



HAL
open science

Langues de Arnold de la famille standard double Explosion de cycle dans la famille quadratique

Alexandre Dezotti

► **To cite this version:**

Alexandre Dezotti. Langues de Arnold de la famille standard double Explosion de cycle dans la famille quadratique. Systèmes dynamiques [math.DS]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2011. Français. NNT: . tel-00666001

HAL Id: tel-00666001

<https://theses.hal.science/tel-00666001>

Submitted on 3 Feb 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE TOULOUSE
Université Toulouse 3 Paul Sabatier
Institut de mathématiques de Toulouse
ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES, INFORMATIQUE ET
TÉLÉCOMMUNICATIONS (MITT)



THÈSE

présentée en vue d'obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE
Spécialité : Mathématiques

par

Alexandre DEZOTTI

sous la direction de Xavier Buff

Titre :

**Les langues de Arnold de la famille standard double
Explosion des cycles dans la famille $z^2 + \lambda$**

soutenue publiquement le mardi 7 juin 2011, 16h00

Rapporteurs

Adam Epstein

John Hubbard

Autres membres du jury

François Berteloot

Kevin Pilgrim

Pascale Roesch

Les langues de Arnold de la famille standard double
Explosion des cycles dans la famille $z^2 + \lambda$

Alexandre Dezotti

2011

Table des matières

1	Quelques préliminaires	13
1.1	Notations	13
1.2	Sur l'application de Böttcher, les rayons externes et la fonction de Green . . .	14
1.2.1	Prolongement de l'inverse de l'application de Böttcher	14
1.2.2	Courbe des cycles périodiques	15
1.2.3	Une inégalité sur la fonction de Green	15
2	Les langues de Arnold de la famille des applications standard doubles	17
2.1	introduction	17
2.1.1	La famille des applications standard doubles et les langues de Arnold	17
2.1.2	Classification des langues de Arnold	19
2.2	Propriétés générales des applications $g_{a,b}$	21
2.3	Déformation	24
2.3.1	La déformation	24
2.4	Retour dans la famille des applications standard doubles	27
2.4.1	Type du cycle déformé	29
2.5	Chemin	30
2.5.1	Analyticité	31
2.5.2	Aboutissement du chemin lorsque le multiplicateur converge vers 0 . .	31
3	Vitesse de croissance des coefficients de la série de Laurent de l'inverse de l'application de Böttcher	35
3.1	Introduction et énoncés	35
3.2	Expression de ψ et démonstration du lemme 3.1.2	37
3.3	Un équivalent des coefficients de la série entière racine carrée	38
3.4	Preuve de la première identité du théorème 3.1.3	41
3.5	Calcul de $h(\eta)$	42
4	Ensembles de Julia infiniment renormalisables non localement connexes	45
4.1	Composantes hyperboliques, sillages, membres de l'ensemble de Mandelbrot et renormalisation	45
4.2	Inégalité de Pommerenke-Lévine-Yoccoz pour les bords du sillage	48
4.3	Ensembles de Julia non localement connexes	51

4.4	Critère de Douady-Sullivan	52
5	Inégalité de Lévine sur la position des valeurs critiques de la fonction multiplicateur	55
5.1	Préliminaires sur les formes et différentielles quadratiques	55
5.1.1	Résidu d'une 1-forme méromorphe	56
5.1.2	Images directes de 1-formes	56
5.1.3	Différentielles quadratiques	58
5.1.4	Différentielles quadratiques avec parties polaires prescrites	60
5.1.5	Images directes de différentielles quadratiques	62
5.1.6	Parties polaires invariantes	64
5.2	Définition de la différentielle quadratique associée à une fraction rationnelle et à un cycle périodique	67
5.2.1	Différence entre la différentielle quadratique et son image directe	68
5.3	L'inégalité	71
5.4	Une majoration sur le diamètre de membres de l'ensemble de Mandelbrot	77
6	Critère de non locale connexité d'ensembles de Julia quadratiques infiniment renormalisables d'après Guénadi Lévine	79
6.1	Inverse de la fonction multiplicateur	80
6.2	Suite de renormalisations satellites	82
6.2.1	Fonctions d'explosion	83
6.2.2	Rayon de contrôle	89
6.2.3	Convergence de la suite des racines des bifurcations satellites	90
6.2.4	Non locale connexité de l'ensemble de Julia du paramètre limite	92
7	Modèle hypothétique d'explosion de cycles	101
7.1	Introduction	101
7.2	Définition et explication du modèle	101
7.3	Quelques propriétés du compact K_∞	106
7.3.1	Adresse d'un point dans le compact limite	106
7.3.2	Lemmes de calculs	108
7.3.3	Résultats	110
7.4	Lien entre le modèle et son origine	111

Introduction

Les langues de Arnold de la famille des applications standard doubles

La famille des applications standard doubles est la famille des applications du cercle $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ définie par

$$f_{a,b}(x) = 2x + a - \frac{b}{\pi} \sin(2\pi x) \pmod{1},$$

avec $x \in \mathbb{T}^1$ et paramétrée par $a \in \mathbb{T}^1$ et $b \in [0, 1]$.

Il s'agit d'une famille réelle de dimension 2 de perturbations de la famille de revêtements doubles du cercle

$$x \mapsto 2x + a \pmod{1}$$

paramétrée par $a \in \mathbb{T}^1$.

Sa définition et son introduction dans le champs de l'étude de la dynamique est due à Michał Misiurewicz et Ana Rodrigues dans les articles [25] et [26].

Un des buts annoncés dans ces articles est la compréhension des phénomènes liés à présence de points de ramifications dans un système dynamique. Dans ce cas particulier, les applications $f_{a,b}$ sont de degré 2, de plus, pour tout $a \in \mathbb{T}^1$, l'application $f_{a,1}$ a un point critique.

Similairement à ce qui passe pour l'application standard de Vladimir Arnold, $x \mapsto x + a + b \sin(2\pi x)$, où certaines portions de l'espace des paramètres $(a, b) \in \mathbb{T}^1 \times [0, 1]$, appelées langues de Arnold, correspondent à des systèmes se comportant de façon organisée, caractérisés par une phase asservie, il existe des régions de l'espace des paramètres de la famille standard double dont les paramètres correspondant possèdent un attracteur discret indépendant des conditions initiales.

On peut associer à ce cycle attractif une donnée combinatoire liée à la dynamique de l'application de doublement $x \mapsto 2x \pmod{1}$. Ces zones, classifiées combinatoirement, sont aussi appelées langues de Arnold. Le chapitre 2 a pour but de montrer que les langues de Arnold de la famille des applications standard doubles sont connexes.

La section 2.1 définit le problème plus en détail.

Vitesse de croissance des coefficients de la série de Laurent de l'inverse de l'application de Böttcher

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que le polynôme quadratique $z^2 + \lambda$ a un ensemble de Julia non connexe, c'est-à-dire $\lambda \notin \mathcal{M}$ où \mathcal{M} est l'ensemble de Mandelbrot. Cela entraîne que les coordonnées de Böttcher B à l'infini (normalisée de façon unique en choisissant 1 comme valeur de la dérivée en ∞) ne se prolongent pas sur tout son bassin.

Il existe alors un rayon minimal $R > 1$ avec lequel on peut définir un inverse $\psi = B^{-1}$ sur le complémentaire du disque fermé $\overline{D}(0, R)$. Ce rayon est $R = \sqrt{|B(\lambda)|}$. On en déduit une

borne supérieure asymptotique de la croissance des coefficients du développement en série de Laurent de la fonction $\psi(z) = z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_k}{z^{2k}}$:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[2k+1]{|\beta_k|} = \sqrt{|B(\lambda)|}.$$

Le but du chapitre 3 est d'expliciter un équivalent précis pour les β_k . Pour cela on choisit une racine carrée $u \mapsto \sqrt{1+u}$, définie holomorphe sur le disque $D(0, 1)$, positive sur $]0, 1[$. Ceci et l'imparité de la fonction ψ permettent de définir de façon unique le nombre complexe

$$\sqrt{B'(\lambda)} = \lim_{z^2 \rightarrow \eta} \frac{z \sqrt{1 - \frac{\eta}{z^2}}}{\psi(z)}.$$

Le théorème est alors le suivant.

Théorème 3.1.3 *Soit $\alpha < 1$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda \notin \mathcal{M}$ et soit*

$$\psi(z) = z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_k}{z^{2k}}$$

l'inverse des coordonnées de Böttcher B_λ du polynôme quadratique $f(z) = z^2 + \lambda$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\beta_n = -\frac{(B(\lambda))^n}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}\sqrt{B'(\lambda)}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right).$$

Inégalité de Lévine sur la position des valeurs critiques de la fonction multiplicateur

On sait que sur chaque composante hyperbolique H de l'ensemble de Mandelbrot, la fonction qui à un paramètre λ associe le multiplicateur du cycle attractif est un isomorphisme entre H et le disque unité. En outre cette fonction se prolonge holomorphiquement sur un voisinage du sillage de H et, dans le sillage, n'est de module inférieur ou égal à 1 que sur \overline{H} .

Les positions des points critiques de cette fonction restent à déterminer de façon globale. L'inégalité suivante permet d'exclure une zone précise au voisinage de la composante H .

Théorème 5.3.1 *Soit $d \in \mathbb{N}$ tel que $d \geq 2$. Soit $C \geq 2$, il existe des constantes $M > 1$, $K_0 > 0$ et $K_1 > 0$ qui ne dépendent que de C telles que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| \leq C$ et tel que le polynôme $z^d + \lambda$ possède un cycle répulsif de période m de multiplicateur ρ (dépendant de λ), on a*

$$m|\rho - 1| \leq K_0 M^m \left(\log |\rho| + K_1 \left| \frac{\dot{\rho}}{\rho} \right| \right), \quad (1)$$

où $\dot{\rho}$ désigne la dérivée de la fonction multiplicateur ρ par rapport au paramètre λ .

Le théorème ci-dessus est une généralisation du théorème 3 de [19] qui est valable pour la famille $z^2 + \lambda$. Guénadi Lévine démontre celui-ci en utilisant des techniques analytiques, notamment de déformations quasiconformes. À l'origine il sert d'outil pour contrôler les explosions de cycles le long d'une suite de bifurcations satellites successives et parvenir au critère de non locale connexité de l'ensemble de Julia dont on parle plus loin.

Il s'est avéré que l'on peut se passer de ce théorème pour la famille $z^2 + \lambda$.

L'idée générale de la démonstration est la relation profonde qu'il y a entre différentielles quadratiques et le cotangent de l'espace des déformations d'une famille déterminée de fonctions rationnelles (voir [10]). Par ce biais on peut expliciter la relation algébrique liant variation du multiplicateur d'un cycle et celle de la valeur critique. C'est, entre autres, de cette relation que provient l'inégalité ci-dessus.

Pour ce faire il a fallu, étant donné une fraction rationnelle f et un cycle périodique b de f dont le multiplicateur est distinct de 1 et 0, expliciter les parties polaires de différentielles quadratiques, invariantes le long du cycle b (cf proposition 5.1.16).

Une telle différentielle quadratique peut être choisie de façon unique modulo le choix d'un ensemble receptacle de trois pôles comptés avec multiplicités. Pour les polynômes il est commode de mettre un pôle triple en ∞ , la différentielle quadratique obtenue s'écrit, lorsque l'on a fixé le résidu en les points de $b = (b_0, \dots, b_{m-1})$ à 1,

$$q(z)dz^2 = \sum_{j=0}^{m-1} \left(\frac{1}{(z - b_j)^2} + \frac{\alpha_j}{z - b_j} \right) dz^2,$$

avec $\alpha_j = \frac{(f^{\circ m})''(b_j)}{\rho(\rho-1)}$, où ρ est le multiplicateur du cycle b .

L'invariance des parties polaires met à jour la relation entre variation du multiplicateur et déplacement de la valeur critiques dans la formule (théorème 5.2.5) :

$$q - f_*q = -\frac{1}{\lambda} \frac{\dot{\rho}}{\rho} \frac{1}{z - \lambda} dz^2,$$

où les points représentent les dérivées par rapport au paramètre λ , qui est aussi la valeur critique de $f(z) = z^d + \lambda$.

La suite de la démonstration met en jeu des estimations sur la perte de masse par poussée en avant de la différentielle quadratique q par la fraction rationnelle f (voir [11]).

Ensembles de Julia quadratique infiniment satellite renormalisables

Les polynômes infiniment satellite renormalisables sont les polynômes quadratiques $z^2 + \lambda$ dont les paramètres λ se trouvent à l'intersection d'une suite infinie de copies de l'ensemble de Mandelbrot successivement attachées les unes aux autres (voir [7], [22]).

La dynamique de ces polynômes et la topologie de l'espace des paramètres en ces points sont mal connues et leur étude est liée à la question de la locale connexité de l'ensemble de Mandelbrot.

On peut voir le phénomène de bifurcation satellite comme l'explosion d'un cycle périodique en un cycle de période multiple de la précédente. Cette explosion est en fait la collision d'un premier cycle avec un second cycle en un paramètre ou le multiplicateur du premier cycle est une racine de l'unité et celui du second est 1. Ce phénomène est formalisé par la définition de fonctions d'explosions, cf. proposition 6.2.2 qui s'applique au cas d'une famille de germes générale.

Un polynôme quadratique $z^2 + \lambda$ infiniment satellite renormalisable correspond donc à une suite de cycles qui sont issus des cycles qui les précèdent par une explosion. À de tels polynômes on peut associer une donnée combinatoire qui est une suite de nombres rationnels $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ appelés nombres de rotation. Il s'agit de l'angle interne en lequel la copie de Mandelbrot suivante est rattachée à la précédente dans la suite de copies adjacentes auxquelles appartient le paramètre λ .

Non locale connexité de l'ensemble de Julia

Les polynômes quadratiques infiniment renormalisables font partie de ceux pouvant avoir un ensemble de Julia non localement connexe (voir [14]). Le théorème de Guénadi Lévine (cf. [19]) donne une condition explicite sur la suite des nombres de rotation qui implique que l'ensemble de Julia du polynôme correspondant n'est pas localement connexe.

La condition est la suivante. Si la suite de nombres entiers $(q_n)_n$ tend vers ∞ et que la suite de nombres rationnels $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_n$ vérifie :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right|^{1/q_n} < 1, \quad (2)$$

alors le polynôme $z^2 + \lambda$ infiniment satellite renormalisable de suite de nombres de rotation $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_n$ a un ensemble de Julia qui n'est pas localement connexe.

Je présente une version simplifiée de la démonstration de Guénadi Lévine.

Une partie du problème est de montrer que la donnée de la suite des nombres de rotation et d'une composante hyperbolique initiale suffit, dans le cas qui nous concerne, à caractériser le polynôme quadratique $z^2 + \lambda$ de façon unique (voir section 6.2.3).

La démonstration repose sur un contrôle des explosions de cycles. Pour cela on doit considérer des domaines où ce contrôle est possible grâce notamment aux inégalités de Pommrenke-Lévine-Yoccoz que l'on applique, en plus des cas habituels, aux bords du sillage, là où le nombre de rotation est nul (cf. section 4.2). On peut construire une suite de domaine où l'on suit les cycles, via des fonctions implicites et des fonctions d'explosions (proposition 6.2.6) et utiliser la compacité et des inégalités de distortion pour avoir le contrôle voulu (corollaire 6.2.18). Ainsi on voit que le critère de Douady-Sullivan s'applique (voir section 4.4).

Un modèle pour les infiniment satellite renormalisables

J'expose un modèle de la situation en question dans le dernier chapitre 7. Je réfère aux sections 7.1 et 7.2 pour plus de détails sur le problème.

Plan-résumé

Le contenu se découpe de la façon suivante. Les première et deuxième parties concernent mes travaux autour de la mise en pratique de techniques de la dynamique holomorphe à un problème de la dynamique du cercle et d'une étude analytique des coordonnées de Böttcher et. La suite est consacrée aux polynômes quadratiques infiniment satellite renormalisables en lien avec les ensembles de Julia non localement connexe.

Pour la famille des applications standard doubles du cercle, Michał Misiurewicz et Ana Rodrigues ont introduit une nouvelle acception de la notion de "langue de Arnold". Je prouve que le type d'une langue (cf. définition 2.1.1) est un bon classificateur pour les langues de Arnold de la famille standard double, plus précisément que les domaines d'un type donné sont connexes. Ceci permet de conclure définitivement que les langues de Arnold pour la famille des applications standard double ont vraiment la "forme" de langues de Arnold. La démonstration de la connexité consiste en l'utilisation du prolongement du système dynamique analytique réel sur le cercle en un système dynamique itératif holomorphe sur un ouvert du plan complexe. Sur ce dernier, l'utilisation de techniques de déformations quasi-conformes permet de construire un chemin continu à l'intérieur du domaine de l'espace des paramètres considéré.

Je donne un équivalent précis pour les coefficients du développement en série de Laurent de l'application inverse des coordonnées de Böttcher pour les polynômes quadratiques dont le point critique s'échappe à l'infini.

La partie consacrée à l'étude des ensembles de Julia de polynômes quadratiques infiniment satellite renormalisables non localement connexes est divisée en plusieurs sous parties.

Je démontre une généralisation d'une inégalité qui sert à déterminer un domaine à l'intérieur duquel il n'y a pas de valeur critique de la fonction multiplicateur.

Je reprends d'abord les travaux de Guénadi Lévine sur la question. Le but est une bonne compréhension du mécanisme des bifurcations satellites successives ainsi que des outils (parfois implicites) et approches que Guénadi Lévine utilise pour contrôler ce qui s'y passe.

Enfin, je commence l'étude d'un modèle proposé par Xavier Buff. Il s'agit d'un modèle des renormalisations créé de façon géométrique et générant un modèle topologique hypothétique d'un compact invariant dans l'ensemble de Julia de ces polynômes. Les deux aspects de la justesse et de la description précise de ce modèle restent à étudier. Si ce modèle est correct, il donne une nouvelle condition de non locale connexité des ensembles de Julia de polynômes quadratiques infiniment satellite renormalisables.

Remerciements

Je remercie toutes les personnes qui m'ont aidé pour mes travaux mathématiques durant les presque quatre années qu'auront durée ma thèse.

Je remercie tout particulièrement Xavier Buff, mais aussi Adam Epstein, Arnaud Chéritat, Pascale Roesch, Shishikura Mitsuhiro, John Hubbard ainsi que tous les autres contributeurs plus ou moins importants à l'aboutissement de ce travail.

Je remercie aussi les personnes qui m'ont aidé à résoudre mes problèmes avec l'administration, en particulier André Legrand, Xavier Buff et Éric Lombardi.

Chapitre 1

Quelques préliminaires

1.1 Notations

L'ensemble des nombres complexes est \mathbb{C} . La notation $\widehat{\mathbb{C}}$ dénote le compactifié de la surface \mathbb{C} par ajout d'un point ∞ . C'est une surface de Riemann que l'on considérera munie d'une carte privilégiée, représentée par l'ensemble \mathbb{C} lui-même, et d'un point distingué, le point ∞ . La surface $\widehat{\mathbb{C}}$ est isomorphe la droite projective complexe \mathbb{P}^1 . C'est ainsi qu'elle sera appelée, par abus de notation, lorsqu'elle sera sans point ni carte distinguée.

Dans \mathbb{C} le disque de centre $c \in \mathbb{C}$ et de rayon $r \in \mathbb{R}_+$ est noté $D(c, r)$. Le disque unité centré en 0 dans \mathbb{C} est noté $D(0, 1) = \mathbb{D}$. Lorsque l'on utilisera la métrique hyperbolique sur un disque, voire une surface hyperbolique quelconque, S , on la notera $d_S(\cdot, \cdot)$.

Étant donnée une application holomorphe f définie sur \mathbb{P}^1 , f^{on} désigne le n -ième itéré de l'application f , c'est-à-dire la composition, là où cela est possible, $f^{on} = f \circ \dots \circ f$ de l'application f n fois avec elle même.

Le polynôme quadratique $z^2 + \lambda$, défini sur $\widehat{\mathbb{C}}$, sera noté f_λ alors que $e^{2\pi\sqrt{-1}\alpha}z + z^2$ sera noté p_α (λ et α sont des nombres complexes).

En général J_ξ désigne l'ensemble de Julia d'une application holomorphe g_ξ dépendant d'un paramètre quelconque ξ . Si les fonctions g_ξ sont des polynômes, K_ξ désignera son ensemble de Julia rempli.

Si la fonction g_ξ est un polynôme, le point ∞ possède un bassin attractif connexe, noté \mathcal{A}_∞ , et on note G_ξ la fonction de Green correspondante :

$$G_\xi(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d^n} \log^+ |g_\xi^{on}(z)|,$$

où d est le degré du polynôme g_ξ , $z \in \mathbb{C}$ et $\log^+ = \max\{0, \log\}$.

Comme la fonction g_ξ est un polynôme, elle admet des coordonnées de Böttcher. En particulier si la fonction g_ξ (f_ξ ou p_ξ) est un polynôme quadratique, il existe une unique application holomorphe B_ξ définie au voisinage du point ∞ , tangente à l'identité en ce point et vérifiant $B_\xi \circ f_\xi = (B_\xi)^2$. La fonction B_ξ est définie sur tout le bassin attractif de l'infini lorsque les points critiques du polynôme ne s'échappent pas. Là où elle est définie elle satisfait $\log |B_\xi| = G_\xi$.

L'inverse de l'application B_ξ (défini au voisinage du point ∞) sera noté ψ_ξ . Comme la fonction holomorphe ψ_ξ est définie au voisinage du point ∞ et tangente l'identité en ce point elle admet un développement en série de Laurent de la forme :

$$\psi_\xi(z) = z + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k(\xi)}{z^k},$$

où $b_k(\xi)$ sont des coefficients complexes dépendant du paramètre ξ .

L'ensemble de Mandelbrot, c'est-à-dire l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que le polynôme quadratique $z^2 + \lambda$ a un ensemble de Julia connexe, sera noté \mathcal{M} .

1.2 Sur l'application de Böttcher, les rayons externes et la fonction de Green

1.2.1 Prolongement de l'inverse de l'application de Böttcher

On rappelle que lorsque le point critique λ du polynôme quadratique $f_\lambda = z^2 + \lambda$ est dans l'ensemble de Julia rempli, l'inverse de l'application de Böttcher se prolonge en un isomorphisme holomorphe entre le complémentaire dans $\widehat{\mathbb{C}}$ du disque unité fermé et le complémentaire dans $\widehat{\mathbb{C}}$ de l'ensemble de Julia rempli de f_λ . Ce prolongement reste une conjugaison entre l'application $z \mapsto z^2$ et f_λ sur son ensemble de définition.

Remarque 1.2.1 *Dans le cas contraire (i.e. lorsque le point critique s'échappe), on peut prolonger holomorphiquement l'application $\psi_\lambda = B_\lambda^{-1}$ sur l'ensemble $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \left(\overline{\mathbb{D}} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} I_n \right)$ où $I_n = f_0^{-n}([e^{\sqrt{-1}\theta}, B_\lambda(\lambda)])$ et θ est un argument de $B_\lambda(\lambda)$.*

Théorème 1.2.2 ([5], VIII) *L'application $\lambda \mapsto B_\lambda(\lambda)$ est un isomorphisme holomorphe entre le complémentaire de l'ensemble de Mandelbrot dans \mathbb{C} et le complémentaire du disque unité fermé.*

Ce théorème permet de définir les rayons externes dans l'espace à paramètres comme suit. Le rayon externe d'angle θ est l'ensemble $R_\theta = \{\lambda : \exists r, B_\lambda(\lambda) = re^{\sqrt{-1}\theta}\}$, c'est-à-dire l'ensemble des paramètres λ tels que, dans le plan dynamique, le rayon externe d'angle θ passe par la valeur critique λ .

Pour simplifier les énoncés, on dira qu'un angle θ est périodique pour l'application $z \mapsto z^2$ si le nombre complexe $e^{\sqrt{-1}\theta}$ est périodique par cette application (i.e. $\theta \pmod{1}$ est périodique pour l'application $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \mapsto 2x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$). Les angles périodiques bornent des domaines de l'ensemble des paramètres appelés sillages, cf le chapitre 4 pour plus de détails.

1.2.2 Courbe des cycles périodiques

On notera $X_{d,m}$ la courbe algébrique constituée des couples $(\lambda, (z_0, \dots, z_{m-1})) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^m$ tels que z_0 est un point périodique de période m exacte du polynôme $f_\lambda(z) = z^d + \lambda$. Par le théorème des fonctions implicites, cette courbe est lisse au voisinage des couples $(\lambda, (z_0, \dots, z_{m-1}))$ tels que $(f_\lambda^{om})'(z_0) \neq 1$. En particulier, la fonction $\rho_{d,m}$ qui au couple $(\lambda, (z_0, \dots, z_{m-1}))$ associe le multiplicateur $(f_\lambda^{om})'(z_0)$ du cycle correspondant est bien définie et holomorphe sur l'ouvert de $X_{d,m}$ où ce multiplicateur est différent de 1.

Dans la section 4.1, on sera amené à considérer l'adhérence de la courbe $X_{2,m}$ que l'on notera X_m (voir notamment théorème 4.1.1).

1.2.3 Une inégalité sur la fonction de Green

Le résultat suivant, reliant la fonction de Green d'un polynôme unicritique aux multiplicateurs de ses cycles périodiques, sera utilisé dans la suite. On rappelle que la fonction de Green d'un polynôme est continue sous-harmonique sur \mathbb{C} et harmonique sur l'ouvert où elle est non nulle.

Lemme 1.2.3 *Soit $d \in \mathbb{N}$ tel que $d \geq 2$ et soit $f_\lambda(z) = z^d + \lambda$. On suppose que l'application f_λ possède un cycle périodique (b_0, \dots, b_{m-1}) de période m et de multiplicateur ρ tel que $|\rho| > 1$.*

On note G_λ la fonction de Green associée au polynôme f_λ . Alors

$$G_\lambda(0) \leq \frac{\log |\rho|}{m}.$$

Remarque 1.2.4 *Alexandre Eremenko et Guénadi Lévine ont démontré un résultat plus fort et plus général dans [12] (cf. theorem 1.6). Celui-ci est équivalent au lemme ci-dessus pour le cas où $d = 2$.*

Dém. On rappelle que la fonction de Green G d'un polynôme f est définie par :

$$G_\lambda(z) = \max \left\{ 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |f^{on}(z)|}{d^n} \right\}.$$

La fonction $\lambda \mapsto G_\lambda(0)$ est continue, positive et harmonique sur $\{z \in \mathbb{C} : G_\lambda(z) > 0\}$.

Pour tout $z \neq 0$, $|f_\lambda(z)| \geq |z| \left(|z|^{d-1} - \frac{|\lambda|}{|z|} \right)$. Par conséquent si le module $r = |z|$ du point z vérifie $r^{d-1} - \frac{|\lambda|}{r} > 1$, le point z est dans le bassin de l'infini du polynôme f_λ . Notons R_e le maximum de 2 et du plus petit nombre réel positif vérifiant, pour tout $r > R_e$, $r^{d-1} - \frac{|\lambda|}{r} > 1$. Ce dernier nombre étant la plus grande solution de l'équation $r^d - |\lambda| - r = 0$, on a l'encadrement suivant :

$$\max\{2, |\lambda|^{1/d}\} \leq R_e \leq \max\{2, (2|\lambda|)^{1/d}\}.$$

D'autre part, lorsque $|\lambda| > R_e$ (ce qui est vrai pour tout paramètre λ assez grand), on pose $R_i = (|\lambda| - R_e)^{1/d}$. Alors, pour tout paramètre λ assez grand pour que la constante R_i puisse être définie, le disque ouvert centré en le point 0 et de rayon R_i est envoyé dans le complémentaire du disque fermé centré en 0 et de rayon R_e . On a $R_i \sim |\lambda|^{1/d}$ pour $\lambda \rightarrow \infty$.

Remarque 1.2.5 Ceci montre que l'ensemble de Julia du polynôme $z^d + \lambda$ est inclus, pour $\lambda \rightarrow \infty$, dans un anneau rond de rayons d'ordre $|\lambda|^{1/d}$ et d'épaisseur d'ordre $1/|\lambda|^{1-1/d}$.

Considérons le cycle périodique (b_0, \dots, b_{m-1}) . Comme les points b_i de ce cycle appartiennent à l'ensemble de Julia du polynôme f_λ , ils vérifient $R_i \leq b_i \leq R_e$, de sorte que $(dR_i)^m \leq |\rho| \leq (dR_e)^m$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{\log |\rho|}{m} &\geq \log d + \log R_i \\ &\geq \log d + \frac{1}{d} \log(|\lambda| - R_e), \end{aligned}$$

ce dernier terme étant équivalent à $\frac{1}{d} \log |\lambda|$ lorsque $\lambda \rightarrow \infty$.

En outre, si un point z s'échappe par itération du polynôme f_λ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_\lambda^{on}(z)| \geq r$, où $r > 0$ est tel que $r \left(1 - \frac{|\lambda|}{r^d}\right) > 1$, alors l'encadrement, vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_\lambda^{on}(z)|^d \left(1 - \frac{|\lambda|}{r^d}\right) \leq |f_\lambda^{on+1}(z)| \leq |f_\lambda^{on}(z)|^d \left(1 + \frac{|\lambda|}{r^d}\right)$$

entraîne l'encadrement

$$\log |z| + \frac{1}{d-1} \log \left(1 - \frac{|\lambda|}{r^d}\right) \leq G_\lambda(z) \leq \log |z| + \frac{1}{d-1} \log \left(1 + \frac{|\lambda|}{r^d}\right). \quad (1.1)$$

Alors, d'après l'encadrement 1.1 vrai pour $|\lambda|$ assez grand,

$$\begin{aligned} G_\lambda(0) &= \frac{1}{d} G_\lambda(\lambda) \\ &\leq \frac{1}{d} \left(\log |\lambda| + \frac{1}{d-1} \log \left(1 + \frac{1}{|\lambda|^{d-1}}\right) \right). \end{aligned}$$

Ce dernier terme est équivalent à $\frac{1}{d} \log |\lambda|$ pour $\lambda \rightarrow \infty$. Il existe donc une constante positive ε , ne dépendant que de $|\lambda|$, tendant vers 0 lorsque $\lambda \rightarrow \infty$ telle que

$$\frac{\log |\rho|}{m} \geq (1 + \varepsilon) G_\lambda(0). \quad (1.2)$$

Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$ assez grand et $\varepsilon > 0$ tel que l'inégalité 1.2 est vraie pour tout λ de module égal à r . Lorsque la valeur de $\log^+ |\rho|$ est 0, la fonction $(\lambda, (z_0, \dots, z_{m-1})) \mapsto G_\lambda(0)$ est nulle car le point critique appartient alors à l'ensemble de Julia rempli du polynôme f_λ . On peut alors étendre l'inégalité 1.2 aux paramètres λ tels que $|\lambda| \leq r$ en appliquant le principe du maximum aux fonctions $\frac{\log^+ |\rho|}{m}$ et $(1 + \varepsilon) G_\lambda(0)$ qui sont harmoniques sur l'ouvert de $X_{d,m}$ où $G_\lambda(0) > 0$.

Ainsi, comme $\varepsilon \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow 0$, l'inégalité annoncée est vraie sur tout $(\lambda, (z_0, \dots, z_{m-1})) \in X_{d,m}$. \square

Chapitre 2

Les langues de Arnold de la famille des applications standard doubles

2.1 introduction

2.1.1 La famille des applications standard doubles et les langues de Arnold

Soit la famille d'applications

$$F_{a,b}(X) = 2X + a - \frac{b}{\pi} \sin(2\pi X)$$

avec $(a, b) \in \mathbb{R} \times [0, 1]$ et $X \in \mathbb{R}$. Ces applications passent au quotient modulo 1 pour donner ce qu'on appellera la famille des applications standard doubles, notée $(f_{a,b})_{a \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}, b \in [0,1]}$, et que l'on peut exprimer de façon légèrement abusive en posant :

$$f_{a,b}(x) = 2x + a - \frac{b}{\pi} \sin(2\pi x) \pmod{1},$$

avec $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Les applications $f_{a,b}$ sont des applications analytiques du cercle $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ de degrés 2. Un des buts énoncé dans [25] est d'étudier cette famille en tant qu'exemple de perturbations de l'application de doublement $x \mapsto 2x + a$, ces perturbations pouvant être amplifiées jusqu'à apparition d'une ramification (pour tout $a \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, l'application $f_{a,1}$ a un point critique dans \mathbb{T}^1). Les principaux travaux la concernant ont été initiés par Michal Misiurewicz et Ana Rodrigues ainsi que Michael Benedicks ([25], [26], [24], [2]).

On peut montrer ([25], [16] proposition 2.4.9) que pour tout $(a, b) \in \mathbb{T}^1 \times [0, 1]$, il existe une unique application $\varphi_{a,b} : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1$ continue de degré 1 préservant l'orientation, vérifiant, $\forall x \in \mathbb{T}^1$,

$$\varphi_{a,b} \circ f_{a,b}(x) = 2\varphi_{a,b}(x) \pmod{1}.$$

Cette semiconjugaison peut-être obtenue comme passage au quotient modulo 1 d'une limite uniforme :

$$\varphi_{a,b}(X \bmod 1) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{a,b}^{\text{on}}(X)}{2^n} \bmod 1.$$

En outre, $\varphi_{a,b}$ dépend continûment de $(a, b) \in \mathbb{T}^1 \times [0, 1]$.

Aux applications $f_{a,b}$, on peut faire correspondre, via l'application exponentielle, des applications $g_{a,b}$, définies sur le cercle unité complexe $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, qui se prolongent en des applications holomorphes de \mathbb{C}^* :

$$g_{a,b}(z) = e^{2\pi a \sqrt{-1}} z^2 e^{-b(z-1/z)}.$$

La restriction $g_{a,b}|_{\mathbb{S}^1} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ est une application de degré 2 préservant l'orientation. L'application $g_{a,b}$ est symétrique par rapport au cercle unité, c'est-à-dire $\forall z \in \mathbb{C}^*$,

$$g_{a,b}(1/\bar{z}) = \frac{1}{g_{a,b}(z)}.$$

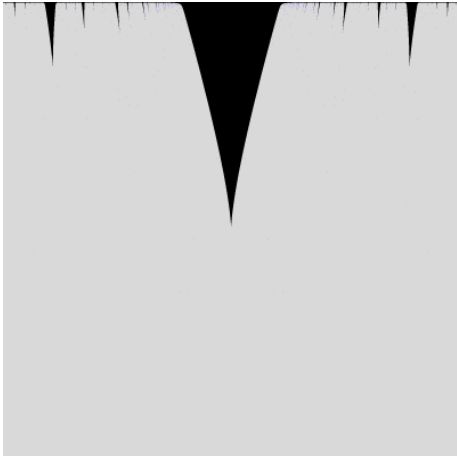


FIG. 2.1 – Les langues de Arnold de la famille standard double (a en abscisse, b en ordonnée)

Étant donné le problème du départ (étudier une famille d'applications continues du cercle), on est amené à considérer l'ensemble Ω des paramètres (a, b) pour lesquels $g_{a,b}$ admet un cycle attractif sur le cercle. Cet ensemble est un ouvert de $\mathbb{T}^1 \times [0, 1]$. Son allure est donnée par le dessin 2.1.1. Les composantes connexes de cet ensemble ont été nommées langues de Arnold par Michal Misiurewicz et Ana Rodrigues par analogie aux langues de Arnold de la famille des applications standard. Ces auteurs ont montré qu'elles étaient simplement connexes [26]. On remarque que, contrairement à la famille standard, le bout des langues de Arnold de la famille standard double se trouvent en général à des niveaux différents de b . En outre, il ne peut y avoir de cycle attractif lorsque $b < 1/2$ car la dérivée est strictement plus grande que 1 sur \mathbb{T}^1 .

En outre, l'application $g_{a,b}$ a exactement deux points critiques simples ou un seul point critique double, symétriques par rapport au cercle unité et elle ne possède pas de valeur asymptotique dans \mathbb{C}^* . Il s'en suit que les éléments de la famille $(g_{a,b})_{a \in \mathbb{T}^1, b \in [0, 1]}$ ne peuvent avoir plus de deux cycles attractifs. Par la propriété de symétrie de $g_{a,b}$ ces cycles sont de même période, symétriques par rapport au cercle unité et sont confondus si et seulement si les points des cycles sont sur le cercle unité (et aucune préimage d'un point du cercle qui ne se trouve pas dans le cercle ne peut être périodique par itération de $g_{a,b}$).

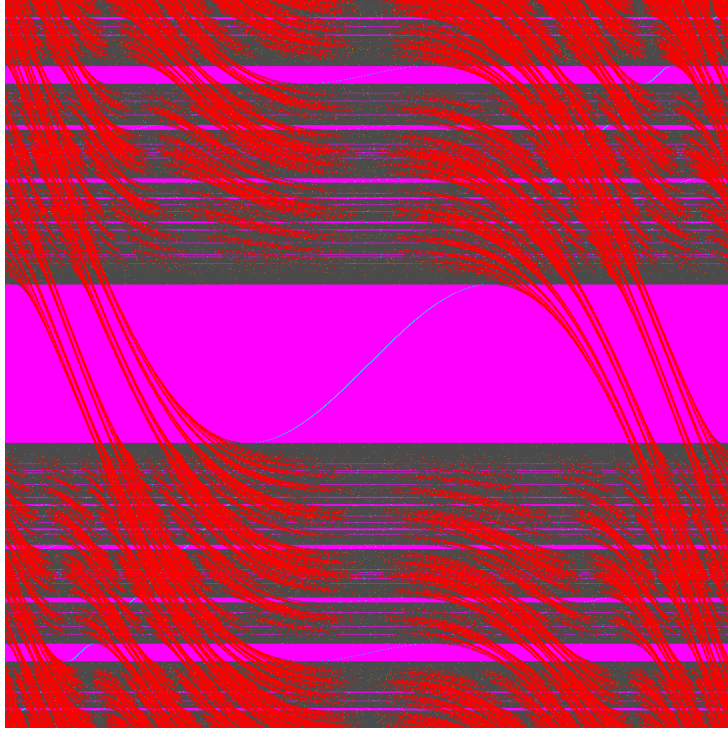


FIG. 2.2 – Les graphes $(x, a(x))$

La figure 2.2 montre en bleu clair et rouge les graphes des fonctions $x \mapsto a(x)$ telles que le couple $(a(x), 1)$ est un paramètre pour lequel x est un point périodique de $f_{a,1}$ (avec période ≤ 10). Ces fonctions $a(x)$ sont définies sur tout \mathbb{T}^1 . Les parties du graphe où $a(x)$ est décroissante, en rouge, correspondent à un cycle répulsif et inversement celles où la fonction est croissantes, en bleu clair, à un cycle attractif. Les intervalles (bandes horizontales) des valeurs de $a(x)$ pour lesquelles $f_{a,1}$ a un cycle attractif de période inférieure ou égale à 10 sont en rose.

2.1.2 Classification des langues de Arnold

Un moyen de classer les langues de Arnold de la famille $(f_{a,b})_{a,b}$ est d'introduire la notion de type [25]. Pour cela, on considère un paramètre $(a, b) \in \mathbb{T}^1 \times [0, 1]$ tel que $g_{a,b}$ admet un cycle attractif sur le cercle unité et $x_0 \in \mathbb{S}^1$ le point du cycle dont la composante correspondante du bassin d'attraction immédiat dans \mathbb{C}^* contient les points critiques de $g_{a,b}$. Ce point sera dit "distingué". En fait, la propriété de symétrie de la fonction $g_{a,b}$ entraîne que la composante du bassin d'attraction contenant le point distingué contient ses deux points critiques.

Définition 2.1.1 *Un couple de paramètres $(a, b) \in \mathbb{T}^1 \times [0, 1]$ est dit de type τ si $g_{a,b}$ a un cycle attractif sur le cercle tel que $\varphi_{a,b}(x_0) = \tau$, où x_0 est le point distingué du cycle attractif.*



FIG. 2.3 – Exemples de graphes de $\varphi_{a,b}$ avec $(a, b) = (0.64, 0.22)$, $(0.33, 0.59)$ et $(0, 0.99)$

Il est à noter que l'ensemble des types possibles est l'ensemble des points périodiques de l'application $x \mapsto 2x \pmod{1}$, c'est-à-dire l'ensemble des nombres rationnels de la forme $\frac{k}{2^p-1}$, avec $k \in \{0, \dots, 2^p - 2\}$, p étant un multiple de la période du cycle correspondant. Par continuité, le type est constant sur les langues. Mon but était alors de montrer l'existence d'une bijection entre l'ensemble des langues et l'ensemble des types possibles.

Théorème 2.1.2 ([4] theorem 1.4) *Pour tout type possible τ , il existe une et une seule composante connexe de l'ensemble*

$$\Omega = \{(a, b) \in \mathbb{T}^1 \times [0, 1] : g_{a,b} \text{ a un cycle attractif sur le cercle}\}$$

dont les paramètres correspondant sont de type τ .

La démonstration de ce résultat consiste essentiellement en la construction d'un chemin à l'intérieur de l'espace des paramètres reliant tout paramètres de type τ à l'unique paramètre de type τ dont le cycle correspondant est super attractif (voir [4] section 5.2 pour une preuve de l'existence et de l'unicité d'un tel paramètre).

Théorème 2.1.3 ([4]) *Pour tout type possible τ , il existe un unique paramètre $(a_\tau, b_\tau) \in \mathbb{T}^1 \times [0, 1]$ tel que g_{a_τ, b_τ} a un cycle super attractif de type τ . En outre, on a $b_\tau = 1$.*

Enfin, tout paramètre (a, b) de type τ peut être relié à ce paramètre $(a_\tau, 1)$ par un chemin continu dans l'ensemble des paramètres de type τ .

Dém. (Résumé schématique) L'existence et l'unicité du paramètre (a_τ, b_τ) et $b_\tau = 1$ est une question d'analyse réelle exploitant les propriétés de monotonies des application considérées.

Le chemin lui-même est obtenu par déformation quasiconforme. Il s'agit de faire décroître le multiplicateur du cycle jusqu'à 0. Il est facile de construire une déformation qui ne modifie pas le type du cycle.

Le fait que l'on retombe presque, après déformation, dans la famille des applications standard doubles est essentiellement topologique, travaillant en fait dans une famille un peu

plus large, stable par composition à droite et à gauche par des homéomorphismes de \mathbb{C}^* pour lesquels la conjuguée est encore holomorphe ([4] proposition 4.6). On retrouve des arguments similaires dans les travaux de Saeed Zakeri [39].

La convergence vers le paramètre $(a_\tau, 1)$ lorsqu'on fait tendre le multiplicateur vers 0 repose entre autres sur le fait que le chemin construit est en fait analytique et sur l'unicité de ce paramètre. \square

2.2 Propriétés générales des applications $g_{a,b}$

Nous étudions quelques propriétés des applications $g_{a,b}$ que nous utiliserons plus tard. Étudions d'abord l'ensemble des valeurs critiques de ces applications. Soit

$$g(z) = z^2 e^{u(1/z)+v(z)},$$

où u et v sont des polynômes de degrés respectifs $p \geq 1$ et $q \geq 1$. Puisque $\deg v \geq 1$, l'ensemble des singularités essentielles de g contient 0. Le point ∞ est le seul autre point dans cet ensemble.

Le lemme suivant est utilisé dans la proposition 2.4.1

Lemme 2.2.1 *La dérivée de g est $g'(z) = \frac{1}{z^{p-1}}P(z)e^{u(1/z)+v(z)}$, où $P(z)$ est le polynôme $z^{p+1}v'(z) + 2z^p - z^{p-1}u'(1/z)$. Le degré de P est $p+q$ et son terme constant est égal au terme de degré q de u (et donc non nul). En particulier les points critiques de g sont les racines de P avec mêmes multiplicités.*

Lorsque $p = q = 1$, on appelle $(a, b, c) \in \mathbb{C}/\mathbb{Z} \times (\mathbb{C}^*)^2$ des nombres complexes vérifiant $v(z) + u(1/z) = 2\pi A\sqrt{-1} - (bz - c/z)$, avec $a = A \bmod 1$. Alors les points critiques de g sont les racines du polynôme quadratique $bz^2 - 2z + c$, en d'autres termes : $\frac{1 \pm \sqrt{1-bc}}{b}$, où $\sqrt{1-bc}$ désigne l'une des deux (quelconque) des racines carrées de $1-bc$.

Nous dirons qu'une application $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ est symétrique par rapport au cercle unité si, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{f(z)}$. En particulier, si on suppose que g est symétrique par rapport au cercle unité, alors $c = \bar{b}$ et $a \in \mathbb{R}$.

Supposons maintenant que $p = q = 1$ et que g est symétrique par rapport au cercle unité et notons cette application $g_{a,b}$, i.e. $g_{a,b}(z) = \lambda z^2 e^{-(bz - \bar{b}/z)}$, avec $|\lambda| = 1$. On remarque qu'il existe une unique rotation conjuguant $g_{a,b}$ à une fonction $g_{\tilde{a},\tilde{b}}(z) = \tilde{\lambda} z^2 e^{-(\tilde{b}z - \tilde{b}/z)}$ avec $\tilde{b} \in \mathbb{R}_+$. En fait la seule manière d'y arriver est de conjuguer par l'application linéaire $z \mapsto \frac{|b|}{b}z$. On obtient $\tilde{\lambda} = \frac{\lambda|b|}{b}$ et $\tilde{b} = |b|$.

Lemme 2.2.2 *Soit $a \in \mathbb{T}^1$, $b \in \mathbb{C}$. Alors l'application*

$$g_{a,b} = e^{2\pi a\sqrt{-1}} z^2 e^{-(bz - \bar{b}/z)}$$

se restreint en une application monotone de \mathbb{S}^1 si et seulement si $|b| \leq 1$. Si on est dans ce cas, alors $|b| = 1$ équivaut à ce que les points critiques se trouvent sur le cercle unité.

Dém. Lorsque $|b| < 1$ les points critiques de $g_{a,b}$, qui sont $\left\{ \frac{1-\sqrt{1-|b|^2}}{b}, \frac{1+\sqrt{1-|b|^2}}{b} \right\}$, n'appartiennent pas au cercle unité. Par conséquent, $g_{a,b}$, qui admet une restriction de \mathbb{S}^1 dans lui-même, est monotone sur le cercle. Comme $g_{a,b}$ dépend continûment de b , la restriction est encore monotone lorsque $|b| = 1$. Dans ce cas, l'application $g_{a,b}$ n'a qu'un seul point critique $1/b$ et celui-ci appartient au cercle.

Inversement, supposons $|b| > 1$. Il est plus pratique de faire les calculs avec l'application relevée $f_{a,|b|}$ de $g_{a,|b|}$ (conjuguée à $g_{a,b}$ par une rotation). Les points critiques de $f_{a,b}$ sont les solutions de $\cos(2\pi x) = \frac{1}{|b|}$. Ces points critiques appartiennent à l'axe réel et la dérivée seconde $f''_{a,b}(x) = -4\pi|b| \sin(2\pi x)$ ne s'annule pas en ces points. Par conséquent $f_{a,|b|}$ et donc $g_{a,b}|_{\mathbb{S}^1}$ ne sont pas monotones lorsque $|b| > 1$. \square

On rappelle que α est une valeur asymptotique de $g_{a,b}$ s'il existe un chemin continu $\eta : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}^*$ tel que la limite de $\eta(t)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ est 0 ou ∞ et tel que $\alpha = \lim_{t \rightarrow +\infty} g_{a,b}(\eta(t))$. Si on note $S_{g_{a,b}}$ l'ensemble des valeurs singulières de la fonction $g_{a,b}$, c'est-à-dire la réunion de l'ensemble des valeurs critiques et de l'ensemble des valeurs asymptotiques de la fonction $g_{a,b}$, alors, au dessus de n'importe quel voisinage de $z \in \mathbb{S}_{g_{a,b}}$, l'application $g_{a,b}$ n'est pas un revêtement et réciproquement, la restriction $g_{a,b} : \mathbb{C}^* \setminus g_{a,b}^{-1}(S_{g_{a,b}}) \rightarrow \mathbb{C} \setminus S_{g_{a,b}}$ est un revêtement.

Nous allons calculer les valeurs asymptotiques de l'application $g_{a,b}$.

Proposition 2.2.3 *Soit $\lambda \in \mathbb{S}^1$, $b \in \mathbb{R}^*$. Alors l'ensemble des valeurs asymptotiques de $g(z) = \lambda z^2 e^{-b(z-1/z)}$ est $\{0, \infty\}$.*

Dém.

On voit, grâce aux chemins $t \mapsto \eta_{\pm}(t) = \pm t$, que 0 et ∞ sont des valeurs asymptotiques. On montre alors, comme dans [39], qu'une valeur asymptotique α ne peut être autre chose que 0 ou ∞ .

Par définition, on a $\alpha = \lim_{t \rightarrow +\infty} g \circ \eta(t)$ pour un chemin η tendant vers 0 ou vers ∞ . Par symétrie, on peut supposer que $\eta(t) \rightarrow \infty$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Soit $x, y : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définis par $x + \sqrt{-1}y = -b(\eta - 1/\eta)$.

S'il existe $c \in \mathbb{R}$ et une suite $t_n \rightarrow \infty$ tels que $x(t_n) \geq c$ pour tout n , alors $g(\eta(t_n)) \rightarrow \infty$. Ainsi $\alpha \neq 0$ entraîne que $x(t) \rightarrow -\infty$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. Notons \arg_0 la détermination de l'argument prenant ses valeurs dans $[0, 2\pi[$. Une conséquence de ce qui précède est que $\arg_0 \eta = \arg_0 \left(\frac{x + \sqrt{-1}y}{-b} \right) + o(1) \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$ pour tout t assez grand.

D'un autre côté, s'il existe $t_n \rightarrow +\infty$ tel que $(|y(t_n)|)_n$ est bornée, alors $g(\eta(t_n)) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. En fait, $\log |g| = \log |\eta|^2 + x = \log \left(\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) + x + o(1)$, donc $\log |g(\eta(t_n))| = x(t_n) + o(x(t_n))$. Puisque $x(t_n) \rightarrow -\infty$, nous aurions $g(\eta(t_n)) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. En conséquence de quoi, $\alpha \neq 0$ entraîne que y est non borné.

Soit \arg la partie imaginaire du prolongement analytique d'un choix de $\log g$ le long du chemin η . Puisque $\log g \circ \eta(t)$ converge lorsque $t \rightarrow \infty$, la fonction $\arg g \circ \eta$ est bornée. Or $\arg g \circ \eta = y + \arg \lambda + 2 \arg \eta$, $\arg \eta$ est non borné. Ceci contredit ce qui précède. \square

On aurait aussi pu utiliser le théorème d'Ahlfors-Carleman-Denjoy pour montrer que $g_{a,b}$ n'a pas de valeur asymptotique dans \mathbb{C}^* . Le résultat provient du fait que la fonction entière $f_{a,b}(z) = 2z - a + \frac{b}{\pi} \sin 2\pi z$ n'a pas de valeur asymptotique finie. Cela nécessiterait l'utilisation du fait que l'ordre de croissance de $f_{a,b}$ est fini. Nous rappelons ici ce que nous entendrons par ordre de croissance.

Définition 2.2.4 Soit a un point de la sphère de Riemann \mathbb{P}^1 , U un voisinage de a et $f : U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe définie sur le voisinage épointé $U \setminus \{a\}$ de a , ayant une singularité essentielle en a . Alors l'ordre de croissance de f près de a est défini par :

$$\limsup_{r \rightarrow 0} - \frac{\log \log M_a(f, r)}{\log r},$$

où $M_a(f, r) = \sup_{d(z,a)=r} |f(z)|$ et d est la distance sphérique.

Cette définition ne dépend pas du choix de carte dans le domaine. Pour la famille d'applications $(g_{a,b})_{a \in \mathbb{T}^1, b \in \mathbb{R}^*}$, les ordres de croissances près de 0 et ∞ sont égaux à 1.

Le dernier résultat de cette section permet de relier les éventuels bassins attractifs aux points critiques de $g_{a,b}$.

Proposition 2.2.5 Pour tout $(a, b) \in \mathbb{T}^1 \times [0, 1]$, l'application $g_{a,b}$ peut avoir au plus deux cycles attractifs, et s'il y en a, ils sont de même période. De plus, le bassin immédiat d'un cycle attractif contient au moins un point critique.

Si un cycle attractif appartient au cercle unité, il attire les deux points critiques et il n'y a pas d'autre cycle attractif. Dans ce cas les points critiques appartiennent à la même composante du bassin immédiat.

Dém. Les valeurs asymptotiques de $g_{a,b}$ n'appartiennent pas à son ensemble de définition, par conséquent, si z n'est pas l'un des n premiers itérés d'un point critique de la fonction $g_{a,b}$, $g_{a,b}^{\circ n}$ est un revêtement au-dessus d'un voisinage de ce point. Par conséquent les valeurs asymptotiques de $g_{a,b}^{\circ n}$ sont les mêmes que celles de $g_{a,b}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ la période du cycle attractif de $g_{a,b}$. Soit $R > 0$ le rayon maximal d'un disque centré en 0 et sur lequel l'inverse ψ de la linéarisante correspondante à ce cycle attractif est définie. Soit $r < R$ tel que $\frac{r}{|\rho|} > R$ (ρ est le multiplicateur du cycle).

Si on suppose que $B_r := \psi(D(0, r))$ ne contient pas de valeur asymptotique ni de valeur critique de $g_{a,b}^{\circ n}$, alors $g_{a,b}^{\circ n} : (g_{a,b}^{\circ n})^{-1}(B_r) \rightarrow B_r$ est un revêtement. Puisque B_r est simplement connexe, on aurait une branche inverse de $g_{a,b}^{\circ n}$ définie sur l'ensemble B_r . Alors ψ pourrait être prolongée dans $D(0, r/|\rho|)$ par la formule $\psi(z) = (g_{a,b}^{\circ n})^{-1}(\psi(\rho z))$ ce qui contredit la maximalité de $R < r/|\rho|$.

On en conclut que B_r contient un point critique ou asymptotique de $g_{a,b}^{\circ n}$. Ce ne peut être une valeur asymptotique car les valeurs asymptotiques de $g_{a,b}^{\circ n}$ n'appartiennent pas au domaine de définition de l'application. Donc le bassin immédiat du cycle attractif contient au moins un point critique.

Puisqu'il n'y a que deux points critiques, il y a au plus deux cycles attractifs. La symétrie entraîne qu'ils ont même période. En outre, si ce cycle appartient au cercle unité, par symétrie, les deux points critiques appartiennent à la même composante du bassin immédiat. \square

2.3 Déformation

Lemme 2.3.1 *Soit $(a, b) \in \mathbb{T}^1 \times [0, 1]$ tels que $g_{a,b}$ a un cycle attractif sur le cercle unité de type τ et de multiplicateur λ . Alors il existe une famille $(\varphi_\rho)_{\rho \in]0,1[}$ d'homéomorphismes quasiconformes $\varphi_\rho : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ de la sphère de Riemann fixant 0 et ∞ , dépendant analytiquement de la variable réelle ρ , telle que $\varphi_\lambda = id_{\mathbb{P}^1}$ et tel que φ_ρ conjugue $g_{a,b}$ à un g_{a_ρ, b_ρ} ayant un cycle attractif sur le cercle de type τ avec multiplicateur ρ :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \xrightarrow{\varphi_\rho} & \mathbb{C}^* \\ g_{a,b} \downarrow & & \downarrow g_{a_\rho, b_\rho} \\ \mathbb{C}^* & \xrightarrow{\varphi_\rho} & \mathbb{C}^* \end{array} \quad (2.1)$$

Démontrons ce lemme. Le but est de construire une application $g_{\tilde{a}, \tilde{b}}$, appartenant à la famille complexe des applications standard doubles, à partir de $g := g_{a,b}$ ayant le même type que g mais avec un multiplicateur donné $\rho \in]0, 1[$. Ceci est fait par déformation quasiconforme.

2.3.1 La déformation

Soit φ une application linéarisante locale de $g^{\circ p}$, où p est la période du cycle, définie au voisinage de $x \in \mathbb{S}^1$, où x est le point du cycle qui se trouve dans la même composante de Fatou que le point critique de g .

On supposera que la dérivée de φ en x vaut $\varphi'(x) = -\sqrt{-1}x$. Cette normalisation permet de définir φ de façon unique. On a $\varphi \circ g^{\circ p} = \lambda g$.

Il est facile de voir que φ est symétrique (cf lemme 2.3.2 ci-dessous), ce qui entraîne que si D_R est un disque centré en $0 = \varphi(x)$ sur lequel φ^{-1} est bien définie, alors $U = \varphi^{-1}(D_R)$ est stable par $z \mapsto 1/\bar{z}$.

Lemme 2.3.2 *Soit f une fonction holomorphe définie sur un voisinage du cercle unité, symétrique par rapport au cercle unité et ayant un cycle attractif $(x, f(x), \dots, f^{\circ p-1}(x))$ de période p dans \mathbb{S}^1 avec multiplicateur λ .*

Alors $\lambda \in \mathbb{R}$ et la linéarisante φ définie dans un voisinage de x vérifiant $\varphi'(x) = \sqrt{-1}x$ satisfait $\varphi(1/\bar{z}) = \varphi(z)$ et les préimages par φ de disques centrés en 0 sont symétriques par rapport au cercle unité.

Dém. Puisque f est symétrique par rapport au cercle unité, le multiplicateur est réel. Si on pose $\psi(z) = \overline{\varphi(1/\bar{z})}$, on voit facilement que $\psi \circ f = \lambda\psi$ car λ est réel. De plus ψ est holomorphe et un calcul direct donne $\psi'(x) = \varphi'(x)$.

Par unicité, il s'ensuit que $\psi = \varphi$. Enfin $\varphi(z) \in D_R \Leftrightarrow \overline{\varphi(z)} \in D_R \Leftrightarrow \varphi(1/\bar{z}) \in D_R$. \square

Les lemmes suivants permettent de procéder une déformation au voisinage du cycle attractif.

Lemme 2.3.3 *Soit $\alpha > 0$ et*

$$\begin{aligned} \chi : \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ z &\longmapsto |z|^\alpha z. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Alors :

- χ est un difféomorphisme réel-analytique satisfaisant $\chi(re^{i\theta}) = r^{\alpha+1}e^{i\theta}$ et $\chi(zz') = \chi(z)\chi(z')$ (pour tout z, z' dans \mathbb{C}^*);
- on a

$$\mu_\chi := \frac{\partial\chi/\partial\bar{z}}{\partial\chi/\partial z} = \frac{\alpha/2}{1 + \alpha/2} \frac{z}{\bar{z}}. \quad (2.3)$$

En particulier $|\mu_\chi|$ est constant et $\|\mu_\chi\|_\infty = \left| \frac{\alpha/2}{1+\alpha/2} \right|$;

- si $\alpha = \frac{\log r}{\log R} - 1$, χ envoie le disque D_R (de rayon R) sur le disque D_r ;
- si de plus $R, r < 1$, alors

$$|\mu_\chi| = \frac{|1 - \log r / \log R|}{1 + \log r / \log R} < 1. \quad (2.4)$$

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} D_R & \xrightarrow{\chi} & D_r \\ \downarrow z \mapsto \lambda z & & \downarrow z \mapsto \rho z \\ D_R & \xrightarrow{\chi} & D_r \end{array} \quad (2.5)$$

avec $\rho = \chi(\lambda) = \lambda^{1+\alpha}$ (en particulier $0 < \rho < 1$).

Dém.

- L'application χ est monotone sur les rayons, $\chi(0) = 0$ et $\chi(R) = R^{\frac{\log r}{\log R}} = r$;
- on a $\frac{\partial|z|}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\bar{z}}{|z|}$ et $\frac{\partial|z|}{\partial\bar{z}} = \frac{1}{2} \frac{z}{|z|}$. Donc $\frac{\partial\chi}{\partial\bar{z}} = \frac{\alpha}{2} |z|^{\alpha-2} z^2$ et $\frac{\partial\chi}{\partial z} = \left(\frac{\alpha}{2} + 1\right) |z|^\alpha$;
- Du premier point il vient : $\chi(\lambda z) = \chi(\lambda)\chi(z) = \rho\chi(z)$.

\square

Lemme 2.3.4 *La composition*

$$U \xrightarrow{\varphi} D_R \xrightarrow{\chi} D_r$$

induit une forme de Beltrami σ_ρ sur U , dépendant analytiquement de ρ , qui est invariante par g :

$$\sigma_\rho = \mu_\rho \frac{d\bar{z}}{dz} = \frac{\alpha/2}{1 + \alpha/2} \cdot \frac{\varphi(z)}{\overline{\varphi(z)}} \cdot \frac{\overline{\varphi'(z)} d\bar{z}}{\varphi'(z) dz}.$$

En outre σ_ρ vérifie $\mu_\rho(1/\bar{z}) = \overline{\mu_\rho(z)}$ sur U .

Dém. La dilatation μ_ρ est le coefficient de la forme de Beltrami $\frac{\partial \chi \circ \varphi}{\partial \bar{\chi} \circ \varphi}$. La dépendance analytique provient de (2.3) et du fait que $\alpha = \frac{\log \rho}{\log \lambda} - 1$.

L'invariance par g provient de (2.3) et (2.5) ci-dessus. \square

Ainsi nous avons une forme de Beltrami σ_ρ définie sur un ouvert symétrique (image du disque D_R par φ^{-1}) invariante par g avec coefficient de dilatation μ_ρ symétrique (i.e. $\mu_\rho(1/\bar{z}) = \overline{\mu_\rho(z)}$).

On propage σ_ρ sur presque tout le bassin (i.e. en dehors des points critiques et de leurs préimages) attractif en la tirant en arrière par g . La forme de Beltrami qui en résulte est encore symétrique et nous pouvons l'étendre à 0 en dehors du bassin.

Plus précisément, la forme de Beltrami prolongée $\sigma_\rho = \mu_\rho \frac{d\bar{z}}{dz} \in L^\infty$ est construite de cette façon (voir [35]) :

- sur $U = \varphi^{-1}(D_R)$, σ_ρ est la forme de Beltrami g -invariante donnée par le lemme 2.3.4 ;
- sur les préimages $g^{-n}(U)$ de U , la forme σ_ρ est donnée par :

$$\sigma_\rho(z) = \frac{\overline{g^{\circ n'}(z)}}{g^{\circ n'}(z)} \mu_\rho(g^{\circ n}(z)) \frac{d\bar{z}}{dz}.$$

On remarque que cette définition fonctionne parce que σ_ρ est g -invariante sur U ;

- ailleurs $\sigma = 0$.

Puisque g est holomorphe, on a $\|\sigma_\rho\|_\infty = \|\sigma_\rho\|_{L^\infty(\mathbb{P}^1)} = \|\sigma_\rho\|_{L^\infty(U)}$.

Il est facile de voir que le coefficient μ_ρ est symétrique sur U . De plus, $\forall n, \forall z, g^{\circ n'}(1/\bar{z}) = \overline{g^{\circ n'}(z)}$. Il s'ensuit que pour tout z tel que $g^{\circ n}(z) \in U$,

$$\mu_\rho(1/\bar{z}) = \frac{\overline{g^{\circ n'}(1/\bar{z})}}{g^{\circ n'}(1/\bar{z})} \mu_\rho(g^{\circ n}(1/\bar{z})) = \overline{\left(\frac{g^{\circ n'}(z)}{g^{\circ n'}(z)} \mu_\rho(g^{\circ n}(z)) \right)} = \overline{\mu_\rho(z)}.$$

Remarque 2.3.5 La variable ρ n'intervient pas dans la procédure de tirer-en-arrière ci-dessus. Par conséquent, la forme de Beltrami σ_ρ dépend analytiquement de ρ .

Puisque $\|\sigma_\chi\|_\infty = \|\sigma_\rho\|_\infty < 1$, le théorème de Riemann mesurable (relèvement des structures quasiconformes) donne l'existence d'un unique homéomorphisme quasiconforme $\Phi_\rho : (\mathbb{P}^1, 0, \infty, x) \longrightarrow (\mathbb{P}^1, 0, \infty, x)$ tel que la forme de Beltrami σ_ρ est Φ_ρ -invariante. De plus cet homéomorphisme est symétrique par rapport au cercle unité (voir section 2.2) et, grâce

à la dépendance analytique en fonction de ρ , on sait que (voir [1] $\rho \mapsto \Phi_\rho(z)$ est analytique pour tout $z \in \mathbb{P}^1$).

Par l'invariance par g , les applications $\tilde{g} := \Phi_\rho \circ g \circ \Phi_\rho^{-1}$ et $\tilde{\varphi} := (\Phi_\rho \circ \varphi^{-1} \circ \chi)^{-1}$ sont holomorphes sur leur domaine de définition respectifs :

$$\tilde{\varphi} : \Phi_\rho(U) \xrightarrow{\Phi_\rho^{-1}} U \xrightarrow{\varphi} D_R \xrightarrow{\chi} D_r$$

$$\begin{array}{ccccccc} \Phi_\rho(U) & \xrightarrow{\Phi_\rho^{-1}} & U & \xrightarrow{\varphi} & D_R & \xrightarrow{\chi} & D_r \\ \tilde{g} \downarrow & & g \downarrow & & \downarrow \times \lambda & & \downarrow \times \rho \\ \Phi_\rho(h(U)) & \xrightarrow{\Phi_\rho^{-1}} & h(U) & \xrightarrow{\varphi} & \lambda D_R & \xrightarrow{\chi} & \rho D_r \end{array} \quad (2.6)$$

La nouvelle application \tilde{g} possède un cycle attractif de période p , comme g , avec une linéarisante locale $\tilde{\varphi}$ définie dans un voisinage du point $\Phi_\rho(x) = x$ (point du cycle attractif en question). Le multiplicateur de ce nouveau cycle est $\rho = \lambda^{1+\alpha}$. On remarque que toutes les valeurs de l'intervalle $]0, 1[$ peuvent être affectées à ρ en choisissant la valeur de α idoine.

Il faut voir que l'on peut, en déformant g de cette façon, obtenir, après une éventuelle renormalisation, une application qui appartient encore à la famille des $g_{a,b}$. Dans la section suivante, on montre que, après conjugaison par une rotation convenable, la nouvelle application appartient à la famille.

2.4 Retour dans la famille des applications standard doubles

Vérifions que l'application \tilde{g} construite dans la section précédente est conjuguée par une rotation R à un unique élément de la famille $(g_{a,b})_{a,b}$.

Proposition 2.4.1 *Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ et soit $g_{a,b,c} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ définie par :*

$$g_{a,b,c}(z) = e^{2\sqrt{-1}\pi a} z^2 e^{-(bz-c/z)}.$$

Soit φ, ψ des homéomorphismes de la sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ préservant l'orientation fixant 0 et ∞ .

Si l'application $\psi \circ g_{a,b,c} \circ \varphi : \mathbb{C}^ \rightarrow \mathbb{C}^*$ est holomorphe, alors il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ tel que $\psi \circ g_{a,b,c} \circ \varphi = g_{\alpha,\beta,\gamma}$.*

Si on suppose que l'application $g_{a,b,c}$ est symétrique par rapport au cercle unité, donc que $a \in \mathbb{T}^1$ et $c = \bar{b}$, et que φ et ψ sont aussi symétriques par rapport au cercle unité, alors l'application $g_{\alpha,\beta,\gamma}$ est aussi symétrique par rapport au cercle unité, $\alpha \in \mathbb{T}^1$, $\gamma = \bar{\beta}$ et on a $|\beta| < 1$ si et seulement si $|b| < 1$ et $|\beta| = 1$ si et seulement si $|\beta| = 1$.

Dém. On peut supposer que les homéomorphismes φ et ψ sont quasiconformes. En effet, soit V l'ensemble des valeurs critiques de $g_{a,b,c}$. Il contient un ou deux points et $\psi(V)$ est

l'ensemble des valeurs critiques de $h := \psi \circ g_{a,b,c} \circ \varphi$. Comme V est fini et par compacité de $\widehat{\mathbb{C}}$, il existe une isotopie $\psi_t : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ entre l'homéomorphisme $\psi = \psi_0$ et un homéomorphisme quasiconforme ψ_1 telle que pour tout $t \in [0, 1]$, $\psi_t(0) = 0$, $\psi_t(\infty) = \infty$ et pour tout $v \in V$, $\psi_t(v) = \psi(v)$. Grâce à cette dernière propriété, l'isotopie ψ_t peut être relevée en une isotopie φ_t entre l'homéomorphisme $\varphi = \varphi_0$ et l'homéomorphisme φ_1 qui est quasiconforme puisque localement composition d'homéomorphisme quasiconformes.

Puisque les homéomorphismes φ et ψ préservent l'orientation de \mathbb{C}^* , ils induisent l'identité sur le premier groupe d'homologie de \mathbb{C}^* à coefficients entiers $H_1(\mathbb{C}^*, \mathbb{Z})$. Ce groupe est engendré par la classe d'homologie $[\gamma]$ d'une courbe γ faisant un tour autour de 0 dans la direction directe, ainsi :

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}\pi} \int_{(0,+)} \frac{h'(z)}{h(z)} dz = \frac{1}{2\sqrt{-1}\pi} \int_{(0,+)} \frac{g'_{a,b,c}(z)}{g_{a,b,c}(z)} dz.$$

Cette intégrale dépend continûment des paramètres $(a, b, c) \in \mathbb{C}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Par conséquent c'est une constante indépendante de (a, b, c) . Alors :

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}\pi} \int_{(0,+)} \frac{h'(z)}{h(z)} dz = \frac{1}{2\sqrt{-1}\pi} \int_{(0,+)} \frac{g'_{0,0,0}(z)}{g_{0,0,0}(z)} dz = 2.$$

Il existe donc une fonction holomorphe $u : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ telle que $h(z) = z^2 e^{u(z)}$. Afin de connaître la fonction u plus précisément, on va utiliser l'ordre de croissance de la fonction h près de 0 et de ∞ .

Supposons à partir de maintenant que les homéomorphismes φ et ψ sont des homéomorphismes K -quasiconformes de $\widehat{\mathbb{C}}$. On sait que de tels homéomorphismes sont localement Hölder continus d'exposant $1/K$. Alors, en appliquant l'inverse de la bijection φ près de ∞ , on trouve des constantes $R_\infty > 0$ et $C_\infty > 0$ telles que pour tout point $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ vérifiant $|\varphi(z)| \geq R_\infty$, on a $|\varphi(z)| \leq C_\infty |z|^K$. De plus, on peut choisir les constantes R_∞ et C_∞ de sorte que l'on ait la même chose si on remplace φ par ψ .

Nous estimons l'ordre de croissance de l'application holomorphe h au voisinage du point ∞ . Puisque $\varphi(z) \rightarrow \infty$ lorsque $z \rightarrow \infty$, on peut supposer que $|z|$ est telle que $|\varphi(z)| \geq R_\infty$. Alors :

$$\begin{aligned} \Re \left(- \left(b\varphi(z) + \frac{c}{\varphi(z)} \right) \right) &\leq |b||\varphi(z)| + \frac{|c|}{|\varphi(z)|} \\ &\leq |b|C_\infty |z|^K + \frac{|c|}{R_\infty}. \end{aligned}$$

Donc $|g \circ \varphi(z)| \leq C|z|^{2K} e^{C'|z|^K}$, pour des constantes $C, C' > 0$. Ainsi, si $|\psi \circ g_{a,b,c} \circ \varphi(z)| \geq R_\infty$, alors $|h(z)| = |\psi \circ g_{a,b,c} \circ \varphi(z)| \leq C''|z|^{2K^2} e^{C'''|z|^K}$ pour des constantes $C'', C''' > 0$. Donc l'ordre de croissance de l'application holomorphe h au voisinage de ∞ est fini.

Il en va de même pour l'ordre de croissance au voisinage du point 0 par un argument tout à fait similaire utilisant la Hölder continuité de l'application φ près du point 0.

Ainsi l'application u admet un développement en série de Laurent non nul :

$$u(z) = \sum_{n=-p}^q a_n z^n,$$

avec $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $a_{-p} \neq 0$ et $a_q \neq 0$.

Par définition de h , l'application h a le même nombre de points critiques que $g_{a,b,c}$. On sait que la fonction $g_{a,b,c}$ a deux points critiques comptés avec multiplicités.

On a (cf. lemme 2.2.1) :

$$\begin{aligned} h'(z) &= (2z + z^2 u'(z)) e^{u(z)} \\ &= \frac{1}{z^{p-1}} (2z^p + z^{p+1} u'(z)) e^{u(z)}. \end{aligned}$$

La fonction $P(z) = (2z^p + z^{p+1} u'(z))$ est un polynôme de degré exact $p+q$ tel que $P(0) \neq 0$. Donc la fonction h a $p+q$ points critiques comptés avec multiplicités. Par conséquent $p = q = 1$, ce qui termine la démonstration de la première partie de la proposition 2.4.1.

La partie sur la symétrie est facilement établie. Les équivalences sur la majoration $|\beta| < 1$ ou l'identité $|\beta| = 1$ sont conséquences du lemme 2.2.2. \square

De cette proposition il s'ensuit qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{T}^1 \times \overline{\mathbb{D}}$ dépendant de ρ tels que $\Phi_\rho \circ g \circ \Phi_\rho^{-1} = e^{2\sqrt{-1}\pi\alpha} z^2 e^{-(\beta z - \bar{\beta}/z)}$. De plus nous avons dans la section 2.2 qu'il existait une unique rotation R telle que $R^{-1} \circ \Phi_\rho \circ g \circ \Phi_\rho^{-1} \circ R$ appartienne à la famille d'applications $(g_{a,b})_{a \in \mathbb{T}^1, b \in [0,1]}$.

2.4.1 Type du cycle déformé

Étant donné $\rho \in]0, 1[$, nous avons un processus qui construit une application qui appartient à la famille des applications standard doubles par déformation d'une application appartenant à une langue, de sorte que cette application déformée ait un cycle attractif de multiplicateur ρ . Il nous faut vérifier que le type de ce cycle est le même que celui du cycle correspondant à l'application de départ.

Proposition 2.4.2 *Le couple de paramètres (\tilde{a}, \tilde{b}) correspondant à la fonction déformée \tilde{g} est de type τ .*

Dém. On rappelle que τ est l'image par l'application $\phi_{\tilde{a}, \tilde{b}}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_{a,b}^{\circ n}(x)/2^n$ (voir [25]) du point \tilde{x} du cycle attractif de $g_{\tilde{a}, \tilde{b}}$ appartenant à la composante du bassin contenant les points critiques.

La proposition est une conséquence de la propriété d'unicité suivante concernant la semiconjugaison $\phi_{a,b}$.

Lemme 2.4.3 *Soit $f : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1$ une application continue monotone. Si $\varphi, \psi : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1$ sont des applications croissantes (n'inversant pas l'orientation) continues de degré 1 telles que $\varphi \circ f = 2 \times \varphi$ et $\psi \circ f = 2 \times \psi$, alors $\varphi = \psi$.*

Remarque 2.4.4 Dans ce lemme, l'hypothèse de continuité est superflue.

Dém. Soit F un relevé de l'application f et $\tilde{\varphi}$ un relevé de l'application φ . Puisque $\tilde{\varphi} \circ F$ est une fonction croissante c'est un relevé de 2φ .

Donc il existe un entier k tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \tilde{\varphi}(F(x)) = 2\tilde{\varphi}(x) + k.$$

Alors, si on pose $\varphi_1 = \tilde{\varphi} + k$, on a $\varphi_1 \circ F = 2\varphi_1$. On suppose qu'on a la même propriété pour un relevé ψ_1 de ψ .

Les applications φ_1 et ψ_1 sont croissantes de degré 1 et localement bornées. Donc la fonction $\varphi_1 - \psi_1$ est périodique et bornée. Or

$$\varphi_1(x) - \psi_1(x) = \frac{1}{2}(\varphi_1(F(x)) - \psi_1(F(x))),$$

donc

$$\varphi_1(x) - \psi_1(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^n (\varphi_1(F^{on}(x)) - \psi_1(F^{on}(x))),$$

pour tout n . Ainsi $\varphi_1(x) - \psi_1(x) = 0$. □

Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{T}^1 & \xrightarrow{\Psi^{-1}} & \mathbb{T}^1 & \xrightarrow{\phi_{a,b}} & \mathbb{T}^1 \\ f_{\tilde{a},\tilde{b}} \downarrow & & f_{a,b} \downarrow & & D \downarrow \\ \mathbb{T}^1 & \xrightarrow{\Psi^{-1}} & \mathbb{T}^1 & \xrightarrow{\phi_{a,b}} & \mathbb{T}^1 \end{array} \quad (2.7)$$

où Ψ est définie par $\exp \circ \Psi = \Phi_{|\mathbb{S}^1} \circ \exp$. Donc on a $\phi_{\tilde{a},\tilde{b}} = \phi_{a,b} \circ \Psi^{-1}$. Par conséquent (\tilde{a}, \tilde{b}) est de type τ .

2.5 Chemin

Le lemme 2.3.3 donne la valeur du multiplicateur ρ de la nouvelle application $g_{\tilde{a},\tilde{b}}$, c'est $\rho = \lambda^{1+\alpha}$, où α est pris dans l'intervalle $] -1, +\infty[$. Alors il est clair que toutes les valeurs dans l'intervalle $]0, 1[$ peuvent être assignées à ρ lorsque l'on change le paramètre α (il suffit de poser $\alpha = \frac{\log \rho}{\log \lambda} - 1$).

Soit $\gamma(\rho) := (\tilde{a}(\rho), \tilde{b}(\rho))$ où $(\tilde{a}(\rho), \tilde{b}(\rho))$ est le couple de paramètres correspondant à $f_{\tilde{a},\tilde{b}}$, restriction de $g_{\tilde{a},\tilde{b}}$ sur le cercle unité (l'application $g_{\tilde{a},\tilde{b}}$ est construite à partir de $g_{a,b}$ par la déformation quasiconforme décrite précédemment).

Cette application γ est bien définie sur $]0, 1[$, vérifie $\gamma(\lambda) = (a, b)$ et est à valeurs dans la langue T_τ de type τ .

On va montrer cette application $\rho \mapsto \gamma(\rho)$ est continue. En fait elle est réel-analytique. Après quoi il restera à montrer qu'on peut définir $\gamma(0)$ et que cela doit correspondre à un paramètre dont l'application correspondante possède un cycle superattractif de type τ .

2.5.1 Analyticité

La preuve de la dépendance analytique en ρ de $(\tilde{a}, \tilde{b}) = (a(\rho), b(\rho))$ se fonde sur l'étude de la régularité de la dépendance des points et valeurs critiques de la fonction \tilde{g}_ρ , issue directement de la déformation avant rotation, ainsi que de la rotation qui permet d'en faire un membre de la famille des applications standard doubles (cf proposition 2.4.1).

On sait déjà, par le théorème de redressement des formes de Beltrami à paramètres, que l'application $\rho \mapsto \Phi_\rho(z)$ est réel analytique pour tout z . Les points critiques de $\tilde{g}_\rho = \Phi_\rho \circ g \circ \Phi_\rho^{-1}$, qui sont caractérisables topologiquement, sont les images des points critiques de la fonction g par l'homéomorphisme Φ_ρ . Soit ω l'un des deux points critiques de la fonction g et $\tilde{\omega}_\rho := \Phi_\rho(\omega)$. Puisque l'application $\rho \mapsto \Phi_\rho(\omega)$ est réel analytique le point critique $\tilde{\omega}_\rho$ dépend analytiquement de ρ .

La conjugaison par une rotation R_ρ permet de normaliser la déformée \tilde{g}_ρ de sorte que la fonction $g_\rho = R_\rho \circ \tilde{g}_\rho \circ R_\rho^{-1}$ soit un élément de la famille qu'on étudie. Puisque les points critiques de la fonction $\tilde{g}_\rho(z) = \lambda z^2 e^{-(bz - \bar{b}/z)}$ sont $\frac{1 \pm \sqrt{1 - |b|^2}}{b} \in \frac{1}{b} \mathbb{R}$, cela revient à ramener le point critique sur le demi axe réel positif. Précisément, $R_\rho z = \frac{|\tilde{\omega}_\rho|}{\tilde{\omega}_\rho} z$.

Par conséquent, le point critique correspondant pour g_ρ , $\omega_\rho = R_\rho \tilde{\omega}_\rho = |\tilde{\omega}_\rho|$, dépend lui aussi analytiquement de ρ .

Des formules des point critiques de $g_\rho = g_{a(\rho), b(\rho)}$, on tire :

$$b(\rho) = \frac{2\omega_\rho}{1 + \omega_\rho^2},$$

qui est valable pour les deux points critiques ω_ρ .

On peut exprimer $a(\rho)$ en fonction de ρ en utilisant l'expression de la valeur critique de g_ρ , qui est à la fois image de ω_ρ par $g_\rho(z) = e^{2\pi a(\rho)\sqrt{-1}} z^2 e^{-b(\rho)(z-1/z)}$ et image de $h(\omega)$ par $R_\rho \circ \Phi_\rho$. On a :

$$e^{2\pi a(\rho)\sqrt{-1}} = \frac{R_\rho \circ \Phi_\rho(f(\omega))}{\omega_\rho^2 e^{-b(\rho)(\omega_\rho - 1/\omega_\rho)}}.$$

Ainsi l'application $\rho \mapsto (a(\rho), b(\rho))$ est un chemin analytique défini sur $]0, 1[$ dans $T_\tau \subset \mathbb{T}^1 \times [0, 1]$.

2.5.2 Aboutissement du chemin lorsque le multiplicateur converge vers 0

Nous avons montré que, étant donné un paramètre $(a, b) = (a(0), b(0))$ dans la langue de type τ , il existe un chemin continu $\rho \in]0, 1[\mapsto \gamma(\rho) = (a(\rho), b(\rho))$ dans cette langue, dans une direction duquel le multiplicateur du cycle de type τ est ρ et tend vers 0. Il reste à montrer que le chemin tend vers une limite définie lorsque $\rho \rightarrow 0$, que cette limite correspond à un paramètre de type τ avec cycle superattractif et que ce point ne dépend pas du point de départ dans la langue.

Montrons d'abord que la limite $\lim_{\rho \rightarrow 0} (a(\rho), b(\rho))$ existe.

On remarque que $b(\rho) \leq 1$ pour tout ρ puisque pour $b > 1$, l'application $f_{a,b}$ ne préserve par l'orientation.

Puisque $f'_{a,b}(x) \geq 2(1-b)$ pour tout (a, b, x) et $\lim_{\rho \rightarrow 0} (f_{a(\rho), b(\rho)}^{\circ p})'(x(\rho)) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho = 0$, où $x(\rho)$ est l'un des points du cycle attractif (de période p) de $f_{a(\rho), b(\rho)}$, la valeur de $b(\rho)$ tend vers 1 lorsque $\rho \rightarrow 1$. En particulier, par la dépendance continue de la semiconjugaison $\phi_{a,b}$ par rapport à (a, b) , pour toute valeur d'adhérence de $(a(\rho), b(\rho))$ lorsque $\rho \rightarrow 0$, l'application correspondante a un cycle superattractif de période exacte p .

L'ensemble Λ des valeurs d'adhérence du chemin $\gamma(\rho) = (a(\rho), b(\rho))$ lorsque $\rho \rightarrow 0$ est inclus dans l'ensemble des points $(a, 1) \in \mathbb{T}^1 \times \{1\}$. Cet ensemble Λ est compact et connexe puisque c'est l'intersection décroissante des ensembles compacts connexes $\overline{\gamma([0, 1/n])}$. Donc le compact Λ est réduit à un point ou alors contient un ouvert non vide $]a_1, a_2[$ de $\mathbb{T}^1 \times \{1\}$. On montre son intérieur est vide.

Lemme 2.5.1 *Pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'application $\mathbb{T}^1 \ni a \mapsto f_{a,1}^{\circ p}(1/2) \in \mathbb{T}^1$ est strictement croissante de degré $2^p - 1$.*

Dém. La croissance vient de l'inégalité $\frac{\partial}{\partial a} (F_{a,1}^{\circ p}(1/2)) \geq 1$, qui peut être obtenue par un calcul direct (voir [26]). En effet on a $\frac{\partial}{\partial a} F_{a,b} = 1$ et la formule $\frac{\partial}{\partial a} (F_{a,b}^{\circ p+1}) = \frac{\partial F_{a,b}}{\partial a} (F_{a,b}^{\circ p}) + F'_{a,b} \frac{\partial F_{a,b}^{\circ p}}{\partial a}$ permet de faire une récurrence (la dérivée de $F_{a,b}$ est positive).

Il suffit maintenant de montrer que pour tout $(a, b, x) \in \mathbb{R} \times [0, 1] \times \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}$ on a :

$$F_{a+1,b}^{\circ p}(x) = F_{a,b}^{\circ p}(x) + 2^p - 1$$

(on rappelle que $f_{a,b} : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1$ est l'application quotientée dans \mathbb{T}^1 de l'application $F_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$).

Cette identité est vraie pour $p = 1$, en outre, une récurrence sur p donne :

$$\begin{aligned} F_{a+1,b}^{\circ p+1}(x) &= F_{a+1,b}(F_{a+1,b}^{\circ p}(x)) \\ &= F_{a,b}(F_{a,b}^{\circ p}(x) + 2^p - 1) + 1 \\ &= F_{a,b}^{\circ p+1}(x) + 2^{p+1} - 1. \end{aligned}$$

□

Maintenant nous montrons que la limite est unique. Sinon le point $1/2$, qui est le seul point critique de $g_{a,1}$, serait un point p -périodique pour toutes les application $f_{a,1}$ telles que $a \in]a_1, a_2[$, ce qui impossible d'après ce qui précède. La limite est donc unique.

Le type du paramètre limite $(a, 1)$ doit être τ . En effet, ce paramètre possède un type τ' , mais puisque l'ensemble des paramètres d'un type donné est un ouvert de $\mathbb{T}^1 \times [0, 1]$, toutes les valeurs du chemin assez proche du paramètre limite $(a, 1)$ doivent être aussi de type τ' , ce qui entraîne que $\tau' = \tau$.

Lemme 2.5.2 Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $(a, b) \in \mathbb{T}^1$, $X \in \mathbb{R}$. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k < 2^p - 1$ et $x = X \bmod 1 \in \mathbb{T}^1$. Si $F_{a,b}^{\circ p}(X) = X + k$ alors $\phi_{a,b}(x) = \frac{k}{2^p - 1}$.

Dém. On a :

$$\begin{aligned}\phi_{a,b}(x) &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{a,b}^{\circ n}(X)}{2^n} \right) \bmod 1, \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{a,b}^{\circ np}(X)}{2^{np}} \right) \bmod 1.\end{aligned}$$

Or $F_{a,b}^{\circ p}(X) = X + k$ donc :

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{a,b}^{\circ np}(X)}{2^{np}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X + k \sum_{j=0}^{n-1} 2^{pj}}{2^{np}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k \frac{2^{np} - 1}{2^p - 1}}{2^{np}}.\end{aligned}$$

□

Proposition 2.5.3 Soit $\tau \in \mathbb{T}^1$ un point périodique de l'application de doublement $D : x \mapsto 2x$. Alors il existe un unique paramètre $a \in \mathbb{T}^1$ tel que le couple de paramètres $(a, 1)$ est de type τ et le cycle correspondant de $g_{a,b}$ est superattractif.

Remarque 2.5.4 Si $g_{a,b}$ possède un cycle superattractif alors $b = 1$ (cf section 2.2).

Dém. Comme le point $\tau \in \mathbb{T}^1$ est un point périodique de D il existe $p \in \mathbb{N}^*$, $k \in \{0, \dots, 2^p - 2\}$ tels que $\tau = \frac{k}{2^p - 1}$. De plus, par le lemme 2.5.1, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \{0, \dots, 2^p - 2\}$ il existe un unique $a \in \mathbb{T}^1$ tel que $F_{a,b}^{\circ p}(1/2) = 1/2 + k$. Mais alors, d'après le lemme 2.5.2, le paramètre $(a, 1)$ est de type τ . □

Corollaire 2.5.5 Si $\tau \in \mathbb{T}^1$ est un type, la langue T_τ de type τ est non vide.

Corollaire 2.5.6 Les langues sont connexes.

Dém. La langue T_τ est non vide. Prenant n'importe quel point dans cette langue en tant que point de départ, on construit le chemin continu $\gamma : [0, 1] \rightarrow T_\tau$ comme précédemment. L'extrémité $\gamma(1)$ de ce chemin est un paramètre $(a, 1)$ de type τ correspondant à un cycle superattractif. Un tel paramètre est unique et donc tous les points de T_τ sont reliés. □

Chapitre 3

Vitesse de croissance des coefficients de la série de Laurent de l'inverse de l'application de Böttcher

3.1 Introduction et énoncés

Soit ψ l'inverse de l'application de Böttcher B du polynôme $f = f_\lambda(z) = z^2 + \lambda$. La fonction ψ est définie holomorphe et univalente de l'ouvert $\Delta_R = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}(0, R)$ sur le complémentaire d'un compact de $\widehat{\mathbb{C}}$.

Par définition, ψ vérifie :

$$\psi(z^2) = f(\psi(z)) = \psi(z)^2 + \lambda$$

pour tout $|z| > R$.

La fonction ψ est impaire. En effet $f(\psi(z)) = \psi(z^2) = f(\psi(-z))$ donc $\psi(-z)^2 = \psi(z)^2$. Le développement en série de Laurent de la fonction ψ s'écrit donc :

$$\begin{aligned}\psi(z) &= z + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{2k+1}}{z^{2k+1}} \\ &= z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_k}{z^{2k}}\end{aligned}$$

en posant $\beta_0 = 1$ et pour $k \geq 1$, $\beta_k = b_{2k-1}(\lambda)$. On suppose que le rayon de convergence de la série $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z^{2k}$ est $1/R \leq 1$, ce qui équivaut à ce que la série de Laurent converge uniformément sur tout compact de Δ_R .

Remarque 3.1.1 *Le rayon R étant égal à $|B_\lambda(\lambda)|^{1/2}$, la suite des coefficients β_n vérifie*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\beta_n|} = |B(\lambda)|.$$

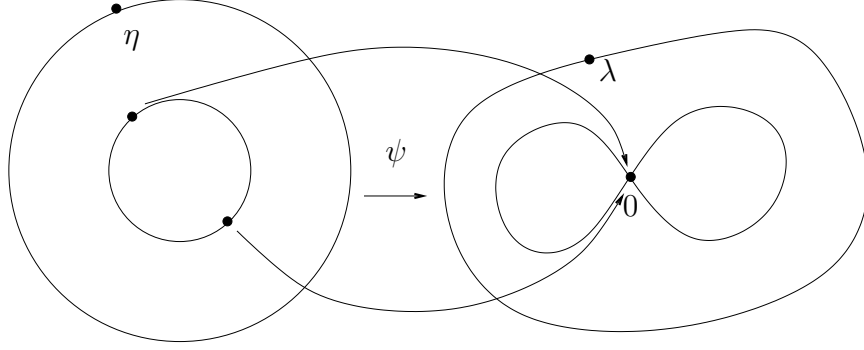


FIG. 3.1 – Le prolongement maximal de ψ a pour image le complémentaire d'un huit

Le théorème 3.1.3 donne une estimation plus précise de la vitesse de croissance de cette suite.

Dans le cas où le bassin de l'infini de $f = f_\lambda$ contient le point critique 0, c'est-à-dire quand l'ensemble de Julia correspondant J n'est pas connexe, le rayon de convergence vérifie $R > 1$ et ψ est univalente sur le domaine Δ_R . Si \mathcal{M} désigne l'ensemble de Mandelbrot on a alors $\lambda \notin \mathcal{M}$. En outre, on notera $\eta = B(\lambda)$ la préimage de la valeur critique λ par ψ , on a $|\eta| = R^2$.

Lemme 3.1.2 Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \notin \mathcal{M}$, ψ l'inverse des coordonnées de Böttcher du polynôme quadratique $f(z) = z^2 + \lambda$. Soit η la préimage de la valeur critique λ par l'application ψ et soit $\Delta_R = \mathbb{C} \setminus \overline{D(0, R)}$ le domaine de convergence de la série de Laurent en z représentant $\psi(z)$ (on a $R = |\omega|$). Alors, étant donné un choix holomorphe de racine carrée de la fonction $1 - \frac{\eta}{z^2}$, il existe une fonction holomorphe h définie sur Δ_R telle que

$$\psi(z) = zh(z^2)\sqrt{1 - \frac{\eta}{z^2}}.$$

Ce lemme permet de donner une expression précise de la vitesse de croissance des coefficients $\beta_k(\lambda)$

Théorème 3.1.3 Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \notin \mathcal{M}$, et soit

$$\psi(z) = z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_k}{z^{2k}}$$

l'inverse des coordonnées de Böttcher B du polynôme quadratique $f(z) = z^2 + \lambda$.

Soit h la fonction holomorphe définie sur Δ_R telle que $\psi(z) = zh(z^2)\sqrt{1 - \frac{\eta}{z^2}}$, où la branche de la racine carrée est celle qui est positive en les racines carrées du nombre complexe $1/2\eta$ (donné par le développement en série 3.1).

Alors pour tout $\alpha < 1$,

$$\beta_n = -\frac{B(\lambda)^n h(B(\lambda))}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right).$$

En outre si la valeur de $\sqrt{B'(\lambda)}$ est celle donnée par le choix de $\sqrt{1 - \frac{\eta}{z^2}}$ (ces deux fonctions valent 1 en ∞) alors

$$\beta_n = -\frac{(B(\lambda))^n}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}\sqrt{B'(\lambda)}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right).$$

3.2 Expression de ψ et démonstration du lemme 3.1.2

La fonction holomorphe ψ présente une singularité de type coin d'ouverture $\frac{1}{2}\pi$ (modulo π) en les préimages par z^2 de $\eta = B(\lambda)$. Cela provient du fait que le bord de son image est la préimage d'une courbe analytique simple par une fonction holomorphe ayant une valeur critique simple sur cette courbe.

Ainsi la fonction ψ "ressemble" au voisinage de deux points $\pm\omega$ du bord de son domaine de définition à une fonction racine carrée, ces points étant les deux préimages du point critique 0 par l'application ψ prolongée par continuité jusqu'au bord de son domaine de définition. Afin de tenir compte au mieux de ces singularités on factorise par les termes correspondants " $\sqrt{(z - \omega)(z + \omega)}$ ".

Dém. (du lemme 3.1.2). On va montrer qu'on peut écrire :

$$\psi(z) = zh(z^2)\sqrt{1 - \frac{\eta}{z^2}},$$

où h est une fonction holomorphe sur le domaine (inclus dans $\widehat{\mathbb{C}}$) Δ_R .

Comme $|\eta| = R^2$, pour tout $z \in \Delta_R$, $1 - \frac{\eta}{z^2} \neq 0$ donc il existe une fonction holomorphe racine carrée $\sqrt{1 - \frac{\eta}{z^2}}$ définie sur le domaine $\widehat{\mathbb{C}} \setminus D(0, R)$ et une fonction holomorphe g défini sur le même domaine telles que

$$\psi(z) = g(z)\sqrt{1 - \frac{\eta}{z^2}}.$$

On sait que la fonction ψ est impaire, donc la fonction g est aussi impaire. Par conséquent il existe une fonction holomorphe h définie sur le domaine Δ_{R^2} telle que $g(z) = zh(z^2)$.

Montrons que la fonction h se prolonge sur Δ_R . Pour cela, on considère la fonction $\phi(z) = \frac{\psi(z^2) - \lambda}{1 - \frac{\eta}{z^2}}$.

Cette fonction est définie méromorphe sur l'ensemble des nombres complexes z tels que $|z|^2 > R$. En fait elle est holomorphe sur cet ensemble. En effet, la fonction $z \mapsto 1 - \frac{\eta}{z^2}$ admet un zéro simple en ω et $-\omega$ et il en est de même pour la fonction $\psi(z^2) - \lambda$ car $\psi(\eta) = c$ et la fonction ψ est univalente au voisinage de η . De plus cette fonction ne s'annule pas sur le domaine $\{z \in \mathbb{C} : |z|^2 > R\}$ car ψ est univalente sur son domaine de définition Δ_R .

D'un autre côté, la fonction $g(z) = zh(z^2)$ vérifie $g(z)^2 = \frac{\psi(z^2) - \lambda}{1 - \frac{\eta}{z^2}}$ pour tout nombre complexe $z \in \Delta_R$. Comme la fonction ψ est univalente sur Δ_R et tangente à l'identité en

∞ , la fonction $z \mapsto \psi(z^2) + \lambda$ est un revêtement ramifié de degré 2 sur $\Delta_{\sqrt{R}}$ ramifié en ∞ , fixant le point ∞ , donc

$$\int_{(\infty+)} \frac{2z\psi'(z^2)}{\psi(z^2) + \lambda} dz = -2.$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} - \int_{(0+)} \frac{2\eta/(1/z)^3}{1 - \frac{\eta}{(1/z)^2}} \frac{dz}{z^2} &= -2\eta \int_{(0+)} \frac{z}{1 - \eta z^2} dz \\ &= 0. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\int_{(\infty+)} \frac{\phi'(z)}{\phi(z)} dz = -2,$$

et donc qu'il existe une fonction $\sqrt{\phi}$ holomorphe sur $\Delta_{\sqrt{R}}$ vérifiant $\sqrt{\phi}^2 = \phi$ et $g|_{\Delta_R} = \sqrt{\phi}$.
□

Corollaire 3.2.1 *Soit h la fonction holomorphe définie sur Δ_R que l'on vient de construire. Soit a_n les coefficients du développement en série de Laurent de la fonction $h(z^2)$:*

$$h(z^2) = \sum_n^{\infty} \frac{a_n}{z^{2n}}.$$

Alors pour tout $R' > \sqrt{R}$ il existe une constante $C(R') > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|a_n| \leq C(R') R'^{2n}.$$

3.3 Un équivalent des coefficients de la série entière racine carrée

On rappelle que pour $|t| < 1$, la fonction $\sqrt{1-t}$, valant 1 en $t = 0$, peut être définie par le développement en série entière :

$$\sqrt{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} s_n t^n,$$

avec s_n vérifiant la récurrence :

$$\begin{cases} s_0 = 1, \\ s_{n+1} = \frac{n-\frac{1}{2}}{n+1} s_n. \end{cases}$$

En particulier, on a, pour tout $n \geq 1$,

$$s_n = -\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}n((n-1)!)^2}.$$

On supposera que c'est ce choix de racine carrée que l'on prend lorsque l'on considère la fonction $\sqrt{1 - \frac{\eta}{z^2}}$ avec $t = \frac{\eta}{z^2}$, c'est-à-dire que la fonction $\sqrt{1 - \frac{\eta}{z^2}}$ est définie par :

$$\sqrt{1 - \frac{\eta}{z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \left(\frac{\eta}{z^2}\right)^n, \quad (3.1)$$

où les coefficients s_n sont ceux décrits ci-dessus.

Lemme 3.3.1 *Soit*

$$\sqrt{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} s_n t^n$$

le développement en série entière de la fonction racine carrée de $1-t$ définie sur \mathbb{D} valant 1 en $t=0$.

Alors

$$s_n = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{n\sqrt{n}} \left(1 + \frac{3}{8} \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

Dém. D'après la formule de Stirling (qu'on peut trouver dans [38]) on a :

$$\Gamma(n) = \left(\frac{e}{n}\right)^n \sqrt{\frac{2\pi}{n}} e^{\theta(n)/12n}$$

où $0 < \theta(n) < 1$ et $\theta(n) \rightarrow 1$ très vite quand $n \rightarrow \infty$.

$\Gamma(n+1) = n!$, donc, pour $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} s_n &= -\frac{\Gamma(2n-1)}{n2^{2n-1}(\Gamma(n))^2} \\ &= -\frac{1}{n} \left(\frac{1}{2^{2n-1}} \left(\frac{2n-1}{e}\right)^{2n-1} \sqrt{\frac{2\pi}{2n-1}} e^{J(2n-1)} \left(\frac{e}{n}\right)^{2n} \frac{n}{2\pi} e^{-2J(n)} \right) \end{aligned}$$

où $J(n) = \theta(n)/12n$,

$$s_n = -\frac{1}{n\sqrt{n}} \left(e \left(n - \frac{1}{2}\right)^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{2n-1}} \left(\frac{1}{n}\right)^{2n} nE \right),$$

avec $E = \exp(J(2n-1) - 2J(n)) = 1 + \frac{\theta(2n-1)}{12(2n-1)} - \frac{\theta(n)}{6n} + O(\frac{1}{n^2})$. Donc

$$s_n = -\frac{E}{n\sqrt{n}} \left(e \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{2n-1} \sqrt{\frac{1}{2 - \frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}} \right).$$

Or

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{2n} &= \exp(2n \log(1 - \frac{1}{2n})) = \exp(-1 - \frac{1}{4n} + O(\frac{1}{n^2})) \\ &= e^{-1} \left(1 - \frac{1}{4n} + O(\frac{1}{n^2})\right) \end{aligned}$$

et $\frac{1}{1 - \frac{1}{2n}} = 1 + \frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2})$, puis

$$\sqrt{\frac{1}{2 - \frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{1}{2n}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{4n} + O(\frac{1}{n^2})\right).$$

D'où :

$$\begin{aligned} s_n &= -\frac{1}{n\sqrt{n}} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} E \left(1 - \frac{1}{4n} + O(\frac{1}{n^2})\right) \left(1 + \frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2})\right) \left(1 + \frac{1}{4n} + O(\frac{1}{n^2})\right) \\ &= -\frac{1}{n\sqrt{n}} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} - \frac{\theta(n)}{6}\right) + \frac{\theta(2n-1)}{12(2n-1)} + O(\frac{1}{n^2})\right). \end{aligned}$$

Étant donné que

$$\frac{1}{12(2n-1)} = \frac{1}{24} \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2})\right),$$

on a :

$$s_n = -\frac{1}{n\sqrt{n}} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} - \frac{\theta(n)}{6} + \frac{\theta(2n-1)}{24}\right) + O(\frac{1}{n^2})\right).$$

Ainsi,

$$s_n = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{n\sqrt{n}} \left(1 + \frac{3}{8} \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2})\right).$$

□

3.4 Preuve de la première identité du théorème 3.1.3

On montre que si $q \in \left] \frac{1}{\sqrt{R}}, 1 \right[$, si K_n est une suite de nombres entiers telle que $K_n/n \rightarrow 0$ et $n^{3/2}q^{K_n} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$ alors

$$\beta_n = -\frac{\eta^n h(\eta)}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}} \left(1 + O\left(\frac{K_n}{n}\right) + O(n^{3/2}q^{K_n}) \right).$$

Pour le théorème, il suffit de prendre n'importe quel nombre $q \in \left] \frac{1}{\sqrt{R}}, 1 \right[$ et de considérer la suite $K_n = n^{1-\alpha}$.

On a :

$$\psi(z) = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{z^{2n}} = z h(z^2) \sqrt{1 - \frac{\eta}{z^2}},$$

avec $h(z^2) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{z^{2k}} \right)$ et $\sqrt{1 - \frac{\eta}{z^2}} = \left(\sum_{l=0}^{\infty} s_l \frac{\eta^l}{z^{2l}} \right)$. On a ainsi $\beta_n = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{\eta^k} \eta^n s_{n-k}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier, K_n une suite d'entiers naturels et $q \in \left] \frac{1}{\sqrt{R}}, 1 \right[$. On considère

$$\xi_n \beta_n = -\frac{2\sqrt{\pi}n^{3/2}}{\eta^n} \beta_n = -\sum_{k=0}^n (2\sqrt{\pi}n^{3/2} s_{n-k}) \frac{a_k}{\eta^k}.$$

Tout d'abord, on a $h(\eta) = \sum_{k=0}^{K_n} \frac{a_k}{\eta^k} + \sum_{k=K_n+1}^{\infty} \frac{a_k}{\eta^k}$. Or, d'après le corollaire 3.2.1, il existe une constante $C_0 > 0$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left| \frac{a_k}{\eta^k} \right| \leq C_0 q^k$. On a alors :

$$\left| \sum_{k=K_n+1}^{\infty} \frac{a_k}{\eta^k} \right| \leq C_0 q^{K_n+1} \frac{1}{1-q}.$$

D'après le lemme 3.3.1, il existe une constante $C_1 > 0$ et une fonction r_1 bornée par C_1 sur \mathbb{N} , indépendantes de n et de $K \leq n$, telles que pour tout $k \leq K$,

$$s_{n-k} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}(n-k)^{3/2}} \left(1 + \frac{r_1(n-k)}{n-k} \right).$$

Donc :

$$-2\sqrt{\pi}n^{3/2} s_{n-k} = \left(\frac{n}{n-k} \right)^{3/2} \left(1 + \frac{r_1(n-k)}{n-k} \right).$$

En outre $k \leq K$ entraîne

$$1 \leq \left(\frac{n}{n-k} \right)^{3/2} \leq \left(\frac{1}{1 - \frac{K_n}{n}} \right)^{3/2}.$$

Donc,

$$1 - \frac{C_1}{n} \frac{1}{1 - \frac{K_n}{n}} \leq -2\sqrt{\pi}n^{3/2}s_{n-k} \leq \left(1 - \frac{K_n}{n}\right)^{-3/2} \left(1 + \frac{C_1}{n} \frac{1}{1 - \frac{K_n}{n}}\right)$$

donc il existe une constante $C_2 > 0$, indépendante des entiers n et K , et une fonction r_2 bornée par C_2 sur l'ensemble $\mathbb{N} \times \{k \in \mathbb{N} : k \leq K_n\}$, indépendante des entiers n et K , telles que $-2\sqrt{\pi}n^{3/2}s_{n-k} = 1 + r_2(n, k)\frac{K_n}{n}$, pour entier k tel que $k \leq K$.

On a alors :

$$\sum_{k=0}^{K_n} (-2\sqrt{\pi}n^{3/2}s_{n-k}) \frac{a_k}{\eta^k} = \sum_{k=0}^{K_n} \frac{a_k}{\eta^k} + \sum_{k=0}^{K_n} \frac{a_k}{\eta^k} r_2(n, k) \frac{K_n}{n},$$

le deuxième terme du second membre satisfaisant la majoration :

$$\left| \sum_{k=0}^{K_n} \frac{a_k}{\eta^k} r_2(n, k) \frac{K_n}{n} \right| \leq C_2 \frac{K_n}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{a_k}{\eta^k} \right|.$$

En outre $s_p \rightarrow 0$ donc il existe une constante $C_3 > 0$ telle que $|s_p| < C_3$ pour tout entier p . Alors

$$\left| \sum_{k=K_n+1}^{\infty} \frac{a_k}{\eta^k} 2\sqrt{\pi}n^{3/2}s_{n-k} \right| \leq C_3 2\sqrt{\pi}n^{3/2}q^{K_n+1} \frac{1}{1-q}.$$

Finalement

$$\begin{aligned} \left| \xi_n \beta_n - \sum_{k=0}^{K_n} \frac{a_k}{\eta^k} \right| &\leq C_2 \frac{K_n}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{a_k}{\eta^k} \right| + C_3 \frac{2\sqrt{\pi}q^{K_n+1}}{1-q} \\ &= O\left(\frac{K_n}{n}\right) + O(n^{3/2}q^{K_n}), \end{aligned}$$

ce qui entraîne :

$$\beta_n = -\frac{\eta^n h(\eta)}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}} \left(1 + O\left(\frac{K_n}{n}\right) + O(n^{3/2}q^{K_n})\right).$$

□

3.5 Calcul de $h(\eta)$

La fonction h vérifie, pour tout nombres complexe z tel que $|z| > R$:

$$h(z^2)^2 = \frac{\psi(z^2) - \lambda}{z^2 - \eta}.$$

Or au voisinage du point η , la fonction ψ vérifie $\psi(z) - \lambda = \psi'(\eta)(z - \eta) + O((z - \eta)^2)$, donc pour tout point z tel que z^2 est dans un voisinage du point η , on a $\frac{\psi(z^2) - \lambda}{z^2 - \eta} = \psi'(\eta) + O((z^2 - \eta)^2)$. Ainsi, la fonction $\frac{\psi(z^2) - \lambda}{z^2 - \eta}$ est définie sur des voisinages des points ω et $-\omega$ et atteint la valeur $\psi'(\eta) \neq 0$ en ces points.

Alors il existe un unique prolongement analytique de la fonction h aux voisinages des points ω et $-\omega$, il s'agit d'un choix de racine carrée $\sqrt{\frac{\psi(z^2) - \lambda}{z^2 - \eta}}$ au voisinage du nombre complexe $\psi'(\eta)$. Ce choix est déterminé par la relation, vraie pour tout nombre complexe z tel que $|z| > R$:

$$\sqrt{\frac{\psi(z^2) - \lambda}{z^2 - \eta}} = \frac{\psi(z)}{z\sqrt{1 - \frac{\eta}{z^2}}},$$

où la fonction $\sqrt{1 - \frac{\eta}{z^2}}$ est la racine carrée précédemment choisie de la fonction $1 - \frac{\eta}{z^2}$.

Pour conclure on utilise le fait que $\psi'(\eta) = 1/B'(\lambda)$. □

Chapitre 4

Ensembles de Julia infiniment renormalisables non localement connexes

Le but de ce chapitre est de rappeler quelques notions et résultats utilisés dans la suite. On rappelle qu'on note, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $f_\lambda(z) = z^2 + \lambda$.

4.1 Composantes hyperboliques, sillages, membres de l'ensemble de Mandelbrot et renormalisation

Les notions et résultats suivants, très utilisés par la suite, sont bien connus. On les retrouve dans [5], [6], [22], [14], [17] et ailleurs.

Théorème 4.1.1 ([6],XIV) *Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et soit X_m l'ensemble analytique suivant :*

$$X_m = \overline{\{(\lambda, z) \in \mathbb{C}^2 : f_\lambda^{\circ m}(z) = z, \forall k = 1, \dots, m-1, f_\lambda^{\circ k}(z) \neq z\}}.$$

La courbe algébrique X_m est lisse et la projection

$$\pi : (\lambda, z) \in X_m \mapsto \lambda$$

est un revêtement ramifié.

Par le théorème des fonctions implicites, l'ensemble des points de ramifications de l'application π est inclus dans l'ensemble des paramètres où le cycle est de multiplicateur 1.

Proposition 4.1.2 *L'application*

$$\rho_m : (\lambda, z) \in X_m \mapsto (f_\lambda^{\circ m})'(z)$$

est propre.

Ceci peut se voir directement grâce à la remarque 1.2.5 par exemple.

Définition 4.1.3 Une composante hyperbolique de l'ensemble de Mandelbrot est une composante connexe H de l'ensemble de Mandelbrot telle que pour tout paramètre $\lambda \in H$, le polynôme quadratique f_λ possède un cycle attractif.

Remarque 4.1.4 Sur une composante hyperbolique H , la période du cycle attractif est constante.

Étant donnée une composante hyperbolique H , on notera m_H la période des cycles attractifs des polynômes f_λ pour $\lambda \in H$ et $\text{mult}_H : H \rightarrow \mathbb{D}$ la fonction multiplicateur qui à un paramètre $\lambda \in H$ associe le multiplicateur du cycle attractif de f_λ .

Théorème 4.1.5 ([6], XIX) Les composantes hyperboliques de l'ensemble de Mandelbrot sont simplement connexes.

L'application $\text{mult}_H : H \rightarrow \mathbb{D}$ qui à un paramètre associe le multiplicateur du cycle attractif correspondant est un biholomorphisme entre la composante et le disque unité et cette application s'étend en un homéomorphisme entre \overline{H} et le disque unité fermé.

Plus précisément, le cycle peut être suivi jusqu'au bord de la composante sur lequel le multiplicateur est de module 1 et la fonction qui à un paramètre du bord de H associe le multiplicateur est un homéomorphisme entre les espaces topologiques ∂H et $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Définition 4.1.6 ([6], XIV) Soit H une composante hyperbolique. Le paramètre $\lambda \in \overline{H}$ tel que $\text{mult}_H(\lambda) = 1$ est appelé racine de la composante hyperbolique H .

Soit λ un paramètre du bord d'une composante hyperbolique H tel que le multiplicateur est une racine de l'unité $e^{2\pi\sqrt{-1}p/q}$ différente de 1 (on suppose p et q premiers entre eux). Il existe une composante hyperbolique H' sur laquelle les polynômes quadratiques possèdent un cycle attractif de période $m_{H'} = qm_H$, adjacente à la composante H en λ . Le cycle correspondant à un cycle attractif sur H' est de multiplicateur 1 en le paramètre de tangence λ et se confond à celui qui est attractif sur H en ce paramètre (cf. proposition 6.2.6).

On dira que la composante hyperbolique H' est attachée à la composante H en le point λ . On dit aussi que la composante H' est satellite de la composante H . La composante hyperbolique H sera qualifiée de composante mère de la composante hyperbolique H' .

Théorème 4.1.7 Soit H' une composante hyperbolique attachée à une composante hyperbolique H en un paramètre λ . Alors, il existe deux rayons externes dans l'espace de paramètres aboutissant au paramètre λ et séparant la composante H de la composante H' .

Définition 4.1.8 Soit H' une composante hyperbolique attachée à une composante hyperbolique H en un paramètre λ .

La composante connexe W' de l'espace des paramètres privé des deux rayons aboutissant en la racine de la composante hyperbolique H' et de leur point d'aboutissement commun, contenant la composante H' est appelée sillage de la composante hyperbolique H' .

La partie L' de l'ensemble de Mandelbrot contenue dans le sillage W' au quel on a ajouté le point de tangence à la composante H , est appelée membre attaché en H .

La racine de la composante hyperbolique H' est aussi appelée racine du membre L' .

Théorème 4.1.9 *Soit H' une composante hyperbolique attachée à une composante hyperbolique H en un paramètre λ .*

On peut suivre de façon holomorphe le cycle correspondant à la composante H' sur tout le sillage, c'est-à-dire qu'il existe $m_{H'}$ fonctions holomorphes $(b_i)_{i=0, \dots, m_{H'}-1}$ définies sur W' telles que, pour tout nombre complexe $\lambda \in W'$, $(b_0(\lambda), \dots, b_{m_{H'}-1}(\lambda))$ est un cycle périodique de f_λ de période exacte $m_{H'}$, attractif sur H' .

De plus ce cycle est répulsif en dehors de $\overline{H'}$.

Définition 4.1.10 *Le nombre p/q , correspondant au multiplicateur $e^{2\pi\sqrt{-1}p/q}$ du cycle parabolique en la racine d'une composante hyperbolique H' attaché en une composante hyperbolique H , est appelé nombre de rotation de H' (ou de W' , L') par rapport à H .*

Sauf mention contraire, on suppose qu'un nombre rationnel p/q représentant un nombre de rotation d'une composante hyperbolique est donné sous sa forme réduite, i.e. que les entiers p et q sont premiers entre eux et que $q > 0$.

Théorème 4.1.11 *Soit H une composante hyperbolique de l'ensemble de Mandelbrot satellite d'une autre composante hyperbolique de période m . On suppose que H a pour nombre de rotation de p/q . Soit W le sillage de la composante hyperbolique H . Soit, pour $\lambda \in W$, $\xi(\lambda) = (\xi_0(\lambda), \dots, \xi_{m-1}(\lambda))$ le cycle correspondant à la composante hyperbolique parente de H .*

Alors, il existe un cycle périodique $(\theta_0, \dots, \theta_{mq-1})$ de l'application de doublement $x \mapsto 2x \pmod{1}$ tel que pour tout $\lambda \in W$, chaque point du cycle $\xi(\lambda)$ est point d'atterrissage de q des rayons externes du plan dynamique de f_λ d'angles externes $2\sqrt{-1}\pi\theta_0, \dots, 2\sqrt{-1}\pi\theta_{mq-1}$.

Rappelons le lien entre composantes hyperboliques adjacentes et renormalisations.

Définition 4.1.12 *Soit f un polynôme quadratique et soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle (voir par exemple [21]) que le polynôme f^{on} est dit renormalisable s'il existe des disques topologiques ouverts U et V tels que U est relativement compact dans V , le point critique 0 appartient à U et l'application $f^{on} : U \rightarrow V$ est propre avec ensemble de Julia connexe.*

Lorsqu'il existe une suite infinie d'entiers $(n_k)_k$ pour lesquels f^{on_k} est renormalisable, le polynôme quadratique f est dit infiniment renormalisable.

Pour tout paramètre λ appartenant au sillage d'une composante hyperbolique adjacente à une autre composante hyperbolique de période m et de nombre de rotation p/q par rapport à cette composante (avec p et q premiers entre eux), le polynôme f_λ^{mq} est presque renormalisable dans le sens où il satisfait aux hypothèses de la définition 4.1.12 sauf celle de connexité de l'ensemble de Julia. On parle, dans ce cadre, de renormalisation satellite.

Tout paramètre λ , limite d'une suite de composantes hyperboliques adjacentes est donc infiniment renormalisable. Dans ce cas, on dira aussi, par abus, que l'ensemble de Julia du polynôme quadratique f_λ est infiniment renormalisable.

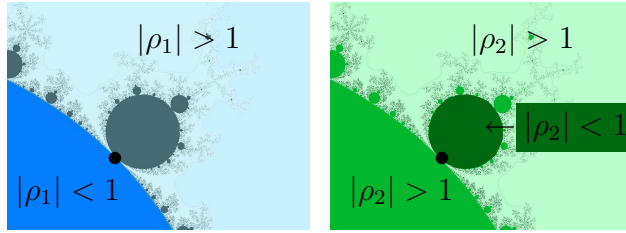


FIG. 4.1 – Exemple de deux composantes hyperboliques adjacentes dans l'ensemble de Mandelbrot

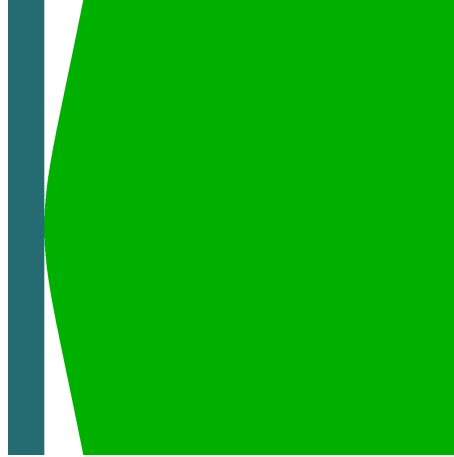


FIG. 4.2 – Exemple de domaine déterminé par l'inégalité ci-dessus dans le plan des logarithmes des multiplicateurs ($m = 3$) en vert à droite (les nombres complexes dont la partie réelle est négative sont en bleu sarcelle).

4.2 Inégalité de Pommerenke-Lévine-Yoccoz pour les bords du sillage

Soit H une composante hyperbolique de l'ensemble de Mandelbrot. On notera Cycle_H l'application holomorphe qui à un paramètre $\lambda \in H$, associe les points du cycle attractif du polynôme $f_\lambda(z) = z^2 + \lambda$. Ces applications se prolongent holomorphiquement sur un voisinage de l'ensemble $\overline{W} \setminus \{\lambda_H\}$, où W est le sillage de la composante hyperbolique H et λ_H sa racine.

On considérera que l'application Cycle_H est définie holomorphe sur un tel voisinage et dont l'intersection avec l'ensemble de Mandelbrot est réduite au membre attaché en λ_H privé de sa racine.

Lemme 4.2.1 (Inégalité de Pommerenke-Lévine-Yoccoz) *Soit H une composante hy-*

perbolique de période m de l'ensemble de Mandelbrot. Alors, l'ensemble Ω défini par :

$$\Omega = \left\{ \rho \in \mathbb{C} : \exists L \in \mathbb{C}, \rho = e^L \text{ et } \arctan \left(\frac{\pi}{2^m - 1} \frac{1}{\Re L} \right) \frac{|L|^2}{\Re L} \leq 2\pi m \log 2 \right\}$$

contient les images des rayons externes délimitant le sillage de la composante hyperbolique H par l'application $\text{mult}_H : W \rightarrow \mathbb{C}$ donnant le multiplicateur du cycle associé au sillage W de la composante hyperbolique H .

Dém. Le cycle $b(\lambda)$, qui est attractif pour les paramètres de la composante hyperbolique H , dépend holomorphiquement du paramètre sur tout le sillage. Sur les rayons externes de l'espace des paramètres délimitant le sillage W , l'application correspondant au cycle $b(\lambda)$ admet un prolongement continu, puisque sur les rayons externes en question se trouvent à l'extérieur de l'ensemble de Mandelbrot et donc tous les cycles sont de multiplicateur différent de 1 ce qui permet de les suivre localement. En particulier la fonction multiplicateur mult_H est continue sur \overline{W} et au voisinage de $\overline{W} \setminus \{\lambda_H\}$, où λ_H est la racine de W .

On sait grâce au lemme 4.2.2 ci-dessous qu'en dehors du sillage et au voisinage de celui-ci le nombre de rotation est nul.

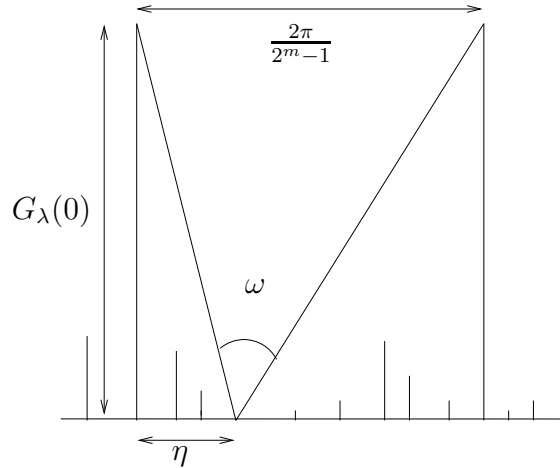


FIG. 4.3 – Illustration de la démonstration du lemme 4.2.1 (après rotation d'un quart de tour)

En appliquant le théorème 7 de [32], qui fonctionne tel quel pour un nombre de rotation nul, on obtient :

$$\frac{|\log \rho|^2}{\log |\rho|} \leq 2\pi \log 2 \frac{m}{\omega},$$

où $\log \rho$ est une détermination du logarithme du multiplicateur mult_H , et ω est un angle. L'angle ω est défini comme suit (cf. figure 4.2).

On considère le domaine défini dans la remarque 1.2.1, sur lequel on peut définir une application holomorphe prolongeant l'inverse de l'application de Böttcher B_λ où λ est un paramètre du sillage W tel que $mult_H(\lambda) = \rho$. La préimage Δ de cet ouvert par l'application exponentielle consiste en le complémentaire du demi-plan fermé de droite $\{\Re e \leq 0\}$ et d'une famille de segments horizontaux attachés en la droite verticale $\{\Re e = 0\}$ et de longueur de la forme $G_\lambda(0)/2^n$ ($n \in \mathbb{N}$).

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, le nombre de segments de longueur $G_\lambda(0)/2^n$ est égal au nombre de préimages du nombre complexe $e^{i\theta}$ par l'application $z \mapsto z^{2^{n+1}}$, où θ est l'angle de celui des deux rayons délimitant le sillage W , qui atterrit sur la valeur critique en le paramètre λ considéré. En particulier, il y a exactement deux segments de longueur $G_\lambda(0)$.

Soit $2\pi\sqrt{-1}\theta/2 \pm \eta\sqrt{-1}$ le point d'atterrissage dans ce plan (intersection d'une droite horizontale avec la droite verticale $\{\Re e = 0\}$), le plus proche du point d'attachement du segment d'extrémité $G_\lambda(0) + 2\pi\sqrt{-1}\theta/2$ (ce point est tel que son image par un prolongement continu de $B_\lambda^{-1} \circ \exp$ est le point critique 0), parmi tous les points d'atterrissage de rayons atterrissant sur le cycle $b(\lambda)$.

L'angle ω est l'angle d'ouverture ($< \pi$) du secteur issu du point $2\pi\sqrt{-1}\theta/2 \pm \eta\sqrt{-1}$ et dont les bord passent par les points $2\pi\sqrt{-1}\theta/2 + G_\lambda(0)$ et $2\pi\sqrt{-1}\theta/2 + G_\lambda(0) \pm \frac{2\pi\sqrt{-1}}{2^m-1}$. (L'important est que ce secteur se trouve dans le domaine de définition de B_λ^{-1} et qu'il soit issu du point $2\pi\sqrt{-1}\theta/2 \pm \eta\sqrt{-1}$).

Les points d'atterrissage, dans le plan des logarithmes des coordonnées de Böttcher, du cycle de rayons atterrissant sur le cycle $b(\lambda)$ sont espacés d'au moins $\frac{2\pi\sqrt{-1}}{2^m-1}$ car ils sont de période m . Ceci entraîne qu'en dehors du point $2\pi\sqrt{-1}\theta/2 \pm \eta\sqrt{-1}$, l'intervalle vertical $\left[2\pi\sqrt{-1}\theta/2, 2\pi\sqrt{-1}\theta/2 \pm \frac{2\pi\sqrt{-1}}{2^m-1}\right]$ ne contient aucun autre de ces points. Par conséquent, du fait de la minimalité de η , les segments ouverts $]2\pi\sqrt{-1}\theta/2 \pm \eta\sqrt{-1}, 2\pi\sqrt{-1}\theta/2 + G_\lambda(0)[$ et $]2\pi\sqrt{-1}\theta/2 \pm \eta\sqrt{-1}, 2\pi\sqrt{-1}\theta/2 + G_\lambda(0) \pm \frac{2\pi\sqrt{-1}}{2^m-1}[$ n'intersectent pas le complémentaire du domaine Δ et le secteur que ces segments délimitent est inclus dans le domaine Δ .

Alors on a :

$$\begin{aligned} \omega &= \arctan\left(\frac{\eta}{G_\lambda(0)}\right) + \arctan\left(\left(\frac{2\pi}{2^m-1} - \eta\right) \frac{1}{G_\lambda(0)}\right) \\ &\geq \arctan\left(\frac{\pi}{2^m-1} \frac{1}{G_\lambda(0)}\right). \end{aligned}$$

On se sert alors du lemme 1.2.3. □

Lemme 4.2.2 *Soit H une composante hyperbolique de l'ensemble de Mandelbrot satellite d'une autre composante. Soit W le sillage de la composante hyperbolique H et λ_H sa racine.*

Alors il existe un voisinage V de $\overline{W} \setminus \{\lambda_H\}$ dans le complémentaire de l'ensemble de Mandelbrot privé du membre attaché en λ_H , tel que l'application Cycle_H est définie sur V et pour tout $\lambda \in V \setminus \overline{W}$ les rayons externes dynamiques d'angles externes les itérés des angles externes du bord du sillage W atterrit sur le cycle $\text{Cycle}_H(\lambda)$.

Dém. Comme le cycle Cycle_H est répulsif sur le bord de W (en dehors de la racine), il existe un voisinage ouvert V de $\partial W \setminus \{\lambda_H\}$ sur lequel on peut prolonger la fonction holomorphe $\lambda \mapsto \text{Cycle}_H(\lambda)$. On suppose en outre que l'ouvert V n'intersecte pas l'ensemble de Mandelbrot. On doit démontrer que la propriété sur les rayons externes est vérifiée.

Soit θ le cycle d'angles externes correspondant aux angles externes de l'espaces des paramètres bordant le sillage de H .

Le cycle d'angles externes θ atterrit sur un cycle périodique $C(\lambda)$ de f_λ pour tout $\lambda \in V' = V \setminus \overline{W}$. Dans cet ensemble V' , le cycle $C(\lambda)$ est répulsif et peut donc être suivi localement holomorphiquement. Quitte à restreindre V , on peut supposer V et V' simplement connexes. L'application $\lambda \mapsto C(\lambda)$ est alors définie holomorphe sur V' . Les rayons externes d'angles appartenant au cycle θ atterrissent sur le cycle $C(\lambda)$ pour tout $\lambda \in V'$.

On sait qu'en la racine λ_H , ces rayons atterrissent sur le cycle parabolique limite de $\text{Cycle}_H(\lambda)$ quand $\lambda \rightarrow \lambda_H$. Si la fonction $\lambda \mapsto C(\lambda)$ ne tend pas vers $\text{Cycle}_H(\lambda)$ quand $\lambda \rightarrow \lambda_H$, alors on peut la prolonger holomorphiquement au voisinage de λ_H et $C(\lambda_H)$ est un cycle périodique répulsif du polynôme f_λ .

Comme $\lambda_H \in \mathcal{M}$, il existe un cycle de rayons externes périodiques qui atterrit sur les points du cycle $C(\lambda_H)$.

Or, par continuité, ce cycle de rayons externes doit encore atterrit sur $C(\lambda)$ pour λ assez proche de λ_H . Il ne peut y avoir deux cycles de rayons externes distincts atterrissant sur un cycle périodique d'un polynôme. Ainsi $C(\lambda_H)$ est le cycle parabolique de f_{λ_H} .

Enfin, si H est une composante satellite d'une autre composante H' , le cycle $C(\lambda)$ ne peut être le cycle $\text{Cycle}_{H'}$ associé à la composante parente. En effet le cycle de rayons externes d'angles θ n'atterrit pas sur $\text{Cycle}_{H'}$ sur un voisinage de W à l'extérieur du sillage W . On a montré que $C = \text{Cycle}_H$. \square

4.3 Ensembles de Julia non localement connexes

Définition 4.3.1 *Soit X un espace topologique séparé.*

On dit que l'espace topologique X est localement connexe si tout point de X admet une base de voisinages connexes.

Cette définition est équivalente (cf. [23]) au fait que tout point de l'ensemble X admette une base de voisinages connexes et ouverts.

Un ensemble de Julia sera donc dit localement connexe s'il vérifie, en tant qu'espace topologique compact, la propriété de la définition ci-dessus et non localement connexe s'il la met en défaut. Par exemple, c'est le cas pour les polynômes quadratiques dont l'ensemble de Julia n'est pas connexe, puisque dans ce cas là, l'ensemble de Julia en question est homéomorphe à l'ensemble de Cantor.

Dans le cas d'un polynôme quadratique ayant un ensemble de Julia connexe, la non locale connexité requiert, d'après un théorème de Jean-Christophe Yoccoz, que le polynôme en question soit infiniment renormalisable ou ait un cycle irrationnellement indifférent. Une

construction décrite dans l'article de Dan Erik Krarup Sørensen [37], basée sur des idées d'Adrien Douady, donne des exemples d'ensembles de Julia non localement connexe de polynômes quadratiques infiniment satellite renormalisables.

Dans cet article, la démonstration que de tels ensembles de Julia quadratiques existent est faite par un argument de continuité. John Milnor a proposé de façon empirique un critère explicite concernant la suite des nombres de rotation, sous lequel l'ensemble de Julia du paramètre infiniment satellite renormalisable correspondant, doit être non localement connexe. Ce critère est finalement correct mais plus exigeant que de nécessaire.

La première condition explicite démontrée pour qu'un tel paramètre ait un ensemble de Julia non localement connexe a été donné par Guénadi Lévine. Ses travaux font l'objet des deux chapitres suivants.

4.4 Critère de Douady-Sullivan

Le critère de Douady-Sullivan est une alternative permettant de montrer que certains ensembles de Julia ne sont pas localement connexes. Il est utilisé dans de nombreux exemples si bien qu'on puisse conjecturer qu'il est applicable à tous les cas d'ensembles de Julia non localement connexes de fractions rationnelles ayant un ensemble de Julia connexe (voir [34]).

Lemme 4.4.1 (Voir [23], démonstration du lemme 18.8) *Soit (X, d) un espace métrique compact, $h : X \rightarrow h(X) \subset X$ un homéomorphisme de l'espace X sur $h(X)$ tel que $\exists \varepsilon > 0, \exists k > 1, \forall (x, y) \in X \times X, d(x, y) \leq \varepsilon \Rightarrow d(h(x), h(y)) \geq kd(x, y)$.*

Alors l'ensemble X est fini.

Dém. L'application $h^{-1} : h(X) \rightarrow X$ est uniformément continue, il existe donc $\delta > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in X \times X, d(h(x), h(y)) \leq \delta \Rightarrow d(x, y) \leq \varepsilon$.

En particulier, pour tout $s \leq \delta$, on a $d(h(x), h(y)) \leq s \Rightarrow d(x, y) \leq \frac{s}{k}$ et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}, d(h^{on}(x), h^{on}(y)) \leq \delta \Rightarrow d(x, y) \leq \frac{\delta}{k^n}$.

Comme X est compact, il existe un recouvrement fini $X = \bigcup_{i=1}^N U_i$, où U_i sont des ouverts de diamètre majoré par δ . On a $X \subset h^{-n} \left(\bigcup_{i=1}^N U_i \right) = \bigcup_{i=1}^N h^{-n}(U_i)$ et $diam(h^{-n}(U_i)) \leq \frac{\delta}{k^n}$ pour tout n .

Soit x_1, \dots, x_N, x_{N+1} des points de l'ensemble X , alors il existe au moins deux indices distincts i_1 et i_2 tels que $x_{i_1} = x_{i_2}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{\delta}{k^n} < \min\{d(x_i, x_j), x_i \neq x_j\}$. Puisque pour tout indice $i \in \{1, \dots, N+1\}, x_i \in \bigcup_{j=1}^N h^{-n}(U_j)$, il existe des indices j, i_1 et i_2 tels que $i_1 \neq i_2$ et $\{x_{i_1}, x_{i_2}\} \subset h^{-n}(U_j)$. Or $diam(h^{-n}(U_j)) \leq \frac{\delta}{k^n}$, donc $x_{i_1} = x_{i_2}$.

Par conséquent l'ensemble X a au plus N éléments. Ainsi l'espace X est compact discret donc fini. \square

Proposition 4.4.2 (Critère de Douady-Sullivan, cf. [33]) *Soit f un polynôme. Soit C un compact inclus dans l'ensemble de Julia du polynôme f et soit B le bassin de l'infini. On suppose que le compact C ne rencontre pas les points critiques de f et est tel que $f|_C$ est une bijection de C . On suppose en outre que le bassin immédiat B ne contient pas d'autre point critique que l'infini.*

Alors, ou bien l'ensemble de Julia du polynôme f n'est pas localement connexe, ou bien C est une union finie de points périodiques paraboliques ou répulsifs du polynôme f .

Dém. Cette démonstration reprend essentiellement celle donnée dans [34] p.42.

Comme f est un polynôme et que l'on suppose que le bassin de l'infini B ne contient pas de point critique fini, celui-ci est simplement connexe.

Supposons que ∂B est localement connexe. Soit d le degré de la restriction $f|_B$. Soit $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow B$ l'application de conjugaison de Böttcher définie de façon unique par le diagramme

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & B \\ \varphi \uparrow & & \uparrow \varphi \\ \mathbb{D} & \xrightarrow{z^d} & \mathbb{D} \end{array}$$

et par le fait que sa dérivée en 0 soit 1 ($\varphi(0) = \infty$).

Alors φ s'étend continûment jusqu'au bord (théorème de Carathéodory, voir par exemple [23], theorem 17.14) et tous les rayons

$$(R(\theta))_{\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}} = \left(\left\{ \varphi(re^{2\pi\sqrt{-1}\theta}), r \in [0, 1[\right\} \right)_\theta$$

aboutissent. Soit $\gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \partial B$ l'application qui à un angle θ associe l'aboutissement du rayon correspondant $R(\theta)$. Soit $K := \{\theta \text{ tel que le rayon } R(\theta) \text{ d'angle } \theta \text{ aboutit dans } C\}$. L'ensemble K est compact car l'application γ est continue, par le théorème de Carathéodory, et l'ensemble C est fermé.

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ on a $f(\gamma(\theta)) = \gamma(d\theta)$. Si on suppose qu'il existe des angles θ et θ' , éléments de l'ensemble K , tels que $d\theta = d\theta'$ alors $f(\gamma(\theta)) = \gamma(d\theta) = \gamma(d\theta') = f(\gamma(\theta'))$. L'application f est injective sur C donc $\gamma(\theta) = \gamma(\theta')$. Si $\theta \neq \theta'$, les images des rayons $R(\theta)$ et $R(\theta')$ par l'application f sont deux rayons distincts, car C ne contient pas de point critique. Or $f(R(\theta)) = R(d\theta)$ et $f(R(\theta')) = R(d\theta')$, donc $d\theta \neq d\theta'$. On en déduit que l'identité $d\theta = d\theta'$ implique l'identité $\theta = \theta'$, en conséquence de quoi l'application $\theta \mapsto d\theta \pmod{1}$ est injective sur K .

L'image du compact K par cette application est un sous-ensemble compact de K . Son injectivité nous permet d'appliquer le lemme 4.4.1 et de conclure que l'ensemble C est fini (car la préimage d'un singleton par l'application γ est finie). L'ensemble C est donc constitué de points périodiques de l'application f non attractifs (car éléments de l'ensemble de Julia du polynôme f).

Par invariance et injectivité, les éléments de l'ensemble C sont des points périodiques de l'application f . Comme C est fini et invariant par f , étant donné un point $x \in C$ il existe un

angle θ et un itéré $f^{\circ n}$ de l'application f tels que le rayon externe $R(\theta)$ aboutit en le point x et tel que $f^{\circ n}(R(\theta)) = R(\theta)$. En outre $(f^{\circ n})'(x) \neq 0$.

On peut alors appliquer le lemme de l'escargot ("snail lemma", voir [23] lemma 16.2) à la branche inverse locale de l'application holomorphe $f^{\circ n}$ qui envoie le point x sur lui-même, munie du rayon externe $R(\theta)$. \square

Chapitre 5

Inégalité de Lévine sur la position des valeurs critiques de la fonction multiplicateur

Le but de ce chapitre est de donner une démonstration utilisant les différentielles quadratiques, d'une généralisation d'une généralisation d'une inégalité de Guénadi Lévine ([19] Theorem 3) qui permet d'obtenir un domaine sur lequel on n'a pas de valeur critiques pour l'application multiplicateur mult. Dans ses articles, Guénadi Lévine se sert ensuite de cette inégalité d'utiliser une extension de la fonction inverse mult⁻¹ sur un domaine explicite afin de contrôler l'explosion des cycles lors des bifurcations satellites.

Théorème 5.3.1 *Soit $d \in \mathbb{N}$ tel que $d \geq 2$ et soit $C \geq 2$, il existe des constantes $M > 1$, $K_0 > 0$ et $K_1 > 0$ qui ne dépendent que de C telles que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| \leq C$ et tel que le polynôme $z^d + \lambda$ possède un cycle répulsif de période m de multiplicateur ρ (dépendant de λ), on a*

$$m |\rho - 1| \leq K_0 M^m \left(\log |\rho| + K_1 \left| \frac{\dot{\rho}}{\rho} \right| \right), \quad (5.1)$$

où $\dot{\rho}$ désigne la dérivée de la fonction multiplicateur ρ par rapport au paramètre λ .

5.1 Préliminaires sur les formes et différentielles quadratiques

$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ désigne la sphère de Riemann vue comme variété complexe sans point distingué. Par contre, $\widehat{\mathbb{C}}$ désigne le compactifié de \mathbb{C} , $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, isomorphe (de façon non unique) à la sphère de Riemann pointée en ∞ .

5.1.1 Résidu d'une 1-forme méromorphe

Soit U un ouvert de \mathbb{C} , $m \in U$ et $f : U \setminus \{m\} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holmorphe.

On note $\int_{(m+)} f(z)dz$ l'unique valeur de l'intégrale de la fonction f le long de chemins d'indice 1 par rapport au point m et homotopes à un point dans $U \cup \{m\}$ (c'est le cas de tout chemin dans un voisinage assez petit du point m).

En d'autres termes, $\int_{(m+)} f(z)dz$ est l'intégrale de la 1-forme $f(z)dz$ sur n'importe quel chemin de la classe d'homotopie d'un petit cercle (de rayon assez petit) parcouru une fois en sens direct et centré en m .

Étant donnés une surface de Riemann S , m un point de S et α une 1-forme méromorphe α définie sur $S \setminus \{m\}$, on note $Rés(\alpha, m)$ le résidu de la 1-forme α en m . On notera aussi :

$$Rés(\alpha, m) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{(m+)} \alpha.$$

Dans le cas où la surface de Riemann S est $\widehat{\mathbb{C}}$ et la forme considérée s'écrit $f(z)dz$ dans la carte \mathbb{C} , on utilise la notation

$$\int_{(\infty,+)} f(z)dz := \int_{(0,+)} -\frac{f(1/z)}{z^2} dz.$$

5.1.2 Images directes de 1-formes

Les formes sont des objets pour lesquels tirer en arrière est une opération naturelle. On sera néanmoins amené à pousser en avant des formes. La définition suivante, bien qu'elle ne le nécessite pas, sera toujours utilisée avec des fonctions f propres.

Définition 5.1.1 Soit U et V des surfaces de Riemann, α une 1-forme méromorphe sur U , $f : U \rightarrow V$ une application holomorphe. La 1-forme image directe (ou poussée en avant) $f_*\alpha$ de la 1-forme α par l'application holomorphe f est la 1-forme méromorphe définie par : $\forall(m, \xi) \in TU$ (c'est-à-dire $m \in U$ et $\xi \in T_mU$),

$$f_*\alpha(m; \xi) = \sum_{w:f(w)=m} \alpha(w; df(w)^{-1}\xi). \quad (5.2)$$

Si U est un ouvert de \mathbb{C} et $\alpha = g(z)dz$, la formule (5.2) s'écrit :

$$f_*\alpha(z; \xi) = \sum_{w:f(w)=z} \frac{g(w)}{f'(w)} dz(z; \xi),$$

où $dz(z; \xi) = \xi$.

Remarque 5.1.2 Lorsque la fonction f est propre, la poussée en avant d'une 1-forme est méromorphe et ses poles éventuels sont situés en les valeurs critiques de la fonction f .

On rappelle que si f est une fonction holomorphe définie sur un ouvert de \mathbb{C} , s'écrivant au voisinage d'un point critique c , $f(z) = v + a(z - c)^d + O((z - c)^{d+1})$, alors il existe un voisinage U de c inclus dans le domaine de définition de f et une application holomorphe univalente φ définie sur U telle que $\forall z \in \varphi(U)$, $f \circ \varphi^{-1}(z) = v + z^d$.

On utilise le lemme suivant pour pouvoir faire le calcul de résidu de la proposition 5.1.4 ci-dessous.

Lemme 5.1.3 *Soit U et V des ouverts de \mathbb{C} , $f : U \rightarrow V$ une fonction holomorphe, $c \in U$ un point critique de la fonction f et $v = f(c)$ la valeur critique correspondante. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow V$ un chemin continu faisant un tour dans le sens direct autour de v .*

Alors il existe une famille $(\gamma_i)_{i \in \mathbb{Z}_d}$ de chemins continus lisses (paramétrés par $[0, 1]$) tels que

- $\forall i \in \mathbb{Z}_d$, $\gamma_i(1) = \gamma_{i+1}(0)$,
- le chemin composé $\tilde{\gamma} = \gamma_0 \cdots \gamma_{d-1}$ est une courbe de Jordan faisant un tour dans le sens direct autour du point c ,
- il existe un paramétrage continu $\delta : [0, 1] \rightarrow U$ d'une courbe de Jordan lisse homotope au chemin γ telle que, $\forall t \in [0, 1]$, $\forall i \in \mathbb{Z}_d$, $\delta(t) = f(\gamma_i(t))$.

Dém. Il suffit de construire les chemins γ_i dans le cas où $f(z) = v + z^d$. En effet, il existe un biholomorphisme φ défini sur un voisinage de c tel que $f \circ \varphi^{-1}(z) = v + z^d$. Si γ'_i désigne les chemins correspondants pour $f \circ \varphi^{-1}(z)$, on voit facilement que les chemins $\gamma_i := \varphi^{-1} \circ \gamma'_i$ satisfont aux conclusions.

Soit donc $f(z) = v + z^d$. Soit D un disque centré en v . Quitte remplacer le chemin γ par un chemin homotope, on peut considérer que c'est un cercle centré en v inclus dans le disque D . Soit Δ la demie-droite issue du point v passant par le point $\gamma(0)$ (la demi-droite Δ n'intersecte le chemin γ qu'en ce point l).

Alors il existe une branche de la racine d ième $\sqrt[d]{z - v}$ définie holomorphe sur $D \setminus \Delta$. Les fonctions holomorphes g_i définies, pour $i \in \mathbb{Z}_d$, sur $D \setminus \Delta$ par $g_i(z) = e^{2\pi\sqrt{-1}i/d} \sqrt[d]{z - v}$ satisfont :

$$\lim_{\arg(z) \rightarrow \arg(\gamma(1))^+} g_i(z) = \lim_{\arg(z) \rightarrow \arg(\gamma(1))^-} g_{i+1}(z).$$

On vérifie alors que les prolongements continus γ_i (pour $t \rightarrow 0$ et $t \rightarrow 1$) des chemins $g_i \circ \gamma$ satisfont les propriétés recherchées. \square

Proposition 5.1.4 *Soit U un ouvert de \mathbb{C} , $\alpha = g(z)dz$ une 1-forme méromorphe sur U , f une fonction holomorphe définie sur U .*

Soit c un point critique de la fonction f et $v = f(c)$ la valeur critique correspondante. On suppose que le point c est le seul point critique qui s'envoie sur v et que la fonction g est holomorphe sur $U \setminus \{c\}$.

Enfin on suppose que pour tout lacet continu γ suffisamment proche du point v , ne passant pas par ce point, $f^{-1}(\gamma)$ est une réunion de lacets continus.

Alors

$$\text{Rés}(f_*\alpha, v) = \text{Rés}(\alpha, c).$$

Remarque 5.1.5 *L'hypothèse sur les préimages lacets suffisamment voisins de la valeur critique est toujours vérifiée dans le cas où l'application f est un revêtement ramifié de degré fini.*

Dém. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow V$ un chemin continu faisant un tour dans le sens direct autour de v . Soit d le degré local de l'application holomorphe f au voisinage de c

D'après le lemme 5.1.3, il existe une famille de chemins continus $(\gamma_i)_{i \in \mathbb{Z}_d}$ paramétrés par $[0, 1]$, se joignant en un lacet faisant un tour direct autour de c et relevant le chemin γ dans le sens où pour tout indice $i \in \mathbb{Z}_d$, $f \circ \gamma_i$ est une courbe de Jordan lisse homotope au chemin γ . En outre pour tout $t \in [0, 1]$ et tout couple d'indices (i, j) , on a $f \circ \gamma_i(t) = f \circ \gamma_j(t)$.

Alors

$$\begin{aligned} f_*\alpha(\gamma(t); \gamma'(t)) &= \sum_{w: f(w)=\gamma(t)} \frac{g(w)}{f'(w)} \gamma'(t) \\ &= \sum_{i=0}^{d-1} \frac{g(\gamma_i(t))}{f'(\gamma_i(t))} \gamma'(t) + h(t), \end{aligned}$$

avec $\int_{[0,1]} h(t)dt = 0$ (grâce aux hypothèses sur la fonction g et sur les primages du chemin γ par l'application f). Or $\gamma'_i(t) = \frac{\gamma'(t)}{f'(\gamma_i(t))}$, donc

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} f_*\alpha(\gamma(t); \gamma'(t))dt &= \sum_{i=0}^{d-1} \int_{[0,1]} g(\gamma_i(t))\gamma'_i(t)dt \\ &= \int_{(c^+)} g(z)dz \end{aligned}$$

d'après la propriété de recollement des chemins γ_i . □

5.1.3 Différentielles quadratiques

On rappelle ([15], p.207) qu'une différentielle quadratique holomorphe sur une surface de Riemann S est une section du carré tensoriel du faisceau des 1-formes holomorphes sur S . Dans une carte M , une différentielle quadratique holomorphe sur une surface de Riemann peut donc s'écrire $q = q_M dz^2$ avec q_M une fonction définie et holomorphe sur l'image de la carte. Étant donné qu'il n'existe pas de différentielle quadratique holomorphe non nulle sur la sphère de Riemann, on sera amené à considérer des différentielles quadratiques méromorphes, définies comme suit.

Définition 5.1.6 Une différentielle quadratique méromorphe q sur une surface de Riemann S est la donnée d'un ensemble $P \subset S$ discret (l'ensemble des pôles) et d'une différentielle quadratique q holomorphe sur $S \setminus P$ tels que pour tout $p \in P$, il existe un voisinage U de p dans S tel que $P \cap U = \{p\}$ et une carte $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{C}$ telle que $\varphi_*q = q_\varphi dz^2$ sur $V \setminus \{\varphi(p)\}$ et q_φ se prolonge en une fonction méromorphe sur V .

On vérifie aisément que si l'on choisit une autre carte ψ au voisinage du point p , la fonction q_ψ représentant q dans cette carte admet un pôle du même ordre que celui de q_φ . On peut alors parler de pôles et d'ordres correspondant à ces pôles pour une différentielle quadratique méromorphe donnée.

Étant donné une surface de Riemann S et une différentielle quadratique méromorphe q définie sur S et un pôle ξ de q d'ordre pair p , on peut définir le résidu de q en ξ . Pour cela, on considère une carte φ au voisinage de ξ qui envoie ξ en 0 et on note q_0 la fonction méromorphe définie au voisinage de 0 représentant q dans cette carte (c'est-à-dire $\varphi_*q = q_0 dz^2$ au voisinage de 0). Elle a donc un pôle d'ordre p en 0.

Lemme 5.1.7 Soit U un ouvert de \mathbb{C} tel que $0 \in U$, f une fonction holomorphe sur U ne s'annulant qu'en 0. Si

$$\frac{1}{2} \int_{(0,+)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \in 2\sqrt{-1}\pi\mathbb{Z},$$

alors, il existe une fonction holomorphe g définie sur U , ne s'annulant qu'en 0 telle que $g^2 = f$. De plus, si h est une fonction holomorphe sur U , telle que $h^2 = f$, alors $h = g$ ou $h = -g$.

Dém. Il s'agit d'un argument standard. La partie unicité du lemme provient de l'unicité relative d'un relèvement par un revêtement. \square

La fonction $1/q_0$ vérifie les hypothèses du lemme précédent pour un certain (assez petit) voisinage de 0. Il existe donc une fonction méromorphe $\sqrt{q_0}$ définie au voisinage de 0 telle que $(\sqrt{q_0} dz)^2 = q_0 dz^2$. On pose alors

$$\text{Rés}(q, \xi) = (\text{Rés}(\sqrt{q_0} dz, 0))^2. \quad (5.3)$$

On voit que cette quantité ne dépend ni du choix de racine carrée, ni de la carte (car c'est le cas pour le résidu d'une 1-forme méromorphe et par unicité du couple de racines carrées). C'est ce qu'on appellera le résidu de la différentielle quadratique q en ξ .

À l'image de ce qui se fait dans les travaux d'Adam Epstein ([10], [11]), on devra considérer les parties polaires de différentielles quadratiques définies sur la surface de Riemann S , et plus généralement les parties polaires de sections méromorphes de fibrés holomorphes sur S .

Définition 5.1.8 Soit α et β des sections méromorphes d'un même fibré holomorphe \mathcal{F} de fibres de dimension 1 au dessus de $\widehat{\mathbb{C}}$ et \mathbb{C} une carte fixée de $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$ qui est aussi une

trivialisation du fibré \mathcal{F} . Soit $\xi \in \mathbb{C}$ et soit α_0 et β_0 les fonctions méromorphes sur \mathbb{C} représentant respectives les sections α et β dans la carte \mathbb{C} .

On dit que les sections α et β ont même partie polaire au point ξ si la section $\alpha - \beta$ est holomorphe au voisinage du point ξ .

Cette définition s'applique aussi bien aux différentielles quadratiques méromorphes qu'aux champs de vecteurs méromorphes sur $\widehat{\mathbb{C}}$.

Une partie polaire s'identifie localement aux termes négatifs du développement en série de Laurent centré au point ξ de la fonction méromorphe représentant la section α dans une carte au voisinage de ξ . Les coefficients de ce développement dépendent néanmoins de la carte utilisée.

On notera $PP_{\mathcal{F}}(\alpha, \xi)$ la partie polaire de la section méromorphe α du fibré \mathcal{F} au point ξ . Lorsque α est une différentielle quadratique (ou lorsqu'il n'y a pas de confusion possible) on la notera $PP_{\xi}(\alpha)$.

5.1.4 Différentielles quadratiques avec parties polaires prescrites

On suppose maintenant que la surface S est la sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$.

Pour des raisons de cohomologie, une différentielle quadratique que $\widehat{\mathbb{C}}$ possède au moins quatre pôles, ces pôles étant comptés avec multiplicités.

On va voir qu'on peut prescrire les parties polaires d'une différentielle quadratique sur la sphère de Riemann en un nombre fini de points choisis arbitrairement, pour peu que l'on choisisse suffisamment de points additionnels où mettre où des parties polaires nécessaires au rééquilibrage.

Proposition 5.1.9 *Soit E et F des sous-ensembles finis disjoints non vides de $\widehat{\mathbb{C}}$. Soit $(n_y)_{y \in F}$ des entiers strictement positifs tels que $\sum_{y \in F} n_y = 3$.*

Soit $(p_x)_{x \in E}$ une famille arbitraire de parties polaires.

Alors il existe une unique différentielle quadratique méromorphe sur $\widehat{\mathbb{C}}$ dont l'ensemble des pôles est inclus dans $E \cup F$ ayant pour parties polaires p_x en les points $x \in E$ et ayant des pôles d'ordre au plus n_y en les points $y \in F$.

Dém. On choisit une carte \mathbb{C} de $\widehat{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ telle que $(E \cup F) \cap \{0, \infty\} = \emptyset$. Il s'agit de trouver une différentielle quadratique q dont l'expression dans \mathbb{C} est :

$$q_0(z)dz^2 = \sum_{x \in E} P_x(z)dz^2 + \sum_{y \in F} Q_y(z)dz^2 + \varphi(z)dz^2,$$

où P_x désigne le développement en série (finie) de Laurent centré en x et débutant à l'ordre -1 , représentant la partie polaire p_x dans la carte \mathbb{C} , Q_y un développement en série de Laurent centré en y débutant à l'ordre -1 et se terminant (au plus) à l'ordre $-n_y$ ($Q_y = 0$ si $n_y = 0$) et φ est une fonction entière.

On définit les familles de constantes complexes $\alpha_x, \beta_x, \gamma_x$ et a_y, b_y, c_y de sorte qu'on ait

$$\begin{aligned} P_x(z) &= \frac{\alpha_x}{z-x} + \frac{\beta_x}{(z-x)^2} + \frac{\gamma_x}{(z-x)^3} + O\left(\frac{1}{(z-x)^4}\right), \\ Q_x(z) &= \frac{a_y}{z-y} + \frac{b_y}{(z-y)^2} + \frac{c_y}{(z-y)^3}. \end{aligned}$$

Lorsqu'on fait le changement de carte $z \mapsto 1/z$, on obtient :

$$\psi(z)dz^2 = \frac{1}{z^4} \left(\sum_{x \in E} P_x(1/z)dz^2 + \sum_{y \in F} Q_y(1/z)dz^2 + \varphi(1/z)dz^2, \right)$$

où ψ est une fonction holomorphe au voisinage du point 0, car la différentielle quadratique q n'a pas de pôle en ∞ . Ceci entraîne alors que $\varphi = 0$ et

$$\sum_{y \in F} a_y = - \sum_{x \in E} \alpha_x \quad (5.4)$$

$$\sum_{y \in F} (ya_y + b_y) = - \sum_{x \in E} (x\alpha_x + \beta_x) \quad (5.5)$$

$$\sum_{y \in F} (y^2a_y + 2yb_y + c_y) = - \sum_{x \in E} (x^2\alpha_x + 2x\beta_x + \gamma_x). \quad (5.6)$$

Des solutions a_y, b_y, c_y de ce système linéaire produisent des différentielles quadratiques dont les pôles sont dans l'ensemble $E \cup F$, de parties polaires p_x en les $x \in E$ et avec des pôles au plus triples en les points de l'ensemble F . Ces solutions existent car la matrice associée au système est de rang maximal 3.

Nous allons maintenant vérifier que ces solutions existent encore lorsqu'on impose en outre que $\sum_{y \in F} n_y = 3$ et que dans ce cas elles sont uniques.

Sans perte de généralité on suppose que $\forall y \in F, n_y \neq 0$. Il y a trois possibilités.

- L'ensemble F est de cardinal 1, dans ce cas les inconnues sont les trois coefficients a_y, b_y, c_y du développement en série de Laurent au niveau de l'unique pôle y dans F qui est d'ordre au plus trois. Les équations 5.4, 5.5 et 5.6 se réduisent en le système linéaire triangulaire suivant

$$\begin{aligned} a_y &= A = - \sum_{x \in E} \alpha_x \\ ya_y + b_y &= B = - \sum_{x \in E} (x\alpha_x + \beta_x) \\ y^2a_y + 2yb_y + c_y &= C = - \sum_{x \in E} (x^2\alpha_x + 2x\beta_x + \gamma_x). \end{aligned}$$

La matrice associée est inversible puisque ses coefficients diagonaux sont des 1.

- Lorsque le cardinal de F est 2, on pose $F = \{y_1, y_2\}$ où le point y_1 est le pôle d'ordre 1 et le point y_2 le pôle d'ordre 2. Dans ce cas les inconnues sont $a_1 = a_{y_1}, a_2 = a_{y_2}, b_2 = b_{y_2}$, le système devient :

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ y_1^2 & y_2^2 & 2y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant étant $(y_1 - y_2)^2$ et les nombres complexes y_1 et y_2 étant distincts, on a bien une unique solution.

- Enfin, si $F = \{y_1, y_2, y_3\}$ les inconnues sont les trois coefficients $a_i = a_{y_i}$. La matrice du système est une matrice de Vandermonde et celle-ci est inversible car les y_i sont distincts. \square

5.1.5 Images directes de différentielles quadratiques

La tirée en arrière est un objet naturel à définir pour les champs de tenseurs covariants tels que les différentielles quadratiques. On rappelle que la tirée en arrière f^*q d'une différentielle quadratique méromorphe $q = q_0 dz^2$ par une fonction méromorphe f vérifie $f^*q_0(z; dz) = q_0(f(z))f'(z)^2 dz^2$. Dans la suite nous aurons besoin de pousser en avant des différentielles quadratiques.

Proposition 5.1.10 *Soit une fraction rationnelle $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ non constante et soit S_f l'ensemble de ses valeurs critiques. Soit q une différentielle quadratique méromorphe sur \mathbb{P}^1 . Soit f_*q défini, pour tout $(z, \xi) \in T\mathbb{P}^1$ tel que $z \notin S_f$, par :*

$$f_*q(z; \xi) = \sum_{w: f(w)=z} q(w; df(w)^{-1}\xi),$$

où $df(w)^{-1}$ est l'inverse de l'application tangente de f en w .

Alors,

- f_*q se prolonge en une différentielle quadratique méromorphe sur \mathbb{P}^1 et son ensemble de pôles est contenu dans la réunion de l'image de l'ensemble des pôles de la différentielle quadratique q et de l'ensemble des valeurs critiques de l'application f .
- Lorsqu'une valeur critique v de f n'est pas l'image d'un pôle de la différentielle quadratique q , le pôle de la différentielle quadratique f_*q en v est d'ordre au plus 1.
- Si p est image d'un pôle de la différentielle quadratique q , son ordre en tant que pôle (éventuellement nul) de la différentielle quadratique f_*q est au plus le maximum des ordres des pôles de q dont p est l'image.

Cette proposition permet de définir l'image directe (ou poussée en avant) d'une différentielle quadratique.

Définition 5.1.11 *Soit une fraction rationnelle $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ et une différentielle quadratique méromorphe q sur \mathbb{P}^1 . Alors l'image directe (la poussée en avant) f_*q de q est définie par :*

$\forall(z, \xi) \in T\mathbb{P}^1,$

$$f_*q(z; \xi) = \sum_{w:f(w)=z} q(w; df(w)^{-1}\xi),$$

$df(w)^{-1}$ étant l'inverse de l'application tangente de f en w .

Si $f : (\widehat{\mathbb{C}}, \infty) \rightarrow (\widehat{\mathbb{C}}, \infty)$ est une fraction rationnelle, on obtient comme expression dans la carte \mathbb{C} :

$$\sum_{w:w \in \mathbb{C}, f(w)=z} q_0(w) \left(\frac{\xi}{f'(w)} \right)^2 = \left(\sum_{w:w \in \mathbb{C}, f(w)=z} \frac{q_0(w)}{f'(w)^2} \right) \xi^2.$$

Remarque 5.1.12 Soit $f : (\widehat{\mathbb{C}}, \infty) \rightarrow (\widehat{\mathbb{C}}, \infty)$ une fraction rationnelle, l'opérateur de transfert de Ruelle T_f associé à f est un opérateur sur les fonctions (méromorphes) g défini par (voir [18]) :

$$T_f g(z) = \sum_{w:w \in \mathbb{C}, f(w)=z} \frac{g(w)}{f'(w)^2}, \quad (5.7)$$

de sorte que

$$f_*(gdz^2) = (T_f g)dz^2.$$

Dém. (de la proposition 5.1.10) En dehors des valeurs critiques les branches inverses de l'application f sont bien définies et la somme $\sum_{w:f(w)=z} q(w; df(w)^{-1}\xi)$ est localement bien

définie et méromorphe avec des pôles d'ordres au plus ceux des pôles éventuels de q en les préimages du point z . Ainsi, f_*q est une différentielle quadratique méromorphe globalement définie en dehors des valeurs critiques de f .

La différentielle quadratique f_*q se prolonge méromorphiquement sur \mathbb{P}^1 . En effet les valeurs critiques de f sont isolées et, dans n'importequelle carte au voisinage d'une valeur critique, le module de la fonction qui représente cette différentielle quadratique dans cette carte tend vers $+\infty$ (à moins d'être borné) lorsque l'on s'approche de l'image de la valeur critique dans la carte.

Il reste à majorer l'ordre du pôle en une valeur critique v de f . Pour ceci on peut se contenter de raisonner localement, c'est-à-dire de ne considérer que certaines préimages de la valeur critique, puisque les contributions aux pôles de chaque préimage s'ajoutent. En particulier, on supposera, sans perte de généralité, qu'il n'y a qu'un seul point critique c d'image v .

On considère une carte où la valeur critique v de l'application f est le point 0. Soit $g(z)dz^2$ le représentant de q dans cette carte, la fonction g étant méromorphe au voisinage

du point 0. Soit $k \geq 2$ et $c \in \mathbb{C}^*$ tels que $f(z) = cz^k + O(z^{k+1})$. Il existe alors des constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que, pour w voisin de 0 on ait

$$\begin{aligned} |f(w)| &\leq C_1 |w|^k \\ \frac{1}{|f'(w)|^2} &\leq C_2 / |w|^{2k-2}. \end{aligned}$$

Pour tout z suffisamment proche de 0, toutes les préimages par f du point représenté par z dans la carte sont dans la même carte. Ainsi il existe C est une constante positive telle que

$$\left| \sum_{w:f(w)=z} \frac{g(w)}{f'(w)^2} \right| \leq \frac{C}{|z|^{2-2/k}} \sum_{w:f(w)=z} |g(w)|.$$

Lorsque la fonction g n'a pas de pôle en 0, ce dernier terme est un $o(1/|z|^2)$, ce qui montre que le pôle de la différentielle quadratique f_*g en v est d'ordre au plus 1.

Les estimations précédentes permettent aussi de traiter le cas où la fonction g a un pôle en 0. \square

Remarque 5.1.13 *L'opérateur image directe par une fraction rationnelle f non constante agit linéairement sur les parties polaires qui se trouvent en des points en dehors de l'ensemble précritique $f^{-1}(S_f)$.*

Lemme 5.1.14 ([18] lemma 3.1) *Soit $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ une fraction rationnelle fixant ∞ n'ayant que des points critiques simples en dehors de ∞ . Soit c_1, \dots, c_N ses points critiques finis et $v_i = f(c_i)$ les valeurs critiques correspondantes. Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $\forall i, a \neq c_i$. Alors*

$$T_f \left(\frac{1}{z-a} \right) = \frac{1}{f'(a)} \frac{1}{z-f(a)} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{f''(c_i)(c_i-a)} \frac{1}{z-v_i},$$

et

$$T_f \left(\frac{1}{(z-a)^2} \right) = \frac{1}{(z-f(a))^2} - \frac{f''(a)}{f'(a)^2} \frac{1}{z-f(a)} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{f''(c_i)(c_i-a)^2} \frac{1}{z-v_i}.$$

Dém. Se fait par un calcul de résidu, la deuxième formule découlant de la première par dérivation par rapport à a , voir [18]. \square

5.1.6 Parties polaires invariantes

Soit f une fraction rationnelle non constante et $b = (b_0, \dots, b_m)$ un cycle périodique de f de période exacte m . Adam Epstein a donné une classification complète des divergences invariantes le long d'un cycle selon son multiplicateur dans [11], une divergence invariante

étant une classe de partie polaire modulo les termes de degré -1 qui est invariante par image directe.

On suppose que le multiplicateur du cycle b est $\rho \notin \{0, 1\}$ et que ce cycle est disjoint de l'ensemble S_f des valeurs critiques de f . On se propose d'expliciter quelles sont les parties polaires invariantes par f_* , c'est-à-dire d'ajouter le terme de degré -1 aux considérations faites dans la référence ci-dessus.

Définition 5.1.15 *Soit f une fraction rationnelle non constante et $b = (b_0, \dots, b_{m-1})$ un cycle périodique de f de période exacte m .*

Une famille de parties polaires $(P_i)_{i=0, \dots, m-1}$ invariante le long de b est une famille de parties polaires P_i situées en les points du cycle b_i telles que pour toute différentielle quadratique méromorphe q définie au voisinage de b et ayant P_i pour partie polaire en b_i , on ait

$$PP(b_i, (g_{i-1})_*q) = PP(b_i, q)$$

où g_i est la restriction de l'application f sur un voisinage de b_i sur lequel q est définie et sur lequel le degré de f est égal au degré local en b_i (1 si $f'(b_i) \neq 0$ et k si b_i est un point critique de multiplicité k).

D'après la classification d'Adam Epstein de telles parties polaires sont d'ordre 2 et il y a unicité si l'on suppose que le résidu en les points b_i d'une différentielle quadratique ayant ces parties polaire y vaut 1. Choisissons une carte \mathbb{C} de \mathbb{P}^1 , identifié alors à $\widehat{\mathbb{C}}$, telle que $\forall i$, $b_i \in \mathbb{C}$ et $b_i \neq f(\infty)$. Soit $q = q_0(z)dz^2$ la différentielle quadratique définie par

$$q_0(z)dz^2 = \sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{1}{(z - b_i)^2} + \frac{\alpha_i}{z - b_i} \right) dz^2.$$

où les constantes $\alpha_i \in \mathbb{C}$ sont à déterminer. Nous allons montrer qu'il existe un et un seul m -uplet $(\alpha_0, \dots, \alpha_{m-1}) \in \mathbb{C}^m$ tel que les parties polaires de la différentielle quadratique q sont invariantes par f_* .

D'après le lemme 5.1.14,

$$PP(f_*q_0, b_i) = \frac{1}{(z - b_{i+1})^2} - \frac{f''(b_i)}{f'(b_i)^2} \frac{1}{z - b_{i+1}} + \frac{\alpha_i}{f'(b_i)} \frac{1}{z - b_{i+1}},$$

où l'on pose $b_m = b_0$. Ainsi on est ramené aux équations ($\alpha_m := \alpha_0$) :

$$\alpha_{i+1} = \frac{1}{f'(b_i)} \left(\alpha_i - \frac{f''(b_i)}{f'(b_i)} \right). \quad (5.8)$$

On en tire que $\alpha_i = \frac{\alpha_i}{\rho} + C_i$, où C_i est une constante dépendant de i . Comme $\rho \neq 1$, on sait qu'il existe une et une seule solution.

On peut calculer α_i comme suit. En dérivant deux fois la relation $f^{\circ m}(f(z)) = f(f^{\circ m}(z))$ et en l'appliquant à $z = b_i$, on obtient $(f^{\circ m})''(b_{i+1})f'(b_i)^2 + \rho f''(b_i) = f''(b_i)\rho^2 + f'(b_i)(f^{\circ m})''(b_i)$. On en déduit que

$$\frac{f''(b_i)}{f'(b_i)} = \frac{(f^{\circ m})''(b_i)}{\rho(\rho-1)} - f'(b_i) \frac{(f^{\circ m})''(b_{i+1})}{\rho(\rho-1)}.$$

Ainsi $(\frac{(f^{\circ m})''(b_i)}{\rho(\rho-1)})_{i=0, \dots, m-1}$ est la solution des équations (5.8).

Ainsi pour toute différentielle quadratique méromorphe q sur \mathbb{P}^1 telle que les seuls pôles de q qui s'envoient sur le cycle b (ne contenant aucune valeur critique de f) sont en les points de b et aucun point de b . Alors, si les parties polaires de q sont invariantes par f_* , elles sont de la forme

$$PP \left(\left(\frac{1}{(z-b_i)^2} + \frac{\alpha_i}{z-b_i} \right) dz^2 \right)$$

avec $\alpha_i = \frac{(f^{\circ m})''(b_i)}{\rho(\rho-1)}$.

On a montré le résultat suivant.

Proposition 5.1.16 *Les parties polaires invariantes le long du cycle b sont les multiples de*

$$PP \left(\left(\frac{1}{(z-b_i)^2} + \frac{\alpha_i}{z-b_i} \right) dz^2 \right),$$

avec

$$\alpha_i = \frac{(f^{\circ m})''(b_i)}{\rho(\rho-1)}.$$

Etant donné une différentielle quadratique méromorphe q et un champ de vecteurs méromorphe ξ définis sur une surface de Riemann S , le produit tensoriel $q \otimes \xi$ est canoniquement une 1-forme méromorphe sur S , puisqu'une différentielle quadratique sur une surface de Riemann est un champ de 2-tenseurs symétriques covariants que l'on peut donc contracter de façon non ambiguë avec un champ de vecteurs. Si E désigne une famille finie d'ensembles finis de S , on note $\langle q, \xi \rangle_E$ la somme des résidus de la 1-forme méromorphe $q \otimes \xi$ en les points des ensembles E .

La proposition suivante met en avant l'utilité du point de vue de la dynamique holomorphe des différentielles quadratiques ayant des parties polaires invariantes. Elle donne la variation du multiplicateur d'un cycle qui n'est ni parabolique ni superattractif par un calcul de résidu. Ce cas ainsi que d'autres cas ont été amplement traités dans [10].

Proposition 5.1.17 ([10], lemma 6) *Soit U un ouvert de \mathbb{C} et soit, pour tout $\lambda \in U$, f_λ une fraction rationnelle. On suppose que l'application $\lambda \mapsto f_\lambda$ est holomorphe.*

On suppose qu'il existe une application holomorphe $b : U \rightarrow \mathbb{C}^m$ telle que pour tout $\lambda \in U$, $b(\lambda)$ est un cycle périodique de f_λ de période exacte m et de multiplicateur ρ distinct de 0 et de 1.

Soit $\lambda_0 \in U$ et soit q une différentielle quadratique méromorphe sur \mathbb{P}^1 ayant une partie polaire invariante par $f = f_{\lambda_0}$ le long du cycle $b = b(\lambda_0)$ avec résidu 1.

Soit $\dot{\rho}$ la dérivée du multiplicateur par rapport à λ en λ_0 et soit η le champs de vecteurs méromorphe sur \mathbb{P}^1 défini par $f'(z)\eta(z) = \partial f_\lambda / \partial \lambda|_{\lambda=\lambda_0}$.

Alors, la somme des résidus de la 1-forme $q \otimes \eta$ le long du cycle b vaut $\frac{\dot{\rho}}{\rho}$.

Dém. On procède à un calcul direct.

Notons $\dot{f}(z) = \partial f_\lambda / \partial \lambda|_{\lambda=\lambda_0}(z)$ et $b = (b_0, \dots, b_{m-1})$. Soit $i \in \{0, \dots, m-1\}$. On note $\dot{f}_i = \dot{f}(b_i)$, $f'_i = f'(b_i)$, $f''_i = f''(b_i)$ et $\dot{f}'_i = \dot{f}'(b_i)$. Alors, pour z proche de 0,

$$\begin{aligned} \dot{f}(b_i + z) &= \dot{b}_{i+1} + \dot{f}'_i z - \dot{b}_i f'(b_i + z) + O(z^2) \\ &= \dot{b}_{i+1} - \dot{b}_i f'_i + z(\dot{f}'_i - \dot{b}_i f''_i) + O(z^2). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{\dot{f}}{f'}(b_i + z) = \left(\frac{\dot{b}_{i+1}}{f'_i} - \dot{b}_i \right) + z \left(\frac{\dot{f}'_i}{f'_i} - \frac{f''_i \dot{b}_{i+1}}{(f'_i)^2} \right) + O(z^2).$$

Le résidu de la 1-forme $\frac{\dot{f}}{f'} \otimes q$ en b_i est donc $\alpha_i \frac{\dot{f}_i}{f'_i} + \frac{\dot{f}'_i}{f'_i} - \dot{b}_{i+1} \frac{f''_i}{(f'_i)^2}$ où les α_i satisfont les équations 5.8. On a alors

$$\alpha_i \frac{\dot{f}_i}{f'_i} - \dot{b}_{i+1} \frac{f''_i}{(f'_i)^2} = \alpha_i \frac{\dot{f}_i - \dot{b}_{i+1}}{f'_i} + \dot{b}_{i+1} \alpha_{i+1}.$$

L'identité $f(b_i) = b_{i+1}$ entraîne $\dot{f}_i + f'_i \dot{b}_i = \dot{b}_{i+1}$ et donc

$$\alpha_i \frac{\dot{f}_i}{f'_i} - \dot{b}_{i+1} \frac{f''_i}{(f'_i)^2} = -\alpha_i \dot{b}_i + \alpha_{i+1} \dot{b}_{i+1}.$$

Par conséquent, $\langle q, \eta \rangle_b = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\dot{f}'_i}{f'_i} = \frac{\dot{\rho}}{\rho}$. □

5.2 Définition de la différentielle quadratique associée à une fraction rationnelle et à un cycle périodique

Proposition 5.2.1 *Soit f une fraction rationnelle de \mathbb{P}^1 , $m \in \mathbb{N}^*$, $b = (b_0, \dots, b_m)$ un cycle périodique de f de période exacte m et de multiplicateur distinct de 1 et 0. Soit $F \subset \mathbb{P}^1$ disjoint de b tel que $1 \leq \text{card}(F) \leq 3$ et soit $(n_y)_{y \in F} \in (\mathbb{N}^*)^F$ tel que $\sum_{y \in F} n_y = 3$.*

Alors il existe une unique différentielle quadratique méromorphe q sur \mathbb{P}^1 vérifiant :

- l'ensemble des pôles de q est inclus dans $b \cup F$,

- la partie polaire de la différentielle quadratique q est invariante le long du cycle b avec résidu 1,
- en $y \in F$, q a un pôle d'ordre au plus n_y .

Dém. Il s'agit d'une application de la proposition 5.1.9 avec $E = b$ et les parties polaires en E sont les uniques parties polaires invariantes le long de b avec résidu 1. \square

Définition 5.2.2 *Soit un ensemble non vide F ayant au plus 3 éléments et muni de poids $(n_y)_{y \in F}$ de somme 3. Étant donné une fraction rationnelle f et un cycle périodique b de f de multiplicateur, on appellera la différentielle quadratique méromorphe q de la proposition 5.2.1, la différentielle quadratique associée à (f, b) .*

5.2.1 Différence entre la différentielle quadratique et son image directe

Lemme 5.2.3 ([18], theorem 3) *Soit un ensemble non vide F ayant au plus 3 éléments et muni de poids $(n_y)_{y \in F}$ de somme 3.*

Soit $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ une fraction rationnelle. Soit c_1, \dots, c_p les points critiques finis de f dans $\widehat{\mathbb{C}}$ et pour $i = 1, \dots, p$ $v_i = f(c_i)$, les valeurs critiques associées.

Soit $b = (b_0, \dots, b_{m-1})$ un cycle périodique de f de période m et de multiplicateur $\rho \notin \{0, 1\}$, on suppose que $\forall i, b_i \neq \infty$.

*Soit q la différentielle quadratique associée à (f, b) et $q_0(z)dz^2$ et $(f_*q)_0(z)dz^2$ représentent respectivement q et f_*q dans la carte \mathbb{C} .*

Alors il existe $L = (L_1, \dots, L_p) \in \mathbb{C}^p$ tel que

$$q_0(z) - (f_*q)_0(z) = \sum_{i=1}^p \frac{L_i}{z - v_i} + P, \quad (5.9)$$

où P est un ensemble de parties polaires situées en les points de $f(\{\infty\} \cup F)$.

Dém.

On sait, par construction de q que les seuls pôles éventuels de $q - f_*q$ se trouvent en les valeurs critiques de f et en les images des points de F .

Les pôles en les valeurs critiques sont simples et les pôles en les points de $f(F)$ sont au plus triples. Donc le pôle éventuel en ∞ est au plus triple, ce qui justifie l'absence de terme polynômial dans l'expression 5.9. \square

Lemme 5.2.4 Soit U, V des ouverts de \mathbb{C} , $f : U \rightarrow V$ une application holomorphe, q une fonction méromorphe définie sur U et $v \in V$ tel que toutes les préimages du point v par l'application f sont soit des points critiques simples de f soit des points réguliers (non critiques).

Soit c_1, \dots, c_k les points critiques préimages du point v . On suppose que la fonction q n'a pas de pôle en les c_i .

Alors

$$PP(T_f q, v)(z) = \sum_{i=1}^k \frac{q(c_i)}{f''(c_i)(z - v)}.$$

Dém. Un développement limité permet de voir que la fonction $T_f q$ a un pôle au plus simple en v .

Nous allons calculer le résidu correspondant à ce pôle. Ce résidu est la somme de toutes les contributions de chaque c_i , on se ramène alors au cas où f a un unique point critique simple c .

On a :

$$\begin{aligned} \text{Rés}(T_f q, v) &= \text{Rés} \left(\sum_{w:f(w)=z} \frac{q(w)}{f'(w)^2} dz, v \right) \\ &= \text{Rés} \left(f_* \left(\frac{q(z)}{f'(z)} dz \right), v \right) \\ &= \text{Rés} \left(\frac{q(z)}{f'(z)} dz, c \right), \end{aligned}$$

d'après la proposition 5.1.4. Ce qui donne bien le résultat attendu. \square

Dans la suite l'application f sera un polynôme. Dans ce cas, il est pratique de prendre $F = \{\infty\}$ et $n_\infty = 3$.

Théorème 5.2.5 ([18], Theorem 1) Soit $(f_\lambda)_\lambda$ une famille de polynômes moniques centrés dépendant holomorphiquement d'un paramètre λ appartenant à un ouvert U de \mathbb{C} .

On suppose qu'il existe un vecteur $b(\lambda) = (b_0(\lambda), \dots, b_{m-1}(\lambda)) \in \mathbb{C}^m$ dépendant holomorphiquement du paramètre $\lambda \in U$ tel que pour tout paramètre $\lambda \in U$, $b(\lambda)$ est un cycle périodique du polynôme f_λ qui n'est ni de multiplicateur 1, ni superattractif.

On note $c_1(\lambda), \dots, c_k(\lambda)$ les points critiques du polynôme f_λ , $v_1(\lambda), \dots, v_k(\lambda)$ les valeurs critiques correspondantes (non nécessairement distinctes), $\rho(\lambda)$ le multiplicateur correspondant au cycle $b(\lambda)$ et \dot{v}_i et $\dot{\rho}$ les dérivées par rapport au paramètre $\lambda \in U$ évaluées en le paramètre $\lambda = \lambda_0 \in U$.

On suppose en outre que les points critiques $c_i(\lambda)$ ne changent pas de multiplicité lorsque λ varie dans U et qu'aucun d'eux n'est un point fixe de f_λ .

Soit q la différentielle quadratique associée au couple $(f, b) = (f_{\lambda_0}, b(\lambda_0))$

Alors

$$q - f_*q = \sum_{i=1}^k \frac{L_i}{z - v_i} dz^2$$

où les constantes L_i satisfont :

$$\sum_{i=1}^k v_i L_i = -\frac{\dot{\rho}}{\rho(\lambda_0)}.$$

Dém.

Soit η le champs de vecteurs méromorphe sur $\widehat{\mathbb{C}}$ défini par l'équation $df \cdot \eta = \dot{f}$, où $\dot{f}(z)$ est le vecteur dérivée par rapport au paramètre λ de la fonction $f_\lambda(z)$ évaluée en λ_0 ($\dot{f}(z)$ est un vecteur tangent à $\widehat{\mathbb{C}}$ attaché en $f_{\lambda_0}(z)$).

Dans la suite on notera $q_0(z)dz^2$ la différentielle quadratique q exprimée dans la carte \mathbb{C} et f, b, c_i, v_i, ρ , sans référence au paramètre, à la place de, respectivement, $f_{\lambda_0}, b(\lambda_0), c_i(\lambda_0), v_i(\lambda_0)$ et $\rho(\lambda_0)$.

Les pôles du champs de vecteurs η se trouvent en les points critiques de f . Les pôles éventuels de la 1-forme $q \otimes \eta$ se situent donc le long du cycle b en les points critiques $c = (c_1, \dots, c_k)$ ou en ∞ . Donc par le théorème des résidus on a :

$$\langle q, \eta \rangle_{c, b, \infty} = 0.$$

Étant donné que le polynôme f est monique centré, le champs de vecteurs η admet un zéro au moins triple en ∞ , or le pôle de la différentielle quadratique q en ∞ est au plus triple donc

$$\langle q, \eta \rangle_{\infty} = 0.$$

On a alors

$$\langle q, \eta \rangle_c = -\langle q, \eta \rangle_b. \quad (5.10)$$

Soit $i \in \{1, \dots, k\}$, soit U_i et V_i des voisinages respectifs des points c_i et v_i tels que $f(U_i) \subset V_i$. On suppose que $U_i \cap V_i = \emptyset$. Soit θ le champs de vecteurs méromorphe défini sur $U_i \cup V_i$ par $\theta(z) = -v_i$ pour $z \in V_i$ et par $\theta(z) = (f^*\theta)(z) + \eta(z)$, pour $z \in U_i$.

On a alors

$$\begin{aligned} \text{Rés}(q \otimes \eta, c_i) &= \text{Rés}(q \otimes \eta|_{U_i}, c_i) \\ &= \text{Rés}(q \otimes (\theta - f^*\theta), c_i) \\ &= \text{Rés}(q \otimes \theta, c_i) - \text{Rés}(q \otimes (f^*\theta), c_i). \end{aligned}$$

En vertu de la proposition 5.1.4,

$$\text{Rés}(q \otimes (f^*\theta), c_i) = \text{Rés}(f_*(q \otimes (f^*\theta)), v_i).$$

Or

$$PP(f_*(q \otimes (f^*\theta)), v_i) = PP\left(\sum_{w \in U: f(w)=z} \frac{q_0(w)\theta_0(z)}{f'(w)}, v_i\right) \quad (5.11)$$

$$= PP((f_*q) \otimes \theta, v_i). \quad (5.12)$$

Ainsi

$$R\acute{e}s(q \otimes (f^*\theta), c_i) = R\acute{e}s((f_*q) \otimes \theta, v_i).$$

Comme la multiplicité $\nu \geq 2$ du point critique c_i ne change pas quand λ varie, pour tout $\lambda \in U$ et tout $\zeta \in \mathbb{C}$ assez petit, $f_\lambda(c_i(\lambda) + \zeta) = v_i(\lambda) + O(\zeta^\nu)$. Par conséquent $\dot{f}_\lambda(c_i(\lambda) + \zeta) = \dot{v}_i(\lambda) + O(\zeta^{\nu-1})$. Or, pour ζ assez petit, $\theta(c_i + \zeta) = \left(-\dot{v}_i + \dot{f}(c_i + \zeta)\right) / f'(c_i + \zeta)$. Ainsi, le champs de vecteurs θ n'a pas de pôle en c_i .

Par conséquent $\langle q, \eta \rangle_{c_i} = -\langle f_*q, \theta \rangle_{v_i}$. D'après le lemme 5.2.3, il existe un $L_i \in \mathbb{C}$ tel que la partie polaire de f_*q en v_i soit $-\frac{L_i}{z-v_i}$. D'où

$$\langle q, \eta \rangle_c = -\sum_{i=0}^k L_i \dot{v}_i.$$

La proposition 5.1.17 et l'égalité 5.10 entraînent que $\langle q, \eta \rangle_c = -\frac{\dot{\rho}}{\rho}$. □

5.3 L'inégalité

On considère la famille des polynômes $f_\lambda(z) = z^d + \lambda$ paramétrée par $\lambda \in \mathbb{C}$.

Théorème 5.3.1 *Soit $d \in \mathbb{N}$ tel que $d \geq 2$ et soit $C \geq 2$, il existe des constantes $M > 1$, $K_0 > 0$ et $K_1 > 0$ qui ne dépendent que de C telles que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| \leq C$ et tel que le polynôme $z^d + \lambda$ possède un cycle répulsif de période m de multiplicateur ρ (dépendant de λ), on a*

$$m|\rho - 1| \leq K_0 M^m \left(\log |\rho| + K_1 \left| \frac{\dot{\rho}}{\rho} \right| \right), \quad (5.13)$$

où $\dot{\rho}$ désigne la dérivée de la fonction multiplicateur ρ par rapport au paramètre λ .

Corollaire 5.3.2 *Étant donné $C \geq 2$, sur l'ensemble des paramètres λ tels que $|\lambda| \leq C$ et ayant un cycle de période m de multiplicateur ρ vérifiant*

$$|\rho - 1| > \frac{K_0 M^m}{m} \log |\rho| \quad (5.14)$$

(où les constantes sont celles données par le théorème précédent), la dérivée de la fonction qui au paramètre λ associe le multiplicateur du cycle de période m est non nulle.

Remarque 5.3.3 *Il est possible à partir de là de construire un domaine autour du disque unité sur lequel on peut définir l'inverse de la fonction qui à un paramètre donné associe le multiplicateur du cycle considéré que l'on suit continûment (en tant qu'ensemble non ordonné) en fonction du paramètre (voir par exemple [19], theorem 4, dans le cadre quadratique).*

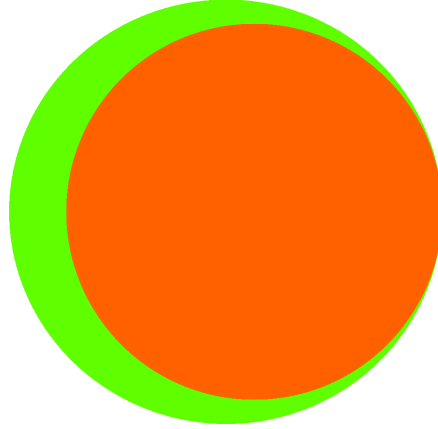


FIG. 5.1 – Ci-dessus une illustration du corollaire 5.3.2 dans le plan des multiplicateurs : en orange le disque unité et en vert la partie hors du disque vérifiant l'inégalité 5.14.

La démonstration du théorème ci-dessus reprend celle de Guénadi Lévine pour la famille quadratique en les généralisant.

Dém. Soit $b = (b_0, \dots, b_{m-1})$ le cycle du polynôme $f_\lambda(z) = z^d + \lambda$ dont il est question dans l'énoncé. Soit q_λ la différentielle quadratique sur $\widehat{\mathbb{C}}$ associée au couple (f_λ, b) et q la fonction méromorphe de \mathbb{C} telle que q_λ vaut qdz^2 dans la carte \mathbb{C} . Grâce au théorème 5.2.5, on sait que $q_\lambda = (f_\lambda)_*q_\lambda + \frac{\dot{\rho}}{\rho} \frac{dz^2}{z-\lambda}$ (en abusant légèrement des notations).

Notons $G = G_\lambda = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{d^j} \log^+ |f_\lambda^{oj}|$ la fonction de Green du polynôme f_λ . La fonction G est définie et positive sur tout \mathbb{C} . Étant donné $\eta > 0$, on appellera l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} : G(z) = \eta\}$, l'équipotentielle de potentiel η .

Soit $g_0 > 0$, et soit $g = g_0/d^m$. Soit $V = \{z : G(z) \leq dg\} \setminus B_\delta$ et $U = f_\lambda^{-1}(U)$. La constante g_0 sera déterminée plus tard, en fonction de la constante C uniquement, de façon à ce qu'elle soit supérieure au potentiel critique (lemme 5.3.9). On note B_λ les coordonnées de Böttcher normalisées, définies et holomorphes sur $\{z \in \mathbb{C} : G_\lambda(z) > g_0\}$. La fonction B_λ dépend continuellement de λ et est telle que $\frac{z(B_\lambda^{-1})'(z)}{B_\lambda^{-1}(z)} \sim 1$ pour $z \rightarrow \infty$. On peut étendre cette

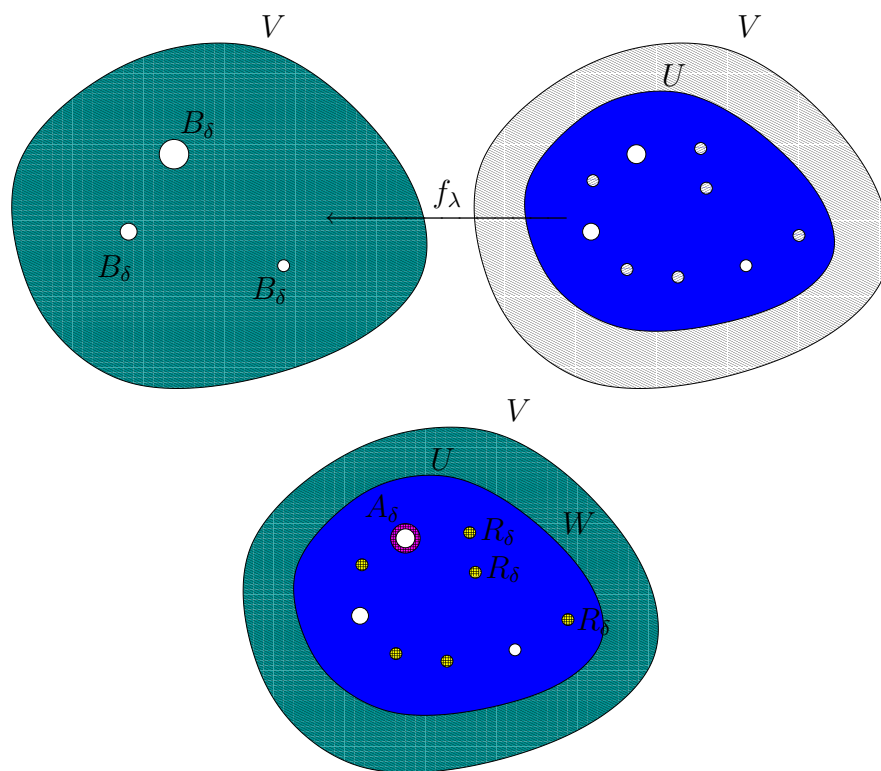


FIG. 5.2 – En haut à gauche le domaine V en cyan (le plus grs trou représente le disque autour de b_0). En haut à droite, le domaine U en bleu, avec en grisé le domaine U . En bas la superposition des deux avec en jaune l'ensemble R_δ et en rouge l'anneau A_δ .

fonction en un difféomorphisme du complémentaire du disque unité sur un ouvert du bassin de l'infini du polynôme f_λ dont le complémentaire dans ce bassin est de mesure nulle.

Soit $\delta > 0$ et B_δ la réunion du disque $D(b_0, \delta)$ et des composantes connexes de ses préimages successives contenant les points du cycle jusqu'à $m - 1$.

On a alors

$$V \cup A_\delta = W_g \cup U \cup R_\delta$$

où A_δ est un anneau fondamental autour de b_0 , $W_g = \{g < G \leq dg\}$ et R_δ sont les composantes de la préimage de B_δ disjointes de B_δ . Quitte à prendre δ assez petit, on peut supposer que les ensembles W_g , A_δ , B_δ et R_δ sont disjoints les uns des autres.

Par construction $|q|$ est intégrable sur U et V (par rapport à la mesure de Lebesgue $dxdy$ du plan). La démonstration consiste en un encadrement de l'intégrale $\int_{W_g} |q|dxdy$.

Lemme 5.3.4 *Lorsque $\delta \rightarrow 0$, on a*

$$\int_{W_g} |q|dxdy \leq \int_{A_\delta} |q|dxdy + \int_V |q - (f_\lambda)_*q|dxdy + o(1)$$

Dém. On a :

$$\int_V |q| dxdy = \int_{W_g} |q| dxdy + \int_U |q| dxdy - \int_{A_\delta} |q| dxdy + \int_{R_\delta} |q| dxdy.$$

L'ensemble R_δ converge, lorsque $\delta \rightarrow 0$, vers un ensemble fini de points distincts des pôles de la fonction q . Ainsi, pour δ tendant vers 0, $\int_{R_\delta} |q| dxdy = o(1)$.

D'autre part, comme $U = f_\lambda^{-1}(V)$, $\int_U |q| dxdy \geq \int_V |(f_\lambda)_* q| dxdy$.

Ainsi

$$\begin{aligned} \int_{W_g} |q| dxdy &\leq \int_V |q| dxdy - \int_V |(f_\lambda)_* q| dxdy + \int_{A_\delta} |q| dxdy + o(1) \\ &\leq \int_V |q - (f_\lambda)_* q| dxdy + \int_{A_\delta} |q| dxdy + o(1). \end{aligned}$$

□

Lemme 5.3.5 *Lorsque $\delta \rightarrow 0$, on a*

$$\int_{A_\delta} |q| dxdy = 2\pi \log |\rho| + o(1).$$

Dém. D'une part,

$$\int_{A_\delta} |q| dxdy = \int_{A_\delta} \frac{dxdy}{|z - b_0|^2} + o(1).$$

En fait, comme par construction $f_\lambda^{\circ m}(D(b_0, \delta) \setminus A_\delta) = D(b_0, \delta)$, un résultat bien connu dit que (voir la remarque 5.3.13) :

$$\int_{A_\delta} \frac{dxdy}{|z - b_0|^2} = 2\pi \log |\rho|.$$

□

Lemme 5.3.6 *Il existe une constante $K > 0$ ne dépendant que de g et C telle que*

$$\int_V |q - (f_\lambda)_* q| dxdy \leq K \left| \frac{\dot{\rho}}{\rho} \right|.$$

Dém. Grâce au théorème 5.2.5, on a

$$\int_V |q - (f_\lambda)_* q| dxdy \leq \left| \frac{\dot{\rho}}{\rho} \right| \int_{\{z: G(z) \leq dg\}} \left| \frac{1}{z - \lambda} \right| dxdy.$$

Le lemme suivant permet de contrôler l'intégrale $\int_{\{z: G(z) \leq dg\}} \left| \frac{1}{z - \lambda} \right| dxdy$.

Lemme 5.3.7 Soit $g > 0$, $C > 0$ et G_λ la fonction de Green associée au polynôme $f_\lambda(z) = z^d + \lambda$. Alors, pour tout paramètre λ tel que $|\lambda| \leq C$,

$$\{z \in \mathbb{C} : G_\lambda(z) \leq g\} \subset D \left(0, \max \left\{ \frac{e^g}{\left(1 - \frac{C}{(1+C)^d}\right)^{\frac{1}{d-1}}}, 1 + C \right\} \right).$$

Dém. Pour tout nombre complexe z tel que $|z| > R$, on a $\frac{|f_\lambda(z)|}{|z|^d} > 1 - \frac{|\lambda|}{R^d}$. Posant $R = 1 + C$, on a $1 - \frac{|\lambda|}{R^d} \geq 1 - \frac{C}{(1+C)^d}$.

Soit $\gamma = 1 - \frac{C}{(1+C)^d}$ alors

$$R\gamma = 1 + C - \frac{C}{(1+C)^{d-1}} > 1.$$

Ainsi pour tout nombre complexe z tel que $|z| > R$ et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|f_\lambda^{\circ n}(z)| > \gamma^{\frac{d^n-1}{d-1}}|z|^{d^n}$ et donc $G(z) \geq \log(\gamma^{\frac{1}{d-1}}|z|)$. \square

Corollaire 5.3.8 Il existe $R_0 = R_0(C)$ tel que pour tout $d \geq 2$, tout $\lambda \in D(0, C)$ et tout $\eta > 0$, on a

$$\{z \in \mathbb{C} : G_\lambda(z) \leq \eta\} \subset D(0, e^\eta R_0).$$

L'ensemble $\{G \leq g_0/d^{m-1}\}$ est donc inclus dans un disque fixé D , dont le rayon (fini) ne dépend que des constantes C et g_0 .

La fonction $\lambda \mapsto \int_D \frac{1}{|z-\lambda|} dx dy$ est bornée pour $\lambda \in D(0, C)$. On obtient alors une constante $K > 0$, définie uniquement en fonction des constantes C et g_0 , telle que

$$\int_{W_g} |q| dx dy \leq 2\pi \log |\rho| + K \left| \frac{\dot{\rho}}{\rho} \right|. \quad (5.15)$$

Il faut maintenant minorer le terme $\int_{W_g} |q| dx dy$.

Lemme 5.3.9 Soit $C > 0$ et G_λ la fonction de Green associée au polynôme $f_\lambda(z) = z^d + \lambda$. Alors, pour tout paramètre λ tel que $|\lambda| \leq C$ et tout nombre complexe z tel que $|z| \leq 1 + C$,

$$G_\lambda(z) \leq \log \left((1 + C) \left(1 + \frac{C}{(1 + C)^d} \right)^{\frac{2d-1}{d(d-1)}} \right).$$

Dém. Si z est un nombre complexe tel que $|z| > 1 + C$ alors $|f_\lambda(z)| > |z| \left((1 + C)^{d-1} - \frac{C}{1+C} \right) > |z|$ et $|f(z)| \leq |z|^d \left(1 + \frac{C}{(1+C)^d} \right)$, pas conséquent, si z est un nombre complexe tel qu'il existe un nombre entier $n \in \mathbb{N}^*$, que l'on supposera minimal, tel que $|f_\lambda^{\circ n}(z)| > 1 + C$, alors

$$\begin{aligned} G_\lambda(z) &= \frac{1}{d^n} G_\lambda(f_\lambda^{\circ n}(z)) \leq \frac{1}{d^n} \log \left(\left(1 + \frac{C}{(1 + C)^d} \right)^{\frac{d}{d-1}} |f_\lambda^{\circ n}(z)| \right) \\ &\leq \log \left((1 + C) \left(1 + \frac{C}{(1 + C)^d} \right)^{\frac{2d-1}{d(d-1)}} \right). \end{aligned}$$

Si un tel entier n n'existe pas alors $G_\lambda(z) = 0$ est l'inégalité est encore vraie. \square

Dém. (du lemme 5.3.10)

Il existe donc une constante K_0 telle que pour tout $d \geq 2$, tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| \leq C$, on a $G(0) \leq K_0$.

À partir de maintenant, on fixe $g_0 > K_0$ indépendamment de λ .

Lemme 5.3.10 *Il existe des constantes réelles $K_* > 0$ et $M > 0$, ne dépendant que de C et d , tels que*

$$\int_{W_g} |q| dx dy \geq K_* M^m |\rho - 1|.$$

Dém. On définit le champs de vecteurs $\xi(z) = (f_\lambda^{\circ m}(z) - z)\partial/\partial z$, sur \mathbb{C} , et la 1-forme $\omega = dB_\lambda/B_\lambda$ presque partout sur le complémentaire du Julia rempli de f_λ . On peut alors écrire $|q_\lambda| = \frac{1}{|\omega\xi|} |q_\lambda\xi| \cdot |\omega|$.

En prenant des branches locales du logarithme des coordonnées de Böttcher $\zeta = \log B_\lambda = \theta + \sqrt{-1}\eta$, on trivialisé la 1-forme ω en $d\zeta$. On a alors

$$\begin{aligned} \int_{W_g} |q_\lambda| &= \int_g^{dg} \int_{\gamma_\eta} \frac{1}{|\omega\xi|} |q_\lambda\xi| d\eta \\ &\geq (d-1)g \inf_{W_g} \frac{1}{|\omega\xi|} \cdot \inf_{g \leq \eta \leq dg} \int_{\gamma_\eta} |q_\lambda\xi|, \end{aligned}$$

où, pour tout η , γ_η est l'équipotentielle de potentiel η .

Lemme 5.3.11

$$\int_{\gamma_\eta} q_\lambda\xi = 2\pi\sqrt{-1}m(\rho - 1).$$

Dém. Dans le plan dynamique, l'équipotentielle γ_η est constituée d'une réunion de courbes dont l'indice global (somme des indices de chacune des ses composantes) autour de chacun des points b_i du cycle est 1.

L'intégrand $q_\lambda\xi$ est une 1-forme méromorphe définie sur \mathbb{C} , holomorphe au voisinage des équipotentielles de potentiel strictement positif.

Les pôles de la différentielle quadratique q_λ dans \mathbb{C} se trouvent en les points du cycle et sont d'ordre 2, avec comme coefficient dominant 1 (le résidu de la différentielle quadratique q_λ en ces points). Le champs de vecteurs ξ s'annule en ces points avec dérivée $\rho - 1$.

Le résultat suit par le calcul des résidus en chacun des pôles. \square

Lemme 5.3.12 *Il existe des constantes $K_* > 0$ et $M_* > 0$, déterminées uniquement à partir de C et d , telles que*

$$\int_{W_g} \left| \frac{1}{\omega\xi} \right| \geq \frac{K_*}{M_*^m}.$$

Dém.

La 1-forme ω dépend continûment de λ . Il existe donc une constante K_* telle que pour tout λ tel que $|\lambda| \leq C$ et tout $z \in \{g_0 \leq G \leq dg_0\}$,

$$|\omega| \leq K_* |dz|.$$

En outre $f_\lambda^{\text{om}}(W_g)$ est inclus dans l'anneau $\{g_0 \leq G \leq dg_0\}$. Or la 1-forme ω vérifie l'identité $f_\lambda^* \omega = d\omega$. Ainsi on a

$$\sup_{W_g} |\omega\xi| \leq \frac{1}{d^m} K_* \sup_{z \in W_g} |(f_\lambda^{\text{om}})'(z) (f_\lambda^{\text{om}}(z) - z)|.$$

Le corollaire 5.3.8 permet de majorer $|f_\lambda'(z)| = d|z|^{d-1}$ uniformément en λ lorsque $G_\lambda(z) \leq dg_0$ par une constante $M_* > 0$ (cette constante ne dépend que de C , d et g_0).

Pour la même raison, on majore $|f_\lambda^{\text{om}}(z) - z|$ uniformément en z et λ sur l'ensemble W_g (l'image de cet ensemble par f_λ^{om} étant incluse dans l'ensemble $\{G \leq g_0\}$).

On obtient ainsi le résultat attendu. \square

Ainsi $\int_{W_g} |q| dx dy \geq \frac{K_{**}}{M^m} m |\rho - 1|$, pour une certaine constante K_{**} déterminée uniquement à partir de C et d . Il suffit maintenant de combiner cette inégalité avec l'inégalité 5.15. \square

Remarque 5.3.13 *La démonstration ci-dessus utilise le fait que l'opérateur image directe des différentielles quadratiques est une contraction pour la norme L^1 corrigée de termes sources ou puits.*

Ces aspects de la théorie des différentielles quadratiques appliquée à la dynamique holomorphe montrent leur importance dans l'article d'Adam Epstein [11] donnant un raffinement de l'inégalité de Fatou-Shishikua (la limite $\int_{A_\delta} \frac{dx dy}{|z - b_0|^2} = 2\pi \log |\rho|$ y est notée $\text{Res}(f : q)$).

5.4 Une majoration sur le diamètre de membres de l'ensemble de Mandelbrot

Du théorème 5.3.1 on peut déduire une majoration de la taille des membres correspondant à une suite de renormalisations satellites. Cette majoration permet à Guénadi Lévine de montrer que sous certaines hypothèses sur la suite de nombres de rotation (ces hypothèses sont vérifiées dans le cadre du théorème 6.2.14), l'ensemble de Mandelbrot est localement connexe en le paramètre limite de la suite de composantes hyperboliques associée à la suite de renormalisation.

Chapitre 6

Critère de non locale connexité d'ensembles de Julia quadratiques infiniment renormalisables d'après Guénadi Lévine

Le but est de redémontrer le théorème de Guénadi Lévine suivant, donnant une condition explicite sur les nombres de rotation de bifurcations satellites successives sous laquelle l'ensemble de Julia du polynôme quadratique infiniment renormalisable correspondant n'est pas localement connexe.

Théorème 6.2.14 ([19]) *Soit $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_n$ une suite de nombres rationnels avec $(p_n, q_n) = 1$ et $q_n \rightarrow \infty$.*

Soit $(\lambda_n)_n$ la suite des racines de bifurcations satellites correspondant à la suite $(p_n/q_n)_n$.

Supposons que la suite $(q_n)_n$ tende vers ∞ et que la suite $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_n$ vérifie :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right|^{1/q_n} < 1. \quad (6.1)$$

Alors la suite $(\lambda_n)_n$ converge vers un paramètre λ_ correspondant à un polynôme quadratique $z^2 + \lambda_*$ infiniment renormalisable dont l'ensemble de Julia n'est pas localement connexe.*

La démonstration repose essentiellement sur des contrôles explicites des domaines de définition des fonctions d'explosions et d'univalence des fonctions multiplicateur. Contrairement à Guénadi Lévine, nous n'utiliserons pas le théorème du chapitre précédent.

6.1 Inverse de la fonction multiplicateur

Définition 6.1.1 (cf. figure 6.1) Soit H une composante hyperbolique de l'ensemble de Mandelbrot de période m on note Ω_m l'ouvert défini par

$$\Omega_m = \left\{ \rho \in \mathbb{C} : \forall L \text{ tel que } \rho = e^L, \arctan\left(\frac{m}{2^m - 1} \frac{\pi}{\log|\rho|}\right) \frac{|L|^2}{\log|\rho|} > 2\pi m \log 2 \right\} \cup \mathbb{D}$$

et Ω_H^{\log} l'ensemble

$$\Omega_H^{\log} := \{L \in \mathbb{C} : -\pi < \text{Im } L \leq \pi \text{ et } e^L \in \Omega_m\}.$$

Lemme 6.1.2 L'ouvert Ω_m est un domaine simplement connexe.

Dém. L'ensemble Ω_m^{\log} est la réunion du demi-plan $\{z \in \mathbb{C} : \Re z < 0\}$ et du complémentaire d'un ensemble fermé C invariant par translation de $2\pi\sqrt{-1}$. L'ensemble C intersecte la droite verticale $\{\Re z = 0\}$ en des points espacés de $2\pi\sqrt{-1}$, il s'agit de l'ensemble suivant :

$$C = 2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z} + \bigcup_{r>0} (\{z : |z - Y(m, r)| \leq Y(m, r)\} \cap \{z : \Re z = r\}),$$

où

$$Y(m, r) = \frac{\pi m \log 2}{\arctan\left(\frac{m}{2^m - 1} \frac{\pi}{r}\right)}.$$

Comme les diamètres des disques $\{z : |z - Y(m, r)| \leq Y(m, r)\}$ croissent assez vite lorsque r croît et qu'ils sont tous tangents au même point à la droite verticale $\{\Re z = 0\}$, l'ouvert Ω_m est connexe et simplement connexe. \square

Comme précédemment, on note mult_H la fonction qui à un paramètre λ appartenant à la composante hyperbolique H associe le multiplicateur du cycle attractif de f_λ .

Proposition 6.1.3 L'inverse mult_H^{-1} de l'isomorphisme $\text{mult}_H : H \rightarrow \mathbb{D}$ s'étend holomorphiquement en une application univalente définie sur le domaine Ω_m .

L'image de l'application $\text{mult}_H^{-1} : \Omega_m \rightarrow \mathbb{C}$ est incluse dans le sillage de la composante hyperbolique H .

Dém.

On sait que la courbe algébrique X_m définie par

$$X_m = \overline{\{(\lambda, z) \in \mathbb{C}^2 : f_\lambda^{\circ m}(z) = z, \forall k = 1, \dots, m-1, f_\lambda^{\circ k}(z) \neq z\}}$$

est lisse et la projection $\pi : (\lambda, z) \rightarrow \lambda$ est un revêtement ramifié au dessus de l'espace des paramètres (cf. théorème 4.1.1).

L'application multiplicateur $\rho_m(\lambda, z) = (f_\lambda^{\circ k})'(z)$, définie sur X_m , est une fonction propre de X_m sur \mathbb{C} (cf. lemme 1.2.3). Donc sa restriction à $\rho_m^{-1}(\Omega_m)$ est propre sur Ω_m .

Soit \tilde{W} la réunion des composantes connexes de la préimage du sillage W de la composante hyperbolique H correspondant à la continuation du cycle associé à la composante H . La projection π restreinte à cet ouvert est un revêtement trivial au-dessus de ce sillage W car le cycle peut être suivi holomorphiquement en fonction du paramètre à l'intérieur du sillage (théorème 4.1.9).

D'après le lemme 4.2.1 on a $\rho_m(\partial\tilde{W}) \subset \mathbb{C} \setminus \Omega_m$.

L'application ρ_m est donc propre sur les composantes préimages de l'ensemble Ω_m par ρ_m qui sont incluses dans \tilde{W} . Chacune de ces composantes ne peut contenir qu'une seule préimage du disque unité, le degré de ρ_m est donc 1 (ω_m est simplement connexe) sur chacune de ces composantes.

Enfin ces composantes se projettent toutes de façon univalente sur l'espace des paramètres. \square



FIG. 6.1 – Exemples de domaines Ω_m^{\log} (à gauche en vert) et Ω_m (à droite, en vert le disque unité et en cyan le reste du domaine Ω_m).

Lemme 6.1.4 *Il existe une constante numérique $K > 1$ telle que pour tout $m \in \mathbb{N}$ assez grand, pour toute une composante hyperbolique H de l'ensemble de Mandelbrot de période m et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la distance entre $\sqrt{-1}\alpha$ et le bord de Ω_m^{\log} vérifie :*

$$\frac{1}{K} \min \left\{ \frac{|\alpha|}{2^{m/2}}, \frac{\alpha^2}{m} \right\} \leq \text{dist}(\sqrt{-1}\alpha, \partial\Omega_m^{\log}) \leq K \min \left\{ \frac{|\alpha|}{2^{m/2}}, \frac{\alpha^2}{m} \right\}.$$

Dém. Pour tout $x > 0$, on a

$$\max \left\{ \frac{x}{1+x}, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} \right\} \leq \arctan(x) \leq \min \left\{ x, \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Ainsi, on se ramène à étudier les frontières des ensembles suivants

$$\begin{aligned}\Omega_M &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\pi < y \leq \pi, \min \left\{ \frac{\phi}{x}, \frac{\pi}{2} \right\} (x^2 + y^2) > \kappa x \right\}, \\ \Omega_m &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\pi < y \leq \pi, \max \left\{ \frac{\phi}{x + \phi}, \frac{\pi}{2} - \frac{x}{\phi} \right\} (x^2 + y^2) > \kappa x \right\}\end{aligned}$$

où $\phi = \frac{m\pi}{2^m - 1}$ et $\kappa = 2\pi m \log 2$. De sorte que l'on aura l'encadrement

$$\text{dist}(\sqrt{-1}\alpha, \partial\Omega_M) \leq \text{dist}(\sqrt{-1}\alpha, \partial\Omega_m^{\log}) \leq \text{dist}(\sqrt{-1}\alpha, \Omega_m).$$

La condition $\min \left\{ \frac{\phi}{x}, \frac{\pi}{2} \right\} (x^2 + y^2) = \kappa x$ est équivalente à

$$\begin{aligned}- x &= \sqrt{\frac{\phi}{\kappa - \phi}} |y| \text{ si } |y| \geq \frac{2}{\pi} \sqrt{\phi(\kappa - \phi)} \text{ et} \\ - x &= \frac{\kappa}{\pi} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\pi^2}{\kappa^2} y^2} \right) \text{ sinon.}\end{aligned}$$

Ainsi il existe des constantes strictement positives k_1 et k_2 telles que la distance de $i\alpha$ au bord de Ω_M est minorée par $\min \left\{ k_1 \frac{|\alpha|}{2^{m/2}}, k_2 \frac{\alpha^2}{m} \right\}$ pour m assez grand.

D'autre part, on a $\frac{\phi}{x + \phi} = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{\phi}$ pour $x = \delta\phi$ où δ est la constante universelle

$$\delta = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1 + \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \left(\frac{\pi}{2} + 3 \right)} \right).$$

Par conséquent,

$$\max \left\{ \frac{\phi}{x + \phi}, \frac{\pi}{2} - \frac{x}{\phi} \right\} \geq \max \left\{ \frac{\phi}{x + \phi}, \frac{\pi}{2} - \delta \right\}.$$

La condition $\max \left\{ \frac{\phi}{x + \phi}, \frac{\pi}{2} - \delta \right\} (x^2 + y^2) = \kappa x$ est alors équivalente à

$$\begin{aligned}- x &= \frac{\kappa\phi}{2(\kappa - \phi)} \left(\sqrt{1 + 4 \frac{\kappa - \phi}{\kappa\phi} y^2} - 1 \right) \text{ pour } y^2 \geq \delta\phi(\kappa(1 + \delta) - \delta\phi) \text{ et} \\ - x &= \frac{\kappa}{\pi - 2\delta} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{(\pi - 2\delta)^2}{\kappa^2} y^2} \right) \text{ sinon.}\end{aligned}$$

Ainsi il existe des constantes strictement positives K_1 et K_2 telles que la distance de $i\alpha$ au bord de Ω_m est majorée par $\min \left\{ K_1 \frac{|\alpha|}{2^{m/2}}, K_2 \frac{\alpha^2}{m} \right\}$. \square

6.2 Suite de renormalisations satellites

Étant donnée une composante hyperbolique H de l'ensemble de Mandelbrot \mathcal{M} , on note, pour $\lambda \in H$, $\text{mult}_H(\lambda)$ le multiplicateur du cycle attractif du polynôme $z^2 + \lambda$ et m_H sa période.

Lorsque l'on considère des suites de composantes hyperboliques, on notera $\text{mult}_n := \text{mult}_{H_n}$ et $m_n := m_{H_n}$ la période du cycle attractif correspondant, ainsi que Ω_n pour le domaine Ω_{m_n} défini dans la section 6.1 (définition 6.1.1).

6.2.1 Fonctions d'explosion

Lemme 6.2.1 Soit U, V des ouverts de \mathbb{C} contenant 0. Soit $(a, \alpha) \in (\mathbb{C}^*)^2$, $q \in \mathbb{N}^*$. Soit $\varphi : U \times V \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe vérifiant, pour s et ζ voisins de 0,

$$\varphi(s, \zeta) = \alpha s^q + a\zeta^q + O(s^{q+1}) + O(s^q\zeta) + O(s\zeta^q) + O(\zeta^{q+1}).$$

Alors il existe un voisinage W de 0 et q fonctions holomorphes $(X_i : W \rightarrow V)_{i=0, \dots, q-1}$ telles que $\varphi(s, \zeta) = 0$ et $(s, \zeta) \in W \times V$ équivaut à $\exists i, \zeta = X_i(s)$.

De plus, pour tout $i \in \{0, \dots, q-1\}$, $(X'_i(0))^q = \frac{a}{\alpha}$.

Dém. Puisque, pour s et ζ voisins de 0, $\varphi(s, \zeta) = \alpha s^q (1 + O(s) + O(\zeta)) + a\zeta^q (1 + O(s) + O(\zeta))$, il existe des fonctions g_1 et g_2 holomorphes au voisinage de $(0, 0) \in U \times V$ telles que

$$\varphi(s, \zeta) = \alpha (sg_1(s, \zeta))^q + a (\zeta g_2(s, \zeta))^q$$

et $g_1(0, 0) = g_2(0, 0) = 1$.

La condition $\varphi(s, \zeta) = 0$ est alors équivalente à l'affirmation suivante. Il existe une racine q -ième γ de $\frac{a}{\alpha}$ telle que $sg_1(s, \zeta) + \gamma\zeta g_2(s, \zeta) = 0$.

Soit γ_0 une racine q -ième de $\frac{a}{\alpha}$. On note, pour $i = 1, \dots, q-1$, $\gamma_i = e^{2\sqrt{-1}\pi i/q}$ ses autres racines q -ièmes.

Par le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage W de 0 et des fonctions holomorphes $X_i : W \rightarrow \mathbb{C}$ pour lesquelles on a l'équivalence suivante : $sg_1(s, \zeta) = -\gamma_i\zeta g_2(s, \zeta)$ et $(s, \zeta) \in W \times V$ équivaut à $\zeta = X_i(s)$. Ainsi, les fonctions X_i vérifient les propriétés recherchées. \square

Proposition 6.2.2 (existence locale des fonctions d'explosion)

Soit Λ un ouvert de \mathbb{C} et S une surface de Riemann. Soit pour tout $\lambda \in \Lambda$, une application holomorphe $f_\lambda : S \rightarrow S$. On suppose que f_λ dépend holomorphiquement de λ .

On suppose qu'il existe un entier $m \in \mathbb{N}^*$, un cycle périodique $b = (b_0, \dots, b_{m-1}) \in S^m$ de f_{λ_0} de période exacte m et un nombre rationnel $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$ (avec p et q premiers entre eux) tel que le multiplicateur du cycle b est $e^{2\sqrt{-1}\pi p/q}$.

On suppose enfin que les points b_i sont des points fixes de $f_{\lambda_0}^{\circ m q}$ de multiplicité $q+1$, que l'on peut suivre le cycle b localement en fonction de λ au voisinage de λ_0 et que λ_0 n'est pas un point critique de la fonction qui à λ associe le multiplicateur du cycle correspondant.

Alors il existe un voisinage ouvert U de λ_0 dans Λ , un voisinage S de 0 dans \mathbb{C} et m fonctions holomorphes $(x_{p_i})_{i=0, \dots, m-1}$ définies sur S tels que :

1. il existe une fonction holomorphe $C : U \rightarrow S^m$ telle que $C(\lambda_0) = b$ et pour tout $\lambda \in U$, $C(\lambda)$ est un cycle périodique de l'application f_λ de période exacte m ;
2. la fonction $\rho : U \rightarrow \mathbb{C}$ qui à $\lambda \in U$ associe le multiplicateur du $C(\lambda)$ de f_λ est univalente ;
3. $S = \{s \in \mathbb{C} : \exists \lambda \in U, \rho(\lambda) = e^{2\sqrt{-1}\pi p/q} + s^q\}$;

4. $\forall i \in \{0, \dots, m-1\}, \forall s \in S, xp_i(s) = 0$ ou $\forall i \in \{0, \dots, m-1\}, xp_i(0) = 0$ et $xp'_i(0) \neq 0$;
5. pour tout $s \in S, \left(b_i + xp_i(e^{2\sqrt{-1}\pi j/q} s) \right)_{\substack{i=0, \dots, m-1 \\ j=0, \dots, q-1}}$ est un cycle périodique de f_λ avec $\rho(\lambda) = e^{2\sqrt{-1}\pi p/q} + s^q$.

Dém. (Voir aussi [3], proposition 1)

Comme le multiplicateur du cycle b est différent de 1, on peut appliquer le théorème des fonctions implicites et on peut donc suivre ce cycle en fonction de λ sur un voisinage U_0 de λ_0 . Ceci donne la fonction $C = (C_0, \dots, C_{m-1}) : U_0 \mapsto S^m$ du premier point. Par hypothèse, on peut choisir U_0 assez petit pour que la fonction $\lambda \mapsto \rho(\lambda) = (f_\lambda^{om})'(C_0(\lambda))$ soit univalente sur U_0 .

Le point fixe parabolique b_0 de $f_{\lambda_0}^{omq}$ est non dégénéré, il existe donc $a \in \mathbb{C}^*$ tel que, pour z proche de $b_0, f_{\lambda_0}^{omq}(z) = z + a(z - b_0)^{q+1} + O((z - b_0)^{q+2})$. Alors, par le théorème de Rouché, il existe des ouverts disjoints V_0, \dots, V_{m-1} , voisinages respectifs des points b_0, \dots, b_{m-1} et un voisinage ouvert $U_1 \subset U_0$ de λ_0 tels que f_λ^{omq} admet exactement $q + 1$ points fixes (comptés avec multiplicité) dans chaque V_i .

Comme la fonction multiplicateur est univalente au voisinage de λ_0 , la multiplicité de $C_0(\lambda)$ en tant que point fixe de f_λ^{omq} est strictement inférieure à $q + 1$ dans $U_2 \setminus \{\lambda_0\}$ ou $U_2 \subset U_1$ est un voisinage ouvert de λ_0 . Par conséquent, pour tout $\lambda \in U_2 \setminus \{\lambda_0\}, f_\lambda$ admet un cycle périodique ξ distinct de $C(\lambda)$ de période divisant mq et visitant chacun des ouverts V_i dans le même ordre que $C(\lambda)$. En particulier sa période est divisible par m .

Par univalence de la fonction multiplicateur ρ , on peut rétrécir le voisinage U_2 de sorte que l'on puisse supposer que ce cycle ξ est de multiplicateur distinct de 1 pour tout $\lambda \in U_2 \setminus \{\lambda_0\}$. Le théorème des fonctions implicites permet de le suivre localement. Par ailleurs les continuations $\xi(\lambda)$ de ce cycle le long de chemins tendant vers λ_0 tendent vers $b = C(\lambda_0)$. L'unicité de la fonction implicite entraîne l'impossibilité que le multiplicateur de ξ ne tendent pas vers 1 le long de tels chemins. La période du cycle ξ est donc exactement mq , car $(f_{\lambda_0}^{ok})'(b_0) \neq 1$ pour $k < mq$.

Par conséquent, pour tout $\lambda \in U_2 \setminus \{\lambda_0\},$ il existe un unique cycle périodique $\xi(\lambda)$ dans $V = V_0 \cup \dots \cup V_{m-1}$ de période exacte mq et dépendant localement holomorphiquement de λ . Cependant, la fonction ξ n'a pas de prolongement global sur U_2 du fait de problèmes de monodromie.

Soit $r > 0$ assez petit pour que, pour tout $s \in D(0, r), e^{2\sqrt{-1}\pi p/q} + s^q \in \rho(U_2)$. La fonction $\pi : D(0, r) \rightarrow \pi(D(0, r)) \subset U_2$ définie par

$$\pi(s) = \rho^{-1} \left(e^{2\sqrt{-1}\pi p/q} + s^q \right)$$

est un revêtement ramifié holomorphe de degré q , ramifié uniquement en $\lambda_0 = \pi(0)$ avec degré local q . Factoriser par π permet de suivre le cycle de période mq holomorphiquement (en s) sur un voisinage au-dessus de λ_0 .

Le cycle parabolique b de f_{λ_0} est non dégénéré, donc, pour tout $i \in \{0, \dots, q-1\}$, il existe $a_i \in \mathbb{C}^*$ tel que, pour ζ tendant vers 0,

$$f_{\lambda_0}^{\circ mq}(b_i + \zeta) = b_i + \zeta + a_i \zeta^{q+1} + O(\zeta^{q+2}).$$

On en déduit que, pour ε et ζ tendant vers 0 et pour tout $i \in \{0, \dots, q-1\}$,

$$f_{\lambda_0}^{\circ mq}(C_i(\lambda_0 + \varepsilon) + \zeta) = C_i(\lambda_0 + \varepsilon) + (\rho(\lambda_0 + \varepsilon))^q \zeta + a_i \zeta^{q+1} + O(\varepsilon \zeta^2 + \zeta^{q+2}).$$

On pose alors, pour $s \in D(0, r)$, $\varepsilon = \pi(s) - \lambda_0$. Alors $\varepsilon = \frac{s^q}{\rho} + O(s^{2q})$, où $\dot{\rho} = \frac{\partial \rho}{\partial \lambda}|_{\lambda=\lambda_0}$. On définit φ sur $D(0, r) \times W$, où W est un voisinage de 0 assez petit, par

$$\varphi(s, \zeta) = \frac{f_{\pi(s)}^{\circ qm}(C_i(\pi(s)) + \zeta) - C_i(\pi(s)) - \zeta}{\zeta}.$$

La fonction φ est holomorphe et vérifie

$$\varphi(s, \zeta) = qe^{-2\sqrt{-1}\pi p/q} s^q + a_i \zeta^q + O(s^{2q}) + O(\zeta^{q+1}) + O(s^q \zeta).$$

Ceci permet d'appliquer le lemme 6.2.1. On pose $xp_i = X_0 - b_i$. La fonction xp_i vérifie les propriétés demandées. \square

Définition 6.2.3 *Les fonctions xp_i sont appelées fonctions d'explosion.*

Remarque 6.2.4 *La proposition 6.2.2 donne l'existence des fonctions d'explosion xp_i sur un voisinage de 0.*

On peut les prolonger sur tout disque $D(0, \tilde{r})$ dont l'image par l'application $s \mapsto e^{2\sqrt{-1}\pi p/q} + s^q$ est contenue dans l'image par la fonction multiplicateur ρ d'un domaine où cette fonction est univalente, et tel que le multiplicateur du cycle $\left(b_i + xp_i(e^{2\sqrt{-1}\pi j/q} s)\right)_{\substack{i=0, \dots, m-1 \\ j=0, \dots, q-1}}$ de période mq ainsi défini reste de multiplicateur distinct de 1.

La définition qui suit concerne le cas de l'ensemble de Mandelbrot.

Définition 6.2.5 *Soit $p/q \in \mathbb{Q}^*$. Soit H une composante hyperbolique de l'ensemble de Mandelbrot, W son sillage et $\text{mult}_H : W \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction multiplicateur associée. On suppose que la composante hyperbolique H est satellite d'une composante hyperbolique H_0 .*

Soit mult_{H_0} la fonction multiplicateur associée à la composante hyperbolique H_0 .

On définit $R_0(H, p/q)$ comme étant le suprémum des nombres réels $R > 0$ ayant les propriétés suivantes :

1. *le domaine $e^{\sqrt{-1}\pi p/q} + D(0, R)$ est inclus dans le sillage de H_0 ,*
2. *la fonction mult_{H_0} est univalente sur le domaine $e^{\sqrt{-1}\pi p/q} + D(0, R)$,*
3. *le multiplicateur du cycle représenté par prolongement analytique sur $D(0, R^{1/q})$ des fonctions d'explosions associées à la racine de la composante hyperbolique H est différent de 1.*

Le rayon $R_0(H, p/q)$ dans un certain sens maximal parmi les rayons $R > 0$ sur lesquels on peut prolonger holomorphiquement les fonctions d'explosions sur les disques $D(0, R^{1/q})$.

La proposition suivante donne un minorant du rayon $R_0(H, p/q)^{1/q}$.

Proposition 6.2.6 ([20], lemma 4.1) *Soit H_1 une composante hyperbolique satellite d'une composante hyperbolique H_0 de l'ensemble de Mandelbrot, de nombre de rotation p/q par rapport à sa composante mère. Soit $m_0 = m_{H_0}$ la période de la composante hyperbolique H_0 et $m_1 = m_{H_1}$ celle de la composante H_1 .*

Soit

$$r = \left(\min \left\{ \frac{1}{2m_0q^3}, \text{dist} \left(e^{2\pi\sqrt{-1}\frac{p}{q}}, \partial\Omega_{H_0} \right) \right\} \right)^{1/q}.$$

Alors l'image du disque $S = D(0, r)$ par l'application $s \mapsto s^q + e^{2\sqrt{-1}\pi p/q}$ est contenue dans le domaine de définition de l'application $\text{mult}_{H_0}^{-1}$ (cf. proposition 6.1.3) et il existe q fonctions holomorphes $(xp_0, xp_2, \dots, xp_{q-1})$ définies sur S telles que :

1. *pour tout indice $i = 0, \dots, q-1$, $xp_i(0) = 0$ et $xp'_i(0) \neq 0$ et*
2. *pour tout nombre complexe $s \in S$, l'ensemble*

$$\left\{ b_i + xp_i(se^{2\pi\sqrt{-1}j/q}), i = 0, \dots, q-1, j = 0, \dots, q-1 \right\}$$

est le cycle de période $m_1 = qm_0$ du polynôme quadratique $z^2 + \text{mult}_{H_0}^{-1}(e^{2\pi\sqrt{-1}p/q} + s^q)$, attractif sur H_1 , où $\{b_i\}_i$ est le m_{H_0} -cycle parabolique du polynôme $z^2 + \text{mult}_{H_0}^{-1}(e^{2\pi\sqrt{-1}p/q})$.

Dém.

D'après la remarque 6.2.4, il suffit que l'image du disque $D(0, r)$ par l'application $s \mapsto e^{2\sqrt{-1}\pi p/q} + s^q$ soit, d'une part, incluse dans le domaine Ω_{H_0} , ce qui est garanti par la définition du rayon r , et d'autre part, que le multiplicateur du cycle de période $m_1 = m_0q$, paramétré par $s \in D(0, r)$, reste distinct de 1.

Supposons qu'il existe $s \in D(0, r)$ tel que le multiplicateur du prolongement du cycle γ tend vers la valeur 1 lorsque le paramètre tend vers le paramètre $\lambda = \text{mult}_{H_0}^{-1}(e^{2\sqrt{-1}\pi p/q} + s^q)$.

Alors le paramètre λ est une racine d'un membre de l'ensemble de Mandelbrot attaché en la composante hyperbolique H_0 car l'image du domaine Ω_{H_0} par l'application $\text{mult}_{H_0}^{-1}$ est incluse dans le sillage de H_0 . Soit p'/q' le nombre de rotation de ce membre.

D'après le lemme 6.1 de [19], le dénominateur de ce nombre de rotation vérifie $q' \leq q+1$.

La taille des disques de Yoccoz permet de voir que cela n'est pas possible sur le disque $D(0, r)$. \square

Lemme 6.2.7 *Soit H_0 une composante hyperbolique de l'ensemble de Mandelbrot de période m . Soit $p/q \in \mathbb{Q}$ avec p et q premiers entre eux et soit H_1 l'unique composante hyperbolique attachée à H_0 avec nombre de rotation p/q .*

Soit mult_{H_1} un prolongement holomorphe au voisinage de la racine de la composante hyperbolique H_1 de la fonction multiplicateur de la continuation analytique du cycle associé à H_1 .

Pour tout $r < R_0(H_0, p/q)$, la fonction mult_{H_1} est bien définie sur $\text{mult}_{H_0}^{-1} \left(D(e^{2\pi\sqrt{-1}p/q}, r) \right)$ et on a :

$$\text{mult}_{H_1} \circ \text{mult}_{H_0}^{-1} \left(D(e^{2\pi\sqrt{-1}p/q}, r) \right) \supset D \left(1, \frac{q^2}{16} r \right),$$

où mult_{H_0} désigne la fonction multiplicateur associée à la composante hyperbolique H_0 et mult_{H_1} la fonction multiplicateur associée à la composante hyperbolique H_1 .

Dém. La démonstration repose sur deux lemmes. Le premier lemme est un résultat classique.

Lemme 6.2.8

$$\left(\text{mult}_{H_1} \circ \text{mult}_{H_0}^{-1} \right)' \left(e^{2\pi\sqrt{-1}\frac{p}{q}} \right) = -\frac{q^2}{e^{2\pi\sqrt{-1}\frac{p}{q}}}$$

Dém. On sait qu'en ce qui concerne le cycle de période m_0 et de multiplicateur $e^{2\pi\sqrt{-1}p/q}$ en le paramètre λ_0 point d'attache de la composante hyperbolique H_1 , il peut être suivi de façon holomorphe au voisinage de ce paramètre, c'est-à-dire qu'il existe une fonction holomorphe $\lambda \mapsto \xi(\lambda)$ définie au voisinage de λ_0 vérifiant

$$f_\lambda^{\circ m_0}(\xi(\lambda)) = \xi(\lambda),$$

pour tout paramètre λ appartenant à ce voisinage. On définit la famille de fonctions holomorphes g_u en posant :

$$g_u(z) = f_{\lambda_0+u}^{\circ m_0}(\xi(\lambda_0 + u) + z) - \xi(\lambda_0 + u),$$

pour u voisin de λ_0 . Les fonctions g_u vérifient $g_u(0) = 0$, pour tout u dans un voisinage de λ_0 , et on a $g'_u(0) = e^{2\sqrt{-1}\pi p/q}$.

Ainsi, il existe une constante $c \in \mathbb{C}$ telle que pour $u \rightarrow 0$ on a

$$g_u(z) = \left(e^{2\sqrt{-1}\pi p/q} + cu \right) z + O(uz^2) + O(u^2) + O(z^2).$$

La fonction holomorphe g_0 possède un point fixe 1-parabolique en 0. Comme l'application f_{λ_0} a un unique point fixe, il n'y a qu'un seul cycle de pétales attaché au point fixe parabolique. Il existe donc une constante $\gamma \in \mathbb{C}^*$ telle que :

$$g_u^{\circ q}(z) = \left(1 + qe^{-2\sqrt{-1}\pi p/q} cu \right) z + \gamma z^{q+1} + O(uz^2) + O(u^2 z) + O(z^{q+2}).$$

Un point ζ du cycle de g_u , attractif pour les paramètres $\lambda_0 + u$ appartenant à la composante hyperbolique H_1 , tend vers le point 0 lorsque $u \rightarrow 0$ et satisfait alors

$$qe^{-2\sqrt{-1}\pi p/q}cu\zeta + \gamma\zeta^{q+1} = O(u\zeta^2) + O(u^2\zeta) + O(\zeta^{q+2}),$$

ce qui entraîne $\gamma\zeta^q = -qe^{-2\sqrt{-1}\pi p/q}cu + O(u\zeta^2) + O(u^2\zeta) + O(\zeta^{q+2}) = O(u)$.

Par conséquent

$$(g_u^{\circ q})'(\zeta(u)) = 1 + qe^{-2\sqrt{-1}\pi p/q}cu + (q+1)\gamma\zeta(u)^q + o(u)$$

et donc

$$\frac{(g_u^{\circ q})'(0) - 1}{g_u'(0) - e^{2\sqrt{-1}\pi p/q}} = -\frac{q^2}{e^{2\pi\sqrt{-1}\frac{p}{q}}}.$$

□

L'autre lemme utile est un lemme de surjectivité, appelé lemme de Carathéodory-Fekete dans [20] (attribué à Hurwitz par Zéev Néhari dans [27], theorem I).

Lemme 6.2.9 *Si une fonction holomorphe f définie sur le disque $D(0, 1)$ vérifie $f(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ et si $f'(0) = 1$, alors $f(D(0, 1)) \supset D(0, \frac{1}{16})$.*

Dém. Supposons que le nombre complexe $a \in \mathbb{C}^*$ ne soit pas dans l'image. Alors la restriction de l'application holomorphe f à $D(0, 1) \setminus \{0\} = \mathbb{D}^*$ est à valeurs dans la surface hyperbolique $\mathbb{C}^* \setminus \{a\}$. Ainsi sa dérivée par rapport aux métriques hyperboliques respectives des surfaces hyperboliques \mathbb{D}^* et $\mathbb{C}^* \setminus \{a\}$ doit être majorée par 1.

Le résultat découle alors d'une estimation de la métrique hyperbolique de la surface $\mathbb{C}^* \setminus \{a\}$ au voisinage du point 0. Cette estimation se fait grâce à l'expression analytique du revêtement universel de cette surface (voir, par exemple, [28], chapter VI, section 6). □

Soit $g = \text{mult}_{H_1} \circ \text{mult}_{H_0}^{-1}$. On note que, par définition de R_0 , la fonction g est bien définie et ne peut valoir 1 sur $D(e^{2\pi\sqrt{-1}p/q}, r) \setminus \{e^{2\pi\sqrt{-1}p/q}\}$.

Appliquant ce lemme à une transformation affine de la fonction g , dont on peut donner la formule avec l'aide du lemme précédent, cela donne :

$$g\left(D(e^{2\pi\sqrt{-1}p/q}, r)\right) \supset D\left(1, \frac{q^2}{16}r\right).$$

□

Afin de montrer la convergence d'une suite de paramètres correspondant à des bifurcations satellites successives il faut ajouter une contrainte au domaine sur lequel on suit les explosions de cycles.

Définition 6.2.10 Soient $H, p/q$ et H_0 d'un contexte identique à celui de la définition 6.2.5. On définit $R(H, p/q)$ comme étant le suprémum des nombres réels $R > 0$ vérifiant, en outre des propriétés 1, 2, 3 de la définition 6.2.5, la propriété suivante.

Pour tout $\theta \in \mathbb{C}$ tel que $|\theta| = 1$, l'équation

$$\text{mult}_H \circ \text{mult}_{H_0}^{-1}(\rho) = \theta$$

admet au plus une solution sur le disque $D(e^{2\sqrt{-1}\pi p/q}, R)$.

On a $R_0(H, p/q) \geq R(H, p/q) > 0$. Le lemme suivant donne une minoration de $R(H, p/q)$. La vitesse de croissance de p_n/q_n imposée à la suite de nombres de rotation $(p_n/q_n)_n$ permettra d'utiliser ce lemme et donc de se passer d'une l'hypothèse de convergence des paramètres racines λ_n .

Lemme 6.2.11 Soit H_1 une composante hyperbolique satellite d'une composante hyperbolique H_0 de l'ensemble de Mandelbrot, de nombre de rotation p/q par rapport à sa composante mère. Soit $m_0 = m_{H_0}$ la période de la composante hyperbolique H_0 et $m_1 = m_{H_1}$ celle de la composante H_1 .

Soit

$$r = \left(\min \left\{ \frac{1}{2m_0q^3}, \text{dist} \left(e^{2\pi\sqrt{-1}\frac{p}{q}}, \partial\Omega_{H_0} \right) \right\} \right)^{1/q}$$

et soit $\theta \in \mathbb{C}$ tel que $|\theta| = 1$.

Alors, sur le disque $B = D(e^{2\sqrt{-1}\pi p/q}, r^q)$, l'équation

$$\text{mult}_{H_1} \circ \text{mult}_{H_0}^{-1}(\rho) = \theta$$

admet au plus une solution.

Dém. L'argument est le même que pour la fin de la démonstration du théorème 6.2.6 : si l'application f_c , pour $c \in \mathcal{M}$, admet un cycle neutre de période m_1 alors le paramètre c se trouve sur le membre dont la racine est la racine de la composante hyperbolique H_1 , sur le bord d'une composante hyperbolique H . Cette composante hyperbolique ne peut être que H_1 puisqu'en dehors de celle-ci, et à l'intérieur du sillage de H_1 , le multiplicateur est de module plus grand que 1. \square

6.2.2 Rayon de contrôle

Étant donnée une composante hyperbolique H de l'ensemble de Mandelbrot \mathcal{M} , satellite d'une autre composante H_0 avec nombre de rotation p/q où $(p, q) = 1$ on note

$$\tilde{R}(H_0, p/q) = \min \left\{ \frac{1}{2m_{H_0}q^3}, \text{dist} \left(2\pi\sqrt{-1}\frac{p}{q}, \partial\Omega_{H_0} \right) \right\}.$$

Où Ω_{H_0} est le domaine défini dans la proposition 6.1.3. On rappelle qu'on a $m_H = qm_{H_0}$. On a vu que $\tilde{R}(H_0, p/q) \leq R(H_0, p/q)$ (cf. définition 6.2.5).

Dans le cas où l'on considère une suite de composantes hyperboliques satellites H_{n+1} de nombres de rotation p_n/q_n par rapport à leur composantes mères respectives, on notera $R_n := R(H_n, p_n/q_n)$ et $\tilde{R}_n := \tilde{R}(H_n, p_n/q_n)$.

6.2.3 Convergence de la suite des racines des bifurcations satellites

Soit $H_0 = H_\heartsuit$ la composante hyperbolique principale de l'ensemble de Mandelbrot. Étant donnée une suite de nombres rationnels $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_n$, on définit les suites $(H_n)_n$ et $(\lambda_n)_n$ par récurrence en assignant à λ_n le paramètre racine de la composante hyperbolique H_{n+1} attachée à H_n en le point d'argument interne p_n/q_n .

On a ainsi défini la suite $(\lambda_n)_n$ des racines de bifurcations satellites correspondantes à la suite $(p_n/q_n)_n$.

Théorème 6.2.12 ([19]) *Il existe une constante numérique $C > 0$ ayant les propriétés suivantes.*

Soit $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_n$ une suite de nombres rationnels avec $(p_n, q_n) = 1$.

Soit $(\lambda_n)_n$ la suite des racines de bifurcations satellites correspondant à la suite $(p_n/q_n)_n$.

Soit R_n une suite de nombres réels strictement positifs tels que la fonction $\text{mult}_n^{-1} \circ \exp$ est définie et univalente sur le disque $D\left(2\sqrt{-1}\pi\frac{p_n}{q_n}, R_n\right)$.

Supposons que la suite $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_n$ vérifie, à partir d'un certain rang, la condition

$$\frac{C}{q_n^2} \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| < R_n. \quad (6.2)$$

Alors la suite $(\lambda_n)_n$ converge vers un paramètre λ_ correspondant à un polynôme quadratique $z^2 + \lambda_*$ infiniment renormalisable.*

Dém. On pose, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\psi_n := \text{mult}_n^{-1} \circ \exp$. Par définition de la constante R_n , la fonction ψ_n est définie holomorphe et univalente sur le disque $D\left(2\sqrt{-1}\pi\frac{p_n}{q_n}, R_n\right)$.

Soit $C = 2738$, $\alpha = 243/500$. On considère les domaines

$$D_n = \psi_n \left(D \left(2\sqrt{-1}\pi\frac{p_n}{q_n}, \frac{\alpha C}{q_n^2} \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| \right) \right).$$

On va montrer qu'ils forment une suite décroissante de domaines emboîtés dont les diamètres tendent vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$. Pour ce faire on aura besoin des domaines intermédiaires

$$D'_n = \psi_n \left(D \left(2\sqrt{-1}\pi\frac{p_n}{q_n}, \frac{\beta C}{q_n^2} \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| \right) \right),$$

où $\beta = \frac{1469}{10000}$.

1. Premièrement on voit que $\lambda_{n+1} \in D'_n$. On a :

$$\exp \left(D \left(2\pi\sqrt{-1}\frac{p_n}{q_n}, \frac{\beta C}{q_n^2} \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| \right) \right) \supset D \left(e^{2\sqrt{-1}\pi\frac{p_n}{q_n}}, \frac{\beta C}{4q_n^2} \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| \right).$$

Grâce à la proposition 6.2.6, on sait que mult_{n+1} est bien définie sur le domaine D'_n , donc, d'après le lemme 6.2.7

$$\text{mult}_{n+1}(D'_n) \supset D \left(1, \frac{\beta C}{64} \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| \right).$$

$$\text{Or } \left| e^{2\sqrt{-1}\pi\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}} - 1 \right| < 2\pi \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| \leq \frac{\beta C}{64} \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right|.$$

Et donc, par injectivité (lemme 6.2.11) on a $\lambda_{n+1} \in D'_n$.

2. Le paramètre λ_n n'appartient pas au domaine D_{n+1} car, $0 \notin D \left(2\sqrt{-1}\pi\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}, R_{n+1} \right)$.
3. Montrons que $D_{n+1} \subset D_n$ et que $\text{diam } D_{n+1} \leq u \text{diam } D_n$, où u est une constante vérifiant $0 < u < 1$.

Comme la fonction ψ_n est univalente sur le disque $D(0, R_n)$, l'inégalité 6.2 et une inégalité de distorsion classique (voir, par exemple, [9], theorem 2.6) entraînent, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$D \left(\lambda_n, r_n \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} \right) \subset D_n \subset D \left(\lambda_n, r_n \frac{\alpha}{1 - \alpha^2} \right) \quad (6.3)$$

ainsi que

$$D \left(\lambda_n, r_n \frac{\beta}{1 + \beta^2} \right) \subset D'_n \subset D \left(\lambda_n, r_n \frac{\beta}{1 - \beta^2} \right), \quad (6.4)$$

$$\text{où } r_n = \frac{C}{q_n^2} \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| \left| \psi'_n \left(2\sqrt{-1}\pi\frac{p_n}{q_n} \right) \right|.$$

Une conséquence de ces inclusions et du fait que le paramètre λ_n n'appartient pas à D_{n+1} est l'inégalité $|\lambda_{n+1} - \lambda_n| \geq \frac{\alpha r_{n+1}}{1 + \alpha^2}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} D_{n+1} &\subset D \left(\lambda_{n+1}, \frac{\alpha r_{n+1}}{1 - \alpha^2} \right) \\ &\subset D \left(\lambda_{n+1}, \frac{1 + \alpha^2}{1 - \alpha^2} |\lambda_{n+1} - \lambda_n| \right) \\ &\subset D \left(\lambda_n, \frac{2}{1 - \alpha^2} |\lambda_{n+1} - \lambda_n| \right). \end{aligned}$$

Or $\lambda_{n+1} \in D'_n$, donc $|\lambda_{n+1} - \lambda_n| \leq \frac{\beta r_n}{1 - \beta^2}$. Ainsi

$$\begin{aligned} D_{n+1} &\subset D \left(\lambda_n, \frac{\beta r_n}{1 - \beta^2} \frac{2}{1 - \alpha^2} \right) \\ &\subset D \left(\lambda_n, \frac{\beta r_n}{1 - \beta^2} \frac{2/u}{1 - \alpha^2} \right), \end{aligned}$$

avec $u = 99999/100000$. Or,

$$\frac{\beta r_n}{1 - \beta^2} \frac{2/u}{1 - \alpha^2} = \frac{\alpha r_n}{1 + \alpha^2} \frac{2}{u} \frac{\beta}{\alpha} \frac{1 + \alpha^2}{1 - \beta^2} \frac{1}{1 - \alpha^2}.$$

On vérifie alors que $\frac{2}{u} \frac{\beta}{\alpha} \frac{1 + \alpha^2}{1 - \alpha^2} \frac{1}{1 - \beta^2} < 1$. Ainsi

$$D_{n+1} \subset D_n,$$

ce qui donne le résultat attendu.

Par conséquent, comme $\lambda_n \in D_n$, la suite $(\lambda_n)_n$ converge vers un paramètre $\lambda_* \in M$ dont le polynôme correspondant $z^2 + \lambda_*$ est infiniment renormalisable. \square

6.2.4 Non locale connexité de l'ensemble de Julia du paramètre limite

Lemme 6.2.13 *Soit $R > 0$. Alors il existe un nombre réel $R_* > 0$, ne dépendant que du nombre réel R , tel que pour tout nombre complexe $\lambda \in D(0, R)$, les cycles périodiques du polynôme quadratique $f_\lambda(z) = z^2 + \lambda$ sont tous inclus dans le disque fermé $\overline{D(0, R_*)}$.*

Dém. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $R_* := \max \left\{ (1 + \varepsilon)\sqrt{R}, \frac{1}{1 - \frac{1}{(1 + \varepsilon)^2}} \right\}$, alors, pour tout couple de nombres complexes (λ, z) vérifiant $\lambda \leq R$ et $|z| > R_*$, on a

$$\begin{aligned} |f_\lambda(z)| &\geq |z|^2 \left(1 - \left| \frac{\lambda}{z^2} \right| \right) \\ &\geq \left(1 - \frac{1}{(1 + \varepsilon)^2} \right) |z|^2, \end{aligned}$$

ce qui entraîne que la suite $(|f_\lambda^{on}(z)|)_n$ tend vers ∞ lorsque $n \rightarrow \infty$ car $\left(1 - \frac{1}{(1 + \varepsilon)^2} \right) |z| > 1$. \square

Théorème 6.2.14 ([19]) *Soit $\left(\frac{p_n}{q_n} \right)_n$ une suite de nombres rationnels avec $(p_n, q_n) = 1$ et $q_n \rightarrow \infty$.*

Soit $(\lambda_n)_n$ la suite des racines de bifurcations satellites correspondant à la suite $(p_n/q_n)_n$.

Supposons que la suite $(q_n)_n$ tende vers ∞ et que la suite $\left(\frac{p_n}{q_n} \right)_n$ vérifie :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right|^{1/q_n} < 1. \quad (6.5)$$

Alors la suite $(\lambda_n)_n$ converge vers un paramètre λ_ correspondant à un polynôme quadratique $z^2 + \lambda_*$ infiniment renormalisable dont l'ensemble de Julia n'est pas localement connexe.*

Pour la démonstration de ce théorème, on a besoin du corollaire des lemmes suivants.

Lemme 6.2.15 *Il existe une fonction continue $H : [0, 1[\rightarrow [0, +\infty[$ satisfaisant la propriété suivante.*

Soit $r > 0$ et soit X, C et \tilde{C} des fonctions holomorphes définies sur le disque $D(0, r)$.

On suppose que

1. *pour tout $s \in D(0, r) \setminus \{0\}$, $\tilde{C}(s) \neq X(s)$;*
2. *$\forall s \in D(0, r)$, $X(s) = C(s) \Leftrightarrow s = 0$;*
3. *$\forall s \in D(0, r)$, $\tilde{C}(s) = C(s) \Rightarrow s = 0$;*
4. *l'ordre d'annulation de $\tilde{C} - C$ en 0 est au plus égal à l'ordre d'annulation de $X - C$ moins 1.*

Alors, pour tout $s \in D(0, r)$,

$$|X(s) - C(s)| \leq |\tilde{C}(s) - C(s)| H\left(\frac{|s|}{r}\right).$$

Dém. Soit φ la fonction définie par

$$\varphi(s) = \frac{X(s) - C(s)}{\tilde{C}(s) - C(s)}.$$

La fonction φ est définie holomorphe sur $D(0, r)$. De plus elle a les propriétés suivantes :

- $\forall s \in D(0, r)$, $\varphi(s) \neq 1$,
- $\forall s \in D(0, r)$, $\varphi(s) = 0 \Leftrightarrow s = 0$,
- le point 0 est un zéro simple de φ .

Ces propriétés entraînent alors la majoration :

$$|\varphi(s)| \leq H\left(\frac{|s|}{r}\right),$$

où $H : [0, 1[\rightarrow [0, \infty[$ est la fonction

$$H(u) = \sup \{|g(z)| : |z| \leq u, g : D(0, 1) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{1\} \text{ holomorphe, } g(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0\}.$$

La fonction H est localement bornée continue car l'ensemble de fonctions $\{g : D(0, 1) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{1\} \text{ holomorphe, } g(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0\}$ est relativement compact dans l'espace des fonctions holomorphes définies sur $D(0, 1)$. \square

Remarque 6.2.16 *On peut montrer que la fonction H vérifie (cf. [27] ainsi que [19], section 4.3),*

$$\begin{aligned} H(u) &= 16u \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1 + u^{2k})^8}{(1 - u^{2k-1})^8} \\ &\leq \frac{1}{16} e^{-\pi^2 / \log u} \end{aligned}$$

pour tout $u \in [0, 1[$.

Lemme 6.2.17 Soit $R > 0$, $\rho > 0$, $q \in \mathbb{N}^*$. Soit Y une fonction holomorphe définie sur le disque $D(0, \rho)$ et à valeurs dans le disque $D(0, R)$.

Alors, pour tout $t \in D(0, \rho)$,

$$|Y(te^{2\sqrt{-1}\pi/q}) - Y(t)| \leq \frac{2\pi R}{q} \frac{|t|/\rho}{1 - (|t|/\rho)^2}.$$

Dém. Par contraction hyperbolique on a :

$$\begin{aligned} \left| \frac{Y(s)}{R} - \frac{Y(se^{2\sqrt{-1}\pi/q})}{R} \right| &\leq d_{\mathbb{D}} \left(\frac{Y(s)}{R}, \frac{Y(se^{2\sqrt{-1}\pi/q})}{R} \right) \\ &\leq d_{D(0, \rho)}(s, se^{2\sqrt{-1}\pi/q}) \\ &\leq \frac{2\pi}{q} \frac{|s|/\rho}{1 - (|s|/\rho)^2}. \end{aligned}$$

□

Corollaire 6.2.18 Soit $r, R, \rho, q, X, C, \tilde{C}$ et Y comme dans les lemmes 6.2.15 et 6.2.17 ci-dessus.

Soit $s \in D(0, r)$. On suppose qu'il existe $t \in D(0, \rho)$ tel que $C(s) = Y(t)$ et $\tilde{C}(s) = Y(te^{2\sqrt{-1}\pi/q})$.

Alors

$$|X(s) - C(s)| \leq \frac{2\pi R}{q} \frac{|t|/\rho}{1 - (|t|/\rho)^2} H \left(\frac{|s|}{r} \right).$$

Dém. Il s'agit juste d'une juxtaposition des deux lemmes précédents. □

Dém. (du théorème 6.2.14) Le but principal de cette démonstration est de pouvoir utiliser le critère de Douady-Sullivan en contrôlant les explosions des cycles.

On voit facilement que la condition 6.5 entraîne la condition 6.2 du théorème 6.2.12 de sorte que la suite de paramètres $(\lambda_n)_n$ converge vers un paramètre λ_* pour lequel le polynôme quadratique $z^2 + \lambda_*$ est infiniment renormalisable.

Par hypothèse il existe une constante $\alpha \in]0, 1[$ et un entier n_0 tel que pour tout entier n vérifiant $n \geq n_0$,

$$\left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| \leq \alpha^{q_n}. \quad (6.6)$$

Quitte à ne considérer que la queue de la suite $(p_n/q_n)_n$, on renormalise de sorte que $n_0 = 0$.

Par conséquent, si l'ensemble de Julia correspondant au paramètre limite de cette nouvelle suite de renormalisations satellites n'est pas localement connexe, il en est de même pour l'ensemble de Julia de la limite de la suite originale (c'est une conséquence du "principe de connexité", voir, par exemple, [21] theorem 6.13).

Supposons dorénavant que l'inégalité $\left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| \leq \alpha^{q_n}$ est vraie pour tout entier n (les nombres de rotations ayant été modifiés en conséquence de la renormalisation).

On reprend les notations de la preuve du théorème précédent. On considère notamment la suite de domaines emboîtés D_n convergeant vers λ_* définie par :

$$D_n = \psi_n^{-1} \left(D \left(2\sqrt{-1}\pi \frac{p_n}{q_n}, d_n \right) \right),$$

avec $d_n = O \left(\frac{1}{q_n^2} \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| \right)$.

On note $\text{Cycle}_n = (\text{Cycle}_{n,0}, \dots, \text{Cycle}_{n,m_n-1})$ l'application holomorphe définie sur le sillage W_n qui à un paramètre λ de ce sillage associe le cycle de f_λ qui est attractif sur la composante hyperbolique H_n (et indifférent ou répulsif en les autres points du sillages), en particulier on suppose que, pour tout $\lambda \in W_n$ et tout $i \in \{0, \dots, m_n - 2\}$,

$$f_\lambda(\text{Cycle}_{n,i}(\lambda)) = \text{Cycle}_{n,i+1}(\lambda)$$

et

$$f_\lambda(\text{Cycle}_{n,m_n-1}(\lambda)) = \text{Cycle}_{n,0}(\lambda).$$

Ces fonctions s'étendent continuellement sur l'adhérence du sillage. On choisit en outre, lorsque $n \geq 1$, l'élément du cycle représenté par la fonction $\text{Cycle}_{n,0}$ de sorte que la limite de cette fonction lorsque le paramètre tend vers la racine λ_{n-1} du sillage est égale à $\text{Cycle}_{n-1,0}$ en ce paramètre. Ainsi, pour tout entier $i \in \{0, \dots, m_n - 1\}$, si $i \bmod q_{n-1} \equiv j \in \{0, \dots, m_{n-1} - 1\}$, alors $\text{Cycle}_{n,i}(\lambda_{n-1}) = \text{Cycle}_{n-1,j}(\lambda_{n-1})$.

On sait, d'après la proposition 6.1.3, que la fonction mult_n est un isomorphisme entre D_n et $\exp \left(D \left(2\pi\sqrt{-1}\frac{p_n}{q_n}, d_n \right) \right)$. De plus, grâce à la proposition 6.2.6, on sait qu'on peut suivre l'explosion du cycle Cycle_{n+1} sur un voisinage de la racine de la composante hyperbolique H_{n+1} . Précisément, il existe $m_{n+1} = q_n m_n$ fonctions holomorphes $\text{Cycleexp}_{n,i}$ définies sur le disque $D \left(1, R_n^{1/q_n} \right)$ telles l'ensemble $\{\text{Cycleexp}_{n,i}(s), i = 0, \dots, m_{n+1}\}$ est l'ensemble des points d'un cycle m_{n+1} -périodique du polynôme quadratique f_λ , où le paramètre λ vérifie $\text{mult}_n(\lambda) = e^{2\pi\sqrt{-1}\frac{p_n}{q_n}} + s^{q_n}$ et ce cycle est attractif lorsque $\lambda \in H_{n+1}$. Les fonctions $\text{Cycleexp}_{n,i}$ sont définies par :

$$\text{Cycleexp}_{n+1,i}(s) = \text{Cycle}_{n,j}(\lambda_n) + xp_{n,j} \left(se^{2\sqrt{-1}\pi \frac{kp_n}{q_n}} \right),$$

où $i = j + kq_n$ et la fonction $xp_{n,j}$ est la fonction d'explosion dont il est question dans la proposition 6.2.6.

Soit $i \in \{0, \dots, m_n - 1\}$, $j \in \{0, \dots, m_{n+1} - 1\}$ tels que $j \equiv i \bmod q_{n-1}$. On va chercher à appliquer le corollaire 6.2.18.

Les paramètres que l'on considère se trouvent dans un voisinage relativement compact de l'ensemble de Mandelbrot. Les points $\text{Cycle}_{n,i}(\lambda)$ des cycles correspondant à des paramètres

de ce voisinage sont donc tous inclus dans un disque de rayon fini R_c indépendant de la valeur de λ et de n (lemme 6.2.13). En conséquence de quoi les fonctions holomorphes $Y(t) = \text{Cycleexp}_{n-1,i}(t)$ et $\text{Cycleexp}_{n-1,i}\left(te^{2\pi\sqrt{-1}/q_{n-1}}\right)$ définies sur le disque $D\left(0, R_{n-1}^{1/q_{n-1}}\right)$, sont à valeurs dans le disque de rayon R_c centré en 0. En outre il existe i' tel que pour tout $t \in D\left(0, R_{n-1}^{1/q_{n-1}}\right)$ tel que $\text{mult}_{n-1}^{-1}\left(e^{2\sqrt{-1}\pi p_{n-1}/q_{n-1}} + t^{q_{n-1}}\right) \in W_n$,

$$\text{Cycleexp}_{n-1,i}\left(te^{2\pi\sqrt{-1}/q_{n-1}}\right) = \text{Cycle}_{n,i'}\left(\text{mult}_{n-1}^{-1}\left(e^{2\sqrt{-1}\pi p_{n-1}/q_{n-1}} + t^{q_{n-1}}\right)\right).$$

En particulier, il existe $t \in D\left(0, d_{n-1}^{1/q_{n-1}}\right)$ tel que $\text{Cycle}_{n,i}(\lambda_*) = \text{Cycleexp}_{n-1,i}(t)$ et $\text{Cycle}_{n,i'}(\lambda_*) = \text{Cycleexp}_{n-1,i}\left(te^{2\pi\sqrt{-1}/q_{n-1}}\right)$.

La distance entre les points $Y(s)$ et $Y(se^{2\sqrt{-1}\pi/q_{n-1}})$ peut être vue comme la distance minimale entre deux points du cycle explosant (celui qui est attractif sur la composante H_n).

D'autre part les fonctions

$$\begin{aligned} X(s) &= \text{Cycleexp}_{n+1,j}(s), \\ C(s) &= \text{Cycle}_{n,i}\left(\text{mult}_n^{-1}\left(e^{2\sqrt{-1}\pi p_n/q_n} + s^{q_n}\right)\right) \text{ et} \\ \tilde{C}(s) &= \text{Cycle}_{n,i'}\left(\text{mult}_n^{-1}\left(e^{2\sqrt{-1}\pi p_n/q_n} + s^{q_n}\right)\right) \end{aligned}$$

sont holomorphes sur le disque $D\left(0, R_n^{1/q_n}\right)$ vérifient les propriétés suivantes.

Pour tout $s \in D\left(0, R_n^{1/q_n}\right) \setminus \{0\}$, $C(s) \neq X(s)$, $\tilde{C}(s) \neq X(s)$ et $\tilde{C}(s) \neq C(s)$. En outre $\tilde{C}(0) \neq C(0)$ mais $C(0) = X(0)$.

Il existe $s \in D(0, d_n^{1/q_n})$ tel que $\lambda_* = e^{2\sqrt{-1}\pi p_n/q_n} + s^{q_n}$. Ainsi, d'après le corollaire 6.2.18 (et la monotonie du majorant en terme de $|s|$ et $|t|$), on a

$$|\text{Cycle}_{n+1,j}(\lambda_*) - \text{Cycle}_{n,i}(\lambda_*)| \leq \frac{2\pi R_c}{q_{n-1}} \frac{(d_{n-1}/R_{n-1})^{1/q_{n-1}}}{1 - (d_{n-1}/R_{n-1})^{2/q_{n-1}}} H\left(\left(\frac{d_n}{R_n}\right)^{1/q_n}\right),$$

où $H : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction universelle bornée sur tout intervalle compact de $[0, 1[$.

Le polynôme f_λ possède deux point fixes dépendant holomorphiquement de λ sur le domaine D_0 . En outre ils sont distincts sur ce domaine. Le premier est décrit par la fonction $\text{Cycle}_{0,0}$. La fonction décrivant le second point fixe sera appelée ζ . Ainsi on montre de la même façon que précédemment l'inégalité suivante :

$$|\text{Cycle}_{1,j}(\lambda_*) - \text{Cycle}_{0,0}(\lambda_*)| \leq |\text{Cycle}_{0,0}(\lambda_*) - \zeta(\lambda_*)| H\left(\left(\frac{d_0}{R_0}\right)^{1/q_0}\right).$$

Lemme 6.2.19 *Soit $\lambda \neq 0$ et α et β les deux points fixes distincts du polynôme quadratique $f_\lambda(z) = z^2 + \lambda$, alors*

$$\alpha - \beta = 2\alpha - 1.$$

Dém. Comme les nombres complexes α et β sont des points fixes du polynôme quadratique f_λ , on a $\alpha - \beta = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$ ce qui entraîne $\alpha + \beta = 1$. Ainsi, de l'identité $(\alpha + \beta)^2 = 1$ on déduit que $1 = 2\alpha(\alpha + \beta) - \alpha + \beta$. \square

Ce lemme permet de majorer $|\text{Cycle}_{0,0}(\lambda_*) - \zeta(\lambda_*)|$:

$$\begin{aligned} |\text{Cycle}_{0,0}(\lambda_*) - \zeta(\lambda_*)| &= |1 - \text{mult}_0(\lambda_*)| \\ &\leq \left| 1 - e^{2\sqrt{-1}\pi\frac{p_0}{q_0}} \right| + \left| e^{2\sqrt{-1}\pi\frac{p_0}{q_0}} - \text{mult}_0(\lambda_*) \right| \\ &\leq 2\pi \left| \frac{p_0}{q_0} \right| + d_0. \end{aligned}$$

On a alors montré l'inégalité suivante, vraie pour tout entier $n \geq 0$ et tout entier $j \in \{0, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned} |\text{Cycle}_{n,j}(\lambda_*) - \text{Cycle}_{0,0}(\lambda_*)| &\leq \left(2\pi \left| \frac{p_0}{q_0} \right| + d_0 \right) H \left(\left(\frac{d_0}{R_0} \right)^{1/q_0} \right) + \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2\pi R_c}{q_{k-1}} \frac{(d_{k-1}/R_{k-1})^{1/q_{k-1}}}{1 - (d_{k-1}/R_{k-1})^{2/q_{k-1}}} H \left(\left(\frac{d_k}{R_k} \right)^{1/q_k} \right). \end{aligned}$$

Pour tout paramètre λ_* tel que le polynôme f_{λ_*} est infiniment renormalisable, on a $|\lambda_*| > 1/4$. Par conséquent, il existe une constante $K_{pf} > 0$ telle que pour tout tel paramètre λ_* , les points fixes du polynôme correspondant à ce paramètre sont à une distance d'au moins K_{pf} du point critique 0.

Ainsi lorsque la condition

$$\left(2\pi \left| \frac{p_0}{q_0} \right| + d_0 \right) H \left(\left(\frac{d_0}{R_0} \right)^{\frac{1}{q_0}} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\pi R_c}{q_{k-1}} \frac{\left(\frac{d_{k-1}}{R_{k-1}} \right)^{\frac{1}{q_{k-1}}}}{1 - \left(\frac{d_{k-1}}{R_{k-1}} \right)^{\frac{2}{q_{k-1}}}} H \left(\left(\frac{d_k}{R_k} \right)^{\frac{1}{q_k}} \right) < K_{pf} \quad (6.7)$$

est vérifiée, l'ensemble de tous les cycles de l'application f_{λ_*} reste à une distance strictement positive du point critique de l'application.

On peut alors appliquer le critère de Douady-Sullivan (proposition 4.4.2), en effet la fermeture C de l'ensemble des valeurs des cycles $(\text{Cycle}_{n,i}(\lambda_*))_{n,i}$ est un sous-ensemble fermé de l'ensemble de Julia du polynôme quadratique $f_{\lambda_*}(z) = z^2 + \lambda_*$, ne contenant pas le point critique de ce polynôme f_{λ_*} et l'application f_{λ_*} est injective sur l'ensemble C (voir [33], lemme 5.9, l'application f_{λ_*} agit comme un odomètre sur l'ensemble des points limite).

Montrons que l'inégalité 6.7 est vérifiée dès lors que l'entier n_1 est assez grand.

Lemme 6.2.20 *Soit $\beta > 1$ et $(q_n)_n$ une suite de nombres entiers tendant vers ∞ vérifiant :*

$$q_{n+1} \geq \beta^{q_n}$$

et soit $(m_n)_n$ la suite d'entiers définie par :

$$m_n = \prod_{k=0}^{n-1} q_k,$$

alors

$$\sum_{n \geq n_1} \frac{m_{n_1}}{q_n} \rightarrow 0$$

lorsque $n_1 \rightarrow \infty$.

En particulier, on déduit de ce lemme que $\sum_k \frac{1}{q_k}$ converge et que $\frac{m_k}{q_k} \rightarrow 0$.

Dém. La suite $(q_n)_n$ est croissante. Montrons que $m_n/q_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Pour tout entiers n et k , on a

$$q_{n+1} \geq (\beta)^{q_n} \geq \frac{(\log \beta)^k}{k!} q_n^k.$$

En particulier, avec $k = 2$, on voit que $q_n \geq q_{n_0} \gamma^{n-n_0}$, pour n_0 assez grand, où la constante $\gamma > 1$ vaut

$$\gamma = \frac{q_{n_0}}{2(\log \beta)^2} > 1.$$

Cette constante tend vers ∞ lorsque $n_0 \rightarrow \infty$. Grâce à cela on voit que $\left(\frac{n \log q_{n-1}}{q_{n-1}}\right)^{n-1}$ tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$. Or

$$\begin{aligned} \frac{m_n}{q_n} &\leq \left(\frac{\log q_{n-1}}{\log \beta}\right)^{n-1} \frac{q_{n-1}}{q_n} \\ &\leq n! \log \beta \left(\frac{\log q_{n-1}}{q_{n-1}}\right)^{n-1} \\ &\leq \log \beta \left(\frac{n \log q_{n-1}}{q_{n-1}}\right)^{n-1}, \end{aligned}$$

donc $\frac{m_n}{q_n} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

Ainsi

$$\sum_{n \geq n_1} \frac{m_{n_1}}{q_n} \leq \frac{m_{n_1}}{q_{n_1}} \sum_{n \geq 0} \gamma^{-n} \rightarrow 0.$$

□

Ce lemme entraîne que la somme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\pi R_c}{q_{k-1}} \frac{(d_{k-1}/R_{k-1})^{1/q_{k-1}}}{1 - (d_{k-1}/R_{k-1})^{2/q_{k-1}}} H \left(\left(\frac{d_k}{R_k} \right)^{1/q_k} \right)$$

est aussi petite qu'on veut pour peu que la suite $\left((d_k/R_k)^{1/q_k}\right)_k$ reste à une distance fixée de la valeur 1.

Il reste donc à montrer qu'il existe $\beta \in [0, 1[$ et $k_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $k \geq k_0$, on a $\left(\frac{d_k}{R_k}\right)^{1/q_k} \leq \beta$.

D'une part on sait, d'après la section 6.2.2 (plus précisément de la proposition 6.2.6 et du lemme 6.2.11), que

$$R_k \geq \tilde{R}_k = \min \left\{ \frac{1}{2m_k q_k^3}, \text{dist} \left(2\pi\sqrt{-1}\frac{p_k}{q_k}, \partial\Omega_k \right) \right\}.$$

D'autre part, d'après le lemme 6.1.4, il existe une constante numérique $k > 0$ telle que la distance $\text{dist} \left(2\pi\sqrt{-1}\frac{p_k}{q_k}, \partial\Omega_k \right)$ est minorée par $k \min \left\{ \frac{|p_k|}{q_k 2^{m_k/2}}, \frac{p_k^2}{q_k^2 m_k} \right\}$.

Ainsi, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\left(\frac{d_k}{R_k}\right)^{1/q_k} \leq C^{1/q_k} \min \left\{ (q_k m_k)^{1/q_k} \left| \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \right|^{1/q_k}, \left(\frac{2^{m_k/2}}{p_k q_k} \left| \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \right| \right)^{1/q_k}, \left(\frac{m_k q_k^2}{p_k^2} \left| \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \right| \right)^{1/q_k} \right\}.$$

Comme $m_k/q_k \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$, on a, pour $k \rightarrow \infty$, $\left(\frac{d_k}{R_k}\right)^{1/q_k} \leq (1 + o(1))\alpha$. \square

Remarque 6.2.21 L'hypothèse $\left| \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \right|^{1/q_k} < \alpha$ permet de majorer le terme $H \left(\left(\frac{d_k}{R_k} \right)^{1/q_k} \right)$ par une constante.

Une condition plus fine sur la suite des nombres de rotation peut être extraite de l'inégalité 6.7. Une telle condition est explicitée dans [19].

Chapitre 7

Modèle hypothétique d'explosion de cycles

7.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'établir une condition similaire à celle du théorème 6.2.14 par le biais d'un modèle. C'est-à-dire un théorème donnant une condition sur la suite des nombres de rotation des bifurcations satellites successives correspondant à un polynôme quadratique infiniment renormalisable pour que celui-ci ait un ensemble de Julia non localement connexe.

On veut aussi, à l'image de ce qui a été fait pour les hérissons (voir par exemple [30], [29], [31]), une description topologique et dynamique d'un compact invariant correspondant à la situation non localement connexe.

Dans ce but, Xavier Buff a créé un modèle contenant une description des bifurcations au moyen de pseudo applications de renormalisation correspondant aux renormalisations d'un polynôme quadratique infiniment satellite renormalisable (c'est-à-dire infiniment renormalisable, limite de bifurcations satellites adjacentes les unes aux autres). Je vais le décrire et l'étudier avec pour objectif de montrer que ce modèle est correct et d'obtenir quelques informations sur la structure d'un compact invariant généré par ce modèle.

7.2 Définition et explication du modèle

Soit $(p_n/q_n)_n$ une suite de nombres rationnels de $]0, 1[$, où p_n et q_n sont sans diviseur commun. On suppose que la suite $(p_n/q_n)_n \in (\mathbb{Q}^*)^{\mathbb{N}}$ converge vers 0. Soit $c > 1$ fixée et soit $t_n = c|p_n|/q_n$.

Remarque 7.2.1 Voir le lemme 7.2.5 à propos de la constante c .

On note M_n l'application de Möbius $M_n(z) = \frac{1-t_n/z}{1-t_n}$. Cette application est caractérisée par le fait qu'elle envoie 0 en ∞ , t_n en 0 et 1 sur lui-même. On définit la suite d'applications $(\varphi_n)_n$ par $\varphi_n(z) := (M_n(z))^{q_n}$.

Remarque 7.2.2 On supposera toujours que le point t_n appartient au disque unité. Etant donné que l'on suppose aussi que $p_n/q_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, cela revient à ne négliger que les premiers termes de la suite $(p_n/q_n)_n$.

Dans le cas où $p_n = 1$, on peut se contenter de prendre $q_n t_n / |p_n| < 2$ si l'on ne veut pas supposer $p_n/q_n \rightarrow 0$ mais alors le lemme 7.3.13 concernant l'épaisseur de $K_{n,0}$ ne peut être appliqué tel quel (voir section 7.3.3).

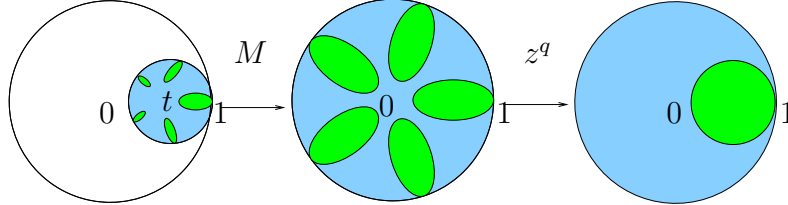


FIG. 7.1 – Illustration schématique de l'application $\varphi(z) = \left(\frac{1-t/z}{1-t}\right)^q$ sur le disque unité, vue en tant que composition de l'application de Möbius et de la fonction puissance q . La partie bleue à gauche est envoyée sur la partie bleue à droite, de même pour les parties vertes (Le disque vert de droite étant proche de 0, ses préimages par la fonction puissance sont allongées).

Etant donné $z \in \overline{\mathbb{D}}$, on pose $z_0 = \varphi_0(z)$ et, si $z_{n-1} \in \overline{\mathbb{D}}$, on pose $z_n = \varphi_n(z_{n-1})$. Soit $\Phi_n = \varphi_n \circ \dots \circ \varphi_0$, de sorte que $z_n = \Phi_n(z)$. On considère l'ensemble K_∞ des points qui ne s'échappent pas c'est-à-dire l'ensemble

$$K_\infty = \{z \in \overline{\mathbb{D}} : \forall n, \Phi_n(z) \in \overline{\mathbb{D}}\}.$$

L'ensemble K_∞ est compact. Un des objectifs est d'étudier les propriétés de ce compact K_∞ . En particulier on aimerait savoir sous quelles conditions le compact K_∞ possède des continua non dégénérés en tant que composantes connexes ainsi qu'une caractérisation topologique de ce compact.

Il sera utile de considérer la suite de compacts K_n suivante :

$$K_n := \{z \in \overline{\mathbb{D}} : \forall k = 0, \dots, n, \varphi_k \circ \dots \circ \varphi_0(z) \in \overline{\mathbb{D}}\}.$$

La suite $(K_n)_n$ est une suite décroissante de compacts non vides ($1 \in K_n$ pour tout n) dont l'intersection est le compact K_∞ .

Définition 7.2.3 L'ensemble K_∞ est le compact $K_\infty := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$.

Les applications φ_n sont définies de façon à modéliser les renormalisations successive d'un polynôme quadratique infiniment satellite renormalisable. À de tels polynômes correspond une suite de nombres de rotation (voir section 4.1) $(p_n/q_n)_n$.

On rappelle qu'une bifurcation satellite correspond à une collision de cycle. Par exemple une petite perturbation d'un polynôme ayant un point fixe parabolique possède un cycle entièrement inclus dans un voisinage du point fixe perturbé.

Si le multiplicateur du point fixe du polynôme de départ est $e^{2\sqrt{-1}\pi p_n/q_n}$ et le nombre de rotation du cycle du nouveau polynôme est p_{n+1}/q_{n+1} alors le déplacement du point fixe par perturbation sera de l'ordre de p_{n+1}/q_{n+1} alors que l'explosion a lieu à une vitesse de l'ordre de $(p_{n+1}/q_{n+1})^{1/q_n}$.

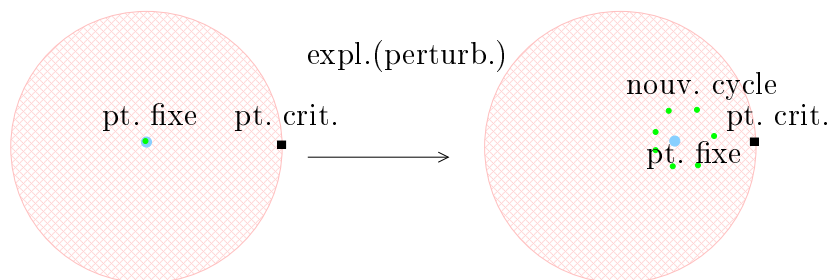


FIG. 7.2 – Une explosion d'un point fixe parabolique suite à une perturbation

Un tel polynôme sera renormalisable. La renormalisation remplace alors une application f_n perturbation du polynôme ayant un point fixe, par une application $f_{n+1} = \mathcal{R}f_n$. Le renormalisé de ce polynôme possède à nouveau un point fixe, image du cycle explosant par l'application de renormalisation.

Il y a alors une application $\tilde{\varphi}_n$, définie sur le domaine de renormalisation, telle que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{f_n^{\circ q_n}} & \\ \tilde{\varphi}_n \downarrow & & \downarrow \tilde{\varphi}_n \\ & \xrightarrow{\mathcal{R}f_n} & \end{array}$$

Dans le cas d'un polynôme quadratique infiniment renormalisable f_n , l'application f_{n+1} est encore renormalisable et on peut construire une suite d'applications renormalisées $(f_n)_n$.

Les applications $\varphi_n(z) = \left(\frac{1-t_n/z_n}{1-t_n}\right)^{q_n}$ sont des modèles pour les applications $\tilde{\varphi}_n$:

- le disque unité $\overline{\mathbb{D}}$ est pris en tant que voisinage des cycles explosants,
- le point critique est placé en 1 en tant que point de référence fixe,
- on recentre l'ancien point fixe avec l'application de Mobius $M_n(z) = \frac{1-t_n/z_n}{1-t_n}$,
- on transforme le nouveau cycle en un nouveau point fixe avec l'application de mise à la puissance q_n .

Grace au critère de Douady-Sullivan (voir section 4.4), on sait que si la suite des cycles explosants ne s'accumule pas sur le point critique alors l'ensemble de Julia n'est pas localement connexe.

L'ensemble K_∞ contient l'ensemble des points d'accumulation de ces cycles. Il possède un nombre infini de composantes connexes, chacune contenant un point de l'ensemble des

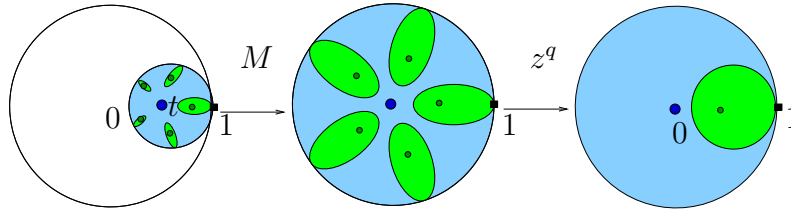


FIG. 7.3 – Le point fixe est d’abord recentré puis le cycle est transformé en point fixe.

points d’accumulation des cycles. Si les composantes connexes du compact K_∞ sont des points, c’est un ensemble de Cantor et $\{1\}$ est une composante connexe.

Sinon le compact K_∞ contient un segment $[x_0, 1]$ attaché au point 1 et l’ensemble des points d’accumulation des cycles ne contient pas le point 1. Il est légitime de supposer alors que l’ensemble de Julia d’un polynôme quadratique infiniment renormalisable avec suite de nombres de rotation $(p_n/q_n)_n$ n’est pas localement connexe.

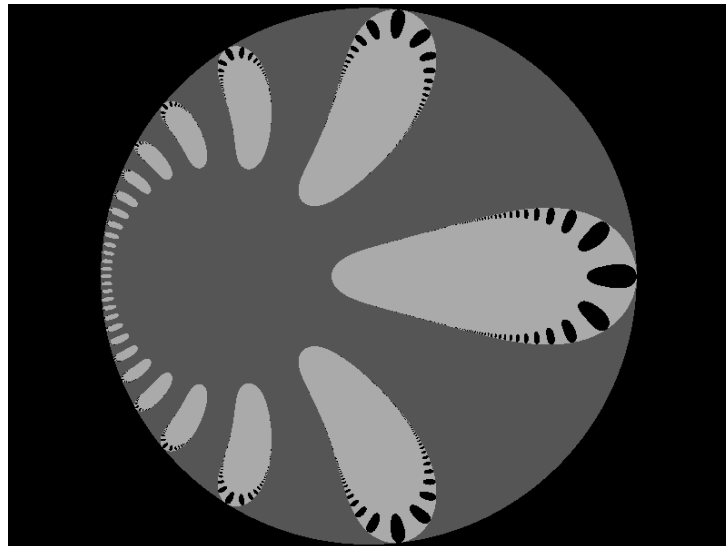


FIG. 7.4 – Un exemple d’ensemble résiduel K_n avec $n = 3$ (on a zoomé sur la partie droite du disque unité). Le compact K_n est symétrique par rapport l’axe réel et son intersection avec l’axe réel contient un segment issu de 1 (sur la droite).

Définition 7.2.4 Pour $c > 1$ on définit \mathcal{C}_c comme étant l’ensemble des paramètres λ tels que le polynôme quadratique $z^2 + \lambda$ est infiniment satellite renormalisable avec une suite de nombres de rotation $(p_n/q_n)_n$ vérifiant les assertions suivantes :

1. la suite de nombres positifs $(t_n)_n$ définie par $t_n = c|p_n|/q_n$ est telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $t_n \in]0, 1[$;

2. soit $\varphi_n(z) = \left(\frac{1-t_n/z}{1-t_n}\right)^{q_n}$ et soit $\Phi_n = \varphi_n \circ \dots \circ \varphi_0$ définies sur l'ensemble $\overline{\mathbb{D}}$. Alors

$$\exists x_0 \in]0, 1[\text{ tel que } \forall n, \Phi_n(x_0) \geq t_{n+1}.$$

Lemme 7.2.5 Soit $c \geq c' > 1$. Alors $\mathcal{C}_c \subset \mathcal{C}_{c'}$.

Dém. Soit $\lambda \in \mathcal{C}_c$ et soit $\gamma = c'/c \leq 1$. Par hypothèse la suite $(t_n)_n$ telle que $t_n = c|p_n|/q_n$, où $(p_n/q_n)_n$ est la suite des nombres de rotation associée au paramètre λ , est telle que $t_n \in]0, 1[$. On pose $t'_n = \gamma t_n$. La suite $(t'_n)_n$ vérifie $\forall n, t'_n \in]0, 1[$. Soit $x_0 \in [0, 1]$ tel que $\forall n, \Phi_n(x_0) \geq t_{n+1}$.

On pose $\varphi'_n(z) = \left(\frac{1-t'_n/z}{1-t'_n}\right)^{q_n}$ et $\Phi'_n = \varphi'_n \circ \dots \circ \varphi'_0$. On définit la suite de nombres réels $(x_n)_n$ par $x_{n+1} = \varphi_n(x_n)$. Montrons que l'on peut définir une suite $(x'_n)_n$ par $x'_0 = x_0$ et $x'_{n+1} = \varphi'_n(x'_n)$ et qu'elle vérifie $\forall n, x'_n \geq x_n$.

Supposons x'_n définie et vérifiant l'inégalité. Comme $t'_n \leq t_n$, on a, pour tout $x \leq 1$,

$$\frac{1-t'_n/x}{1-t'_n} \geq \frac{1-t_n/x}{1-t_n}.$$

Ainsi, on a

$$x'_{n+1} \geq \varphi_n(x'_n) \geq \varphi_n(x_n) = x_{n+1}.$$

Enfin, on voit que $x_n \geq t_{n+1} = \frac{1}{\gamma} t'_{n+1} \geq t'_{n+1}$. □

Il y a d'abord un résultat sur la locale connexité en lien avec le théorème 6.2.14.

Théorème 7.2.6 Soit λ un paramètre tel que le polynôme quadratique $f_\lambda(z) = z^2 + \lambda$ est infiniment satellite renormalisable dont la suite des nombres de rotation $(p_n/q_n)_n$ vérifie

- la suite $(p_n)_n$ est bornée,
- $\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right|^{1/q_n} < 1$.

Alors pour toute constante $c > 1$ il existe renormalisée f_{λ_*} du polynôme f_λ telle que $\lambda_* \in \mathcal{C}_c$.

Dém.

Quitte à considérer une renormalisée f_{λ_*} d'itéré assez grand de f_λ , on peut supposer, comme dans la démonstration du théorème 6.2.14, qu'il existe $\alpha \in [0, 1[$ tel que la suite de nombres de rotation associée à f_{λ_*} vérifie $|p_{n+1}/q_{n+1}| \leq \alpha^{q_n}$.

Soit $\beta \in]1, 1/\alpha[$ et $\eta = \frac{1}{1-\beta\alpha}$. Si nécessaire on considère un niveau de renormalisation encore plus grand de sorte que l'on ait, pour tout n , $\left(\frac{\beta}{1-t_n}\right)^{q_n} \geq c\eta$.

On montre que la suite $(x_n)_n$ définie par $x_0 = \eta t_0$ et $x_{n+1} = \left(\frac{1-t_n/x_n}{1-t_n}\right)^{q_n}$ vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \geq \eta t_n$. En effet, par récurrence, on a

$$\begin{aligned} x_{n+1} &\geq \left(\frac{1-1/\eta}{1-t_n}\right)^{q_n} = \left(\frac{\beta}{1-t_n}\right)^{q_n} \alpha^{q_n} \\ &\geq \eta t_{n+1}. \end{aligned}$$

□

Ce théorème ajoute du crédit à la conjecture suivante qui se fonde sur l'idée que ce modèle décrit bien la situation des bifurcations satellites successives.

Conjecture 7.2.7 *Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que le polynôme quadratique $f_\lambda(z) = z^2 + \lambda$ est infiniment satellite renormalisable avec suite de nombres de rotation $(1/q_n)_n$.*

Alors l'ensemble de Julia de la fonction holomorphe f_λ n'est pas localement connexe si et seulement si il existe $c > 1$ et une renormalisée f_{λ_} de f_λ telles que $\lambda_* \in \mathcal{C}_c$.*

Concernant la structure de K_∞ , à l'image de ce qu'on sait faire pour les bouquets de Cantor, on cherche à en donner une caractérisation topologique.

7.3 Quelques propriétés du compact K_∞

Dans cette section on pose $t_n = c \left| \frac{p_n}{q_n} \right|$ avec $c > 1$. On rappelle que $M_n(z) = \frac{1-t_n/z}{1-t_n}$ et $\varphi_n(z) = M_n(z)^{q_n}$.

7.3.1 Adresse d'un point dans le compact limite

Lemme 7.3.1 *Soit $t \in]0, 1[$ et $M(z) := \frac{1-t/z}{1-t}$. Alors*

$$M(z) \in \overline{\mathbb{D}} \Leftrightarrow z \in D,$$

où D est le disque fermé dont le segment $[\frac{t}{2-t}, 1]$ est un diamètre.

Dém. L'application de Möbius M préserve le signe de la partie imaginaire et envoie le point 1 sur lui-même et le point $\frac{t}{2-t}$ sur le point -1 . □

Lemme 7.3.2 *Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $E_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ l'application $z \mapsto z^{q_n}$. Pour chaque composante connexe de $E_{n-1}^{-1}(M_n^{-1}(\overline{\mathbb{D}}))$, il existe un unique $k \in \{0, \dots, q_{n-1} - 1\}$ tel que $e^{2\pi\sqrt{-1}\frac{k}{q_{n-1}}}$ appartient à cette composante.*

Dém. D'après le lemme 7.3.1 ci-dessus, $M_n^{-1}(\overline{\mathbb{D}})$ est un disque se trouvant strictement à droite de 0, donc les composantes connexes de sa préimage par E_{n-1} sont contenues dans des secteurs d'amplitude $\frac{\pi}{q_{n-1}}$ et séparés les uns des autres par des secteurs de même amplitude.

En outre $1 \in M_n^{-1}(\overline{\mathbb{D}})$, donc chaque composante contient une et une seule racine q_{n-1} -ième de l'unité. \square

Corollaire 7.3.3 *Le nombre de composantes connexes de K_n est $N_n = \prod_{k=0}^{n-1} q_k$.*

Dém. L'application M_{n-1} est un homéomorphisme entre $E_{n-1}^{-1}(M_n^{-1}(\overline{\mathbb{D}}))$ et $\varphi_{n-2} \circ \dots \circ \varphi_0(K_n)$ \square

Le lemme précédent permet de numérotter les composantes de

$$\varphi_n^{-1}(\varphi_{n+1}^{-1}(\overline{\mathbb{D}})) = \varphi_n^{-1}(M_{n+1}^{-1}(\overline{\mathbb{D}}))$$

avec \mathbb{Z}_{q_n} de la façon suivante : à une composante on associe le représentant de k modulo q_n si k est tel que $e^{2\pi\sqrt{-1}k\frac{pn}{q_n}}$ appartient à l'image de cette composante par M_n . Grâce à cette numérotation, on peut définir l'adresse d'un point $z \in K_n$ comme étant la suite finie $(k_0, \dots, k_{n-1}) \in \mathbb{Z}_{q_0} \times \dots \times \mathbb{Z}_{q_{n-1}}$ telle que $\varphi_{j-2} \circ \dots \circ \varphi_0(z)$ appartient à la composante numéro k_{j-1} de $\varphi_{j-1}^{-1}(\overline{\mathbb{D}})$. De même on définit l'adresse d'un point $z \in K_\infty$ comme étant la suite infinie (k_0, \dots, k_n, \dots) des numéros respectifs des composantes auxquelles appartient la suite des $\varphi_{n-2} \circ \dots \circ \varphi_0(z)$. Ainsi, sur chaque composante de K_n les n premiers numéros des adresses des points $z \in K_\infty$ sont constants.

Définition 7.3.4 *Soit $z \in K_n$, alors le n -uplet $\alpha \in \mathbb{Z}_{q_0} \times \dots \times \mathbb{Z}_{q_{n-1}}$ est l'adresse de z dans K_n si pour tout $k \leq n-1$, $M_{k+1} \circ \varphi_k \circ \dots \circ \varphi_0(z)$ appartient à la même composante connexe de $\varphi_k^{-1}(\overline{\mathbb{D}})$ que $e^{2\pi\sqrt{-1}\alpha_k\frac{pk}{q_k}}$.*

Soit $z \in K_\infty$, $\alpha \in \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_{q_n}$ est l'adresse de z dans K_∞ si pour tout $n \in \mathbb{N}$, le point $M_{n+1} \circ \varphi_n \circ \dots \circ \varphi_0(z)$ appartient à la même composante connexe de $\varphi_n^{-1}(\overline{\mathbb{D}})$ que $e^{2\pi\sqrt{-1}\alpha_n\frac{pn}{q_n}}$.

Etant donnée une suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres entiers strictement positifs tels que s_n divise s_{n+1} , on appelle odomètre d'échelle $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'ensemble $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_{s_0} \times \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_{s_{n+1}/s_n}$ muni de la topologie produit des topologies discrètes de \mathbb{Z}_{q_n} et d'une application d'incrémentement $\sigma : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ continue définie par (voir [8]) : $\forall j = (j_n) \in \mathcal{O}$,

$$(\sigma(j))_n = \begin{cases} j_n + 1 & \text{si } \forall k \leq n-1, j_k = q_k - 1, \\ j_n & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans tout ce qui suit, l'ensemble des adresses

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_{q_n} \tag{7.1}$$

est identifié à l'odomètre d'échelle $\left(\prod_{m=0}^n q_m\right)_{n \in \mathbb{N}}$ qui est alors muni d'une topologie d'ensemble de Cantor.

L'incrémentation ne sera pas utile pour l'étude de K_∞ .

Proposition 7.3.5 *Soit $\pi : K_\infty \rightarrow \mathcal{P}(K_\infty)$ l'application qui consiste à associer à un point de K_∞ la composante connexe à laquelle il appartient.*

Alors, l'ensemble des composantes connexes de K_∞ muni de la topologie finale de π est homéomorphe à l'odomètre des adresses (7.1).

Dém. Soit $k \in \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_{q_n}$. Alors l'ensemble des points qui ont (k_0, \dots, k_{n-1}) pour adresse dans

K_n est un compact connexe (homéomorphe à $\overline{\mathbb{D}}$). On en déduit que l'ensemble des points qui ont k pour adresse dans K_∞ est non vide et que cet ensemble est une composante connexe de K_∞ . Il y a donc bijection entre l'ensemble des composantes connexes de K_∞ et l'ensemble des adresses. Il suffit alors de montrer que l'application qui à un point de K_∞ associe son adresse est continue.

Soit $z \in K_\infty$, $z' \in K_\infty$ et soit k et k' leurs adresses respectives. Supposons qu'il existe n tel que $\forall m \geq n$, $k_m = k'_m$. Alors $\varphi_n \circ \dots \circ \varphi_0(z)$ et $\varphi_n \circ \dots \circ \varphi_0(z')$ se trouvent dans la même composante connexe de K_n . Cette composante connexe est contenue dans un voisinage disjoint des autres composantes de K_n □

Remarque 7.3.6 *On pourrait montrer directement que l'espace des composantes connexes de K_∞ est un ensemble de Cantor. L'information importante est contenue dans la continuité de l'application adresse.*

Définition 7.3.7 *Identifiant l'espace des adresses et l'espace des composantes connexes de K_∞ , on le note K_{base} .*

7.3.2 Lemmes de calculs

Lemme 7.3.8 *Soit $c \geq 1$, $q \in \mathbb{N}^*$, $t = c/q$ et $\varphi : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{P}^1$ définie par $\varphi(z) = \left(\frac{1-t/z}{1-t}\right)^q$.*

Soit $\varepsilon \geq 0$ et $\gamma = \frac{c/2}{c+\log c-\varepsilon}$. Alors il existe $q_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $q \geq q_0$ et si $z \in \overline{\mathbb{D}}$ est tel que $|z - \gamma| \geq \gamma$ alors $|\varphi'(z)| > 1 + \varepsilon$.

Dém. Notant x la partie réelle de z et r son module, la propriété $|z - \gamma| \geq \gamma$ est équivalente à la relation $r^2 \geq 2\gamma x$.

Sous l'hypothèse que cette relation est vérifiée, on a

$$\begin{aligned}
\left| \frac{z-t}{z} \right|^2 &= 1 + \frac{t^2}{r^2} - \frac{2tx}{r^2} \\
&\geq 1 + \frac{t^2}{r^2} \frac{x^2}{r^2} - \frac{2tx}{r^2} \\
&\geq \left(1 - \frac{tx}{r^2} \right)^2 \\
&\geq \left(1 - \frac{t}{2\gamma} \right)^2.
\end{aligned}$$

En outre $|\varphi'(z)| = \frac{c}{(1-t)r^2} \left| \frac{1-t/z}{1-t} \right|^{q-1}$, ainsi $|\varphi'(z)| \geq \frac{c}{1-\frac{t}{2\gamma}} \left(\frac{1-\frac{t}{2\gamma}}{1-t} \right)^q$. Comme d'autre part $\frac{c}{1-\frac{t}{2\gamma}} \left(\frac{1-\frac{t}{2\gamma}}{1-t} \right)^q \sim e^\varepsilon > 1 + \varepsilon$, on aura $|\varphi'(z)| > 1 + \varepsilon$ pour q assez grand (indépendamment de z) \square

Dans la suite on note \arg la détermination de l'argument à valeurs dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

Lemme 7.3.9 Soit $c \geq 1$, $q \in \mathbb{N}^*$, $t = c/q$ et $\varphi : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{P}^1$ définie par $\varphi(z) = \left(\frac{1-t/z}{1-t} \right)^q$.

Alors, pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}$ tel que $|\arg(z-t)| \leq \frac{\pi}{2}$, on a $|\arg \varphi(z)| \geq \frac{c \operatorname{Im} z}{2|z|^2}$.

Dém. Par symétrie, il suffit de le prouver pour tout $z = x + \sqrt{-1}y$ tel que $x \geq t$ et $y > 0$. Sous ces hypothèses on a $\arg(z) = \arcsin(y/|z|)$ et $\arg(z-t) = \arcsin(y/|z-t|)$.

Par ailleurs, $\arg \varphi(z) = q(\arg(z-t) - \arg(z)) \geq 0$. Ainsi,

$$\arg \varphi(z) = q \left(\arcsin \left(\frac{y}{|z-t|} \right) - \arcsin \left(\frac{y}{|z|} \right) \right).$$

Or étant donné que \arcsin est convexe sur $[0, 1]$,

$$\arcsin \left(\frac{y}{|z-t|} \right) \geq \arcsin \left(\frac{y}{|z|} \right) + \arcsin' \left(\frac{y}{|z|} \right) \left(\frac{y}{|z-t|} - \frac{y}{|z|} \right).$$

En outre $\arcsin' \left(\frac{y}{|z|} \right) = \frac{|z|}{x}$.

Nous allons estimer la différence $\frac{y}{|z-t|} - \frac{y}{|z|}$. Posons $r := |z|$. Nous avons

$$|z-t|^2 = r^2 \left(1 + \frac{t^2}{r^2} - 2\frac{tx}{r^2} \right)$$

donc

$$|z-t| \leq \frac{1}{r^2} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{t^2}{r^2} - 2\frac{tx}{r^2} \right) \right).$$

Il est facile de vérifier que

$$\frac{1}{2} \left(\frac{t^2}{r^2} - 2 \frac{tx}{r^2} \right) \leq 0.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{1}{|z-t|} &\geq \frac{1}{r \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{t^2}{r^2} - 2 \frac{tx}{r^2} \right) \right)} \\ &\geq \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{t^2}{r^2} - 2 \frac{tx}{r^2} \right) \right), \end{aligned}$$

et donc $\frac{1}{|z-t|} - \frac{1}{|z|} \geq \frac{xt}{r^3} - \frac{1}{2} \frac{t^2}{r^3}$.

De ces estimations, il vient

$$\begin{aligned} \arg \varphi(z) &\geq \frac{qty}{r^2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{t}{x} \right) \\ &\geq \frac{cy}{r^2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{t}{x} \right). \end{aligned}$$

Puisque $x \geq t$, on a $\arg \varphi(z) \geq \frac{cy}{2r^2}$. □

Corollaire 7.3.10 *Dans le même contexte que celui du lemme précédent, on a :*

$$|\arg(z)| \leq \frac{\pi}{c} |\arg \varphi(z)| \cdot |z|.$$

Dém. D'après le lemme précédent, nous avons $|\arg \varphi(z)| \geq \frac{c}{2} \frac{|\operatorname{Im} y|}{|z|^2}$, or $\frac{|\operatorname{Im} y|}{|z|} = |\sin(\arg z)|$. Comme en outre $|\sin t| \geq \frac{2}{\pi} |t|$ pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on obtient $|\arg \varphi(z)| \geq \frac{c}{\pi |z|} |\arg z|$, i.e. $|\arg z| \leq \frac{\pi |z|}{c} |\arg \varphi(z)|$. □

7.3.3 Résultats

Soit $K_{n,0}$ la composante de K_n contenant le point 1. Il s'agit de l'ensemble des points dont l'adresse commence par n zéros.

Lemme 7.3.11 *L'application $M_{n+1} \circ \varphi_n \circ \dots \circ \varphi_0 : K_{n,0} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$ est la restriction d'un biholomorphisme défini au voisinage de $K_{n,0}$.*

Dém. Les préimages d'un même point se trouvent sur des composantes de K_n différentes. □

Lemme 7.3.12 *L'intersection de $K_{n,0}$ avec la droite réelle est un intervalle contenant 1.*

Dém. L'homéomorphisme $(M_n \circ \varphi_{n-1} \circ \cdots \circ \varphi_0)|_{K_{n,0}}$ est une bijection entre les points réels de $K_{n,0}$ et ceux de $\overline{\mathbb{D}}$. \square

Soit $I_0 := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_{n,0}$.

Lemme 7.3.13 *Supposons $c > \pi$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $K_{n,0} \subset \{z \in \overline{\mathbb{D}} : |\arg z| \leq \frac{\pi}{2} (\frac{\pi}{c})^n\}$.*

Remarque 7.3.14 *Voir remarque 7.2.2 pour les restrictions sur la portée de ce lemme.*

Dém. Soit $z \in K_n$. Par hypothèse $z_k = \varphi_k \circ \cdots \circ \varphi_0(z) \in \overline{\mathbb{D}}$, pour tout $k = 0, \dots, n$. Ainsi, d'après le lemme 7.3.1, $|\arg(z_k - t_{k+1})| \leq \frac{\pi}{2}$, $k = 0, \dots, n-1$. Alors, du lemme 7.3.10, il vient $\forall k \leq n-1$, $|\arg z_k| \leq \frac{\pi}{c} |\arg z_{k+1}|$. \square

Corollaire 7.3.15 *Si $c > \pi$, la composante limite $I_0 := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_{n,0}$ est un segment de la droite réelle (éventuellement réduit au point 1).*

En particulier sa dimension de Hausdorff est 0 ou 1.

Conjecture 7.3.16 *C'est vrai aussi pour $c > 1$.*

Remarque 7.3.17 *Il est facile de voir que toutes les composantes connexes de K_∞ qui sont envoyées en un nombre fini d'étapes sur la composante contenant le point 1 est homéomorphe à I_0 .*

7.4 Lien entre le modèle et son origine

On espère établir un isomorphisme entre le modèle supposé et ce qu'il est censé modéliser en utilisant la théorie de renormalisation des fonctions presque paraboliques (voir notamment [36], [13]).

Bibliographie

- [1] Lars V. Ahlfors. *Lectures on quasiconformal mappings*, volume 38 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2006. With supplemental chapters by C. J. Earle, I. Kra, M. Shishikura and J. H. Hubbard.
- [2] Michael Benedicks and Ana Rodrigues. Kneading sequences for double standard maps. *to appear in Fundam. Mathem.*
- [3] Xavier Buff and Arnaud Chéritat. Upper bound for the size of quadratic Siegel disks. *Invent. Math.*, 156(1) :1–24, 2004.
- [4] Alexandre Dezotti. Connectedness of the Arnold tongues for double standard maps. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 138(10) :3569–3583, 2010.
- [5] A. Douady and J. H. Hubbard. *Étude dynamique des polynômes complexes. Partie I*, volume 84 of *Publications Mathématiques d’Orsay [Mathematical Publications of Orsay]*. Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, Orsay, 1984.
- [6] A. Douady and J. H. Hubbard. *Étude dynamique des polynômes complexes. Partie II*, volume 85 of *Publications Mathématiques d’Orsay [Mathematical Publications of Orsay]*. Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, Orsay, 1985. With the collaboration of P. Lavaurs, Tan Lei and P. Sentenac.
- [7] Adrien Douady and John Hamal Hubbard. On the dynamics of polynomial-like mappings. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 18(2) :287–343, 1985.
- [8] Tomasz Downarowicz. Survey of odometers and Toeplitz flows. In *Algebraic and topological dynamics*, volume 385 of *Contemp. Math.*, pages 7–37. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [9] Peter L. Duren. *Univalent functions*, volume 259 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [10] Adam Epstein. Transversality in holomorphic dynamics, manuscript, 2010.
- [11] Adam Lawrence Epstein. Infinitesimal thurston rigidity and the fatou-shishikura inequality, 2010.
- [12] A. È. Erëmenko and G. M. Levin. Estimation of the characteristic exponents of a polynomial. *Teor. Funktsii Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, (58) :30–40 (1993), 1992.
- [13] Inou Hiroyuki and Shishikura Mitsuhiro. The renormalization for parabolic fixed points and their perturbation. *preprint*.

- [14] J. H. Hubbard. Local connectivity of Julia sets and bifurcation loci : three theorems of J.-C. Yoccoz. In *Topological methods in modern mathematics (Stony Brook, NY, 1991)*, pages 467–511. Publish or Perish, Houston, TX, 1993.
- [15] John Hamal Hubbard. *Teichmüller theory and applications to geometry, topology, and dynamics. Vol. 1*. Matrix Editions, Ithaca, NY, 2006. Teichmüller theory, With contributions by Adrien Douady, William Dunbar, Roland Roeder, Sylvain Bonnot, David Brown, Allen Hatcher, Chris Hruska and Sudeb Mitra, With forewords by William Thurston and Clifford Earle.
- [16] Anatole Katok and Boris Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, volume 54 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. With a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza.
- [17] Genadi Levin. Disconnected Julia set and rotation sets. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 29(1) :1–22, 1996.
- [18] Genadi Levin. Multipliers of periodic orbits in spaces of rational maps, i-ii, 2008.
- [19] Genadi Levin. Multipliers of periodic orbits of quadratic polynomials and the parameter plane. *Israel J. Math.*, 170 :285–315, 2009.
- [20] Genadi Levin. Rigidity and non local connectivity of julia sets of some quadratic polynomials, 2009.
- [21] Curtis T. McMullen. *Complex dynamics and renormalization*, volume 135 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1994.
- [22] John Milnor. Periodic orbits, external rays and the Mandelbrot set : an expository account. *Astérisque*, (261) :xiii, 277–333, 2000. Géométrie complexe et systèmes dynamiques (Orsay, 1995).
- [23] John Milnor. *Dynamics in one complex variable*, volume 160 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, third edition, 2006.
- [24] Michał Misiurewicz and Ana Rodrigues. Non-generic cusps. *to appear in the Transactions of the AMS*.
- [25] Michał Misiurewicz and Ana Rodrigues. Double standard maps. *Comm. Math. Phys.*, 273(1) :37–65, 2007.
- [26] Michał Misiurewicz and Ana Rodrigues. On the tip of the tongue. *J. Fixed Point Theory Appl.*, 3(1) :131–141, 2008.
- [27] Zeev Nehari. The elliptic modular function and a class of analytic functions first considered by Hurwitz. *Amer. J. Math.*, 69 :70–86, 1947.
- [28] Zeev Nehari. *Conformal mapping*. Dover Publications Inc., New York, 1975. Reprinting of the 1952 edition.
- [29] Ricardo Pérez-Marco. Topology of julia sets and hedgehogs. *preprint, Universtié de Paris-Sud*, 1994.

- [30] Ricardo Pérez Marco. Nonlinearizable holomorphic dynamics having an uncountable number of symmetries. *Invent. Math.*, 119(1) :67–127, 1995.
- [31] Ricardo Pérez-Marco. Hedgehogs dynamics. *preprint, UCLA*, 1996.
- [32] Carsten Lunde Petersen and Pascale Roesch. Carrots for dessert. 2010.
- [33] P. Roesch. Some rational maps whose Julia sets are not locally connected. *Conform. Geom. Dyn.*, 10 :125–135 (electronic), 2006.
- [34] P. Roesch. Frontière des domaines de stabilité, mémoire d’habilitation à diriger des recherches, 2009.
- [35] Mitsuhiro Shishikura. On the quasiconformal surgery of rational functions. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 20(1) :1–29, 1987.
- [36] Mitsuhiro Shishikura. Bifurcation of parabolic fixed points. In *The Mandelbrot set, theme and variations*, volume 274 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 325–363. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
- [37] Dan Erik Krarup Sørensen. Infinitely renormalizable quadratic polynomials, with non-locally connected Julia set. *J. Geom. Anal.*, 10(1) :169–206, 2000.
- [38] E. T. Whittaker and G. N. Watson. *A course of modern analysis*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 1996. An introduction to the general theory of infinite processes and of analytic functions; with an account of the principal transcendental functions, Reprint of the fourth (1927) edition.
- [39] Saeed Zakeri. On Siegel disks of a class of entire maps. *Duke Math. J.*, 152(3) :481–532, 2010.