



**HAL**  
open science

## Enroulement, contact et vibrations de tiges élastiques

Sebastien Neukirch

► **To cite this version:**

Sebastien Neukirch. Enroulement, contact et vibrations de tiges élastiques. Mécanique des structures [physics.class-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2009. tel-00667562

**HAL Id: tel-00667562**

**<https://theses.hal.science/tel-00667562>**

Submitted on 7 Feb 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Habilitation à diriger des recherches**  
**UPMC Univ Paris 6**

Spécialité : Mécanique  
Ecole doctorale de Sciences Mécaniques, Acoustique et Electronique de Paris

présentée par  
Sébastien Neukirch

**ENROULEMENT, CONTACT ET VIBRATIONS**  
**DE TIGES ÉLASTIQUES**

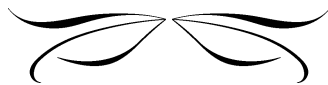
soutenue publiquement le 30 juin 2009  
devant un jury composé de :

M. Pierre Alart	<i>rapporteur</i>
M. David Bensimon	<i>examineur</i>
M. Alain Cimetière	<i>examineur</i>
M. Jean-Jacques Marigo	<i>président</i>
M. Nguyen Quoc Son	<i>rapporteur</i>
M. Lev Truskinovsky	<i>rapporteur</i>



**Mademoiselle de Lespinasse** : - Non ; cela avait tout l'air du délire. C'était, en commençant, un galimatias de cordes vibrantes et de fibres sensibles. Cela m'a paru si fou que, résolue de ne le pas quitter de la nuit et ne sachant que faire, j'ai approché une petite table du pied de son lit, et me suis mise à écrire tout ce que j'ai pu attraper de sa rêvasserie.

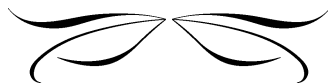
*Denis Diderot (été 1769), "Le rêve d'Alembert"*





# Remerciements

J'ai rencontré dans ma vie d'écolier, d'étudiant, d'enseignant et de chercheur, un petit nombre de personnes – maîtres d'école, enseignants, camarades, professeurs, collègues – qui m'ont fortement influencé, et m'ont aidé dans mon développement intellectuel. Au delà des remerciements qui vont de soi je souhaite que cette entraide, ces coups de pouces, ces conseils avisés, cette initiation à la Science dont j'ai bénéficié ne s'arrêtent pas à moi, que la transmission continue.





# Table des matières

<b>A</b>	<b>Quelques études sur les tiges élastiques</b>	<b>1</b>
<b>I</b>	<b>Les équations de Kirchhoff</b>	<b>11</b>
I.1	Théorie directe de Cosserat . . . . .	11
I.2	Approche de Kirchhoff, Clebsch et Love . . . . .	18
I.3	Cas plan . . . . .	20
<b>II</b>	<b>Tige encastrée</b>	<b>27</b>
II.1	Tige idéale . . . . .	27
II.2	Approche variationnelle . . . . .	40
<b>III</b>	<b>Application à l'ADN</b>	<b>45</b>
III.1	L'ADN : une tige élastique ? . . . . .	45
III.2	Les expériences <i>in-vitro</i> . . . . .	47
III.3	Modèle pour le sur-enroulement . . . . .	49
III.4	Interactions ADN-ADN . . . . .	51
III.5	Résultats . . . . .	52
III.6	Conclusion . . . . .	53
<b>IV</b>	<b>Torsades</b>	<b>57</b>
IV.1	Introduction . . . . .	57
IV.2	Géométrie, cinématique . . . . .	58
IV.3	Equations d'équilibre . . . . .	60
IV.4	Applications . . . . .	63
<b>V</b>	<b>Vibrations et ondes de flexion</b>	<b>69</b>
V.1	Equations de Kirchhoff dynamiques . . . . .	69
V.2	Ondes de flexion . . . . .	70
V.3	Vibrations d'une tige encastrée-encastrée . . . . .	75
<b>VI</b>	<b>Une conclusion et quelques perspectives</b>	<b>83</b>
VI.1	De l'intérêt des tiges . . . . .	83
VI.2	Tige élastiques : Que reste-t-il à faire ? . . . . .	84





## **Première partie**

# **Quelques études sur les tiges élastiques**



# Introduction et état de l'art

## Appellations

Barre, poutre, verge, arc, tige, filament, fil, corde, etc. Que de mots pour définir le même type d'objets élastique : un corps allongé dont les dimensions transverses sont petites par rapport à sa dimension longitudinale. La structure, dite élancée, est dans ce cas vue comme un objet élastique à une dimension et les équations de l'élasticité 3D sont remplacées par des équations plus simples : les équations d'équilibre sont, par exemple, des équations différentielles ordinaires. Les différentes appellations utilisées permettent en fait de caractériser le comportement élastique de l'objet : une barre reste rigide en flexion mais pourra s'étirer (ou se contracter) si soumise à un effort axial, une poutre fléchit sous l'effet d'un effort de flexion, un arc est une poutre dont la forme naturelle est courbe, une tige fléchit et se tord dans les trois dimensions d'espace, un filament est une tige microscopique soumise aux fluctuations thermiques. Les termes fil et corde sont réservés à des corps élastiques parfaitement flexibles qui s'étirent si soumis à une force de tension. Les objets étudiés dans ce mémoire sont soit des poutres, soit des tiges, en grandes rotations. C'est le terme 'tige' qui apparaît quasi exclusivement dans le texte.

L'histoire de l'étude scientifique des déformations des tiges élastiques remonte au moins à Galilée [Galilee 38]. Le livre de Timosheko [Timoshenko 61] retrace les apports des savants qui ont contribué à l'établissement de la théorie des tiges : Daniel Bernoulli, Léonard Euler, Joseph-Louis Lagrange, Henri Navier, Barré de Saint-Venant et finalement Gustave Kirchhoff, Alfred Clebsch, et A. Edward H. Love. Je me contenterai ici dans cette introduction d'exposer certains des travaux récents (i.e. de ces dix ou quinze dernières années) sur le sujet des tiges élastiques.

## Mappemonde des tiges

L'état de l'art que je dresse ici est inévitablement lacunaire, les travaux mentionnés sont ceux qui ont retenu mon attention et ont influencé mon travail.

Gabor Domokos, Hongrie, s'est intéressé à des problèmes de discrétisation des équations d'équilibre, e.g. à l'apparition de solutions fantômes lorsque le pas n'est pas assez fin [Domokos 93]. Il a aussi développé un algorithme de cheminement numérique, basé sur la méthode d'approximation linéaire par morceaux [Allgower 97] faisant intervenir des simplexes en  $N$  dimensions [Domokos 95], différent des schémas classiques prédicteur-correcteur. Enfin il s'est intéressé à des problèmes où une poutre (grande rotation dans le plan) entre en contact avec elle-même

---

[Domokos 03] ou un mur [Domokos 97]. Ce dernier problème a aussi été étudié par Benoît Roman lors de sa thèse de doctorat [Pocheau 04] à Marseille.

En Angleterre, Alan Champneys, Michael Thompson, et Gert van der Heijden se sont intéressés majoritairement à des problèmes d'équilibre de tiges (avec torsion, défléchies dans l'espace 3D). Ils ont revisité l'analogie statique-dynamique de Kirchhoff [van der Heijden 00], étudiant l'intégrabilité ou l'aspect chaotique du système différentiel régissant l'équilibre d'une tige, particulièrement dans le cas d'une tige de longueur infinie où les orbites homoclines ou hétéroclines entrent en jeu [Champneys 96]. Plus récemment Gert van der Heijden et Evgueni Starostin ont proposé un modèle de bande élastique pour décrire la forme d'un ruban de Möbius [Starostin 07].

John Maddocks a montré que l'on pouvait écrire les équations de la statique et de la dynamique d'une tige comme un système Hamiltonien [Dichmann 96], ce qui permet d'utiliser les résultats théoriques et les méthodes numériques existants pour ces systèmes. D'autre part il a introduit le concept de courbure globale d'une courbe [Gonzalez 02] qui permet de traiter de manière unique les deux cas dans lesquels une tige s'auto-contacte. Le groupe de Lausanne a aussi établi un critère de stabilité via le calcul de la deuxième variation de l'énergie potentielle de la tige [Manning 98] et a appliqué ces méthodes au calcul des configurations de plasmides d'ADN [Manning 96, Furrer 00].

De l'autre côté de l'Atlantique, Bernard Coleman et David Swigon ont introduit un modèle pour l'étude de configurations où la tige est en contact avec elle-même (i.e. auto-contact), et ont appliqué cette méthode à l'investigation minutieuse des plasmides d'ADN sur-enroulés [Coleman 00]. Une modélisation des configurations avec auto-contact a aussi été proposée par David Stump and Barrie Fraser (Australie), modélisation faisant intervenir des discontinuités dans le moment interne à la tige [Stump 98]. Récemment Heiko von der Mosel and Friedemann Schuricht ont prouvé que les solutions qui minimisent l'énergie potentielle d'une tige avec contact ne peuvent avoir de discontinuité dans le moment [Schuricht 03], ce qui invalide le modèle australien.

Alain Goriely et Michael Tabor se sont intéressés à des problèmes de statique de tiges avec courbure et torsion naturelle (e.g. hélices) [McMillen 02], mais aussi de dynamique : par exemple ondes de flexion dans un fouet [McMillen 03], ou critère de stabilité dynamique [Goriely 97a, Goriely 97b].

Côté dynamique, plusieurs algorithmes ont récemment été introduits pour simuler l'évolution temporelle d'une tige avec ou sans (auto-) contact [Goyal 05, Spillmann 07, Bergou 08].

Enfin les outils de cheminement numérique couramment utilisés pour suivre les changements dans la déformée lorsqu'on fait lentement (i.e. de manière quasistatique) varier la valeur d'un paramètre sont AUTO [Doedel 97], Multifario [Henderson 02], MAN [Potier-Ferry 04, Cochelin 04].

## Contenu du mémoire

Ce mémoire donne un aperçu des travaux de recherche que j'ai effectués après ma thèse de doctorat [Neukirch 98]. Je n'ai pas souhaité faire un catalogue exhaustif de toutes mes recherches mais ai plutôt sélectionné un nombre limité d'études, présentées de manière cohérente. La sé-

---

lection est néanmoins représentative de mon travail depuis 1999.

Le premier chapitre expose la théorie directe de Cosserat et rappelle les équations de Kirchhoff, qui seront utilisées dans tout le mémoire. Je n'ai pas effectué de travaux de recherche sur l'établissement de ces équations (théorie directe ou approche asymptotique) mais j'ai néanmoins inclus une section expliquant d'où viennent les équations de Kirchhoff, sur lesquelles tout le reste du travail exposé dans le mémoire est basé. En fin de chapitre je montre sur un exemple simple que l'extensibilité de la tige peut être négligée si l'on étudie des configurations d'équilibre sous des chargements dont l'intensité est du même ordre de grandeur que la force de flambage.

Les deuxième et troisième chapitres présentent l'étude principale que j'ai réalisée sur les tiges : un traitement relativement complet des configurations post-flambage d'une tige encastree-encastree, contenant à la fois une étude des propriétés de symétrie des solutions, des diagrammes force-extension ou torsion-rotation numériques et expérimentaux, une modélisation du contact ainsi que l'application aux expériences d'étirement sous contrainte de torsion de la molécule d'ADN.

Le troisième chapitre expose la modélisation de l'enroulement d'une tige (ayant ou non des courbures et torsion naturelles) soit autour d'une autre tige, soit autour d'un obstacle cylindrique.

La quatrième chapitre traite de la dynamique d'une poutre encastree-libre et du phénomène de renforcement de courbure, puis des modes de vibration d'une poutre encastree-encastree. Je compare alors les valeurs des fréquences des modes propres obtenues pour une poutre inextensible avec celles obtenues pour une poutre extensible.



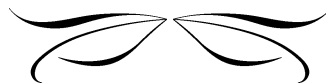
# Bibliographie

- [Allgower 97] E. L. Allgower & K. Georg. *Numerical path following*. In P. G. Ciarlet & J. L. Lions, editeurs, *Handbook of Numerical Analysis*, volume 5, pages 3–207. North-Holland, 1997.
- [Bergou 08] Miklós Bergou, Max Wardetzky, Stephen Robinson, Basile Audoly & Eitan Grinspun. *Discrete Elastic Rods*. *ACM Transactions on Graphics (SIGGRAPH)*, 2008.
- [Champneys 96] A. R. Champneys & J. M. T. Thompson. *A multiplicity of localised buckling modes for twisted rod equations*. *Proc. R. Soc. Lond. A*, vol. 452, pages 2467–2491, 1996.
- [Cochelin 04] B. Cochelin & F. Périçon. *Résolution de petits systèmes algébriques par la MAN sous Matlab*. *Revue Européenne de Mécanique Numérique*, vol. 13, no. 1-2, pages 76–96, 2004.
- [Coleman 00] B. D. Coleman & D. Swigon. *Theory of supercoiled elastic rings with self-contact and its application to DNA plasmids*. *Journal of Elasticity*, vol. 60, pages 173–221, 2000.
- [Dichmann 96] D.J. Dichmann, Y. Li & J.H. Maddocks. *Hamiltonian Formulations and Symmetries in Rod Mechanics*. In J.P. Mesirov, K. Schulten & D.W. Sumners, editeurs, *Mathematical Approaches to Biomolecular Structure and Dynamics*, volume 82 of *The IMA Volumes in Mathematics and Its Applications*, pages 71–113. Springer Verlag, 1996.
- [Doedel 97] E. J. Doedel, A. R. Champneys, T. F. Fairgrieve, Y. A. Kuznetsov, B. Sandstede & X.-J. Wang. *AUTO97 : Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations*. Rapport technique, Department of Computer Science, Concordia University, Montreal, Canada, 1997. (Available by FTP from ftp.cs.concordia.ca in directory pub/doedel/auto).
- [Domokos 93] G. Domokos & P. Holmes. *Euler’s problem, Euler’s method, and the standard map ; or, the discrete charm of buckling*. *Journal of Nonlinear Science*, vol. 3, no. 1, pages 109–151, 1993.
- [Domokos 95] G. Domokos & Zs. Gáspár. *A Global, Direct Algorithm for Path-Following and Active Static Control of Elastic Bar Structures*. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, vol. 23, no. 4, pages 549 – 571, 1995.



- [Domokos 97] G. Domokos, P. Holmes & B. Royce. *Constrained euler buckling*. Journal of Nonlinear Science, vol. 7, no. 3, pages 281–314, 1997.
- [Domokos 03] G. Domokos, W. B. Fraser & I. Szeberényi. *Symmetry-breaking bifurcations of the uplifted elastic strip*. Physica D : Nonlinear Phenomena, vol. 185, no. 2, pages 67 – 77, 2003.
- [Furrer 00] Patrick B. Furrer, Robert S. Manning & John H. Maddocks. *DNA Rings with Multiple Energy Minima*. Biophysical Journal, vol. 79, pages 116–136, 2000.
- [Galilee 38] Galilee. *Discours concernant deux sciences nouvelles*. Elzevirs, Leiden, 1638.
- [Gonzalez 02] O. Gonzalez, J. H. Maddocks, F. Schuricht & H. von der Mosel. *Global curvature and self-contact of nonlinearly elastic curves and rods*. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, vol. 14, no. 1, pages 29–68, 2002.
- [Goriely 97a] Alain Goriely & Michael Tabor. *Nonlinear dynamics of filaments I. Dynamical instabilities*. Physica D : Nonlinear Phenomena, vol. 105, no. 1-3, pages 20 – 44, 1997.
- [Goriely 97b] Alain Goriely & Michael Tabor. *Nonlinear dynamics of filaments II. Nonlinear analysis*. Physica D : Nonlinear Phenomena, vol. 105, no. 1-3, pages 45 – 61, 1997.
- [Goyal 05] S. Goyal, N.C. Perkins & C.L. Lee. *Nonlinear dynamics and loop formation in Kirchhoff rods with implications to the mechanics of DNA and cables*. Journal of Computational Physics, vol. 209, no. 1, pages 371 – 389, 2005.
- [Henderson 02] Michael E. Henderson. *Multiple parameter continuation : Computing implicitly defined k-manifolds*. International Journal of Bifurcation and Chaos, vol. 12, no. 3, pages 451–476, 2002.
- [Manning 96] R.S. Manning, J.H. Maddocks & J.D. Kahn. *A Continuum Rod Model of Sequence-Dependent DNA Structure*. J. Chem. Phys., vol. 105, pages 5626–5646, 1996.
- [Manning 98] R. S. Manning, K. A. Rogers & J. H. Maddocks. *Isoperimetric conjugate points with application to the stability of DNA minicircles*. Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences, vol. 454, no. 1980, pages 3047–3074, 1998.
- [McMillen 02] T. McMillen & A. Goriely. *Tendril Perversion in Intrinsically Curved Rods*. Journal of Nonlinear Science, vol. 12, no. 3, pages 241–281, 2002.
- [McMillen 03] Tyler McMillen & Alain Goriely. *Whip waves*. Physica D : Nonlinear Phenomena, vol. 184, no. 1-4, pages 192 – 225, 2003. Complexity and Nonlinearity in Physical Systems – A Special Issue to Honor Alan Newell.
- [Neukirch 98] Sébastien Neukirch. *Les attracteurs des systèmes dynamiques dissipatifs de Lorenz et de Liénard : nombre, forme et localisation*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 1998.

- [Pocheau 04] A. Pocheau & B. Roman. *Uniqueness of solutions for constrained Elastica*. Physica D : Nonlinear Phenomena, vol. 192, no. 3-4, pages 161 – 186, 2004.
- [Potier-Ferry 04] M. Potier-Ferry & J. Cadou. *Basic ANM algorithms for path following problems*. Revue européenne des éléments finis, vol. 13, no. 1-2, pages 9–32, 2004.
- [Schuricht 03] F. Schuricht & H. von der Mosel. *Euler-Lagrange Equations for Nonlinearly Elastic Rods with Self-Contact*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, vol. 168, no. 1, pages 35–82, 2003.
- [Spillmann 07] J. Spillmann & M. Teschner. *CORDE : Cosserat Rod Elements for the Dynamic Simulation of One-Dimensional Elastic Objects*. ACM SIGGRAPH / Eurographics Symposium on Computer Animation, San Diego, USA, 2007.
- [Starostin 07] E. L. Starostin & G. H. M. van der Heijden. *The shape of a Mobius strip*. Nature Materials, vol. 6, no. 8, pages 563–567, 2007.
- [Stump 98] D. M. Stump, W. B. Fraser & K. E. Gates. *The writhing of circular cross-section rods : undersea cables to DNA supercoils*. Proc. R. Soc. Lond. A, vol. 454, pages 2123–2156, 1998.
- [Timoshenko 61] Stephen P. Timoshenko & James M. Gere. *Theory of elastic stability*. McGraw-Hill international editions, 1961.
- [van der Heijden 00] G. H. M. van der Heijden & J. M. T. Thompson. *Helical and localised buckling in twisted rods : a unified analysis of the symmetric case*. Nonlinear Dynamics, vol. 21, pages 71–79, 2000.





# Chapitre I

## Les équations de Kirchhoff

### Plan du chapitre

---

<b>I.1</b>	<b>Théorie directe de Cosserat</b> . . . . .	<b>11</b>
a)	Equilibre mécanique . . . . .	12
b)	Suivi des déformations : cinématique . . . . .	13
c)	Lois de comportement . . . . .	13
d)	Résumé des équations . . . . .	16
e)	Ecriture des équations en composantes . . . . .	16
f)	Adimensionnement . . . . .	17
<b>I.2</b>	<b>Approche de Kirchhoff, Clebsch et Love</b> . . . . .	<b>18</b>
<b>I.3</b>	<b>Cas plan</b> . . . . .	<b>20</b>
a)	Equations d'équilibre dans le repère fixe . . . . .	21
b)	Equations d'équilibre dans le repère mobile . . . . .	22
c)	Résolution du cas encastree-encastree . . . . .	22
d)	Comparaison extensible / inextensible . . . . .	24

---

### I.1 Théorie directe de Cosserat

On définit ici les équations d'équilibre d'une tige élastique se déformant dans l'espace à trois dimensions. On étudie des tiges dont la taille de la section est très petite devant la longueur totale. On se restreint de plus aux cas où les déformations restent petites : c'est à dire que les longueurs typiques de variation de l'état mécanique de la tige sont grandes devant la taille de la section (les rayons de courbure restent grands devant le diamètre de la section par exemple). Dans ce cas le problème d'élasticité 3D d'un corps se déformant dans l'espace est réduit au problème d'un corps élastique 1D (la ligne centrale de la tige) se déformant dans l'espace. Les efforts dans chaque section sont moyennés et l'on ne considère que leurs résultantes. La section de la tige n'est cependant pas oubliée mais elle est considérée rigide (hypothèse de Navier-Bernoulli) : la déformation de la ligne centrale n'entraîne pas de déformation de la section. Néanmoins l'orientation de cette section ne soit pas obligée de coïncider avec l'orientation (i.e. la tangente) de la

ligne centrale. On utilise ainsi une théorie de directeurs de Cosserat (en anglais : Special Cosserat theory of rods [Antman 04]) pour suivre les changements d'orientation de la section, ce que les frères Cosserat appelaient *une théorie directe de la ligne déformable* [Cosserat 96]. La tige est soumise à des forces distribuées sur sa longueur ainsi qu'à des forces et moments ponctuels agissant aux extrémités ou en certains points précis. On cherche les équilibres que la tige adopte en fonction des efforts extérieurs appliqués.

### a) Equilibre mécanique

On étudie l'équilibre d'une tige de longueur  $L$  soumise à des forces et moments extérieurs (pesanteur, force électrostatique, pression de contact venant d'un obstacle, tension, poussée ou couple venant d'un opérateur, etc). La ligne centrale de la tige est repérée par sa position  $\{\mathbf{R}(S), S \in [0, L]\}$  dans un repère fixe  $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ , où  $S$  est l'abscisse curviligne le long de cette ligne. Les efforts extérieurs appliqués à la tige se répercutent le long de ligne centrale donnant ainsi lieu à une force  $\mathbf{F}(S)$  et un moment  $\mathbf{M}(S)$  internes variables. Pour une section d'abscisse  $S_1$  la force  $\mathbf{F}(S_1)$  est la force que la partie aval de la tige  $S > S_1$  applique sur la partie amont  $S < S_1$ . Les équations d'équilibre sont les équations qui décrivent comment la force  $\mathbf{F}(S)$  et le moment  $\mathbf{M}(S)$  internes varient avec  $S$ , ce sont des équations différentielles ordinaires. On établit ces équations en considérant l'équilibre d'un petit morceau de tige, entre  $S$  et  $S + \delta S$ , dans la limite où la longueur du morceau tend vers zéro,  $\delta S \rightarrow 0$  [Antman 04]. On considère donc les

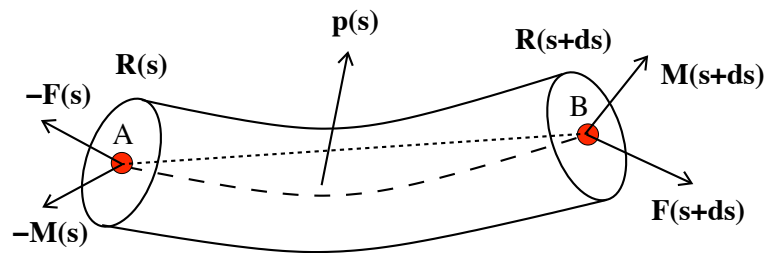


FIGURE I.1 – Une petite partie d'une tige et les forces externes qui lui sont appliquées. La ligne centrale est représentée par des traits interrompus longs et le vecteur  $\mathbf{R}'(S)dS$  par des pointillés.

forces appliquées au morceau de tige entre  $S$  et  $S + \delta S$  (voir fig. I.1) : à droite ( $S + \delta S$ ) les efforts extérieurs se résument une force  $\mathbf{F}(S + \delta S)$  et un moment  $\mathbf{M}(S + \delta S)$ , et à gauche la force et le moment extérieurs appliqués en  $S$  sont  $-\mathbf{F}(S)$  et  $-\mathbf{M}(S)$ . En présence d'une force externe comme la pesanteur, une force électrostatique ou une force de contact, on ajoute à ce bilan une force distribuée  $\mathbf{P}(s)$ , qui a la dimension d'une force par unité de longueur. L'équilibre des forces s'écrit donc :

$$\mathbf{F}(S + \delta S) - \mathbf{F}(S) + \mathbf{P}(S) \delta S = \mathbf{0}$$

On fait de même pour les moments. Ici on ne considère pas de moment distribué. Il faut par contre ajouter le couple créé par le fait que les forces  $\mathbf{F}(S)$  et  $\mathbf{F}(S + \delta S)$  n'agissent pas au même point. On obtient :

$$\mathbf{M}(S + \delta S) - \mathbf{M}(S) + \mathbf{OA} \times (-\mathbf{F}(S)) + \mathbf{OB} \times \mathbf{F}(S + \delta S) = \mathbf{0}.$$

On fait tendre  $\delta S \rightarrow 0$  et l'on obtient finalement :

$$\mathbf{F}' + \mathbf{P} = \mathbf{0}, \quad (\text{I.1a})$$

$$\mathbf{M}' + \mathbf{R}' \times \mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad (\text{I.1b})$$

où  $(\ )' \stackrel{\text{def}}{=} d/dS$ . Dans le cas d'une évolution dynamique de la tige, les termes d'inertie apparaissent à droite des signes 'égal'. A noter que l'on peut retrouver ces équations par une approche variationnelle [Bourgat 88].

## b) Suivi des déformations : cinématique

En plus du repère fixe  $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ , on utilise un repère mobile orthonormé constitué de trois directeurs :  $\{\mathbf{d}_1(S), \mathbf{d}_2(S), \mathbf{d}_3(S)\}$ . Le vecteur  $\mathbf{d}_3$  est normal à la section et les vecteurs  $\mathbf{d}_1$  and  $\mathbf{d}_2$  appartiennent à la section. L'évolution de  $\mathbf{d}_3$  permet de suivre la façon dont la tige se courbe dans l'espace et celle de  $\mathbf{d}_1$  et  $\mathbf{d}_2$  retrace la façon dont la tige est tordue (twistée en fran-anglais). Le vecteur  $\mathbf{d}_3$  est aligné avec la tangente  $\mathbf{R}'$  à la ligne centrale lorsque qu'il n'y a pas de cisaillement. Si il n'y a pas non plus d'extension, alors  $\mathbf{R}' = \mathbf{d}_3$ . Le repère mobile  $\{\mathbf{d}_i(S)\}$  restant orthonormal tout le long de la tige ( $\forall S$ ), on peut écrire son évolution à l'aide d'un vecteur  $\mathbf{U}(S)$  :

$$\mathbf{d}_i' = \mathbf{U} \times \mathbf{d}_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (\text{I.2})$$

où  $\mathbf{U}$  est le vecteur de Darboux, aussi appelé vecteur des courbures car ses composantes dans le repère mobile correspondent aux courbures autour de  $\mathbf{d}_1$  et  $\mathbf{d}_2$  et à la torsion autour de  $\mathbf{d}_3$ . Par torsion en français il faut entendre *twist* en anglais, une quantité qui contient plus d'information que la simple torsion géométrique de Frenet.

La relation (I.2) peut-être inversée si l'on veut obtenir les composantes du vecteur de Darboux en fonction des directeurs :

$$U_1 = \mathbf{d}_2' \times \mathbf{d}_3, \quad U_2 = \mathbf{d}_3' \times \mathbf{d}_1, \quad U_3 = \mathbf{d}_1' \times \mathbf{d}_2, \quad (\text{I.3})$$

## c) Lois de comportement

Afin de clore le système d'équations qui régit l'équilibre d'une tige élastique il faut introduire les lois de comportement, c'est à dire le lien entre contraintes et déformations. Le fait d'utiliser, pour écrire les lois de comportement, les composantes  $U_i$  du vecteur de Darboux est une hypothèse de la théorie de directeurs de Cosserat. Cette hypothèse n'est vérifiée que lorsqu'on établit, par des approches asymptotiques  $3D \rightarrow 1D$ , que les termes correctifs à ces lois de comportement sont d'ordres supérieurs.

On place un chapeau sur les variables de l'état de référence. La tige peut être courbée  $\hat{U}_1 \neq 0$ ,  $\hat{U}_2 \neq 0$  et tordue  $\hat{U}_3 \neq 0$  dans son état de référence (comme un ressort par exemple). Les lois de comportement en courbure expriment la façon dont le moment interne  $\mathbf{M}$  dépend des déformations de courbure-torsion  $Q_i = U_i(S) - \hat{U}_i(S)$ . On se place dans le cadre de l'hypothèse d'hyperélasticité : il existe une fonction  $W$  des déformations  $Q_i$  dont les dérivés partielles sont

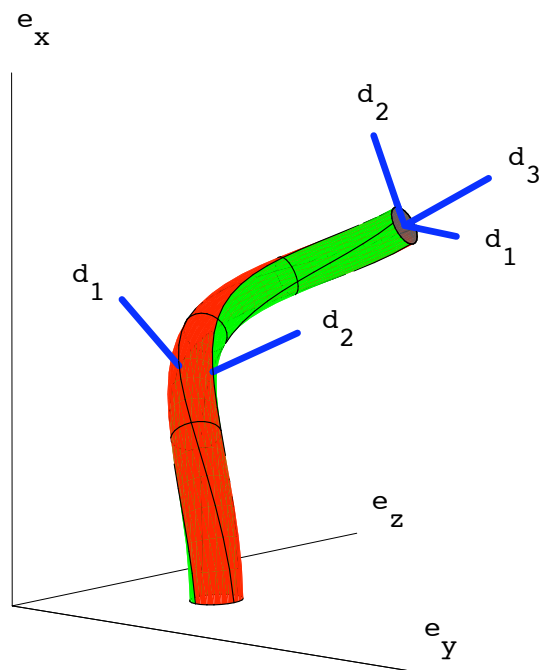


FIGURE I.2 – Une tige courbée et tordue (i.e. sous torsion). Les lignes tracées à la surface de la tige permettent de suivre la torsion. Le repère mobile  $d_i$  est tracé en deux endroits différents le long de la tige.

les composantes  $M_i$  du moment interne dans le repère mobile :

$$M_i = \left. \frac{\partial W}{\partial Q_i} \right|_{Q_i=U_i(S)-\hat{U}_i(S)}$$

où  $U_1(S)$  et  $U_2(S)$  correspondent aux courbures, et  $U_3(S)$  à la torsion, de l'état déformé. De la même façon la force interne  $F$  dérive de  $W$  via les déformations en cisaillement en extension

$$F_i = \left. \frac{\partial W}{\partial Q'_i} \right|_{Q'_i=V_i(S)-\hat{V}_i(S)}$$

où  $V_1$  et  $V_2$  correspondent au cisaillement et  $V_3$  à l'extension et où les  $F_i$  sont les composantes de la force dans le repère mobile  $\{\mathbf{d}_i(S)\}$ . La liberté que l'on a de choisir les directeurs dans la configuration de référence permet de prendre  $\hat{V}_i(s) = (0, 0, 1)$  [Antman 04]. Une fois que le vecteur  $\mathbf{V}(S) = V_1 \mathbf{d}_1 + V_2 \mathbf{d}_2 + V_3 \mathbf{d}_3$  est connu, on calcule la position de la ligne centrale via l'équation :

$$\mathbf{R}' = \mathbf{V}(S) \quad (\text{I.4})$$

On s'intéresse ici au cas de lois de comportement linéaires, où  $W(Q_i, Q'_i)$  est une fonction quadratique des  $Q_i$  et  $Q'_i$ . Dans le cas où les déformations de courbure-torsion sont découplées des déformations de cisaillement-extension, on a :

$$M_i = \sum_{j=1}^{j=3} K_{ij}(S) (U_j(S) - \hat{U}_j(S)) \quad (\text{I.5})$$

$$F_i = \sum_{j=1}^{j=3} L_{ij}(S) (V_j(S) - \hat{V}_j(S)) \quad (\text{I.6})$$

où  $K_{ij}(S)$  et  $L_{ij}(S)$  sont des matrices symétriques. Dans le cas d'une tige droite et prismatique dans son état de référence, on a  $\hat{U}_j(s) \equiv 0$ . Dans le cas de propriétés uniformes du matériau et si la section de la tige est la même partout, on a des matrices  $K_{ij}$  et  $L_{ij}$  constantes. On se place enfin dans le cas encore simplifié où il n'y a pas de couplage entre courbures et torsion ni entre cisaillements et extension, c'est à dire avec des matrices diagonales (on note  $K_i$  et  $L_i$  ces éléments diagonaux). Les lois de comportement s'écrivent alors :

$$M_i = K_i U_i \quad (\text{I.7})$$

$$F_i = L_i (V_i - \hat{V}_i) \quad (\text{I.8})$$

Dans le cas d'une section circulaire les modules de flexion  $K_1$  et  $K_2$ , le module de torsion  $K_3$  ainsi que les module de cisaillement  $L_1$  et  $L_2$  et le module d'extension  $L_3$  s'écrivent simplement en fonction du module d'élasticité longitudinal (module de Young)  $E$ , du module de glissement  $G$ , de l'aire de la section  $A$ , du moment polaire  $J$  et du moment quadratique de la section  $I$  :

$$K_1 = K_2 = EI$$

$$K_3 = GJ$$

$$L_1 = L_2 = GA$$

$$L_3 = EA$$



### d) Résumé des équations

Nous avons finalement huit quantités vectorielles à déterminer  $\mathbf{F}(S)$ ,  $\mathbf{M}(S)$ ,  $\mathbf{R}(S)$ ,  $\mathbf{d}_1(S)$ ,  $\mathbf{d}_2(S)$ ,  $\mathbf{d}_3(S)$ ,  $\mathbf{U}(S)$  et  $\mathbf{V}(S)$ . La force extérieure  $\mathbf{P}(S)$  doit être connue explicitement (e.g. pesanteur) ou bien être exprimable en fonction des quantités précédentes (e.g. en fonction de la position  $\mathbf{R}(S)$  dans le cas du contact ou d'une force électrostatique). En contre-partie 6 équations différentielles ordinaires (I.1a), (I.1b), (I.2), (I.4) et 2 relations algébriques (I.7) et (I.8) relient ces quantités inconnues. Malheureusement les relations (I.7) et (I.8) font intervenir les composantes dans le repère mobile des quantités inconnues. Cela oblige à écrire les équations différentielles (I.1a), (I.1b), (I.2), (I.4) comme des équations pour les composantes dans le repère mobile. Dans certains cas précis (e.g. le cas traité au Chapitre II) les lois de comportement peuvent prendre un aspect vectoriel, ce qui permet de garder l'écriture vectorielle de l'ensemble des équations.

### e) Ecriture des équations en composantes

On exprime les équations d'équilibre (I.1a), (I.1b) dans le repère mobile, c'est à dire comme des équations pour les composantes  $F_i$  de la force et  $M_i$  du moment dans le repère mobile. Le fait que le repère ne soit pas fixe introduit des termes supplémentaires dans les équations.

$$\begin{aligned}
 F_1' &= F_2 U_3 - F_3 U_2 - P_1 \\
 F_2' &= F_3 U_1 - F_1 U_3 - P_2 \\
 F_3' &= F_1 U_2 - F_2 U_1 - P_3 \\
 M_1' &= M_2 U_3 - M_3 U_2 + F_2 V_3 - F_3 V_2 \\
 M_2' &= M_3 U_1 - M_1 U_3 + F_3 V_1 - F_1 V_3 \\
 M_3' &= M_1 U_2 - M_2 U_1 + F_1 V_2 - F_2 V_1
 \end{aligned}$$

où  $P_i$  sont les composantes de la force extérieure dans le repère mobile  $\{\mathbf{d}_i(S)\}$ . Les autres équations sont écrites dans le repère fixe :

$$X' = V_1 d_{1x} + V_2 d_{2x} + V_3 d_{3x} \quad (\text{I.9a})$$

$$Y' = V_1 d_{1y} + V_2 d_{2y} + V_3 d_{3y} \quad (\text{I.9b})$$

$$Z' = V_1 d_{1z} + V_2 d_{2z} + V_3 d_{3z} \quad (\text{I.9c})$$

$$d'_{1x} = U_3 d_{2x} - U_2 d_{3x} = U_3 d_{3y} d_{1z} - U_3 d_{3z} d_{1y} - U_2 d_{3x} \quad (\text{I.9d})$$

$$d'_{1y} = U_3 d_{2y} - U_2 d_{3y} = U_3 d_{3z} d_{1x} - U_3 d_{3x} d_{1z} - U_2 d_{3y} \quad (\text{I.9e})$$

$$d'_{1z} = U_3 d_{2z} - U_2 d_{3z} = U_3 d_{3x} d_{1y} - U_3 d_{3y} d_{1x} - U_2 d_{3z} \quad (\text{I.9f})$$

$$d'_{2x} = U_1 d_{3x} - U_3 d_{1x} \quad (\text{I.9g})$$

$$d'_{2y} = U_1 d_{3y} - U_3 d_{1y} \quad (\text{I.9h})$$

$$d'_{2z} = U_1 d_{3z} - U_3 d_{1z} \quad (\text{I.9i})$$

$$d'_{3x} = U_2 d_{1x} - U_1 d_{2x} = U_2 d_{1x} - U_1 d_{3y} d_{1z} + U_1 d_{3z} d_{1y} \quad (\text{I.9j})$$

$$d'_{3y} = U_2 d_{1y} - U_1 d_{2y} = U_2 d_{1y} - U_1 d_{3z} d_{1x} + U_1 d_{3x} d_{1z} \quad (\text{I.9k})$$

$$d'_{3z} = U_2 d_{1z} - U_1 d_{2z} = U_2 d_{1z} - U_1 d_{3x} d_{1y} + U_1 d_{3y} d_{1x} \quad (\text{I.9l})$$

Les équations (I.9g), (I.9h) et (I.9i) peuvent être omises et le vecteur  $\mathbf{d}_2(S) = \mathbf{d}_3 \times \mathbf{d}_1$  calculé après coup. Les quantités  $U_i$  et  $V_i$  ne sont plus des inconnues du problème car elles sont remplacées dans les équations par :

$$U_1 = K_{11}^{-1} M_1 + K_{12}^{-1} M_2 + K_{13}^{-1} M_3 + \hat{U}_1$$

$$U_2 = K_{12}^{-1} M_1 + K_{22}^{-1} M_2 + K_{23}^{-1} M_3 + \hat{U}_2$$

$$U_3 = K_{13}^{-1} M_1 + K_{23}^{-1} M_2 + K_{33}^{-1} M_3 + \hat{U}_3$$

$$V_1 = L_{11}^{-1} F_1 + L_{12}^{-1} F_2 + L_{13}^{-1} F_3$$

$$V_2 = L_{12}^{-1} F_1 + L_{22}^{-1} F_2 + L_{23}^{-1} F_3$$

$$V_3 = L_{13}^{-1} F_1 + L_{23}^{-1} F_2 + L_{33}^{-1} F_3 + 1$$

On a finalement un système de 15 équations différentielles ordinaires à résoudre.

Remarque : le cas d'une tige sans cisaillement ni extension est obtenu en posant  $V_1 = 0 = V_2$  et  $V_3 = 1$ .

## f) Adimensionnement

Il y a deux méthodes principales pour adimensionner les équations d'équilibre des tiges élastiques. La première méthode consiste à utiliser la longueur  $L$  de la tige comme unité de longueur. Les forces et moments sont de plus divisés par un module  $K_0$  (e.g. unique module de flexion dans le cas d'une tige isotrope).

$$\mathbf{f} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{F} L^2}{K_0}, \quad \mathbf{m} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{M} L}{K_0}, \quad \mathbf{u} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{U} L, \quad \mathbf{r} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{R}}{L}, \quad s \stackrel{\text{def}}{=} \frac{S}{L}, \quad \gamma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{K_3}{K_0}. \quad (\text{I.10})$$

L'intégration des équations différentielles à alors lieu sur un intervalle de longueur unité pour  $s$ . Le seuil de flambage pour une tige encastrée-encastrée est atteint pour  $|\mathbf{f}|/(2\pi)^2 = 1$  et nous parlerons de forces grandes si ce paramètre  $|\mathbf{f}|/(2\pi)^2$  est grand devant un.

Il est d'autres cas où la longueur  $L$  de la tige n'est pas la longueur pertinente pour décrire les configurations d'équilibre observées. En fait une autre longueur caractéristique peut être construite avec  $|\mathbf{F}|$  et  $K_0$  :  $L_{loc} = \sqrt{K_0/|\mathbf{F}|}$ . On appelle cas de longueur infinie le cas où  $L \gg L_{loc}$  (par exemple quand la force appliquée est importante). Dans ce cas les détails précis des conditions de bords perdent leur importance et ces dernières peuvent être remplacées par des conditions en contraintes imposées où une force de tension et un couple de torsion externes, alignés avec la tangente en bout de tige, sont appliqués aux extrémités de la tige. Les déformations le long de la tige sont alors localisées sur une région de longueur  $L_{loc}$  [van der Heijden 00]. J'ai étudié, pour le cas d'une tige encastrée-encastrée, le passage d'une description en longueur finie à une description en longueur infinie [Neukirch 02].

## I.2 Approche de Kirchhoff, Clebsch et Love

A la différence des théories directes, les approches asymptotiques ne font *a priori* pas d'hypothèses sur la loi de comportement de la tige, mais la déduit des équations de l'élasticité 3D (voir par exemple [Cimetière 88], [Acerbi 91], [Marigo 98], ou [Marigo 06]). C'est d'ailleurs une telle démarche qu'ont suivi Kirchhoff [Kirchhoff 59, Kirchhoff 76] et Clebsch [Clebsch 62]. Leurs travaux ont été repris et reformulés par Love [Love 44]. Dill [Dill 92] revient sur les contributions de chacun et examine ces travaux à la lumière de la théorie moderne de l'élasticité. Ce qui suit est un résumé de l'article de Dill.

On se place dans le cas d'une tige (de longueur  $L$ ) de section uniforme. Chaque point matériel sur la tige est repéré par ses coordonnées  $(X, Y, S)$ , sa position dans un repère fixe est donnée par :

$$\mathbf{R}(X, Y, S) = \mathbf{R}_{cent}(S) + X \mathbf{a}_1 + Y \mathbf{a}_2 \quad (\text{I.11})$$

où  $S$  est l'abscisse curviligne de la ligne centrale  $\mathbf{R}_{cent}$ , ligne joignant les centres géométriques des sections. Le centre géométrique d'une section est défini de manière à ce que  $\int X dX = 0$  et  $\int Y dY = 0$ . Les vecteurs  $\mathbf{a}_1$  et  $\mathbf{a}_2$  sont les axes principaux de la section. L'épaisseur  $h$  de la section est la plus grande distance (dans la section) au centre géométrique, i.e. le rayon dans le cas d'une section circulaire. Dans l'état déformé, où la tige est courbée et tordue, le même point matériel est repéré par :

$$\mathbf{r}(X, Y, S) = \mathbf{r}_{cent}(S) + X \mathbf{d}_1 + Y \mathbf{d}_2 + w_i \mathbf{d}_i. \quad (\text{I.12})$$

Les équations de Kirchhoff sont établies comme le premier ordre d'un développement asymptotique de petit paramètre  $\alpha$ , où  $\alpha$  est le plus grand des quatre nombres suivants :  $h/L$ ,  $\epsilon$ ,  $h/a$ ,  $h/b$  où  $\epsilon$  est l'extension de la ligne centrale,  $1/a$  (respectivement  $1/b$ ) la plus grande courbure (ou torsion) dans l'état naturel (respectivement déformé).

L'hypothèse de Navier-Bernoulli stipule que dans l'état déformé les vecteurs  $\mathbf{d}_1$  et  $\mathbf{d}_2$  sont obtenus par simple rotation des vecteurs  $\mathbf{a}_1$  et  $\mathbf{a}_2$ , et donc que  $w_i = 0$  dans la formule (I.12). Un point important est que Kirchhoff n'a jamais fait une telle hypothèse [Dill 92]. Les sections ne sont donc pas supposées rigides, mais la distance entre la section déformée et la rotation rigide

de la section est supposé petite par rapport à  $h$ . Enfin supposition est faite que les composantes perpendiculaires (à la ligne centrale) du vecteur contrainte ne varient pas, à l'ordre dominant en  $\alpha$ , dans la section. Sous ces hypothèses, on peut calculer les quantités  $w_i$  de l'équation (I.12), et de plus montrer que ce sont bien les composantes  $U_1$ ,  $U_2$  et  $U_3$  du vecteur de Darboux (cf. Eq. I.2) qui entrent en jeu dans l'expression des contraintes :

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = -\nu(\epsilon + U_1 Y - U_2 X) \quad (\text{I.13a})$$

$$\epsilon_{12} = 0 \quad (\text{I.13b})$$

$$\epsilon_{13} = \frac{1}{2} U_3 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial X} - Y \right) \quad (\text{I.13c})$$

$$\epsilon_{23} = \frac{1}{2} U_3 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial Y} + X \right) \quad (\text{I.13d})$$

$$\epsilon_{33} = \epsilon + U_1 Y - U_2 X. \quad (\text{I.13e})$$

Le coefficient de Poisson est noté  $\nu$  et  $\varphi(X, Y)$  est la fonction de gauchissement de la section si celle-ci n'est pas circulaire (par exemple  $\varphi(X, Y) = -XY(a^2 - b^2)/(a^2 + b^2)$  pour une section elliptique de grand axe  $a$  et de petit axe  $b$ ). Les composantes, au premier ordre en  $\alpha$ , du tenseur des contraintes sont :

$$\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{22} = 0 \quad (\text{I.14a})$$

$$\sigma_{31} = G U_3 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial X} - Y \right) \quad (\text{I.14b})$$

$$\sigma_{32} = G U_3 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial Y} + X \right) \quad (\text{I.14c})$$

$$\sigma_{33} = E(\epsilon + U_1 Y - U_2 X). \quad (\text{I.14d})$$

On peut alors calculer les relations entre extension, courbure et torsion et les contraintes correspondantes :

$$F_3 = \iint \sigma_{33} dX dY \quad (\text{I.15})$$

$$\mathbf{M} = \iint (X \mathbf{d}_1 + Y \mathbf{d}_2) \times (\sigma_{3i} \mathbf{d}_i) dX dY \quad (\text{I.16})$$

et l'on trouve les relations classiques :

$$F_3 = EA\epsilon \quad (\text{I.17})$$

$$M_1 = E U_1 \iint Y^2 dX dY \quad (\text{I.18})$$

$$M_2 = E U_2 \iint X^2 dX dY \quad (\text{I.19})$$

$$M_3 = G U_3 \iint \left( X^2 + Y^2 + X \frac{\partial \varphi}{\partial Y} - Y \frac{\partial \varphi}{\partial X} \right) dX dY \quad (\text{I.20})$$

A noter qu'il a été démontré que les comportements en extension d'une part, et en flexion-torsion d'autre part n'ont pas lieu de concert. Ainsi lorsqu'on augmente l'intensité du chargement appliqué à un cylindre élancé ( $h \ll L$ ), celui-ci se comporte successivement comme : une

poutre linéaire (en petite déflexion), une tige inextensible en grande rotation, un fil (parfaitement flexible) inextensible, et enfin un fil extensible [Marigo 06].

### I.3 Cas plan

Regardons l'équilibre plan, sans torsion ni cisaillement d'une tige extensible. La tige est droite et prismatique à l'état libre. Les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\mathbf{F}'(S) = \mathbf{0} \tag{I.21a}$$

$$\mathbf{M}'(S) = \mathbf{F} \times \mathbf{R}'(S) \tag{I.21b}$$

$$\mathbf{R}'(S) = V_3(S) \mathbf{d}_3(S). \tag{I.21c}$$

Les déformations sont supposées dans le plan  $(X, Z)$ . Le directeur  $\mathbf{d}_1(S)$  est le long de la nor-

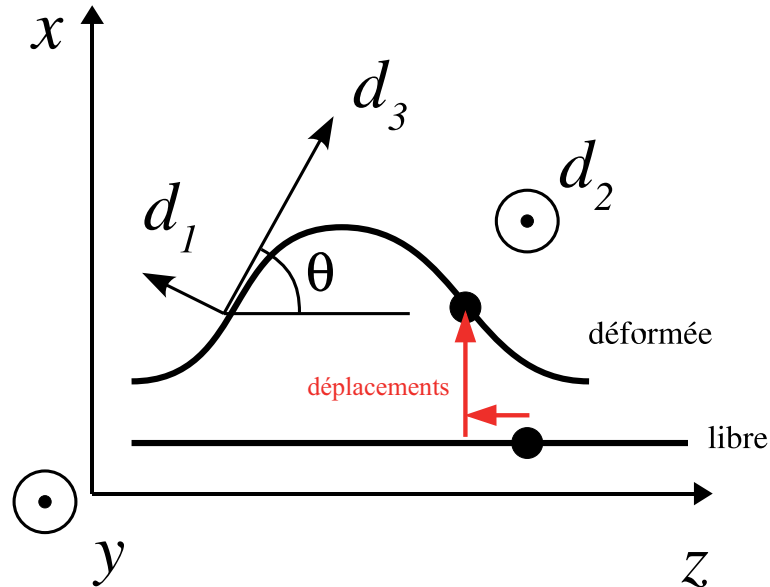


FIGURE I.3 – Déformation plane d'une tige. Le déplacement vertical est  $X$  et le déplacement horizontal est  $Z - S$ .

male à la ligne centrale  $\mathbf{R}(S)$ . Le directeur  $\mathbf{d}_2$  est fixe est on a  $\mathbf{d}_2 \equiv \mathbf{e}_y$ . Le directeur  $\mathbf{d}_3$  est le long de la tangente  $\mathbf{R}'(S)$ . Dans l'état déformé, ce dernier vecteur n'est pas de norme un, car  $S$  n'est l'abscisse curviligne que dans l'état de référence.

On écrit les équations réduites en faisant appel à l'angle de rotation  $\theta(S)$  entre l'axe  $Z$  et le directeur  $\mathbf{d}_3$  :

$$\mathbf{d}_3(S) = \begin{pmatrix} \sin\theta(S) \\ 0 \\ \cos\theta(S) \end{pmatrix}_{e_x, e_y, e_z} \quad \text{et} \quad \mathbf{d}_1(S) = \begin{pmatrix} \cos\theta(S) \\ 0 \\ -\sin\theta(S) \end{pmatrix}_{e_x, e_y, e_z} \tag{I.22}$$

On a de plus  $F_y \equiv F_2 \equiv 0$  et  $M_x(S) \equiv 0$  et  $M_z(S) \equiv 0$ . L'équation (I.21a) implique que le vecteur force est constant. Ainsi ses composantes  $F_x$  et  $F_z$  dans le repère fixe sont constantes, mais pas

ses composantes  $F_1$  et  $F_3$  dans le repère mobile. Comme il n'y a de déformation que dans le plan  $(X, Z)$ , on a  $\mathbf{U} = (0, U_2(S), 0)_{d_1, d_2, d_3}$ . Les équations (I.2) s'écrivent alors :

$$\mathbf{d}_1' = -U_2 \mathbf{d}_3 \text{ et } \mathbf{d}_3' = +U_2 \mathbf{d}_1. \quad (\text{I.23})$$

Le cisaillement de la tige est négligé quel que soit la valeur de l'effort tranchant :  $V_1 = 0, \forall F_1$ . Cela revient à prendre  $L_1 \rightarrow \infty$  dans (I.8). Les lois de comportement s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} F_3(S) &= L_3 (V_3(S) - 1) \\ M_2(S) &= K_2 U_2(S) \end{aligned}$$

avec  $L_3 = EA$  et  $K_2 = EI$ .

### a) Equations d'équilibre dans le repère fixe

Les équations d'équilibre (I.21) se réduisent à :

$$\begin{aligned} M_y'(S) &= V_3(S) (F_z \sin \theta(S) - F_x \cos \theta(S)) \\ X'(S) &= V_3(S) \sin \theta(S) \\ Z'(S) &= V_3(S) \cos \theta(S). \end{aligned}$$

La loi de comportement sur le moment  $EI U_2 = M_y$  avec  $U_2 = \theta'(S)$ , obtenue avec (I.22 et (I.23)), permet d'écrire une équation pour  $\theta$ . D'autre part  $V_3$  est remplacé grâce à la loi de comportement sur la tension :  $F_3 = F_x \sin \theta + F_z \cos \theta = EA(V_3 - 1)$ . On obtient finalement :

$$\begin{aligned} \theta' &= M_y / (EI) \\ M_y' &= \left( 1 + \frac{1}{EA} (F_x \sin \theta + F_z \cos \theta) \right) (F_z \sin \theta - F_x \cos \theta) \\ &= F_z \sin \theta - F_x \cos \theta - \frac{1}{EA} \left( F_x F_z \cos 2\theta + \frac{F_x^2 - F_z^2}{2} \sin 2\theta \right) \\ X' &= \left( 1 + \frac{1}{EA} (F_x \sin \theta + F_z \cos \theta) \right) \sin \theta \\ Z' &= \left( 1 + \frac{1}{EA} (F_x \sin \theta + F_z \cos \theta) \right) \cos \theta \end{aligned}$$

Les quantités  $F_x$  et  $F_z$  sont des constantes. Elles sont déterminées par les conditions de bords dans le cas d'un chargement où les contraintes sont imposées. Par contre ce sont des inconnues du problème dans le cas d'un chargement à géométrie imposée. On adimensionne les quantités suivantes avec la longueur de la tige et la rigidité de courbure  $EI$  :

$$m_y = \frac{M_y L}{EI}, \quad f_{x,z} = F_{x,z} \frac{L^2}{EI}, \quad x = \frac{X}{L}, \quad z = \frac{Z}{L}, \quad s = \frac{S}{L},$$

les autres quantités (i.e.  $V_3$  et  $\theta$ ) restant inchangées. L'équation pour  $V_3$  s'écrit maintenant :

$$V_3 = 1 + \frac{I}{AL^2} (f_x \sin \theta + f_z \cos \theta).$$

Finalement, les équations adimensionnées d'équilibre d'une tige plane avec extension s'écrivent :

$$\theta' = m_y \quad (\text{I.24a})$$

$$m'_y = f_z \sin \theta - f_x \cos \theta - \frac{I}{AL^2} \left( f_x f_z \cos 2\theta + \frac{f_x^2 - f_z^2}{2} \sin 2\theta \right) \quad (\text{I.24b})$$

$$x' = \left( 1 + \frac{I}{AL^2} (f_x \sin \theta + f_z \cos \theta) \right) \sin \theta \quad (\text{I.24c})$$

$$z' = \left( 1 + \frac{I}{AL^2} (f_x \sin \theta + f_z \cos \theta) \right) \cos \theta \quad (\text{I.24d})$$

où la dérivée est prise par rapport à  $s \in [0; 1]$ . On définit le terme  $\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} I/(AL^2) \propto (H/L)^2$ , où  $H$  est la dimension caractéristique de la section. Le cas sans extension s'obtenant en faisant  $\epsilon = 0$ . Ce terme  $\epsilon$  est en fait l'inverse du carré du rapport d'élancement. On voit que si l'on étudie des configurations de tiges soumises à des forces telles que  $\epsilon f_{x,z} \ll 1$ , alors l'extension est négligeable et les contraintes et déformations du système sont très proches de celles d'une tige inextensible. Les valeurs typiques de forces pour lesquelles les déformations en extension viennent rivaliser avec les déformations en courbure sont donc  $f_{x,z} \approx \epsilon^{-1} \gg 1$ . Imaginons une tige de rapport d'aspect modéré  $L/H = 30$  où  $\epsilon \approx 10^{-3}$ . Pour avoir des déformations d'extension non négligeables sur une telle tige, il faut donc imposer des forces  $10^3$  fois supérieures au seuil de flambage<sup>1</sup>.

### b) Equations d'équilibre dans le repère mobile

On peut écrire les équations d'équilibre en faisant intervenir la tension  $f_3$ , avec  $V_3 = 1 + \epsilon f_3$ , et la force de cisaillement  $f_1$  :

$$\begin{aligned} \theta' &= m_y, & m'_y &= -V_3 f_1, & V'_3 &= \epsilon m_y f_1, & f'_1 &= -m_y (V_3 - 1)/\epsilon \\ \text{ou bien } \theta' &= m_y, & m'_y &= -f_1 (1 + \epsilon f_3), & f'_3 &= m_y f_1, & f'_1 &= -m_y f_3 \end{aligned}$$

Le cas sans extension s'obtient en faisant  $\epsilon = 0$  dans les équations de la deuxième ligne.

### c) Résolution du cas encastree-encastree

Le diagramme de bifurcation des configurations d'équilibre d'une tige inextensible, encastree-encastree, en déformation plane, sans torsion, est donné en Figure I.4. L'inextensibilité est assurée en posant  $\epsilon = I/(AL^2) = 0$  dans les équations (I.24). Le diagramme est obtenu en résolvant le problème aux bords constitué des équations (I.24) avec  $f_x = 0$ , couplées aux conditions aux extrémités :

$$\theta(0) = 0, \quad \theta(1) = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0. \quad (\text{I.25})$$

1. On rappelle que le flambage d'une tige simplement supportée ou encastree a lieu autour de  $f/(2\pi)^2 = O(1)$ .

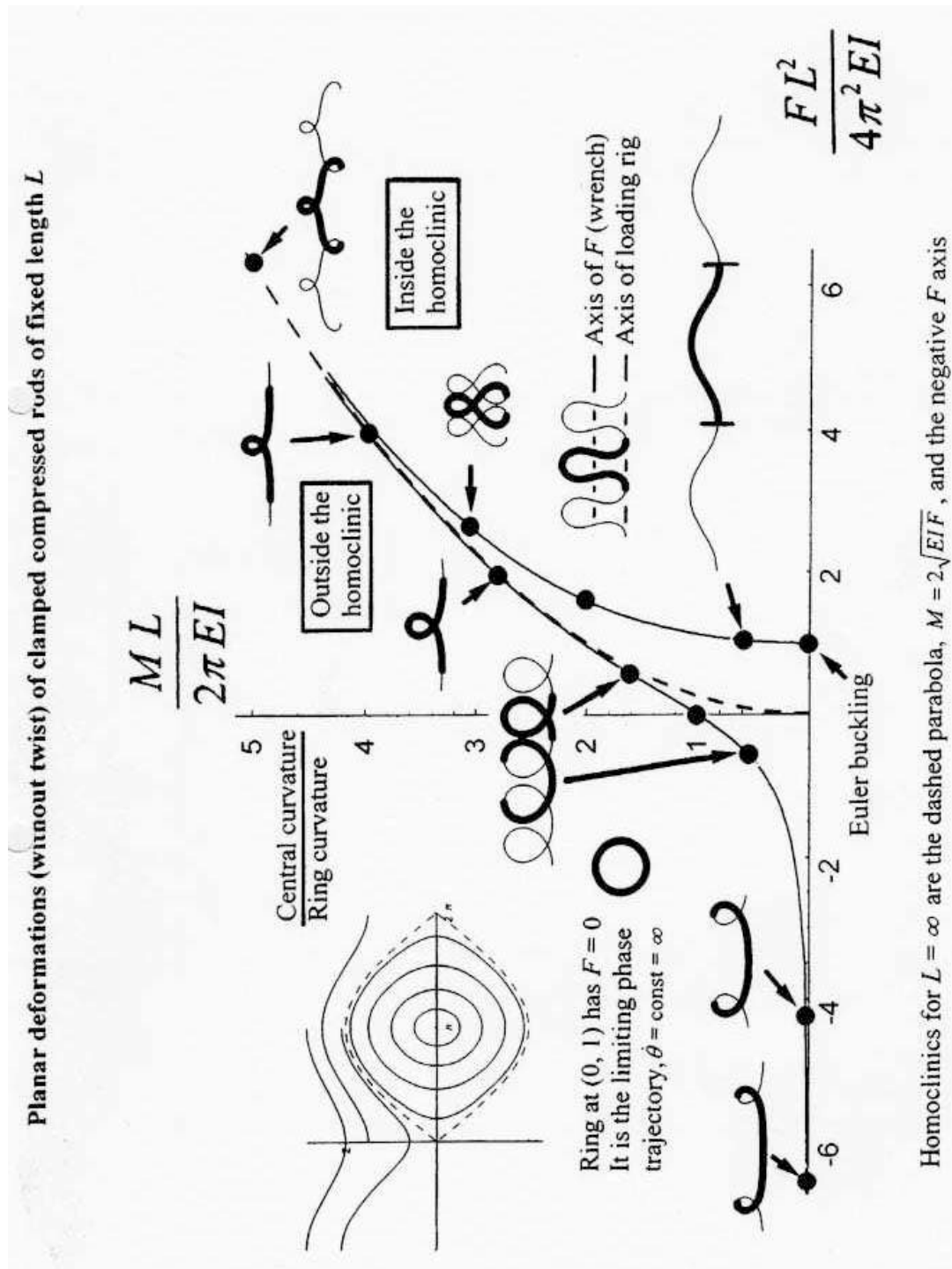


FIGURE I.4 – Diagramme de bifurcation d’une tige inextensible encastée-encastée en déformation plane et sans torsion (figure dessinée en collaboration avec Michael Thompson).



### d) Comparaison extensible / inextensible

On étudie le raccourcissement  $d = 1 - (z(1) - z(0))$  entre les extrémités d'une tige en fonction de la force de poussée imposée  $p = -f_z/(2\pi)^2$  et on compare les résultats obtenus dans les cas extensible et inextensible, voir Fig. I.5. Pour des poussées faibles,  $p < 1$ , la tige reste rectiligne, alignée avec l'axe  $z$  et  $d = O(\epsilon)$ . Lorsque la poussée dépasse le seuil de flambage  $p = 1 + O(\epsilon)^2$ , la tige flambe et les extrémités se rapprochent,  $d$  croît brutalement. L'étude est faite pour une tige à section circulaire de rapport d'aspect (longueur sur diamètre) égal à 10, ce qui induit une valeur de  $\epsilon = 1/(1600) = 6,25 \cdot 10^{-4}$ . On voit sur la figure que le raccourcissement dans le cas extensible est très proche de celui du cas inextensible, et ce au moins jusqu'à la configuration où les deux extrémités se touchent ( $d = 1$ ). Nous montrons donc que, lorsque la force appliquée est proche ou modérément éloignée du seuil de flambage, une tige extensible a un comportement très proche d'une tige inextensible et qu'il est ainsi superflu de considérer l'extensibilité

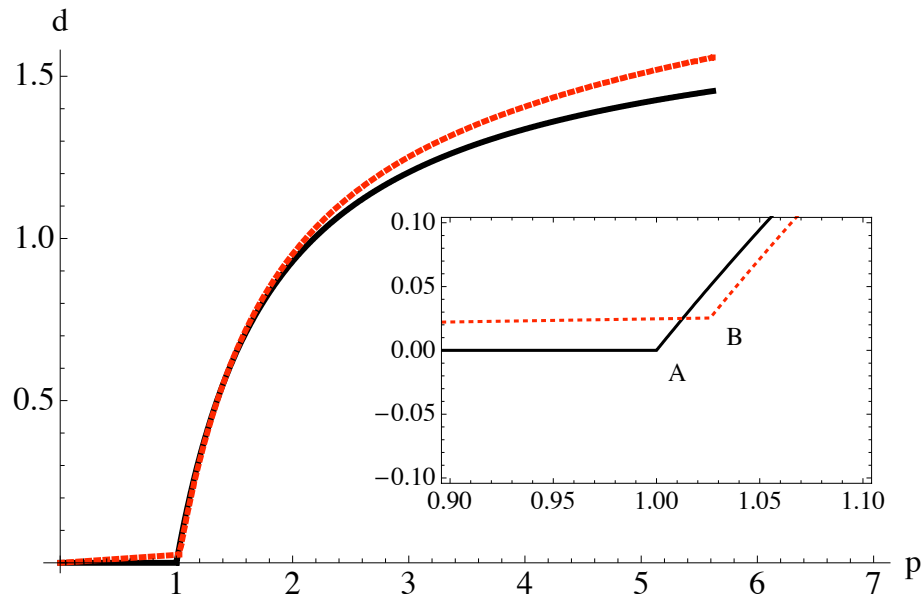


FIGURE I.5 – Détail du diagramme de bifurcation de la Figure I.4. L'axe horizontal est  $p = -f_z/(2\pi)^2$  et l'axe vertical est  $d = 1 - (z(1) - z(0))$ . La courbe pleine (et noire) correspond au modèle inextensible, la courbe en pointillé (et rouge) correspond au modèle extensible avec  $\epsilon = 1/1600$ .

2. Le décalage au seuil de flambage entre les deux courbes croît linéairement avec  $\epsilon$  : le point A a pour coordonnées  $A(p = 1; d = 0)$  et le point B ( $p = 1 + 4\pi^2 \epsilon + \dots; d = 4\pi^2 \epsilon + \dots$ ).

# Bibliographie

- [Acerbi 91] Emilio Acerbi, Giuseppe Buttazzo & Danilo Percivale. *A variational definition of the strain energy for an elastic string*. Journal of Elasticity, vol. 25, no. 2, pages 137–148, 1991.
- [Antman 04] S. S. Antman. Nonlinear problems of elasticity. Springer-Verlag, New York, 2nd edition, 2004.
- [Bourgat 88] J.-F. Bourgat, P. Le Tallec & S. Mani. *Modélisation et calcul des grands déplacements de tuyaux élastiques en flexion torsion*. Journal de Mécanique Théorique et Appliquée, vol. 7, no. 4, pages 379–408, 1988.
- [Cimetière 88] A. Cimetière, G. Geymonat, H. Dret, A. Raoult & Z. Tutek. *Asymptotic theory and analysis for displacements and stress distribution in nonlinear elastic straight slender rods*. Journal of Elasticity, vol. 19, no. 2, pages 111–161, 1988.
- [Clebsch 62] A. Clebsch. Theorie der Elasticität fester Körper. B. G. Teubner, Leipzig, 1862.
- [Cosserat 96] Eugène Cosserat & François Cosserat. *Sur la théorie de l'élasticité. Premier mémoire*. In Annales de la faculté des sciences de Toulouse, 1ère série, volume 10, pages I.–I.–116. Université Paul Sabatier, 1896.
- [Dill 92] Ellis Harold Dill. *Kirchhoff's theory of rods*. Archive for History of Exact Sciences, vol. 44, no. 1, pages 1–23, 1992.
- [Kirchhoff 59] G. Kirchhoff. *Über das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes*. J. Reine Angew. Math., vol. 56, pages 285–313, 1859.
- [Kirchhoff 76] Gustav Kirchhoff. Vorlesungen über mathematische Physik, Mechanik. B.G. Teubner, Leipzig, 1876.
- [Love 44] A. E. H. Love. A treatise on the mathematical theory of elasticity. Dover Publications, New York, 4th edition, 1944.
- [Marigo 98] Jean-Jacques Marigo, Hamid Ghidouche & Zubir Sedkaoui. *Des poutres flexibles aux fils extensibles : une hiérarchie de modèles asymptotiques*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics-Physics-Chemistry-Astronomy, vol. 326, no. 2, pages 79 – 84, 1998.

- [Marigo 06] Jean-Jacques Marigo & Nicolas Meunier. *Hierarchy of One-Dimensional Models in Nonlinear Elasticity*. Journal of Elasticity, vol. 83, pages 1–28, 2006.
- [Neukirch 02] S. Neukirch, G. H. M van der Heijden & J. M. T. Thompson. *Writhing instabilities of twisted rods : from infinite to finite length*. J. Mech. Phys. Solids, vol. 50, pages 1175–1191, 2002.
- [van der Heijden 00] G. H. M. van der Heijden & J. M. T. Thompson. *Helical and localised buckling in twisted rods : a unified analysis of the symmetric case*. Nonlinear Dynamics, vol. 21, pages 71–79, 2000.



# Chapitre II

## Un cas d'école : tige encastree sous tension et torsion

### Plan du chapitre

---

<b>II.1 Tige ideale</b> . . . . .	<b>27</b>
a) Simplification du systeme d'equations . . . . .	28
b) Conditions aux bords encastres . . . . .	30
c) Reversibilite des solutions . . . . .	31
d) Equilibres sans contact . . . . .	32
e) Equilibres en presence de contact . . . . .	33
f) Solutions avec contact continu . . . . .	37
g) Resultats . . . . .	38
<b>II.2 Approche variationnelle</b> . . . . .	<b>40</b>

---

### II.1 Tige ideale

Nous cherchons les formes d'equilibre d'une tige encastree-encastree ou la position et la tangente de la tige sont contraintes aux deux extremités, mais ou nous pouvons neanmoins rapprocher ces deux extremités et introduire une rotation axiale. Nous sommes dans le cas d'un chargement a géométrie imposée, avec des conditions de bords sur les variables de position  $\mathbf{R}$  et d'orientation de section  $\mathbf{d}_3$ . Nous étudions les configurations d'equilibre d'une tige ideale, c'est à dire d'une tige à section circulaire (de rayon  $h$ ), faite d'un matériau élastique uniforme et isotrope, dont la configuration naturelle est droite ( $\hat{U}_{1,2} = 0$ ) et sans torsion ( $\hat{U}_3 = 0$ ). Le comportement élastique de la tige est donc décrit par sa rigidité de flexion  $K_0 = E\pi h^4/4$  et sa rigidité de torsion  $K_3 = G\pi h^4/2$ , où  $h$  est la rayon de la section circulaire. Comme illustré sur l'exemple I.3-d), pour des gammes de forces modérées (par rapport à la force critique de flambage) il est inutile de considérer les déformations d'extension de la tige. Nous prendrons ainsi une tige inextensible et sans cisaillement (i.e.  $\mathbf{R}' = \mathbf{d}_3$ ), ce qui implique que la force dans la tige n'est pas donnée par les déformations, mais est une inconnue du problème. Enfin nous traitons le cas

d'une tige de longueur  $L$  et nous réalisons l'adimensionnement par la longueur  $L$ , donné par les relations (I.10).

### a) Simplification du système d'équations

Dans ce cas de tige idéale, la loi de comportement en courbure/torsion peut être écrite sous forme vectorielle (voir par exemple [Swigon 99, Nizette 99]) :

$$\mathbf{M} = K_0 \mathbf{d}_3 \times \mathbf{d}_3' + K_3 U_3 \mathbf{d}_3. \quad (\text{II.1})$$

De manière équivalente nous pouvons effectuer le remplacement suivant dans l'équation d'évolution du troisième directeur :

$$\mathbf{d}_3' = \mathbf{U} \times \mathbf{d}_3 = \frac{\mathbf{M}}{K_0} \times \mathbf{d}_3.$$

Cela évite le recours au repère mobile dans le jeu d'équations d'équilibre, qui s'écrivent, une fois adimensionnées :

$$\mathbf{f}' = -\mathbf{p} \quad (\text{II.2a})$$

$$\mathbf{m}' = \mathbf{f} \times \mathbf{d}_3 \quad (\text{II.2b})$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{d}_3 \quad (\text{II.2c})$$

$$\mathbf{d}_3' = \mathbf{m} \times \mathbf{d}_3 \quad (\text{II.2d})$$

dans le cas où il y a une force distribuée  $\mathbf{p}(s)$  qui s'applique sur la tige. Nous ne considérerons que des cas où la force distribuée est une force de contact. Dans le cas de configurations sans contact,  $\mathbf{p}(s) \equiv 0$ , l'équation (II.2a) donne  $\mathbf{f} = \text{constante}$  et l'équation (II.2b) peut être intégrée en :

$$\mathbf{m}(s) = \mathbf{f} \times \mathbf{r}(s) + \mathbf{m}_K, \quad (\text{II.3})$$

où  $\mathbf{m}_K$  est une constante d'intégration. Le jeu d'équations différentielles se réduit alors à :

$$\mathbf{r}' = \mathbf{d}_3 \quad (\text{II.4})$$

$$\mathbf{d}_3' = (\mathbf{f} \times \mathbf{r} + \mathbf{m}_K) \times \mathbf{d}_3 \quad (\text{II.5})$$

Ce système a quatre quantités conservées le long de la tige (en plus de la force) :

$$\mathbf{d}_3 \cdot \mathbf{d}_3 = 1, \quad (\text{II.6a})$$

$$I_0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{m}(s) \cdot \mathbf{f} = \text{constante}, \quad (\text{II.6b})$$

$$I_1 \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{f} \times \mathbf{r} + \mathbf{m}_K) \cdot \mathbf{d}_3 \quad (= m_3) = \text{constante}, \quad (\text{II.6c})$$

$$I_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} |(\mathbf{f} \times \mathbf{r} + \mathbf{m}_K)|^2 + \mathbf{d}_3 \cdot \mathbf{f} = \text{constante}. \quad (\text{II.6d})$$

Il y a deux façons de s'attaquer aux équations (II.4) et (II.5). La première est d'utiliser les intégrales premières (II.6a)-(II.6d) pour réduire encore le système. Ceci se fait en utilisant des angles

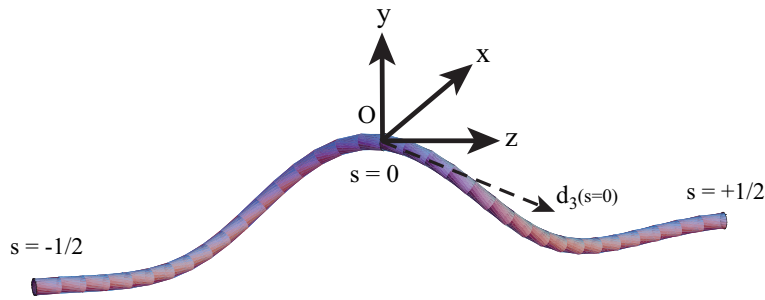


FIGURE II.1 – Schéma illustrant le choix de l'origine du repère fixe, de l'origine de l'abscisse curviligne et de l'orientation des axes.

d'Euler pour repérer la tangente  $\mathbf{d}_3$ , voir par exemple [van der Heijden 00]. La seconde façon est d'intégrer les six équations différentielles ordinaires (II.4) et (II.5) numériquement. Le champ de vecteurs est polynomial du second degré sur les variables  $x, y, z, d_{3x}, d_{3y}, d_{3z}$ . Cela évite d'avoir à traiter les problèmes de continuité dus aux angles d'Euler. Lors de l'intégration numérique des équations (voir par exemple [Henderson 04]), le schéma suivant est utilisé pour simplifier le problème, sans perte de généralité (voir Figure II.1) :

- nous choisissons l'origine de l'abscisse curviligne de telle manière à ce que le point  $\mathbf{r}(0)$  soit en milieu de tige, i.e.  $s \in [-1/2; +1/2]$ . Ce choix apparaît judicieux en présence de symétries.
- Nous choisissons l'origine du repère fixe de manière à ce que  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$  (ainsi  $\mathbf{m}_K = \mathbf{m}(0)$ ).
- Le cas  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$  étant simple et sans piment, on se restreint au cas où la force n'est pas nulle et nous choisissons l'axe  $\mathbf{e}_z$  le long et dans le sens de la force  $\mathbf{f} = (0, 0, f > 0)$ . La quantité conservée  $I_0$  est alors  $I_0 = f m_z$ , avec  $m_z$  constant.
- Enfin nous choisissons les axes  $\mathbf{e}_x$  et  $\mathbf{e}_y$  de manière à ce que la tangente de la tige en  $s = 0$  soit dans le plan  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$  (i.e.  $d_{3y}(0) = 0$ ). Sans ce dernier choix l'ensemble des solutions satisfaisant aux conditions de bords encastrées est une famille continue engendrée par la rotation (continue) autour de l'axe  $\ell$  de la Fig. II.2. Cette famille est représentée en Fig. II.3, voir aussi la figure 3 de [Champneys 96]. Le choix  $d_{3y}(0) = 0$  sélectionne deux solutions isolées parmi la famille continue de solutions.

Si on écrit  $\mathbf{d}_3(s = 0) = (\sin \theta_0, 0, \cos \theta_0)$ , alors le système différentiel {Eqs. (II.4) et (II.5)} a une valeur initiale inconnue  $\theta_0$  et trois paramètres libres  $f, m_{x0}$  et  $m_{z0} = m_z$ . La donnée des valeurs des quatre inconnues  $(\theta_0, f, m_{x0}, m_z)$  engendre une unique solution d'équilibre.

Une fois la ligne centrale calculée, la rotation des sections autour de la ligne centrale est déterminée par le directeur  $\mathbf{d}_1(s)$ . Ce directeur est obtenu en intégrant, après coup, l'équation suivante :

$$\mathbf{d}_1' = (\mathbf{d}_3 \times \mathbf{d}_3') \times \mathbf{d}_1 + \frac{m_3}{\gamma} \mathbf{d}_3 \times \mathbf{d}_1. \quad (\text{II.7})$$

Il est à noter que c'est seulement à ce niveau qu'intervient, pour une tige idéale, la rigidité de torsion  $K_3$  de la tige. On rappelle que l'on note  $\gamma = K_3/K_0$ . En effet les équations (II.2a)-(II.2d) régissant la forme de la ligne centrale de la tige sont indépendantes des rigidités de courbure et de torsion.

## b) Conditions aux bords encastres

Nous considerons une tige dont les extremités sont encastrees. La position et la normale à

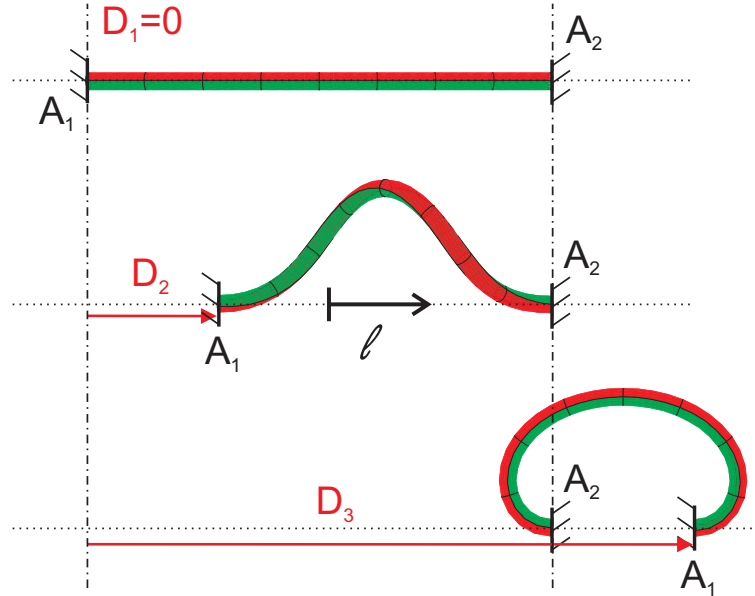


FIGURE II.2 – Tige élastique encastree : l'axe  $\ell$  (joignant les points  $A_1$  et  $A_2$ ) et la normale à la section aux deux extremités sont alignés. Pour une configuration  $i$ , le raccourcissement  $D_i$  est la distance entre le point  $A_1$  dans cette configuration et le point  $A_1$  dans la configuration de référence :  $D_1 = 0$ ,  $0 < D_2 < L$  and  $L < D_3 < 2L$ .

la section (qui dans notre cas sans cisaillement est aussi la tangente de la ligne centrale) sont contraintes aux deux extremités. De plus nous demandons que les tangentes soient en regard, i.e. alignées avec le vecteur joignant les deux extremités de la tige, voir figure II.2. Ces conditions géométriques s'écrivent :

$$\mathbf{d}_3(-1/2) = \mathbf{d}_3(+1/2) \quad (\text{II.8})$$

$$\mathbf{r}(+1/2) - \mathbf{r}(-1/2) = k \mathbf{d}_3(+1/2) \text{ avec } k \in ]-1; +1]. \quad (\text{II.9})$$

On appelle  $A_1$  et  $A_2$  les deux extremités de la tige. L'orientation de l'abscisse curviligne est prise de  $A_1$  vers  $A_2$ . Le point  $A_2$  reste fixe, mais le point  $A_1$  peut être déplacé le long de l'axe  $\ell$  de manière à introduire un raccourcissement  $D$  :

$$d \stackrel{\text{def}}{=} \frac{D}{L} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{L - (\mathbf{R}(A_2) - \mathbf{R}(A_1)) \cdot \mathbf{d}_3(A_2)}{L} = 1 - (\mathbf{r}(+1/2) - \mathbf{r}(-1/2)) \cdot \mathbf{d}_3(+1/2) = 1 - k \quad (\text{II.10})$$

À cette condition aux bords sur la distance bout-à-bout de la tige, nous ajoutons une condition sur la rotation de la section de la tige en  $A_2$  par rapport à la section de la tige en  $A_1$ . Cette condition sur la rotation s'écrit à l'aide du vecteur  $\mathbf{d}_1$  :

$$\cos \alpha = \mathbf{d}_1(+1/2) \cdot \mathbf{d}_1(-1/2) \quad (\text{II.11})$$

$$\sin \alpha = \mathbf{d}_1(+1/2) \times \mathbf{d}_1(-1/2) \cdot \mathbf{d}_3(+1/2) \quad (\text{II.12})$$

L'angle di-hédral  $\alpha$  est pris entre 0 et  $2\pi$ . Le suivi de la rotation totale  $R$  permet de différencier deux configurations ayant le même  $\alpha = R \bmod 2\pi$ .

### c) Réversibilité des solutions

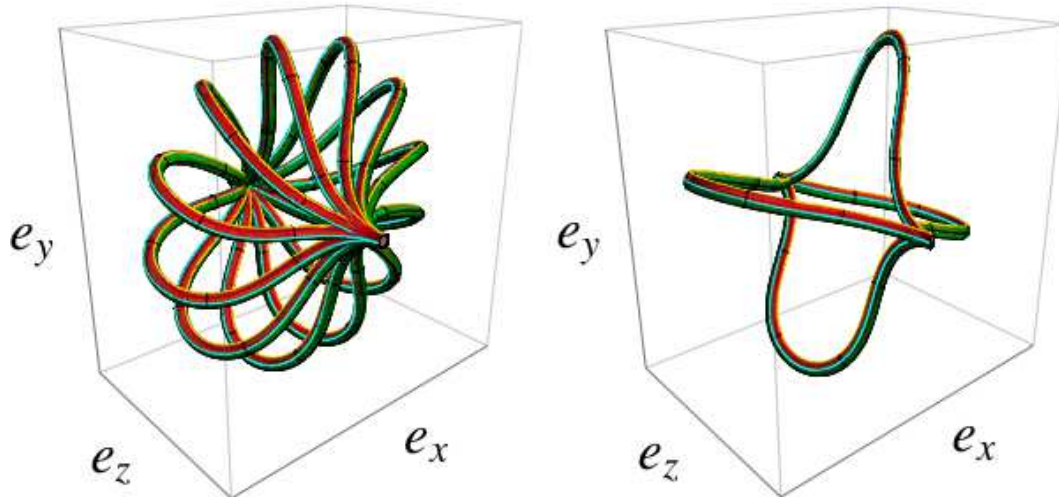


FIGURE II.3 – Equilibres d'une tige élastique encastrée à ses deux extrémités. A- (*Register symmetry*) Dans le cas d'une section circulaire, il y a une symétrie continue de rotation autour de l'axe  $\ell$ . B- Dans le cas d'une tige à section ellipsoïdale, seules quatre configurations restent solutions des équations d'équilibre.

On s'intéresse maintenant aux propriétés des solutions du problème défini plus haut. Quelques manipulations rapides avec un filament élastique semblent indiquer que les configurations d'équilibre sont symétriques par rapport au point milieu ( $s = 0$ ) de la tige. Plus précisément si on effectue une rotation de  $\pi$  autour de l'axe  $y$ , la configuration est inchangée. Les solutions  $x(s)$ ,  $y(s)$  et  $z(s)$  sont donc respectivement impaire, paire et impaire. En fait on peut montrer que si en un point  $s = s_0$  le long d'une tige les trois vecteurs  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{m}(s)$  et  $\mathbf{d}_3(s)$  sont co-planaires, alors la forme de la ligne centrale sera symétrique par rapport à l'axe perpendiculaire au plan et qui passe par  $\mathbf{r}(s_0)$ . Si on prend  $\mathbf{r}(s_0) = \mathbf{0}$  alors les solutions  $x(s)$ ,  $y(s)$ ,  $z(s)$ ,  $d_{3x}(s)$ ,  $d_{3y}(s)$ ,  $d_{3z}(s)$ ,  $m_x(s)$ ,  $m_y(s)$ ,  $m_z(s)$  seront toutes paires ou impaires. La réversibilité des solutions dans le cas de configurations circulairement closes ( $d = 1$ ) a été prouvée par [Domokos 01]. J'ai pour ma part prouvé qu'en fait toutes les solutions ( $d \in [0; 2[$ ) sont réversibles [Neukirch 02]. On rappelle que ces propriétés valent pour une tige idéale, sans contact et pour des conditions aux bords d'encastrement. Il semble que les conditions aux bords soient le facteur limitant de cette propriété de réversibilité car des simulations avec une tige encastrée à section telle que  $I_1 \neq I_2$  font apparaître des solutions symétriques (voir figure II.3) alors qu'il est des cas de tiges idéales tenues par d'autres conditions de bords admettant des solutions non symétriques [Swigon 99]. D'autre part la présence d'auto-contact dans le cas de conditions aux bords d'encastrement ne semble pas



introduire de solutions non symétriques, du moins c'est ce qui a été observé numériquement [van der Heijden 03].

#### d) Equilibres sans contact

On considère une tige, initialement droite le long de l'axe  $e_z$ , soumise à une force axiale  $f$ . La tension  $f$  est gardée fixe et l'on commence à imposer une rotation entre les extrémités. Pour des valeurs faibles du chargement en torsion la tige reste droite. Et ce n'est que lorsque que la rotation  $R$ , ou de manière équivalente ici le moment de torsion  $m_3 = \gamma R$ , dépasse une valeur seuil que la solution droite tordue perd sa stabilité et que la tige flambe. La valeur seuil dépend des conditions de bords. Pour le cas encastrée-encadrée le seuil de flambage pour le moment de torsion  $m_3$  est donné par :

$$\cos \pi \sqrt{m_3^2 - 4f} - \cos \pi m_3 = \left( 2\pi f \sin \pi \sqrt{m_3^2 - 4f} \right) / \sqrt{m_3^2 - 4f}, \quad (\text{II.13})$$

où l'on voit que la valeur seuil  $m_3$  croît avec  $f$ . Lorsque  $f$  est grand et positif, la valeur seuil  $m_3$  peut être approchée par :

$$m_3 = \sqrt{4f} \quad (\text{II.14})$$

qui est la valeur calculée dans le cas d'une tige de longueur infinie [van der Heijden 00]. Le point important ici est que la bifurcation est sous-critique, c'est à dire qu'il n'y a pas de solution non triviale pour des valeurs supérieures à la valeur seuil en rotation. Les solutions non triviales (flambées) existent pour des valeurs de rotation inférieures à la valeur seuil et sont instables. Ce caractère sous-critique de la bifurcation est du au chargement qui est mixte : côté rotation c'est la géométrie qui est imposée mais côté extension c'est la force plutôt que le déplacement qui est imposée. En effet dans la cas d'un chargement géométrique en rotation et déplacement, la bifurcation de flambage est sur-critique et lorsque le seuil est dépassé, des configurations flambées stables apparaissent. Ces configurations sont les mêmes dans les différents cas de chargement, seule la stabilité change. L'ensemble des valeurs prises par  $f$  et  $m_3$  pour les configurations flambées sans contact dans le cas d'un longueur infinie est donné par [Coyne 90, Thompson 96] :

$$m_3^2 = 2f(1 + \cos \theta), \quad (\text{II.15})$$

où  $\theta$  est l'angle entre la tangente en milieu de tige et l'axe de la force  $e_z$ , qui est aussi dans ce cas l'axe  $\ell$ . Dans l'espace des paramètres  $(m_3, f, \theta)$  l'équation (II.15) représente une surface. Cette surface des configurations flambées est tracée sur la figure II.4 où sont aussi tracés les contours d'iso-valeurs du raccourcissement  $D$  et de la rotation  $R$ . La courbe de flambage est la parabole donnée par l'équation (II.14) dans le plan  $\theta = 0$ . Dans le cas d'une tige de longueur finie, la surface des configurations flambées devient plus complexe et les courbes d'iso-valeurs sont aussi modifiées. Néanmoins on retrouve le comportement 'longueur infinie' dès que la force appliquée  $f = FL^2/K_0$  et le moment de torsion  $m_3 = M_3L/K_0$  sont grands.

Une autre façon de représenter la surface des configurations flambées est d'utiliser directement l'espace  $(D, R, M_3)$ . L'intérêt de cette surface réside dans le fait que les paramètres  $D$  et  $R$  sont les paramètres facilement accessibles expérimentalement et que ce sont les paramètres

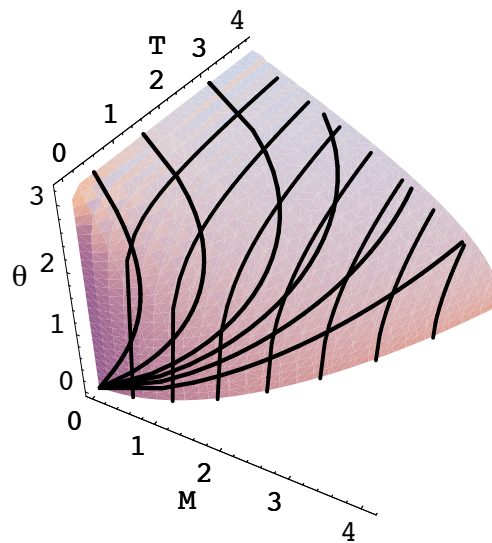


FIGURE II.4 – Valeurs de  $f = (2\pi)^2 T$  et  $m_3 = 2\pi M$  pour les configurations flambées dans le cas d'une tige de longueur infinie. L'angle  $\theta$  est l'angle entre la tangente en milieu de tige et l'axe de la force. Les lignes de niveau sont les contours d'iso-valeurs du raccourcissement  $D$  (lignes passant par l'origine) et de la rotation  $R$  (lignes à  $m_3$  constant).

de contrôle dans le cas d'un chargement en géométrie imposée. Cette surface est tracée en figure II.5 pour une tige de longueur finie avec un rapport  $K_3/K_0 = 0.75$  (i.e. un module de Poisson  $\nu = 1/3$ ). Lors d'une expérience de chargement en géométrie imposée sur la tige le point de fonctionnement se déplace sur la surface des configurations. En géométrie imposée une instabilité apparaît dès que le point atteint un endroit de la surface où la normale est horizontale. Si on oriente dans le sens des  $M_3$  croissants la normale à la surface à l'origine, alors les points de la surface où la normale est orientée vers le haut correspondent à des configurations stables. Lorsqu'une configuration de la tige devient instable, pour une valeur de  $D_i$ ,  $R_i$  et  $M_{3i}$ , la tige effectue un saut dynamique<sup>1</sup> vers la (ou une des) configuration(s) d'équilibre ayant les mêmes valeurs de  $D = D_i$  et  $R = R_i$ , mais un  $M_{3i}$  différent. Dans le cas où aucune configuration avec  $D = D_i$  et  $R = R_i$  sans contact n'existe, le saut dynamique s'effectue vers une configuration avec contact.

### e) Equilibres en présence de contact

Nous allons exposer une façon de calculer les équilibres d'une tige lorsque celle-ci se touche elle-même ; Nous parlerons d'auto-contact. Nous suivons l'exemple type, déjà évoqué plus haut, d'une tige soumise à un chargement mixte : une force constante et une rotation sont imposées. Les configurations d'équilibre sont calculées numériquement : pour chaque valeur de la force, une méthode du tir [Keller 76] est utilisée pour isoler un premier équilibre satisfaisant les conditions de bords, ensuite une méthode de cheminement [Allgower 97] permet de suivre les mo-

1. il est nécessaire de faire appel à une dynamique avec dissipation d'énergie pour que la tige puisse se stabiliser dans la nouvelle configuration d'équilibre stable.

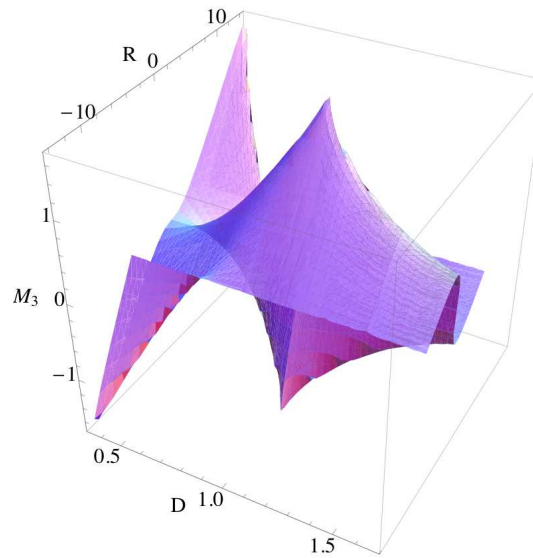


FIGURE II.5 – Surface des configurations d'équilibre flambées (sans contact) dans l'espace des paramètres  $(D, R, M_3)$ , où  $D$  est le raccourcissement,  $R$  la rotation totale et  $M_3$  le moment de torsion. Chaque point sur la surface correspond à une configuration d'équilibre satisfaisant les conditions d'encastrement aux bords.

difications de cet équilibre lorsque la rotation est modifiée. Le tir requière que le nombre de paramètres inconnus (ici quatre :  $\theta_0, f, m_{x0}, m_z$ ) soit égal au nombre de conditions. Pour des solutions symétriques, les conditions d'encastrement (II.8) et (II.9) s'écrivent  $\mathbf{d}_{3y}(s=1/2) = 0$  et  $x(s=1/2) \mathbf{d}_{3z}(s=1/2) = z(s=1/2) \mathbf{d}_{3x}(s=1/2)$ . A ces deux conditions s'ajoutent la condition sur la force de tension appliquée  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{d}_3(s=1/2) = T$ , et la condition sur la valeur de la rotation  $R$ . On a donc bien quatre conditions pour quatre inconnues.

Nous allons suivre les équilibres sur un diagramme  $(z, n)$ , où  $z \stackrel{\text{def}}{=} 1 - d$  est la distance bout à bout de la tige et  $n$  le nombre de tours ( $n = R/(2\pi)$ ) imposés à la tige. On rappelle que chaque point de fonctionnement correspond à une configuration. La tige est initialement droite ( $z = 1$ ) et sans torsion ( $n = 0$ ) : le point de fonctionnement correspondant est le point  $A$  sur la figure II.6. Au fur et à mesure que  $n$ , et donc que le moment de torsion  $M_3$ , croît la tige reste droite mais acquière de la torsion et le point de fonctionnement se déplace jusqu'au point de bifurcation  $B$ . Le reste de la droite ( $z = 1, n > n_B$ ) correspond à des configurations instables. Les configurations flambées de  $B$  à  $C$  sont aussi instables (pour ce chargement mixte), la bifurcation étant une bifurcation fourche sous-critique. Elles peuvent néanmoins être suivies numériquement. En  $C$  la configuration contient une boucle qui se touche, on atteint le premier contact. Si l'on continue sur cette branche les configurations s'interpénètrent. Si par contre le contact est pris en compte dans le modèle (équations d'équilibre et conditions géométriques), le cheminement va bifurquer une nouvelle fois et l'on va suivre une nouvelle branche, émanant du point  $C$ . Le contact apporte des conditions supplémentaires (conditions géométriques de non-pénétration), mais génère en contre-partie des inconnues supplémentaires : valeurs ajustables de l'intensité de la force de contact  $\Delta F$  et des abscisses curvilignes  $S_{1a}$  et  $S_{1b}$  des parties en contact. La tige en

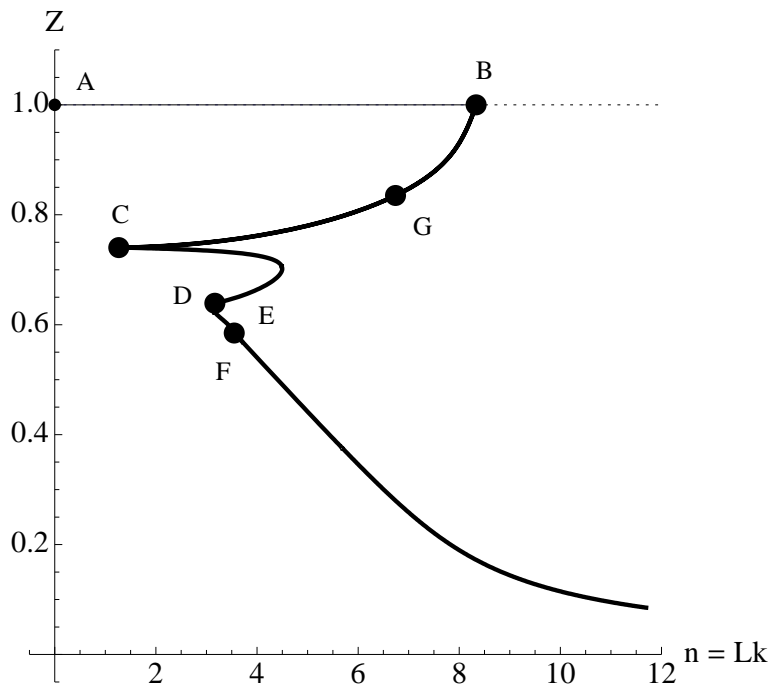


FIGURE II.6 – Diagramme de bifurcation d’une tige encastree soumise à une tension constante et à une rotation  $2\pi n$  imposee. Seules les configurations sans penetration sont tracees

$S = S_{1a}$  touche un autre morceau de la tige, en  $S = S_{1b}$ , si les trois conditions geometriques suivantes sont remplies : (i) la distance entre les deux lignes centrales  $|\mathbf{R}(S_{1a}) - \mathbf{R}(S_{1b})|$  est egle à deux fois le rayon de la section circulaire :

$$|\mathbf{R}(S_{1a}) - \mathbf{R}(S_{1b})| = 2h,$$

(ii) la tangente en  $S = S_{1a}$  est perpendiculaire au vecteur inter-distance  $\mathbf{R}(S_{1a}) - \mathbf{R}(S_{1b})$  :

$$(\mathbf{R}(S_{1a}) - \mathbf{R}(S_{1b})) \cdot \mathbf{d}_3(S_{1a}) = 0,$$

(iii) la tangente en  $S = S_{1b}$  est perpendiculaire au même vecteur inter-distance :

$$(\mathbf{R}(S_{1a}) - \mathbf{R}(S_{1b})) \cdot \mathbf{d}_3(S_{1b}) = 0.$$

Les conditions (ii) et (iii) signifient aussi que la distance d’approche  $\varphi(S_{1a}, S_{1b}) = |\mathbf{R}(S_{1a}) - \mathbf{R}(S_{1b})|$  est minimum par rapport à  $S_{1a}$  (condition (ii)) et  $S_{1b}$  (condition (iii)). Ces trois conditions sont à ajouter aux conditions de bords à verifier dans la methode du tir, elles viennent aider à selectionner les trois inconnues supplementaires mentionnees plus haut :  $\Delta F$ ,  $S_{1a}$  et  $S_{1b}$ . L’egalite nombre d’inconnues, nombre de conditions n’est donc pas perdue lors du contact. Du fait de la symetrie axiale des solutions, le point de contact est situe en  $S_1 \stackrel{\text{def}}{=} S_{1a} = -S_{1b}$  et les conditions (ii) et (iii) sont en fait equivalentes.

On chemine maintenant le long de la branche, emanant du point C, qui contient les configurations à un point de contact. Ces configurations sont stables jusqu’au point limite en  $n$ , les

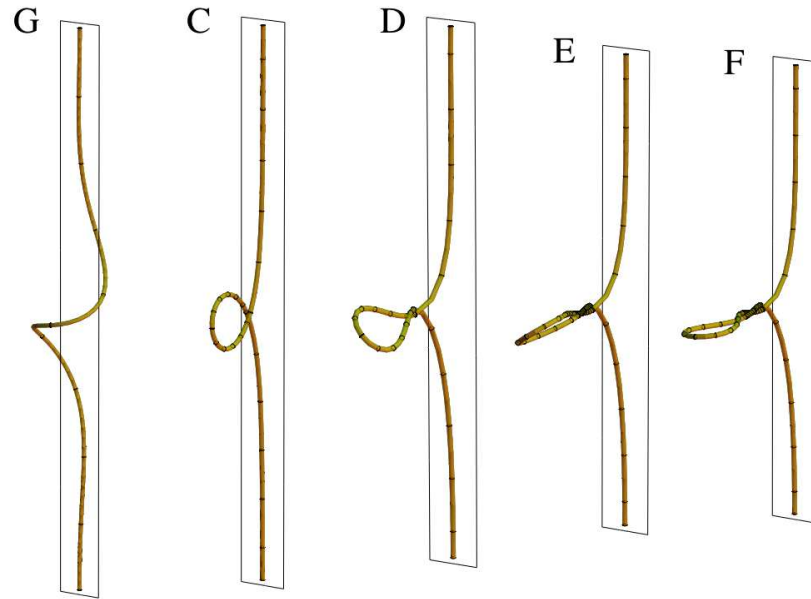


FIGURE II.7 – Les cinq configurations d'équilibre correspondant aux points sur le diagramme de bifurcation de la figure II.6.

configurations suivantes étant instables. Ces configurations instables sont par contre admissibles du point de vue géométrique : il n'y a pas d'interpénétration, et l'on a toujours  $|\mathbf{R}(S_1) - \mathbf{R}(-S_1)| = 2h$  et  $(d/dS) |\mathbf{R}(S) - \mathbf{R}(-S)|_{S=S_1} = 0$ . Néanmoins si l'on suit la branche assez loin on arrive au point  $D$  où  $(d^2/dS^2) |\mathbf{R}(S) - \mathbf{R}(-S)|_{S=S_1} = 0$ . Au delà de ce point  $D$  deux zones d'interpénétration se développent de part et d'autre de  $S_1$ . Deux voies semblent alors possibles : (i) l'aplatissement de la fonction distance en  $S_1$  peut indiquer l'existence de configurations où le point de contact est remplacé par une zone continue de contact où la fonction d'inter-distance est plate, ou (ii) la présence de deux zones (séparées par  $S = S_1$ ) d'interpénétration peut indiquer l'existence de configurations ayant deux points de contact distincts. Une recherche numérique par méthode du tir permet de trouver à la fois les configurations conjecturées en (i) et (ii). Toutefois les configurations comprenant une ligne de contact nécessitent une pression de contact négative, donc non physique. Nous reparlerons plus loin de la modélisation de configurations comprenant une ligne de contact. Les configurations à deux points de contact qui introduisent deux inconnues ( $\Delta F_2$  et  $S_2$ ) et deux conditions supplémentaires ( $|\mathbf{R}(S_2) - \mathbf{R}(-S_2)| = 2h$  et  $(\mathbf{R}(S_2) - \mathbf{R}(-S_2)) \cdot \mathbf{d}_3(S_2) = 0$ ), ne modifient pas l'égalité nombre d'inconnues = nombre de conditions. La branche, émanant du point  $D$ , des configurations à deux points de contact est entièrement stable. Assez rapidement la fonction distance  $|\mathbf{R}(S) - \mathbf{R}(-S)|$  fait apparaître un minimum local entre  $S_1$  et  $S_2$ . La valeur de ce minimum est au départ supérieure à  $2h$  mais diminue au fur et à mesure que l'on s'avance sur la branche. Au point  $E$ , le minimum vaut exactement  $2h$  : un troisième point de contact est créé, distinct des deux précédents.

L'abscisse du troisième point de contact est comprise dans l'intervalle  $[S_1; S_2]$ . Nous réorga-

nisons les notations de manière à avoir  $S_1 < S_2 < S_3$  où  $S_2$  est maintenant l'abscisse du nouveau point de contact. La branche émanant du point  $E$  ne comprend que des configurations stables, on la suit jusqu'au point  $F$  où l'inter-distance  $|\mathbf{R}(S) - \mathbf{R}(-S)|$  admet une nouvelle fois une dérivée seconde nulle en  $S_2$ . Comme auparavant deux vois s'offrent à nous : introduire un nouveau point de contact voisin du point en  $S_2$  ou introduire une solution développant un contact continu dans un intervalle strictement inclus dans  $[S_1; S_3]$ . L'introduction d'un point de contact supplémentaire, voisin du point en  $S_2$ , mène à des configurations à quatre points de contact. Les solutions ainsi engendrées présentent de l'interpénétration (fait numérique) et ne sont donc pas considérées. Par contre nous allons voir que les solutions développant une zone de contact continu sont parfaitement admissibles : pas d'interpénétration et pression de contact positive en tout point. *Remarque* : les propriétés de stabilité, d'interpénétration, de signe de la pression de contact exposées ici dépendent a priori de la valeur du rayon  $h$  de la section circulaire (où plutôt du rapport  $h/L$ ). En effet on peut estimer possible que des solutions présentant de l'interpénétration pour un rapport d'aspect  $h/L$  deviennent admissibles pour des valeurs plus petites de  $h/L$ . Cette conjecture est supportée par l'étude [Starostin 04] où le cas d'un rayon nul ( $h = 0$ ) est considéré et où seules des solutions comprenant des points de contact sont exposées.

## f) Solutions avec contact continu

La forme géométrique des configurations à trois points de contact et les symétries du problème indiquent que pour les nouvelles solutions le contact continu va se développer le long d'un axe perpendiculaire à l'axe  $\ell$ . On cherche donc à raccorder la solution précédente, scindée en deux, avec une solution où les deux segments de tige s'enroulent l'un autour de l'autre en hélices de pas variable. Ces solutions en paires torsadées ont été décrites par Coleman & Swigon [Coleman 00]. L'axe d'enroulement des deux hélices est l'axe de symétrie  $\mathbf{e}_y$  et nous introduisons des angles d'Euler par rapport à cet axe. La tangente  $\mathbf{d}_3$  s'écrit alors :

$$\mathbf{d}_3(S) = (\sin\theta \sin\psi, \cos\theta, \sin\theta \cos\psi)$$

où  $\theta$  est l'angle hélicoïdal et  $\psi$  l'angle azimutal. Les deux segments d'hélice se font face de part et d'autre de l'axe  $\mathbf{e}_y$ . Chaque segment peut être vu comme s'enroulant autour d'un cylindre imaginaire, de rayon  $h$ , l'autre segment vivant sur le même cylindre, en face. Chaque segment exerce une pression de contact sur l'autre segment. Nous cherchons alors les équations d'équilibre d'une tige astreinte à exister sur un cylindre de rayon  $h$  et subissant une réaction normale orientée vers l'extérieur du cylindre. La position de la ligne centrale  $\mathbf{R}(S)$  est donnée par :

$$\mathbf{R}(S) = (-\chi h \cos\psi(S), Y(S), \chi h \sin\psi(S))$$

où  $\chi = \pm 1$  correspond à la chiralité des hélices. La fonction  $\psi(S)$  doit satisfaire à la condition différentielle  $\psi' = \chi \sin\theta(S)/h$  pour avoir  $\mathbf{R}' = \mathbf{d}_3$ . Comme exposé au Chapitre IV les équations d'équilibre d'une tige astreinte sur un cylindre peuvent être écrites comme des équations différentielles (voir Eqs. (IV.18)) sur l'angle  $\theta(S)$  :

$$\theta' = \omega \tag{II.16a}$$

$$\omega' = \chi \frac{M_3}{K_0 h} \cos 2\theta + \frac{2}{h^2} \sin^3 \theta \cos \theta. \tag{II.16b}$$

La pression de contact est donnée par (IV.11a), c'est à dire :

$$P(S) = \psi' F_\psi - F_r'$$

et peut être calculée une fois la configuration connue. De même les composantes de la force interne dans le repère cylindrique  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\psi, \mathbf{e}_y)$  sont données par (IV.19) avec  $K = 0$  et s'écrivent ici :

$$F_r = \omega \left( \frac{3K_0}{2h} \sin 2\theta - \chi M_3 \right) \quad (\text{II.17})$$

$$F_\psi = -\chi \frac{K_0}{h^2} \sin^3 \theta - \frac{M_3}{h} \cos \theta \quad (\text{II.18})$$

$$F_y = \text{constante} = 0 \quad (\text{II.19})$$

où  $\mathbf{e}_r = (\mathbf{R} - (\mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_y) \mathbf{e}_y) / h$  et  $\mathbf{e}_\psi = \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_r$ . La constante est trouvée nulle par raccordement avec la solution extérieure où la force interne n'a pas de composante sur  $\mathbf{e}_y$ . L'introduction d'une telle solution en contact continu apporte deux inconnues supplémentaires par rapport à une solution à trois points de contact : l'abscisse  $S_2$  est maintenant remplacée par deux abscisses  $S_{2a}$  et  $S_{2b}$  et l'unique saut de force  $\Delta F_2$  est remplacé par deux sauts  $\Delta F_{2a}$  et  $\Delta F_{2b}$ . (Au point  $F$  on a  $S_2 = S_{2a} = S_{2b}$  et  $\Delta F_2 = \Delta F_{2a} + \Delta F_{2b}$ ). Il n'y a par contre pas de nouvelles conditions géométriques de contact à ajouter : les deux conditions d'inter-distance et de tangence qu'il y avait en  $S_2$  sont remplacées par les deux conditions en  $S_{2a}$  (entrée de la zone continue), mais les conditions de contact en  $S_{2b}$  sont automatiquement vérifiées. Il n'y a donc pas de conditions de décollement. Par contre deux conditions sur le raccordement de la force interne sont créées par les équations (II.17) et (II.18). En effet les composantes de la force interne dans la tige en  $S = S_{2a}^-$  sont connues et il faut qu'elles correspondent aux valeurs données par les équations (II.17) et (II.18). L'égalité nombre de conditions, nombre d'inconnues dans la méthode du tir est donc conservée.

### g) Résultats

Un diagramme de bifurcation montrant les résultats de continuations pour différentes valeurs de deux paramètres  $t \stackrel{\text{def}}{=} TL^2/K_0$  et  $L/(2h)$  est tracé en Fig. II.8. La grandeur  $T$  est la tension en fin de tige,  $T = \mathbf{F}(L/2) \cdot \mathbf{d}_3(L/2)$ . On s'intéresse plus particulièrement aux propriétés des solutions avec ligne de contact. Pour des valeurs de  $TL^2/K_0$  et de  $L/(2h)$  grandes devant 1, la solution d'équilibre tend vers une configuration où la partie en contact continu est presque uniforme :  $\theta(S)$  varie peu. On est en fait proche du point de selle du système (II.16). On va faire l'approximation, dans le reste de cette section, que le système est sur le point de selle. L'angle  $\theta$  prend alors une valeur constante, la valeur au point de selle, et l'on a  $\theta'(S) \equiv 0$ .

La formule pour la pression de contact se simplifie et donne :

$$P = \frac{K_0 \sin^4 \theta}{h^3 \cos 2\theta}.$$

D'autre part l'équation (II.16b) donne maintenant la valeur du moment de torsion en fonction de l'angle  $\theta$  :

$$M_3 = -\chi \frac{2K_0}{h} \frac{\sin^3 \theta \cos \theta}{\cos 2\theta}. \quad (\text{II.20})$$

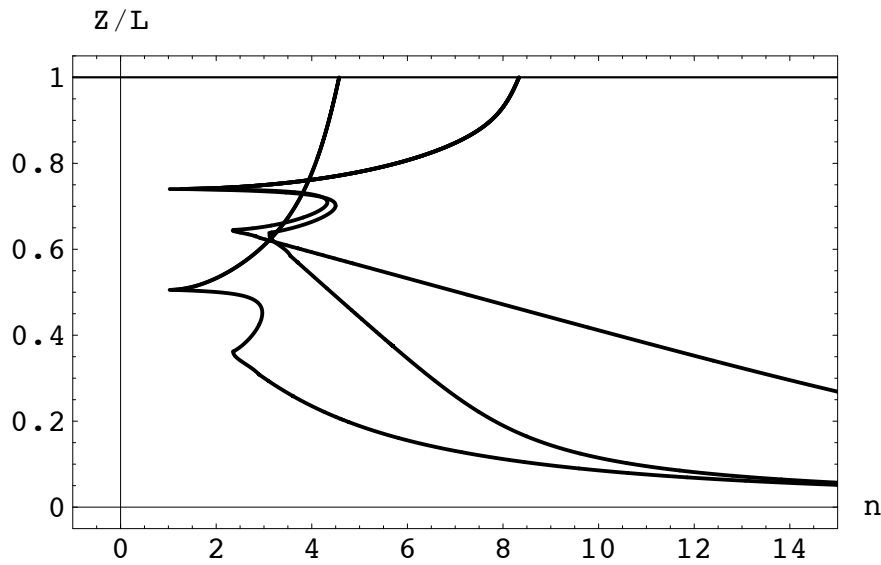


FIGURE II.8 – Trois courbes de bifurcation pour trois valeurs du couple  $(TL^2/((2\pi)^2 K_0); L/(2h)) = (1, 62; 170), (6, 170)$  et  $(6, 1700)$ , du bas vers le haut en  $n = 14$ .

Il reste à trouver une formule pour déterminer  $\theta$ . A priori la quantité  $I_2$ , définie par l'équation (II.6d), n'est conservée le long de la tige que pour des configurations sans contact. Néanmoins il est facile de voir qu'en l'absence de friction, le contact, qu'il soit ponctuel ou continu, ne modifie pas cette quantité  $I_2$ . En effet le moment interne  $\mathbf{M}(S)$  n'est jamais modifié par le contact ; par contre la force interne  $\mathbf{F}(s)$  est modifiée, mais sa composante le long de la tangente (i.e. la tension) n'est pas modifiée. L'écriture de l'invariant  $I_2$  en deux endroits de la tige permet d'établir la formule qui détermine l'angle  $\theta$ . Lorsque  $t$  et  $L/(2h)$  sont grands, la force appliquée par l'encastrement sur la tige,  $\mathbf{F}(L/2)$ , est presque alignée avec sa tangente et le moment appliqué,  $\mathbf{M}(L/2)$ , n'a plus de composante de flexion :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(L/2) &\simeq T \mathbf{d}_3(L/2) \simeq T \mathbf{e}_z \\ \mathbf{M}(L/2) &\simeq M_3 \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

ainsi  $I_2 = (1/2)M_3^2/K_0 + T$ . D'autre part, dans la partie de contact continu, la courbure est donnée par  $\sin^2 \theta/h$  et  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{d}_3 = \chi F_\psi \sin \theta$ . On obtient alors :

$$I_2 = \frac{1}{2} \frac{M^2}{K_0} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}_3 = \frac{1}{2K_0} \left( \left( \frac{K_0 \sin^2 \theta}{h} \right)^2 + M_3^2 \right) + \chi F_\psi \sin \theta$$

En utilisant les deux écritures de  $I_2$  ainsi que les équations (II.20) et (II.18), on obtient :

$$T = \frac{K_0}{h^2} \sin^4 \theta \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\cos 2\theta} \right). \tag{II.21}$$

Une fois les deux paramètres  $T$  et  $h$  fixés, on calcule  $\theta$  et  $M_3$  grâce aux équations (II.21) et (II.20) respectivement. Un point important à noter est que la rotation imposée  $2\pi n$  n'entre pas dans les



équations et donc que  $\theta$  est indépendant de  $n$ . Il en est de même pour le moment  $M_3$  et par là pour la torsion totale du système (*total twist* en anglais) notée  $Tw$  :

$$Tw \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^L U_3(S) dS = \frac{1}{2\pi} \frac{M_3}{K_3} L.$$

Le système a deux façons de réagir à la rotation  $2\pi n$  qu'on lui impose : il peut emmagasiner de la torsion (*total twist*  $Tw$ ) ou se vriller sur lui-même (*writhe*  $Wr$ ), avec la contrainte topologique  $n = Tw + Wr$  [Călugăreanu 59, White 69, Fuller 71]. On voit que, dans la limite des grandes tensions  $t \stackrel{\text{def}}{=} TL^2/K_0 \gg 1$  et des grands rapports d'aspect  $L/(2h) \gg 1$ , lorsque l'on fait croître  $n$  la torsion totale  $Tw$  reste constante et c'est le vrillage  $Wr$  qui augmente avec  $n$ . Le vrillage est dominé par le vrillage de la région en contact continu qui vaut [Fuller 78] :

$$Wr \simeq \frac{1}{2\pi} \frac{L_p}{2h} \sin 2\theta$$

où  $L_p$  est la longueur curviligne totale de la tige dans région de contact,  $L_p = 2(S_3 - S_1)$ . On voit alors que pour une valeur de  $t$  donnée (et donc une valeur de  $\theta$ ) le vrillage croît avec  $n$  par l'intermédiaire de  $L_p$  : au fur et à mesure que  $n$  augmente,  $L_p$  augmente et les parties terminales diminuent. Il y a donc une valeur maximale pour le vrillage  $Wr_{\max} = \frac{1}{2\pi} \frac{L}{2h} \sin 2\theta$ . Pour des rotations imposées supérieures ( $n > Wr_{\max}$ ), c'est la torsion  $Tw$  qui recommence à croître, le vrillage restant bloqué à sa valeur de saturation  $Wr_{\max}$ .

Afin de vérifier numériquement les formules asymptotiques établies ci-dessus, on extrait des simulations la valeur moyenne

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} (1/(S_{2b} - S_{2a})) \int_{S_{2a}}^{S_{2b}} \theta(S) dS$$

pour différentes valeurs de  $TL^2/K_0$ . La dépendance de  $T$  et  $M_3$  en fonction de  $h$  (seule longueur active du problème) est obtenue par simple calcul de dimensions :  $T \propto 1/h^2$  et  $M \propto 1/h$ . Il reste à faire varier  $T$  pour  $h$  fixé et à ajuster les paramètres  $\beta_1$  et  $\beta_2$  dans la formule :

$$\frac{Th^2}{K_0} = \sin^4 \alpha \left( \beta_1 + \frac{\beta_2}{\cos 2\alpha} \right)$$

pour trouver  $\beta_1 \simeq 0.499$  et  $\beta_2 \simeq 0.999$ . La formule (II.20) est contrôlée de la même manière. On vérifie de la même façon la relation :

$$n = Tw + Wr = \frac{1}{2\pi} \frac{M_3}{K_3} L + \frac{1}{2\pi} \frac{S_3 - S_1}{h} \sin 2\alpha$$

## II.2 Approche variationnelle

On va montrer dans cette section que l'on peut retrouver les expressions de la tension appliquée  $T$ , du moment de torsion appliqué  $M_3$  et de la pression de contact  $P$  avec une approche variationnelle du problème [Clauvelin 08]. Nous allons écrire l'énergie potentielle du sys-

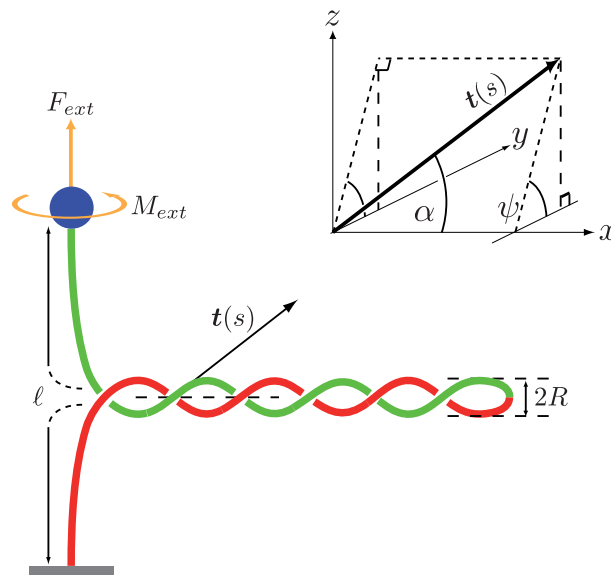


FIGURE II.9 – Représentation schématique d'une configuration enroulée d'une tige sous contrainte de tension et de torsion.

tème comme la somme de l'énergie de déformation élastique et des travaux des efforts extérieurs. Les relations d'équilibre seront alors retrouvées en annulant la première variation de l'énergie par rapport à ses variables.

On a vu dans la section précédente que lorsque la force appliquée  $TL^2/K_0$  et le rapport d'aspect  $L/(2h)$  sont grands devant 1, la configuration de la tige tend asymptotiquement vers une géométrie simplifiée où la partie en contact continu est presque uniforme et où les parties terminales (connectées aux encastrement) sont presque droites (bien que sous torsion). Si de plus on néglige la contribution énergétique de la boucle à l'extrémité de la partie en contact continu, on a alors un système à deux phases : (i) tige droite sous torsion, (ii) partie en torsade à deux brins. Nous allons d'abord écrire l'énergie de déformation élastique du système :

$$E_{\text{elas}} = \frac{1}{2}K_0 \int_0^L \kappa^2(S) dS + \frac{1}{2}K_3 \int_0^L U_3^2(S) dS \tag{II.22}$$

La courbure  $\kappa(S)$  dans les parties terminales et dans la boucle est négligée. Dans la torsade la courbure est la courbure (constante) d'une hélice d'angle hélicoïdal  $\alpha$  et de rayon  $R$  :  $\kappa = \sin^2 \alpha / R$ . La torsion  $U_3$  est uniforme le long de la tige (cf. Section II.1) et est une inconnue du problème. On a finalement :

$$E_{\text{elas}} = \frac{1}{2}K_0 \frac{\sin^4 \alpha}{R^2} L_p + \frac{1}{2}K_3 U_3^2 L$$

où  $L_p$  est la longueur curviligne totale de la tige dans la phase torsadée. A cette énergie de déformation élastique on ajoute les travaux des efforts extérieurs, la tension  $T$  et le moment de torsion  $M_3$  :

$$E_{\text{eff}} = -T\Delta Z - 2\pi n M_3 \tag{II.23}$$

où  $\Delta Z$  est l'extension verticale du système et  $2\pi n$  la rotation totale de l'extrémité haute de la tige autour de l'axe  $\mathbf{e}_z$ . Les parties terminales étant considérées droites, l'extension  $\Delta Z$  est égale à leur longueur curviligne cumulée :  $\Delta Z = L - L_p$ . D'autre part nous utilisons, pour le nombre de tours  $n$ , la formule établie en Section II.1-g) :

$$2\pi n = u_3 L - \chi \frac{L_p}{2R} \sin 2\alpha. \quad (\text{II.24})$$

Nous cherchons maintenant à annuler la première variation de l'énergie sous la contrainte que le rayon hélicoïdal  $R$  corresponde au rayon  $h$  de la tige. Nous introduisons donc un multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  et considérons le Lagrangien augmenté :

$$V = E_{\text{elas}} + E_{\text{eff}} - \lambda(R - h)$$

qui est fonction de quatre variables  $u_3$ ,  $\alpha$  et  $L_p$ ,  $R$ .

La première variation ( $\partial V / \partial u_3$ ,  $\partial V / \partial \alpha$ ,  $\partial V / \partial L_p$ ,  $\partial V / \partial R$ ) est nulle si :

$$\begin{aligned} u_3 &= M_3 / K_3, \\ M_3 &= -\chi \frac{2K_0 \sin^3 \alpha \cos \alpha}{h \cos 2\alpha}, \\ T &= \frac{K_0}{h^2} \sin^4 \alpha \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\cos 2\alpha} \right), \\ P &= \frac{K_0 \sin^4 \alpha}{h^3 \cos 2\alpha}, \end{aligned}$$

où le multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  est identifié à  $L_p P$ . On retrouve ainsi les expressions établies précédemment.

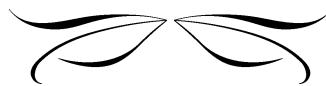
Une fois l'épaisseur  $h$  et la rigidité en flexion  $K_0$  choisies, les expressions de la tension et du moment de torsion appliqués au système dépendent du seul paramètre  $\alpha$ . On peut alors éliminer ce paramètre et écrire le moment de torsion comme une simple fonction de la force imposée :

$$\frac{M_3 h}{K_0} = 2 \left( \frac{2}{3} \right)^{3/4} \left( \frac{T h^2}{K_0} \right)^{3/4} + \left( \frac{2}{3} \right)^{5/4} \left( \frac{T h^2}{K_0} \right)^{5/4} + \dots$$

# Bibliographie

- [Allgower 97] E. L. Allgower & K. Georg. *Numerical path following*. In P. G. Ciarlet & J. L. Lions, editeurs, Handbook of Numerical Analysis, volume 5, pages 3–207. North-Holland, 1997.
- [Champneys 96] A. R. Champneys & J. M. T. Thompson. *A multiplicity of localised buckling modes for twisted rod equations*. Proc. R. Soc. Lond. A, vol. 452, pages 2467–2491, 1996.
- [Clauvelin 08] N. Clauvelin, B. Audoly & S. Neukirch. *Mechanical Response of Plectonemic DNA : An Analytical Solution*. Macromolecules, vol. 41, no. 12, pages 4479–4483, 2008.
- [Coleman 00] B. D. Coleman & D. Swigon. *Theory of supercoiled elastic rings with self-contact and its application to DNA plasmids*. Journal of Elasticity, vol. 60, pages 173–221, 2000.
- [Coyne 90] James Coyne. *Analysis of the Formation and Elimination of Loops in Twisted Cable*. IEEE Journal of Ocean Engineering, vol. 15, no. 2, pages 72–83, 1990.
- [Călugăreanu 59] G. Călugăreanu. *L'intégrale de Gauss et l'analyse des noeuds tridimensionnels*. Rev. Math. Pures Appl., vol. 4, pages 5–20, 1959.
- [Domokos 01] G. Domokos & T. Healey. *Hidden Symmetry of global solutions in twisted elastic rings*. Journal of Nonlinear Science, vol. 11, pages 47–67, 2001.
- [Fuller 71] F. Brock Fuller. *The Writhing Number of a Space Curve*. Proceedings of the National Academy of Sciences, USA, vol. 68, no. 4, pages 815–819, 1971.
- [Fuller 78] F. Brock Fuller. *Decomposition of the linking number of a closed ribbon : A problem from molecular biology*. Proceedings of the National Academy of Sciences, USA, vol. 75, no. 8, pages 3557–3561, 1978.
- [Henderson 04] Michael E. Henderson & Sébastien Neukirch. *Classification of the spatial clamped elastica : numerical continuation of the solution set*. International Journal of Bifurcation and Chaos, vol. 14, no. 4, pages 1223–1239, 2004.
- [Keller 76] Herbert B. Keller. Numerical solution of two points boundary value problems. SIAM, Philadelphia, 1976.
- [Neukirch 02] Sébastien Neukirch & Michael E. Henderson. *Classification of the spatial clamped elastica : symmetries and zoology of solutions*. Journal of Elasticity, vol. 68, pages 95–121, 2002.

- [Nizette 99] M. Nizette & A. Goriely. *Toward a classification of Euler-Kirchhoff filaments*. J. Math. Phys, vol. 40, pages 2830–2866, 1999.
- [Starostin 04] E. L. Starostin. *Symmetric equilibria of a thin elastic rod with self-contacts*. Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences, vol. 362, no. 1820, pages 1317–1334, 2004.
- [Swigon 99] D. Swigon. *Configurations with self contact in the theory of the elastic rod model for DNA*. PhD thesis, Rutgers State University of New Jersey, U.S.A., 1999.
- [Thompson 96] J.M.T. Thompson & A.R. Champneys. *From helix to localized writhing in the torsional post-buckling of elastic rods*. Proceedings of the Royal Society of London Series A-Mathematical Physical and Engineering Sciences, vol. 452, pages 117–138, 1996.
- [van der Heijden 00] G. H. M. van der Heijden & J. M. T. Thompson. *Helical and localised buckling in twisted rods : a unified analysis of the symmetric case*. Nonlinear Dynamics, vol. 21, pages 71–79, 2000.
- [van der Heijden 03] G. H. M van der Heijden, S. Neukirch, V. G. A. Goss & J. M. T. Thompson. *Instability and self-contact phenomena in the writhing of clamped rods*. Int. J. Mech. Sci., vol. 45, no. 1, pages 161–196, 2003.
- [White 69] J. White. *Self-linking and the Gauss integral in higher dimensions*. American Journal of Mathematics, vol. 91, pages 693–728, 1969.



# Chapitre III

## Application à la mécanique de l'ADN

### Plan du chapitre

---

<b>III.1 L'ADN : une tige élastique ?</b> . . . . .	<b>45</b>
a) Structure primaire . . . . .	46
b) Structure secondaire . . . . .	46
c) Structure tertiaire . . . . .	46
<b>III.2 Les expériences <i>in-vitro</i></b> . . . . .	<b>47</b>
a) Pourquoi étudier les propriétés mécaniques de la molécule d'ADN ? . . . . .	47
b) Les différents dispositifs expérimentaux . . . . .	47
<b>III.3 Modèle pour le sur-enroulement</b> . . . . .	<b>49</b>
a) Equilibre . . . . .	50
b) Extension verticale de la molécule . . . . .	50
<b>III.4 Interactions ADN-ADN</b> . . . . .	<b>51</b>
<b>III.5 Résultats</b> . . . . .	<b>52</b>
<b>III.6 Conclusion</b> . . . . .	<b>53</b>

---

### III.1 La molécule d'ADN : une tige élastique ?

L'acide désoxyribonucléique (ADN) porte l'information génétique sur laquelle est basé le fonctionnement de tout organisme vivant sur Terre. La découverte de la molécule d'ADN date de 1869. A l'époque la relative simplicité de la molécule, en comparaison des protéines, a fait que personne ne croyait que cette molécule, constituée d'un long enchaînement de groupes phosphate-sucre-base, pouvait porter les gènes, briques élémentaires du capital génétique des organismes. C'est seulement en 1944 que O. Avery et collaborateurs montrent expérimentalement que l'ADN porte l'information génétique. En 1953 F. Crick et J. Watson proposent, sur la base de clichés de diffraction des rayons X de Rosalind Franklin, la structure en double hélice. Au cours des décennies qui suivent l'ADN se révèle être l'élément central de l'activité cellulaire et la biologie moléculaire est aujourd'hui la sous-discipline reine de la biologie.

### a) Structure primaire

La molécule d'ADN est un hétéro-polymère : elle est constituée d'un squelette de molécules se répétant à l'identique, squelette sur lequel viennent s'accrocher des bases (A, T, C, G) dont la séquence, non répétitive, contient l'information. On peut représenter schématiquement la molécule comme une échelle dont chacun des deux montants est une ligne sucre-phosphate uniforme et dont les barreaux sont les paires de bases. Il y a en fait deux types de barreaux : A=T et C≡G.

### b) Structure secondaire

Si on fait subir une torsion à l'échelle le long de son axe, on obtient une structure où les montants (squelette sucre-phosphate) s'enroulent pour former une double hélice et où les barreaux (paires de bases) tournent et se rapprochent les uns des autres. La structure ainsi créée est stabilisée par le fait que le squelette sucre-phosphate est hydrophile et que les bases sont hydrophobes (l'ADN cellulaire est de manière permanente entouré de molécules d'eau). Cette géométrie en double hélice uniforme d'axe rectiligne est évidemment une idéalisation. La molécule de part sa séquence a une forme naturelle irrégulière, s'éloignant plus ou moins de la géométrie idéale en double hélice d'axe rectiligne. De plus l'irrégularité de la séquence confère à la molécule une flexibilité non uniforme. Enfin le squelette sucre-phosphate est chargé électriquement. L'ADN est donc toujours immergé en solution saline ou des contre-ions viennent neutraliser la solution. Les contre-ions se regroupent en nuage autour de la molécule, sans néanmoins annuler complètement le potentiel électrostatique créé par la molécule. Les interactions de la molécule avec des protéines ou d'autres molécules d'ADN ou encore avec d'autres parties de la même molécule sont régies en grande partie par cette force à longue portée. A l'échelle de quelques dizaines de paires de bases la non régularité de la structure disparaît au profit d'une structure moyenne aux propriétés uniformes. Ainsi notre modèle pour la réponse mécanique de la molécule d'ADN sera une tige élastique uniforme, de section circulaire munie d'une loi de comportement linéaire en flexion et torsion. La tige est de plus chargée électriquement et une énergie d'interaction doit être calculée.

### c) Structure tertiaire

Au delà des irrégularités de la structure aux petites échelles ( $\approx 1\text{nm}$ ), la molécule possède une longueur caractéristique, la longueur de persistance  $L_p \approx 50\text{nm}$ , qui mesure la façon dont la rigidité de flexion  $K_0$  s'oppose aux fluctuations thermiques  $k_B T$  dues aux chocs Browniens des molécules du solvant sur l'ADN :  $L_p \stackrel{\text{def}}{=} K_0 / (k_B T)$ . Une molécule de longueur  $L$  grande devant la longueur de persistance  $L_p$  sera la proie des fluctuations thermiques et sa structure tertiaire (à grande échelle) ressemblera à une pelote emmêlée de taille  $\approx \sqrt{LL_p}$ . Si cette même molécule est maintenant soumise à une force d'étirement, la structure tertiaire en pelote va s'allonger puis se débobiner pour enfin s'organiser longitudinalement le long de l'axe de la force et ressembler à un ver (ligne allongée désordonnée). Le modèle de physique statistique du ver qui décrit cette structure calcule l'extension bout à bout de la molécule,  $\Delta Z$ , en fonction de la force

imposée [Marko 95b] :

$$\frac{F_{\text{ext}}K_0}{(k_B T)^2} = \rho_{\text{wlc}} + \frac{1}{4} \frac{1}{(1 - \rho_{\text{wlc}})^2} - \frac{1}{4}. \quad (\text{III.1})$$

où  $k_B$  est la constante de Boltzmann,  $T$  la température absolue, et  $\rho_{\text{wlc}} = \Delta Z/L$ . D'autres structures tertiaires apparaissent *in-vivo* notamment dans les plasmides (segment d'ADN hors d'un chromosome). Ces plasmides sont fréquemment sur-enroulés : la double hélice vient s'enrouler autour d'elle même pour accommoder une contrainte de torsion présente dans le plasmide.

## III.2 Les expériences *in-vitro* sur molécules individuelles

### a) Pourquoi étudier les propriétés mécaniques de la molécule d'ADN ?

L'ADN étant une molécule, c'est *a priori* ses propriétés chimiques qu'il va s'agir de comprendre. Les questions fondamentales liées au port du capital génétique sont : comment un gène présent sur l'ADN s'exprime-t'il (transcription) ? Comment le capital génétique est recopié lors de la division cellulaire (duplication) ? Ces questions ont bien sur été étudiées et en grande partie élucidées dans les années et décennies qui ont suivies la découverte de la structure en double hélice. Mais le physicien est amené à se poser d'autres questions, plus simples en apparence, telles que : pourquoi une double-hélice et par autre chose [Calladine 04] ? Comment fait-on entrer deux mètres d'ADN dans un noyau de dix micromètre de diamètre ? Par ailleurs, la structure en double hélice est la cause de contraintes géométriques et topologiques : lors de la transcription, l'ARN polymérase doit ouvrir la double hélice pour lire l'information contenue dans la séquence des paires de bases. Quelle énergie ou force faut-il alors déployer pour ouvrir la structure ? Cette force d'ouverture dépend-elle de la contrainte de torsion qui règne dans la molécule ? D'autre part lorsque la molécule s'enroule autour d'elle même (sur-enroulement) quelles sont les ordres de grandeur des contraintes (par exemple de flexion) et des déformations présentes dans la structure ? En effet les protéines qui agissent sur l'ADN, de part leur tailles ou suivant l'énergie qu'elles peuvent déployer, ne pourront pas toutes accéder et catalyser des régions par trop entortillées.

### b) Les différents dispositifs expérimentaux

De nombreux dispositifs expérimentaux ont été créés pour étudier la molécule d'ADN. Les expériences de migration de molécules dans un gel soumis à un champ électrique (électrophorèse sur gel) permettent de séparer les molécules selon leur taille mais aussi selon le degré de sur-enroulement. La microscopie électronique permet de 'voir' les structures tertiaires des molécules, bien que les conformations soient confinées à un plan. La technique d'imagerie par force atomique, qui utilise un petit bras flexible capable de générer des forces allant jusqu'au nano Newton (force typique de rupture de la liaison covalente), permet de tester la résistance à la rupture de nombreuses molécules. Des méthodes utilisant la force de trainée visqueuse peuvent permettre d'étirer la molécule ou de la sortir d'une capsides de virus par exemple. Mais nous nous intéresseront ici aux expériences où ce sont des pinces (optiques ou magnétiques)



qui viennent saisir la molécule (ou plutôt une bille collée à la molécule). Le dispositif permet alors, via la pince, de soumettre *une* molécule d'ADN à des contraintes de tension et de torsion. Plus précisément dans le dispositif des pinces magnétiques [Strick 96], développé il y a maintenant plus de dix ans au Laboratoire de Physique Statistique de l'Ecole Normale Supérieure de Paris dans le groupe animé par V. Croquette et D. Bensimon, une molécule d'ADN de plusieurs milliers de paires de bases est agrafée à une de ses extrémités sur un capillaire de verre tandis que l'autre extrémité est attachée à une bille (super-para-) magnétique. De forts aimants permanents ( $\sim 0,5$  Tesla) permettent de tirer la bille vers le haut et en même temps de lui imposer une rotation autour d'un axe vertical : l'expérience est réalisée en force imposée ( $\sim$  pN) et rotation imposée (plusieurs dizaines de tours). Une camera CCD et un microscope permettent de suivre les déplacements verticaux de la bille : l'extension bout à bout  $\Delta Z$  de la molécule est relevée pour chaque valeur du nombre de tours  $n$  imposé au système. Les courbes expérimentales ainsi obtenues sont appelées courbes d'extension-rotation.

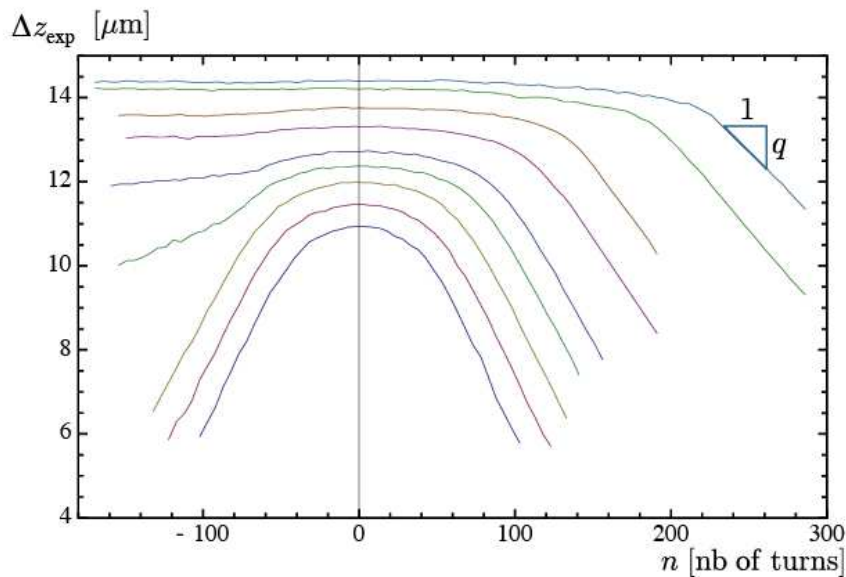


FIGURE III.1 – Courbes expérimentales d'extension-rotation comprenant une zone de décroissance linéaire (de pente  $-q$ ) de l'extension  $\Delta z_{\text{exp}}(n)$  en fonction du nombre de tours imposés  $n$ . La quantité  $\Delta z_{\text{th}}(n)$  définie par la formule (III.7) est notre prédiction théorique de cette partie linéaire. Ces courbes ont été réalisées avec la molécule d'ADN de 48kpb du virus bactériophage  $\lambda$ . Chaque courbe correspond à une force de tension fixe,  $F_{\text{ext}}$  : 0.25, 0.33, 0.44, 0.57, 0.74, 1.10, 1.31, 2.20, 2.95 pN (du bas vers le haut). Ces données proviennent du groupe de V. Croquette et D. Bensimon (CNRS).

Lorsqu'aucune rotation n'est imposée, l'extension  $\Delta Z$  de la molécule est relevée en fonction de la force appliquée. Le modèle du ver donne une formule, Eq. (III.1), liant la force appliquée  $F_{\text{ext}}$  et l'extension  $\Delta Z$ . Cette formule permet d'extraire la longueur de persistance  $L_p$  des données expérimentales, par ajustement. On maintient maintenant la force fixée et on impose une rotation à la bille. A faible nombre de tours, l'extension  $\Delta Z$  décroît avec  $n$  de manière quadra-

tique [Moroz 98]. La configuration de la molécule ressemble toujours à un ver mais un peu plus entortillé qu'auparavant. Pour une valeur seuil du nombre de tours, une transition a lieu et l'extension de la molécule décroît alors linéairement avec  $n$ . La transition est d'autant plus nette que la force imposée est importante. La configuration de la molécule change qualitativement et comprend maintenant deux régions : (i) des parties 'linéaires' en forme de ver et (ii) une (ou des) parties où la molécule est enroulée autour d'elle-même à la manière d'une torsade à deux brins : on parle de plectonèmes .

### III.3 Modèle pour le sur-enroulement

On décrit ces configurations plectonémiques avec un modèle de tige élastique en interaction électrostatique avec elle-même. On reprend l'approche variationnelle présentée en Section II.2 en y ajoutant un potentiel d'interaction à longue portée. L'énergie totale du système est alors composée de trois termes, l'énergie de déformation élastique Eq. (II.22), l'énergie des efforts extérieurs et l'énergie d'interaction. Dans les expériences sur l'ADN, le chargement est en force imposée et en rotation imposée. Ainsi l'énergie des efforts extérieurs ne comprend que le premier terme ( $-T\Delta Z$ ) de l'équation (II.23). En contre partie l'énergie totale doit être minimisée sous la contrainte donnée par l'équation (II.24). Les interactions longue portée ADN-ADN ont principalement lieu dans la partie plectonémique. Pour des rayons de sur-enroulement  $R$  de l'ordre du nanomètre, l'interaction ADN-ADN est dominée par des effets électrostatiques. Dans le cas d'une zone plectonémique uniforme, l'énergie d'interaction s'écrit :

$$V_{\text{int}} = L_p U(R, \alpha) . \quad (\text{III.2})$$

où  $\alpha$  est l'angle hélicoïdal des super-hélices dans la partie plectonémique. Une fois additionnées les contributions élastique, potentielle et électrostatique, l'énergie totale s'écrit :

$$V(R, \alpha, L_p, \tau) = \frac{K_0 \sin^4 \alpha}{2 R^2} L_p + \frac{K_3}{2} \tau^2 L - F_{\text{ext}} (L - L_p) + L_p U(R, \alpha) , \quad (\text{III.3})$$

avec  $\tau \stackrel{\text{def}}{=} U_3$ . Cette énergie doit être minimisée sous la contrainte de la rotation imposée, donnée par l'équation (II.24), qui est linéaire en  $L_p$ . Cela nous permet d'éliminer la variable  $L_p$  de l'énergie totale qui est finalement fonction des trois variables ( $\alpha, R, \tau$ ). Une fois le terme constant  $-F_{\text{ext}}L$  retranché, cette énergie s'écrit :

$$V(\alpha, R, \tau) = \frac{K_3}{2} \tau^2 L + (2\pi n - \tau L) \left[ \frac{-2\chi}{\sin 2\alpha} \left( \frac{K_0 \sin^4 \alpha}{2 R} + R F_{\text{ext}} + R U(R, \alpha) \right) \right] . \quad (\text{III.4})$$

### a) Equilibre

Les équations d'équilibre s'obtiennent alors simplement en annulant la première variation de l'énergie,  $(\frac{\partial V}{\partial \alpha}, \frac{\partial V}{\partial R}, \frac{\partial V}{\partial \tau})=0$ . On obtient le jeu d'équations suivant :

$$2K_0 \frac{\cos \alpha \sin^3 \alpha}{R^2} + \frac{\partial U(R, \alpha)}{\partial \alpha} - \frac{2}{\tan 2\alpha} \left( \frac{K_0 \sin^4 \alpha}{2 R^2} + F_{\text{ext}} + U(R, \alpha) \right) = 0, \quad (\text{III.5a})$$

$$F_{\text{ext}} - \frac{K_0}{2R^2} \sin^4 \alpha + R \frac{\partial U(R, \alpha)}{\partial R} + U(R, \alpha) = 0, \quad (\text{III.5b})$$

$$M_{\text{ext}} + \frac{2\chi}{\sin 2\alpha} \left( \frac{K_0 \sin^4 \alpha}{2 R} + R F_{\text{ext}} + R U(R, \alpha) \right) = 0. \quad (\text{III.5c})$$

Dans la dernière équation nous avons remplacé la variable  $\tau$  par  $M_{\text{ext}} = K_3 \tau$  de façon à avoir un jeu d'équations indépendant de la rigidité  $K_3$ . L'énergie d'interaction et ses dérivées apparaissent naturellement dans les équations d'équilibre. Nous décrirons brièvement dans la section III.4 deux énergies d'interaction et nous comparerons les résultats obtenus avec chacune d'elle en section III.5. Pour une énergie d'interaction  $U(R, \alpha)$  donnée et pour chaque valeur de la tension  $F_{\text{ext}}$ , qui apparaît ici comme un paramètre, nous avons un système algébrique de trois équations à trois inconnues  $(\alpha, R, M_{\text{ext}})$  à résoudre.

Une remarque importante est que le jeu d'équations (III.5), et a fortiori ses solutions  $\alpha, R, M_{\text{ext}}$ , ne dépendent pas du nombre de tours  $n$  appliqué à l'ADN. Ainsi notre modèle prédit que lorsque  $n$  augmente les caractéristiques de la région plectonémique (i.e. le rayon et l'angle super-hélicaux) ainsi que le moment de torsion présent dans l'ADN ne changent pas. La molécule peut être ainsi vue comme un système à deux phases où l'augmentation de  $n$  engendre simplement un passage de longueur de molécule de la phase linéaire à la phase plectonémique :  $L_p \propto n$ , cf. Eq. (II.24), où [Marko 94]. Enfin nous montrons dans la prochaine section que cette invariance par rapport à  $n$  prédit aussi la dépendance linéaire de l'extension  $\Delta Z$  en fonction de  $n$ .

Finalement notons que la chiralité  $\chi$  de la super-hélice de la région plectonémique est de signe opposé au sens de rotation (signe de  $n$  ou de  $M_{\text{ext}}$ ). En effet le terme entre parenthèses dans l'équation (III.5c) étant toujours positif, le signe de  $M_{\text{ext}}$  est opposé de celui de  $\chi$ .

### b) Extension verticale de la molécule

La distance entre le capillaire et la bille magnétique est mesurée expérimentalement en fonction du nombre de tours appliqués à la bille. La formule simple  $\Delta z = L_t$ , valide pour des parties terminales rectilignes, n'est pas convenable en présence de fluctuations thermiques. Nous prenons ces fluctuations thermiques en compte en introduisant une nouvelle quantité  $\Delta z_{\text{th}}$  :

$$\Delta z_{\text{th}} = \rho_{\text{wlc}} \Delta z, \quad (\text{III.6})$$

où le facteur correctif  $\rho_{\text{wlc}}$  à été introduit en section c). Ainsi pour écrire  $\Delta z_{\text{th}}$  comme une fonction de  $n$  il suffit d'utiliser l'égalité  $\Delta z = \ell_t = \ell - \ell_p$  dans l'équation (III.6) et de prendre pour  $L_p$  l'expression obtenue en résolvant l'équation (II.24) :

$$\Delta z_{\text{th}} = \left( 1 - \chi \frac{2R}{\sin 2\alpha} \tau \right) \rho_{\text{wlc}} \ell + \chi \rho_{\text{wlc}} \frac{4\pi R}{\sin 2\alpha} n. \quad (\text{III.7})$$

### III.4 Interactions ADN-ADN

Pour des inter-distances modérées (quelques nanomètres) l'interaction entre deux molécules d'ADN est principalement électrostatique. La molécule d'ADN étant chargée négativement, elle est toujours baignée dans une solution saline qui contient des ions négatifs (co-ions) et positifs (contre-ions). Ces ions, dont la position fluctue sans cesse autour de la molécule d'ADN, participent à l'énergie d'interaction. De nombreux travaux ont eu trait au calcul théorique de l'énergie d'interaction entre deux molécules d'ADN en solution saline [Brenner 74, Podgornik 90] et on assiste aujourd'hui à un regain d'intérêt pour ce sujet, regain dû au développement des expériences sur molécules individuelles, voir par exemple [Kornyshev 07].

Dans notre modèle l'énergie d'interaction est spécifiée de manière indépendante à la réponse élastique de la molécule. Nous pouvons ainsi facilement utiliser différentes énergies d'interaction et comparer les résultats obtenus avec chacune d'elles.

Parmi les nombreuses références sur le sujet [Oosawa 68, Kornyshev 07, Téllez 06, Savelyev 07, Ray 94, Ubbink 99], nous choisissons deux énergies d'interaction, basées sur des théories reconnues et dont l'expression analytique ne présente pas de paramètre inconnu.

#### Théorie de Poisson-Boltzmann

Dans leur étude des configurations sur-enroulées de plasmides d'ADN, Ubbink et Odijk établissent une expression pour l'énergie d'interaction électrostatique de deux segments d'ADN se faisant face ou s'enroulant l'un autour de l'autre [Ubbink 99]. L'énergie d'interaction est calculée en suivant la théorie de Poisson-Boltzmann qui prend en compte la concentration des co- et contre-ions dans le calcul du champ électrostatique autour d'un objet chargé. Il a été montré que le traitement non-linéaire de l'équation Poisson-Boltzmann pouvait être simplifié en un problème linéaire en considérant des potentiels écrantés, du type Debye-Huckel, et ce à distance grande devant la longueur de Debye. Il faut alors renormaliser la charge linéique de la molécule et lui attribuer une charge effective  $\nu$ , le calcul de cette charge effective n'étant pas chose aisée. Les différents travaux numériques [Marko 95a, Vologodskii 95] et analytiques [Stroobants 86, Trizac 02] à notre connaissance proposent des valeurs disparates.

Dans leur étude [Ubbink 99], Ubbink et Odijk proposent la formule suivante pour l'énergie d'interaction de deux segments d'ADN se faisant face ( $\alpha = 0$ ) ou s'enroulant l'un autour de l'autre ( $\alpha \neq 0$ ) :

$$U_{PB}(R, \alpha) = \frac{1}{2} k_B T \nu^2 l_B \sqrt{\frac{\pi}{\kappa_D R}} e^{-(2\kappa_D R)} \varphi(\alpha), \quad (\text{III.8a})$$

où la dépendance angulaire prend la forme suivante :

$$\varphi(\alpha) = 1 + 0.83 \tan^2 \alpha + 0.86 \tan^4 \alpha. \quad (\text{III.8b})$$

On reconnaît la constante Boltzmann  $k_B$ , la température absolue  $T$ , la charge linéaire effective  $\nu$ , la longueur de Bjerrum  $l_B \stackrel{\text{def}}{=} e^2 / (4\pi\epsilon_0\epsilon_r k_B T)$  et la longueur de Debye  $\kappa_D^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\epsilon_0\epsilon_r k_B T / (2n_c e^2)}$ , où  $n_c$  est le nombre d'ions par mètre cube. A  $T = 300$  K, on a  $l_B = 0.7$  nm et pour une concentration de sel monovalent de  $c = 10$  mM, la longueur de Debye vaut  $\kappa_D^{-1} = 3.07$  nm et la valeur de la charge effective utilisée par Ubbink et Odijk est  $\nu = 1.97$  nm<sup>-1</sup>. Dans le cas où l'on

prend  $\alpha = 0$ , l'énergie d'interaction est celle de deux lignes droites parallèles, que nous noterons  $U_{PB}^+ \stackrel{\text{def}}{=} U_{PB}(R, 0)$ .

### Condensation des contre-ions

Le calcul de l'énergie d'interaction par Ray et Manning [Ray 94] est basé sur la théorie de la condensation des contre-ions de la solution sur le polymère chargé [Manning 69]. L'énergie d'interaction est celle de deux molécules d'ADN rectilignes et parallèles ( $\alpha = 0$ ). Les auteurs considèrent que une partie des contre-ions est adsorbée à la surface de l'ADN qui voit ainsi sa charge modifiée. Il faut alors considérer, en plus de l'énergie de répulsion des charges sises sur les segments opposés, l'énergie libre d'adsorption des contre-ions sur la molécule mais aussi l'énergie d'interaction des charges d'une même molécule. Pour des valeurs suffisamment grandes de l'inter-distance entre les deux molécules, l'énergie d'interaction entre les deux molécules d'ADN s'écrit :

$$U_{CC}(R) = \frac{k_B T}{2b} \left( 2 - \frac{1}{\xi} \right) B_K^0(2\kappa_D R),$$

où  $b = 0.17$  nm est lié à l'espacement des charges sur l'ADN et  $\xi = l_B/b$  est la densité de charge (sans dimension) de l'ADN ( $\xi = 4.11$  at  $T = 300$  K). La fonction de Bessel modifiée, du deuxième type et d'ordre zéro,  $B_K^0(x)$  décroît exponentiellement avec  $x$  :  $B_K^0(x) \rightarrow \sqrt{\pi/2} e^{-x}/\sqrt{x}$  si  $x \gg 1$ .

## III.5 Résultats

On résout, numériquement par une méthode de Newton-Raphson, les équations (III.5) pour les trois types d'énergie d'interaction évoquées plus haut  $U_{PB}$ ,  $U_{PB}^+$  or  $U_{CC}$ . Pour des valeurs raisonnables de la tension appliquée, on trouve que les équations (III.5) ont deux solutions. On procède alors au calcul de la seconde variation de l'énergie (III.4) et on ne retient que la solution stable.

Les valeurs des solutions pour  $R$ ,  $\alpha$  et  $M_{\text{ext}}$ , non montrées ici, servent à prédire la pente de la partie linéaire des courbes d'extension-rotation expérimentales. Etant donné que les solutions  $R$ ,  $\alpha$  ne dépendent pas du paramètre  $n$ , l'équation (III.7) montre que l'extension  $\Delta Z$  décroît linéairement avec  $n$ . Cette décroissance linéaire est bien connue expérimentalement (voir Fig. III.1), et elle est ici une conséquence directe de notre théorie. La pente de la partie linéaire est donnée par :

$$q = \frac{d\Delta z_{\text{th}}}{dn} = \chi \frac{4\pi R}{\sin 2\alpha} \rho_{\text{wlc}}. \quad (\text{III.9})$$

On trace en Fig. III.2 la pente  $q$  en fonction de la force appliquée, et ce pour les trois énergies d'interactions considérées ici. De plus nous comparons nos prédictions théoriques avec celles d'un autre modèle [Marko 07] et nous confrontons ces prédictions avec les pentes extraites directement des relevés expérimentaux. Les données expérimentales nous ont été fournies par V. Croquette (Lab. Phys. Stat. - ENS). Ce sont les données utilisées dans les articles [Clauvelin 08, Neukirch 04]. Nous obtenons un bon accord avec les expériences, et ce sur toute la gamme de force. La prédiction venant du modèle de Marko s'écarte des données expérimentales à basse force, lorsque le rayon super-hélicale  $R$  est grand. Cela semble être du au fait que ce

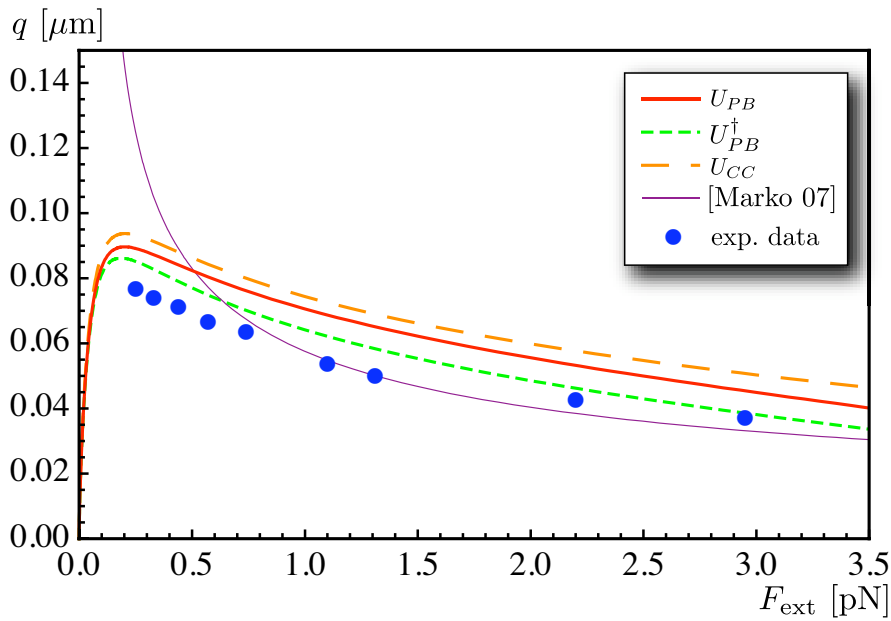


FIGURE III.2 – Valeurs théoriques de la pente  $q$  de la partie linéaire des courbes d’extension-rotation en fonction de la force appliquée  $F_{\text{ext}}$ . Les disques correspondent aux relevés expérimentaux (cf. Fig. 2 dans [Clauvelin 08]). La courbe (mauve) en trait fin est tracée d’après le modèle introduit dans [Marko 07], où les paramètres suivants ont été utilisés :  $A = 50$  nm,  $C = 95$  nm and  $P = 28$  nm.

modèle est basé sur des interactions de contact de type cœur dur au sein des plectonèmes et ne peut ainsi reproduire correctement la variation de  $R$  avec la force appliquée.

## III.6 Conclusion

Nous venons de présenter un modèle analytique pour le sur-enroulement de la molécule d’ADN dans les expériences d’extension-rotation. Le modèle est basé d’une part sur une description élastique des déformations survenant au sein de la molécule et d’autre part sur la prise en compte des interactions électrostatiques ADN-ADN. Ces interactions ADN-ADN sont calculées en utilisant des forces à longue portée issues de potentiels extraits de la littérature existante sur le sujet. La description de ces interactions est cloisonnée du reste du modèle, ce qui nous permet de faire appel à différentes théories. Nous avons plus particulièrement utilisé deux des modèles d’interactions les plus courants. Les deux modèles fournissent des prédictions en bon accord avec les expériences, ce qui semble suggérer (i) qu’un autre modèle d’interaction fournira des résultats semblables et (ii) que les structures sur-enroulées de la molécule d’ADN dépendent en grande partie de l’élasticité de la molécule et dans une moindre mesure de détails de l’interaction ADN-ADN. Les expériences d’extension-rotation, qui sont de nos jours réalisées de manière routinière, apparaissent ainsi comme une façon de tester les propriétés élastiques de la molécule d’ADN. De plus, étant donné que la réponse de la molécule nue est bien décrite par un modèle

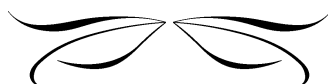
élastique, il est naturel de se pencher maintenant sur l'action mécanique des protéines sur la molécule.

# Bibliographie

- [Brenner 74] Stephen L. Brenner & V. Adrian Parsegian. *A Physical Method for Deriving the Electrostatic Interaction between Rod-Like Polyions at All Mutual Angles*. *Bio-physical Journal*, vol. 14, no. 4, pages 327–334, 1974.
- [Calladine 04] Chris R. Calladine, Horace Drew, Ben Luisi & Andrew Travers. *Understanding dna : The molecule and how it works*. Academic Press, 3rd edition, 2004.
- [Clauvelin 08] N. Clauvelin, B. Audoly & S. Neukirch. *Mechanical Response of Plectonemic DNA : An Analytical Solution*. *Macromolecules*, vol. 41, no. 12, pages 4479–4483, 2008.
- [Kornyshev 07] Alexei A. Kornyshev, Dominic J. Lee, Sergey Leikin & Aaron Wynveen. *Structure and interactions of biological helices*. *Reviews of Modern Physics*, vol. 79, no. 3, pages 943–996, 2007.
- [Manning 69] Gerald S. Manning. *Limiting Laws and Counterion Condensation in Polyelectrolyte Solutions. I. Colligative Properties*. *The Journal of Chemical Physics*, vol. 51, no. 3, pages 924–933, 1969.
- [Marko 94] J. F. Marko & E. D. Siggia. *Fluctuations and Supercoiling of DNA*. *Science*, vol. 265, pages 506–508, 1994.
- [Marko 95a] J. F. Marko & E. D. Siggia. *Statistical mechanics of supercoiled DNA*. *Phys. Rev. E*, vol. 52, no. 3, pages 2912–2938, 1995.
- [Marko 95b] J. F. Marko & E. D. Siggia. *Stretching DNA*. *Macromolecules*, vol. 28, pages 8759–8770, 1995.
- [Marko 07] J. F. Marko. *Torque and dynamics of linking number relaxation in stretched supercoiled DNA*. *Physical Review E*, vol. 76, page 021926, 2007.
- [Moroz 98] J. David Moroz & Philip Nelson. *Entropic Elasticity of Twist-Storing Polymers*. *Macromolecules*, vol. 31, pages 6333–6347, 1998.
- [Neukirch 04] S. Neukirch. *Extracting DNA twist rigidity from experimental supercoiling data*. *Physical Review Letters*, vol. 93, no. 19, page 198107, 2004.
- [Oosawa 68] Fumio Oosawa. *Interaction between parallel rodlike macroions*. *Biopolymers*, vol. 6, no. 11, pages 1633–1647, 1968.
- [Podgornik 90] Rudi Podgornik & V. Adrian Parsegian. *Molecular fluctuations in the packing of polymeric liquid crystals*. *Macromolecules*, vol. 23, no. 8, pages 2265–2269, 1990.



- [Ray 94] Jolly Ray & Gerald S. Manning. *An attractive force between two rodlike polyions mediated by the sharing of condensed counterions*. Langmuir, vol. 10, no. 7, pages 2450–2461, 1994.
- [Savelyev 07] Alexey Savelyev & Garegin A. Papoian. *Inter-DNA Electrostatics from Explicit Solvent Molecular Dynamics Simulations*. Journal of the American Chemical Society, vol. 129, no. 19, pages 6060–6061, 2007.
- [Strick 96] T. R. Strick, J.-F. Allemand, D. Bensimon, A. Bensimon & V. Croquette. *The Elasticity of a Single Supercoiled DNA molecule*. Science, vol. 271, pages 1835–1837, 1996.
- [Stroobants 86] A. Stroobants, H. N. W. Lekkerkerker & T. Odijk. *Effect of electrostatic interaction on the liquid crystal phase transition in solutions of rodlike polyelectrolytes*. Macromolecules, vol. 19, no. 8, pages 2232–2238, 1986.
- [Télez 06] Gabriel Télez & Emmanuel Trizac. *Exact asymptotic expansions for the cylindrical Poisson-Boltzmann equation*. Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment, vol. 2006, no. 06, page P06018, 2006.
- [Trizac 02] Emmanuel Trizac, Lydéric Bocquet & Miguel Aubouy. *Simple Approach for Charge Renormalization in Highly Charged Macroions*. Phys. Rev. Lett., vol. 89, no. 24, page 248301, 2002.
- [Ubbink 99] Job Ubbink & Theo Odijk. *Electrostatic-Undulatory Theory of Plectonemically Supercoiled DNA*. Biophys. J., vol. 76, no. 5, pages 2502–2519, 1999.
- [Vologodskii 95] Alexander Vologodskii & Nicholas Cozzarelli. *Modeling of long-range electrostatic interactions in DNA*. Biopolymers, vol. 35, no. 3, pages 289–296, 1995.



# Chapitre IV

## Torsades

### Plan du chapitre

---

<b>IV.1 Introduction</b> . . . . .	<b>57</b>
<b>IV.2 Géométrie, cinématique</b> . . . . .	<b>58</b>
a) Hélice généralisée . . . . .	58
b) Repère cylindrique . . . . .	59
c) Repère matériel et loi de comportement . . . . .	59
<b>IV.3 Equations d'équilibre</b> . . . . .	<b>60</b>
a) Equilibre des moments . . . . .	61
b) Equilibre des forces . . . . .	61
c) Quantités conservées . . . . .	62
d) Solutions uniformes . . . . .	62
e) Tige sans courbure ni torsion naturelles . . . . .	63
<b>IV.4 Applications</b> . . . . .	<b>63</b>
a) Protéines fibreuses . . . . .	63
b) Plantes grimpantes . . . . .	64

---

### IV.1 Introduction

On étudie ici l'équilibre de tiges élastiques enroulées autour d'un obstacle ou d'une autre tige. On retrouve de telles configurations dans les câbles, les protéines fibreuses, les plantes grim-pantes (plantes volubiles : *twiners* en anglais).

On considère une tige à section circulaire (de rayon  $h$ ) formée dans un matériau élastique isotrope et uniforme. On néglige l'extension et le cisaillement. La tige peut avoir une forme na-turelle en hélice. On cherche à caractériser les configurations d'équilibre de cette tige lorsque celle-ci s'enroule autour d'un cylindre de rayon  $R$ . Dans le cas d'une plante volubile, ce cylindre est le tuteur autour duquel la plante s'enroule.

Dans le cas d'un câble à deux brins (paire torsadée, laine de deux fils, commetage, *yarn ply* en anglais) ce cylindre est virtuel et le rayon  $R$  est en fait égal au rayon  $h$  de la section des brins.

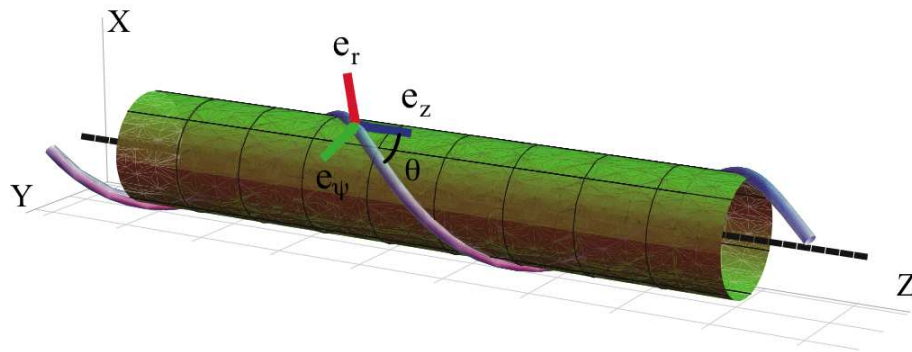


FIGURE IV.1 – Une hélice généralisée est une courbe qui vit à la surface d'un cylindre. On utilise le repère cylindrique  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\psi$ ,  $\mathbf{e}_z$ . L'angle  $\theta$ , entre la tangente à la courbe et l'axe  $z$  n'est pas nécessairement constant.

Néanmoins la géométrie du contact et de l'enroulement fait que tout se passe comme si chacun des brins évoluait à la surface d'un cylindre qui lui appliquait une réaction normale (i.e. perpendiculaire à l'axe du cylindre). La tige est donc contrainte de vivre à la surface d'un cylindre. On définit l'angle d'enroulement  $\theta(S)$  comme l'angle entre l'axe du cylindre et la tangente à la tige. Dans les cas où cet angle est uniforme  $d\theta(S)/dS \equiv 0$  la tige a une forme en hélice. Dans le cas contraire, on parle de configurations en hélices généralisées. Incidemment, le cas d'un câble à trois brins avec angle d'enroulement uniforme peut être inclus dans la présente étude. En effet les symétries et les propriétés géométriques rendent le problème équivalent à étudier l'enroulement d'un brin à la surface d'un cylindre de rayon  $R = R(\theta) \neq h$  soumis à une force de réaction normale (i.e. perpendiculaire à l'axe du cylindre) représentant la somme des efforts venant des deux autres brins.

Dans tous les cas, cette force de réaction normale (ou pression de contact) doit être centrifuge (i.e. composante radiale positive). Une valeur négative correspondant à de l'adhésion, ce que l'on ne considère pas ici. Le signe de la pression devra ainsi être vérifié *a posteriori*.

## IV.2 Géométrie, cinématique

### a) Hélice généralisée

On utilise le repère fixe  $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ . On cherche les configurations d'une tige vivant à la surface d'un cylindre de rayon  $R$  et d'axe  $\mathbf{e}_z$  (voir Figure IV.1), configurations que l'on appelle hélices généralisées :

$$\mathbf{R}(S) = \begin{cases} \chi R \sin \psi(S) \\ -\chi R \cos \psi(S) \\ Z(S) \end{cases}$$

où  $\chi = \pm 1$  donne la chiralité de l'hélice, et où  $S$  est l'abscisse curviligne. Les accolades  $\{\}$  sont utilisées quand on écrit les composantes dans le repère fixe  $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ . Dans le cas contraire on utilisera des parenthèses et l'on spécifiera le repère utilisé. Dans le cas considéré ici où le

cisaillement et l'extension sont négligés, le troisième directeur  $\mathbf{d}_3$  est confondu avec la tangente  $\mathbf{R}'(S)$ . On utilise les angles d'Euler  $\theta$  et  $\psi$  pour paramétrer le vecteur unitaire  $\mathbf{d}_3$  :

$$\mathbf{d}_3(S) = \begin{cases} \sin\theta(S) \cos\psi(S) \\ \sin\theta(S) \sin\psi(S) \\ \cos\theta(S) \end{cases} .$$

L'égalité  $\mathbf{R}'(S) = \mathbf{d}_3$  impose :

$$\psi'(S) = \chi \frac{\sin\theta(S)}{R} . \quad (\text{IV.1})$$

On parle d'hélice quand l'angle d'enroulement est uniforme  $d\theta(S)/dS \equiv 0$  et d'hélice généralisée dans le cas contraire.

## b) Repère cylindrique

Dans la suite nous utiliserons le repère cylindre  $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\psi, \mathbf{e}_z\}$  tel que :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &\stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{R} - Z\mathbf{e}_z)/R = \chi \sin\psi \mathbf{e}_x - \chi \cos\psi \mathbf{e}_y, \\ \mathbf{e}_\psi &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r = \chi \cos\psi \mathbf{e}_x + \chi \sin\psi \mathbf{e}_y. \end{aligned}$$

Dans le cas d'une configuration en hélice (i.e. où  $\theta$  est uniforme), le vecteur radial  $\mathbf{e}_r$  est confondu avec le vecteur normal (au sens de Frenet) à la ligne centrale  $\mathbf{R}(S)$ . Ceci nous incite à introduire un autre vecteur  $\mathbf{e}_b \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_r \times \mathbf{d}_3$  qui dans le cas d'une hélice est confondu avec le vecteur binormal (au sens de Frenet) à la ligne centrale  $\mathbf{R}(S)$ .

## c) Repère matériel et loi de comportement

La tige a une configuration naturelle (i.e. sans efforts extérieurs) en hélice de chiralité droite. Nous notons  $U_{20}$  et  $U_{30}$  la courbure et la torsion de cette hélice. Ces deux grandeurs peuvent s'exprimer en fonction de l'angle d'enroulement  $\theta_0$  et du rayon  $R_0$  de l'hélice naturelle :  $U_{20} = \sin^2\theta_0/R_0$  et  $U_{30} = \sin 2\theta_0/(2R_0)$ . Dans cette configuration de référence, les directeurs  $\mathbf{d}_1(S)$ ,  $\mathbf{d}_2(S)$  et  $\mathbf{d}_3(S)$  sont choisis confondus avec le repère de Frenet de la courbe, c'est à dire avec la normale, la binormale et la tangente, respectivement, de l'hélice naturelle. Ainsi le vecteur de Darboux de la configuration de référence s'écrit :  $\mathbf{U}_0 = (0, U_{20}, U_{30})_{\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}}$ . Pour une configuration déformée le vecteur de Darboux est noté  $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)_{\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}}$  et la loi de comportement relie les composantes du moment interne  $\mathbf{M}(S)$  et la différence entre les composantes des vecteurs de Darboux 'naturel' et 'déformé' :

$$\begin{aligned} M_1 &= EIU_1 \\ M_2 &= EI(U_2 - U_{20}) \\ M_3 &= GJ(U_3 - U_{30}) \end{aligned}$$

On utilise l'adimensionnement introduit au Chapitre I, cf. Eq. (I.10). La loi de comportement s'écrit alors :

$$\begin{aligned} m_1 &= u_1 \\ m_2 &= u_2 - u_{20} \\ m_3 &= \gamma(u_3 - u_{30}). \end{aligned}$$

En plus des deux angles  $\theta(s)$  et  $\psi(s)$  qui permettent de suivre l'évolution de la tangente  $\mathbf{d}_3(s)$  lorsque  $s$  varie, le suivi de tout le trièdre  $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$  nécessite l'emploi d'un troisième angle d'Euler, que nous notons  $\phi(s)$ . Les coordonnées des vecteurs  $\mathbf{d}_1$  et  $\mathbf{d}_2$  s'écrivent :

$$\mathbf{d}_1 = \begin{cases} \cos \phi \cos \psi \cos \theta - \sin \phi \sin \psi \\ \cos \phi \sin \psi \cos \theta + \sin \phi \cos \psi \\ -\cos \phi \sin \theta \end{cases}, \quad \mathbf{d}_2 = \begin{cases} -\sin \phi \cos \psi \cos \theta - \cos \phi \sin \psi \\ -\sin \phi \sin \psi \cos \theta + \cos \phi \cos \psi \\ \sin \phi \sin \theta \end{cases} \quad (\text{IV.2})$$

Le couple  $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2\}$  est obtenu via la rotation (d'angle  $\phi$ ) du couple  $\{\mathbf{e}_b, \mathbf{e}_r\}$  autour de  $\mathbf{d}_3$  :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{pmatrix} = -\chi \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_b \\ \mathbf{e}_r \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.3})$$

Les expressions pour les  $u_i$  sont obtenues grâce à (I.3) :

$$\mathbf{u}(s) = \begin{pmatrix} \theta' \sin \phi - \psi' \sin \theta \cos \phi \\ \theta' \cos \phi + \psi' \sin \theta \sin \phi \\ \phi' + \psi' \cos \theta \end{pmatrix} \{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}. \quad (\text{IV.4})$$

Pour finir, on écrit la composante  $m_z$  du moment selon l'axe du cylindre qui servira par la suite :

$$m_z = -u_{20} \sin \phi \sin \theta + \chi \frac{\sin^3 \theta}{R} + \gamma \cos \theta \left( \phi' + \chi \frac{\sin 2\theta}{2R} - u_{30} \right). \quad (\text{IV.5})$$

### IV.3 Equations d'équilibre

On cherche maintenant sous quelles conditions une tige enroulée autour d'un cylindre est à l'équilibre. On est dans le cas d'un problème semi-inverse : la rayon d'enroulement est fixé, mais l'angle d'enroulement  $\theta(S)$ , ainsi que les deux autres angles d'Euler  $\psi(S)$  et  $\phi(S)$  sont inconnus. L'équation (IV.1) déterminant  $\psi(S)$  une fois  $\theta(S)$  connu, les deux fonctions inconnues sont en fait  $\theta(S)$  et  $\phi(S)$ . Nous allons obtenir les équations différentielles que ces deux fonctions doivent vérifier en introduisant les contraintes géométriques et la loi de comportement, établies en Section IV.2, dans les équations de Kirchhoff :

$$\mathbf{f}' + \mathbf{p} = 0 \quad (\text{IV.6a})$$

$$\mathbf{m}' + \mathbf{r}' \times \mathbf{f} = 0 \quad (\text{IV.6b})$$

où  $\mathbf{p}$  est la pression de contact venant du cylindre.

On introduit les composantes  $f_r$ ,  $f_\psi$  et  $f_z$  de la force interne dans le repère cylindrique  $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\psi, \mathbf{e}_z\}$ ,  $\mathbf{f} = f_r \mathbf{e}_r + f_\psi \mathbf{e}_\psi + f_z \mathbf{e}_z$ .

### a) Equilibre des moments

On projette (IV.6b) sur le repère  $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{d}_3, \mathbf{e}_b\}$ .

On obtient selon  $\mathbf{e}_r$  :

$$\begin{aligned} \chi\theta'' = & -\chi u_{20} \left( \phi' + \frac{\chi \sin 2\theta}{2R} \right) \sin \phi - \gamma \frac{\sin^2 \theta}{R} \left( \phi' + \frac{\chi \sin 2\theta}{2R} - u_{30} \right) + \frac{\chi \sin 2\theta}{2R} \frac{\sin^2 \theta}{R} \\ & - f_\psi \cos \theta + \chi f_z \sin \theta. \end{aligned} \quad (\text{IV.7})$$

Puis selon  $\mathbf{d}_3$  :

$$\gamma \phi'' = -\chi \gamma \theta' \frac{\cos 2\theta}{R} + \theta' u_{20} \sin \phi - \chi u_{20} \cos \phi \frac{\sin^2 \theta}{R}. \quad (\text{IV.8})$$

Et enfin selon  $\mathbf{e}_b$  :

$$f_r = -\chi u_{20} \left( \phi' + \frac{\chi \sin 2\theta}{2R} \right) \cos \phi - \chi \gamma \theta' \left( \phi' + \frac{\chi \sin 2\theta}{2R} - u_{30} \right) + 3\theta' \frac{\sin 2\theta}{2R}. \quad (\text{IV.9})$$

Enfin on remarque que si l'on projette (IV.6b) sur  $\mathbf{e}_z$ , on obtient :

$$m'_z = \chi f_r \sin \theta (= R\psi' f_r) \quad (\text{IV.10})$$

### b) Equilibre des forces

Dans le cas d'un contact sans friction, on a  $\mathbf{p} = p(s) \mathbf{e}_r(s)$ . L'écriture de l'équation (IV.6a) dans le repère cylindrique  $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\psi, \mathbf{e}_z\}$  donne :

$$f'_r - \psi' f_\psi = -p(s) \quad (\text{IV.11a})$$

$$f'_\psi + \psi' f_r = 0 \quad (\text{IV.11b})$$

$$f'_z = 0. \quad (\text{IV.11c})$$

En rapprochant (IV.10) de (IV.11b) on obtient  $m'_z = -f'_\psi R$ , qui s'intègre et donne  $m_z = -f_\psi R + K$ . La constante  $K$  correspond en fait au moment appliqué aux extrémités. En utilisant (IV.5), on peut finalement écrire :

$$f_\psi = \frac{u_{20}}{R} \sin \phi \sin \theta - \chi \frac{\sin^3 \theta}{R^2} - \frac{\gamma}{R} \cos \theta \left( \phi' + \chi \frac{\sin 2\theta}{2R} - u_{30} \right) + \frac{K}{R}. \quad (\text{IV.12})$$

Les deux fonctions inconnues  $\theta(S)$  et  $\phi(S)$  sont donc solutions des équations différentielles suivantes :

$$\theta' = \omega \quad (\text{IV.13a})$$

$$\begin{aligned} \omega' = & -u_{20} \sin \phi \left( v + \frac{\chi \sin 2\theta}{1R} \right) + \chi \gamma \frac{\cos 2\theta}{R} \left( v + \frac{\chi \sin 2\theta}{2R} - u_{30} \right) \\ & + \frac{2}{R^2} \sin^3 \theta \cos \theta - \chi \frac{K}{R} \cos \theta + f_z \sin \theta \end{aligned} \quad (\text{IV.13b})$$

$$\phi' = v \quad (\text{IV.13c})$$

$$v' = -\chi \omega \frac{\cos 2\theta}{R} + \omega \frac{u_{20}}{\gamma} \sin \phi - \chi \frac{u_{20}}{\gamma} \cos \phi \frac{\sin^2 \theta}{R} \quad (\text{IV.13d})$$

### c) Quantités conservées

En présence de contact, le vecteur force n'est plus conservé. Néanmoins la quantité  $(\mathbf{m} - \mathbf{f} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_z$  est conservée le long de la tige. Cette quantité est en fait la constante  $K$  mentionnée plus haut. De plus nous allons voir que l'analogie de la quantité  $I_2$ , introduite au Chapitre II (cf. Eq. (II.6d)), est elle aussi toujours une quantité invariante le long de la tige. Si l'on ajoute  $\chi \theta'$  (IV.7) à  $-\frac{\sin^2 \theta}{R}$  (IV.9), on obtient :

$$\begin{aligned} \theta' \theta'' - f_r \frac{\sin^2 \theta}{R} &= -\gamma \left( \phi' + \frac{\chi \sin 2\theta}{2R} \right) \left( \phi'' + \theta' \frac{\chi \cos 2\theta}{R} \right) \\ &\quad - 2\theta' \frac{\sin^2 \theta}{R} \frac{\sin 2\theta}{R} - \chi f_\psi \theta' \cos \theta + f_z \theta' \sin \theta, \end{aligned} \quad (\text{IV.14})$$

relation qui peut être intégrée (en utilisant (IV.11b)) :

$$\frac{1}{2} \left( \theta'^2 + \frac{\sin^4 \theta}{R^2} \right) + \frac{1}{2} \gamma (\phi' + \psi' \cos \theta)^2 + \chi f_\psi \sin \theta + f_z \cos \theta = \text{constante} \quad (\text{IV.15})$$

Le premier terme entre parenthèses est en fait la somme des courbures au carré :  $\theta'^2 + \sin^4 \theta / R^2 = u_1^2 + u_2^2$  et le deuxième terme  $(\phi' + \psi' \cos \theta)^2$  est la torsion au carré  $u_3^2$ , cf. Eq. (IV.4). D'autre part les deux derniers termes sont simplement la tension interne à la tige,  $f_3 = \mathbf{f} \cdot \mathbf{d}_3$ . Ainsi cette constante s'écrit :

$$\frac{1}{2} (u_1^2 + u_2^2) + \frac{1}{2} \gamma u_3^2 + f_3 = \text{constante}$$

On retrouve ici, à une constante près, le Hamiltonien  $\frac{1}{2} \mathbf{m} \cdot \mathbf{K}^{-1} \mathbf{m} + \hat{u} \cdot \mathbf{m} + n_3$  présenté dans [Dichmann 96].

### d) Solutions uniformes

La configuration naturelle de la tige est caractérisée par des angles  $\theta_0$  et  $\phi_0 \equiv \pi/2$  uniformes : la ligne centrale est une hélice et les directeurs  $\mathbf{d}_1$  et  $\mathbf{d}_2$  correspondent à la normale et à la bi-normale de Frenet. Les configurations d'équilibre sont décrites par les deux angles  $\theta(s)$  et  $\phi(s)$ . Si maintenant on s'intéresse aux configurations d'équilibre dont la ligne centrale est en hélice :  $\theta'(s) \equiv 0$ , la question qui se pose est la suivante : parmi ces configurations d'équilibre, lesquelles ont un angle  $\phi(s)$  variable et lesquelles ont un angle  $\phi$  uniforme. On appelle solution uniforme, une solution avec  $\theta'(s) \equiv 0$  et  $\phi'(s) \equiv 0$ . On montre maintenant que seules des solutions uniformes peuvent exister.

On considère une solution dont la ligne centrale est une hélice :  $\theta'(s) = \omega(s) \equiv 0$ . La relation (IV.15) peut alors s'écrire :

$$\frac{1}{2} \gamma \phi(s)^2 = A \sin \phi(s) + B \quad (\text{IV.16})$$

avec  $A$  et  $B$  des constantes (non nulles) de  $s$ . On remplace  $\phi'(s)$  via la relation (IV.13d) et on obtient :

$$C \cos^2 \phi(s) = A \sin \phi(s) + B \quad (\text{IV.17})$$

avec  $C$  une autre constante (non nulle) de  $s$ . Cette dernière relation ne peut être vérifiée pour tout  $s$  que si l'angle  $\phi$ , justement, ne dépend pas de  $s$ . On montre ainsi que les configurations d'équilibre dont la ligne centrale est en hélice ( $\theta'(s) \equiv 0$ ) ont de plus  $\phi'(s) \equiv 0$ . Dans ce cas (IV.13d) montre que  $\phi = \pi/2 \text{ mod } \pi$ .

Cette propriété de solutions en hélice uniforme a déjà été discutée en l'absence de pression contact : hélice naturelle à section non symétrique [McMillen 02] où la propriété est vérifiée, et dans le cas plus général d'une loi de comportement couplant courbure et torsion, où la propriété n'est pas vérifiée [Chouaieb 06].

### e) Tige sans courbure ni torsion naturelles

Dans le cas où la tige à une configuration naturelle droite ( $u_{20} = 0$ ) et prismatique ( $u_{30} = 0$ ), les équations différentielles (IV.13) se simplifient :

$$\theta' = \omega \quad (\text{IV.18a})$$

$$\omega' = \chi\gamma \frac{\cos 2\theta}{R} u_3 + \frac{2}{R^2} \sin^3 \theta \cos \theta - \chi \frac{K}{R} \cos \theta + f_z \sin \theta \quad (\text{IV.18b})$$

$$\phi' = \nu \quad (\text{IV.18c})$$

$$\nu' = -\chi\omega \frac{\cos 2\theta}{R}. \quad (\text{IV.18d})$$

L'équation (IV.18d) s'intègre en  $\nu(s) + \chi \sin 2\theta(s)/(2R) = \text{constante} = u_3$ . Les composantes de la force s'écrivent :

$$f_r = -\chi\gamma\theta' u_3 + 3\theta' \frac{\sin 2\theta}{2R} \quad (\text{IV.19a})$$

$$f_\psi = -\chi \frac{\sin^3 \theta}{R^2} - \frac{\gamma}{R} \cos \theta u_3 + \frac{K}{R} \quad (\text{IV.19b})$$

$$f_z = \text{constante} \quad (\text{IV.19c})$$

## IV.4 Applications

### a) Protéines fibreuses

Les protéines fibreuses sont une classe de protéines distincte des protéines globulaires dans le sens où leur structure est plus simple : elles s'organisent longitudinalement. Deux exemples types de protéines fibreuses sont la kératine, que l'on retrouve notamment dans les cheveux, les ongles, et le collagène, que l'on retrouve dans les tendons et les os. Une protéine est une longue molécule composée d'une suite d'acides aminés : c'est la structure primaire. Cette longue molécule va adopter une configuration géométrique 3D (qui dépend de la séquence) : c'est la structure secondaire. Une structure secondaire très fréquente est l'hélice alpha : les acides aminés se placent le long d'une hélice. Dans une protéine, les hélices alpha s'organisent en fonction



des interactions entre molécules. Dans la kératine deux hélices alpha vont s'enrouler l'une autour de l'autre pour former un dimère, voir Fig. IV.2. L'hélice alpha est de chiralité droite et les dimères de kératine sont de chiralité gauche. L'explication classique pour décrire la structure (et donc la chiralité) de ce super-enroulement est qu'il permet à la protéine de cacher certains acides aminés du solvant. Nous avons montré que l'explication classique géométrique n'était pas suffisante et qu'il fallait en plus considérer l'équilibre élastique des hélices alpha constituant le dimère [Neukirch 08]. Notre modèle explique aussi la structure et la chiralité de la triple hélice du tropo-collagène, premier étage de la structure multi-niveaux des fibres de collagène.

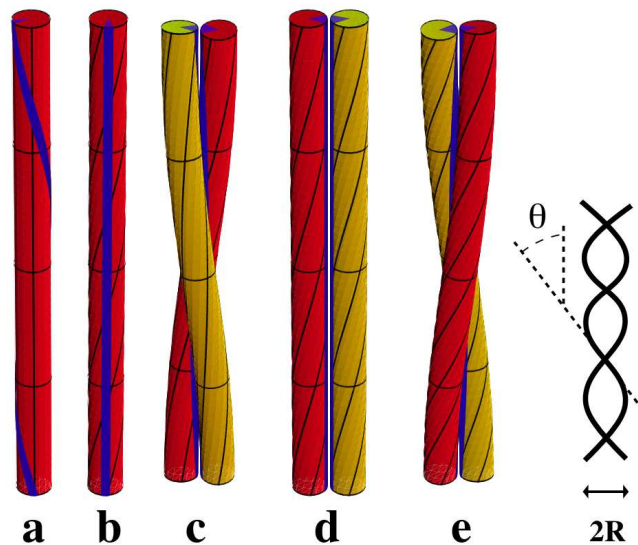


FIGURE IV.2 – Figure 3 - De gauche à droite : (a) hélice alpha avec sa bande hydrophobe enroulée gauche ; (b) hélice alpha sous torsion de manière à ce que la bande hydrophobe soit rectiligne ; (c) superenroulement de chiralité gauche ; (d) deux hélices alpha parallèles ; (e) superenroulement de chiralité droite. Dans les trois dernières configurations, les bandes hydrophobes se font face et sont tournées vers l'intérieur de la structure. On remarque que la torsion (que l'on repère avec les lignes noires à la surface du filament) est plus importante dans la configuration (e) que dans la configuration (c). Schéma de droite : définition de l'angle de croisement  $\theta$  entre les filaments.

## b) Plantes grimpantes

Les plantes volubiles sont des plantes qui s'enroulent autour d'un support pour croître. La plante doit être capable, pour atteindre la lumière, d'entourer des supports de tailles variées. Pour une espèce donnée, la plante va être capable de croître autour de supports cylindriques de rayon différents (voir Fig. IV.3). Une question, mentionnée par Charles Darwin dans son livre sur les plantes grimpantes, est de savoir si il y a un rayon maximal pour le support cylindrique, au dessus duquel la plante ne peut plus s'enrouler. Nous avons proposé un modèle élastique de tige

à courbure naturelle qui met en évidence une instabilité si le rayon du support cylindre est plus de trois fois plus grand que le rayon de courbure naturel de la plante [Goriely 06].

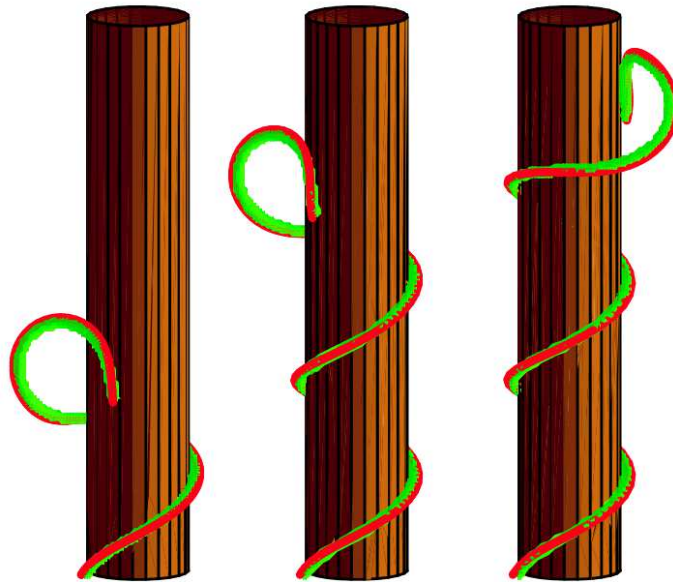
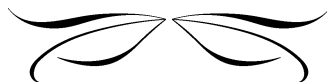


FIGURE IV.3 – Tige à courbure et torsion naturelle en équilibre autour d'un cylindre, utilisée comme modèle de plante grimpante.



# Bibliographie

- [Chouaieb 06] Nadia Chouaieb, Alain Goriely & John H. Maddocks. *Helices*. Proceedings of the National Academy of Sciences, USA, vol. 103, no. 25, pages 9398–9403, 2006.
- [Dichmann 96] D.J. Dichmann, Y. Li & J.H. Maddocks. *Hamiltonian Formulations and Symmetries in Rod Mechanics*. In J.P. Mesirov, K. Schulten & D.W. Sumners, editeurs, *Mathematical Approaches to Biomolecular Structure and Dynamics*, volume 82 of *The IMA Volumes in Mathematics and Its Applications*, pages 71–113. Springer Verlag, 1996.
- [Goriely 06] Alain Goriely & Sébastien Neukirch. *The mechanics of climbing and attachment in twining plants*. Physical Review Letters, vol. 97, page 184302, 2006.
- [McMillen 02] T. McMillen & A. Goriely. *Tendrils Perversion in Intrinsically Curved Rods*. Journal of Nonlinear Science, vol. 12, no. 3, pages 241–281, 2002.
- [Neukirch 08] Sébastien Neukirch, Alain Goriely & Andrew Hausrath. *Chirality of coiled-coils : elasticity matters*. Physical Review Letters, vol. 100, page 038105, 2008.





# Chapitre V

## Vibrations et ondes de flexion

### Plan du chapitre

---

<b>V.1</b>	<b>Equations de Kirchhoff dynamiques . . . . .</b>	<b>69</b>
<b>V.2</b>	<b>Ondes de flexion . . . . .</b>	<b>70</b>
a)	Expérience de la catapulte . . . . .	70
b)	Dynamique linéaire d'une tige encastrée-libre . . . . .	70
c)	Adimensionnement . . . . .	71
d)	Conditions aux bords . . . . .	72
e)	Décomposition en modes . . . . .	72
<b>V.3</b>	<b>Vibrations d'une tige encastrée-encastrée . . . . .</b>	<b>75</b>
a)	Vibrations autour de la configuration droite . . . . .	77
b)	Vibrations autour de la configuration flambée . . . . .	79

---

### V.1 Equations de Kirchhoff dynamiques

Au Chapitre I, nous avons discuté les équations d'équilibre d'une tige, cf. Eqs. (I.1). Les équations de la dynamique s'obtiennent en remplaçant les zéros à droite du signe égal par la dérivée temporelle de l'impulsion dans (I.1a) et par la dérivée temporelle du moment cinétique dans (I.1b). On obtient :

$$\mathbf{F}' + \mathbf{P} = \rho A \ddot{\mathbf{R}}, \tag{V.1a}$$

$$\mathbf{M}' + \mathbf{R}' \times \mathbf{F} = \rho I (\mathbf{d}_1 \times \ddot{\mathbf{d}}_1 + \mathbf{d}_2 \times \ddot{\mathbf{d}}_2), \tag{V.1b}$$

où  $\rho$  est la masse volumique du matériau constituant la tige,  $A$  l'aire de la section droite et  $\dot{\quad} \stackrel{\text{def}}{=} d/dT$ ,  $T$  temps physique (en secondes). Nous ne considérons pas d'effets dynamique dans la loi de comportement qui reste une loi statique entre moments et courbure/torsion et forces et cisaillements/extension. Un vecteur de rotation angulaire  $\boldsymbol{\Omega}(S, T)$  de la section apparaît, de la même façon que le vecteur de Darboux (cf. Eq. (I.2)), et caractérise l'évolution temporelle des directeurs  $\mathbf{d}_i$  :

$$\dot{\mathbf{d}}_i = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{d}_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

L'égalité des dérivées croisées (espace et temps) introduit des relations de compatibilité.

On se concentre ici sur le cas d'une dynamique sans torsion ni force distribuée, confinée dans le plan  $(x, z)$ , et on fait les mêmes choix de notation qu'en Section I.3. Le directeur  $\mathbf{d}_1(S)$  est le long de la normale à la ligne centrale  $\mathbf{R}(S)$ . Le directeur  $\mathbf{d}_2$  est fixe est on a  $\mathbf{d}_2 \equiv \mathbf{e}_y$ . Le directeur  $\mathbf{d}_3$  est le long de la tangente  $\mathbf{R}'(S)$ . On écrit les équations réduites en faisant appel à l'angle de rotation  $\theta(S, T)$  entre l'axe  $Z$  et le directeur  $\mathbf{d}_3 = (\sin\theta, 0, \cos\theta)$ . Dans le cas extensible,  $S$  n'est plus l'abscisse curviligne et la relation entre la tangente  $\mathbf{R}'(S)$  (qui n'est pas normée) est le directeur  $\mathbf{d}_3(S)$  est donnée par l'équation (I.21c) :  $\mathbf{R}'(S) = V_3(S) \mathbf{d}_3(S)$ . On obtient finalement :

$$F'_x = \rho A \ddot{X} \quad (\text{V.2a})$$

$$F'_z = \rho A \ddot{Z} \quad (\text{V.2b})$$

$$M'_y + V_3 (F_x \cos\theta - F_z \sin\theta) = \rho I \dot{\Omega}_2 \quad (\text{V.2c})$$

$$X' = V_3 \cos\theta \quad (\text{V.2d})$$

$$Z' = V_3 \sin\theta \quad (\text{V.2e})$$

Pour les configurations planes  $\Omega_2 = \dot{\theta}$ . Les fonctions  $M_y(S)$  et  $V_3(S)$  sont données par les lois de comportement :

$$M_y = EI \theta' \quad (\text{V.3a})$$

$$F_3 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}_3 = F_x \sin\theta + F_z \cos\theta = EA (V_3 - 1) \quad (\text{V.3b})$$

## V.2 Ondes de flexion dans une tige relâchée

### a) Expérience de la catapulte

On considère une tige ayant une de ses extrémités encastree. L'autre extrémité est tenue et soumise à un moment de courbure  $M_0$ . Au temps  $t_0$ , cette extrémité est relâchée et l'on étudie l'évolution dynamique de la tige ; c'est l'expérience de la catapulte [Audoly 05].

### b) Dynamique linéaire d'une tige encastree-libre

Nous nous concentrons sur des configurations en faible pentes, i.e.  $\theta \ll 1$  et où il n'y a pas de force extérieure, d'ordre zéro, imposée aux extrémités. Nous négligeons l'extension des configurations déformées :  $V_3(S) = 1, \forall S$ . L'équation (V.2c) devient alors :

$$M'_y + F_x = \rho I \ddot{\theta}. \quad (\text{V.4})$$

Si l'on dérive cette équation par rapport à  $S$ , que l'on utilise l'équation (V.2a), puis la loi de comportement en courbure  $M_y = EI \theta'$  et enfin la relation  $\theta = X'$ , valable en faible pente, on trouve :

$$EI X'''' + \rho A \ddot{X} = \rho I \ddot{X}'' \quad (\text{V.5})$$

qui donne la dynamique du déplacement transverse de la tige. En dérivant une ou deux fois par rapport à  $S$ , on obtient les équations pour l'angle  $\theta$  ou la courbure  $K \stackrel{\text{def}}{=} \theta'$  :

$$EI\theta'''' + \rho A\ddot{\theta} = \rho I\ddot{\theta}'' \quad (\text{V.6})$$

$$EIK'''' + \rho A\ddot{K} = \rho I\ddot{K}'' \quad (\text{V.7})$$

### c) Adimensionnement

Il existe deux façons d'adimensionner les équations (V.5), (V.6) ou (V.7). Une première façon, adoptée notamment dans [Coleman 92, Coleman 93] ou [McMillen 03], utilise  $\ell = \sqrt{I/A}$  comme unité de longueur et  $\nu \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{I/A} / \sqrt{E/\rho}$  comme unité de temps. Cette façon de faire nous paraît non appropriée car l'unité de longueur introduite est de l'ordre du rayon de la section droite, longueur qui est nécessairement petite devant les tailles typiques des déformations dans la tige (i.e. rayon de courbure, etc.). D'autre part l'unité de temps utilisée fait appel à la vitesse du son  $c_{\text{Ray}} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{E/\rho}$  dans le matériau, donc des ondes de compression. Les ondes de flexion que nous étudions ayant des vitesses caractéristiques bien plus petites que cette vitesse du son. L'unité de temps  $\nu \stackrel{\text{def}}{=} \ell / c_{\text{Ray}}$ , qui mesure le temps que met le son pour traverser la section, paraît alors doublement non appropriée pour étudier des phénomènes où des ondes de flexion se déplacent le long de la tige. Si néanmoins on pose  $x = X/\ell$ ,  $s = S/\ell$  et  $t = T/\nu$ , l'équation (V.5) s'écrit alors :

$$x'''' + \ddot{x} = \ddot{x}''$$

où les dérivées de  $x(s, t)$  sont prises par rapport aux nouvelles variables  $s$  et  $t$ , sans dimensions. Avec ce choix d'adimensionnement on garde tous les termes de l'équation, y compris le terme d'inertie en rotation, à droite du signe égal.

Nous faisons maintenant le choix d'utiliser la longueur  $L$  de la tige comme unité de longueur et le temps caractéristique  $\tau \stackrel{\text{def}}{=} L^2 \sqrt{\rho A / (EI)}$  comme unité de temps. Ce temps est caractéristique de la période d'oscillation d'une tige encastree-libre (diapason par exemple). On fait appel au rapport d'élanement

$$\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{L}{\sqrt{I/A}} \quad (\text{V.8})$$

de la tige, qui est un nombre sans dimension, grand devant 1. L'élanement correspond au rapport d'aspect de la tige (longueur totale divisée par taille caractéristique de la section). Le temps caractéristique  $\tau$  correspond alors au temps que met le son pour traverser  $\lambda$  fois la tige dans sa longueur. Ce temps est  $\lambda^2$  plus long que le temps caractéristique  $\nu$  discuté plus haut.

Dans ce cas, où  $x = X/L$ ,  $s = S/L$  et  $t = T/\tau$ , l'équation (V.5) devient :

$$x'''' + \ddot{x} = \frac{\ddot{x}''}{\lambda^2}$$

où les dérivées de  $x(s, t)$  sont prises par rapport aux nouvelles variables  $s$  et  $t$ , sans dimensions. On voit alors que le terme d'inertie en rotation des sections, à droite du signe égal, est négligeable. Nous utiliserons par la suite cette deuxième façon d'adimensionner les équations et nous négligerons le terme à droite du signe égal.



Nous cherchons à mettre en évidence un phénomène de sur-courbure le long de la tige : localement et temporairement la courbure  $\kappa(s, t) \stackrel{\text{def}}{=} KL$  prend des valeurs supérieures à la condition initiale  $\kappa(s, t = 0) = \kappa_0$  imposée. Nous étudierons donc l'équation différentielle pour la courbure :

$$\kappa'''' + \ddot{\kappa} = 0 \quad (\text{V.9})$$

#### d) Conditions aux bords

*Conditions en espace.* La tige est encastree en  $s = S/L = 0$  et libre en  $s = S/L = 1$ . Les conditions d'encastrement  $x(s = 0, t) = 0$  et  $x'(s = 0, t) = 0, \forall t$ , impliquent, via l'équation (V.9), les conditions  $\kappa''(s = 0, t) = 0$  et  $\kappa'''(s = 0, t) = 0, \forall t$ . Les conditions au bord libre s'écrivent directement  $\kappa(s = 1, t) = 0$  (pas de moment imposé) et  $\kappa'(s = 1, t) = 0$  (pas de force imposée).

*Conditions en temps.* La tige est relâchée sans vitesse initiale  $\dot{\kappa}(s, t = 0) = 0, \forall s$ , depuis une configuration en arc de cercle  $\kappa(s, t = 0) = \kappa_0, \forall s$ .

Ces conditions ne sont pas compatibles pour  $s = 1$  et  $t = 0$  car d'une part on demande que la courbure soit nulle et d'autre part qu'elle soit égale à  $\kappa_0$ . Cette incompatibilité est régularisée si l'on considère que tout de suite après  $t = 0$  la courbure, dans un voisinage du bord libre, passe rapidement de  $\kappa_0$  à 0. Par voisinage du bord libre, on entend  $s$  tel que  $(1 - s) \sim H/L$  avec  $H$  dimension caractéristique de la section ( $H \sim \sqrt{I/A}$ ). Et par rapidement, on entend des temps de l'ordre de  $\nu = \sqrt{I/A} / \sqrt{E/\rho}$ , introduit plus haut. Nous remplaçons donc la condition initiale  $\kappa(s, t = 0) = \kappa_0$  par

$$\kappa(s, t = 0) = \kappa_0 \left(1 - e^{-\left(\frac{s-1}{\epsilon}\right)^2}\right) \quad (\text{V.10})$$

avec  $\epsilon \sim H/L \ll 1$ . A noter que, l'équation (V.9) étant linéaire, on peut poser  $\kappa_0 = 1$  sans perte de généralité.

#### e) Décomposition en modes

On cherche la solution de (V.9) sous la forme :

$$\kappa(s, t) = \sum_i \alpha_i \kappa_i(s, t) \quad (\text{V.11})$$

où les  $\kappa_i(s, t)$  sont les modes propres du système et les constantes  $\alpha_i$  sont les coefficients de la décomposition spectrale de la condition initiale sur la base des modes propres. Chaque mode propre  $\kappa_i(s, t)$  doit être solution de l'équation (V.9). On peut alors séparer les variables temps et espace et écrire  $\kappa_i(s, t) = \bar{\kappa}(s) g(t)$ . Les deux fonctions  $\bar{\kappa}(s)$  et  $g(t)$  doivent alors satisfaire aux équations :

$$\bar{\kappa}''''(s) = c \bar{\kappa}(s) \quad (\text{V.12})$$

$$\ddot{g}(t) = -c g(t). \quad (\text{V.13})$$

On définit  $n$  via la relation  $c = n^4$ . La solutions de (V.13) satisfaisant à la condition de vitesse nulle en  $t = 0$  est

$$g(t) = \cos(\omega_n t) \text{ avec } \omega_n = n^2.$$

Les solutions de (V.12) s'écrivent :

$$\bar{\kappa}_n(s) = A \sin(ns) + B \cos(ns) + C \sinh(ns) + D \cosh(ns)$$

Les conditions aux bords en espace imposent que  $B = D = \sin n + \sinh n$ ,  $A = C = -(\cos n + \cosh n)$  ainsi que la relation de sélection des nombres d'onde  $n$  :

$$1 + \cos n \cosh n = 0. \tag{V.14}$$

Les premières solutions de cette équation sont  $n_1 = 1,88$ ,  $n_2 = 4,69$ ,  $n_3 = 7,85$ . Le terme en cosinus hyperbolique devenant rapidement grand devant 1, les solutions de (V.14) s'écrivent approximativement  $n_i \simeq (2i - 1)(\pi/2)$  et ce dès  $i = 2$ . Seul le tout premier mode ne satisfait vraiment pas  $\cos n_i \simeq 0$ .

*Assemblage de la solution.* Il nous reste à déterminer les coefficients  $\alpha_j$ . Ils sont donnés par la condition initiale, à  $t = 0$ . On commence par définir le produit scalaire suivant :

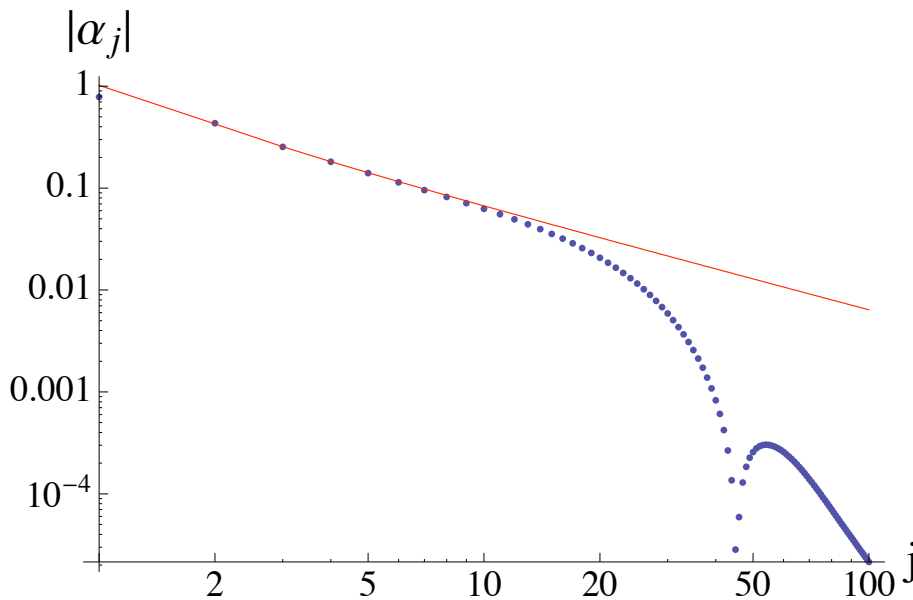


FIGURE V.1 – Valeur absolue des coefficients  $\alpha_{n_j}$ , pour  $j = 1, \dots, 100$ , calculés pour la condition initiale (V.10) avec  $\epsilon = 1/40$ .

$$\begin{aligned} \langle \bar{\kappa}_n, \bar{\kappa}_m \rangle &\stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 \bar{\kappa}_n(s) \cdot \bar{\kappa}_m(s) ds \\ &= 0 \text{ si } n \neq m \\ &= (\sin n + \sinh n)^2 \text{ si } n = m. \end{aligned}$$

On va donc utiliser des modes de norme unité :

$$\bar{\kappa}_n(s) = \cos(ns) + \cosh(ns) - \left( \frac{\cos n + \cosh n}{\sin n + \sinh n} \right) (\sin(ns) + \sinh(ns)). \tag{V.15}$$

Les coefficients  $\alpha_n$  (cf. Eq. V.11) sont alors calculés de la manière suivante :

$$\alpha_n = \int_0^1 \kappa(s, t=0) \cdot \bar{\kappa}_n(s) ds.$$

Le signe des coefficients  $\alpha_n$  alterne, le premier coefficient étant positif, et leur valeur absolue décroît avec  $n$ , voir Fig. V.1. Les modes dont la variation spatiale  $1/n$  est grande devant la petite longueur  $\epsilon$  sur laquelle la condition initiale est regularisée (cf. Eq. V.10) ne voient pas la régularisation. On peut alors calculer une approximation de leur coefficient  $\alpha_n$  en prenant  $\kappa(s, t=0) = 1$ ,  $\forall s$ . On obtient alors, pour  $n \ll (1/\epsilon)$  :

$$\alpha_n \simeq \int_0^1 \bar{\kappa}_n(s) ds = \frac{2}{n} \frac{\sin n \sinh n}{\sin n + \sinh n}.$$

Cette approximation est tracée en ligne continue (rouge) sur la Fig. V.1.

Une fois les coefficients calculés, on peut tracer la solution  $\kappa(s, t)$  pour un temps  $t_1$  fixé, voir Fig V.2. On remarque que la solution  $\kappa(s, t)$  prend localement des valeurs supérieures à la courbure initiale (ici  $\kappa(s, t=0) \equiv 1$ ). Le maximum le plus proche de  $s = 1$  (i.e. de l'extrémité de la tige qui vient d'être relâchée) prend notamment des valeurs supérieures à 1,4. Ce maximum traverse la tige dans sa longueur ; celle-ci subit donc, de manière locale et temporaire, des sur-courbures de plus de 40% par rapport à la courbure initiale. On voit ainsi que même si l'on a courbé la tige à une valeur en dessous de la courbure de rupture, le phénomène (transitoire et localisé) de sur-courbure peut être suffisant pour casser la tige.

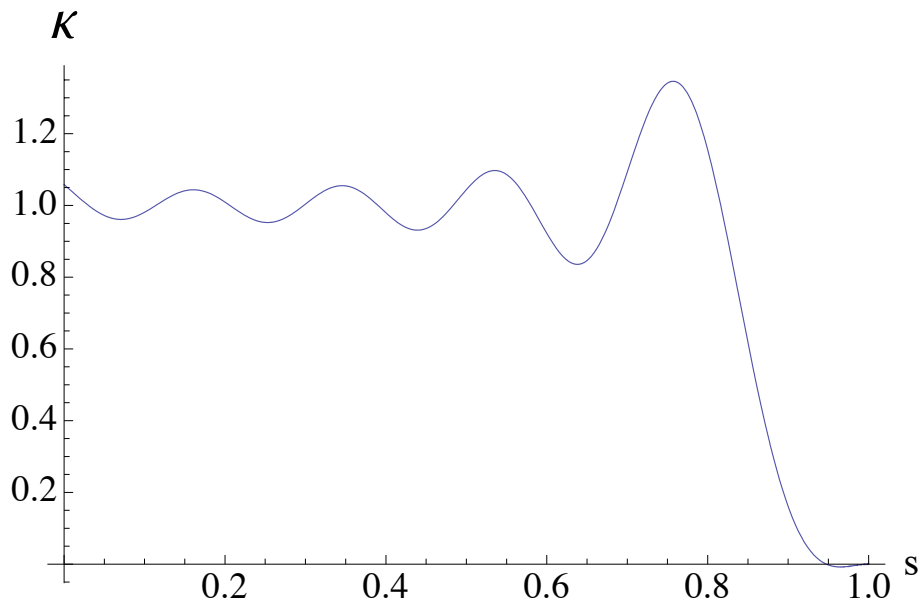


FIGURE V.2 – Solution  $\kappa(s, t_1)$  avec  $t_1 = 0,005$ .

*Formule simplifiée.* Les valeurs des nombres d'onde  $n_i$  sont telles que l'expression (V.15) peut être simplifiée, et ce dès les tous premiers modes, voir Fig. V.3. Pour des valeurs de  $n \simeq \pi/2 \text{ mod } \pi$

grandes devant 1, on neglige  $\cos n$  et l'on developpe  $\cosh n \simeq \sinh n \simeq e^n/2$ . On obtient :

$$\kappa_n(s) \simeq e^{-ns} + \cos(ns) - \sin(ns) + \sin n e^{n(s-1)} \text{ avec } \langle \kappa_n(s), \kappa_n(s) \rangle \simeq 1 \tag{V.16}$$

Les conditions aux bords en espace restent satisfaites (au meme ordre d'approximation). Si pour le calcul des coefficients on utilise la meme approximation  $\kappa(s, t = 0) = 1, \forall s$ , valable pour  $n \ll (1/\epsilon)$ , on trouve :

$$\alpha_{n_i} \simeq (-1)^{i+1} \frac{2}{n}. \tag{V.17}$$

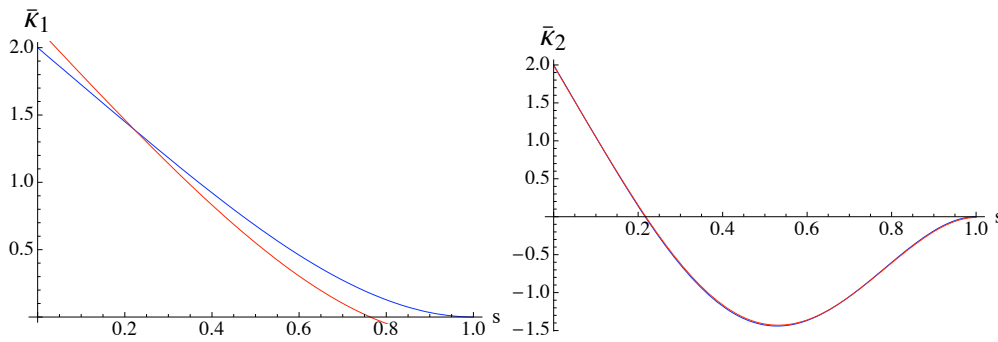


FIGURE V.3 – Les deux premiers modes (en bleu) et leur approximation asymptotique (en rouge). Dès le deuxième mode les courbes sont presque confondues.

$i$	1	2	3	4
$n$	1,875	4,694	7,855	10,9955
$(2i - 1)/(\pi/2)$	1.571	4,712	7.854	10,9956
$\alpha_n$	0,783	-0,433	0,252	-0,177
$(-1)^{i+1} (2/n)$	1,067	-0,426	0,255	-0,182

TABLE V.1 – Valeurs des quatre premiers nombres d'onde  $n$  et des coefficients spectraux  $\alpha_n$ .

### V.3 Vibrations d'une tige encastree-encastree

On revient sur le probleme d'une tige encastree a ses deux extremités et soumise a une pousse axiale le long de l'axe  $z$ . Les configurations d'equilibre ont été étudiées en section I.3-c) où il a été montré (numériquement) que l'extension ne jouait qu'un rôle mineur dans la description des configurations flambées. Nous nous penchons ici sur les fréquences de vibrations d'une tige encastree-encastree. Nous considérons les vibrations autour de la configuration droite si la pousse  $p \stackrel{\text{def}}{=} -f_{zE}/(4\pi^2)$  est en deça du seuil de flambage, et les vibrations autour de la configuration flambée sinon.

On part des equations (V.2) et (V.3) pour la dynamique, dans le plan et sans torsion, d'une tige extensible. On adimensionne les variables en utilisant la longueur  $L$  de la tige et le temps caracteristique  $\tau = L^2 \sqrt{\rho A / (EI)}$  introduit en Section V.2-c). On obtient :

$$f'_x = \ddot{x} \quad (\text{V.18a})$$

$$f'_z = \ddot{z} \quad (\text{V.18b})$$

$$\theta' = m_y \quad (\text{V.18c})$$

$$m'_y = (1 + \epsilon f_3) (f_z \sin \theta - f_x \cos \theta) + \epsilon \ddot{\theta} \quad (\text{V.18d})$$

$$x' = (1 + \epsilon f_3) \sin \theta \quad (\text{V.18e})$$

$$z' = (1 + \epsilon f_3) \cos \theta \quad (\text{V.18f})$$

où on utilise la tension  $f_3 = f_x \sin \theta + f_z \cos \theta$ , et le petit parametre  $\epsilon = I / (AL^2) \ll 1$  qui est l'inverse du carré du rapport d'elancement  $\lambda$ , cf. Eq. (V.8). Les conditions de bords d'encastrement aux deux extremités s'ecrivent :

$$\theta(s=0, t) = 0, \quad \theta(s=1, t) = 0, \quad x(s=0, t) = 0, \quad x(s=1, t) = 0, \quad \forall t. \quad (\text{V.19})$$

On veut caracteriser les vibrations de faibles amplitudes autour d'un equilibre. On cherche donc les solutions de (V.18) sous la forme :

$$\begin{aligned} f_x(s, t) &= f_{xE} + \delta f_x(s) e^{i\omega t}, & f_z(s, t) &= f_{zE} + \delta f_z(s) e^{i\omega t} \\ x(s, t) &= x_E(s) + \delta x(s) e^{i\omega t}, & z(s, t) &= z_E(s) + \delta z(s) e^{i\omega t} \\ \theta(s, t) &= \theta_E(s) + \delta \theta(s) e^{i\omega t}, & m_y(s, t) &= m_{yE}(s) + \delta m_y(s) e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Les fonctions  $f_{xE}(s), \dots, m_{yE}(s)$  étant solutions des equations d'equilibre (I.24) soumises aux conditions de bords (I.25). Les variables de perturbation lineaire  $\delta f_x(s), \dots, \delta m_y(s)$  sont alors sujettes au systeme d'equations differentielles suivant :

$$\delta f'_x = -\omega^2 \delta x \quad (\text{V.20a})$$

$$\delta f'_z = -\omega^2 \delta z \quad (\text{V.20b})$$

$$\delta \theta' = \delta m_y \quad (\text{V.20c})$$

$$\begin{aligned} \delta m'_y &= (1 + \epsilon f_{3E}) (\delta f_z \sin \theta_E - \delta f_x \cos \theta_E + \delta \theta (f_{xE} \sin \theta_E + f_{zE} \cos \theta_E)) + \\ &\quad \epsilon \delta f_3 (f_{zE} \sin \theta_E - f_{xE} \cos \theta_E) - \epsilon \omega^2 \delta \theta \end{aligned} \quad (\text{V.20d})$$

$$\delta x' = (1 + \epsilon f_{3E}) \cos \theta_E \delta \theta + \epsilon \delta f_3 \sin \theta_E \quad (\text{V.20e})$$

$$\delta z' = -(1 + \epsilon f_{3E}) \sin \theta_E \delta \theta + \epsilon \delta f_3 \cos \theta_E \quad (\text{V.20f})$$

où  $f_{3E} = f_{xE} \sin \theta_E + f_{zE} \cos \theta_E$  est la tension à l'equilibre et

$$\delta f_3 = \delta f_x \sin \theta_E + \delta f_z \cos \theta_E + \delta \theta (f_{xE} \cos \theta_E - f_{zE} \sin \theta_E).$$

Le terme d'inertie en rotation des section  $-\epsilon \omega^2 \delta \theta$  ne sera pas pris en compte ici.

### a) Vibrations autour de la configuration droite

On étudie ici les modes vibratoires lorsque la poussée  $p \stackrel{\text{def}}{=} -f_{zE}/(4\pi^2) \geq 0$  reste inférieure au seuil de flambage. La configuration d'équilibre stable est alors telle que  $\theta_E(s) = 0, \forall s$  et  $f_{xE} = 0$ . Les équations (V.20) se réduisent à :

$$\delta x'''' + \bar{p} \delta x'' - \bar{\omega}^2 \delta x = 0 \quad (\text{V.21})$$

où  $\bar{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} (1 + \epsilon f_{zE}) \omega$  et  $\bar{p} \stackrel{\text{def}}{=} -(1 + \epsilon f_{zE}) f_{zE}$ . On cherche les solutions de (V.21) sous la forme  $\delta x(s) = e^{ins}$ . Le nombre d'onde  $n$  doit alors satisfaire l'équation algébrique  $n^4 - \bar{p} n^2 - \bar{\omega}^2 = 0$ . On pose :

$$N^+ = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\bar{p}^2 + 4\bar{\omega}^2} + \bar{p} \right) > 0, \quad N^- = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\bar{p}^2 + 4\bar{\omega}^2} - \bar{p} \right) > 0, \quad n^+ = \sqrt{N^+}, \quad \text{et} \quad n^- = \sqrt{N^-}.$$

Les quatre racines du polynôme  $n^4 - \bar{p} n^2 - \bar{\omega}^2$  s'écrivent :  $\pm n^+, \pm i n^-$ . La solution générale s'écrit comme :

$$\begin{aligned} \delta x(s) &= \text{Re} \left[ A' e^{in^+ s} + B' e^{-in^+ s} + C' e^{-n^- s} + D' e^{n^- s} \right] \\ \delta x(s) &= A \cos(n^+ s) + B \sin(n^+ s) + C \cosh(n^- s) + D \sinh(n^- s). \end{aligned}$$

Les conditions de bords (V.19) impliquent que :

$$\delta x(0) = 0 = \delta x(1) \quad \text{et} \quad \delta x'(0) = 0 = \delta x'(1).$$

Les amplitudes  $A, B, C$  et  $D$  sont alors déterminées par le système :

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ B n^+ + D n^- &= 0 \\ A \cos n^+ + B \sin n^+ + C \cosh n^- + D \sinh n^- &= 0 \\ -A n^+ \sin n^+ + B n^+ \cos n^+ + C n^- \sinh n^- + D n^- \cosh n^- &= 0. \end{aligned}$$

Ce système sans second membre doit être de déterminant nul pour que sa solution soit autre que la solution nulle, il faut donc que :

$$2n^+ n^- (\cos n^+ \cosh n^- - 1) + (n^{+2} - n^{-2}) \sin n^+ \sinh n^- = 0. \quad (\text{V.22})$$

Pour chaque valeur de  $p = -f_{zE}/(4\pi^2)$ , cette équation détermine les valeurs des pulsations  $\omega$  des différentes modes de vibrations, que l'on trace en Figure V.4, pour  $\epsilon = 0$  et  $\epsilon = 1/1600$  (i.e.  $L/(2h) = 10$ ). Au fur et à mesure que la poussée imposée croît, les fréquences de vibration baissent. La première fréquence de vibration atteint une valeur nulle au flambage (c'est une des façons de calculer la charge critique de flambage).

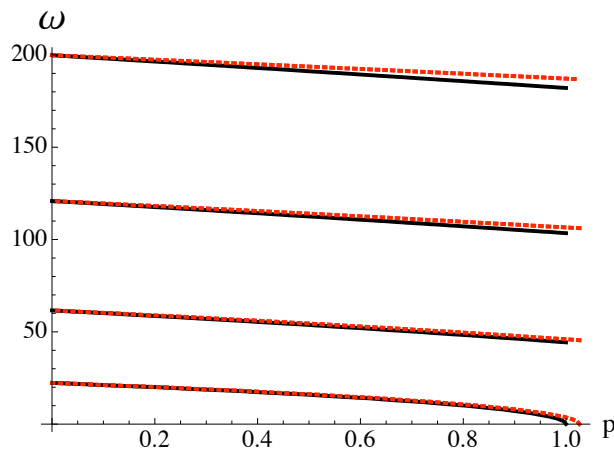


FIGURE V.4 – Pulsations des quatre premiers modes de vibration autour de la configuration droite. En traits pleins (noirs) le cas inextensible et en pointillés (rouges) le cas extensible, avec  $\epsilon = 1/1600$ .

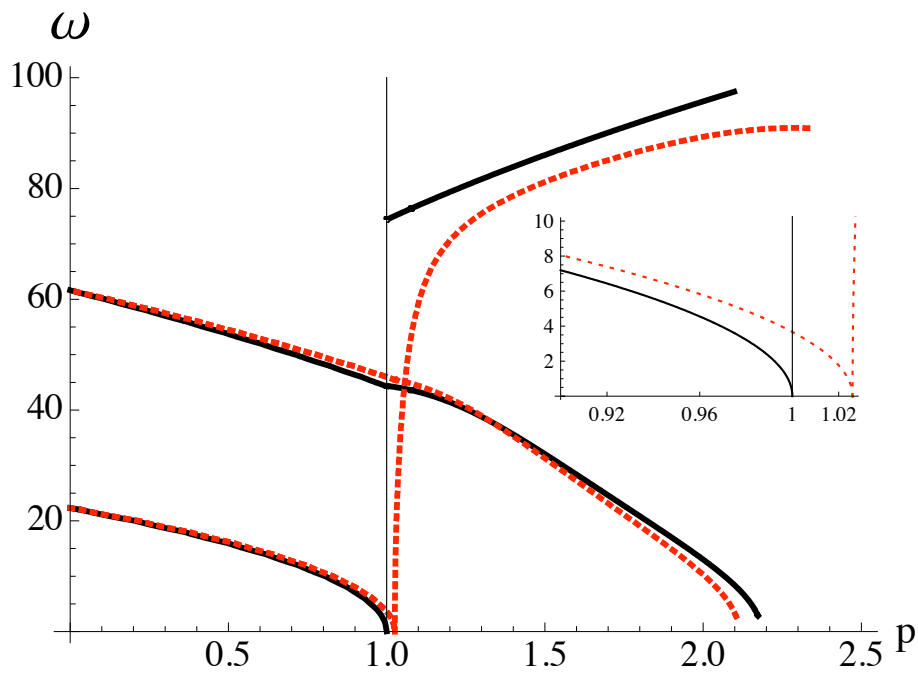


FIGURE V.5 – Pulsations des deux premiers modes de vibration autour de la configuration droite et de la configuration flambée. En traits pleins (noirs) le cas inextensible et en pointillés (rouges) le cas extensible, avec  $\epsilon = 1/1600$ .

**b) Vibrations autour de la configuration flambée**

On calcule maintenant les modes de vibration autour de la configuration flambée (stable) qui existe au dessus du seuil  $p \simeq 1 + 4\pi^2 \epsilon$ . Le calcul est effectué numériquement en utilisant une méthode du tir pour résoudre le problème au bord donné par les équations (V.20) associé aux conditions d'encastrement :

$$\delta x(0) = 0 = \delta x(1), \delta z(0) = 0 = \delta z(1) \text{ et } \delta \theta(0) = 0 = \delta \theta(1).$$

On a vu plus haut qu'avant le flambage le premier mode de vibration, autour de la configuration droite, voit sa fréquence décroître vers zéro lorsque la poussée s'approche du seuil. Dans le cas extensible, lorsque que la poussée dépasse ce seuil, la fréquence du premier mode de vibration, autour de la configuration flambée, croît à partir de zéro (voir Fig. V.5). Par contre dans le cas inextensible, la valeur de la fréquence du premier mode subit une discontinuité en  $p = 1$  (voir Fig. V.5). La fréquence du deuxième mode reste elle continue dans les deux cas (inextensible et extensible). En résumé on voit sur la Fig. V.5 que sauf pour une petite plage de valeur de la poussée  $p$ , les fréquences dans les cas extensible et inextensible sont proches.





# Bibliographie

- [Audoly 05] B. Audoly & S. Neukirch. *Fragmentation of rods by cascading cracks : why spaghetti do not break in half*. Physical Review Letters, vol. 95, page 095505, 2005.
- [Coleman 92] Bernard D. Coleman & Ellis H. Dill. *Flexure waves in elastic rods*. J. Acoust. Soc. Am., vol. 91, no. 5, pages 2663–2673, 1992.
- [Coleman 93] Bernard D. Coleman, Ellis H. Dill, Marzio Lembo, Zheng Lu & Irwin Tobias. *On the dynamics of rods in the theory of Kirchhoff and Clebsch*. Arch. Rational Mech. Anal., vol. 121, pages 339–359, 1993.
- [McMillen 03] Tyler McMillen & Alain Goriely. *Whip waves*. Physica D : Nonlinear Phenomena, vol. 184, no. 1-4, pages 192 – 225, 2003. Complexity and Nonlinearity in Physical Systems – A Special Issue to Honor Alan Newell.





# Chapitre VI

## Une conclusion et quelques perspectives

### VI.1 De l'intérêt des tiges

La théorie de l'élasticité, basée sur la description des objets comme milieux continus, n'est pas chose aisée à enseigner ni à comprendre. Que ce soit du point de vue des concepts (e.g. champ de déformation), ou des outils (e.g. tenseurs), tout conspire à faire de la mécanique des milieux continus une matière difficile. Elle n'est d'ailleurs que rarement enseignée aux étudiants des parcours de physique, dont certains ne découvrent le module d'Young qu'en M2.

Une façon de contourner le problème est de démarrer l'étude de cette matière (i.e. la mécanique des milieux continus) avec les structures élancées<sup>1</sup>. En effet une grande partie des concepts sont déjà présents dans la théorie des poutres ou dans ce qu'on appelle, bizarrement<sup>2</sup>, la résistance des matériaux : forces distribuées, répartitions des efforts, équilibre, stabilité, contact, dynamique, vibrations, méthode variationnelle, loi de comportement, conditions de compatibilité, courbes force-extension, conditions de bords. Par contre l'infinie difficulté de résoudre analytiquement, parfois même de simuler, les équations générales de l'élasticité dans le cas d'un problème 3D 'complet' disparaît lorsqu'il s'agit de tiges élastiques. En effet les équations d'équilibre sont alors de 'simples' équations différentielles ordinaires et les conditions de bord viennent apporter juste ce qu'il faut de richesse pour rendre les problèmes intéressants à étudier. Un problème de flèche ou de flambage pourra alors introduire les concepts de déformation variable dans l'espace, d'énergie de déformation élastique, de bifurcation et stabilité, entre autres, tout en jouissant de la possibilité d'une résolution analytique. C'est d'ailleurs le vrai intérêt et la vraie richesse des tiges : on peut aller très loin dans l'étude des problèmes (contact, vibrations, etc.), et ce en réalisant des résolutions analytiques. Même lorsqu'on se tourne vers le numérique, ce n'est pas souvent du numérique lourd (e.g. les résultats présentés dans ce mémoire ont presque tous été obtenus avec le logiciel Mathematica).

---

1. J.-J. Marigo, communication personnelle

2. bizarrement car il s'agit en fait de structures.

## VI.2 Tige élastiques : Que reste-t-il à faire ?

Ces quinze dernières années ont vu une résurgence de travaux sur les tiges élastiques. J'ai mentionné certains de ces travaux en Introduction de ce mémoire, travaux tous orientés sur l'utilisation et la résolution des équations de Kirchhoff plutôt que sur l'établissement des dites équations : les équations de Kirchhoff ont 150 ans et pas une ride ! Les problèmes de tiges qui seront étudiés prochainement feront donc probablement appel à une composante ou un concept nouveau qui sera adjoint au modèle : poutre ou tige à section spéciale (i.e. creuse, ou ouverte et fortement courbée, ou de grande largeur), tige microscopique soumise aux fluctuations thermiques, tige subissant un champ de force venant de la tige elle-même (auto-gravitant ou auto-électrostatique), tige en interaction capillaire avec un liquide.

Les travaux portant sur les poutres à section spéciales sont souvent des études asymptotiques dont le but est d'établir les équations d'équilibre du système, plutôt que de résoudre ces équations dans des cas précis.

L'étude de filaments microscopiques (souvent biologiques) requière souvent l'utilisation de concepts de physique statistique. Les études de conformation de polymères, flexibles ou semi-flexibles, ont montré la nécessité de la prise en compte de l'entropie configurationnelle dans la résolution du problème. Ces modèles qui en général utilisent l'intégrale de la courbure au carré comme énergie de déformation élastique<sup>3</sup> sont développés par des physiciens. Dans le cas plus riche de polymères ayant une rigidité de torsion (e.g. l'ADN) deux termes nouveaux apparaissent dans l'énergie : l'intégrale de la torsion au carré et la contrainte d'enlacement. Le premier terme a été parfois confondu avec la torsion géométrique de Frenet de la ligne centrale et le caractère non-local du deuxième terme a souvent été mal compris. Ces deux termes supplémentaire dans l'énergie d'une tige sous contrainte de torsion déroutent certains des spécialistes de physique statistique, et par conséquent un traitement faisant intervenir de manière rigoureuse élasticité et fluctuations thermiques fait toujours défaut. Le problème est encore plus ardu si l'auto-répulsion électrostatique du filament est prise en compte.

Bien que plusieurs problèmes d'auto-contact aient été étudiés, il n'y a pas de résultat général sur la façon qu'a une tige élastique de se toucher : les zones de contact sont-elles ponctuelles ou étendues ? Plusieurs travaux ont fait apparaître qu'une topologie de contact relativement générique semble être une zone étendue encadrée par deux zones ponctuelles. La recherche d'une explication de cette topologie et un recensement des cas dans lesquels elle s'observe est clairement un projet intéressant.

Le calcul de l'équilibre d'une tige chargée électriquement et soumise à son propre champ électrostatique présente deux difficultés. Premièrement le champ créé par une ligne chargée est singulier sur cette ligne<sup>4</sup>, ce qui pose problème puisque c'est justement le long de cette ligne que l'on doit évaluer la force électrostatique engendrée par le champ. Deuxièmement les équations d'équilibre de Kirchhoff changent de nature : d'équations différentielles ordinaires, elles deviennent équations intégro-différentielles. Dans le cas d'un contact avec un obstacle ou en présence d'une force de pesanteur, la force interne n'est plus constante. Sa variation par rapport

---

3. les polymères étudiés sont en général des chaînes d'atomes de carbone et ne sont pas sensibles à la torsion.

4. de la même façon que le champ créé par une charge ponctuelle est singulier sur le point.

à  $S$  correspond à la pression de contact  $P(S)$  :

$$N'(S) = -P(S).$$

Mais si la force externe est créée par le champ électrostatique propre à la tige, la pression de contact en  $S$  ne dépend plus simplement de  $S$ , mais de la position (ou plutôt de l'interdistance) de toute la tige  $R(S')$ ,  $\forall S' \in [0; L]$ . On a :

$$N'(S) = -\lambda \int_0^L \Phi(R(S) - R(S')) dS' \tag{VI.1}$$

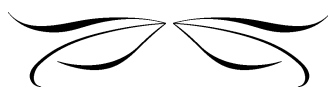
où  $\lambda$  est un paramètre lié à l'intensité de la charge linéique. Le caractère local des équations différentielles ordinaires est perdu : la variation de la force interne  $N(S)$  dépend de toute la solution et non plus de la solution au voisinage de  $S$ .

Pour chacun des deux écueils présentés ici, des remèdes ont été proposés. Ils n'apportent toutefois pas de solutions satisfaisantes. Premièrement la singularité du champ électrostatique sur la ligne chargée est contournée en introduisant une zone,  $[S_1 - \delta; S_1 + \delta]$  autour du point  $S = S_1$  où l'on veut évaluer le champ, où les charges ne sont pas prises en compte. La taille  $2\delta$  de la zone devient alors un paramètre supplémentaire du problème et il s'avère que les solutions dépendent de  $\delta$  lorsque  $\delta \rightarrow 0$ . Deuxièmement le caractère intégro-différentiel des équations d'équilibre d'une tige sous son propre champ peut aussi être contourné en travaillant par itération. Une première solution d'équilibre est calculée pour une tige non chargée,  $\lambda = 0$  dans l'équation (VI.1). Ensuite l'intégrale, dans la partie droite de cette équation, qui *in fine* est une fonction de  $S$ , est évaluée pour un ensemble discret de points  $S_i = (i/N)L$ ,  $i \in [0; N]$ . Les équations de Kirchhoff sont alors résolues pour une valeur petite mais non nulle de  $\lambda$ . Une fois la nouvelle forme d'équilibre calculée, on réévalue le champ, c'est à dire l'intégrale de l'équation (VI.1), et on recalcule une nouvelle forme d'équilibre avec un  $\lambda$  légèrement plus grand. Cela revient à calculer l'équilibre d'une tige chargée dans un champ électrostatique créé par une forme d'équilibre différente bien que proche. Le processus est intérré jusqu'à convergence de la solution. Cette méthode fonctionne lorsque la charge  $\lambda$  n'est pas trop importante et lorsque les configurations ne sont pas trop entortillées. Car dès que le champ électrostatique qui baigne la tige devient fort, la convergence ne se fait plus.

Ces quelques propositions d'étude sur les tiges élastiques font apparaître, je crois, que même si le sujet a 150 ans, il reste des choses à faire. L'ordinateur et les logiciels intégrés de calcul et de visualisation, du type Matlab ou Mathematica, permettent de rapidement débroussailler un sujet et de vérifier son intérêt. Evidemment, même si c'est un outil formidable, l'ordinateur n'a pas réponse à tout et le fait de simuler un équilibre ou une dynamique de tige ne donne pas automatiquement accès à la compréhension du phénomène étudié : *Prédire n'est pas expliquer*<sup>5</sup>. Comme évoqué plus haut, c'est un des intérêts de l'étude des tiges élastiques : force n'est pas de requérir au numérique et nombre de problèmes peuvent être étudiés analytiquement, permettant une appréhension plus directe des phénomènes élastiques à l'œuvre.

---

5. René Thom, 1991



# Bibliographie générale

- [Allgower 97] E. L. Allgower & K. Georg. *Numerical path following*. In P. G. Ciarlet & J. L. Lions, editeurs, Handbook of Numerical Analysis, volume 5, pages 3–207. North-Holland, 1997.
- [Antman 04] S. S. Antman. Nonlinear problems of elasticity. Springer-Verlag, New York, 2nd edition, 2004.
- [Calladine 04] Chris R. Calladine, Horace Drew, Ben Luisi & Andrew Travers. Understanding dna : The molecule and how it works. Academic Press, 3rd edition, 2004.
- [Keller 76] Herbert B. Keller. Numerical solution of two points boundary value problems. SIAM, Philadelphia, 1976.
- [Love 44] A. E. H. Love. A treatise on the mathematical theory of elasticity. Dover Publications, New York, 4th edition, 1944.



# Index

ADN, 45

auto-contact, 33

hélice généralisée, 58

méthode de cheminement, 33

méthode du tir, 33

plectonèmes, 49

rapport d'élanement, 71

tige idéale, 27

## Résumé

Ce mémoire présente plusieurs études sur l'équilibre, la stabilité et les vibrations de poutres élastiques en grande rotation. Le modèle utilisé est d'abord présenté de deux manières différentes : les équations de Kirchhoff sont introduites (i) comme une théorie directe de Cosserat, (ii) par une approche asymptotique  $3D \rightarrow 1D$ . Une étude relativement complète des équilibres avec et sans auto-contact d'une poutre sous contrainte de tension et torsion et encastrée en ses deux extrémités est ensuite exposée. Le modèle est d'autre part appliqué au sur-enroulement de la molécule d'ADN et aux expériences sur molécule individuelle. Le cas d'une poutre naturellement courbe enroulée autour d'un obstacle cylindrique est ensuite traité. Les équations d'équilibre obtenues sont appliquées au cas d'une plante grimpanche autour d'un tuteur ainsi qu'aux configurations dimériques de la protéine kératine. Enfin la dynamique d'une poutre plane est analysée sous deux angles différents : (i) la relâchement d'une poutre console qui donne lieu au phénomène de renforcement de courbure, et (ii) les vibrations d'une poutre post-flambée, encastrée en ses deux extrémités, avec comparaison des cas extensibles et inextensibles. La conclusion mentionne quelques problèmes d'intérêt qui seront l'objets d'études futures.

## Abstract

This dissertation deals with equilibrium, stability and vibrations of twisted rods. First the model used (i.e. the Kirchhoff equations) is presented from two perspectives : (i) as a direct theory, the special Cosserat theory of rods, and (ii) as a  $3D \rightarrow 1D$  asymptotic theory. The core of the text is dedicated to a relatively comprehensive study of equilibrium solutions of a clamped twisted rods with or without self-contact. Results are applied to DNA supercoiling and single-molecule experiments. Then the case of a rod with intrinsic curvature and twist coiled around a rigid cylinder is examined. The equilibrium equations obtained are applied to analyze biology related problems as the growth of a climbing plant around a pole and the secondary structure of the protein keratin. Finally the dynamics of a planar elastica is considered in two different configurations. First the dynamics of a bent and released cantilever is analyzed and shown to give rise to curvature overshoots. Second the in-plane vibrations of a planar clamped elastica after buckling are numerically computed and the role of extensibility is examined.

