



HAL
open science

ÉQUATION DES ONDES SUR LES ESPACES SYMÉTRIQUES RIEMANNIENS DE TYPE NON COMPACT.

Ali Hassani

► **To cite this version:**

Ali Hassani. ÉQUATION DES ONDES SUR LES ESPACES SYMÉTRIQUES RIEMANNIENS DE TYPE NON COMPACT.. Mathématiques générales [math.GM]. Université de Nanterre - Paris X, 2011. Français. NNT: . tel-00669082

HAL Id: tel-00669082

<https://theses.hal.science/tel-00669082>

Submitted on 11 Feb 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS OUEST NANTERRE LA DÉFENSE

U.F.R. SEGMI

École Doctorale : Connaissance, Langage, Modélisation

Année universitaire 2010 - 2011

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Présentée par
Ali HASSANI

Intitulée :
**ÉQUATION DES ONDES SUR LES ESPACES SYMÉTRIQUES
RIEMANNIENS DE TYPE NON COMPACT**

Thèse dirigée par **M. Salah MEHDI**

Soutenue publiquement le 6 Juin 2011, devant le jury composé de :

M. Jean-Phillipe ANKER, Université d'Orléans, Rapporteur

M. Gérard LION, Université Paris-Ouest Nanterre la Défense, Examinateur

M. Noël LOHOUE, C.N.R.S., Examinateur

M. Salah MEHDI, Université Paul Verlaine de Metz, Directeur de thèse

Mme Angela PASQUALE, Université Paul Verlaine de Metz, Examinatrice

Au vu des rapports de **M. Jean-Philippe ANKER** et **Mme Hajer BAHOURI**

**Équation des ondes sur les espaces symétriques
riemanniens de type non compact**

Résumé

Ce mémoire porte sur l'étude des équations d'évolution sur des variétés à courbure non nulle, plus particulièrement l'équation des ondes sur les espaces symétriques riemanniens de type non compact.

Des propriétés de dispersion des solutions du problème de Cauchy homogène sont démontrées. Ces propriétés sont ensuite utilisées pour établir des estimations dites *estimations de Strichartz*. L'examen de ces estimées permet de déduire que le problème de Cauchy non linéaire avec des non-linéarités de type puissance est globalement bien posé pour des données initiales petites et localement bien posé pour des données arbitraires.

Après un chapitre introductif dédié aux définitions, propriétés algébriques et géométriques des espaces symétriques et à quelques aspects élémentaires d'analyse harmonique sphérique sur ces espaces, un article est présenté : *Wave equation on Riemannian symmetric spaces*. Cet article contient nos résultats principaux. Dans le dernier chapitre nous présentons en détail deux problèmes ouverts qui prolongent nos travaux. Il s'agit respectivement d'établir le lien entre le comportement asymptotique des estimées et les orbites nilpotentes, et l'étude de l'équation des ondes pour les formes différentielles sur les espaces symétriques.

Mots-clés : Laplacien - Équation des ondes - Espaces symétriques - Analyse sphérique - Estimations de dispersion - Estimations de Strichartz - Problème de Cauchy localement et globalement bien posé - Orbites nilpotentes - Formes différentielles.

Abstract

In this memoir we study evolution equations on curved manifolds. In particular we are interested in the wave equation on Riemannian symmetric spaces of the noncompact type.

Dispersive properties of solutions of homogeneous Cauchy problem are proved. These properties are then used to establish *Strichartz-type estimates*. A closer study of these estimates shows that the nonlinear Cauchy problem with power-like nonlinearities is globally well posed for small initial data and locally well posed for arbitrary initial data.

The first chapter is devoted to definitions, algebraic and geometric properties of symmetric spaces and to few elementary aspects of spherical analysis on these spaces. Then our main results are represented in an article : *Wave equation on Riemannian symmetric spaces*. In the last chapter we present in detail two open problems for future work. One issue is to establish a link between the asymptotic behavior of the estimates and nilpotent orbits, while another issue is the study of wave equation for differential forms on symmetric spaces.

Key words : Laplacian - Wave equation - Symmetric spaces - Spherical analysis - Dispersive estimates - Strichartz estimates - Cauchy problem locally an globally well posed - Nilpotent orbits - Differential forms.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à témoigner ma profonde reconnaissance à Salah Mehdi pour m'avoir donné la chance incroyable d'effectuer cette thèse sous sa direction. Je le remercie de m'avoir proposé dès le début des questions passionnantes, je le remercie aussi pour sa patience face à mes nombreux doutes, inquiétudes ou questions, pour sa disponibilité, ses encouragements constants et pour ses nombreux conseils. Je suis en admiration constante devant lui, tant pour ses idées mathématiques que pour les qualités pédagogiques dont il fait preuve, dans son bureau comme lors de conférences. Cher Salah, tu es formidable, merci pour tout.

Je voudrais exprimer ma profonde gratitude à Noël Lohoué qui m'a suggéré le problème et qui a guidé mes premiers pas dans cette thèse. Ses nombreux conseils et ses idées toujours pertinentes ont illuminé mes longues nuits de réflexion. Je remercie sincèrement Jean-Philippe Anker pour les nombreuses discussions mathématiques toujours enrichissantes et pour ses nombreuses suggestions sans lesquelles ce travail n'aurait jamais abouti. Merci à eux du fond du coeur.

Je remercie très chaleureusement Jean-Philippe Anker et Hajer Bahouri d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Je remercie également vivement Gérard Lion et Angela Pasquale de me faire l'honneur d'être membres du jury. Angela Pasquale m'a consacré du temps lors de mes visites à Metz, je la remercie pour sa gentillesse et sa disponibilité.

Un grand merci au révolutionnaire Laurent Mesnager pour ses nombreux conseils, coups de main et autres réponses humoristiques et énergiques à mes questions angoissées. Merci mon "ami".

Je souhaite remercier très chaleureusement l'ensemble de l'équipe Modal'X de Nanterre qui m'a accueilli pendant ces années et m'a ainsi permis d'achever cette thèse. J'en profite pour saluer les doctorants et jeunes docteurs que j'ai été ravi de rencontrer à Nanterre, Esterina, Hélène, Kaouthar, Marc, Pierre-André et le talentueux "arrière central" Sébastien, ainsi que Frédéric et Zakaria avec qui j'ai partagé le même bureau.

Merci à tous mes copains de Montrouge pour toutes ces années d'amitié et de soutien à distance. Merci à Anouar, Houcine, Chérif, Rafik, Foued, Mohamed, Yosr, mes deux cousins Chokri et Nader.

Mes derniers mots s'adressent à celui qui tout ceci n'aurait aucun sens. À mon frère Yassine pour tous les moments magiques que j'ai pu passer à ses côtés. Pour ses conseils et nos discussions parfois houleuses qui m'ont permis d'avancer et de remettre en question mes certitudes. Merci, il m'a appris à cuisiner.

Une pensée tendre à mes nièces Malek, Yasmine, Nour et mon neveu Hamidullah.

Enfin, je remercie du fond du coeur mes parents pour le soutien qu'ils m'ont toujours apporté, pour le réconfort et la confiance qu'ils me témoignent dans mes nombreux moments de doute, et pour leur philosophie. Un énorme merci, je vous dois tout. Vous avez tant fait pour moi, pour mes soeurs Yosra et Salsabil et pour mon frère Yassine.

À vous qui m'êtes si chers, je dédie cette thèse.

Table des matières

1	Introduction	6
2	Quelques outils d'analyse harmonique sphérique	25
2.1	Espaces symétriques : Définitions. Notations	25
2.1.1	Structure riemannienne	25
2.1.2	Décomposition d'Iwasawa. Décomposition de Cartan	26
2.1.3	Normes sur \mathfrak{g} et G	27
2.2	Analyse harmonique sur les espaces symétriques	27
2.2.1	Normalisation des mesures de Haar	27
2.2.2	Extension de la forme de Killing	28
2.2.3	Fonctions sphériques	28
2.2.4	Fonction c de Harish-Chandra	30
2.2.5	Transformée de Fourier sphérique	32
2.2.6	Théorème de Paley-Wiener	33
2.2.7	Formule d'inversion. Théorème de Plancherel	33
2.2.8	Transformée euclidienne. Transformée d'Abel	34
2.2.9	Espaces de Schwartz. Distributions	34
2.3	Espaces de Sobolev. Espaces de Besov	35
2.3.1	Espaces de Sobolev	35
2.3.2	Espaces de Besov	37
2.4	Phénomène de Kunze-Stein. Dualité TT^*	45
3	Wave equation on symmetric spaces	49
3.1	Introduction.	49
3.2	Preliminaries. Notations.	52
3.3	Besov spaces.	54
3.4	Dispersive and Strichartz estimates on $X = G/K$	55
3.5	Nonlinear wave equation on $X = G/K$	63

4 Perspectives	68
4.1 Comportement asymptotique des estimées et orbites nilpotentes	68
4.2 L'équation des ondes pour les formes différentielles sur G/K	74

Introduction

L'objectif principal de ce mémoire est l'étude de l'équation des ondes sur les espaces symétriques riemanniens de type non compact. On obtient des propriétés de dispersion pour l'équation homogène

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u - \Delta u = 0.$$

L'équation des ondes est l'une des équations d'évolution pour la quelle la vitesse de propagation est *finie* : le signal se déplace à une vitesse finie égale à un, ce qui signifie que si les données initiales ont un support dans une boule de rayon R , la solution à l'instant T possède un support dans une boule de rayon $R + T$. On peut alors s'attendre à ce que lorsque l'énergie de la solution se répartie sur une région qui croît avec le temps, la taille de cette solution diminue en conséquence. D'un point de vue physique, l'exemple qui illustre cette constatation est la propagation des ondes à la surface d'un lac lorsqu'on jette une pierre : les rayons des cercles qui apparaissent deviennent de plus en plus grands, mais l'amplitude des vagues diminue jusqu'à ce qu'ils disparaissent. La signification de ce phénomène est la *décroissance des solutions* lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Il est également à noter qu'un phénomène semblable se produit également pour d'autres équations d'évolution, même si la vitesse de propagation *n'est pas finie* : les exemples les plus importants sont l'équation de Schrödinger

$$i \frac{\partial}{\partial t}u + \Delta u = 0,$$

et l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial}{\partial t}u - \Delta u = 0.$$

Pour ces deux équations, il est facile de prouver la propriété de décroissance grâce à la représentation explicite des solutions. Mais contrairement à l'équation des ondes, si les données initiales sont à support compact, les solutions de ces équations à un instant T ne sont plus à support compact. Dans ce cas en utilisant la transformée de Fourier, on peut voir que les composantes des solutions avec des différentes fréquences se déplacent

à différentes vitesses. Cela est dû à la présence d'un *nuage de particules* se déplaçant à énergies différentes. Cette description a été utilisée pour unifier le cas de vitesse finie et la cas de vitesse infinie. On parle alors de dispersion au lieu de décroissance en temps des solutions.

L'étude de ces propriétés est d'une importance fondamentale à plusieurs points de vue. Cela est décisif en traitement de signaux sismiques, notamment lors de l'acquisition de données surfaciques. L'analyse des ondes de surface appliquée à la caractérisation du sol est un sujet d'intérêt croissant en génie civil et en géologie. Le fait que ces ondes se propagent le long de la surface et aient une profondeur de pénétration dans le sol qui dépend de la fréquence implique une dispersion des ondes. D'un point de vue *traitement de signal*, ce phénomène signifie que les différentes harmoniques de l'onde se propagent à des vitesses différentes. En outre les estimations de dispersion sont un outil très utile dans des nombreux problèmes non linéaires, en particulier pour l'équation des ondes et l'équation de Schrödinger semi-linéaires, la théorie moderne des problèmes de Cauchy *localement* et *globalement bien posés* repose essentiellement sur ces estimations.

Dans [34], Strichartz a établi le lien entre les estimations de dispersion et un problème classique d'analyse harmonique, appelé *la conjecture de restriction*. Étant donnée une fonction f dans la classe de Schwartz sur \mathbb{R}^{n+1} , alors sa transformée de Fourier \hat{f} est bien définie et est dans la même classe, avec

$$\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq c\|f\|_{L^1}.$$

En particulier, si l'on restreint \hat{f} à une hypersurface quelconque H de \mathbb{R}^{n+1} , on a

$$\|\hat{f}|_H\|_{L^\infty} \leq c\|f\|_{L^1}.$$

La question que l'on se pose : est-il possible de remplacer la norme L^1 à droite par une autre norme L^p avec $p \neq 1$? La réponse est négative. En effet il est impossible de la remplacer par exemple par la norme L^2 , où seulement la norme L^2 de \hat{f} est contrôlée par la norme L^2 de f et donc, à priori, on ne peut pas restreindre une fonction de L^2 à une hypersurface H de mesure nulle. Si on considère la transformée de Fourier de la solution de l'équation des ondes homogène, on obtient une mesure à support inclus dans l'hypersurface et les estimées de dispersion de la solution donnent des estimées pour cette mesure. Autrement dit, les propriétés de dispersion impliquent des propriétés de restriction et vice versa.

Commençons par décrire quelques résultats sur les équations d'évolution dans le cas euclidien \mathbb{R}^n pour $n \geq 1$. Considérons l'équation de Schrödinger :

$$\begin{cases} i \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + \Delta u(t, x) = 0, \\ u(t = 0, x) = u_0(x). \end{cases}$$

Par transformation de Fourier, on peut montrer qu'il y a une unique solution au sens des distributions (tempérées) qui s'écrit en variables de Fourier comme suit :

$$\hat{u}(t, \xi) = e^{-it|\xi|^2} \hat{u}_0(\xi),$$

et en variables d'espaces comme suit :

$$u(t, x) = e^{it\Delta}u_0(x) = \frac{1}{(-4i\pi t)^{n/2}} \int e^{i\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy.$$

De cette formulation, on obtient l'inégalité de dispersion suivante :

$$|e^{it\Delta}u_0(x)| \leq Ct^{-n/2} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \quad (1.0.1)$$

en majorant simplement l'exponentielle complexe par un. La solution de l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) - \Delta u(t, x) = 0, \\ u(t = 0, x) = u_0(x). \end{cases}$$

possède la même représentation que celle de l'équation de Schrödinger :

$$u(t, x) = e^{t\Delta}u_0(x) = \frac{1}{(-4\pi t)^{n/2}} \int e^{i\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy.$$

Ainsi, on obtient la même estimée de dispersion

$$|e^{t\Delta}u_0(x)| \leq Ct^{-n/2} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.0.2)$$

Il est à noter qu'il est beaucoup plus difficile d'obtenir des estimations analogues à (1.0.1) et (1.0.2) pour l'équation des ondes. Von Wahl [39] donne une description complète de ces estimées, en particulier il prouve que la solution de l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) - \Delta u(t, x) = 0, \\ u(t = 0, x) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} u(t = 0, x) = u_1(x). \end{cases}$$

satisfait la propriété suivante :

$$|u(t, x)| \leq C(1+t)^{-\frac{n-1}{2}} \|u_1\|_{W^{N,1}(\mathbb{R}^n)}, \quad n \geq 2,$$

pour des réels $N = N(n)$ assez grands, où $W^{N,1}(\mathbb{R}^n)$ sont les espaces de Sobolev classiques sur \mathbb{R}^n . Ces estimées ont été améliorées et raffinées par plusieurs auteurs, en particulier par Kapitanski [24] puis par Ginibre et Velo [18] pour prendre la forme optimale suivante :

$$|u(t, x)| \leq Ct^{-\frac{n-1}{2}} \|u_1\|_{\dot{B}_1^{\frac{n-1}{2},1}(\mathbb{R}^n)} \quad (1.0.3)$$

où $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace de Besov homogène sur \mathbb{R}^n défini par :

$$\|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{jsq} \|\Delta_j f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^q \right)^{1/q}, \quad (1.0.4)$$

avec $\Delta_j f = \mathcal{F}^{-1}(\varphi_j(\xi)\widehat{f}(\xi))$ telle que $\varphi_j(\xi) = \widehat{\phi}(\xi/2^{j+1}) - \widehat{\phi}(\xi/2^j)$, où $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vérifie $\widehat{\phi}(\xi) = 1$ si $|\xi| \leq 1$ et $\widehat{\phi}(\xi) = 0$ si $|\xi| \geq 1 + \frac{1}{10}$.

Il est possible de déduire de (1.0.3) d'autres estimées de type *espace-temps*. Ces estimées sont appelées *estimations de Strichartz*. Toutefois, ces estimées ne sont en fait qu'un cas spécial dont la preuve est basée sur des techniques d'analyse harmonique, comme le théorème d'interpolation complexe de Stein. Ces estimations ont été développées et raffinées par Ginibre et Velo [18] qui en ont développé des outils abstraits d'analyse fonctionnelle pour obtenir une description complète en excluant les cas limites. Ces cas ont été étudiés par Keel et Tao [26] qui ont donné une forme complète de ces estimées.

Pour l'équation de Schrödinger sur \mathbb{R}^n , les estimations de Strichartz ont la forme suivante :

$$\|e^{it\Delta}u_0\|_{L^r(I, L^p(\mathbb{R}^n))} \leq C\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad (1.0.5)$$

pour un intervalle quelconque $I \subseteq \mathbb{R}$ et pour des couples admissibles (r, p) i.e.

$$\frac{1}{r} + \frac{n}{2p} = \frac{n}{4}, \quad r, p \geq 2 \text{ tels que } (r, p) \neq (2, \infty). \quad (1.0.6)$$

Le couple limite dans ce cas est $(r, p) = (2, \frac{2n}{n-2})$ et l'estimation (1.0.5) reste vraie si $n \geq 3$. En revanche, si $n = 2$, le couple limite est $(r, p) = (2, \infty)$ et l'estimation (1.0.5) est en général fautive. Dans le cas de l'équation de Schrödinger inhomogène

$$\begin{cases} i \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + \Delta u = F(t, x) \\ u(t = 0, x) = u_0(x) \end{cases}$$

l'estimation de Strichartz s'écrit :

$$\left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} F(s, x) ds \right\|_{L^r(I, L^p(\mathbb{R}^n))} \leq C\|F\|_{L^{\tilde{r}'}(I, L^{\tilde{p}'}(\mathbb{R}^n))} \quad (1.0.7)$$

pour des couples (r, p) et (\tilde{r}, \tilde{p}) où \tilde{r}' et \tilde{p}' désignent les conjugués de \tilde{r} et \tilde{p} respectivement.

On considère maintenant l'équation des ondes inhomogène sur \mathbb{R}^n

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) - \Delta u(t, x) = F(t, x) \\ u(t = 0, x) = u_0(x) \\ \frac{\partial}{\partial t} u(t = 0, x) = u_1(x) \end{cases} \quad (1.0.8)$$

Si les données initiales u_0 et u_1 appartiennent respectivement aux espaces de Sobolev homogènes $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ et $\dot{H}^{s-1}(\mathbb{R}^n)$, et pour des couples admissibles (r, p) et (\tilde{r}, \tilde{p}) , i.e.

$$\frac{1}{r} + \frac{n-1}{2p} \leq \frac{n-1}{4}, \quad 2 < r \leq \infty \text{ et } 2 \leq p < \frac{2(n-1)}{n-3}, \quad n \geq 3 \quad (1.0.9)$$

tels que

$$\frac{1}{r} + \frac{n}{p} = \frac{n}{2} - s = \frac{1}{\tilde{r}'} + \frac{n}{\tilde{p}'} - 2 \quad (1.0.10)$$

alors l'estimation de Strichartz pour une solution u de (1.0.8) s'écrit comme suit :

$$\|u\|_{L^r(I, L^p(\mathbb{R}^n))} \leq C \left(\|u_0\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)} + \|u_1\|_{\dot{H}^{s-1}(\mathbb{R}^n)} + \|F\|_{L^{\tilde{r}'}(I, L^{\tilde{p}'}(\mathbb{R}^n))} \right). \quad (1.0.11)$$

Cette estimation reste vraie pour le couple limite $(r, p) = (2, \frac{2(n-1)}{n-3})$ si $n \geq 4$, mais elle est fausse si $n = 3$.

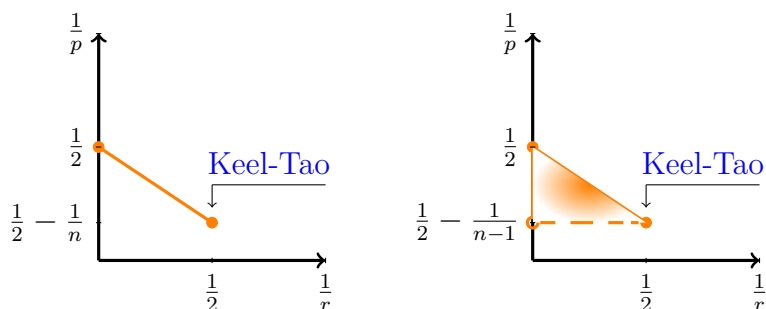


Figure 1.1. A gauche : Couples admissibles pour l'équation de Schrödinger sur \mathbb{R}^n lorsque $n \geq 3$. A droite : Couples admissibles pour l'équation des ondes sur \mathbb{R}^n lorsque $n \geq 4$.

Parmi les applications les plus importantes des estimations de Strichartz est l'étude des problèmes de Cauchy non linéaires liés à l'équation de Schrödinger

$$\begin{cases} i \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + \Delta u(t, x) = F(u(t, x)) \\ u(t = 0, x) = u_0(x) \end{cases}$$

et à l'équation des ondes

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) - \Delta u(t, x) = G(u(t, x)) \\ u(t = 0, x) = u_0(x) \\ \frac{\partial}{\partial t} u(t = 0, x) = u_1(x) \end{cases}$$

On notera que ces deux équations peuvent s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi + A\phi = N(\phi) \quad (1.0.12)$$

où A est un opérateur différentiel en espace, et où l'on se donne la donnée initiale $\phi(t = 0) = \phi_0$. La théorie des semi-groupes nous fournit un substitut pour l'équation (1.0.12) : on dispose d'un opérateur $S(t) = e^{tA}$ qui nous donne la solution de l'équation linéaire, i. e. lorsque $N = 0$ et une solution de (1.0.12) résulte formellement du principe de Duhamel :

$$\phi(t) = S(t)\phi_0 + \int_0^t S(t-s)N(\phi)(s)ds. \quad (1.0.13)$$

Il est clair que pour mener à bien l'étude de (1.0.13), il faut commencer par étudier les propriétés de l'équation linéaire, i. e. les propriétés de l'opérateur $S(t)$ (estimées de dispersion). Ceci permet souvent de dégager un cadre fonctionnel raisonnable, et dans un second temps, il s'agit de trouver dans ce cadre fonctionnel (estimées de Strichartz), quels sont les espaces les mieux adaptés pour traiter les non-linéarités $N(\phi)$ pour terminer par le théorème classique du point fixe.

Au-delà de l'étude du problème de Cauchy, un certain nombre de questions se posent naturellement : à supposer que l'on ait obtenu une solution locale en temps, que devient-elle à grand temps ? A t-on existence globale à grand temps ou explosion ? Dans l'un ou l'autre cas, quel est le comportement de la solution ? Peut-on la comparer à un objet asymptotique plus simple, par exemple la solution d'une équation linéaire, ou obtenir des bornes sur le taux d'explosion ? Dans ce cadre et, comme nous l'avons cité dans (1.0.3) et (1.0.11), il y a une famille d'espaces fonctionnels qui apparaît naturellement, ce sont les espaces de Besov et les espaces de Sobolev.

La question abordée dans ce mémoire est l'extension de l'étude des équations d'évolution des espaces euclidiens dans le contexte des variétés de courbures non nulles. Il s'agit principalement de comprendre l'influence de la géométrie de ces variétés sur les effets de dispersion et de transférer les résultats (dans les deux directions) entre le cas plat et le cas courbe.

Les variétés à courbure non nulle sont utilisées pour modéliser des espaces-temps. Parmi ces espaces, on peut citer l'exemple des espaces anti de Sitter n -dimensionnel notés AdS_n et de Sitter n -dimensionnel notés dS_n . Ces deux espaces peuvent être représentés comme l'hyperboloïde de \mathbb{R}^{n+1} d'équation :

$$x_0^2 + x_1^2 - \sum_{j=2}^n x_j^2 = -\alpha^2,$$

où $\alpha > 0$ est une constante strictement positive.

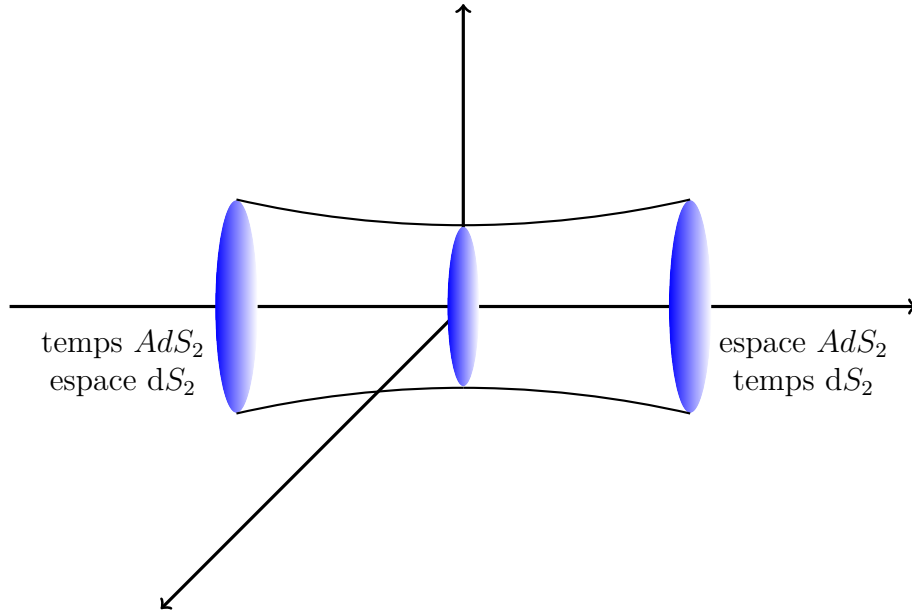


Figure 1.2. Espace-temps (Anti)-de Sitter.

Sur l'espace Anti-de Sitter les vecteurs du genre temps ont des normes négatives et le temps est compact. En revanche, sur l'espace-temps de Sitter, les vecteurs du genre temps ont des normes positives et l'espace est compact.

Dans le cas des variétés compactes, il faut s'attendre à moins de dispersion et donc des résultats d'application plus faibles que dans le cas plat, i. e. des variétés à courbure nulle du point de vue décroissance et régularité des solutions. On observe en particulier, que pour l'équation de Schrödinger sur une variété compacte M , on a l'estimation de Strichartz locale avec pertes de dérivées suivante [11] :

$$\left\| e^{it\Delta} u_0 \right\|_{L^r(I, L^p(M))} \leq C_I \left\| u_0 \right\|_{H^{\frac{1}{r}}(M)},$$

où I est un intervalle borné de \mathbb{R} et $C_I > 0$ est une constante qui dépend de I . Pour l'étude des équations de Schrödinger non linéaires sur les variétés compactes, on peut citer les travaux de Bourgain[9] sur le tore \mathbb{T}^n , Burq, Gérard et Tzvetkov [11] sur les sphères \mathbb{S}^n et dans le cas général où M est une variété de dimension 4, on mentionne les résultats de Gérard et Pierfelice [17].

Quant à l'équation des ondes, la vitesse finie de propagation montre qu'il suffit de travailler dans des cartes locales et d'établir des estimées de Strichartz locales pour l'opérateur des ondes sur \mathbb{R}^n à coefficients variables. Telles estimées pour les équations à coefficients réguliers ont été obtenues au point par Kapitanski [25] et Mockenhaupt, Seeger et Sogge[30]. Dans ce contexte, à l'aide de la construction *Lax parametrix*, on a des estimées de dispersion appropriées. Egalement des estimées de Strichartz pour des opérateurs à coefficients dans la classe $C^{1,1}$ ont été établies par Smith [31] et par Tataru [37] dont l'article constitue

la gamme complète des estimées locales.

Dans le cas des variétés riemanniennes non compactes, on s'attend à plus de dispersion et par conséquent à des résultats à priori plus forts que dans le cas plat. Décrivons quelques résultats récents qui mettent en évidence ce phénomène. Anker et Pierfelice [1] en étudiant le problème de Cauchy

$$\begin{cases} i \frac{\partial}{\partial t} u + \Delta_{\mathbb{H}^n} u = F \\ u(t=0, x) = u_0(x) \end{cases}$$

sur les espaces hyperboliques réels $\mathbb{H}^n = G/K$ qui sont des exemples particuliers de variétés riemanniennes non compactes de courbures négatives (avec $G = SO_o(1, n)$ et $K = SO(n)$ est le groupe spécial orthogonal), établissent une inégalité de dispersion optimale en toute dimension $n \geq 2$, sans aucune hypothèse de radialité, ainsi qu'une inégalité de Strichartz pour une grande famille de paires admissibles. Plus précisément, l'estimée de dispersion prend la forme suivante :

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{H}^n)} \leq C \|u_0\|_{L^{\tilde{p}'}(\mathbb{H}^n)} \begin{cases} |t|^{-\max(1/2-1/p, 1/2-1/\tilde{p})n}, & \text{si } 0 < |t| < 1, \\ |t|^{-3/2}, & \text{si } |t| \geq 1, \end{cases} \quad (1.0.14)$$

pour $2 < p, \tilde{p} \leq \infty$. La méthode consiste à estimer ponctuellement le noyau de convolution s_t défini par :

$$s_t(r) = C e^{-i(\frac{n-1}{2})^2 t} \int_{\mathbb{R}} e^{-it\lambda^2} \varphi_\lambda(r) |c(\lambda)|^{-2} d\lambda,$$

où φ_λ et $c(\lambda)$ sont respectivement la fonction sphérique et la fonction de Harish-Chandra [7] et telles que la solution homogène u s'écrit :

$$u(t, x) = e^{it\Delta} u_0(x) = u_0 * s_t(x).$$

Cela permet de déduire les inégalités suivantes faisant appel aux espaces de Lorentz :

$$\|s_t\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{H}^n)} \leq C \begin{cases} |t|^{-\max(1/2-1/p, 1/2-1/\tilde{p})n}, & \text{si } 0 < |t| < 1, \\ |t|^{-3/2}, & \text{si } |t| \geq 1, \end{cases}$$

pour en déduire à l'aide du théorème d'interpolation et une version du phénomène de Kunze-Stein [12][22], plus précisément :

$$L^{p'}(K \setminus G) * L^{p'}(G/K) \subset L^{p',\infty}(K \setminus G/K), \quad \forall p > 2, \quad (1.0.15)$$

l'estimation suivante :

$$\|e^{it\Delta_{\mathbb{H}^n}}\|_{L^{\tilde{p}'} \rightarrow L^p} \leq C \begin{cases} |t|^{-\max(1/2-1/p, 1/2-1/\tilde{p})n}, & \text{si } 0 < |t| < 1, \\ |t|^{-3/2}, & \text{si } |t| \geq 1. \end{cases} \quad (1.0.16)$$

En utilisant l'argument de dualité TT^* , l'inégalité de Strichartz s'écrit alors :

$$\|u\|_{L^r(I, L^p(\mathbb{H}^n))} \leq C (\|F\|_{L^{\tilde{p}'}(I, L^{\tilde{p}'}(\mathbb{H}^n))} + \|u_0\|_{L^2(\mathbb{H}^n)}), \quad (1.0.17)$$

pour un intervalle quelconque $I \subseteq \mathbb{R}$ et pour des couples admissibles (r, p) et (\tilde{r}, \tilde{p}) , i. e.

$$\frac{1}{r} + \frac{n}{2p} \geq \frac{n}{4}, \quad 2 \leq r < \infty \text{ et } 2 < p < \infty. \quad (1.0.18)$$

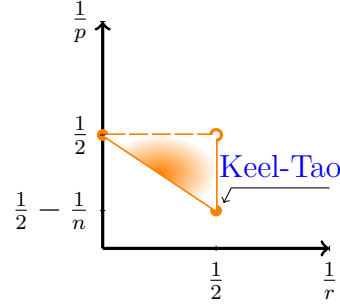


Figure 1.3. Couples admissibles pour l'équation de Schrödinger sur \mathbb{H}^n lorsque $n \geq 3$.

Notons que l'ensemble des couples admissibles pour \mathbb{H}^n (Figure 1.3) est beaucoup plus grand que celui de \mathbb{R}^n (Figure 1.1). C'est un phénomène également remarqué dans [8] pour les solutions radiales et, on peut le considérer comme un effet de la géométrie hyperbolique de \mathbb{H}^n sur la dispersion. Comme application de (1.0.17) et en utilisant le théorème classique du point fixe, Anker et Pierfelice ont montré que le problème de Cauchy semi-linéaire

$$\begin{cases} i \frac{\partial}{\partial t} u + \Delta_{\mathbb{H}^n} u = F_\kappa(u), \\ u(t=0) = u_0, \end{cases}$$

où la non-linéarité F_κ vérifie l'hypothèse :

$$|F_\kappa(u)| \leq C|u|^\kappa \text{ et } |F_\kappa(u) - F_\kappa(v)| \leq C(|u|^{\kappa-1} + |v|^{\kappa-1})|u - v|, \quad (1.0.19)$$

est :

1. globalement bien posé dans $L^2(\mathbb{H}^n)$ pour une donnée initiale petite si $1 < \kappa \leq 1 + \frac{4}{n}$,
2. globalement bien posé dans l'espace de Sobolev $H_2^1(\mathbb{H}^n)$ pour une donnée initiale petite si $1 < \kappa \leq 1 + \frac{4}{n-2}$,
3. localement bien posé dans $L^2(\mathbb{H}^n)$ pour une donnée initiale petite si $1 < \kappa < 1 + \frac{4}{n}$,
4. localement bien posé dans l'espace de Sobolev $H_2^1(\mathbb{H}^n)$ pour une donnée initiale petite si $1 < \kappa < 1 + \frac{4}{n-2}$.

Indiquons que, pour les solutions radiales homogènes, on a les estimations de dispersion pondérées suivantes [7] :

$$\omega(x)|u(t, x)| \leq C(|t|^{-n/2} + |t|^{-3/2}) \int_{\mathbb{H}^n} |f(y)|\omega(y)^{-1} dy,$$

où $\omega(x) = \frac{\sinh(r)}{r}$, et r désigne la distance géodésique de x à l'origine.

De plus l'équation des ondes

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u - \Delta_{\mathbb{H}^n} u(t, x) = F(t, x), \\ u(t=0, x) = u_0(x), \\ \frac{\partial}{\partial t} u(t=0, x) = u_1(x) \end{cases}$$

a été étudiée sur les espaces hyperboliques de dimension 3 par Metcalfe et Taylor [29] qui ont prouvé des estimées de dispersion et de Strichartz et déduit des applications pour l'équation des ondes semi-linéaire.

En revanche, l'équation des ondes *modifiée*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u - (\Delta_{\mathbb{H}^n} + (\frac{n-1}{2})^2)u(t, x) = F(t, x), \\ u(t = 0, x) = u_0(x), \\ \frac{\partial}{\partial t} u(t = 0, x) = u_1(x) \end{cases}$$

a été considérée pour la première fois par J. Fontaine dans [15] et [16] en dimension $n = 2$ et $n = 3$. Le travail le plus célèbre impliquant cette équation est dû à D. Tataru. Dans [36], en considérant les mêmes outils d'analyse harmonique sphérique que dans [34][35], il obtient des estimées de dispersion pour les opérateurs $\frac{\sin\left(t\sqrt{\Delta_{\mathbb{H}^n} + (\frac{n-1}{2})^2}\right)}{\sqrt{\Delta_{\mathbb{H}^n} + (\frac{n-1}{2})^2}}$ et $\cos\left(t\sqrt{\Delta_{\mathbb{H}^n} + (\frac{n-1}{2})^2}\right)$, plus précisément

$$\|u(t, \cdot)\|_{H_p^{-s+1}(\mathbb{H}^n)} \leq \frac{(1+t)^{2/p}}{(\sinh(t))^{(n-1)(1/2-1/p)}} \|u_1\|_{H_p^s(\mathbb{H}^n)}, \quad \text{avec } 2s = (n+1)(1/2 - 1/p),$$

où $H_p^s(\mathbb{H}^n)$ est une famille des espaces de Sobolev inhomogènes sur \mathbb{H}^n . Ces estimées ont été transférées sur \mathbb{R}^n pour déduire une inégalité de Strichartz avec poids dans \mathbb{R}^n .

Des résultats complémentaires ont également été obtenus par Ionescu [9] qui a obtenu des estimées de Sobolev pour les opérateurs $\frac{\sin\left(t\sqrt{\Delta_{\mathbb{H}^n} + (\frac{n-1}{2})^2}\right)}{\sqrt{\Delta_{\mathbb{H}^n} + (\frac{n-1}{2})^2}}$ et $\cos\left(t\sqrt{\Delta_{\mathbb{H}^n} + (\frac{n-1}{2})^2}\right)$.

Dans un papier récent [4], Anker, Pierfelice et Vallarino poursuivent l'étude des équations d'évolution sur les espaces hyperboliques réels \mathbb{H}^n , commencée par l'équation de Schrödinger [1]. En fait, en considérant l'équation des ondes modifiée sur \mathbb{H}^n , ils obtiennent une famille des estimées de Strichartz plus grande que celle du cas euclidien et en déduisent des résultats plus forts d'existence locale pour l'équation non linéaire.

Dans un cadre plus général et toujours pour les variétés riemanniennes non-compactes, Pierfelice [32], en considérant l'opérateur de Jacobi $L_{\alpha,\beta}$ sur les espaces de Damek-Ricci S , montre que les solutions radiales de l'équation de Schrödinger sur S :

$$\begin{cases} i \frac{\partial}{\partial t} u + L_{\alpha,\beta} u = F(t, x), \\ u(t = 0, x) = u_0(a), \end{cases}$$

vérifient l'estimation de Strichartz pondérée suivante :

$$\|\omega_p u\|_{L^r(\mathbb{R}, L^p(S))} \leq C(\|\omega_{\tilde{p}} F\|_{L^{\tilde{r}}(\mathbb{R}, L^{\tilde{p}}(\mathbb{H}^n))} + \|\omega_2 u_0\|_{L^2(S)}), \quad (1.0.20)$$

pour des couples admissibles (r, p) et (\tilde{r}, \tilde{p}) , i.e.

$$\frac{2}{r} + \frac{n}{p} = \frac{n}{2}, \quad 2 < r \leq \infty \quad \text{et} \quad 2 \leq p < \frac{2n}{n-2}, \quad \text{si } n = \dim(S) > 3,$$

avec le poids

$$\omega_p(a) = \left(\frac{\sinh(a)}{a}\right)^{(m+k)(1/2-1/p)} \left(\cosh(a)\right)^{k(1/2-1/p)}, \quad (1.0.21)$$

où $\alpha = \frac{m+k-1}{2}$, $\beta = \frac{k-1}{2}$ tels que $\alpha \geq \beta \geq -\frac{1}{2}$. De plus les solutions de l'équation des ondes sur S :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u - L_{\alpha,\beta} u = F(t, x), \\ u(t=0, x) = u_0(a), \\ \frac{\partial}{\partial t} u(t=0, x) = u_1(a) \end{cases}$$

satisfont l'estimation de Strichartz pondérée

$$\left\| \omega_p u \right\|_{L^r(\mathbb{R}, L^p(S))} \leq C \left(\left\| \omega_{\tilde{p}'} F \right\|_{L^{\tilde{r}'}(\mathbb{R}, L^{\tilde{p}'}(\mathbb{H}^n))} + \left\| \frac{u_0}{\sigma} \right\|_{H^\gamma(S)} + \left\| \frac{u_1}{\sigma} \right\|_{H^{\gamma-1}(S)} \right), \quad (1.0.22)$$

pour des couples admissibles (r, p) et (\tilde{r}, \tilde{p}) , i.e.

$$\frac{1}{r} + \frac{n-1}{2p} \leq \frac{n-1}{4}, \quad 2 < r < \infty \text{ et } 2 < p \leq \frac{2(n-1)}{n-3}, \text{ si } n = \dim(S) > 3,$$

avec le même poids donné par (1.0.21) et où

$$\sigma(a) = a^{\alpha+1/2} (\sinh(a))^{-\alpha-1/2} (\cosh(a))^{-\beta-1/2}.$$

La preuve de (1.0.20) et (1.0.22) est basée sur la construction d'une transformation pour laquelle l'opérateur de Jacobi $L_{\alpha,\beta}$ sur S se réduit à la partie radiale de l'opérateur de Laplace sur \mathbb{R}^n donnée par :

$$\Delta = \partial_a^2 + \frac{n-1}{4} \partial_a,$$

en posant

$$u(t, a) = \sigma(a)v(t, a).$$

Récemment, d'autres estimées de dispersion et de Strichartz ont été démontrées pour l'équation des ondes modifiée et l'équation de Schrödinger non modifiée sur les espaces de Damek-Ricci par Anker, Pierfelice et Vallarino dans [3] et [5]. Cela peut être considéré comme une extension des résultats obtenus par Anker et Pierfelice sur les espaces hyperboliques réels \mathbb{H}^n [1].

D'autre part, des estimées de dispersion et de Strichartz généralisées pour l'équation des ondes ont été obtenues et développées sur les groupes de Heisenberg,

$$\mathcal{H}^n = \{[z, s]; \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad s \in \mathbb{R}\}$$

muni de la loi de multiplication

$$[z, s].[z', s'] = [z + z', s + s' + 2\text{Im}(z\bar{z}')]]$$

par Bahouri, Gérard et Xu [6]. La preuve de leurs estimées, comme dans le cas euclidien [18], est basée sur trois ingrédients :

- Estimation de la phase stationnaire sur le groupe d'évolution associé à l'équation homogène,
- Découpages dyadiques (i.e. analyse de Littlewood-Paley) et les espaces de Besov,
- L'argument standard d'analyse fonctionnelle TT^* et le théorème d'interpolation complexe.

Notons $N = 2n + 2$ la dimension homogène de \mathcal{H}^n et $\Delta = \sum_{j=1}^n (X_j^2 + Y_j^2)$ l'opérateur de Laplace-Kohn sur \mathcal{H}^n , où

$$X_j = \partial_{x_j} + 2y_j \partial_s \text{ et } Y_j = \partial_{y_j} + 2x_j \partial_s, \quad j = 1, \dots, n.$$

Si les données initiales u_0 et u_1 du problème de Cauchy appartiennent respectivement aux espaces de Besov homogènes $\dot{B}_1^{N-1/2,1}(\mathcal{H}^n)$ et $\dot{B}_1^{N-1/2-1,1}(\mathcal{H}^n)$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u - \Delta u = F, \\ u(t=0, x) = u_0(x), \\ \frac{\partial}{\partial t} u(t=0, x) = u_1(x), \end{cases}$$

alors l'estimation de dispersion pour la solution homogène s'écrit :

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\mathcal{H}^n)} \leq C(1 + |t|)^{-1/2} (\|u_0\|_{\dot{B}_1^{N-1/2,1}(\mathcal{H}^n)} + \|u_1\|_{\dot{B}_1^{N-1/2-1,1}(\mathcal{H}^n)}) \quad (1.0.23)$$

et si u_1 , $X_j u_0$ et $Y_j u_0$ appartiennent à $L^{p'}(\mathcal{H}^n)$, avec $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2N-1}$, alors cette estimée devient :

$$\|u(t)\|_{L^p(\mathcal{H}^n)} \leq C(1 + |t|)^{-1/(2N-1)} \left(\sum_{j=1}^n (\|X_j u_0\|_{L^{p'}(\mathcal{H}^n)} + \|Y_j u_0\|_{L^{p'}(\mathcal{H}^n)}) + \|u_1\|_{L^{p'}(\mathcal{H}^n)} \right). \quad (1.0.24)$$

L'estimation de Strichartz s'en déduit et prend la forme :

$$\|u\|_{L^r(I, L^p(\mathcal{H}^n))} \leq C(\|F\|_{L^1(I, L^2(\mathcal{H}^n))} + E_0(u)^{1/2}), \quad (1.0.25)$$

pour un intervalle borné $I \subset \mathbb{R}$ et pour des couples (r, p) tels que :

$$\frac{1}{r} + \frac{N}{p} = \frac{N}{2} - 1, \quad \frac{2N}{N-2} \leq p \leq \frac{2(2N-1)}{2N-5},$$

$$\text{où } E_0(u) = \sum_{j=1}^n (\|X_j u_0\|_{L^2(\mathcal{H}^n)}^2 + \|Y_j u_0\|_{L^2(\mathcal{H}^n)}^2) + \|u_1\|_{L^2(\mathcal{H}^n)}^2.$$

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude de l'équation des ondes sur les espaces symétriques riemanniens de type non compact de rang supérieur. Ces espaces possèdent une structure plus riche du fait de leur homogénéité. Ils sont des espaces homogènes pour le groupe des isométries et sont des variétés géodésiquement complètes, donc complètes en

vertu du théorème de Hopf-Rinow. En particulier, l'opérateur de Laplace est invariant par l'action du groupe et, cela a des conséquences fondamentales sur le spectre du laplacien et donc sur les équations d'évolution.

Ces espaces constituent un cadre naturel pour généraliser l'analyse harmonique classique sur les sphères. Cela est fourni par la théorie des représentations qui donne également des outils puissants et efficaces pour comprendre l'analyse sur ce type d'espaces [20][21]. En particulier, les valeurs propres du laplacien sont étroitement liées aux caractères infinitésimaux de certaines représentations du groupe des isométries.

Les espaces symétriques ont été définis et classifiés pour la première fois par Elie Cartan. On note ces espaces par $X = G/K$, où G est un groupe de Lie semisimple non compact connexe à centre fini et K est un sous groupe compact maximal de G . Notons que les espaces hyperboliques \mathbb{H}^n sont des espaces symétriques riemanniens non compacts. Ils correspondent au cas où $G = SO_e(1, n)$ est de rang réel 1 et $K = SO(n)$ le groupe spécial orthogonal. De même via la décomposition d'Iwasawa, les espaces de Damek-Ricci peuvent être considérés, dans une certaine mesure, comme un cas particulier d'un espace symétrique riemannien G/K .

Dans le chapitre 2, on présente les outils que nous utiliserons dans cette thèse. Il s'agit principalement de la structure des espaces symétriques riemanniens de type non compact et de l'analyse harmonique sphérique sur ces espaces. On rappelle en particulier, les définitions des espaces de Besov et de Sobolev et quelques propriétés d'injection et de densité de ces espaces. Dans le chapitre 3, on considère l'équation des ondes sur l'espace symétrique $X = G/K$:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) - \Delta u(t, x) = F(t, x), \\ u(t = 0, x) = u_0(x), \\ \frac{\partial}{\partial t} u(t = 0, x) = u_1(x), \end{cases}$$

où Δ désigne l'opérateur de Laplace-Beltrami sur X . Notre premier résultat est l'estimation de dispersion suivante pour la solution homogène ($F \equiv 0$) :

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^p(X)} \leq C \left(\|u_0\|_{B_{p'}^{m-\sigma, 1}(X)} + \|u_1\|_{B_{p'}^{m-(\sigma-1), 1}(X)} \right) \begin{cases} |t|^{-(n-1)(1/2-1/p)}, & \text{si } 0 < |t| < 1, \\ |t|^{-\ell/2}, & \text{si } |t| \geq 1, \end{cases} \quad (1.0.26)$$

tels que $2 < p < \infty$, avec certaines conditions sur $\ell = \text{rang}_{\mathbb{R}}(G)$ le rang réel de G et $n = \dim(X) < \sigma$. Ici $B_p^{s, q}(X)$; $1 \leq p \leq \infty, 1 \leq q \leq \infty$ et $s \in \mathbb{R}$, désigne l'espace de Besov sur X , i. e. l'ensemble des distributions tempérées sur X tel que :

$$\|f\|_{B_p^{s, q}(X)} = \|f \times \varphi_{0, N}\|_{L^p(X)} + \left(\int_0^1 t^{-sq} \|f \times \varphi_t^N\|_{L^p(X)}^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty,$$

où $\{\varphi_{0, N}, \varphi_t^N\}_{0 < t \leq 1, 2N > |s|}$ représente un système de fonctions K -biinvariantes à supports compacts sur G telle que pour toute fonction $f \in L^2(X)$, nous avons la formule :

$$f(x) = (f \times \varphi_{0, N})(x) + \int_0^1 (f \times \varphi_t^N \times \varphi_t^N)(x) \frac{dt}{t}.$$

Comme pour l'estimée (1.0.14) de l'équation de Schrödinger sur les espaces hyperboliques [1], l'idée de la preuve consiste à estimer ponctuellement le noyau :

$$W_{t,\sigma}(x) = (-\Delta)^{-\sigma/2} e^{it(-\Delta)^{1/2}}(x), \quad \sigma > n, \quad x \in G \text{ et } t \in \mathbb{R},$$

pour obtenir à l'aide du lemme de Morse [38] que :

$$|W_{t,\sigma}(x)| \leq C|t|^{-\ell/2} \varphi_0(x) P(\|x\|), \quad \text{si } |t| \geq 1,$$

où φ_0 est la fonction sphérique φ_λ sur G au point $\lambda = 0$ et P est un polynôme de degré supérieur à ℓ . Par le phénomène de Kunze-Stein [4][22], on obtient l'estimation $L^{p'} - L^p$ suivante :

$$\left\| (-\Delta)^{-\sigma/2} e^{it(-\Delta)^{1/2}} \right\|_{L^{p'} \rightarrow L^p} \leq C|t|^{-\ell/2}, \quad \text{si } |t| \geq 1 \text{ et } 2 < p < \infty. \quad (1.0.27)$$

En revanche dans le cas où $0 < |t| < 1$, on a [14] :

$$\left\| (-\Delta)^{-\sigma/2} e^{it(-\Delta)^{1/2}} \right\|_{L^1 \rightarrow L^\infty} \leq C|t|^{-\frac{n-1}{2}}, \quad \sigma > \frac{n+1}{2}.$$

Ce qui permet en interpolant, de montrer que :

$$\left\| (-\Delta)^{-\sigma/2} e^{it(-\Delta)^{1/2}} \right\|_{L^{p'} \rightarrow L^p} \leq C|t|^{-(n-1)(1/2-1/p)}, \quad \text{si } 0 < |t| < 1 \text{ et } 2 < p < \infty. \quad (1.0.28)$$

Ainsi, l'estimation de dispersion (1.0.26) s'en suit en utilisant le fait que l'opérateur $(-\Delta)^{-\sigma/2}$ commute avec la convolution et que l'espace de Besov $B_p^{0,1}(X)$ s'injecte dans $L^p(X)$.

Comparons notre résultat avec celui obtenu dans [2] dans le cas des espaces hyperboliques \mathbb{H}^n de dimension $n \geq 3$, où Anker et Pierfelice montrent l'estimation de dispersion suivante :

$$\left\| (-\Delta)^{-\sigma/2} e^{it\sqrt{-\Delta}} \right\|_{L^{p'} \rightarrow L^p} \leq C \begin{cases} |t|^{-(n-1)(1/2-1/p)}, & \text{si } 0 < |t| < 1, \\ |t|^{-3/2}, & \text{si } |t| \geq 1. \end{cases}$$

avec $2 < p < \infty$ et $\sigma \geq (n+1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})$. Donc nos résultats sont complémentaires aux leurs pour $|t|$ petit. Mais leur borne $|t|^{-3/2} = |t|^{-1/2-1}$ est plus optimale que la nôtre pour $|t|$ grand, puisqu'en remplaçant ℓ par 1 dans (1.0.27), on n'obtient que la borne $|t|^{-1/2}$. Ce qui montre que la décroissance devrait être supérieure en temps grand.

Notre second résultat est l'estimation de Strichartz suivante déduite de (1.0.26) et de l'argument de dualité TT^* qui nous impose de supposer que $\ell \geq 2$:

$$\left\| u \right\|_{L^r(I, B_p^{-\frac{m}{2}, 2}(X))} \leq C \left(\left\| F \right\|_{L^{\tilde{r}'}(I, B_{\tilde{p}'}^{\frac{m}{2}-\sigma, 2}(X))} + \mathcal{E}(u) \right), \quad (1.0.29)$$

pour des couples admissibles (r, p) et (\tilde{r}, \tilde{p}) i. e.

$$\frac{2}{r} + \frac{n-1}{p} \geq \frac{n-1}{2}, \quad 2 < r < \infty \text{ et } 2 < p < \infty,$$

et pour $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle quelconque de \mathbb{R} et, où $\mathcal{E}(u) = \|u_0\|_{H_2^\sigma(X)} + \|u_1\|_{H_2^{\sigma-1}(X)}$ avec $\sigma > \frac{n}{2}$ comme condition de régularité.

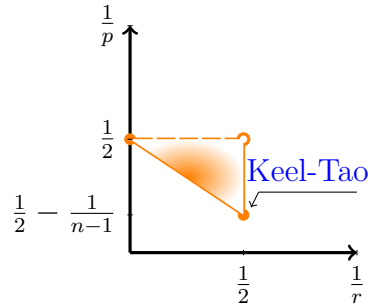


Figure 1.4. Couples admissibles pour l'équation des ondes sur $X = G/K$ lorsque $\dim(\mathfrak{a}) = \ell \geq 3$.

Finalement, comme application de l'estimation de Strichartz (1.0.29) et à l'aide du théorème du point fixe, on montre que le problème de Cauchy semi-linéaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u - \Delta u = F_\kappa(u), \\ u(t=0, x) = u_0(x), \\ \frac{\partial}{\partial t} u(t=0, x) = u_1(x), \end{cases} \quad (1.0.30)$$

telle que la non-linéarité F_κ vérifie l'hypothèse

$$|(-\Delta)^{\sigma/2} F_\kappa(u)| \leq C|u|^\kappa \text{ et } |(-\Delta)^{\sigma/2} (F_\kappa(u) - F_\kappa(v))| \leq C|u - v|(|u| + |v|)^{\kappa-1}$$

est :

1. globalement bien posé si l'énergie $\mathcal{E}(u)$ est petite et telle que $1 < \kappa \leq 1 + \frac{4}{n-1}$ et que sa solution globale appartient à $L^{\kappa+1}(\mathbb{R}, L^{\kappa+1}(X))$,
2. localement bien posé pour une énergie arbitraire $\mathcal{E}(u)$ et telle que $1 < \kappa < 1 + \frac{4}{n-1}$,

où

$$\mathcal{E}(u) = \|u_0\|_{H_2^\sigma(X)} + \|u_1\|_{H_2^{\sigma-1}(X)}.$$

Signalons que cette hypothèse de non-radialité est en général difficile à vérifier lorsque $\sigma > 0$. Un tel choix est fixé pour pouvoir utiliser convenablement les données introduites dans l'estimée de Strichartz (1.0.29).

Indiquons que dans le cas euclidien, Lindblad et Sogge [27] ont montré un résultat beaucoup plus général. En effet, en supposant que les données initiales u_0 et u_1 appartiennent respectivement aux espaces de Sobolev homogènes $\dot{H}^{s(\kappa)}(\mathbb{R}^n)$ et $\dot{H}^{s(\kappa)-1}(\mathbb{R}^n)$, ils ont montré l'existence globale dès que $\kappa \geq 1 + \frac{4}{n-1}$. Ici nous nous intéressons seulement au

cas particulier où $s(\kappa) = \sigma > \frac{n}{2} = \frac{\dim(X)}{2}$ et à des valeurs bornées de κ . Mais contrairement au cas euclidien, il n'y a aucune puissance critique

$$\kappa_c = \frac{1}{2} + \frac{1}{n-1} \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n-1}\right)^2 + \frac{2}{n-1}}.$$

Ce phénomène avait déjà été observé en rang $\ell = 1$ [2][4][5].

Remarquons également que notre condition de régularité $\sigma > n$ dans les estimées de dispersion et $\sigma > \frac{n}{2}$ dans les estimées de Strichartz est trop élevée, contrairement au cas euclidien et au cas des espaces hyperboliques [2][4] où elle est simplement réduite à $\sigma \geq (n+1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})$.

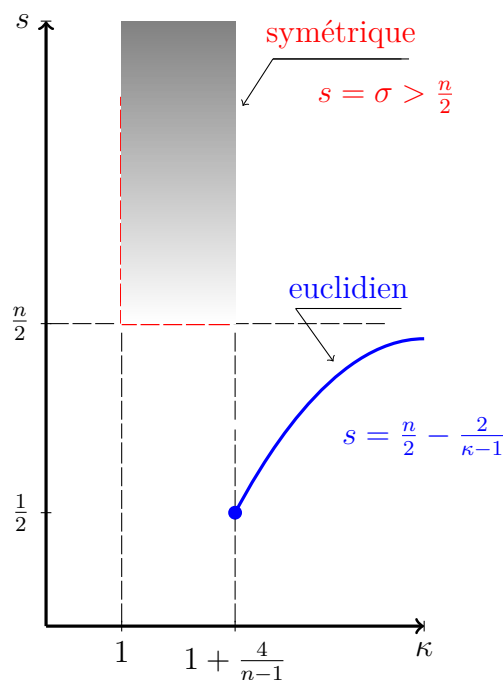


Figure 1.5. Existence globale des solutions du problème de Cauchy (1.0.30) sur \mathbb{R}^n et sur $X = G/K$.

Note. On précise que le chapitre 3 se présente sous forme d'un article en anglais à paraître dans *Journal of Mathematical physics*.

Enfin dans le chapitre 4 nous présentons en détail deux problèmes ouverts qui prolongent nos travaux et sur lesquels nous souhaitons concentrer nos efforts après la soutenance.

Pour faciliter la lecture de ce texte, nous avons inclus une bibliographie pour chaque chapitre.

Bibliographie

- [1] J-Ph. Anker, V. Pierfelice, *Nonlinear Schrödinger equation on real hyperbolic spaces*. Ann. I. H. Poincaré - AN 26 (2009) 1853-1869.
- [2] J-Ph. Anker, V. Pierfelice, *Wave and Klein-Gordon equations on hyperbolic spaces*. Prépublication [hal-00581773].
- [3] J-Ph. Anker, V. Pierfelice, M. Vallarino *The Schrödinger equation on Damek-Ricci spaces*. Prépublication [hal-00525155], Comm. Part. Diff. Eq. (à paraître).
- [4] J-Ph. Anker, V. Pierfelice, M. Vallarino *The wave equation on real hyperbolic spaces*. Prépublication [hal-00525251].
- [5] J-Ph. Anker, V. Pierfelice, M. Vallarino *The wave equation on Damek-Ricci spaces*. Prépublication [hal-00542277].
- [6] H. Bahouri, P. Gérard, C-J. Xu, *Espaces de Besov et estimations de Strichartz généralisées sur le groupe de Heisenberg*. J. Anal. Math. 82 (2000), 93–118.
- [7] V. Banica, *The nonlinear Schrödinger equation on the hyperbolic space*. Comm. Partial Differential Equations 32 (10) (2007) 1643–1677, arXiv :math/0406058.
- [8] V. Banica, R. Carles, G. Staffilani, *Scattering theory for radial nonlinear Schrödinger equations on hyperbolic space*. Geom. Funct. Anal. 18 (2) (2008) 367–399.
- [9] J. Bourgain, *Eigenfunction bounds for the Laplacian on the n -torus*. Internat. Math. Res. Notices. 3 (1993) 61-66.
- [10] N. Burq, P. Gérard, N. Tzvetkov, *The Cauchy problem for the non linear Schrödinger equation on a compact manifold*. J. Nonlinear Math. Phys. 10 (2003), suppl. 1, 12–27.
- [11] N. Burq, P. Gérard, N. Tzvetkov, *Strichartz inequalities and the nonlinear Schrödinger equation on compact manifolds*. Amer. J. Math. 126 (2004), no. 3, 569–605.

- [12] M. Cowling, *Herz's "principe de majoration" and the Kunze-Stein phenomenon.* in : Harmonic Analysis and Number Theory, Montreal 1996, in : CMS Conf. Proc, vol. 21, Amer. Math. Soc. 1997, pp. 73–88.
- [13] M. Cowling, S. Guilini, S. Meda, *$L^p - L^q$ estimates for functions of the Laplace-Beltrami operator on noncompact symmetric spaces III.* Ann. Inst. Fourier 51 (2001), 1047-1069.
- [14] M. Cowling, S. Guilini, S. Meda, *Oscillatory multipliers related to the wave equation on noncompact symmetric spaces.* J. London. Math. Soc. (2) 66 (2002) 691-709.
- [15] A. J. Fontaine, *Une équation semi-linéaire des ondes sur \mathbb{H}^3 .* C. R. Acad. Sci. Paris Série 1 Mathématiques 319 (1994), 935-948.
- [16] A. J. Fontaine, *A semilinear wave equation on hyperbolic spaces.* Comm. Partial. Diff. Eq. 22 (1997), 633-659.
- [17] P. Gérard, V. Pierfelice, *Nonlinear Schrödinger equation on four dimensional compact manifolds.* Bulletin de la SMF 138, fascicule 1 (2010).
- [18] G. Ginibre G et G. Velo, *Generalized Strichartz inequalities for the wave equation.* J. Funct. Anal. 133 (1995), 50–86.
- [19] Harish-Chandra, *Spherical function on semi-simple Lie group, I.* Amer. J. Math. 80(1958), 241-310.
- [20] S. Helgason , *Groups and geometric analysis. Integral geometry, invariant differential operators and spherical functions.* Academic press (1984).
- [21] S. Helgason, *Geometric analysis on symmetric spaces.* American math.Soc, Providence, RI(1994).
- [22] A-D. Ionescu, *An endpoint estimate for the Kunze-Stein phenomenon and related maximal operators.* Ann. of Math. (2) 152 (1) (2000) 259-275.
- [23] A-D. Ionescu, *Fourier integral operators on noncompact symmetric spaces of real rank one.* J. Funct. Anal. 174 (2000), 274-300.
- [24] L-V. Kapitanski, *Some generalizations of the Strichartz-Brenner inequality* (Russian). Algebra i Analiz 1 3 (1989) 127-159; translation in Leningrad Math. J. 1 3 (1990) 693-726.
- [25] L-V. Kapitanski, *Norm estimates in Besov and Lizorkin-Triebel spaces for the solutions of second order linear hyperbolic equations.* J. Sov. Math., 56 (1991), 2348-2389.
- [26] M. Keel , T. Tao, *Endpoint Strichartz estimates.* Amer. J. Math. 120 (5) (1998) 955-980.
- [27] H. Lindblad H, C-D. Sogge, *On existence and scattering with minimal regularity for semilinear wave equation.* J. Funct. Anal. 130 (1995) 357-426.

- [28] N. Lohoué, T. Rychener, *Some function spaces on symmetric spaces related to convolution operators*. J. Funct. Anal. 55 (1984) 200-219.
- [29] J. Metcalfe, M. E. Taylor, *Nonlinear waves in 3D hyperbolic space*. Trans. Amer. Soc. (à paraître).
- [30] G. Mockenhaupt, A. Seeger and C. D. Sogge, *Local smoothing of Fourier integral operators and Carleson-Sjolin estimates*. J. Amer. Math. Soc., 6 (1993), 65-130.
- [31] H.F. Smith, *A parametrix construction for wave equations with $C^{1,1}$ coefficients*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 48 (1998), 797-835.
- [32] V. Pierfelice, *Weighted Strichartz estimates for the Schrödinger and wave equations on Damek-Ricci spaces*. Math. Z. 260 (2) (2008) 377-392.
- [33] L. Skrzypczak, *Besov spaces on symmetric manifolds-The atomic decomposition*. Studia Math. 124 (1997), no. 3, 215–238.
- [34] R.S. Strichartz, *A priori estimates for the wave equation and some applications*. J. Funct. Anal. 5(1970), 218-235.
- [35] R.S. Strichartz, *Restriction of Fourier transform to quadratic surfaces and decay of solution of wave equations*. Duke Math. J. 44 (1977), no. 3, 705–714.
- [36] D. Tataru, *Strichartz estimates in the hyperbolic space and global existence for the semilinear wave equation*. Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001), no. 2, 795–807.
- [37] D. Tataru, *Strichartz estimates for second order hyperbolic operators with nonsmooth coefficients III*. J. Amer. Math. Soc., 15 (2002), 419-442.
- [38] V-S. Varadarajan, *The method of stationnary phase and applications to geometry and analysis on Lie groups*. Algebraic and analytic methods in representation theory (Sonderborg, 1994), 167-242, Perspect. Math., 17, Academic Press, San Diego, CA, 1997.
- [39] W. von Wahl, *L^p -decay rates for homogeneous wave-equations*. Math. Z. 120 (1971) 93-106.

Quelques outils d'analyse harmonique sphérique

Nous proposons dans ce chapitre de présenter les outils que nous utiliserons dans la suite. Il s'agit principalement de la structure des espaces symétriques riemanniens de type non compact et de l'analyse harmonique sur ces espaces.

2.1 Espaces symétriques : Définitions. Notations

2.1.1 Structure riemannienne

Soient G un groupe de Lie semisimple non compact connexe à centre fini et K un sous groupe compact maximal de G . Soit \mathfrak{g} (resp. \mathfrak{k}) l'algèbre de Lie de G (resp. K). La décomposition de Cartan de \mathfrak{g} s'écrit :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$$

où \mathfrak{p} est le complémentaire orthogonal de \mathfrak{k} dans \mathfrak{g} relativement à la forme de Killing de \mathfrak{g}

$$\mathcal{K} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}, (X, Y) \mapsto \text{Tr}(\text{ad}(X) \circ \text{ad}(Y))$$

et ad désigne la différentielle de l'action adjointe Ad_G de G . On note θ l'involution de Cartan correspondante. La forme de Killing de \mathfrak{g} étant non dégénérée, elle définit un produit scalaire G -invariant sur \mathfrak{g}

$$\langle X, Y \rangle = -\mathcal{K}(X, \theta(Y))$$

qui est défini positif sur \mathfrak{p} et défini négatif sur \mathfrak{k} . Ce produit scalaire induit une structure riemannienne sur l'espace

$$X = G/K.$$

En fait cet espace est un espace symétrique riemannien de type non compact dont l'espace tangent à l'origine eK est identifié à \mathfrak{p} . La forme de Killing \mathcal{K} permet d'identifier \mathfrak{g} avec son espace dual \mathfrak{g}^* et, également les sous espaces de \mathfrak{g} avec les sous espaces de \mathfrak{g}^* .

2.1.2 Décomposition d'Iwasawa. Décomposition de Cartan

Soit \mathfrak{a} un sous espace abélien maximal de \mathfrak{p} . La dimension réelle de \mathfrak{a} définit le rang réel $\text{rank}_{\mathbb{R}}(G)$ de G . On pose

$$\ell = \dim(\mathfrak{a}) = \text{rank}_{\mathbb{R}}(G).$$

Soit Σ l'ensemble des racines restreintes de \mathfrak{g} relatives à \mathfrak{a} , i. e.,

$$\Sigma = \{\lambda \in \mathfrak{a}^* \mid \lambda \neq 0 \text{ et } \mathfrak{g}_{\lambda} \neq \{0\}\},$$

où

$$\mathfrak{g}_{\lambda} = \{X \in \mathfrak{g} \mid [H, X] = \lambda(H)X \quad \forall H \in \mathfrak{a}\}.$$

On fixe une chambre de Weyl positive \mathfrak{a}_+ dans \mathfrak{a}^* . On note par Σ_+ l'ensemble correspondant des racines restreintes positives et par Σ_+^0 l'ensemble des racines non divisibles dans Σ_+ . On définit la sous algèbre nilpotente \mathfrak{n} de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} par :

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{\lambda \in \Sigma_+} \mathfrak{g}_{\lambda}.$$

La décomposition d'Iwasawa de \mathfrak{g} s'écrit :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n},$$

et la décomposition correspondante au niveau du groupe de Lie G est :

$$G = KAN,$$

où A et N sont deux sous groupes analytiques de G d'algèbres de Lie \mathfrak{a} et \mathfrak{n} respectivement. Soit $\overline{\mathfrak{a}_+}$ la fermeture de la chambre de Weyl \mathfrak{a}_+ . La décomposition de Cartan de G , se présente alors sous la forme

$$G = K \exp(\overline{\mathfrak{a}_+}) K.$$

Chaque élément g de G s'écrit :

$$g = k_1 A(g) k_2$$

relativement à la décomposition de Cartan et,

$$g = k(g) \exp(H(g)) n(g),$$

dans la décomposition d'Iwasawa. Il est à noter que les éléments $k(g)$, $n(g)$, $H(g)$ et $A(g)$ sont uniques.

2.1.3 Normes sur \mathfrak{g} et G

La forme de Killing induit une norme sur \mathfrak{g} et \mathfrak{g}^* , que l'on note avec le même symbole $\| \cdot \|$. On obtient également une norme sur G en posant :

$$\| g \| = \| A(g) \| .$$

En particulier, on a les propriétés suivantes :

$$\| g^{-1} \| = \| g \| \text{ et } \| kgk' \| = \| g \| \text{ pour tout } g \in G \text{ et } k, k' \in K.$$

2.2 Analyse harmonique sur les espaces symétriques

2.2.1 Normalisation des mesures de Haar

Soit M le centralisateur de A dans K . La forme de Killing de G induit des mesures euclidiennes sur A , \mathfrak{a} et \mathfrak{a}^* . En multipliant ces mesures par $(2\pi)^{-\ell/2}$, on obtient des mesures invariantes da , dH et $d\lambda$ sur A , \mathfrak{a} et \mathfrak{a}^* respectivement. Les mesures de Haar dm sur M et dk sur K sont normalisées de sorte que la masse totale est égale à 1. Les mesures de Haar sur G et N sont normalisées de sorte que

$$\begin{aligned} \int_G f(g) dg &= \int_{K \times A \times N} f(kan) e^{2\rho(\log a)} dk da dn \\ &= \int_{\bar{N} \times M \times A \times N} f(\bar{n}man) e^{2\rho(\log a)} d\bar{n} dm da dn \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

et

$$\int_G f(g) dg = \int_{G/K} \int_K f(gk) dk d(gK), \quad (2.2.2)$$

où

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\lambda \in \Sigma_+} m_\lambda \lambda$$

est la demi somme des racines restreintes positives comptées avec leurs multiplicités m_λ et \log est l'inverse de l'application $\exp : \mathfrak{a} \mapsto A$ et $\bar{N} = \theta(N)$.

La variété homogène compacte

$$B = K/M = G/MAN$$

réalisée comme la frontière de X joue un rôle crucial dans l'analyse harmonique sur X et la mesure invariante $db = d(kM)$ sur $B = K/M$ est normalisée par :

$$\int_B db = \int_{K/M} d(kM) = 1.$$

2.2.2 Extension de la forme de Killing

La forme de Killing \mathcal{K} s'étend linéairement au complexifié $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ de \mathfrak{a} et on garde le même symbole pour désigner cette extension. Alors, pour $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, on note par H_{λ} l'unique élément de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ défini par :

$$\lambda(H) = \langle H_{\lambda}, H \rangle, \quad \forall H \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}.$$

On pose

$$\langle \lambda, \mu \rangle = \langle H_{\lambda}, H_{\mu} \rangle, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*.$$

Pour $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, on écrit :

$$\lambda = \mathcal{R}e\lambda + i\mathcal{I}m\lambda,$$

où $i = \sqrt{-1}$ et $\mathcal{R}e\lambda, \mathcal{I}m\lambda \in \mathfrak{a}^*$ sont respectivement les parties réelles et imaginaires de λ , avec

$$\|\lambda\|^2 = \|\mathcal{R}e\lambda\|^2 + \|\mathcal{I}m\lambda\|^2.$$

2.2.3 Fonctions sphériques

Définition 2.2.1 Une fonction non nulle et continue $\psi : G \rightarrow \mathbb{C}$ est dite sphérique si

$$\int_K \psi(xky)dk = \psi(x)\psi(y), \quad \text{pour tous } x, y \in G.$$

Soit $y \in G$ tels que $\psi(y) \neq 0$. Alors $\psi(x) = \psi(y)^{-1} \int_K \psi(xky)dk$. Par suite ψ est K -invariante à droite. De la même façon, on vérifie que ψ est K -invariante à gauche. Par ailleurs $\psi(1)^2 = \psi(1)$, donc $\psi(1) = 1$ ou $\psi(1) = 0$. Ce deuxième cas implique que $0 = \psi(x)\psi(1) = \int_K \psi(xk)dk = \psi(x)$ pour tout $x \in G$. Donc $\psi \equiv 0$, qui est impossible. Ce qui montre que $\psi(1) = 1$.

Lemme 2.2.2 Toute fonction sphérique sur G est déterminée par sa restriction à $\exp(\overline{\mathfrak{a}_+})$.

Preuve. C'est une conséquence directe de la décomposition de Cartan de G . \square

On note $\mathbb{D}(X)$ l'algèbre (commutative) des opérateurs différentiels invariants sur X . Le théorème suivant donne une caractérisation des fonctions sphériques.

Théorème 2.2.3 Une fonction $\psi : X \rightarrow \mathbb{C}$ est sphérique si et seulement si $\psi(eK) = 1$ et ψ est une fonction propre de $\mathbb{D}(X)$, i.e. il existe un caractère $\chi : \mathbb{D}(X) \rightarrow \mathbb{C}$ tels que :

$$D\psi = \chi(D)\psi \quad \text{pour tout } D \in \mathbb{D}(X).$$

Harish-Chandra donne une description des fonctions sphériques [7]. Soient M' le normalisateur de A dans K et $W = M'/M$ le groupe de Weyl associé au système des racines restreintes relatives à \mathfrak{a} . Ce groupe agit sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ par :

$$(s.\lambda)(H) = \lambda(s^{-1}.H), \quad H \in \mathfrak{a}.$$

Pour $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, on définit :

$$\varphi_{\lambda}(g) = \int_K e^{(i\lambda - \rho)(H(gk))} dk, \quad g \in G.$$

Théorème 2.2.4 *Avec les notations précédentes, on a*

1. φ_{λ} est une fonction sphérique,
2. Si ψ est une fonction sphérique alors il existe $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ tels que $\psi = \varphi_{\lambda}$,
3. $\varphi_{\lambda} = \varphi_{\mu}$ si et seulement si $\lambda \in W.\mu$.

On note $U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de \mathfrak{g} . Les éléments de $U(\mathfrak{g})$ agissent sur l'espace $C^{\infty}(G)$ comme des opérateurs différentiels opérant à droite et à gauche. On note $f(D, g, E)$ l'action de $(D, E) \in U(\mathfrak{g}) \times U(\mathfrak{g})$ sur $f \in C^{\infty}(G)$ en $g \in G$. Plus précisément :

$$\begin{aligned} f(D, g, E) &= \left(\frac{\partial}{\partial s_1} \cdots \frac{\partial}{\partial s_d} \frac{\partial}{\partial t_1} \cdots \frac{\partial}{\partial t_e} \right)_{/s_1=\dots=s_d=t_1\dots t_e=0} \\ &\times f((\exp s_1 X_1) \cdots (\exp s_d X_d) (\exp t_1 Y_1) \cdots (\exp t_e Y_e)) \end{aligned}$$

avec $D = X_1 \cdots X_d$ et $E = Y_1 \cdots Y_e$ où $X_1, \dots, X_d, Y_1, \dots, Y_e \in \mathfrak{g}$.

De plus, on note $S(\mathfrak{a}^*)$ l'algèbre symétrique de \mathfrak{a}^* . On a les propriétés suivantes des fonctions sphériques [5] [8] :

Proposition 2.2.5 1. $\varphi_{\lambda}(g)$ est bi- K - invariante pour $g \in G$ et W -invariante pour $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$.

2. φ_{λ} est une fonction C^{∞} sur G et holomorphe sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$.
3. Si Δ est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur X , alors :

$$\Delta \varphi_{\lambda} = -(\|\lambda\|^2 + \|\rho\|^2) \varphi_{\lambda}.$$

4. Il existe deux constantes positives $C > 0$ et $d > 0$ telles que :

$$e^{-\rho(H)} \leq \varphi_0(\exp H) \leq C(\|H\| + 1)^d e^{-\rho(H)}, \quad \forall H \in \overline{\mathfrak{a}_+}.$$

5. Si $D, E \in U(\mathfrak{g})$, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|\varphi_{\lambda}(D, g, E)| \leq c(\|\lambda\| + 1)^{\deg D + \deg E} \varphi_{i\text{Im}\lambda}(g).$$

6. Si $P \in S(\mathfrak{a}^*)$, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\left| P\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right) \varphi_{\lambda}(g) \right| \leq C(\|g\| + 1)^{\deg P} \varphi_{i\text{Im}\lambda}(g).$$

2.2.4 Fonction c de Harish-Chandra

Si l'on considère la classe des fonctions sphériques $\varphi_\lambda(g)$, il est naturel d'étudier leurs comportements à "l'infini". Pour cela, reprenons l'involution de Cartan θ et notons $\bar{N} = \theta(N)$. On a le lemme suivant :

Lemme 2.2.6 *Soit $f \in L^1(K/M)$. Alors*

$$\int_K f(k)dk = \int_{\bar{N}} f(k(\bar{n}))e^{-2\rho H(\bar{n})}d\bar{n}. \quad (2.2.3)$$

Preuve. On considère une fonction continue et positive $\varphi : AN \mapsto \mathbb{R}$ à support compact telle que :

$$\int_{AN} \varphi(an)e^{2\rho H(a)}dadn = 1,$$

et soit F la fonction définie sur G telle que

$$F(kan) = f(k)\varphi(an).$$

Alors

$$\int_G f(g)dg = \int_K f(k)dk.$$

Le résultat se déduit de la formule intégrale (2.2.1). □

Soit \mathfrak{a}_+^* la chambre de Weyl positive dans \mathfrak{a}^* ; i.e.

$$\mathfrak{a}_+^* = \{\lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^* \text{ telle que } \langle \lambda, \alpha \rangle > 0, \text{ pour tout } \alpha \in \Sigma_+\},$$

Remarquons que pour tout $\bar{n} \in \bar{N}$, on a :

$$k(\bar{n}) = \bar{n}a(\bar{n})^{-1}[a(\bar{n})n(\bar{n})a(\bar{n})^{-1}].$$

Il s'en suit que :

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda(a) &= \int_K e^{(i\lambda-\rho)H(ak)}dk \\ &= \int_K e^{(i\lambda-\rho)H(ak(\bar{n}))}e^{-2\rho H(\bar{n})}d\bar{n} \end{aligned}$$

de sorte pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ tels que $\operatorname{Re}(i\lambda) \in \mathfrak{a}_+^*$ on a :

$$\lim_{\exp(\mathfrak{a}_+) \ni a \rightarrow \infty} e^{(-i\lambda+\rho)H(a)}\varphi_\lambda(a) = \int_{\bar{N}} e^{(i\lambda-\rho)H(\bar{n})}d\bar{n} = c(\lambda). \quad (2.2.4)$$

Définition 2.2.7 *L'intégrale (2.2.4) définit la fonction c de Harish-Chandra.*

Exemple 1. On considère le groupe $G = SL(2, \mathbb{R})$.

Soient $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et A le groupe des matrices diagonales $a_t = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} = \exp(tH)$.

Alors $\Sigma = \{\alpha, -\alpha\}$, avec $\alpha(xH) = 2x$. Fixons $\Sigma_+ = \{\alpha\}$. Dans ce cas, on obtient que :

$$N = \left\{ n_x = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} \text{ et } \bar{N} = \left\{ \bar{n}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Finalement, soit $K = SO(2) = \{k_\beta, \beta \in \mathbb{R}\}$, avec

$$k_\beta = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}.$$

Un simple calcul montre que l'on a :

$$k_\beta a_t n_x = \begin{pmatrix} e^t \cos(\beta) & e^t x \cos(\beta) + e^{-t} \sin(\beta) \\ -e^t \sin(\beta) & -e^t x \sin(\beta) + e^{-t} \cos(\beta) \end{pmatrix}.$$

Ce qui montre que :

$$\log \left(a \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \log(\alpha^2 + \gamma^2) H.$$

On identifie $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ avec \mathbb{C} . On en déduit que :

$$\begin{aligned} c(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (1+x^2)^{-\frac{\lambda+1}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} (1+x)^{-\frac{\lambda+1}{2}} \sqrt{x} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma(\frac{\lambda}{2})}{\Gamma(\frac{\lambda+1}{2})}, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé les formules $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ et $\int_0^{+\infty} x^{a-1} (1+x)^{-(a+b)} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$. □

Exemple 2. Supposons que G est de rang réel égal à 1, i.e. $\ell = \dim(\mathfrak{a}) = 1$. On identifie $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ à \mathbb{C} . Par conséquence :

$$\rho = m_\alpha + 2m_{2\alpha}.$$

On définit la forme quadratique Q sur \bar{n} par

$$Q(X) = \frac{\|X\|^2}{2(m_\alpha + 4m_{2\alpha})},$$

avec m_α et $m_{2\alpha}$ sont les multiplicités respectivement de α et 2α .

Soient $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ et $Y \in \mathfrak{g}_{2\alpha}$. Alors, on a :

$$a(\exp(X+Y))^{-i\lambda-\rho} = ((1+Q(X)/2)^2 + 2Q(Y))^{-\frac{i\lambda+\rho}{4}}.$$

Donc

$$c(\lambda) = c_0 \int_0^\infty \int_0^\infty ((1+r)^2 + s)^{-\frac{i\lambda+\rho}{4}} r^{\frac{m_\alpha-2}{2}} s^{\frac{m_{2\alpha}-2}{2}} dr ds,$$

avec $c_0 = \frac{\Gamma(m_\alpha+m_{2\alpha})}{\Gamma((m_\alpha+m_{2\alpha}/2))}$.

En substituant $t = s(1+r)^{-2}$, on obtient :

$$c(\lambda) = c_0 \frac{\Gamma(\frac{i\lambda}{2})\Gamma(\frac{i\lambda+m_\alpha}{4})}{\Gamma(\frac{i\lambda+m_\alpha}{2})\Gamma(\frac{i\lambda+\rho}{4})}.$$

□

Dans le cas général, la fonction c de Harish-Chandra est donnée par la formule de Gindikin-Karpalevic suivante [8] :

Théorème 2.2.8 Soit Σ_+^0 l'ensemble des racines indivisibles de Σ_+ . Alors, on a :

$$c(\lambda) = c_0 \prod_{\mu \in \Sigma_+^0} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} \langle i\lambda, \mu_0 \rangle) \Gamma(\frac{1}{2} \langle i\lambda, \mu_0 \rangle + \frac{1}{2})}{2\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{4}m_\mu + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \langle i\lambda, \mu_0 \rangle) \Gamma(\frac{1}{4}m_\mu + \frac{1}{2}m_{2\mu} + \frac{1}{2} \langle i\lambda, \mu_0 \rangle)},$$

où $\mu_0 = \frac{\mu}{\langle \mu, \mu \rangle}$ et la constante c_0 est définie telle que $c(i\rho) = 1$.

De plus la fonction c de Harish-Chandra vérifie les propriétés suivantes :

Proposition 2.2.9 1. $c(-\lambda) = \overline{c(\lambda)}$, pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}^*$.

2. La fonction $|c(\lambda)|^{-2}$ est C^∞ , non nulle et W -invariante sur \mathfrak{a}^* .

3. Il existe une constante positive $C > 0$ tels que :

$$|c(\lambda)|^{-2} \leq C(1 + \|\lambda\|)^{n-\ell},$$

4. Il existe deux constantes positives $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ tels que :

$$|c(\lambda)|^{-1} \leq C_1 + C_2 \|\lambda\|^{\frac{n-\ell}{2}}, \quad \text{Ré}(i\lambda) \in \overline{\mathfrak{a}_+^*},$$

2.2.5 Transformée de Fourier sphérique

On note par $\mathcal{D}(G)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ et à supports compacts sur G et, par $\mathcal{D}_K(G)$ le sous espace de $\mathcal{D}(G)$ des fonctions bi- K -invariantes sur G . La transformée de Fourier sphérique d'une fonction f de $\mathcal{D}_K(G)$, notée \hat{f} est la fonction définie sur $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ par :

$$\hat{f}(\lambda) = \int_G f(g) \varphi_{-\lambda}(g) dg, \quad \lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*.$$

Les fonctions de $\mathcal{D}(G)$ seront dites fonctions régulières.

2.2.6 Théorème de Paley-Wiener

Sur l'espace euclidien \mathbb{R}^n , le théorème de Paley-Wiener détermine l'image par la transformée de Fourier

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\xi} dx,$$

de l'espace des fonctions régulières sur \mathbb{R}^n . Dans le cas des espaces symétriques, on a le théorème suivant [8] :

Théorème 2.2.10 *Pour un réel $R > 0$, on note $\mathcal{P}_W^R(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$ l'espace des fonctions entières W -invariantes sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ telles que*

$$|F(\lambda)| \leq C_p(1 + |\lambda|)^{-p} e^{R|\operatorname{Im}\lambda|}, \quad \forall p \in \mathbb{N},$$

et on pose

$$\mathcal{P}_W(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*) = \bigcup_{R>0} \mathcal{P}_W^R(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*).$$

Alors la transformée sphérique $f \mapsto \widehat{f}$ définit un isomorphisme de $\mathcal{D}_K(G)$ dans $\mathcal{P}_W(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$. De plus, la fonction $gK \mapsto f(g)$ est à support inclus dans la boule fermée $\overline{B(o, R)}$ si et seulement si $\widehat{f} \in \mathcal{P}_W^R(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$.

2.2.7 Formule d'inversion. Théorème de Plancherel

Avec les notations précédentes, on a les deux formules suivantes [8] :

Théorème 2.2.11 *Soit $f \in \mathcal{D}_K(G)$. Alors on a :*

1. *Formule d'inversion :*

$$\forall g \in G, \quad f(g) = \frac{1}{|W|} \int_{\mathfrak{a}^*} \varphi_{\lambda}(g) \widehat{f}(\lambda) |c(\lambda)|^{-2} d\lambda. \quad (2.2.5)$$

2. *Formule de Plancherel :*

$$\int_G |f(g)|^2 dg = \frac{1}{|W|} \int_{\mathfrak{a}^*} |\widehat{f}(\lambda)|^2 |c(\lambda)|^{-2} d\lambda, \quad (2.2.6)$$

et $\mathcal{P}_W(\mathfrak{a}^*)$ est un sous-espace dense de $L^2(\mathfrak{a}^*, \frac{|c(\lambda)|^{-2}}{|W|} d\lambda)$.

2.2.8 Transformée euclidienne. Transformée d'Abel

On note par $\mathcal{D}_W(\mathfrak{a})$ l'espace des fonctions W -invariantes de classe C^∞ et à support compact sur \mathfrak{a} . La transformée euclidienne d'une fonction f appartenant à cet espace est donnée par :

$$\mathcal{F}f(\lambda) = \int_{\mathfrak{a}} f(H)e^{-i\lambda(H)}dH, \quad \lambda \in \mathfrak{a}^*.$$

La transformée d'Abel d'une fonction h dans $\mathcal{D}_K(G)$ est

$$\mathcal{A}h(H) = e^{\rho(H)} \int_N h((\exp H)n)dn, \quad H \in \mathfrak{a}.$$

De plus le diagramme suivant est commutatif [1] :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_K(G) & \xrightarrow{\mathcal{A}} & \mathcal{D}_W(\mathfrak{a}) \\ & \searrow \hat{\quad} & \swarrow \mathcal{F} \\ & \mathcal{P}_W(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*) & \end{array}$$

2.2.9 Espaces de Schwartz. Distributions

Pour $0 < p \leq 2$, l'espace de Schwartz $\mathcal{S}^p(X)$ sur X , est défini par :

$$\mathcal{S}^p(X) = \{f \in C^\infty(X);$$

$$\sup_{k_1, k_2 \in K, H \in \overline{\mathfrak{a}_+}} \langle H \rangle^r \varphi_0(H)^{-2/p} |f(D_1, k_1(\exp(H))k_2, D_2)| < +\infty; D_1, D_2 \in U(\mathfrak{g}), r \geq 0\},$$

avec $\langle H \rangle = (\|H\|^2 + 1)^{1/2}$.

Dans le cas particulier où $p = 1$, on note $\mathcal{S}(X)$ au lieu de $\mathcal{S}^p(X)$. Alors l'espace $\mathcal{D}(X)$ des fonctions de classe C^∞ à support compact sur X est un sous espace dense de $\mathcal{S}(X)$ et pour tout réel $q \geq 1$, on a les inclusions suivantes :

$$\mathcal{S}(X) \subset \mathcal{S}^q(X) \text{ et } \mathcal{S}(X) \subset L^q(X).$$

L'espace dual topologique $\mathcal{S}'(X)$ de $\mathcal{S}(X)$ est inclus dans l'espace $\mathcal{D}'(X)$ des distributions sur X . Une distribution est dite tempérée si l'on peut l'étendre à une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(X)$. Donc $\mathcal{S}'(X)$ est identifié à l'espace des distributions tempérées sur X .

Maintenant, si on note par $\mathcal{S}_K(X)$ le sous espace de $\mathcal{S}(X)$ des fonctions K -invariantes sur X et par $\mathcal{S}_W(\mathfrak{a})$ et $\mathcal{S}_W(\mathfrak{a}^*)$ les espaces de Schwartz usuels sur \mathfrak{a} et \mathfrak{a}^* des fonctions W -invariantes, alors le diagramme suivant est commutatif et chaque flèche est un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_K(X) & \xrightarrow{\mathcal{A}} & \mathcal{S}_W(\mathfrak{a}) \\ & \searrow \hat{\quad} & \swarrow \mathcal{F} \\ & \mathcal{S}_W(\mathfrak{a}^*) & \end{array}$$

2.3 Espaces de Sobolev. Espaces de Besov

Dans ce paragraphe, nous allons mettre en place les notions indiquées précédemment : à savoir quelques propriétés élémentaires des espaces de Sobolev et de Besov sur la variété symétrique $X = G/K$ en nous inspirant des travaux de Strichartz [18] et de Skrzypczak [15][16][17]. Nous supposons que l'opérateur de Laplace-Beltrami Δ sur X est défini négatif. Une façon de définir les espaces de Sobolev H_p^s sur \mathbb{R}^n est de les considérer comme l'image de L^p par l'action du potentiel de Bessel $(I - \Delta)^{-s/2}$. Cette définition peut être généralisée au cas d'une variété riemannienne complète, donc, en particulier au cas de l'espace symétrique de type non-compact $X = G/K$.

2.3.1 Espaces de Sobolev

Pour un nombre complexe s avec $\text{Ré}(s) > 0$, nous définissons le potentiel de Bessel $(I - \Delta)^{-s/2}$ par l'identité formelle suivante

$$(I - \Delta)^{-s/2} = \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{-1} \int_0^{+\infty} t^{s/2-1} e^{-t} e^{t\Delta} dt, \quad (2.3.7)$$

où $e^{t\Delta}$ est une notation du semi-groupe de la chaleur défini sur $L^2(X)$. Notons par $H_t(x, y)$ le noyau de la chaleur défini sur $\mathbb{R}_+ \times X \times X$ par

$$e^{t\Delta} u(x) = \int_X H_t(x, y) u(y) dy, \quad \forall u \in L^2(X), \quad (2.3.8)$$

avec $\int_X |H_t(x, y)| dy \leq 1 \quad \forall t > 0$ et $\forall x \in X$.

Remarque 2.3.1 $H_t(x, y)$ est une fonction de classe C^∞ , à valeurs réelles strictement positives sur $\mathbb{R}_+ \times X \times X$ et est symétrique. De plus $\frac{\partial}{\partial t} e^{t\Delta} u = \Delta e^{t\Delta} u$ pour tout $u \in L^2(X)$. Cette propriété reste vraie pour tout $u \in L^p(X)$, $1 \leq p \leq \infty$, si l'on définit $e^{t\Delta} u$ par (2.3.8). De plus, $\|e^{t\Delta} u\|_{L^p(X)} \leq \|u\|_{L^p(X)}$ pour tout $t > 0$ et $\|e^{t\Delta} u - u\|_{L^p(X)} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$. Il s'agit d'un résultat important dû à Strichartz [18].

Pour un réel $s > 0$ strictement positif, l'intégrale

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{-1} \int_0^{+\infty} t^{s/2-1} e^{-t} H_t(x, y) dt$$

converge absolument pour presque tous x et y vers la fonction positive et symétrique que l'on note $J_s(x, y)$ telle que

$$\int_X J_s(x, y) dy \leq 1. \quad (2.3.9)$$

Ainsi

$$(I - \Delta)^{-s/2} u(x) = \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{-1} \int_X J_s(x, y) u(y) dy. \quad (2.3.10)$$

On peut alors facilement montrer le résultat suivant

Proposition 2.3.2 1. $(I - \Delta)^{-s/2}$ est un opérateur continu de $L^p(X)$ dans lui même, de norme inférieure ou égale à 1, pour tout $s > 0$ et pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

2. $(I - \Delta)^{-s/2}(I - \Delta)^{-\tilde{s}/2} = (I - \Delta)^{-(s+\tilde{s})/2} \quad \forall s, \tilde{s} > 0$.

3. $(I - \Delta)^k(I - \Delta)^{-s/2} = (I - \Delta)^{-(s-2k)/2}$ si $s > 2k > 0$.

Nous omettons la preuve, qui est une conséquence directe de (2.3.9), l'inégalité de Hölder et du théorème de Fubini. On utilise ces résultats pour étendre la définition de $(I - \Delta)^{-s/2}$ pour tous les réels s .

Remarque 2.3.3 Remarquons que l'intégrale $J_s(x, y)$ existe encore pour les nombres complexes s tel que $\text{Ré}(s) > 0$. La proposition précédente est aussi utilisée pour étendre cette définition à \mathbb{C} tout entier.

Nous donnons maintenant la définition des espaces de Sobolev H_p^s sur X . On se restreint aux valeurs de p tels que $1 < p < \infty$.

Définition 2.3.4 Si $s > 0$ alors $H_p^s(X)$ est l'ensemble des fonctions $f \in L^p(X)$ telles que $f = (I - \Delta)^{-s/2}h$, avec $h \in L^p(X)$ et $\|f\|_{H_p^s(X)} = \|h\|_{L^p(X)}$.

Si $s < 0$ alors $H_p^s(X)$ est l'ensemble des distributions $f \in \mathcal{D}'(X)$ tels que $f = (I - \Delta)^{-s/2}h$, avec $h \in H_p^{2k+s}(X)$ où k est un entier naturel tel que $2k + s > 0$ et $\|f\|_{H_p^s(X)} = \|h\|_{H_p^{2k+s}(X)}$.

Si $s = 0$ alors $H_p^0(X) = L^p(X)$.

A partir de cette définition, on remarque que les espaces de Sobolev $H_p^s(X)$ sont des espaces de Banach et que dans le cas des réels $s < 0$, $H_p^s(X)$ ne dépend pas de k .

Pour aller plus loin dans les propriétés des espaces de Sobolev, nous énonçons deux théorèmes qui nous seront utiles dans le paragraphe suivant.

Théorème 2.3.5 Si $s > \tilde{s}$ alors $H_p^s(X)$ est dense dans $H_p^{\tilde{s}}(X)$ et $\|f\|_{H_p^{\tilde{s}}(X)} \leq \|f\|_{H_p^s(X)}$.

Preuve. En considérant la Proposition 2.3.2, l'inégalité est immédiate. Montrons la densité.

Soit $u \in H_p^{\tilde{s}}(X)$, $\tilde{s} > 0$ et soit $k \in \mathbb{N}$. On considère $(\phi_j)_j$ une approximation de l'identité à support inclus dans \mathbb{R}_+^* . On définit la suite $u_j = \int \phi_j(t)e^{t\Delta}u dt$.

Il existe $h \in L^p(X)$ tels que $u = (I - \Delta)^{-\tilde{s}/2}h$. En tenant compte de la Remarque 2.3.3 et du fait que les opérateurs $e^{t\Delta}$ et $(I - \Delta)^{-\tilde{s}/2}$ commutent, on a

$$\begin{aligned} \|(I - \Delta)^k u_j\|_{L^p(X)} &\leq \int \phi_j(t) \|e^{t\Delta}(I - \Delta)^{-\tilde{s}/2}h\|_{L^p(X)} dt \\ &= \int \phi_j(t) \|(I - \Delta)^{-\tilde{s}/2}e^{t\Delta}h\|_{L^p(X)} dt \\ &\leq \int \phi_j(t) \|e^{t\Delta}h\|_{L^p(X)} dt \\ &\leq \int \phi_j(t) \|h\|_{L^p(X)} dt \end{aligned}$$

Ce qui montre que $u_j \in H_p^{2k}(X)$. Autrement dit $u_j \in H_p^\infty(X) \subset H_p^s(X)$.

De plus, $\|e^{t\Delta}u\|_{H_p^{\tilde{s}}(X)} \leq \|u\|_{H_p^{\tilde{s}}(X)}$. On déduit donc, que

$$\|u_j - u\|_{H_p^{\tilde{s}}(X)} \leq \int \phi_j(t) \|e^{t\Delta}u - u\|_{H_p^{\tilde{s}}(X)} dt \rightarrow 0$$

quand $j \rightarrow \infty$.

Si $\tilde{s} < 0$, nous posons $(I - \Delta)^k \int \phi_j(t) e^{t\Delta} v dt$, où $(I - \Delta)^k v = u$ et $2k + \tilde{s} > 0$. \square

Le deuxième théorème établit une relation entre le potentiel de Bessel et le potentiel de Riesz, qui s'écrit comme des puissances de $-\Delta$ et est défini par l'identité formelle suivante

$$(-\Delta)^{-s/2} = \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{-1} \int_0^{+\infty} t^{s/2-1} e^{t\Delta} dt, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (2.3.11)$$

Il est clair que dans cette formule, il y a des problèmes de convergence lorsque $t \rightarrow \infty$ si $s \geq 0$ et quand $t \rightarrow 0$ si $s \leq 0$. Pour contourner ces problèmes, nous donnons une définition abstraite du L^p -domaine de $(-\Delta)^{-s/2}$. Plus précisément, on dit qu'une fonction $u \in L^p(X)$ est dans le L^p -domaine de $(-\Delta)^{-s/2}$ si l'intégrale $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{-1} \int_{\varepsilon}^N t^{s/2-1} e^{t\Delta} u dt$ converge quand $\varepsilon \rightarrow 0$ et $N \rightarrow \infty$ dans $L^p(X)$ vers une fonction v et on écrit $v = (-\Delta)^{-s/2}u$.

Théorème 2.3.6 ([18])

Soient $s > 0$ et $1 < p < \infty$. Alors $u \in H_p^s(X)$ si et seulement si elle appartient au L^p -domaine de $(-\Delta)^{s/2}$. Et $\|u\|_{L^p(X)} + \|(-\Delta)^{s/2}u\|_{L^p(X)}$ est équivalente à $\|u\|_{H_p^s(X)}$.

Le résultat suivant est donc, une conséquence directe de la densité de l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact, $\mathcal{D}(X)$ dans $L^p(X)$ et de la continuité de l'opérateur $(-\Delta)^{s/2}$, $s > 0$ sur $L^p(X)$, $1 < p < \infty$.

Corollaire 2.3.7 Soient $s > 0$ et $1 < p < \infty$. Alors $\mathcal{D}(X)$ est dense dans $H_p^s(X)$.

2.3.2 Espaces de Besov

2.3.2.1 Définitions et quelques propriétés élémentaires

On se propose de donner la définition d'une classe d'espaces de Besov en s'inspirant de la Définition 2.3.4. En s'appuyant sur la méthode d'interpolation réelle [2], on a :

Définition 2.3.8 Soient $s \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$ et $0 < q \leq \infty$. Alors l'espace de Besov $B_p^{s,q}(X)$ est défini via la méthode d'interpolation réelle

$$B_p^{s,q}(X) = (H_p^{s_0}(X), H_p^{s_1}(X))_{\theta, q},$$

avec $0 < \theta < 1$ et $s = \theta s_0 + (1 - \theta) s_1$.

D'autres constructions des espaces de Besov sur X sont possibles. Compte tenu de l'effet de la croissance exponentielle des volumes des boules sur une variété riemannienne et contrairement au cas euclidien, où les espaces de Besov sont définis à l'aide de l'analyse de Littlewood-Paley, il n'est pas raisonnable de définir ces espaces via des fonctions à transformées de Fourier à supports compacts sur \mathfrak{a}^* . Pour mettre en place cette idée heuristique,

nous commençons par construire une partition de l'unité sur \mathfrak{a}^* légèrement différente de celle donnée dans [17]. Soit $\varphi \in \mathcal{D}_K(X)$ une fonction réelle, K -invariante et de classe C^∞ sur X à support inclus dans la boule géodésique fermée $\overline{B(eK, 1)}$ telle que $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$. On définit une fonction ψ sur X telle que :

$$\psi = \mathcal{A}\varphi \text{ et } \psi^N = \mathcal{A}\varphi^N,$$

où $\varphi^N = (\tilde{\Delta})^N \varphi$ pour $N \in \mathbb{N}$, avec $\tilde{\Delta} = -\Delta - \|\rho\|^2$.

On remarque immédiatement que :

$$\widehat{\varphi^N} = \mathcal{F} \circ \mathcal{A}(\varphi^N) = \mathcal{F}(\psi^N) \in \mathcal{S}_W(\mathfrak{a}^*).$$

On suppose que pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ ($\lambda \neq 0$) :

$$\int_0^\infty (\mathcal{F}\psi^N)^2(t\lambda) \frac{dt}{t} = 1,$$

et on définit une fonction régulière $\psi_{0,N}$ sur \mathfrak{a} par sa transformée euclidienne :

$$\mathcal{F}\psi_{0,N}(\lambda) = 1 - \int_0^1 (\mathcal{F}\psi^N)^2(t\lambda) \frac{dt}{t}.$$

Puisque $\mathcal{F}\psi^N \in \mathcal{S}_W(\mathfrak{a}^*)$, on peut déduire facilement que $\mathcal{F}\psi_{0,N} \in \mathcal{S}_W(\mathfrak{a}^*)$ et que $\psi_{0,N} \in \mathcal{S}_W(\mathfrak{a})$. Maintenant, on considère la fonction $\varphi_{0,N}$ définie par :

$$\varphi_{0,N} = \mathcal{A}^{-1}\psi_{0,N}.$$

Alors, en utilisant le fait que \mathcal{A} est un isomorphisme entre les deux espaces $\mathcal{D}_K(G)$ et $\mathcal{D}_W(\mathfrak{a})$, on déduit que $\varphi_{0,N} \in \mathcal{D}_K(G)$. Un simple calcul montre que l'on a :

$$\widehat{\varphi}_{0,N}(\lambda) + \int_0^1 (\widehat{\varphi^N})^2(t\lambda) \frac{dt}{t} = 1.$$

Finalement, soit φ_t^N une fonction de $\mathcal{D}_K(G)$ définie par :

$$\widehat{\varphi_t^N}(\lambda) = \widehat{\varphi^N}(t\lambda), \quad \forall \lambda \in \mathfrak{a}^*.$$

Il est clair que le support de cette fonction est inclus dans la boule fermée $\overline{B(eK, t)}$.

On a une formule de type Calderon [17] :

$$f(x) = (f \times \varphi_{0,N})(x) + \int_0^1 (f \times \varphi_t^N \times \varphi_t^N)(x) \frac{dt}{t}, \quad \forall f \in L^2(X). \quad (2.3.12)$$

où \times est une notation du produit de convolution sur X . Le système des fonctions $\{\varphi_{0,N}, \varphi_t^N\}_{0 < t \leq 1}$ ainsi construit forme une résolution continue de l'unité sur \mathfrak{a}^* .

Remarque 2.3.9 Cette partition peut être considérée comme une version continue de la partition de Littlewood-Paley donnée par L. Skrzypczak dans [15], en posant $t = 2^{-j}$, $j \in \mathbb{N}$ et qu'il n'existe pas de définition canonique de telles partitions.

Pour faire le lien avec le paragraphe précédent, nous donnons une autre version des espaces de Sobolev sur X faisant appel à la résolution de l'unité $\{\varphi_{0,N}, \varphi_t^N\}_{0 < t \leq 1}$. Plus précisément, on définit la famille $\mathcal{F}_p^{s,q}(X)$ des espaces de Sobolev, pour le cas particulier $q = 2$ et tels que $\mathcal{F}_p^{0,2}(X) = L^p(X)$.

Définition 2.3.10 *Soient $1 < p < \infty$ et $s \in \mathbb{R}$. Soit N un entier positif tels que $2N > |s|$. Soit $\{\varphi_{0,N}, \varphi_t^N\}_{0 < t \leq 1}$ le système de fonctions défini précédemment. Alors*

$$\{f \in \mathcal{S}'(X); \|f\|_{\mathcal{F}_p^{s,2}(X)} < \infty\},$$

où

$$\|f\|_{\mathcal{F}_p^{s,2}(X)} = \|f \times \varphi_{0,N}\|_{L^p(X)} + \left\| \left(\int_0^1 t^{-2s} |f \times \varphi_t^N|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \right\|_{L^p(X)}. \quad (2.3.13)$$

Dans le cas euclidien, cette approche des espaces de Sobolev est due à Triebel [20]. Il est à remarquer que l'expression (2.3.13) dépend de N et du système $\{\varphi_{0,N}, \varphi_t^N\}_{0 < t \leq 1}$. Le théorème suivant [16] montre que les normes définies par des systèmes différents sont équivalentes.

Théorème 2.3.11 *Soient $1 < p < \infty$ et $s \in \mathbb{R}$. Soit N un entier positif tels que $2N > |s|$. Alors*

$$H_p^s(X) = \mathcal{F}_p^{s,2}(X). \quad (2.3.14)$$

Revenons au contexte qui nous intéresse directement pour la suite de ce travail. Rappelons ici la définition et quelques propriétés des espaces de Besov liées au système de fonctions $\{\varphi_{0,N}, \varphi_t^N\}_{0 < t \leq 1}$.

Définition 2.3.12 *Soient $1 \leq p \leq \infty, 1 \leq q \leq \infty$ et $s \in \mathbb{R}$. Soit N un entier positif tel que $2N > |s|$. On considère $\{\varphi_{0,N}, \varphi_t^N\}_{0 < t \leq 1}$ le système des fonctions défini précédemment. Alors l'espace de Besov est l'espace vectoriel noté par $\mathcal{B}_p^{s,q}(X)$ et donné par :*

$$\mathcal{B}_p^{s,q}(X) = \{f \in \mathcal{S}'(X); \|f\|_{\mathcal{B}_p^{s,q}(X)} < \infty\},$$

où :

$$\|f\|_{\mathcal{B}_p^{s,q}(X)} = \|f \times \varphi_{0,N}\|_{L^p(X)} + \left(\int_0^1 t^{-sq} \|f \times \varphi_t^N\|_{L^p(X)}^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}. \quad (2.3.15)$$

Une conséquence du Théorème 2.3.11 est que la définition de $\mathcal{B}_p^{s,q}(X)$ ne dépend ni de la fonction φ donnée précédemment pour définir une partition de l'unité sur \mathfrak{a}^* ni de N . En effet, on a le théorème suivant [16] :

Théorème 2.3.13 *Soient $1 < p < \infty, 1 < q \leq \infty$ et $s \in \mathbb{R}$. Alors*

$$\mathcal{B}_p^{s,q}(X) = B_p^{s,q}(X). \quad (2.3.16)$$

Preuve. Cela découle du fait que pour des espaces de Banach quelconques B, A_0 et A_1 , on a les formules d'interpolation suivantes :

$$(B \times A_0, B \times A_1)_{\theta, q} = B \times (A_0, A_1)_{\theta, q}.$$

$$(L^p(X, A_0), L^p(X, A_1))_{\theta, q} = L^p(X, (A_0, A_1)_{\theta, q}).$$

et du fait que [14] :

$$\left(L_2\left([0, 1], t^{-2s_0} \frac{dt}{t}, L^p(X)\right), L_2\left([0, 1], t^{-2s_1} \frac{dt}{t}, L^p(X)\right) \right)_{\theta, q} = L_q\left([0, 1], t^{-2s} \frac{dt}{t}, L^p(X)\right),$$

où $s = \theta s_0 + (1 - \theta) s_1$ avec $0 < \theta < 1$. □

Remarque 2.3.14 *On sait que le dual $\left(H_p^s(X)\right)'$ de $H_p^s(X)$ est égal à $H_{p'}^{-s}(X)$. Alors par le théorème de dualité, conséquence du théorème d'interpolation réelle, on déduit que :*

$$\left(B_p^{s, q}(X)\right)' = B_{p'}^{-s, q'}(X),$$

avec $1/p + 1/p' = 1/q + 1/q' = 1$.

2.3.2.2 Applications

On souhaite relier les espaces que l'on vient de définir avec ceux que l'on connaît déjà. On a remarqué que $B_p^{0, 2}(X) = L^p(X)$, $1 \leq p \leq \infty$. Nous donnons des applications immédiates de la Définition 2.3.12. Considérons la fonction $(\varphi_t^N)_{0 < t \leq 1}$ définie précédemment. Notons $\ell = \text{rank}_{\mathbb{R}}(G) = \dim(\mathfrak{a})$, $n = \dim(X)$ et $\text{vol}(B(eK, t))$ le volume de la boule géodésique $(B(eK, t))$. En utilisant la formule d'inversion (2.2.5) et la Proposition 2.2.9, on a :

$$\begin{aligned} \|\varphi_t^N\|_{L^\infty(X)} &\leq C \int_{\mathfrak{a}^*} |\widehat{\varphi_t^N}(\lambda)| |c(\lambda)|^{-2} d\lambda \\ &\leq C t^{-\ell} \int_{\mathfrak{a}^*} |\widehat{\varphi^N}(\lambda)| (C_1 + C_2 t^{-\gamma} \|\lambda\|^\gamma)^2 d\lambda \\ &= C t^{-n} \int_{\mathfrak{a}^*} |\widehat{\varphi^N}(\lambda)| (C_1 t^\gamma + C_2 \|\lambda\|^\gamma)^2 d\lambda \\ &\leq C t^{-n}, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que $\widehat{\varphi^N} \in \mathcal{S}_W(\mathfrak{a}^*)$, et l'on a posé $\gamma = \frac{1}{2}(n - \ell)$.

Combinée avec la croissance polynômiale de la boule $B(eK, t)$ au voisinage de l'origine, i.e :

$$\text{vol}(B(eK, t)) = O(t^n), \quad 0 < t \leq 1,$$

la dernière inégalité permet de montrer qu'il existe une constante $C = C(N) > 0$ qui dépend de N telle que :

$$\|\varphi_t^N\|_{L^1(X)} \leq C, \quad \forall 0 < t \leq 1. \quad (2.3.17)$$

Comme conséquence de ce résultat et de la formule de Calderon (2.3.12), on obtient :

Proposition 2.3.15 *Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, on a :*

$$\|u\|_{L^p(X)} \leq C \|u\|_{B_p^{0,1}(X)}, \quad (2.3.18)$$

où $C = C(N) > 0$ est une constante qui dépend de N .

Preuve. On a successivement :

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^p(X)} &\leq \|u \times \varphi_{0,N}\|_{L^p(X)} + \int_0^1 \|u \times \varphi_t^N \times \varphi_t^N\|_{L^p(X)} \frac{dt}{t} \\ &\leq \|u \times \varphi_{0,N}\|_{L^p(X)} + \int_0^1 \|u \times \varphi_t^N\|_{L^p(X)} \|\varphi_t^N\|_{L^1(X)} \frac{dt}{t} \\ &\leq \|u \times \varphi_{0,N}\|_{L^p(X)} + C \int_0^1 \|u \times \varphi_t^N\|_{L^p(X)} \frac{dt}{t} \\ &\leq C \|u\|_{B_p^{0,1}(X)}, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'inégalité de Young. □

On souhaite s'affranchir de la restriction $q = 1$. Tout d'abord, rappelons la définition de la transformée de Fourier-Helgason généralisant la transformée de Fourier sphérique. En termes des décompositions d'Iwasawa $G = KAN \simeq NAK$ de G , on écrit :

$$g \in K \exp(H(g))N, \quad g \in N \exp(A(g))K,$$

où $A(g)$ et $H(g)$ sont uniquement déterminés telles que :

$$A(g) = -H(g^{-1}) \quad \text{et} \quad A(gK, kM) = A(x, b) = A(k^{-1}g).$$

La transformée de Fourier-Helgason notée \mathcal{H} d'une fonction régulière f sur X est définie par :

$$\mathcal{H}f(\lambda, b) = \int_X f(x) e^{(-i\lambda + \rho)A(x,b)} dx; \quad \lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^* \quad \text{et} \quad b \in B = K/M.$$

Dans ce cas, la formule d'inversion est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{|W|} \int_{\mathfrak{a}^* \times B} \mathcal{H}f(\lambda, b) e^{(i\lambda + \rho)A(x,b)} \frac{d\lambda db}{|c(\lambda)|^2}, \quad x \in X, \quad (2.3.19)$$

et celle de Plancherel est donnée par :

$$\int_X |f(x)|^2 dx = \int_{\mathfrak{a}_+^* \times B} |\mathcal{H}f(\lambda, b)|^2 \frac{d\lambda db}{|c(\lambda)|^2}. \quad (2.3.20)$$

On a le résultat de Bernstein suivant [17] :

Proposition 2.3.16 *Soit $1 \leq q \leq 2$. Alors la transformée de Fourier-Helgason \mathcal{H} représente un opérateur borné de $B_2^{n(1/q-1/2),q}(X)$ dans $L^q(\mathfrak{a}^* \times B, |c(\lambda)|^{-2} d\lambda db)$.*

Reprenons le potentiel de Riesz $(-\Delta)^{-\sigma/2}$ défini par l'identité formelle (2.3.11) pour des puissances σ positives. Définissons pour une fonction f (ou une distribution) régulière définie sur X , la fonction $(-\Delta)^{-\sigma/2}f$ par la formule d'inversion :

$$\begin{aligned} (-\Delta)^{-\sigma/2}f(x) &= \frac{1}{|W|} \int_{\mathfrak{a}^* \times B} e^{(i\lambda+\rho)A(x,b)} \mathcal{H}\left((-\Delta)^{-\sigma/2}f\right)(\lambda, b) \frac{d\lambda db}{|c(\lambda)|^2} \\ &= \frac{1}{|W|} \int_{\mathfrak{a}^* \times B} e^{(i\lambda+\rho)A(x,b)} (\|\lambda\|^2 + \|\rho\|^2)^{-\sigma/2} \mathcal{H}f(\lambda, b) \frac{d\lambda db}{|c(\lambda)|^2}. \end{aligned}$$

Appliquons donc, la proposition précédente pour montrer :

Corollaire 2.3.17 *Soient $1 \leq q \leq 2$, $1 \leq a < 2$, $1 \leq p \leq \infty$ et $1 \leq p \leq \infty$ et soit $\sigma > n = \dim(X)$.*

1. *Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\left\| \mathcal{H}\left((-\Delta)^{-\sigma/2}f\right) \right\|_{L^q(\mathfrak{a}^* \times B, |c(\lambda)|^{-2} d\lambda db)} \leq C \|\rho\|^{-\sigma} \|f\|_{B_2^{n(1/q-1/2), q}(X)}.$$

2. *Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\left\| (-\Delta)^{-\sigma/2}f \right\|_{L^p(X)} \leq C \|f\|_{B_p^{1/a-1/2, 2}(X)}.$$

Preuve. La première inégalité est évidente ; il suffit d'appliquer la proposition précédente et la formule de Plancherel à la fonction $(-\Delta)^{-\sigma/2}f$. On montre la deuxième estimation. Pour cela, il nous faut énoncer le lemme suivant.

Lemme 2.3.18 *Soient $1 \leq a < 2$ et $1 \leq p \leq \infty$. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\|f\|_{L^p(X)} \leq C \|f\|_{B_p^{1/a-1/2, 2}(X)}. \quad (2.3.21)$$

En effet, en considérant la formule de Caldéron (2.3.12), on a :

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(X)} &\leq \|f \times \varphi_{0,N}\|_{L^p(X)} + \int_0^1 \|f \times \varphi_t^N \times \varphi_t^N\|_{L^p(X)} \frac{dt}{t} \\ &\leq \|f \times \varphi_{0,N}\|_{L^p(X)} + \int_0^1 \|f \times \varphi_t^N\|_{L^p(X)} \cdot \|\varphi_t^N\|_{L^1(X)} \frac{dt}{t} \\ &= \|f \times \varphi_{0,N}\|_{L^p(X)} + \int_0^1 \frac{\|f \times \varphi_t^N\|_{L^p(X)}}{t^{1/a-1/2+1/2}} \cdot \frac{\|\varphi_t^N\|_{L^1(X)}}{t^{1-1/a}} dt \\ &\leq \|f \times \varphi_{0,N}\|_{L^p(X)} \\ &\quad + \left(\int_0^1 t^{-2(1/a-1/2)} \|f \times \varphi_t^N\|_{L^p(X)}^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^1 \frac{\|\varphi_t^N\|_{L^1(X)}^2}{t^{2(1-1/a)}} dt \right)^{1/2} \\ &\leq C \|f\|_{B_p^{1/a-1/2, 2}(X)}, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé (2.3.17), et les inégalités de Young et Hölder. Pour conclure, il nous faut examiner le terme $\|(-\Delta)^{-\sigma/2}f\|_{B_p^{1/a-1/2, 2}(X)}$. Considérons alors, $(\varphi_\varepsilon)_{0 < \varepsilon \leq 1}$ la suite des fonctions régulières K - invariantes sur X définies par leurs transformées de Fourier sphériques

$$\widehat{\varphi}_\varepsilon(\lambda) = \frac{\|\lambda\|^2}{\varepsilon + \|\lambda\|^2} e^{-\varepsilon(1 + \|\lambda\|^2)}, \quad \lambda \in \mathfrak{a}^*.$$

Par le théorème de Paley-Wiener, on montre facilement que $\widehat{\varphi}_\varepsilon$ et φ_ε appartiennent respectivement à $\mathcal{P}_W(\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*)$ et $\mathcal{D}_K(G)$. Dans ce qui suit, on montre deux propriétés fondamentales de la suite $(\varphi_\varepsilon)_{0 < \varepsilon \leq 1}$.

Lemme 2.3.19 *Soit la suite des fonctions $(\varphi_\varepsilon)_{0 < \varepsilon \leq 1}$ définie précédemment.*

1. *Pour toute distribution $f \in \mathcal{S}'(X)$, on a :*

$$f \times \varphi_{0,N} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f \times \varphi_{0,N} \times \varphi_\varepsilon \text{ et } f \times \varphi_t^N = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f \times \varphi_t^N \times \varphi_\varepsilon. \quad (2.3.22)$$

2. *Pour tout $\sigma > n = \dim(X)$, il existe une constante $C > 0$ ne dépendant pas de ε telle que*

$$\|(-\Delta)^{-\sigma/2} \varphi_\varepsilon\|_{L^\infty(X)} \leq C. \quad (2.3.23)$$

Preuve. Nous suivons la même idée utilisée pour montrer l'identité (9) dans [17].

Soit $f \in C^\infty(X) \cap \mathcal{S}'(X)$. En utilisant le théorème de convergence dominée, on peut trouver une suite $(f_j) \subset \mathcal{D}(X)$ convergente vers f dans $\mathcal{S}'(X)$. Pour démontrer (2.3.22) il est suffisant de considérer f dans $\mathcal{D}(X)$ avec la convergence dans $L^2(X)$. Par la formule de Plancherel (2.3.20), on a :

$$\|f \times \varphi_{0,N} - f \times \varphi_{0,N} \times \varphi_\varepsilon\|_{L^2(X)}^2 = \int_{\mathfrak{a}_+^* \times B} h_\varepsilon(\lambda, b) \frac{d\lambda db}{|c(\lambda)|^2}$$

où

$$h_\varepsilon(\lambda, b) = |\mathcal{H}f(\lambda, b) \widehat{\varphi}_{0,N}(\lambda)|^2 |1 - \widehat{\varphi}_\varepsilon(\lambda)|^2.$$

Observons que

$$0 \leq \widehat{\varphi}_\varepsilon(\lambda) \leq 1,$$

et que

$$\widehat{\varphi}_\varepsilon(\lambda) \rightarrow 1 \text{ si } \varepsilon \rightarrow 0, \quad \forall \lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*.$$

Ce qui permet de déduire que

$$h_\varepsilon(\lambda, b) \leq 4 |\mathcal{H}f(\lambda, b) \widehat{\varphi}_{0,N}(\lambda)|^2,$$

$$h_\varepsilon(\lambda, b) \rightarrow 0 \text{ si } \varepsilon \rightarrow 0 \quad \forall \lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*.$$

Par le théorème de convergence dominée, on conclut que

$$\int_{\mathfrak{a}_+^* \times B} h_\varepsilon(\lambda, b) \frac{d\lambda db}{|c(\lambda)|^2} \rightarrow 0 \text{ si } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Ce qui montre (2.3.22). La démonstration de (2.3.23) est élémentaire; il suffit d'écrire la formule d'inversion pour la fonction $(-\Delta)^{-\sigma/2} \varphi_\varepsilon$, utiliser le fait que $0 \leq \widehat{\varphi}_\varepsilon(\lambda) \leq 1$ et les propriétés de la fonction c de Harish-Chandra (Proposition 2.2.9). Maintenant le Corollaire 2.3.17 n'est autre qu'une conséquence directe de la définition de l'espace de Besov $B_p^{1/a-1/2,2}(X)$, des Lemmes 2.3.18 et 2.3.19 et, de la commutativité de $(-\Delta)^{-\sigma/2}$ avec le produit de convolution. \square

2.3.2.3 Décomposition atomique des espaces de Besov

Plusieurs espaces fonctionnels sur \mathbb{R}^n admettent des décompositions atomiques, en ce sens où chaque membre de ces espaces peut s'écrire comme une somme de blocs simples appelés *atomes*. La décomposition qui provient de la théorie des espaces de *Hardy* [11][13] s'est révélée utile même pour les espaces fonctionnels qui ne sont pas définis sur \mathbb{R}^n . Dans ce paragraphe, nous donnons une description d'une décomposition atomique des espaces de Besov $B_p^{s,q}(X)$ pour $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$ et $1 \leq q \leq \infty$.

Définition 2.3.20 Soit $B(x, r)$, $0 < r \leq 1$, une boule géodésique de X . Soient $s \in \mathbb{R}$ et $1 \leq p \leq \infty$. Soient L et \tilde{L} deux entiers tels que

$$L \geq \max([s] + 1, 0) \text{ et } \tilde{L} \geq \max([-s], -1). \quad (2.3.24)$$

- Une fonction régulière a est dite s -atome centré dans $B(x, r)$ si

$$\text{supp } a \subset B(x, 2r),$$

$$\sup_{x \in X} |(\tilde{\Delta}^m a)(x)| \leq 1 \text{ pour } m \leq L.$$

- Une fonction régulière a est dite (s, p) -atome centré dans $B(x, r)$ si

$$\text{supp } a \subset B(x, 2r),$$

$$\sup_{x \in X} |(\tilde{\Delta}^m a)(x)| \leq r^{s-2m-n/p} \text{ pour } m \leq L,$$

$$D^\beta(\mathcal{H}a)(0, b) = 0 \text{ pour } \beta \text{ tels que } |\beta| \leq \tilde{L}, \text{ et } b \in B.$$

La décomposition atomique des espaces de Besov exige un contrôle strict de la localisation des supports des atomes. Pour cette raison, on a besoin de certains recouvrements de l'espace symétrique $X = G/K$. Soit $(r_j)_{j=0,1,\dots}$ une suite décroissante vers 0 de nombres réels positifs. Soit $B_j = B(x_{j,i}, r_j)_{i \geq 1}$ un recouvrement uniformément local de X . La suite B_j de recouvrement est dite *finie uniformément locale* s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout j chaque $x \in X$ est un élément d'au plus C boules du recouvrement B_j . La décomposition atomique des espaces de Besov est décrite par le théorème suivant [17] :

Théorème 2.3.21 Soit $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$ et $1 \leq q \leq \infty$. Soient L et \tilde{L} deux entiers vérifiant (2.16). Soit $B_j = (B(x_{j,i}, 2^{-j}))_{i \geq 1}$ un recouvrement fini uniformément local de X . Alors :

- Toute $f \in B_p^{s,q}(X)$ se décompose sous la forme

$$f = \sum_{i \geq 0} s_i a_i + \sum_{j \geq 0} \sum_{i \geq 0} s_{j,i} a_{j,i} \quad (\text{convergence dans } \mathcal{S}'(X)), \quad (2.3.25)$$

où a_i est un s -atome centré dans la boule $B(x_{1,i}, 1)$, $a_{j,i}$ est un (s, p) -atome centré dans la boule $B(x_{j,i}, 2^{-j})$ et, s_i et $s_{j,i}$ deux nombres complexes tels que

$$\left(\sum_{i \geq 0} |s_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{j \geq 0} \left(\sum_{i \geq 0} |s_{j,i}|^p \right)^{q/p} \right)^{1/q} < \infty. \quad (2.3.26)$$

- *Inversement, si $f \in \mathcal{S}'(X)$ se décompose comme dans (2.3.25) et (2.3.26), alors $f \in B_p^{s,q}(X)$.*

Cette décomposition montre que la définition des espaces de Besov $B_p^{s,q}$ ne dépend pas de la partition de l'identité $\{\varphi_{0,N}, \varphi_t^N\}_{0 < t \leq 1}$.

Pour conclure ce paragraphe, on rappelle ici quelques injections sur les espaces de Besov, qui sont conséquences immédiates de la décomposition atomique (2.3.25) [17].

Proposition 2.3.22 *Soient $1 \leq p, q, q_0, q_1 \leq \infty$ et $s, s_0, s_1 \in \mathbb{R}$.*

(i) *(Injection élémentaire)*

$$B_p^{s,q_0}(X) \subset B_p^{s,q_1}(X), \quad q_0 \leq q_1.$$

$$B_p^{s_0,q}(X) \subset B_p^{s_1,q}(X), \quad s_1 \leq s_0.$$

(ii) *(Injections avec différentes métriques)*

$$B_p^{s_0,q}(X) \subset B_\infty^{s_1,q}(X), \quad s_1 = s_0 - n/p,$$

$$B_1^{s_0,q}(X) \subset B_p^{s_1,q}(X), \quad s_0 - n = s_1 - n/p,$$

$$B_1^{0,1}(X) \subset L^1(X) \subset B_1^{0,\infty}(X),$$

$$B_\infty^{0,1}(X) \subset C(X) \subset B_\infty^{0,\infty}(X),$$

où $C(X)$ désigne l'espace des fonctions continues bornées sur X .

2.4 Phénomène de Kunze-Stein. Dualité TT^*

La preuve des résultats du chapitre suivant nécessite le rappel de deux théorèmes importants. Le premier est une version faible du phénomène de Kunze-Stein et le deuxième est un argument abstrait d'analyse fonctionnelle, que l'on appelle TT^* (TT star).

La question étudiée par le premier phénomène est : pour quels réels p , q et r , on a l'inclusion suivante :

$$L^p(G) * L^q(G) \subseteq L^r(G).$$

La première version de ce phénomène est donnée par Kunze et Stein dans le cas où $G = SL(2, \mathbb{R})$ désigne le groupe linéaire des matrices réelles carrées d'ordre 2 et de déterminant 1. Leur preuve repose sur l'étude du prolongement analytique des séries principales en tant que représentations uniformément bornées sur des espaces de Hilbert précis. Cowling [3] généralise ce phénomène au cas d'un groupe de Lie G semi-simple connexe et de centre fini pour montrer le résultat suivant :

$$L^p(G) * L^2(G) \subseteq L^2(G); \quad 1 \leq p < 2.$$

Cette version a été développée et améliorée par Lohoué et Rychener [12], Cowling [4] et Ionescu [9] en faisant l'extension aux espaces de Lorentz sur le groupe G de rang réel égal à 1. Plus précisément, on a par exemple [4], [9] :

$$L^{q',a}(G) * L^{q',b}(G) \subseteq L^{q',c}(G); \quad 1 \leq q' < 2, \text{ et } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \geq 1,$$

$$L^{2,1}(G) * L^{2,1}(G) \subseteq L^{2,\infty}(G).$$

Le résultat qu'il nous faut est beaucoup plus faible. On utilise l'inclusion suivante :

Proposition 2.4.1 *Soient p et \tilde{p} deux réels tels que $\max\{2, \frac{2}{p}\} < \tilde{p} < p < \infty$. Alors, on a :*

$$L^{p'}(G) * L^{\tilde{p}}(G) \subseteq L^p(G).$$

L'argument de dualité TT^* est en fait un résultat développé par Kato [10] puis par Ginibre et Velo [6]. Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert, Y un espace de Banach, Y^* le dual de Y , et \mathcal{D} un espace dense dans Y . Soit $T \in \mathcal{L}_a(\mathcal{H}, \mathcal{D})$ et soit $T^* \in \mathcal{L}_a(\mathcal{D}_a^*, \mathcal{H})$ son opérateur adjoint, défini par

$$\langle Tu, v \rangle_{\mathcal{D}, \mathcal{D}_a^*} = \langle u, T^*v \rangle_{\mathcal{H}}, \quad \forall u \in \mathcal{H}, \forall v \in \mathcal{D}_a^*.$$

où $\mathcal{L}_a(Z_1, Z_2)$ est l'espace des applications linéaires de l'espace vectoriel Z_1 dans l'espace Z_2 , \mathcal{D}_a^* le dual algébrique de \mathcal{D} et $\langle \varphi, \psi \rangle_{\mathcal{D}, \mathcal{D}_a^*}$ est le produit scalaire entre \mathcal{D} et \mathcal{D}_a^* (avec $\varphi \in \mathcal{D}$ et $\psi \in \mathcal{D}_a^*$).

Théorème 2.4.2 *Les trois conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *Il existe un réel $C_1 \geq 0$ tel que pour tout $u \in \mathcal{H}$,*

$$\|Tu\|_Y \leq C_1 \|u\|_{\mathcal{H}}.$$

2. *Il existe un nombre réel $C_2 \geq 0$ tel que pour tout $v \in Y^*$,*

$$\|T^*v\|_{\mathcal{H}} \leq C_2 \|v\|_{Y^*}.$$

3. *Il existe un réel $C_3 \geq 0$ tel que pour tout $v \in Y^*$,*

$$\|TT^*v\|_Y \leq C_3 \|v\|_{Y^*}.$$

Bibliographie

- [1] J-Ph. Anker, *L^p -Fourier multipliers on Riemannian symmetric spaces of the noncompact type*. Ann. of Math. (2) 132 (1990), no. 3, 597–628.
- [2] J. Bergh, J. Löfstrom, *Interpolation spaces. An introduction*. Springer-Verlag, Berlin, 1976. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 223.
- [3] M. Cowling, *The Kunze-Stein phenomenon*. Ann. Math. 107 (1978), 209-234.
- [4] M. Cowling, *Herz's "principe de majoration" and the Kunze-Stein phenomenon*. in : Harmonic Analysis and Number Theory, Montreal 1996, in : CMS Conf. Proc, vol. 21, Amer. Math. Soc. 1997, pp. 73–88.
- [5] R. Gangolli, V.S. Varadarajan, *Harmonic analysis of spherical functions on real reductive groups*. Springer-Verlag (1988).
- [6] G. Ginibre G et G. Velo, *Generalized Strichartz inequalities for the wave equation*. J. Funct. Anal. 133 (1995), 50–86.
- [7] Harish-Chandra, *Spherical function on semi-simple Lie group, I*. Amer. J. Math. 80 (1958), 241-310.
- [8] S. Helgason, *Groups and geometric analysis. Integral geometry, invariant differential operators and spherical functions*. Academic press (1984).
- [9] A.D. Ionescu, *An endpoint for the Kunze-Stein phenomenon and related maximal operators*. Ann. Math. 152 (2000), 259-275.
- [10] T. Kato, *On nonlinear Schrödinger equation*. Ann. Inst. H. Poincaré (A) Phys. Theor. 46 (1) (1987) 113–129.
- [11] T. Kawazoe, *Atomic Hardy spaces on semisimple Lie groups*. in : Non-commutative harmonic analysis and Lie groups, Proc. Conf. Marseille 1985, Lecture Notes in Math. 1243, Springer, 1987, pp. 189–197.

- [12] N. Lohoué, T. Rychener, *Some function spaces on symmetric spaces related to convolution operators*. J. Funct. Anal. 55 (1984) 200-219.
- [13] R-A. Macías et C. Segovia, *A decomposition into of distributions on spaces of homogeneous type*. Adv. in. Math. 33 (1979), 271–309.
- [14] L.E. Person, *Real interpolation between cross-sectional L^p -spaces in quasi Banach bundles*. Technical Report, Lulea, 1984.
- [15] L. Skrzypczak *Besov spaces on symmetric manifolds*. Hokkaido Math. J. 25 (1996), no. 2, 231–247.
- [16] L. Skrzypczak, *Some equivalent norms in Sobolev and Besov spaces on symmetric manifolds*. J. London Math. Soc. (2) 53 (1996), no. 3, 569–581.
- [17] L. Skrzypczak, *Besov spaces on symmetric manifolds-The atomic decomposition*. Studia Math. 124 (1997), no. 3, 215–238.
- [18] R-S. Strichartz, *Analysis of the Laplacian on the complete Riemannian manifolds*. J. Funct. Anal 52 (1983), 48–79.
- [19] H. Triebel, *Spaces of Besov-Hardy-Sobolev type on complete Riemannian manifolds*. Ark. Mat. 24 (1986), no. 2, 299–337.
- [20] H. Triebel, *Theory of function spaces II*. Birkhäuser, 1992.

Wave equation on symmetric spaces

Abstract. We consider the wave equation on Riemannian symmetric spaces of the non-compact type. We prove that the solutions of the homogeneous equation have dispersion properties and we deduce Strichartz type estimates for these solutions. We use these estimates to treat nonlinear equations with power type. As a byproduct, we prove the global well-posedness for small energy.

3.1 Introduction.

One fundamental evolution equation of special interests of physicist is the wave equation. In this paper we shall prove estimates of type

$$\|u\|_{L^r(I, B_p^{-s,q}(X))} \leq C \left(\|F\|_{L^{r'}(I, B_{\tilde{p}}^{s,q'}(X))} + \mathcal{E}(u) \right) \quad (3.1.1)$$

for solutions u to the inhomogeneous wave equation on Riemannian symmetric spaces X ,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u - \Delta u = F,$$

where $B_p^{s,q}(X)$ denotes the Besov spaces on X , $\mathcal{E}(u)$ the energy of u and Δ is the Laplace-Beltrami operator on X .

In the case of Euclidean space \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, the history of estimates (3.1.1) began in article by Segal [18]. They are called Strichartz estimates after the fundamental work of Strichartz [21]. They were developed by several authors and applied to study well-posedness for nonlinear Cauchy problems and scattering theory. In the litterature, the paper by Ginibre and Velo [9] is the basic reference for description of these estimates. It should be noted that estimates analogous to (3.1.1) have been proved on Heisenberg groups [5], hyperbolic spaces [22] and on Damek-Ricci spaces [17]. In the general context, where X is a manifold equipped with a measure σ and $\Delta = L$ is a second order differential operator on X which satisfies some integrability conditions, Lohoué proved some L^p -estimates of solutions of wave equation in terms of norms of the initial data. The proofs consist of a series of

technical estimates that make heavy use of spectral functional calculus and complex interpolation theory (see [16]).

Here, we show that the tools used by Ginibre and Velo in [9] can be generalized to the case of Riemannian symmetric spaces of the non-compact type. We start from a suitable representation of a solution u of the homogeneous equation

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u - \Delta u = 0$$

by establishing inequalities of decay time when initial data $u(t=0)$ and $\frac{\partial}{\partial t} u(t=0)$ belong to suitable *Besov spaces* on X . This assumption can be seen as a regularity condition. These inequalities describe the dispersion properties related to the spread of waves on X and take the following form

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^*} |t|^\beta \|u(t)\|_{L^p(X)} < +\infty, \quad (3.1.2)$$

where $p \in]2, +\infty[$ and β depends on p when $0 < |t| < 1$. Combined with standard arguments of functional analysis, the estimation (3.1.2) leads to the inequality (3.1.1) for suitable pairs (r, p) and (\tilde{r}, \tilde{p}) . We apply these estimates to study the well-posedness for the nonlinear Cauchy problem with a power-like nonlinearity F_κ of order κ

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u - \Delta u = F_\kappa(u).$$

Our results are in the context where $X = G/K$ with G a noncompact connected semisimple Lie group with finite center and K a maximal compact subgroup of G . Write $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ the Cartan decomposition of the Lie algebra \mathfrak{g} of G , where \mathfrak{k} denotes the Lie algebra of K and \mathfrak{p} is identified with the tangent space to G/K on the origin eK . Let \mathfrak{a} be a maximal abelian subspace of \mathfrak{p} . Fix a positive system Σ_+ of roots of \mathfrak{g} relative to \mathfrak{a} , we denote ρ the half-sum of positive roots counted with their multiplicities and put $\ell = \dim(\mathfrak{a})$. The Killing form of \mathfrak{g} induces a norm on \mathfrak{a} , on the vector dual space \mathfrak{a}^* of \mathfrak{a} and extends linearly to a norm on $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ and $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$. Consider $(\varphi_{0,N}, \varphi_\tau^N)_{0 < \tau \leq 1, N \in \mathbb{N}}$ a system of bi- K -invariant compactly supported smooth functions on G . We denote $B_p^{s,q}(X)$ for $2N > |s|$, $1 \leq p \leq \infty$ and $1 \leq q \leq \infty$ the Besov space on X , i.e. the space of tempered distributions on X satisfying :

$$\|f\|_{B_p^{s,q}(X)} = \|f * \varphi_{0,N}\|_{L^p(X)} + \left(\int_0^1 \tau^{-sq} \|f * \varphi_\tau^N\|_{L^p(X)}^q \frac{d\tau}{\tau} \right)^{1/q} < \infty.$$

Let Δ be the Laplace-Beltrami operator on X and $\sigma > n = \dim(X)$. Consider the following linear Cauchy problem on X

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) - \Delta u(t, x) = F(t, x), & t \in \mathbb{R}, x \in X \\ u(t=0, x) = u_0(x), \\ \frac{\partial}{\partial t} u(t=0, x) = u_1(x). \end{cases} \quad (3.1.3)$$

Our first main result is the following dispersive estimate of homogeneous solution of (3.1.3).

Theorem 1 (cf. Theorem 3.4.4 below) *Let $2 < p < \infty$, $m \geq 0$ and $\sigma > n$. There exists a constant $C = C(\sigma) > 0$ such that the following dispersive estimates holds*

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^p} \leq C \left(\|u_0\|_{B_{p'}^{m-\sigma,1}} + \|u_1\|_{B_{p'}^{m-(\sigma-1),1}} \right) \begin{cases} |t|^{-(n-1)(1/2-1/p)}, & \text{if } 0 < |t| < 1, \\ |t|^{-\ell/2}, & \text{if } |t| \geq 1. \end{cases}$$

The strategy of the proof is :

- use the Kunze-Stein phenomenon [6], [12] and complex interpolation to derive $L^{p'} - L^p$ dispersive estimate of the kernel

$$W_{t,\sigma}(x) = (-\Delta)^{-\sigma/2} e^{it(-\Delta)^{-1/2}}(x), \quad \sigma > n, \quad t \in \mathbb{R},$$

from the inversion formula,

- combine the injection $B_p^{0,1} \subset L^p$ with commutativity of operator $(-\Delta)^{\sigma/2}$ with convolutions.

Suppose $\ell = \dim(a) \geq 2$. Consider *admissible pairs* of indices (r, p) corresponding to the triangle

$$\mathcal{T}_n = \left\{ \left(\frac{1}{r}, \frac{1}{p} \right) \in]0, \frac{1}{2}[\times]0, \frac{1}{2}[; \frac{2}{r} + \frac{n-1}{p} \geq \frac{n-1}{2} \right\},$$

and let $I \subset \mathbb{R}$ be a bounded or unbounded interval. The second main result is the following Strichartz type estimate.

Theorem 2 (cf. Theorem 3.4.5 below) *Let $m \geq 0$, $\tilde{m} \geq 0$ and $\sigma > \frac{n}{2}$. Assume that (r, p) and (\tilde{r}, \tilde{p}) are admissible pairs as above. Then there exists a constant $C = C(\sigma) > 0$ such that the following Strichartz estimate holds for solutions to the inhomogeneous wave equation :*

$$\|u\|_{L^r(I, B_p^{-\frac{m}{2}, 2}(X))} \leq C \left(\|F\|_{L^{\tilde{r}'}(I, B_{\tilde{p}'}^{\tilde{m}-\sigma, 2}(X))} + \mathcal{E}(u) \right),$$

where $\mathcal{E}(u) = \|u_0\|_{H_2^\sigma(X)} + \|u_1\|_{H_2^{\sigma-1}(X)}$.

The main idea of the proof is to apply the TT^* argument developed by Kato [13], Ginibre and Velo [9] and Keel and Tao [14].

We use the above Strichartz estimate and classical fixed point procedure to prove local and global well-posedness for the *nonlinear* Cauchy problem

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u - \Delta u = F_\kappa(u) \\ u(t=0) = u_0, \\ \frac{\partial}{\partial t} u(t=0) = u_1, \end{cases} \quad (3.1.4)$$

where a nonlinear term F_κ is of the power type, i.e. there exist constants $\kappa > 1$ and $C > 0$ such that

$$|(-\Delta)^{\sigma/2} F_\kappa(u)| \leq C|u|^\kappa \text{ and } |(-\Delta)^{\sigma/2}(F_\kappa(u) - F_\kappa(v))| \leq C|u - v|(|u| + |v|)^{\kappa-1}. \quad (3.1.5)$$

Let $\mathcal{E}(u) = \|u_0\|_{H_2^\sigma(X)} + \|u_1\|_{H_2^{\sigma-1}(X)}$ and $\sigma > \frac{n}{2}$. We have the following well-posedness result.

Theorem 3 (cf. Theorem 3.5.1 below)

1. If $1 < \kappa \leq 1 + \frac{4}{n-1}$, then the nonlinear wave equation (3.1.4) is globally well posed for small energy $\mathcal{E}(u)$. Moreover, the solution u satisfies

$$u \in L^{\kappa+1}(\mathbb{R}, L^{\kappa+1}(X)).$$

2. If $1 < \kappa < 1 + \frac{4}{n-1}$, then the nonlinear wave equation (3.1.4) is locally well posed for arbitrary energy $\mathcal{E}(u)$.

It should be noted that Lindblad and Sogge proved a more general result but only in the case of the Euclidean space \mathbb{R}^n . They showed global existence for small data u_0 and u_1 in homogeneous Sobolev spaces $\dot{H}^{s(\kappa)}(\mathbb{R}^n) \times \dot{H}^{s(\kappa)-1}(\mathbb{R}^n)$ provided $\kappa \geq 1 + \frac{4}{n-1}$ [15]. Here we only deal with the particular case where $s(\kappa) = \sigma > \frac{n}{2}$ and bounded values for κ .

Finally, let us mention that J.-P. Anker and V. Pierfelice proved sharp estimates for nonlinear Schrödinger equation on real hyperbolic spaces [3], i. e. with $\ell = 1$. Moreover, recently, J.-P. Anker informed us that he has obtained, with V. Pierfelice and M. Vallarino, new results for nonlinear wave equations on real hyperbolic spaces as well [4]. However our results are, somewhat, complementary since we deal with the case $\ell \geq 2$ (though some of our results are actually valid for $\ell \geq 1$). Our technics are similar to those used in [3], in particular we use the Kunze-Stein phenomenon [6][12] to obtain estimates of some convolution kernel associated with the Laplace-Beltrami operator Δ on G/K .

Acknowledgements. We are grateful to Noël Lohoué who suggested the problem and generously shared his insights on the topic. We thank Jean-Philippe Anker for his precious help and for explaining his recent results with Vittoria Pierfelice in [3]. We are indebted to the referee for comments and suggestions that helped us improve the paper.

3.2 Preliminaries. Notations.

We recall the basic notations of Fourier analysis on Riemannian symmetric spaces of the noncompact type. We refer to [10], [8] and [11] for geometric properties and more details for harmonic analysis on these spaces. Let G be a noncompact connected semisimple Lie group with finite center and K a maximal compact subgroup of G . Let \mathfrak{g} (resp. \mathfrak{k}) be the Lie algebra of G (resp. K) and consider the Cartan decomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ of \mathfrak{g} . Here \mathfrak{p} is the (K -invariant) orthogonal complement of \mathfrak{k} in \mathfrak{g} with respect to the Killing form $\langle \cdot, \cdot \rangle$ of \mathfrak{g} . This form induces a K -invariant scalar product on \mathfrak{p} , and hence a G -invariant Riemannian metric on the symmetric homogeneous manifold $X = G/K$ whose tangent space at origin eK is naturally identified with \mathfrak{p} . Fix a maximal abelian subspace \mathfrak{a} in \mathfrak{p}

and denote by \mathfrak{a}^* (respectively $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$) the real (respectively complex) vector dual of \mathfrak{a} . The Killing form of \mathfrak{g} induces a scalar product on \mathfrak{a}^* and a \mathbb{C} -bilinear form on $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$. If $\lambda, \mu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ let $H_\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ be determined by $\lambda(H) = \langle H_\lambda, H \rangle$, $\forall H \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$, and put $\langle \lambda, \mu \rangle = \langle H_\lambda, H_\mu \rangle$. We put $\|\lambda\| = \langle \lambda, \lambda \rangle^{1/2}$ for $\lambda \in \mathfrak{a}^*$. Denote by Σ the root system of \mathfrak{g} relatively to \mathfrak{a} . Let W be the Weyl group associated to Σ , and let m_λ denote the multiplicity of the root $\lambda \in \Sigma$. In particular if \mathfrak{a}_+ denotes the positive Weyl chamber in \mathfrak{a} corresponding to some fixed set Σ_+ of positive roots, we have the Cartan decomposition $G = K \exp(\overline{\mathfrak{a}_+})K$ of G , where $\overline{\mathfrak{a}_+}$ denote the closure of \mathfrak{a}_+ . Each element $x \in G$ is written uniquely as $x = k_1 A(x) k_2$. We denote by $\|x\| = \|A(x)\|$ the norm defined on G . Let $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\lambda \in \Sigma_+} m_\lambda \lambda$ and let $n = \dim(X)$.

Consider $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ the Iwasawa decomposition of \mathfrak{g} and the corresponding Iwasawa decomposition $G = K \exp(\mathfrak{a})N$ of G , where N is the analytic subgroup of G associated to the nilpotent subalgebra \mathfrak{n} . Denote by $H(x)$ the Iwasawa component of $x \in G$ in \mathfrak{a} . There is a basic estimate for this component (see [11], p. 476)

$$\|H(x)\| \leq c\|x\| \quad (3.2.6)$$

and it is called Iwasawa projection, where c is a positive constant.

Finally, let $\ell = \dim(\mathfrak{a})$ the real dimension of \mathfrak{a} . By definition, ℓ is the real rank of G .

We identify functions on $X = G/K$ with functions on G which are K -invariant on the right, and hence bi- K -invariant functions on G with functions on X , K -invariants on the left. If f is a sufficiently regular bi- K -invariant function on G , then its *spherical-Fourier transform* is a function on $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ defined by

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_G f(x) \varphi_{-\lambda}(x) dx, \quad \lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*,$$

where φ_λ is the *spherical function* on G defined by

$$\varphi_\lambda(x) = \int_K e^{\langle i\lambda - \rho, H(xk) \rangle} dk, \quad x \in G, \quad \lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*.$$

The Plancherel and inversion formula for the spherical transform are respectively given by

$$\int_G |f(x)|^2 dx = \frac{1}{|W|} \int_{\mathfrak{a}^*} |\widehat{f}(\lambda)|^2 |c(\lambda)|^{-2} d\lambda,$$

$$f(x) = \frac{1}{|W|} \int_{\mathfrak{a}^*} \varphi_\lambda(x) \widehat{f}(\lambda) |c(\lambda)|^{-2} d\lambda, \quad x \in G,$$

where $c(\lambda)$ is the *Harish-Chandra c -function* and $|W|$ denotes the order of the Weyl group W .

Now we summarize some fundamental properties of spherical and Harish-Chandra functions [1], [2], [8]. Let $U(\mathfrak{g})$ be the universal enveloping algebra of \mathfrak{g} and $S(\mathfrak{a}^*)$ be the symmetric algebra of \mathfrak{a}^* . The elements of $U(\mathfrak{g})$ acts on $C^\infty(G)$, as differential operators, on both sides.

We shall write $f(D, g, E)$ for the action of $(D, E) \in U(\mathfrak{g}) \times U(\mathfrak{g})$ on $f \in C^\infty(G)$ at $g \in G$. Explicitly :

$$f(D, g, E) = \left(\frac{\partial}{\partial s_1} \cdots \frac{\partial}{\partial s_d} \frac{\partial}{\partial t_1} \cdots \frac{\partial}{\partial t_e} \right)_{/s_1=\dots=s_d=t_1=\dots=t_e=0} \\ \times f((\exp s_1 X_1) \dots (\exp s_d X_d) (\exp t_1 Y_1) \dots (\exp t_e Y_e))$$

if $D = X_1 \dots X_d$ and $E = Y_1 \dots Y_e$ with $X_1, \dots, X_d, Y_1, \dots, Y_e \in \mathfrak{g}$.

Proposition 3.2.1 1. The function $\varphi_\lambda(x)$ is bi- K -invariant in $x \in G$ and W -invariant in $\lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$.

2. The function $\varphi_\lambda(x)$ is a C^∞ in x and holomorphic in $\lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$.

3. If Δ is the Laplace-Beltrami operator on X , then

$$\Delta \varphi_\lambda = -(\|\lambda\|^2 + \|\rho\|^2) \varphi_\lambda.$$

4. If $D, E \in U(\mathfrak{g})$, there is a constant $C > 0$ such that

$$|\varphi_\lambda(D, x, E)| \leq C(\|\lambda\| + 1)^{\deg D + \deg E} \varphi_{i\text{Im}\lambda}(x).$$

5. If $P \in S(\mathfrak{a}^*)$, there is a constant $C > 0$ such that

$$|P\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right) \varphi_\lambda(x)| \leq C(\|x\| + 1)^{\deg P} \varphi_{i\text{Im}\lambda}(x).$$

Proposition 3.2.2 The function $|c(\lambda)|^{-2}$ is C^∞ , nonnegative and W -invariant on \mathfrak{a}^* , and all its derivatives have polynomial growth.

Remark 3.2.1 The above proposition means that $|c(\lambda)|^{-2}$ and all its derivatives are controlled by $(1 + \|\lambda\|)^d$, where $d = n - \ell$ (see [8], page 272).

3.3 Besov spaces.

As was already mentioned in the introduction, we need a definition for Besov spaces on $X = G/K$. We adopt the approach given in [20] analogous to the Euclidean case [24]. We consider a continuous partition of unity $(\varphi_{0,N}, \varphi_\tau^N)_{0 < \tau \leq 1, N \in \mathbb{N}}$ on \mathfrak{a}^* slightly different from the one given in [20]. More precisely, $\varphi_{0,N}$ and φ_τ^N are two C^∞ compactly supported bi- K -invariant functions on G such that if $f \in L^2(X)$, then the following formula of Calderon type holds

$$f(x) = (f * \varphi_{0,N})(x) + \int_0^1 (f * \varphi_\tau^N * \varphi_\tau^N)(x) \frac{d\tau}{\tau}$$

(convergence in $L^2(X)$).

Let $s \in \mathbb{R}$, the Besov space $B_p^{s,q}(X)$ on X is the space of tempered distributions on X satisfying :

$$\|f\|_{B_p^{s,q}(X)} = \|f * \varphi_{0,N}\|_{L^p(X)} + \left(\int_0^1 \tau^{-sq} \|f * \varphi_\tau^N\|_{L^p(X)}^q \frac{d\tau}{\tau} \right)^{1/q} < \infty,$$

for $2N > |s|$, $1 \leq p \leq \infty$ and $1 \leq q \leq \infty$. We can moreover assume that the function φ_τ^N is supported in the geodesic ball $B(eK, \tau)$. Using the polynomial growth of balls near the origin, we easily prove that $\|\varphi_\tau^N\|_{L^1(X)}$ is finite and depends on N but not on τ . Consequently we obtain that $B_p^{0,1}(X) \subset L^p(X)$.

It was proven in [19] that for $1 < p < \infty$, one has :

$$B_p^{s,q}(X) = (H_p^{s_0}(X), H_p^{s_1}(X))_{\theta,q},$$

where $0 < \theta < 1$, $s = \theta.s_0 + (1-\theta).s_1$ and $H_p^s(X) = (I - \Delta)^{-s/2} L^p(X)$ is the Bessel-potential space and, $(\cdot, \cdot)_{\theta,q}$ the real interpolation method. Therefore we deduce that $B_p^{s,q}(X)$ coincides with the Besov spaces defined on X by uniform localization [23] and is a Banach space. Moreover the dual space of $B_p^{s,q}(X)$ is $B_{p'}^{-s,q'}(X)$, where p' and q' denote the conjugate numbers of p and q respectively. Furthermore $(-\Delta)^{\tilde{s}/2} B_p^{s,q}(X) = B_p^{s+\tilde{s},q}(X)$.

3.4 Dispersive and Strichartz estimates on $X = G/K$.

Throughout this section, A_j, B_j, \dots will stand for positive constants.

Let $\sigma > n = \dim(X)$. Consider the Cauchy problem for the homogeneous linear wave equation on the symmetric space $X = G/K$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) - \Delta u(t, x) = 0, \\ u(t = 0, x) = u_0(x) = (-\Delta)^{-\sigma/2} v_0(x), \\ \frac{\partial}{\partial t} u(t = 0, x) = u_1(x) = (-\Delta)^{-\sigma/2} v_1(x). \end{cases}$$

The solution is given by

$$u(t, x) = \cos(t\sqrt{-\Delta})u_0(x) + \frac{\sin(t\sqrt{-\Delta})}{\sqrt{-\Delta}}u_1(x).$$

Here the initial data u_j , $j = 0, 1$, are given by the formal identity

$$u_j = (-\Delta)^{-\sigma/2} v_j = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \alpha \rightarrow \infty} \Gamma(\sigma/2)^{-1} \int_\varepsilon^\alpha t^{\sigma/2-1} e^{t\Delta} v_j dt \text{ in } L^p(X).$$

We introduce the associated convolution kernel W_t related to the Laplace-Beltrami operator Δ . It is a bi- K -invariant kernel on G and can be expressed via the inverse spherical Fourier transform as follows :

$$W_t(x) = \frac{1}{|W|} \int_{\alpha^*} e^{it\sqrt{\|\lambda\|^2 + \|\rho\|^2}} \varphi_\lambda(x) |c(\lambda)|^{-2} d\lambda, \quad t \in \mathbb{R} \text{ and } x \in G.$$

This kernel satisfies the following properties

- i) $\widehat{W}_t(\lambda) = e^{it\sqrt{\|\lambda\|^2 + \|\rho\|^2}}$.
- ii) $\frac{\partial^2}{\partial t^2} W_t(x) = \Delta W_t(x)$.

Let $t \in \mathbb{R}$ and $\sigma > n = \dim(X)$. We define the convolution kernel $W_{t,\sigma}$ by

$$W_{t,\sigma}(x) = \frac{1}{|W|} \int_{\mathfrak{a}^*} e^{it\sqrt{\|\lambda\|^2 + \|\rho\|^2}} (\|\lambda\|^2 + \|\rho\|^2)^{-\sigma/2} \varphi_\lambda(x) |c(\lambda)|^{-2} d\lambda, \quad x \in G$$

It is clear that $W_{t,\sigma}$ is bi- K -invariant function on G and that $W_{t,\sigma}(x) = (-\Delta)^{-\sigma/2} W_t(x)$. We now prove an estimate of this kernel.

(a) The estimate for large t . The idea for providing estimates for $|t| \geq 1$ is to split $W_{t,\sigma}$ into a local part $W_{t,\sigma}^0$ and a part at infinity $W_{t,\sigma}^\infty$. We prove some decay properties of the two parts separately, and then deduce a pointwise estimate of $W_{t,\sigma}$ for bounded ℓ -values.

Write $W_{t,\sigma}(x) = W_{t,\sigma}^0(x) + W_{t,\sigma}^\infty(x)$, where

$$W_{t,\sigma}^0(x) = \frac{1}{|W|} \int_{\|\lambda\| \leq 1} e^{it\sqrt{\|\lambda\|^2 + \|\rho\|^2}} (\|\lambda\|^2 + \|\rho\|^2)^{-\sigma/2} \varphi_\lambda(x) |c(\lambda)|^{-2} d\lambda$$

and

$$W_{t,\sigma}^\infty(x) = \frac{1}{|W|} \int_{\|\lambda\| \geq 1} e^{it\sqrt{\|\lambda\|^2 + \|\rho\|^2}} (\|\lambda\|^2 + \|\rho\|^2)^{-\sigma/2} \varphi_\lambda(x) |c(\lambda)|^{-2} d\lambda.$$

Proposition 3.4.1 *Let $a \in 2\mathbb{N}$. There exists a constant $C = C(a) > 0$ depends on a such that the following estimate holds*

$$|W_{t,\sigma}^0(x)| \leq C |t|^{-\ell/2} \varphi_0(x) (3 + \|x\|)^a, \quad \ell < a.$$

for every t such that $|t| \geq 1$ and $x \in G$.

Proof. We divide the proof into three steps.

Step 1. First we recall Morse's fundamental lemma, which describes completely the local structure of a map in a neighborhood of a non-degenerate critical point. It says that in a neighborhood of a non-degenerate critical point, the map can be written as a quadratic form in a suitable chart [25].

Lemma 3.4.2 *Let b be a non-degenerate critical point of a real-valued function ϕ on a differentiable manifold M of dimension ℓ . Then there exists a chart (x_1, \dots, x_ℓ) in a neighborhood U of b such that $x_j(b) = 0$, $\forall j$ and*

$$\phi(x) = \phi(b) + \frac{1}{2} \langle Qx, x \rangle = \phi(b) - \sum_{j=1}^{\alpha} x_j^2 + \sum_{j=\alpha+1}^{\ell} x_j^2,$$

where Q is the Hessian matrix of ϕ and α is the index of b .

Remark 3.4.1 *The index of a non-degenerate critical point b of ϕ is the dimension of the largest subspace of the tangent space to M at b on which the Hessian is negative definite.*

We apply this lemma for the function $\phi(\lambda) = \sqrt{\|\lambda\|^2 + \|\rho\|^2}$ and 0 that is the non-degenerate critical point of index 0. Let $\omega : \mathbf{a} \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ be a system of local coordinates centered in 0. Using Parseval formula, we may write

$$\begin{aligned} W_{t,\sigma}^0(x) &= \frac{1}{|W|} \int_{B_\omega} e^{it\phi(\omega^{-1}(y))} (\|\omega^{-1}(y)\|^2 + \|\rho\|^2)^{-\sigma/2} \varphi_{\omega^{-1}(y)}(x) |c(\omega^{-1}(y))|^{-2} |J_{\omega^{-1}}(y)| dy \\ &= \frac{1}{|W|} e^{it\|\rho\|^2} \int_{\mathbb{R}^\ell} \mathcal{F}(e^{i\frac{t}{2\|\rho\|}\|\cdot\|^2})(\xi) \mathcal{F}(h)(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

where h is the function defined on \mathbb{R}^ℓ by

$$h(y) = (\|\omega^{-1}(y)\|^2 + \|\rho\|^2)^{-\sigma/2} \varphi_{\omega^{-1}(y)}(x) |c(\omega^{-1}(y))|^{-2} |J_{\omega^{-1}}(y)|,$$

$J_{\omega^{-1}}(y)$ is the jacobian in the chart ω^{-1} , $B_\omega = \omega(B(0, 1))$, $B(0, 1)$ is the unit ball in \mathbf{a} and \mathcal{F} denote the Fourier transform on \mathbb{R}^ℓ

Step 2. We calculate the Fourier transform of the bounded continuous function defined on B_ω by

$$y \mapsto e^{i\frac{t}{2\|\rho\|}\|y\|^2}.$$

Using Morse's lemma, it was proved in [25] that

$$\mathcal{F}(e^{it(Qy,y)/2})(\xi) = \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{m/2} |\det(Q)|^{-1/2} e^{i(\pi/4)\text{sgn}(Q)} e^{-i(Q^{-1}\xi,\xi)/2t},$$

where Q is a nonsingular symmetric $m \times m$ matrix. In particular, we obtain that :

$$\mathcal{F}(e^{it\frac{\|y\|^2}{2\|\rho\|}})(\xi) = (2\pi\|\rho\|)^{\ell/2} t^{-\ell/2} e^{i\pi/4\ell} e^{-i\frac{\|\rho\|}{2t}\|\xi\|^2}.$$

Step 3. Now (3.4.7) implies that

$$|W_{t,\sigma}^0(x)| \leq A_1 |t|^{-\ell/2} \|\mathcal{F}(h)\|_{L^1(\mathbb{R}^\ell)}.$$

We would like to have an estimate for the norm $\|\mathcal{F}(h)\|_{L^1(\mathbb{R}^\ell)}$. To do this, consider the Euclidean Laplace operator Δ_e and let $a \in 2\mathbb{N}$ such that $\ell = \dim(\mathbf{a}) < a$. There exists a constant $A_2 = A_2(a)$ such that

$$\|\mathcal{F}h\|_{L^1(\mathbb{R}^\ell)} \leq A_3 (\|h\|_{L^1(\mathbb{R}^\ell)} + \|\Delta_e^{a/2} h\|_{L^1(\mathbb{R}^\ell)}).$$

It is clear that $\|h\|_{L^1(\mathbb{R}^\ell)} \leq A_3 \varphi_0(x)$, $A_3 = A_3(\sigma) > 0$.

For $y \in B_\omega$, set

$$\Delta_e^{a/2} h(y) = \sum_{b=0}^a \frac{a!}{b!(a-b)!} \mathcal{D}_1 \left((\|\omega^{-1}(y)\|^2 + \|\rho\|^2)^{-\sigma/2} \varphi_{\omega^{-1}(y)}(x) \right) \mathcal{D}_2 \left(|c(\omega^{-1}(y))|^{-2} |J_{\omega^{-1}}(y)| \right),$$

where \mathcal{D}_1 and \mathcal{D}_2 are two differential operators of degrees $a - b$ and b respectively.

Eventually one has $|\mathcal{D}_2(|c(\omega^{-1}(y))|^{-2} |J_{\omega^{-1}}(y)|)| \leq A_4$, $A_4 = A_4(b) > 0$.

Let us expand

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}_1\left(\left(\|\omega^{-1}(y)\|^2 + \|\rho\|^2\right)^{-\sigma/2}\varphi_{\omega^{-1}(y)}(x)\right) = \\ & \sum_{c=0}^{a-b} \frac{(a-b)!}{c!(a-b-c)!} \mathcal{D}_{1,1}\left(\left(\|\omega^{-1}(y)\|^2 + \|\rho\|^2\right)^{-\sigma/2}\mathcal{D}_{1,2}\varphi_{\omega^{-1}(y)}(x)\right), \end{aligned}$$

where $\mathcal{D}_{1,1}$ and $\mathcal{D}_{1,2}$ are two differential operators of degree $a - b - c$ and c respectively. Using the estimate (2.6) for the Iwasawa projection, we are lead to the conclusion

$$|\mathcal{D}_{1,2}\varphi_{\omega^{-1}(y)}(x)| \leq A_6\varphi_0(x)(1 + \|x\|)^c.$$

Thus $|\mathcal{D}_1\left(\left(\|\omega^{-1}(y)\|^2 + \|\rho\|^2\right)^{-\sigma/2}\varphi_{\omega^{-1}(y)}(x)\right)| \leq A_7(\sigma, a)\varphi_0(x)(2 + \|x\|)^{a-b}$. This allows one to conclude that

$$\|\Delta_e^{a/2}h\|_{L^1(\mathbb{R}^\ell)} \leq A_8(\sigma, a)\varphi_0(x)(3 + \|x\|)^a.$$

We have shown that

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}h\|_{L^1(\mathbb{R}^\ell)} & \leq A_2\left(A_3(\sigma)\varphi_0(x) + A_8(\sigma, a)\varphi_0(x)(3 + \|x\|)^a\right) \\ & \leq A_9(\sigma, a)\varphi_0(x)(3 + \|x\|)^a. \end{aligned}$$

This finishes the proof of Proposition 3.4.1. □

Next we turn to the pointwise estimate of $W_{t,\sigma}^\infty$.

Proposition 3.4.3 *For all $d \in \mathbb{N}$ there exists a constant $C = C(d) > 0$ depending on d such that the following estimate holds, for every $x \in G$ and for every t such that $|t| > 1$:*

$$|W_{t,\sigma}^\infty(x)| \leq C|t|^{-d}\varphi_0(x)(1 + \|x\|)^d, \quad \text{provided } \sigma > n = \dim(X).$$

Proof. Consider the operator \mathcal{D} defined by

$$\mathcal{D} = \frac{\sqrt{s^2 + \|\rho\|^2}}{s} \frac{d}{ds}.$$

According to the fact that

$$\mathcal{D}^d(e^{it\sqrt{s^2 + \|\rho\|^2}}) = (it)^d e^{it\sqrt{s^2 + \|\rho\|^2}}, \quad \forall d \geq 1,$$

and using spherical coordinates, we obtain that

$$W_{t,\sigma}^\infty(x) = \frac{1}{|W|} (it)^{-d} \int_{|s|>1} \mathcal{D}^d(e^{it\sqrt{s^2 + \|\rho\|^2}})\psi(s, x)s^{\ell-1} ds, \quad \forall d \geq 1,$$

where $\psi(s, x)$ is the function given by

$$\psi(s, x) = (s^2 + \|\rho\|^2)^{-\sigma/2} \int_{S^{\ell-1}} \varphi_{s\theta}(x)|c(s\theta)|^{-2} d\theta, \quad \text{with } |s| > 1 \text{ and } x \in G.$$

In the sense of distributions, we integrate by parts to see that

$$\begin{aligned}
\int_{|s|>1} \mathcal{D}^d(e^{it\sqrt{s^2+\|\rho\|^2}})\psi(s, x)s^{\ell-1}ds &= \int_{|s|>1} \mathcal{D}\mathcal{D}^{d-1}(e^{it\sqrt{s^2+\|\rho\|^2}})\psi(s, x)s^{\ell-1}ds \\
&= \int_{|s|>1} \frac{\sqrt{s^2+\|\rho\|^2}}{s} \frac{d}{ds} \left(\mathcal{D}^{d-1}(e^{it\sqrt{s^2+\|\rho\|^2}}) \right) \psi(s, x)s^{\ell-1}ds \\
&= - \int_{|s|>1} \mathcal{D}^{d-1}(e^{it\sqrt{s^2+\|\rho\|^2}}) \frac{d}{ds} \left(\frac{\sqrt{s^2+\|\rho\|^2}}{s} \psi(s, x)s^{\ell-1} \right) ds.
\end{aligned}$$

By induction on d , one gets

$$W_{t,\sigma}^\infty(x) = \frac{1}{|W|} (it)^{-d} \int_{|s|>1} e^{it\sqrt{s^2+\|\rho\|^2}} \mathcal{D}_*^d(\psi(s, x)s^{\ell-1}) ds, \quad \forall d \geq 1,$$

where \mathcal{D}_* is the operator defined by

$$\mathcal{D}_*(h) = \frac{d}{ds} \left(\frac{\sqrt{s^2+\|\rho\|^2}}{s} h(s) \right).$$

It remains to show that

$$\int_{|s|>1} |\mathcal{D}_*^d(\psi(s, x)s^{\ell-1})| ds = O(\varphi_0(x)(1 + \|x\|)^d)$$

The term $\mathcal{D}_*^d(\psi(s, x)s^{\ell-1})$ can be expanded as

$$\mathcal{D}_*^d(\psi(s, x)s^{\ell-1}) = \sum_{j=0}^d \psi_j(s, d) \frac{d^j \psi(s, x)}{ds^j} s^{\ell-1},$$

where $(\psi_j(s, d))_{j=0, \dots, d}$ is a sequence of bounded functions which can be written as a combinations of $(\frac{d^j}{ds^j} \frac{\sqrt{s^2+\|\rho\|^2}}{s})_{j=0, \dots, d-1}$. Using the fact that (Proposition 3.2.2)

$$|c(s\theta)|^{-2} \leq B_1(1 + |s|)^{n-\ell}$$

and (Proposition 3.2.1)

$$\left| \frac{d^k \varphi_{s\theta}(x)}{ds^k} \right| \leq B_2 \varphi_0(x)(1 + \|x\|)^k, \quad \forall k,$$

we deduce that

$$\left| \frac{d^j \psi(s, x)}{ds^j} \right| |s|^{\ell-1} \leq B_3(j) \varphi_0(x)(1 + \|x\|)^j |s|^{-\sigma+n-1}, \quad \forall j = 0, \dots, d.$$

Summing over j leads to :

$$|\mathcal{D}_*^d(\psi(s, x)s^{\ell-1})| \leq B_4(d) \varphi_0(x)(1 + \|x\|)^d |s|^{-\sigma+n-1}.$$

Therefore, we obtain that

$$\int_{|s|>1} |\mathcal{D}_*^d(\psi(s, x)s^{\ell-1})| ds \leq B_4(d) \varphi_0(x)(1 + \|x\|)^d \int_{|s|>1} |s|^{-\sigma+n-1} ds = O(\varphi_0(x)(1 + \|x\|)^d),$$

if $n = \dim(X) < \sigma$. This completes the proof of Proposition 3.4.3. \square

Corollary 3.4.2 *Let $a \in 2\mathbb{N}$ and $\sigma \in \mathbb{R}$ satisfying $\ell < a$ and $n < \sigma$. There exists a constant $C = C(\sigma, a) > 0$ such that the following estimates holds, for every $x \in G$ and for every $t \in \mathbb{R}$ such that $|t| \geq 1$:*

$$|W_{t,\sigma}(x)| \leq C|t|^{-\ell/2}\varphi_0(x)(3 + \|x\|)^a. \quad (3.4.8)$$

Proof. We simply take $a = d$ in the preceding proposition. \square

(b) The estimate for small t . When $0 < |t| < 1$, we recall the following key result [7].

Proposition 3.4.4 *There exists a constant $C > 0$ such that the following dispersive estimate holds*

$$\|(-\Delta)^{-\sigma/2}e^{it\sqrt{-\Delta}}\|_{L^1 \rightarrow L^\infty} \leq C|t|^{-\frac{n-1}{2}}, \text{ if } \sigma > \frac{n+1}{2} \text{ and } 0 < |t| < 1. \quad (3.4.9)$$

Using the pointwise estimate (3.4.8) and the dispersive estimate (3.4.9), we can study the L^p mapping properties of the propagator $(-\Delta)^{-\sigma/2}e^{it\sqrt{-\Delta}}$, when $\sigma > n$.

Theorem 3.4.3 *Let $2 < p \leq \infty$ and $\sigma > n$. There exists a constant $C = C(\sigma) > 0$ such that the following dispersive estimates hold*

$$\|(-\Delta)^{-\sigma/2}e^{it\sqrt{-\Delta}}\|_{L^{p'} \rightarrow L^p} \leq C \begin{cases} |t|^{-(n-1)(1/2-1/p)}, & \text{if } 0 < |t| < 1, \\ |t|^{-\ell/2}, & \text{if } |t| \geq 1. \end{cases} \quad (3.4.10)$$

Proof. It is not difficult to see that $\|(-\Delta)^{-\sigma/2}e^{it\sqrt{-\Delta}}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq 1$. Then, the first estimate is obtained by interpolation with (3.4.9). We prove the second part.

The function $x \mapsto \varphi_0(x)(3 + \|x\|)^a$ is in $L^{\tilde{p}}$ for all $\tilde{p} > 2$. Thus, according to (3.4.8), we deduce that $W_{t,\sigma}$ is in $L^{\tilde{p}}$ and

$$\|W_{t,\sigma}\|_{L^{\tilde{p}}} \leq c|t|^{-\ell/2} \text{ if } \sigma > n \text{ and } a > \ell.$$

Then, by Kunze-Stein phenomenon (see [6] and [12]), this inequality leads to

$$\begin{aligned} \|(-\Delta)^{-\sigma/2}e^{it\sqrt{-\Delta}}f\|_{L^p} &= \|f * W_{t,\sigma}\|_{L^p} \\ &\leq C_1 \|f\|_{L^{p'}} \|W_{t,\sigma}\|_{L^{\tilde{p}}}, \text{ if } 2 < \tilde{p} < p \\ &\leq C_2 |t|^{-\ell/2} \|f\|_{L^{p'}}. \end{aligned}$$

This proves Theorem 3.4.3. \square

Next, consider the Besov spaces $B_p^{s,q}$ on X . The dispersive estimate (3.1.2) follows from Theorem 3.4.3 and from expression of the homogeneous solution u .

Theorem 3.4.4 *Let $2 < p < \infty$, $m \geq 0$ and $\sigma > n$. There exists a constant $C = C(\sigma) > 0$ such that the following dispersive estimates holds*

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^p} \leq C \left(\|v_0\|_{B_{p'}^{m,1}} + \|(-\Delta)^{-1/2}v_1\|_{B_{p'}^{m,1}} \right) \begin{cases} |t|^{-(n-1)(1/2-1/p)}, & \text{if } 0 < |t| < 1, \\ |t|^{-\ell/2}, & \text{if } |t| \geq 1. \end{cases} \quad (3.4.11)$$

Proof. For simplicity, we introduce the notation

$$A(t) = \begin{cases} |t|^{-(n-1)(1/2-1/p)}, & \text{if } 0 < |t| < 1, \\ |t|^{-\ell/2}, & \text{if } |t| \geq 1. \end{cases}$$

As a consequence of the L^p dispersive estimate (3.4.10), we obtain

$$\begin{aligned} \|f * W_{t,\sigma}\|_{B_p^{s,q}} &= \|(-\Delta)^{-\sigma/2} e^{it\sqrt{-\Delta}} f\|_{B_p^{s,q}} \\ &= \|(-\Delta)^{-\sigma/2} e^{it\sqrt{-\Delta}} f * \varphi_{0,N}\|_{L^p} \\ &+ \left(\int_0^1 \tau^{-sq} \|(-\Delta)^{-\sigma/2} e^{it\sqrt{-\Delta}} f * \varphi_\tau^N\|_{L^p}^q \frac{d\tau}{\tau} \right)^{1/q} \\ &= \|(-\Delta)^{-\sigma/2} e^{it\sqrt{-\Delta}} (f * \varphi_{0,N})\|_{L^p} \\ &+ \left(\int_0^1 \tau^{-sq} \|(-\Delta)^{-\sigma/2} e^{it\sqrt{-\Delta}} (f * \varphi_\tau^N)\|_{L^p}^q \frac{d\tau}{\tau} \right)^{1/q} \\ &\leq C(\sigma, a) A(t) \left\{ \|f * \varphi_{0,N}\|_{L^{p'}} \right. \\ &+ \left. \left(\int_0^1 \tau^{-(s+m)q} \|f * \varphi_\tau^N\|_{L^{p'}}^q \frac{d\tau}{\tau} \right)^{1/q} \right\} \\ &= C(\sigma, a) A(t) \|f\|_{B_{p'}^{s+m,q}}, \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

with $2N > \max(|s|, |s+m|)$, $1 \leq q \leq \infty$ and $1 < p' < 2 < p < \infty$.

The dispersive estimate (3.4.11) follows from (3.4.12), when $s = 0$, $q = 1$, the fact that $(-\Delta)^{-\sigma/2}$ commute with convolutions and the injection $B_p^{0,1} \subset L^p$.

This ends the proof of Theorem 3.4.4. \square

As an application to dispersive estimates, we prove Strichartz estimates of solution of inhomogeneous linear wave equation on symmetric space $X = G/K$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) - \Delta u(t, x) = F(t, x) = (-\Delta)^{-\sigma/2} H(t, x), \\ u(t = 0, x) = u_0(x) = (-\Delta)^{-\sigma/2} v_0(x), \\ \frac{\partial}{\partial t} u(t = 0, x) = u_1(x) = (-\Delta)^{-\sigma/2} v_1(x). \end{cases}$$

The solution is given by the so called Duhamel's principle

$$u(t, x) = \cos(t\sqrt{-\Delta})u_0(x) + \frac{\sin(t\sqrt{-\Delta})}{\sqrt{-\Delta}}u_1(x) + \int_0^t \frac{\sin((t-t')\sqrt{-\Delta})}{\sqrt{-\Delta}}F(t', x)dt'.$$

Let $I \subset \mathbb{R}$ be a bounded or an unbounded interval. With the same notations, let us take $s = -\frac{m}{2}$ and $q = 2$. The estimate (3.4.12) leads to

$$\begin{aligned} \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} (-\Delta)^{-\sigma} e^{i(t-t')\sqrt{-\Delta}} h(t', \cdot) dt' \right\|_{B_p^{-\frac{m}{2}, 2}} &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left\| (-\Delta)^{-\sigma} e^{i(t-t')\sqrt{-\Delta}} h(t', \cdot) \right\|_{B_p^{-\frac{m}{2}, 2}} dt' \\ &\leq D_1 \int_{-\infty}^{+\infty} A(t-t') \left\| h(t', \cdot) \right\|_{B_{p'}^{\frac{m}{2}, 2}} dt'. \end{aligned}$$

Taking the $L^r(I)$ norm, $2 < r < \infty$, we get

$$\left\| \int_{-\infty}^{+\infty} (-\Delta)^{-\sigma} e^{i(t-t')\sqrt{-\Delta}} h(t', \cdot) dt' \right\|_{L^r(I, B_p^{-\frac{m}{2}, 2})} \leq D_1 \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} A(t-t') \left\| h(t', \cdot) \right\|_{B_{p'}^{\frac{m}{2}, 2}} dt' \right\|_{L^r(I)}. \quad (3.4.13)$$

The convolution kernel $|t-t'|^{-(n-1)(1/2-1/p)} \chi_{|t-t'| \leq 1}$ defines a bounded operator from L^{r_1} to L^{r_2} for all $1 < r_1 \leq r_2 < \infty$ such that $\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \leq 1 - (n-1)(1/2 - 1/p)$, and $\frac{1}{2} - \frac{1}{n-1} < \frac{1}{p} < \frac{1}{2}$, in particular from $L^{r'}$ to L^r for all $2 \leq r < \infty$ such that $(n-1)(1/2 - 1/p) \leq \frac{2}{r}$. Moreover the convolution kernel $|t-t'|^{-\ell/2} \chi_{|t-t'| \geq 1}$ defines a bounded operator from $L^{r'}$ to L^r for all $2 < r < \infty$ and $\ell \geq 2$.

Thus, according to (3.4.13), we have

$$\left\| \int_{-\infty}^{+\infty} (-\Delta)^{-\sigma} e^{i(t-t')\sqrt{-\Delta}} h(t', \cdot) dt' \right\|_{L^r(I, B_p^{-\frac{m}{2}, 2})} \leq D_2 \left\| h \right\|_{L^{r'}(I, B_{p'}^{\frac{m}{2}, 2})}, \quad (3.4.14)$$

with

$$(n-1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \leq \frac{2}{r} \text{ such that } \ell \geq 2, \quad 0 < \frac{1}{r} < \frac{1}{2} \text{ and } \frac{n-3}{2(n-1)} < \frac{1}{p} < \frac{1}{2}. \quad (3.4.15)$$

Now, consider the operator

$$Tf(t, x) = (-\Delta)^{-\sigma/2} e^{it\sqrt{-\Delta}} f(x)$$

and its formal adjoint

$$T^*h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-\Delta)^{-\sigma/2} e^{it'\sqrt{-\Delta}} h(t', x) dt'.$$

From these considerations and from (3.4.14), we have shown that the operators

$$TT^*h(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-\Delta)^{-\sigma} e^{i(t-t')\sqrt{-\Delta}} h(t', x) dt'$$

and

$$\widetilde{TT^*}h(t, x) = \int_0^t (-\Delta)^{-\sigma} e^{i(t-t')\sqrt{-\Delta}} h(t', x) dt'$$

are bounded from $L_t^{r'} B_{p'}^{\frac{m}{2}, 2} = L^{r'}(I, B_{p'}^{\frac{m}{2}, 2}(X))$ to $L_t^r B_p^{-\frac{m}{2}, 2} = L^r(I, B_p^{-\frac{m}{2}, 2}(X))$. And, this is sufficient to apply the standard TT^* argument developed by Kato [13], Ginibre and Velo [9] and Keel and Tao [14]. But here, according to (3.4.15), we turn our attention to the pair (r, p) such that $\frac{1}{2} - \frac{1}{n-1} < \frac{1}{p} < \frac{1}{2}$ and $\frac{n-1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}) \leq \frac{1}{r} < \frac{1}{2}$. More precisely, we treated the *admissible pairs* of indices (r, p) corresponding to the triangle

$$\mathcal{T}_n = \{(\frac{1}{r}, \frac{1}{p}) \in]0, \frac{1}{2}[\times]0, \frac{1}{2}[; \frac{2}{r} + \frac{n-1}{p} \geq \frac{n-1}{2}\}, \text{ if } \ell \geq 2.$$

We thus finally obtain the following result.

Theorem 3.4.5 *Let $m \geq 0$, $\tilde{m} \geq 0$ and $\sigma > \frac{n}{2}$. Assume that (r, p) and (\tilde{r}, \tilde{p}) are admissible pairs as above. Then there exists a constant $C = C(\sigma) > 0$ such that the following Strichartz estimate holds for solutions to the inhomogeneous wave equation :*

$$\|u\|_{L_t^r B_p^{-\frac{m}{2}, 2}} \leq C(\|H\|_{L_t^{\tilde{r}} B_{\tilde{p}}^{\frac{\tilde{m}}{2}, 2}} + \mathcal{E}(u)), \quad (3.4.16)$$

where $\mathcal{E}(u) = \|v_0\|_{L^2(X)} + \|(-\Delta)^{-1/2}v_1\|_{L^2(X)} = \|u_0\|_{H_2^\sigma(X)} + \|u_1\|_{H_2^{\sigma-1}(X)}$.

Remark 3.4.6 *The endpoint $(\frac{1}{r}, \frac{1}{p}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{n-1})$, if $\ell \geq 3$ is treated as in [14] for the integrals over $|t - s| \leq 1$ and the integrals over $|t - s| \geq 1$ are estimated as before.*

3.5 Nonlinear wave equation on $X = G/K$.

The above Strichartz estimates can be used to prove local and global well-posedness results for nonlinear problems. We consider the wave equation (3.1.4)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u - \Delta u = F_\kappa(u) = (-\Delta)^{-\sigma/2} H_\kappa(u), \\ u(t=0) = u_0 = (-\Delta)^{-\sigma/2} v_0, \\ \frac{\partial}{\partial t} u(t=0) = u_1 = (-\Delta)^{-\sigma/2} v_1 \end{cases}$$

on $X = G/K$, with nonlinear terms H_κ satisfying

$$|H_\kappa(u)| \leq C|u|^\kappa \text{ and } |H_\kappa(u) - H_\kappa(v)| \leq C|u - v|(|u| + |v|)^{\kappa-1}, \text{ for some power } \kappa > 1.$$

Theorem 3.5.1 *1. If $1 < \kappa \leq 1 + \frac{4}{n-1}$, then the nonlinear wave equation (3.1.4) is globally well posed for small energy $\mathcal{E}(u)$. Moreover, the solution u satisfies*

$$u \in L^{\kappa+1}(\mathbb{R}, L^{\kappa+1}(X)).$$

2. If $1 < \kappa < 1 + \frac{4}{n-1}$, then the nonlinear wave equation (3.1.4) is locally well posed for arbitrary energy $\mathcal{E}(u)$.

Proof. Here we use standard arguments. We define

$$u(t, x) = \psi(v(t, x)) = \cos(t\sqrt{-\Delta})u_0(x) + \frac{\sin(t\sqrt{-\Delta})}{\sqrt{-\Delta}}u_1(x) + \int_0^t \frac{\sin((t-t')\sqrt{-\Delta})}{\sqrt{-\Delta}} F_\kappa(v(t', x)) dt'$$

as a solution to the Cauchy problem

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u - \Delta u = F_\kappa(v), \\ u(t=0) = u_0, \\ \frac{\partial}{\partial t} u(t=0) = u_1. \end{cases}$$

We take $m = \tilde{m} = 0$ in the above Strichartz estimate (3.4.16). Let $(\frac{1}{r}, \frac{1}{p})$, $(\frac{1}{\tilde{r}}, \frac{1}{\tilde{p}})$ belong to the triangle \mathcal{T}_n and $\alpha \leq 2$ be such that

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{r} + \frac{n-1}{p} = \frac{n-1}{2}, \\ \frac{\alpha}{\tilde{r}} + \frac{n-1}{\tilde{p}} = \frac{n-1}{2}. \end{cases} \quad (3.5.17)$$

According to the energy conservation and (3.4.16), we have the following Strichartz estimate

$$\|u\|_{L_t^r L_x^p} + \|u\|_{L_t^\infty L_x^2} \leq C(\|H_\kappa(v)\|_{L_t^{\tilde{r}'} L_x^{\tilde{p}'}} + \mathcal{E}(u)). \quad (3.5.18)$$

Using our nonlinear assumption (3.1.5), we write

$$\begin{aligned} \|H_\kappa(v)\|_{L_t^{\tilde{r}'} L_x^{\tilde{p}'}} &\leq C\|v\|_{L_t^{\tilde{r}'} L_x^{\tilde{p}'}}^\kappa \\ &\leq C\|v\|_{L_t^{\tilde{r}'\kappa} L_x^{\tilde{p}'\kappa}}^\kappa. \end{aligned}$$

Then

$$\|u\|_{L_t^r L_x^p} + \|u\|_{L_t^\infty L_x^2} \leq C(\|v\|_{L_t^{\tilde{r}'\kappa} L_x^{\tilde{p}'\kappa}}^\kappa + \mathcal{E}(u)). \quad (3.5.19)$$

Now we use the standard fixed point procedure. To do this, we need to consider function spaces on both sides of (3.5.19). Let $r = \tilde{r}'\kappa$ and $p = \tilde{p}'\kappa$. With this choice, we can easily prove that $\kappa = \frac{2\alpha}{n-1} + 1$ and $r = p = \tilde{r} = \tilde{p} = \kappa + 1$.

Let $Y = C(\mathbb{R}, L^2(X)) \cap L^r(\mathbb{R}, L^p(X))$ be a Banach space with the norm defined by

$$\|u\|_Y = \|u\|_{L_t^r L_x^p} + \|u\|_{L_t^\infty L_x^2}.$$

Inequality (3.5.18) implies

$$\|\psi(v)\|_Y \leq C(\|v\|_Y^\kappa + \mathcal{E}(u)).$$

Let us prove that $\psi : Y_\varepsilon \rightarrow Y_\varepsilon$ is a contraction if $\varepsilon > 0$ and $\mathcal{E}(u)$ are sufficiently small, where Y_ε denotes the ball $\{u \in Y; \|u\|_Y \leq \varepsilon\}$. To do this, let $v, \tilde{v} \in Y$ and $u = \psi(v)$, $\tilde{u} = \psi(\tilde{v})$. By (3.5.18) and nonlinear assumption (3.1.5), we have

$$\begin{aligned} \|\psi(v) - \psi(\tilde{v})\|_Y &= \|u - \tilde{u}\|_Y \\ &\leq C\|H_\kappa(v) - H_\kappa(\tilde{v})\|_{L_t^{\tilde{r}'} L_x^{\tilde{p}'}} \\ &\leq C\|v - \tilde{v}\|_{L_t^{\tilde{r}'\kappa} L_x^{\tilde{p}'\kappa}}^\kappa. \end{aligned}$$

Writing $\frac{1}{\tilde{r}'} = \frac{1}{r} + \frac{1}{\frac{r}{\kappa-1}}$ and $\frac{1}{\tilde{p}'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{\frac{p}{\kappa-1}}$ and, using Hölder's inequality, we obtain

$$\begin{aligned} \|\psi(v) - \psi(\tilde{v})\|_Y &\leq E_1(\|v\|_Y + \|\tilde{v}\|_Y)^{\kappa-1} \|v - \tilde{v}\|_Y \\ &\leq E_1(2\varepsilon)^{\kappa-1} \|v - \tilde{v}\|_Y \\ &\leq \frac{1}{2} \|v - \tilde{v}\|_Y, \end{aligned}$$

if $E_1(2\varepsilon)^{\kappa-1} \leq \frac{1}{2}$ and $v, \tilde{v} \in Y_\varepsilon$.

In consequence ψ is a contraction on Y_ε and this finishes the proof of the first part of Theorem 3.5.1.

Now, if $1 < \kappa < 1 + \frac{4}{n-1}$, we prove local well-posedness in a similar way for arbitrary energy $\mathcal{E}(u)$. Let $\alpha < 2$ and take a time interval $I = [-T, T]$ for a small T (which depending only of $\mathcal{E}(u)$). Let $p = \tilde{p}'\kappa$ and suppose that $r > \tilde{r}'\kappa$. Writing $\frac{1}{\tilde{r}'} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r_0}$; $r_0 > 1$, using Hölder's inequality in t and nonlinear assumption (3.1.5), we deduce that

$$\|H_\kappa(v)\|_{L_{\tilde{t}'} L_{\tilde{x}'}} \leq E_2(2T)^{1/r_0} \|v\|_{L_t L_x^p}^\kappa$$

and

$$\|\psi(v)\|_Y \leq E_3((2T)^{1/r_0} \|v\|_Y^\kappa + \mathcal{E}(u)),$$

where $Y = C(I, L^2(X)) \cap L^r(I, L^p(X))$.

On the other hand, writing $\frac{1}{\tilde{r}'} = \frac{1}{r} + \frac{1}{\frac{r}{\kappa-1}} + \frac{1}{r_0}$ and $\frac{1}{\tilde{p}'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{\frac{p}{\kappa-1}}$, by Hölder's inequality, we obtain

$$\| |v - \tilde{v}| (|v| + |\tilde{v}|)^{\kappa-1} \|_{L_{\tilde{t}'} L_{\tilde{x}'}} \leq (2T)^{1/r_0} \|v - \tilde{v}\|_{L_t L_x^p} \| |v| + |\tilde{v}| \|_{L_t L_x^p}^{\kappa-1}.$$

Therefore

$$\|u - \tilde{u}\|_Y = \|\psi(v) - \psi(\tilde{v})\|_Y \leq E_4((2T)^{1/r_0} \|v - \tilde{v}\|_Y \| |v| + |\tilde{v}| \|_Y^{\kappa-1} + \mathcal{E}(u)).$$

Let $T = 2^{-r_0(\kappa-1)} \mathcal{E}(u)^{-r_0}$. The above calculations with this choice give

$$\|u - \tilde{u}\|_{Y_R} \leq E_4(2T)^{1/r_0} (2R)^{\kappa-1} (\|v - \tilde{v}\|_{Y_R} + (2T)^{-1/r_0} (2R)^{1-\kappa} \mathcal{E}(u)),$$

where $Y_R = \{u \in Y; \|u\|_Y \leq R\}$ with sufficiently large R such that $E_4(2T)^{1/r_0} (2R)^{\kappa-1} < \frac{1}{2}$. Thus, we have proved that ψ is a contraction in Y_R . \square

Bibliographie

- [1] ANKER J-PH. *L^p -Fourier multipliers on Riemannian symmetric spaces of the non-compact type*. Ann. of Math. (2) 132 (1990), no. 3, 597–628.
- [2] ANKER J-PH. *The spherical Fourier transform of rapidly decreasing functions. A simple proof of a characterization due to Harish-Chandra, Helgason, Trombi and Varadarajin*. J. Funct. Anal. 96 (1991), no. 2, 331–349.
- [3] ANKER J-PH, PIERFELICE V. *Nonlinear Schrödinger equation on real hyperbolic spaces*. Ann. I. H. Poincaré - AN 26 (2009) 1853-1869.
- [4] ANKER J-PH, PIERFELICE V, VALLARINO M. *The wave equation on real hyperbolic spaces*. Prépublication [hal-00525251].
- [5] BAHOURI H, GERARD P, XU C-J. *Espaces de Besov et estimations de Strichartz généralisées sur le groupe de Heisenberg*. J. Anal. Math. 82 (2000), 93–118.
- [6] COWLING M. *Herz's "principe de majoration" and the Kunze-Stein phenomenon*. in : Harmonic Analysis and Number Theory, Montreal 1996, in : CMS Conf. Proc, vol. 21, Amer. Math. Soc. 1997, pp. 73-88.
- [7] COWLING M, GUILINI S, MEDA S. *Oscillatory multipliers related to the wave equation on noncompact symmetric spaces*. J. London. Math. Soc. (2) 66 (2002) 691-709.
- [8] GANGOLLI R, VARADARAJAN, V S. *Harmonic analysis of spherical functions on real reductive groups*. Springer-Verlag (1988).
- [9] GINIBRE G, VELO G. *Generalized Strichartz inequalities for the wave equation*. J. Funct. Anal. 133 (1995), 50-86.
- [10] HELGASON S. *Groups and geometric analysis. Integral geometry, invariant differential operators and spherical functions*. Academic press (1984).
- [11] HELGASON S. *Geometric analysis on symmetric spaces*. American math.Soc, Providence, RI(1994).
- [12] IONESCU A D. *An endpoint estimate for the Kunze-Stein phenomenon and related maximal operators*. Ann. of Math. (2) 152 (1) (2000) 259-275.

- [13] KATO T. *On nonlinear Schrödinger equation*. Ann. I. H. Poincaré (A) Phys. Theor. 46 (1) (1987) 113-129.
- [14] KEEL M, TAO T. *Endpoint Strichartz estimates*. Amer. J. Math. 120 (5) (1998) 955-980.
- [15] LINDBLAD H, SOGGE C D. *On existence and scattering with minimal regularity for semilinear wave equation*. J. Funct. Anal. 130 (1995) 357-426.
- [16] LOHOUÉ N. *L^p estimates of solutions of wave equations on Riemannian manifolds, Lie groups and applications*. Harmonic analysis and number theory (Montreal, PQ, 1996), 103-126, CMS Conf. Proc. 21, AMS, Providence, RI, 1997.
- [17] PIERFELICE V. *Weighted Strichartz estimates for the Schrödinger and wave equations on Damek-Ricci spaces*. Math. Z. 260 (2) (2008) 377-392.
- [18] SEGAL I E. *Space-time decay for solutions of wave equation*. Advances in Math. 22 (1976), no. 3, 305-311.
- [19] SKRZYPCZAK L. *Some equivalent norms in Sobolev and Besov spaces on symmetric manifolds*. J. London Math. Soc. (2) 53 (1996), no. 3, 569-581.
- [20] SKRZYPCZAK L. *Besov spaces on symmetric manifolds-The atomic decomposition*. Studia Math. 124 (1997), no. 3, 215-238.
- [21] STRICHARTZ R S. *Restriction of Fourier transform to quadratic surfaces and decay of solution of wave equations*. Duke Math. J. 44 (1977), no. 3, 705-714.
- [22] TATARU D. *Strichartz estimates in the hyperbolic space and global existence for the semilinear wave equation*. Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001), no. 2, 795-807.
- [23] TRIEBEL H. *Spaces of Besov-Hardy-Sobolev type on complete Riemannian manifolds*. Ark. Mat. 24 (1986), no. 2, 299-337.
- [24] TRIEBEL H. *Theory of function spaces II*. Birkhäuser, 1992.
- [25] VARADARAJAN V S. *The method of stationary phase and application to geometry and analysis on Lie groups*. Algebraic and analytic methods in representation theory (Sonderborg, 1994), 167-242, Perspect. Math., 17, Academic Press, San Diego, CA, 1997.

Perspectives

4.1 Comportement asymptotique des estimées et orbites nilpotentes

Commençons par quelques motivations provenant de la physique, nous adopterons l'approche de [6][7]. Dans la théorie générale de la relativité, un espace-temps est une variété lorentzienne (M, g) , de dimension $m+1$ et de signature $(m, 1)$. Un point matériel est caractérisé par sa "masse" et son "spin" tous deux positifs. Les trajectoires de points matériels libres dans le champ gravitationnel décrit par la métrique g sont des géodésiques ϑ sur X . Si la particule est de "masse" positive, la géodésique est de "genre temps", i.e $g(\dot{\vartheta}, \dot{\vartheta}) < 0$. Si elle est de "masse" nulle, la géodésique est de "genre lumière", ce qui veut dire que $g(\dot{\vartheta}, \dot{\vartheta}) = 0$. Les géodésiques de genre espace, pour lesquelles $g(\dot{\vartheta}, \dot{\vartheta}) > 0$, n'ont pas de telle interprétation. La quantification de la dynamique (classique) des particules de "masse nulle" pose des problèmes délicats que nous allons reformuler à l'aide de la méthode des orbites.

Soit G un groupe de Lie réel semisimple connexe non compact à centre fini d'algèbre de Lie \mathfrak{g} . La représentation adjointe de G est le morphisme de groupes $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$, $g \mapsto \text{Ad}(g)$ défini par la différentielle de l'automorphisme $\Psi_g : G \rightarrow G$, $h \mapsto ghg^{-1}$:

$$\text{Ad}(g) = d_e \Psi_g.$$

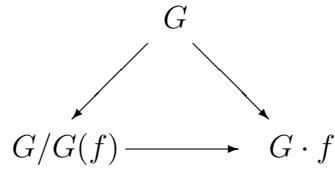
La différentielle de Ad en l'élément neutre e définit la représentation adjointe de \mathfrak{g} :

$$\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g}), X \mapsto (Y \mapsto [X, Y]).$$

La représentation coadjointe de G est alors le morphisme $\text{Ad}^* : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g}^*)$, $g \mapsto \text{Ad}^*(g)$ défini par :

$$\text{Ad}^*(g)(f)(X) = f(\text{Ad}^{-1}(g)(X)), \quad \forall g \in G, X \in \mathfrak{g}, f \in \mathfrak{g}^*$$

où \mathfrak{g}^* désigne le dual vectoriel de \mathfrak{g} . L'orbite coadjointe $G \cdot f$ d'un élément f de \mathfrak{g}^* est naturellement difféomorphe à l'espace homogène $G/G(f)$, où le sous-groupe fermé $G(f) = \{g \in G \mid \text{Ad}^*(g)f = f\}$ désigne le sous-groupe d'isotropie de f :



Il n'est pas difficile de vérifier que la forme bilinéaire :

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}, (X, Y) \mapsto f([X, Y])$$

induit une structure symplectique sur l'orbite coadjointe $G \cdot f$ qui est donc nécessairement de dimension paire.

Il existe deux familles importantes d'orbites coadjointes. Un élément X de \mathfrak{g} est dit semisimple si l'endomorphisme $\text{ad}(X)$ de \mathfrak{g} est diagonalisable sur la complexification $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ de \mathfrak{g} ; et X est nilpotent si l'endomorphisme $\text{ad}(X)$ est nilpotent. La décomposition de Jordan assure que tout élément X de \mathfrak{g} s'écrit de manière unique comme la somme :

$$X = X_s + X_n$$

d'un élément semisimple X_s et d'un élément nilpotent X_n tels que $[X_s, X_n] = 0$. Par ailleurs, la forme de Killing de \mathfrak{g} est non dégénérée et induit un isomorphisme G -équivariant :

$$\mathfrak{g}^* \xrightarrow{\cong} \mathfrak{g}, f \mapsto X_f.$$

Ainsi nous dirons que $f \in \mathfrak{g}^*$ est semisimple (resp. nilpotent) si X_f est semisimple (resp. nilpotent). Par exemple, lorsque $G = SL(2, \mathbb{R})$ désigne le groupe linéaire des matrices réelles carrées d'ordre 2 de déterminant 1, \mathfrak{g}^* est isomorphe à \mathbb{R}^3 et les orbites coadjointes de G sont décrites dans le schéma suivant :

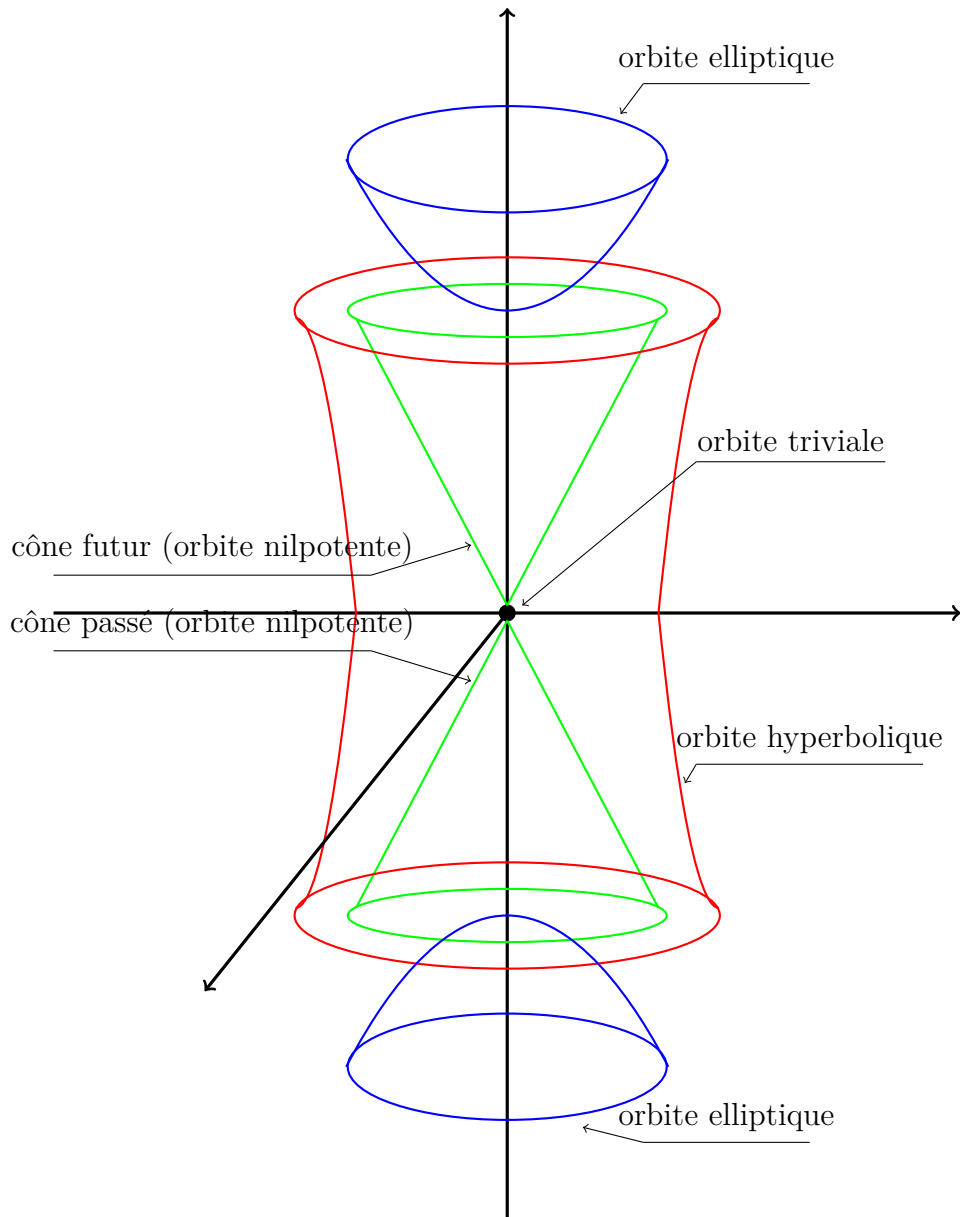


Figure 4.1. Orbites coadjointes, $G = SL(2, \mathbb{R})$.

A présent, indiquons comment les orbites nilpotentes se distinguent. Si X est une variété différentiable, alors le fibré cotangent T^*X est naturellement muni d'une structure de variété symplectique. Supposons que G agisse transitivement sur X . Alors G agit également sur T^*X et cette action induit une application moment $J : T^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$. Comme J est G -équivariante, alors l'image $\text{Im}(J)$ est une union d'orbites coadjointes. Le schéma de Souriau suggère d'interpréter certaines de ces orbites comme les espaces des phases de particules qui se meuvent librement sur X [8]. Soit $\pi : T^*X \rightarrow X$ la projection canonique :

$$\begin{array}{ccc}
& T^*X & \\
\pi \swarrow & & \searrow J \\
X & & \mathfrak{g}^* \supset \text{Im}(J) = \bigcup_{\mathfrak{g}^*/G} \mathcal{O}
\end{array}$$

On dit qu'une orbite coadjointe \mathcal{O} de G appartenant à l'image de J est l'espace des phases d'une particule qui se meut librement sur X si :

$\forall f \in \mathcal{O} \subset \text{Im}(J)$, $\pi(J^{-1}(f))$ est une géodésique de genre temps ou lumière sur X .

De telles orbites \mathcal{O} sont appelées "espaces de mouvements" de particules sur X . Pour des particules de "masse nulle", il s'avère que l'orbite associée est une orbite nilpotente de G .

Du point de vue de la théorie des représentations, les orbites coadjointes jouent également un rôle important. Elles permettent de paramétrer le dual unitaire \widehat{H} d'un groupe de Lie nilpotent connexe simplement connexe H . Le dual unitaire de H est l'ensemble des classes d'équivalence des représentations unitaires irréductibles de H . La bijection $\mathfrak{h}^*/H \xrightarrow{\cong} \widehat{H}$, due à Kirillov [3], est connue sous le nom de *méthode des orbites*. Malheureusement cette méthode ne fonctionne pas pour les groupes de Lie semisimples en général, elle permet toutefois de paramétrer une partie intéressante du dual unitaire [2]. L'un des principaux obstacles à la mise an oeuvre de la méthode des orbites pour les groupes semisimples est justement le mauvais "comportement" des orbites nilpotentes.

Revenons à notre groupe de Lie réel semisimple connexe non compact G à centre fini, où l'on a fixé un sous-groupe compact maximal K . Supposons qu'il existe un élément $f \in \mathfrak{g}^*$ dont le sous-groupe d'isotropie $G(f) = \{g \in G \mid \text{Ad}^*(g)f = f\}$ soit isomorphe à K . Notons qu'un tel élément f existe automatiquement si G est hermitien, i.e l'espace symétrique G/K admet une structure complexe et l'action de G se réalise par des transformations holomorphes. Il est bien connu que G est hermitien si, et seulement si, le centralisateur du centre de \mathfrak{k} dans \mathfrak{g} coïncide avec \mathfrak{k} , si \mathfrak{k} désigne l'algèbre de Lie de K [4]. En d'autres termes l'orbite coadjointe $G \cdot f$ de f est difféomorphe à l'espace symétrique riemannien G/K . Pour chaque nombre réel λ strictement positif, on définit l'orbite coadjointe \mathcal{O}_λ de $\lambda \frac{f}{\mathcal{K}(X_f, X_f)}$, où \mathcal{K} désigne la forme de Killing de \mathfrak{g} . Nous obtenons ainsi une famille continue $\{\mathcal{O}_\lambda\}_{\lambda>0}$ d'orbites coadjointes difféomorphes à G/K :

$$\mathcal{O}_\lambda \simeq G/K.$$

La limite $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{O}_\lambda$ de la famille $\{\mathcal{O}_\lambda\}_{\lambda>0}$ est alors définie par [5] :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{O}_\lambda = \bigcap_{\epsilon > 0} \overline{\bigcup_{0 < \lambda < \epsilon} \mathcal{O}_\lambda}$$

où $\bar{}$ désigne l'adhérence.

Proposition 4.1.1 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{O}_\lambda$ est une union finie d'orbites coadjointes nilpotentes de G qui contient l'orbite triviale $\{0\}$.

Preuve. Par définition, l'ensemble $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{O}_\lambda$ est invariant par l'action coadjointe de G . De plus, si X appartient à $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{O}_\lambda$ alors μX appartient également à $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{O}_\lambda$ pour tout $\mu > 0$. Cela entraîne que 0 appartient à $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{O}_\lambda$ et que tout élément de $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{O}_\lambda$ est nilpotent. On en déduit que $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{O}_\lambda$ est une union d'orbites coadjointes nilpotentes de G . Cette union est donc nécessairement finie. \square

Il est difficile en général de déterminer précisément la nature des orbites nilpotentes qui apparaissent dans l'ensemble limite $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{O}_\lambda$: orbite nilpotente minimale, principale, sous-régulière, ... (voir [1] pour la classification des orbites nilpotentes). Toutefois, dans le cas où G est le groupe $SL(2, \mathbb{R})$ ou lorsque G est le groupe pseudo-orthogonal $G = SO_0(p, q)$ avec $p + q \in 2\mathbb{N}$ et $p \geq 2, q \geq 2$, il est possible de décrire les orbites nilpotentes qui constituent $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{O}_\lambda$. Rappelons que $SO_0(p, q)$ est la composante connexe de l'identité du groupe des isométries $O(p, q)$ de la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^{p+q} \times \mathbb{R}^{p+q}$:

$$\left((x_1, \dots, x_{p+q}), (y_1, \dots, y_{p+q}) \right) \longmapsto x_1 y_1 + \dots + x_p y_p - (x_{p+1} y_{p+1} + \dots + x_{p+q} y_{p+q}).$$

Ainsi lorsque $G = SO_0(p, q)$ avec $p + q \in 2\mathbb{N}$ et $p \geq 2, q \geq 2$, on a (Théorème C dans [5]) :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{O}_\lambda = \mathcal{O}_{min} \cup \mathcal{O}_0 \cup \{0\}$$

où \mathcal{O}_{min} désigne l'orbite nilpotente minimale de G (i.e \mathcal{O}_{min} est de dimension minimale parmi les orbites coadjointes nilpotentes non triviales de G , en l'occurrence \mathcal{O}_{min} est de dimension $2(p + q - 3)$) et \mathcal{O}_0 est une orbite nilpotente de dimension $2(p + q - 2)$. Dans le cas où G est le groupe $SL(2, \mathbb{R})$ nous avons :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{O}_\lambda = \mathcal{O}_{min} \cup \{0\}$$

où \mathcal{O}_{min} est le cône "futur" :

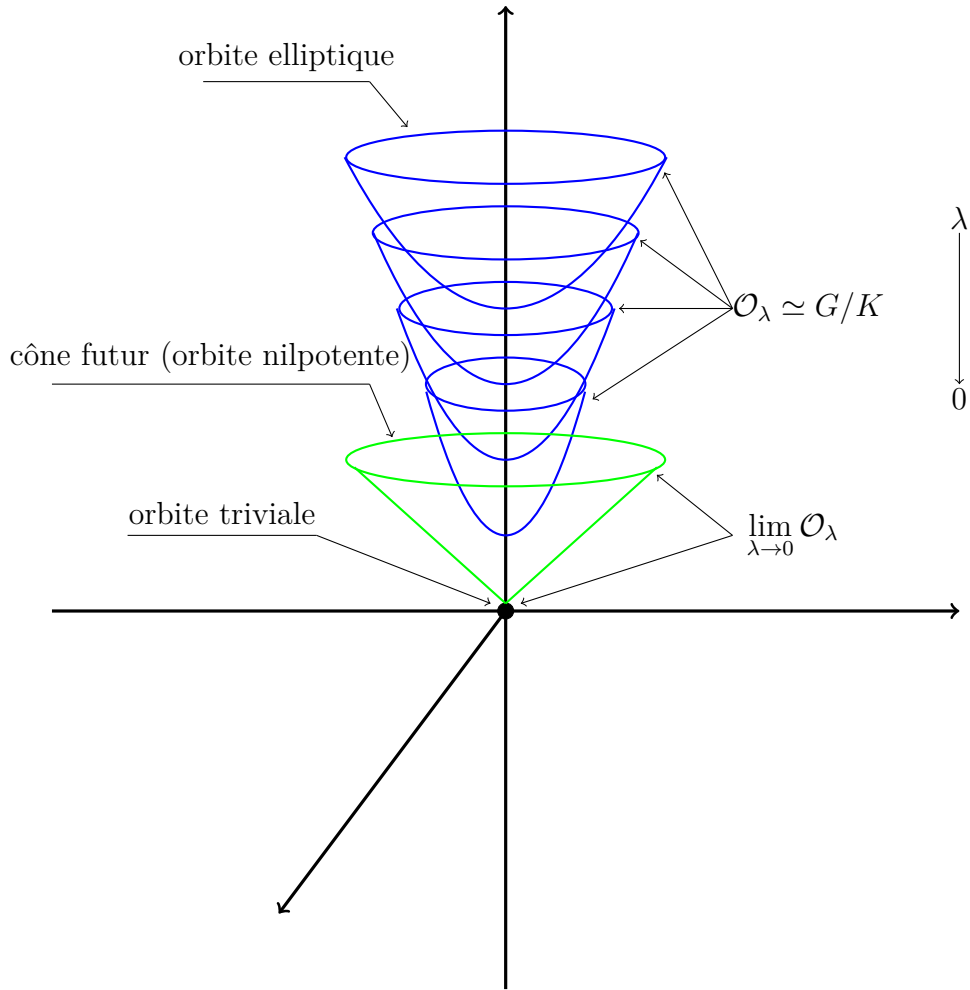


Figure 4.2. Limites des orbites coadjointes, $G = SL(2, \mathbb{R})$.

Pour $\lambda > 0$ fixé, soit Δ_λ l'opérateur de Laplace-Beltrami sur \mathcal{O}_λ et considérons, de manière analogue à ce que nous avons fait dans le chapitre 3, l'équation des ondes (avec conditions initiales) sur \mathcal{O}_λ :

$$(E_\lambda) \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) - \Delta_\lambda u(t, x) = F(t, x), & t \in \mathbb{R}, x \in X \\ u(t = 0, x) = u_0(x), \\ \frac{\partial}{\partial t} u(t = 0, x) = u_1(x). \end{cases}$$

Puisque $\mathcal{O}_\lambda \simeq G/K$, nous pouvons appliquer le Théorème 3.4.9 pour obtenir des estimées de type Strichartz pour des solutions du problème de Cauchy (E_λ) . Nous obtenons de la sorte une famille continue de solutions et d'estimées correspondant à la famille $\{\mathcal{O}_\lambda\}_{\lambda>0}$. On se pose alors les problèmes suivants :

Problème 1 : Quelle équation obtient-on à la limite $\lambda \rightarrow 0$? Pour quelle orbite non triviale \mathcal{O} dans $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{O}_\lambda$ et pour quelle métrique sur \mathcal{O} cela a-t-il un sens ?

Problème 2 : Déterminer le comportement asymptotique de ces solutions et de leurs estimées à la limite $\lambda \rightarrow 0$.

4.2 L'équation des ondes pour les formes différentielles sur G/K .

Soient G un groupe de Lie semisimple réel connexe non-compact à centre fini et K un sous-groupe compact maximal de G . Comme nous l'avons rappelé dans les préliminaires (Chapitre 2), l'espace homogène G/K est naturellement muni d'une structure de variété riemannienne symétrique non compacte, avec la métrique induite par la forme de Killing. Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan de \mathfrak{g} , où \mathfrak{g} et \mathfrak{k} sont les algèbres de Lie de G et K respectivement. Le groupe K agit sur le dual vectoriel $(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}})^*$ de la complexification de \mathfrak{p} via la restriction de (l'extension linéaire de) l'action adjointe Ad^* de G . Cela induit une représentation σ_ℓ de K sur le produit extérieur $V_\ell = \wedge^\ell(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}})^*$:

$$\begin{aligned}\sigma_\ell(k)(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_\ell) &= \text{Ad}(k)v_1 \wedge \text{Ad}(k)v_2 \cdots \wedge \text{Ad}(k)v_\ell, \quad \ell \geq 1, \\ \sigma_0(k)v &= v, \quad v \in \mathbb{C},\end{aligned}$$

appelée représentation d'isotropie. Notons que, par l'isomorphisme de Hodge, σ_ℓ and $\sigma_{\dim(\mathfrak{p})-\ell}$ sont équivalentes pour tout $0 \leq \ell \leq \dim(\mathfrak{p})$. La représentation d'isotropie n'est pas irréductible en général et sa décomposition en composantes irréductibles

$$(\sigma_\ell, V_\ell) \simeq \bigoplus (\sigma_\ell^j, V_\ell^j)$$

n'est pas non plus connue explicitement.

Fixons un produit scalaire K -invariant $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\wedge^\ell \mathfrak{p}}$ sur V_ℓ tel que

$$\langle V_\ell^i, V_\ell^j \rangle = \{0\} \text{ si } i \neq j.$$

La représentation d'isotropie, comme toute représentation de dimension finie de K , définit un fibré vectoriel \mathcal{V}_ℓ sur G/K . Soit $L^p(G/K, \mathcal{V}_\ell)$ l'espace des sections L^p , i.e les ℓ -formes différentielles L^p -intégrables sur G/K , avec $p \in \mathbb{N}^*$. Le groupe G agit par les translations à gauche sur $L^p(G/K, \mathcal{V}_\ell)$. Plus précisément, le produit tensoriel $L^p(G) \otimes \wedge^\ell \mathfrak{p}$ est muni d'une action de G et d'une action de K définies respectivement par : $\mathbf{L} \otimes \mathbb{1}$ et $\mathbf{R} \otimes \sigma_\ell$, où \mathbf{L} et \mathbf{R} désignent les translations à gauche et à droite sur l'espace $L^p(G)$ des fonctions complexes L^p -intégrables. En particulier, nous avons l'isomorphisme de G -modules :

$$L^p(G/K, \mathcal{V}_\ell) \simeq \left(L^p(G) \otimes \wedge^\ell \mathfrak{p} \right)^K,$$

où $\left(L^p(G) \otimes \wedge^\ell \mathfrak{p} \right)^K$ désigne le sous-espace des vecteurs K -invariants, muni de la norme :

$$\| \phi \|_{L^p(G/K, \mathcal{V}_\ell)} = \left(\int_G \| \phi(g) \|_{\wedge^\ell \mathfrak{p}}^p dg \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Lorsque $\ell = 0$, c'est-à-dire dans le cas des fonctions, nous écrivons simplement $L^p(G/K)$. Par ailleurs le groupe K agit sur l'espace vectoriel $\text{End}(\Lambda^\ell \mathfrak{p})$ des endomorphismes de $\Lambda^\ell \mathfrak{p}$ de la manière suivante :

$$\tilde{\sigma}_\ell(k)(T) = \sigma_\ell(k) \circ T \circ \sigma_\ell(k)^{-1}, \quad \forall k \in K, \forall T \in \text{End}(\Lambda^\ell \mathfrak{p}).$$

Cette représentation induit un fibré vectoriel homogène $\mathcal{E}nd(\Lambda^\ell \mathfrak{p})$ sur G/K et $L^p(G/K, \mathcal{E}nd(\Lambda^\ell \mathfrak{p}))$ désignera l'espace de ses sections L^p . Nous avons également un isomorphisme de G -modules :

$$L^p(G/K, \mathcal{E}nd(\Lambda^\ell \mathfrak{p})) \simeq \left(L^p(G) \otimes \text{End}(\Lambda^\ell \mathfrak{p}) \right)^K,$$

relativement à la K -action $\mathbf{R} \otimes \tilde{\sigma}_\ell$, avec la norme

$$\| \phi \|_{L^p(G/K, \mathcal{E}nd(\Lambda^\ell \mathfrak{p}))} = \left(\int_G \| \phi(g) \|_{\text{End}(\Lambda^\ell \mathfrak{p})}^p dg \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dans le cas où $p = +\infty$, ces définitions s'adaptent de manière usuelle.

D'autre part, la forme de Killing de \mathfrak{g} induit une suite d'applications G -équivariantes :

$$\text{End}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\text{canonique}} \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \otimes (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})^* \xrightarrow{\text{Killing}} \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \otimes \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \xrightarrow{\text{injection}} T(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\text{quotient}} \mathcal{U}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}),$$

où $\text{End}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ désigne l'espace vectoriel complexe des endomorphismes du complexifié $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ de \mathfrak{g} , $T(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ l'algèbre tensorielle de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ et $\mathcal{U}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Soit Ω_G l'image de l'identité dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$. De la G -équivariance des applications ci-dessus, il résulte que Ω_G appartient au centre de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$. D'autre part, tout élément $A = A_1 \cdot A_2 \cdots A_p$ de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ définit un opérateur différentiel \tilde{A} sur G comme suit :

$$\tilde{A} = \tilde{A}_1 \circ \cdots \circ \tilde{A}_p \quad \text{avec} \quad (\tilde{A}_j f)(g) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\exp(-tA_j)g), \quad \forall f \in C^\infty(G), g \in G$$

où $C^\infty(G)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions lisses sur G . En particulier, l'opérateur différentiel $\tilde{\Omega}_G$ sur G est un opérateur différentiel G -invariant, appelé l'opérateur de Casimir de G . Soit

$$Q_\ell = \int_K R(k) \otimes \sigma_\ell(k) dk$$

la projection de $L^p(G) \otimes \Lambda^\ell \mathfrak{p}$ sur le sous-espace $\left(L^p(G) \otimes \Lambda^\ell \mathfrak{p} \right)^K$ des vecteurs K -invariants. Le laplacien Δ_ℓ agissant sur les ℓ -formes différentielles L^p -intégrables sur G/K est défini par :

$$\Delta_\ell \circ Q_\ell = -Q_\ell \circ (\tilde{\Omega}_G \otimes \text{Id}_{\Lambda^\ell \mathfrak{p}}).$$

Problème 3 : Etudier le problème de l'équation des ondes pour les formes différentielles L^p -intégrables sur G/K . Généraliser dans ce contexte les estimées obtenues dans le cas des fonctions.

Bibliographie

- [1] D. H. Collingwood and W. M. McGovern, *Nilpotent orbits in semisimple Lie algebras*. Van Nostrand Reinhold Math. Series, 1993.
- [2] M. Duflo, *Représentations unitaires des groupes de Lie et méthode des orbites*. Mathematics today (Luxembourg, 1981), pp. 125-138, Gauthier-Villars, Paris, 1982.
- [3] A. Kirillov, *Eléments de la théorie des représentations*. Traduit du russe par A. Sosinsky. Editions Mir, Moscow, 1974.
- [4] A. W. Knap, *Lie groups : Beyond an introduction*. Progress in Math. **140**, Second edition, Birkhäuser, 2002.
- [5] T. Kobayashi and B. Orsted, *Conformal geometry and branching laws for unitary representations attached to minimal nilpotent orbits*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **326** (1998), pp. 925-930.
- [6] S. Mehdi, *Quantification et limite semiclassique pour les orbites nilpotentes de $SO_o(n, 2)$* . Thèse de Doctorat de l'Université Denis Diderot-Paris 7, 1996.
- [7] S. Mehdi, *Semiclassical limit for the Binegar-Zierau quantization of the minimal nilpotent orbits of $SO_0(2p, 2)$* . J. Math. Phys. **41** (2000), pp. 578-601.
- [8] J.-M. Souriau, *Structure des systèmes dynamiques*. Dunod, 1970.