



HAL
open science

Etude linéaire et non linéaire de la déformation du front de fissures planes au cours de leur propagation et, notamment, de leur coalescence.

Laurène Legrand

► To cite this version:

Laurène Legrand. Etude linéaire et non linéaire de la déformation du front de fissures planes au cours de leur propagation et, notamment, de leur coalescence.. Mécanique des solides [physics.class-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2011. Français. NNT: . tel-00670082

HAL Id: tel-00670082

<https://theses.hal.science/tel-00670082>

Submitted on 14 Feb 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS 6

Spécialité : **MÉCANIQUE**

présentée par

Laurène LEGRAND

pour obtenir le grade de DOCTEUR de l'Université PARIS 6

Sujet de thèse :

**ÉTUDE LINÉAIRE ET NON LINÉAIRE DE LA DÉFORMATION
DE FRONTS DE FISSURES PLANES AU COURS DE LEUR PROPAGATION
ET NOTAMMENT DE LEUR COALESCENCE**

Soutenue le 12 décembre 2011

devant le jury composé de Madame et Messieurs :

Andreï CONSTANTINESCU

Président du jury

Nicolas MOËS

Rapporteur

Marc BONNET

Rapporteur

Christian DASCALU

Examineur

Véronique LAZARUS

Examineur

Jean-Baptiste LEBLOND

Examineur

Avant tout, je souhaiterais exprimer ma gratitude envers mes directeurs de thèse pour m'avoir guidée pendant ces trois années (et deux mois).

Tout d'abord, un grand merci à *Jean-Baptiste Leblond* pour m'avoir formée à la recherche en partageant ses vastes connaissances scientifiques et pour m'avoir écoutée et encouragée durant mes périodes de doute.

Je désire aussi remercier *Véronique Lazarus* pour m'avoir ouvert les portes du F.A.S.T. et pour m'avoir initiée aux joies de la programmation en langage C. Merci pour ta patience, ta rigueur scientifique et ton aide inestimable pendant le sprint final!

Ma reconnaissance s'adresse ensuite à toutes les personnes ayant accepté de faire partie de mon jury :

Andreï Constantinescu pour m'avoir fait l'honneur d'en être le président.

Nicolas Moës et *Marc Bonnet* pour avoir été rapporteurs de mon manuscrit, et *Christian Dascalu* pour avoir accepté de l'examiner.

Un grand merci à tous les d'Alembertiens, les anciens : Tarek, Seb, Peppe, Bobby ..., les présents : Joel, Didier, Benj, Stef, mais aussi aux Orcéens : Mourad, Guillaume, Cyril, Floriane, Yann...

Sans oublier mes amis qui m'ont soutenue et supportée : Alex, Vaness, Micheline, Morgan, PierreS, Marco, Léa, NicoS, Dali, Hélène, Renato, Romano, Tompouce, Oliv ...

Et pour finir, un immense merci à ma famille dont le soutien inconditionnel m'aide à avancer : mon irremplaçable Manman qui a orchestré en coulisse mon pot de thèse secondée à merveille par Camille, Pôpa mon mentor, Guigui, Papy, Mamie, les tatas (Véro, Martine, Cendrine), les tontons (Raymond, Mimi, J-P), les cousins (François, Seb, Guigui), les cousines (Mélanie, Camille, Hélène) et mon roc Pierre..

À Michel

Table des matières

Introduction générale	10
I Approches perturbatives : extension d'une à deux fissures	12
Introduction	13
1 Quelques éléments de mécanique de la rupture fragile traditionnelle	14
1.1 Singularité de déplacement et de contraintes en élasticité 3D	15
1.2 Lois d'avance en élasticité 3D	16
1.2.1 Rupture brutale	16
1.2.2 Rupture subcritique ou par fatigue	16
1.2.3 Unification du critère de Griffith et de la loi de Paris	17
1.3 Conclusion	18
2 Approche perturbative pour une fissure en mode I	20
2.1 Variation des F.I.C. pour une petite perturbation du front	21
2.1.1 Rappel de la théorie des fissures en mode I	21
2.1.2 Introduction des fonctions de poids de Bueckner	21
2.1.3 Perturbation des facteurs d'intensité de contraintes $\delta K(s_1)$	23
2.1.4 Perturbation du noyau fondamental $\delta W(s_1, s_2)$	24
2.2 Quelques exemples de configurations standards	25
3 Cas de deux fissures coplanaires, parallèles, en forme de fentes infinies	27
3.1 Introduction	28
3.2 Application de la formule de Rice au cas d'étude	28
3.2.1 Préliminaires	28
3.2.2 Solution 2D	30
3.2.3 Construction du système intégral-différentiel	31
3.2.4 Résultats	33
3.3 Conclusion	33
II Application à l'étude des petites perturbations lors de la coalescence	36
Introduction	37

4	In-plane perturbation of two asymptotically closed slit-cracks	39
4.1	Introduction	40
4.2	Matched asymptotic expansions	41
4.2.1	Existence of a boundary layer near the origin in Fourier's space	41
4.2.2	Outer problem	43
4.2.3	Inner problem	45
4.2.4	Back to the outer problem	46
4.3	Results for the Fourier transforms of the components of the fundamental kernel	47
4.4	Back to the physical space	49
4.4.1	Expression of the perturbation of the stress intensity factors	49
4.4.2	Expressions of the components of the fundamental kernel	50
4.4.3	Results for the components of the fundamental kernel	52
4.5	Concluding remarks	54
5	Study of a pair of semi-infinite cracks during their coplanar coalescence	55
5.1	Introduction	56
5.2	Generalities	58
5.3	Propagation of the crack fronts in brittle fracture : bifurcation and instability	61
5.4	Evolution of the crack fronts in fatigue or subcritical crack growth	66
5.5	Statistics of the deformation of the crack fronts in a heterogeneous material	68
5.5.1	Generalities	68
5.5.2	General expressions of $\widehat{\mathcal{E}}^+$ and $\widehat{\mathcal{E}}^-$	69
5.5.3	Qualitative analysis of the evolution of the crack front shape	70
5.5.4	Behavior of $\widehat{\Delta}^{++}$ and $\widehat{\Delta}^{+-}$ for small ligaments and large wavelengths	71
5.5.5	Comments	72
5.6	Conclusion	73
III Application à l'étude de grandes perturbations lors de la coalescence		76
Introduction		77
6	Principe de la méthode-Implémentation numérique	79
6.1	Cas d'une fissure fermée en mode I	80
6.1.1	Formules incrémentales	80
6.1.2	Schéma itératif	81
6.1.3	Etape I : Détermination de K et de W sur un contour \mathcal{C} quelconque	83
6.1.4	Etape II : Etude du trajet de propagation d'une fissure quelconque	83
6.1.4.1	Cas général	83
6.1.4.2	Loi d'avance en fatigue	83
6.1.4.3	Loi d'avance à seuil	84
6.2	Extension au cas de deux fissures coplanaires sollicitées en mode I	86
6.2.1	Notations	86
6.2.2	1 ^{ère} formule de Rice : Expression de l'accroissement δK de K	87
6.2.3	2 ^{ème} formule de Rice : Expression de l'accroissement δW de W	87
6.2.4	Schéma itératif	88
Conclusion		88

7 Interaction et propagation de deux fissures circulaires	89
Introduction	90
7.1 Calculs de F.I.C. pour deux cercles identiques	90
7.1.1 Validation : Interaction faible	90
7.1.2 Interaction forte	91
7.2 Propagation en fatigue	96
7.3 Propagation en rupture fragile	98
Conclusion	101
Conclusion générale	106
Appendices	109
A In-plane perturbation of two arbitrarily spaced slit-cracks	109
A.1 Introduction	110
A.2 Generalities	112
A.2.1 Rice's formulae	112
A.2.2 Application of Rice's formulae to a system of two slit-cracks	113
A.2.3 Elementary properties of the components of the fundamental kernel	115
A.3 The 2D solution	116
A.3.1 Solution for equal cracks	116
A.3.2 Solution for slightly unequal cracks	116
A.3.3 Consequences on the 3D solution	118
A.4 Integrodifferential equations for the components of the fundamental kernel	119
A.4.1 First translatory motion of the crack fronts	119
A.4.2 Second translatory motion of the crack fronts	120
A.4.3 Rotation of the crack fronts	121
A.5 Equations on the Fourier transforms of the components of the fundamental kernel	123
A.5.1 Fourier transform of the integrodifferential equations	123
A.5.2 Complementary conditions	124
A.6 Numerical procedure and results	125
A.6.1 Choice of a numerical procedure	125
A.6.2 Numerical results	126
A.7 Summary and perspectives	133
B Annexes : Chapitre A	134
B.1 Appendix : asymptotic behavior of the functions $\widehat{g_{\alpha\beta}}$ near infinity	135
C Annexes : Chapitre 4	137
C.1 Appendix : the sign of the function \widehat{F}	138
C.2 Appendix : asymptotic behavior of the function \widehat{g} near infinity	138
D Annexes : Chapitre 5	139
D.1 Asymptotic behavior of the function \overline{f} near infinity	140
D.2 Statistical description of an ensemble of cracked media	140
D.3 Asymptotic behavior of the functions $\psi(q_1, q_2)$ and $\chi(q_1, q_2)$ for $q_1, q_2 \rightarrow 0$	141

D.4	Estimate of the correlation length of the perturbations of the crack fronts	141
E	Implémentation numérique	143
E.1	Géométrie	144
E.2	Evaluation du F.I.C. K et du noyau W	145
E.3	Remaillage	147
F	Valeur principale	148

Introduction générale

Considérons une fissure plane dans un solide élastique linéaire isotrope. On sait à l'heure actuelle prédire le seuil et le trajet de propagation quand le problème peut se ramener à un problème 2D de fissures chargées en mode I+II. D'une part, les critères de Griffith (1920), d'Irwin (1957) et Paris & Erdogan (1963) fournissent les conditions de propagation, en reliant chargement et avancée de la fissure. D'autre part, le Principe de Symétrie Locale (*cf.* Goldstein & Salganik (1974) et Cotterell & Rice (1980)) nous renseigne sur la direction de propagation en fonction du chargement, en donnant la valeur de l'angle de branchement en fonction des Facteurs d'Intensité des Contraintes (F.I.C.).

Malheureusement, dans de nombreux cas, cette approche 2D est insuffisante. C'est le cas en présence de mode III, qui engendre un trajet de propagation hors plan complexe (*cf.* Leblond et al. (2011)). C'est aussi le cas lorsque la fissure est plane et le front de fissure a une forme trop irrégulière pour pouvoir être approximé par une droite ou un cercle. Nous nous intéressons dans ce travail de thèse à ce dernier type de problèmes, c'est-à-dire à la prédiction du changement de forme de la fissure lors de la propagation coplanaire. Ces déformations du front peuvent être dues à la géométrie du solide et de la fissure initiale et/ou à l'interaction de la fissure avec des hétérogénéités du milieu.

Ces problèmes sont difficiles à appréhender avec les approches numériques classiques (F.E.M., X.F.E.M.), c'est pourquoi ils ont été abordés notamment par des approches perturbatives. Invariablement, ces approches se sont appuyées sur l'expression de l'altération des F.I.C. résultant d'une petite perturbation arbitraire du front. Cette formule fournit la variation des F.I.C. exprimée sous la forme d'une intégrale sur le front non perturbé, dont l'intégrande fait intervenir une fonction, le "noyau fondamental", lié aux fonctions de poids 3D de Bueckner (1987). Ce noyau dépend de la géométrie. Il a été calculé dans un premier temps pour une fissure semi-infinie chargée en mode I par Rice (1985) puis en mode II+III par Gao & Rice (1986), puis des géométries de plus en plus complexes : la fissure circulaire (Gao & Rice 1987*b*, Gao 1988), la tunnel-crack (Leblond et al. (1996), Lazarus & Leblond (2002*b*)), la fissure semi-infinie d'interface (Lazarus & Leblond (1998*b*), Piccolroaz et al. (2007)). Des formules perturbatives pour le noyau ont également été établies que ce soit en mode I (Rice (1989)) ou en mode II+III Favier et al. (2006*b*). Cette approche permettant de réactualiser les FIC pour une petite perturbation du front peut être utilisée d'une part analytiquement pour étudier des petites déformations du front et d'autre part numériquement pour étudier, par un processus itératif, de plus grandes déformations.

Les travaux analytiques concernant les petites déformations peuvent être décomposés en deux parties : l'étude de la stabilité de la forme par rapport à des perturbations géométriques du front et l'étude des changements de forme du front lors de la propagation dans un milieu à propriétés de rupture hétérogènes.

La stabilité configurationnelle consiste à étudier si une petite perturbation du front tend à s'atténuer ou à s'amplifier lors de la propagation. Parmi les géométries étudiées, on compte la fissure semi-infinie chargée en traction (Rice 1985, Gao et Rice 1989), en cisaillement (Gao et Rice 1986), la fissure circulaire externe (Gao et Rice 1987*a*) et interne en mode I (Gao et Rice 1987*b*), et en mode mixte (Gao et Rice 1987*b*), et la fissure en forme de fente infinie chargée en tension (Leblond *et al.* 1996) et en cisaillement (Lazarus et Leblond 2002*a*), et enfin, la fissure semi-infinie d'interface soumise à un chargement arbitraire (Lazarus et Leblond 1998*a*).

Les effets des fluctuations de caractéristiques de fracture des matériaux ont, quant à eux, été étudiés par le couplage d'outils statistiques avec l'approche perturbative. On peut citer les

travaux en physique statistique de Schmittbuhl *et al.* (1995), Ramanathan *et al.* (1997), Delaplace *et al.* (1999), Schmittbuhl et Vilotte (1999) ou encore Katzav et Adda-Bedia (2006), s’attachant à déterminer l’“exposant de rugosité” le long du front d’une fissure semi-infinie. Plus récemment, s’inspirant des travaux de Perrin & Rice (1994), Lazarus, Leblond et leurs doctorants, Elie Favier (2005) et Nadjime Pindra (2009) se sont intéressés au spectre de puissance et à la fonction d’autocorrélation de la perturbation du front de fissure, dans le cas de la fissure en forme de fente infinie sollicitée en traction (Favier *et al.* (2006*b*)), en cisaillement (Pindra *et al.* (2010*b*)), et dans le cas de la fissure semi-infinie d’interface soumise à un chargement arbitraire (Pindra *et al.* (2008)).

Pour générer des grandes déformations du front de fissure de manière numérique, il est possible d’utiliser de façon incrémentale les formules perturbatives des F.I.C. et du noyau fondamental de Rice (1989) et Favier *et al.* (2006*b*). Cette idée de Rice (1989) a été mise en pratique par Bower et Ortiz (1990) et Lazarus (2003) dans le cadre de la propagation coplanaire d’une fissure contenue dans un milieu infini et sollicitée en traction, puis étendue par Favier lors de sa thèse (Favier *et al.* 2006*b*) au mode mixte. Le caractère infini du milieu est requis, ce qui constitue une limitation, contrairement aux M.E.F., dans les configurations pour lesquelles il est nécessaire de prendre en compte les frontières. L’intérêt majeur de cette approche est de n’impliquer que le maillage du seul front de fissure 1D, ce qui permet d’étudier relativement facilement le trajet de propagation à la fois en rupture fragile et en fatigue en tenant compte des changements de forme du front de façon précise.

La méthode par approche perturbative, évoquée précédemment, est valable quel que soit le nombre de fissures pourvu que le milieu puisse être supposé infini. Mais, en pratique, les applications n’ont concerné jusqu’à présent qu’une fissure isolée. L’objet de cette thèse sera de l’étendre au cas de l’interaction entre deux fissures. Elle se développe en trois parties :

- Dans la partie I, on rappelle quelques éléments de mécanique de la rupture classique. Puis, les grandes lignes de cette approche sont exposées comme prérequis.
- La seconde partie traite de l’interaction entre deux fissures en forme de fentes infinies, se basant sur les travaux récents de Pindra *et al.* (2010*b*). Après la détermination du Facteur d’Intensité des Contraintes et du “noyau fondamental” pour cette géométrie, une étude statistique de la propagation est menée, en supposant que le matériau présente des caractéristiques à rupture statistiquement distribuées.
- La partie III correspond à l’étude numérique de la propagation de deux fissures circulaires lors de leur coalescence. On y expose l’extension du code de Lazarus (2003), écrit en langage C, au cas de deux fissures coplanaires à fronts fermés chargées en mode I. On traite, à titre d’applications, le cas de la propagation en fatigue ainsi qu’en rupture brutale d’un système de deux fissures initialement circulaires.

Première partie

**Approches perturbatives : extension
d'une à deux fissures**

Introduction

Nous allons ici rappeler quelques notions fondamentales de mécanique de la rupture fragile afin d'appréhender les problèmes de propagation et coalescence de fissures planes envisagés dans ce travail. Cette partie est composée des trois chapitres suivants :

1. Le premier chapitre est consacré à l'introduction des outils classiques de mécanique de la rupture fragile et au choix des notations qui sont utilisées dans la suite. Les facteurs d'intensité des contraintes tridimensionnels y sont définis, bien qu'en pratique, seul celui correspondant au mode I nous est utile. Nous présentons ensuite la version tridimensionnelle des différents critères de propagation intervenant par la suite : le critère de Griffith sous chargement monotone et la loi de Paris pour modéliser de la fatigue. Un critère unifié est aussi proposé.
2. Nous exposons dans le deuxième chapitre les approches perturbatives en mode I pour des fissures planes. Ces approches permettent d'obtenir les variations au premier ordre des facteurs d'intensité des contraintes dues à de petites perturbations arbitraires du front. L'expression générale de ces formules est valable quel que soit le nombre de fissures pourvu qu'elles soient contenues dans un même plan. Mais, nous verrons qu'en pratique, elle fait apparaître un noyau dépendant de la géométrie, et qu'elle n'a été appliquée, jusqu'à présent, que pour des fissures uniques de forme simple que nous passerons en revue.
3. Ce n'est que très récemment que ce noyau a été déterminé pour le cas particulier de deux fissures en forme de fentes infinies par Pindra et al. (2010a). Nous en rappelons les grandes lignes dans le troisième chapitre .

Chapitre 1

Quelques éléments de mécanique de la rupture fragile traditionnelle

1.1 Singularité de déplacement et de contraintes en élasticité 3D

La notion de facteurs d'intensité de contraintes (F.I.C.) est très générale et s'applique à des fissures arbitraires contenues dans un milieu élastique. Cependant, notre étude portant sur la déformation de fissures planes, nous nous limiterons à ce cadre de travail. Considérons donc une fissure plane, classiquement contenue dans le plan $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$ et de normale \mathbf{e}_y . On note \mathcal{C} le front de la fissure sur lequel on définit une abscisse curviligne notée s . A chaque point $M(s)$ courant du front est associé un repère local défini comme suit :

- $\mathbf{e}_1(s)$: normal au front dans le plan de la fissure et orienté dans la direction de propagation.
- $\mathbf{e}_2(s) \equiv \mathbf{e}_y$
- $\mathbf{e}_3(s) \equiv \mathbf{e}_1(s) \wedge \mathbf{e}_2(s)$

On considère également le plan $\pi(s)$, contenant le point courant $M(s)$ et de normale $\mathbf{e}_3(s)$.

Comme le montre la figure (1.1), l'abscisse curviligne s est choisie dirigée par le sens de $\mathbf{e}_3(s)$.

On considère alors un matériau élastique homogène soumis à un chargement variant de manière quasi-statique. Sous ces conditions, d'après Leblond & Torlai (1992), les champs mécaniques en présence résultent localement de la superposition de la solution $(\mathbf{u}_p, \boldsymbol{\sigma}_p)$ d'un problème de déformation plane (dans le plan $\pi(s)$) et de la solution $(\mathbf{u}_a, \boldsymbol{\sigma}_a)$ d'un problème de déformation antiplane (par rapport au plan $\pi(s)$). En tout point M au voisinage du front de fissure, les champs locaux de déplacement et de contraintes peuvent ainsi s'écrire sous la forme :

- $\mathbf{u} = \mathbf{u}_p + \mathbf{u}_a$
avec : $\mathbf{u}_p = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2$ et $\mathbf{u}_a = u_3 \mathbf{e}_3$
- $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_p + \boldsymbol{\sigma}_a$
avec : $\sigma_p = \sigma_{11} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \sigma_{12} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) + \sigma_{22} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \sigma_{33} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$
et $\sigma_a = \sigma_{13} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1) + \sigma_{23} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2)$

Dans la mesure où nous ne cherchons ici qu'à définir les F.I.C., nous nous contenterons d'explicitier les composantes des champs solutions dont nous avons besoin, à savoir le saut de déplacement $\llbracket u(P) \rrbracket = \mathbf{u}(P^+) - \mathbf{u}(P^-)$ au point $P(r, s)$ en amont de la pointe de fissure et les contraintes $\sigma(P') \cdot \mathbf{e}_y$ au point $P'(r')$ en aval de la pointe, les distances r et r' étant supposées petites. Dans la limite $r \rightarrow 0^+$ et $r' \rightarrow 0^+$, on a les expressions suivantes, à l'ordre principal :

$$\begin{cases} \llbracket u_1(r, s) \rrbracket \sim_{r \rightarrow 0^+} 8 \frac{1 - \nu^2}{E} K_{II}(s) \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \\ \llbracket u_2(r, s) \rrbracket \sim_{r \rightarrow 0^+} 8 \frac{1 - \nu^2}{E} K_I(s) \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \\ \llbracket u_3(r, s) \rrbracket \sim_{r \rightarrow 0^+} 8 \frac{1 - \nu^2}{E} K_{III}(s) \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} \sigma_{21}(r', s) \sim_{r \rightarrow 0^+} \frac{K_{II}(s)}{\sqrt{2r'\pi}} \\ \sigma_{22}(r', s) \sim_{r \rightarrow 0^+} \frac{K_I(s)}{\sqrt{2r'\pi}} \\ \sigma_{23}(r', s) \sim_{r \rightarrow 0^+} \frac{K_{III}(s)}{\sqrt{2r'\pi}} \end{cases} \quad (1.2)$$

Les coefficients $K_I(s)$, $K_{II}(s)$ et $K_{III}(s)$ apparaissant dans les expressions asymptotiques (1.1) et (1.2) sont les F.I.C. en mode I, mode II et mode III, définis en chaque point $M(s)$ du front. Ces F.I.C dépendent de la géométrie considérée, du chargement et des caractéristiques mécaniques du matériau.

1.2 Lois d'avance en élasticité 3D

Nous allons exposer ici les lois de propagation des fissures en rupture brutale, en rupture subcritique et en fatigue. Ces lois portent sur les seuls F.I.C. traduisant l'état local de contrainte du matériau.

1.2.1 Rupture brutale

Supposons le matériau considéré soumis à un chargement de mode I constant, le critère d'Irwin en tout point du front s'écrit :

$$\begin{cases} K_I(s) < K_c \implies & \text{pas de propagation} \\ K_I(s) = K_c \implies & \text{propagation possible} \end{cases} \quad (1.3)$$

où la quantité K_c , appelée ténacité du matériau, est intrinsèque au matériau.

Pour un chargement mettant en jeu du mode mixte (mode II et/ou mode III), il est possible d'étendre le critère d'Irwin en introduisant le *taux de restitution d'énergie* G . La formule d'Irwin donne le lien entre G et les F.I.C. :

$$G(s) = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)(K_I^2(s) + K_{II}^2(s)) + K_{III}^2(s)] \quad (1.4)$$

Le critère étendu s'écrit simplement :

$$\begin{cases} G(s) < G_c \implies & \text{pas de propagation} \\ G(s) = G_c \implies & \text{propagation possible} \end{cases} \quad (1.5)$$

1.2.2 Rupture subcritique ou par fatigue

Considérons maintenant un chargement cyclique d'amplitude inférieure au seuil critique évoqué précédemment. Une propagation de la fissure est néanmoins possible, on parle alors de propagation par fatigue du matériau ; chaque cycle de chargement s'accompagne d'une petite avance de la fissure. La loi classique pour le mode I est la loi de Paris qui donne la vitesse d'avance normale de la fissure par cycle de chargement en fonction de l'amplitude de variation du facteur K_I , sous la forme :

$$\frac{da(s)}{dN_c} = C_K [\Delta K_I]^\beta \quad (1.6)$$

avec :

- $a(s)$ est la longueur de fissure en $M(s)$.
- N_c le nombre de cycles traité comme une variable continue.
- C_K et β des constantes du matériau.

De la même façon que pour la rupture brutale, on peut étendre ce critère à des chargements de mode mixte de la façon suivante :

$$\frac{da(s)}{dN_c} = C_G[\Delta G]^{\beta/2} \quad (1.7)$$

On remarque que l'exposant de la loi est pris égal à $\beta/2$ (et non pas β) pour la rendre compatible avec celle applicable au mode I; en effet, K_I intervient au carré dans l'expression de G .

Un autre cas est à considérer, celui de la propagation de la fissure à chargement constant en dessous du seuil : on parle alors de rupture subcritique pour laquelle la propagation se fait très lentement. Il est possible d'adapter la loi de Paris au cas de la rupture subcritique en substituant le temps t au nombre de cycles N_c et G à ΔG , on obtient la loi :

$$\frac{da(s)}{dt} = C_{sub}[G]^{\beta/2} \quad (1.8)$$

1.2.3 Unification du critère de Griffith et de la loi de Paris

Pour faire le parallèle entre les diverses lois, il faut utiliser une variable unique τ jouant le rôle de "temps cinématique" en rupture brutale, celui du nombre de cycles en fatigue et celui du temps réel en rupture subcritique. On cherche une loi unifiée de la forme suivante :

$$\frac{da(s)}{d\tau} = \tilde{C}[\tilde{G}/\tilde{G}_c]^{\beta/2} \quad (1.9)$$

Montrons que cette formulation unique permet de caractériser les trois types de rupture précédents :

- **Rupture brutale** : la forme du critère d'Irwin, détaillé précédemment, est très différente de (1.9). On peut cependant retrouver son comportement au passage à la limite $n \rightarrow +\infty$ dans (1.9). En effet, substituons-y G et G_c à \tilde{G} et \tilde{G}_c et effectuons le passage à la limite. On voit facilement que tant que G reste strictement inférieur à G_c , il n'y a pas de propagation, et que lorsque G égale G_c alors l'avancée de la fissure est possible. On a ici affaire à une régularisation de la loi de Griffith par convergence simple d'une famille de fonctions continues vers une fonction discontinue.
- **Rupture par fatigue** : il suffit de choisir N_c pour τ , ΔG pour \tilde{G} et C_G pour $\tilde{C}\tilde{G}_c^{-\beta/2}$ pour obtenir (1.7) à partir de (1.9).
- **Rupture subcritique** : on substitue ici t à τ , G à \tilde{G} et C_{sub} à $\tilde{C}\tilde{G}_c^{-\beta/2}$ dans (1.9) et on obtient (1.8).

Remarques :

- Cette formulation n'offre pas une équivalence stricte au critère de Griffith, dans le cas de la rupture brutale. C'est au mieux le cas localement, mais rien ne prouve que cela reste vrai à l'échelle de la structure entière. En effet, cette loi nous permet de nous affranchir des problèmes de bifurcations, du fait que la vitesse d'avance y soit explicitée de manière unique, alors qu'elle n'apparaît qu'implicitement dans le critère de Griffith.
- Ce type d'unification a été discutée dans le livre de Lemaître & Chaboche (1985).

1.3 Conclusion

Dans ce chapitre, les F.I.C. $K_I(s)$, $K_{II}(s)$ et $K_{III}(s)$ en chaque point $M(s)$ du front ont été définis en adoptant une base locale $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)(s)$ orthonormée directe, le F.I.C. $K_I(s)$ étant lié à la composante selon \mathbf{e}_2 du saut de déplacement, le F.I.C. $K_{II}(s)$ à la composante selon \mathbf{e}_1 , et le F.I.C. $K_{III}(s)$ à la composante selon \mathbf{e}_3 . Ils sont à la base des critères de propagation et leur détermination est donc indispensable. Une des façons de les calculer le long de fronts distordus est d'utiliser les approches perturbatives rappelées dans le chapitre suivant.

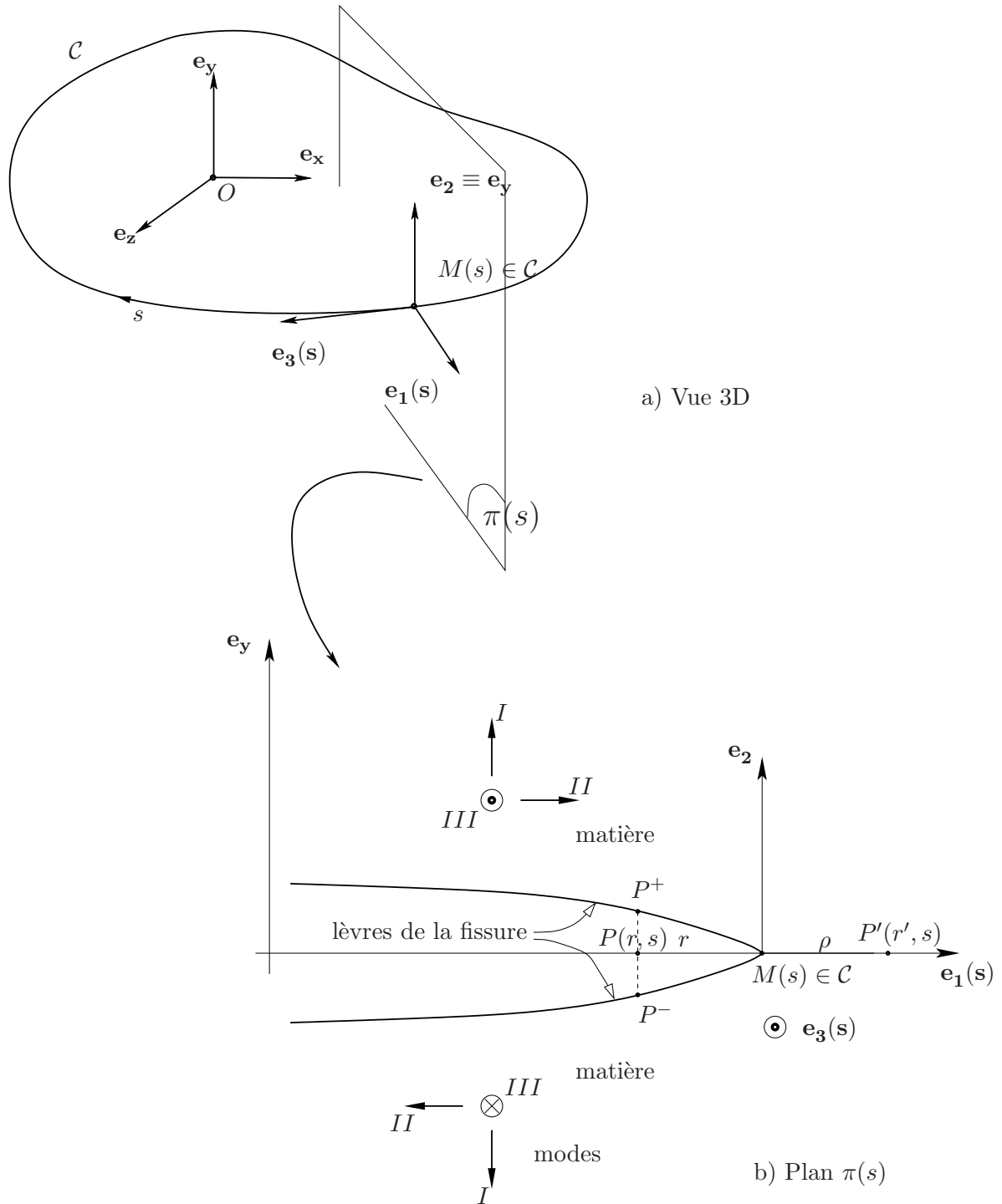


FIGURE 1.1 – Fissure plane de contour arbitraire : vue d'ensemble (a) et vue dans le plan $\pi(s)$ (b)

Chapitre 2

Approche perturbative pour une fissure en mode I

2.1 Variation des F.I.C. pour une petite perturbation du front

Dans le cadre de notre étude, on se limite ici au mode I. Cette section est tirée des articles de Rice (1985) et Rice (1989).

2.1.1 Rappel de la théorie des fissures en mode I

On rappelle les résultats principaux détaillés au chapitre précédent, avec des notations simplifiées, étant donné que l'on travaille désormais en mode I uniquement.

On considère un solide élastique 3D Ω , de contour $\partial\Omega$, contenant une fissure plane dont le contour est supposé suffisamment régulier et noté \mathcal{C} . On fait également l'hypothèse que le matériau est homogène et isotrope et que le corps est symétrique par rapport au plan de fissure $y = 0$. Ce corps est soumis à une distribution volumique de forces symétriques par rapport au plan de fissure $y = 0$, notées $\mathbf{f}(x, y, z) = \mathbf{f}(\mathbf{r})$. Ce chargement induit du mode I uniquement sur le front de la fissure. On note s l'abscisse curviligne d'un point courant le long de ce front.

- A une distance r' en aval du front de fissure, les contraintes sont données par :

$$\sigma_{22} = \sigma \sim \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r'}} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r'}} \quad (2.1)$$

où K désigne le facteur d'intensité en mode I.

- A une distance r en amont du front de fissure, le saut de déplacement normal à travers la fissure s'écrit :

$$\llbracket u(r) \rrbracket \sim \frac{8(1-\nu^2)}{E} K \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \quad (2.2)$$

Le taux d'énergie libérée par unité de surface fissurée est donné par la formule d'Irwin :

$$G = \frac{1-\nu^2}{E} K^2 \quad (2.3)$$

2.1.2 Introduction des fonctions de poids de Bueckner

On définit les fonctions de poids de Bueckner, notées h , donnant le facteur d'intensité de contraintes du mode I induit à l'abscisse s par une force ponctuelle unité appliquée en \mathbf{r} dans la direction y . Elles dépendent de la position $\mathbf{r} = (x, y, z)$ dans le corps, du point d'application de la force ponctuelle unité et de l'abscisse s le long du front de fissure : $h(\mathbf{r}; s)$. Ces fonctions de poids vérifient deux propriétés fondamentales :

- La première est que le facteur d'intensité de contraintes du mode I induit à l'abscisse s le long du front de fissure par une distribution arbitraire de forces $f(\mathbf{r})$ parallèles à \mathbf{e}_y est donné par :

$$K(s) = \int_{\Omega} h(\mathbf{r}; s) f(\mathbf{r}) dx dy dz \quad (2.4)$$

- La seconde propriété est liée à la variation du déplacement selon y qui se produit lorsque le front de fissure avance normal à lui-même dans le plan (Oxy) d'une quantité $\delta a = \delta a(s)$. Cette variation s'écrit au premier ordre en $\delta a(s)$:

$$\delta u(\mathbf{r}) = 2 \frac{1-\nu^2}{E} \int_{\Omega} h(\mathbf{r}; s) K(s) \delta a(s) ds$$

Cette expression est établie en posant : $\delta a(s) = g(s)\delta A$, où $g(s)$ est une fonction arbitraire définie le long du front de fissure décrivant la géométrie de l'altération du front et A une quantité décrivant l'amplitude de cette altération.

On a alors :

$$\left(\frac{\partial u(\mathbf{r}; A)}{\partial A}\right)_{A=0} = 2 \frac{1 - \nu^2}{E} \int_{\mathcal{C}} h(\mathbf{r}; s) K(s) g(s) ds \quad (2.5)$$

Dans le cadre de notre étude, on s'intéresse à la variation de la discontinuité de déplacement normal à la fissure. La formule donnant cette variation ne fera intervenir que le saut de la fonction de poids à travers la fissure, défini par :

$$k(x, z; s') = h(x, 0^+, z; s') - h(x, 0^-, z; s') \quad (2.6)$$

pour tout point (x, z) du plan de fissure.

Les propriétés de k sont semblables à celles de h évoquées précédemment.

Tout d'abord, si le chargement imposé consiste en des tractions $\pm \mathbf{T} = \pm T(x, z) \mathbf{e}_y$ par unité de surface sur les lèvres de la fissure, alors le facteur d'intensité à l'abscisse s' le long du front est :

$$K(s') = \int_{\text{fissure}} k(x, z; s') T(x, z) dx dy \quad (2.7)$$

Pour un chargement quelconque, on peut toujours se ramener à cette situation grâce au principe de superposition.

D'autre part, si le front de fissure est déplacé d'une quantité $\delta a(s)$ sous chargement fixé, alors la variation de la discontinuité de déplacement à travers le plan de fissure s'écrit au premier ordre en $\delta a(s)$:

$$\delta \llbracket u(r) \rrbracket = 2 \frac{1 - \nu^2}{E} \int_{\mathcal{C}} k(x, z; s') K(s') \delta a(s') ds' \quad (2.8)$$

Considérons finalement une fissure de forme plane quelconque, on choisit deux points du front d'abscisses respectives s et s' , un point (x, z) de la zone de fissure à la petite distance perpendiculaire $\rho = \rho(x, z)$ du point s du front. On note par ailleurs $D(s; s')$ la distance cartésienne entre les points s et s' . La fonction $k(x, z; s')/\sqrt{\rho(x, z)}$ est connue pour avoir une limite finie lorsque $\rho(x, z)$ tend vers zéro (se référer par exemple à Leblond et al. (1999)) On définit alors la fonction $W(x, z; s')$ de la façon suivante :

$$W(x, z; s') = \pi \sqrt{\frac{\pi}{2}} D^2(s, s') \lim_{\rho(x, z) \rightarrow 0} \frac{k(x, z; s')}{\sqrt{\rho(x, z)}} \quad (2.9)$$

La fonction $W(s, s')$ dépend en fait de la forme du front de fissure, l'argument \mathcal{C} est volontairement oublié ici pour ne pas alourdir les notations. Cette fonction est nommée *noyau fondamental*, ou *noyau*. Bien que les F.I.C. dépendent du chargement, la fonction de poids et donc le noyau fondamental ne dépendent du chargement qu'à travers la partition du bord relative aux déplacements et aux efforts imposés. (On ne considérera dans ce travail que des situations où la partie du bord $\partial\Omega$ soumise à des déplacements imposés est vide).

On montre que pour ρ tendant vers zéro, $W(x, z; s')$ admet une limite finie notée $W(s; s')$ et que la fonction W ainsi définie est symétrique : $W(s'; s) = W(s; s')$.

De surcroît, la fonction $W(s; s')$ vérifie la propriété suivante lorsque s' tend vers s :

$$\lim_{s \rightarrow s'} W(s; s') = 1 \quad (2.10)$$

2.1.3 Perturbation des facteurs d'intensité de contraintes $\delta K(s_1)$

On se place dans le cas d'une fissure plane de géométrie quelconque sollicitée en mode I pur et se propageant dans le plan Oxz .

Cas $\delta a(s_1) = 0$

On suppose que $\delta a(s) = 0$ pour $s = s_1$ et $s = s_2$: cette hypothèse nous permet de calculer les quantités $\delta K(s_1)$, $\delta K(s_2)$ et $\delta W(s_1, s_2)$. Naturellement, on s'intéresse plus généralement à δK et δW en tout point du front, on verra ensuite la manière dont on procède lorsque $\delta a(s) \neq 0$. On considère un point (x_1, z_1) situé à la distance ρ_1 du point s_1 du front, on a alors, d'après l'équation (2.2) :

$$\llbracket u(x_1, z_1) \rrbracket \sim \frac{8(1-\nu^2)}{E} K(s_1) \sqrt{\frac{\rho_1}{2\pi}} \quad (2.11)$$

Le premier point s_1 restant immobile dans le mouvement du front, on en déduit qu'au premier ordre en $\delta a(s)$:

$$\delta \llbracket u(x_1, z_1) \rrbracket \sim \frac{8(1-\nu^2)}{E} \delta K(s_1) \sqrt{\frac{\rho_1}{2\pi}} \quad (2.12)$$

D'après les équations (2.8) et (2.11), il vient que :

$$\delta \llbracket u(x_1, z_1) \rrbracket = \frac{2(1-\nu^2)}{E} \frac{\sqrt{2\rho_1}}{\pi\sqrt{\pi}} \int_C \frac{W(x_1, z_1; s)}{D^2(x_1, z_1; s)} K(s) \delta a(s) ds \quad (2.13)$$

On peut montrer que lorsque ρ_1 tend vers zéro, la limite de l'intégrale de (2.13) existe au sens des valeurs principales de Cauchy (cf. annexe F). La comparaison avec l'équation (2.12) montre alors que :

$$\delta K(s_1) = \frac{1}{2\pi} VP \int_C \frac{W(s_1, s)}{D^2(s_1, s)} K(s) \delta a(s) ds \quad (2.14)$$

Ceci est établi au premier ordre en $\delta a(s)$ pour $\delta a(s_1) = 0$.

Cas $\delta a(s_1) \neq 0$

On peut ici procéder de deux manières différentes :

- On décompose le mouvement de la manière suivante :

$$\delta a(s) = \delta a(s_1) + [\delta a(s) - \delta a(s_1)] \quad (2.15)$$

On a alors :

$$\delta K(s_1) = \delta_* K(s_1) + \frac{1}{2\pi} VP \int_C \frac{W(s_1, s)}{D^2(s_1, s)} K(s) [\delta a(s) - \delta a(s_1)] ds \quad (2.16)$$

où $\delta_* K(s_1)$ représente la variation de $K(s_1)$ induite par une avancée uniforme du front égale à $\delta a(s_1)$.

- On réécrit l'équation de Rice (2.14) comme suit :

$$\delta K(s_1) = \frac{1}{2\pi} VP \int_{\mathcal{C}} \frac{W(s_1, s)}{D^2(s_1, s)} K(s) [\delta a(s) - \delta_* a(s)] ds \quad (2.17)$$

où $\delta_* a(M)$ est une avance particulière de la fissure qui en préserve la forme et telle que $\delta_* a(s_1) = \delta a(s_1)$.

On peut facilement montrer qu'il est toujours possible de définir de manière unique une telle translation vérifiant ces conditions. Il vient alors :

$$\delta_* a(s) = \delta a(s_1) \mathbf{n}(s_1) \cdot \mathbf{n}(s)$$

où $\mathbf{n}(s)$ représente la normale au front \mathcal{C} au point M d'abscisse s .

2.1.4 Perturbation du noyau fondamental $\delta W(s_1, s_2)$

Nous allons maintenant établir l'expression générale de la variation de la fonction W . Pour cela, nous allons appliquer l'équation (2.14) à une paire de forces unité dans la direction y appliquées sur les lèvres de la fissure en (x, z) . On définit une perturbation $\delta a(s)$ s'annulant aux points s_1 et s_2 , on considère de plus un point (x_2, z_2) à la distance ρ_2 du point s_2 du front, on a alors, d'après l'équation (2.14) :

$$\delta k(x_2, z_2; s_1) = \frac{1}{2\pi} VP \int_{\mathcal{C}} \frac{W(s_1; s)}{D^2(s_1; s)} k(x_2, z_2; s) \delta a(s) ds \quad (2.18)$$

Or, l'équation (2.9) nous donne l'expression asymptotique de k pour $\rho_2 \rightarrow 0$:

$$k(x_2, z_2; s_1) = \frac{\sqrt{2\rho_2} W(x_2, z_2; s_1)}{\pi\sqrt{\pi} D^2(x_2, z_2; s_1)}$$

En divisant par $\sqrt{\rho_2}$ et en prenant la limite $\rho_2 \rightarrow 0$ l'équation (2.14) et en l'injectant dans (2.18), l'équation (2.18) devient :

$$\delta W(s_2; s_1) = \frac{D^2(s_2; s_1)}{2\pi} VP \int_{\mathcal{C}} \frac{W(s_1; s)W(s_2; s)}{D^2(s_1; s)D^2(s_2; s)} \delta a(s) ds \quad (2.19)$$

Remarque : Il est possible d'étendre cette expression à des perturbations δa du front ne s'annulant pas en s_1 et s_2 ; cela sera nécessaire dans le volet numérique de cette étude. Pour ce faire, imaginons un mouvement de la fissure δa_{**} tel que $\delta a_{**}(s_1) = \delta a(s_1)$ et $\delta a_{**}(s_2) = \delta a(s_2)$. On note alors $\delta W_{**}(s_1, s_2)$ la variation du noyau associé. L'équation (2.19) devient alors :

$$\delta W(s_1; s_2) = \delta_{**} W(s_1, s_2) + \frac{D^2(s_1; s_2)}{2\pi} VP \int_{\mathcal{C}} \frac{W(s_1; s)W(s; s_2)}{D^2(s_1; s)D^2(s; s_2)} [\delta a(s) - \delta_{**} a(s)] ds \quad (2.20)$$

La difficulté ici sera de définir l'avancée $\delta_{**} a(s)$ de telle sorte que $\delta_{**} W(s_1, s_2)$ puisse être calculé. Ce problème n'est malheureusement pas résolu dans le cas général. Cependant, dans le cas d'un milieu infini soumis à un chargement uniforme à l'infini, il est toujours possible de trouver une combinaison de translations, rotations et homothéties amenant tout couple de points distincts (s_1, s_2) d'une position initiale vers une position finale quelles qu'elles soient. On remarque que de telles transformations laissent inchangé le noyau, i.e $\delta_{**} W(s_1, s_2) = 0$. L'équation (2.20) s'écrit finalement :

$$\delta W(s_1; s_2) = \frac{D^2(s_1; s_2)}{2\pi} VP \int_{\mathcal{C}} \frac{W(s_1; s)W(s; s_2)}{D^2(s_1; s)D^2(s; s_2)} [\delta a(s) - \delta_{**} a(s)] ds \quad (2.21)$$

2.2 Quelques exemples de configurations standards

Afin d'initier la méthode d'approche perturbative, le noyau fondamental doit être connu pour la configuration non perturbée. Il existe peu de configurations pour lesquelles c'est le cas. En se restreignant au mode I, citons la fissure circulaire interne (figure 2.2) et la fissure semi-infinie (figure 2.1b) dont le noyau a été déterminé par Gao & Rice (1987b) et Rice (1989) respectivement. Pour ces deux géométries, l'expression est simple et vaut :

$$W(s, s') = 1 \quad \forall s, s' \in \mathcal{C} \quad (2.22)$$

Il a aussi été déterminé par Leblond et al. (1996) pour la fissure en forme de fente infinie chargée en mode I (figure 2.1a). Dans ce cas, il n'existe pas de solution analytique.

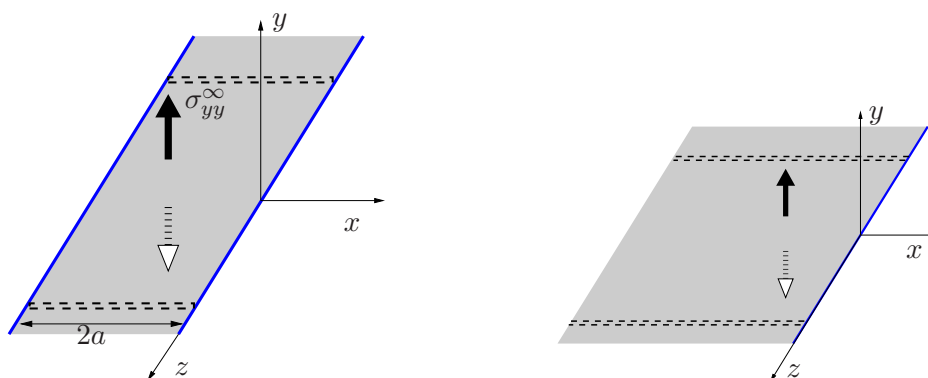


FIGURE 2.1 – Fissures en forme de fente infinie (a) et semi-infinie (b) soumises à des tractions à l'infini

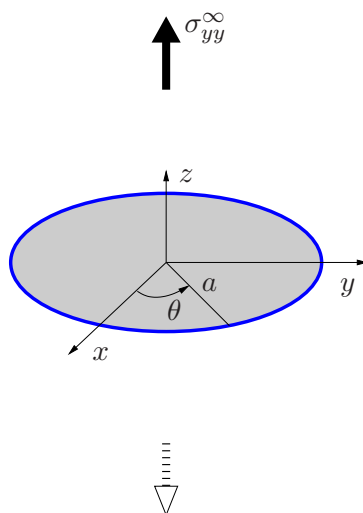


FIGURE 2.2 – Fissure circulaire intérieure soumise à des tractions à l'infini

Les cas précédents concernent tous une fissure unique. Ce n'est que très récemment que le noyau a été calculé pour une géométrie impliquant deux fissures, celle du système de deux fentes

infinies parallèles. L'obtention du noyau est rappelé dans le chapitre suivant ; c'est un prérequis au problème de la coalescence des deux fentes infinies, traité dans la partie II.

Chapitre 3

Approche perturbative pour deux fissures en mode I : cas de deux fissures coplanaires, parallèles, en forme de fentes infinies

3.1 Introduction

Cette section se base sur les travaux de Pindra et al. (2010b), dont elle présente un résumé. L'intégralité de l'article est donné en annexe A, car il contient des formules indispensables à la compréhension du chapitre 4.

Dans la perspective de l'étude future de la déformation de fronts de fissures coplanaires au cours de leur coalescence, nous allons nous appuyer sur le problème modèle de deux fissures parallèles en forme de fentes infinies dans un milieu infini.

Dans un premier temps, il convient de déterminer la distribution des F.I.C. le long des fronts résultant d'une perturbation coplanaire infinitésimale mais arbitraire de ces fronts. Pour cette géométrie, le "noyau fondamental" se réduit à six fonctions inconnues, appelées fonctions d'influence, qui décrivent les interactions entre les quatre fronts de fissures. La résolution du problème revient à déterminer ces six fonctions. La méthode représente une extension de celle utilisée par Leblond et al. (1996) dans le cas une fissure bande unique dans un milieu infini. Cette technique se base sur la formule de Rice donnant la variation, au premier ordre, du noyau fondamental résultant d'une perturbation arbitraire du front dans le plan de fissure. Elle consiste ensuite à considérer des mouvements particuliers des fissures qui préservent leur forme (mais pas nécessairement leur orientation ni leur taille). De ce procédé découle un système intégral-différentiel de six équations à six fonctions inconnues qu'il convient de résoudre numériquement dans le domaine de Fourier.

Un aspect remarquable de cette méthode est qu'elle permet de s'affranchir du calcul complet de la solution élastique très fastidieux, voire impossible, en se concentrant sur la seule quantité d'intérêt, le F.I.C. du mode I.

3.2 Application de la formule de Rice au cas d'étude

3.2.1 Préliminaires

On considère ici un corps infini, élastique et isotrope au sein duquel existe un système de deux fissures coplanaires en fentes infinies. Le milieu est chargé en mode I pur. On perturbe chaque front α ($= 1, 2, \bar{1}, \bar{2}$), à la position z , d'une petite distance $\delta_\alpha(z)$, perpendiculairement à lui-même, comme le montre la figure (3.1). La formule de Rice (2.16) donnant la variation de $\delta K_\alpha(z)$ du F.I.C. local prend la forme suivante :

$$\delta K_\alpha(z) = [\delta K_\alpha(z)]_{\delta_\beta(z') \equiv \delta_\alpha(z), \forall \beta, \forall z'} + \sum_{\beta=1,2,\bar{1},\bar{2}} PV \int_{-\infty}^{+\infty} Z_{\alpha\beta}(z, z') K_\beta(z') [\delta_\beta(z') - \delta_\alpha(z)] dz' \quad (\alpha = 1, 2, \bar{1}, \bar{2}) \quad (3.1)$$

où $[\delta K_\alpha(z)]_{\delta_\beta(z') \equiv \delta_\alpha(z), \forall \beta, \forall z'}$ représente la valeur de $\delta K_\alpha(z)$ pour une avance uniforme de tous les fronts de la quantité $\delta_\alpha(z)$, et $Z_{\alpha\beta}(z, z')$ la valeur du noyau aux points z du front α et z' du front β .

Les notations utilisées dans (3.1) sont un peu différentes de celles utilisées par Rice dans (2.16). En effet, on y a redéfini l'expression du noyau Z (et non plus W) : $Z(z, z') = \frac{W(z, z')}{2\pi[D(z, z')]^2}$. Le

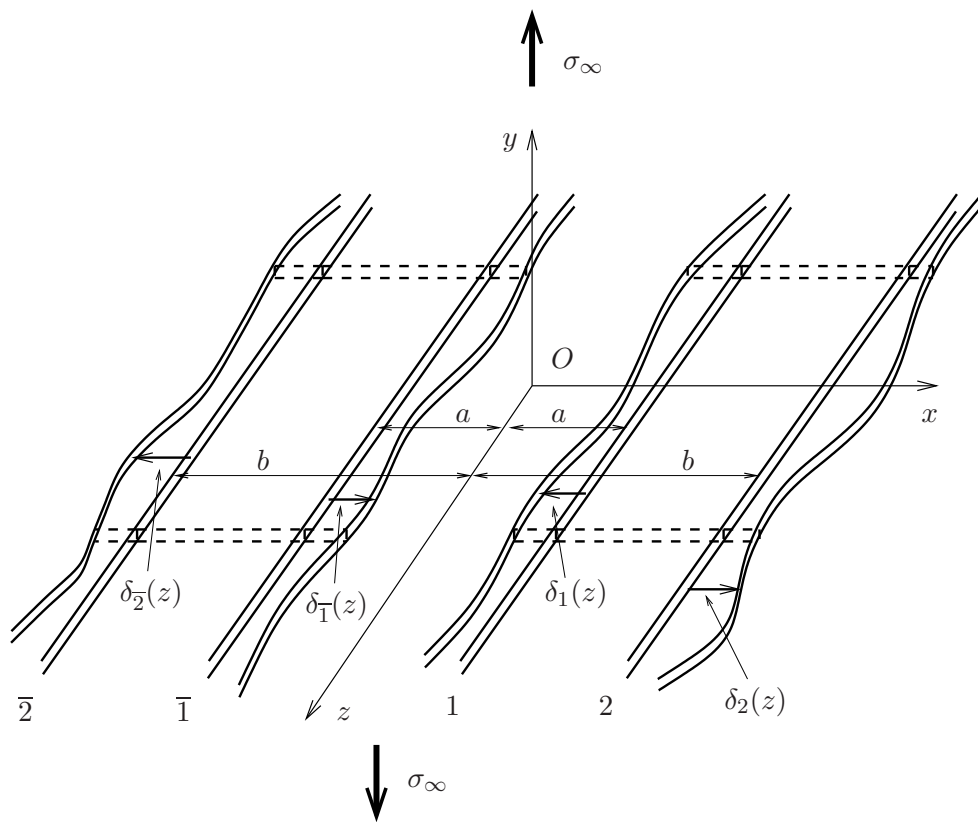


FIGURE 3.1 – Système de deux fissures en forme de fentes infinies perturbées dans leur plan

noyau ainsi redéfini vérifie les propriétés :

$$\begin{cases} Z(s, s') \sim \frac{1}{2\pi [D(s, s')]^2} & \text{pour } s' \rightarrow s \\ Z(s, s') = Z(s', s) & \text{pour tout } s, s' \end{cases} \quad (3.2)$$

L'écriture de (3.1) peut être améliorée en faisant les remarques suivantes :

- Du fait de l'invariance par translation (dans la direction z) de la configuration non perturbée et du caractère singulier des fonctions $Z_{\alpha\alpha}(z, z')$ lorsque z tend vers z' , on choisit de poser :

$$\begin{cases} Z_{\alpha\alpha}(z, z') \equiv \frac{f_{\alpha} [(z - z')/b]}{(z - z')^2} \\ Z_{\alpha\beta}(z, z') \equiv \frac{g_{\alpha\beta} [(z - z')/b]}{b^2} \end{cases} \quad (\alpha \neq \beta) \quad (3.3)$$

- Dans l'équation (3.1), le terme d'avance uniforme est, par définition, proportionnel à $\delta_{\alpha(z)}$; de plus, on peut séparer les intégrales pour lesquelles $\beta \neq \alpha$ en deux parties impliquant respectivement $\delta_{\beta}(z')$ et $\delta_{\alpha}(z)$; on regroupe finalement les termes proportionnels à $\delta_{\alpha}(z)$ sous la forme $C_{\alpha}(z)\delta_{\alpha}(z)$. L'équation (3.1) prend alors la forme :

$$\begin{aligned} \delta K_{\alpha}(z) &= C_{\alpha}(z)\delta_{\alpha}(z) + PV \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\alpha} \left(\frac{z - z'}{b} \right) K_{\alpha}(z') \frac{\delta_{\alpha}(z') - \delta_{\alpha}(z)}{(z' - z)^2} dz' \\ &+ \sum_{\beta \neq \alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\alpha\beta} \left(\frac{z - z'}{b} \right) K_{\beta}(z') \delta_{\beta}(z') \frac{dz'}{b^2} \quad (\alpha = 1, 2, \bar{1}, \bar{2}). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Remarques et propriétés :

- On pose : $u \equiv \frac{z - z'}{b}$.
- Le terme $C_{\alpha}(z)\delta_{\alpha}(z)$ correspond à une avance uniforme du seul front α . La quantité $C_{\alpha}(z)$ dépend du chargement mais pas les fonctions f_{α} et $g_{\alpha\beta}$, sous réserve que le chargement consiste uniquement en des efforts imposés, puisque ces fonctions, composantes du noyau fondamental, sont liées aux fonctions poids de Bueckner.
- Propriétés des fonctions f_{α} et $g_{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} - f_{\alpha}(0) &= \frac{1}{2\pi} \quad (\alpha = 1, 2, \bar{1}, \bar{2}) \\ - \begin{cases} f_{\alpha}(-u) &= f_{\alpha}(u) & (\alpha = 1, 2, \bar{1}, \bar{2}) \\ g_{\beta\alpha}(-u) &= g_{\alpha\beta}(u) & (\alpha \neq \beta). \end{cases} \\ - \begin{cases} f_{\alpha} &\equiv f_{\bar{\alpha}} & (\alpha = 1, 2, \bar{1}, \bar{2}) \\ g_{\alpha\beta} &\equiv g_{\beta\alpha} \equiv g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} & (\alpha \neq \beta). \end{cases} \end{aligned}$$

3.2.2 Solution 2D

Il est nécessaire de connaître la solution 2D, situation de déformation plane dans la direction z , afin de déterminer les F.I.C. aux pointes de fissures et les variations induites par de petites

perturbations coplanaires de la géométrie des fissures.

Dans un premier temps, il faut traiter le cas où les deux fissures sont de taille identique, sous un chargement de traction uniforme à l'infini. Il convient ensuite de résoudre le problème où les deux fissures sont de longueurs légèrement différentes. En combinant ces résultats à l'équation (3.4), on obtient les valeurs des intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} g_{\alpha\beta}(u)du$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} g_{12}(u)du = \frac{1}{2\sqrt{k} k'^2} \left(\frac{E'}{K'} + k \right) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g_{1\bar{1}}(u)du = \frac{1}{4k k'^2} \left(-2\frac{E'}{K'} + 1 + k^2 \right) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g_{1\bar{2}}(u)du = \frac{1}{2\sqrt{k} k'^2} \left(\frac{E'}{K'} - k \right) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g_{2\bar{2}}(u)du = \frac{1}{4k'^2} \left(-2\frac{E'}{K'} + 1 + k^2 \right). \end{array} \right. \quad (3.5)$$

Les résultats, basés sur les travaux de Tada et al. (2000), seront utilisés dans la suite de la résolution.

3.2.3 Construction du système intégral-différentiel

Nous allons considérer ici des mouvements particuliers de la fissure de telle sorte que la forme de celle-ci soit préservée, mais pas nécessairement sa taille ni son orientation. En effet, si l'on respecte la forme des fissures dans le mouvement, le noyau fondamental lui-même reste inchangé, seuls ses arguments changent. Dans l'équation de Rice, la variation du noyau fondamental est donc liée aux dérivées de ce noyau, tandis que le second membre de l'équation est intégral : c'est pourquoi on obtient des équations intégral-différentielles sur les composantes du noyau fondamental.

Les trois transformations envisagées sont choisies de manière à laisser invariant le rapport a/b , noté k , respectant ainsi la forme du système de fissures.

- Premier mouvement de translation des fronts :

On envisage tout d'abord une homothétie, à laquelle s'ajoute une translation des fissures de telle sorte que le front 1 reste immobile au cours de la transformation. On applique ensuite la formule de Rice à la nouvelle géométrie ainsi définie et l'on obtient une équation intégral-différentielle sur la fonction f_1 :

$$f_1' = -(1-k)u(g_{12} * g_{12}) + 2ku(g_{1\bar{1}} * g_{1\bar{1}}) - (1+k)u(g_{1\bar{2}} * g_{1\bar{2}}) \quad (3.6)$$

- Second mouvement de translation des fronts :

On considère la même transformation composée excepté que le front invariant est, cette fois, le front 2 et on obtient une équation sur f_2 :

$$f_2' = -(1-k)u(g_{12} * g_{12}) + (1+k)u(g_{1\bar{2}} * g_{1\bar{2}}) - 2u(g_{2\bar{2}} * g_{2\bar{2}}) \quad (3.7)$$

- Mouvement de rotation des fronts :

Pour déterminer les quatre fonctions $g_{\alpha\beta}$, il nous faut considérer une transformation ayant au moins deux points invariants n'appartenant pas à un même front. nous définissons donc une rotation des quatre fronts d'un même angle, comme le montre la figure (A.7).

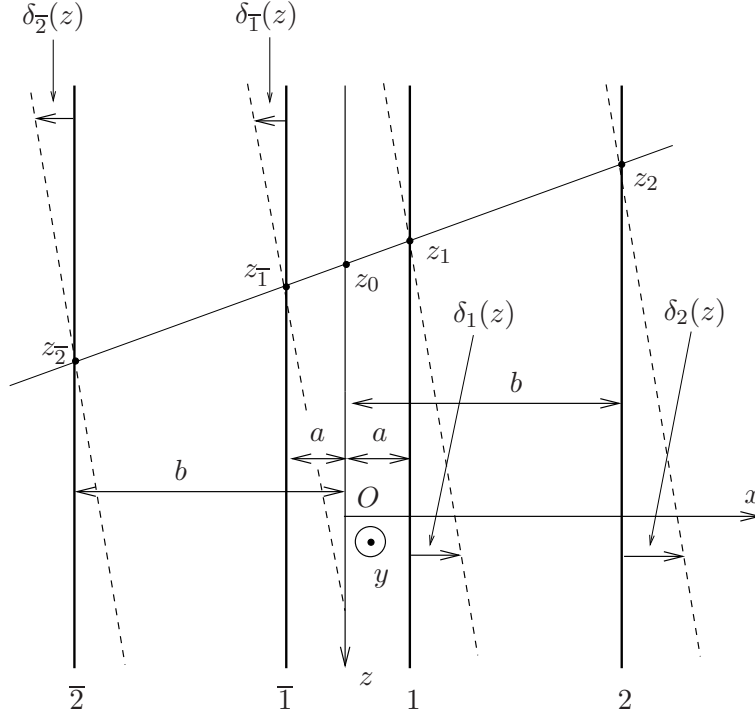


FIGURE 3.2 – Rotation des fronts de fissures

Après application de l'équation de Rice, on obtient les quatre dernières équations intégrodifférentielles ci-dessous :

$$\left[\left(1 - k + \frac{u^2}{1 - k} \right) g_{12} \right]' = -PV \frac{f_1 + f_2}{u} * g_{12} + (ug_{1\bar{1}}) * g_{1\bar{2}} - (ug_{1\bar{2}}) * g_{2\bar{2}} + \frac{2k}{1 - k} u (g_{1\bar{1}} * g_{1\bar{2}}) - \frac{1 + k}{1 - k} u (g_{1\bar{2}} * g_{2\bar{2}}). \quad (3.8)$$

$$\left[\left(2k + \frac{u^2}{2k} \right) g_{1\bar{1}} \right]' = 2PV \frac{f_1}{u} * g_{1\bar{1}} - (ug_{12}) * g_{1\bar{2}} + (ug_{1\bar{2}}) * g_{12} - \frac{u}{k} (g_{12} * g_{1\bar{2}}); \quad (3.9)$$

$$\left[\left(1 + k + \frac{u^2}{1 + k} \right) g_{1\bar{2}} \right]' = PV \frac{f_1 - f_2}{u} * g_{1\bar{2}} - (ug_{12}) * g_{2\bar{2}} - (ug_{1\bar{1}}) * g_{12} - \frac{1 - k}{1 + k} u (g_{12} * g_{2\bar{2}}) + \frac{2k}{1 + k} u (g_{1\bar{1}} * g_{12}); \quad (3.10)$$

$$\left[\left(2 + \frac{u^2}{2} \right) g_{2\bar{2}} \right]' = -2PV \frac{f_2}{u} * g_{2\bar{2}} + (ug_{12}) * g_{1\bar{2}} - (ug_{1\bar{2}}) * g_{12} + ku (g_{12} * g_{1\bar{2}}). \quad (3.11)$$

Remarque : Du fait de l'apparition de produits de convolution dans les équations obtenues, il est préférable de résoudre ce système dans le domaine de Fourier. En pratique, on effectue donc une réduction de ces équations intégrodifférentielles à des équations différentielles ordinaires non-linéaires par transformation de Fourier. Nous ne détaillerons pas ici cette étape. On peut simplement noter que les équations (3.5) issues du calcul de la solution 2D fournissent les conditions aux limites en zéro des fonctions $\hat{g}_{\alpha\beta}$ dans le domaine de Fourier.

3.2.4 Résultats

Pour chaque valeur de k , après avoir déterminé numériquement la solution dans l'espace de Fourier, on en calcule la transformée inverse afin d'obtenir les composantes f_1 , f_2 , g_{12} , $g_{1\bar{1}}$, $g_{1\bar{2}}$ et $g_{2\bar{2}}$ du noyau fondamental. Les figures ci-après illustrent les résultats obtenus.

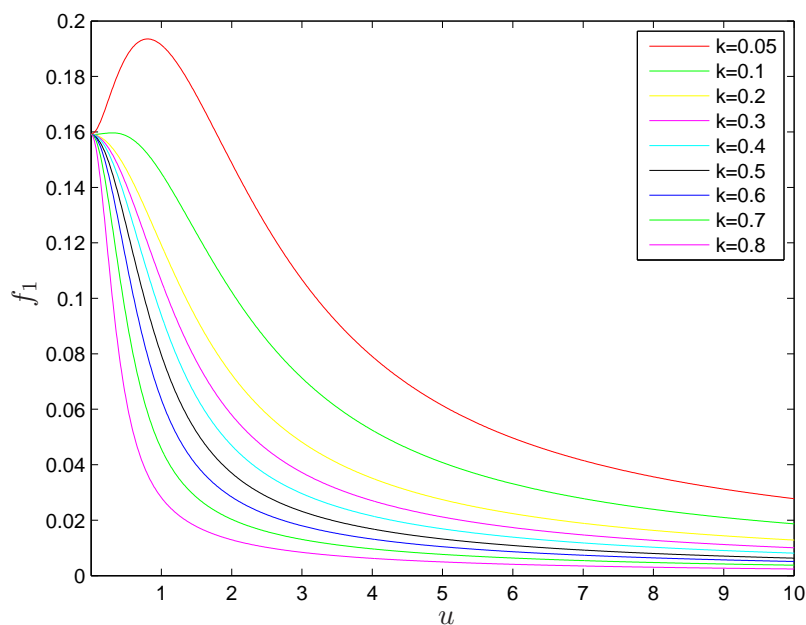
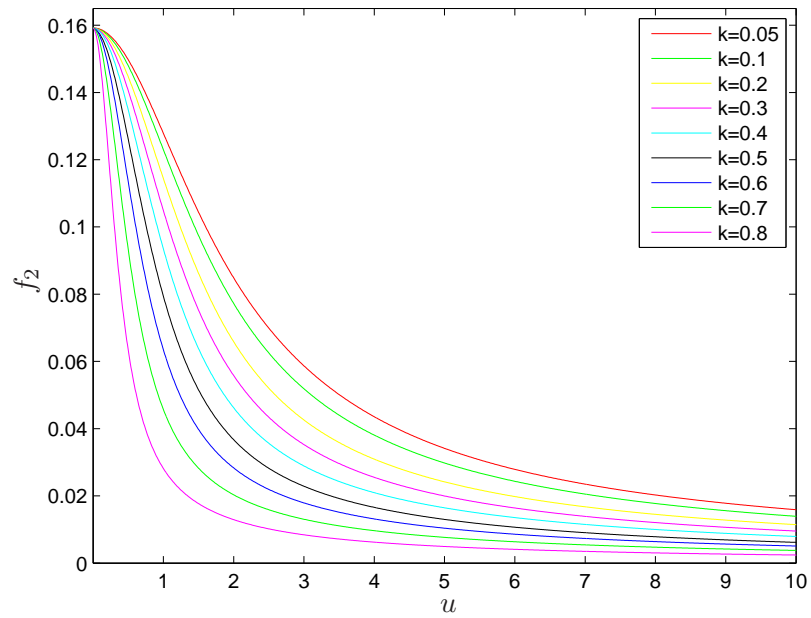
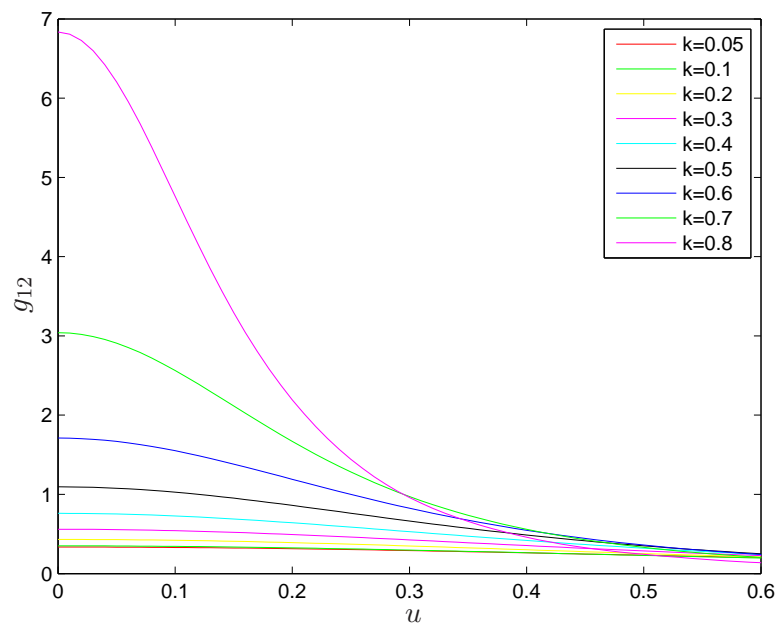
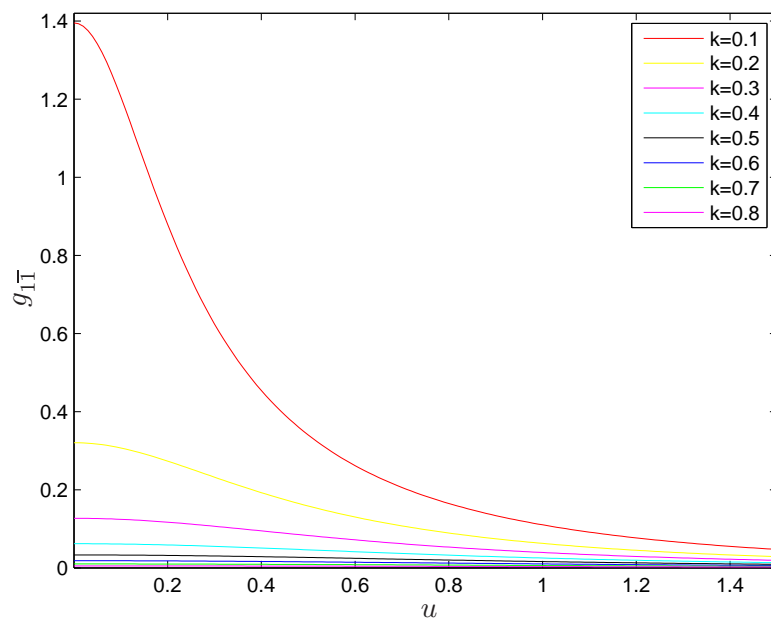


FIGURE 3.3 – La fonction $f_1(u)$

3.3 Conclusion

La connaissance des fonctions f_α et $g_{\alpha\beta}$ ainsi que des F.I.C. pour la configuration non perturbée permet, en injectant la déformation du front δa dans les formules (3.4), d'obtenir les F.I.C. le long du front déformé. Nous allons nous en servir dans la partie suivante pour étudier les fluctuations des fronts de fissures induites par la propagation de celles-ci dans un milieu hétérogène.

FIGURE 3.4 – La fonction $f_2(u)$ FIGURE 3.5 – La fonction $g_{12}(u)$

FIGURE 3.6 – La fonction $g_{1\bar{1}}(u)$

Deuxième partie

Application à l'étude des petites perturbations lors de la coalescence

Introduction

L'étude de la coalescence des fissures est un sujet méconnu d'un point de vue théorique ; de nombreuses interrogations, quant à l'évolution des composantes harmoniques d'une perturbation, restent en suspens. En effet, il est très difficile de caractériser l'évolution des différentes composantes lors d'une propagation arbitraire des fronts. Cette partie s'intéresse à l'étude de la coalescence coplanaire de fissures dans le cas d'un système modèle de deux fissures en forme de fentes infinies parallèles. Elle s'articule en deux chapitres, se composant chacun d'un article publié dans une revue scientifique internationale.

Dans un premier temps, le chapitre 4 s'attache à déterminer les fonctions poids de Bueckner dans le cas limite d'un ligament tendant vers zéro. Cette étape s'appuie sur les travaux de Pindra et al. (2010*b*), résumés au chapitre précédent, qui concernent l'étude de la perturbation coplanaire d'un système de deux fissures-bandes parallèles, identiques, sollicitées en mode I. Ils sont particularisés dans le chapitre 4, à la configuration-limite où la distance entre les deux fronts internes tend vers zéro. Le chapitre 5 traite ensuite de l'évolution de la forme des fronts d'un ligament de matière au sein d'un matériau fragile de caractéristiques à rupture homogènes ou hétérogènes, au cours de la coalescence finale de ces fronts.

Chapitre 4 :

A partir de l'étude du cas général où les fronts de fissures sont fixés, séparés par une distance arbitraire, on s'intéresse au cas particulier où la distance entre les fronts internes devient petite, ou bien de façon équivalente la distance entre les fronts externes grande. La géométrie de notre problème est donc équivalente à une paire de fissures semi-infinies coplanaires dont les fronts sont parallèles.

L'étude de ce problème nécessite un procédé de passage à la limite (à partir du cas de deux fissures en forme de fentes infinies) non trivial. La difficulté majeure réside dans le fait que la distribution du F.I.C. des fronts internes peut être affectée ou non par des perturbations sinusoidales des fronts externes. Plus précisément, pour des perturbations de longueurs d'ondes comparables à la distance entre les fronts externes, les fronts intérieurs sont influencés par la présence de ces derniers. En revanche, lorsque la distance caractéristique de la perturbation est de l'ordre de la largeur du ligament, tout se passe, pour les fronts internes, comme si les fronts externes n'existaient pas.

Ce phénomène est à l'origine de l'apparition d'une couche limite pour les grandes longueurs d'ondes, c'est-à-dire pour les petits nombres d'ondes dans le domaine de Fourier, qui est notre espace de travail dans la détermination des composantes du noyau fondamental. Afin de pallier ces problèmes, liés au fait que différentes échelles de longueur entrent en jeu, nous utilisons la technique des développements asymptotiques raccordés dans l'espace de Fourier, et non dans

l'espace physique.

Ce procédé permet de réduire le problème à la recherche des transformées de Fourier, dans la direction du front, de seulement deux fonctions d'influence (caractérisant l'influence de la perturbation en un point du front sur le F.I.C. en un autre point du même front, ou de l'autre front). On aboutit alors à un système différentiel non linéaire mettant en jeu ces deux fonctions. Ce système est ensuite réduit à une seule équation différentielle. Cette équation est résolue analytiquement au voisinage de l'origine dans l'espace de Fourier et numériquement pour des nombres d'ondes arbitraires. On revient finalement dans l'espace physique, par transformation inverse de Fourier, et obtient ainsi la variation locale du F.I.C. des fronts internes due à une perturbation infinitésimale mais néanmoins arbitraire de ces fronts.

Le résultat le plus remarquable de cette étude est que, bien que les interactions à grande distance entre les fronts (identiques ou distincts) décroissent en fonction de cette distance, cette diminution est nettement plus lente que pour d'autres géométries-modèles étudiées par le passé, à savoir la fissure semi-infinie chargée en mode I Rice (1985) et en mode mixte Gao & Rice (1986), et la fissure en forme de fente infinie chargée en mode I Leblond et al. (1996) et en mode mixte Lazarus & Leblond (2002a) et Lazarus & Leblond (2002b).

Chapitre 5 :

Reprenant les résultats du chapitre 4, le présent chapitre traite, de manière quasistatique, de l'évolution des fronts d'un système de deux fissures semi-infinies coplanaires se propageant dans un milieu fragile de caractéristiques de fracture homogènes ou hétérogènes.

Dans un premier temps, la preuve sera apportée que, dans le cas de la rupture brutale régie par la loi de Griffith, le problème est mal posé. En effet, nous verrons qu'il est impossible de définir la forme des fronts de manière univoque, du fait de l'apparition de multiples bifurcations. Plus précisément, les modes de bifurcation consistent, à chaque instant, en perturbations sinusoidales symétriques des deux fronts dont la longueur d'onde est un multiple caractéristique de la largeur du ligament restant entre les deux fissures. Cette longueur d'onde est une longueur "critique" en ce sens que les perturbations de longueurs d'ondes supérieures à cette valeur présentent une croissance instable. Ce phénomène d'instabilité auquel nous sommes confrontés est en fait indépendant de la loi de propagation adoptée.

Pour pallier le problème des bifurcations multiples, une loi de propagation régularisée de type Paris est envisagée. L'étude se concentre alors sur la propagation de front de fissures de fatigue au sein d'un milieu dont la constante de Paris est non-uniforme. Ceci conduit à une expression explicite de la forme des fronts en fonction du temps, et ce pour une distribution arbitraire de la constante de Paris dans le plan de fissure.

Le dernier volet de ce chapitre consiste en une étude statistique de la forme des fronts dans le cas où la constante de Paris est statistiquement distribuée dans l'espace. Le résultat principal de cette étude est que la distance de corrélation des perturbations des fronts augmente lentement, de façon logarithmique, avec la demi-largeur moyenne de la fissure. Ceci constitue une différence notable avec le cas de la fissure en forme de fente infinie pour laquelle l'étude statistique, menée par Favier et al. (2006b), a révélé que la distance de corrélation augmentait beaucoup plus vite, proportionnellement à la demi-largeur de la fissure. Cette conclusion implique une plus forte sélection dans le temps des composantes de Fourier correspondant à des perturbations de grandes longueurs d'ondes dans le cas de la fissure en forme de fente infinie que dans le cas du ligament.

Chapitre 4

In-plane perturbation of a system of two coplanar slit-cracks - II : Case of close inner crack fronts or distant outer ones

Ce chapitre est une copie de l'article de Legrand & Leblond (2010b).

Abstract

The study of the in-plane perturbation of a system of two coplanar slit-cracks carried out in Part I is specialized to the case where the distance between the inner crack fronts is small, or equivalently that between the outer fronts large. The limit process involved is complex because of appearance of a “boundary layer” in the limiting case considered; this boundary layer occurs near the origin in the Fourier space used to determine the unknown components of the fundamental kernel looked for. A technique of matched asymptotic expansions is used to tackle this difficulty.

The problem is thus reduced to determining two unknown functions only, which characterize the “interactions” between the two inner fronts. These functions obey a system of nonlinear differential equations in Fourier’s space, which are solved analytically near the origin and numerically in general. The results evidence a very slow decrease of long-range interactions between distinct points on the same front or distinct ones. This represents a striking difference with respect to the cases considered earlier of a single semi-infinite crack and a single slit-crack.

Keywords : slit-crack ; semi-infinite crack ; perturbation ; stress intensity factor ; Fourier transform ; matched asymptotic expansions ; numerical integration

4.1 Introduction

In Appendix A of these joint papers, denoted part I in this chapter, we studied the problem of the slight in-plane perturbation of a system of two coplanar, parallel, identical tensile slit-cracks in an infinite isotropic elastic body. The method of solution was of “special” rather than “general” nature in Bueckner (1987)’s terminology, in the sense that it avoided the full solution of the complex 3D elasticity problem implied, and concentrated instead on the determination of the sole distribution of the stress intensity factors (SIFs) along the crack fronts.

In a first step, we considered the general case of arbitrary, fixed distances between the various crack fronts. The aim of the present chapter, denoted Part II, is to study the special case of a small distance between the inner fronts or a large one between the outer fronts¹, emphasis being placed on the distribution of the SIFs on the former. The cracked geometry then consists of a pair of coplanar semi-infinite cracks with parallel fronts. It is of particular interest in that it represents the simplest envisageable model geometry for the study of the deformation of crack fronts during

It is worth noting that the problem resembles that of perturbation of the front of a semi-infinite crack approaching a free surface, studied analytically and numerically by Gao et al. (1991). There is no strict equivalence, however, since Gao et al. (1991)’s geometry still involved a single crack; the present work seems to be the first to consider perturbation of a system of cracks.

The treatment will involve a non-trivial limit process. The essence of the difficulty lies in the fact that the distribution of the SIFs on the inner fronts is affected by sinusoidal perturbations of these fronts in a way that depends on their wavelength, being sensitive to the presence of the outer fronts if this wavelength is comparable to the distance between these, but not if it is

1. These two situations are equivalent since what matters is obviously only the ratio of these distances.

comparable to the distance between the inner fronts. This entails appearance of a “boundary layer” for small wavenumbers (large wavelengths) in the Fourier space used for the determination of the components of the fundamental kernel (FK) looked for. This difficulty can however be tackled using a method of matched asymptotic expansions, analogous to those used by Leguillon & Sanchez (1987) to solve various problems of solid mechanics involving different lengthscales; the only difference being that the boundary layer occurs here in Fourier’s space instead of the usual physical space.

The paper is organized as follows :

- Section 4.2 presents the method of matched asymptotic expansions. The procedure allows to reduce the problem to the determination of the Fourier transforms, in the direction of the crack fronts, of only two functions representing the influence of the perturbation of one of the inner fronts on the SIFs on the same front or the other one. These functions verify a system of nonlinear ordinary differential equations (ODEs) which, quite remarkably, can be further reduced to a single nonlinear ODE on a single function.
- Section 4.3 is devoted to the solution of this ODE. This solution is provided in analytical form near the origin in Fourier’s space, that is for small wavenumbers. The equation is also solved numerically for arbitrary wavenumbers.
- Finally Section 4.4 goes back to the physical space by providing the final expression of the local perturbation of the SIFs on the two inner fronts in terms of the perturbations of these fronts. One remarkable feature of this expression is the very slow decrease, at large distances, of the functions representing the effect of the perturbation of one of the fronts upon the distribution of the SIFs on the same front or the other one.

4.2 Matched asymptotic expansions

4.2.1 Qualitative justification of existence of a boundary layer near the origin in Fourier’s space

Assume that the distance $2b$ between the outer fronts is much larger than that between the inner ones, $2a$. Consider some sinusoidal perturbation of the inner fronts, and assume first that its wavelength λ is comparable to a , and thus much smaller than b (Figure 4.1). Seen from a given point of the inner fronts, the outer ones may as well be considered as infinitely remote, since they are located at a distance much larger than the typical distance of variation of the perturbation; hence the value of the local SIF is bound not to be affected by their presence.

Now consider the case where the wavelength λ of the perturbation is comparable to b (Figure 4.2). Then, seen from a given point of the inner fronts, the outer ones appear to be located at a finite distance, comparable to the typical distance of variation of the perturbation; hence their presence is bound to affect the value of the local SIF.

Similar arguments apply to the influence of perturbations of the outer fronts upon the distribution of the SIFs on the inner ones. Such perturbations are bound not to influence these SIFs if their wavelength λ is comparable to a , but to influence them if it is comparable to b .

In Fourier’s space, the argument of functions is the wavenumber, which is inversely proportional to the wavelength. Hence the presence of the outer fronts is expected to be unimportant for large wavenumbers (small wavelengths), but important for small wavenumbers (large wavelengths). With the notations introduced in equations (A.4), (A.5) and (A.6) of Part I, this implies, in the limit $k \rightarrow 0$, *presence of a boundary layer near the origin for the Fourier trans-*

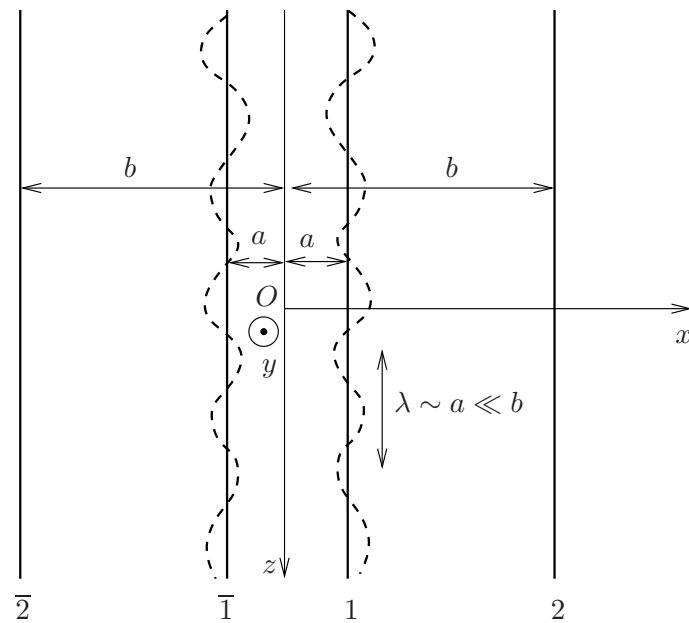


FIGURE 4.1 – Sinusoidal perturbation of the inner fronts - Case of a small wavelength

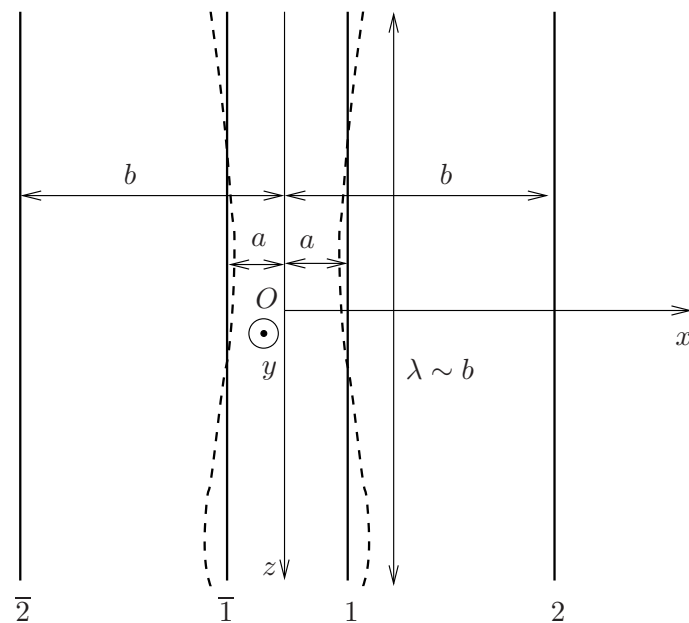


FIGURE 4.2 – Sinusoidal perturbation of the inner fronts - Case of a large wavelength

forms of the components of the FK f_α and $g_{\alpha\beta}$.

4.2.2 Outer problem

In Part I, we used the Fourier variable p defined by equation (A.26), corresponding to the reduced coordinate u defined by equation (A.7). This Fourier variable is related to the wavelength λ by the formula $|p| = 2\pi b/\lambda$. Therefore the boundary layer, which corresponds to values of λ of order b , occurs for values of $|p|$ of order unity, instead of being concentrated near the origin as required for the outer expansion of the problem. To define this expansion, it is therefore necessary to introduce a new reduced coordinate v and a new associated Fourier variable q through the formulae

$$v \equiv \frac{u}{k} = \frac{z - z'}{a} \quad ; \quad q \equiv kp \quad (\text{so that } pu = qv). \quad (4.1)$$

The boundary layer then occurs for values of $|q|$ of order $k \ll 1$, as desired.

To now define suitable changes of functions, one must know the order of magnitude of the functions \widehat{F}_α and $\widehat{g}_{\alpha\beta}$ in the limit $k \rightarrow 0$. The former functions are of order unity by equations (A.37) of Part I. The order of magnitude of the latter functions may be deduced from equations (A.35) of Part I, using the asymptotic expressions of the elliptic integrals E' and K' for $k \rightarrow 0$ provided by Gradshteyn & Ryzhik (1980); one thus gets

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{g}_{12}(0) \sim -\frac{1}{2\sqrt{k} \ln k} \\ \widehat{g}_{1\bar{1}}(0) \sim \frac{1}{4k} \\ \widehat{g}_{1\bar{2}}(0) \sim -\frac{1}{2\sqrt{k} \ln k} \\ \widehat{g}_{2\bar{2}}(0) \rightarrow \frac{1}{4} \end{array} \right. \quad \text{for } k \rightarrow 0. \quad (4.2)$$

These orders of magnitude suggest to use the following changes of functions for the outer expansion :

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{F}_1(p) \equiv \widehat{F}_1^o(q) \\ \widehat{F}_2(p) \equiv \widehat{F}_2^o(q) \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} \widehat{g}_{12}(p) \equiv \frac{1}{\sqrt{k} \ln k} \widehat{g}_{12}^o(q) \\ \widehat{g}_{1\bar{1}}(p) \equiv \frac{1}{k} \widehat{g}_{1\bar{1}}^o(q) \\ \widehat{g}_{1\bar{2}}(p) \equiv \frac{1}{\sqrt{k} \ln k} \widehat{g}_{1\bar{2}}^o(q) \\ \widehat{g}_{2\bar{2}}(p) \equiv \widehat{g}_{2\bar{2}}^o(q). \end{array} \right. \quad (4.3)$$

In fact the functions $\widehat{F}_\alpha^o(q)$ and $\widehat{g}_{\alpha\beta}^o(q)$ depend on k , and what we are interested in is their limits for $k \rightarrow 0$. For simplicity, identical notations will be used for these functions and their limits.

The equations verified by the functions $\widehat{F}_\alpha(p)$ and $\widehat{g}_{\alpha\beta}(p)$ must now be rewritten in terms of the functions $\widehat{F}_\alpha^o(q)$ and $\widehat{g}_{\alpha\beta}^o(q)$ in the limit $k \rightarrow 0$. By equations (A.38)_{1,3,4} of Part I, $\widehat{g}_{12}(p)$, $\widehat{g}_{1\bar{2}}(p)$ and $\widehat{g}_{2\bar{2}}(p)$ go to zero like $e^{-(1-k)p}$, $e^{-(1+k)p}$ and e^{-2p} respectively for $p \rightarrow +\infty$. Now by equation (4.1)₂, for fixed $q > 0$ and $k \rightarrow 0$, p goes to $+\infty$, and therefore by equations (4.3)_{3,5,6}, $\widehat{g}_{12}^o(q)$, $\widehat{g}_{1\bar{2}}^o(q)$ and $\widehat{g}_{2\bar{2}}^o(q)$ go to zero like $e^{-q/k}$, $e^{-q/k}$ and $e^{-2q/k}$ respectively. In other words, *the functions $\widehat{g}_{12}^o(q)$, $\widehat{g}_{1\bar{2}}^o(q)$ and $\widehat{g}_{2\bar{2}}^o(q)$ are zero in the limit $k \rightarrow 0$ for every*

positive value of their argument q , and the same is true for negative values since all functions are even. (This conclusion does not hold at the origin because of the boundary layer near this point). In intuitive terms, this is because when a is adopted as a reference distance as done in equation (4.1)₁, letting k go to zero means letting the distances between fronts 1 and 2, 1 and $\bar{2}$, 2 and $\bar{2}$ go to infinity; the “interactions” between these fronts depicted by the functions $\widehat{g}_{1\bar{2}}(p)$, $\widehat{g}_{1\bar{2}}(p)$ and $\widehat{g}_{2\bar{2}}(p)$ then vanish.

Accounting for these properties and using the changes of variable and functions defined by equations (4.1)₂ and (4.3)_{1,4} in equations (A.28) and (A.31) of Part I, one gets, in the limit $k \rightarrow 0$, the following system of ODEs on the sole functions $\widehat{F}_1^o(q) \equiv \widehat{F}(q)$ and $\widehat{g}_{1\bar{1}}^o(q) \equiv \widehat{g}(q)$:

$$\begin{cases} q\widehat{F}' & = 4\widehat{g}\widehat{g}' \\ q\left(\widehat{g} - \frac{\widehat{g}''}{4}\right) & = -\widehat{F}\widehat{g}. \end{cases} \quad (4.4)$$

Determining complementary conditions at the origin is not a straightforward task because of the boundary layer near this point. However conditions at infinity are easily derived from equations (A.37)₁ and (A.38)₂ of Part I plus the changes of functions defined by equations (4.3)_{1,4} :

$$\widehat{F}(+\infty) = \frac{1}{2} \quad ; \quad \widehat{g}(+\infty) = \widehat{g}'(+\infty) = 0. \quad (4.5)$$

Quite remarkably, the function $\widehat{F}(q)$ can be eliminated in system (4.4) to yield an ODE on the sole function $\widehat{g}(q)$. Indeed multiplying equation (4.4)₁ by \widehat{F}/q , equation (4.4)₂ by $4\widehat{g}'/q$ and taking their sum, one gets

$$\widehat{F}\widehat{F}' + 4\widehat{g}\widehat{g}' - \widehat{g}'\widehat{g}'' = 0 \quad \Rightarrow \quad \widehat{F}^2 + 4\widehat{g}^2 - \widehat{g}'^2 = Cst.,$$

and the value of the constant is $\frac{1}{4}$ by equations (4.5). It follows that

$$\widehat{F}(q) = \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 4\widehat{g}^2(q) + \widehat{g}'^2(q)}.$$

But it is shown in Appendix C.1 that the sign of the function $\widehat{F}(q)$ is identical to that of q ; therefore

$$\widehat{F}(q) = \text{sgn}(q) \sqrt{\frac{1}{4} - 4\widehat{g}^2(q) + \widehat{g}'^2(q)}. \quad (4.6)$$

Reinserting this result into equation (4.4)₂, one gets the following ODE on the function $\widehat{g}(q)$:

$$\widehat{g}'' = 4\widehat{g} \left(1 + \frac{1}{|q|} \sqrt{\frac{1}{4} - 4\widehat{g}^2 + \widehat{g}'^2} \right). \quad (4.7)$$

This equation is almost identical to that for a single tensile slit-crack established by Leblond et al. (1996), the only difference being the sign $+$ instead of $-$ before the radical; but the solution will reveal to be notably different.

4.2.3 Inner problem

The inner expansion relies on use of the “dilated” Fourier variable p related to q by equation (4.1)₂, plus the following changes of functions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{F}_1(p) \equiv \frac{1}{k} \widehat{F}_1^i(p) \\ \widehat{F}_2(p) \equiv \widehat{F}_2^i(p) \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} \widehat{g}_{12}(p) \equiv \frac{1}{\sqrt{k} \ln k} \widehat{g}_{12}^i(p) \\ \widehat{g}_{1\bar{1}}(p) \equiv \frac{1}{k} \widehat{g}_{1\bar{1}}^i(p) \\ \widehat{g}_{1\bar{2}}(p) \equiv \frac{1}{\sqrt{k} \ln k} \widehat{g}_{1\bar{2}}^i(p) \\ \widehat{g}_{2\bar{2}}(p) \equiv \widehat{g}_{2\bar{2}}^i(p). \end{array} \right. \quad (4.8)$$

The justification of equation (4.8)₁ lies in an examination of the order of magnitude of the right-hand side of the ODE (A.28) of Part I, which shows that the function \widehat{F}_1 in the left-hand side is of order $\frac{1}{k}$ for $k \rightarrow 0$ when the variable p is used. That of equation (4.8)₂ lies in the fact that when b is adopted as a reference distance (as implied by the use of the variable p), taking the limit $k \rightarrow 0$ means letting the distance between the inner fronts 1 and $\bar{1}$ go to zero ; these fronts then have no more influence upon self-interactions of front 2 upon itself, so that the function \widehat{F}_2 describing these self-interactions must go to some finite limit. Finally the justification of equations (4.8)_{3,4,5,6} lies in equations (4.2) as before.

Using the changes of functions defined by equations (4.8), one easily rewrites the ODEs (A.28 - A.33) of Part I, in the limit $k \rightarrow 0$, in the following form :

$$\left\{ \begin{array}{l} p \widehat{F}_1^{i'} \quad = \quad 4 \widehat{g}_{1\bar{1}}^i \widehat{g}_{1\bar{1}}^{i'} \\ 0 \quad = \quad -2 \widehat{g}_{12}^i \widehat{g}_{12}^{i'} + 2 \widehat{g}_{1\bar{2}}^i \widehat{g}_{1\bar{2}}^{i'} \\ 0 \quad = \quad \widehat{F}_1^i \widehat{g}_{12}^i + \widehat{g}_{1\bar{1}}^{i'} \widehat{g}_{1\bar{2}}^i \\ -\frac{p}{2} \widehat{g}_{1\bar{1}}^{i''} \quad = \quad -2 \widehat{F}_1^i \widehat{g}_{1\bar{1}}^i \\ 0 \quad = \quad -\widehat{F}_1^i \widehat{g}_{1\bar{2}}^i - \widehat{g}_{12}^i \widehat{g}_{1\bar{1}}^{i'} \\ 0 \quad = \quad -\widehat{g}_{12}^i \widehat{g}_{1\bar{2}}^{i'} + \widehat{g}_{1\bar{2}}^i \widehat{g}_{12}^{i'}. \end{array} \right. \quad (4.9)$$

These ODEs are supplemented by the following conditions at the origin, which result from equations (4.2), equations (A.36) of Part I and the changes of functions (4.8) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{g}_{12}^i(0) = -\frac{1}{2} \quad ; \quad \widehat{g}_{12}^{i'}(0) = 0 \\ \widehat{g}_{1\bar{1}}^i(0) = \frac{1}{4} \quad ; \quad \widehat{g}_{1\bar{1}}^{i'}(0) = 0 \\ \widehat{g}_{1\bar{2}}^i(0) = -\frac{1}{2} \quad ; \quad \widehat{g}_{1\bar{2}}^{i'}(0) = 0 \\ \widehat{g}_{2\bar{2}}^i(0) = \frac{1}{4} \quad ; \quad \widehat{g}_{2\bar{2}}^{i'}(0) = 0. \end{array} \right. \quad (4.10)$$

These equations can be solved analytically. Consider first equations (4.9)_{2,6}. The first implies that $(\widehat{g}_{12}^i)^2 = (\widehat{g}_{1\bar{2}}^i)^2 + Cst.$ and the constant must be zero by equations (4.10)_{1,5} ; therefore $\widehat{g}_{12}^i = \pm \widehat{g}_{1\bar{2}}^i$ but the sign $-$ must be rejected by equations (4.10)_{1,5}, so that finally

$$\widehat{g}_{12}^i = \widehat{g}_{1\bar{2}}^i. \quad (4.11)$$

Equation (4.9)₆ is then automatically satisfied. The intuitive meaning of the result (4.11) is that interactions between fronts 1 and 2 on the one hand, 1 and $\bar{2}$ on the other hand, asymptotically

become equal in the limit $k \rightarrow 0$. Of course, this is because fronts 2 and $\bar{2}$ become equally distant from front 1 in this limit.

Now consider equations (4.9)_{3,5}. Both equations, combined with equation (4.11), yield

$$\widehat{F}_1^i = -\widehat{g}_{1\bar{1}}^{i'}. \quad (4.12)$$

Finally consider equations (4.9)_{1,4}. Combined with equation (4.12), they yield the single equation

$$p \widehat{g}_{1\bar{1}}^{i''} = -4\widehat{g}_{1\bar{1}}^i \widehat{g}_{1\bar{1}}^{i'}. \quad (4.13)$$

Let us show that the ODE (4.13), together with conditions (4.10)_{3,4}, admits the sole trivial solution

$$\widehat{g}_{1\bar{1}}^i(p) \equiv Cst. = \frac{1}{4}. \quad (4.14)$$

Since $\widehat{g}_{1\bar{1}}^i$ is an even function, it suffices to consider positive values of its argument p . Let \mathcal{I} denote the largest interval of the form $[0, p_0)$ (p_0 being finite or infinite) over which $\widehat{g}_{1\bar{1}}^i$ is positive. Equation (4.13) implies that over this interval, $\widehat{g}_{1\bar{1}}^{i'}$ and $\widehat{g}_{1\bar{1}}^{i''}$ are of opposite signs; hence $[(\widehat{g}_{1\bar{1}}^{i'})^2]' = 2\widehat{g}_{1\bar{1}}^{i'} \widehat{g}_{1\bar{1}}^{i''} \leq 0$, which implies that $(\widehat{g}_{1\bar{1}}^{i'})^2$ is a non-increasing function. But this function is non-negative and vanishes at the origin by equation (4.10)₄. Hence it must necessarily be zero over the entire interval \mathcal{I} . Therefore the function $\widehat{g}_{1\bar{1}}^i$ must necessarily be constant, equal to $\frac{1}{4}$ by equation (4.10)₃, over \mathcal{I} .

Now if the upper bound p_0 of the interval \mathcal{I} were finite, the continuity of the function $\widehat{g}_{1\bar{1}}^i$ would imply that it would still take the value $\frac{1}{4}$ at this point. Therefore $\widehat{g}_{1\bar{1}}^i(p)$ would remain positive for values of p slightly larger than p_0 , so that \mathcal{I} would not be the largest interval over which this function is positive, contradiction. It follows that p_0 is necessarily infinite, and therefore that $\widehat{g}_{1\bar{1}}^i$ is necessarily equal to $\frac{1}{4}$ over the entire interval $[0, +\infty)$.

4.2.4 Back to the outer problem

The “matching condition” of identity of values of the function $\widehat{g}_{1\bar{1}}^o(q) \equiv \widehat{g}(q)$ at the origin and the function $\widehat{g}_{1\bar{1}}^i(p)$ at infinity allows to supplement equations (4.5)_{2,3} and (4.7) of the outer problem with the condition

$$\widehat{g}(0) = \frac{1}{4}. \quad (4.15)$$

It is unfortunately impossible to determine the value of $\widehat{g}'(0)$ from some similar matching condition. The difficulty is that the derivatives of the functions $\widehat{g}(q)$ and $\widehat{g}_{1\bar{1}}^i(p)$ are connected through the relation $\widehat{g}'(q) = \frac{1}{k} \widehat{g}_{1\bar{1}}^{i'}(p)$; in the limit $k \rightarrow 0$, $\widehat{g}_{1\bar{1}}^{i'}(\pm\infty)$ is zero but $\frac{1}{k}$ is infinite, so that the value of the product remains indeterminate.

It so happens, however, that the value of $\widehat{g}'(0)$ can be deduced from equations (4.5)_{2,3}, (4.7) and (4.15) themselves. Assume first that $\widehat{g}'(0)$ is non-negative. By equations (4.7) and (4.15), \widehat{g}'' is positive in some neighborhood of the origin. Hence \widehat{g}' is an increasing function in this neighborhood, and since $\widehat{g}'(0) \geq 0$, \widehat{g}' is positive for small, positive values of q . This implies that the function \widehat{g} increases beyond its initial value of $\frac{1}{4}$ for such values of q . Since it goes to zero at infinity by equation (4.5)₂, it must have a maximum at some point in the interval $(0, +\infty)$. Let q_0 denote the smallest such point; then $\widehat{g}(q_0) > 0$ and $\widehat{g}''(q_0) \leq 0$. But these inequalities are incompatible with the ODE (4.7), contradiction.

Hence $\widehat{g}'(0)$ must be negative. Assume that it is finite. By equation (4.15), $\sqrt{\frac{1}{4} - 4\widehat{g}^2 + \widehat{g}'^2}$ goes to the limit $|\widehat{g}'(0)|$ for $q \rightarrow 0$. Therefore, for small values of q , the ODE (4.7) asymptotically reads $\widehat{g}''(q) \sim |\widehat{g}'(0)|/|q|$, and it follows that $\widehat{g}'(q) \sim |\widehat{g}'(0)| \ln(|q|)$. But this implies that \widehat{g}' diverges to infinity in the limit $q \rightarrow 0$, which again contradicts the hypothesis made.

Hence the only possibility left for the value of $\widehat{g}'(0)$ is

$$\widehat{g}'(0) = -\infty. \quad (4.16)$$

Note that this relation perfectly illustrates the presence of a boundary layer near the origin of Fourier's space in the limit $k \rightarrow 0$; indeed in the absence of such a layer, $\widehat{g}'(0)$ would necessarily be zero, $\widehat{g}_{1\bar{1}}'(0)$ being zero for all nonzero values of k .

4.3 Results for the Fourier transforms of the components of the fundamental kernel

To determine the function \widehat{g} over the interval $[0, +\infty)$ by the same numerical method as in Part I, it is necessary to first study its asymptotic behavior for $q \rightarrow +\infty$. This is done in Appendix C.2, and the result reads

$$\widehat{g}(q) = \gamma \frac{e^{-2q}}{\sqrt{q}} \left[1 - \frac{3}{16q} + O\left(\frac{1}{q^2}\right) \right] \quad \text{for } q \rightarrow +\infty \quad (4.17)$$

where γ is an unknown constant.

The function \widehat{g} is then determined over the interval $[0, +\infty)$, or rather some interval $[q_{\min}, q_{\max}]$ with $0 < q_{\min} \ll 1 \ll q_{\max}$, by numerically solving the ODE (4.7) together with condition (4.15). Just like in Part I, Runge-Kutta's method of order 4 is used for backward numerical integration, and Newton's method is used to adjust the value of the constant γ so as to match the required value of $\widehat{g}(0)$. Once the function \widehat{g} is known (together with its derivative), the function \widehat{F} is easily deduced from equation (4.6).

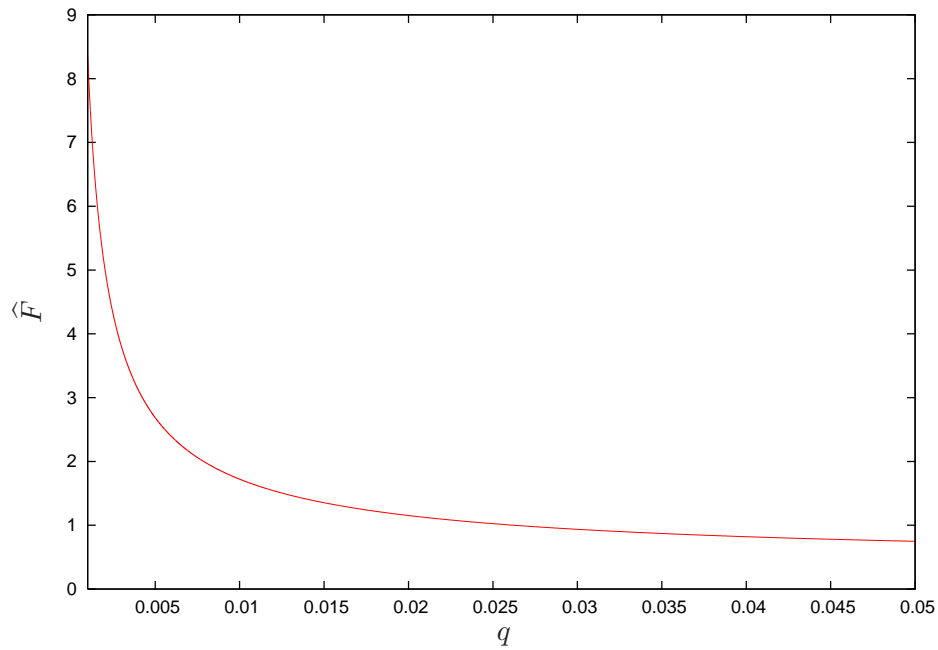
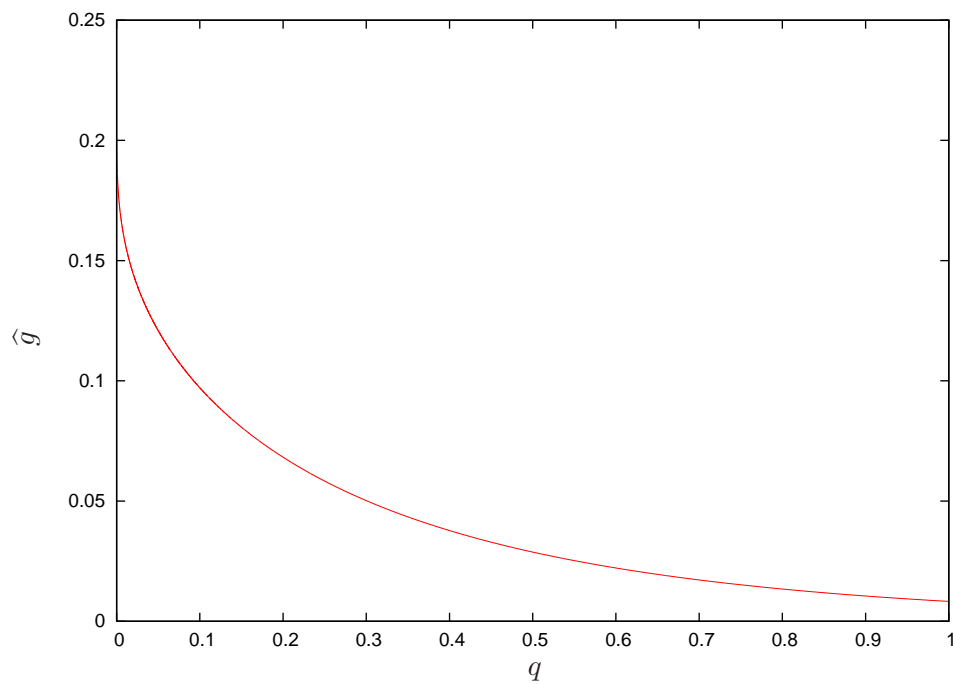
Figures 4.3 and 4.4 show the results obtained. The graph of the function \widehat{g} may be observed to have an infinitely negative slope at the origin, as required by equation (4.16). Another remarkable feature is the divergence of the function \widehat{F} . The tendency of the function \widehat{F}_1 to take larger values near the origin for small values of k could already be observed in Figure A.8 of Part I, but becomes much more dramatic in the limit $k \rightarrow 0$ envisaged here: indeed for all nonzero values of k , \widehat{F}_1 goes down to zero at the origin, but in the limit $k \rightarrow 0$, \widehat{F} goes to infinity.

These numerical results may be nicely supplemented by determining the asymptotic behavior of the functions \widehat{F} and \widehat{g} near the origin, the usefulness of which will appear below. To determine that of \widehat{g} , one may asymptotically replace $\sqrt{\frac{1}{4} - 4\widehat{g}^2 + \widehat{g}'^2}$ by $-\widehat{g}'$ in equation (4.7), since in the limit $q \rightarrow 0$, \widehat{g} goes to $\frac{1}{4}$ whereas \widehat{g}' becomes infinitely negative. One thus gets the simplified model ODE

$$\widetilde{g}'' = -4 \frac{\widetilde{g}\widetilde{g}'}{q}, \quad (4.18)$$

the solution of which is denoted \widetilde{g} to clearly distinguish it from that of the real ODE (4.7), \widehat{g} . To solve equation (4.18), rewrite it in the form

$$q\widetilde{g}'' = (q\widetilde{g}')' - \widetilde{g}' = -4q\widetilde{g}' \quad \Rightarrow \quad q\widetilde{g}' - \widetilde{g} = -2\widetilde{g}^2 + Cst.$$

FIGURE 4.3 – The function $\hat{F}(q)$ FIGURE 4.4 – The function $\hat{g}(q)$

But $q\tilde{g}'$ must go to zero in the limit $q \rightarrow 0$; indeed if it went to some nonzero limit, \tilde{g}' would behave like some constant times $\frac{1}{q}$, and \tilde{g} would diverge logarithmically instead of going to the limit $\frac{1}{4}$. Thus, taking the limit $q \rightarrow 0$ in the preceding equation, one gets $Const. = -\tilde{g}(0) + 2\tilde{g}'^2(0) = -\frac{1}{8}$ so that

$$q\tilde{g}' = \tilde{g} - 2\tilde{g}'^2 - \frac{1}{8} = -2\left(\tilde{g} - \frac{1}{4}\right)^2.$$

Integration of this ODE through separation of variables is trivial and leads to

$$\tilde{g}(q) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\ln(|q|) + Const.}. \quad (4.19)$$

This is only the solution of the model ODE (4.18), of course. But the right-hand side is of the form $\frac{1}{4} + \frac{1}{2\ln(|q|)} + O\left(\frac{1}{\ln^2(|q|)}\right)$ for $q \rightarrow 0$, and one may check that the formula

$$\hat{g}(q) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\ln(|q|)} + O\left(\frac{1}{\ln^2(|q|)}\right) \quad \text{for } q \rightarrow 0 \quad (4.20)$$

does define a rigorous asymptotic solution of the true ODE (4.7) satisfying the necessary conditions (4.15) and (4.16). The asymptotic formula for the function \hat{F} then easily follows from equation (4.6) :

$$\hat{F}(q) = \frac{1}{2q\ln^2(|q|)} + O\left(\frac{1}{q\ln^3(|q|)}\right) \quad \text{for } q \rightarrow 0. \quad (4.21)$$

Equation (4.20) implies that for $q \rightarrow 0$, the function \hat{g} goes extremely slowly (like the inverse of $\ln(|q|)$) to its limit of $\frac{1}{4}$. This will bear important consequences upon the behavior of the components of the fundamental kernel at large distances.

4.4 Back to the physical space

4.4.1 Expression of the perturbation of the stress intensity factors

We shall now provide the final expression of the perturbation of the SIFs on the inner fronts resulting from some arbitrary perturbation of these fronts, in the case of a small distance $2a$ between them or a large distance $2b$ between the outer fronts. The wavelength of the perturbation of the inner fronts is assumed to be comparable to a , which therefore represents the reference distance to be adopted. Thus the functions to be used are those of the outer problem, and the influence of the outer fronts vanishes.

It is then possible to adopt somewhat more natural notations forgetting about the outer fronts, by ascribing upper symbols $+$ and $-$ to the inner fronts instead of lower symbols 1 and $\bar{1}$. Thus equation (A.8) of Part I will be used with the notations $\delta^+(z)$ and $\delta^-(z)$ instead of $\delta_1(z)$ and $\delta_{\bar{1}}(z)$, and $C^+(z)$ and $C^-(z)$ instead of $C_1(z)$ and $C_{\bar{1}}(z)$.

It becomes necessary to extend the definition of the outer problem, given in Section 4.2.2 in Fourier's space, to the physical space. It is recalled that for any nonzero value of k ,

- the functions $\widehat{F}_1(p)$ and $\widehat{g}_{1\bar{1}}(p)$ are respectively the odd indefinite integral of the Fourier transform of the function $f_1(u)$ and the Fourier transform of the function $g_{1\bar{1}}(u)$, so that $f_1(u)$ and $g_{1\bar{1}}(u)$ are the inverse Fourier transforms of $\widehat{F}_1'(p)$ and $\widehat{g}_{1\bar{1}}(p)$;

- the functions $\widehat{F}_1^o(q) \equiv \widehat{F}(q)$ and $\widehat{g}_{1\bar{1}}^o(q) \equiv \widehat{g}(q)$ are related to $\widehat{F}_1(p)$ and $\widehat{g}_{1\bar{1}}(p)$ through equations (4.3)_{1,4}.

It thus natural to define, for any nonzero value of k ,

- a function $f_1^o(v) \equiv f(v)$ as the inverse Fourier transform of $\widehat{F}'(q)$;
- a function $g_{1\bar{1}}^o(v) \equiv g(v)$ as the inverse Fourier transform of $\widehat{g}(q)$.

These functions depend on k , and what we are interested in is their limits (again denoted $f(v)$ and $g(v)$) for $k \rightarrow 0$.

To relate the outer functions $f(v)$, $g(v)$ to the original functions $f_1(u)$, $g_{1\bar{1}}(u)$ (the components of the fundamental kernel) for any nonzero value of k , it suffices to note that by what precedes and the relations (4.1) connecting u and v plus p and q ,

$$f(v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{F}'(q) e^{-iqv} dq = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{F}_1'(p) e^{-ipv} dp = f_1(u) \quad (k \neq 0); \quad (4.22)$$

$$g(v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(q) e^{-iqv} dq = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k^2 \widehat{g}_{1\bar{1}}(p) e^{-ipv} dp = k^2 g_{1\bar{1}}(u) \quad (k \neq 0). \quad (4.23)$$

Using these results in equation (A.8) of Part I and taking then the limit $k \rightarrow 0$ (which implies in particular discarding terms pertaining to the outer fronts), one gets

$$\begin{aligned} \delta K^\pm(z) &= C^\pm(z) \delta^\pm(z) + PV \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{z-z'}{a}\right) K^\pm(z') \frac{\delta^\pm(z') - \delta^\pm(z)}{(z'-z)^2} dz' \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} g\left(\frac{z-z'}{a}\right) K^\mp(z') \delta^\mp(z') \frac{dz'}{a^2}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

This expression applies to any loading consisting only of prescribed forces. The quantities $C^\pm(z)$ depend on the loading but the functions $f(v)$ and $g(v)$ do not.

The case of a loading consisting of a uniform tensile stress applied at infinity is of special interest. For such a loading the unperturbed SIFs $K^\pm(z) \equiv K$ and the quantities $C^\pm(z)$ are given by equations (A.11)₁ and (A.15)₁ of Part I. Dividing then equation (4.24) by K and using the asymptotic expressions of the elliptic integrals E' and K' for $k \rightarrow 0$ provided by Gradshteyn & Ryzhik (1980), one gets

$$\begin{aligned} \frac{\delta K^\pm(z)}{K} &= \frac{\delta^\pm(z)}{4a} + PV \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{z-z'}{a}\right) \frac{\delta^\pm(z') - \delta^\pm(z)}{(z'-z)^2} dz' \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} g\left(\frac{z-z'}{a}\right) \delta^\mp(z') \frac{dz'}{a^2}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

This expression is similar to that for a single tensile slit-crack (Leblond et al. 1996), with different functions $f(v)$ and $g(v)$. It will serve as a basis in a future study of the deformation of the fronts during coalescence of the cracks.

4.4.2 Expressions of the components of the fundamental kernel

It is now necessary to provide expressions of the functions f and g allowing for their numerical calculation. The following difficulty arises here. What we are interested in is the limit of these functions for $k \rightarrow 0$, but unfortunately equations (4.22) and (4.23) have been established for $k \neq 0$, and it is not *a priori* clear that they still apply in this limit. In fact, it is obvious that

equation (4.22) does not, since for $v = 0$ for instance, the integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{F}'(q) dq$ is meaningless, \widehat{F}' behaving like $\frac{1}{q^2 \ln^2(|q|)}$ for $q \rightarrow 0$ by equation (4.21).

It becomes momentarily necessary to distinguish between the values $f(k; v)$ and $\widehat{F}(k; q)$ of the functions f and \widehat{F} for $k \neq 0$ and their limits $f(0; v)$ and $\widehat{F}(0; q)$ for $k \rightarrow 0$. With these notations, equation (4.22)₁ implies, since the function \widehat{F}' is even, that

$$\begin{aligned} f(k; v) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{F}'(k; q) e^{-iqv} dq \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \widehat{F}'(k; q) \cos(qv) dq \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^\epsilon \widehat{F}'(k; q) \cos(qv) dq + \int_\epsilon^{+\infty} \widehat{F}'(k; q) \cos(qv) dq \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\widehat{F}(k; \epsilon) + \int_0^\epsilon \widehat{F}'(k; q) (\cos(qv) - 1) dq + \int_\epsilon^{+\infty} \widehat{F}'(k; q) \cos(qv) dq \right] \end{aligned}$$

where ϵ denotes an arbitrary positive number; use has been made here of the fact that the function $\widehat{F}(k; q) \equiv \widehat{F}_1(k; p)$ vanishes at the origin for all nonzero values of k . Now for fixed $\epsilon > 0$ and $k \rightarrow 0$:

- $\widehat{F}(k; \epsilon)$ goes to $\widehat{F}(0; \epsilon)$;
- $\int_0^\epsilon \widehat{F}'(k; q) (\cos(qv) - 1) dq$ is $O(\epsilon)$, since $\widehat{F}'(0; q) (\cos(qv) - 1)$ is $O\left(\frac{1}{\ln^2(|q|)}\right)$ for $q \rightarrow 0$ by equation (4.21);
- $\int_\epsilon^{+\infty} \widehat{F}'(k; q) \cos(qv) dq$ goes to $\int_\epsilon^{+\infty} \widehat{F}'(0; q) \cos(qv) dq$, since the boundary layer is located around the origin, outside of the interval $[\epsilon, +\infty)$.

Therefore, in this limit,

$$f(0; v) = \frac{1}{\pi} \left[\widehat{F}(0; \epsilon) + O(\epsilon) + \int_\epsilon^{+\infty} \widehat{F}'(0; q) \cos(qv) dq \right].$$

Taking now the limit $\epsilon \rightarrow 0$ in this expression and coming back to the original notations discarding indications of dependence upon k , one gets

$$f(v) = \frac{1}{\pi} FP \int_0^{+\infty} \widehat{F}'(q) \cos(qv) dq \equiv \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\widehat{F}(\epsilon) + \int_\epsilon^{+\infty} \widehat{F}'(q) \cos(qv) dq \right]; \quad (4.26)$$

the symbol FP here denotes the finite part of an integral in the sense of Hadamard. This equation shows that $f(v)$ is the inverse Fourier transform of $\widehat{F}'(q)$ after all, but in some generalized sense.

Equation (4.26) does provide an explicit expression of the function f , but the presence of the FP makes it unfit for the numerical calculation of this function. A more convenient expression may be found through integration by parts, using the function $\widehat{F} - \frac{1}{2}$ (which vanishes at infinity by equation (4.5)₁) as an indefinite integral of \widehat{F}' :

$$\begin{aligned} f(v) &= \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\widehat{F}(\epsilon) - \left(\widehat{F}(\epsilon) - \frac{1}{2} \right) \cos(\epsilon v) + \int_\epsilon^{+\infty} \left(\widehat{F}(q) - \frac{1}{2} \right) v \sin(qv) dq \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\cos(\epsilon v)}{2} + \widehat{F}(\epsilon) (1 - \cos(\epsilon v)) + v \int_\epsilon^{+\infty} \left(\widehat{F}(q) - \frac{1}{2} \right) \sin(qv) dq \right]. \end{aligned}$$

Now in the limit $\epsilon \rightarrow 0$, $\cos(\epsilon v)$ becomes unity, $\widehat{F}(\epsilon) (1 - \cos(\epsilon v))$ goes to zero by equation (4.21), and $\int_\epsilon^{+\infty} \left(\widehat{F}(q) - \frac{1}{2} \right) \sin(qv) dq$ goes to $\int_0^{+\infty} \left(\widehat{F}(q) - \frac{1}{2} \right) \sin(qv) dq$, again by equation

(4.21). It follows that

$$f(v) = \frac{1}{2\pi} + \frac{v}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\widehat{F}(q) - \frac{1}{2} \right) \sin(qv) dq, \quad (4.27)$$

where the integral is convergent in the usual sense and therefore fit for numerical integration.

Similar difficulties do not arise for the function g , since the inverse Fourier transform of the function \widehat{g} exists in the ordinary sense even for $k \rightarrow 0$, this function being continuous at the origin and zero at infinity. Equation (4.23)₁ thus still applies in this limit and yields, since the function \widehat{g} is even :

$$g(v) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \widehat{g}(q) \cos(qv) dq. \quad (4.28)$$

4.4.3 Results for the components of the fundamental kernel

Figures 4.5 and 4.6 show graphs of the functions f and g obtained through numerical calculation of the integrals in equations (4.27) and (4.28).

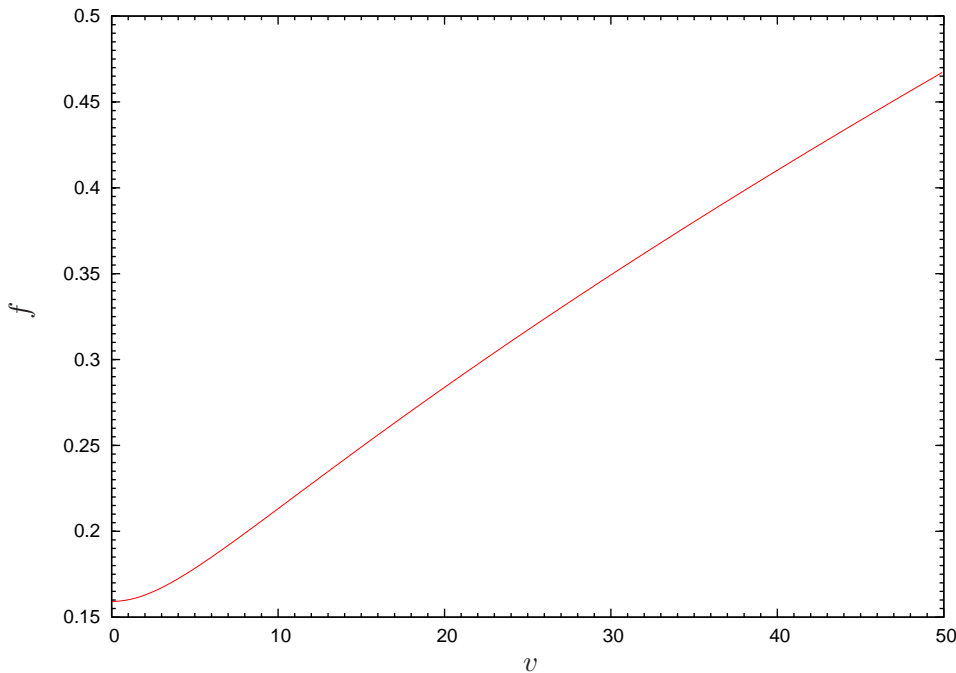
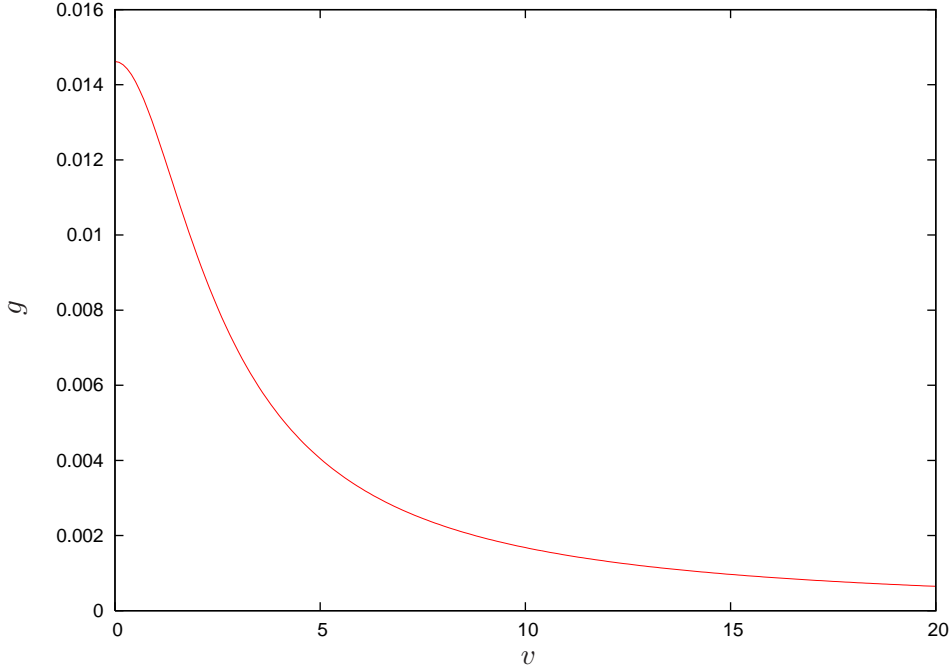


FIGURE 4.5 – The function $f(v)$

Again, these numerical results may be nicely supplemented by determining the asymptotic behavior of the functions f and g near infinity, which is governed by that of the functions \widehat{F} and \widehat{g} near the origin. Consider the function f for instance. Define the following change of function for $q > 0$:

$$\widehat{F}(q) - \frac{1}{2} \equiv \frac{\widehat{h}(q)}{q \ln^2 q};$$

FIGURE 4.6 – The function $g(v)$

the function \widehat{h} is regular at the origin and takes the value $1/2$ there by equation (4.21). Then, by equation (4.27),

$$f(v) = \frac{1}{2\pi} + \frac{v}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\widehat{h}(q)}{q \ln^2 q} \sin(qv) dq.$$

(The double pole at $q = 1$ in the integrand here is only apparent since $\frac{\widehat{h}(q)}{q \ln^2 q} = \widehat{F}(q) - \frac{1}{2}$ which is a perfectly regular function at these points). Assume that $v > 0$ and use the change of variable $qv \equiv q'$; the preceding equation becomes

$$f(v) = \frac{1}{2\pi} + \frac{v}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\widehat{h}(q'/v)}{\ln^2(q'/v)} \frac{\sin q'}{q'} dq' = \frac{1}{2\pi} + \frac{v}{\pi \ln^2 v} \int_0^{+\infty} \widehat{h}\left(\frac{q'}{v}\right) \frac{\ln^2 v}{\ln^2(q'/v)} \frac{\sin q'}{q'} dq'.$$

For every $q' > 0$, in the limit $v \rightarrow +\infty$, $\widehat{h}(q'/v)$ goes to $\widehat{h}(0) = \frac{1}{2}$ and $\frac{\ln^2 v}{\ln^2(q'/v)}$ goes to unity, so that $\int_0^{+\infty} \widehat{h}\left(\frac{q'}{v}\right) \frac{\ln^2 v}{\ln^2(q'/v)} \frac{\sin q'}{q'} dq'$ goes to $\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin q'}{q'} dq' = \frac{\pi}{4}$. Therefore

$$f(v) \sim \frac{1}{2\pi} + \frac{v}{4 \ln^2 v} \sim \frac{v}{4 \ln^2 v} \quad \text{for } v \rightarrow +\infty.$$

Since the function f is even by equation (4.27), it follows that

$$f(v) \sim \frac{|v|}{4 \ln^2(|v|)} \quad \text{for } v \rightarrow \pm\infty. \quad (4.29)$$

A similar reasoning for the function g shows that

$$g(v) \sim \frac{1}{4|v| \ln^2(|v|)} \quad \text{for } v \rightarrow \pm\infty. \quad (4.30)$$

4.5 Concluding remarks

This paper was devoted to the study of the slight in-plane perturbation of a pair of coplanar semi-infinite tensile cracks with parallel fronts. It was based on a preliminary study of a system of identical tensile slit-cracks ; a technique of matched asymptotic expansions was applied to the results of this prior study to let the distance between the inner fronts go to zero, or equivalently that between the outer fronts go to infinity.

The most remarkable results, equations (4.29) and (4.30), pertain to the asymptotic behavior at infinity of the components of the FK, which characterize the effect of a perturbation of a front upon the distribution of the SIFs on the same front and the other one, that is in short, “interactions” between fronts. Two comments are in order here.

First, equations (4.29) and (4.30) show that the functions $f(v)/v^2$ and $g(v)$ which, by equation (4.24), depict interactions between identical or distinct fronts respectively, behave similarly at infinity. In other words, at large distances, a small perturbation of one of the crack fronts generates identical perturbations of the SIFs on the two fronts. For a unique slit-crack, the same phenomenon was observed for mode I loadings, as considered here (Leblond et al. 1996), but not for general mixed mode loadings (Lazarus & Leblond 2002*a,b*).

Second, and more importantly, this work, combined with previous ones, shows that although interactions between identical or distinct fronts always decrease at large distances, the quickness of the decrease highly depends on the cracked geometry considered. Indeed, d denoting the distance between the location of the perturbation of the front and the point of observation of the perturbation of the SIFs :

- for a semi-infinite crack loaded in mode I (Rice 1985) or in mixed mode (Gao & Rice 1986), interactions decrease like $\frac{1}{d^2}$;
- for a single slit-crack in mode I (Leblond et al. 1996) or in mixed mode (Lazarus & Leblond 2002*a,b*), they decrease more quickly, like $\frac{1}{d^3}$;
- for a pair of coplanar semi-infinite cracks loaded in mode I, they decrease much more slowly, like $\frac{1}{d \ln^2 d}$ ². This very slow decrease is bound to have important consequences on the deformation of the fronts during their propagation leading to the final coalescence of the cracks, to be studied in a future paper (Legrand & Leblond 2010*a*).

2. Note that the exponent of d here is just negative enough to ensure, with the additional logarithmic term, convergence of the integrals in equations (4.24) and (4.25).

Chapitre 5

**Evolution of the shape of the fronts
of a pair of semi-infinite cracks
during their coplanar coalescence**

Ce chapitre est une copie de l'article de Legrand & Leblond (2010a).

Abstract

This paper studies the evolution of the shape of the fronts of a pair of tensile coplanar semi-infinite cracks propagating in some homogeneous or inhomogeneous brittle material, during their final coalescence. It is based on a previous work which provides the distribution of the mode I stress intensity factor on the fronts of such cracks, after some small but otherwise arbitrary in-plane perturbation of these fronts.

It is first shown that the problem is ill-posed for propagation in brittle fracture governed by Griffith's criterion, in the sense that the occurrence of multiple bifurcations makes it impossible to unambiguously define the shape of the crack fronts. At each instant, the bifurcation modes consist of symmetric sinusoidal perturbations of the two fronts with a certain "critical" wavelength, which is a characteristic multiple of the width of the ligament remaining between the cracks. There is also an effect of unstable growth of sinusoidal perturbations of wavelength greater than this critical value.

For propagation in fatigue or subcritical crack growth governed by some Paris-type law, these difficulties disappear and the evolution in time of the shape of the crack fronts can be calculated explicitly. The case of a medium with random spatial variations of Paris's constant is considered; statistical information on the shape of the fronts is derived. The results obtained exhibit significant differences with respect to those for the simpler case of a tensile slit-crack previously considered in the literature.

Keywords : semi-infinite cracks; coalescence; deformation of the fronts; brittle fracture; fatigue; subcritical crack growth

5.1 Introduction

In the last quarter of a century, many papers have been devoted to the theoretical study of the evolution of the shape of crack fronts during the quasistatic, coplanar propagation of cracks. Among these, one may distinguish between two groups of works, the first consisting of works which have considered materials with possibly heterogeneous, but given and fixed fracture properties, and the second of works which have used statistical tools to study the effect of random fluctuations of these properties.

In the first group of papers, the following crack configurations were considered :

- the semi-infinite crack loaded in tension (Rice (1985), Gao & Rice (1989)) and shear (Gao & Rice (1986));
- the internal (Gao & Rice 1987b) and external (Gao & Rice 1987a) circular tensile cracks;
- the internal circular shear mode crack (Gao 1988);
- the slit-crack loaded in tension (Leblond et al. 1996) and shear (Lazarus & Leblond 2002a);
- the semi-infinite interfacial crack loaded arbitrarily (Lazarus & Leblond 1998a).

These works essentially concentrated on the problem of stability or instability of the crack front shape. This problem was treated by analytical means, using a first-order expansion in the perturbation implying neglect of the nonlinearity associated to the influence of the perturbed crack front position upon the local fracture properties.

The second group of papers includes, among others, the works of Schmittbuhl et al. (1995), Ramanathan et al. (1997), Ramanathan & Fisher (1997), Delaplace et al. (1999),

Schmittbuhl & Vilotte (1999), Roux et al. (2003), Charles et al. (2004), Katzav & Adda-Bedia (2006) and Bonamy et al. (2008). These authors mainly concentrated on the determination of the “roughness exponent” of the crack front, using numerical simulations, self-consistent-expansions or renormalization group theory. Full account was taken in their works of the non-linearity associated to the influence of the current front position upon the fracture properties, which was shown by Roux et al. (2003) to play an important role on the value of the overall toughness (the effect was confirmed by Ponsou (2009)). In contrast, neglecting again this nonlinearity and following a somewhat different line of thought inspired by a previous work of Perrin & Rice (1994) on dynamic fracture, several works studied correlation functions and power spectra of the crack front perturbation by analytical means, for

- the tensile slit-crack (Favier et al. 2006b);
- the shear mode slit-crack (Pindra et al. 2010a);
- the semi-infinite interfacial crack (Pindra et al. 2008).

All works of both groups considered geometries involving a single crack, which precluded the interesting study of *the evolution of the shape of crack fronts during coplanar coalescence of cracks*. The reason was that they all used formulae providing the stress intensity factors after some small but otherwise arbitrary coplanar perturbation of the crack fronts, which until recently were available only for singly cracked geometries.

However Pindra et al. (2010b) and Legrand & Leblond (2010b), using a work of Rice (1989), have just established such formulae for the simplest possible geometry involving multiple cracks : namely a system of two coplanar, parallel, identical slit-cracks loaded in tension in some infinite body. Pindra et al. (2010b) considered first the general case of arbitrarily spaced crack fronts. Legrand & Leblond (2010b) then specialized their results to the case where the distance between the outer fronts is much larger than that between the inner fronts. In this limit one gets a pair of coplanar semi-infinite cracks with parallel fronts separated by a ligament, which is a nice model geometry for the study of the coalescence of coplanar cracks.

The aim of the present work is to apply Legrand & Leblond (2010b)’s formulae to the study of the evolution of the shape of crack fronts during the coalescence of cracks. There will be connections with both groups of works mentioned above. Indeed we shall study both matters of bifurcation and stability for brittle fracture governed by Griffith’s criterion, with a given homogeneous or inhomogeneous distribution of fracture toughness, and statistical features of the shape of the fronts for propagation in fatigue or subcritical crack growth governed by Paris’s law, in a randomly heterogeneous material. A comparison with the case of a tensile slit-crack envisaged by Leblond et al. (1996) and Favier et al. (2006b) will be presented.

The paper is organized as follows :

- Section A.2 presents the model cracked geometry considered, and recalls Legrand and Leblond (2010b)’s results for the distribution of the stress intensity factors along the crack fronts resulting from some small in-plane perturbation of these fronts.
- Section 5.3 considers propagation of the crack fronts in brittle fracture in a medium with homogeneous or heterogeneous fracture toughness. Special emphasis is placed on the study of bifurcation and stability phenomena.
- Section 5.4 considers propagation of the crack fronts in fatigue or subcritical crack growth in a medium with heterogeneous Paris constant. The explicit expression of the shape of the fronts is provided as a function of time, for any distribution of the Paris constant within the crack plane.
- Finally Section 5.5 uses these results to derive statistical properties of the shape of the

crack fronts, in the case of random spatial fluctuations of the Paris constant.

5.2 Generalities

Consider, within some infinite isotropic elastic body, a system of two coplanar semi-infinite cracks occupying the domains $x \leq -a$ and $x \geq a$ in the plane $y = 0$, and loaded through remote tensile tractions (Figure 5.1)¹. The (mode I) stress intensity factors are uniform and identical on the two fronts; let K denote their common value.

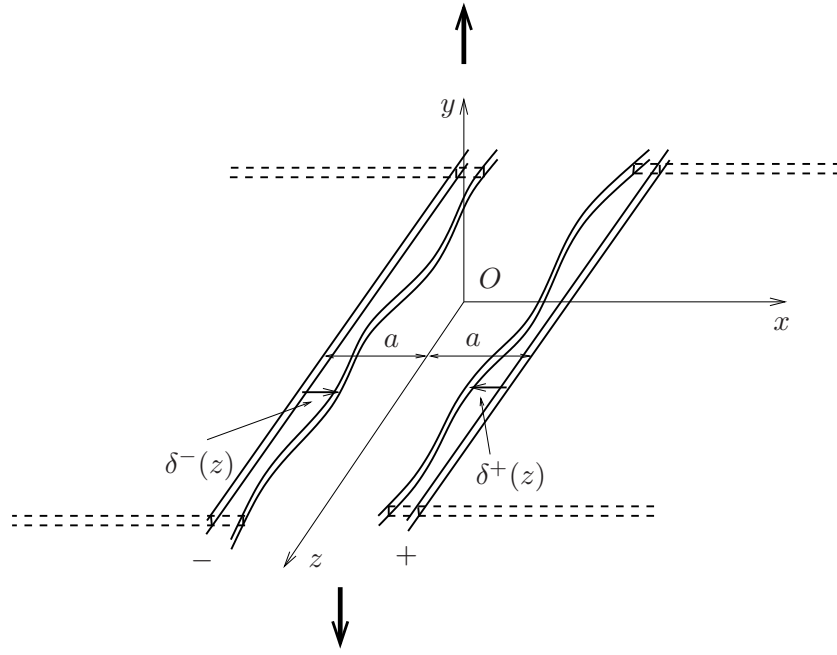


FIGURE 5.1 – Two coplanar semi-infinite cracks with slightly perturbed fronts

Denote the fore ($x = a$) and rear ($x = -a$) crack fronts with upper $+$ and $-$ symbols, respectively. Slightly perturb these fronts within the crack plane, denoting $\delta^+(z)$ and $\delta^-(z)$ the local orthogonal distances from the original fronts to the perturbed ones, measured positively in the direction of propagation (Figure 5.1). The resulting perturbations $\delta K^+(z)$, $\delta K^-(z)$ of the stress intensity factors on the fore and rear fronts are given, to first order in the perturbation of these fronts, by the following formula (Legrand & Leblond 2010b) :

$$\frac{\delta K^\pm(z)}{K} = \frac{\delta^\pm(z)}{4a} + PV \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{z-z'}{a}\right) \frac{\delta^\pm(z') - \delta^\pm(z)}{(z'-z)^2} dz' + \int_{-\infty}^{+\infty} g\left(\frac{z-z'}{a}\right) \frac{\delta^\mp(z')}{a^2} dz'. \quad (5.1)$$

In this expression the symbol PV denotes a Cauchy principal value, and f and g are characteristic functions of the cracked geometry considered, which have been calculated numerically once

1. Semi-infinite cracks give rise to traditional ambiguities on the external load, since they cannot withstand uniform tractions exerted at infinity. Here the situation considered unambiguously consists (like in the work of Legrand & Leblond (2010b)) of a system of two slit-cracks occupying the domains $-b \leq x \leq -a$, $a \leq x \leq b$ and loaded through uniform remote tensile tractions, *in the limiting case where b is much larger than a .*

and for all by Legrand & Leblond (2010*b*). These functions are even and represented graphically in Figures 5.2 and 5.3 for positive values of their argument

$$v \equiv \frac{z - z'}{a}. \quad (5.2)$$

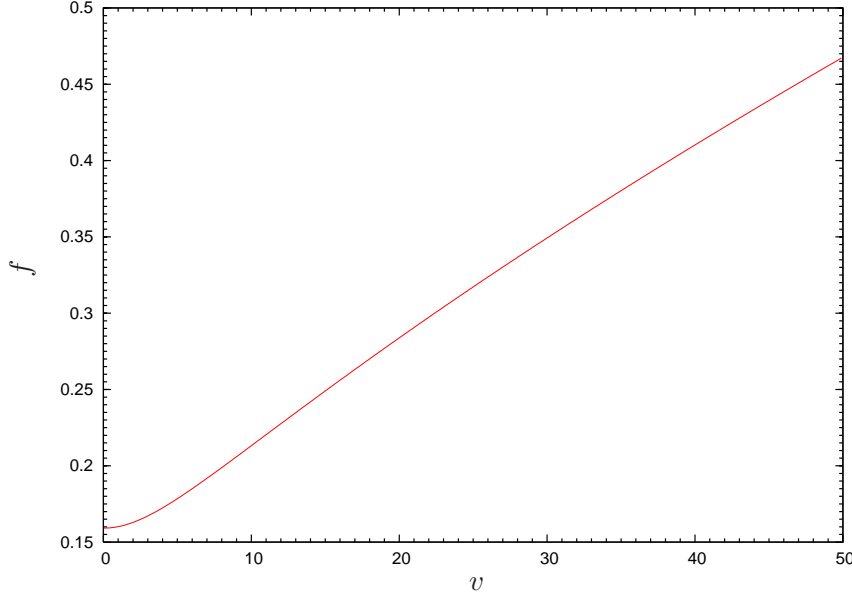


FIGURE 5.2 – The function $f(v)$

Also, they satisfy the following properties :

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \quad ; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g(v)dv = \frac{1}{4} \quad ; \quad \begin{cases} f(v) \sim \frac{v}{4 \ln^2 v} \\ g(v) \sim \frac{1}{4v \ln^2 v} \end{cases} \quad \text{for } v \rightarrow +\infty. \quad (5.3)$$

Note that properties (5.3)_{3,4} warrant (slow!) convergence at infinity of the integrals in equation (5.1), for bounded functions $\delta^+(z)$ and $\delta^-(z)$.

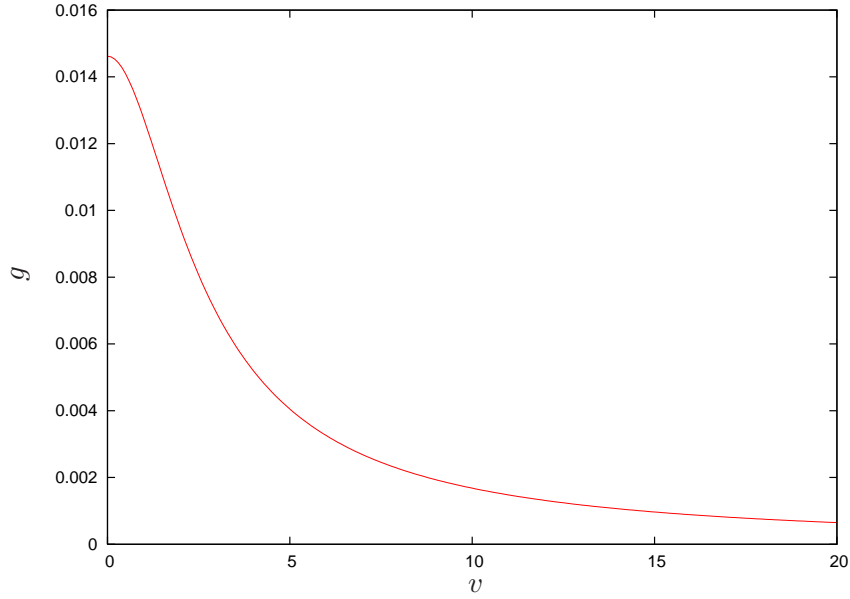
Use will be made of Fourier transforms in the direction z of the crack fronts. The definition adopted for the Fourier transform $\widehat{\phi}(\xi)$ of an arbitrary function $\phi(z)$ is

$$\widehat{\phi}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z)e^{i\xi z} dz \quad \Leftrightarrow \quad \phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}(\xi)e^{-i\xi z} d\xi. \quad (5.4)$$

The Fourier transform $\widehat{\phi}(q)$ of a function $\phi(v)$ is defined by similar formulae.

We shall need the Fourier transform of equation (5.1). The easiest way to get it is to express the functions δ^+ and δ^- in terms of their Fourier transforms $\widehat{\delta}^+$ and $\widehat{\delta}^-$ in this equation. The calculation is somewhat lengthy but straightforward, and the result reads

$$\frac{\widehat{\delta K^\pm}(\xi)}{K} = \overline{f}(\xi a) \frac{\widehat{\delta^\pm}(\xi)}{a} + \widehat{g}(\xi a) \frac{\widehat{\delta^\mp}(\xi)}{a}. \quad (5.5)$$

FIGURE 5.3 – The function $g(v)$

In this expression \bar{f} and \hat{g} are functions of the argument

$$q \equiv \xi a \quad (5.6)$$

defined by

$$\begin{cases} \bar{f}(q) \equiv \frac{1}{4} + PV \int_{-\infty}^{+\infty} f(v) \frac{e^{-iqv} - 1}{v^2} dv & = \frac{1}{4} + 2 \int_0^{+\infty} f(v) \frac{\cos(qv) - 1}{v^2} dv \\ \hat{g}(q) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} g(v) e^{-iqv} dv & = 2 \int_0^{+\infty} g(v) \cos(qv) dv. \end{cases} \quad (5.7)$$

Note that \hat{g} is just the Fourier transform of g , whereas the relation between \bar{f} and f is more complex. The functions \bar{f} and \hat{g} are even and represented graphically in figure 5.4 for positive values of their argument q .

Additional properties of the functions \bar{f} and \hat{g} are as follows. First, their values at the origin are

$$\bar{f}(0) = \hat{g}(0) = \frac{1}{4}. \quad (5.8)$$

The first value is a consequence of the definition (5.7)₁ of \bar{f} , and the second of equation (5.3)₂. Also, the behavior of \bar{f} and \hat{g} near infinity is given by

$$\begin{cases} \bar{f}(q) \sim -\frac{q}{2} \\ \hat{g}(q) \rightarrow 0 \end{cases} \quad \text{for } q \rightarrow +\infty. \quad (5.9)$$

Equation (5.9)₁ is a consequence of equation (5.3)₁ and is established in Appendix D.1, whereas equation (5.9)₂ results from the fact that \hat{g} is a Fourier transform.

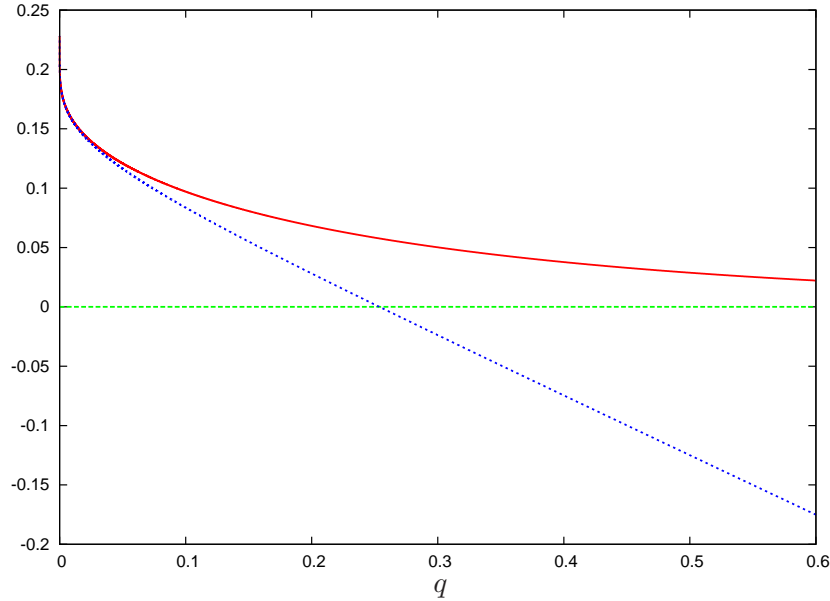


FIGURE 5.4 – The functions $\bar{f}(q)$ (in blue) and $\hat{g}(q)$ (in red)

All these results are similar to those for a slit-crack (Leblond et al. 1996), and to a lesser extent to those for a single semi-infinite crack (Rice 1985). There are however notable differences in the asymptotic behavior near infinity of the functions $f(v)/v^2$ and $g(v)$ which, by equation (5.1), describe the effect of a slight crack advance at some point upon the value of the stress intensity factor at some other point, that is, “interactions” between distinct points of the crack fronts. Indeed, $d \equiv |z - z'| \equiv a|v|$ denoting the distance between such points :

- for a pair of semi-infinite cracks, interactions decrease like $\frac{1}{d \ln^2 d}$ for large d (equations (5.3)_{3,4}) ;
- for a slit-crack, they decrease like $\frac{1}{d^3}$ (Leblond et al. 1996) ;
- for a single semi-infinite crack, they decrease like $\frac{1}{d^2}$ (Rice 1985).

Thus, the $\frac{1}{d^2}$ decrease for a single semi-infinite crack being adopted as a reference, the decrease for a pair of semi-infinite cracks is slower, and that for a slit-crack is quicker. This is bound to bear important consequences upon the temporal evolution of the deformation of the fronts for these different crack configurations.

5.3 Propagation of the crack fronts in brittle fracture : bifurcation and instability phenomena

We now study the propagation of the crack fronts. At each instant t , the distance $a^\pm(z, t)$ between the Oz axis and an arbitrary point on the fore or rear crack front is of the form

$$a^\pm(z, t) \equiv a(t) - \delta^\pm(z, t) \quad , \quad |\delta^\pm(z, t)| \ll a(t) \quad (5.10)$$

where $a(t)$ denotes the mean half-width of the ligament and $\delta^\pm(z, t)$ the local perturbation of the front, as measured with respect to the unperturbed ligament of half-width $a(t)$. (See figure 5.1,

where a , δ^+ and δ^- now depend on t). Also, the local stress intensity factor $K[z, x = \pm a^\pm(z, t)]$ is of the form

$$K[z, x = \pm a^\pm(z, t)] \equiv K[a(t)] + \delta K^\pm[z, a(t)] \quad , \quad |\delta K^\pm[z, a(t)]| \ll K[a(t)] \quad (5.11)$$

where $K[a(t)]$ denotes the stress intensity factor for the unperturbed ligament of half-width $a(t)$ and $\delta K^\pm[z, a(t)]$ the local perturbation of this stress intensity factor.

In this section, we consider the case of propagation in brittle fracture, governed by Griffith's criterion. The fracture toughness $K_c(z, x)$ is allowed to slightly vary within the crack plane and is thus of the form

$$K_c(z, x) \equiv \overline{K_c} [1 + \delta k_c(z, x)] \quad , \quad |\delta k_c(z, x)| \ll 1, \quad (5.12)$$

$\overline{K_c}$ denoting its average value and $\delta k_c(z, x)$ its normalized, dimensionless fluctuation.

To find the shape of the crack fronts, one must equate $K[z, x = \pm a^\pm(z, t)]$ to $K_c[z, x = \pm a^\pm(z, t)]$. Identifying mean values and fluctuations in this identity, one gets the following conditions at every instant :

$$\begin{cases} K[a(t)] & = \overline{K_c} \\ \delta K^\pm[z, a(t)] & = \overline{K_c} \delta k_c[z, x = \pm a(t)] \end{cases} \quad (5.13)$$

where $\delta k_c[z, x = \pm a^\pm(z, t)]$ has been replaced by $\delta k_c[z, x = \pm a(t)]$ to first order. It must be acknowledged here that although this linearization is irreproachable from a strict mathematical point of view, it may raise physical problems in a number of cases. Indeed it means neglecting the nonlinearity associated to the influence of the current perturbed front position upon the local fracture toughness, which was noted in the Introduction to often significantly alter the value of the overall toughness. The reason for tolerating this shortcoming (following the approach initiated by Perrin & Rice (1994) in the case of dynamic propagation of a semi-infinite crack) is that linearization is indispensable to get explicit, analytic results.

Since the mean half-width $a(t)$ of the ligament continuously decreases with time, fulfillment of condition (5.13)₁ requires a corresponding continuous adjustment of the loading, so as to maintain a constant value of the mean stress intensity factor $K[a(t)]$. Such an adjustment being assumed to be achieved, the Fourier transform of condition (5.13)₂ yields upon use of equation (5.5) :

$$\begin{cases} \overline{f}(\xi a) \frac{\widehat{\delta^+}(\xi, a)}{a} + \widehat{g}(\xi a) \frac{\widehat{\delta^-}(\xi, a)}{a} & = \widehat{\delta k_c}(\xi, a) \\ \overline{f}(\xi a) \frac{\widehat{\delta^-}(\xi, a)}{a} + \widehat{g}(\xi a) \frac{\widehat{\delta^+}(\xi, a)}{a} & = \widehat{\delta k_c}(\xi, -a) \end{cases}$$

where a has been adopted as a measure of "kinematic time" instead of t . Taking the sum and the difference of these equations, one gets

$$\begin{cases} (\overline{f} + \widehat{g})(\xi a) \frac{(\widehat{\delta^+} + \widehat{\delta^-})(\xi, a)}{a} & = \widehat{\delta k_c}(\xi, a) + \widehat{\delta k_c}(\xi, -a) \\ (\overline{f} - \widehat{g})(\xi a) \frac{(\widehat{\delta^+} - \widehat{\delta^-})(\xi, a)}{a} & = \widehat{\delta k_c}(\xi, a) - \widehat{\delta k_c}(\xi, -a). \end{cases} \quad (5.14)$$

Solving for $(\widehat{\delta}^+ + \widehat{\delta}^-)(\xi, a)$ and $(\widehat{\delta}^+ - \widehat{\delta}^-)(\xi, a)$ and taking the inverse Fourier transform of the expressions found, one finally obtains

$$\begin{cases} (\delta^+ + \delta^-)(z, a) = \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\delta k}_c(\xi, a) + \widehat{\delta k}_c(\xi, -a)}{(\overline{f} + \widehat{g})(\xi a)} e^{-i\xi z} d\xi \\ (\delta^+ - \delta^-)(z, a) = \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\delta k}_c(\xi, a) - \widehat{\delta k}_c(\xi, -a)}{(\overline{f} - \widehat{g})(\xi a)} e^{-i\xi z} d\xi. \end{cases} \quad (5.15)$$

These equations apparently define the shape of the crack fronts for every value of the mean half-width a of the ligament.

Unfortunately it so happens that both functions $(\overline{f} + \widehat{g})(q)$ and $(\overline{f} - \widehat{g})(q)$ appearing in the denominators of the integrals in equations (5.15) have zeroes : the first at the points

$$q = \pm q_c \quad , \quad q_c \approx 0.341 \quad (5.16)$$

and the second at $q = 0$. The existence of these zeroes is very clear in Figure 5.4. The function $(\overline{f} + \widehat{g})(q)$ behaves like a constant times $q \mp q_c$ for $q \rightarrow \pm q_c$, and it can be shown using the results of Legrand & Leblond (2010b) that the function $(\overline{f} - \widehat{g})(q)$ behaves like a constant times $q^2 \ln(|q|)$ for $q \rightarrow 0$. Hence both integrals in equations (5.15) are divergent and meaningless. This means that *it is impossible to unambiguously define the shape of the crack fronts.*

To better understand the origin of the problem, re-examine equations (5.14). These equations unambiguously define the sum and the difference of the Fourier components $\widehat{\delta}^+(\xi, a)$, $\widehat{\delta}^-(\xi, a)$, when the functions $(\overline{f} + \widehat{g})(\xi a)$ and $(\overline{f} - \widehat{g})(\xi a)$ in their left-hand sides do not vanish. When they do, which happens for $\xi a = \pm q_c$ in the first equation and 0 in the second, $(\widehat{\delta}^+ + \widehat{\delta}^-)(\xi, a)$ or $(\widehat{\delta}^+ - \widehat{\delta}^-)(\xi, a)$ cannot be determined. There may be an infinity of solutions, meaning occurrence of a bifurcation, or no solution, depending on whether the material is homogeneous ($\widehat{\delta k}_c(\xi, a) \pm \widehat{\delta k}_c(\xi, -a) = 0$) or inhomogeneous ($\widehat{\delta k}_c(\xi, a) \pm \widehat{\delta k}_c(\xi, -a) \neq 0$).

In a homogeneous material, bifurcations thus occur in two cases :

- *Case 1* : $\xi a = \pm q_c$. This means that the value of the wavelength $\lambda \equiv 2\pi/|\xi|$ of the Fourier components $\widehat{\delta}^+(\xi, a)$, $\widehat{\delta}^-(\xi, a)$ considered is

$$\lambda_c \equiv \frac{2\pi a}{q_c}. \quad (5.17)$$

Then $(\widehat{\delta}^+ + \widehat{\delta}^-)(\pm q_c/a, a)$ is indeterminate but $(\widehat{\delta}^+ - \widehat{\delta}^-)(\pm q_c/a, a)$ is zero. Therefore $\widehat{\delta}^+(\pm q_c/a, a)$ and $\widehat{\delta}^-(\pm q_c/a, a)$ are equal, which means that the perturbations of the two crack fronts are symmetric with respect to the median axis Oz of the ligament.

- *Case 2* : $\xi a = 0$. This means that the wavelength λ is infinite. Then $(\widehat{\delta}^+ + \widehat{\delta}^-)(0, a)$ is zero so that $\widehat{\delta}^+(0, a)$ and $\widehat{\delta}^-(0, a)$ are opposite, whereas $(\widehat{\delta}^+ - \widehat{\delta}^-)(0, a)$ is indeterminate. The perturbations of the crack fronts consist of mere identical translatory motions of these fronts in the direction Ox .

The existence of the second bifurcation mode is an obvious consequence of the translational invariance of the problem in the direction Ox , but the existence of the first one is far less intuitive. It is related to the fact that *symmetric sinusoidal perturbations of the crack fronts of*

a certain “critical” wavelength λ_c , given by equation (5.17), give rise to uniform distributions of the stress intensity factor along these fronts.

This phenomenon may be rationalized as follows :

- Consider first a symmetric perturbation of the crack fronts of small wavelength, $\lambda \ll a$ (Figure 5.5). The crack advance is maximum at point A and minimum at point B . Draw small circles centered at these points. Because of the local curvature of the crack front, that part of the interior of the circle occupied by the unbroken ligament (hatched in Figure 5.5) is larger at point A than at point B , so that the opening of the crack is more hindered near the first point than near the second. Thus the stress intensity factors $K(A)$, $K(B)$ at points A and B obey the inequality $K(A) < K(B)$.
- Consider now a symmetric perturbation of large wavelength, $\lambda \gg a$, and again points A and B where the crack advance is respectively maximum and minimum (Figure 5.6). The stress intensity factors at points A and B are almost the same as for ligaments of uniform width equal to the local width at these points (indicated by dashed double arrows in Figure 5.6). It follows that $K(A) > K(B)$.
- The difference $K(A) - K(B)$ is thus negative for small λ and positive for large λ , and obviously varies continuously with this parameter. Hence some special value λ_c such that $K(A) - K(B) = 0$ must necessarily exist.

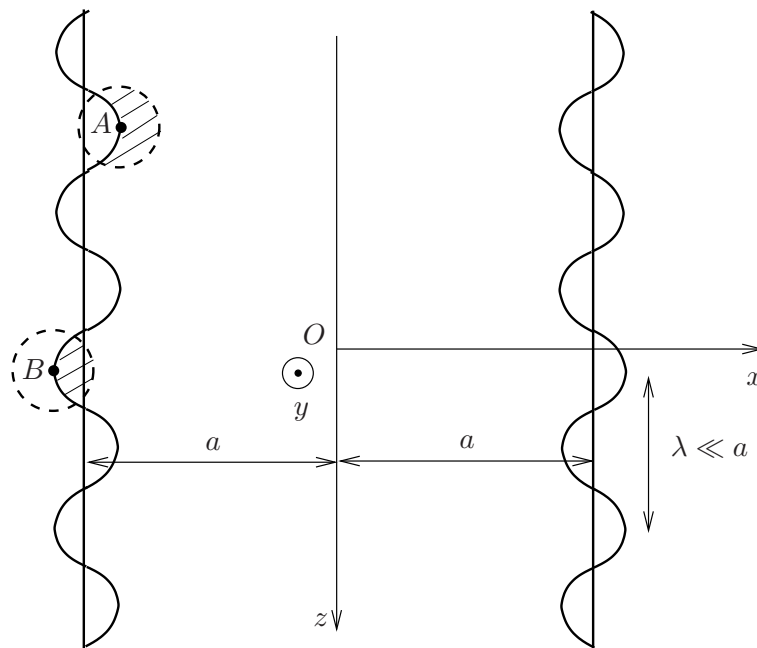


FIGURE 5.5 – Symmetric sinusoidal perturbation of the crack fronts of small wavelength

It is worth noting that the argument about perturbations of small wavelength, being based on *local* considerations, applies regardless of the overall cracked geometry considered; hence the inequality $K(A) < K(B)$ is general for small-scale perturbations. In contrast, the argument about perturbations of large wavelength depends on the overall geometry : the inequality $K(A) > K(B)$ for large-scale perturbations is true in the specific case considered but may be wrong in other cases, depending upon whether in the 2D problem (in the xy plane), K increases

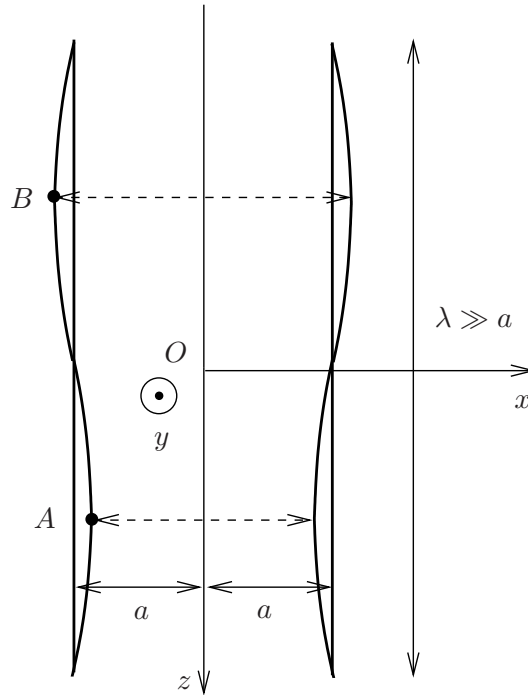


FIGURE 5.6 – Symmetric sinusoidal perturbation of the crack fronts of large wavelength

or decreases with the distance of propagation. Thus, for certain geometries (such as that considered here), the sign of $K(A) - K(B)$ will be negative for perturbations of small wavelength but positive for perturbations of large wavelength, in which case a bifurcation will necessarily occur for some specific wavelength; but for other geometries the sign of $K(A) - K(B)$ will be negative for perturbations of all wavelengths, and no bifurcation will occur.

The infinite body with a slit-crack of width $2a$ belongs to the first category of geometries. Hence the reasonings presented above also provide a qualitative explanation of the existence of a bifurcation in that case, first evidenced by Leblond et al. (1996). The bifurcation mode was found by these authors to also be symmetric about the median axis of the crack; the only difference lay in the smaller value of $\lambda_c = 2\pi a/q_c$ for a slit-crack than for a pair of coplanar semi-infinite cracks ($q_c \approx 0.925$ in the first case versus 0.341 in the second, see Leblond et al. (1996) and equation (5.16)₂ above). The larger value of λ_c for a pair of coplanar semi-infinite cracks is related to the longer range of interaction in this case between distinct points of the crack fronts; see appendix A.2.

The bifurcation problem in geometries of the first category is all the more serious since bifurcations appear without any delay, and new bifurcations continually appear (assuming that the inequality $K(A) > K(B)$ for perturbations of large wavelengths remains true at all instants).

In addition, in geometries of the first category, the existence of a bifurcation mode generates a phenomenon of unstable development of sinusoidal perturbations of large wavelength. Indeed consider for definiteness the specific geometry of a pair of semi-infinite cracks, and assume the fracture toughness to be homogeneous for simplicity. Consider a perturbation of the form

$$\delta^+(z) \equiv \delta^-(z) \equiv \alpha \cos(\xi z + \phi). \quad (5.18)$$

Then, by equation (5.5),

$$\delta K^+(z) = \delta K^-(z) = K(\bar{f} + \hat{g})(\xi a) \frac{\alpha}{a} \cos(\xi z + \phi). \quad (5.19)$$

It follows that the maxima and minima of $K^+(z)$ and $K^-(z)$ are in phase or in opposite phases with those of $\delta^+(z)$ and $\delta^-(z)$ according to whether $(\bar{f} + \hat{g})(\xi a)$ is positive or negative, that is according to whether the wavelength $\lambda \equiv 2\pi/|\xi|$ is greater or smaller than λ_c . Thus, if $\lambda > \lambda_c$, points located ahead of the mean front have a larger stress intensity factor than those located behind it, so that the undulations of the fronts must grow in time; whereas if $\lambda < \lambda_c$, they must decay. In other words, perturbations of the crack fronts of wavelength greater than λ_c are unstable whereas perturbations of wavelength smaller than λ_c are stable. Observe that the reasoning is in fact independent of the crack propagation law, provided that the local rate of propagation is an increasing function of the local stress intensity factor.

All these results and considerations fully confirm the conclusions arrived at by Rice (1985), Gao & Rice (1986), Gao & Rice (1987*b*), Gao & Rice (1987*a*) and Gao (1988) in various other cases.

5.4 Evolution of the crack fronts in fatigue or subcritical crack growth

For propagation in brittle fracture governed by Griffith's criterion, the occurrence of multiple bifurcations prohibiting to unambiguously define the shape of the crack fronts is a clear indication that the problem of evolution of these fronts is ill-posed. The only way to overcome this difficulty is to adopt some "regularized" propagation law. One possibility to achieve such a regularization would be to introduce inertial effects. But this would require knowledge of the dynamic equivalents of functions f and g of equation (5.1), which are intimately connected to Bueckner's weight functions (Rice 1989); and 3D dynamic weight functions are unfortunately known only for the single semi-infinite crack (Willis & Movchan 1995), not for a pair of such cracks.

We shall therefore adopt another regularization procedure, which consists of retaining the quasistatic hypothesis but replacing Griffith's criterion by some Paris-type propagation law. With the notations introduced at the beginning of Section 5.3, this law reads

$$-\frac{\partial a^\pm}{\partial t}(z, t) = C[z, x = \pm a^\pm(z, t)] \{K[z, x = \pm a^\pm(z, t)]\}^N \quad (5.20)$$

where $C(z, x)$ is *Paris's constant* and N *Paris's exponent*. The former quantity will be assumed to be spatially variable, but the latter uniform for simplicity.

Equation (5.20) applies to slow, "subcritical" crack propagation below the brittle threshold; the notations in equation (5.20), with t representing time and K the stress intensity factor, are adapted to this case. It also applies to fatigue under cyclic loadings; in this case " t " must conventionally be re-interpreted as "number of cycles" and K as "variation of the stress intensity factor during one cycle".

The Paris constant will be assumed to vary only slightly within the crack plane and thus be of the form

$$C(z, x) \equiv \bar{C} [1 + \delta c(z, x)] \quad , \quad |\delta c(z, x)| \ll 1, \quad (5.21)$$

\overline{C} and $\delta c(z, x)$ denoting its mean value and normalized, dimensionless fluctuation.

Expanding the propagation law (5.20) to first order using equations (5.10), (5.11) and (5.21) and identifying terms of order 0 and 1, one gets

$$\begin{cases} -\frac{da(t)}{dt} &= \overline{C} \{K[a(t)]\}^N \\ \frac{\partial \delta^\pm(z, t)}{\partial t} &= N \overline{C} \{K[a(t)]\}^{N-1} \delta K^\pm[z, a(t)] + \overline{C} \delta c[z, x = \pm a(t)] \{K[a(t)]\}^N. \end{cases}$$

Note that $\delta c[z, x = \pm a^\pm(z, t)]$ has been replaced by $\delta c[z, x = \pm a(t)]$ here, following a strict linearization procedure like in equation (5.13)₂, with the same shortcomings and for the same basic reason. Eliminating dt between these equations and adopting again a as a measure of kinematic time instead of t , one obtains

$$-\frac{\partial \delta^\pm(z, a)}{\partial a} = N \frac{\delta K^\pm(z, a)}{K(a)} + \delta c(z, \pm a).$$

Taking the Fourier transform of this equation using equation (5.5), one gets

$$\begin{cases} -\frac{\partial \widehat{\delta}^+(\xi, a)}{\partial a} &= \frac{N}{a} \left[\overline{f}(\xi a) \widehat{\delta}^+(\xi, a) + \widehat{g}(\xi a) \widehat{\delta}^-(\xi, a) \right] + \widehat{\delta} c(\xi, a) \\ -\frac{\partial \widehat{\delta}^-(\xi, a)}{\partial a} &= \frac{N}{a} \left[\overline{f}(\xi a) \widehat{\delta}^-(\xi, a) + \widehat{g}(\xi a) \widehat{\delta}^+(\xi, a) \right] + \widehat{\delta} c(\xi, -a) \end{cases}$$

or equivalently

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial a} \left(\widehat{\delta}^+ + \widehat{\delta}^- \right) (\xi, a) &= \frac{N}{a} (\overline{f} + \widehat{g}) (\xi a) \left(\widehat{\delta}^+ + \widehat{\delta}^- \right) (\xi, a) \\ &\quad + \widehat{\delta} c(\xi, a) + \widehat{\delta} c(\xi, -a) \\ -\frac{\partial}{\partial a} \left(\widehat{\delta}^+ - \widehat{\delta}^- \right) (\xi, a) &= \frac{N}{a} (\overline{f} - \widehat{g}) (\xi a) \left(\widehat{\delta}^+ - \widehat{\delta}^- \right) (\xi, a) \\ &\quad + \widehat{\delta} c(\xi, a) - \widehat{\delta} c(\xi, -a). \end{cases} \quad (5.22)$$

The integration of these first-order, linear, inhomogeneous differential equations on the sum and the difference of $\widehat{\delta}^+(\xi, a)$ and $\widehat{\delta}^-(\xi, a)$ is straightforward using standard methods. Assuming the crack fronts to be initially straight ($\widehat{\delta}^+(\xi, a_0) = \widehat{\delta}^-(\xi, a_0) = 0$ for the initial value a_0 of the half-width of the ligament), one gets

$$\begin{cases} \left(\widehat{\delta}^+ + \widehat{\delta}^- \right) (\xi, a) &= \int_{a_0}^{a_1} [\psi(\xi a, \xi a_1)]^N \left[\widehat{\delta} c(\xi, a_1) + \widehat{\delta} c(\xi, -a_1) \right] da_1 \\ \left(\widehat{\delta}^+ - \widehat{\delta}^- \right) (\xi, a) &= \int_{a_0}^{a_1} [\chi(\xi a, \xi a_1)]^N \left[\widehat{\delta} c(\xi, a_1) - \widehat{\delta} c(\xi, -a_1) \right] da_1 \end{cases} \quad (5.23)$$

where

$$\begin{cases} \psi(q_1, q_2) &= \exp \left[\int_{q_1}^{q_2} (\overline{f} + \widehat{g})(q) \frac{dq}{q} \right] \\ \chi(q_1, q_2) &= \exp \left[\int_{q_1}^{q_2} (\overline{f} - \widehat{g})(q) \frac{dq}{q} \right]. \end{cases} \quad (5.24)$$

Since the system of cracks studied is prone to instabilities, as shown in Section 5.3, equations (5.23) may predict an unlimited increase in time of the Fourier components of the perturbations of the crack fronts. In such a case the linearized equations (5.23) are valid only at the beginning of propagation, when the increase is still limited².

2. This usual drawback of linearized studies of instabilities is known not to hinder the correct prediction of their onset.

5.5 Statistics of the deformation of the crack fronts in a heterogeneous material

5.5.1 Generalities

We shall now derive some statistical information on the shape of the crack fronts in the case of propagation in fatigue or subcritical crack growth within a medium having a randomly spatially variable Paris constant.

We therefore consider a statistical ensemble of possible “realizations” of the heterogeneous medium. Appendix D.2 briefly recalls basic mathematical elements of description of such an ensemble. Precise definitions of the *mathematical expectation* $E[F(z)]$ of an arbitrary observable $F(z)$ defined on the crack fronts and its *two-point autocorrelation function* $E[F(z_1)F(z_2)]$ are provided first, equations (D.1) and (D.2). The case of statistical invariance of the observable in the direction of the crack fronts is then considered; in this case $E[F(z_1)F(z_2)]$ depends only on the relative distance between points z_1 and z_2 :

$$E[F(z_1)F(z_2)] \equiv \mathcal{F}(z_2 - z_1), \quad (5.25)$$

where the (obviously even) function \mathcal{F} is the *autocorrelation function* of the observable F . It is shown in Appendix D.2 that the following relations then hold :

$$E[\widetilde{F_1 F_2}] (\xi_1, \xi_2) = E[\widehat{F}(\xi_1)\widehat{F}(\xi_2)] = 2\pi \delta(\xi_1 + \xi_2) \widehat{\mathcal{F}}(\xi_2), \quad (5.26)$$

where δ denotes Dirac’s function and $E[\widetilde{F_1 F_2}]$ the double (z_1, z_2) –Fourier transform of the function $E[F(z_1)F(z_2)]$; the Fourier transform $\widehat{\mathcal{F}}$ of \mathcal{F} here is the *power spectrum* of the observable F .

We shall make the hypothesis of statistical homogeneity and isotropy of the distribution of the Paris constant within the crack plane. Also, absence of correlations between the fluctuations of the Paris constant on one front and the other will be postulated; the underlying assumption is that the correlation distance d of these fluctuations is much smaller than the mean half-width a of the ligament. These elements imply that, for positive values of x_1 and x_2 ,

$$\begin{cases} E[\delta c(z_1, x_1)\delta c(z_2, x_2)] \equiv E[\delta c(z_1, -x_1)\delta c(z_2, -x_2)] \equiv \mathcal{C}(z_2 - z_1, x_2 - x_1) \\ E[\delta c(z_1, x_1)\delta c(z_2, -x_2)] \approx 0. \end{cases} \quad (5.27)$$

The function $\mathcal{C}(z, x)$ in equation (5.27)₁ depends only on the distance $(z^2 + x^2)^{1/2}$, which implies in particular that it is even with respect to its first argument. It decreases down to zero over some distance of the order of d .

The hypotheses made on the distribution of the Paris constant imply that the resulting perturbations of the crack fronts must be statistically invariant in the direction z and statistically symmetric with respect to the Oz axis. This means that

$$\begin{cases} E[\delta^+(z_1, a)\delta^+(z_2, a)] \equiv E[\delta^-(z_1, a)\delta^-(z_2, a)] \equiv \Delta^{++}(z_2 - z_1, a) \\ E[\delta^+(z_1, a)\delta^-(z_2, a)] \equiv \Delta^{+-}(z_2 - z_1, a) \end{cases} \quad (5.28)$$

where the functions Δ^{++} and Δ^{+-} are even with respect to their first argument.

It will be helpful to consider the quantities

$$\begin{cases} \mathcal{E}^+(z_2 - z_1, a) \equiv E\left[(\delta^+ + \delta^-)(z_1, a)(\delta^+ + \delta^-)(z_2, a)\right] \\ \mathcal{E}^-(z_2 - z_1, a) \equiv E\left[(\delta^+ - \delta^-)(z_1, a)(\delta^+ - \delta^-)(z_2, a)\right]. \end{cases} \quad (5.29)$$

Expanding these expressions using the definitions (5.28) of Δ^{++} and Δ^{+-} , one gets

$$\begin{aligned} \begin{cases} \mathcal{E}^+(z, a) = 2(\Delta^{++} + \Delta^{+-})(z, a) \\ \mathcal{E}^-(z, a) = 2(\Delta^{++} - \Delta^{+-})(z, a) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \Delta^{++}(z, a) = \frac{1}{4}(\mathcal{E}^+ + \mathcal{E}^-)(z, a) \\ \Delta^{+-}(z, a) = \frac{1}{4}(\mathcal{E}^+ - \mathcal{E}^-)(z, a) \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \widehat{\Delta}^{++}(\xi, a) = \frac{1}{4}(\widehat{\mathcal{E}}^+ + \widehat{\mathcal{E}}^-)(\xi, a) \\ \widehat{\Delta}^{+-}(\xi, a) = \frac{1}{4}(\widehat{\mathcal{E}}^+ - \widehat{\mathcal{E}}^-)(\xi, a). \end{cases} \end{aligned} \quad (5.30)$$

5.5.2 General expressions of $\widehat{\mathcal{E}}^+$ and $\widehat{\mathcal{E}}^-$

General expressions of the functions $\widehat{\mathcal{E}}^+(\xi, a)$ and $\widehat{\mathcal{E}}^-(\xi, a)$ are needed first. To derive that of $\widehat{\mathcal{E}}^+(\xi, a)$, use the definition (D.2) of the two-point correlation function and the solution (5.23)₁ of the differential equation (5.22)₁ to get

$$\begin{aligned} E \left[\left(\widehat{\delta}^+ + \widehat{\delta}^- \right) (\xi_1, a) \left(\widehat{\delta}^+ + \widehat{\delta}^- \right) (\xi_2, a) \right] &= \int_a^{a_0} \int_a^{a_0} [\psi(\xi_1 a, \xi_1 a_1)]^N [\psi(\xi_2 a, \xi_2 a_2)]^N \times \\ &\quad \times E \left[\left(\widehat{\delta}c(\xi_1, a_1) + \widehat{\delta}c(\xi_1, -a_1) \right) \left(\widehat{\delta}c(\xi_2, a_2) + \widehat{\delta}c(\xi_2, -a_2) \right) \right] da_1 da_2. \end{aligned}$$

Use of equations (5.26) and (5.27) and the definition (5.29)₁ of $\mathcal{E}^+(z, a)$ then yields

$$\begin{aligned} 2\pi \delta(\xi_1 + \xi_2) \widehat{\mathcal{E}}^+(\xi_2, a) &= 2 \int_a^{a_0} \int_a^{a_0} [\psi(\xi_1 a, \xi_1 a_1)]^N [\psi(\xi_2 a, \xi_2 a_2)]^N \times \\ &\quad \times 2\pi \delta(\xi_1 + \xi_2) \widehat{\mathcal{C}}(\xi_2, a_2 - a_1) da_1 da_2 \\ &= 4\pi \delta(\xi_1 + \xi_2) \int_a^{a_0} \int_a^{a_0} [\psi(-\xi_2 a, -\xi_2 a_1)]^N [\psi(\xi_2 a, \xi_2 a_2)]^N \widehat{\mathcal{C}}(\xi_2, a_2 - a_1) da_1 da_2 \end{aligned}$$

so that

$$\widehat{\mathcal{E}}^+(\xi, a) = 2 \int_a^{a_0} \int_a^{a_0} [\psi(\xi a, \xi a_1)]^N [\psi(\xi a, \xi a_2)]^N \widehat{\mathcal{C}}(\xi, a_2 - a_1) da_1 da_2 \quad (5.31)$$

where account has been taken of the relation $\psi(-q_1, -q_2) = \psi(q_1, q_2)$ resulting from the definition (5.24)₁ of the function ψ plus the fact that the function $\widehat{f} + \widehat{g}$ is even.

Equation (5.31) has been obtained without any approximation, but may be simplified using the properties of the function \mathcal{C} . First, use of the change of variables defined by

$$r \equiv \frac{a_1 + a_2}{2} \quad ; \quad s \equiv a_2 - a_1 \quad (5.32)$$

yields

$$\widehat{\mathcal{E}}^+(\xi, a) = 2 \int_a^{a_0} \left\{ \int_{-s_m(r)}^{s_m(r)} [\psi(\xi a, \xi(r - s/2))]^N [\psi(\xi a, \xi(r + s/2))]^N \widehat{\mathcal{C}}(\xi, s) ds \right\} dr$$

where $-s_m(r)$ and $s_m(r)$ denote the minimum and maximum values of s allowed by the inequalities $a \leq a_1 \equiv r - s/2 \leq a_0$, $a \leq a_2 \equiv r + s/2 \leq a_0$. Now since $\mathcal{C}(z, x)$ becomes very small when $(z^2 + x^2)^{1/2} \gtrsim d$, $\widehat{\mathcal{C}}(\xi, s)$ takes non-negligible values only when $|s| \lesssim d$. Assuming that $d \ll a$ ($\leq r$), it follows that $|s| \ll r$ then³. It follows that $[\psi(\xi a, \xi(r - s/2))]^N$ and $[\psi(\xi a, \xi(r + s/2))]^N$ may safely be both replaced by $[\psi(\xi a, \xi r)]^N$. Also, when this is done, one

3. In Perrin & Rice (1994)'s terms, there is a phenomenon of *domination of the diagonal in integration over the square* $(a_1, a_2) \in [a, a_0]^2$.

may safely extend the integral from $-s_m(r)$ to $s_m(r)$ to the entire real line. Indeed for almost every r in the interval $[a, a_0]$, $s_m(r)$ is comparable to $a_0 - a$ so that as soon as $a_0 - a \gtrsim d$, the integration interval $[-s_m(r), s_m(r)]$ becomes larger than the interval $[-d, d]$ over which $\widehat{\mathcal{C}}(k, s)$ takes significant values. With these simplifications, the expression of $\widehat{\mathcal{E}}^+(\xi, a)$ becomes

$$\widehat{\mathcal{E}}^+(\xi, a) = 2\widetilde{\mathcal{C}}(\xi, 0) \int_a^{a_0} [\psi(\xi a, \xi r)]^{2N} dr \quad (5.33)$$

where $\widetilde{\mathcal{C}}$ is the double (z, x) -Fourier transform of the function \mathcal{C} .

A similar reasoning leads to an analogous formula for $\widehat{\mathcal{E}}^-(\xi, a)$:

$$\widehat{\mathcal{E}}^-(\xi, a) = 2\widetilde{\mathcal{C}}(\xi, 0) \int_a^{a_0} [\chi(\xi a, \xi r)]^{2N} dr. \quad (5.34)$$

5.5.3 Qualitative analysis of the evolution of the crack front shape

Before deriving the explicit asymptotic behavior of $\widehat{\Delta}^{++}$ and $\widehat{\Delta}^{+-}$ for small ligaments in a specific limiting case, it is useful to qualitatively discuss some general features of the evolution of the Fourier components of the perturbations of the crack fronts, as a function of their wavelength.

A preliminary remark is that Fourier components of all wavelengths will be considered, in spite of the fact that material heterogeneities of small size obviously generate only crack front perturbations of comparable size, and that equations (5.23) predict that all Fourier components of the perturbations must subsequently evolve independently of each other. The justification of this apparent inconsistency lies in the fact that the property of independence of the evolutions of the various Fourier components is only an unrealistic consequence of the linearization made to derive equations (5.23). In reality, nonlinear effects (notably those associated to the influence of the perturbed crack front position upon the local fracture properties) generate couplings between the evolutions of the various Fourier components. Therefore components of small wavelength generated at each instant continuously “feed” those of larger wavelength, so that components of all wavelengths must be present⁴.

The phenomenon of unstable development of perturbations of large wavelength evidenced in Section 5.3 in the case of brittle fracture was observed to in fact hold for all propagation laws ; it thus applies to the Paris law (5.20) considered here. Also, the critical wavelength λ_c given by equation (5.17) decreases in time proportionally to the half-width a of the remaining ligament, whereas the wavelength λ of an arbitrary Fourier component is fixed by definition. Hence there are two possibilities for each Fourier component :

- If λ is initially larger than λ_c , it remains so at all instants, so that the Fourier component considered must always increase.
- If λ is initially smaller than λ_c , it remains so for a certain time, then becomes larger ; the Fourier component considered must then decrease first, but later increase.

Thus all Fourier components ultimately grow ; the larger the initial wavelength, the quicker the growth. The long-term evolution of the crack front is therefore governed by large-scale perturbations, in spite of the fact that as mentioned before, such perturbations are not generated initially but result only from the nonlinear evolution of small-scale ones.

4. And are indeed observed in actual experiments.

5.5.4 Asymptotic behavior of $\widehat{\Delta}^{++}$ and $\widehat{\Delta}^{+-}$ for small ligaments and large wavelengths

In order to get explicit results, we shall now consider the case of small ligaments and large wavelengths, defined by the conditions

$$a \ll a_0 \ll \lambda \equiv 2\pi/|\xi|. \quad (5.35)$$

The first hypothesis, $a \ll a_0$, is natural in the context of the study of coalescence of the cracks. The second, $a_0 \ll \lambda$, means concentrating logically on those components which grow most, according to the discussion just above.

With hypotheses (5.35), the arguments ξa , ξr of the functions ψ and χ in equations (5.33) and (5.34) are small. Asymptotic expressions of $\psi(q_1, q_2)$ and $\chi(q_1, q_2)$ for q_1 and $q_2 \rightarrow 0$ ⁵ are therefore required. These expressions are derived in Appendix D.3 and the results are as follows :

$$\begin{cases} \psi(q_1, q_2) & \sim \sqrt{\frac{q_2}{q_1}} \frac{\ln(|q_2|)}{\ln(|q_1|)} & \text{for } q_1 \text{ and } q_2 \rightarrow 0. \\ \chi(q_1, q_2) & \rightarrow 1 \end{cases} \quad (5.36)$$

Equations (5.33) and (5.36)₁ imply that with hypotheses (5.35),

$$\widehat{\mathcal{E}}^+(\xi, a) \sim 2\widetilde{\mathcal{C}}(\xi, 0) \int_a^{a_0} \left(\frac{r}{a}\right)^N \left[\frac{\ln(|\xi r|)}{\ln(|\xi a|)}\right]^{2N} dr.$$

The lower bound a of the integral here may be replaced by 0 by hypothesis (5.35)₁. Also, the main contribution to the integral comes from the vicinity of the upper bound of a_0 , where the term $\left[\frac{\ln(|\xi r|)}{\ln(|\xi a|)}\right]^{2N}$ varies much less quickly than the term $(\frac{r}{a})^N$. Thus $\left[\frac{\ln(|\xi r|)}{\ln(|\xi a|)}\right]^{2N}$ may be replaced by $\left[\frac{\ln(|\xi a_0|)}{\ln(|\xi a|)}\right]^{2N}$ ⁶. Finally $\widetilde{\mathcal{C}}(\xi, 0)$ may be replaced by $\widetilde{\mathcal{C}}(0, 0)$ since the new hypothesis $\lambda \gg a$, combined with that made from the start, $a \gg d$, implies that $|\xi|$ is much smaller than the typical width $1/d$ of the bell-shaped function $\widetilde{\mathcal{C}}(\xi, 0)$. The expression of $\widehat{\mathcal{E}}^+(\xi, a)$ thus becomes

$$\widehat{\mathcal{E}}^+(\xi, a) \sim \frac{2\widetilde{\mathcal{C}}(0, 0)}{N+1} a_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^N \left[\frac{\ln(|\xi a_0|)}{\ln(|\xi a|)}\right]^{2N} \quad \text{for } a \ll a_0 \ll \lambda. \quad (5.37)$$

A similar reasoning based on equations (5.34) and (5.36)₂ also shows that

$$\widehat{\mathcal{E}}^-(\xi, a) \rightarrow 2\widetilde{\mathcal{C}}(0, 0) a_0 \quad \text{for } a \ll a_0 \ll \lambda. \quad (5.38)$$

Combination of equations (5.30), (5.37) and (5.38) finally yields the following explicit results for the power spectra $\widehat{\Delta}^{++}$ and $\widehat{\Delta}^{+-}$:

$$\widehat{\Delta}^{++}(\xi, a) \sim \widehat{\Delta}^{+-}(\xi, a) \sim \frac{\widetilde{\mathcal{C}}(0, 0)}{2(N+1)} a_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^N \left[\frac{\ln(|\xi a_0|)}{\ln(|\xi a|)}\right]^{2N} \quad \text{for } a \ll a_0 \ll \lambda. \quad (5.39)$$

5. And q_1 and q_2 of identical signs, since $\psi(q_1, q_2)$ and $\chi(q_1, q_2)$ are defined only in this case; see equations (5.24).

6. This expeditious reasoning obviously lacks rigor, but the result can be checked to be rigorously correct by a more elaborate reasoning based on some integration by parts.

5.5.5 Comments

A first comment is that the power spectra $\widehat{\Delta}^{++}(\xi, a)$ and $\widehat{\Delta}^{+-}(\xi, a)$ become asymptotically equal in the limit $a \ll a_0$. The physical implication is that correlations between values of the perturbations of the fronts at distinct points ultimately become as strong when these points lie on different fronts as when they lie on the same one. The explanation of this seemingly paradoxical phenomenon is that the perturbations of the two fronts tend to become symmetrical in time. Indeed it can be observed from equations (5.23), using the asymptotic forms (5.36) of the functions ψ and χ , that the sum of the Fourier components $\widehat{\delta}^+$ and $\widehat{\delta}^-$ ultimately becomes much larger than their difference.

Somewhat analogous observations were made by Favier et al. (2006*b*) in the case of a slit-crack.

Some comments pertaining to the dependence of $\widehat{\Delta}^{++}(\xi, a)$ and $\widehat{\Delta}^{+-}(\xi, a)$ upon ξ must also be made, with special reference to the work of Tanguy et al. (1998) on statistical properties of the evolution of elastic chains subjected to random external forces superposed on long-range interaction forces. One important result of these authors was that for interaction forces varying like the inverse of the α -th power of the distance, the power spectrum varied like $|\xi|^{-1-2\zeta}$, where ζ (the ‘‘roughness exponent’’) was determined numerically as a function of α . Their hypotheses were however different from those made here in several respects :

- A single semi-infinite crack was considered. This geometry did not involve any characteristic length, similar to the width of the remaining ligament in the present study.
- Consideration of a single semi-infinite crack also implied absence of interactions between fronts, analogous to those described by the final term of the right-hand side of equation (5.1).
- The power dependence of the interaction forces upon the distance did not include the possibility of an additional logarithmic term, like in equations (5.3)_{3,4}.

The last two factors have however a minor impact on the results, so that one may concentrate on the first one.

Now it can be seen from equation (5.39) that $\widehat{\Delta}^{++}(\xi, a)$ and $\widehat{\Delta}^{+-}(\xi, a)$ vary only modestly (logarithmically) with ξ ; in particular they go to constant values in the limit $\xi \rightarrow 0$ ($\lambda \equiv 2\pi/|\xi| \rightarrow +\infty$). This result is in line with those of Tanguy et al. (1998). Indeed $\alpha = 1$ by equations (5.3) in the present case, and Tanguy et al. (1998)’s ζ -value is then about $-\frac{1}{2}$, implying $-1 - 2\zeta \approx 0$. This shows that the presence of some characteristic length imposed by the overall geometry is insufficient to invalidate Tanguy et al. (1998)’s results in the present case.

The situation was different in the case of a slit-crack envisaged by Favier et al. (2006*b*). The value of α for such a geometry is 3, and Tanguy et al. (1998)’s analysis then predicts that $\zeta \approx 1$ and $-1 - 2\zeta \approx -3$, in clear contradiction with the value of -1 actually found by Favier et al. (2006*b*). The discrepancy clearly arose from presence of some characteristic distance in the geometry considered.

Some comments on the dependence of $\widehat{\Delta}^{++}(\xi, a)$ and $\widehat{\Delta}^{+-}(\xi, a)$ upon t or a are finally in order. This aspect was also studied by Tanguy et al. (1998), but comparison with their results would be meaningless here, because this dependence is essentially governed in the present case by the decrease of the width of the remaining ligament in time, as will be seen.

Both power spectra $\widehat{\Delta}^{++}(\xi, a)$ and $\widehat{\Delta}^{+-}(\xi, a)$ diverge to infinity in time; the divergence is governed by the factor $(a \ln^2(|\xi a|))^{-N}$ (with $a \rightarrow 0$). This phenomenon obviously arises from the unstable growth of Fourier components of the perturbations of the fronts of sufficiently large

wavelength, evidenced in Section 5.3.

Favier et al. (2006b)'s observations for a slit-crack of half-width a were different. Both $\widehat{\Delta}^{++}(\xi, a)$ and $\widehat{\Delta}^{+-}(\xi, a)$ were found to diverge like a^N (with $a \rightarrow +\infty$) for $\xi = 0$, but go to finite limits for $\xi \neq 0$. This meant that in addition to a general divergence of the perturbations of the fronts, there was a strong effect of preferred selection in time of their Fourier components of large wavelength (small wavenumber), which is absent, or at least much less important, for a pair of coplanar semi-infinite cracks.

This question may be examined in more detail by deriving an estimate of the ‘‘correlation length’’ L of the perturbations of the fronts, *i.e.* of the typical distance beyond which the perturbations at distinct points are no longer correlated. This is done in Appendix D.4 using equations (5.39), and the result is

$$L \sim \frac{2\pi}{C_N} a_0 \left(\ln \frac{a_0}{a} \right)^{2N} \quad \text{for } a \ll a_0 \quad (5.40)$$

where C_N is a constant depending only on N . Thus L increases slowly (logarithmically) in time. In contrast, in the case of a slit-crack, the correlation length was observed to grow proportionally to the half-width a of the crack (Favier et al. 2006b) and therefore much more quickly. The implication was again a much stronger selection in time of Fourier components of the perturbations of the fronts of large wavelength for a slit-crack.

The difference between the two cases may be explained as follows, in reference to the discussion in Section 5.3. In the case of a slit-crack, since the critical wavelength λ_c increases in time (proportionally to the half-width of the crack), all Fourier components of the perturbations of the fronts of finite wavelength λ ultimately have $\lambda < \lambda_c$, and thus must asymptotically decay; therefore the only Fourier components really selected are those of *infinite* wavelength. In contrast, for a pair of coplanar semi-infinite cracks, λ_c decreases (proportionally to the half-width of the ligament) so that all Fourier components ultimately have $\lambda > \lambda_c$ and must asymptotically grow, implying a much less efficient process of selection of large wavelengths.

5.6 Conclusion

This work was devoted to the problem of the evolution in time of the shape of the fronts of a pair of coplanar, semi-infinite cracks propagating in a homogeneous or inhomogeneous brittle material. The relevance of this model cracked geometry lies in the fact that it allows for a theoretical study (apparently the first of its kind) of the final phase of coalescence of coplanar cracks.

In the case of propagation in brittle fracture, governed by Griffith's criterion, the occurrence of multiple bifurcations forbade to define the crack front shapes as unambiguous functions of time. A phenomenon of unstable growth of sinusoidal perturbations of sufficiently large wavelength was also evidenced. This phenomenon was in fact independent of the propagation law.

The use of a Paris-type law, appropriate for fatigue or subcritical crack growth, was then observed to eliminate such difficulties. Statistical information on the shape of the crack fronts was derived in the case of random spatial variations of the Paris constant. Significant differences were observed with respect to the case considered earlier of a slit-crack. The basic explanation of these differences lies in the fact that although the cracked geometry involves a single character-

istic distance in both cases (the half-width of the slit-crack or the ligament remaining between the two semi-infinite cracks), this distance goes to infinity in one case versus zero in the other.

Troisième partie

Application à l'étude de grandes perturbations lors de la coalescence

Introduction

L'objectif central de ce volet numérique réside dans la résolution d'un problème de propagation de fissures planes. On s'attache ici à prédire l'évolution de la forme du front d'un système de deux fissures coplanaires au cours d'une propagation d'envergure conséquente. Il est clair que ce type de problème devient rapidement insoluble analytiquement et donc que l'outil numérique s'impose.

Les outils classiques, à savoir la Méthode des Eléments Finis (*M.E.F.*), utilisés par Xu *et al.* (1994) pour le cas d'une fissure tridimensionnelle en propagation non plane, posent le problème majeur de devoir générer un maillage *3D* du solide considéré à chaque itération, ce qui est très lourd numériquement. Une variante plus récente consiste à coupler la méthode des lignes de niveaux et les éléments finis étendus *XFEM*. On pourra se référer, entre autres exemples, à Sukumar *et al.* (2003), Moes *et al.* (2002) ou Gravouil *et al.* (2002). Dans ce type d'approches, seule la géométrie initiale en l'absence de fissure nécessite alors d'être maillée. L'utilisation de la Méthode des Eléments de Bords (*B.E.M.*) constitue une autre alternative qui nécessite uniquement un maillage *2D* de la surface fissurée et du bord extérieur. Différents exemples sont traités dans le livre de Bonnet (1994). Cette méthode a été implémentée par Fares (1989) et par Xu et Ortiz (1993) mais, à notre connaissance, jamais appliquée au cas de l'interaction entre deux fissures.

Dans la présente étude, on s'intéresse aux effets de changement de forme du front indépendants des effets de bords du solide considéré. Pour cela, on choisira des fissures suffisamment petites et distantes des frontières pour pouvoir supposer le milieu infini et soumis à un chargement lointain. Pour cette raison, les méthodes basées sur les équations intégrales sont plus adaptées : seul le maillage de la surface fissurée est nécessaire.

Sous réserve d'une propagation dans le plan, il suffit alors de mailler le contour *1D* de la fissure. Se basant sur le formalisme de Bueckner-Rice, les travaux de Bower et Ortiz (1990, 1991 et 1993) apportent quelques exemples d'une telle approche en mode I. Plus tard, Lazarus (2003) a développé une variante simplifiée de leur méthode, et ce sans perte significative de précision. Durant ses travaux de thèse, Elie Favier a étendu le code "PlaneCracks" de Lazarus à une situation de mode quelconque. Toutes ces démarches ne font intervenir qu'une fissure, nous allons l'étendre ici à deux fissures pour en étudier la coalescence.

La littérature compte quelques travaux concernant des fissures en interaction mais sans prise en compte de la déformation du front, et uniquement pour des fissures de formes simples, circulaires ou elliptiques. On peut citer les travaux pionniers de Fabrikant (1987), ceux de Kachanov et Laures (1989) et, plus récemment, ceux de Zhan et Wang (2006). Ils nous servent ici pour valider notre approche numérique.

Dans la présente thèse, nous allons étendre le code "PlaneCracks" à l'étude de l'interaction entre

deux fissures initialement circulaires chargées en mode I. Cette partie numérique s'articule en deux chapitres :

Chapitre 6 :

Dans un premier temps, on expose la méthode numérique, implémentée par Lazarus (2003) pour le cas d'une fissure à front fermé au sein d'un milieu infini sollicitée en mode d'ouverture (mode I). Le principe de cette méthode incrémentale consiste à coupler le formalisme de Bueckner-Rice, en particulier les formules donnant les variations au premier ordre du F.I.C. et du noyau (équations (2.17) et (2.21)) à une loi d'avance, à partir d'une configuration initiale pour laquelle les champs K et W sont connus.

Le point de départ était une fissure circulaire chez Lazarus (2003) et une fissure semi-infinie chez Bower & Ortiz (1993), géométries pour lesquelles le noyau est connu de façon analytique. Malheureusement, il n'existe pas de configuration impliquant deux fissures pour laquelle le noyau est explicitement connu. L'astuce ici consiste à partir de deux fissures circulaires suffisamment éloignées pour les supposer indépendantes. La valeur du F.I.C. et du noyau correspond alors à celles bien connues d'une fissure circulaire isolée.

Chapitre 7 :

Dans ce chapitre, nous utilisons le code numérique pour étudier l'interaction entre deux fissures circulaires.

Dans un premier temps, les F.I.C. le long des fronts circulaires sont obtenus en perturbant de façon uniforme deux fissures suffisamment éloignées pour être considérées comme indépendantes. Nous obtenons ainsi des valeurs des F.I.C. conformes à celles obtenues précédemment par Kachanov & Laures (1989) en utilisant une méthode indépendante de superposition. L'accord est très bon pour des écarts entre fissures allant jusqu'à 1/10 de la taille des fissures. Pour des écarts inférieurs, on note une plus grande sensibilité des résultats aux paramètres numériques, mais nous arrivons tout de même, par un calcul soigné, à retrouver leurs résultats pour des distances entre fissures de l'ordre de 10^{-4} du rayon des fissures.

Nous utilisons alors le code pour étudier la propagation de fissures circulaires par une loi d'avance de type Paris ou Griffith en tenant compte du changement de forme des fissures. On constate, en fatigue, que les fissures demeurent quasi-circulaires et que l'on a une légère diminution du nombre de cycles par rapport à une fissure isolée, localisée à des distances très proches entre fissures. Pour le critère de Griffith par contre, les différences entre cas isolé et interaction sont plus importantes. On note premièrement un changement de forme conséquent, les fissures s'allongent l'une vers l'autre. Deuxièmement, le chargement à rupture chute alors de façon drastique.

Chapitre 6

Principe de la méthode-Implémentation numérique

Ce chapitre reprend la méthodologie utilisée par Lazarus (2003), pour une fissure de contour fermé chargée en mode I et l'adapte au cas d'étude de deux fissures coplanaires de contours fermés.

6.1 Cas d'une fissure fermée en mode I

6.1.1 Formules incrémentales

On considère une fissure plane de contour fermé arbitraire \mathcal{C} , contenue dans le plan $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$ d'un milieu infini soumis à un chargement uniforme de traction à l'infini σ_∞ (cf. 6.1). On note $\tilde{K}(M)$ le F.I.C. au point M du front \mathcal{C} . Afin de séparer les contributions de la géométrie et du chargement, on explicite le F.I.C. de la façon suivante :

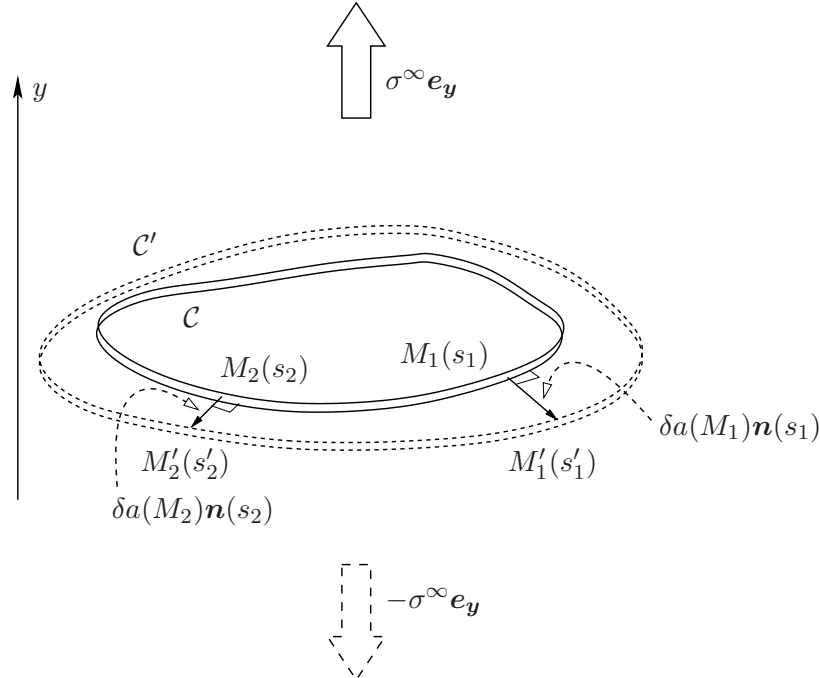


FIGURE 6.1 – Notations.

$$\tilde{K}(M) = \sigma_\infty K(M) \quad (6.1)$$

De part la linéarité du problème, $K(M)$ correspond au F.I.C. pour un chargement unitaire et, de ce fait, dépend uniquement de la géométrie du front de fissure \mathcal{C} . On perturbe très faiblement la géométrie de la fissure dans son plan, la fissure avance alors d'une petite quantité $\delta a(M)$ dans la direction perpendiculaire au front \mathcal{C} . On définit une abscisse curviligne s le long du front \mathcal{C} . Soient M_1 et M_2 deux points distincts du front, d'abscisses respectives s_1 et s_2 , on rappelle les formules de Rice (1989) donnant les variations, au premier ordre en δa , du F.I.C. et du noyau fondamental :

$$\delta K(M_1) = \frac{1}{2\pi} VP \int_{\mathcal{C}} \frac{W(M, M_1)}{D^2(M, M_1)} K(M) [\delta a(M) - \delta_* a(M)] ds(M) \quad (6.2)$$

où $\delta_*a(M)$ est une avance particulière de la fissure qui en préserve la forme et telle que $\delta_*a(M_1) = \delta a(M_1)$

$$\delta W(M_1, M_2) = \frac{D^2(M_1, M_2)}{2\pi} VP \int_{\mathcal{C}} \frac{W(M_1, M)W(M; M_2)}{D^2(M_1; M)D^2(M; M_2)} [\delta a(M) - \delta_{**}a(M)] ds(M) \quad (6.3)$$

où $\delta_{**}a(M)$ est aussi une avance particulière de la fissure qui en préserve la forme et telle que $\delta_{**}a(M_1) = \delta a(M_1)$ et $\delta_{**}a(M_2) = \delta a(M_2)$. On peut facilement montrer qu'il est toujours possible de définir de manière unique de telles transformations, en combinant translations, rotations et homothéties. Il vient :

$$\delta_*a(M) = \delta a(M_1)\mathbf{n}(M_1) \cdot \mathbf{n}(M) = \Re(z'_1 - z_1)\Re(z_n) - \Im(z'_1 - z_1)\Im(z_n)$$

et

$$\delta_{**}a(M) = \frac{1}{2} \left(\overline{(z' - z)}z_n + (z' - z)\bar{z}_n \right)$$

avec

$$z' = \frac{z'_1(z_2 - z) + z'_2(z - z_1)}{z_2 - z_1}$$

où z, z_1, z_2 sont les affixes complexes des points M, M_1, M_2 ; z'_1, z'_2 les affixes des points $M_1 + \delta a(M_1)\mathbf{n}(M_1)$ et $M_2 + \delta a(M_2)\mathbf{n}(M_2)$; z_n l'affixe du vecteur normal au front $\mathbf{n}(M)$ et \bar{z} le complexe conjugué de z ; \Re et \Im symbolisent les parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe.

6.1.2 Schéma itératif

Supposons maintenant que le F.I.C. K et le noyau fondamental W soient connus le long d'un front \mathcal{C} donné. Il nous est alors possible de calculer K' et W' sur tout front \mathcal{C}' suffisamment proche de \mathcal{C} , dans la mesure où le terme de droite de chacune des équations (6.2) et (6.3) ne fait intervenir que des quantités dans la configuration actuelle du front \mathcal{C} . On peut donc envisager de réaliser numériquement des itérations successives sur une suite donnée de fronts de fissures suffisamment proches les uns des autres, ce procédé ayant pour objectifs :

- **Étape I** : La détermination du F.I.C. et du noyau le long de n'importe quel contour de fissure à partir d'une configuration de référence pour laquelle ces grandeurs sont connues.
- **Étape II** : L'accès au trajet de propagation d'une fissure arbitraire, en partant d'une fissure initiale issue de l'étape I.

Le noyau de base du schéma numérique est donc composé des deux formules de Bueckner-Rice (6.2) et (6.3) et de la loi d'avance (6.4). On peut formaliser les deux premières équations en introduisant des fonctionnelles comme suit : $\delta K \equiv \mathcal{L}_K[K; W; \delta a]$ pour (2.16), $\delta W \equiv \mathcal{L}_W[W; \delta a]$ pour (2.21). L'algorithme itératif peut alors être schématisé par la figure (6.2)

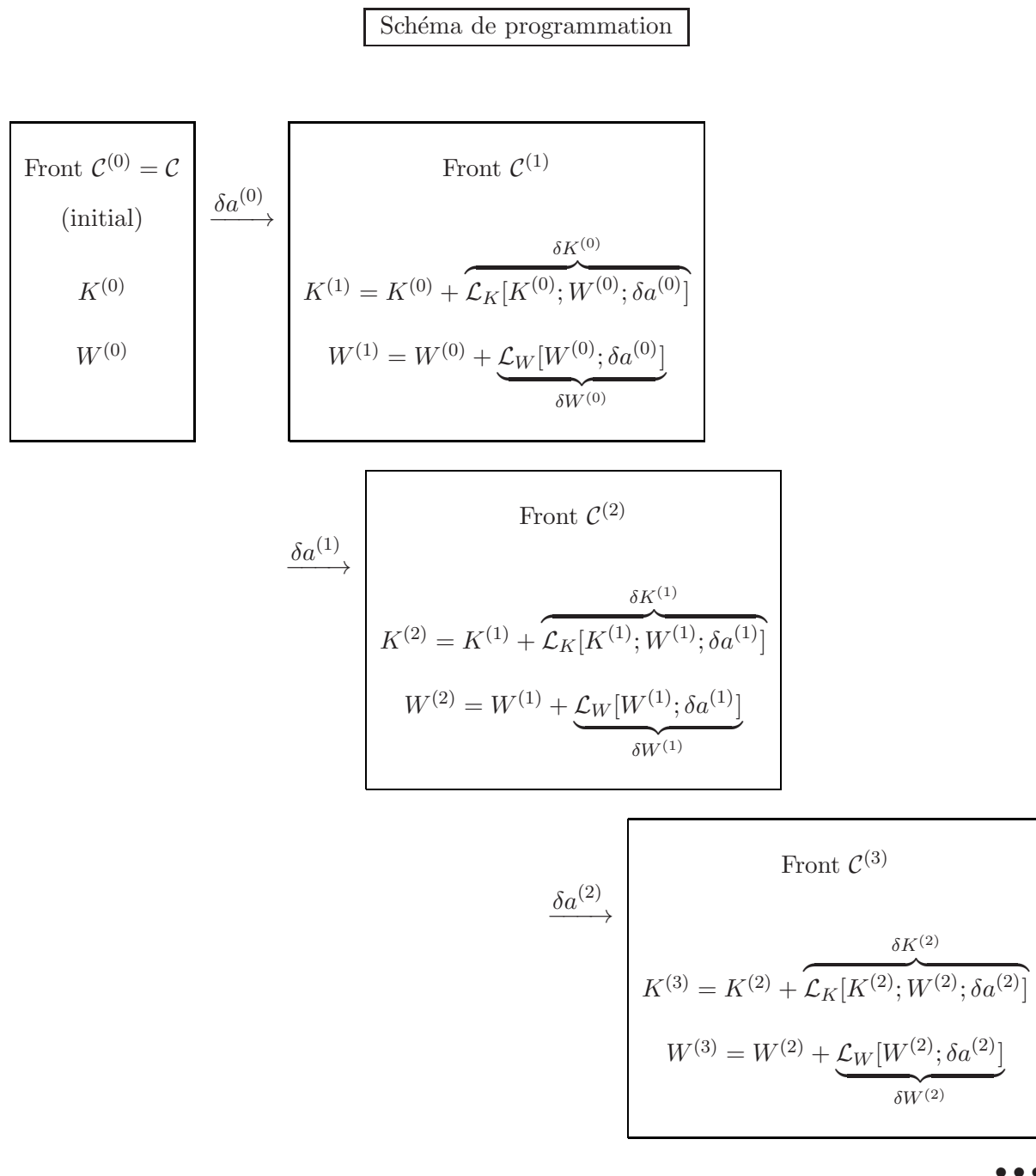


FIGURE 6.2 – Schéma incrémental

6.1.3 Etape I : Détermination du F.I.C. K et du noyau W sur le contour \mathcal{C} d'une fissure quelconque

Le calcul du F.I.C. et du noyau le long du front \mathcal{C} se fait en trois étapes :

- Choisir une configuration initiale de la fissure, de contour noté \mathcal{F} , pour laquelle les fonctions $K_{\mathcal{F}}$ et $W_{\mathcal{F}}$ soient connues et qui soit le plus proche possible de la configuration recherchée \mathcal{C} .
- Construire une suite de configurations intermédiaires \mathcal{C}_k , $k = 0, \dots, n$ suffisamment proches les unes des autres et telles que : $\mathcal{C}_0 = \mathcal{F}$ et $\mathcal{C}_n = \mathcal{C}$.
- Appliquer les équations (6.2) et (6.3) de manière itérative entre le front \mathcal{C}_k et \mathcal{C}_{k+1} , k allant de 0 à $n - 1$ et ainsi obtenir, K_k et W_k pour $k = 1, \dots, n$.

Comme on l'a vu au paragraphe 2.2, les configurations de référence, configurations pour lesquelles le F.I.C. et le noyau sont connus, sont peu nombreuses, à savoir la fissure circulaire, la fissure en forme de fente infinie et la fissure semi-infinie.

6.1.4 Etape II : Etude du trajet de propagation d'une fissure quelconque

6.1.4.1 Cas général

Une fois l'étape précédente achevée, il est possible d'étudier la propagation de la fissure de contour \mathcal{C} . En vue de l'implémentation numérique de la méthode, la propagation est faite par étapes successives à chaque fois que le maximum de l'avancée de fissure atteint une petite distance δa_{max} donnée. On note $\delta a(M)$ l'avance normale d'un point M du front initial \mathcal{C} au cours d'une étape numérique.

En faisant l'hypothèse que la propagation est régie par le F.I.C., on formalise l'expression de l'avancée comme suit :

$$\delta a(M) = \delta a_{max} \mathcal{L}_M[K(M'), M' \in \mathcal{C}] \quad \text{avec} \quad \mathcal{L}_M[K(M'), M' \in \mathcal{C}] \leq 1 \quad (6.4)$$

Les quantités d'intérêt étant connues le long de \mathcal{C} , on applique alors la loi d'avance 6.4 et on actualise la position du front. Il convient ensuite d'utiliser les équations (6.2) et (6.3) pour connaître les valeurs du F.I.C. et du noyau sur le nouveau front. On réitère ce procédé autant de fois qu'il est nécessaire.

6.1.4.2 Loi d'avance en fatigue

Le corps, présentant une fissure de front \mathcal{C} , est maintenant soumis à un chargement cyclique d'amplitude $\Delta\sigma_{\infty}$ uniforme à l'infini. En appliquant la loi de Paris, le taux d'avance de la fissure en un point M du front s'écrit :

$$\frac{da(M)}{dN_c} = C(M) [\Delta\tilde{K}(M)]^{\beta(M)} \quad (6.5)$$

avec :

- N_c le nombre de cycles de chargement
- $C(M)$ et $\beta(M)$ les paramètres de la loi de Paris (dépendant du matériau éventuellement non uniforme)
- $\Delta\tilde{K}(M)$ l'amplitude du F.I.C au point M considéré

De l'équation (6.1), on déduit que :

$$\Delta \tilde{K}(M) = \Delta \sigma_\infty K(M) \quad (6.6)$$

On fait maintenant l'hypothèse qu'au cours de la phase d'avancée $\delta a(M)$ définie précédemment, le F.I.C. $K(M)$ peut être considéré constant. Il est alors possible d'intégrer l'équation (6.5) en y injectant (6.6), ce qui conduit à :

$$\delta a(M) = N_c C(M) \Delta \sigma_\infty^{\beta(M)} K(M)^{\beta(M)} \quad (6.7)$$

où N_c est le nombre de cycles nécessaires pour obtenir : $\max_{M \in \mathcal{C}} \delta a(M) = \delta a_{max}$. On obtient donc :

$$N_c = \frac{\delta a_{max}}{\max_{M \in \mathcal{C}} [C(M) \Delta \sigma_\infty^{\beta(M)} K(M)^{\beta(M)}]} \quad (6.8)$$

On peut maintenant expliciter la fonctionnelle de l'équation (6.4) :

$$\mathcal{L}_M[K_C(M'), M' \in \mathcal{C}] = \frac{[C(M) \Delta \sigma_\infty^{\beta(M)} K_C(M)^{\beta(M)}]}{\max_{M' \in \mathcal{C}} [C(M') \Delta \sigma_\infty^{\beta(M')} K(M')^{\beta(M')}]} \quad (6.9)$$

Dans le cas particulier d'un matériau de constantes de Paris uniformes, à savoir $C(M) = C = Cte$ et $\beta(M) = \beta = Cte$, on arrive à la forme simplifiée suivante :

$$\mathcal{L}_M[K(M'), M' \in \mathcal{C}] = \left(\frac{K(M)}{K_{max}} \right)^\beta \quad (6.10)$$

avec : $K_{max} = \max_{M' \in \mathcal{C}} K(M')$

6.1.4.3 Loi d'avance à seuil

En rupture brutale, la loi de propagation est donnée par le critère d'Irwin comme nous l'avons vu dans le paragraphe 1.2 :

$$\begin{cases} \delta a(M) = 0 & \text{si } \tilde{K}(M) < K_c \\ \delta a(M) \geq 0 & \text{si } \tilde{K}(M) = K_c \end{cases} \quad (6.11)$$

La fissure est supposée se propager de manière quasistatique sous un chargement à l'infini σ_∞ variant de telle sorte qu'à chaque instant on ait : $\max_{M \in \mathcal{C}} \frac{K(M)}{K_c(M)} = 1$. Cette condition garantit que $K(M) \leq K_c$ pour tout point M du front et qu'il y a toujours une zone active du front, i.e. une zone se propageant. Du fait de l'équation (6.1), le chargement vérifie :

$$\sigma_\infty = \frac{1}{\max_{M \in \mathcal{C}} \frac{K(M)}{K_c(M)}} \quad (6.12)$$

Cette quantité est donc amenée à changer au cours de la propagation. L'accroissement de σ_∞ signifie que l'on doit augmenter le chargement pour que la fissure avance, il y a stabilité de la propagation. En revanche, diminuer σ_∞ signifie que la fissure se propage de manière instable.

Il a été montré au paragraphe 1.2, dans la sous-section traitant de la loi unifiée, que le critère d'Irwin était satisfait par :

$$\delta a(M) = \delta \tau \left(\frac{K(M)}{K_c(M)} \right)^\beta, \quad \beta \rightarrow \infty \quad (6.13)$$

où $\delta \tau$ est l'incrément de temps cinématique relatif à l'avance $\delta a(M)$.

En choisissant le temps incrémental $\delta \tau$ de façon à avoir $\delta a(M) = \delta a_{max}$ implique alors, grâce à l'équation (6.13) :

$$\delta \tau = \frac{\delta a_{max}}{\max_{M \in \mathcal{C}} \frac{K(M)}{K_c(M)}} \quad (6.14)$$

On a donc :

$$\delta a(M) = \delta a_{max} \left(\frac{K(M)}{K_c(M) \max_{M' \in \mathcal{C}} \frac{K(M')}{K_c(M')}} \right)^\beta, \quad \beta \rightarrow \infty \quad (6.15)$$

L'équation (6.15) peut être identifiée à la loi générique (6.4) en posant :

$$\mathcal{L}_M[K(M'), M' \in \mathcal{C}] = \left(\frac{K(M)}{K_c(M) \max_{M' \in \mathcal{C}} \frac{K(M')}{K_c(M')}} \right)^\beta, \quad \beta \rightarrow \infty \quad (6.16)$$

Dans l'hypothèse où la ténacité est uniforme au sein du matériau considéré, la dernière expression se ramène simplement à :

$$\mathcal{L}_M[K(M'), M' \in \mathcal{C}] = \left(\frac{K(M)}{\max_{M' \in \mathcal{C}} K(M')} \right)^\beta, \quad \beta \rightarrow \infty \quad (6.17)$$

On a ainsi réécrit le critère d'Irwin sous la forme d'une loi de type Paris. On a donc une même loi explicite pour considérer le cas de la fatigue et celui de la rupture brutale :

$$\delta a(M) = \delta a_{max} \frac{[f(M)K(M)]^{\alpha(M)}}{\max_{M' \in \mathcal{C}} ([f(M')K(M')]^{\alpha(M)})} \quad (6.18)$$

avec :

- $\alpha(M) = \beta(M)$ et $f(M) = C(M)^{1/\beta(M)} \Delta \sigma_\infty$ en fatigue.
- $\alpha(M) = \beta \gg 1$ et $f(M) = \frac{1}{K_c(M)}$ en rupture fragile.

6.2 Extension au cas de deux fissures coplanaires sollicitées en mode I

6.2.1 Notations

On considère maintenant deux fissures circulaires de contours notés \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 . On note a_1 et a_2 leurs rayons respectifs et b la distance entre les deux centres, comme le montre la figure (6.3). On fait toujours l'hypothèse d'un chargement uniforme à l'infini, ce qui permet d'introduire les facteurs d'intensité adimensionnés K_1 et K_2 relatifs à chaque fissure.

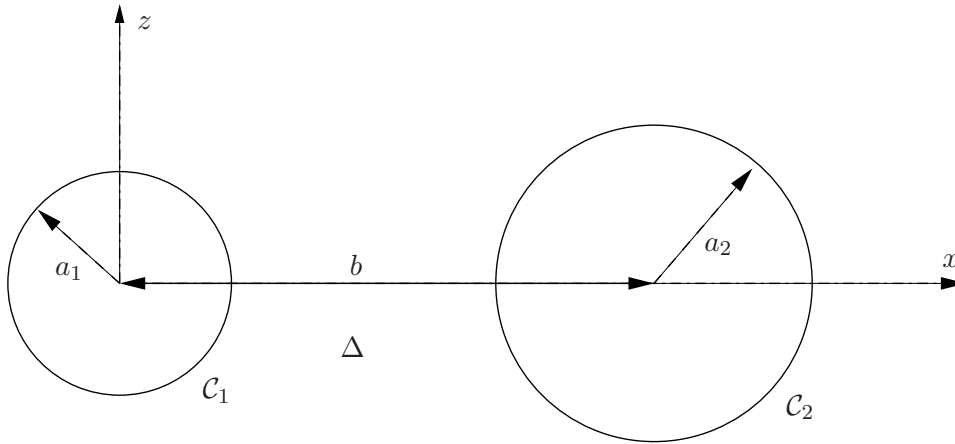


FIGURE 6.3 – Deux fissures circulaires dans le plan $(O; x, z)$

Les formules (6.2) et (6.3) s'étendent au cas de deux fissures, l'intégration sur le contour \mathcal{C} devient la somme d'une intégrale sur \mathcal{C}_1 et d'une intégrale sur \mathcal{C}_2 . A l'instar du cas de deux fissures parallèles en forme de fentes infinies étudiées précédemment, nous allons avoir recours à l'utilisation d'indices afin de distinguer les contributions de chaque front sur les quantités d'intérêt. Dans la suite, nous adopterons les notations suivantes :

- $K_1(M)$: F.I.C. en un point M du front \mathcal{C}_1 .
- $K_2(M)$: F.I.C. en un point M du front \mathcal{C}_2 .
- $W_{11}(M, M')$: noyau traduisant l'influence de l'avancée d'un point M du front \mathcal{C}_1 sur le F.I.C. en un point M' du même front \mathcal{C}_1 .
- $W_{22}(M, M')$: noyau traduisant l'influence de l'avancée d'un point M du front \mathcal{C}_2 sur le F.I.C. en un point M' du même front \mathcal{C}_2 .
- $W_{12}(M, M')$: noyau traduisant l'influence de l'avancée d'un point M du front \mathcal{C}_1 sur le F.I.C. en un point M' du front \mathcal{C}_2 .

En vue de l'implémentation numérique (détaillée en annexe E), différentes distances sont également définies pour distinguer les cas :

- $D_{11}(M, M')$: si M et M' sur tous deux sur le front \mathcal{C}_1 .
- $D_{22}(M, M')$: si M et M' sur tous deux sur le front \mathcal{C}_2 .

– $D_{12}(M, M')$: si M appartient au front \mathcal{C}_1 et M' au front \mathcal{C}_2 .

Nous allons maintenant réécrire les équations de Rice (6.2) et (6.3) adaptées à notre cas d'étude.

6.2.2 1^{ère} formule de Rice : Expression de l'accroissement δK de K

Soit M_i un point du front \mathcal{C}_α , $\alpha = 1, 2$ et M_k un point courant appartenant à $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\alpha \cup \mathcal{C}_\beta$ avec $(\alpha, \beta) = 1, 2$ tels que $\beta \neq \alpha$.

Avec ces notations, la première formule de Rice (6.2) s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta K_\alpha(M_i) &= \frac{1}{2\pi} VP \int_{\mathcal{C}} \frac{W(M_k, M_i)}{D^2(M_k, M_i)} K(M_k) [\delta a(M_k) - \delta_* a(M_k)] ds(M_k) \\ &= \frac{1}{2\pi} VP \int_{\mathcal{C}_\alpha} \frac{W_{\alpha\alpha}(M_i, M_k)}{D_{\alpha\alpha}^2(M_i, M_k)} K_\alpha(M_k) \delta a_\alpha^{(\alpha)}(M_k) ds(M_k) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}_\beta} \frac{W_{\alpha\beta}(M_i, M_k)}{D_{\alpha\beta}^2(M_i, M_k)} K_\beta(M_k) \delta a_\alpha^{(\beta)}(M_k) ds(M_k) \end{aligned} \quad (6.19)$$

avec :

$$\begin{cases} \delta a_\alpha^{(\alpha)}(M_k) = \delta a_\alpha(M_k) - (\delta a_\alpha(M_i) \vec{n}_\alpha(M_i)) \cdot \vec{n}_\alpha(M_k) \\ \delta a_\alpha^{(\beta)}(M_k) = \delta a_\beta(M_k) - (\delta a_\alpha(M_i) \vec{n}_\alpha(M_i)) \cdot \vec{n}_\beta(M_k) \end{cases}$$

Pour alléger les notations, on introduit les fonctions suivantes :

$$\begin{cases} f_\alpha(M_i, M_k) = W_{\alpha\alpha}(M_i, M_k) K_\alpha(M_k) \delta a_\alpha^{(\alpha)}(M_k) \\ g_\beta(M_i, M_k) = W_{\alpha\beta}(M_i, M_k) K_\beta(M_k) \delta a_\alpha^{(\beta)}(M_k) \end{cases} \quad (6.20)$$

$$\delta K_\alpha(M_i) = \frac{1}{2\pi} \left(VP \int_{\mathcal{C}_\alpha} \frac{f_\alpha(M_i, M_k)}{D_{\alpha\alpha}^2(M_i, M_k)} ds(M_k) + \int_{\mathcal{C}_\beta} \frac{g_\beta(M_i, M_k)}{D_{\alpha\beta}^2(M_i, M_k)} ds(M_k) \right) \quad (6.21)$$

6.2.3 2^{ème} formule de Rice : Expression de l'accroissement δW de W

• Soient M_i et M_k appartenant au même front \mathcal{C}_α , $\alpha = 1, 2$ et M un point courant appartenant à $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\alpha \cup \mathcal{C}_\beta$ avec $\beta = 1, 2$ tel que $\beta \neq \alpha$.

$$\begin{aligned} \delta W_{\alpha\alpha}(M_i, M_k) &= \frac{D^2(M_i, M_k)}{2\pi} VP \int_{\mathcal{C}} \frac{W(M_i, M) W(M; M_k)}{D^2(M_i; M) D^2(M; M_k)} [\delta a(M) - \delta_* a(M)] ds(M) \\ &= \frac{D_{\alpha\alpha}^2(M_i, M_k)}{2\pi} VP \int_{\mathcal{C}_\alpha} \frac{W_{\alpha\alpha}(M_i, M) W_{\alpha\alpha}(M_k, M)}{D_{\alpha\alpha}^2(M_i, M) D_{\alpha\alpha}^2(M_k, M)} \delta a_{\alpha\alpha}^{(\alpha)}(M) ds(M) \\ &\quad + \frac{D_{\alpha\alpha}^2(M_i, M_k)}{2\pi} \int_{\mathcal{C}_\beta} \frac{W_{\alpha\beta}(M_i, M) W_{\alpha\beta}(M_k, M)}{D_{\alpha\beta}^2(M_i, M) D_{\alpha\beta}^2(M_k, M)} \delta a_{\alpha\alpha}^{(\beta)}(M) ds(M) \end{aligned} \quad (6.22)$$

• Soient M_i appartenant au même front \mathcal{C}_α , $\alpha = 1, 2$, et M_k sur le front \mathcal{C}_β avec $\beta = 1, 2$ tel

que $\beta \neq \alpha$ et M un point courant appartenant à $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\alpha \cup \mathcal{C}_\beta$.

$$\begin{aligned} \delta W_{\alpha\beta}(M_i, M_k) = & \frac{D_{\alpha\beta}^2(M_i, M_k)}{2\pi} VP \int_{\mathcal{C}_\alpha} \frac{W_{\alpha\alpha}(M_i, M)W_{\alpha\beta}(M, M_k)}{D_{\alpha\alpha}^2(M_i, M)D_{\alpha\beta}^2(M, M_k)} \delta a_{\alpha\beta}^{(\alpha)}(M) ds(M) \\ & + \frac{D_{\alpha\beta}^2(M_i, M_k)}{2\pi} VP \int_{\mathcal{C}_\beta} \frac{W_{\alpha\beta}(M_i, M)W_{\beta\beta}(M_k, M)}{D_{\alpha\beta}^2(M_i, M)D_{\beta\beta}^2(M_k, M)} \delta a_{\alpha\beta}^{(\beta)}(M) ds(M) \end{aligned} \quad (6.23)$$

avec : $\delta a_{\alpha\beta}^{(\gamma)}(M) = \delta a_\gamma(M) - \overrightarrow{V_{i,k}}(M) \cdot \overrightarrow{n}_\gamma(M)$, $\overrightarrow{V_{i,k}}$ étant une transformation géométrique telle que l'on ait : $\delta a_{\alpha\beta}^{(\gamma)}(M_i) = \delta a_{\alpha\beta}^{(\gamma)}(M_k) = 0$.

6.2.4 Schéma itératif

A l'instar du cas d'une fissure unique, le premier travail réside dans la détermination des F.I.C. et du noyau le long de deux fissures circulaires quelconques à partir d'une configuration de référence pour laquelle ces grandeurs sont connues. En pratique, nous connaissons le F.I.C. et le noyau dans le cas d'une fissure circulaire unique de rayon a : $K = 2\sqrt{\frac{a}{\pi}}$ et $W = 1$ (cf. formule 2.22). Forts de ce résultat, nous allons choisir comme configuration de référence deux cercles suffisamment éloignés, qui n'interagissent pas l'un avec l'autre, de telle sorte que l'on puisse écrire :

$$\begin{cases} K_1 = 2\sqrt{\frac{a_1}{\pi}} \\ K_2 = 2\sqrt{\frac{a_2}{\pi}} \\ W_{11} = W_{22} = 1 \\ W_{12} = 0 \end{cases} \quad (6.24)$$

où a_1 est le rayon du front de fissure \mathcal{C}_1 et a_2 celui de \mathcal{C}_2 .

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la méthode incrémentale sur laquelle se base le code "PlaneCracks", développé par Lazarus (2003) pour une fissure en mode I. Puis, nous avons exposé l'implémentation numérique nécessaire à l'extension de ce code au cas de deux fissures. L'objectif premier des calculs numériques est de déterminer les conditions raisonnables sous lesquelles les fissures peuvent être considérées comme décorréélées ou en interaction. Nous nous intéresserons ensuite à deux types d'applications, à savoir :

1. Le calcul de K et W pour deux cercles coplanaires de configuration arbitraire.
Pour cela, nous confronterons nos résultats avec ceux obtenus par Kachanov & Laures (1989). Ces derniers ont mené une étude ayant pour objectif le calcul des F.I.C. de fissures circulaires, arbitrairement orientées et réparties dans le plan, étude prenant en compte les interactions mutuelles entre les fissures.
2. L'étude de la propagation de deux fissures circulaires quelconques.
Des calculs en fatigue et en rupture brutale sont menés, et ce avec prise en compte des effets de changement de forme des fissures.

Chapitre 7

Interaction et propagation de deux fissures circulaires

Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats obtenus pour le calcul des F.I.C. d'un système deux fissures circulaires en interaction. Il n'existe malheureusement pas, à notre connaissance, de solution analytique pour ce problème. Pour des fissures en "faible interaction", c'est-à-dire dont les F.I.C. sont peu différents du cas d'un cercle isolé, les travaux de Fabrikant (1987), Kachanov & Laures (1989) et Chen & Lee (2002) fournissent des résultats numériques, en bon accord les uns avec les autres. C'est pourquoi, dans la section 7.1.1, nous nous basons sur leurs valeurs pour valider notre code et tester l'influence des différents paramètres, à savoir le rayon initial a_0 , le nombre de noeuds N et l'amplitude de l'avancée $\delta a/a$. Pour des fissures très proches l'une de l'autre, les approximations numériques sont plus discutables et peu d'études y ont été consacrées. On peut citer Fabrikant (1987) et Kachanov & Laures (1989), avec lesquels nous comparons nos résultats, dans la section 7.1. Dans la section 7.2, nous introduisons dans notre code une loi d'avance de type Paris, pour simuler la coalescence des fissures en fatigue, puis en rupture fragile.

7.1 Calculs de F.I.C. pour deux cercles identiques

Dans cette section, on considère une géométrie identique à celle de la figure (6.3), avec $a_1 = a_2 = a$. On fait subir aux fissures une loi d'avance uniforme définie comme suit :

$$\frac{\delta a}{a} = \gamma \min\left(a, \frac{\Delta}{2}\right) \quad (7.1)$$

où γ est un paramètre numérique et Δ représente la distance minimale subsistant entre les fissures (*cf.* figure (6.3)). Dans toute cette partie, les figures représentent K_{\max}/K^0 en fonction $\Delta/2a$, où $K_{\max} = \max_{M \in \mathcal{C}} K$ et K^0 est le F.I.C. le long du front d'une fissure isolée qui vaut $2 \sqrt{\frac{a}{\pi}}$.

7.1.1 Validation : Interaction faible

Dans ce paragraphe, on suppose les fissures pas trop proches pour rester en interaction faible afin de comparer nos résultats avec ceux de Fabrikant (1987), Kachanov & Laures (1989) et Chen & Lee (2002), réputés quasi-exacts dans ce cas. En pratique, on supposera $\Delta/2a > 0.3$. Les figures (7.1), (7.3) et (7.4) donnent la valeur de K_{\max}/K^0 pour différents jeux de paramètres a_0 , N et $\delta a/a$ en fonction de la variable adimensionnée $\Delta/2a$. On constate un bon accord entre nos résultats numériques et ceux obtenus dans la littérature. Un point important à souligner ici est que les F.I.C. obtenus diffèrent de moins de 10 % de ceux pour une fissure circulaire isolée. Etudions maintenant de façon plus précise l'influence de chacun des paramètres numériques a_0 , N et $\delta a/a$:

Influence du rayon initial a_0

Sur la figure (7.1), on remarque que les valeurs dépendent d'autant plus sensiblement de a_0 que les fissures sont proches. En comparant avec les valeurs de la littérature, on constate que le rayon initial ne doit pas être pris trop petit, du fait de la nature incrémentale de la méthode, pour éviter l'accumulation d'erreurs numériques ni trop grand, car notre point de départ doit

correspondre à des cercles que l'on peut supposer isolés (*cf.* paragraphe 6.2.4). Typiquement, on doit prendre des valeurs de a_0 comprises entre 0.05 et 0.1, un optimum correspondant à $a_0 = 0.1$.

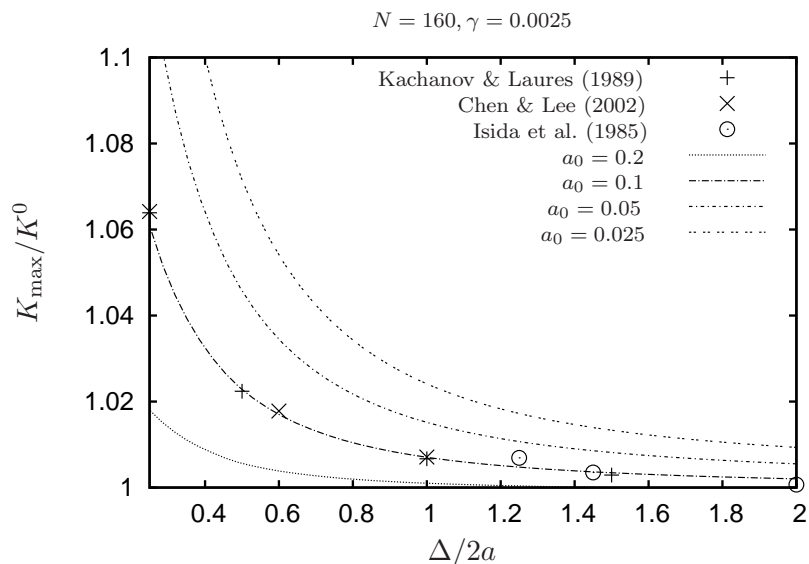


FIGURE 7.1 – Influence du rayon initial

Influence du nombre de noeuds N

On observe une faible dépendance vis-à-vis du nombre de points sur chaque maillage (*cf.* figure (7.3)), sous réserve que N soit suffisamment grand (en pratique $N > 100$). Cependant, si $N < 160$, on constate que le profil de $K(s)$ présente des irrégularités, comme on peut le voir sur la figure (7.2) pour $N = 100$, c'est pourquoi il semble plus judicieux d'utiliser des valeurs $N \geq 160$. Etant donné que le CPU augmente en N^3 , nous choisissons $N = 160$ dans la suite, pour limiter le temps de calcul.

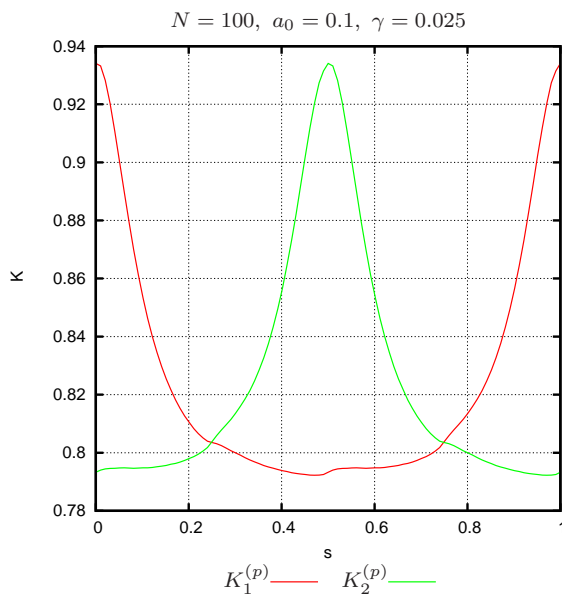
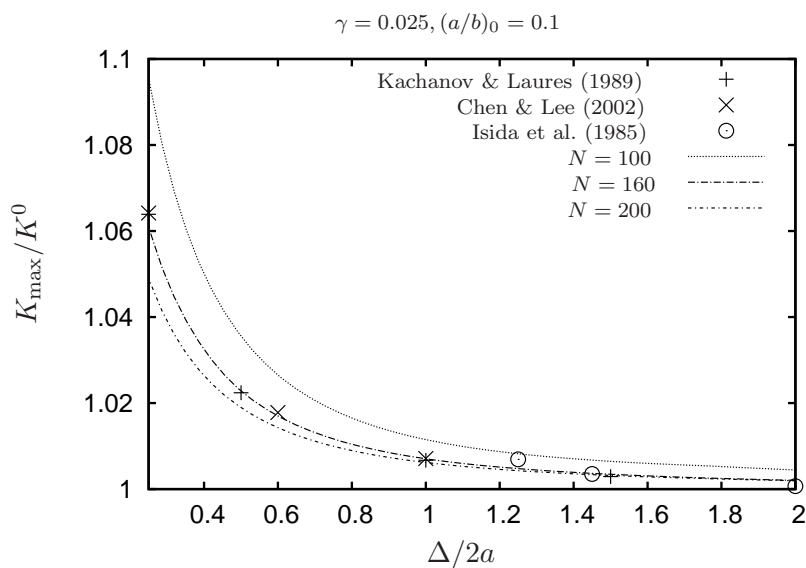
Influence du coefficient d'avancée uniforme γ

Ici encore, de part le caractère incrémental de la méthode, $\delta a/a$, et par conséquent γ , ne doit pas être pris trop petit mais suffisamment pour rester dans le cadre de perturbations au premier ordre (*cf.* 7.4). Typiquement, on choisit des valeurs de $\delta a/a$ dans l'intervalle $[0.025; 0.1]$, une valeur optimale semblant correspondre à $\gamma = 0.025$.

Dans la suite, nous utiliserons donc $a_0 = 0.1$, $N = 160$, $\delta a/a = 0.025$, sauf mention explicite du contraire.

7.1.2 Interaction forte

Dans cette sous-partie, on envisage des géométries comprenant des fissures interagissant de façon plus significative : la variable $\Delta/2a$ évolue ici entre 1 et 10^{-4} . Les figures (7.5), (7.6)

FIGURE 7.2 – Profil des F.I.C. pour $N = 100$ FIGURE 7.3 – Influence du nombre N de points sur chaque maillage

et (7.7) représentent la quantité K_{\max}/K^0 pour différents triplets paramètres $(a_0, N, \delta a/a)$ en fonction de la variable adimensionnée $\Delta/2a$.

On voit que les résultats sont en accord, au moins qualitatif, avec ceux de la littérature. Intéressons nous maintenant à l'influence des différents paramètres en jeu.

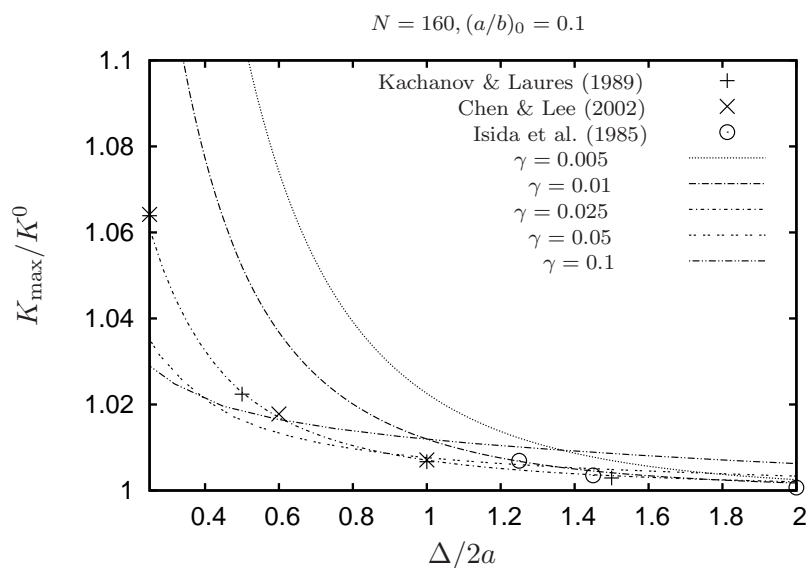
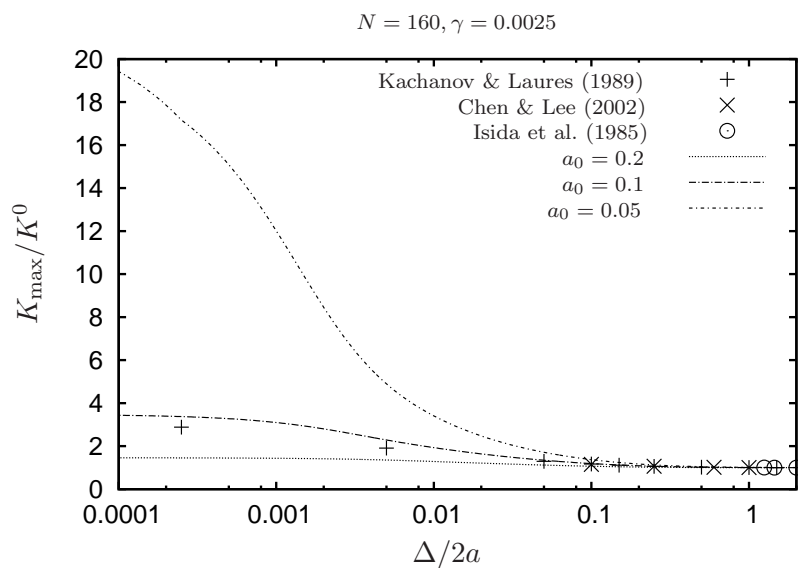


FIGURE 7.4 – Influence du maximum de l'avancée

Influence du rayon initial a_0

On observe ici une forte sensibilité au choix du rayon initial (figure 7.5) : on doit discriminer les trop petites valeurs qui entraînent une augmentation trop importante de l'erreur numérique. Encore une fois, on constate que la valeur de $a_0 = 0.1$ semble donner les résultats les plus satisfaisants.

FIGURE 7.5 – Dépendance au paramètre a_0

Influence du nombre de noeuds N

Encore une fois, on note une relativement faible influence du nombre de noeuds N , à condition que la discrétisation soit suffisamment fine (*cf.* figure 7.6).

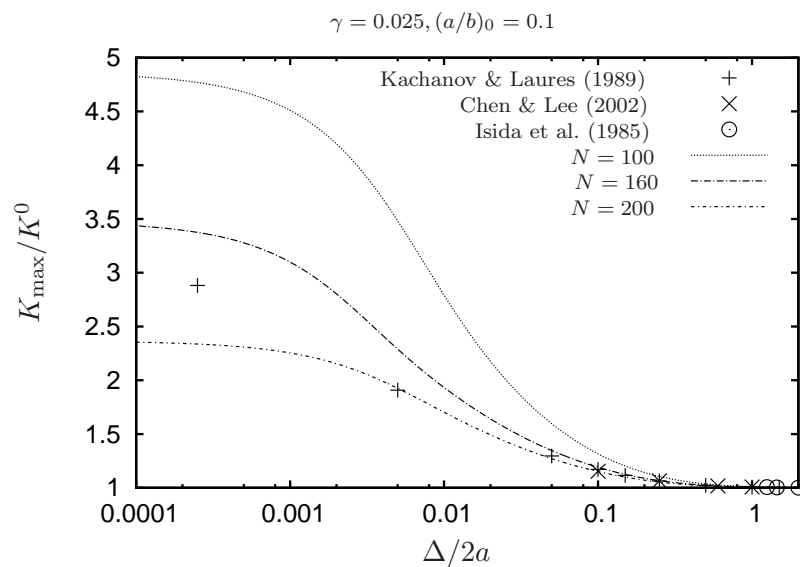


FIGURE 7.6 – Dépendance en N

Influence du coefficient d'avancée uniforme γ

La sensibilité vis-à-vis du paramètre d'avance γ est relativement importante, il semble raisonnable de prendre $\gamma \geq 0.025$ pour éviter l'accumulation d'erreurs. La valeur $\gamma = 0.025$ se confirme comme étant un bon compromis pour retrouver les résultats de Kachanov & Laures (1989), comme on le voit sur la figure (7.7).

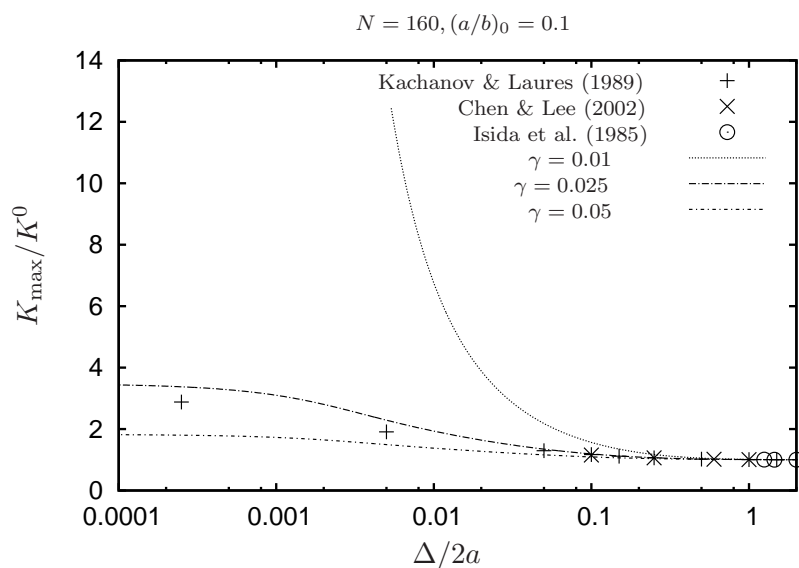
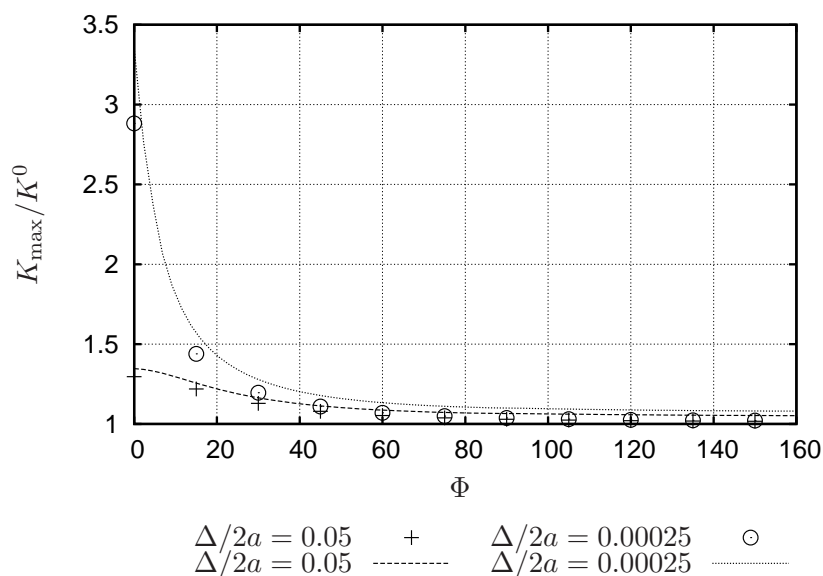


FIGURE 7.7 – Dépendance vis-à-vis du maximum de l’avancée

FIGURE 7.8 – F.I.C. en fonction de l’angle polaire ϕ

La figure (7.8) donne la valeur des F.I.C. le long du front pour deux valeurs de $\Delta/2a$ avec le jeu de paramètres optimum $a_0 = 0.1$, $N = 160$ et $\gamma = 0.025$. Les lignes correspondent à nos simulations et les symboles aux valeurs reportées dans la table 1 de l’article de Kachanov & Laures (1989). On observe que le jeu de paramètre adopté permet une bonne corrélation avec les résultats de Kachanov & Laures (1989) même pour des fissures très proches.

7.2 Propagation en fatigue

Les résultats numériques exposés dans la section (7.1.1) ont montré les capacités de notre code à calculer les F.I.C. pour toute géométrie impliquant deux fissures circulaires dans un même plan. Appliquons maintenant la méthode pour pouvoir prédire le trajet de propagation de deux fissures circulaires initialement décorréliées. On suppose l'avance des fissures gouvernée par la loi de Paris (6.5), avec des propriétés à rupture choisies homogènes $C(M) = C$ et $\beta(M) = \beta$. De plus, comme pour la loi uniforme utilisée précédemment, le paramètre numérique δa_{\max} , défini par l'équation (6.4) est pris proportionnel à une longueur caractéristique du problème, pour s'assurer de la légitimité de l'approche au premier ordre. Il est défini comme suit :

$$\delta a_{\max} = \gamma \min \left(a, \frac{\Delta}{2} \right) \quad (7.2)$$

où γ est un paramètre numérique et Δ représente la distance minimale subsistant entre les fissures.

Dans ce qui suit, nous allons étudier la propagation de deux fissures circulaires de rayon initial $a_1 = a_2 = 0.1$ et dont les centres sont distants de $b = 1$ pour différentes valeurs du coefficient de Paris. Nous allons corréler les positions successives des fronts de fissures au nombre N^* défini comme suit :

$$N^* = C (\Delta \sigma_{\infty})^{\beta} b^{\beta/2-1} N_c \quad (7.3)$$

On rappelle que l'on peut l'obtenir à partir de nos calculs en se référant à la formule (6.8) du paragraphe 6.1.4.2. A partir de ce nombre, on peut remonter, connaissant le chargement $\Delta \sigma_{\infty}$, les constantes matériau β et C , et la distance entre les fissures, au nombre de cycles réels nécessaire pour faire passer la fissure de son état initial à son état final.

Pour une fissure circulaire unique, on peut obtenir le nombre de cycles de façon analytique en intégrant la loi d'avance sachant que $K = 2 \sqrt{\frac{a}{\pi}}$. On obtient ainsi que le nombre de cycles nécessaire pour faire croître la fissure d'un rayon a_0 à un rayon a vaut :

$$N^* = \frac{\left(\frac{b}{a_0}\right)^{\frac{\beta}{2}-1} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\beta}{2}-1}}{\frac{\beta}{2} - 1}$$

Les simulations concernant l'interaction entre deux fissures sont comparées à cette valeur dans la suite.

- **Exposant de Paris $\beta = 3$** : Paramètres numériques : $N = 160$, $\gamma = 0.025$ et $a_0 = 0.1$

La figure (7.9) représente les positions successives des fissures au cours de la propagation, corréliées au nombre de cycles adimensionné N^* . On voit que les cercles ne se déforment quasiment pas au cours du processus et que la propagation s'accélère avec la taille des fissures. Ceci est lié à la croissance des F.I.C. quand la fissure s'agrandit. Il est également à noter que le nombre de cycles réels adimensionné nécessaire à la coalescence, en fonction de l'avancée adimensionnée a_{int}/b , est légèrement inférieur à celui pour une fissure seule (*cf.* figure (7.11)).

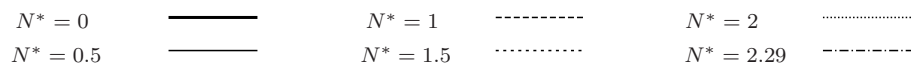
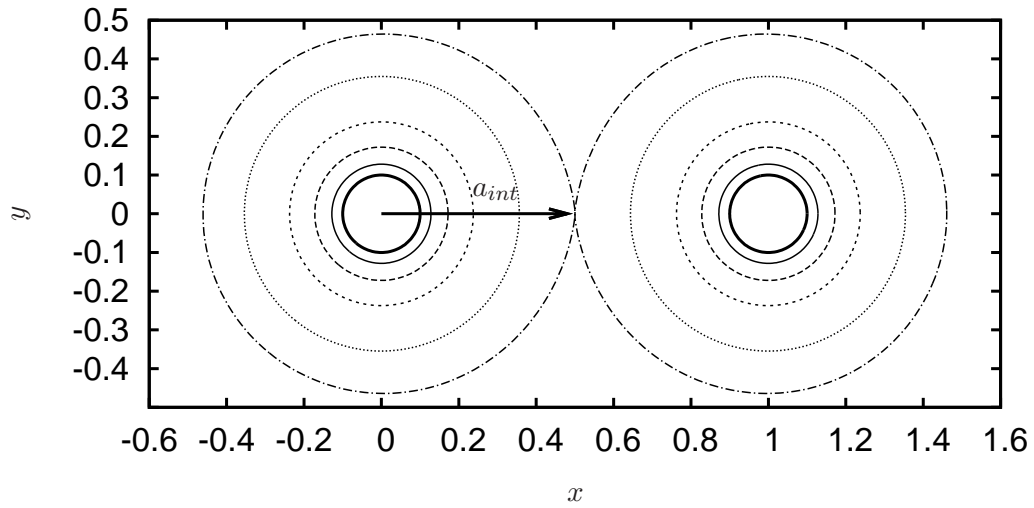


FIGURE 7.9 – Propagation en fatigue avec un exposant de Paris $\beta = 3$

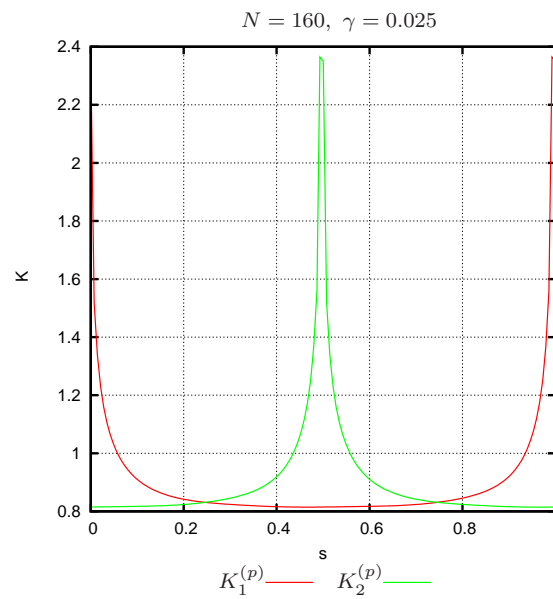


FIGURE 7.10 – Profil des F.I.C. pour $\Delta = 10^{-4}$, avec un exposant $\beta = 3$

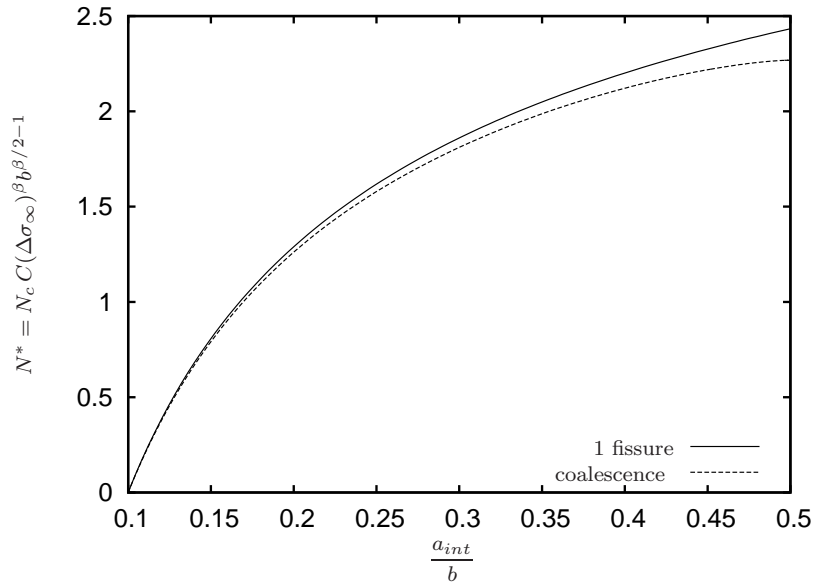


FIGURE 7.11 – Nombre de cycles réels adimensionné en fonction de l’avancée pour $\beta = 3$.

- **Exposant de Paris $\beta = 10$** : Paramètres numériques : $N = 160$, $\gamma = 0.01$ et $a_0 = 0.1$

Sur la figure (7.12), on voit que les fissures ressentent l’influence l’une de l’autre seulement en fin de propagation, et qu’elle se déforme très peu, seulement localement au niveau du point d’impact. Là encore, le nombre de cycles réels en fonction de l’avancée adimensionnée a_{int}/b est très proche de celui pour une fissure unique (*cf.* figure (7.13)).

7.3 Propagation en rupture fragile

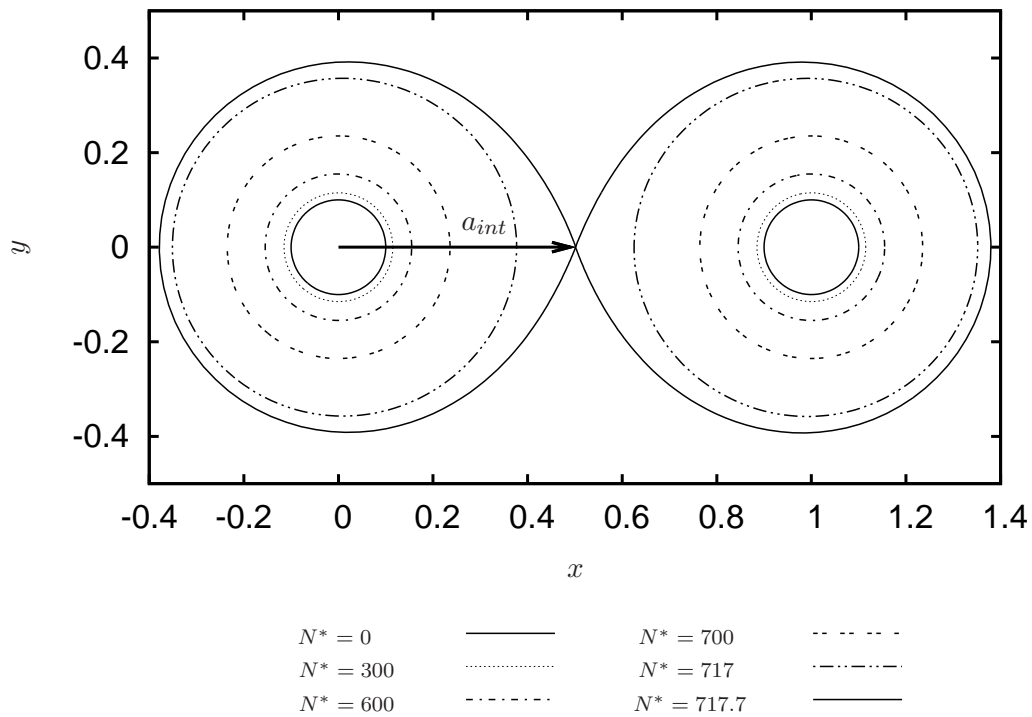
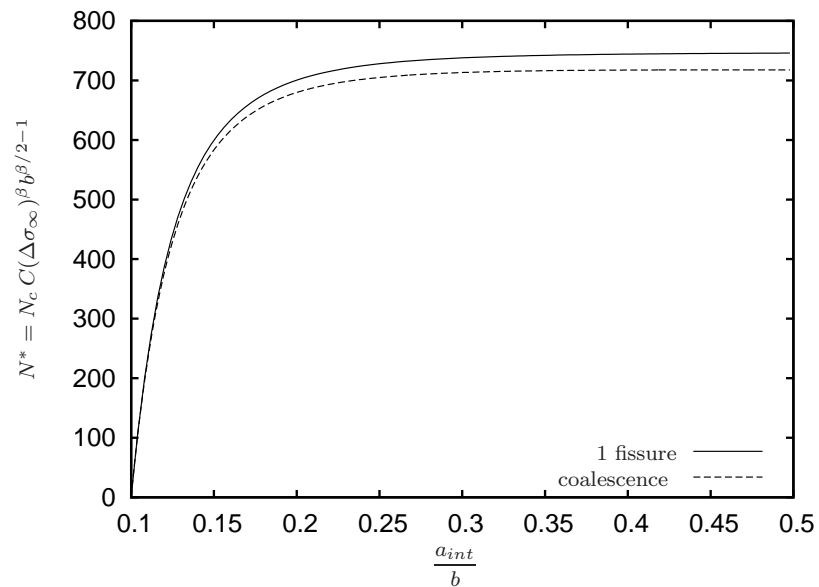
Nous présentons ici les résultats numériques obtenus pour des propagations en rupture brutale. Nous rappelons qu’à des fins numériques la loi de Griffith peut être régularisée par une loi de type Paris à condition de prendre un exposant suffisamment grand. En pratique, $\beta = 30$ et $\beta = 50$ ont été testés. Pour ces deux cas, la déformation des fronts est conséquente et la procédure de remaillage (*cf.* annexe E.3) a dû être utilisée afin de rerépartir les noeuds des maillages dans les zones où les F.I.C. sont les plus élevés.

Nous allons ici corrélérer les positions successives des fronts au chargement réel adimensionné que l’on peut obtenir en utilisant la formule (6.12), c’est-à-dire :

$$\sigma_\infty \frac{\sqrt{b}}{K_c} = \frac{1}{\max K(s)} \quad (7.4)$$

On peut ainsi obtenir le chargement nécessaire à faire passer chaque fissure de son état initial à son état final.

Pour une fissure circulaire unique, on peut calculer analytiquement le chargement par intégration

FIGURE 7.12 – Propagation en fatigue avec un exposant de Paris $\beta = 10$.FIGURE 7.13 – Nombre de cycles réels adimensionné en fonction de l'avancée pour $\beta = 10$.

de la loi d'avance. On obtient alors le chargement nécessaire pour faire croître la fissure d'un rayon a_0 à un rayon a donné par :

$$\sigma_\infty \frac{\sqrt{b}}{K_c} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a/b}} \quad (7.5)$$

On compare nos résultats à cette valeur dans la suite.

- **Exposant de Paris $\beta = 30$** : Paramètres numériques : $N = 160$, $\gamma = 0.001$ et $a_0 = 0.1$

On trace sur la figure (7.14), les positions des fissures à différentes valeurs du chargement critique, explicité dans le paragraphe 6.1.4.3 du chapitre précédent. On voit que, quand les fissures sont éloignées, le seuil est atteint pour l'ensemble des points du front car les F.I.C. y sont quasi-uniformes. Lorsque a/b atteint environ $1/4$, l'interaction entre fissures entraînent un accroissement des F.I.C. localement. Le seuil est alors atteint uniquement en ces points d'où une déformation prononcé du front. A la fin du processus itératif, chaque front est très fortement déformé dans la zone "exposée" à l'autre fissure. Il est à noter que la coalescence n'a pu être atteinte, du fait des valeurs de plus en plus grandes que prennent les F.I.C.; les F.I.C. étant asymptotiquement infinis au voisinage de la "zone d'interaction".

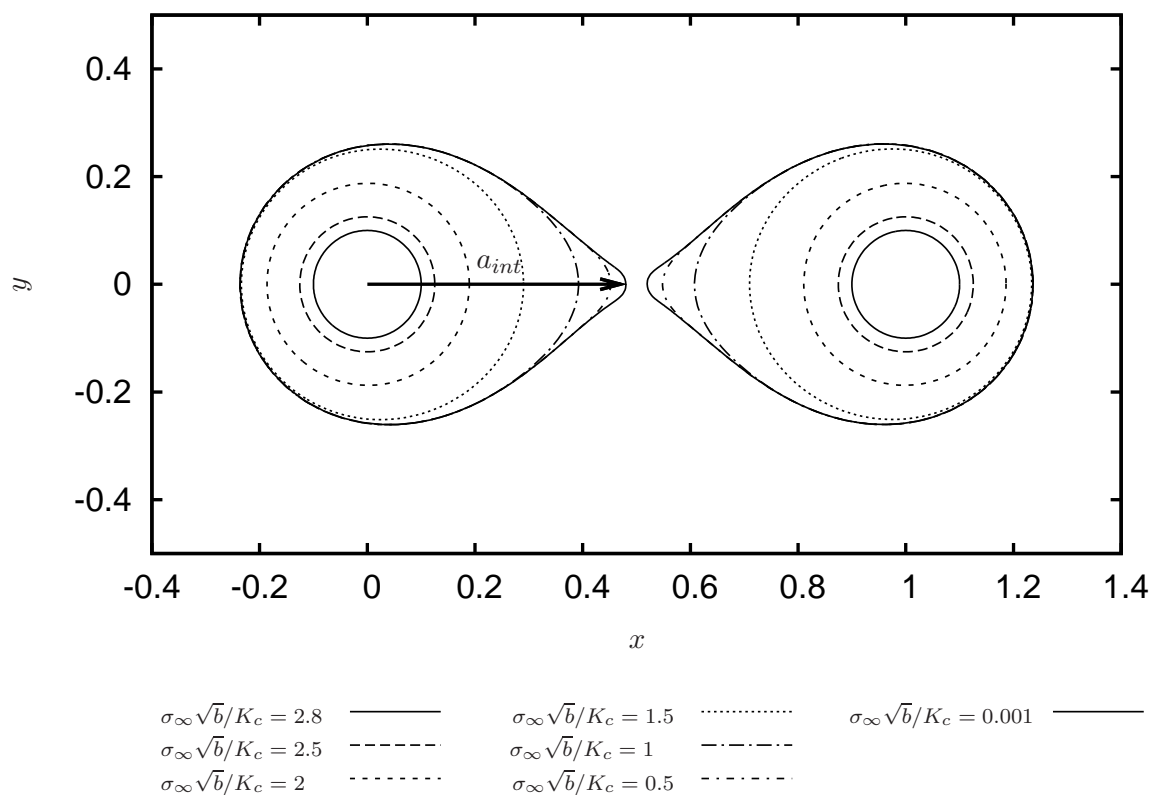
La figure (7.15) représente le chargement réel en fonction de l'avancée, caractérisée par la grandeur sans dimension a_{int}/b pour le cas de la coalescence ainsi que pour la fissure isolée. On remarque que le chargement diminue fortement au cours de la propagation et tend presque à disparaître lorsque les fissures sont très proches. A l'inverse de la fatigue, le comportement est très différent du cas d'une fissure isolée. On a aussi représenté le nombre de cycles réels en fonction de l'avancée (*cf.* figure 7.16); en effet, certaines céramiques travaillent encore en fatigue avec des exposants de l'ordre de 30 (*cf.* Fleck et al. (1994)).

- **Exposant de Paris $\beta = 50$** : Paramètres numériques : $N = 160$, $\gamma = 0.001$ et $a_0 = 0.1$

Les fronts des fissures sont tracées sur la figure (7.17) pour différentes valeurs du chargement réel. A l'instar du cas précédent, les fissures ressentent leur présence mutuelle très rapidement et les fronts sont très fortement déformés à la fin du processus numérique. Là encore, la coalescence n'a pas été atteinte, les F.I.C. devenant infinis.

Le chargement réel est représenté en fonction de l'avance sur la figure (7.18). On observe les mêmes caractéristiques que pour le cas $\beta = 30$, à savoir que lorsque les fissures deviennent suffisamment proches, le chargement tend très vite vers zéro.

On remarque que les résultats sont quasiment identiques pour $\beta = 30$ et $\beta = 50$, on en déduit donc que le choix de prendre $\beta \geq 30$ est suffisant pour simuler la loi de Griffith en utilisant la loi régularisée.

FIGURE 7.14 – Propagation en fatigue avec un exposant de Paris $\beta = 30$.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons appliqué le code à l'étude de l'interaction entre deux fissures circulaires.

Afin de valider le code, nous avons comparé les valeurs des F.I.C., obtenus pour différentes configurations, à celles trouvées dans la littérature. Nous avons obtenu des résultats en bon accord avec ceux de Fabrikant (1987), Kachanov & Laures (1989) et Chen & Lee (2002), et ce même pour des fissures très proches l'une de l'autre. Il est à noter qu'on a observé une sensibilité aux paramètres numériques (nombre de noeuds, rayon initial et paramètre d'avance), d'autant plus grande que les cercles sont proches.

Une fois le code validé, nous avons, dans un premier temps, étudié la propagation en fatigue. On a observé une faible déformation des fissures initialement circulaires et une faible influence de l'interaction sur le nombre de cycles. En revanche, le cas de la rupture fragile a révélé que les fronts étaient très fortement perturbés par la présence de l'autre fissure. On a ainsi obtenu des fissures avec un profil très allongé dans la "zone d'interaction". On a de plus noté une diminution significative du chargement à rupture dès que l'interaction entre fissures se fait ressentir.

Faute de temps, nous nous sommes restreints à l'étude de deux fissures de même taille. Le cas des tailles différentes sera traité ultérieurement. Nous envisageons aussi à l'avenir d'étendre le code à l'interaction entre des fissures de géométries plus complexes (elliptique, rectangulaire par

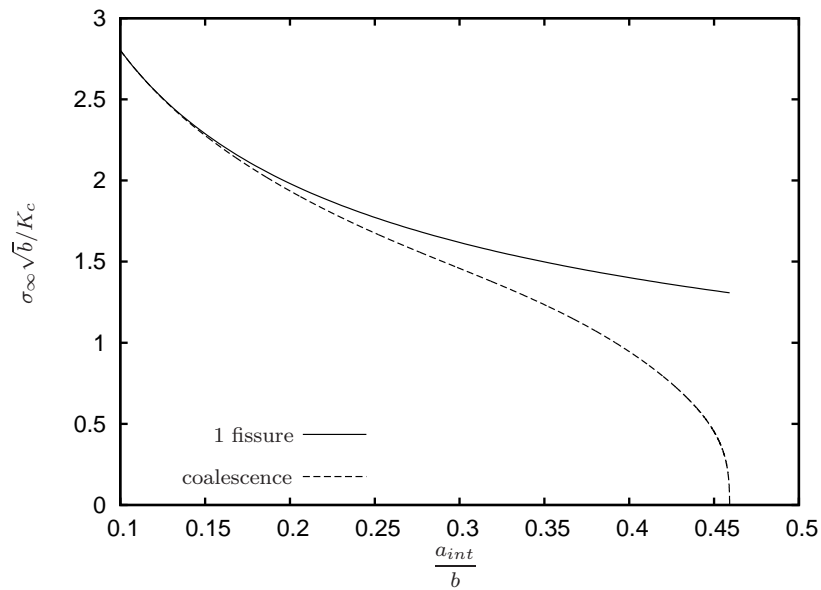


FIGURE 7.15 – Chargement réel adimensionné en fonction de l'avancée pour $\beta = 30$.

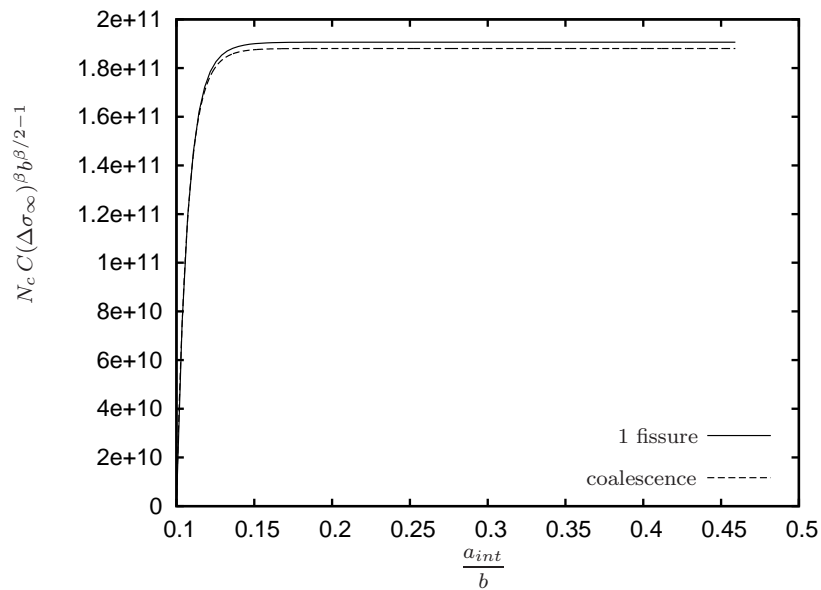
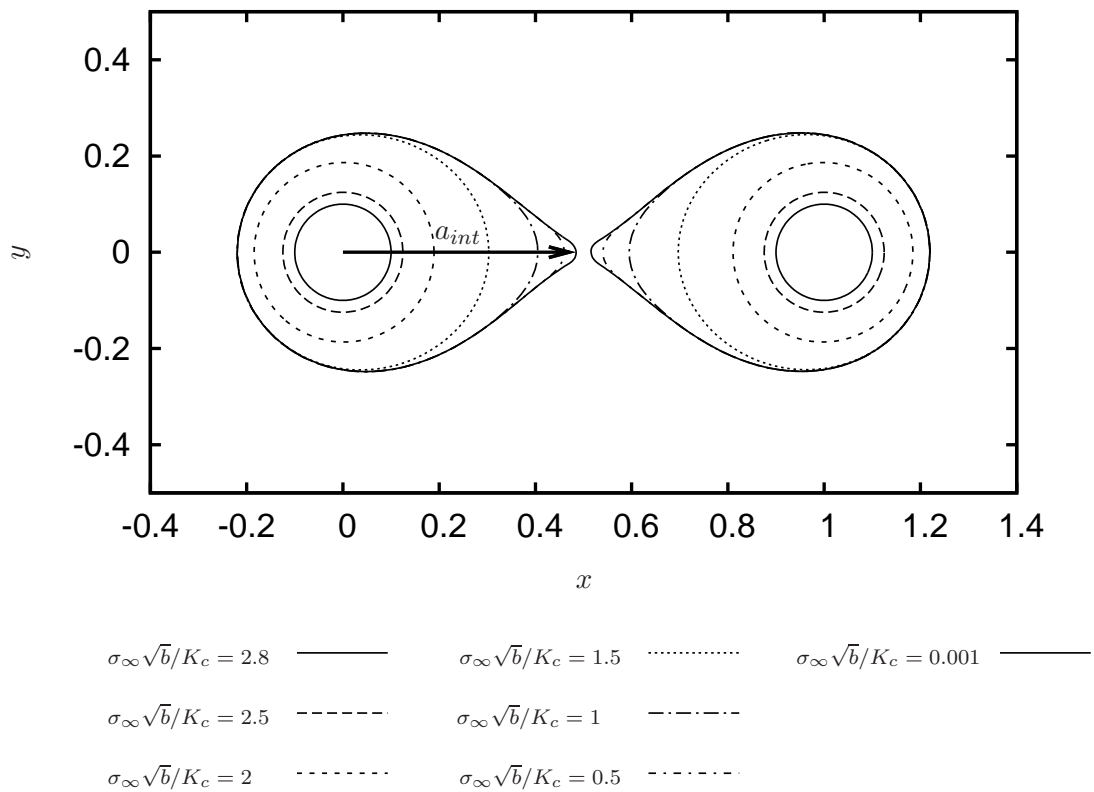
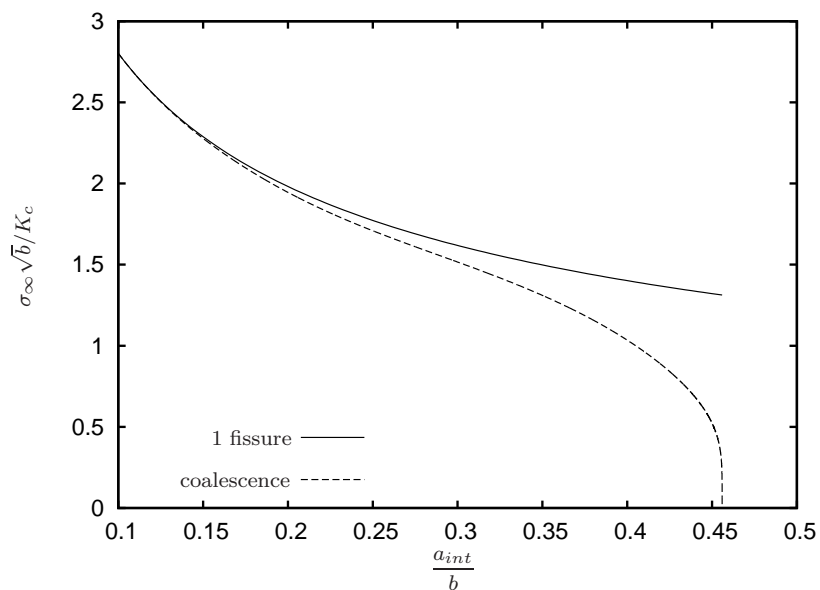


FIGURE 7.16 – Nombre de cycles réels adimensionné en fonction de l'avancée pour $\beta = 30$.

exemple). Il serait également intéressant d'étudier la post-coalescence, la présence d'une zone angulaire étant connue pour faciliter de façon significative la propagation (Lazarus (2003)).

FIGURE 7.17 – Propagation en fatigue avec un exposant de Paris $\beta = 50$.FIGURE 7.18 – Chargement réel adimensionné en fonction de l'avancée pour $\beta = 50$.

Conclusion générale

En mécanique linéaire élastique de la rupture, la détermination des FIC est un préalable à toute prédiction de la propagation de fissures. Celle-ci devient complexe dès que le problème ne peut plus être considéré comme bi-dimensionnel. C'est notamment le cas même pour une fissure coplanaire lorsque le front de fissure se déforme. Ces déformations peuvent être dues à des instabilités de la forme initiale, à l'hétérogénéité du milieu, à l'interaction d'une fissure avec un bord libre ou une autre fissure. Dans la présente thèse, nous nous sommes intéressés aux changements de forme pouvant résulter de l'interaction avec une autre fissure. C'est apparemment la première étude qui a été menée dans ce sens. Vu la complexité du problème nous nous sommes restreints au cas du mode 1.

Pour cela nous avons étendu le champ d'application des approches perturbatives au cas de l'interaction de deux fissures au cours de leur coalescence finale. Rappelons que l'objectif de ces approches est de donner, au premier ordre, l'accroissement des FIC lié à des petites perturbations du front de fissure. Elles ont été développées pour différentes géométries de fissure isolée à la suite des travaux de Rice (1985). Nous les avons étendues ici à deux fissures en forme de fentes infinies et à deux fissures circulaires. Nous les avons appliquées d'une part analytiquement pour étudier de faibles déviations de la forme rectiligne du front et numériquement de façon incrémentale, pour étudier la propagation de deux fissures circulaires initialement éloignées jusqu'à leur coalescence.

Dans le volet analytique, il a été question de la coalescence coplanaire d'un système de deux fissures en forme de fentes infinies. Pour cette étude, un premier travail de détermination des fonctions de poids dans la configuration limite où la distance entre les deux fissures tend vers zéro a dû être effectué. Ce problème était loin d'être trivial du fait de l'apparition d'une couche limite, lorsque la distance caractéristique de la perturbation était de l'ordre de la largeur du ligament restant entre les fissures. Une technique de développements asymptotiques raccordés a dû être utilisée pour pallier la difficulté. Une fois le noyau calculé pour notre géométrie modèle, nous nous sommes intéressés à l'évolution de la forme des fronts d'un ligament de matière au sein d'un matériau fragile de caractéristiques à rupture homogènes ou hétérogènes au cours de la coalescence finale de ces fronts. Pour simuler la rupture brutale, nous avons utilisé une loi de Paris régularisée, le critère de Griffith donnant lieu à de multiples bifurcations. Nous avons alors réalisé une étude statistique de la forme des fronts dans le cas où la constante de Paris est statistiquement distribuée dans l'espace. Le résultat majeur de cette étude est que la distance de corrélation des perturbations des fronts augmente lentement (de façon logarithmique) par rapport au cas de la fissure-bande isolée (cf. Favier et al. (2006b)). Cette étude pourrait être étendue au cas du mode mixte mais sa résolution analytique deviendrait alors nettement plus complexe.

Dans le volet numérique, nous nous sommes attachés à prédire l'évolution de la forme du front d'un système de deux fissures circulaires au cours d'une propagation d'envergure conséquente au sein d'un milieu infini, avec prise en compte des effets de changement de forme des fronts. Pour cela, nous avons étendu le code "PlaneCracks", développé par Lazarus (2003), au cas de deux fissures coplanaires. Nous avons ensuite appliqué ce code à l'étude de la propagation de fissures circulaires en fatigue d'une part, et en rupture fragile d'autre part. Les simulations en fatigue ont montré que les fissures se déformaient très peu et que la diminution du nombre de cycles de chargement, nécessaire pour atteindre la coalescence, par rapport au cas d'une fissure isolée était très légère. En revanche, les résultats en rupture fragile ont révélé un changement de forme important des fissures, celles-ci tendant à s'allonger fortement l'une vers l'autre. De plus, le chargement à rupture décroît très fortement à mesure que les fissures se rapprochent l'une

de l'autre. Forts des bons résultats obtenus avec le code, il nous semble intéressant d'en élargir les applications. Très prochainement, nous allons traiter le cas de deux fissures circulaires de rayons initiaux distincts puis dans un second temps, envisager d'autres géométries initiales : ellipses, rectangles, cardioides... A plus long terme, il serait envisageable d'étendre le code à l'après coalescence et à la fissures multiples. En particulier, il serait intéressant, mais délicat de pouvoir traiter le cas d'une fissure de forme quelconque entourée de petites fissures circulaires, afin de simuler l'interaction d'une fissure avec les microfissures d'endommagement de la "process zone".

Annexes

Annexe A

In-plane perturbation of a system of two coplanar slit-cracks - I : Case of arbitrarily spaced crack fronts

Cette annexe est une copie de l'article de Pindra et al. (2010*b*).

Abstract

In order to lay the grounds for a future study of the deformation of the fronts of coplanar cracks during their final coalescence, we consider the model problem of a system of two coplanar, parallel, identical slit-cracks loaded in mode I in some infinite body. The first, necessary task is to determine the distribution of the stress intensity factors along the crack fronts resulting from some small but otherwise arbitrary in-plane perturbation of these fronts. This is done here in the case where the distances between the various crack fronts are arbitrary and fixed.

The first-order expression of the local variation of the stress intensity factor is provided by a general formula of Rice (1989) in terms of some “fundamental kernel” tied to the mode I crack face weight function. In the specific case considered, this fundamental kernel reduces to six unknown functions; the problem is to determine them. This is done by using another formula of Rice (1989) which provides the variation of the fundamental kernel in a similar way. This second formula is applied to special perturbations of the crack fronts preserving the shape and relative dimensions of the cracks while modifying their absolute size and orientation. The output of this procedure consists of nonlinear integrodifferential equations on the functions looked for, which are transformed into nonlinear ordinary differential equations through Fourier transform in the direction of the crack fronts, and then solved numerically.

Keywords : slit-crack ; perturbation ; stress intensity factor ; weight function ; integrodifferential equation ; Fourier transform ; numerical integration

A.1 Introduction

Many papers have been devoted in the past 25 years to the theoretical study of the deformation of crack fronts during the quasistatic and coplanar propagation of 3D cracks. Two groups may be distinguished among these.

A first group focussed on stability of the crack front shape, possibly (but not necessarily) in the presence of well-defined heterogeneities such as hard obstacles. The situations envisaged included the semi-infinite crack loaded in tension (Rice 1985, Gao & Rice 1989) and in shear (Gao & Rice 1986); the internal (Gao & Rice 1987*b*) and external (Gao & Rice 1987*a*) circular tensile cracks; the internal circular shear mode crack (Gao 1988); the slit-crack loaded in tension (Leblond et al. 1996) and in shear (Lazarus & Leblond 2002*a*); and the semi-infinite interface crack under general loading (Lazarus & Leblond 1998*a*).

A second group used statistical tools to study the effect of random fluctuations of the fracture properties. Schmittbuhl et al. (1995), Ramanathan et al. (1997), Delaplace et al. (1999), Schmittbuhl & Vilotte (1999) and Katzav & Adda-Bedia (2006) focussed on the determination of the “roughness exponent” of the front of a tensile semi-infinite crack. Also, the power spectrum and the autocorrelation function of the deviation of the crack front from straightness were studied for the slit-crack loaded in tension by Favier et al. (2006*b*) and in shear by Pindra et al. (2010*a*), and for the 3D semi-infinite interface crack loaded arbitrarily by Pindra et al. (2008).

All these works basically relied on use of an expression of the variation of the stress intensity factors (SIFs) resulting from a slight but otherwise arbitrary coplanar perturbation of the crack front, named *Rice’s first formula* in the sequel. This formula expressed the variation of the SIFs in the form of an integral over the unperturbed front involving, in addition to the perturbation

of the front, some “Fundamental Kernel” (FK) connected to Bueckner’s 3D crack face weight functions. It was established for planar cracks loaded in mode I in full generality (following consideration of a number of special cases) by Rice (1989)¹, and extended by Leblond et al. (1999) to arbitrarily shaped cracks under arbitrary loadings.

The crack face weight functions for the semi-infinite crack and the internal and external circular cracks have been known explicitly for a long time, and this was what allowed Rice (1985), Gao & Rice (1986), Gao & Rice (1987*b,a*), Gao (1988) and Gao & Rice (1989) to express the perturbed SIFs explicitly for these geometries. The crack face weight functions, or more precisely the FK, for the slit-crack and the semi-infinite interface crack, which were used in the works of Leblond et al. (1996), Lazarus & Leblond (2002*a*) and Lazarus & Leblond (1998*a*), have been known for a shorter time. The FK was derived for the slit-crack loaded in tension by Leblond et al. (1996) and in shear by Lazarus & Leblond (2002*b*), and for the semi-infinite interface crack under arbitrary loading by Lazarus & Leblond (1998*b*) and Piccolroaz et al. (2007). The methods employed in these works, with the exception of the last one, were of “special” rather than “general” nature in Bueckner (1987)’s terminology. This means that rather than providing the full solution of the elasticity problem implied, they concentrated on the sole feature of interest, namely the distribution of the SIFs along the crack front, at the expense of generality but with the advantage of economy and simplicity.

An important restriction is that up to now, the 3D crack face weight functions and FK have been known only for geometries involving a single crack. This has prevented the interesting study of *the deformation of crack fronts during coplanar coalescence of cracks*. The aim of these two joint papers is to lay the grounds for future studies of this kind, by calculating the FK for the simplest possible model 3D geometry involving two cracks : namely *a system of two parallel, coplanar, identical slit-cracks loaded in tension in some infinite body* (see Figure A.1 below). In the present Part I, the distances between the various crack fronts will be considered as given and fixed. In Part II to follow, we shall let the distance between the inner fronts go to zero, or equivalently that between the outer fronts go to infinity, with the future study of coalescence in mind.

The method of derivation of the FK for the cracked geometry considered will make a fundamental use of *Rice’s second formula* derived in the same paper as the first one (Rice 1989). This second formula provided the variation of the FK in mode I, just as the first one provided that of the SIFs. Again, this variation was expressed as an integral over the unperturbed front involving the FK and the perturbation of the front.

Rice’s idea was to apply his two formulae to the numerical calculation of the SIFs and the FK for a planar crack of arbitrary shape. This may be achieved through slight successive modifications of these functions resulting from slight successive deformations of the front, starting from a circular shape for which they are known and ending with the final shape desired. Alternatively, this final shape may not be imposed arbitrarily *a priori*, but determined incrementally through repeated application of some physical propagation criterion depending on the SIFs at each step of the calculation. Both of these ideas were put to practice by Bower & Ortiz (1990, 1993) and Lazarus (2003) in mode I, and Favier et al. (2006*a*) in mode I+II+III using extensions of Rice’s formulae to general loadings.

However the use made here of Rice’s second equation, which is inspired from that made by Leblond et al. (1996) for a single slit-crack, is of a different nature. It consists of applying

1. An alternative derivation was provided independently by Nazarov (1989), but the connection between the FK and the crack face weight functions was not evidenced in this work.

this equation to special perturbations of the crack fronts preserving the shape and relative dimensions of the cracks while modifying their absolute size and orientation. Such perturbations do not change the FK itself, but only its arguments. The procedure thus yields “self-consistent” equations on the FK. These equations are of integrodifferential nature, but because of the natural invariance of the problem in the direction of the crack fronts, they may be transformed into ordinary differential equations (ODEs) through Fourier transform (FT) in this direction. They may then be solved numerically once and for all for every set of relative distances between the various crack fronts.

The paper is organized as follows :

- As a necessary prerequisite, Section A.2 recalls Rice (1989)’s equations for the variations of the SIFs and FK resulting from some arbitrary coplanar perturbation of an arbitrary tensile crack. These equations are then specialized to a system of two coplanar, parallel, identical slit-cracks. The FK is shown to consist of six unknown functions of a single variable, called the *components of the FK* in the sequel.
- In Section A.3, classical previous works are used to provide the solution of the 2D problem of two slightly unequal collinear tensile cracks, which is needed in the sequel.
- Section A.4 uses Rice’s second equation to derive nonlinear integrodifferential equations on the components of the FK. The perturbations envisaged include certain translatory motions of the fronts, plus identical rotations of these fronts around suitably chosen centers.
- From there, Section A.5 derives nonlinear ODEs on the FT of the components of the FK. Complementary conditions are obtained by determining the values of the FT of the components of the FK at the origin from the 2D solution presented in Section A.3, and their asymptotic behavior near infinity from the ODEs themselves.
- Finally Section A.6 presents the numerical procedure used to solve these equations and the results obtained.

A.2 Generalities

A.2.1 Rice’s formulae for the perturbations of the stress intensity factors and the fundamental kernel

Consider a crack with arbitrary smooth front \mathcal{F} lying on a plane of symmetry of some isotropic elastic body. Load this body through some symmetric system of prescribed forces and/or displacements. The crack is then in a situation of pure mode I; let the local SIF be denoted $K(s)$, where s represents some curvilinear abscissa along \mathcal{F} .

The loading being kept constant, shift the crack front \mathcal{F} by a small distance $\delta(s)$, as measured perpendicularly to its original configuration, within the crack plane. The function $\delta(s)$ being assumed to be regular, the resulting change $\delta K(s)$ of the local SIF is given, to first order in the perturbation of the front, by *Rice’s first formula* (Rice 1989, Nazarov 1989) :

$$\delta K(s) = [\delta K(s)]_{\delta(s') \equiv \delta(s), \forall s'} + PV \int_{\mathcal{F}} Z(s, s') K(s') [\delta(s') - \delta(s)] ds'. \quad (\text{A.1})$$

In this expression $[\delta K(s)]_{\delta(s') \equiv \delta(s), \forall s'}$ denotes the value of $\delta K(s)$ for a uniform advance of the crack front equal to $\delta(s)$, and $Z(s, s')$ is the *fundamental kernel* of the cracked geometry con-

sidered, connected to Bueckner's mode I crack face weight function².

The quantity $[\delta K(s)]_{\delta(s') \equiv \delta(s), \forall s'}$ depends on both the geometry and the loading. On the other hand the FK depends on the geometry but has no dependence upon the load, other than on which portions of the body and its boundary have forces versus displacements prescribed. It obeys the following properties :

$$\begin{cases} Z(s, s') \sim \frac{1}{2\pi [D(s, s')]^2} & \text{for } s' \rightarrow s \\ Z(s, s') = Z(s', s) & \text{for all } s, s' \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

where $D(s, s')$ denotes the Cartesian distance between points s and s' . Note that property (A.2)₁ implies that the integral in equation (A.1) makes sense as a Cauchy principal value (PV).

Now assume that the crack front is unperturbed at points s and s' ($\delta(s) = \delta(s') = 0$). Then the change of the FK itself is provided, again to first order in the perturbation of the front, by *Rice's second formula* (Rice 1989) :

$$\delta Z(s, s') = PV \int_{\mathcal{F}} Z(s, s'') Z(s'', s') \delta(s'') ds'' \quad (\text{A.3})$$

Note that there are in fact two principal values in the integral here, at points s and s' .

A.2.2 Application of Rice's formulae to a system of two slit-cracks

Consider, within some infinite isotropic elastic body, a system of two coplanar, parallel, identical slit-cracks loaded in pure mode I through some symmetric system of forces ; for instance (but not necessarily) a uniform stress σ_∞ applied at infinity perpendicularly to the crack plane (Figure A.1). Define a Cartesian frame (O, x, y, z) such that the cracks lie on the plane $y = 0$, the fronts of one of the cracks at the positions $x = a$ (front 1) and $x = b$ (front 2) within this plane, and the fronts of the symmetric crack at $x = -a$ (front $\bar{1}$) and $x = -b$ (front $\bar{2}$). Define also the dimensionless parameters

$$k \equiv \frac{a}{b} \quad ; \quad k' \equiv \sqrt{1 - k^2} \quad (\text{A.4})$$

Note that the limit $k \rightarrow 0$ (equivalently $k' \rightarrow 1$) corresponds to the case of a nearly vanishing ligament between the cracks, whereas the limit $k \rightarrow 1$ (equivalently $k' \rightarrow 0$) corresponds to that of narrow, weakly interacting cracks.

Now shift each front α ($= 1, 2, \bar{1}, \bar{2}$), at the position z , by a small distance $\delta_\alpha(z)$ perpendicularly to itself. Rice's first formula (A.1) for the variation $\delta K_\alpha(z)$ of the local SIF $K_\alpha(z)$ takes the form

$$\begin{aligned} \delta K_\alpha(z) &= [\delta K_\alpha(z)]_{\delta_\beta(z') \equiv \delta_\alpha(z), \forall \beta, \forall z'} \\ &+ \sum_{\beta=1,2,\bar{1},\bar{2}} PV \int_{-\infty}^{+\infty} Z_{\alpha\beta}(z, z') K_\beta(z') [\delta_\beta(z') - \delta_\alpha(z)] dz' \quad (\alpha = 1, 2, \bar{1}, \bar{2}) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

2. The FK was noted $\frac{W(s, s')}{2\pi [D(s, s')]^2}$ in Rice (1989)'s work in order to emphasize its singular behavior for $s' \rightarrow s$; see equation (A.2)₁ below.

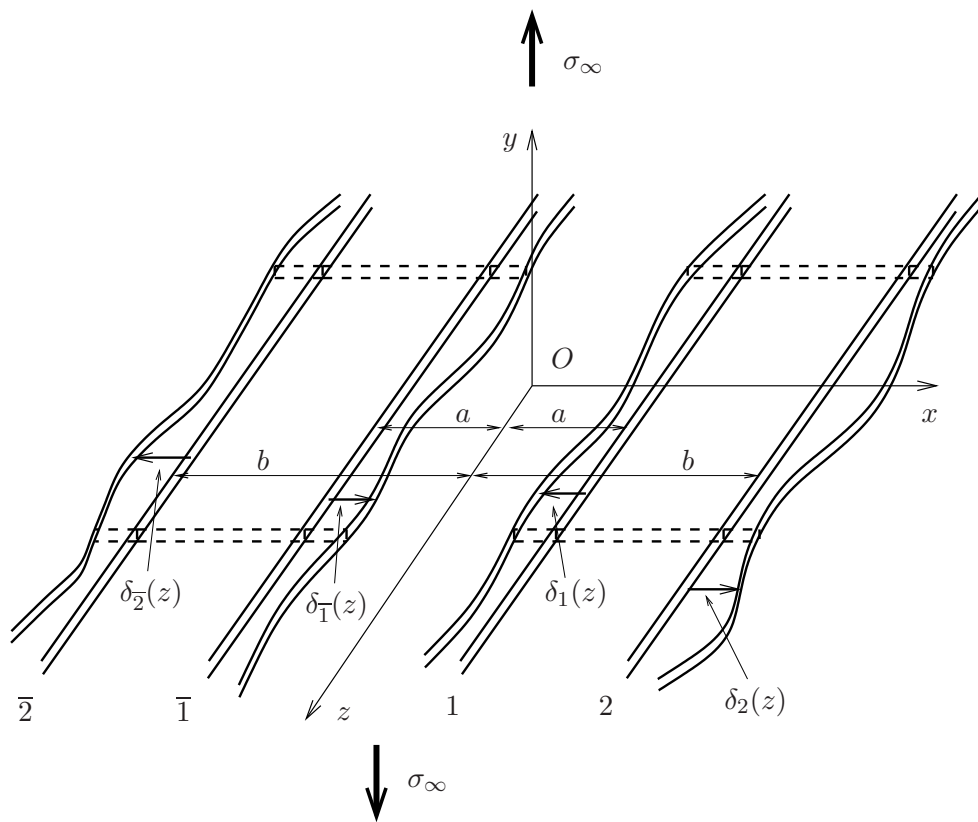


FIGURE A.1 – Two coplanar, parallel, identical tensile slit cracks with slightly perturbed fronts

where $[\delta K_\alpha(z)]_{\delta_\beta(z') \equiv \delta_\alpha(z), \forall \beta, \forall z'}$ denotes the value of $\delta K_\alpha(z)$ for a uniform advance of all fronts equal to $\delta_\alpha(z)$, and $Z_{\alpha\beta}(z, z')$ the value of the FK at points z of front α and z' of front β ³.

The notations in equation (A.5), although in line with those used in Rice's general formula (A.1), may be improved by adapting them to the specific case considered :

- First, one may account for the translational invariance of the unperturbed geometry in the direction z plus the singularity of the functions $Z_{\alpha\alpha}(z, z')$ (no sum on α) for $s' \rightarrow s$, equation (A.2)₁, by setting

$$\begin{cases} Z_{\alpha\alpha}(z, z') \equiv \frac{f_\alpha[(z-z')/b]}{(z-z')^2} & (\text{no sum on } \alpha) \\ Z_{\alpha\beta}(z, z') \equiv \frac{g_{\alpha\beta}[(z-z')/b]}{b^2} & (\alpha \neq \beta) \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

where indications of dependence of the functions upon the parameter k are omitted for simplicity. The notation

$$u \equiv \frac{z-z'}{b} \quad (\text{A.7})$$

for the argument of the functions f_α and $g_{\alpha\beta}$ will often be used in the sequel. Note that $f_\alpha(u)$ and $g_{\alpha\beta}(u)$ are regular functions of u at $u = 0$.

- Second, in the right-hand side of equation (A.5), one may note that $[\delta K_\alpha(z)]_{\delta_\beta(z') \equiv \delta_\alpha(z), \forall \beta, \forall z'}$ is proportional to $\delta_\alpha(z)$ by definition; then use the regularity of $g_{\alpha\beta}[(z-z')/b]$ to split the integrals having $\beta \neq \alpha$ into two terms involving $\delta_\beta(z')$ and $\delta_\alpha(z)$ respectively; and finally gather the various terms proportional to $\delta_\alpha(z)$ in the form $C_\alpha(z)\delta_\alpha(z)$.

Equation (A.5) then becomes

$$\begin{aligned} \delta K_\alpha(z) &= C_\alpha(z)\delta_\alpha(z) + PV \int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha\left(\frac{z-z'}{b}\right) K_\alpha(z') \frac{\delta_\alpha(z') - \delta_\alpha(z)}{(z'-z)^2} dz' \\ &+ \sum_{\beta \neq \alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\alpha\beta}\left(\frac{z-z'}{b}\right) K_\beta(z') \delta_\beta(z') \frac{dz'}{b^2} \quad (\alpha = 1, 2, \bar{1}, \bar{2}). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Note that the term $C_\alpha(z)\delta_\alpha(z)$ here represents the value of $\delta K_\alpha(z)$ for a uniform advance of the *sole front* α equal to $\delta_\alpha(z)$ ($\delta_\alpha(z') \equiv \delta_\alpha(z), \forall z'$; $\delta_\beta(z') \equiv 0, \forall \beta \neq \alpha, \forall z'$). The quantity $C_\alpha(z)$ depends on the loading but the functions f_α and $g_{\alpha\beta}$ do not, provided that this loading consists only of prescribed forces (no prescribed displacements).

A.2.3 Elementary properties of the components of the fundamental kernel

The general property (A.2)₁, combined with the definition (A.6)₁ of the functions f_α , implies that

$$f_\alpha(0) = \frac{1}{2\pi} \quad (\alpha = 1, 2, \bar{1}, \bar{2}). \quad (\text{A.9})$$

Combination of property (A.2)₂ and equations (A.6) also yields

$$\begin{cases} f_\alpha(-u) &= f_\alpha(u) & (\alpha = 1, 2, \bar{1}, \bar{2}) \\ g_{\beta\alpha}(-u) &= g_{\alpha\beta}(u) & (\alpha \neq \beta). \end{cases}$$

3. It is emphasized that the indices α and β here do not refer to different loading modes but to different fronts.

Other properties result from the symmetries of the unperturbed geometry. Symmetry with respect to planes parallel to Oxy implies that the functions f_α and $g_{\alpha\beta}$ are even. This property was already known for the former functions from the first equation just above, but for the latter it implies, upon combination with the second equation, that the functions $g_{\alpha\beta}$ and $g_{\beta\alpha}$ are identical. Moreover symmetry with respect to the plane Oyz implies that the functions f_α and $f_{\bar{\alpha}}$, $g_{\alpha\beta}$ and $g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ are also identical.

Combining these various properties, one concludes that *the FK reduces to only six unknown components : the functions $f_1, f_2, g_{12}, g_{1\bar{1}}, g_{1\bar{2}}$ and $g_{2\bar{2}}$, all of which are even.* The other functions may be deduced from them through the relations

$$\begin{cases} f_\alpha & \equiv f_{\bar{\alpha}} & (\alpha = 1, 2, \bar{1}, \bar{2}) \\ g_{\alpha\beta} & \equiv g_{\beta\alpha} \equiv g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} & (\alpha \neq \beta). \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

In addition, the functions f_1 and f_2 satisfy the property (A.9).

A.3 The 2D solution

The 2D solution (in plane strain in the direction z) will be needed for reasons which will appear below. This solution is provided in essence in Chapter 19 of Muskhelishvili (1953)'s book, and in detail in the works of Sadowsky (1956), Barenblatt (1962), Yokobori et al. (1965) and Hwu (1991) and the compilations of Broberg (1999) and Tada et al. (2000).

A.3.1 Solution for equal cracks

Figure A.2 sketches the problem considered in the case of equal cracks; the loading is assumed here to consist of a uniform tensile stress σ_∞ imposed at infinity. The SIFs for this crack configuration have been provided by Sadowsky (1956) and compiled by Tada et al. (2000) and are given by

$$\begin{cases} \frac{K_1}{\sigma_\infty \sqrt{\pi b}} = \frac{K_{\bar{1}}}{\sigma_\infty \sqrt{\pi b}} = \frac{1}{\sqrt{k} k'} \left(\frac{E'}{K'} - k^2 \right) \\ \frac{K_2}{\sigma_\infty \sqrt{\pi b}} = \frac{K_{\bar{2}}}{\sigma_\infty \sqrt{\pi b}} = \frac{1}{k'} \left(1 - \frac{E'}{K'} \right) \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

where E' and K' are the classical complete elliptic integrals defined by (Gradshteyn & Ryzhik 1980) :

$$\begin{cases} E' \equiv E(k') \equiv \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \phi} d\phi \\ K' \equiv K(k') \equiv \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \phi}}. \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

A.3.2 Solution for slightly unequal cracks

The SIFs for arbitrary unequal cracks have been provided by Barenblatt (1962), Yokobori et al. (1965) and Hwu (1991) and compiled by Broberg (1999) and Tada et al. (2000). One can get from there, through tedious but straightforward calculations based on Gradshteyn & Ryzhik (1980)'s formulae for the derivatives of elliptic integrals, the first-order variations of the SIFs resulting from a slight collinear perturbation of a system of equal cracks. Two cases are of interest here :

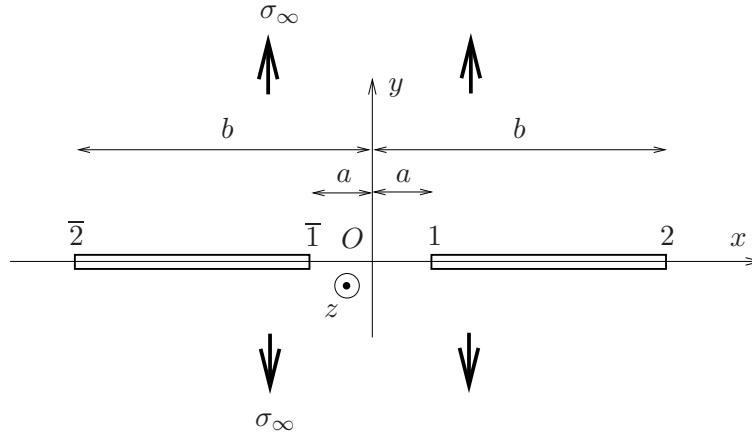


FIGURE A.2 – Two equal, collinear cracks in 2D

- *Perturbation of one of the inner crack tips, say tip 1, by a distance δ_1 (Figure A.3). The variations of the SIFs are then given, to first order, by*

$$\begin{cases} \frac{\delta K_1}{\sigma_\infty \sqrt{\pi b}} = \frac{1}{4k^{3/2}k'^3} \left[-2\frac{E'^2}{K'^2} + (1-k^2)\frac{E'}{K'} + k^2(3-k^2) \right] \frac{\delta_1}{b} \\ \frac{\delta K_2}{\sigma_\infty \sqrt{\pi b}} = \frac{1}{2kk'^3} \left[\frac{E'^2}{K'^2} + k(1-k)\frac{E'}{K'} - k^3 \right] \frac{\delta_1}{b} \\ \frac{\delta K_{\bar{1}}}{\sigma_\infty \sqrt{\pi b}} = \frac{1}{4k^{3/2}k'^3} \left[-2\frac{E'^2}{K'^2} + (1+3k^2)\frac{E'}{K'} - k^2(1+k^2) \right] \frac{\delta_1}{b} \\ \frac{\delta K_{\bar{2}}}{\sigma_\infty \sqrt{\pi b}} = \frac{1}{2kk'^3} \left[\frac{E'^2}{K'^2} - k(1+k)\frac{E'}{K'} + k^3 \right] \frac{\delta_1}{b}. \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

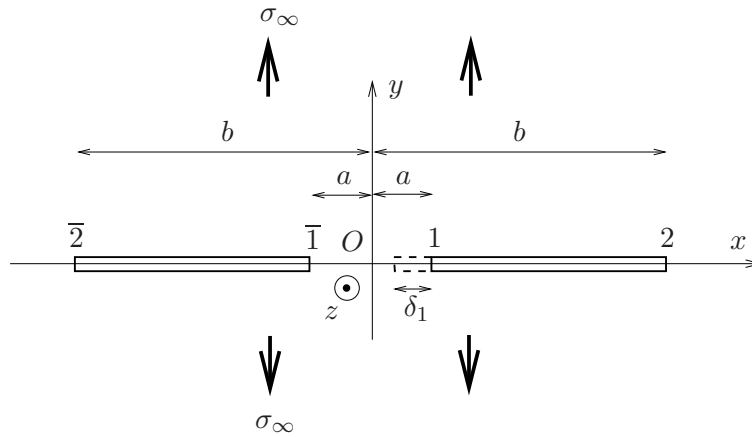


FIGURE A.3 – Two collinear cracks in 2D - Perturbation of one of the inner cracks tips

– *Perturbation of one of the outer crack tips, say tip 2, by a distance δ_2* (Figure A.4). Then

$$\begin{cases} \frac{\delta K_1}{\sigma_\infty \sqrt{\pi b}} = \frac{1}{2\sqrt{k} k'^3} \left[-\frac{E'^2}{K'^2} + (1-k)\frac{E'}{K'} + k \right] \frac{\delta_2}{b} \\ \frac{\delta K_2}{\sigma_\infty \sqrt{\pi b}} = \frac{1}{4k'^3} \left[2\frac{E'^2}{K'^2} + (1-k^2)\frac{E'}{K'} + 1 - 3k^2 \right] \frac{\delta_2}{b} \\ \frac{\delta K_{\bar{1}}}{\sigma_\infty \sqrt{\pi b}} = \frac{1}{2\sqrt{k} k'^3} \left[-\frac{E'^2}{K'^2} + (1+k)\frac{E'}{K'} - k \right] \frac{\delta_2}{b} \\ \frac{\delta K_{\bar{2}}}{\sigma_\infty \sqrt{\pi b}} = \frac{1}{4k'^3} \left[2\frac{E'^2}{K'^2} - (3+k^2)\frac{E'}{K'} + 1 + k^2 \right] \frac{\delta_2}{b}. \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

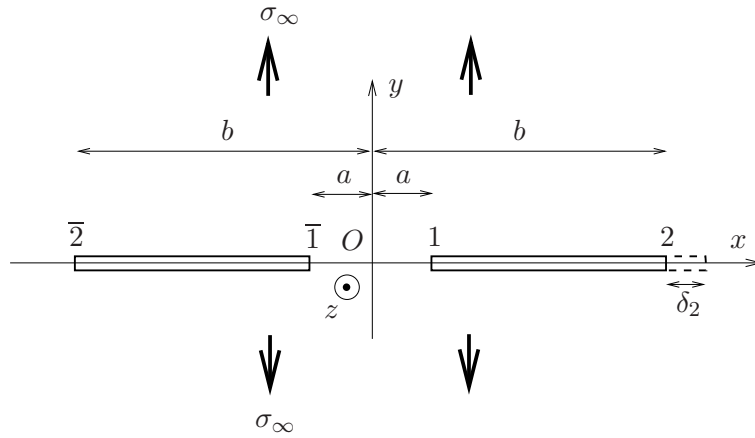


FIGURE A.4 – Two collinear cracks in 2D - Perturbation of one of the outer cracks tips

A.3.3 Consequences on the 3D solution

Now come back to the 3D case and assume again that the loading consists of a uniform tensile stress σ_∞ imposed at infinity. Then the unperturbed SIFs K_α are independent of z and given by equations (A.11). Move the sole crack front α ($= 1$ or 2) by a uniform distance δ_α . Then the variation δK_α of the SIF on this front is also uniform and given by equation (A.13)₁ or (A.14)₂. But it is also equal to $C_\alpha \delta_\alpha$ by equation (A.8). Hence the values of the constants C_α are given by

$$\begin{cases} \frac{C_1}{\sigma_\infty \sqrt{\pi b}} = \frac{C_{\bar{1}}}{\sigma_\infty \sqrt{\pi b}} = \frac{1}{4k^{3/2} k'^3 b} \left[-2\frac{E'^2}{K'^2} + (1-k^2)\frac{E'}{K'} + k^2(3-k^2) \right] \\ \frac{C_2}{\sigma_\infty \sqrt{\pi b}} = \frac{C_{\bar{2}}}{\sigma_\infty \sqrt{\pi b}} = \frac{1}{4k'^3 b} \left[2\frac{E'^2}{K'^2} + (1-k^2)\frac{E'}{K'} + 1 - 3k^2 \right] \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

where account has been taken of the equality $C_\alpha = C_{\bar{\alpha}}$ resulting from symmetry with respect to the plane Oyz .

Now move the sole front β ($= 1$ or 2) by a uniform distance δ_β and consider the resulting variation δK_α of the SIF on front α ($\neq \beta$). This variation is uniform and given by one of the equations (A.13)_{2,3,4} or (A.14)_{1,3,4}. But by equation (A.8), it is also given by

$$\delta K_\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\alpha\beta} \left(\frac{z - z'}{b} \right) K_\beta \delta_\beta \frac{dz'}{b^2} = K_\beta \frac{\delta_\beta}{b} \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\alpha\beta}(u) du.$$

From there and equations (A.11) follow the values of the integrals $\int_{-\infty}^{+\infty} g_{\alpha\beta}(u) du$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} g_{12}(u) du = \frac{1}{2\sqrt{k} k'^2} \left(\frac{E'}{K'} + k \right) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g_{1\bar{1}}(u) du = \frac{1}{4k k'^2} \left(-2\frac{E'}{K'} + 1 + k^2 \right) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g_{1\bar{2}}(u) du = \frac{1}{2\sqrt{k} k'^2} \left(\frac{E'}{K'} - k \right) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g_{2\bar{2}}(u) du = \frac{1}{4k'^2} \left(-2\frac{E'}{K'} + 1 + k^2 \right). \end{array} \right. \quad (\text{A.16})$$

(Note that the value of $\int_{-\infty}^{+\infty} g_{12}(u) du$ is provided by both the variation of K_1 induced by a perturbation of front 2 and the variation of K_2 induced by a perturbation of front 1).

Again, the values of the constants C_α here depend on the specific loading considered but those of the integrals $\int_{-\infty}^{+\infty} g_{\alpha\beta}(u) du$ do not, provided that this loading consists only of prescribed forces.

A.4 Integrodifferential equations for the components of the fundamental kernel

A.4.1 First translatory motion of the crack fronts

Let us define a combination of small translatory motions of the crack fronts preserving relative distances between them and leaving front 1 fixed (Figure A.5). The displacements of the various fronts must then be proportional to their distance to front 1, that is $b - a = (1 - k)b$ for front 2, $2a = 2kb$ for front $\bar{1}$ and $b + a = (1 + k)b$ for front $\bar{2}$. They must thus be of the form

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_1 \equiv 0 \\ \delta_2 \equiv (1 - k)\varepsilon \\ \delta_{\bar{1}} \equiv -2k\varepsilon \\ \delta_{\bar{2}} \equiv (1 + k)\varepsilon \end{array} \right. \quad (\text{A.17})$$

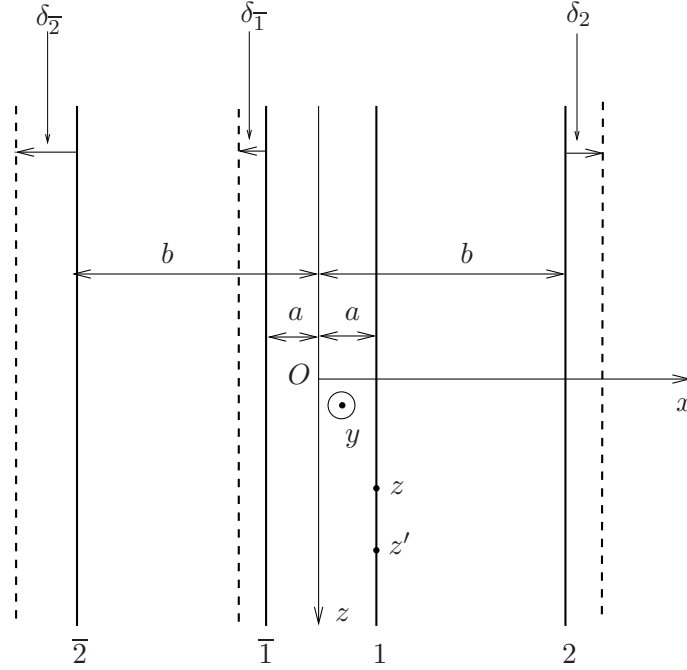
for some small distance ε . (The $-$ sign in equation (A.17)₃ arises from the fact that front $\bar{1}$ must move backward, see Figure A.5).

Let z and z' denote arbitrary points on front 1. Since the crack advance is zero at these points, Rice's second formula (A.3) may be used to evaluate the variation of the component $Z_{11}(z, z') \equiv f_1[(z - z')/b]/(z - z')^2$. When doing so, one may note that since the ratio $k \equiv a/b$ is preserved in the transformation, the function f_1 itself does not change; but its argument does, since the half-distance b between the outer crack fronts becomes $b + \varepsilon$. To first order in ε , the new value of $Z_{11}(z, z')$ is thus

$$\frac{f_1[(z - z')/(b + \varepsilon)]}{(z - z')^2} = \frac{f_1[(z - z')/b]}{(z - z')^2} - \frac{f_1'[(z - z')/b]}{z - z'} \frac{\varepsilon}{b^2}$$

so that its variation is

$$\delta Z_{11}(z, z') \equiv -\frac{f_1'[(z - z')/b]}{z - z'} \frac{\varepsilon}{b^2}.$$

FIGURE A.5 – Translatory motion of crack fronts 2, $\bar{1}$ and $\bar{2}$

Therefore, by Rice's second formula (A.3) and equations (A.6) and (A.17),

$$\begin{aligned} -\frac{f'_1[(z-z')/b] \varepsilon}{z-z'} \frac{\varepsilon}{b^2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} g_{12} \left(\frac{z-z''}{b} \right) g_{21} \left(\frac{z''-z'}{b} \right) (1-k) \varepsilon \frac{dz''}{b^4} \\ &\quad - \int_{-\infty}^{+\infty} g_{1\bar{1}} \left(\frac{z-z''}{b} \right) g_{\bar{1}1} \left(\frac{z''-z'}{b} \right) 2k \varepsilon \frac{dz''}{b^4} \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} g_{1\bar{2}} \left(\frac{z-z''}{b} \right) g_{\bar{2}1} \left(\frac{z''-z'}{b} \right) (1+k) \varepsilon \frac{dz''}{b^4}. \end{aligned}$$

Using the symmetry relations (A.10)₂ and the changes of variables $u \equiv (z-z')/b$, $u' \equiv (z-z'')/b$, one gets from there the integrodifferential equation

$$f'_1 = -(1-k)u(g_{12} * g_{12}) + 2ku(g_{1\bar{1}} * g_{1\bar{1}}) - (1+k)u(g_{1\bar{2}} * g_{1\bar{2}}) \quad (\text{A.18})$$

where the symbol $*$ denotes the convolution product and the argument u of the functions has been discarded for compactness.

A.4.2 Second translatory motion of the crack fronts

Consider now a similar combination of translatory motions of the crack fronts preserving relative distances and leaving fixed front 2 instead of front 1 (Figure A.6). The displacements of the fronts are then proportional to their distance to front 2 so that

$$\begin{cases} \delta_1 &\equiv (1-k)\varepsilon \\ \delta_2 &\equiv 0 \\ \delta_{\bar{1}} &\equiv -(1+k)\varepsilon \\ \delta_{\bar{2}} &\equiv 2\varepsilon \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

Applying Rice's second formula (A.3) to evaluate the variation of the component $Z_{22}(z, z')$ resulting from this perturbation, one gets, following the same lines as above, the integrodifferential equation

$$f'_2 = -(1 - k)u(g_{12} * g_{12}) + (1 + k)u(g_{1\bar{2}} * g_{1\bar{2}}) - 2u(g_{2\bar{2}} * g_{2\bar{2}}). \quad (\text{A.20})$$

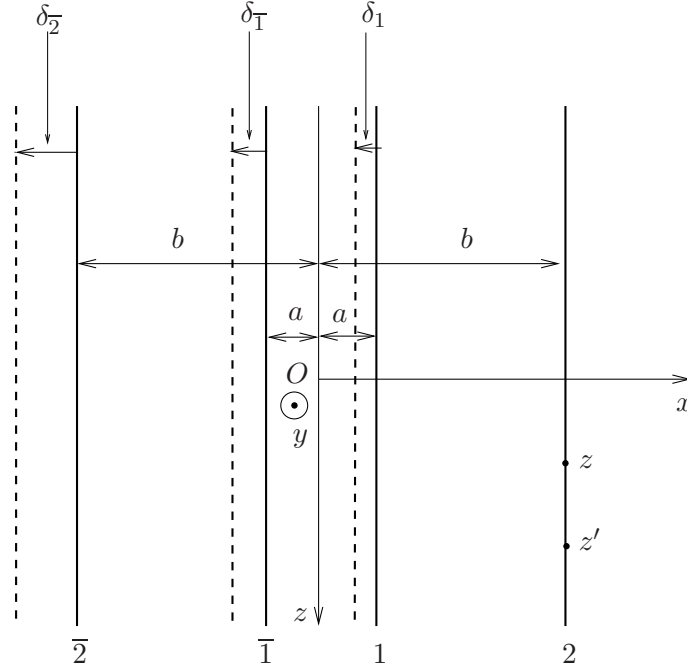


FIGURE A.6 – Translatory motion of crack fronts 1, $\bar{1}$ and $\bar{2}$

A.4.3 Rotation of the crack fronts

Consider finally small, identical rotations of the crack fronts around centers located on them and aligned on a straight line (Figure A.7). The positions $z_1, z_2, z_{\bar{1}}, z_{\bar{2}}$ of these centers and the perturbations of the fronts are then of the form

$$\begin{cases} z_1 \equiv z_0 - kh \\ z_2 \equiv z_0 - h \\ z_{\bar{1}} \equiv z_0 + kh \\ z_{\bar{2}} \equiv z_0 + h \end{cases} ; \quad \begin{cases} \delta_1(z) \equiv -\varepsilon(z - z_1) \\ \delta_2(z) \equiv \varepsilon(z - z_2) \\ \delta_{\bar{1}}(z) \equiv \varepsilon(z - z_{\bar{1}}) \\ \delta_{\bar{2}}(z) \equiv -\varepsilon(z - z_{\bar{2}}) \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

where z_0 denotes an arbitrary position, h an arbitrary distance and ε a small angle. Since the centers of rotation do not move in the perturbation, Rice's second formula (A.3) may be used to evaluate the variations of the components $Z_{12}(z_1, z_2)$, $Z_{1\bar{1}}(z_1, z_{\bar{1}})$, $Z_{1\bar{2}}(z_1, z_{\bar{2}})$ and $Z_{2\bar{2}}(z_2, z_{\bar{2}})$.

By Thales's theorem, the ratios of the distances between the various fronts are the same if measured perpendicularly to them or along the straight line joining the centers of rotation; and this is true both before and after the perturbation. It follows that these ratios are preserved in the transformation. Therefore, to evaluate the variation of $Z_{12}(z_1, z_2) \equiv g_{12}[(z_1 - z_2)/b]/b^2$, one may again note that the function g_{12} itself does not change; but again its argument does

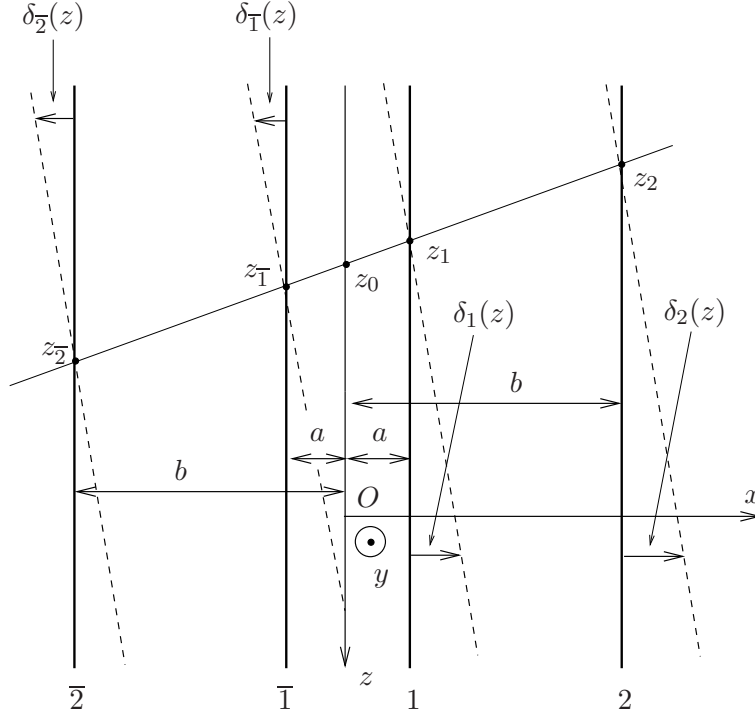


FIGURE A.7 – Rotation of the crack fronts

since the half-distance b between the outer fronts and the positions $z_1, z_2, z_{\bar{1}}, z_{\bar{2}}$ of the centers of rotation, as measured along the fronts, become after the transformation

$$b' \equiv b + \varepsilon h \quad ; \quad \begin{cases} z'_1 \equiv z_1 + \varepsilon kb \\ z'_2 \equiv z_2 + \varepsilon b \\ z'_{\bar{1}} \equiv z_{\bar{1}} - \varepsilon kb \\ z'_{\bar{2}} \equiv z_{\bar{2}} - \varepsilon b. \end{cases}$$

Therefore the new value of $Z_{12}(z_1, z_2)$ is

$$\begin{aligned} \frac{g_{12}[(z'_1 - z'_2)/b']}{b'^2} &= \frac{g_{12}[(z_1 - z_2)/b]}{b^2} - 2g_{12} \left(\frac{z_1 - z_2}{b} \right) \frac{z_1 - z_2}{1 - k} \frac{\varepsilon}{b^3} \\ &\quad - g'_{12} \left(\frac{z_1 - z_2}{b} \right) \left[1 - k + \frac{1}{1 - k} \left(\frac{z_1 - z_2}{b} \right)^2 \right] \frac{\varepsilon}{b^2} \end{aligned}$$

so that its variation is

$$\delta Z_{12}(z_1, z_2) \equiv -2g_{12} \left(\frac{z_1 - z_2}{b} \right) \frac{z_1 - z_2}{1 - k} \frac{\varepsilon}{b^3} - g'_{12} \left(\frac{z_1 - z_2}{b} \right) \left[1 - k + \frac{1}{1 - k} \left(\frac{z_1 - z_2}{b} \right)^2 \right] \frac{\varepsilon}{b^2}.$$

Therefore, by Rice's second formula (A.3) and equations (A.6) and (A.21)_{5,6,7,8},

$$\begin{aligned}
 & -2g_{12} \left(\frac{z_1 - z_2}{b} \right) \frac{z_1 - z_2}{1 - k} \frac{\varepsilon}{b^3} - g'_{12} \left(\frac{z_1 - z_2}{b} \right) \left[1 - k + \frac{1}{1 - k} \left(\frac{z_1 - z_2}{b} \right)^2 \right] \frac{\varepsilon}{b^2} \\
 & = -PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_1[(z_1 - z)/b]}{(z_1 - z)^2} \frac{g_{12}[(z - z_2)/b]}{b^2} \varepsilon(z - z_1) dz \\
 & \quad + PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_{12}[(z_1 - z)/b]}{b^2} \frac{f_2[(z - z_2)/b]}{(z - z_2)^2} \varepsilon(z - z_2) dz \\
 & \quad + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_{1\bar{1}}[(z_1 - z)/b]}{b^2} \frac{g_{\bar{1}2}[(z - z_2)/b]}{b^2} \varepsilon(z - z_{\bar{1}}) dz \\
 & \quad - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_{1\bar{2}}[(z_1 - z)/b]}{b^2} \frac{g_{\bar{2}2}[(z - z_2)/b]}{b^2} \varepsilon(z - z_{\bar{2}}) dz.
 \end{aligned}$$

Using the symmetry relations (A.10)₂ and the changes of variables $u \equiv (z_1 - z_2)/b$, $u' \equiv (z_1 - z)/b$, writing $z - z_{\bar{1}}$ and $z - z_{\bar{2}}$ in the form $z - z_1 + z_1 - z_{\bar{1}}$ and $z - z_1 + z_1 - z_{\bar{2}}$, and expressing $z_1 - z_{\bar{1}}$ and $z_1 - z_{\bar{2}}$ in terms of $z_1 - z_2$ using equations (A.21)_{1,2,3,4}, one gets from there the integrodifferential equation

$$\begin{aligned}
 \left[\left(1 - k + \frac{u^2}{1 - k} \right) g_{12} \right]' & = -PV \frac{f_1 + f_2}{u} * g_{12} + (ug_{1\bar{1}}) * g_{1\bar{2}} - (ug_{1\bar{2}}) * g_{2\bar{2}} \\
 & \quad + \frac{2k}{1 - k} u (g_{1\bar{1}} * g_{1\bar{2}}) - \frac{1 + k}{1 - k} u (g_{1\bar{2}} * g_{2\bar{2}}). \tag{A.22}
 \end{aligned}$$

The reasonings for the variations of the components $Z_{1\bar{1}}(z_1, z_{\bar{1}})$, $Z_{1\bar{2}}(z_1, z_{\bar{2}})$ and $Z_{2\bar{2}}(z_2, z_{\bar{2}})$ are similar and lead to the following integrodifferential equations :

$$\left[\left(2k + \frac{u^2}{2k} \right) g_{1\bar{1}} \right]' = 2PV \frac{f_1}{u} * g_{1\bar{1}} - (ug_{12}) * g_{1\bar{2}} + (ug_{1\bar{2}}) * g_{12} - \frac{u}{k} (g_{12} * g_{1\bar{2}}); \tag{A.23}$$

$$\begin{aligned}
 \left[\left(1 + k + \frac{u^2}{1 + k} \right) g_{1\bar{2}} \right]' & = PV \frac{f_1 - f_2}{u} * g_{1\bar{2}} - (ug_{12}) * g_{2\bar{2}} - (ug_{1\bar{1}}) * g_{12} \\
 & \quad - \frac{1 - k}{1 + k} u (g_{12} * g_{2\bar{2}}) + \frac{2k}{1 + k} u (g_{1\bar{1}} * g_{12}); \tag{A.24}
 \end{aligned}$$

$$\left[\left(2 + \frac{u^2}{2} \right) g_{2\bar{2}} \right]' = -2PV \frac{f_2}{u} * g_{2\bar{2}} + (ug_{12}) * g_{1\bar{2}} - (ug_{1\bar{2}}) * g_{12} + ku (g_{12} * g_{1\bar{2}}). \tag{A.25}$$

A.5 Equations on the Fourier transforms of the components of the fundamental kernel

A.5.1 Fourier transform of the integrodifferential equations

The presence of convolution products in equations (A.18), (A.20), (A.22 - A.25) is an invitation to take their FTs. The FT $\widehat{\phi}(p)$ of an arbitrary function $\phi(u)$ is defined here by the equivalent formulae

$$\widehat{\phi}(p) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(u) e^{ipu} du \quad \Leftrightarrow \quad \phi(u) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\phi}(p) e^{-ipu} dp. \tag{A.26}$$

Taking the FT of the various terms of equations (A.18), (A.20), (A.22 - A.25) is a straightforward task, except for terms of the form $PV \frac{f_\alpha}{u}$ ($\alpha = 1, 2$). To calculate the FT of these terms,

define the functions $h_\alpha \equiv \frac{f_\alpha}{u}$. Then $f_\alpha = uh_\alpha$ so that $\widehat{f}_\alpha = -i\widehat{h}_\alpha'$, the integral defining \widehat{h}_α being understood as a Cauchy *PV*. Therefore $\widehat{h}_\alpha = \widehat{PV} \frac{f_\alpha}{u} = i\widehat{F}_\alpha$ where \widehat{F}_α is some indefinite integral of \widehat{f}_α , which may be identified upon application of this result at $p = 0$ as the unique *odd* such integral :

$$\widehat{F}_\alpha(p) \equiv \int_0^p \widehat{f}_\alpha(p') dp' \quad (\alpha = 1, 2). \quad (\text{A.27})$$

Use of this result in equations (A.18), (A.20), (A.22 - A.25) then yields the following ODEs on the functions \widehat{F}_α and $\widehat{g}_{\alpha\beta}$:

$$p\widehat{F}_1' = -2(1-k)\widehat{g}_{12}\widehat{g}_{12}' + 4k\widehat{g}_{1\bar{1}}\widehat{g}_{1\bar{1}}' - 2(1+k)\widehat{g}_{1\bar{2}}\widehat{g}_{1\bar{2}}'; \quad (\text{A.28})$$

$$p\widehat{F}_2' = -2(1-k)\widehat{g}_{12}\widehat{g}_{12}' + 2(1+k)\widehat{g}_{1\bar{2}}\widehat{g}_{1\bar{2}}' - 4\widehat{g}_{2\bar{2}}\widehat{g}_{2\bar{2}}'; \quad (\text{A.29})$$

$$p \left[(1-k)\widehat{g}_{12} - \frac{\widehat{g}_{12}''}{1-k} \right] = \left(\widehat{F}_1 + \widehat{F}_2 \right) \widehat{g}_{12} + \frac{2k}{1-k} \widehat{g}_{1\bar{1}} \widehat{g}_{1\bar{2}}' + \frac{1+k}{1-k} \widehat{g}_{1\bar{1}}' \widehat{g}_{12} - \frac{1+k}{1-k} \widehat{g}_{1\bar{2}} \widehat{g}_{2\bar{2}}' - \frac{2}{1-k} \widehat{g}_{1\bar{2}}' \widehat{g}_{2\bar{2}}; \quad (\text{A.30})$$

$$p \left(2k\widehat{g}_{1\bar{1}} - \frac{\widehat{g}_{1\bar{1}}''}{2k} \right) = -2\widehat{F}_1 \widehat{g}_{1\bar{1}} - \frac{1-k}{k} \widehat{g}_{12} \widehat{g}_{1\bar{2}}' - \frac{1+k}{k} \widehat{g}_{12}' \widehat{g}_{1\bar{2}}; \quad (\text{A.31})$$

$$p \left[(1+k)\widehat{g}_{1\bar{2}} - \frac{\widehat{g}_{1\bar{2}}''}{1+k} \right] = \left(\widehat{F}_2 - \widehat{F}_1 \right) \widehat{g}_{1\bar{2}} - \frac{1-k}{1+k} \widehat{g}_{12} \widehat{g}_{1\bar{1}}' + \frac{2k}{1+k} \widehat{g}_{12}' \widehat{g}_{1\bar{1}} - \frac{1-k}{1+k} \widehat{g}_{12} \widehat{g}_{2\bar{2}}' - \frac{2}{1+k} \widehat{g}_{12}' \widehat{g}_{2\bar{2}}; \quad (\text{A.32})$$

$$p \left(2\widehat{g}_{2\bar{2}} - \frac{\widehat{g}_{2\bar{2}}''}{2} \right) = 2\widehat{F}_2 \widehat{g}_{2\bar{2}} - (1-k)\widehat{g}_{12} \widehat{g}_{1\bar{2}}' + (1+k)\widehat{g}_{12}' \widehat{g}_{1\bar{2}}. \quad (\text{A.33})$$

A.5.2 Complementary conditions

Since the functions \widehat{F}_α and $\widehat{g}_{\alpha\beta}$ are odd and even, respectively, it suffices to determine them over the interval $[0, +\infty)$. In order to do so using the ODEs (A.28 - A.33), one needs “initial conditions” at, *a priori*, $p = 0$ or $+\infty$; but in fact conditions at $p = 0$ and $+\infty$ will reveal necessary for the numerical integration, as will be seen.

– Values of the \widehat{F}_α , $\widehat{g}_{\alpha\beta}$ and $\widehat{g}_{\alpha\beta}'$ at $p = 0$. It follows from the definition (A.27) of the \widehat{F}_α that

$$\widehat{F}_1(0) = \widehat{F}_2(0) = 0. \quad (\text{A.34})$$

Also, equations (A.16) directly provide the values of the $\widehat{g}_{\alpha\beta}$ at $p = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{g}_{12}(0) = \frac{1}{2\sqrt{k}k'^2} \left(\frac{E'}{K'} + k \right) \\ \widehat{g}_{1\bar{1}}(0) = \frac{1}{4kk'^2} \left(-2\frac{E'}{K'} + 1 + k^2 \right) \\ \widehat{g}_{1\bar{2}}(0) = \frac{1}{2\sqrt{k}k'^2} \left(\frac{E'}{K'} - k \right) \\ \widehat{g}_{2\bar{2}}(0) = \frac{1}{4k'^2} \left(-2\frac{E'}{K'} + 1 + k^2 \right). \end{array} \right. \quad (\text{A.35})$$

Finally, since these functions are even⁴,

$$\widehat{g}_{12}'(0) = \widehat{g}_{1\bar{1}}'(0) = \widehat{g}_{1\bar{2}}'(0) = \widehat{g}_{2\bar{2}}'(0) = 0. \quad (\text{A.36})$$

- Values of the \widehat{F}_α at $p = +\infty$ and asymptotic behavior of the $\widehat{g}_{\alpha\beta}$ for $p \rightarrow +\infty$. To find the values of the \widehat{F}_α at $p = +\infty$, note that the formula

$$\widehat{f}_\alpha(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(u) e^{ipu} \mathfrak{u} = 2 \int_0^{+\infty} f_\alpha(u) \cos(pu) \mathfrak{u}$$

yields upon integration and use of the change of variable $u' \equiv pu$:

$$\widehat{F}_\alpha(p) = 2 \int_0^{+\infty} f_\alpha(u) \frac{\sin(pu)}{u} \mathfrak{u} = 2 \int_0^{+\infty} f_\alpha\left(\frac{u'}{p}\right) \frac{\sin u'}{u'} \mathfrak{u}'.$$

It then follows through replacement of $f_\alpha(u'/p)$ by $f_\alpha(0)$ in the limit $p \rightarrow +\infty$ and use of equations (A.9) that

$$\widehat{F}_1(+\infty) = \widehat{F}_2(+\infty) = \frac{1}{2}. \quad (\text{A.37})$$

Also, the $\widehat{g}_{\alpha\beta}$ are zero at infinity since these functions are FTs. However we shall not need the sole limit of the $\widehat{g}_{\alpha\beta}$ but their asymptotic behavior near infinity. The derivation of this behavior is somewhat involved and presented in Appendix B.1, and it is concluded that

$$\begin{cases} \widehat{g}_{12}(p) &= \gamma_{12} \left[1 + \frac{1}{8(1-k)p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right) \right] \sqrt{p} e^{-(1-k)p} \\ \widehat{g}_{1\bar{1}}(p) &= \gamma_{1\bar{1}} \left[1 - \frac{3}{16kp} + O\left(\frac{1}{p^2}\right) \right] \frac{e^{-2kp}}{\sqrt{p}} \\ \widehat{g}_{1\bar{2}}(p) &= \left[\gamma_{1\bar{2}} - \frac{\gamma_{12}\gamma_{1\bar{1}}}{4p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right) \right] e^{-(1+k)p} \\ \widehat{g}_{2\bar{2}}(p) &= \left[\gamma_{2\bar{2}} + \left(\frac{\gamma_{2\bar{2}}}{16} - \frac{1+k}{4} \gamma_{12}\gamma_{1\bar{2}} \right) \frac{1}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right) \right] \sqrt{p} e^{-2p} \end{cases} \quad \text{for } p \rightarrow +\infty \quad (\text{A.38})$$

where $\gamma_{12}, \gamma_{1\bar{1}}, \gamma_{1\bar{2}}, \gamma_{2\bar{2}}$ are unknown constants.

Remark. One can check that the ODEs (A.28 - A.33) imply that the quantity

$\widehat{F}_1^2 + \widehat{F}_2^2 + 2(1-k)^2 \widehat{g}_{12}^2 - 2\widehat{g}_{12}^{\prime 2} + 4k^2 \widehat{g}_{1\bar{1}}^2 - \widehat{g}_{1\bar{1}}^{\prime 2} - 2(1+k)^2 \widehat{g}_{1\bar{2}}^2 + 2\widehat{g}_{1\bar{2}}^{\prime 2} + 4\widehat{g}_{2\bar{2}}^2 - \widehat{g}_{2\bar{2}}^{\prime 2}$ is a constant, the value of which is $\frac{1}{2}$ by equations (A.37) and (A.38). Similar intriguing constants of integration were evidenced for a single slit-crack loaded in tension (Leblond et al. 1996) and shear (Lazarus & Leblond 2002b). The basic explanation of their existence remains to be found.

A.6 Numerical procedure and results

A.6.1 Choice of a numerical procedure

Since the ODEs (A.28 - A.33) are of second order and nonlinear, they can only be solved numerically; but this can be done once and for all for each value of the ratio k defined by equation (A.4)₁.

4. We disregard here the improbable possibility of functions $\widehat{g}_{\alpha\beta}'$ discontinuous at the origin. It is easy to show that in such a case the functions $g_{\alpha\beta}(u)$ would decrease like u^{-2} for $u \rightarrow \pm\infty$; a very unlikely behavior since their equivalent for a single slit-crack is known to decrease more quickly, like $|u|^{-3}$ (Leblond et al. 1996).

Since the values of the functions \widehat{F}_α , $\widehat{g}_{\alpha\beta}$ and $\widehat{g}_{\alpha\beta}'$ at $p = 0$ are known, the most natural method seems to integrate from 0 to $+\infty$, or rather from p_{\min} to p_{\max} , with $0 < p_{\min} \ll 1 \ll p_{\max}$. (Integrating right from the origin is impossible because of the singular nature of the ODEs there). But this would raise a problem for large values of p , for the following reason. For such values, the left-hand sides in equations (A.30 - A.33) dominate over the right-hand sides, so that each function $\widehat{g}_{\alpha\beta}$ is asymptotically proportional to a sum of two exponentials : $e^{(1-k)p}$ and $e^{-(1-k)p}$ for \widehat{g}_{12} , e^{2kp} and e^{-2kp} for $\widehat{g}_{1\bar{1}}$, $e^{(1+k)p}$ and $e^{-(1+k)p}$ for $\widehat{g}_{1\bar{2}}$, and e^{2p} and e^{-2p} for $\widehat{g}_{2\bar{2}}$. The increasing exponentials $e^{(1-k)p}$, e^{2kp} , $e^{(1+k)p}$, e^{2p} are not wanted for obvious physical reasons; the problem is that because of inevitable numerical errors, they are bound to appear and ultimately dominate over the desired decreasing ones $e^{-(1-k)p}$, e^{-2kp} , $e^{-(1+k)p}$, e^{-2p} .

The solution to this problem is obviously to integrate backwards, from p_{\max} to p_{\min} , so as to transform the undesired exponentials $e^{(1-k)p}$, e^{2kp} , $e^{(1+k)p}$, e^{2p} into decreasing functions. Then, even though they will inevitably appear, they will be dominated by the desired increasing ones $e^{-(1-k)p}$, e^{-2kp} , $e^{-(1+k)p}$, e^{-2p} . But another difficulty pertaining to initial conditions then appears : indeed the asymptotic behavior of the functions $\widehat{g}_{\alpha\beta}$ for $p \rightarrow +\infty$ is known only up to some multiplicative constants γ_{12} , $\gamma_{1\bar{1}}$, $\gamma_{1\bar{2}}$, $\gamma_{2\bar{2}}$. The solution to this other problem is to adjust these constants so as to match the desired values of the functions at the origin.

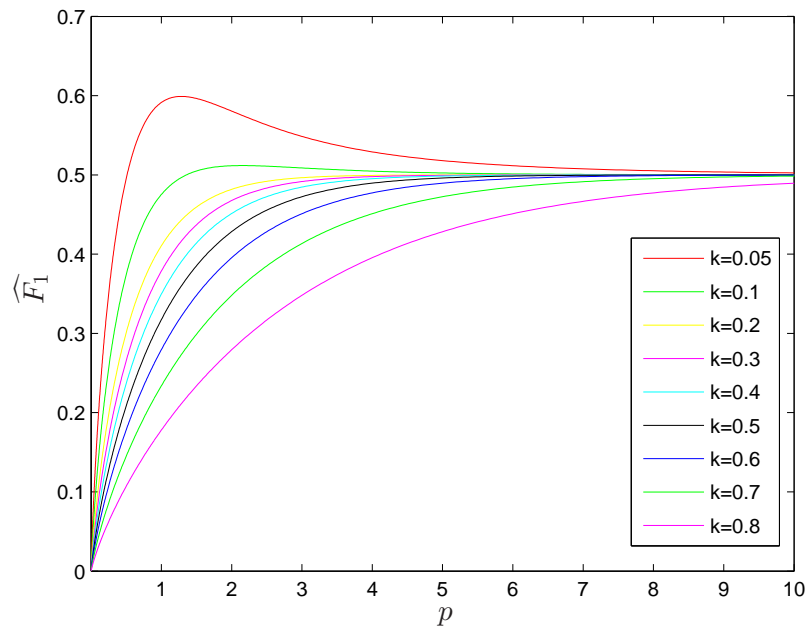
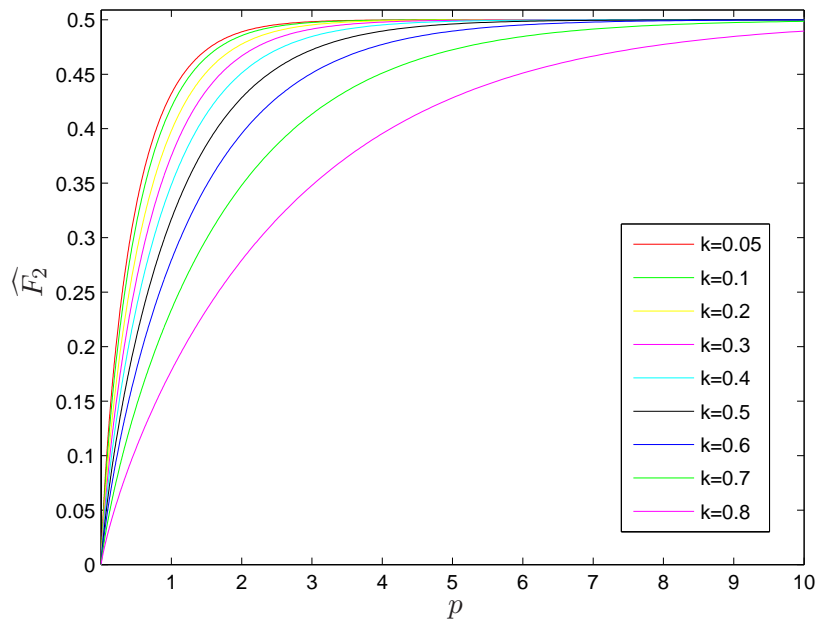
The numerical procedure thus essentially consists of a Newton algorithm on the constants $\gamma_{\alpha\beta}$. For each quadruplet of values $(\gamma_{12}, \gamma_{1\bar{1}}, \gamma_{1\bar{2}}, \gamma_{2\bar{2}})$, the values of the functions \widehat{F}_α , $\widehat{g}_{\alpha\beta}$ and $\widehat{g}_{\alpha\beta}'$ at $p = p_{\max}$ are deduced from equations (A.37) and (A.38), and the ODEs (A.28 - A.33) are integrated backwards using Runge-Kutta's method of order 4. The values of the functions $\widehat{g}_{\alpha\beta}$ at $p = p_{\min}$ are compared to the "primary targets" provided by equations (A.35), and the constants $\gamma_{\alpha\beta}$ modified accordingly for the next Newton iteration. The required derivatives $\partial\widehat{g}_{\alpha\beta}(p_{\min})/\partial\gamma_{\lambda\mu}$ are obtained by numerical differentiation through slight variations of the $\gamma_{\lambda\mu}$. Once convergence has been obtained, a final check is performed on the "secondary targets" provided by equations (A.34) and (A.36).

A.6.2 Numerical results

Figures A.8 to A.13 show the functions \widehat{F}_α and $\widehat{g}_{\alpha\beta}$ thus obtained, for $p_{\min} = 0.0001$ and $p_{\max} = 40$. Various values of the ratio k defined by equation (A.4)₁, ranging from 0.05 to 0.8, are envisaged here. (In Figure A.11, the function $\widehat{g}_{1\bar{1}}$ for the value $k = 0.05$ is not shown because results for other values would become illegible). Figures A.14 to A.19 also show the functions f_α and $g_{\alpha\beta}$, obtained through inverse Fourier transform of the functions $\widehat{f}_\alpha = \widehat{F}_\alpha'$ and $\widehat{g}_{\alpha\beta}$.

Comments on the influence of k on the various functions are in order. This parameter is recalled to represent the distance between the inner crack fronts normalized by that between the outer ones; we shall consider the latter distance, $2b$, as fixed and the sole former one, $2a$, as variable. Also, it will be helpful to remember that the functions $f_\alpha[(z - z')/b]$ and $g_{\alpha\beta}[(z - z')/b]$ describe "interactions" between the crack fronts, in the sense that they are related to the variation of the SIF at the point z of front α induced by a small advance of the point z' of front α (for f_α) or front β (for $g_{\alpha\beta}$).

The influence of k upon the various functions may then be rationalized in terms of two distinct effects. First, the presence of the ligament tends to reduce the opening of the cracks, and consequently the interactions between the fronts; thus an increase of its width must result in a decrease of the functions. Second, it is obvious that the larger the distance between two crack fronts, the weaker the interactions between them.

FIGURE A.8 – The function $\widehat{F}_1(p)$ FIGURE A.9 – The function $\widehat{F}_2(p)$

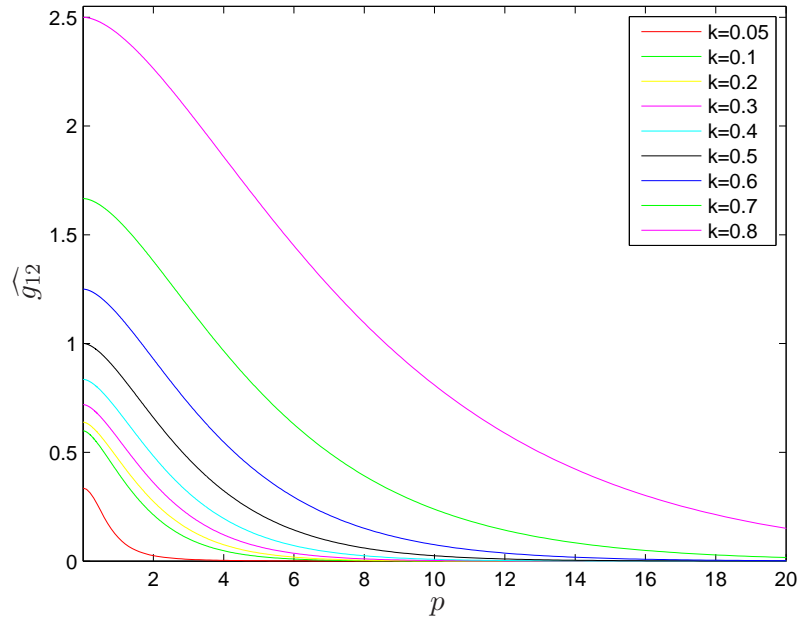


FIGURE A.10 – The function $\widehat{g}_{12}(p)$

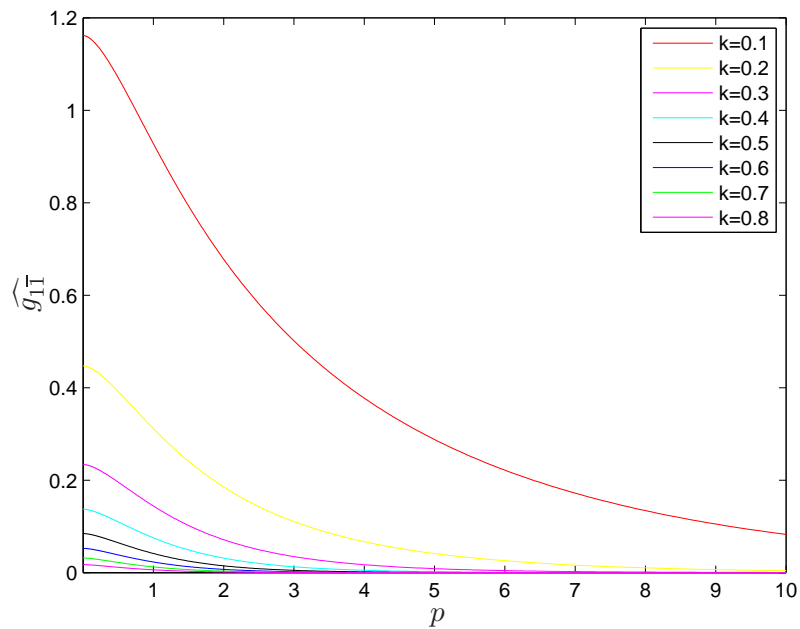
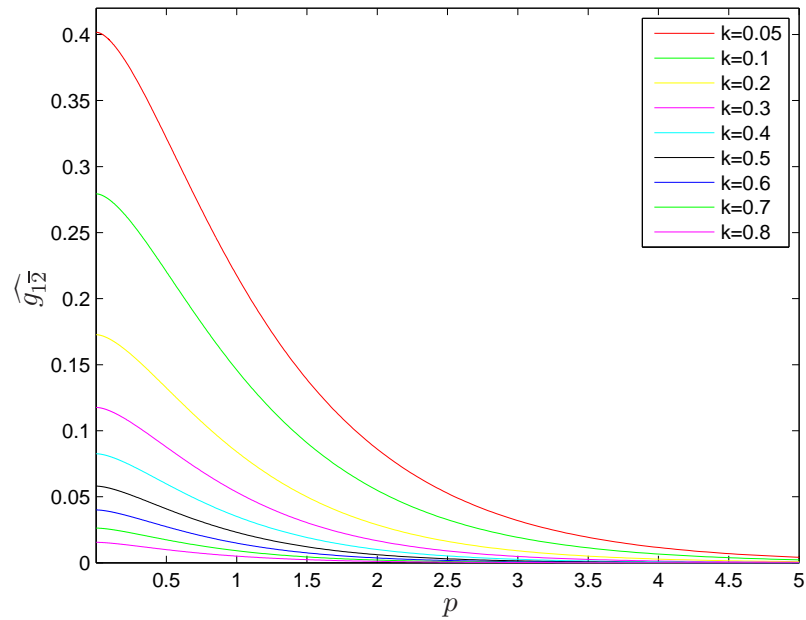
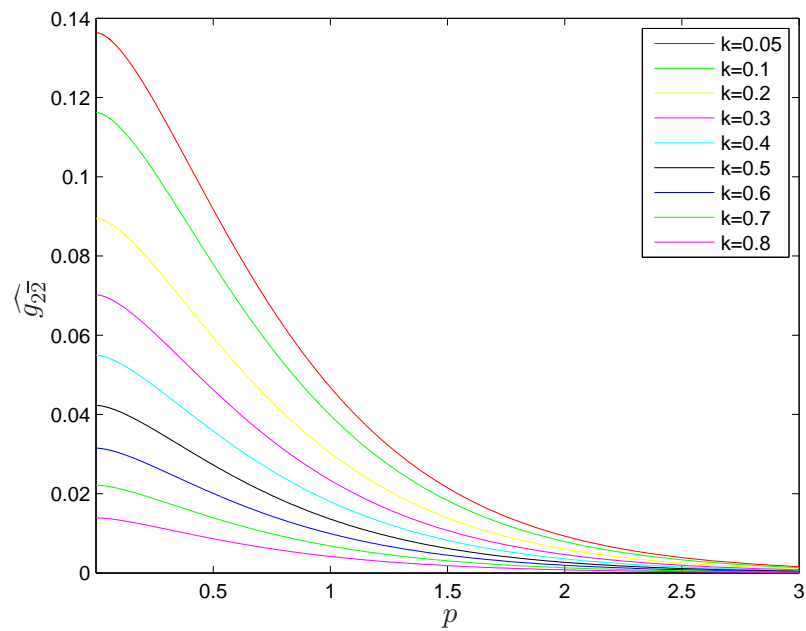
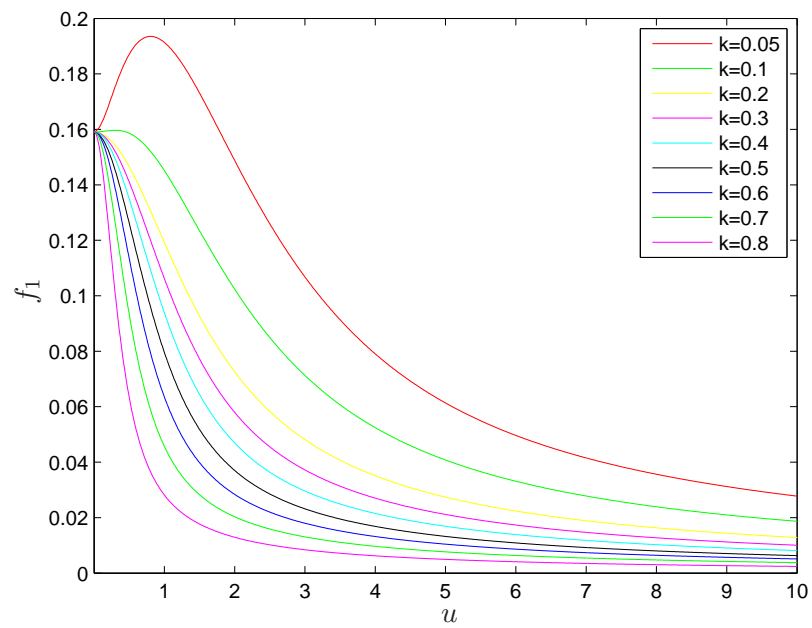
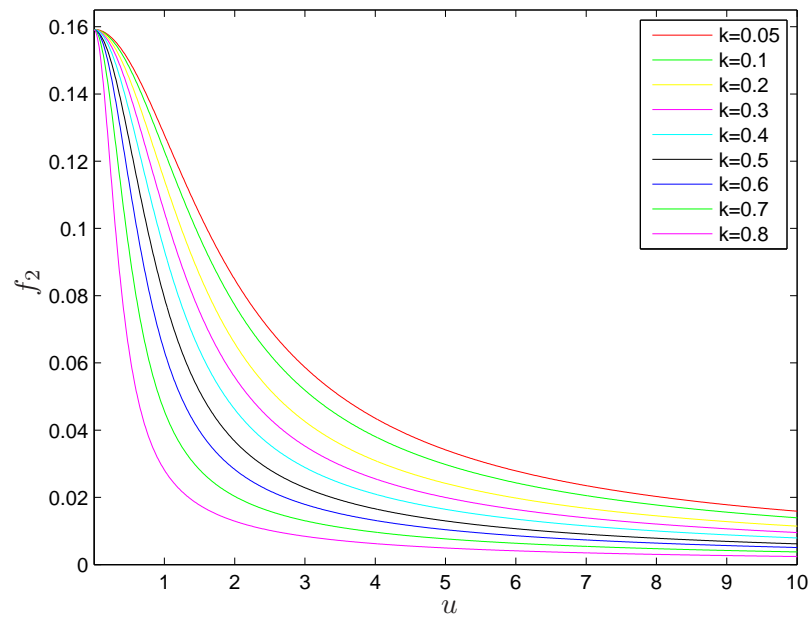
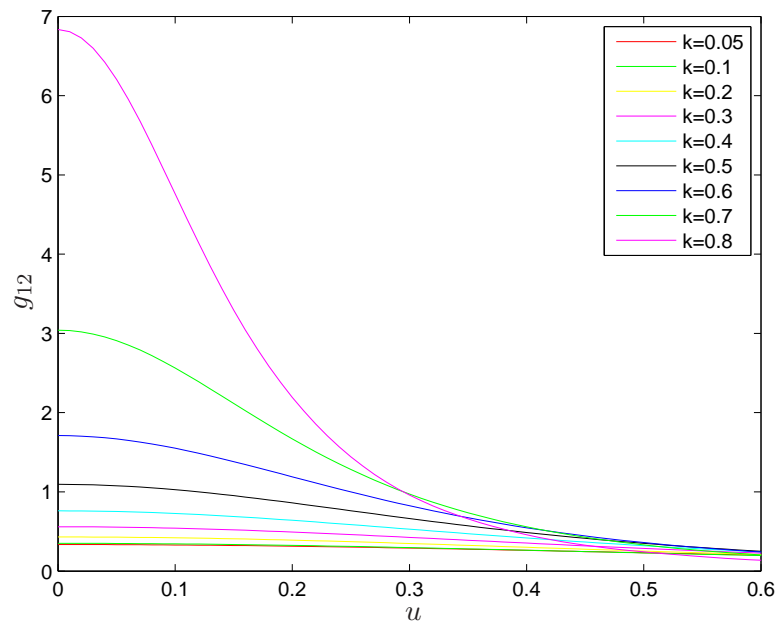
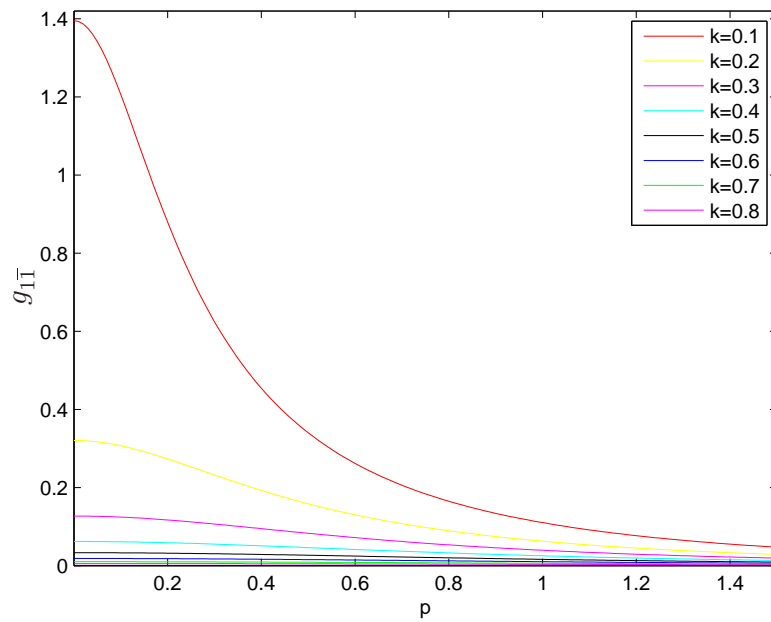
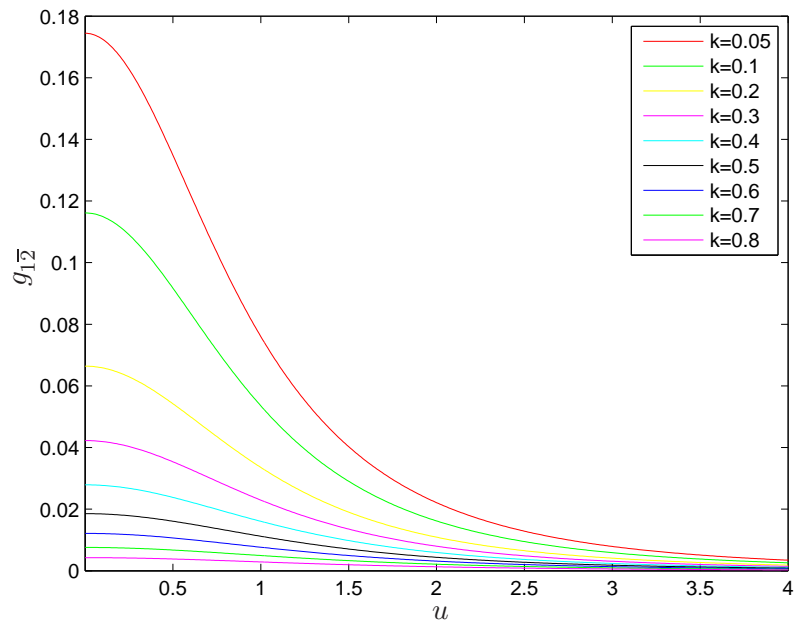
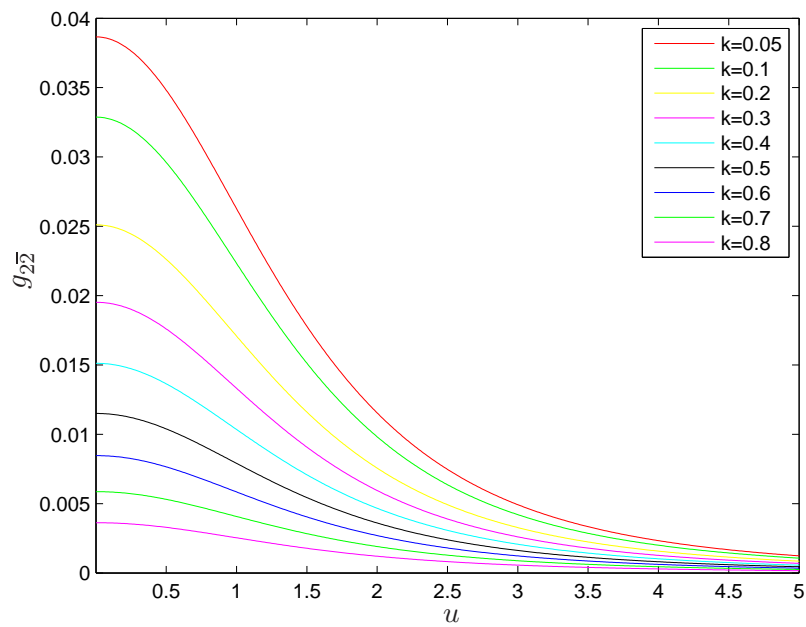


FIGURE A.11 – The function $\widehat{g}_{1\bar{1}}(p)$

FIGURE A.12 – The function $\widehat{g}_{1\bar{2}}(p)$ FIGURE A.13 – The function $\widehat{g}_{2\bar{2}}(p)$

FIGURE A.14 – The function $f_1(u)$ FIGURE A.15 – The function $f_2(u)$

FIGURE A.16 – The function $g_{12}(u)$ FIGURE A.17 – The function $g_{1\bar{1}}(u)$

FIGURE A.18 – The function $g_{1\bar{2}}(u)$ FIGURE A.19 – The function $g_{2\bar{2}}(u)$

Now two types of behavior may be observed on Figures A.8 to A.19 :

- The functions \widehat{F}_1 , \widehat{F}_2 , $\widehat{g}_{1\bar{1}}$, $\widehat{g}_{1\bar{2}}$, $\widehat{g}_{2\bar{2}}$, and similarly f_1 , f_2 , $g_{1\bar{1}}$, $g_{1\bar{2}}$, $g_{2\bar{2}}$, decrease when k increases. This is because for these functions, the two phenomena just described combine their effects : an increase of k induces an increase of the width of the ligament as well as of the distance between fronts 1 and $\bar{1}$, 1 and $\bar{2}$ (that between fronts 2 and $\bar{2}$ remaining unchanged).
- In contrast, the functions \widehat{g}_{12} and g_{12} increase when k increases. For these functions, the two phenomena mentioned above play opposite roles since an increase of k induces an increase of the width of the ligament but a decrease of the distance between fronts 1 and 2. It is not easy to *a priori* predict what the net result will be. Numerical results show that the influence of the distance between the fronts overcomes that of the width of the ligament.

Such elementary considerations cannot however explain the puzzling observation that $\widehat{F}_1(p)$ and $f_1(u)$ become non-monotone functions of p and u for small values of k (see Figures A.8 and A.14). This strange behavior will be studied in detail in Part II.

A.7 Summary and perspectives

This paper was devoted to the evaluation of the distribution of the (mode I) stress intensity factor along the fronts of a system of two coplanar, parallel, identical tensile slit-cracks, after some slight but otherwise arbitrary in-plane perturbation of these fronts. The aim was to lay the grounds for a future study of the deformation of these fronts during propagation of the cracks in a medium with spatially variable fracture properties.

The expression of the perturbed stress intensity factor being provided by *Rice's first formula* (Rice 1989) in terms of six unknown geometry-dependent functions, the *components of the fundamental kernel*, the problem was to evaluate these functions. The original method used to do so circumvented the (probably impossible) determination of the entire solution of the complex 3D elasticity problem implied, and concentrated on the sole quantities of interest. It relied on three basic elements :

- Application of *Rice's second formula* (Rice 1989) for the perturbation of the fundamental kernel to special perturbations of the crack fronts preserving the shape and relative dimensions of the cracks, while modifying their absolute size and orientation. This procedure yielded integro-differential equations on the components of the fundamental kernel.
- Reduction of these integro-differential equations to ordinary nonlinear differential equations through Fourier transform in the direction of the crack fronts.
- Numerical solution of these ordinary differential equations.

The case of a small distance between the two inner crack fronts, or equivalently of a large one between the outer fronts, is of special interest for the study of the deformation of the former fronts during the final coalescence of the cracks. The study of this case raises non-trivial difficulties and will be presented in Part II.

Acknowledgement. This work was supported by the ANR Programme SYSCOMM ANR-09-SYSC-006 “MEPHYSTAR”.

Annexe B

Annexes : Chapitre A

B.1 Appendix : asymptotic behavior of the functions $\widehat{g}_{\alpha\beta}$ near infinity

The asymptotic behavior of the functions $\widehat{g}_{12}(p)$, $\widehat{g}_{1\bar{1}}(p)$, $\widehat{g}_{1\bar{2}}(p)$, $\widehat{g}_{2\bar{2}}(p)$ for $p \rightarrow +\infty$ will be derived from the ODEs (A.30 - A.33).

In these equations, the left-hand sides involve a factor of p which goes to infinity, and therefore dominate over the right-hand sides. Therefore the right-hand sides may simply be discarded in a first approximation, and the conclusion is that

$$\widehat{g}_{12}(p) \propto e^{-(1-k)p} ; \widehat{g}_{1\bar{1}}(p) \propto e^{-2kp} ; \widehat{g}_{1\bar{2}}(p) \propto e^{-(1+k)p} ; \widehat{g}_{2\bar{2}}(p) \propto e^{-2p} \quad \text{for } p \rightarrow +\infty \quad (\text{B.1})$$

where divergent exponentials have been excluded for obvious physical reasons¹.

It is now necessary to study equations (A.30 - A.33) separately.

Study of equation (A.30). Using equations (A.37) and (B.1), one concludes that

$$\left(\widehat{F}_1 + \widehat{F}_2\right) \widehat{g}_{12} \sim \widehat{g}_{12} \propto e^{-(1-k)p} ; \widehat{g}_{1\bar{1}} \widehat{g}_{1\bar{2}}' \propto e^{-(1+3k)p} ;$$

$$\widehat{g}_{1\bar{1}}' \widehat{g}_{1\bar{2}} \propto e^{-(1+3k)p} ; \widehat{g}_{1\bar{2}} \widehat{g}_{2\bar{2}}' \propto e^{-(3+k)p} ; \widehat{g}_{1\bar{2}}' \widehat{g}_{2\bar{2}} \propto e^{-(3+k)p}.$$

It follows that in the right-hand side of equation (A.30), the first term dominates over the other ones which can therefore be discarded; one thus gets

$$p \left[(1-k) \widehat{g}_{12} - \frac{\widehat{g}_{12}''}{1-k} \right] = \widehat{g}_{12} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\widehat{g}_{12}''}{\widehat{g}_{12}} = \left(\frac{\widehat{g}_{12}'}{\widehat{g}_{12}} \right)' + \left(\frac{\widehat{g}_{12}'}{\widehat{g}_{12}} \right)^2 = (1-k)^2 - \frac{1-k}{p}.$$

Expanding $\widehat{g}_{12}'/\widehat{g}_{12}$ in powers of $\frac{1}{p}$ and identifying terms, one then gets the formula

$$\frac{\widehat{g}_{12}'}{\widehat{g}_{12}} = -(1-k) + \frac{1}{2p} - \frac{1}{8(1-k)p^2} + O\left(\frac{1}{p^3}\right),$$

integration of which yields expression (A.38)₁ of the text.

Study of equation (A.31). This study is completely analogous to that of equation (A.30) and leads to expression (A.38)₂ of the text.

Study of equation (A.32). Examining the order of magnitude of the various terms in the right-hand side as was done for equation (A.30), one concludes that the first, fourth and fifth terms are negligible but the second and third are not. Using the asymptotic expressions (A.38)_{1,2} of the functions \widehat{g}_{12} and $\widehat{g}_{1\bar{1}}$ just established, one then puts equation (A.32) in the form

$$p \left[(1+k) \widehat{g}_{1\bar{2}} - \frac{\widehat{g}_{1\bar{2}}''}{1+k} \right] = \gamma_{12} \gamma_{1\bar{1}} \frac{e^{-(1+k)p}}{2p} \left[1 + O\left(\frac{1}{p}\right) \right]. \quad (\text{B.2})$$

A special solution of this equation is $-\frac{\gamma_{12}\gamma_{1\bar{1}}}{4} \frac{e^{-(1+k)p}}{p} \left[1 + O\left(\frac{1}{p}\right) \right]$, and the general solution of the associated homogenous equation is $\gamma_{1\bar{2}} e^{-(1+k)p}$ where $\gamma_{1\bar{2}}$ is a constant. The general solution of equation (B.2) is therefore given by expression (A.38)₃ of the text.

Study of equation (A.33). Using equation (A.37)₂ and the asymptotic expressions (A.38)_{1,3} of the functions \widehat{g}_{12} and $\widehat{g}_{1\bar{2}}$ just established, one puts this equation in the form

$$p \left(2\widehat{g}_{2\bar{2}} - \frac{\widehat{g}_{2\bar{2}}''}{2} \right) = \widehat{g}_{2\bar{2}} + \frac{1+k}{2} \gamma_{12} \gamma_{1\bar{2}} \frac{e^{-2p}}{\sqrt{p}} \left[1 + O\left(\frac{1}{p}\right) \right]. \quad (\text{B.3})$$

1. In fact the functions $\widehat{g}_{\alpha\beta}$ will be seen to be asymptotically proportional not simply to some exponential, but the product of exponential and power functions. The formula $\widehat{\phi}(p) \propto e^{-\kappa p}$ here and below must thus be interpreted as meaning that the function $\widehat{\phi}(p)$ is asymptotically equivalent to an expression of the type $\alpha p^\beta e^{-\kappa p}$ for some constants α and β .

A special solution is $-\frac{1+k}{4} \gamma_{12} \gamma_{1\bar{2}} \frac{e^{-2p}}{\sqrt{p}} \left[1 + O\left(\frac{1}{p}\right) \right]$. Also, the associated homogeneous equation may be solved by putting it in the form

$$\frac{\widehat{g_{2\bar{2}}''}}{\widehat{g_{2\bar{2}}}} = \left(\frac{\widehat{g_{2\bar{2}}'}}{\widehat{g_{2\bar{2}}}} \right)' + \left(\frac{\widehat{g_{2\bar{2}}'}}{\widehat{g_{2\bar{2}}}} \right)^2 = 4 - \frac{2}{p},$$

expanding $\widehat{g_{2\bar{2}}}'/\widehat{g_{2\bar{2}}}$ in powers of $\frac{1}{p}$ and identifying terms; the general solution is found to be $\gamma_{2\bar{2}} \sqrt{p} e^{-2p} \left[1 + \frac{1}{16p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right) \right]$ where $\gamma_{2\bar{2}}$ is a constant. Combining these solutions, one obtains expression (A.38)₄ of the text for the general solution of equation (B.3).

Annexe C

Annexes : Chapitre 4

C.1 Appendix : the sign of the function \widehat{F}

We shall show here that the sign of the function $\widehat{F}(q)$ is identical to that of q . The proof will be provided for positive values of q , the conclusion for negative ones resulting then from the fact that \widehat{F} is an odd function.

In a first step, we rewrite the system (4.4) in the form

$$\begin{cases} q\widehat{F}' &= 4\widehat{g}\widehat{g}' \\ \widehat{g}'' &= 4\widehat{g}\left(1 + \frac{\widehat{F}}{q}\right). \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

Near infinity, the term $\frac{\widehat{F}}{q}$ in the right-hand side of equation (C.1)₂ becomes negligible since \widehat{F} remains finite by equation (4.5)₁. This ODE thus asymptotically becomes $\widehat{g}'' \sim 4\widehat{g}$. The solution is a linear combination of the two exponentials e^{2q} and e^{-2q} , but the former is ruled out by equations (4.5)_{2,3}. Thus \widehat{g} asymptotically behaves like e^{-2q} , which implies that the signs of \widehat{g} and \widehat{g}' are opposite near infinity. Equation (C.1)₁ then implies that \widehat{F}' is negative near infinity. By equation (4.5)₁, this implies that *the function \widehat{F} asymptotically decreases toward the value $\frac{1}{2}$* .

Now assume that the function \widehat{F} becomes zero at some point in the interval $(0, +\infty)$. Let p_0 denote the largest such point. It then follows from the asymptotic decrease of the function \widehat{F} toward $\frac{1}{2}$ that it must have a maximum in the interval $(p_0, +\infty)$, say at p_1 . The function \widehat{F}' vanishes at p_1 , and the function \widehat{F} is positive over the interval $[p_1, +\infty)$. It then follows from equation (C.1)₂ that the signs of \widehat{g} and \widehat{g}'' are identical over the interval $[p_1, +\infty)$. Therefore $(\widehat{g}\widehat{g}')' = \widehat{g}\widehat{g}'' + \widehat{g}'^2 \geq 0$ over this interval, which implies that $\widehat{g}\widehat{g}'$ is a non-decreasing function. Since $\widehat{g}\widehat{g}' < 0$ near infinity, this necessarily remains true over the entire interval $[p_1, +\infty)$. Hence neither \widehat{g} nor \widehat{g}' may vanish over it; by equation (C.1)₁, the same is true of \widehat{F}' . Hence this function cannot be zero at the point p_1 , contradiction.

Hence the function \widehat{F} cannot vanish over the interval $(0, +\infty)$. Thus it must have a constant sign, and this sign is positive by equation (4.5)₁. This concludes the proof.

C.2 Appendix : asymptotic behavior of the function \widehat{g} near infinity

It has already been noted in Appendix C.1 that the function \widehat{g} behaves like e^{-2q} in the limit $q \rightarrow +\infty$, but more accurate information on its asymptotic behavior is now needed.

Equation (4.7) asymptotically reads

$$\frac{\widehat{g}''}{\widehat{g}} = \left(\frac{\widehat{g}'}{\widehat{g}}\right)' + \left(\frac{\widehat{g}'}{\widehat{g}}\right)^2 = 4 + \frac{2}{q} + O(e^{-4q}/q) \quad \text{for } q \rightarrow +\infty.$$

Expanding then \widehat{g}'/\widehat{g} in powers of $\frac{1}{q}$ and identifying terms, one finds that

$$\frac{\widehat{g}'}{\widehat{g}} = -2 - \frac{1}{2q} + \frac{3}{16q^2} + O\left(\frac{1}{q^3}\right),$$

and equation (4.17) follows from there through integration.

Annexe D

Annexes : Chapitre 5

D.1 Asymptotic behavior of the function \bar{f} near infinity

Use of the change of variable $w \equiv qv$ in the definition (5.7)₁ of \bar{f} yields

$$\bar{f}(q) = \frac{1}{4} + 2q \int_0^{+\infty} f\left(\frac{w}{q}\right) \frac{\cos w - 1}{w^2} dw.$$

It follows that in the limit $q \rightarrow +\infty$,

$$\bar{f}(q) \sim \frac{1}{4} + 2q \int_0^{+\infty} f(0) \frac{\cos w - 1}{w^2} dw = \frac{1}{4} + \frac{q}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos w - 1}{w^2} dw$$

where equation (5.3)₁ has been used. The value of the last integral is readily found to be $-\pi/2$ through integration by parts. Equation (5.9)₁ of the text follows from there.

D.2 Statistical description of an ensemble of cracked media

We consider a statistical ensemble of possible “realizations” of an infinite medium containing a pair of coplanar semi-infinite cracks. The elastic properties are the same for all realizations, but the fracture properties of the crack plane and the geometry of the crack fronts vary from one realization to another. To each realization is attached a specific real number ω , which is a random variable spanning some domain Ω of the real line. The *density of probability* of the variable ω is denoted $p(\omega)$. The probability that this variable be in some neighborhood of ω of measure $d\omega$ is thus $p(\omega)d\omega$. The integral of $p(\omega)$ over Ω is unity by definition.

The *mathematical expectation* $E[F(z)]$ of an arbitrary observable $F(z; \omega)$ defined on the crack fronts (depending upon the specific realization considered) is defined as

$$E[F(z)] \equiv \int_{\Omega} F(z; \omega) p(\omega) d\omega. \quad (\text{D.1})$$

Its *two-point autocorrelation function* $E[F(z_1)F(z_2)]$ is similarly defined as

$$E[F(z_1)F(z_2)] \equiv \int_{\Omega} F(z_1; \omega) F(z_2; \omega) p(\omega) d\omega. \quad (\text{D.2})$$

Similar formulæ hold for functions defined in Fourier’s space.

Let $\widetilde{E[F_1 F_2]}(\xi_1, \xi_2)$ denote the double Fourier transform of the function $E[F(z_1)F(z_2)]$. Then

$$\begin{aligned} \widetilde{E[F_1 F_2]}(\xi_1, \xi_2) &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E[F(z_1)F(z_2)] e^{i\xi_1 z_1} e^{i\xi_2 z_2} dz_1 dz_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{\Omega} F(z_1; \omega) F(z_2; \omega) p(\omega) d\omega \right) e^{i\xi_1 z_1} e^{i\xi_2 z_2} dz_1 dz_2 \\ &= \int_{\Omega} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(z_1; \omega) e^{i\xi_1 z_1} dz_1 \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(z_2; \omega) e^{i\xi_2 z_2} dz_2 \right) p(\omega) d\omega \\ &= \int_{\Omega} \widehat{F}(\xi_1; \omega) \widehat{F}(\xi_2; \omega) p(\omega) d\omega \\ &= E[\widehat{F}(\xi_1) \widehat{F}(\xi_2)]. \end{aligned}$$

This establishes equation (5.26)₁ of the text.

Moreover, if the observable is statistically invariant in the direction of the crack front, its two-point autocorrelation function is of the form (5.25) so that

$$\begin{aligned}
\widetilde{E[F_1 F_2]}(\xi_1, \xi_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(z_2 - z_1) e^{i\xi_1 z_1} e^{i\xi_2 z_2} dz_1 dz_2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(z_2 - z_1) e^{i(\xi_1 + \xi_2)z_1} e^{i\xi_2(z_2 - z_1)} dz_1 dz_2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\xi_1 + \xi_2) \mathcal{F}(z) e^{i\xi_2 z} dz \\
&= 2\pi \delta(\xi_1 + \xi_2) \widehat{\mathcal{F}}(\xi_2),
\end{aligned}$$

where δ denotes Dirac's function. This establishes equation (5.26)₂ of the text.

D.3 Asymptotic behavior of the functions $\psi(q_1, q_2)$ and $\chi(q_1, q_2)$ for $q_1, q_2 \rightarrow 0$

The asymptotic behaviors of the functions $\bar{f}(q)$ and $\widehat{g}(q)$ for $q \rightarrow 0$ are identical :

$$\begin{cases} \widehat{g}(q) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2 \ln(|q|)} + O\left(\frac{1}{\ln^2(|q|)}\right) \\ \bar{f}(q) = \widehat{g}(q) + O\left(q^2 \ln(|q|)\right) \end{cases} \quad \text{for } q \rightarrow 0. \quad (\text{D.3})$$

Equation (D.3)₁ was established by Legrand & Leblond (2010b), and equation (D.3)₂ can be proved using their results and the definition (5.7)₁ of the function \bar{f} . It follows from these equations and the definition (5.24)₁ of the function $\psi(q_1, q_2)$ that if q_1 and q_2 are both positive and small,

$$\begin{aligned}
\psi(q_1, q_2) &= \exp \left\{ \int_{q_1}^{q_2} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\ln q} + O\left(\frac{1}{\ln^2 q}\right) \right] \frac{dq}{q} \right\} \\
&= \exp \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{q_2}{q_1} \right) + \ln \left(\frac{\ln q_2}{\ln q_1} \right) + O\left(\frac{1}{\ln q_1}\right) + O\left(\frac{1}{\ln q_2}\right) \right] \\
&= \sqrt{\frac{q_2}{q_1} \frac{\ln q_2}{\ln q_1}} \left[1 + O\left(\frac{1}{\ln q_1}\right) + O\left(\frac{1}{\ln q_2}\right) \right].
\end{aligned}$$

Equation (5.36)₁ of the text directly follows from there for positive values of q_1 and q_2 , and it obviously also holds for negative ones since $\psi(-q_1, -q_2) = \psi(q_1, q_2)$.

Equation (D.3)₂ and the definition (5.24)₂ of the function $\chi(q_1, q_2)$ also imply that for small values of q_1 and q_2 ,

$$\begin{aligned}
\chi(q_1, q_2) &= \exp \left[\int_{q_1}^{q_2} O\left(q^2 \ln(|q|)\right) \frac{dq}{q} \right] \\
&= \exp \left[O\left(q_1^2 \ln(|q_1|)\right) + O\left(q_2^2 \ln(|q_2|)\right) \right]
\end{aligned}$$

and equation (5.36)₂ of the text follows from there.

D.4 Estimate of the correlation length of the perturbations of the crack fronts

The ‘‘correlation length’’ L of the perturbations of the crack fronts is of the order of 2π times the inverse of the typical width (in ξ) of the bell-shaped functions $\widehat{\Delta}^{++}(\xi, a)$ and $\widehat{\Delta}^{+-}(\xi, a)$. By equation (5.39), these spectra are proportional to $\left[\frac{\ln(|\xi a_0|)}{\ln(|\xi a|)} \right]^{2N}$. The function $\xi \mapsto \left[\frac{\ln(\xi a_0)}{\ln(\xi a)} \right]^{2N}$

decreases from 1 to 0 over the interval $[0, 1/a_0]$. Therefore its width is of the order of its integral over this interval so that

$$L \sim 2\pi \left\{ \int_0^{1/a_0} \left[\frac{\ln(\xi a_0)}{\ln(\xi a)} \right]^{2N} d\xi \right\}^{-1}.$$

To get an equivalent of this quantity in the limit $a \ll a_0$, re-write it in the form

$$\begin{aligned} L &\sim 2\pi \left\{ \int_0^{1/a_0} \left[\frac{|\ln(\xi a_0)|}{|\ln(\xi a_0)| + \ln(a_0/a)} \right]^{2N} d\xi \right\}^{-1} \\ &= 2\pi \left(\ln \frac{a_0}{a} \right)^{2N} \left\{ \int_0^{1/a_0} \left[\frac{|\ln(\xi a_0)|}{\frac{|\ln(\xi a_0)|}{\ln(a_0/a)} + 1} \right]^{2N} d\xi \right\}^{-1} \\ &= 2\pi a_0 \left(\ln \frac{a_0}{a} \right)^{2N} \left\{ \int_0^1 \left[\frac{|\ln x|}{\frac{|\ln x|}{\ln(a_0/a)} + 1} \right]^{2N} dx \right\}^{-1} \end{aligned}$$

where the change of variable $x \equiv \xi a_0$ has been used. By Lebesgue's dominated convergence theorem, the last integral goes to the limit

$$C_N \equiv \int_0^1 |\ln x|^{2N} dx \tag{D.4}$$

when a_0/a goes to infinity. This establishes equation (5.40) of the text, with C_N given by equation (D.4).

Annexe E

Implémentation numérique

E.1 Géométrie

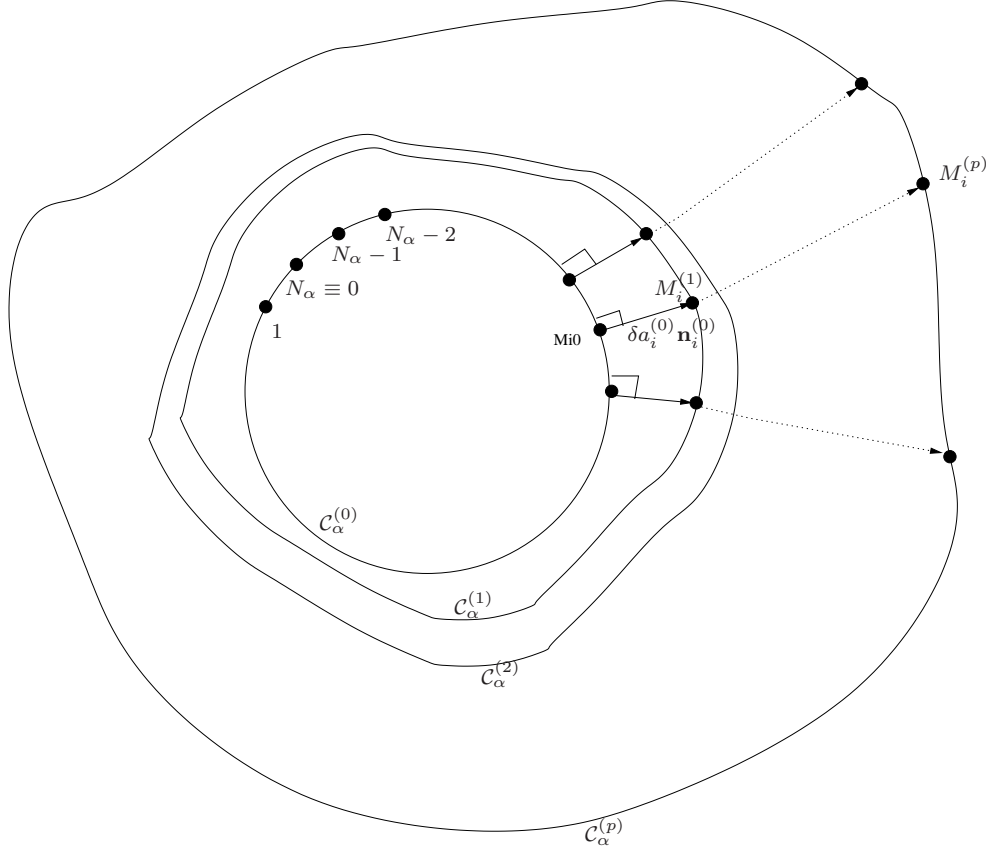


FIGURE E.1 – Construction des maillages successifs entre $\mathcal{C}_\alpha^{(0)}$ et $\mathcal{C}_\alpha^{(p)}$, avec $\alpha = 1, 2$

• Maillage

On construit un maillage pour le front initial $\mathcal{C}^{(0)}$, nous détaillerons par la suite comment procéder pour le cas d'étude des deux fissures circulaires d'un même plan. La figure montre la construction des maillages successifs à partir du maillage du front initial $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{(0)} = \mathcal{C}_1^{(0)} \cup \mathcal{C}_2^{(0)}$ jusqu'au maillage final $\mathcal{C}_{\text{fin}} = \mathcal{C}^{(p)} = \mathcal{C}_1^{(p)} \cup \mathcal{C}_2^{(p)}$. A chaque itération, on impose directement :

$$\delta a_i^{(j)} = \delta a_{\text{max}}^{(j)} \left(\frac{K_{\mathcal{C}^{(j)}}(M)}{K_{\mathcal{C}^{(j)}}^\infty} \right)^\beta \quad \text{pour } j \in 1 : p \text{ en chaque point } M_i^{(j)} \text{ du maillage } \mathcal{C}^{(j)} = \mathcal{C}_1^{(j)} \cup \mathcal{C}_2^{(j)}$$

et l'on construit par récurrence : $M_i^{(j+1)} = M_i^{(j)} + \delta a_i^{(j)} \mathbf{n}_i^{(j)}$

• Distances

Les distances sont évaluées à l'aide des coordonnées cartésiennes lorsqu'il s'agit de deux points (appartenant ou non au même front), à l'aide de la norme euclidienne dans le cas d'un vecteur. On définit cependant plusieurs distances pour distinguer les différents cas, et ce pour des raisons de dimensionnement de matrices car les deux fronts ne contiennent pas nécessairement le même

nombre de noeuds :

- $D_{11}(M_i, M_j)$: si M_i et M_j sur tous deux sur le front \mathcal{C}_1 .
- $D_{22}(M_i, M_j)$: si M_i et M_j sur tous deux sur le front \mathcal{C}_2 .
- $D_{12}(M_i, M_j)$: si M_i appartient au front \mathcal{C}_1 et M_j au front \mathcal{C}_2 .

Remarque : On s'affranchit de l'utilisation de la distance D_{21} en remarquant que pour M_i , appartenant au front \mathcal{C}_1 , et M_j au front \mathcal{C}_2 , on a la relation : $D_{21}(M_j, M_i) = D_{12}(M_i, M_j)$.

• Abscisse curviligne et normales

Les abscisses curvilignes et les normales sont calculées simplement en faisant l'hypothèse que les points de chaque maillage sont reliés par des segments de droite. La normale en un point $M_i^{(j)}$ du front $\mathcal{C}^{(j)} = \mathcal{C}_1^{(j)} \cup \mathcal{C}_2^{(j)}$ est contruite de façon à être normée et dirigée vers l'extérieur de la fissure le long de la bissectrice des droites $(M_{i-1}^{(j)}; M_i^{(j)})$ et $(M_i^{(j)}; M_{i+1}^{(j)})$.

Il aurait été possible de faire une approximation quadratique, et non plus linéaire, de l'arc de cercles reliant deux points du maillage. L'étude, menée par Lazarus (2003) pour le cas d'une fissure unique n'a pas apporté une amélioration significative.

E.2 Evaluation du F.I.C. K et du noyau W

Ces fonctions sont calculées sur la suite de maillages $\{M_{i,i=0..N_1-1}^{(j)}; M_{k,k=0..N_2-1}^{(j)}\} = M_{i,k}^{(j)} \in \mathcal{C}^{(j)}$ de manière incrémentale. Supposons que l'on connaisse ces champs pour un j donné ($j \in \{0 : p\}$) en les points $M_{i,k}^{(j)}$. Le F.I.C. aux points $M_{i,k}^{(j+1)}$ est alors donné par la formule : $K(M_{i,k}^{(j+1)}) = K(M_{i,k}^{(j)}) + \delta K(M_{i,k}^{(j)})$, où la quantité $\delta K(M_{i,k}^{(j)})$ est évaluée par l'équation (6.2) dans laquelle on pose $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{(j)}$ et $M_1 = M_{i,k}^{(j)}$. De même, $W(M_{i,k}^{(j+1)}, M_{l,m}^{(j+1)}) = W(M_{i,k}^{(j)}, M_{l,m}^{(j)}) + \delta W(M_{i,k}^{(j)}, M_{l,m}^{(j)})$ où $\delta W(M_{i,k}^{(j)}, M_{l,m}^{(j)})$ est donné par la formule (6.3) avec $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{(j)}$, $M_1 = M_{i,k}^{(j)}$ et $M_2 = M_{l,m}^{(j)}$.

Intégration et valeur principale Dans un premier temps, il convient de réécrire l'équation (6.2) pour un point quelconque $M_i^{(j)} \in \mathcal{C}^{(j)} = \mathcal{C}_1^{(j)} \cup \mathcal{C}_2^{(j)}$ en utilisant la relation de Chasles comme suit :

$$\begin{aligned} 2\pi \delta K(M_i) &= VP \int_{\mathcal{C}} \frac{W(M, M_i)}{D^2(M, M_i)} K(M) [\delta a(M) - \delta_* a(M)] ds(M) \\ &= \sum_{i=0}^{N_i-1} VP \int_{M_i}^{M_{i+1}} \varphi(M) ds(M) \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

où $N_i = N_1$ si $M_i^{(j)}$ appartient au front $\mathcal{C}_1^{(j)}$, $N_i = N_2$ si $M_i^{(j)}$ appartient au front $\mathcal{C}_2^{(j)}$
 et $\varphi(M) = \frac{W(M, M_i) K(M) [\delta a(M) - \delta_* a(M)]}{D^2(M, M_i)}$.

L'intérêt majeur de cette décomposition est de se ramener à des intégrales dont les bornes sont les noeuds du maillage et ainsi de pouvoir traiter indépendamment les différentes contributions

suivant le comportement particulier de l'intégrande. On pourra de ce fait adopter un traitement spécifique pour gérer le voisinage des valeurs principales.

Il faut ici être prudent pour l'évaluation de l'intégrale au sens des valeurs principales. On doit en effet traiter de façon particulière l'intégration sur l'intervalle $]M_{i-1}; M_{i+1}[$ autour du point M_i , soit :

$$\sum_{k=0}^{N_i-1} VP \int_{M_i}^{M_{i+1}} \varphi(M) ds(M) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i-1 \\ k \neq i}}^{N_i} \int_{M_k}^{M_{k+1}} \varphi(M) ds(M) + VP \int_{M_{i-1}}^{M_{i+1}} \varphi(M) ds(M) \quad (\text{E.2})$$

- La partie régulière s'approxime classiquement par interpolation linéaire, à savoir, pour $k \neq i$ et $k \neq i-1$:

$$\int_{M_i}^{M_{i+1}} \varphi(M) ds(M) \simeq \frac{\varphi(M_k) + \varphi(M_{k+1})}{2} (s(M_{k+1}) - s(M_k)) \quad (\text{E.3})$$

- Pour le traitement de la valeur principale, on peut remarquer que le comportement de l'intégrande au voisinage du point M_i est de la forme $\varphi(M) = \frac{\tilde{\varphi}(M)}{(s(M) - s(M_i))^2}$ avec $\tilde{\varphi}(M_i) = 0$. Il semble alors pertinent d'interpoler la fonction φ par la fonction $s(M) \mapsto (a s(M) - b)(s(M) - s(M_i))$, avec a_i et b_i sont deux constantes, obtenues à partir des valeurs de $\varphi(M_{i-1})$ et $\varphi(M_{i+1})$, et dépendant du point M_i où est calculé le F.I.C.. Le calcul de la valeur principale devient :

$$\begin{aligned} VP \int_{M_i}^{M_{i+1}} \varphi(M) ds(M) &\simeq VP \int_{M_i}^{M_{i+1}} \frac{a_i s(M) - b_i}{s(M) - s(M_i)} ds(M) \\ &= a_i (s(M_{i+1}) - s(M_{i-1})) + (a_i s(M_i) - b_i) \ln \left| \frac{s(M_{i+1}) - s(M_i)}{s(M_{i-1}) - s(M_i)} \right| \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

où a_i et b_i sont donnés par les formules (E.4) de l'annexe (F).

Ceci nous conduit au résultat suivant :

$$\begin{aligned} 2\pi \delta K(M_i) &\simeq \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i-1 \\ k \neq i}}^{N_i} \frac{\varphi(M_k) + \varphi(M_{k+1})}{2} (s(M_{k+1}) - s(M_k)) \\ &+ a_i (s(M_{i+1}) - s(M_{i-1})) + (a_i s(M_i) - b_i) \ln \left| \frac{s(M_{i+1}) - s(M_i)}{s(M_{i-1}) - s(M_i)} \right| \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

En ce qui concerne l'évaluation de $\delta W(M_i, M_k)$ issue de l'équation (6.3), on procède de façon analogue. On pose :

$$\phi(M) \equiv \frac{W(M, M_i)W(M, M_k)}{D^2(M; M_i)D^2(M; M_k)} [\delta a(M) - \delta_{**} a(M)] ds(M)$$

Une décomposition du front est nécessaire comme précédemment. Pour tout segment ne contenant pas les points M_i et M_k , on effectue des interpolations linéaires. Par ailleurs, l'intégration au voisinage des deux valeurs principales se fait indépendamment l'une de l'autre mais de façon analogue avec ϕ , excepté lorsque les intervalles d'intégration $]M_{i-1}; M_{i+1}[$ et $]M_{k-1}; M_{k+1}[$ ne sont pas disjoints. Deux configurations sont alors possibles :

- $M_i = M_k$: les deux points sont confondus : $\delta W(M_i; M_i) = 0$. En effet, d'après (2.10), $W(M_i; M_i)$ prend une valeur universelle égale à 1.
- $M_k = M_{i+1}$: les deux points sont adjacents. Le domaine d'intégration est délimité par

$s(M_{i-1})$ et $s(M_{i+2})$. L'intégrande $\phi(M)$ se comporte comme : $\frac{\tilde{\phi}(M)}{(s(M) - s(M_i))^2 (s(M) - s(M_{i+1}))^2}$

avec $\tilde{\phi}(M_i) = \tilde{\phi}(M_{i+1}) = 0$. On peut donc raisonnablement interpoler $\tilde{\phi}$ sous la forme $\tilde{\phi} = (s(M) - s(M_i))(s(M) - s(M_{i+1}))(\tilde{a}_i s(M) - \tilde{b}_i)$, les constantes \tilde{a}_i et \tilde{b}_i étant déterminées à partir des valeurs de $\phi(M_{i-1})$ et $\phi(M_{i+2})$. L'intégration sur le domaine considéré conduit à :

$$\begin{aligned} VP \int_{M_{i-1}}^{M_{i+2}} \phi(M) ds(M) &\simeq VP \int_{M_{i-1}}^{M_{i+2}} \frac{\tilde{a}_i s(M) - \tilde{b}_i}{(s(M) - s(M_i))(s(M) - s(M_{i+1}))} ds(M) \\ &= \frac{\tilde{a}_i s(M_i) - \tilde{b}_i}{s(M_i) - s(M_{i+1})} \ln \left| \frac{s(M_{i+2}) - s(M_i)}{s(M_{i-1}) - s(M_i)} \right| \\ &\quad + \frac{\tilde{a}_i s(M_{i+1}) - \tilde{b}_i}{s(M_{i+1}) - s(M_i)} \ln \left| \frac{s(M_{i+2}) - s(M_{i+1})}{s(M_{i-1}) - s(M_{i+1})} \right| \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

où les constantes \tilde{a}_i et \tilde{b}_i sont explicitées dans l'annexe (F).

E.3 Remaillage

Une procédure de remaillage a été mise en place ; le but étant de redistribuer les noeuds de façon à éviter les phénomènes de zones d'accumulation et de zones appauvries en points. On choisit d'augmenter la concentration de noeuds dans les zones où le F.I.C. prend ses valeurs maximales. En particulier, dans le cas de la coalescence, on va raffiner le maillage dans les zones à l'avant des fronts. Une fois les noeuds répartis, on utilise des interpolations quadratiques pour estimer les valeurs des champs K et W aux nouveaux noeuds.

Annexe F

Valeur principale

Il ne s'agit pas ici de présenter de manière rigoureuse et exhaustive la notion de Valeur Principale au sens de Cauchy, mais simplement de donner une idée d'un tel concept et de son intérêt dans la théorie de Bueckner-Rice.

Il est bien connu que les fonctions de Riemann $x \mapsto x^\alpha$ ne sont intégrables en 0 qu'à la condition nécessaire et suffisante que $\alpha > -1$. En particulier le cas limite $\alpha = -1$ pose problème puisqu'une primitive d'une telle fonction est \ln qui n'est pas bornée dans le voisinage de 0.

Cependant, si l'on considère $I : \varepsilon \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \int_{\substack{[a;b] \\ |x|>\varepsilon}} \frac{dx}{x}$, on peut donner un sens à $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} I(\varepsilon)$ puisque

$I(\varepsilon) \equiv \ln \left| \frac{b}{a} \right|$; on note alors :

$$VP \int_{[a;b]} \frac{dx}{x} := \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{\substack{[a;b] \\ |x|>\varepsilon}} \frac{dx}{x}$$

Plus généralement, si $(a; b)$ désigne un intervalle de \mathbb{R} , c un point de $]a; b[$, f une fonction de $(a; b) \setminus \{c\}$ dans un espace de Banach F , intégrable sur $(a; c - \varepsilon)$ et sur $(c + \varepsilon'; b)$ (ε et ε' strictement positifs quelconques) mais non nécessairement sur $(a; b)$, alors on dit que l'intégrale

de f est convergente en Valeur Principale (en c) si et seulement si $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \left\{ \int_{(a; c-\varepsilon]} + \int_{[c+\varepsilon; b)} \right\} f$

existe. On peut montrer, de façon évidente, que pour que la Valeur Principale de f existe, il faut et il suffit que f soit, au voisinage de c , la somme d'une fonction antisymétrique f_1 et d'une fonction symétrique f_2 telle que $\int_{]c; b)} f_2$ soit convergente. Cette décomposition est toujours

possible puisque se résumant à décomposer en partie impaire et paire une fonction une fois le problème ramené au voisinage de 0 par un changement de variable. La symétrie de l'intervalle d'intégration permet d'annuler la partie délicate contenant f_1 (au moins au voisinage du point gênant) et de ramener celle contenant f_2 à l'expression précédente.

Pour ce qui nous concerne, voici le détail de la façon dont est utilisée cette notion : pour une utilisation de la formule (6.2) sur le contour \mathcal{C} pour lequel la valeur principale est prise en s_k , on a : $a \equiv s(M_{i-1}) - s(M_i)$ et $b \equiv s(M_{i+1}) - s(M_i)$ d'après E.4 soit :

$$\begin{aligned}
VP \int_{s(M_{i-1})}^{s(M_{i+1})} \varphi(s) ds &\simeq VP \int_{s(M_{i-1})}^{s(M_{i+1})} \frac{a_i s - b_i}{s(M) - s(M_i)} ds \\
&= VP \int_{[a;b]} \frac{a_i(s(M) + s(M_i)) - b_i}{s(M)} ds(M) \\
&= (a_i s(M_i) - b_i) \cdot VP \int_{[a;b]} \frac{ds}{s(M)} + a_i \int_{[a;b]} ds(M) \\
&= (a_i s(M_i) - b_i) \ln \left| \frac{b}{a} \right| + a_i (b - a)
\end{aligned} \tag{F.1}$$

Par ailleurs la relation 6.3 demande l'intégration en valeur principale de la fonction suivante :

$$\phi(s) \simeq \frac{\tilde{a}_i s(M) - \tilde{b}_i}{(s(M) - s(M_i))(s(M) - s(M_{i+1}))}$$

On a :

$$\begin{aligned}
VP \int_{s(M_{i-1})}^{s(M_{i+2})} \phi(M) ds(M) &\simeq VP \int_{s(M_{i-1})}^{s(M_{i+2})} \frac{\tilde{a}_i s(M) - \tilde{b}_i}{(s(M) - s(M_i))(s(M) - s(M_{i+1}))} ds \\
&= VP \int_{s(M_{i-1})}^{s(M_{i+2})} \left[\frac{A_i}{s(M) - s(M_i)} + \frac{B_i}{s(M) - s(M_{i+1})} \right] ds \\
&= A_i \cdot VP \int_{[a';b']} \frac{ds(M)}{s(M)} + B_i \cdot VP \int_{[a'';b'']} \frac{ds(M)}{s(M)} \\
&= A_i \ln \left| \frac{b'}{a'} \right| + B_i \ln \left| \frac{b''}{a''} \right|
\end{aligned} \tag{F.2}$$

sous les conditions suivantes :

$$A_i = \frac{\tilde{a}_i s(M_i) - \tilde{b}_i}{s(M_i) - s(M_{i+1})} \quad a' = s(M_{i-1}) - s(M_i) \quad b' = s(M_{i+2}) - s(M_i) \tag{F.3}$$

$$B_i = \frac{\tilde{a}_i s(M_{i+1}) - \tilde{b}_i}{s(M_{i+1}) - s(M_i)} \quad a'' = s(M_{i-1}) - s(M_{i+1}) \quad b'' = s(M_{i+2}) - s(M_{i+1}) \tag{F.4}$$

Bibliographie

- Barenblatt, G. (1962), The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture, Vol. 7 of *Advances in Applied Mechanics*, Elsevier, pp. 55 – 129.
- Bonamy, D., Santucci, S. & Ponsou, L. (2008), ‘Crackling dynamics in material failure as the signature of a self-organized dynamic phase transition’, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 045501.
- Bonnet, M. (1994), *Equations intégrales et éléments de frontière en mécanique des solides*, Ecole Polytechnique (Palaiseau), chapter 2 et 5.
- Bower, A. F. & Ortiz, M. (1990), ‘Solution of three-dimensional crack problems by a finite perturbation method’, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **38**(4), 443 – 480.
- Bower, A. F. & Ortiz, M. (1991), ‘A three-dimensional analysis of crack trapping and bridging by tough particles’, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **39**(6), 815 – 858.
- Bower, A. F. & Ortiz, M. (1993), ‘An analysis of crack trapping by residual stresses in brittle solids’, *ASME Journal of Applied Mechanics* **60**, 175–182.
- Broberg, K. (1999), ‘Cracks and fracture’, *Academic Press, New York* .
- Bueckner, H. F. (1987), ‘Weight functions and fundamental fields for the penny-shaped and the half-plane crack in three-space’, *International Journal of Solids and Structures* **23**(1), 57–93.
- Charles, Y., Vandembroucq, D., Hild, F. & Roux, S. (2004), ‘Material-independent crack arrest statistics’, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **52**(7), 1651–1669.
- Chen, Y. & Lee, K. Y. (2002), ‘Solution of flat crack problem by using variational principle and differential–integral equation’, *International Journal of Solids and Structures* **39**(23), 5787–5797.
- Cotterell, B. & Rice, J. R. (1980), ‘Slightly curved or kinked cracks’, *International Journal of Fracture* **16**(2).
- Delaplace, A., Schmittbuhl, J. & Maloy, K. J. (1999), ‘High resolution description of a crack front in a heterogeneous plexiglas block’, *Physical Review E (Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics)* **60**(2), 1337–43.
- Fabrikant, V. (1987), ‘Close interaction of coplanar circular cracks in an elastic medium’, *Acta Mechanica* **67**, 39–59.

- Fares, N. (1989), 'Crack fronts trapped by arrays of obstacles : numerical solutions based on surface integral representation', *Transactions of the ASME. Journal of Applied Mechanics* **56**(4), 837–843.
- Favier, E., Lazarus, V. & Leblond, J.-B. (2006a), 'Coplanar propagation paths of 3d cracks in infinite bodies loaded in shear', *International Journal of Solids and Structures* **43**(7-8), 2091 – 2109.
- Favier, E., Lazarus, V. & Leblond, J.-B. (2006b), 'Statistics of the deformation of the front of a tunnel-crack propagating in some inhomogeneous medium', *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **54**(7), 1449 – 1478.
- Fleck, N., Kang, K. & Ashby, M. (1994), 'Overview no. 112 : The cyclic properties of engineering materials', *Acta Metallurgica et Materialia* **42**(2), 365 – 381.
URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0956715194904936>
- Gao, H. (1988), 'Nearly circular shear mode cracks', *International Journal of Solids and Structures* **24**(2), 177–193.
- Gao, H. & Rice, J. R. (1986), 'Shear stress intensity factors for planar crack with slightly curved front', *ASME Journal of Applied Mechanics* **53**(4), 774–778.
- Gao, H. & Rice, J. R. (1987a), 'Nearly circular connections of elastic half spaces', *ASME Journal of Applied Mechanics* **54**(4), 627–634.
- Gao, H. & Rice, J. R. (1987b), 'Somewhat circular tensile cracks', *International Journal of Fracture* **33**(3), 155–174.
- Gao, H. & Rice, J. R. (1989), 'A first-order perturbation analysis of crack trapping by arrays of obstacles', *Transactions of the ASME* **56**, 828–836.
- Gao, H., Rice, J. R. & Lee, J. (1991), 'Penetration of a quasi-statically slipping crack into a seismogenic zone of heterogeneous fracture resistance', *J. Geophys. Res.* **96**, 21535–21548.
- Goldstein, R. V. & Salganik, R. L. (1974), 'Brittle fracture of solids with arbitrary cracks', *International Journal of Fracture* **10**, 507–523.
- Gradshteyn, I. & Ryzhik, I. (1980), 'Table of integrals, series, and products', *Academic Press, New York* .
- Gravouil, A., Moes, N. & Belytschko, T. (2002), 'Non-planar 3d crack growth by the extended finite element and level sets. ii. level set update', *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **53**(11), 2569–86.
- Griffith, A. (1920), 'The phenomena of rupture and flow in solids', *Philosophical Transactions of the Royal Society* **221**, 163–198.
- Hwu, C. (1991), 'Collinear cracks in anisotropic bodies', *Int. J. of Fracture* **52**, 239–256.
- Irwin, G. (1957), 'Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing of a plate', *ASME Journal of Applied Mechanics* **24**, 361–364.

- Isida, M., Hirota, K., Noguchi, H. & Yoshida, T. (1985), 'Two parallel elliptical cracks in an infinite solid subjected to tension', *International Journal of Fracture* **27**, 31–48.
- Kachanov, M. & Laures, J.-P. (1989), 'Three-dimensional problems of strongly interacting arbitrarily located penny-shaped cracks', *International Journal of Fracture* **41**, 289–313.
- Katzav, E. & Adda-Bedia, M. (2006), 'Roughness of tensile crack fronts in heterogenous materials', *EPL (Europhysics Letters)* **76**(3), 450.
- Lazarus, V. (2003), 'Brittle fracture and fatigue propagation paths of 3d plane cracks under uniform remote tensile loading', *International Journal of Fracture* **122**, 23–46.
- Lazarus, V. & Leblond, J.-B. (1998a), 'Three-dimensional crack-face weight functions for the semi-infinite interface crack. I. Variation of the stress intensity factors due to some small perturbation of the crack front', *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **46**(3), 489–511.
- Lazarus, V. & Leblond, J.-B. (1998b), 'Three-dimensional crack-face weight functions for the semi-infinite interface crack. II. Integrodifferential equations on the weight functions and resolution', *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **46**(3), 513–536.
- Lazarus, V. & Leblond, J.-B. (2002a), 'In-plane perturbation of the tunnel-crack under shear loading. I : bifurcation and stability of the straight configuration of the front.', *International Journal of Solids and Structures* **39**(17), 4421–4436.
- Lazarus, V. & Leblond, J.-B. (2002b), 'In-plane perturbation of the tunnel-crack under shear loading. II : determination of the fundamental kernel.', *International Journal of Solids and Structures* **39**(17), 4437–4455.
- Leblond, J.-B., Karma, A. & Lazarus, V. (2011), 'Theoretical analysis of crack front instability in mode I+III', *Journal of Mechanics Physics of Solids* **59**, 1872–1887.
- Leblond, J.-B., Lazarus, V. & Mouchrif, S.-E. (1999), 'Crack paths in three-dimensional elastic solids. II. Three-term expansion of the stress intensity factors - Applications and perspectives', *International Journal of Solids and Structures* **36**(1), 105–142.
- Leblond, J. B., Mouchrif, S. E. & Perrin, G. (1996), 'The tensile tunnel-crack with a slightly wavy front', *International Journal of Solids and Structures* **33**(14), 1995–2022.
- Leblond, J.-B. & Torlai, O. (1992), 'The stress field near the front of an arbitrarily shaped crack in a three-dimensional elastic body', *Journal of Elasticity* **29**(2), 97–131.
- Legrand, L. & Leblond, J. (2010a), 'Evolution of the shape of the fronts of a pair of semi-infinite cracks during their coplanar coalescence', *ZAMM* **90**(10-11), 821–836.
- Legrand, L. & Leblond, J. (2010b), 'In-plane perturbation of a system of two coplanar slit-cracks – ii : Case of close inner crack fronts or distant outer ones', *International Journal of Solids and Structures* **47**(25-26), 3504 – 3512.
- Leguillon, D. & Sanchez, E. (1987), *Computation of singular solutions in elliptic problems and elasticity*, Masson (Paris).

- Lemaître, J. & Chaboche, J.-L. (1985), *Mécanique des matériaux solides*, Dunod.
- Moes, N., Gravouil, A. & Belytschko, T. (2002), ‘Non-planar 3d crack growth by the extended finite element and level sets. I. Mechanical model’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **53**(11), 2549–68.
- Muskhelishvili, N. (1953), ‘Some basic problems of the mathematical theory of elasticity’, *Noordhoff, Groningen*.
- Nazarov, S. (1989), ‘Derivation of variational inequality for the shape of the small increment of a mode I crack’, *Mech. Solids* **24**, 145–152.
- Paris, P. & Erdogan, F. (1963), ‘A critical analysis of crack propagation laws’, *Journal of Basic Engineering, Transaction of the American Society of Mechanical Engineering, Series D* **85**(3), 528–534.
- Perrin, G. & Rice, J. R. (1994), ‘Disordering of a dynamic planar crack front in a model elastic medium of randomly variable toughness’, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **42**(6), 1047–1064.
- Piccolroaz, A., Mishuris, G. & Movchan, A. (2007), ‘Evaluation of the Lazarus–Leblond constants in the asymptotic model of the interfacial wavy crack’, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **55**(8), 1575 – 1600.
- Pindra, N., Lazarus, V. & Leblond, J.-B. (2008), ‘The deformation of the front of a 3d interface crack propagating quasistatically in a medium with random fracture properties’, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **56**(4), 1269 – 1295.
- Pindra, N., Lazarus, V. & Leblond, J.-B. (2010a), ‘Geometrical disorder of the fronts of a tunnel-crack propagating in shear in some heterogeneous medium’, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **58**(3), 281 – 299.
- Pindra, N., Lazarus, V. & Leblond, J.-B. (2010b), ‘In-plane perturbation of a system of two coplanar slit-cracks - I : Case of arbitrarily spaced crack fronts’, *International Journal of Solids and Structures* **47**(25-26), 3489–3503.
- Ponson, L. (2009), ‘Depinning transition in the failure of inhomogeneous brittle materials’, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 055501(1)–055501(4).
- Ramanathan, S., Ertas, D. & Fisher, D. (1997), ‘Quasistatic crack propagation in heterogeneous media’, *Physical Review Letters* **79**(5), 873–876.
- Ramanathan, S. & Fisher, D. S. (1997), ‘Dynamics and instabilities of planar tensile cracks in heterogeneous media’, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 877–880.
- Rice, J. R. (1985), ‘First-order variation in elastic fields due to variation in location of a planar crack front’, *ASME Journal of Applied Mechanics* **52**(3), 571–579.
- Rice, J. R. (1989), Weight function theory for three-dimensional elastic crack analysis, in R. P. Wei & R. P. Gangloff, eds, ‘Fracture Mechanics : Perspectives and Directions (Twentieth Symposium)’, American Society for Testing and Materials STP 1020, Philadelphia, USA, pp. 29–57.

- Roux, S., Vandembroucq, D. & Hild, F. (2003), 'Effective toughness of heterogeneous brittle materials', *European Journal of Mechanics - A/Solids* **22**(5), 743 – 749.
- Sadowsky, M. (1956), 'Stress concentration caused by multiple punches and cracks', *ASME J. Appl. Mech.* **23**, 80–84.
- Schmittbuhl, J., Roux, S., Vilotte, J.-P. & Maloy, K. (1995), 'Interfacial crack pinning : Effect of nonlocal interactions', *Phys. Rev. Lett.* **74**, 1787–1790.
- Schmittbuhl, J. & Vilotte, J.-P. (1999), 'Interfacial crack front wandering : influence of quenched noise correlations', *Physica A* **270**(1-2), 42–56.
- Sukumar, N., Chopp, D. L. & Moran, B. (2003), 'Extended finite element method and fast marching method for three-dimensional fatigue crack propagation', *Engineering Fracture Mechanics* **70**(1), 29–48.
- Tada, H., Paris, P. C. & Irwin, G. R. (2000), *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, Third Edition, American Society of Mechanical Engineers, New York.
- Tanguy, A., Gounelle, M. & Roux, S. (1998), 'From individual to collective pinning : Effect of long-range elastic interactions', *Physical Review E (Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics)* **58**(2), 1577–1590.
- Willis, J. & Movchan, A. (1995), 'Dynamic weight functions for a moving crack. i. mode I loading', *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **43**(3), 319 – 341.
- Xu, G., Bower, A. F. & Ortiz, M. (1994), 'An analysis of non-planar crack growth under mixed mode loading', *International Journal of Solids and Structures* pp. 2167–2193.
- Xu, G. & Ortiz, M. (1993), 'A variational boundary integral method for the analysis of 3-d cracks of arbitrary geometry modelled as continuous distributions of dislocation loops', *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **36**(21), 3675–701.
- Yokobori, T., Ohashi, M. & Ichikawa, M. (1965), 'The interaction of two collinear asymmetrical cracks', *Rep. Res. Inst. Strength Fracture Materials (Tohoku University)* **1**, 33–39.
- Zhan, S. & Wang, T. (2006), 'Interactions of penny-shaped cracks in three-dimensional solids', *Acta Mechanica Sinica* **22**, 341–353.