HAL
open science

Dynamique des structures à interfaces non linéaires : Extension des techniques de balance harmonique

Vincent Jaumouillé

To cite this version:

Vincent Jaumouillé. Dynamique des structures à interfaces non linéaires : Extension des techniques de balance harmonique. Autre. Ecole Centrale de Lyon, 2011. Français. NNT : 2011ECDL0007 . tel-00670283

HAL Id: tel-00670283

https://theses.hal.science/tel-00670283v1

Submitted on 15 Feb 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Numéro d'ordre : 2011 - 07 Année 2011

THESE DE DOCTORAT

de l'École Centrale de Lyon

PRÉSENTÉE À

L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

SPÉCIALITÉ : MÉCANIQUE

Par

Vincent JAUMOUILLÉ

DYNAMIQUE DES STRUCTURES À INTERFACES NON LINÉAIRES
EXTENSION DES TECHNIQUES DE BALANCE HARMONIQUE

Présentée et soutenue publiquement le 22 mars 2011 devant le jury d'examen :

O. Allix	Professeur, LMT, ENS Cachan	Rapporteur
A. Berlioz	Professeur, ICA, Université de Toulouse	Rapporteur
J.-L. Loubet	Directeur de Recherche, LTDS, École Centrale de Lyon	Examinateur
B. Petitjean	Expert, EADS Innovation Works	Examinateur
L. Jézéquel	Professeur, LTDS, École Centrale de Lyon	Directeur de Thèse
J.-J. Sinou	Professeur, LTDS, École Centrale de Lyon	Directeur de Thèse

ÉCOLE CENTRALE LYON

Direction de la recherche

Liste des personnes Habilitées à Diriger des Recherches en poste à l'Ecole Centrale de Lyon

Nom-Prénom	*Corps grade*	Laboratoire ou à défaut département ECL	Etablissement
AURIOL Philippe	*professeur*	AMPERE	ECL
BEROUAL Abderrahmane	*professeur*	AMPERE	ECL
BURET François	*professeur*	AMPERE	ECL
JAFFREZIC-RENAULT Nicole	*directeur de recherche*	AMPERE	CNRS/ECL
KRÄHENBÜHL Laurent	*directeur de recherche*	AMPERE	CNRS/ECL
MARTELET Claude	*professeur*	AMPERE	ECL
NICOLAS Alain	*professeur*	AMPERE	ECL
NICOLAS Laurent	*directeur de recherche*	AMPERE	CNRS/ECL
SCORLETTI Gérard	*professeur*	AMPERE	ECL
SIMONET Pascal	*chargé de recherche*	AMPERE	CNRS/ECL
THOMAS Gérard	*professeur*	AMPERE	ECL
VOLLAIRE Christian	*professeur*	AMPERE	ECL
		Nbre Ampère 12	
HELLOUIN Yves	*maître de conférences*	DER EEA	ECL
LE HELLEY Michel	*professeur*	DER EEA	ECL
		Nbre DER EEA 2	
GUIRALDENQ Pierre	*professeur émérite*	DER STMS	ECL
VINCENT Léo	*professeur*	DER STMS	ECL
		Nbre DER STMS 2	
LOHEAC Jean-Pierre	*maître de conférences*	ICJ	ECL
MAITRE Jean-François	*professeur émérite*	ICJ	ECL
MARION Martine	*professeur*	ICJ	ECL
MIRONESCU Elisabeth	*professeur*	ICJ	ECL
MOUSSAOUI Mohand	*professeur*	ICJ	ECL
MUSY François	*maître de conférences*	ICJ	ECL
ZINE Abdel-Malek	*maître de conférences*	ICJ	ECL
		Nbre ICJ 7	
DAVID Bertrand	*professeur*	ICTT	ECL
		Nbre ICTT 1	
CALLARD Anne-Ségolène	*maître de conférences*	INL	ECL
CLOAREC Jean-Pierre	*maître de conférences*	INL	ECL
GAFFIOT Frédéric	*professeur*	INL	ECL
GAGNAIRE Alain	*maître de conférences*	INL	ECL
GARRIGUES Michel	*directeur de recherche*	INL	CNRS/ECL
GENDRY Michel	*directeur de recherche*	INL	CNRS/ECL
GRENET Geneviève	*directeur de recherche*	INL	CNRS/ECL
HOLLINGER Guy	*directeur de recherche*	INL	CNRS/ECL

JOSEPH Jacques	*professeur*	INL	ECL
KRAWCZYK Stanislas	*directeur de recherche*	INL	CNRS/ECL
LETARTRE Xavier	*chargé de recherche*	INL	CNRS/ECL
MARTIN Jean-René	*professeur émérite*	INL	ECL
O'CONNOR Ian	*professeur*	INL	ECL
PHANER-GOUTORBE Magali	*professeur*	INL	ECL
ROBACH Yves	*professeur*	INL	ECL
SAINT-GIRONS Guillaume	*chargé de recherche*	INL	CNRS/ECL
SEASSAL Christian	*chargé de recherche*	INL	CNRS/ECL
SOUTEYRAND Eliane	*directeur de recherche*	INL	CNRS/ECL
TARDY Jacques	*directeur de recherche*	INL	CNRS/ECL
VIKTOROVITCH Pierre	*directeur de recherche*	INL	CNRS/ECL

Nbre INL 20

CHEN Liming	*professeur*	LIRIS	ECL

Nbre LIRIS 1

BAILLY Christophe	*professeur*	LMFA	ECL
BERTOGLIO Jean-Pierre	*directeur de recherche*	LMFA	CNRS/ECL
BLANC-BENON Philippe	*directeur de recherche*	LMFA	CNRS/ECL
BOGEY Christophe	*chargé de recherche*	LMFA	CNRS/ECL
CAMBON Claude	*directeur de recherche*	LMFA	CNRS/ECL
CARRIERE Philippe	*chargé de recherche*	LMFA	CNRS/ECL
CHAMPOUSSIN J-Claude	*professeur émérite*	LMFA	ECL
COMTE-BELLOT genevièvre	*professeur émérite*	LMFA	ECL
FERRAND Pascal	*directeur de recherche*	LMFA	CNRS/ECL
GALLAND Marie-Annick	*professeur*	LMFA	ECL
GODEFERD Fabien	*chargé de recherche*	LMFA	CNRS/ECL
GOROKHOVSKI Mikhail	*professeur*	LMFA	ECL
HENRY Daniel	*directeur de recherche*	LMFA	CNRS/ECL
JEANDEL Denis	*professeur*	LMFA	ECL
JUVE Daniel	*professeur*	LMFA	ECL
LE RIBAULT Catherine	*chargée de recherche*	LMFA	CNRS/ECL
LEBOEUF Francis	*professeur*	LMFA	ECL
PERKINS Richard	*professeur*	LMFA	ECL
ROGER Michel	*professeur*	LMFA	ECL
SCOTT Julian	*professeur*	LMFA	ECL
SHAO Liang	*chargé de recherche*	LMFA	CNRS/ECL
SIMOENS Serge	*chargé de recherche*	LMFA	CNRS/ECL
TREBINJAC Isabelle	*maître de conférences*	LMFA	ECL

Nbre LMFA 23

BENAYOUN Stéphane	*professeur*	LTDS	ECL
CAMBOU Bernard	*professeur*	LTDS	ECL
COQUILLET Bernard	*maître de conférences*	LTDS	ECL
DANESCU Alexandre	*maître de conférences*	LTDS	ECL
FOUVRY Siegfrid	*chargé de recherche*	LTDS	CNRS/ECL
GEORGES Jean-Marie	*professeur émérite*	LTDS	ECL
GUERRET Chrystelle	*chargé de recherche*	LTDS	CNRS/ECL
HERTZ Dominique	*past*	LTDS	ECL
ICHCHOU Mohamed	*professeur*	LTDS	ECL
JEZEQUEL Louis	*professeur*	LTDS	ECL
JUVE Denyse	*ingénieur de recherche*	LTDS	ECL
KAPSA Philippe	*directeur de recherche*	LTDS	CNRS/ECL
LE BOT Alain	*chargé de recherche*	LTDS	CNRS/ECL

LOUBET Jean-Luc	*directeur de recherche*	LTDS	CNRS/ECL
MARTIN Jean-Michel	*professeur*	LTDS	ECL
MATHIA Thomas	*directeur de recherche*	LTDS	CNRS/ECL
MAZUYER Denis	*professeur*	LTDS	ECL
PERRET-LIAUDET Joël	*maître de conférences*	LTDS	ECL
SALVIA Michelle	*maître de conférences*	LTDS	ECL
SIDOROFF François	*professeur*	LTDS	ECL
SINOU Jean-Jacques	*maître de conférences*	LTDS	ECL
STREMSDOERFER Guy	*professeur*	LTDS	ECL
THOUVEREZ Fabrice	*professeur*	LTDS	ECL
TREHEUX Daniel	*professeur*	LTDS	ECL
VANNES André-Bernard	*professeur émérite*	LTDS	ECL
VINCENS Eric	*maître de conférences*	LTDS	ECL
		Nbre LTDS 26	
	Total HdR ECL	91	

Remerciements

Je tiens en premier lieu à remercier Olivier Allix et Alain Berlioz pour avoir accepté d'être les rapporteurs de ma thèse ainsi que Jean-Luc Loubet pour en avoir été le président du jury.

La collaboration dans le cadre d'un contrat Cifre entre l'Ecole Centrale de Lyon et EADS Innovation Works m'a permis de m'appuyer sur de nombreuses personnes de ces deux entités que je remercie pour leur aide et leur soutien.

Au sein d'Innovation Works, je remercie tout d'abord Benoît Petitjean pour l'encadrement de mes travaux et pour l'ouverture et l'écoute dont il a su faire preuve. Je remercie également l'ensemble des collègues des équipes Vibration, Structure et CND, pour leurs grandes qualités scientifiques et pour l'ambiance toujours chaleureuse qu'ils savent entretenir. Une pensée particulière pour Patricia à l'origine de cette thèse et pour Guillaume pour les franches rigolades dans le bureau. Enfin, merci à la communauté des thésards sévillans fondateurs du rtg 27 et aux salseros/as du site.

Au sein du laboratoire du LTDS, je remercie tout d'abord Louis Jézéquel, pour avoir initié ces travaux et pour avoir partagé sa vision de la mécanique. Ensuite un très grand merci à Jean-Jacques Sinou pour la qualité de son suivi et le souci pédagogique dont il fait preuve, ainsi que pour l'ambiance de travail très bonne qu'il sait développer. Un seul regret : j'ai échoué à en faire un supporter des canaris. Enfin, merci à tous les personnels du labo, notamment à tous les poissons de l'aquarium. Merci à Manu pour les échanges et conseils, et pour les barres de rire avec juste un séparateur de bureau.

Tout cela n'aurait pas été possible sans le concours de mes amis et de ma famille. Merci à toute la clique, Lola, Polo, Julien, Nico, Fab et cie. Mention spéciale à Nico chez qui j'ai squatté de nombreuses fois, et à feu le canapé rouge. Pardonnerai-je à Nico et Julien de m'avoir forcé à payer les croissants à pas d'heure ? Plutôt crever. Merci à Adèle qui a toujours été présente dans les différents moments de la thèse et qui a supporté la fin de thèse.

Enfin merci à mes parents qui m'ont toujours soutenu et qui, grâce à une certaine " stabilité familiale ", m'ont permis de finir par une soirée (in)oubliable.

Merci à mon pote bill tremendous qui a su agacer plus d'une personne mentionnée ci-dessus.

Résumé

Cette étude porte sur la simulation dynamique de structures présentant des interfaces non linéaires et plus particulièrement sur le développement de diverses extensions à la méthode de balance harmonique. Cette méthode, qui permet le calcul de réponses vibratoires stationnaires, est basée sur l'approximation en série de Fourier tronquée de la réponse. En fonction de caractère plus ou moins non linéaire de la réponse, le nombre d'harmoniques à retenir pour approcher de façon satisfaisante la réponse peut être important et varier fortement sur l'ensemble de la plage de fréquence de simulation.

Un des objectifs principaux de cette recherche a été de proposer une stratégie de calcul qui permette d'adapter le nombre d'harmoniques à chaque fréquence. Dans l'optique d'approcher le mouvement global de la structure, la méthodologie proposée se base sur le suivi de l'énergie de déformation du système en fonction de la richesse du contenu fréquentiel. La formulation développée reste simple à calculer et compatible avec les étapes de condensation interne à la méthode de balance harmonique. L'extension de cette technique au calcul de réponses quasi-stationnaires est en outre possible en redéfinissant les stratégies de choix des harmoniques à retenir.

Parallèlement à ce but principal, la présence de variables internes dans les modèles non linéaires d'interface (modèle de frottement par exemple) a été prise en compte dans la formulation des équations de la balance harmonique adaptative.

Ces méthodes spécifiques ont ensuite été mises en œuvre sur des modèles numériques de structures aéronautiques. Un isolateur d'équipement utilisant un matériau viscoélastique non linéaire a ainsi pu être simulé. Ensuite, la méthode de balance harmonique adaptative a pu être appliquée à l'étude des effets dynamiques non linéaires observée sur les structures boulonnées. Enfin, le calcul de réponses quasi-périodiques s'est effectué sur un tronçon de lanceur intégrant des amortisseurs à frottement sec.

Mots Clés : Dynamique des structures, analyse non linéaire, méthode de balance harmonique adaptative, interface non linéaire, vibration périodique, condensation, matériau viscoélastique, structure boulonnée, amortisseur à frottement.

Abstract

The study deals with the dynamic simulation of structures with non linear interfaces and particularly with the development of various extensions of the harmonic balance method. This method, applied for steady state vibrations, is based on the response approximation with a truncated Fourier series. Depending on the more or less pronounced non linear response behavior, the number of harmonics to retain to correctly approach the response may be important and may strongly vary over all the frequency band.

One of the main objectives of this research work has been to propose a calculation strategy which allows adapting the number of harmonics for each frequency. In order to globally approach the structure vibration, the proposed methodology basics is to observe the strain energy evolution functions of frequency contents. The developed formulation is easy to calculate and may be employed with internal reduction steps of the harmonic balance method. Moreover, an extension of this technique for quasi-periodic vibrations is possible by redefining harmonic choice strategies.

In conjunction with this main objective, internal variables in non linear interface models (friction models for example) have been considered in a specific adaptive harmonic balance method formulation.

Then, these specific methods have been applied on numerical aeronautical structure models. An equipment isolator integrating a non linear viscoelastic material has been simulated. Secondly, adaptive harmonic balance method has been employed for the study of non linear dynamic effects of bolted structures. Finally, quasi periodic vibration calculation has been carried out on a launcher stage integrating dry friction dampers.

Keywords :
Structural dynamics, non linear analysis, adaptive harmonic balance method, non linear interface, periodic vibration, reduction, viscoelastic material, bolted structure, dry friction damper.

Table des matières

1 Introduction **7**

2 Modélisation des interfaces et Calcul de réponse dynamique **11**

2.1 Modélisation des interfaces 12

2.1.1 Elastomères 12

2.1.1.1 Principales propriétés mécaniques 13

2.1.1.1.a Comportement élastique 14

Effet Mullins 14

Incompressibilité 15

2.1.1.1.b Comportement dissipatif 15

2.1.1.1.c Dépendance en température 16

2.1.1.1.d Dépendance en fréquence 17

2.1.1.1.e Dépendance en amplitude : effet Payne 18

2.1.1.2 Modélisation de la dépendance en fréquence 19

2.1.1.2.a Approche directe 19

2.1.1.2.b Modèles rhéologiques 21

2.1.1.2.c Dérivées fractionnaires 23

2.1.1.2.d Autres approches 24

2.1.1.3 Modélisation de la dépendance en amplitude 24

2.1.1.3.a Approche directe 25

2.1.1.3.b Modèles de frottement 26

2.1.1.3.c Autres approches 27

2.1.2 Jonctions boulonnées 28

2.1.2.1 Phénomène de frottement 28

2.1.2.2 Frottement dans les jonctions boulonnées 29

2.1.2.2.a Effort normal optimal 31

2.1.2.2.b Influence du chargement 33

2.1.2.3 Effets dynamiques induits par les jonctions boulonnées 33

2.1.2.4 Modélisations 33

2.1.2.4.a Amortissement équivalent 34

2.1.2.4.b Modèles paramétriques simples 35

2.1.2.4.c Modèles paramétriques de microglissement 36
Modèle d'Iwan 37
Modèle de LuGre 38
2.1.2.4.d Modèles locaux 40
2.1.3 Amortisseurs à frottement 41
2.1.3.1 Régimes de fonctionnement 41
2.1.3.2 Modélisation 41
2.2 Sous-structuration dynamique aux interfaces 44
2.2.1 Modes des sous-structures 45
2.2.2 Condensation de Guyan 46
2.2.3 Méthodes de Synthèse Modale 47
2.2.3.1 Méthodes à interfaces fixes : Craig Bampton 48
2.2.3.2 Substitution modale 50
2.2.3.3 Interfaces libres : Mac Neal 52
2.3 Méthodes Non Linéaires de Calcul de Solutions Périodiques 54
2.3.1 Méthodes temporelles 55
2.3.1.1 Méthodes d'intégration temporelle 55
2.3.1.1.a Notion de qualification d'un schéma d'intégration 55
Schéma d'intégration implicite ou explicite 55
Consistance d'un schéma d'intégration 56
Stabilité 56
2.3.1.1.b Cas des systèmes linéaires 57
Limites de stabilité 57
Méthode de Newmark 58
2.3.1.1.c Cas des systèmes non linéaires 60
2.3.1.1.d Autres méthodes 61
2.3.1.2 Méthodes des différences finies 63
2.3.1.3 Méthode de tir 64
2.3.2 Méthodes d'approximation 65
2.3.2.1 Méthodes de perturbation 65
2.3.2.2 Méthode de balance harmonique 66
2.3.2.3 Collocation 69
2.3.2.3.a Application au traitement des efforts non linéaires 69
2.3.2.4 Eléments finis en temps 71
2.3.3 Continuation 71
2.3.3.1 Paramétrisation 72
2.3.3.1.a Paramétrisation sélective 72
2.3.3.1.b Paramétrisation curviligne 73
2.3.3.2 Prédiction 73
2.3.3.2.a Prédicteur sécant 74
2.3.3.2.b Prédicteur tangent 74

2.3.3.2.c Prédicteur polynomial 74
2.3.3.3 Correction 75
2.3.3.3.a Méthode de Newton-Raphson 75
2.3.3.3.b Méthode Pseudo-Arclength 75
2.3.3.3.c Méthode de MoorePenrose 76
2.3.3.4 Aspects pratiques 76
2.4 Conclusion 78

3 Simulation dynamique d'un isolateur à supports élastomères 79
3.1 Méthode de balance harmonique 79
3.1.1 Mise en équations 80
3.1.2 Condensation 83
3.2 Méthodologie de prise en compte de l'effet Payne 85
3.2.1 Formulation au premier harmonique 86
3.2.2 Evaluation des efforts non linéaires 87
3.2.3 Densité d'énergie de déformation 88
3.2.4 Mesure de déformation équivalente 89
3.2.4.1 Compression 91
3.2.4.2 Cisaillement 91
3.2.5 Assemblage 92
3.2.5.1 Formulation de la viscoélasticité linéaire dans MSC.Nastran 92
3.2.5.2 Assemblage avec prise en compte de l'effet Payne. 93
3.2.6 Démarche globale 94
3.3 Application à un isolateur industriel 95
3.3.1 Présentation du dispositif 95
3.3.2 Modèle numérique 99
3.3.2.1 Géométrie et Maillage 99
3.3.2.2 Réduction des parties linéaires 99
3.3.2.3 Excitation 101
3.3.3 Résultats 103
3.3.3.1 Déplacements 103
3.3.3.2 Transmissibilité 103
3.3.3.3 Mesure de déformation équivalente 104
3.4 Conclusion 105

4 Méthode de balance harmonique adaptative appliquée aux jonctions boulonnées 107
4.1 Méthode de balance harmonique adaptative 108
4.1.1 Energie de déformation approchée 109
4.1.1.1 Sans condensation 109
4.1.1.2 Avec condensation 109
4.1.2 Critère proposé 110

4.2 Application aux jonctions boulonnées . . . 112
4.2.1 Structure étudiée . . . 112
4.2.2 Modèle de jonction . . . 113
4.2.3 Système global et jonction . . . 114
4.3 Formulation HBM avec variable interne : adaptation au modèle de LuGre . . . 115
4.3.1 Démarche retenue . . . 115
4.3.2 Autres méthodes de traitement des variables internes . . . 116
4.4 Résultats . . . 121
4.4.1 Effets non linéaires . . . 121
4.4.2 Saturation de l'énergie de déformation . . . 124
4.4.3 Influence de la force d'excitation . . . 125
4.4.4 Valeur seuil . . . 130
4.4.5 Comparaison entre critère général et réduit . . . 130
4.5 Conclusion . . . 131

5 Extension aux systèmes multifréquentiels : application sur frotteurs 135
5.1 Méthode de balance harmonique multifréquentielle . . . 136
5.1.1 Fonctions quasipériodiques . . . 136
5.1.2 Formulation générale . . . 138
5.1.3 Traitement des efforts non linéaires . . . 139
5.1.4 Condensation . . . 139
5.1.5 Continuation . . . 140
5.1.6 Nombre d'harmoniques . . . 140
5.2 Balance harmonique multifréquentielle adaptative . . . 142
5.2.1 Energie de déformation approchée . . . 142
5.2.1.1 Sans condensation . . . 142
5.2.1.2 Avec condensation . . . 142
5.2.2 Extension du critère . . . 143
5.3 Application aux amortisseurs à frottement sec . . . 145
5.3.1 Présentation du dispositif . . . 145
5.3.2 Modèle d'amortisseur . . . 147
5.4 Formulation en accélération imposée . . . 149
5.4.1 Représentation harmonique . . . 149
5.4.2 Formulation générale . . . 151
5.4.3 Condensation . . . 151
5.5 Résultats . . . 152
5.5.1 Réponse à une excitation monofréquentielle . . . 152
5.5.1.1 Structure seule . . . 152
5.5.1.2 Structure amortie . . . 153
5.5.2 Réponse à une excitation bifréquentielle . . . 155
5.5.2.1 Structure seule . . . 156

5.5.2.2 Structure amortie 157
5.6 Conclusion 161

6 Conclusion **163**

Bibliographie **167**

Liste des figures **179**

Chapitre 1

Introduction

Cette thèse CIFRE a été réalisée à EADS Innovation Works en collaboration avec le Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes UMR 5513 de l'École Centrale de Lyon.

Contexte de l'étude

L'architecture des structures aéronautiques et spatiales est toujours très complexe et se présente sous la forme d'un assemblage de différents éléments présentant des comportements mécaniques non linéaires. Ces comportements peuvent provenir de non linéarités géométriques (déploiement de satellite, déflection d'ailes d'avion,...), matérielles (comportement élastique de panneau composite, hyperélasticité de plots élastomères,...), liées au contact (jonction avec jeu, amortisseur de chocs,...) ou au frottement (amortisseurs à frottement, dissipation par microglissement dans les jonctions boulonnées, freins aéronautiques...). Pourtant, dans le domaine de la dynamique des structures, l'étude des vibrations des structures conduit souvent, pour des raisons de simplification, à la construction de modèles linéaires. En effet, cette simplification est possible si des gammes limitées de chargement permettent d'approcher les caractéristiques des éléments non linéaires comme linéaires ou si des paramètres équivalents (amortissement modal équivalent, force moyenne, approximation au premier harmonique d'un effort de frottement,...) sont calculés avant introduction dans le modèle complet linéaire de la structure étudiée.

Toutefois, la prise en compte des non linéarités dans la dynamique globale de la structure connaît ces dernières années un essort de plus en plus important. En effet, l'amélioration des prédictions vibratoires a un impact direct sur le dimensionnement et l'optimisation des différents composants. De plus, le développement de solutions antivibratoires performantes pour s'adapter à de nouvelles configurations ou pour améliorer l'isolation de dispositifs exigeants nécessite d'introduire des systèmes fortement non linéaires.

Ces éléments non linéaires sont généralement localisés aux interfaces entre deux composants au comportement linéaire. Il peut s'agir d'éléments de connection discrets ou continus assurant le trans-

fert des efforts statiques et dynamiques (jonctions boulonnées, DIAS [1], absorbeur de choc SASSA [2], mât moteur...) ou d'amortisseurs connectés entre deux points d'attache (amortisseurs à frottement SARO [3], amortisseurs de traînée...). Ainsi, afin de pouvoir réaliser des calculs complets sur structure non linéaire, des méthodes de réduction et de condensation au niveau des interfaces, ainsi que des méthodes de résolution adaptées à des systèmes non linéaires, sont généralement développées.

Cette étude s'intéresse particulièrement au calcul de réponses stationnaires sur structures non linéaires et s'articule autour de la méthode de balance harmonique. Son principe est basé sur l'approche de la réponse, supposée périodique, par un développement en série de Fourier tronquée. Le nombre de termes retenus dans ce développement influence alors la précision de l'approximation mais impacte fortement le temps de calcul. Cependant, en raison de la non linéarité de la structure, il n'est généralement pas possible de déterminer a priori quels harmoniques interviendront dans la réponse ni s'ils seront significatifs. En outre, l'importance des harmoniques peut varier sur une plage de fréquence donnée, notamment dans les zones où les non linéarités ont un effet majeur sur la dynamique de la structure. Afin de réaliser des simulations sur des structures industrielles de grande taille, il est donc intéressant de se doter d'outils numériques judicieux permettant d'adapter le nombre d'harmoniques à chaque fréquence tout en conservant une précision acceptable et une efficacité numérique satisfaisante. L'objectif principal de la thèse est donc d'étendre les capacités de la méthode de balance harmonique initiale en développant une méthodologie d'adaptation du nombre d'harmoniques. De plus, les méthodologies proposées seront focalisées sur la simulation de structures industrielles présentant des non linéarités localisées. Des méthodes de réduction de modèles ainsi que des outils d'interaction avec les logiciels commerciaux seront donc développés.

Par ailleurs, ce travail portera plus spécifiquement sur la modélisation de trois types d'éléments d'interfaces à comportement non linéaire rencontrés sur l'ensemble des produits développés par EADS. En effet, l'approfondissement des connaissances et l'amélioration des modélisations existantes pour ces technologies est aujourd'hui un enjeu majeur pour le domaine aéronautique et spatial.

Le premier domaine d'intérêt concerne la modélisation des solutions d'isolation vibratoire en élastomère largement utilisées pour leurs propriétés amortissantes dans le domaine aéronautique ou spatial [68, 153]. Ces technologies peuvent permettre de connecter deux éléments principaux entre différents points d'attache (DIspositif Assouplisseur d'Ariane 5, silent blocs pour équipements, amortisseurs de traînée en élastomère...) ou peuvent être utilisées de façon répartie sur une interface plus grande (dispositifs absorbeur de chocs entre deux étages de lanceur...). Ces éléments ont des comportements fortement non linéaires et il devient nécessaire d'améliorer les prédictions et par conséquent de prendre en compte les effets non linéaires associés. Ainsi, l'étude portera sur la modélisation d'un isolateur d'équipement en élastomère monté sur satellite. L'élastomère chargé présente alors un effet non linéaire prononcé engendrant une incertitude forte sur la fréquence de résonance du dispositif et sur sa transmissibilité.

1. DIspositif ASsouplisseur.
2. Shock Attenuation System for Spacecraft and Adaptor.
3. Système Amortisseur du Réservoir d'Oxygène.

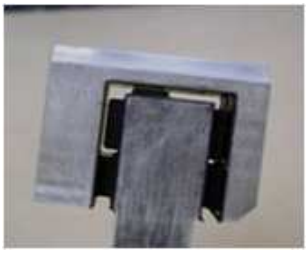
a)  b) c)

FIGURE 1.1 – Illustration des dispositifs étudiés : a) Isolateur élastomère ; b) Jonction boulonnée spatiale ; c) Amortisseur à frottement.

Le second domaine concerne l'analyse des phénomènes non linéaires au sein des nombreuses jonctions boulonnées présentes sur les structures aéronautiques et spatiales. En effet, la dissipation engendrée par ces éléments de connection représente la source de dissipation majeure pour une structure assemblée [14] mais reste encore mal connue. Ainsi, la plupart des modélisations existantes utilisent encore un amortissement global affecté à l'ensemble de la structure ne permettant pas de prendre en compte les effets dissipatifs spécifiques des jonctions ni leurs propriétés de raideur. De nombreuses études ont ainsi déjà été réalisées afin d'améliorer les prédictions [27] ou encore d'utiliser ces phénomènes dissipatifs pour optimiser le comportement des structures [60, 152]. La construction de modèles non linéaires intégrables dans des modèles de structures complètes reste encore un enjeu de taille.

Le dernier domaine concerne l'utilisation d'amortisseurs à frottement comme amortisseurs passifs de vibration. En effet, ces dispositifs présentent l'avantage d'être adaptables à des températures extrêmes et de pouvoir amortir des vibrations de faible amplitude. Il sont utilisés sur lanceur [81] actuellement et pourraient être étendus à l'avenir sur d'autres systèmes. Ces types d'amortisseurs présentent un comportement fortement non linéaire et il est alors indispensable d'utiliser des méthodes de résolution spécifique. L'étude s'intéressera ici au calcul par balance harmonique de la réponse dynamique d'un banc expérimental adapté aux lanceurs intégrant trois amortisseurs à frottement.

Plan du mémoire

Le travail réalisé dans le cadre de cette thèse s'articule autour de cinq chapitres. Le chapitre 2 constitue l'état de l'art et les chapitres 3, 4 et 5 présentent les contributions de la thèse.

Tout d'abord, nous exposerons en chapitre 2 les différentes modélisations possibles pour les trois types d'interfaces considérées, à savoir les éléments d'isolation en élastomère, les interfaces boulonnées et les amortisseurs à frottement sec. Dans un deuxième temps, nous présenterons la stratégie globale

de calcul des réponses dynamiques stationnaires de structures à interfaces non linéaires. Les méthodes permettant la réduction des parties linéaires des modèles sur les interfaces non linéaires seront ensuite développées. Enfin, une revue des principales méthodes spécifiques au calcul de réponses stationnaires non linéaires seront présentées.

A partir de cette synthèse, le chapitre 3 propose une première application directe de la méthode de balance harmonique effectuée sur un isolateur d'équipements de satellite en élastomère. L'élastomère utilisé présente un comportement dynamique non linéaire, dénommé effet Payne, qui entraîne une variation de la rigidité des plots isolants en fonction de l'amplitude des vibrations auxquelles il est soumis. Une méthodologie sera proposée pour prendre en compte cet effet dans un calcul de transmissibilité du dispositif complet. Des outils d'interaction entre les logiciels Nastran et Matlab via des routines DMAP seront développés pour améliorer l'adaptabilité de la méthode de balance harmonique à des cas industriels.

Le chapitre 4 sera consacré au développement d'une méthode de balance harmonique adaptative. Cette extension permettra de proposer des critères pour ajuster le nombre d'harmoniques à retenir à chaque fréquence de la plage considérée et de traiter le cas des systèmes non linéaires à variables internes. L'objectif sera d'approcher de façon globale la dynamique non linéaire du système complet. L'application sera effectuée sur un système boulonné représenté comme une jonction non linéaire et intégrable dans un modèle éléments finis complet. L'analyse des réponses vibratoires permettra de mettre en évidence les atouts et limites de la méthodologie adaptative proposée ainsi que les zones de fonctionnement où les effets non linéaires sont prépondérants.

Enfin, le chapitre 5 de ce mémoire proposera une extension de la méthode de balance harmonique adaptative à des réponses multifréquentielles stationnaires. Les structures sont alors excitées par au moins deux fréquences incommensurables entre elles. L'application sera focalisée sur un modèle de maquette représentatif d'une partie de lanceur qui comporte trois amortisseurs à frottement.

La synthèse des différentes contributions de la thèse ainsi que les perspectives associées concluront ce mémoire.

Chapitre 2

Modélisation des interfaces et Calcul de réponse dynamique

Le calcul de la réponse dynamique d'un système présentant des interfaces non linéaires nécessite la mise en place d'une démarche structurée qui s'articule généralement autour de trois étapes principales.

La première d'entre elles est la modélisation des interfaces. Cette modélisation se doit d'être suffisamment complexe pour permettre de rendre compte des effets non linéaires significatifs sur la dynamique de la structure tout en restant intégrable facilement dans un modèle de structure complète.

La deuxième étape consiste ensuite à réduire les parties linéaires du modèle sur les interfaces non linéaires en utilisant les techniques de condensation et de sous-structuration. La taille du système à résoudre est ainsi largement diminuée, rendant ainsi possible la mise en place de techniques de résolutions adaptées aux systèmes non linéaires.

Ce chapitre se concentrera donc tout d'abord sur la modélisation de trois types d'éléments d'interface présents dans les applications d'EADS, à savoir les isolateurs en élastomères, les jonctions boulonnées et les amortisseurs à frottement. Dans un second temps, les différentes méthodes utilisables ainsi que les techniques de continuation facilitant le suivi d'une solution sur une plage de fréquence considérée seront exposées.

2.1 Modélisation des interfaces

La modélisation des interfaces revêt une importance capitale lorsque l'on s'intéresse à la simulation d'une structure non linéaire. Un compromis entre la représentativité du phénomène et la facilité d'intégration dans un modèle de structure complet doit être trouvé. De plus, le choix de la modélisation appropriée est fortement dépendant de l'objectif de la simulation. Par exemple, un modèle de jonction boulonnée ne sera pas du tout le même s'il s'agit de représenter l'amplitude moyenne de vibration de la structure ou s'il s'agit de quantifier précisément les efforts vus localement par la jonction. De même, les modélisations dépendent également de l'architecture de la structure et la taille de l'interface. Ainsi certaines non linéarités peuvent être représentées comme distribuées sur l'interface ou réparties de façon discrète. Par exemple, pour assembler deux composants, les jonctions boulonnées sont généralement présentes en nombre important et il peut alors être possible de les considérer une à une dans le modèle ou au contraire de les considérer réparties continûment. Il est donc impératif de prendre en compte ces considérations pour pouvoir réaliser une modélisation adaptée au problème à traiter.

Dans cette section nous nous intéresserons à la modélisation des trois types d'éléments non linéaires d'interfaces. Le premier type d'éléments rassemble l'ensemble des solutions en élastomère, bien connues pour leurs propriétés amortissantes. Le second type concerne les jonctions boulonnées, généralement très présentes sur les structures industrielles, qui génèrent un amortissement provenant de phénomènes complexes et difficilement modélisables. Les phénomènes de frottement entre les interfaces des pièces à assembler y jouent un rôle important. Enfin, les amortisseurs à frottement sec seront détaillés car adaptés à une dissipation passive dans des environnements contraignants.

2.1.1 Elastomères

Les élastomères sont largement utilisés pour leur grande élasticité mais également pour leur capacité d'isolation due à leur souplesse et à leur amortissement matériau élevé. En effet leur souplesse permet d'isoler des structures pour des basses fréquences (à partir de $5Hz$ et au-delà [14]) et ils peuvent absorber jusqu'à 70% de l'énergie injectée via un amortissement élevé. Afin de qualifier les isolateurs il est courant de s'intéresser à la transmissibilité en déplacement ou en effort. La transmissibilité que l'on peut obtenir pour la fréquence principale à isoler peut être de l'ordre de 0.1 à 0.3. En figure 2.1 sont présentés les principaux effets que l'on peut observer sur les caractéristiques d'un isolateur en fonction de ses propriétés dynamiques. ω représente la fréquence de l'excitation qui s'exerce sur le système à isoler tandis que ω_n représente la fréquence de l'isolateur créé (dépendant de la raideur de l'isolateur). Un faible module de stockage permet d'isoler des fréquences très basses et une rigidification importante permet d'améliorer les propriétés de filtrage notamment vers les hautes fréquences. En ce qui concerne la réalisation technologique des isolateurs, les plots en compression ou en cisaillement sont souvent préférés aux plots en tension qui présentent un risque plus élevé d'usure au niveau du contact métal-élastomère. Toutefois, dans un environnement réel, les sollicitations sont souvent complexes et la souplesse des élastomères ainsi que la facilité à produire des pièces à géométrie complexe par moulage permet de prendre en compte facilement ces types d'excitation.

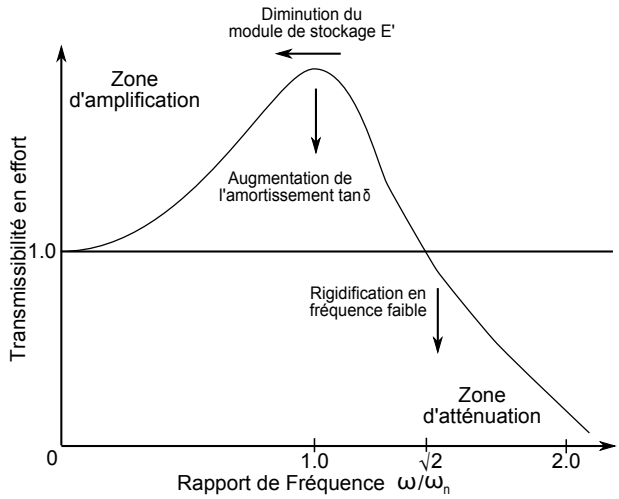


FIGURE 2.1 – Influence des propriétés dynamiques sur les caractéristiques d'isolation.

Afin de concevoir des isolateurs vibratoires efficaces sur une plage de fréquence donnée, il est nécessaire de connaître les principales propriétés de ce matériau qui dépendent de nombreux facteurs (fréquence, température, amplitude de déformation, précharge...) ainsi que les modélisations utilisées pour représenter les propriétés dissipatives du matériau. La dépendance du module dynamique en fonction de l'amplitude de vibration, aussi dénommée effet Payne, peut de plus se montrer significative sur un certain nombre d'isolateurs. Lors du calcul de réponses dynamiques d'un système intégrant de tels isolateurs, il est alors indispensable de prendre en compte cette dépendance qui introduit un terme non linéaire dans les équations du système. Après avoir détaillé les principales propriétés des élastomères dans un premier paragraphe, nous présenterons les approches courantes pour modéliser la dépendance en fréquence du module dynamique des élastomères ainsi que la dépendance en amplitude ou effet Payne.

2.1.1.1 Principales propriétés mécaniques

La terminologie "élastomères" rassemble les matériaux qui présentent une composition différente mais des propriétés mécaniques et une structure moléculaire proches. Le terme "élasto" renvoie à leur propriété d'élasticité en grandes déformations et le terme "mères" rappelle leur nature de polymères.

Les élastomères, d'origine naturelle ou synthétique, sont avant tout un assemblage de longues chaînes macromoléculaires carbonées, résultant de la polymérisation de monomères (type isoprène pour le caoutchouc naturel). Afin de pouvoir accepter de très grandes déformations, le procédé de vulcanisation, découvert par Goodyear en 1839, doit être appliqué. Il consiste à chauffer le matériau et à créer des liaisons pontales entre les chaînes macromoléculaires à l'aide de soufre introduit. Les chaînes sont alors bloquées dans leur translation relative. Le système réticulaire obtenu peut accepter de grandes déformations car les chaînes carbonées sont repliées et peuvent être étirées dans la direction de l'allongement. Le comportement du matériau obtenu est isotrope. Parmi les élastomères, il faut

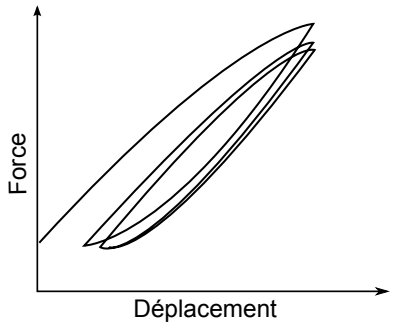


FIGURE 2.2 – Effet Mullins.

distinguer les élastomères non chargés et chargés qui peuvent présenter des propriétés différentes. En effet de nombreux composants sont ajoutés lors de fabrication pour la vulcanisation, la mise en oeuvre, la protection, la coloration, l'obtention de caractéristiques particulières. Les élastomères non chargés sont ceux au sein desquels seuls les agents de vulcanisation et de mise en oeuvre sont ajoutés. Les élastomères chargés intègrent en plus des composants, appelés charges, afin d'améliorer leurs propriétés, notamment leur résistance. La charge la plus courante est le noir de carbone.

2.1.1.1.a Comportement élastique

Les élastomères possèdent une grande élasticité et peuvent accepter de très grandes déformations, d'environ 600% jusqu'à 1000% [76, 131]. Toutefois le matériau n'est pas parfaitement élastique puisqu'on observe la présence de cycle d'hystérésis pour des chargements cycliques à vitesse constante traduisant une perte d'énergie correspondante à l'aire du cycle sous forme de chaleur. De plus la dissipation est supérieure pour les élastomères chargés et pour des amplitudes de débattement plus grandes. L'amortissement hystérétique généralement caractérisé pour de tels matériaux est supérieur à 1 [14]. Enfin, il faut noter qu'une déformation homogène en cisaillement, jusqu'à une certaine limite, fait apparaître une relation linéaire entre la contrainte de cisaillement et le taux de cisaillement. Le coefficient de cisaillement peut être considéré comme une constante du matériau. Ce n'est en revanche pas le cas pour le module d'Young qui est dépendant du taux de déformation.

Effet Mullins

En plus de cette particularité, un autre effet, appelé effet Mullins [108], est présent lors des premiers cycles de chargement d'un échantillon en élastomère. En effet, une diminution de raideur des premiers cycles d'hystérésis est observé (durant les trois à cinq premiers cycles). Ce comportement provient d'une rupture de quelques liaisons moléculaires. Cet effet est important à prendre en compte lors de la caractérisation du matériau. La stabilisation doit être obtenue avant toute mesure. On présente en figure 2.2 une illustration de ce phénomène.

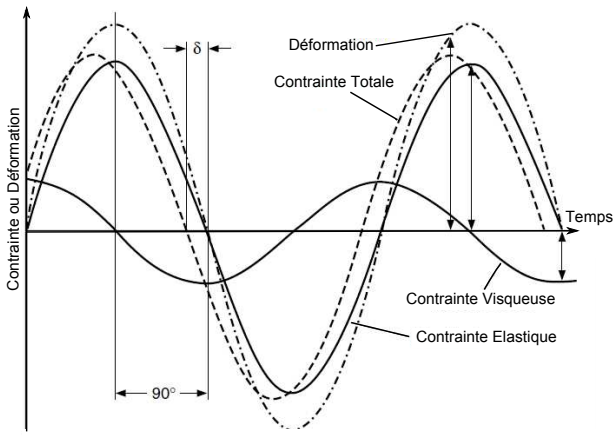


FIGURE 2.3 – Réponse à une sollicitation harmonique en déformation.

Incompressibilité

Les matériaux élastomères présentent un module de compressibilité très élevé de l'ordre de 1000 à $2000MPa$ et un module de cisaillement de l'ordre de $1MPa$ ce qui leur confère une propriété de quasi-incompressibilité. Les élastomères conservent donc leur volume même pour de très grandes déformations. Pour la modélisation, ils sont quasiment toujours considérés comme incompressibles, ce qui peut engendrer des problèmes de verrouillage numérique lors des calculs [82], surtout pour des matériaux confinés.

2.1.1.1.b Comportement dissipatif

L'énergie dissipée par cycle au cours d'un chargement périodique permet de caractériser les propriétés dissipatives du matériau. On constate ainsi que le matériau a un comportement viscoélastique, c'est-à-dire que la réponse en contrainte à une déformation cyclique présente une partie en phase avec la sollicitation (partie élastique) et une en quadrature de phase (partie visqueuse) (figure 2.3).

Cette caractéristique se retrouve lors du tracé des cycles contraintes-déformations. Afin de quantifier l'amortissement en réponse à une sollicitation harmonique du type $\epsilon(t) = \epsilon_0 sin(\omega t)$, on définit les notions de module complexe et d'angle de perte. En effet on considère que la contrainte répond de façon sinusoïdale avec un déphasage noté δ ou angle de perte. La contrainte peut alors s'écrire $\sigma(t) = \sigma_0 sin(\omega t + \delta)$. La forme des cycles obtenus est décrit par la figure 2.4 ci-dessous.

En représentant les quantités par des phaseurs, il est alors possible de définir un module d'Young complexe $\mathbf{E}^* = \sigma/\epsilon$. L'expression de $\mathbf{E}^*$ s'écrit alors :

$$\mathbf{E}^* = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} e^{i\delta} = E' + iE'' = E'(1 + i\ tan\delta) \tag{2.1}$$

E' représente la partie réelle du module dynamique $\mathbf{E}^*$ en phase avec l'excitation. Il est appelé module

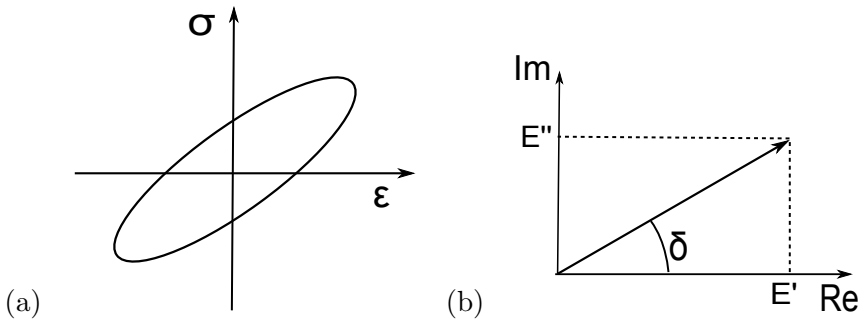


FIGURE 2.4 – a) Courbe contrainte-déformation elliptique b) Module dynamique complexe.

de stockage. E'' est le module perte qui est en quadrature de phase avec l'excitation. On parle également de facteur de perte η pour quantifier le ratio d'énergie dissipée par cycle par rapport à l'énergie stockée :

$$\eta(\omega) = tan\delta = \frac{1}{\pi}\frac{\textit{énergie dissipée par cycle}}{\textit{énergie maximale stockée par cycle}} = \frac{E''(\omega)}{E'(\omega)} \tag{2.2}$$

L'amortissement généré par le matériau est donc directement relié à E'' et δ. Si ces deux grandeurs sont faibles, l'amortissement sera faible également. L'origine de l'amortissement provient de deux phénomènes. Le premier est la résistance à la réorganisation des chaînes moléculaires qui ne peut se faire instantanément engendrant un effet visqueux. Le second provient de l'interaction entre charges et macromolécules, expliquant ainsi que l'amortissement des élastomères augmente avec le taux de charge.

2.1.1.1.c Dépendance en température

Les élastomères sont des matériaux fortement dépendant à la température, notamment en ce qui concerne leurs propriétés dynamiques. L'allure de cette dépendance est montrée en figure 2.5 pour le module dynamique et pour le facteur de perte du matériau. Il faut noter la présence d'une température caractéristique, appelée température de transition vitreuse T_g, autour de laquelle les propriétés dynamiques du matériau varient fortement. En effet, le module diminue fortement au passage de cette température alors que le facteur de perte présente un maximum. A basses températures, les macromolécules sont figées et ne peuvent avoir de mouvement relatif. La dissipation est ainsi faible et le matériau se comporte comme du verre. Le module du matériau est de l'ordre de $10^4 MPa$. Lorsque la température augmente, les chaînes peuvent progressivement se déplacer et leur glissement relatif engendre une dissipation importante. Le pic de dissipation se situe ainsi au niveau de la transition lorsque le compromis résistance au glissement/déplacement des chaînes est optimal. La zone au-delà de la transition est appelé zone caoutchoutique. Le module du matériau est de l'ordre de $1MPa$ et les mouvements de molécules importants. Les élastomères sont souvent utilisés au début de leur zone caoutchoutique où les propriétés dissipatives sont encore élevées. Les élastomères couramment rencontrés ont une température de transition comprise entre -100° et -20° [76].

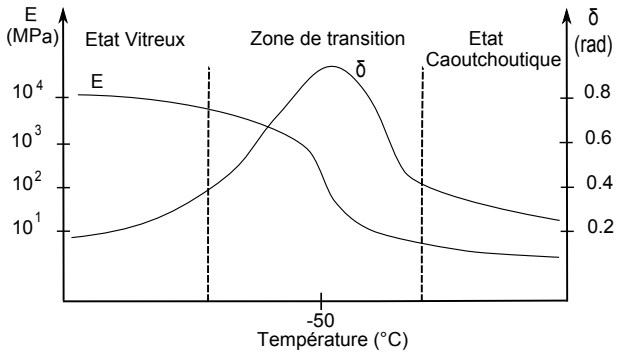


FIGURE 2.5 – Effet de la température sur les propriétés dynamiques.

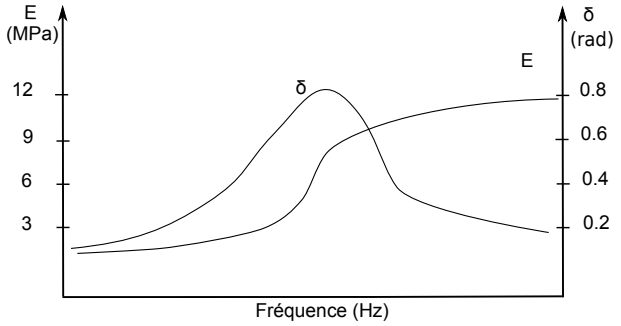


FIGURE 2.6 – Effet de la fréquence sur les propriétés dynamiques.

2.1.1.1.d Dépendance en fréquence

La fréquence est un paramètre très influent sur le comportement dynamique des élastomères et déterminant lors de la mise au point d'isolateur vibratoire. L'évolution du module dynamique ainsi que du facteur de perte est montrée en figure 2.6 pour une température ambiante. Le premier effet à noter est la rigidification en fréquence qui rend le matériau plus raide lorsque la fréquence augmente. Le second effet est l'observation d'un pic de dissipation pour une fréquence donnée, fréquence à laquelle l'évolution du module dynamique est la plus importante. A fréquence faible, le module tend vers une certaine limite qui détermine la raideur statique du matériau, toujours plus faible qu'en dynamique. Il faut noter la correspondance des deux figures 2.5 et 2.6. En effet, du point de vue phénoménologie, une diminution de température est équivalente à une augmentation de fréquence. On parle alors d'équivalence temps-température [56]. Ce principe présente l'avantage de pouvoir étendre les caractérisations des élastomères sur une plus grande bande de fréquence que ne le permettent les moyens de mesure. En effet, il est possible de réaliser plusieurs caractérisations à des tempréatures différentes puis d'appliquer le principe d'équivalence pour déduire les propriétés à une température donnée pour des fréquences plus élevées.

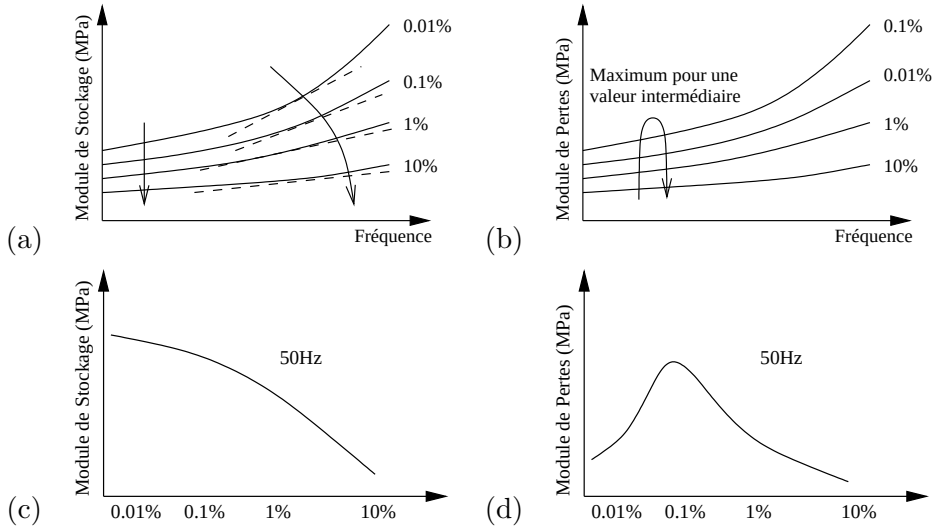


FIGURE 2.7 – Effet Payne sur le module de stockage (a,c) et le module de pertes (b,d) : sur une bande de fréquence (a,b) ; à fréquence fixée en fonction de l'amplitude dynamique (c,d).

2.1.1.1.e Dépendance en amplitude : effet Payne

L'effet Payne, encore appelé effet Fletcher-Gent, a été introduit par W. P. Fletcher et A. N. Gent en 1953 [57] et par A. R. Payne en 1960 [117, 118].

Cet effet se traduit par l'observation expérimentale d'une dépendance des propriétés dynamiques du matériau en fonction de l'amplitude des vibrations auxquelles l'échantillon testé est soumis. Deux effets principaux sont notés lorsque l'amplitude de déformation augmente :

- Le module dynamique diminue,
- L'amortissement passe par un maximum.

La figure 2.7 montre l'allure des courbes expérimentales que l'on observe pour un échantillon d'élastomère chargé au noir de carbone [101]. On remarque que la pente des courbes décrivant l'évolution du module de stockage en fonction de la fréquence diminue lorsque l'amplitude de déformation augmente. Cela entraîne que la dépendance en fréquence du matériau tend à être moins prononcée plus l'amplitude de déformation est importante.

Les phénomènes responsables de l'effet Payne sont principalement attribués à la présence de charges dans les élastomères. En effet, les élastomères non chargés présentent une très faible dépendance en amplitude [30, 79, 100, 117, 146]. Le principal phénomène responsable de l'effet Payne semble être le frottement des chaînes moléculaires et des charges présentes dans le matériau. Plus la concentration de charges est importante, plus la dépendance en amplitude est prononcée. Ce phénomène de déformation-reformation du réseau moléculaire des élastomères est, contrairement à l'effet Mullins, réversible.

Enfin, d'autres analyses complémentaires expérimentales ont été menées sur l'effet Payne. Nous pouvons notamment citer les travaux de Wrana et al. [157] qui constatèrent une atténuation de l'effet

Payne lorsque l'échantillon testé est soumis, en plus d'une déformation harmonique, à une déformation de grande amplitude à basse fréquence. En outre, l'influence de la précharge sur l'effet Payne a été étudiée par Brüger et al. [23] sur des plots élastomères utilisés dans le domaine automobile. Il est noté qu'il existe une prédéformation du matériau pour laquelle les modules de stockage et de perte sont minimum, diminuant ainsi l'effet Payne.

2.1.1.2 Modélisation de la dépendance en fréquence

Nous avons vu précédemment que les matériaux viscoélastiques présentaient des propriétés dissipatives qui se traduisent par l'observation d'un cycle d'hystérésis en régime de sollicitation harmonique ou par l'amortissement d'oscillations libres en réponse impulsionnelle. Lorsqu'il s'agit de simuler la réponse de tels matériaux à une sollicitation harmonique, la principale propriété qui est présente pour tous les matériaux élastomères et qui ne peut pas être négligée est la rigidification en fréquence du matériau. Les analyses sont couramment menées à température fixée dans un premier temps et la prise en compte d'autres facteurs comme l'effet Payne, la précharge, l'environnement, interviennent, lorsqu'ils sont significatifs, dans un second temps.

La rigidification en fréquence engendre des propriétés de raideur et d'amortissement variables qui, selon leur forte variation ou non, peut engendrer des différences importantes sur les modes d'une structure complète et sur leurs amortissement respectifs. Dans le cas de structures faiblement amorties, la première approche possible rapidement est de considérer les modes propres réels de la structure et de calculer un amortissement modal équivalent pour chaque mode en se basant sur la connaissance de la raideur dynamique de la structure aux différentes fréquences propres (via la méthode des énergies modales [86] par exemple). Toutefois, en présence d'éléments élastomères fortement amortissants aux interfaces, cette méthode n'est plus adaptée et le développement de modèles plus détaillés de la raideur dynamique des éléments est nécessaire.

Nous présentons donc dans cette partie les principales modélisations permettant de prendre en compte la dépendance en fréquence du matériau. Ces modélisations, à l'exception de l'approche directe, consistent toutes à approcher de façon satisfaisante les parties réelles et imaginaires du module dynamique. En outre, notre étude se focalise principalement sur le calcul de vibrations à faible amplitude d'éléments isolants en élastomères. Ainsi, les modèles de comportement en grande déformation permettant de considérer les effets non linéaires géométriques ne seront pas détaillés ici.

2.1.1.2.a Approche directe

L'approche directe ne consiste pas exactement en la construction d'un modèle de comportement intégrant la dépendance en fréquence dans sa formulation mais plutôt en l'introduction des différentes valeurs expérimentales obtenues lors de caractérisations élémentaires du matériau utilisé (mesure du module dynamique $\mathbf{E}^*$) ou lors de mesures de raideur dynamique (mesure de $\mathbf{K}^*$) de pièces complètes. Les résultats obtenus pour différentes fréquences et différentes amplitudes permettent alors la création

d'abaques reliant un couple fréquence-amplitude (ω, ϵ_0) et le module dynamique. Il ne s'agit donc pas à proprement parler de modélisation mais juste d'hypothèses sur le comportement.

L'avantage de cette méthode est évidemment l'absence de procédure d'identification de paramètres d'un modèle à déterminer. De plus, dans un cadre industriel, lorsque les éléments isolants en élastomères sont à géométrie complexe, la mesure de la raideur dynamique s'effectue rapidement et peut s'introduire aisément dans un calcul sur une structure complète en définissant une raideur complexe $\mathbf{K}^*(\omega) = \mathbf{K}'(\omega) + i\mathbf{K}''(\omega)$. Les données tabulaires obtenues expérimentalement sont ensuite directement insérées dans la procédure de calcul.

Cette approche n'utilise certes pas un modèle mais suppose tout de même de faire une hypothèse importante. On suppose que le matériau soumis à une sollicitation harmonique répond avec un certain déphasage de façon harmonique également. On parle d'hypothèse de premier harmonique. En effet, à une sollicitation harmonique en déformation $\epsilon(t) = \epsilon_0 sin(\omega t)$, la réponse peut comporter d'autres harmoniques d'ordre supérieur, notamment lorsque l'effet Payne est prononcé :

$$\sigma(t) = \sum_k \sigma_k sin(k\omega t + \delta_k) \tag{2.3}$$

Dans la grande majorité des modélisations utilisées, ces harmoniques supérieurs ne sont pas pris en compte. Sous certaines amplitudes limites, cette hypothèse est de toute façon vérifiée pour la plupart des cas traités [129]. La quasi-proportionnalité observée entre la contrainte et la déformation est une conséquence du caractère réversible du phénomène de dépendance en amplitude [105].

L'utilisation des données expérimentales dans les codes de calcul est relativement simple lorsque seule la dépendance en fréquence du matériau est considérée. En effet, le logiciel MSC.Nastran fournit par exemple, dans le cadre de la viscoélasticité linéaire, la possibilité de définir deux fonctions scalaires $TR(f)$ et $TI(f)$ fonctions de la fréquence f :

$$\begin{aligned} T_R(f) &= \frac{1}{g_{ref}}\left(\frac{G'(f)}{G_{ref}} - 1\right) \\ T_I(f) &= \frac{1}{g_{ref}}\left(\frac{G''(f)}{G_{ref}} - g\right) \end{aligned} \tag{2.4}$$

G' et G'' représentent ici les modules de stockage et de perte, G_{ref} le module quasi-statique du matériau, g un amortissement structural global affecté à l'ensemble du modèle éléments finis considéré et g_{ref} un amortissement structural affecté localement à chaque élément.

Ainsi la matrice de raideur dynamique des éléments élastomères considérés est calculée à partir d'une première matrice de raideur $\mathbf{K}^1_{dd}$ réelle calculée à partir de la donnée du module quasi-statique G_{ref}. La relation finale est ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{dd}(f) &= \left[(1 + g_{ref}T_R(f)) + i\,(g + g_{ref}T_I(f))\right]\mathbf{K}^1_{dd} \\ \mathbf{K}_{dd}(f) &= \left(\frac{G'(f) + iG"(f)}{G_{ref}}\right)\mathbf{K}^1_{dd} \end{aligned} \tag{2.5}$$

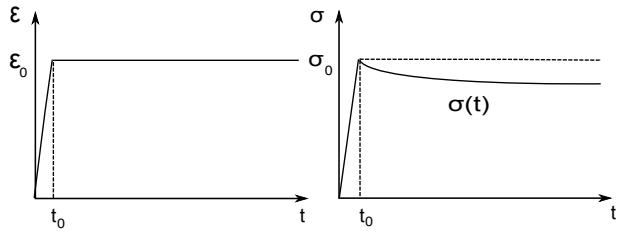


FIGURE 2.8 – Profil de déformation et de contrainte lors d'un essai de relaxation.

2.1.1.2.b Modèles rhéologiques

De manière générale, la contrainte d'un matériau viscoélastique est une fonction de l'histoire des déformations. En effet la réponse d'un matériau viscoélastique à une sollicitation instantanée présente toujours une partie instantanée et une partie "différée". On parle de notion de mémoire du matériau. Nous nous plaçons ici dans le cadre de la viscoélasticité linéaire, c'est-à-dire que la réponse du matériau est supposée être une fonction linéaire de l'histoire des déformations. Sous ces hypothèses de linéarité, le principe de superposition de Boltzmann ("Si l'on superpose deux histoires de sollicitations, la réponse est la superposition des réponses") permet d'exprimer la réponse à toute histoire de sollicitation à partir de la connaissance des fonctions de réponse du matériau, à savoir les fonctions de relaxation et de complaisance.

Ces deux fonctions sont généralement obtenues lors d'essais de fluage et de relaxation afin de caractériser le matériau. Un essai de relaxation consiste en l'application d'un échelon de déformation ϵ_0 en traction, en compression uniaxiale, en cisaillement, etc., et en une mesure de la contrainte dans l'éprouvette au cours du temps $\sigma(t)$. On observe pour les matériaux viscoélastiques une diminution des contraintes au cours du temps qui correspond à l'atteinte d'un état d'équilibre du matériau après un temps "infini". Ce phénomène est appelé relaxation des contraintes. L'autre type d'essai est l'inverse du précédent ; un échelon de contrainte est appliqué et la déformation résultante est observée au cours du temps $\epsilon(t)$. Les réponses à un échelon unitaire sont ainsi les fonctions de relaxation et de fluage. La figure 2.8 présente la forme des courbes obtenues pour un essai de relaxation.

Afin de formuler la loi de comportement basée sur une formulation intégrale, il est nécessaire de formuler quelques hypothèses supplémentaires :

- la contrainte est une fonctionnelle de toute l'histoire des déformations.
- la matériau est non vieillissant, c'est-à-dire que les fonctions de relaxation et de complaisance ne dépendent que d'une seule variable temporelle.
- la fonctionnelle est linéaire.

De plus, l'hypothèse d'isotropie permet de ramener la description du comportement à deux paramètres

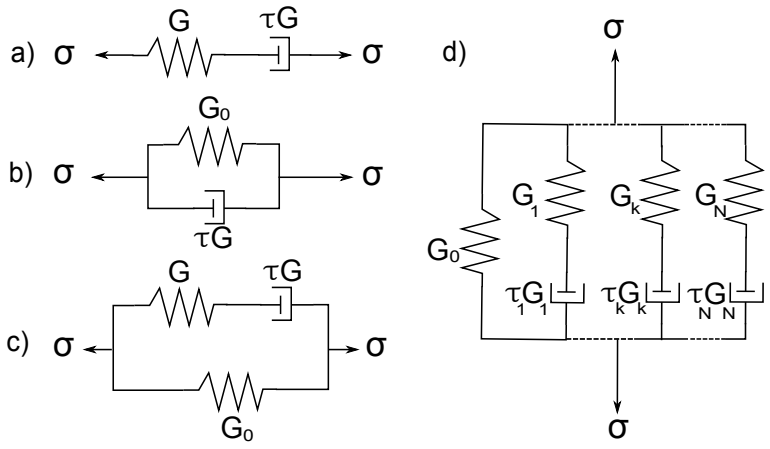


FIGURE 2.9 – Modèles rhéologiques : a) Maxwell b) Kelvin-Voigt c) Zener d) Maxwell généralisé.

uniquement : les coefficients de Lamé $\lambda(t)$ et $\mu(t)$ ou le module de compressibilité $K(t)$ et $\mu(t)$. Les élastomères étant quasiment incompressibles, seule la partie déviatorique est généralement prise en compte. Ainsi, la contrainte peut s'exprimer en fonction de relaxation $\mu(t)$:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} \mu(t-\tau)\dot{\epsilon}(\tau)d\tau \tag{2.6}$$

ou, si le matériau est initialement en repos ($\epsilon(t) = 0$ pour $t < 0$), comme :

$$\sigma(t) = \mu(t)\epsilon(0) + \int_{0}^{t} \mu(t-\tau)\dot{\epsilon}(\tau)d\tau \tag{2.7}$$

A partir de cette formulation intégrale, l'objectif des modèles présentés va être d'approcher les fonctions de relaxation ou de fluage. Le comportement des matériaux viscoélastiques étant intermédiaire entre un comportement purement élastique et un comportement purement visqueux, les premières modélisations vont utiliser des combinaisons d'éléments ressorts et amortisseurs. Ainsi les modèles les plus simples et les plus couramment rencontrés sont ceux de Maxwell, de Kelvin-Voigt et de Zener (ou solide standard). La figure 2.9 en donnent une représentation graphique où les rigidités des ressorts sont données par les paramètres G et G_0 et un temps de relaxation τ. Classiquement il est possible d'écrire la loi de comportement associée sous la forme d'une équation différentielle à dérivées temporelles d'ordre entier :

$$\sigma + \sum_{m=1}^{M} b_m \frac{d^m\sigma}{dt^m} = a_0\epsilon + \sum_{n=1}^{N} a_n \frac{d^n\epsilon}{dt^n} \tag{2.8}$$

Les modèles simples présentés sont des cas particuliers de cette écriture générale (voir table 2.1). Le modèle général associé est le modèle de Maxwell généralisé qui permet une meilleure approche de la fonction de relaxation expérimentale. Son expression générale qu'en donne le modèle s'écrit alors :

$$\mu(t) = G_0 + \sum_{k=1}^{N} G_k e^{-t/\tau_k} \tag{2.9}$$

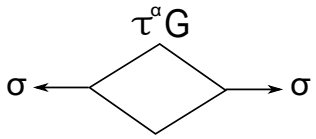


FIGURE 2.10 – Elément Spring-pot.

Le module dynamique peut être obtenue facilement en exprimant l'équation 2.8 dans le domaine fréquentiel :

$$\mu(\omega) = G_0 + \sum_{k=1}^{N} \frac{i\omega G_i}{\frac{1}{\tau_i} + i\omega} \tag{2.10}$$

Paramètres

Modèle	**M**	**N**	$\mathbf{b_1}$	$\mathbf{a_0}$	$\mathbf{a_1}$
Maxwell	1	-	τ	-	τG
Voigt	-	1	-	G_0	τG
Zener	1	1	τ	G_0	$\tau(G + G_0)$

TABLE 2.1 – Paramètres des lois de comportement viscoélastique des modèles rhéologiques de Maxwell, de Kelvin-Voigt et de Zener.

2.1.1.2.c Dérivées fractionnaires

L'utilisation d'éléments simples de type ressort et amortisseur dans les modèles précédents a cependant un inconvénient : le nombre d'éléments à prendre en compte pour qu'un modèle généralisé représente de façon satisfaisante la fonction de relaxation peut rapidement devenir important, augmentant de façon significative le nombre de paramètres à identifier. Afin de diminuer le nombre de paramètres des modèles, un nouvel élément appelé spring-pot ayant un comportement intermédiaire entre un ressort pur et un amortisseur pur a été développé et se représente par le schéma en figure 2.10. L'écriture mathématique de ce modèle utilise la notion de dérivée fractionnaire, généralisation de la dérivée d'ordre entier que l'on peut retrouver dans l'écriture des modèles rhéologiques précédents. En effet, la contrainte associée à un élément spring-pot s'écrit alors $\sigma = \tau^\alpha G \mathcal{D}^\alpha \epsilon$. Pour $\alpha = 0$, $\sigma = G\epsilon$ et le comportement est purement élastique. Pour $\alpha = 1$, $\sigma = \tau G \dot{\epsilon}$ et le comportement est dissipatif.

De façon plus explicite, l'opérateur de dérivation fractionnaire $\mathcal{D}^\alpha$, selon la définition de Riemann-Liouville [115], est :

$$\mathcal{D}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(s)}{(t-s)^\alpha} ds \quad avec \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt \tag{2.11}$$

Cette définition aboutit à une approche des fonctions de relaxation par des lois en puissance décroissante de α de la forme $1/t^{\alpha}$ contrairement aux modèles précédents qui s'écrivaient en fonction d'exponentielles décroissantes. La définition précédente est cependant difficile à intégrer dans des procédures numériques. Pour cela une expression numérique approchée est couramment utilisée. La relation contrainte-déformation de l'équation 2.8 a donc été généralisée par Bagley et Torvik [8] :

$$\sigma + \sum_k b_k \mathcal{D}^{\alpha_k} \sigma = a_0 \epsilon + \sum_k a_k \mathcal{D}^{\beta_k} \epsilon \tag{2.12}$$

L'écriture du module dynamique peut alors s'écrire :

$$\mu(\omega) = \frac{a_0 + \sum_k (i\omega)^{\beta_k} a_k}{1 + \sum_k (i\omega)^{\alpha_k} b_k} \tag{2.13}$$

De façon générale, des modèles utilisant entre 3 et 5 paramètres sont suffisants pour aboutir à une bonne représentation du module dynamique. Enfin, les modèles à dérivées fractionnaires ont l'avantage d'avoir un fondement thermodynamique et d'être compatibles avec la seconde loi de la thermodynamique [7, 47].

2.1.1.2.d Autres approches

Parmi les autres approches développées pour prendre en compte la dépendance en fréquence des matériaux viscoélastiques, nous pouvons citer les approches ayant recours à des variables internes. Ces variables internes peuvent être associées à des coordonnées de dissipation en introduisant des mini-oscillateurs (méthode de Golla-Hughes-Taylor [104]), en utilisant des variables thermodynamiques (Augmented Thermodynamics Fields [98], Augmented Hooke's Law [48]) ou en divisant le champ de déformation en une partie élastique et une partie anélastique (Anelastic Displacements Fields [145]). Toutefois ces approches sont principalement adaptées au calcul de réponses transitoires, et peuvent présenter des difficultés à approcher de façon satisfaisante les courbes maîtresses des matériaux.

2.1.1.3 Modélisation de la dépendance en amplitude

Lors de l'utilisation d'élastomères chargés, l'effet Payne peut se montrer significatif et les modèles classiques permettant de prendre en compte la dépendance en fréquence du matériau se révéler limités. Par conséquent, la prédiction de la raideur dynamique de l'élément isolant pour une amplitude de vibration donnée peut s'avérer difficile. Enfin, lorsqu'il s'agit de prédire les amplitudes vibratoires d'un système complet intégrant des isolateurs élastomères, la dépendance en amplitude de la raideur de l'isolateur engendre des équations du mouvement qui sont non linéaires et qui nécessitent des procédures de calcul adaptés, telles que celles présentées en section 2.3.

Il est donc nécessaire de se munir de modèles de comportement permettant la prise en compte de l'effet Payne dans les simulations. Deux principales approches peuvent être rencontrées. La première se place au niveau macroscopique en utilisant les mesures de raideur dynamique de plots isolants

pour la réalisation d'un calcul direct [13] ou pour une construction de modèles souvent unidirectionnels [136, 138, 144]. Cette démarche est le plus souvent adaptée à la simulation de structures complètes intégrant localement des isolateurs non linéaires en élastomères. La seconde approche utilise les mesures de caractérisation du matériau (essais de relaxation, mesure de module dynamique) réalisées sur éprouvettes et cherche à reproduire le comportement local des différentes parties des pièces élastomères [63, 64, 80]. Cette dernière approche est souvent utilisée pour prédire la raideur dynamique de plots utilisant des pièces moulées de forme parfois complexe.

Quellle que soit l'approche retenue, les différentes modélisations peuvent se regrouper sous trois formes principales. La première consiste uniquement à insérer les données issues d'essais dans la procédure de calcul. La seconde se base sur la construction de modèles ajoutant des frotteurs dans les modèles rhéologiques existants. La dernière utilise des variables internes permettant la prise en compte de l'état interne de la microstructure. Nous détaillons ici ces trois familles de modélisations.

2.1.1.3.a Approche directe

L'approche directe ne consiste pas exactement en la construction d'un modèle de comportement intégrant la dépendance en amplitude dans sa formulation mais plutôt en l'introduction des différentes valeurs expérimentales mesurées ou approchées (de raideur dynamique d'un plot ou de module dynamique mesuré sur éprouvette) dans une procédure de calcul utilisant des modélisations plus simples, souvent uniquement capables de représenter la dépendance en fréquence du matériau. L'avantage de ces approches est évidemment de s'affranchir de la construction d'une nouvelle formulation et, avec elle, de l'identification de paramètres.

De façon générale, les valeurs expérimentales utilisées sont regroupées sous forme de tableaux de données brutes, approchées par une fonction (loi polynomiale,etc.) dépendant de la fréquence [13], ou utilisée pour l'identification de paramètres de plusieurs modèles viscoélastiques simples (par exemple des modèles de Maxwell généralisés [63]). La contrepartie est toutefois de devoir construire une procédure de calcul qui détermine les propriétés les plus adaptées à affecter parmi l'ensemble des valeurs tabulées possibles. La construction de critères permettant ce choix devient alors une étape décisive afin d'espérer conserver la représentativité du comportement de la structure réelle étudiée. Il s'agit évidemment d'évaluer correctement l'amplitude de déformation vue par l'élastomère afin de lui affecter des propriétés adéquats. Cette amplitude peut être simple à évaluer dans le cas d'une sollicitation en déformation uniaxiale d'un plot isolateur entier [13] ou relever d'une approche plus complexe si le modèle simple pris en compte est tridimensionnel ou si les sollicitations sont complexes [63, 123].

Enfin, la résolution du problème dynamique peut s'appréhender de deux manières distinctes. En effet, la dépendance en amplitude de l'élastomère conduit théoriquement à la création d'une matrice de raideur complexe dépendante de l'amplitude de vibration $\mathbf{K}^*(\omega, X)$. La méthode de résolution des équations non linéaires peut alors se ramener à l'utilisation d'un solveur non linéaire adapté de type Newton-Raphson ou équivalent [13, 123] ou consister en la succession d'une série de calculs linéaires

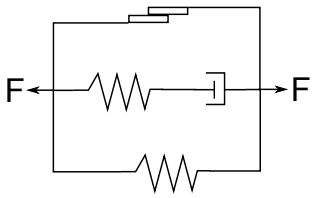


FIGURE 2.11 – Modèle Visco-Elasto-Plastique.

utilisant la formulation viscoélastique classique intégrée dans les codes de calculs [63]. La première option met à jour les propriétés matériaux à chaque itération du solveur tandis que la seconde effectue cette opération entre deux calculs linéaires.

2.1.1.3.b Modèles de frottement

Les premières modélisations permettant de prendre en compte la dépendance en amplitude des matériaux viscoélastiques sont motivées par le fait que l'effet Payne est principalement dû aux interactions de frottement entre les charges du réseau et les chaînes moléculaires. Des modèles de dissipateur à frottement sont donc ajoutés en plus des éléments rhéologiques classiques afin de représenter la dépendance en amplitude. Le modèle de base créé est donc un modèle visco-élasto-plastique en figure 2.11. La combinaison du ressort et de l'amortisseur permet de représenter les effets de relaxation et les dépendances temporelles et fréquentielles. L'amortisseur et le frotteur apportent l'amortissement au modèle. Ainsi l'effort généré par une cellule élémentaire est la somme des efforts élastiques, visqueux et de frottement $F = F_e + F_v + F_f$. Différentes expressions pour la force de frottement peuvent ensuite être envisagées. La première expression envisageable peut être un modèle de Coulomb [24, 136], mais celui-ci présente des limitations numériques importantes. Berg [16] proposa une expression continue en accord avec les observations expérimentales et facilement identifiable expérimentalement. Cette expression a été reprise par la suite dans de nombreux travaux [138, 144] :

$$\begin{aligned} F_f &= F_{fs} + \frac{x - x_{fs}}{x_{1/2}(1-\mu) - (x - x_{fs})}(F_{fmax} - F_{fs}) \;\; pour \;\; \dot{x} > 0 \\ F_f &= F_{fs} + \frac{x - x_{fs}}{x_{1/2}(1+\mu) - (x - x_{fs})}(F_{fmax} + F_{fs}) \;\; pour \;\; \dot{x} < 0 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Le modèle est paramétré par F_{fmax} l'effort de frottement maximal et $x_{1/2}$ qui représente le déplacement pour lequel l'effort est égal à la moitié de F_{fmax}. F_{fs} et x_{fs} sont les valeurs d'effort et de déplacement au début de chaque cycle et sont réactualisés à chaque cycle. Enfin, $\mu = F_{fs}/F_{fmax}$.

Le modèle simple visco-élasto-plastique peut évidemment être raffiné et il est possible de trouver différentes combinaisons. Le modèle viscoélastique peut être remplacé par un modèle de Maxwell généralisé ou par un modèle fractionnaire [138, 144]. La partie élastique peut se modéliser de façon non linéaire pour prendre en compte la déformation des hystérésis pour des amplitudes plus

grandes [68, 138]. Enfin des associations de plusieurs frotteurs sont possibles [64, 124], voire l'utilisation de modèles élasto-plastiques [6, 64, 87].

Un des inconvénients majeurs de ces modélisations est le découplage des effets dissipatifs associés à l'amplitude et associés à la viscoélasticité. De plus, ces modèles sont généralement macroscopiques et unidimensionnels, ce qui nécessite d'identifier à nouveau les paramètres des modèles dès que la géométrie de la pièce évolue ou dans le cas où d'autres types de sollicitations sont envisagés. Toutefois, cette approche reste très intéressante pour les industriels car simple et intégrable dans des calculs dynamiques sur une structure complète. D'autres travaux tentent cependant d'introduire de tels modélisations dans un calcul tridimensionnel [64].

2.1.1.3.c Autres approches

Les autres approches développées se basent sur une considération de l'état de la microstructure du matériau et notamment de l'état des liaisons entre les charges et les chaînes carbonées qui, lors de cycles de chargement, se brisent et se rééquilibrent dans un état dépendant de l'amplitude de déformation du cycle. Le premier modèle développé à partir de cette approche est le modèle de Kraus [91] qui suppose que des liaisons entre charges se brisent et se reforment. Sous amplitude de déformation constante et sans considérer d'éventuels dommages dans le matériau, le nombre de liaisons entre charges tend asymptotiquement vers un état stationnaire. Ce nombre est une fonction décroissante de l'amplitude de déformation $\Delta\epsilon$. L'expression du module dynamique est ainsi donnée par la relation :

$$\begin{aligned} G' &= G'_0 + \frac{G'_1 - G'_0}{1 + (\Delta\epsilon/\Delta\epsilon_c)^{2m}} \\ G'' &= G''_0 + \frac{2(G''_m - G''_\infty)(\Delta\epsilon/\Delta\epsilon_c)^m}{1 + (\Delta\epsilon/\Delta\epsilon_c)^{2m}} \end{aligned} \tag{2.15}$$

où G'_0, G'_1, G''_0, G''_m, $\Delta\epsilon_c$ et m sont des paramètres matériaux. On voit ici que le module est ici représenté par des lois puissances décroissantes de l'amplitude de déformation. Ulmer [146] critiqua et améliora ce modèle par la suite. Plus récemment, de nombreux travaux ont prolongé ce travail en introduisant dans la formulation basée sur un modèle de Maxwell des variables internes correspondant à des variables de temps caractéristiques du matériau et à des variables représentant la dépendance à l'histoire des amplitudes de déformation [80, 101]. Ces modèles ont l'avantage d'être constitutifs, tri-dimensionnels et prennent en compte la dépendance en amplitude aussi bien en régime harmonique qu'en régime transitoire. Toutefois, ces modélisations restent encore très complexes et difficilement adaptables aux calculs sur une structure complète intégrant des éléments élastomères.

2.1.2 Jonctions boulonnées

Les jonctions boulonnées sont responsables de la majeure partie de l'amortissement d'une structure assemblée. Cet amortissement, prépondérant par rapport à l'amortissement matériau, peut atteindre jusqu'à 90% de l'amortissement total [14]. Le facteur de qualité Q d'une structure boulonnée en acier est généralement compris entre 20 et 60 contre une valeur d'environ 1000 pour une même structure monolithique.

De plus, l'amortissement des jonctions présente quelques caractéristiques importantes. Il est relativement peu dépendant de la fréquence mais fortement influencé par l'amplitude des vibrations [27,77] ; il est donc dépendant de l'amplitude d'excitation de la structure et de l'effort normal entre les surfaces en contact. Enfin, un phénomène de rodage est observé qui engendre une diminution de l'amortissement en fonction du nombre de cycles de chargement [67].

Les phénomènes en jeu dans les jonctions sont de nature complexe car dépendants de nombreux paramètres comme la forme des jonctions, le couple de serrage des boulons, les forces d'excitation et l'amplitude des glissements observés entre les interfaces. Dans l'optique d'améliorer les prédictions d'amortissement sur structures assemblées voire d'optimiser la dynamique de ces dernières, ces phénomènes complexes au sein des jonctions nécessitent de s'intéresser de près au frottement entre les pièces en contact et de modéliser de façon appropriée ces éléments. Après avoir mentionné les principaux phénomènes de frottement intervenant dans la dynamique des jonctions, nous détaillerons les différentes modélisations possibles.

2.1.2.1 Phénomène de frottement

L'essentiel de la transmission des efforts dynamiques à travers une jonction boulonnée s'effectue par l'intermédiaire du frottement entre les différentes surfaces en contact à l'intérieur de la jonction. L'effort normal F_N appliqué par la tête du boulon à la surface supérieure d'un boulon simple permet de transmettre au maximum dans la direction orthonormale aux surfaces en contact un effort tangentiel μF_N. Le frottement engendre également de la dissipation au sein de la jonction. Il est donc impératif de prendre en compte ce phénomène si l'on souhaite développer des modèles représentatifs de jonctions réelles. Nous détaillerons donc ici les principales caractéristiques du frottement entre deux surfaces de façon générale puis nous nous concentrerons sur les phénomènes prépondérants observés sur jonctions boulonnées. Les propos seront principalement focalisés sur le frottement sec, couramment rencontré sur jonction boulonnée.

Le frottement est une combinaison de phénomènes complexes physiques et physico-chimiques ce qui explique la très grande dépendance du frottement vis-à-vis de nombreux paramètres : les matériaux, la fréquence des contacts, la rugosité des surfaces de contact, l'effort normal appliqué, les conditions environnementales, la présence de contaminants, la lubrification, l'usure, les effets thermiques [21,22,122].

La réaction tangentielle donnant naissance au frottement peut être appréhendée de différentes

manières. Pour le frottement sec, une première interprétation avancée par Bowden et Tabor [21, 22] est de considérer les déformations élastiques et plastiques des aspérités microscopiques en contact. Selon cette approche, la surface de contact réelle entre les deux surfaces A peut s'exprimer comme le rapport entre l'effort normal appliqué F_N et la plus faible des deux duretés des matériaux en contact H. De plus, chaque aspérité subit une contrainte de cisaillement qui la déforme élastiquement jusqu'à la valeur limite de contrainte en cisaillement τ_y. L'effort tangentiel résultant peut ainsi s'exprimer $F_T = \tau_y A$. Ainsi, le coefficient de frottement devient $\mu = F_N/F_T = \tau_y/H$. On retrouve ainsi dans une première approche les principales observations de Coulomb selon lesquelles le coefficient de frottement ne dépend pas de l'effort normal, ni de la vitesse relative, ni de la surface apparente. Enfin, cette approche illustre les caractéristiques élasto-plastiques observées du frottement sec et justifie l'utilisation de la théorie des hystérésis pour la construction de modèles de frottement [151].

Suite à cette première explication, nous rappelons rapidement les principales caractéristiques observées dans l'étude du frottement entre deux surfaces planes :

- Frottement statique et dynamique : le coefficient de frottement statique est plus grand que le coefficient de frottement dynamique.
- Effet Stribeck [141] : l'effort de frottement est une fonction de la vitesse relative. Cette fonction décroît à partir d'une vitesse nulle puis croît de nouveau (effet hydrodynamique pour les contacts lubrifiés). Pour le frottement sec, le frottement est très peu dépendant de la vitesse.
- L'effort de frottement statique peut être considéré comme l'effort maximal observé lorsque l'on étudie l'effort de frottement en fonction du déplacement et non plus en fonction de la vitesse comme les modèles de Coulomb précédemment développés [121]. La figure 2.12–a illustre ces observations expérimentales. Cette analyse est un point de départ dans l'analyse du microglissement.
- L'effort statique diminue lorsque la vitesse d'application de la force extérieure augmente.
- L'analyse de la courbe effort-déplacement avant qu'un déplacement macroscopique ne soit observé montre le caractère élasto-plastique de la réponse [38]. La figure 2.12–b illustre ce propos.
- Un effet retard est observé lors de l'application d'une vitesse oscillante ayant une composante continue de telle sorte que la vitesse reste positive. La force de frottement décrit alors un cycle. Le frottement est plus élevé pour les vitesses croissantes [78].

2.1.2.2 Frottement dans les jonctions boulonnées

L'étude des phénomènes physiques se déroulant au niveau des interfaces de contact d'une jonction boulonnée est une tâche difficile à réaliser expérimentalement en raison de l'impossibilité de placer des appareils de mesure directement au niveau des interfaces. Les mesures sont souvent dégradées par le reste de l'environnement expérimental, à savoir les parties restantes des éprouvettes ou les dispositifs d'attache. Cependant, à partir d'une combinaison des connaissances provenant d'expériences, de simulations, et de quelques résultats analytiques, les principales propriétés du comportement aux interfaces ont pu être identifiées. Considérons en figure 2.13–a le comportement d'une jonction à recouvrement simple, représentative du comportement de nombreuses autres configurations.

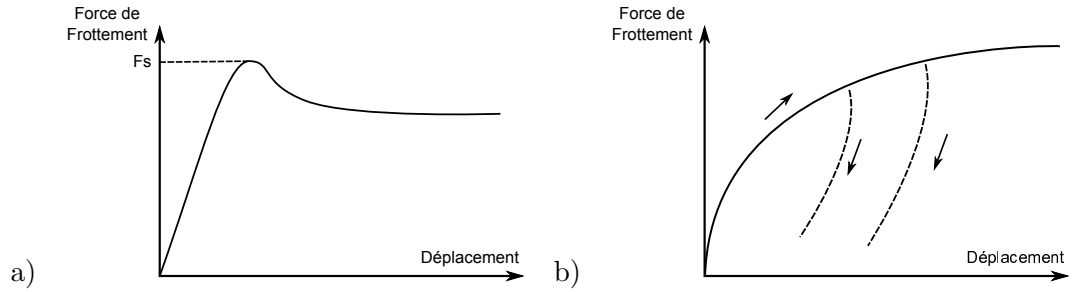


FIGURE 2.12 – Relation Effort–Déplacement : a) Frottement statique observé dans [121] b) Caractéristiques élastoplastiques observées dans [38].

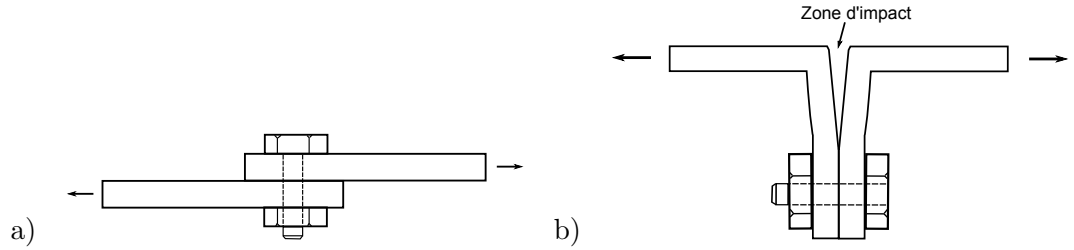


FIGURE 2.13 – a) Jonction boulonnée simple b) Impacts dans une jonction.

La jonction est serrée par un effort normal presseur et soumise à une excitation latérale engendrant un glissement transverse au niveau de l'interface (déplacements entre 0 et quelques centaines de microns sur une jonction spatiale [27]). Pour de faibles charges longitudinales, une zone de glissement sur les bords de l'interface se développe. Pour des charges plus élevées, la zone de glissement s'étend proportionnellement à la charge appliquée et l'amplitude du glissement observé varie quant à lui de façon quadratique avec la charge. On parle alors de glissement partiel. La notion de microglissement peut être utilisée lorsque la zone de glissement ne représente qu'une faible portion de la zone d'interface. Enfin, pour des charges plus élevées, l'intégralité de l'interface est en glissement et l'on parle de macroglissement. Des cartes de glissement obtenues numériquement sur une jonction simple montrent que la zone de collement diminue progressivement autour du perçage permettant le passage de la vis [41]. Pour des chargements plus complexes, les zones de glissement prennent des formes spécifiques et doivent être étudiées au cas par cas [27]. De plus, pour les zones en collement, la déformation plastique des aspérités de la surface est d'autant plus importante que la pression normale est grande.

Ces trois phénomènes que sont le macroglissement, le glissement partiel, et le micro glissement dû aux déformations plastiques des aspérités, sont les principaux phénomènes intervenant chacun de façon plus ou moins prononcée selon les conditions de montage et de fonctionnement. Ces phénomènes de glissement représentent les principaux phénomènes responsables de l'amortissement généré par les

jonctions boulonnées [14]. La plupart des montages industriels, devant supporter une grande raideur statique, présentent majoritairement du microglissement et du glissement partiel.

Il est par conséquent généralement considéré que la force de frottement dans les jonctions boulonnées est :
- dépendante des matériaux et des états de surface,
- proportionnelle à l'effort normal,
- indépendante de la vitesse relative et de la surface apparente,
- généralement plus élevée avant l'apparition du glissement (frottement statique).

Par conséquent, les effets Stribeck et de retard resteront donc peu significatifs. Cependant, des modèles permettant de décrire les phénomènes élasto-plastiques de microglissement seront généralement nécessaires. Ces dernières considérations ne prennent pas en compte la présence d'éventuels matériaux entre les deux pièces à assembler (couche d'élastomère par exemple).

En plus de la dissipation introduite par le glissement aux interfaces, un second phénomène peut être responsable d'une partie de la dissipation d'énergie. Il s'agit du phénomène d'impacts observé entre les parties adjacentes à la jonction qui se déforment élastiquement et qui peuvent s'entrechoquer. Ce phénomène s'observe généralement pour de fortes amplitudes en fonction de la géométrie de la jonction et réalise un transfert d'énergie vers les hautes fréquences [135]. Une illustration est donnée en figure 2.13–b. Des phénomènes de fretting peuvent également survenir [134] notamment dans les structures aéronautiques et un certain soin doit être apporté lorsqu'il s'agit d'augmenter la dissipation dans les jonctions tout en évitant les problèmes de fretting. De plus, à fréquences élevées, le phénomène de pompage d'air peut également être prépondérant [148]. Enfin, des effets de relaxation sont observés dans les jonctions qui se traduisent par une diminution de la tension du boulon en fonction du temps. La relaxation de la tension du boulon atteint 5 à 6% de sa valeur initiale sur une période de temps de l'ordre d'une journée [84]. Toutefois, nous ne nous intéresserons pas en détail à ces aspects dans ce travail.

2.1.2.2.a Effort normal optimal

L'amortissement des jonctions provenant largement du frottement généré par le microglissement dans les jonctions, la force normale appliquée à ces dernières influence largement cet amortissement. En effet, une diminution de l'effort normal tend à augmenter la zone de glissement. La dissipation d'énergie étant proportionnelle au produit de l'effort normal par l'amplitude du glissement, il existe un effort normal optimal pour maximiser la dissipation. Toutefois une diminution de l'effort normal engendre généralement une diminution de la raideur de la jonction, raideur qui doit malgré tout être capable de supporter les efforts subis. Il est donc généralement possible d'augmenter l'amortissement en agissant uniquement sur les conditions de montage des boulons. Cette procédure reste cependant efficace uniquement pour les premiers modes de la structure, lorsque les déplacements observés dans les jonctions restent suffisamment importants pour apporter une dissipation significative.

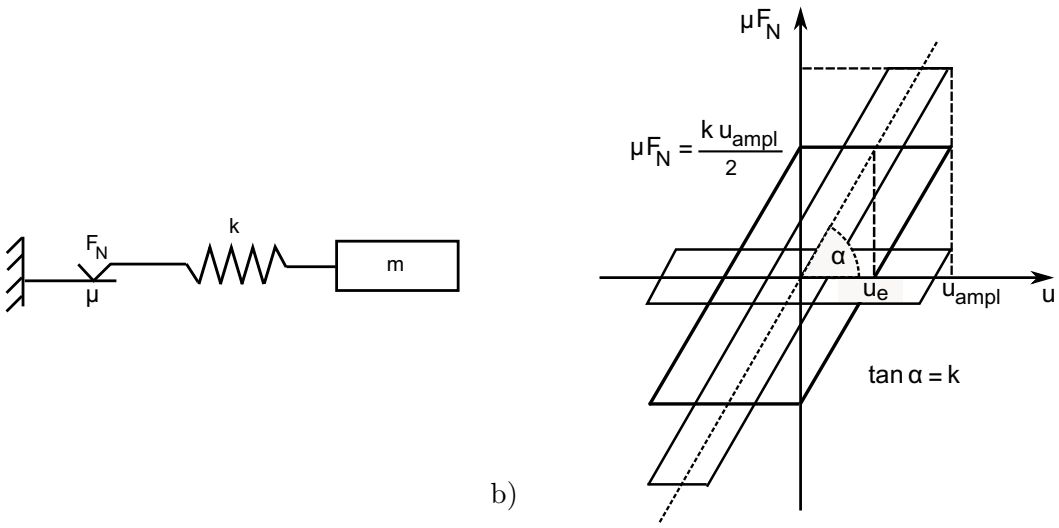


FIGURE 2.14 – a) Système masse-ressort-frotteur b) Hystérésis obtenues.

Ce concept de force normale optimale peut être illustré sur un système masse-ressort-frotteur à un degré de liberté en figure 2.14–a [62]. Le frotteur est modélisé par un modèle bilinéaire de Coulomb (association d'un ressort et d'un frotteur). Les courbes d'hystérésis obtenues pour différentes valeurs de l'effort normal F_N sont montrées en figure 2.14–b. Pour un frotteur de raideur k avec un coefficient de frottement μ, le déplacement élastique vaut $u_e = \mu F_N/k$. L'amplitude de l'oscillation est $u_{ampl} > u_e$. Ainsi l'énergie dissipée par cycle s'écrit :

$$D = 4ku_e(u_{ampl} - u_e) \tag{2.16}$$

Il est facile de voir que si l'effort normal est nul $F_N = 0$ ou s'il y a collement $F_N > F_{stick} = ku_{ampl}/\mu$, la dissipation est nulle. Celle-ci est maximale lorsque le déplacement élastique est égal à la moitié de l'amplitude de l'oscillation $u_e = u_{ampl}/2$. Ce cas correspond à l'application d'un effort normal égal à la moitié de l'effort normal minimal pour obtenir le collement :

$$F_{N,optimal} = F_{stick}/2 = \frac{ku_{ampl}}{2\mu} \tag{2.17}$$

Ce raisonnement simplifié permet donc de comprendre l'importance du choix de l'effort normal qui possède un optimal sur les structures assemblées si l'on souhaite maximiser la dissipation. En outre, ce raisonnement permet également de comprendre que, lors de l'analyse de la dissipation locale sur une interface, la dissipation n'est pas forcément dans les zones où l'amplitude du glissement est la plus forte, mais plutôt où le produit effort-déplacement l'est [27].

L'influence de la force normale sur l'amortissement a été utilisée pour contrôler la vibration de structure spatiale de type treillis par Gaul et al. [60] et pour analyser l'impact du fonctionnement d'un certain nombre de jonctions boulonnées en macroglissement sur l'amortissement d'un satellite complet [152].

2.1.2.2.b Influence du chargement

Le chargement appliqué sur une jonction a une grande influence sur le glissement généré aux interfaces et par conséquent sur la dissipation. De nombreuses études se sont penchées sur la dépendance de la dissipation en fonction de l'amplitude du chargement appliqué [17, 134, 147]. Il ressort de ces études que l'analyse de la loi de dépendance observée peut permettre l'identification des sources de dissipation. En effet, Ungar [147] montra que la dissipation due au pompage d'air variait de façon quadratique en fonction du chargement pour des jonctions rivetées, et que la puissance devenait supérieure à 2 pour des jonctions type jonctions à recouvrement. De plus, l'analyse de Goodman [66] montra que la dissipation par cycle d'un contact plan dépendait de façon cubique de l'effort de cisaillement appliqué. Les expériences menées montrent que la loi est souvent une puissance comprise entre 2.2 et 2.8, notamment en raison des chargements de flexion qui peuvent parfois réduire la zone de contact.

2.1.2.3 Effets dynamiques induits par les jonctions boulonnées

Nous venons de voir que le principal effet notoire sur la dynamique des structures assemblées est la dissipation générée dans les jonctions qui peut représenter la majeure partie de l'énergie dissipée par la structure. Cette effet est difficile à prédire vu la complexité des phénomènes physiques mis en jeu mais l'ensemble des travaux de recherche déjà effectués ont montré qu'il est cependant possible d'influencer l'amortissement en agissant sur l'effort normal dans les jonctions. Ce concept a cependant un impact limité aux premiers modes de la structure pour lesquelles les déplacements au sein des jonctions restent importants.

En plus de cet effet d'amortissement, le glissement généré à la surface de contact engendre une diminution de la raideur des jonctions. Cette abaissement peut être significatif ou non, engendrant par la suite une diminution plus ou moins importante des fréquences propres de la structure [77]. La raideur des jonctions peut également être non linéaire, en raison de la forme des lois de frottement aux interfaces mais également en raison de l'application du chargement généralement décalé par rapport à l'axe du boulon [84]. Enfin, dans le cas de jonctions avec jeu, la dynamique peut être influencée.

Le comportement non linéaire présent aux interfaces par le frottement sec génère également des réponses dynamiques en régime forcé qui présentent des harmoniques d'ordre supérieurs comme nous pouvons le voir dans les travaux de Ouyang et al. [116].

2.1.2.4 Modélisations

Malgré les non linéarités de comportement des jonctions boulonnées, une grande partie des structures assemblées présentent un comportement linéaire, excepté au niveau des jonctions en raison de l'amortissement dû au microglissement et d'une légère diminution de raideur. Ces structures sont donc souvent modélisées par des modèles éléments finis linéaires. De plus, le nombre élevé de connections boulonnées rend leur intégration dans les modèles prohibitive et la détermination des boulons ayant un impact majeur sur la dynamique de la structure complète reste une tâche très difficile.

Les premières méthodes permettant de prendre en compte les jonctions dans un calcul dynamique se sont d'abord réduit à considérer uniquement l'effet d'amortissement et à l'intégrer ensuite dans les modèles éléments finis par les méthodes classiques bien connues. Cependant, la volonté d'améliorer la prédiction et de prendre en compte les effets non linéaires a conduit à développer des modèles paramétriques non linéaires simples basés sur l'utilisation de ressorts et amortisseurs non linéaires. Ensuite, la meilleure connaissance des phénomènes de frottement se déroulant aux interfaces de contact dans la jonction a permis la construction de modèles paramétriques non linéaires basés sur les caractéristiques élasto-plastiques observées. Enfin, les moyens de calculs ont également donné naissance à un certain nombre de modélisations fines par éléments finis où l'ensemble des éléments constituants les jonctions ainsi que les interfaces de contact se trouvent représentés. Nous détaillons dans ce qui suit ces quatre grandes familles de modèles.

2.1.2.4.a Amortissement équivalent

La première façon de prendre en compte l'impact des jonctions dans la dynamique d'une structure est de ne considérer que l'effet d'amortissement des jonctions (et non pas la diminution de raideur) et de l'intégrer dans l'amortissement global affecté au modèle complet. L'amortissement peut alors être modélisé de façon classique par un amortissement proportionnel, structural, ou modal, voire une combinaison de ces différents types. L'avantage de cette approche est d'être bien maîtrisée et compatible avec les méthodes de calculs classiques, même si l'amortissement introduit ne possède pas les propriétés qualitatives réelles. De plus, les paramètres modaux peuvent être déduits de tests dynamiques réalisés sur structure réelle.

Ce type de modélisation repose sur une hypothèse de linéarité qui peut montrer ses limites pour plusieurs raisons :

- une modélisation de l'amortissement de type proportionnel ou modal fait apparaître une forte dépendance à la fréquence ce qui n'est généralement pas le cas avec l'amortissement structural observé pour les jonctions boulonnées ;
- les modèles linéaires font apparaître une dépendance quadratique de l'énergie dissipée par cycle en fonction de l'effort d'excitation, ce qui n'est généralement pas le cas sur les structures boulonnées (loi puissance avec un exposant entre 2.2 et 2.8) [66, 134] ;
- ces approches ne peuvent rendre compte d'une diminution de raideur des jonctions observées expérimentalement.

Pour tenir compte de ces limitations, deux approches sont possibles. La première est de choisir des valeurs de paramètres d'amortissement permettant d'encadrer le comportement du système (choix d'un amortissement minimal permettant de borner le maximum de la réponse par exemple). La seconde est d'approcher le comportement non linéaire de la structure dans un domaine de fonctionnement restreint où l'hypothèse de linéarité peut être respectée.

Pour la seconde approche, il est alors nécessaire d'identifier les paramètres de la structure pour différentes amplitudes A d'excitation, de vibrations, pour permettre de déduire un ensemble de valeurs d'amortissement, généralement des amortissements modaux pour les premiers modes de la structure $\xi_k(A)$, en fonction des différentes amplitudes. Il peut alors s'agir d'utiliser ou de recombiner ces valeurs d'amortissement pour des sollicitations ayant même gamme d'amplitude [27], ou d'extrapoler ces valeurs pour des sollicitations d'amplitude plus élevée. Toutefois, l'extension des valeurs d'amortissement à d'autres sollicitations reste une question délicate en raison de la non linéarité des structures.

Les différentes valeurs d'amortissement peuvent être obtenues à partir d'essais sur structure réelle de type analyse modale ou lâcher [77], ou à partir d'essais virtuels considérant les simulations numériques comme prédictives pour différents cas de chargement simple [27].

2.1.2.4.b Modèles paramétriques simples

La méthode précédente consiste à ajuster des paramètres d'un modèle linéaire pour approcher un comportement présentant des non linéarités localisées. Lorsqu'il s'agit d'améliorer la prédiction des modèles de structures, il peut être intéressant de conserver le caractère non linéaire local de la jonction afin de l'intégrer dans la simulation complète d'une structure ou d'utiliser ses caractéristiques élémentaires pour en déduire de nouvelles valeurs d'amortissement à utiliser dans les modèles linéaires. Dans tous les cas, il est nécessaire de se doter de modèles paramétriques non linéaires permettant de représenter la dissipation et la raideur des jonctions.

La première possibilité est de considérer un modèle de jonction linéaire, souvent constitué d'assemblage de ressorts et d'amortisseurs, et d'identifier ses paramètres autour d'une zone de fonctionnement restreinte permettant encore une fois de valider l'hypothèse d'approche du comportement non linéaire par un modèle de structure linéaire. Nous pouvons mentionner les travaux de Ren et al. [126] ou de Esteban et al. [52]. Enfin, il peut être envisageable de représenter la variation des propriétés de la jonction en raison des non linéarités en utilisant un modèle de jonction linéaire paramétré par des nombres flous [75]. Des éléments linéaires volumiques ou surfaciques peuvent également être utilisés en identifiant les propriétés d'élasticité des éléments [3].

Le seconde possibilité est d'utiliser des raideurs et amortisseurs non linéaires permettant de représenter les variations de raideur et d'amortissement en fonction de l'amplitude des déplacements des degrés de liberté de la jonction. Ainsi, Ahmadian et al. [2] utilisent une raideur cubique pour modéliser l'assouplissement de la jonction alors que l'amortissement reste représenté par un amortisseur visqueux linéaire. La même raideur cubique a été utilisé par Esteban et al. [52] mais pour représenter une jonction présentant un jeu et donc l'augmentation de raideur observée lors des amplitudes extrêmes de débattement.

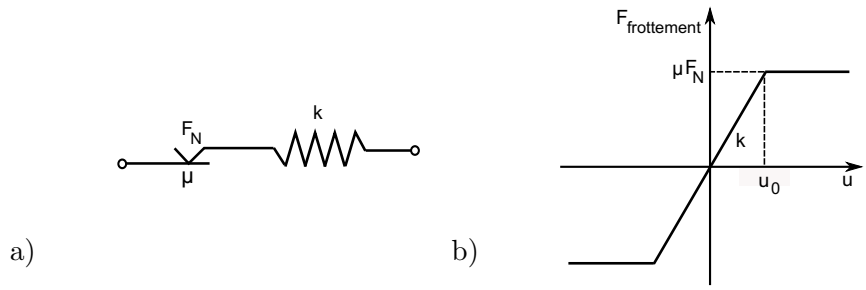


FIGURE 2.15 – a) Elément bilinéaire b) Caractéristiques associées.

2.1.2.4.c Modèles paramétriques de microglissement

Les modèles non linéaires précédents restent trop simplistes pour pouvoir permettre de représenter en détail les phénomènes de frottement présents aux interfaces. Avec l'augmentation des connaissances sur les phénomènes de glissement présents dans les jonctions via les observations expérimentales et les calculs numériques, une nouvelle famille de modèles a vu le jour en se basant sur l'analogie avec la réponse élasto-plastique des métaux. En effet, nous avons détaillé précédemment les effets de microglissement observés pour deux surfaces en contact. L'observation des courbes de réponse force-déplacement montrent que le comportement présente des caractéristiques élasto-plastiques [38].

Ainsi les premiers modèles vont intégrer un élément bilinéaire consistant en l'association en série d'une raideur et d'un frotteur donné par une loi simple de Coulomb (figure 2.15). Cet élément est appelé élément de Jenkins [62]. Lors du collement, la force de frottement est générée par le ressort. Lorsque la force de frottement de Coulomb est atteinte, le frotteur se met à glisser. La réponse est ainsi élasto-plastique. Contrairement à un modèle de Coulomb classique, ce modèle présente l'avantage de lever la singularité en zéro. Le modèle peut s'écrire :

$$\begin{aligned} F &= ku \quad si \quad u < u_0 \\ F &= ku_0 \quad si \quad u \geq u_0 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Le modèle bilinéaire précédent ne permet cependant que de représenter un état collé ou glissant, ce qui est insuffisant si l'on veut décrire en détail le microglissement aux interfaces des jonctions. De nombreux autres modèles ont donc été développés en multipliant le nombre d'éléments bilinéaires en série ou en parallèle ou en utilisant une variable interne permettant de représenter l'état interne de la surface et de prendre en compte sa dynamique propre.

Dans tous les cas, la plupart de ces modèles possèdent les propriétés de symétrie décrites par Masing [58] facilitant ainsi l'identification des paramètres des modèles. La règle de Masing stipule que les deux chemins définissant l'hystérésis obtenue durant un chargement cyclique ont la même forme que la courbe de premier chargement. En effet, chaque chemin est obtenu en effectuant une

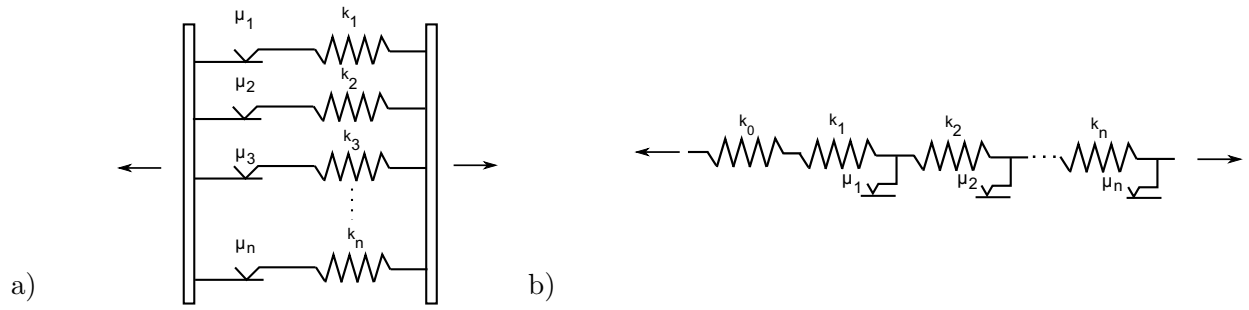


FIGURE 2.16 – Modèles d'Iwan : a) parallèle b) série.

homothétie de facteur de deux, une translation et une réflexion de la courbe de premier chargement. Les propriétés de la jonction sont donc connues uniquement par la donnée de la courbe de premier chargement. L'expression des efforts dans la liaison peut alors s'écrire :

$$F = R(x_{inv}) + 2sign(x - x_{inv})R(|x - x_{inv}|/2) \tag{2.19}$$

où R est la fonction identifiée à partir de la courbe de premier chargement et x_{inv} est une des deux extrémités de l'hystérésis obtenue pour un chargement cyclique.

Nous présentons dans la suite deux modèles couramment rencontrés dans la littérature : le modèle d'Iwan et le modèle de LuGre. De nombreux autres modèles existent. Nous pouvons citer le modèle de Haessig et al. [74] qui considère les points de contact entre les surfaces et sa version adaptée numériquement nommé "Reset Integrator Model" [74]. Le modèle de Dahl [42, 43] a été largement utilisé pour des applications de contrôle par friction [74,114] puis modifié pour ajout d'un effet visqueux [4]. Nous pouvons enfin mentionner les applications du modèle de Bliman et Sorine [19] qui peut être vu comme une combinaison de deux modèles de Dahl, le modèle de Valanis [62] et son application à une structure spatiale [61], le modèle de Menq [106] et de Bouc-Wen [113].

Modèle d'Iwan

Les modèles d'Iwan [85] sont une extension de l'utilisation d'éléments bilinéaires simples et consistent en l'association, parallèle (on parle alors de modèle de Maxwell de glissement) ou série, de plusieurs de ces éléments. On représente en figure 2.16 les deux configurations initialement présentées par Iwan. Les éléments de Jenkins ont tous même raideur mais possèdent des forces de frottement différentes, permettant le glissement progressif des différents éléments au cours du chargement. Or, le modèle peut se formuler de façon discrète en considérant un nombre fini d'éléments de Jenkins ou de façon continue en considérant un nombre infini. La répartition des forces de frottement dans ce dernier se fait alors par l'introduction d'une distribution. Cette loi peut être choisie de telle sorte que le modèle nécessite alors que l'identification de quatre paramètres [134].

De nombreux modèles et applications ont été développés à partir de ce modèle [46, 134]. Nous pouvons mentionner le développement d'un élément poutre $2D$ intégrant deux modèles d'Iwan dans les travaux de Song et al. [137,140] et son extension à un élément $3D$ [139]. Enfin, il faut noter les travaux de Quinn et Segalman [120] qui, en utilisant un modèle discret en série, ont permis de déterminer une expression analytique donnant la dissipation par cycle en fonction de l'amplitude d'excitation pour différentes répartitions de charge normale aux interfaces. En considérant une distribution de Hertz des charges normales, la loi de puissance est une puissance de $8/3$ en accord avec les relevés expérimentaux. Miller et al. [107] ont fait la synthèse des deux travaux précédents en proposant un modèle d'Iwan particulier permettant de représenter le microglissement des deux côtés des interfaces en contact et l'intégrèrent dans un élément poutre selon le travail de Song et al. [140]. Les résultats numériques montrent une dépendance de la dissipation qui suit une loi de puissance d'un facteur 2.72 proche des observations expérimentales.

Modèle de LuGre

Le modèle de Lugre (Lund–Grenoble) a été développé par Canudas de Wit et al. [29] et est inspiré de l'idée développée par Haessig et al. [74].

Le modèle de Haessig et al. se base sur la considération des points de contact entre les deux surfaces. Les points de contact sont considérés comme étant répartis de façon aléatoire sur la surface de contact. Chaque point de contact se comporte comme une lamelle flexible qui, lorsque le mouvement relatif entre les deux surfaces augmente, génère une force élastique proportionnelle au déplacement relatif. La somme de ces forces élémentaires donne naissance à la force de frottement obtenue. Lorsque l'élongation d'un ressort élémentaire dépasse une valeur seuil, le contact est considéré comme rompu et un autre point de contact est généré aléatoirement entre les deux surfaces. Le modèle intègre un nombre fini de lamelles, généralement entre 20 et 25, et donc plusieurs variables internes ce qui rend ce modèle relativement peu efficace numériquement.

Afin d'améliorer l'efficacité numérique du modèle, l'idée du modèle de LuGre est de considérer la valeur moyenne de l'ensemble des lamelles élastiques et de représenter cette valeur par une variable interne, dénoté z ici. La déflection moyenne voit son évolution dépendante de la vitesse de glissement relative entre les deux surfaces. La figure 2.17 illustre le modèle. Le modèle est également capable de représenter le microglissement, des forces de frottement statique et dynamique différentes, l'effet Stribeck et des phénomènes associés à des contacts lubrifiés. Toutefois, le modèle de LuGre présente quelques limitations dans les phases de collement. En effet, dans certains cas d'application de la force extérieure, un déplacement non nul macroscopique peut s'observer et l'effort de frottement peut être momentanément dans le même sens que l'effort d'excitation en raison de l'amortissement des lamelles introduit. Suite à cette étude, un modèle complémentaire élasto-plastique a été développé pour éviter ses limitations par Dupont et al. [50].

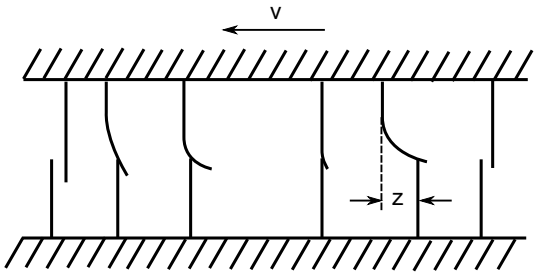


FIGURE 2.17 – Modèle de LuGre.

Le modèle s'écrit de façon générale sous la forme :

$$\begin{aligned} F &= \sigma_0 z + \sigma_1(v)\dot{z} + f(v) \\ \dot{z} &= v - \sigma_0 \frac{|v|}{g(v)} z \end{aligned} \tag{2.20}$$

où F et v sont respectivement l'effort de frottement généré et la vitesse relative entre les deux surfaces en contact. Le paramètre σ_0 représente la raideur linéaire des lamelles modélisées. $\sigma_1(v)$ permet d'introduire de l'amortissement au niveau des lamelles et ce afin d'éviter l'observation d'oscillations non amorties dans les périodes de collement. La forme standard du modèle considère un amortissement constant. En cas de vitesse relative constante $v = C^{te}$, le modèle génère une force égale à :

$$F = g(v)sign(v) + f(v) \tag{2.21}$$

On voit par cette expression que la fonction $f(v)$ peut permettre de représenter un éventuel amortissement visqueux présent (généralement $f(v) = \alpha_2 v$ [5]) et que la fonction $g(v)$ rend compte de la dépendance du coefficient de frottement en fonction de la vitesse. L'effet Stribeck peut ainsi être modélisé en choisissant une fonction de la forme :

$$g(v) = \alpha_0 + \alpha_1 e^{-(v/v_0)^2} \tag{2.22}$$

La somme $\alpha_0 + \alpha_1$ permet ainsi de définir l'effort de frottement statique et le terme α_0 l'effort dynamique de type Coulomb (indépendant de la vitesse). A partir de ces différents choix, une forme standard du modèle est couramment employée et s'écrit :

$$\begin{aligned} F &= \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \alpha_2 v \\ g(v) &= \alpha_0 + \alpha_1 e^{-(v/v_0)^2} \\ \dot{z} &= v - \sigma_0 \frac{|v|}{g(v)} z \end{aligned} \tag{2.23}$$

De nombreuses analyses complémentaires peuvent être retrouvées dans les travaux de Olsson et al. [114]. Il est à noter que le modèle de Dahl [42, 43] peut être vu comme un cas particulier du

modèle de LuGre correspondant au cas où les paramètres σ_1, $f(v)$ sont nuls et où $g(v)$ est constant.

Le modèle de LuGre a été largement utilisé pour des applications de contrôle de vibrations par frottement, notamment pour le contrôle de vibrations de structures spatiales de type treillis. Une jonction spécifique intégrant des piézoélectriques permet de contrôler l'effort normal afin d'optimiser la dissipation en certains points de la structure [59, 60].

2.1.2.4.d Modèles locaux

Une dernière approche permettant d'appréhender les phénomènes complexes de frottement présents dans les jonctions boulonnées consiste en la discrétisation fine des différentes interfaces de contact en modélisant par éléments finis l'ensemble des éléments réalisant la jonction. Les lois de contact entre les différents éléments sont alors introduites par des méthodes de pénalisation ou par multiplicateurs de Lagrange et les lois de frottement sont souvent des lois de type Coulomb. La description du glissement partiel à l'interface est alors représenté par des noeuds d'interface en glissement et des noeuds en collement. Pour la résolution, les logiciels commerciaux comme Abaqus, Nastran [41, 113] ou Ansys ou des méthodes plus spécifiques comme la méthode LATIN [27] peuvent être mises en oeuvre. Les calculs sont généralement effectués en quasi-statique en considérant que les longueurs d'ondes impliquées sont très grandes devant la dimension des liaisons.

Ce type de modélisation présente l'avantage de représenter les formes complexes et les différents éléments qui peuvent se trouver dans une jonction boulonnée. De plus, aucun modèle paramétrique n'est nécessaire même si les coefficients de frottement, les matériaux, les chargements appliqués doivent être appliqués avec précaution. Cependant, certaines limites peuvent être soulignées. Tout d'abord, la description du comportement de l'interface par une loi de type Coulomb permet de représenter le glissement partiel mais pas le microglissement lié à la déformation des aspérités. La modélisation de la micromécanique du contact supposerait alors des pas de temps (environ $4.10^{-10}s$) et des tailles de maille (environ $10\mu m$) très faibles et souvent prohibitifs pour la réalisation d'un calcul complet [135]. Les hypothèses classiquement utilisées pour ce genre de modélisation sont [62] :

- le contact entre les surfaces est élastique ; aucune déformation plastique n'est représentée,
- les surfaces ont même comportement dans toutes les directions,
- les paramètres des surfaces ne changent pas en fonction du temps,
- le frottement sec est considéré uniquement.

Le microglissement peut cependant être considéré faible devant l'amortissement généré par le glissement partiel [27]. Enfin, les simulations numériques peuvent être longues et présenter : des difficultés de convergence en fonction des paramètres choisis. Toutes ces observations permettent de conclure que l'utilisation de tels modèles pour la réalisation d'un calcul dynamique sur une structure complète est peu envisageable à l'heure actuelle ; les modèles présents permettent seulement de réaliser des prédictions d'amortissement et d'étudier le comportement des interfaces pour des structures simples.

2.1.3 Amortisseurs à frottement

Les amortisseurs à frottement sont généralement bien adaptés à l'amortissement de vibrations en raison de leur faible sensibilité à la température, de leur possibilité de contrôle semi-actif, et de leur utilisation pour des gammes de fréquences larges notamment pour les chocs. De plus, les amortisseurs à frottement peuvent être insérés dans le vide et donc adaptables en environnement spatial. Nous présentons dans la suite les divers types d'amortisseurs que l'on peut rencontrer et leur régime de fonctionnement. Les modélisations simples couramment rencontrées sont exposées dans un second temps.

2.1.3.1 Régimes de fonctionnement

Divers régimes de fonctionnement peuvent être envisagés pour les amortisseurs à frottement sec. En effet, en fonction de l'amplitude de déplacements à amortir, les phénomènes de frottement seront différents. Ainsi, lorsqu'il s'agit d'amortir les vibrations de deux structures spatiales, l'introduction d'un amortisseur à frottement entre deux points de connexion s'effectuera généralement pour atténuer des vibrations de l'ordre de $0.1mm$. Cette atténuation sera réalisée à l'aide d'un élément frottant sur un cylindre. Les phénomènes observés seront alors du collement et du glissement autorisant la plupart du temps à modéliser le frottement par une simple loi de Coulomb. Nous pouvons illustrer ce propos en considérant l'amortissement à frottement inséré sur l'étage cryogénique d'Ariane 5 [81]. D'autres travaux plus amonts [149] s'intéressent à l'introduction d'éléments piézo-électriques pour réaliser un contrôle semi-actif de structures. Le schéma de principe de ce type d'amortisseurs est présenté en figure 2.18. Un coussinet vient généralement frotter sur la surface interne du cylindre extérieur. La force de frottement est proportionnelle à l'effort presseur sur le coussinet. Cet effort presseur peut être généré par des éléments piézo-électriques ou par des rondelles qui se déforment lors du déplacement axial de la tige principale. D'autres applications peuvent être rencontrées dans le domaine de l'industrie automobile [70] ou du génie civil [109].

Les amortisseurs à frottement peuvent être également utilisés en dissipant de l'énergie par microglissement. Cela peut être le cas de jonctions prototypes spécialement développées pour lesquelles un effort normal est contrôlé par piézo-électriques afin d'amortir les vibrations d'une structure spatiale en treillis [60]. La figure 2.19 montre une représentation de ce type de jonction. Un autre domaine d'application des amortisseurs à frottement est le domaine des turbomachines [132]. L'amortissement généré par de tels dispositifs est induit par le microglissement aux niveau des interfaces.

2.1.3.2 Modélisation

En ce qui concerne la modélisation utilisée pour le comportement frottant de ce type d'amortisseurs, les modèles utilisés sont très proches de ceux utilisés pour les jonctions boulonnées.

Lorsque l'amortisseur se présente sous la forme d'une biellette frottante, la modélisation les plus

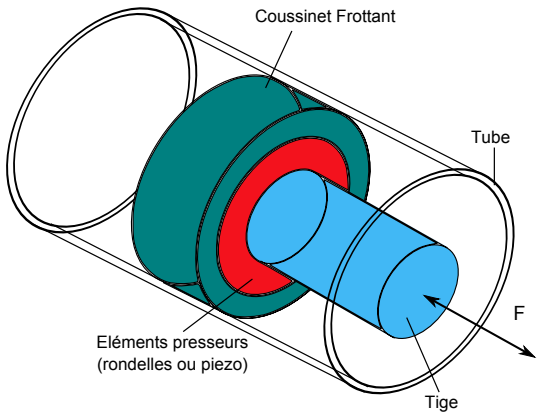


FIGURE 2.18 – Schéma de principe d'un amortisseur à frottement sec.

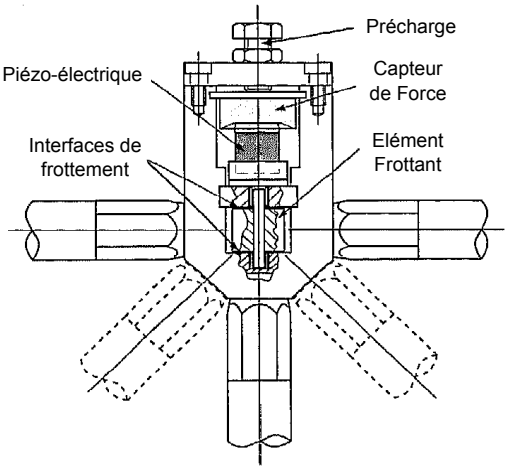


FIGURE 2.19 – Jonction à frottement contrôlé.

rencontrée est évidemment le modèle bilinéaire. La raideur modélise les phases de collement du dissipateur tandis qu'un frottement de Coulomb est souvent utilisé [81]. Cette approche est de plus appréciée pour sa simplicité de mise en oeuvre dans un contexte industriel. L'approximation de premier harmonique pour l'effort de frottement est employée pour simplifier les calculs, voire un amortissement équivalent est calculé. Toutefois, les caractérisations expérimentales du frottement en fonction de la vitesse de déplacement du frotteur peuvent montrer une dépendance en fonction de la vitesse. La direction de l'effort résistant s'effectuant dans la direction de l'amortisseur, le choix de modèle de frottement unidirectionnel est possible. L'amortisseur étant souvent relié par des liaisons rotules, l'effort résistant peut facilement être projeté sur les six degrés de liberté des noeuds d'attache (trois degrés de liberté par noeud).

Pour la modélisation des jonctions à frottement contrôlé ou des amortisseurs d'aubes de turbines, des modèles prenant en compte le microglissement de façon plus raffiné peuvent être utilisés. Ainsi, des modèles de Lugre [60] et des modèles d'Iwan [132] peuvent être utilisés. Les modèles d'amortisseurs d'aubes de turbine présentent toutefois une particularité à savoir un déplacement possible dans deux directions. Afin de prendre en compte cette spécificité, des modèles utilisant des frotteurs glissant dans un plan ont été proposés par Sanliturk et al. [132]. La rotation de chaque modèle bilinéaire utilisé est alors paramétrée par un angle évoluant suivant un cycle de vibration.

2.2 Sous-structuration dynamique aux interfaces

Lorsque l'on cherche à déterminer le comportement vibratoire d'une structure assemblée avec une grande précision, il est nécessaire de discrétiser finement la structure ce qui amène à des modèles comportant un grand nombre de degrés de liberté. La résolution numérique du système d'équations obtenues peut alors conduire à de fortes limitations informatiques, tant au niveau de la mémoire que du temps calcul. Il est alors impératif de mettre en oeuvre différentes techniques afin de diminuer la taille du système tout en conservant suffisamment d'informations sur le comportement dynamique pour garantir une précision satisfaisante.

La première étape consiste à créer une partition de la structure en différents domaines, dénommés "sous-structures", qui seront étudiés ou réduits séparément avant d'être assemblés à nouveau en vue de la résolution globale du système décrivant l'ensemble de la structure. Le système final, après réduction d'au moins une des sous-structures, est alors de taille réduite par rapport au problème initial. La sous-structuration présente également d'autres avantages, notamment la division possible d'un projet en plusieurs sous-projets ou encore la réduction du nombre de sous-structures à étudier en profitant des symétries de certaines sous-structures ou de la présence de plusieurs sous-structures identiques. Enfin, lorsque la structure considérée est un assemblage de différents sous-systèmes (tronçons de lanceur, satellite, et navette spatiale par exemple), il peut être intéressant de travailler avec une subdivision suivant les interfaces de connexions entre ces différents éléments. Le problème est alors considéré de façon modulaire et il devient possible de modifier une sous-structure sans remettre en cause l'ensemble du projet.

La seconde étape qui permet la réduction du système à résoudre est l'étape de condensation qui permet de diminuer le nombre de degrés de liberté décrivant chaque sous-structure. Lors d'analyses dynamiques en basses fréquences de structures assemblées, la majeure partie des méthodes de condensation sont basées sur une approximation des déplacements via la méthode de Ritz. Dans cette approche, les déplacements de chaque sous-structure sont représentés par une somme de fonctions de base décrivant un champ de déplacement particulier de la sous-structure. Plus précisément, les N degrés de liberté $q_N(t)$ d'une sous-structure sont reliés à NR degrés de liberté $q_{NR}(t)$ ($NR < N$ pour assurer une réduction de la taille du système) à l'aide d'une base $\mathbf{T}$ de NR vecteurs linéairement indépendants de taille $N \times NR$ et par la relation :

$$q_N(t) = \mathbf{T} q_{NR}(t) \tag{2.24}$$

Or, l'équation de la dynamique à résoudre pour une sous-structure peut s'écrire :

$$\mathbf{M}\ddot{q} + \mathbf{D}\dot{q} + \mathbf{K}q = F(q, \dot{q}, \Omega, t) \tag{2.25}$$

où q représente l'ensemble des degrés de libertés de la sous-structure, $\mathbf{M}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{K}$ ses matrices de masse, d'amortissement et de raideur, et F les efforts s'appliquant sur la structure. Il est alors possible de réduire cette expression à une équation liant uniquement NR inconnues :

$${}^T\mathbf{TMT}\ddot{q}_{NR} + {}^T\mathbf{TDT}\dot{q}_{NR} + {}^T\mathbf{TKT}q_{NR} = {}^T\mathbf{T}F \tag{2.26}$$

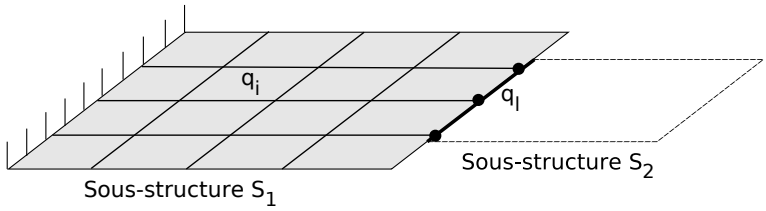


FIGURE 2.20 – Division des degrés de liberté.

A partir de la connaissance de NR degrés de liberté $q_{NR}(t)$, il est possible de déduire l'ensemble des déplacements du système $q_N(t)$. Or la qualité de l'approximation des déplacements dépend de la capacité des vecteurs de base choisis à représenter les déplacements observés sur la structure réelle. Les méthodes de condensation existantes cherchent donc à construire une base $\mathbf{T}$ à partir de la connaissance *a priori* de la forme des réponses cherchées. Ces méthodes s'orientent donc vers les modes propres de vibration ainsi que vers les modes de déformations statique.

2.2.1 Modes des sous-structures

Lorsque l'on s'intéresse à la dynamique des interfaces d'une structure assemblée, il peut être intéressant de condenser la sous-structure sur ses interfaces avec les autres sous-structures afin de pouvoir insérer des modèles complexes de jonctions. Les méthodes de condensation conduisent donc souvent à diviser les N degrés de liberté $q_N(t)$ de la sous-structure entre les degrés de liberté de liaison $q_l(t)$ et les degrés de liberté internes $q_i(t)$.

De plus, les méthodes de condensation se basent sur une approche qui considère les déplacements de la structure comme une combinaison linéaire des modes de vibrations et des modes de déformation statiques. La base modale qui doit nécessairement être tronquée doit alors pouvoir représenter la dynamique du système sur une bande fréquence suffisante. En outre, les modes de vibration de chaque sous-structure peuvent se calculer à partir de différents types de conditions limites appliquées aux interfaces (libre, fixe, chargée). Les différentes méthodes de réduction se distinguent par ce choix des conditions limites. On rappelle ici les différents modes qui sont considérés par ces méthodes.

Parmi les modes statiques de déformation, deux types sont distingués :
- *modes statiques de liaison* : il s'agit des modes d'interface correspondant aux calculs de degrés de liberté internes lorsqu'un déplacement unitaire est appliqué sur un degré de liberté de liaison, tous les autres étant nuls. Si la sous-structure est liée de façon isostatique, ces modes dérivent en modes rigides.
- *modes d'attache* : ces modes correspondent aux modes de la structure soumise à des efforts unitaires sur les interfaces. Cette notion a été utilisée par Bamford [12] pour améliorer les méthodes à interfaces fixes.

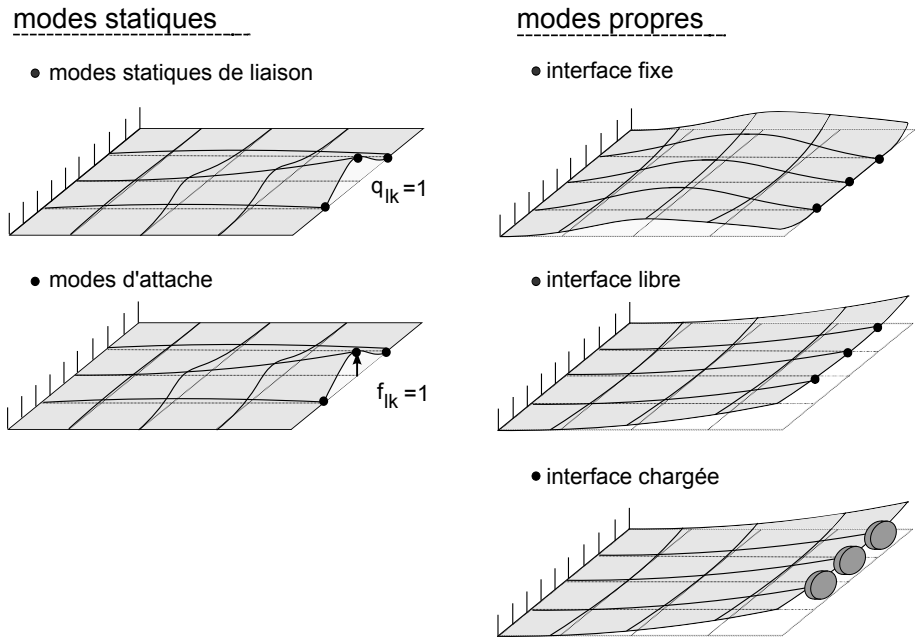


FIGURE 2.21 – Modes de sous-structures.

Les modes propres qui peuvent être utilisés dépendent des conditions limites utilisées :
- *interface fixe* (Craig-Bampton)
- *interface libre* (Substitution Modale, Mac Neal)
- *interface chargée* (Hruda-Benfield) : les degrés de liberté d'interface sont affectés de masse ou d'inertie représentatives des conditions imposées par la présence d'autres sous-structures adjacentes.

La figure 2.21 récapitule schématiquement les différents modes présentés.

A partir de ces différentes approches modales, deux grands types de méthodes sont utilisées : la condensation de Guyan [73] et la synthèse modale. Dans la suite de ce paragraphe, ces différentes méthodes sont détaillées.

2.2.2 Condensation de Guyan

La condensation de Guyan utilise uniquement les modes statiques de liaison comme vecteurs de base en négligeant les effets d'inertie sur les degrés de liberté internes qui seront choisis pour la réduction. En effet, on considère l'équation dynamique d'une structure libre à N degrés de liberté qui peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{K}q_N = F \quad avec \quad F = \omega^2 \mathbf{M} q_N \tag{2.27}$$

Les degrés de liberté sont ensuite divisés en deux catégories : les degrés de liberté “maîtres“ q_m et

les degrés de liberté “esclaves“ q_e pour lesquels les efforts d'inertie sont négligés :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ee} & \mathbf{K}_{em} \\ \mathbf{K}_{me} & \mathbf{K}_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_e \\ q_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_e \approx 0 \\ F_m \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

Le relation entre les degrés de liberté “maîtres“ et “esclaves“ peut alors être déduite simplement :

$$q_e = -\mathbf{K}_{ee}^{-1}\mathbf{K}_{em}q_m \tag{2.29}$$

En considérant que les degrés de liberté “maîtres“ sont assimilés aux degrés de liberté réduits q_{NR}, la matrice $\mathbf{T}$ s'exprime alors :

$$\begin{aligned} q_N &= \mathbf{T}q_{NR} \\ \begin{bmatrix} q_e \\ q_m \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{ee}^{-1}\mathbf{K}_{em} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} q_m \end{aligned} \tag{2.30}$$

Lorsque la partition des degrés de liberté “maîtres-esclaves“ (q_e, q_m) correspond à la partition entre degrés de liberté internes et degrés de liberté de liaison (q_i, q_l), chaque colonne de $\mathbf{T}$ correspond à un mode statique de liaison comme présenté en figure 2.21. Il est cependant possible d'améliorer le processus en retenant parmi les degrés de liberté “maîtres“ certains degrés de liberté internes.

L'expression de la matrice de raideur condensée $\bar{\mathbf{K}}$ s'écrit alors :

$$\bar{\mathbf{K}}_{mm} = \mathbf{K}_{mm} - \mathbf{K}_{me}\mathbf{K}_{ee}^{-1}\mathbf{K}_{em} \tag{2.31}$$

La qualité de l'approximation réalisée dépend du choix des degrés de liberté “esclaves“ puisque les forces d'inertie de ces degrés de liberté doivent être négligeables par rapport à celles des degrés de liberté “maîtres“. En dessous de la première fréquence propre de la structure, les effets inertiels peuvent être négligés et la méthode peut s'appliquer. En revanche, au dessus cette fréquence, une technique d'amélioration consiste à ajouter des modes statiques en augmentant le nombre de degrés de liberté “maîtres“. Cependant cette solution est limitée en raison du nombre important de degrés de liberté supplémentaires vis-à-vis de la faible augmentation de la fréquence de coupure du modèle créé.

Enfin, la condensation de Guyan peut être enchaînée de façon séquentielle sur chaque sous-structure puis sur l'assemblage final où des degrés de liberté d'interface (voire internes à chaque sous-structure) peuvent être éliminés. On parle de condensation de Guyan à plusieurs niveaux. Il reste cependant toujours difficile d'obtenir une précision satisfaisante avec une efficacité numérique faible. D'autres méthodes basées sur la synthèse modale se montrent plus performantes dans ce domaine et sont donc présentées ci-après.

2.2.3 Méthodes de Synthèse Modale

Les trois principales méthodes de synthèse modale sont détaillées ici et utilisent toutes les trois des conditions aux limites différentes (fixe, libre, mixte) pour le calcul des modes de chaque sous-structure.

2.2.3.1 Méthodes à interfaces fixes : Craig Bampton

La méthode de Craig et Bampton [39] se base sur l'association de modes propres à interface fixe et de modes statiques de liaison. Ainsi, les déplacements internes de la sous-structure sont liés de façon linéaire aux degrés de liberté de liaison et au vecteur des coordonnées modales η_p pour p modes retenus :

$$q_i = \Phi_{il} q_l + \Psi_{ip} \eta_p \tag{2.32}$$

où $\Phi_{il} = -\mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{K}_{il}$ est la matrice des déformées statiques de liaison comme vu au paragraphe précédent 2.2.2 et $\Psi_{ip} = [\psi_i 1 \cdots \psi_i p]$ les vecteurs propres du système avec interface fixe :

$$\mathbf{K}_{ii}\psi_i = \lambda \mathbf{M}_{ii}\psi_i \tag{2.33}$$

Par conséquent la matrice $\mathbf{T}$ peut s'exprimer sous la forme :

$$\begin{array}{rcl} q_N & = & \mathbf{T} q_{NR} \\ \begin{bmatrix} q_i \\ q_l \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \Phi_{il} & \Psi_{ip} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_l \\ \eta_p \end{bmatrix} \end{array} \tag{2.34}$$

La matrice de raideur condensée peut ensuite être déduite :

$$\bar{\mathbf{K}} = {}^T\mathbf{T}\mathbf{K}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{ll} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{k}_p \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

La matrice de raideur condensée est donc ici diagonale par blocs et fait intervenir la matrice de raideur condensée statiquement sur les degrés de liberté d'interface $\bar{\mathbf{K}}_{ll} = \mathbf{K}_{ll} - \mathbf{K}_{li}\mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{K}_{il}$ et la matrice des raideurs généralisées des modes propres encastrés $\bar{k}_p = {}^T\Psi_{ip}\mathbf{K}_{ii}\Psi_{ip} = diag(\omega)$ dans le cas où la matrice de raideur est normalisée en masse.

La matrice de masse condensée fait intervenir un couplage entre les modes statiques de liaison et les modes d'interface. En effet, son expression est donnée par la relation :

$$\bar{\mathbf{M}} = {}^T\mathbf{T}\mathbf{M}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{ll} & \bar{\mathbf{M}}_{lp} \\ \bar{\mathbf{M}}_{pl} & \bar{m}_p \end{bmatrix} \tag{2.36}$$

avec $\bar{\mathbf{M}}_{ll} = \left[{}^T\Phi_{il}\ \mathbf{I}\right] \mathbf{M}\ {}^T\left[\Phi_{il}\ \mathbf{I}\right]$ la matrice de masse condensée statiquement à l'interface, $\bar{m}_p = {}^T\Psi_{ip}\mathbf{M}_{ii}\Psi_{ip}$ la matrice des masses généralisées. Cette dernière est égale à l'identité dans le cas où les modes sont normalisés en masse. Les termes de couplage sont $\bar{\mathbf{M}}_{pl} = {}^T\bar{\mathbf{M}}_{lp} = \left[{}^T\Phi_{il}\ \mathbf{I}\right] \mathbf{M}\ {}^T\left[\Psi_{ip}\ \mathbf{0}\right]$.

En outre, en présence de forces extérieures $F = {}^T\left[F_i\ F_l\right]$ sur la sous-structure, ces efforts se réduisent de la façon suivante :

$$\bar{F} = {}^T\mathbf{T}F = \begin{bmatrix} {}^T\Phi_{il}F_i + F_l \\ {}^T\Psi_{ip}F_i \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

Dans le cas de l'assemblage de deux sous-structures s_1 et s_2, la compatibilité des déplacements et des efforts aux interfaces s'écrit :

$$q_l^{s_1} = q_l^{s_2} = q_l^s \;\; et \;\; F_l^{s_1} + F_l^{s_2} = 0 \tag{2.38}$$

Par conséquent, les degrés de liberté retenus de la structure assemblée seront $\zeta = {}^T\left[q_l^s \; \eta_p^{s_1} \; \eta_p^{s_2}\right]$.

Par addition des énergies cinétiques et de déformation et du travail des efforts extérieurs, il est possible de déduire les équations de la structure assemblée :

$$\begin{aligned} \omega^2 \bar{\mathbf{M}}^s \zeta + \bar{\mathbf{K}}^s \zeta &= \bar{F}^s \\ \omega^2 \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{ll}^s & \bar{\mathbf{M}}_{lp}^{s_1} & \bar{\mathbf{M}}_{lp}^{s_2} \\ & \bar{m}_p^{s_1} & \mathbf{0} \\ Sym. & & \bar{m}_p^{s_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_l^s \\ \eta_p^{s_1} \\ \eta_p^{s_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{ll}^s & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \bar{k}_p^{s_1} & \mathbf{0} \\ Sym. & & \bar{k}_p^{s_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_l^s \\ \eta_p^{s_1} \\ \eta_p^{s_2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{F}_l^s \\ {}^T\Psi_{ip}^{s_1} F_i^{s_1} \\ {}^T\Psi_{ip}^{s_2} F_i^{s_2} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.39}$$

Les matrices de masse et de raideur condensées aux interfaces sont la somme des matrices condensées aux interfaces de chaque sous-structure :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{M}}_{ll}^s &= \bar{\mathbf{M}}_{ll}^{s_1} + \bar{\mathbf{M}}_{ll}^{s_2} \\ \bar{\mathbf{K}}_{ll}^s &= \bar{\mathbf{K}}_{ll}^{s_1} + \bar{\mathbf{K}}_{ll}^{s_2} \end{aligned} \tag{2.40}$$

Les efforts condensés aux interfaces sont quant à eux la somme des efforts internes condensés de chaque sous-structure :

$$\bar{F}_l^s = {}^T\Phi_{il}^{s_1} F_i^{s_1} + {}^T\Phi_{il}^{s_2} F_i^{s_2} \tag{2.41}$$

La méthode de Craig et Bampton présente donc l'avantage d'utiliser des modes à interface fixe qui sont propres à chaque sous-structure et indépendants de la présence d'autres sous-structures assemblées. Cela permet d'étudier chaque sous-structure de façon indépendante et de travailler avec des superéléments. Ces derniers présentent aussi l'avantage de la confidentialité lors de travail partagé en fournissant le comportement dynamique de la sous-structure sans communiquer aucune information sur sa géométrie. De plus, cette méthode fournit une bonne précision et une absence de couplage entre les modes statiques et les modes à interfaces fixes au niveau de la matrice de raideur. Enfin, les degrés de liberté de liaison restent directement accessibles sans phase de restitution préalable, autorisant à insérer entre les sous-structures des modèles de comportement d'interface complexes afin de gérer des phénomènes de contact ou d'isolation par exemple.

Cependant, la démarche se trouve limitée dans les cas où l'interface représente une part importante des degrés de liberté de la structure (cas des interfaces finement discrétisés afin d'obtenir une bonne précision). En effet, l'avantage de réduction du nombre de degrés de liberté n'est plus immédiat étant donné que les matrices condensés statiquement aux interfaces sont "pleines". Une nouvelle étape de condensation de Guyan peut néanmoins être opérée sur l'interface. L'utilisation des modes à interface fixe peut également se montrer peu adaptée à certains types de problèmes car l'utilisation

d'interfaces fixes représente un cas limite pour le calcul de modes qui n'est pas toujours représentatif du comportement de l'assemblage final. Bamford [12] a de plus montré que la prise en compte de modes d'attaches peut permettre d'améliorer significativement la précision des résultats. Enfin, les méthodes de substitution modale présentées dans le paragraphe suivant considèrent elles des conditions limites intermédiaires.

2.2.3.2 Substitution modale

Les méthodes de substitution modale telles que la méthode de Hruda et Benfield [15] sont particulièrement bien adaptées à l'analyse d'un composant principal et de constituants secondaires (cas lanceur-navette spatiale, lanceur-satellite). Il s'agit d'une généralisation de la méthode des "branch modes" de Gladwell [65]. L'avantage de cette méthode est de pouvoir considérer plusieurs types de modes différents pour la structure principale : modes à interface fixe ou modes à interface chargée, ces derniers améliorant significativement la convergence.

Considérons donc une sous-structure principale s_1 assemblée à une sous-structure secondaire s_2. Les modes libres de la sous-structure principale sont retenus et les degrés de liberté de cette structure peuvent alors s'écrirent à partir des notations introduites dans les paragraphes précédents :

$$\begin{bmatrix} q_i^{s_1} \\ q_l^{s_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{ip}^{s_1} \\ \Psi_{lp}^{s_1} \end{bmatrix} \eta_p^{s_1} = \Psi_p^{s_1} \eta_p^{s_1} \tag{2.42}$$

Les vecteurs propres sont évidemment solutions du problème : $\mathbf{K}^{s_1}\psi = \lambda \mathbf{M}^{s_1}\psi$.

La sous-structure secondaire est quant à elle réduite grâce à une méthode de Craig et Bampton :

$$\begin{bmatrix} q_i^{s_2} \\ q_l^{s_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{il}^{s_2} & \Psi_{ip}^{s_2} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_l^{s_2} \\ \eta_p^{s_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_l^{s_2} & \Psi_p^{s_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_l^{s_2} \\ \eta_p^{s_2} \end{bmatrix} \tag{2.43}$$

L'originalité de la méthode est l'utilisation de la compatibilité des déplacements aux interfaces pour permettre de supprimer les degrés de liberté de liaison de la sous-structure secondaire :

$$q_l^{s_1} = \Psi_{lp}^{s_1} \eta_p^{s_1} = q_l^{s_2} \tag{2.44}$$

La matrice des vecteurs de base pour l'ensemble de la structure assemblée $\mathbf{T}$ s'exprime donc :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} q_i^{s_1} \\ q_l^{s_1} \\ q_i^{s_2} \\ q_l^{s_2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Psi_{ip}^{s_1} & \mathbf{0} \\ \Psi_{lp}^{s_1} & \mathbf{0} \\ \Phi_{il}^{s_2}\Psi_{lp}^{s_1} & \Psi_{ip}^{s_2} \\ \Psi_{lp}^{s_1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_p^{s_1} \\ \eta_p^{s_2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} q^{s_1} \\ q^{s_2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Psi_p^{s_1} & \mathbf{0} \\ \Phi_l^{s_2}\Psi_p^{s_1} & \Psi_p^{s_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_p^{s_1} \\ \eta_p^{s_2} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.45}$$

L'assemblage peut alors être réalisé pour une structure sans amortissement ni force extérieure. On obtient :

$$\omega^2 \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{11} & \bar{\mathbf{M}}_{12} \\ \bar{\mathbf{M}}_{21} & \bar{m}_p^{s_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_p^{s_1} \\ \eta_p^{s_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{k}_p^{s_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_p^{s_1} \\ \eta_p^{s_2} \end{bmatrix} \tag{2.46}$$

avec pour les matrices condensées :

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{K}}_{11} &= \bar{k}_p^{s_1} + {}^T\psi_{lp}^{s_1}\bar{\mathbf{K}}_{ll}^{s_2}\psi_{lp}^{s_1} \\
\bar{\mathbf{M}}_{11} &= \bar{m}_p^{s_1} + {}^T\psi_{lp}^{s_1}\bar{\mathbf{M}}_{ll}^{s_2}\psi_{lp}^{s_1} \\
\bar{\mathbf{M}}_{12} = {}^T\bar{\mathbf{M}}_{21} &= {}^T\psi_p^{s_1}{}^T\phi_l^{s_2}\bar{\mathbf{M}}_{ll}^{s_2}\psi_p^{s_2}
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Il faut noter ici que les matrices condensées de masse et de raideur de la sous-structure principale font intervenir une participation des matrices condensées statiques de la sous-structure secondaire.

La méthode de Benfield et Hruda présente l'avantage d'avoir d'excellentes propriétés de convergence. En outre, comme la méthode de Craig et Bampton, elle entraîne un couplage de masse. Cependant, l'intérêt est ici de ne plus présenter de degrés de liberté d'interface mais uniquement des participations modales, ce qui permet de réduire de façon importante la taille des systèmes à résoudre. De plus, cette procédure est très adaptée à la prise en compte de données expérimentales lors de l'analyse, notamment pour la prise en compte des amortissements modaux de chaque sous-structure. En effet, Blelloch et al. [18] appliquèrent la méthode de Hruda-Benfield afin de construire une matrice d'amortissement d'une structure assemblée permettant de prendre en compte les amortissements modaux connus d'une des sous-structures. Les autres modes de l'assemblage global sont eux affectés d'un amortissement modal classique. La méthode se base sur le calcul de modes intermédiaires en prenant en compte l'effet d'interface de la sous-structure pour laquelle on connaît les amortissements modaux. On en construit une matrice d'amortissement pour laquelle on affecte des amortissements modaux sur les modes intermédiaires et les amortissements modaux connus de la sous-structure. La matrice d'amortissement globale est ensuite calculée en utilisant à nouveau les modes de la structure finale assemblée. L'application a été réalisée sur une navette spatiale et ses principaux composants. Toutefois, une amélioration des méthodes permettant de prendre en compte l'amortissement des sous-structures a été réalisée récemment par Rittweger et al. [128] qui utilise la notion d'amortissement structural équivalent pour chaque sous-structure avant de recalculer une matrice d'amortissement dans la base des modes de l'assemblage.

Enfin, un des autres avantages majeurs de la méthode de Hruda Benfield est la possibilité de considérer des modes à interface chargée dans la base modale de la sous-structure principale. L'idée est d'affecter des propriétés de masse et de raideur à l'interface avec la sous-structure secondaire qui soient représentatives des propriétés de cette dernière. Le calcul des modes de la structure principale sont alors calculés avec ces propriétés. La stratégie employée est la condensation aux interfaces des matrices de masse et de raideur de la sous-structure s_2 pour affecter ensuite ces matrices condensées $\bar{\mathbf{M}}_{ll}^{s_2}$ et $\bar{\mathbf{K}}_{ll}^{s_2}$ à l'interface. Dans le cas d'une structure modulaire où la sous-structure secondaire peut être amenée à varier, le calcul des modes de la structure principale est réalisé à partir d'une structure secondaire de référence de comportement proche des différentes structures secondaires que l'on peut être amenées à connecter. Lors du calcul sur un assemblage particulier, les différences de caractéristiques peuvent être prises en compte via des techniques de perturbation. L'utilisation des modes d'interface chargée a montré une augmentation significative de la précision des résultats obtenus.

2.2.3.3 Interfaces libres : Mac Neal

La méthode de Mac Neal fait partie avec la méthode de Craig et Bampton des deux méthodes les plus utilisées et les plus couramment rencontrées dans les codes de calculs commerciaux. En effet, elle présente la particularité d'utiliser les modes libres de chaque sous-structure ce qui permet une interaction avec les résultats expérimentaux facilitée. La procédure aboutit également à un système d'équations liant uniquement les participations modales de chaque sous-structure, s'affranchissant ainsi de la présence des degrés de liberté d'interface. De plus, la formulation introduit un couplage de raideur et non plus un couplage de masse comme les méthodes précédentes, ce qui présente numériquement un avantage significatif. Enfin les propriétés de convergence de la méthode, lorsqu'une correction de flexibilité résiduelle est toutefois utilisée, sont relativement satisfaisantes.

Un assemblage de deux sous-structures est donc considéré. Les relations entre les degrés de liberté de chaque sous-structure s'écrivent comme vu précédemment 2.42. Cependant, l'utilisation d'une base modale tronquée peut entraîner des erreurs importantes sur le comportement. Afin d'améliorer significativement la méthode, la contribution statique des modes supérieurs est ajoutée dans l'approche des déplacements via l'ajout d'une matrice de flexibilité résiduelle. En effet, l'équation du mouvement d'une sous-structure non amortie peut s'écrire :

$$\mathbf{M}\ddot{q} + \mathbf{K}q = F \tag{2.48}$$

La solution exacte de l'équation peut être obtenue en calculant une solution de l'équation homogène et une solution de l'équation particulière. Pour un système à N degrés de liberté, la solution peut s'écrire :

$$q_{sol} = \Psi\eta + \mathbf{G}F \tag{2.49}$$

où Ψ est la base modale complète des N modes à interface libre, $\Psi\eta$ la solution de l'équation homogène et $\mathbf{G}F$ la solution particulière. G est la matrice de flexibilité dynamique qui peut s'exprimer en fonction des modes propres et des paramètres modaux :

$$\mathbf{G} = \sum_{k=1}^{N} \frac{{\psi_k}^T \psi_k}{\omega_k - \omega^2} \tag{2.50}$$

Cette solution peut être décomposée en deux parties correspondant aux p premiers modes retenus dans la troncature d'une part q, et aux modes d'ordre supérieur pour l'autre q_{p+1} :

$$\begin{aligned} q_{sol} &= q + q_{p+1} \\ q &= \Psi_p\eta_p + \mathbf{G}_pF \\ q_{p+1} &= \Psi_{p+1}\eta_{p+1} + \mathbf{G}_{p+1}F \end{aligned} \tag{2.51}$$

avec $\Psi = [\Psi_p \ \Psi_{p+1}]$ et $\mathbf{G}_p$ et $\mathbf{G}_{p+1}$ s'obtient en coupant la somme introduite dans l'expression de $\mathbf{G}$ en deux parties.

L'idée est de considérer la contribution statique des modes supérieurs à savoir un terme égal à :

$$q_{p+1}^{stat} = \mathbf{G}_{res}F \tag{2.52}$$

Or le terme $\mathbf{G}_{res}$ correspond à la flexiblité résiduelle :

$$\mathbf{G}_{res} = \sum_{k=p+1}^{N} \frac{{\psi_k}^T \psi_k}{\omega_k - \omega^2} = \mathbf{G}_0 - \sum_{k=1}^{p} \frac{{\psi_k}^T \psi_k}{\omega_k - \omega^2} \tag{2.53}$$

où $\mathbf{G}_0$ est la matrice de flexibilité statique obtenue en calculant $\mathbf{G}(\omega = 0)$.

Les degrés de liberté d'interface q_l peuvent alors s'exprimer de la façon suivante :

$$q_l = \psi_{lp}\eta_p + \mathbf{G}_{ll}F_l \tag{2.54}$$

De plus l'équation du mouvement dans la base modale de la structure sans force extérieure s'écrit :

$$\omega^2 \bar{m}_p \eta_p + \bar{k}_p \eta_p = {}^T\psi_{lp} F_l \tag{2.55}$$

L'assemblage de deux sous-structures s'écrit via la compatibilité des déplacements et des efforts d'interfaces 2.38. Ainsi les efforts d'interface de chaque sous-structure s'écrivent :

$$F_l^{s_1} = \left[\mathbf{G}_{ll}^{s_1} + \mathbf{G}_{ll}^{s_2}\right]^{-1} \left[\psi_{lp}^{s_2}\eta_p^{s_2} - \psi_{lp}^{s_1}\eta_p^{s_1}\right] = \bar{\mathbf{K}}_{ll}^{s} \left[\psi_{lp}^{s_2}\eta_p^{s_2} - \psi_{lp}^{s_1}\eta_p^{s_1}\right] \tag{2.56}$$

L'assemblage final peut donc s'exprimer uniquement en fonction des participations modales de chaque sous-structure :

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{11} & \bar{\mathbf{K}}_{12} \\ \bar{\mathbf{K}}_{21} & \bar{\mathbf{K}}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_p^{s_1} \\ \eta_p^{s_2} \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} \bar{m}_p^{s_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{m}_p^{s_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_p^{s_1} \\ \eta_p^{s_2} \end{bmatrix} \tag{2.57}$$

avec pour les matrices condensées :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}}_{11} &= \bar{k}_p^{s_1} + {}^T\psi_{lp}^{s_1}\bar{\mathbf{K}}_{ll}^{s}\psi_{lp}^{s_1} \\ \bar{\mathbf{K}}_{22} &= \bar{k}_p^{s_2} + {}^T\psi_{lp}^{s_2}\bar{\mathbf{K}}_{ll}^{s}\psi_{lp}^{s_2} \\ \bar{\mathbf{K}}_{12} = {}^T\bar{\mathbf{K}}_{21} &= -{}^T\psi_{lp}^{s_1}\bar{\mathbf{K}}_{ll}^{s}\psi_{lp}^{s_2} \end{aligned} \tag{2.58}$$

L'approximation de la participation des modes supérieurs en terme de contribution statique uniquement consiste en une approximation du premier ordre. Rubin [130] a développé une méthode du second ordre qui considère des modes d'attache et des modes à interface libre qui permet d'améliorer la précision du calcul mais qui aboutit cependant à une matrice de masse couplée. Craig et Chang [40] ont proposé une approche générale de couplage basée également sur la prise en compte des modes libres et des modes d'attache.

2.3 Méthodes Non Linéaires de Calcul de Solutions Périodiques

Nous présentons dans ce paragraphe les principales méthodes de calcul classiquement utilisées pour le calcul de solutions périodiques de systèmes non linéaires. Le cadre de cette étude s'intéresse au calcul de réponses de structures soumises à une excitation périodique. L'équation de la dynamique décrivant de tels systèmes non autonomes peut être représentée, après discrétisation, de la façon générale suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{X} + \mathbf{D}\dot{X} + \mathbf{K}X = F(X, \dot{X}, \Omega, t) = F_L(\Omega, t) + F_{NL}(X, \dot{X}, \Omega, t) \tag{2.59}$$

Le vecteur X représente les n degrés de liberté du système, $\mathbf{M}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{K}$ représentent respectivement les matrices de masse, d'amortissement, et de raideur du système. Le système considéré est soumis à une excitation périodique F_L dépendante du temps et à la fréquence Ω. Les non linéarités du système sont représentées sous la forme d'effort extérieurs F_{NL} et dépendent a priori des déplacements X et des vitesses $\dot{X}$, de la fréquence de l'excitation Ω et du temps t.

Parmi les différentes méthodes présentées dans cette section, certaines se basent classiquement sur une formulation des problèmes non linéaires sous la forme d'équation d'état du premier ordre. La formulation équivalente de l'équation précédente 2.59 peut être obtenue en considérant un vecteur d'état du type $x = [X, \dot{X}] \in I\!R^{2n}$:

$$\dot{x} = \mathbf{G}(x, t) \tag{2.60}$$

avec

$$\mathbf{G}(x, t) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{-1}F(X, \dot{X}, \Omega, t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} x \tag{2.61}$$

On suppose ici que $\mathbf{M}$ est inversible. Dans la suite de cette section, la formulation au premier ou au deuxième ordre sera employée en fonction de la simplicité d'écriture de la méthode qui en découle.

La réponse de systèmes dynamiques non linéaires à une sollicitation périodique est très souvent périodique mais peut également dans certains cas présenter un caractère quasi-périodique voire chaotique. Les méthodes à mettre en oeuvre afin de calculer ces solutions sont alors de nature très différente. Dans le cadre de notre étude, nous nous restreindrons aux cas des solutions périodiques et nous présenterons les méthodes spécifiques associées à ce type de calcul.

A partir de la formulation du problème précédemment introduite, de nombreuses approches différentes existent et sont plus ou moins adaptées selon le type de problème traité. Elles peuvent toutefois se distinguer en deux catégories principales. La première rassemble les méthodes dites "temporelles" utilisant un schéma d'intégration temporelle et ne prédéterminant pas la forme de la solution. La seconde regroupe les méthodes "d'approximation" de la solution sous une forme prédéterminée. Il peut s'agir de rechercher la solution comme une perturbation de la solution linéaire, de la considérer décrite dans un espace restreint, ou de la décrire par une somme de fonctions de forme. Dans ce dernier cas des projections sur des fonctions de pondération sont nécessaires.

2.3.1 Méthodes temporelles

Les méthodes temporelles se basent sur la reconstitution dans le temps pas à pas de la solution via l'utilisation d'un schéma d'intégration. L'avantage de ces méthodes est l'absence d'hypothèse forte sur la forme de la réponse et la possibilité de pouvoir traiter tout type de problème. La description de réponses complexes est donc favorisée.

La première méthode présentée dans cette section est la méthode d'intégration temporelle qui, à partir de conditions initiales, simule le régime transitoire jusqu'à obtention du régime permanent décrivant la solution périodique recherchée. Il faut de plus noter que le calcul de solutions transitoires, de réponses quasi-périodiques ou chaotiques, est possible.

Les deux autres méthodes que sont la méthode des différences finies et la méthode de tir se proposent de réaliser une intégration temporelle uniquement sur la période du régime permanent et de résoudre ensuite un problème aux limites vérifiant la condition de périodicité. Celle-ci peut s'exprimer pour une solution $X(t)$ de période T sous la forme $X(t) = X(t + T)$.

2.3.1.1 Méthodes d'intégration temporelle

Les méthodes d'intégration temporelle représentent une approche intuitive de résolution d'un système d'équations différentielles en temps. En effet, ces méthodes consistent à construire à partir d'un jeu de conditions initiales la réponse pas à pas du système. Les avantages de ces algorithmes sont l'adaptabilité à tout type de non linéarité ainsi que leur simplicité d'utilisation. De plus, l'intégration temporelle permet le calcul de tout type de réponse vibratoire, aussi bien transitoire que périodique. Toutefois, lors du calcul de solutions périodiques, le régime permanent décrivant la solution peut être observé après un régime transitoire très long, ce qui peut devenir problématique notamment pour les structures faiblement amorties. Il devient alors pertinent d'utiliser des méthodes spécifiques tels que présentées dans cette section. Nous présenterons dans les paragraphes suivants les notions principales pour qualifier un schéma d'intégration ainsi que les principaux algorithmes rencontrés dans la littérature.

2.3.1.1.a Notion de qualification d'un schéma d'intégration

Schéma d'intégration implicite ou explicite

Le principe d'un intégrateur temporel est de vérifier l'équation différentielle du mouvement à résoudre (considérée sous la forme d'une équation du second ordre 2.59 ou du premier ordre 2.60) en plusieurs instants consécutifs t_n. Pour cela il est nécessaire de discrétiser dans le temps l'équation du mouvement et de formuler des hypothèses sur la variation des déplacements, des vitesses et des accélérations sur chaque intervalle de temps $[t_n\ ;\ t_{n+1}]$. L'intervalle de temps h entre ces deux instants peut, selon le schéma utilisé, être constant ou variable. A partir de cette discrétisation, tout schéma

d'intégration peut s'écrire, en considérant une équation de la forme 2.60 et en notant $x_n = x(t_n)$, comme une combinaison linéaire des valeurs du vecteur d'état aux instants précédents et des dérivées du vecteur d'état aux instants précédents et à l'instant actuel :

$$x_{n+1} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_{n+1-j} - h \sum_{j=0}^{m} \beta_j \dot{x}_{n+1-j} \; avec \; h = t_{n+1} - t_n \tag{2.62}$$

Lorsque $\beta_0 = 0$, le vecteur x_{n+1} est alors calculé uniquement en fonction des valeurs aux instants précédents. Le schéma est dit *explicite*. Lorsque $\beta_0 \neq 0$, le vecteur x_{n+1} dépend de sa propre dérivée. Le schéma est dit *implicite*. Ces schémas nécessitent des inversions matricielles à chaque pas de temps et donc une allocation mémoire supérieure à un schéma explicite. Ils sont surtout utilisés pour des problèmes pour lesquels la réponse est dominée par un faible nombre de modes à basses fréquences. Les schémas explicites sont quant à eux principalement utilisés pour des problèmes de dynamique rapide où interviennent hautes et moyennes fréquences.

Enfin, si β_j et α_j sont nuls pour $j > 1$, on parle de schéma *à un pas*. Sinon on parle de schéma *à pas multiples*.

Consistance d'un schéma d'intégration

La consistance d'un schéma d'intégration est une propriété qui assure que la solution calculée par le schéma proposé converge vers la solution exacte du problème lorsque le pas de discrétisation h tend vers 0. Cette condition peut être formulée de façon simple par la propriété suivante :

$$\lim_{h \to 0} \frac{x_{n+1} - x_n}{h} = \dot{x}(t_n) \tag{2.63}$$

Stabilité

La stabilité est une notion qui va permettre de rendre compte de l'évolution de perturbations autour de la solution pour les instants ultérieurs. La propriété de stabilité peut s'énoncer comme suit :

Un schéma d'intégration directe est dit stable s'il existe un pas d'intégration $h_0 > 0$ tel que, pour tout $h \in [0\,;\,h_0]$, une perturbation finie du vecteur d'état à l'instant t_n n'entraîne qu'une modification non croissante du vecteur d'état x_{n+j} calculé à un instant ultérieur t_{n+j}.

Un schéma d'intégration stable n'entraîne donc pas systématiquement une convergence vers la solution exacte mais signifie seulement que la différence entre solution numérique et solution exacte reste bornée. Plus cette différence sera faible, plus le schéma sera qualifié de précis. Afin d'obtenir un schéma précis, il sera nécessaire de se placer à la frontière de stabilité, étant donné qu'un schéma instable a tendance à faire croître les amplitudes et qu'un schéma stable entraîne a contrario une décroissance de celles-ci.

De plus, la stabilité du schéma d'intégration choisi peut dépendre ou non des paramètres α_j, β_j, et du pas de temps h. Certains schémas présentent l'avantage d'être stables indépendamment de ces paramètres et du pas de temps ; on parle de *stabilité inconditionnelle*.

Enfin, la stabilité du schéma peut être reliée à la conservation d'énergie du système entre deux instants consécutifs. Ainsi, on peut montrer qu'un bilan d'énergie positif entre deux instants consécutifs entraîne une augmentation des amplitudes et donc une instabilité du schéma. En revanche un bilan négatif manifeste la présence d'amortissement numérique. Cette notion est particulièrement utile dans l'étude de la stabilité des schémas non linéaires, l'expression analytique des domaines de stabilité n'étant plus toujours possible.

2.3.1.1.b Cas des systèmes linéaires

Nous présentons dans cette section l'application des différents schémas rencontrés aux systèmes linéaires. En effet, ceux-ci présentent l'avantage de permettre une quantification analytique des notions précédentes. L'extension aux systèmes non linéaires sera effectuée dans une seconde partie.

Limites de stabilité

Afin d'obtenir un schéma d'intégration précis, il est nécessaire de considérer un pas de temps adapté pour se situer à la frontière de stabilité de l'algorithme. Pour réaliser ce choix, une analyse de stabilité à partir de l'équation homogène est classiquement menée. L'analyse est menée en considérant la formulation du système sous la forme équivalente à la formulation introduite en 2.60. Le système est non amorti et soumis à des efforts d'excitation linéaires uniquement :

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \bar{F}_L(t) \tag{2.64}$$

avec

$$\mathbf{A} = -\begin{bmatrix} \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \; et \; \bar{F}_L(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{-1}F_L(X, \dot{X}, \Omega, t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{2.65}$$

Considérons désormais une petite perturbation z_n de x_n à l'instant t_n. Ainsi $\dot{z}_{n+1} = \mathbf{A}z_{n+1}$. En insérant cette relation dans l'équation décrivant le schéma 2.62 :

$$\sum_{j=0}^{m} \left(\alpha_j \mathbf{I} - h\beta_j \mathbf{A}\right) z_{n+1-j} = 0 \; avec \; \alpha_0 = -1 \tag{2.66}$$

On note alors $\underline{\mu}$ la matrice diagonale des $2n$ valeurs propres μ_i de $\mathbf{A}$ et X la matrice des vecteurs propres normés associés. En écrivant la perturbation sous la forme :

$$\begin{cases} z_{n+1-m} & = & X\tilde{z} \\ z_{n+1-m+1} & = & \lambda X\tilde{z} \\ \vdots & & \\ z_{n+1} & = & \lambda z_n = \cdots = \lambda^m X\tilde{z} \end{cases}$$

Ainsi l'équation caractéristique 2.66 peut s'écrire :

$$\sum_{j=0}^{m} \left(\alpha_j \mathbf{I} - h\beta_j \mathbf{A}\right) \lambda^{m_j} X\tilde{z} = 0 \tag{2.67}$$

En multipliant à droite par la matrice des vecteurs propres et d'après l'orthogonalité des vecteurs propres :

$$\left[\sum_{j=0}^{m} \left(\alpha_j \mathbf{I} - h\beta_j \underline{\mu}\right) \lambda^{m_j}\right] \tilde{z} = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall k \in [1\ ;\ 2n] \sum_{j=0}^{m} \left(\alpha_j - h\beta_j \mu_k\right) \lambda^{m_j} = 0 \tag{2.68}$$

Le schéma est alors stable si et seulement si $|\lambda| \leq 1$. A la frontière de stabilité, nous pouvons écrire que $\lambda = e^{i\theta},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$. La limite de stabilité peut alors s'exprimer de façon générale par la relation :

$$\mu h = \frac{\sum_{j=0}^{m} \alpha_j e^{i\theta(m-j)}}{\sum_{j=0}^{m} \beta_j e^{i\theta(m-j)}} \tag{2.69}$$

En ce qui concerne la prise en compte de l'amortissement structural du système étudié, celui-ci a généralement un effet stabilisant pour les systèmes linéaires (notamment pour les schémas de Newmark).

Méthode de Newmark

Considérons tout d'abord l'équation de la dynamique pour un système linéaire écrite de façon équivalente à l'équation 2.59. Le vecteur X est ici remplacé par le terme $q(t)$ afin de s'accorder avec la plupart des notations traditionnelles :

$$\mathbf{M}\ddot{q}(t) + \mathbf{D}\dot{q}(t) + \mathbf{K}q(t) = F_L(t) \tag{2.70}$$

Afin d'obtenir un schéma d'intégration, il est nécessaire de discrétiser l'équation ci-dessus en divers instants t_n. La plupart des schémas d'intégration sont basés sur l'utilisation d'un développement de Taylor au premier ordre avec une approximation des restes intégraux par quadrature numérique. Développons les quantités $q(t_n + h)$ et $\dot{q}(t_n + h)$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{q}_{n+1} & = & \dot{q}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{q}(\tau) d\tau \\ q_{n+1} & = & q_n + h\dot{q}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{q}(\tau)(t_n + h_\tau) d\tau \end{array}\right. \tag{2.71}$$

Exprimons ensuite $\ddot{q}(\tau)$ sur l'intervalle $[t_n\ ;\ t_{n+1}]$ en fonction des accélérations $\ddot{q}_n$ et $\ddot{q}_{n+1}$ aux bornes de l'intervalle :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \ddot{q}_n & = & \ddot{q}(\tau) + q^{(3)}(\tau)(t_n - \tau) + \frac{q^{(4)}(\tau)}{2}(t_n - \tau)^2 + \cdots \\ \ddot{q}_{n+1} & = & \ddot{q}(\tau) + q^{(3)}(\tau)(t_{n+1} - \tau) + \frac{q^{(4)}(\tau)}{2}(t_{n+1} - \tau)^2 + \cdots \end{array}\right. \tag{2.72}$$

En multipliant ces équations par respectivement $(1 - \gamma)$ et γ, nous obtenons :

$$\ddot{q}(\tau) = (1 - \gamma)\ddot{q}_n + \gamma\ddot{q}_{n+1} + q^{(3)}(\tau)\left[\tau - h\gamma - t_n\right] + O(h^2 q^{(4)}) \tag{2.73}$$

De même, en multipliant les mêmes équations par respectivement $(1-2\beta)$ et β :

$$\ddot{q}(\tau) = (1-2\beta)\ddot{q}_n + 2\beta\ddot{q}_{n+1} + q^{(3)}(\tau)\left[\tau - 2h\beta - t_n\right] + O(h^2 q^{(4)}) \tag{2.74}$$

En utilisant les équations 2.73 et 2.74, les expressions des intégrales des équations 2.71 peuvent être obtenues :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{q}(\tau)d\tau & = & (1-\gamma)h\ddot{q}_n + \gamma h\ddot{q}_{n+1} + r_n \\ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{q}(\tau)(t_n + h_\tau)d\tau & = & (\frac{1}{2}-\beta)h^2\ddot{q}_n + \beta h^2\ddot{q}_{n+1} + r'_n \end{array}\right. \tag{2.75}$$

Avec l'expression des erreurs de troncature égales à :

$$\left\{\begin{array}{rcl} r_n & = & \left(\gamma - \frac{1}{2}\right) h^2 q^{(3)}(\tilde{\tau}) + O(h^3 q^{(4)}) \ , \ t_n < \tilde{\tau} < t_{n+1} \\ r'_n & = & \left(\beta - \frac{1}{6}\right) h^3 q^{(3)}(\tilde{\tau}) + O(h^4 q^{(4)}) \end{array}\right. \tag{2.76}$$

L'introduction des équations 2.75 dans les équations 2.71 donnent ainsi l'expression générale du schéma implicite de Newmark :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{q}_{n+1} & = & \dot{q}_n + (1-\gamma)h\ddot{q}_n + \gamma h\ddot{q}_{n+1} \\ q_{n+1} & = & q_n + h\dot{q}_n + (\frac{1}{2}-\beta)h^2\ddot{q}_n + \beta h^2\ddot{q}_{n+1} \end{array}\right. \tag{2.77}$$

Il est alors possible de déduire l'accélération $\ddot{q}_{n+1}$ uniquement en fonction des grandeurs à l'instant précédent en utilisant l'équation de la dynamique. En injectant les équations 2.77 dans l'équation dynamique 2.70 :

$$\begin{array}{rcl} \left[\mathbf{M} + \gamma h\mathbf{D} + \beta h^2\mathbf{K}\right]\ddot{q}_{n+1} & = & F_L(t) - \mathbf{D}\left(\dot{q}_n + (1-\gamma)h\ddot{q}_n\right) - \mathbf{K}\left(q_n + h\dot{q}_n + (\dfrac{1}{2}-\beta)h^2\ddot{q}_n\right) \\ \mathbf{S}\ddot{q}_{n+1} & = & F_L(t) - \mathbf{D}\tilde{\dot{q}}_{n+1} - \mathbf{K}\tilde{q}_{n+1} \end{array} \tag{2.78}$$

Après évaluation des accélérations il est alors nécessaire de réaliser les corrections sur $\dot{q}_{n+1}$ et q_{n+1}.

L'algorithme complet mis en oeuvre est détaillé en figure 2.3.1.1.b.

Cas particuliers de la méthode de Newmark

En fonction des valeurs des deux paramètres γ et β, l'interpolation des accélérations sur l'intervalle $[t_n\ ;\ t_{n+1}]$ est modifiée ce qui influence fortement les propriétés de l'algorithme. Nous citons ici les valeurs remarquables :

- $(\gamma = 1/2, \beta = 1/6)$: *Interpolation linéaire de l'accélération*, $\ddot{q}(\tau) = \ddot{q}_n + (\tau - t_n)(\ddot{q}_{n+1} - \ddot{q}_n)/h$ Le schéma est alors conditionnellement stable.
- $(\gamma = 1/2, \beta = 1/4)$: *Accélération moyenne*, $\ddot{q}(\tau) = (\ddot{q}_{n+1} + \ddot{q}_n)/2$. Ce schéma implicite est le plus fréquent en dynamique car il est inconditionnellement stable et précis au second ordre. Un des avantage est l'absence de dissipation numérique.
- $(\gamma = 1/2, \beta = 1/12)$: *Fox et Goodwin*. Ce schéma est conditionnellement stable.
- $(\gamma = 1/2, \beta = 0)$: *Différences Finies Centrées*. Ce schéma est explicite et conditionnellement stable. Il est possible de montrer que l'approximation de l'accélération correspond alors à :

$$\ddot{q}_n = \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} \tag{2.79}$$

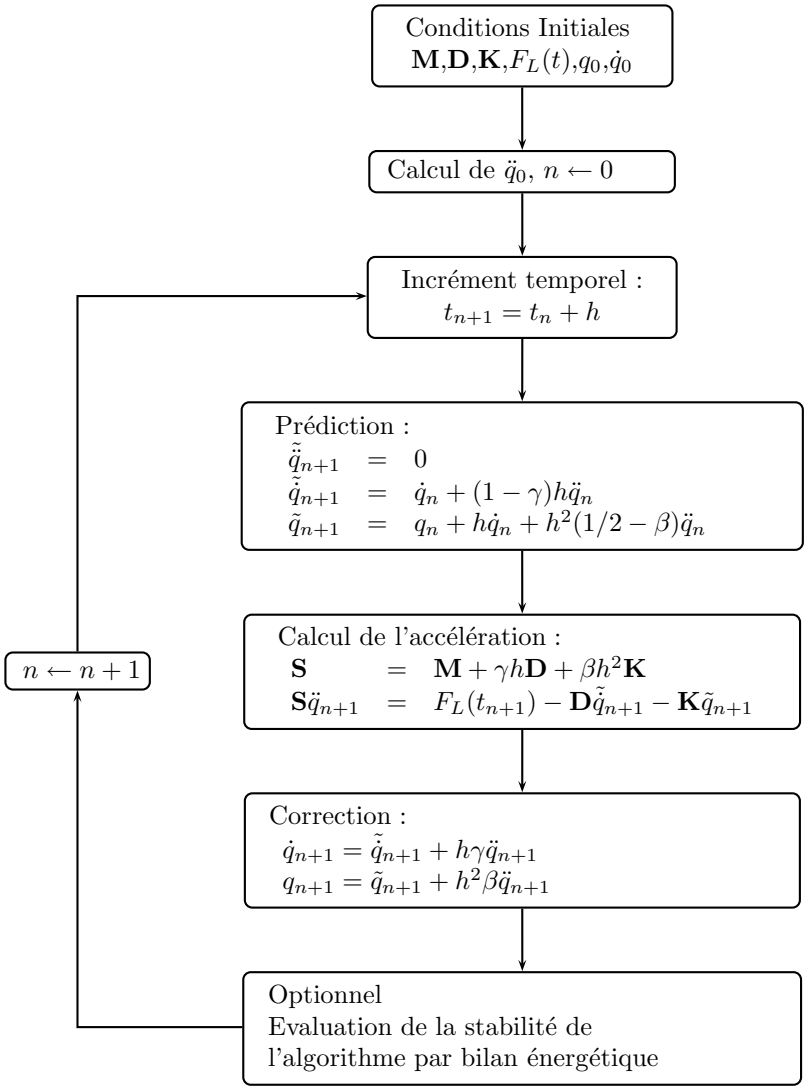


FIGURE 2.22 – Algorithme d'intégration par schéma de Newmark - Systèmes linéaires.

2.3.1.1.c Cas des systèmes non linéaires

Dans le cas de systèmes non linéaires, l'utilisation d'un schéma implicite de Newmark nécessite une boucle supplémentaire de convergence sur les déplacements et vitesses à chaque pas de temps. Une prédiction des déplacements et vitesses $\tilde{q}_{n+1}$ et $\tilde{\dot{q}}_{n+1}$ est effectuée à partir des données à l'instant précédent q_n, $\dot{q}_n$, $\ddot{q}_n$. Ensuite, l'équation du mouvement permet de déduire $\ddot{q}_{n+1}$ que l'on réutilise pour en déduire le nouveau champ de déplacements et vitesses q_{n+1} et $\dot{q}_{n+1}$ à l'instant suivant. Pour l'évaluation des accélérations, l'application d'une procédure de Newton-Raphson permet le calcul d'une

correction à chaque pas. Considérons donc l'équivalent de l'équation 2.78 en non linéaire :

$$\begin{aligned}\left[\mathbf{M}+\gamma h\mathbf{D}+\beta h^2\mathbf{K}\right]\ddot{q}_{n+1} &= F_L(t)-\mathbf{D}\tilde{\dot{q}}_{n+1}-\mathbf{K}\tilde{q}_{n+1}\\ &\quad +F_{NL}(\tilde{q}_{n+1}+\beta h^2\ddot{q}_{n+1},\tilde{\dot{q}}_{n+1}+\gamma h\ddot{q}_{n+1})\end{aligned} \tag{2.80}$$

On pose ensuite :

$$\ddot{q}_{n+1}^{(0)}=\tilde{\ddot{q}}_{n+1},\ \dot{q}_{n+1}^{(0)}=\tilde{\dot{q}}_{n+1},\ q_{n+1}^{(0)}=\tilde{q}_{n+1} \tag{2.81}$$

La correction sur l'accélération $\Delta\ddot{q}^{(i)}$ est ensuite obtenue via la relation :

$$S_{n+1}^{(i)}\Delta\ddot{q}^{(i)}=-r_{n+1}^{(i)} \tag{2.82}$$

Avec

$$\begin{aligned}r_{n+1}^{(i)} &= \mathbf{M}\ddot{q}_{n+1}^{(i)}+\mathbf{D}\dot{q}_{n+1}^{(i)}+\mathbf{K}q_{n+1}^{(i)}+F_{NL}(q_{n+1}^{(i)},\dot{q}_{n+1}^{(i)})+F_L(t_{n+1})\\ \mathbf{S}_{n+1}^{(i)} &= \mathbf{M}+\gamma h(\mathbf{D}+D_{\dot{q}}F_{NL}(q_{n+1}^{(i)},\dot{q}_{n+1}^{(i)}))+\beta h^2(\mathbf{K}+D_qF_{NL}(q_{n+1}^{(i)},\dot{q}_{n+1}^{(i)})\end{aligned} \tag{2.83}$$

Les corrections sont ensuite appliquées comme suit :

$$\ddot{q}_{n+1}^{(i+1)}=\ddot{q}_{n+1}^{(i)}+\Delta\ddot{q}^{(i)},\ \dot{q}_{n+1}^{(i+1)}=\dot{q}_{n+1}^{(i)}+\gamma h\Delta\ddot{q}^{(i)},\ q_{n+1}^{(i+1)}=q_{n+1}^{(i)}+\beta h^2\Delta\ddot{q}^{(i)} \tag{2.84}$$

L'opération est effectuée jusqu'à convergence, c'est-à-dire tant que :

$$\left\|r_{n+1}^{(i+1)}\right\|>\epsilon \tag{2.85}$$

L'algorithme mis en oeuvre est détaillé en figure 2.3.1.1.c.

2.3.1.1.d Autres méthodes

La méthode de Hilbert-Hughes-Taylor (HHT) est couramment rencontrée lorsqu'il s'agit d'introduire de l'amortissement numérique sans dégrader la précision. La formulation se base sur les formules de Newmark mais en ajoutant une pondération sur les forces élastiques et les forces externes sur l'intervalle de temps. L'algorithme s'applique en non linéaire. En notant $f(q,\dot{q})=\mathbf{D}\dot{q}+\mathbf{K}q$, l'équation du mouvement prend la forme :

$$\mathbf{M}\ddot{q}_{n+1}+(1-\alpha)f(q_{n+1},\dot{q}_{n+1})+\alpha f(q_n,\dot{q}_n)=(1-\alpha)F(q_{n+1},\dot{q}_{n+1},t)+\alpha F(q_n,\dot{q}_n,t) \tag{2.86}$$

En choisissant les paramètres tels que $\alpha\in[0,1/3]$, $\gamma=1/2+\alpha$, $\beta=1/4(1+\alpha)^2$, un schéma inconditionnellement stable du second ordre est obtenu. L'avantage de cet algorithme est d'introduire une dissipation dans les hautes fréquences tout en conservant une précision proche de la méthode de l'accélération moyenne en basses fréquences. Ce schéma est recommandé en non linéaire et est d'ailleurs intégré dans le code de calcul Abaqus.

Une extension de ce type d'algorithme a donné naissance à la méthode α introduite par Cung et al. [11, 35]. Cette méthode implicite à un pas permet d'optimiser la répartition fréquentielle de

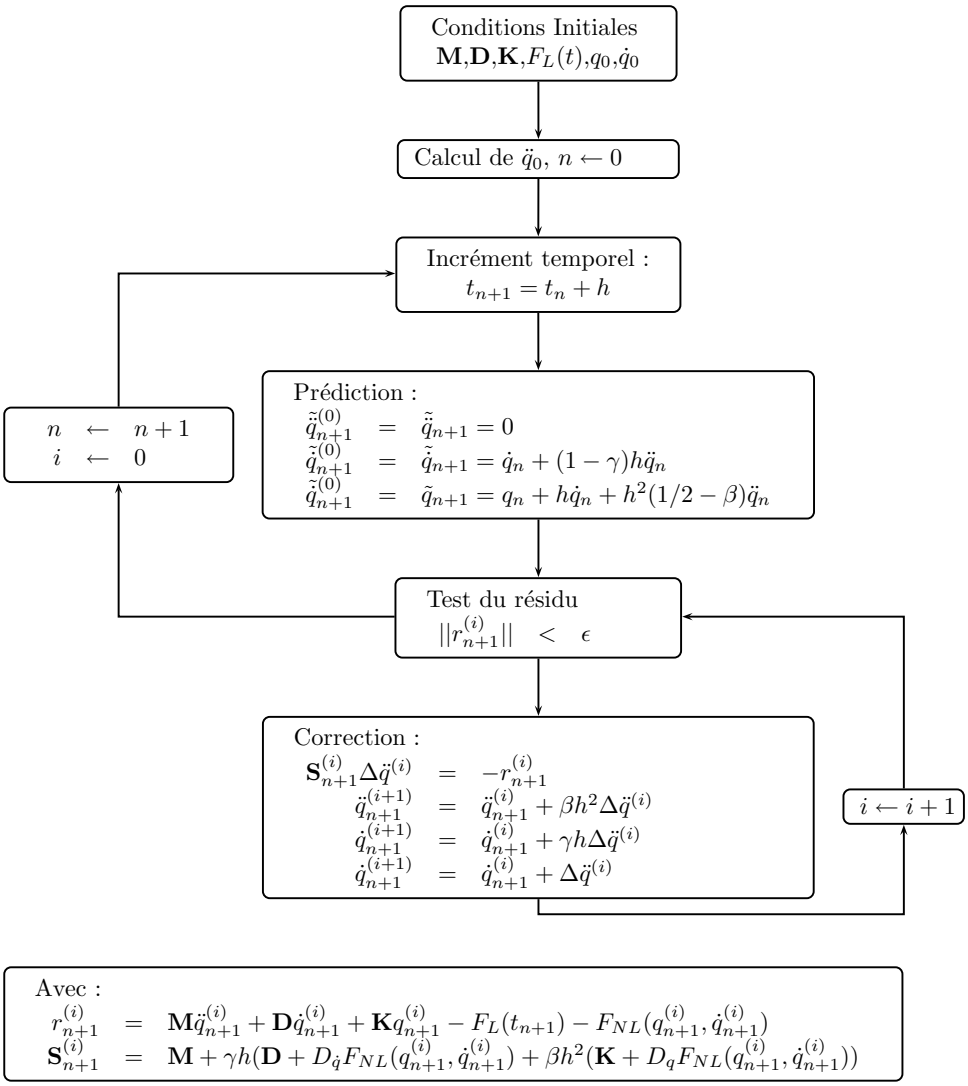


FIGURE 2.23 – Algorithme d'intégration par schéma de Newmark - Systèmes non linéaires.

l'amortissement introduit par l'intermédiaire de deux coefficients α_m et α_f. Les schémas de la méthode HHT peuvent être retrouvés pour $\alpha_m = 0$ et ceux de Newmark pour $\alpha_m = 0$ et $\alpha_f = 0$. De façon générale, l'équation du mouvement s'écrit :

$$\mathbf{M}((1-\alpha_m)\ddot{q}_{n+1}+\alpha_m\ddot{q}_n)+(1-\alpha_f)f(q_{n+1},\dot{q}_{n+1})+\alpha_f f(q_n,\dot{q}_n) = (1-\alpha_f)F(q_{n+1},\dot{q}_{n+1},t)+\alpha_f F(q_n,\dot{q}_n,t) \tag{2.87}$$

Le schéma est inconditionnellement stable pour $\alpha_m \leq \alpha_f \leq 1/2$ et $\beta \geq 1/4 + 1/2(\alpha_m\alpha_f)$. L'erreur d'amplification peut être du second ordre pour $\gamma = 1/2 - \alpha_m + \alpha_f$. Enfin, l'amortissement à hautes fréquences peut être maximisé pour un choix judicieux du paramètre $\beta = 1/4(1-\alpha_m+\alpha_f)^2$. Toutefois, pour les problèmes non linéaires, ces analyses ne sont plus valides et la stabilité devient incertaine [51].

Une dernière application de la méthode-α pour le couplage de plusieurs sous-domaines avec des pas de temps différents a été réalisée par Bursi et al. [25].

Afin d'améliorer la stabilité des schémas d'intégration pour les systèmes non linéaires, des schémas forçant la conservation de l'énergie voire la conservation des moments énergétiques ont été développées. Une présentation générale de ces méthodes peut être trouvée dans le travail de Kuhl et al. [92, 93].

2.3.1.2 Méthodes des différences finies

Les schémas d'intégration temporelle présentés précédemment permettent de calculer le régime transitoire du système à résoudre jusqu'à stabilisation de la réponse en régime permanent. Toutefois il est possible d'utiliser le schéma d'intégration pour calculer directement le régime permanent du système en exprimant le système en chaque instant de la période de vibration et en reliant ces divers instants par le schéma d'intégration. Considérons tout d'abord l'équation du système sous la forme 2.60. La période est ensuite divisée en m points avec un pas de temps h. Les divers instants correspondants sont notés $t_i = ih$. En notant $x_i = x(t_i)$, le système suivant peut être obtenu :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}_0 & = & \mathbf{G}(x_0, t_0) \\ \dot{x}_1 & = & \mathbf{G}(x_1, t_1) \\ & \vdots & \\ \dot{x}_{m-1} & = & \mathbf{G}(x_{m-1}, t_{m-1}) \end{array}\right. \tag{2.88}$$

L'expression des dérivées est ensuite obtenue via le schéma d'intégration choisi, en l'occurrence de façon courante le schéma des différences finies d'où le nom de la méthode. Le schéma peut être centré, avant ou arrière selon les problèmes numériques (stabilité, précision) rencontrés. En utilisant le schéma de Crank-Nicholson, à savoir $x_{i+1} - x_i = h/2(\mathbf{G}(x_{i+1}, t_{i+1}) + \mathbf{G}(x_i, t_i))$, le système devient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 - x_0 & = & h/2(\mathbf{G}(x_1, t_1) + \mathbf{G}(x_0, t_0)) \\ x_2 - x_1 & = & h/2(\mathbf{G}(x_2, t_2) + \mathbf{G}(x_1, t_1)) \\ & \vdots & \\ x_{m-1} - x_0 & = & h/2(\mathbf{G}(x_{m-1}, t_{m-1}) + \mathbf{G}(x_0, t_0)) \end{array}\right. \tag{2.89}$$

Le système obtenu contient alors $2nm$ équations et $2nm + 1$ inconnues ($2nm$ inconnues des x_i et la période T implicitement écrite ici avec $h = T/m$). La condition de périodicité est directement écrite dans le système ci-dessus. Il ne reste qu'à régler le problème de phase qui peut se régler en fixant une des coordonnées $x_{0,j}$ à l'instant initial.

La résolution du système peut ensuite être obtenue par utilisation d'un solveur non linéaire de type Newton-Raphson. Une des limites de la méthode est la taille du système obtenu qui peut s'avérer importante afin d'obtenir une précision acceptable. Ainsi, cette méthode devient peu adaptée lorsque la réponse présente des gradients importants ou des composantes moyennes ou hautes fréquences prononcées.

2.3.1.3 Méthode de tir

La méthode de tir est une méthode numérique pour la résolution de problèmes aux limites et peut donc s'appliquer au calcul de solutions périodiques qui constituent des problèmes aux limites particuliers (conditions identiques aux deux extrémités de la période de la solution). Nous présenterons dans ce paragraphe le cas de la recherche de solution périodique.

L'idée de base est de calculer les conditions finales de la solution par intégration temporelle à partir des conditions initiales et d'appliquer ensuite des corrections sur les conditions initiales afin d'obtenir des conditions finales identiques (déterminant ainsi la solution périodique recherchée).

Considérons tout d'abord la formulation du problème sous la forme introduite en équation 2.60. A partir d'une condition initiale (T_0, x_0), la condition finale $x(T_0, x_0)$ est obtenue par intégration et est fonction des conditions initiales x_0 et T_0. A chaque itération de l'algorithme de la méthode, une correction Δx et ΔT va être calculée de telle sorte que :

$$x(T_0 + \Delta T, x_0 + \Delta x) = x_0 \tag{2.90}$$

Par un développement au premier ordre autour de (T_0, x_0), nous pouvons écrire :

$$x(T_0, x_0) + \frac{\partial x}{\partial t}(T_0, x_0).\Delta T + \frac{\partial x}{\partial x_0}(T_0, x_0).\Delta x_0 = x_0 \tag{2.91}$$

Or d'après la définition de l'équation à résoudre 2.60 nous pouvons déduire que :

$$\frac{\partial x}{\partial t}(T_0, x_0) = \mathbf{G}(x(T_0, x_0), T_0) \tag{2.92}$$

La seconde dérivée partielle peut être calculée en remarquant tout d'abord que :

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial x_0}(T_0, x_0) = \frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\partial x}{\partial t}(T_0, x_0) = \frac{\partial \mathbf{G}(x(T_0, x_0), T_0)}{\partial x_0} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_0}(T_0, x_0) \tag{2.93}$$

En remarquant que $\frac{\partial x}{\partial x_0}(t = 0, x_0) = \mathbf{I}_n$ (n est le nombre de degrés de liberté du système), $\frac{\partial x}{\partial x_0}$ est alors solution de l'équation différentielle :

$$\dot{Y} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x}(x(t, x_0), t)Y \text{ , et } Y(0) = \mathbf{I}_n \tag{2.94}$$

Il est donc possible d'obtenir le terme $\frac{\partial x}{\partial x_0}(T_0, x_0)$ en intégrant temporellement l'équation différentielle précédente (on calcule ainsi la matrice de monodromie).
Il est ensuite possible de déterminer la correction à apporter en résolvant l'équation suivante :

$$\frac{\partial x}{\partial t}(T_0, x_0).\Delta T + \frac{\partial x}{\partial x_0}(T_0, x_0).\Delta x_0 = x_0 - x(T_0, x_0) \tag{2.95}$$

Toutefois le système comporte $2n$ équations pour $2n + 1$ inconnues ($2n$ inconnues de x_0 et la période T). L'équation manquante provenant du blocage de la phase peut être obtenue en fixant une des coordonnées de la correction ou en imposant une condition d'orthogonalité entre Δx_0 et $\mathbf{G}(x(T_0, x_0), T_0)$

[112]. Dans le cas particulier de systèmes non-autonomes, la période est alors connue et le système à résoudre contient autant d'équations que d'inconnues. La procédure de résolution est classique.

La méthode de tir permet donc dans cette formulation de calculer des solutions périodiques à un problème non linéaire. Cependant, il est nécessaire de se placer dans un voisinage de la solution. De plus, les intégrations temporelles nécessaires sur l'équation à résoudre et sur le gradient des efforts par rapport aux degrés de liberté peuvent s'avérer quelquefois coûteux en temps de calcul voire en mémoire. Enfin, l'avantage de cette méthode est de ne pas prédéterminer la forme de la solution et de s'affranchir du problème de la troncature comme ce peut être le cas pour les méthodes de balance harmonique ou de collocation.

2.3.2 Méthodes d'approximation

Afin d'éviter le coûteux calcul du régime transitoire proposé par les méthodes d'intégration temporelle, de nombreuses méthodes se sont concentrées sur l'approche directe du régime permanent. Pour augmenter la vitesse de résolution que peuvent offrir les méthodes de tir ou des différences finies nécessitant une intégration temporelle, des méthodes d'approximation de la solution recherchée ont été développées.

Les premières présentées sont les méthodes de perturbations et recherchent la solution sous la forme d'une perturbation de la solution du système linéaire. Un développement en puissance croissante d'un petit paramètre est ainsi réalisée. Les inconvénients restent l'adaptation difficile aux systèmes de grande taille, la restriction à des non linéarités faibles et le caractère analytique des calculs à mener.

Les suivantes (méthodes de balance harmonique et de collocation) sont classiquement désignées comme méthodes fréquentielles étant donné qu'elle développent la solution recherchée sous la forme d'une série de Fourier. La formulation du problème s'effectue dans le domaine fréquentiel en recherchant les différents coefficients de Fourier. Cette mise en équation est obtenue via une procédure de projection sur des fonctions de pondération de l'équation dynamique obtenue en utilisant l'approximation de la réponse. Dans la méthode de balance harmonique et de collocation trigonométrique, ces fonctions de pondération sont les mêmes que les fonctions d'approximation à savoir les fonctions trigonométriques.

Enfin la dernière méthode présentée est la méthode des éléments finis en temps. Celle-ci utilise des fonctions d'interpolation qui sont des polynômes de Lagrange sur chaque élément 4D ainsi créé.

2.3.2.1 Méthodes de perturbation

Les méthodes de perturbations sont des méthodes analytiques permettant le calcul de solutions périodiques pour des systèmes limités à une taille raisonnable. Ces méthodes considèrent que les

termes non linéaires de l'équation à résoudre sont *petits* et proportionnels à un petit paramètre ϵ :

$$F_{NL}(X, \dot{X}, \Omega, t) = \epsilon \check{F}_{NL}(X, \dot{X}, \Omega, t) \tag{2.96}$$

La solution du problème non linéaire $x(t)$ (en considérant la formulation de l'équation 2.60) est alors cherchée sous la forme d'un développement en puissance croissante suivant le paramètre ϵ. La réponse est alors considérée comme une perturbation de la solution du système linéaire associé (obtenue pour $\epsilon = 0$) :

$$x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \dots \tag{2.97}$$

En réinjectant ce développement dans l'équation du système 2.60, plusieurs équations différentielles sont obtenues en isolant les termes d'ordre équivalent suivant ϵ. La résolution des équations se fait de façon successive suivant les puissances croissantes de ϵ (solution du système linéaire, solution perturbée à l'ordre 1, puis 2, etc...).

L'inconvénient majeur de cette méthode est l'apparition possible de termes séculaires qui traduisent la déficience de l'approximation. En effet, la solution obtenue par cette méthode sera toujours de période égale à la période de la solution du problème linéaire associé. Afin de pallier ces difficultés, des variantes de cette technique ont été développées :

- Méthode de Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky [20] : l'amplitude $A(t)$ et la phase $\Phi(t)$ sont considérées comme dépendantes du temps et régies par des équations différentielles fonction du paramètre ϵ. Le développement de la solution peut alors s'écrire :

$$x(t) = A(t)cos(\Phi(t)) + \epsilon x_1(A(t), \Phi(t)) + \dots \tag{2.98}$$

- Méthode des échelles multiples ou Lindstedt-Poincaré [111] : des corrections sur la pulsation de la réponse non linéaire sont apportées en considérant plusieurs échelles de temps de plus en plus lentes. La solution cherchée s'écrit ainsi sous la forme :

$$x(t) = x_0(t_0, t_1, \dots) + \epsilon x_1(t_0, t_1, \dots) + \epsilon^2 x_2(t_0, t_1, \dots) + \dots \; avec \; t_i = \epsilon^i t \tag{2.99}$$

  La résolution s'effectue de la même façon que pour la méthode de base en considérant les puissances croissantes de ϵ.

Les méthodes de perturbations ont été historiquement développées pour des non linéarités faibles. Toutefois, certains travaux ont permis d'étendre le champ d'application à des non linéarités plus fortes [26, 159].

2.3.2.2 Méthode de balance harmonique

Le principe de la méthode de balance harmonique est décrit depuis maintenant plusieurs décennies et a permis très tôt d'étudier de façon analytique les vibrations de systèmes de taille réduite et présentant une non linéarité simple. En effet, A. H. Nayfeh et D.T. Mook [111] ont traité dans leur ouvrage de nombreux systèmes à quelques degrés de liberté présentant notamment une non linéarité quadratique. Toutefois les calculs peuvent rapidement devenir fastidieux et les sources d'erreur se multiplier. A titre illustratif, nous pouvons citer E.H. Dowell [49] qui réalisa l'analyse par balance

harmonique à l'ordre un d'une poutre décrite dans sa base modale reliée à un système masse/ressort par un patin frottant et qui obtint des conclusions paradoxales. Ces conclusions relevaient finalement d'une erreur de signe corrigée dans une seconde version [54] ce qui illustre bien la complexité des calculs à mener.

La méthode de balance harmonique incrémentale introduite au début des années 1980 par Lau [31, 32, 95] a permis de résoudre des systèmes de plus grande taille et de traiter des non linéarités quelconques. La première application [31] a été réalisée sur une poutre non linéaire avec différentes conditions limites et a permis la mise en avant de super- et sous-harmoniques. La méthode développée se base sur une méthode incrémentale de résolution de Newton-Raphson associée à la procédure de Galerkin, projection sur les fonctions trigonométriques décrivant la solution. L'application de ces deux étapes successivement aboutit à la résolution d'un système algébrique non linéaire pour lequel les inconnues sont les coefficients de Fourier de la série décrivant la réponse.

Nous illustrons ici la méthode de balance harmonique incrémentale qui sera présentée de façon plus détaillée dans le chapitre suivant au paragraphe 3.1 dans une formulation adaptée à la simulation de modèle éléments finis. La solution du problème est tout d'abord supposée périodique et recherchée sous forme d'une série de Fourier tronquée à m harmoniques :

$$X(t) = B_0 + \sum_{k=1}^{m} \left(A_k \sin(\frac{k}{\nu}\Omega t) + B_k \cos(\frac{k}{\nu}\Omega t) \right) \tag{2.100}$$

où $Z = [B_0 \ A_1 \ B_1 \ \ldots \ A_k \ B_k \ \ldots]^T$ est le vecteur des coefficients de Fourier de taille $(2m+1)n \times 1$ et ν est un entier permettant de prendre en compte la présence d'éventuels sous-harmoniques.
L'expression précédente est ensuite insérée dans l'équation de la dynamique 2.59 qui considèrent les termes non linéaires de l'équation comme des efforts extérieurs au système F_{NL}. Cette équation est ensuite projetée sur les fonctions trigonométriques (procédure de Galerkin) en utilisant le produit scalaire suivant :

$$< f, g >= \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t)dt \tag{2.101}$$

Une équation algébrique non linéaire liant les coefficients de Fourier de la réponse Z est ainsi obtenue et le problème revient à annuler une fonction du type :

$$H(Z, \Omega) = \mathbf{A}(\Omega)Z - b(Z, \Omega) \tag{2.102}$$

Le vecteur b correspond ici aux coefficients de Fourier des efforts appliqués au système $F(X, \dot{X}, \Omega, t)$ et dépend donc des coefficients de Fourier de la réponse Z. $\mathbf{A}$ est une matrice dépendant des parties linéaires du modèle et de la fréquence d'excitation Ω.
Dans le cas où aucune solution analytique de l'équation précédente ne peut être déterminée, la résolution s'effectue de manière itérative en utilisant un solveur non linéaire (du type Newton-Raphson par exemple), correspondant ainsi à la méthode de balance harmonique incrémentale.

La principale difficulté de la méthode de balance harmonique est le traitement des termes non linéaires, plus précisément le calcul des coefficients de Fourier b_{NL} des efforts F_{NL}. En effet, de nombreux termes faisant intervenir des intégrales temporelles des forces non linéaires et de leurs dérivées par rapport aux déplacements et aux vitesses généralisées sont présents. L'évaluation analytique de ces intégrales est, quand celle-ci est possible, complexe mais toujours avantageuse en temps de calcul. Divers travaux ont appliqué ces calculs pour des cas de non linéarités présentant une raideur linéaire par morceaux [94], une raideur cubique pour l'analyse de flottement d'un profil d'aile 2D [125], ou un amortissement de type frottement sec sur un système à un degré de liberté [119] ou une poutre [55].

La limitation introduite par le calcul analytique des termes non linéaires a été levée par l'utilisation d'une procédure numérique réalisant des passages fréquentiels/temporels pour l'évaluation des non linéarités. Cette méthode, dénommée AFT pour *Alternating Frequency Time*, a été introduite par T.M. Cameron et J.H. Griffin [28]. A partir des coefficients de Fourier de la réponse à chaque itération, l'idée de base est d'évaluer temporellement cette réponse via un algorithme de transformée de Fourier discrète (DFT) puis d'évaluer les termes non linéaires b_{NL} (le vecteur des coefficients de Fourier se décompose en une partie linéaire et une partie non linéaire $b = b_L + b_{NL}$). L'obtention des coefficients de Fourier du terme non linéaire est ensuite réalisée par une transformée de Fourier inverse (IDFT). Evidemment, pour le calcul des transformées de Fourier discrètes, il est judicieux d'utiliser un nombre d'échantillons temporels égal à une puissance de 2 afin de mettre en oeuvre efficacement l'algorithme FFT (Fast Fourier Transform) pour minimiser le temps de calcul. La démarche générale est la suivante :

$$Z \overset{FFT^{-1}}{\Longrightarrow} X(t) = B_0 + \sum_{k=1}^{m}(A_k \sin(\frac{k}{\nu}\Omega t) + B_k \cos(\frac{k}{\nu}\Omega t)) \Longrightarrow F_{NL}(X, \dot{X}, \Omega, t) \overset{FFT}{\Longrightarrow} b_{NL} \quad (2.103)$$

De nombreuses applications utilisant l'algorithme FFT ont par la suite été mises en oeuvre, comme par exemple l'analyse de contact rotor/stator [69], l'amortissement par frottement d'aubes [71], ou l'étude d'oscillateurs linéaires par morceaux [89]. Toutefois l'utilisation d'un algorithme de DFT a également été mis en oeuvre par S. Naranayan et P. Sekar [110]. L'expression des matrices permettant le passage temps-fréquence y est explicitée dans un cadre général.

Enfin, nous pouvons citer les travaux de B. Cochelin et C. Vergez [36] qui ont récemment développé une méthode de balance harmonique ayant pour but de simplifier les expressions des termes non linéaires. L'idée est de transformer les non linéarités en termes quadratiques. L'ajout de variable interne est alors nécessaire. Cette méthode est largement inspirée de la méthode asymptotique numérique (MAN) [44].

La méthode de balance harmonique incrémentale sera la méthode utilisée pour la suite des travaux présentés dans ce mémoire. Les détails de la formulation utilisée sont présentés en début de chapitre 3.

Dans le paragraphe suivant nous présentons une autre méthode de calcul de solution périodique qui est désignée sous le nom de collocation. Elle présente la possibilité d'être appliquée en conjonction

avec la méthode de balance harmonique dans le calcul des termes non linéaires de l'équation 2.102.

2.3.2.3 Collocation

Une autre méthode permet de déterminer les solutions périodiques d'un système non linéaire décrit par une équation du type 2.59. Il s'agit de la méthode de collocation. Cette dernière se donne, tout comme la méthode de balance harmonique, une forme prédéfinie à la solution cherchée. L'idée de la méthode est alors de venir vérifier l'équation à résoudre sur un nombre de points, appelés points de collocation, afin d'obtenir un système d'équations algébriques non linéaires que l'on vient résoudre par un solveur non linéaire. Dans le cas de la construction de solutions périodiques temporelles, les points de collocation seront des instants de la période de la solution.

Dans un second temps, la solution est recherchée sous la forme d'une fonction polynômiale par morceaux et périodique de période T. L'intervalle de temps $[0\ T]$ est ensuite découpé en $r+1$ points $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = T$. Sur chaque intervalle $[t_i\ \ t_{i+1}]$, la solution est approchée par un polynôme $x^{(i)}$ de degré p. Il est donc nécessaire de vérifier l'équation sur $p+1$ points de collocation afin de définir de façon unique le polynôme cherché. Il est alors souvent pratique de définir les $p+1$ points comme équidistants sur l'intervalle $[t_i\ \ t_{i+1}]$ et ainsi obtenir $t_i = t_{i,0} < t_{i,1} < \cdots < t_{i,p} = t_{i+1}$. La vérification de l'équation à résoudre s'écrit alors :

$$\forall 0 \leq i \leq r-1,\ \forall 0 \leq j \leq p,\ \dot{x}^{(i)}(t_{i,j}) = \mathbf{G}(x^{(i)}(t_{i,j}), t_{i,j}) \tag{2.104}$$

Les polynômes sont ensuite décomposés sur la base des polynômes de Lagrange afin de pouvoir définir la solution en fonction d'un nombre fini d'inconnues. On note $x^{(i,j)} = x^{(i)}(t_{i,j})$ les valeurs aux instants $t_{i,j}$:

$$x^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{p} x^{(i,j)} \left(\prod_{k=0,k\neq j}^{p} \frac{t - t_{i,k}}{t_{i,j} - t_{i,k}} \right) \tag{2.105}$$

On obtient ainsi $2n(p+1)r$ inconnues que l'on peut diminuer de $2n(r-1)$ équations en utilisant la continuité de la solution sur les différents intervalles : $\forall 1 \leq i \leq r-1, x^{(i,p)} = x^{(i+1,0)}$. Dans le cas où la période du mouvement n'est pas connu a priori, une inconnue supplémentaire est nécessaire. On obtient $2nrp + 2n + 1$ inconnues.

D'après l'équation 2.104, on obtient $2nrp$ équations. En utilisant la condition de périodicité à savoir $x^{(0,0)} = x^{(r-1,p)}$, $2n$ nouvelles équations sont obtenues. Toutefois, si $x(t)$ est solution, $x(t+t')$ l'est aussi. Il est donc nécessaire d'imposer une phase au signal, que l'on peut appliquer simplement en fixant une des coordonnées à l'instant initial. $2nrp + 2n + 1$ équations sont donc obtenues. Le système non linéaire peut ensuite être résolu à l'aide d'un solveur non linéaire.

2.3.2.3.a Application au traitement des efforts non linéaires

La méthode de collocation peut également être utilisée pour l'évaluation des efforts non linéaires lors d'une résolution par méthode de balance harmonique. Il s'agit d'une alternative à la méthode utilisant une évaluation des efforts non linéaires par transformée de Fourier discrète. La méthode est alors appelée méthode de collocation trigonométrique car on décompose la solution en série de Fourier afin de s'adapter à la méthode de balance harmonique. La méthode de collocation trigonométrique a d'abord été utilisée en conjonction avec la méthode de balance harmonique par Hwang et al. [83] pour une application sur rotors non linéaires. Xie et al. [158] ont ensuite appliqué la méthode avec la méthode AFT introduite par Cameron et al. [28].

Dans un premier temps, les grandeurs $X(t)$, $\dot{X}(t)$ et $F_{NL}(X, \dot{X}, \Omega, t)$ sont évaluées sur $r+1$ instants de la période et leur discrétisation temporelle est notée :

$$\begin{aligned} \bar{X} &= {}^T\left[{}^TX_0\ {}^TX_1\ \cdots\ {}^TX_r\right] = {}^T\left[{}^TX(t_0)\ {}^TX(t_1)\ \cdots\ {}^TX(t_r)\right] \\ \bar{F}_{NL} &= {}^T\left[{}^TF_{NL}(X_0, \dot{X}_0, \Omega, t_0)\ {}^TF_{NL}(X_1, \dot{X}_1, \Omega, t_1)\ \cdots\ {}^TF_{NL}(X_r, \dot{X}_r, \Omega, t_r)\right] \end{aligned} \tag{2.106}$$

Or, $X(t)$ et $F_{NL}(X, \dot{X}, \Omega, t)$ sont décrits par leurs coefficients de Fourier Z et b_{NL} suivant un développement en série à m harmoniques identique à celui introduit en équation 2.100 pour la méthode de balance harmonique. Les grandeurs discrétisées $\bar{X}, \bar{\dot{X}}, \bar{F}_{NL}$ peuvent donc s'écrire simplement en fonction de leurs coefficients de Fourier pour m harmoniques considérés :

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \bar{\mathbf{T}}_1 \otimes \mathbf{I}_n Z \\ \bar{\dot{X}} &= \bar{\mathbf{T}}'_1 \otimes \mathbf{I}_n Z \\ \bar{F}_{NL} &= \bar{\mathbf{T}}_1 \otimes \mathbf{I}_n b_{NL} \\ avec\ \bar{\mathbf{T}}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & \sin(\frac{\Omega}{\nu}t_0) & \cos(\frac{\Omega}{\nu}t_0) & \dots & \cos(\frac{m}{\nu}\Omega t_0) \\ 1 & \sin(\frac{\Omega}{\nu}t_1) & \cos(\frac{\Omega}{\nu}t_1) & \dots & \cos(\frac{m}{\nu}\Omega t_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \sin(\frac{\Omega}{\nu}t_r) & \cos(\frac{\Omega}{\nu}t_r) & \dots & \cos(\frac{m}{\nu}\Omega t_r) \end{bmatrix}, \\ \bar{\mathbf{T}}_n = \bar{\mathbf{T}}_1 \otimes \mathbf{I}_n \quad et \quad \bar{\mathbf{T}}'_1 &= \frac{d}{dt}\bar{\mathbf{T}}_1 \end{aligned} \tag{2.107}$$

$\mathbf{I}_n$ est ici la matrice identité de $I\!R^n$.
De plus, l'expression de $\bar{F}_{NL}$ peut également être obtenue en utilisant la relation décrivant les efforts non linéaires :

$$\bar{F}_{NL} = \begin{bmatrix} F_{NL}(X_0, \dot{X}_0, \Omega, t_0) \\ \vdots \\ F_{NL}(X_r, \dot{X}_r, \Omega, t_r) \end{bmatrix} = F_{NL}(\bar{X}, \bar{\dot{X}}, \Omega, [t_0\ \cdots\ t_r]) \tag{2.108}$$

Les coefficients de Fourier des efforts non linéaires peuvent ensuite être obtenus en inversant la relation au sens des moindres carrés par utilisation de la pseudo-inverse de la matrice $\bar{\mathbf{T}}_n$. En utilisant la relation 2.107 et la relation 2.108 :

$$b_{NL} = \left({}^T\bar{\mathbf{T}}_n\bar{\mathbf{T}}_n\right)^{-1}\,{}^T\bar{\mathbf{T}}_n F_{NL}(\bar{X}, \bar{\dot{X}}, \Omega, [t_0\ \cdots\ t_r]) \tag{2.109}$$

Enfin, Liu et al. [103] ont proposé de se ramener à une matrice $\bar{\mathbf{T}}_n$ carrée en choisissant un nombre d'échantillons temporels égal au nombre d'harmoniques considérés dans l'approximation de la réponse soit $2m+1$. L'application à un modèle de profil d'aile comportant une raideur de tangage cubique a ensuite été réalisée [102].

2.3.2.4 Eléments finis en temps

En dynamique des structures, la méthode des éléments finis se base sur une discrétisation spatiale du problème à résoudre. La méthode aboutit à l'obtention des équations de la dynamique pour un système discrétisé 2.59. Cependant, cette discrétisation n'est que partielle puisque les coordonnées généralisées du système sont toujours fonction du temps. L'idée de la méthode des éléments finis en temps est d'introduire à la fois une discrétisation spatiale et temporelle du problème. Les inconnues du système à résoudre ainsi obtenu sont alors des valeurs nodales évaluées en divers instants. De façon pratique, cela revient à rajouter une dimension au domaine d'étude selon la variable temps et à considérer ainsi des éléments 4D.

La formulation de la méthode se base sur le principe variationnel de la loi de variation de l'action d'Hamilton et a été introduite par Bailey [9] en 1975. La solution dynamique y est recherchée à l'aide de fonctions d'approximation (polynômes de Lagrange) définies sur l'intervalle de temps d'étude ce qui s'apparente à la méthode de Rayleigh-Ritz. La méthode a ensuite été étendue au cas où la solution est approchée localement sur chaque division de l'intervalle de temps d'étude par Simkins [10] et Riff et al. [127] jusqu'à la définition d'éléments finis spatio-temporels.

Cette méthode présente l'avantage de pouvoir calculer à la fois des solutions transitoires et des solutions périodiques ou quasi-périodiques. De plus, le problème non linéaire obtenu présente une matrice de raideur dynamique et une jacobienne des termes non linéaires creuses, contrairement à la jacobienne du système non linéaire obtenu avec la méthode de balance harmonique, ce qui présente un avantage numérique important. Enfin, un traitement des termes non linéaires par interpolation est possible afin de réduire les nombreuses intégrations à effectuer lors de l'évaluation des non linéarités [45].

Il est également à noter que la méthode de balance harmonique constitue un cas particulier de la méthode des éléments finis où un seul élément fini est utilisé sur la période. L'ajout d'harmoniques correspond à un enrichissement de la famille des fonctions d'interpolation utilisées tout en conservant le maillage initial (éléments hiérarchiques et enrichissement du maillage de type p et non h).

2.3.3 Continuation

Les méthodes de résolution présentées précédemment permettent de calculer la réponse forcée d'un système non linéaire pour un jeu de paramètres. Or, il est généralement souhaitable de déterminer le comportement du système sur une plage de variation d'un des paramètres, appelé paramètre de

contrôle et noté μ. Le paramètre le plus couramment choisi est évidemment la pulsation d'excitation qui permet de calculer la réponse fréquentielle du système sur une gamme de fréquence donnée. D'autres analyses paramétriques peuvent être menées et ainsi faire varier un amortissement, une raideur, un coefficient de frottement...

Nous considérons donc la résolution d'un problème non linéaire exprimé sous la forme d'une fonction $H(x, \mu) = 0$ de $I\!R^{p+1}$ dans $I\!R^p$ et nous cherchons à déterminer la courbe décrite par la solution x du problème lorsque le paramètre de contrôle μ varie dans l'intervalle $[\mu_1 \;\; \mu_2]$. La fonction décrivant le problème peut par exemple être l'équation résultant de la méthode de balance harmonique 2.102 et x représenter alors l'ensemble des coefficients de Fourier de la solution Z. En outre, lors d'une telle étude, des bifurcations paramétriques peuvent apparaître selon les valeurs de μ et plusieurs solutions peuvent être présentes. Il est alors nécessaire de suivre l'ensemble des solutions sur la plage de variation. Toutefois nous ne présenterons pas ici les outils permettant de détecter les points de bifurcation.

La construction de la courbe décrivant la solution s'effectue numériquement en faisant varier de façon discrète le paramètre de contrôle μ. La courbe obtenue est donc une succession de points solutions que nous noterons $y_n = (x_n, \mu_n)$. L'objectif des méthodes de continuation est d'utiliser la connaissance des points précédents déjà calculés $(y_1, \cdots, y_n)$ pour calculer rapidement le point suivant y_{n+1} que l'on cherchera dans la "continuité" de la portion de la courbe déjà décrite.

La démarche globale s'articule autour de deux étapes importantes. La première consiste à effectuer une prédiction du prochain point à calculer noté $y_{n+1}^{(0)}$. La seconde consiste à venir effectuer des corrections successives sur cette prédiction pour satisfaire les équations du problème et ainsi déterminer la solution y_{n+1}.

Nous présentons dans la suite les principales techniques généralement utilisées.

2.3.3.1 Paramétrisation

Afin de décrire l'ensemble de la courbe décrivant les solutions sur la plage de variation $[\mu_1 \;\; \mu_2]$ du paramètre de contrôle, il est nécessaire de paramétrer la courbe pour la parcourir suivant un sens défini en la construisant point par point. Il s'agit de se munir d'une fonction $s \mapsto (x(s), \mu(s))$ de $I\!R$ vers $I\!R^{q+1}$ où q est le nombre de composantes de x. Pour cela, plusieurs techniques existent.

2.3.3.1.a Paramétrisation sélective

Cette technique est la plus immédiate puisqu'elle consiste à choisir le paramètrage correspondant au suivi d'une des composantes x^k de x ou au suivi du paramètre de contrôle μ. On a donc $s = x^k$ ou $s = \mu$. Le choix du suivi du paramètre de contrôle est évidemment le plus naturel et le plus courant. Toutefois ce type de paramétrage présente un inconvénient majeur : il ne permet pas de

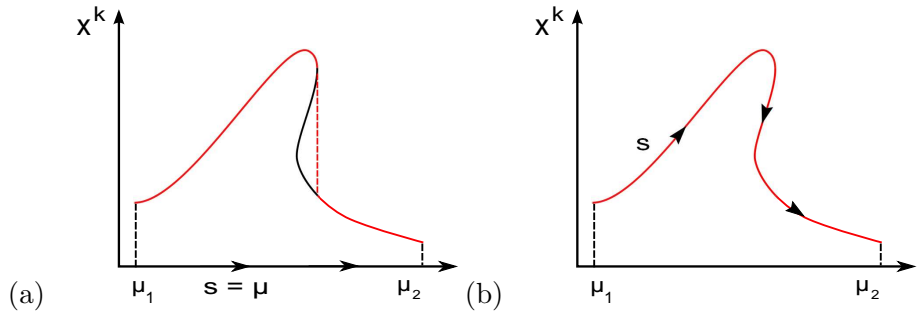


FIGURE 2.24 – Point de retournement : a) paramétrisation sélective, b) paramétrisation curviligne.

suivre la courbe lorsque celle-ci présente un point de retournement. Or, ce type de comportement est relativement fréquent en analyse non linéaire (notamment lors de saut de la réponse dynamique). Le type de réponse observée dans ce cas est illustrée en figure 2.24 pour $s = \mu$.

2.3.3.1.b Paramétrisation curviligne

Afin de pouvoir décrire les points de retournement, il peut être judicieux de paramétrer la courbe par son abscisse curviligne. Puisque la courbe est décrite de façon discrète, l'abscisse curviligne est définie comme étant la longueur de la ligne brisée définie par les points y_1 à y_n. Le premier point calculé y_1 sert d'origine ; la valeur de l'abscisse curviligne est nulle en ce point. Ainsi l'incrément d'abscisse curviligne entre deux points s'exprime :

$$\Delta s_n = \sqrt{\|x_n - x_{n-1}\|^2 + (\mu_n - \mu_{n-1})^2} \tag{2.110}$$

Les différentes valeurs de l'abscisse curviligne sont calculées alors de proche en proche :

$$s_n = s_{n-1} + \Delta s_n \tag{2.111}$$

Cette paramétrisation permet de décrire les points de retournement en rendant possible la diminution du paramètre de contrôle. La figure 2.24 illustre cette capacité.

2.3.3.2 Prédiction

Une fois le paramétrage de la courbe effectuée, une prédiction du prochain point doit être réalisée à partir de la connaissance des points précédents $(y_1, \cdots, y_n)$ et de la valeur du paramètre $s_1, \cdots, s_n$ et à une certaine "distance" du dernier point donnée par un incrément Δ_s du paramètre s décrivant la courbe. Le prédicteur sera noté $y_{n+1}^{(0)}$. Plusieurs types de prédicteurs peuvent être envisagés. Nous décrivons ici les principaux rencontrés.

2.3.3.2.a Prédicteur sécant

La prédiction est réalisée sur la droite formée par les deux derniers points calculés.

$$y_{n+1}^{(0)} = y_n + \Delta_s \frac{y_n - y_{n-1}}{\|y_n - y_{n-1}\|} \tag{2.112}$$

2.3.3.2.b Prédicteur tangent

La prédiction est réalisée sur la droite formée par la tangente au dernier point calculé. La direction de cette droite est donnée par un vecteur tangent unitaire $\vec{t}$:

$$y_{n+1}^{(0)} = y_n + \Delta_s \vec{t} \tag{2.113}$$

Cette méthode est plus précise que la précédente mais également plus coûteuse car elle nécessite le calcul de la jacobienne $\mathbf{J}_y H(y_n)$ de la fonction H au point y_n. Le vecteur $\vec{t}$ vérifie : $\mathbf{J}_y H(y_n)\vec{t} = 0$, $\|\vec{t}\| = 1$ et $det \begin{pmatrix} \mathbf{J}_y H(y_n) \\ {}^T\vec{t} \end{pmatrix} > 0$.

2.3.3.2.c Prédicteur polynomial

Les deux méthodes précédentes peuvent être vues comme des prédicteurs d'ordre 1. En effet, la méthode de la sécante correspond à utiliser un polynôme d'ordre 1 en s et la méthode de la tangente correspond à un développement limité à l'ordre 1 de $H(y_n + \Delta y)$. Une autre méthode permet de faire des prédictions d'un ordre plus élevé en considérant plus de points précédents.

Les polynômes de Lagrange sont utilisées pour approcher la fonction H par un polynôme P de degré d. Pour définir ce polynôme, $d+1$ points précédents $[(y_n, s_n), \ldots, (y_{n-d}, s_{n-d})]$ sont nécessaires. Ainsi son expression s'écrit :

$$P(s) = \sum_{i=n-d}^{n} \left(y_i \prod_{\substack{j=n-d \\ j \neq i}}^{n} \frac{s - s_j}{s_i - s_j} \right) \tag{2.114}$$

La prédiction est alors calculée suivant la formule :

$$y_{n+1}^{(0)} = P(s_n + \Delta s) \tag{2.115}$$

La figure 2.25 donne une représentation schématique des trois types de prédicteurs présentés.

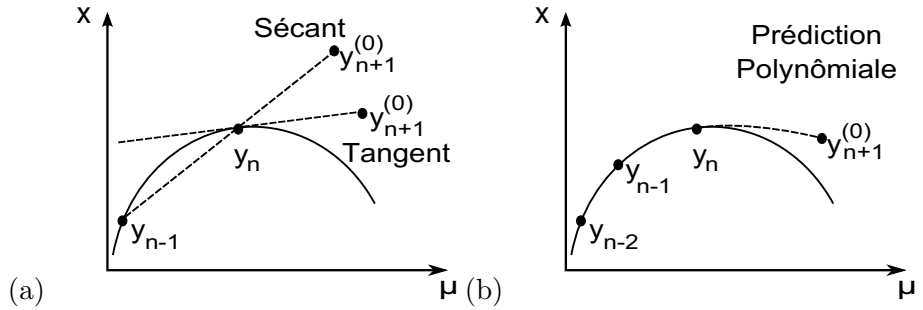


FIGURE 2.25 – Prédicteurs : a) sécant et tangent, b) d'ordre élevé.

2.3.3.3 Correction

Une fois la prédiction $y_{n+1}^{(0)}$ établie, cette dernière doit être corrigée pendant plusieurs itérations afin de converger vers un point solution y_{n+1} tel que le résidu des équations à résoudre soit au dessous d'une valeur seuil ϵ. Les méthodes de correction permettent de définir une stratégie pour les corrections successives. En effet, la fonction $H(x, \mu)$ étant de $I\!R^{p+1}$ vers $I\!R^p$, il est nécessaire d'ajouter une équation (méthodes arclength, pseudo-arclength, ou MoorePenrose) ou de fixer une des composantes de y (méthode de Newton).

2.3.3.3.a Méthode de Newton-Raphson

Une des composantes de $y_{n+1}^{(0)}$ est fixée. Généralement il s'agit du paramètre $\mu_{n+1}^{(0)} = \mu_{n+1}$. Un schéma de Newton-Raphson nous permet alors d'écrire :

$$H(x_{n+1}^{(i+1)}, \mu_{n+1}) = H(x_{n+1}^{(i)}, \mu_{n+1}) + \mathbf{J}_y H(x_{n+1}^{(i)}, \mu_{n+1})\Delta x \tag{2.116}$$

Le point corrigé à l'itération $i+1$ s'exprime :

$$y_{n+1}^{(i+1)} = \begin{bmatrix} x_{n+1}^{(i)} + \Delta x \\ \mu_{n+1} \end{bmatrix} \; avec \; \Delta x = -\mathbf{J}_y H(x_{n+1}^{(i)}, \mu_{n+1}) H(x_{n+1}^{(i)}, \mu_{n+1}) \tag{2.117}$$

2.3.3.3.b Méthode Pseudo-Arclength

Cette méthode permet de rechercher la solution sur la perpendiculaire à la droite créée par le point prédit et le point précédent et passant par le point prédit. Des corrections sont donc apportées à la fois sur x et sur μ. L'équation permettant d'assurer l'appartenance à la droite s'écrit :

$$\begin{aligned} < y_{n+1}^{(i+1)} - y_{n+1}^{(0)}, y_{n+1}^{(0)} - y_n > &= 0 \\ \Leftrightarrow < y_{n+1}^{(i)} - y_{n+1}^{(0)}, y_{n+1}^{(0)} - y_n > + < \Delta y, y_{n+1}^{(0)} - y_n > &= 0 \\ \Leftrightarrow \qquad < \Delta y, y_{n+1}^{(0)} - y_n > &= 0 \end{aligned} \tag{2.118}$$

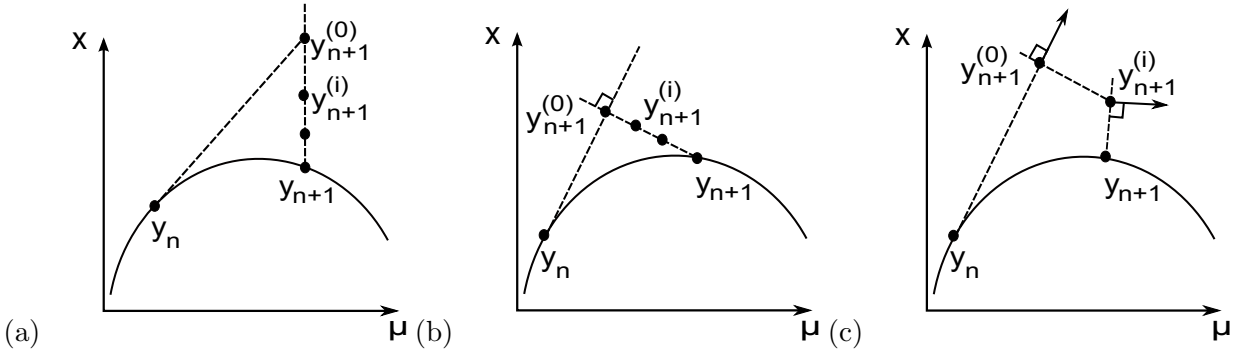


FIGURE 2.26 – Correcteurs : a) Newton-Raphson, b) Pseudo Arclength c) Moore Penrose.

Le point corrigé à l'itération $i+1$ s'exprime alors :

$$y_{n+1}^{(i+1)} = \begin{bmatrix} x_{n+1}^{(i)} + \Delta x \\ \mu_{n+1}^{(i)} + \Delta\mu \end{bmatrix} \; avec \; \begin{bmatrix} \mathbf{J}_x H(y_{n+1}^{(i)}) & \mathbf{J}_\mu H(y_{n+1}^{(i)}) \\ x_{n+1}^{(0)} - x_n & \mu_{n+1}^{(0)} - \mu_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -H(y_{n+1}^{(i)}) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.119}$$

Cette méthode est une simplification de la méthode Arclength qui recherchait la solution sur un cercle autour du point prédit. Cependant, cette dernière méthode est rarement utilisée car l'équation supplémentaire n'est pas linéaire.

2.3.3.3.c Méthode de MoorePenrose

Dans cette méthode, la direction de recherche varie à chaque itération est reste toujours orthogonale au noyau de la matrice jacobienne $\mathbf{J}_y H(y_{n+1}^{(i)})$ au point $y_{n+1}^{(i)}$. On calcule donc une correction à chaque itération sans rajouter d'équations supplémentaires mais en calculant la matrice pseudo-inverse de MoorePenrose de la matrice jacobienne. Une matrice pseudo-inverse $\mathbf{W}^+$ d'une matrice $\mathbf{W}$ se définit par $\mathbf{W}^+ = {}^T\mathbf{W}(\mathbf{W}^T\mathbf{W})^{-1}$. La correction peut donc s'écrire :

$$y_{n+1}^{(i)} = y_{n+1}^{(0)} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta\mu \end{bmatrix} \; avec \; \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta\mu \end{bmatrix} = -\mathbf{J}_y^+ H(y_{n+1}^{(i)}) H(y_{n+1}^{(i)}) \tag{2.120}$$

Une représentation schématique des trois méthodes de correction présentées est donnée en figure 2.26.

2.3.3.4 Aspects pratiques

Pour la mise en oeuvre pratique des méthodes proposées, il est impératif de porter une grande attention sur la valeur du pas Δs utilisé pour réaliser une prédiction. En effet, un pas très grand engendrera une prédiction très éloignée du point précédent et nécessitera un nombre d'itérations de correction important. En revanche, un pas faible engendrera une convergence rapide mais un parcours

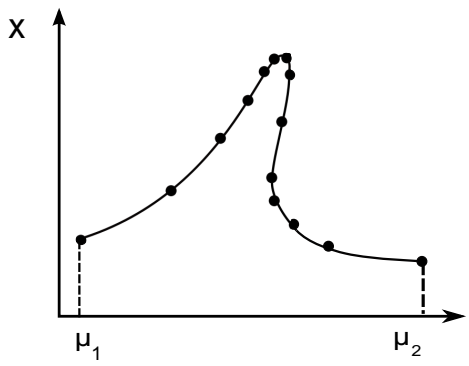


FIGURE 2.27 – Courbe obtenu avec un pas adaptatif.

de la courbe à décrire très lent. Il est donc intéressant de se munir d'outils pratiques permettant d'adapter au cours de la description de la courbe le pas Δs. Lors de la description de pic de résonance, un pas fin permettra de décrire précisément le pic, alors que dans les portions relativement plates, un faible nombre de points permettra d'approcher la réponse. Un pas plus grand sera adapté. Une illustration d'une méthode à pas adaptative est donnée en figure 2.27.

Afin de réaliser automatiquement cette adaptation, l'approche la plus courante est de modifier la valeur du pas utilisée pour le calcul du point précédent en fonction du nombre d'itérations (noté I) qui ont été nécessaires. Ainsi, un coefficient multiplicateur β est utilisé et peut s'écrire par exemple sous la forme :

$$\beta = \frac{I_{opt}}{I} \; ou \; \beta = 2^{(I_{opt}-I)/4} \tag{2.121}$$

où I_{opt} représente le nombre d'itérations optimal souhaité. En pratique, I_{opt} compris entre 3 et 6 semble adapté [142]. En outre, il est généralement nécessaire de borner la facteur β pour éviter des changements de pas trop brusques. Les valeurs extrêmes conseillées sont alors entre 0.5 et 2. Enfin, un pas minimal Δs_{min} et maximal Δs_{max} doit être affecté pour limiter la vitesse de parcours de la courbe. Ces valeurs sont dépendantes de l'ordre de grandeur des différentes composantes de x et μ.

En cas de non convergence, il est intéressant de programmer d'autres scénarii. L'une des modifications les plus efficaces semble de diviser l'incrément Δs par 2 en cas de non convergence. Le point prédit se rapproche alors des points précédents. De plus, le changement du type de schéma prédicteur/correcteur peut avoir une forte influence. Ces gestions de scénarii relèvent toutefois de l'expérience de l'utilisateur.

2.4 Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre la stratégie générale pour calculer la réponse dynamique de structures à interfaces non linéaires. Cette démarche s'articule autour de trois points essentiels que sont la modélisation, la réduction des parties linéaires du modèle et enfin la résolution via des méthodes de calcul spécifiques.

Le choix du modèle revêt une importance capitale puisque celui-ci doit conserver la non linéarité du comportement à représenter tout en restant suffisamment simple pour s'intégrer convenablement dans un modèle plus large d'une structure complète. La discrétisation de la structure doit donc être faite avec attention. De plus, le modèle retenu est à mettre en adéquation avec la méthode de résolution ; la formulation des efforts non linéaires peut en effet être temporelle ou fréquentielle, l'utilisation de variables internes peut être rédhibitoire, etc... Enfin, dans un contexte industriel, des modèles simples utilisant directement des données d'essais ou utilisant peu de paramètres restent toujours un avantage certain.

Dans la suite de cette étude, nous nous concentrerons sur la simulation de structures non linéaires par l'intermédiaire de la méthode de balance harmonique. Par conséquent, des modèles non linéaires exprimés directement dans le domaine fréquentiel seront privilégiés. En outre, un nombre restreint de degrés de liberté permettra d'éviter la résolution d'un système de trop grande taille. En effet, pour tout harmonique supplémentaire retenu dans la technique de balance harmonique, le nombre d'inconnues à déterminer augmente du double du nombre de degrés de liberté du modèle. Toutefois, l'approche retenue dans le chapitre suivant se montrera efficace malgré son caractère mixte puisque la stratégie repose sur un nombre de degrés de liberté non linéaires élevé associé à un seul harmonique et avec une non linéarité s'exprimant directement dans le domaine fréquentiel.

Chapitre 3

Simulation dynamique d'un isolateur à supports élastomères

La méthode de balance harmonique présentée dans le chapitre précédent nécessitent des adaptations pour être appliquée sur des modèles éléments finis de grande taille et comportant des non-linéarités, modèles souvent définis sous un logiciel commercial. Ce chapitre présente une application de la méthode de balance harmonique à un isolateur spatial défini sous le logiciel commercial MSC.Nastran et pour lequel une interaction avec MATLAB est proposée afin de réaliser la simulation. La non linéarité du système réside dans la non linéarité du matériau viscoélastique qui présente une dépendance de son module dynamique en fonction de la fréquence et de l'amplitude de déformation à laquelle il est soumis (effet Payne). La prise en compte de cet effet nécessite le développement d'une méthodologie particulière pour le traitement des efforts générés par les éléments élastomères.

La formulation de la balance harmonique sera détaillée dans une première partie afin d'introduire dans une seconde partie la procédure spécifique mise en oeuvre pour considérer l'effet Payne. Enfin, des simulations numériques appliquées au cas de l'isolateur vibratoire viendront illustrer la méthodologie développée.

3.1 Méthode de balance harmonique

Nous détaillons dans cette partie la méthode de balance harmonique de façon générale et détaillée pour un modèle éléments finis dans l'optique d'introduire dans la prochaine section la formulation spécifique à un harmonique retenue dans la procédure de prise en compte de l'effet Payne. L'historique de la méthode ainsi que ses grandes caractéristiques ont été présentés et comparés avec les autres méthodes de calcul de solutions périodiques dans la section 2.3 du chapitre 2 d'état de l'art. La formulation présentée est spécifique à ce mémoire.

3.1.1 Mise en équations

Tout d'abord, nous noterons $\mathbf{I}_k$ et $\mathbf{0}_k$ la matrice identité et la matrice nulle de l'espace $I\!R^k$. Considérons ensuite un système mécanique discret à n degrés de liberté décrit par ses matrices de masse $\mathbf{M}$, d'amortissement $\mathbf{D}$ et de raideur $\mathbf{K}$ de taille $n \times n$. Une excitation périodique $F_L(\Omega, t)$ est appliquée au système à la pulsation Ω. Les non linéarités du système sont considérées comme des forces extérieures dépendant des déplacements X, des vitesses $\dot{X}$, de la pulsation Ω et du temps t. Ces efforts sont notés $F_{NL}(X, \dot{X}, \Omega, t)$. L'équation du mouvement peut alors s'écrire :

$$\mathbf{M}\ddot{X} + \mathbf{D}\dot{X} + \mathbf{K}X = F(X, \dot{X}, \Omega, t) = F_L(\Omega, t) + F_{NL}(X, \dot{X}, \Omega, t) \tag{3.1}$$

La réponse est supposée périodique ce qui permet de la développer en série de Fourier. Ce développement théoriquement infini est tronqué pour ne conserver que m harmoniques dans la réponse :

$$X(t) = B_0 + \sum_{k=1}^{m} \left(A_k \sin(\frac{k}{\nu}\Omega t) + B_k \cos(\frac{k}{\nu}\Omega t) \right) \tag{3.2}$$

soit

$$X(t) = \left[\mathbf{I}_n \ \sin(\frac{\Omega}{\nu}t)\mathbf{I}_n \ \cos(\frac{\Omega}{\nu}t)\mathbf{I}_n \ \ldots \ \sin(\frac{k}{\nu}\Omega t)\mathbf{I}_n \ \cos(\frac{k}{\nu}\Omega t)\mathbf{I}_n \ \ldots \right] [B_0 \ A_1 \ B_1 \ \ldots \ A_k \ B_k \ \ldots]^T$$

où $Z = [B_0 \ A_1 \ B_1 \ \ldots \ A_k \ B_k \ \ldots]^T$ est le vecteur des coefficients de Fourier de taille $(2m+1)n \times 1$ et ν est un entier permettant de prendre en compte la présence d'éventuels sous-harmoniques.

Une notation plus compacte peut être obtenue en considérant la notation suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1(t) &= \left[1 \ \sin(\frac{\Omega}{\nu}t) \ \cos(\frac{\Omega}{\nu}t) \ \ldots \ \sin(\frac{k}{\nu}\Omega t) \ \cos(\frac{k}{\nu}\Omega t) \ \ldots \right] \\ \mathbf{T}_n(t) &= \mathbf{T}_1(t) \otimes \mathbf{I}_n \end{aligned} \tag{3.3}$$

où $\otimes$ représente le produit de Kronecker.

Ainsi, avec cette notation :

$$X(t) = \mathbf{T}_n(t)Z = (\mathbf{T}_1(t) \otimes \mathbf{I}_n)\, Z \tag{3.4}$$

Le même développement peut également être réalisé pour l'effort F, en supposant que ce dernier se développe de façon similaire en série de Fourier tronquée à l'ordre m :

$$F(X, \dot{X}, \Omega, t) = C_0 + \sum_{k=1}^{m} \left(S_k \sin(\frac{k}{\nu}\Omega t) + C_k \cos(\frac{k}{\nu}\Omega t) \right) \tag{3.5}$$

soit

$$\begin{aligned} F(X, \dot{X}, \Omega, t) &= \mathbf{T}_n(t)\, [C_0 \ S_1 \ C_1 \ \ldots \ S_k \ C_k \ \ldots]^T \\ F(X, \dot{X}, \Omega, t) &= (\mathbf{T}_1(t) \otimes \mathbf{I}_n)\, b \end{aligned} \tag{3.6}$$

Afin de calculer vitesses et accélérations, nous introduisons un opérateur de dérivation élémentaire ∇ :

$$\nabla = \frac{\Omega}{\nu} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

Pour un système à 1 degré de liberté et pour m harmoniques, l'opérateur de dérivation s'écrira :

$$\nabla_1 = diag(0, \nabla, \ldots, k\nabla, \ldots, m\nabla) \tag{3.8}$$

Par conséquent cet opérateur de dérivation pour un système à n degrés de liberté se mettra sous la forme :

$$\begin{aligned} \nabla_n &= diag(\mathbf{0}_n, \ldots, \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n & -k\frac{\Omega}{\nu}\mathbf{I}_n \\ k\frac{\Omega}{\nu}\mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n \end{bmatrix}, \ldots) \\ \nabla_n &= \nabla_1 \otimes \mathbf{I}_n \end{aligned} \tag{3.9}$$

Les vitesses et les accélérations peuvent donc se noter :

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= \mathbf{T}_n(t)\nabla_n Z \\ \ddot{X}(t) &= \mathbf{T}_n(t)\nabla_n^2 Z = \mathbf{T}_n(t)\left(\nabla_1^2 \otimes \mathbf{I}_n\right) Z \end{aligned} \tag{3.10}$$

En remplaçant l'équation 3.10 dans l'équation 3.1, nous obtenons :

$$\mathbf{M}\mathbf{T}_n(t)\left(\nabla_1^2 \otimes \mathbf{I}_n\right) Z + \mathbf{D}\mathbf{T}_n(t)\left(\nabla_1 \otimes \mathbf{I}_n\right) Z + \mathbf{K}\mathbf{T}_n(t) Z = \mathbf{T}_n(t) b \tag{3.11}$$

Or, pour toute matrice $\mathbf{W}$ de taille $n \times n$, via les propriétés du produit de Kronecker :

$$\mathbf{W}\mathbf{T}_n(t) = \mathbf{W}\left(\mathbf{T}_1(t) \otimes \mathbf{I}_n\right) = \mathbf{T}_n(t)\left(\mathbf{I}_{2m+1} \otimes \mathbf{W}\right) \tag{3.12}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_n(t)\left(\left(\mathbf{I}_{2m+1} \otimes \mathbf{M}\right)\left(\nabla_1^2 \otimes \mathbf{I}_n\right) + \left(\mathbf{I}_{2m+1} \otimes \mathbf{D}\right)\left(\nabla_1 \otimes \mathbf{I}_n\right) + \left(\mathbf{I}_{2m+1} \otimes \mathbf{K}\right)\right) Z &= \mathbf{T}_n(t) b \\ \mathbf{T}_n(t)\left(\nabla_1^2 \otimes \mathbf{M} + \nabla_1 \otimes \mathbf{D} + \mathbf{I}_{2m+1} \otimes \mathbf{K}\right) Z &= \mathbf{T}_n(t) b \end{aligned} \tag{3.13}$$

La dépendance temporelle de l'équation peut être supprimée afin d'obtenir un système de $(2m+1)n$ équations liant les coefficients de Fourier en utilisant une procédure de Galerkin qui consiste en une projection sur les fonctions de base trigonométriques. En effet, ces fonctions définissent un produit scalaire :

$$< f, g >= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)g(t)dt \tag{3.14}$$

Plus simplement, la procédure de Galerkin appliquée ici revient à calculer les coefficients de Fourier des différentes grandeurs temporelles de l'équation 3.13 après avoir introduit le développement en série de Fourier dans l'équation du mouvement.

Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_0^T {}^T\mathbf{T}_n(t)\mathbf{T}_n(t)dt &= \frac{1}{T}\int_0^T \left({}^T\mathbf{T}_1(t)\mathbf{T}_1(t)\right)\otimes\mathbf{I}_n dt \\
\frac{1}{T}\int_0^T {}^T\mathbf{T}_n(t)\mathbf{T}_n(t)dt &= \underbrace{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}_1}\otimes\mathbf{I}_n
\end{aligned} \tag{3.15}$$

avec $\mathbf{L}_1$ matrice carré de taille $2m+1$.

L'application de ce produit scalaire sur l'équation 3.13 conduit à l'écriture :

$$(\mathbf{L}_1\otimes\mathbf{I}_n)\left(\nabla_1^2\otimes\mathbf{M}+\nabla_1\otimes\mathbf{D}+\mathbf{I}_{2m+1}\otimes\mathbf{K}\right)Z=(\mathbf{L}_1\otimes\mathbf{I}_n)\,b \tag{3.16}$$

$\mathbf{L}_1\otimes\mathbf{I}_n$ étant une matrice constante diagonale, le système peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{A}Z=b \;\; avec \;\; \mathbf{A}=\nabla_1^2\otimes\mathbf{M}+\nabla_1\otimes\mathbf{D}+\mathbf{I}_{2m+1}\otimes\mathbf{K} \tag{3.17}$$

La matrice $\mathbf{A}$ s'écrit de façon explicite :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}
\mathbf{K} & & & & & & & \\
& \mathbf{K}-\left(\frac{\Omega}{\nu}\right)^2\mathbf{M} & -\frac{\Omega}{\nu}\mathbf{D} & & & & & \\
& \frac{\Omega}{\nu}\mathbf{D} & \mathbf{K}-\left(\frac{\Omega}{\nu}\right)^2\mathbf{M} & & & & & \\
& & & \ddots & & & & \\
& & & & \mathbf{K}-\left(\frac{k}{\nu}\Omega\right)^2\mathbf{M} & -\frac{k}{\nu}\Omega\mathbf{D} & & \\
& & & & \frac{k}{\nu}\Omega\mathbf{D} & \mathbf{K}-\left(\frac{k}{\nu}\Omega\right)^2\mathbf{M} & & \\
& & & & & & \ddots &
\end{bmatrix} \tag{3.18}$$

Le système à résoudre peut se ramener à la détermination des zéros d'une fonction $H : I\!R^{(2m+1)\times n} \rightarrow I\!R^{(2*m+1)\times n}$:

$$H(Z)=\mathbf{A}(\Omega)Z-b(Z,\Omega) \tag{3.19}$$

Dans la démarche ci-dessus, la projection sur les fonctions trigonométriques (procédure de Galerkin) a d'abord été mise en oeuvre afin d'aboutir à la résolution d'un problème non linéaire. Il s'agit d'annuler la fonction H à l'aide d'un solveur non linéaire de type Newton-Raphson. Toutefois il faut noter que l'ordre des deux démarches (procédure de Galerkin puis procédure de Newton-Raphson) n'a pas d'importance et il est tout à fait possible d'écrire tout d'abord la correction à appliquer sur la solution puis de développer celle-ci en série de Fourier et de projeter le résidu sur les fonctions trigonométriques. La démonstration est donné par Ferri [53] et les travaux de Pierre et al. [119] présentent un cas d'application de la méthode de type Newton-Raphson suivie de la procédure de Galerkin.

Il faut noter dans l'équation 3.19 que b dépend de Z et Ω car b correspond aux coefficients de Fourier de $F(X, \dot{X}, \Omega, t)$. Dans le cas où aucune expression analytique n'a pu être établie entre les coefficients de Fourier de b et de Z, une évaluation temporelle des termes $X(t)$ et $\dot{X}(t)$ peut être calculée à partir d'un vecteur initial Z en utilisant un algorithme de FFT inverse :

$$Z \overset{FFT^{-1}}{\Longrightarrow} X(t) = B_0 + \sum_{k=1}^{m} (A_k \sin(\frac{k}{\nu}\Omega t) + B_k \cos(\frac{k}{\nu}\Omega t)) \tag{3.20}$$

Cette approximation permet d'évaluer temporellement les efforts non linéaires $F_{NL}(X, \dot{X}, \Omega, t)$ et d'en déduire les coefficients de Fourier associés :

$$F_{NL}(X, \dot{X}, \Omega, t) \overset{FFT}{\Longrightarrow} b_{NL}(Z, \Omega) = {}^T[C_0^{NL}\ S_1^{NL}\ C_1^{NL} \dots\ S_m^{NL}\ C_m^{NL}] \tag{3.21}$$

Enfin, la résolution de la fonction non linéaire H nécessite le calcul d'une matrice jacobienne faisant intervenir les dérivées des termes non linéaires pas rapport aux déplacements et aux vitesses généralisées. Pour réaliser ce calcul, différentes méthodes sont possibles. Le calcul analytique [94, 119] reste le plus efficace mais également le plus fastidieux. Le calcul peut également être effectué par différences finies [90]. La technique AFT a également été utilisée en remarquant que les colonnes de la matrice jacobienne sont des fonctions périodiques pour lesquelles la procédure AFT peut s'appliquer [110]. Afin de réduire le nombre important de FFT à effectuer, A.Y.T. Leung et S.K. Chui [99] ont proposé une amélioration qui fait intervenir les coefficients de Fourier des dérivées partielles des termes non linéaires. Les colonnes de la matrice jacobienne sont ensuite déduits par des relations analytiques explicites. Dans notre étude, l'utilisation de mesures expérimentales rend difficile le calcul de la jacobienne par des méthodes analytiques ; la matrice jacobienne sera donc évaluée numériquement par différences finies.

3.1.2 Condensation

Une étape supplémentaire permettant de réduire le nombre d'inconnues des équations non linéaires à résoudre consiste à exprimer les coefficients de Fourier des degrés de liberté sur lesquels aucune non linéarité n'est appliquée (appelés degrés de liberté linéaires) en fonction des coefficients de Fourier des degrés de liberté restants (appelés degrés de liberté non linéaires).

Pour cela, une réorganisation des degrés de liberté entre les p degrés de liberté linéaires et les q degrés de liberté non linéaires en utilisant une matrice booléenne de passage $\mathbf{P}$ est proposée :

$$X = \mathbf{P} \begin{bmatrix} X_p \\ X_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_p & \mathbf{P}_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_p \\ X_q \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

où $\mathbf{P}_p$ est une matrice $n \times p$ contenant les p premières colonnes de $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}_q$ contenant les q dernières colonnes de $\mathbf{P}$.

Cette réorganisation modifie alors les matrices du système de la façon suivante :

$$\tilde{\mathbf{M}} = {}^T\mathbf{P}\mathbf{M}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} {}^T\mathbf{P}_p\mathbf{M}\mathbf{P}_p & {}^T\mathbf{P}_p\mathbf{M}\mathbf{P}_q \\ {}^T\mathbf{P}_q\mathbf{M}\mathbf{P}_p & {}^T\mathbf{P}_q\mathbf{M}\mathbf{P}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}}_{pp} & \tilde{\mathbf{M}}_{pq} \\ \tilde{\mathbf{M}}_{qp} & \tilde{\mathbf{M}}_{qq} \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

En utilisant la même décomposition pour les coefficients de Fourier, nous notons $Z_p = [B_{0p}\ A_{1p}\ B_{1p} \dots A_{mp}\ B_{mp}]$ (de même pour Z_q) et nous pouvons écrire :

$$Z = \left[\ \mathbf{I}_{2m+1} \otimes \mathbf{P}_p \mid \mathbf{I}_{2m+1} \otimes \mathbf{P}_q\ \right] \begin{bmatrix} Z_p \\ Z_q \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

$\mathbf{P}$ étant une matrice booléenne, celle-ci est orthogonale et par conséquent $\left[\ \mathbf{I}_{2m+1} \otimes \mathbf{P}_p \mid \mathbf{I}_{2m+1} \otimes \mathbf{P}_p\ \right]$ l'est aussi. L'équation 3.17 s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} {}^T(\mathbf{I}_{2m+1} \otimes \mathbf{P}_p) \\ {}^T(\mathbf{I}_{2m+1} \otimes \mathbf{P}_q) \end{bmatrix} \mathbf{A} \left[\ \mathbf{I}_{2m+1} \otimes \mathbf{P}_p \mid \mathbf{I}_{2m+1} \otimes \mathbf{P}_q\ \right] \begin{bmatrix} Z_p \\ Z_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_p \\ b_q \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

Or, pour $(k, l) \in \{p, q\}$:

$$\begin{aligned} {}^T(\mathbf{I}_{2m+1} \otimes \mathbf{P}_k)\,\mathbf{A}\,(\mathbf{I}_{2m+1} \otimes \mathbf{P}_l) &= \left(\mathbf{I}_{2m+1} \otimes {}^T\mathbf{P}_k\right)\left(\nabla_1^2 \otimes \mathbf{M} + \nabla_1 \otimes \mathbf{D} + \mathbf{I}_{2m+1} \otimes \mathbf{K}\right)(\mathbf{I}_{2m+1} \otimes \mathbf{P}_l) \\ \tilde{\mathbf{A}}_{kl} &= \nabla_1^2 \otimes {}^T\mathbf{P}_k\mathbf{M}\mathbf{P}_l + \nabla_1 \otimes {}^T\mathbf{P}_k\mathbf{D}\mathbf{P}_l + \mathbf{I}_{2m+1} \otimes {}^T\mathbf{P}_k\mathbf{K}\mathbf{P}_l \\ \tilde{\mathbf{A}}_{kl} &= \nabla_1^2 \otimes \tilde{\mathbf{M}}_{kl} + \nabla_1 \otimes \tilde{\mathbf{D}}_{kl} + \mathbf{I}_{2m+1} \otimes \tilde{\mathbf{K}}_{kl} \end{aligned} \tag{3.26}$$

Nous obtenons :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{pp} & \tilde{\mathbf{A}}_{pq} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{qp} & \tilde{\mathbf{A}}_{qq} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}}} \begin{bmatrix} Z_p \\ Z_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_p \\ b_q \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

Le terme Z_p peut être éliminé et le système revient à déterminer les zéros d'une fonction H_q : $\mathbb{R}^{(2m+1)\times q} \longrightarrow \mathbb{R}^{(2*m+1)\times q}$:

$$H_q(Z_q) = \left(\tilde{\mathbf{A}}_{qq} - \tilde{\mathbf{A}}_{qp}\tilde{\mathbf{A}}_{pp}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}_{pq}\right) Z_q - \left(b_q - \tilde{\mathbf{A}}_{qp}\tilde{\mathbf{A}}_{pp}^{-1} b_p\right) \tag{3.28}$$

En l'absence de forces appliquées sur les p degrés de liberté linéaires, $b_p = 0$ et :

$$H_q(Z_q) = \bar{\mathbf{A}}_{qq}(\Omega) Z_q - b_q(Z_q, \Omega) \tag{3.29}$$

où $\bar{\mathbf{A}}_{qq}(\Omega) = \tilde{\mathbf{A}}_{qq} - \tilde{\mathbf{A}}_{qp}\tilde{\mathbf{A}}_{pp}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}_{pq}$ représente la condensation de la matrice $\tilde{A}$ sur l'interface des q degrés de liberté non linéaires.

Enfin, les p degrés de liberté linéaires peuvent être ensuite obtenus via la relation :

$$Z_p = \tilde{\mathbf{A}}_{pp}^{-1}\left(b_p - \tilde{\mathbf{A}}_{pq} Z_q\right) \tag{3.30}$$

3.2 Méthodologie de prise en compte de l'effet Payne

Dans cette partie, nous présentons une méthodologie numérique de prise en compte de l'effet Payne dans les matériaux viscoélastiques. Cette procédure s'applique au calcul de réponses vibratoires stationnaires de systèmes mécaniques intégrant des éléments élastomères non linéaires présentant un effet Payne prononcé. Par ailleurs, l'étude se place dans l'optique de pouvoir appliquer la méthode de balance harmonique sur des cas industriels provenant directement de logiciels commerciaux et ne nécessitant que très peu de modifications afin de prendre en compte les non linéarités du système. La modélisation proposée conservera le maillage par éléments volumiques des parties en élastomère.

La résolution du système non linéaire est réalisée par l'intermédiaire de l'application d'une méthode de balance harmonique et d'un solveur de type Newton-Raphson. De plus, la formulation est limitée aux petites déformations et pour des pièces élastomères non préchargées.

La démarche, pour la prise en compte des efforts non linéaires générés par les éléments élastomères, se base sur l'affectation de propriétés dynamiques (module de stockage et de perte) adaptées à l'état de déformation local de chaque zone de l'élastomère. Elle est inspirée des travaux de Gil-Negrete et al. [63] qui avait proposé de prédire la raideur dynamique d'un plot élastomère soumis à une vibration d'amplitude connue. Les propriétés à affecter à chaque zone étaient celles correspondant l'état de déformation observé lors d'un essai quasi-statique effectué pour la même amplitude que celle qui est utilisée dynamiquement. Les propriétés dynamiques (module de cisaillement dynamique) provenaient directement d'essais de caractérisation du matériau à l'amplitude donnée. Rabkin M. [123] proposa ensuite de réaliser un calcul dynamique fréquentiel sur un modèle élastomère préchargé et calcula de façon itérative sous le logiciel Marc la réponse de la structure.

La méthode présentée ici se base sur une approche similaire et évalue, à chaque itération du solveur, la densité d'énergie de déformation dans chaque élément et pour un champ de déplacement correspondant à l'itération précédente. Une déformation équivalente élémentaire γ_{eq}^{e} est ensuite déduite (via une équivalence énergétique) de telle sorte que la densité d'énergie de l'élément considéré soit égale à celle qui serait obtenue lors d'un essai virtuel de caractérisation sur une éprouvette soumise à une amplitude dynamique de γ_{eq}^{e}. Le type d'essai virtuel (compression, cisaillement,...) dépend évidemment de l'essai de caractérisation du matériau. Cette équivalence énergétique permet d'associer des propriétés dynamiques d'un élément matériel soumis à un état de déformation multi-axial à partir de données expérimentales obtenues sur une éprouvette soumis à un état de déformation uniaxial. Le module de stockage et de perte est alors déduit pour chaque élément à partir des valeurs expérimentales tabulées en fonction de la fréquence et de l'amplitude de déformation. L'assemblage des matrices de raideur complexes est enfin réalisé et les efforts non linéaires sont calculés.

Cette démarche présente l'avantage d'utiliser les données issues d'essais de caractérisation (cisaillement, traction-compression) réalisés sur éprouvettes. L'utilisation de valeurs expérimentales tabulaires dans la méthodologie proposée permet en effet de s'affranchir de l'étape d'identification de paramètres

pour l'élaboration de modèles simplifiés de comportement viscoélastique.

Les paragraphes suivants présentent en détail les différentes étapes de la méthodologie, de la formulation du problème en utilisant la méthode de balance harmonique aux différents calculs d'énergie de déformation et de déformation équivalente. La procédure, interfacée avec MSC.Nastran, voit sa programmation intimement liée à la formulation logicielle préexistante.

3.2.1 Formulation au premier harmonique

Considérons un système mécanique comportant des éléments élastomères non linéaires, c'est-à-dire présentant un effet Payne significatif. Ce système est représenté par un modèle éléments finis en utilisant les mêmes notations qu'au paragraphe précédent 3.1.

Les pièces en élastomère sont modélisées par un ensemble V d'éléments volumiques. v degrés de liberté sont liés aux éléments élastomères. La masse de ces éléments est intégrée dans la matrice de masse globale du système. Seuls les efforts générés par la raideur dynamique complexe $\mathbf{K}_v^{\mathbb{C}} = \mathbf{K}_v^{'} + i\mathbf{K}_v^{''}$ des éléments élastomères sont considérés comme des efforts externes non linéaires $F_{NL}(X, \dot{X}, \Omega, t)$ dans la formulation HBM. La dépendance en amplitude du module dynamique du matériau se traduit par des efforts non linéaires fonctions du champ de déplacement X. Ils sont également fonctions de la pulsation d'excitation du système afin de prendre en compte le phénomène de rigidification en fréquence.

Par application de la méthode de balance harmonique précédemment détaillée, le problème se ramène à déterminer les zéros d'une fonction $H : \mathbb{R}^{(2m+1)\times n} \rightarrow \mathbb{R}^{(2m+1)\times n}$:

$$H(Z) = \mathbf{A}(\Omega)Z - b(Z, \Omega) = \mathbf{A}(\Omega)Z - b_L(\Omega) - b_{NL}(Z_v, \Omega) \tag{3.31}$$

b correspond évidemment aux coefficients de Fourier des efforts $F(X, \dot{X}, \Omega, t)$ qui sont décomposés en deux parties : la première b_L provenant des efforts linéaires d'excitation F_L et la seconde b_{NL} provenant des efforts non linéaires F_{NL}. Il est à noter que b_{NL} dépend uniquement des coefficients de Fourier Z_v des v degrés de liberté liés aux éléments élastomères.

La formulation précédente considère un nombre quelconque d'harmoniques dans le développement en série de Fourier des différentes grandeurs. Dans notre cas, un seul harmonique a été retenu. En effet, pour des matériaux viscoélastiques présentant un effet Payne significatif, il a été observé que les harmoniques d'ordre supérieur restent faibles devant l'ordre 1 sous certaines limites d'amplitude de déformation. Le lecteur pourra se référer à Roland [129] pour plus de détails. Par conséquent, en notant A_1 et B_1 les coefficients de Fourier de l'harmonique 1 des déplacements, le problème se ramène à un système de $2n \times 2n$ équations :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} - \Omega^2\mathbf{M} & -\Omega\mathbf{D} \\ \Omega\mathbf{D} & \mathbf{K} - \Omega^2\mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} = b_L(\Omega) + b_{NL}(Z_v, \Omega) \tag{3.32}$$

avec $\mathbf{M}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{K}$, respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de raideur des parties linéaires

du modèle considéré. La matrice de masse **M** intègre également les matrices de masse des éléments élastomères du système considéré.

3.2.2 Evaluation des efforts non linéaires

Nous explicitons dans ce paragraphe le calcul des coefficients de Fourier b_{NL} des efforts non linéaires. Tout d'abord réorganisons les degrés de liberté de façon à faire apparaître les v degrés de liberté liés aux éléments élastomères et les nv degrés de liberté restants en utilisant la matrice booléenne **P** :

$$X = \mathbf{P} \begin{bmatrix} X_{nv} \\ X_v \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

Le comportement du matériau étant dépendant de la fréquence d'excitation $f = 2\pi\Omega$ et de l'amplitude de la déformation subie, la matrice de raideur complexe est fonction de X_v uniquement et peut s'écrire :

$$\mathbf{K}_v^{\mathbb{C}}(X_v, f) = \mathbf{K}_v^{'}(X_v, f) + i\mathbf{K}_v^{''}(X_v, f) \tag{3.34}$$

Par conséquent, en utilisant l'équivalence entre amortissement visqueux et amortissement hystérétique à la pulsation Ω, les efforts non linéaires peuvent s'écrire :

$$F_{NL}(X, \dot{X}, \Omega, t) = -\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_v^{'}(X_v, f) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{nv} \\ X_v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{K}_v^{''}}{\Omega}(X_v, f) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_{nv} \\ \dot{X}_v \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

En utilisant les notations du paragraphe 3.1.1, $X(t) = \mathbf{T}(t)Z$, où Z représente les coefficients de Fourier des déplacements. Le vecteur b_{NL} est alors calculé avec la relation suivante :

$$b_{NL} = \frac{1}{T}\int_0^T {}^T\mathbf{T}(t)F_{NL}(X, \dot{X}, \Omega, t)dt \tag{3.36}$$

Or la matrice de raideur complexe ne dépend pas explicitement du temps mais uniquement de l'amplitude de déformation pour une pulsation donnée. Par conséquent le calcul de b_{NL} peut s'exprimer simplement et permet de s'affranchir d'une évaluation temporelle des efforts non linéaires, opération lourde numériquement :

$$\begin{aligned} b_{NL} &= -\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_v^{'}(Z_v, f) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_v^{'}(Z_v, f) \end{bmatrix} Z - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{K}_v^{''}}{\Omega}(Z_v, f) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\mathbf{K}_v^{''}}{\Omega}(Z_v, f) \end{bmatrix} \nabla Z \\ \begin{bmatrix} S_{NLnv} \\ S_{NLv} \\ C_{NLnv} \\ C_{NLv} \end{bmatrix} &= -\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_v^{'}(Z_v, f) & \mathbf{0} & -\mathbf{K}_v^{''}(Z_v, f) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_v^{''}(Z_v, f) & \mathbf{0} & \mathbf{K}_v^{'}(Z_v, f) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1nv} \\ A_{1v} \\ B_{1nv} \\ B_{1v} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.37}$$

où $Z_v = [A_{1v}B_{1v}]^T$ représente les coefficients de Fourier des v degrés de liberté liés aux élastomères, $Z_{nv} = [A_{1nv}B_{1nv}]^T$ ceux des nv degrés de liberté restants, et $\nabla = \Omega \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ est l'opérateur de

dérivation introduit au paragraphe 3.1.1.

En raison de la dépendance en amplitude du matériau, un solveur itératif est utilisé pour la résolution. A partir du champ de déplacement ${}^{(i)}Z$ à l'itération i, la matrice de raideur complexe des éléments viscoélastiques ${}^{(i)}\mathbf{K}_v^{\mathbb{C}}({}^{(i)}Z_v, f)$ est évaluée afin d'en déduire la valeur des efforts non linéaires ${}^{(i)}b_{NL}$.

Le champ de déplacement n'étant pas nécessairement homogène au sein du matériau, les propriétés du matériau changent en fonction de la zone considérée de l'élastomère. La procédure présentée dans cette section prend en compte ce phénomène en affectant une valeur du module dynamique différente pour chaque élément élastomère. Pour un élément e de l'ensemble V des éléments élastomères, une matrice élémentaire ${}^{(i)}\mathbf{K}_v^{\mathbb{C},e}({}^{(i)}Z_v^e, f)$ est calculée à partir du champ de déplacement élémentaire ${}^{(i)}Z_v^e$ de cet élément. Toutes ces matrices élémentaires sont ensuite assemblées pour déduire la matrice de raideur dynamique ${}^{(i)}\mathbf{K}_v^{\mathbb{C}}({}^{(i)}Z_v, f)$:

$$ {}^{(i)}\mathbf{K}_v^{\mathbb{C}}({}^{(i)}Z_v, f) = \sum_{e \in V} {}^{(i)}\mathbf{K}_v^{\mathbb{C},e}({}^{(i)}Z_v^e, f) \tag{3.38} $$

Dans les paragraphes suivants, nous nous attachons à détailler le calcul d'une matrice élémentaire ${}^{(i)}\mathbf{K}_v^{\mathbb{C},e}({}^{(i)}Z_v^e, f)$ à partir d'un champ de déplacement initial ${}^{(i)}Z_v^e$. Enfin l'indice i sera omis pour une simplification des écritures.

3.2.3 Densité d'énergie de déformation

Pour chaque élément viscoélastique, une déformation équivalente γ_{eq}^e est calculée à partir du champ de déplacement élémentaire Z_v^e. Cette déformation permet d'associer les modules de stockage G'^e et de perte G''^e provenant d'un essai de caractérisation uniaxial à un état de déformation combinant plusieurs sollicitations dans l'élément.

Afin de calculer cette déformation, une équivalence énergétique basée sur la densité d'énergie de déformation de l'élément est réalisée. L'énergie de déformation dans un élément élastique ayant pour module de cisaillement le module statique "de référence" G_{ref} et ayant pour champ de déplacement

Z_v^e est tout d'abord calculée. Son expression s'écrit :

$$\begin{aligned}
E^e(t) &= \frac{1}{2}{}^T X_v^e(t)\mathbf{K}_{ref}X_v^e(t) \\
E^e(t) &= \frac{1}{2}{}^T Z_v^{eT}\mathbf{T}(t)\mathbf{T}(t)\mathbf{N}_{\mathbf{K}_{ref}}Z_v^e \\
E^e(t) &= \frac{1}{2}{}^T Z_v^e \begin{bmatrix} \sin^2(\Omega t)\mathbf{I} & \sin(\Omega t)\cos(\Omega t)\mathbf{I} \\ \sin(\Omega t)\cos(\Omega t)\mathbf{I} & \cos^2(\Omega t)\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{N}_{\mathbf{K}_{ref}}Z_v^e \\
E^e(t) &= \frac{1}{2}{}^T Z_v^e \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(1-\sin(2\Omega t)\right)\mathbf{I} & \frac{1}{2}\left(\sin(2\Omega t)\right)\mathbf{I} \\ \frac{1}{2}\sin(\Omega t)\mathbf{I} & \frac{1}{2}\left(1+\cos(2\Omega t)\right)\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{N}_{\mathbf{K}_{ref}}Z_v^e \\
E^e(t) &= \frac{1}{4}{}^T Z_v^e\mathbf{N}_{\mathbf{K}_{ref}}Z_v^e + \\
&\quad \frac{1}{4}\left[\left({}^T B_{1v}^e\mathbf{K}_{ref}B_{1v}^e - {}^T A_{1v}^e\mathbf{K}_{ref}A_{1v}^e\right)\cos(2\Omega t) + \left(2^T A_{1v}^e\mathbf{K}_{ref}B_{1v}^e\right)\sin(2\Omega t)\right] \qquad (3.39)
\end{aligned}$$

où $\mathbf{K}_{ref}$ représente la matrice de raideur élastique de l'élément calculé avec G_{ref}, $\mathbf{N}_{\mathbf{K}_{ref}} = diag(\mathbf{K}_{ref},$-$\mathbf{K}_{ref})$ suivant la notation introduite au paragraphe 3.1.1, et $[A_{1v}^e, B_{1v}^e]$ sont les coefficients de Fourier des degrés de liberté de l'élément.

Cette énergie est constituée d'un terme constant $E_0^e = \frac{1}{4}{}^T Z_v^e\mathbf{N}_{\mathbf{K}_{ref}}Z_v^e$, qui représente la valeur moyenne de l'énergie sur une période, et d'une terme oscillant à la pulsation 2Ω. L'amplitude de ce dernier terme est :

$$E_a^e = \frac{1}{4}\sqrt{\left({}^T B_{1v}^e\mathbf{K}_{ref}B_{1v}^e - {}^T A_{1v}^e\mathbf{K}_{ref}A_{1v}^e\right)^2 + \left(2^T A_{1v}^e\mathbf{K}_{ref}B_{1v}^e\right)^2} \qquad (3.40)$$

Ceci permet de déduire la valeur pic sur une période de cette énergie et vaut par conséquent $E_{peak}^e = E_0^e + E_a^e$. Afin de déterminer la densité d'énergie ρ^e, l'énergie est divisée par le volume de l'élément :

$$\rho^e = \frac{E_{peak}^e}{Vol^e} \qquad (3.41)$$

En pratique, MSC.Nastran fournit la possibilité d'obtenir l'énergie de déformation ainsi que sa densité pour chaque élément dans le cas d'une analyse fréquentielle. Par cet intermédiaire, chaque densité d'énergie des éléments élastomères est récupérée après l'introduction d'un champ de déplacement complexe correspondant au champ de déplacement Z_v obtenu à l'itération considérée.

3.2.4 Mesure de déformation équivalente

A partir de la densité d'énergie de déformation pour le champ de déplacement Z_v, il est possible de déterminer une déformation équivalente γ_{eq}^e pour chaque élément. Cette déformation équivalente est reliée à l'amplitude dynamique des essais de caractérisation du matériau qui ont mis en évidence l'effet Payne de ce dernier, ce qui va ainsi permettre d'affecter les valeurs des modules de stockage et de perte issues des données d'essais. Cette notion de déformation équivalente a été introduite par Gil-Negrete N. et al. [63]. Dans notre exposé, on se base sur une récupération lors d'un calcul

dynamique de l'énergie de déformation d'un élément pour calculer la déformation équivalente alors que Gil-Negrete N. s'appuyait sur les valeurs principales des déformations à chaque point d'intégration.

Une équivalence énergétique est donc réalisée de façon à égaliser la densité d'énergie obtenue précédemment avec celle qui est obtenue dans une éprouvette lors d'un essai de caractérisation à l'amplitude dynamique γ_{eq}^{e}. Les conditions de l'essai de caractérisation (traction-compression, cisaillement) correspondent évidemment au type de test réalisé pour obtenir les données expérimentales dont nous disposons.

Evaluons donc la densité d'énergie de déformation dans une éprouvette en fonction des déformations principales. Tout d'abord, pour un élément matériel et pour un matériau purement élastique, rappelons l'expression des contraintes principales en fonction des déformations principales :

$$\begin{aligned}
\sigma_{p1} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\,\epsilon_{p1}+\nu\,(\epsilon_{p2}+\epsilon_{p3})\right]\\
\sigma_{p2} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\,\epsilon_{p2}+\nu\,(\epsilon_{p3}+\epsilon_{p1})\right]\\
\sigma_{p3} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\,\epsilon_{p3}+\nu\,(\epsilon_{p1}+\epsilon_{p2})\right]
\end{aligned} \tag{3.42}$$

où E et ν sont le module élastique et le coefficient de Poisson.

L'énergie de déformation totale s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
\rho_{dt} &= \frac{1}{2}\sigma:\epsilon\\
\rho_{dt} &= \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\left(\epsilon_{p1}^2+\epsilon_{p2}^2+\epsilon_{p3}^2\right)+2\nu\left(\epsilon_{p1}\epsilon_{p2}+\epsilon_{p2}\epsilon_{p3}+\epsilon_{p3}\epsilon_{p1}\right)\right]
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Or l'énergie de déformation se compose d'une partie sphérique et déviatorique. La partie sphérique s'écrit :

$$\begin{aligned}
\rho_{ds} &= \frac{1}{2}pe^{v}\\
\rho_{ds} &= \frac{E}{6(1-2\nu)}\left(\epsilon_{p1}+\epsilon_{p2}+\epsilon_{p3}\right)^2
\end{aligned} \tag{3.44}$$

où $p=\frac{1}{3}\left(\sigma_{p1}+\sigma_{p2}+\sigma_{p3}\right)$ est la pression moyenne hydrostatique et $e^{v}=\epsilon_{p1}+\epsilon_{p2}+\epsilon_{p3}$ est la déformation volumétrique.

La densité d'énergie de déformation déviatorique est donc :

$$\rho_{dd} = \rho_{dt}-\rho_{ds} \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{dd} &= \frac{E}{6(1+\nu)}\left[\left(\epsilon_{p1}-\epsilon_{p2}\right)^2+\left(\epsilon_{p2}-\epsilon_{p3}\right)^2+\left(\epsilon_{p3}-\epsilon_{p1}\right)^2\right]\\
\rho_{dd} &= \frac{G}{3}\left[\left(\epsilon_{p1}-\epsilon_{p2}\right)^2+\left(\epsilon_{p2}-\epsilon_{p3}\right)^2+\left(\epsilon_{p3}-\epsilon_{p1}\right)^2\right]
\end{aligned} \tag{3.46}$$

A partir de cette expression, il est possible de réaliser l'équivalence $\rho_{dd} = \rho^e$ afin de déterminer la déformation équivalente. La formule obtenue dépend néanmoins du type d'essai de caractérisation réalisée. Nous détaillons ici les deux cas principalement rencontrés de traction/compression et de cisaillement simple.

3.2.4.1 Compression

Considérons une éprouvette cylindrique compressée avec une amplitude de déformation γ. Le matériau considéré a, comme dans le cas précédent, un module de cisaillement G_{ref} et est considéré quasi-incompressible. Les déformations principales peuvent alors s'exprimer simplement : $\epsilon_{p1} = \gamma$ et $\epsilon_{p2,3} = -\frac{\gamma}{2}$. Dans ce cas, la densité d'énergie devient :

$$\begin{aligned} \rho_{ddTC} &= \frac{G_{ref}}{3}\left[\left(\frac{3}{2}\gamma\right)^2 + 0 + \left(\frac{3}{2}\gamma\right)^2\right] \\ \rho_{ddTC} &= \frac{3G_{ref}}{2}\gamma^2 \end{aligned} \tag{3.47}$$

L'équivalence énergétique qui permet d'obtenir la déformation équivalente s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \rho^e_{ddTC} &= \rho^e \\ \frac{3G_{ref}}{2}\gamma^{e\ 2}_{eq} &= \rho^e \\ \gamma^e_{eq} &= \sqrt{\frac{2\rho^e}{3G_{ref}}} \end{aligned} \tag{3.48}$$

3.2.4.2 Cisaillement

Dans le cas du cisaillement, les déformations principales s'écrivent : $\epsilon_{p1} = \frac{\gamma}{2}$, $\epsilon_{p2} = -\frac{\gamma}{2}$ et $\epsilon_{p3} = 0$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} \rho_{ddCis} &= \frac{G_{ref}}{3}\left[\gamma^2 + \frac{\gamma^2}{4} + \frac{\gamma^2}{4}\right] \\ \rho_{ddCis} &= \frac{G_{ref}}{2}\gamma^2 \end{aligned} \tag{3.49}$$

La déformation équivalente s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \rho^e_{ddCis} &= \rho^e \\ \frac{G_{ref}}{2}\gamma^{e\ 2}_{eq} &= \rho^e \\ \gamma^e_{eq} &= \sqrt{\frac{2\rho^e}{G_{ref}}} \end{aligned} \tag{3.50}$$

3.2.5 Assemblage

En utilisant les données tabulées provenant des essais de caractérisation, les modules de stockage $G'^e(\gamma^e_{eq}, f)$ et de perte $G''^e(\gamma^e_{eq}, f)$ sont déduits à partir de la déformation équivalente ainsi que de la fréquence d'excitation du système. Des interpolations quadratiques et cubiques sont utilisées afin d'approcher les valeurs des modules lorsque le point de fonctionnement ne correspond pas exactement aux données expérimentales. Cette étape est réalisée avec le logiciel MATLAB.

Ces données matériaux vont permettre de calculer les matrices complexes élémentaires $\mathbf{K}_v^{\mathbb{C},e}(\gamma^e_{eq}, f) = \mathbf{K}_v^{\mathbb{C},e}(Z^e_v, f)$ qui dépendent de γ^e_{eq} et par conséquent de Z^e_v.

La formulation utilisée est dérivée de la formulation proposée par MSC.Nastran pour la visco-élasticité linéaire pour les analyses fréquentielles. Nous en rappelons ici la formulation.

3.2.5.1 Formulation de la viscoélasticité linéaire dans MSC.Nastran

MSC.Nastran fournit la possibilité de représenter le comportement d'un matériau viscoélastique dans le cadre de la théorie de la viscoélasticité linéaire en petites déformations. Pour des analyses fréquentielles, le comportement est représenté par un module de cisaillement complexe :

$$G(f) = G'(f) + iG"(f) \tag{3.51}$$

où G' et $G"$ représentent respectivement les modules de stockage et de perte du matériau.

Lors d'une analyse fréquentielle (SOL108), MSC.Nastran formule une matrice de raideur complexe à partir du module de cisaillement complexe. L'équation de la dynamique à résoudre est formulée de la façon suivante :

$$\left(-\Omega^2\mathbf{M}_{dd} + i\Omega\mathbf{B}_{dd} + \mathbf{K}_{dd}\right) X_d = F_d \tag{3.52}$$

où $\mathbf{M}_{dd}$,$\mathbf{B}_{dd}$ et $\mathbf{K}_{dd}$ représentent respectivement les matrices de masse, d'amortissement visqueux et de raideur, et $\Omega = 2\pi f$.

La matrice de raideur $\mathbf{K}_{dd}$ comporte l'amortissement hystérétique et se formule de la façon suivante :

$$\mathbf{K}_{dd} = (1 + ig)\,\mathbf{K}^1_{dd} + k\mathbf{K}^4_{dd} \tag{3.53}$$

g représente l'amortissement structural global affecté au modèle EF considéré, $\mathbf{K}^1_{dd}$ la matrice de raideur des éléments structuraux calculés à partir des données matériau (sans amortissement) et $\mathbf{K}^4_{dd}$ la matrice d'amortissement structural obtenue en multipliant les matrices de raideur élémentaires par l'amortissement structural par élément g_{ref}. Si g_{ref} est le même pour tous les éléments, alors $\mathbf{K}^4_{dd} = g_{ref}\mathbf{K}^1_{dd}$.

Dans le cas d'un modèle intégrant uniquement des éléments à comportement viscoélastique, l'équation 3.53 est modifiée et utilise deux fonctions scalaires dépendantes de la fréquence :

$$\mathbf{K}_{dd}(f) = (1 + ig)\,\mathbf{K}^1_{dd} + (T_R(f) + iT_I(f))\,\mathbf{K}^4_{dd} \tag{3.54}$$

avec

$$T_R(f) = \frac{1}{g_{ref}} \left(\frac{G'(f)}{G_{ref}} - 1 \right) \tag{3.55}$$

et

$$T_I(f) = \frac{1}{g_{ref}} \left(\frac{G"(f)}{G_{ref}} - g \right) \tag{3.56}$$

Ainsi, dans le cas où l'amortissement structural par élément est identique pour tous les éléments, la matrice de raideur formulée est donc égale à :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{dd}(f) &= \left[(1 + g_{ref} T_R(f)) + i \left(g + g_{ref} T_I(f) \right) \right] \mathbf{K}^1_{dd} \\ \mathbf{K}_{dd}(f) &= \left(\frac{G'(f) + iG"(f)}{G_{ref}} \right) \mathbf{K}^1_{dd} \end{aligned} \tag{3.57}$$

La matrice $\mathbf{K}^1_{dd}$ est calculée à partir du module de cisaillement quasi statique G_{ref} et est par conséquent indépendante de Ω. La matrice de raideur complexe obtenue est donc une matrice réelle pondérée par une fonction complexe donnant le rapport entre le module dynamique et sa valeur statique.

Il est à noter que les deux fonctions T_R et T_I sont deux fonctions scalaires qui sont rentrées de façon tabulaire à partir des données expérimentales issues des essais de caractérisation du matériau considéré.

3.2.5.2 Assemblage avec prise en compte de l'effet Payne.

Pour pouvoir calculer la matrice de raideur de l'ensemble des éléments viscoélastiques, chacun ayant une déformation équivalente différente, le calcul se base sur une analogie avec l'équation 3.57 où la matrice de raideur élémentaire qui dépend à la fois de la fréquence f et de la déformation équivalente γ^e_{eq} est évaluée par la relation :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{\mathbb{C},e}_v(Z^e_v, f) &= \mathbf{K}^{\mathbb{C},e}_v(\gamma^e_{eq}, f) \\ \mathbf{K}^{\mathbb{C},e}_v(Z^e_v, f) &= \left(\frac{G'^e(\gamma^e_{eq}, f) + iG''^e(\gamma^e_{eq}, f)}{G_{ref}} \right) \mathbf{K}^e_{ref} \end{aligned} \tag{3.58}$$

Les valeurs de $G'^e(\gamma^e_{eq}, f)$ et $G"^e(\gamma^e_{eq}, f)$ sont calculées à chaque itération et pour chaque élément. L'amortissement structural élémentaire g_{ref} inséré vaut 1.

L'assemblage de la matrice de raideur complexe globale $\mathbf{K}^{\mathbb{C}}_v(Z_v, f)$ est finalement réalisé et les coefficients de Fourier des efforts non linéaires b_{NL} sont calculés selon l'équation 3.37.

En pratique, ces matrices ainsi que les coefficients de Fourier b_{NL} sont calculés avec MSC.Nastran par l'intermédiaire d'une procédure alter en DMAP. Cette procédure permet de traiter un modèle EF défini directement sous MSC.Nastran et gère la connectivité entre les éléments viscoélastiques lors de l'assemblage.

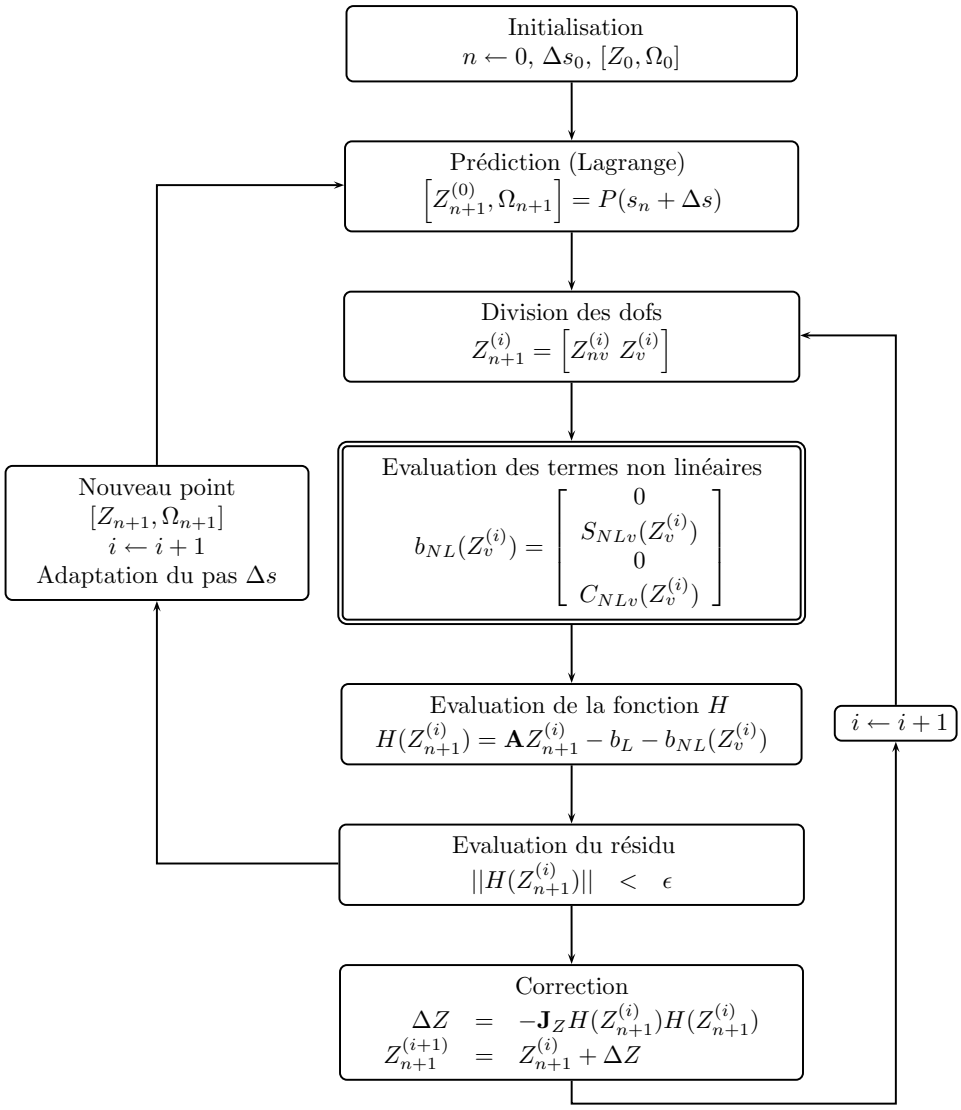


FIGURE 3.1 – Algorithme général de balance harmonique avec intégration de la procédure d'évaluation des termes non linéaires.

3.2.6 Démarche globale

L'algorithme complet du calcul qui est suivi est présenté en figure 3.1. Il présente les différentes étapes de la continuation à effectuer. La présentation est effectuée en considérant un paramétrage par abscisse curviligne, une prédiction par polynômes de Lagrange et une correction de type Newton-Raphson. L'algorithme intègre la méthodologie de prise en compte de l'effet Payne. Les étapes constituant la procédure de calcul des efforts non linéaires sont rassemblées en figure 3.2. Cette étape est à effectuer à chaque itération du solveur. Enfin, il faut noter que le calcul de la jacobienne du système utilise également cette procédure.

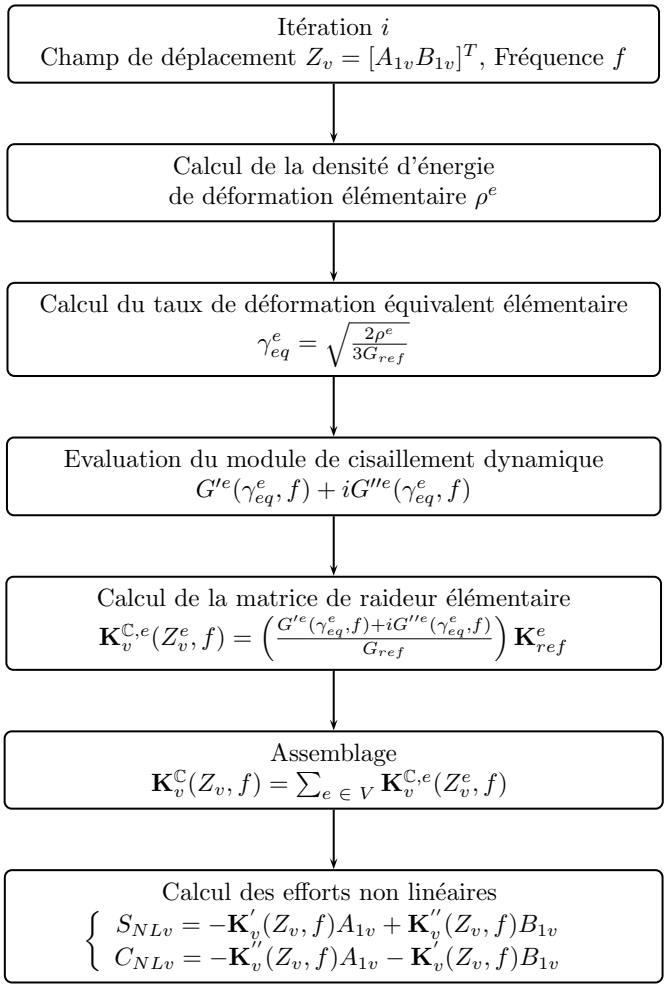


FIGURE 3.2 – Algorithme de calcul des efforts non linéaires à chaque itération i.

3.3 Application à un isolateur industriel

3.3.1 Présentation du dispositif

La méthodologie présentée précédemment est appliquée dans cette section à la simulation d'un isolateur vibratoire. Ce dispositif est utilisé dans l'industrie spatiale afin d'isoler au niveau vibratoire une instrumentation de satellite. En effet, de nombreux dispositifs de mesure ou de contrôle sont embarqués et nécessitent pour fonctionner d'être protégés durant toute la phase de lancement et isolés du reste de la structure en opération. C'est le cas des dispositifs gyroscopiques servant à positionner et orienter correctement le satellite ou encore des dispositifs d'observation qui demandent une grande

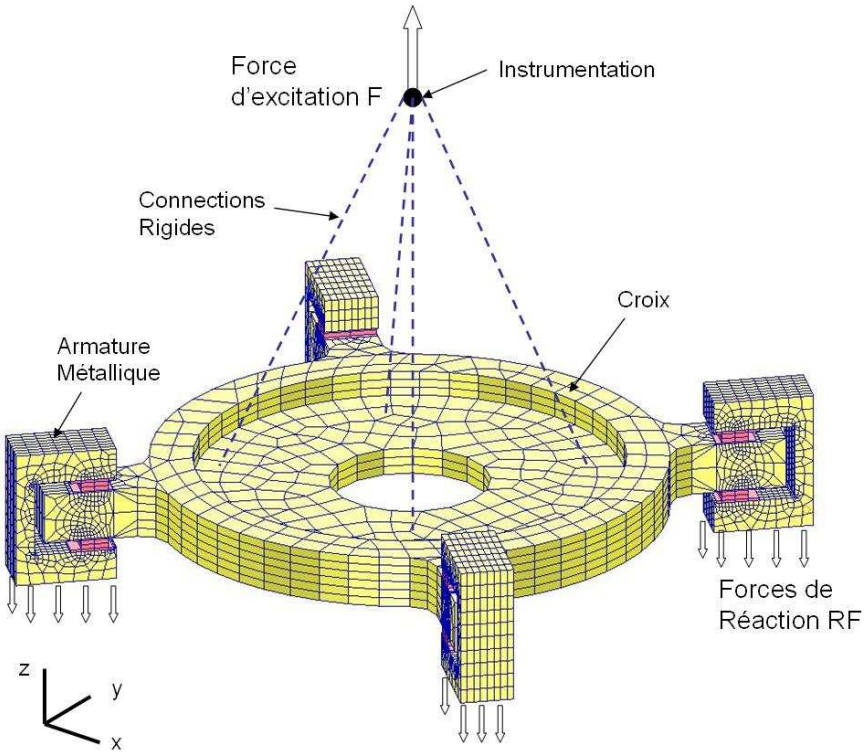


FIGURE 3.3 – Isolateur à supports élastomères : Vue d'ensemble.

stabilité afin de garantir leur précision.

L'isolateur considéré est donc constitué d'un support métallique supportant l'instrumentation à protéger relié à quatre plots isolants. Chaque plot se compose d'armatures métalliques en aluminium servant à fixer la structure à la base du satellite et de pièces souples en élastomères visant à filtrer par leurs propriétés amortissantes les vibrations et les efforts transmis à l'instrumentation embarquée. Le support métallique de l'instrumentation, de forme circulaire, sera désigné sous le nom de "croix".

La figure 3.3 présente une vue d'ensemble du dispositif. L'instrumentation à isoler n'est représentée sur la figure que par une masse concentrée pour raison de confidentialité. Son poids est approximativement de $16kg$. Le poids total de la structure incluant isolateur et instrumentation est d'environ $20kg$. La hauteur de l'ensemble est de $180mm$ et le diamètre de la croix est de $200mm$.

Les pièces élastomères sont présentées plus en détail en figure 3.4. Elles se présentent sous la forme de deux parties parallélépipédiques insérées entre la croix et les parties supérieures et inférieures des parties métalliques des plots isolants. Cette représentation est simplifiée car les deux parties parallélépipédiques font partie d'une même pièce qui épouse les contours des parties métalliques des

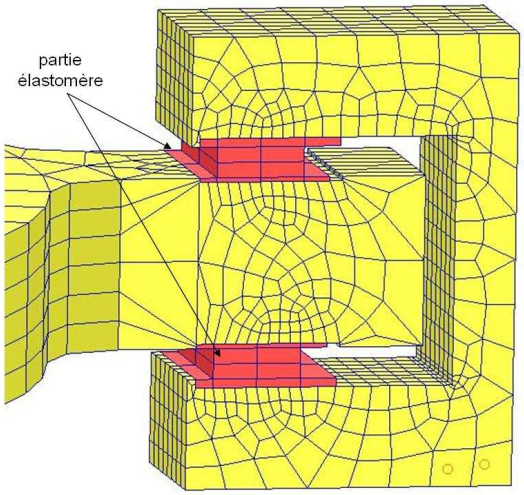


FIGURE 3.4 – Isolateur à supports élastomères : Zoom sur les éléments élastomère.

plots. De plus une butée en élastomère est également présente sur la partie latérale afin d'absorber les chocs. La modélisation pour le calcul ne conserve que les parallélépipèdes qui intégrent les fonctions d'amortissement et de filtrage. La dimension de chaque bloc est de $20 \times 10 \times 3.5mm$.

L'élastomère utilisé présente un effet Payne significatif. Ce matériau a été caractérisé par des essais dynamiques sur éprouvette cylindrique en traction/compression sans précharge et pour différentes amplitudes dynamiques de déformation, à savoir $\pm 0.1\%$, $\pm 0.25\%$, $\pm 1\%$, $\pm 2\%$ et $\pm 5\%$. Les bandes de fréquences pour lesquelles les essais ont été réalisés sont différentes en fonction de l'amplitude de l'excitation : $1 - 185Hz$ pour $\pm 5\%$, $1 - 395Hz$ pour $\pm 2\%$, et $1 - 500Hz$ pour $\pm 0.1\%$, $\pm 0.25\%$ et $\pm 1\%$. La bande de fréquence $1 - 185Hz$, présentant des données pour toutes les amplitudes de déformation testées, sera privilégiée pour les simulations. Afin d'illustrer la dépendance en amplitude et en fréquence du module de cisaillement dynamique du matériau, le module de stockage expérimental est tracé en fonction de l'amplitude dynamique en figure 3.5 et en fonction de la fréquence en figure 3.6. Pour raison de confidentialité, les valeurs en ordonnée ont été supprimées.

Afin de qualifier l'efficacité du dispositif, des essais expérimentaux ont été menés et visaient à déterminer la transmissibilité en effort du dispositif. Une force excitatrice F est appliquée sur l'instrumentation ou sur la croix. Les efforts de réaction RF obtenus à la base des plots isolants permettent ensuite de déterminer la transmissibilité associée $T = RF/F$. La force excitatrice appliquée est dépendante du cas dimensionnant étudié.

L'objectif de cette section est de réaliser une simulation du dispositif lorsque celui-ci est excité suivant son mode de pompage. La force excitatrice est alors appliquée sur l'instrumentation (ou sa

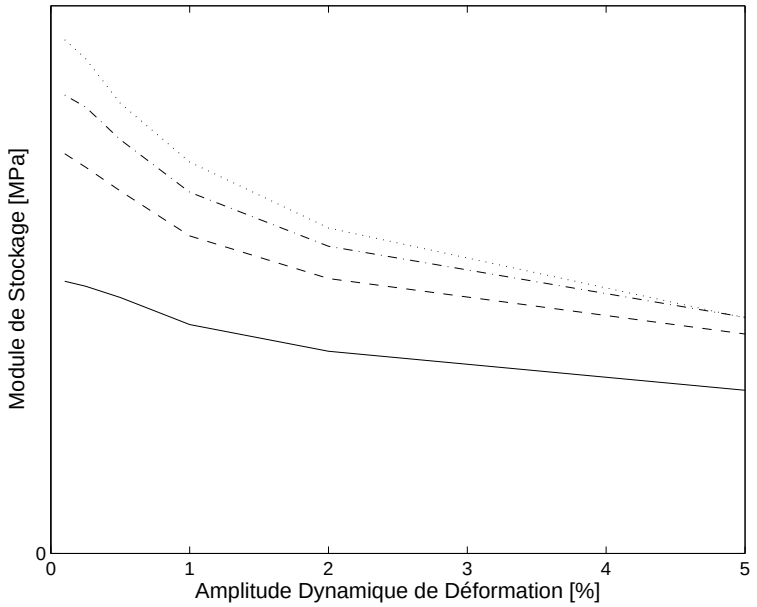


FIGURE 3.5 – Module de Stockage : Dépendance en amplitude ; – ($1Hz$) ; - - ($45Hz$) ; -.- ($115Hz$) ; ... ($185Hz$).

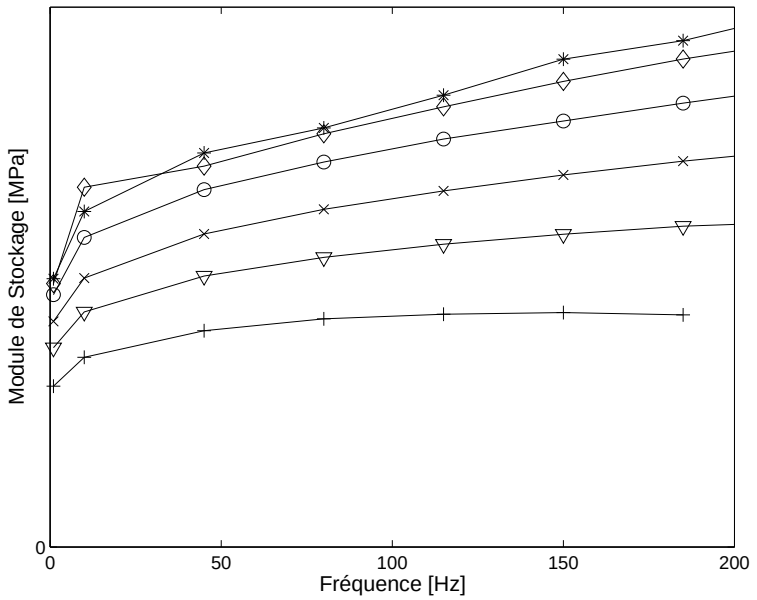


FIGURE 3.6 – Module de Stockage : Dépendance en fréquence ; * ($0.1\%Hz$) ; $\diamond$ (0.25%) ; o (0.5%) ; $\times$ (1%) ; ∇ (2%) ; + (5%).

structure simplifiée la représentant) dans la direction telle que détaillée en figure 3.3. Une telle force fait travailler en traction et compression les zones parallélépipédiques des élastomères. En raison de l'effet Payne prononcé du matériau, la raideur des élastomères varie en fonction de l'amplitude de vibration du dispositif. En effet, lors des résonances l'amplitude vibratoire a tendance à augmenter ce qui entraîne un assouplissement des plots. Cette variation rend par conséquent difficilement prédictible l'amplitude des vibrations et également la fréquence de résonance de l'ensemble, qui a tendance à diminuer lorsque les plots s'assouplissent. La méthodologie proposée, qui permet de prendre en compte la dépendance des propriétés dynamiques de l'élastomère, sera ainsi mise en oeuvre afin de déduire les amplitudes vibratoires, la fréquence de résonance du mode de pompage et l'amplitude de la transmissibilité en effort observé.

3.3.2 Modèle numérique

3.3.2.1 Géométrie et Maillage

Le modèle numérique utilisé est réalisé sous MSC.Nastran et est présenté en figure 3.3. Pour la simulation, aucune précharge statique ne sera prise en compte. L'instrumentation est modélisée uniquement par une masse concentrée au centre de gravité et par une matrice d'inertie. La masse concentrée est liée de façon rigide à la face supérieure de la croix par des éléments de liaison. La croix et les parties métalliques des plots isolants sont modélisés par éléments finis avec 10739 éléments parallélépipédiques CHEXA et tétrahédriques CTETRA.

La géométrie des pièces en élastomère a été modifiée afin de négliger les zones pour lesquelles la déformation est faible. Ces zones influencent peu le comportement dynamique de la structure pour le mode de pompage. Les modifications de géométrie qui ont été faites n'entraînent pas une modification sur les six premières fréquences propres de la structure de plus de 0.1%.

En outre, le maillage de ces parties élastomères a été simplifié afin de réduire le nombre de degrés de liberté "non linéaires" en lien avec l'élastomère tout en conservant une bonne représentativité du comportement dynamique des éléments élastomères. Le maillage simplifié comporte 192 éléments CHEXA. La modification sur les six premières fréquences propres de la structure n'excède pas 3%. En ce qui concerne les problèmes de verrouillage volumétrique du maillage [82], une comparaison a été menée sur le logiciel Abaqus pour une géométrie proche d'un parallélépipède élastomère d'un plot soumis à de la compression. Abaqus dispose effectivement d'éléments solides classiques du même type que l'élément CHEXA mais aussi d'éléments utilisant une formulation hybride. Aucun problème de verrouillage n'a été relevé. De plus, l'absence de verrouillage est également entraînée par le faible confinement des parties en élastomère.

3.3.2.2 Réduction des parties linéaires

Afin de réduire le nombre de degrés de liberté, la croix et les parties métalliques des plots sont condensées par condensation de Guyan [73] (voir paragraphe 2.2.2). Le premier mode libre de la croix

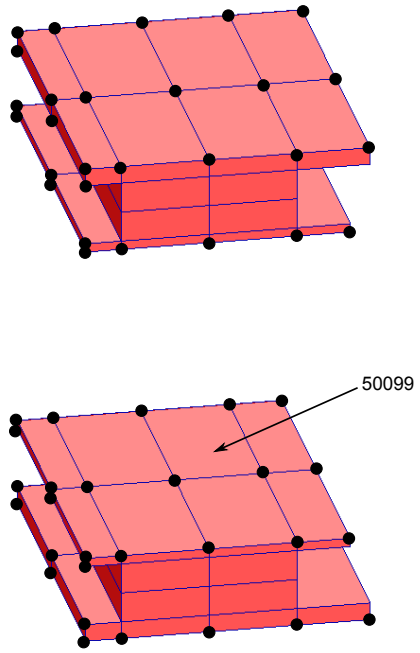


FIGURE 3.7 – Noeuds d'interface avec l'élastomère pour la condensation de Guyan.

a une fréquence supérieure à $1kHz$ et donc largement supérieure à la bande de fréquence d'étude de $10 - 120Hz$, autorisant à réaliser une condensation statique des pièces métalliques du modèle sur les interfaces avec le matériau élastomère.

En effet, pour chaque pièce métallique, des degrés "maîtres" X_m correspondant aux degrés de liberté des noeuds d'interface entre l'aluminium et l'élastomère sont choisis. La figure 3.7 montre les noeuds "maîtres" des interfaces considérées. L'ensemble des degrés de liberté de l'ensemble des noeuds d'interface est noté $X_{v,\Gamma}$. Les degrés de liberté "esclaves" restant sont notés X_s. Pour chaque pièce métallique i, une matrice de raideur condensée $\bar{\mathbf{K}}_i$ est ensuite calculée à partir de la formule 2.31 de la section 2.2.2 du chapitre précédent.

De plus, en ce qui concerne la réduction de la croix, des degrés de liberté "maîtres" sont considérés et correspondent aux degrés de liberté des éléments rigides reliant la masse concentrée et la croix. Après condensation, il est possible d'éliminer ces degrés de liberté additionnels et de se ramener à ne conserver uniquement que les six degrés de liberté de la masse concentrée X_{nv} et les degrés de liberté de l'interface aluminium-élastomère.

Finalement, les cinq matrices condensées $\bar{\mathbf{K}}_i$ sont assemblées en une seule matrice condensée $\bar{\mathbf{K}}$ sur tous les degrés de liberté d'interface $X_{v,\Gamma}$ et les six degrés de liberté X_{nv}. La même opération est effectuée de façon à obtenir les matrices de masse et d'amortissement condensées $\bar{\mathbf{M}}$, $\bar{\mathbf{D}}$.

Comme vu en équation 3.33, les degrés de liberté peuvent être divisés en deux ensembles selon leur

lien avec les éléments élastomères. Dans le cas particulier présenté ici, X_{nv} est constitué des six degrés de liberté de la masse concentrée et X_v est composé des degrés de liberté d'interface $X_{v,\Gamma}$ et des degrés de liberté internes à l'élastomère $X_{v,in}$. En notant $\mathbf{M}_v$ la matrice de masse des éléments élastomères, l'équation 3.32 peut s'écrire :

$$\mathbf{A}Z_v = \bar{\mathbf{A}}Z_v + \mathbf{A}_v Z_v \quad = \quad b_L(\Omega) + b_{NL}(Z_v, \Omega) \tag{3.59}$$

avec

$$\bar{\mathbf{A}}Z_v \quad = \quad \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}} - \Omega^2\bar{\mathbf{M}} & \mathbf{0} & -\Omega\bar{\mathbf{D}} & \mathbf{0} \\ & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \quad \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \quad \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\Omega\bar{\mathbf{D}} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{K}} - \Omega^2\bar{\mathbf{M}} & \mathbf{0} \\ & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \quad \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \quad \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1nv} \\ A_{1v,\Gamma} \\ A_{1v,in.} \\ B_{1nv} \\ B_{1v,\Gamma} \\ B_{1v,in.} \end{bmatrix} \tag{3.60}$$

$$\mathbf{A}_v Z_v \quad = \quad \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} & & \\ \mathbf{0} & & -\Omega^2\mathbf{M}_v & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} & & -\Omega^2\mathbf{M}_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1nv} \\ A_{1v,\Gamma} \\ A_{1v,in.} \\ B_{1nv} \\ B_{1v,\Gamma} \\ B_{1v,in.} \end{bmatrix} \tag{3.61}$$

et

$$b_{NL} \quad = \quad - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_v'(Z_v, \Omega) & \mathbf{0} & -\frac{\mathbf{K}_v''}{\Omega}(Z_v, \Omega) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{K}_v''}{\Omega}(Z_v, \Omega) & \mathbf{0} & \mathbf{K}_v'(Z_v, \Omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1nv} \\ A_{1v} = \begin{cases} A_{1v,\Gamma} \\ A_{1v,in.} \end{cases} \\ B_{1nv} \\ B_{1v} = \begin{cases} B_{1v,\Gamma} \\ B_{1v,in.} \end{cases} \end{bmatrix} \tag{3.62}$$

Après condensation, le modèle comporte ainsi 1662 degrés de liberté et 192 éléments CHEXA élastomère. 6 degrés de liberté permettent de représenter le mouvement de corps rigide de l'instrumentation.

La taille du système à résoudre peut parfois poser quelques difficultés en terme de temps de calcul, notamment lors de l'évaluation numérique de la jacobienne du système. Pour cette raison, la résolution a été effectuée en réutilisant pour les itérations supérieures à 1 la matrice jacobienne calculée à la première itération.

3.3.2.3 Excitation

Une excitation de $145N$ est appliquée au centre de gravité de l'instrumentation. L'amplitude de l'effort est calibré de telle sorte que la déformation équivalente maximale n'excède pas 4%. En effet, pour

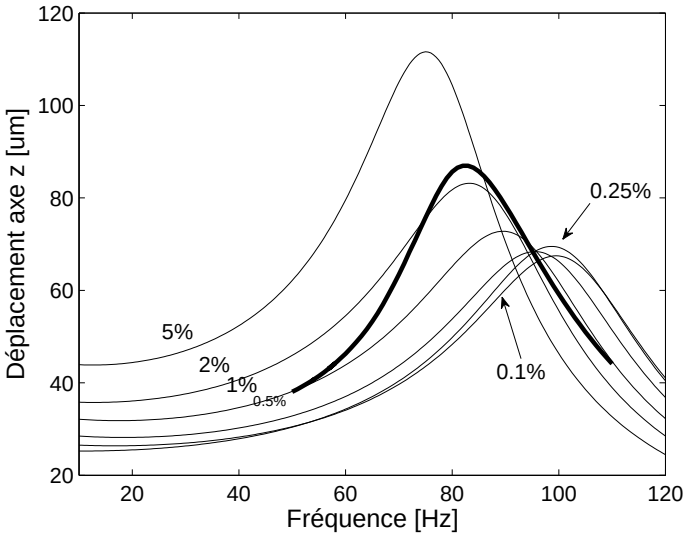


FIGURE 3.8 – Déplacement de la masse concentrée : ▬ procédure non linéaire avec dépendance en amplitude ; – propriétés homogènes de l'élastomère sans dépendance en amplitude.

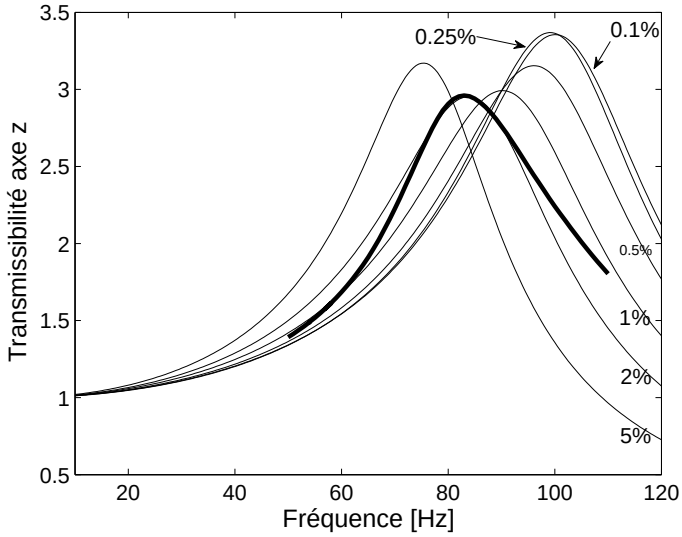


FIGURE 3.9 – Transmissibilité en force suivant l'axe z $\frac{Rz}{F}$: ▬ procédure non linéaire avec dépendance en amplitude ; – propriétés homogènes de l'élastomère sans dépendance en amplitude.

des propriétés homogènes de l'élastomère correspondant à une amplitude dynamique expérimentale de 5% (respectivement de 0.1%), une simulation linéaire avec MSC.Nastran montre que la déformation

équivalente maximale obtenue parmi les éléments élastomères (et pour toute la plage de fréquence considérée) est de 4% (respectivement 2.41%). Par conséquent la déformation équivalente maximale restera entre 2.41% et 4%.

3.3.3 Résultats

Les simulations sont réalisées sur la bande de fréquence $[10-120Hz]$ afin de représenter le mode de pompage et afin de bénéficier de l'ensemble des valeurs expérimentales disponibles. En parallèle de la méthodologie proposée qui est réalisée avec MSC.Nastran et avec MATLAB, des analyses fréquentielles linéaires sont réalisées avec MSC.Nastran et avec l'algorithme SOL108. Ces calculs ne prennent en compte que la dépendance en fréquence du matériau et avec des propriétés matériau homogènes correspondantes à une amplitude dynamique expérimentale fixée.

3.3.3.1 Déplacements

Les premiers résultats montrent que la fréquence de résonance du mode de pompoage peut varier sur une bande de fréquence de $[75-100]Hz$ pour des propriétés homogènes dans tous les éléments élastomères. En effet, la figure 3.8 décrit l'évolution du déplacement suivant l'axe z (axe d'application de l'effort d'excitation) de la masse concentrée pour six amplitudes dynamiques expérimentales différentes. Sans surprise, la fréquence de résonance diminue lorsque l'amplitude dynamique choisie pour les propriétés matériau augmente. Un maximum de $100Hz$ est obtenue pour des propriétés correspondant à une amplitude de 0.1% alors que le miminum observé de $75Hz$ correspond à une amplitude de 5%. Cette diminution est associée à l'assouplissement du matériau observé sur les relevés expérimentaux en figure 3.5. Le déplacement maximal observé augmente également avec des propriétés matériau correspondant à une plus grande amplitude dynamique. Ce déplacement augmente entre 67 et $111\mu m$.

En ce qui concerne le calcul réalisé avec la procédure non linéaire, la fréquence de résonance se situe à $83Hz$ montrant bien que le matériau élastomère fonctionne dans sa plage de fonctionnement non linéaire. Le déplacement maximal observé est de $87\mu m$ et est bien cohérent avec l'analyse des précédents calculs linéaires. Aux environs de la résonance, ce résultat est très proche du résultat que l'on peut obtenir avec des propriétés homogènes correspondant à une amplitude expérimentale de 2%. Cependant il faut noter que la forme de la courbe reste légèrement différente par rapport à l'ensemble des calculs linéaires réalisés.

3.3.3.2 Transmissibilité

Une analyse en figure 3.9 montre que la transmissibilité en effort suivant l'axe z atteint une valeur maximale d'environ 3 pour toutes les simulations. Les sept résultats varient en effet entre 2.96 et 3.37. Cette transmissibilité n'est pas constante et n'a pas, à la différence des résultats sur le déplacement, un comportement monotone avec l'augmentation de l'amplitude dynamique expérimentale considérée pour l'affectation des propriétés matériau. La transmissibilité atteint un minimum pour une déformation équivalente de 2%. La procédure non linéaire est également très proche de cette courbe à 2%. La forme

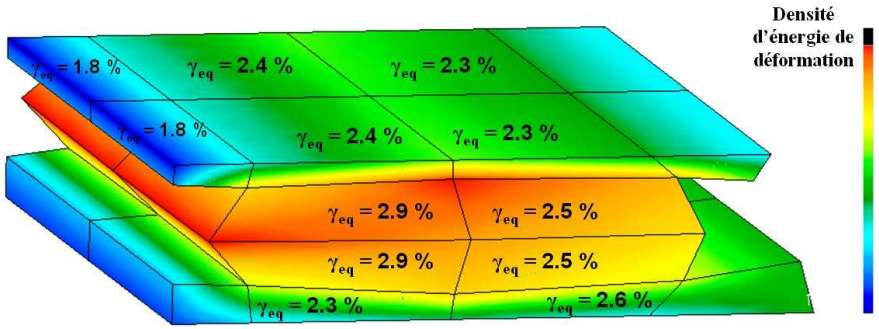


FIGURE 3.10 – Parallélépipède élastomère déformé et distribution des déformations équivalentes à $71Hz$.

de la courbe obtenue avec la méthodologie non linéaire est également différente de l'ensemble des calculs linéaires.

3.3.3.3 Mesure de déformation équivalente

La méthodologie mise en place permet de considérer un module dynamique du matériau qui n'est pas homogène dans l'ensemble des parallélépipèdes en élastomère. A cette fin, une déformation équivalente est calculée pour chaque élément. Cette possibilité offerte par la procédure est illustrée en figure 3.10 où la partie parallélépipédique inférieure d'un plot isolant est représenté en phase de compression à $71Hz$. La déformation équivalente de chaque élément montre clairement la non homogénéité du module dynamique au sein du matériau. La valeur maximale obtenue est de 3.21% pour l'élément 50099 et à la fréquence de $83Hz$ (résonance). Comme attendu, cette valeur se situe bien dans les bornes fixées de $2.41 - 4\%$. Le maillage des parties élastomères reste un maillage très simplifié mais qui permet de rendre compte de façon correcte du comportement dynamique d'un élastomère quasi incompressible et d'éviter tout problème de verrouillage numérique. Enfin, la déformation est distribuée spatialement mais aussi modifiée à chaque fréquence comme le montre la figure 3.11 qui montre l'évolution de la déformation équivalente pour l'élément 50099. La valeur maximale obtenue est évidemment observée pour la résonance à $83Hz$.

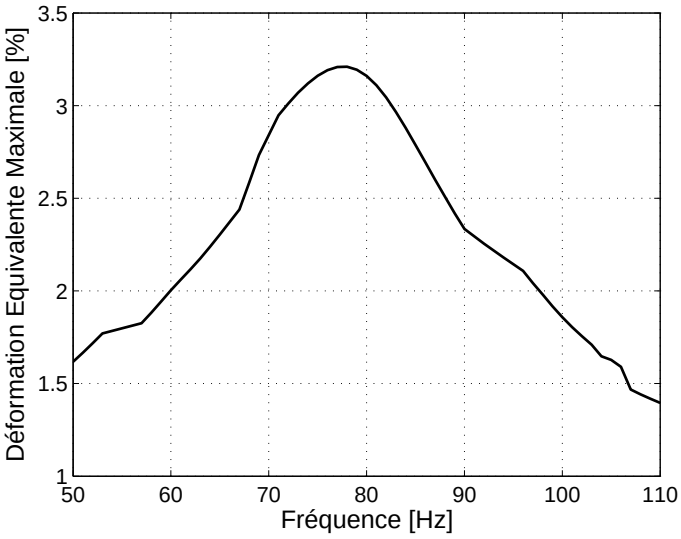


FIGURE 3.11 – Déformation équivalente : élément 50099 en contact avec la croix (voir figure 3.7).

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, l'applicabilité de la méthode de balance harmonique sur un cas industriel défini sous logiciel commercial a été montrée. La méthode a été appliquée avec un seul harmonique en étant interfacée avec MSC.Nastran et MATLAB. Le cas industriel proposé a consisté en la simulation dynamique d'un isolateur d'instrumentation satellite. Cet isolateur intègre des plots isolants en élastomère qui présentent une non linéarité matérielle. En effet, le module dynamique de l'élastomère dépend de la fréquence d'excitation et de l'amplitude de déformation de celui-ci. Ce phénomène est mieux connu sous le nom d'effet Payne.

Cette non linéarité a nécessité la programmation d'une procédure spécifique pour le traitement des efforts non linéaires. L'interface en élastomère a été modélisée de façon volumique et non pas avec un modèle simplifié uni ou bidimensionnel. Même si, sur le cas considéré, le maillage des parties élastomères a été simplifié, la méthodologie proposée laisse la possibilité dans l'avenir de conserver un maillage provenant directement d'un modèle éléments finis industriel préexistant (ayant servi à d'autres types d'analyse). En outre, cette modélisation tridimensionnelle permet de prendre en compte l'effet Payne au sein du matériau en affectant des propriétés dynamiques dans chaque région de l'élastomère en fonction de la déformation locale vue par chaque élément. En effet, cette procédure est basée sur le calcul d'une déformation équivalente pour chaque élément qui permet, par une équivalence énergétique, d'affecter des propriétés mécaniques provenant d'essais de caractérisation du matériau. Le développement d'un modèle spécifique ainsi que l'identification de paramètres ne sont ainsi plus requis. La matrice de raideur complexe non linéaire peut enfin être assemblée afin de déduire les efforts

non linéaires générés par la déformation des parties élastomères du modèle.

Enfin, la mise en place d'une telle procédure nécessite encore une programmation spécifique, notamment en ce qui concerne la modélisation des parties non linéaires du modèle. La non linéarité matérielle de l'effet Payne n'est pas intégrée dans les codes de calcul et a dû faire l'objet d'une programmation avec MATLAB et avec des subroutines internes à Nastran en langage DMAP. Cependant, le cas étudié a montré l'applicabilité de la méthode et la possibilité d'utiliser un plus grand nombre de fonctionnalités du logiciel (assemblage, gestion de la connectivité du modèle, utilisation du maillage prédéfini, condensation). La méthodologie proposée pourraient également être programmée entièrement en langage DMAP afin de réduire les temps de calcul.

Chapitre 4

Méthode de balance harmonique adaptative : application aux jonctions boulonnées

Dans le chapitre précédent, nous venons de voir comment la méthode de balance harmonique peut être employée sur des modèles numériques industriels et comment les méthodes de réduction de modèles peuvent s'appliquer afin de réduire le nombre d'inconnues du système à résoudre. Cependant, la résolution par méthode de balance harmonique nécessite de développer la réponse cherchée en série de Fourier tronquée à un ordre inconnu "a priori". Un faible nombre de degrés de liberté du modèle condensé peut en effet aboutir à un grand nombre d'inconnues pour le système d'équations à résoudre lorsqu'un grand nombre d'harmoniques est considéré dans le développement en série. La réduction du nombre d'harmoniques peut donc être un second moyen de réduire la taille du système à résoudre. Pour cela, il est nécessaire de mettre en oeuvre des méthodes capables de sélectionner le nombre d'harmoniques nécessaires pour atteindre la précision souhaitée. Les méthodes à mettre en place peuvent évidemment être différentes en fonction de l'objectif souhaité. Il peut s'agir d'approcher au mieux les déplacements et efforts au niveau de l'interface, de rendre compte du comportement dynamique global de la structure en adoptant une approche simplifiée au niveau de l'interface, ou encore de déduire des paramètres modaux équivalents à partir d'un calcul simplifié.

Dans ce chapitre, une méthode de balance harmonique permettant l'adaptation du nombre d'harmoniques en vue de l'approche du comportement global de la structure est présentée. Son application sur un système de jonctions boulonnées est détaillée et l'analyse des effets non linéaires présents dans les jonctions est réalisée.

De plus, nous proposerons une méthodologie permettant d'intégrer des variables internes dans la formulation des équations. Le modèle de jonction utilisé introduit en effet deux variables qui seront également développées en série de Fourier.

4.1 Méthode de balance harmonique adaptative

Pour une fréquence d'excitation d'un système mécanique donné, aucun outil théorique ne permet de déterminer quels harmoniques sont réellement significatifs dans la réponse dynamique du système. De plus le nombre d'harmoniques significatifs peut varier fortement sur une plage de fréquence donnée en fonction du caractère plus ou moins non linéaire de la réponse. Des outils numériques ont été developpés par Laxalde [96]. Ces outils se basent sur une approche des efforts non linéaires du système. Ce critère ne prend cependant pas en compte le comportement global du système et peut se montrer inadapté lorsque les efforts linéaires sont prédominants devant les efforts non linéaires. Par conséquent, la méthodologie proposée dans cette section se focalise sur une grandeur caractéristique du comportement dynamique global de la structure, à savoir l'énergie de déformation du système, et étudie son évolution en fonction des différents harmoniques considérés dans le développement en série de la réponse.

Considérons donc de façon générale un système mécanique discret à n degrés de liberté décrit par ses matrices de masse $\mathbf{M}$, de raideur $\mathbf{K}$ et d'amortissement $\mathbf{D}$, comme vu au paragraphe 3.1.1. Ce système est excité par un effort périodique $F_L(\Omega, t)$ à la pulsation Ω. Les non linéarités du système sont considérées comme des efforts extérieurs non linéaires $F_{NL}(X, \dot{X}, \Omega, t)$ et dépendent des déplacements X et de leurs dérivées $\dot{X}$. Nous noterons $\mathbf{I}_k$ et $\mathbf{0}_k$ respectivement la matrice identité et la matrice nulle de l'espace $I\!R^k$.

L'équation du mouvement (Eq. 2.59) peut alors s'écrire :

$$\mathbf{M}\ddot{X} + \mathbf{D}\dot{X} + \mathbf{K}X = F(X, \dot{X}, \Omega, t) = F_L(\Omega, t) + F_{NL}(X, \dot{X}, \Omega, t) \tag{4.1}$$

La réponse recherchée, supposée périodique, est alors développée en série de Fourier tronquée à m harmoniques :

$$X(t) = B_0 + \sum_{k=1}^{m} \left(A_k \sin(\frac{k}{\nu}\Omega t) + B_k \cos(\frac{k}{\nu}\Omega t) \right) \tag{4.2}$$

soit sous forme condensée :

$$X(t) = \mathbf{T}_n(t)Z = (\mathbf{T}_1(t) \otimes \mathbf{I}_n)\, Z \tag{4.3}$$

avec, en conservant les notations du chapitre précédent :

$$\mathbf{T}_1(t) = \left[1 \ \sin(\frac{\Omega}{\nu}t) \ \cos(\frac{\Omega}{\nu}t) \ \ldots \ \sin(\frac{k}{\nu}\Omega t) \ \cos(\frac{k}{\nu}\Omega t) \ \ldots \right] \tag{4.4}$$

$Z = [B_0 \ A_1 \ B_1 \ \ldots \ A_k \ B_k \ \ldots]^T$ est le vecteur des coefficients de Fourier de taille $(2m+1)n \times 1$. Le système à résoudre (Eq. 3.19) se ramène à l'annulation d'une fonction H défini sous la forme :

$$H(Z) = \mathbf{A}(\Omega)Z - b(Z, \Omega) \tag{4.5}$$

Dans le cas d'une condensation, la fonction à résoudre H_q (Eq. 3.29) dépend des degrés de liberté non linéaires $Z_q = [B_{0q} \ A_{1q} \ B_{1q} \ldots A_{mq} \ B_{mq}]^T$ et s'exprime sous une forme similaire à la fonction H :

$$H_q(Z_q) = \bar{\mathbf{A}}_{qq}(\Omega)Z_q - b_q(Z_q, \Omega) \tag{4.6}$$

4.1.1 Energie de déformation approchée

4.1.1.1 Sans condensation

L'expression de l'énergie de déformation du système peut s'exprimer de façon simple en fonction des coefficients de Fourier :

$$U = \frac{1}{2}{}^{T}X(t)\mathbf{K}X(t) = \frac{1}{2}{}^{T}Z^{T}\mathbf{T}_n(t)\mathbf{T}_n(t)\left(\mathbf{I}_{2m+1}\otimes\mathbf{K}\right)Z \tag{4.7}$$

L'expression de l'énergie de déformation moyenne est alors obtenue sur une période en utilisant la propriété vue en équation 3.15 :

$$\begin{aligned}
< U > &= \frac{1}{T}\int_0^T U(t)dt \\
< U > &= \frac{1}{2T}{}^{T}Z\left(\int_0^T {}^{T}\mathbf{T}_n(t)\mathbf{T}_n(t)dt\right)\left(\mathbf{I}_{2m+1}\otimes\mathbf{K}\right)Z \\
< U > &= \frac{1}{2}{}^{T}Z\left(\mathbf{L}_1\otimes\mathbf{I}_n\right)\left(\mathbf{I}_{2m+1}\otimes\mathbf{K}\right)Z \\
< U > &= \frac{1}{2}{}^{T}Z\left(\mathbf{L}_1\otimes\mathbf{K}\right)Z
\end{aligned} \tag{4.8}$$

d'après les propriétés du produit de Kronecker, à savoir $(A\otimes B)(C\otimes D) = (AC)\otimes(BD)$.

4.1.1.2 Avec condensation

Lorsqu'une procédure de condensation sur les q degrés de liberté non linéaires du modèle est utilisée, il est possible d'exprimer l'énergie de déformation moyenne uniquement en fonction des coefficients de Fourier Z_q de ces degrés de liberté non linéaires. L'intérêt de cette approche est de s'affranchir des calculs de restitution pour déterminer les coefficients de Fourier des degrés de liberté linéaires du modèle Z_p.
En reprenant les notations introduites au paragraphe 3.1.2, l'énergie de déformation s'exprime de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
< U > &= \frac{1}{2}{}^{T}Z\left(\mathbf{L}_1\otimes\mathbf{K}\right)Z \\
< U > &= \frac{1}{2}\left[{}^{T}Z_p\ {}^{T}Z_q\right]\begin{bmatrix}\mathbf{I}_{2m+1}\otimes{}^{T}\mathbf{P}_p\\ \mathbf{I}_{2m+1}\otimes{}^{T}\mathbf{P}_q\end{bmatrix}\left(\mathbf{L}_1\otimes\mathbf{K}\right)\left[\ \mathbf{I}_{2m+1}\otimes\mathbf{P}_p\ \mid\ \mathbf{I}_{2m+1}\otimes\mathbf{P}_q\ \right]\begin{bmatrix}Z_p\\ Z_q\end{bmatrix} \\
< U > &= \frac{1}{2}\left[{}^{T}Z_p\ {}^{T}Z_q\right]\begin{bmatrix}\mathbf{L}_1\otimes{}^{T}\mathbf{P}_p\mathbf{K}\mathbf{P}_p & \mathbf{L}_1\otimes{}^{T}\mathbf{P}_p\mathbf{K}\mathbf{P}_q\\ \mathbf{L}_1\otimes{}^{T}\mathbf{P}_q\mathbf{K}\mathbf{P}_p & \mathbf{L}_1\otimes{}^{T}\mathbf{P}_q\mathbf{K}\mathbf{P}_q\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Z_p\\ Z_q\end{bmatrix} \\
< U > &= \frac{1}{2}\left[{}^{T}Z_p\ {}^{T}Z_q\right]\begin{bmatrix}\mathbf{L}_1\otimes\tilde{\mathbf{K}}_{pp} & \mathbf{L}_1\otimes\tilde{\mathbf{K}}_{pq}\\ \mathbf{L}_1\otimes\tilde{\mathbf{K}}_{qp} & \mathbf{L}_1\otimes\tilde{\mathbf{K}}_{qq}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Z_p\\ Z_q\end{bmatrix} \\
< U > &= \frac{1}{2}\left[{}^{T}Z_p\ {}^{T}Z_q\right]\left(\mathbf{L}_1\otimes\mathbf{I}_n\right)\tilde{\mathbf{A}}(\Omega=0)\begin{bmatrix}Z_p\\ Z_q\end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

L'expression ci-dessus reste complexe et nécessite pour le calcul la connaissance des degrés de liberté linéaires qui sont déduits de la relation précédemment établie (Eq. 3.30) :

$$Z_p = \tilde{\mathbf{A}}_{pp}^{-1}\left(b_p - \tilde{\mathbf{A}}_{pq} Z_q\right) \tag{4.10}$$

L'expression de l'énergie peut néanmoins être simplifiée via quelques hypothèses. En considérant qu'aucune force extérieure ne s'applique sur les degrés de liberté linéaires (choix souvent judicieux de l'utilisateur) et en considérant que les degrés de liberté linéaires sont statiquement liés aux degrés de liberté non linéaires ($\Omega = 0$), on en déduit :

$$\begin{aligned} Z_p &= -\tilde{\mathbf{A}}_{pp}^{-1}(\Omega=0)\tilde{\mathbf{A}}_{pq}(\Omega=0) Z_q \\ Z_p &= -\left(\mathbf{L}_1^{-1} \otimes \tilde{\mathbf{K}}_{pp}^{-1}\right)\left(\mathbf{L}_1 \otimes \tilde{\mathbf{K}}_{pq}\right) Z_q \end{aligned} \tag{4.11}$$

En introduisant cette expression dans l'équation 4.9 :

$$\begin{aligned} < U > &= \frac{1}{2}\Big(-{}^T Z_p \left(\mathbf{L}_1 \otimes \tilde{\mathbf{K}}_{pp}\right)\left(\mathbf{L}_1^{-1} \otimes \tilde{\mathbf{K}}_{pp}^{-1}\right)\left(\mathbf{L}_1 \otimes \tilde{\mathbf{K}}_{pq}\right) Z_q + {}^T Z_p \left(\mathbf{L}_1 \otimes \tilde{\mathbf{K}}_{pq}\right) Z_q \\ &\quad -{}^T Z_q \left(\mathbf{L}_1 \otimes \tilde{\mathbf{K}}_{qp}\right)\left(\mathbf{L}_1^{-1} \otimes \tilde{\mathbf{K}}_{pp}^{-1}\right)\left(\mathbf{L}_1 \otimes \tilde{\mathbf{K}}_{pq}\right) Z_q + {}^T Z_q \left(\mathbf{L}_1 \otimes \tilde{\mathbf{K}}_{qq}\right) Z_q\Big) \\ < U > &= \frac{1}{2}{}^T Z_q \left[\mathbf{L}_1 \otimes \left(\tilde{\mathbf{K}}_{qq} - \tilde{\mathbf{K}}_{qp}\tilde{\mathbf{K}}_{pp}^{-1}\tilde{\mathbf{K}}_{pq}\right) Z_q\right] \\ < U > &= \frac{1}{2}{}^T Z_q \left(\mathbf{L}_1 \otimes \bar{\mathbf{K}}_{qq}\right) Z_q \end{aligned} \tag{4.12}$$

où $\bar{\mathbf{K}}_{qq}$ est la matrice condensée statiquement de $\tilde{\mathbf{K}}$ comme vu en équation 2.31.

4.1.2 Critère proposé

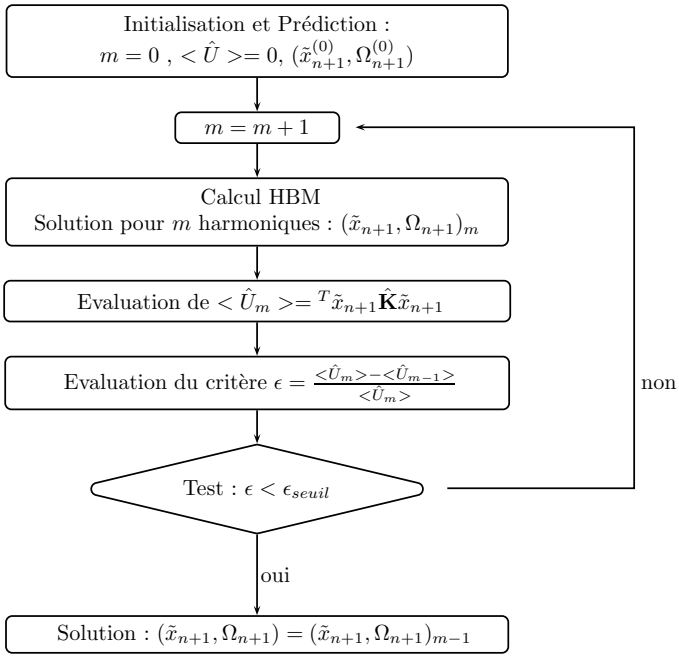
Une fois l'expression de l'énergie de déformation moyenne établie, l'évolution de cette grandeur va être suivie, pour une fréquence donnée, lorsque le nombre d'harmoniques considérés dans la réponse augmente. Plus précisément la différence relative entre deux valeurs consécutives (la première pour m harmoniques et la seconde pour $m+1$) va être observée. L'augmentation du nombre d'harmoniques sera stoppée lorsque cette variation ϵ sera inférieure à une valeur seuil ϵ_s choisie par l'utilisateur.

Cependant, étant donné que la matrice $\mathbf{L}_1$ est diagonale et constante, l'étude de la saturation de l'énergie approchée revient à l'étude d'une grandeur approchée :

$$\begin{aligned} < \hat{U} > &= {}^T Z \left(\mathbf{I}_{2m+1} \otimes \mathbf{K}\right) Z && \textit{sans condensation} \\ < \hat{U} > &= {}^T Z_q \left(\mathbf{I}_{2m+1} \otimes \bar{\mathbf{K}}_{qq}\right) Z_q && \textit{avec condensation} \end{aligned} \tag{4.13}$$

L'algorithme numérique utilisé est présenté en figure 4.1. Un premier calcul est toujours réalisé à partir d'un calcul avec un harmonique puis le nombre est augmenté jusqu'à ce que la différence relative soit inférieure à la valeur seuil fixée.

La procédure présentée ici ajoute à chaque nouveau passage un harmonique. Cela suppose donc que l'évolution de l'énergie de déformation soit monotone. Cela constitue une importante limitation



avec $\tilde{x} = \left\{ \begin{array}{c} Z \\ ou \\ Z_q \end{array} \right\}$ et $\hat{\mathbf{K}} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{K} \\ ou \\ \bar{\mathbf{K}}_{qq} \end{array} \right\}$.

FIGURE 4.1 – Algorithme HBM adaptatif.

de la méthode. En effet, de nombreux systèmes non linéaires font intervenir des ordres significatifs non consécutifs dans la réponse. Par exemple, seuls les ordres impairs sont significatifs dans la réponse d'un système à frottement sec. Pour ces cas particuliers, un traitement possible est la connaissance “a priori“ d'un tel comportement qui permet de ne développer la réponse que sur les ordres impairs. Ce type de traitement est celui qui sera mis en oeuvre lors de l'application sur jonction boulonnée en section suivante.

4.2 Application aux jonctions boulonnées

4.2.1 Structure étudiée

La structure étudiée est constituée d'un assemblage de deux poutres encastrées-libres reliées entre elles par une jonction boulonnée. Ce système sera utilisé afin de mettre en oeuvre l'algorithme de balance harmonique adaptatif. La figure 4.2 présente le système mis en oeuvre. Les deux poutres sont en aluminium Al 7075 et sont de section rectangulaire ($5.1cm \times 2.5cm$). Les poutres ont des longueurs différentes ($34.7cm$ et $84.7cm$) afin d'éviter un comportement dynamique symétrique de chaque poutre.

Les poutres sont ensuite modélisées sous le logiciel Abaqus à l'aide d'éléments poutres B21 utilisant une formulation de Timoshenko. 10 (respectivement 25) éléments sont utilisés pour la poutre de longueur $34.7cm$ (respectivement $84.7cm$). En raison des forces axiales, des non linéarités géométriques peuvent apparaître dans ce système de deux poutres encastrées-encastrées pour des niveaux d'excitation élevés et être simultanément présentes avec les non linéarités dues à la jonction boulonnée. Cependant le modèle est focalisé sur les non linéarités locales et est limitée aux non linéarités de la jonction. Pour plus de détails sur les non linéarités géométriques, le lecteur peut se référer aux travaux de Sze et al. [143] qui appliqua la méthode de balance harmonique à une poutre non linéaire.

Le modèle de jonction est représenté par un élément poutre de $3.5cm$ décrit par une matrice de masse élémentaire d'un élément B21 et par une matrice de raideur non linéaire considérée dans la méthode de balance harmonique comme générant un effort de raideur extérieur au système. Ces forces extérieures sont les deux moments de flexion M_1 et M_2 et les deux efforts tranchants F_1 et F_2 aux extrémités de l'élément. Un amortissement de Rayleigh est affecté en utilisant les matrices de masse et de raideur de la poutre monolithique de telle sorte que l'amortissement modal sur les modes à $0.24kHz$ et $1.14kHz$ soit de 0.1%. Ces deux fréquences correspondent au second et cinquième modes. Une valeur de 0.1% est représentative de structures réelles et reste suffisamment faible pour conserver un effet significatif des non linéarités de la jonction. En effet, une augmentation de l'amortissement structural peut réduire les amplitudes de vibration et par conséquent les amplitudes harmoniques d'ordre supérieur ce qui diminue le nombre d'harmoniques retenus par la méthode adaptative.

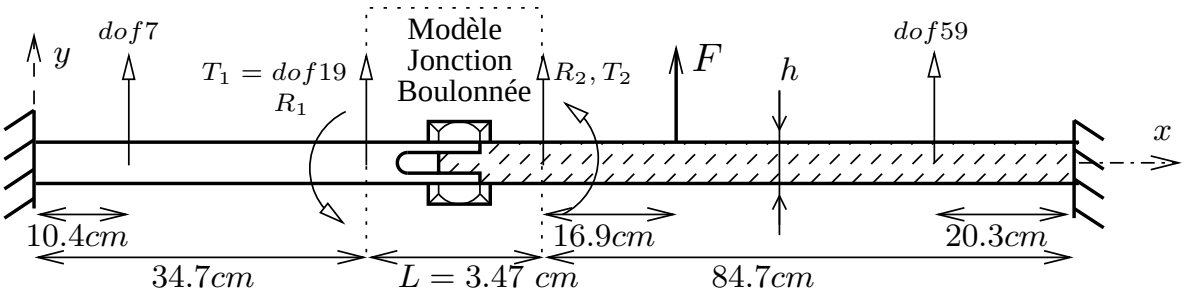


FIGURE 4.2 – Assemblage boulonné.

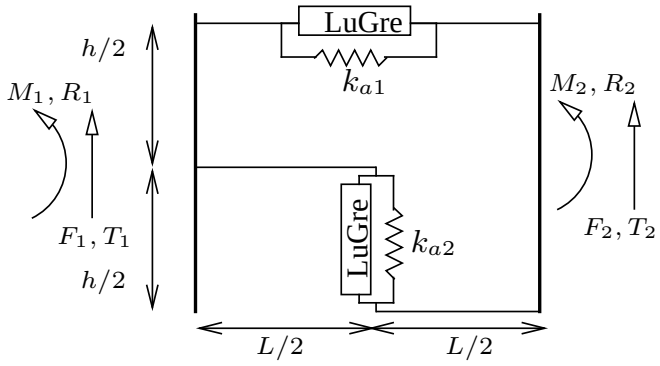


FIGURE 4.3 – Modèle de jonction.

4.2.2 Modèle de jonction

Le modèle de jonction boulonnée est présenté en figure 4.3 et s'inspire d'un travail de Song et al. [140]. Le modèle utilisé est appelé "adjusted LuGre beam element" par analogie avec les travaux de Song. Le microglissement et le macroglissement sont les deux principaux effets non linéaires présents à l'interface de la jonction [1]. Cependant, dans un souci de simplicité du modèle, les effets de macroglissement ainsi que les contacts en butée ne sont pas pris en compte. Le microglissement est ici modélisé en utilisant un modèle non linéaire intégrant un modèle de LuGre conduisant à l'apparation d'harmoniques d'ordre impair. Comme discuté en section 4.1.2, les harmoniques d'ordre pair ne doivent pas être considérés afin d'obtenir une convergence de l'énergie de déformation sur les harmoniques impairs. En ce qui concerne le modèle de jonction présenté en figure 4.3, l'idée est de remplacer les raideurs d'un élément poutre linéaire par une combinaison parallèle d'un modèle de LuGre et d'une raideur résiduelle $k_{a,i},\ i \in \{1,2\}$ caractéristique d'une jonction boulonnée [61]. Cet élément a deux degrés de liberté de rotation de section R_1 et R_2 et deux degrés de liberté de translation T_1 et T_2. h et L sont respectivement la hauteur de section et la longueur de l'élément.

Afin d'établir la relation entre les efforts et les degrés de liberté de l'élément, les élongations Δ_1 et Δ_2 des deux ressorts résiduels doivent être considérées :

$$\Delta_1 = \frac{L}{2}(R_1 + R_2) + (T1 + T1) \ \ et \ \ \Delta_2 = \frac{h}{2}(R_1 - R_2) \tag{4.14}$$

De plus, chaque modèle de LuGre génère un effort $f_{LuGre,i},\ i \in \{1,2\}$ qui dépend de l'élongation Δ_i mais aussi d'une variable interne ζ_i et de sa dérivée. Cet effort peut s'écrire :

$$f_{LuGre,i}(\Delta_i, \dot{\Delta}_i, \zeta_i, \dot{\zeta}_i) = \sigma_{0i}\zeta_i + \sigma_{1i}\dot{\zeta}_i + \alpha_{2i}\dot{\Delta}_i \tag{4.15}$$

$$\dot{\zeta}_i = \dot{\Delta}_i - \frac{\sigma_{0i}}{\alpha_{0i} + \alpha_{1i} e^{-\left(\frac{\dot{\Delta}_i}{v_{0i}}\right)^2}} \left|\dot{\Delta}_i\right| \zeta_i \tag{4.16}$$

L'effort généré par l'association parallèle d'un modèle de LuGre et d'une raideur s'écrit :

$$f_i(\Delta_i, \dot{\Delta}_i, \zeta_i, \dot{\zeta}_i) = f_{LuGre,i}(\Delta_i, \dot{\Delta}_i, \zeta_i, \dot{\zeta}_i) + k_{a,i}\Delta_i \tag{4.17}$$

La perte de raideur observée durant les phases de microglissement peut être représentée par l'introduction d'un coefficient $\gamma_i \in [0;1]$ reliant la raideur résiduelle du modèle $k_{a,i}$, le paramètre de raideur du modèle de LuGre σ_{0i} et la raideur d'un élément linéaire équivalent k_i. Les relations entre les deux paramètres peuvent s'écrire $\sigma_{0i} = (1-\gamma_i)k_i$ et $k_{a,i} = \gamma_i k_i$. Les efforts et moments résultants peuvent alors s'exprimer :

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\Delta_1, \dot{\Delta}_1, \zeta_1, \dot{\zeta}_1) \\ \frac{L}{2} f_1(\Delta_1, \dot{\Delta}_1, \zeta_1, \dot{\zeta}_1) + \frac{h}{2} f_2(\Delta_2, \dot{\Delta}_2, \zeta_2, \dot{\zeta}_2) \\ -f_1(\Delta_1, \dot{\Delta}_1, \zeta_1, \dot{\zeta}_1) \\ \frac{L}{2} f_1(\Delta_1, \dot{\Delta}_1, \zeta_1, \dot{\zeta}_1) - \frac{h}{2} f_2(\Delta_2, \dot{\Delta}_2, \zeta_2, \dot{\zeta}_2) \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

Par conséquent, à partir de l'équation 4.14, l'expression de l'effort non linéaire généré par l'élément de jonction s'exprime :

$$F_{NL,ALBE}(\begin{bmatrix} T_1 \\ R_1 \\ T_2 \\ R_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \dot{T}_1 \\ R_1 \\ T_2 \\ R_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \dot{\zeta}_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

Les deux raideurs d'un élément linéaire équivalents k_i peuvent être obtenues simplement par les relations :

$$k_1 = 12\frac{EI}{L^3} = 1,43.10^6 N/mm \;\; et \;\; k_2 = 4\frac{EI}{Lh^2} = 8,92.10^5 N/mm \tag{4.20}$$

Les autres paramètres sont déduits par analogie avec les travaux de Shiryayev et al. [137], notamment $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.1078$, $\alpha_{01} = \alpha_{02} = 81.9N$, $\sigma_{11} = \sigma_{12} = \alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{21} = \alpha_{22} = 0$. Finalement, $\sigma_{01} = 1,27.10^6 N/mm$, $\sigma_{02} = 7,96.10^5 N/mm$, $k_{a,1} = 1,55.10^5 N/mm$, $k_{a,2} = 9.62.10^4 N/mm$.

4.2.3 Système global et jonction

Le système est ensuite excité avec une force harmonique F_L d'amplitude $42N$ à la pulsation Ω. Ce chargement est appliqué sur la poutre de plus grande dimension dans une direction transversale (degré de liberté 31). En utilisant la formulation précédente (Eqn. 4.1), l'équation du mouvement peut être écrite avec l'ajout de deux équations supplémentaires décrivant l'évolution des variables internes ζ_1 et ζ_2 du modèle de LuGre :

$$\mathbf{M}\ddot{X} + \mathbf{D}\dot{X} + \mathbf{K}X = F_L(\Omega, t) - F_{NL,ALBE}(\begin{bmatrix} X \\ \dot{X} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \dot{\zeta}_1 \\ \dot{\zeta}_2 \end{bmatrix}, \Omega, t) \tag{4.21}$$

$$\dot{\zeta}_i = \dot{\Delta}_i - \frac{\sigma_{0i}}{\alpha_{0i} + \alpha_{1i} e^{-\left(\frac{\dot{\Delta}_i}{v_{0i}}\right)^2}} \left|\dot{\Delta}_i\right| \zeta_i \;\; for \;\; i \in \{1,2\} \tag{4.22}$$

4.3 Formulation HBM avec variable interne : adaptation au modèle de LuGre

4.3.1 Démarche retenue

Le recours à l'utilisation d'un modèle de LuGre afin de représenter le microglissement présent dans la jonction entraîne l'introduction d'une variable interne dans le système d'équations différentielles à résoudre [156]. En effet, la relation force-déplacement du modèle de LuGre est non algébrique et non holonome, c'est-à-dire que la force générée ne peut pas être exprimée en fonction du déplacement et de la vitesse instantanés. Par conséquent, le modèle de LuGre introduit une équation différentielle supplémentaire ainsi qu'une variable interne. Afin d'appliquer la méthode de balance harmonique, une reformulation du problème est donc nécessaire. Les deux variables internes ζ_1 et ζ_2 vont, à l'instar des déplacements, être développées en série de Fourier. En insérant le même développement $\zeta_i(t) = \mathbf{T}_2(t)Z_{\zeta_i}$ dans l'équation 4.22 :

$$\begin{aligned}
0 &= \dot{\zeta}_i - \left(\dot{\Delta}_i - \frac{\sigma_{0i}}{\alpha_{0i} + \alpha_{1i} e^{-\left(\frac{\dot{\Delta}_i}{v_{0i}}\right)^2}} \left|\dot{\Delta}_i\right| \zeta_i \right) \\
0 &= \mathbf{T}_2(t)\nabla_2 Z_{\zeta_i} - \mathbf{T}_2(t) b_{\zeta_i}(Z, Z_{\zeta_i}, \Omega) \\
0 &= \nabla_2 Z_{\zeta_i} - b_{\zeta_i}(Z, Z_{\zeta_i}, \Omega) \;\; avec \;\; i \in \{1, 2\}
\end{aligned} \tag{4.23}$$

où $b_{\zeta_i}(Z, Z_{\zeta_i}, \Omega)$ représente les coefficients de Fourier du terme non linéaire.

Le problème est finalement équivalent à la détermination des zéros d'une fonction $HH(Z, Z_\zeta)$ dépendant des coefficients de X et de $\zeta = [\zeta_1\ \zeta_2]$. HH est une fonction de $I\!R^{(2m+1)\times(n+2)}$ dans $I\!R^{(2m+1)\times(n+2)}$.

$$HH(Z, Z_\zeta) = \left\{ \begin{array}{lcl} H(Z, Z_\zeta) & = & \mathbf{A}(\Omega)Z - b(Z, Z_\zeta, \Omega) \\ C(Z, Z_\zeta) & = & \nabla_2 Z_\zeta - b_\zeta(Z, Z_\zeta, \Omega) \end{array} \right\} \tag{4.24}$$

Dans le cas d'une condensation, nous pouvons définir de façon similaire une fonction $HH_q(Z_q, Z_\zeta)$ de $I\!R^{(2m+1)\times(q+2)}$ dans $I\!R^{(2m+1)\times(q+2)}$:

$$HH_q(Z_q, Z_\zeta) = \left\{ \begin{array}{lcl} H_q(Z_q, Z_\zeta) & = & \bar{\mathbf{A}}_{qq}(\Omega)Z_q - b_q(Z_q, Z_\zeta, \Omega) \\ C(Z_q, Z_\zeta) & = & \nabla_2 Z_\zeta - b_{q,\zeta}(Z_q, Z_\zeta, \Omega) \end{array} \right\} \tag{4.25}$$

Enfin, le calcul de l'énergie de déformation approchée $< \hat{U} >$ reste identique aux équations 4.13 étant donné que seuls les degrés de liberté physiques sont utilisés pour le calcul de l'énergie de déformation.

Afin de réaliser les simulations, une procédure de condensation est utilisée sur les degrés de liberté de la jonction T_1, R_1, T_2 et R_2 et sur le degré de liberté d'application de la force T_F. Avec les deux variables internes des modèles de LuGre, le système à résoudre est donc de taille $(2m + 1) \times 7$.

4.3.2 Autres méthodes de traitement des variables internes

La méthodologie présentée précédemment a cependant un léger désavantage, celui de rajouter deux variables inconnues supplémentaires. Ces deux nouvelles variables ζ_1 et ζ_2 engendrent la présence de $(2m+1) \times 2$ inconnues supplémentaires lors du développement en série de Fourier à m harmoniques. La taille du système peut alors augmenter de façon significative.

Méthode proposée par Wong et al.
Pour pallier ce problème, Wong et al. [155,156] ont proposé une autre démarche qui consiste à résoudre, non plus les équations différentielles du mouvement, mais uniquement les équations non linéaires du modèle local utilisé. Dans leurs travaux, le modèle de Bouc-Wen [154] a été utilisé. Ainsi, à chaque itération de Newton, le déplacement Z étant connu, il est possible de déduire l'expression des efforts générés par le modèle non linéaire de Bouc-Wen via la relation :

$$b_{NL} = \mathbf{A}(\Omega)Z - b_L \tag{4.26}$$

où b_L représente les efforts linéaires sur la structure.

L'évaluation temporelle des déplacements et des efforts non linéaires, ainsi que leurs dérivées, est ensuite calculée par transformée de Fourier inverse ce qui permet d'introduire ces grandeurs dans les équations non linéaires du modèle. L'équation est ensuite transformée dans le domaine fréquentiel et constitue le problème à résoudre qui se ramène à un problème de minimisation. L'algorithme de Levenberg-Marquardt est ensuite appliqué pour la résolution du problème.

Toutefois, afin de conserver l'unicité de la solution, il est important d'avoir un nombre d'inconnues en déplacement Z égal au nombre d'inconnues en effort b_{NL}. Par exemple, pour un système à deux degrés de liberté relié par un modèle de Bouc-Wen, l'équation peut, pour un harmonique, s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ B_{11} \\ B_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} \\ -S_{11} \\ C_{11} \\ -C_{12} \end{bmatrix} \tag{4.27}$$

Le problème de minimisation ainsi obtenu introduira une fonction de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$ et l'unicité ne sera pas garantie. Il est ainsi important de condenser le modèle sur les degrés de liberté non linéaires uniquement et de réaliser ensuite une nouvelle procédure de condensation sur les degrés de liberté relatifs [96].

Autre méthode proposée
Dans le modèle étudié dans ce chapitre, la procédure sur degrés de liberté relatifs n'a pas été réalisée et le modèle de LuGre utilisé empêche l'application directe de la méthodologie proposée par Wong. Nous proposons ici une seconde méthode qui consiste en une nouvelle procédure de condensation qui ne conserve que les variables internes du modèle de LuGre.

Nous ne présenterons la méthodologie que dans le cas d'une condensation, le cas sans condensation se fait aisément. Les coefficients $b_q(Z_q, Z_\zeta, \Omega)$ des efforts extérieurs appliqués sur le système peuvent se diviser entre les coefficients b_{Lq} des efforts linéaires (ici l'effort d'excitation) et ceux b_{NLq} des efforts non linéaires. Or ces coefficients correspondent à ceux des efforts dans la jonction $F_{NL,ALBE}$. Par conséquent, les équations 4.14, 4.16, 4.17, 4.18 peuvent s'exprimer de façon plus compacte :

$$\Delta = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{2} & 1 & \frac{L}{2} & 0 \\ 1 & \frac{h}{2} & 0 & -\frac{h}{2} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{X_q}} X_q \tag{4.28}$$

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{01} & 0 \\ 0 & \sigma_{02} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_\zeta} \zeta + \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 \\ 0 & \sigma_{12} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{\dot\zeta}} \dot\zeta + \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{21} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{\dot\Delta}} \dot\Delta + \underbrace{\begin{bmatrix} k_{a,1} & 0 \\ 0 & k_{a,2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_\Delta} \Delta \tag{4.29}$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{L}{2} & \frac{h}{2} \\ -1 & 0 \\ \frac{L}{2} & -\frac{h}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_f} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \tag{4.30}$$

avec $\Delta =^T [\Delta_1\ \Delta_2]$ et $X_q =^T [T_1\ R_1\ T_2\ R_2\ T_F]$.

Le vecteur des efforts non linéaires peut donc s'exprimer simplement en fonction des coefficients de Fourier de X_q et de ζ :

$$\begin{aligned} b_{NLq} &= \left(\mathbf{I}_{2m+1} \otimes \mathbf{A}_f \mathbf{A}_\Delta \mathbf{A}_{X_q} + \nabla_1 \otimes \mathbf{A}_f \mathbf{A}_{\dot\Delta} \mathbf{A}_{X_q}\right) Z_q + \left(\mathbf{I}_{2m+1} \otimes \mathbf{A}_f \mathbf{A}_\zeta + \nabla_1 \otimes \mathbf{A}_f \mathbf{A}_{\dot\zeta}\right) Z_\zeta \\ b_{NLq} &= \mathbf{A}_{Z_q} Z_q + \mathbf{A}_{Z_\zeta} Z_\zeta \end{aligned} \tag{4.31}$$

Il est alors possible d'exprimer Z_q en fonction de Z_ζ via l'équation 4.25 :

$$Z_q = \left(\bar{\mathbf{A}}_{qq} - \mathbf{A}_{Z_q}\right)^{-1} \left(\mathbf{A}_{Z_\zeta} Z_\zeta + b_{Lq}\right) \tag{4.32}$$

Le problème peut donc se ramener à déterminer les zéros de la fonction $C(Z_\zeta)$ de $I\!R^{(2m+1)\times(2)}$ dans $I\!R^{(2m+1)\times(2)}$:

$$C(Z_q, Z_\zeta) = \nabla_2 Z_\zeta - b_{q,\zeta}(Z_\zeta, \Omega) \tag{4.33}$$

A partir de la donnée de Z_ζ à chaque pas de Newton, il est possible de déduire Z_p via la relation 4.32. Ensuite, par une procédure de transformée de Fourier inverse, X_q et ζ sont évalués temporellement. $\dot\Delta$ est lui aussi évalué via la relation 4.28. Enfin les coefficients de Fourier $b_{q,\zeta}$ sont obtenus par FFT.

Cependant, cette dernière méthode présente certes l'avantage de réduire le nombre d'inconnues du système à résoudre mais nécessite un effort certain de mise en forme numérique. De plus, les coefficients de Fourier des degrés de liberté physiques ne sont plus directement accessibles à chaque itération du

solveur.

Démarche retenue

Ainsi, dans un souci de simplicité, la programmation présentée en section précédente 4.3.1 sera utilisée dans la suite, étant donné que l'ajout de deux variables internes ne pose pas ici de problème au regard de la taille du modèle éléments finis.

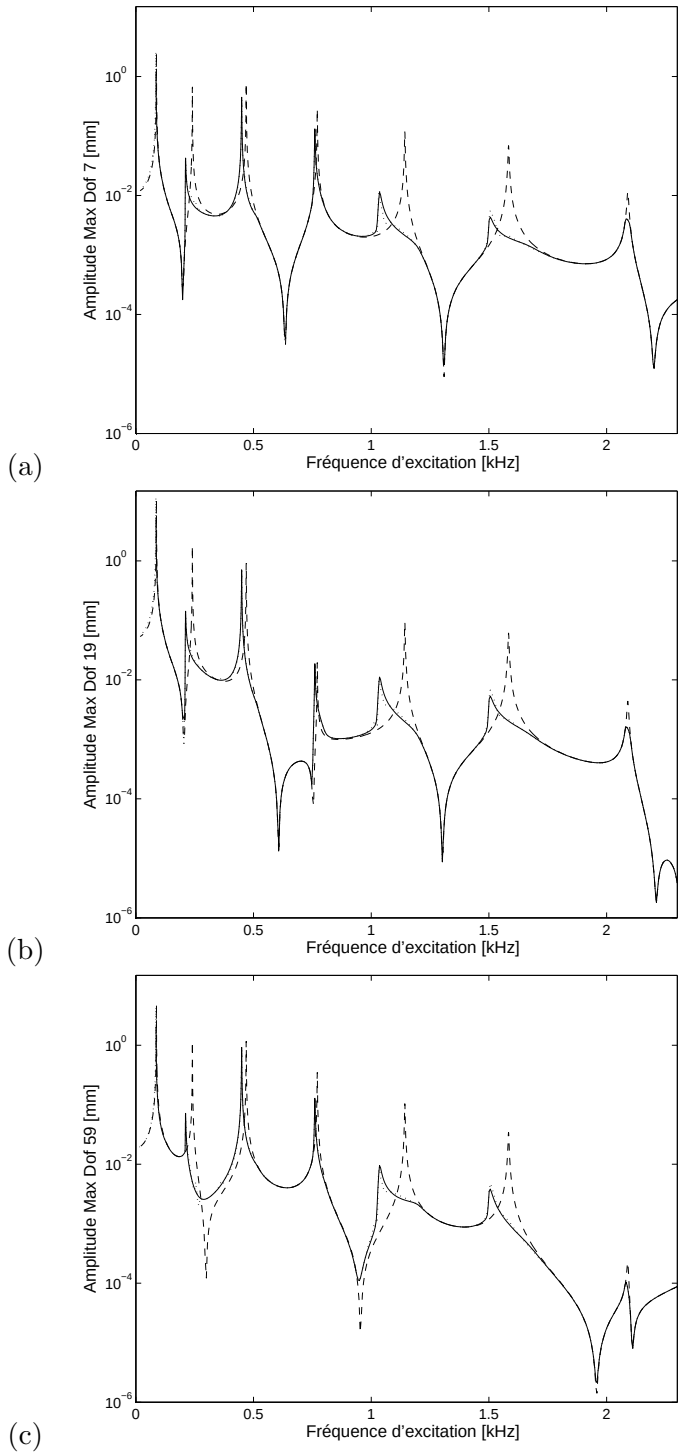


FIGURE 4.4 – Amplitude maximale de vibration pour les degrés de liberté 7(a), 19(b), 59(c) et pour différents cas linéaires et non linéaires sur toute la bande de fréquence étudiée ; – – (linéaire, HBM 1 harm.) ; — (non linéaire, HBM 1 harm.) ; ... (non linéaire, HBM adaptative)

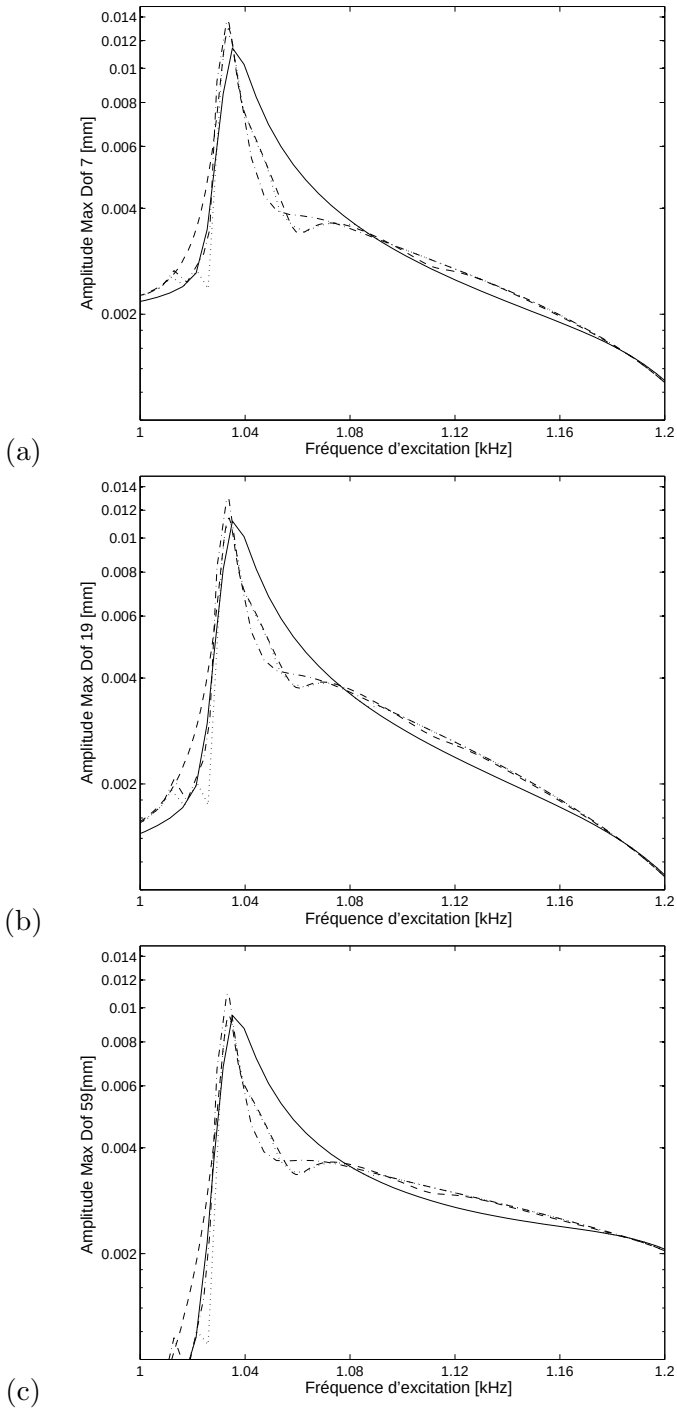


FIGURE 4.5 – Amplitude maximale de vibration pour les degrés de liberté 7(a), 19(b), 59(c) et pour différents cas linéaires et non linéaires autour de la résonance à 1.1kHz : — (non linéaire, HBM 1 harm.) ; –.– (non linéaire, HBM 3 harm.) ; ... (non linéaire, HBM adaptative) ; –.– (non linéaire, HBM 11harm.)

4.4 Résultats

Les résultats présentés dans cette section ont été calculés sur une bande de fréquence de $[0 - 2.3]\,kHz$. La méthode de continuation utilise une abscisse curviligne et des polynômes de Lagrange de degré 2 pour la prédiction. Un algorithme adaptatif est mis en oeuvre afin de mieux décrire les résonances. Une correction basée sur la pseudo-inverse de Moore-Penrose est appliquée à chaque itération. Le lecteur pourra se référer à la section 2.3.3 détaillant les techniques de continuation du second chapitre pour plus d'explications sur la correction de type Moore-Penrose et sur les prédicteurs de Lagrange.

4.4.1 Effets non linéaires

L'amplitude maximale de vibration obtenue pour le cas linéaire (cas d'une poutre monolithique) et pour deux cas non linéaires (HBM avec un harmonique et HBM adaptative) est présentée en figure 4.4. Le cas à un harmonique fait référence à l'algorithme de balance harmonique classique sans adaptation du nombre d'harmoniques dans la troncature. Trois degrés de liberté correspondant à des déplacements transversaux sont observés : deux au centre des deux poutres (degré de liberté 7 et 59) et un correspondant au degré de liberté 19 situé au niveau de la jonction. Le détail des positions est mentionné sur la figure 4.2. Pour le calcul utilisant l'algorithme adaptatif, une valeur seuil de 3% a été fixée. Sept modes sont repérés sur la bande de fréquence d'étude. Tout d'abord, nous pouvons noter que les non linéarités du système introduites par la modélisation du microglissement de la jonction engendrent deux phénomènes qui peuvent être appréciés par l'observation de la réponse pour un harmonique. Le premier est l'amortissement généré par le frottement qui se traduit par une diminution de l'amplitude des pics de résonance. Le second est l'assouplissement modal qui reflète la diminution de raideur de la jonction. Certains modes présentent ainsi des décalages fréquentiels et des distortions importantes, notamment les second, cinquième et sixième modes. De plus, ces effets ont le même ordre de grandeur pour tous les degrés de liberté du système. Enfin, les différences entre la réponse à un harmonique et la réponse adaptative sont marquées de façon notable au niveau des résonances ce qui illustre la nécessité de considérer plusieurs harmoniques dans ces zones. La jonction est en effet plus sollicitée dans ces zones et l'influence du glissement en son sein y est plus significatif.

Afin d'apprécier ces différences, un zoom a été effectué sur le pic de résonance proche de $1.1kHz$ en figure 4.5. Trois cas non linéaires correspondant à 1, 3 et 11 harmoniques y sont comparés avec l'algorithme adaptatif. Ces trois cas présentent des différences importantes au niveau de cette résonance. Nous pouvons noter que la réponse de l'algorithme adaptatif reste très proche de la réponse à 11 harmoniques, cette dernière étant considérée comme une référence vu le nombre élevé d'harmoniques considérés. Cependant, le nombre d'harmoniques utilisé par la HBM adaptative reste inférieure à 11, comme l'atteste la figure 4.6. En effet, la réponse n'utilise qu'au maximum un développement à 7 harmoniques au passage de cette résonance, traduisant la convergence de l'algorithme et le caractère secondaire des harmoniques supérieurs dans l'atteinte d'une précision de 3% sur l'approche de l'énergie de déformation. Sur l'ensemble de la bande de fréquence considérée, entre 1 et 11 harmoniques sont nécessaires pour respecter le critère avec la possibilité de ne conserver qu'un seul harmonique hors

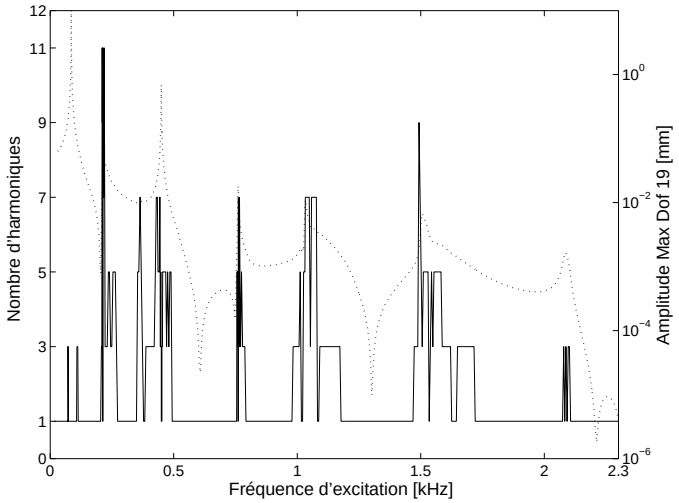


FIGURE 4.6 – Evolution du nombre d'harmoniques : — nombre d'harmoniques ; ... amplitude maximale de vibration pour le degré de liberté 19.

résonances. Dans le cas présent, un nombre maximal de 15 harmoniques a été autorisé dans l'algorithme adaptatif.

Les contributions des trois premiers harmoniques significatifs de la réponse (ordre 1, 3, 5 de la réponse à 11 harmoniques) sont analysés en figure 4.7 au niveau du même pic de résonance à $1.1kHz$. Les modules des coefficients de Fourier y sont représentés, c'est-à-dire la norme du vecteur $||A_k\ B_k||$ pour un harmonique k et pour un degré de liberté (voir Eqn. 4.2). Ces analyses sont réalisées toujours pour les degrés de liberté 7, 19 et 59. Le premier harmonique reste toujours largement supérieur aux harmoniques 3 et 5, avec toutefois une augmentation de l'importance des ordres supérieurs au niveau de la résonance. En effet, l'analyse des rapports $3^e/1^{er}$ et $5^e/1^{er}$ illustre que ceux-ci peuvent augmenter jusqu'à 10% pour le troisième harmonique et jusqu'à 2% pour le cinquième. Cette observation peut être reliée aux travaux de Ouyang et al. [116] qui analysa l'émergence des troisième et cinquième harmoniques à hauteur de 2% et de 0.7% du premier harmonique sur l'analyse expérimentale d'une jonction boulonnée.

Une analyse similaire sur l'énergie de déformation approchée peut être effectuée à travers la contribution de l'ordre k en analysant le terme $\frac{1}{2}^T Z_k \left(\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{K}\right) Z_k$. Z_k fait ici référence à la contribution de l'ordre k du vecteur des coefficients de Fourier Z. Les résultats sont tracés en figure 4.8. La même tendance est observée pour chaque degré de liberté pris individuellement, ce qui montre que cette grandeur se comporte comme un indicateur du comportement de chaque degré de liberté. La valeur maximale obtenue est de 12.5% pour le troisième harmonique et de 2% pour le cinquième.

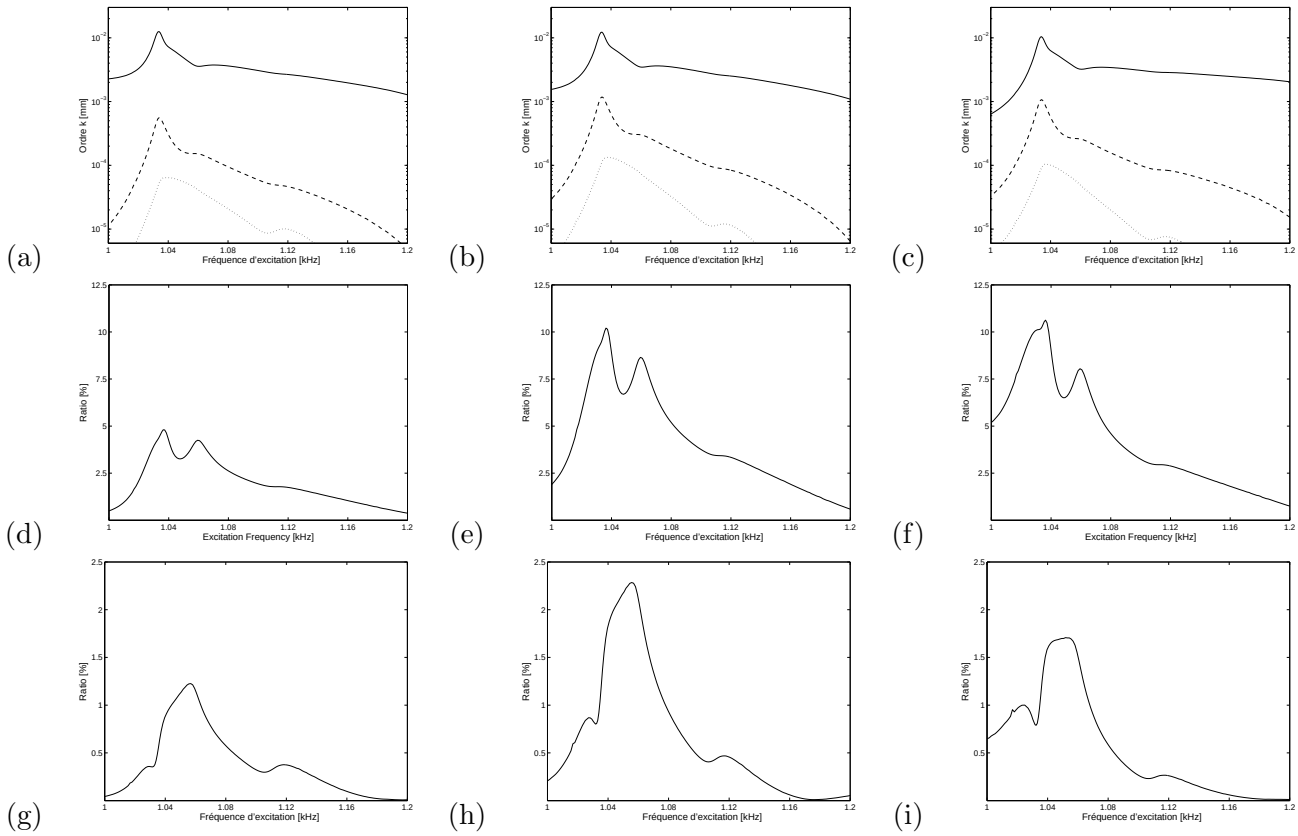


FIGURE 4.7 – Contribution des 1er,3ème et 5ème harmoniques sur l'amplitude maximale de vibration et ratios associés pour les degrés de liberté 7(a,d,g), 19(b,e,h), 59(c,f,i) : (a-c) module des coefficients de Fourier du : — 1er harmonique ; – – 3ème harmonique ; ... 5ème harmonique ; (d-f) ratio $3^{ème}/1^{er}$; (g-i) ratio $5^{ème}/1^{er}$.

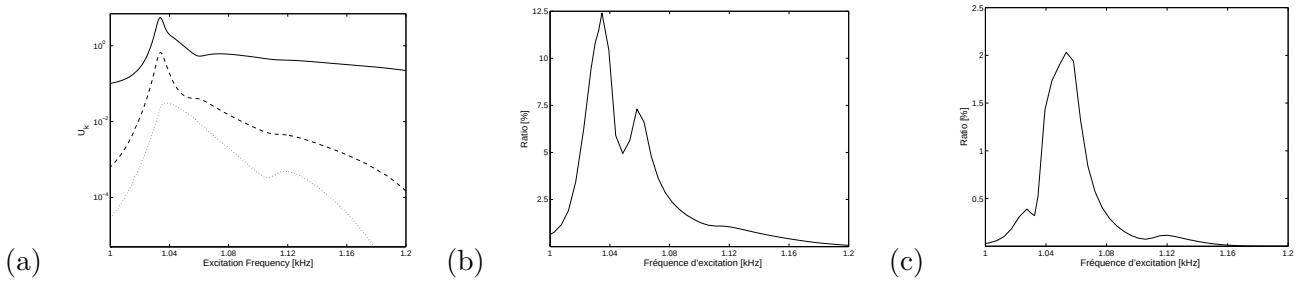


FIGURE 4.8 – Contribution des 1er,3ème et 5ème harmoniques sur l'énergie de déformation approchée et ratios associés : (a) contribution du : — 1er harmonique ; – – 3ème harmonique ; ... 5ème harmonique ; (b) ratio $3^{ème}/1^{er}$; (c) ratio $5^{ème}/1^{er}$.

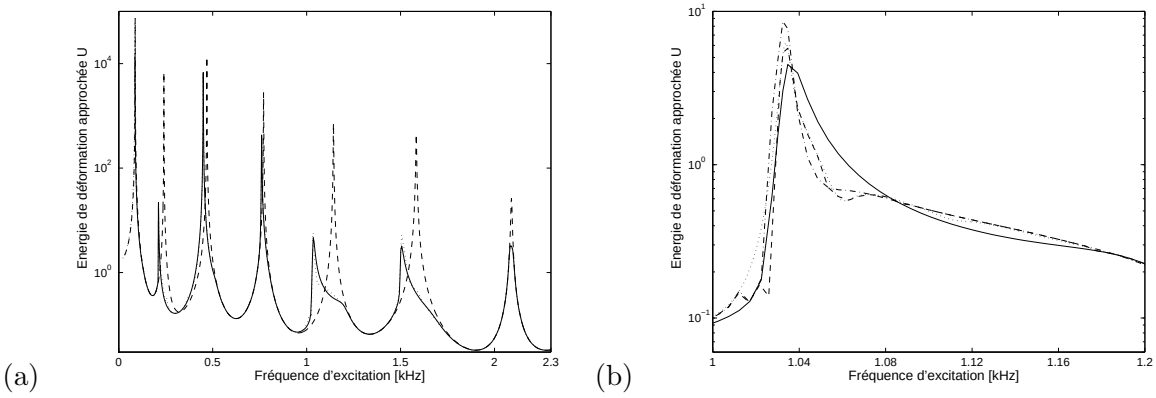


FIGURE 4.9 – Energie de déformation approchée pour différents cas linéaires et non linéaires : (a) sur toute la bande de fréquence étudiée ; – – (linéaire, HBM 1 harm.) ; — (non linéaire, HBM 1 harm.) ; ... (non linéaire, HBM adaptative) (b) zoom autour de la résonance à 1.1kHz ; — (non linéaire, HBM 1 harm.) ; –.– (non linéaire, HBM 3 harm.) ; ... (non linéaire, HBM adaptative) ; –.– (non linéaire, HBM 11harm.)

4.4.2 Saturation de l'énergie de déformation

L'énergie de déformation approchée $< \hat{U} >$ est présentée sur l'ensemble de la bande de fréquence en figure 4.9 pour trois cas différents : un calcul linéaire, un calcul HBM à un harmonique, et un calcul avec l'algorithme adaptatif. Un pic est évidemment observé pour chaque résonance et la diminution des amplitudes de vibration créée par l'apport d'amortissement dans la jonction se traduit de la même façon sur l'énergie de déformation. De plus les décalages fréquentiels se retrouvent. Comme pour l'analyse des réponses en fréquence, l'énergie de déformation reste inchangée hors résonances entre l'algorithme adaptatif et l'algorithme à un harmonique. De plus les différences se font plus nettes aux résonances où la figure 4.9 montre pour le pic à $1.1kHz$ les réponses pour 1, 3 et 11 harmoniques. L'énergie de déformation reste très proche de la courbe à 11 harmoniques même si l'algorithme n'a calculé qu'au maximum 7 harmoniques.

4.4.3 Influence de la force d'excitation

Les premières simulations présentées ont été réalisées avec une force d'excitation d'amplitude $42N$. L'influence de cette force est maintenant étudiée en réalisant des calculs pour les valeurs de $6N$, $12N$, $24N$, $42N$, $66N$. L'amplitude maximale de vibration est ensuite présentée en figure 4.10. Des zooms pour le degré de liberté 19 sont réalisés pour les trois premiers pics de résonance en figure 4.11(a), le cinquième en figure 4.11(b), et le septième en figure 4.11(c). Les réponses sont obtenues via l'algorithme adaptatif. Tout d'abord, l'augmentation de l'amplitude de l'effort d'excitation entraîne une augmentation des effets non linéaires avec un décalage fréquentiel des pics de résonance plus marqué pour les fortes amplitudes. Cela montre la relation de dépendance entre l'amplitude de vibration et l'amortissement modal, relation non linéaire comme précédemment noté par Ungar [147].

Afin d'apprécier l'amplification dynamique dans les cinq cas non linéaires, des fonctions de réponses en fréquences (FRFs) sont calculées en divisant l'amplitude maximale de vibration par l'amplitude de la force excitatrice. Les résultats, très similaires pour l'ensemble des trois degrés de liberté considérés, sont présentés dans le cas particulier du degré de liberté 19 en figure 4.12 sur l'ensemble de la bande de fréquence (a), sur les trois premiers pics (b), le cinquième (c) et le septième (d). L'amplitude reste toujours maximale au niveau des résonances. Cependant, lorsque la force augmente, l'amplitude maximale au niveau d'un pic passe par un minimum (ici pour un effort compris entre 24 et 42N) traduisant le caractère non linéaire et dépendant en amplitude de l'amortissement dans la liaison. Ouyang et al. [116] observa le même phénomène entre l'énergie dissipée et l'amplitude d'excitation pour une jonction travaillant en torsion.

En outre, l'amplitude de la force d'excitation a une influence sur le nombre d'harmoniques retenus par l'algorithme adaptatif. La figure 4.13 représente cette évolution pour les cinq amplitudes testées et aux environs du pic de $1.1kHz$. Le nombre d'harmoniques augmente lorsque les non linéarités sont plus importantes et passe ainsi de 1 harmonique pour $6N$ à jusqu'à 9 pour $66N$. Le décalage fréquentiel du nombre maximal d'harmoniques peut également être noté.

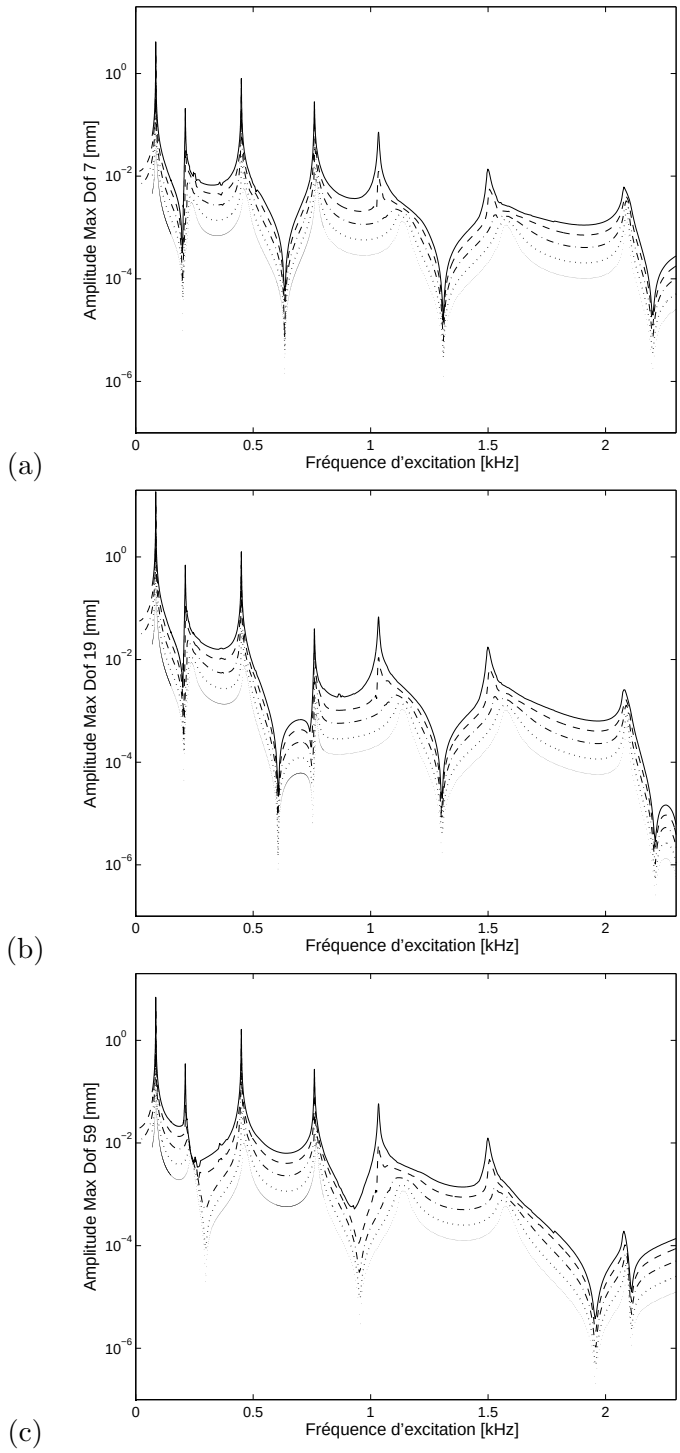


FIGURE 4.10 – Influence de l'amplitude de la force d'excitation sur l'amplitude maximale de vibration pour les degrés de liberté 7(a), 19(b), 59(c) : ... $6N$; - - - $12N$; –.– $24N$; – – $42N$; — $66N$.

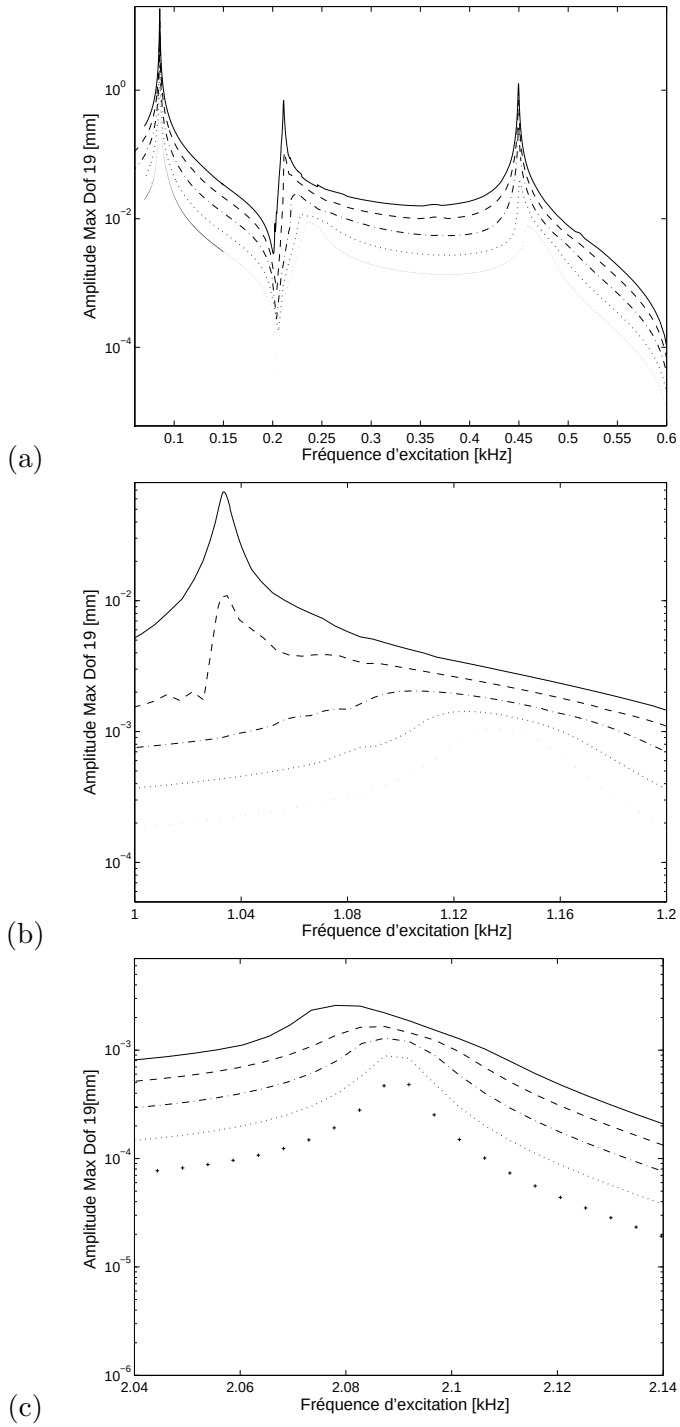


FIGURE 4.11 – Influence de l'amplitude de la force d'excitation sur l'amplitude maximale de vibration pour le degré de liberté 19 : (a) Zoom sur les 3 premières résonances, (b) Zoom sur la résonance à 1.1kHz, (c) Zoom sur la résonance à 2kHz : ... (remplacé par +++ en (c)) $6N$; - - - $12N$; –.– $24N$; – – $42N$; — $66N$.

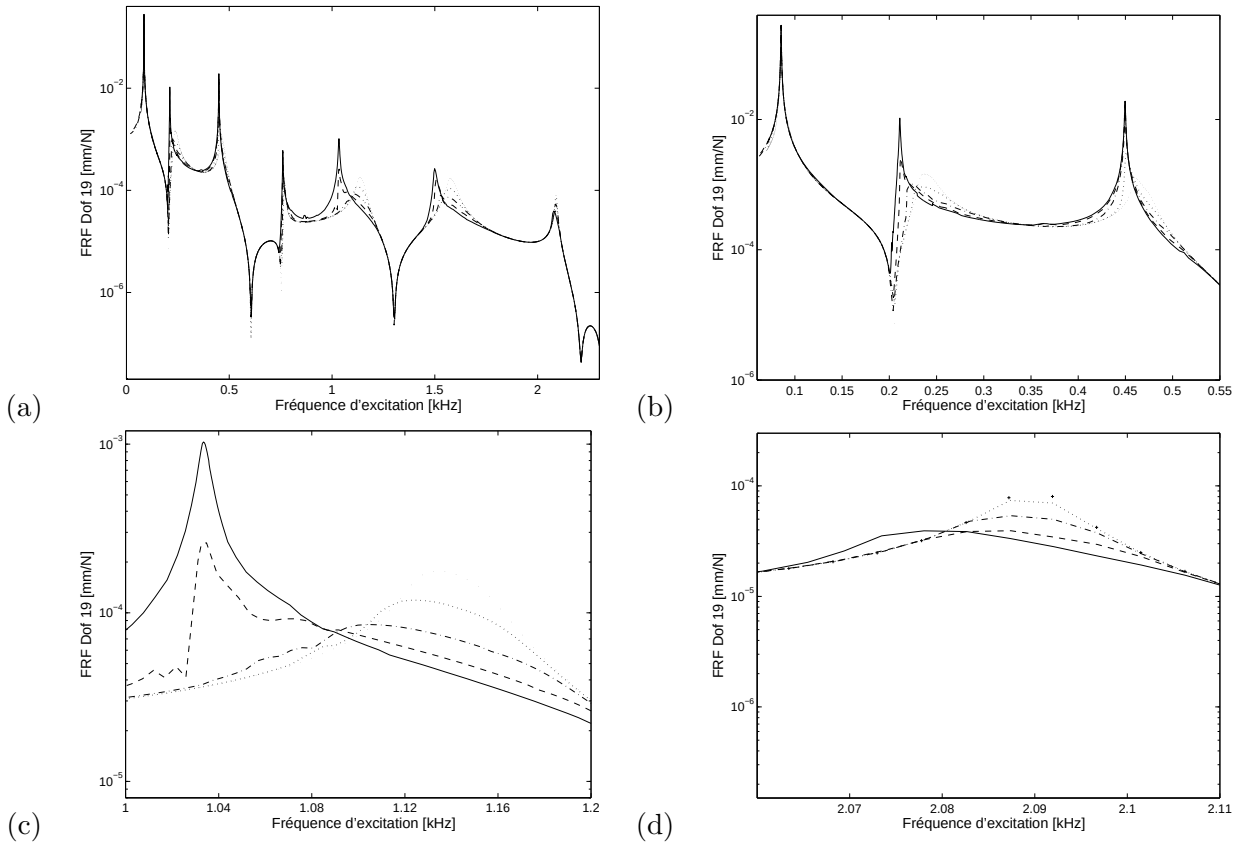


FIGURE 4.12 – Influence de l'amplitude de la force d'excitation sur les fonctions de réponse en fréquence pour le degré de liberté 19 : (a) sur toute la bande de fréquence étudiée, (b) Zoom sur les 3 premières résonances, (c) Zoom sur la résonance à 1.1kHz, (d) Zoom sur la résonance à 2kHz : ...(remplacé par +++ en (d)) $6N$; - - - $12N$; –.– $24N$; – – $42N$; — $66N$.

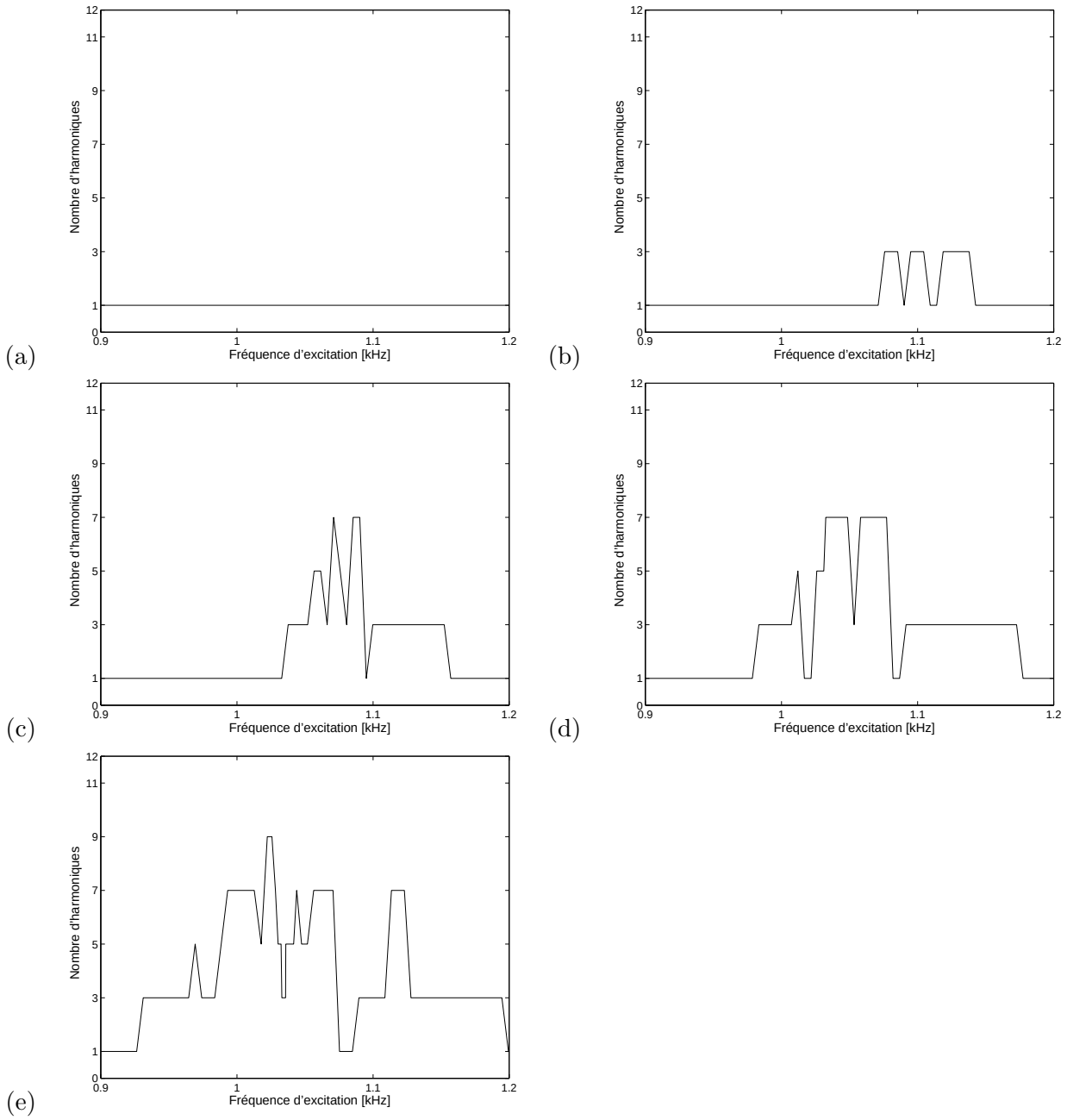


FIGURE 4.13 – Influence de l'amplitude de la force d'excitation sur le nombre d'harmoniques, zoom sur la résonance à 1.1kHz : (a) $6N$, (b) $12N$, (c) $24N$, (d) $42N$, (e) $66N$.

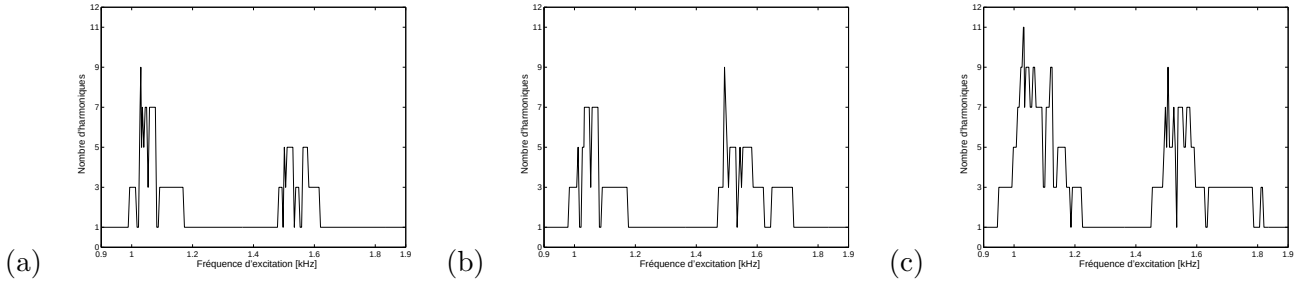


FIGURE 4.14 – Influence de la valeur seuil sur le nombre d'harmoniques, zoom sur les résonances à 1.1kHz et 1.5kHz : (a) 5%, (b) 3%, (c) 1%.

4.4.4 Valeur seuil

Différentes valeurs seuil de 1, 3 et 5% ont été testées pour l'algorithme adaptatif. La figure 4.14 montre l'évolution conséquente du nombre d'harmoniques pour les deux pics de résonance proches de $1.1kHz$ et $1.5kHz$. Sans surprise, le nombre d'harmoniques retenus augmente quand la précision demandée est plus importante. La valeur seuil à affecter reste toujours à déterminer par l'utilisateur. Toutefois il a été observé que l'ordre de grandeur de la différence relative entre deux réponses en amplitude pour les degrés de liberté du modèle est le même que celui calculé sur l'énergie de déformation. Une variation relative de 3% sur l'énergie de déformation sera accompagnée d'une variation relative d'environ 3% également sur l'amplitude des réponses vibratoires.

4.4.5 Comparaison entre critère général et réduit

Une expression simplifiée de l'énergie de déformation du système a été établie en équation 4.12 dans le cas d'une condensation. Cette expression considère que les coefficients de Fourier des degrés de liberté linéaires sont reliés statiquement aux coefficients des degrés de liberté non linéaires, conduisant à l'introduction d'une matrice de raideur condensée uniquement, sans recourir aux matrices de masses et d'amortissement du modèle. L'algorithme adaptatif a donc été mis en oeuvre avec ce critère et la réponse dynamique du système a été superposée avec le cas précédent (critère sans condensation) en figure 4.15. Les deux courbes diffèrent fortement pour des fréquences supérieures à la première résonance, invalidant l'hypothèse formulée. Cependant, la figure 4.16, qui trace l'évolution du nombre d'harmoniques retenus, montre un comportement très similaire au regard du calcul effectué avec un critère sans condensation comme vu en figure 4.6. Ce résultat peut peut-être s'expliquer par le fait qu'une variation relative de l'énergie de déformation entre deux nombres d'harmoniques consécutifs est suivie. Le critère réduit représente donc une alternative pour un calcul utilisant une balance harmonique adaptative.

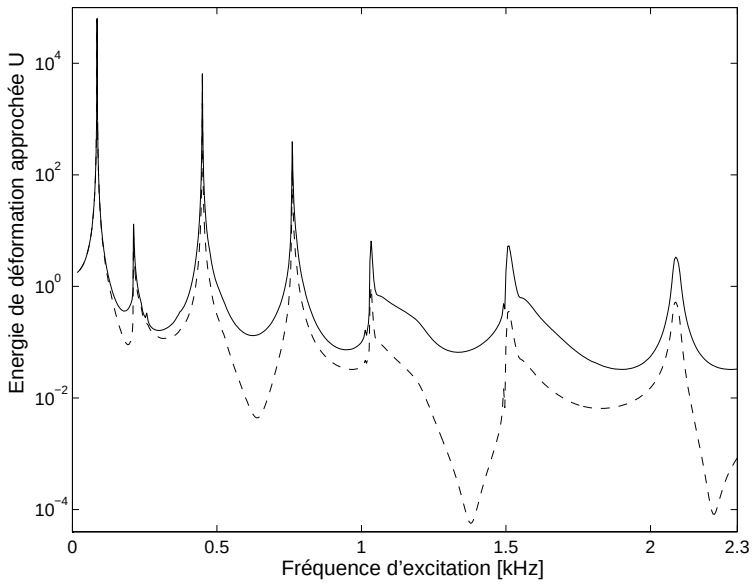


FIGURE 4.15 – Energie de déformation approchée : — expression générale ; – – expression dans le cas d'une condensation.

4.5 Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre le développement d'une méthode de balance harmonique adaptative qui permet d'adapter le nombre d'harmoniques nécessaires à l'approche de la réponse à chaque fréquence de la plage considérée. La méthodologie développée a pour objectif d'approcher de façon satisfaisante la dynamique d'une structure large intégrant localement des non linéarités aux interfaces. Dans cette optique, les développements se sont concentrés sur l'observation de l'énergie de déformation du système complet lorsque le nombre d'harmoniques utilisés pour l'approche de la réponse augmente. En effet, l'énergie de déformation de la structure présente l'avantage d'être une grandeur scalaire simple, rapidement calculable après calcul par balance harmonique, et rendant compte de façon globale de la dynamique du système. L'arrêt de l'algorithme est ensuite déterminé par la variation relative de cette énergie entre deux valeurs consécutives.

L'application à l'analyse de la dynamique d'un assemblage boulonné a permis dans un second temps de mettre en évidence le caractère adaptatif de l'algorithme proposé. Les non linéarités du système présentes au sein du modèle de jonction boulonnée proviennent alors de la représentation du microglissement entre les interfaces de contact. Toutefois l'élément de jonction utilisé, basé sur un modèle de LuGre, nécessite la prise en compte de variables internes dans les équations décrivant le mouvement. La programmation de la méthode de balance harmonique a donc été adaptée en développant en série de Fourier les variables internes du modèle et en ajoutant des équations non linéaires supplémentaires aux équations classiques de la méthode de balance harmonique. Le nombre d'inconnues est également

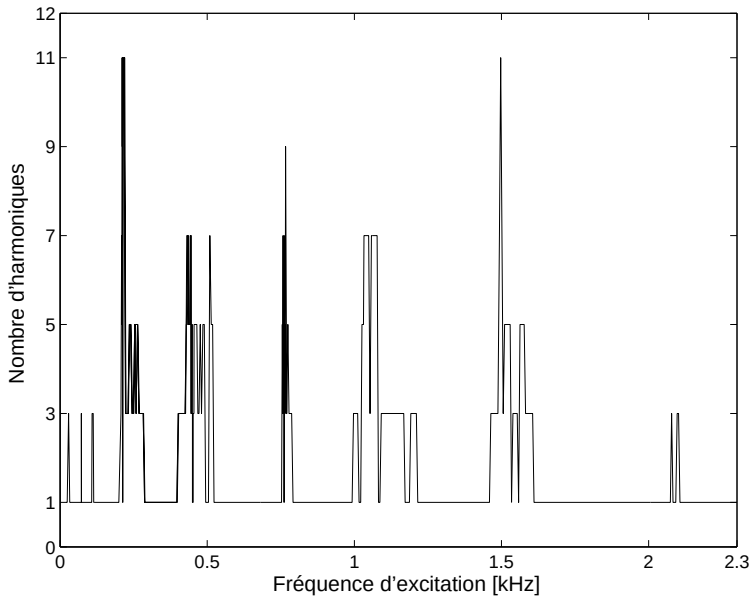


FIGURE 4.16 – Nombre d'harmoniques obtenus avec l'expression dans le cas d'une condensation : — expression générale ; – – expression dans la cas d'une condensation.

augmenté. Cette formulation présente certes l'inconvénient d'augmenter la taille du problème ainsi que le nombre d'inconnues, mais a pour avantage de ne pas modifier les équations classiques de la méthode de balance harmonique et d'être ainsi rapidement mis en oeuvre pour tout type de structure. De plus les valeurs des coefficients de Fourier des degrés de liberté physiques restent facilement accessibles à chaque itération du solveur.

L'analyse de la dynamique d'une structure boulonnée à partir de cette formulation et de cet algorithme adaptatif a pu être réalisée. Le modèle et la méthode de calcul conservent donc les non linéarités du système qui se traduisent sur les réponses dynamiques forcées du système par deux principaux effets : un premier effet d'amortissement rendant compte du microglissement présent au sein de la jonction et un second effet d'assouplissement des modes dû à la diminution de raideur de la jonction. Le décalage fréquentiel significatif des pics de résonance a ainsi pu être noté. En ce qui concerne la variabilité du nombre d'harmoniques retenus dans la réponse, le caractère adaptatif de la méthode a été montrée puisque le nombre d'harmoniques observés augmente lors des pics des résonances, domaines fréquentiels où la jonction dissipe le plus d'énergie par les non linéarités de frottement. En outre, l'émergence d'harmoniques supérieurs (ordre 3 et 5 notamment) a été observée, en accord avec les observations expérimentales connues, même si l'ordre 1 reste toujours prépondérant.

En ce qui concerne l'adaptation en ordre, le nombre d'harmoniques retenus augmente à proximité des résonances, zones où les non linéarités se font plus présentes. L'ordre 1 reste suffisant en dehors de ces zones. De plus, tout comme les ordres supérieurs des degrés de liberté physiques, les contributions

des ordres supérieurs à l'énergie de déformation deviennent non négligeables au niveau des résonances et leur ordre de grandeur devant l'ordre 1 est le même que pour les degrés de liberté de déplacement. L'observation de l'énergie de déformation permet donc bien de représenter la prépondérance des harmoniques supérieurs sur la réponse globale du système. Enfin, l'observation de l'influence du seuil d'arrêt présente un comportement cohérent avec un nombre d'harmoniques obtenus plus important lorsque la valeur du seuil diminue.

Si l'on s'intéresse à l'influence de l'amplitude de la force excitatrice, il est intéressant de noter que l'amplitude de vibration a le même sens de variation que l'amplitude de l'excitation. De plus, le nombre d'harmoniques retenus suit cette évolution en augmentant avec les amplitudes de vibration. Les fonctions de réponse en fréquence passent par un minimum pour une valeur intermédiaire de l'excitation.

La méthode de balance harmonique adaptative présentée dans ce chapitre est donc capable d'approcher le comportement dynamique d'une structure complète et de tenir compte de la présence éventuelle d'harmoniques d'ordre supérieur dans la réponse. Une des limitations rencontrées est la présence d'harmoniques non consécutifs dans la réponse, mais cette restriction peut être levée dans un grand nombre de cas. En effet, pour des structures réelles, les harmoniques présentent souvent une décroissance monotone en fréquence, et, lorsque les harmoniques pairs ou impairs sont absents, il est possible d'en avoir connaissance a priori, comme nous l'avons montré ici.

Le critère a été présenté dans ce chapitre pour des structures excitées par un effort monofréquentiel et pour des réponses périodiques. Toutefois, la notion d'harmonique pouvant être étendue dans les cas de réponses quasi-périodiques, la mise en oeuvre d'une méthodologie adaptative pour des cas multifréquentiels sera effectuée dans le chapitre suivant.

Chapitre 5

Extension aux systèmes multifréquentiels : application au cas d'amortisseurs à frottement

Le chapitre précédent a présenté une méthodologie adaptative permettant d'ajuster le nombre d'harmoniques à retenir dans le développement de la réponse pour chaque fréquence en fonction de l'importance des non linéarités dans la réponse dynamique d'une structure. Cette méthodologie est valable pour le calcul de réponses périodiques. Or, les systèmes non linéaires peuvent parfois présenter une réponse quasipériodique. De plus, de nombreuses structures industrielles peuvent parfois être soumises à plusieurs excitations à des fréquences différentes et parfois incommensurables. Lorsque l'on s'intéresse à ce type de réponse, il est possible d'adapter la formulation de la méthode de balance harmonique au calcul de réponses quasipériodiques. Le choix du nombre de termes à retenir dans le développement de la réponse reste alors ouvert. L'objet de ce chapitre est donc d'étendre la formulation adaptative présentée dans le chapitre précédent au cas de systèmes multifréquentiels pour lesquels la notion d'harmonique doit être redéfinie.

L'application de la méthode sera effectuée sur un troisième cas d'application de cette thèse. Ce cas consiste en la simulation d'un dispositif expérimental représentatif d'une partie de lanceur au sein duquel trois amortisseurs à frottement sont insérés dans le but d'amortir les vibrations d'un équipement du tronçon. Le dispositif étant excité par une accélération imposée à sa base, la formulation de la méthode de balance harmonique sera adaptée à ce cas. Enfin, des variables internes seront considérées dans les modèles d'amortisseurs retenus.

Nous présentons donc tout d'abord la formulation de la méthode de balance harmonique pour le calcul de réponses quasipériodiques afin d'introduire dans un deuxième temps l'extension de la méthodologie adaptative. Le dispositif expérimental sera ensuite présenté puis la formulation pour la prise en compte des accélérations imposées sera détaillée. Enfin, les résultats obtenus avec la méthodologie adaptative multifréquentielle seront commentés.

5.1 Méthode de balance harmonique multifréquentielle

La méthode de balance harmonique multifréquentielle (MHBM) a été très tôt développée par Chua et Ushida [34, 150] dans le but de calculer des réponses apériodiques de systèmes non linéaires. Cette méthode a également été appelée “spectral harmonic balance“ [112]. La méthodologie incrémentale a ensuite été introduite par Lau et al. [32] et la technique AFT (passage temps-fréquence) par Choi et al. [33]. L'analyse de stabilité de solutions quasi-périodiques a également été menée sur des applications rotor [72, 88]. Enfin une généralisation de la méthode de balance harmonique contrainte a été mise en oeuvre pour le calcul de réponses sur systèmes autonomes présentant plusieurs modes instables [37]. Nous rappelons ici la formulation de la méthode de balance harmonique multifréquentielle afin d'introduire dans la section suivante l'extension de la technique adaptative monofréquentielle au cas multifréquentiel.

5.1.1 Fonctions quasipériodiques

Les réponses dynamiques non linéaires peuvent être de nature quasi-périodique du fait de plusieurs excitations à des fréquences différentes, fréquences souvent incommensurables. Nous nous intéressons particulièrement à ce point dans ce chapitre et nous considérons donc un système non linéaire excité par p fréquences d'excitation de pulsation $\omega_i,\ i \in [\![1, p]\!]$. La solution sera dite quasi-périodique si les fréquences d'excitation sont incommensurables c'est-à-dire :

$$\forall\,(k_1, \cdots, k_p) \in \mathbb{Z}^p, \qquad k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \cdots + k_p\omega_p = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = k_2 = \cdots = k_p = 0 \tag{5.1}$$

Afin d'approcher la réponse non linéaire quasi-périodique, cette dernière est recherchée sous la forme d'une série de Fourier multiple dont le contenu fréquentiel est une combinaison linéaire des p fréquences d'excitation :

$$X(t) = \sum_{(k_1,\cdots,k_p)\in\mathbb{Z}^p} A_{k_1,\cdots,k_p} \sin\left((k_1\omega_1 t + \cdots + k_p\omega_p)t\right) + B_{k_1,\cdots,k_p} \cos\left((k_1\omega_1 t + \cdots + k_p\omega_p)t\right) \tag{5.2}$$

Les coefficients $A_{k_1,\cdots,k_p}$ et $B_{k_1,\cdots,k_p}$ représentent les coefficients de Fourier associés à chaque combinaison linéaire des fréquences d'excitation. Le terme $A_{0,\cdots,0}$ correspondant à une combinaison linéaire nulle est considéré comme nul.

Une façon plus simple de considérer l'écriture de la réponse consiste à introduire une variable de temps multidimensionnelle $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1\ \tau_2\ \cdots\ \tau_p]^T \in \mathbb{R}^p$ et une base fréquentielle $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1\ \omega_2\ \cdots\ \omega_p]^T$. La relation entre le temps “vrai“ t et $\boldsymbol{\tau}$ s'écrit :

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\omega} t \tag{5.3}$$

La variable $\boldsymbol{\tau}$ est appelée variable d'hyper-temps [88] pour laquelle chaque composante est 2π-périodique. L'expression du déplacement $X(t)$ peut se réécrire de la façon suivante :

$$X(\boldsymbol{\tau}) = \sum_{\boldsymbol{k}\,\in\,\mathbb{Z}^p} A_{\boldsymbol{k}} \sin\left(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{\tau}\right) + B_{\boldsymbol{k}} \cos\left(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{\tau}\right) \tag{5.4}$$

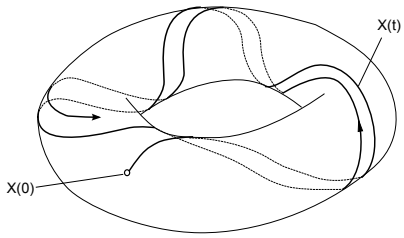


FIGURE 5.1 – Trajectoire sur un tore invariant [72].

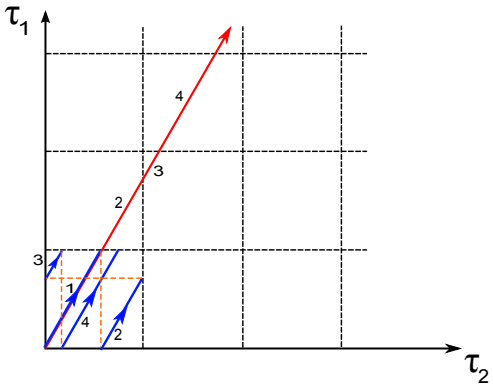


FIGURE 5.2 – Domaines temporels mono et multi-dimensionnels.

$\boldsymbol{k} = [k_1 \cdots k_p]$ est le vecteur des harmoniques de chaque composante temporelle τ_j. L'équation précédente est ainsi 2π-périodique sur chaque variable d'hyper-temps τ_j. La fonction $X(\boldsymbol{\tau})$ est appelée fonction-tore [133]. Un exemple de trajectoire bi-périodique est donné en figure 5.1. La variable t évolue dans $\mathbb{R}^3$ sur le tore formé par les deux paramètres (τ_1, τ_2). Grâce à la périodicité de chaque composante temporelle τ_j, il est possible de développer le tore de la figure 5.1 sur un plan. Le contenu de la trajectoire s'inscrit dans le carré défini par $(\tau_1, \tau_2) \in [0\ ;\ 2\pi]^2$. La figure 5.2 illustre ce passage du domaine temporel au domaine hyper-temps. En effet, il est possible de retrouver t à partir de la connaissance de τ_1 et τ_2 via la relation :

$$\begin{cases} \tau_1 = \omega_1 t \\ \tau_2 = \omega_2 t \end{cases} \Rightarrow t = \frac{\tau_1}{\omega_1} = \frac{\tau_2}{\omega_2} \tag{5.5}$$

Il existe ainsi une bijection de $\mathbb{R}^2$ vers $[0\ ;\ 2\pi]^2$ qui à tout instant t associe un unique point du carré $(\tau_1, \tau_2) \in [0\ ;\ 2\pi]^2$ et inversement. Cette propriété permet d'appliquer les algorithmes de transformée de Fourier multi-dimensionnelle et ainsi d'utiliser la procédure AFT dans la formulation de la balance harmonique.

Le développement en série de Fourier de $X(t)$ étant théoriquement infini, il est nécessaire de prendre un nombre fini de combinaisons linéaires des p pulsations d'excitation. Considérons donc un nombre

N_c de combinaisons linéaires non nulles caractérisées par la donnée d'un vecteur $\boldsymbol{k} = [k_1 \ \cdots \ k_p]$. En conservant le terme constant, $X(\boldsymbol{\tau})$ s'écrit alors :

$$X(\boldsymbol{\tau}) = B_0 + \sum_{i=1}^{N_c} A_{\boldsymbol{k}_i} \sin(\boldsymbol{k}_i.\boldsymbol{\tau}) + B_{\boldsymbol{k}_i} \cos(\boldsymbol{k}_i.\boldsymbol{\tau}) \tag{5.6}$$

Il est possible d'aboutir à une expression plus compacte en considérant une extension de la matrice $\mathbf{T}_1(t)$ défini en équation 3.3 en créant un opérateur dépendant de $\boldsymbol{\tau}$:

$$\mathbf{T}_1(\boldsymbol{\tau}) = [1 \ \sin(\boldsymbol{k}_1.\boldsymbol{\tau}) \ \cos(\boldsymbol{k}_1.\boldsymbol{\tau}) \ \ldots \ \sin(\boldsymbol{k}_{N_c}.\boldsymbol{\tau}) \ \cos(\boldsymbol{k}_{N_c}.\boldsymbol{\tau})] \tag{5.7}$$

A partir de cette expression, le déplacement $X(\boldsymbol{\tau})$ s'exprime de façon compacte sous une forme similaire à l'équation 3.4 :

$$X(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{T}_n(\boldsymbol{\tau})Z = (\mathbf{T}_1(\boldsymbol{\tau}) \otimes \mathbf{I}_n)\, Z \tag{5.8}$$

avec $Z = \left[B_0 \ A_{\boldsymbol{k}_1} \ B_{\boldsymbol{k}_1} \ \ldots \ A_{\boldsymbol{k}_{N_c}} \ B_{\boldsymbol{k}_{N_c}}\right]^T$ le vecteur des coefficients de Fourier associés.

5.1.2 Formulation générale

L'intérêt de passer de la variable $t \in \mathbb{R}$ à $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^p$ est de conserver l'orthogonalité entre les fonctions trigonométriques dépendantes de $\boldsymbol{\tau}$. Pour pouvoir étendre la formulation de la balance harmonique au cas multi-fréquentiel, nous devons redéfinir l'opérateur de dérivation ∇_n défini en équation 3.9. Ainsi nous redéfinissons ∇ et ∇_1 :

$$\nabla = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

et

$$\nabla_1 = diag(0, \boldsymbol{k}_1.\boldsymbol{\omega}\nabla, \ldots, \boldsymbol{k}_{N_c}.\boldsymbol{\omega}\nabla) \tag{5.10}$$

L'expression de ∇_n reste, avec ces notations, identique et égale à $\nabla_1 \otimes \mathbf{I}_n$. De même, les calculs des vitesses et des accélérations restent identiques :

$$\begin{aligned} \dot{X}(\boldsymbol{\tau}) &= \mathbf{T}_n(\boldsymbol{\tau})\nabla_n Z \\ \ddot{X}(\boldsymbol{\tau}) &= \mathbf{T}_n(\boldsymbol{\tau})\left(\nabla_1^2 \otimes \mathbf{I}_n\right) Z \end{aligned} \tag{5.11}$$

Par un calcul similaire à l'équation 3.13, l'introduction de ces expressions dans les équations du mouvement conduit alors à l'équation :

$$\mathbf{T}_n(\boldsymbol{\tau})\left(\nabla_1^2 \otimes \mathbf{M} + \nabla_1 \otimes \mathbf{D} + \mathbf{I}_{2N_c+1} \otimes \mathbf{K}\right) Z = \mathbf{T}_n(\boldsymbol{\tau})b \tag{5.12}$$

L'application de la procédure de Galerkin via l'orthogonalité des fonctions trigonométriques 2π-périodiques sur chaque composante τ_i permet d'aboutir au système final à résoudre :

$$\mathbf{A}Z = b \ \ avec \ \ \mathbf{A} = \nabla_1^2 \otimes \mathbf{M} + \nabla_1 \otimes \mathbf{D} + \mathbf{I}_{2N_c+1} \otimes \mathbf{K} \tag{5.13}$$

La matrice $\mathbf{A}$ s'écrit de façon explicite :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & & & & & \\ & \mathbf{K} - (\boldsymbol{k}_1.\boldsymbol{\omega})^2\,\mathbf{M} & -\boldsymbol{k}_1.\boldsymbol{\omega}\mathbf{D} & & & \\ & \boldsymbol{k}_1.\boldsymbol{\omega}\mathbf{D} & \mathbf{K} - (\boldsymbol{k}_1.\boldsymbol{\omega})^2\,\mathbf{M} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \mathbf{K} - (\boldsymbol{k}_{N_c}.\boldsymbol{\omega})^2\,\mathbf{M} & -\boldsymbol{k}_{N_c}.\boldsymbol{\omega}\mathbf{D} \\ & & & & \boldsymbol{k}_{N_c}.\boldsymbol{\omega}\mathbf{D} & \mathbf{K} - (\boldsymbol{k}_{N_c}.\boldsymbol{\omega})^2\,\mathbf{M} \end{bmatrix} \tag{5.14}$$

Tout comme la méthode de balance harmonique mono-fréquentielle, le problème se ramène à l'annulation d'une fonction $H : I\!R^{(2N_c+1)\times n} \rightarrow I\!R^{(2N_c+1)\times n}$:

$$H(Z) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\omega})Z - b(Z, \boldsymbol{\omega}) \tag{5.15}$$

La procédure de résolution reste identique à la méthode de balance harmonique monofréquentielle.

5.1.3 Traitement des efforts non linéaires

En ce qui concerne le traitement des termes non linéaires, la procédure AFT reste applicable en utilisant un algorithme de transformée de Fourier multidimensionnel :

$$Z \overset{FFTn^{-1}}{\Longrightarrow} X(\boldsymbol{\tau}) = B_0 + \sum_{i=1}^{N_c} A_{\boldsymbol{k}_i} \sin(\boldsymbol{k}_i.\boldsymbol{\tau}) + B_{\boldsymbol{k}_i} \cos(\boldsymbol{k}_i.\boldsymbol{\tau}) \tag{5.16}$$

Les coefficients des efforts non linéaires $F_{NL}(X, \dot{X}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\tau})$ sont ensuite déduits :

$$F_{NL}(X, \dot{X}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\tau}) \overset{FFT}{\Longrightarrow} b_{NL}(Z, \boldsymbol{\omega}) = {}^T[C_0^{NL}\ S_{\boldsymbol{k}_1}^{NL}\ C_{\boldsymbol{k}_1}^{NL} \ldots\ S_{\boldsymbol{k}_{N_c}}^{NL}\ C_{\boldsymbol{k}_{N_c}}^{NL}] \tag{5.17}$$

5.1.4 Condensation

La condensation ne subit pas de changement majeur dans la formulation par rapport à la description qui a été faite au troisième chapitre de ce mémoire. L'expression des termes $\tilde{\mathbf{A}}_{kl}$ pour $(k, l) \in \{p, q\}$ s'écrit par analogie avec l'équation 3.26 :

$$\tilde{\mathbf{A}}_{kl} = \nabla_1^2 \otimes \tilde{\mathbf{M}}_{kl} + \nabla_1 \otimes \tilde{\mathbf{D}}_{kl} + \mathbf{I}_{2N_c+1} \otimes \tilde{\mathbf{K}}_{kl} \tag{5.18}$$

La fonction à annuler $H_q(Z_q)$ reste identique à son expression précédente, à savoir :

$$H_q(Z_q) = \bar{\mathbf{A}}_{qq}(\boldsymbol{\omega})Z_q - b_q(Z_q, \boldsymbol{\omega}) \tag{5.19}$$

5.1.5 Continuation

Enfin, en ce qui concerne la continuation, la démarche générale présentée précédemment reste inchangée. Lorsqu'une analyse en fonction de la fréquence est menée, il est courant de considérer un paramètre de contrôle μ variant sur une plage donnée. Ce paramètre de contrôle est tel que toutes les fréquences d'excitations, incommensurables entre elles, sont proportionnelles à celui-ci. Par exemple, pour deux pulsations d'excitation incommensurables et dans un rapport $\sqrt{2}$, il est possible de choisir $\mu = \omega_1$ variant entre $\omega_{1,min}$ et $\omega_{1,max}$. ω_2 sera alors égal à $\sqrt{2}\mu$. Cependant, il peut être possible de ne faire varier qu'une seule fréquence ; l'algorithme multidimensionnel peut alors être substitué, dans le cas de deux fréquences uniquement, à un algorithme monofréquentiel lorsque la fréquence variante passe par un multiple de la seconde.

5.1.6 Nombre d'harmoniques

La qualité de l'approximation de la réponse $X(t)$ dépend fortement des combinaisons linéaires $\boldsymbol{k}_i$ des différentes pulsations d'excitation et de leur nombre N_c. Dans le cas monofréquentiel pour lequel le développement est réalisé suivant les harmoniques de la pulsation fondamentale (termes ω, 2ω, 3ω,...), le contenu fréquentiel se définit couramment par la seule donnée du nombre d'harmoniques considérés et la fréquence maximale du signal correspond au plus grand harmonique. Dans le cas multifréquentiel, la définition des combinaisons linéaires est plus complexe. En effet, certaines combinaisons peuvent conduire à une pulsation $\boldsymbol{k}.\boldsymbol{\omega}$ négative. De plus, une combinaison linéaire comportant des harmoniques élevés de chaque pulsation ω_i peut tout de même conduire à une pulsation très basse. Par exemple, dans le cas $p = 2$ pour $\omega_1 = 1$ et $\omega_2 = \sqrt{2}$, la combinaison $50\omega_1 - 35\omega_2 \approx 0.502$ aboutit à une pulsation inférieure aux deux pulsations d'excitation. Afin de se donner un ensemble de combinaisons linéaires simples à déterminer et en cohérence avec le cas monofréquentiel, plusieurs critères ont été développés. Ils sont discutables mais ont le mérite de balayer en premier les principales composantes généralement observées et observables (par exemple, du type $\omega_1 + \omega_2$, $\omega_1 - \omega_2$, $2\omega_1 - \omega_2$,...).

Tout d'abord, une première simplification est possible. Les fonctions que l'on cherche à représenter sont réelles ce qui permet de ne pas considérer les combinaisons $\boldsymbol{k}$ pour lesquelles la pulsation résultante $\boldsymbol{k}.\boldsymbol{\omega}$ est négative. Par conséquent, si $\boldsymbol{k}$ est retenu dans le développement, alors $-\boldsymbol{k}$ ne l'est pas.

Pour les critères proposés, la donnée d'un nombre N_h permet généralement de borner le nombre maximal d'harmoniques de chaque composante ω_i. Le premier critère proposé est le critère de Chua et Ushida [34] :

$$\sum_{i=1}^{p} |k_i| \leq N_h \tag{5.20}$$

En revanche, Legrand [97] propose la variante suivante :

$$|k_i| \leq N_h \ , \ \forall j \in [\![1; p]\!] \tag{5.21}$$

La formulation de Chua reste cohérente avec le cas monofréquentiel puisque le cas $N_h = 1$ correspond

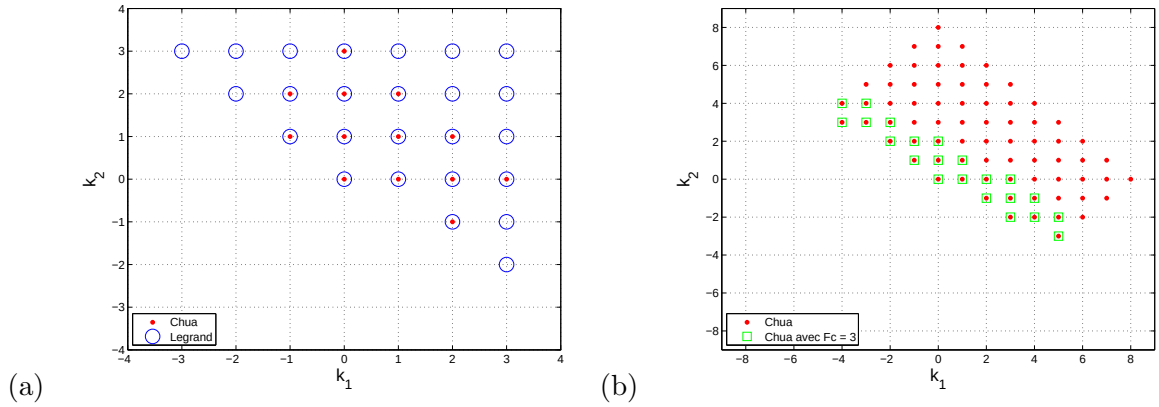


FIGURE 5.3 – Termes harmoniques ($p = 2$) pour différents critères : a) $N_h = 3$ b) $N_h = 8$.

à la prise en compte des combinaisons $(0, 0), (\omega_1, 0), (0, \omega_2)$. La formulation de Legrand ajoute le terme (ω_1, ω_2).

Enfin, il est possible de combiner ces critères avec une fréquence de coupure qui permet de conserver les combinaisons impliquant un ordre élevé d'harmoniques des composantes ω_i tout en conservant un nombre limité de combinaisons. La taille du système reste ainsi raisonnable.

On illustre les deux précédents critères en figure 5.3-a pour $p = 2$ et $N_h = 3$. Les deux fréquences sont $f_1 = 1$ et $f_2 = \sqrt{2}$. La non symétrie par rapport au point milieu s'explique par la suppression des pulsations négatives. La figure 5.3-b montre la comparaison entre un critère de type Chua et le même critère mais avec l'ajout du critère sur la fréquence de coupure. La fréquence de coupure vaut ici $f_c = 3$. Ce critère se montre intéressant vu le nombre important de combinaisons que cela nous permet d'omettre dans le développement de la réponse.

Dans la suite de ce mémoire, nous utiliserons un critère de Chua associé à une fréquence de coupure. Les pulsations négatives seront supprimées. Ainsi, les combinaisons des fréquences d'excitation seront uniquement déterminées par la donnée de N_h et de la fréquence de coupure f_c.

5.2 Balance harmonique multifréquentielle adaptative

Nous présentons ici l'extension de la méthodologie adaptative au cas de systèmes multifréquentiels. Le critère repose toujours sur l'énergie de déformation du système mais le suivi de cette énergie diffère par rapport au cas monofréquentiel dans la manière de considérer les différents termes de la série de Fourier multifréquentielle.

5.2.1 Energie de déformation approchée

5.2.1.1 Sans condensation

Dans le cas multifréquentiel, l'expression de l'énergie de déformation reste quasiment inchangée. L'équation 4.7 devient alors :

$$U = \frac{1}{2}^T X(\boldsymbol{\tau})\mathbf{K}X(\boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{2}^T Z^T \mathbf{T}_n(\boldsymbol{\tau})\mathbf{T}_n(\boldsymbol{\tau}) \left(\mathbf{I}_{2N_c+1} \otimes \mathbf{K}\right) Z \tag{5.22}$$

Le calcul de la valeur moyenne suivant chaque composante τ_i est ainsi possible :

$$\begin{aligned} < U > &= \frac{1}{(2\pi)^p} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} U(\boldsymbol{\tau}) d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_p \\ < U > &= \frac{1}{2}^T Z \left(\mathbf{L}_1 \otimes \mathbf{I}_n\right) \left(\mathbf{I}_{2N_c+1} \otimes \mathbf{K}\right) Z \\ < U > &= \frac{1}{2}^T Z \left(\mathbf{L}_1 \otimes \mathbf{K}\right) Z \end{aligned} \tag{5.23}$$

avec $\mathbf{L}_1$ matrice carré de taille $2N_c + 1$:

$$\mathbf{L}_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots \end{bmatrix} \tag{5.24}$$

5.2.1.2 Avec condensation

Dans le cas de l'utilisation d'une condensation, l'expression reste très proche. L'analogue du terme $\tilde{\mathbf{A}}(\Omega = 0)$ est alors $\tilde{\mathbf{A}}(\omega_1 = 0, \omega_2 = 0, \cdots, \omega_p = 0) = \mathbf{I}_{2N_c+1} \otimes \tilde{\mathbf{K}}$. Ainsi, en considérant toujours qu'aucune force ne s'exerce sur les degrés de liberté linéaires, la relation liant les degrés de liberté linéaires Z_p aux degrés de liberté non linéaires Z_q est exprimée pour $(\omega_1 = 0, \omega_2 = 0, \cdots, \omega_p = 0)$:

$$\begin{aligned} Z_p &= -\tilde{\mathbf{A}}_{pp}^{-1}(\omega_1 = 0, \omega_2 = 0, \cdots, \omega_p = 0)\tilde{\mathbf{A}}_{pq}(\omega_1 = 0, \omega_2 = 0, \cdots, \omega_p = 0) Z_q \\ Z_p &= -\left(\mathbf{L}_1^{-1} \otimes \tilde{\mathbf{K}}_{pp}^{-1}\right)\left(\mathbf{L}_1 \otimes \tilde{\mathbf{K}}_{pq}\right) Z_q \end{aligned} \tag{5.25}$$

L'expression de l'énergie de déformation approchée s'écrit de la même manière qu'en équation 4.12 :

$$< U >= \frac{1}{2}^T Z_q \left(\mathbf{L}_1 \otimes \bar{\mathbf{K}}_{qq}\right) Z_q \tag{5.26}$$

5.2.2 Extension du critère

Le critère permettant l'adaptation en ordre proposé au chapitre précédent se basait sur l'observation de l'évolution de l'énergie de déformation approchée lorsque le nombre d'harmoniques retenus dans le développement de la réponse augmentait. L'algorithme débutait pour 1 harmonique, puis augmentait de façon incrémentale le nombre d'harmoniques qui suivait alors l'évolution $(1, 2, 3, \cdots)$ ou $(1, 3, 5, \cdots)$ selon que les harmoniques pairs étaient conservés ou non.

Dans le cas multifréquentiel, le sens de parcours des différents harmoniques n'est plus aussi immédiat et plusieurs stratégies peuvent être envisagées. Tout d'abord, nous ne considérons pas les fréquences négatives et nous fixons une fréquence de coupure f_c pour la donnée des différentes combinaisons de pulsations d'excitation possibles. Ensuite, nous nous donnons un nombre $N_{h,max}$ assurant l'existence d'un nombre fini de combinaisons, noté $\mathcal{E}(N_{h,max}, f_c)$, dans la bande de fréquence $[0; f_c]$. Nous utiliserons le critère de Chua pour retenir les combinaisons, le critère de Legrand étant utilisable malgré tout. L'objectif est de déterminer un algorithme permettant le parcours de l'ensemble des combinaisons $\mathcal{E}$ dans un sens donné et cohérent. Le nombre de combinaisons possibles N_c (et donc d'éléments $\boldsymbol{k}$ de $\mathcal{E}$) augmente au fur et à mesure du parcours de $\mathcal{E}$ et la grandeur observée est alors :

$$\begin{aligned} < \hat{U} > &= {}^T Z \left(\mathbf{I}_{2N_c+1} \otimes \mathbf{K}\right) Z && \textit{sans condensation} \\ < \hat{U} > &= {}^T Z_q \left(\mathbf{I}_{2N_c+1} \otimes \bar{\mathbf{K}}_{qq}\right) Z_q && \textit{avec condensation} \end{aligned} \tag{5.27}$$

Une première stratégie envisageable est le parcours des combinaisons suivant les valeurs croissantes de la pulsation $\boldsymbol{k}.\boldsymbol{\omega}$. Cette stratégie augmente progressivement le contenu fréquentiel de la réponse mais présente l'inconvénient de ne pas capturer "rapidement" les combinaisons simples du type $\omega_1+\omega_2$ pour $p = 2$ par exemple. Une illustration de cette stratégie est donnée en figure 5.4 pour $p = 2$, $N_{h,max} = 3$, $f_c = 5$. Les deux fréquences f_1 et f_2 valent 1 et $\sqrt{2}$. On observe graphiquement le parcours de l'espace dans le repère (k_1, k_2). Dans l'exemple, l'harmonique $f_1 + f_2$, régulièrement rencontré sur cas réels, est seulement la 8e combinaison parcourue dans l'ordre des fréquences croissantes.

La seconde stratégie consiste à augmenter progressivement N_h jusqu'à $N_{h,max}$. Cette méthode permet de capturer rapidement les combinaisons simples et ne donne pas de priorité à une des composantes ω_i. L'inconvénient est l'ajout de plusieurs combinaisons lorsqu'on augmente N_h d'une unité. La figure 5.5 illustre cette stratégie pour le même exemple que précédemment. La pulsation $\omega_1 + \omega_2$ est retenue dès $N_h = 2$ et donc beaucoup plus rapidement que la première stratégie. Nous pouvons voir sur cet exemple que cette méthode consiste finalement à considérer l'ensemble des combinaisons possibles (aboutissant à une pulsation positive et inférieure à la pulsation maximale) qui se trouvent dans la boule de $\mathbb{R}^p$ centrée en $(0, \ldots, 0)$ et de rayon N_h. La norme associée (finalement le critère de Chua) est la norme $\mathcal{L}^1$ définie par :

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_p| \tag{5.28}$$

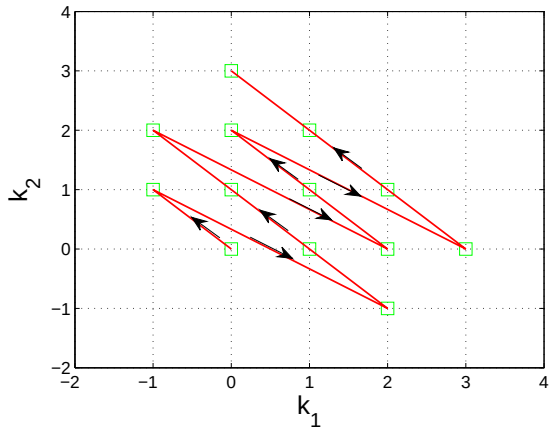


FIGURE 5.4 – Parcours des termes harmoniques par fréquence croissante : $p = 2$, $N_{h,max} = 3$, $f_c = 5$.

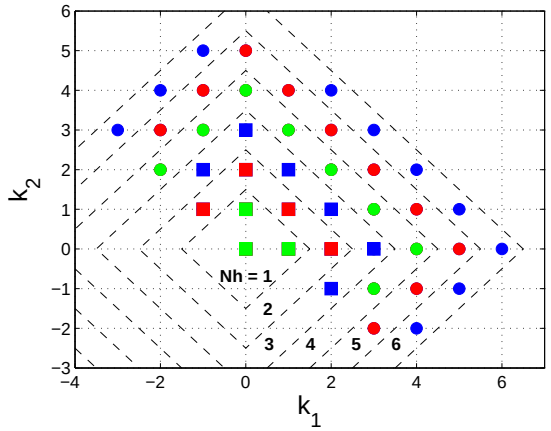
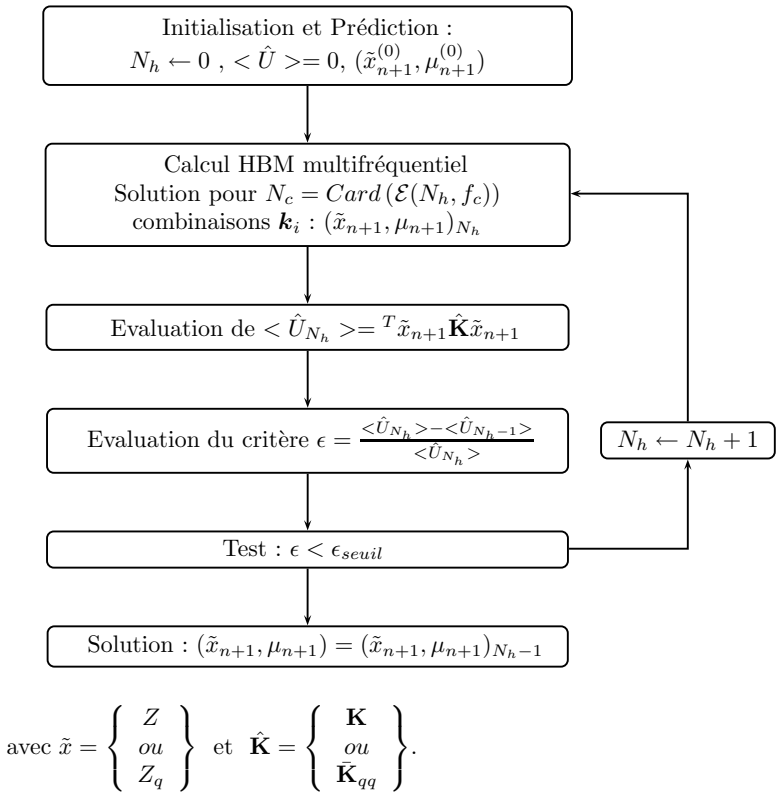


FIGURE 5.5 – Parcours des termes harmoniques par N_h croissant : $p = 2$, $N_{h,max} = 6$, $f_c = 8$.

Dans la suite de ce mémoire, nous utiliserons cette seconde stratégie pour la mise en place de la méthode de balance harmonique adaptative car celle-ci est cohérente avec l'approche retenue en monofréquentiel (si $p = 1$, on retrouve la même stratégie que celle proposée en monofréquentiel) et permet de prendre en compte très rapidement les combinaisons simples. La figure 5.6 récapitule la méthodologie employée.



avec $\tilde{x} = \left\{ \begin{array}{c} Z \\ ou \\ Z_q \end{array} \right\}$ et $\hat{\mathbf{K}} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{K} \\ ou \\ \bar{\mathbf{K}}_{qq} \end{array} \right\}$.

FIGURE 5.6 – Algorithme HBM adaptatif multifréquentiel.

5.3 Application aux amortisseurs à frottement sec

5.3.1 Présentation du dispositif

On se propose dans ce chapitre d'appliquer la méthodologie adaptative multifréquentielle sur un dispositif expérimental amorti par amortisseur à frottement. Ce dispositif est représentatif d'un tronçon de lanceur et est illustré par le schéma en figure 5.7. Une structure cylindrique compose la partie principale du tronçon. A l'intérieur de la partie cylindrique, un lest est inséré pour représenter un équipement (réservoir, propulseur,...). L'équipement présente un mode de suspension (appelé mode de pendule) dont la fréquence propre est déterminée par la raideur des ressorts liant le lest avec le reste de la structure. L'objet de cette étude est d'amortir et de contrôler les vibrations du mode de pendule en introduisant trois amortisseurs à frottement entre l'équipement et la partie externe du dispositif.

Le modèle numérique développé pour les simulations résulte de la condensation d'un modèle initial plus large. Seuls quelques noeuds d'interface ont été conservés afin de réduire au maximum la taille de la structure condensée. La répartition géométrique des noeuds conservés est présentée en figure 5.8. Le noeud 1 modélise l'interface basse de la structure qui permet la connexion avec le reste du lanceur.

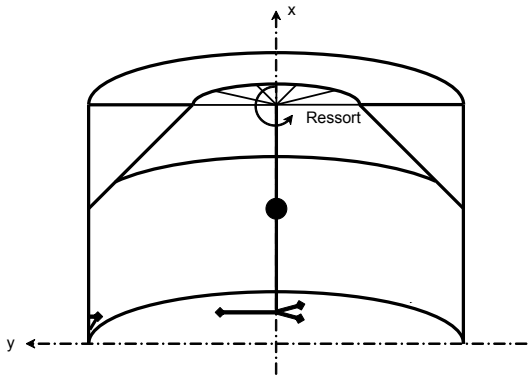


FIGURE 5.7 – Schéma du dispositif expérimental.

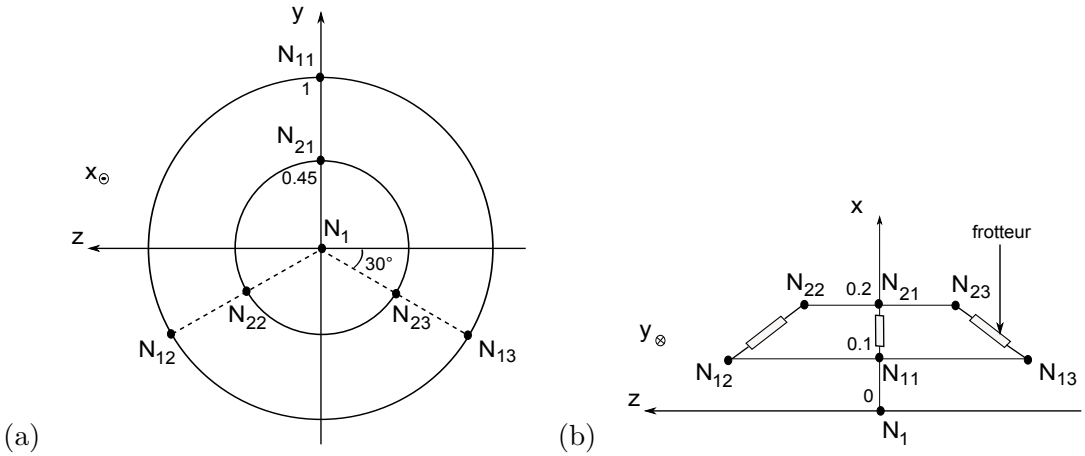


FIGURE 5.8 – Schéma du dispositif expérimental : a) Vue du dessus b) Vue latérale.

L'interface de connexion est alors considérée rigide et décrite uniquement par le mouvement du noeud 1. Les six autres noeuds du modèle sont les noeuds "non linéaires" d'attache des trois amortisseurs. Ainsi trois noeuds sont situés sur la partie externe de la partie cylindrique et trois autres sur l'interface basse de l'équipement.

Six degrés de liberté par noeuds sont retenus et 10 degrés de liberté supplémentaires sont utilisés suite à la réduction du modèle. En effet, 10 modes ont été conservés pour réaliser une condensation dynamique de type Craig-Bampton. Finalement, le modèle regroupe donc 52 degrés de liberté.

Le modèle est réalisé sous SAMCEF et la condensation de Craig-Bampton a permis l'extraction des matrices condensées du modèle. L'amortissement du modèle considère un amortissement modal de 2% sur les 30 premiers modes de la structure et recalcule ensuite une matrice d'amortissement structurale à partir de la matrice des amortissements modaux et des modes propres.

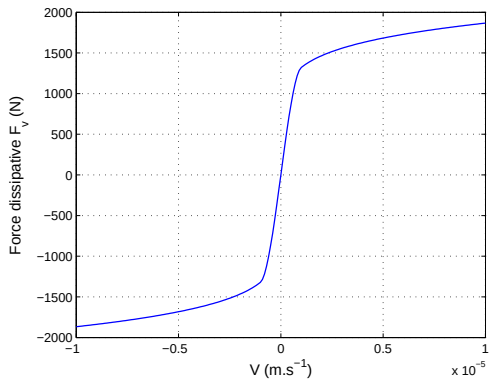


FIGURE 5.9 – Caractéristiques de la force dissipative.

La structure sera étudiée ici en réponse à une accélération imposée par le reste du lanceur et agissant sur la base de la structure. Ainsi, le noeud d'interface 1 aura une accélération imposée dans la direction radiale de la partie cylindrique. La direction choisie sera la composante suivant l'axe y. L'analyse sera menée sur la bande de fréquence $[0\ \ 100]\ Hz$ sachant que le mode de pendule se situe vers $30Hz$. Dans un premier temps, l'analyse sera monofréquentielle avec une accélération harmonique sur le noeud 1. Une amplitude crête de $1g$ sera appliquée. Dans un second temps, le comportement de la structure sera observé lors d'une excitation bifréquentielle. Une accélération quasipériodique comportant deux fréquences incommensurables f_1 et $\sqrt{2}f_1$ sera appliquée sur le même noeud 1. Chaque composante aura une amplitude de $1g$.

5.3.2 Modèle d'amortisseur

Les trois amortisseurs à frottement insérés sont modélisés de façon simple par une association en série d'un ressort et d'un frotteur. Le ressort permet de rendre compte de la raideur du contact et de la tige de l'amortisseur. Ce ressort a pour raideur $k_r = 10^8 N/m$. Le dissipateur suit une loi dépendante de la vitesse et identifiée expérimentalement. Sa caractéristique est tracée en figure 5.9. Cette loi est une loi puissance avec un exposant de 0.15. Une interpolation polynomiale cubique a été réalisée autour de O pour éviter une pente infinie à l'origine. La fonction utilisée est donc décrite de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
F_v(v) &= -10500\,|v|^{0.15} && pour\ \ v < -10^{-6} \\
F_v(v) &= 1.88.10^9 v - 5.62.10^{20} v^3 && pour\ \ -10^{-6} < v < 10^{-6} \\
F_v(v) &= 10500\,|v|^{0.15} && pour\ \ v > 10^{-6}
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Une représentation schématique du frotteur est donnée en figure 5.10. Cet amortisseur regroupe deux degrés de liberté qui sont notés ici X_{1001} et X_{1011}. Le premier degré de liberté X_{1001} est une

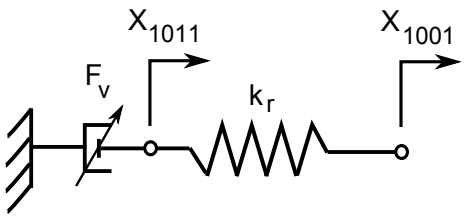


FIGURE 5.10 – Modèle d'amortisseur.

mesure de l'allongement de la distance entre les noeuds N_{11} et N_{21} de la structure. Le premier des 3 frotteurs étant inséré entre ces noeuds, le degré de liberté X_{1001} représente l'allongement du frotteur. Le second degré de liberté X_{1011} correspond à la variable interne du frotteur. C'est le déplacement de ce degré de liberté qui entraîne le déplacement du dissipateur et donc l'amortissement de la structure. Ainsi la variable v de la loi du frotteur précédemment décrite correspond à la dérivée du degré de liberté X_{1011} et donc $v = \dot{X}_{1011}$. Les numérotations décrites précédemment correspondent évidemment au frotteur 1. Les degrés de liberté 1002, 1012, 1003 et 1013 sont affectés pour les frotteurs 2 et 3 entre les noeuds N_{12} et N_{22} et les noeuds N_{13} et N_{23}.

Enfin, la fonction décrivant le frotteur étant impaire, les harmoniques pairs dans le cas monofréquentiel et les pulsations $\omega = k_1\omega_1 + k_2\omega_2$ telles que la somme $|k_1| + |k_2|$ soit paire dans le cas bifréquentiel ne seront pas retenus dans le développement en série de Fourier de la méthode de balance harmonique.

5.4 Formulation en accélération imposée

Les cas de charge dimensionnants sont généralement donnés par des accélérations imposées. Nous sommes dans ce cas pour notre application. Les méthodes qui permettent de prendre en compte une accélération imposée sont les méthodes d'ajout d'une masse ou d'une raideur ou les méthodes de multiplicateurs de Lagrange. Toutefois ces méthodes entraînent des matrices mal conditionnées (ajout d'une masse importante ponctuelle) ou demandent un effort de programmation important. Dans le cas d'une étude fréquentielle pour laquelle les accélérations sont périodiques ou quasi-périodiques, il est aisé de reformuler les équations de la technique de balance harmonique afin de calculer la réponse du système. Le système non linéaire à résoudre est alors diminué de $(2N_c+1)n_{imp}$ équations, où n_{imp} est le nombre de degrés de liberté pour lesquelles une accélération est imposée. Dans cette section, nous présentons la méthodologie qui est utilisée dans le reste de l'étude.

5.4.1 Représentation harmonique

Considérons tout d'abord le cas simple où une accélération harmonique d'amplitude crête g_{a_1} à une pulsation ω_1 est imposée sur un degré de liberté de la structure $x_1(t)$. Le déplacement de ce degré de liberté s'écrit alors $x_1(t) = g_{a_1}/\omega_1^2 sin(\omega_1 t)$ et le vecteur des coefficients de Fourier associés est $z_1 = \begin{bmatrix} 0 & g_{a_1}/\omega_1^2 & 0 \end{bmatrix}$ pour un harmonique considéré et un terme constant. Si l'accélération n'est pas sinusoïdale il peut être possible de calculer ses coefficients de Fourier tels que :

$$\ddot{x}_1(t) = g_{a_1} sin(\omega_1 t) + g_{a_2} sin(\omega_2 t) + ... \tag{5.30}$$

L'expression du déplacement est alors :

$$x_1(t) = g_{a_1}/\omega_1^2 sin(\omega_1 t) + g_{a_2}/4\omega_1^2 sin(2\omega_1 t) + ... \tag{5.31}$$

Le vecteur des coefficients de Fourier s'écrit $z_1 = \begin{bmatrix} 0 & g_{a_1}/\omega_1^2 & 0 & g_{a_2}/4\omega_1^2 & 0 & \ldots \end{bmatrix}$.

Dans le cas d'analyses multifréquentielles, les accélérations imposées à des fréquences différentes sont généralement appliquées sur des degrés de liberté différents car provenant de deux systèmes distincts. Prenons par exemple le cas de deux degrés de liberté x_1 et x_2 pour lesquelles des accélérations d'amplitude g_{1,a_1} et g_{2,a_1} sont appliquées à deux pulsations incommensurables ω_1 et ω_2. En considérant les combinaisons de fréquences $(0, \omega_1, \omega_2, \omega_1+\omega_2)$, les expressions des coefficients de Fourier z_1 et z_2 s'expriment alors par les relations :

$$\begin{aligned} z_1 &= \begin{bmatrix} 0 & g_{1,a_1}/\omega_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ z_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & g_{2,a_1}/\omega_2^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.32}$$

Considérons désormais l'écriture dans le cas général d'un système à n degrés de liberté $X(t) \in \mathbb{R}^n$. Un nombre n_{imp} de degrés de liberté $X_{imp}(t)$ subissent une accélération imposée. Ces accélérations imposées ont des pulsations différentes. p pulsations différentes sont présentes. Le problème est résolu

par balance harmonique en recherchant la solution sur un ensemble de combinaisons linéaires des pulsations d'excitation. L'ensemble des combinaisons est noté $\mathcal{E}(N_h, f_c)$ en utilisant un critère de Chua avec fréquence de coupure. Nous notons $N_c = Card(\mathcal{E}(N_h, f_c))$ le nombre de combinaisons non nulles.

Les accélérations imposées sont toutes monofréquentielles, c'est-à-dire que les fréquences sont du type ω_1, $2\omega_1$, ω_2 (et non pas $\omega_1 + \omega_2$). Appelons $\mathcal{E}^*(N_h, f_c)$ l'ensemble des combinaisons monofréquentielles :

$$\mathcal{E}^*(N_h, f_c) = \{\boldsymbol{k} \in \mathcal{E}(N_h, f_c) \quad | \quad \exists i \in [\![1; p]\!], \quad k_i \neq 0 \quad et \quad \forall j \in [\![1; p]\!], \quad j \neq i \Rightarrow k_j = 0\} \tag{5.33}$$

$\mathcal{E}^*(N_h, f_c)$ représente les points retenus non nuls sur l'axe des abscisses et des ordonnées dans le cas $p = 2$.

L'écriture générale des accélérations imposées est donc :

$$\ddot{X}_{imp}(t) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathcal{E}^*(N_h, f_c)} A_{imp,\boldsymbol{k}} sin(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{\omega} t) + B_{imp,\boldsymbol{k}} cos(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{\omega} t) \tag{5.34}$$

Les déplacements associés sont :

$$X_{imp}(t) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathcal{E}^*(N_h, f_c)} \frac{A_{imp,\boldsymbol{k}}}{(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{\omega})^2} sin(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{\omega} t) + \frac{B_{imp,\boldsymbol{k}}}{(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{\omega})^2} cos(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{\omega} t) \tag{5.35}$$

Les coefficients de Fourier Z_{imp} peuvent donc s'exprimer simplement par l'écriture suivante :

$$Z_{imp} = \left[0 \quad \underbrace{\frac{A_{imp,\boldsymbol{k}}}{(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{\omega})^2} \quad \frac{B_{imp,\boldsymbol{k}}}{(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{\omega})^2}}_{\boldsymbol{k} \in \mathcal{E}^*(N_h, f_c)} \quad \cdots \quad \underbrace{0 \quad 0}_{\boldsymbol{k} \notin \mathcal{E}^*(N_h, f_c)} \right]^T \tag{5.36}$$

Une fois cette écriture établie, les degrés de liberté du système doivent être séparés entre X_{imp} et les degrés de liberté non imposés X_f. Avec le même raisonnement qu'utilisé en équation 3.22, il existe une matrice booléenne de passage $\check{\mathbf{P}}$ telle que :

$$X = \check{\mathbf{P}} \begin{bmatrix} X_{imp} \\ X_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \check{\mathbf{P}}_{imp} & \check{\mathbf{P}}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{imp} \\ X_f \end{bmatrix} \tag{5.37}$$

Ainsi les coefficients de Fourier sont réorganisés :

$$Z = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2N_c+1} \otimes \check{\mathbf{P}}_{imp} \mid \mathbf{I}_{2N_c+1} \otimes \check{\mathbf{P}}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{imp} \\ Z_f \end{bmatrix} \tag{5.38}$$

5.4.2 Formulation générale

A partir de cette notation et de la séparation des degrés de liberté du système, il est possible de reformuler le problème à résoudre. Le système obtenu par application de la technique de balance harmonique s'écrit de façon générale :

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\omega})Z = b(Z, \boldsymbol{\omega}) \tag{5.39}$$

Il est alors possible de réordonner les degrés de liberté :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} {}^T\left(\mathbf{I}_{2N_c+1} \otimes \check{\mathbf{P}}_{imp}\right) \\ {}^T\left(\mathbf{I}_{2N_c+1} \otimes \check{\mathbf{P}}_f\right) \end{bmatrix} \mathbf{A} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_{2N_c+1} \otimes \check{\mathbf{P}}_{imp} & \mathbf{I}_{2N_c+1} \otimes \check{\mathbf{P}}_f \end{array} \right] \begin{bmatrix} Z_{imp} \\ Z_f \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} b_{imp} \\ b_f \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \check{\mathbf{A}}_{imp,imp} & \check{\mathbf{A}}_{imp,f} \\ \check{\mathbf{A}}_{f,imp} & \check{\mathbf{A}}_{f,f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{imp} \\ Z_f \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} b_{imp} \\ b_f \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.40}$$

Connaissant Z_{imp}, les inconnues à déterminer sont Z_f et les efforts de réaction b_imp. Le système à résoudre peut alors se ramener à la résolution d'une fonction $\check{H} : I\!R^{(2N_c+1)\times(n-n_{imp})} \rightarrow I\!R^{(2N_c+1)\times(n-n_{imp})}$:

$$\check{H}(Z_f) = \check{\mathbf{A}}_{f,f}(\boldsymbol{\omega})Z_f - b_f(Z, \boldsymbol{\omega}) - \check{\mathbf{A}}_{f,imp}(\boldsymbol{\omega})Z_{imp} \tag{5.41}$$

Les efforts sur les degrés de liberté imposés sont calculés ensuite simplement par la relation :

$$b_{imp} = \check{\mathbf{A}}_{imp,imp}Z_{imp} + \check{\mathbf{A}}_{imp,f}Z_f \tag{5.42}$$

5.4.3 Condensation

Dans le cas d'une condensation interne, le même raisonnement peut être appliqué à la fonction H_q à résoudre en décomposant X_q entre les degrés de liberté imposés $X_{q,imp}$ et les libres $X_{q,f}$. Avant transformation, le système est le suivant :

$$\bar{\mathbf{A}}_{qq}(\boldsymbol{\omega})Z_q = b_q(Z_q, \boldsymbol{\omega}) \tag{5.43}$$

La réorganisation des degrés de liberté amène à :

$$\begin{bmatrix} \check{\bar{\mathbf{A}}}_{qq,imp,imp} & \check{\bar{\mathbf{A}}}_{qq,imp,f} \\ \check{\bar{\mathbf{A}}}_{qq,f,imp} & \check{\bar{\mathbf{A}}}_{qq,f,f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{q,imp} \\ Z_{q,f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{q,imp} \\ b_{q,f} \end{bmatrix} \tag{5.44}$$

Le système se ramène à la résolution d'une fonction $\check{H}_q : I\!R^{(2N_c+1)\times(q-n_{imp})} \rightarrow I\!R^{(2N_c+1)\times(q-n_{imp})}$:

$$\check{H}_q(Z_{q,f}) = \check{\bar{\mathbf{A}}}_{qq,f,f}(\boldsymbol{\omega})Z_{q,f} - b_{q,f}(Z_q, \boldsymbol{\omega}) - \check{\bar{\mathbf{A}}}_{qq,f,imp}(\boldsymbol{\omega})Z_{q,imp} \tag{5.45}$$

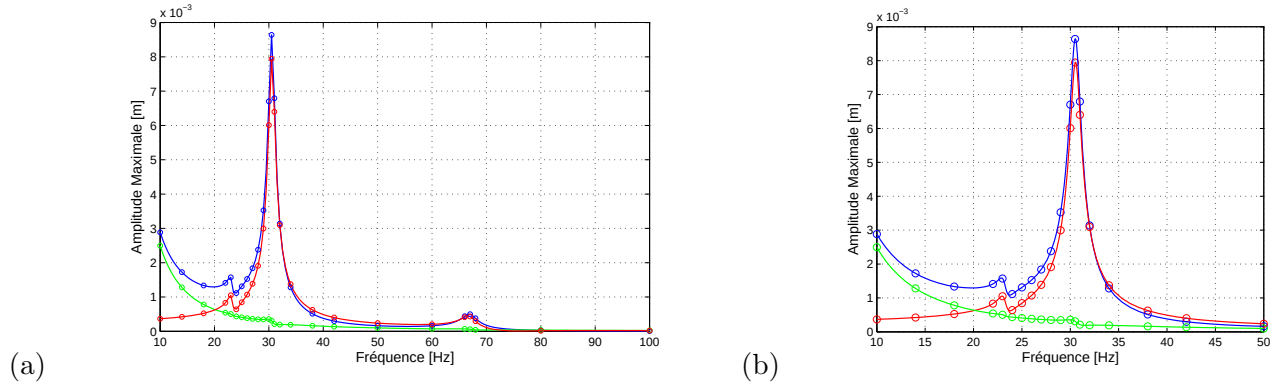


FIGURE 5.11 – Réponse monofréquentielle sans amortisseur - Comparaison entre HBM (–) et Intégration Temporelle Samcef (o) : a) sur $[10\ \ 100]\,Hz$; b) zoom sur le mode de pendule. Légende : (–,o) $Y_{N_{21}}$; (–,o) X_{1001} ; (–,o) $Y_{N_{11}}$.

5.5 Résultats

Dans cette section, nous présentons les résultats obtenus lors de la simulation du dispositif expérimental. Les simulations avec et sans amortisseurs permettent d'analyser l'effet de ces derniers sur les amplitudes vibratoires de la structure autour du mode de pendule.

Les réponses en fréquence sont calculées en utilisant une méthode de balance harmonique multifréquentielle, y compris pour les simulations monofréquentielles. La formulation utilise trois variables internes et applique une accélération imposée comme vu au paragraphe précédent. La condensation interne à la méthode de balance harmonique n'est pas utilisée. Les harmoniques pairs ne sont pas pris en compte dans le cas monofréquentiel. En bifréquentiel, les pulsations $\omega = k_1\omega_1 + k_2\omega_2$ telles que la somme $|k_1| + |k_2|$ soit paire ne sont pas retenues non plus.

Des comparaisons sont réalisées avec les résultats obtenus par intégration temporelle sous SAMCEF.

5.5.1 Réponse à une excitation monofréquentielle

5.5.1.1 Structure seule

En l'absence d'amortisseurs, la structure linéaire présente un mode de pendule autour de $30.5Hz$. Un calcul par balance harmonique à un harmonique a permis de calculer la réponse du dispositif sur $[10\ \ 100]\,Hz$. Nous présentons en figures 5.11-a et 5.11-b l'amplitude vibratoire obtenue pour trois grandeurs : le déplacement dans la direction y du noeud N_{11} que nous noterons $Y_{N_{11}}$, l'analogue pour le noeud N_{21} noté $Y_{N_{21}}$, et la distance entre les noeuds N_{11} et N_{21} correspondant à X_{1001}.

Nous pouvons noter la présence d'un autre mode vers $67Hz$. De plus, la distance entre les deux noeuds atteint un maximum de $7.9mm$ autour du mode de pendule. C'est ce débattement qui va ensuite être atténué par les amortisseurs. Enfin, les tracés obtenus par intégration temporelle montrent la bonne corrélation entre l'intégration temporelle et la méthode de balance harmonique en linéaire.

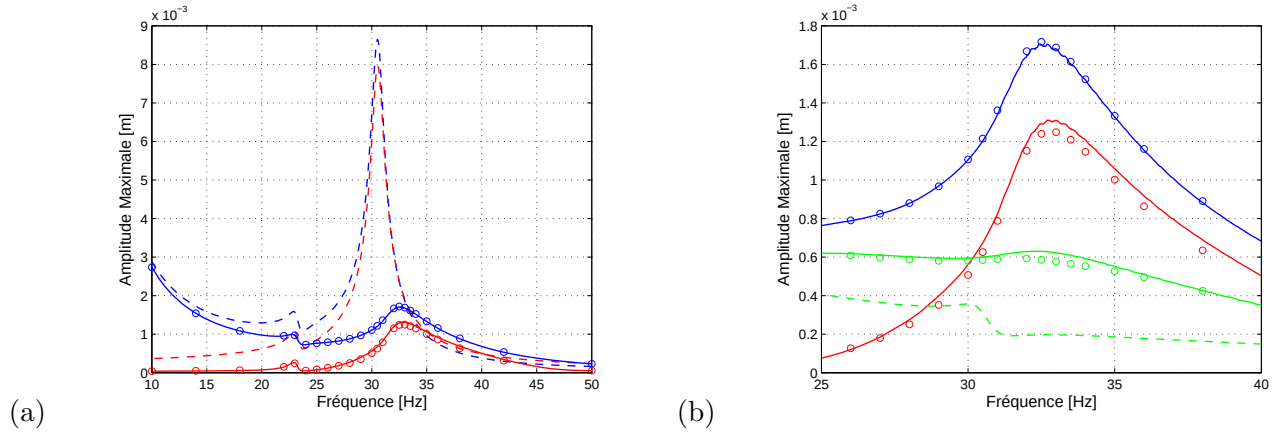


FIGURE 5.12 – Réponse monofréquentielle avec amortisseurs : a) sur $[10\ \ 50]\,Hz$; b) sur $[25\ \ 40]\,Hz$. Légende : (–) HBM avec 3 harmoniques ; (o) Intégration Temporelle Samcef ; (- -) Rappel des résultats sur structure non amortie (HBM avec 1 harmonique) ; (–,o,- -) $Y_{N_{21}}$; (–,o,- -) X_{1001} ; (–,o,- -) $Y_{N_{11}}$.

5.5.1.2 Structure amortie

Lorsque les trois amortisseurs sont intégrés dans le dispositif, l'amplitude des vibrations de l'équipement est réduit de façon significative comme le montrent les figures 5.12-a et 5.12-b. La réponse amortie obtenue par balance harmonique à 3 harmoniques et la réponse obtenue par intégration temporelle sont superposées avec la réponse de la structure non amortie linéaire. Les mêmes degrés de liberté qu'au paragraphe précédent sont représentés. Nous pouvons voir que l'amplitude de vibration du noeud N_{21} dans la direction y est passée d'un maximum de $8.6mm$ dans le cas non amorti à un maximum de $1.7mm$. L'amplitude a ainsi été diminuée par 5. De même, le débattement maximal du frotteur est d'environ $1.25mm$ et a donc été divisé par 6. En revanche, le déplacement du noeud N_{11} a été augmenté.

En plus de cet effet amortissant, il faut noter le décalage fréquentiel de la résonance du mode de pendule qui se trouve désormais aux alentours de $32.5Hz$ contre $30.5Hz$ dans le cas non amorti. La raideur des amortisseurs semblent jouer un rôle dans ce décalage.

Du point de vue de la corrélation entre intégration temporelle et balance harmonique, les résultats semblent satisfaisants pour 3 harmoniques retenus dans la balance harmonique. La comparaison des résultats obtenus pour 1 et 3 harmoniques, présentés en figures 5.13-a et 5.13-b, montre qu'un écart significatif est présent entre les réponses à 1 et 3 harmoniques. L'écart entre le maximum du déplacement $Y_{N_{21}}$ à l'ordre 1 et celui à l'ordre 3 représente ainsi 15% du maximum obtenu par intégration temporelle. Cet écart n'est pas du même ordre de grandeur pour tous les degrés de liberté puisqu'il est par exemple de l'ordre de 3.5% pour le degré de liberté $Y_{N_{11}}$.

L'algorithme adaptatif a ensuite été appliqué sur ce cas. Le critère d'arrêt a été fixé pour une va-

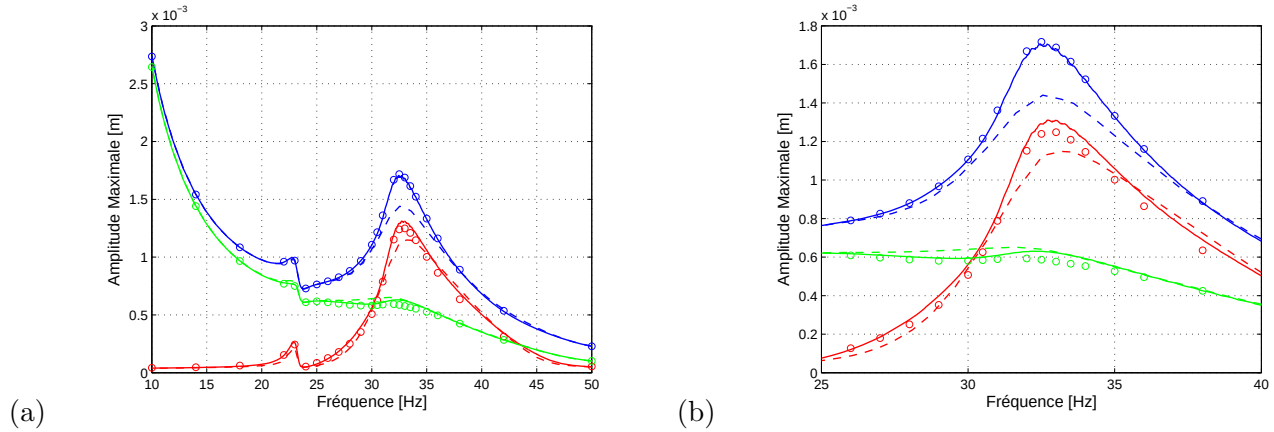


FIGURE 5.13 – Influence du troisième harmonique : a) sur $[10\ \ 50]\,Hz$; b) sur $[25\ \ 40]\,Hz$. Légende : (–) HBM avec 3 harmoniques ; (- -) HBM avec 1 harmonique ; (o) Intégration Temporelle Samcef ; (–,o,- -) $Y_{N_{21}}$; (–,o,- -) X_{1001} ; (–,o,- -) $Y_{N_{11}}$.

riation relative de l'énergie de déformation du système inférieure à 5%. Les résultats obtenus sont présentés en figure 5.14-a. La méthode de balance harmonique met en évidence l'importance de considérer l'ordre 3 au passage de la résonance du mode de pendule, approximativement entre 31 et $35Hz$. Le nombre d'harmoniques retenus par l'algorithme est mentionné en figure 5.14-b et atteint une valeur maximale de 5.

Enfin, l'analyse du débattement de la variable interne du frotteur 1, noté X_{1011}, montre que l'amplitude vibratoire est très proche du débattement du frotteur et est présentée en figure 5.15. La raideur élevée de l'amortissement explique ce faible écart.

Le calcul monofréquentiel réalisé a ainsi permis d'illustrer la dynamique non amortie et amortie du dispositif. Avec l'introduction des amortisseurs, nous avons pu constater que la réduction des amplitudes vibratoires de l'équipement est significative. En outre, nous avons vu l'importance de retenir trois harmoniques au passage de la résonance, ce qui a pu être confirmé par l'application de l'algorithme adaptatif. Ce dernier a en effet retenu au moins trois harmoniques au passage de la résonance.

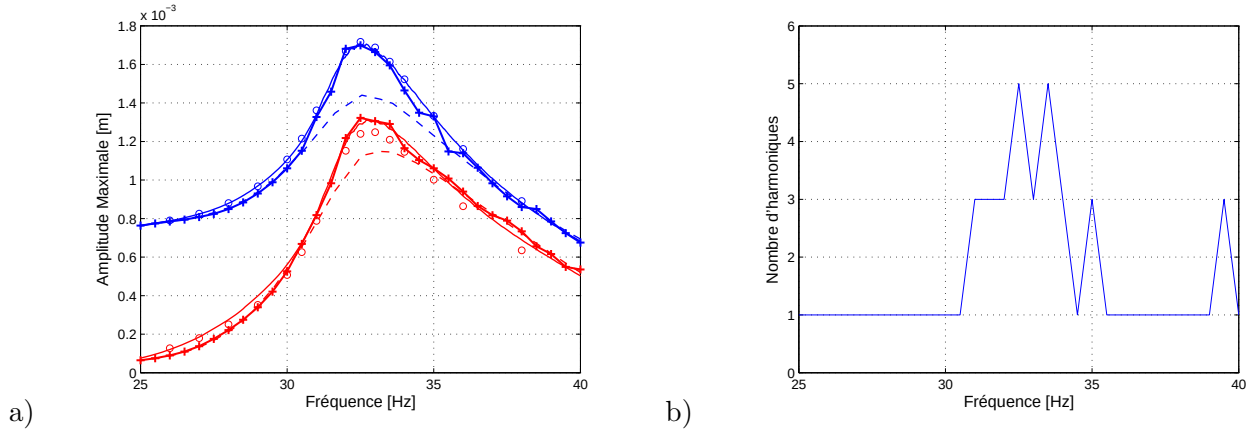


FIGURE 5.14 – a) Réponse monofréquentielle en utilisant l'algorithme adaptatif : (-+-) HBM Adaptative ; (–) HBM avec 3 harmoniques ; (- -) HBM avec 1 harmonique ; (o) Intégration Temporelle Samcef ; (-+-,–,- -,o) $Y_{N_{21}}$; (-+-,–,- -,o) X_{1001} ; b) Nombre d'harmoniques obtenus pour une valeur seuil de 0.05.

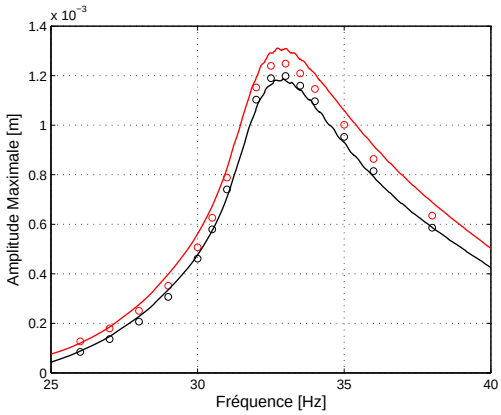


FIGURE 5.15 – Déplacement de la variable interne X_{1011} : (–) HBM avec 3 harmoniques ; (o) Intégration Temporelle Samcef ; (–,o) X_{1001} ; (–,o) X_{1011}.

5.5.2 Réponse à une excitation bifréquentielle

Nous appliquons désormais une accélération comportant deux fréquences incommensurables ω et $\sqrt{2}\omega$. Les calculs sont effectués en utilisant l'algorithme de balance harmonique multifréquentiel. La continuation est réalisée en faisant varier le paramètre $\omega_1 = \omega$. La seconde composante fréquentielle ω_2 varie dans le même temps en conservant un rapport $\sqrt{2}$ avec ω_1.

Pour les tracés de réponse en fréquence, le calcul de l'amplitude maximale de vibration n'a plus de sens. La norme du vecteur des coefficients de Fourier représentant le degré de liberté observé est donc

calculée à chaque fréquence et reportée sur le graphe associé. Pour Nc combinaisons de fréquence, la grandeur calculée est scalaire et s'écrit pour un degré de liberté :

$$\left\| b_0 \; a_{\boldsymbol{k}_1} \; b_{\boldsymbol{k}_1} \; \ldots \; a_{\boldsymbol{k}_{N_c}} \; b_{\boldsymbol{k}_{N_c}} \right\| \tag{5.46}$$

Des comparaisons avec les résultats obtenus par intégration temporelle via Samcef sont réalisées. Pour chaque fréquence d'excitation ω_1, le spectre de la réponse temporelle en régime stationnaire du degré de liberté observé est calculée de façon à déduire les coefficients de chaque harmonique prépondérant dans la réponse. La norme du vecteur des coefficients est ensuite calculée puis reportée sur le graphe. La comparaison avec les résultats obtenus par la méthode de balance harmonique multifréquentielle est alors possible.

Ce post-traitement est long et fastidieux puisqu'il nécessite de calculer la réponse du système sur un intervalle de temps suffisamment long pour obtenir un spectre de qualité. De plus, l'analyse du spectre doit être effectuée avec précision pour permettre une lecture correcte des amplitudes de chaque harmonique. Ces limitations mettent en avant l'intérêt de l'utilisation de la méthode de balance harmonique multifréquentielle qui permet de calculer facilement l'ensemble de la réponse sur une plage de fréquence donnée.

5.5.2.1 Structure seule

L'application d'une accélération bifréquentielle sur le noeud N_1 permet d'obtenir sur une structure sans amortisseur les réponses dynamiques présentées en figure 5.16. Les degrés de liberté $Y_{N_{21}}$ et X_{1001} sont suivis. Les résultats sur structure non amortie en monofréquentiel ont été ajoutés pour comparaison.

Tout d'abord, comme attendu, nous pouvons mentionner la présence de deux pics de résonance principaux (voir figure 5.16). Le premier se situe à la fréquence du mode de pendule $30.5Hz$ et le deuxième à la fréquence du mode de pendule divisée par $\sqrt{2}$ soit $21.5Hz$. Un troisième pic est observé pour $47.5Hz$. Ce pic correspond à la fréquence du mode à $67Hz$ divisée par $\sqrt{2}$.

De plus, les amplitudes vibratoires sont les mêmes que celles observées en monofréquentiel comme le montre la comparaison des superpositions des courbes en monofréquentiel et bifréquentiel au niveau du mode de pendule. Cette constatation est possible puisque l'amplitude de l'accélération de chaque composante fréquentielle est de $1g$ et donc la même qu'en monofréquentiel.

Enfin, deux calculs temporels ont été réalisés au niveau des deux pics principaux et montrent que l'amplitude calculée est très proche de celle obtenue par balance harmonique multifréquentielle.

Ces différentes observations valident partiellement le calcul effectué par balance harmonique multifréquentielle. De plus les résultats de ce cas linéaire vont permettre de qualifier la réduction obtenue par l'introduction des dissipateurs.

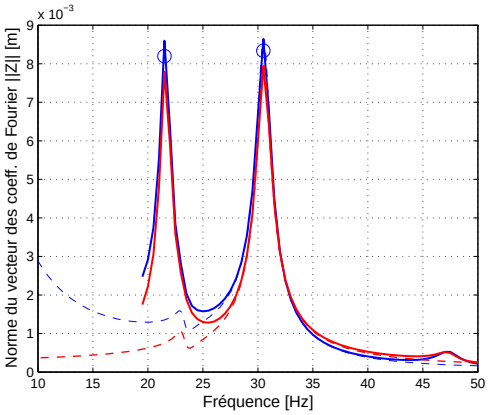
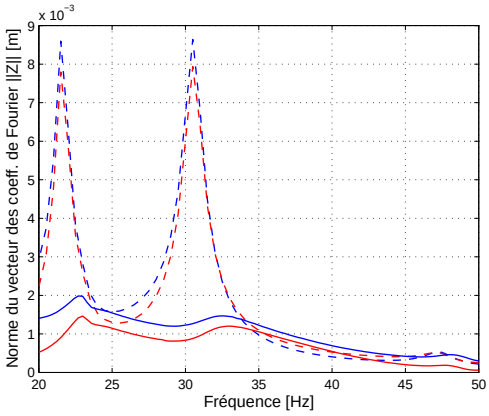
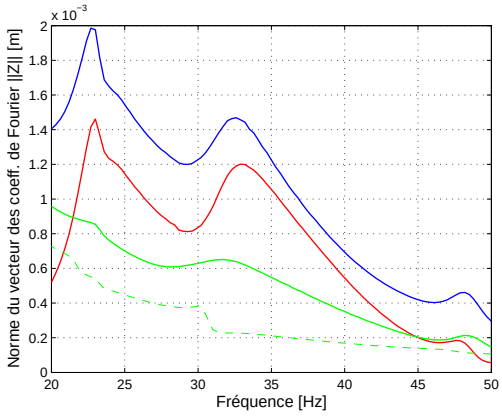


FIGURE 5.16 – Réponse bifréquentielle sans amortisseur : (–) Réponse bifréquentielle (HBM bifréquentielle avec $Nh = 1$) ; (- -) Rappel de la réponse monofréquentielle (HBM monofréquentielle à 1 harmonique) ; (o) Intégration Temporelle Samcef ; (–,- -,o) $Y_{N_{21}}$; (–,- -) X_{1001}.



(a)



(b)

FIGURE 5.17 – Réponse bifréquentielle avec amortisseurs : a) sur $[10\ \ 50]\,Hz$; b) sur $[20\ \ 50]\,Hz$. Légende : (–) HBM avec $N_h = 1$; (- -) Rappel des résultats sur structure non amortie (HBM avec $N_h = 1$) ; (–,- -) $Y_{N_{21}}$; (–,- -) X_{1001} ; (–,- -) $Y_{N_{11}}$.

5.5.2.2 Structure amortie

La structure amortie présente toujours deux pics de résonance principaux mais leur fréquence a été modifiée. Ils sont observés pour $22.7Hz$ et $32.5Hz$. La figure 5.17 présente une comparaison entre la structure non amortie et la structure amortie. La réponse pour une balance harmonique avec $N_h = 1$ y est représentée. La réduction est toujours significative puisque les amplitudes sont divisées par au moins un facteur 5.

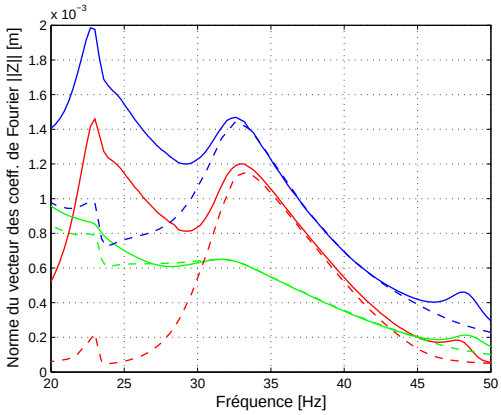


FIGURE 5.18 – Comparaison entre réponse mono- et bi- fréquentielle : (–) Réponse bifréquentielle (HBM avec $N_h = 1$) ; (- -) Réponse monofréquentielle (HBM avec 1 harmonique) ; (–,- -) $Y_{N_{21}}$; (–,- -) X_{1001} ; (–,- -) $Y_{N_{11}}$.

De plus, il faut noter que les deux pics ne présentent plus une amplitude similaire. Ceci peut s'expliquer par la présence d'un pic de résonance sur la réponse monofréquentielle aux alentours de $23Hz$ comme précédemment observé en figures 5.11-a et 5.12-a. Ce pic vient ensuite interagir avec le pic observé en bifréquentiel et en linéaire vers $22.7Hz$ qui s'est décalé de quelques Hz après l'introduction des amortisseurs.

Il est possible de comparer aux alentours du mode de pendule les réponses mono- et bi-fréquentielles. La figure 5.18 montre ainsi que la norme du vecteur des coefficients de Fourier en bifréquentiel est très proche de celle en monofréquentiel aux alentours du mode de pendule vers $32.5Hz$. La structure répond alors quasiment uniquement sur l'harmonique [1 0]. Dans l'optique d'amortir la vibration du mode de pendule, l'efficacité des amortisseurs n'est pas altérée par la présence d'une seconde composante fréquentielle.

La figure 5.19 met en évidence l'importance de considérer les harmoniques d'ordres supérieurs et donc les combinaisons $(k_1\omega_1 + k_2\omega_2)$ telles que $k_1 + k_2 = 3$. La comparaison en quelques points avec l'intégration temporelle Samcef permet de corréler les résultats obtenus avec la méthode de balance harmonique multifréquentielle et de montrer l'importance des ordres supérieurs. L'influence des ordres supérieurs est visible au niveau des résonances.

Comme en monofréquentiel, les écarts au niveau des résonances peuvent être importants. Par un calcul rapide à $32Hz$, l'écart entre la réponse pour $N_h = 3$ et $N_h = 1$ représente, comme en monofréquentiel, 15% de l'amplitude obtenue par intégration temporelle.

Du fait du nombre important de combinaisons de fréquence à considérer pour $N_h = 3$ (8 combinaisons après élimination des ordres pairs) et du temps de calcul élevé associé, le calcul d'un nombre plus important de points n'a pas été entrepris, les résultats présentés en figure 5.19 donnant l'allure

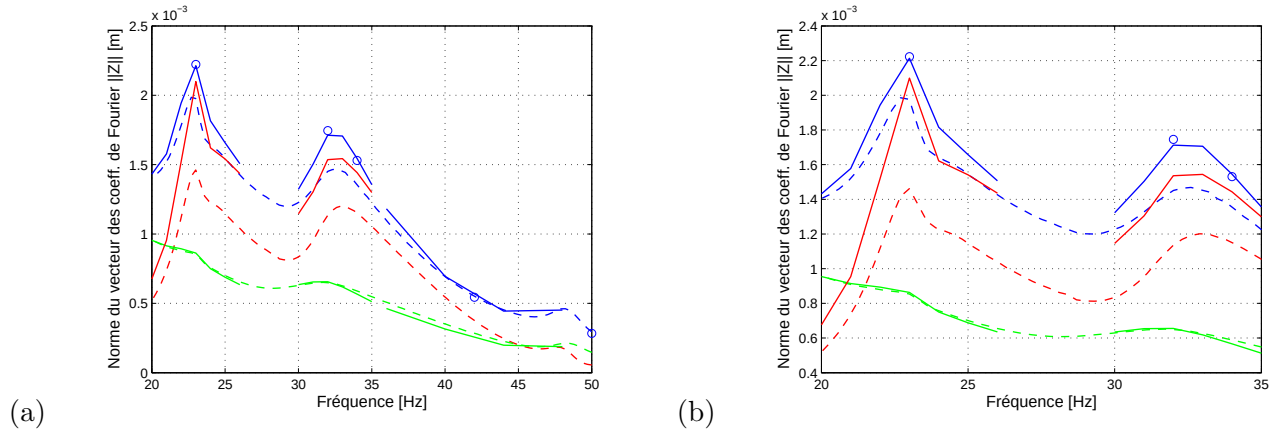


FIGURE 5.19 – Influence des harmoniques d'ordre supérieur : a) sur $[20\ \ 50]\,Hz$; b) sur $[20\ \ 35]\,Hz$. Légende : (–) HBM avec $N_h = 3$; (- -) HBM avec $N_h = 1$; (o) Intégration Temporelle Samcef ; (–,o,- -) $Y_{N_{21}}$; (–,- -) X_{1001} ; (–,- -) $Y_{N_{11}}$.

générale des réponses quasi-périodiques.

L'algorithme adaptatif multifréquentiel a ensuite été mis en oeuvre et a permis de confirmer l'importance des ordres supérieurs. La réponse est détaillée en figure 5.20. Le critère d'arrêt a été fixé pour une variation relative de l'énergie de déformation du système inférieure à 5%. L'algorithme augmente bien le nombre de combinaisons fréquentielles à prendre en compte dans le développement de la réponse. Le paramètre N_h, indiquant en quelque sorte le nombre de termes retenus, est représenté en figure 5.21. Au passage des résonances, N_h augmente montrant l'importance des ordres supérieurs. De plus, entre les réponses pour $N_h = 1$ et $N_h = 3$, la variation d'énergie de déformation représente une variation de 15% de la valeur pour $N_h = 1$ au voisinage du pic de $32Hz$.

Afin d'illustrer l'importance des différentes combinaisons fréquentielles présentes dans la réponse que nous cherchons à approcher, le spectre de la réponse en déplacement $Y_{N_{21}}$ du noeud N_{21} est donné en figure 5.22 pour la fréquence d'excitation $\omega_1 = 32Hz$. Le spectre a été calculé en utilisant le résultat de l'intégration temporelle. L'analyse de la courbe montre l'influence des différentes combinaisons de fréquences et notamment l'importance du terme $2f_1 - f_2$. Ce dernier terme est capturé dès que le paramètre N_h est égal à 3. L'amplitude de ce pic étant non négligeable devant les amplitudes des termes f_1 et f_2, ceci explique sans doute pourquoi il est important de considérer $N_h = 3$ pour approcher de façon correcte l'amplitude des vibrations par la méthode de balance harmonique multifréquentielle.

La simulation du dispositif lorsque celui-ci est soumis à une accélération bifréquentielle a montré que les ordres supérieurs doivent être pris en compte au voisinage des résonances afin d'approcher correctement la réponse. L'algorithme adaptatif multifréquentiel a été appliqué et a confirmé cette analyse. Toutefois, les temps de calculs longs et des difficultés numériques pour la convergence de la

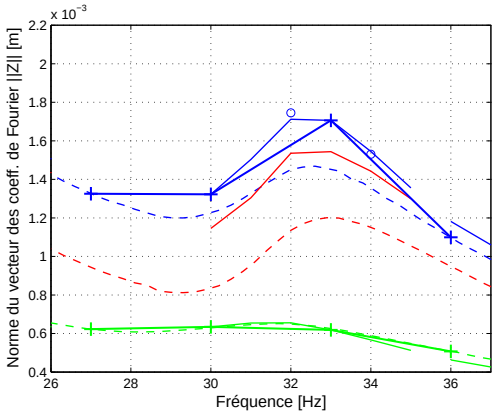


FIGURE 5.20 – Réponse bifréquentielle en utilisant l'algorithme adaptatif : (-+-) HBM Adaptative ; (–) HBM avec $N_h = 3$; (- -) HBM avec $N_h = 1$; (o) Intégration Temporelle Samcef ; (-+-,–,- -,o) $Y_{N_{21}}$; (–,- -) X_{1001} ; (-+-,–,- -) $Y_{N_{11}}$.

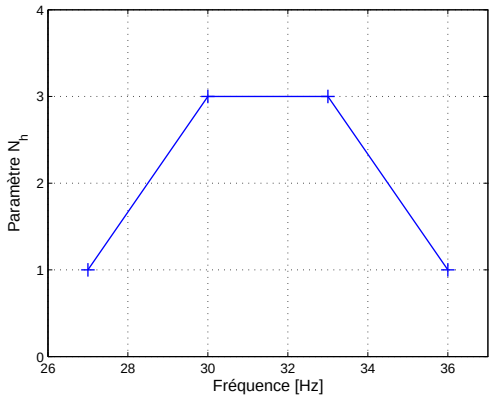


FIGURE 5.21 – Evolution du paramètre N_h pour une valeur seuil de 0.05.

méthode ont empêché une analyse plus fine des résultats (analyse de l'influence du seuil, de l'amplitude de l'excitation,...).

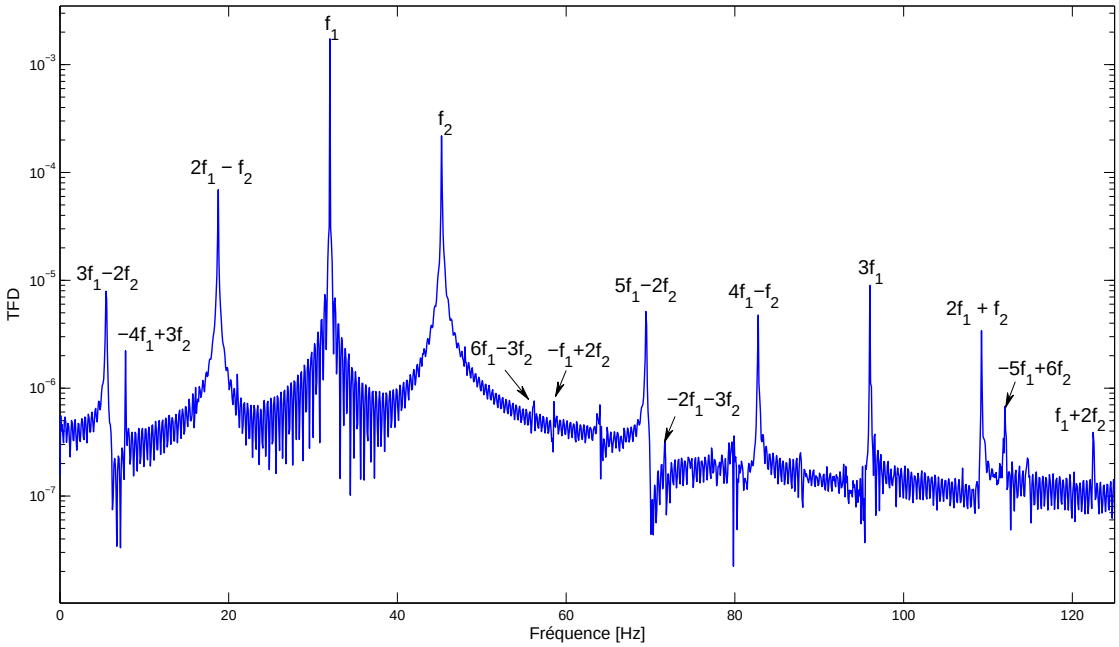


FIGURE 5.22 – Spectre de la réponse $Y_{N_{21}}$ à $32Hz$.

5.6 Conclusion

Nous avons vu dans ce dernier chapitre la formulation générale de la méthode de balance harmonique dans le cas de systèmes multifréquentiels pour lesquels la réponse vibratoire est quasipériodique. Les différents outils utilisés dans le cas monofréquentiel peuvent être étendus à ce cas. En effet, les procédures de condensation et de continuation restent valables. De plus, l'utilisation de variables internes dans les modèles des non linéarités demeure possible. Pour l'évaluation des termes non linéaires, le calcul d'une FFT multidimensionnelle est utilisé.

A partir de cette formulation, la notion de nombre d'harmoniques retenus a été redéfinie en considérant un paramètre discret N_h et une fréquence de coupure f_c qui définissent à chaque augmentation de N_h d'une unité, non plus l'ajout d'un harmonique, mais plutôt l'ajout d'un ensemble de combinaisons linéaires d'harmoniques des fréquences fondamentales de l'excitation. La méthodologie adaptative a donc été proposée en utilisant N_h comme paramètre de suivi de l'énergie de déformation du système qui se calcule de façon aussi simple que dans le cas monofréquentiel. Le parcours des nombreuses combinaisons d'harmoniques possibles s'effectue non pas par fréquence croissante mais à partir d'une boule centrée sur l'harmonique d'ordre 0. Ce critère est l'équivalent à l'augmentation du nombre d'harmoniques d'une seule fréquence dans le cas monofréquentiel.

La méthode a ensuite été mise en oeuvre sur un dispositif expérimental représentatif d'une partie de lanceur. Ce dispositif intègre trois amortisseurs à frottement afin d'amortir les vibrations d'un équipement de ce tronçon (réservoir, propulseur,...) lorsque la base de celui-ci est soumise à une accélération imposée. La formulation de la méthode de balance harmonique a dû être modifiée afin de prendre en compte cette spécificité. La démarche a été présentée ici dans un cadre général.

Dans le cas d'une excitation monofréquentielle, la réponse dynamique du système présente un fort amortissement du mode de pendule aux environs de $32.5Hz$ montrant ainsi l'efficacité des amortisseurs. La réponse non linéaire monofréquentielle a été calculée en utilisant l'algorithme classique pour un nombre d'harmoniques fixé et en utilisant l'algorithme adaptatif. L'analyse des résultats montrent clairement l'importance de considérer l'ordre 3 dans la résolution pour espérer une bonne corrélation avec l'intégration temporelle effectuée ici avec SAMCEF. La méthode de balance harmonique adaptative vient confirmer cette analyse.

La mise en oeuvre de la méthode adaptative multifréquentielle a ensuite pu être réalisée en appliquant une accélération imposée comportant deux fréquences incommensurables. L'analyse du système montre la présence de deux pics principaux et les réponses calculées par balance harmonique soulignent l'importance de retenir les combinaisons d'harmoniques tels que $N_h = 3$. Les combinaisons telles que N_h soit pair sont nulles et sont l'analogie directe en multifréquentiel des sytèmes monofréquentiels pour lesquels les harmoniques pairs ne sont pas prépondérants. Toutefois, l'augmentation rapide du nombre de combinaisons engendre la résolution d'un système de taille importante au détriment de l'efficacité numérique.

Chapitre 6

Conclusion et Perspectives

Cette thèse s'articule principalement autour de la simulation dynamique des structures présentant des interfaces non linéaires et plus particulièrement autour de diverses extensions de la méthode de balance harmonique. Cette méthode, qui permet de calculer la réponse vibratoire stationnaire des structures étudiées, est basée sur une approximation de la réponse en série de Fourier tronquée. En fonction du caractère plus ou moins non linéaire de la dynamique du système, le nombre d'harmoniques à retenir pour approcher de façon satisfaisante la vibration du système peut être important et varier fortement sur l'ensemble de la plage de fréquence de simulation.

Un des objectifs majeurs de la thèse a ainsi été de développer une méthodologie adaptative permettant d'ajuster le nombre d'harmoniques à chaque fréquence. Dans l'optique d'approcher le comportement dynamique d'une structure de grande taille intégrant des non linéarités uniquement de façon localisée, le critère permettant l'adaptation s'est basé sur le calcul de l'énergie de déformation de l'ensemble du système et sur son évolution pour un nombre croissant d'harmoniques. De plus, une procédure de condensation interne à la méthode de balance harmonique peut s'associer sans difficulté à la méthodologie adaptative.

Dans un deuxième temps, l'extension de la méthodologie adaptative aux systèmes multifréquentiels a été proposée dans un formalisme général.

Enfin, un dernier objectif a été de considérer la prise en compte de variables internes dans les modèles non linéaires, notamment dans les modèles de frottement utilisés, et de rendre leur utilisation possible dans la méthode de balance harmonique.

Plusieurs cas d'application ont mis en avant les capacités de la méthode de balance harmonique et de ses variantes adaptatives à s'intégrer dans une démarche de simulation complète de structures industrielles.

Tout d'abord, la simulation d'un isolateur d'équipements utilisant des plots en élastomère a été effectuée. La méthode de balance harmonique au premier ordre a pu s'appliquer sur un modèle complet après condensation des parties linéaires de la structure sur les interfaces non linéaires. Une démarche permettant la prise en compte de l'effet Payne exhibé par le matériau a été intégrée dans la résolution

par balance harmonique. Le modèle des interfaces a conservé un nombre important de degrés de liberté non linéaires et a utilisé directement les caractérisations expérimentales du matériau.

La méthodologie adaptative monofréquentielle a ensuite été appliquée sur le cas d'une structure boulonnée. La méthode s'est révélée apte à représenter les principaux effets dynamiques non linéaires qui peuvent être observés. La dépendance non linéaire de l'amortissement de la structure aux amplitudes vibratoires ainsi que l'assouplissement modal ont pu être représentés. L'augmentation du nombre d'harmoniques à retenir a bien été observée dans les zones où les non linéarités impactent fortement la dynamique de la structure étudiée. En outre, la modélisation de jonction boulonnée a engendré le développement d'une méthodologie permettant d'intégrer d'éventuelles variables internes dans la formulation du problème. Cette procédure augmente certes le nombre d'inconnues mais présente une démarche générale utilisable pour de très nombreux modèles non linéaires.

Le troisième cas d'application de cette thèse a consisté en la simulation d'un dispositif expérimental représentatif d'une partie de lanceur sur lequel trois amortisseurs à frottement amortissent le mode de vibration d'un équipement. La méthodologie adaptative est mise en oeuvre dans le cadre d'une excitation en accélération multifréquentielle. Ainsi, la formulation des équations a été modifiée pour prendre en compte l'accélération imposée. De plus, trois variables internes ont été utilisées pour représenter les frotteurs. La méthode adaptative reste néanmoins applicable et a ensuite montré la nécessité de considérer un nombre plus élevé d'harmoniques dans les zones où les amortisseurs travaillent fortement.

Enfin, l'ensemble des versions de la méthode de balance harmonique ont été programmées dans une formulation générale utilisable pour tout type de modèle éléments finis. La programmation du comportement des non linéarités reste spécifique au cas traité et dépend du choix de modélisation effectué. Ces programmes sont regroupés sous Matlab et leur interfaçage avec Nastran a été partiellement effectué. A l'avenir, l'application de ces méthodes sur d'autres cas d'application d'EADS est donc envisagée.

Les différentes méthodologies se sont ainsi montrées bien adaptées à la démarche générale de simulation de structures industrielles soumises à des excitations mono- et multifréquentielles et les perspectives futures sont donc nombreuses.

Tout d'abord, les algorithmes développés au cours de cette thèse ont permis de montrer la faisabilité de l'adaptation en ordre mais les développements nécessitent encore d'être optimisés numériquement, que ce soit au niveau des propriétés de convergence et d'efficacité numérique ou au niveau de l'interaction de la méthode de balance harmonique avec les logiciels commerciaux au sein desquels sont généralement modélisées les structures industrielles. La programmation dans un langage spécifique et

adapté aux logiciels utilisés dans l'industrie permettrait de faciliter la mise en oeuvre de la résolution sur des structures complexes.

Ensuite, la méthodologie adaptative présentée ajuste le nombre d'harmoniques retenus de la même manière pour tous les degrés de liberté du système. Dans le cas de non linéarités localisées, il pourrait être intéressant de développer une adaptation spatiale du nombre d'harmoniques de façon à considérer un développement à ordre plus élevé localement. Ce procédé permettrait de réduire la taille du système à résoudre tout en conservant une bonne précision. L'analyse de l'énergie de déformation pourrait être effectuée sur différents domaines de la structure étudiée. Toutefois, le choix du type de méthodologie reste fortement dépendant de l'objectif de la simulation (approximation de la dynamique globale ou précision localement forte au niveau de la non linéarité).

L'algorithme adaptatif développé présente également des limitations au niveau des points de retournement des réponses en fréquence qui constituent un phénomène observable dans le cadre de l'étude des systèmes non linéaires. En effet, à une valeur de fréquence fixée peuvent coexister plusieurs réponses pour lesquelles une prédominance des ordres n'est pas semblable. L'algorithme peut alors avoir quelques difficultés à converger, ce dernier pouvant basculer d'une solution vers l'autre.

De plus, l'adaptation en ordre est effectuée par un parcours des différents ordres successifs en partant toujours de l'ordre 1. L'obtention d'un critère caractérisant la prédominance des effets non linéaires sur la dynamique globale à partir de la donnée d'un seul calcul reste à définir. Ceci permettrait de s'affranchir d'un nombre important de calculs par balance harmonique pour chaque point mais suppose que le critère soit capable d'indiquer si le nombre d'harmoniques doit être augmenté ou diminué. L'analyse de la projection des résidus des équations à résoudre sur les fonctions trigonométriques non retenues pourrait fournir une voie possible.

Enfin, la prise en compte d'incertitudes sur les modèles ou sur les excitations et notamment l'influence des incertitudes sur les différents ordres de la réponse est une voie à étudier. Cet aspect est par exemple un enjeu important pour la modélisation des jonctions boulonnées. La complexité des phénomènes qui s'y déroulent et la grande variabilité du comportement en fonction de nombreux paramètres nécessite à l'avenir de prendre en compte les incertitudes dans les modèles non linéaires développés [135].

Bibliographie

[1] H. Ahmadian and H. Jalali. Generic element formulation for modelling bolted lap joints. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(5) :2318–2334, 2007.

[2] H. Ahmadian and H. Jalali. Identification of bolted lap joints parameters in assembled structures. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(2) :1041–1050, 2007.

[3] H. Ahmadian, J. E. Mottershead, S. James, M. I. Friswell, and C. A. Reece. Modelling and updating of large surface-to-surface joints in the awe-mace structure. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20(4) :868–880, 2006.

[4] A. Al Majid and R. Dufour. Formulation of a hysteretic restoring force model. Application to vibration isolation. *Nonlinear Dynamics*, 27(1) :69–85, 2002.

[5] B. Armstrong-Hélouvry, P. Dupont, and C. Canudas de Wit. A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction. *Automatica*, 30(7) :1083–1138, 1994.

[6] A. Austrell, A.K. Olsson, and M. Jonsson. A method to analyse the non-linear dynamic behaviour of carbon-black filled rubber components using standard fe codes. In *Proceedings of the Second Conference on Constitutive Models for Rubbers*, pages 231–235, 2001.

[7] R.L. Bagley and P.J. Torvik. A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity. *Journal of Rheology*, 27 :201–210, 1983.

[8] R.L. Bagley and P.J. Torvik. Fractional Calculus - A Different Approach to the Analysis of Viscoelastically Damped Structures. *AIAA Journal*, 21(5) :741–748, 1983.

[9] C. D. Bailey. Application of Hamilton's law of varying action. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 13(9) :1154–1157, 1975.

[10] T. E. Bailey. Application of Hamilton's law of varying action. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 19(10) :1357–1362, 1981.

[11] G. Baldo, A. Bonelli, O.S. Bursi, and S. Erlicher. The accuracy of the generalized-alpha method in the time integration of non-linear single- and two-DOF forced systems. *Computational Mechanics*, 38(1) :15–31, 2006.

[12] R.M. Bamford. A Modal Combinaison Program for Dynamic Analysis of structures. *Tech. Memo.*, pages 33–290, 1967.

[13] F. Barillon, J.-J. Sinou, J.M. Duffal, and Jézéquel L. Non linear dynamics of a whole vehicle FE model using a Harmonic Balance Method. 2010. International Conference on Noise and Vibration Engineering ISMA 2010, Leuven, Belgium,Oct 20-21, 2010.

[14] C.F. Beards. *Structural Vibration : Analysis and Damping.* Elsevier, 1996.

[15] W.A. Benfield and R.F. Hruda. Vibration Analysis of Structures by Component Mode Substitution. *AIAA Journal*, 9(7) :1255–1261, 1971.

[16] M. Berg. A non-linear rubber spring model for rail vehicle dynamics analysis. *Vehicle System Dynamics*, 30(3–4) :197–212, 1998.

[17] E. J. Berger. Friction modeling for dynamic system simulation. *Applied Mechanics Reviews*, 55(6) :535–577, 2002.

[18] P.A. Blelloch and N. Tengler. Application of hruda-benfield method to component damping for space shuttle coupled loads. pages 2332–2342, 1994. 35th AIAA Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Hilton Head, SC.

[19] P.A. Bliman and M. Sorine. A system-theoretic approach of systems with hysteresis. Application to friction modelling and compensation. pages 1844–1849, 1993. In Proceedings of the second European Control Conference, Groningen, The Netherlands.

[20] N. N. Bogoliubov and Y. A. Mitropolsky. *Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations.* Gordon and Breach, New York, 1961.

[21] F.P. Bowden and D. Tabor. *The friction and Lubrication of Solids.* Oxford Univ. Press, Oxford, 1950.

[22] F.P. Bowden and D. Tabor. *The friction and Lubrication of Solids, Part II.* Oxford Univ. Press, Oxford, 1964.

[23] T. Bruger and M. Rabkin. FEM-Simulation of comfort relevant properties of elastorneric mountings : The Payne-effect under preloading. In Boukamel, A and Laiarinandrasana, L and Meo, S and Verron, E, editor, *Constitutive Models For Rubber V*, Proceedings and Monographs in Engineering, Water and Earth Sciences, pages 439–442, 2008. 5th European Conference on Constitute Models for Rubber, Paris, FRANCE, SEP 04-07, 2007.

[24] S. Bruni and A. Collina. Modelling the viscoelastic behaviour of elastomeric components : An application to the simulation of train-track interaction. *Vehicle System Dynamics*, 34(4) :283–301, 2000.

[25] O.S. Bursi, L. He, A. Bonelli, and P. Pegon. Novel generalized-[alpha] methods for interfield parallel integration of heterogeneous structural dynamic systems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234(7) :2250 – 2258, 2010. Fourth International Conference on Advanced COmputational Methods in ENgineering (ACOMEN 2008).

[26] J. Cai, X. Wu, and Y.P. Li. Comparison of multiple scales and kbm methods for strongly nonlinear oscillators with slowly varying parameters. *Mechanics Research Communications*, 31(5) :519 – 524, 2004.

[27] A. Caignot, P. Ladevèze, D. Néron, and Durand J.-F. Virtual testing of the prediction of damping in joints. *Engineering Computations*, 27 :621–644, 2010.

[28] T. M. Cameron and J. H. Griffin. An alternating frequency/time domain method for calculating the steady-state response of nonlinear dynamic systems. *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the Asme*, 56(1) :149–154, 1989.

[29] C. Canudas de Wit, H. Olsson, K.J. Åström, and P. Lichinsky. Dynamic friction models and control design. pages 1920–1926, 1993. Proceedings of the 1993 American Control Conference, San Francisco, California, 1993.

[30] L. Chazeau, J.D. Brown, L.C. Yanyo, and S.S. Sternstein. Modulus recovery kinetics end other insights into the Payne effect for filled elastomers. *Polymer Composites*, 21(2) :202–222, 2000.

[31] Y.K. Cheung and S.L. Lau. Incremental time-space finite strip method for nonlinear structural vibrations. *Earthquake engineering and structural dynamics*, 10 :239–253, 1982.

[32] Y.K. Cheung and S.L. Lau. Incremental harmonic balance method with multiple time scales for aperiodic vibration of nonlinear systems. *Journal of Applied Mechanics*, 50 :871–876, 1983.

[33] S.K. Choi and S.T. Noah. Response and stability analysis of piecewise-linear oscillators under multi-forcing frequencies. *Nonlinear Dynamics*, 3 :105–121, 1992.

[34] L. Chua and A. Ushida. Algorithms for computing almost periodic steady-state response of nonlinear systems to multiple input frequencies. *IEEE Trans. Circuits Syst*, 1981.

[35] J. Chung and G.M. Hulbert. A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation - the generalized-alpha method. *Journal of Applied Mechanics - Transactions of the ASME*, 60(2) :371–375, 1993.

[36] B. Cochelin and C. Vergez. A high order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions. *Journal of Sound and Vibration*, 324(1-2) :243–262, 2009.

[37] N. Coudeyras, S. Nacivet, and J.-J. Sinou. Periodic and quasi-periodic solutions for multi-instabilities involved in brake squeal. *Journal of Sound and Vibration*, 328(4–5) :520–540, December 2009.

[38] J. Courtney-Pratt and E. Eisner. The effect of a tangential force on the contact of metallic bodies. volume A238, pages 529–550, 1957. Proceedings of the Royal Society.

[39] R.J. Craig and M.C.C. Bampton. Coupling of Substructures for Dynamic Analyses. *American Institute of Aeronautics and Astronautics - Journal*, 6(7) :1313–1319, 1968.

[40] R.R. Craig and C.J. Chang. Free interface methods of substructures coupling for dynamic analysis. *AIAA Journal*, 14(11) :1633–1635, 1976.

[41] A. D. Crocombe, R. Wang, G. Richardson, and C. I. Underwood. Estimating the energy dissipated in a bolted spacecraft at resonance. *Computers & Structures*, 84(5–6) :340–350, 2006.

[42] P. Dahl. A solid friction model. *Technical Report TOR-0158H3107–18I-1, The Aerospace Corporation, El Segundo, CA*, 1968. Technical Report.

[43] P. Dahl. Solid friction damping of spacecraft oscillations. 1975. AIAA Paper No.75–1104 presented at the AIAA Guidance and Control Conference, Boston, Mass.

[44] N. Damil and M. Potier-Ferry. A new method to compute perturbed perturbation : application to the buckling behaviour of elastic plates and shells. *International Journal of Engineering Sciences*, 26 :943–957, 1990.

[45] D. Demailly. *Etude du comportement non-linéaire dans le domaine fréquentiel. Application à la dynamique rotor.* PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2003.

[46] D. V. Deshmukh, E. J. Berger, M. R. Begley, and U. Komaragiri. Correlation of a discrete friction (Iwan) element and continuum approaches to predict interface sliding behavior. *European Journal of Mechanics - A/Solids,*, 26(2) :212–224, 2007.

[47] A. C. Dos Santos Galucio. *Atténuation des réponses transitoires par traitement hybride piézoélectrique / viscoélastique en utilisant un modèle à dérivées fractionnaires.* PhD thesis, Conservatoire National des Arts et Métiers, France, 2004.

[48] K. Dovstam. Augmented Hooke's law in frequency domain. A three dimensional, material damping formulation. *International Journal of Solids and Structures*, 32 :2835–2852, 1995.

[49] E. H. Dowell. The behavior of a linear, damped modal system with a Non-Linear spring mass dry friction damper system attached. *Journal of Sound and Vibration*, 89(1) :65–84, 1983.

[50] P. Dupont, B. Armstrong, and V. Hayward. Elasto-plastic friction model : contact compliance and stiction. *2000 ACC Chicago*, 2000.

[51] S. Erlicher, L. Bonaventura, and O. S. Bursi. The analysis of the generalized-a method for non-linear dynamic problems. *Computational Mechanics*, 28(2) :83–104, 2002.

[52] J. Esteban and C.A. Rogers. Energy dissipation through joints : theory and experiments. *Computers and Structures*, 75(4) :347 – 359, 2000.

[53] A. A. Ferri. On the equivalence of the incremental harmonic balance method and the harmonic balance–newton-raphson method. *Journal of Applied Mechanics*, 53 :455–456, 1986.

[54] A. A. Ferri and E. H. Dowell. The behavior of a linear, damped modal system with a Non-Linear Spring-Mass dry friction damper system attached, .2. *Journal of Sound and Vibration*, 101(1) :55–74, 1985.

[55] A. A. Ferri and E. H. Dowell. Frequency-Domain solutions to Multi-Degree-Of-Freedom, dry friction damped systems. *Journal of Sound and Vibration*, 124(2) :207–224, 1988.

[56] J.D. Ferry. *Viscoelastic Properties of Polymers.* John Wiley and sons, 1980.

[57] W.P. Fletcher and A.N. Gent. Non-linearity in the dynamic properties of vulcanisaed rubber compounds. *I.R.I. Transactions*, 29 :266–280, 1953.

[58] R. Fougeres and F. Sidoroff. The evolutive masing model and its application to cyclic plasticity and aging. *Nuclear Engineering And Design*, 114(3) :273–284, 1989.

[59] L. Gaul, H. Albrecht, and J. Wirnitzer. Semi-active friction damping of large space truss structures. *Shock and Vibration*, 11(3–4) :173–186, 2004.

[60] L. Gaul, S. Hurlebaus, J. Wirnitzer, and H. Albrecht. Enhanced damping of lightweight structures by semi-active joints. *Acta Mechanica*, 195(1–4) :249–261, 2008.

[61] L. Gaul and J. Lenz. Nonlinear dynamics of structures assembled by bolted joints. *Acta Mechanica*, 125(1–4) :169–181, 1997.

[62] L. Gaul and R. Nitsche. The role of friction in mechanical joints. *Applied Mechanics Reviews*, 54(2) :93–106, 2001.

[63] N. Gil-Negrete, J. Vinolas, and L. Kari. A simplified methodology to predict the dynamic stiffness of carbon-black filled rubber isolators using a finite element code. *Journal of Sound and Vibration*, 296(4–5) :757–776, 2006.

[64] N. Gil-Negrete, J. Vinolas, and L. Kari. A nonlinear rubber material model combining fractional order viscoelasticity and amplitude dependent effects. *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the Asme*, 76(1), 2009.

[65] G.M.L. Gladwell. Branch Mode Analysis of Vibrating Systems. *AIAA Journal*, 1 :41–59, 1964.

[66] L.E. Goodman. Contributions of continuum mechanics to the analysis of the sliding of unlubricated solids. volume 39, pages 1–12, 1980. AMD Symposium Series on ASME Applied Mechanical Division.

[67] L. Gorbatikh and M. Popova. Modeling of a locking mechanism between two rough surfaces under cyclic loading. *International Journal of Mechanical Sciences*, 48(9) :1014 – 1020, 2006.

[68] R. Grilli, R. Krishnan, W. Hu, N. M. Wereley, and T. Sieg. Mechanisms-based analysis of filled elastomeric dampers under single and dual frequency excitations. *Journal Of The American Helicopter Society*, 53(3) :252–266, 2008.

[69] G. Von Groll and D. J. Ewins. The Harmonic Balance Method With Arc-Length Continuation In Rotor/Stator Contact Problems. *Journal of Sound and Vibration*, 241(2) :223–233, 2001.

[70] E. Guglielmino and Kevin A. Edge. A controlled friction damper for vehicle applications. *Control Engineering Practice,*, 12(4) :431—-443, 2004.

[71] J. Guillen, C. Pierre, F. Pfeiffer, and C. Glocker. An efficient, hybrid, frequency-time domain method for the dynamics of large-scale dry-friction damped structural systems. In *Iutam Symposium on Unilateral Multibody Contacts ; Solid Mechanics And Its Applications ; IUTAM Symposium on Unilateral Multibody Contacts*, pages 169–178, 1998. Conference Proceedings.

[72] M. Guskov, J.-J. Sinou, and F. Thouverez. Multi-dimensional harmonic balance applied to rotor dynamics. *Mechanics Research Communications*, 35(8) :537–545, December 2008.

[73] R.J. Guyan. Reduction of Stiffness and Mass Matrices. *AIAA Journal*, 3(2), 1965.

[74] D. A. Haessig and B. Friedland. On the modeling and simulation of friction. *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control-Transactions of the Asme*, 113(3) :354–362, 1991.

[75] M. Hanss, S. Oexl, and L. Gaul. Identification of a bolted-joint model with fuzzy parameters loaded normal to the contact interface. *Mechanics Research Communications,*, 29(2–3) :177–187, 2002.

[76] C.M. Harris and A.G. Piersol. *Shock and Vibration Handbook*. 5th edition, McGraw-Hill, New-York, 2002.

[77] L. Heller, E. Foltete, and J. Piranda. Experimental identification of nonlinear dynamic properties of built-up structures. *Journal of Sound and Vibration*, 327(1–2) :183–196, 2009.

[78] D.P. Hess and A. Soom. Friction at a lubricated line contact operating at oscillating sliding velocities. *Journal of Tribology*, 112 :147–152, 1990.

[79] P. Hofer. Strain-induced nonlinearities of filler-reinforced rubber under cyclic deformations : experiments and modeling. *Proceedings of the ECCMR Conference 2007, Paris*, 2007.

[80] P. Hofer and A. Lion. Modelling of frequency- and amplitude-dependent material properties of filler-reinforced rubber. *Journal Of The Mechanics And Physics Of Solids*, 57(3) :500–520, 2009.

[81] E. Hornung, R. Jakel, and E. Costes. Damping devices for optimising the dynamic behavior of ariane's new cryogenic upper stage esc-a. 2000. 51st IAC, Rio de Janeiro, 2000.

[82] T.J.R. Hughes. *Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1987.

[83] J. L. Hwang and T. N. Shiau. An Application of The Generalized Polynomial Expansion Method to Nonlinear Rotor Bearing Systems. *Journal of Vibration and Acoustics - Transactions of The ASME*, 113(3) :299–308, 1991.

[84] R. A. Ibrahim and C. L. Pettit. Uncertainties and dynamic problems of bolted joints and other fasteners. *Journal of Sound and Vibration,*, 279(3-5) :857–936, 2005.

[85] W. D. Iwan. On a class of models for the yielding behavior of continuous and composite systems. *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the Asme*, pages 612–617, 1967.

[86] C.D. Johnson and D.A. Kienholz. Finite-Element Prediction Of Damping In Structures With Constrained Viscoelastic Layers. *AIAA Journal*, 20(9) :1284–1290, 1982.

[87] M. Kaliske and H. Rothert. Constitutive approach to rate-independent properties of filled elastomers. *International Journal Of Solids And Structures*, 35(17) :2057–2071, 1998.

[88] Y. B. Kim. Multiple harmonic balance method for aperiodic vibration of a piecewise-linear system. *Journal of Vibration and Acoustics-Transactions of the Asme*, 120(1) :181–187, January 1998.

[89] Y.B. Kim and S.T. Noah. Stability and bifurcation analysis of oscillators with piecewise-linear characteristics : A general approach. *Journal of Applied Mechanics*, 58 :545–553, 1991.

[90] Y.B. Kim, S.T. Noah, and Y.S. Choi. Periodic response of multi-disk rotors with bearing clearances. journal of sound and vibration. *Journal of Sound and Vibration*, 144 :381–395, 1991.

[91] G. Kraus. Mechanical losses in carbon-black filled rubbers. *Journal of Applied Polymer Science, Applied Polymer Symposium*, 39, 1984.

[92] D. Kuhl and M.A. Crisfield. Energy-conserving and decaying algorithms in non-linear structural dynamics. *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, 45(5) :569–599, 1999.

[93] D. Kuhl and E. Ramm. Generalized Energy-Momentum Method for non-linear adaptive shell dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 178(3–4) :343–366, 1999.

[94] S. L. Lau and W. S. Zhang. Nonlinear vibrations of Piecewise-Linear systems by incremental Harmonic-Balance method. *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the Asme*, 59(1) :153–160, 1992.

[95] S.L. Lau, Y.K. Cheung, and S.Y. Wu. A variable parameter incrementation method of dynamic instability of linear and nonlinear systems. *Journal of Applied Mechanics*, 49 :849–853, 1982.

[96] D. Laxalde. *Etude d'amortisseurs non-linéaires appliqués aux roues aubagées et aux systèmes multi-étages*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2007.

[97] M. Legrand. *Modèles de prédiction de l'interaction rotor/stator dans un moteur d'avion.* PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes, 2005.

[98] G.A. Lesieutre and D.L. Mingori. Finite element modeling of frequency dependent material damping using augmenting thermodynamics fields. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 13(6) :1040–1050, 1990.

[99] A. Y. T. Leung and S. K. Chui. Nonlinear vibration of coupled duffing oscillators by an improved incremental Harmonic-Balance method. *Journal of Sound and Vibration*, 181(4) :619–633, 1995.

[100] A. Lion. Thixotropic behaviour of rubber under dynamic loading histories : Experiments and theory. *Journal Of The Mechanics And Physics Of Solids*, 46(5) :895–930, 1998.

[101] A. Lion. Constitutive modeling of the dynamic properties of elastomers. pages 9–19, 2008. 5th European Conference on Constitute Models for Rubber, Paris, France, Sep 04-07, 2007.

[102] L. Liu, E. H. Dowell, and J. P. Thomas. A high dimensional harmonic balance approach for an aeroelastic airfoil with cubic restoring forces. *Journal of Fluids and Structures*, 23(3) :351–363, 2007.

[103] L. Liu, J.P. Thomas, E.H. Dowell, P. Attar, and K.C. Hall. A comparison of classical and high dimensional harmonic balance approaches for a Duffing oscillator. *Journal of Computational Physics*, 215(1), 2006.

[104] D.J. McTavish and P.C. Hughes. Modeling of linear viscoelastic space structures. *Journal of Vibration and Acoustics*, 115 :103–110, 1993.

[105] A.I. Medalia. Effect of Carbon-Black on Dynamic Properties of Rubber Vulcanizates. *Rubber Chemistry And Technology*, 51(3) :437–523, 1978.

[106] C.H. Menq, J. Bielak, and J.H. Griffin. The influence of microslip on vibratory response, part i : a new microslip model. *Journal of Sound and Vibration*, 107(2) :279–293, 1986.

[107] J. D. Miller and D. D. Quinn. A two-sided interface model for dissipation in structural systems with frictional joints. *Journal of Sound and Vibration*, 321(1–2) :201–219, 2009.

[108] L. Mullins. Softening of rubber by deformation. *Rubber Chenmistry and Technology*, 42 :339–362, 1969.

[109] F. Myrvoll, A.M. Kaynia, E. Hjorth-Hansen, and E. Strommen. Full-scale dynamic performance testing of the bridge structure and the special cable friction dampers on the cable-stayed Uddevalla bridge. In *Proceedings Of IMAC-XX : Structural Dynamics Vols I and II*, volume 4753 of

Proceedings Of The Society Of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE), pages 657–662, 2002. 20th IMAC Conference on Structural Dynamics, Los Angeles, CA 04-07, 2002.

[110] S. Naranayan and P. Sekar. A frequency domain based numeric-analytical method for non-linear dynamical systems. *Journal of Sound and Vibration*, 211 :409–424, 1991.

[111] A. H. Nayfeh and D. T. Mook. *Nonlinear Oscillations.* Wiley, 1979.

[112] A.H. Nayfeh and B. Balachandran. *Applied Nonlinear Dynamics - Analytical, Computational and Experimental Methods.* Wiley Series in Nonlinear Science, 1995.

[113] M. J. Oldfield, H. Ouyang, and J. E. Mottershead. Simplified models of bolted joints under harmonic loading. *Computers & Structures,*, 84(1–2) :25–33, 2005.

[114] H. Olsson, K. J. Astrom, C. Canudas-de-Wit, M. Gafvert, and P. Lischinsky. Friction models and friction compensation. *European Journal of Control*, 4 :176–195, 1998.

[115] A.. Oustaloup. *La dérivation non entière.* Hermès, 1995.

[116] H. Ouyang, M. J. Oldfield, and J. E. Mottershead. Experimental and theoretical studies of a bolted joint excited by a torsional dynamic load. *International Journal of Mechanical Sciences*, 48(12) :1447–1455, 2006.

[117] A.R. Payne. A note on the existence of a yield point in the dynamic modulus of loaded vulcanisates. *Journal of Applied Polymer Science*, 3(127), 1960.

[118] A.R. Payne. Low strain dynamic properties of filled rubbers. *Rubber Chemistry and Technology*, 44 :440–478, 1971.

[119] C. Pierre, A. A. Ferri, and E. H. Dowell. Multi-Harmonic analysis of dry friction damped systems using an incremental Harmonic-Balance method. *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the Asme*, 52(4) :958–964, 1985.

[120] D. D. Quinn and D. J. Segalman. Using series-series iwan-type models for understanding joint dynamics. *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the Asme*, 72(5) :666–673, 2005.

[121] E. Rabinowicz. The nature of the static and kinetic coefficients of friction. *Journal of Applied Physics*, 22 :1373–1379, 1951.

[122] E. Rabinowicz. *Friction and wear of materials.* New York : Wiley, second edition, 1995.

[123] M. Rabkin. Simulation of the Fletcher-Gent effect by using of the subroutine UPHI MSC/MARC (c). In *Constitutive Models for Rubber V*, pages 263–268, 2008. 5th European Conference on Constitute Models for Rubber, Paris, France, Sep 04-07, 2007.

[124] M. Rabkin, T. Bruger, and P. Hinsch. Material model and experimental testing of rubber components under cyclic deformation. In *Proceedings of the Third Conference on Constitutive Models for Rubbers*, pages 319–324, 2003.

[125] A. Raghothama and S. Narayanan. Non-linear dynamics of a two-dimensional airfoil by incremental harmonic balance method. *Journal of Sound and Vibration*, 226(3) :493–517, 1999.

[126] Y. Ren and C. F. Beards. Identification of 'effective' linear joints using coupling and joint identification techniques. *Journal of Vibration and Acoustics-Transactions of the Asme*, 120(2) :331–338, 1998.

[127] R. Riff and M. Baruch. Time Finite element discretization of Hamilton's law of varying action. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 22(9) :1310–1318, 1984.

[128] A. Rittweger, S. Dieker, K. Abdoly, and J. Albus. Coupled dynamic load analysis with different component damping of the substructures. 2008. 59th International Astronautical Congress,IAC-08-C2.3.3.

[129] C.M. Roland. Dynamic Mechanical-Behavior of Filled Rubber at Small Strains. *Journal of Rheology*, 34(1) :25–34, 1990.

[130] S. Rubin. Improved component mode representation for structural dynamics analysis. *AIAA Journal*, 13(8) :995–1006, 1975.

[131] P. Saad. *Modélisation et Identification du Comportement Non Linéaire des Cales en Caoutchouc.* PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, France, 2003.

[132] K. Y. Sanliturk and D. J. Ewins. Modelling two-dimensional friction contact and its application using harmonic balance method. *Journal of Sound and Vibration*, 193(2) :511—-523, 1996.

[133] F. Schilder, W. Vogt, S. Schreiber, and H.M. Osinga. Fourier methods for quasi-periodic oscillations. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 67(5) :629—-671, 2006.

[134] D. J. Segalman. Modelling joint friction in structural dynamics. *Journal of Sound and Vibration*, 13(1) :430–453, 2005.

[135] D.J. Segalman, T. Peaz, D. Smallwood, A. Sumali, and A. Urbina. Status and integrated roadmap for joints modeling research. *Sandia report SAND2003-0897*, 2003.

[136] N.C. Shekar, H. Hatwal, and A. K. Mallik. Performance of non-linear isolators and absorbers to shock excitations. *Journal of Sound and Vibration*, 227(2).

[137] O. V. Shiryayev, S. M. Page, C. L. Pettit, and J. C. Slater. Parameter estimation and investigation of a bolted joint model. *Journal of Sound and Vibration*, 307(3–5) :680–697, 2007.

[138] M. Sjoberg and L. Kari. Nonlinear isolator dynamics at finite deformations : An effective hyperelastic, fractional derivative, generalized friction model. *Nonlinear Dynamics*, 33(3) :323–336, 2003.

[139] Y. Song, C. J. Hartwigsen, L. A. Bergman, and A. F. Vakakis. A three-dimensional nonlinear reduced-order predictive joint model. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 2(1) :59–73, 2003.

[140] Y. Song, C. J. Hartwigsen, D. M. McFarland, A. F. Vakakis, and L. A. Bergman. Simulation of dynamics of beam structures with bolted joints using adjusted iwan beam elements. *Journal of Sound and Vibration*, 273(1–2) :249–276, 2004.

[141] R. Stribeck. Die wesentlichen eigenschaften der gleit- und rollenlager – the key qualities of sliding and roller bearings. *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, 46 :1432–1437, 1902.

[142] P. Sundararajan and S.T. Singh. Dynamics of forced nonlinear systems using shooting/arc-length continuation method – application to rotor systems. *Journal of Vibration and Acoustics*, 119 :9–20, 1997.

[143] K.Y. Sze, S.H. Chen, and J.L. Huang. The incremental harmonic balance method for non linear vibration of axially moving beams. *Journal of Sound and Vibration*, 281 :611–626, 2005.

[144] W. Thaijaroen and A.J.L. Harrison. Nonlinear dynamic modelling of rubber isolators using six parameters based on parabolic spring, springpot, and smooth-slip friction element. *Polymer Testing*, 29(7), 2010.

[145] M.A. Trindade. *Contrôle Hybride actif-passif des vibrations de structures par des matériaux piézoélectriques et viscoélastiques : poutres sandwich/multicouches intelligentes.* PhD thesis, CNAM Paris, 2000.

[146] J.D. Ulmer. Strain dependence of dynamic mechanical properties of carbon black-filled rubber compounds. *Rubber Chemistry And Technology*, 69(1) :15–47, 1996.

[147] E. E. Ungar. Status of engineering knowledge concerning damping of built-up structures. *Journal of Sound and Vibration*, 26(1) :141–154, 1973.

[148] E.E. Ungar and G. Maidanik. High frequency plate damping due to gas pumping in riveted joints. *Journal of Acoustic Society of America*, 44(1) :292–292, 1963.

[149] M. Unsal, C. Niezrecki, and C. Crane. A new semi-active piezoelectric-based friction damper. In Agnes, GS and Wang, KW, editor, *Smart Structures And Materials 2003 : Damping And Isolation*, volume 5052 of *Proceedings Of The Society Of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE)*, pages 413–420, 2003. Smart Structures and Materials 2003 Conference, San Diego, CA, 2003.

[150] A. Ushida and L.O. Chua. Frequency domain analysis of nonlinear circuits driven by multi-tone signals. *IEEE Trans. Circuit Syst. CAS-31*, 252 :776–779, 1984.

[151] F. Vestroni and M. Noori. Hysteresis in mechanical systems - modeling and dynamic response. *Internationa Journal Of Non-Linear Mechanics*, 37(8) :1261–1262, 2002.

[152] R. Wang, A. D. Crocombe, G. Richardson, and C. I. Underwood. Energy dissipation in spacecraft structures incorporating bolted joints operating in macroslip. *Journal of Aerospace Engineering*, 21(1) :19–26, 2008.

[153] R. Wang, A. D. Crocombe, G. Richardson, and C. I. Underwood. Energy dissipation in spacecraft structures incorporating bolted joints with viscoelastic layers. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part G-Journal of Aerospace Engineering*, 222(G2) :201–211, 2008.

[154] Y.K. Wen. Method of random vibration of hysteretic systems. *Journal Of The Engineering Mechanics Division - ASCE*, 102 :249—-263, 1976.

[155] C.W. Wong, Y.Q. Ni, and J.M. Ko. Steady-State Oscillation of Hysteretic Differential Model .2. Performance Analysis. *Journal of Engineering Mechanics-ASCE*, 120(11) :2299–2325, 1994.

[156] C.W. Wong, Y.Q. Ni, and S.L. Lau. Steady-State Oscillation of Hysteretic Differential Model .1. Response Analysis. *Journal of Engineering Mechanics-ASCE*, 120(11) :2271–2298, 1994.

[157] C. Wrana, C. Fischer, and V. Hartel. Dynamic measurements on fllied elastomers by mono- and bimodal excitations. *Kautschuk Gummi Kunststoffe*, 56(9) :437+, 2003.

[158] G. Xie and J.Y.K. Lou. Alternating frequency/coefficient (AFC) technique in the trigonometric collocation method. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 31(4) :531–545, 1996.

[159] S.B. Yamgoué and T.C. Kofané. Application of the krylov-bogoliubov-mitropolsky method to weakly damped strongly non-linear planar hamiltonian systems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 42(10) :1240 – 1247, 2007.

Table des figures

1.1 Illustration des dispositifs étudiés. 9

2.1 Influence des propriétés dynamiques sur les caractéristiques d'isolation. 13
2.2 Effet Mullins. 14
2.3 Réponse à une sollicitation harmonique en déformation. 15
2.4 Module dynamique. 16
2.5 Effet de la température sur les propriétés dynamiques. 17
2.6 Effet de la fréquence sur les propriétés dynamiques. 17
2.7 Effet Payne sur le module dynamique. 18
2.8 Profil de déformation et de contrainte lors d'un essai de relaxation. 21
2.9 Modèles rhéologiques. 22
2.10 Elément Spring-pot. 23
2.11 Modèle Visco-Elasto-Plastique. 26
2.12 Frottement statique et Caractéristiques élastoplastiques. 30
2.13 Jonctions boulonnée et zones d'impacts. 30
2.14 Système à 1 ddl frottant et Hystérésis associées. 32
2.15 Elément bilinéaire. 36
2.16 Modèles d'Iwan 37
2.17 Modèle de LuGre. 39
2.18 Schéma de principe d'un amortisseur à frottement sec. 42
2.19 Jonction à frottement contrôlé. 42
2.20 Division des degrés de liberté. 45
2.21 Modes de sous-structures. 46
2.22 Algorithme d'intégration par schéma de Newmark - Systèmes linéaires. 60
2.23 Algorithme d'intégration par schéma de Newmark - Systèmes non linéaires. 62
2.24 Paramétrisation et Point de retournement. 73
2.25 Prédicteurs. 75
2.26 Correcteurs. 76
2.27 Courbe obtenu avec un pas adaptatif. 77

3.1 Algorithme général de balance harmonique. 94

3.2 Procédure d'évaluation des efforts non linéaires. 95
3.3 Isolateur à supports élastomères : Vue d'ensemble. 96
3.4 Isolateur à supports élastomères : Zoom sur les éléments élastomère. 97
3.5 Module de stockage expérimental : dépendance en amplitude. 98
3.6 Module de stockage expérimental : dépendance en fréquence. 98
3.7 Noeuds d'interface avec l'élastomère pour la condensation de Guyan. 100
3.8 Déplacement de la masse concentrée. 102
3.9 Transmissibilité en force suivant l'axe z. 102
3.10 Elastomère déformé et déformation équivalentes. 104
3.11 Déformation équivalente. 105

4.1 Algorithme HBM adaptatif. 111
4.2 Assemblage boulonné. 112
4.3 Modèle de jonction. 113
4.4 Amplitude maximale de vibration. 119
4.5 Amplitude maximale de vibration autour de $1.1kHz$ 120
4.6 Evolution du nombre d'harmoniques. 122
4.7 Contribution des ordres sur l'amplitude de vibration. 123
4.8 Contribution des ordres sur l'énergie de déformation. 123
4.9 Energie de déformation approchée. 124
4.10 Influence de la force d'excitation sur l'amplitude de vibration. 126
4.11 Influence de la force d'excitation sur l'amplitude de vibration : degré de liberté 19. . . 127
4.12 Influence de la force d'excitation sur les FRFs. 128
4.13 Influence de la force d'excitation sur le nombre d'harmoniques. 129
4.14 Influence de la valeur seuil sur le nombre d'harmoniques. 130
4.15 Energie de déformation approchée condensée. 131
4.16 Nombre d'harmoniques pour une expression condensée. 132

5.1 Trajectoire sur un tore invariant. 137
5.2 Domaines temporels mono et multi-dimensionnels. 137
5.3 Termes harmoniques pour différents critères. 141
5.4 Parcours des termes harmoniques par fréquence croissante. 144
5.5 Parcours des termes harmoniques par N_h croissant. 144
5.6 Algorithme HBM adaptatif multifréquentiel. 145
5.7 Schéma du dispositif expérimental. 146
5.8 Schéma du dispositif expérimental. 146
5.9 Force dissipative insérée. 147
5.10 Modèle d'amortisseur. 148
5.11 Réponse monofréquentielle sans amortisseur. 152
5.12 Réponse monofréquentielle avec amortisseurs. 153
5.13 Influence du troisième harmonique. 154

5.14 Réponse monofréquentielle adaptative. 155
5.15 Déplacement de la variable interne. 155
5.16 Réponse bifréquentielle sans amortisseur. 157
5.17 Réponse bifréquentielle avec amortisseurs. 157
5.18 Comparaison entre réponse mono- et bi- fréquentielle. 158
5.19 Influence des harmoniques d'ordre supérieur. 159
5.20 Réponse bifréquentielle adaptative. 160
5.21 Evolution du paramètre N_h. 160
5.22 Spectre de la réponse. 161

dernière page de la thèse

AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 7 août 2006,

Vu la demande des Directeurs de Thèse

Messieurs L. JEZEQUEL et J-J. SINOU

et les rapports de

Monsieur O. ALLIX
Professeur - LMT Cachan - Bât. Léonard de Vinci - 61 avenue président Wilson - 94235 CACHAN cedex

et de

Monsieur A. BERLIOZ
Professeur - Université Paul Sabatier Toulouse III - UFR-MIG - Département de Mécanique - Bât. 1R2
118, route de Narbonne - 31062 TOULOUSE

Monsieur JAUMOUILLE Vincent

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

Ecole doctorale MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL ET ACOUSTIQUE

Fait à Ecully, le 8 mars 2011

P/Le Directeur de l'E.C.L.
La Directrice des Etudes

ECOLE CENTRALE DE LYON
SCOLARITE
3ème cycle

M-A. GALLAND