



HAL
open science

Propagation des solitons spatio-temporels dans les milieux dissipatifs

Aladji Kamagaté Kamagate

► **To cite this version:**

Aladji Kamagaté Kamagate. Propagation des solitons spatio-temporels dans les milieux dissipatifs. Autre [cond-mat.other]. Université de Bourgogne, 2010. Français. NNT : 2010DIJOS068 . tel-00671172

HAL Id: tel-00671172

<https://theses.hal.science/tel-00671172v1>

Submitted on 16 Feb 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université de Bourgogne

École Doctorale CARNOT

Thèse

présentée par

Aladjì KAMAGATÉ

pour obtenir le titre de

DOCTEUR en PHYSIQUE

PROPAGATION DES SOLITONS SPATIO-TEMPORELS DANS DES MILIEUX DISSIPATIFS

le 31 mai 2010 à 15h30

devant la commission d'examen composée de :

Jean-Guy Caputo	Maître de conférences (INSA de Rouen)	Rapporteur
Hervé Leblond	Professeur (Université de Angers)	Rapporteur
Stéphane Barland	Chargé de Recherche (Institut Non Linéaire de Nice)	Examinateur
Thibaut Sylvestre	Chargé de Recherche (Université de Franche-Comté)	Examinateur
Philippe Grelu	Professeur (Université de Bourgogne)	Directeur de thèse
P. Tchofo Dinda	Professeur (Université de Bourgogne)	Directeur de thèse
N. N. Akhmediev	Professeur (The Australian National University)	Invité

Je TE dédie cette page, car je n'ai pas de mots pour te remercier ...

Remerciements

Ce travail de thèse est le fruit de trois années de travail effectué au sein de l'équipe Solitons, Lasers et Communication Optique (SLCO) au Laboratoire Interdisciplinaire Carnot de Bourgogne (ICB). Pour ce fait, je tiens à remercier Guy Millot responsable de l'équipe SLCO, ainsi que l'ensemble des personnels de m'avoir accueilli afin de mener à bien mon travail.

Je souhaite tout particulièrement exprimer ma reconnaissance et une profonde gratitude à mes directeurs de thèse, Philippe Grelu et Patrice Tchofo-Dinda, qui m'ont encadré durant toute la durée de ma thèse. Ils ont su se rendre disponible et amicale pour répondre à mes interrogations, m'ont fourni de l'aide permanente et des conseils sur le sujet traité. D'une grande simplicité, malgré un emploi du temps déjà surchargé, ils ont toujours réussi à trouver un moment que ce soit pour discuter d'une nouvelle idée, résoudre des problèmes ou bien encore pour évoquer des sujets de la vie de tous les jours.

Ce travail sur les *Balles de lumière* m'a donné l'occasion de travailler avec d'autres physiciens, notamment José Soto-Crespo de l'Institut d'Optique, Madrid, en Espagne qui a pu me faire profiter de son aide dans la phase numérique de ce projet et de ses remarques pertinentes. De même, j'ai également pu apprécier les compétences et l'expérience incomparable de Nail Akhmediev de l'Université de Canberra, en Australie, sur le sujet ; je le remercie pour son franc soutien, sa sympathie et ses conseils.

Je souhaite ensuite exprimer toute ma gratitude à Hervé Leblond et Jean-Guy Caputo d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse, ainsi qu'à tous les différents membres du jury.

J'ai eu la chance durant ma première année de thèse de travailler avec Alexis Labruyère, il a su se rendre disponible pour me donner les bases de *Maple* et *Matlab*, et répondre à mes nombreuses interrogations ; à ce titre je lui dis un grand merci. J'en profite donc pour remercier tous les doctorants plus particulièrement Souad pour

ces gâteaux et sa sympathie, Ronald pour nos parties de tennis et surtout pour nos premières années de solitude à Dijon, Ziaul et tous les autres.

Je remercie également très sincèrement Ebby N'dédé Professeur à l'Université de Cocody à Abidjan pour ses conseils, son encouragement et son soutien tout au long de mon parcours universitaire en Côte d'Ivoire, sans oublier Pr. Jules Tenon et les autres membres du laboratoire Physique Atomique et Spectroscopie Moléculaire.

Je tiens également à souligner ma grande reconnaissance envers mes parents, à qui je dois ce succès. Ils ont su rester à mon écoute, me soutenir durant mes longues années d'étude et m'offrir tout ce qui était bon pour mon épanouissement. Grâce à leurs encouragements et conseils précieux j'ai pu vivre mes années de scolarité dans la responsabilité, la sérénité et efficacité.

Table des matières

Introduction	9
Chapitre 1 Solitons temporels, solitons spatio-temporels, et solitons dissipatifs	17
1.1 Introduction	17
1.2 Historique des solitons	19
1.3 Les premiers solitons optiques	22
1.3.1 Quelques phénomènes non linéaires et dispersifs sur les impulsions optiques	23
1.3.1.1 Effet Kerr optique	23
1.3.1.2 Equation de Schrödinger non linéaire	26
1.3.1.3 Dispersion de la vitesse de groupe	28
1.3.1.4 Auto-modulation de la phase	31
1.3.2 Les solitons temporels	33
1.3.3 Les solitons spatiaux	34
1.3.4 L'effet d'effondrement ou "collapse"	37
1.3.5 Les solitons spatio-temporels	38
1.4 Les solitons dissipatifs	42
1.5 Conclusion	45
Chapitre 2 Méthode des coordonnées collectives	47
2.1 Introduction	47

2.2	Comparaison entre la méthode des opérateurs de projection et l'approche du Lagrangien	48
2.3	Comparaison entre la méthode des moments et de l'approche du Lagrangien moyen	50
2.4	Fondements de la méthode des opérateurs de projection	52
2.4.1	Présentation des contraintes	54
2.4.2	Equation du mouvement des coordonnées collectives	55
2.4.3	Equation de mouvement des coordonnées collectives dans l' <i>approximation "bare"</i> (sans champ résiduel)	58
2.4.4	Minimisation directe du champ résiduel	59
2.5	Caractérisation d'une impulsion optique distordue asymétriquement	60
2.5.1	Fonction d'essai symétrique (<i>conventionnel</i>)	61
2.5.2	Fonction d'essai asymétrique (<i>amélioré</i>)	63
2.6	Comparaison de la méthode des opérateurs de projection et la méthode des moments	67
2.7	Conclusion	68
Chapitre 3 Solutions de l'équation de Ginzburg-Landau Complexe à (1+1)D		71
3.1	Introduction	71
3.2	Recherche des solutions de l'équation GL à (1+1)D	72
3.2.1	Equations variationnelles	73
3.2.2	Etude de la stabilité	76
3.2.2.1	Solitons dissipatifs stationnaires de l'équation GL à (1+1)D	77
3.2.2.2	Solitons dissipatifs non stationnaires de l'équation GL à (1+1)D	81
3.3	Comparaison entre le domaine numérique et le domaine de l'approche variationnelle	87
3.4	Energie des solitons dissipatifs de l'équation GL à (1+1)D	89
3.5	Conclusion	92

Chapitre 4 Solutions balles de lumière à symétrie cylindrique de l'équation GL à (3+1)D	95
4.1 Introduction	95
4.1.1 L'équation de Ginzburg-Landau complexe à (3+1)D	97
4.1.2 Choix de la fonction d'essai	99
4.1.3 Equations variationnelles	101
4.2 Cartographie des balles de lumière dans l'espace des paramètres de GL3DC	105
4.2.1 Balles de lumière stationnaires	106
4.2.2 Balles de lumière oscillantes	118
4.2.3 Diagramme de bifurcation	128
4.3 Conclusion	130
Chapitre 5 Brisure de symétrie et mise en auto-rotation des balles de lumières	131
5.1 Introduction	131
5.2 Principe de l'étude	132
5.3 Etats dynamiques de la balle de lumière	134
5.4 Balles de lumière oscillantes	135
5.4.1 Différentes dynamiques d'oscillations	135
5.4.2 Rôle du bruit sur les oscillations	137
5.4.3 Diagramme de bifurcation	143
5.5 Balles de lumière en autorotation et en expansion	144
5.6 Effet des termes quintiques sur les oscillations	149
5.7 Conclusion	153
Conclusion et perspectives	155
Annexe A La résonance des solitons dissipatifs	158
Annexe B Liste des Publications	162
Bibliographie	165

Introduction

La plupart des phénomènes dans la nature sont non linéaires. Au cours de ces dernières années, la compréhension de ces phénomènes s'est améliorée substantiellement grâce aux simulations numériques et au développement des outils et études mathématiques qui ont joué un rôle prépondérant dans cette évolution. Le couplage et les interactions permanents entre expérience, analyse théorique et calcul ou simulation, est maintenant caractéristique des récents développements de la physique des phénomènes non linéaires.

Il faut préciser qu'il existe deux manifestations fascinantes et importantes des phénomènes non linéaires, qui sont : les structures non linéaires cohérentes, et les phénomènes chaotiques [1]. Cependant le même système peut présenter ces deux aspects, c'est-à-dire passer d'un état structuré au chaos ou inversement.

Les structures non linéaires cohérentes peuvent être arbitrairement classées en cinq grands [1] types parmi lesquels figurent les structures temporelles, spectrales, les structures du type impulsion, les structures et ondes tournantes, enfin les ondes solitaires et les solitons, qui constituent notre étude. Contrairement aux autres ondes, les solitons correspondent aux systèmes unidimensionnels dont la particularité est de pouvoir garder leur forme en se propageant. Ces dernières années le concept de soliton (dans le domaine temporel ou spatial) s'est considérablement développé avec des conséquences importantes dans de nombreux domaines scientifiques.

La recherche de solitons spatio-temporels autoconfinés dans les trois dimensions spatiales et dans le domaine temporel, est un problème mythique de l'optique non linéaire [2]. Au cours des dernières années, un nouveau niveau de compréhension a

été atteint sur les conditions d'existence, de stabilité et de génération des solitons optiques spatio-temporels, qui sont des paquets d'ondes capables de se propager dans les milieux optiques non linéaires sans se disperser ni se diffracter. Une des propriétés générales des ondes dans un milieu homogène est qu'elles ont tendance à s'étaler durant leur propagation. Ce comportement résulte du fait que les différentes composantes spectrales de l'onde se propagent à des vitesses et/ou dans des directions différentes. Par exemple, lors de la propagation ; on assiste à la diffusion transverse d'un rayon laser, en raison de la diffraction, de même que l'élargissement temporel des impulsions dans un milieu, en raison de la dispersion de vitesse de groupe. Bien souvent, les effets non linéaires accélèrent la désintégration d'un paquet d'onde. Mais, lorsque certaines conditions spéciales sont réunies, la nonlinéarité peut compenser les effets linéaires de diffusion. Dans ces conditions, l'impulsion reste localisée et se propage sans déformation. Ce comportement est connu sous le nom de soliton. Ainsi, les solitons optiques sont des ondes électromagnétiques localisées qui se propagent de manière stable dans des milieux non linéaires en présence de la dispersion, la diffraction ou des deux.

Les solitons temporels provenant d'un équilibre entre la dispersion et la nonlinéarité, ont été prédits en 1973 par Hasegawa et Tappert [3], et observés expérimentalement pour la première fois en 1980 par Mollenauer et al. [4].

Les solitons spatiaux résultent de l'équilibre entre la nonlinéarité et la diffraction. Lorsqu'elle agit dans une seule dimension transversale, la diffraction produit un effet analogue à celle de la dispersion anormale dans le domaine temporel. L'effet de l'auto-modulation de phase qui dépend de l'intensité peut alors compenser exactement la diffraction, et conduire à une impulsion apte à se propager sans s'étaler ni s'auto-confiner. Une telle onde de la forme d'une raie dans un guide d'onde planaire, qui confine l'onde dans une direction transverse, a été observée pour la première fois par A. Barthélémy et al. [5] ensuite par Aitchison et al. [6].

Ainsi, le double équilibre, entre la nonlinéarité et la diffraction unidimensionnelle d'une part, et entre la nonlinéarité et la dispersion chromatique anormale d'autre part, donne naissance à des solutions solitons, aux quels on fait référence comme étant des objets à $(1+1)$ -dimension ou brièvement $(1+1)D$. Le premier "1" correspond à la

coordonnée temporelle t dans le cas des solitons temporels, ou à la coordonnée spatiale transversale x dans le cas des solitons spatiaux et le second "1" fait référence à la coordonnée de propagation z . Cependant, les solitons spatiaux à $(2+1)D$ dans les milieux à nonlinéarité purement cubique sont instables, à la différence de leurs homologues à $(1+1)D$; car dans ce cas, des fluctuations bidimensionnelles (dans les directions transverses x et y) détruisent l'équilibre, qui est un équilibre instable, entre la nonlinéarité et la diffraction. Ce processus d'auto-accélération de l'auto-focalisation non linéaire est connu sous le nom de *collapse* ou effondrement des impulsions, comme on peut le voir dans l'article [7] de Bergé. L'un des moyens pour éviter l'effondrement et d'obtenir des solitons $(2+1)D$ stables réside dans l'emploi des milieux à nonlinéarité saturable [8].

Ce mémoire de thèse a pour objectif d'apporter une contribution aux efforts entrepris au cours de la décennie écoulée par les physiciens spécialistes de l'optique non linéaire, pour identifier, clarifier et classifier les conditions de génération des impulsions qui sont localisées dans toutes les dimensions transverses de l'espace, aussi bien que dans le domaine temporel. Ces solitons spatio-temporels sont des objets à $(2+1+1)D$ [ou $(3+1)D$] où le "2" indique les deux dimensions transverses, le premier "1" correspond à la dimension temporelle et le dernier "1" appartient à la coordonnée de propagation. Comme dans le cas des solitons temporels ou spatiaux, la formation des solitons spatio-temporels peut être interprétée avec un milieu de type Kerr (nonlinéarité du troisième ordre) comme le résultat d'un double équilibre d'une part entre la diffraction et la nonlinéarité, et d'autre part entre la dispersion et la nonlinéarité. Ces solitons complets (spatio-temporels), qui sont confinés dans l'espace et localisés dans le temps sont connus sous le nom de *balles de lumière* [2]. On pourrait intuitivement penser que les ingrédients requis pour la formation des solitons temporels ou spatiaux ($(1+1)$ dimensions) stables, seraient exactement adéquats pour la formation de solitons dans toutes les dimensions (balles de lumière). Mais ce n'est malheureusement pas le cas. En effet, dans une dimension transverse un milieu Kerr peut produire un confinement stable, alors que ce n'est plus le cas pour des dimensions d'ordres élevés. Comme mentionné précédemment, à partir de deux dimensions transverses, la nonlinéarité Kerr seule conduit à des solutions localisées instables qui s'autofocalisent ou

se dispersent rapidement en présence de fluctuations. Des nonlinéarités un peu plus élaborées ont été proposées dans le but de permettre la formation des solitons spatio-temporels stables. On peut citer comme exemple des milieux à nonlinéarité cubique saturable; ce modèle a permis de démontrer théoriquement l'existence des solitons spatio-temporels (SST) à $(1+1+1)D$ [9] ou bien des nonlinéarités d'ordre 2 couplant deux longueurs d'ondes distinctes, le fondamental et la seconde harmonique [10, 11]. De même dans les milieux à nonlinéarité quadratique Malomed et al [12] ont montré par une approche variationnelle, les conditions de stabilité des SST. L'étude des solitons spatio-temporels dans les systèmes conservatifs ou Hamiltoniens, constituent des modèles commodes pour l'analyse mathématique de base de comportements dynamiques simples. A coté de ces milieux, une autre alternative est de recourir aux systèmes dissipatifs; c'est le cas de notre étude dans ce mémoire de thèse. La présence des SST dans ces systèmes requiert un apport d'énergie continu à l'intérieur de la structure localisée pour la maintenir en vie. En plus de l'équilibre entre la nonlinéarité et la diffraction (dispersion), l'équilibre entre l'entrée de l'énergie (gain) et la sortie d'énergie (pertes) est primordiale pour la formation des solitons dissipatifs.

Contrairement aux études intensives conduites sur des solitons temporels ou spatiaux à une ou deux dimensions, le progrès vers la démonstration expérimentale de SST dans le cas tridimensionnel est très lent. Jusqu'à présent, les solitons spatio-temporels à $(2+1+1)D$ ou $(3+1)D$ n'ont pas encore été observés expérimentalement dans les milieux à gain, mais dans l'air. En effet, il faut trouver un milieu doté de pertes et d'un gain, homogène, isotrope et non linéaire; mais un tel milieu reste encore à l'heure actuelle difficile à synthétiser. Le choix de la nonlinéarité permettant un tel autoconfinement et garantissant une solution stable est délicat, et le lien entre la dimensionnalité et l'effet nonlinéaire utilisé est particulièrement important. De nos jours la recherche des milieux non linéaires ne concerne plus exclusivement les milieux à nonlinéarités dispersives, comme ce fut le cas dans les années 90. Un nombre croissant de travaux, sur le plan théorique comme au niveau expérimental, font état de solitons dans les cavités actives. Ces solitons de cavité correspondent à des structures transverses stables et localisées qui peuvent se former dans l'environnement dissipatif des cavités laser de grande ouverture, c'est-à-dire fortement multimodes [13, 14]. De

façon précise, l'emploi de lasers à semi-conducteurs a permis de mettre en lumière des possibilités de contrôle indépendant de plusieurs solitons, ce qui présente un vif intérêt pour le développement de fonctions de traitement tout-optiques de l'information [15, 16]. Il s'agit jusqu'à présent de solitons spatiaux localisés transversalement, mais non localisés dans le domaine temporel, puisque les cavités fonctionnent en régime quasi-continu. En ce qui concerne les solitons dissipatifs spatio-temporels complets la question a déjà été abordée à la fois théoriquement et numériquement, dans le cas de solutions à symétrie sphérique [17, 18].

Le progrès vers la recherche des solitons spatio-temporels, ou des balles de lumière exige des avancées conceptuelles, analytiques, numériques et expérimentales spécifiques ; qui passent par deux grands défis à relever :

(i) - la mise au point d'un modèle physique approprié de système optique non linéaire, basé sur des équations d'évolution qui permettent la propagation tridimensionnelle stable,

(ii) - la synthèse d'un matériau adéquat réunissant tous les ingrédients physiques nécessaires pour la génération et propagation des solitons spatio-temporels.

Ainsi, les avancées dans des directions tant théoriques qu'expérimentales sont nécessaires ; mais, dans ce travail de thèse, nous nous attaquons au premier des deux défis suscités. Sur la base d'un modèle de Ginzburg-Landau cubique quintique à coefficients complexes, dans lequel les effets de diffraction sont incorporés avec l'approximation paraxiale [19], nous mettons en évidence l'existence des balles de lumière dissipatives. Nous dressons une cartographie des différents types de comportements dynamiques qu'elle présente, ainsi que les conditions de propagation correspondantes. La réalisation de ce projet comporte plusieurs étapes, décrite dans ce manuscrit qui comprend cinq chapitres organisés de la manière suivante :

Le premier chapitre a pour ambition de présenter quelques généralités et différents types de solitons optiques. Après un bref rappel historique sur les solitons, nous introduisons au lecteur les principaux phénomènes dispersifs et non linéaires et rappellerons l'équation de Schrödinger non linéaire qui gouverne l'évolution du champ dans le cas particulier d'un milieu conservatif à nonlinéarité Kerr. Ensuite, nous abordons

également le concept du soliton dissipatif, car c'est notre principal centre d'intérêt dans cette étude, et sa modélisation par l'équation de Ginzburg-Landau complexe cubique quintique.

Le deuxième chapitre est entièrement consacré à la présentation de la méthode variationnelle des coordonnées collectives et à son application à la caractérisation d'une impulsion optique asymétrique dans un système conservatif à une dimension. En particulier, nous montrons que la caractérisation d'une impulsion distordue asymétriquement nécessite une étape mathématique supplémentaire, où on reformule les coordonnées collectives afin qu'ils s'identifient aux paramètres physiques de l'impulsion.

Dans le troisième chapitre, nous nous basons sur les travaux antérieurs de Tsoy et al. [20] pour retrouver les solutions de l'équation cubique quintique de Ginzburg-Landau complexe à (1+1)D (GL1D). Tout d'abord la dynamique de l'évolution du champ gouvernée par l'équation GL1D originale, est ramenée par projection, en un système d'équations différentielles ordinaires décrivant l'évolution des paramètres du soliton. A partir de ces équations différentielles, nous dressons une cartographie précise des points fixes et les différents types de solutions solitons dissipatifs de l'équation.

Le quatrième chapitre exploite la méthodologie du troisième chapitre pour circonscrire le domaine d'existence des solutions solitons dissipatifs de l'équation cubique quintique de Ginzburg-Landau complexe à (3+1)D. Sur la base de plusieurs fonctions d'essais, nous indiquons, à l'aide de la méthode des coordonnées collectives, une piste sérieuse pour l'existence des solitons spatio-temporels dans l'espace des paramètres de cette équation. Et que ces balles de lumière peuvent être soit stationnaires ou avoir des mouvements d'oscillations stables. Nous présentons de même une comparaison de nos résultats semi-analytiques avec ceux obtenus par la résolution exacte de l'équation de Ginzburg-Landau complexe à (3+1)D, qui permet de mettre en lumière la pertinence prédictive de l'approche des coordonnées collectives.

Le cinquième et dernier chapitre de ce mémoire consiste, à partir d'un choix particulier de la fonction d'essai, à montrer les différents types de dynamiques oscillatoires que peut avoir une balle de lumière. L'influence des termes cubiques et quintiques sur les oscillations stables est examinée, ainsi que l'effet du bruit. Une analyse semi-analytique permet d'étudier l'effet de la perturbation de l'un des paramètres de la balle de lumière sur sa dynamique générale.

Enfin, nous présentons nos conclusions et les perspectives que ce travail de thèse permet d'envisager.

Solitons temporels, solitons spatio-temporels, et solitons dissipatifs

1.1 Introduction

Pour une meilleure compréhension de la suite de mon travail, je présenterai dans ce chapitre le concept de soliton qui a bouleversé les sciences non linéaires et listerai ses différentes manifestations en optique. La notion d'onde solitaire a été avancée pour la première fois par un ingénieur écossais de la navigation fluviale John Scott Russell qui remarqua qu'une onde hydrodynamique parvenait à se propager sans changer de forme et sans diminution de vitesse sur un canal peu profond qui relie Édimbourg (une ville de la côte est de l'Écosse, et sa capitale, depuis 1437) à Forth-Clyde. Cette observation n'était pas le fait du hasard, mais constituait une partie d'une série d'expériences sur les profils des péniches que Scott Russell réalisait pour l'Union Canal Society of Edimburg.

Le soliton idéal tel qu'il est considéré d'un point de vue mathématique est une onde solitaire, solution exacte d'une équation non linéaire qui se propage sans déformation et sans changement de vitesse. La forme et la vitesse après collision demeurent inchangées dans le cas idéal (Hamiltonien). Cette définition est liée à l'intégrabilité mathématique stricte de l'équation qui modélise le système considéré.

Bien que la définition précédente soit très utile, l'expérimentateur est rarement confronté avec des problèmes relevant de l'appellation de soliton mais plutôt avec des pro-

blèmes où les perturbations (défauts, impuretés, ...) modifient légèrement les propriétés idéales du soliton. Dans ce cas les physiciens utilisent plutôt le terme de "quasi soliton" qui désigne une onde solitaire ou paquet d'énergie se propageant sans déformation ni modification de vitesse trop importantes.

En gardant à l'esprit cette définition, bien que cela puisse apparaître abusif aux mathématiciens, à l'heure actuelle, le physicien a l'habitude d'utiliser le terme soliton plutôt que quasi soliton ou onde solitaire.

Les solitons résultent d'un équilibre parfait entre la dispersion (diffraction) qui tend à étaler l'onde localisée et la nonlinéarité qui contrebalance l'effet dispersif (diffractif). Cela implique qu'à travers l'effet non linéaire, l'onde induit l'équivalent d'un puit de potentiel et se capture elle-même dans son propre potentiel induit. Ce phénomène d'onde solitaire se manifeste dans nombre de domaines de la physique. Il se manifeste donc naturellement dans une grande diversité de systèmes non linéaires, et malgré la diversité des systèmes dans lesquels les solitons se révèlent, ils ont une caractéristique particulière commune. On peut citer entre autres les exemples suivants :

- Ondes hydrodynamiques [21] : on peut citer les phénomènes de Mascaret observés à certains moments sur la seine jusqu'à Rouen, ou sur la Tamise, les raz de marées, les tsunamis, ...
- Ondes de densité de charge dans les plasmas [22].
- Ondes de matière dans les condensats de Bose-Einstein [23].
- Excitations sur les chaînes d'ADN [24].

Au vu de l'ensemble des variétés solitons et de la rapide évolution du domaine en optique, nous tenterons de rendre compte des variantes liées aux solitons optiques. Dans notre étude, nous mettrons tout d'abord un accent particulier sur la famille des solitons temporels du type enveloppe qui à ce jour trouvent un formidable champ d'application dans le domaine des télécommunications. Ensuite, nous parlerons brièvement des solitons spatiaux qui possèdent des propriétés dynamiques qui en font de potentiels candidats pour le traitement tout-optique de l'information et enfin nous aborderons la famille constituée de solitons spatio-temporels qui constituent l'essentiel de mon travail de thèse. Il s'agit de solitons qui sont au carrefour des solitons spatiaux et temporels ; en effet les effets non linéaires, sous certaines conditions

peuvent compenser à la fois la diffraction et la dispersion de la vitesse de groupe, et occasionner simultanément un soliton dans l'espace et dans le temps [25]. Pour clore ce chapitre nous introduirons les solitons dissipatifs qui, contrairement à ce que l'on croit généralement, possèdent de remarquables propriétés de robustesse lorsqu'on arrive à obtenir un parfait équilibre entre les pertes et gains. Dans les milieux à gain, les solitons spatio-temporels ne sont stables en situation expérimentale que pour les systèmes dissipatifs où une source d'énergie permet à la structure de se maintenir et de se stabiliser, car tout système réel possède de la dissipation à long terme.

Mais auparavant, il n'est pas inutile de rappeler quelques faits historiques sur les solitons.

1.2 Historique des solitons

De façon convenable, peut être la meilleure introduction des solitons est celle relatée par J. Scott Russell, né le 9 mai 1808 à Parkhead (Écosse), mort le 8 juin 1882 à Ventnor, Île de Wight (Angleterre). Lors de son séminaire en 1844 [26] à la Royal Society; il disait :

« J'observais le mouvement d'un bateau que deux chevaux tiraient rapidement dans un canal étroit, lorsque ce bateau vint à s'arrêter tout à coup; mais il n'en fut pas de même pour la masse d'eau qu'il avait mise en mouvement dans le canal; elle s'accumula autour de la proue dans un état de violente agitation, puis, laissant tout à coup le bateau en arrière, se mit à cheminer en avant avec une grande vitesse sous la forme d'une seule grande ondulation, dont la surface était arrondie, lisse et parfaitement déterminée. Cette onde continua sa marche dans le canal sans que sa forme et sa vitesse parussent s'altérer en rien. Je la suivis à cheval et la retrouvai cheminant encore avec une vitesse de 8 à 9 milles (1 mille=1.609 km sur terre ou 1.852 km sur mer et dans les airs) à l'heure et conservant sa figure initiale (environ 300 pieds sur 1 à 1 et $\frac{1}{2}$ pied de hauteur) (1 pied \approx 30 cm). La hauteur de l'onde diminuait graduellement, et après l'avoir suivie pendant un mille ou deux, je la perdis dans les sinuosités du canal. Ainsi le mois d'Aout 1834 ai-je eu la chance de ma première rencontre avec ce phénomène étrange et beau, que je nommai : onde de translation ».

A la suite de cette observation, John Scott Russell qui était principalement un architecte naval, réalisa plusieurs expériences à l'aide d'un canal artificiel car le phénomène qu'il venait de voir lui était totalement inconnu. Il a pu déterminer avec précision la forme typique en sécante hyperbolique de l'onde solitaire de même que la relation qui lie sa vitesse et son amplitude. Des travaux complémentaires ont été réalisés, dans la seconde moitié du dix-neuvième siècle, par les ingénieurs hydrodynamiciens dont Henri Bazin et Henri Darcy, sur le canal de Bourgogne, à proximité de Dijon. Le travail expérimental de Russell a engendré un engouement énorme en hydrodynamique théorique, principalement en Grande-Bretagne. De nombreux chercheurs comme George Airy et Samuel Earnshaw par exemple, se sont intéressés à ce nouveau phénomène et on essayé de décrire théoriquement la vague solitaire. Malgré leurs efforts, ils ne parvenaient pas à décrire cette vague ; ce qui jeta le trouble parmi eux. Ainsi Airy s'opposait à l'idée de *grande vague primaire*, il estimait qu'elle n'était ni grande ni primaire, mais résultait de la faible profondeur de l'eau. Quant à Stokes, il doutait qu'une vague solitaire puisse se propager sans changer de forme. Les premiers résultats théoriques approximatifs, mais corrects visant à décrire le phénomène analytiquement sont dûs d'abord à Boussinesq en 1871 et quelques années plus tard à Rayleigh en 1876. Dix neuf ans après, soit en 1895, deux hollandais nommés D.J. Korteweg et G. de Vries [27] développaient une équation non linéaire décrivant la propagation d'ondes de grandes longueurs d'ondes à la surface d'un canal étroit et peu profond. Ces résultats permirent un tant soit peu de taire cette controverse. Les premières expérimentations sur ce sujet furent réalisées par E. Fermi, J.R. Pasta et S.M. Ulam, car jusque là il y avait eu assez peu de progrès [28]. Ces expériences sont numériques et portent sur la dynamique de chaînes de particules interagissant de manière non linéaire. La principale idée de cette réalisation était que l'addition de petits couplages non linéaires dans une modélisation d'un solide par des particules sur un réseau unidimensionnel permettrait de comprendre la thermalisation et l'équipartition de l'énergie sur les différents modes au bout d'un temps assez long. Ces travaux ont mis en évidence un comportement en contradiction avec l'hypothèse statistique. L'énergie reste localisée dans les modes dominants pendant un temps plus long que prévu. Mais la généralisation et la signification de l'onde solitaire sont l'œuvre de

Martin Kruskal et Norman Zabusky [29], et ce seulement en 1965, date à laquelle ils proposaient le terme *soliton* à cette vague solitaire et parvinrent à montrer que l'équation dite de Korteweg-de Vries (KdV) admet comme solutions des solitons dont celui de Russell [30, 31]. Il est à noter que l'équation standard de KdV ne prend pas en compte la diminution très lente de la hauteur de la vague d'eau que Scott Russell a observée. Cette diminution est due aux pertes par « frottement » et correspond à l'inévitable dissipation qui intervient dans la dynamique au temps longs. La caractéristique principale de l'équation de KdV est que la vitesse des ondes solitaires est proportionnelle à leur hauteur. La question évidente qui découlait de ces études était de savoir comment se comportait deux ondes d'amplitudes différentes lors d'une collision. Au début, des chercheurs estimaient qu'à l'issue d'une collision, les deux ondes se détruiraient à cause de la nature non linéaire de l'interaction. Il a fallu attendre les travaux de M. Kruskal et N. Zabusky pour démentir cette assertion. Ils ont découvert grâce à leurs travaux numériques que chaque onde solitaire gardait son identité après la collision ; ces deux chercheurs qui doutaient de tout rapportaient ceci : « *ici, nous avons un processus physique non linéaire à travers lesquels les interactions des impulsions localisées ne se dispersent pas de façon irréversible* ». Au-delà de cette première et formidable observation du soliton hydrodynamique, de nombreux chercheurs se sont tournés vers ce nouveau domaine de recherche. Ainsi, en 1967 on assiste à une contribution fondamentale dans ce domaine grâce à C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal, et R.M. Miura [32]. Ils ont mis à jour une relation inattendue entre l'équation de Korteweg de Vries et l'équation de Schrödinger de la mécanique quantique. Cette méthode a permis de trouver la solution générale à plusieurs solitons. En quelques années le sujet a progressé considérablement et est devenu le domaine de prédilection d'un certain nombre de chercheurs. En 1971 C.S. Gardner ainsi que V. Zakharov et L.D. Faddeev ont découvert la formulation hamiltonienne de KdV, faisant le lien avec la théorie classique de l'intégrabilité au sens de J. Liouville (1855), et le nombre des exemples d'équations intégrables ayant des solutions solitons s'est accru. On peut citer les équations de Kadomtsev-Petviashvili, Sine-Gordon, Schrödinger non linéaire Après toutes ces études fructueuses, l'existence de solitons a été invoquée pour expliquer de nombreux phénomènes, allant au-delà de la propagation

d'ondes de surface. On peut citer en particulier les ondes dans les plasmas et dans les fibres optiques, ainsi que les excitations solitoniques dans des composés organiques. Le sujet a connu de nombreux développements allant vers les mathématiques pures, comme la théorie de la grassmannienne infinie par Sato en 1982 [33].

Avec les outils mathématiques aboutis et les solitons devenus incontournables, plusieurs chercheurs commencèrent alors à s'investir dans ce nouvel axe de recherche : la physique non linéaire ; ils explorèrent ce domaine dans tous les champs de la physique. Dans le cadre de notre étude, nous nous limiterons aux solitons optiques.

1.3 Les premiers solitons optiques

Depuis l'avènement du laser en 1960 comme une source de radiation cohérente extrêmement intense, caractérisé par un très haut degré de monochromaticité et une grande directionnalité, de nombreux effets physiques nouveaux, dépendants de l'intensité de la lumière, ont été mis en évidence, faisant apparaître le domaine de l'optique non linéaire. Ces effets autorisent l'interaction entre faisceaux lumineux par l'intermédiaire des milieux qu'ils traversent. Ils permettent de réaliser des dispositifs tout optique dans le domaine des télécommunications et du traitement du signal.

En régime linéaire, une impulsion ou paquet d'ondes en optique, a une tendance naturelle à s'étaler durant sa propagation dans un milieu homogène. Une onde localisée dans l'espace ou temporellement peut subir un étalement, soit de son enveloppe temporelle soit de ses dimensions spatiales ou même des deux simultanément.

L'étalement est dû à la dispersion chromatique pour les impulsions temporelles et à la diffraction pour les impulsions spatiales. On peut remédier à la dispersion spatiale ou temporelle dans un milieu linéaire par différents procédés technologiques. Spatialement, la méthode la plus communément utilisée est celle de guides d'ondes où, sous certaines conditions liées à l'interférence constructive entre les différentes réflexions, le faisceau piégé forme un mode guidé. Par exemple on peut citer le guide planaire diélectrique, que l'on appelle communément guide (1+1)D ou 1 D car l'on considère dans ce cas un axe de propagation et un seul axe transverse guidant.

Pour certains matériaux d'optiques non linéaires, c'est-à-dire dont les propriétés (in-

dice de réfraction ou absorption) peuvent être modifiées par la présence de la lumière, la propagation d'impulsions optiques dans le temps ou dans l'espace peut être altérée. Si l'indice de réfraction du milieu est modifié par le biais de la lumière, il est possible sous certaines conditions d'éliminer l'élargissement temporel ou spatial de l'impulsion. Un soliton optique [34] est donc tout simplement la compensation auto-induite de ces étalements, lorsque l'effet de la dispersion chromatique ou de la diffraction est compensée par l'effet de la modification auto-induite de l'indice de réfraction.

Il est important à ce niveau de noter que l'interaction entre deux impulsions optiques diffère d'un régime à l'autre : deux faisceaux ou impulsions optiques peuvent se croiser sans interagir en optique linéaire. Il en va tout autrement en régime non linéaire, puisque le milieu est fortement sensible à l'intensité totale du champ couplé et dépend donc des amplitudes des différentes composantes en présence. Une des propriétés fondamentales des solitons est que, bien qu'existant en régime non linéaire, ils ont la propriété extraordinaire de pouvoir survivre à une collision en préservant leur énergie, leur quantité de mouvement et leur forme. Cet attribut repose sur le fait que les équations différentielles qui régissent la propagation des solitons sont intégrables [35]. L'intégrabilité dans ce sens, signifie qu'on peut obtenir une solution analytique exacte du soliton ; que le système Hamiltonien sous-jacent a une infinité de constantes de mouvement. On peut obtenir des solutions analytiques par quadrature en utilisant la théorie spectrale inverse développée par Zakharov et Shabat en 1972 [36] pour l'équation de Schrödinger Non Linéaire (NLS) unidimensionnelle.

1.3.1 Quelques phénomènes non linéaires et dispersifs sur les impulsions optiques

1.3.1.1 Effet Kerr optique

L'effet Kerr optique est vraisemblablement le processus non linéaire *le plus* important de toute l'optique non linéaire [37, 38] pour ses applications, et reste la clef de voûte du phénomène soliton optique. Cet effet correspond à la propriété de certains matériaux d'acquérir un indice de réfraction dépendant linéairement de l'intensité du champ électromagnétique qui les traverse. Il est à l'origine d'une très grande variété de

phénomènes tels que l'auto-focalisation, l'auto-modulation de phase et de fréquence, la génération de solitons, les commutateurs optiques, la modulation de phase croisée, le mélange à quatre ondes etc

Lorsqu'une onde lumineuse se propage dans un milieu diélectrique, le champ électrique incident induit un déplacement des charges et une polarisation au sein de ce matériau [37, 38]. Pour une intensité de ce champ faible devant le champ atomique du matériau et suffisamment éloignée de ses fréquences de résonances, la réponse du milieu se traduit donc par une réponse proportionnelle au champ incident. Dans ce cas, nous avons une réponse linéaire, c'est-à-dire que la polarisation induite par le champ extérieur possède la même fréquence que le champ qui lui a donné naissance avec une amplitude qui lui est proportionnelle.

Par contre pour des intensités lasers suffisamment importantes, lorsque l'amplitude du champ incident devient importante, la réponse du matériau fait intervenir différents harmoniques et une nonlinéarité dans la relation constitutive entre la polarisation du milieu et le champ électrique lumineux appliqué. Pour des intensités nettement inférieures aux intensités du champ intra-atomique, la relation constitutive peut être développée en puissances des composantes de polarisation du champ électrique de la forme :

$$P_i = \epsilon_0 \left(\chi_{ij}^{(1)} E_j + \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l + \dots \right), \quad (1.1)$$

où ϵ_0 est la permittivité du vide,

et $\chi^{(n)}$ est le tenseur de susceptibilité d'ordre n .

Pour les matériaux composés de silice fondue (exemple la fibre optique), il n'existe pas de direction privilégiée d'orientation des molécules. De ce fait, les tenseurs de susceptibilité d'ordre 2 sont dirigés aléatoirement et se compensent en moyenne, ce qui annule le tenseur de susceptibilité macroscopique $\chi^{(2)}$. Enfin dans une fibre optique homogène, le tenseur de susceptibilité d'ordre 3 ($\chi^{(3)}$) sera à l'origine des effets non linéaires de plus petit ordre.

L'effet Kerr optique correspond à l'existence dans un matériau d'une susceptibilité non linéaire du troisième ordre purement réelle de la forme $\chi_{xxxx}^{(3)}(\omega; \omega, -\omega, \omega) = \chi^{(3)}(\omega; \omega, -\omega, \omega)$.

Or puisque $E(-\omega) = E^*(\omega)$, le matériau acquiert une polarisation non linéaire du

type

$$P^{NL}(\omega) = \frac{3}{4}\epsilon_0\chi^{(3)}(\omega; \omega, -\omega, \omega) \left| \vec{A} \right|^2 A e^{i\vec{k}\vec{r}}, \quad (1.2)$$

lorsqu'il est sous l'influence d'une onde d'amplitude A de fréquence ω et de vecteur d'onde \vec{k} .

On a $\vec{E}(\omega) = A(\omega)e^{i\vec{k}\vec{r}} \vec{e}_x$ et $\left| \vec{A} \right|^2 = \left| \vec{E} \right|^2$.

Le facteur $\frac{3}{4}$ provient des propriétés de symétrie du tenseur $\chi^{(3)}$.

En posant $\epsilon^{NL} = \frac{3}{4}\chi^{(3)} \left| \vec{E} \right|^2$, P^{NL} peut s'écrire sous la forme

$$P^{NL}(\omega) = \epsilon_0\epsilon^{NL}E(\omega), \quad (1.3)$$

où ϵ^{NL} est la contribution non linéaire de la constante diélectrique; la polarisation totale prend alors la forme suivante.

$$P(\omega) = P^L + P^{NL} = \epsilon_0 [\chi_{xx}^{(1)} + \epsilon^{NL}] E(\omega). \quad (1.4)$$

Comme le montre l'équation (1.4) et en s'inspirant du fait que l'indice de réfraction et la polarisation sont étroitement liés par la relation de Maxwell suivante

$$D = n^2 E = \epsilon_0 E + P, \quad (1.5)$$

l'indice de réfraction n à la fréquence ω est donné par :

$$n^2 = 1 + \chi^{(1)} + \epsilon^{NL} = (n_0 + \Delta n^{NL})^2. \quad (1.6)$$

n_0 est l'indice de réfraction linéaire à la fréquence ω .

Δn^{NL} est l'indice de réfraction non linéaire.

En pratique, on a $n_0 \gg \Delta n^{NL}$, d'où l'approximation $(n_0 + \Delta n^{NL})^2 \approx n_0^2 + 2n_0 \Delta n^{NL}$.

Sachant que $n_0^2 = 1 + \chi^{(1)}$, on a alors $\epsilon^{NL} = 2n_0 \Delta n^{NL}$,

soit $\Delta n^{NL} = \frac{\epsilon^{NL}}{2n_0} = \frac{3}{8n_0}\chi^{(3)} \left| \vec{E} \right|^2 = n_2 \left| \vec{E} \right|^2$,

où n_2 est l'indice de réfraction non linéaire défini par $n_2 = \frac{3}{8n_0}\chi^{(3)}$.

L'indice de réfraction n à la fréquence ω est donnée par

$$n(\omega) = n_0(\omega) + n_2 \left| \vec{E}(\omega) \right|^2. \quad (1.7)$$

La polarisation linéaire P^L est à l'origine de la dépendance en fréquence de l'indice de réfraction, tandis que la polarisation non linéaire P^{NL} entraîne une dépendance

en intensité de l'indice de réfraction que l'on appelle effet Kerr optique.

Sachant que l'intensité de l'onde I est donnée par $I = \alpha |E|^2$ avec $\alpha = \frac{1}{2}n_0 \epsilon_0 c$ l'indice de réfraction dépend donc de l'intensité de l'onde incidente et est donné par

$$n(\omega, I) = n_0(\omega) + \frac{n_2}{\alpha} I. \quad (1.8)$$

Pour la silice fondue, on a typiquement $\frac{n_2}{\alpha} = 2.710^{-20} m^2/W$ au voisinage de la longueur d'onde de $1.55 \mu m$. Par exemple pour $I = 10^{13} W/m^2$, on a $\frac{n_2}{\alpha} I = 2.710^{-7}$ soit $\Delta n^{NL} \ll n_0$ ($n_0 \approx 1.45$).

Physiquement, l'effet Kerr résulte de l'interaction du champ électrique avec les atomes de silice. Il s'agit d'un processus non-résonant, dans le sens où les transitions électroniques impliquent des états virtuels. La réponse Kerr du matériau au champ appliqué est quasi-instantanée (temps de relaxation $\approx 3fs$). La valeur de l'indice de Kerr est relativement faible dans la silice, cependant, la fibre optique constitue un milieu Kerr privilégié puisque des puissances de plusieurs dizaines de milliwatts sont confinées sur des distances pouvant atteindre plusieurs milliers de kilomètres (avec réamplification optique intermédiaire) au sein d'un cœur dont la surface effective est de l'ordre de $25 - 80 \mu m^2$.

1.3.1.2 Equation de Schrödinger non linéaire

La propagation d'une impulsion optique dans un milieu diélectrique présentant une nonlinéarité Kerr s'accompagne de nombreux phénomènes qui sont difficiles à appréhender directement par l'analyse de la polarisation non linéaire (par exemple l'effet soliton), mais qui peuvent être compris si l'on considère l'équation de Schrödinger non linéaire [37, 38].

Cette équation peut décrire analytiquement la propagation de la lumière dans une fibre optique [37] et sous certaines conditions, a des solutions analytiques mais elle permet aussi une résolution numérique des phénomènes de propagation. L'avantage de cette résolution numérique est qu'elle permet alors une bonne compréhension des différents phénomènes résultants de la propagation.

Considérons une impulsion lumineuse qui se propage selon un axe z avec une fréquence ω_0 , de nombre d'onde k_0 et une enveloppe A . Soit E ce champ donné par

$$E = A \exp[i(k_0 z - \omega_0 t)]. \quad (1.9)$$

Supposons que l'enveloppe A de l'impulsion varie lentement par rapport aux variations rapides spatio-temporelles de l'onde porteuse ω_0 . Par conséquent le spectre spatial est concentré autour du nombre d'onde de l'enveloppe porteuse k_0 et le spectre en fréquence est concentré autour de la fréquence porteuse ω_0 . Ainsi il est possible de développer le nombre d'onde k en fonction de ω_0 selon une série de Taylor autour du nombre d'onde k_0 :

$$k(\omega) = k_0 + \left(\frac{\partial k}{\partial \omega}\right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 k}{\partial^2 \omega}\right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial |A|^2}\right)_{A_0=0} |A|^2 \dots \quad (1.10)$$

Le terme non linéaire $Q = (\partial k / \partial |A|^2)_{A_0=0}$ provient de l'effet Kerr optique $n = n(\omega, |A|^2)$. En effet, $k = n \frac{\omega}{c} = k(\omega, |A|^2)$.

En posant $K = k - k_0$, $\Omega = \omega - \omega_0$, $\beta_1 = (\partial k / \partial \omega)_{\omega_0}$ et $\beta_2 = (\partial^2 k / \partial^2 \omega)_{\omega_0}$, on peut réécrire l'équation (1.10) sous la forme suivante :

$$K = \beta_1 \Omega + \frac{1}{2} \beta_2 \Omega^2 + Q |A|^2, \quad (1.11)$$

où β_1 représente l'inverse de la vitesse de groupe et β_2 est le coefficient de dispersion de la vitesse de groupe (GVD : Group Velocity Dispersion).

Dans la littérature, on remplace très souvent β_2 qui est la variation de la vitesse de groupe vis-à-vis de la fréquence par le paramètre D qui s'exprime en $ps/km.nm$. Les deux paramètres sont liés par la relation suivante :

$$D = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \beta_2. \quad (1.12)$$

D est d'une manière générale la somme de deux contributions : la dispersion chromatique du matériau D_m et la dispersion du guide D_g . On peut définir deux régimes de propagation séparés par la longueur d'onde de dispersion nulle λ_0 . Lorsque $D > 0$ ($\beta_2 < 0$), le régime de dispersion est qualifié d'anormal, et inversement pour $D < 0$ ($\beta_2 > 0$) le régime de dispersion est dit normal.

L'équation (1.11) représente la relation de dispersion non linéaire de l'onde enveloppe. En utilisant une méthode basée sur la transformée de Fourier, dans laquelle K est remplacé par l'opérateur spatial $-i\partial/\partial z$ et Ω par l'opérateur temporel $i\partial/\partial T$, on peut appliquer l'équation (1.11) à l'enveloppe A , et on obtient l'équation suivante :

$$i \frac{\partial A}{\partial z} + i \beta_1 \frac{\partial A}{\partial T} - \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + Q |A|^2 A = 0. \quad (1.13)$$

Pour rendre les choses plus simples ; il est pratique d'utiliser un système de coordonnées qui se déplace à la vitesse de groupe $v_g = 1/\beta_1$, c'est-à-dire, en remplaçant T par $t = T - z/v_g$ et d'utiliser la quantité $A = (\alpha A_{eff})^{1/2} A$ pour laquelle $|A|^2$ représente la puissance de l'onde. Pour un faisceau laser gaussien, le champ électrique s'écrit $E = A(z)\psi(x, y)e^{i(k_0z - \omega_0 t)}$, où $\psi(x, y)$ est la distribution transverse du champ électrique. L'intensité de l'onde étant $I = \frac{1}{2}n_0 \epsilon_0 c |E|^2$, la puissance $P = \alpha A_{eff} |A|^2$ de l'onde est obtenue par l'intégration sur la section transverse du faisceau laser. Le paramètre $A_{eff} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x, y)|^2 dx dy$ est l'aire effective du cœur de la fibre, qui prend en compte la variation de l'intensité de l'onde sur la section transverse de la fibre. La valeur de A_{eff} est fortement liée à la distribution des modes. En tenant compte de ces différentes substitutions, l'équation (1.13) se réduit à l'équation de Schrödinger non linéaire (NLS) de l'onde enveloppe [37, 38].

$$i \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \gamma |A|^2 A = 0, \quad (1.14)$$

où γ est le coefficient non linéaire défini par $\gamma = \frac{\omega n_2}{c \alpha A_{eff}}$ et s'exprime en $W^{-1}m^{-1}$. Cette équation (1.14) est analogue à l'équation de Schrödinger en mécanique quantique mais avec un potentiel non linéaire. Elle est à la base de nombreux travaux de recherche dans le domaine des Télécoms et a été démontrée dans les fibres optiques en 1973 par Hasegawa et Tappert [3]. Dans cette équation NLS la plus simple, nous avons négligé les pertes de la fibre ainsi que tous les termes d'ordre supérieur qui décrivent des effets tels que la dispersion d'ordre trois, ou la diffusion de Raman stimulée, mais cette équation peut être généralisée pour inclure d'autres effets.

1.3.1.3 Dispersion de la vitesse de groupe

Dans l'équation (1.14), nous avons la coexistence de la dispersion d'ordre deux (β_2) et de la nonlinéarité (γ) lors de la propagation dans un milieu diélectrique de longueur L . En mettant le coefficient de nonlinéarité à zéro ($\gamma = 0$), seul l'effet de la dispersion de vitesse de groupe peut être obtenu sur la propagation d'une impulsion. Dans ce cas l'équation (1.14) se réduit à [37] :

$$i \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0, \quad (1.15)$$

dans le domaine fréquentiel l'équation (1.15) devient

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} - \frac{i}{2} \beta_2 \omega^2 \tilde{A} = 0, \quad (1.16)$$

où $\tilde{A}(z, \omega)$ représente la transformée de Fourier (TF) de $A(z, t)$ donnée par

$$\tilde{A}(z, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(z, t) \exp(i\omega t) dt. \quad (1.17)$$

La solution de l'équation (1.16) est donnée par

$$\tilde{A}(z, \omega) = \tilde{A}(0, \omega) \exp\left(\frac{i}{2} \beta_2 \omega^2 z\right), \quad (1.18)$$

où $\tilde{A}(0, \omega)$ désigne la transformée de Fourier du champ initial $A(z, t)$.

En regardant attentivement l'équation (1.18), il ressort clairement que la dispersion modifie la phase de chaque composante spectrale de l'impulsion d'une quantité qui dépend de la distance parcourue dans la fibre et de la fréquence de chaque composante. Le spectre de puissance donnée par $|\tilde{A}(z, \omega)|^2 = |\tilde{A}(0, \omega)|^2$ n'est pas modifié par la dispersion, il reste constant au cours de la propagation. En revanche, le changement de phase spectrale peut modifier la forme de l'enveloppe temporelle.

Par exemple, soit une impulsion de forme gaussienne pour laquelle le champ initial est le suivant :

$$A(0, t) = \exp\left(\frac{-t^2}{2\delta_0^2}\right), \quad (1.19)$$

avec δ_0 la demi-largeur à $1/e$ de l'intensité reliée à sa largeur à mi-hauteur (FWHM) [37] par $FWHM = 2\sqrt{\ln 2} \delta_0 \approx 1.665 \delta_0$.

En tenant compte du fait que la transformée de Fourier inverse de l'équation (1.18) donne le champ électrique suivant

$$A(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(0, \omega) \exp\left(\frac{i}{2} \beta_2 \omega^2 z - i\omega t\right) d\omega, \quad (1.20)$$

de l'impulsion en fonction de la distance de propagation, il vient qu'à la distance z le champ électrique s'écrit [37, 38] :

$$A(z, t) = \frac{\delta_0}{\sqrt{\delta_0^2 - i\beta_2 z}} \exp\left(-\frac{t^2}{2(\delta_0^2 - i\beta_2 z)}\right). \quad (1.21)$$

On remarque à travers cette équation (1.21) que l'impulsion s'élargit tout en gardant sa forme gaussienne au cours de la propagation. Par conséquent, sa puissance crête

diminue progressivement afin de satisfaire la loi de conservation de l'énergie. Pour mieux mettre en évidence le phénomène d'élargissement des impulsions, nous réarrangeons l'expression précédente (1.21) sous la forme suivante :

$$A(z, t) = \frac{1}{(1 + (\delta_0^{-2} \beta_2 z)^2)^{1/4}} \exp \left[-\frac{t^2}{\delta_0^2 (1 + (\delta_0^{-2} \beta_2 z)^2)} + \frac{i 2 \beta_2 z t^2}{\delta_0^4 (1 + (\delta_0^{-2} \beta_2 z)^2)} - \frac{i}{2} \arctan(\delta_0^{-2} \beta_2 z) \right]. \quad (1.22)$$

A partir de cette expression (1.22), nous pouvons déduire que la largeur de l'impulsion gaussienne s'exprime en fonction de la distance de propagation (indépendamment du signe de la dispersion) par :

$$\delta_z(z) = \delta_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{L_d} \right)^2}. \quad (1.23)$$

Ainsi, on voit bien que la largeur de l'impulsion augmente de δ_0 à $\delta_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{L_d} \right)^2}$. Le paramètre L_d désigne la longueur caractéristique de la dispersion. A la distance $z = L_d$, une impulsion gaussienne s'élargit d'un facteur $\sqrt{2}$. L'expression de la longueur de dispersion est donnée par :

$$L_d = \frac{\delta_0^2}{|\beta_2|}. \quad (1.24)$$

Une autre remarque importante de l'équation (1.22) montre qu'au cours de la propagation, l'impulsion acquiert une phase quadratique du type $\Phi_d(z, t) = (at^2 + b)z$. La fréquence instantanée sous l'enveloppe de l'impulsion, c'est-à-dire la dérivée temporelle de la phase, s'écarte donc de la fréquence de la porteuse selon une quantité qui varie linéairement le long de l'impulsion et qui augmente avec la distance de propagation. Cette quantité est $\delta\omega = -\frac{\partial\Phi_d}{\partial t}$ appelée *chirp* ou glissement de fréquence. Le phénomène d'étalement de l'onde s'explique par le fait que les différentes composantes spectrales de l'impulsion se déplacent à des vitesses différentes par le biais de la dispersion chromatique [37, 38]. Pour une impulsion gaussienne initialement non-chirpée, la dispersion induit à la distance z la dérive en fréquence $\delta\omega = -\frac{\partial\Phi_d}{\partial t}$. Cette expression montre que la dérive en fréquence induite par la dispersion dépend du signe de β_2 et varie linéairement au cours du temps.

En régime de dispersion anormale, les composantes de plus hautes fréquences se déplacent plus vite que les composantes de plus basses fréquences. Ainsi au cours de la propagation, les composantes de basses fréquences s'accumuleront sur le front descendant de l'impulsion tandis que les hautes fréquences s'amasseront sur le front montant. Le front montant de l'impulsion étant alors plus rapide que le front descendant, il s'ensuit un élargissement de l'impulsion.

1.3.1.4 Auto-modulation de la phase

Une des manifestations très intéressante de l'effet Kerr optique est le phénomène d'auto-modulation de phase (SPM : self-phase modulation) qui se traduit par l'accumulation d'une phase non linéaire générée au cours de la propagation et qui engendre, contrairement à la dispersion, un élargissement spectral des impulsions optiques. De même que pour les effets liés à la dispersion, les effets non linéaires ne se manifestent qu'au-delà d'une certaine distance de propagation minimum. Considérons la propagation d'une onde lumineuse de champ $A(z, t)$ dans un milieu non linéaire et non dispersif, dans ce cas les effets de dispersion peuvent être négligés et l'équation différentielle de Schrödinger non linéaire dans laquelle β_2 est nul devient

$$i \frac{\partial A}{\partial z} + \gamma |A|^2 A = 0. \quad (1.25)$$

La solution de cette équation est tout simplement

$$A(z, t) = A(0, t) \exp(i \gamma |A(0, t)|^2 z). \quad (1.26)$$

L'équation (1.26) indique que $|A(z, t)|^2 = |A(0, t)|^2$, ce qui signifie que le profil temporel de l'impulsion est préservé, et reste inchangé durant la propagation et par conséquent l'auto-modulation de phase ne modifie pas le profil d'intensité au cours de la propagation. Dans l'expression (1.26), le déphasage non linéaire $\Phi_{NL} = \gamma |A(0, t)|^2 z$ dépend de la puissance $|A(0, t)|^2$ initiale et augmente linéairement avec la distance de propagation z . Lorsque nous sommes en présence d'une impulsion gaussienne ou sécante hyperbolique, le déphasage est maximal au centre de l'impulsion et vaut $\Phi_{NL}^{max} = \gamma z P_c$, avec $P_c = |A(0, 0)|^2$ la puissance crête de l'impulsion. Le déphasage non linéaire dépend de la forme de l'impulsion ($|A(0, t)|^2$) et varie non linéairement

vis-à-vis du temps. L'impulsion sera donc chirpée c'est-à-dire que la fréquence instantanée varie et diffère de la fréquence centrale ω_0 de l'onde porteuse. L'auto-modulation de phase modifie donc le profil spectral de l'impulsion en générant en permanence au cours de la propagation des photons de fréquences inférieures à la fréquence de la porteuse ω_0 sur le front montant de l'impulsion et respectivement supérieures à ω_0 sur le front descendant. De même que pour la dispersion, l'impulsion acquiert un chirp ou glissement de fréquence défini par [37, 38]

$$\delta\omega(t) = \omega(t) - \omega_0 = -\frac{\partial\Phi_{NL}}{\partial t} = -\frac{\partial|A(0,t)|^2}{\partial t}\gamma z. \quad (1.27)$$

La distance caractéristique au-delà de laquelle les effets non linéaires deviennent importants est appelée la longueur de nonlinéarité, elle représente la longueur nécessaire à une accumulation de phase non linéaire au centre de l'impulsion égale à 1 ($\Phi_{NL}^{max} = 1$) et s'exprime par :

$$L_{nl} = \frac{1}{\gamma P_c}. \quad (1.28)$$

Toutes ces longueurs (L_{nl} et L_d) caractérisant les différents effets rencontrés dans un milieu diélectrique sont très utiles pour définir le régime de propagation, modélisant au mieux le système. En effet, si $L_{nl} \gg L_d$ nous pouvons considérer que le système est purement dispersif et donc peut être modélisé par l'équation (1.15) et dans le cas contraire, si $L_{nl} \ll L_d$ le système sera purement non linéaire et pourra être modélisé par l'équation (1.25).

La dérive en fréquence induite par l'auto-modulation de phase possède plusieurs caractéristiques intéressantes. $\delta\omega$ est négative du côté du front montant de l'impulsion (décalage vers le rouge) et positive du côté du front descendant (décalage vers le bleu). La dérive en fréquence est linéaire en z et croissante dans la partie centrale de l'impulsion. L'auto-modulation de phase a de nombreuses applications : en construisant un interféromètre à l'aide du milieu diélectrique non linéaire (fibre optique par exemple) on peut réaliser un commutateur tout optique. Elle peut aussi être bénéfique pour comprimer les impulsions et obtenir des impulsions ultra-courtes (quelques femtosecondes) ou bien néfaste par exemple l'élargissement spectral des impulsions dans le cas des systèmes de télécommunication.

1.3.2 Les solitons temporels

Les solitons temporels résultent fondamentalement d'un équilibre parfait entre deux phénomènes que nous venons de voir ; à savoir la dispersion et l'auto-modulation de phase. Le soliton temporel "brillant", c'est-à-dire une impulsion positive sur fond noir, est observable en régime de dispersion anormale ($D > 0$) où la modification de la phase induite par l'auto-modulation de phase est contrebalancée exactement par celle induite par la dispersion (et les dérivées en fréquence correspondantes se compensent elles aussi) de sorte que $L_{nl} = L_d$. En absence de pertes et d'effet d'ordre supérieur, le soliton temporel est alors capable de voyager sans aucune déformation. Cet équilibre est obtenu pour une forme sécante hyperbolique d'impulsion. Mathématiquement, l'équation (1.14), appartient à la classe remarquable d'équations non linéaires intégrables, qui peuvent être résolues exactement pour un état initial arbitraire au moyen de la méthode de diffusion inverse. Les solutions dépendent du signe de la dispersion. Une solution de l'équation (1.14) peut être mise (pour $N = 1$) sous la forme suivante :

$$A(z, t) = N\sqrt{P_0} \operatorname{sech}\left(\frac{t}{\delta_0}\right) \exp\left(\frac{iP_0z}{2\gamma}\right), \quad (1.29)$$

où N est l'ordre du soliton donné par $N^2 = \frac{L_d}{L_{nl}} = \frac{\gamma P_0 \delta_0^2}{|\beta_2|}$, ce paramètre sans dimension mesure l'importance relative des effets dispersifs et non linéaires, et la puissance crête pour générer le soliton fondamental ($N = 1$) est déterminée par $L_{nl} = L_d$ et donnée par

$$P_0 = \frac{|\beta_2|}{\gamma \delta_0^2}. \quad (1.30)$$

Seul le soliton temporel fondamental ($N = 1$) se propage sans déformation, tous les autres solitons d'ordre supérieur ($N > 1$) subissent un mouvement de déformation récurrent durant leur propagation. De ce fait, le soliton temporel fondamental est très attractif pour la transmission de l'information dans les systèmes de communication optique. Il peut être excité dans une fibre optique pour des niveaux de puissance très faibles disponibles avec des diodes lasers. Par exemple, pour une fibre à dispersion décalée ($|\beta_2| \approx 1 \text{ps}^2/\text{km}$), à la longueur d'onde $\lambda_0 = 1.55 \mu\text{m}$, avec $\gamma = 3 \text{W}^{-1}\text{km}^{-1}$ et pour $\delta_0 = 10 \text{ps}$ nous obtenons la puissance crête suivante $P_0 = 3.3 \text{mW}$. Il est à noter

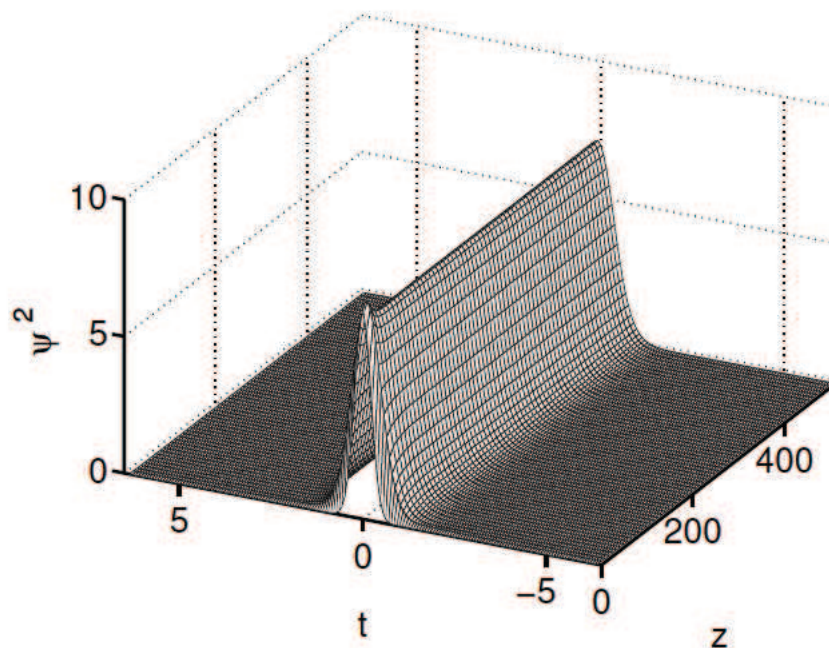


FIG. 1.1 Exemple de propagation d'un soliton temporel ($N = 1$) de NLS.

le caractère invariant de l'intensité au cours de la propagation et la grande stabilité de l'impulsion solitonique en particulier sa largeur temporelle, lors de la propagation.

1.3.3 Les solitons spatiaux

De manière analogue aux solitons temporels, les solitons spatiaux optiques correspondent à des faisceaux optiques dont la diffraction naturelle est totalement compensée par l'auto-modulation de phase du milieu de propagation sensible à l'intensité du champ. En effet, la modification de l'indice va induire optiquement l'effet de lentille et engendrera l'autofocalisation du faisceau durant la propagation. Dans ce cas, on arrive à observer un soliton spatial lorsque l'autofocalisation contrebalance exactement l'élargissement du faisceau dû à la diffraction naturelle.

La formation des solitons spatiaux est basée sur la géométrie du guide d'onde et sur le déphasage photo-induits :

Concernant la géométrie du guide d'onde induit, on sait qu'un faisceau de largeur

limitée obéit aux lois de la diffraction caractérisée par la longueur de Rayleigh :

$$L_D = \frac{r}{\theta_D} = \frac{\pi n_o r^2}{\lambda}, \quad (1.31)$$

où r est le rayon de mode ("waist"), n_o l'indice linéaire de réfraction et λ la longueur d'onde optique. La longueur de Rayleigh L_D est la distance de propagation au bout de laquelle la taille du faisceau a augmenté d'un facteur $\sqrt{2}$ (sa surface a doublé). C'est un paramètre important car il définit (un peu arbitrairement) la distance sur laquelle le faisceau laser garde une taille relativement constante. En présence d'un milieu de nonlinéarité positive ($\gamma > 0$), le faisceau induit une augmentation d'indice Δn , proportionnelle à l'intensité. L'angle critique de réflexion totale entre les deux milieux, défini par $\theta_c = \sqrt{2\Delta n/n_o}$ permet alors de déterminer une longueur caractéristique de nonlinéarité (autofocalisation) dans l'approximation des petits angles (développement limité),

$$L_{NL} = \frac{r}{\theta_c} = \frac{r}{\sqrt{2\Delta n/n_o}}. \quad (1.32)$$

Le soliton spatial correspond à un équilibre entre la diffraction et l'autofocalisation, dans ce cas les deux longueurs s'égalisent, de sorte que

$$L_{NL} = L_D \iff \theta_c = \theta_D \quad (1.33)$$

Une autre description qualitative du modèle est basée sur la distorsion des fronts d'onde [39] et le déphasage photo-induit. La propagation d'un faisceau monochromatique, peut être représentée par une superposition d'ondes planes (représentant les fréquences spatiales), de vecteur d'onde $k = n\omega/c$. Chaque onde plane se propage suivant une direction, d'un angle α par rapport à l'axe de propagation, et est caractérisée par la projection de son vecteur d'onde sur l'axe de propagation, tandis que les vitesses de chacune de ces ondes relativement à cet axe sont différentes. Le déphasage ainsi créé entre les différentes composantes lors de la propagation, se traduit par un élargissement de la taille du faisceau optique (diffraction). Si une nonlinéarité introduit un déphasage dépendant du profil d'intensité (auto-modulation de phase), alors ce déphasage peut modifier le front optique et induire une autofocalisation. Sous certaines conditions (signe de γ , profil de l'impulsion), l'autofocalisation arrive à compenser exactement la diffraction, et ainsi aboutir à l'effet soliton spatial désiré.

En comparaison aux solitons temporels, les solitons spatiaux exploitent la nonlinéarité des matériaux massifs ou planaires sur des distances de propagation beaucoup plus courtes de l'ordre du centimètre. L'étude des solitons spatiaux est plus considérable car, à la différence des solitons temporels, le piégeage se produit dans une ou deux dimensions transverses et dans des matériaux non linéaires de types divers. Ainsi le soliton spatial comporte différents aspects comme, l'autofocalisation en confi-

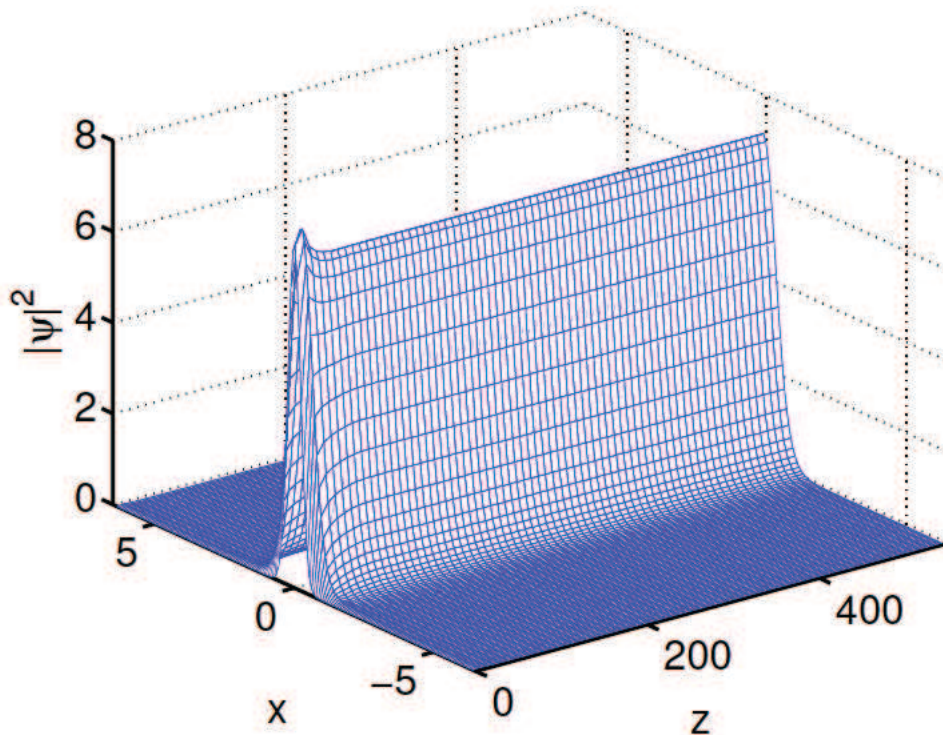


FIG. 1.2 Exemple de soliton spatial à une dimension.

guration 1-D, l'existence de vortex optiques [40], la formation de motifs complexes ou de structures localisées dans les cavités [41] . . . , ces multiples aspects des solitons spatiaux ont grandement stimulé l'intérêt pour ce domaine de recherche (les solitons quadratiques, dans les cristaux liquides, les solitons Kerr, photoréfractifs, . . .) [42, 43] et permettent d'envisager un grand nombre d'applications comme des opérations photoniques ultrarapides [44] et d'adressage de l'information tout-optique, basés sur leurs interactions.

1.3.4 L'effet d'effondrement ou "collapse"

Comme indiqué par Zakharov et Shabat, [36] une onde continue à (1+1) dimensions (une dimension longitudinale et une autre dimension transversale) avec un profil sech et une relation prescrite entre sa largeur et sa puissance peut se propager comme soliton fondamental spatial dans un milieu Kerr homogène : le terme de diffraction est exactement équilibré par le terme non linéaire. Ce soliton spatial a été observé expérimentalement par A. Barthelemy [5, 45, 46] ensuite par J. S. Aitchinson et al [47]. Dans les milieux Kerr de dimension transversale (1+1)D, le soliton spatial a une forme sécante hyperbolique. Dans ces systèmes dotés d'une nonlinéarité cubique, il n'y a aucun effondrement des ondes, car la diffraction dominera toujours quand l'échelle spatiale devient assez petite (le gradient devient assez grand). Par contre, pour des nonlinéarités d'ordre supérieur, comme par exemple une réponse quintique, la diffraction n'est plus forcément suffisante pour contrebalancer l'auto-modulation [48, 49]. Or dans le cas à deux dimensions transversales (2+1)D, la situation est tout à fait différente, l'onde spatiale a une toute autre forme de profil [50]. En particulier dans les milieux à nonlinéarité cubique, une augmentation de l'intensité conduit à l'auto-focalisation de l'onde, et il s'ensuit son effondrement ; il n'existe donc pas de soliton Kerr spatiaux à (2+1)D.

L'équation de Schrödinger non linéaire (NLS) peut se réécrire

$$i\partial_z u + \eta\Delta u + \kappa|u|^2 u = 0, \quad (1.34)$$

avec η la dispersion, κ le coefficient non linéaire, $u(z, X)$ l'enveloppe du champ, $X = x_1, \dots, x_d$, $\Delta = \sum_{i=1}^d \partial_{x_i}^2$ et $d = 1$ ou 2

Lorsque $\kappa > 0$ on assiste à l'auto-confinement des impulsions et le phénomène contraire lorsque $\kappa < 0$. L'équation (1.34) dans le cas de $\kappa > 0$ admet des solutions qui deviennent singulières au bout d'un temps fini lorsque $d = 2$ (cas critique) ou $d > 2$ (cas super critique). Pour $d = 1$, l'équation (1.34) est intégrable et donne des solutions soliton qui résultent de l'équilibre exact entre la diffraction et la nonlinéarité. Pour $d = 2$, qui nous intéresse, la structure de la solution dans les milieux non linéaires [51] est plus compliquée. Les études numériques [48, 52, 53] ont montré que pour certaines conditions initiales il existe des solutions singulières dans un temps fini c'est-à-dire que l'amplitude de la solution devient infinie. Dans ce cas, la

nonlinéarité domine les termes de diffraction et il en résulte l'effondrement de l'impulsion. Ce phénomène d'apparition d'une singularité dans la fonction d'onde est connu sous le nom de "collapse". En optique non linéaire, la singularité correspond à une augmentation extrême de l'amplitude du champ en raison de l'auto-confinement. Mathématiquement, l'effondrement de ces solitons correspond à une singularité dans la fonction d'onde, lorsqu'on est en présence d'une distance de propagation ou d'un temps fini. Ce comportement est fondamental pour beaucoup d'équations d'ondes et, se produit dans une variété de domaines de la physique, telles qu'en hydrodynamique, en plasma, ou en l'optique [7].

Dans ces systèmes physiques, l'apparition d'autres effets physiques permet d'éviter la singularité dans la fonction d'onde et ainsi limiter le risque d'effondrement des impulsions. En effet, de nombreux travaux ont montré que l'effet d'effondrement peut être contrarié soit, par la présence d'un amortissement dû aux inhomogénéités dans la structure des champs et dans la fonction de distribution des particules [54], soit par la saturation de la nonlinéarité [53], la cohérence partielle [55], ou la non paraxialité des petits faisceaux [53].

Dans les systèmes à $(2+1)D$, la diffraction n'est pas assez forte pour surmonter l'auto-modulation de phase. Dans ce cas, avec une puissance critique, l'impulsion continuera à s'effondrer d'une façon radialement symétrique, maintenant un profil indépendamment de sa forme initiale [56]. Il est donc difficile de trouver des solitons spatiaux à $(2+1)D$ stables sur des longues distances [57, 58]. Les effets de perturbation qui peuvent modifier ou arrêter le "collapse" sont la dissipation, la dispersion normale et la saturation de la nonlinéarité [48]. La seule alternative réaliste à nos yeux pour obtenir la formation des solitons spatiaux à plus d'une dimension, est de recourir à des milieux dissipatifs où la présence des gains et pertes non linéaires permet d'avoir des solitons plus stables et éviter ainsi l'effondrement des impulsions.

1.3.5 Les solitons spatio-temporels

Nous venons de voir une gamme de solitons déjà riches en diversité qui, sous certaines conditions pouvaient être soit temporels, soit spatiaux. A l'intersection de ces solitons temporels et spatiaux, il existe les solitons spatio-temporels. En effet, la pro-

pagation d'une impulsion lumineuse intense et localisée est gouvernée par l'entrejeu entre la diffraction, la dispersion de la vitesse de groupe et les différents processus non linéaires présents. Sous certaines conditions, les nonlinéarités peuvent être utilisées pour compenser à la fois la diffraction et la dispersion de vitesse de groupe et ainsi produire simultanément un soliton dans l'espace et dans le temps [25], comme le montre la figure (1.3) ci après. Lorsque nous sommes en régime linéaire, il est impossible d'obtenir des solitons spatio-temporels et ce en raison de l'élargissement temporel et spatial des impulsions. L'emploi des milieux non linéaires adéquats permet de contrer les élargissements et ainsi aboutir à un soliton spatio-temporel. Le terme de *balle de lumière* a été proposé par Silberberg [2] pour décrire ces solitons spatio-temporels complets. Comme nous l'avons discuté précédemment, pour les milieux Kerr conservatifs, on assiste à l'effondrement des impulsions. Les milieux caractérisés par une forte saturation d'effet Kerr, comme les milieux cubique-quintiques, peuvent éviter l'effondrement des impulsions et ainsi permettre le confinement dans plusieurs dimensions [59, 60], mais en pratique de tels milieux sont difficiles à trouver. Les matériaux photo-réfractifs possédant une forte saturation de nonlinéarité sont des alternatives, mais leurs réponses très lentes ne permettent pas de les utiliser dans la formation des solitons temporels [61]. Par contre, les matériaux quadratiques permettent de remédier à cette situation, car ils possèdent une réponse très rapide, qui a permis d'observer expérimentalement des solitons à $(2+1)D$ [10, 62, 63]. La principale difficulté liée à ces matériaux est de trouver les conditions nécessaires à la génération des ondes de seconde harmonique et des modes fondamentaux. A l'heure actuelle, les solitons spatio-temporels à $(3+1)D$ ou balles de lumière n'ont pas encore été observés expérimentalement dans les milieux à gain. Le constat général est que les milieux Kerr échouent expérimentalement à produire convenablement les solitons spatio-temporels ou balles de lumière. Les milieux dissipatifs non linéaires sont des alternatives très intéressants ; en effet l'équilibre additionnel entre les pertes et les gains donne une robustesse à la forme de l'impulsion et ainsi doit permettre d'éviter son effondrement. Dans le cas des solitons spatio-temporels à $(3+1)D$, ils ont été appelés récemment *balles de lumière dissipatives*. Leur étude et démonstration numérique fait suite aux travaux précurseurs de Rosanov qui avait montré que les systèmes dis-

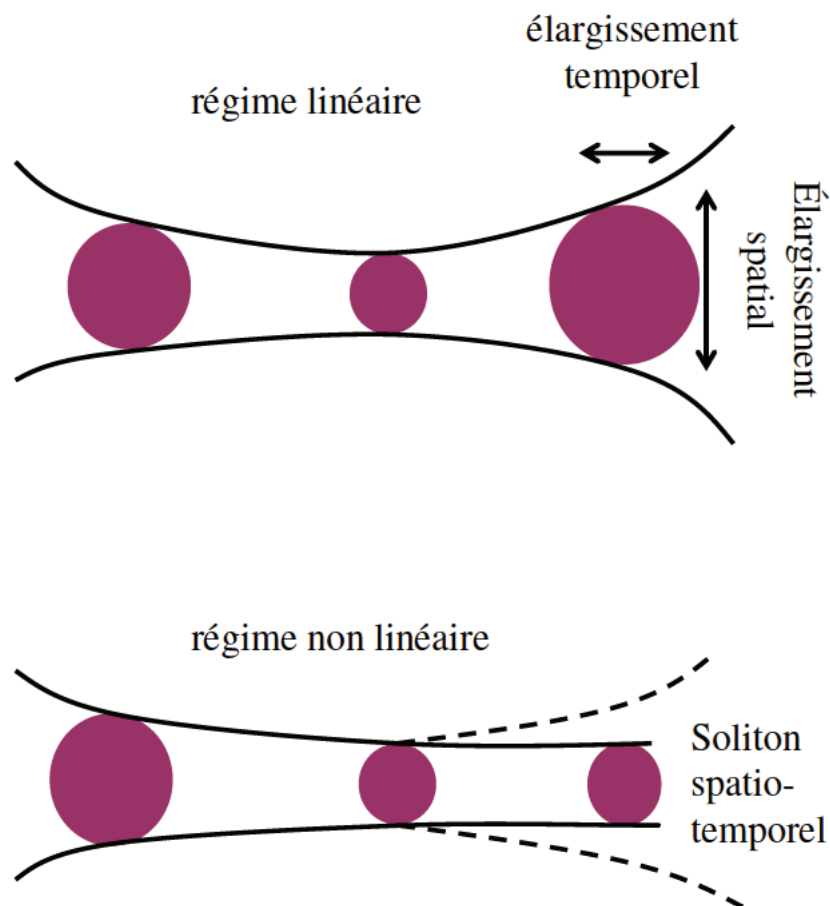


FIG. 1.3 Illustration du concept de balle de lumière en régime linéaire et non linéaire.

sipatifs pouvaient avoir des solutions solitons à une, deux et trois dimensions [17]. Lorsque les paramètres du système sont bien choisis, il est possible d'avoir des balles de lumières stables. Outre les solutions stationnaires, il est fort probable de trouver des solutions oscillantes mais stables. Dans les cas des solitons à une et deux dimensions leurs domaines d'existence ont déjà été l'objet de nombreuses études. Il reste

actuellement le cas des solitons spatio-temporels à trois dimensions qui est le centre d'intérêt principal de mon mémoire de thèse.

Pour parvenir à répondre à un tel défi scientifique, c'est-à-dire générer un soliton

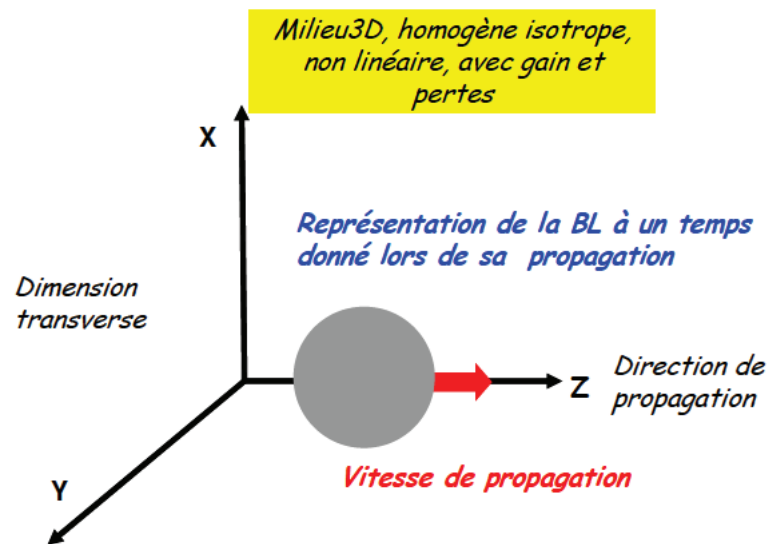
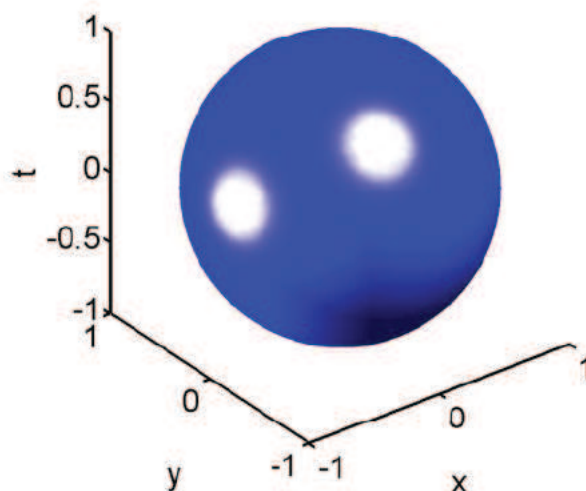


FIG. 1.4 Représentation de la propagation d'une balle de lumière (BL) dans l'espace pour un temps donné.

confiné dans l'espace et localisé dans le temps, il faut un milieu à trois dimensions non linéaire, homogène, isotrope qui présente en plus du gain et des pertes saturables. L'étude des balles de lumière dissipatives nous enseigne qu'il faut un certain nombre de milieux dotés de caractéristiques particulières pour permettre de matérialiser la présence d'une telle impulsion spatio-temporelle [voir figure (1.4)]. Il est clair que de tels milieux sont difficiles à trouver. Sur le plan analytique, il n'existe pas encore des solutions analytiques stables, mais il est possible d'obtenir numériquement des solutions stables de balles de lumière. Pour y arriver, il faut disposer d'un outil numérique adéquat, une bonne condition initiale, et des paramètres de système bien choisis.

FIG. 1.5 Exemple de soliton spatio-temporel «balle de lumière».

1.4 Les solitons dissipatifs

Le terme "soliton" a été inventé pour décrire les ondes solitaires solutions d'une équation intégrable comme celle de Korteweg de Vries et de Schrödinger non linéaire. Cependant comme les solutions non linéaires localisées existent dans une grande variété de systèmes physiques, le terme "soliton" a été étendu par les physiciens à l'étude des ondes solutions des systèmes conservatifs et non conservatifs. Les solitons non conservatifs ou dissipatifs ont des caractéristiques différentes de ceux de systèmes conservatifs. L'étude de leurs propriétés s'est accrue durant les deux dernières décennies, faisant du sujet des solitons dissipatifs un domaine de recherche à part entière [64, 65].

Un soliton dissipatif est une structure localisée capable d'exister pendant une longue période de temps, bien que les parties de la structure éprouvent des pertes et gains d'énergie et/ou de matière. Cette structure peut être une grandeur physique telle qu'une intensité lumineuse, une température, un champ magnétique, etc. La formation de ces structures est vue comme la conséquence d'un flux d'énergie, ce qui permet en partie d'expliquer et de comprendre certaines manifestations localisées dans divers domaines de la physique, la chimie et la biologie.

Les systèmes dissipatifs sont largement répandus dans la nature. Les structures dites conservatives ou Hamiltoniennes sont des modèles commodes pour l'analyse du comportement dynamique de certains systèmes moins complexes, mais ces systèmes conservatifs sont inadaptés à décrire la plupart des comportements dynamiques aux temps longs. En inspectant dans la nature, nous nous rendons compte que toutes les particules sont plongées dans des milieux dissipatifs qui alimentent leurs mouvements en permanence. Le terme *système dissipatif* a été employé par Nicolis et Prigogine [66] pour décrire les systèmes thermodynamiques hors d'équilibre. Depuis environ une décennie, de nombreux systèmes ouverts non linéaires ont été intensément étudiés, dans le cadre de l'étude théorique des solitons dissipatifs [64, 65]. La perception communément répandue au sujet des systèmes dissipatifs, est qu'ils ne peuvent que perdre de l'énergie. En réalité ces systèmes sont non isolés, car ils sont en contact avec une source externe qui peut leur fournir de l'énergie nécessaire pour compenser les pertes. Ce transfert d'énergie est nécessaire pour maintenir la structure *en vie*. Les structures localisées dans ces systèmes c'est-à-dire les solitons dissipatifs connaissent un regain d'intérêt dans le milieu scientifique [64]. Ces solitons dissipatifs peuvent être considérés comme des composantes élémentaires des structures plus compliquées. De même lorsqu'ils existent [67], les solitons dissipatifs peuvent former *des molécules* [68, 69]. La formation des solitons dissipatifs est beaucoup plus complexe que celle des systèmes conservatifs, car en plus de la dispersion et la nonlinéarité, les solitons dissipatifs échangent de l'énergie et/ou de la matière avec une source externe très proche. Ils existent dans des systèmes ouverts hors d'équilibre, sont décrits par un champ impulsionnel et peuvent vivre indéfiniment dans le temps, si les paramètres qui leur donnent naissance restent constants au cours de la propagation. Ils peuvent évoluer, ou changer de forme périodiquement, mais disparaissent lorsque les échanges d'énergie ou de matière avec l'extérieur cessent, ou si les paramètres du système ne coïncident plus avec ceux qui ont permis la formation du soliton. Ces structures (solitons dissipatifs) apparaissent typiquement en biochimie, en optique, dans les systèmes thermiques. De façon pédagogique, nous pouvons étendre les analogies aux systèmes plus compliqués tels que l'espèce animale dans la nature qui peut être considérée comme structure localisée, dont les processus internes doivent être équilibrés. Leur existence

résulte d'un ajustement d'une série de paramètres (température, pression humidité, etc...) de façon appréciable, et ils cessent de vivre si l'apport d'énergie de l'extérieur s'arrête.

L'une des équations génériques qui permettent de décrire la dynamique des solitons dissipatifs et que nous utiliserons dans notre étude, est l'équation de Ginzburg-Landau complexe cubique quintique (GL) [70, 71]. Cette équation décrit aussi bien qualitativement que quantitativement plusieurs effets de propagation des ondes non linéaires et peut se mettre sous la forme normalisée suivante [64, 72] :

$$\psi_z - i\frac{D}{2}\psi_{tt} - i|\psi|^2\psi - i\nu|\psi|^4\psi = \delta\psi + \beta\psi_{tt} + \epsilon|\psi|^2\psi + \mu|\psi|^4\psi \quad (1.35)$$

où μ , δ , β , D , ν et ϵ sont des constantes réelles, et ψ est le champ complexe avec deux variables c'est-à-dire $\psi = \psi(t, z)$. La signification physique de chaque terme dépend du problème particulier étudié. En optique cette équation décrit les systèmes lasers [73, 74], les lignes de transmission de solitons avec régénération [75], les cavités non linéaires avec une pompe externe [76] et les oscillateurs paramétriques [77].

Le membre de gauche de l'équation (3.1) représente les termes conservatifs et le membre de droite inclut tous les termes dissipatifs.

Lorsque cette équation est appliquée au cas des lasers à modes bloqués passifs, z représente la distance de propagation accumulée tour après tour dans la cavité, t la coordonnée du temps (ou transverse spatiale) retardé dans le référentiel local de l'impulsion, ψ représente l'enveloppe normalisée du champ électrique, $D = +1(-1)$, le coefficient de dispersion, qui est positif dans le cas d'un régime de dispersion anormale et négatif dans le cas normal. Le coefficient δ représente les pertes linéaires dans la cavité (lorsqu'il est négatif), ϵ (si positif) est le terme de gain non linéaire. β (si positif) et μ (si négatif) sont les coefficients de filtrage spectral (ou la dispersion de gain) et de saturation non linéaire du gain, respectivement. Le coefficient ν (si négatif) représente le terme de saturation de l'effet Kerr dans la cavité (effet non linéaire d'ordre supérieur).

Cette équation distribuée peut aussi être appliquée à la modélisation d'une cavité laser de large ouverture opérant en régime des impulsions courtes. Le modèle inclut l'effet de la dispersion longitudinale de l'impulsion et son évolution le long de la cavité. Les termes dissipatifs décrivent les gain et pertes de l'impulsion dans la

cavité. Les termes dissipatifs d'ordre supérieur sont responsables des caractéristiques de transmission non linéaires dans la cavité, qui surviennent par exemple dans le cas des lasers à modes bloqués passifs [68].

Il existe une différence significative entre les solitons dissipatifs et ceux des systèmes conservatifs. Pour les systèmes conservatifs, nous avons vu précédemment que les solitons ne résultent que de l'équilibre entre la dispersion (diffraction) et la nonlinéarité. L'unique équilibre entre les deux permet la formation d'une solution stationnaire, qui est d'habitude une famille de solitons. En ce qui concerne les systèmes avec gains et pertes (système dissipatif), pour avoir des solitons dissipatifs stationnaires il faut, en plus du premier équilibre un second équilibre entre les pertes et les gains. Ce second équilibre impose que les paramètres sont fixés, au contraire des familles de solitons hamiltoniens. Donc, en ce qui concerne l'étude des balles de lumière, nous avons plusieurs paramètres (gain, perte, nonlinéarité, ...) dont l'interaction permet de donner une certaine dynamique au soliton spatio-temporel. La forme, l'amplitude et la largeur de ces impulsions sont tous fixés et dépendent des paramètres de l'équation qui les gouverne [78]. Mais il existe quelques rares exceptions à cette règle [79, 80], dans des cas très spécifiques. Ces deux équilibres non linéaires sont fortement couplés, fournissant des propriétés uniques à ces formations localisées. Ainsi, les solitons dissipatifs ne sont pas simplement les extensions des solitons qui ont été étudiés, depuis fort longtemps, dans des systèmes hamiltoniens. Ils représentent très souvent des attracteurs dans les systèmes dynamiques de dimension infinie. En général, les solitons dissipatifs sont relativement stables vis-à-vis des fluctuations de paramètres et du bruit. Ils sont aussi potentiellement tolérants à l'inclusion de termes d'ordre supérieur dans l'équation de propagation ou à l'augmentation de la dimension spatio-temporelle du problème, contrairement aux solitons Hamiltoniens.

1.5 Conclusion

La découverte du soliton a été d'un apport considérable dans la communauté scientifique, en ce sens qu'il a permis d'expliquer plusieurs phénomènes qui étaient

jusque là mal compris. Ainsi, après plusieurs tentatives pour expliquer *l'onde de translation* que J. Scott. Russell avait observée, les chercheurs ont finalement découvert que le phénomène soliton naît d'un équilibre délicat entre deux effets (incluant la nonlinéarité) qui se compensent. Dans le cas du soliton optique (soliton "brillant" sur fond noir), hamiltonien, ces effets sont essentiellement l'auto-modulation de phase et la dispersion anormale. Nous avons vu que le soliton pouvait être temporel, spatial ou les deux à la fois. En effet si l'indice de réfraction du milieu est modifié par l'intermédiaire de la lumière, il est alors possible dans certaines circonstances de supprimer l'élargissement temporel ou spatial de l'impulsion. On parle alors de soliton temporel optique dans le cas de la compensation de la dispersion chromatique et soliton spatial lors de la neutralisation de la diffraction du faisceau. Lorsqu'on arrive à éradiquer à la fois l'impact de la dispersion et de la diffraction, on parle alors de solitons spatio-temporels. A coté des solitons conservatifs, il existe des ondes solitaires dans les systèmes dissipatifs, que nous appellerons, à l'instar d'une majorité croissante de physiciens, solitons dissipatifs. Dans ce cas, en plus de l'équilibre entre la dispersion (diffraction) et la nonlinéarité il faut que les pertes et les gains non linéaires se compensent. L'étude des solitons dissipatifs temporels a été d'un intérêt très précieux tant pour les sciences fondamentales que pour les télécommunications optiques à haut débit. Dans ce travail de thèse, nous nous focaliserons sur la description des solitons dissipatifs spatio-temporels obtenus à partir de l'équation modèle de Ginzburg-Landau cubique-quintique correspondant à des systèmes avec gain, pertes saturables, filtrage spectral, dispersion, diffraction et nonlinéarité. Nous utiliserons une méthode semi-analytique (la méthode des coordonnées collectives) pour circonscrire le domaine d'existence des ces balles de lumière dans l'espace des paramètres de l'équation modèle.

Méthode des coordonnées collectives

2.1 Introduction

Rappelons que la propagation d'une impulsion lumineuse intense dans un milieu diélectrique peut engendrer une série de phénomènes non linéaires, comme le mélange à quatre ondes, l'auto-modulation de phase, la diffusion de Raman stimulée, ou l'auto-raïdissement, ... [81, 82]. Les effets combinés des phénomènes non linéaires et de la dispersion chromatique conduisent à des processus dynamiques complexes et particulièrement difficiles à comprendre à partir du seul champ impulsionnel solution de l'équation de propagation. Pour mieux appréhender ces processus dynamiques, il est parfois possible de ramener la dynamique de l'impulsion à celle d'un système mécanique simple n'ayant qu'un petit nombre de degrés de liberté. A chaque degré de liberté du système mécanique équivalent, on associe une variable représentant un paramètre physique de l'impulsion. Ces variables permettant la description du comportement impulsionnel sont appelées coordonnées collectives. Les procédés mathématiques qui permettent de transformer l'équation de propagation du champ impulsionnel en un système d'équations différentielles ordinaires décrivant l'évolution des coordonnées collectives de l'impulsion au cours de la propagation sont qualifiés de *méthodes des coordonnées collectives*.

De manière plus générale, de nombreux systèmes en physique, en biologie et en chimie sont décrits par des équations d'évolution dynamique, dont les solutions exactes sont difficiles à trouver et à analyser. Les méthodes des coordonnées collectives permettent

de simplifier l'analyse du comportement dynamique par le biais d'une fonction d'essai permettant d'approcher la solution. Une fonction d'essai est choisie de façon à approcher au mieux le profil de la solution réelle de l'équation d'évolution dynamique. La fonction d'essai peut être une Gaussienne, une sécante hyperbolique, ou une autre forme, dotée d'un nombre fini de paramètres correspondant aux caractéristiques physiques de l'impulsion. Ces paramètres correspondent précisément aux coordonnées collectives. Plusieurs techniques mathématiques permettent d'obtenir les équations d'évolution des coordonnées collectives. La plus connue est la méthode du Lagrangien moyen. Elle a été utilisée dans la théorie des solitons par Anderson [83]. Une autre méthode est celle des moments, qui a été développée plus tard par Maimistov [84]. La troisième méthode la plus utilisée est celle des opérateurs de projection [85, 86]. Chaque fonction d'essai conduit à un système d'équations d'évolution des coordonnées collectives qui lui est propre. Cependant on peut se demander si les différentes techniques suscitées conduisent au même système d'équation.

Dans ce chapitre nous présentons d'abord une comparaison entre les différentes méthodes des coordonnées collectives suscitées. Ensuite nous exposerons de manière plus détaillée la méthode des opérateurs de projection, qui est celle dont nous nous sommes le plus servi tout au long de la thèse.

2.2 Comparaison entre la méthode des opérateurs de projection et l'approche du Lagrangien

Pour illustrer cette comparaison, nous allons utiliser comme équation de propagation, celle de Schrödinger non linéaire suivante dont les termes seront explicités plus tard.

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{i\beta_2(z)}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 t} - i\gamma(z) |\psi|^2 \psi = \Xi R, \quad (2.1)$$

où

$$\Xi R = -\frac{\alpha(z)}{2} \psi + \frac{\beta_3(z)}{6} \frac{\partial^3 \psi}{\partial^3 t}, \quad (2.2)$$

représente un terme de perturbation.

Les étapes essentielles pour obtenir les équations différentielles ordinaires à partir de

l'équation (2.1), à l'aide de la méthode du Lagrangien sont les suivantes. Sans les termes de perturbation le Lagrangien moyen de l'équation (2.1) est donné par

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\beta_2(z)}{2} |\psi_t|^2 + \frac{\gamma(z)}{2} |\psi|^4 + \frac{i}{2} (\psi^* \psi_z - \psi \psi_z^*) \right] dt. \quad (2.3)$$

En choisissant la fonction d'essai (pour approcher la solution) sous la forme

$$f = A \exp \left[-\frac{(t-p)^2}{w^2} + i \frac{c}{2} (t-p)^2 - id(t-p) + if \right], \quad (2.4)$$

et en substituant la fonction f dans l'équation (2.3), nous obtenons la fonction L suivante :

$$L = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \beta_2(z) A^2 \left(\frac{1}{w} + \frac{w^3 c^2}{4} + wd^2 \right) + \frac{\sqrt{\pi}}{4} \gamma(z) w A^4 - \frac{\sqrt{\pi}}{8\sqrt{2}} A^2 w^3 \dot{c} - \frac{\sqrt{\pi} A^2 w}{\sqrt{2}} (\dot{f} + d\dot{p}) - A^2 w^2 \left(\beta_2(z) cd - c\dot{p} - \dot{d} \right), \quad (2.5)$$

où les termes pointés sont les dérivées par rapport à z .

Les équations variationnelles sont ensuite données [87, 88] par la relation

$$\frac{\partial L}{\partial X} - \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \Xi R \frac{\partial f^*}{\partial X} + cc, \quad (2.6)$$

avec $X = A, w, p, c, d, f$. En remplaçant ψ par la fonction d'essai dans l'équation (2.2) ($\psi = f$) et après intégration de l'équation (2.6) nous obtenons les équations variationnelles suivantes.

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \frac{\beta_2}{2} Ac - \frac{\beta_3}{2} Acd - \frac{\alpha}{2} A, \\ \dot{p} &= -\beta_2 d + \frac{\beta_3}{8} \left(\frac{4}{w^2} + w^2 c^2 + 4d^2 \right), \\ \dot{w} &= -\beta_2 wc + \beta_3 wcd, \\ \dot{c} &= \beta_2 \left(c^2 - \frac{4}{w^4} \right) + \beta_3 d \left(\frac{4}{w^4} - c^2 \right) - \gamma A^2 \frac{\sqrt{2}}{w^2}, \\ \dot{d} &= 0, \\ \dot{f} &= \beta_2 \left(\frac{1}{w^2} - \frac{d^2}{2} \right) + \beta_3 \left(\frac{w^2 c^2 d}{8} - \frac{d}{2w^2} + \frac{d^3}{3} \right) - \gamma \frac{5\sqrt{2}}{8} A^2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Les équations (2.7) obtenues à l'aide de l'approche du Lagrangien sont exactement les mêmes que celles que l'on obtient avec la méthode des opérateurs de projection

(que nous allons définir dans les sections suivantes) [85]. Ainsi, dans la référence [85] les auteurs ont démontré que l'approche du Lagrangien donne exactement les mêmes résultats que la méthode des opérateurs de projection pour les équations (2.1) et (2.2).

2.3 Comparaison entre la méthode des moments et de l'approche du Lagrangien moyen

Dans cette section, nous présentons brièvement la méthode des moments [84], qui, comme les deux autres, permet de ramener le problème de dynamique d'une impulsion à celui d'un système mécanique simple n'ayant qu'un petit nombre de degrés de liberté. Pour un champ arbitraire ψ , les équations de moment [84] s'écrivent :

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx, \quad (2.8)$$

$$P = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\psi\psi_x^* - \psi^*\psi_x) dx,$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi|^2 dx,$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^2 |\psi|^2 dx,$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0) (\psi^*\psi_x - \psi\psi_x^*) dx, \quad (2.9)$$

qui sont des quantités conservées pour l'équation de Schrödinger non linéaire. Par contre pour l'équation complexe cubique quintique de Ginzburg-Landau (GL) suivante :

$$i\psi_t + \frac{D}{2}\psi_{xx} + |\psi|^2\psi = -\nu|\psi|^4\psi + i\delta\psi + i\beta\psi_{xx} + i\epsilon|\psi|^2\psi + i\mu|\psi|^4\psi \equiv R[\psi] \quad (2.10)$$

ces quantités ne sont pas conservées, mais satisfont le système d'équation suivant

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= i \int_{-\infty}^{\infty} (\psi R^* - \psi^* R) dx, \\ \frac{dP}{dt} &= -i \int_{-\infty}^{\infty} (\psi_x R^* - \psi_x^* R) dx, \\ \frac{dI_1}{dt} &= iDP + i \int_{-\infty}^{\infty} x(\psi R^* - \psi^* R) dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dI_2}{dt} &= -iDI_3 + i \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^2 (\psi R^* - \psi^* R) dx, \\ \frac{dI_3}{dt} &= 2P \frac{dx_0}{dt} + i \int_{-\infty}^{\infty} (2D |\psi|^2 - |\psi|^4) dx \\ &+ 2i \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0) (\psi_x R^* - \psi_x^* R) dx + i \int_{-\infty}^{\infty} (\psi R^* - \psi^* R) dx. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Il existe une infinité de moments qui sont conservés pour l'équation NLS et non conservés pour l'équation GL. Dans la méthode, on choisit alors un nombre de moments égal au nombre de variables du système réduit, ou coordonnées collectives. C'est pourquoi dans cet exemple on travaille avec 5 moments.

Pour obtenir les équations variationnelles, il suffit de remplacer ψ par la fonction d'essai choisie ($\psi = f$) et effectuer les dérivées temporelles des quantités situées dans le membre de gauche du système d'équations (2.11). En prenant bien en compte le fait que la fonction d'essai ne dépend pas explicitement du temps, mais en dépend indirectement via les coordonnées collectives. Par exemple $\frac{dQ}{dt} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial Q}{\partial X_j} \frac{dX_j}{dt}$, où $\frac{\partial Q}{\partial X_j}$ s'obtient à partir de l'équation (2.8) où on a pris $\psi = f$. Ainsi, à partir du système (2.11), on génère un système d'équation incluant les dérivées $\dot{X}_j = \frac{dX_j}{dt}$ et les coordonnées collectives. En inversant ce système, on obtient les équations variationnelles. En appliquant l'approche du Lagrangien à l'équation (2.10), dans l'article [89], Adrian Ankwicz et Nail Akhmediev ont montré que les équations différentielles ordinaires obtenues par les deux méthodes (méthode des moments et méthode du Lagrangien) sont dans la plupart des cas identiques lorsqu'on choisit "la bonne" fonction d'essai. Par un choix particulier de la fonction d'essai avec une dérive en fréquence quadratique les auteurs ont obtenu les mêmes équations variationnelles avec les deux méthodes. Mais les résultats deviennent différents quand les termes d'ordre supérieurs sont inclus dans la phase de la fonction d'essai.

Ces méthodes des coordonnées collectives (approche du Lagrangien, méthode des moments, méthode des opérateurs de projection) constituent généralement la première étape d'investigation des systèmes dont les solutions exactes sont difficiles à obtenir. Les solutions des équations variationnelles doivent être confirmées par des simulations numériques. En effet, au cours de sa dynamique, l'impulsion peut subir des phénomènes soudains et violents (tels qu'une brisure de symétrie) qui modifient

considérablement son profil par rapport à celle de la fonction d'essai choisie. Ainsi il est nécessaire, au moins dans les cas les plus importants, de confronter les résultats des méthodes des coordonnées collectives à ceux obtenus directement par la résolution des équations de propagation. Mais le choix de la fonction d'essai reste crucial pour toutes ces méthodes.

2.4 Fondements de la méthode des opérateurs de projection

Comme mentionné précédemment, l'idée principale des méthodes des coordonnées collectives est de simplifier la description du comportement d'une entité collective. Dans ce chapitre, nous illustrons la méthode des opérateurs de projection en l'appliquant au problème de la caractérisation des impulsions déformées asymétriquement par la dispersion d'ordre 3, dans un système (1+1)D (fibre optique par exemple). La dynamique d'une telle impulsion optique dans un système constituée d'une concaténation de fibres (à dispersion positive et négative) peut être décrite par l'équation de Schrödinger non linéaire suivante :

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{i\beta_2(z)}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\beta_3(z)}{6} \frac{\partial^3 \psi}{\partial t^3} - i\gamma(z) |\psi|^2 \psi = -\frac{\alpha(z)}{2} \psi, \quad (2.12)$$

où $\psi(z, t)$ désigne l'amplitude de l'enveloppe du champ électrique à une position z dans le système de fibre et à un temps t . $\beta_2(z)$ et $\beta_3(z)$ représentent respectivement les coefficients de dispersion d'ordre 2 et 3. Le paramètre $\gamma(z)$ représente le coefficient de nonlinéarité et $\alpha(z)$ décrit les pertes linéaires dans la fibre. La dynamique de l'impulsion est complètement spécifiée par la solution de l'équation (2.12), ψ , mais il est difficile de se rendre compte directement à partir du champ ψ de ce qui se passe réellement dans le système [85, 90]. En effet, le champ ψ ne décrit pas seulement l'impulsion en tant qu'entité collective (localisée dans le temps et dans l'espace) mais aussi toutes les excitations localisées ou non localisées, comme le bruit et le rayonnement, qui sont plus ou moins présents dans le système. De plus, l'impulsion peut non seulement être capable de se translater en un bloc comme une seule entité, mais elle peut aussi exécuter des vibrations internes plus ou moins complexes selon le type

de perturbations présentes dans le système. Dans ce contexte, il est convenable de simplifier la caractérisation de l'impulsion par l'utilisation d'un jeu de paramètres (coordonnées collectives) décrivant au mieux les caractéristiques physiques majeures de l'impulsion [90].

L'idée consiste à approcher le champ impulsionnel $\psi(z, t)$, dont l'expression est inconnue, par une fonction d'essai f appelée *ansatz*, qui doit pouvoir exprimer facilement en fonction des coordonnées collectives X_i avec $i = 1, 2, \dots, N$. Les paramètres X_i sont donc associés aux paramètres physiques de l'impulsion (amplitude, largeur, chirp, etc ...).

Dans la première étape de la méthode des opérateurs de projection, le champ $\psi(z, t)$ est décomposé de la manière suivante :

$$\psi(z, t) = f(X_1, X_2, \dots, X_N) + q(z, t), \quad (2.13)$$

où $q(z, t)$ est un terme correctif qu'il faut ajouter à f pour obtenir le champ exact ψ . Ce champ correctif est aussi appelé *champ résiduel*. Il peut se décomposer en deux termes : le premier terme correspond au champ qu'il faudrait ajouter à f pour obtenir ψ , en absence de toute perturbation. Le second terme est constitué du bruit et d'un rayonnement qui se produit lorsqu'une impulsion qui n'est pas solution exacte ψ de l'équation (2.12) est injectée dans la fibre, comme c'est souvent le cas dans les systèmes de transmission par fibre. Il est important de noter que ce terme correctif n'est pas forcément négligeable par rapport à f . La fonction ψ étant à priori inconnue, le choix de f ne peut être qu'arbitraire. Cependant cette fonction doit être choisie pour représenter au mieux le profil du champ exact ψ . Les fonctions d'essai les plus utilisées pour f correspondent aux profils gaussiens [82, 91], sécantes hyperboliques [81, 82, 92] et à des développements en série des fonctions d'Hermite-Gauss [93, 94, 95].

A ce stade, il est important de noter que le simple remplacement direct ψ par $f + q$ dans l'équation de Schrödinger ne garantit pas une description adéquate de l'impulsion en terme de coordonnées collectives, car la complémentarité entre f et q peut être obtenue de différentes manières. Ici le point le plus important à noter est que la fonction f représentera d'autant mieux le champ exact ψ que le champ résiduel sera petit. A cette fin, on doit introduire des contraintes dans le système, afin que les coordonnées collectives prennent des valeurs qui minimisent q .

2.4.1 Présentation des contraintes

La grandeur qui donne la meilleure représentation de l'importance du champ résiduel est sans doute l'énergie associée à ce champ, qui s'écrit

$$\Lambda \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} |q|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi - f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_N, t)|^2 dt. \quad (2.14)$$

Le niveau de cette énergie sert aussi comme mesure de la précision de la fonction d'essai f choisie. L'énergie du champ résiduel, Λ , doit donc être suffisamment petite, par rapport à l'énergie totale de l'impulsion, pour donner un sens physique aux coordonnées collectives. Les contraintes doivent obliger les coordonnées collectives à évoluer suivant des directions précises qui minimisent l'énergie du champ résiduel tout au long de la dynamique. Mathématiquement, pour une fonction à plusieurs variables Λ , la minimisation se traduit par

$$d\Lambda = \frac{\partial \Lambda}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial \Lambda}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial \Lambda}{\partial X_3} dX_3 + \dots + \frac{\partial \Lambda}{\partial X_N} dX_N \approx 0, \quad (2.15)$$

mais pour des variables X_j indépendantes, nous avons

$$C_{1j} = \frac{d\Lambda}{dX_j} \approx 0. \quad (2.16)$$

Les équations (2.13), (2.14) et (2.16) conduisent alors au premier groupe de contraintes pour les variables X_j ,

$$C_{1j} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Re[q f_{X_j}^*] dt \approx 0, j = 1, N. \quad (2.17)$$

Le symbole \Re indique qu'il s'agit de la partie réelle. f_{X_j} représente la dérivée de la fonction f par rapport à la CC X_j et $f_{X_j}^*$ est le conjugué de f_{X_j} . Le signe \approx dans l'équation (2.15) dénote une égalité faible au sens de Dirac [96]. En effet, la méthode des opérateurs de projection pour obtenir les équations d'évolution des coordonnées collectives est basée sur la théorie de Dirac des systèmes dynamiques sous contraintes [96]. Selon cette approche, une quantité faiblement égale à zéro ne peut pas être mise à zéro avant d'avoir effectué toutes les variations de cette quantité par rapport aux coordonnées collectives, pour obtenir les équations de mouvement. Dans ce contexte, un point fondamental à souligner réside dans le choix des valeurs initiales

des coordonnées collectives, $X_j(z = 0)$, pour satisfaire les conditions de contrainte en $z = 0$. En supposant le champ $\psi(z = 0, t)$ connu en début de dynamique, on détermine la condition initiale $[X(0), q(0, t)]$ sur les variables dynamiques du système à partir de l'équation (2.17). Cependant, le choix d'une condition initiale $X_j(z = 0)$ satisfaisant aux contraintes (2.16) et (2.17) ne garantit pas que les contraintes seront satisfaites en tout point z durant la dynamique. De ce fait, il faut donc introduire un deuxième groupe de contraintes qui assurera que les premières C_{1j} soient satisfaites au cours de la propagation c'est-à-dire $C_{1j}(X_1, X_2, X_3, \dots, X_N, z \neq 0) \approx 0$, si elles sont initialement satisfaites. De la sorte, on définit les secondes contraintes de la manière suivante :

$$C_{2j} = \frac{dC_{1j}}{dz} \approx 0. \quad (2.18)$$

En explicitant les contraintes C_{2j} en fonction des coordonnées collectives X_j et du champ résiduel q et en tenant compte de (2.17), on obtient finalement

$$C_{2j} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \Re[f_{X_j}^* q_z] dt - \sum_{k=1}^N \dot{X}_k \int_{-\infty}^{+\infty} \Re[f_{X_j X_k}^* q] dt. \quad (2.19)$$

La présence du champ résiduel impose d'obtenir son équation d'évolution. En substituant au champ ψ sa décomposition $f + q$, dans l'équation de propagation (2.12), on obtient l'équation de propagation du champ résiduel :

$$\begin{aligned} q_z + i \frac{\beta_2(z)}{2} q_{tt} - \frac{\beta_3(z)}{6} q_{ttt} - i\gamma(z) |f + q|^2 q + \frac{\alpha(z)}{2} q = \\ - \sum_{j=1}^N \dot{X}_j f_{X_j} - i \frac{\beta_2(z)}{2} f_{tt} + \frac{\beta_3(z)}{6} f_{ttt} + i\gamma(z) |f + q|^2 f - \frac{\alpha(z)}{2} f, \end{aligned} \quad (2.20)$$

Cette équation n'est pas soluble analytiquement, en raison de sa complexité. Cependant, lorsque le champ q est faiblement couplé aux coordonnées collectives, il est possible de linéariser cette équation (2.20) et obtenir une expression approchée du champ résiduel [90].

2.4.2 Equation du mouvement des coordonnées collectives

Les contraintes étant établies dans les équations (2.16) et (2.18), nous allons maintenant déterminer les équations du mouvement des coordonnées collectives. Les équations

tions du mouvement des coordonnées collectives peuvent s'obtenir en utilisant directement la deuxième contrainte (équation (2.19)) ainsi en y remplaçant q_z par son expression (2.20), on obtient alors

$$\begin{aligned}
C_{2j} = & 2 \sum_{k=1}^N \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \Re[f_{X_k} f_{X_j}^*] dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \Re[q f_{X_j X_k}^*] dt \right] \dot{X}_k \\
& + \beta_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Re[i f_{X_k}^* f_{tt}] dt - \beta_3 \int_{-\infty}^{+\infty} \Re[f_{X_k}^* f_{ttt}] dt \\
& - 2\gamma \int_{-\infty}^{+\infty} \Re[i f_{X_k}^* |f + q|^2 f] dt + \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \Re[f_{X_k}^* f] dt \\
& + \beta_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Re[i f_{X_k}^* q_{tt}] dt - \beta_3 \int_{-\infty}^{+\infty} \Re[f_{X_k}^* q_{ttt}] dt \\
& - 2\gamma \int_{-\infty}^{+\infty} \Re[i f_{X_k}^* |f + q|^2 q] dt + \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \Re[f_{X_k}^* q] dt. \tag{2.21}
\end{aligned}$$

De même, en effectuant la même opération pour $j = 1, 2, \dots, N$, on obtient l'équation matricielle suivante qui s'écrit formellement

$$[C_2] = \left[\frac{\partial C_1}{\partial X} \right] [\dot{X}] + [\Gamma], \tag{2.22}$$

où les différentes matrices colonnes se présentent de la manière suivante

$$\left[C_2 \right] \equiv \begin{bmatrix} C_{21} \\ C_{22} \\ \vdots \\ C_{2N} \end{bmatrix}, \quad \left[\dot{X} \right] \equiv \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \vdots \\ \dot{X}_N \end{bmatrix}, \quad \left[\Gamma \right] \equiv \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_N \end{bmatrix}. \tag{2.23}$$

Les éléments de matrice Γ_k sont donnés par :

$$\begin{aligned}
\Gamma_k = & \beta_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Re[i f_{X_k}^* f_{tt}] dt - \beta_3 \int_{-\infty}^{+\infty} \Re[f_{X_k}^* f_{ttt}] dt - 2\gamma \int_{-\infty}^{+\infty} \Re[i f_{X_k}^* |f + q|^2 f] dt \\
& + \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \Re[f_{X_k}^* f] dt + \beta_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Re[i f_{X_k}^* q_{tt}] dt - \beta_3 \int_{-\infty}^{+\infty} \Re[f_{X_k}^* q_{ttt}] dt
\end{aligned}$$

$$-2\gamma \int_{-\infty}^{+\infty} \Re[i f_{X_k}^* |f + q|^2 q] dt + \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \Re[f_{X_k}^* q] dt. \quad (2.24)$$

La matrice $\left[\frac{\partial C_1}{\partial X} \right]$ est représentée par :

$$\left[\frac{\partial C_1}{\partial X} \right] \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial C_{11}}{\partial X_1} & \frac{\partial C_{11}}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial C_{11}}{\partial X_N} \\ \frac{\partial C_{12}}{\partial X_1} & \frac{\partial C_{12}}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial C_{12}}{\partial X_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial C_{1N}}{\partial X_1} & \frac{\partial C_{1N}}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial C_{1N}}{\partial X_N} \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

et ces éléments matriciels sont donnés par

$$\frac{\partial C_{1j}}{\partial X_k} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Re[f_{X_k} f_{X_j}^*] dt - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Re[q f_{X_j X_k}^*] dt. \quad (2.26)$$

Lorsque $j = k$ dans cette équation (2.26), le terme $2 \int_{-\infty}^{+\infty} |f_{X_k}|^2 dt$ peut être assimilé à la masse du soliton suivant la direction X_k . Quant à Γ_k , il décrit une force qui indique l'action de la dispersion, la non linéarité, les pertes et autres effets dans la même direction X_k . Le mouvement des coordonnées collectives est engendré par l'ensemble des ces forces Γ_k ($k = 1, 2, \dots, N$). Enfin, pour obtenir les équations du mouvement des coordonnées collectives X_1, X_2, \dots, X_k on utilise l'équation matricielle (2.22), dans laquelle apparaissent explicitement les secondes contraintes dans le membre de gauche, et on adopte la procédure de Dirac [96], en posant le terme de contrainte C_2 à zéro dans cette équation (2.22), ce qui donne finalement les équations du mouvement des coordonnées collectives ci-après :

$$\left[\dot{X} \right] = - \left[\frac{\partial C}{\partial X} \right]^{-1} [\Gamma]. \quad (2.27)$$

Boesch et collaborateurs [90] ont montré sur un modèle de chaînes d'atomes couplés harmoniquement, que les équations d'évolution des coordonnées collectives obtenues par l'application des contraintes peuvent être obtenues de manière plus expéditive en utilisant un opérateur de projection. Cette méthode des opérateurs de projection a été ensuite étendue au problème de la dynamique des impulsions dans les fibres optiques [85]. La procédure consiste à projeter l'équation (2.20) dans la direction suivante de l'opérateur de projection complexe P_k donné par :

$$P_k = \Re \int \frac{\partial f^*}{\partial X_k} dt, \quad (2.28)$$

c'est-à-dire, à multiplier cette équation par le projecteur P_k et à intégrer la partie réelle de l'équation résultante. Ensuite on applique le deuxième groupe de contraintes, pour obtenir les équations du mouvement (2.27).

En définitive, le système d'équations (2.20) et (2.27) décrit complètement la propagation d'une impulsion modélisée par l'équation de Schrödinger non linéaire (2.12). Elle permet de suivre l'évolution des coordonnées collectives et de mesurer l'écart entre la solution exacte ψ et la solution approchée f . Il existe des systèmes où cet écart devient négligeable ($\psi - f \approx 0$). C'est le cas par exemple des lignes constituées de fibres à gestion dense de la dispersion. Il s'agit d'un système formé d'une concaténation de morceaux de fibres à dispersion alternativement positive et négative. Dans ces systèmes les points fixes de la ligne sont très proches d'un profil gaussien dans toute la partie centrale de l'impulsion. Dans ce cas, on peut négliger le champ résiduel dans la mise en œuvre de la méthode des coordonnées collectives. Dans la terminologie issue de la physique de la matière condensée, cette approximation est appelée *approximation "bare"* (approximation de l'impulsion déshabillée, c'est-à-dire débarassée du champ résiduel).

2.4.3 Equation de mouvement des coordonnées collectives dans l'*approximation "bare"* (sans champ résiduel)

Dans un grand nombre de cas pratiques intéressants, on peut considérer que le profil de l'impulsion est proche d'une gaussienne, ($\psi \approx f$). Dans ce cas, en posant $q = 0$, dans la méthode développée dans la section précédente, l'équation matricielle (2.27) devient

$$[\dot{X}] = \left[\frac{\partial C_1^0}{\partial X} \right]^{-1} [\Gamma^o], \quad (2.29)$$

et les éléments matriciels sont donnés alors par

$$\begin{aligned} \Gamma_k^o &= \beta_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Re[i f_{X_k}^* f_{tt}] dt - \beta_3 \int_{-\infty}^{+\infty} \Re[f_{X_k}^* f_{ttt}] dt \\ &- 2\gamma \int_{-\infty}^{+\infty} \Re[i f_{X_k}^* |f|^2 f] dt + \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \Re[f_{X_k}^* f] dt, \end{aligned} \quad (2.30)$$

et

$$\frac{\partial C_{1j}^o}{\partial X_k} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Re[f_{X_k} f_{X_j}^*] dt. \quad (2.31)$$

De manière générale, dans l'*approximation bare*, on peut adopter tout type de fonction d'essai, à condition que l'énergie du champ résiduel reste suffisamment faible.

2.4.4 Minimisation directe du champ résiduel

Dans cette section, nous présentons une autre procédure simple et entièrement numérique, qui est strictement équivalente à la résolution des équations du mouvement (2.20) et (2.27), mais qui ne requiert qu'une très petite fraction de calculs pour obtenir les équations d'évolution des coordonnées collectives et du champ résiduel. Dans cette thèse, bien que nous n'ayions pas exploité cette procédure, il nous a paru important d'en informer le lecteur. Ce processus de minimisation directe de l'énergie du champ résiduel (2.14) nécessite au préalable la connaissance de la forme exacte du champ ψ . Pour y arriver, on résout numériquement l'équation de propagation (2.12) à l'aide de la méthode de Fourier à pas divisés [97]. Ensuite, à chaque distance de propagation z , on applique les premières contraintes pour obtenir les coordonnées collectives qui minimisent l'énergie du champ résiduel ; ce qui équivaut indirectement à résoudre les équations (2.17). Comme le champ $\psi(z, t)$ est connu à chaque distance z , le travail de minimisation de l'énergie du champ résiduel devient simplement un problème mathématique de minimisation d'une fonction linéaire à N variables (les N coordonnées collectives). Ce problème peut être résolu par une procédure itérative, telle que la méthode de Newton-Raphson [98], qui se traduit par la relation suivante :

$$[X]_{i+1} = [X]_i - \left[\frac{\partial C_1}{\partial X} \right]_i^{-1} [C]_i, \quad (2.32)$$

où l'indice i indique le numero d'itération, et la matrice colonne $[C_1]$ a pour éléments les contraintes C_{1j} . Un simple critère pour arrêter ce processus d'itérations, est que les valeurs absolues de toutes les contraintes descendent en dessous d'une petite quantité ε , soit $\max(|C_{11}|, |C_{12}|, \dots, |C_{1N}|)_i < \varepsilon$, proche de zéro.

2.5 Caractérisation d'une impulsion optique distordue asymétriquement

De nos jours la mise en place des systèmes de communication à très haut débit requiert en amont des procédures relativement complexes et coûteuses [99], qui comprennent plusieurs étapes intermédiaires incluant des études analytiques [91, 86], des simulations numériques massives [100, 101], des expériences de laboratoire [102, 103] etc Ce travail préliminaire est capital pour des impulsions ultra courtes, car elles nécessitent l'emploi d'un nombre plus élevé de composants optiques [104]. Ces études préalables permettent en effet d'adapter les paramètres de l'impulsion optique aux différents composants du système de communication désiré. Par exemple, la détermination de la largeur spectrale des filtres optiques (qui permettent de réduire le bruit d'amplification), nécessite, par avance, la connaissance de la largeur spectrale de l'impulsion (qui est déterminée par sa largeur temporelle et son chirp) [105].

Dans un tel contexte, la fiabilité des résultats qui peuvent être obtenus dans l'étape de conception des systèmes de transmission optiques à haut débit devient une question plutôt cruciale, qui déterminera le coût final du système. Pour concevoir de tels systèmes avec succès, il est donc nécessaire de disposer d'outils théoriques fiables qui permettent de caractériser les impulsions d'une façon relativement précise. A notre connaissance, la plupart des outils théoriques qui ont été utilisés jusqu'à présent pour évaluer les paramètres les mieux adaptés de l'impulsion optique pour des lignes de communications optiques présupposent fondamentalement que le profil de l'impulsion est symétrique (dans le domaine temporel et spectral). Cependant, au cours de leur propagation dans les systèmes de transmissions optiques, les impulsions ultra-brèves sont soumises à de fortes perturbations qui peuvent induire des distorsions asymétriques dans leur profil temporel ou spectral. De telles perturbations peuvent être créées par certains effets linéaires et non linéaires importants qui sont connus comme de générateurs potentiels de distorsions asymétriques dans le profil des impulsions dans des systèmes de fibres optiques. Deux exemples bien connus de ces effets sont la dispersion d'ordre 3 [106] et l'effet d'auto-raïdissement [37]. Dans ce contexte il est important de disposer d'outils permettant de caractériser les impulsions asymétriques

de manière fiable.

Dans ce qui suit, nous montrons que les techniques standards ne permettent pas de décrire de manière satisfaisante les impulsions optiques asymétriques. Nous présentons une méthode améliorée de caractérisation, qui permet précisément d'évaluer les paramètres d'une impulsion ayant des distorsions symétriques ou asymétriques.

2.5.1 Fonction d'essai symétrique (*conventionnel*)

Depuis plusieurs années, la plupart des travaux d'optimisation des systèmes de transmission existants ou des travaux de conception des futurs réseaux de communication optiques [91, 85, 107, 108, 109], utilisent des méthodes de coordonnées collectives. Ces études ont comme caractéristique commune l'utilisation d'une fonction d'essai de la forme suivante.

$$f_s = A \exp \left[-\frac{(t-p)^2}{w^2} + i\frac{c}{2}(t-p)^2 - id(t-p) + if \right], \quad (2.33)$$

que nous appellerons *ansatz conventionnel*. A ce stade de notre étude, il est très important de rappeler que les paramètres $A, p, \sqrt{2\ln 2}w, c/(2\pi), d$ et f sont les coordonnées collectives conventionnelles, utilisées jusqu'à présent pour représenter respectivement l'amplitude, la position temporelle, la largeur à mi-hauteur (FWHM), le chirp, le décalage fréquentiel et la constante de phase. Une telle fonction d'essai symétrique simplifie les opérations à effectuer pour obtenir les équations de mouvement des coordonnées collectives ; dans notre exemple, les dérivées mises en jeu sont :

$$\begin{aligned} f_A &= \exp \left[-\frac{(t-p)^2}{w^2} + i\frac{c}{2}(t-p)^2 - id(t-p) + if \right], \\ f_p &= \left[2\frac{(t-p)}{w^2} - ic(t-p) + id \right] f_s, \\ f_w &= -2\frac{(t-p)}{w^3} f_s, \\ f_c &= \frac{i}{2}(t-p)^2 f_s, \\ f_d &= -i(t-p) f_s, \\ f_f &= if_s. \end{aligned} \quad (2.34)$$

A partir de ces relations, on détermine aisément les f_i^* (conjugué de f_i) ; $i = A, w, p, c, d, f$, et les éléments de l'équation (2.29) dans l'*approximation "bare"* sont donnés explici-

tement par

$$\begin{bmatrix} \dot{A} \\ \dot{p} \\ \dot{w} \\ \dot{c} \\ \dot{d} \\ \dot{f} \end{bmatrix} = \frac{1}{A^2} \begin{bmatrix} 2\frac{w}{A^2} & 0 & \frac{1}{A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X_{22} & 0 & -\frac{1}{4}w_d^3 & -\frac{1}{4}w^3c & -2wd \\ \frac{1}{A} & 0 & \frac{3}{2w} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}w^3d & 0 & \frac{3}{32}w^5 & 0 & \frac{1}{4}w^3 \\ 0 & -\frac{1}{4}w^3c & 0 & 0 & \frac{1}{2}w^3 & 0 \\ 0 & -2wd & 0 & \frac{1}{4}w^3 & 0 & 2w \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Gamma_1^0 \\ \Gamma_2^0 \\ \Gamma_3^0 \\ \Gamma_4^0 \\ \Gamma_5^0 \\ \Gamma_6^0 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

avec $X_{22} = \frac{2}{w} + \frac{1}{2}w^3c^2 + 2wd^2$. Les éléments de la matrice colonne Γ^0 sont les suivants :

$$\Gamma_1^0 = -\alpha Aw,$$

$$\begin{aligned} \Gamma_2^0 &= -\beta_2 A^2 \left(\frac{3d}{w} + \frac{3}{4}w^3c^2d + wd^3 \right) - \sqrt{2}\gamma A^4 wd \\ &+ \beta_3 A^2 \left(\frac{1}{w^3} + \frac{1}{2}wc^2 + \frac{1}{2}w^3c^2d^2 + \frac{1}{16}w^5c^4 + \frac{2d^2}{w} \frac{1}{3}d^4w \right), \end{aligned}$$

$$\Gamma_3^0 = -\alpha A^2 - \beta_2 A^2 c - \beta_3 A^2 cd,$$

$$\begin{aligned} \Gamma_4^0 &= -\beta_2 \left(\frac{1}{8}A^2w - \frac{3}{32}A^2w^5c^2 - \frac{1}{8}A^2w^3d^2 \right) + \frac{\gamma}{8\sqrt{2}}A^4w^3 \\ &+ \beta_3 \left(\frac{3}{32}A^2w^5c^2 - \frac{3}{32}A^2w^5c^2d - \frac{1}{24}A^2w^3d^3 \right), \end{aligned}$$

$$\Gamma_5^0 = \frac{\beta_2}{2}A^2w^3cd - \beta_3 \left(\frac{1}{4}A^2wc + \frac{1}{4}A^2w^3cd^2 + \frac{1}{16}A^2w^5c^3 \right),$$

$$\begin{aligned} \Gamma_6^0 &= \beta_2 \left(\frac{A^2}{w} + \frac{1}{4}A^2w^3c^2 + A^2wd^2 \right) + \sqrt{2}\gamma A^4w \\ &- \beta_3 \left(\frac{A^2d}{w} + A_w^2d^3 + \frac{1}{4}A^2w^3c^2d \right). \end{aligned}$$

Enfin la résolution de l'équation (2.35) donne les équations de mouvement des coordonnées collectives suivantes en présence des pertes, de la dispersion d'ordre 2 et

3.

$$\begin{aligned}
\dot{A} &= \Delta A = \frac{\beta_2}{2}Ac - \frac{\beta_3}{2}Acd - \frac{\alpha}{2}A, \\
\dot{p} &= \Delta p = -\beta_2d + \frac{\beta_3}{8}\left(\frac{4}{w^2} + w^2c^2 + 4d^2\right), \\
\dot{w} &= \Delta w = -\beta_2wc + \beta_3wcd, \\
\dot{c} &= \Delta c = \beta_2\left(c^2 - \frac{4}{w^4}\right) + \beta_3d\left(\frac{4}{w^4} - c^2\right) - \gamma A^2\frac{\sqrt{2}}{w^2}, \\
\dot{d} &= \Delta d = 0, \\
\dot{f} &= \Delta f = \beta_2\left(\frac{1}{w^2} - \frac{d^2}{2}\right) + \beta_3\left(\frac{w^2c^2d}{8} - \frac{d}{2w^2} + \frac{d^3}{3}\right) - \gamma\frac{5\sqrt{2}}{8}A^2.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Ces équations variationnelles permettent de visualiser, dans l'*approximation "bare"*, l'action des différents effets linéaires et non linéaires qui influencent la propagation d'une impulsion régie par l'équation de Schrödinger non linéaire (2.12). Le fait le plus remarquable est que les coordonnées collectives de ces équations ne peuvent en aucun cas décrire convenablement les altérations asymétriques dans le profil de l'impulsion, ni les conséquences de l'asymétrie sur les paramètres fondamentaux de l'impulsion, du fait de la forme symétrique de la fonction d'essai. Dans la prochaine section, nous montrons que lorsqu'on introduit une coordonnée de déformation asymétrique dans la fonction d'essai, toutes les coordonnées collectives qui sont présentes dans cette fonction d'essai perdent leurs sens physique usuel et leur fiabilité. Pour résoudre ce problème, nous avons mis en place des formules qui permettent de retrouver les paramètres physiques de l'impulsion.

2.5.2 Fonction d'essai asymétrique (*amélioré*)

La fiabilité de toute méthode de coordonnées collectives repose d'abord sur la qualité du choix de la fonction d'essai. Ainsi pour mieux caractériser les impulsions asymétriques par cette méthode, notre choix s'est porté sur la fonction d'essai suivante :

$$f_a = A\left(1 + \frac{l(t-p)}{w}\right) \exp\left[-\frac{(t-p)^2}{w^2} + i\frac{c}{2}(t-p)^2 - id(t-p) + if\right], \tag{2.37}$$

qui contient une coordonnée collective supplémentaire, à savoir l , qui la différence de la fonction d'essai symétrique de l'équation (2.33). Le paramètre l sert à détecter et quantifier la présence d'une distorsion asymétrique dans le profil de l'impulsion. Il joue donc un rôle très important dans la caractérisation du profil et la phase de l'impulsion distordue. Lorsque nous comparons les profils respectifs des deux fonctions d'essai qui ne se différencient que par le paramètre l , on remarque sur la figure (2.1) que la seule introduction du paramètre de distorsion l change le profil temporel de l'impulsion et le rend asymétrique. La fonction (2.37) est donc tout à fait apte à décrire des distorsions de profil asymétriques qui peuvent être créées par la présence de β_3 . Après avoir défini la fonction d'essai, nous pouvons procéder à une analyse variationnelle des impulsions asymétriques basée sur l'*approximation "bare"*, c'est-à-dire, une analyse qui néglige le champ résiduel q . L'avantage majeur de cette *approximation "bare"*, réside dans le fait que, la propagation de l'impulsion peut être complètement caractérisée sans avoir à connaître le champ exact $\psi(z, t)$, autrement dit, sans avoir à résoudre l'équation de propagation (2.12) ce qui procure un gain de temps considérable. Par conséquent, en nous inspirant de la méthode développée précédemment, et de la formule (2.29), nous obtenons les équations variationnelles suivantes pour une impulsion asymétrique régie par la fonction d'essai proposée dans l'équation (2.37).

$$\begin{aligned}
\dot{A} &= \Delta A + \beta_3 \frac{A [3w^4 c^2 (l^2 - 8) + 12l^2 + 32]}{48lw^3}, \\
\dot{p} &= \Delta p + \beta_3 \frac{3w^4 l^2 c^2 + 12l^2 - 12w^4 c^2 + 16}{24w^2 l^2}, \\
\dot{w} &= \Delta w + \beta_3 \frac{3w^4 c^2 - 4}{6lw^2},
\end{aligned} \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned}
\dot{c} &= \Delta c + \frac{l^2}{16Mw^4} [1024\beta_2 (3l^2 - 4)] \\
&\quad - \frac{l^2}{16Mw^4} [\gamma\sqrt{2}A^2 w^2 (9l^6 + 144l^4 - 528l^2 + 1024)] \\
&\quad + \beta_3 \frac{2l}{Mw^4} [-w^5 c^3 (3l^4 - 8l^2 + 16) + 4wc(3l^4 + 8l^2 + 16)] \\
&\quad - \beta_3 \frac{2l}{Mw^4} [32dl(3l^2 - 4)],
\end{aligned} \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned}
\dot{d} = & \Delta d + \frac{8\beta_2 l(16 - 3l^4)}{Mw^3} + \frac{\gamma\sqrt{2}A^2 l(9l^6 + 18l^4 + 128)}{4wM} \\
& + \frac{\beta_3}{24Mw^3 l^2} [3c^3 w^5 (3l^8 - 48l^6 - 96l^4 + 256l^2 - 256)] \\
& + \frac{\beta_3}{24Mw^3 l^2} [4wc(9l^8 - 480l^4 + 256) + 192dl(3l^4 - 16)],
\end{aligned} \tag{2.40}$$

$$\begin{aligned}
\dot{f} = & \Delta f + \frac{6\beta_2 l^4(3l^2 - 4)}{Mw^2} + \frac{3\sqrt{2}\gamma A^2 l^2(45l^6 + 408l^4 - 624l^2 + 512)}{128M} \\
& + \frac{\beta_3}{24Mw^2 l^2} [6c^3 w^5 l^3(15l^4 - 24l^2 + 16) - 4d(81l^8 - 288l^6 - 256)] \\
& + \frac{\beta_3}{24Mw^2 l^2} [3dc^2 w^4(9l^8 - 192l^4 + 256l^2 - 256)] \\
& + \frac{\beta_3}{24Mw^2 l^2} [-24wcl^3(3l^4 - 24l^2 + 16)],
\end{aligned} \tag{2.41}$$

$$\dot{i} = -\frac{\beta_3}{48w^3 l^2} [3c^2 w^4(l^4 - 16) - 4l^4 + 16l^2 + 16], \tag{2.42}$$

avec $M = 9l^6 + 36l^4 - 48l^2 + 64$.

Dans ces équations variationnelles, les termes ΔA , Δp , Δw , Δc , Δd et Δf , correspondent aux termes induits par la partie symétrique de la fonction d'essai de l'équation (2.33) et qui figurent dans les seconds membres des équations (2.36). Une analyse méticuleuse de ces équations permet de révéler les conséquences d'une distorsion asymétrique sur tous les autres paramètres fondamentaux d'une impulsion optique. En absence de la dispersion d'ordre 3 ($\beta_3 = 0$), l'équation (2.42) mène à $\dot{i} = 0$, ce qui signifie qu'aucune asymétrie ne se développera durant la propagation. La présence du paramètre de déformation l au dénominateur de certains termes des seconds membres des équations (2.38), (2.40) et (2.41), implique, d'un point de vue purement mathématique, que les coordonnées collectives deviendront infinies si une impulsion parfaitement symétrique est injectée dans un système affecté par une dispersion d'ordre 3 ($l = 0$ et $\beta_3 \neq 0$). En fait, cette situation est physiquement peu probable dans un système réel à cause de la présence du bruit de photon, qui est aléatoirement distribué dans le spectre du système. Ainsi, si $\beta_3 \neq 0$, le paramètre de

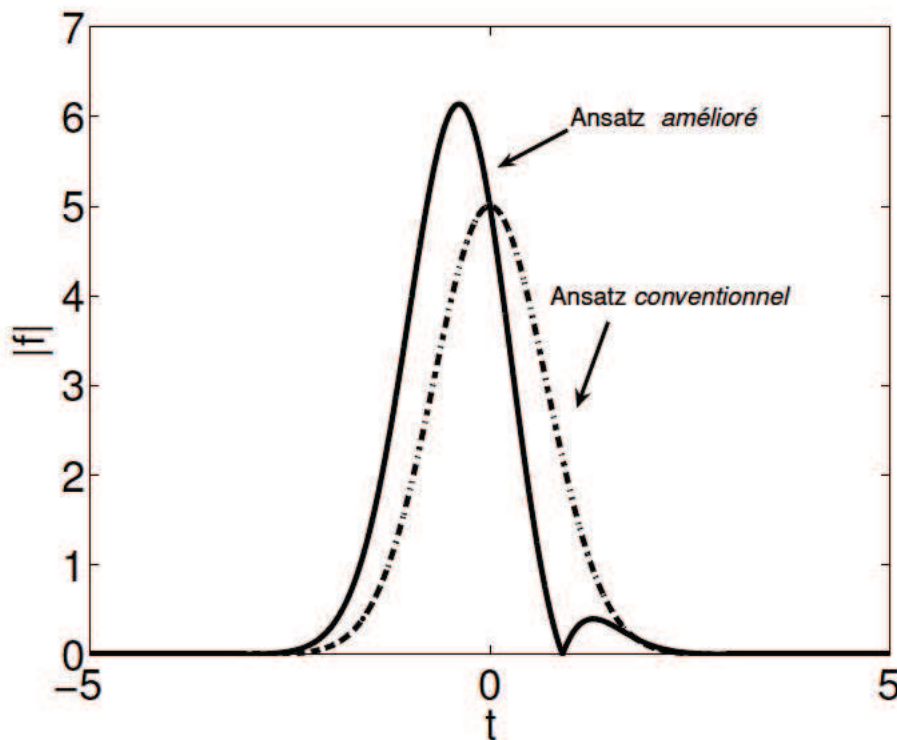


FIG. 2.1 Profil temporel de la fonction d'essai symétrique (*conventionnel*) en pointillé et asymétrique (*amélioré*) en trait plein.

déformation l entre en jeu dans l'évolution de toutes les coordonnées collectives pour n'importe quel profil d'impulsion, induisant ainsi des effets directs et indirects dans tous les paramètres de l'impulsion. D'après ces équations variationnelles, on voit bien que la dispersion d'ordre 3 a des effets directs sur les coordonnées temporelles A, p, w et l . Ces effets directs sont représentés par les termes proportionnels à β_3 [équations (2.38) et (2.42)] d'une part, et d'autre part, la dispersion d'ordre 3 induit des effets directs et indirects sur les coordonnées c, d et f [équations (2.39), (2.40) et (2.41)]. Les effets indirects sont les termes qui ne contiennent pas le coefficient β_3 mais qui sont proportionnels à l . Les effets indirects peuvent agir dans le même sens que les effets directs, ou dans un sens opposé, selon le signe de la dispersion d'ordre 3. Ainsi, grâce à la méthode des coordonnées collectives et au choix approprié de la fonction d'essai asymétrique nous avons obtenu des équations variationnelles qui sont aptes à décrire le comportement des impulsions ayant des distortions asymétriques, et ainsi aptes à déceler les conséquences directes et indirectes d'une distortion asymétrique

sur l'évolution des paramètres physiques de l'impulsion. Il aurait été pratiquement impossible d'obtenir une description aussi fine de l'impulsion sans l'utilisation des équations variationnelles.

2.6 Comparaison de la méthode des opérateurs de projection et la méthode des moments

Nous venons d'illustrer de façon détaillée la mise en œuvre pratique de la méthode des opérateurs de projection pour la caractérisation des impulsions optiques dont la propagation est régie par une équation de Schrödinger scalaire, choisie pour sa simplicité. Dans les prochains chapitres nous utiliserons cette méthode pour circonscrire les domaines d'existence des solitons dissipatifs spatio-temporels de GL complexe cubique quintique. Ceci n'est justifié que parce que l'équation de Schrödinger non linéaire a des solutions "impulsion" qui persistent et dont les paramètres deviennent lentement variables au cours du temps lorsque l'on passe à Ginzburg-Landau.

Dans ce paragraphe nous comparons les équations différentielles ordinaires obtenues par la méthode des opérateurs de projection et la méthode des moments. L'équation de propagation considérée est celle de GL (1+1)D décrite précédemment [équation (2.10)]. Et la fonction d'essai choisie pour les deux méthodes est la même et se présente sous la forme suivante

$$\psi(t, z) = A \exp \left(-\frac{t^2}{w^2} - \frac{t^4}{w^4} + ict^2 + if \right), \quad (2.43)$$

où A est l'amplitude de l'impulsion, w sa largeur, c son chirp et f la constante de phase qui n'intervient pas dans les équations différentielles ordinaires. En appliquant la méthode des opérateurs de projection avec ce choix de fonction d'essai et l'équation (2.10), nous obtenons les équations différentielles ordinaires suivantes :

$$\begin{aligned} Q_z &= Q \left(2\delta - 3.7377 \frac{\beta}{w^2} - 1.1585 \beta w^2 c^2 + 1.4336 \frac{Q\epsilon}{w} + 1.1459 \frac{Q^2 \mu}{w^2} \right) \\ w_z &= w \left(2Dc + 2.6307 \frac{\beta}{w^2} - 0.8153 \beta w^2 c^2 - 0.2523 \frac{Q\epsilon}{w} - 0.2689 \frac{Q^2 \mu}{w^2} \right) \\ c_z &= \frac{1}{w^2} \left(-2Dc^2 w^2 + 4.9046 \frac{D}{w^2} - 1.3266 \frac{Q}{w} - 1.4908 \frac{Q^2 \nu}{w^2} - 18.314 \beta c \right) \end{aligned} \quad (2.44)$$

où le paramètre Q , qui représente l'énergie, est donné par

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dt = 1.0508256A^2w \quad (2.45)$$

Dans l'article [110] les auteurs ont appliqué la même fonction d'essai à l'équation GL [équation (2.10)]; en utilisant la méthode des moments et ont obtenu les équations suivantes :

$$\begin{aligned} Q_z &= Q \left(2\delta - 3.738 \frac{\beta}{w^2} - 1.158\beta w^2 c^2 + 1.433 \frac{Q\epsilon}{w} + 1.146 \frac{Q^2}{w^2} \mu \right) \\ w_z &= w \left(2Dc + 2.142 \frac{\beta}{w^2} - 0.874\beta w^2 c^2 - 0.290 \frac{Q\epsilon}{w} - 0.325 \frac{Q^2}{w^2} \mu \right) \\ c_z &= \frac{1}{w^2} \left(-2Dc^2 w^2 + 6.453 \frac{D}{w^2} - 1.237 \frac{Q}{w} - 1.319 \frac{Q^2 \nu}{w^2} - 19.624\beta c \right) \end{aligned} \quad (2.46)$$

On remarque que les équations (A.11) et (2.46) sont qualitativement identiques. Quantitativement on note une légère différence dans certains coefficients dans les seconds membres, qui ne devrait pas avoir de conséquence majeure dans la description du comportement impulsionnel.

2.7 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous nous sommes efforcés de rappeler quelques méthodes variationnelles qui ont pour caractéristique commune l'emploi d'une fonction d'essai arbitraire qui s'exprime en fonction des paramètres de l'impulsion. L'évolution de ces paramètres est régie par un système d'équations différentielles ordinaires obtenu à partir de l'équation de propagation du champ électrique. Cela permet aisément de résoudre certaines équations, incluant les équations non intégrables.

Nous avons présenté de façon très détaillée les principes de base des méthodes de coordonnées collectives inspirées des travaux de thèse de A. Moubissi [111] et de la référence [85]. Globalement, ces méthodes consistent à substituer au champ impulsionnel exact, une fonction d'essai analytique, qui est construite à partir de variables (coordonnées collectives) associées aux paramètres de l'impulsion. Les coordonnées collectives sont choisies de façon à représenter au mieux la configuration du champ

exacte. Pour illustrer la mise en œuvre pratique de cette méthode, nous l'avons appliquée au problème de la détermination du comportement d'une impulsion soumise aux effets de la dispersion d'ordre trois [112]. Nous avons utilisé successivement deux fonctions d'essai, ayant respectivement des profils symétrique et asymétrique. Nous avons alors pu déterminer les effets directs et indirects d'une distorsion asymétrique du profil temporel, sur l'évolution des paramètres physiques de l'impulsion. Dans la suite de notre étude, nous exploiterons la méthode des coordonnées collectives pour explorer les différentes solutions de l'équation GL complexe cubique quintique à 1(+1)D et (3+1)D, ce qui permettra d'alléger de manière considérable le volume des calculs numériques.

Solutions de l'équation de Ginzburg-Landau Complexe à $(1+1)D$

3.1 Introduction

Les systèmes dissipatifs ont une dynamique impliquant une diversité de phénomènes tels que les pertes saturables, le gain non linéaire, la nonlinéarité dispersive, la dispersion et autres effets. L'interaction entre ces phénomènes conduit à une riche variété de structures [78]. Le soliton dissipatif (DS) en est un exemple typique. Ses paramètres dépendent principalement de ceux du système.

Dans des études récentes de systèmes dissipatifs à $(1+1)D$, de nouveaux types d'ondes dissipatives localisées appartenant à la classe des solitons dissipatifs oscillants ("pulsating solitons"), ont été identifiés par simulations numériques [113, 114, 115] et observés expérimentalement [116] dans des cavités lasers. La variation de l'un des paramètres du système peut changer le type de solution via une bifurcation. On peut avoir ainsi, des solitons dissipatifs stationnaires, des solitons à différents types d'oscillations ("pulsating solitons", "creeping solitons" et "erupting solitons") [117]. Une partie des solutions oscillantes peut être comprise comme étant associée à l'existence d'attracteurs de type cycle limite.

L'objectif principal de ce chapitre consiste à cerner les différents types de solutions solitons de l'équation GL complexe cubique quintique à $(1+1)D$. Cependant bien que des solutions exactes de l'équation GL complexe cubique quintique à $(1+1)D$

existent [118], elles ne peuvent être représentées explicitement que pour certaines relations entre les paramètres de l'équation. Comme l'équation GL à (1+1)D est caractérisée par cinq paramètres, il est difficile de trouver la correspondance entre les différentes régions de l'espace des paramètres et les divers types d'ondes localisées. On peut toute fois dresser une cartographie des comportements du système, mais au prix de simulations numériques massives, avec différents jeux de paramètres et conditions initiales [114]. Cet énorme volume de travail peut être allégé en combinant les méthodes des cordonnées collectives et les techniques mathématiques de recherche de points fixes.

Dans la présente étude, nous exploitons les résultats des travaux antérieurs de Tsoy et al. dans l'article [20] pour mettre en évidence les différents types de solutions solitons de l'équation GL à (1+1)D dans l'espace des paramètres du système, et dresser une cartographie des comportements dynamiques.

3.2 Recherche des solutions de l'équation GL à (1+1)D

Dans le cadre de notre étude, nous utiliserons l'équation cubique quintique de Ginzburg-Landau adimensionnée à (1+1)D [118, 64] décrite dans le chapitre 1, que nous rappelons ci-après :

$$\psi_z - i\frac{D}{2}\psi_{tt} - i|\psi|^2\psi - i\nu|\psi|^4\psi = \delta\psi + \beta\psi_{tt} + \epsilon|\psi|^2\psi + \mu|\psi|^4\psi. \quad (3.1)$$

Cette équation (GL) est l'une des équations universelles utilisées pour décrire les systèmes dissipatifs. Cette équation distribuée permet d'expliquer une riche variété de phénomènes non linéaires dans différents domaines de la physique [119], comme par exemple en optique non linéaire, en dynamique des fluides, plasmas, supraconductivité [120, 121, 122], mais également dans le domaine de la chimie et de la biologie. De nombreux systèmes lasers à impulsions courtes peuvent être modélisés par cette équation maîtresse [123, 124]. Dans le cas des lasers à absorbants saturables rapides avec un temps de réponse beaucoup plus rapide que la durée de l'impulsion, l'absorption saturable peut être mise en correspondance avec les termes dissipatifs cubiques et quintiques.

Le terme dissipatif quintique dans l'équation GL à (1+1)D est essentiel pour assurer

la stabilité des impulsions [74]. Le modèle continu prend en compte les principaux effets physiques que l'on peut rencontrer dans une cavité laser, comme la dispersion, l'auto modulation de phase, le filtrage spectral, le gain (linéaire et non linéaire) et les pertes (linéaires et non linéaires).

L'équation (3.1) admet des paramètres multiples et est non intégrable sous la forme générale. Par conséquent, une analyse de ses multiples solutions exige des simulations numériques intensives. Cependant des solutions exactes de GL complexe cubique quintique existent dans peu de cas seulement, lorsqu'elles sont des ondes solitaires (soliton dissipatif) [125] et lorsque certaines relations sont établies entre les paramètres de l'équation [118, 126]. En règle générale, on construit ces solutions à partir d'une certaine classe de fonctions, cette présupposition conduit très souvent à laisser de côté certaines solutions. Ces solutions ignorées peuvent être mises en évidence par des techniques algébriques non perturbatives [64, 127], qui demandent de nombreux calculs.

Ces défis stimulent l'intérêt pour les méthodes approchées d'intégration de l'équation GL. La méthode de perturbation a permis d'obtenir des solutions solitons dissipatifs de l'équation GL complexe cubique quintique dans les limites de petite et grande dispersion et la nonlinéarité de phase [128, 129].

Une autre alternative est de recourir à des méthodes variationnelles (méthodes des moments, méthodes des Lagrangiens, méthodes des opérateurs de projection) [18, 20, 130], qui permettent de réduire l'équation originale de propagation de dimension infinie (en termes de degrés de liberté) à un problème de dimension finie. Elles sont relativement faciles à mettre en œuvre et permettent d'avoir un gain de temps considérable, d'avoir un accès rapide aux différents paramètres du soliton.

3.2.1 Equations variationnelles

Pour obtenir une meilleure compréhension des processus dynamiques qui influencent le comportement de l'impulsion lors de sa propagation, le champ impulsionnel $\psi(z, t)$ de l'équation (3.1) a été approché par une fonction d'essai qui peut facilement s'exprimer en fonction des paramètres physiques du soliton. Ainsi, l'équation de propagation du champ impulsionnel (3.1) est transformée en un système d'équations différentielles

ordinaires (EDO) décrivant l'évolution des paramètres de l'impulsion au cours de la propagation. Cependant, le choix de la fonction d'essai est crucial pour l'obtention des solutions ayant les propriétés désirées. Ce choix est précédé d'une analyse minutieuse et basé sur une comparaison entre quelques solutions analytiques approchées et des solutions purement numériques obtenues par la résolution directe de l'équation de propagation du champ $\psi(t, z)$. Pour notre étude, le choix de la fonction d'essai s'inspire des travaux de E.N. Tsoy [20] et se présente sous la forme suivante :

$$\psi(t, z) = A \operatorname{sech} \left(\frac{t-p}{w} \right) \exp i (c(t-p)^2 + b(t-p)). \quad (3.2)$$

Ici, A , représente l'amplitude du soliton dissipatif, w est proportionnel à la largeur à mi-hauteur du soliton, b est le décalage fréquentiel, p la position temporelle et enfin, c caractérise le paramètre de chirp de l'impulsion. Le chirp est extrêmement important, comme l'ont montré les études purement numériques citées plus haut.

L'énergie de l'impulsion Q est donnée par

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dt = 2A^2w, \quad (3.3)$$

la "quantité de mouvement" s'exprime par :

$$P = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\psi\psi_t^* - \psi^*\psi_t) dt = -2iA^2wb. \quad (3.4)$$

Le "Hamiltonien" peut aussi se mettre sous la forme suivante pour $D = 1$

$$H = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (|\psi_t|^2 - |\psi|^4) dt = \frac{A^2}{2w} (w^4c^2\pi^2 - 2w^2A^2 + 3w^2b^2 + 1). \quad (3.5)$$

Ces quantités peuvent aussi s'exprimer facilement en fonction des paramètres de la fonction d'essai (coordonnées collectives).

En s'inspirant des résultats de la référence [20], avec la fonction d'essai décrit par l'équation (3.2), nous obtenons les équations variationnelles suivantes qui régissent

l'évolution d'un soliton dissipatif.

$$\begin{aligned}
\dot{Q} &= 4wA^2 \left(\delta + \frac{2}{3}\epsilon A^2 + \frac{8}{15}\mu A^4 - \frac{5\beta}{15w^2} - \frac{\pi^2}{3}\beta c^2 w^2 - \beta b^2 \right), \\
\dot{w} &= 2Dcw - \frac{4}{\pi^2}\epsilon w A^2 + \frac{8\beta}{\pi^2 w} - \frac{4}{\pi^2}\mu w A^4 - \frac{16}{15}\pi^2\beta c^2 w^3, \\
\dot{c} &= -2Dc^2 - \left(\frac{4}{\pi^2 w^2} + \frac{4}{3w^2} \right) \beta c + 2A^2 + \frac{32}{15}\nu A^4 - \frac{2D}{w^2}, \\
\dot{b} &= -\frac{4}{3}\beta b \left(\pi^2 c^2 w^2 + \frac{1}{w^2} \right), \\
\dot{p} &= bD - \frac{2}{3}\beta cb \pi^2 w^2.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

En considérant les solutions pour lesquelles le décalage fréquentiel est nul ($b = 0$) et où le soliton est immobile temporellement ($p = 0$), ce qui correspond à un soliton "centré" spectralement [130]; on obtient un système réduit seulement aux trois variables A , w et c . Les équations variationnelles suivantes peuvent se réécrire alors

$$\begin{aligned}
\dot{Q} &= 4wA^2 \left(\delta + \frac{2}{3}\epsilon A^2 + \frac{8}{15}\mu A^4 - \frac{5\beta}{15w^2} - \frac{\pi^2}{3}\beta c^2 w^2 \right), \\
\dot{w} &= 2Dcw - \frac{4}{\pi^2}\epsilon w A^2 + \frac{8\beta}{\pi^2 w} - \frac{4}{\pi^2}\mu w A^4 - \frac{16}{15}\pi^2\beta c^2 w^3, \\
\dot{c} &= -2Dc^2 - \left(\frac{4}{\pi^2 w^2} + \frac{4}{3w^2} \right) \beta c + 2A^2 + \frac{32}{15}\nu A^4 - \frac{2D}{w^2}.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Il ressort des équations (3.7) que la dispersion d'ordre 2, représentée par D , n'agit pas sur l'évolution de l'énergie du soliton, mais a une grande influence sur la largeur et le chirp de l'impulsion. Les termes du gain non linéaire (ϵ) et de la saturation du gain (μ) n'interviennent que sur l'amplitude et la largeur du soliton. Ils n'ont aucun effet sur le chirp. Par contre, la dispersion du gain (β) intervient dans toutes les équations (3.7). Ce paramètre domine donc toutes les parties du soliton comme le montre clairement l'équation (3.7). Il est à noter également que les pertes linéaires (représentées par le terme δ) n'influencent ni la largeur ni le chirp dans notre étude, mais agissent seulement sur l'énergie. Il en est de même pour la saturation de la nonlinéarité, qui n'agit que sur le chirp. Les résultats analytiques [équation (3.7)] montrent précisément le mode d'action des différents paramètres de l'équation GL à (1+1)D sur la structure interne du soliton. La connaissance de ce mode d'action est très importante car elle permet de contrôler le comportement dynamique de l'impulsion.

3.2.2 Etude de la stabilité

Notre motivation première est de trouver les solutions physiquement pertinentes de l'équation GL complexe cubique quintique à (1+1)D. Ainsi, à partir des résultats analytiques de l'équation (3.7), nous analyserons attentivement les états stationnaires et leurs régions de stabilité, à partir des points fixes de l'équation (3.7). Les points fixes (FPs) de ce système d'équations (3.7) sont les solutions du système d'équations $\dot{Q} = \dot{w} = \dot{c} = 0$.

Le "seuil d'existence" des FPs peut être estimé par la relation suivante $\epsilon_s \approx 2\sqrt{\delta\mu}$ [130].

Si $\epsilon > \epsilon_s$ on a deux types de point fixe ; les FPs stables et les FPs instables. Dans le cas contraire il n'existe pas de solutions stables. C'est la quantité ϵ qui conditionne l'existence des solutions localisées qui sont liées à la subsistance des ondes continues [131].

A partir des équations (3.7), on détermine d'abord les points fixes du système et on étudie ensuite leur stabilité. La stabilité du point fixe est déterminée par l'analyse des valeurs propres λ_j , $j = 1, 2, 3$ de la matrice jacobienne définie par $M_{ij} = \partial \dot{x}_i / \partial x_j$ ($\dot{x} = \dot{Q} = \dot{w} = \dot{c}$) ; ce qui donne, après tous les calculs, la matrice dont les éléments sont donnés ci-après :

$$\begin{aligned}
M_{11} &= 2\delta + \frac{8}{3}\epsilon A^2 + \frac{16}{5}\mu A^4 - \frac{2\beta}{3w^2} - \frac{2}{3}\pi^2\beta c^2 w^2, \\
M_{12} &= -\frac{8}{3}\epsilon A^4 - \frac{48}{15}\mu A^6 + \frac{8}{3w^2}A^2\beta - \frac{8}{3}\pi^2\beta c^2 w^2 A^2, \\
M_{13} &= -\frac{8}{3}\pi^2\beta w^3 c A^2, \\
M_{21} &= -\frac{2}{\pi^2}\epsilon - 4\mu\pi^2 A^2, \\
M_{22} &= -\frac{8}{\pi w^2}\beta + \frac{4}{\pi^2}\mu A^4 + 2Dc - \frac{16}{5}\pi^2\beta c^2 w^2, \\
M_{23} &= 2Dw - \frac{32}{15}\pi^2\beta c w^3, \\
M_{31} &= -\frac{1}{\pi^2 w^3} - \frac{32}{15\pi^2 w^3}\nu A^2, \\
M_{32} &= \frac{8}{3w^3}\beta c + \frac{8}{\pi^2 w^3}\beta c + \frac{6}{\pi^2 w^3}A^2 + \frac{128}{15\pi^2 w^3}\nu A^4 - \frac{8}{\pi^2 w^5}D, \\
M_{33} &= -4Dc - \frac{4}{3w^2}\beta - \frac{4}{\pi^2}w^2\beta.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Si la partie réelle d'au moins une des valeurs propres λ_j est positive, alors le point fixe correspondant est instable. Conséquent, pour avoir des points fixes stables il faut que les parties réelles des valeurs propres soient toutes négatives.

Notre objectif consiste à mettre au point une cartographie des solutions stables et instables dans l'espace des paramètres de l'équation (3.1). Mais, comme on ne peut pas obtenir cette cartographie en faisant varier à la fois tous les paramètres de l'équation GL à $(1+1)D$ (3.1), notre idée consiste à fixer tous les paramètres, sauf deux que nous faisons varier. Pour chaque jeu de paramètres, nous examinons l'existence et la stabilité du point fixe.

En explorant les régions de paramètres au voisinage de $\mu = -0.1$, $\delta = -0.1$, $\beta = 0.08$ et de $D = 1$, qui sont les mêmes valeurs que celles de la référence [20, 130]; nous avons mis en évidence dans le plan (ν, ϵ) une grande variété de solutions de l'équation (3.1), incluant les solitons stationnaires et non stationnaires.

3.2.2.1 Solitons dissipatifs stationnaires de l'équation GL à $(1+1)D$

En fixant les valeurs de μ , β , δ et D , respectivement à -0.1 , 0.08 , -0.1 et à 1 , et en considérant le champ initial suivant

$$\psi(z, t) = 3.23 \operatorname{sech}\left(\frac{t}{0.45}\right); \quad (3.9)$$

nous avons fait varier ν de -0.11 à -0.054 par pas de 0.005 , et ϵ de 0.6 à 0.85 par pas de 0.001 . Pour chaque couple de valeur (ν, ϵ) , nous avons recherché un point fixe par la méthode de Newton-Raphson, et ensuite nous avons étudié la stabilité de ce point fixe. Le résultat de ce travail est représenté par la cartographie de la figure (3.1). Cette figure montre les régions des points fixes stables (zone grise) et instables (zones hachurées et claires). Les points fixes instables se répartissent en deux catégories correspondant respectivement à des cycles limites stables et solutions instables. Un point fixe stable est un attracteur au voisinage duquel tous les autres points convergent. La figure (3.2) que nous avons obtenue, pour $\mu = -0.1$, $\beta = 0.08$, $D = 1$, $\delta = -0.1$, $\epsilon = 0.625$, et $\nu = -0.07$, illustre l'évolution des paramètres d'une impulsion vers un point fixe stable. Nous avons utilisé comme condition initiale une impulsion ayant pour amplitude 3.1941 , largeur 0.4775 et pour chirp -0.4725 . Ce soliton converge vers un point fixe stable, qui correspond à un soliton stationnaire

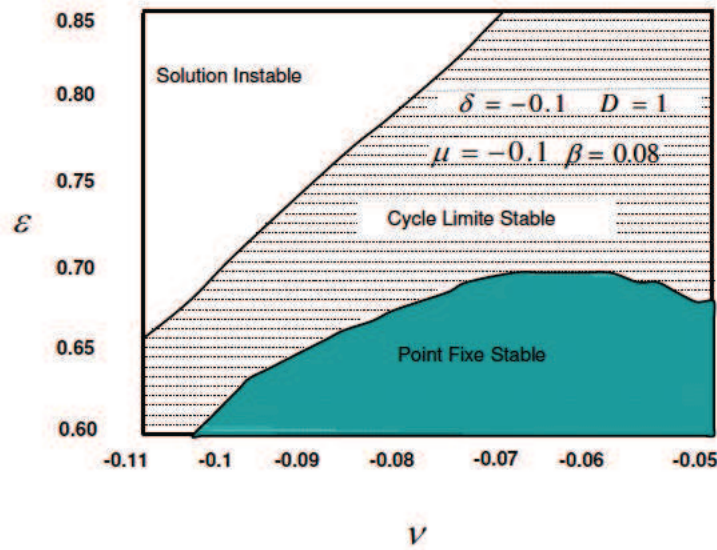


FIG. 3.1 Régions d'existence des points fixes stables et instables (cycles limites), pour les paramètres du système indiqués à l'intérieur de la figure.

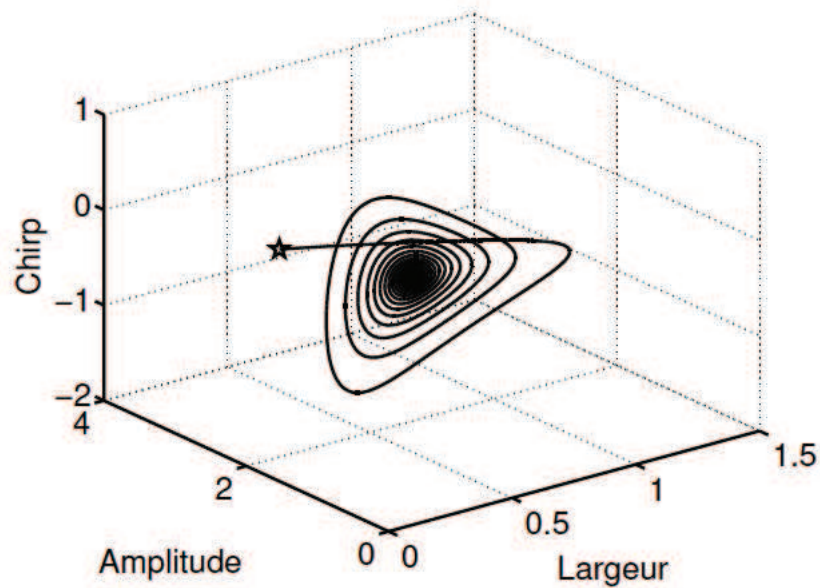


FIG. 3.2 Trajectoire d'une impulsion évoluant vers un point fixe stable. L'étoile correspond au point initial de coordonnées $(3.1941, 0.4775, -0.4725)$ qui converge vers le point fixe stable $(2.7045, 0.5473, -0.2577)$; les paramètres du système sont les suivants $\mu = -0.1$, $\beta = 0.08$, $D = 1$, $\delta = -0.1$, $\epsilon = 0.625$, et $\nu = -0.07$.

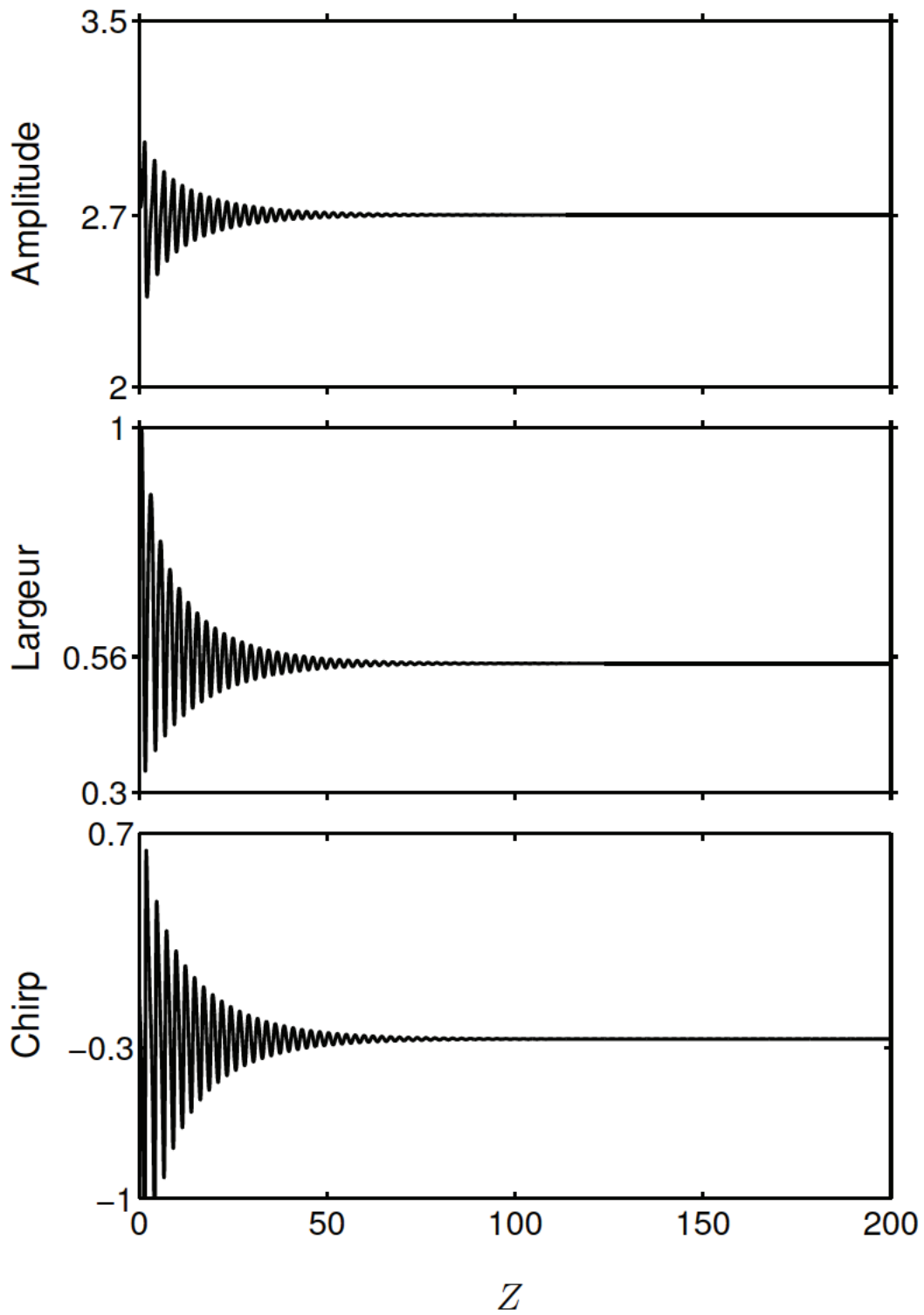


FIG. 3.3 Evolution des paramètres d'un soliton dissipatif stationnaire pour le jeu de paramètres suivant : $\mu = -0.1$, $\beta = 0.08$, $D = 1$, $\delta = -0.1$, $\epsilon = 0.625$ et $\nu = -0.07$.

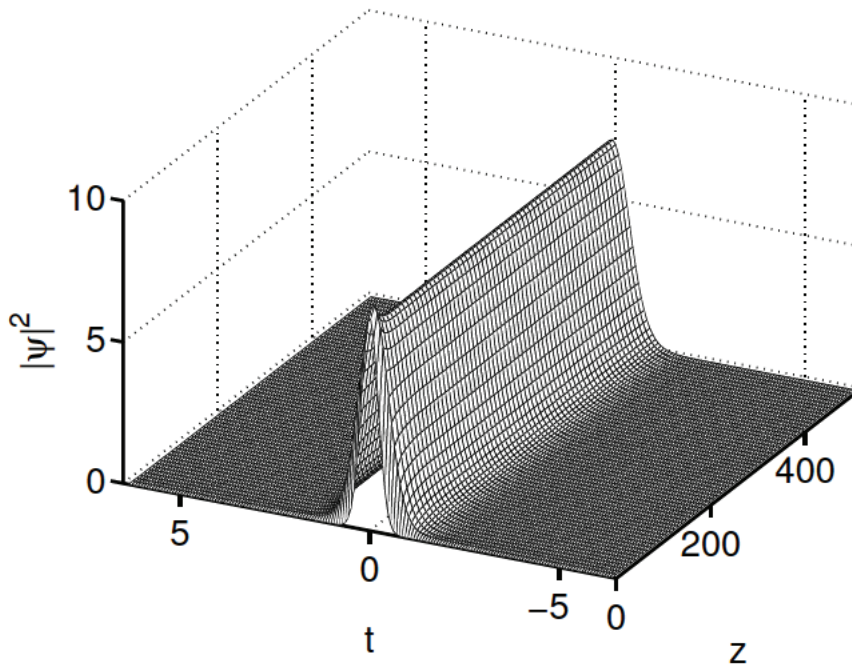


FIG. 3.4 Evolution du profil d'un soliton dissipatif stationnaire pour les mêmes paramètres que ceux de la figure (3.3).

d'amplitude 2.7045, largeur 0.5473 et chirp -0.2577 . Lorsque ce point est atteint, les paramètres de l'impulsion (amplitude, largeur, chirp) restent constant, quelle que soit la distance de propagation. Les points fixes stables représentent les solutions solitons dissipatifs stationnaires de l'équation GL à (1+1)D représentés en gris sur la figure (3.1). On peut remarquer que les impulsions stationnaires existent principalement dans les régions de faibles valeurs du gain non linéaire, ϵ . Pour chaque couple de valeurs de (ν, ϵ) donné, il existe un et un seul type de soliton stationnaire avec ses caractéristiques propres (amplitude, largeur, énergie...). Après une période transitoire initiale caractérisée par de petites oscillations, ce type de soliton entre dans un régime stationnaire où ses paramètres n'évoluent plus, comme l'illustre la figure (3.3), obtenue pour $\mu = -0.1$, $\beta = 0.08$, $D = 1$, $\delta = -0.1$, $\epsilon = 0.625$ et $\nu = -0.07$.

La figure (3.4) montre très clairement que le profil temporel de ce soliton reste inchangé quelque soit la distance de propagation. Pour un autre jeu de paramètres dans cette même région, le comportement reste identique mais avec des valeurs différentes d'amplitude, de largeur et de dérive de fréquence.

3.2.2.2 Solitons dissipatifs non stationnaires de l'équation GL à (1+1)D

Les systèmes dissipatifs admettent, en plus des solutions stationnaires, des solutions oscillantes. Cependant, il est pratiquement impossible de mettre en évidence ces solutions sous forme analytique, en raison de leur complexité [132]. Un exemple de solution soliton oscillant de l'équation GL à (1+1)D dans le régime de dispersion normale a déjà été présenté par Deissler et al. dans l'article [113]. Mais la variété de ces solutions et leur domaine d'existence sont plus étendues [117]. La région des points fixes instables correspond à des valeurs de gain non linéaire élevées ; lorsqu'on augmente progressivement la valeur du gain non linéaire, on passe de la région des impulsions stationnaires à la région des impulsions non stationnaires avec la création des cycles limites [133], comme le montre la figure (3.1). Un cycle limite est une trajectoire fermée dans l'espace dont les coordonnées sont les variables dynamiques du système étudié. On observe de tels comportements dans l'étude de nombreux systèmes non linéaires tels que l'oscillateur de Van der Pol, les systèmes optiques dissipatifs, ... [116].

Sur la cartographie de la figure (3.1), selon le domaine de paramètres considérée, nous avons les cycles limites stables et des "solutions instables" expansives, correspondant à des comportements bien distincts. La région proche des points fixes stables (zone hachurée), est celle des cycles limites stables. La figure (3.5), que nous avons obtenue pour les valeurs $\mu = -0.1$, $\beta = 0.08$, $D = 1$, $\delta = -0.1$, $\epsilon = 0.725$ et $\nu = -0.08$, illustre la dynamique de l'impulsion sur un cycle limite stable. Nous avons considéré comme condition initiale, un point soliton non stationnaire avec pour amplitude 9.7433, largeur 0.4775 et pour chirp -0.4725 . Nous remarquons qu'après une période transitoire initiale, ce soliton se positionne sur une trajectoire fermée et ne la quitte plus quelle que soit la distance de propagation.

Les cycles limites stables représentent les solutions solitons dissipatifs oscillants de l'équation GL à (1+1)D représentées en pointillées sur la figure (3.1). Ce sont des impulsions qui changent de forme périodiquement, mais gardent ce mouvement d'ensemble sur une longue durée lorsque les paramètres du système qui leur a donné naissance ne sont pas modifiés. Ils se déplacent en exécutant des mouvements internes périodiques (dynamique rapide) mais restent stables tout au long de leur propagation

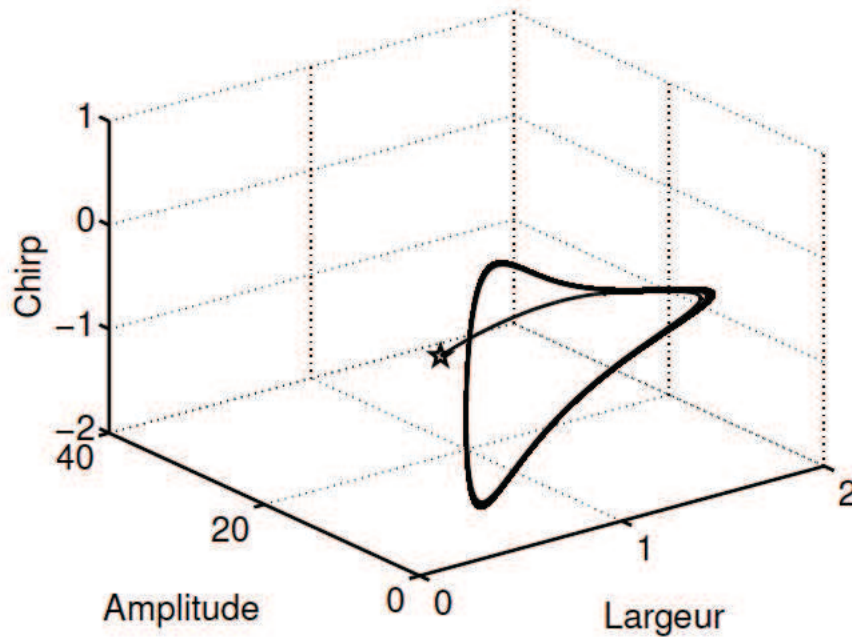


FIG. 3.5 Trajectoire d'un cycle limite stable. L'étoile correspond au point initial de coordonnées (9.7433, 0.4775, -0.4725); les paramètres du système sont les suivants $\mu = -0.1$, $\beta = 0.08$, $D = 1$, $\delta = -0.1$, $\epsilon = 0.725$ et $\nu = -0.08$.

(du point de vue de la dynamique lente).

La figure (3.6) montre l'évolution de l'amplitude, de la largeur et du chirp pour la même condition initiale que celle du cycle limite stable de la figure (3.5). On note que chacune des grandeurs physiques du soliton dissipatif oscille autour d'une certaine valeur fixe.

Cependant, ces oscillations ne sont pas anodines dans le sens où elles occupent une région non négligeable de l'espace des paramètres de l'équation GL à (1+1)D. En plus elles peuvent exister pour différentes conditions initiales.

La figure (3.7), qui représente le profil d'un soliton dissipatif oscillant, correspond à $\epsilon = 0.725$, $\nu = -0.08$, $\mu = -0.1$, $\beta = 0.08$, $D = 1$ et à $\delta = -0.1$. On observe clairement le mouvement périodique suivant la coordonnée de propagation z . Cette impulsion change périodiquement de profil au cours de la propagation, mais reconstitue exactement le même profil après chaque période. Notons qu'il n'y a aucun lien avec la dynamique oscillante des solitons hamiltoniens d'ordre supérieur. La période d'oscillation des ces solitons est fortement influencée par le gain, c'est-à-dire, par un

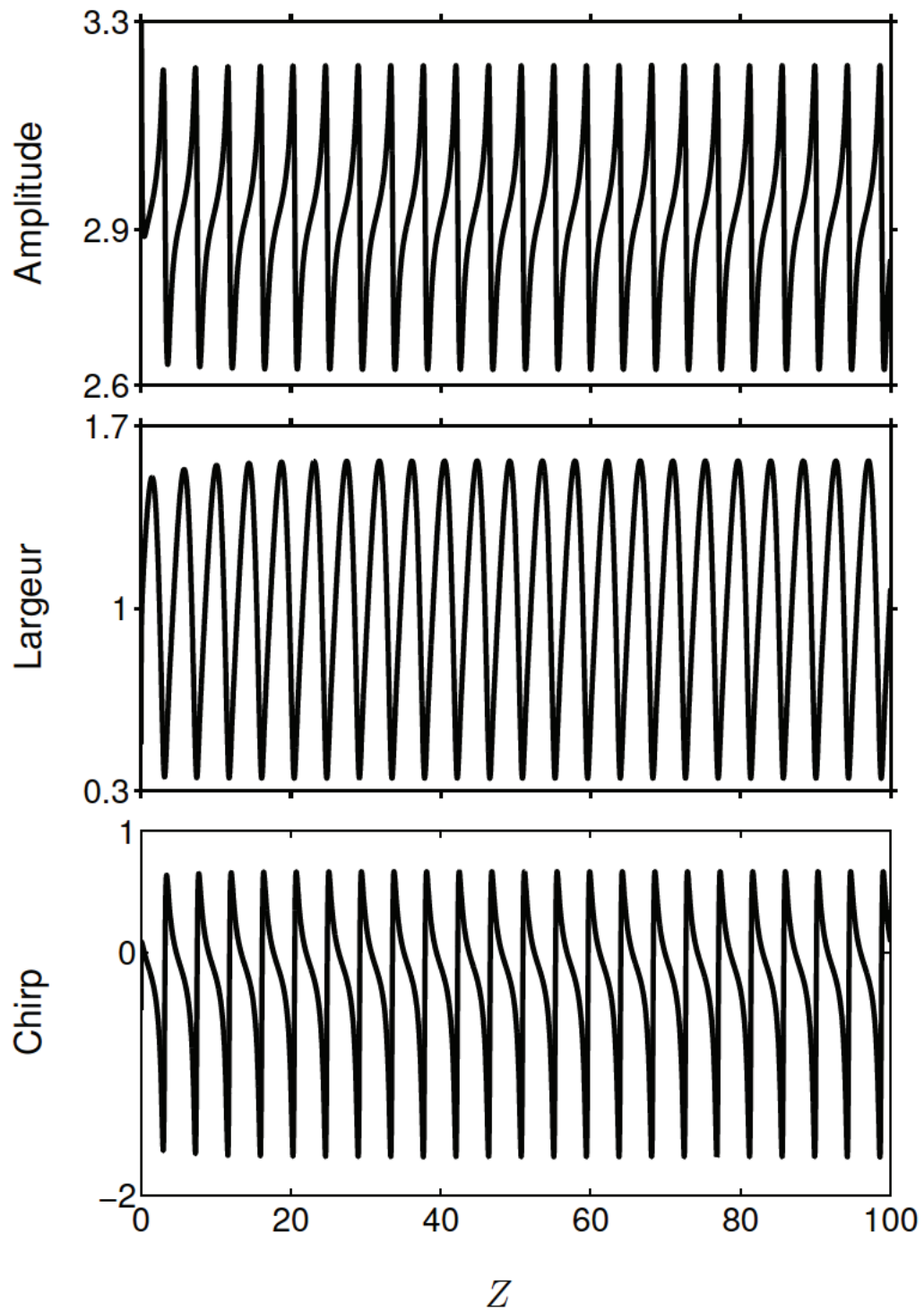


FIG. 3.6 Evolution des différents paramètres d'un soliton dissipatif oscillant pour les paramètres du système suivants : $\mu = -0.1$, $\beta = 0.08$, $D = 1$, $\delta = -0.1$, $\epsilon = 0.725$ et $\nu = -0.08$.

apport d'énergie externe. Pour illustrer ce fait, nous avons tracé la période des impulsions oscillantes pour différentes valeurs de ν , $(-0.1, -0.09, -0.08)$ en fonction du gain non linéaire, ϵ . Le résultat de cette analyse est représenté dans la figure (3.8). La dynamique des impulsions oscillantes est beaucoup plus complexe, nous y reviendrons de façon très détaillée dans les prochains chapitres. Nous avons vu que le passage des points fixes stables aux solutions instables se fait via les cycles limites stables. Dans cette région des cycles limites stables, les impulsions incarnent une dynamique oscillatoire, dont les périodes bien définies sont dépendantes des paramètres du système. Sur la figure (3.8) nous avons étudié l'influence du gain non linéaire (ϵ) et

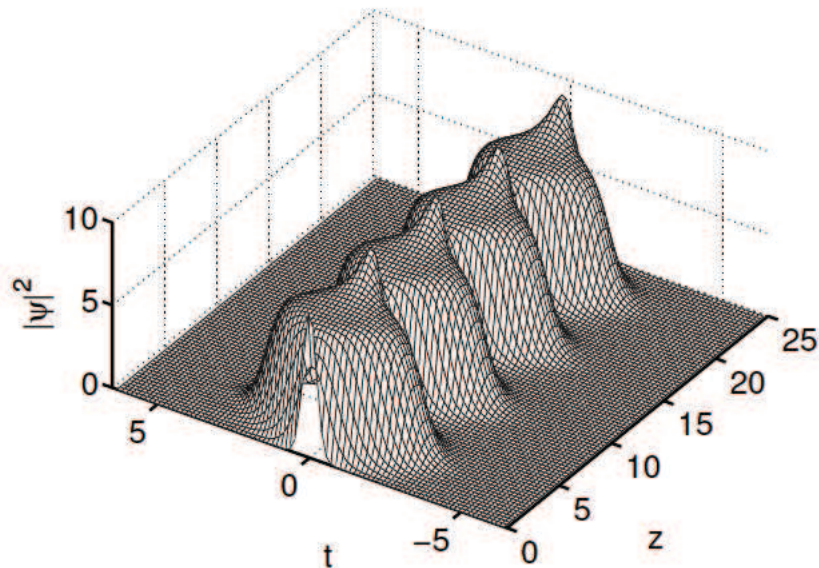


FIG. 3.7 Evolution du profil d'un soliton dissipatif oscillant pour les paramètres du système suivants : $\epsilon = 0.725$, $\nu = -0.08$, $\mu = -0.1$, $\beta = 0.08$, $D = 1$ et à $\delta = -0.1$.

de la saturation de la nonlinéarité (ν) sur la période des oscillations. On constate que lorsqu'on fixe tous les autres paramètres du système (par exemple pour $\nu = -0.08$) et que seul le gain non linéaire varie, la période des oscillations internes de l'impulsion évolue d'abord très légèrement pour les faibles valeurs du gain non linéaire ϵ avant de croître de manière très abrupte lorsqu'on s'approche d'une certaine valeur critique de ϵ . Le comportement général est que la période des solitons dissipatifs oscillants croît avec le gain non linéaire. Quant à l'effet du paramètre de saturation Kerr ν sur

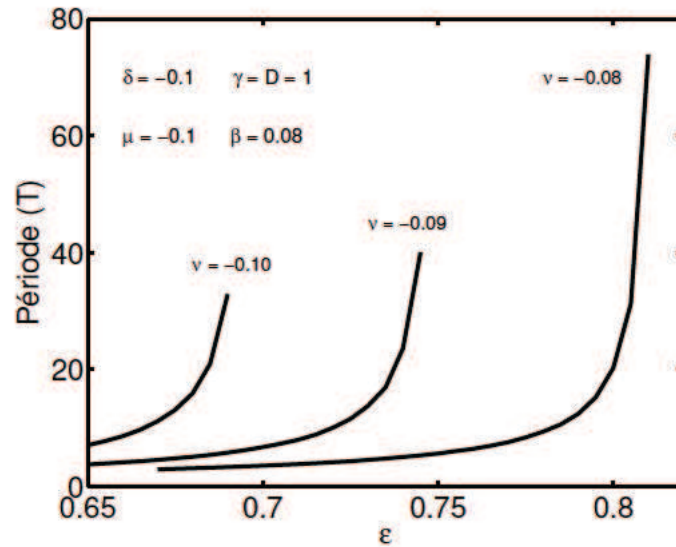


FIG. 3.8 Période des oscillations des solitons dissipatifs oscillants en fonction de ϵ pour différentes valeurs de ν

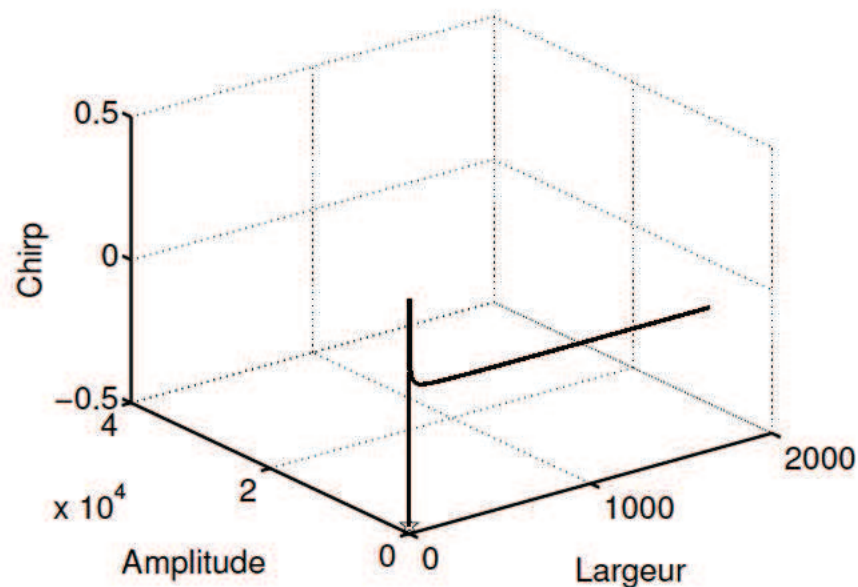


FIG. 3.9 Trajectoire brisée d'une solution instable. L'étoile correspond au point initial de coordonnées $(9.7433, 0.4775, -0.4725)$; les paramètres du système sont les suivants $\delta = -0.1, D = 1, \beta = 0.08, \mu = -0.1, \nu = -0.1$ et $\epsilon = 0.75$.

la période, le point majeur qui se dégage nettement de cette étude est le suivant : lorsque la saturation du milieu est moindre, c'est-à-dire pour de petites valeurs de ν , en valeur absolue, les solitons oscillent à de faibles fréquences (grandes périodes).

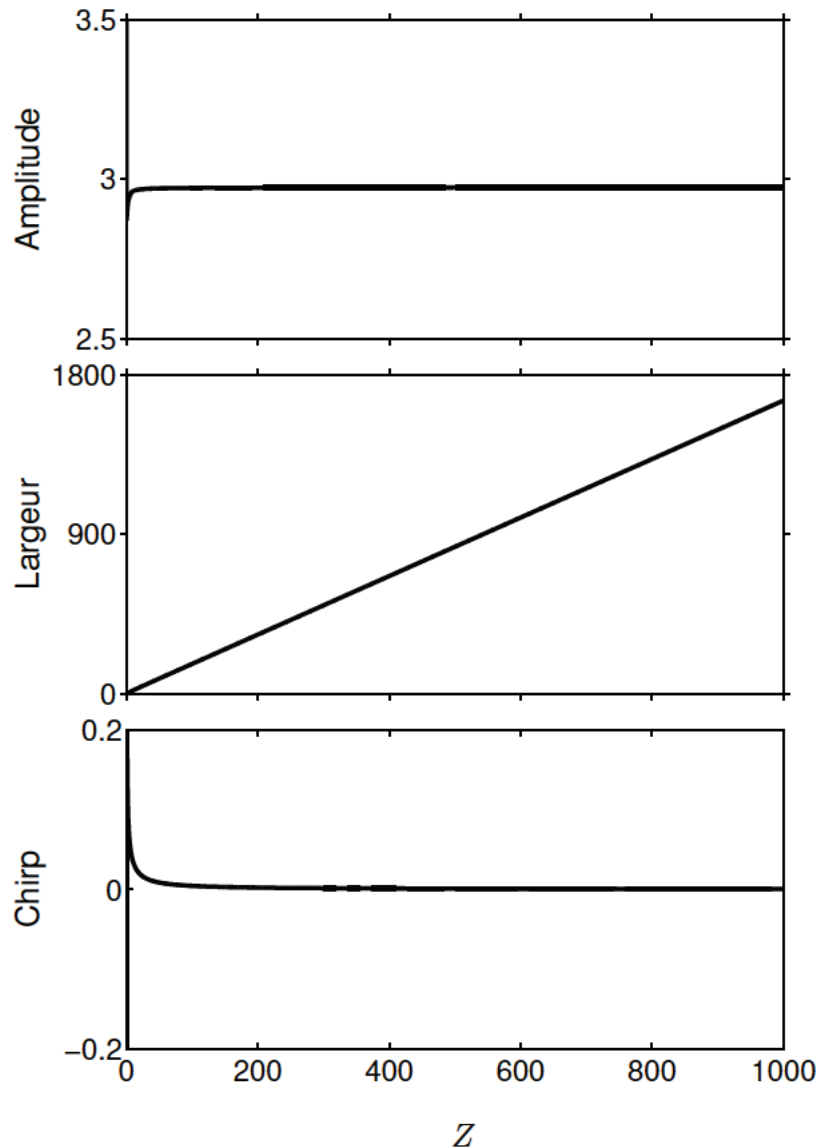


FIG. 3.10 Evolution des différents paramètres d'une solution instable pour les paramètres suivants $\delta = -0.1$, $D = 1$, $\beta = 0.08$, $\mu = -0.1$, $\nu = -0.1$ et $\epsilon = 0.75$.

Les solutions instables sont représentés dans la troisième partie de la cartographie de la figure (3.1). Dans ce domaine les impulsions perdent leur stabilité suite à l'action excessive du gain non linéaire. De ce fait, l'impulsion n'arrive plus à se maintenir sur une trajectoire fermée dans l'espace des paramètres et s'étend brusquement. La figure (3.9) retrace dans l'espace des paramètres du soliton, l'évolution d'un tel cycle limite instable pour $\delta = -0.1$, $D = 1$, $\beta = 0.08$, $\mu = -0.1$, $\nu = -0.1$ et $\epsilon = 0.75$. La période des cycles limites de ces impulsions tend vers l'infini, ce qui correspond à

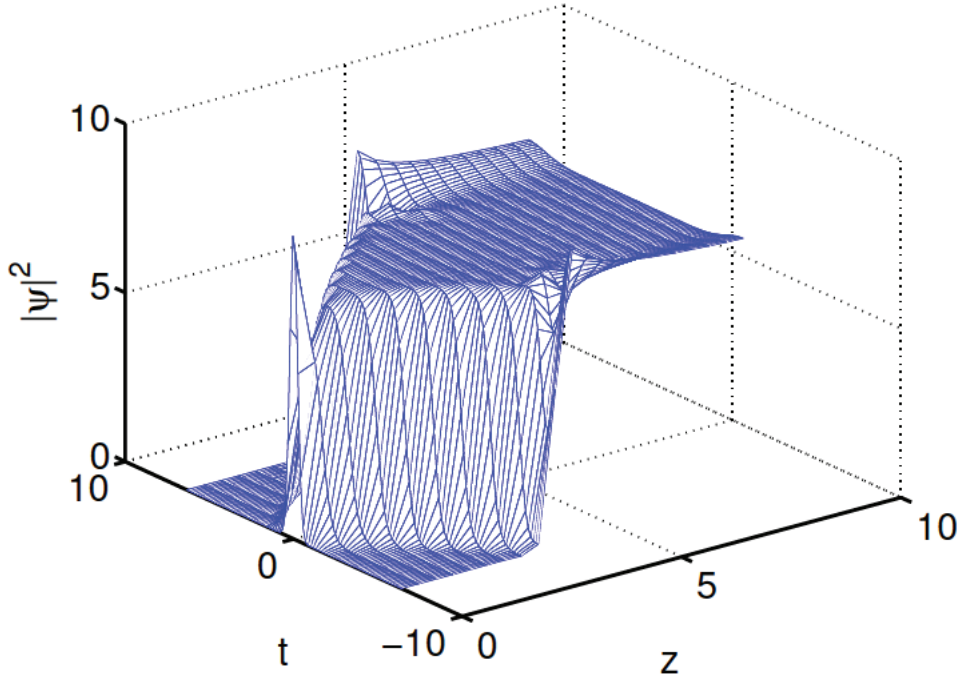


FIG. 3.11 Evolution du profil d'une solution instable, pour les paramètres du système suivants : $\delta = -0.1$, $D = 1$, $\beta = 0.08$, $\mu = -0.1$, $\nu = -0.1$ et $\epsilon = 0.75$.

une solution instable. L'amplitude de l'impulsion dans ce cas reste toujours constante alors que son énergie et sa largeur augmentent avec le temps [voir figure (3.10)]. Ce mouvement est équivalent aux solutions localisées de l'équation GL à $(1+1)D$, mais avec une amplitude constante et une largeur qui croît indéfiniment ; c'est une transformation asymptotique du soliton vers un régime continu dont l'énergie est infinie. Ils correspondent aux solutions instables de l'équation GL complexe cubique quintique à $(1+1)D$.

3.3 Comparaison entre le domaine numérique et le domaine de l'approche variationnelle

Pour effectuer cette comparaison, nous allons représenter dans un même plan, la cartographie des différentes solutions obtenues pas la résolution numérique de l'équation (3.1) [130] et les résultats obtenus par les équations variationnelles (3.7). Le résultat de cette étude est décrit par la figure (3.12). La partie de la cartographie

comprise entre les deux lignes brisées (*a* et *b*) retrace les solutions oscillantes obtenues par la méthode numérique. On remarque que ce domaine est plus petit que celui de la méthode variationnelle. Par contre la région des solutions stationnaires obtenues numériquement et qui est dans toute la partie inférieure de la ligne *a* est plus grande que celle de la procédure variationnelle. L'analyse de cette figure montre que la méthode des coordonnées collectives permet d'obtenir approximativement les différentes dynamiques des solutions solitons temporels de GL1D complexe cubique quintique. Tous les types de solitons sont bien prédits par l'approche variationnelle, mais les frontières entre leurs domaines respectifs de stabilité sont prédites de manière plus approximative.

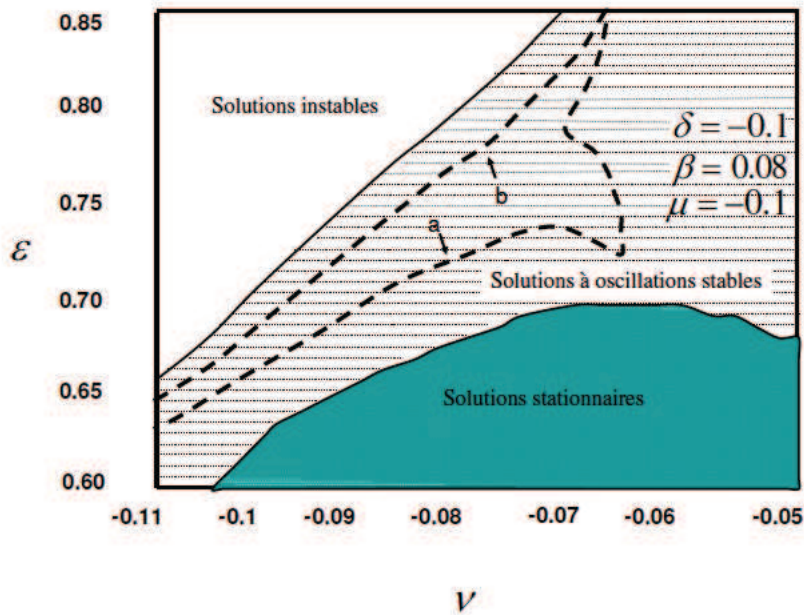


FIG. 3.12 Cartographie des différentes solutions de l'équation GL à (1+1)D obtenue par la résolution numérique (lignes brisées) et par la procédure variationnelle.

3.4 Energie des solitons dissipatifs de l'équation GL à (1+1)D

L'un des paramètres extrêmement importants dans l'étude des phénomènes dissipatifs est l'énergie totale du système. C'est un paramètre à la fois quantitatif et qualitatif des différentes solutions solitons du système. Il permet de contrôler le comportement des impulsions et de voir comment elles évoluent au cours du temps. Cette énergie totale est donnée par l'équation (3.3).

L'énergie des systèmes dissipatifs n'est pas conservée à priori (en dehors du cas des impulsions stationnaires), son évolution dépend des paramètres de l'équation de propagation. Pour des solutions localisées temporellement et spatialement, l'énergie évolue mais reste finie. Quand la solution stationnaire est atteinte, l'énergie reste rigoureusement constante au cours de la propagation. Un autre type de comportement correspond aux solutions oscillantes, qui se caractérisent par une énergie qui oscille entre deux valeurs limites. Enfin, dans certaines régions de paramètres on trouve des solutions instables qui "explorent" ou bien tendent vers un régime continu. Pour ces impulsions, l'énergie tend vers l'infini. Dans les figures qui suivent sont illustrés divers comportements de l'énergie pour différentes solutions solitons dissipatifs de l'équation GL (1+1)D.

La figure (3.13) illustre l'évolution de l'énergie d'une impulsion située initialement à proximité d'un état stationnaire. Comme la condition initiale n'est pas située au point fixe, la dynamique débute par une phase transitoire au cours de laquelle l'énergie exécute de petites oscillations avant de se stabiliser sur une valeur constante 2.704 qui correspond à l'état stationnaire. Lorsque cette énergie est atteinte le système ne la quitte plus quelle que soit la distance de propagation.

Dans le domaine des solitons à oscillations, l'énergie oscille entre deux valeurs fixes. Sur la figure (3.14), obtenue pour $\delta = -0.1$, $D = 1$, $\beta = 0.08$, $\mu = -0.1$, $\nu = -0.08$ et $\epsilon = 0.725$, on remarque que l'énergie effectue des oscillations autour d'une position d'équilibre. Tout au long de la propagation, les oscillations s'effectuent entre deux limites correspondant à 27.32 et 6.25. Dans le cas des solutions instables, l'énergie croît linéairement vers l'infini comme l'illustre la figure (3.15), que nous avons obtenu

nue pour $\delta = -0.1$, $D = 1$, $\beta = 0.08$, $\mu = -0.1$, $\nu = -0.1$ et $\epsilon = 0.75$.

De même, nous avons examiné l'évolution de la quantité H de l'équation (3.5).

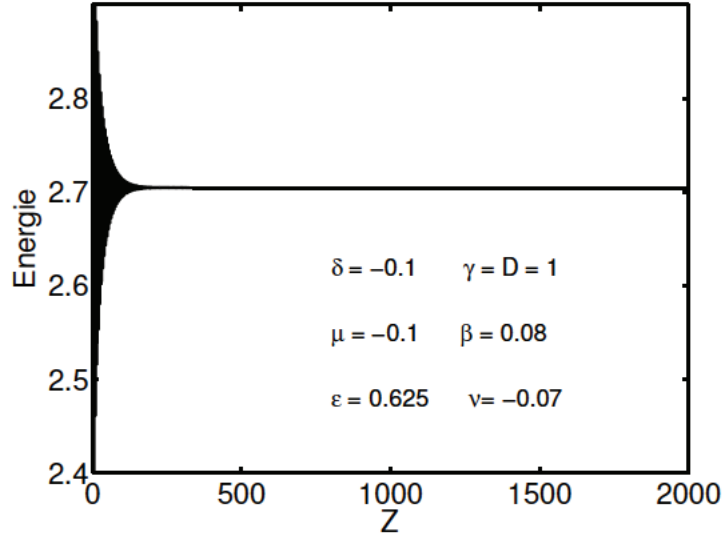


FIG. 3.13 Evolution de l'énergie d'un soliton dissipatif stationnaire pour $\delta = -0.1$, $D = 1$, $\beta = 0.08$, $\mu = -0.1$, $\nu = -0.07$ et $\epsilon = 0.625$.

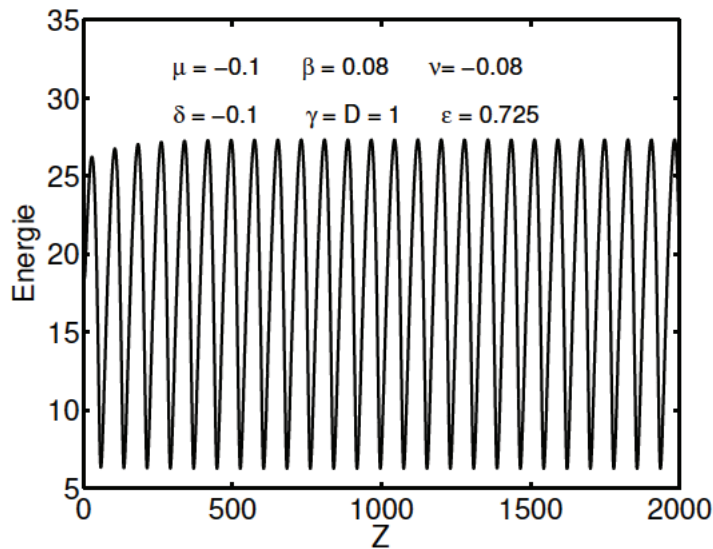


FIG. 3.14 Evolution de l'énergie d'un soliton dissipatif oscillant

On remarque que H a la même dynamique que l'énergie Q . Pour les solutions stationnaires H reste constant, mais oscille entre deux grandeurs fixes en présence des

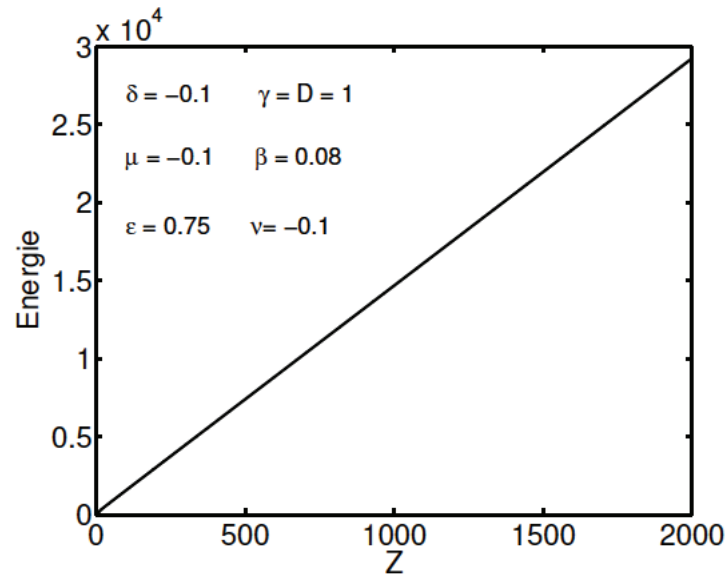


FIG. 3.15 Evolution de l'énergie d'un soliton dissipatif instable

solutions oscillantes, et devient linéaire dans le domaine des solutions instables. Les figures [(3.16), (3.17) et (3.18)] suivantes illustrent cette dynamique.

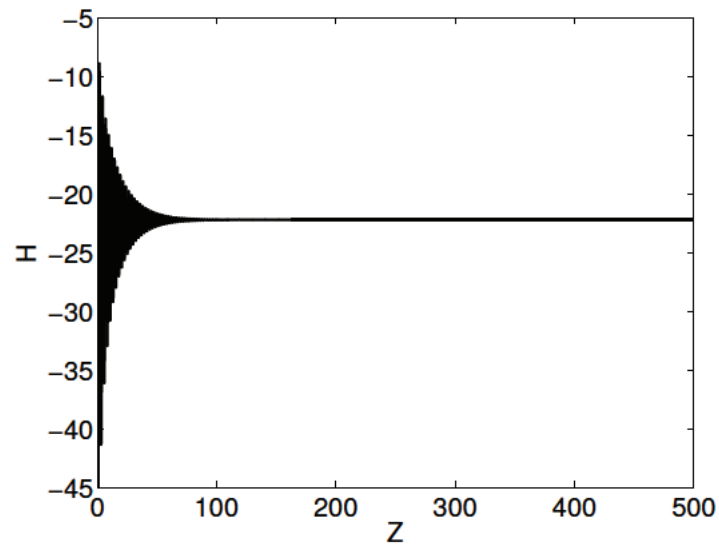


FIG. 3.16 Evolution de H dans le cas stationnaire, pour $\delta = -0.1$, $D = 1$, $\beta = 0.08$, $\mu = -0.1$, $\nu = -0.07$ et $\epsilon = 0.625$.

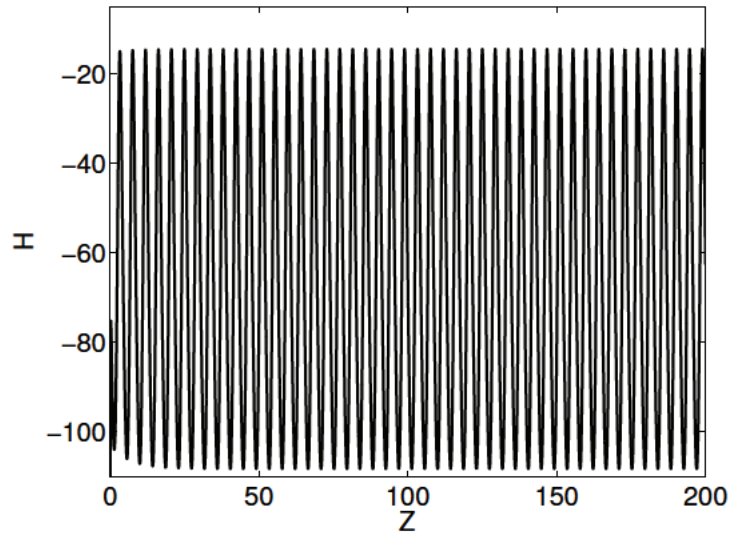


FIG. 3.17 Evolution de H dans le cas oscillant, pour $\delta = -0.1$, $D = 1$, $\beta = 0.08$, $\mu = -0.1$, $\nu = -0.08$ et $\epsilon = 0.725$.

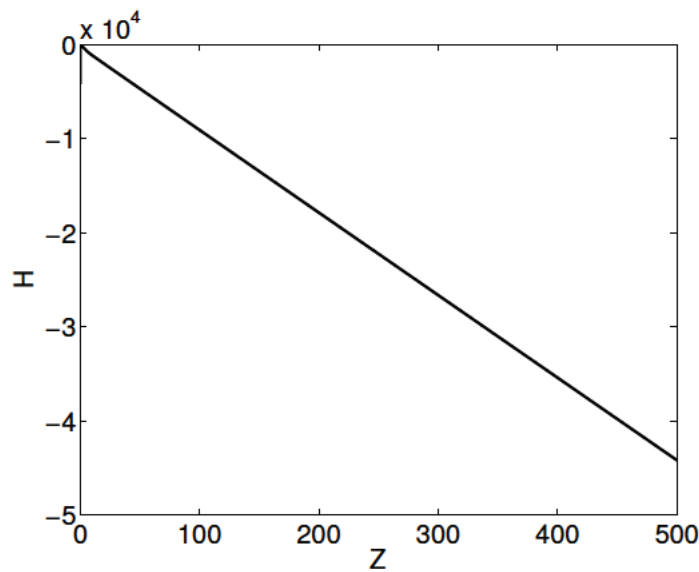


FIG. 3.18 Evolution de H dans le cas instable, pour $\delta = -0.1$, $D = 1$, $\beta = 0.08$, $\mu = -0.1$, $\nu = -0.1$ et $\epsilon = 0.75$.

3.5 Conclusion

Au terme de cette étude, nous avons pu mettre en évidence les différentes solutions solitons de l'équation de Ginzburg-Landau complexe à (1+1)D à l'aide d'une procédure variationnelle. Cette méthode nous a permis de mettre en lumière l'in-

fluence des paramètres de l'équation GL à (1+1)D sur le profil temporel et spectral de l'impulsion (amplitude, largeur et chirp), et d'obtenir l'évolution des paramètres de l'impulsion au cours de la propagation. Nous avons dressé une cartographie générale des différents types de comportements impulsionsnels. Cette cartographie inclut des points fixes stables qui correspondent aux solutions solitons stationnaires et des points fixes instables qui se répartissent en cycles limites stables, correspondant aux solutions solitons oscillants et en solutions instables qui se manifestent sous la forme d'impulsions en expansion temporelle. La limite de validité de notre étude repose sur le choix de la fonction d'essai, et la cartographie des solutions en dépend. Il ressort de notre analyse que les paramètres de l'équation GL à (1+1)D et ceux de la fonction d'essai jouent un rôle majeur dans la recherche des solutions localisées. Ainsi, nous avons démontré que la période des oscillations internes des solitons oscillants est fortement liée à la valeur du paramètre du gain non linéaire (ϵ). Dans d'autres cas, comme nous le verrons plus tard, les oscillations des solitons oscillants peuvent être quasi-périodique, avec plusieurs périodes impliquées dans l'évolution.

Après cette étude développée sur les solitons dissipatifs à (1+1)D, des outils numériques et analytiques, nous examinerons dans le prochain chapitre, avec la méthode des opérateurs de projection, le problème complexe des solitons dissipatifs à (3+1)D c'est à dire les solitons spatio-temporels ou balles de lumière.

Solutions balles de lumière à symétrie cylindrique de l'équation GL à (3+1)D

4.1 Introduction

Dans les systèmes physiques qui échangent de l'énergie avec l'environnement, la dissipation non linéaire permet la formation de structures localisées stables [66]. Par exemple, sur la base de l'équation GL complexe cubique quintique, les systèmes dissipatifs admettent des solutions solitons optiques stables à une, deux et trois dimensions [17, 19]. Rappelons cependant que la stabilité de ces structures optiques localisées à plus d'une dimension est une question non triviale dans le cas des systèmes conservatifs, où on est confronté à une stabilité marginale et à l'effondrement des impulsions [2, 134]. Enfin, nous supposons un milieu non linéaire homogène, ce qui exclut la localisation du champ dans les guides d'ondes et les cavités. Dans ce cas, le champ optique localisé crée son propre guide d'onde dans le milieu non linéaire et supporte sa localisation pendant la propagation.

Une équation maîtresse qui modélise la propagation d'ondes spatio-temporelles à (3+1)D dans les milieux non linéaires dissipatifs est l'équation complexe cubique-quintique de Ginzburg-Landau (GL3D) [135, 119]. Cette équation est une extension de celle que nous avons utilisée dans le chapitre précédent dans le cas à (1+1)D.

Notons que pour une équation symétrique en \vec{r} et t les solitons à (3+1)D pourraient admettre une symétrie sphérique entre les variables temporelles et toutes les variables

spatiales. Ainsi, si nous nous limitons à des solutions stationnaires à symétrie sphérique, il est possible de réduire l'équation de propagation à une équation différentielle ordinaire (EDO), qui peut être résolue numériquement assez aisément [17, 136]. Cependant, dans la modélisation des systèmes physiques réels, il est important de différencier les effets temporels et spatiaux dans l'équation. Par exemple, la propagation peut aussi avoir lieu dans des milieux avec une dispersion normale, ce qui brise la symétrie entre \vec{r} et t . En plus, la limitation de la largeur de bande, ou filtrage spectral, peut en grande partie dominer les effets de filtrage spatiaux, et briser également la symétrie sphérique dans l'équation. Divers effets peuvent être à l'origine des solutions avec une symétrie non sphérique. Récemment, l'existence des balles de lumière stables ayant des formes complexes a été démontrée numériquement en utilisant l'équation GL à (3+1)D, pour n'importe quel signe de dispersion chromatique [19, 137] et pour une vaste gamme de paramètres de l'équation [138, 139]. De la même manière la capacité des balles de lumière à former des complexes a été dévoilée par des simulations numériques [136, 140].

Cependant la résolution numérique de l'équation GL à (3+1)D, pour un jeu de paramètres et une condition initiale donnée est une procédure extrêmement longue, qui peut prendre plusieurs jours avec un ordinateur standard [137]. Plus difficile encore, lorsqu'on essaye de cartographier différents types de solutions solitons en fonction des paramètres de l'équation en raison du nombre importants de ces paramètres (5 paramètres typiquement). Dans ce contexte, il est important et même nécessaire de développer des outils théoriques qui peuvent permettre de mettre en évidence les solutions solitons plus rapidement et prévoir leurs domaines d'existence. Jusqu'à présent, quelques méthodes approchées, semi analytiques, basées sur des considérations diverses de la physique, ont été développées et appliquées à l'étude de la propagation d'impulsions non linéaires. Plusieurs d'entre elles se servent d'une fonction d'essai, associée à un système dynamique de dimension finie. La réduction en un système dynamique de dimension finie se fait par le biais des principes variationnels [18, 141] : la méthode Lagrangienne, la méthode des moments [20, 130], et la méthode des opérateurs de projections [85] que nous avons décrite au chapitre 2. Le système dynamique réduit permet d'obtenir l'évolution d'un nombre fini de paramètres comme la lar-

geur de l'impulsion, son chirp, son amplitude, etc. Avec un nombre fini de variables, on réduit largement le temps de calcul, au détriment entre autre de la précision. De plus, quand la fonction d'essai contient plus de trois paramètres, des difficultés apparaissent fréquemment dans la résolution du problème. Pour notre étude sur les solitons à (3+1)D, le nombre de paramètres dans la fonction d'essai doit être au moins égal à cinq. La réduction à trois paramètres devient possible quand nous limitons la fonction d'essai à une fonction à symétrie sphérique. Mais cette procédure ne peut donner qu'une vue partielle de la dynamique de l'impulsion dans notre étude. L'approche Lagrangienne a été appliquée récemment à l'équation GL à (3+1)D en utilisant une fonction d'essai à symétrie sphérique Gaussienne avec quatre [20] ou huit paramètres [142].

Dans ce chapitre, en nous inspirant de la méthodologie des chapitres 2 et 3, nous montrons que l'approche *des coordonnées collectives* est une technique appropriée pour obtenir des solutions localisées approchées de l'équation GL à (3+1)D cylindrique, avec un certain nombre de fonctions d'essais. En utilisant cette technique, nous trouvons une riche variété de solutions qui incluent les solutions stationnaires et oscillantes ainsi que leurs bifurcations. L'avantage décisif de la technique est la réduction spectaculaire du temps de calcul informatique permettant de trouver l'emplacement approximatif des solutions spécifiques dans l'espace des paramètres de l'équation GL3D.

4.1.1 L'équation de Ginzburg-Landau complexe à (3+1)D

Notre modèle pour la description des balles de lumière est fondé sur l'extension du modèle de Ginzburg-Landau cubique-quintique à coefficients complexes (GL), que nous avons étudié antérieurement dans le cadre à une dimension (1+1)D. Ce modèle associe des nonlinéarités dispersives et dissipatives d'ordre trois et cinq. Nous y avons inclus des opérateurs transverses pour prendre en compte la diffraction spatiale. L'équation de propagation normalisée pour l'étude est celle de Ginzburg-Landau complexe à (3+1)D cylindrique (GL3DC), qui est la suivante :

$$\psi_z - i\frac{D}{2}\psi_{tt} - \frac{i}{2}\psi_{rr} - \frac{i}{2r}\psi_r - i|\psi|^2\psi - i\nu|\psi|^4\psi = \delta\psi + \beta\psi_{tt} + \epsilon|\psi|^2\psi + \mu|\psi|^4\psi \quad (4.1)$$

Cette équation rend compte de la dynamique spatio-temporelle des structures localisées de plusieurs phénomènes physiques des systèmes dissipatifs. $\psi = \psi(x, y, t, z)$ représente l'enveloppe normalisée du champ électrique et est une fonction complexe des quatre variables spatio-temporelles x, y, z et t , où t est le temps dans le référentiel propre en mouvement avec l'impulsion optique, z la distance de propagation et enfin x et y sont les deux coordonnées transverses prenant en compte la diffraction spatiale dans l'approximation des ondes paraxiales. Dans ce qui suit, D est pris égal à 1. Dans l'équation (4.1) le coefficient de l'effet Kerr est normalisé, pour représenter une propagation en régime de dispersion anormale. Cette équation distribuée peut être appliquée à la modélisation d'une cavité laser d'ouverture large dans le régime d'impulsions courtes. Le modèle inclut donc la diffraction transverse, ainsi que la dispersion chromatique. Les termes dissipatifs décrivent le gain et les pertes de l'impulsion dans le milieu. Les termes dissipatifs d'ordre supérieur sont responsables des caractéristiques de transmission non linéaires, qui permettraient, par exemple, dans une cavité, le verrouillage de modes passifs au moyen d'un absorbant saturable.

Rappelons cependant que des solutions analytiques de l'équation GL à une dimension existent, et ne peuvent être explicitement formulées que dans certaines cas correspondant à des relations précises entre les paramètres du système, et que toutes ces solutions analytiques sont instables [135]. Les seules solutions stables sont obtenues numériquement, par conséquent, dans le cas à deux ou trois dimensions, la seule possibilité de trouver des solutions stables est de procéder par simulations numériques. Cette procédure purement numérique est complexe et coûteuse en temps de calcul. De plus, comme l'équation (4.1) à trois dimensions est caractérisée par plusieurs paramètres, il est difficile de trouver la correspondance entre les différentes régions dans l'espace des paramètres et les divers types d'ondes localisées. La solution à ce problème consiste en plusieurs simulations numériques avec différents jeux de paramètres et conditions initiales. Ce travail intensif peut être allégé s'il est possible de trouver des modèles simples pour l'existence des solutions localisées. Dans notre étude, comme nous l'avons fait dans le cas à une dimension, nous utiliserons la méthode des coordonnées collectives (CCs) qui permet une réduction complète du problème de l'évolution du champ (qui a un nombre infini de degrés de liberté) à l'évolution d'un jeu fini

de coordonnées collectives associées aux paramètres physiques de l'impulsion ce qui permet d'avoir un gain de temps considérable.

4.1.2 Choix de la fonction d'essai

La première des priorités est le choix de la fonction d'essai (ansatz). Ce choix doit être fait en fonction de l'équation de propagation et du type de solutions recherchées. Ainsi, la forme précise de cette fonction qui présente les paramètres de la balle de lumière dans la théorie est particulièrement cruciale, surtout quand des approximations sont faites. Après le choix de la fonction d'essai on peut poursuivre le processus de caractérisation de l'impulsion de deux façons complètement différentes selon le niveau d'exactitude désiré pour les CCs, comme nous l'avons expliqué dans le chapitre 2 de cette thèse. On peut se servir du champ exact pour obtenir les paramètres de la balle de lumière. Autrement dit, on peut prendre le champ résiduel en considération et adopter une procédure numérique pour déterminer les coordonnées collectives par une minimisation directe de l'énergie du champ résiduel [85]. Cette approche conduit généralement à des résultats qui sont plus précis que ceux de l'approche variationnelle. Mais son application à notre étude serait aussi extrêmement coûteuse en temps de calcul. La deuxième approche de caractérisation des balles de lumière équivaut à effectuer une analyse variationnelle en négligeant le champ résiduel [85], comme nous l'avons fait dans le cas à (1+1)D. Ici aussi, le temps de calcul nécessaire pour l'analyse variationnelle représente seulement une très petite fraction du temps de calcul exigé par comparaison à n'importe quelle méthode qui utilise le champ d'impulsion exact au cours de la propagation d'impulsion. Le seul inconvénient de la méthode variationnelle réside dans son niveau d'exactitude, qui dépend très fortement du choix de la fonction d'essai. Dans des cas précis, éventuellement limités en nombre, les prédictions obtenues par cette méthode, dans l'approximation *bare* doivent être validées par la résolution exacte de l'équation GL3DC. Sans commencer par résoudre numériquement l'équation GL3DC, il est difficile d'avoir une idée du profil du champ $\psi(r, t, z)$. De ce fait, le choix d'une fonction d'essai particulière a un certain caractère d'arbitraire, qui est à l'origine de la nature approximative de

l'approche des coordonnées collectives. Ainsi, pour des systèmes aussi complexes que ceux de notre étude, régis par l'équation GL3DC, il est préférable d'effectuer l'étude avec au moins deux fonctions d'essai qui ont des profils spatio-temporels clairement différents. La comparaison des domaines de stabilité correspondant à ces fonctions d'essais devrait, en principe, donner une meilleure idée de la cartographie des comportements. Ensuite, une résolution numérique exacte de l'équation GL3DC doit être faite pour confirmer et affiner les différents types de comportements. La simplicité de l'approche des CCs rend son exécution rapide et nous permet d'effectuer des études parallèles avec plusieurs fonctions d'essai de profils différents dans différents domaines de l'espace des paramètres de l'équation GL3DC. Nous avons choisi deux fonctions d'essai.

Notre premier choix s'est porté sur la fonction Gaussienne suivante :

$$f_{GO} = A \exp \left(-\frac{t^2}{w_t^2} - \frac{r^2}{w_r^2} + ic_t t^2 + ic_r r^2 + if \right), \quad (4.2)$$

où A , w_t , w_r , c_t , c_r et f représentent les coordonnées collectives. A désigne l'amplitude de la balle de lumière, w_t et w_r sont respectivement liés aux largeurs temporelles et spatiales, c_t et c_r sont respectivement les paramètres de chirp temporel et transverse et f est la constante de phase globale. Quand un régime stationnaire est atteint, la phase devient une fonction linéaire de la distance de propagation z . Dans cette situation, il n'y a aucune symétrie entre les variables temporelles et spatiales, en raison de l'existence du filtrage spectral dans le domaine temporel. Il est aussi important de souligner que, puisque le système est dissipatif, les solutions acquièrent une dérive en fréquence tant dans le domaine spatial que temporel en raison du flux de circulation d'énergie à l'intérieur de l'impulsion. Le principal avantage de cette fonction d'essai Gaussienne réside dans sa simplicité, qui rend la procédure de dérivation des équations variationnelles relativement facile. Un des inconvénients de cette fonction d'essai se trouve dans le fait qu'elle exclut certains comportements dynamiques internes comme le raidissement du front de l'impulsion, l'aplatissement de sa crête.

Le second ansatz que nous utiliserons est une fonction super-Gaussienne, qui possède des fronts plus raides que la Gaussienne. Elle permet de voir l'impact de la forme de

la fonction d'essai sur les solutions, et se présente de la manière suivante :

$$f_{SG} = A \exp \left(-\frac{t^2}{w_t^2} - \frac{t^4}{mw_t^4} - \frac{r^2}{w_r^2} - \frac{r^4}{mw_r^4} + ic_t t^2 + ic_r r^2 + if \right). \quad (4.3)$$

Ici A , w_t , w_r , c_t , c_r et f ont les mêmes significations que dans la Gaussienne précédente et m est le paramètre qui permet d'ajuster la forme de l'impulsion, et que nous considérons comme étant une constante positive arbitraire. Parmi la famille de ces fonctions super-gaussiennes (pour différent m), nous avons remarqué que lorsque m est plus petit que 1, l'impulsion commence à s'aplatir et tend vers une forme rectangulaire. Par contre, quand m est de plus en plus grand que 1, l'impulsion tend vers une gaussienne. En posant $m = 1$, l'impulsion adopte un profil intermédiaire entre les deux cas extrêmes que nous venons de mentionner. C'est ce cas que nous considérons dans la suite de cette thèse.

Les fonctions d'essai Gaussienne et super-Gaussienne présentées ci-dessus pré-supposent la symétrie cylindrique de l'impulsion dans le plan transverse (x, y) . C'est ce qui nous permet d'utiliser la coordonnée transverse $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ dans leurs expressions analytiques. Autrement dit, les deux fonctions d'essai ne sont pas aptes pour décrire une brisure de symétrie dans le plan transverse. Après le choix des fonctions d'essais, la prochaine étape consiste à déterminer les équations variationnelles.

4.1.3 Equations variationnelles

On applique l'*approximation "bare"* à l'équation (4.1). Autrement dit, en remplaçant le champ ψ par $f_{i=GO,SG}$ où f désigne une fonction d'essai, et projetant l'équation résultante dans la direction $\frac{\partial f^*}{\partial X}$ ($X = A, w_t, w_r, c_t, c_r, f$) on obtient aisément un jeu de six équations différentielles qui gouvernent l'évolution des paramètres d'une impulsion se propageant dans l'espace et le temps. L'utilisation de la première fonction

d'essai donne les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \dot{A} &= A\delta + \frac{3}{4}A^3\epsilon - \frac{2\beta A}{w_t^2} + \frac{5}{9}A^5\mu - \frac{1}{2}Ac_tD - Ac_r \\
 \dot{w}_t &= w_t c_t D - \frac{1}{4}w_t A^2 \epsilon - \frac{2}{9}A^4 w_t \mu + (4 - w_t^4 c_t^2) \frac{\beta}{2w_t} \\
 \dot{w}_r &= 2w_r c_r - \frac{1}{4}w_r A^2 \epsilon - \frac{2}{9}A^4 w_r \mu \\
 \dot{c}_t &= -\frac{A^2}{w_t^2} + \left(\frac{4}{w_t^4} - c_t^2\right)D - \frac{8\nu A^4}{9w_t^2} - \frac{8\beta c_t}{w_t^2} \\
 \dot{c}_r &= -\frac{A^2}{w_r^2} + \frac{8}{w_r^4} - 2c_r^2 - \frac{8\nu A^4}{9w_r^2} \\
 \dot{f} &= \beta c_t + \frac{3A^2}{4} - \frac{D}{w_t^2} - \frac{2}{w_r^2} + \frac{5\nu A^4}{9}
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

et la fonction d'essai super-Gaussienne (pour $m = 1$) donne les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \dot{A} &= A\delta + 0.46A^3\epsilon e^{\frac{1}{2}} + 0.21\mu A^5 e - Ac_tD - 2Ac_r - \frac{A\beta}{w_t^2}(3.18 + 0.17w_t^4 c_t^2) \\
 \dot{w}_t &= 2w_t c_t D - 0.12w_t A^2 \epsilon e^{\frac{1}{2}} - 0.07A^4 w_t \mu e + (2.63 - 0.81w_t^4 c_t^2) \frac{\beta}{w_t} \\
 \dot{w}_r &= 4w_r c_r - 0.12w_r A^2 \epsilon e^{\frac{1}{2}} - 0.07A^4 w_r \mu e \\
 \dot{c}_t &= \left(\frac{4.90}{w_t^4} - 2c_t^2\right)D - \frac{18.31c_t\beta}{w_t^2} - \frac{0.63A^2 e^{\frac{1}{2}}}{w_t^2} - \frac{0.38A^4 \nu e}{w_t^2} \\
 \dot{c}_r &= -4c_r^2 + \frac{9.80}{w_r^4} - \frac{0.63A^2 e^{\frac{1}{2}}}{w_r^2} - \frac{0.38A^4 \nu e}{w_r^2} \\
 \dot{f} &= 2.65\beta c_t + 0.25A^4 \nu e + 0.52A^2 e^{\frac{1}{2}} - \frac{3.28}{w_r^2} - \frac{1.64D}{w_t^2}
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Les équations (4.4) et (4.5) ne donnent aucune information explicite sur les différentes solutions de l'équation GL3DC et sur leurs stabilités. Elles révèlent tout simplement de manière détaillée l'influence des paramètres de l'équation (4.1) sur les diverses coordonnées collectives de la balle de lumière. Les deux systèmes d'équations ((4.4) et (4.5)) sont qualitativement similaires, ils comportent les mêmes termes, mais avec des coefficients différents. Ainsi les paramètres de l'équation GL3DC vont agir sensiblement différent selon la fonction d'essai. Une analyse minutieuse de ces équations variationnelles montre que l'amplitude (A) de la balle de lumière est régie par le gain non linéaire et sa saturation, les pertes, la dispersion et le terme de filtrage spectral ; nous confirmons que l'équilibre entre les pertes et le gain est nécessaire pour maintenir la forme de l'impulsion. Les largeurs temporelles (w_t) et spatiales (w_r) dépendent

également du gain non linéaire et de sa saturation. Comme attendu, la dispersion et le terme de filtrage spectral n'influencent que la largeur temporelle (w_t). De même les grandeurs physiques spatiales (c_r) et temporelles (c_t) sont influencées de façon identique par l'effet Kerr et sa saturation mais le temporel est dominé de plus par la dispersion et le filtrage spectral. Enfin la constante de phase (f) lors de son évolution n'influence pas les cinq premières équations.

Pour mettre en lumière l'influence différenciée des paramètres sur l'impulsion, nous avons tracé le profil temporel et radial de l'impulsion pour différentes valeurs de la dispersion ($D = 1$ et $D = 2$), en gardant les autres paramètres identiques. Pour y arriver, nous résolvons d'abord les équations différentielles de l'équation (4.5) numériquement avec comme condition initiale, un point fixe stable de coordonnées $A = 2.5623$, $w_t = 1.2467$, $w_r = 1.3263$, $c_t = -0.0956$, $c_r = -0.0058$ et $f = 0$. Notons qu'à ce stade, nous ne connaissons absolument pas les propriétés de stabilité de la balle de lumière. A partir des solutions X ($X = A, w_t, w_r, c_t, c_r, f$) trouvées, nous reconstruisons le profil du champ pour les valeurs de $D = 1$ et 2 , et ainsi, nous pouvons suivre son évolution suivant la distance de propagation z . La figure (4.1) montre l'évolution du profil temporel, elle révèle que l'impulsion augmente en amplitude et en largeur lorsqu'on double la valeur de la dispersion. Ce qui est en accord avec les expressions \dot{A} et \dot{w}_t des équations (4.4) et (4.5) qui affichent la dépendance de l'amplitude et de la largeur temporelle vis-à-vis de la dispersion. La figure (4.2) représente la variation du profil spatial pour ces différentes valeurs de la dispersion ($D = 1$ et $D = 2$). Il ressort de cette figure que la largeur spatiale de l'impulsion reste inchangée lorsqu'on double la valeur de la dispersion, ce qui est conforme à l'expression \dot{w}_r des équations (4.4) et (4.5) qui est indépendante de la dispersion. Par contre nous remarquons que l'amplitude dans ce cas croît légèrement. Ces figures illustrent le fait que la dispersion n'agit pas sur le profil radial mais uniquement sur le profil temporel comme le montre explicitement les expressions \dot{A} et \dot{w}_t des équations (4.4) et (4.5).

Ainsi, grâce aux expressions analytiques obtenues par la méthode des opérateurs de projections, on obtient une compréhension claire des conséquences de l'évolution des différents paramètres sur la balle de lumière. L'intérêt de cette approche (méthode des coordonnées collectives) réside aussi dans l'aisance avec laquelle elle permet d'obtenir

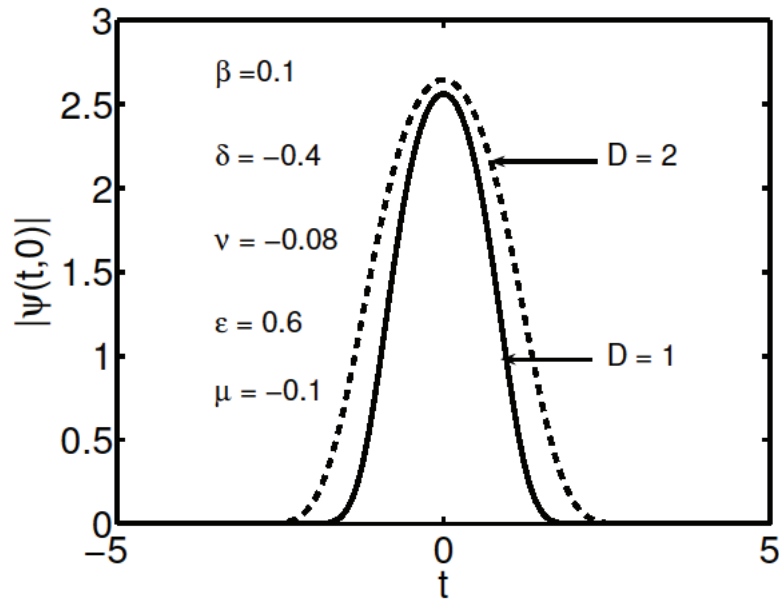


FIG. 4.1 Evolution du profil temporel de la balle de lumière pour différentes valeurs de la dispersion ($D = 1$ et $D = 2$). Les autres valeurs sont indiquées à l'intérieur de la figure.

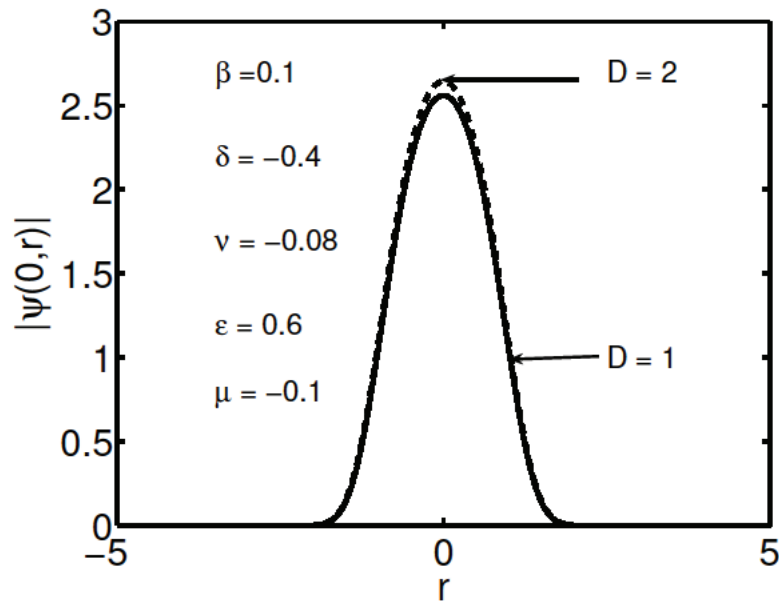


FIG. 4.2 Evolution du profil radial de la balle de lumière pour différentes valeurs de la dispersion ($D = 1$ et $D = 2$). Les autres valeurs sont indiquées à l'intérieur de la figure.

les paramètres fondamentaux des points fixes, ainsi qu'une cartographie des différents types de solutions, ce qui réduit de plusieurs ordres de grandeur le volume des calculs habituellement requis par la simulation numérique complète de l'équation GL3DC.

4.2 Cartographie des balles de lumière dans l'espace des paramètres de GL3DC

L'objectif principal de notre étude est de fournir une cartographie approximative, dans un laps de temps réduit, des régions d'existence des solutions stables et instables dans l'espace des paramètres de l'équation (4.1) à (3+1)D. Mais comme l'équation (4.1) a cinq paramètres indépendants ($D/\beta, \epsilon, \nu, \mu, \delta$), il est extrêmement difficile de réaliser et représenter la cartographie de ces régions en faisant varier à la fois les cinq paramètres de l'équation GL3DC. L'étude consiste à fixer trois et faire varier les deux autres paramètres. Ainsi on peut dresser aisément une cartographie des différentes solutions solitons stables.

La démarche consiste à déterminer les points fixes à partir des équations variationnelles ; les points fixes (FPs) du système sont les solutions des équations $\dot{A} = \dot{w}_t = \dot{w}_r = \dot{c}_t = \dot{c}_r = 0$. Ensuite nous analysons la stabilité des points fixes, qui est déterminée par la recherche des valeurs propres λ_j avec $j = 1, \dots, 6$ de la matrice $M_{ij} = \partial \dot{x}_i / \partial x_j$ ($x = A, w_r, w_t, c_r, c_t$). Notre critère de stabilité reste le même que pour les cas à (1+1)D ; autrement dit, si la partie réelle d'au moins une des valeurs propres est positive, alors le FP correspondant est instable ; dans le cas contraire nous avons des FPs stables. Les points fixes stables correspondent aux solutions stables de l'équation GL3DC (4.1) (balles de lumière stables).

On rappelle que, comme dans le cas à une dimension, la résolution des équations $\dot{A} = \dot{w}_t = \dot{w}_r = \dot{c}_t = \dot{c}_r = 0$ se fait par la méthode de Newton-Raphson.

Une analyse variationnelle, comme mentionné au départ, est une méthode de nature approximative dont le niveau de précision dépend fortement de la fonction d'es-sai particulière choisie. Par conséquent, étant donné la complexité de l'équation de Ginzburg-Landau complexe, nous devons prendre le plus grand de soin pour appliquer la méthode des opérateurs de projections à cette équation. Il est utile, au préalable,

d'avoir un aperçu du niveau de précision de la méthode dans une portion de l'espace des paramètres étudiés. Pour y arriver, on peut procéder par une comparaison directe entre les résultats donnés par la méthode approchée et ceux trouvés par la procédure entièrement numérique. De ce fait nous avons commencé la recherche des balles de lumière en utilisant la méthode des opérateurs de projections dans le domaine des paramètres où les balles de lumière ont déjà été trouvées récemment par la résolution exacte de l'équation GL3D [143, 144]. En explorant l'espace des paramètres de l'équation GL3DC, nous avons pu mettre en évidence dans les plans (ν, ϵ) , (μ, ν) et (β, ϵ) une riche variété de solutions de l'équation GL3DC (4.1) incluant les solitons spatio-temporels stationnaires, à savoir, les balles de lumière stationnaires et aussi des balles de lumière oscillantes proches de ces régions. Ainsi, dans un premier cas, nous avons fixé les valeurs des paramètres de l'équation GL3DC $D = 1$, $\mu = -0.1$, $\delta = -0.4$ et $\beta = 0.1$ et fait varier les deux paramètres restants. Nous avons alors pu mettre en évidence, dans le plan formé par les deux paramètres (ν, ϵ) , les différentes solutions de l'équation GL3DC (4.1) incluant les solutions solitons stationnaires stables.

4.2.1 Balles de lumière stationnaires

Nous utilisons comme condition initiale les paramètres du champ suivant :

$$\psi(r, t, 0) = 3.54 \exp\left(-\frac{t^2}{0.33} - \frac{r^2}{0.31}\right). \quad (4.6)$$

Ce choix est bien sûr arbitraire et n'est assujéti à aucun critère particulier, car, en principe, la procédure de Newton-Raphson de recherche du point fixe assure la convergence vers le point fixe quelque soit la condition initiale. Ainsi, en partant de cette condition initiale du champ, en fixant les autres valeurs des paramètres et en faisant varier ν de -0.12 à -0.02 par pas de 0.002 et ϵ de 0.5 à 1 par pas de 0.001, nous obtenons facilement la cartographie de la figure (4.3). La procédure consiste à chercher pour chaque couple de valeur (ν, ϵ) , un point fixe et ensuite étudier sa stabilité. Si le point fixe donné est stable, nous avons dans ce cas une solution stationnaire, dans le cas contraire, la solution est non stationnaire mais peut être une solution oscillante (et associé à un cycle limite stable).

Il est utile de noter que l'on peut procéder de deux manières différentes : la première

consiste à partir systématiquement du même champ initial pour obtenir l'ensemble de la carte des comportements. La deuxième procédure consiste à utiliser comme condition initiale du point fixe pour un jeu de paramètre donné (ν, ϵ) , le point fixe du jeu de paramètre précédent. Dans notre étude, nous avons remarqué que quel que soit la procédure, on aboutit à la même cartographie.

Le domaine gris foncé de la figure (4.3), représente la région des solutions stationnaires pour la fonction d'essai Gaussienne. Le domaine entre les pointillés est celui trouvé par la procédure entièrement numérique. On peut clairement observer qu'une grande partie du domaine trouvé par la méthode semi-analytique se trouve presque intégralement incluse dans le domaine de stabilité exact, et n'occupe qu'une très petite fraction de ce domaine exact. En fait, la fonction d'essai Gaussienne permet seulement la prédiction des domaines de stabilité dans lesquels le profil exact n'est pas trop éloigné d'une forme d'une Gaussienne. Cette cartographie révèle que les impulsions n'ont pas la même forme dans toutes les parties du domaine. Plus généralement, on peut difficilement prévoir la totalité d'un grand domaine de stabilité avec une seule fonction d'essai, parce qu'un grand domaine recouvre vraisemblablement des solutions de profils différents.

En utilisant la fonction d'essai super-Gaussienne f_{SG} avec comme champ initial arbitraire

$$\psi(r, t, 0) = 3.54 \exp\left(-\frac{t^2}{0.33} - \frac{t^4}{0.10} - \frac{r^2}{0.31} - \frac{r^4}{0.10}\right), \quad (4.7)$$

et dans les mêmes conditions que la gaussienne, nous obtenons le domaine gris clair de la figure (4.3) qui décrit les solutions stationnaires de l'équation GL3DC (4.1). Ce domaine contient entièrement celui prévu par la fonction d'essai Gaussienne, tout en restant presque entièrement contenu dans le domaine obtenu numériquement ce qui semble indiquer que la super-Gaussienne est plus proche du profil exact. Ainsi, cette cartographie montre que la méthode des opérateurs de projections associée à la fonction d'essai super-Gaussienne fournit une prédiction approximative mais assez précise du domaine de stabilité de balles de lumière stationnaires, en bon accord avec celui obtenu par simulation directe de l'équation GL3DC. Il découle de l'analyse de cette cartographie que les impulsions n'ont pas vraisemblablement le même profil dans tous les domaines. Le choix d'une fonction d'essai permet d'obtenir des points

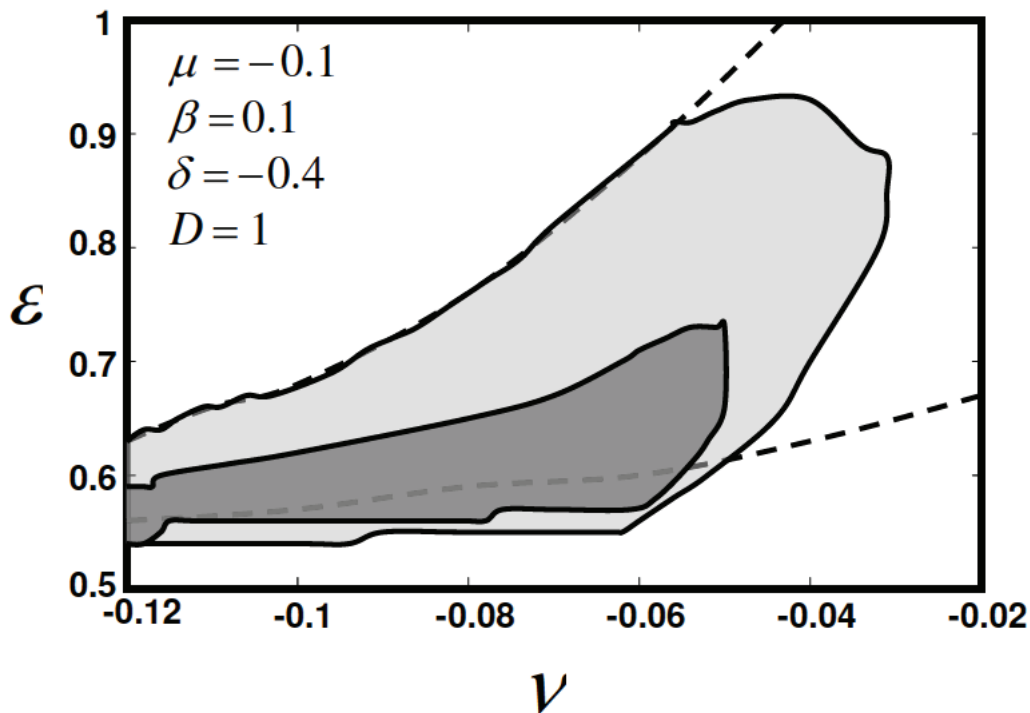


FIG. 4.3 Cartographie des balles de lumière stables dans le plan (ν, ϵ) (du gain non linéaire et de la saturation de l'effet Kerr) trouvée par la méthode des coordonnées collectives; en utilisant une fonction d'essai Gaussienne (le domaine gris foncé) et une fonction d'essai super-Gaussienne (le domaine gris clair). Les autres paramètres de l'équation GL3DC sont à l'intérieur de la figure. Pour comparaison, le domaine trouvé avec la solution numérique exacte de l'équation GL3DC se trouve à l'intérieur des deux lignes brisées.

fixes dont le profil n'est pas excessivement éloigné de la fonction d'essai en question. La méthode des opérateurs de projections quant à elle, permet de circonscrire très rapidement le domaine des profils d'impulsions proche d'une forme souhaitée (qui correspond à la fonction d'essai que l'on se donne).

La résolution exacte de l'équation GL3DC par un ordinateur puissant permet de trouver une solution stable en un jour pour un jeu de paramètre donné. Autrement dit, pour obtenir une cartographie complète des différentes solutions il faut plusieurs semaines voir des mois de simulations numériques. Le gros avantage de notre méthode semi-analytique réside dans son incomparable rapidité, qui permet de trouver typique-

ment une solution stable en une seconde sur un ordinateur standard. Cette rapidité nous permet d'explorer d'autres domaines de l'espace des paramètres de l'équation GL3DC pour lesquels des solutions exactes n'ont pas encore été calculées. Ainsi, pour le jeu de paramètres $\beta = 0.1$, $\nu = -0.4$, $\delta = -0.4$ et $D = 1$, en faisant varier μ de -0.12 à -0.02 par pas de 0.002 et ϵ de 0.2 à 0.9 par pas de 0.009 nous avons mis à jour dans le plan (μ, ϵ) le domaine d'existence des balles de lumière stationnaires, ce domaine est visible dans la figure (4.4). Le domaine en gris foncé décrit la région de

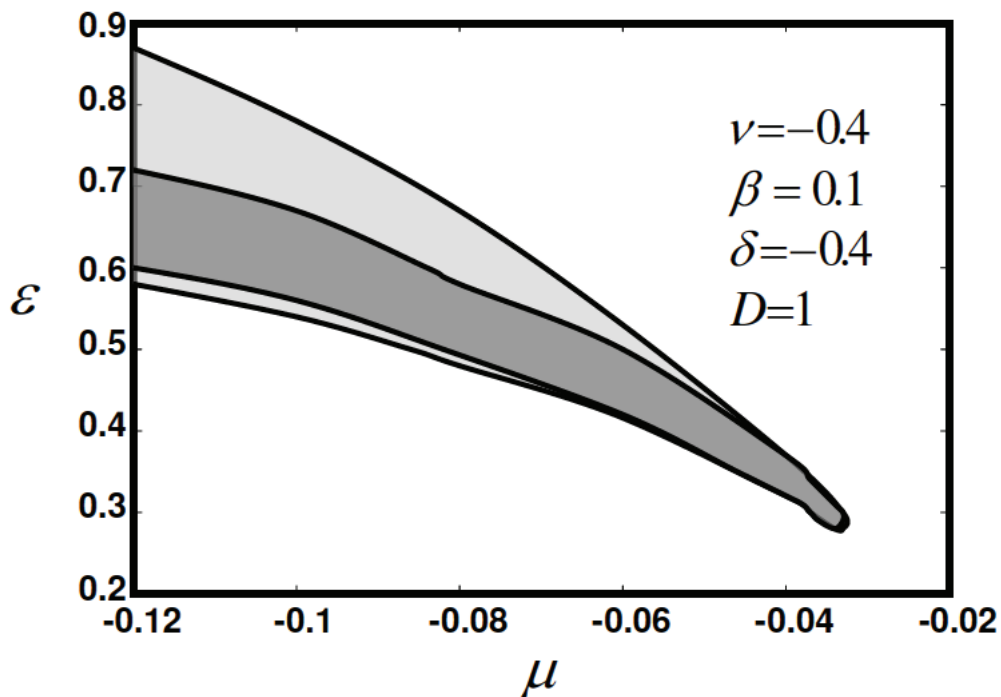


FIG. 4.4 Cartographie des balles de lumière stables dans le plan (μ, ϵ) (la saturation du gain non linéaire et le gain non linéaire) trouvée par la méthode des opérateurs de projection ; en utilisant une fonction d'essai Gaussienne (le domaine gris foncé) et une fonction d'essai super-Gaussienne (le domaine gris clair). Les autres paramètres de l'équation GL3DC sont à l'intérieur de la figure.

stabilité obtenue avec la fonction Gaussienne et celui gris clair constitue la zone des balles de lumière stationnaires retrouvée par la fonction super-Gaussienne. Ici, il est utile de noter que dans les deux cas, la forme du domaine d'existence des balles de lumière stationnaires est semblable à la forme du domaine où des impulsions stables

purement temporelles ont été trouvées numériquement dans le cadre de l'équation GL à (1+1)D [135]. Bien que le problème d'évolution des impulsions spatio-temporelles à (3+1)D considéré dans ce travail présent soit beaucoup plus complexe, nous pouvons remarquer que la tendance qui relie les paramètres de l'équation et l'existence des solitons dissipatifs est semblable. Cela semble être une caractéristique générale des solitons dissipatifs, qui peuvent s'accommoder plus facilement du passage aux dimensions élevées que les solitons Hamiltoniens.

L'importance du terme dissipatif quintique de l'équation GL3DC est contrôlée par le terme de saturation du gain non linéaire (μ), ce terme est essentiel pour assurer la stabilisation des solutions stationnaires, et doit être négatif comme il l'a été prouvé dans la référence [135]. Dans le cadre de notre étude des solitons spatio-temporels, une valeur minimale de $-\mu$, qui est proche de 0.025 dans la figure (4.4), est ainsi exigée pour obtenir des balles de lumière stables et dépend des autres paramètres. Nous remarquons que lorsque la valeur absolue du terme de saturation du gain non linéaire (μ) devient plus grande, la stabilisation des balles de lumière est améliorée, et leur domaine d'existence augmente. Il en est de même en ce qui concerne une variation du terme de gain non linéaire (ϵ). La figure (4.4) révèle enfin que lorsque la saturation du gain non linéaire ($-\mu$) augmente et que son gain non linéaire (ϵ) augmente, nous obtenons une zone de stabilité des balles de lumière qui augmente dans le même sens. Autrement dit, pour avoir des balles de lumière stables, il faudrait que les grandes pertes associées à une importante saturation du gain non linéaire soient compensées par une augmentation du gain non linéaire.

Enfin, la cartographie de la figure (4.5) complète notre étude. En effet le coefficient de dispersion (D) et celui du gain non linéaire (ϵ) sont les principaux paramètres accessibles expérimentalement, dans un laser par exemple. De ce fait nous avons obtenu la région d'existence des balles de lumière en suivant la même méthode que précédemment, dans le plan (β, ϵ) . On rappelle que les paramètres D et β peuvent être redimensionnée avec D/β . Pour y arriver nous avons fixé les paramètres $\delta = -0.4$, $\nu = -0.08$, $\mu = -0.1$, et $D = 1$, ainsi lorsque ϵ varie de 0.4 à 1 par pas de 0.009 et que β varie de 0 à 1.5 par pas de 0.02, on obtient le domaine de stabilité des balles de lumière stationnaires visible dans la figure (4.5). Ce domaine est semblable au do-

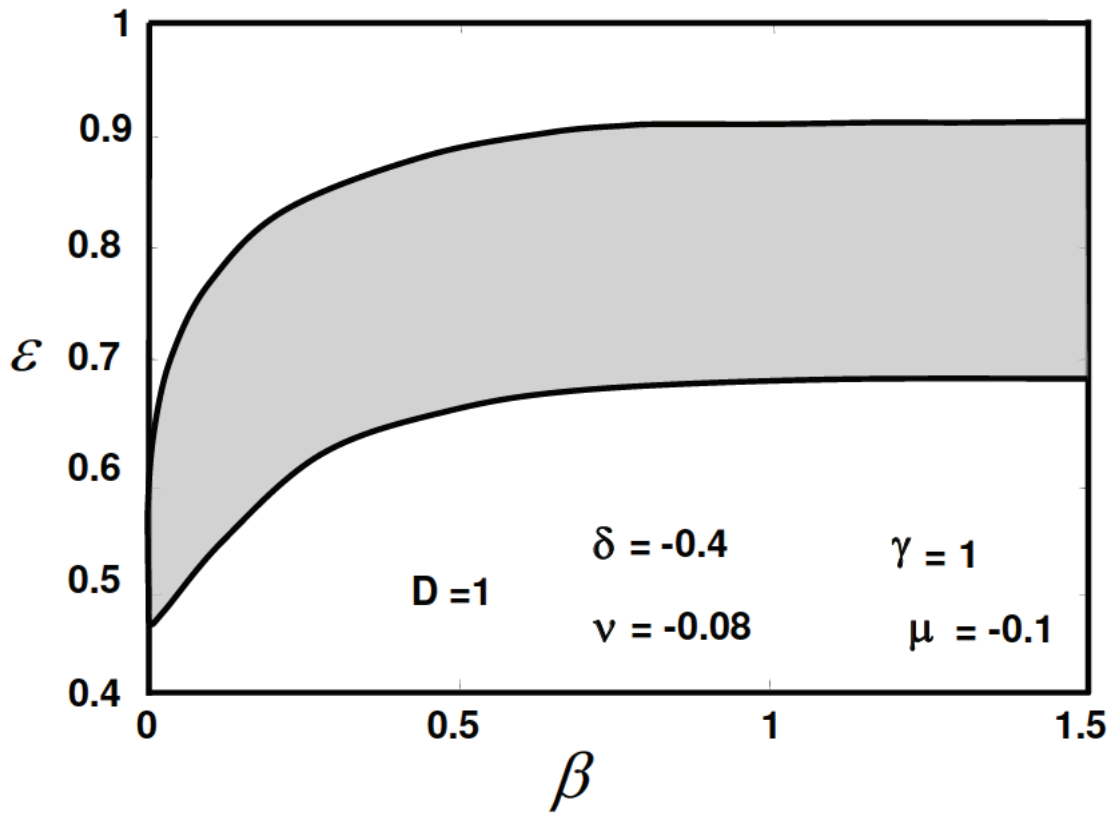


FIG. 4.5 Cartographie des balles de lumière stables dans le plan (β, ϵ) trouvée par la méthode de coordonnées collectives en utilisant l'ansatz super-Gaussien. Les autres paramètres de l'équation GL3DC sont à l'intérieur de la figure.

maine trouvé numériquement dans [137] pour une valeur légèrement différente de ν . A travers cette figure, nous pouvons comprendre l'impact du terme de filtrage spectral, proportionnel au coefficient β , sur une base semblable, bien que le terme agissant dans l'équation GL3DC soit linéaire. En effet, le filtrage spectral agit comme un processus de localisation dans le domaine spectral, qui stabilise en retour le profil temporel de l'impulsion. Mais il représente aussi les pertes supplémentaires qui doivent être compensées par une augmentation du coefficient de gain non linéaire ϵ .

Une balle de lumière stationnaire est une impulsion qui arrive à se propager suivant une distance (z), confinée dans l'espace (x et y) et tout en étant localisée dans le temps (t); sans déformation de ses largeurs temporelles et spatiales, ni de son amplitude; en gardant son profil constant quelque soit la distance de propagation.

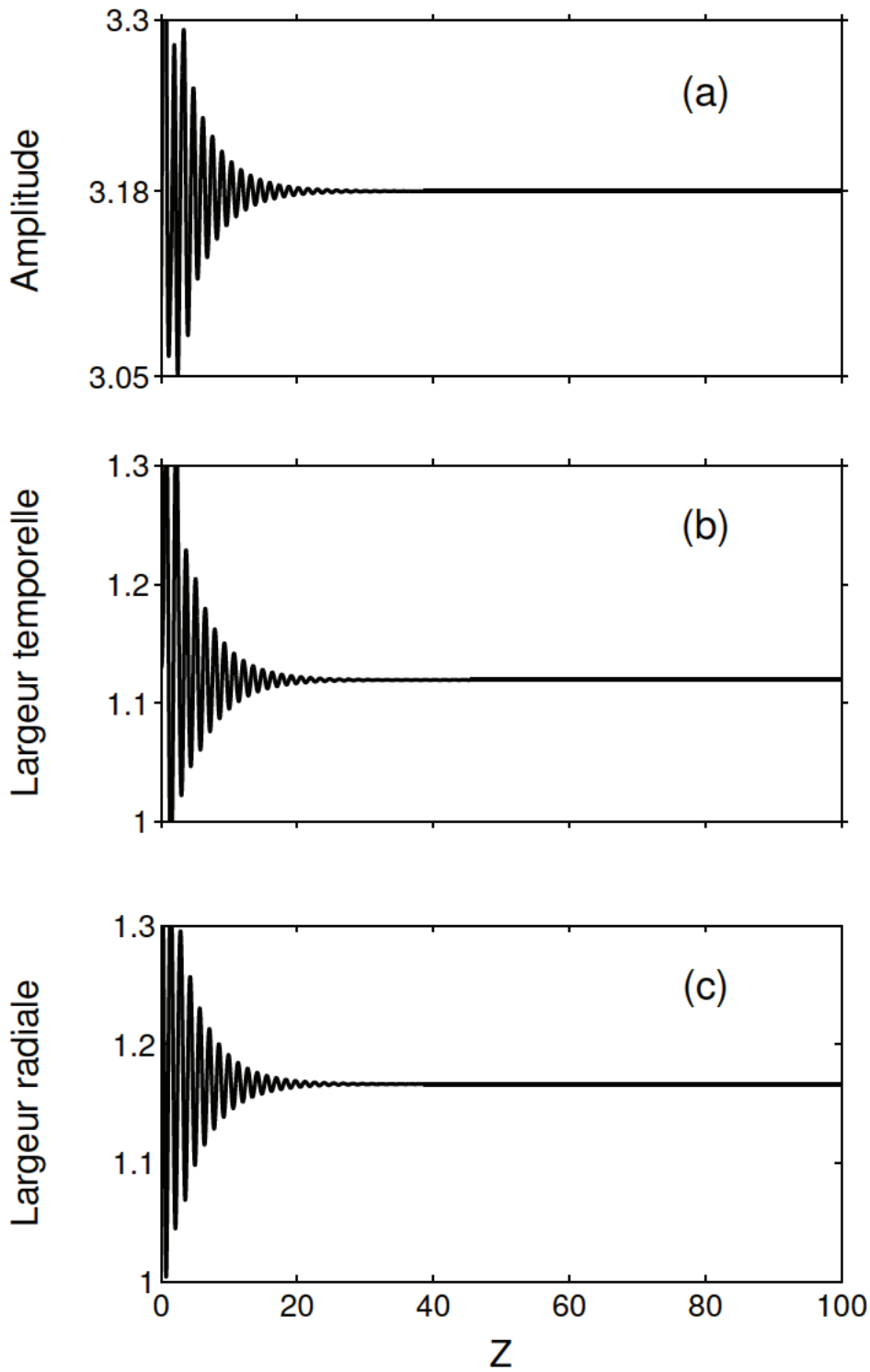


FIG. 4.6 Evolution des largeurs et de l'amplitude d'une balle de lumière stationnaire pour les paramètres suivants $\epsilon = 0.78$, $\nu = -0.06$, $\mu = -0.1$, $\delta = -0.4$, $\beta = 0.1$ et $D = 1$.

La figure (4.6) retrace l'évolution de l'amplitude, de la largeur temporelle et de la largeur spatiale d'une balle de lumière stationnaire correspondant à $\epsilon = 0.78$, $\nu = -0.06$, $\mu = -0.1$, $\delta = -0.4$, $\beta = 0.1$ et $D = 1$. La dynamique commence par une courte oscillation sur une distance de $z \approx 25$, dû à l'ajustement du profil issu de la condition initiale. L'amplitude et les largeurs restent constantes lors de leurs évolutions sur de très longue distance. Ce comportement est analogue pour toutes les grandeurs physiques (amplitude, largeurs, ...) des balles de lumière stationnaires. Cependant la largeur temporelle et spatiale n'ont pas la même valeur durant la propagation ; la largeur temporelle reste fixée à 1.12, tandis que la largeur spatiale est à 1.16. Remarquons que pour le jeu de paramètres choisis, la différence est faible et la symétrie sphérique de la balle de lumière est presque réalisée. Mais ceci sera largement inexact pour d'autres paramètres de GL3DC. L'amplitude de l'impulsion reste toujours à 3.18. Il en est de même pour l'énergie de la balle de lumière définie par la quantité suivante :

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} 2\pi r |\psi(r, t, z)|^2 dr dt \quad (4.8)$$

qui reste constante, lorsque nous sommes en présence des solutions stationnaires. On peut exprimer cette expression en fonction des coordonnées collectives. Ainsi avec les fonctions Gaussienne et super-Gaussienne, on obtient respectivement les expressions suivantes

$$Q_{GO} = \frac{\pi}{4} \sqrt{2\pi} A^2 w_r^2 w_t, \quad (4.9)$$

$$Q_{SG} = 1.0823 A^2 w_r^2 w_t. \quad (4.10)$$

Pour les deux fonctions d'essai, la "quantité de mouvement" définie par l'équation (3.4) est nulle. De même l'équation (3.5) peut s'exprimer en fonction des paramètres des fonctions d'essai. Ainsi avec les fonctions Gaussienne et super-Gaussienne, on obtient respectivement les expressions suivantes

$$H_{GO} = \frac{\pi \sqrt{\pi} A^2}{16 w_t} \left(4\sqrt{2} - A^2 w_t^2 w_r^2 + 4\sqrt{2} w_r^4 c_r^2 + 4\sqrt{2} w_t^4 c_t^2 + 4\sqrt{2} w_t^4 c_t^2 w_r^4 c_r^2 \right), \quad (4.11)$$

$$H_{SG} = \frac{\pi A^2}{2 w_t} 1.128 \cdot 10^{-8} \left(1.858 \cdot 10^7 c_t^2 w_t^4 c_r^2 w_r^4 + 2.339 \cdot 10^8 + 5.991 \cdot 10^7 c_r^2 w_r^4 \right) + \frac{\pi A^2}{2 w_t} 1.128 \cdot 10^{-8} \left(-1.329 \cdot 10^7 A^2 w_r^2 w_t^2 + 7.252 \cdot 10^7 c_t^2 w_t^4 \right). \quad (4.12)$$

L'évolution de l'énergie reflète en général le comportement des paramètres de l'impulsion. Dans le cas stationnaire, nous avons suivi son évolution, et obtenu le résultat représenté sur la figure (4.7). Les valeurs des paramètres sont les mêmes que celles

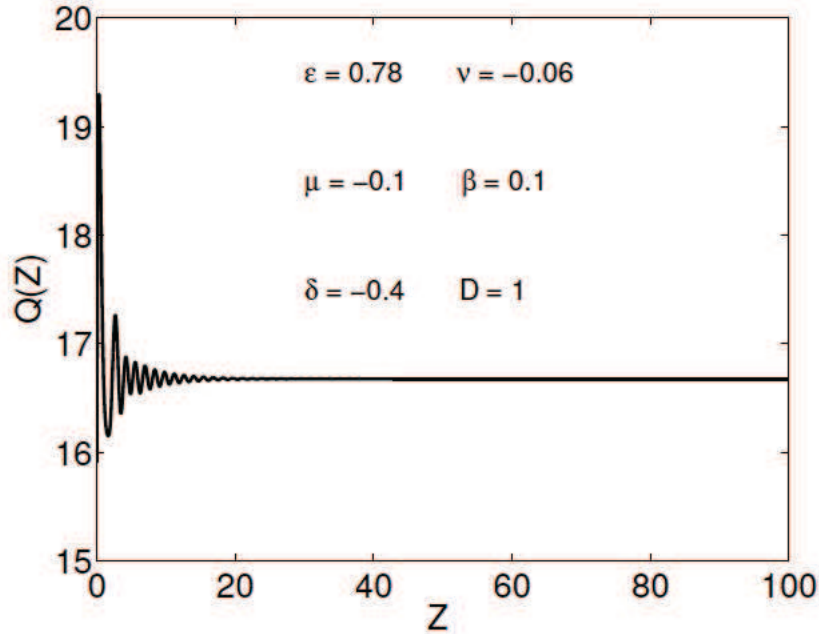


FIG. 4.7 Evolution de l'énergie Q en fonction de la distance z , les paramètres de l'équation GL3DC sont indiqués à l'intérieur de la figure.

de la figure (4.6). Comme dans le cas précédent, initialement, l'énergie oscille brièvement jusqu'à $z \approx 25$, avant de se stabiliser à une valeur constante égale à 16.67 durant le reste de la propagation. De même, nous avons suivi l'évolution de la quantité H pour les deux fonctions considérées avec les mêmes paramètres. Le résultat de cette analyse est représenté sur la figure (4.8). On remarque que H a la même dynamique que l'énergie Q . Après une courte oscillation, la quantité H reste constante, symbole d'une solution stationnaire.

Nous nous sommes intéressés ensuite à la variation de l'énergie totale Q de la balle de lumière dans le domaine du plan (ν, ϵ) de la cartographie de la figure (4.3). Sur cette figure, nous avons trois domaines obtenus par la fonction Gaussienne, super-Gaussienne, et la résolution exacte. Pour ϵ fixé à 0.6, en gardant les autres valeurs des paramètres identiques à celle de la cartographie, et en faisant varier ν de -0.12 à -0.04 nous avons représenté sur la figure (4.9) l'évolution des énergies. La courbe

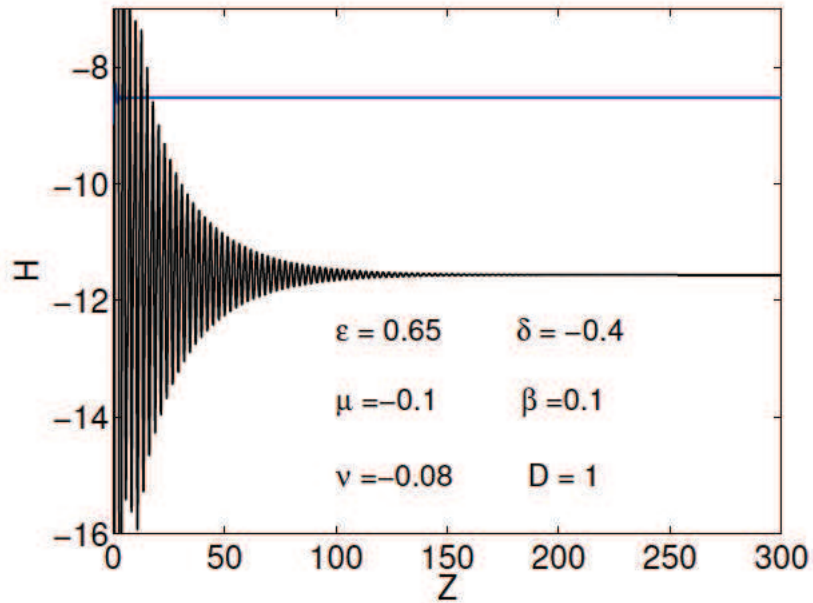


FIG. 4.8 Evolution de H en fonction de la distance z , les paramètres de l'équation GL3DC sont à l'intérieur de la figure. En noir la fonction Gaussienne et en bleu la super-Gaussienne.

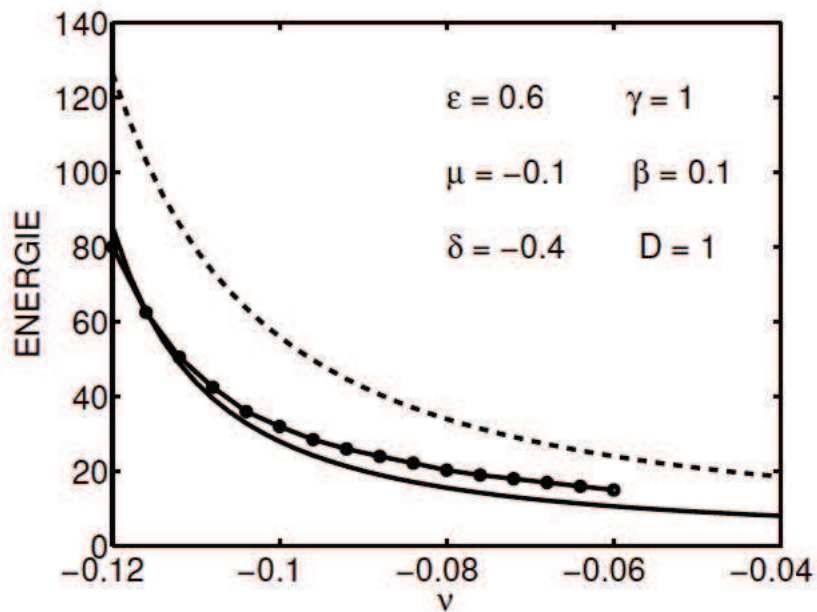


FIG. 4.9 Evolution de l'énergie Q en fonction du paramètre ν obtenu par la fonction Gaussienne en trait discontinu, par la fonction super-Gaussienne en ligne noire, et par simulations numériques directes de l'équation GL3DC en cercles.

en trait discontinu décrit l'énergie obtenue par la Gaussienne, en trait plein celle de la super-Gaussienne et enfin la courbe en cercle noir présente l'énergie obtenue par les calculs exacts. L'allure générale des ces courbes révèle que l'énergie des balles de lumière diminue lorsque la saturation de l'effet Kerr (ν) augmente. Ainsi pour ces paramètres de l'équation GL3DC ($\epsilon = 0.6$, $\mu = -0.1$, $\delta = -0.4$, $\beta = 0.1$ et $D = 1$), pour avoir des balles de lumière énergétiques, il faut que la saturation de l'effet Kerr (ν) soit plus faible. A travers cette figure, on peut voir clairement que l'énergie de la fonction super-Gaussienne coïncide plutôt bien avec l'énergie de la solution exacte du soliton. Cela semble indiquer que la solution soliton exacte est plutôt proche d'une super-Gaussienne dans la région de paramètres considérés. Cependant, la comparaison des profils des solitons spatio-temporels à (3+1)D n'est pas une procédure simple.

On note que l'auto-focalisation d'une balle de lumière exige une certaine quantité d'énergie minimale quand le gain et les paramètres de perte sont fixés. Ainsi, si l'énergie de la solution baisse avec l'augmentation de ν , qui est un paramètre dispersif, il y aura une valeur de ν , pour ϵ donné, où la solution deviendra instable et le champ disparaîtra. D'autres solutions stables peuvent alors être trouvées au prix d'une augmentation du paramètre de gain non linéaire, et de la taille des domaines de stabilité.

Finalement, pour ces solitons stationnaires, nous comparons pour différentes valeurs du gain non linéaire (ϵ), le profil temporel et radial des balles de lumière pour la solution Gaussienne, super-Gaussienne et la solution exacte, les paramètres de l'équation GL3DC étant identiques. Le résultat de cette analyse est représenté dans les figures (4.10) et (4.11).

Pour $\epsilon = 0.6$, sur la figure (4.10), nous remarquons que le profil super-Gaussien en pointillé vert est proche de la solution exacte représentée en ligne rouge. Le couple de point ($\nu = -0.08$, $\epsilon = 0.6$) se situe au sein de trois domaines, mais le profil gaussien représenté en ligne bleue brisée ne décrit pas convenablement le profil de la balle de lumière surtout au niveau des piédestaux, comme le montre la figure (4.10). Ceci est confirmé par la figure (4.9) précédente qui représentent l'évolution des énergies, car pour $\nu = -0.08$, et $\epsilon = 0.6$, on voit clairement que les énergies des deux impulsions

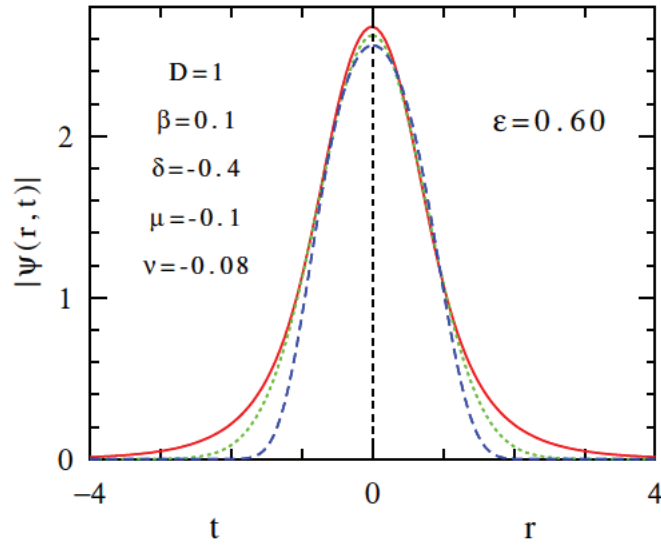


FIG. 4.10 Comparaison des profils transverses (r) et temporels (t) de la balle de lumière, obtenus par l'ansatz Gaussien en ligne brisée bleue, par la fonction d'essai super-Gaussienne en pointillé vert et par les calculs exacts en ligne rouge, pour $\epsilon = 0.6$, les autres paramètres sont à l'intérieur de la figure.

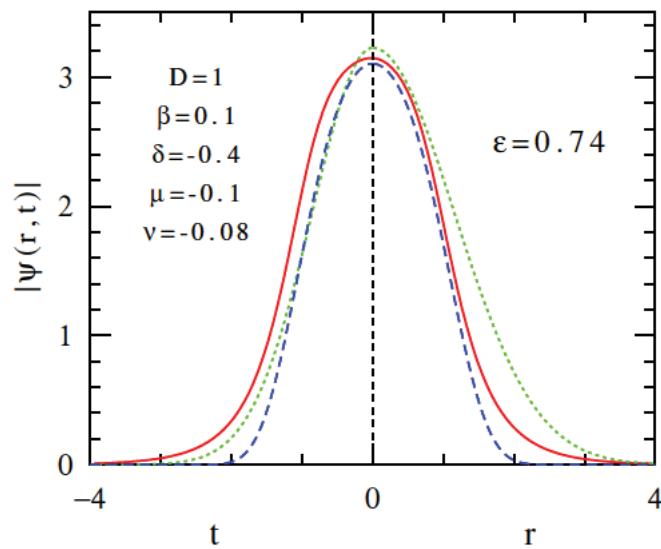


FIG. 4.11 Comparaison des profils transverses (r) et temporels (t) de la balle de lumière, obtenus par l'ansatz Gaussien en pointillé vert, par la fonction d'essai super-Gaussienne en ligne brisée bleue et par les calculs exacts en ligne rouge, pour $\epsilon = 0.74$, les autres paramètres sont à l'intérieur de la figure.

(exacte et super-Gaussienne) sont relativement proches, comparées à celle de la fonction Gaussienne. On note aussi que, dans ce cas, pour $\epsilon = 0.6$, les profils temporels et spatiaux sont très semblables.

La situation change complètement quand le gain non linéaire, ϵ passe de la valeur 0.6 à 0.74. En effet sur la figure (4.10), nous remarquons une différence notable entre les profils temporels et spatiaux de la balle de lumière. Et on note qu'à cette valeur du gain non linéaire, ϵ , la solution de la fonction Gaussienne n'est pas stable mais son profil temporel en pointillé vert est relativement proche de la solution exacte. Tandis que dans cette situation, c'est le profil spatial de la fonction super-Gaussienne, en ligne brisée bleue qui devient le plus proche du profil de la solution exacte représentée en ligne rouge. Dans ce dernier cas, la symétrie sphérique des solutions est largement brisée car les profils temporels et transversaux diffèrent notablement.

Nous allons nous intéresser maintenant à d'autres types de solutions localisées qui sont très proches des frontières où les solutions stables ont été trouvées.

4.2.2 Balles de lumière oscillantes

Comme mentionné dans le chapitre sur les solitons temporels, les systèmes dissipatifs à (1+1)D peuvent avoir des solutions oscillantes stables et elles existent sur la même base que les solitons stationnaires. Nous allons considérer la recherche de ces solutions oscillantes dans le cadre des solitons spatio-temporels à (3+1)D. Une balle de lumière oscillante peut être décrite comme un cycle limite du système dynamique dissipatif et, comme les points fixes des systèmes dynamiques, les cycles limites peuvent être stables ou instables. La solution converge en une balle de lumière oscillante si le cycle limite est un attracteur stable (que le système dynamique possède pour un jeu donné de paramètres). Les balles de lumières oscillantes diffèrent des solitons d'ordre supérieur qui sont d'habitude liés au modèle intégrable [132]. Un soliton oscillant peut être obtenu avec une relative facilité, si et seulement si c'est un attracteur dans l'espace de phase. La difficulté surgit quand des solutions stationnaires et oscillantes coexistent. Alors dans ce cas, le choix des conditions initiales devient crucial. Cependant dans la plupart des cas, les solutions stationnaires et oscillantes existent dans des domaines distincts ; dans ce cas la recherche est plus aisée. Dans le

cas à une dimension, l'existence des solitons oscillants et les bifurcations des solitons stationnaires, ont déjà été démontrées par simulation numérique; mais jusqu'ici, il n'existe pas encore d'expressions analytiques pour ces solutions oscillantes et leurs frontières de bifurcation [20]. La difficulté du problème est liée au fait que l'équation GL3DC a plusieurs paramètres qui définissent la région d'existence des solutions stationnaires et oscillantes, les frontières de bifurcation sont des surfaces dans cet espace de paramètres multi-dimensionnel.

Par extrapolation au cas à une dimension, on peut s'attendre à l'existence des balles de lumières oscillantes; ces impulsions exécutent des déformations périodiques ou quasi-périodiques d'amplitude, de largeur, de chirp et de profil tout au long de leur propagation. Dans ce travail, nous allons essayer de les mettre en évidence dans différents plans.

Le calcul numérique des solutions de GL3D a montré que, de toutes les fonctions d'essai testées, la fonction d'essai super-Gaussienne s'est révélée être la plus proche de solutions de l'équation (4.1). Nous allons rechercher maintenant des balles de lumière oscillantes à l'aide de cette fonction d'essai. A cette fin nous allons nous inspirer de la cartographie de la figure (4.3), en conservant les mêmes valeurs des paramètres, et en explorant le voisinage du domaine des balles de lumière stationnaires; car il est bien connu que les domaines des balles de lumière stationnaires et oscillantes sont généralement frontaliers. Le résultat de cette analyse détaillée se trouve sur la cartographie suivante de la figure (4.12). Dans le plan défini par les paramètres de saturation de l'effet Kerr, ν , et du gain non linéaire, ϵ , de la figure (4.12), les régions d'existence des balles de lumière stationnaires stables présentées sur cette figure sont contenues entre deux bornes limites (supérieures et inférieures) du gain non linéaire ϵ . En dessous de la limite inférieure ($\epsilon \approx 0.53$), l'énergie pompée dans le système n'est pas suffisante pour supporter les balles de lumière. Dans ce cas, la solution localisée se dissipe et disparaît finalement. Au contraire, quand ϵ est au-dessus de la valeur supérieure ($\epsilon \approx 0.62$), l'approvisionnement en énergie gonfle la balle de lumière qui poursuit une expansion tant que l'apport d'énergie se maintient. Nous remarquons sur la figure (4.12), l'existence d'un petit domaine intermédiaire des valeurs du gain non linéaire, ϵ où des solutions stationnaires sont transformées en solutions oscillantes. La

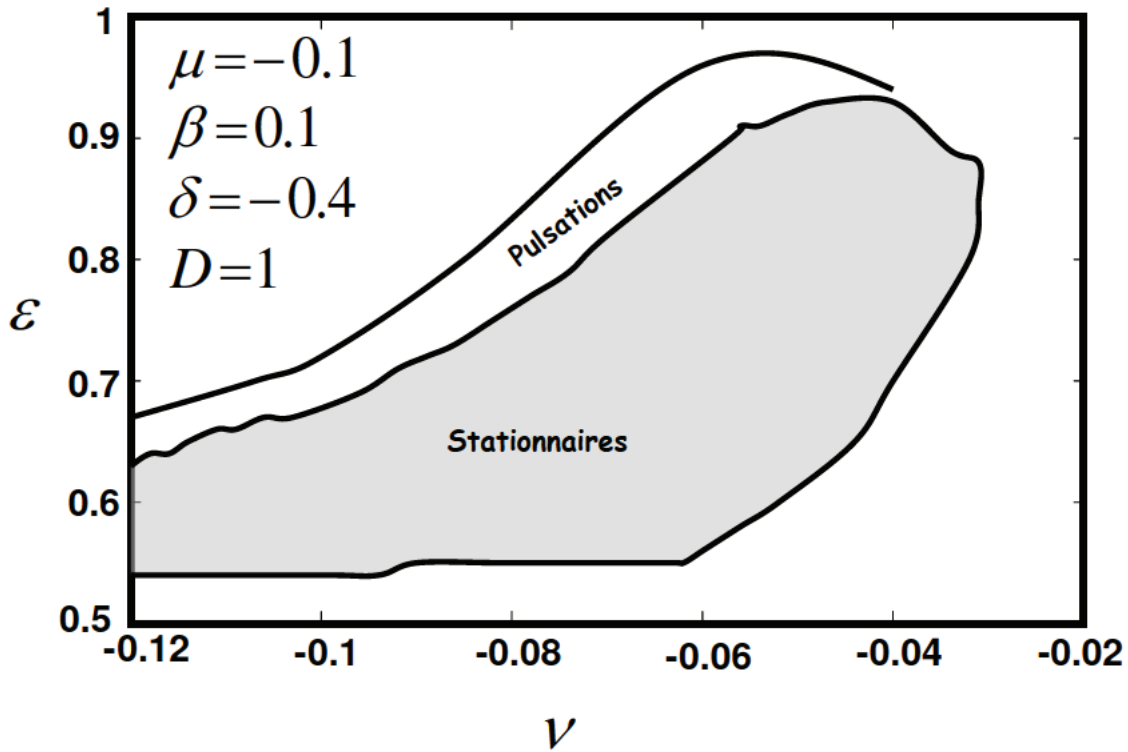


FIG. 4.12 Cartographie des balles de lumière stationnaires et oscillantes dans le plan (ν, ϵ) trouvées par la méthode des coordonnées collectives; en utilisant la fonction d'essai super-Gaussienne. Les autres paramètres de l'équation GL3DC sont à l'intérieur de la figure. Les balles de lumière oscillantes (domaine en blanc) sont juste localisées après les balles de lumière stationnaires (domaine en gris).

frontière de cette région est arbitraire dans la mesure, où les deux solutions peuvent coexister à la frontière. Pour des valeurs du gain non linéaire, (ϵ) au-dessus de cette région, nous avons des impulsions qui cessent d'osciller et s'étendent à des impulsions instables expansive. Cette cartographie nous montre que le domaine des balles de lumière stationnaires représenté dans le plan (ν, ϵ) est plus étendu que celui des impulsions oscillantes pour un jeu de paramètre donné.

A l'intérieur de ce domaine à pulsations, pour la saturation de l'effet Kerr, $\nu = -0.06$ et du gain non linéaire, $\epsilon = 0.9$; nous nous sommes intéressés aux comportements des paramètres de la balle de lumière. Cette dynamique est représentée par la figure (4.13) qui montre l'évolution de l'amplitude (a), de la largeur temporelle (b) et

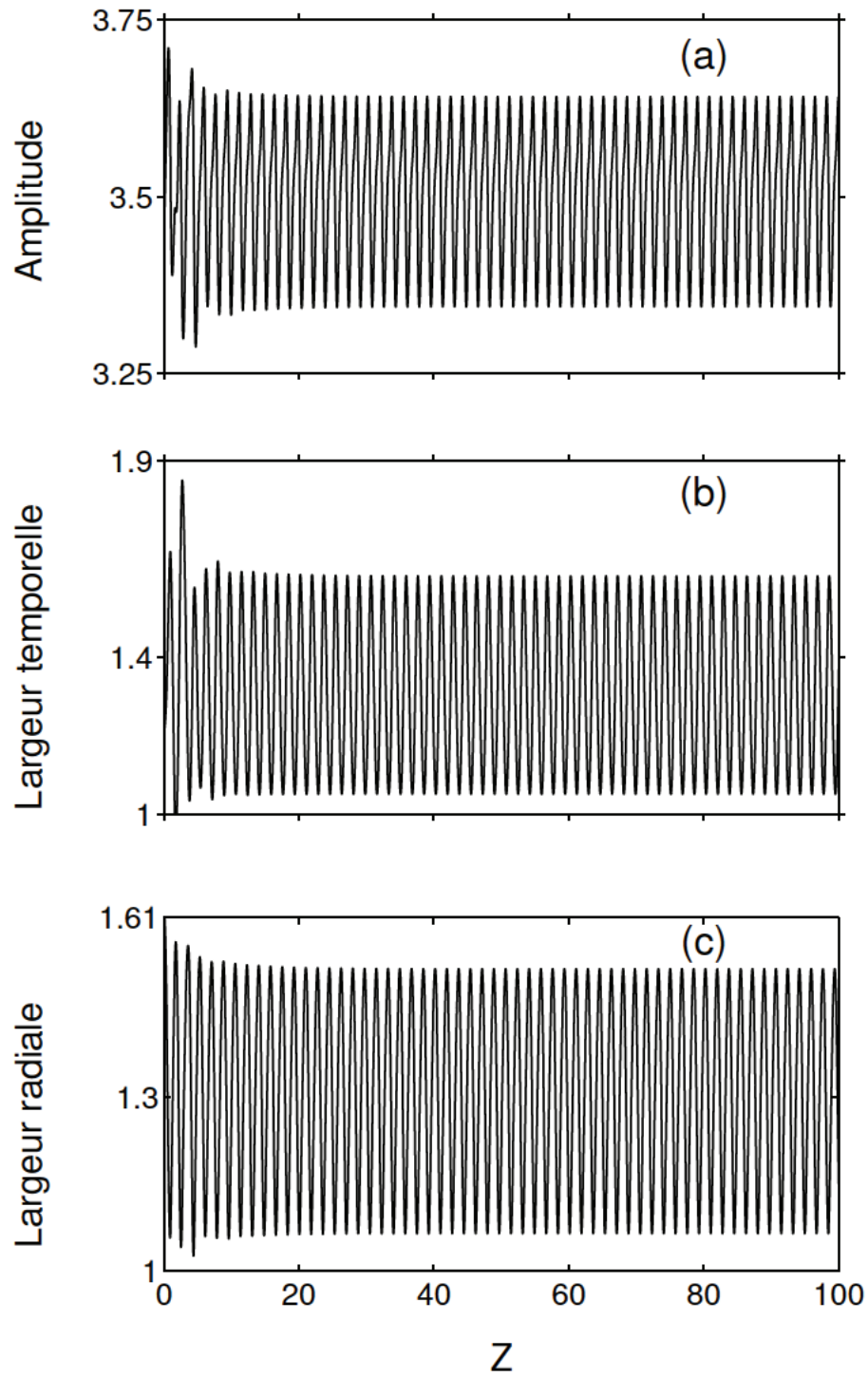


FIG. 4.13 Evolution des largeurs et de l'amplitude d'une balle de lumière oscillante pour les paramètres suivants : $\epsilon = 0.9$, $\nu = -0.06$, $\mu = -0.1$, $\delta = -0.4$, $\beta = 0.1$ et $D = 1$.

de la largeur spatiale (c) d'une balle de lumière oscillante correspondant à $\epsilon = 0.9$, $\nu = -0.06$, $\mu = -0.1$, $\delta = -0.4$, $\beta = 0.1$ et $D = 1$. Initialement, l'amplitude et les largeurs oscillent irrégulièrement sur une distance de $z \approx 10$. Nous attribuons l'irrégularité des oscillations au bruit numérique. Après cette première phase, toutes les grandeurs oscillent de manière stable; ainsi l'amplitude exécute des oscillations entre deux valeurs fixes (3.64 et 3.34). De même, la largeur temporelle oscille entre 1.60 et 1.05 avec une amplitude d'oscillation constante, alors que la largeur spatiale varie entre les valeurs 1.52 et 1.06. La variation de l'énergie pour ces mêmes paramètres est décrite par la figure (4.14). Elle reflète le comportement général de l'impulsion, qui commence la dynamique par une phase transitoire constituée d'oscillations irrégulières, avant d'osciller de façon stable entre les valeurs 34.14 et 23.98, nous assistons

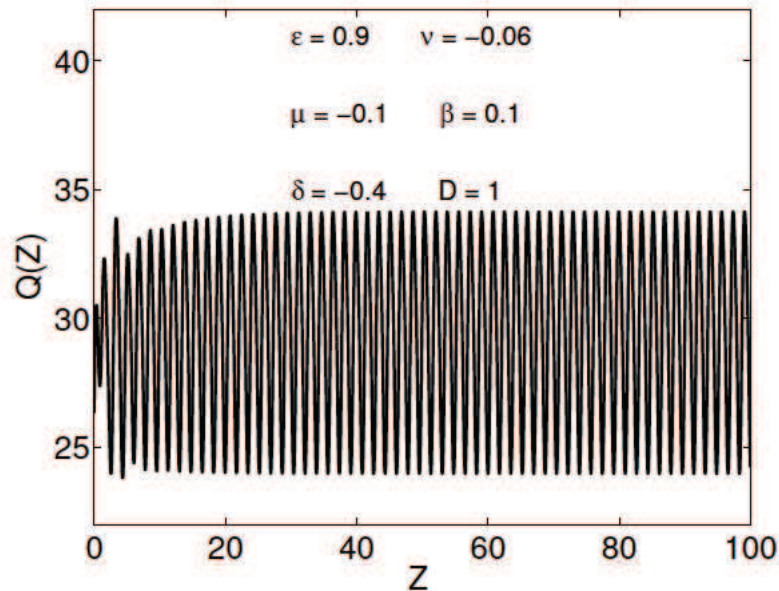


FIG. 4.14 Evolution de l'énergie Q en fonction de la distance z .

d'abord à une variation brute de l'énergie de la balle de lumière.

De même, nous avons suivi l'évolution de la quantité H pour les fonctions Gaussienne et super-Gaussienne. Le résultat de cette analyse est représenté sur la figure (4.15). La courbe du dessus (plus foncée) est celle obtenue par la fonction Gaussienne avec $\epsilon = 0.7$, et celle du bas (light) par la super-Gaussienne et pour $\epsilon = 0.8$. On remarque que H , quelque soit la fonction considérée, a la même dynamique que l'énergie Q . Après un mouvement transitoire de courte durée, H oscille entre deux

valeurs constantes, ce mouvement reste stable tout au long de la propagation.

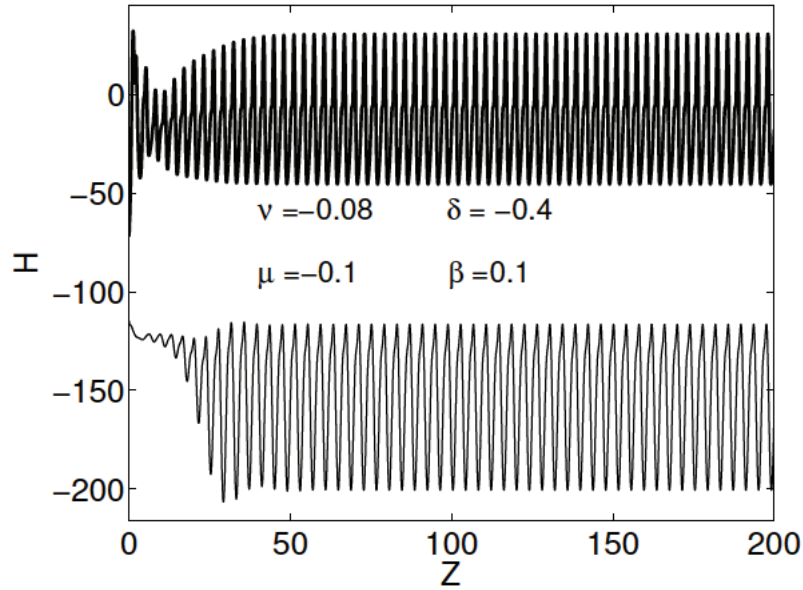


FIG. 4.15 Evolution de H en fonction de la distance z , les paramètres de l'équation GL3DC sont à l'intérieur de la figure. En haut la fonction Gaussienne avec $\epsilon = 0.7$ et en bas la super-Gaussienne avec $\epsilon = 0.8$.

Les termes quintiques (μ, ν) sont essentiels à la formation des balles de lumière. Pour voir leur influence sur les balles de lumière oscillantes, nous avons fixé $\epsilon = 0.6$, $\delta = -0.4$, $\beta = 0.1$ et toujours $D = 1$. En faisant varier μ de -0.15 à -0.04 par pas de 0.002 et ν de -0.22 à -0.02 , par pas de 0.003 , nous avons mis en évidence les solutions stationnaires et oscillantes des balles de lumière de l'équation GL3DC. La première analyse qui ressort de cette figure (4.16) est que, pour ces valeurs de paramètres, il est impossible de trouver des balles de lumière stables pour des valeurs du terme de saturation de la nonlinéarité (ν) inférieures à environ -0.25 et supérieures à -0.02 et pour des valeurs de la saturation de gain non linéaire (μ) inférieures à -0.145 et supérieures à -0.04 . Cependant lorsque les paramètres ν et μ sont bien choisis nous avons des solutions de balles de lumière stationnaires représentées en gris sur la figure (4.16). A côté de ces solutions, nous trouvons les balles de lumière oscillantes qui occupent la portion de domaine coloriée en blanc. Ces solutions oscillantes se trouvent dans la partie inférieure de la cartographie.

Une analyse détaillée de la dynamique de variables collectives des points fixes loca-

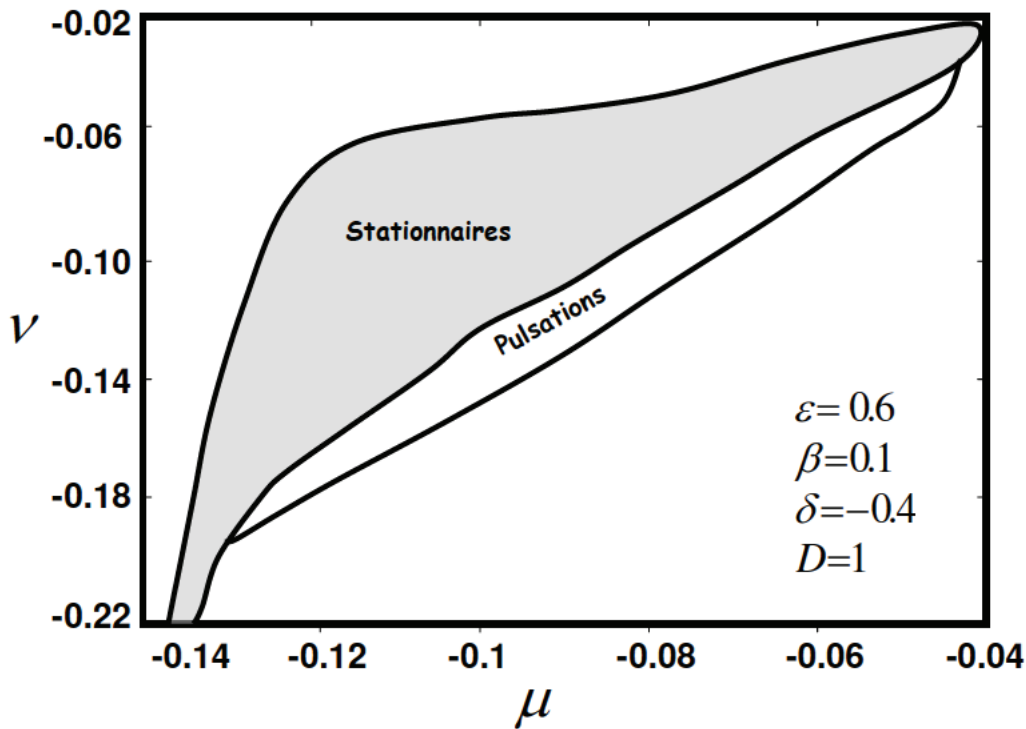


FIG. 4.16 Cartographie des balles de lumière stationnaires et oscillantes dans le plan (μ, ν) trouvées par la méthode de coordonnées collectives; en utilisant la fonction d'essai super-Gaussienne. Les autres paramètres de l'équation GL3DC sont à l'intérieur de la figure. Le domaine des balles de lumière oscillantes (domaine blanc) est en dessous de celui des balles de lumière stationnaires (domaine gris).

lisés dans les domaines des impulsions oscillantes permet de mettre en évidence les cycles limites stables qui correspondent aux balles de lumières oscillantes. Ces solutions peuvent être considérées comme des attracteurs, et la dynamique d'une telle impulsion est illustrée par la figure (4.17). La figure (a) montre l'évolution de l'énergie totale de la balle de lumière pour les valeurs de paramètres mentionnées en son sein. Cette énergie commence avec une valeur initiale de $Q \approx 60$, et l'instabilité se développe rapidement vers $z \approx 20$. Après cette série d'oscillations, l'énergie de l'impulsion demeure stable avec de grandes oscillations entre deux valeurs constantes (55 et 84). La dynamique de l'énergie reflète globalement le comportement de la balle de lumière, qui après une courte période transitoire, demeure stable avec des déformations périodiques, comme le témoignent les figures (b) et (c) qui décrivent l'évolution du profil

radial et temporel de la balle de lumière. D'après les figures (4.17) le domaine d'existence de telles impulsions est relativement large, ce qui est synonyme d'existence de forts attracteurs de type cycle limite. Cette caractéristique remarquable a déjà été observée dans divers systèmes dissipatifs non linéaires [114, 20, 144, 68, 145, 146]. L'existence d'une telle dynamique doit être confirmée par les simulations numériques de l'équation GL3DC originale avec les mêmes paramètres que ceux de la méthode semi-analytique. Car avant tout la méthode des coordonnées collectives est une procédure variationnelle, qui permet une rapide exploration des domaines d'existence des dynamiques élémentaires. Mais comme nous l'avons vu précédemment le choix de la fonction d'essai est crucial pour obtenir des solutions proches des résultats purement numériques. Et aussi le type de pulsation est lié à la fonction d'essai et au nombre de ses coordonnées collectives. Avec une fonction d'essai comme nos deux ansatz f_{G0} et f_{SG} possédants une symétrie cylindrique, on peut obtenir des impulsions de type oscillantes, cependant la dynamique complète des solutions de l'équation GL3DC peut être beaucoup plus compliquée. Dans la présente étude, les impulsions oscillantes ont été bien confirmées par la résolution numérique de l'équation GL3DC ; ces résultats numériques sont représentés par la figure (4.18), qui a été obtenue par J. M. Soto-Crespo de Instituto de Óptica, Madrid en Espagne. Dans cette procédure numérique, l'équation de propagation est résolue au moyen de la méthode de Fourier à pas divisés : les dérivées partielles secondes sont résolues dans l'espace de Fourier, tandis que les autres termes linéaires et non linéaires sont résolus avec la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Les simulations numériques se font à partir d'un maillage de 512 points dans chaque dimension spatiale transverse, et avec 256 points temporels. Afin d'éviter les artefacts numériques, divers pas spatiaux et temporels sont testés. La figure (4.18)(a) montre l'évolution de l'énergie. La dynamique reste stable entre deux constantes avec des pulsations de $z = 50$ à 140 , nous observons aussi une instabilité de l'énergie avant $z = 50$. On remarque ici qu'après $z = 140$, la dynamique bascule vers la formation de doublets de balles complexes rotatifs [144]. Les figures (b) et (c) montrent l'évolution du profil radial et temporel pour deux périodes d'oscillations.

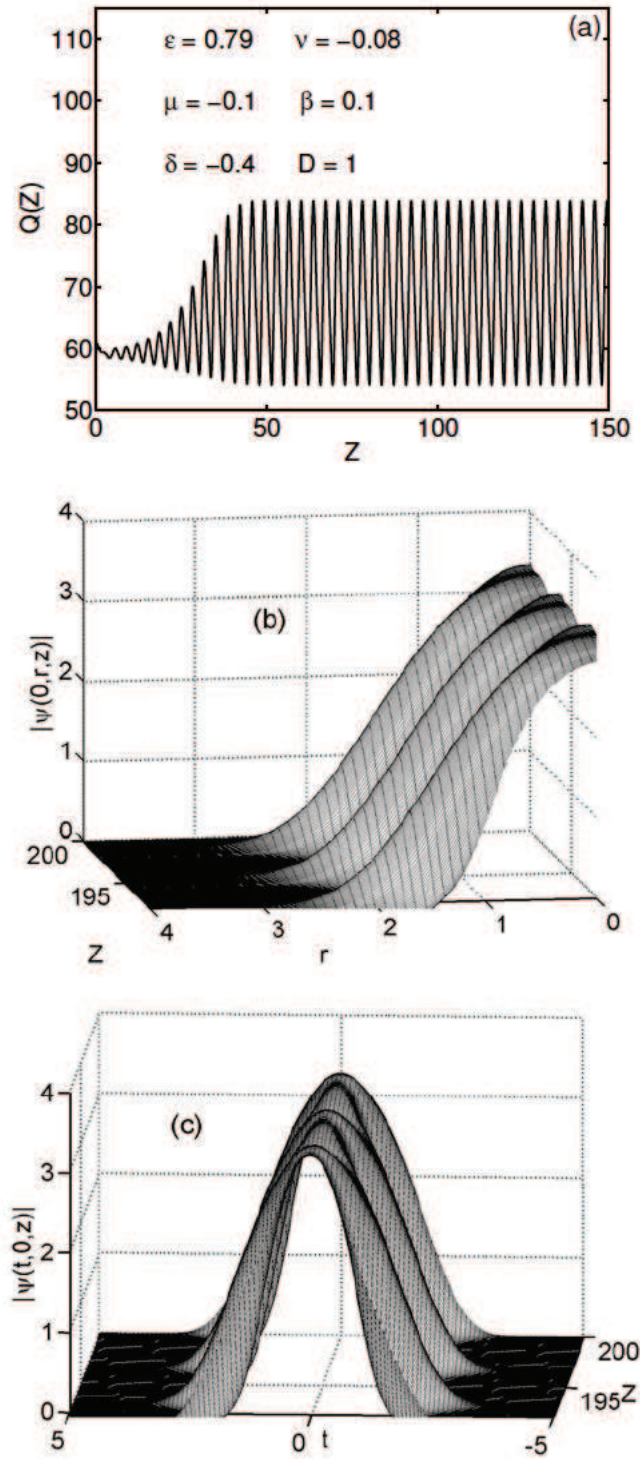


FIG. 4.17 Balle de lumière oscillante obtenue par la méthode des coordonnées collectives : (a) évolution de l'énergie totale, (b) évolution du profil radial, (c) évolution du profil temporel.

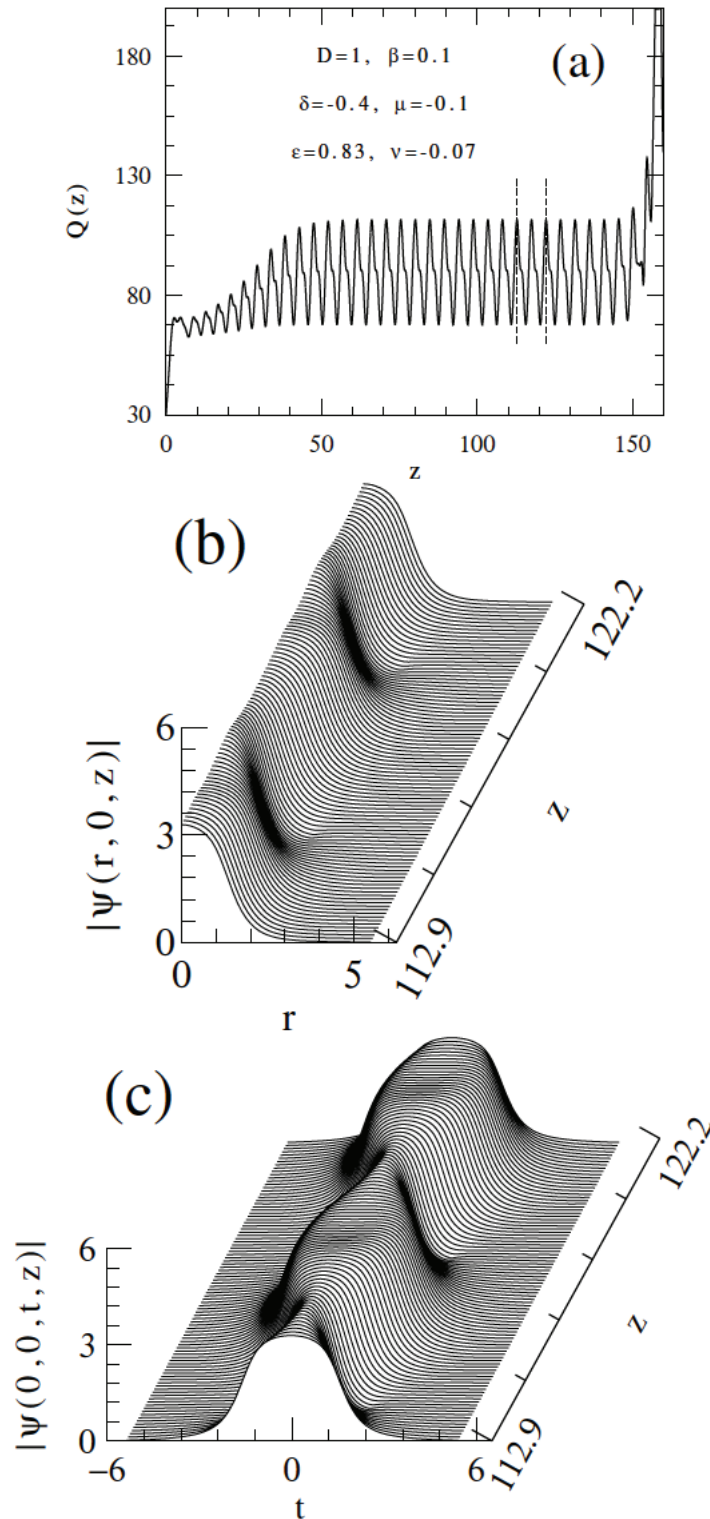


FIG. 4.18 Balle de lumière oscillante obtenue par les calculs numériques : (a) évolution de l'énergie totale, (b) évolution du profil radial, (c) évolution du profil temporel.

4.2.3 Diagramme de bifurcation

Le comportement de l'énergie est un aspect très instructif dans l'étude des systèmes dissipatifs, son évolution nous renseigne entre autre, sur les différents types de solutions dans la dynamique du système à étudier. Au cours de cette étude sur les balles de lumière, nous avons révélé deux états stables très distincts; un état stable qui correspondait aux solutions stationnaires et un autre état qui est lié aux solutions oscillantes. Pour rendre compte de ces phénomènes de la dynamique de l'énergie, nous avons analysé le comportement de l'énergie dans les deux cartographies représentées par les figures (4.12) et (4.16). Le résultat de cette analyse est décrit par les figures (4.19) et (4.20).

La figure (4.19) est liée à la cartographie du plan (ν, ϵ) , où nous avons fixé $\nu = -0.08$, $\mu = -0.1$, $\delta = -0.4$, $\beta = 0.1$ et $D = 1$ et fait varier ϵ du domaine des impulsions stationnaires à celle des impulsions oscillantes. Ainsi pour chaque valeur du gain non linéaire, ϵ , nous traçons le maximum et le minimum de l'énergie, ce qui nous permet d'obtenir le diagramme de bifurcation des énergies. Dans le domaine stationnaire

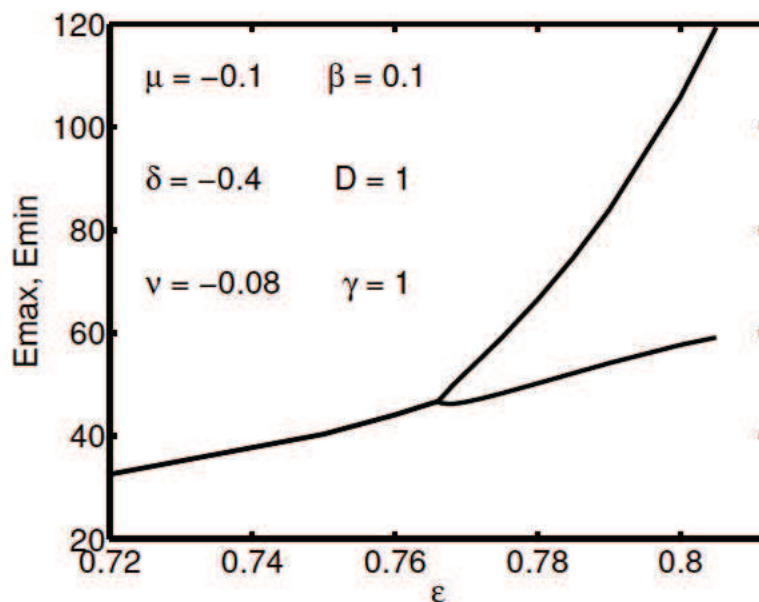


FIG. 4.19 Diagramme de bifurcation de l'énergie correspondant à la cartographie du plan (ν, ϵ) , pour les paramètres de la balle de lumière indiqués à l'intérieur de la figure.

le diagramme représente une seule branche, ces impulsions sont stationnaires donc le maximum de l'énergie (E_{\max}) est égal au minimum de l'énergie (E_{\min}). Cette branche évolue linéairement jusqu'à un point critique qui correspond au début du domaine des solutions oscillantes. Il se produit alors la bifurcation de la branche d'énergie en deux branches distinctes qui correspondent respectivement au maximum de l'énergie (E_{\max}) et au minimum de l'énergie (E_{\min}). On remarque que l'écart entre les deux branches augmente avec la valeur du gain non linéaire, ϵ jusqu'au domaine des impulsions instables. Ce diagramme de bifurcation permet ainsi de mieux visualiser l'évolution d'un système stationnaire vers un système oscillant. La situation est inversée pour la figure (4.20) correspondant à la cartographie du plan (μ, ν) , que nous avons obtenue en fixant $\epsilon = 0.6$, $\mu = -0.1$, $\delta = -0.4$, $\beta = 0.1$ et $D = 1$. En faisant varier ν , dans ce cas, le diagramme de bifurcation indique que le système évolue d'un état oscillant vers un état stationnaire.

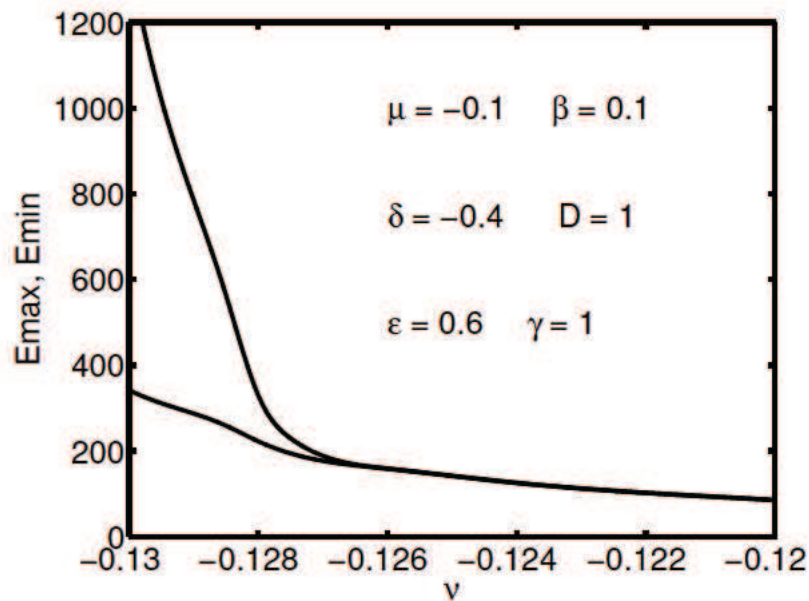


FIG. 4.20 Diagramme de bifurcation de l'énergie correspondant à la cartographie du plan (μ, ν) , pour les paramètres de la balle de lumière indiqués à l'intérieur de la figure.

4.3 Conclusion

Dans ce travail, nous venons de démontrer que la méthode des opérateurs de projections est une approche très pratique qui permet de prédire approximativement le domaine d'existence des balles de lumière stables dans l'espace des paramètres de l'équation cubique quintique de Ginzburg-Landau complexe [147]. Pour un choix approprié de la fonction d'essai et des paramètres de l'équation, nous avons mis en évidence les solutions solitons spatio-temporels stationnaires. A coté de ces solutions, nous avons prédit aussi le domaine d'existence des balles de lumière oscillantes. Il ressort de notre étude, un bon accord qualitatif et quantitatif entre notre méthode semi-analytique et la procédure purement numérique qui consiste dans la résolution exacte de l'équation GL3DC. L'avantage de notre méthode est son gain de temps par rapport aux autres procédures variationnelle et sa facilité de mise à en œuvre et en plus comme nous le verrons dans le prochain chapitre, cette méthode permet de révéler des dynamiques séquentielles qui sont difficiles à déceler par les méthodes numériques. Mais la validité de ces études repose sur un choix minutieux de la fonction d'essai car, comme on l'a si bien vu, son choix détermine différents types de solutions.

Chapitre 5

Brisure de symétrie et mise en auto-rotation des balles de lumières

5.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, et dans [147], nous avons montré à l'aide de la méthode des coordonnées collectives, que pour un choix approprié de la fonction d'essai, les balles de lumière pouvaient avoir deux types de solutions stables, l'une stationnaire et l'autre oscillante. Dans cette étude ci, nous nous intéressons uniquement à la dynamique des solutions oscillantes, sur la base du fait que des oscillations se manifestent dans la plupart des systèmes dissipatifs non linéaires. Pour un choix donné de la fonction d'essai, nous observons différentes dynamiques d'oscillations de la balle de lumière selon la valeur du terme cubique du gain non linéaire. Nous constatons également que le bruit, même de très faible amplitude, peut conduire à des comportements dynamiques qualitativement différents. Ainsi grâce au diagramme de bifurcation, nous avons identifié des dynamiques impliquant plus de deux d'extrema de l'énergie de la balle de lumière pulsante ; ce qui illustre la complexité de son mouvement interne. Pour un jeu de paramètres donnés, nous avons mis en évidence les balles de lumière oscillantes périodiques et quasi-périodiques, de même que l'influence des termes quintiques sur ses pulsations. Nous montrons enfin dans ce chapitre, que la perturbation des paramètres de la balle de lumière peut conduire après brisure de la symétrie cylindrique à un mouvement de rotation de la balle de lumière sur elle-même et conduit

à son expansion.

5.2 Principe de l'étude

Dans notre étude précédente [147], l'utilisation de différentes fonctions d'essai a permis de décrire une plus riche variété de comportements dynamiques des balles de lumière. Ces fonctions d'essai Gaussiennes admettent des formes d'impulsions asymétriques dans le plan transversal x, y . En nous inspirant des résultats préliminaires de [147], et dans le but de décrire des déformations asymétriques plus complexes de l'impulsion dans le plan (x, y) , nous choisissons pour cette étude, la fonction d'essai Gaussienne suivante :

$$f = A \exp \left(-\frac{t^2}{w_t^2} - \frac{x^2}{w_x^2} - \frac{y^2}{w_y^2} - s_1 xy + \frac{i}{2} c_t t^2 + \frac{i}{2} c_x x^2 + \frac{i}{2} c_y y^2 + \frac{i}{2} s_2 xy + i f \right). \quad (5.1)$$

Avec t, x, y les variables temporelles et spatiales suivant l'axe x et y respectivement, $A, w_t, w_x, w_y, s_1, c_t, c_x, c_y, s_2$ et f représentent les coordonnées collectives avec A , l'amplitude de l'impulsion, w_t, w_x et w_y sont respectivement liés à la largeur temporelle, à la largeur spatiale suivant l'axe x et à la largeur spatiale suivant l'axe y de l'impulsion. Les paramètres de chirp temporel et transverse sont respectivement c_t, c_x et c_y et enfin f est la constante de phase globale. Pour donner la possibilité de rotation dans le plan spatial transverse à la balle de lumière, nous avons introduit les paramètres s_1 et s_2 .

L'ajout des ces variables collectives supplémentaires libère de nouveaux degrés de liberté, et permet de dévoiler des dynamiques plus complexes, comme des pulsations asymétriques. Cependant, il est bien évident qu'il y a une limite raisonnable au nombre de variables collectives qu'on peut ajouter sans compromettre la faisabilité mathématique des équations variationnelles. Après le choix de la fonction d'essai pour la dynamique désirée, et en appliquant l'*approximation "bare"*, sans champ résiduel dans la méthode des opérateurs de projections [85], nous obtenons les équations variationnelles qui régissent une telle dynamique. Ces équations variationnelles qui suivent, font apparaître d'une part, l'action exercée par les différents paramètres de l'équation sur les diverses parties du soliton et d'autre part montrent en même temps

aussi de quelle manière les paramètres du soliton (amplitude, largeurs, ...) évoluent au cours du temps. Nous allons nous intéresser ici particulièrement à la propagation des largeurs (\dot{w}_t , \dot{w}_x et \dot{w}_y) et aux paramètres (s_1 et s_2) autorisant la rotation de la balle de lumière. Nous remarquons que la nonlinéarité cubique et quintique du gain non linéaire ont une action directe sur les largeurs spatiales et temporelles. De plus, la dispersion (D) et le terme de filtrage spectral (β) exercent une influence sur la largeur temporelle seule. Les coordonnées collectives responsables de la rotation (s_1 et s_2) n'ont d'effets que sur les largeurs transverses.

$$\begin{aligned}
\dot{A} &= A\delta + \frac{7}{16}\sqrt{2}A^3\epsilon - \frac{2\beta A}{w_t^2} + \frac{2}{9}\mu\sqrt{3}A^5 - \frac{1}{2}Ac_tD - \frac{1}{2}Ac_x - \frac{1}{2}Ac_y \\
\dot{w}_t &= w_t c_t D - \frac{1}{8}\sqrt{2}w_t A^2 \epsilon - \frac{2}{27}\mu\sqrt{3}A^4 w_t + (4 - w_t^4 c_t^2) \frac{\beta}{2w_t} \\
\dot{w}_x &= w_x c_x - \frac{1}{8}\sqrt{2}w_x A^2 \epsilon - \frac{2}{27}\mu\sqrt{3}A^4 w_x + \frac{1}{4}s_1 s_2 w_x^3 \\
\dot{w}_y &= w_y c_y - \frac{1}{8}\sqrt{2}w_y A^2 \epsilon - \frac{2}{27}\mu\sqrt{3}A^4 w_y + \frac{1}{4}s_1 s_2 w_y^3 \\
\dot{s}_1 &= -s_1 c_x - s_1 c_y + \frac{1}{4}\sqrt{2}\epsilon A^2 s_1 + \frac{4}{27}\sqrt{3}\mu A^4 s_1 - \frac{s_2}{w_y^2} - \frac{s_2}{w_x^2} \\
\dot{c}_t &= -Dc_t^2 - \frac{\sqrt{2}A^2}{2w_t^2} + \frac{4D}{w_t^4} - \frac{8\sqrt{3}\nu A^4}{27w_t^2} - \frac{8\beta c_t}{w_t^2} \\
\dot{c}_x &= s_1^2 - c_x^2 - \frac{s_2^2}{4} - \frac{\sqrt{2}A^2}{2w_x^2} + \frac{4}{w_x^4} - \frac{8\sqrt{3}\nu A^4}{27w_x^2} \\
\dot{c}_y &= s_1^2 - c_y^2 - \frac{s_2^2}{4} - \frac{\sqrt{2}A^2}{2w_y^2} + \frac{4}{w_y^4} - \frac{8\sqrt{3}\nu A^4}{27w_y^2} \\
\dot{s}_2 &= -s_2 c_x - s_2 c_y - \frac{1}{2}\sqrt{2}A^2 s_1 - \frac{8}{27}\sqrt{3}\nu A^4 s_1 + \frac{4s_1}{w_y^2} + \frac{4s_1}{w_x^2} \\
\dot{f} &= \beta c_t + \frac{7\sqrt{2}A^2}{16} - \frac{D}{w_t^2} - \frac{1}{w_x^2} - \frac{1}{w_y^2} + \frac{2\sqrt{3}\nu A^4}{9}
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Ce qui nous conduit à nous intéresser à leur propagation. Les équations montrent que cette dynamique est régie non seulement par les termes cubiques et quintiques de gain non linéaire mais aussi par la nonlinéarité cubique et quintique de l'effet Kerr. Les paramètres w_x et w_y doivent être différents de zéro sinon il est impossible d'avoir une pulsation asymétrique qui engendre un mouvement de rotation. Par contre f n'intervient pas dans les équations et n'est pas nécessaire à l'évolution. L'énergie peut s'exprimer en fonction des paramètres de la fonction s'essai sous la forme suivante :

$$Q = \frac{\pi\sqrt{2}\pi A^2 w_t w_x w_y}{2\sqrt{4 - w_x^2 w_y^2 s_1^2}}. \tag{5.3}$$

La "quantité de mouvement" définie par l'équation (3.4) est nulle pour cette fonction.

5.3 Etats dynamiques de la balle de lumière

A partir des équations (5.2), pour les valeurs des paramètres $\delta = -0.4$, $\nu = -0.08$, $\mu = -0.1$ et $\beta = 0.1$, avec comme champ initiale

$$f = 4 \exp \left(-\frac{t^2}{1.3} - \frac{x^2}{1.4} - \frac{y^2}{0.9} - 0.4xy \right). \quad (5.4)$$

nous déterminons les différentes solutions de l'équation GL3D dans le plan (D, ϵ) . Le choix du plan (D, ϵ) est arbitraire, car comme nous l'avons vu jusqu'à présent, il est possible de cartographier les solutions dans d'autres régions de paramètres de l'équation GL3D. Le résultat de cette analyse est représenté par la figure FIG (5.1).

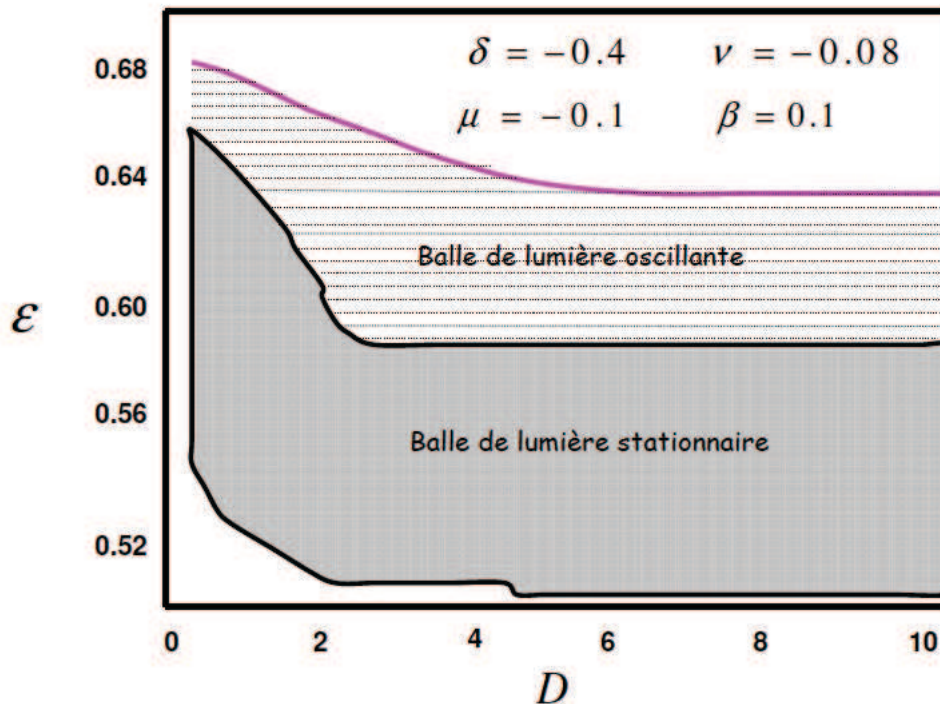


FIG. 5.1 Cartographie des balles de lumière stationnaires et oscillantes dans le plan (D, ϵ) , trouvée par la méthode des coordonnées collectives.

Cette cartographie est assez typique des diagrammes que nous avons obtenus dans d'autres régions de paramètres tels que (ν, ϵ) , (μ, ϵ) , (β, ϵ) et (μ, ν) . Ainsi, ce diagramme de stabilité démontre l'existence de deux types de comportement, qui diffèrent selon la valeur du paramètre du gain non linéaire, ϵ . Dès que le paramètre du gain non linéaire excède une certaine valeur critique (ϵ_c) le système bascule vers un régime de propagation non stationnaire caractérisé par la variation périodique des paramètres de l'impulsion (incluant l'énergie). Ce domaine de propagation oscillante correspondent aux régions en pointillés du diagramme de la figure FIG(5.1). Dans cette étude-ci, nous allons nous focaliser sur le comportement des impulsions oscillantes qui sont très proche du domaine des impulsions stationnaires.

5.4 Balles de lumière oscillantes

5.4.1 Différentes dynamiques d'oscillations

Un examen du comportement dynamique dans le voisinage immédiat de la frontière entre les domaines des balles de lumière stationnaires et oscillantes, révèle deux caractéristiques essentielles :

Premièrement, nous observons que la dynamique des impulsions oscillantes est plutôt de caractère harmonique ; dans ce cas, l'énergie oscille quasi-sinusoidalement entre deux limites correspondant à des extrema principaux d'énergie.

Désormais, nous qualifions d'état d'énergie extremum, un état où le sens de variation de l'énergie de l'impulsion s'inverse.

La plus grande et la plus petite des extrema d'énergie sont qualifiées d'extrema principaux. Tous les autres seront qualifiés d'extrema secondaires. Ainsi, dès que l'on franchit la frontière du domaine stationnaire, le système bascule vers un régime où la propagation s'accompagne de déformations internes correspondant à une dynamique de type quasi-harmonique, avec deux extrema principaux, comme l'illustrent les figures FIG (5.2 (a1)-(b1)).

Enfin deuxièmement, à mesure que l'on s'éloigne de cette frontière (quand la valeur de ϵ augmente) la dynamique interne de la balle de lumière change et devient de plus en plus anharmonique, ce qui accroît le nombre d'extrema secondaires dans

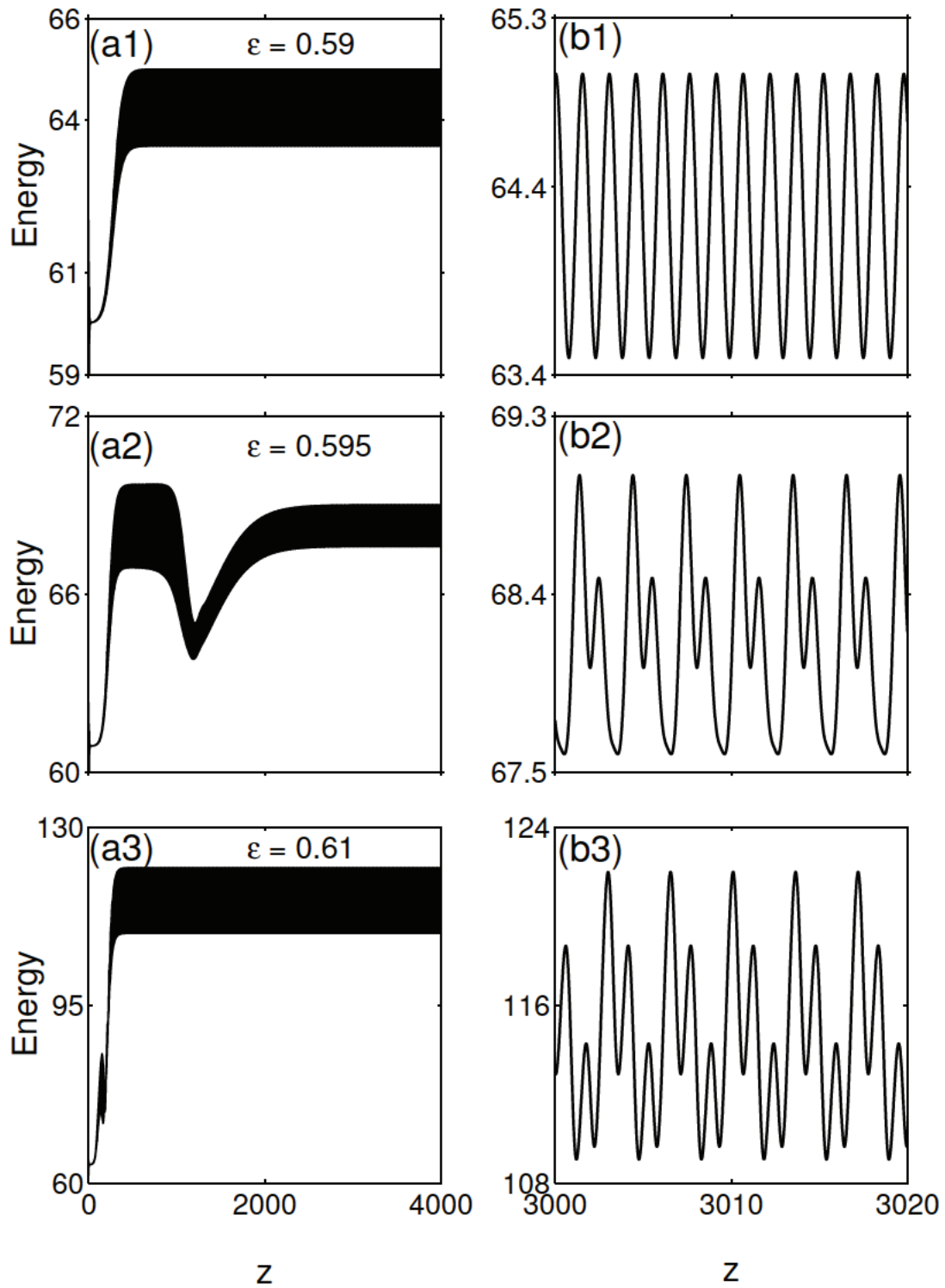


FIG. 5.2 Evolution de l'énergie de la balle de lumière oscillante pour différentes valeurs du gain non linéaire ϵ , les autres paramètres sont $D = 6$, $\delta = -0.4$, $\nu = -0.08$, $\mu = -0.1$ et $\beta = 0.1$, les figures $b(i)$, $i = 1, 2, 3$ représentent une vue de près des $a(i)$.

les variations d'énergie comme l'illustrent les figures FIG (5.2 (a2)-(b2)) et FIG (5.2 (a3)-(b3)).

En fonction de la valeur du gain non linéaire, la dynamique de la balle de lumière oscillante change considérablement, avec des pulsations périodiques et quasi-périodiques. Dans une telle situation, les autres paramètres (largeurs et amplitude, ...) ont une dynamique similaire à celle de l'énergie.

5.4.2 Rôle du bruit sur les oscillations

Dans la plupart des études théoriques sur le comportement des balles de lumière, les conditions initiales sont généralement très idéalisées, avec un profil proche du point fixe. Or, au niveau pratique, une impulsion dans un système réel est toujours sujette à différents types de perturbations plus ou moins importantes, qui sont susceptibles d'entraîner des distorsions de profil ou des brisures de symétrie par rapport à celui du point fixe. Aussi, pour avoir un aperçu complet du comportement d'une balle de lumière il est préférable d'inclure dans l'analyse le cas d'une impulsion affectée d'une petite perturbation initiale. Dans ce contexte, la méthode des opérateurs de projections devient particulièrement utile, car elle offre la possibilité de reproduire facilement une grande variété de perturbations de profil d'impulsion, qui seraient difficilement réalisables par toute autre méthode. Nous montrons ci-dessous que certains types de perturbations, même de très faible amplitude, peuvent conduire à des comportements dynamiques qualitativement différents de ceux prédits par les diagrammes de stabilité usuels basés sur la propagation de points fixes non perturbés. Ici nous allons examiner de manière détaillée l'évolution des paramètres physiques de l'impulsion au cours de la dynamique oscillatoire. La région de paramètre que nous avons choisie est située au voisinage de la frontière entre les domaines stationnaires et non stationnaires, à savoir, la région correspondant à $\epsilon = 0.59$ et $D = 6$. Le point fixe correspond alors à $A = 2.8697, w_t = 2.8117, w_x = 1.1473, w_y = 1.1473, s_1 = 0, c_t = -0.0061, c_x = -0.0112, c_y = -0.0112, s_2 = 0$, et $f = 0$. En prenant ce point fixe comme condition initiale, et en résolvant les équations variationnelles, nous avons trouvé que le bruit joue un rôle décisif dans la mise en place de la dynamique interne de l'impulsion. Pour effectuer nos simulations, nous avons choisi comme condition

initiale le point fixe ci-dessus, affecté d'un bruit dont l'amplitude e_{max} est fixée à une petite fraction de la valeur du point fixe non perturbé. Les résultats de la simulation sont clairement visibles dans la figure FIG (5.3), qui montre l'évolution de l'énergie en fonction de la distance de propagation, pour différents niveaux de bruit e_{max} . Quel que soit le niveau de bruit présent dans le système, la figure FIG (5.3) montre que la dynamique de l'impulsion oscillante commence toujours par une première phase analogue à une phase stationnaire. Ensuite l'impulsion entre dans le régime permanent, au cours duquel son énergie exécute un mouvement oscillatoire périodique entre deux valeurs limites. On observe que le passage de l'impulsion au régime oscillant se manifeste par une montée abrupte de son énergie. Ce passage se produit à une distance qui dépend sensiblement du niveau de bruit initialement présent dans le système, comme le révèle la figure FIG (5.3).

Les figures FIG (5.3 (a1)-(b1)) illustrent le cas idéal, où aucun bruit n'est initialement présent dans le système ($e_{max} = 0$). L'impulsion n'est alors soumise à aucun bruit additionnel, qui est inévitablement présent dans le système comme l'est le bruit de photons présent dans un système optique réel. Dans ce cas, la transition vers le régime oscillatoire se produit au voisinage de $z = 2000$, comme le montre la figure FIG (5.3 (a1)). Il est probable que cette transition soit influencée par le bruit numérique. Dans la suite de la propagation l'énergie de l'impulsion exécute des oscillations de type harmonique entre deux niveaux instables situés à 63.45 et 64.8, comme le montre la figure FIG (5.3 (b1)). Lorsque le niveau de bruit est porté à $e_{max} = 5.10^{-5}$ la transition se produit à $z = 700$ [voir FIG (5.3 (a2)-(b2))], et pour $e_{max} = 5.10^{-2}$ la transition se produit à $z = 100$ [voir FIG (5.3 (a3)-(b3))]. Ainsi donc, l'élévation du niveau de bruit dans le système précipite le passage de la balle de lumière vers le régime oscillatoire. Cependant, le niveau de bruit n'a aucune influence sur l'amplitude des oscillations dans le régime permanent, comme le montrent les figures FIG (5.3 (b1)-(b2)-(b3)).

D'autre part, pour avoir un aperçu du comportement de l'impulsion oscillante, nous avons examiné plus attentivement l'évolution de ses paramètres physiques. Nous avons choisi le cas où le profil initial est affecté d'un niveau de bruit correspondant à $e_{max} = 0.05$ [considéré dans la figure FIG (5.3 (a3)-(b3))]. Nous avons trouvé que

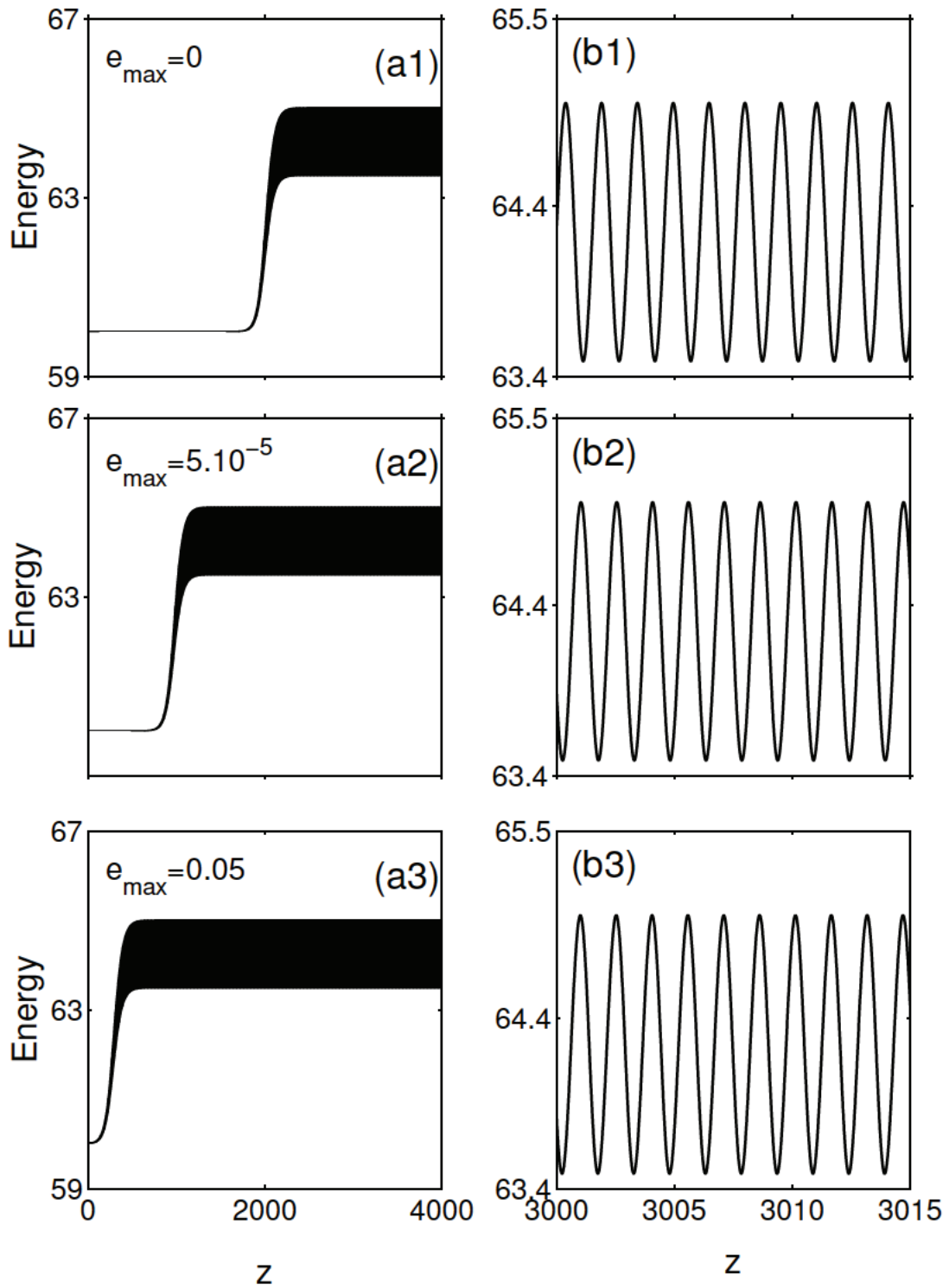


FIG. 5.3 Evolution de l'énergie de la balle de lumière oscillante pour différents niveaux de bruit e_{\max} , les paramètres sont $\epsilon = 0.59$, $D = 6$, $\delta = -0.4$, $\nu = -0.08$, $\mu = -0.1$ et $\beta = 0.1$, les figures $b(i)$, $i = 1, 2, 3$ représentent une vue de près des $a(i)$.

tous les paramètres, à l'exception notable des paramètres de déformation asymétrique s_1 et s_2 , exécutent un mouvement que l'on peut décomposer en trois grandes phases étiquetées I, II, et III dans la figure FIG (5.4) :

(i) la phase initiale (phase I), qui s'étend de $z = 0$ jusqu'à $z \approx 200$, correspond à un régime de propagation quasi-stationnaire (avec une énergie constante), au cours duquel les paramètres de l'impulsion n'exécutent que de très petites oscillations (autour de leurs valeurs initiales), à l'exception de la largeur temporelle qui exécute un mouvement oscillatoire dont l'amplitude s'établit initialement à un niveau relativement modéré avant de décroître. [voir figure FIG (5.4 (a1))].

(ii) la deuxième phase (phase II), qui s'étend de $z \approx 200$ jusqu'à $z \approx 500$, correspond à un régime transitoire au cours duquel les amplitudes d'oscillation des différents paramètres, et principalement les largeurs spatiales transverses, augmentent fortement avant de se stabiliser. Cette dynamique provoque un accroissement net de l'énergie de l'impulsion [voir figure FIG (5.3 (a3))] et de l'amplitude d'oscillation.

(iii) dans la troisième phase, l'impulsion entre dans un état d'oscillations permanentes de type harmonique [voir figure FIG (5.3 (b3))]. Un examen de l'évolution des largeurs de l'impulsion suivant les directions des axes x et y [figure FIG (5.4 (b1) et 5(b2))] révèle que l'amplitude des oscillations atteint son maximum dans une direction au moment où elle est exactement à son minimum dans l'autre direction (préservant une symétrie de comportement vis-à-vis des deux axes). En d'autres termes, la balle de lumière oscille entre une ellipse allongée dans le sens horizontal et une allongée dans le sens vertical [voir figure FIG (5.5)]. Ce mouvement correspond à des "respirations" suivant les axes x et y .

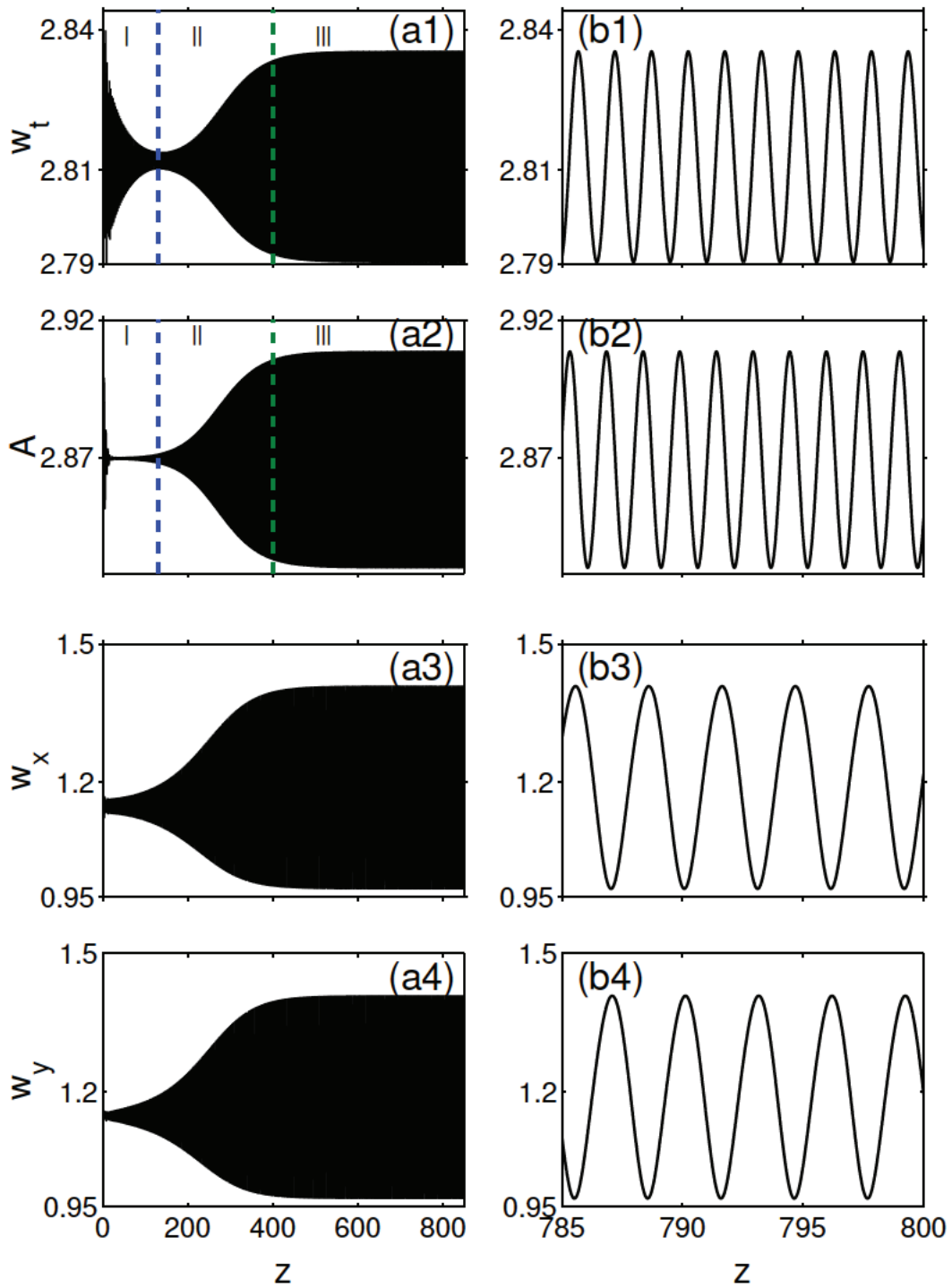


FIG. 5.4 Evolution des différents paramètres de la balle de lumière oscillante pour $\epsilon = 0.59$, $D = 6$, $\delta = -0.4$, $\nu = -0.08$, $\mu = -0.1$ et $\beta = 0.1$, les figures $b(i)$, $i = 1, 2, 3$ représentent une vue de près des $a(i)$.

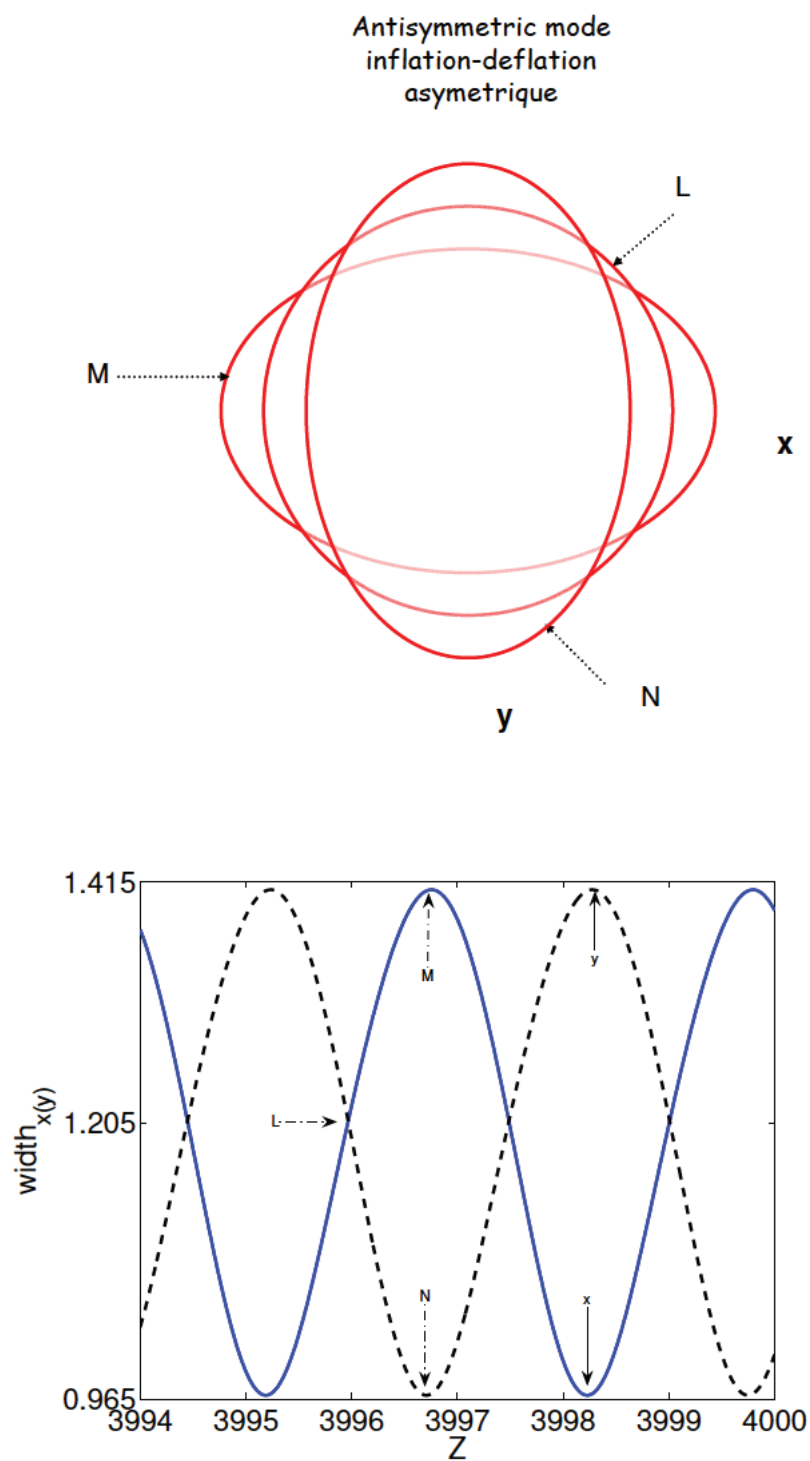


FIG. 5.5 Balle de lumière oscillante lorsque $s_1 = s_2 = 0$, avec $\epsilon = 0.59$, $D = 6$, $\delta = -0.4$, $\nu = -0.08$, $\mu = -0.1$ et $\beta = 0.1$.

5.4.3 Diagramme de bifurcation

Un critère permettant d'obtenir rapidement un aperçu du degré de complexité de la dynamique interne de la balle de lumière oscillante, est le nombre de ses extrema d'énergie. La figure FIG (5.6) suivante représente les états d'énergie stable et instable en fonction du gain non linéaire ϵ , pour $\mu = -0.1$, $\delta = -0.4$, $\nu = -0.08$, $\beta = 0.1$, et $D=6$. On observe dans cette figure que pour des valeurs du gain non linéaire, ϵ , inférieures à 0.58, les impulsions sont stationnaires et caractérisées par un seul niveau d'énergie (qui est donc stable). Au delà de $\epsilon = 0.58$, le système bifurque vers des états non stationnaires. La branche des états stationnaires se scinde alors en

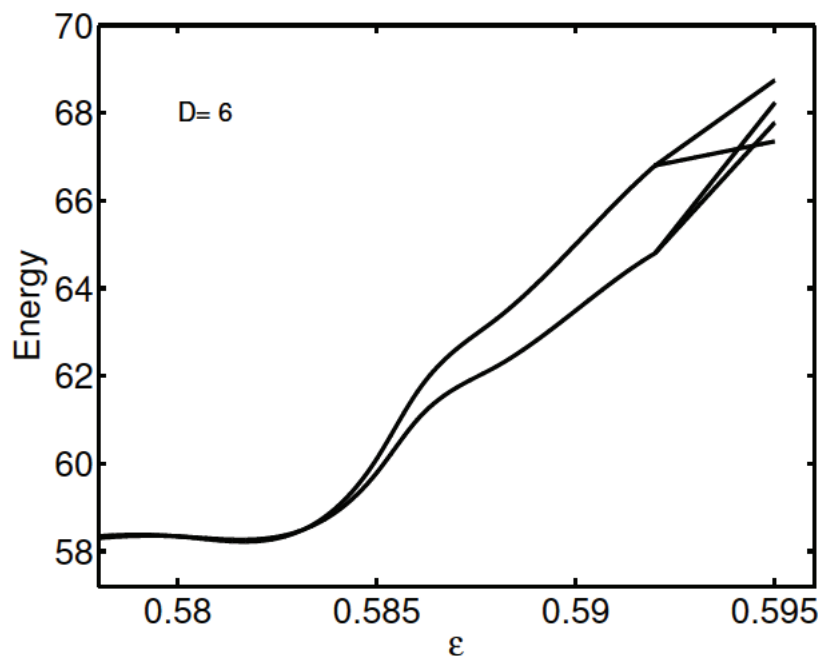


FIG. 5.6 Diagramme de bifurcation des énergies de la balle de lumière oscillante en fonction de ϵ , pour $D = 6$, $\delta = -0.4$, $\nu = -0.08$, $\mu = -0.1$ et $\beta = 0.1$.

deux branches associées à deux états instables. A partir de $\epsilon = 0.592$, une nouvelle bifurcation se produit, avec la scission de chaque branche instable en deux nouvelles branches instables. Pour des valeurs plus élevées du paramètre ϵ le nombre d'extrema secondaires augmente. Ainsi donc la figure FIG (5.6) révèle l'existence d'une grande variété d'états dynamiques issus d'une cascade de "bifurcations", et met en lumière le rôle décisif du paramètre cubique de gain non linéaire dans la dynamique interne

de la balle de lumière oscillante.

5.5 Balles de lumière en autorotation et en expansion

Dans le domaine en pointillé, pour toutes valeurs du gain non linéaire, ϵ , la dynamique globale des balles de lumière est oscillatoire. Dans ce domaine les paramètres de l'impulsion exécutent des déformations d'amplitude sauf les paramètres s_1 et s_2 qui valent zéro tout au long de la propagation. Lors de son évolution, une asymétrie se crée entre les largeurs spatiales suivant l'axe x et y , ainsi nous observons un mode d'élongation (inflation - déflation) asymétrique des largeurs spatiales suivant chaque axe (x et y), et la balle de lumière garde son mouvement oscillant, suivant chaque axe comme le montre la figure FIG (5.5) précédente. Dans ce cas, les largeurs suivant l'axe x et la direction y ont la même valeur. Seuls diffèrent leurs sens de propagation. Elles gardent un mouvement asymétrique durant leur évolution.

En considérant à présent cette situation où le profil initial de l'impulsion correspond exactement aux mêmes valeurs de paramètres que dans la figure FIG (5.3), à l'exception des paramètres s_1 et s_2 qui sont ici affectés d'une très petite perturbation initiale : $s_1 = 3.10^{-7}$, $s_2 = 3.10^{-7}$. Nous remarquons alors à travers l'évolution de l'énergie, que la propagation de l'impulsion révèle deux phénomènes spectaculaires clairement visibles sur la figure FIG (5.7) : d'une part il ressort de cette figure que pour un même niveau de bruit, la perturbation des paramètres s_1 et s_2 précipite le passage de l'impulsion vers le régime à pulsations (voir la figure FIG (5.3) et FIG (5.7)) et d'autre part on constate que l'impulsion ne séjourne dans le régime à pulsations que pendant un temps relativement limité, avant de suivre son expansion. Le phénomène d'expansion de l'énergie se manifeste par un accroissement rapide et sans limite de l'énergie de l'impulsion. Ainsi, la perturbation des paramètres s_1 et s_2 change la dynamique de la balle de lumière oscillante. On assiste à la brisure de symétrie et l'impulsion se met dans un mouvement de rotation tout en oscillant comme l'illustre la figure FIG (5.8). Mais nous constatons cependant, que l'impulsion reste stable pendant un temps relativement court avant la phase d'expansion. D'autre part,

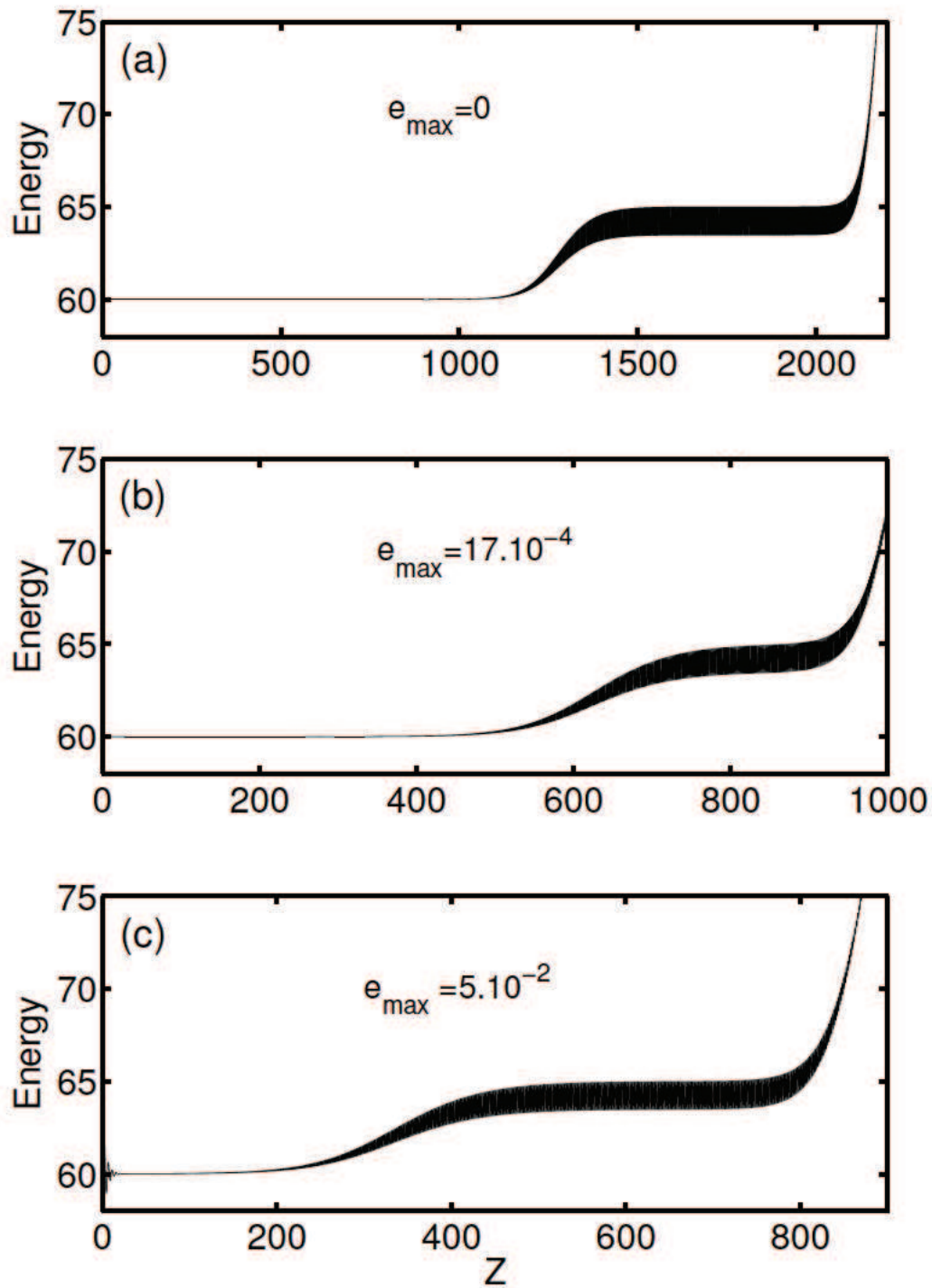


FIG. 5.7 Evolution de l'énergie de la balle de lumière oscillante "perturbée" pour différents niveaux de bruit e_{\max} , les paramètres sont $\epsilon = 0.59$, $D = 6$, $\delta = -0.4$, $\nu = -0.08$, $\mu = -0.1$ et $\beta = 0.1$.

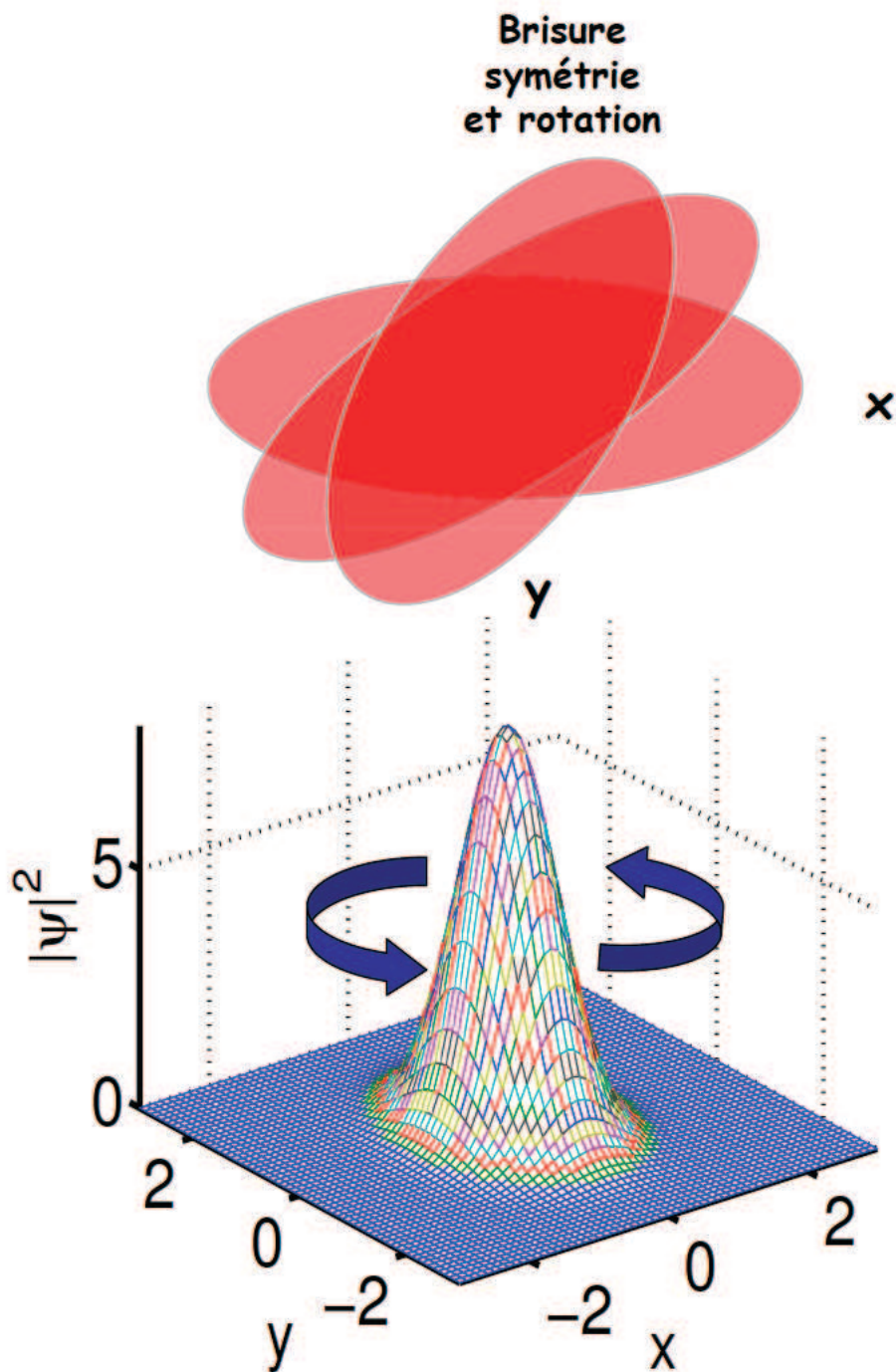


FIG. 5.8 Balle de lumière oscillante rotative lorsque $s_1 = s_2 \neq 0$, avec $\epsilon = 0.59$, $D = 6$, $\delta = -0.4$, $\nu = -0.08$, $\mu = -0.1$ et $\beta = 0.1$.

en examinant plus attentivement le comportement de l'impulsion, dans le cadre de la dynamique de la balle de lumière oscillante en rotation, nous avons identifié deux grandes parties dans sa dynamique interne, illustrées dans la figure FIG (5.9), qui montre l'évolution des paramètres physiques de l'impulsion pour le niveau de bruit $e_{max} = 0.05$.

La première partie, qui s'étend de $z \approx 200$ jusqu'à $z \approx 750$, est quasiment analogue au comportement d'une impulsion avec les paramètres s_1 et s_2 non perturbés, excepté le passage précipité vers le régime à pulsations. Elle se déroule donc selon les trois phases décrites précédemment, à savoir : une dynamique oscillatoire initiale de faible amplitude, suivie d'un régime transitoire avec accroissement abrupt de l'amplitude des oscillations, qui débouche sur un régime à pulsations. Mais, à partir de $z = 750$ et au-delà, commence la deuxième partie de la dynamique avec des changements importants induits par la perturbation initiale des paramètres s_1 et s_2 . Ces changements commencent à se manifester de manière spectaculaire par des oscillations qui apparaissent progressivement dans les paramètres s_1 et s_2 , comme le montrent les figures FIG (5.9 (a1)-(a2)).

Ensuite ces oscillations augmentent violemment au début de la deuxième partie de la dynamique, et atteignent leurs valeurs maxima au bout d'une distance que nous qualifierons de distance critique Z_c , qui se situe au voisinage de $z = 845$. Dans le même temps, l'amplitude d'oscillation des largeurs spatiales subit une baisse qui prend fin exactement au moment où les oscillations de s_1 et s_2 atteignent leurs maxima (à $z = Z_c$). On remarque qu'au-delà de la distance critique, l'impulsion exécute un mouvement de balancier (semi-rotation) dont l'amplitude croît jusqu'à atteindre un niveau lui permettant d'effectuer une rotation complète. L'impulsion effectue alors des rotations complètes autour de son centre de masse. Mais la durée de vie de l'impulsion en rotation s'avère être relativement courte. En effet cette propagation avec rotation complète s'effectue avec une expansion rapide de l'énergie de l'impulsion, comme le montrent les figures FIG (5.7).

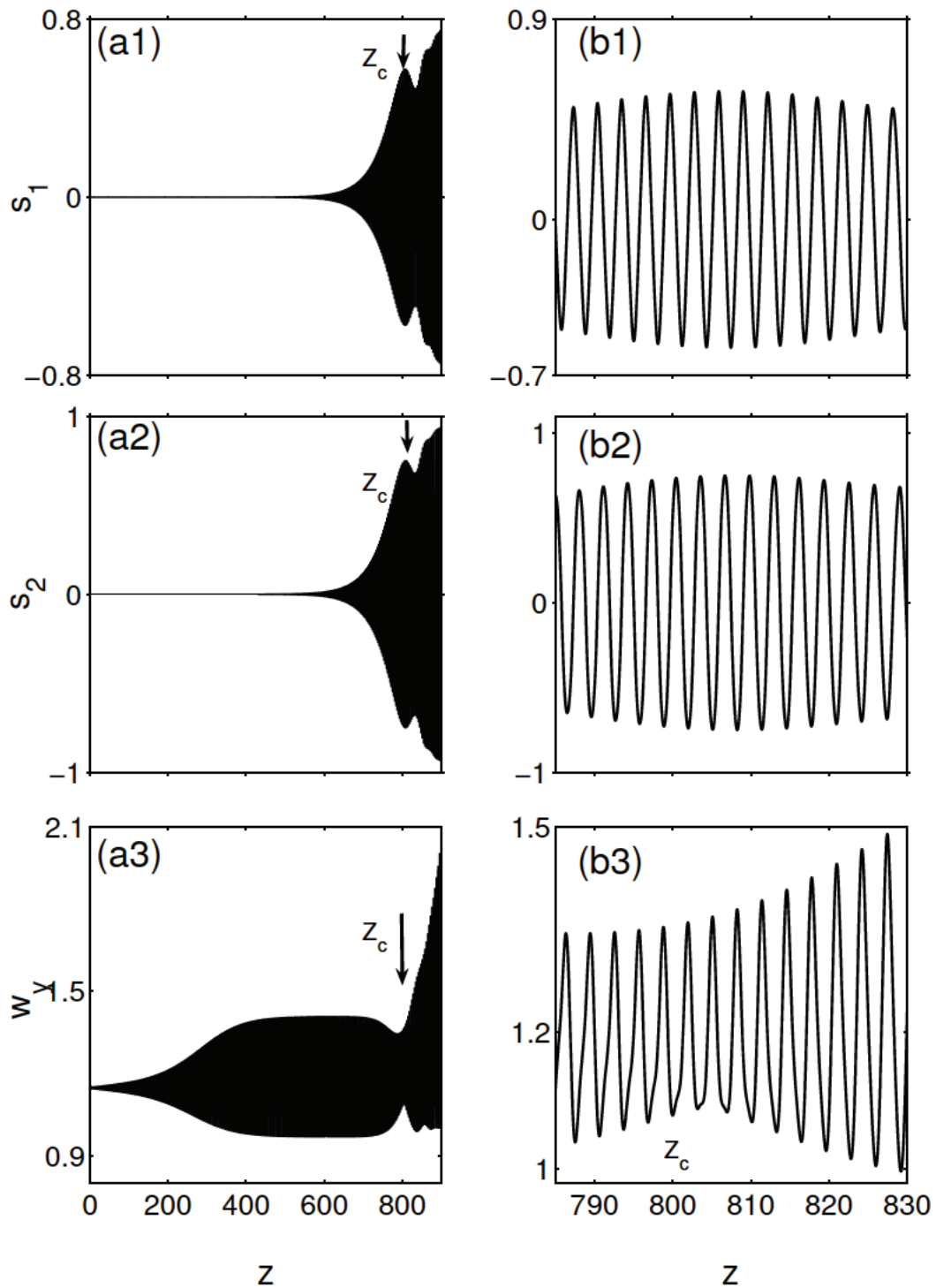


FIG. 5.9 Evolution des paramètres de la balle de lumière, avec $\epsilon = 0.59$, $D = 6$, $\delta = -0.4$, $\nu = -0.08$, $\mu = -0.1$ et $\beta = 0.1$, les figures $b(i)$, $i = 1, 2, 3$ représentent une vue de près des $a(i)$.

5.6 Effet des termes quintiques sur les oscillations

A ce stade de notre étude, nous allons étudier l'influence des termes quintiques sur les balles de lumière oscillantes. Nous allons d'abord nous intéresser à l'action de la saturation de la nonlinéarité sur l'oscillation des impulsions. A cette fin, nous avons fixé $\epsilon = 0.6$, $D = 6$, $\mu = -0.1$, $\beta = 0.1$, $\delta = -0.4$ et pour différentes valeurs de ν ($-0.07, -0.08, -0.09$), nous avons suivi la dynamique de l'énergie en fonction de la distance de propagation z . Le résultat de cette analyse détaillée est représenté sur la figure FIG (5.10) ; les figures b(i), $i = 1, 2, 3$; représentent une vue de près des figures a(i). Evidemment, nous avons choisi les valeurs de ν pour lesquelles, le mouvement de la balle de lumière est oscillant, mais cette dynamique change lorsqu'on modifie la valeur de ν . Sur les figures FIG (5.10 b(1)-b(2)), nous remarquons que lorsqu'on diminue la valeur de ν de -0.07 à -0.08 , l'amplitude d'oscillation de l'énergie augmente. Dans le cas des figures (b(1) et b(2)), le mouvement est toujours périodique et stable, mais la situation est tout à fait différente pour la figure b(3). Ici la dynamique générale reste, c'est-à-dire l'énergie augmente pour des valeurs de la saturation de la nonlinéarité plus petites, par contre la variation de l'énergie n'est pas conservée tout au long de la propagation. La figure a(3) reflète trois dynamiques bien différentes, de $z = 400$ à $z = 1400$, nous avons un mouvement oscillatoire périodique de forte énergie, qui est semi-stable. Ensuite de $z = 1400$ à $z = 2000$, nous assistons à une rapide décroissance de l'énergie, qui correspond à un changement de la dynamique interne de la balle de lumière. Et enfin de $z = 2000$ à $z = 4000$, l'énergie se conserve à nouveau entre un minimum et un maximum et l'impulsion rentre dans une dynamique oscillatoire quasi-périodique stable sur de longue distance.

Quant à l'effet de la saturation du gain non linéaire, elle est décrite par la figure FIG (5.11) où les valeurs des paramètres sont $\epsilon = 0.6$, $D = 6$, $\nu = -0.08$, $\beta = 0.1$, $\delta = -0.4$ et pour différentes valeurs de μ ($-0.1, -0.09, -0.085$), nous avons reproduit l'évolution de l'énergie en fonction de la distance de propagation. L'énergie de la balle de lumière augmente d'un facteur très impressionnant lorsque le terme de saturation du gain croît, ceci est visible sur les figures FIG (5.11) b(1), b(2) et b(3). La dynamique interne de l'impulsion est conservée pour chaque valeur de μ , mais ce comportement change d'une valeur de μ à une autre. Ainsi pour $\mu = -0.1$, la balle

de lumière évolue en oscillant entre deux valeurs fixes de l'énergie, ce mouvement reste stable et est périodique, par contre, sur la figure b(2) et b(3), pour $\mu = -0.09$ et -0.085 respectivement, la balle de lumière oscille entre six valeurs constantes de l'énergie. Dans cette situation, le mouvement interne est quasi-périodique et stable quelle que soit la distance de propagation.

L'analyse de la figure FIG (5.10) et FIG (5.11) permet de conclure que les paramètres quintiques influent très fortement sur la dynamique interne de la balle de lumière oscillante, mais de façon différente. Ce qui impliquera, en pratique un contrôle minutieux de ces termes dans la dynamique des balles de lumières oscillantes.

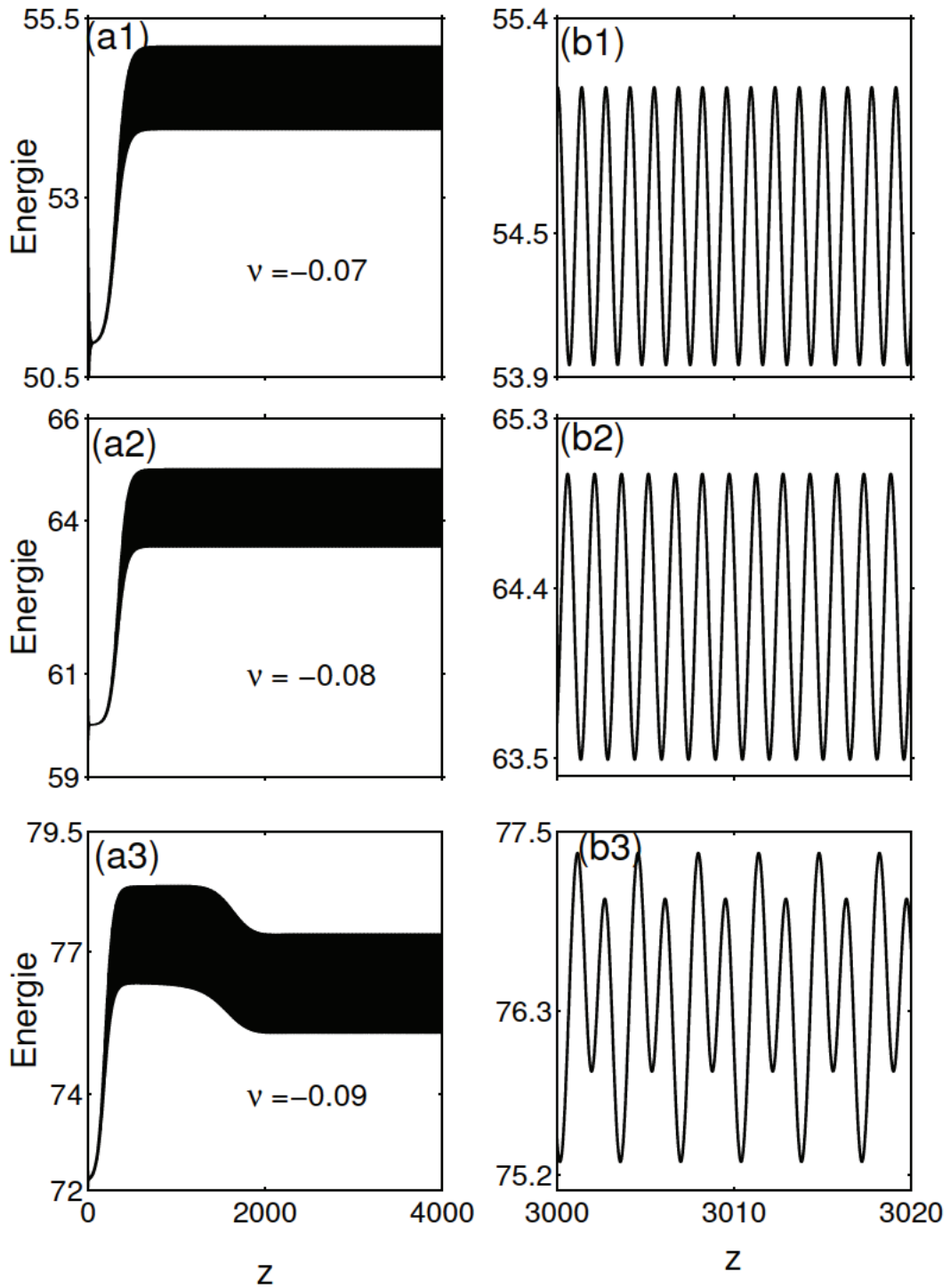


FIG. 5.10 Evolution de l'énergie de la balle de lumière oscillante pour différente valeur de la saturation de l'effet Kerr ν , avec $\epsilon = 0.59$, $D = 6$, $\delta = -0.4$, $\mu = -0.1$ et $\beta = 0.1$, les figures $b(i)$, $i = 1, 2, 3$ représentent une vue de près des $a(i)$.

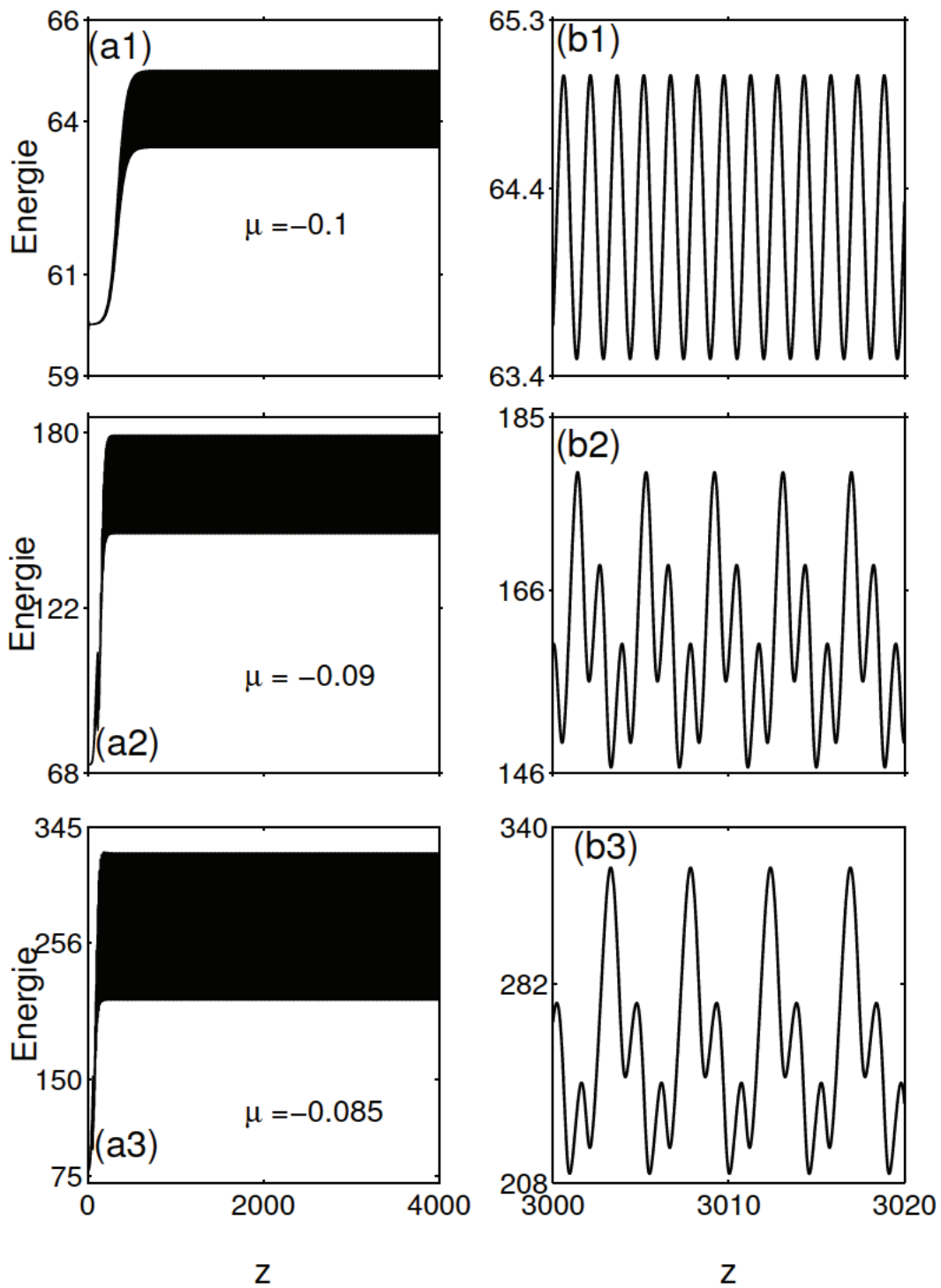


FIG. 5.11 Evolution de l'énergie de la balle de lumière oscillante pour différente valeur de la saturation du gain non linéaire μ , avec $\epsilon = 0.59$, $D = 6$, $\delta = -0.4$, $\nu = -0.08$ et $\beta = 0.1$, les figures $b(i)$, $i = 1, 2, 3$ représentent une vue de près des $a(i)$.

5.7 Conclusion

Nous nous sommes intéressés dans cette partie, à la dynamique des solitons dissipatifs spatio-temporels; cette étude révèle la richesse des comportements des impulsions oscillantes et l'influence des termes cubiques et quintiques de l'équation de Ginzburg-Landau Complexe. Par la méthode des opérateurs de projection et le choix d'une fonction d'essai spécifique, nous avons pu mettre en évidence les balles de lumière périodiques et quasi-périodiques dans l'espace des paramètres de l'équation GL3D. En perturbant les paramètres de la balle de lumière nous avons mis en clarté des balles de lumière en autorotation qui entrent en expansion au bout d'un certain temps, et nous avons montré que le bruit a une importance sur l'oscillation des impulsions. La méthode des coordonnées collectives devient particulièrement utile, car elle offre la possibilité de reproduire facilement une grande variété de perturbations de profil d'impulsion, qui seraient difficilement réalisables par toute autre méthode. Nous pensons que ces études numériques aideront à expliquer certains comportements dans les systèmes lasers à grande ouverture (VCSEL) "Vertical-Cavity Surface-Emitting Laser" avec lesquels les balles de lumière sont activement recherchées sur le plan expérimental.

A terme, ces résultats obtenus grâce à la méthode semi-analytique des opérateurs de projection, qui est une étude approchée, devront être confirmés par d'autres méthodes variationnelles ou par des études purement numériques. Nous avons déjà entamé des études dans cette direction c'est-à-dire par la résolution exacte de l'équation GL3D pour essayer de trouver toutes ces dynamiques décrites dans ce chapitre.

Conclusion et perspectives

Ce sujet de thèse s'inscrit dans le contexte général des solitons spatio-temporels à $(3+1)D$ ou balles de lumière, dont nous pouvons ici en rappeler la problématique. Quel modèle physique d'un système optique choisir comme équation de propagation ? Quel dispositif compatible avec le choix de l'équation, permettra d'expérimenter les balles de lumière ? Questions difficiles, car jusqu'à présent, les solitons spatio-temporels ont été examinés théoriquement seulement dans des divers modèles de base régis par l'équation de Schrödinger non linéaire à $(3+1)D$, qui procurent la plupart du temps une stabilité marginale et l'effondrement des solitons. Et les seuls milieux dans lesquels les solitons spatio-temporels ont été déjà observés expérimentalement sont des cristaux optiques disposant d'une nonlinéarité quadratique, mais seulement à $(2+1)D$ (ou $(1+1+1)D$).

Ainsi, dans notre travail, nous nous sommes intéressés à la première question et avons essayé de donner des pistes pour la deuxième. Au vu des résultats purement numériques récents des travaux de José Soto-Crespo et al [116, 144], notre choix s'est porté sur l'équation cubique quintique de Ginzburg-Landau complexe, étendue à trois dimensions. Cette équation s'applique aux systèmes dissipatifs dont nous pensons qu'ils sont les milieux appropriés pour la mise en œuvre expérimentale des balles de lumière. Mais l'équation de Ginzburg-Landau complexe à $(3+1)D$ est analytiquement insoluble et la résolution numérique exacte prend un temps considérable.

Pour pallier cette difficulté, nous avons utilisé une méthode semi-analytique la méthode des opérateurs de projection qui consiste à approcher le champ exact par une fonction d'essai qui est fonction des paramètres physiques du soliton. Cette méthode

jusqu'à présent, était appliquée à la résolution des problèmes unidimensionnels. Nous avons appliqué cette procédure à l'équation de Ginzburg-Landau complexe à $(3+1)D$, pour la recherche des balles de lumière. Ainsi pour un choix bien défini de la fonction d'essai, et des paramètres de l'équation CGLE, nous avons mis en évidence les solutions spatio-temporelles stationnaires. De même, nous avons prédit l'existence des solutions oscillantes de balles de lumière dans des domaines très proches des domaines stationnaires. La comparaison des résultats avec ceux obtenus par la méthode purement numérique, donne un bon accord qualitatif et quantitatif. Il ressort de notre étude que la méthode des opérateurs de projection est une approche très pratique qui permet d'établir approximativement le domaine d'existence des balles de lumière stables dans l'espace des paramètres de l'équation cubique quintique de Ginzburg-Landau complexe.

Nous nous sommes intéressés aussi à la dynamique des balles de lumière oscillantes. Ainsi, par le choix d'une fonction d'essai spécifique, nous avons obtenu des balles de lumière qui oscillent périodiquement et quasi-périodiquement dans l'espace des paramètres de l'équation CGLE. En perturbant les paramètres de la balle de lumière nous avons mis en lumière des balles de lumière en autorotation qui entrent en expansion au bout d'un certain temps. Nous avons montré que le bruit a une importance sur l'oscillation des impulsions et également mis en évidence, durant cette étude, l'influence des termes cubiques et quintiques sur le mouvement des balles de lumière oscillantes.

Cette méthode des opérateurs de projection est utile, car elle nous offre la possibilité de reproduire facilement une grande variété de perturbations de profil d'impulsion, qui seraient difficilement réalisables par toute autre méthode. L'avantage de notre méthode est son gain de temps par rapport aux autres procédures variationnelles et sa facilité de mise à exécution. De plus, cette méthode permet de révéler des dynamiques séquentielles qui sont difficiles à déceler par les méthodes numériques. Mais la validité de notre étude repose sur le choix minutieux de la fonction d'essai.

Finalement, notre étude suggère la possibilité de créer des balles de lumière dans des milieux homogènes, isotropes dotés de pertes, d'une nonlinéarité et d'un gain saturables. Mais en réalité il est difficile de trouver un tel milieu qui regroupe à la

fois toutes ces caractéristiques ; ce qui explique le fait que jusqu'à présent les balles de lumière n'ont pas encore été démontrées expérimentalement dans les milieux à gain. Après beaucoup d'années de progrès théoriques, l'observation de vrais solitons à $(2+1+1)D$ ou $(3+1)D$ (balles de lumière), reste un grand défi.

Récemment beaucoup d'attention a été portée à la dynamique transversale en optique non linéaire dans des cavités, à savoir, l'étude d'effets transversaux dans des cavités optiques passives et actives, comme la formation de modèles et de structures localisées dans des systèmes dissipatifs [122]. Dans de tels systèmes, l'une des équations prototypes de la dynamique est l'équation de Ginzburg-Landau complexe. Au vu de nos résultats et avec les progrès technologiques, nous pensons qu'à terme la matérialisation expérimentale de ces solitons spatio-temporels se fera, et nous pensons que les matériaux semi-conducteurs avec d'énormes qualités (fortes nonlinéarités, faibles dimensions, ...) sont des milieux candidats très propices à l'expérimentation des balles de lumière. La réalisation expérimentale des balles de lumière sera sans doute une énorme avancée technologique dans la communauté de l'optique en particulier et de la physique en général. Les résultats obtenus en optique pourront servir de guide dans la recherche de solitons multidimensionnels dans d'autres secteurs de la physique. Le domaine qui est le plus proche de l'optique non linéaire en terme de la description théorique et qui a attiré beaucoup d'attention au cours des dernières années, est la condensation de Bose-Einstein (CBE), dans lequel des solitons brillants et noirs ont été observés.

Ce travail peut être approfondi et nous sommes persuadés que ces applications seront très riches dans les domaines de la physique, la chimie et la biologie, où le comportement dynamique est décrit par l'équation de Ginzburg-Landau Complexe. A titre d'exemple nous pouvons mentionner les fonctions de traitement parallèle, la réalisation des mémoires tampons optiques, des opérations logiques, du routage dynamique de l'information, et enfin du cryptage et du décryptage à haut débit sans oublier la régénération des bits optiques.

La résonance des solitons dissipatifs

La caractéristique principale des solitons dissipatifs est qu'ils existent seulement quand il y a un approvisionnement continu en énergie par une source externe. Cependant, l'énergie du soliton peut augmenter indéfiniment pour certaines valeurs des paramètres du système. Ce processus qui ressemble beaucoup au phénomène de résonance dans la théorie d'oscillateurs est appelé *résonance des solitons dissipatifs*. En utilisant la méthode des coordonnées collectives nous avons trouvé une relation approximative entre les paramètres de l'équation CGLE où la résonance se manifeste.

Notre approche sur l'étude de la résonance des solitons dissipatifs s'applique aux systèmes dynamiques non linéaires dirigés par l'équation cubique quintique de Ginzburg-Landau complexe, qui suit :

$$\psi_z - i\frac{1}{2}D\psi_{tt} - i\gamma|\psi|^2\psi - i\nu|\psi|^4\psi = \delta\psi + \beta\psi_{tt} + \epsilon|\psi|^2\psi + \mu|\psi|^4\psi. \quad (\text{A.1})$$

La fonction d'essai, utilisée pour approcher les solutions localisées stationnaires de l'équation CGLE, après plusieurs tentatives est la suivante :

$$\psi(t, z) = A \exp\left(-\frac{t^2}{w^2} - \frac{t^4}{w^4} + ict^2 + ip\right), \quad (\text{A.2})$$

où A représente l'amplitude du soliton, w sa largeur, c sa dérive de fréquence et p la constante linéaire de phase.

L'énergie du soliton est donné par l'expression suivante

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dt. \quad (\text{A.3})$$

$$Q = 1.0508256A^2w. \quad (\text{A.4})$$

La densité dénergie, ρ est

$$\rho = |\psi|^2 \quad (\text{A.5})$$

$$\rho = A^2 \exp\left(-\frac{2t^2(w^2 + t^2)}{w^4}\right) \quad (\text{A.6})$$

Le flux correspondant, j est

$$j = \frac{i}{2} (\psi\psi_t^* - \psi_t\psi^*) D \quad (\text{A.7})$$

$$j = 2 A^2 c t \exp\left(-\frac{2t^2(w^2 + t^2)}{w^4}\right) D \quad (\text{A.8})$$

En appliquant la méthode des opérateurs de projections dans *l'approximation bare*, appliquée à la fonction d'essai (A.2), nous obtenons les équations variationnelles suivantes :

$$\begin{aligned} A_z &= A\delta + 0.8857602A^3\epsilon - 3.184220\frac{A\beta}{w^2} - 0.171542Aw^2\beta c^2 + 0.7811281A^5\mu - ADc \\ w_z &= -0.2650755wA^2\epsilon + 2.630750\frac{\beta}{w} - 0.815375w^3\beta c^2 - 0.2968765wA^4\mu + 2wDc \\ c_z &= -1.393998\frac{\gamma A^2}{w^2} + 4.904643\frac{D}{w^4} - 2Dc^2 - 1.646144\frac{A^4\nu}{w^2} - 18.31443\frac{\beta c}{w^2} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Essayons d'exprimer ces équations variationnelles en fonction de l'énergie Q

$$\begin{aligned} Q &= 1.0508256A^2w \\ Q_z &= 2 * 1.0508256AwA_z + 1.0508256A^2w_z \\ Q_z &= 2.1017AwA_z + 1.0508256A^2w_z \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} Q_z &= Q \left(2\delta - 3.737\frac{\beta}{w^2} - 1.158\beta w^2 c^2 + 1.433\frac{Q\epsilon}{w} + 1.145\frac{Q^2}{w^2}\mu \right) \\ w_z &= w \left(2Dc + 2.630\frac{\beta}{w^2} - 0.815\beta w^2 c^2 - 0.252\frac{Q\epsilon}{w} - 0.268\frac{Q^2}{w^2}\mu \right) \\ c_z &= \frac{1}{w^2} \left(-2Dc^2 w^2 + 4.904\frac{D}{w^2} - 1.326\frac{\gamma Q}{w} - 1.490\frac{Q^2\nu}{w^2} - 18.314\beta c \right) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Recherche de la courbe de résonance analytiquement

Proche de la courbe de résonance nous avons ;

$Q \rightarrow \infty$, $w \rightarrow \infty$ et $c \rightarrow 0$

L'équation (A.11) devient alors

$$\begin{aligned} Q_z &= Q \left(2\delta - 1.158\beta w^2 c^2 + 1.433 \frac{Q\epsilon}{w} + 1.145 \frac{Q^2}{w^2} \mu \right) \\ w_z &= w \left(-0.815\beta w^2 c^2 - 0.252 \frac{Q\epsilon}{w} - 0.268 \frac{Q^2 \mu}{w^2} \right) \\ c_z &= \frac{1}{w^2} \left(-2Dc^2 w^2 - 1.326 \frac{\gamma Q}{w} - 1.490 \frac{Q^2 \nu}{w^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Les points fixes proche de la courbe de résonance sont définis par :

$$\begin{aligned} \left(2\delta - 1.1585\beta w^2 c^2 + 1.4336 \frac{Q\epsilon}{w} + 1.1459 \frac{Q^2}{w^2} \mu \right) &= 0 \\ \left(-0.8153\beta w^2 c^2 - 0.2523 \frac{Q\epsilon}{w} - 0.2689 \frac{Q^2 \mu}{w^2} \right) &= 0 \\ \left(-2Dc^2 w^2 - 1.3266 \frac{\gamma Q}{w} - 1.4908 \frac{Q^2 \nu}{w^2} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Sachant que, proche de la courbe de résonance, $\frac{Q}{w}$ et $c w$ tendent vers des constantes, et en résolvant les deux premières équations de (A.13) relative à $\frac{Q}{w}$ et $c w$, Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{Q}{w} &= \frac{-0.4014k}{\mu} \\ c w &= -\sqrt{\frac{0.4317\delta\mu - 0.0311k\epsilon}{\beta\mu}}, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

où

$$k = 1.4611\epsilon + \sqrt{2.1348\epsilon^2 - 8.1254\delta\mu}. \quad (\text{A.15})$$

Nous substituons maintenant cette équation dans la troisième équation de (A.13), nous obtenons ensuite la courbe de résonance en fonction des termes de l'équation CGLE.

$$D = \frac{k\beta(0.2402k\nu - 0.5325\gamma\mu)}{\mu(0.0622k\epsilon - 0.8634\delta\mu)}. \quad (\text{A.16})$$

Proche de la courbe de résonance définie par l'équation (A.16), l'énergie du soliton de même que sa largeur augmentent indéfiniment.

En fonction des paramètres de l'équation CGLE, donc du système, la résonance peut apparaître en régime de dispersion normale (D positive) qui est le cas le plus courant, mais peut aussi se produire en régime de dispersion anormale en changeant le système. Ces résultats peuvent être utiles dans la construction des systèmes laser passifs à mode bloqué qui produisent des impulsions fortes énergétiques, sans besoin d'amplificateurs supplémentaires.

Liste des Publications

Publications

P1. J. Fatome, S. Pitois, A. Kamagaté ; G. Millot, D. Massoubre and J-L. Oudar,
All-Optical Reshaping Based on a Passive Saturable Absorber Microcavity Device for Future 160-Gb/s Applications,

Photonics Technology Letters IEEE Volume 19, Issue 4, Page(s) :245 - 247 (2007).

P2. A. Kamagaté, P. Grelu, P. Tchofo Dinda,

Solitons dissipatifs de l'équation de Ginzburg-Landau Complexe (CGLE) à (3+1)D : balles de lumière et pulsations,

NL Pub. ISBN : 2-9516773-7-5 EAN : 9782951677371 Page(s) :85 - 89 (2008).

P3. J. Atangana, A. Kamagaté, P. Tchofo-Dinda, A. Labruyère and T.C. Kofane,

Effective characterization of the phase and intensity profiles of asymmetrically distorted light pulses in optical fiber systems,

J. Opt. Soc. Am. B Vol.26, N° 3 Pages 371-382 (2009).

P4. A. Kamagaté, Ph. Grelu, P. Tchofo-Dinda, J.M. Soto-Crespo, N. Akhmediev,

Stationary and pulsating dissipative light bullets from a semi-analytical approach,

Physical Review E 79, 026609 (2009).

P5. A. Kamagaté, Ph. Grelu, P. Tchofo-Dinda,

Pulsating and rotating dissipative light bullets in (3+1)D CGLE through collective variable method : in preparation,

International Conference Proceedings

J. FATOME, S. PITOIS, A. KAMAGATE, D. MASSOUDRE, G.MILLOT AND J-L. OUDAR, (oral)

"All-optical reshaping at 160-Gbit/s using a passive saturable absorber-based microcavity device",
ECOC'06, sept. 24-28, Cannes, France, paper Th1.4.3.

A. KAMAGATE, PH.GRELU, P. TCHOFO-DINDA, J.M. SOTO-CRESPO, AND N. AKHMEDIEV, (poster)

"Stationary and Pulsating dissipative light bullets from a semi-analytical approach",
EOS2008, paper TOM 6 834, Annual congress of the European Optical Society, 29 Sept-2 Oct, Paris (2008).

A. KAMAGATE, PH. GRELU, P. TCHOFO-DINDA, J.M. SOTO-CRESPO, N. AKHMEDIEV, (poster)

"Stationary and pulsating optical light bullets in dissipative nonlinear systems",
ICOPA'08, Conference Proceedings pp. 135-137, International Conference on Optics, Photonics and their Applications, Algiers, Algeria (2008).

A. KAMAGATE, PH.GRELU, P. TCHOFO-DINDA, J.M. SOTO-CRESPO, N. AKHMEDIEV, (oral)

"Pulsating Dissipative Light Bullets",
CLEO 2009, paper EH2.5 WED, Conference on Lasers and Electro-Optics Europe, 14-19 June 2009, München, Germany.

Participation in International Workshop

A. KAMAGATE, PH.GRELU, P. TCHOFO-DINDA, (poster)

"Pulsating and rotating dissipative light bullets in (3+1)D CGLE through collective variable methods",

International School on Complexity XII, "Complex Phenomena in Nonlinear Physics", Ettore Majorana Foundation and Centre for Scientific Culture, Erice (Sicily,IT), 3-7 October 2009.

National Conferences

A. KAMAGATE, A. LABRUYERE, PH.GRELU, P. TCHOFO-DINDA, (Poster)

Les Solitons dissipatifs de l'équation Ginzburg-Landau Complexe,

JED 2007 (Dijon 9 et 10 mai 2007).

A. KAMAGATE, J.ATANGANA, P. TCHOFO-DINDA, (Poster)

Caractérisation exacte de la phase et du profil d'intensité des impulsions lumineuses fortement et asymétriquement déformées,

JED 2007 (Dijon 9 et 10 mai 2007).

A. KAMAGATE, PH.GRELU, P. TCHOFO-DINDA, (Oral + Poster)

Solitons dissipatifs de l'équation de Ginzburg-Landau Complexe (CGLE) à $(3+1)D$: balles de lumière et pulsations,

NL Pub. ISBN : 2-9516773-7-5 EAN : 9782951677371 Page(s) :85-89, RNL 2008 (Paris 26 et 27 Mars 2008).

A. KAMAGATE, PH.GRELU, P. TCHOFO-DINDA, (Oral)

Balles de lumière Stationnaires et Oscillantes de l'équation Ginzburg-Landau Complexe (CGLE) à $(3+1) D$,

JED 2008 (Besançon 15 et 16 Mai 2008).

A. KAMAGATE, PH.GRELU, P. TCHOFO-DINDA, (Poster)

Balles de lumière Stationnaires et Pulsations par une approche variationnelle,

JDS 2008 (Dijon 15 juin 2008).

A. KAMAGATE, PH.GRELU, P. TCHOFO-DINDA, (Oral)

Dynamique des balles de lumière oscillantes,

JED 2009 (Dijon 14 et 15 Mai 2009).

A. KAMAGATE, PH.GRELU, P. TCHOFO-DINDA, (Poster)

Solitons Optiques,

JDS 2009 (Dijon 7 juin 2009).

Bibliographie

- [1] H. HAKEN. Synergetics. An introduction. Nonequilibrium phase transitions and self-organization in physics, chemistry and biology. Springer-Verlag, New York, 1977.
- [2] Y. SILBERBERG,. Collapse of optical pulses. Opt. Lett., 15 :1282–1284, 1990.
- [3] A. HASEGAWA, and F. TAPPERT. Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. i. anomalous dispersion,. Appl. Phy. Lett., 23 :142, 1973.
- [4] L. F. MOLLENAUER, R. H. STOLEN and J. P. GORDON . ,experimental observation of picosecond pulse narrowing and solitons in optical fibers. Phys. Rev. Lett., 45 :1095, 1980.
- [5] A. BARTHELEMY, S. MANEUF, and C. FROEHLI . Propagation soliton et auto-confinement de faisceaux laser par non linearite optique de kerr,. Optics Communications, 55 :201–204, 1985.
- [6] J. S. AITCHISON, A. M. WEINER, Y. SILBERBERG, M. K. OLIVER, J. L. JACKEL, M. E. LEAIRD, E.M. VOGEL, and P. W. E. SMITH. Observation of spatial solitons in a nonlinear glass waveguide,. Opt. Lett., 15 :471, 1990.
- [7] L. BERGE. Wave collapse in physics : principles and applications to light in plasma waves,. Phys. Rep., 303 :259–370, 1998.
- [8] B. A. MALOMED, D. MIHALACHE, F. WISE, A. and L. TORNER. Spatiotemporal optical solitons,. J. Opt. B : Quantum Semiclass. Opt., 7 :R53–R72, 2005.
- [9] M. TRIPPENBACH, M. MATUSZEWSKI, B. A. and ALOMED. Stabilization of three-dimensional matter-waves solitons in an optical lattice,. Europhys. Lett., 70(8), 2005.
- [10] L. TORNER, and A. BARTHELEMY. Quadratic solitons : recent developments. IEEE J. Quantum Electron, 39 :22–30, 2003.
- [11] Y. F. CHEN, K. BECKWITT, and B. A. MALOMED. Criteria for experimental observation of multidimensional optical soliton in saturable media,. Phys. Rev. E, 70 :046610, 2004.
- [12] B. A. MALOMED, P. DRUMMOND, H. HE, A. BERNTSON, D. ANDERSON, and M. LISAK. Spatiotemporal solitons in multidimensional optical media with a quadratic nonlinearity,. Phys. Rev. E., 56 :4725–4735, 1997.

- [13] Y. LARIONOVA, and C. WIESS. Spatial semiconductor resonator solitons with optical pumping,. Opt. Exp., 13(10711–10716), 2005.
- [14] Y. TANGUY, T. ACKEMANN, W. J. FIRTH, and R. JAGER. Realization of a semiconductor-based cavity solitons lasers. Phys. Rev. Lett., 100 :013907, 2008.
- [15] S. BARLAND, J. R. TREDICCE, M. BRAMBILLA, L. A. LUGIATO, S. BALLE, M. GIUDICI, T. MAGGIPINTO, L. SPINELLI, G. TISSONI, T. KNOLD, M. MILLER, and R. JAGER. Cavity solitons as pixels in semiconductor microcavities,. Nature, 419 :669–702, 2002.
- [16] W. J. FIRTH, and C. O. WEISS. Cavity and feedback solitons. Opt. Photon. News., 13 :54–58, 2002.
- [17] N. N. ROSANOV, and A. ANKIEWICZ . Spatial Hysteresis and Optical Patterns. Springer, Berlin, 2002.
- [18] V. SKARKA, and N.B. ALEKSIĆ. Stability criterion for dissipative soliton solutions of the one-, two- , and three-dimensional complex cubic-quintic ginzburg-landau equations. Phys. Rev. Lett., 76 :42–65, 2006.
- [19] P. GRELU, J. M. STO-CRESPO, and N. AKHMEDIEV. Solitons optiques spatio-temporels dissipatifs. Opt. Express, 13 :9352, 2005.
- [20] E. N TSOY , and N. AKHMEDIEV. Bifurcations from stationary to pulsating solitons in the cubic- quintic complex ginzburg-landau equation. Phys. Lett. A, 343 :417 –422, 2005.
- [21] P. A. E. M. JANSSEN . Nonlinear four-waves interactions and freak waves,. Journal of Physical Oceanography, pages 863–884, 2002.
- [22] L. MORICONI,. Charge density wave-assisted tunneling between hall edge states,. Phys. Rev. B., 64 :195118, 2001.
- [23] W. KETTERLE . Nobel lecture : When atoms behave as waves : Bose-einstein condensation and the atom laser,. Rev. Mod. Phys., 74(1131–1151), 2002.
- [24] F. DOMINGUEZ-ADAME, A. SANCHEZ, and Y. S. KIVSHAR. Soliton pinning by long-range order in aperiodic systems,. Phys. Rev. E, 52 :R2183–R2186, 1995.
- [25] F. WISE, and P. Di TRAPANI . The hunt of light bullets - spatiotemporal solitons. Optics and Photonics News., 13 :28–32, 2002.
- [26] J. S. RUSSELL. report on waves. Report of the Fourteenth Meeting of the British Association for the Advancement of Science Held, pages 311–390, 1844.
- [27] D. J. KORTEWEG, and G. de VRIES. On the change of the form of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of water surface waves,. Philos. Magazine., 39(422–443), 1895.
- [28] E. FERMI J. PASTA and S. ULMA. Studies of non linear problems. Document LA, 1940, 1955.
- [29] N. J. ZABUSKY , and M. D. KRUSKAL. Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. Phys. Rev. Lett., 15 :240–243, 1965.

-
- [30] N. J. ZABUSKY , and C. J. GALVIN. Shallow water waves, the korteweg-de vries equation and solitons. J. Fluid Mech., 47 :811–824, 1971.
- [31] BULLOUGH , and CAUDREY . Solitons and the Korteweg de Vries equation : integrable systems in 1834-1995. acta Applicandae Mathematica, 39 :139–228, 1995.
- [32] C. S. GARDNER, J. M. GREENE, M. D. KRUSKAL, and R. M. MIURA. Method for solving the korteweg-de vries equation,. Phys. Rev.Lett., 19 :1095–1097, 1967.
- [33] M. SATO, and Y. SATO. Soliton equations as dynamical systems on infinite dimensional grassmann manifold, nonlinear partial differential equations in applied science. North-Holland Math. Stud., 81 :42–65, 1982.
- [34] J. W. FLEISCHER, N. K. EFREMIDIS, T. CARMON, D. N. CHRISTODOULIDES, and M. SEGEV. Solitons in optically-induced nonlinear photonic lattices. Optics and Photonics News, Special Issue, 13 :37–49, 2002.
- [35] DARZIN, and JOHNSON . Solitons : An introduction. Cambridge university press, 1983.
- [36] V. E. ZAKHAROV, and A. B. SHABAT. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media. Sov. Phys. JETP, 34 :62–69, 1972.
- [37] G. P. AGRAWAL. Nonlinear Fiber Optics 3rd Edition. New York Academic press, 2001.
- [38] G. MILLOT, and P. TCHOFO-DINDA. Nonlinear effects,. Encyclopedia of Modern Optics Elsevier Ltd., 12 :467, 2004.
- [39] G. I. STEGEMAN, and M. , SEGEV. Optical spatial solitons and their interactions : Universality and diversity,. Science, 286 :1518–1523, 1999.
- [40] H. LEBLOND, B. A. MALOMED, and D. MIHALACHE. Three-dimensional vortex solitons in quasi-two-dimensional lattices ,. Phys. Rev. E , 76(026604–026614), 2007.
- [41] J. W. FLEISCHER, M. SEGEV, N. K. EFREMIDIS, and D. N. CHRISTODOULIDES,. Observation of two-dimensional discrete solitons in optically induced nonlinear photonic lattices. Nature, 422 :147–140, 2003.
- [42] D. E. PELINOVSKY, A. V. BURYAK, and Y. S. KIVSHAR. Instability of solitons governed by quadratic nonlinearities. Phys. Rev. Lett., 75 :591–595, 1995.
- [43] M. A. KARPIERZ,. Solitary waves in liquid crystalline waveguide. Phys. Rev. E., 66(036603), 2002.
- [44] V. COUDERC, E. L. LAGO, C. De ANGELIS, and F. GRINGOLI. Trapping of a weak probe through coupling with a two-color quadratic spatial soliton,. Opt. Commun., 203 :421 –425, 2002.
- [45] F. REYNAUD, and A. BARTHELEMY. Optically controlled interaction between two fundamental soliton beams. Europhys. Lett., 12 :401–405, 1990.

- [46] R. D. L. FUENTE, A. BARTHELEMY, and C. FROEHLY, Spatial-soliton-induced guided waves in a homogeneous nonlinear kerr medium. Optics Letters, 16 :793–795, 1991.
- [47] J. S. AITCHISON, A. M. WEINER, Y. SILBERBERG, D. E. LEAIRD, M. K. OLIVER, J. L. JACKEL, and P. W. E. SMITH. Experimental observation of spatial soliton interactions,. Opt. Lett., 16 :15–17, 1991.
- [48] C. SULEM and P. L. SULEM. The nonlinear Schrodinger equation : self-focusing and wave collapse. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [49] O. BANG, J. J. RASMUSSEN, and P. L. CHRISTIANSEN. Subcritical localization in the discrete nonlinear schrodinger- equation with arbitrary power nonlinearity,. Nonlinearity, 7 :205–218, 1994.
- [50] R. Y. CHIAO, E. GARMIRE, and C. H. TOWNES. Self-trapping of optical beams,. Phys. Rev. Lett., 13 :479–482, 1964.
- [51] R. Y. CHIAO, E. GARMIRE, and C. H. T. OWNES. Self-trapping of optical beams. Phys. Rev. Lett., 13 :479–482, 1964.
- [52] C. J. BUDD, S. CHEN, and R. D. R. USSELL. New self-similar solutions of the nonlinear schrodinger equation with moving mesh computations. J. Comput. Phys., 152 :756–789, 1999.
- [53] G. FIBICH, and G. PAPANICOLAOU. Self-focusing in the perturbed and unperturbed nonlinear schrödinger equation in critical dimension. SIAM J. Appl. Math., 60 :183–240, 1999.
- [54] V. N TSYTOVICH, and R. BINGHAM. Arrest of wave collapse and transitional damping. Comments Plasma Phys. Controlled Fusion, 14 :361–368, 1992.
- [55] O. BANG, D. EDMUNDSON, and W. KROLIKOWSKI. Collapse of incoherent light beams in inertial bulk kerr media,. Phys. Rev. Lett., 83 :5479–5482, 1999.
- [56] K. D. MOLL, A. L. GAETA, and G. FIBICH. Self-similar optical wave collapse : observation of the townes profile,. Phys. Rev. Lett., 90 :203902, 2003.
- [57] J. T. MANASSAH. Collapse of the two-dimensional spatial soliton in a parabolic- index media,. Opt. Lett., 17 :1259–1261, 1992.
- [58] C. SUN C. BARSİ and J. W. FLEISCHER. Peakon profiles and collapse-bounce cycles in self-focusing spatial beams,. Opt. Express, 16 :20676–20686, 2008.
- [59] D. E. EDMUNDSON, and R. H. ENNS. Particlelike nature of colling three-dimensional optical solitons. Phys. Rev. A, 51 :2491–2498, 1995.
- [60] N. AKHMEDIEV, and J. M. SOTO-CRESPO. Generation of a train of three-dimensional optical solitons in a self- focusing medium,. Phys. Rev. A, 47 :1358–1364, 1993.
- [61] H. MEMG, G. SALAMO, M. F. SHIH, and M. SEGEV. Coherent collisions of photorefractive solitons,. Opt. Lett., 22(448–450), 1997.
- [62] X. LIU, L. J. QIAN, and F. W. WISE. Generation of optical spatiotemporal solitons,. Phys. Rev. Lett., 82(4631), 1999.

-
- [63] L. JANKOVIC, P. ABOUSSOUAN, M. AFFOLTER, G. STEGEMAN, and M. KATZ. Quadratic soliton collisions,. Opt. Express, 12 :5562–5576, 2004.
- [64] N. AKHMEDIEV, and A. ANKIEWICZ . Dissipative Solitons. Springer, Berlin, 2005.
- [65] N. AKHMEDIEV, and A. ANKIEWICZ . Dissipative solitons : from optics to biology and medicine, volume 751. Springer, Heidelberg, 2008.
- [66] G. NICOLIS, and I. PRIGOGINE. Self organization in nonequilibrium systems - From dissipative structures to order through fluctuations. John Wiley & sons, New York, 1977.
- [67] S. FAUVE, and O. THUAL. Soliton waves generated by subcritical instabilities in dissipative systems. Phys. Rev. Lett., 64 :282–284, 1990.
- [68] N. AKHMEDIEV, J. M. SOTO-CRESPO, and Ph. GRELU . Spatiotemporal optical solitons in nonlinear dissipative media : From stationary light bullets to pulsating complexes,. chaos, 17 :037112, 2007.
- [69] Ph. GRELU, and J. M. SOTO-CRESPO. Temporal solitons molecules in mode-locked lasers : collisions, pulsations and vibrations,. in Dissipative solitons : from optics to biology and medicine par N. N. Akhmediev et A. Ankiewicz, 751 :137–173, 2008.
- [70] Y. KURAMOTO . Chemical Oscillations, Waves and Turbulence Dissipative Solitons. Springer-Verglag, Berlin, 1984.
- [71] C. NORMAND, and Y. POMEAU. Convective instability : A physicists approach. Rev. Mod. Phys., 49 :581–623, 1977.
- [72] N. AKHMEDIEV, and A. ANKIEWICZ . Solitons of the Complex Ginzburg-Landau equation. Springer, Berlin, 2001.
- [73] P. A. BELANGER. Coupled-cavity mode-locking : a nonlinear model,. J. Opt. Soc. Am. B, 8 :2077–2082, 1991.
- [74] J. D. MOORES,. On the ginzburg-landau laser mode-locking model with fifth-order saturable absorber term,. Opt. commun., 96 :65–70, 1993.
- [75] L. F. MOLLENAUER, J. P. GORDON, and S. G. EVANGELIDES. The sliding-frequency guiding : an improved from soliton jitter control,. Opt. Lett., 17 :1575, 1992.
- [76] W. J. FIRTH, and A. J. SCROGGIE. Optical bullet holes : Robust controllable localized states of a nonlinear cavity. Phys. Rev. Lett., 76 :1623–1626, 1996.
- [77] P. S. JIAN, W. E. TORRUELLAS, M. HAELTERMAN, U. PESCHEL, and F. LEDERER. Solitons of singly resonant optical parametric oscillators,. Opt. Lett., 24 :400–402, 1999.
- [78] W. V. SAARLOS, and P. C. HHENBERG. Fronts,pulse, sources and sinks in generalized ginzburg-landau. Physica D, 56 :303–367, 1992.
- [79] N. BEKKI, and K. NOZAKI. Formations of spatial patterns and holes in the generalized ginzburg- landau equation,. Phys. Lett., 110 :133–135, 1985.

- [80] N. AKHMEDIEV, and V. V. AFANASJEV. Novel arbitrary-amplitude soliton solutions of cubic-quintic complex ginzburg-landau equation., Phys. Rev. Lett., 75 :2320–2323, 1995.
- [81] G. P. AGRAWAL. Nonlinear Fiber Optics 2nd Edition. New York Academic press, 1995.
- [82] A. HASEGAWA, and Y. KODAMA. Solitons in Optical Communication. Oxford University Press, New York, 1995.
- [83] D. ANDERSON. Variational approach to nonlinear pulse propagation in optical fibers ., Phys. Rev. A, 27 :3135–3145, 1983.
- [84] A. I. MAIMISTOV. Evolution of single waves close to solitons of schrodinger nonlinear equation., J. Exp. Theor. Phys., 77(727), 1993.
- [85] P. TCHOFO DINDA, A. B. MOUBISSI, and K. NAKKEERAN. Collective variable theory for optical solitons in fibers. Phys. Rev. E, 64 :016608 1–15, 2001.
- [86] P. TCHOFO DINDA, A. LABRUYERE, K. NAKKEERAN, J. FATOME, A. B. MOUBISSI, S. PITOIS, and G. MILLOT. On the designing of densely dispersion-managed optical fiber systems for ultra-fast optical communication., Ann. Telecommun., 58 :1785–1808, 2003.
- [87] O. LEGRAND. Kink-antikink dissociation and annihilation : A collective-coordinate description. Phys. Rev. A, 36 :5068–5073, 1987.
- [88] J. G. CAPUTO, and N. FLYTZANIS. Kink-antikink collisions in sine-gordon and ϕ^4 models : Problems in the variational approach. Phys. Rev. A, 44 :6219–6225, 1991.
- [89] A. ANKIEWICZ, and N. AKHMEDIEV. Comparison of lagrangian approach and method of moments for reducing dimensionality of soliton dynamical systems. CHAOS, 18 :033129, 2008.
- [90] R. BOESCH, P. STANCIOFF, and C. R. WILLIS. Hamiltonian equations for multiple-collective-variable theories of nonlinear klein-gordon equations : A projection-operator approach. Phys. Rev. B, 38 :6713–6735, 1988.
- [91] V. E. ZAKHAROV and S. WABNITZ. Optical solitons : Theoretical Challenges and Industrial Perspectives. Springer-Verlag, 1998.
- [92] J. G. CAPUTO, N. FLYTZANIS, and M. P. SORENSEN. Ring laser configuration studied by collective coordinates. J. Opt. Soc. Am. B, 12 :139–145, 1995.
- [93] S. K. TURITSYN, and V. K. MEZENTSEV. Dynamics of self-similar dispersion-managed soliton presented in the basis of chirped gauss-hermite functions., JETP Lett., 67 :640, 1998.
- [94] T. I. LAKOBA, and D. J. KAUP. Shape of stationary pulse in strong dispersion management regime., Elec. Lett., 34(1124), 1998.
- [95] T. I. LAKOBA, and D. J. KAUP. Hermite-gauss expansion for propagation in strongly dispersion managed fibres., Phys. Rev. E, 58(6728), 1998.
- [96] P. A. M. DIRAC . Lectures on Quantum Mechanics. Academics, 1964.

-
- [97] G. P. AGRAWAL. Fiber-Optics Communications Systems 2nd Edition. Wiley, 1992.
- [98] A. RALSTON, . A First Course in Numerical Analysis. McGraw, New York, 1965.
- [99] A. ACKAERT, P. DEMEESTER, P. LAGASSE, Ch. POLITI, M. OMAHONY, T. BERG, B. TROMBORG, J. SANITAIR, E. PATZAK, S. RAO, P. VOGEL, Ch. MINOT, and D. ERASME. European 1st-programme roadmap for optical communications, . Ann. Telecommun., 58 :1550–1585, 2003.
- [100] F. MATERA, V. ERAMO, A. SCHIFFINI, M. GUGLIELMUCCI, and M. SETTEMBRE. Numerical investigation on design of wide geographical optical- transport networks based on $n \times 40$ -gb/s transmission, . J. Lightwave Technol., 21(456–465), 2003.
- [101] L. J. RICHARDSON, W. FORYSIAK, and N. J. DORAN. Transoceanic 160-gbit/s single-channel transmission using short- period dispersion managementve instability : A physicists approach. IEEE Photon. Technol. Lett., 13 :209–211, 2001.
- [102] J. FATOME, S. PITOIS, P. TCHOFO DINDA, and G. MILLOT. Eperimental demonstration of 160-ghz densly dispersion-managed soliton transmission in a single channel over 896 km of commercial fibres. Opt. Express., 11 :1553–1558, 2003.
- [103] A. GRAY, Z. HUANG, Y. W. A. LEE, I. Y. KHRUSHCHEVAND, and I. BENNION. Experimental observation of autosoliton propagation in a dispersion- managed system guided by nonlinear optical loop mirrors, . Opt. Lett., 29 :926–928, 2004.
- [104] S. WIELANDY, P. S. WESTBROOK, M. FISHTEYN, P. REYES, W. SHAIRER, H. ROHDE, and G. LEHMANN. Demonstration of automatic dispersion control for 160 gtbit/s transmission over 275 km of deployed fibre. Electron. Lett., 40 :690–691, 2004.
- [105] S. BOSCOLO, S. K. TURITSYN, and K. J. BLOW. All optical passive 2r regeneration for $n \times 40$ gbit/s wdm transmission using nolm and novel filtering technique. Opt. Commun., 217 :227–232, 2003.
- [106] T. I. LAKOBA, and G. P. AGRAWAL. Effects of third-order dispersion on dispersion-managed solitons, . J. Opt. Soc. Am. B, 16(1332–1343), 1999.
- [107] K. NAKKEERAN, Y. C. KWAM, P. K. A. WAI, A. LABRUYERE, P. TCHOFO-DINDA, and A. B. MOUBISSI. Analytical design of densely dispersion-managed optical fiber transmission systems with gaussian and raised cosine return-to-zero ansatze. J. Opt. Soc.Am. B, 21 :1901–1907, 2004.
- [108] S. K. TURITSYN, T. SCHAFER, K. H. SPATSCHEK, and V. K. MEZENTSEV. Path-averaged chirped optical solitons in dispersion-managed in fiber communication lines, . Opt. Commun., 163 :122–158, 1999.
- [109] P. TCHOFO DINDA, K. NAKKEERAN, and A. LABRUYERE. Suppression of soliton self-frequency shift by up-shifted filtering, . Opt. Lett., 27 :382–384, 2002.

- [110] W. CHANG, A. ANKIEWICZ, J. M. SOTO-CRESPO and N. AKHMEDIEV. Dissipative solitons resonances. Phys. Rev. A, 78 :023830, 2008.
- [111] A. B. MOUBISSI, Application de la methode des coordonnees collectives a la conception et l optimisation des lignes de transmission a gestion de la dispersion, haut debit et longue distance, sur fibre optiques. Universite de Bourgogne, 2002.
- [112] J. ATANGANA, A. KAMAGATE, P. TCHOFO DINDA, A. LABRUYERE, and T. C. KOFANE . Effective characterization pulses in optical fiber systems of the phase and intensity profiles of asymmetrically distorted light. J. Opt. Soc. Am. B, 26 :371–383, 2009.
- [113] R. J. DESSLER, and H. R. BRAND. Periodic, quasiperiodic, and chaotic localized solutions of the quintic complex ginzburg-landau equation,. Phys. Rev. Lett, 72 :478 –481, 1994.
- [114] N. AKHMEDIEV, J. M. SOTO-CRESPO, and G. TOWN. Pulsating solitons, chaotic solitons, period doubling, and pulse coexistence in mode-locked lasers : Cgle approach. Phys. Rev. E, 63, 2001.
- [115] H. SAKAGUCHI, and B. A. MALOMED. Instabilities and splitting of pulses in coupled ginzburg-landau equations. Physica D, 154 :229, 2001.
- [116] J. M. SOTO-CRESPO, M. GRAPINET Ph. GRELU and N. AKHMEDIEV,. Bifurcations and multiple-period soliton pulsations in a passively mode-locked fiber laser,. Phys. Rev. E, 70 :11, 2004.
- [117] J. M. SOTO-CRESPO, N. AKHMEDIEV, and A. ANKIEWICZ. Pulsating, creeping and erupting solitons in dissipative systems. Phys. Lett. A., 85 :2937–2940, 2000.
- [118] N. AKHMEDIEV, and A. ANKIEWICZ . Solitons, nonlinear pulses and beams. Chapman & Hall, London, 1997.
- [119] I. S. ARANSON, and L. KRAMER. The world of the complex ginzburg-landau equation. Rev. Mod. Phys., 74 :99–143, 2002.
- [120] M. C. CROSS, and P. C. HOHENBERG. The physics of simple metal clusters : experimental aspects and simple models,. Rev. Mod. Phys, 65 :611 –676, 1993.
- [121] P. MANNEVILLE,., Dissipative structures and Weak Turbulence. Academic, San Diego, 1999.
- [122] P. MANDEL, and M. TLIDI. Transverse dynamics in cavity nonlinear optics,. J. Opt. B., 6(66–75), 2004.
- [123] H. A. HAUS, J. G. FUJIMOTO, and E. P. IPPEN. Structures for additive pulse mode locking,. J. Opt. Am. B, 8 :2068–2076, 1995.
- [124] E. P. IPPEN. Principles of passive mode locking,. Appl. Phys. B, 58 :159–170, 1994.
- [125] Y. SHI, Z. DAI, and S. HAN. Exact solutions for 2d cubic-quintic ginzburg-landau equation. Journal of Physics, 96 :012148, 2008.
- [126] K. MARUNO, A. ANKIEWICZ, and N. AKHMEDIEV. Exact soliton solutions of the one-dimensional complex swift- hohenberg equation,. Physica D, 176(44–66), 2003.

-
- [127] R. CONTE. The Painleve Property. One Century Later. Springer Verlag, New York, 1999.
- [128] B. A. MALOMED. Evolution of nonsoliton and quasi-classical wavetrains in nonlinear schrodinger and korteweg de vries equations with dissipative perturbations,. Physica D, 29 :155–172, 1987.
- [129] B. A. MALOMED, and A. A. NEPOMNYASHCHY. Kinks and solitons in the generalized ginzburg-landau equation ,. Phys. Rev. A., 42 :6009–6014, 1990.
- [130] E. N TSOY, A. ANKIEWICZ, and N. AKHMEDIEV. Dynamical models for dissipative localized waves of the complex ginzburg-landau equation,. Phys. Rev. E, 73 :036621–036631, 2006.
- [131] J. M. SOTO-CRESPO, N. AKHMEDIEV and G. , TOWN. Continuous-wave versus pulse regime in passively mode-locked laser with a fast saturable absorber,. J. Opt. Soc. Am. B, 19 :234–242, 2002.
- [132] J. SATSUMA, and N. YAJIMA . Initial value problems of one-dimensional self-modulation of nonlinear waves in dispersive media. Prog. Theor. Phys. Suppl., 55 :284–306, 1974.
- [133] J. GUCKENHEIMER, and P. HOLMES . Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. Springer-Vergla, New York, 1983.
- [134] P. L. KELLEY,. Sel-focusing of optical beams. Phys. Rev. Lett., 15(26), 1965.
- [135] J. M. SOTO-CRESPO, N. AKHMEDIEV, and V. V. AFANASJEV . Stability of the pulselike solutions of the quintic complex ginzburg-landau equation. J. Opt. Soc. Am. B, 13 :1439, 1996.
- [136] N. VERETENOV, A. LADIMIROV, N. KALITEEVSKII, N. ROSANOV, S. FEDOROV, and A. SHATSEV. On three-dimensional dissipative optical solitons : collisions of laser bullets and topological solitons. Opt. Spectros., 76 :569–573, 2000.
- [137] J. M. SOTO-CRESPO, Ph. GRELU, and N. AKHMEDIEV. Optical bullets and rockets in nonlinear dissipative systems and their transformations and interactions,. Opt. Express, 14 :4013–4025, 2006.
- [138] D. MIHALACHE, D. MAZILU, F. LEDERER, Y. V. KARTASHOV, L. C. CRASOVAN, L. TORNER, and B.A. MALOMED. Stable vortex tori in the three-dimensional cubic-quintic ginzburg-landau equation ,. Phys. Rev. Lett., 97 :073904, 2006.
- [139] D. MIHALACHE, D. MAZILU, F. LEDERER, H. LEBLOND, and B.A. MALOMED. Stability of dissipative optical solitons in the three-dimensional cubic-quintic ginzburg-landau equation,. Phys. Rev. A., 75 :033811–033819, 2007.
- [140] N. VERETENOV, N. ROSANOV, and S. FEDOROV. Opt. Quantum. Electron, 40 :253, 2008.
- [141] A. ANKIEWICZ, N. AKHMEDIEV, and N. DEVINE. Dissipative solitons with lagrangian approach. Opt. Fiber. Technol., 13 :91–97, 2007.

-
- [142] N.B. ALEKSIĆ, V. SKARKA, D. V. TIMOTIJEVIĆ, and D. GAUTHIER. Self-stabilized spatiotemporal dynamics of dissipative light bullets generated from inputs without spherical symmetry in three-dimensional ginzburg-landau systems. Phys. Rev. A, 75 :013903–013907, 2007.
- [143] Ph. GRELU, J. M. SOTO-CRESPO, and N. AKHMEDIEV. Light bullets and dynamic pattern formation in nonlinear dissipative systems,. Opt. Express, 13 :9352–9352, 2005.
- [144] J. M. SOTO-CRESPO, N. AKHMEDIEV, and Ph. GRELU. Optical bullets and double bullet complexes in dissipative systems,. Phys. Rev.E, 74 :046612–046623, 2006.
- [145] M. GRAPINET, and Ph. GRELU . Vibrating soliton pairs in a mode-locked laser cavity,. Opt. Lett., 31 :2115–2117, 2006.
- [146] J. M. SOTO-CRESPO, Ph. GRELU N. AKHMEDIEV and N. , DEVINE. ,. Phys. Rev. E, 75 :016613, 2007.
- [147] A. KAMAGATE, Ph. GRELU, P. TCHOFO-DINDA J. M. SOTO-CRESPO, and N. AKHMEDIEV. Stationary and pulsating dissipative light bullets from a collective approach. Phys. Rev. E., 79(026609), 2009.

Propagation des solitons spatio-temporels dans les milieux dissipatifs

Résumé : Ce mémoire de thèse présente une approche semi-analytique des différentes solutions solitons spatio-temporelles de l'équation cubique quintique de Ginzburg-Landau complexe étendue à $(3+1)D$ (GL3D).

La méthode semi-analytique choisie est celle des coordonnées collectives qui permet d'approcher le champ exact, dont l'expression analytique est inconnue, par une fonction d'essai, qui comporte un nombre limité de paramètres physiques.

En appliquant cette procédure à l'équation GL3D, nous obtenons un système d'équations variationnelles qui gouverne l'évolution des paramètres de la balle de lumière. Nous montrons que cette approche des coordonnées collectives est incomparablement plus rapide que la procédure de résolution directe de l'équation GL3D. Cette rapidité permet d'obtenir, en un temps record, une cartographie générale des comportements dynamiques des balles de lumière. Cette cartographie révèle une riche variété d'états dynamiques faite de balles de lumière stationnaires, oscillantes et rotatives.

Finalement, les résultats de cette thèse prédisent l'existence de plusieurs familles de balles de lumière, et précisent les domaines respectifs de leurs paramètres physiques. Cette prédiction constitue un pas en avant dans les efforts entrepris ces dernières années en vue d'une démonstration expérimentale de ce type d'impulsions.

Mots-clefs : Soliton dissipatif, Balle de lumière, Soliton spatio-temporel, Equation de Ginzburg-Landau

Propagation of spatiotemporal solitons in dissipative media

Abstract : This thesis presents a semi-analytical approach for the search of $(3+1)D$ spatiotemporal soliton solutions of the complex cubic-quintic Ginzburg-Landau equation (GL3D).

We use a semi-analytical method called collective coordinate approach, to obtain an approximate profile of the unknown pulse field. This ansatz function is chosen to be a function of a finite number of parameters describing the light pulse.

By applying this collective coordinate procedure to the GL3D equation, we obtain a system of variational equations which give the evolution of the light bullet parameters as a function of the propagation distance. We show that the collective coordinate approach is incomparably faster than the direct numerical simulation of the propagation equation. This permits us to obtain, efficiently, a global mapping of the dynamical behavior of light bullets, which unveils a rich variety of dynamical states comprising stationary, pulsating and rotating light bullets.

Finally the existence of several types of light bullets is predicted in specific domains of the equation parameters. Altogether, this theoretical and numerical work may be a useful tool next to the efforts undertaken these last years observing light bullets experimentally.

Key-words : Dissipative soliton, Light bullet, Spatio-temporal soliton, Ginzburg-Landau equation