



**HAL**  
open science

# Développements d'indicateurs de qualité dans la modélisation des ouvrages géotechniques par la méthode des éléments finis : applications aux soutènements

Cristina Vulpe

## ► To cite this version:

Cristina Vulpe. Développements d'indicateurs de qualité dans la modélisation des ouvrages géotechniques par la méthode des éléments finis : applications aux soutènements. Autre. Université Paris-Est, 2011. Français. NNT : 2011PEST1130 . tel-00672359

**HAL Id: tel-00672359**

**<https://theses.hal.science/tel-00672359>**

Submitted on 21 Feb 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## THESE DE DOCTORAT

En vue de l'obtention du titre de

DOCTEUR

DE

L'UNIVERSITE PARIS-EST

Spécialité: **Géotechnique**

Présentée et soutenue publiquement par

**Cristina VULPE**

Sujet de la thèse

**Développement d'indicateurs de qualité dans la modélisation des ouvrages géotechniques par la méthode des éléments finis : application aux soutènements**

Le 7 septembre 2011 devant le jury composé de :

Isam SHAHROUR	UST Lille	Rapporteur
Richard KASTNER	INSA Lyon	Rapporteur
Valérie BERNHARDT	Terrasol	Examinatrice
Philippe MESTAT	IFSTTAR	Directeur de thèse

Laboratoire d'accueil : **Institut français des sciences et technologies des transports, de l'aménagement et des réseaux**, 58 Boulevard Lefebvre, 75015 Paris







## **Abstract**

The thesis proposes to study the accuracy of the finite element method (FEM) analyses by means of « quality indicators ». The quality indicators represent simple mathematical formulas that are designed to evaluate the reliability of the numerical analyses. The accuracy of the discretization modeling of these analyses is determined; the mathematical model is considered correct and the errors resulting from the choice of the mechanical properties of the soil are not taken into account. We proposed the mathematical formulations of the quality indicators and also established their lower and upper bounds. Due to their simple mathematical formulation, the quality indicators are easily implemented in any finite element computer code. We have introduced them in the CESAR-LCPC finite element computer code, namely in the nonlinear mechanical execution module.

The proposed quality indicators are used on a number of simple 2D and 3D problems elastic and elastoplastic problems in order to assess the jump in stress values in the nodes of the generated mesh. After testing the accuracy of the discretization modeling of these numerical analyses, we evaluated the discretization modeling quality of a braced sheetpile excavation (Hochstetten experimental site, near Karlsruhe). The accuracy of the results based on the mechanical properties of the soil and the structure has not been studied. Also, we proved that the quality indicator results are independent of the chosen mechanical properties for the soil or structure.

**Keywords:** quality indicator, error, upper bound, lower bound, phased analysis

## **Résumé**

Notre thèse propose d'étudier la précision des calculs par la méthode des éléments finis (MEF) au moyen "d'indicateurs de qualité". Les indicateurs de qualité représentent des formules simples qui permettent d'évaluer la qualité des calculs par éléments finis. La qualité de l'analyse numérique est évaluée par rapport à la

discrétisation. Le modèle mathématique est considéré correct et les erreurs résultant du choix des propriétés des matériaux ne sont pas être pris en compte. Nous avons défini les formulations mathématiques de ces indicateurs de qualité, ainsi que leurs limites inférieures et supérieures. Grâce au choix de formulations simples, il est facile de les introduire dans un logiciel de calcul par éléments finis. Ils ont été implémentés dans le code de calcul CESAR-LCPC, module Mécanique en Comportement Non Linéaire.

Afin de démontrer qu'ils ont été correctement définis et de tester leur fiabilité, ces indicateurs de qualité sont testés sur un certain nombre de problèmes simples en 2D et en 3D. Après avoir prouvé leur capacité à caractériser la qualité de la discrétisation des modèles d'éléments finis, nous les avons testés sur le cas d'une excavation de palplanches butonnées (site expérimental de Hochstetten, près de Karlsruhe). La précision des résultats en termes de propriétés mécaniques choisies pour le sol et les structures n'a pas été étudiée. Nous avons également démontré que les résultats sont indépendants des propriétés mécaniques choisies pour le sol ou la structure.

**Mots-clés:** indicateur de qualité, erreur, borne supérieure, borne inférieure, analyse multiphasique

## Articles et communications internationales

Les résultats des travaux de cette thèse ont été l'objet de publications scientifiques. Quatre communications (quatrième en cours d'apparaître) ont été publiés dans de conférences internationales avec des actes et deux articles ont été soumis au revue « Finite Elements In Analysis and Design ». La liste des documents est jointée ci-dessous :

Vulpe, C., N. Droniuc, E. Bourgeois and P. Mestat (2010). "Simple quality indicators for FE analysis based on stress maps for Gauss points." *7th European Conf. on Numerical Methods in Geotechnical Engineering (NUMGE 2010), Trondheim*: 187-193.

Vulpe, C., E. Bourgeois, P. Mestat, F. Chiappini and N. Droniuc (2011). "Development of simple quality indicators for FE analysis based on stress maps at element nodes." *Computer Methods for Geomechanics: Frontiers and New Applications (13th Int. Conf. of the IACMAG, Melbourne, Australia)* 1: 163-168.

Vulpe, C., E. Bourgeois, P. Mestat, F. Chiappini and N. Droniuc (2011). "Simple quality indicators for FE analysis based on stress maps. Application to simple 2D and 3D problems." *Proceedings of the Int. Conf. on Adaptive Modeling and Simulation 2011, Paris, France*: 493-503.

Vulpe, C., P. Mestat, E. Bourgeois, F. Chiappini and N. Droniuc (2011). "Quantifying errors in FEM by means of quality indicators. Application to simple 2D problems." *11th National Congress on Computational Mechanics (USNCCM), Minnesota, USA* (accepted).

Vulpe, C., E. Bourgeois, P. Mestat and F. Chiappini (2011). "Development of quality indicators. Part I: developement and application to simple 2D and 3D problems." *Finite Elements in Analysis and Design* (submitted).

Vulpe, C., E. Bourgeois, P. Mestat and F. Chiappini (2011). "Development of quality indicators. Part II: application to a braced sheetpile excavation (Karlsruhe experimental site)." *Finite Elements in Analysis and Design* (submitted).



## Liste de notations

Toutes les variables utilisées dans la thèse ont été décrites dans les chapitres ou elles ont été introduites. Elles sont résumées ci-dessous.

- minuscules latines

$(e)_u$	erreur concernant le champ des déplacements
$(e)_\sigma$	erreur concernant le champ des contraintes
$\bar{f}$	effort volumique
$i$	itération
$n$	incrément
$\bar{n}$	vecteur unitaire
$q$	nodal displacement matrix
$q_i$	taux de convergence
$t$	temps
$u$	champ des déplacements exacts
$u_h$	champ des déplacements calculés par éléments finis
$u_{exp}$	champ des déplacements réels

- majuscules latines

$B$	matrice des dérivées des fonctions d'interpolation
$D$	matrice d'élasticité
$E$	module d'Young
$\bar{F}$	effort surfacique
$H$	matrice de comportement de Hooke
$H^q$	espace vectoriel Helmholtz
$I_{q,ij}^{(1)}$	premier indicateur de qualité
$I_q^{(2)}$	deuxième indicateur de qualité
$I_q^{(3)}$	troisième indicateur de qualité
$K$	matrice de rigidité
$K_0$	matrice de rigidité initiale

$L_2$	espace vectoriel euclidienne
MCNL	Mécanique en Comportement Non Linéaire
N	matrice des fonctions d'interpolation
P	chargement total appliqué à la structure
R	indice de robustesse
$R(u)$	vecteur des forces nodales
$(\bar{R}, \bar{G}, \bar{J})$	défauts d'équilibre
SD	indice d'uniformité

- lettres grecques

$\varepsilon_{MEF}$	erreur globale estimée
$\lambda(t)$	proportion du chargement exercé à l'instant t
$\Phi(u, \lambda)$	vecteur résidu
$\eta$	erreur relative
$\Omega$	volume de la structure
$\Omega_e$	volume de l'élément e
$\sigma$	champ des contraintes exactes
$\sigma_{exp}$	champ des contraintes réels
$\sigma_h$	champ des contraintes calculés par éléments finis
$\sigma^*$	champ des contraintes lissé
$\tau$	champ des contraintes de cisaillement
$\Theta$	indice d'efficacité au niveau global
$\Theta_e$	indice d'efficacité au niveau local

## Tableau des matières

Abstract/Résumé	
Articles et communications internationales	
Liste de notations	
I Introduction generale et objectifs.....	15
I.1 Introduction .....	16
I.2 Objectifs.....	18
II Estimation d'erreurs et techniques d'adaptation de maillages .....	21
II.1 Erreurs dans la méthode des éléments finis.....	22
II.1.1 Introduction.....	22
II.1.2 Types des solutions .....	22
II.1.3 Le problème de référence .....	24
II.1.4 Types d'erreurs .....	25
II.1.4.1 Erreurs de discrétisation.....	26
II.1.4.2 Erreurs globales, erreurs de pollution et erreurs locales .....	29
II.2 Méthodes d'amélioration de la qualité des analyses par éléments finis .....	30
II.2.1 Introduction.....	30
II.2.2 Types d'estimateurs d'erreurs .....	31
II.2.3 Estimateurs d'erreurs <i>a posteriori</i> .....	33
II.2.3.1 Estimateurs basés sur l'analyse duale .....	33
II.2.3.1.1 Etat de développement .....	33
II.2.3.2 Estimateurs d'erreurs en relation de comportement .....	33
II.2.3.2.1 Estimateur d'erreur local .....	35
II.2.3.2.2 Etat de développement .....	35
II.2.3.3 Estimateur d'erreur sur les résidus d'équilibre .....	35
II.2.3.3.1 Description des équations résiduelles .....	36
II.2.3.3.2 Estimateurs explicites .....	37
II.2.3.3.3 Estimateurs implicites .....	38
II.2.3.3.4 Etat de développement .....	39
II.2.3.4 Extrapolation de Richardson.....	40
II.2.3.4.1 Etat de développement .....	41
II.2.3.5 Estimateurs d'erreurs basés sur le lissage des contraintes.....	41
II.2.3.5.1 Méthode globale .....	42
II.2.3.5.2 La méthode de recouvrement .....	43
II.2.3.5.3 Etat de développement .....	44
II.2.3.6 Estimateurs d'erreurs basés sur les bases hiérarchiques .....	45
II.2.3.6.1 Etat de développement .....	46
II.2.4 Bornes sur les erreurs .....	46
II.2.5 Qualité des estimateurs d'erreurs .....	47
II.2.6 Techniques de contrôle de l'erreur.....	50
II.2.7 Quelques exemples de problèmes traités par les méthodes d'adaptation dans les calculs éléments finis.....	54
II.3 Les methodes d'adaptation dans les codes de calculs industriels .....	54
II.4 Conclusions.....	59
III Development of quality indicators. Part I: development and application to simple 2D and 3D problems .....	61
III.1 Article presentation.....	62
III.2 Article 1 .....	64

---

III.3	The influence of the mesh fineness on the quality of the numerical solution. Simple case study.....	90
IV	Development of quality indicators. Part II: application to a braced sheetpile excavation (Karlsruhe experimental site).....	101
IV.1	Introduction .....	102
IV.2	Article 2.....	103
V	Implementation des indicateurs de qualite dans CESAR-LCPC .....	121
V.1	Description du code de calcul CESAR-LCPC et du module d'execution MCNL.....	122
V.1.1	CESAR-LCPC .....	122
V.1.2	MCNL.....	124
V.1.2.1	Types de discrétisations pour les problèmes non linéaires. Notions sur la convergence .....	124
V.1.2.2	Algorithme de résolution en comportement non linéaire.....	126
V.1.2.3	Processus itératif et algorithme de résolution .....	128
V.1.2.4	Méthodes de calcul des matrices de rigidité .....	129
V.1.2.5	Méthodes d'accélération de la convergence .....	130
V.1.2.6	Méthodes d'actualisation.....	131
V.1.2.7	Schéma d'accélération de la convergence.....	131
V.1.2.8	Résolution et incrémentation du chargement.....	132
V.1.2.9	Tests de convergence pour le processus itératif .....	133
V.1.2.9.1	Convergence, non-convergence et divergence.....	135
V.2	Implementation des indicateurs de qualité dans le module d'execution MCNL de CESAR-LCPC .....	136
V.2.1	Intégrité des calculs MCNL.....	138
V.3	Programmation d'indicateurs de qualité dans CESAR-LCPC.....	138
V.3.1	Activation de mots-clés dans le jeu des données.....	139
II.3.2	Visualisation des résultats d'indicateurs de qualité .....	140
V.4	Conclusions.....	140
VI	Conclusions et perspectives .....	143
VI.1	Conclusions.....	144
VI.2	Perspectives.....	148
	Bibliographie.....	
	Annexes.....	

---

**Tableau des figures**

Figure II.1 Types de solutions.....	23
Figure II.2 Le problème de référence.....	24
Figure II.3 Interface entre deux éléments ( $E_1$ et $E_2$ ).....	37
Figure II.4 Position des points superconvergents pour des éléments linéaires.....	44
Figure II.5 Bornes sur les erreurs (Chamoin, 2007).....	47
Figure II.6 Représentation graphique de la méthode r-adaptation (Delmas, 2008).....	51
Figure II.7 h-adaptation : représentation graphique de la méthode de raffinement local (Delmas, 2008).....	52
Figure II.8 h-adaptation : représentation graphique de la méthode de raffinement global (Delmas, 2008).....	52
Figure II.9 Représentation graphique de la méthode p-adaptation (Delmas, 2008).....	53
Fig. III.1 Analyzed problem .....	90
Fig. III.2 Discretized model (5 elements) .....	90
Fig. III.3 Discretized model (n finite linear elements) .....	94
Fig. III.4 Discretized model: elements $i-1$ and $i$ .....	95
Fig. III.5 Evolution of the quality of the numerical solution with respect to the mesh fineness .....	99
Figure V.1 Schéma d'organisation du code de calcul CESAR-LCPC (Humbert, 1989) .....	123
Figure V.2 Algorithme de résolution en comportement non linéaire (Mestat, 2005).....	129
Figure V.3 Schéma du processus itératif pour incréments de chargement consécutifs.....	132
Figure V.4 Calcul du vecteur résidu et erreur sur la solution .....	133
Figure V.5 Algorithme de résolution en comportement non linéaire et introduction des indicateurs de qualité.....	138



# I INTRODUCTION GENERALE ET OBJECTIFS

## I.1 INTRODUCTION

Le développement socio-économique actuel a conduit à la conception et la construction de structures qui n'auraient pas été possibles dans le passé. Le manque d'espace et les besoins techniques liés à l'édification d'infrastructures sortant de la norme ont repoussé les limites où il est possible de bâtir et augmenté les possibilités de construire en sous-sol. Ainsi, les méthodes de conception traditionnelles ne suffisent plus pour les structures contemporaines. La méthode des éléments finis (MEF) a été développée dans les dernières décennies et elle prend progressivement une place importante à côté des méthodes traditionnelles. Les ingénieurs font de plus en plus appel aux codes de calcul numérique pour analyser et déterminer l'état limite ultime des ouvrages. La MEF a été largement utilisée dans la conception des ouvrages géotechniques, notamment l'analyse des travaux d'excavation et les projets de grands murs de soutènement.

La MEF présente un certain nombre de restrictions concernant l'application des lois de comportement complexes, les limitations imposées par les capacités de calcul (taille des maillages, mémoire de l'ordinateur, ...) et l'approximation de la taille et de la forme réelles des structures. Le manque d'expérience de l'ingénieur ou la complexité de l'ouvrage à modéliser posent des questions quant à la fiabilité des résultats. La MEF donne toujours des résultats approximatifs en raison de l'incertitude des paramètres introduits et des choix faits pour le modèle discrétisé. La solution approchée reflète le choix des paramètres et du modèle géométrique qui peuvent bien souvent mal représenter le comportement réel de l'ouvrage.

Des incohérences peuvent survenir dans l'utilisation de la MEF, lorsqu'il s'agit d'approcher le problème réel à l'aide d'un modèle mécanique et plus tard lorsqu'il faut passer du modèle mécanique au modèle approché discrétisé. La transition du modèle réel au modèle MEF se fait à travers une série de simplifications et d'hypothèses réductrices qui peuvent facilement conduire un ingénieur inexpérimenté à une mauvaise interprétation. L'une des difficultés liées à l'emploi

de la méthode des éléments finis réside dans le fait que des résultats sont toujours obtenus, mais il reste à l'ingénieur la tâche d'apprécier leur validité.

Au cours des dernières dizaines d'années, les chercheurs ont compris la nécessité de déterminer des erreurs d'approximation dérivées de l'analyse des codes de calcul par éléments finis. Les premières approches pour définir les erreurs sur des solutions de problèmes résolus par la méthode des différences finies sont le résultat du travail de Richardson (1910). Par la suite, la recherche sur l'estimation des erreurs dans les analyses MEF a été intensifiée à partir des années 1960 (Veubeke, 1965). Plusieurs méthodes d'estimation d'erreur ont depuis été proposées et développées. Au début, ces méthodes ont été définies en fonction de normes de l'énergie, mais cette description s'est avérée peu pratique pour les ingénieurs et cela les a conduits à proposer des estimateurs d'erreurs sous forme de quantités d'intérêt (champ des déplacements, champ des contraintes, ...). Un aspect important du développement des estimateurs d'erreur réside dans l'évaluation de leur qualité. Babuska et al. (1994b), Zhong et Beckers (1990), Beckers et Zhong (1992) ont étudié la fiabilité des estimateurs d'erreur par l'intermédiaire de plusieurs indices.

Bien que l'évaluation de la fiabilité des estimateurs d'erreur ait été d'une grande importance, les chercheurs ont constaté qu'il est nécessaire de prouver que ces estimateurs sont à la fois fermés et bornés. Les bornes des estimateurs des erreurs ont été étudiées. Pour les estimateurs d'erreur faisant appel aux normes de l'énergie, leurs limites ont été faciles à déterminer, à l'opposé des formulations mathématiques complexes apparaissent dans le calcul des limites des estimateurs d'erreur exprimées en termes de quantités d'intérêt.

La finalité de l'estimation des erreurs est la recherche de méthodes permettant d'obtenir un meilleur modèle approché. L'amélioration de la discrétisation du modèle numérique s'est avérée plus facile à réaliser. Les erreurs de modélisation issues du choix de la représentation mathématique du modèle physique sont significatives mais ont été peu étudiées, l'amélioration des résultats axée sur le choix des propriétés des matériaux n'a pas encore été prise en considération. Les moyens de minimiser les erreurs de discrétisation sont appelés « adaptation de

maillage ». Quelques méthodes d'adaptation ont été élaborées : les plus utilisés sont les méthodes dites « méthode-h » et « méthode-p », la première portant sur l'augmentation de la finesse du maillage autour de zones d'intérêt du modèle et la deuxième méthode consistant à élever le degré du polynôme des éléments utilisés dans la discrétisation. La méthode d'adaptation est appliquée après le calcul des estimateurs d'erreur et dans les cas où ceux-ci surpassent une valeur de tolérance prédéfinie. Ainsi, un nouveau calcul est effectué pour vérifier que le nouveau modèle répond à la valeur de tolérance prédéfinie. Bien que la méthode soit en pratique simple, elle devient très coûteuse en temps de calculs pour des problèmes complexes. De plus, l'adaptation du maillage devient quasi-impossible pour la simulation du phasage des travaux où les erreurs maximales de la discrétisation sont localisées à des endroits différents du modèle d'une phase à l'autre.

La programmation des estimateurs d'erreur dans les codes commerciaux de calcul par éléments finis n'est pas très répandue en raison du fait qu'ils sont restreints à certains types de problèmes. Leurs formulations mathématiques complexes ont aussi créés un obstacle en les rendant peu accessibles. De plus, l'exorbitant coût de calcul dû à l'utilisation des techniques de contrôle de l'erreur a conduit les développeurs de codes commerciaux par éléments finis à ne les pas implémenter.

## **I.2 OBJECTIFS**

En tenant compte des limitations précédentes pour développer des estimateurs d'erreur générales, valides, faciles à implémenter et à utiliser, le développement d'outils simples permettant d'évaluer la qualité d'un calcul numérique est apparu nécessaire. Des formules simples et générales ont été recherchées.

Dans le cadre de ces travaux de thèse, nous proposons d'étudier la qualité d'un calcul numérique au moyen « d'indicateurs de qualité ». La qualité de l'analyse numérique est évaluée par rapport au modèle approché discrétisé. Le modèle mathématique est considéré correct et les erreurs résultant du choix des propriétés des matériaux n'ont pas été pris en compte. Une description est donnée des entités

nouvellement définies qui caractérisent la qualité de la modélisation par éléments finis, leurs formulations mathématiques sont également présentées. Ces formulations ont été cherchées sous des formes assez simples, des bornes inférieures et supérieures garanties sont établies. Le choix de formulations mathématiques simples permet une mise en œuvre sans difficulté des indicateurs de qualité dans les codes de calcul par éléments finis.

La définition d'indicateurs de qualité devrait permettre d'évaluer si le choix du modèle de discrétisation est correct. Même si ce choix n'est pas la source la plus pénalisante des erreurs dans la modélisation numérique, opter pour un bon modèle de discrétisation représente une condition nécessaire pour obtenir de bons résultats approximatifs. Toutefois, l'utilisation des indicateurs de qualité ne doit en aucune façon conduire l'ingénieur à négliger l'étude du problème en profondeur et le choix de bons paramètres pour le comportement mécanique de la structure.

Le mémoire de thèse a été organisé en six chapitres.

Le premier chapitre offre une introduction générale sur les méthodes d'estimation de la qualité ; des analyses par éléments finis et les objectifs de la thèse y sont présentés.

Le deuxième chapitre propose une brève présentation des méthodes actuellement développées pour évaluer les erreurs et améliorer la qualité des calculs numériques. L'état de développement de chacune de ces méthodes est présenté et leur limites actuelles sont détaillées.

Faisant suite à la présentation des limitations des techniques d'adaptation développées, le troisième chapitre est consacré à la description des indicateurs de qualité. Les définitions mathématiques de trois indicateurs de qualité sont données, des bornes supérieures et inférieures garanties sont définies. La qualité du modèle de discrétisation est testée sur des problèmes simples bidimensionnels et tridimensionnels.

Dans le quatrième chapitre, nous étudions la qualité des analyses numériques dans le cadre de l'étude d'une fouille devant un rideau de palplanches butonné (site expérimental de Karlsruhe) à l'aide des indicateurs de qualité. Le site expérimental de Karlsruhe est décrit et les phases d'exécution détaillées. L'analyse par éléments finis est effectuée sur la base des phases d'exécution présentées. La qualité de la solution approchée est étudiée pour chaque phase d'excavation. En outre, les résultats sur quelques segments du modèle sont décrits séparément.

Le cinquième chapitre est dédié aux travaux de programmation dans le module d'exécution MCNL (Mécanique en Comportement Non Linéaire) du code de calcul numérique CESAR-LCPC. Une brève description de CESAR-LCPC est donnée, suivie par une présentation plus détaillée de MCNL au sein duquel les indicateurs de qualité ont été introduits. Le fonctionnement normal des analyses numériques n'est en aucun cas impacté par l'implémentation des indicateurs de qualité dans le code CESAR-LCPC. L'étude de la qualité des calculs par éléments finis est rendue possible par l'activation d'un mot-clé dans le fichier d'entrée du calcul.

Le sixième chapitre présente les conclusions et des pistes pour de futurs développements sont proposées.

Des annexes sont à la disposition du lecteur à la fin du mémoire. Elles comportent des notes de programmation et un large éventail de résultats pour les problèmes simples. L'excavation de la fouille devant un rideau de palplanches butonné est ajoutée comme exemple d'évaluation de la qualité des calculs numériques.

## **II ESTIMATION D'ERREURS ET TECHNIQUES D'ADAPTATION DE MAILLAGES**

## II.1 ERREURS DANS LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

### II.1.1 Introduction

Le traitement par la méthode des éléments finis de type déplacement d'un problème mécanique, en utilisant des lois de comportement non linéaires, conduit à la résolution d'un système d'équations algébriques de la forme suivante :

$$\Phi(u, \lambda) = R(u) - \lambda(t) \cdot P \quad \text{II.1}$$

où  $\Phi(u, \lambda)$  est le vecteur résidu exprimant l'état de déséquilibre de la structure à un instant  $t$  de la sollicitation imposée ;  
 $R(u)$  est le vecteur des forces nodales correspondant aux contraintes dans la structure à l'instant  $t$  ;  
 $P$  représente le vecteur chargement total appliqué à la structure ;  
 $\lambda(t)$  exprime la proportion du chargement exercé à l'instant  $t$ .

La solution du système d'équations est un couple  $(u, \lambda)$  associant la réponse en déplacements de la structure à la sollicitation qu'elle subit. Le processus de résolution itérative introduit une erreur non récupérable à chaque itération; il en résulte une valeur finale du vecteur résidu  $\Phi(u, \lambda)$ . Les erreurs sont aussi définies par les discontinuités des contraintes nodales à l'interface des éléments.

### II.1.2 Types des solutions

Nous pouvons distinguer trois types de « solutions » :

- la solution réelle  $(u_{\text{exp}}, \sigma_{\text{exp}})$  est obtenue à partir des mesures in situ sur l'ouvrage. Elle représente la solution globale prenant en compte les comportements et interactions de l'ensemble du problème physique. Elle ne peut pas être obtenue par calculs ;

- la solution théorique  $(u, \sigma)$  représente la solution exacte du problème mathématique issu de la physique et de la mécanique en tenant compte des conditions aux limites ;
- la solution numérique  $(u_h, \sigma_h)$  représente la solution obtenue pour le problème d'éléments finis. C'est une solution approchée car des hypothèses simplificatrices interviennent en grand nombre dans son estimation.

La solution obtenue par des calculs avec la méthode des éléments finis (MEF) est déterminée par le modèle de discrétisation, le chargement imposé, une discrétisation d'incrément ainsi qu'un nombre d'itérations choisis. La solution finale  $u_{h,\lambda,i}$  est obtenue pour un maillage "h", un incrément "λ" et une itération "i".

Afin de valider une solution numérique, nous devons fournir une comparaison avec la solution réelle issue des mesures sur site. Cette vérification ne peut être faite qu'a posteriori. Une corrélation entre les trois solutions est donnée dans la Figure II.1.

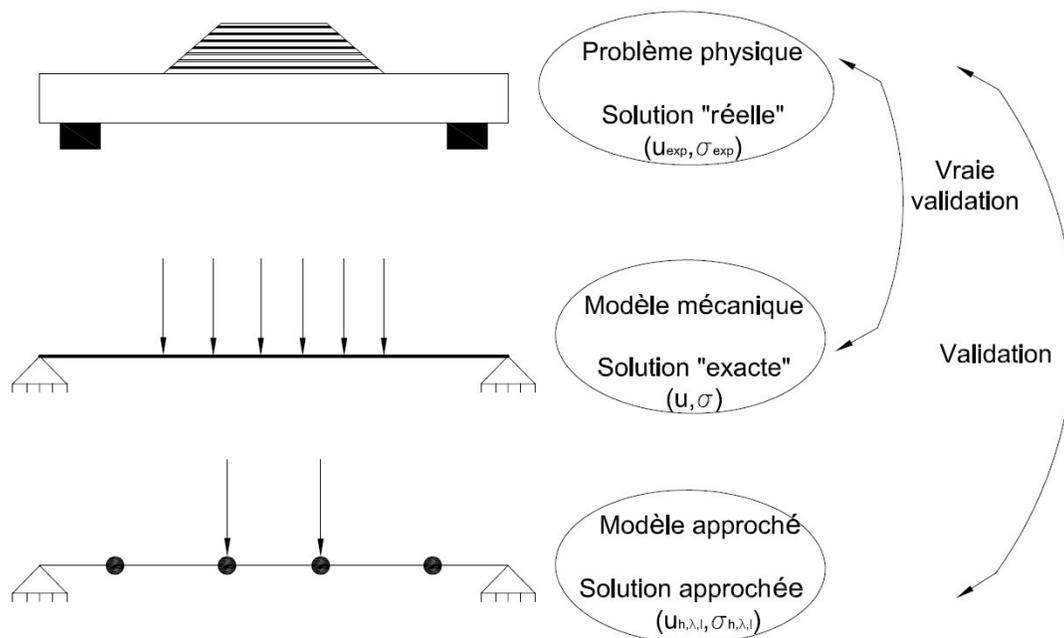


Figure II.1 Types de solutions

### II.1.3 Le problème de référence

Le contrôle de la qualité du calcul par éléments finis consiste à comparer la solution approchée  $(u_h, \sigma_h)$  avec la solution exacte  $(u, \sigma)$  du problème mécanique qui est considéré comme le problème de référence. Par raisons de simplification, ce problème de référence est décrit pour un domaine élastique linéaire.

Dans un domaine élastique linéaire, nous considérons un volume  $\Omega$  de contour  $\Gamma$ . Ce contour est l'union de deux parties disjointes  $\Gamma_F$  et  $\Gamma_u$  telles que  $\Gamma_F \cup \Gamma_u = \Gamma$  et  $\Gamma_F \cap \Gamma_u = \emptyset$ . Sur le contour  $\Gamma_u$ , un déplacement  $\bar{u}$  est imposé alors qu'un effort surfacique  $\bar{F}$  est imposé sur  $\Gamma_F$ . Le solide est de plus soumis à un effort volumique  $\bar{f}$  sur l'ensemble du domaine  $\Omega$  (Figure II.2).

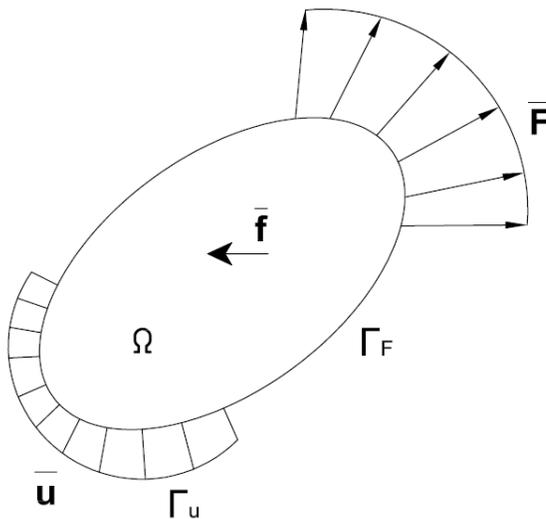


Figure II.2 Le problème de référence

Le problème de référence peut être formulé de la façon suivante :

- l'équation d'équilibre :

$$\text{div} \sigma + \bar{f} = 0, \text{ on } \Omega$$

II.2

- les conditions aux limites :

$$\begin{aligned}\sigma \cdot \bar{n} &= \bar{F}, \text{ on } \Gamma_F \\ u &= \bar{u}, \text{ on } \Gamma_u\end{aligned}\tag{II.3}$$

- relation de comportement (élasticité linéaire par exemple) :

$$\sigma = E\varepsilon + \sigma_0\tag{II.4}$$

avec  $\sigma_0$  le tenseur des contraintes initiales ;  
E le tenseur d'élasticité linéaire.

#### II.1.4 Types d'erreurs

Les codes de calculs numériques sont devenus des outils très importants pour la conception et l'analyse des structures géotechniques. Leur fiabilité est essentielle et un intérêt majeur a été démontré par les chercheurs depuis les années 1960 dans la détermination et l'amélioration de la précision des analyses par éléments finis. Afin de déterminer la qualité des calculs numériques, les sources d'erreurs doivent être identifiées.

Oden et al. (2005a) décrivent les sources d'erreurs dans les calculs MEF de la manière suivante :

- erreurs de discrétisation (ou d'approximation) dues aux hypothèses utilisées pour décrire le modèle mathématique ;
- erreurs de modèle dues à l'approximation du problème réel par le modèle physique et mécanique ;
- erreurs d'incertitude dues à des informations incomplètes notamment concernant les lois de comportement du sol et les valeurs des paramètres de calcul.

Mestat et al. (2000) exposent cinq sources d'erreurs dans les calculs MEF, notamment :

- erreurs de discrétisation dues à la technique des éléments finis (méthode de résolution approchée, algorithmes utilisés, procédures itératives ou par pas de temps pour les problèmes d'évolution) et à la mise en œuvre par l'utilisateur (hypothèses de calcul, type d'analyse et d'éléments, élaboration du maillage, etc.);
- erreurs de modèle liée au modèle théorique. Ces erreurs dépendent des équations mathématiques du modèle et des incertitudes de mesure ;
- erreurs de convergence dues soit à un découpage inapproprié du chargement, soit à des données inadaptées pour les algorithmes de résolution. Elles concernent seulement les problèmes de comportement non linéaire et la résolution par une technique itérative ;
- erreurs de calcul. Elles représentent la différence entre la solution analytique et la solution numérique ;
- erreurs de données provoquées par des caractéristiques de calcul erronées.

Les erreurs de modèle représentent un sujet relativement nouveau étudié ces dernières années en liaison avec des matériaux hétérogènes, des polymères soumis à de grandes déformations et le comportement inélastique des matériaux (Oden et Vegamanti, 2000 ; Oden et Prudhomme, 2002).

Nous allons discuter une seule source d'erreurs, celle des erreurs de discrétisation. Elles sont dues aux hypothèses employées pour caractériser géométriquement le problème physique dans les codes de calcul MEF : type d'éléments utilisés, taille de problème, choix du modèle bidimensionnel ou tridimensionnel.

#### ***II.1.4.1 Erreurs de discrétisation***

Les erreurs de discrétisation peuvent être classées en trois grandes catégories :

- les erreurs dues aux pas de temps (dépendant de l'algorithme de résolution) ;

- les erreurs dues à la discrétisation spatiale (dépendant du maillage) ;
- les erreurs dues aux incréments de chargement (dépendant de l'algorithme de résolution).

Le premier type d'erreur apparaît dans des problèmes d'évolution (consolidation, dynamique), tandis que les autres types sont communs à tous les problèmes analysés. Ainsi, les problèmes de consolidation sont plus difficiles à analyser correctement et il devient plus difficile d'attribuer l'erreur à la configuration du maillage, au pas de temps ou au processus incrémental.

Les erreurs en déplacements et en contraintes, en raison de la discrétisation, peuvent être calculées au niveau local et global. Les erreurs peuvent être définies comme de la façon suivante :

$$(e)_u = u - u_h \quad \text{II.5}$$

où  $(e)_u$  représente l'erreur concernant le champ des déplacements ;  
 $u$  représente le champ des déplacements exacts ;  
 $u_h$  représente le champ des déplacements calculés par éléments finis.

$$(e)_\sigma = \sigma - \sigma_h \quad \text{II.6}$$

où  $(e)_\sigma$  représente l'erreur concernant le champ des contraintes ;  
 $\sigma$  représente le champ des contraintes exactes ;  
 $\sigma_h$  représente le champ des contraintes calculées par éléments finis.

Ainsi, nous définissons deux couples :

- la solution exacte  $(u, \sigma)$ , qui représente la solution du modèle mécanique ;

- la solution approchée (ou MEF)  $(u_h, \sigma_h)$ , qui représente la solution du modèle approché discrétisé.

Une meilleure façon de quantifier l'erreur est de l'évaluer sous la forme d'une norme énergétique. Pour les opérateurs définis positifs, la norme de l'énergie est l'option la plus pratique. Pour les opérateurs indéterminés, ainsi que ceux définis positifs, les normes euclidienne ( $L_p$ ) et de Helmholtz ( $H_q$ ) peuvent être utilisées, la plus simple d'entre elles étant la norme  $L_2$  (norme euclidienne), (Stewart and Hughes, 1998).

La norme d'erreur locale est donnée par :

$$\|(\mathbf{e})_\sigma\|_{\Omega_e} = \left( \int_{\Omega_e} (\mathbf{e})_\sigma^t \mathbf{H}(\mathbf{e})_\sigma d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{II.7}$$

où  $\Omega_e$  désigne le volume de l'élément  $e$  ;  
 $\mathbf{H}$  est la matrice de comportement de Hooke.

et la norme d'erreur globale est définie par :

$$\|(\mathbf{e})_\sigma\|_{\Omega} = \left( \int_{\Omega} (\mathbf{e})_\sigma^t \mathbf{H}(\mathbf{e})_\sigma d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{II.8}$$

où  $\Omega$  représente le volume de la structure.

L'erreur locale définie en fonction de la norme  $L_2$  est donnée par :

$$\|(\mathbf{e})_\sigma\|_{\Omega_e}^{L_2} = \left( \int_{\Omega_e} (\mathbf{e})_\sigma^t (\mathbf{e})_\sigma d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{II.9}$$

et l'erreur globale par :

$$\|(\mathbf{e})_{\sigma}\|_{\Omega}^{L^2} = \left( \int_{\Omega} (\mathbf{e})_{\sigma}^t (\mathbf{e})_{\sigma} d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{II.10}$$

Nous allons définir les relations relatives aux erreurs uniquement au niveau global.

En général, la solution exacte n'est pas connue, il est nécessaire de calculer une estimation de l'erreur sur la solution MEF. L'erreur globale estimée est fournie par, (Zienkiewicz et al., 2005), :

$$\varepsilon_{\text{MEF}} \approx \|(\mathbf{e})_u\|_{\Omega} \quad \text{II.11}$$

On définit également l'erreur relative exprimée en norme énergétique :

$$\eta = \frac{\|(\mathbf{e})_u\|_{\Omega}}{\|u_h\|_{\Omega}} \quad \text{II.12}$$

#### ***II.1.4.2 Erreurs globales, erreurs de pollution et erreurs locales***

Delmas (2008) a étudié le développement d'erreurs dans la solution approchée d'un problème en tenant compte de deux types de discrétisation :

- un modèle discrétisé avec un raffinement uniforme global ;
- un modèle discrétisé basé sur le modèle antérieure, mais raffiné localement dans une zone restreinte du problème, appelée zone d'intérêt.

Le développement d'erreurs pour le modèle discrétisé avec un raffinement uniforme global est observé : les erreurs globales décroissent quand le raffinement du maillage augmente. Delmas (2008) à noté que lorsque seule la zone d'intérêt est raffinée, la solution approchée n'est pas améliorée dans le reste de la structure. L'erreur globale reste pratiquement inchangée ; ceci indique que l'erreur dans la zone d'intérêt contribue très peu à l'erreur globale. Concernant les erreurs dans la zone d'intérêt, il a été observé que pour améliorer de manière significative la solution dans cette zone il n'était pas suffisant de raffiner uniquement cette zone.

Ainsi, les erreurs dans le reste de la structure ont aussi une influence sur la qualité de la solution dans la zone d'intérêt. Il semble donc que l'erreur locale vraie est composée de deux parties : une composante locale et une composante complémentaire issue du reste de la structure. Les composantes complémentaires sont appelées des erreurs de pollution. Le concept d'erreurs de pollution a été introduite par Babuska et al. (1994a ; 1995a)

Les erreurs locales deviennent plus importantes que les erreurs globales puisque souvent les erreurs qui nous intéressent sont localisées dans une zone restreinte de la discrétisation et l'accent est mis sur l'amélioration de la qualité de la solution numérique dans la zone d'intérêt (Oden et Vegamanti, 2000), indépendamment du raffinement global. Cependant les erreurs locales sont influencées par les erreurs de pollution, ainsi il devient important de calculer les erreurs globales et d'ajouter leur effet lors du calcul des erreurs locales (Babuska et al., 1998).

Les erreurs globales sont définies par des normes énergétiques globales qui ne présentent pas d'informations pertinentes pour l'ingénieur, les erreurs locales sont représentées par des quantités calculées en un nœud ou un point d'intégration telles que le champ de contraintes, le champ de déplacements ou les champs de vitesses (Oden et Prudhomme, 2001).

## **II.2 METHODES D'AMELIORATION DE LA QUALITE DES ANALYSES PAR ELEMENTS FINIS**

### **II.2.1 Introduction**

L'amélioration des calculs par éléments finis a été étudiée depuis les années 1960. Les premières tentatives pour évaluer les erreurs dans les analyses numériques ont été attribuées à Veubeke (1965). Les chercheurs se sont intéressés à la détermination et à l'optimisation des paramètres de la modélisation par éléments finis, notamment ceux liés à la discrétisation. La technique pour obtenir une

meilleure solution est aussi appelée adaptation de maillage. Elle se déroule suivant trois étapes (Stelzer et Hofstetter, 2005) :

- une première analyse éléments finis est effectuée ;
- estimation d'erreurs de la solution numérique. Des estimateurs d'erreurs sont employés pour déterminer les erreurs dans la première solution numérique ;
- une méthode d'adaptation de maillage est appliquée sur le modèle numérique original. La technique d'adaptation consiste à modifier le modèle original entier ou une partie du modèle original afin d'obtenir de meilleures solutions numériques.

Un certain nombre d'estimateurs d'erreur et de techniques d'adaptation de maillage ont été introduits et développés au cours des quatre dernières décennies. Les estimateurs d'erreurs et les techniques d'adaptation existantes pour la MEF seront présentés par la suite.

### II.2.2 Types d'estimateurs d'erreurs

A partir du travail de Veubeke (1965) sur l'estimation d'erreur basée sur l'analyse duale, les chercheurs se sont intéressés à l'estimation des erreurs qui apparaissent dans les calculs par éléments finis. Au cours des 40 dernières années, différentes approches ont été développées sur les estimateurs d'erreurs globales (norme  $L_2$ ,  $H^1$ , déplacement en norme énergétique) et les erreurs locales (champs de déplacement, champs de contraintes, facteurs d'intensité).

Les estimateurs d'erreurs peuvent être divisés en deux catégories :

- estimateurs d'erreurs *a priori* ;
- estimateurs d'erreurs *a posteriori*.

L'estimation *a priori* se fait avant le calcul par éléments finis car elle ne fait pas intervenir l'approximation par éléments finis  $(u_h, \sigma_h)$ . Les estimateurs *a priori* ne peuvent pas être calculés, car ils sont fonction de la solution exacte (inconnue). Ils

sont utilisés pour déterminer le taux de convergence asymptotique de la MEF et pour trouver des limitations sur les paramètres du problème. Le comportement asymptotique d'un estimateur d'erreur est atteint lorsque la taille des éléments dans le maillage tend vers zéro.

Les estimateurs d'erreur *a posteriori* sont obtenus dès lors que la solution numérique est connue. Leur objectif n'est pas de fournir une estimation de l'erreur  $e$ , mais de donner une estimation de la magnitude de l'erreur. Ils sont utiles pour les techniques de contrôle de l'erreur.

Une liste des estimateurs *a posteriori* développés au cours des dernières années est présentée (Tableau 1).

Type d'estimateur d'erreur <i>a posteriori</i>		Authors
Estimateur d'erreur basé sur l'analyse duale		Veubeke, 1965
Estimateur d'erreur en relation de comportement		Ladevèze, 1975
Estimateur d'erreur sur les résidus d'équilibre	estimation explicite	Babuska et Rheinboldt, 1978
	estimation implicite	
Extrapolation de Richardson		Babuska et al., 1982
Estimateur d'erreur basé sur le lissage du champ des contraintes	méthode globale	Zienkiewicz et Zhu, 1987
	méthode locale	Zhong, 1991
	méthode de recouvrement	Zienkiewicz et Zhu, 1992
Estimateur d'erreur basé sur les bases hiérarchiques		Bank et Smith, 1993

Tableau 1 Liste des estimateurs d'erreurs *a posteriori*

### **II.2.3 Estimateurs d'erreurs *a posteriori***

#### ***II.2.3.1 Estimateurs basés sur l'analyse duale***

La première tentative pour estimer l'erreur globale d'un calcul numérique a été effectuée par Veubeke (1965) qui proposa la méthode d'analyse duale. La méthode consiste à comparer deux solutions d'éléments finis du même problème, obtenus suivant deux approches différentes :

- une approche cinématiquement admissible (formulation en déplacements) ;
- une approche statiquement admissible (formulation en contraintes).

Si les conditions de déplacement imposées sont homogènes, l'approche cinématiquement admissible fournit une borne inférieure pour l'erreur globale tandis que l'approche statiquement admissible fournit une borne supérieure. La situation est inversée lorsque les conditions de traction imposées sont homogènes.

##### ***II.2.3.1.1 Etat de développement***

Cette méthode est tout à fait rigoureuse pour des structures dont les conditions aux limites sont homogènes. Cependant, elle n'a pratiquement jamais été mise en œuvre dans les codes de calcul par éléments finis car elle ne peut ni s'appliquer à des problèmes ayant des conditions limites mixtes ni au niveau des éléments. Debongnie et al. (1995) améliorèrent la méthode en étendant son application aux problèmes avec des conditions aux limites générales en omettant l'utilisation des bornes. La méthode a d'abord été introduite dans le code SAMCEF par Kempeneers (2005). Malgré son intérêt, la méthode reste insatisfaisante en raison de coûts de calcul élevés et de l'impossibilité d'estimer les erreurs au niveau local.

#### ***II.2.3.2 Estimateurs d'erreurs en relation de comportement***

La méthode d'estimation d'erreurs en relation de comportement fut développée par Ladevèze (1975). Les erreurs sont données par les équations (II.5) et (II.6). La

solution exacte  $(u, \sigma)$  est approximée par le couple  $(u_h, \sigma_h)$  avec  $\sigma_h$  ne vérifiant pas les équations d'équilibre. Afin de résoudre ce problème, les équations sont divisées en deux :

- les conditions d'admissibilité (équation d'équilibre, équations de liaison et conditions initiales) ;
- la relation de comportement.

Ainsi, le couple  $(u_h, \sigma_h)$  vérifie les conditions d'admissibilité. Cette solution approchée ne vérifie pas la loi de comportement du matériau, mais une approximation de cette loi. La qualité de cette approximation est obtenue en comparant les deux lois de comportement (la loi constitutive utilisée et la loi constitutive approximée). Ceci est réalisé en construisant un couple admissible  $(\hat{u}, \hat{\sigma})$  basé sur la solution numérique et les données d'entrées. La construction du champ de déplacements est simple car  $u_h$  vérifie la condition d'admissibilité, nous considérons ensuite  $\hat{u} = u_h$ . Le champ de contraintes  $\sigma_h$  n'est pas statiquement admissible, un champ de contrainte  $\hat{\sigma} \neq \sigma_h$  qui vérifie les équations d'équilibre a alors été défini par (Ladevèze et Pelle, 2004). Le principe de base consiste à chercher le champ  $\hat{\sigma}$  comme un prolongement de la solution par éléments finis tel que :

$$\int_{\Omega} (\hat{\sigma} - \sigma_h) \nabla N_i \, d\Omega = 0 \quad \forall e \in \Omega \text{ et } \forall i \in I \quad \text{II.13}$$

où  $I$  est l'ensemble des nœuds du maillage et  $N_i$  est la fonction de forme associée au nœud  $i$ . Cette condition de prolongement impose au champ de contraintes  $\hat{\sigma}$  cherché, sur tout élément et pour tout champ de déplacements, le même travail que la contrainte  $\sigma_h$ .

L'erreur en relation de loi de comportement devient :

$$(\hat{e})_{\text{RdC}} = \hat{\sigma} - H\epsilon(\hat{u}) \quad \text{II.14}$$

où  $(\hat{\epsilon})_{\text{RdC}}$  représente l'erreur en loi de comportement ;  
 $H$  est la matrice de Hooke.

Si le couple  $(\hat{u}, \hat{\sigma})$  vérifie la relation  $\hat{\sigma} = H\epsilon(\hat{u})$ , il est alors considéré comme la solution exacte  $(\sigma, u)$  du problème.

L'erreur en norme énergétique est définie de la manière suivante :

$$\|e\|_{\text{RdC}} = \left( \int_{\Omega} \hat{\epsilon}_{\text{RdC}}^T H \hat{\epsilon}_{\text{RdC}} d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{II.15}$$

La qualité du couple  $(\hat{u}, \hat{\sigma})$  construit conditionne la qualité de la mesure de l'erreur.

#### *II.2.3.2.1 Estimateur d'erreur local*

La méthode locale d'estimation de l'erreur en relation de comportement a d'abord été développée par Ladeveze et Rougeot (1997) pour des analyses élastiques linéaires 2D. Florentin et al. (2002 ; 2003) ont développé la méthode locale pour des problèmes tridimensionnels et Louf et al (2003) pour des problèmes de contact avec frottement.

#### *II.2.3.2.2 Etat de développement*

L'estimateur d'erreur en relation de comportement a été mis à jour continument ces dernières années. Gallimard et al. (2000) l'ont implémenté pour des problèmes de plasticité et Ladeveze et Moes (1999), Ladeveze et al. (1999a) pour des problèmes viscoplastiques. L'estimateur est à ce jour encore en cours de développement notamment pour des problèmes plastiques (Blaysat et al., 2010a ; 2010b).

#### *II.2.3.3 Estimateur d'erreur sur les résidus d'équilibre*

Les estimateurs d'erreur sur les résidus d'équilibre ont été développés par Babuska et Rheinboldt (1978) et Babuska et Rheinboldt (1980). Deux types d'estimateurs se distinguent :

- les estimateurs explicites ;
- les estimateurs implicites.

L'estimateur explicite utilise directement l'équation des résidus, liant l'erreur au résidu, pour obtenir une estimation globale de l'erreur en norme énergétique. L'erreur est exprimée en fonction des défauts d'équilibre.

Quant aux estimateurs implicites, ils emploient l'approximation de l'erreur en résolvant des problèmes locaux, élément par élément ou par patch d'éléments.

### II.2.3.3.1 Description des équations résiduelles

Lorsque nous comparons la solution exacte  $(u, \sigma)$  à la solution approchée  $(u_h, \sigma_h)$ , nous trouvons que cette dernière vérifie les conditions aux limites et la loi de comportement. Par contre,  $(u_h, \sigma_h)$  ne vérifie pas les équations d'équilibre. Il existe trois types de défauts d'équilibre dans la méthode des éléments finis :

- l'équation d'équilibre intérieure n'est pas vérifiée :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \sigma_h + \bar{f} &= \bar{R} \\ \|\bar{R}\| &\neq 0 \end{aligned} \quad \text{II.16}$$

- le vecteur contrainte n'équilibre pas les charges données :

$$\begin{aligned} \sigma_h \bar{n} + \bar{F} &= \bar{G} \\ \|\bar{G}\| &\neq 0 \end{aligned} \quad \text{II.17}$$

- le vecteur contrainte est discontinu à l'interface entre deux éléments (Figure II.3) :

$$\begin{aligned} [\sigma_h \bar{n}]_{I_{E_1}} + [\sigma_h \bar{n}]_{I_{E_2}} &= \bar{J} \\ \|\bar{J}\| &\neq 0 \end{aligned} \quad \text{II.18}$$

Le vecteurs  $(\bar{R}, \bar{G}, \bar{J})$  représentent ainsi les défauts d'équilibre.

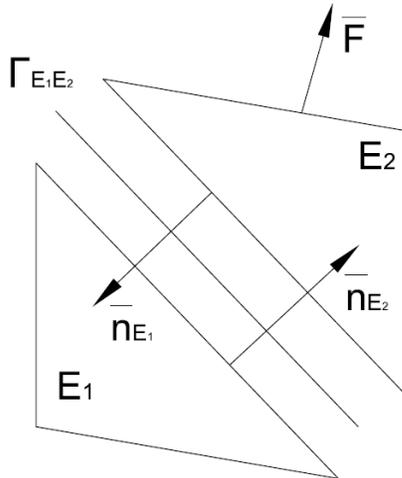


Figure II.3 Interface entre deux éléments ( $E_1$  et  $E_2$ )

Les estimateurs d'erreurs sur les résidus d'équilibre se déterminent à partir d'une relation entre la norme énergétique et le défaut d'équilibre, et peuvent s'exprimer à l'aide de l'équation suivante :

$$\|e\|_{\Omega}^2 = C_1 \int_{\Omega} \bar{\mathbf{R}}^T \bar{\mathbf{R}} d\Omega + C_2 \int_A \bar{\mathbf{J}}^T \bar{\mathbf{J}} dA \quad \text{II.19}$$

où  $C_1$  et  $C_2$  représentent des constantes dépendant de la taille et du degré d'interpolation des éléments ;  
 $\Omega$  représente le volume du modèle approché ;  
 $A$  est l'ensemble des interfaces entre les éléments.

#### II.2.3.3.2 Estimateurs explicites

Les estimateurs d'erreur explicites peuvent être calculés à partir de la solution numérique en utilisant l'équation (II.19). Ces types d'estimateurs ont d'abord été étudiés par Babuska et Rheinboldt (1978) pour des problèmes unidimensionnels et par Kelly et al. (1983) pour des problèmes bidimensionnels. Ils impliquent le calcul de la valeur du défaut d'équilibre interne et des discontinuités des contraintes à l'interface entre les éléments. Ils sont exprimés en fonction des normes énergétiques.

Gago (1982) et Zhong et Beckers (1990) ont étudié les estimateurs explicites pour des problèmes 1D et 2D et ils ont tiré les conclusions suivantes :

- pour les problèmes 1D, les sauts de traction sont plus importants que pour les problèmes 2D ;
- dans le cas des problèmes 2D, le résidu d'équilibre est prédominant pour les éléments de degrés pairs d'interpolation et les sauts de traction sont dominants pour les éléments de degrés impairs d'interpolation.

Les estimateurs implicites peuvent être calculés au niveau élémentaire (niveau local). Afin d'obtenir un état d'équilibre  $(R_e, G_e, J_e)$  au niveau local, des éléments statiquement admissibles sont utilisés pour résoudre le problème ; ainsi, l'estimateur offre une borne supérieure pour l'erreur globale.

L'estimateur explicite local est défini par l'équation suivante :

$$\|e\|_e^2 = C_1 \int_{\Omega_e} R_e^T R_e d\Omega_e + C_2 \int_{\Gamma_e} J_e^T J_e d\Gamma_e \quad \text{II.20}$$

où  $(R_e, J_e)$  représente le défaut d'équilibre pour l'élément "e" ;  
 $C_1$  et  $C_2$  représentent des paramètres inconnus liés au maillage localement.

Un travail important a été mené afin de développer et d'améliorer les estimateurs locaux pour les problèmes élastiques (Diez et al., 1998; Prudhomme et Oden, 1999; Oden et Prudhomme, 2001; Oden et al., 2005b; Delmas, 2008).

### II.2.3.3.3 Estimateurs implicites

Les estimateurs implicites ont été introduits par Babuska et Rheinboldt (1978). Plusieurs méthodes implicites ont été développées :

- estimateurs implicites par patch d'éléments appelés *Subdomain Residual Method*, (SRM), (Babuska et Rheinboldt, 1978) ;

- estimateurs implicites par éléments nommés *Element Residual Method*, (Demkowicz et al., 1984).

Kelly (1984) a démontré que les défauts d'équilibre sont en équilibre au niveau global et que l'erreur  $e$ , définie par les équations II.5 et II.6, satisfait l'équation différentielle originale à condition de remplacer les forces volumiques par les résidus d'équilibre et les tractions imposées par les défauts de traction.

Il a été démontré que la qualité des estimateurs implicites dépend fortement de la topologie du maillage, (Babuska et al., 1992 ; Strouboulis et Haque, 1992).

#### II.2.3.3.4 Etat de développement

Les estimateurs explicites sont rarement mis en œuvre dans des codes d'éléments finis du fait que les termes  $C_1$  et  $C_2$  restent inconnus (sauf pour les maillages réguliers où  $C_1$  et  $C_2$  ont été obtenus pour les éléments linéaires quadrilatéraux (Kelly et al., 1983)), ce qui est un grand inconvénient pour ces estimateurs d'erreurs. Néanmoins, (Delmas, 2008) a introduit l'estimateur explicite local dans Code\_Aster au cours d'un projet de développement. L'option d'estimation d'erreur dans le code n'est pas utilisée pour les «problèmes industriels».

En ce qui concerne les estimateurs implicites, la méthode *Element Residual Method* présente un inconvénient majeur : elle dépend fortement de l'opérateur divergence relatif aux contraintes. Bank et Weiser (1985) et Ainsworth et Oden (2000) ont proposé la méthode *Equilibrated Residual Method* qui permet de choisir l'opérateur divergence assurant l'équilibre sur les champs de contraintes pour chaque élément. Parmi les méthodes implicites, la méthode *Equilibrated Residual Method* est la plus robuste (Babuska et al., 1994b).

La méthode *SRM (Subdomain Residual Method)* a été améliorée par Carstensen et Funken (2000) et Pares (2005).

L'estimation d'erreur pour des problèmes de plasticité et viscoplasticité n'est pas développée à ce jour.

### II.2.3.4 Extrapolation de Richardson

L'extrapolation de Richardson est basée sur la propriété de convergence asymptotique de la solution approchée. La méthode a été proposée et appliquée par Richardson (1910) à la Méthode des Différences Finies. Elle a été ultérieurement développée par Gago (1982) pour la méthode des éléments finis.

L'énergie de déformation « exacte » et l'énergie de déformation approchée s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \|u\|_{\Omega}^2 \\
 U_h &= \frac{1}{2} \|u_h\|_{\Omega}^2
 \end{aligned}
 \tag{II.21}$$

La procédure d'extrapolation de Richardson, (Babuska et al., 1982 ; Gago, 1982) comprend les étapes suivantes :

- choisir une loi de convergence empirique de l'erreur globale, la plus simple est souvent utilisée étant la suivante :

$$U - U_h = C \left( \frac{1}{DDL} \right)^{2r_c}
 \tag{II.22}$$

où

- C est une constante indépendante de la taille de maillage ;
- $r_c$  représente le taux de convergence de l'erreur globale ;
- DDL est le nombre total de Degrés De Liberté.

- effectuer une série de trois analyses numériques  $(U_{h,i}, DDL_i)$ , où  $i = \overline{1,3}$ .

- déterminer les inconnues  $(C, r_c, U)$  par minimisant la fonctionnelle suivante :

$$\Pi = \sum_{i=1}^3 \left( U - U_{h,i} - C \left( \frac{1}{DDL_i} \right)^{2r_c} \right)^2 \quad \text{II.23}$$

Pour obtenir de bons résultats, un certain nombre de maillages fins uniformes devrait être utilisé dans la procédure d'extrapolation de Richardson, mais le raffinement excessif doit être évité car le résultat peut aussi être influencé par d'autres sources d'erreurs. Il est également recommandé d'utiliser les résultats des dernières analyses de la série afin d'éliminer l'influence des degrés de liberté fixés. Cette méthode ne peut pas être appliquée aux modèles hybrides.

#### *II.2.3.4.1 Etat de développement*

Le coût de calcul des erreurs par l'extrapolation de Richardson est important car elle requiert au moins trois analyses numériques. Par ailleurs, la méthode n'est implémentée dans aucun code de calcul par élément finis et il y a eu peu de tentatives pour l'améliorer, (Zienkiewicz, 2006).

#### *II.2.3.5 Estimateurs d'erreurs basés sur le lissage des contraintes*

La méthode d'estimation d'erreurs a d'abord été présentée dans le travail de Zienkiewicz et Zhu (1987). Ces estimateurs consistent à déterminer une approximation plus précise de la solution approchée qui remplace la solution exacte dans le calcul de l'erreur définie par (II.6). Ainsi, la précision d'un tel estimateur dépend de la précision de la solution lissée.

$$\begin{aligned} \left( e \right)_{\sigma}^* &= \sigma - \sigma_h \\ \left( e \right)_u^* &= u - u_h \end{aligned} \quad \text{II.24}$$

où  $\sigma^*$  représente le champ de contraintes lissé ;  
 $u^*$  représente le champ de déplacements lissé.

La différence entre la solution exacte et la solution approchée est donnée par :

- le degré d'interpolation des éléments finis employés qui ne représentent pas la forme exacte de la physique du problème ;
- le défaut d'équilibre au niveau de l'interface entre deux éléments qui est donné par l'équation (II.18). Cette erreur est due à l'utilisation de la même fonction d'interpolation (continuité  $C^0$ ) pour le champ de contraintes que pour le champ de déplacements.

En tenant compte de (II.8), l'erreur en norme en énergie est :

$$\left\| \left( \begin{matrix} e \\ \sigma \end{matrix} \right) \right\|_{\Omega} = \left( \int_{\Omega} (\sigma^* - \sigma_h)^T H^{-1} (\sigma^* - \sigma_h) \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{II.25}$$

#### II.2.3.5.1 Méthode globale

Zienkiewicz et Zhu (1987) proposent de calculer le champ de contraintes lissés  $\sigma^*$  le plus proche possible de la solution exacte à partir de la solution par éléments finis.

Ainsi, pour chaque élément, la composante  $j$  du champ de contraintes  $\sigma^*$  est définie par :

$$\sigma_j^* = \sum_{i=1}^n N_i \bar{\sigma}_{hij} \quad \text{II.26}$$

où  $\bar{\sigma}_{hij}$  est la valeur au nœud  $i$  de la composante  $j$  du champ  $\sigma^*$  ;  
 $N_i$  est la matrice des fonctions d'interpolation sur un nœud  $i$  ;  
 $n$  est le nombre de nœuds de l'élément  $\Omega_e$ .

Les contraintes nodales  $\bar{\sigma}_{hij}$  sont déterminées par la minimisation de la fonctionnelle :

$$\Pi(\bar{\sigma}_{hij}) = \int_{\Omega} (\sigma^* - \sigma)^T (\sigma^* - \sigma) d\Omega \quad \text{II.27}$$

avec

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \bar{\sigma}_{hij}} = 0 \quad \text{II.28}$$

Pour chaque valeur  $\bar{\sigma}_{hij}$  il faut résoudre le système :

$$A\bar{\sigma}_{hij} = b_j \quad \text{II.29}$$

où  $A$  est une matrice symétrique et définie positive. Elle ne doit être évaluée qu'une seule fois, car elle est indépendante de la composante du champ de contraintes. L'ordre de la matrice  $A$  est égal au nombre de nœuds du maillage.

La méthode de construction de la matrice  $A$  est très coûteuse surtout pour les problèmes 3D (tenseur de contraintes à 6 composantes) où on doit résoudre six systèmes du même ordre de grandeur que le système éléments finis.

#### II.2.3.5.2 La méthode de recouvrement

Cette méthode a été proposée par Zienkiewicz et Zhu (1992). La méthode, appelée *Superconvergent Patch Recovery (SPR)*, propose de calculer les champs de contraintes pour un certain nombre de points (appelés « points superconvergents ») à partir de « patch » comportant plusieurs éléments, de les superposer et de moyenner les résultats. Les points superconvergents représentent des points dans les éléments finis pour lesquels les valeurs du champ de contraintes approchées sont de très bonnes qualités. Les points superconvergents pour des éléments linéaires sont illustrés dans la Figure II.4. Barlow (1976) a prédit la position des points superconvergents pour des éléments de barre, des éléments de poutre et des éléments plans linéaires et quadratiques. Il a trouvé que les points pour lesquels le champ de contraintes approché est le

meilleur sont les points de Gauss. Les points pour lesquels le déplacement approché est le meilleur sont les nœuds.

Le concept d'ultraconvergence a été étudié et vérifié pour la méthode SPR par Zhang (1996, 2000) pour les éléments quadrangulaires de degré pairs. La convergence n'était pas obtenue pour les éléments quadrangulaires de degré impair.

La méthode *SPR* n'est pas aussi efficace pour les maillages mixtes ou non uniformes. La méthode n'est pas utilisable pour les matériaux avec des discontinuités parce que les effets de la discontinuité sont lissés (Gratsch et Bathe, 2005).

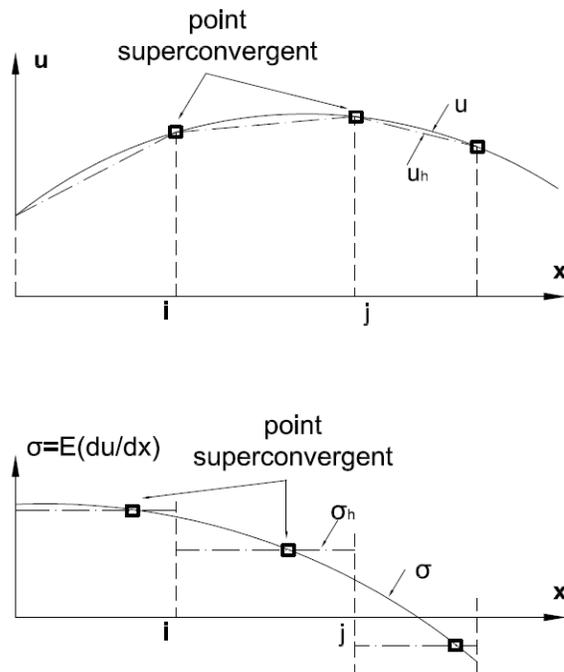


Figure II.4 Position des points superconvergents pour des éléments linéaires

### II.2.3.5.3 Etat de développement

La méthode de recouvrement a été développée ces dernières années. La méthode *Recovery by Equilibrium Patches (REP)* a été présentée par Boroomand et Zienkiewicz (1997b, 1997a) et la méthode *SPREB (enhanced Superconvergent Patch Recovery incorporating Equilibrium and Boundary conditions)* par Wiberg et al. (1994).

Boroomand et Zienkiewicz (1999) ont étudié la technique de recouvrement pour les problèmes élastoplastiques à partir des méthodes *SPR* et *REP*, car elles se sont avérées les plus efficaces pour les problèmes élastiques et linéaires. Aussi, El-Hamalawi et Bolton (1999) ont adapté la méthode SPREB pour les problèmes de consolidation.

Malgré les limitations de la méthode, (Meng et Zhu, 2007), elle reste la technique d'estimation d'erreurs la plus répandue et utilisée dans les codes de calcul du fait de sa simplicité d'implémentation. Zhu (1997) a démontré que la méthode d'estimation d'erreurs sur les résidus d'équilibre peut être retrouvée à partir de la méthode de recouvrement.

#### *II.2.3.6 Estimateurs d'erreurs basés sur les bases hiérarchiques*

Cette méthode a été proposée par Bank et Smith (1993). L'estimateur d'erreurs est déterminé à partir de deux solutions approchées du même problème obtenues en utilisant deux schémas de discrétisation ayant chacun une précision différente.

Une première analyse numérique est effectuée et une solution  $(u_h^1, \sigma_h^1)$  est obtenue. A partir de cette solution, une solution améliorée  $(u_h^2, \sigma_h^2)$  est déterminée soit par augmentation du degré d'interpolation des éléments, soit par raffinement du maillage.

L'erreur définie par (II.6) devient :

$$(e^*)_u = u_h^2 - u_h^1 \approx (e)_u \quad \text{II.30}$$

La validité de (II.30) dépend de la manière dont  $(u_h^2, \sigma_h^2)$  représente une amélioration de  $(u_h^1, \sigma_h^1)$  et se rapproche de la solution exacte  $(u, \sigma)$ . Ceci est traduit par l'hypothèse de saturation de Bank et Smith (1993) :

$$\|u - u_h^2\| \leq \beta \|u - u_h^1\| \quad \text{II.31}$$

où  $\beta$  représente une constante qui vaut  $\frac{1}{2}$  pour les maillages linéaires et  $\frac{1}{4}$  pour les maillages quadratiques.

Dans la pratique, pour des solutions  $u$  suffisamment régulière, l'hypothèse de saturation est vérifiée.

#### *II.2.3.6.1 Etat de développement*

Bien que la méthode soit très simple et facile à implémenter dans les codes de calculs EF, le coût de calcul pour un problème complexe reste excessif. L'estimateur d'erreurs basé sur les bases hiérarchiques n'est implémenté dans aucun code numérique.

### **II.2.4 Bornes sur les erreurs**

Veubeke (1965) a été le premier à s'intéresser au développement des bornes sur les erreurs, particulièrement des bornes inférieures pour l'énergie de déformation, à partir d'une norme énergétique complémentaire pour obtenir une surévaluation de la norme énergétique en déformations. Ce procédé a été difficile à résoudre, alors Veubeke et Zienkiewicz (1967) ont essayé de construire une technique d'évaluer les bornes sur les erreurs (appelée « slab analogy ») pour des problèmes 2D, sans succès.

Avec l'introduction d'estimateurs d'erreurs basés sur les résidus d'équilibre, une autre opportunité de construire des bornes a été envisagée. Kelly (1984) a étudié la construction des bornes supérieures. Les travaux de Ladevèze et al. (1986) et de Bank et Weiser (1985) concernant les bornes pour les estimateurs d'erreurs basés sur les résidus d'équilibre ont suivi.

Il était important d'offrir des bornes sur les erreurs en champs de déplacements ou champs de contraintes surtout dans des zones d'intérêt. L'objectif a été de trouver

des bornes précises et garantis (Figure II.5) pour les erreurs. Becker et Rannacher (1996), Paraschivoiu et al. (1997a) et Ladeveze et al. (1999b) ont établis des bornes précises et parfois garantis pour des problèmes en statique linéaire. Rannacher et Suttmeier (1998) ont établis des bornes non précises et non garantis pour des problèmes non linéaires.

Paraschivoiu et al. (1997b), Pareire et Patera (1999) et Patera et Pareire (2003) ont étendue l'étude des bornes sur les erreurs pour des quantités d'intérêt. Pour une quantité d'intérêt arbitraire, ils ont démontré que il est possible de construire un problème adjoint de qualité supérieure que le problème original, avec le même maillage que le problème original. Le problème adjoint fournit les bornes supérieures sur les erreurs.

Le travail reste encore en cours de développement pour obtenir des bornes inférieures. Les bornes doivent encore être étendues aux problèmes plastiques.

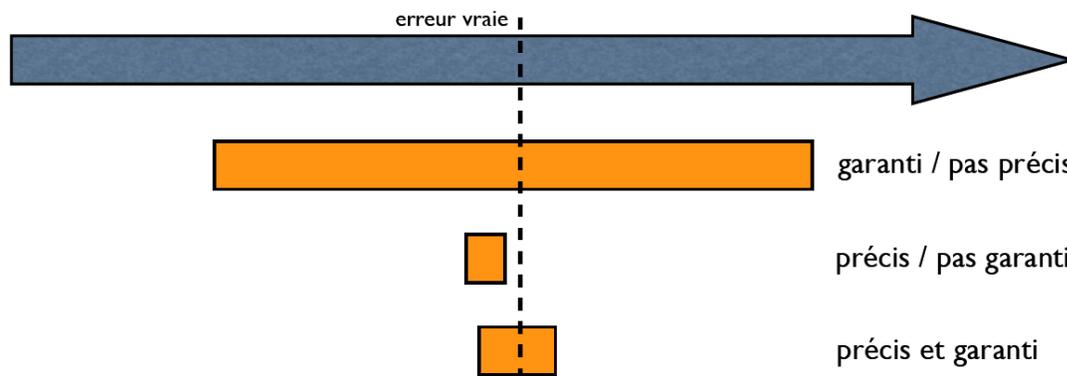


Figure II.5 Bornes sur les erreurs (Chamoin, 2007)

### II.2.5 Qualité des estimateurs d'erreurs

L'idée de calculer les estimations des erreurs de calculs numériques n'est pas nouvelle; un travail sérieux à ce sujet a commencé dans les années 1980. Le développement d'estimateurs d'erreurs a posteriori est un sujet commun dans les milieux de recherche universitaire. Les estimateurs d'erreurs offrent une mesure quantitative pour déterminer la qualité des simulations numériques. Ils fournissent une base pour les techniques de contrôle de l'erreur des modèles discrets. À ce

jour, la plupart des estimateurs a posteriori a été réservée à une classe assez restreinte de problèmes, se rapportant en grande partie à la théorie linéaire. À cause de cela, ils ne sont pas introduits dans les codes de calculs commerciaux.

Nous pouvons anticiper le fait que l'estimation d'erreur a posteriori et les techniques de contrôle de l'erreur vont devenir une caractéristique commune dans les codes de calculs par éléments finis dans les prochaines dizaines d'années. L'étude des bornes supérieures et inférieures pour les erreurs représente une avancée importante dans le domaine d'estimation d'erreurs. Oden et al. (2003) estiment qu'une bonne démarche de construction des bornes sera faite dans la prochaine dizaine d'années.

Nous pouvons définir la qualité des estimateurs d'erreurs par deux méthodes :

- l'indice d'efficacité de l'erreur globale (Gago, 1982 ; Zienkiewicz et Zhu, 1987) :

$$\Theta = \frac{\|(e)_u\|_{\Omega}}{\left\| \begin{pmatrix} * \\ e \end{pmatrix} \right\|_{\sigma, \Omega}} \quad \text{II.32}$$

où  $\|(e)_u\|$  représente l'erreur estimée par l'équation (II.11) ;

$\left\| \begin{pmatrix} * \\ e \end{pmatrix} \right\|_{\sigma, \Omega}$  représente l'erreur vraie ou l'erreur définie par (II.25).

Si l'erreur par rapport à la solution exacte n'est pas connue, alors l'erreur vraie est considérée comme étant la différence entre la solution approchée obtenue pour un maillage très fin (appelé solution "overkill") et celle obtenue pour le maillage courant. Strouboulis et Haque (1992) et Babuska et al. (1994d) ont étudié la qualité d'estimateurs d'erreurs pour des problèmes ayant des solutions analytiques ou pour lesquels une solution de référence peut être déterminée sur un maillage très fin. Ils ont conclu que la qualité d'un estimateur dépend de la topologie du maillage, de la régularité de la solution et de la régularité des éléments.

Un bon estimateur d'erreur est caractérisé par un indice d'efficacité proche de la valeur unité. Quand l'indice se rapproche de l'unité pour un maillage très fin, l'estimateur est dit asymptotiquement exact. Néanmoins, il est préférable que l'estimateur donne des indices d'efficacité proches de 1 pour des maillages moyennement fins afin d'être utilisable pour des discrétisations courantes en ingénierie.

- l'indice d'uniformité (Zhong et Beckers, 1990; Beckers et Zhong, 1992) :

$$SD = \left[ \frac{1}{N} \sum_{e=1}^N (\Theta_e - \bar{\Theta})^2 \right]^{1/2} \quad \text{II.33}$$

où  $\Theta_e$  représente l'indice d'efficacité au niveau local ;  
 $\bar{\Theta}$  est la valeur moyenne sur  $\Theta_e$   
 $N$  est le nombre d'éléments finis.

Si  $SD \approx 0$ , l'estimateur d'erreurs est considéré uniforme. Un bon estimateur est dans le même temps efficace et uniforme.

L'indice de robustesse représente un autre moyen d'examiner la qualité d'estimateur. Il a été développé par Babuska et al. (1994b) :

$$R = \max \left( \left| 1 - \Theta_L \right| + \left| 1 - \Theta_U \right|, \left| 1 - \frac{1}{\Theta_L} \right| + \left| 1 - \frac{1}{\Theta_U} \right| \right) \quad \text{II.34}$$

où  $\Theta_L$  représente la borne inférieure de l'indice d'efficacité ;  
 $\Theta_U$  représente la borne supérieure de l'indice d'efficacité.

L'estimateur optimal est obtenu pour un indice de robustesse faible, idéalement  $R = 0$  (vérifié pour  $\Theta_U = \Theta_L = 1$ ). Babuska et al. (1994b, 1994d, 1997) ont testé une

série d'estimateurs d'erreurs et ils ont conclu que la méthode de recouvrement SPR (Superconvergent Patch Recovery) est la plus robuste.

Néanmoins, l'indice est difficilement à implémenter dans les codes et reste inutilisable pour les solutions approchées avec des maillages complexes.

### **II.2.6 Techniques de contrôle de l'erreur**

Les méthodes d'adaptation de maillage ont été introduites dans l'étude de la MEF par Babuska et Rheinboldt (1978, 1980). Après avoir déterminé les erreurs, il était intéressant pour les chercheurs de développer des méthodes d'adaptation qui, en tenant compte des erreurs calculées, améliorent les solutions approchées à partir d'un maillage courant. Au cours du temps, une série de techniques adaptatives a été développée. Leur objectif est d'obtenir facilement des solutions plus précises. L'efficacité des techniques adaptatives dépend de la qualité de l'estimateur d'erreur choisi.

Comme une grande partie des erreurs de discrétisation sont des erreurs de discrétisation spatiale, la solution MEF peut être considérablement améliorée par un remaillage. Une méthode automatique de génération de maillage est alors considérée. Zhu et Zienkiewicz (1997) définissent les caractéristiques de base d'un générateur automatique de maillage : robuste, rapide, facile à utiliser et à générer de bonnes mailles.

Les chercheurs ont proposé trois méthodes pour développer des générateurs automatiques de maillage :

- triangulation de Delauney ;
- méthode frontale avancée ;
- méthode "finite octree".

Chacune de ces méthodes présente des désavantages. La triangulation de Delaunay est une méthode globale, ce qui rend difficile le contrôle de la qualité du maillage. La technique frontale avancée est difficile à implémenter dans les codes

numériques et la méthode "finite octree" dépend fortement des coordonnées du point de la géométrie du modèle.

La génération automatique de maillage 3D est intéressante car un certain nombre de structures complexes ne peuvent être analysées à l'aide de modélisation 2D. La première génération de maillage est souvent coûteuse, donc, l'application d'une des techniques de régénération de mailles serait encore plus coûteuse et souvent inefficace. Zhu et Zienkiewicz (1997) proposent une combinaison entre la triangulation de Delauney et la méthode frontale avancée pour la génération automatique de maillage 3D avec des éléments tétraédriques. Depuis lors, un certain nombre d'auteurs ont étudié et essayer d'améliorer la génération automatique de maillage (Boussetta, 2005; Rachowicz et al., 2006; Kurtz et Demkowicz, 2007).

Les méthodes d'adaptation de maillage sont les suivantes :

- r-adaptation: optimise la position des nœuds du maillage (Carroll et Baker, 1973 ; Kikuchi et al., 1986). La méthode est présentée dans Figure II.6.

L'inconvénient majeur de cette méthode réside dans le fait que l'amélioration de la précision est limitée par le nombre de degrés de liberté disponibles. Le nombre de degrés de liberté est constant.

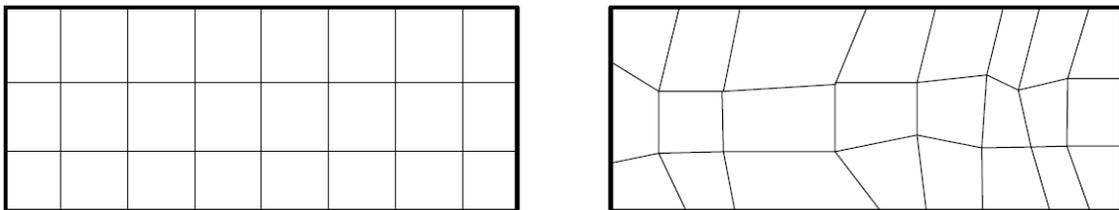


Figure II.6 Représentation graphique de la méthode r-adaptation (Delmas, 2008)

- h-adaptation: raffinement et régénération complète du maillage.

Cette méthode consiste à modifier la taille des éléments en conservant le type d'interpolation et la topologie du maillage. Il y a deux manières pour mettre en œuvre cette approche :

a) raffinement local, appelé aussi "element bisection method" ou adaptation hiérarchique de maillage. Le raffinement est réalisé seulement dans les zones d'intérêt, Figure II.7 :

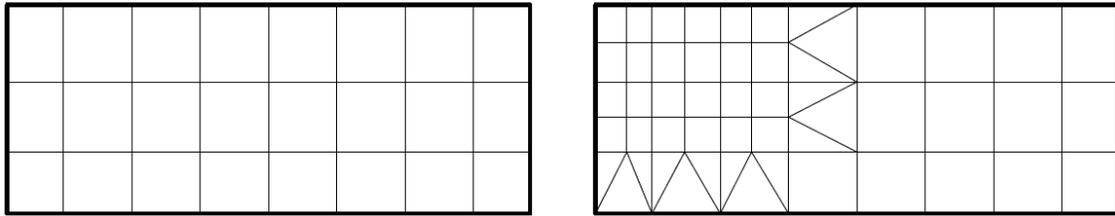


Figure II.7 h-adaptation : représentation graphique de la méthode de raffinement local (Delmas, 2008)

b) méthode globale de h-remailage : le maillage est complètement régénéré (Carnet et al., 1981). Une représentation graphique de la méthode est présentée dans Figure II.8. L'avantage de cette méthode est de pouvoir uniformiser efficacement la distribution de l'erreur.

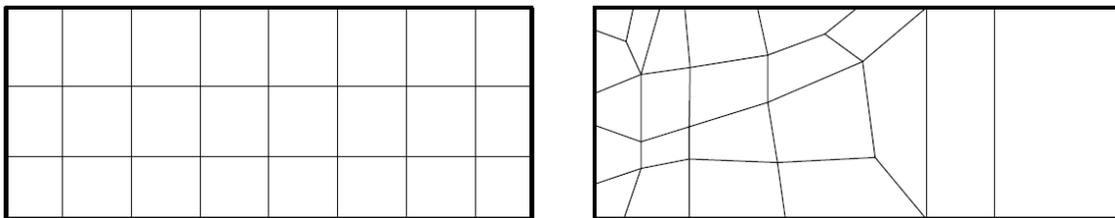


Figure II.8 h-adaptation : représentation graphique de la méthode de raffinement global (Delmas, 2008)

- p-adaptation: augmenter le degré d'interpolation des éléments, la topologie de maillage est conservée (Babuska et al., 1981 ; Babuska et Suri, 1990). Une représentation graphique de la méthode est présentée dans Figure II.9.

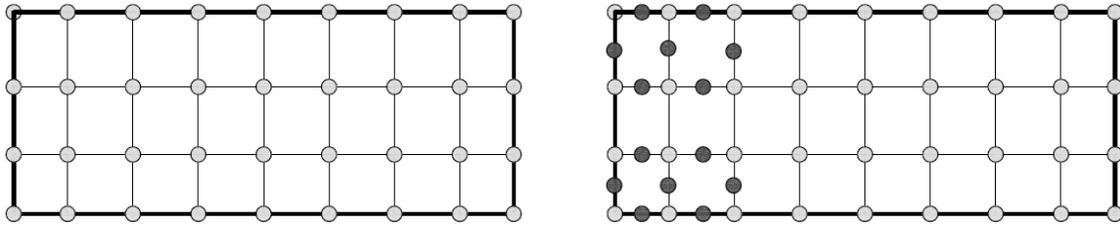


Figure II.9 Représentation graphique de la méthode p-adaptation (Delmas, 2008)

Le degré d'interpolation des éléments est augmenté en conservant le maillage initial. Cette méthode se rapproche de plus la forme du modèle, ce qui convient pour les surfaces courbes. Les éléments linéaires introduisent des erreurs plus importantes, car ils ne décrivent pas la surface réelle.

- hp-adaptation : combinaison entre h-adaptation et p-adaptation.

Une technique d'adaptation très utilisée est la combinaison entre le type h et le type p. La méthode optimise les résultats par remaillage et augmentation du degré d'interpolation des éléments. Une première approche consiste à appliquer d'abord l'adaptation de type h pour atteindre une précision intermédiaire, puis à appliquer l'adaptation de type p (Zienkiewicz et al., 1989). Une autre approche consiste à utiliser les deux méthodes de façon à optimiser la vitesse de convergence (Rank et Babuska, 1987). Des méthodes d'amélioration de l'adaptation de type hp ont été proposées par Paczelt et al. (1999) pour des problèmes de contact et par Solin et Demkowicz (2004) pour des problèmes elliptiques.

Askes et al. (2002) ont développé une technique d'adaptation de maillage à partir de l'adaptation de type r et de l'adaptation de type h. L'intérêt était d'utiliser la meilleure caractéristique de chaque technique individuelle et de les combiner afin d'obtenir une stratégie d'adaptation plus efficace.

Des erreurs significatives sont souvent concentrées dans certaines zones du maillage, il est alors intéressant d'affiner le maillage dans ces régions pour optimiser le temps de calcul. Mar (1993) a introduit une méthode de raffinement qui augmente localement la qualité du maillage dans les zones d'intérêt.

Les problèmes multiphasiques représentent une autre catégorie de problèmes coûteux pour les méthodes d'adaptation. El-Hamalawi et Bolton (1999) et Stelzer et Hofstetter (2005) ont essayé d'améliorer l'efficacité des techniques d'adaptation.

Les techniques présentées ci-dessus nécessitent un modèle discrétisé d'origine à partir duquel un maillage adapté est obtenu. Cette procédure n'est pas satisfaisante, elle entraîne des coûts élevés de calcul et devient impraticable pour les modèles numériques complexes. Bugada et al. (2008) proposent une nouvelle stratégie d'adaptation qui permet de générer un maillage amélioré sans effectuer entièrement une technique de remaillage.

La méthode d'adaptation du maillage reste un sujet en cours de développement jusqu'à ce qu'une méthode robuste, efficace et facile d'emploi soit mise au point.

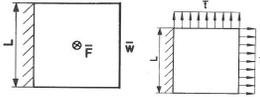
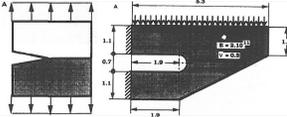
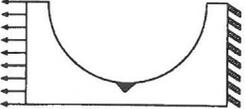
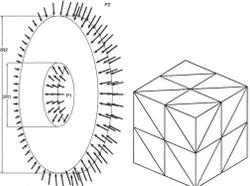
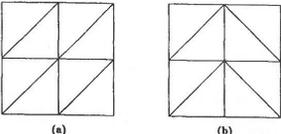
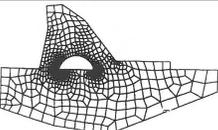
### **II.2.7 Quelques exemples de problèmes traités par les méthodes d'adaptation dans les calculs éléments finis**

Les tableaux 2 et 3 présentent plusieurs problèmes étudiés par différentes méthodes d'adaptation, ils résument l'état actuel de développement concernant les techniques de contrôle d'erreurs et leurs possibles applications pour « des problèmes industriels ».

## **II.3 LES METHODES D'ADAPTATION DANS LES CODES DE CALCULS INDUSTRIELS**

Le but du développement des techniques de contrôle de l'erreur était de les introduire dans les codes courants de calculs par éléments finis. Le code effectue des analyses sans offrir à l'utilisateur des informations concernant la précision de la solution numérique. Les méthodes d'adaptation sont destinées à minimiser l'écart entre la solution approchée par éléments finis et la solution exacte du problème physique. Malgré leur implémentation dans les codes de calculs, elles restent

encore peu utilisées et adaptées pour un nombre limités de problèmes. Une liste des codes les plus répandus est présentée dans le Tableau 4 (SAMCEF, 2006; ADINA, 2008; Cast3m, 2010; GEO5, 2010; PLAXIS, 2010; ABAQUS, 2011; ANSYS, 2011; CATIA, 2011; Code\_Aster, 2011; LS-DYNA, 2011).

Article	Estimateur d'erreurs	Considérations sur l'analyse	Erreur maximale désirée	Problèmes étudiés	Description du problème	Conclusions (par les auteurs)
(Debondie et al., 1995)	Analyse duale	- élasticité linéaire - bornes supérieures et inférieures	Prédéfinie		- loi de comportement élastique linéaire	- solution approchée remplacée par solution admissible - utile pour interpréter les erreurs en relation de comportement
(Coorevits et al., 1995)	Relation de comportement	- élasticité 2D - maillage avec éléments triangulaire à 3 et 6 nœuds	Prédéfinie		- loi de comportement élastique linéaire	- analyse linéaire 2D automatique - méthode efficace pour les problèmes 2D linéaires - peut être étendue aux problèmes 3D élastiques
(Ladeveze et al., 1999b)	Relation de comportement - erreur locale	- élasticité 2D	Prédéfinie			- la borne supérieure est définie - encore en cours de développement pour 2D et 3D
(Florentin et al., 2002)	Relation de comportement - erreur locale	- la borne supérieure est définie - élasticité 3D - qualité définie par l'indice d'efficacité	Prédéfinie			- améliore les champs statiquement admissibles - larges erreurs globales, très fines erreurs locales - en cours de développement pour les erreurs locales
(Florentin et al., 2003)	Relation de comportement - erreur locale	- analyse structural 3D - solution analytique connue - éléments tétraédriques à 10 nœuds - qualité définie par l'indice d'efficacité	Prédéfinie			- surestimation de l'erreur (indice d'efficacité locale > 1)
(Babuska et al., 1995b)	Résidu d'équilibre - niveau élémentaire	- qualité définie par l'indice d'efficacité - élasticité linéaire 2D	Prédéfinie		- différents types de maillage pour les éléments triangulaires et quadrangulaires	- l'estimateur ERpB est robuste
(Diez et al., 1998)	Résidu d'équilibre - niveau élémentaire	- qualité définie par l'indice d'efficacité - élasticité 2D	Prédéfinie		- déformations planes	- applicable pour des maillages mixtes - implémentation facile dans les codes de calcul EF

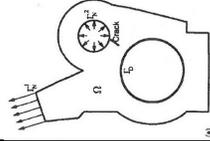
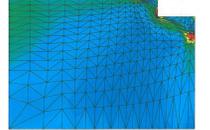
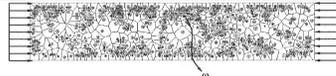
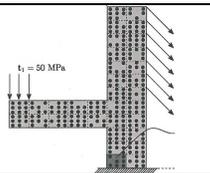
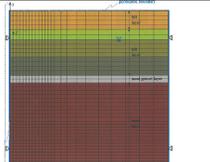
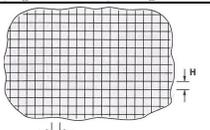
(Strouboulis et al., 1999)	Résidu d'équilibre - erreur locale	- erreur divisée en erreur locale et erreur de pollution - élasticité linéaire 2D	Prédéfinie			- indices d'efficacité entre 0,5-2,2
(Askes et al., 2002)	Résidu d'équilibre	- problème de couplage - r-h-adaptation - estimateur d'erreur (h-adaptation) - indicateur d'erreur (r-adaptation)	Prédéfinie		- le maillage divisé en deux pour adaptation : h-adaptation et r-adaptation	- des erreurs très grandes dans les zones de la singularité - en cours de développement
(Oden et Prudhomme, 2002)	Résidu d'équilibre - erreur locale	- erreurs en quantités d'intérêt - erreurs de modèle - discrétisation hiérarchique (maillage raide – maillage fin)	Prédéfinie			- vérification (erreurs de discrétisation) et validation (erreurs de modèle) utiles
(Romkes et al., 2006)	Résidu d'équilibre - erreur locale	- erreur locale en quantité d'intérêt - méthode de Monte Carlo - matériau hétérogène - micro-échelles	Prédéfinie		- matériau hétérogène - aluminium et bore isotopique	- le processus d'adaptation contrôle les erreurs de modèle - en cours de développement
(El-Hamalawi et Bolton, 1999)	Lissage de contraintes	- base sur SPREB, - pression interstitielle introduite dans l'analyse d'estimation d'erreurs - problème de consolidation - h-adaptation	Prédéfinie		- sol élastique, non pesant - problème axisymétrique - loi de comportement Tresca	- les estimations d'erreurs sont améliorées par l'introduction de la pression interstitielle - interaction sol-structure mieux représentée
(Stelzer et Hofstetter, 2005)	Lissage de contraintes - erreur globale	- 2 types d'estimation; une bases sur quantités incrémentales, l'autre bases sur quantités totales - problème de couplage - élasticité linéaire	Prédéfinie		- problème d'assèchement	- le deuxième type d'estimation (quantités totales) est plus économique
(Oden et al., 2005b)	Bases hiérarchiques - erreur en quantité d'intérêt	- structure treillis	Prédéfinie		- maillage treillis combiné avec un modèle continu	- erreurs contrôlées par les treillis
(Huang et al., 2010)	Bases hiérarchiques	- matériau orthotrope - itération symétrique Gauß-Seidel	Prédéfinie		- matériau orthotrope	- bonne technique d'adaptation pour les maillages anisotropes - l'itération GS est efficace et économique

Tableau 2 Techniques d'adaptation de maillage pour des problèmes élastiques

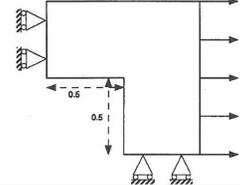
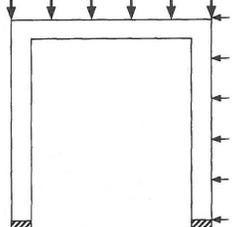
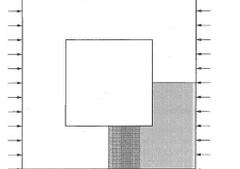
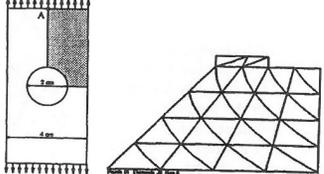
Article	Estimateur d'erreurs	Considération sur l'analyse	Erreur maximale désirée	Problèmes étudiés	Description du problème	Conclusions (par les auteurs)
(Ladeveze et Moes, 1999)	Relation de comportement	<ul style="list-style-type: none"> <li>- problèmes plastiques:</li> <li>- dépend de temps</li> <li>- discrétisation spatiale</li> <li>- méthode itérative</li> </ul> <ul style="list-style-type: none"> <li>- h-adaptation</li> </ul>	Prédéfinie		<ul style="list-style-type: none"> <li>- déformations planes</li> <li>- modèle Prandtl-Reuss (von Mises)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- le processus itératif n'influence pas les erreurs</li> <li>- processus itératif et discrétisation de maillage et temporelle abordés en même temps</li> </ul>
(Ladeveze et al., 1999a)	Relation de comportement	<ul style="list-style-type: none"> <li>- problèmes plastiques</li> <li>- dépend de temps</li> </ul>	Prédéfinie		<ul style="list-style-type: none"> <li>- matériau viscoplastique</li> <li>- l'erreur diminue quand la discrétisation temporelle est la source principale d'erreurs</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- possible extension aux matériaux atypiques</li> <li>- prend en compte le processus itératif et la discrétisation de maillage et temporelle</li> <li>- en cours de développement</li> <li>- la finesse du maillage n'influence pas les erreurs</li> </ul>
(Gallimard et al., 2000)	Relation de comportement	<ul style="list-style-type: none"> <li>- erreur de Drucker et estimateur d'erreur Drucker évolué</li> </ul>	Prédéfinie		<ul style="list-style-type: none"> <li>- modèle Prandtl-Reuss (von Mises)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- meilleur indice d'efficacité pour l'estimateur d'erreur Drucker évolué</li> <li>- développement possible pour les problèmes viscoplastiques</li> </ul>
(Boroomand et Zienkiewicz, 1999)	Lissage de contraintes	<ul style="list-style-type: none"> <li>- raffinement h-adaptation</li> <li>- nouvel opérateur pour le transfert d'information à partir du maillage original au maillage raffiné</li> <li>- erreurs de discrétisation</li> </ul>	Prédéfinie		<ul style="list-style-type: none"> <li>- loi de comportement élastoplastique</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- bon opérateur de transfert basé sur la méthode de lissage de contraintes</li> <li>- peut être utilisé dans des problèmes non linéaires</li> </ul>

Tableau 3 Techniques d'adaptation de maillage pour des problèmes plastiques

Code de calcul par éléments finis	Estimateurs d'erreurs utilisé (techniques d'adaptation de maillage)	Types de problèmes analysés
<b>LS-DYNA</b>	Estimateur basé sur les résidus d'équilibre (RMS, R2) / r-adaptation pour des éléments solides en 2D et 3D / d-adaptation pour les éléments coques	industrie d'automobiles/ aérospatiale
<b>code_ASTER</b>	1. Estimateur basé sur le lissage des contraintes / 2. Estimateur basé sur les résidus d'équilibre / 3. Erreur en quantité d'intérêt	1. problèmes de mécanique 2D / 2. problèmes mécaniques et thermiques 2D et 3D
<b>ABAQUS</b>	Estimateur basé sur le lissage des contraintes/ h-adaptation	toutes les types des analyses / limitations en 2D et 3D (éléments tétraédriques)
<b>PLAXIS</b>	pas utilisés	pas utilisés
<b>ANSYS</b>	Estimateur basé sur les résidus d'équilibre / h-adaptation	limitations: analyses statiques linéaires
<b>ADINA</b>	Estimateur basé sur les résidus d'équilibre	pas d'information
<b>CASTEM</b>	Estimateur en relation de comportement	pas d'information
<b>SAMCEF</b>	Estimateur en relation de comportement	pas d'information

Tableau 4 Liste des codes de calculs par éléments finis utilisant des méthodes d'estimation et adaptation

## II.4 CONCLUSIONS

Ce chapitre a présenté les méthodes actuellement développées et utilisées pour déterminer et améliorer la qualité des calculs par éléments finis. Les estimateurs d'erreur utilisés pour déterminer la qualité de la discrétisation sont présentés, puis chaque estimateur d'erreur est détaillé avec l'évaluation de l'état actuel de développement.

Les techniques de contrôle de l'erreur dans les codes numériques ont été largement développées et étudiées. Jusqu'à présent, la plupart de ces méthodes ont été développées pour des problèmes 2D linéaires élastiques. Quelques

problèmes élastoplastiques, viscoplastiques ou tridimensionnels ont été abordés. Les méthodes d'adaptation restent très coûteuses en temps de calculs, leur qualité n'est pas encore totalement estimée. Toutefois, des formulations mathématiques complexes sont adaptables pour des classes de problèmes restreintes (surtout élasticité). Les méthodes sont généralement difficiles à implémenter dans les codes de calculs. Les formulations mathématiques les plus fiables et précises sont les plus coûteuses, même pour des analyses simples.

Ainsi, il nous a semblé nécessaire d'introduire une approche simple pour quantifier les erreurs commises à la fin d'un calcul par éléments finis, celle-ci doit être accessible pour les ingénieurs. Une telle méthode a été recherchée et proposée dans le cadre de cette thèse.

Nous proposons d'étudier la qualité des solutions approchées à partir d'« indicateurs de qualité » décrits dans le prochain chapitre.

## **III DEVELOPMENT OF QUALITY INDICATORS. PART I: DEVELOPMENT AND APPLICATION TO SIMPLE 2D AND 3D PROBLEMS**

### III.1 ARTICLE PRESENTATION

After evaluating the available error estimators and adaptive techniques, by also describing their current development stage, in Chapter II. Estimation d'erreurs et techniques d'adaptation de maillages, we reached the conclusion that we need to introduce a simple way of quantifying errors in FEM, a simple method that is accessible for engineers

Up to the present time, most of the methods studying the accuracy of the numerical analyses are applicable for 2D linear elastic problems, with some exceptions where elastoplastic, viscoplastic or 3D analyses have been studied. The adaptive techniques proved to be time consuming especially for complex problems. The methods (except for the SPR method) are difficult to implement in computer codes; thus very few codes have adopted tools to study the quality of the FE analyses.

We proposed a new means of studying the accuracy of the numerical solutions, namely studying the quality of the discretization model: simple mathematical formulations that can be easily implemented into any computer code that take no additional computation time. These new tools are called "quality indicators". Three indicators have been defined.

The work on this chapter is presented under the form of an article submitted to « Finite Elements In Analysis and Design » international journal. First, a short overview about error estimators is given. The errors are assessed, the definition and presentation of the quality indicators follows. Lower and upper bounds are obtained. We then illustrate the use of the quality indicators for 2D and 3D problems based on FEM analyses using different types of elements and mesh finenesses. Four simple problems have been chosen: uniform load strip on elastic half space, circular cavity expansion, uniform vertical loading of a smooth rigid strip on an elastoplastic half space, tunnel stability.

Since the article presents a restrictive amount of results, ANNEXE 1 and ANNEXE 2 collect a larger number of graphs for an in-depth study of the quality of the numerical solutions of the chosen simple 2D and 3D problems. ANNEX 1 is dedicated to the simple 2D problems and ANNEXE 2 to the simple 3D problems results.

The article submitted to « Finite Element in Analysis and Design » is attached below. The paper is presented in its original submitted form.

# Development of quality indicators. Part I: development and application to simple 2D and 3D problems

Submitted to "Finite Elements in Analysis and Design"

---

## Abstract

The paper presents an a posteriori tool for determining the accuracy of the FE analyses – called "quality indicators". The quality indicators are simple and time efficient numerical formulas for determining the errors induced by discretization. They define the nodal stress errors in the computations. The results given by the quality indicators are plotted graphically as contour plots over the modeled mesh. Upper and lower bounds are easily determined. They have been tested on a number of linear elastic and nonlinear elastoplastic 2D and 3D simple problems and they prove to be efficient tools in determining the accuracy of the FE computations.

Keywords: quality indicator, error, upper bound, lower bound, 2D, 3D

---

## 1 INTRODUCTION

FEM is an important computation tool in geotechnical engineering since analytical solutions are rarely available. FEM offers only approximate solutions and their quality is often questionable. Thus, the accuracy of the analyses has occupied an important space in the development of the FEM computations. The accuracy of the FEM solution has been studied by means of error estimates. They can be divided into a priori error estimators and a posteriori error estimators. A priori estimators are little developed because they provide little information when the exact solution is not known; they are not computable. In contrast, the a posteriori error estimates can be computed even if the exact solution is not known; they are used for adaptive mesh techniques.

A number of a posteriori error estimation methods have been developed over the years, the most significant being the recovery error estimation [1, 2] and residual error estimation [3-6]. Both methods have been subsequently improved over the years [2, 3, 7-15]. It has been demonstrated that the recovery technique offers more accurate error determinations and that there is a relation between the two main error estimation methods. Also, the residual error estimator can be derived from a recovery based error estimator [16, 17]. Even though it has been shown that the recovery error estimator is more robust than the residual error estimator [18, 19], the quality of the recovery technique depends directly on the accuracy of the recovered solution since it is used in place of the exact solution when computing the error [20]. The recovery error estimator is accurate only if the recovered solution (obtained by different recovery techniques such as SPR [2], REP [21] or SPREB [22]) is highly accurate. One significant disadvantage of this method is the fact that the recovery solution depends on another FEM solution.

In recent years, a clearer representation of the errors in FEM has been sought for using quantities of interest (stresses, displacement, heat transfer, velocity fields); quantities that provide relevant information about the FEM analyses to the engineers [23-27]. Bounds on such errors have been implemented but only for a number of restricted problems, generally 2D and elasticity [28-30].

A number of automatic adaptivity techniques have been added to the error estimators in order to improve the FEM solution where high errors are evaluated [1, 31, 32]. These methods have proved to be efficient on a limited number of problems offering mixed results [33-35]. A great disadvantage of the adaptivity techniques is the computation costs for large and/or nonlinear problems. The adaptive techniques rely on remeshing either the entire model or the parts of the model where large errors are detected. Recently, goal oriented adaptivity has been studied based on the error estimation in quantities of interest [24]. Lower and upper bounds have been introduced for the goal oriented estimators [29, 36-38].

The present article proposes a simple approach to determine the discretization errors, i.e. errors that are mostly caused by the type of elements used and the mesh fineness. The mesh size, the complete/reduced integration are also factors that influence the accuracy of the FEM analysis. The aim is to provide the FEM user a tool that would allow verifying the accuracy in terms of spatial discretization of the FEM analyses. The accuracy of the FEM analyses will be measured by “numerical quality indicators”. The quality indicators define the nodal stress errors in the analyzed problems. The errors are determined based on the inconsistency of the stress values at nodes throughout the mesh. The results are presented graphically in terms of contour plots. The quality indicators are adimensional values.

Guaranteed lower and upper bounds for the quality indicators are also easily determined and presented.

The quality indicators are suitable for any type of problem since their definition involves the computation of errors based solely on the computed nodal stresses in the problem. Another advantage of the quality indicators is represented by the graphical visualization of the errors along the mesh.

In Section 2, the errors are reviewed and defined in terms of equilibrium defaults. Section 3 is dedicated to the definition and presentation of the quality indicators implemented in CESAR computer code; Section 4 presents the lower and upper bounds on the quality indicators. Sections 5 and 6 illustrates the use of the quality indicators for 2D and 3D problems based on FEM analyses using different types of elements and mesh finenesses. Section 7 is dedicated to the concluding remarks on the use of quality indicators.

## 2 PRELIMINARY ANALYSIS OF THE ERRORS IN FEM

Let us define a model problem on the elastic domain  $\Omega \subset \mathfrak{R}^d$ , with  $d = \overline{1,3}$  (Fig. 1). The domain is bounded by the surface  $\Gamma$ . External forces  $\bar{F}$  are applied on  $\Gamma_F$ , displacements  $\bar{u}_0$  are applied on  $\Gamma_u$ ; the boundaries  $\Gamma_u$  and  $\Gamma_F$  are such that:

$$\Gamma_u \cap \Gamma_F = \emptyset \quad 2.1$$

$$\Gamma_u \cup \Gamma_F = \Gamma \quad 2.2$$

with  $\Gamma$  as boundary of the domain  $\Omega$ .

The equations of the problem are the momentum balance:

$$\text{div}\sigma + \bar{f} = 0 \quad 2.3$$

with the boundary conditions:

$$\sigma \cdot \bar{n} = \bar{F} \quad 2.4$$

$$\bar{u} = \bar{u}_0 \quad 2.5$$

where  $\bar{n}$  represents the outward unit vector.

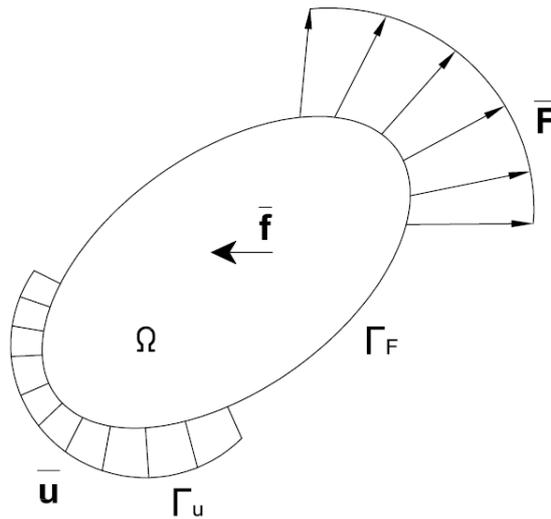


Fig. 1 Physical model

When performing displacement based FE computations, 2.3 and 2.4 are not satisfied. On the whole we can provide three sources of errors in the numerical analyses:

$$\text{div}\sigma_h + \bar{f} \neq 0 \quad 2.6$$

$$\sigma_h \cdot \bar{n} \neq \bar{F} \quad 2.7$$

$$[\sigma_h \cdot \bar{n}]_{E_1} \neq [\sigma_h \cdot \bar{n}]_{E_2} \quad 2.8$$

where  $\sigma_h$  denotes the stress tensor obtained by FEM and  $E_1, E_2$  represent two neighbouring elements. Equation 2.8 is graphically described by Fig. 2.

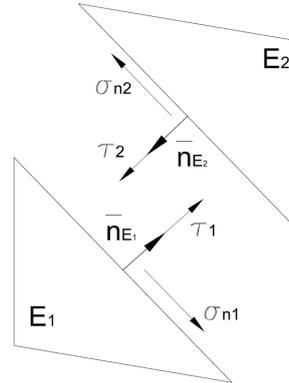


Fig. 2 Interface between 2 elements

The approximate FE solutions  $(u_h, \sigma_h, \varepsilon_h)$  are expressed as follows:

$$u_h = N\tilde{u} \quad 2.9$$

$$\varepsilon_h = Su_h \quad 2.10$$

$$\sigma_h = DSu_h \quad 2.11$$

where  $\tilde{u}$  represents the nodal values of the displacement,  $N$  represents the appropriate polynomial shape function,  $S$  represents the general differential operator and  $D$  the elasticity matrix containing specific material properties.

The errors associated with each FEM solution are considered as the difference between the exact solution defined by the field  $(u, \sigma, \varepsilon)$  and the numerical solution. The accuracy of  $(u_h, \sigma_h, \varepsilon_h)$  is assessed by the discretization errors defined below:

$$e = u - u_h \quad 2.12$$

$$e_\sigma = \sigma - \sigma_h \quad 2.13$$

$$e_\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_h \quad 2.14$$

In what follows, the quality indicators are defined by the FE solution nodal stress jumps in each element of the discretized model. Except for nodes belonging to elements having different material properties, we expect that the nodal stresses be continuous in

a homogeneous material. The quality indicators determine the level of inaccuracies inside the mesh.

The quality indicators are applicable to any type of problem, but for the ease of representation the elastic model problem has been considered above.

### 3 DEFINITION AND PRESENTATION OF QUALITY INDICATORS

The quality indicators represent the level of inconsistency at any given point in the FE solution and are formulated in terms of errors at nodal stresses. Since we consider that the errors are solely FE analyses related, the differences in values of the interconnecting nodal stresses have been assessed and represented in terms of quality indicators.

For the purpose of simplification, we discuss herein the development of the quality indicators based on the considerations for the elastic model. Three quality indicators have been developed and implemented in the CESAR-LCPC FE computer code.

Quality indicator  $I_{q,ij}^{(1)}$  evaluates the difference between the nodal stresses at element corners while quality indicators  $I_q^{(2)}$  and  $I_q^{(3)}$  evaluate the equilibrium default of the interface between adjacent elements.  $I_q^{(2)}$  and  $I_q^{(3)}$  are determined based on 2.8.

The quality indicators have been defined as follows:

$$I_{q,ij}^{(1)} = \frac{\max_k |\sigma_{ij}| - \min_k |\sigma_{ij}|}{\max_{k \in \Omega} (\max_k |\sigma_{ij}|)} \quad 3.15$$

where:  $I_{q,ij}^{(1)}$  represents the norm of the error on a component of the stress tensor,  $\max_k |\sigma_{ij}|$  and  $\min_k |\sigma_{ij}|$  represent the maximum and minimum values of  $\sigma_{ij}$  over all elements connected to the node  $k$ ,  $k \in \Omega$ , and  $\max_{\Omega} (\max_{k \in \Omega} |\sigma_{ij}|)$  represents the maximum  $\sigma_{ij}$  value over the entire mesh.

$$I_q^{(2)} = \frac{|\sigma_{n1}| - |\sigma_{n2}|}{\max(|\sigma_{n1}|, |\sigma_{n2}|)} \quad 3.16$$

$$I_q^{(3)} = \frac{|\tau_1| - |\tau_2|}{\max(|\tau_1|, |\tau_2|)} \quad 3.17$$

where:  $I_q^{(2)}$ ,  $I_q^{(3)}$  represent the norm on the error of a component of the stress vector,  $\sigma_{n1}$ ,  $\sigma_{n2}$ ,  $\tau_1$  and  $\tau_2$  represent the normal and tangent stress vector components at the element interface (see Fig. 2).

$I_{q,ij}^{(1)}$  is computable for all 2D and 3D isoparametric elements;  $I_q^{(2)}$  and  $I_q^{(3)}$  are computable only for the 2D quadratic isoparametric elements since the nodal stress errors at element interface are involved in their determination.

The computation of the quality indicators involves the use of already determined stresses, thus extra computational cost brought by the introduction of the quality indicators is insignificant. The time efficiency of the quality indicators represents an advantage when analyzing the accuracy of complex problems.

#### 4 UPPER AND LOWER BOUNDS

Guaranteed upper and lower bounds are easily proven for the quality indicators. The lower bound of the quality indicators is attained when:

$$\max_k |\sigma_{ij}| = \min_k |\sigma_{ij}|$$

$$|\sigma_{n1}| = |\sigma_{n2}| \tag{4.18}$$

$$|\tau_1| = |\tau_2|$$

which also represents the maximum level of accuracy on the analyzed node.

The least accurate results are obtained for:

$$\min_k (\sigma_{ij}) = 0$$

$$\sigma_{n,\alpha} = 0 \text{ for } \alpha = \overline{1,2} \quad \alpha \in N \tag{4.19}$$

$$\tau_\alpha = 0 \text{ for } \alpha = \overline{1,2} \quad \alpha \in N$$

Condition 4.19 implies that  $I_q^{(2)}$  and  $I_q^{(3)}$  reach unity;  $I_{q,ij}^{(1)}$  reaches unity if and only if  $\max_{\Omega_e} |\sigma_{ij}|$  in the considered node represents the largest nodal stress value over the entire mesh.

Taking into account the considerations from 4.18 and 4.19, the upper and lower bounds for the quality indicator described by equations 3.15, 3.16 and 3.17 are:

$$0 \leq I_{q,ij}^{(1)} \leq 1$$

$$0 \leq I_q^{(2)} \leq 1$$

4.20

$$0 \leq I_q^{(3)} \leq 1$$

If we consider:

$$\min_k |\sigma_{ij}| \geq 50\% \max_k |\sigma_{ij}|$$

$$\min(|\sigma_{n1}|, |\sigma_{n2}|) \geq 50\% \max(|\sigma_{n1}|, |\sigma_{n2}|)$$

4.21

$$\min(|\tau_1|, |\tau_2|) \geq 50\% \max(|\tau_1|, |\tau_2|)$$

as acceptable for any given node, except for nodes that belong to elements having different material properties, then the admissible upper bounds for 3.15, 3.16 and 3.17 become:

$$I_{q,ij}^{(1)} \leq 0.5$$

$$I_q^{(2)} \leq 0.5$$

4.22

$$I_q^{(3)} \leq 0.5$$

The denominator in 3.15 has been chosen as the maximum stress value over the entire mesh in order to avoid having maximum values for the quality indicator around the least loaded areas. There, even if the stresses are very small the relative difference between them can be considerable, overshadowing the important errors that occur in the vicinity of the loaded area.

The 0.5 value is acceptable for the nodes close to the loading area where we tend to have the greatest stresses. The acceptable values for the quality indicator decrease as the studied nodes are further from the loaded area.

In order to illustrate the efficiency of the quality indicators a number of 2D and 3D simple problems are computed with CESAR-LCPC computer code and the results treated by means of the quality indicators. The problems are defined either by elastic or elastoplastic constitutive laws. Different mesh finenesses and type of elements are used in order to provide a large array of results and compare their accuracies.

## 5 2D EXEMPLES

Four simple 2D problems have been analyzed by FEM computer code CESAR-LCPC: circular cavity expansion, strip load on elastic half space, uniform vertical loading of smooth rigid strip and tunnel stability. The first example is modeled in axisymmetry; the other three examples are modeled in plane strains. The meshes consist of eight-noded quadrilateral isoparametric elements, six-noded or three-noded triangular isoparametric elements. The size, shape and number of the elements vary along the mesh.

### 5.1 Uniform strip load on elastic half space problem

In the first place, we consider an elastic half space subjected to a uniform vertical load applied on a strip of infinite length and of width  $M$ . Due to symmetry, only half of the problem is modeled (Fig. 3). The soil has been modeled by using isotropic linear elastic constitutive law ( $E=1000 \text{ N/m}^2$ ,  $\nu=0.2$ ). A uniformly distributed load  $p=40 \text{ N/m}^2$  is applied. The exact solution for the stress field is given by [39] and [40].

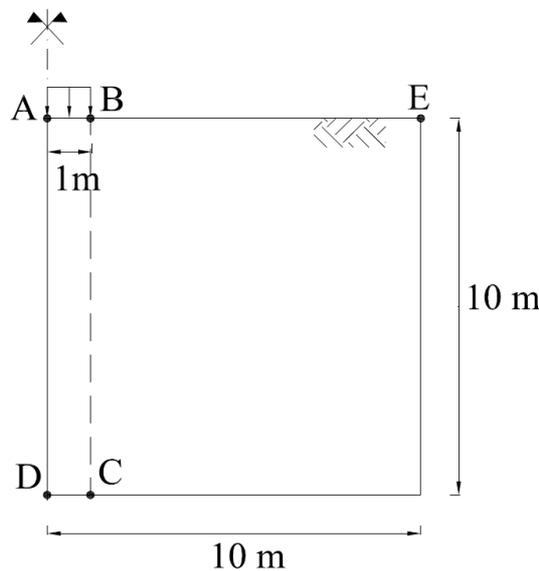
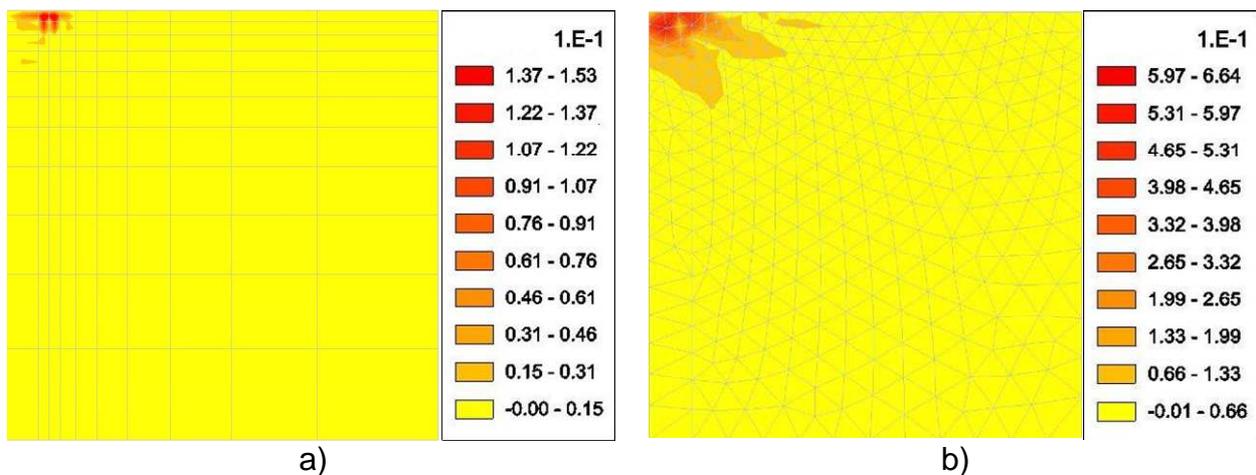


Fig. 3 Strip load on elastic half space problem



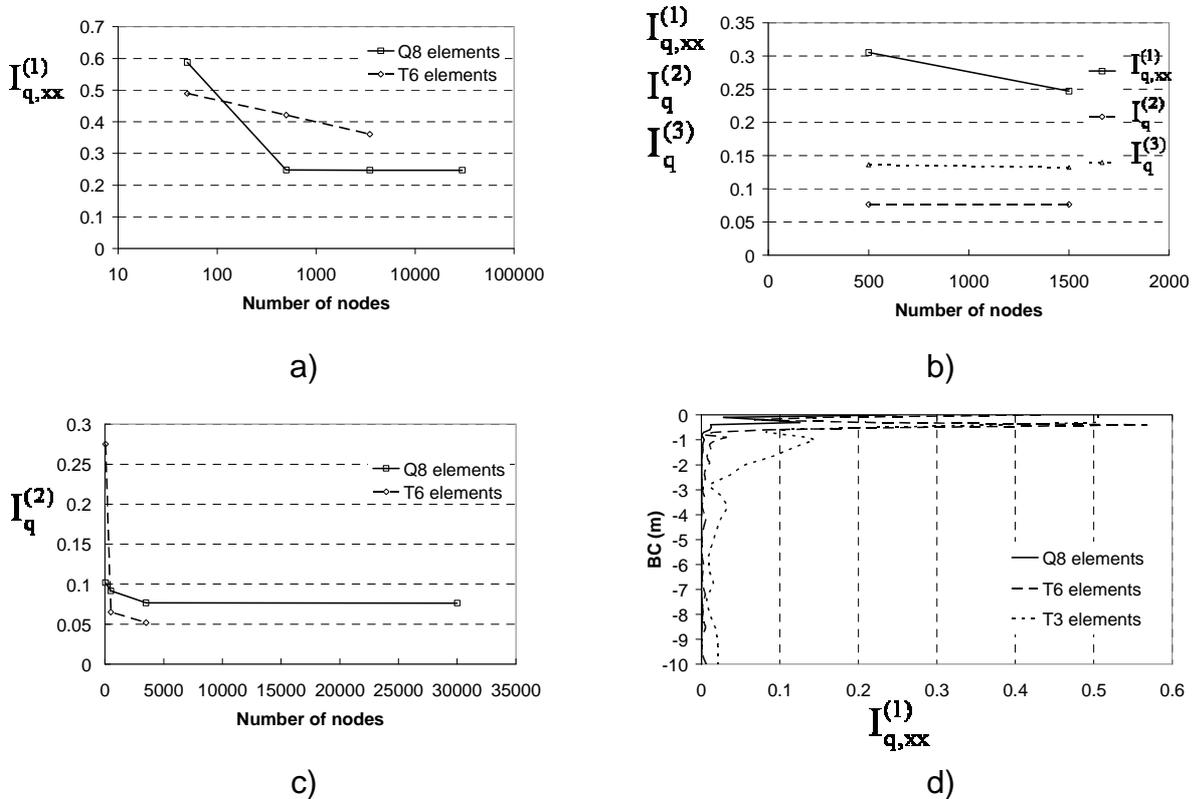
**Fig. 4 Graphical (contour plots) representation of the FE accuracy for the 2D strip load on elastic half space problem: a)  $I_q^{(2)}$  for medium fine mesh of Q8 elements, complete integration; b)  $I_{q,xx}^{(1)}$  for medium fine mesh of T3 elements, reduced integration.**

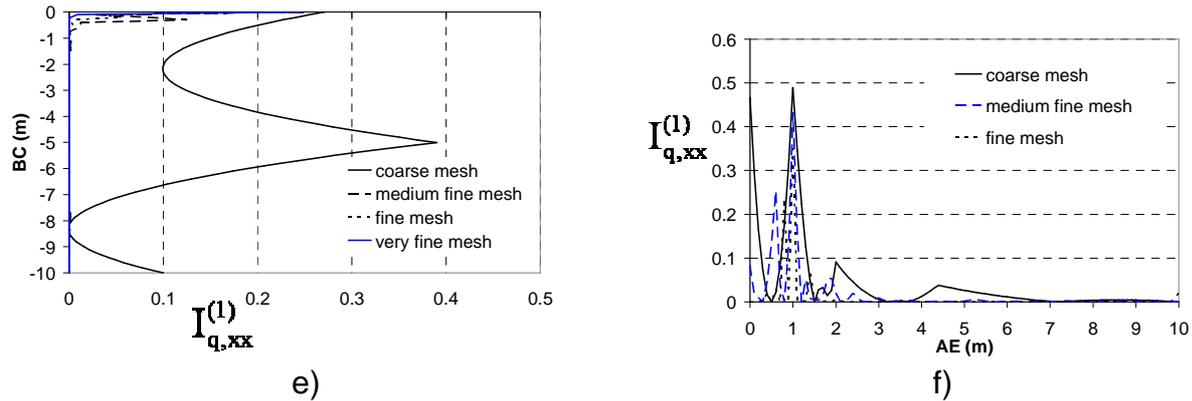
Fig. 4 represents the graphical representations (contour plots) of the accuracy of the analyses through the quality indicators. Fig. 5d), Fig. 5e) and Fig. 5f) show the accuracy levels along segments BC and AE as well as the influence of the mesh fineness and type of elements over the entire mesh as represented in Fig. 5a) and Fig. 5b).

The shapes of the accuracy curves are erratic for the coarse meshes (for e.g., see Fig. 5e)); the nodal stress values stabilize at larger distance from the loaded area.

The results of the quality indicators for fine meshes are used when studying the influence of the type of elements on the quality indicators, thus eliminating the errors that may be induced by the mesh fineness.

$I_{q,xx}^{(1)}$  shows the influence of the mesh fineness over the entire mesh in Fig. 5. The quality of the FE approximate solution improves when increasing the number of elements in the mesh. The same influence, but with lower values for the nodal stress jump, are observed in Fig. 5c) by using  $I_q^{(2)}$ . The nodal stress jump is larger in the corners of the elements than at element interface.





**Fig. 5** Quality of the FE solution for the 2D strip load on elastic half space problem: a) influence of the number of nodes on the value of  $I_{q,xx}^{(1)}$  ; b) influence of the number of nodes on the indicators  $I_{q,xx}^{(1)}$ ,  $I_q^{(2)}$  and  $I_q^{(3)}$  for T6 elements; c) influence of the number of nodes on the value of  $I_q^{(2)}$  ; d) influence of the type of elements on the value of  $I_{q,xx}^{(1)}$  for BC; e) influence of the number of nodes on the value of  $I_{q,xx}^{(1)}$  for Q8 element meshes along BC; f) influence of the number of nodes on the value of  $I_{q,xx}^{(1)}$  for T6 element meshes along AE.

Large errors can be observed close to the loaded area for any type of element used, see Fig. 5d). When analyzing the influence of the mesh fineness over segment BC, the coarse mesh gives unsatisfactory results; due to a small number of points for which the quality indicator can be computed, the accuracy curve has an erratic shape, see Fig. 5e). For the AE segment, the shape of the accuracy curves for all types of elements is similar, see Fig. 5f). They all point to larger errors under the edge of the loading surface.

## 5.2 Circular cavity expansion problem

The accuracy in terms of discretization modeling was also studied for the expansion of an infinitely long circular cavity. The interior radius is  $R_1=1$  m and the exterior radius is  $R_2=10$  m. The problem is graphically described in Fig. 6. The model is axisymmetric, thus only half was analyzed. The soil was modeled using three types of constitutive laws for the soil, consecutively: linear orthotropic constitutive law ( $E_1=75$  kN/m<sup>2</sup>,  $E_2=100$  kN/m<sup>2</sup>,  $\nu_1=0.5$ ,  $\nu_2=0.2$ ,  $G_2=42$  kN/m<sup>2</sup>), Tresca constitutive law ( $E=1$  kN/m<sup>2</sup>,  $\nu=0.3$ ,  $c=600$  kN/m<sup>2</sup>) and linear elastic constitutive law ( $E=1$  kN/m<sup>2</sup>,  $\nu=0.3$ ). Analytical solutions for the three used constitutive laws are found in the literature [41]. A uniform pressure  $p=2.25$  kN/m<sup>2</sup> is applied in the cavity for the linear orthotropic and Tresca cases and  $p=0.2$  kN/m<sup>2</sup> is applied in the cavity for the linear elastic case.

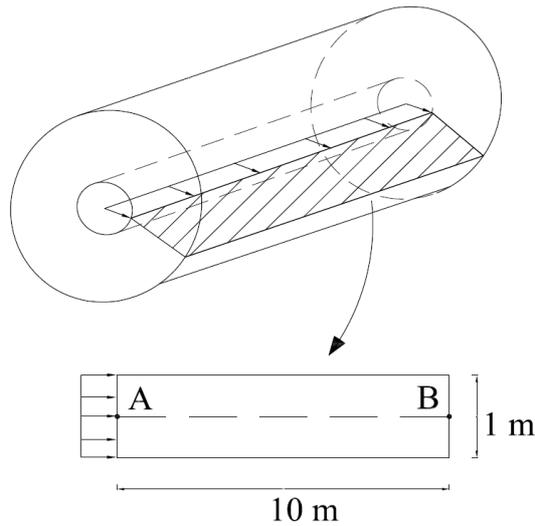


Fig. 6 Circular cavity expansion problem

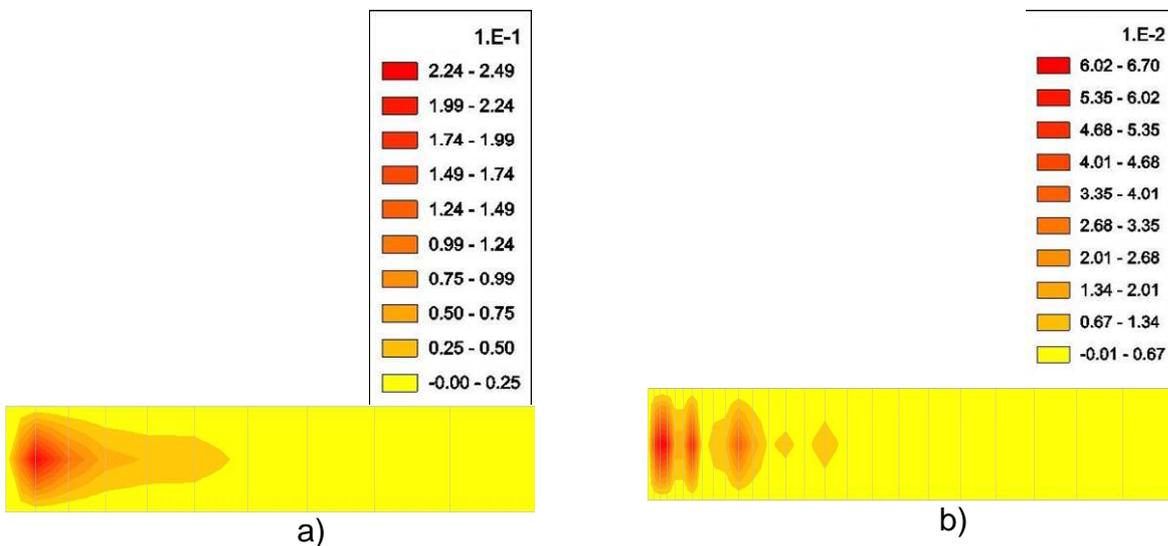
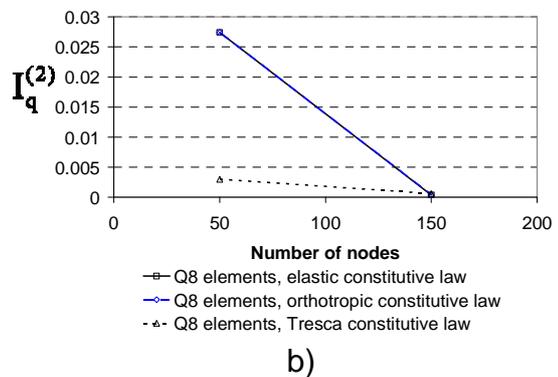
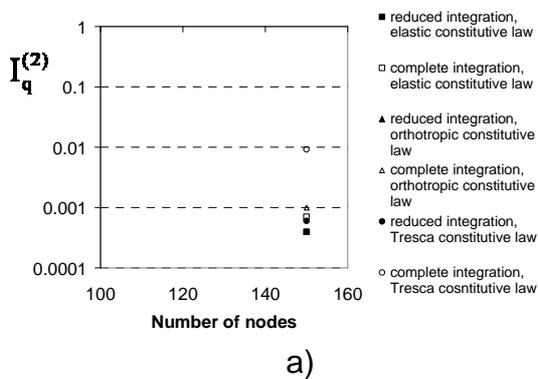
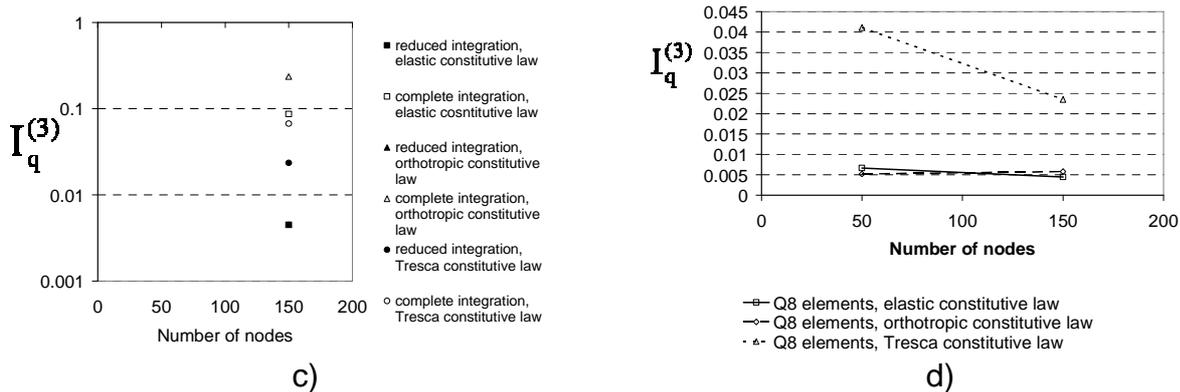


Fig. 7 Graphical (contour plots) representation of the FE accuracy for the 2D circular cavity expansion problem: a)  $I_q^{(3)}$  for coarse mesh of Q8 elements, complete integration, elastic material; b)  $I_q^{(3)}$  for medium fine mesh of Q8 elements, complete integration, elastoplastic (Tresca) material.





**Fig. 8 Quality of the FE solution for the 2D circular cavity expansion problem: a) influence of the reduced/complete integration on the value of  $I_q^{(2)}$ ; b) influence of the number of nodes on the value of  $I_q^{(2)}$  for elastic, orthotropic and elastoplastic modeled soil; c) influence of the reduced/complete integration on the value of  $I_q^{(3)}$ ; d) influence of the number of nodes on the value of  $I_q^{(3)}$  for elastic, orthotropic and elastoplastic modeled soil.**

Fig. 7a) and Fig. 7b) show the graphical representation of the quality indicator over the FE analysis. The engineer can visualize the quality of the FE solution along the entire mesh.

Fig. 8b) and Fig. 8d) show the accuracy of the FE analysis for the same discretization models but using different constitutive laws. Also, the influence of the reduced/complete integration has been studied, see Fig. 8a and Fig. 8c). Even though a sharp improvement of the accuracy of the FE solution can be observed for the problem using the orthotropic constitutive law, all the results give satisfactory results regardless of the type of elements or mesh fineness used in the computation.

### 5.3 Uniform vertical loading of a smooth rigid strip on an elastoplastic half space problem

The uniform vertical loading of a smooth rigid strip problem is graphically described in Fig. 9. Half of the domain is modeled due to symmetry. The soil has been modeled by using Tresca constitutive law ( $E= 1 \text{ MPa}$ ,  $\nu=0.2$  and  $c= 20 \text{ kN/m}^2$ ), the smooth rigid strip by using the isotropic linear elastic constitutive law ( $E=300 \text{ MPa}$ ,  $\nu=0.2$ ). Two values have been considered for the strip footing thickness: 15 cm and 50 cm. A uniformly distributed load  $p=40 \text{ kN/m}^2$  is applied on the smooth rigid strip in both cases. The solution for the problem is given by [41] and [42].

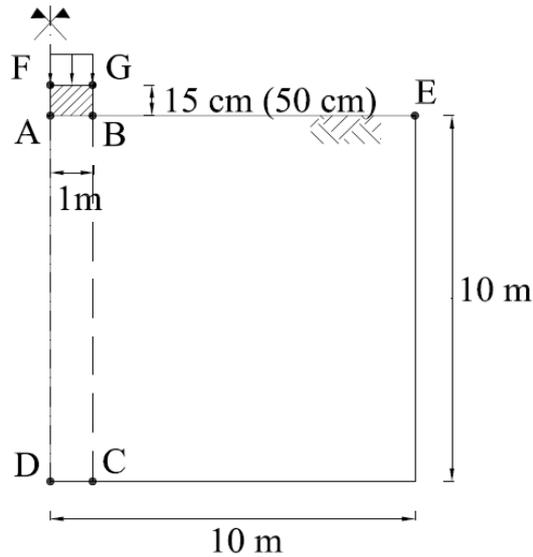


Fig. 9 Uniform vertical loading of a smooth rigid strip on an elastoplastic half space problem (2D)

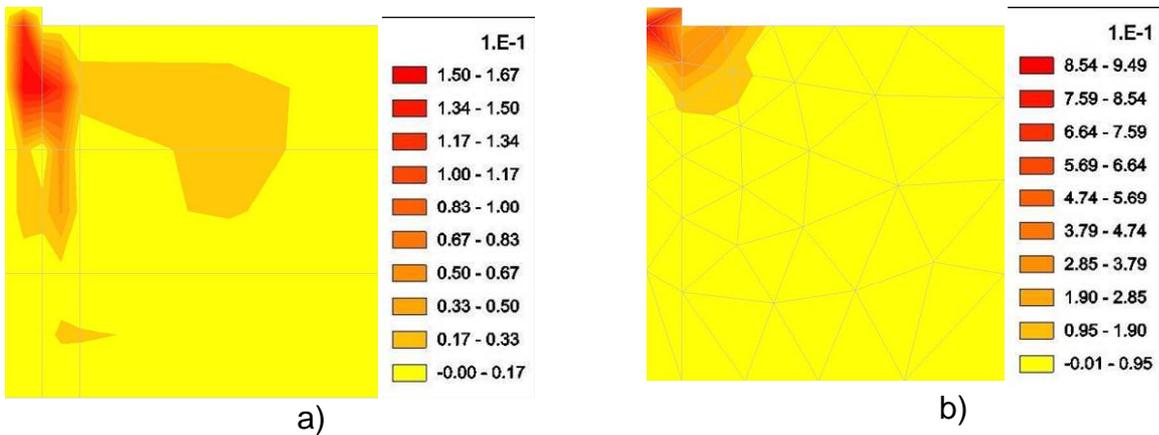
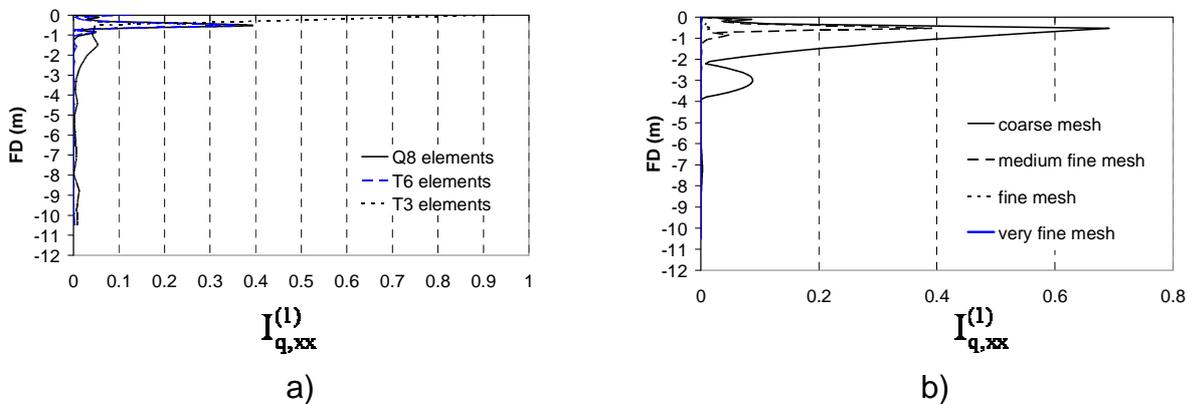
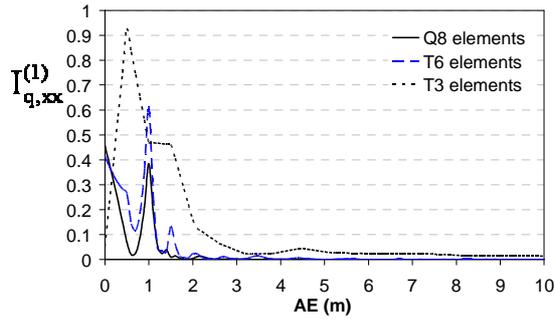
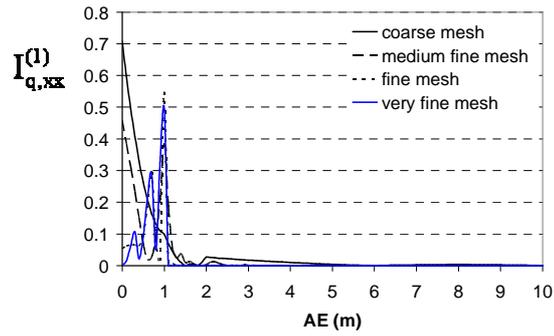


Fig. 10 Graphical (contour plots) representation of the FE accuracy for the 2D uniform vertical loading of a smooth rigid strip on an elastoplastic half space problem: a)  $I_{q,xx}^{(1)}$  for coarse mesh of Q8 elements, reduced integration, 50cm high smooth rigid loading strip; b)  $I_{q,xx}^{(1)}$  for coarse mesh of T3 elements, reduced integration, 50cm high smooth rigid loading strip.

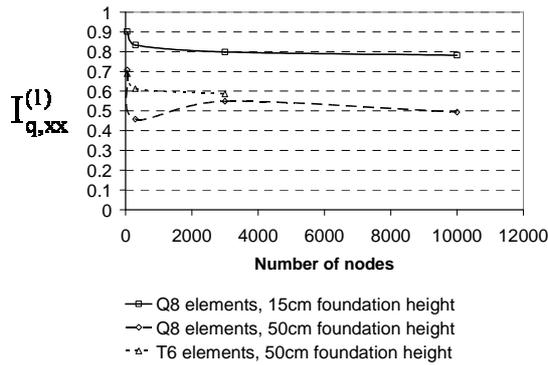




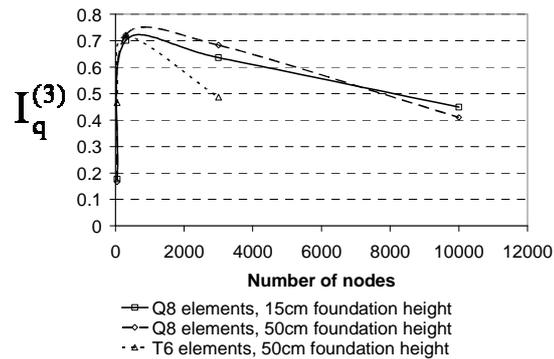
c)



d)



e)



f)

**Fig. 11 Quality of the FE solution for the 2D uniform vertical loading of a smooth rigid strip on an elastoplastic half space problem: a) influence of the type of elements on the value of  $I_{q,xx}^{(1)}$  for FD; b) influence of the number of nodes on the value of  $I_{q,xx}^{(1)}$  for FD; c) influence of the type of elements on the value of  $I_{q,xx}^{(1)}$  for AE; d) influence of the number of nodes on the value of  $I_{q,xx}^{(1)}$  for AE; e) influence of the number of nodes and type of elements on the value of  $I_{q,xx}^{(1)}$  over the entire mesh; f) influence of the number of nodes and type of elements on the value of  $I_q^{(3)}$  over the entire mesh.**

The influence of the type of elements and of the mesh fineness is graphically analyzed in Fig. 11a), Fig. 11b), Fig. 11c) and Fig. 11d) for segments FD and AE. Also, Fig. 11e) and Fig. 11f) show the maximum values for the quality indicators over the entire mesh for different mesh finenesses and types of elements used in the analyses.

Very large errors can be noticed close to the loaded surface on the vertical segment FD, see Fig. 11a) and Fig. 11b), regardless of the type of elements or mesh fineness used in the analysis. The influence of the loaded surface on FD becomes negligible only when a very fine mesh of Q8 elements is used.

As expected, the linear interpolation 2D triangular elements (T3) provide the least accurate results along the interface soil-smooth rigid foundation, AE, see Fig. 11c). The coarse and medium fine meshes produce large errors on the left-hand side of the loaded surface as opposed to the fine and very fine meshes which point to the largest errors on the right-hand side of the loaded surface, see Fig. 11d).



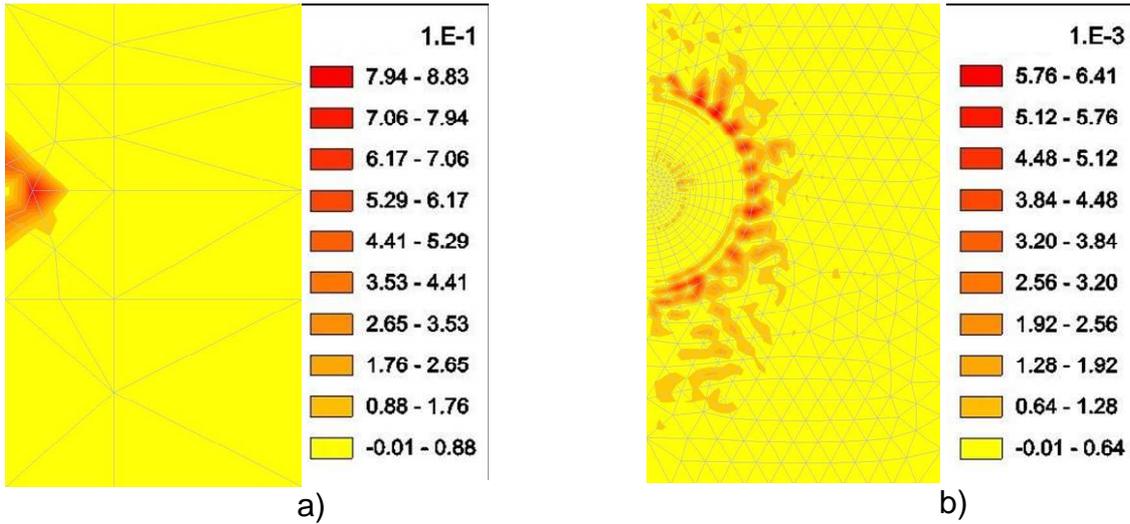


Fig. 13 Graphical (contour plots) representation of the FE accuracy for the 2D tunnel excavation problem: a)  $I_{q,xx}^{(1)}$  for coarse mesh of T6 elements, reduced integration; b)  $I_q^{(2)}$  for fine mesh of mixed elements (T6 and Q8), reduced integration.

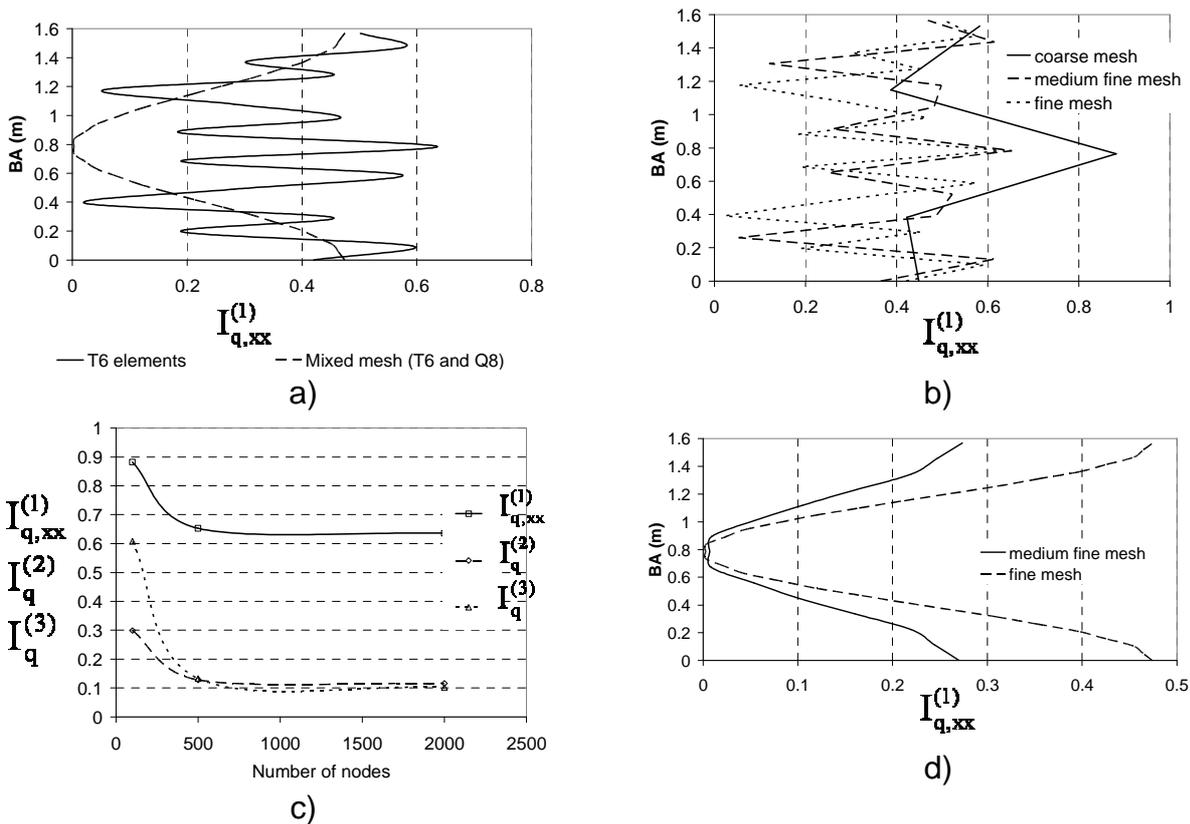


Fig. 14 Quality of the FE solution for the 2D tunnel excavation problem: a) influence of the type of elements on the value of  $I_{q,xx}^{(1)}$  for AB; b) influence of the number of nodes on the value of  $I_{q,xx}^{(1)}$  for AB; c) influence of the number of nodes on the indicators  $I_{q,xx}^{(1)}$ ,  $I_q^{(2)}$  and  $I_q^{(3)}$  for T6 elements; d) influence of the number of nodes on the value of  $I_{q,xx}^{(1)}$  for the mixed mesh along BA.

The surface between arches AB and GH is modeled with both T6 and Q8 elements. The remaining mesh is modeled using T6 elements. The quality of the analyses is sought for both types of meshes.

Fig. 14a), Fig. 14b) and Fig. 14d) show the quality of the analyses along segment BA with respect to the type of elements used and mesh finenesses. The quadrilateral elements give much more accurate results for the circular excavated surface AB. While the mesh fineness takes part in deciding the accuracy of the FE analyses, the type of elements used plays a significant role in designing the tunnel surface.

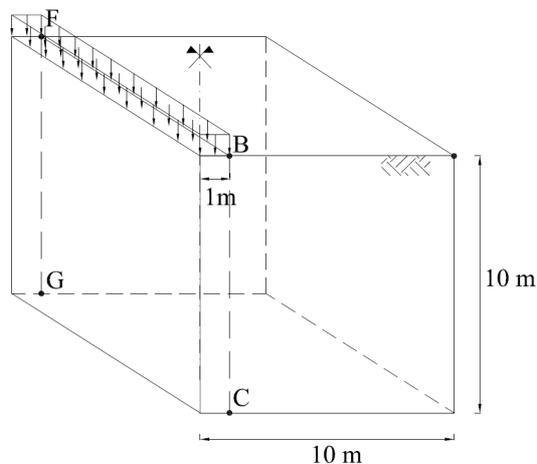
The overall largest values of the quality indicators are plotted for all quality indicators for different mesh finenesses, see Fig. 14c).  $I_q^{(2)}$  and  $I_q^{(3)}$  describe overall satisfactory accurate computations but  $I_{q,xx}^{(1)}$  shows overall large errors for all FE analyses regardless of the mesh fineness used. Thus, we can deduce that the nodal stress jumps are higher at the element corners.

## 6 3D EXAMPLES

Three simple 3D problems have been analyzed: uniform strip load on elastic half space problem, circular cavity expansion problem and uniform vertical loading of smooth rigid strip on an elastoplastic half space problem. They are transformed into 3D analyses by extrusion from the 2D models presented in 5.1, 5.2 and 5.3. The meshes have been modeled using either 20-noded parabolic isoparametric elements (H20), 15-noded (P15) or 6-noded (P6) prismatic isoparametric elements. The quality indicators have been employed a posteriori to determine the accuracy of the analyses.

### 6.1 Uniform strip load on elastic half space problem

The problem is modeled using the same material properties and loading as for the problem described in 5.1. Due to symmetry, only half of the problem is computed.



**Fig. 15 Strip load on elastic half space problem (3D).**

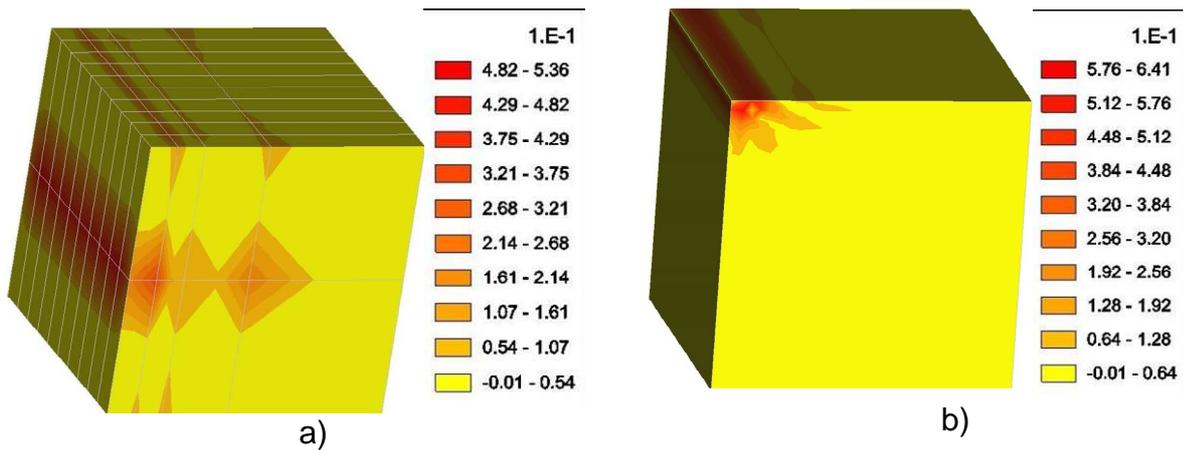
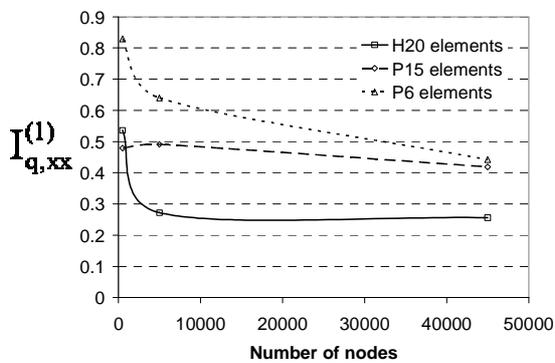
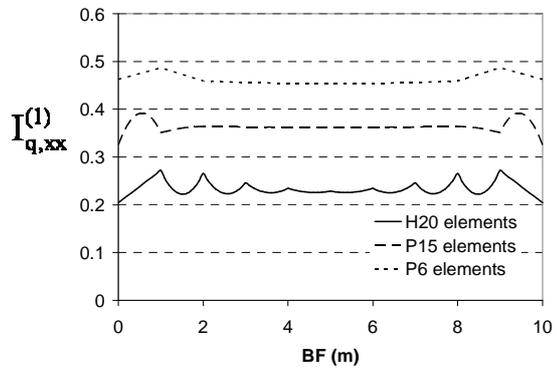


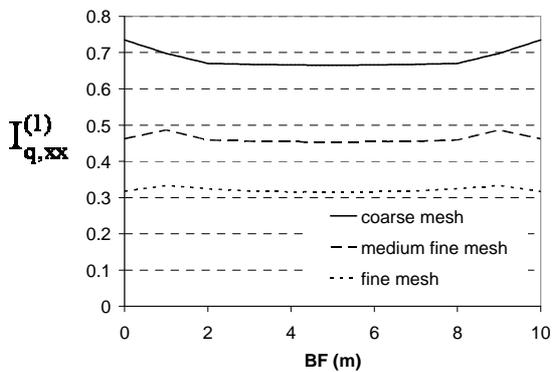
Fig. 16 Graphical (contour plots) representation of the FE accuracy for the 3D strip load on elastic half space problem: a)  $I_{q,xx}^{(1)}$  for coarse mesh of H20 elements, reduced integration; b)  $I_{q,xx}^{(1)}$  for medium fine mesh of P6 elements, reduced integration.



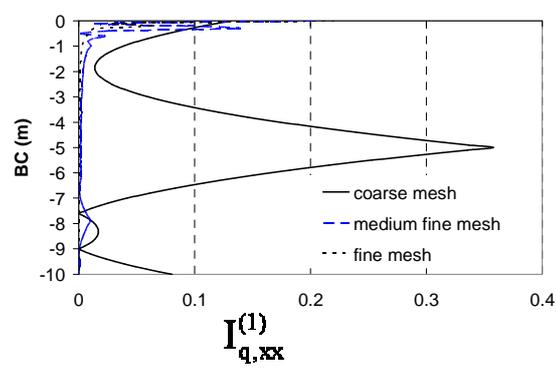
a)



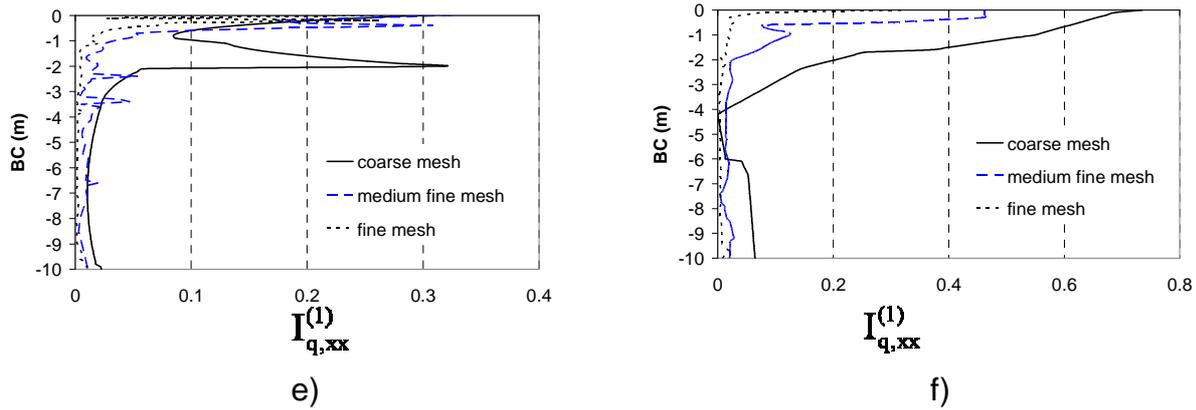
b)



c)



d)



**Fig. 17** Quality of the FE solution for the 3D strip load on elastic half space problem: **a)** influence of the number of nodes and type of elements on the indicator  $I_{q,xx}^{(1)}$ ; **b)** influence of the type of elements on the value of  $I_{q,xx}^{(1)}$  for BF; **c)** influence of the number of nodes on the value of  $I_{q,xx}^{(1)}$  for the P6 element meshes along BF; **d)** influence of the number of nodes on the value of  $I_{q,xx}^{(1)}$  for H20 element meshes along BC; **e)** influence of the number of nodes on the value of  $I_{q,xx}^{(1)}$  for P15 element meshes along BC; **f)** influence of the number of nodes on the value of  $I_{q,xx}^{(1)}$  for P6 element meshes along BC.

Fig. 17b), Fig. 17c), Fig. 17d), Fig. 17e), and Fig. 17f) show the influence of the type of elements and mesh fineness along segments BC and BF. When studying the influence of the type of elements and mesh fineness used in the computations for the BF segment,  $I_{q,xx}^{(1)}$  points to large errors when using P6 elements and/or coarse meshes. The influence of the mesh fineness for H20, P15 and P6 elements is analyzed separately. Fig. 17d), Fig. 17e) and Fig. 17f) provide similar accuracy patterns along segment BC, but the accuracy values are very different. The P6 elements provide errors two times larger than the P15 and H20 elements. Fig. 14d) shows an erratic accuracy curve for the H20 element mesh due to a small number of points for which the quality of the analysis could be calculated.

The overall largest  $I_{q,xx}^{(1)}$  values along the problem are plotted in Fig. 17a). The largest errors are observed for the coarse meshes and P6 elements. The accuracy of the FE analyses is visibly improved from a coarse to a medium fine mesh. The level of accuracy remains almost constant afterwards even when the number of nodes is increased by a factor 10.

## 6.2 Circular cavity expansion problem

The problem is modeled using the same material properties and loading as for the problem described in 5.2. For the 3D analyses, only the elastic and orthotropic materials have been taken into consideration. Due to the symmetry, only one fourth of the model will be analyzed. The meshes will be modeled using only 20-noded quadrilateral isoparametric elements (H20).

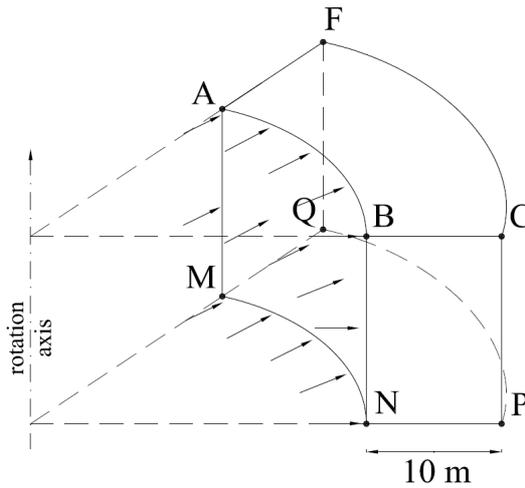


Fig. 18 Circular cavity expansion problem (3D).

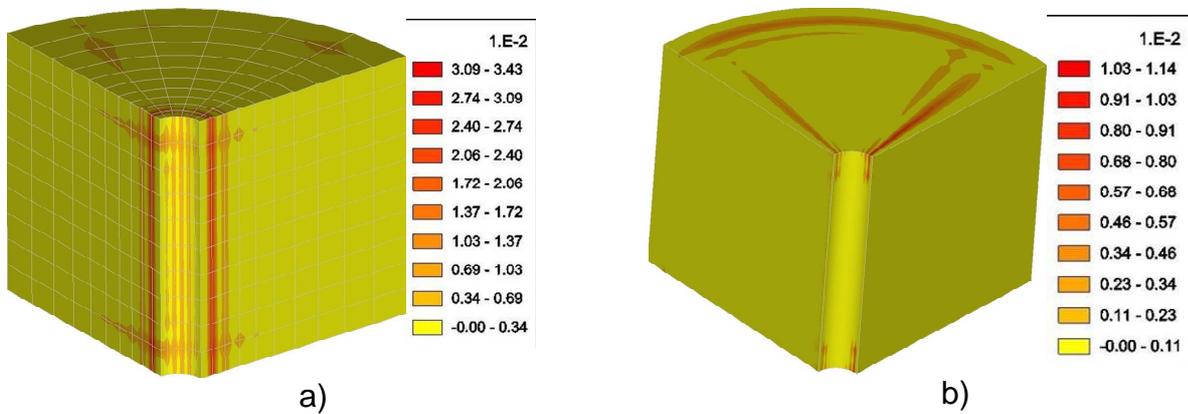
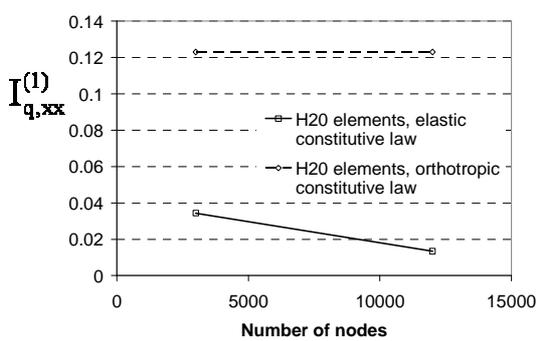
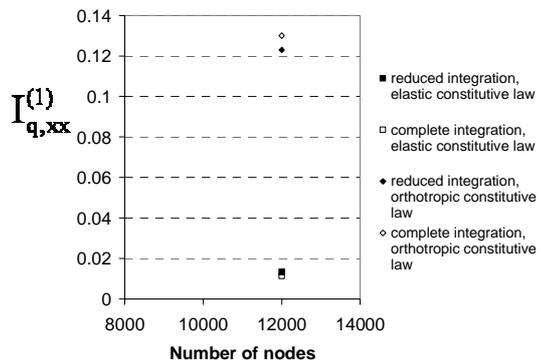


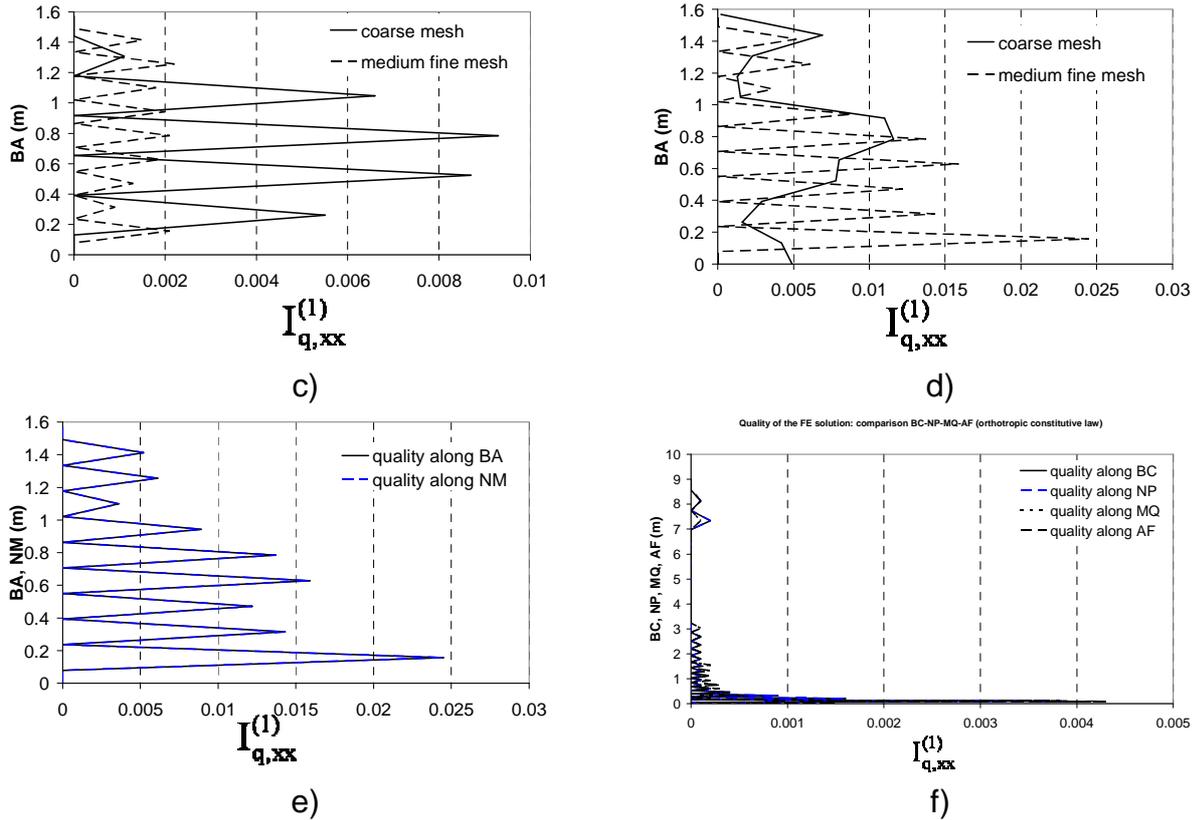
Fig. 19 Graphical (contour plots) representation of the FE accuracy for the 3D circular cavity expansion problem: a)  $I_{q,xx}^{(1)}$  for coarse mesh of H20 elements, reduced integration, elastic material; b)  $I_{q,xx}^{(1)}$  for medium fine mesh of H20 elements, complete integration, elastic material.



a)



b)



**Fig. 20** Quality of the FE solution for the 3D circular cavity expansion problem: a) influence of the number of nodes on the value of  $I_{q,xx}^{(1)}$  for elastic and orthotropic modeled soil; b) influence of the reduced/complete integration on the value of  $I_q^{(2)}$ ; c) influence of the number of nodes on the value of  $I_{q,xx}^{(1)}$  for elastic soil on BA; d) influence of the number of nodes on the value of  $I_{q,xx}^{(1)}$  for the orthotropic soil on BA; e) comparison of the accuracy of the FE solution for BA/NM segments for the orthotropic soil by means of  $I_{q,xx}^{(1)}$ ; f) comparison of the accuracy of the FE solution for BC/NP/MQ/AF segments by means of  $I_{q,xx}^{(1)}$ .

The influence of the reduced/complete integration is plotted in Fig. 20b). The accuracy of the model with respect to the mesh fineness for both elastic and orthotropic materials is presented in Fig. 20a). Also, for both types of materials analyzed, the accuracy along BA is plotted in Fig. 20c) and Fig. 20d). In order to study the evolution of the results along the discretization, in Fig. 20e) and Fig. 20f) are plotted the accuracies for the borders BA/NM and BC/NP/MQ/AF.

### 6.3 Uniform vertical loading of smooth rigid strip on an elastoplastic half space problem

The problem is modeled using the same material properties and loading as for the problem described in 5.3. For the 3D analysis, only the 50cm high smooth rigid strip will be taken into consideration. Due to symmetry, only half of the problem is computed.

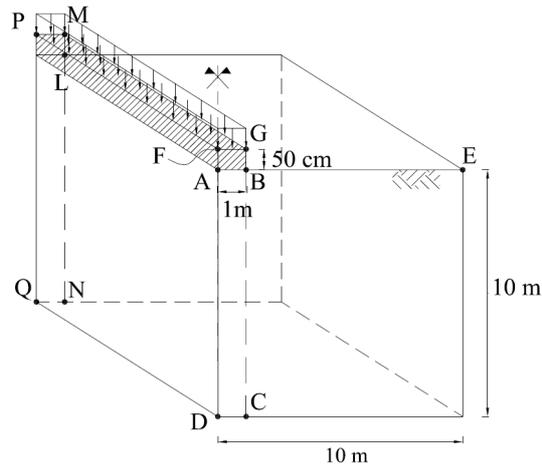


Fig. 21 Uniform vertical loading of smooth rigid strip on an elastoplastic half space problem (3D).

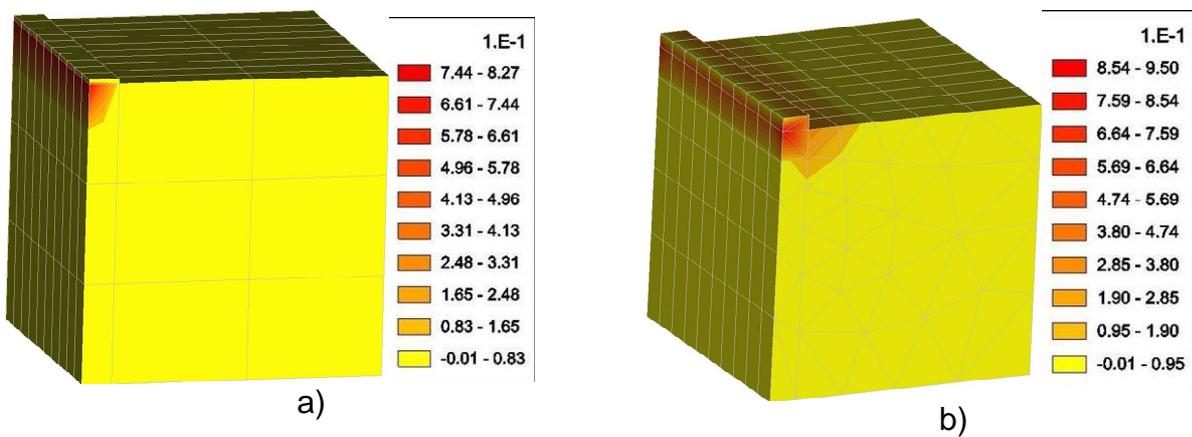
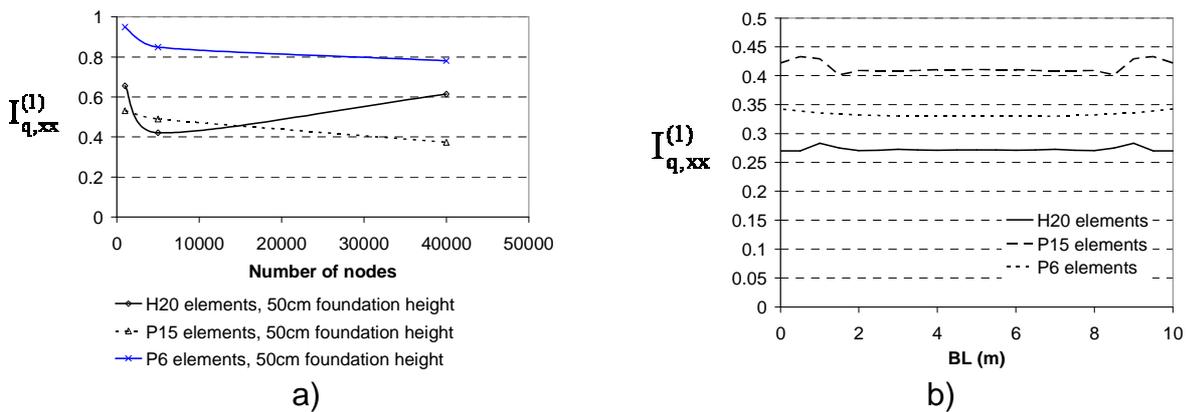
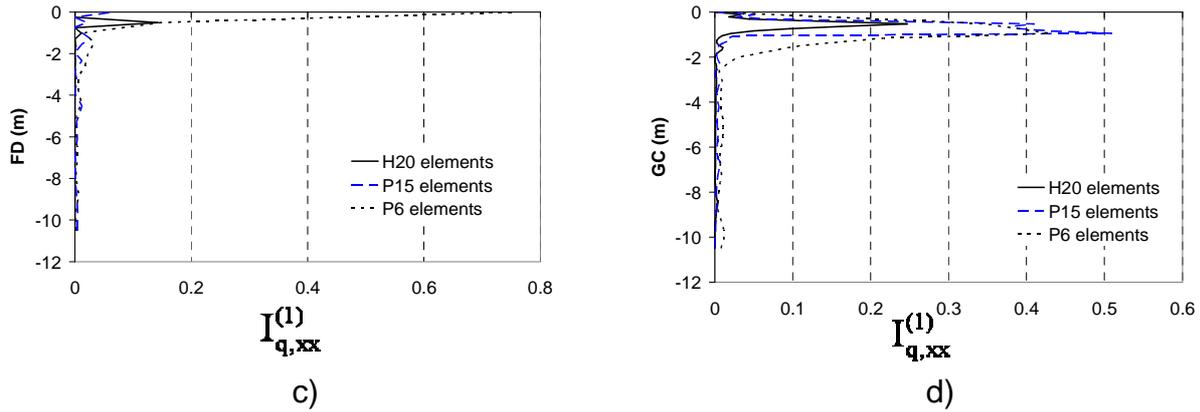


Fig. 22 Graphical (contour plots) representation of the FE accuracy for the 3D uniform vertical loading of smooth rigid strip on an elastoplastic half space problem: a)  $I_{q,xx}^{(1)}$  for coarse mesh of H20 elements, reduced integration; b)  $I_{q,xx}^{(1)}$  for coarse mesh of P6 elements, reduced integration.





**Fig. 23** Quality of the FE solution for the 3D uniform vertical loading of smooth rigid strip on an elastoplastic half space problem: a) influence of the number of nodes and type of element on the value of  $I_{q,xx}^{(1)}$ ; b) influence of the type of elements on the value of  $I_{q,xx}^{(1)}$  for BL; c) influence of the type of elements on the value of  $I_{q,xx}^{(1)}$  FD; d) influence of the type of elements on the value of  $I_{q,xx}^{(1)}$  for GC.

The accuracies along segments BC, FD and GC with respect to the type of elements are plotted in Fig. 23 b), Fig. 23c) and Fig. 23d). For the horizontal segment describing the extremity of the interface soil-smooth rigid foundation, the P15 element mesh gives the least accurate results. P6 element meshes give the least accurate results for the segments FD and GC. The H20 element mesh obtains the least nodal stress jumps for each of the three segments taken into consideration. Also, the largest errors are observed close to the loaded area for the segments FD and GC.

Fig. 23a) shows the influence of the mesh fineness for different types of elements by comparing the largest values of the  $I_{q,xx}^{(1)}$  over the entire mesh. As expected and seen from the previous examples, the P6 elements provide the least accurate results. It can be also noted that even if the mesh is refined by a factor 40, the accuracy of the FE analyses only improves slightly for the P6 and P15 element meshes. On the contrary, for the H20 element mesh, a decrease on the overall accuracy can be observed. We can suppose that this phenomenon is a singular case and does not represent a just conclusion for the influence of the mesh fineness.

## 7 CONCLUSIONS

This paper presented an easy and time efficient method of accounting for the accuracy of the FE approximate solutions: the quality indicators. They have been developed to account for the discretization errors that occur due to the choice of the numerical model. One source of discretization errors has been considered the jump in nodal stresses at element nodes, both corner element nodes as well the element interface nodes. For this type of errors, the quality indicators have been defined and described in Section 3; they are adimensional values. Their definition led to easily determined lower and upper bounds.

The parametric studies performed for the 2D and 3D problems (influence of the mesh fineness and type of elements) searched for the most accurate FE solutions by means of the quality indicators. The quality indicators proved to be easy and efficient tools in determining the overall accuracy of the discretization models, but also study the accuracy along specified segments in the model.

A few remarks about the quality indicators are noted below:

- The quality indicators enable the FE user to acquire a better understanding of the accuracy of the performed analysis.
- The quality indicators offer an overall image of the accuracy of the FE solution, as can be seen in Fig. 4, Fig. 7, Fig. 10, Fig. 13, Fig. 16, Fig. 19 and Fig. 22.
- The quality indicators are easily implemented into any FEM computer code.
- The use of quality indicators in the FE computations is not time consuming, the required time for the computations of the quality indicators is insignificant, making it an efficient tool in determining the accuracy of the FE analyses.
- They are applicable for any type of problem, both 2D and 3D; in their determination are involved only the already computed nodal stresses.

## REFERENCES

- [1] Zienkiewicz, O.C. and J.Z. Zhu, *A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1987. 24: p. 337-357.
- [2] Zienkiewicz, O.C. and J.Z. Zhu, *The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: The recovery technique*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1992. 33: p. 1331-1364.
- [3] Kelly, D.W., et al., *A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method. Part I-Error analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1983. 19: p. 1593-1619.
- [4] Babuska, I. and W.C. Rheinboldt, *A posteriori error estimates for the finite element method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1978. 12: p. 1597-1615.
- [5] Babuska, I. and W.C. Rheinboldt, *Computational error estimates and adaptive processes for some non linear structural problems*. Comput. Methods Appl. Mech. and Engrg., 1982. 34: p. 895-937.
- [6] Babuska, I. and W.C. Rheinboldt, *Reliable error estimation and mesh adaptation for the finite element method*. Computational Methods in Nonlinear Mechanics, 1980: p. 67-108.
- [7] Bank, R.E. and A. Weiser, *Some a posteriori error estimators for elliptic partial differential equations*. Mathematics of computations, 1985. 44: p. 283-301.
- [8] Zienkiewicz, O.C., J.Z. Zhu, and J. Wu, *The superconvergent patch recovery (SPR) and adaptive finite element refinement*. Computer methods in applied mechanics and engineering, 1992. 101: p. 207-224.
- [9] Oden, J.T., et al., *Toward a universal h-p adaptive finite element strategy. Part 2. A posteriori error estimation*. Comput. Methods Appl. Mech. and Engrg., 1989. 77: p. 113-180.
- [10] Johnson, C. and P. Hansbo, *Adaptive finite element methods for small strain elastoplasticity*. Proceedings of IUTAM Conference on Finite Inelastic Deformations Theory and Applications, Hannover, Germany, 1991.

- [11] Ainsworth, M. and J.T. Oden, *A unified approach to a posteriori error estimation using element residual methods*. Numerische Mathematik 1993. 65: p. 23-50.
- [12] Diez, P., J.J. Egozcue, and A. Huerta, *A posteriori error estimation for standard finite element analysis*. Computer methods in applied mechanics and engineering, 1998. 163: p. 141-157.
- [13] Zienkiewicz, O.C. and R.L. Taylor, *The finite element patch test revisited. A computer test for convergence, validation and error estimates*. Computer methods in applied mechanics and engineering, 1997. 149: p. 223-254.
- [14] Meng, L. and Q. Zhu, *The ultraconvergence of derivative for bicubic finite element*. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2007. 196: p. 3771-3778.
- [15] Stelzer, R. and G. Hofstetter, *Adaptive finite element analysis of multi-phase problems in geotechnics*. Computers and Geotechnics, 2005. 32: p. 458-481.
- [16] Zhu, J.Z., *A posteriori error estimation - the relationship between different procedures*. Comput. Methods Appl. Engrg., 1997. 150: p. 411-422.
- [17] Zhu, J.Z. and O.C. Zienkiewicz, *Superconvergent recovery technique and a posteriori error estimators*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1990. 30: p. 1321-1340.
- [18] Babuska, I., et al., *Validation of a posterior error estimators by numerical approach*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1994. 37: p. 1073-1123.
- [19] Babuska, I., et al., *An objective criterion for assessing the reliability of a-posteriori error estimators in finite element computations*. USACM Bulletin, 1994. 7: p. 4-15.
- [20] Zhu, J.Z. and O.C. Zienkiewicz, *A posteriori error estimation and three-dimensional automatic mesh generation*. Finite Elements in Analysis and Design, 1997. 25: p. 167-184.
- [21] Boroomand, B. and O.C. Zienkiewicz, *Recovery by equilibrium patches (REP)*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1997. 40: p. 137-154.
- [22] Wiberg, N.E., F. Abdulwahab, and S. Ziukas, *Enhanced superconvergent patch recovery incorporating equilibrium and boundary conditions*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1994. 37: p. 3417-3440.
- [23] Becker, R. and R. Rannacher, *Weighted a posteriori error control in FE method*. ENUMATH-95, 1995(Paris).
- [24] Oden, J.T. and S. Prudhomme, *Goal-oriented error estimation and adaptivity for the finite element method*. Computers and mathematics with applications, 2001. 41: p. 735-756.
- [25] Oden, J.T., S. Prudhomme, and P. Bauman, *On the extension of goal-oriented error estimation and hierarchical modeling to discrete lattice models*. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2005. 194: p. 3668-3688.
- [26] Solin, P. and L. Demkowicz, *Goal-oriented hp-adaptivity for elliptic problems*. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2004. 193: p. 449-468.
- [27] Florentin, E., L. Gallimard, and J.P. Pelle, *Evaluation of the local quality of stresses in 3D finite element analysis*. Computer methods on applied mechanics and engineering, 2002. 191: p. 4441-4457.
- [28] Prudhomme, S. and J.T. Oden, *On goal-oriented error estimation for elliptic problems: application to the control of pointwise errors*. Computer methods in applied mechanics and engineering, 1999. 176: p. 313-331.
- [29] Chamoin, L., *Encadrement a posteriori de quantités locales dans les problèmes de viscoélasticité linéaire résolus par la Méthode des Eléments finis*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2007.
- [30] Ladeveze, P., et al., *Local error estimators for finite element linear analysis*. Computer methods in applied mechanics and engineering, 1999. 176: p. 231-246.
- [31] Babuska, I. and C. Rheinboldt, *Adaptive approaches and reliability estimates in finite element analysis*. Computer methods in applied mechanics and engineering, 1979. 17/18: p. 519-540.
- [32] Rachowicz, W., D. Pardo, and L. Demkowicz, *Fully automatic hp-adaptivity in three dimensions*. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2006. 195: p. 4816-4842.
- [33] Gratsch, T. and K.J. Bathe, *A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis*. Computers and structures, 2005. 83: p. 235-265.
- [34] Zienkiewicz, O.C., *The background of error estimation and adaptivity in finite element computations*. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2006. 195: p. 207-213.
- [35] Strouboulis, T., D.L. Wang, and I. Babuska, *Robustness of error estimators for finite element solutions of problems*. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2009. 198: p. 1946-1966.

- [36] Pares, N., P. Diez, and A. Huerta, *Bounds of functional outputs for parabolic problems. Part II: Bounds of the exact solution*. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2008. 197: p. 1661-1679.
- [37] Larsson, F., P. Diez, and A. Huerta, *A flux-free a posteriori error estimator for the incompressible Stokes problem using a mixed FE formulation*. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2010. 199: p. 2383-2402.
- [38] Oden, J.T. and K.S. Vegamanti, *Estimation of local modeling error and goal-oriented adaptive modeling of heterogeneous materials*. Journal of computational physics, 2000. 164: p. 22-47.
- [39] Gray, H., *Stress distribution in elastic soils*. Proc. of First Int. Cong. Soil Mech., 1936. Volume 2(Cambridge Mass.): p. 157-168.
- [40] Holl, D.L., *Plain-stress distribution of stress in elastic media*. Iowa Engg. Expts. Station bull, 1941(Iowa): p. 148-163.

### III.3 THE INFLUENCE OF THE MESH FINENESS ON THE QUALITY OF THE NUMERICAL SOLUTION. SIMPLE CASE STUDY

We have selected a simple problem, see Fig. III.1. We consider a linear elastic, isotropic soil of height  $h$  and unit weight  $\gamma$ , where  $\lambda$  and  $\mu$  represent Lamé's parameters. The lateral and bottom displacements are restricted by a stiff confining ring. The soil is discretized in four finite linear elements (two-node elements) of equal length  $\frac{h}{4}$ , see Fig. III.2.

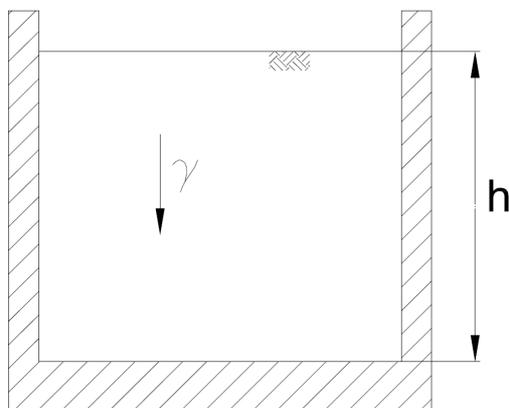


Fig. III.1 Analyzed problem

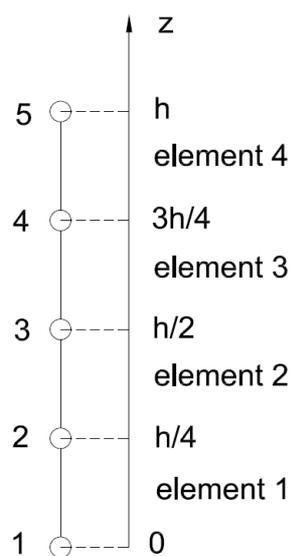


Fig. III.2 Discretized model (5 elements)

Based on Hooke's law, the problem possesses the following solution:

$$F = K \cdot U \quad \text{III.1}$$

For the chosen discretized model, we have:

$$K = \frac{4(\lambda + 2\mu)}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{III.2}$$

$$F = -\frac{\gamma h}{8} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{III.3}$$

The numerical solution of the displacement for the problem described in Fig. III.2 is:

$$U = \begin{bmatrix} w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{bmatrix} \quad \text{III.4}$$

with:

$$\begin{aligned} w_2 &= w\left(\frac{h}{4}\right) = -\frac{7}{32} \cdot \frac{\gamma h^2}{E} \\ w_3 &= w\left(\frac{h}{2}\right) = -\frac{3}{8} \cdot \frac{\gamma h^2}{E} \\ w_4 &= w\left(\frac{3h}{4}\right) = -\frac{15}{32} \cdot \frac{\gamma h^2}{E} \\ w_5 &= w(h) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma h^2}{E} \end{aligned} \quad \text{III.5}$$

where  $E$  represents the elastic modulus.

We are going to compute the numerical values of the stresses for element no.2 and element no.3. For element no.2 we have:

$$\sigma^{\{2\}} = E \left[ w_2 \left( -\frac{4}{h} \right) + w_3 \frac{4}{h} \right] = \frac{4E}{h} (w_3 - w_2) \quad \text{III.6}$$

$$\sigma^{\{2\}} = \frac{4E}{h} \frac{1}{E} \left( -\frac{3\gamma h^2}{8} + \frac{7\gamma h^2}{32} \right) = -\frac{5}{8} \gamma h$$

and for element no.3:

$$\sigma^{\{3\}} = E \left[ w_3 \left( -\frac{4}{h} \right) + w_4 \frac{4}{h} \right] = \frac{4E}{h} (w_4 - w_3) \quad \text{III.7}$$

$$\sigma^{\{3\}} = \frac{4E}{h} \frac{1}{E} \left( -\frac{15\gamma h^2}{32} + \frac{3\gamma h^2}{8} \right) = -\frac{3}{8} \gamma h$$

The analytical solution for the stress is given by the following formula:

$$\sigma_{\text{exact}}(z) = E \frac{dw}{dz} = \gamma(z - h) \quad \text{III.8}$$

where  $z \in [0, h]$  represents the position of the node for which the stress is assessed.

We are going to focus on the computation of the stress in node no.3. Its position is

$z = \frac{h}{2}$ . Based on equation III.8, the stress becomes:

$$\sigma_{\text{exact}}^3 \left( \frac{h}{2} \right) = \gamma \left( \frac{h}{2} - h \right) = -\frac{\gamma h}{2} \quad \text{III.9}$$

From III.9, III.6 and III.7 we notice that the stress values for node no.3 are different.

The errors in III.6 and III.7 are due to the fact that  $\sigma^{\{2\}}$  and  $\sigma^{\{3\}}$  vary linearly with

respect to  $z$ . Computing the stress value errors in node no.3 resulting from the numerical solution with respect to analytical solution, we obtain:

$$\frac{\sigma^{\{3\}} - \sigma_{\text{exact}}^3}{\sigma_{\text{exact}}^3} = \frac{-\frac{3}{8}\gamma h + \frac{1}{2}\gamma h}{\frac{1}{2}\gamma h} = \frac{1}{4} \quad \text{III.10}$$

$$\frac{\sigma^{\{2\}} - \sigma_{\text{exact}}^3}{\sigma_{\text{exact}}^3} = \frac{-\frac{5}{8}\gamma h + \frac{1}{2}\gamma h}{\frac{1}{2}\gamma h} = -\frac{1}{4}$$

We recall the mathematical formulation of the first quality indicator  $I_{q,ij}^{(1)}$ , computed for the corner nodes  $k$  of each element:

$$I_{q,ij}^{(1)} = \frac{\max_k |\sigma_{ij}| - \min_k |\sigma_{ij}|}{\max_{\Omega} (\max_k |\sigma_{ij}|)} \quad \text{III.11}$$

Using III.11 to compute the error in node no.3, we obtain:

$$I_{q,zz}^{(1)} = \frac{\frac{5}{8}\gamma h - \frac{3}{8}\gamma h}{\gamma h} = \frac{1}{4} \quad \text{III.12}$$

We notice that the value of the quality indicator  $I_{q,ij}^{(1)}$  is influenced by the number of elements. In order to prove this assumption, the problem described in Fig. III.1 will be next divided in  $n$  linear finite elements (two-node elements) of equal length  $\frac{h}{n}$ .

The discretized model is shown in Fig. III.3.

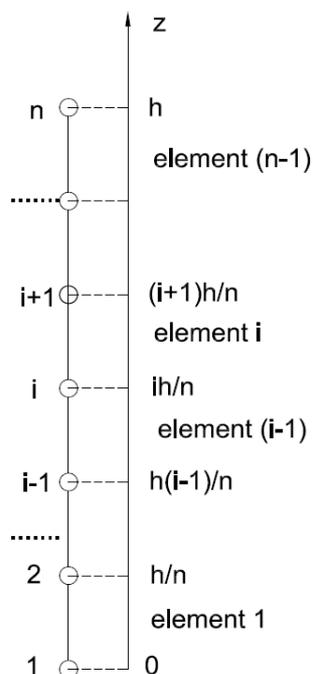


Fig. III.3 Discretized model (n finite linear elements)

The displacement for an element  $i$  is given by the following relation:

$$w(z) = w_{i-1}N_1(z) + w_iN_2(z) \text{ for } z \in \left[ z_{i-1}, z_i = z_{i-1} + \frac{h}{n} \right] \quad \text{III.13}$$

where  $N_1, N_2$  represent the interpolation functions for a two-node element, taking the values:

$$N_1(z) = i - \frac{n}{h}z \text{ and } N_2(z) = 1 - i + \frac{n}{h}z \quad \text{III.14}$$

By substituting III.14 in III.13 we obtain:

$$w(z) = w_{i-1} \left( i - \frac{n}{h}z \right) + w_i \left( 1 - i + \frac{n}{h}z \right) \quad \text{III.15}$$

The stress for the element  $i-1$  is:

$$\sigma^{\{i-1\}} = E \frac{dw}{dz} = E \frac{n}{h} (-w_{i-1} + w_i) \quad \text{III.16}$$

For  $z_{i-1} = \frac{(i-1)h}{n}$ , III.14 becomes:

$$N_1(z_{i-1}) = i - \frac{n}{h} \frac{h}{n} (i-1) = 1 \text{ and } N_2(z_{i-1}) = 1 - i + \frac{n}{h} \frac{h}{n} (i-1) = 0 \quad \text{III.17}$$

For  $z_i = \frac{ih}{n}$ , III.14 becomes:

$$N_1(z_i) = i - \frac{n}{h} \frac{h}{n} i = 0 \text{ and } N_2(z_i) = 1 - i + \frac{n}{h} \frac{h}{n} i = 1 \quad \text{III.18}$$

From this point further, we are going to analyze the displacement and stress value around node  $i$ . It connects element  $i-1$  and element  $i$ , see Fig. III.4.

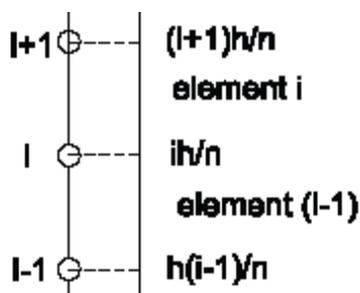


Fig. III.4 Discretized model: elements  $i-1$  and  $i$

Based on III.13, we obtain the following for the element  $i-1$ :

$$w = w_{i-1} N_1 + w_i N_2$$

$$N_1 = i - \frac{n}{h} z \quad \text{III.19}$$

$$N_2 = 1 - i + \frac{n}{h} z$$

and for element  $i$ :

$$w = w_{i-1}N_1 + w_iN_2$$

$$N_1 = i - \frac{n}{h}z \quad \text{III.20}$$

$$N_2 = 1 - i + \frac{n}{h}z$$

The displacement equation for element  $i$  is:

$$w(z) = w_{i-1}\left(i - \frac{n}{h}z\right) + w_i\left(1 - i + \frac{n}{h}z\right) \quad \text{III.21}$$

and the stress:

$$\sigma^{\{i\}} = E \frac{dw}{dz} = \frac{En}{h}(-w_{i-1} + w_i) \quad \text{III.22}$$

The variational principle of the equilibrium equation for the problem described in Fig. III.1 is:

$$-\int_0^h E \frac{dw}{dz} \frac{d\delta v}{dz} dz - \int_0^h \gamma \delta v dz = 0 \quad \text{III.23}$$

where:

$$\frac{dw}{dz} = w_{i-1}\left(-\frac{n}{h}\right) + w_i\left(\frac{n}{h}\right)$$

$$\frac{dw}{dz} = w_i\left(-\frac{n}{h}\right) + w_{i+1}\left(\frac{n}{h}\right)$$

$$\frac{d\delta v}{dz} = \delta v_{i-1}\left(-\frac{n}{h}\right) + \delta v_i\left(\frac{n}{h}\right)$$

$$\frac{d\delta v}{dz} = \delta v_i\left(-\frac{n}{h}\right) + \delta v_{i+1}\left(\frac{n}{h}\right) \quad \text{III.24}$$

By solving equation III.23 we obtain:

$$\begin{aligned}
 & -E(w_i - w_{i-1})(\delta v_i - \delta v_{i-1})\frac{n^2 h}{h^2 n} - E(w_{i+1} - w_i)(\delta v_{i+1} - \delta v_i)\frac{n^2 h}{h^2 n} - \\
 & -\gamma \left[ \delta v_{i-1} \left( iz - \frac{n z^2}{h 2} \right) + \delta v_i \left( (1-i)z - \frac{n z^2}{h 2} \right) \right]_{z_{i-1}}^{z_{i-1} + \frac{h}{n}} - \\
 & -\gamma \left[ \delta v_i \left( (i+1)z - \frac{n z^2}{h 2} \right) + \delta v_{i+1} \left( -iz - \frac{n z^2}{h 2} \right) \right]_{z_i}^{z_i + \frac{h}{n}} = 0
 \end{aligned} \tag{III.25}$$

By replacing  $z = \frac{ih}{n}$  in III.25, we obtain:

$$\begin{aligned}
 & -E(w_i - w_{i-1})\frac{n}{h} + E(w_{i+1} - w_i)\frac{n}{h} - \gamma \left[ (1-i)\frac{h}{n} + \frac{n}{2h} \left( \left( \frac{ih}{n} \right)^2 - \left( \frac{(i-1)h}{n} \right)^2 \right) \right] - \\
 & -\gamma \left[ (1+i)\frac{h}{n} - \frac{n}{2h} \left( -\left( \frac{ih}{n} \right)^2 + \left( \frac{(i+1)h}{n} \right)^2 \right) \right] = 0
 \end{aligned} \tag{III.26}$$

$$\begin{aligned}
 & -E(-w_{i-1} + 2w_i - w_{i+1})\frac{n}{h} - \\
 & -\gamma \left[ (1-i)\frac{h}{n} + (1+i)\frac{h}{n} + \frac{n}{2h} \left( \frac{ih}{n} \right)^2 + \frac{n}{2h} \left( \frac{ih}{n} \right)^2 - \frac{n}{2h} \left( \frac{(i-1)h}{n} \right)^2 - \frac{n}{2h} \left( \frac{(i+1)h}{n} \right)^2 \right] = 0
 \end{aligned} \tag{III.27}$$

$$\begin{aligned}
 & -E(-w_{i-1} + 2w_i - w_{i+1})\frac{n}{h} - \\
 & -\gamma \left[ \frac{2h}{n} + \frac{n}{2h} \frac{h^2}{n^2} (i^2 + i^2 - (i-1)^2 - (i+1)^2) \right] = 0
 \end{aligned} \tag{III.28}$$

$$-E(-w_{i-1} + 2w_i - w_{i+1})\frac{n}{h} = \gamma \left[ \frac{2h}{n} - \frac{h}{n} \right] \tag{III.29}$$

Thus, for node  $i$  we obtain:

$$-w_{i-1} + 2w_i - w_{i+1} = \frac{1}{E} \left( \frac{h}{n} \right)^2 \gamma \quad \text{III.30}$$

which is equivalent to:

$$\begin{aligned} \sigma^{\{i+1\}} - \sigma^{\{i\}} &= \frac{En}{h} (-w_{i-1} + 2w_i - w_{i+1}) = \frac{En}{h} \frac{1}{E} \left( -\frac{h}{n} \right)^2 \gamma \\ \sigma^{\{i+1\}} - \sigma^{\{i\}} &= -\frac{h\gamma}{n} \end{aligned} \quad \text{III.31}$$

The stress for the element  $i-1$  is:

$$\sigma^{\{i-1\}} = \frac{En}{h} (-w_{i-2} + w_{i-1}) \quad \text{III.32}$$

Since the discretized model is composed of linear two-node elements, we obtain a linear variation of the displacement along direction  $z$ . In reality, the displacement is a quadratic function with respect to the direction  $z$ . Therefore, by discretizing the problem by linear elements we introduce a non recuperable error along  $z$ . By computing the error using III.11 for node  $i$ , function of the stress values for the elements  $i-1$  and  $i$ , we obtain:

$$I_{q,zz}^{(1)} = \frac{|\sigma^{\{i\}}| - |\sigma^{\{i-1\}}|}{|\sigma^{\{n\}}|} \quad \text{III.33}$$

$$I_{q,zz}^{(1)} = \left| \frac{\frac{En}{h} (-w_{i-1} + w_i + w_{i-2} - w_{i-1})}{\gamma h} \right| = \left| -\frac{2\gamma h}{2n} \right| \quad \text{III.34}$$

$$I_{q,zz}^{(1)} = \frac{1}{n} \quad \text{III.35}$$

where  $n$  represents the number of nodes in the discretized model.

From III.35 results that for  $n \rightarrow \infty$  we have  $I_{q,zz}^{(1)} = 0$  which is graphically represented in Fig. III.5. Therefore, we can conclude that the number of elements is an important factor in assessing the discretization errors.

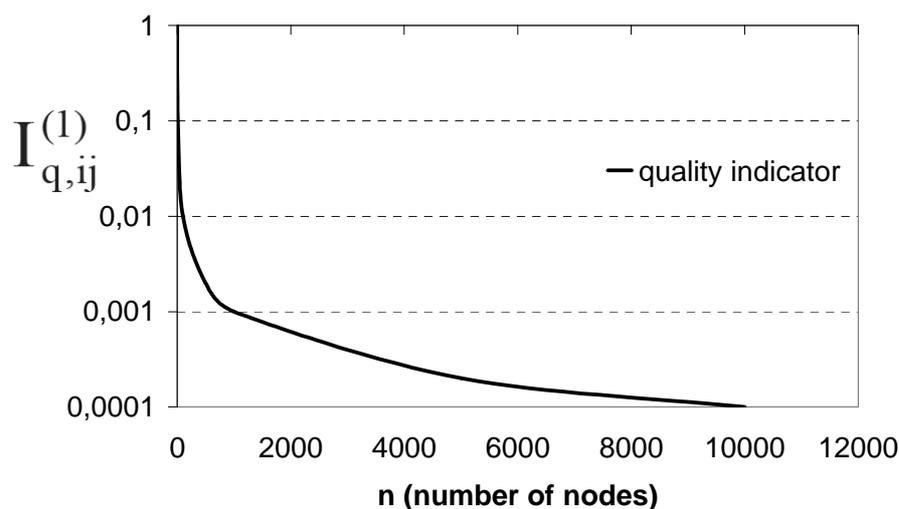


Fig. III.5 Evolution of the quality of the numerical solution with respect to the mesh fineness

As it has been noticed by the three quality indicators ( $I_{q,ij}^{(1)}$ ,  $I_q^{(2)}$  and  $I_q^{(3)}$ ), the accuracy of the numerical solution is directly related to the mesh fineness. For a very coarse mesh, we obtain large errors. These errors decrease for finer discretization models.



## **IV DEVELOPMENT OF QUALITY INDICATORS. PART II: APPLICATION TO A BRACED SHEETPILE EXCAVATION (KARLSRUHE EXPERIMENTAL SITE)**

## IV.1 INTRODUCTION

Following the presentation of the quality indicators in the previous chapter, we now use the previously defined indicators to assess the quality of the numerical solution of a braced sheetpile excavation (Hochstetten experimental site, near Karlsruhe). The accuracy of the results based on the mechanical properties of the soil and the structure is not studied. Also, we prove that the quality indicator results are independent of the chosen mechanical properties for the soil or structure.

The work is presented under the form of an article submitted to « Finite Elements in Analysis and Design » international journal. The article is divided into six Sections. Section 1 exposes the current development of the error estimators. Section 2 reviews the description of the quality indicators proposed in (Vulpe et al., 2011), Section 3 is dedicated to the presentation of the Karlsruhe experimental sheetpile wall, the material properties and the FE analysis considerations. Section 4 presents the accuracy of the FE analyses results; accuracy established by means of quality indicators. The overall largest values of the quality indicators over the entire discretization are presented as well as the accuracy of several select segments. The influence of the mechanical properties of soil on the quality indicators is presented in Section 5. The conclusions are presented in Section 6.

Since the article presents a restrictive amount of results, ANNEXE 3 and ANNEXE 4 collect a larger number of graphs for an in-depth study of the quality of the numerical solutions of the braced sheetpile excavation. ANNEXE 3 is dedicated to the study of the accuracy of the discretization model and ANNEXE 4 to study of the influence of the mechanical properties of the soil on the quality indicators.

The article submitted to « Finite Elements in Analysis and Design » is attached below. The paper is presented in its original submitted form.

# Development of quality indicators. Part II: application to a braced sheetpile excavation (Karlsruhe experimental site)

Submitted to "Finite Elements in Analysis and Design"

---

## Abstract

The second part of the development of quality indicators in FEM is dedicated to testing the accuracy of the FEM solution of a braced sheetpile excavation by means of the indicators described in [1] (*C. Vulpe et al, "Development of quality indicators. Part I: development and application to simple 2D and 3D problems", submitted*). An experimental site in Karlsruhe has been chosen and FEM analyses performed. Results presenting the accuracy of the 2D nonlinear elastoplastic FE computations treated with the quality indicators are detailed. Also, it is proven that the quality indicators do not depend on the soil mechanical properties.

Keywords: quality indicator, error, phased analysis, 2D

---

## 1 INTRODUCTION

Error estimators and adaptive techniques have been developed and proposed over the years [2-8]. They aim at identifying and correcting errors that occur in FEM analyses. The errors have been divided into discretization errors and modeling errors. While the study of the modeling errors can be considered at incipient stage [9, 10], the study of the discretization errors has been the object of numerous publications. The already established error estimators (notably recovery and residual error estimators) have been tested on a large array of geotechnical problems treating different soil mechanics aspects, from simple problems for which analytical solutions are known to more complex analyses for which analytical solutions are not available. While a larger number of a posteriori error estimators have been developed over the years, the recovery and residual error estimators have been tested and studied at a larger scale. The recovery error estimators have proven to offer more accurate representations of the discretization errors than the residual error estimators [11, 12].

Studies to assess the robustness of the established error estimators were performed with mixed results, depending on the treated problem and type of error estimator used [12-14]. The study of the errors estimators in FE analyses has focused on errors in quantities of interest in the recent years since frequently the FEM user is interested in the accuracy of specific output data (stresses, displacements, heat transfer)[15-17]. Lower and upper bounds have been sought for several type of problems [18-20].

Though they have been thoroughly investigated, there is still an amount of uncertainty and lack of precision of the error estimators [14]. The accuracy of the most reliable error estimator, the recovery error estimator, as established by [11], strongly depends on the accuracy of the "overkill" FE solution employed in the determination of the recovery solution.

The quality indicators proposed in [1] and used on a number of simple 2D and 3D elastic and elastoplastic problems assess the jump in stress values in the nodes of the generated mesh. Their aim is to define the discretization errors stemming from the approximations in the nodal stresses.

The outline of the paper is organised as follows: Section 2 reviews the descriptions of the quality indicators proposed in [1]. Section 3 is dedicated to the presentation of the Karlsruhe experimental sheetpile wall, the material properties and the FE analysis considerations. Section 4 presents the accuracy of the FE analyses results; accuracy established by means of quality indicators. The overall largest values of the quality indicators over the entire discretization are presented as well as the accuracy of several select segments. The influence of the mechanical properties of soil on the quality indicators is presented in Section 5. The conclusions will be presented in Section 6.

## 2 DEFINITION AND PRESENTATION OF QUALITY INDICATORS

The sources of errors in FEM are: the choice of a mathematical representation of the physical phenomena and the choice of the numerical model in the FE approximation. There exists a third, less studied, source of error, namely the error due to random information or scarce data about the physical model. The two main types of errors can be assessed as: modeling errors due to simplified mathematic representation of the physical event and discretization errors due to the discrete approximations of the mathematical model.

The current paper assesses and quantifies only the discretization errors. From a numerical modeling point of view, the errors are mostly due to the degree of the polynomial interpolation of the elements and the fineness of the mesh involved in the discretization.

The errors are defined as the difference between the exact solution (the solution for the mathematical model) and the approximate solution obtained by FEM analysis (the solution obtained by numerical approximation of the mathematical model). One can define the discretization errors as follows:

$$e = u - u_h \quad 2.1$$

$$e_\sigma = \sigma - \sigma_h \quad 2.2$$

$$e_\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_h \quad 2.3$$

where  $(u, \sigma, \varepsilon)$  represents the exact solution and  $(u_h, \sigma_h, \varepsilon_h)$  represents the approximate FE solution.

Equation 2.2 can be also expressed as  $\sigma_h \neq \sigma$ . The exact solution of the mathematical model is considered correct and no errors are derived from it; hence the numerical solution provides the errors. This hypothesis is the base of the formulation for the quality indicators. The quality indicators are expressed solely function of the FE solution nodal stresses. They determine the level of inaccuracies inside the mesh [1].

They are explicitly defined as follows:

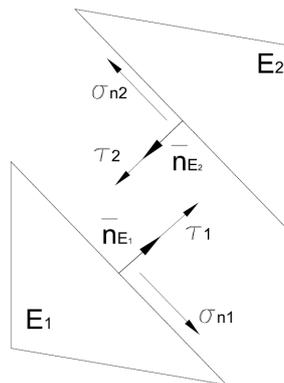
$$I_{q,ij}^{(1)} = \frac{\max_k |\sigma_{ij}| - \min_k |\sigma_{ij}|}{\max_{k \in \Omega} (\max_k |\sigma_{ij}|)} \quad 2.4$$

where:  $I_{q,ij}^{(1)}$  represents the norm of the error on a component of the stress tensor,  $\max_k |\sigma_{ij}|$  and  $\min_k |\sigma_{ij}|$  represent the maximum and minimum values of  $\sigma_{ij}$  over all elements connected to the node  $k$ ,  $k \in \Omega$ , and  $\max_{k \in \Omega} (\max_k |\sigma_{ij}|)$  represents the maximum  $\sigma_{ij}$  value over the entire mesh.

$$I_q^{(2)} = \frac{|\sigma_{n1}| - |\sigma_{n2}|}{\max(|\sigma_{n1}|, |\sigma_{n2}|)} \quad 2.5$$

$$I_q^{(2)} = \frac{|\tau_1| - |\tau_2|}{\max(|\tau_1|, |\tau_2|)} \quad 2.6$$

where:  $I_q^{(2)}$ ,  $I_q^{(3)}$  represent the norm on the error of a component of the stress vector,  $\sigma_{n1}$ ,  $\sigma_{n2}$ ,  $\tau_1$  and  $\tau_2$  represent the normal and tangent stress vector components at the element interface (see Fig. 1).



**Fig. 1 Interface between two elements.**

Quality indicator  $I_{q,ij}^{(1)}$  evaluates the difference between the nodal stresses at element corners while quality indicators  $I_q^{(2)}$  and  $I_q^{(3)}$  evaluate the equilibrium default of the element interface.  $I_q^{(2)}$  and  $I_q^{(3)}$ .

The denominator in 2.4 has been chosen as the maximum stress value over the entire mesh in order to avoid having maximum values for the quality indicator around the least loaded areas. There, even if the stresses are very small the relative difference between them can be considerable, overshadowing the important errors that occur in the vicinity of the loaded area.

$I_{q,ij}^{(1)}$ ,  $I_q^{(2)}$  and  $I_q^{(3)}$  have been implemented in the CESAR-LCPC finite element method computer code.

With the definitions adopted above, it can be shown that the quality indicators are bound to respect the following inequalities:

$$0 \leq I_{q,ij}^{(1)} \leq 1$$

$$0 \leq I_q^{(2)} \leq 1 \quad 2.7$$

$$0 \leq I_q^{(3)} \leq 1$$

where the most accurate results are obtained for the zero values and least accurate results for the unity values.

### 3 PRESENTATION OF THE KARLSRUHE BRACED SHEETPILE EXCAVATION (EXPERIMENTAL SITE)

Following the verification and validation processes recommended by [21], [1] verified the efficiency of the newly implemented quality indicators while the current papers validates them. The accuracy of the FE analyses for a braced sheetpile excavation experimental site is studied by means of quality indicators.

In 1993, the University of Karlsruhe and the Dutch Centre for Civil Engineering, Research and Codes (CUR) organized a FEM analysis prediction competition for an experimental sheet pile sheetpile wall built in Hochstetten [22, 23]. The site has been investigated and supervised for the entire duration of the work. Instrumentation equipment has been set and measurements have been carried out both for the sheet piles and the excavation during the realization of the test.

Fig. 2 and Fig. 3 show the geometry and dimensions of experimental site. Fig. 2 shows the cross-section view of the experimental site at the end of the excavation. The site is represented by a 7x4m in surface and 5m deep braced excavation supported by:

- 8 m long "ARBED PU8" sheetpile on the left;
- 6 m deep "KRUPP KD VI" sheetpile on the right;
- both lateral excavation walls are 8 m deep "ARBED PU8" sheetpiles.

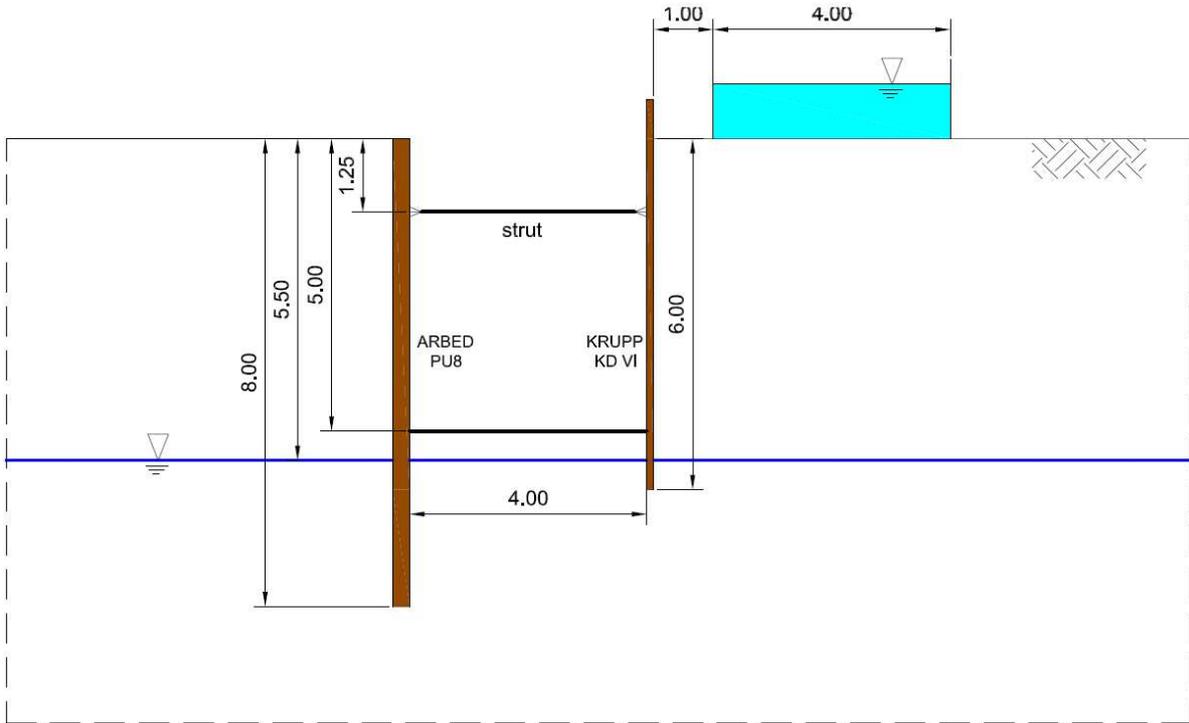


Fig. 2 Karlsruhe braced sheetpile excavation: cross-section view.

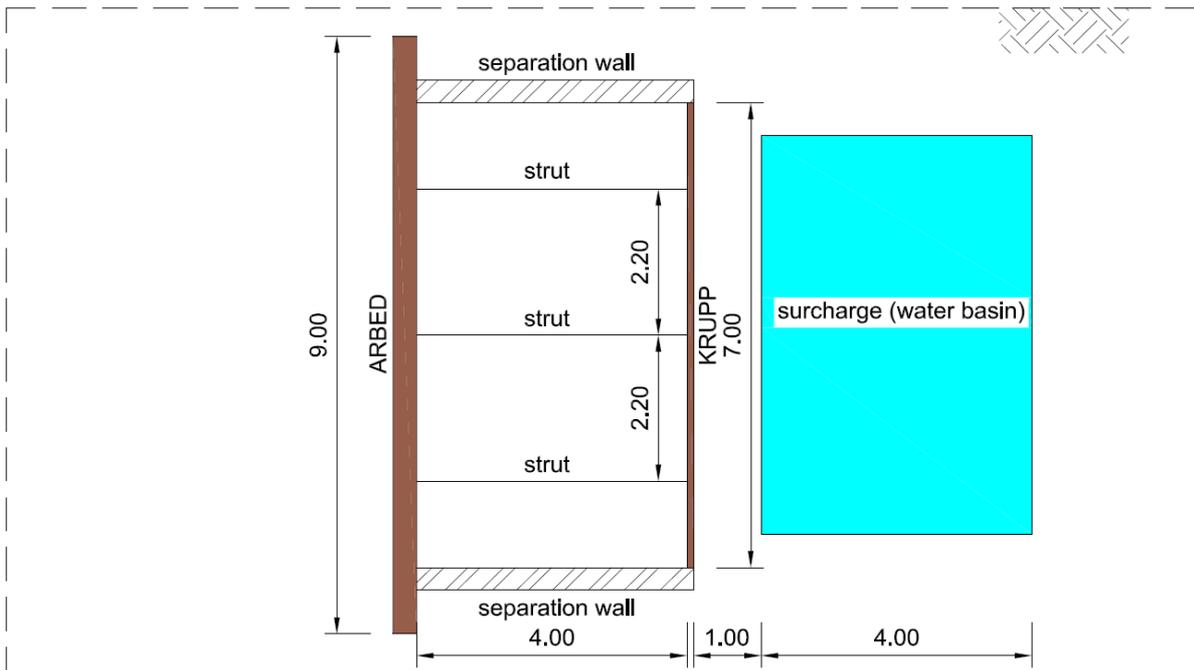


Fig. 3 Karlsruhe braced sheetpile excavation: top view.

### 3.1 Material properties. FEM analyses considerations

Both in situ and laboratory experiments have been conducted by CUR [22] and physical and mechanical properties for the sheetpiles and struts have been provided. Based on

the information received about the excavated soil (silty sand on the upper layer, sand with gravel intrusions on the bottom layer), it was decided to use Mohr-Coulomb constitutive law for the FE analyses. The ground water table (GWT) is situated at - 5.50m. The soil parameters used in the FE analyses are defined in Table 1 and the sheetpiles and struts parameters are presented in Table 2.

Depth (m)	E (kPa)	$\nu$	c (kPa)	$\Phi$ (°)	$\psi$ (°)	$\gamma'$ (kN/m <sup>3</sup> )	$\alpha$ (°)
0.00<z<5.50	30000	0.25	3	41.6	11.6	16.5	-
5.50<z<24.00	45000	0.25	0	41.6	11.6	9.8	-

**Table 1 Soil parameters for the Mohr-Coulomb constitutive law.**

Sheetpile	E (kPa)	$\nu$	Equivalent thickness (cm)	E (kPa)	A (m <sup>2</sup> )
ARBED	6824000	0.3	35	Strut	2,1E+08
KRUPP	24400000	0.3	10		0.02

**Table 2 Sheetpiles and struts parameters.**

### 3.2 Phases of construction

The execution and experimentation phases for the experimental site in Karlsruhe are described below. The installation of the sheetpiles has not been taken into account in the execution phases. These phases have been used when performing the FE analyses:

- Phase 1: excavation to -1.75m;
- Phase 2: struts' installation. The struts have been subjected to a prestress loading of 10 kN/strut;
- Phase 3: excavation to -4.00m;
- Phase 4: excavation to -5.00m;
- Phase 5: 10 kPa surcharge is applied behind the KRUPP sheetpile as shown in Fig. 2;
- Phase 6: reaching the limit state by means of controlled length reduction of the struts.

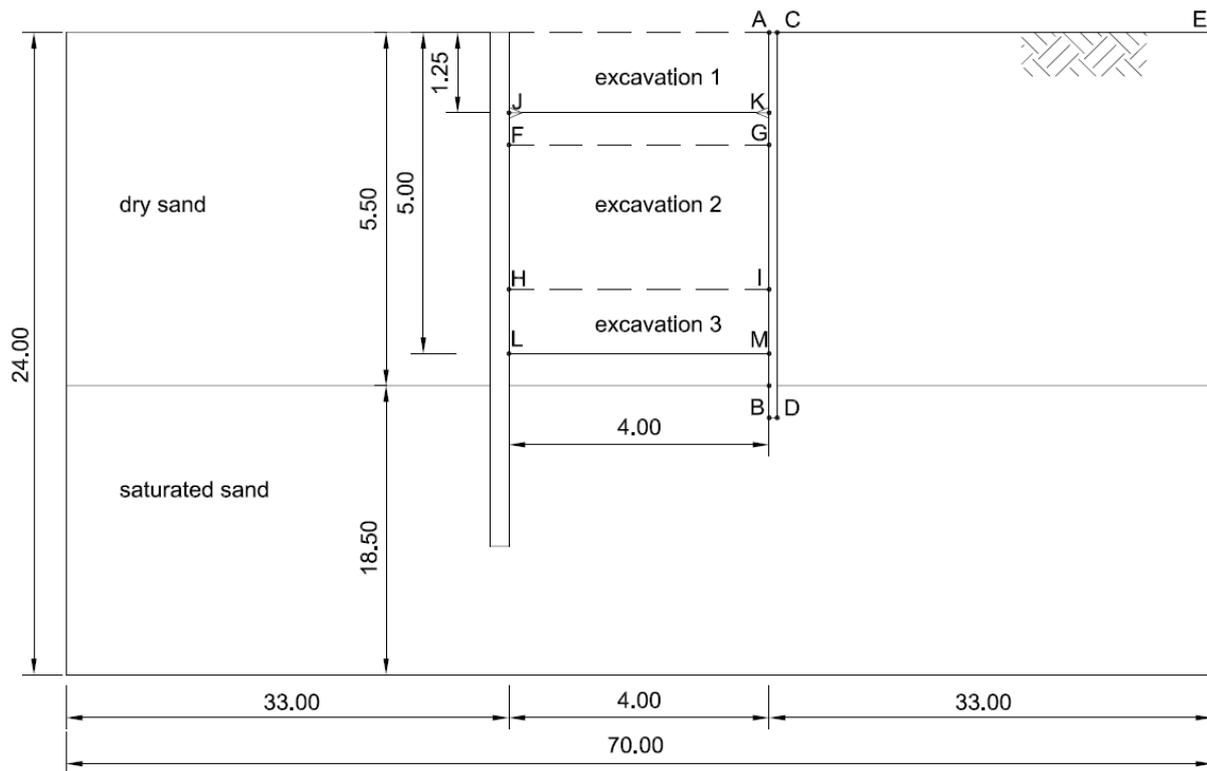
### 3.3 FEM analyses

The geometry and dimensions of the FE model are presented in Fig. 4. The soil has been modeled using Mohr-Coulomb constitutive law while the linear elastic constitutive law was used to model the sheetpiles and the struts. The physical and mechanical properties of the soil, sheetpiles and struts used for the computations are given in Table 1 and Table 2. In order to take into account the compaction of the soil caused by the sheetpile installation technique (sheetpiles installed by vibration), the sheetpiles have been modeled as a 35cm wide surface (for the ARBED sheetpile) and a 10cm wide surface (for the KRUPP sheetpile) respectively. The soil-structure interaction has been

taken into account and it has been modeled by a 10mm wide interface modeled using the so called “oriented criterion” constitutive law [24] for which the parameters are presented in Table 3. The FE analyses have been performed in effective stresses.

Interface	E (kPa)	$\nu$	c (kPa)	$\Phi$ (°)	$\psi$ (°)	$\gamma'$ (kN/m <sup>3</sup> )	$\alpha$ (°)
dry sand - structure	100	0	0	20	0	16.5	90
saturated sand - structure	100	0	0	20	0	9.8	90
sheetpile foot	100	0	0	20	0	9.8	0

**Table 3 Soil-structure interface parameters for the oriented criterion constitutive law.**



**Fig. 4 Karlsruhe braced sheetpile excavation: FE model plan.**

Four FE analyses have been performed for the Karlsruhe experimental site with different mesh finenesses, Table 4. The analyses are performed in 2D using the plane strain condition. The meshes consist of eight-noded quadrilateral isoparametric elements (Q8 elements) with reduced integration.

Mesh fineness	No. of nodes
coarse mesh	2121
medium fine mesh	4377
fine mesh	13317
very fine mesh	21125

**Table 4 Karlsruhe braced sheetpile wall: mesh finenesses for FEM analyses.**

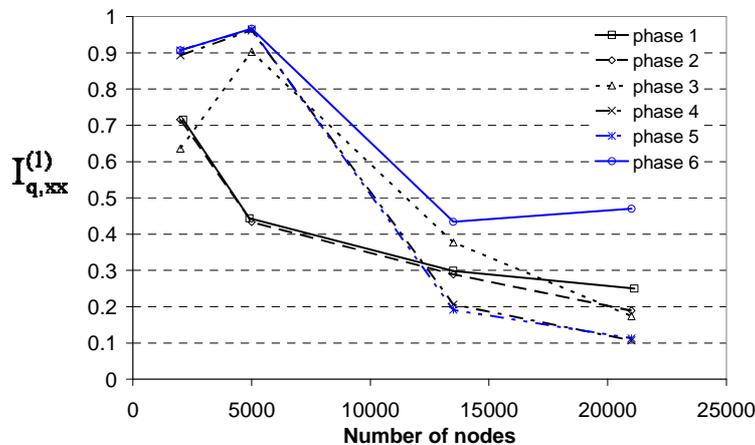
The accuracy of the FE computations will be examined using the quality indicators implemented in CESAR-LCPC FE computer code [1]. They will point to the discretization errors throughout the mesh.

#### 4 ACCURACY OF THE FE ANALYSIS OF THE KARLSRUHE BRACED SHEETPILE EXCAVATION

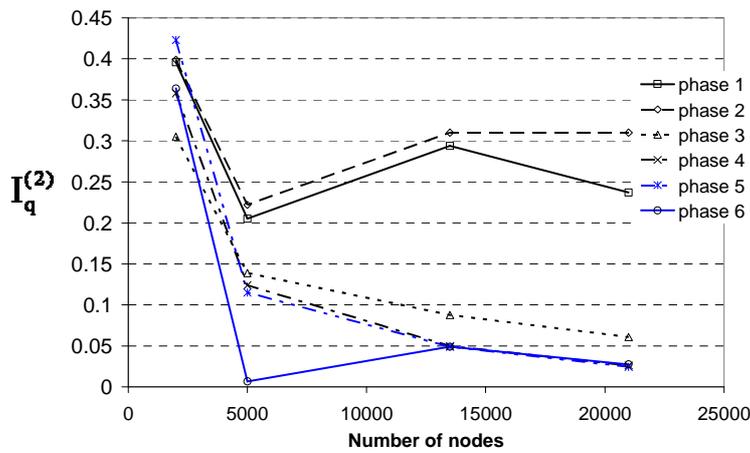
The accuracy of the FE analysis of a retaining wall is studied. The quality of the numerical solution is sought in the case of a braced sheetpile excavation experimental site in Karlsruhe. A number of computations have been performed using solely 2D isoparametric second degree polynomial interpolation elements, Q8, but with different mesh finenesses. The accuracy of the FE analyses is studied only from the point of view of the quality of the discretization. Once the FE analyses finished, the quality indicators are employed a posteriori and the graphical representations of the approximate results are plotted, as seen in Fig. 13.

The overall largest quality indicators values on the entire mesh as well as the quality of the solution over key segments in the mesh are presented. The purpose is to show the repartition of the errors over the entire modeled domain but also to analyze the discretization errors along specific areas within the mesh. A number of representative segments inside the mesh have been chosen; they represented the soil-structure interaction (AB, CD), excavation levels (FG, HI, LM), the struts (JK) or the ground level behind the sheetpile (CE), see Fig. 4.

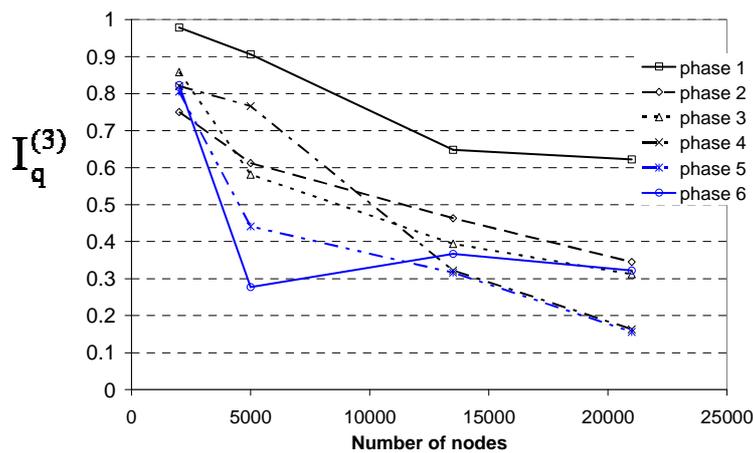
The overall accuracy of the FE analyses for each construction phase is presented in Fig. 5, Fig. 6 and Fig. 7.  $I_{q,xx}^{(1)}$ ,  $I_q^{(2)}$  and  $I_q^{(3)}$  show an improvement in the accuracy of the FE solutions for the finer meshes, as it is expected. The coarse mesh gives poor results in terms of quality of the discretization, with values for quality indicators  $I_{q,xx}^{(1)}$  and  $I_q^{(3)}$  reaching unity. The nodal errors described by  $I_{q,xx}^{(1)}$  and  $I_q^{(3)}$  are very high for all phases of execution, especially for the 5<sup>th</sup> and 6<sup>th</sup> phase for the coarse mesh. Quality indicator  $I_q^{(2)}$  provides values less critical of the overall accuracy of FE analyses for all execution phases.



**Fig. 5 Quality of the FE analysis for the Karlsruhe braced sheetpile excavation: influence of the mesh fineness for all construction phases on the maximum value of  $I_{q,xx}^{(1)}$  over the entire mesh.**

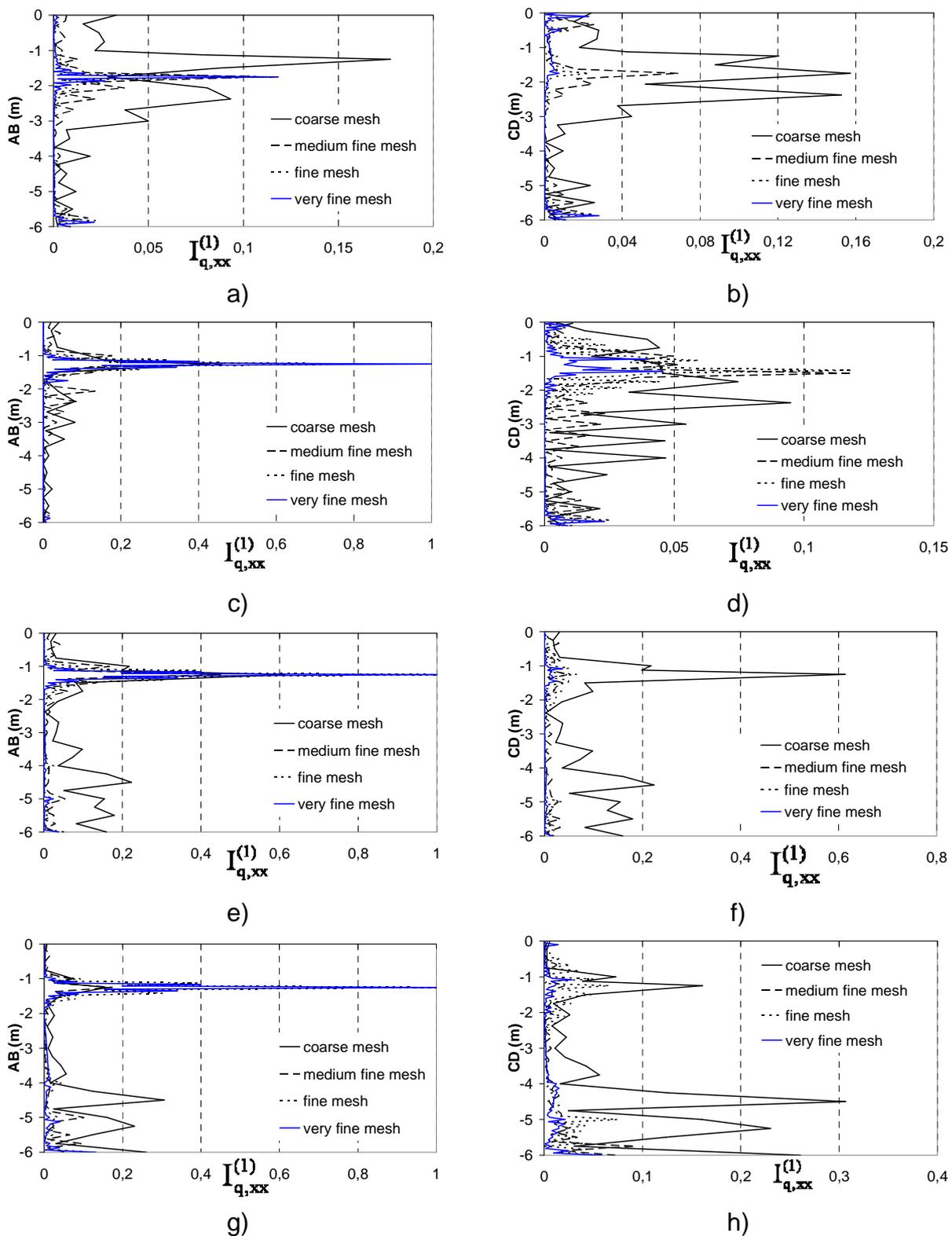


**Fig. 6 Quality of the FE analysis for the Karlsruhe braced sheetpile excavation: influence of the mesh fineness for all construction phases on the maximum value of  $I_q^{(2)}$  over the entire mesh.**



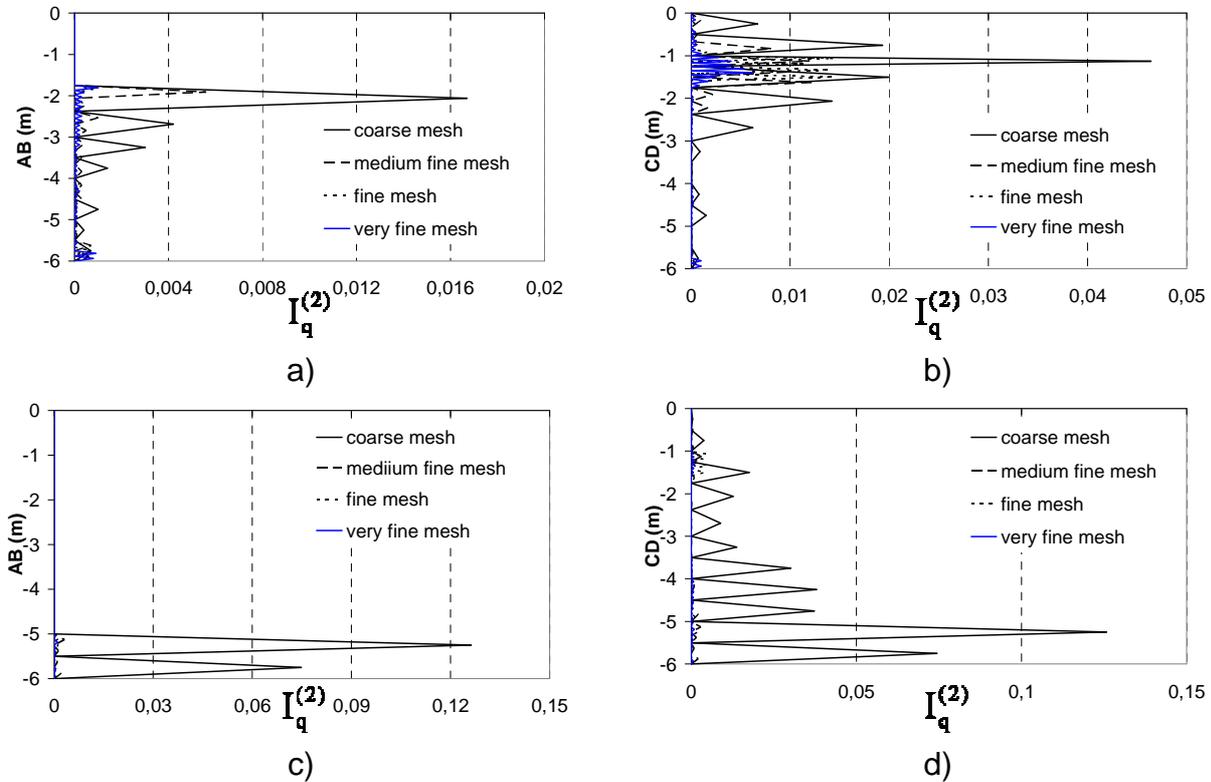
**Fig. 7 Quality of the FE analysis for the Karlsruhe braced sheetpile excavation: influence of the mesh fineness for all construction phases on the maximum value of  $I_q^{(3)}$  over the entire mesh.**

The quality of the discretization along specific segments of the Karlsruhe experimental site in the FE analysis is presented in Fig. 8, Fig. 9, Fig. 10, Fig. 11, and Fig. 12. Several segments along the discretized mesh have been chosen and the accuracy of their discretization has been studied. Problematic areas arise along the investigated segments; large errors are observed in specific areas (close to the loaded area, singularity points), but the values of the quality indicators stabilize differently depending on the mesh fineness and type of elements used (for e.g., the errors diminish closer to the loaded areas for the finer mesh than for the coarse meshes). The shapes of the accuracy curves are erratic for the coarse meshes; the nodal stress values stabilize at larger distance from the loaded area. These observations prove that the simple quality indicators implemented in CESAR-LCPC are good tools in determining the accuracy of the FEM analyses with respect to the chosen discretization model.



**Fig. 8 Quality of the FE analysis for the Karlsruhe braced sheetpile excavation: a) influence of the mesh fineness along AB for phase 1 using  $I_{q,xx}^{(1)}$  ; b) influence of the mesh fineness along BC for phase 1 using  $I_{q,xx}^{(1)}$  ; c) influence of the mesh fineness along AB for phase 2 using  $I_{q,xx}^{(1)}$  ; d) influence of the mesh fineness along BC for phase 2 using  $I_{q,xx}^{(1)}$  ; e) influence of the mesh fineness**

along AB for phase 4 using  $I_{q,xx}^{(1)}$  ; f) influence of the mesh fineness along BC for phase 4 using  $I_{q,xx}^{(1)}$  ; g) influence of the mesh fineness along AB for phase 6 using  $I_{q,xx}^{(1)}$  ; h) influence of the mesh fineness along BC for phase 6 using  $I_{q,xx}^{(1)}$  .

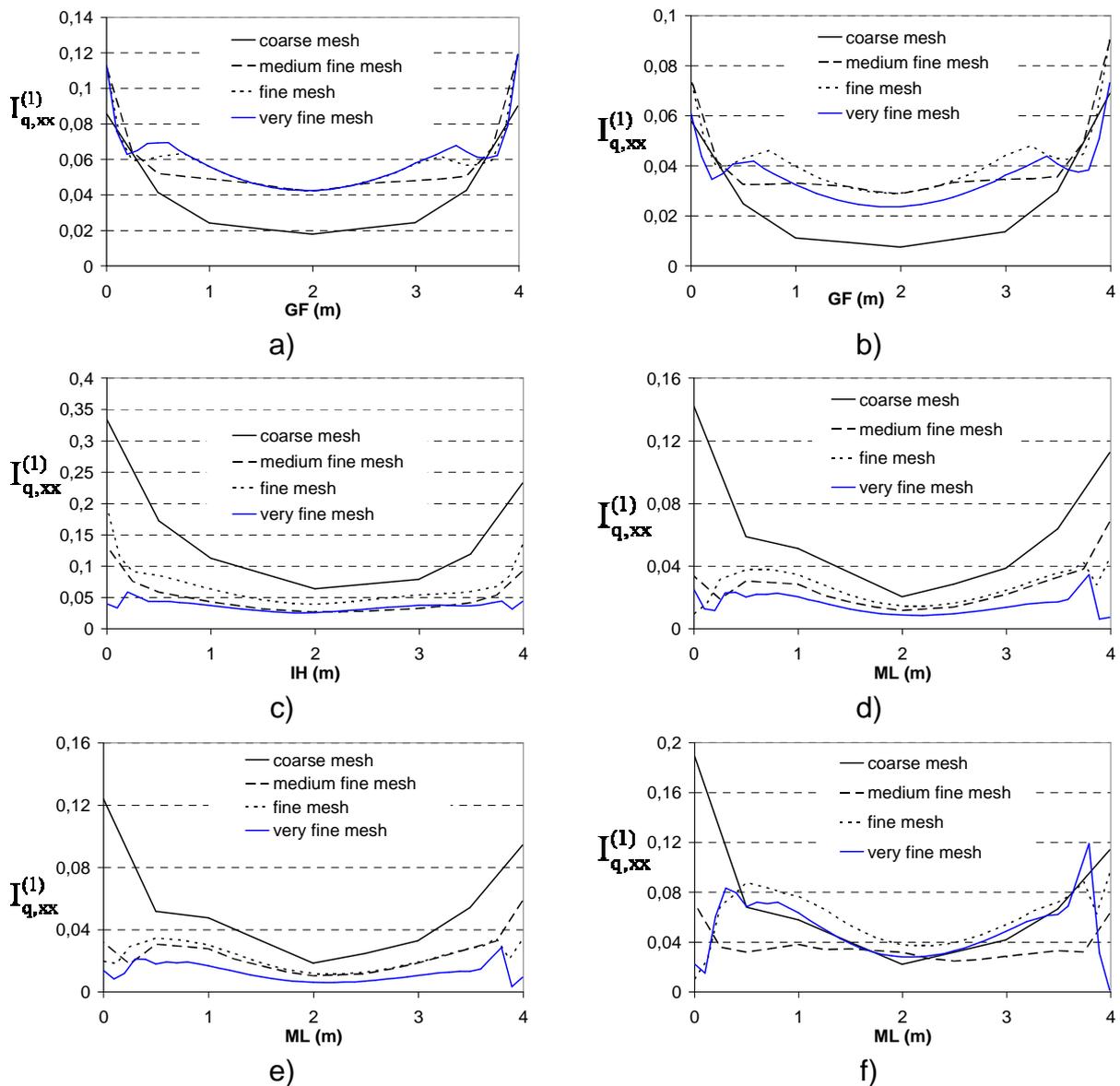


**Fig. 9** Quality of the FE analysis for the Karlsruhe braced sheetpile excavation: a) influence of the mesh fineness along AB for phase 2 using  $I_q^{(2)}$  ; b) influence of the mesh fineness along BC for phase 2 using  $I_q^{(2)}$  ; c) influence of the mesh fineness along AB for phase 6 using  $I_q^{(2)}$  ; d) influence of the mesh fineness along AB for phase 6 using  $I_q^{(2)}$  .

As expected, the coarse mesh offers the least accurate results along the mesh. Consistent errors are observed along the AB and CD segments at the sheetpile-strut interface, see Fig. 8 and Fig. 9. The AB and CD segments represent the two faces of the KRUPP sheetpile, AB being the sheetpile side facing the excavation and CD the sheetpile side facing the supported soil. As in the case of the simple problems analyzed in [1],  $I_{q,xx}^{(1)}$  estimates larger values for the nodal stress errors.

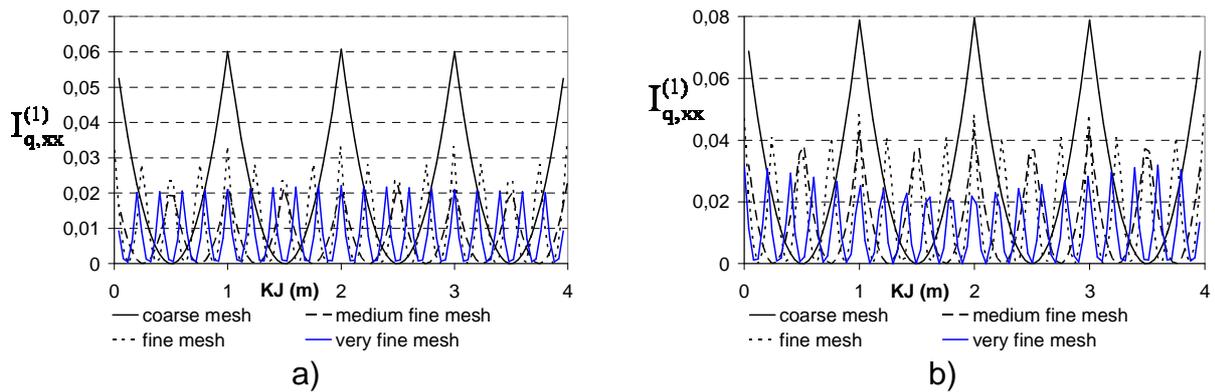
For the analyzed phases where the struts are installed, the dominating errors are met at the interface sheetpile-strut. The largest  $I_{q,xx}^{(1)}$  value, namely  $I_{q,xx}^{(1)} = 1$ , is reached at the interface sheetpile-strut on the excavating side. Also, large nodal stress jumps are developed along the sheetpiles at the excavation level.

The fine and very fine meshes show large errors at the sheetpile-strut interface with errors rapidly decreasing and stabilising along negligible values.

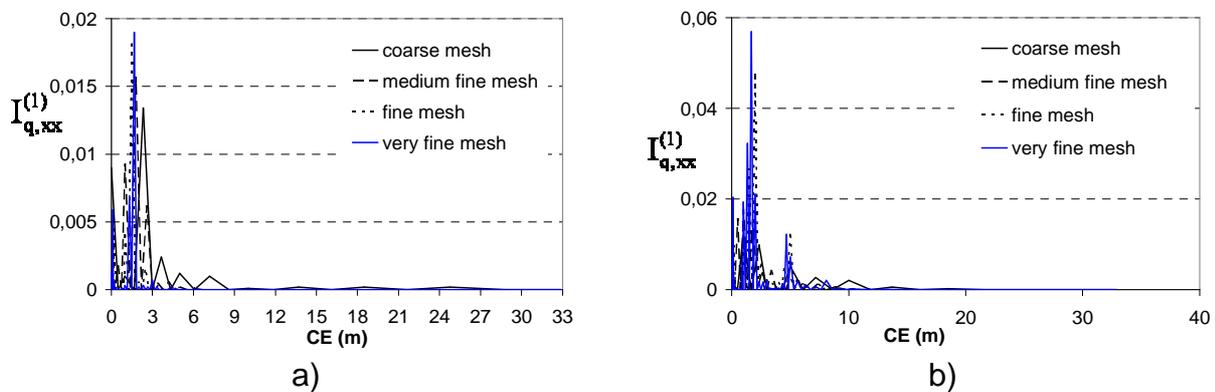


**Fig. 10** Quality of the FE analysis for the Karlsruhe braced sheetpile excavation: a) influence of the mesh fineness along GF for phase 1 using  $I_{q,xx}^{(1)}$  ; b) influence of the mesh fineness along GF for phase 2 using  $I_{q,xx}^{(1)}$  ; c) influence of the mesh fineness along IH for phase 3 using  $I_{q,xx}^{(1)}$  ; d) influence of the mesh fineness along ML for phase 4 using  $I_{q,xx}^{(1)}$  ; e) influence of the mesh fineness along ML for phase 5 using  $I_{q,xx}^{(1)}$  ; f) influence of the mesh fineness along ML for phase 6 using  $I_{q,xx}^{(1)}$ .

The accuracy of the numerical analysis along the excavation surfaces (GF – first excavation surface, IH – second excavation surface, ML – third excavation surface) is very satisfactory regardless of the mesh fineness, small nodal stress jumps are observed with both  $I_{q,xx}^{(1)}$  and  $I_q^{(2)}$ . While for the first excavation surface, GH, the coarse mesh appears as the most accurate discretization solution, for the next excavation surfaces, IH and ML, the accuracy improves with the refinement of the mesh.



**Fig. 11** Quality of the FE analysis for the Karlsruhe braced sheetpile excavation: **a)** influence of the mesh fineness along KJ for phase 3 using  $I_{q,xx}^{(1)}$ ; **b)** influence of the mesh fineness along KJ for phase 5 using  $I_{q,xx}^{(1)}$ .



**Fig. 12** Quality of the FE analysis for the Karlsruhe braced sheetpile excavation: **a)** influence of the mesh fineness along CE for phase 4 using  $I_{q,xx}^{(1)}$ ; **b)** influence of the mesh fineness along CE for phase 6 using  $I_{q,xx}^{(1)}$ .

Very small errors are observed for the discretized struts and horizontal soil surface behind the sheetpile, see Fig. 11 and Fig. 12. The fineness of the discretization plays little importance in the quality level of the results for segments CE and KJ. One can deduce that in order to save on time computation costs, a coarse discretization is sufficient in the area not directly related to the excavation

The areas most affected by the fineness of the discretization are the sheetpile walls and the horizontal excavation surfaces. The rest of the numerical model is not significantly influenced by the quality of the mesh, as can be observed in the graphical representation of the quality of the FE solution over the entire mesh in Fig. 13.

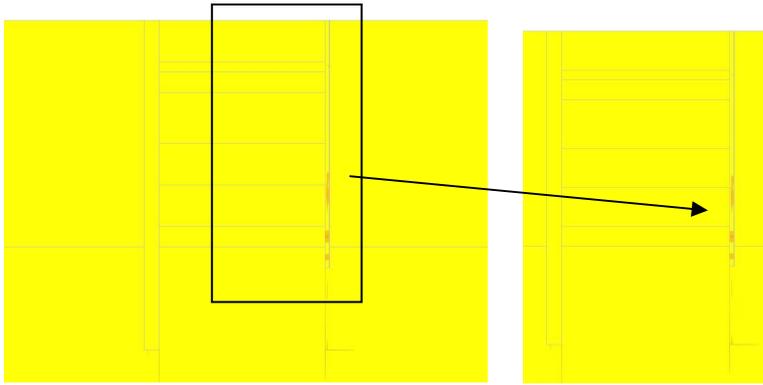


Fig. 13 Graphical (contour plots) representation of the FE accuracy for the Karlsruhe braced sheetpile excavation:  $I_q^{(2)}$  for the coarse mesh for phase 4.

## 5 INFLUENCE OF THE SOIL PARAMETERS ON THE QUALITY INDICATORS

In this section, we propose to verify if the soil parameters influence the values of the quality indicators. For this, we assume, consecutively, different values for the following soil parameters for the first layer of soil (where  $0 \leq z \leq 5.50\text{m}$ , see Table 1): Young modulus (E), cohesion (c) and internal friction angle ( $\phi$ ). The values of the considered soil parameters are taken in a range of  $\pm 50\%$  from the original values for Young modulus and internal friction angle and  $\pm 100\%$  from the original values for the cohesion.

FE analyses for the first and second phase of the Karlsruhe sheetpile excavation have been performed to determine the influence of the soil parameters on the quality indicators. The analyses have been performed for the coarse and medium fine meshes.

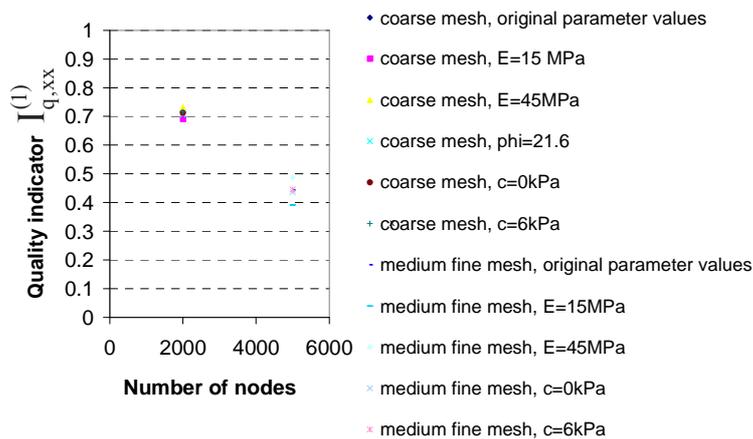
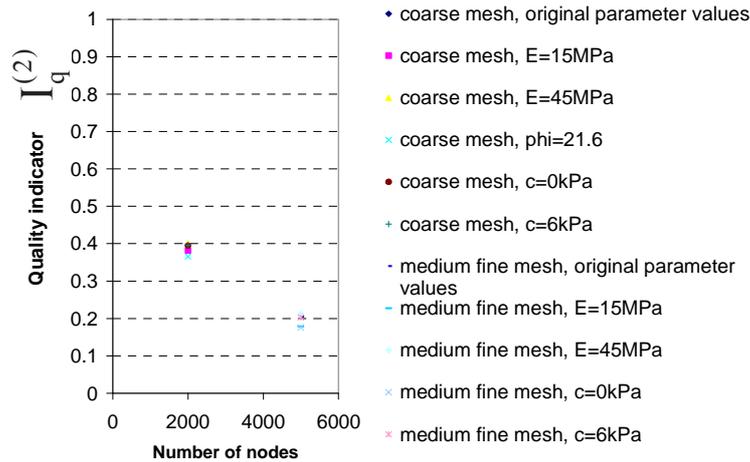
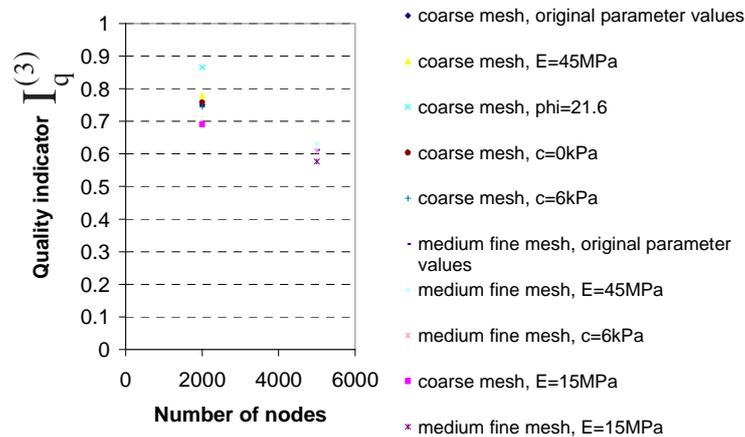


Fig. 14 Quality of the FE analysis for the Karlsruhe braced sheetpile excavation: influence of the soil parameters for  $I_{q,xx}^{(1)}$ , first excavation phase



**Fig. 15 Quality of the FE analysis for the Karlsruhe braced sheetpile excavation: influence of the soil parameters for  $I_q^{(2)}$ , first excavation phase**



**Fig. 16 Quality of the FE analysis for the Karlsruhe braced sheetpile excavation: influence of the soil parameters for  $I_q^{(3)}$ , second excavation phase**

Fig. 14 and Fig. 15 show that the values of the  $I_{q,xx}^{(1)}$  and  $I_q^{(2)}$  quality indicators are independent of the soil parameters introduced in the computations. The variations in the values of the quality indicators are extremely limited even if the soil parameters are varied in large ranges (the ratio between the largest and smallest Young moduli is 3).

Fig. 16 shows the influence of the soil parameters on the values of  $I_q^{(3)}$ . It can be noticed that the values of  $I_q^{(3)}$  are not totally independent of the soil parameters. For the coarse mesh, we observe that  $I_q^{(3)} = 0.701$  for  $E=15\text{MPa}$  and  $I_q^{(3)} = 0.866$  for  $\phi = 21.6^\circ$  which represent the minimum and maximum values of the third quality indicator computed with the chosen soil parameters. For the medium fine mesh, the minimum value is  $I_q^{(3)} = 0.577$  (obtained for  $E=15\text{MPa}$ ) and the maximum value is  $I_q^{(3)} = 0.663$  (obtained for  $\phi = 21.6^\circ$ ), thus the difference between the maximum and minimum value is less than

0.1. We can assume that even if  $I_q^{(3)}$  is not independent of the soil parameters, their influence is not significant and it is decreasing with the increase in the mesh fineness.

Therefore, we can conclude that  $I_{q,xx}^{(1)}$  and  $I_q^{(2)}$  are independent of the soil parameters and  $I_q^{(3)}$  becomes independent with the increase of number of nodes in the FE model.

## 6 CONCLUSIONS

In this paper we reviewed the simple quality indicators developed and described in [1]. After being studied for simple 2D and 3D problems, they were used to assess the accuracy of the FE approximate solution of a multi-phase braced sheetpile excavation site in Karlsruhe. After a brief reminder of the development of the quality indicators, an experimental site in Karlsruhe has been described. The experiment has been divided into six phases which have been numerically reproduced in CESAR-LCPC finite element computer code. Four FE analyses have been performed, using different discretization finenesses, and then the results were treated by means of the three developed quality indicators. The quality of the FE approximate solution has been judged on the whole over the entire model; also specific sensitive segments of the problem have been analyzed separately.

The quality indicators are employed a posteriori when the FE computation is finished. Since the quality indicators are computed based on already determined nodal stresses, their computation time is negligible. They have also been defined in order to permit the definition of guaranteed lower and upper bounds. A good quality FE analysis is described by very small values of the indicators. Overall, quality indicator  $I_{q,ij}^{(1)}$  offered the most critical observation of nodal stress jumps while  $I_q^{(2)}$  and  $I_q^{(3)}$  predicted lower values. For a better understanding of the accuracy of the numerical solution, the use of the three quality indicators is recommended since they account for nodal stress jumps in different parts of the mesh elements.

A series of concluding remarks about the quality indicator is noted below:

- The quality indicators are efficient tools in determining the accuracy of the FE analyses over the entire mesh;
- The quality indicators point to the least accurate discretization areas in the modeled mesh. The graphic representation of a number of segments from the mesh clearly shows the distribution of errors stemming from the nodal stress jumps. Sensitive low accurate points and stabilizing value patterns along these segments depending on the mesh refinement are observed;
- They are applicable for any type of problem, both 2D and 3D; they perform very well for the multi-phased example analyzed in this paper;
- The values of the quality indicators are independent of the soil parameters (with only the third quality indicator slightly depending on the parameters); thus it can be concluded that they point only to discretization errors in the FEM model;
- The quality indicators provide reliable information about the least accurate areas of the discretization. The FE user can decide if remeshing in those areas is

necessary. Otherwise, an automatic adaptive technique can be used with the quality indicators. A tolerance limit for the accuracy can be set and areas not corresponding to the preset tolerance value may be refined.

The present paper has only analyzed discretization errors arising in the FE solutions. The modeling errors due to the choice of the mathematical model have not been taken into account; the mathematical representation of the physical model has been presumed correct for the example studied. Naturally, the errors due to an inappropriate choice of the mathematical model can lead to larger and more significant errors.

## REFERENCES

- [1] Vulpe, C., P. Mestat, and E. Bourgeois, *Development of quality indicators. Part I: developement and application to simple 2D and 3D problems*. 2011.
- [2] Babuska, I. and W.C. Rheinboldt, *A posteriori error estimates for the finite element method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1978. 12: p. 1597-1615.
- [3] Zienkiewicz, O.C. and J.Z. Zhu, *A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1987. 24: p. 337-357.
- [4] Johnson, C. and P. Hansbo, *Adaptive finite element methods for small strain elastoplasticity* Proceedings of IUTAM Conference on Finite Inelastic Deformations Theory and Applications, Hannover, Germany, 1991.
- [5] Bank, R.E. and A. Weiser, *Some a posteriori error estimators for elliptic partial differential equations*. Mathematics of computations, 1985. 44: p. 283-301.
- [6] Veubeke, B.F.d., *Displacements and equilibrium models in the finite elements method*. Stress analysis, 1965.
- [7] Ladevèze, P., *Les bases de la méthode des erreurs en relation de comportement pour le controle adaptatif des calculs éléments finis : les travaux des années 1975*. Rapport interne, LMT Cachan, 1995.
- [8] Bank, R.E. and R.K. Smith, *A posteriori error estimates based on hierarchical bases*. SIAM Journal of Numerical Analysis, 1993. 30: p. 921-935.
- [9] Oden, J.T. and S. Prudhomme, *Estimation of modeling error in computational mechanics*. Journal of computational physics, 2002. 182: p. 496-515.
- [10] Oden, J.T., et al., *Theory and methodology for estimation and control of errors due to modeling, approximation and uncertainty*. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2005. 194: p. 195-204.
- [11] Babuska, I., T. Strouboulis, and C.S. Upadhyay, *A model study of the quality of a posteriori error estimators fo linear elliptic problems. Error estimation in the interior of patchwise uniform grids of triangles*. Computer methods in applied mechanics and engineering, 1994. 114: p. 307-378.
- [12] Babuska, I., et al., *Validation of a posterior error estimators by numerical approach*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1994. 37: p. 1073-1123.
- [13] Strouboulis, T., D.L. Wang, and I. Babuska, *Robustness of error estimators for finite element solutions of problems*. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2009. 198: p. 1946-1966.
- [14] Gratsch, T. and K.J. Bathe, *A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis*. Computers and structures, 2005. 83: p. 235-265.
- [15] Eriksson, K. and C. Johnson, *Adaptive finite element methods for parabolic problems I: a linear model problem*. SIAM Journal of Numerical Analysis, 1991. 28: p. 43-77.
- [16] Becker, R. and R. Rannacher, *A feed-back approach to error control in finite element methods: basic analysis and examples*. East-West Journal of Numerical Mathematics, 1996. 4: p. 237-264.
- [17] Prudhomme, S. and J.T. Oden, *On goal-oriented error estimation for elliptic problems: application to the control of pointwise errors*. Computer methods in applied mechanics and engineering, 1999. 176: p. 313-331.
- [18] Oden, J.T. and S. Prudhomme, *Goal-oriented error estimation and adaptivity for the finite element method*. Comput. Math. Appl., 2001. 41: p. 735-756.

- [19] Ohnimus, S., E. Stein, and E. Walhorn, *Local error estimates of FEM for displacements and stresses in linear elasticity by solving local Neumann problems*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001. 52: p. 727-746.
- [20] Paraschivoiu, M., J. Pareire, and A. Patera, *A posteriori finite element bounds for linear-functional outputs of elliptic partial differential equations*. Computer methods in applied mechanics and engineering, 1997. 150: p. 289-312.
- [21] Mestat, P., *De la rhéologie des sols à la modélisation des ouvrages géotechniques*. Etudes et recherches des laboratoires des ponts et chaussées, 2000. GT67.
- [22] Universitat\_Karlsruhe and CUR, *Sheetpile wall verification test. Documentation for the prediction*. 1993.
- [23] Wolffersdorff, P.A.v., *Results of the field test and evaluation of the predictions and subsequent calculations, Workshop Sheet Pile Test Karlsruhe*. 1994. Delft University, Holland.
- [24] Mestat, P., *Lois de comportement des géomatériaux et modélisation par la méthode des éléments finis*. GT 52, 1993(LCPC).

## **V IMPLEMENTATION DES INDICATEURS DE QUALITE DANS CESAR-LCPC**

## **V.1 DESCRIPTION DU CODE DE CALCUL CESAR-LCPC ET DU MODULE D'EXECUTION MCNL**

### **V.1.1 CESAR-LCPC**

Le code de calcul par éléments finis CESAR-LCPC est utilisé depuis 1981. Il a été élaboré à partir du code de calcul ROSALIE développé dans les années 1960 au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (LCPC). Il est adapté à la résolution par la méthode des éléments finis des problèmes de génie civil, notamment dans le domaine géotechnique. Son langage de programmation est le FORTRAN. La version actuellement en service de CESAR-LCPC est la version 4.2.

Plusieurs aspects présents dans ROSALIE ont été conservés lors du passage au nouveau code, tels que la séparation du pré-traitement des données, des calculs et du post-traitement des résultats, la facilité d'introduction de nouveaux modules, l'interface graphique pour effectuer et analyser les calculs numériques.

Le code est divisé en trois parties distinctes :

- le pré-processeur MAX sert à la préparation du maillage et des autres données à l'aide de programmes 2D/3D ;
- le programme CESAR effectue les calculs par éléments finis ;
- le post-processeur PEGGY interprète les résultats à l'aide de programmes 2D/3D.

MAX et PEGGY présentent des interfaces graphiques facilitant l'utilisation du code de calculs. Les programmes communiquent à l'aide d'une base de données caractéristique pour chaque type d'analyse effectuée (Figure V.1).

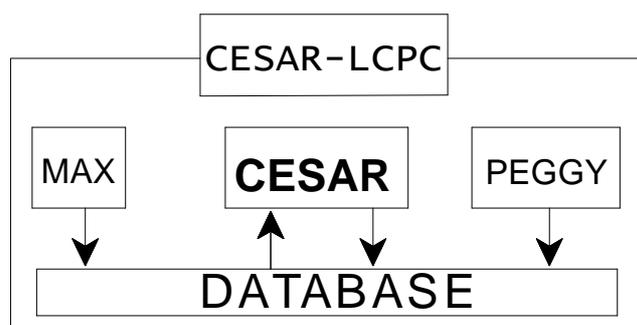


Figure V.1 Schéma d'organisation du code de calcul CESAR-LCPC (Humbert, 1989)

Le code est conçu pour faciliter l'introduction de nouvelles possibilités de calcul dans les modules d'exécution existants. Le code est basé sur un système de fichiers FORTRAN indépendants reliés entre eux par des sous-routines. Les sous-routines écrites dans un fichier sont accessibles par un autre fichier FORTRAN faisant partie du code. De cette façon, le code peut fournir un large éventail de renseignements sur toutes les quantités spécifiques calculées (contraintes, déplacements, pression interstitielle, énergie de déformation, etc.)

Un nombre important de modules d'exécution a été développé dans CESAR-LCPC pour traiter des problèmes en mécanique, diffusion, couplage mécanique/diffusion, dynamique, etc. Ils sont généralement structurés en trois niveaux de programmation différents :

- le niveau global est spécifique au maillage et correspond à une phase de l'algorithme de résolution en mécanique ou diffusion ;
- le niveau élémentaire dépend de la nature et du type des éléments finis, il définit le calcul et le niveau d'assemblage d'un élément fini ;
- le niveau local définit l'analyse en un point matériel, désigné par un nœud ou un point d'intégration à l'intérieur de l'élément. Ce niveau est généralement indépendant du type ou de la nature des éléments. La loi de comportement est utilisée pour la détermination des contraintes et pour effectuer «l'actualisation» de toutes les quantités non-linéaires.

## V.1.2 MCNL

Le module d'exécution MCNL (Mécanique en Comportement Non-Linéaire) effectue des analyses numériques pour les problèmes non-linéaires de mécanique en statique (élastoplasticité avec écrouissage, élasticité non linéaire) pour différents types de géomatériaux (sols, béton, roches) pour lesquels plusieurs lois de comportement ont été implémentées.

L'introduction des lois de comportement dans un code de calcul nécessite l'emploi d'algorithmes de résolution fiables et de préférence économiques. Les algorithmes de résolution utilisés dans les codes de calculs avec des éléments finis de type déplacement sont : incrémentaux et itératifs. Ils sont structurés sur deux niveaux :

- un niveau global, où est effectué le calcul du champ de déplacements aux nœuds de la structure discrétisée par l'inversion d'un système d'équations algébriques ;
- un niveau local, où est effectué le calcul du tenseur de contraintes en un point matériel à partir du tenseur de déformations et de l'histoire d'un certain nombre de quantités tensorielles ou scalaires.

MCNL utilise l'algorithme itératif de Newton-Raphson « modifiée » appelé aussi méthode des contraintes initiales (Mestat, 2005).

### *V.1.2.1 Types de discrétisations pour les problèmes non linéaires. Notions sur la convergence*

Il existe quatre types de processus de discrétisation qui interviennent lorsqu'il s'agit de résoudre des problèmes statiques non linéaires :

- la discrétisation spatiale (modèle de discrétisation) du domaine géométrique représentatif de l'ouvrage ;
- la discrétisation de chargement ; la charge est appliquée progressivement (si le type de problème le permet). La charge est divisée en incréments afin de favoriser la convergence de l'algorithme itératif de résolution et la qualité de la solution ;

- le processus de résolution itératif pour les lois non linéaires de comportement ;
- le schéma d'intégration locale de l'algorithme de résolution ; il est basé sur les processus itératifs ou sous-incrémentaux. Il est utilisé lorsque les lois de comportement sont définies sous forme implicite ou différentielle.

La qualité de la solution approchée dépend du type de discrétisation mentionnée ci-dessus. Les trois derniers types dépendent les uns des autres et définissent la qualité de la solution lors des analyses numériques (Mestat, 1984, 1985, 1986, 1998). Ainsi, pour un maillage donné, chacun d'eux peut être la source d'erreurs pendant l'estimation des tenseurs des contraintes, du vecteur résidu ou du vecteur de déplacement.

Une notion de convergence peut être associée à chacun de ces types de processus :

- la convergence au sens du maillage, assurée par le choix et la formulation mathématique des éléments finis. La solution éléments finis est considérée très proche de la solution exacte du problème analytique pour une maille très fine ;
- la convergence au sens du chargement. Le calcul a pour objet de trouver la valeur de la charge limite supportable par un massif de sol. La charge est appliquée par une suite d'incrémentes et la charge limite est définie au pas de chargement pour lequel le calcul diverge. On peut aussi améliorer la qualité de la solution pour un chargement donné en augmentant le découpage en sous-incréments ;
- la convergence au sens du processus de résolution incrémental et itératif. Elle fournit la solution en termes de déplacement ou de contraintes pour un maillage donné et un schéma d'intégration des lois de comportement non linéaire choisi ;
- la convergence au sens du schéma d'intégration locale. Elle peut être reprise pour calculer les contraintes et les quantités non linéaires (écrouissage, déformations plastiques) compatibles avec

l'expression des lois de comportement au moyen d'un processus itératif local.

### *V.1.2.2 Algorithme de résolution en comportement non linéaire*

Le traitement par la méthode des éléments finis de type déplacement d'un problème de mécanique en comportement non linéaire conduit à résoudre un système d'équations algébriques de la forme suivante (Zienkiewicz et al., 1969 ; Zienkiewicz, 1977 ; Bathe, 1981 ; Crisfield, 1991, 1997) :

$$\Phi(u, \lambda) = R(u) - \lambda(t) \cdot P = 0 \quad \text{V.1}$$

où  $\Phi$ , appelé le vecteur résidu, représente l'état de déséquilibre de la structure à un instant  $t$  de la sollicitation ;  
 $u$  est le vecteur de déplacements des nœuds du maillage ;  
 $R(u)$  désigne le vecteur des forces nodales correspondant aux contraintes dans la structure à un instant  $t$  ;  
 $P$  représente le vecteur du chargement total appliqué sur la structure ;  
 $\lambda(t)$ , facteur de charge, représente l'incrément du chargement à un instant  $t$ .

La solution du système d'équations est un couple  $(u, \lambda)$  associant la réponse en déplacements de la structure à la sollicitation appliquée.

Si le facteur de charge n'est pas constant, une équation supplémentaire doit être introduite pour résoudre le système  $(u_i, \lambda_i)$ . Cette équation est dérivée d'une méthode de contrôle pas à pas du chargement (méthode de la longueur d'arc, méthode de Wempner) (Wempner, 1971 ; Ricks, 1972 ; Crisfield, 1983 ; Mestat, 1993). La seule inconnue restante est le champ de déplacements.

Le système d'équations ne peut être directement calculé en raison des non-linéarités introduites par les lois de comportement. Ainsi, des processus de résolution incrémentaux et itératifs basés sur la linéarisation des équations

algébriques sont nécessaires (Bathe et Wilson, 1976 ; Desai et Christian, 1977 ; Bathe, 1981 ; Kardestuncer et Norrie, 1987 ; Zienkiewicz et Taylor, 1989 ; Prat et al., 1997) :

$$\Phi(u + \Delta u, \lambda + \Delta \lambda) = \Phi(u, \lambda) + \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\}_u \Delta u + \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right\}_\lambda \Delta \lambda \quad V.2$$

La matrice définie par la relation :

$$K_i = - \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\}_u \quad V.3$$

représente la matrice de rigidité pour l'itération  $i$  et l'incrément  $n$ . Cette méthode de construction de la matrice de rigidité est appelée méthode Newton-Raphson. Le calcul de V.3 permet de définir un schéma de résolution de l'équation  $\Phi(u, \lambda) = 0$ . En fait, si la matrice de rigidité est considérée assemblée et une solution approchée  $(u_0, \lambda_0)$  est connue telle que<sup>1</sup>  $\|\Phi(u_0, \lambda_0)\| \neq 0$ , alors la solution de l'équation  $\Phi(u + \Delta u, \lambda + \Delta \lambda)$  devient une nouvelle solution approchée du problème mécanique. Les accroissements de déplacements  $\Delta u$  et de facteur de charge  $\Delta \lambda$  sont déterminés par les relations suivantes<sup>2</sup> :

$$\Delta u = u_1 - u_0 = -[K]^{-1} \Phi(u_0, \lambda_0) \quad V.4$$

$$\|u_1 - u_0\|^2 + \alpha^2 (\lambda_1 - \lambda_0)^2 \|P\|^2 = L^2 \text{ appelé relation elliptique}$$

La relation elliptique, proposé par (Crisfield, 1983), représente une relation entre le facteur de charge et le champ de déplacement. Le couple  $(u_0, \lambda_0)$  représente la solution convergée à un instant  $t_0$  du calcul.  $\alpha$  est un scalaire donné constant,  $L$  une longueur donnée pouvant dépendre de l'instant  $t$  et  $i$  est le numéro de l'itération.

<sup>1</sup> La notation  $\|\bullet\|$  représente la norme euclidienne classique.

<sup>2</sup> La notation  $[\bullet]$  dénote une matrice.

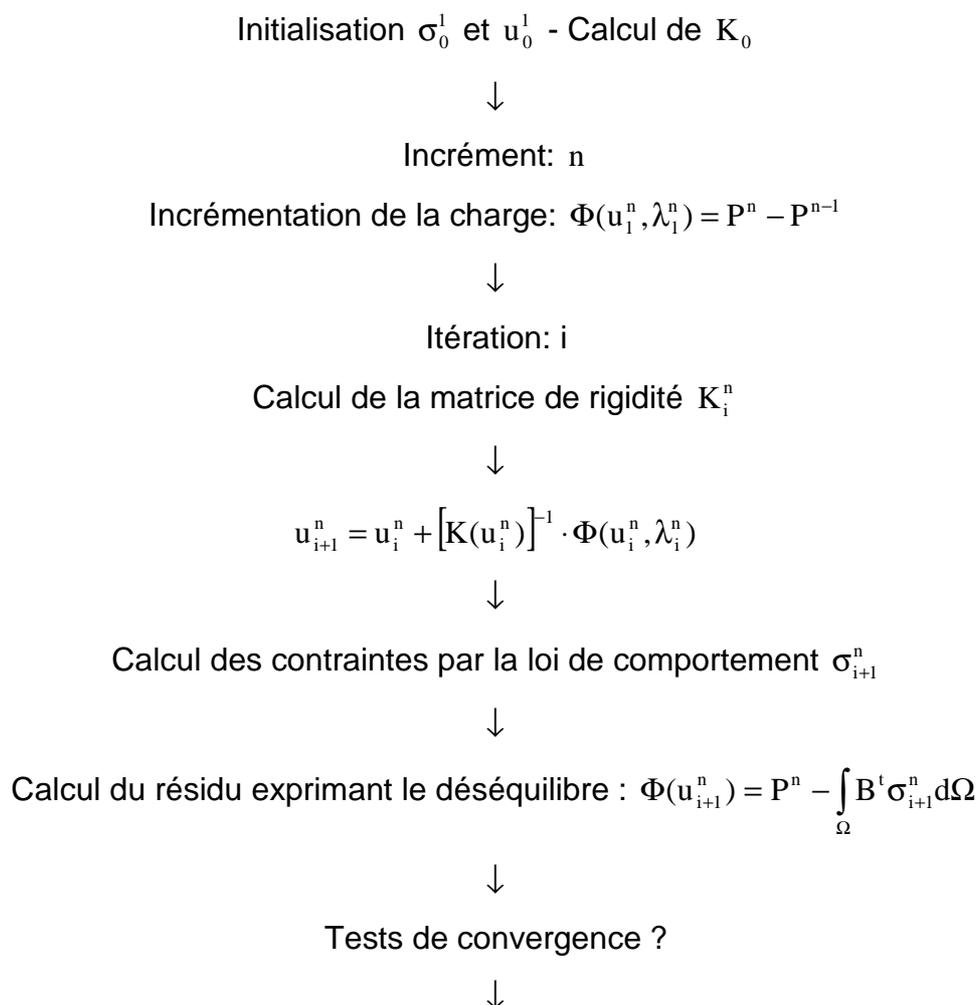
### V.1.2.3 Processus itératif et algorithme de résolution

Un processus itératif peut être construit pour un incrément de chargement donné en tenant compte du fait que la matrice de rigidité  $K_i$  est inversible. Pour une itération  $i$  donnée,  $K_i$  et  $\Phi(u_i, \lambda_i)$  sont calculés en fonction du déplacement  $u_i$ , puis le déplacement  $u_{i+1}$  est déterminé à partir de la relation suivante ::

$$u_{i+1} = u_i - [K_i]^{-1} \cdot \Phi(u_i, \lambda_i) \quad \text{V.5}$$

Si la suite  $(u_i, \lambda_i)$  converge, sa limite  $(u_\infty, \lambda_\infty)$  est la solution du problème  $\Phi(u_\infty, \lambda_\infty) = 0$ .

Pour un maillage fixé et une loi de chargement donnée, la résolution des processus itératifs d'un problème non linéaire prend la forme suivante :



si non convergence  $\Rightarrow i = i + 1$   
 si convergence  $\Rightarrow n = n + 1$

Figure V.2 Algorithme de résolution en comportement non linéaire (Mestat, 2005)

où  $B$  est la matrice des dérivées des fonctions d'interpolation ;  
 $\Omega$  représente le volume du modèle discrétisé ;  
 $\sigma_i^n$  représente le tenseur des contraintes à l'itération  $i$  de l'incrément  $n$ .

Au cours d'une itération, la loi de comportement intervient directement à deux niveaux de l'algorithme de résolution :

- pour construire la matrice de rigidité  $K_i$  ;
- pour construire le champ de contraintes en chaque point matériel (niveau local).

Les itérations n'ont aucune signification physique car les résultats ne vérifient pas simultanément les équations d'équilibre et la loi de comportement.

#### *V.1.2.4 Méthodes de calcul des matrices de rigidité*

Le calcul de la matrice de rigidité à une itération quelconque est rarement possible car les dérivées partielles du vecteur résidu par rapport au champ de déplacement ( $u_i$ ) doivent être déterminées. En supposant que le domaine  $\Omega$  ne varie pas avec le champ de déplacement (hypothèse des petites transformations), l'expression suivante doit être calculée :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u) = -\frac{\partial R}{\partial u}(u) = -\int_{\Omega} B^t \left[ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial u} \right] d\Omega = -\int_{\Omega} B^t \left[ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \right] B d\Omega \quad V.6$$

Ce procédé de construction de la matrice de rigidité tangente est appelé méthode de Newton-Raphson. Devant l'impossibilité de calculer correctement le tenseur

$\left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \right)$ , il a est « admis » d'approcher ce tenseur par le tenseur  $(E_{ijkl})$  reliant les

déformations et les contraintes incrémentales :

$$d\sigma_{ij} = E_{ijkl}(\sigma_{mn})d\varepsilon_{kl} \quad V.7$$

Les approximations employées et le temps de calcul important pour l'assemblage de la matrice de rigidité à chaque itération ont conduit à l'élaboration de nouvelles méthodes plus efficaces pour évaluer la matrice de rigidité. Afin d'éviter le calcul de la matrice de rigidité pour chaque itération, Nayak et Zienkiewicz (1972) ont proposés de conserver, pendant toutes les itérations, la matrice de rigidité calculée lors de l'étape initiale  $K_o$ . Cette méthode est appelée méthode des contraintes initiales ou de Newton-Raphson « modifiée ». Le nouveau système d'équations à résoudre prend la forme suivante :

$$K_o \cdot \Delta u_i = K_o \cdot (u_{i+1} - u_i) = -\Phi(u_i, \lambda_i) - (\lambda_{i+1} - \lambda_i)P \quad V.8$$

Même si pour des problèmes simples, la méthode de rigidité tangente peut donner des résultats plus rapides (moins d'itérations), pour des problèmes complexes, la méthode des contraintes initiales est généralement plus rapide. Le coût pour calculer et inverser la matrice de rigidité à chaque étape d'itération est considérable ; donc le temps nécessaire pour effectuer plusieurs itérations en utilisant la même matrice de rigidité est généralement inférieur au temps nécessaire pour calculer le même problème avec moins d'itérations, mais toujours en assemblant une nouvelle matrice de rigidité.

Le temps de calcul est généralement réduit fortement en couplant la méthode des contraintes initiales avec un schéma d'accélération de la convergence.

#### ***V.1.2.5 Méthodes d'accélération de la convergence***

Il existe deux types de méthodes d'accélération de la convergence :

- les méthodes fondées sur des considérations énergétiques (méthode sécante et méthode dite « line search ») ;
- les méthodes d'actualisation (Denis et Moré, 1977).

La méthode d'accélération de la convergence consiste à estimer un champ de déplacement qui est plus proche de la solution exacte que le vecteur de déplacement ( $u_{i+1}$ ) obtenu en inversant le système d'équilibre pour chaque itération. Ce champ est déterminé à partir du champ ( $\Delta u_i$ ) et les résultats pour les itérations précédentes ( $i-1$ ) et ( $i-2$ ).

#### ***V.1.2.6 Méthodes d'actualisation***

Pendant l'application de la méthode D-F-P (Davidon-Fletcher-Powell), appelée aussi méthode d'actualisation de rang 1, la matrice  $K_i$  est calculée et stockée à chaque pas d'itération et le temps de calcul devient très coûteux. Une manière pour améliorer la méthode consiste à factoriser les matrices actualisées et à stocker la matrice de rigidité initiale  $K_0$ .

Une autre simplification importante concernant le stockage minimal d'informations à chaque itération a été proposée par Crisfield (1983). Les matrices à chaque itération sont calculées à partir de la matrice de rigidité initiale  $K_0$ . Cette méthode est appelée « D-F-P modifiée » et elle combine la méthode d'actualisation avec la méthode des contraintes initiales.

La méthode « D-F-P modifiée » a été implémentée dans le module de calcul MCNL du code de calcul CESAR-LCPC (Mestat, 1986, 1988).

#### ***V.1.2.7 Schéma d'accélération de la convergence***

Les méthodes d'actualisation sont efficaces seulement pour les matrices de rigidité symétriques. Ces méthodes dépendent fortement des erreurs d'estimation des vecteurs résidus. Il est nécessaire de vérifier le processus de résolution itératif et la cohérence de la solution afin d'éviter des résultats inacceptables. Le chargement

est divisé en incréments ( $\Delta P = P^{n+1} - P^n$ ) afin de mieux suivre l'évolution des erreurs. Les incréments décrivent les phases d'exécution du problème étudié. Pour chaque incrément de chargement, l'algorithme itératif décrit ci-dessus est mis en œuvre.

Pour un maillage fixé et une loi de comportement donnée, le processus itératif est effectué pour chaque incrément. Quand la convergence est obtenue pour un incrément  $P^n$ , le processus itératif est répété à l'incrément suivant  $P^{n+1}$ , Figure V.3.

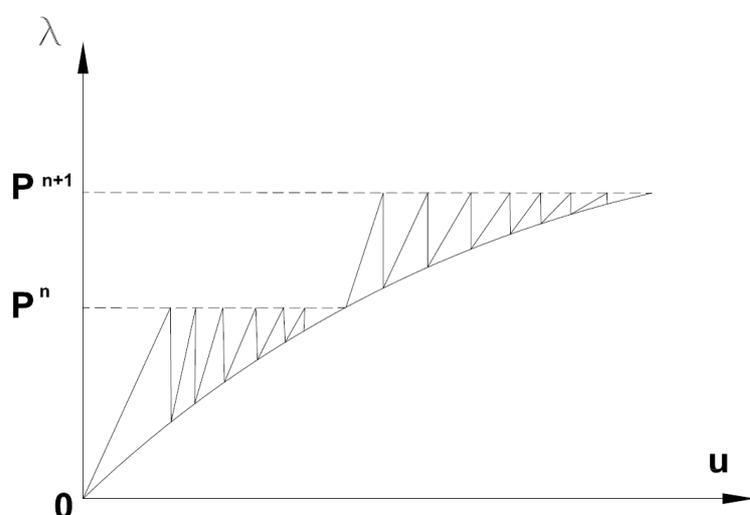


Figure V.3 Schéma du processus itératif pour incréments de chargement consécutifs

#### V.1.2.8 Résolution et incrémentation du chargement

Pour une résolution de qualité, il est nécessaire d'évaluer correctement le tenseur des contraintes afin d'éviter la propagation d'erreurs au cours du processus d'intégration locale des équations différentielles. Dans la plupart des cas en petits déplacements, le processus itératif suppose que la loi de comportement non-linéaire du matériau permet de calculer la valeur exacte du déséquilibre, ou résidu, en fonction de la seule connaissance des quantités actualisées (déplacements, facteur de charge, quantités non linéaires). Toutefois, la méthode de Newton-Raphson ne donnera pas la solution exacte car à chaque itération  $i$  est introduite une erreur non récupérable provenant des approximations faites dans le calcul du résidu  $\Phi(u_i, \lambda_i)$ .

Par conséquent, la suite  $(u_i)$  peut converger et le résidu final être quasiment nul, mais la solution obtenue peut être différente de la solution exacte. Ceci est illustré dans la Figure V.4.

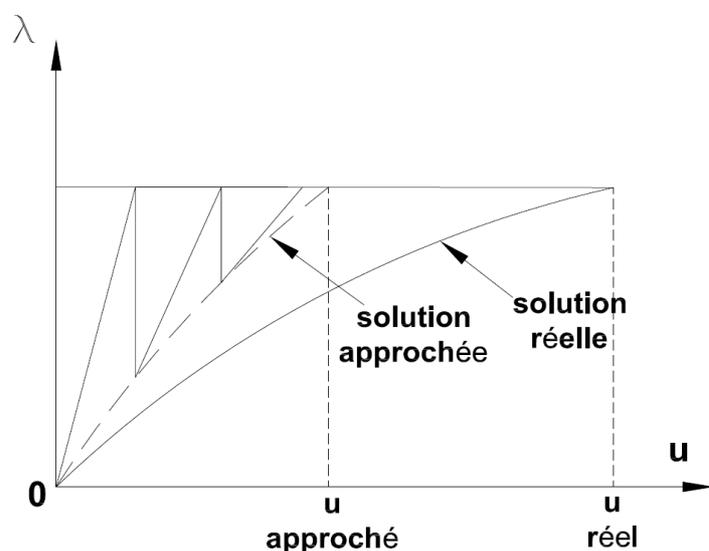


Figure V.4 Calcul du vecteur résidu et erreur sur la solution

Pour réduire le risque d'erreur dans le calcul du vecteur résidu, il est recommandé d'appliquer le chargement de façon incrémentale. Le chargement total  $P$  à appliquer est divisé en une succession d'incrément dont la définition est liée, si possible, à des étapes réelles de la construction ou du chargement de la structure. A chaque incrément correspond un problème non-linéaire qui se résout par la méthode de Newton-Raphson (Figure V.3).

#### V.1.2.9 Tests de convergence pour le processus itératif

A la fin de chaque itération, les tests de convergence doivent être vérifiés. L'algorithme de résolution décrit par la relation II.2 introduit un vecteur résidu  $\Phi(u_i, \lambda_i)$  qui illustre le déséquilibre entre la charge appliquée à la structure et les efforts internes. Le processus itératif a pour but de réduire la norme du vecteur résidu  $\|\Phi(u_i, \lambda_i)\|$  à un niveau raisonnable (moins de 1% ou 0,1% de la charge maximale appliquée) et de faire converger la suite  $(u_i, \lambda_i)$ .

La convergence est définie par trois tests numériques :

- test sur les résidus :  $\|\Phi(u_i, \lambda_i)\| < \varepsilon_r \|\Phi(u_0, \lambda_0)\|$ ;
- test sur les déplacements :  $\|u_{i+1} - u_i\| < \varepsilon_d \|u_i\|$ ;
- test sur le travail :  $|\Phi(u_i, \lambda_i)^t (u_{i+1} - u_i)| < \varepsilon_t |\Phi(u_0, \lambda_0)^t u_0|$ .

où  $0.1\% \leq \varepsilon_r, \varepsilon_d$  et  $\varepsilon_t \leq 1\%$ .

La satisfaction de ces tests ne signifie pas, de façon certaine, que la suite des déplacements  $(u_i)$  ou la série des accroissements de déplacements  $\Delta(u_i)$  converge. Ils peuvent que la suite  $\Delta(u_i)$  tend vers zéro. Les trois tests dénotent des conditions nécessaires mais pas suffisantes. Il est fortement recommandé de calculer, en plus des tests de convergence, le taux de convergence :

$$q_{i+1} = \frac{\|\Delta(u_{i+1})\|}{\|\Delta(u_i)\|} \quad \text{V.9}$$

Pour que la série associée  $\Delta(u_i)$  soit convergente, la relation V.9 doit vérifier les conditions suivantes :

- la suite  $(q_i)$  est monotone décroissante ;
- $\lim(q_i) < 1$ .

Si, de plus, il a pu être établi que la suite est telle que  $\forall i > i_c$  ( $i_c$  une itération donnée)  $q_i < 1$ , l'inégalité suivante est vérifiée (Mestat, 1986, 1988) :

$$\|u_{i+k} - u_i\| \leq \frac{q_i}{1 - q_i} \|\Delta u_i\| \quad \text{pour } \forall i > i_c \quad \text{V.10}$$

Si  $k \rightarrow \infty$ , l'inégalité V.10 conduit à la relation V.11 décrivant l'estimation de l'erreur commise en arrêtant le processus à l'itération  $i$  pour  $(u_i)$  :

$$\|u - u_i\| \leq \frac{q_i}{1 - q_i} \|\Delta u_i\| \quad \text{V.11}$$

où  $u = \lim_{k \rightarrow \infty} (u_k)$ .

Pour chaque incrément, l'étude de la décroissance de la suite  $(q_i)$  au cours du processus permet de s'assurer de la bonne convergence de la suite des déplacements  $(u_i)$ . Alors, la limite de cette suite représente une valeur approchée de la solution exacte du problème théorique pour le chargement appliqué à un instant  $t$ . Le degré de cette approximation dépend de la finesse du maillage. Cela conduit à étudier la convergence au sens du maillage (V.1.2.1).

#### V.1.2.9.1 Convergence, non-convergence et divergence

Il est relativement facile de conclure à une convergence en analysant la suite des quantités caractérisant le processus itératif. La divergence est évidente quand  $\Delta u_i$  ne tend pas vers zéro où quand  $q_i > 1$  pour les itérations suivantes. Il y a certaines conditions pour lesquelles ni la convergence ni la divergence ne sont obtenues. C'est le cas de la non-convergence. Les résultats des tests de convergence sont décrits dans le Tableau 5.

Résultat du test de convergence	Observations
Convergence	Les tests sont satisfaits. La suite $(q_i)$ est monotone décroissante et sa limite est $< 1$ . Lorsque la zone plastique devient importante, sans menacer la stabilité de l'ouvrage, la suite $(q_i)$ se stabilise autour de valeurs comprises entre 0,8 et 0,99; ce qui suffit à assurer l'absolue convergence de la série par la méthode des contraintes initiales. Des valeurs plus faibles sont généralement observées avec la méthode tangente. Dans le cas des accélérateurs de la convergence, la suite des taux est souvent décroissante, car le principe des accélérateurs consiste à obtenir au début d'un incrément des accroissements de déplacements relativement importants entre deux itérations successives.
Non-convergence	La norme des forces résiduelles décroît très lentement, le nombre d'itérations devient très important ou la suite des taux présente des valeur très proches de l'unité. Il est difficile de conclure et un nouveau calcul avec un incrément de chargement plus faible est recommandé.
Divergence	La norme des forces résiduelles ne tend pas vers zéro et la suite des taux oscille autour de la valeur unité.

Tableau 5. Résultats des tests de convergence et observations (Mestat, 1998)

Pour conclure sur la qualité de l'analyse par éléments finis, des informations plus détaillées en exploitant les résultats, le nombre d'incrémentations et les étapes d'itération, doivent être fournies. Les résultats doivent être analysés afin de vérifier les points suivants (Mestat, 1998) :

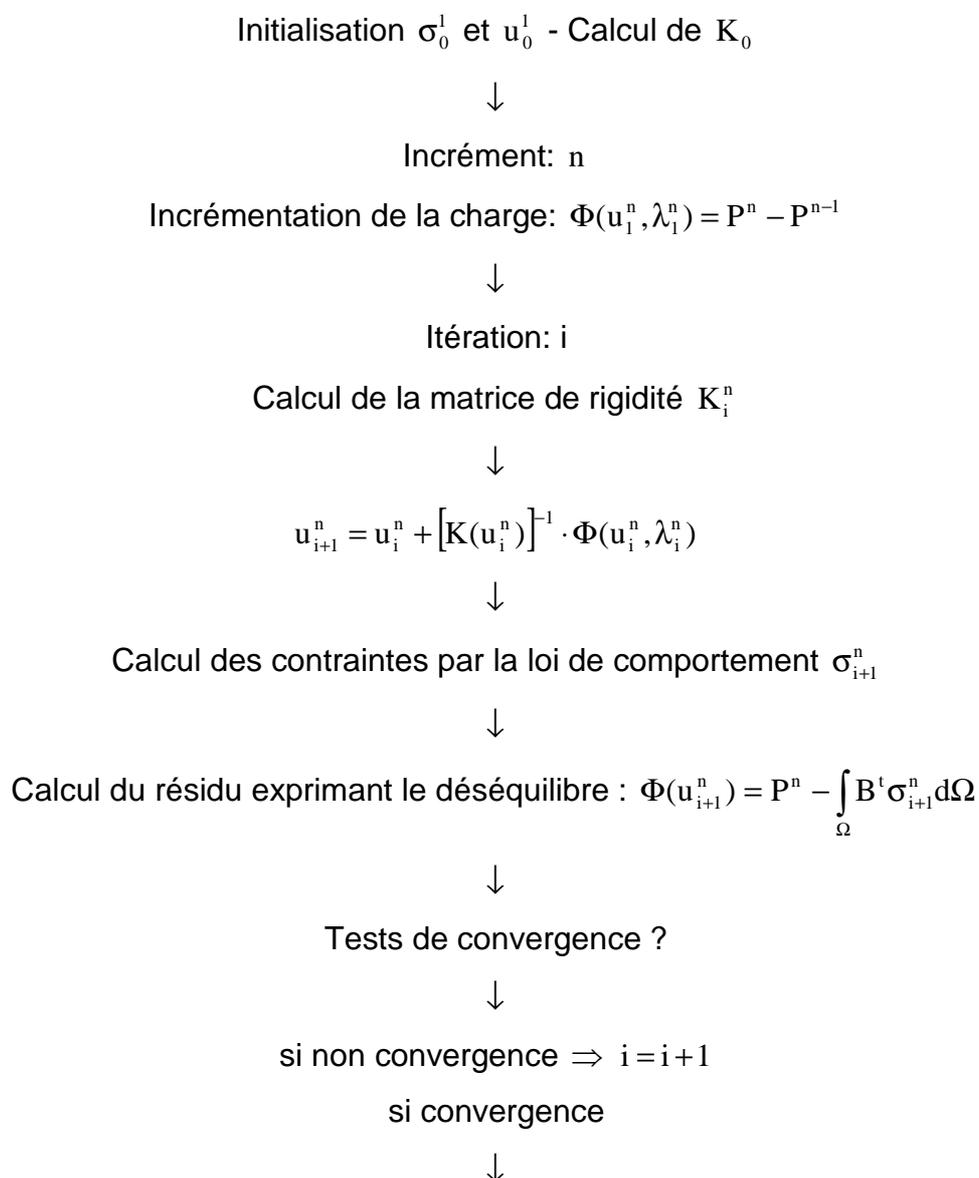
- les dimensions du maillage. Elles doivent être suffisantes pour décrire correctement le mécanisme de déformation de la structure. L'état de contraintes initiales, loin de l'application des sollicitations, ne doit pas être significativement influencée ;
- le respect des conditions aux limites imposées et des conditions de symétrie (conditions sur les déplacements et les contraintes) ;
- la cohérence globale des résultats. Par exemple, une compression doit conduire à un tassement ou tout creusement a tendance à se rétracter ;
- la continuité des déplacements, des vecteurs contraintes des réactions et de certaines composantes des tenseurs des contraintes ;
- les isovaleurs de déformations plastiques. Celles-ci représentent une bonne vérification pour les analyses limites. Leurs valeurs peuvent être comparées aux ordres de grandeur observées dans les essais laboratoire ;
- la vérification de la carte des critères de plasticité sur l'ensemble du maillage ;
- le comportement aux interfaces ;
- l'estimation *a posteriori* des erreurs de calcul.

## **V.2 IMPLEMENTATION DES INDICATEURS DE QUALITE DANS LE MODULE D'EXECUTION MCNL DE CESAR-LCPC**

Les indicateurs de qualité sont déterminés a posteriori. Ils sont introduits à la fin de l'algorithme de résolution et ne prennent en compte que la solution approchée à une itération donnée et un incrément fixé. Les indicateurs de qualité étudient la discontinuité au niveau des nœuds du maillage du problème analysé. La

discontinuité des contraintes nodales est une conséquence importante des erreurs liées à la méthode de calcul et à ses algorithmes. Pour un nœud commun à plusieurs éléments, les contraintes calculées séparément pour chaque élément prennent des valeurs différentes les unes par rapport aux autres. Une valeur moyenne est généralement choisie ce nœud.

Pour un maillage fixé, un nombre d'incrément et d'itérations donnés, nous cherchons une solution approchée d'un problème physique. L'algorithme de résolution pour un problème en comportement non linéaire (module MCNL) comprenant également le calcul des indicateurs de qualité est présenté dans la Figure V.5. Ce schéma est dérivé de celui de la Figure V.2.



Solution approchée:  $(u_{i+1}^n, \sigma_{i+1}^n)$

Calcul des indicateurs de qualité pour la solution approchée  $(u_{i+1}^n, \sigma_{i+1}^n)$

Figure V.5 Algorithme de résolution en comportement non linéaire et introduction des indicateurs de qualité

### V.2.1 Intégrité des calculs MCNL

L'implémentation des indicateurs de qualité dans CESAR-LCPC ne modifie pas les résultats de calculs dans le module MCNL. L'algorithme de résolution pour un problème en comportement non linéaire reste inchangé. Le code a seulement été développé en introduisant l'option permettant d'estimer la qualité des solutions approchées. L'introduction des indicateurs de qualité dans CESAR-LCPC est rendue facile par la conception du code. Le code source est réparti en plusieurs fichiers FORTRAN qui sont généralement indépendants les uns des autres, mais certains d'entre eux regroupent des méthodes communes aux différents modules. L'exécution des différents modules, sous le contrôle de l'utilisateur, est faite en appelant les sous-programmes correspondant à chaque module suivant les mots-clés lus dans le fichier « jeu de données ». Ainsi, nous pouvons insérer de nouvelles informations dans les modules qui seront exécutées par l'activation d'un mot-clé. Si les mots-clés ne sont pas introduits dans le jeu de données, le module MCNL effectue l'analyse numérique en comportement non linéaire sans prendre en compte le calcul d'indicateurs de qualité.

## V.3 PROGRAMMATION D'INDICATEURS DE QUALITE DANS CESAR-LCPC

Les indicateurs de qualité ont été programmés dans le module d'exécution MCNL en modifiant les fichiers suivants:

- blmcl.f (ensemble des sous-programmes pour la résolution d'un problème de mécanique à comportement non linéaire);

- lmg3.f (ensemble des sous-programmes pour l'impression et la préparation au dépouillement pour un module de résolution en comportement non linéaire).

Une brève description des fichiers blm3.f et lmg3.f est présentée dans l'ANNEXE 5. Les indicateurs de qualité sont implémentés dans lmg3.f. Ils sont ajoutés à la routine CALERR qui effectue les calculs des sauts de contraintes aux nœuds du maillage. Le fichier blm3.f est légèrement modifié afin d'accueillir les indicateurs de qualité mis en œuvre. La programmation dans CESAR-LCPC des indicateurs de qualité est attachée et décrite dans l'ANNEXE 6.

### V.3.1 Activation de mots-clés dans le jeu des données

L'option de vérification de la qualité de la solution approchée dans CESAR-LCPC est activée dans le jeu des données par l'introduction des lignes suivantes:

```
ERR  
4   n  
txt_file
```

où

- ERR représente le mot-clé activant le calcul des indicateurs de qualité de la solution numérique ;
- 4 est une commande qui entraîne l'écriture d'un fichier texte contenant une série de valeurs stockées aux nœuds ;
- n désigne la valeur de ERR qui entraîne le calcul du nième indicateur de qualité (voir Tableau 6) ;
- txt\_file désigne le nom du fichier texte où les valeurs d'indicateurs de qualité sont stockées.

Valeur de n	Indicateur de qualité
1	$I_{q,ij}^{(1)} = \frac{\max_k  \sigma_{ij}  - \min_k  \sigma_{ij} }{\max_{k \in \Omega} (\max_k  \sigma_{ij} )}$
2	$I_q^{(2)} = \frac{ \sigma_{n1}  -  \sigma_{n2} }{\max( \sigma_{n1} ,  \sigma_{n2} )}$
3	$I_q^{(3)} = \frac{ \tau_1  -  \tau_2 }{\max( \tau_1 ,  \tau_2 )}$

Tableau 6 Valeurs ERR dans le jeu des données pour calculer les indicateurs de qualité

où  $I_{q,ij}^{(1)}$  est déterminé pour un nœud sommet  $k$ ,  $k \in \Omega$ .

L'ANNEXE 7 détaille l'activation du mot-clé ERR dans un fichier jeu des données.

### II.3.2 Visualisation des résultats d'indicateurs de qualité

Comme mentionné dans le chapitre V.3.1, les résultats d'indicateurs de qualité sont stockés dans un fichier texte qui est ensuite converti en un fichier portant l'extension « .rsv4 ». Le processus de conversion du fichier texte dans un fichier de post-traitement (.rsv4) est décrite dans Bourgeois (2009). Les résultats peuvent être visualisés et interprétés dans le programme de post-traitement CLEO ou PEGGY.

## V.4 CONCLUSIONS

Le code de calcul éléments finis CESAR-LCPC a été présenté en insistant sur la description du module d'exécution MCNL. L'algorithme de résolution des problèmes en comportement non linéaire a été présenté ainsi que le processus incrémental et itératif. La construction de la matrice de rigidité et les méthodes d'accélération de la convergence ont été détaillées. Le test de convergence pour chaque incrément de chargement du processus itératif est donné et les notions de convergence, non-convergence et de divergence ont été ensuite présentées.

L'implémentation des indicateurs de qualité dans le module MCNL a été décrite en maintenant l'intégrité du module d'exécution. Les résultats sont stockés dans un fichier indépendant. La mise en oeuvre d'indicateurs de qualité représente une amélioration du code de calcul. Pour de plus amples détails sur la programmation des indicateurs de qualité, le lecteur est invité à lire l'annexe 5, l'annexe 6 et l'annexe 7.



## **VI CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES**

## VI.1 CONCLUSIONS

L'étude de la précision des calculs par la méthode des éléments finis est depuis 40 ans un sujet important dans le domaine des sciences de l'ingénieur. Plusieurs techniques d'estimation d'erreurs ont été proposées.

Le chapitre II a décrit les estimateurs d'erreurs a posteriori actuellement développés. Pour chaque estimateur, une présentation détaillée a été faite en mettant l'accent sur son état actuel de développement. Les estimateurs d'erreur les plus utilisés sont : l'estimateur basé sur les résidus, l'estimateur basé sur le lissage des contraintes (méthode de recouvrement) et l'estimateur d'erreur en relation avec la loi de comportement. Parmi eux, l'estimateur basé sur la méthode de recouvrement proposé par Zienkiewicz et Zhu (1987) est le plus simple et le plus robuste (Babuska et al., 1994c). Des méthodes d'évaluation de la qualité des estimateurs d'erreur existants ont été proposées par Gago (1982), Zhong et Beckers (1990), Babuska et al. (1994b). Des techniques d'adaptation de maillage ont été également développées afin d'améliorer la précision d'une solution par éléments finis. Si les erreurs sont supérieures à une valeur de tolérance prédéfinie, une technique adaptative (raffinement du maillage, augmentation du degré d'interpolation des éléments, optimisation de la position des nœuds) est employée. Nous avons conclu que les estimateurs d'erreur disponibles sont basés sur des formulations mathématiques complexes, donc difficiles à implémenter dans des codes numériques, ou n'ont pas la qualité nécessaire et/ou sont seulement disponibles pour un nombre restreint de types de problèmes. Par conséquent, nous avons considéré comme nécessaire de développer une méthode simple et efficace pour évaluer la qualité des calculs par la méthode des éléments finis.

Le chapitre III a été consacré au développement des « indicateurs de qualité » qui représentent un nouvel outil simple pour étudier la précision des solutions approchées. Nous avons défini des indicateurs de qualité à l'aide de formules mathématiques simples. Leur formulation est basée sur les défauts d'équilibre aux

nœuds et aux interfaces entre deux éléments. Trois indicateurs de qualité ont été proposés :

- $I_{q,ij}^{(1)}$  caractérise les erreurs dues au défaut d'équilibre aux nœuds sommets des éléments. Il est applicable à tout type d'éléments pour des analyses numériques bidimensionnels et tridimensionnels ;
- le deuxième  $I_q^{(2)}$  et le troisième  $I_q^{(3)}$  rendent compte des erreurs dues au défaut d'équilibre aux nœuds milieux à l'interface entre deux éléments. Ils permettent seulement de déterminer les erreurs pour les éléments isoparamétriques quadratiques 2D.

Dans le calcul des indicateurs de qualité interviennent les valeurs de contraintes déjà déterminées, le coût de calcul supplémentaire apporté par l'introduction des indicateurs de qualité est donc négligeable. En raison de leur formulation mathématique simple, ils sont facilement mis en œuvre dans les codes de calculs par éléments finis. Nous avons implémenté ces indicateurs de qualité dans le module d'exécution MCNL (Mécanique en Comportement Non Linéaire). Nous avons aussi déterminé leurs bornes supérieures et inférieures.

Plusieurs problèmes bidimensionnels et tridimensionnels simples ont été étudiés en utilisant différents types d'éléments. La qualité du modèle discrétisé a été évaluée par les indicateurs de qualité. Nous avons noté que les indicateurs de qualité mettent bien en évidence les zones dans lesquels les erreurs sont *a priori* les plus importantes (singularités géométriques, singularités de chargement, interface de matériaux avec des propriétés mécaniques différentes).

Le chapitre III a été présenté sous la forme d'un article soumis à la revue internationale « Finite Elements in Analysis and Design ».

Le chapitre IV aborde le problème de la qualité de la modélisation numérique d'une fouille devant un rideau de palplanches butonné (site expérimental de Karlsruhe). Quatre modèles discrétisés avec des éléments quadratiques et présentant des finesses de maillage différentes ont été réalisés. La qualité des solutions numériques a été évaluée.

Le site expérimental ainsi que les phases d'exécution ont été présentés. Pour chaque phase d'exécution, les estimateurs  $I_{q,ij}^{(1)}$ ,  $I_q^{(2)}$  et  $I_q^{(3)}$  ont été calculés. La qualité globale des modèles numériques a été étudiée, mais aussi la qualité sur plusieurs aspects du modèle (l'interaction sol-structure, niveaux d'excavation, couche de sol horizontale derrière la palplanche). Les indicateurs de qualité ont mis en évidence des erreurs importantes pour le modèle le plus grossier et pour les zones d'interface entre des matériaux présentant des propriétés mécaniques différentes. Nous avons conclu, du moins pour cet exemple, que les indicateurs de qualité développés représentent de bons outils pour étudier la qualité de discrétisation des modèles construits pour une résolution par la méthode des éléments finis.

Nous avons proposé la borne supérieure 0,5 pour les indicateurs  $I_{q,ij}^{(1)}$ ,  $I_q^{(2)}$  et  $I_q^{(3)}$  comme indice d'une qualité satisfaisante pour un nœud donné, à l'exception des nœuds qui appartiennent à des éléments ayant des propriétés mécaniques très différentes. La valeur 0,5 est acceptable pour les nœuds à proximité de la zone de chargement où nous trouvons les plus grandes perturbations du champ de contraintes initiales. Les valeurs acceptables pour les indicateurs de qualité diminuent à mesure que les nœuds étudiés sont plus loin de la zone la plus sollicitée.

Les indicateurs de qualité (aussi bien que les estimateurs d'erreur possibles) rendent compte de la précision de la solution approchée en considérant seulement le modèle de discrétisation. Les erreurs de modélisation liées au choix de la formulation mathématique du modèle physique sont également importantes mais n'ont pas été étudiées. L'amélioration des résultats basés sur une optimisation des paramètres de comportement des matériaux n'a pas encore été pris en considération.

Néanmoins, on a réalisé une étude de l'influence des propriétés mécaniques du sol sur les valeurs des indicateurs de qualité. Nous avons prouvé sur la base des exemples examinés que les paramètres ont peu d'effet sur les valeurs de  $I_{q,ij}^{(1)}$  et

$I_q^{(2)}$ . Les valeurs de  $I_q^{(3)}$  ne sont pas indépendantes des paramètres du sol, mais leur influence n'est pas significative. Nous avons montré que l'influence des paramètres est décroissante avec l'augmentation de la finesse de maillage. Par conséquent, nous avons conclu que les valeurs de  $I_{q,ij}^{(1)}$  et  $I_q^{(2)}$  sont indépendantes des paramètres du sol et que la valeur  $I_q^{(3)}$  devient indépendante avec l'augmentation du nombre de nœuds dans le maillage.

Ce chapitre IV a été également présenté sous la forme d'un article soumis à la revue internationale « Finite Elements in Analysis and Design ».

Le chapitre V présente la mise en œuvre des indicateurs de qualité dans le code de calculs par éléments finis CESAR-LCPC. Après une présentation générale du code, l'architecture du module d'exécution MCNL a été détaillée. La structure des modules d'exécution a permis le développement du calcul d'erreurs sans interférer avec le fonctionnement normal du code. Un nouveau mot-clé, ERR, a été attribué pour les indicateurs de qualité. L'analyse de la qualité des solutions approchées est activée en ajoutant ERR dans le fichier des données d'entrées. Les résultats des calculs MCNL ne sont pas influencés ; les valeurs des indicateurs de qualité sont stockées dans un fichier indépendant et peuvent être interprétées à l'aide d'un post-processeur (PEGGY, CLEO).

En conclusion, à l'issue de ce travail, il apparaît qu'un outil simple (les indicateurs de qualité) pour évaluer la qualité des calculs par éléments finis a été développé. Nous avons montré qu'il offre des informations pertinentes concernant la qualité des solutions numériques. Son implémentation dans un code de calcul numérique a été réalisée sans modifier l'organisation générale de l'algorithme de résolution du code. Nous estimons aussi qu'il peut être intégré facilement dans d'autres codes numériques.

## VI.2 PERSPECTIVES

Les indicateurs de qualité développés ont fourni des observations pertinentes quant à la qualité des calculs effectués dans le module MCNL du code CESAR-LCPC. L'intérêt d'implémenter des indicateurs de qualité dans d'autres modules d'exécution du CESAR-LCPC est manifeste. Leur mise en œuvre dans les modules traitant des problèmes d'évolution (notamment problèmes de consolidation, problèmes dynamiques) est importante car ils pourront témoigner du développement et de l'évolution des erreurs sur le modèle discrétisé au cours des incréments de temps. Les exemples de modules d'exécution dans CESAR-LCPC où les indicateurs de qualité peuvent être mises en œuvre sont les suivants : CSNL (consolidation non linéaire), MPNL (analyse en thermo-plasticité en milieu poreux), DYNL (analyse dynamique non linéaire).

Nous avons souligné toutefois que les indicateurs de qualité ne sont pas adaptés pour tous les types d'éléments finis. Tandis que  $I_{q,ij}^{(1)}$  est applicable à tous les types d'éléments bidimensionnels et tridimensionnels,  $I_q^{(2)}$  et  $I_q^{(3)}$  sont applicables uniquement pour les éléments isoparamétriques quadratiques bidimensionnels. Un travail complémentaire est donc nécessaire pour traiter les erreurs à l'interface entre les éléments et les visualiser pour les éléments isoparamétriques linéaires 2D et 3D.

Le choix d'une bonne représentation mathématique du problème physique est fondamental pour l'obtention de solutions approchées pertinentes. Souvent, ce choix ne reproduit pas fidèlement le comportement réel du sol ou de la structure. Ainsi, le développement d'indicateurs de qualité pour les erreurs de modélisation représente un aspect très important dans l'étude de la précision des analyses par éléments finis. Pour déterminer les erreurs de modélisation nous avons impérativement besoin de disposer des mesures données par l'instrumentation des ouvrages pour comparer la solution numérique à la solution réelle. Les erreurs de modélisation constituent les plus grandes erreurs dans les calculs numériques et leur quantification représenterait un grand progrès vers une solution approchée proche de la solution réelle.

## Bibliographie

ABAQUS (2011). "ABAQUS v6.7: Documentation (<http://129.25.22.58:2180/v6.7/index.html>)."

ADINA (2008). "ADINA System 8.5: Release notes." <http://www.cadfamily.com/download/cae/adina/>.

Ainsworth, M. and J. T. Oden (2000). "A posteriori error estimation in finite element analysis." (Wiley-Intersciences).

ANSYS (2011). "ANSYS 13.0: Documentation (<http://www.ansys.com/Support/Documentation>)."

Askes, H., N. Pastor and A. Rodriguez-Ferran (2002). "Combined rh-adaptive remeshing strategies for error estimators and error indicators." *WCCM V, Vienna, Austria*(Editors: H.A. Mang, F.G. Rammerstorfer, J. Eberhardsteiner).

Babuska, I., B.A.Szabo and N. Katz (1982). "The p-Version of the Finite Element Method." *SIAM Journal of Numerical Analysis* 18: 515-545.

Babuska, I., L. Plank and R. Rodriguez (1992). "Quality assessment of the a-posteriori error estimation in finite elements." *Finite Elements in Analysis and Design* 11: 5-306.

Babuska, I. and W. C. Rheinboldt (1978). "A posteriori error estimates for the finite element method." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 12: 1597-1615.

Babuska, I. and W. C. Rheinboldt (1980). "Reliable error estimation and mesh adaptation for the finite element method." *Computational Methods in Nonlinear Mechanics*: 67-108.

Babuska, I., T. Strouboulis, S. K. Gangaraj, K. Copps and D. K. Datta (1998). "Practical aspects of a-posteriori estimation for reliable finite element analysis." *Computers and structures* 66(5): 627-664.

Babuska, I., T. Strouboulis, A. Mathur and C. S. Upadhyay (1994a). "Pollution-error in the h-version of the finite-element method and the local quality of a-posteriori error estimators." *Finite Elements in Analysis and Design* 17: 273-321.

Babuska, I., T. Strouboulis and C. S. Upadhyay (1994b). "A model study of the quality of a posteriori error estimators of linear elliptic problems. Error estimation in the interior of patchwise uniform grids of triangles." *Computer methods in applied mechanics and engineering* 114: 307-378.

Babuska, I., T. Strouboulis and C. S. Upadhyay (1997). "A model study of the quality of a posteriori error estimators for finite element solutions of linear elliptic problems, with particular reference to the behavior near the boundary." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 40: 2521-2577.

- Babuska, I., T. Strouboulis, C. S. Upadhyay and S. K. Gangaraj (1995a). "A posteriori estimation and adaptive control of the pollution error in the h-version of the finite element method." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 38: 4207-4235.
- Babuska, I., T. Strouboulis, C. S. Upadhyay, S. K. Gangaraj and K. Coops (1994c). "An objective criterion for assessing the reliability of a-posteriori error estimators in finite element computations." *USACM Bulletin* 7: 4-15.
- Babuska, I., T. Strouboulis, C. S. Upadhyay, S. K. Gangaraj and K. Coops (1994d). "Validation of a posterior error estimators by numerical approach." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 37: 1073-1123.
- Babuska, I., T. Strouboulis, C. S. Upadhyay and S. K. Gangaraj (1995b). "A model study of element residual estimators for linear elliptic problems: the quality of the estimators in the interior of meshes of triangles and quadrilaterals." *Computers and structures* 57(6): 1009-1028.
- Babuska, I. and M. Suri (1990). "The p- and h-p versions of the finite element method, an overview." *Comput. Methods Appl. Mech. and Engrg.* 80: 5-26.
- Babuska, I., B. Szabo and I. Katz (1981). "The p-version of the finite element method." *SIAM Journal of Numerical Analysis* 18: 515-545.
- Bank, R. E. and R. K. Smith (1993). "A posteriori error estimates based on hierarchical bases." *SIAM Journal of Numerical Analysis* 30: 921-935.
- Bank, R. E. and A. Weiser (1985). "Some a posteriori error estimators for elliptic partial differential equations." *Mathematics of computations* 44: 283-301.
- Barlow, J. (1976). "Optimal stress locations in finite element models." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 10: 243-251.
- Bathe, K. J. (1981). "Finite element procedures in engineering analysis."
- Bathe, K. J. and E. L. Wilson (1976). "Numerical methods in finite element analysis."
- Becker, R. and R. Rannacher (1996). "A feed-back approach to error control in finite element methods: basic analysis and examples." *East-West Journal of Numerical Mathematics* 4: 237-264.
- Beckers, P. and H. G. Zhong (1992). "Influence of element distortions on the reliability of some a-posteriori error estimators." *New advances in computational structural mechanics*: 177-187.
- Blaysat, B., E. Florentin and P. Ladeveze (2010a). "Verification for visco-plastic behaviour: First results for local quantities of interest " *9th International Conference in Integrated Design and Manufacturing for Mechanical Engineering*.

Blaysat, B., P. Ladeveze and E. Florentin (2010b). "A first attempt for guaranteed error bounds in (visco)-plasticity." *ECCM 10*.

Boroomand, B. and O. C. Zienkiewicz (1997a). "An improved REP recovery and the effectivity robustness test." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 40: 3247-3277.

Boroomand, B. and O. C. Zienkiewicz (1997b). "Recovery by equilibrium patches (REP)." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 40: 137-154.

Boroomand, B. and O. C. Zienkiewicz (1999). "Recovery procedures in error estimation and adaptivity. Part II: adaptivity in nonlinear problems of elasto-plasticity behaviour." *Computer methods in applied mechanics and engineering* 176: 127-146.

Bourgeois, E. (2009). "Utilisation de CLEO pour la visualisation de grandeurs nodales." (LCPC).

Boussetta, R. (2005). "Estimateurs d'erreur et remaillage adaptatif : application à la simulation 3D des procedes de mise en forme des materiaux." *Thèse de doctorat, Ecole des mines de Paris*.

Bugeda, G., J. J. Rodenas and E. Onate (2008). "An integration of a low cost adaptive remeshing strategy in the solution of structural shape optimisation problems using revolutionary methods." *Computers and structures* 86: 1563-1578.

Carnet, J., P. Ladevèze and D. Leguillon (1981). "An optimal mesh procedure in the finite element method." *Proc. of the Third Conf. on Math. of F.E. and Appl.*

Carroll, W. E. and R. M. Baker (1973). "A theorem for optimum finite-element idealizations." *International Journal of Solids and Structures* 9: 883-895.

Carstensen, C. and S. A. Funken (2000). "Fully reliable localized error control in the FEM." *Society for Industrial and Applied Mathematics* 21: 1465-1484.

Cast3m (2010). "Cast3m 2010: Manual pages (<http://www-cast3m.cea.fr/cast3m/listnotices.do>)."

CATIA (2011). "Catia V6R2011x (<http://www.3ds.com/products/catia/welcome/>)."

Chamoin, L. (2007). "Encadrement a posteriori de quantités locales dans les problèmes de viscoélasticité linéaire résolus par la Méthode des Eléments finis." *Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan*.

Code\_Aster (2011). "Code\_Aster v.10: Documentation (<http://www.code-aster.org/V2/doc/default/>)."

Coorevits, P., P. Ladeveze and J. P. Pelle (1995). "An automatic procedure with control of accuracy for finite element analysis in 2D elasticity." *Computer methods in applied mechanics and engineering* 121: 91-120.

- Crisfield, M. A. (1983). "An arc-length method including line searches and accelerations." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 19: 1269-1289.
- Crisfield, M. A. (1991). "Non-linear finite element analysis of solid and structures. Volume 1. Essentials." *John-Wiley and Sons*: 346.
- Crisfield, M. A. (1997). "Non-linear finite element analysis of solid and structures. Volume 2. Advanced topics." *John Wiley and Sons*: 494.
- Debongnie, J. F., H. G. Zhong and P. Beckers (1995). "Dual analysis with general boundary conditions." *Computer methods in applied mechanics and engineering* 122: 183-192.
- Delmas, J. (2008). "Stratégie de contrôle d'erreur en calcul de structures industrielles. Mise en œuvre d'estimation d'erreur en quantité d'intérêt et d'adaptation de maillage."
- Demkowicz, L., J. T. Oden and T. Strouboulis (1984). "Adaptive finite elements for flow problems with moving boundaries. Part I: Variational principles & a posteriori estimates." *Comput. Methods Appl. Mech. and Engrg.* 46: 217-251.
- Denis, J. E. and J. J. Moré (1977). "Quasi-Newton methods, motivation and theory." *SIAM Review* 19(1): 46-89.
- Desai, C. S. and J. T. Christian (1977). "Numerical methods in geotechnical engineering."
- Diez, P., J. J. Egozcue and A. Huerta (1998). "A posteriori error estimation for standard finite element analysis." *Computer methods in applied mechanics and engineering* 163: 141-157.
- El-Hamalawi, A. and M. D. Bolton (1999). "An a posteriori error estimator for plane-strain geotechnical analysis." (Elsevier).
- Florentin, E., L. Gallimard, P. Ladeveze and J. P. Pelle (2003). "Local error estimator for stresses in 3D structural analysis." *Computers and structures* 81: 1751-1757.
- Florentin, E., L. Gallimard and J. P. Pelle (2002). "Evaluation of the local quality of stresses in 3D finite element analysis." *Computer methods on applied mechanics and engineering* 191: 4441-4457.
- Gago, J. P. (1982). "A posteriori error analysis and adaptivity for the finite element method." (PhD. Thesis, University of Wales, Swansea).
- Gallimard, L., P. Ladeveze and J. P. Pelle (2000). "An enhanced error estimator on the constitutive relation for plasticity problems." *Computers and structures* 78: 801-810.

- GEO5 (2010). "GEO 5 v11: Manuals (<http://www.finesoftware.eu/download/manuals/>)."
- Gratsch, T. and K. J. Bathe (2005). "A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis." *Computers and structures* 83: 235-265.
- Huang, W., L. Kamenski and J. Lang (2010). "A new anisotropic mesh adaptation method based upon hierarchical a posteriori error estimates." *Journal of computational physics* 229: 2179-2198.
- Humbert, P. (1989). "CESAR-LCPC, un code général de calcul par éléments finis." *Bulletin de liaison des Laboratoires des Ponts et Chaussées*(160): 112-116.
- Kardestuncer, H. and D. H. Norrie (1987). "Finite element handbook."
- Kelly, D. W. (1984). "The self-equilibrium of residual and complementary a posteriori error estimates in finite element method." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 20: 1491-1506.
- Kelly, D. W., J. P. Gago, O. C. Zienkiewicz and I. Babuska (1983). "A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method. Part I-Error analysis." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 19: 1593-1619.
- Kempeneers, M. (2005). "Elements finis statiquement admissibles et estimation d'erreur par analyse duale." *Thèse de doctorat, Université de Liège, Faculté des sciences appliquées*.
- Kikuchi, N., K. Y. Chung, T. Torigaki and J. E. Taylor (1986). "Adaptive finite element methods for shape optimization of linearly elastic structures." *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 57: 67-89.
- Kurtz, J. and L. Demkowicz (2007). "A fully automatic hp-adaptivity for elliptic PDEs in three dimensions." *Computer methods in applied mechanics and engineering* 196: 3534-3545.
- Ladevèze, P. (1975). "Comparaison de modèles de milieux continus " *Thèse Université Pierre et Marie Curie*.
- Ladevèze, P., G. Coffignal and J. Pelle (1986). "Accuracy of elastoplastic and dynamic analysis." *Accuracy estimates and adaptive refinements in finite element computations*(Babuska, Gago, Oliveira and Zienkiewicz (eds.), Wiley London): 485-509.
- Ladeveze, P. and N. Moes (1999). "Adaptive control for finite element analysis in plasticity." *Computers and structures* 73: 45-60.
- Ladeveze, P., N. Moes and B. Douchin (1999a). "Constitutive relation error estimators for (visco)plastic finite element analysis with softening." *Computer methods in applied mechanics and engineering* 176: 247-264.

- Ladeveze, P. and P. Rougeot (1997). "New advances in a posteriori error constitutive relation in f.e. analysis." *Computer methods in applied mechanics and engineering* 150: 239-249.
- Ladeveze, P., P. Rougeot, P. Blanchard and J. P. Moreau (1999b). "Local error estimators for finite element linear analysis." *Computer methods in applied mechanics and engineering* 176: 231-246.
- LS-DYNA (2011). "LS-DYNA V971 R5.1: Manuals (<http://www.dynasupport.com/manuals>)."
- Mar, A. (1993). "Adaptive mesh refinement for nonlinear problems in geomechanics using an advanced constitutive law." *Ph.D. thesis, University of Manchester, U.K.*
- Meng, L. and Q. Zhu (2007). "The ultraconvergence of derivative for bicubic finite element." *Computer methods in applied mechanics and engineering* 196: 3771-3778.
- Mestat, P. (1984). "Résolution des problèmes élastoplastiques en éléments finis - Programme CESAR-PLAS." (LCPC, Division GMS1, FAER 1.05.10.4): 172.
- Mestat, P. (1985). "Etude des problèmes élastoplastiques en éléments finis - Evolution du programme CESAR-PLAS." (LCPC, Division GMS1, FAER 1.05.10.5): 180.
- Mestat, P. (1986). "Sur les comportements non linéaires en éléments finis." (LCPC. Division GMS1, FAER 1.05.10.6): 140.
- Mestat, P. (1988). "Les méthodes de résolution en comportement non linéaire - Théorie et applications." (LCPC, Division GMS1, FAER 1.05.10.7): 56.
- Mestat, P. (1993). "Lois de comportement des géomatériaux et modélisation par la méthode des éléments finis." *GT 52*(LCPC).
- Mestat, P. (1998). "Modèles d'éléments finis et problèmes de convergence en comportement non linéaire." *BLPC Volume 214*(LCPC): 45-60.
- Mestat, P. (2005). "CESAR-LCPC. Version standard. Référentiel théorique. Module MCNL." 5e édition.
- Mestat, P., P. Humbert and A. Dubouchet (2000). "Recommandations pour la vérification des modèles d'éléments finis en géotechnique." *BLPC 229*: 33-51.
- Nayak, G. C. and O. C. Zienkiewicz (1972). "Convenient form stress invariants for plasticity." *Journal of Structural Division A.S.C.E.*: 949-953.
- Oden, J. T., I. Babuska, F. Nobile, Y. Feng and R. Tempone (2005a). "Theory and methodology for estimation and control of errors due to modeling, approximation and uncertainty." *Computer methods in applied mechanics and engineering* 194: 195-204.

Oden, J. T., T. Belytschko, I. Babuska and T. J. R. Hughes (2003). "Research directions in computational mechanics." *Computer methods on applied mechanics and engineering* 192: 913-922.

Oden, J. T. and S. Prudhomme (2001). "Goal-oriented error estimation and adaptivity for the finite element method." *Computers and mathematics with applications* 41: 735-756.

Oden, J. T. and S. Prudhomme (2002). "Estimation of modeling error in computational mechanics." *Journal of computational physics* 182: 496-515.

Oden, J. T., S. Prudhomme and P. Bauman (2005b). "On the extension of goal-oriented error estimation and hierarchical modeling to discrete lattice models." *Computer methods in applied mechanics and engineering* 194: 3668-3688.

Oden, J. T. and K. S. Vegamanti (2000). "Estimation of local modeling error and goal-oriented adaptive modeling of heterogeneous materials." *Journal of computational physics* 164: 22-47.

Paczelt, I., B. A. Szabo and T. Szabo (1999). "Solution of contact problem using the hp-version of the finite element method." *Computers and mathematics with applications*: 49-69.

Paraschivoiu, M., J. Pareire and A. Patera (1997a). "A posteriori finite element bounds for linear-functional outputs of elliptic partial differential equations." *Computer methods in applied mechanics and engineering* 150: 289-312.

Paraschivoiu, M., J. Pareire and A. Patera (1997b). "A posteriori finite element bounds for linear-functional outputs of elliptic partial differential equations." *Computer methods in applied mechanics and engineering* 150(1-4): 289-312.

Pareire, J. and A. Patera (1999). "Asymptotic a posteriori finite element bounds for the outputs of noncoercive problems: the Helmholtz and Burgers equations." *Computer methods in applied mechanics and engineering* 171(1-2): 77-86.

Pares, N. (2005). "Error assessment for functional outputs of PDEs: bounds and goal oriented adaptivity." *Doctoral thesis, Universita Politecnica de Catalunya*.

Patera, A. T. and J. Pareire (2003). "A general Lagrangian formulation for the computation of a posteriori finite element bounds." *Lecture Notes in Computational Science and Engineering* 25(Error estimation and adaptive discretization methods in computational fluid dynamics. Springer, Berlin): 159-206.

PLAXIS (2010). "PLAXIS 2D 2010: User manuals (<http://www.plaxis.nl/shop/69/info/manuals/>)."

Prat, M., P. Bisch, P. Mestat, A. Millard and G. Pijaudier-Cabot (1997). "Calcul des ouvrages généraux de construction." *Coll. Emploi des éléments finis en génie civil*: 768.

Prudhomme, S. and J. T. Oden (1999). "On goal-oriented error estimation for elliptic problems: application to the control of pointwise errors." *Computer methods in applied mechanics and engineering* 176: 313-331.

Rachowicz, W., D. Pardo and L. Demkowicz (2006). "Fully automatic hp-adaptivity in three dimensions." *Computer methods in applied mechanics and engineering* 195: 4816-4842.

Rank, E. and I. Babuska (1987). "An expert system for the optimal mesh design in the hp-version of the finite element method." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 24: 2087-2106.

Rannacher, R. and F. Suttmeier (1998). "A posteriori control in finite element methods via duality techniques: Application to perfect plasticity." *Computational Mechanics* 21: 123-133.

Richardson, L. F. (1910). "The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems." *Philosophical Transactions of the Royal Society A* 210: 307-357.

Ricks, E. (1972). "The application of Newton's method to the problem of elastic stability." *Journal of Applied Mechanics* 39: 1066-1066.

Romkes, A., J. T. Oden and K. Vemaganti (2006). "Multi-scale goal-oriented adaptive modeling of random heterogeneous materials." *Mechanics of materials* 38: 859-872.

SAMCEF (2006). "SAMCEF: User manual (<http://www.samcef.com>)."

Solin, P. and L. Demkowicz (2004). "Goal-oriented hp-adaptivity for elliptic problems." *Computer methods in applied mechanics and engineering* 193: 449-468.

Stelzer, R. and G. Hofstetter (2005). "Adaptive finite element analysis of multi-phase problems in geotechnics." *Computers and Geotechnics* 32: 458-481.

Stewart, J. R. and T. J. R. Hughes (1998). "A tutorial in elementary finite element error analysis: A systematic presentation of a priori and a posteriori error estimates." *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 158: 1-22.

Strouboulis, T., I. Babuska, S. K. Gangaraj, K. Copps and D. K. Datta (1999). "A posteriori estimation of the error in the error estimate." *Computer methods in applied mechanics and engineering* 176: 387-418.

Strouboulis, T. and K. A. Haque (1992). "Recent experiences with error estimation and adaptivity. Part II: Error estimation for h-adaptive approximations on grids of triangles and quadriangles." *Comput. Methods Appl. Mech. and Engrg.* 100: 359-430.

Veubeke, B. F. d. (1965). "Displacements and equilibrium models in the finite element method." *Stress analysis*.

- Veubeke, B. F. d. and O. C. Zienkiewicz (1967). "Strain energy bounds in finite element analysis by slab analogy." *The Journal of Strain Analysis* 2: 265-271.
- Vulpe, C., E. Bourgeois, P. Mestat and F. Chiappini (2011). "Development of quality indicators. Part I: development and application to simple 2D and 3D problems." *Finite Elements in Analysis and Design* (submitted).
- Wempner, G. A. (1971). "Discrete approximations related to non linear theories of solids." *International Journal of Solids and Structures* 7: 1581-1599.
- Wiberg, N. E., F. Abdulwahab and S. Ziukas (1994). "Enhanced superconvergent patch recovery incorporating equilibrium and boundary conditions." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 37: 3417-3440.
- Zhang, Z. M. (1996). "Ultraconvergence of the patch recovery technique." *Mathematics of computations* 65: 1431-1437.
- Zhang, Z. M. (2000). "Ultraconvergence of the patch recovery technique." *Mathematics of computations* 69: 141-158.
- Zhong, H. G. and P. Beckers (1990). "Equilibrium default error estimators for the finite element solution." *Int. Rep. SA-140, LTAS*.
- Zhu, J. Z. (1997). "A posteriori error estimation - the relationship between different procedures." *Comput. Methods Appl. Engrg.* 150: 411-422.
- Zhu, J. Z. and O. C. Zienkiewicz (1997). "A posteriori error estimation and three-dimensional automatic mesh generation." *Finite Elements in Analysis and Design* 25: 167-184.
- Zienkiewicz, O. C. (1977). "The finite element method." *McGraw-Hill, London* 3rd edition.
- Zienkiewicz, O. C. (2006). "The background of error estimation and adaptivity in finite element computations." *Computer methods in applied mechanics and engineering* 195: 207-213.
- Zienkiewicz, O. C. and R. Taylor (1989). "The finite element method (vol. 1: Basic concepts and linear applications)." 672.
- Zienkiewicz, O. C., R. L. Taylor and J. Z. Zhu (2005). "The finite element method: its basis and fundamentals." 6th edition(Elsevier, Butterworth Heinemann).
- Zienkiewicz, O. C., S. Valliappan and I. P. King (1969). "Elasto-plastic solution of engineering problems. Initial stress, finite element approach." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1: 75-100.
- Zienkiewicz, O. C. and J. Z. Zhu (1987). "A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 24: 337-357.

Zienkiewicz, O. C. and J. Z. Zhu (1992). "The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: The recovery technique." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 33: 1331-1364.

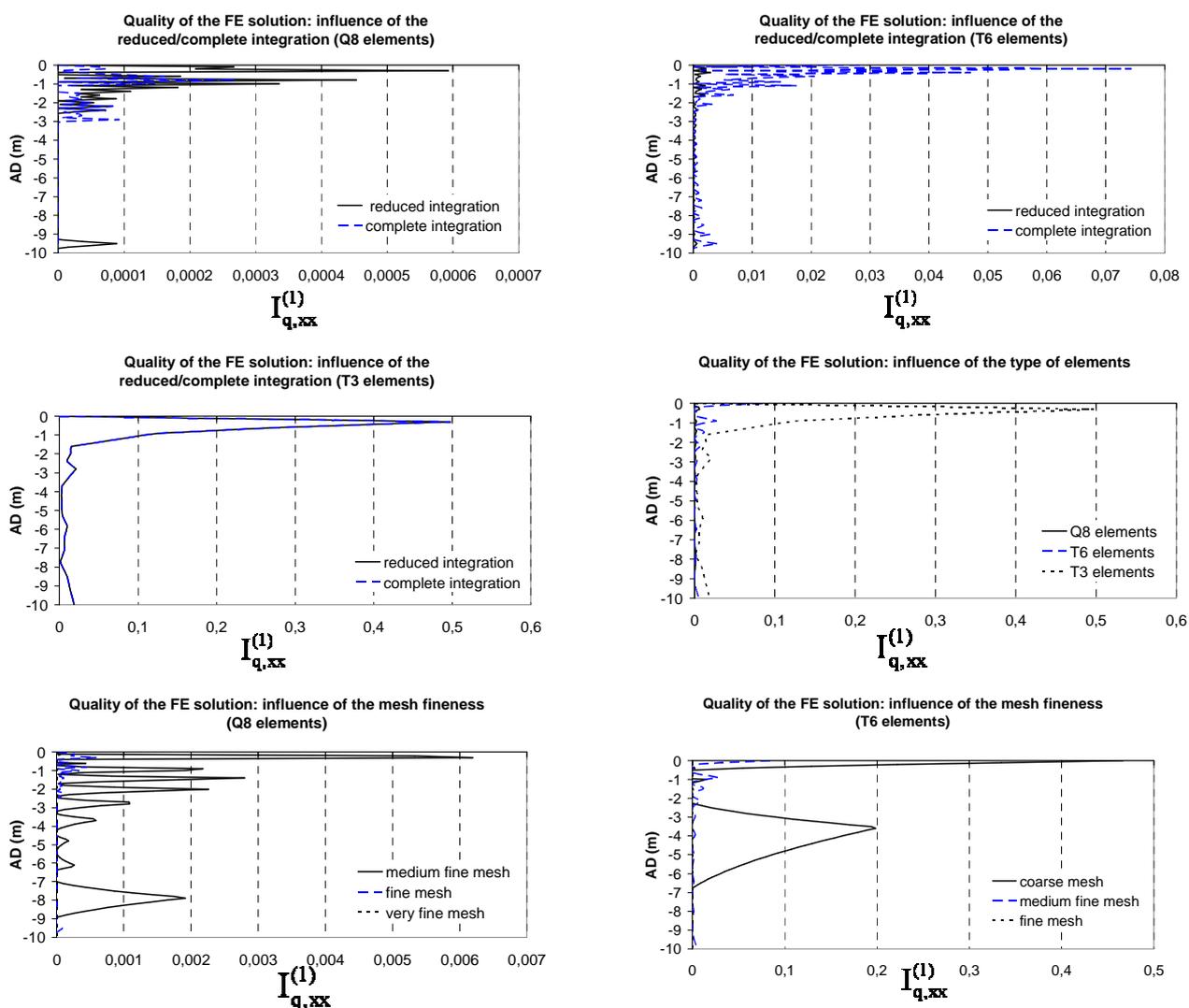
Zienkiewicz, O. C., J. Z. Zhu and N. G. Gong (1989). "Effective and practical hp-version adaptive analysis procedures for the finite element method." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 28: 879-891.

## ANNEXES

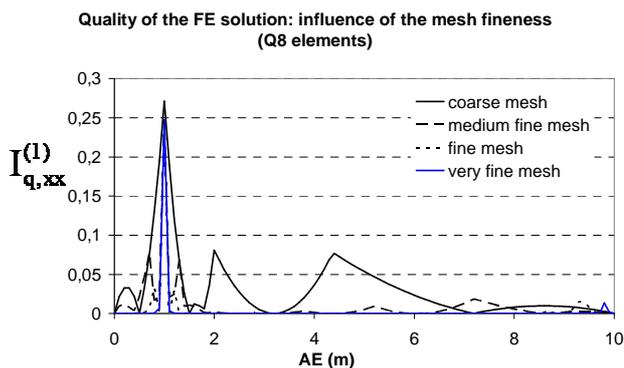
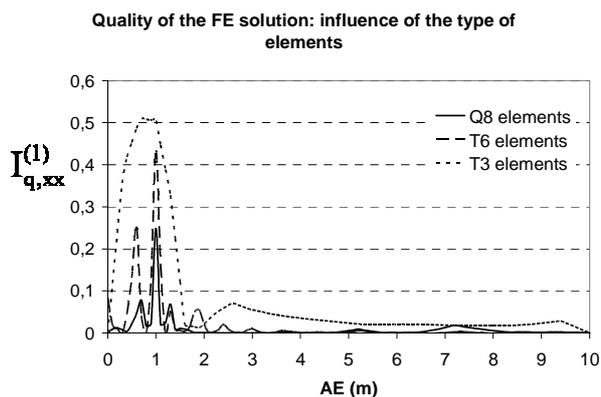
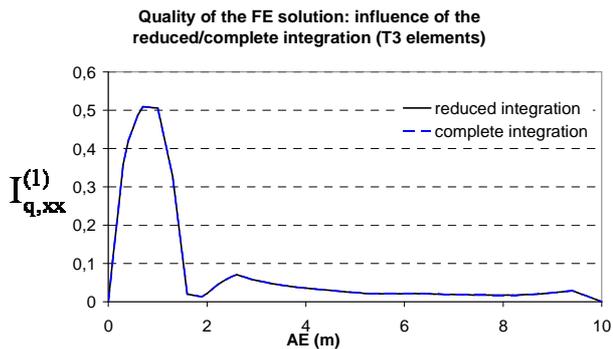
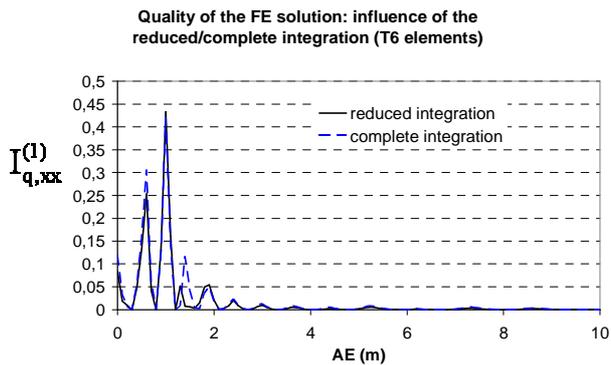
## ANNEXE 1

L'annexe 2 recueille un certain nombre de résultats qui ne pourraient pas avoir été exposées dans le chapitre III (Development of quality indicators. Part II: application to a braced sheetpile excavation (Karlsruhe experimental site)). Nous offrons dans cette annexe d'autres résultats concernant l'étude de la qualité des solutions approchées pour des problèmes simples bidimensionnels.

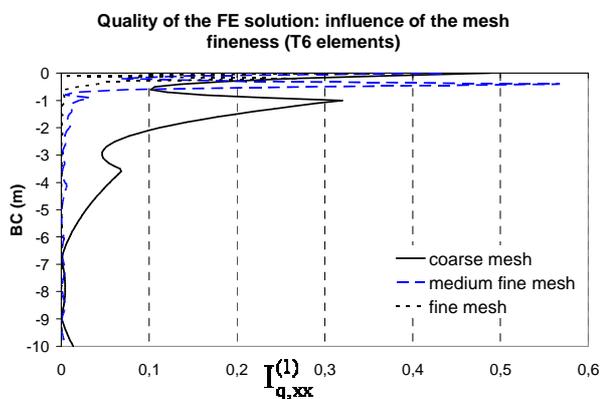
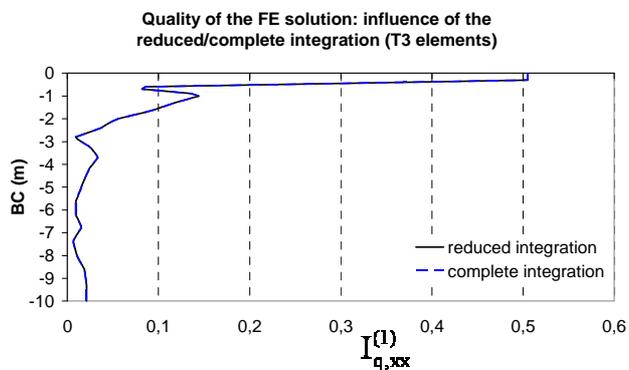
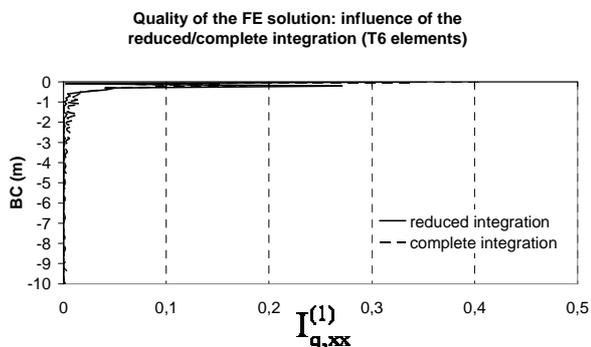
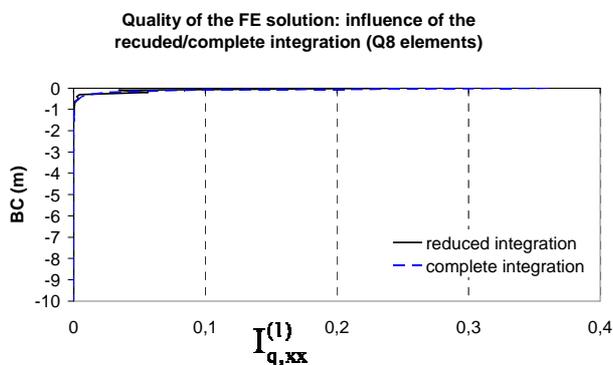
**Problème : fondation filante souple. Pression uniforme appliquée sur un sur une largeur finie à la surface d'un massif élastique linéaire et isotrope de profondeur finie**



A1. 1 Quality of the FE solution for the 2D strip load on elastic half space problem along AD



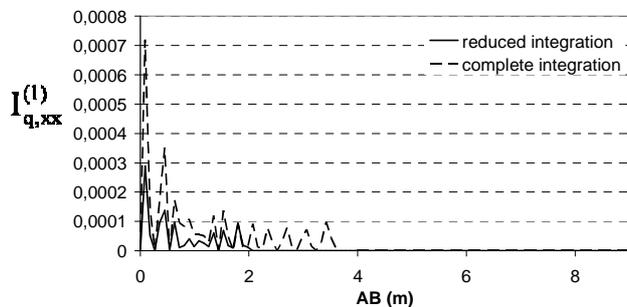
A1. 2 Quality of the FE solution for the 2D strip load on elastic half space problem along AE



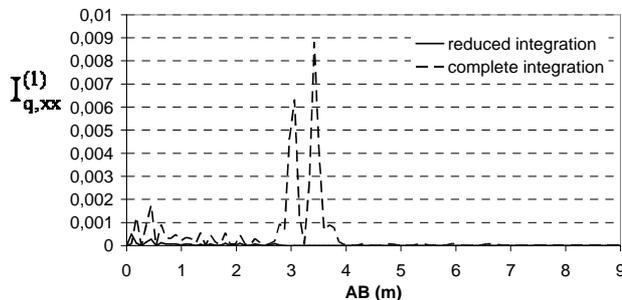
A1. 3 Quality of the FE solution for the 2D strip load on elastic half space problem along BC

## Problème : cavité cylindrique de section circulaire soumise à une pression interne uniforme

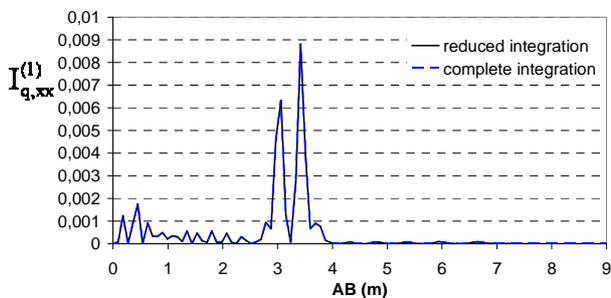
Quality of the FE solution: influence of the reduced/complete integration (orthotropic constitutive law)



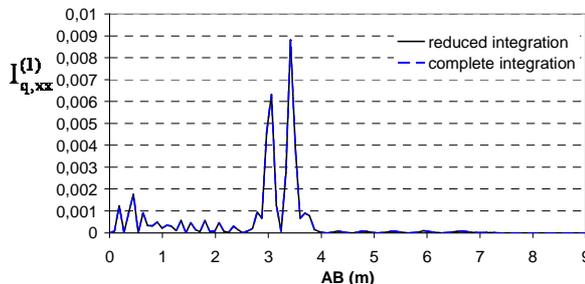
Quality of the FE solution: influence of the reduced/complete integration (elastic constitutive law)



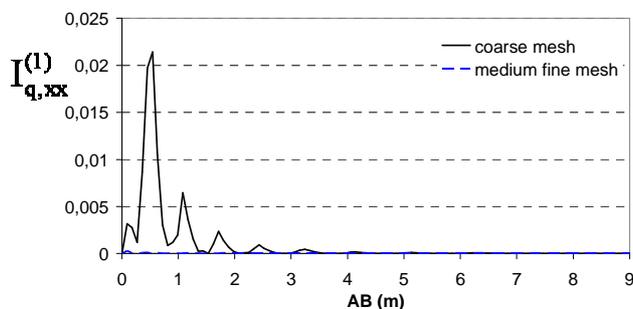
Quality of the FE solution: influence of the reduced/complete integration (Tresca constitutive law)



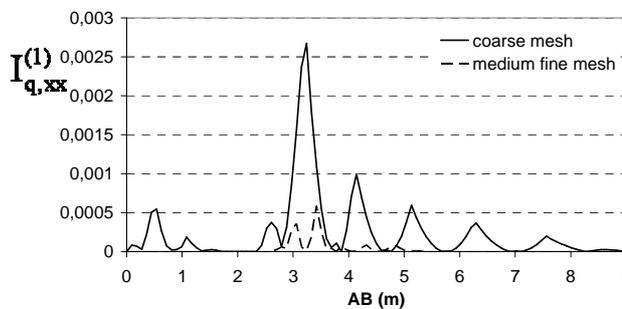
Quality of the FE solution: influence of the reduced/complete integration (Tresca constitutive law)



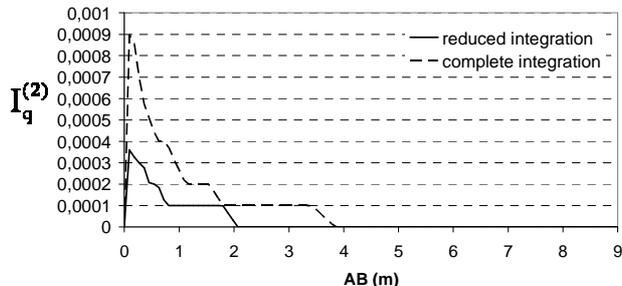
Quality of the FE solution: influence of the mesh fineness (elastic constitutive law)



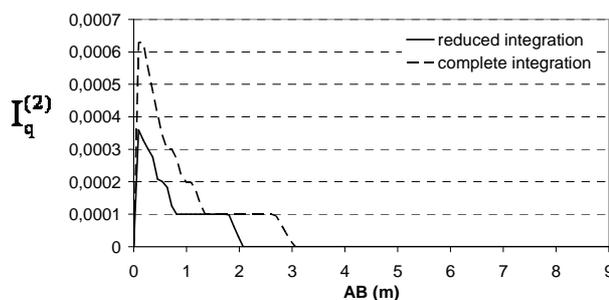
Quality of the FE solution: influence of the mesh fineness (Tresca constitutive law)



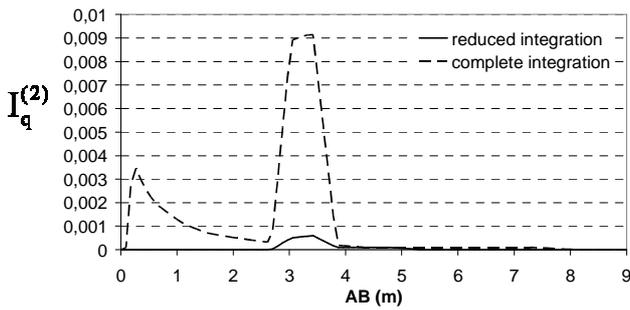
Quality of the FE solution: influence of the reduced/complete integration (orthotropic constitutive law)



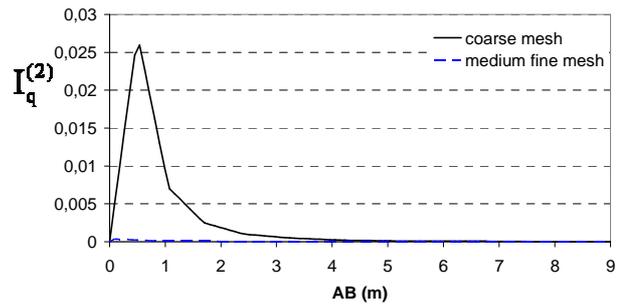
Quality of the FE solution: influence of the reduced/complete integration (elastic constitutive law)



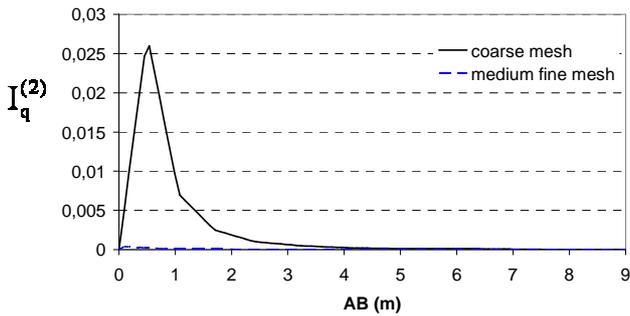
Quality of the FE solution: influence of the reduced/complete integration (Tresca constitutive law)



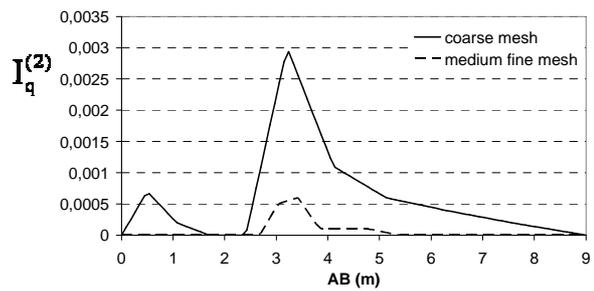
Quality of the FE solution: influence of the mesh fineness (orthotropic constitutive law)



Quality of the FE solution: influence of the mesh fineness (elastic constitutive law)

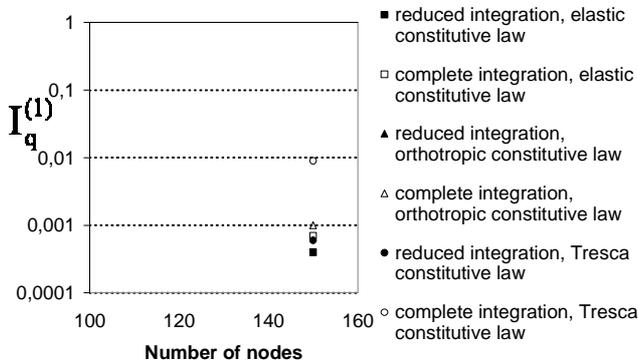


Quality of the FE solution: influence of the mesh fineness (Tresca constitutive law)

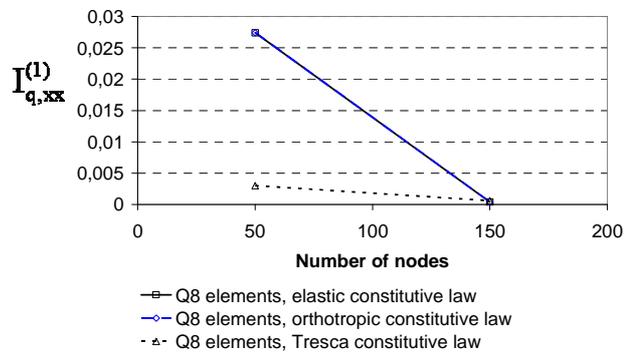


A1. 4 Quality of the FE solution for the 2D circular cavity expansion problem along AB

Quality of the FE solution: influence of the reduced/complete integration



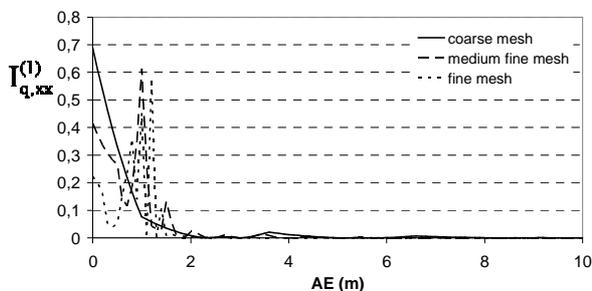
Quality of the FE solution: influence of the mesh fineness



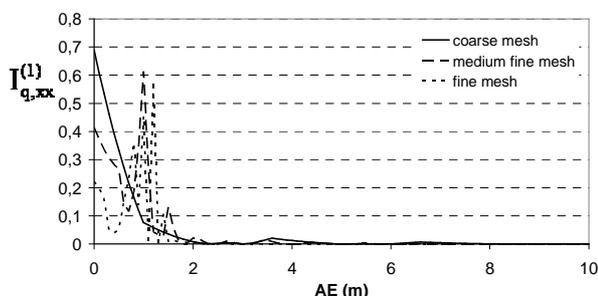
A1. 5 Quality of the FE solution for the 2D circular cavity expansion problem using  $I_{q,xx}^{(1)}$

**Problème : fondation filante rigide. Pression uniforme appliquée sur un sur la fondation (interface sol-structure parfaitement lise) appuyant sur massif de profondeur finie**

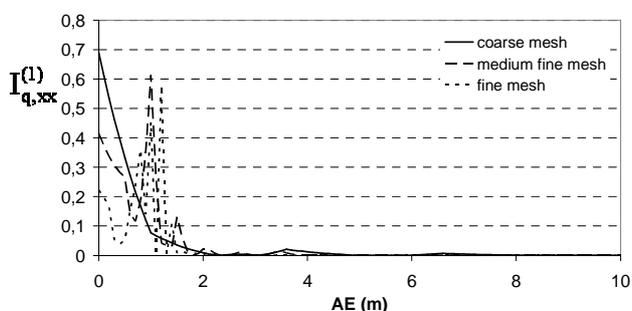
Quality of the FE solution: influence of the mesh fineness (T6 elements)



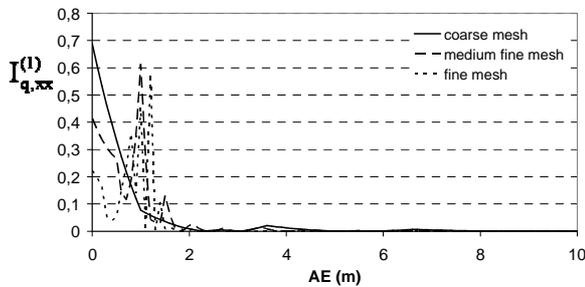
Quality of the FE solution: influence of the mesh fineness (T6 elements)



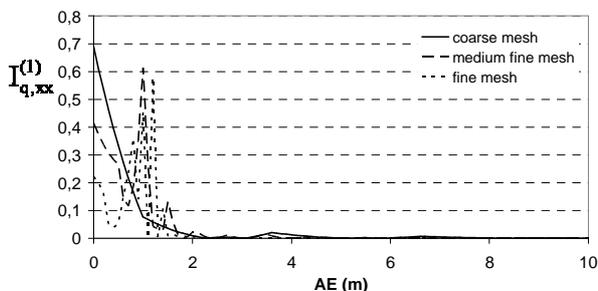
Quality of the FE solution: influence of the mesh fineness (T6 elements)



Quality of the FE solution: influence of the mesh fineness (T6 elements)

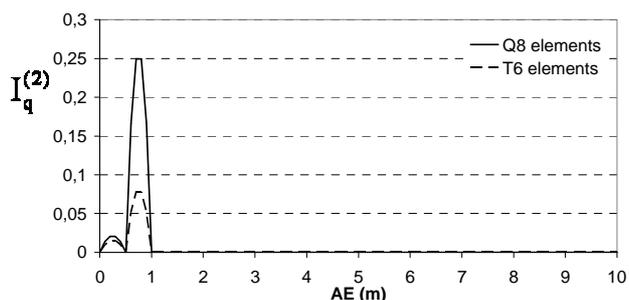


Quality of the FE solution: influence of the mesh fineness (T6 elements)

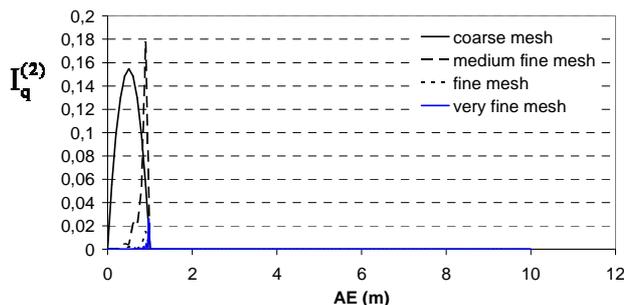


A1. 6 Quality of the FE solution for the 2D uniform vertical loading of a smooth rigid strip on an elastoplastic half space problem along AE for  $I_{q,xx}^{(1)}$

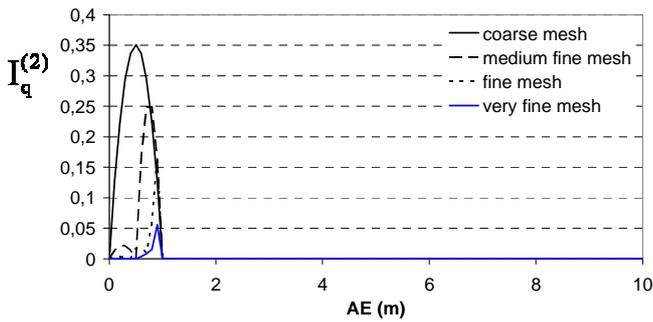
Quality of the FE solution: influence of the type of element



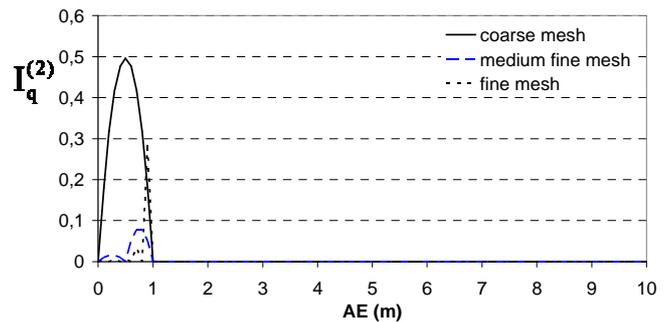
Quality of the FE solution: influence of the mesh fineness (Q8 elements, 15cm foundation height)



Quality of the FE solution: influence of the mesh fineness (Q8 elements, 50cm foundation height)

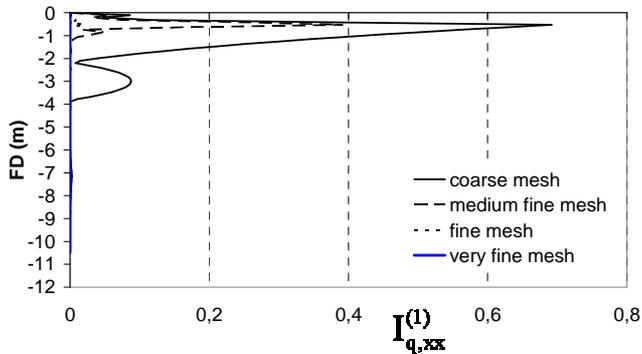


Quality of the FE solution: influence of the mesh fineness (T6 elements)

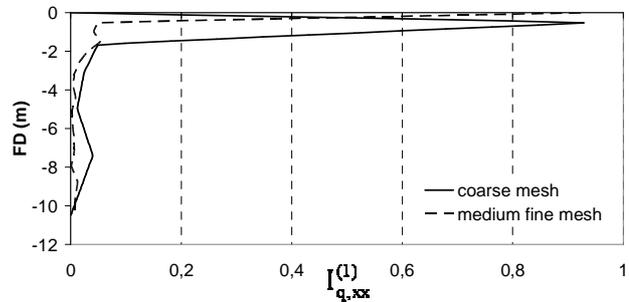


A1. 7 Quality of the FE solution for the 2D uniform vertical loading of a smooth rigid strip on an elastoplastic half space problem along AE for

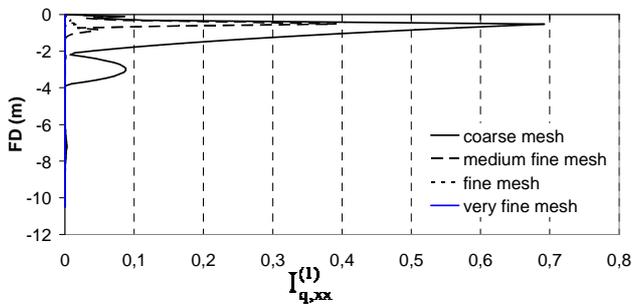
Quality of the EF solution: influence of the mesh fineness (Q8 elements, 50cm foundation height)



Quality of the FE solution: influence of the mesh fineness (T3 elements)

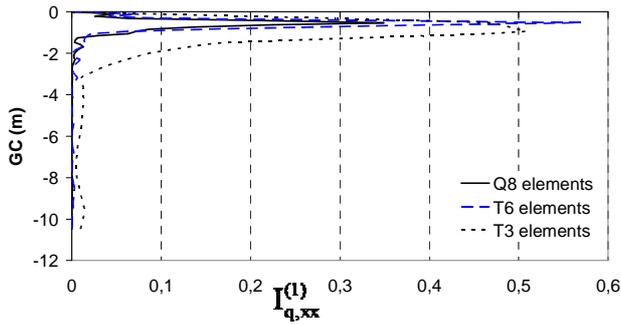


Quality of the FE solution: influence of the mesh fineness (T6 elements)

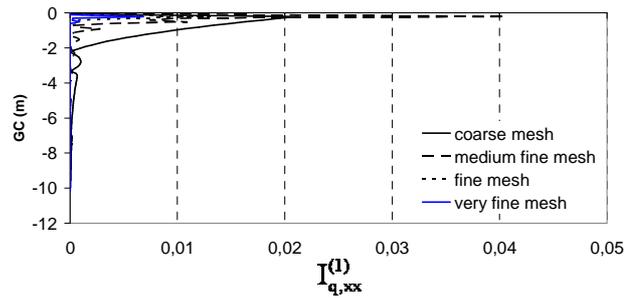


A1. 8 Quality of the FE solution for the 2D uniform vertical loading of a smooth rigid strip on an elastoplastic half space problem along FD

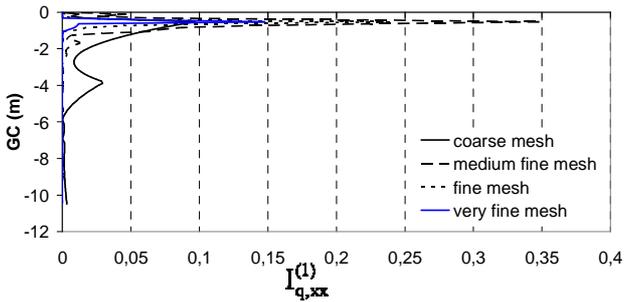
Quality of the FE solution: influence of the element type



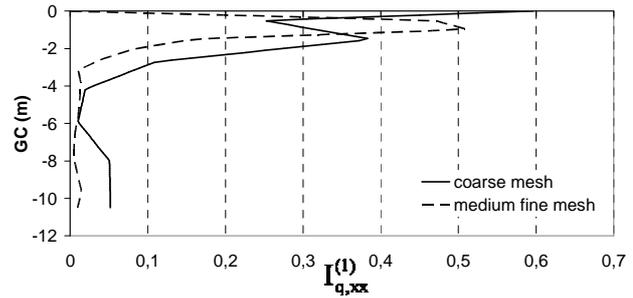
Quality of the FE solution: influence of the mesh fineness (Q8 elements, 15cm foundation height)



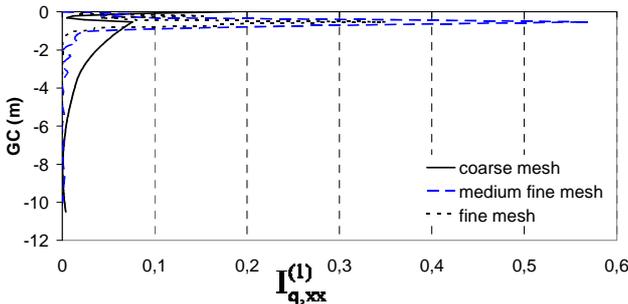
Quality of the FE solution: influence of the mesh fineness (Q8 elements, 50cm foundation height)



Quality of FE solution: influence of the mesh fineness (T3 elements)

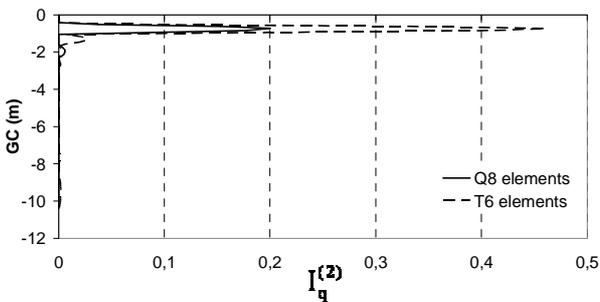


Quality of the FE solution: influence of mesh fineness (T6 elements)

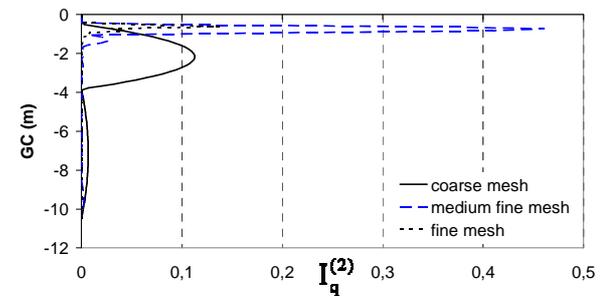


A1. 9 Quality of the FE solution for the 2D uniform vertical loading of a smooth rigid strip on an elastoplastic half space problem along GC for  $I_{q,xx}^{(1)}$

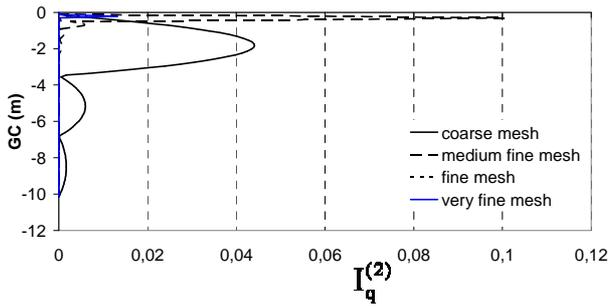
Quality of the FE solution: influence of the type of element



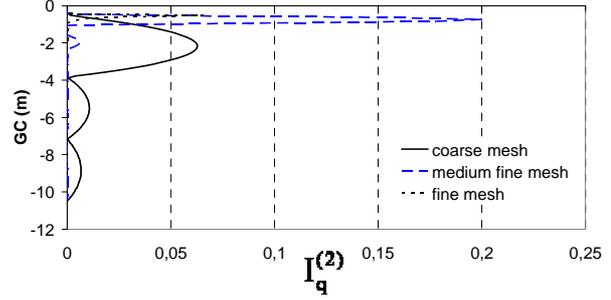
Quality of the FE solution: influence of the mesh fineness (T6 elements)



Quality of the FE solution: influence of the mesh fineness (Q8 elements, 15cm foundation height)



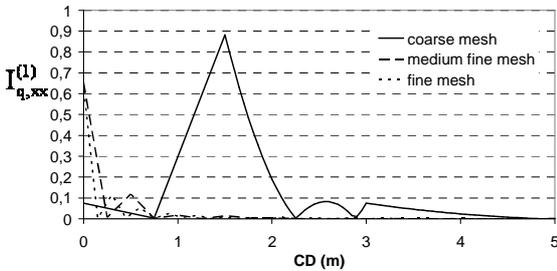
Quality of the FE solution: influence of the mesh fineness (Q8 elements, 50cm foundation height)



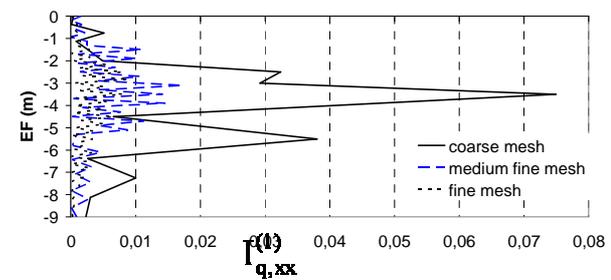
A1. 10 Quality of the FE solution for the 2D uniform vertical loading of a smooth rigid strip on an elastoplastic half space problem along GC for  $I_q^{(2)}$

**Problème : creusement d'un tunnel en déformation plane**

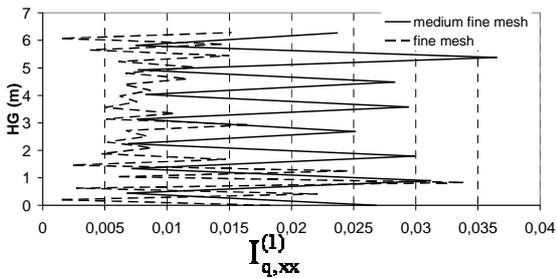
Quality of the FE solution: influence of the mesh fineness (T6 elements)



Quality of the FE solution: influence of the mesh fineness (T6 elements)

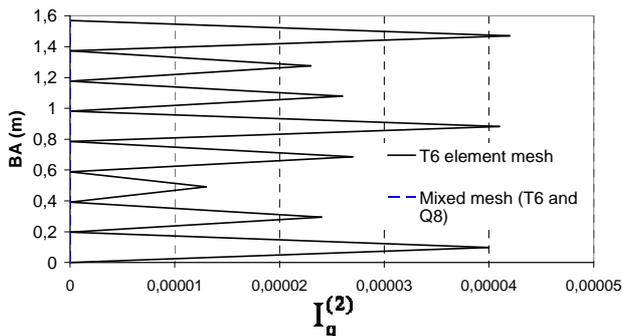


Quality of the FE solution: influence of the mesh fineness (mixed mesh)

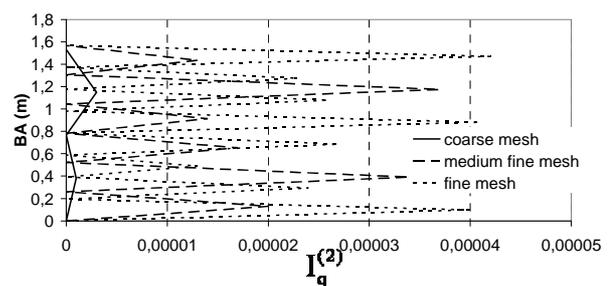


A1. 11 Quality of the FE solution for the 2D tunnel stability problem for  $I_{q,xx}^{(1)}$

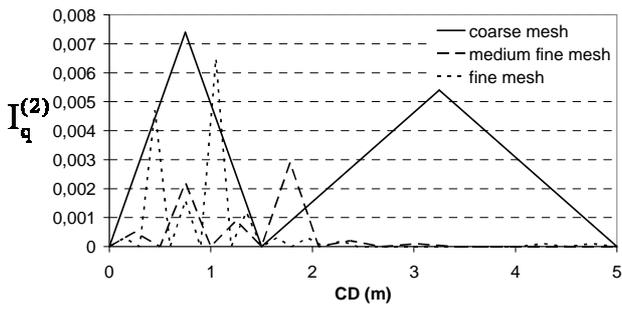
Quality of the FE solution: influence of the type elements



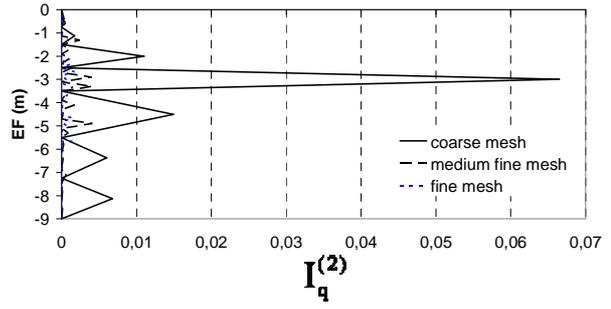
Quality of the FE solution: influence of the mesh fineness (T6 elements)



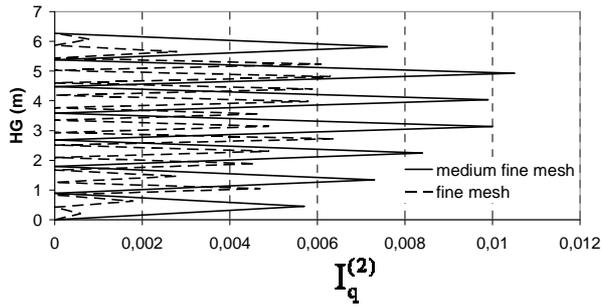
Quality of the FE solution: influence of the mesh fineness  
(T6 elements)



Quality of the FE solution: influence of the mesh fineness  
(T6 elements)



Quality of the FE solution: influence of the mesh fineness  
(mixed mesh)

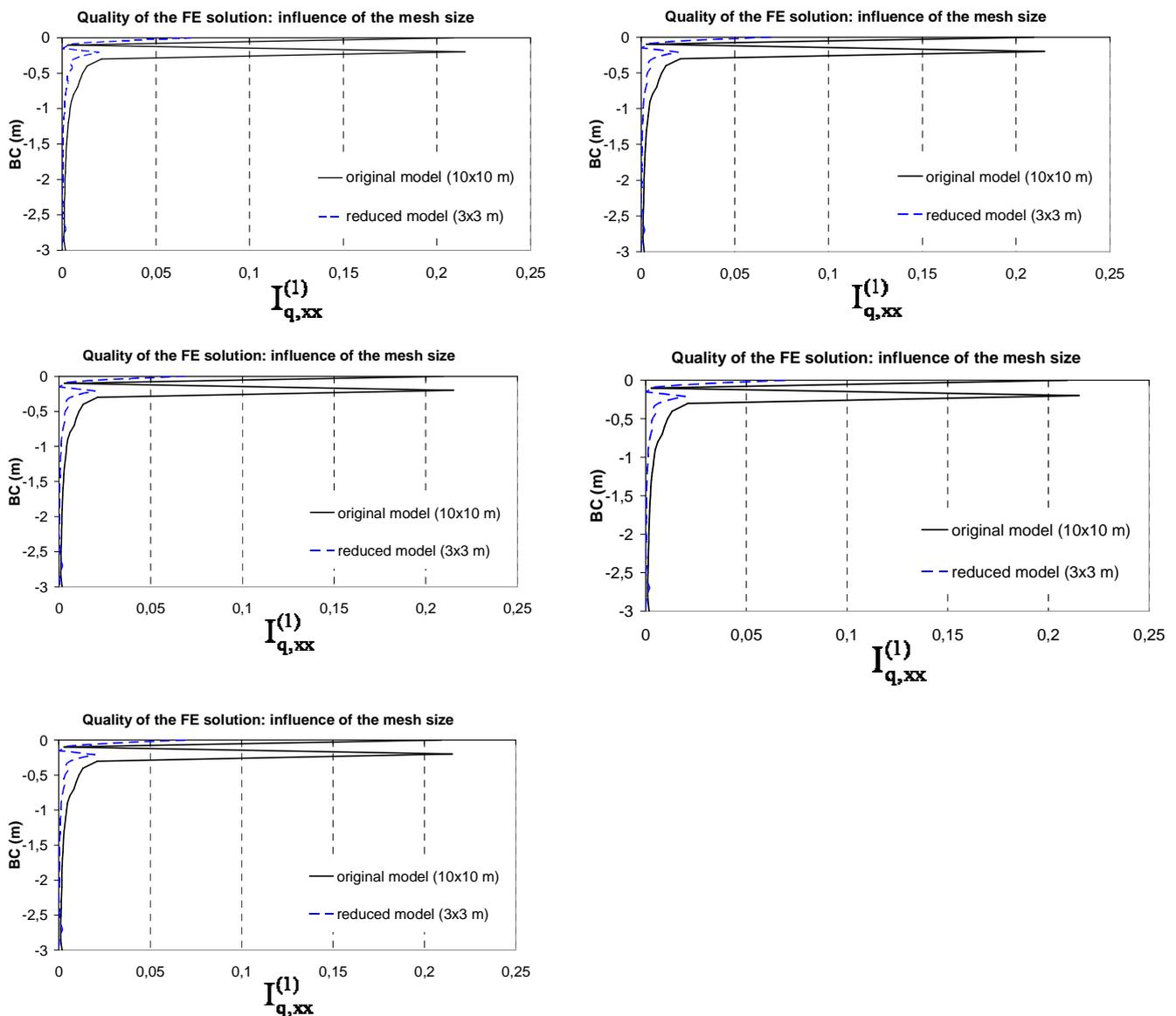


A1. 12 Quality of the FE solution for the 2D tunnel stability problem for  $I_q^{(2)}$

## ANNEXE 2

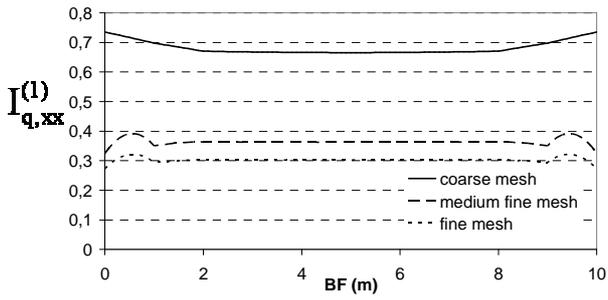
L'annexe 2 recueille un certain nombre de résultats qui ne pourraient pas avoir été exposées dans le chapitre III (Development of quality indicators. Part II: application to a braced sheetpile excavation (Karlsruhe experimental site). Nous offrons dans cette annexe d'autres résultats concernant l'étude de la qualité des solutions approchées pour des problèmes simples tridimensionnels.

**Problème : fondation filante souple. Pression uniforme appliquée sur un sur une largeur finie à la surface d'un massif élastique linéaire et isotrope de profondeur finie**

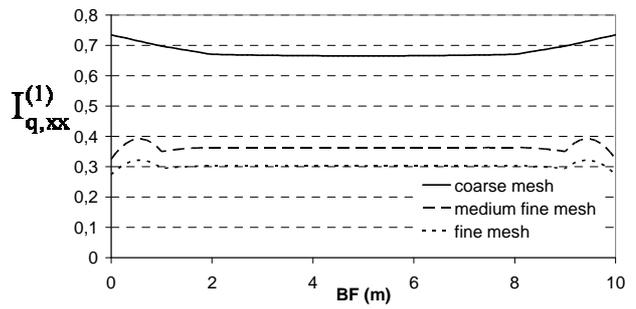


A2. 1 Quality of the FE solution for the 3D strip load on elastic half space problem along BC

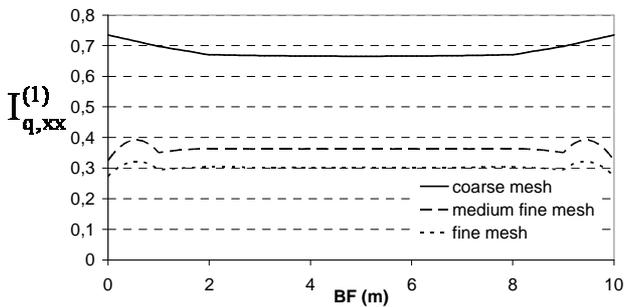
Quality of the FE solution: influence of the mesh fineness (P15 elements)



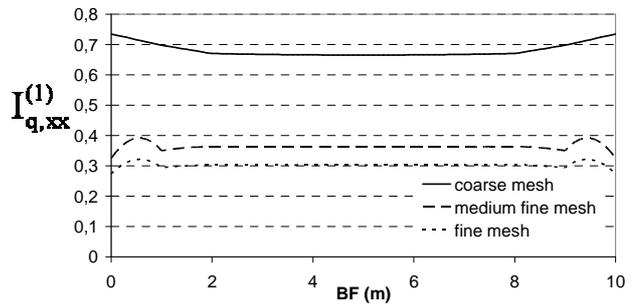
Quality of the FE solution: influence of the mesh fineness (P15 elements)



Quality of the FE solution: influence of the mesh fineness (P15 elements)

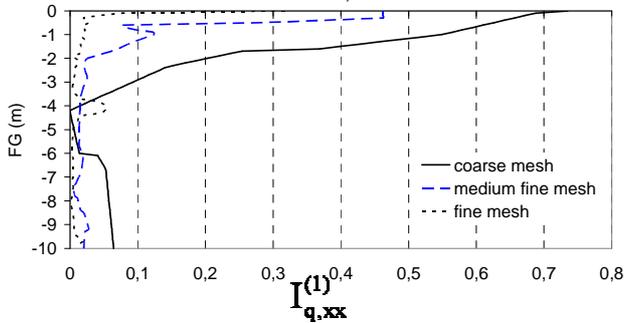


Quality of the FE solution: influence of the mesh fineness (P15 elements)

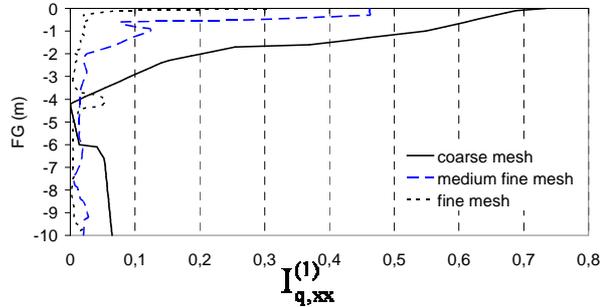


A2. 2 Quality of the FE solution for the 3D strip load on elastic half space problem along BF

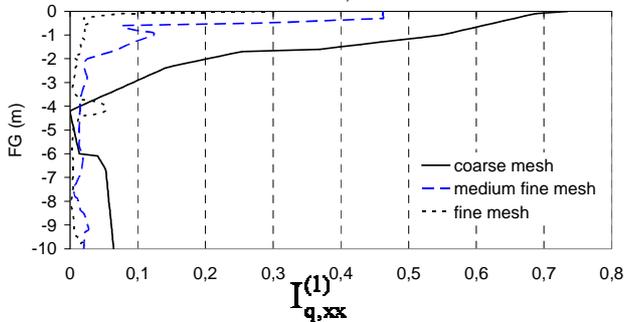
Quality of the FE solution: influence of the mesh fineness (P6 elements)



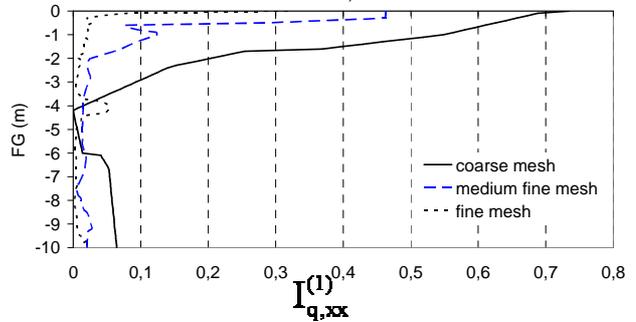
Quality of the FE solution: influence of the mesh fineness (P6 elements)

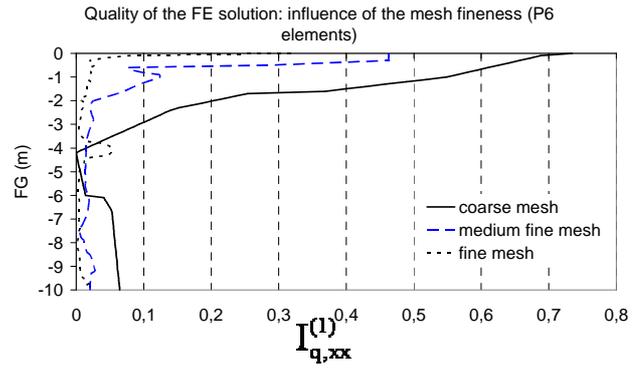
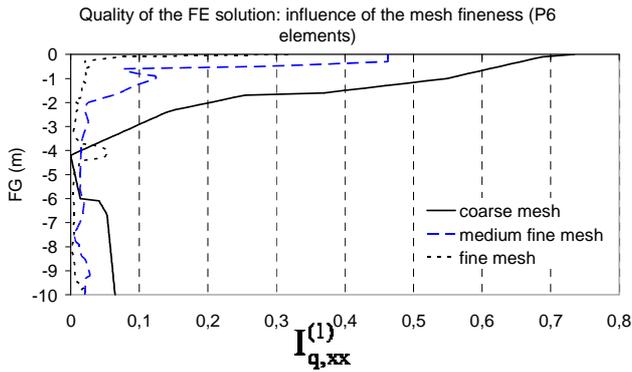


Quality of the FE solution: influence of the mesh fineness (P6 elements)



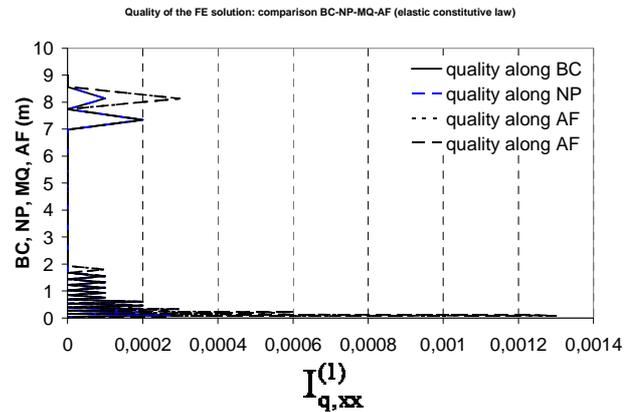
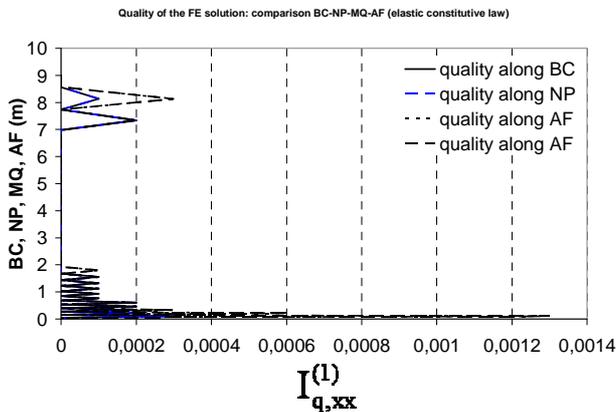
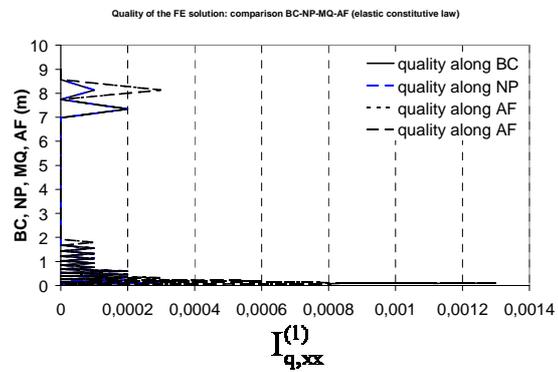
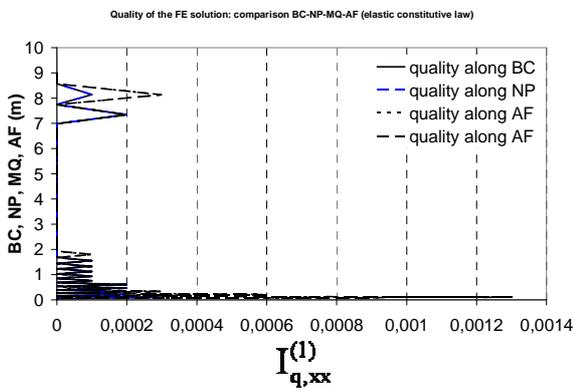
Quality of the FE solution: influence of the mesh fineness (P6 elements)



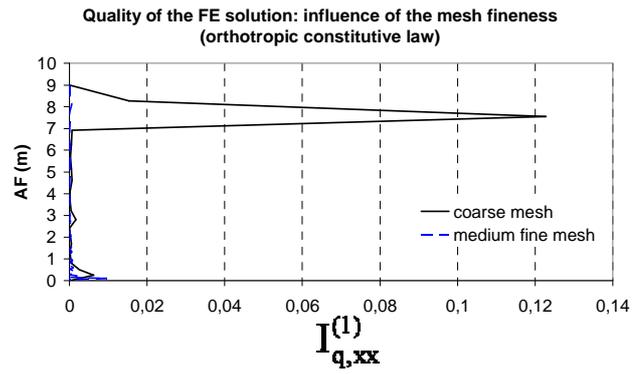
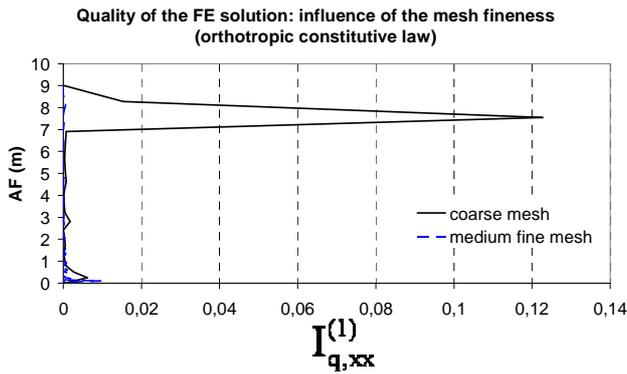
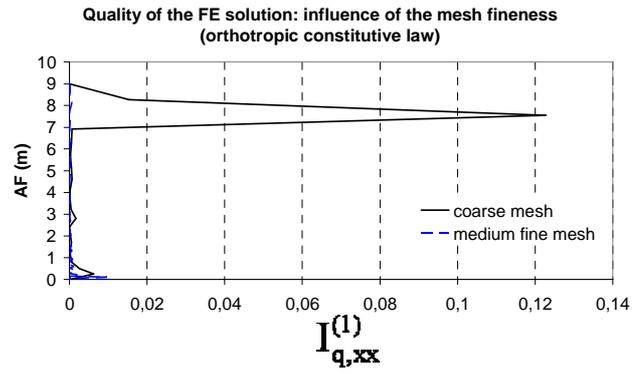
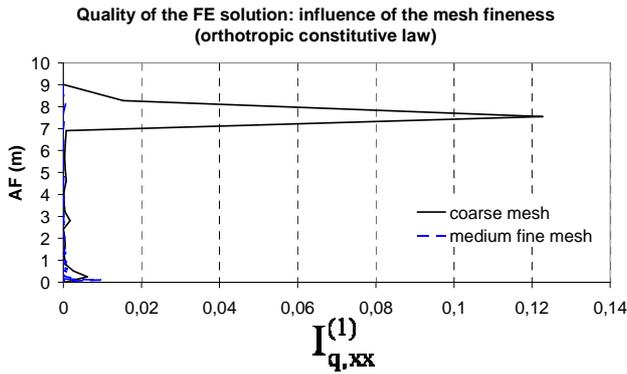


A2. 3 Quality of the FE solution for the 3D strip load on elastic half space problem along FG

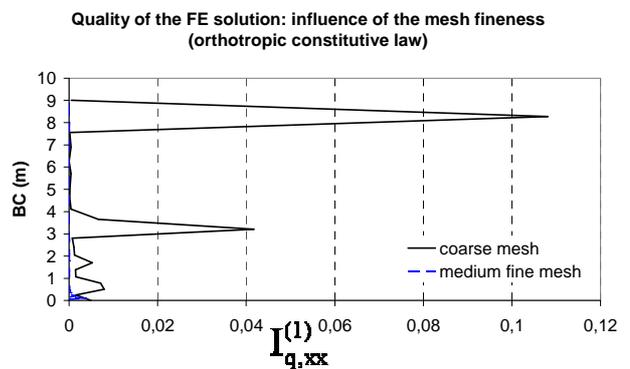
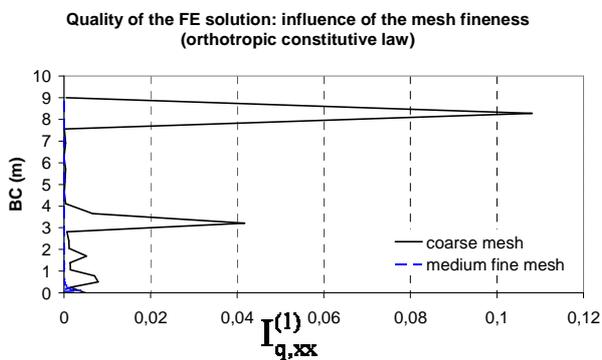
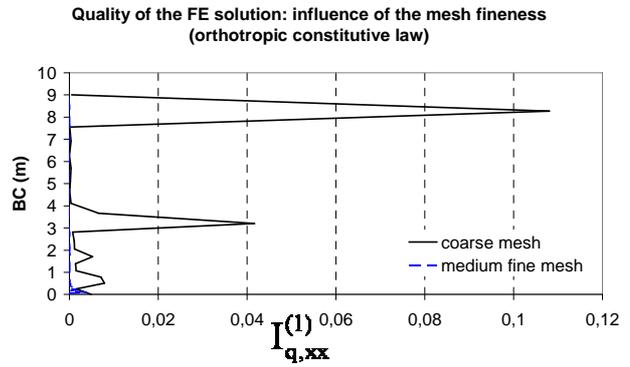
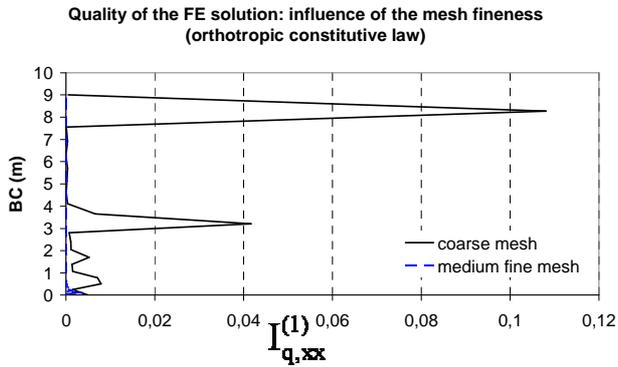
**Problème : cavité cylindrique de section circulaire soumise à une pression interne uniforme**



A2. 4 Quality of the FE solution for the 3D circular cavity expansion problem along BA

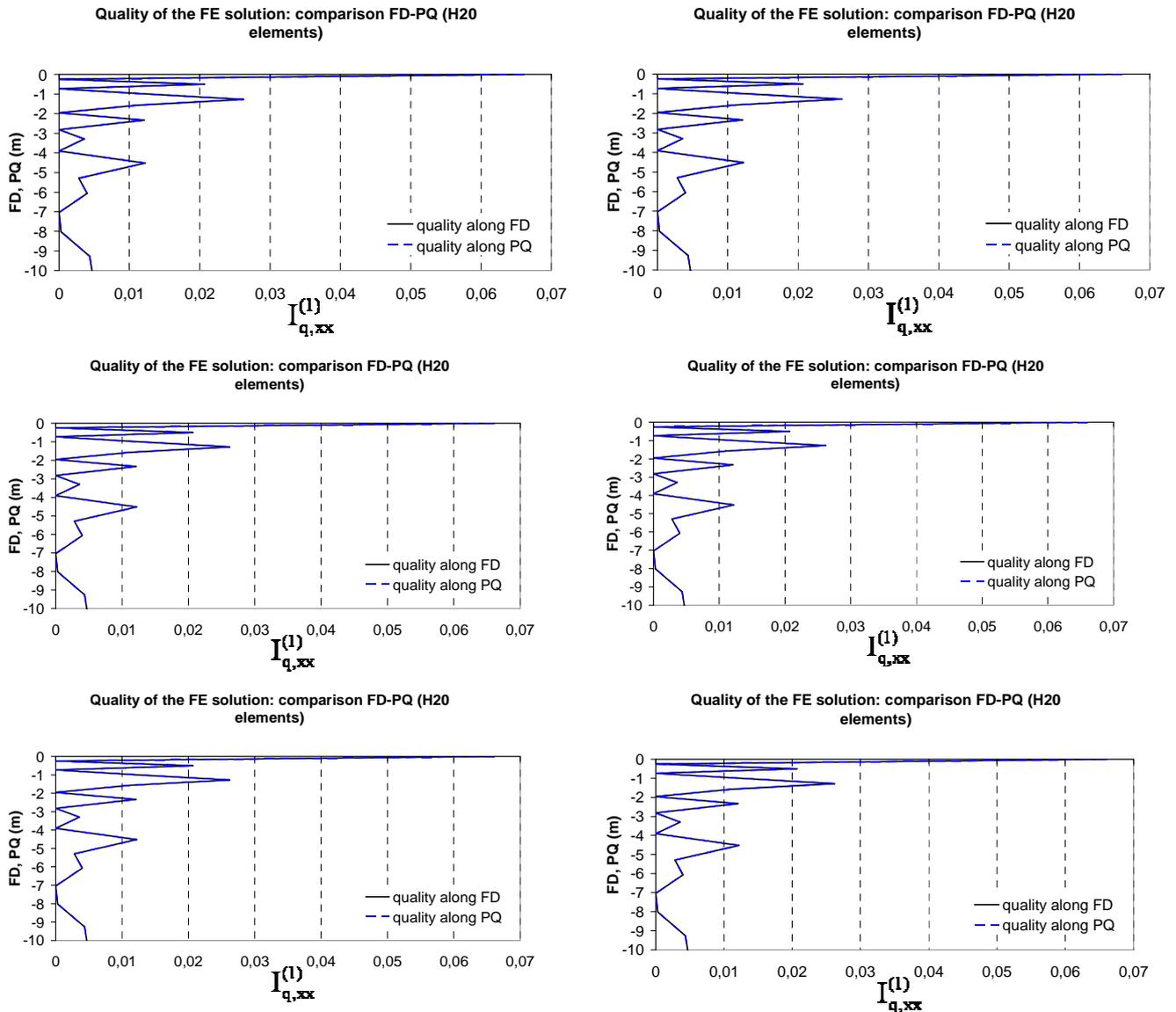


A2. 5 Quality of the FE solution for the 3D circular cavity expansion problem along AF



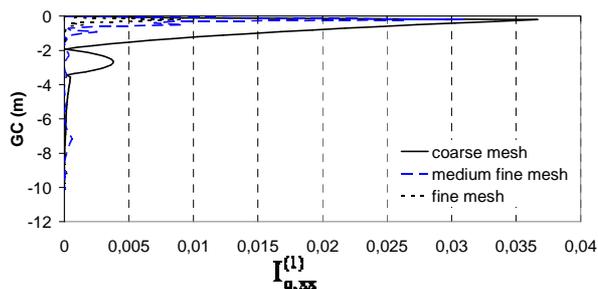
A2. 6 Quality of the FE solution for the 3D circular cavity expansion problem along BC

**Problème : fondation filante rigide. Pression uniforme appliquée sur un sur la fondation (interface sol-structure parfaitement lisse) appuyant sur massif de profondeur finie**

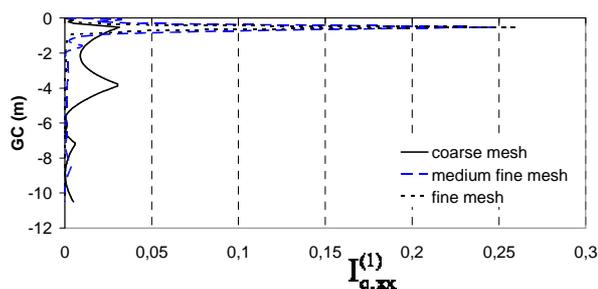


A2. 7 Quality of the FE solution for the 3D uniform vertical loading of smooth rigid strip on an elastoplastic half space problem along FD

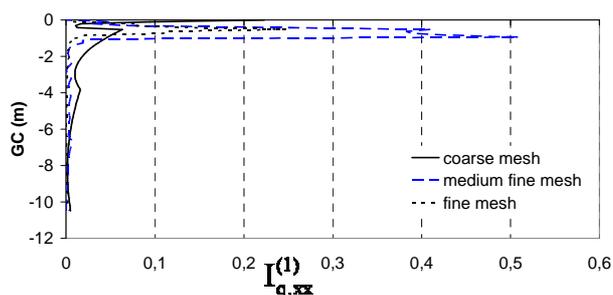
Quality of the FE solution: influence of the mesh fineness (H20 elements, 15cm foundation height)



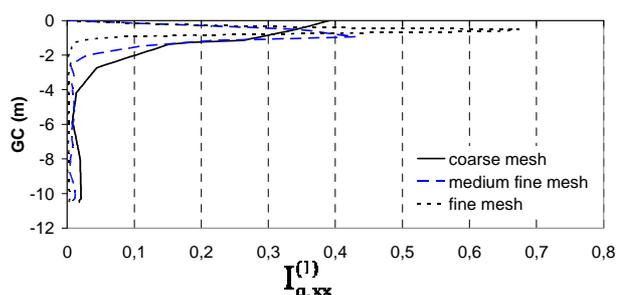
Quality of the mesh fineness (H20 elements, 50cm foundation height)



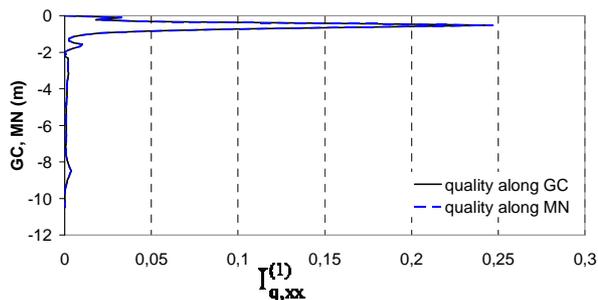
Quality of the FE solution: influence of the mesh fineness (P15 elements)



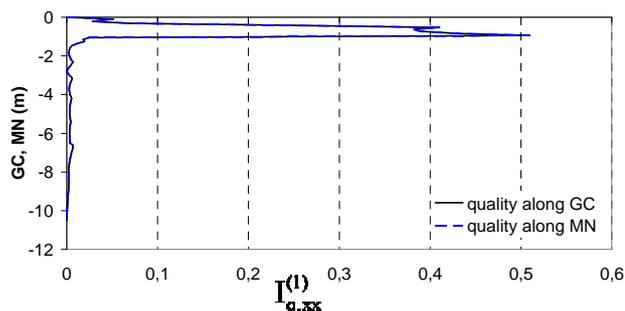
Quality of the FE solution: influence of the mesh fineness (P6 elements)



Quality of the FE solution: comparison GC-MN (H20 elements)

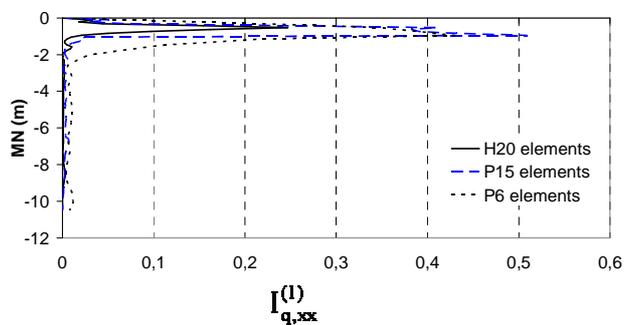


Quality of the FE solution: comparison GC-MN (P15 elements)

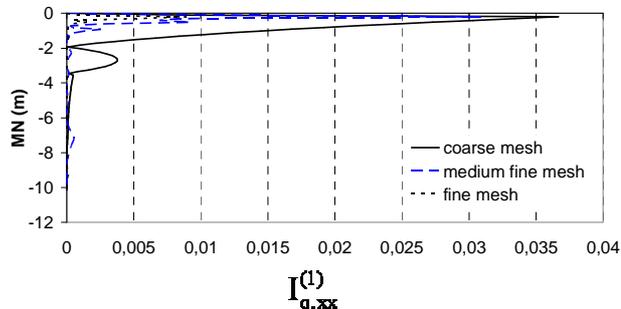


A2. 8 Quality of the FE solution for the 3D uniform vertical loading of smooth rigid strip on an elastoplastic half space problem along GC

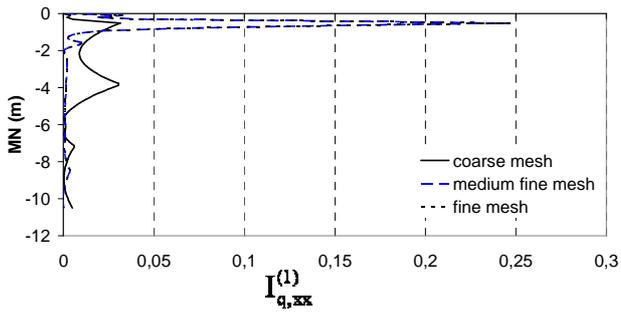
Quality of the FE solution: influence of the type of element



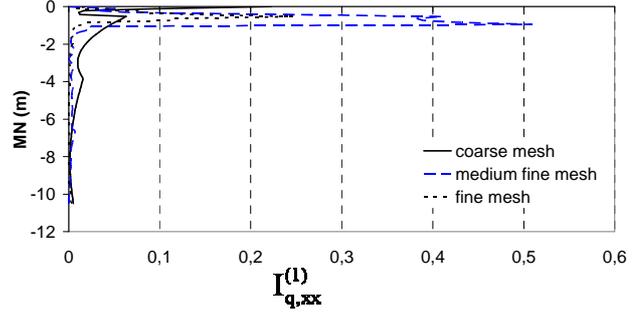
Quality of the FE solution: influence of the mesh fineness (H20 elements, 15cm foundation height)



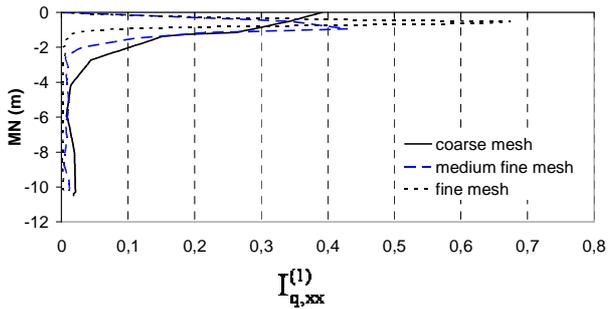
Quality of the FE solution: influence of the mesh fineness  
(H20 elements, 50cm foundation height)



Quality of the FE solution: influence of the mesh fineness  
(P15 elements)

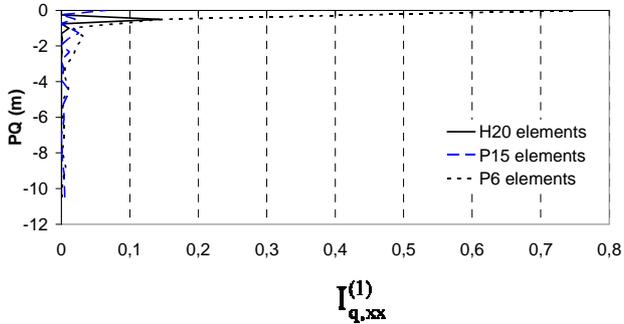


Quality of the FE solution: influence of the mesh fineness  
(P6 elements)

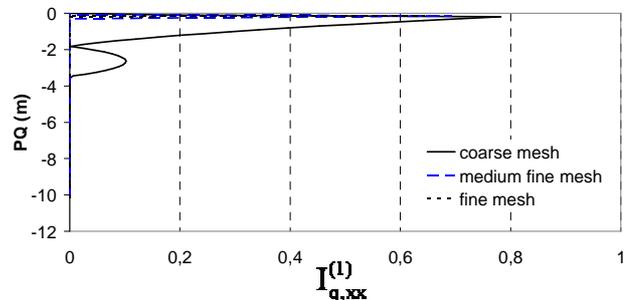


A2. 9 Quality of the FE solution for the 3D uniform vertical loading of smooth rigid strip on an elastoplastic half space problem along MN

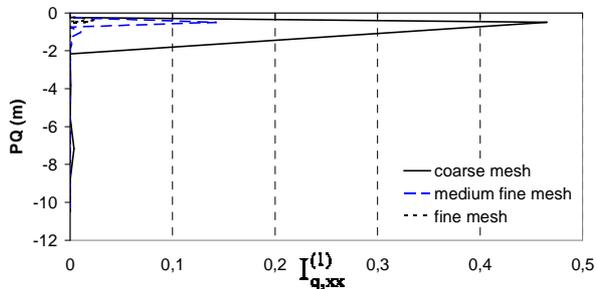
Quality of the FE solution: influence of the type of element



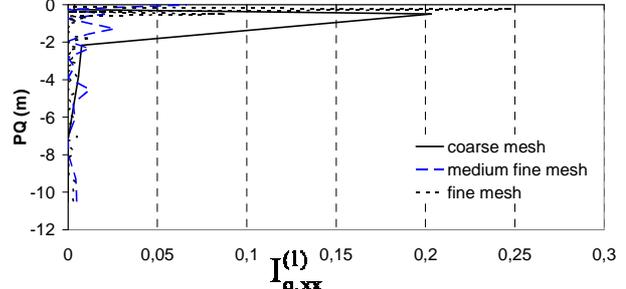
Quality of the FE solution: influence of the mesh fineness  
(H20 elements, 15cm foundation height)

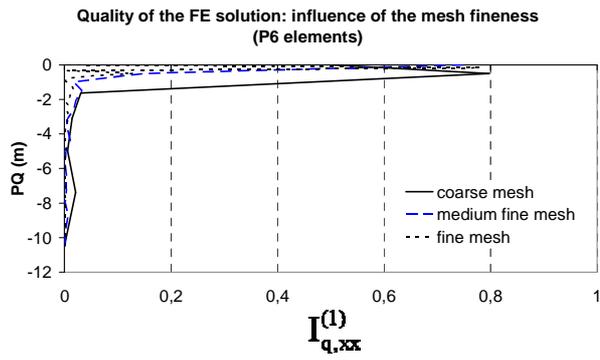


Quality of the FE solution: influence of the mesh fineness  
(H20 elements, 50cm foundation height)



Quality of the FE solution: influence of the mesh fineness  
(P15 elements)

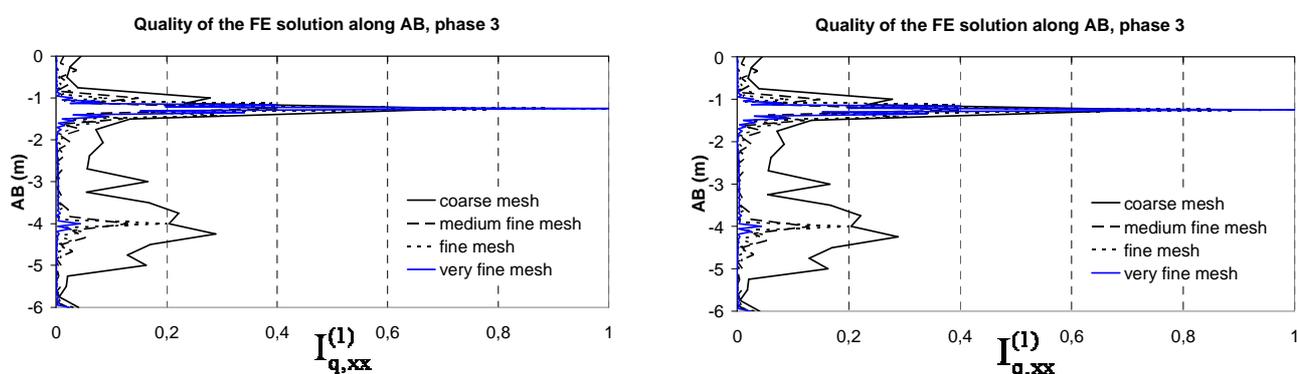




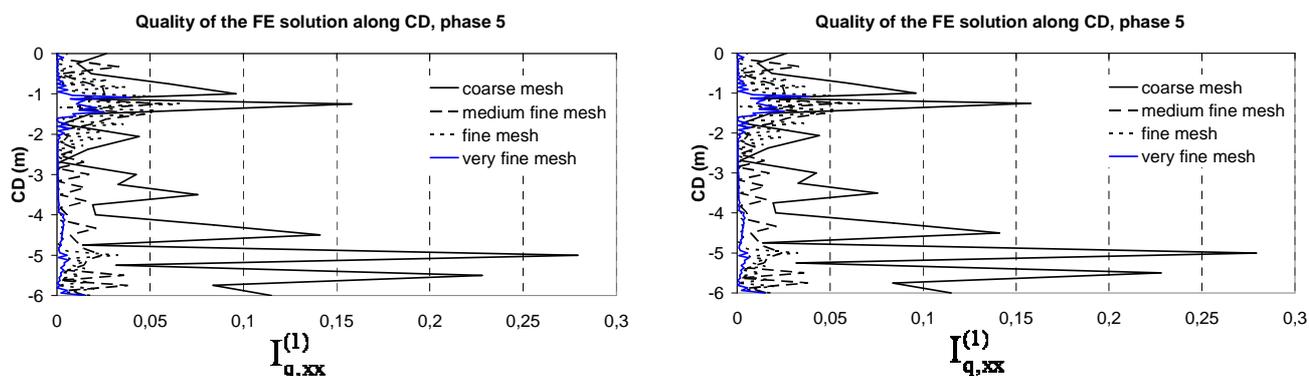
A2. 10 Quality of the FE solution for the 3D uniform vertical loading of smooth rigid strip on an elastoplastic half space problem along PQ

## ANNEXE 3

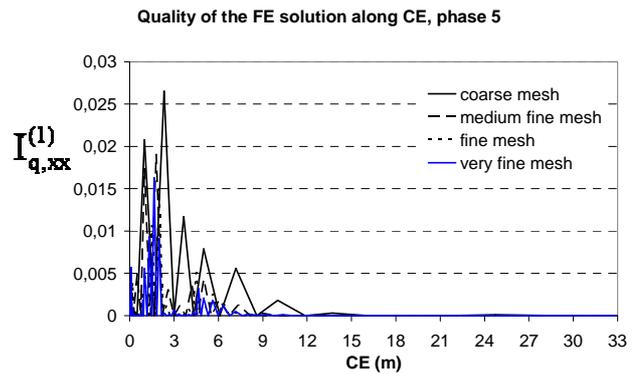
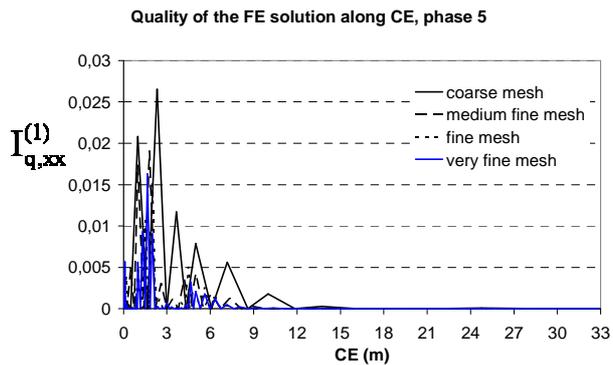
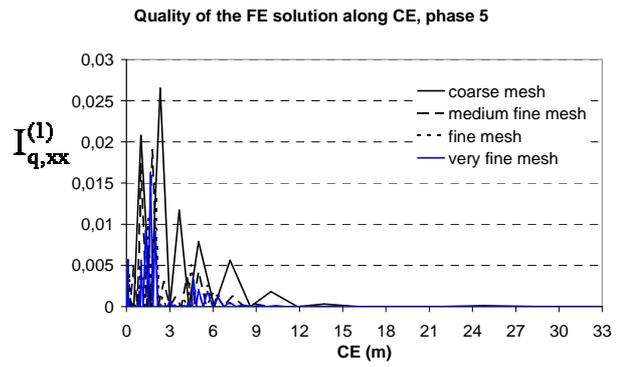
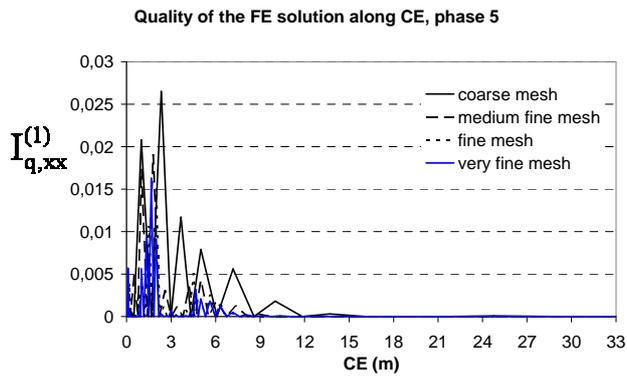
L'annexe 3 recueille un certain nombre de résultats qui ne pourraient pas avoir été exposées dans le chapitre IV (Development of quality indicators. Part II: application to a braced sheetpile excavation (Karlsruhe experimental site)). Nous offrons dans cette annexe d'autres résultats concernant l'étude de la qualité de la solution approchée d'une fouille devant un rideau de palplanches butonné (site expérimental de Karlsruhe).



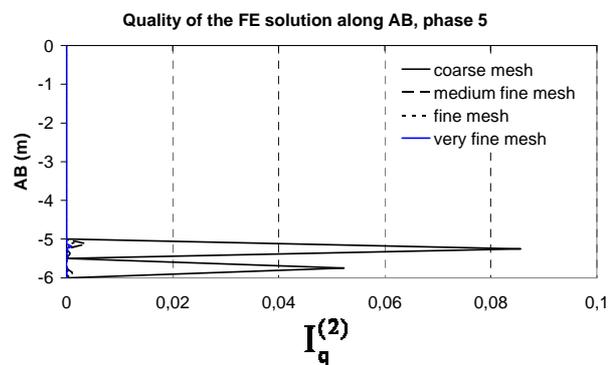
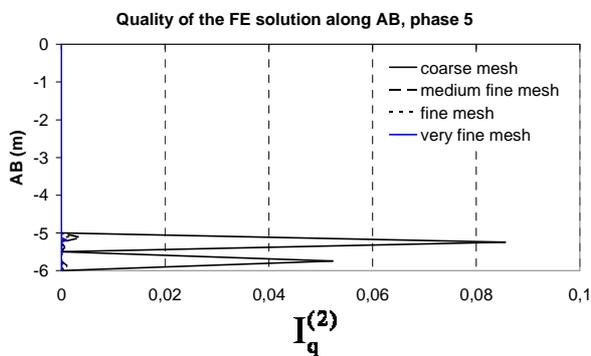
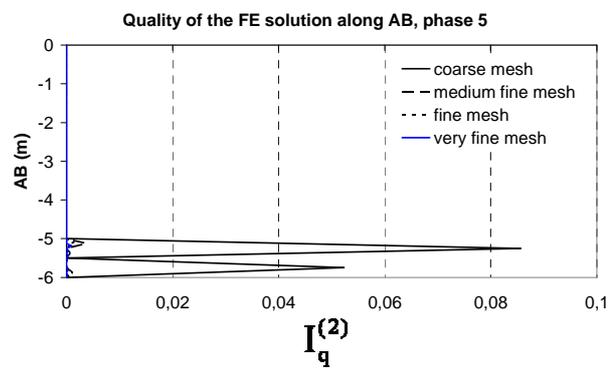
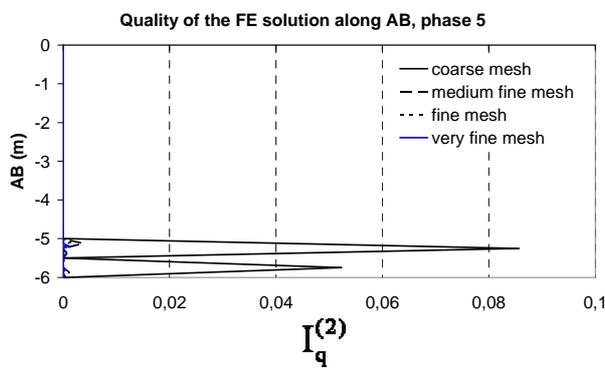
A3. 1 Quality of the FE analysis for the Karlsruhe braced sheetpile excavation along AB for  $I_{q,xx}^{(1)}$



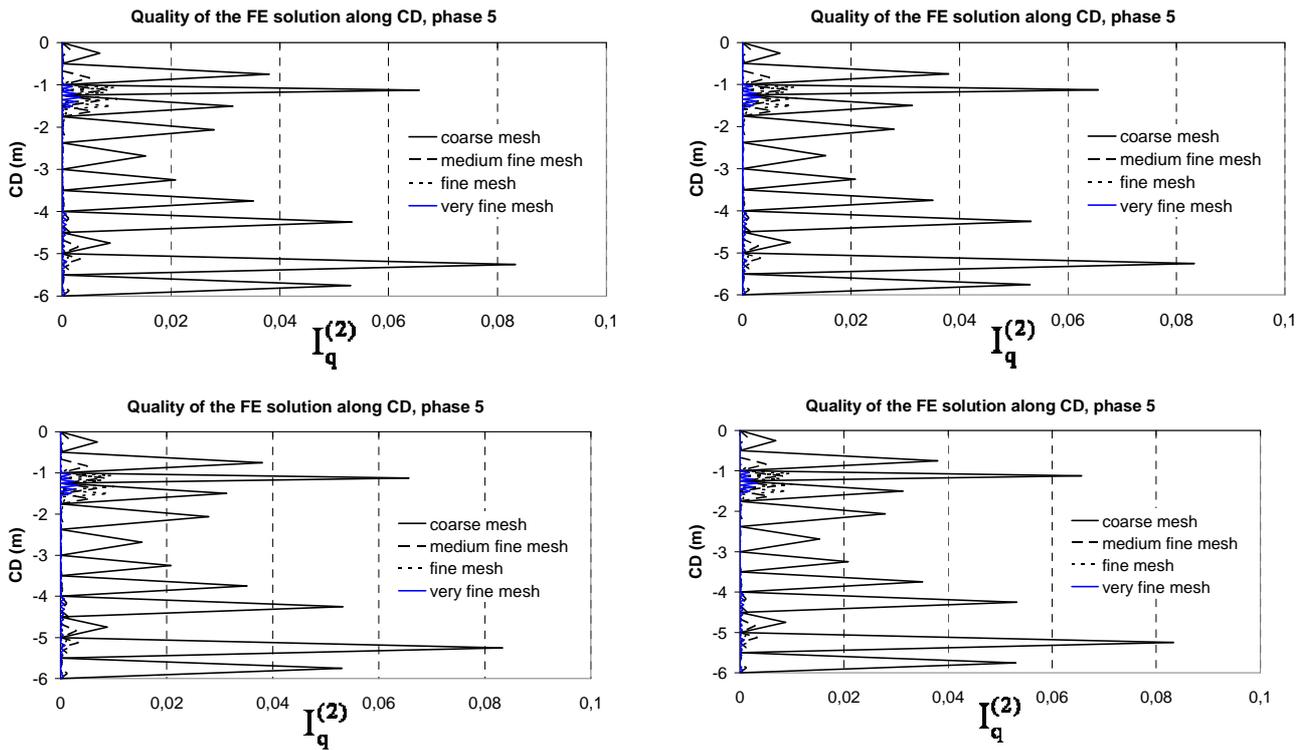
A3. 2 Quality of the FE analysis for the Karlsruhe braced sheetpile excavation along CD for  $I_{q,xx}^{(1)}$



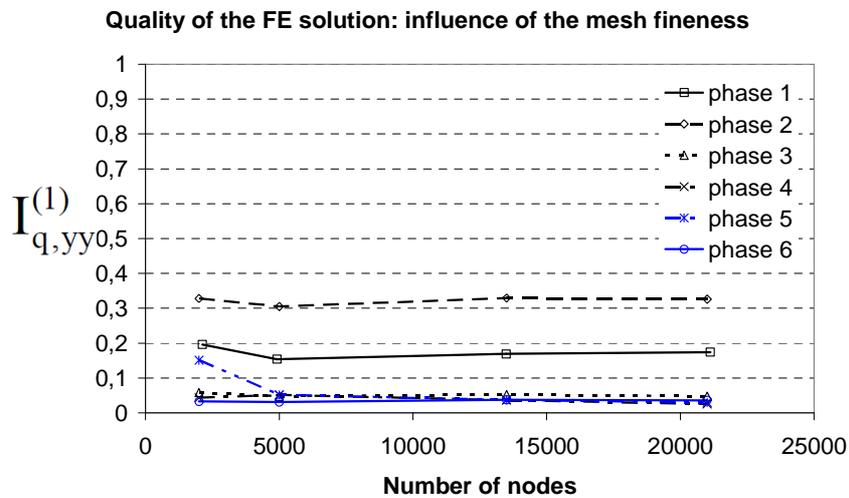
A3. 3 Quality of the FE analysis for the Karlsruhe braced sheetpile excavation along CE for  $I_{q,xx}^{(1)}$



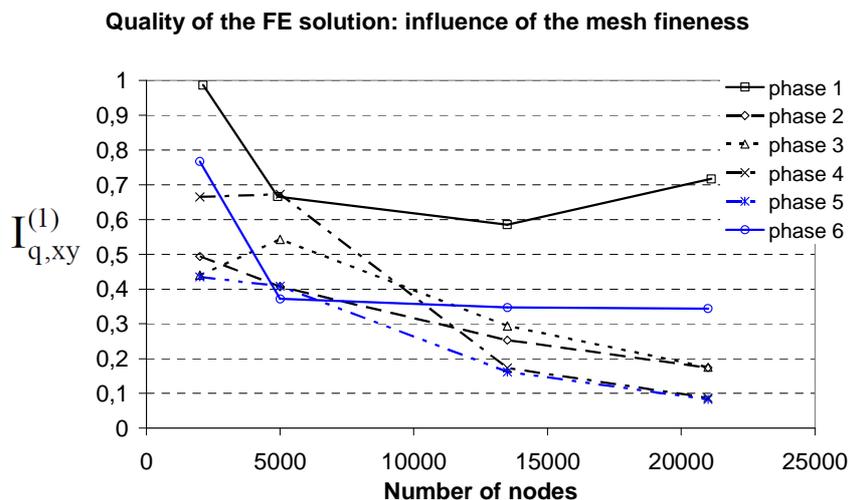
A3. 4 Quality of the FE analysis for the Karlsruhe braced sheetpile excavation along AB for  $I_q^{(2)}$



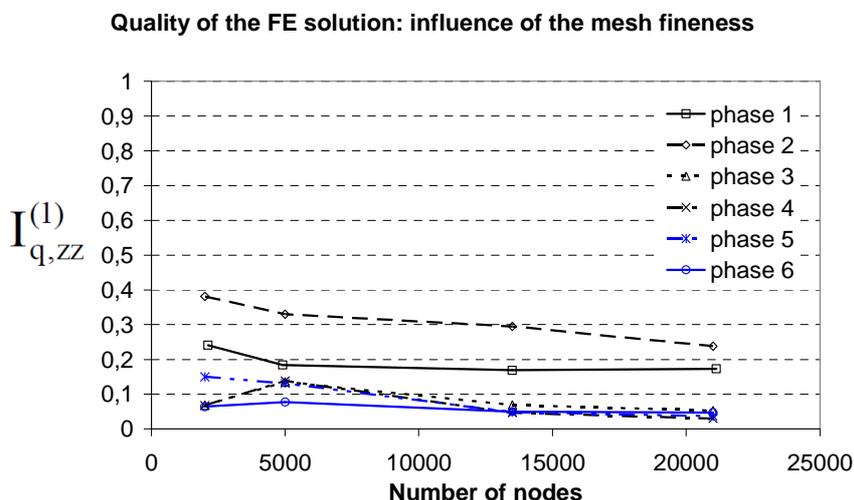
A3. 5 Quality of the FE analysis for the Karlsruhe braced sheetpile excavation along CD for  $I_q^{(2)}$



A3. 6 Quality of the FE analysis for the Karlsruhe braced sheetpile excavation: influence of the mesh fineness for all construction phases over all the entire mesh using  $I_{q,yy}^{(1)}$



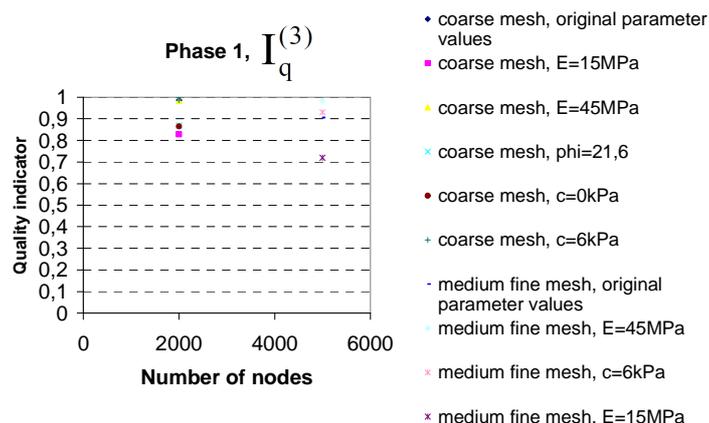
A3. 7 Quality of the FE analysis for the Karlsruhe braced sheetpile excavation: influence of the mesh fineness for all construction phases over all the entire mesh using  $I_{q,xy}^{(1)}$



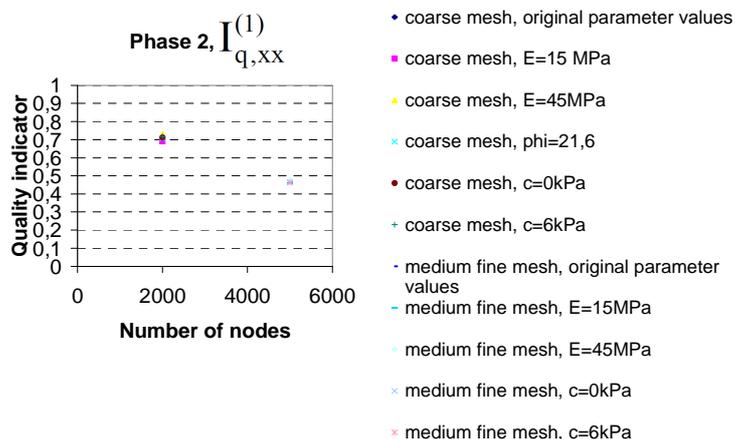
A3. 8 Quality of the FE analysis for the Karlsruhe braced sheetpile excavation: influence of the mesh fineness for all construction phases over all the entire mesh using  $I_{q,zz}^{(1)}$

## ANNEXE 4

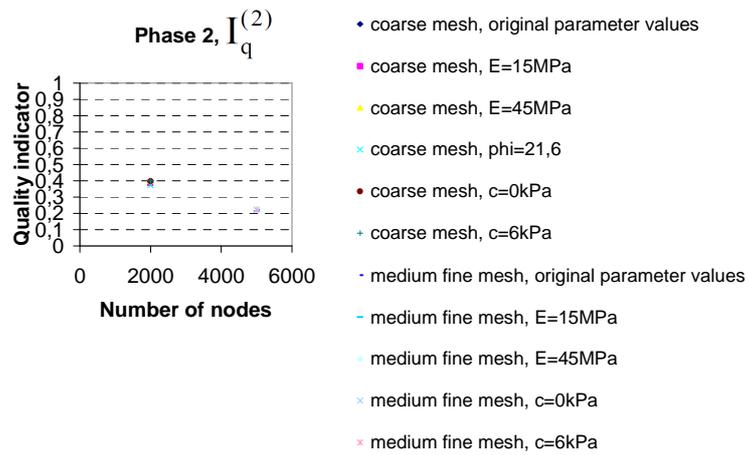
L'annexe 4 recueille un certain nombre de résultats qui ne pourraient pas avoir été exposées dans le chapitre IV (Development of quality indicators. Part II: application to a braced sheetpile excavation (Karlsruhe experimental site)). Nous offrons dans cette annexe d'autres résultats concernant l'étude de l'influence des paramètres mécaniques du sol sur les valeurs des indicateurs de qualité.



A4. 1 Quality of the FE analysis for the Karlsruhe braced sheetpile excavation: influence of the soil parameters for  $I_q^{(3)}$ , first excavation phase



A4. 2 Quality of the FE analysis for the Karlsruhe braced sheetpile excavation: influence of the soil parameters for  $I_{q,xx}^{(1)}$ , second excavation phase



A4. 3 Quality of the FE analysis for the Karlsruhe braced sheetpile excavation: influence of the soil parameters for  $I_q^{(2)}$ , second excavation phase

## ANNEXE 5

Cette annexe présente la structure des deux fichiers FORTRAN compris dans le module d'exécution MCNL ou nous avons implémenté les indicateurs de qualité. Une courte description de fichier blmcnl.f et fichier lmgcn3.f est donnée ci-dessous.

### **blmcnl.f**

Le fichier blmcnl.f représente un ensemble des sous-programmes pour la résolution d'un problème de mécanique à comportement non linéaire. Une brève description du fichier est donnée dans le tableau A5. 1.

La routine CALGOR selecte la méthode et l'algorithme de résolution selon la loi de comportement adoptée dans le calcul. Elle vérifie la compatibilité entre les méthodes d'exécution disponibles, le type de modèle (plane, axisymétrique, 3D) et les lois de comportement choisies dans le fichier « jeu de données ».

Les routines principales de fichier blmcnl.f sont : BLMCNL (décrit et réserve d'espace pour les vecteurs et les matrices), EXMCNL (assemblage et résolution d'un problème de comportement non linéaire par les méthodes de Newton-Raphson classiques) et SOMCNL (stockage des résultats qui peuvent ensuite être visualisées par le post-processeur Peggy).

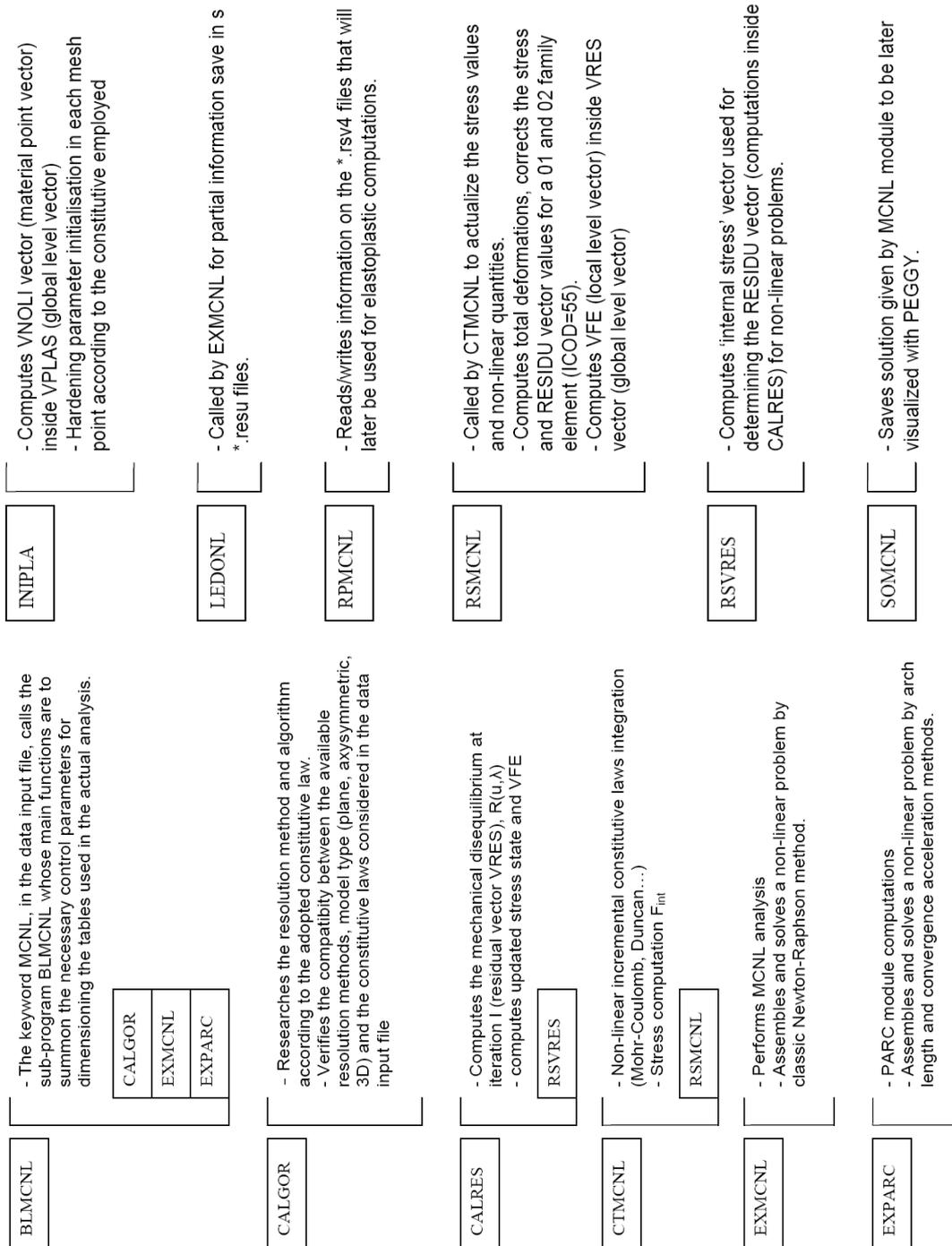
Des routines peuvent être appelées par autres routine, faisant part du même fichier ou d'un autre fichier afin d'effectuer des taches où des informations supplémentaires sont nécessaires (informations données par la routine appelée). Les routines appelées sont marquées XXXXX et insérées dans la description de la routine où elles sont utilisées (A5. 1 et A5. 2).

### **lmgcn3.f**

Le fichier lmgcn3.f représente un ensemble des sous-programmes pour l'impression et la préparation pour le post-traitement des problèmes pour un module de résolution en comportement non linéaire. Il est aussi responsable du

calcul de : contraintes principales, sauts de contraintes aux nœuds du maillage, déformations élastiques, déformations plastiques, etc.

Les routines du fichier lmgcn3.f sont souvent appelées par les routines du fichier blmcnl.f, surtout pas les routines EXMCNL et EXPARC. Une brève description du fichier FORTRAN lmgcn3.f est donnée dans le tableau A5. 2.



A5. 1 Organigramme blmcnl.f

<b>CALDPQ</b>	Computes the stress tensor invariants	<b>IMSORT</b>	Saves/prints the results for the nodes at the end of each Increment
<b>CALERR</b>	Computes the stress tensor error at element nodes	<b>SOMCNL</b>	
<b>DEPGMS</b>	Saves Information for PEGGY	<b>INKNTE</b>	Computes the inverse numbering matrix
<b>DPRINC</b>	Computes the principal stresses	<b>LOGAUS</b>	Gauss/Hammer points print logo
<b>ECRESU</b>	Saves the results on a formatted file	<b>RVCOEL</b>	Computes the elastic deformations
<b>ECRIPG</b>	Saves stresses, total deformations and plastic strain results for the integration points	<b>SORDPT</b>	Prints the plastic strain tensor using DPL keyword in the input data file
<b>EXTREM</b>	Computes the maximum and minimum values for a given quantity	<b>SORDTO</b>	Prints the total displacement tensor using DTO keyword in the input data file
<b>IMCROU</b>	Prints the hardening parameter	<b>SORNDP</b>	Computes/saves the plastic strain norms
<b>IMPDBG</b>	Prints the stresses, constitutive law and the hardening parameter	<b>SORPRS</b>	Writes an external file containing the nodal pore pressure variation for an undrained analysis using the PRS keyword in the input data file
<b>IMPGAU</b>	Saves/prints the results for the integration points at the end of each increment	<b>STOCKA</b>	Saves information that can be later treated with PEGGY
<b>IMPLOC</b>	Prints the iterative process vector at local level	<b>SUIVIC</b>	Integrates and writes information from the MCNL execution module
<b>IMPMET</b>	Prints additional commentary		



## ANNEXE 6

Les fichiers FORTRAN lmgcn3.f et blmcnl.f ont été modifiés afin de tenir compte des indicateurs de qualité nouvellement introduites. Les indicateurs ont été programmés dans la routine CALERR appartenant au fichier lmgcn3.f. Les nouvelles lignes de programmation dans les deux fichiers sont présentées ci-dessous.

## - programmation dans lmgcn3.f:

```

=====
      SUBROUTINE CALDPQ
=====
C DEFINITION :
C   CALCUL DES INVARIANTS DU TENSEUR DES CONTRAINTES
C
C=====
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
C
      DIMENSION VAP(*),P1(*),P2(*)
C
      DATA DEUX,TROIS/2.D0,3.D0/
C
C----- Calcul de P, Q, epsilon_v, epsilon_d
C
      DO 10 I=1,NINCR
      II=(I-1)*4+1
      P1(I)=(VAP(II)+VAP(II+1)+VAP(II+3))/TROIS
      P2(I)=(VAP(II)-VAP(II+1))**2+(VAP(II+1)-VAP(II+3))**2
      P2(I)=(P2(I)+(VAP(II)-VAP(II+3))**2)/DEUX
      P2(I)=DSQRT(P2(I))
      P1(I)=-P1(I)
10  CONTINUE
      END

=====
      SUBROUTINE CALERR
C=====
Ccv ERR 2010.04.13 D
C   SUBROUTINE CALERR(KNTE, KPNT, KTYPE, KNEQ, KPGRE, KPROP, KREP,
C   & KINTE2, KLOCE, KTRAV, KDLNC, KNI, KPNI, VCOEL, VSAUT,
C   & TOLSAU, MERR, CVF, VCORG, VCONE, VCORE, VDIMP, VDLE, VEFC, VINT, VNOLI,
C   & VPLAS, VPROP, VREPV, VUT, VTRAV)
C   SUBROUTINE CALERR(KNTE, KPNT, KPGRE, KTRAV, KNI,
C   & KPNI, VCOEL, VSAUT, TOLSAU, MERR)
C, VCORG, KNTE, KPNT,
C   & KTYPE, KPGRE, KPROP, VPROP, KDLNC,
C   & VDIMP, KREP, VREPV, KNEQ, KINTE2, VUT, VPLAS, IPLAS, MPINT2, KLOCE,
C   & VCORE, VDLE, VINT, VCONE, VNOLI, VTRAV, VEFC)
C   SUBROUTINE CALERR(KNTE, KPNT, KPGRE, KTRAV, KDLNC, KNI,
C   & KPNI, VCOEL, VSAUT, TOLSAU, MERR, VCORG, KTYPE, KPROP, VPROP, VDIMP,
C   & KREP, VREPV, KNEQ, KINTE2, VUT, VPLAS, KLOCE, VCORE, VDLE, VINT,
C   & VCONE, VNOLI, VEFC, VSAUT)
C, VCORG, KDLNC)
C reference appel 2010.04.13
=====
C DEFINITION :

```

New variables are introduced. They are used to express the quality indicators.

```

C      Calcul des sauts de contraintes aux noeuds du maillage
C
C=====
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C
COMMON/CODL/NDIM,NNT,NDLN,NDLT
COMMON/CONT/NCONE,NCONT
COMMON/ELEM/NGRPE,NELT,NNEL,NTYPE,NCG,NCM,NPREL
COMMON/ESEXE/MEXE,MR,MP,MFICH(10)
COMMON/RGDT/ICOD,INEL,IDLE
COMMON/FINT/MPINT1,MPINT2,NENI,NENIT
COMMON/PINL/IPLAS
CHARACTER*8 KTYPE
DIMENSION KPNT( * ),KNTE( * ),VSAUT( * ),KPGRE( * ),
& KNI( * ),KPNI( * ),VCOEL( * ),KTRAV( * ),KDLNC( * ),KTYPE( * ),
& KPROP( * ),VPROP( * ),VDIMP( * ),KREP( * ),VREP( * ),KNEQ( * ),KINTE2( * ),
& VUT( * ),VPLAS( * ),KLOCE( * ),VCORE( * ),VDLE( * ),VINT( * ),VCONE( * ),
& VNOLI( * ),VEFC( * )
C
c      DIMENSION VCORG( * ),KPNT( * ),KNTE( * ),VSAUT( * ),KPGRE( * ),
Ccv ERR 2010.04.13 D
c      & KNI( * ),KPNI( * ),VCOEL( * ),KTRAV( * ),KDLNC( * ),VCONE( * ),VTRAV( * ),
c      & KNEQ( * ),KPROP( * ),KREP( * ),KINTE2( * ),KLOCE( * ),VPROP( * ),KTYPE( * ),
c      & VDIMP( * ),VREP( * ),VUT( * ),VPLAS( * ),VCORE( * ),VDLE( * ),VINT( * ),
c      & VNOLI( * )
c
c      & KNI( * ),KPNI( * ),VCOEL( * ),KTRAV( * )
Ccv ERR 2010.04.13 F
      DIMENSION SIG(100),SAUT(6),VCONT(100,6),SMAXT(6),SIGRFGLOBAL(6),
& VSIGMAMAX(2),KPSEG(100000),KNTE2(100000),KPNT2(100000),
& KNS2(100000),VCORG2(200000)
C
REAL NX,NY,NORMEN,P1X,P1Y,P2X,P2Y,P3X,P3Y,P4X,P4Y,
& P5X,P5Y,P6X,P6Y,P7X,P7Y,P8X,P8Y,TX,TY,NORMET,
& SIGMANX,SIGMANY,SIGMATX,SIGMATY,
& SIGMAN1,SIGMAN2,SIGMAT1,SIGMAT2
DATA ZERO,PETIT/0.D0,1.D-6/
Ccv ERR 2010.04.13 D
Ceb
CHARACTER*16 NOMFERR,FICSTO,FICRES,FICGAU
CHARACTER*80 VERSION,UNIC
CHARACTER*40 C40
CHARACTER*4 BLOC
CHARACTER*5 ETUDE,CALCU
COMMON/CALER/NOMFERR
COMMON/FSTOK/FICSTO,FICRES,FICGAU
Ceb
Ccv ERR 2010.04.13 F
      ICOD=72
      CALL CONTR(VCORG,KNTE,KPNT,KTYPE,KPGRE,KPROP,VPROP,KDLNC,
& VDIMP,KREP,VREP,KNEQ,KINTE2,VUT,VPLAS,IPLAS,MPINT2,KLOCE,
& VCORE,VDLE,VINT,VCONE,VNOLI,VCOEL,VEFC,0)
C ici enprincipe on a les contraintes aux noeuds dans VTRAV
C a vérifier soigneusement
      JOEL=NCONE*NELT
C
C----- calcul du numel inverse
      NDLT=NDIM*NNT
      CALL INKNT(KNTE,KPNT,KNI,KPNI,KPGRE,0)
C calcul de IERR / MERR
      IERR=MERR/1000
      MERR=MERR-1000*IERR
      print *, 'MERR,IERR=',MERR,IERR
C
C----- cas T3 - création d'un pseudo maillage en T6
C-- KNS2 Tableau comportant les numeros des noeuds en position sur
C-- chaque segment
C-- KPSEG Tableaux stockant la matrice des noeuds milieux de chaque segment
C-- (les indices de colonnes et de lignes sont les numeros des noeuds
C-- de chaque segment)
      IF ((KPNT(2)-KPNT(1)).EQ.3) THEN

```

If ICOD=72, the nodal values are computed and saved.

```

IG=NNT+1
DO I=1,NELT
J=KPNTTE(I)
PRINT *, 'kpnte,knte', J, KNTE(J), KNTE(J+1), KNTE(J+2)
KNS2(J)=KNTE(J+1)
KNS2(J+1)=KNTE(J+2)
KNS2(J+2)=KNTE(J)
DO K=0,2
PRINT *, 'kpseg1', J, KNTE(J+K), KNS2(J+K)
IF (KPSEG((KNTE(J+K)-1)*NNT+KNS2(J+K)).EQ.0) THEN
  KPSEG((KNTE(J+K)-1)*NNT+KNS2(J+K))=IG
  KPSEG((KNS2(J+K)-1)*NNT+KNTE(J+K))=IG
  PRINT *, 'kpseg2', KNTE(J+K)-1, KNS2(J+K),
&      (KNTE(J+K)-1)*NNT+KNS2(J+K), IG
  IG=IG+1
ENDIF
ENDDO
ENDDO
DO I=1,NELT
I1=KPNTTE(I)
KPNTTE2(I)=KPNTTE(I)+(I-1)*3
I2=KPNTTE2(I)
DO J=0,2
  KNTE2(I2+J)=KNTE(I1+J)
  VCORG2(2*KNTE2(I2+J)-1)=VCORG(2*KNTE(I1+J)-1)
  VCORG2(2*KNTE2(I2+J))=VCORG(2*KNTE(I1+J))
ENDDO
I2=KPNTTE2(I)+3
PRINT *, 'test kpseg', KPSEG((KNTE(I1+J)-1)*NNT+KNS2(I1+J))
DO J=0,2
IF (KPSEG((KNTE(I1+J)-1)*NNT+KNS2(I1+J)).NE.0) THEN
  KNTE2(I2+J)=KPSEG((KNTE(I1+J)-1)*NNT+KNS2(I1+J))
  PRINT *, 'modif kpseg', I2+J, KNTE2(I2+J)
  VCORG2(2*KNTE2(I2+J)-1)=0.5*(VCORG(2*KNTE(I1+J)-1)+
&      VCORG(2*KNS2(I1+J)-1))
  VCORG2(2*KNTE2(I2+J))=0.5*(VCORG(2*KNTE(I1+J))+
&      VCORG(2*KNS2(I1+J)))
ENDIF
ENDDO
PRINT *, 'mail', KPNTTE(I), KNTE(KPNTTE(I)),
&      KNTE(KPNTTE(I)+1), KNTE(KPNTTE(I)+2)
PRINT *, 'mail2', KPNTTE2(I), KNTE2(KPNTTE2(I)),
&      KNTE2(KPNTTE2(I)+1), KNTE2(KPNTTE2(I)+2),
&      KNTE2(KPNTTE2(I)+3), KNTE2(KPNTTE2(I)+4),
&      KNTE2(KPNTTE2(I)+5)
ENDDO
DO I=1,NELT
I1=KPNTTE(I)
DO J=0,2
PRINT *, 'coor', J, KNTE(I1+J),
&      VCORG(2*KNTE(I1+J)-1),
&      VCORG(2*KNTE(I1+J))
ENDDO
ENDDO
DO I=1,NELT
I2=KPNTTE2(I)
DO J=0,5
PRINT *, 'coor2', J, KNTE2(I2+J),
&      VCORG2(2*KNTE2(I2+J)-1),
&      VCORG2(2*KNTE2(I2+J))
ENDDO
ENDDO
ENDIF
C
C----- calcul des sauts de contraintes
C
  NCONT=2*NDIM
  NN=NCONT*NNT
  VSIGMAMAX(1)=ZERO
  VSIGMAMAX(2)=ZERO
C
C5 DO 5 I=1,NN
  VSAUT(I)=ZERO
DO I=1,NN
  VSAUT(I)=ZERO
ENDDO

```

For EER=0, the original analysis of a mechanical nonlinear problem is performed

For ERR=1, MCNL analysis takes into account the computation of the first numerical auqlity indicator for both 2D and 3D problems.

Implementation of the second and third quality indicators for 2D analyses.

Implementation of the quality indicators for T3 elements.

```

DO 6 I=1,6
SAUT(I)=ZERO
SMAXT(I)=ZERO
DO 6 J=1,100
6 VCONT(J,I)=ZERO
DO 7 I=1,100
7 SIG(I)=ZERO
DO 8 I=1,6
8 SIGRFGLOBAL(I)=ZERO
C
C --- boucle 10 sur les noeuds du maillage
JP=0
DO 10 IN=1,NNT
I1=KPNI(IN)
I2=KPNI(IN+1)-1
C
C----- boucle 20 recherche de l ensemble des elements JN
C auxquels appartient le noeud IN
JINEL=0
DO 20 I=I1,I2
JN=KNI(I)
IE1=KPNTI(JN)
IE2=KPNTI(JN+1)-1
IPLACE=0
JINEL=JINEL+1
C
C----- recherche des contraintes au noeud IN pour les elements JN
DO 40 J=IE1,IE2
JPLACE=KNTE(J)
IPLACE=IPLACE+1
IF (IN.EQ.JPLACE) GOTO 41
40 CONTINUE
41 ICOEL=(JN-1)*NCONE
DO 30 J=1,NCONT
30 VCONT(JINEL,J)=VCOEL(J+NCONT*(IPLACE-1)+ICOEL)
20 CONTINUE
C
IF(IERR.EQ.0) THEN
C
C----- calcul du saut maximal pour chacune des composantes
C du tenseur des contraintes au noeud IN
C
DO 50 J=1,NCONT
SMAX=ZERO
DO 51 I=1,JINEL
51 SIG(I)=VCONT(I,J)
C --- calcul de la contrainte de reference
CALL EXTREM(SIG,SIGMIN,SIGMAX,JINEL)
SIGRF=SIGMIN
IF (SIGRF.EQ.ZERO) SIGRF=SIGMAX
Ccv ERR 2010.04.13 D
SIGRF=MAX(ABS(SIGMIN),ABS(SIGMAX))
SIGRF=0.D0
DO I=1,JINEL
SIGRF=SIGRF+SIG(I)
ENDDO
SIGRF=ABS(SIGRF)/DBLE(JINEL)
SIGRF=1.D0
Ccv ERR 2010.04.13 F
IF (SIGRF.EQ.ZERO) GOTO 52
IF (DABS(SIGRF).LE.PETIT) GOTO 52
C --- calcul des sauts relatifs
DO 60 K=1,JINEL
DO 60 L=1,JINEL
SAUT(J)=(VCONT(K,J)-VCONT(L,J))/SIGRF
SAUT(J)=ABS(SAUT(J))
60 IF (SAUT(J).GT.SMAX) SMAX=SAUT(J)
52 SAUT(J)=SMAX
50 CONTINUE
C
C----- recherche des noeuds ou les sauts ne sont pas admissibles
ICONT=0
DO 90 I=1,NCONT
IF (SAUT(I).GT.TOLSAU) THEN
ICONT=ICONT+1

```

Implementation of the quality indicators for Q4 elements.

Implementation of the quality indicators for T6 elements.

Implementation of the quality indicators for Q8 elements.

```

        IF (ICONT.EQ.1) THEN
            JP=JP+1
            KTRAV(JP)=IN
        ENDIF
    ENDIF
90    CONTINUE
C
C --- stockage des sauts aux noeuds du maillage
    DO 70 J=1,NCONT
70    VSAUT(J+(IN-1)*NCONT)=SAUT(J)
C
C
C
        ELSEIF(IERR.EQ.1) THEN
C
C ---- erreur concernant les contraintes max et min aux noeuds
C      erreur= (abs(contr max)-abs(contr min))/max global abs(contr)
C
            DO 510 J=1,NCONT
                SMAX=ZERO
                DO 511 I=1,JINEL
511    SIG(I)=VCONT(I,J)
C --- recuperation des contraintes min et max au noeud
                CALL EXTREM(SIG,SIGMIN,SIGMAX,JINEL)
                SIGRF=MAX(ABS(SIGMIN),ABS(SIGMAX))
C --- actualisation de la contrainte de reference pour la normalisation
                IF (SIGRF.GT.SIGRFGLOBAL(J)) THEN
                    SIGRFGLOBAL(J)=SIGRF
                ENDIF
C --- calcul premiere indicateur de qualite avant normalisation
                SAUT(J)=(ABS(SIGMAX)-ABS(SIGMIN))
                SAUT(J)=ABS(SAUT(J))
510    CONTINUE
C
C --- stockage des sauts aux noeuds du maillage
            DO 810 J=1,NCONT
810    VSAUT(J+(IN-1)*NCONT)=SAUT(J)
C
C
C
        ELSEIF((IERR.EQ.2).OR.(IERR.EQ.3)) THEN
C
C ---- erreur concernant les projections de la contrainte normale
C      a l'interface entre deux elements T6 ou Q8 pour calculs 2D et 3D
C      pour ERR=2 (projection suivant la normale de la contrainte normale)
C      erreur=(contr.normale1+contr.normale2)/max global abs(contr.normale)
C
C
C      pour ERR=3 (projection suivant la tangente de la contrainte normale)
C      erreur=(contr.tangentel+contr.tangente2)/max global
C      abs(contr.tangente)
C      les contraintes sont celles aux noeuds ce calcul est fait uniquement
C      aux noeuds
C      milieux de segments donc pour les cas JINEL=2
C --- cas 2D
            IF(NDIM.EQ.2) THEN
                FIRSTCALCUL=0
                SIGMAN1=0.D0
                SIGMAT1=0.D0
                SIGMAN2=0.D0
                SIGMAT2=0.D0
C --- boucle sur les elements du noeud
                DO 220 I=I1,I2
                    JN=KNI(I)
                    IE1=KPNTE(JN)
                    IE2=KPNTE(JN+1)-1
                    IPLACE=0
C --- boucle sur les noeuds de l'element
                DO 240 J=IE1,IE2
                    JPLACE=KNTE(J)
                    IPLACE=IPLACE+1
                    IF(IN.EQ.JPLACE) GOTO 241
240    CONTINUE
241    ICOEL=(JN-1)*NCONE
C --- cas elements T3

```

Implementation of the second and third quality indicators for 3D analyses.

Implementation of the second quality indicator.

```

C --- on calculera un saut au noeud fictif IN+3 de KNTE2
      IF((IE2+1-IE1).EQ.3) THEN
C --- cas noeud 1e de l'element T3
      IF(IPLACE.EQ.1) THEN
C --- (P1X,P1Y) 1e noeud de l'element
C --- (P2X,P2Y) 2e noeud de l'element
C --- (NX,NY) vecteur normal au noeud
C --- (TX,TY) vecteur tangent au noeud
      P2X=VCORG(2*KNTE(IE1+1)-1)
      P1X=VCORG(2*KNTE(IE1)-1)
      P2Y=VCORG(2*KNTE(IE1+1))
      P1Y=VCORG(2*KNTE(IE1))
      NX=(-1)*(P2Y-P1Y)
      NY=P2X-P1X
      TX=P2X-P1X
      TY=P2Y-P1Y
      ENDIF
C --- cas noeud 2e de l'element T3
      IF(IPLACE.EQ.2) THEN
C --- (P2X,P2Y) 2e noeud de l'element
C --- (P3X,P3Y) 3e noeud de l'element
      P3X=VCORG(2*KNTE(IE1+2)-1)
      P2X=VCORG(2*KNTE(IE1+1)-1)
      P3Y=VCORG(2*KNTE(IE1+2))
      P2Y=VCORG(2*KNTE(IE1+1))
      NX=(-1)*(P3Y-P2Y)
      NY=P3X-P2X
      TX=P3X-P2X
      TY=P3Y-P2Y
      ENDIF
C --- cas noeud 3e de l'element T3
      IF(IPLACE.EQ.3) THEN
C --- (P1X,P1Y) 1e noeud de l'element
C --- (P3X,P3Y) 3e noeud de l'element
      P3X=VCORG(2*KNTE(IE1+2)-1)
      P1X=VCORG(2*KNTE(IE1)-1)
      P3Y=VCORG(2*KNTE(IE1+2))
      P1Y=VCORG(2*KNTE(IE1))
      NX=(-1)*(P1Y-P3Y)
      NY=P1X-P3X
      TX=P1X-P3X
      TY=P1Y-P3Y
      ENDIF
      ENDIF
C --- cas elements Q4
      IF((IE2+1-IE1).EQ.4) THEN
C --- cas noeud 1e de l'element Q4
      IF(IPLACE.EQ.1) THEN
C --- (P1X,P1Y) 1e noeud de l'element
C --- (P2X,P2Y) 2e noeud de l'element
      P2X=VCORG(2*KNTE(IE1+1)-1)
      P1X=VCORG(2*KNTE(IE1)-1)
      P2Y=VCORG(2*KNTE(IE1+1))
      P1Y=VCORG(2*KNTE(IE1))
      NX=(-1)*(P2Y-P1Y)
      NY=P2X-P1X
      TX=P2X-P1X
      TY=P2Y-P1Y
      ENDIF
C --- cas noeud 2e de l'element Q4
      IF(IPLACE.EQ.2) THEN
C --- (P2X,P2Y) 2e noeud de l'element
C --- (P3X,P3Y) 3e noeud de l'element
      P3X=VCORG(2*KNTE(IE1+2)-1)
      P2X=VCORG(2*KNTE(IE1+1)-1)
      P3Y=VCORG(2*KNTE(IE1+2))
      P2Y=VCORG(2*KNTE(IE1+1))
      NX=(-1)*(P3Y-P2Y)
      NY=P3X-P2X
      TX=P3X-P2X
      TY=P3Y-P2Y
      ENDIF
C --- cas noeud 5e de l'element Q4
      IF(IPLACE.EQ.3) THEN
C --- (P4X,P4Y) 4e noeud de l'element

```

Implementation of the third quality indicator.

For MERR=3, a .RESU file is created where the values of the computed quality indicators are saved.

For MERR=4, a text file is created where the values of the computed quality indicators are saved.

```

C --- (P3X,P3Y) 3e noeud de l'element
      P4X=VCORG(2*KNTE(IE1+3)-1)
      P3X=VCORG(2*KNTE(IE1+2)-1)
      P4Y=VCORG(2*KNTE(IE1+3))
      P3Y=VCORG(2*KNTE(IE1+2))
      NX=(-1)*(P4Y-P3Y)
      NY=P4X-P3X
      TX=P4X-P3X
      TY=P4Y-P3Y
      ENDIF
C --- cas noeud e de l'element Q4
      IF(IPLACE.EQ.4) THEN
C --- (P4X,P4Y) 4e noeud de l'element
C --- (P1X,P1Y) 1e noeud de l'element
      P4X=VCORG(2*KNTE(IE1+3)-1)
      P1X=VCORG(2*KNTE(IE1)-1)
      P4Y=VCORG(2*KNTE(IE1+3))
      P1Y=VCORG(2*KNTE(IE1))
      NX=(-1)*(P1Y-P4Y)
      NY=P1X-P4X
      TX=P1X-P4X
      TY=P1Y-P4Y
      ENDIF
      ENDIF
C --- cas elements T6
      IF((IE2+1-IE1).EQ.6) THEN
C --- cas noeud 1e,2e ou 3e de l'element T6 on ne traite pas
      IF(IPLACE.LE.3) GOTO 242
C --- cas noeud 4e de l'element T6
      IF(IPLACE.EQ.4) THEN
C --- (P1X,P1Y) 1e noeud de l'element
C --- (P2X,P2Y) 2e noeud de l'element
C --- (NX,NY) vecteur normal au noeud
C --- (TX,TY) vecteur tangent au noeud
      P2X=VCORG(2*KNTE(IE1+1)-1)
      P1X=VCORG(2*KNTE(IE1)-1)
      P2Y=VCORG(2*KNTE(IE1+1))
      P1Y=VCORG(2*KNTE(IE1))
      NX=(-1)*(P2Y-P1Y)
      NY=P2X-P1X
      TX=P2X-P1X
      TY=P2Y-P1Y
      ENDIF
C --- cas noeud 5e de l'element T6
      IF(IPLACE.EQ.5) THEN
C --- (P2X,P2Y) 2e noeud de l'element
C --- (P3X,P3Y) 3e noeud de l'element
      P3X=VCORG(2*KNTE(IE1+2)-1)
      P2X=VCORG(2*KNTE(IE1+1)-1)
      P3Y=VCORG(2*KNTE(IE1+2))
      P2Y=VCORG(2*KNTE(IE1+1))
      NX=(-1)*(P3Y-P2Y)
      NY=P3X-P2X
      TX=P3X-P2X
      TY=P3Y-P2Y
      ENDIF
C --- cas noeud 6e de l'element T6
      IF(IPLACE.EQ.6) THEN
C --- (P1X,P1Y) 1e noeud de l'element
C --- (P3X,P3Y) 3e noeud de l'element
      P3X=VCORG(2*KNTE(IE1+2)-1)
      P1X=VCORG(2*KNTE(IE1)-1)
      P3Y=VCORG(2*KNTE(IE1+2))
      P1Y=VCORG(2*KNTE(IE1))
      NX=(-1)*(P1Y-P3Y)
      NY=P1X-P3X
      TX=P1X-P3X
      TY=P1Y-P3Y
      ENDIF
      ENDIF
C --- cas elements Q8
      IF((IE2+1-IE1).EQ.8) THEN
C --- cas noeud 1e,2e,3e ou 4e de l'element Q8 on ne traite pas
      IF(IPLACE.LE.4) GOTO 242
C --- cas noeud 5e de l'element Q8

```

```

      IF(IPLACE.EQ.5) THEN
C --- (P1X,P1Y) 1e noeud de l'element
C --- (P2X,P2Y) 2e noeud de l'element
      P2X=VCORG(2*KNTE(IE1+1)-1)
      P1X=VCORG(2*KNTE(IE1)-1)
      P2Y=VCORG(2*KNTE(IE1+1))
      P1Y=VCORG(2*KNTE(IE1))
      NX=(-1)*(P2Y-P1Y)
      NY=P2X-P1X
      TX=P2X-P1X
      TY=P2Y-P1Y
      ENDIF
C --- cas noeud 6e de l'element Q8
      IF(IPLACE.EQ.6) THEN
C --- (P2X,P2Y) 2e noeud de l'element
C --- (P3X,P3Y) 3e noeud de l'element
      P3X=VCORG(2*KNTE(IE1+2)-1)
      P2X=VCORG(2*KNTE(IE1+1)-1)
      P3Y=VCORG(2*KNTE(IE1+2))
      P2Y=VCORG(2*KNTE(IE1+1))
      NX=(-1)*(P3Y-P2Y)
      NY=P3X-P2X
      TX=P3X-P2X
      TY=P3Y-P2Y
      ENDIF
C --- cas noeud 7e de l'element Q8
      IF(IPLACE.EQ.7) THEN
C --- (P4X,P4Y) 4e noeud de l'element
C --- (P3X,P3Y) 3e noeud de l'element
      P4X=VCORG(2*KNTE(IE1+3)-1)
      P3X=VCORG(2*KNTE(IE1+2)-1)
      P4Y=VCORG(2*KNTE(IE1+3))
      P3Y=VCORG(2*KNTE(IE1+2))
      NX=(-1)*(P4Y-P3Y)
      NY=P4X-P3X
      TX=P4X-P3X
      TY=P4Y-P3Y
      ENDIF
C --- cas noeud 8e de l'element Q8
      IF(IPLACE.EQ.8) THEN
C --- (P4X,P4Y) 4e noeud de l'element
C --- (P1X,P1Y) 1e noeud de l'element
      P4X=VCORG(2*KNTE(IE1+3)-1)
      P1X=VCORG(2*KNTE(IE1)-1)
      P4Y=VCORG(2*KNTE(IE1+3))
      P1Y=VCORG(2*KNTE(IE1))
      NX=(-1)*(P1Y-P4Y)
      NY=P1X-P4X
      TX=P1X-P4X
      TY=P1Y-P4Y
      ENDIF
      ENDIF
C --- normalisation du vecteur normal et du vecteur tangent
      NORMEN=SQRT((NX*NX)+(NY*NY))
      NX=NX/NORMEN
      NY=NY/NORMEN
      NORMET=SQRT((TX*TX)+(TY*TY))
      TX=TX/NORMET
      TY=TY/NORMET
C --- calcul de sigma.n et de sigma.t
      SIGMANX=NX*VCOEL(1+NCONT*(IPLACE-1)+ICOEL)+
&          NY*VCOEL(3+NCONT*(IPLACE-1)+ICOEL)
      SIGMANY=NX*VCOEL(3+NCONT*(IPLACE-1)+ICOEL)+
&          NY*VCOEL(2+NCONT*(IPLACE-1)+ICOEL)
      IF((IE2+1-IE1).EQ.8) THEN
      IF(((IPLACE.EQ.5).OR.(IPLACE.EQ.6)).OR.
&      ((IPLACE.EQ.7).OR.(IPLACE.EQ.8)).AND.
&      (JINEL.EQ.2)) THEN
      ENDIF
      ENDIF
C
C --- cas equivalent à JINEL=1 (le passage sur ce noeud dans la boucle)
C
      IF(FIRSTCALCUL.EQ.0) THEN
C --- SIGMAN1 projection du vecteur sigma.n suivant n

```

```

C --- SIGMAT1 projection du vecteur sigma.n suivant t
      SIGMAN1=SIGMANX*NX+SIGMANY*NY
      SIGMAT1=SIGMANX*TX+SIGMANY*TY
      FIRSTCALCUL=1
C
C --- cas equivalent à JINEL=2 (on considere sigma.(-n))
C
      ELSE
        SIGMAN2=(SIGMANX*NX+SIGMANY*NY)*(-1)
        SIGMAT2=(SIGMANX*TX+SIGMANY*TY)*(-1)
      ENDIF
242   CONTINUE
220   CONTINUE
C --- actualisation de la valeur reference pour la normalisation (utile pour
ERR=2)
C --- qui est la projection max des sigma.n sur n sur tout le maillage
      IF (ABS(SIGMAN1).GT.VSIGMAMAX(1)) THEN
        VSIGMAMAX(1)=ABS(SIGMAN1)
      ENDIF
      IF(ABS(SIGMAN2).GT.VSIGMAMAX(1)) THEN
        VSIGMAMAX(1)=ABS(SIGMAN2)
      ENDIF
C --- actualisation de la valeur reference pour la normalisation (utile pour
ERR=3)
C --- qui est la projection max des sigma.n sur t sur tout le maillage
      IF (ABS(SIGMAT1).GT.VSIGMAMAX(2)) THEN
        VSIGMAMAX(2)=ABS(SIGMAT1)
      ENDIF
      IF(ABS(SIGMAT2).GT.VSIGMAMAX(2)) THEN
        VSIGMAMAX(2)=ABS(SIGMAT2)
      ENDIF
      ENDIF
C
C
C
C --- cas elements en 3D
C
      ELSE IF(NDIM.EQ.3)
        FIRSTCALCUL=0
        SIGMAN1=0.D0
        SIGMAT1=0.D0
        SIGMAN2=0.D0
        SIGMAT2=0.D0
C --- boucle sur les elements du noeud
C      DO 320 I=I1,I2
C        JN=KNI(I)
C        IE1=KPNTI(JN)
C        IE2=KPNTI(JN+1)-1
C        IPLACE=0
C --- boucle sur les noeuds de l'element
C      DO 340 J=IE1,IE2
C        JPLACE=KNTE(J)
C        IPLACE=IPLACE+1
C        IF(IN.EQ.JPLACE) GOTO 341
C 340   CONTINUE
C 341   ICOEL=(JN-1)*NCONE
C --- cas elements T15
C      IF((IE2+1-IE1).EQ.15) THEN
C --- cas noeud 1e,2e ou 3e de l'element 15 on ne traite pas
C      IF(IPLACE.LE.3) GOTO 242
C
C
C      ENDIF
C
C --- calcul deuxieme indicateur de qualite
C
      IF(IERR.EQ.2) THEN
C --- saut avant normalisation
        SAUT(1)=(SIGMAN1+SIGMAN2)
        SAUT(1)=ABS(SAUT(1))
C --- cas des noeuds milieux de segments sur une frontiere externe non pris
en compte
        IF((SIGMAN1.EQ.0D0).OR.(SIGMAN2.EQ.0D0).OR.(JINEL.LE.1)) THEN
          SAUT(1)=0.D0

```

```

        ENDIF
C
C --- stockage des sauts aux noeuds du maillage
C
        VSAUT(1+(IN-1)*NCONT)=SAUT(1)
C
C --- calcul troisieme indicateur de qualite
C
        ELSE IF(IERR.EQ.3) THEN
C --- saut avant normalisation
        SAUT(4)=(SIGMAT1+SIGMAT2)
        SAUT(4)=ABS(SAUT(4))
C --- cas des noeuds milieux de segments sur une frontiere externe non pris
en compte
        IF((SIGMAT1.EQ.0D0).OR.(SIGMAT2.EQ.0D0).OR.(JINEL.LE.1)) THEN
        SAUT(4)=0.D0
        ENDIF
C
C --- stockage des sauts aux noeuds du maillage
C
        VSAUT(4+(IN-1)*NCONT)=SAUT(4)
        ENDIF
        ENDIF
10 CONTINUE
C
C --- normalisation des erreurs
C
        DO 13 IN=1,NNT
C --- le erreur on divise l'erreur par la valeur max globale des contraintes
C
        IF (IERR.EQ.1) THEN
        DO 14 J=1,NCONT
14      VSAUT(J+(IN-1)*NCONT)=VSAUT(J+(IN-1)*NCONT)/
        &          SIGRFGLOBAL(J)
C
C --- 2e erreur on divise l'erreur par la valeur max des projections des
sigma.n sur n sur tout le maillage
C
        ELSE IF (IERR.EQ.2) THEN
        VSAUT(1+(IN-1)*NCONT)=VSAUT(1+(IN-1)*NCONT)/VSIGMAMAX(1)
        print *, 'saut max',VSIGMAMAX(1),VSAUT(1+(IN-1)*NCONT)
C
C --- 3e erreur on divise l'erreur par la valeur max max des projections des
sigma.n sur t sur tout le maillage
C
        ELSE IF (IERR.EQ.3) THEN
        VSAUT(4+(IN-1)*NCONT)=VSAUT(4+(IN-1)*NCONT)/VSIGMAMAX(2)
        print *, 'saut max',VSIGMAMAX(2)
        ENDIF
13 CONTINUE
C
C---- calcul du saut maximal sur l' ensemble du maillage
C pour chacune des composantes du tenseur des contraintes
C DO 80 I=1,NCONT
C SMAXT(I)=ZERO
C DO 81 IN=1,NNT
C A=VSAUT(I+(IN-1)*NCONT)
C 81 IF (A.GT.SMAXT(I)) SMAXT(I)=A
C 80 CONTINUE
C
C
C --- NOMBRE DE NOEUDS OU LES SAUTS NE SONT PAS ADMISSIBLES
NPOINT=JP
C
Ccv ERR 2010.04.13 D
Ceb MERR=3 : ECRITURE D'UN FICHER .RESU POUR PEGGY
        IF(MERR.EQ.3) THEN
        OPEN(UNIT=551,FILE=NOMFERR)
        CLOSE(551,STATUS='delete')
        OPEN(UNIT=551,FILE=NOMFERR,FORM='UNFORMATTED')
        VERSION=' '
        C40=' - - - - - '
        ETUDE=' ETUDE '
        CALCUC=' CALCUC '

```

```

BLOC='LINE'
UNIC='PAS DE COMMENTAIRES'
WRITE(551)VERSION,BLOC,ETUDE,CALCU
WRITE(551)UNIC
WRITE(551)NDIM,NNT,NDLT,NELT,NGRPE,NCONE
WRITE(551)NCG,NCM,NPREL
WRITE(551)C40
WRITE(551)0
WRITE(551)C40
WRITE(551)0
WRITE(551)C40
WRITE(551)NNT
c   WRITE(551)(KDLNC(IN1),IN1=1,NNT)
    WRITE(551)2
    DO JPAS=1,2
C ECRITURE DES ERREURS :
C on donne deux increments : pour le premier u et v
C representent respectivement le saut sur sigma_xx et sur sigma_syy
C pour le deuxieme on stocke le saut sur sigma_xy et sur sigma_zz
C rien n'empêche d'ajouter des increments pour représenter autre chose
    WRITE(551)C40
    WRITE(551)NDLT
    WRITE(551)(SNGL(VSAUT(2*JPAS-1+(IN1-1)*NCONT)),
&   SNGL(VSAUT(JPAS*2+(IN1-1)*NCONT)),IN1=1,NNT)
101  FORMAT(2F13.4)
    WRITE(551)C40
    WRITE(551)0
C PAS D ECRITURE DES CONTRAINTES
    ENDDO
    CLOSE(551)
    ENDIF
Ceb
Ceb MERR=4 : ECRITURE D'UN FICHIER TEXTE CONTENANT UNE SERIE
C DE NVAL VALEURS STOCKEES AUX NOEUDS
C ici par défaut NVAL=2*NDIM pour les sauts sur les composantes
C du tenseur des contraintes (petite modif)
    IF(MERR.EQ.4) THEN
    OPEN(UNIT=551,FILE=NOMFERR)
    CLOSE(551,STATUS='DELETE')
    OPEN(UNIT=551,FILE=NOMFERR,FORM='FORMATTED')
    WRITE(551,*) 'fichier cree dans la routine CALERR pour generer'
    WRITE(551,*) 'un fichier rsv4 avec le programme visu4'
    WRITE(551,*) 'calcul : '
    WRITE(551,*) ' les lignes suivantes contiennent les discontinuites'//
&'des composantes de sigma, calculees aux noeuds'
    WRITE(551,*)2*NDIM
    DO IST=1,2*NDIM
    WRITE(551,*)'Saut de la composante des contraintes numero ',IST
    WRITE(551,1551)(VSAUT((IN-1)*NCONT+IST),IN=1,NNT)
    ENDDO
    CLOSE(551)
1551  FORMAT(10F15.4)
    ENDIF
Ceb
C
Ccv ERR 2010.04.13 F
C --- impression sur le fichier resultats pour ces noeuds
    IF (NPOINT.NE.0) THEN
    WRITE(MP,2000)
2000  FORMAT(//////,
&   20X,'LES SAUTS DE CONTRAINTES NE SONT PAS ADMISSIBLES ',
&   'AUX NOEUDS SUIVANTS :',//////)
    WRITE(MP,3000)(KTRAV(I),I=1,NPOINT)
3000  FORMAT(10(5X,I6))
C
Ccv ERR 2010.04.13 D
C   IF(MERR.EQ.2) THEN
    IF(MERR.GE.2) THEN
Ccv ERR 2010.04.13 F
    IF (NDIM.EQ.2) WRITE(MP,3100)
    IF (NDIM.EQ.3) WRITE(MP,3200)
3100  FORMAT(//////,10X,'NOEUD',
&   20X,'SAUT DE CONTRAINTES Sxx, Syy, Sxy, Szz')
3200  FORMAT(//////,10X,'NOEUD',
&   20X,'SAUT DE CONTRAINTES Sxx, Syy, Szz, Sxy, Syz, Sxz')

```

```

      DO 85 I=1,NPOINT
      IN=KTRAV(I)
      DO 86 J=1,NCONT
86     SAUT(J)=VSAUT(J+(IN-1)*NCONT)
      IF (NDIM.EQ.2) WRITE(MP,3300) IN,(SAUT(J),J=1,NCONT)
      IF (NDIM.EQ.3) WRITE(MP,3400) IN,(SAUT(J),J=1,NCONT)
3300    FORMAT(10X,I6,4(5X,E12.5))
3400    FORMAT(10X,I6,6(5X,E12.5))
85     CONTINUE
      ENDIF
      ELSE
      WRITE(MP,4000)
4000    FORMAT(//////,
&      15X,'LES SAUTS DE CONTRAINTES SONT ADMNE CALERRISSIBLES ',
&      'SUR L ENSEMBLE DU MAILLAGE')
      ENDIF
      END

```

### - programmation dans blmcnl.f

```

=====
File blmcnl.f
=====
SUBROUTINE EXMCNL
C=====
C
C DEFINITION :
C   Module d'execution : EXECUTION DU BLOC M C N L
C
C FONCTIONNEMENT :
C   Assemblage et resolution d'un probleme de comportement non
C   lineaire par les methodes de NEWTON-RAPHSON classiques.
C
C=====

Ccv ERR 2010.04.28 D
C   ICOD=11
C   une ligne pour C Vulpe : calcul des contraintes en 9 points dans un Q8
C   ICOD=ICOD1
Ccv ERR 2010.04.28 F
C   IGAUSS=ICOD
C   CALL INTEGR(KNTE, KPNT, KTYPE, KPGRE, KPROP, VINT, KINTE2, MPINT2,
&   NDINT, NENI)
C

C ---> calcul des sauts de contraintes aux noeuds du maillage
Ccv ERR 130410 D
C   CVF=VFT(INCR,1)
C   IF(MERR.NE.0) CALL CALERR(KNTE, KPNT, KPGRE, KTRAV,
print *, 'icod', ICOD
c   IF(MERR.NE.0) CALL CALERR(KNTE, KPNT, KTYPE, KNEQ, KPGRE, KPROP, KREP,
c   & KINTE2, KLOCE, KTRAV, KDLNC, KNI, KPNI, VCOEL, VSAUT,
c   & TOLSAU, MERR, CVF, VCOG, VCONE, VCOE, VDIMP, VDLE, VEFC, VINT, VNOLI,
c   & VPLAS, VPROP, VREP, VUT, VTRAV)
C   IF(MERR.NE.0) CALL CALERR(KNTE, KPNT, KPGRE, KTRAV, KDLNC, KNI,
& KPNI, VCOEL, VTRAV, TOLSAU, MERR, VCOG, KTYPE, KPROP, VPROP, VDIMP,
& KREP, VREP, KNEQ, KINTE2, VUT, VPLAS, KLOCE, VCOE, VDLE, VINT, VCONE,
& VNOLI, VEFC, VTRAV)
c, KDLNC)
Ceb option EXC D : appel à REACTS (origine REACV4 de blline.f)
C   IF(MREA.NE.0) CALL REACTS(VCOG, KNTE, KPNT, KTYPE, KPGRE, KNI, KPNI,
& KPROP, VPROP, KDLNC, VDIMP, KREP, VREP, KNEQ, NEQ, KINTE2, VUJ, VUT,
& VCOE, KLOCE, VKE, VFE, VINT, VDLE, VRES, VTRAV, VREA, MNPD)
Ceb option EXC F
C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
CC   'Temps CPU pour preparation sorties'

```

```

CALL AFFCPU(CPUT,0,0,NBD3,NPO3,5)
CALL WLIG('e',' ')
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
CLEO d
C --- verif lecture en-tetes (affichage ecran)
CALL VERLEC
CLEO f
C -- Arret programme avec conservation .rsv4 et complements listing
IF(IERRCS.EQ.200) THEN
CALL AFNOCO(NIT,INCR,31,1)
WRITE(ME,'(//)')
CC ' **** Arret pour NON-CONVERGENCE **** '
CALL MSGERR('EXMCNL',IERRCS,2,9999)
ENDIF
END

```

```

=====
SUBROUTINE LEDONL
C=====
C
C DEFINITION :
C LECTURE EVENTUELLE DES INFORMATIONS POUR UN STOCKAGE PARTIEL
C
C=====
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
CHARACTER*3 MOT
CHARACTER*16 FICSTO,FICRES,FICGAU
CHARACTER*256 NOMF1,NOMF2
CSR d 250106
INTEGER PIP01,PIPO2
CSR f
C
DIMENSION KINCR(*),KNUMO(*),KNELM(*)
Ccv ERR 13042010 D
CHARACTER*16 NOMFERR
COMMON/CALER/NOMFERR
Ccv ERR 13042010 F

Ccv ERR 2010.11.24 D
C --- calcul des sauts de contraintes aux noeuds du maillage
ELSEIF(MOT.EQ.'ERR') THEN
MERR=1
IERR=0
C --- lecture de l indicateur d impression des sauts de contraintes
READ(MR,*,ERR=2000) MERR,IERR
C --- lecture de la tolerance sur les sauts de contraintes
READ(MR,*,ERR=2010) TOLSAU
Ccv ERR 2010.04.13 D
C --- MERR=3 : Ecriture d'un fichier .RESU pour PEGGY
C --- MEER=4 : ecriture d'un fichier texte contenant une serie
C de NVAL valeurs stockees aux noeuds
IF(MERR.EQ.3.OR.MERR.EQ.4)READ(MR,*),NOMFERR
MERR=1000*IERR+MERR
GOTO 991
2000 print *,'erreur lecture des entiers MERR,IERR'
STOP
GOTO 999
2010 print *,'erreur lecture de la tolerance TOLSAU'
STOP
GOTO 999
Ccv ERR 2010.04.13 F
Ccv ERR 2010.11.24 F
C

```

## ANNEXE 7

Un exemple de jeu de données simple pour le module MCNL a été choisi pour montrer l'activation des indicateurs de qualité au cours d'une analyse numérique.

Les mots clés à introduire afin d'effectuer une analyse où l'indicateur de qualité est calculé sont expliqués. L'exemple ci-joint présente le fichier de données d'entrée d'un problème où le troisième l'indicateur qualité est calculé.

Le jeu de données pour un calcul en comportement non linéaire (MCNL) est présenté ci-dessous :

```

EXEC
COMT
-----
-
-                               CESAR-LCPC Version 4.1.x
-
- Nom du MAILLAGE : e2T6
- Nom du CALCUL   : c3
- Familles       : 1
-
- Module         : MCNL
-
- .   386 noeuds
- .   1 groupe
- .   175 elements : 175 MBT6
-
-----

COOR
  2  1
ELEM
  2  1
sol
  1  1  0.          1000.          .2
COND
  2
NUL
  2
  45
386 377 384 370 368 349 348 313 312 288 287 230 228 171 170 105 104 98
 97  93  96  89  88  60  59  36  35  15  12  5  4  2  1  3  8  11
 20  22  32  34  56  58 116 118 121
  1  0
  2
  25
 96  89  88  60  59  36  35  15  12  5  4  2  1  3  8  11  20  22
 32  34  56  58 116 118 121
  0  1

```

```

0
CHAR
2
PUR
2 3
367 380 363 380 386 382
-200.
IMPR
2 0
GEFI
3 1
MCNL
2
1 500 .01
1
.2
DPL
DTP
ERR
4 3
0.01
e2T6_c3err
ITG
1
GAU
0
toto3

```

où

- ERR représente le mot-clé activant le calcul des indicateurs de qualité de la solution numérique ;
- 4 est une commande qui entraîne l'écriture d'un fichier texte contenant une série de valeurs stockées aux nœuds ;
- 3 désigne la valeur de ERR qui entraîne le calcul du troisième indicateur de qualité ;
- e2T6\_c3err désigne le nom du fichier texte où les valeurs d'indicateurs de qualité sont stockées.

Dépendant de la valeur fixée pour ERR, nous pouvons calculer les indicateurs de qualité :

- ERR=1 – calcul du premier indicateur de qualité ;
- ERR=2 – calcul du deuxième indicateur de qualité ;
- ERR=3 – calcul du troisième indicateur de qualité.

Les mêmes mots-clés sont utilisés pour les analyses 2D et 3D.