HAL
open science

Des espaces de Hadamard symétriques de dimension infinie et de rang fini

Bruno Duchesne

To cite this version:

Bruno Duchesne. Des espaces de Hadamard symétriques de dimension infinie et de rang fini. Géométrie différentielle [math.DG]. University of Geneva, 2011. Français. NNT : . tel-00673224

HAL Id: tel-00673224

https://theses.hal.science/tel-00673224

Submitted on 23 Feb 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Genève
Section de Mathématiques

Faculté des sciences
Professeur N. MONOD (directeur)

Des espaces de Hadamard symétriques de dimension infinie et de rang fini

Thèse

présentée à la Faculté des sciences de l'Université de Genève
pour l'obtention du grade de Docteur ès sciences, mention mathématiques

par

Bruno Duchesne

de

La Roche sur Foron (France)

Thèse N° 4340

GENÈVE
atelier de reproduction de Uni Mail

2011

A Marie, Grande aile et Petite aile.

Résumé. Cette thèse se place dans le cadre d'une généralisation CAT(0) des espaces riemanniens symétriques à courbure négative. En particulier, nos espaces ne seront pas nécessairement localement compacts.

Un espace CAT(0) symétrique est un espace CAT(0) complet, sans branchement géodésique et possédant une involution isométrique en chaque point fixant uniquement ce point. Avec l'hypothèse supplémentaire de compacité locale, on retrouve les espaces riemanniens symétriques à courbure négative classés par E. Cartan.

Nous nous intéressons à une famille particulière des espaces CAT(0) symétriques qui possèdent la propriété remarquable d'être de dimension infinie et de rang fini. C'est une famille d'espaces $(X_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ où

$$X_p = \mathbf{O}(p,\infty)/\left(\mathbf{O}(p)\times\mathbf{O}(\infty)\right).$$

Nous montrons que ces espaces sont des espaces CAT(0) symétriques de dimension télescopique p. Ce qui implique, par exemple, que tout groupe moyennable agissant continûment par isométries sur X_p, fixe un point au bord ou laisse invariant un sous-espace isométrique à un espace euclidien.

Inspirés par le théorème de superrigidité de G. Margulis, nous montrons l'existence d'applications de Furstenberg, ce qui constitue la première étape dans un programme de superrigidité pour ces espaces symétriques de dimension infinie mais de rang fini.

Table des matières

Introduction vii
Espaces CAT(0) riemanniens symétriques vii
Applications de Furstenberg ix
Organisation du texte ix
Remerciements x

Chapitre I. Espaces de Hadamard 1
1. Espaces de Hadamard 1
2. Espaces riemanniens symétriques 10
3. Espaces CAT(0) symétriques 14
4. Immeubles sphériques 23

Chapitre II. Espaces de dimension télescopique finie 25
5. Dimensions géométrique, télescopique et inégalité de Jung 25
6. Intersection décroissante de parties convexes 27
7. Conséquences 31
8. Espaces CAT(0) symétriques propres 33

Chapitre III. Des espaces de dimension infinie et de rang fini 37
9. Formes quadratiques d'indice fini 37
10. Grassmannienne de type non-compact 39
11. Angles principaux 43
12. Isométries 49
13. Immeubles sphériques et euclidiens associés 51

Chapitre IV. Théorie mesurée des actions de groupes 55
14. Moyennabilité 55
15. Bords forts 59
16. Champs d'espaces de Hadamard 65
17. Théorème d'Adams-Ballman équivariant 76

Chapitre V. Superrigidité géométrique 81
18. Superrigidité géométrique 81
19. Applications de Furstenberg 84

Appendices 91

Annexe A. Applications de Furstenberg pour des espaces Gromov-hyperboliques 91
20. Espaces Gromov-hyperboliques 91

21. Moyennes 94
22. Applications de Furstenberg 95

Annexe B. Dynamique des isométries 101
23. Isométries d'un espace CAT(0) 101
24. Exemples 107

Bibliographie 113

Index 119

Introduction

Espaces CAT(0) riemanniens symétriques

Les *espaces symétriques* (au sens classique du terme) sont des variétés riemanniennes connexes telles qu'en chaque point, il existe une isométrie fixant ce point et dont la différentielle en ce point est $-\mathrm{Id}$. Ces variétés ont une structure métrique riche car elles sont complètes et homogènes. Elie Cartan a étudié ces variétés dans les années 1925-1930 et a montré le lien fondamental qui existe entre ces espaces et les groupes de Lie semi-simples. Ceux-ci interviennent comme groupes d'isométries des espaces symétriques.

Les espaces symétriques qui nous serviront d'exemples fondamentaux seront les espaces symétriques de type non-compact, c'est-à-dire sans facteur euclidien et à courbure sectionnelle négative. Le théorème de Cartan-Hadamard montre que ces espaces vérifient l'inégalité de Bruhat-Tits. C'est-à-dire, si (X, d) est un espace symétrique de type non-compact et $x, y, z \in X$ alors pour m point milieu entre y et z on a

$$d(x,m)^2 \leq 1/2 \left(d(x,y)^2 + d(x,z)^2\right) - 1/4\ d(y,z)^2.$$

Pour étudier les groupes de Lie semi-simples sans facteur compact et à centre trivial, E. Cartan montre que l'on peut construire un espace symétrique de type non-compact associé et alors, à partir de propriétés géométriques, on peut montrer des résultats algébriques. Ainsi, si G est un groupe de Lie semi-simple sans facteur compact et à centre trivial alors les sous-groupes compacts maximaux de G sont conjugués deux à deux. En effet, les sous-groupes compacts maximaux de G correspondent aux stabilisateurs des points de l'espace symétrique X associé à G. La transitivité de l'action $G \curvearrowright X$ donne alors la conjugaison.

Dans [**Ale57**], A. D. Alexandrov introduit une notion de courbure pour des espaces métriques qui ne sont pas nécessairement des variétés riemanniennes. En 1987, M. Gromov introduit la dénomination d'espace métrique CAT(κ) pour $\kappa \in \mathbb{R}$, en l'honneur de E. Cartan, A. D. Alexandrov et V. A. Topogonov. Cette notion généralise le fait d'être à courbure plus petite que κ. Les espaces CAT(0), ceux de courbure plus petite que celle du plan euclidien, seront notre cadre d'étude.

Un premier but de cette thèse est de proposer une définition d'espace CAT(0) symétrique.

Définition (3.1)**.** Un espace CAT(0) est *symétrique* s'il est sans branchement géodésique et si en tout point, il existe une isométrie involutive fixant uniquement ce point.

Nous montrons alors que sous l'hypothèse supplémentaire de compacité locale, on retrouve les espaces symétriques de type non-compact.

Théorème (8.4)**.** *Soit X un espace symétrique* CAT(0) *propre alors*

$$X \simeq E \times Y$$

où E est un espace euclidien et Y un espace riemannien symétrique de type non-compact. Les espaces E et Y sont peut-être réduits à un point.

Ce sera donc en *dimension infinie*, c'est-à-dire dans le cadre non localement compact, qu'il y aura de nouvelles propriétés à explorer. Une quantité importante attachée à un espace CAT(0) est son *rang*, qui par définition est la plus grande dimension d'un sous-espace isométrique à un espace euclidien. Sans l'hypothèse de compacité locale, ce rang a encore moins de raison d'être fini. Pour les espaces CAT(0) qui ne sont pas homogènes, la finitude du rang n'est pas la bonne notion pour conserver des propriétés intéressantes. La notion de *dimension télescopique finie* introduite par P.-E. Caprace et A. Lytchak dans [**CL10a**] semble être la bonne notion. En particulier, comme dans le cas localement compact, les groupes moyennables agissant continûment sur un espace CAT(0) de dimension télescopique finie laissent invariant un sous-espace euclidien de dimension finie ou fixent un point à l'infini (voir le théorème 7.8). Cette conclusion n'est déjà plus vraie pour une isométrie d'un espace de Hilbert (voir l'exemple 24.15).

On pourra penser à des variétés riemanniennes de dimension infinie (voir [**Eel66**] pour un survol introductif) ou à des espaces CAT(0) qui ne sont pas des variétés riemanniennes.

Dans le chapitre 6 de [**Gro93**] (p.121), M. Gromov suggère l'étude des espaces

$$X_p = \mathbf{O}(p,\infty)/\mathbf{O}(p) \times \mathbf{O}(\infty)$$

dont il dit

> « The spaces like this X_p look as cute and sexy to me as their finite dimensional siblings but they have been for years shamefully neglected by geometers and algebraists alike. »

Ces espaces ont de remarquable qu'ils sont à la fois de dimension infinie et de rang fini. Dans un sens, ces espaces étaient connus (on trouve déjà l'espace hyperbolique de dimension infinie, qui est aussi X_1, dans [**Mic39**] ou [**Mic48**]) mais la propriété de rang fini n'a, semble-t-il, jamais été étudiée.

Nous réalisons une étude métrique des espaces X_p, pour lesquels nous montrons le théorème suivant.

Théorème (Proposition 11.11, Théorèmes 12.1 et 13.1)**.** *Pour $p \in \mathbb{N}^*$, l'espace X_p est un espace de Hadamard symétrique de dimension télescopique et de rang égaux à p. Le groupe d'isométries de X_p est $\mathbf{PO}(p,\infty)$.*

De plus, ∂X_p possède une structure d'immeuble sphérique dont le type est B_p et le groupe de Weyl de cet immeuble est $\mathcal{S}_p \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^p$.

Applications de Furstenberg

Un célèbre théorème de G. Margulis, dit de *superrigidité*, affirme que les réseaux des groupes algébriques semi-simples contiennent beaucoup d'information sur le groupe semi-simple dont ils sont des réseaux.

Théorème (Théorème 1.2 de [**Pan09**]). *Soit X, Y des espaces symétriques ou des immeubles euclidiens de dimension finie, de type non-compact. On suppose que le rang de X est supérieur à 2. Soit Γ un groupe discret irréductible d'isométries de X tel que* $\mathrm{Vol}(\Gamma\backslash X)$ *soit fini.*

Alors toute action isométrique réductive de Γ sur Y laisse stable ou bien un point, ou bien un sous-ensemble convexe de Y qui, à renormalisation des facteurs près, est isométrique à un produit de facteurs irréductibles de X et sur lesquels l'action se prolonge en une action isométrique d'un quotient de $\mathrm{Isom}(X)$.

Toujours dans [**Gro93**], M. Gromov suggère que la propriété de rang fini devrait permettre de formuler un analogue à ce théorème de superrigidité dans le cas où Y est un des espaces X_p ci-dessus.

Une première étape pour montrer ce théorème est tout d'abord de montrer l'existence d'applications de Furstenberg. C'est ce que nous faisons dans le cas $Y = X_p$. Nous aurons besoin pour cela d'un équivalent du théorème de S. Adams et W. Ballmann concernant les actions de groupes moyennables.

Théorème (17.4). *Soit G un groupe localement compact, X un espace de Hadamard de dimension télescopique finie et $\alpha : G \to \mathrm{Isom}(X)$ une action de G sur X. Soit Ω un G-espace ergodique et moyennable. Alors ou bien il existe une section de fonctions de Busemann invariante ou bien il existe un sous-champ du champ constant égal à X euclidien et invariant.*

Classiquement, un bord de Furstenberg pour un groupe de Lie semi-simple G est l'espace mesuré G/P où P est un sous-groupe parabolique minimal. La notion de bord fort introduite par M. Burger et N. Monod généralise cette situation.

Théorème (19.1). *Soit G un groupe localement compact muni d'un bord fort B, agissant non-élémentairement sur un espace X_p avec $p \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe une application G-équivariante mesurable $\varphi\colon B \to \partial X_p$ telle que pour presque tout $b \in B$, $\varphi(b)$ est le centre de la plus petite cellule contenant $\varphi(b)$.*

L'existence d'applications de Furstenberg devrait pouvoir se combiner avec des techniques de *groupe de Weyl généralisé* en cours de développement par U. Bader et A. Furman (voir [**BFS**]). Le but est d'obtenir des résultats de superrigidité en dimension infinie.

Organisation du texte

Le premier chapitre pose le cadre géométrique dans un contexte CAT(0). Les espaces symétriques sont introduits dans le cadre des variétés riemanniennes (de dimension finie ou infinie) ou dans un cadre purement CAT(0). Les exemples qui nous guident sont les

espaces riemanniens symétriques de type non-compact.

Le second chapitre est consacré à la notion de *dimension télescopique finie* introduite par P.-E. Caprace et A. Lytchak. C'est la notion qui semble la bonne pour s'affranchir de la compacité locale tout en restant « raisonnable ». Après une exposition de cette notion et des résultats obtenus par les deux auteurs précédents, nous montrons que notre définition d'espace de Hadamard symétrique coïncide avec la notion riemannienne classique si on fait l'hypothèse de compacité locale.

Le troisième chapitre est consacré au cas particulier $X(p,\infty) = \mathbf{O}(p,\infty)/(\mathbf{O}(p) \times \mathbf{O}(\infty))$. Cet espace est abordé sous différentes approches. On peut y penser comme la limite d'une réunion croissante d'espaces riemanniens symétriques de type non-compact ou comme un sous-ensemble ouvert d'une certaine grassmannienne avec une distance explicite ou encore comme une variété riemannienne quotient d'un groupe de Lie-Hilbert par un sous-groupe.

Le quatrième chapitre est consacré à l'aspect théorie ergodique et moyennabilité de cette étude. Nous y montrons une version équivariante d'un théorème bien connu de S. Adams et W. Ballman pour les actions de groupes moyennables sur les espaces CAT(0) localement compacts.

Le cinquième chapitre redonne le cadre géométrique de la superrigidité due à G. Margulis. Nous y montrons l'existence d'applications de Furstenberg pour les actions sur l'espace X_p.

Les deux appendices ne font pas partie du propos principal mais y sont liés.
Le premier montre l'existence d'applications de Furstenberg dans le cadre d'action de groupe via cocycles sur des espaces Gromov-hyperboliques.
Le second s'intéresse aux actions sur des espaces CAT(0) pour les actions les plus simples possibles. C'est-à-dire engendrées par une unique transformation. Des résultats obtenus par divers auteurs y sont rassemblés et quelques nouveautés y sont ajoutées.

Remerciements

Je tiens à remercier Damien Gaboriau. Tout d'abord pour m'avoir envoyé à Genève lorsque je cherchais quelqu'un pour m'encadrer lors d'un stage de Master. Ensuite, pour m'avoir suivi et conseillé lors de ce travail de thèse en cotutelle et être un organisateur infatigable du groupe de travail, du projet ANR AGORA et des rencontres à venir à l'Institut Henri Poincaré.

Nicolas Monod m'a accueilli et encadré lors de mon stage de Master puis m'a dirigé durant cette thèse. Je le remercie pour le joli sujet qu'il m'a proposé, le soutien permanent qu'il m'a fourni, l'effervescence et la vision mathématiques qui sont les siennes.

La Section de Mathématiques de l'Université de Genève m'a apporté de très bonnes conditions de travail que ce soit pour l'enseignement ou la recherche. Elle m'a permis de

m'apercevoir que ce n'est ni la taille ni les locaux qui font la qualité d'un département de mathématiques mais les personnes qui y appartiennent. En particulier, je tiens à remercier Pierre de la Harpe et Anders Karlsson pour les discussions éclairantes que j'ai pu avoir avec eux.

Le groupe de travail du vendredi après-midi à l'ENS de Lyon , intitulé « Dynamique Mesurable » a été pour moi l'occasion d'une ouverture d'esprit, une source de connaissances nouvelles et de motivation. J'en remercie tous les participants.

L'article [**CL10a**] est arrivé au moment où j'en avais besoin. Je remercie P.-E. Caprace pour m'en avoir expliqué les idées.

CHAPITRE I

Espaces de Hadamard

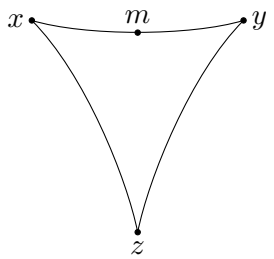
Ce chapitre commence par rappeler les définitions et les propriétés sur les espaces CAT(0) dont nous aurons besoin par la suite. Parmi les ouvrages de référence, on pourra consulter [**Bal95**], [**BGS85**] et bien sûr [**BH99**]. La suite de ce chapitre est consacré à une classe particulière d'espaces CAT(0) les *espaces symétriques* qui seront riemanniens (de dimension finie ou infinie) ou seulement CAT(0).

1. Espaces de Hadamard

1.1. Définitions. Un espace métrique X est dit *géodésique* si entre toutes paires de points (x, y) il existe un segment géodésique, c'est-à-dire une application $c\colon [0, d(x, y)] \to X$ qui est une isométrie. Plus généralement, une application géodésique est une application $c\colon I \to X$ telle que I est un intervalle réel et c une isométrie. On dira que c est un *segment géodésique* si I est compact, un *rayon géodésique* si $I = [0, \infty)$ et une *géodésique* (bi-infinie si on veut accentuer la chose) si $I = \mathbb{R}$.

Définition 1.1. Un espace CAT(0) est un espace métrique géodésique, X, dans lequel si x, y et z sont trois points de X et m un point milieu d'un segment $[x, y]$ alors l'inégalité suivante, dite de Bruhat-Tits, est vérifiée

$$d(z, m)^2 \leq 1/2 \left(d(z, x)^2 + d(z, y)^2\right) - 1/4\ d(x, y)^2$$



On appellera *espaces de Hadamard*, les espaces CAT(0) complets.

Exemples 1.2. Les premiers exemples d'espace CAT(0) sont fournis par les variétés riemanniennes simplement connexes à courbure sectionnelle négative. C'est un corollaire du théorème de Cartan-Hadamard (voir le chapitre II.4 de [**BH99**]). Les arbres sont des espaces CAT(0) et d'autres complexes à simplexes euclidiens sont des espaces CAT(0) comme les immeubles euclidiens ou les complexes cubiques CAT(0).

La notion d'espace CAT(0) est un cas particulier d'une notion plus générale qui est celle d'espace CAT(κ) pour $\kappa \in \mathbb{R}$. Cette notion se comprend intuitivement comme signifiant de courbure inférieure à κ. Le nom a été donné par M. Gromov en l'honneur de

E. Cartan, A. D. Alexandrov et V. A. Topogonov. La définition ne se fait plus à l'aide d'une inégalité mais à l'aide de *triangles de comparaison*.

Fixons $\kappa \in \mathbb{R}$. On note S_κ la surface riemannienne complète de courbure sectionnelle constante égale à κ. Dans le cas où $\kappa = 0$, il s'agit du plan euclidien ; si $\kappa > 0$, c'est la sphère de rayon $1/\sqrt{\kappa}$ dans l'espace euclidien et dans le cas où $\kappa < 0$, c'est le plan hyperbolique muni de la distance usuelle que l'on divise par $\sqrt{-\kappa}$. On note aussi $D_\kappa = \pi/\sqrt{\kappa}$ si $\kappa > 0$ et $D_\kappa = +\infty$ sinon.

Si on considère trois points x, y, z d'un espace métrique (X, d) tels que $d(x, y) + d(y, z) + d(z, x) \leq 2D_\kappa$ alors il existe un triangle géodésique dans S_κ, de sommets $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ tel que

$$\begin{aligned} d(x, y) &= d_{S_\kappa}(\overline{x}, \overline{y}) \\ d(y, z) &= d_{S_\kappa}(\overline{y}, \overline{z}) \\ d(z, x) &= d_{S_\kappa}(\overline{z}, \overline{x}). \end{aligned}$$

Un tel triangle est unique à isométries près et est appelé *triangle de comparaison* (voir le lemme I.2.14 de [**BH99**]).

Définition 1.3. Soit (X, d) un espace métrique et $\kappa \in \mathbb{R}$. L'espace (X, d) est CAT(κ) si

(i) toute paire de points à distance inférieure à D_κ est reliée par au moins une géodésique et

(ii) pour tout triangle géodésique $\Delta(x, y, z)$ tel que $d(x, y) + d(y, z) + d(z, x) \leq 2D_\kappa$ et pour toute paire $(u, v) \in \Delta(x, y, z)$ les points correspondants $(\overline{u}, \overline{v})$ dans le triangle de comparaison vérifie l'inégalité

$$d(u, v) \leq d_{S_\kappa}(\overline{u}, \overline{v})$$

Définition 1.4. Soit (X, d) un espace CAT(0) et E une partie convexe de X. On dit que E est un *sous-espace euclidien* ou un *plat* de X si $(E, d|_{E^2})$ est isométrique à un espace euclidien.

Si Y est une partie bornée (i.e. incluse dans une certaine boule) d'un espace CAT(κ), son *diamètre* est la quantité $\sup\{d(x, y) |\ x, y \in Y\}$ et son *rayon circonscrit* (ou simplement rayon) est l'infimum des rayons de boules fermées contenant Y.

Proposition 1.5 (proposition II.2.7 de [**BH99**])**.** *Soit* (X, d) *un espace* CAT(κ) *et* $Y \subset X$ *une partie bornée de rayon* $r \leq D_\kappa/2$ *alors il existe un unique point* c *appelé* centre circonscrit *tel que* $Y \subset \overline{B}(c, r)$.

Définition 1.6. Le *rang* d'un espace CAT(0) est la plus grande dimension d'un plat de cet espace.

Dans le chapitre 6 de [**Gro93**], M. Gromov définit d'autres notions de rang.

Un espace métrique est *propre* si toutes les boules fermées sont des parties compactes. Cette définition, bien sûr, implique que dans ce cas, l'espace est localement compact et

complet. Dans le cas des espaces de Hadamard cette condition est équivalente à la compacité locale.

Parmi les constructions que l'on peut faire à partir d'espaces CAT(0), la plus simple est celle de produit euclidien. Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, le *produit euclidien* entre X et Y est l'espace $X \times Y$ muni de la distance donnée par $d((x,y),(x',y'))^2 = d_X(x,x')^2 + d_Y(y,y')^2$. Cette construction se comporte bien vis à vis du rang puisque le rang du produit est égal à la somme des rangs. D'une manière générale, on cherche à décomposer un espace CAT(0) en produit de pièces *irréductibles* (c'est à dire qui ne s'écrivent pas comme produit non-trivial). Cependant, ce n'est pas possible en général (voir [**FL08**]), il n'existe pas toujours de décomposition analogue à celle de de Rham pour les variétés riemanniennes complètes et simplement connexes. On a cependant l'existence du *facteur euclidien de de Rham*.

Théorème 1.7 (Facteur euclidien de de Rham)**.** *Soit X un espace de Hadarmard. Il existe une décomposition en produit euclidien*

$$X \simeq \mathcal{H} \times X'$$

tel que $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert et X' un espace de Hadamard sans facteur euclidien. De plus, s'il existe une autre telle décomposition $X \simeq \mathcal{H}_1 \times X_1'$ alors $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}_1$ sont isométriques ainsi que X' et X_1'.
Le facteur $\mathcal{H}$ est appelé facteur euclidien de de Rham de X.

Le facteur euclidien de de Rham se comprend à l'aide d'isométries particulières de X. Soit $\gamma \in \mathrm{Isom}(X)$ une isométrie de X espace CAT(0). L'isométrie γ est une *translation de Clifford* s'il existe $c > 0$ telle que pour tout $x \in X$, $d(\gamma x, x) = c$.

Proposition 1.8 (Théorème 6.15 de [**BH99**])**.** *Soit γ une translation de Clifford d'un espace* CAT(0)*, X. Alors, X se décompose en un produit $X \simeq \mathbb{R} \times Y$ et $\gamma(t,y) = (t+c, y)$ pour $c > 0$.*

Ainsi, le facteur euclidien de la décomposition 1.7 s'identifie avec l'ensemble des translations de Clifford.

1.2. Angles, directions. Soit X un espace CAT(0) et x, y, z trois points ($y \neq x$ et $z \neq x$) de X, on appelle *angle de comparaison* entre y et z, basé en x, l'angle euclidien en $\overline{x}$ du triangle de comparaison $\Delta(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ associé au triangle $\Delta(x,y,z)$. On le notera $\overline{\angle}_x(y,z)$.

Soit c, c' des paramétrisations géodésiques des segments $[x,y]$ et $[x,z]$ telles que $c(0) = c'(0) = x$. Quand $t, t' \to 0$, l'angle $\overline{\angle}_x(c(t), c'(t'))$ décroît, on appelle alors *angle d'Alexandrov* la limite $\lim_{t,t' \to 0} \overline{\angle}_x(c(t), c'(t'))$ que l'on note $\angle_x(y,z)$. Comme cette limite ne dépend pas réellement de y et z mais plutôt des *germes géodésiques* associés à c et c', on notera aussi $\angle_x(c, c')$.

On définit alors *l'espace des directions* Σ_x en un point $x \in X$, comme le quotient de l'ensemble des géodésiques issues de x par la relation $c \sim c' \Leftrightarrow \angle_x(c,c') = 0$. L'angle $\angle_x$ définit alors une distance sur Σ_x. Si X est un espace topologique, une fonction $f \colon X \to \mathbb{R}$

est *semi-continue supérieurement* si pour toute suite (x_n) convergeant vers un certain $x \in X$ on a $f(x) \geq \limsup f(x_n)$.

Proposition 1.9 (Proposition II.3.3 de [**BH99**])**.** *Soit X un espace* CAT(0)*. La fonction $(p, x, y) \mapsto \angle_p(x, y)$ est semi-continue supérieurement et à $p \in X$ fixé, la fonction $(x, y) \mapsto \angle_p(x, y)$ est continue.*

Définition 1.10. Soit (X_1, d_1) et (X_2, d_2) deux espaces métriques. Le *joint sphérique*, $X_1 * X_2$, de X_1 et X_2 est l'espace quotient de $X_1 \times X_2 \times [0, \pi/2]$ par la relation d'équivalence $(x_1, x_2, \theta) \sim (x_1', x_2', \theta')$ si
- $\theta = \theta' = 0$ et $x_1 = x_1'$
- ou $\theta = \theta' = \pi/2$ et $x_2 = x_2'$
- ou $\theta = \theta' \in (0, \pi/2)$ et $x_1 = x_1'$ et $x_2 = x_2'$.

On définit alors une distance sur $Y = X_1 * X_2$ où $y = (x_1, x_2, \theta)$ et $y' = (x_1', x_2', \theta')$ par la formule

$$\cos(d(y, y')) = \cos(\theta)\cos(\theta')\cos(d_1(x_1, x_1')) + \sin(\theta)\sin(\theta')\cos(d_2(x_2, x_2')).$$

Définition 1.11. Soit (X, d) un espace métrique, le *cône euclidien* au dessus de X est l'espace quotient de $X \times [0, \infty)$ par la relation d'équivalence $(x, t) \sim (x', t')$ si $t = t' = 0$ ou si $x = x'$ et $t = t'$. On définit alors une distance d_0 sur C_0X par

$$d_0\left((x, t), (x', t')\right)^2 = t^2 + t'^2 - 2tt' \cos\left(\min\{\pi, d(x, x')\}\right).$$

Si X est un espace CAT(0), on définit alors le *cône tangent* en x, $T_x = C_0\Sigma_x$. L'intuition derrière cette définition provient de la géométrie riemannienne. Le cône tangent fournit un analogue à l'espace tangent en un point de la variété.

On pourra se reporter à la section I.5 de [**BH99**] pour plus de détails. L'idée derrière les constructions d'espaces des directions et de cône euclidien est la suivante. Si X est la sphère euclidienne $\mathbb{S}^{n-1}$ alors C_0X est l'espace euclidien $\mathbb{E}^n$. Réciproquement, si X est l'espace euclidien $\mathbb{E}^n$ alors pour tout $x \in X$, l'espace des directions Σ_x est isométrique à la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$ et le cône tangent T_x est alors isométrique à $\mathbb{E}^n$.

Le joint sphérique est la construction qui donne un équivalent pour les espaces CAT(1) (comme le bord à l'infini ou l'espace des directions d'un espace CAT(0)) d'une décomposition en produit euclidien (voir la proposition 3.14 et [**BH99**, corollaire II.9.11]). D'une manière générale, si X et Y sont deux espaces métriques alors $C_0(X * Y)$ est isométrique à $C_0(X) \times C_0(Y)$ [**BH99**, proposition I.5.15]. Ainsi on voit, par exemple, que $\mathbb{S}^n * \mathbb{S}^m \simeq \mathbb{S}^{n+m+1}$.

Théorème 1.12 (Théorème II.3.19 de [**BH99**])**.** *Soit X un espace* CAT(0)*. Pour tout $x \in X$, le complété de l'espace des directions en x, $\overline{\Sigma}_x$ est un espace* CAT(1) *et le complété du cône tangent en x, $\overline{T}_x$, est un espace de Hadamard.*

1.3. Parties convexes. Soit X un espace CAT(0), si $Y \subset X$, on dit que Y est *convexe* si pour toute paire de points $x, y \in Y$, le segment $[x, y]$ est inclus dans Y. Pour $Y \subset X$ on appelle *enveloppe convexe* de Y la plus petite partie (pour l'inclusion) convexe contenant Y, de même *l'enveloppe convexe fermée* de Y est la plus petite partie convexe

et fermée contenant Y.

Pour un espace X, CAT(1), une partie Y sera *convexe* si pour toute paire de points $x, y \in Y$ telle que $d(x, y) < \pi$, le segment géodésique entre x et y est contenu dans Y.

Proposition 1.13 (Proposition II.2.4 de [**BH99**])**.** *Soit (X, d) un espace* CAT(0) *et C une partie convexe complète pour la distance induite. Alors,*

(i) pour tout $x \in X$, il existe une unique point $\pi_C(x) \in C$ tel que $d(x, \pi_C(x)) = d(x, C)$;

(ii) si x' appartient au segment géodésique $[x, \pi_C(x)]$ alors $\pi_C(x') = \pi_C(x)$;

(iii) pour $x \notin C$ et $y \in C$, si $y \neq \pi_C(x)$ alors $\angle_{\pi_C(x)}(x, y) \geq \pi/2$;

(iv) l'application $x \mapsto \pi_C(x)$ est une rétraction de X sur C, 1-Lipschitz.

De plus, pour tout $r \geq 0$, Le r-voisinage de C, $\{x \in X | \ \exists c \in C, \ d(x, c) \leq r\}$, est aussi une partie convexe.

Lemme 1.14 (Lemme 11 de [**Mon06**] ou le lemme 3.1 de [**Buy98**])**.** *Soit X un espace* CAT(0)*, $C \subset C' \subset X$ deux sous-ensembles convexes fermés bornés non-vides, c, c' leurs centres circonscrits et ρ, ρ' leurs rayons circonscrits.*
Alors $d(c, c') \leq \sqrt{2(\rho'^2 - \rho^2)}$.

Proposition 1.15 (Théorème 14 de [**Mon06**])**.** *Soit X un espace de Hadamard, x un point de X et $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de convexes fermés telle que $(d(x, C_n))_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée alors $\cap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ est non vide.*

Lemme 1.16. *Soit (X, d) un espace métrique, Y, Z deux parties fermées de X et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense de X. Alors $Y \subseteq Z$ si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(x_n, Y) \geq d(x_n, Z)$.*

Démonstration. Si $Y \subseteq Z$ alors pour tout $x \in X$, $d(x, Y) \geq d(x, Z)$. Réciproquement, si $Y \nsubseteq Z$, il existe $y \in Y \setminus Z$. Posons $\varepsilon = d(y, Y)$. Par densité, il existe n tel que $d(y, x_n) < \varepsilon/2$ et alors $d(x_n, Y) < \varepsilon/2$ et $d(x_n, Z) > \varepsilon/2$. □

Lemme 1.17. *Soit X un espace* CAT(0)*, (X_n) une suite décroissante de parties convexes fermées et $Y = \cap_n X_n$. Si $Y \neq \emptyset$ alors pour tout $x \in X$, $\pi_{X_n}(x) \longrightarrow \pi_Y(x)$.*

Démonstration. Soit $x \in X$. Posons $x_n = \pi_{X_n}(x)$. La suite $(d(x, x_n))_n$ est croissante bornée et possède donc une limite $l \leq d(x, Y)$. Si $l < d(x, Y)$ alors pour $\varepsilon = (d(x, Y) - l)/2$ l'intersection de X_n avec la boule fermée de rayon $l + \varepsilon$ est non-vide pour tout n et donc par la proposition 1.15, on aurait $Y \cap \overline{B}(x, l + \varepsilon) \neq \emptyset$, ce qui est absurde donc $l = d(x, Y)$. Soit y le projeté de x sur Y et α_n l'angle de comparaison $\overline{\angle}_{\pi_{X_n}(x)}(x, y)$, qui est supérieur à $\pi/2$ par la proposition 1.13. On a alors

$$d(x, y)^2 = d(x, x_n)^2 + d(x_n, y)^2 - 2\cos(\alpha_n) d(x, x_n) d(x_n, y) \geq 0.$$

Et donc

$$d(x_n, y)^2 \leq d(x, y)^2 - d(x, x_n)^2 \longrightarrow 0.$$

□

Souvent on cherche à décomposer un espace CAT(0) en un produit dans le but de simplifier l'étude. Les résultats suivants donnent des outils pour détecter de telles décompositions.

Lemme 1.18 (Lemme du Sandwich, exercice II.2.12.(2) de *loc. cit.*)**.** *Soit X un espace* CAT(0)*. Soit C_1, C_2 deux parties convexes et complètes de X. On note d_{C_i} la fonction distance à C_i. Si les restrictions de d_{C_1} et d_{C_2} à respectivement C_2 et C_1 sont constantes égales à un certain d alors C_1 et C_2 sont isométriques et l'enveloppe convexe de $C_1 \cup C_2$ est isométrique à $C_1 \times [0, d]$.*

Théorème 1.19 (Théorème II.2.14 de [**BH99**])**.** *Soit X un espace* CAT(0) *et $c\colon \mathbb{R} \to X$ une géodésique.*

(i) L'ensemble, X_c, de toutes les droites géodésiques parallèles à c est une partie convexe de X.

(ii) Soit π_c la restriction à X_c de la projection sur l'image de c. Posons $X_c^0 = \pi_c^{-1}(c(0))$. Alors X_c^0 est une partie convexe et X_c se décompose canoniquement en $X_c^0 \times \mathbb{R}$.

Une isométrie γ d'un espace CAT(0), X, est *semi-simple* si il existe $x \in X$ tel que $d(\gamma x, x) = \inf_{y \in X} d(\gamma y, y)$. Pour plus de précisions sur les isométries, on pourra se référer à l'appendice B. Soit $G \curvearrowright X$ une action par isométries de G sur un espace CAT(0). Un sous-ensemble $Y \subset X$ est *G-invariant* si pour tout $g \in G$, $gY = Y$. Une partie convexe fermée G-invariante est *minimale* si elle est minimale dans l'ensemble ordonné par l'inclusion des parties convexes fermées G-invariantes non vides. Si G est un groupe topologique, une action $G \curvearrowright X$ est *continue* si l'application $G \times X \to X$ est *continue*. Comme l'action se fait par isométries, l'action est continue si et seulement si pour tout $x \in X$, l'application orbitale $g \mapsto gx$ est continue.

Théorème 1.20 (Flat torus theorem, Théorème II.7.1 de *loc. cit.*)**.** *Soit A un groupe abélien libre de rang n agissant proprement par isométries semi-simples sur un espace* CAT(0) *X. Alors, il existe un sous-espace euclidien E de X tel que E est A-invariant, de dimension n et l'action $A \curvearrowright E$ se fait par translations.*

Proposition 1.21 (Remarque 39 de [**Mon06**])**.** *Soit G un groupe topologique agissant continûment par isométries sur un espace de Hadamard X. La réunion Y de toutes les parties convexes fermées de X, G-invariantes et minimales se décompose en un produit $Y \simeq Z \times Z'$. L'action de G sur Z' est triviale et toute partie convexe fermée G-invariante minimale est isométrique à Z.*

1.4. Bord à l'infini. Si X est un espace CAT(0), on va attacher à X un espace, appelé *bord à l'infini* de X et noté ∂X, tel que $\overline{X} = X \cup \partial X$ réalise une compactification géométrique naturelle de X dans le cas où se dernier est propre.

Deux rayons géodésiques ρ, ρ' sont *équivalents* si $\sup_{t,t'>0} d(\rho(t), \rho'(t')) < +\infty$. Le bord à l'infini est alors l'ensemble quotient de l'ensemble de tous les rayons géodésiques par la relation d'équivalence que l'on vient de définir. Les points de ∂X seront typiquement notés ξ ou η. Si on fixe un point $x \in X$ avec X espace de Hadamard alors l'ensemble ∂X s'identifie avec l'ensemble des rayons géodésiques *issus* de ce point, c'est à dire les rayons ρ tels que $\rho(0) = x$ (voir la proposition II.8.2 de [**BH99**]).

On peut naturellement mettre une topologie sur $\overline{X} = X \cup \partial X$ en fixant un point $x \in X$ et en considérant le système inverse des boules fermées centrées en x. La projection de la boule $\overline{B}(x,r)$ sur la boule $\overline{B}(x,r')$ est bien sûr la projection métrique de la proposition 1.13. Cette projection s'étend à ∂X en définissant le projeté de $\xi \in \partial X$ sur $\overline{B}(x,r)$ comme étant le point à distance r de x sur le rayon géodésique issu de x *pointant* vers ξ (c'est à dire dans la classe ξ). Cette topologie sur ∂X ne dépend du choix de x et coïncide avec la topologie initiale (induite par la distance) sur X. On l'appelle *topologie conique* ou *topologie visuelle* (voir la définition II.8.5 de *loc. cit.*).

Soit x un point d'un espace CAT(0), X, et $\xi \in \partial X$ correspondant à un rayon géodésique ρ issu de x. On notera $\rho(\infty) = \xi$. On définit la *fonction de Busemann* associée à ξ et normalisée en x par la formule

$$\beta_\xi(y) = \lim_{t\to\infty}(d(y,\rho(t)) - t).$$

L'existence de la limite est assurée par le lemme II.8.18 de *loc. cit.*. Si on veut accentuer la dépendance en x, on notera $\beta_\xi(y,x)$. La dépendance en x est souvent négligée grâce la *relation de cocycle*

$$\forall x,y,z \in X,\ \beta_\xi(x,z) = \beta_\xi(x,y) + \beta_\xi(y,z) \tag{1.1}$$

Ainsi pour $x,y \in X$, $\beta_\xi(.,x)$ et $\beta_\xi(.,y)$ ne diffèrent que d'une constante qui est $\beta_\xi(y,x)$. Il existe une définition générale pour un espace métrique, d'*horofonction* (voir II.8.12 de *loc. cit.*). Il se trouve que dans le cas des espaces de Hadamard, l'ensemble des horofonctions s'identifie avec l'ensemble des fonctions de Busemann. Ainsi, on utilisera, le terme horofonction ou fonction de Busemann sans distinction. Une *horosphère* est une ligne de niveau d'une fonction de Busemann et une *horoboule* est un ensemble de la forme $\beta_\xi^{-1}((-\infty,c))$ pour $\xi \in X$ et $c \in \mathbb{R}$.

Définition 1.22. Soit X un espace de Hadamard. Pour $x \in X$ et $\xi,\eta \in \partial X$, on note $\angle_x(\xi,\eta)$ l'angle d'Alexandrov entre le rayon géodésique reliant x à ξ et le rayon géodésique reliant x à η. On définit alors l'*angle* $\angle(\xi,\eta)$ par la formule

$$\angle(\xi,\eta) = \sup_{x\in X} \angle_x(\xi,\eta).$$

Cette formule définit une distance appelée *distance angulaire* sur ∂X. Cette distance fait de ∂X un espace métrique complet et la topologie induite par cette distance est plus fine que la topologie visuelle (voir la proposition II.9.6 de [**BH99**]).

Proposition 1.23 (Proposition II.9.3)**.** *Soit Δ un triangle géodésique avec un sommet à l'infini dans un espace* CAT(0)*, X, de sommets $\xi \in \partial X$ et $x,y \in X$. Alors*

(i) $\angle_x(y,\xi) + \angle_y(x,\xi) \leq \pi$.

(ii) $\angle_x(y,\xi) + \angle_y(x,\xi) = \pi$ *si et seulement si l'enveloppe convexe de ce triangle est isométrique à une bande euclidienne.*

Proposition 1.24 (Proposition II.9.8 de [**BH99**])**.** *Soit X un espace de Hadamard avec un point base x_0. Soit $\xi,\eta \in \partial X$ et c,c' les rayons géodésiques tels que $c(0) = c'(0) = x_0$, $c(\infty) = \xi$ et $c'(\infty) = \eta$. Alors*

(i) $\angle(\xi,\eta) = \lim_{t,t'\to\infty} \overline{\angle}_{x_0}(c(t),c'(t')) = \sup\{\overline{\angle}_{x_0}(c(t),c'(t'))|t,t' > 0\}$,

(ii) La fonction $t \mapsto \angle_{c(t)}(\xi, \eta)$ *est croissante et*

$$\angle(\xi, \eta) = \lim_{t \to \infty} \angle_{c(t)}(\xi, \eta).$$

Proposition 1.25 (Corollaire II.9.9 de de [**BH99**])**.** *Soit* X *un espace de Hadamard. Si pour un point* $x \in X$ *et deux points* $\xi, \eta \in \partial X$*, on a* $\angle_x(\xi, \eta) = \angle(\xi, \eta)$ *alors l'enveloppe convexe des images des rayons géodésiques issus de* x *et pointant respectivement vers* ξ *et* η *est isométrique à un secteur angulaire euclidien d'angle* $\angle_x(\xi, \eta)$*.*

La formule angulaire asymptotique suivante provient de la section 2 de [**CM09b**].

Lemme 1.26 (Formule angulaire asymptotique)**.** *Soit* X *un espace* CAT(0)*. Si* ρ *est le rayon géodésique issu de* x *pointant vers* $\xi \in \partial X$ *alors pour tout* $y \neq x$*, on a*

$$\lim_{t \to \infty} \cos(\overline{\angle}_x(\rho(t), y)) = -\frac{\beta_\xi(y, x)}{d(x, y)}.$$

Lemme 1.27 (lemme II.9.16 de [**BH99**])**.** *Soit* X *un espace* CAT(0) *et* x *un point de* X*. Soit* (x_n) *et* (y_n) *deux suites de* X *convergeant respectivement vers* ξ *et* η *dans* ∂X*. Alors,*

$$\liminf_{n \to \infty} \overline{\angle}_x(x_n, y_n) \geq \angle(\xi, \eta).$$

Proposition 1.28 (Corollaire II.9.11 de [**BH99**])**.** *Soit* X_1 *et* X_2 *deux espaces de Hadamard. Alors* $\partial(X_1 \times X_2)$ *muni de la distance angulaire* $\angle$ *est isométrique au joint sphérique* $\partial X_1 * \partial X_2$ *de* $(\partial X_1, \angle)$ *et* $(\partial X_2, \angle)$*.*

Théorème 1.29 ([**BH99**, Théorème II.9.13])**.** *Si* X *est un espace de Hadamard alors* $(\partial X, \angle)$ *est un espace* CAT(1) *complet.*

Si Z est un espace CAT(1) et $Y \subset Z$ alors on dit que Y est *convexe* si pour $x, y \in Y$ tels que $d(x, y) < \pi$ alors $[x, y] \subset Y$. Si X est un espace de Hadamard alors le bord ∂Y d'une partie convexe $Y \subset X$ est une partie convexe de ∂X (voir [**BH99**, II.9.14]).

Proposition 1.30 (Proposition II.9.22 de [**BH99**])**.** *Soit* X *un espace de Hadamard et* $(x_n), (x'_n)$ *deux suites de* X *convergeant vers* ξ *et* ξ' *dans* ∂X*. Supposons que chaque segment* $[x_n, x'_n]$ *rencontre un compact fixé* $K \subset X$ *alors il existe une géodésique* $c \colon \mathbb{R} \to X$ *telle que* $c(-\infty) = \xi$*,* $c(\infty) = \xi'$ *et* c *rencontre* K*.*

1.5. fonctions convexes.

Définition 1.31. Soit X un espace CAT(0) et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction sur X. On dit que f est *convexe* (respectivement *affine*) si sa composition $f \circ c$ avec toute paramétrisation géodésique $c : I \to X$ est une application convexe (respectivement affine) de I dans $\mathbb{R}$.

Soit X un espace CAT(0) et x_0 un point de X. On note $\mathcal{C}_0$ l'espace vectoriel des fonctions convexes f qui s'annulent en x_0. Notons $i : X \to \mathcal{C}_0$ l'application suivante

$$i(x) : y \mapsto d(y, x) - d(x, x_0).$$

Toutes ces applications sont convexes et 1-Lipschitz. Il y a une topologie naturelle sur $\mathcal{C}_0$ qui est celle de la convergence ponctuelle. Si on note $\mathcal{D} = i(X)$ alors $\overline{\mathcal{D}}$ est constitué de fonctions convexes et 1-Lipschitz et contient en particulier les fonctions de Busemann s'annulant en x_0. La topologie de la convergence ponctuelle permet de voir $\overline{\mathcal{D}}$ comme une

partie fermée du produit $\prod_{x\in X}[-d(x,x_0),d(x,x_0)]$ et donc compacte pour cette topologie. En particulier si X est propre, alors $\overline{\mathcal{D}}\setminus\mathcal{D}$ ne contient que les fonctions de Busemann et on retrouve la compactification visuelle.

Il existe une caractérisation agréable des fonctions de Busemann dans le cas des espaces de Hadamard.

Proposition 1.32 (Proposition II.8.22 de [**BH99**])**.** *Soit X un espace de Hadamard et $f\colon X\to\mathbb{R}$ une fonction. La fonction f est une fonction de Busemann si et seulement si*

(i) f est convexe,

(ii) f est 1-Lipschitz et

(iii) pour tout $x\in X$ et tout $r>0$, il existe un unique $y\in\overline{B}(x,r)$ tel que $f(y)=f(x)-r$.

Lemme 1.33 (Lemme 4.10 de [**CL10a**])**.** *Soit X un espace* CAT(0)*. Si $\mathcal{A}$ est une partie compacte de $\mathcal{C}_0$ ne contenant pas de fonctions affines alors l'enveloppe convexe fermée $\overline{\mathrm{Conv}}(\mathcal{A})$ n'en contient pas non plus.*

Théorème 1.34 (Théorème principal de [**AB98a**])**.** *Soit X un espace* CAT(0) *propre et Γ un groupe moyennable agissant continûment par isométries sur X. Alors Γ laisse globalement invariant un sous-espace euclidien (peut-être réduit à un point) ou Γ fixe un point de ∂X.*

On dit qu'un espace CAT(0) est *géodésiquement complet* si tout segment géodésique non réduit à un point se prolonge en une géodésique bi-infinie (non nécessairement unique). D'une manière générale, les fonctions de Busemann sont 1-Lipschitz et convexes. Un point ξ au bord d'un espace CAT(0) est dit *plat* si la fonction de Busemann β_ξ est affine.
Le théorème 1.34 passe par une analyse fine des points plats d'un espace CAT(0) (voir le théorème 1.6 de *loc. cit.*). De celle-ci, nous ne retiendrons que le cas le plus simple.

Lemme 1.35. *Soit X un espace* CAT(0) *géodésiquement complet. Si $\xi\in\partial X$ est un point plat alors*

$$X\simeq\mathbb{R}\times Y_\xi.$$

De plus, la fonction de Busemann β_ξ est constante sur Y_ξ et paramètre affinement le facteur $\mathbb{R}$ à vitesse 1.

Démonstration. C'est un cas particulier du lemme 1.1 de *loc. cit.*. □

Lemme 1.36. *Soit X un espace de Hadamard. Si f une fonction affine 1-Lipschitz telle que*

$$\forall\varepsilon>0\ \forall n\in\mathbb{N}\ \forall x\in X\ \exists z\in X,\ d(x,z)\geq n \text{ et } f(z)-f(x)\geq(1-\varepsilon)d(x,z) \tag{1.2}$$

alors il existe $\xi\in\partial X$ tel que pour $x,y\in X$,

$$f(x)-f(y)=\beta_\xi(y,x)\ .$$

Démonstration. Fixons $x\in X$ alors pour $l>f(x)$, on pose $X_l=\{y\in X|\ f(y)\geq l\}$. Pour tout $l>f(x)$, X_l est une partie convexe fermée non vide et alors, on appelle x_l

le projeté de x sur X_l. Pour tout $l > f(x)$, on a $f(x_l) - f(x) \leq d(x, x_l)$. Si $f(x) < l' < l$ en appelant y l'unique point sur $[x, x_l]$ tel que $f(y) = l'$, on a

$$d(x, x_{l'}) \leq d(x, y) = \frac{l' - f(x)}{l - f(x)} d(x, x_l).$$

Ce qui montre que $l \mapsto \frac{l-f(x)}{d(x,x_l)}$ est décroissante mais l'hypothèse 1.2 montre que pour $n \in \mathbb{N}$ et $l = f(x)+n$, $\frac{d(x,x_l)}{l-f(x)} \geq 1-\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Ainsi $\lim_{l\to\infty}(l-f(x))/d(x, x_l) = 1$ et donc $d(x, x_l) = l - f(x)$ pour tout $l > f(x)$. Ainsi pour $f(x) < l' < l$, $x_{l'} \in [x, x_l]$. Ce qui montre que $\cup_{l>f(x)}[x, x_l]$ est un rayon géodésique. Appelons, ξ son extrémité à l'infini. L'inégalité $d(x_l, \pi_{X_l}(y)) \leq d(x, y)$ pour $x, y \in X$ et $l < \min\{f(x), f(y)\}$ montre que ξ est indépendant du choix de x. Maintenant, la proposition 1.32 montre que pour tous $x, y \in X$, $f(x) - f(y) = \beta_\xi(y, x)$. □

2. Espaces riemanniens symétriques

On introduit brièvement dans cette section les variétés riemanniennes en dimension finie ou infinie. Pour une véritable introduction, on se référera aux livres [**Kli95**] et [**Lan99**].

2.1. Variétés riemanniennes. Soit E et F deux espaces de Banach. On notera sans distinction $||\ ||$ la norme sur E ou F et E_1 sera la boule unité de E. On note $L(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires bornées de E dans F. C'est un espace de Banach pour la norme $||f|| = \sup_{x\in E_1} ||f(x)||$. De même on notera $L(E^k, F)$ l'espace de Banach des applications k-linéaires bornées de E vers F muni de la norme $||f|| = \sup_{x_1,\dots,x_k\in E_1} ||f(x_1, \dots, x_k)||$. Cet espace s'identifie naturellement avec l'espace de Banach $L(E, L(E, \dots L(E, F)))$.

Soit f une application d'un ouvert $U \subset E$ dans F. Soit $x \in U$, on dit que f est *différentiable* en x s'il existe $\phi \in L(E, F)$ tel que

$$||f(x + h) - f(x) - \phi(h)|| \to 0$$

quand $h \to 0$. Une telle application ϕ est unique et est appelée *différentielle* de f en x. On dit que f est différentiable si elle est différentiable en tout point de U. Dans ce cas, on appelle différentielle l'application qui à $x \in U$ associe la différentielle de f en x. On notera cette application df. On dit que f est de classe C^1 si f est différentiable et si df est continue. Par récurrence, on dit que f est C^k pour $k \geq 2$ si df est C^{k-1}. Finalement, on dit que f est C^∞ si f est C^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Soit $U \subset E$ et $V \subset F$ deux ouverts. Une application $f\colon U \to V$ est un *difféomorphisme* si f est une bijection C^∞ dont l'inverse est aussi C^∞.

Définition 2.1. Soit V un espace topologique métrisable et E un espace de Banach. Un *atlas* est la donnée d'une famille $(c_\alpha, V_\alpha)_{\alpha\in A}$ telle que

(i) V_α est un ouvert de V,

(ii) c_α est un homéomorphisme, appelé *carte* entre V_α et un ouvert U_α de E,

(iii) $V = \cup_{\alpha \in A} V_\alpha$ et

(iv) si $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$, alors $u_\beta \circ u_\alpha^{-1}$ est un difféomorphisme de $u_\alpha(V_\alpha \cap V_\beta)$ sur $u_\beta(V_\alpha \cap V_\beta)$.

Une *variété banachique* modelée sur E est la donnée de V et d'un atlas.

Dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$, on retrouve la notion de variété différentielle C^∞ usuelle. On définit alors de même les notions d'espaces tangents TV, de champ de vecteurs (C^∞), de crochet de Lie $[X, Y]$ entre des champs de vecteurs X et Y, de fibrés cotangents et de fibrés tensoriels... En particulier, on notera S^2V le fibré vectoriel des formes bilinéaires bornées symétriques sur TV.

Définition 2.2. Une *variété riemannienne* est une variété banachique, V, modelé sur un espace de Hilbert muni d'une section g de S^2V telle que pour tout $x \in V$, g_x est définie positive et munit T_xV d'une structure d'espace de Hilbert.

Définition 2.3. Un *espace riemannien symétrique* est une variété riemannienne connexe V telle que pour tout $x \in V$, il existe une isométrie S_x de V telle que $d_xS_x = -\operatorname{Id}$.

Définition 2.4. Un groupe de Lie-Hilbert est un groupe muni d'une structure de variété riemannienne telle que la multiplication et le passage à l'inverse sont des applications C^∞.

On pourra se référer à [**Eel66**] pour un survol dans la théorie à un moment où celle-ci était en plein développement. On trouve dans la thèse [**Mca65**] de J.H. McAlpin le principe suivant sur les variétés riemanniennes.

> « Any property of finite dimensional manifolds which is independent of dimension and local compactness, is also a property of Hilbert manifolds. »

Un des théorèmes qui utilise de manière fondamentale la compacité locale est le théorème de Hopf-Rinow qui affirme que la complétude métrique et la complétude géodésique sont équivalentes pour les variétés riemanniennes de dimension finie. Une seule implication reste vraie dans la généralité des variétés riemanniennes (la complétude métrique implique toujours la complétude géodésique, voir la proposition VIII.6.5 de[**Lan99**]).

Comme en dimension finie, un certain nombre d'objets de la géométrie riemannienne existent en dimension infinie. On ne fait que rappeler la définition de ces objets et on se référera à la littérature pour une preuve de l'existence si besoin. Une *isométrie* entre deux variétés riemanniennes est un difféomorphisme tel que la différentielle en chaque point est une isométrie linéaire entre les espaces tangents.

Soit (V, g) une variété riemannienne. On définit la *connection de Levi-Cività* comme l'unique connection affine, ∇, sur le fibré tangent qui vérifie la relation

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) + g(Z, [X, Y]) + g(Y, [Z, X]) - g(X, [Y, Z])$$

pour tous champs de vecteurs X, Y, Z. A partir de cette connection, on peut définir le *tenseur de courbure* R par la relation

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

À partir du tenseur de courbure, on définit le *tenseur de Riemann* par $R(X,Y,Z,V) = g(R(X,Y)Z,V)$. Ce tenseur possède les symétries suivantes

$$\begin{aligned}
&R(X,Y,Z,V) = -R(Y,X,Z,V)\\
&R(X,Y,Z,V) = -R(X,Y,V,Z)\\
&R(X,Y,Z,V) + R(Y,Z,X,V) + R(Z,X,Y,V) = 0\\
&R(X,Y,Z,V) = R(Z,V,X,Y)
\end{aligned}$$

Dans le cas, d'un espace riemannien symétrique, le tenseur de courbure s'exprime simplement à l'aide du crochet de Lie.

Théorème 2.5 (Théorème XIII.4.6 de[**Lan99**]). *Soit (V,g) un espace riemannien symétrique et x un point de X. Alors pour $X,Y,Z \in T_xX$,*

$$R(X,Y)Z(x) = [Z,[X,Y]](x).$$

Pour savoir si une variété riemannienne est (localement) CAT(0), c'est la condition de courbure sectionnelle négative qui est importante. Si X,Y sont deux vecteurs tangents en un point x d'une variété riemannienne alors la *courbure sectionnelle* en x dans le plan tangent engendré par X et Y est

$$\sec(X,Y) = \frac{-R(X,Y,X,Y)}{||X||^2||Y||^2 - < X,Y >^2}.$$

Les symétries du tenseur de Riemann montrent que la courbure sectionnelle ne dépend que du plan engendré par X et Y dans l'espace tangent T_xV. Le fait que R soit un tenseur et donc une forme quadrilinéaire continue en tout $x \in V$ donne l'existence d'une constante κ_x telle que pour tous vecteurs tangents X,Y à V en x, $|\sec(X,Y)| \leq \kappa_x$. Il suffit pour cela de prendre κ_x comme étant le suprémum de $|R(X,Y,X,Y)|$ sur toutes les paires X,Y de vecteurs unitaires orthogonaux tangents à V en x.

2.2. Espaces symétriques de type non-compact. Suivant la terminologie courante, on appelle *espace symétrique de type non-compact* un espace riemannien symétrique de dimension finie à courbure sectionnelle négative et sans facteur euclidien. Des ouvrages de référence concernant ces espaces sont [**Hel01**] et [**Ebe96**].

Il existe un remarquable dictionnaire géométrico-algébrique entre un espace symétrique de type non-compact et son groupe d'isométries. Si X est un espace symétrique de type non-compact alors

- La composante connexe $G = \mathrm{Isom}^\circ(X)$ du groupe d'isométries de X est un groupe de Lie semi-simple, sans facteur compact et à centre trivial.
- Le stabilisateur $K = \mathrm{Stab}_G(x)$, d'un point $x \in X$ est un sous-groupe compact maximal. Deux tels groupes sont conjugués dans G.
- L'action de G sur X est transitive et donc $X \simeq G/K$.

Réciproquement, si G est un groupe de Lie semi-simple sans facteur compact, à centre trivial et si K est un sous-groupe compact maximal alors il existe sur X une structure d'espace symétrique de type non-compact. Deux telles structures sur $X = G/K$ peuvent

être rendues isométriques après homothéties sur les facteurs de de Rham.

Cette structure se lit aussi sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G. Soit B la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. Il existe une décomposition orthogonale pour B,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{p}$$

où $\mathfrak{t}$ est l'algèbre de Lie de K et $\mathfrak{p}$ s'identifie avec l'espace tangent à X en x. De plus, on a les relations $[\mathfrak{t}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p}$ et $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{t}$. La forme de Killing est définie positive sur $\mathfrak{p}$ et définie négative sur $\mathfrak{t}$. Une telle décomposition s'appelle une *décomposition de Cartan*.

L'exemple générique est celui de l'espace symétrique associé au groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et au sous-groupe compact maximal $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. Cet espace symétrique peut s'interpréter géométriquement comme l'ensemble $\mathcal{E}_1$ des ellipsoïdes de volume unité dans l'espace $\mathbb{R}^n$. L'action de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{E}_1$ provenant de celle de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n$. Le point fixe de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ étant alors la sphère unité. On peut interpréter géométriquement la distance (ou plutôt un choix naturel parmi la demi-droite réelle de distances possibles). Pour cela, il suffit, par homogénéité, d'expliciter la distance à la sphère unité S_1. Si E est un ellipsoïde de volume 1 dont les longueurs des axes principaux sont $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ alors

$$d(E, S_1) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha_i)^2}.$$

Cet exemple est générique car il se trouve que tout espace symétrique de type non-compact est un sous-espace *totalement géodésique* de $\mathcal{E}_1$. Un sous-espace totalement géodésique, Y, d'une variété riemannienne X est une sous-variété telle qu'en tout point $y \in Y$ et pour tout vecteur $v \in T_yY$, la géodésique de X issue de y et dirigée par v est incluse dans Y. On pourra se référer aux pages 134-136 de [**Ebe85**] pour une preuve.

2.3. Exemples d'espaces riemanniens symétriques. On traite ici un exemple d'espace riemannien symétrique de dimension infinie. Celui-ci est un équivalent de l'espace symétrique de type non-compact $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. Il apparaît dans le chapitre III.2 de [**dlH72**] et plus récemment on trouve un certain nombre de calculs et de propriétés de cet espace dans [**Tum**], [**Lar07**] et [**CL10b**].

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert réel séparable de dimension infinie et notons $\mathbf{L}^2(\mathcal{H})$ les opérateurs de Hilbert-Schmidt de $\mathcal{H}$, c'est à dire les opérateurs M tels que si (e_i) est une base Hilbertienne alors $\sum_i ||Me_i||^2$ est finie. C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $< M, N >= \mathrm{Tr}({}^tMN) = \sum_i < Me_i, Ne_i >$. Il s'agit d'un idéal dans l'algèbre des opérateurs bornés $\mathbf{L}(\mathcal{H})$.

On note alors $\mathbf{GL}^2(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs inversibles bornés qui s'écrivent $\mathrm{Id} + H$ avec $H \in \mathbf{L}^2(\mathcal{H})$. C'est un groupe de Lie-Hilbert dont l'espace tangent en Id s'identifie avec $\mathbf{L}^2(\mathcal{H})$. Le sous-groupe $\mathbf{O}^2(\mathcal{H}) \leq \mathbf{GL}^2(\mathcal{H})$ qui préserve le produit scalaire de $\mathcal{H}$ est un sous-groupe de Lie-Hilbert car $g \mapsto^t gg$-Id de $\mathbf{GL}^2(\mathcal{H})$ dans les opérateurs de Hilbert-schmidt symétriques définis positifs est une submersion sur l'image réciproque de 0. En effet, la différentielle en g est l'application $h \mapsto^t gh +^t hg$ de $\mathbf{L}^2(\mathcal{H})$ dans les

opérateurs symétriques est surjective. Un antécédant de f étant $1/2gf$. L'espace quotient $\mathbf{GL}^2(\mathcal{H})/\mathbf{O}^2(\mathcal{H})$ possède alors une structure d'espace riemannien symétrique dont la symétrie géodésique en l'image de Id provient de $g \mapsto^t g^{-1}$.

En effet si $\mathbf{S}^2(\mathcal{H})$ désigne les opérateurs de Hilbert-Schmidt auto-adjoint de $\mathcal{H}$ et $\mathbf{P}^2(\mathcal{H})$ les opérateurs définis positifs de $\mathbf{GL}^2(\mathcal{H})$ alors l'exponentielle réalise un difféomorphisme de $\mathbf{S}^2(\mathcal{H})$ sur $\mathbf{P}^2(\mathcal{H})$ et $\mathbf{GL}^2(\mathcal{H})$ agit par $(g,p) \mapsto^t gpg$. Cette action est lisse, transitive et le stabilisateur de Id est $\mathbf{O}^2(\mathcal{H})$. Ainsi, il y a un difféomorphisme entre $\mathbf{GL}^2(\mathcal{H})/\mathbf{O}^2(\mathcal{H})$ et $\mathbf{P}^2(\mathcal{H})$. L'espace tangent en Id s'identifie avec $\mathbf{S}^2(\mathcal{H})$. On obtient une structure riemannienne sur laquelle $\mathbf{GL}^2(\mathcal{H})$ agit par isométries en posant $< M, N >_p = \mathrm{Tr}(p^{-1}Mp^{-1}N)$ pour M, N vecteurs de l'espace tangent à $\mathbf{P}^2(\mathcal{H})$ en p que l'on identifie avec $\mathbf{S}^2(\mathcal{H})$ par la translation de vecteur p.

De plus, la courbure sectionnelle est partout négative. Un raisonnement analogue à celui fait en dimension finie (voir le paragraphe XI§3 de[**Lan99**]) montre que $\mathbf{P}^2(\mathcal{H})$ est un espace CAT(0) symétrique au sens de la section 3.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Un *système de Lie triple* $\mathfrak{l}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ tel que $[\mathfrak{l},[\mathfrak{l},\mathfrak{l}]] \subseteq \mathfrak{g}$. C'est un résultat classique (voir le théorème 7.2 de [**Hel01**]) que si X est un espace symétrique de type non-compact pour lequel $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ est l'algèbre de Lie de $\mathrm{Isom}^\circ(X)$ alors les systèmes de Lie triple du sous-espace $\mathfrak{p}$ sont en bijection, via l'exponentielle, avec les sous-espaces totalement géodésiques de X contenant le point base naturel de $X = G/K$. C'est aussi vrai pour l'espace $\mathbf{P}^2(\mathcal{H})$.

Proposition 2.6 (Proposition III.1.4 de [**dlH72**])**.** *Soit* $\mathfrak{l}$ *un sous-espace vectoriel fermé de* $\mathbf{S}^2(\mathcal{H})$*. Si* $\mathfrak{l}$ *est un système de Lie triple alors* $\exp(\mathfrak{l})$ *est un sous-espace totalement géodésique de* $\mathbf{P}^2(\mathcal{H})$*.*

Remarque 2.7. La liste (voir [**dlH71**]) des L^*-séparables simples (ce qui généralise la notion d'algèbre de Lie symétrique orthogonale [**Hel01**, V.1] en dimension infinie) suggère que les seuls espace symétriques riemanniens irréductibles de dimension infinie et de rang fini sont

$$\begin{aligned} X_p(\mathbb{R}) &= \mathbf{O}(p,\infty)/\left(\mathbf{O}(p)\times\mathbf{O}(\infty)\right)\\ X_p(\mathbb{C}) &= \mathbf{U}(p,\infty)/\left(\mathbf{U}(p)\times\mathbf{U}(\infty)\right)\\ X_p(\mathbb{Q}) &= \mathbf{Sp}(p,\infty)/\left(\mathbf{Sp}(p)\times\mathbf{Sp}(\infty)\right)\end{aligned}$$

Ici $\mathbb{Q}$ désigne le corps des quaternions. L'espace $X_p(\mathbb{R})$ est l'objet du chapitre III.

3. Espaces CAT(0) symétriques

Soit (X,d) un espace métrique géodésique, on dit que X est *sans branchement géodésique* si pour toute paire de segments géodésiques $c_1\colon [0,t_1] \to X$ et $c_2\colon [0,t_2] \to X$ telle qu'il existe $t > 0$ avec $t < t_1, t_2$ et $c_1|_{[0,t]} = c_2|_{[0,t]}$ alors c_1 et c_2 coïncident sur $[0, \min(t_1,t_2)]$. Avec cette définition, on exclut les cas qui se présentent dans les arbres, les immeubles et les complexes cubiques CAT(0) où un segment géodésique peut se prolonger de différentes manières. Une large famille d'exemples est donnée par les variétés riemanniennes.

Définition 3.1. Un espace CAT(0), X, est *symétrique* s'il est sans branchement géodésique et si en tout point $x \in X$, il existe une isométrie involutive S_x possédant un unique point fixe qui est x.

Un espace géodésique possède la *propriété d'extension unique des géodésiques* si tout segment géodésique non réduit à un point se prolonge de manière unique en une géodésique bi-infinie. Les espaces géodésiques qui possèdent cette propriété sont donc ceux qui sont sans branchement géodésique et tels que tout segment géodésique se prolonge en une géodésique bi-infinie. Pour les variétés riemanniennes de dimension finie, cette propriété est donc équivalente à la complétude géodésique qui elle-même est équivalente à la complétude métrique par le théorème de Hopf-Rinow (voir par exemple la proposition VIII.6.5 et le théorème VIII.6.6 de [**Lan99**])

Si X est un espace métrique uniquement géodésique (entre deux points, il existe un unique segment géodésique) qui possède la propriété d'extension unique des géodésiques alors on peut définir la *symétrie géodésique* au point $x \in X$. Si c est une géodésique telle que $c(0) = x$ alors pour $t \in \mathbb{R}$, l'image de $c(t)$ sera $c(-t)$.

Lemme 3.2. *Soit X un espace* CAT(0) *symétrique. Alors X possède la propriété d'extension unique des géodésiques et pour tout $x \in X$, S_x est la symétrie géodésique en x. De plus,* $\mathrm{Isom}(X)$ *agit transitivement sur X.*

Démonstration. Soit $x \in X$. Pour $y \in X$, appelons m le milieu de $[y, S_x(y)]$, comme S_x est une isométrie, $S_x(m)$ est le milieu de $[S_x(y), y]$ et donc $S_x(m) = m$ et donc $m = x$.
Soit $c\colon [0, T[\to X$ une géodésique et posons $x = c(3/4T)$. Comme $[c(0), S_x(c(0))]$ a pour milieu x, $[c(0), x] \cup [x, S_x(c(0))]$ est un segment géodésique. Ce dernier segment prolonge c. Ainsi, X a la propriété d'extension unique des géodésiques. La transitivité est obtenue en observant que si $x, y \in X$ et m est le milieu de $[x, y]$ alors $S_m(x) = y$. □

On appelle *transvection* la composée de deux symétries géodésiques en des points distincts. On appelle transvection de x vers y la composée $S_m \circ S_x$ où m est le milieu de $[x, y]$.

Lemme 3.3. *Soit X un espace* CAT(0) *possédant la propriété d'unique extension des géodésiques. Alors en tout point de X, l'espace des directions s'identifie avec l'ensemble des rayons géodésiques issus de ce point.*

Démonstration. Il suffit de voir que deux rayons géodésiques c, c' issus d'un même point $x \in X$ tels que $\angle(c, c') = 0$ sont égaux. Par propriété d'extension unique des géodésiques, on peut supposer que c et c' sont définies sur $\mathbb{R}$ avec $c(0) = c'(0) = x$. Soit $t > 0$, on a $\angle_x(c'(t), c(-t)) + \angle_x(c(t), c'(t)) \geq \angle_x(c(t), c(-t)) = \pi$ donc $\angle_x(c'(t), c(-t)) = \pi$ et donc $\overline{\angle}_x(c'(t), c(-t)) = \pi$ ce qui est équivalent à dire que $x \in [c'(t), c(-t)]$. Par unicité du prolongement géodésique, on a donc $c'(t) = c(t)$ pour tout $t > 0$. □

Sous les hypothèses du lemme précédent, on peut alors définir, en tout point $x \in X$, une application *exponentielle* $\exp_x\colon T_x \to X$ qui à un point $(r, d) \in T_x$ associe le point à distance r de x sur le rayon géodésique issu de x de direction d. Remarquons qu'il s'agit de l'exponentielle usuelle dans le cas des variétés riemanniennes complètes.

Lemme 3.4. *Soit X un espace* CAT(0) *possédant la propriété d'unique extension des géodésiques. Pour tout $x \in X$, l'application* $\exp_x$ *réalise une bijection entre T_x et X. Son inverse noté* $\log_x$ *est une application* 1*-Lipschitz.*

Démonstration. Comme X est uniquement géodésique, le lemme 3.3 montre que $\exp_x$ est bijective. Par définition de $\exp_x$, pour $v = (r, c), v' = (r', c') \in T_x$, on a $d(\exp_x(v), x) = r$, $d(\exp_x(v'), x) = r'$ et $\overline{\angle}_x(\exp_x(v), \exp_x(v')) \geq \angle(c, c')$ donc $d(\exp_x(v), \exp_x(v')) \geq d(v, v')$. L'application réciproque est donc 1-Lipschitz. □

Pour x, y, z dans un espace géodésique, on note $S_{x,y,z}$ l'aire du triangle euclidien de comparaison. On modifie légèrement la définition de courbure bornée donnée par B.U. Shergoziev dans [**She95**].

Définition 3.5. Un espace géodésique X est à courbure bornée si pour tout point $p \in X$, il existe des réels $\rho_p, \mu_p > 0$ tels que pour tous $x, y, z \in B(p, \rho_p)$ et tous $y' \in]x, y]$ et $z' \in]x, z]$ on a l'inégalité

$$|\overline{\angle}_x(y, z) - \overline{\angle}_x(y', z')| \leq \mu_p S_{x,y,z}.$$

Dans le cas où $d(x, y) = d(x, z) = r$ alors $S_{x,y,z} = \overline{\angle}_x(y, z)r^2/2$ et la condition de courbure bornée donne (pour $\overline{\angle}_x(y, z) > 0$)

$$\left|1 - \frac{\overline{\angle}_x(y', z')}{\overline{\angle}_x(y, z)}\right| \leq \frac{\mu_x r^2}{2}.$$

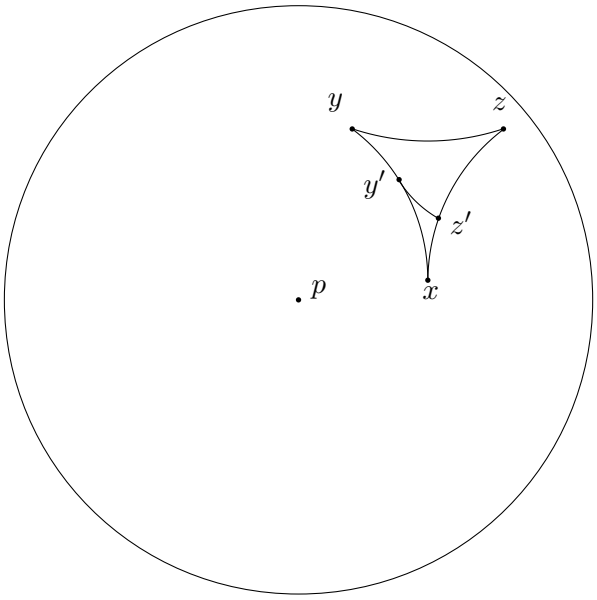
Ce qui implique

$$\left|1 - \frac{\angle_x(y, z)}{\overline{\angle}_x(y, z)}\right| \leq \frac{\mu_x r^2}{2}.$$

La condition est contraignante pour les petits triangles, c'est une condition locale. Pour les variétés riemanniennes de dimension finie, la courbure sectionnelle en chaque point est bornée et les boules fermées sont compactes, ce qui implique qu'elles sont à courbure bornée dans le sens ci-dessus. Pour les variétés riemanniennes de dimension infinie homogènes (en particulier les espaces symétriques), c'est aussi le cas car la courbure sectionnelle est alors uniformément bornée. Un arbre n'est pas à courbure bornée dès lors qu'il possède un sommet de valence supérieure à 3. En effet, l'existence de tripodes dans toutes boules autour de ce point empêche d'être à courbure bornée.

Lemme 3.6. *Soit X un espace de Hadamard symétrique à courbure bornée. Pour tout $x \in X$, l'espace des directions en x est complet.*

Démonstration. Fixons $x \in X$ et $r > 0$ tel que $\frac{\mu_x r^2}{2} \leq 1/2$. Alors pour tout $x, z \in \overline{B}(x, r)$, $\angle_x(y, z) \geq 1/2\overline{\angle}_x(y, z)$. Par le lemme 3.3, les éléments de Σ_x s'identifient avec les rayons géodésiques issus de ce point et donc aussi les éléments à distance exactement r de x. Ainsi, Σ_x est homéomorphe à la sphère centrée en x et de rayon r munie de la distance donnée par l'angle d'Alexandrov. Soit (x_n) une suite de Cauchy dans Σ_x, on a donc $\overline{\angle}_x(x_n, x_m) \to 0$ quand $n, m \to \infty$ et comme $d(x_n, x_m)^2 = 2r^2 - 2r^2 \cos(\overline{\angle}_x(x_n, x_m))$, (x_n) est une suite de Cauchy dans X. Il existe donc $y \in X$ tel que $d(y, x) = r$ et $x_n \to y$. Finalement, comme $\angle_x(y, x_n) \leq \overline{\angle}_x(y, x_n)$, on a bien que x_n converge vers y dans Σ_x. □



Le théorème suivant donnera une caractérisation des sphères hilbertiennes qui nous sera utile pour la suite.

Théorème 3.7 (Théorème 2.1 de [**Ber01**])**.** *Un espace métrique* (W, d) *est isométrique à la sphère unité d'un espace de Hilbert* $\mathcal{H}$ *si et seulement s'il possède les propriétés suivantes :*

(i) W *est un espace* CAT(1) *;*

(ii) W *est complet ;*

(iii) pour tout $x, y \in W$*,* $d(x, y) \leq \pi$ *;*

(iv) pour tout $x \in W$*, il existe un unique* x' *tel que* $d(x, x') = \pi$*.*

De plus, C_0W *est isométrique à* $\mathcal{H}$ *si et seulement si* W *possède les propriétés ci-dessus.*

Remarque 3.8. Dans la version originale, l'énoncé du théorème 3.7 comporte une cinquième propriété qui est :

> pour tout $x, y \in W$ tels que $d(x, y) < \pi$, il existe $z \in W \setminus \{x, y\}$ tel que $d(x, y) = d(x, z) + d(y, z)$.

Cette propriété est en réalité un corollaire de la condition CAT(1) (voir la proposition II.1.4 de [**BH99**]). L'auteur devait avoir en tête la condition de courbure inférieure à 1 au sens d'Alexandrov qui est une version locale de la condition CAT(1) (voir la définition II.1.2 de *loc. cit.*).

Dans [She95], l'auteur montre que, sous certaines hypothèses, un espace géodésique à courbure bornée est une variété topologique modelée sur un espace de Hilbert. C'est à dire qu'en chaque point, il existe un voisinage de ce point homéomorphe à un espace de Hilbert. Sous des hypothèses plus fortes ici, on montre l'existence d'un homéomorphisme global.

Proposition 3.9. *Soit X un espace de Hadamard symétrique. Si X est à courbure bornée alors pour tout point $x \in X$, le cône tangent T_x est isométrique à un espace de Hilbert et l'application exponentielle $\exp_x$ est un homéomorphisme entre T_x et X.*

Démonstration. On commence par montrer que pour tout point de $x \in X$, l'espace des directions Σ_x est isométrique à une sphère hilbertienne en vérifiant les conditions (i) à (iv) de du théorème 3.7. La condition (ii) découle du lemme 3.6 et alors le théorème 1.12 montre la condition (i). La condition (iii) découle de la définition de l'angle d'Alexandrov. La condition (iv) découle de la propriété d'extension unique des géodésiques. Ainsi Σ_x est une sphère hilbertienne et T_x est un espace de Hilbert. Par le lemme 3.4, on sait déjà que $\exp_x$ est une bijection ouverte. Il reste a en montrer la continuité.

On commence par remarquer que par homogénéité, il existe $\mu > 0$ tel que le choix $\mu_x = \mu$ convient pour tout $x \in X$ dans la définition 3.5 de courbure bornée. On choisit alors $r > 0$ tel que $\mu r^2 \leq 1/2$, on aura donc pour tout $x \in X$ et tous $y, z \in \overline{B(x,r)}$,

$$\angle_x(y,z) \geq \frac{1}{2}\overline{\angle}_x(y,z).$$

On montre alors par récurrence sur k que pour tout $x \in X$, l'exponentielle $\exp_x$ est continue de $\overline{B}_{\mathcal{H}}(0, k\frac{r}{2})$ sur $\overline{B}_X(x, k\frac{r}{2})$. Le cas $k = 2$, se traite comme dans le lemme 3.6. Soit v_n une suite de $\overline{B}_{\mathcal{H}}(0,r)$ convergeant vers v_∞. Si $v_\infty = 0$ alors $d(0, \exp_x(v_n)) = ||v_n|| \to 0$ donc $\exp_x(v_n) \to x = \exp_x(0)$. Maintenant, si $v_\infty \neq 0$, on pose (pour n assez grand)

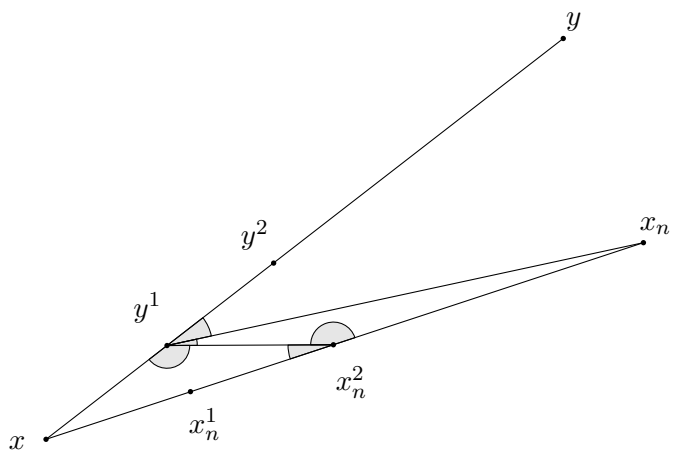
$$r_0 = ||v_\infty|| \in (O, r], \;\; y = \exp_x(v_\infty), \;\; x_n = \exp_x\left(\frac{r_0}{||v_n||}v_n\right).$$

Comme $d(x_n, \exp_x(v_n)) = |r_0 - ||v_n||| \to 0$, il suffit de voir que $x_n \to y$. On sait que $\angle_x(x_n, y) \to 0$ donc $\overline{\angle}_x(x_n, y) \to 0$ et donc $d(x_n, y)^2 = 2r_0^2\left(1 - \cos(\overline{\angle}_x(x_n, y))\right) \to 0$.

On suppose le résultat établi pour $k \geq 2$. On se donne une suite v_n une suite de $\overline{B}_{\mathcal{H}}(0,r)$ convergeant vers v_∞ avec $(k-1)r/2 \geq ||v_\infty|| < kr/2$. On reprend les notations

$$r_0 = ||v_\infty||, \;\; y = \exp_x(v_\infty), \;\; x_n = \exp_x\left(\frac{r_0}{||v_n||}v_n\right)$$

et on introduit y^1, y^2 les points de $[x,y]$ à distance respectivement $r/2$ et r de x et de même les points x_n^1, x_n^2 de $[x, x_n]$ à distance respectivement $r/2$ et r de x. L'hypothèse de récurrence pour $k = 2$ montre que $x_n^1 \to y_1$ et $x_n^2 \to y^2$. Il suffit, alors, de montrer que $\angle_{y_1}(x_n, y) \to 0$. En effet dans ce cas, $d(y^1, x_n)$ et $d(y^1, y)$ sont inférieures à $(k-1)r/2$ pour n assez grand et l'hypothèse de récurrence appliquée à $\exp_y$ montre que $x_n \to y$. Par la proposition 1.9, $\angle_{y^1}(x, x_n^2) \to \pi$. Comme $\angle_x(y^1, x_n^2) + \angle_{y^1}(x, x_n^2) + \angle_{x_n^2}(y^1, x) \leq \pi$, on a $\angle_{x_n^2}(y^1, x) \to 0$. L'inégalité triangulaire renversée donne alors $\angle_{x_n^2}(x_n, y^1) \to \pi$ et de



nouveau, comme $\angle_{x_n}(y^1, x_n^2) + \angle_{y^1}(x_n, x_n^2) + \angle_{x_n^2}(y^1, x_n) \leq \pi$, on a $\angle_{y^1}(x_n, x_n^2) \to 0$. L'inégalité triangulaire $\angle_{y^1}(y^2, x_n) \leq \angle_{y^1}(x_n, x_n^2) + \angle_{y^1}(y^2, x_n^2)$ montre alors que $\angle_{y1}(x_n, y) = \angle_{y^1}(y^2, x_n) \to 0$. □

Remarque 3.10. Réciproquement, soit X un espace CAT(0) qui possède la propriété d'extension unique des géodésiques. S'il existe $x \in X$ tel que T_x est complet et $\exp_x : T_x \to X$ est continue alors X est complet. En effet, soit (x_n) une suite de Cauchy de X alors $\log_x(x_n)$ est une suite de Cauchy de T_x. Celle-ci converge vers $v \in T_x$ et par continuité de l'exponentielle x_n converge vers $\exp_x(v)$.

Donc le cas où X est propre, l'hypothèse de courbure bornée est superflue.

Lemme 3.11. *Si X est un espace* CAT(0) *symétrique propre alors le cône tangent est un espace euclidien et l'application exponentielle un est homéomorphisme.*

Démonstration. Pour tout $x \in X$ et tout $r > 0$, l'application $\log_x$ réalise une bijection continue entre $\overline{B}(x, r)$ et $\overline{B}(0, r) \subset T_x$. Comme $\overline{B}(x, r)$ est compacte, $\overline{B}(0, r)$ l'est aussi et donc T_x est complet et donc un espace euclidien par le théorème 3.7. Toute partie fermée de $\overline{B}(x, r)$ est compacte et a donc une image compacte par $\log_x$. L'application $\log_x$ est donc une bijection continue fermée entre $\overline{B}(x, r)$ et $\overline{B}(0, r)$ pour tout $r > 0$. C'est un homéomorphisme.

□

Dans le théorème 8.4, nous verrons que dans le cas propre, la définition d'espace symétrique CAT(0) coïncide avec la notion classique d'espace riemannien symétrique à courbure négative.

Dans le cas non localement compact, la proposition 3.9 donne, pour un espace de Hadamard symétrique à courbure bornée X, un atlas $\mathcal{A} = \{\exp_x | x \in X\}$ tels que les changements de cartes $\exp_x^{-1} \circ \exp_y$ sont des homéomorphismes entre espaces de Hilbert.

Si ces changements de cartes étaient de plus des applications différentiables alors X serait un espace riemannien symétrique.

3.1. Un espace CAT(0) **symétrique non raisonnable.** Le terme raisonnable fait référence à la citation [**Gro93**, exemple (c) p. 121] de M. Gromov suggérant un résultat similaire à la superrigidité de Margulis pour des espaces symétriques « raisonnables ». L'exemple que nous donnons est un espace de Hadamard symétrique non-localement compact, de rang infini et de courbure non-minorée. En particulier, il ne s'agira pas d'un espace symétrique riemannien. Dans ce cas, l'espace tangent en chaque point est quand même un espace de Hilbert mais l'application exponentielle n'est pas continue.

Notons $\mathbb{H}^2$ le plan hyperbolique à courbure constante -1. Soit Ω un espace de probabilité standard (sans atome). On considère alors, X, l'« intégrale pythagoricienne » de $\mathbb{H}^2$ au dessus de Ω. Par définition, l'espace X est constituée des (classes de) fonctions $\omega \mapsto x_\omega$ de Ω dans $\mathbb{H}^2$ telles que pour tout $o \in \mathbb{H}^2$, $\omega \to d(o, x_\omega)$ est une fonction mesurable de carré sommable. On note alors, comme dans le paragraphe 5.1 de [**Mon06**], $X = L^2(\Omega, \mathbb{H}^2)$. Un point générique de X sera noté $x = (x_\omega)_{\omega\in\Omega}$. La distance sur X est alors donnée par

$$d(x, y)^2 = \int_\Omega d(x_\omega, y_\omega)^2 d\omega.$$

Comme $\mathbb{H}^2$ est un espace de Hadamard séparable, l'espace X est alors un espace de Hadamard séparable (voir par exemple la proposition 3.10 de [**Stu03**]).

Pour $o \in \mathbb{H}^2$, on note S_o la symétrie géodésique en o dans $\mathbb{H}^2$ et pour $x \in X$, on notera aussi σ_x la symétrie en x donnée par la formule pour $y \in X$, $\sigma_x(y) = (S_{x_\omega}(y_\omega))_\omega$. On voit alors que σ_x est une involution isométrique qui possède pour unique point fixe x. Les géodésiques de X se décrivent à partir de celles de $\mathbb{H}^2$.

Proposition 3.12. *Soit I un intervalle réel. Une application $g\colon I \to X$ est une géodésique si et seulement s'il existe une application mesurable $\alpha\colon \Omega \to \mathbb{R}^+$ et une collection de géodésiques $(g_\omega)\colon \alpha(\omega)I \to \mathbb{H}^2$ telles que*

$$\int_\Omega \alpha(\omega)^2 d\omega = 1, \ (g(t))_\omega = g_\omega(\alpha(\omega)t)$$

pour tout $t \in I$ et presque tout ω.

Démonstration. On pourra se référer à la proposition 44 de [**Mon06**] ou à la proposition 3.10 de [**Stu03**] et les références de cette dernière. □

L'espace X est donc un espace de Hadamard symétrique au sens ci-dessus. On va voir qu'il n'est pas à courbure bornée.

Pour $r > 0$ et $a \in (0, \pi)$, choisissons $o \in \mathbb{H}^2$ et deux rayons géodésiques ρ_1, ρ_2 issus de o formant un angle α. Maintenant, pour $\lambda > 0$ on choisit $\Omega_\lambda \subset \Omega$ de mesure λ^2 et on pose $x_1^\lambda = \rho_1(r/\lambda)$ et $x_2^\lambda = \rho_2(r/\lambda)$. On construit des points $x, y^\lambda, z^\lambda \in X$ par

$$\begin{aligned} x_\omega &= o \text{ pour } \omega \in \Omega \\ y_\omega^\lambda &= o \text{ pour } \omega \in \Omega \setminus \Omega_\lambda \\ z_\omega^\lambda &= o \text{ pour } \omega \in \Omega \setminus \Omega_\lambda \\ y_\omega^\lambda &= x_1^\lambda \text{ pour } \omega \in \Omega_\lambda \\ z_\omega^\lambda &= x_2^\lambda \text{ pour } \omega \in \Omega_\lambda \end{aligned}$$

On a alors $d(x, y^\lambda) = d(x, z^\lambda) = r$ et $\overline{\angle}_x(y^\lambda, z^\lambda) = \overline{\angle}_o(x_1^\lambda, x_2^\lambda)$ qui tend vers π quand $\lambda \to 0$. Comme $\angle_x(y^\lambda, z^\lambda) = \angle_o(x_1^\lambda, x_2^\lambda) = a$, en choisissant a aussi proche de zéro que voulu, on nie la condition de courbure bornée.

On peut aussi remarquer que dans cet exemple le rang est $+\infty$. En effet X contient des sous-espaces convexes isométriques à des espaces de Hilbert de dimension infinie. Par exemple, si $L \subset \mathbb{H}^2$ est une géodésique bi-infinie, $\{x \in X |\ x_\omega \in L,\ \forall \omega \in \Omega\}$ est un tel un sous-espace.

L'exemple n'est pas propre au plan hyperbolique et on peut remplacer celui-ci par n'importe quel espace riemannien symétrique de type non-compact, seule la condition de courbure non partout nulle est importante. Si X_0 est un espace de Hilbert alors $L^2(\Omega, X_0)$ aussi.

On veut maintenant comprendre l'application exponentielle pour $X = L^2(\Omega, \mathbb{H}^2)$ et donc, pour cela, comprendre aussi l'espace des directions et le cône tangent en un point. Comme l'espace X est homogène, on obtiendra des espaces isométriques pour chaque point. On va donc le faire au point $x = (x_\omega)$ où $\omega \mapsto x_\omega$ est constante égale à un certain $o \in \mathbb{H}^2$.

Définition 3.13. Soit (Y, d) un espace métrique séparable de diamètre π et Ω un espace mesuré. L'*intégrale sphérique*, $\int_\Omega^* Y$, de Y au-dessus de Ω est l'ensemble constituée de paires $(y, v) = ((y_\omega), (v_\omega))$ telles que

(i) $y_\omega \in Y$, $v_\omega \in \mathbb{R}^+$ pour tout ω,

(ii) $\omega \mapsto v_\omega$ est mesurable et $\int_\Omega v_\omega^2\ d\omega = 1$,

(iii) $\omega \mapsto y_\omega$ est mesurable.

La distance sur $\int_\Omega^* Y$ est alors définie par

$$\cos(d((x, v), (y, w))) = \int_\Omega v_\omega w_\omega \cos(d(x_\omega, y_\omega)) d\omega.$$

Dans le cas où Ω est constitué de deux atomes $\{\omega_1, \omega_2\}$ de mesure 1 alors on retrouve le joint sphérique $X * X$ de la définition 1.10. Dans ce cas, v_1 sera $\cos(\theta)$ et v_2 sera $\sin(\theta)$. On pourra se reporter à la remarque 48 de [**Mon06**].

Proposition 3.14. *Pour $x \in X = L^2(\Omega, \mathbb{H}^2)$, l'espace des directions Σ_x est isométrique à l'intégrale sphérique $\int_\Omega^* \Sigma_o$ et l'espace tangent T_x est isométrique à l'intégrale pythagoricienne $L^2(\Omega, T_o)$.*

Démonstration. Soit g, g' deux rayons géodésiques issus de x. Par la proposition 3.12, on a l'existence de $\{g_\omega\}, \{g'_\omega\}$, famille de rayons issus de o et v, v' applications mesurables $\Omega \to \mathbb{R}^+$ de norme L^2 égales à 1. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\cos(\angle_x(g,g)) &= \lim_{t\to 0} \cos(\overline{\angle}_x(g(t), g(t'))) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{2t^2 - d(g(t), g(t'))^2}{2t^2} \\
&= 1 - 1/2 \lim_{t\to 0} \frac{d(g(t), g(t'))^2}{t^2} \\
&= 1 - 1/2 \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^2} \int_\Omega (v_\omega^2 + v'^2_\omega)t^2 - 2v_\omega v'_\omega \cos(\overline{\angle}_o(g_\omega(v_\omega t), g'_\omega(v'_\omega t)))d\omega \\
&= \int_\Omega v_\omega v'_\omega \cos(\angle_o(g_\omega, g'_\omega))d\omega.
\end{aligned}$$

Ceci montre que Σ_x se plonge isométriquement dans $\int_\Omega^* \Sigma_o$. Récripoquement, si $((g_\omega), (v_\omega))$ est un élément de $\int_\Omega^* \Sigma_o$, on construit la géodésique $t \mapsto g(t)$ où $(g(t))_\omega = g_\omega(v_\omega t)$ pour presque tout ω.

Maintenant, on définit une application $\Phi\colon T_x \to L^2(\Omega, T_o)$ par la formule

$$(\lambda, (g_\omega, v_\omega)) \mapsto (\lambda v_\omega, g_\omega).$$

On calcule alors

$$d((\lambda, (g,v)), (\lambda', (g', v')))^2 = \lambda^2 + \lambda'^2 - 2\lambda\lambda' \cos\left(\int_\Omega v_\omega v'_\omega \cos(\angle_o(g_\omega, g'_\omega))d\omega\right)$$

et

$$\begin{aligned}
d((\lambda v_\omega, g_\omega), (\lambda' v'_\omega, g'_\omega))^2 &= \int_\Omega (\lambda v_\omega)^2 + (\lambda' v'_\omega)^2 - 2\lambda v_\omega \cdot \lambda' v'_\omega \cos(\angle_o(g_\omega, g'_\omega))d\omega \\
&= \lambda^2 + \lambda'^2 - 2\lambda\lambda' \cos\left(\int_\Omega v_\omega v'_\omega \cos(\angle_o(g_\omega, g'_\omega))d\omega\right).
\end{aligned}$$

Ce qui montre que Φ est une isométrie et son inverse est donné par

$$(\lambda_\omega, g_\omega) \mapsto (\lambda, (g_\omega, \lambda_\omega/\lambda))$$

où $\lambda = \sqrt{\int \lambda_\omega^2 d\omega}$. □

Ainsi, l'espace tangent en tout point est un espace de Hilbert. Cependant l'application exponentielle n'est pas continue. En effet, on peut identifier la sphère unité de T_x à Σ_x. Le contre-exemple à la condition de courbure négative montre que l'on peut trouver une suite de rayons géodésiques (ρ_n) issus de x tels que $\angle(\rho_n, \rho_m) \to_{n,m\to\infty} 0$ et tels que les points $\rho_n(1)$ soient uniformément séparés.

4. Immeubles sphériques

L'ouvrage récent de référence sur les immeubles est [**AB08**]. Ici, on donne seulement les idées et résultats à avoir en tête pour ce qui suivra. Une définition (équivalente aux définitions usuelles) pratique et plus visuelle pour nous est celle donnée en II.10A.1 de [**BH99**].

Définition 4.1. Un *immeuble sphérique* de dimension n est un complexe simplicial X dont les simplexes sont des simplexes sphériques tel que :

(i) X est la réunion d'une collection $\mathcal{A}$ de sous-complexes E appelés *appartements* qui munis de la distance intérieure sont isométriques à la sphère $\mathbb{S}^n$ et cette distance intérieure induit la distance sphérique sur chaque simplexe. Les simplexes de dimension n sont appelés des *chambres*. Les intersections de chambres sont appelées *cellules* ou *faces*.

(ii) Deux chambres sont incluses dans un appartement commun.

(iii) Soient E et E' deux appartements contenant tous les deux, deux chambres C et C' alors il existe une isométrie simpliciale de E sur E' qui fixe point par point C et C'

Un immeuble sphérique est dit *épais* si tout simplexe de dimension $n-1$ est une face d'au moins trois simplexes de dimension n.

Un point étonnant de cette définition est qu'elle ne fait pas intervenir ce que l'on appelle le *groupe de Weyl* de l'immeuble qui est une donnée capitale. On pourra le retrouver en montrant que tout appartement est un complexe de Coxeter d'un type fixé et le groupe de Weyl est alors le groupe de Coxeter associé.

Le paragraphe 3.6 de [**Ebe96**] fait le lien entre espace symétrique de type non-compact et immeuble sphérique.

Proposition 4.2. *Soit X un espace symétrique de type non-compact et de rang $r > 1$. Il existe une structure d'immeuble sphérique épais, de dimension $r-1$, sur ∂X telle que la distance soit la distance angulaire.*

Le groupe de Weyl d'un immeuble au bord d'un espace symétrique de type non-compact X, est alors le groupe de Weyl du groupe semi-simple des isométries de X.

Dans la suite, des immeubles sphériques de type B_p interviendront. On représente le type d'un appartement en dimension 1 ce qui correspond à $p = 2$.

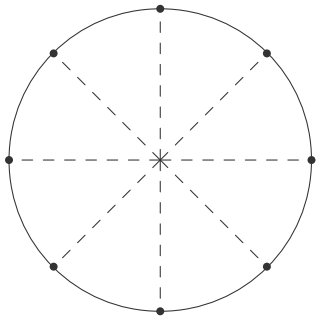


FIGURE 1. Un appartement de type B_2.

CHAPITRE II

Espaces de dimension télescopique finie

Ce chapitre doit beaucoup à l'article [**CL10a**] de P.-E. Caprace et A. Lytchak qui introduit la notion de dimension télescopique. On redonne ici une démonstration de leur premier théorème (Théorème 1.1 chez eux, théorème 6.1 ici) purement géométriquement sans utiliser de « flot de gradient ». A la fin du chapitre, on s'intéresse plus particulièrement à des espaces symétriques de dimension télescopique finie.

5. Dimensions géométrique, télescopique et inégalité de Jung

5.1. Dimension géométrique. Dans l'espace euclidien de dimension n le théorème de Jung affirme que pour toute partie bornée $S \subset \mathbb{R}^n$ il existe une unique boule fermée de rayon minimal $r = \mathrm{rad}(S)$ contenant S et on a alors l'inégalité

$$\mathrm{rad}(S) \leq \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}\,\mathrm{diam}(S).$$

De plus, il y a égalité si et seulement si $\overline{S}$ contient les sommets d'un simplexe régulier de dimension n et d'arêtes de longueur $\mathrm{diam}(S)$. Ainsi, pour un espace euclidien E, on peut caractériser la dimension de l'espace à partir des rapports $\mathrm{rad}(S)/\,\mathrm{diam}(S)$ où S parcourt les parties bornées de E. Pour une version $\mathrm{CAT}(\kappa)$, on peut se reporter à [**LS97**].

Définition 5.1. Un espace $\mathrm{CAT}(0)$, X, est de *dimension géométrique* plus petite que n si pour toute partie $Y \subset X$ de diamètre fini, on a l'inégalité

$$\mathrm{rad}(Y) \leq \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}\,\mathrm{diam}(Y).$$

Cette définition de la dimension géométrique d'un espace $\mathrm{CAT}(0)$ n'est pas la définition originale mais lui est équivalente par le théorème 1.3 de [**CL10a**]. La définition originale est due à B. Kleiner dans [**Kle99**]. Elle est donnée pour les espaces $\mathrm{CAT}(\kappa)$ et se fait de manière itérative à l'aide de l'espace des directions qui lui est $\mathrm{CAT}(1)$. La dimension géométrique d'un espace discret est nulle et on définit la dimension géométrique, DimGeo, comme la plus petite fonction (à valeurs dans $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$) sur la classe des espaces $\mathrm{CAT}(\kappa)$ telle que $\mathrm{DimGeo}(X) \geq \mathrm{DimGeo}(\Sigma_x X) + 1$ pour tout $x \in X$. Un des buts de l'article de B. Kleiner est d'obtenir différentes caractérisations de cette dimension.

Théorème 5.2 (Théorème A de [**Kle99**])**.** *Soit $\kappa \in \mathbb{R}$ et X un espace $\mathrm{CAT}(\kappa)$. Les quantités suivantes sont égales à la dimension géométrique de X*

- $\sup\{\mathrm{DimTop}(K) \mid K \subset X \text{ est compact}\}$*, où* DimTop *désigne la dimension topologique (dimension de recouvrement de Lebesgue).*

- $\sup\{k \mid H_k(U,V) \neq 0,$ pour une paire d'ouverts $V \subset U \subset X\}$. *où* $H_k(U,V)$ *est le* k*-ième groupe d'homologie relative de* U *par rapport à* V.

La propriété suivante pour les espaces CAT(1) de dimension géométrique finie nous sera utile.

Proposition 5.3 (proposition 1.4 de [**BL05**])**.** *Soit* X *un espace* CAT(1) *complet et* $Y \subset X$ *une partie convexe fermée de dimension géométrique finie. Si* Y *est de rayon inférieur à* $\pi/2$ *alors l'ensemble des centres circonscrits possède un unique centre circonscrit, appelé* centre des centres*, qui est invariant par toute isométrie laissant* Y *invariant.*

5.2. Cônes asymptotiques. La dimension géométrique d'un espace est une notion locale puisqu'elle fait intervenir l'espace des directions en chaque point. On veut maintenant définir une quantité « à grande échelle ».

Définition 5.4. Un *ultrafiltre non principal* sur $\mathbb{N}$ est une mesure de probabilité finiment additive, ω sur $\mathbb{N}$ telle que
- $\omega(S) \in \{0,1\}$, pour tout $S \subset \mathbb{N}$.
- $\omega(F) = 0$, pour toute partie finie $F \subset \mathbb{N}$.

L'existence d'ultrafiltres non principaux est une conséquence du lemme de Zorn. En effet, l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ de mesure 1 forme un filtre de parties maximal pour la relation d'inclusion. La vision probabiliste est cependant plus agréable à manipuler pour ce qui nous concerne.

Fixons, ω, un ultrafiltre non principal sur $\mathbb{N}$. Soit X est un espace topologique, x un point de X et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de X. On dit que (x_n) converge vers x (relativement à ω) si pour tout voisinage U de x, $\omega(\{n|x_n \in U\}) = 1$. Si X est séparé alors toute suite possède au plus une limite et l'on note $\lim_\omega x_n = x$. La propriété principale des ultrafiltres est la suivante. Si X est compact alors toute suite est convergente.

Soit ω un ultrafiltre non principal et (X_n, d_n, x_n) une suite d'espaces métriques avec point base x_n. On note $X_\infty = \{(y_n) \in \prod X_n \mid (d(x_n, y_n))_n$ est bornée$\}$. Cet espace est muni d'une pseudo-distance $d(y,z) = \lim_\omega d_n(y_n, z_n)$. L'espace quotient associé à la relation « être à distance 0 » est alors un espace métrique noté (X_ω, d_ω) appelé *ultraproduit* des X_n relativement à ω. Pour plus de détails, on pourra se reporter au chapitre 2 de [**Gro93**] et au paragraphe 2.4 de [**KL97**].

Définition 5.5. Soit (X,d) un espace métrique. Un *cône asymptotique* sur X est un ultraproduit relativement à un ultrafiltre ω, de la suite $(X, \varepsilon_n d, x_n)$ où (ε_n) est une suite de réels strictement positifs tendant vers 0 et (x_n) une suite de points de X.

On pourra remarquer que si (X,d) est un espace CAT(0) alors tout cône asymptotique sur X est aussi un espace CAT(0) et même complet (voir proposition 2.4.6 de *loc. cit.*). Pour se faire une idée de ce que produit la construction d'un cône asymptotique, on peut considérer deux exemples CAT(0) extrémaux : L'espace euclidien et le plan hyperbolique.

Dans le cas d'un espace euclidien (E, d), pour tout $\lambda > 0$, l'espace $(E, \lambda d)$ est isométrique à (E, d) par l'homothétie de rapport λ. Ainsi un cône asymptotique sur E est isométrique à un ultra-produit où tous les facteurs sont isométriques à E. Finalement, tout cône asymptotique sur E est isométrique à E.

Dans le cas du plan hyperbolique, le comportement est bien différent puisque tout cône asymptotique est un arbre réel (voir la remarque 5.8).

5.3. Dimension télescopique.

Définition 5.6 (Introduction de [**CL10a**])**.** Soit (X, d) un espace CAT(0). On dit que X est de *dimension télescopique* n si n est le plus petit entier tel que tout cône asymptotique sur X est de dimension géométrique au plus n.

Comme la dimension géométrique, la dimension télescopique peut s'exprimer à l'aide d'une inégalité inspirée de celle de Jung.

Proposition 5.7 (Théorème 1.3 de [**CL10a**])**.** *Un espace* CAT(0)*, X, est de dimension télescopique plus petite que n si et seulement si pour tout $\delta > 0$, il existe $D > 0$ tel que pour toute partie $Y \subset X$ de diamètre fini supérieur à D, on a l'inégalité*

$$\mathrm{rad}(Y) \leq \left(\delta + \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}\right) \mathrm{diam}(Y). \tag{5.1}$$

Remarques 5.8. (i) Un espace CAT(0) est de dimension télescopique 0 si et seulement si il est borné.

(ii) Un espace (X, d) est Gromov-hyperbolique s'il existe $\delta > 0$ tel que (X, d) est δ-hyperbolique. C'est à dire que pour tout $x_0, x, y, z \in X$

$$\langle x|z\rangle_{x_0} \geq \min\{\langle x|y\rangle_{x_0}, \langle y|z\rangle_{x_0}\} - \delta$$

On se reportera à la section 20 pour une définition du produit de Gromov $\langle x|y\rangle_{x_0}$. En multipliant la distance par $\varepsilon > 0$, un espace δ-hyperbolique devient $\varepsilon\delta$-hyperbolique. Ainsi, un cône asymptotique d'un espace Gromov-hyperbolique géodésique est un un espace géodésique et 0-hyperbolique, c'est un *arbre réel* (voir la définition 2.7 de [**GdlH90**]). En fait un espace CAT(0) est de dimension télescopique 1 si et seulement si il est de plus hyperbolique au sens de Gromov (voir l'introduction de [**CL10a**]).

Être localement compact et être de dimension télescopique finie ne sont pas des propriétés liées. On verra dans le chapitre III des espaces non localement compacts mais de dimension télescopique finie et on peut construire un espace localement compact de dimension télescopique infinie en recollant des morceaux d'espaces dont la dimension grandit en partant à l'infini (voir le paragraphe 2.1 de *loc. cit.*).

6. Intersection décroissante de parties convexes

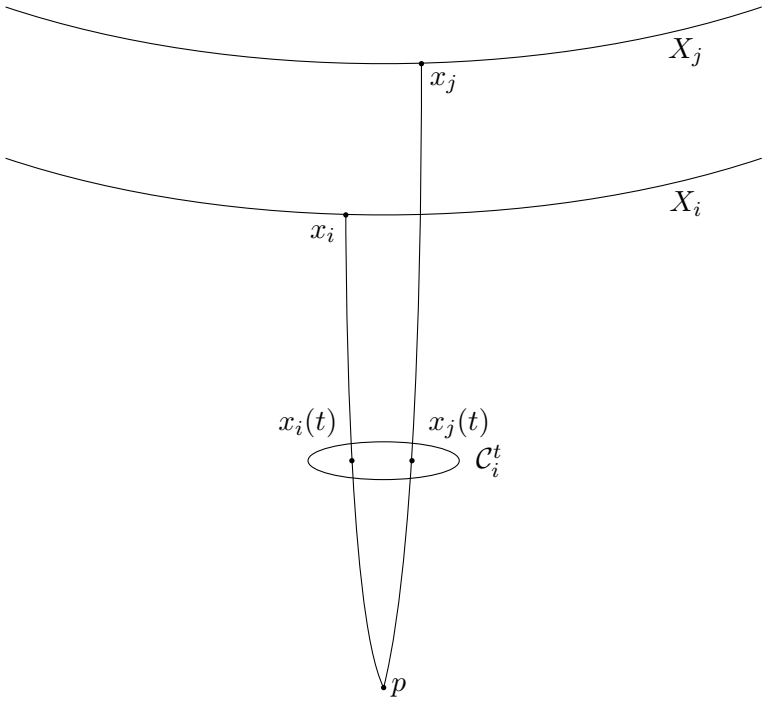
Dans le cas d'un espace CAT(0) propre, on a la dichotomie suivante. Soit l'espace est borné soit le bord est non-vide. Cette dichotomie n'est plus vraie en dimension télescopique finie (même en dimension géométrique finie). Considérons l'espace métrique constitué d'un point duquel partent une infinité de segments dont les longueurs forment une famille non bornée.

Cet espace ne possède pas de géodésique infinie donc son bord est vide bien qu'il ne soit pas borné. De plus, c'est un arbre donc sa dimension géométrique est 1.

Théorème 6.1. *Soit X un espace de Hadamard de dimension télescopique finie. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de parties convexes fermées d'intersection vide. Alors il existe un point $\xi \in \partial X$, appelé* centre des directions*, qui appartient à l' intersection des ∂X_i. De plus, pour tout $\eta \in \cap \partial X_i$, on a $\angle(\xi, \eta) \leq \pi/2$.*

Démonstration. Soit p un point de X. Par la proposition 1.15, si x_i est le projeté de p sur X_i on a $d(p, x_i) \to \infty$. On introduit les notations suivantes :

- $N_t = \min\{i \in \mathbb{N},\ d(p, x_i) \geq t\}$,
- pour $i \geq N_t$, $x_i(t)$ est le point de $[p, x_i]$ à distance t de p,
- $\mathcal{C}_i^t = \{x_i(t),\ i \geq N_t\}$,
- $D_t = \mathrm{diam}(\mathcal{C}_i^t)$,
- pour $i \geq N_t$, c_i^t est le centre de $\{x_j(t),\ j \geq i\}$ et
- r_i^t est le rayon de l'ensemble $\{x_j(t),\ j \geq i\}$.



Il y a alors deux possibilités. La fonction, croissante, $t \mapsto D_t$ est bornée ou non. Dans le premier cas, on a alors la convergence de (x_i) vers un point du bord. Ce point ne dépend pas de p et la boule de rayon $\pi/2$ autour de ce point contient $\cap\partial X_i$. On se place

maintenant dans le second cas. Si X est de dimension telescopique n, on fixe un $\delta > 0$ tel que $\delta\sqrt{2} + \sqrt{\frac{n}{(n+1)}} < 1$ et on a alors l'existence d'un $D > 0$ donné par la définition. Soit $t \geq$ tel que $D_t > D$ et soit i, j deux entiers tels que $j \geq i \geq N_t$. Puisque $X_j \subset X_i$, on a $\overline{\angle}_{x_i}(p, x_j) \geq \pi/2$ (par 1.13). Ainsi, $\overline{\angle}_p(x_i, x_j) \leq \pi/2$ et donc $d(x_i(t), x_j(t)) \leq \sqrt{2}t$. L'inégalité de Jung (5.1) donne

$$r_i^t \leq \left(\delta + \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}\right) D_t \leq \left(\delta\sqrt{2} + \sqrt{\frac{n}{(n+1)}}\right) t$$

L'inégalité triangulaire donne alors

$$d(p, c_i^t) \geq d(p, x_i(t)) - d(x_i(t), c_i^t) \geq \left[1 - \left(\delta\sqrt{2} + \sqrt{\frac{n}{(n+1)}}\right)\right] t$$

Par le lemme 1.14, on a $d(c_i^t, c_j^t) \leq \sqrt{2((r_i^t)^2 - (r_j^t)^2)}$. Comme $(r_k^t)_k$ est décroissante, on en déduit que $(c_k^t)_k$ est de Cauchy. Notons c_t la limite et remarquons que

$$d(p, c_t) \geq \left[1 - \left(\delta\sqrt{2} + \sqrt{\frac{n}{(n+1)}}\right)\right] t. \tag{6.1}$$

On va maintenant s'attacher à montrer que c_t converge vers un point du bord quand t tend vers $+\infty$. Pour $t' \geq t > 0$ et $j \geq i \geq N_{t'}$ on introduit le point noté $\frac{t}{t'}c_i^{t'}$ et situé sur $[p, c_i^{t'}]$ à distance $\frac{t}{t'}d(p, c_i^{t'})$ de p. Par comparaison CAT(0), on a $d(x_j(t), \frac{t}{t'}c_i^{t'}) \leq \frac{t}{t'}d(x_j(t'), c_i^{t'}) \leq \frac{t}{t'}r_i^{t'}$. Ainsi, $r_i^t \leq \frac{t}{t'}r_i^{t'}$. Notons r_t la limite (croissante) des $(r_i^t)_i$, alors $\frac{r^t}{t} \leq \frac{r^{t'}}{t'} \leq \sqrt{2}$ et donc $(\frac{r_t}{t})$ converge quand t tend vers $+\infty$. Dans le triangle $x_j(t), \frac{t}{t'}c_i^{t'}, c_i^t$ avec m le milieu de $\frac{t}{t'}c_i^{t'}, c_i^t$, l'inégalité CAT(0) donne

$$d(x_j(t), m)^2 \leq \frac{1}{2}\left(d(x_j(t), c_i^t)^2 + d(x_j(t), \frac{t}{t'}c_i^{t'})^2\right) - \frac{1}{4}d(\frac{t}{t'}c_i^{t'}, c_i^t)^2$$

Comme m n'est pas le centre de $\mathcal{C}_i^t$, il existe un j pour lequel $d(m, x_j(t)) \geq r_i^t$ et avec les inégalités $d(x_j(t), c_i^t) \leq r_i^t$ et $d(x_j(t), \frac{t}{t'}c_i^{t'}) \leq \frac{t}{t'}r_i^{t'}$ on obtient $d(\frac{t}{t'}c_i^{t'}, c_i^t)^2 \leq 2t^2\left[\left(\frac{r_i^{t'}}{t'}\right)^2 - \left(\frac{r_i^t}{t}\right)^2\right]$ et en faisant tendre i vers $+\infty$ on a

$$d\left(\frac{t}{t'}c^{t'}, c^t\right)^2 \leq 2t^2\left[\left(\frac{r^{t'}}{t'}\right)^2 - \left(\frac{r^t}{t}\right)^2\right]$$

Fixons $t_0 > 0$ et $\varepsilon > 0$. Pour conclure, il suffit de voir que les points $x = \frac{t_0}{d(p,c^t)}c^t$ et $y = \frac{t_0}{d(p,c^t)}\frac{t}{t'}c^{t'}$ sur les segments $[p, c^t]$ et $[p, c^{t'}]$, $d(x, y)$ est aussi petite que l'on veut pour t, t' assez grand. Par le théorème de Thalès dans le triangle de comparaison associé au triangle de sommets $p, c^t, \frac{t}{t'}c^{t'}$, on a $d(x, y) < \frac{t_0}{d(p,c^t)}d\left(\frac{t}{t'}c^{t'}, c^t\right)$. Maintenant, pour t, t'

tels que $\left[\left(\frac{r^{t'}}{t'}\right)^2 - \left(\frac{r^t}{t}\right)^2\right] < \varepsilon^2$ avec l'inégalité 6.1, on obtient

$$d(x,y) < \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{1-\left(\delta\sqrt{2}+\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)}.$$

Si ξ est la limite des c_t alors ξ ne dépend pas du point base p car la projection sur une partie convexe et toutes les autres constructions utilisées n'augmentent pas les distances. Ainsi, on peut choisir p dans un X_i et alors par convexité, on a $c_t \in X_i$ pour tout $t \geq 0$ donc $\xi \in \partial X_i$. Finalement, ξ appartient bien à $\cap_i \partial X_i$.

Soit $\eta \in \cap \partial X_i$ et ρ le rayon géodésique issu de p pointant vers η. Fixons $i \in \mathbb{N}$ et notons p_i^u le projeté de $\rho(u)$ sur X_i. Comme la distance de $\rho(u)$ à X_i est bornée et que la distance à X_i est convexe, on a que $d(p_i^u, \rho(u))$ est majorée par $d(p, X_i)$. Ainsi, p_i^u converge à l'infini vers η. Alors pour $t > 0$ et $i \geq N_t$, $\beta_\eta(x_i(t), p) = \lim_{u\to\infty} d(x_i(t), p_i^u) - d(p_i^u, p)$. Comme $\angle_{x_i}(p, p_i^u) \geq \pi/2$, on a par comparaison CAT(0), $d(x_i(t), p_i^u) \leq d(p, p_i^u)$ et donc $\beta_\eta(x_i(t), p) \leq 0$. Par convexité et continuité des fonctions de Busemann, on obtient $\beta_\eta(c^t, p) \leq 0$. La formule angulaire asymptotique 1.26 permet alors de conclure que $\liminf_{t,u\to\infty} \overline{\angle}_x(\rho(u), c^t) \leq \pi/2$ et par le lemme 1.27, $\angle(\xi, \eta) \leq \pi/2$.

□

Remarques 6.2. (i) L'existence d'une telle suite de parties convexes assure donc, en particulier, le fait que $\partial X \neq \emptyset$.

(ii) Les idées utilisées pour montrer ce théorème sont très proches du paragraphe 6 de [**Buy98**]. En particulier la courbe $t \mapsto c^t$ est appelée *courbe des centres virtuels associés* à la suite (x_i). Ici on montre sans utiliser la *seconde courbe des centres virtuels* qu'il y a convergence à l'infini. Si on suit la méthode de S. Buyalo, on obtient que cette seconde courbe des centres virtuels est une géodésique de p à ξ.

(iii) Le point ξ ainsi construit est canonique dans le sens où toute isométrie de X laissant invariants les X_i fixe ξ. On peut montrer un peu plus.

Proposition 6.3. *Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(X_i')_{i\in\mathbb{N}}$ deux suites de parties convexes fermées d'intersection vide d'un espace de Hadamard de dimension telescopique finie. Soit ξ et ξ' les centres des directions respectifs donnés par le théorème 6.1. Supposons que pour tout n, il existe m' tel que $X_n \subseteq X'_{m'}$ et que pour tout n' il existe m tel que $X'_{n'} \subseteq X_m$. Alors $\xi = \xi'$.*

Démonstration. Commençons par remarquer que si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une extraction (application strictement croissante) alors les suites $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(X_{\varphi(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ ont même centre des directions à l'infini. En effet, la courbe c^t de la démonstration ci-dessus est obtenue comme limite de la suite (c_i^t) et comme une sous-suite d'une suite convergente converge vers la même limite, on a le résultat.

Par la propriété d'emboîtement de (X_i) et (X_i'), on peut trouver deux extractions φ et φ' telles que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $X_{\varphi(i)} \subseteq X'_{\varphi'(i)} \subseteq X_{\varphi(i+1)}$. Définissons alors $X''_{2i} = X_i$ et $X"_{2i+1} = X_i'$. Alors, $(X"_i)$ vérifie les conditions du théorème 6.1 et possède donc un

centre des directions qui est donc le même que celui de $(X_{\varphi(i)})$ et $(X'_{\varphi'(i)})$. Ainsi, les deux suites $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(X'_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ont bien même centre des directions. □

7. Conséquences

Dans cette section, on redonne les applications que l'on trouve dans [**CL10a**] sur les espaces CAT(0) de dimension télescopique finie. Comme nous n'en donnons pas de preuve, nous renvoyons au texte cité. On commence par une conséquence sur une topologie plus faible que la topologie métrique initiale.

Définition 7.1 (Définition 8 de [**Mon06**])**.** Soit X un espace métrique. La topologie $\mathscr{T}_c$ sur X est la topologie la plus grossière pour la laquelle toutes les parties convexes et fermées pour la topologie métrique sont fermées pour $\mathscr{T}_c$.

Une première propriété importante de cette topologie pour les espaces de Hadamard est que toute partie convexe fermée et bornée est compacte (sans être nécessairement séparée) pour $\mathscr{T}_c$ (théorème 14 de [**Mon06**]). Si X est un espace de Hadamard, cette topologie s'étend à $\overline{X} = X \cup \partial X$ en déclarant que pour toute partie convexe de Y de X, l'adhérence $\overline{Y}$ (pour la topologie usuelle sur $\overline{X}$) est fermée pour $\mathscr{T}_c$. Avec cette topologie, si X est un espace de Hadamard qui est de plus Gromov-hyperbolique alors $\overline{X}$ est compact (proposition 23 de [**Mon06**]). Pour les espaces de Hadamard de dimension télescopique finie, on obtient la reformulation suivante :

Proposition 7.2 (Remarque 1.2 de [**CL10a**])**.** *Soit X un espace de Hadamard de dimension télescopique finie alors $\overline{X}$ est compact pour la topologie $\mathscr{T}_c$.*

La condition de finitude sur la dimension télescopique a des conséquences sur le bord à l'infini.

Proposition 7.3. *Soit X est un espace de Hadamard de dimension télescopique finie et $\xi \in \partial X$. Alors le bord à l'infini de toute horoboule centrée en ξ coïncide avec la boule de rayon $\pi/2$ (pour la distance angulaire) de ∂X centrée en ξ.*

Démonstration. La preuve du lemme 3.5 de [**CM09b**] (même énoncé mais dans le cas où X est propre) est en fait général et s'appuie uniquement sur la formule 1.26. □

On va maintenant s'intéresser aux actions par isométries sur des espaces CAT(0) de dimension télescopique finie.

Définition 7.4 (Définition 8 de [**Mon06**])**.** Soit G un groupe topologique agissant continûment par isométries sur un espace métrique X. On dit que l'action $G \curvearrowright X$ est *évanescente* s'il existe $T \subseteq X$ non-borné tel que pour toute partie compacte Q de G, l'ensemble $\{d(gx, x) |\ g \in Q, x \in T\}$ est borné.

Cette définition a pour but de remplacer l'existence de point fixe à l'infini pour une action sur un espace de Hadamard non propre. En effet, Si G agit continûment par isométries sur un espace de Hadamard propre, X, alors l'action est évanescente si et seulement si G possède un point fixe à l'infini (voir la proposition 27 de [**Mon06**]). Toujours dans [**Mon06**], N. Monod introduit la notion d'action *réduite*. un groupe G agit de manière réduite sur un espace CAT(0), X, s'il n'existe pas de partie convexe fermée bornée $Y \subset X$ telle que pour tout $g \in G$, gY et Y sont à distance de Hausdorff finie.

Proposition 7.5 (Proposition 1.8 de [CL10a]). *Soit X un espace de Hadamard de dimension télescopique finie et $G < \mathrm{Isom}(X)$ un sous-groupe du groupe d'isométries.*

(i) L'action $G \curvearrowright X$ est evanescente si et seulement si elle possède un point fixe dans $\overline{X}$.

(ii) Si G ne fixe pas de point à l'infini alors, il existe une partie convexe fermée $Y \subset X$ G-invariante sur laquelle l'action est minimale.

(iii) Si X est irréductible et G agit minimalement sans point fixe à l'infini alors il en est ainsi pour tout sous-groupe $\{e\} \neq H \lhd G$. De plus, l'action $G \curvearrowright X$ est réduite.

(iv) Si $\mathrm{Isom}(X) \curvearrowright X$ est minimale alors pour toute partie convexe fermée $Y \subsetneq X$, on a $\partial Y \subsetneq \partial X$

Rappelons les notations suivantes de la section 1.5. On note $\mathcal{C}_0$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur un espace CAT(0), X, qui s'annulent en un point x_0. On le munit de la topologie de la convergence ponctuelle et on note $\mathcal{D}$ le sous-ensemble des fonctions distances normalisées en x_0.

Proposition 7.6 (Proposition 4.8 de [CL10a]). *Soit X un espace* CAT(0) *de dimension télescopique finie non réduit à un point et tel que* $\mathrm{Isom}(X)$ *agit minimalement. Si $\overline{\mathcal{D}}$ contient une fonction affine alors il existe une décomposition en produit $X = \mathbb{R} \times X'$.*

En fait, la preuve de cette proposition permet de montrer plus car la décomposition ci-dessus est obtenue par l'existence d'une fonction de Busemann et le facteur $\mathbb{R}$ est obtenu grâce à cette fonction de Busemann.

Proposition 7.7. *Soit X un espace* CAT(0) *de dimension télescopique finie non réduit à un point et tel que* $\mathrm{Isom}(X)$ *agit minimalement. Soit $X = E \times Y$ sa décomposition de de Rham où E est le facteur euclidien (de dimension finie) de de Rham. Alors les fonctions affines de $\overline{\mathcal{D}}$ sont exactement les fonctions de Busemann associées à un point de ∂E.*

Le théorème suivant est inspiré par un théorème [AB98a] de S. Adams et W. Ballmann. L'hypothèse de compacité locale initiale est remplacée par celle de dimension télescopique finie.

Théorème 7.8 (Théorème 1.6 de [CL10a]). *Soit X un espace de Hadamard de dimension télescopique finie et G un groupe moyennable agissant continûment par isométries sur X. Alors G fixe un point de ∂X ou G laisse invariant un sous-espace euclidien.*

Pour des espaces de Hadamard généraux, il n'existe pas de décomposition du type décomposition de de Rham mais dans le cas des espaces de Hadamard de dimension télescopique finie, on le résultat suivant.

Proposition 7.9 (Proposition 6.1 de [CL10a]). *Soit X un espace de Hadamard de dimension télescopique finie tel que* $\mathrm{Isom}(X) \curvearrowright X$ *soit minimale. Alors il existe une décomposition maximale en produit*

$$X \simeq \mathbb{R}^n \times X_1 \times \cdots \times X_m$$

où chaque X_i est irréductible non borné et non isométrique à $\mathbb{R}$. De plus, toute isométrie agit en préservant cette décomposition à une permutation des facteurs près.

8. Espaces CAT(0) symétriques propres

Nous allons montrer que la définition d'espace symétrique CAT(0) coïncide avec la notion classique d'espaces riemanniens symétriques à courbure négative dans le cas ou l'espace est propre. On va donc s'attacher à retrouver la structure différentiable. Les idées développées dans [**CM09a, CM09b**] sont largement utilisées et on pourrait se limiter à montrer comment cela découle du théorème 1.1 de [**CM09b**] mais on en donne une preuve « élaguée » dans notre cas particulier.

La démonstration repose sur la résolution du cinquième problème de Hilbert par D. Montgommery et L. Zippin. Cette résolution utilise de manière cruciale la compacité locale et donc la démonstration suivante telle quelle ne s'adapte pas pour les espaces symétriques non localement compacts. L'énoncé suivant est un cas particulier du résultat de D. Montgommery et L. Zippin (voir [**MZ55**] pour une référence originale). Pour des notions sur les groupes moyennables, on pourra se référer à la section 14.1. Si G est un groupe localement compact connexe le *radical moyennable* est le plus grand groupe fermé moyennable distingué de G. Un tel sous-groupe existe et est bien unique. On peut trouver une preuve de l'existence de ce groupe à proposition 4.1.12 de [**Zim84**] et la notion a été introduite par M.M. Day dans [**Day57**].

Théorème 8.1. *Si G est un groupe localement compact connexe de radical moyennable trivial alors G est un groupe de Lie semi-simple sans facteur compact.*

Démonstration. C'est un cas particulier du théorème 11.3.4(ii) de [**Mon01**] dans le cas où G est connexe et avec radical trivial. □

Si X est un espace CAT(0) propre alors il existe une topologie naturelle sur son groupe d'isométries qui en fait un groupe topologique, c'est la *topologie compacte-ouverte*. Pour K compact de X et U ouvert de X, on pose

$$W(K,U) = \{g \in \mathrm{Isom}(X) |\ g(K) \subset U\}.$$

La topologie compacte-ouverte est alors la topologie la plus fine sur $\mathrm{Isom}(X)$ contenant $W(K,U)$ pour tout compact $K \subset X$ et tout ouvert $U \subset X$.

Théorème 8.2. *Soit X un espace* CAT(0) *propre. Le groupe des isométries de X muni de la topologie compacte-ouverte est un groupe localement compact et le stabilisateur de chaque point est un sous-groupe compact.*

Démonstration. La section IV.2 de [**Hel01**] donne ce résultat dans le cadre de la géométrie riemannienne mais tous les arguments s'appliquent aussi ici sans modification. □

Lemme 8.3. *Soit G un groupe agissant par isométries sur un espace de Hadamard X. Alors il existe une partie convexe G-invariante, $\Delta G \subset \partial X$, contenue dans le bord de toute partie fermée convexe G-invariante de X.*

Démonstration. Soit x un point de X. Appelons $\Delta G \subset \partial X$ le bord à l'infini de l'enveloppe convexe fermée de l'orbite de x, notée $\overline{conv}(G \cdot x)$. Par construction, ΔG est une partie convexe du bord G-invariante. Il suffit alors de voir que ΔG ne dépend pas de x. Soit $y \in X$, posons $r = d(x,y)$. Le r-voisinage, $V_r(\overline{conv}(G \cdot x))$, de $\overline{conv}(G \cdot x)$

contient donc y et par la proposition 1.13, c'est une partie convexe fermée de X donc $\overline{conv}(G \cdot y) \subset V_r(\overline{conv}(G \cdot x))$. Finalement, $\partial\left(\overline{conv}(G \cdot x)\right) = \partial\left(\overline{conv}(G \cdot y)\right)$. □

Théorème 8.4. *Soit X un espace symétrique* CAT(0) *propre alors*

$$X \simeq E \times Y$$

où E est un espace euclidien et Y un espace riemannien symétrique de type non-compact. Les espaces E et Y sont peut-être réduits à un point.

Démonstration. Grâce au lemme 3.11, on sait qu'en tout point $x \in X$, le cône tangent est un espace euclidien donc, X est de dimension géométrique finie majorée par la dimension topologique d'un cône tangent et son bord est aussi de dimension géométrique finie. On peut alors faire la décomposition de de Rham de la proposition 7.9

$$X \simeq E \times Y_1 \times \cdots \times Y_n.$$

où E est le facteur euclidien et les Y_i sont des espaces CAT(0) propres irréductibles. Toute géodésique g de X s'écrit $t \mapsto (g_E(v_E t), g_1(v_i t), \ldots, g_n(v_n t))$ où $g_E, g_1, \ldots, g_n$ sont des géodésiques de E et des Y_i et v_E, v_i sont des réels positifs tels que $v_E^2 + \sum_{i=1}^n v_i^2 = 1$. En considérant des géodésiques avec $v_i = 1$ pour un certain i, on voit que chaque Y_i est sans branchements géodésiques et que les symétries de X induisent des symétries pour les Y_i. Ainsi, on voit que chaque Y_i est lui aussi un espace symétrique CAT(0) propre mais irréductible. Appelons G_i la composante neutre (pour la topologie compacte-ouverte) du groupe des isométries de Y_i et R_i son radical moyennable. Le point principal pour montrer que R_i est trivial est le fait suivant.

Affirmation 1 : Le groupe G_i ne fixe pas de point à l'infini de Y_i . En effet, supposons que G_i fixe un point $\xi \in \partial Y_i$. Soit alors $\eta \in \partial Y_i$ un autre point à l'infini et $x \in Y_i$. Notons g l'unique géodésique bi-infinie telle que $g(0) = x$ et $g(\infty) = \eta$. Notons τ_t la transvection telle que $\tau_t(x) = g(t)$. Alors pour tout t, $\tau_t \in G$ et comme τ_t fixe ξ et η, $\angle_x(\xi, \eta) = \angle_{\tau_t}(\xi, \eta)$. Ainsi, par la proposition 1.24 (ii), $\angle_x(\xi, \eta) = \angle(\xi, \eta)$ pour tout $x \in Y_i$.

Maintenant, soit $x, y \in Y_i$, on appelle $\eta \in \partial Y_i$ l'extrémité du rayon géodésique issu de x et passant par y. Par ce qui précède et la formule angulaire asymptotique, on a alors

$$\begin{aligned}\beta_\xi(x, y) &= d(x, y) \lim_{t \to \infty} \cos(\overline{\angle}_x(r(t), y)) \\ &= d(x, y) \cos(\angle(\xi, \eta)),\end{aligned}$$

ce qui montre que β_ξ est une fonction affine et le lemme 1.35 conclut l'affirmation 1.

Affirmation 2 : Tout sous-groupe distingué non trivial de G_i agit minimalement. En effet, soit N un sous-groupe distingué non trivial de G_i. Si N ne possède pas de partie fermée convexe invariante et minimale décroissante pour ces propriétés, il existe une suite décroissante de parties X_n fermées convexes et N-invariantes telle que $\cap X_n = \emptyset$. Par le théorème 6.1, l'intersection des bords est donc de rayon plus petit que $\pi/2$. Par le lemme 8.3, ΔN est aussi de rayon plus petit que $\pi/2$. De plus, $\Delta N \neq \emptyset$ car s'il existe

une orbite non-bornée, par compacité de $\overline{X}$, alors cette orbite possède une valeur d'adhérence à l'infini et N ne peut pas avoir d'orbite bornée car dans ce cas le centre circonscrit serait fixé par N ce qui donnerait une partie minimale invariante. Comme le rayon de ΔN est plus petit que $\pi/2$, que ∂Y_i est de dimension finie et que G_i laisse invariant ΔN, le centre des centres donnés par 5.3 est un point fixe de G_i ce que l'affirmation 1 empêche. Ainsi, N possède une partie fermée convexe invariante minimale Z, il reste à voir que $Z = Y_i$ tout entier. Comme G_i normalise N, pour tout $g \in G_i$, gZ est aussi une partie fermée convexe N-invariante minimale. Comme l'action de G_i est transitive, la réunion $\cup_{g\in G_i} gZ$ est Y_i tout entier. Par la proposition 1.21, Y_i se décompose en produit $Y_i \simeq Z \times Z'$. Comme Y_i est irréductible, un des facteurs est réduit à un point. Si Z est réduit à un point, alors tout point est fixé par N et N est trivial. Ainsi Z' est un point et donc $Z = Y_i$, ce qui conclut l'affirmation 2.

Supposons que R_i (le radical moyennable de G_i) est non trivial, alors par l'affirmation 2, R_i agit minimalement. Par le théorème 7.8, R_i fixe un point au bord ou laisse un sous-espace euclidien invariant. Si la deuxième possibilité est vraie alors par minimalité, Y_i est un espace euclidien, ce qui contredit l'hypothèse sur Y_i. Dans le cas où R_i fixe un point $\xi \in \partial Y_i$ alors son groupe dérivé R_i' fixe toute horoboule centrée en ξ. On remarque que R_i' est aussi distingué dans G_i donc par l'affirmation 2, nécessairement, R_i' est trivial. Ainsi, R_i est abélien. Pour $g \in R_i$, la fonction distance de translation $x \mapsto d(gx, x)$ est alors R_i-invariante. Comme cette fonction est convexe et que l'action de R_i est minimale, elle donc constante. Ce qui signifie que g est une translation de Clifford et donc par le théorème 1.8, $Y_i \simeq Y_i' \times \mathbb{R}$. Ce qui contredit l'hypothèse sur Y_i.

Ainsi, le radical moyennable de G_i est trivial. On peut alors appliquer le théorème 8.1 et G_i est un groupe de Lie semi-simple connexe à centre trivial. Donc G_i est un produit de groupes de Lie simples, $G_i \simeq G_i^1 \times \cdots \times G_i^k$. Chacun des G_i^j agit minimalement par l'affirmation 2. Si $k \geq 2$ alors pour $g \in G_i^1 \setminus \{e\}$, tous les éléments de G_i^2 commutent avec g et donc g est de nouveau une translation de Clifford. Ainsi G_i est un groupe de Lie connexe simple. Soit K_i un sous-groupe compact maximal, K_i fixe un point $x \in Y_i$ et par le théorème 8.2, le stabilisateur de x dans G_i est compact donc K_i est le stabilisateur de x dans G_i. Comme l'action est transitive, $Y_i \simeq G_i/K_i$ (ce n'est pour l'instant qu'une bijection).

Soit S_x la symétrie en x et σ la conjugaison par S_x dans $\mathrm{Isom}(Y_i)$ qui laisse G_i invariant car elle est continue et fixe l'élément neutre. C'est donc un automorphisme involutif du groupe de Lie G_i et il induit une involution linéaire de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_i$. Un calcul montre que si $\sigma(g) = g$ si et seulement si $g \in K_i$. Notons $\mathfrak{k}_i$ l'algèbre de Lie de K_i. Comme σ est continu, c'est un automorphisme analytique de différentielle $d\sigma$ en l'identité qui est un morphisme involutif de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_i$. De plus, la formule $\sigma(\exp(T)) = \exp(d\sigma T)$ pour $T \in \mathfrak{g}_i$ montre que $d\sigma T = T$ si et seulement si $S_x(\exp(tT)x) = x$ pour tout t, c'est à dire si et seulement si T est dans l'algèbre de Lie, $\mathfrak{k}_i$, de K_i. Notons $\mathfrak{p}_i$ le sous-espace propre de $d\sigma$ pour la valeur propre -1 alors $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{k}_i \oplus \mathfrak{p}_i$. Si B_i est la forme de Killing de G_i alors la formule

$$[d\sigma(T)[U, V]] = [d\sigma(T), d\sigma([d\sigma(U), d\sigma(V)])] = d\sigma([T, [d\sigma(U), d\sigma(V)]]),$$

montre que $B_i(d\sigma(T), U) = B_i(T, d\sigma(U))$. Ainsi, $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{t}_i \oplus \mathfrak{p}_i$ est une décomposition de Cartan (voir la section 2.2).

Notons $X_i \simeq G_i/K_i$ l'espace symétrique de G_i alors $\mathfrak{p}_i$ s'identifie à l'espace tangent de X_i au point o correspondant à K_i et on a

$$\begin{array}{rccc} \exp_o \colon & \mathfrak{p}_i & \to & X_i \\ & U & \mapsto & \exp(U)o \ . \end{array}$$

De plus, le lemme 3.11 permet d'identifier le cône tangent T_x de Y_i à $\mathfrak{p}_i$ et on a

$$\begin{array}{rccc} \exp_x \colon & \mathfrak{p}_i & \to & Y_i \\ & U & \mapsto & \exp(U)x \ . \end{array}$$

Ainsi $\mathfrak{p}_i$ possède deux produits scalaires, l'un venant de T_x, l'autre de T_oX_i, tous deux invariants sous l'action adjointe de K_i. Comme G_i est simple, cette action est irréductible donc ces deux produits scalaires sont proportionnels. Quitte à renormaliser la distance de X_i, on peut supposer qu'ils sont égaux. Ainsi, $\Phi = \exp_o \circ \exp_x^{-1}$ réalise un homéomorphisme tel que pour tout $y \in Y_i$, $d_{X_i}(\Phi(y), o) = d_{Y_i}(y, x)$. Finalement, comme G_i agit transitivement sur X_i et Y_i et commute avec Φ, on obtient que Φ est une isométrie entre Y_i et X_i. $\square$

CHAPITRE III

Des espaces de dimension infinie et de rang fini

Dans ce chapitre nous étudions une famille d'espaces CAT(0) symétriques non localement compacts mais de rangs fini. L'approche est essentiellement métrique bien que ces espaces possèdent une structure de variétés riemanniennes.

9. Formes quadratiques d'indice fini

On rappelle des faits classiques sur les formes quadratiques réelles en dimension finie et des résultats généraux sur les formes quadratiques réelles en dimension infinie issus de [**BIM05**].

Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel réel et Q une forme quadratique sur $\mathcal{H}$. On note $B(x,y) = 1/4(Q(x+y) - Q(x-y))$ la forme bilinéaire associée. Si S est un sous-ensemble de $\mathcal{H}$, on note $S^{\perp_Q} = \{x \in \mathcal{H};\ \forall y \in S,\ B(x,y) = 0\}$. On dit que Q est *non-dégénérée* si $\mathcal{H}^{\perp_Q} = \{0\}$. La forme quadratique Q est *définie positive* si $Q(x) > 0$ pour tout $x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ et *définie négative* si $Q(x) < 0$ pour tout $x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$. On dit que Q est *définie* si Q est définie positive ou définie négative et on note cela $Q > 0$ ou $Q < 0$ selon le signe.

Un sous-espace totalement isotrope E est un sous-espace vectoriel tel que $Q|_E$ est nulle. *L'indice* $i(Q)$ est alors défini par

$$i(Q) = \max\{\dim(E);\ Q|_E = 0\}.$$

On définit aussi

$$i_+(Q) = \max\{\dim(E);\ Q|_E > 0\}$$

et

$$i_-(Q) = \max\{\dim(E);\ Q|_E < 0\}.$$

Proposition 9.1 (proposition 2.1 de [**BIM05**])**.** *Soit Q une forme quadratique d'indice fini.*
Alors

(i) $i(Q) = \min\{i_+(Q), i_-(Q)\}$.

Supposons de plus $i(Q) = i_+Q$.

(ii) Si $E \subset \mathcal{H}$ est tel que $Q|_E > 0$ et $\dim(E) = i(Q)$ alors $\mathcal{H} = E \oplus E^{\perp_Q}$ et $Q|_{E^{\perp_Q}} < 0$.

(iii) Si $\mathcal{H} = E_+ \oplus E_-$ est une décomposition orthogonale avec $Q|_{E_+} > 0$ et $Q|_{E_-} < 0$ alors $\dim(E_+) = i(Q)$.

Si $\mathcal{H} = E_+ \oplus E_-$ est une décomposition orthogonale avec $Q|_{E_+} > 0$ et $Q|_{E_-} < 0$, on définit

$$< x, y >= B(x_+, y_+) - B(x_-, y_-)$$

où $x = x_+ + x_-$ et $y = y_+ + y_-$ sont les décompositions de x et y selon $E_+ \oplus E_-$. C'est une forme bilinéaire définie positive.

Définition 9.2. Soit Q une forme quadratique sur $\mathcal{H}$. On dit que Q est *fortement non-dégénérée* d'indice fini si elle est non-dégénérée, d'indice fini et $(\mathcal{H}, < \ , \ >)$ est un espace de Hilbert.

A priori, cette définition dépend de la décomposition $E_+ \oplus E_-$ choisie pour définir $< \ , \ >$. Cependant, le lemme 2.4 de [**BIM05**] montre qu'elle n'en dépend pas. Deux décompositions comme ci-dessus définissent deux produits scalaires équivalents c'est à dire que les normes associées sont équivalentes dans le sens ci-dessous.

Si E et E' sont deux espaces vectoriels munis de forme quadratique Q et Q', on dit que ces deux formes quadratiques sont *équivalentes* s'il existe une application linéaire inversible $f : E \to E'$ telle que $Q' = Q \circ f$. Une application linéaire inversible $f : E \to E$ telle que $Q = Q \circ f$ est dite *orthogonale* et l'ensemble des applications orthogonales forme un groupe pour la composition. Ce groupe est appelé *groupe orthogonal* de Q et est noté $\mathbf{O}(Q)$.

C'est un résultat classique en dimension finie (voir par exemple le théorème 6.6 de [**Per82**]) que la signature caractérise complètement la classe d'équivalence d'une forme quadratique réelle. Ce résultat s'étend aux formes quadratiques fortement non-dégénérées. Pour cela il faut étendre la définition de la signature en dimension infinie. Soit Q une forme quadratique fortement non-dégénérée d'indice fini sur $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H} = E_+ \oplus E_-$ une décomposition orthogonale avec $Q|_{E_+} > 0$ et $Q|_{E_-} < 0$. La forte non-dégénérescence impose à $(E_+, Q|_{E_+})$ et $(E_-, -Q|_{E_-})$ d'être des espaces de Hilbert. Si $d_\pm$ est le cardinal d'une base de Hilbert de $E_\pm$ alors la *signature* de Q est le couple (d_+, d_-).

Proposition 9.3 (Proposition 2.7 de [**BIM05**])**.** *La signature est un invariant complet d'équivalence entre formes quadratiques fortement non-dégénérées d'indice fini.*

Proposition 9.4 (Proposition 2.8 de [**BIM05**])**.** *Si Q est une forme quadratique fortement non dégénérée d'indice fini sur $\mathcal{H}$ et $E \subset \mathcal{H}$ est un sous-espace fermé tel que $Q|_E$ est non dégénérée alors $Q|_E$ est fortement non dégénérée et $\mathcal{H} = E \oplus E^{\perp_Q}$.*

Proposition 9.5 (Théorème de Witt)**.** *Soient E un espace vectoriel de dimension finie, Q une forme quadratique sur E et G, G' deux sous-espaces de E. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) il existe $f \in \mathbf{O}(Q)$ tel que $f(G) = G'$,

(ii) les formes $Q|_G$ et $Q|_{G'}$ sont équivalentes.

Démonstration. C'est le théorème VIII.4.1 de [**Per82**]. □

Corollaire 9.6. *Soient $\mathcal{H}$ un espace vectoriel réel, Q une forme quadratique fortement non dégénérée d'indice fini sur $\mathcal{H}$ et G, G' deux sous-espaces de dimension finie de $\mathcal{H}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) il existe $f \in \mathbf{O}(Q)$ tel que $f(G) = G'$,

(ii) les formes $Q|_G$ et $Q|_{G'}$ sont équivalentes.

DÉMONSTRATION. Si H est le sous-espace (de dimension finie) engendré par G et G', le théorème de Witt (proposition 9.5) montre qu'il existe $f : H \to H$ application orthogonale pour $Q|_H$ telle que $f(G) = G'$. On prolonge f par l'identité sur $H^{\perp_Q}$. Ceci a bien un sens car $Q|_H$ est non dégénérée et alors $\mathcal{H} = H \oplus H^{\perp_Q}$ par la proposition 9.4. □

L'énoncé suivant est donné sans preuve dans [**BIM05**], nous en donnons une preuve.

Proposition 9.7. *Soient $\mathcal{H}$ un espace vectoriel réel, Q une forme quadratique fortement non dégénérée d'indice fini sur $\mathcal{H}$. Si f est une application orthogonale pour Q alors f est un opérateur borné pour toute norme hilbertienne associée à Q.*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{H} = E_+ \oplus E_-$ une décomposition comme dans 9.1.(iii) avec $i(Q) = \dim(E_+)$. On note $||\ ||$ la norme hilbertienne associée. Si $f \in \mathbf{O}(Q)$ alors $f|_{E_+}$ est bornée car $\dim(E_+) < \infty$.
Si $x \in E_+$ avec $||x|| = 1$ alors $Q(f(x)) = 1$ et donc il existe $\lambda \geq 0$ et $u_\pm \in E_\pm$ avec $||u_\pm|| = 1$ tels que $f(x) = \mathrm{ch}(\lambda)u_+ + \mathrm{sh}(\lambda)u_-$. Comme $f|_{E_+}$ est bornée, il existe $\lambda_{\max} > 0$ tel que $0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max}$ pour tout x. De la même manière, si $y \in E_-$ avec $||y|| = 1$ alors il existe $\mu \geq 0$ et $v_\pm \in E_\pm$ avec $||v_\pm|| = 1$ tels que $f(y) = \mathrm{ch}(\mu)v_- + \mathrm{sh}(\mu)v_+$. Soit P_{E_+} le projecteur orthogonal (pour la structure hilbertienne ou pour Q, c'est le même opérateur) alors $P_{E_+} \circ f|_{E_+}$ est injective et donc surjective (sinon il existerait $x \in E_+ \setminus 0$ tel que $f(x) \in E_-$ et donc $Q(f(x)) \leq 0$). Soit $y \in E_-$ de norme 1 alors il existe $x \in E_+$ tel que $u_+ = v_+$. l'égalité $0 = B(x, y) = B(f(x), f(y))$ donne $\mathrm{sh}(\mu)\mathrm{ch}(\lambda) =< u_-, v_- > \mathrm{ch}(\mu)\mathrm{sh}(\lambda)$. Puisque μ et λ sont positifs, $< u_-, v_- > \in [0, 1]$ et donc $\tanh(\mu) \leq \tanh(\lambda)$ et par croissance de la fonction tangente hyperbolique $0 \leq \mu \leq \lambda_{\max}$. Finalement, $||f(y)|| \leq \mathrm{ch}(\lambda_{\max}) + \mathrm{sh}(\lambda_{\max})$. □

Le lemme 11.10 précise la norme d'un élément de $\mathbf{O}(Q)$ en fonction de certains angles hyperboliques.

10. Grassmannienne de type non-compact

10.1. L'espace $X(Q)$. Soit $p \geq 1$ un entier et $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert réel séparable (de dimension finie supérieure à $2p$ ou infinie) et soit (e_i) une base de Hilbert. Si (x_i) est la famille des coordonnées d'un vecteur x, on définit une forme quadratique Q par la formule

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{i>p} x_i^2. \tag{10.1}$$

Cette forme quadratique est non-dégénérée et de signature (p, q) où q est la dimension (finie ou infinie dénombrable) de l'orthogonal des p premiers vecteurs de base. Notons $\mathcal{G}_p$ la Grassmannienne de rang p, c'est à dire l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension p de $\mathcal{H}$. On définit la Grassmannienne de type non-compact

$$X(Q) = \{E \in \mathcal{G}_p,\ Q|_E > 0\}.$$

La forme quadratique Q définie ci-dessus est bien fortement non-dégénérée d'indice fini. De plus, au signe près, toutes les formes quadratiques fortement non-dégénérées d'indice fini sur un espace de Hilbert séparable sont de cette forme là par la proposition 9.3. Ainsi, souvent on ne se rappellera que de la signature de Q et on notera

$$X(p,q) = X(Q).$$

Comme nous nous intéresserons essentiellement au cas de dimension infinie, on notera simplement

$$X_p = X(p,\infty).$$

Dans le cas $p = 1$, on reconnaît l'espace hyperbolique de dimension infinie $\mathbb{H}^\infty$, qui est l'objet central de [**BIM05**].

Le groupe orthogonal, $\mathbf{O}(Q)$ (noté aussi $\mathbf{O}(p,q)$), de la forme quadratique Q agit naturellement sur $\mathcal{G}_p$ par $g \cdot E = g(E)$ pour $g \in \mathbf{O}(Q)$ et $E \in \mathcal{G}_p$. De plus, cette action laisse $X(p,q)$ invariant et donc $\mathbf{O}(Q)$ agit naturellement sur $X(p,q)$. Dans la base (e_i), il y a un élément de $X(p,q)$ un peu plus particulier c'est $E_0 = \mathrm{Vect}(\{e_i\}_{i=1}^p)$. En effet, son orthogonal pour Q, $E_0^{\perp_Q}$, est égal à son orthogonal, $E_0^\perp$, pour le produit scalaire de $\mathcal{H}$. Ainsi, le stabilisateur de E_0 est l'ensmble des transformations qui laisse E_0 et son orthogonal invariant, c'est à dire $\mathbf{O}(Q|_{E_O}) \times \mathbf{O}(Q|_{E_O^\perp}) = \mathbf{O}(p) \times \mathbf{O}(q)$ avec la convention que $\mathbf{O}(\infty)$ est le groupe des transformations orthogonales d'un espace de Hilbert séparable ($E_O^\perp$ ici).

Grâce à la proposition 9.6 le groupe orthogonal de Q agit transitivement sur $X(p,q)$ de telle sorte que cet espace s'identifie avec le quotient $\mathbf{O}(p,q)/\mathbf{O}(p) \times \mathbf{O}(q)$. Dans le cas où q est fini, c'est un espace symétrique de type non-compact bien connu.

10.2. L'espace symétrique $X(p,q)$. Cette section est dédiée à la structure de cet espace symétrique, qui est décrite, par exemple, dans la section 8.2.2 de [**Pet06**] ou la section V.2 de [**Hel01**] et plus particulièrement dans [**Saw99**] .

Le groupe $\mathbf{O}(p,q)$ est un sous-groupe de Lie de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Plus précisément, si J est la matrice diagonale $\mathrm{diag}(1,\dots,1,-1,\dots,-1)$ avec p apparitions de 1 et q apparitions de -1 alors

$$\mathbf{O}(p,q) = \left\{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R});\quad {}^{\mathrm{t}}MJM = J\right\}.$$

Son algèbre de Lie est

$$\mathfrak{o}(p,q) = \left\{H \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R});\quad {}^{\mathrm{t}}HJ + JH = 0\right\}.$$

Avec une écriture par blocs, on obtient que $H \in \mathfrak{o}(p,q)$ si et seulement si

$$H = \begin{bmatrix} A & B \\ {}^{\mathrm{t}}B & C \end{bmatrix}$$

où A et C sont des matrices carré antisymétriques de taille respective p et q et B est une matrice de taille $p \times q$. Le crochet de Lie entre H et H' est $[H,H'] = HH' - H'H$. La forme de Killing est (voir la proposition 3 de [**Saw99**])

$$K(H,H') = (p+q-2)\,\mathrm{trace}(HH')$$

et si $H = \begin{bmatrix} A & B \\ {}^{\mathrm{t}}B & C \end{bmatrix}$ et $H' = \begin{bmatrix} A' & B' \\ {}^{\mathrm{t}}B' & C' \end{bmatrix}$ alors

$$\mathrm{trace}(HH') = \mathrm{trace}(AA') + \mathrm{trace}(CC') + 2\,\mathrm{trace}({}^{\mathrm{t}}BB').$$

Si on définit

$$\mathfrak{t} = \left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix};\ {}^{\mathrm{t}}A = -A,\ {}^{\mathrm{t}}C = -C \right\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{p} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & B \\ {}^{\mathrm{t}}B & 0 \end{bmatrix};\ B \in \mathrm{M}_{pq}(\mathbb{R}) \right\}$$

alors $\mathfrak{t} \simeq \mathfrak{o}(p) \oplus \mathfrak{o}(q)$, de plus K est définie négative sur $\mathfrak{t}$ et définie positive sur $\mathfrak{p}$. L'algèbre de Lie est semi-simple et on a donc une décomposition de Cartan $\mathfrak{o}(p,q) = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{p}$ associée à l'involution de Cartan $H \to -{}^{\mathrm{t}}H$.
Appelons x_0 le sous espace E_0 du début de cette section alors l'espace tangent à $X(p,q)$ en x_0 s'identifie à $\mathfrak{p}$ et l'application exponentielle (au sens riemannien) est donnée par

$$H = \begin{bmatrix} 0 & B \\ {}^{\mathrm{t}}B & 0 \end{bmatrix} \to \exp(H) \cdot x_0.$$

Appelons $\mathfrak{a}$ le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{p}$ des matrices $\begin{bmatrix} 0 & B \\ {}^{\mathrm{t}}B & 0 \end{bmatrix}$ où $B \in \mathrm{M}_{pq}(\mathbb{R})$ est une matrice à coefficients tous nuls sauf les B_{ii} pour $1 \leq i \leq p$. C'est une sous-algèbre abélienne maximale de $\mathfrak{o}(p,q)$ incluse dans $\mathfrak{p}$. La proposition 6.1 de [**Hel01**] montre alors que l'image de $\mathfrak{a}$ par l'application exponentielle est un plat maximal de $X(p,q)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^p$ et notons H_λ l'élément de $\mathfrak{a}$ donné par l'écriture en blocs

$$H_\lambda = \begin{bmatrix} 0 & D & 0 \\ D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$. En munissant $\mathfrak{p}$ du produit scalaire $K' = \frac{1}{2(p+q-2)}K$, on obtient une distance sur $X(p,q)$ invariante sous l'action de $\mathbf{O}(p,q)$ donnée par

$$d(\exp(H_\lambda)x_0, x_0)^2 = K'(H_\lambda, H_\lambda) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2. \tag{10.2}$$

La matrice $\exp(H_\lambda)$ a une expression simple

$$\exp(H_\lambda) = \begin{bmatrix} \mathrm{ch}(\lambda) & \mathrm{sh}(\lambda) & 0 \\ \mathrm{sh}(\lambda) & \mathrm{ch}(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I}_{q-p} \end{bmatrix}$$

où $\mathrm{ch}(\lambda)$ (respectivement $\mathrm{sh}(\lambda)$) est la matrice $\mathrm{diag}(\mathrm{ch}(\lambda_1), \ldots, \mathrm{ch}(\lambda_p))$ (respectivement $\mathrm{diag}(\mathrm{sh}(\lambda_1), \ldots, \mathrm{sh}(\lambda_p))$). Le p-plan $\exp(H_\lambda)E_0$ est donc l'espace vectoriel engendré par les $\{\mathrm{ch}(\lambda_i)e_i + \mathrm{sh}(\lambda_i)e_{p+i}\}_{i=1\ldots p}$.

Dans la suite, l'espace $X(p,q)$ sera toujours muni de la métrique provenant de K'.

10.3. L'espace symétrique X_p. Pour un espace symétrique de type non-compact irréductible (de dimension finie) $X = G/K$, il existe une demi-droite (obtenue par multiplication par un réel strictement positif) de métriques qui font que G agit par isométries. L'usage est de considérer la métrique qui provient de la forme de Killing. Dans la section 10.2, nous avons préféré utiliser la forme K' sur $\mathfrak{o}(p,q)$ qui possède l'avantage de faire disparaître des constantes provenant du paramètre q. Notons temporairement $K'_{(p,q)}$ cette forme pour mettre en avant les paramètres p et q.

Si $q \leq q'$ alors le groupe $\mathbf{O}(p,q)$ se plonge naturellement en un sous-groupe de $\mathbf{O}(p,q')$ de la manière suivante : Si $M \in \mathbf{O}(p,q)$ alors $\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I_{q'-q} \end{bmatrix} \in \mathbf{O}(p,q')$. Cette écriture matricielle définit le plongement. L'image de $\mathbf{O}(p) \times \mathbf{O}(q)$ est un sous-groupe de $\mathbf{O}(p) \times \mathbf{O}(q')$ et la restriction de $K'_{(p,q')}$ à l'image de $\mathfrak{o}(p,q)$ est $K'_{(p,q)}$. Ainsi, on a défini un plongement isométrique de $\mathbf{O}(p,q)$ dans $\mathbf{O}(p,q')$. Au niveau des espaces symétriques, cela donne un plongement totalement géodésique et isométrique de $X(p,q)$ dans $X(p,q')$.

Remarque 10.1. En adaptant légèrement la construction précédente, on voit facilement que $X(p,q)$ se plonge totalement géodésiquement et isométriquement dans $X(p',q')$ pour $p \leq p'$ et $q \leq q'$.

Lemme 10.2. *Pour tout ensemble fini de points $x_1, \ldots, x_n$ de X_p, il existe un sous-espace de Hilbert $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$ de dimension finie et contenant E_0 tel que les points $x_1, \ldots, x_n$ de X_p soient contenus dans $X(Q|_{\mathcal{F}})$.*

Démonstration. Les points $x_1, \ldots, x_n$ sont des p-plans de $\mathcal{H}$, on considère l'espace vectoriel, $\mathcal{F}$, engendré par ces p-plans et E_0. □

On peut alors définir une distance sur X_p. Etant donné deux points de X_p on mesure leur distance dans un $X(Q|_{\mathcal{F}})$ donné par le lemme 10.2. D'après la discussion du début de cette section, cette mesure ne dépend pas du choix de $\mathcal{F}$. Ainsi, on définit bien une distance sur X_p.

Proposition 10.3. *L'espace (X_p, d) est un espace* CAT(0).

Démonstration. Soient x, y et z trois points de X_p. Par le lemme 10.2, il existe un sous-espace de X_p isométrique à un certain $X(p,q)$ donc X_p est un espace métrique géodésique. Soit m un point milieu entre x et y. Il existe de nouveau un espace isométrique à un certain $X(p,q')$ contenant x, y, z et m dans lequel l'inégalité de Bruhat-Tits est vérifiée donc X_p est bien un espace CAT(0) □

Bien que l'espace X_p ne soit plus de dimension finie ni localement compact, si on ne considère qu'une configuration finie alors le raisonnement peut s'effectuer dans un espace symétrique de dimension finie. Ici, $Y \subset X$ *totalement géodésique* signifie que toute géodésique contenant deux points de Y est incluse dans Y.

Proposition 10.4. *Pour toute configuration finie de points, géodésiques, points au bord et plats de dimension finie, il existe un $Y \subset X_p$ totalement géodésique contenant les éléments de cette configuration et isométrique à un $X(p,q)$ pour $p \leq q$.*

Démonstration. On commence par observer que X_p possède la propriété d'extension unique des géodésiques, ce qui est une conséquence du lemme 10.2. Ainsi, une géodésique est entièrement déterminée par deux points distincts sur celle-ci, un point au bord par une géodésique pointant vers ce point et un plat est déterminé par un nombre fini de géodésiques comme enveloppe convexe de celles-ci. Ainsi, le lemme 10.2 permet de trouver Y. □

Corollaire 10.5. *L'espace X_p est de rang p.*

Démonstration. Soit $P \subset X_p$ un plat alors on peut trouver un sous-espace totalement géodésique de X_p isométrique à un certain $X(p,q)$ et contenant P. Comme $X(p,q)$ est de rang $\min(p,q)$, on a $k \leq p$ et donc le rang de X_p est au plus p. Comme il existe des plongements isométriques de $X(p,q)$ (avec $q \geq p$) dans X_p, le rang de X_p est exactement p. □

10.4. Structure de variété riemannienne. Bien que l'approche prise ici est de considérer essentiellement la structure d'espace CAT(0) que possède X_p, on peut, bien entendu, munir cet espace d'une structure de variété riemannienne qui prolonge celle de $X(p,q)$. Pour les notions sur les espaces riemanniens symétriques, on peut se reporter à la section 2.3.

En reprenant les notations de 10.1, on identifie $\mathrm{Vect}(\{e_i\}_{i=1}^p)$ avec $\mathbb{R}^p$ et on note $\mathcal{H}_0$ le supplémentaire orthogonal de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathcal{H}$. On note aussi $L(\mathbb{R}^p, \mathcal{H}_0)$ l'espace vectoriel des opérateurs linéaires (de rang au plus p donc nécessairement bornés) de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathcal{H}_0$. Si $B \in L(\mathbb{R}^p, \mathcal{H}_0)$ alors on note son opérateur adjoint (pour la restriction du produit scalaire à $\mathbb{R}^p$ et $\mathcal{H}_0$) ${}^{\mathrm{t}}B$ et dans ce cas l'application donnée par

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{p} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathcal{H}_0) & \to & X_p \\ B & \mapsto & \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & {}^{\mathrm{t}}B \\ B & 0 \end{bmatrix}\right) \cdot x_0 \end{array}$$

réalise un homéomorphisme. De plus, l'ensemble des opérateurs de la forme $\begin{bmatrix} 0 & {}^{\mathrm{t}}B \\ B & 0 \end{bmatrix}$ forme un système de Lie triple de $\mathbf{S}^2(\mathcal{H})$ et la proposition 2.6 permet d'identifier X_p avec un sous-espace totalement géodésique de $\mathbf{P}^2(\mathcal{H})$.

11. Angles principaux

Dans un espace euclidien, la position relative de deux droites est donnée par l'angle entre ceux deux droites. Les angles principaux (euclidiens), qui sont des objets bien connus depuis les travaux [**Jor75**] de C. Jordan, généralisent le fait précédent. La position relative de deux p-plans est entièrement déterminée par la famille des angles principaux entre ces deux p-plans. De plus, la norme ℓ^2 de cette famille donne exactement la distance (dans l'espace symétrique $\mathbf{O}(p+q)/\mathbf{O}(p) \times \mathbf{O}(q)$) entre les deux p-plans.

Dans cette section, on introduit des angles principaux *hyperboliques* pour lesquels nous n'avons pas trouvé de trace dans la littérature. On montre des propriétés analogues à celles ci-dessus pour ces angles mais relativement à l'espace symétrique $X(p,q)$.

11.1. Angles principaux euclidiens. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert (de dimension finie ou infinie). On note $< x, y >$ le produit scalaire entre x et y et $||x||$ la norme d'un vecteur. Si E et F sont deux sous-espaces vectoriels de dimension $p \in \mathbb{N}^*$, on définit alors par itération la famille des angles principaux.

Soit $c_1 = \max\{< x, y > \mid x \in E,\ y \in F,\ ||x|| = ||y|| = 1\}$. On choisit aussi $x_1 \in E$ et $y_1 \in F$ de norme 1 qui réalisent ce maximum. Si c_i, x_i, y_i sont construits pour $i = 1, \ldots, l < p$, on pose $E_l = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_l)^\perp \cap E$ et $F_l = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_l)^\perp \cap F$. Alors on pose $c_{l+1} = \max\{< x, y > \mid x \in E_l,\ y \in F_l,\ ||x|| = ||y|| = 1\}$ et on choisit de nouveau $x_{l+1} \in E_l$ et $y_{l+1} \in F_l$ de norme 1 qui réalisent ce maximum. Une fois les c_i construits, on définit la famille des *angles principaux* par $\theta_i = \arccos(c_i)$ pour i de 1 à p. C'est une famille ordonnée croissante de nombres entre 0 et $\pi/2$.

Lemme 11.1. *La famille des angles principaux ne dépend pas du choix des x_i et y_i. De plus (x_i) et (y_i) forment des bases biorthogonales de E et F.*

Les familles (x_i) et (y_i) forment des bases biorthogonales de E et F si (x_i) une base orthogonale de E, (y_i) une base orthogonale de F et $< x_i, y_j >= 0$ pour $i \neq j$.

Démonstration. On commence par montrer la propriété d'orthogonalité. Pour cela, on remarque que pour tout vecteur x, le projeté $P_F(x)$ de x sur F est l'unique vecteur de F tel que pour tout $y \in F$, on ait $< x, y >=< P_F(x), y >$. On raisonne alors par récurrence sur i pour montrer que le projeté de x_i sur F est $< x_i, y_i > y_i$. Pour $i = 1$, c'est clair. On suppose le résultat jusqu'au rang i, si $< P_F(x_{i+1}), y_k >\neq 0$ pour $k \leq i$ alors $< x_{i+1}, y_k >\neq 0$ et donc $< x_{i+1}, < x_k, y_k > x_k >=< x_{i+1}, P_E(y_k) >\neq 0$ ce qui est absurde. Ainsi, x_{i+1} est orthogonal à tous les y_k pour $1 \leq k \leq i$. Ce qui montre que $P_F(x_{i+1})$ est dans $\{y_1, \ldots, y_i\}^\perp \cap F$ et donc $P_F(x_{i+1}) =< x_{i+1}, y_{i+1} > y_{i+1}$.

On considère l'application linéaire $P_E \circ P_F|_E$, c'est un endomorphisme de E et dans la base (x_i), cette application a pour matrice $\mathrm{diag}(c_1^2, \ldots, c_p^2)$ (car $P_F(x_i) = \cos(\theta_i) y_i$ et $P_E(y_i) = \cos(\theta_i) x_i$), les valeurs propres de cette application sont donc les c_i^2, ce qui montre que les c_i sont indépendants du choix des x_i et y_i. □

La proposition suivante montre que la famille des angles principaux détermine entièrement la position relativement de deux p-plans.

Proposition 11.2. *Soit E, F deux p-plans de famille d'angles principaux θ et E', F' deux p-plans de famille d'angle principaux θ'.*
Il existe une isométrie f de $\mathcal{H}$ telle que $f(E) = E'$ et $f(F) = F'$ si et seulement $\theta = \theta'$.

Démonstration. Il est clair que la condition d'égalité des angles principaux est nécessaire. Réciproquement, on se donne E, F et E', F' tels que $\theta = \theta'$. On choisit $(x_i), (y_i)$ bases biorthogonales pour E et F et de même $(x'_i), (y'_i)$ bases biorthogonales pour E' et F'. Si $\theta_i \neq 0$ posons $u_i = (y_i - \cos(\theta_i) x_i)/||y_i - \cos(\theta_i) x_i||$. La biorthogonalité montre que $\{x_i\} \cup \{u_i,\ \theta_i \neq 0\}$ est une base orthogonale de $\mathrm{Vect}(E \cup F)$. On réalise la même construction pour E' et F', ce qui donne les u'_i pour i tel que $\theta'_i \neq 0$. Il existe alors f isométrie telle que $f(x_i) = x'_i$ pour tout i et $f(u_i) = u'_i$ pour i tel que $\theta_i \neq 0$. Par construction, on a alors $f(y_i) = y'_i$ pour tout i et donc $f(E) = E'$ et $f(F) = F'$ □

Notons $\mathcal{G}_p$ l'ensemble des p-plans de $\mathcal{H}$. A l'aide des angles principaux, on peut construire de nombreuses distances sur $\mathcal{G}_p$. En effet, remarquons que si E, F et G sont des p-plans et si l'on note θ, β et γ les familles des angles principaux, respectivement, entre E et F , F et G, E et G alors pour tout i, $\gamma_i \leq \theta_i + \beta_i$. Ainsi en définissant $d(E, F) = ||\theta||$ où θ est la famille des angles hyperboliques entre E et F et $||\ ||$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ avec la propriété $||\theta|| \leq ||\theta'||$ si $0 \leq \theta_i \leq \theta'_i$ pour tout i, on obtient une distance G-invariante sur $\mathcal{G}_p$. Il en existe une plus naturelle. Définissons $d_2(E, F) = ||\theta||_2$ pour $E, F \in \mathcal{G}_p$ où θ est la famille des angles principaux entre E et F et $||\ ||_2$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^p$.

Le groupe $\mathbf{O}(\mathcal{H})$ agit transitivement sur $\mathcal{G}_p$ et si on fixe une base hilbertienne (e_i) de $\mathcal{H}$ alors le stabilisateur de $E_0 = \mathrm{Vect}(\{e_i\}_{i=1}^p)$ s'identifie avec $\mathbf{O}(p) \times \mathbf{O}(\mathcal{F})$ où $\mathcal{F}$ est l'orthogonal de E_0. Ainsi, $\mathcal{G}_p$ s'identifie avec $\mathbf{O}(\mathcal{H})/\mathbf{O}(p) \times \mathbf{O}(\mathcal{F})$. Si $\mathcal{F}$ est de dimension finie, q, on retrouve l'espace symétrique compact $\mathbf{O}(p+q)/\mathbf{O}(p) \times \mathbf{O}(q)$.

L'algèbre de Lie de $\mathbf{O}(n)$ est constituée des matrices antisymétriques. L'espace tangent de $\mathcal{G}_p$ au point E_0 s'identifie alors avec les matrices de la forme $X_B = \begin{bmatrix} 0 & B \\ -B^t & 0 \end{bmatrix}$ où B est une matrice de taille $p \times q$ (voir [**Pet06**]). Le produit scalaire sur cet espace tangent est donné par

$$< \begin{bmatrix} 0 & B \\ -B^t & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & A \\ -A^t & 0 \end{bmatrix} >= 2\,\mathrm{trace}(A^t B).$$

La théorie des espaces symétriques (voir le théorème IV.3.3 de [**Hel01**]) montre que les géodésiques issues de E_0 sont de la forme $t \to \exp(tX)E_0$. Considérons une matrice B de taille $p \times q$ de la forme $b_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $b_{ii} = \theta_i$. Le calcul montre que $\exp(X_B)$ est de la forme

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \cos(\theta_p) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \sin(\theta_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \sin(\theta_p) \end{pmatrix} & 0 \\ \begin{pmatrix} \sin(-\theta_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \sin(-\theta_p) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \cos(\theta_p) \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I}_{q-p} \end{bmatrix}$$

On voit alors que les angles principaux entre $\exp(X_B)E_0$ et E_0 sont les $|\theta_i|$ pour $-\pi/2 < \theta_i < \pi/2$ (quitte à les réordonner). Comme $||X_B|| = \sqrt{2\sum \theta_i^2}$, on constate alors qu'au facteur $\sqrt{2}$ près, la distance d_2 sur $\mathcal{G}_p$ est la distance provenant de la métrique d'espace symétrique.

Dans le cas de dimension finie $\mathcal{G}_p$ est compact, ce qui n'est plus le cas en dimension infinie mais on a cependant la proposition suivante.

Proposition 11.3. *L'espace $(\mathcal{G}_p, d_2)$ est complet.*

Démonstration. A chaque p-plan, $E \in \mathcal{G}_p$, on associe son projecteur orthogonal $P_E \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ où $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ désigne l'ensemble des opérateurs bornés de $\mathcal{H}$ muni de la norme d'opérateur qui en fait une algèbre de Banach. De plus, ces opérateurs sont de rang fini et donc de Hilbert-Schmidt (on renvoit à la section 2.8 de [**Arv02**] pour des détails sur les opérateurs de Hilbert-Schmidt). Les opérateurs de Hilbert-Schmidt forment un espace de Hilbert, $\mathbf{L}^2(\mathcal{H})$ pour le produit scalaire $< P, Q >= \mathrm{Trace}({}^tPQ)$ où $\mathrm{Trace}(P) = \sum_{i\geq 0} Pe_i \cdot e_i$. Notons $|| \, ||_2$ la norme associée. Si E et F sont deux p-plans alors en utilisant la construction des angles principaux on voit que $< P_E, P_F >= \sum_{i=1}^{p} \cos(\theta_i)$ où les θ_i sont les angles principaux entre E et F. Ainsi

$$||P_E - P_F||_2 = \sqrt{2\sum_{i=1}^{p}(1-\cos(\theta_i))}. \tag{11.1}$$

Soit E_n une suite de Cauchy dans $(\mathcal{G}_p, d_2)$. La formule ci-dessus montre alors que $P_n = P_{E_n}$ est une suite de Cauchy dans les opérateurs de Hilbert Schmidt. Soit P la limite des P_n. La majoration de la norme d'opérateur par la norme $|| \, ||_2$ (c.f. proposition 2.8.4 de[**Arv02**]) montre que P est aussi un projecteur orthogonal (${}^tP = P$ et $P^2 = P$). De plus le rang d'un projecteur est égale à sa trace et ici $\mathrm{Trace}(P) = \mathrm{Trace}(P^2) = ||P^2||_2 = \lim_{n\to\infty} ||P_n^2||_2 = p$. Ainsi P est un projecteur orthogonal sur un p-plan E. Alors l'équation 11.1 montre alors que $E_n \to E$ dans $\mathcal{G}_p$. □

11.2. Angles principaux hyperboliques. On construit dans cette section les angles principaux *hyperboliques* de la même manière que les angles principaux euclidiens ont été construits. Soit Q la forme quadratique définie en 10.1 sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et B la forme bilinéaire symétrique associée. Soit E et F deux éléments de $X(Q)$.

On définit $c_1' = \max\{B(x,y)|\ x \in E,\ y \in F,\ Q(x) = Q(y) = 1\}$. On remarque que $\{x \in E,\ Q(x) = 1\}$ et $\{y \in E,\ Q(y) = 1\}$ sont compacts puisque $Q|_E$ et $Q|_F$ sont définies positives. On choisit aussi $x_1 \in E$ et $y_1 \in F$ avec $Q(x_1) = Q(y_1) = 1$ qui réalisent ce maximum. Si c_i', x_i, y_i sont construits pour $i = 1, \ldots, l < p$, on pose $E_l = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_l)^{\perp_Q} \cap E$ et $F_l = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_l)^{\perp_Q} \cap F$. Alors on pose $c_{l+1}' = \max\{B(x,y)|\ x \in E_l,\ y \in F_l,\ Q(x) = Q(y) = 1\}$ et on choisit de nouveau $x_{l+1} \in E_l$ et $y_{l+1} \in F_l$ de norme 1 qui réalisent ce maximum.

Remarque 11.4. Dans le cas $p = 1$, l'inégalité de Schwartz renversée (c.f. II.10.3 de [**BH99**]) montre que $B(x_1, y_1) \geq 1$ et on peut donc définir l'angle hyperbolique entre x_1 et y_1 par $\mathrm{arccosh}(B(x_1, y_1))$. On retrouve ainsi la distance usuelle sur l'espace hyperbolique. Cependant lorsque $p \geq 2$ et que x, y sont des vecteurs tels que $Q(x) = Q(y) = 1$, on peut très bien avoir $|B(x,y)| < 1$. On ne peut alors plus définir d'angle hyperbolique entre x et y. On va voir que pour les x_i et y_i, on a toujours $B(x_i, y_i) \geq 1$.

Pour E dans $X(Q)$ on peut définir le *projecteur orthogonal* P_E' sur E relativement à Q . C'est l'unique opérateur P tel que $P|_E = \mathrm{Id}_E$, $P|_{E^{\perp_Q}} = 0$ et $B(Px, y) = B(x, Py)$ pour tout $x, y \in \mathcal{H}$. L'existence de P_E' est assurée par le point (ii) de la proposition 9.1. Dans notre cas où une base particulière a été choisie, on peut définir explicitement P_E'. On commence par remarquer que $P_{E_0}' = P_{E_0}$ puisque que Q et le produit scalaire de $\mathcal{H}$ coïncident sur E_0 et $E_0^{\perp} = E_0^{\perp_Q}$. Maintenant si E appartient à $X(Q)$, il existe

$M \in \mathbf{O}(Q)$ telle que $E = ME_0$. On définit alors $P'_E = MP_{E_0}M^{-1}$. Cette définition ne dépend pas du choix de M. En effet, les autres choix pour M sont de la forme MN avec $N \in \mathbf{O}(p) \times \mathbf{O}(q)$ et comme N et P_{E_0} commutent, on a le résultat.

On a alors pour $x \in E$ et $y \in F$, $B(x, y) = B(x, P'_E(y)) = B(P'_F(y), x)$. Comme Q est définie positive sur E et F, on a $P'_F(x_i) = B(x_i, y_i)y_i$.

Lemme 11.5. *La famille des c'_i ne dépend pas du choix des x_i et y_i. De plus, (x_i) et (y_i) forment des bases biorthogonales pour Q de E et F.*

Démonstration. Le fait que les familles forment des bases bi-orthogonales pour Q se montre exactement de la même manière que dans le lemme 11.1 en remplaçant le produit scalaire par Q.

On a donc $P'_F(x_i) = B(x_i, y_i)y_i$ et $P'_E(y_i) = B(x_i, y_i)x_i$. L'opérateur $P'_E P'_F P'_E$ a donc pour matrice $\mathrm{diag}((c'_1)^2, \dots, (c'_p)^2)$ dans la base (x_i). Les ${c'_i}^2$ en sont donc les valeurs propres et ne dépendent donc pas des x_i et y_i. □

On peut désormais définir les angles principaux hyperboliques. Pour $1 \leq i \leq p$, on a $Q(x_i) = {c'_i}^2 Q(y_i) + Q(x_i - c'_i y_i)$. Comme $Q(x_i) = Q(y_i) = 1$ et que Q est définie négative sur $F^{\perp_Q}$, on a ${c'_i}^2 = 1 - Q(x_i - c'_i y_i) \geq 1$. Posons $\alpha_i = \mathrm{arccosh}(c'_i)$. La famille $\alpha = (\alpha_i)_{i=1}^p$ est une famille décroissante de réels positifs appelée *famille des angles hyperboliques principaux*.

Proposition 11.6. *Soit $E, F \in X(Q)$ de famille d'angles principaux hyperboliques α et $E', F' \in X(Q)$ de famille d'angles principaux hyperboliques α'.*
Il existe une application orthogonale $f \in \mathbf{O}(Q)$ telle que $f(E) = E'$ et $f(F) = F'$ si et seulement $\alpha = \alpha'$.

Démonstration. On se donne $(x_i), (y_i)$ bases bi-orthogonales pour E, F et $(x'_i), (y'_i)$ bases bi-orthogonales pour E', F'. On pose $u_i = x_i - P'_F(y_i)$, $u'_i = x'_i - P'_{F'}(y'_i)$. Soit G l'espace vectoriel engendré par E et F et G' celui engendré par E' et F'. Les familles $\{x_i\} \cup \{u_i,\ u_i \neq 0\}$ et $\{x'_i\} \cup \{u'_i,\ u'_i \neq 0\}$ sont des bases orthogonales respectives de G et G'. De plus $Q(x_i) = 1 = Q(x'_i)$ et $Q(u_i) = 1 - B(x_i, y_i)^2 = 1 - B(x'_i, y'_i)^2 = Q(u'_i)$. Les restrictions de la forme Q à G et G' sont équivalentes, on peut alors appliquer le corollaire 9.6 pour conclure. □

Proposition 11.7. *Soit $E, F \in X(Q)$ de famille d'angles principaux hyperboliques α. Alors $d(E, F) = ||\alpha||_2$.*

Démonstration. Grâce au lemme 10.2, on peut supposer $X(Q)$ est un certain $X(p, q)$ et on sait alors que $\mathbf{O}(p, q)$ agit transitivement sur l'inclusion d'un point dans un plat. Comme $\mathbf{O}(p, q)$ préserve la distance et les angles principaux hyperboliques, on peut supposer que $E = E_0$ et $F = \exp(H_\lambda)E_0$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^p$. On remarque que $\{\alpha_i\} = \{|\lambda_i|\}$. L'équation 10.2 permet alors de conclure. □

11.3. Lien entre ces deux familles d'angles. Il y a un cas où l'on peut exprimer les angles euclidiens en fonction des angles hyperboliques et réciproquement.

Lemme 11.8. *Soit $E \in X(p,q)$. Si θ et α sont les familles des angles principaux respectivement euclidiens et hyperboliques entre E et E_0 alors pour tout $1 \leq i \leq p$ on a*

$$\cos(\theta_{p-i}) = \frac{\mathrm{ch}(\alpha_i)}{\sqrt{\mathrm{ch}(\alpha_i)^2 + \mathrm{sh}(\alpha_i)^2}}.$$

Notons V_0 l'ensemble des éléments de $\mathcal{G}_p$ tels que tous les angles principaux avec E_0 sont plus petits que $\frac{\pi}{4}$.

Proposition 11.9. *L'inclusion de X_p dans $\mathcal{G}_p$ réalise un homéomorphisme entre X_p et V_0.*

Démonstration. L'injection de $X(Q)$ dans V_0 réalise une bijection par définition de ces deux espaces.
Appelons $f\colon \mathbb{R}^+ \to [0, \pi/4)$ la fonction donnée par la formule

$$f(x) = \arccos\left(\frac{\mathrm{ch}(x)}{\sqrt{\mathrm{ch}(x)^2 + \mathrm{sh}(x)^2}}\right).$$

C'est une bijection strictement décroissante. Des majorations grossières montrent que la boule centrée en E_0 de rayon $R \in \mathbb{R}^+$ pour la distance de $X(Q)$ est incluse dans la boule de rayon $pf(R)$ pour la distance de $\mathcal{G}_p$ et de même la boule centrée en E_0 de rayon $r < \pi/4$ pour la distance de $\mathcal{G}_p$ est incluse dans la boule de rayon $pf^{-1}(r)$ pour la distance de X_p. □

Lemme 11.10. *Soit $E \in X_p$ et $M \in \mathbf{O}(Q)$ tel que $M \cdot E_0 = E$ alors $||M|| = ||M^{-1}|| = \sqrt{\mathrm{ch}(\alpha_1)^2 + \mathrm{sh}(\alpha_1)^2}$ où α_1 est le premier angle principal hyperbolique entre E et E_0.*

Démonstration. L'existence de base bi-orthogonale montre que dans une (bonne) base orthogonale de $\mathcal{H}$, on peut choisir pour M la matrice

$$\begin{bmatrix} \mathrm{ch}(\alpha) & \mathrm{sh}(\alpha) & \\ \mathrm{sh}(\alpha) & \mathrm{ch}(\alpha) & \\ & & \mathrm{Id} \end{bmatrix}$$

où $\mathrm{ch}(\alpha)$ (respectivement $\mathrm{sh}(\alpha)$) désigne la matrice $\mathrm{diag}(\mathrm{ch}(\alpha_1), \ldots, \mathrm{ch}(\alpha_p))$ (respectivement $\mathrm{diag}(\mathrm{sh}(\alpha_1), \ldots, \mathrm{sh}(\alpha_p))$. On a bien $M \cdot E_0 = E$ et $||M|| = \sqrt{\mathrm{ch}(\alpha_1)^2 + \mathrm{sh}(\alpha_1)^2}$. Maintenant si M' est un autre élément de $\mathbf{O}(Q)$ qui vérifie la même propriété alors $M^{-1}M' \in \mathbf{O}(p) \times \mathbf{O}(\infty)$ et en particulier $||M|| = ||M'||$. Il en est de même (en changeant les α_i en $-\alpha_i$) pour M^{-1} et on a le résultat annoncé. □

Proposition 11.11. *L'espace (X_p, d) est un espace de Hadamard séparable.*

Pour un espace symétrique, il est facile de montrer la complétude géodésique (si une géodésique ne peut être continuer, on effectue la symétrie près de ce point, ce qui prolonge la géodésique par magie). Le théorème de Hopf-Rinow (c.f. théorème I.3.7 dans [**BH99**]) donne alors la complétude métrique. Ici l'absence de compacité locale ne permet plus d'utiliser le théorème de Hopf-Rinow (voir à ce sujet l'introduction de [**Lan99**]).

Démonstration. Il suffit de montrer qu'une suite de Cauchy (E_n) dans X_p est une suite de Cauchy dans $\mathcal{G}_p$. En effet, par la proposition 11.3, il existe $E \in \mathcal{G}_p$ tel que $E_n \to E$ pour d_2. Comme E_n reste dans une boule centrée en E_0 pour d, le lemme 11.8

montre que $E \in V_0$ et alors la proposition 11.9 montre $E_n \to E$ dans X_p.

Soit (E_n) une suite de Cauchy dans X_p, il existe R tel que $d(E_n, E_0) < R$ pour tout n. On fait le choix de M_n dans $\mathbf{O}(Q)$ tel que $E_n = M_n \cdot E_0$ pour tout n. Si $\alpha(E_n, E_m)$ désigne la famille des angles principaux hyperboliques entre E_n et E_m, on a

$$\alpha(E_n, E_m) = \alpha(M_n^{-1} \cdot E_n, M_n^{-1} \cdot E_m) = \alpha(E_0, M_n^{-1} \cdot E_m).$$

Si x et y sont deux vecteurs respectivement de E_0 et $M_n^{-1} \cdot E_m$, l'inégalité $||x|| = ||M_n^{-1} M_n x|| \leq ||M_n^{-1}||\,||M_n x||$ implique alors

$$\frac{|< M_n x, M_n y >|}{||M_n x||\,||M_n y||} \leq ||M_n||^2 ||M_n^{-1}||^2 \frac{|< x, y >|}{||x||\,||y||}.$$

Ainsi le lemme 11.10, donne

$$\theta_{\max}(E_n, E_m) \leq \left(\mathrm{ch}(R)^2 + \mathrm{sh}(R)^2\right)^2 \theta_{\max}(E_0, M_n^{-1} E_m).$$

Finalement, $\alpha_1(E_0, M_n^{-1} \cdot E_m) = \alpha_1(E_n, E_m) \longrightarrow_{n,m\to\infty} 0$ et le lemme 11.8 impliquent que $\theta_{\max}(E_n, E_m) \longrightarrow_{n,m\to\infty} 0$.

La séparabilité découle de l'homéomorphisme entre V_0 et X_p obtenu dans la proposition 11.9. En effet, V_0 est un ouvert de $\mathcal{G}_p$ qui est homéomorphe à l'ensemble des projecteurs de rang p dans l'ensemble (fermé) des opérateurs de Hilbert-Schimdt, $L^2(\mathcal{H})$, par la formule 11.1. La séparabilité de $\mathbf{L}^2(\mathcal{H})$ peut se voir en l'identifiant avec le produit tensoriel hilbertien $\mathcal{H}\overline{\oplus}\mathcal{H}$. □

12. Isométries

12.1. Le groupe de toutes les isométries. Il est bien connu que le groupe des isométries de l'espace hyperbolique de dimension q, finie ou infinie est $\mathbf{O}(1, q)/\{\pm \mathrm{Id}\}$. Voir, par exemple, la proposition 3.4 de [**BIM05**]. Le théorème suivant et son corollaire généralise ce résultat en rang plus grand que 2. Notons $\pi : \mathbf{O}(Q) \to \mathrm{Isom}(X(Q))$ le morphisme de groupes qui associe à un élément de $\mathbf{O}(Q)$ l'isométrie obtenue par multiplication à gauche sur $\mathbf{O}(p, q)/\mathbf{O}(p) \times \mathbf{O}(q)$.

Théorème 12.1. *Soit g une application de $X(Q)$ dans lui-même. Les énoncés suivants sont équivalents*

(i) La transformation g est une isométrie.

(ii) La transformation g préserve les angles hyperboliques principaux.

(iii) Il existe $h \in \mathbf{O}(Q)$ tel que $g = \pi(h)$.

Voyons tout de suite un corollaire important de ce résultat en définissant $\mathbf{PO}(Q) = \mathbf{O}(Q)/\{\pm \mathrm{Id}\}$.

Corollaire 12.2. *Le groupe* $\mathrm{Isom}(X_p)$ *s'identifie à* $\mathbf{PO}(p, \infty)$.

Démonstration. Grâce au théorème précédant $\mathrm{Isom}(X(Q)) \simeq \mathbf{O}(Q)/\ker(\pi)$, il reste donc à voir que $\ker(\pi) = \{\pm \mathrm{Id}\}$. Soit $G \in \ker(\pi)$ alors $\pi(G)x_0 = x_0$ donc $G \in \mathbf{O}(p) \times \mathbf{O}(q)$. Si $G = A \times B$ avec $A \in \mathbf{O}(p)$ et $B \in \mathbf{O}(q)$ alors la différentielle de $\pi(G)$

en x_0 est donnée par $H \mapsto BH\,{}^tA$. Cette application est l'identité. Identifions l'espace tangent en x_0 avec des matrices à p colonnes et q (peut-être infini) lignes. Notons b_{ij} et a_{ij} les coefficients matriciels respectifs de A et B (dans une base orthogonale pour Q et orthonormée pour le produit scalaire sur $\mathcal{H}$). En prenant pour H la matrice n'ayant que des zéros sauf un 1 en (i,j) on obtient que $BH\,{}^tA$ a pour coefficient en (k,l), $a_{lj}b_{ki}$. Ceci impose $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$ et $b_{ij} = 0$ pour $i \neq j$ et donc pour tout $i \leq q$ et tout $j \leq p$, $a_{jj}b_{ii} = 1$. Il est alors clair que $a_{jj} = b_{ii} = a_{11} = \pm 1$ et donc $G = \pm\,\mathrm{Id}$. □

Démonstration du théorème 12.1. Les implications $(iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$ sont claires. Seule l'implication $(i) \Rightarrow (iii)$ est à montrer.
Soit $g \in \mathrm{Isom}(X_p)$. Comme $\mathbf{O}(p,\infty)$ agit transitivement sur X_p, on peut supposer que $gx_0 = x_0$. On peut alors parler de la différentielle de g en x_0 qui est défini par $T_{x_0}g(H) = \lim_{t\to 0} g\exp(tH)$ où $H \in T_{x_0}X_p \simeq L(E_0,\mathcal{F})$. Cette application est homogène et préserve la norme sur $T_{x_0}X_p$ qui est un espace de Hilbert. C'est un résultat classique que $T_{x_0}g$ est alors linéaire. On va comprendre $T_{x_0}g$ sur une base orthonormée de $\mathbf{L}(\mathbb{R}^p,\mathcal{F})$. Notons δ_{ij} l'application $x \mapsto < x, e_j > \varepsilon_i$ pour $j \leq p$ et $i \in \mathbb{N}^*$ où $(e_i)_{i=1\ldots p}$ est une base de $\mathbb{R}^p$ et (ε_j) une base de $\mathcal{H}$. Les δ_{ij} forment une base orthonormale de $L(E_0,\mathcal{F})$ et $\exp(\delta_{ij})$ est $\mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_{j-1},\mathrm{ch}(1)e_j + \mathrm{sh}(1)\varepsilon_i, e_{j+1},\ldots,e_p) \in X_p$ qui est sur une géodésique singulière issue de x_0.

Un plat maximal de X_p contenant x_0 est de la forme

$$P_{u,v} = \{\mathrm{Vect}\,(\{\mathrm{ch}(\lambda_i)u_i + \mathrm{sh}(\lambda_i)v_i\}_{i=1..p}) \mid \ (\lambda_1,\ldots,\lambda_p) \in \mathbb{R}^p\}$$

pour $u = (u_1,\ldots,u_p)$ base orthonormée de E_0 et $v = (v_1,\ldots,v_p)$ famille orthonormée de $\mathcal{H}_0$.

L'action de $\mathbf{O}(p)\times\mathbf{O}(\infty)$ sur $\mathbf{L}(E_0,\mathcal{F})$ est donnée par $H \mapsto BH\ {}^tA$ pour $A \in \mathbf{O}(p)$ et $B \in \mathbf{O}(\infty)$. Ainsi, l'action de $\mathbf{O}(p)\times\mathbf{O}(\infty)$ sur les plats maximaux contenant x_0 est transitive et on peut supposer que g fixe (point par point) le plat $P_{e,\varepsilon}$ où $e = (e_1,\ldots,e_p)$ et $\varepsilon = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_p)$. Si ε' est obtenu à partir de ε en remplaçant la coordonnée d'indice i par un ε_k pour $k > p$ alors $P_{e,\varepsilon}$ et $P_{e,\varepsilon'}$ ont pour intersection un plat de dimension $p-1$ qui est obtenu en prenant la coordonnée λ_i égale à 0. Donc $gP_{e,\varepsilon'}$ vérifie la même propriété d'intersection avec $P_{e,\varepsilon}$ et donc $gP_{e,\varepsilon'}$ est de la forme $P_{e,\varepsilon''}$ où ε'' est obtenu à partir de ε en remplaçant la coordonnée d'indice i par un vecteur unitaire ε''_k orthogonal aux $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_p$.

De plus, ε''_k ne dépend que de ε_k et de i mais pas de $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_p$ car ε''_k est complètement déterminée par l'image de la géodésique singulière donnée par l'image de $\mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_{j-1},\mathrm{ch}(1)e_j + \mathrm{sh}(1)\varepsilon_k, e_{j+1},\ldots,e_p)$. Ainsi, pour i fixé, l'application $\varepsilon_k \mapsto \varepsilon''_k$ est bien définie pour tout k et se prolonge en une application linéaire orthogonale B_i de $\mathcal{F}$. L'application $T_{x_0}g$ s'écrit donc $H = [h_1,\cdots,h_p] \mapsto [B_1h_1,\ldots,B_ph_p]$ où h_j est la colonne d'indice j de H c'est à dire l'image de e_j par H. Il reste à voir que l'on peut se ramener au cas où tous les B_j sont les mêmes.

Remarquons que, quitte à multiplier g à gauche par $\mathrm{Id}\times B_1^{-1}$, on peut supposer que $B_1 = \mathrm{Id}$. Soit u_1 et u_2 deux vecteurs unitaires orthogonaux de $\mathcal{F}$, l'image de

$\mathrm{Vect}(\mathrm{ch}(1)e_1 + \mathrm{sh}(1)u_1, \ldots, e_{j-1}, \mathrm{ch}(1)e_j + \mathrm{sh}(1)u_2, e_{(j+1)}, \ldots, e_p) \in X_p$ par g est $\mathrm{Vect}(\mathrm{ch}(1)e_1 + \mathrm{sh}(1)u_1, \ldots, e_{j-1}, \mathrm{ch}(1)e_j + \mathrm{sh}(1)B_j u_2, e_{(j+1)}, \ldots, e_p) \in X_p$ et donc $B_j u_2$ est orthogonal à u_1 pour tout u_1 orthogonal à u_2. Ainsi $B_j u_2 = \pm u_2$ pour tout u_2 et par linéarité $B_j = \varepsilon_j \,\mathrm{Id}$ où $\varepsilon_j = \pm 1$. Finalement si A est la matrice diagonale telle que $a_{jj} = \varepsilon_j$ alors $g(A \times \mathrm{Id}) = \mathrm{Id}_{X_p}$.

□

On peut maintenant comprendre la topologie de $\mathrm{Isom}(X_p)$. Rappelons qu'en dimension finie $\mathbf{O}(p)$ possède exatement deux composantes connexes qui sont $\mathbf{SO}(p)$ et l'ensemble des applications orthogonales de déterminant -1. Si p est pair alors Id et $-\mathrm{Id}$ sont dans la même composante connexe et donc $\mathbf{PO}(p) := \mathbf{O}(p)/\{\pm \mathrm{Id}\}$ possède de nouveaux deux composantes connexes. Si p est impair alors Id et $-\mathrm{Id}$ sont dans des composantes distinctes et donc dans ce cas $\mathbf{PO}(p) \simeq \mathbf{SO}(p)$.

En dimension infinie, les choses sont bien différentes car la notion de déterminant n'a plus de sens et en fait $\mathbf{O}(\infty)$ est même contractile par un résultat de N. Kuiper [**Kui65**] pour la topologie de la norme d'opérateurs. Si $\mathbf{GL}(\mathcal{H})$ désigne le groupe de tous les opérateurs bornés inversibles de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ alors appelons $\mathbf{O}(\mathcal{H})$ et $\mathbf{P}(\mathcal{H})$ les sous-groupes de $\mathbf{GL}(\mathcal{H})$ formés, respectivement des opérateurs orthogonaux et des opérateurs symétriques définis positifs (munis de la topologie de la norme d'opérateurs) alors on a le résultat suivant sur la décomposition polaire.

Proposition 12.3. *La décomposition polaire réalise un homéomorphisme entre* $\mathbf{O}(p,\infty)$ *et* $(\mathbf{O}(p,\infty) \cap \mathbf{O}(\mathcal{H})) \times (\mathbf{O}(p,\infty) \cap \mathbf{P}(\mathcal{H}))$.

Démonstration. On se reportera à la proposition 5 du paragraphe II.4 de [**dlH72**] et au paragraphe VII.2 de [**Lan99**]. □

Corollaire 12.4. *Le groupe* $\mathbf{O}(p,\infty)$ *a le type d'homotopie de* $\mathbf{O}(p)$. *Le groupe* $\mathrm{Isom}(X_p)$ *est connexe de groupe fondamental* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *si* p *est impair et possède deux composantes connexes. La composante neutre a alors* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *comme groupe fondamental si* p *est divisable par 4 et* $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ *sinon.*

Démonstration. Comme $\mathbf{O}(p,\infty) \cap \mathbf{O}(\mathcal{H}) = \mathbf{O}(p) \times \mathbf{O}(\infty)$, le groupe $\mathbf{O}(p,\infty) \cap \mathbf{O}(\mathcal{H})$ a le type d'homotopie de $\mathbf{O}(p)$. De plus, l'exponentielle est surjective sur $\mathbf{O}(p,\infty) \cap \mathbf{P}(\mathcal{H})$ qui est donc contractile.
Comme $\mathrm{Isom}(X_p) = \mathbf{PO}(p,\infty)$, on applique alors des résultats classiques sur $\mathbf{PSO}(p)$.

□

Remarquons que si p est impair alors le groupe $\mathbf{PO}(p,\infty)$ se relève en un sous-groupe $\mathbf{O}_+(p,\infty) \leq \mathbf{O}(p,\infty)$ que l'on définit comme l'ensemble des éléments $G \in \mathbf{O}(p,\infty)$ tels que $P_{E_0} \circ G \circ P_{E_0}$ est de déterminant positif. Pour des détails (en dimension finie mais qui se généralisent sans difficulté en dimension infinie) voir le paragraphe 4.3 de [**MT86**].

13. Immeubles sphériques et euclidiens associés

13.1. Immeuble sphérique à l'infini. Le bord à l'infini d'un espace symétrique de type non-compact est muni d'une structure d'immeuble sphérique (voir le paragraphe 4). On va voir que c'est aussi vrai pour le bord à l'infini de X_p.

Proposition 13.1. *Le bord à l'infini* $(\partial X_p, \angle)$ *est un immeuble sphérique épais de type* B_p *et de groupe de Weyl*

$$W_p = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^p \rtimes \mathcal{S}_p.$$

Démonstration. On montre que les propriétés de la définition 4.1 sont vérifiées. On appelle appartement de ∂X_p, le bord d'un sous-espace euclidien maximal de X_p. Tous les appartements sont donc isométriques pour la distance de Tits à la sphère $\mathbb{S}^{p-1}$. On appelle *mur* le bord à l'infini d'une intersection (non-triviale) de deux sous-espaces euclidiens maximaux de X_p. Ce sont des sphères de dimension $p-2$ et on appelle *chambre* les composantes connexes du complémentaire de la réunion des murs. Comme un nombre fini de sous-espaces euclidiens maximaux appartiennent à un sous-espace totalement géodésique isométrique à $X(p,q)$, chaque appartement est muni d'une structure de complexe simpliciel isomorphe à un appartement de $\partial X(p,q)$ (le complexe simpliciel ne dépend pas de q). Les propriété (ii) et (iii) sont vérifiées car elle ne font intervenir que deux chambres ou deux appartements à la fois et elles sont vraies pour l'immeuble sphérique $\partial X(p,q)$.

Le type de l'immeuble sphérique est donnée par le type du système de racines de l'algèbre de Lie de la composante neutre du groupe des isométries dans le cas de dimension finie. Pour $X(p,q)$, le type est B_p, on peut se référer à [**Saw99**]. Le groupe de Weyl est aussi calculé dans [**Saw99**] mais il y a une erreur, il s'agit d'un produit semi-direct et non d'un produit direct. C'est le groupe

$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^p \rtimes \mathcal{S}_p.$$

□

13.2. Immeubles euclidiens asymptotiques et dimension télescopique. Dans [**KL97**], B. Kleiner et B. Leeb donnent une nouvelle définition d'immeuble euclidien qui a pour but de caractériser les immeubles euclidiens grâce à leur géométrie asymptotique. En particulier, un cône asymptotique d'immeuble euclidien est encore un immeuble euclidien.

Pour comprendre la différence avec les immeubles euclidiens habituels (ceux décrits dans [**AB08**], par exemple), on qualifiera ces derniers de « discrets ». Alors, les immeubles euclidiens de Kleiner et Leeb sont aux immeubles discrets ce que les arbres réels sont aux arbres simpliciels. C'est à dire que les « branchements » entre les appartements peuvent se faire de manière continue.

Les immeubles euclidiens « à la Kleiner Leeb » ne sont, ici, qu'un prétexte pour obtenir le corollaire 13.4 et on renvoit à l'article original pour une véritable étude de ces espaces.

Soit E un espace euclidien, son bord à l'infini ∂E muni de la distance angulaire est une sphère euclidienne de dimension un de moins. Comme les isométries de E sont toutes affines et que les translations induisent l'identité sur ∂E, on obtient un morphisme

$$\rho\colon \operatorname{Isom}(E) \to \operatorname{Isom}(\partial E)$$

en associant à toute isométrie euclidienne sa partie linéaire. Un sous-groupe de $W_{\mathrm{Aff}} \subset \mathrm{Isom}(E)$ est appelé *groupe de Weyl affine* s'il est engendré par des réflexions par rapport à des hyperplans et si son image $W = \rho(W_{\mathrm{Aff}})$ est un sous-groupe fini de $\mathrm{Isom}(\partial E)$. Le groupe W est le *groupe de Weyl sphérique* associé à W_{Aff}. On appelle alors, *complexe de Coxeter euclidien*, une telle paire (E, W_{Aff}) et la paire $(\partial E, W)$ est le *complexe de Coxeter sphérique à l'infini* associé. Son *polyèdre d'anisotropie* est le polyèdre sphérique

$$\Delta = \partial E/W.$$

Appelons $\theta_E \colon \partial E \to \Delta$ cette projection. Un segment (non réduit à point) orienté $\overline{xy}$ de E détermine un point de ∂E qui correspond au rayon géodésique issu de x passant par y. La projection d'un point à l'infini correspondant à un segment $\overline{xy}$ sur Δ est appelée Δ-*direction* de $\overline{xy}$. Étant donnés deux points δ_1 et δ_2 de Δ, on introduit l'ensemble fini

$$D(\delta_1, \delta_2) = \{\angle(\xi_1, \xi_2) | (\xi_1, \xi_2) \in \partial E,\ \theta_E(\xi_1) = \delta_1,\ \theta_E(\xi_2) = \delta_2\}.$$

Définition 13.2. Soit (E, W_{Aff}) un complexe de Coxeter euclidien. Un *immeuble euclidien de modèle* (E, W_{Aff}) est un espace de Hadamard X muni de la structure donnée par l'existence de

(i) une application θ de l'ensemble des segments orientés (non triviaux) de X vers Δ,

(ii) une collection, $\mathcal{A}$, appelée *atlas*, de plongements isométriques $\iota \colon E \to X$ qui préserve les Δ-directions et est stable par précomposition par un élément de W_{Aff}. L'image de ι est appelé *appartement*.

Avec les propriétés suivantes

(1) Pour tout $x, y, z \in X$ tels que $y \neq x$ et $z \neq x$,

$$d_\Delta(\theta(\overline{xy}), \theta(\overline{xz})) \leq \overline{\angle}_x(y, z). \tag{13.1}$$

(2) L'angle entre deux segments géodésiques $\overline{xy}$ et $\overline{xz}$ appartient à l'ensemble fini $D(\theta(\overline{xy}), \theta(\overline{xz}))$.

(3) Pour tout segment, rayon ou droite géodésique, il existe un appartement le ou la contenant.

(4) Si A_1 et A_2 son deux appartements s'intersectant alors le *changement de cartes* $\iota_{A_2}^{-1} \circ \iota_{A_1} \colon \iota_{A_1}^{-1}(A_1 \cap A_2) \to \iota_{A_2}^{-1}(A_1 \cap A_2)$ est la restriction d'un élément de W_{Aff}.

Théorème 13.3. *Soit ω un ultrafiltre non principal sur $\mathbb{N}$, (x_n) une suite de points de X_p et (ε_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\lim_\omega \varepsilon_n = 0$. Le cône asymptotique $\lim_\omega(\varepsilon_n X_p, x_n)$ est un immeuble euclidien de modèle $(\mathbb{R}^p, W_p \ltimes \mathbb{R}^p)$.*

Le théorème 5.2.1 de [**KL97**] énonce le même résultat pour tous les espaces symétriques de type non-compact. La même preuve, mots pour mots, s'applique car elle n'utilise pas la compacité locale sauf au lemme 5.2.2. Grâce à l'homogénéité pour chaque n, on peut cependant supposer que les suites (x_n),(y_n) et (z_n) sont toujours dans un même sous-espace $Y \simeq X_{p,2p}$. On ne redonne pas de preuve ici et on renvoit à *loc. cit.*.

Corollaire 13.4. *L'espace X_p est de dimension télescopique exactement p.*

Démonstration. Puisque X_p contient des sous-espaces euclidiens de dimension p, il est clair que $\mathrm{DimTel}(X_p) \geq p$. Le corollaire 6.1.1 de *loc. cit.* montre exactement que si U et V sont deux ouverts d'un immeuble euclidien de rang r avec $V \subset U$ alors $H_k(U, V) = 0$ pour $k > r$. La caractérisation 5.2 montre alors que $\mathrm{DimTel}(X_p) = p$. $\square$

Remarque 13.5. Ce corollaire montre que tous les résultats du paragraphe 7 pour les espaces de dimension télescopique finie s'appliquent donc à X_p.

CHAPITRE IV

Théorie mesurée des actions de groupes

14. Moyennabilité

Une paire, $(\Omega, \mathcal{A})$, constituée d'un ensemble Ω et d'une tribu $\mathcal{A}$ sur Ω est appelée espace borélien. On dit que $(\Omega, \mathcal{A})$ est un *espace borélien standard* si la paire est isomorphe à la paire constituée d'un sous-ensemble borélien d'un espace polonais et de la tribu des boréliens. On fixe un groupe localement compact à base dénombrable, G, pour la suite de cette section. Ce groupe possède une mesure de Haar et les notions de mesurabilité pour ce groupe seront donc relatives à cette mesure de Haar (en fait, relatives uniquement à sa classe). Soit (Ω, μ) un espace borélien standard muni d'une mesure borélienne σ-finie. On dit que (Ω, μ) (ou simplement Ω si μ est implicite) est un *G-espace* s'il existe une action $G \curvearrowright \Omega$ telle que $(g, \omega) \mapsto g\omega$ soit borélienne et si pour tout $g \in G$, la mesure image $g_*\mu$ et la mesure μ sont dans la même classe. C'est à dire que $g_*\mu$ et μ ont mêmes ensembles de mesure nulle. On dit que μ est *invariante* si $g_*\mu = \mu$ pour tout $g \in G$.

Définition 14.1. Soit Ω un G-espace. On dit que Ω est un G-espace *ergodique* (ou que l'action $G \curvearrowright \Omega$ est ergodique) si toute partie mesurable G-invariante est de mesure nulle ou pleine.

Définition 14.2 (Définition 4.2.1 de [**Zim84**])**.** Soit Ω un G-espace et H un groupe localement compact à base dénombrable. Un *cocycle* α est une application mesurable de $G \times \Omega$ vers H telle que pour tout $g, g' \in G$ et presque tout ω,

$$\alpha(gg', \omega) = \alpha(g, g'\omega)\alpha(g', \omega).$$

On remarque que si Ω est un point alors on retrouve la notion de morphisme de groupes.

14.1. Groupe moyennables. Soit G un groupe topologique localement compact muni de sa mesure de Haar. Comme la mesure de Haar est invariante par multiplication (à gauche), on définit une représentation isométrique, π, de G sur $L^1(G)$ par la formule $\pi(g)f(g') = f(g^{-1}g')$. Le dual topologique de $L^1(G)$ étant $L^\infty(G)$, on obtient une représentation isométrique *contragrédiente*, $\pi^\sharp$ de G sur $L^\infty(G)$ donnée par $\pi^\sharp(g) = \pi(g^{-1})^*$ où U^* désigne l'opérateur adjoint associé à $U \in \mathbf{L}(E)$.

Définition 14.3. Une *moyenne* m sur G est une forme linéaire positive de $L^\infty(G)$ telle que $m(\mathbf{1}_G = 1)$.

On dit que G est *moyennable* s'il existe une moyenne invariante sur G. Avec cette définition, les premiers exemples de groupe moyennables sont donnés par les groupes compacts puisque tout élément de $L^\infty(G)$ est intégrable et donc la mesure de Haar de masse totale 1 fournit la moyenne invariante désirée. L'existence d'une décomposition

paradoxale empêche l'existence d'une telle moyenne, ce qui montre que les groupes libres ne sont pas moyennables. Il est important de remarquer que cette notion est bien une notion topologique (plutôt même mesurable) car le groupe $\mathbf{SO}(3)$ muni de sa topologie de groupe de Lie est un groupe compact donc moyennable alors que muni de la topologie discrète (et de la mesure de comptage) il ne l'est plus puisqu'il possède des sous-groupes libres (voir [**dlH00**, II.37]).

La proposition suivante nous donnera une nouvelle définition de groupe moyennable qui sera plus utile pour la suite.

Proposition 14.4 (proposition 1.5 de [**Zim78**])**.** *Soit G un groupe localement compact à base dénombrable. Le groupe G est moyennable si et seulement si pour toute action continue par isométries linéaires de G sur un espace de Banach séparable E et tout compact convexe K de E_1^*, il existe un point fixe dans K.*

Dans cette proposition E_1^* désigne la boule unité fermée de E^* et K est un compact non-vide pour la toplogie faible-$*$. Comme la proposition 4.1.4 de [**Zim84**] le montre on peut, plus généralement, considérer les compacts K non-vides d'un espace vectoriel topologique localement convexe séparé.

14.2. Champs d'espaces de Banach. Pour un traité général on pourra consulter l'appendice A.3 de [**ADR00**] et la section 4 du chapitre II de [**FD88**].

Définition 14.5. Soit Ω un espace borélien standard et μ une mesure borélienne sur Ω. Un *champ d'espaces de Banach* est la donnée d'une famille $\{(E_\omega, || \ ||_\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ d'espaces de Banach munie d'un sous-ensemble $\mathcal{M} \subset \Pi_{\omega\in\Omega} E_\omega$ qui vérifie les conditions suivantes :

(i) si l'ensemble $\{f_\omega |\ f \in \mathcal{M}\}$ est total pour presque tout ω,

(ii) si $f, g \in \mathcal{M}$ alors $f + g \in \mathcal{M}$,

(iii) si $f \in \mathcal{M}$ et $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ est mesurable alors $\varphi f \in \mathcal{M}$,

(iv) si $f \in \mathcal{M}$ alors $\omega \mapsto ||f_\omega||_\omega$ est mesurable,

(v) si (f^n) est une suite de $\mathcal{M}$ telle qu'il existe $f \in \Pi_{\omega\in\Omega} E_\omega$ avec $\lim_{n\to\infty} f_\omega^n = f_\omega$ pour presque tout ω, alors $f \in \mathcal{M}$.

L'ensemble $\mathcal{M}$ est appelée *structure mesurable* du champ d'espaces de Banach $\{(E_\omega, || \ ||_\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ et Ω en est la *base*. Si la base et la structure sont implicites on notera simplement $\mathbf{E}$ un tel champ d'espaces de Banach. On appelera *section* de $\mathbf{E}$ un élément de $\mathcal{M}$.

Définition 14.6. Soit $\mathbf{E} = ((E_\omega), \mathcal{M})$ un champ d'espaces de Banach. On dit que $\mathbf{E}$ est *séparable* s'il existe $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$ dénombrable tel que pour presque tout ω, $\{f_\omega |\ f \in \mathcal{F}\}$ est totale dans E_ω.

Un tel ensemble $\mathcal{F}$ est appelé *famille fondamentale* du champ d'espaces de Banach séparable $\mathbf{E}$, pour construire un champ d'espaces de Banach séparable, il suffit en fait de se donner une famille fondamentale.

Proposition 14.7 (Proposition A.3.2 de [**ADR00**])**.** *Soit Ω un espace borélien standard et (E_ω) une famille d'espaces de Banach et $\mathcal{F} \subset \Pi_{\omega\in\Omega} E_\omega$ une famille dénombrable telle que*

(i) si $f \in \mathcal{M}$ alors $\omega \mapsto ||f_\omega||_\omega$ est mesurable,

(ii) pour presque tout ω, $\{f_\omega |\ f \in \mathcal{F}\}$ est totale dans E_ω.

Alors $\mathcal{F}$ engendre une structure mesurable $\mathcal{M}$ telle que $\mathbf{E} = ((E_\omega), \mathcal{M})$ est un champ d'espaces de Banach séparable.

Exemples 14.8. Exemples de Champs de Banach séparables.

(1) Soit E un espace de Banach et Ω un espace borélien standard. Alors la famille (E_ω) où $E_\omega = E$ pour tout ω et la famille $\mathcal{M}$ constituée des applications $f : \Omega \to E$ telles que $\omega \to ||f_\omega||$ est une fonction mesurable forment un champ d'espace de Banach appelé *champ constant* égal à E.

(2) Les champs mesurables d'espaces de Hilbert séparables introduits par J. Dixmier dans [**Dix96**] sont des cas particuliers de champs d'espaces de Banach séparables.

(3) Soit $\mathbf{H}$ un champ d'espaces de Hilbert séparable de base Ω et $\mathcal{F}$ une famille fondamentale de $\mathbf{H}$. La famille $(H_\omega \otimes H_\omega)$ munie de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F} = \{x \otimes y;\ x, y \in \mathcal{F}\}$ donne lieu à un champ d'espaces de Hilbert séparable par la proposition 14.7 noté $\mathbf{H} \otimes \mathbf{H}$. Pour $\omega \in \Omega$, notons $L^1(H_\omega)$ l'espace de Banach des opérateurs à trace munie de la norme $A \mapsto \operatorname{trace}|A|$. Comme $(H_\omega \otimes H_\omega)$ s'identifie aux opérateurs de Hilbert-Schmidt $L^2(H_\omega)$, cela permet aussi de définir un nouveau champ d'espaces de Hilbert noté $L^2(\mathbf{H})$. On peut aussi voir $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}$ comme un sous-ensemble de $\Pi_\omega L^1(H_\omega)$ formé d'opérateurs de rang 1 qui vérifie les conditions (i) et (ii) de la proposition 14.7 et donc engendre une structure mesurable qui fait de $(L^1(H_\omega))$ un champ d'espaces de Banach séparable noté $L^1(\mathbf{H})$.

Etant donné un champ d'espaces de Banach séparable $\mathbf{E}$ de structure mesurable $\mathcal{M}$, on construit le *champ dual*. Considérons la famille des duaux (E_ω^*) et définissons le sous-ensemble $\mathcal{M}^*$ constitué des éléments $\varphi \in \Pi_{\omega\in\Omega}$ tels que $\omega \mapsto \varphi_\omega(f_\omega)$ est mesurable pour tout $f \in \mathcal{M}$.

Définition 14.9 (lemme A.3.7 de [**ADR00**])**.** La paire $((E_\omega), \mathcal{M}^*)$ est un champ d'espaces de Banach appelé *champ dual* du champ d'espaces de Banach $\mathbf{E}$ et noté $\mathbf{E}^*$.

En général, le dual d'un espace de Banach séparable n'est pas séparable. Ainsi, le champ dual d'un champ d'espaces de Banach séparable n'est pas nécessairement séparable.
Si Ω un G-espace et $\mathbf{E}$ un champ d'espaces de Banach de base Ω et de structure mesurable $\mathcal{M}$, on définit naturellement la notion d'*action* (par isométries) de G sur $\mathbf{E}$.

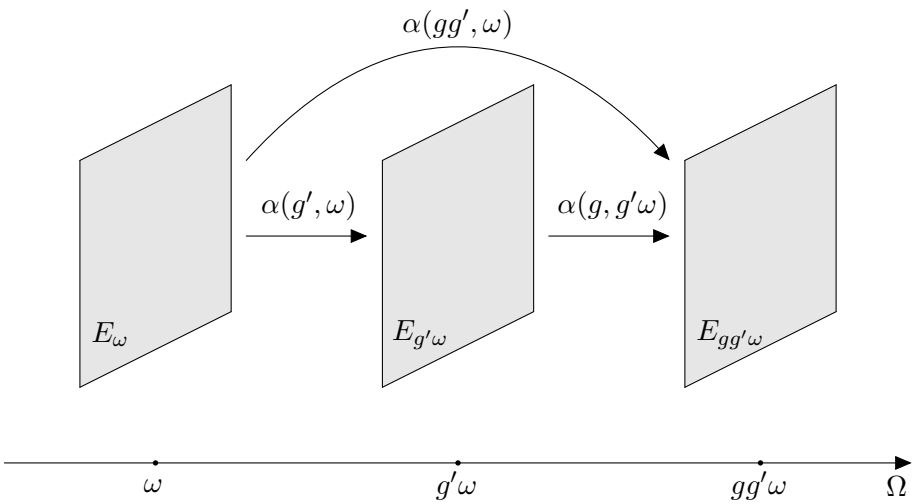
Définition 14.10. Une *action* de G sur $\mathbf{E}$ est la donnée d'une famille d'applications $\{\alpha(g, \omega)\}_{(g,\omega)}$ appelée *cocycle* telle que

(i) pour tout $g \in G$ et presque tout ω, $\alpha(g, \omega) \in \operatorname{Isom}(E_\omega, E_{g\omega})$,

(ii) pour tout $g, g' \in G$ et presque tout ω, $\alpha(gg', \omega) = \alpha(g, \omega)\alpha(g', \omega)$,

(iii) pour tout $g \in G$ et toutes sections f, f', la fonction $(g, \omega) \mapsto ||f_\omega - \alpha(g, g^{-1}\omega) f'_{g^{-1}\omega}||_\omega$ est mesurable.

La condition (ii) est appelée *relation de cocycle*. Si $\mathbf{E}$ est le champ constant égal à un espace de Banach séparable E, on retrouve la notion classique de cocycle définie en 14.2 avec $H = \mathrm{Isom}(E)$. On peut remarquer qu'une action sur un champ d'espaces de Banach donne lieu à une action (au sens usuel) sur les sections définie par $(g \cdot f)_\omega = \alpha(g, g^{-1}\omega) f_\omega$.



Définition 14.11. Soit $\mathbf{E}$ un champ d'espaces de Banach au dessus de Ω et $\mathbf{E}^*$ le champ dual. Un *sous-champ de parties convexes compactes* est la donnée d'une famille $(A_\omega)_{\omega \in \Omega}$ telle que pour presque tout ω, $A_\omega \subset E_\omega^*$ est une partie compacte pour la topologie faible-* de la boule unité de E_ω^*, telle qu'il existe une famille dénombrable de sections de $\mathbf{E}^*$ incluses dans $\prod_\omega A_\omega$ et dont l'enveloppe convexe fermée est A_ω pour presque tout ω. Si Ω est un G-espace et α un cocycle associé à une action de G sur $\mathbf{E}$, on dit que $\mathbf{A}$ est *invariant* si pour tout g et presque tout ω, $\alpha^\sharp(g, \omega) A_\omega = A_{g\omega}$.

14.3. Actions moyennables. Dans [**Zim78**], R. Zimmer généralise la notion de groupe moyennable à celle d'*action moyennable*. On donne ici une définition équivalente à la définition initiale.

Définition 14.12 (Définition 4.2.6 de [**ADR00**])**.** Soit Ω un G-espace. On dit que Ω est *moyennable* si pour tout champ, $\mathbf{E}$, d'espaces de Banach au dessus de Ω, muni d'une action de G et pour tout sous-champ invariant de parties convexes compactes de $\mathbf{E}_1^*$, il existe une section invariante.

La moyennabilité d'une action peut aussi se définir à l'aide d'une généralisation de la notion de moyenne.

Théorème 14.13 (Théorème A de [**AEG94**])**.** *Soit G un groupe localement compact à base dénombrable et Ω un G-espace standard ergodique. Il y a alors équivalence entre*

(i) l'action $G \curvearrowright \Omega$ est moyennable et

(ii) il existe une espérance conditionnelle G-invariante de $L^\infty(\Omega \times G)$ sur $L^\infty(\Omega)$.

Au vu des définitions de groupe moyennable et d'action moyennable, un groupe G est moyennable si et seulement si 'action triviale de G sur l'espace de probabilité réduit à un point est moyennable.

Proposition 14.14 (Théorème 2.1 de [**Zim78**])**.** *Soit G un groupe moyennable et Ω un G-espace ergodique. L'action $G \curvearrowright \Omega$ est moyennable.*

Dans certains cas, la moyennabilité de l'action implique que le groupe est moyennable. Par exemple, si l'action $G \curvearrowright \Omega$ préserve une mesure de probabilité et que cette action est moyennable alors G est moyennable (c'est la proposition 4.3.3 de[**Zim84**]). Cependant, il y a bien d'autres actions moyennables que celles des groupes moyennables. Nous verrons dans la section 15.2 un exemple important concernant les bords de Poisson. Voici un exemple général à l'opposé des groupes moyennables.

Lemme 14.15. *Soit G un groupe localement compact. L'action par multiplication de G sur lui-même est moyennable. Plus généralement, si Ω est un espace mesuré standard alors l'action $G \curvearrowright G \times \Omega$ par multiplication sur le premier facteur est moyennable.*

Démonstration. Soit $\mathbf{A}$ un sous-champ compact convexe G-invariant dans un champ dual E_1^* munit du cocycle $\alpha^\sharp$ provenant d'un cocyle α sur un champ de Banach au dessus de G. Par l'invariance et le théorème de Fubini, il existe $h \in G$ tel que pour presque tout g, $\alpha^\sharp(g,h)A_h = A_g h$. Choisissons $x \in A_h$ et posons $s(g) = \alpha^\sharp(gh^{-1},h)x$. C'est une section mesurable et la relation de cocycle montre qu'elle est invariante. □

Un autre exemple important concerne les groupes hyperboliques.

Théorème 14.16 (Théorème 5.1 de [**Ada94**])**.** *Soit Γ un groupe dénombrable hyperbolique et soit $\partial\Gamma$ le bord à l'infini du graphe de Cayley associé à un certain système de générateurs. Soit μ une mesure borélienne finie sur $\partial\Gamma$ quasi-invariante sous l'action de Γ. Alors l'action de Γ sur $(\partial\Gamma, \mu)$ est moyennable.*

Théorème 14.17 (Théorème 1.9 de [**Zim78**])**.** *Soit G un groupe localement compact à base dénombrable et H un sous-groupe fermé. L'action de G sur G/H est moyennable si et seulement si H est moyennable.*

Ce dernier théorème montre de nouveau que l'action par multiplication à gauche de G sur lui-même est toujours moyennable mais donne aussi des exemples plus intéressants. Si G est un groupe algébrique semi-simple sur un corps local et P un parabolique minimal alors P est un sous-groupe fermé et l'action de G sur G/P (muni de l'unique classe de mesure borélienne régulière G-invariante, voir par exemple [**BdlHV08**, Theorem B.1.4]) est moyennable.

15. Bords forts

15.1. Double ergodicité. Dans [**BM02**] et [**Mon01**], M. Burger et N. Monod introduisent un renforcement de la notion d'ergodicité. Soit G un groupe topologique et E un espace de Banach. On dit que (E, π) est un *G-module de Banach* si π est une

représentation isométrique linéaire de G sur E. Le G-module de Banach (E, π) est dit *continu* si l'application

$$\begin{array}{ccc} G \times E & \to & E \\ (g, v) & \mapsto & \pi(g)v \end{array}$$

est continue (où E est munie de la topologie induite par la norme).

Si (E, π) est un G-module de Banach, le G-module de Banach *contragrédient* $(E^\sharp, \pi^\sharp)$ associé est constitué de $E^\sharp = E^*$, le dual topologique de E et de la représentation linéaire isométrique $\pi^\sharp(g) = \pi(g^{-1})^*$ où $\pi(g)^*$ est l'opérateur adjoint de $\pi(g)$.

Définition 15.1. Un *G-module de coefficients* (E, π) est un G-module de Banach contragrédient associé à un G-module de Banach $(E^\flat, \pi^\flat)$ continu.

Un prédual n'étant pas unique, le choix de $E^\flat$ fait donc parti des données dans la définition ci-dessus. Ce qui permet donc de parler de *la* topologie faible-$*$ sur E sans ambiguïté (voir la remarque 1.2.2 de [**Mon01**] pour plus de détails).

Un G-module de coefficients (E, π) est dit *séparable* si les espaces de Banach E et $E^\flat$ sont séparables (il suffit que E le soit). Si G est localement compact, la proposition 3.3.2 de [**Mon01**] montre qu'un G-module séparable est automatiquement continu.

Définition 15.2. Soit G un groupe localement compact et (B, ν) un G-espace. L'action $G \curvearrowright B$ est dite *ergodique à coefficients séparables* si pour tout G-module de coefficients séparable (E, π), toute fonction $f \colon B \to E$ faiblement mesurable et G-équivariante est essentiellement constante.

Cette nouvelle notion d'ergodicité implique l'ergodicité usuelle. En effet, en utilisant la définition donnée avec un G-module munie de l'action triviale, on retrouve l'ergodicité usuelle. De plus, la remarque 11.4.3 de [**Mon01**] montre cette notion est strictement plus forte (l'ergodicité à coefficients unitaires implique le mélange faible pour une action de $\mathbb{Z}$ sur un espace avec une mesure finie invariante).

Si (B, ν) est un G-espace, on dit que l'action est doublement ergodique à coefficients séparables si l'action diagonale sur l'espace produit $B \times B$ l'est.

Définition 15.3. Soit G un groupe localement compact et (B, ν) un G-espace. On dit que (B, ν) est un *bord fort* pour G si l'action $G \curvearrowright B$ est moyennable et doublement ergodique à coefficients séparables.

L'adjectif *fort* est là pour marquer la différence avec les notions de *bord* et *bord faible* introduites dans [**BM96**]. La définition d'un bord pour un groupe G est obtenue en remplaçant la double ergodicité à coefficients par la double ergodicité usuelle. La différence entre bord et bord faible tient à deux notions légèrement différentes de moyennabilité.

La proposition suivante montre la force de l'hypothèse de double ergodicité à coefficients séparables.

Proposition 15.4 (Proposition 2.4 de [MS04]). *Soit G un groupe localement compact à base dénombrable et (Ω, μ) un G-espace ergodique tel que μ est une mesure de probabilité invariante. Si (B, ν) est un bord fort pour G alors l'action diagonale de G sur $(B \times B \times \Omega, \nu \times \nu \times \mu)$ est ergodique.*

Remarque 15.5. Bien que la notion d'ergodicité soit bien définie pour une action $G \curvearrowright (\Omega, \mu)$ où μ est une mesure dont la classe est préservée sans que μ soit préservée, la proposition ci-dessus est fausse si μ n'est pas finie et invariante.

Par exemple, si G est un groupe hyperbolique et X un graphe de Cayley associé à un système de générateurs finis, il existe une mesure (infinie) sur ∂X telle que $G \curvearrowright \partial X \times \partial X$ soit ergodique. De plus, il existe une application, ϕ, appelée *barycentre* (voir par exemple la proposition 2.1 de [BM96]) G-équivariante de $\partial X \times \partial X \times \partial X$ vers X. Si $G \curvearrowright \partial X \times \partial X \times \partial X$ était ergodique alors ϕ serait essentiellement constante et cette valeur essentielle serait un point fixe pour G, ce qui est impossible.

On peut se demander s'il existe des espaces vérifiant les conditions de la définition 15.3 puisque les conditions de moyennabilité et d'ergodicité semblent antagonistes. En effet, la moyennabilité demande à l'espace d'être plutôt « gros » (relativement à l'action du groupe) alors que l'ergodicité lui demande plutôt d'être « petit ». Les frontières de Poisson de la section suivante fourniront une grande classe d'exemples.

Voici deux propriétés de stabilité des bords forts qui nous seront utiles par la suite.

Proposition 15.6. *Soit G un groupe localement compact et $\Gamma \leq G$ un réseau. Si (B, ν) est un bord fort pour G alors c'est aussi un bord fort pour l'action restreinte à Γ.*

Démonstration. La double ergodicité résulte de la proposition 11.1.10 de [Mon01] et la moyennabilité du lemme 4.3.5 de [Zim84]. □

Proposition 15.7. *Soit $G_1, \ldots, G_n$ des groupes localement compacts à base dénombrable et $(B_1, \nu_1), \ldots, (B_n, \nu_n)$ des bords forts pour les G_i où les mesures ν_i sont σ-finies. Alors $(B_1 \times \cdots \times B_n, \nu_1 \times \cdots \times \nu_n)$ est un bord fort pour $G_1 \times \cdots \times G_n$ relativement à l'action diagonale.*

Démonstration. La double ergodicité résulte du lemme 11.1.8 de [Mon01] qui traite le cas $n = 2$. Pour la moyennabilité, on montre le résultat pour $n = 2$ et un raisonnement par récurrence montrera le cas général. On utilise la caractérisation du théorème 14.13. Soit E_i une espérance conditionnelle G_i-équivariante de $L^\infty(B_i \times G_i)$ sur $L^\infty(B_i)$ où $i = 1, 2$. Si X et Y sont deux espaces mesurés standards, on utilise l'identification

$$\begin{array}{ccc} L^\infty(X \times Y) & \to & L^\infty(X, L^\infty(Y)) \\ f & \mapsto & (x \mapsto f(x, \cdot)). \end{array}$$

On alors

$$\begin{array}{ccc} L^\infty(B_1 \times B_2 \times G_1 \times G_2) & \simeq & L^\infty(B_1 \times G_1, L^\infty(B_2 \times G_2)) \\ & \downarrow E_2 & \\ L^\infty(B_1 \times G_1, L^\infty(B_2)) & \simeq & L^\infty(B_2, L^\infty(B_1 \times G_1)) \\ & \downarrow E_1 & \\ L^\infty(B_2, L^\infty(B_1)) & \simeq & L^\infty(B_1 \times B_2). \end{array}$$

La composition de E_1 avec E_2 donne une espérance conditionnelle $G_1 \times G_2$-équivariante. □

On note le lemme classique suivant qui utilise seulement la double ergodicité « standard ».

Lemme 15.8. *Soit (X, d) un espace métrique séparable sur lequel agit, par isométries, un groupe localement compact G. Soit Ω un G-espace tel que l'action diagonale $G \curvearrowright \Omega \times \Omega$ est ergodique pour la mesure produit. Toute application $\phi\colon \Omega \to X$ mesurable et G-équivariante est essentiellement constante.*

Démonstration. La double ergodicité montre qu'il existe $r \geq 0$ tel que pour presque tout (ω, ω'), $d(\phi(\omega), \phi(\omega')) = r$. Si $r > 0$, par séparabilité, il existe $x \in X$ tel que $B(x, r/2)$ est de mesure strictement positive pour la mesure image par ϕ. Ainsi on trouve une partie de mesure strictement positive $P \subset \Omega \times \Omega$ telle que pour tout $(\omega, \omega') \in P$, $d(\phi(\omega), \phi(\omega')) < r/2 + r/2$. Ce qui donne une contradiction et donc $r = 0$. Ceci signifie que ϕ est essentiellement constante. □

15.2. Frontières de Poisson. On rappelle dans cette section la construction de la frontière de Poisson associée à une marche aléatoire sur un groupe localement compact.

Soit G un groupe localement compact et μ une mesure de probabilité borélienne sur G. La mesure μ est dite *non-dégénérée* si son support, $\mathrm{Supp}(\mu)$, engendre G en tant que semi-groupe, c'est à dire si presque tout élément (pour la mesure de Haar) de G s'écrit comme un produit fini d'élément de $\mathrm{Supp}(\mu)$ sans puissance négative. La mesure μ est dite symétrique si l'application $g \mapsto g^{-1}$ préserve μ et μ est dite *étalée* s'il existe un entier n tel que la n^{ieme} puissance de convolution, μ^{*n}, soit absolument continue par rapport à la mesure de Haar.

On appelle *espace des incréments*, G^∞, l'espace produit $\prod_{\mathbb{N}^*} G$ muni de la mesure produit $\mu^{\otimes\infty}$. Cet espace est isomorphe à *l'espace des trajectoires* $\mathbf{G}$, qui est aussi un produit infini de copies de G mais muni de la mesure image sous l'application

$$\begin{array}{ccc} G^\infty & \to & \mathbf{G} \\ (h_n)_{n\geq 1} & \mapsto & (g_n)_{n\geq 0} \end{array}$$

où g_n est défini par

$$\left\{ \begin{array}{ccc} g_0 & = & e \\ g_{n+1} & = & g_n h_n. \end{array} \right.$$

Notons $\mathbf{P}$ cette mesure image qui correspond à la marche aléatoire partant de e et de probabilité de transition μ. Dans ce cas, g_n est la position au temps n de la marche aléatoire. L'espace $\mathbf{G}$ (considéré uniquement avec la structure borélienne produit sans mesure) est naturellement munie d'une action borélienne de G pour l'action diagonale à gauche. Pour autre distribution (mesure borélienne σ-finie), θ, que la masse de Dirac en l'identité, on peut définir la marche aléatoire de distribution initiale θ, en munissant $\mathbf{G}$ de la mesure

$$\mathbf{P}_\theta = \theta * \mathbf{P} = \int g_* \mathbf{P} d\theta(g).$$

En particulier, si on choisit pour θ la mesure de Haar à droite, m, sur G alors $(\mathbf{G}, \mathbf{P})$ est muni de l'action diagonale à gauche de G, qui en général ne préserve pas la mesure et de l'opérateur de décalage $D\colon \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ qui associe à $(g_n)_{n\geq 0}$ la suite $(g_{n+1})_{n\geq 0}$. Cet opérateur préserve la mesure $\mathbf{P}_m$. En effet, D se lit dans l'espace produit $(G \times G^\infty, m \otimes \mu^{\otimes\infty})$ par

$$\begin{array}{rcl} \tilde{D}\colon G \times G^\infty & \to & G \times G^\infty \\ (g, (h_n)) & \mapsto & (gh_1, (h_{n+1})). \end{array}$$

La mesure image $\tilde{D}_*(m \otimes \mu^{\otimes\infty})$ est alors $(m * \mu) \otimes \mu^{\otimes\infty}$. Si f est une fonction continue à support compact, le calcul suivant

$$\int f(g)\ d(m * \mu)(g) = \int f(gh)\ dm(g) d\mu(h) = \int f(g)\ dm(g) d\mu(h) = \int f(g)\ dm(g)$$

montre que $m * \mu = m$. Ainsi $\tilde{D}_*(m \otimes \mu^{\otimes\infty}) = m \otimes \mu^{\otimes\infty}$ ce qui montre que D préserve $\mathbf{P}_m$.

Définition 15.9. Soit G un groupe localement compact à base dénombrable et μ une mesure borélienne de probabilité sur G. On appelle *frontière de Poisson*, l'espace des composantes ergodiques de l'action du semi-groupe engendré par D sur $\mathbf{G}$

Pour la décomposition en composantes ergodiques, on peut se référer à la section 4 de l'article original [**Var63**].

Comme l'action de D et de G sur $\mathbf{G}$ commutent, le bord de Poisson B est muni d'une mesure ν qui en fait un G-espace. Soulignons que ν n'est pas G-invariante mais que seule sa classe l'est. Si la construction de B est assez abstraite, on peut manipuler cet objet plus simplement en considérant les fonctions mesurables essentiellement bornées sur B. En effet, on a l'identification G-équivariante

$$L^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{P})^D \simeq L^\infty(B, \nu)$$

où $L^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{P})^D$ désigne les fonctions mesurables essentiellement bornées invariantes sous l'action du décalage D. Les propriétés d'ergodicité et de moyennabilité se lisant sur les fonctions essentiellement bornées, on aura déjà une bonne compréhension de l'objet en se limitant à cette identification.

Un bon exemple est alors donné par le théorème suivant dont on redonne une preuve utilisant la caractérisation 14.13

Théorème 15.10 (Théorème 5.2 et 5.3 de [**Zim78**])**.** *Soit G un groupe localement compact à base dénombrable et (B, ν) la frontière de Poisson associé à une mesure μ étalée.*
Alors l'action $G \curvearrowright B$ est moyennable.

Démonstration. On utilise les identifications suivantes

$$L^\infty(G \times B) \simeq L^\infty(G, L^\infty(B)) \simeq L^\infty(G, L^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{P})^D) \simeq L^\infty(G \times \mathbf{G})^D.$$

Le lemme 14.15 et l'identification $(\mathbf{G}, \mathbf{P}) \simeq (G \times G^\infty, m \times \mu^{\otimes\infty})$, montrent que l'action $G \curvearrowright \mathbf{G}$ est moyennable donc il existe une espérance conditionnelle $E\colon L^\infty(G \times \mathbf{G}) \to L^\infty(\mathbf{G})$. Remarquons que comme les actions de D et $\mathbf{G}$ commutent, si $f \in L^\infty(G \times \mathbf{G})$ est D-invariante alors $E(f)$ l'est aussi. Ainsi, on obtient une espérance conditionnelle de $L^\infty(G \times \mathbf{G})^D$ vers $L^\infty(\mathbf{G})^D$ ce qui prouve le résultat. $\square$

FIGURE 1. Limite circulaire III, M.C. Escher.

Initialement, M. Burger et N. Monod ont montré l'existence d'un bord fort pour les groupes localement compacts et compactement engendrés (voir le théorème 11.1.3 de [**Mon01**] pour un énoncé précis), V. Kaimanovich a généralisé cette existence.

Théorème 15.11 (Théorème 3 de [**Kai03**])**.** *Soit G un groupe localement compact à base dénombrable. La frontière de Poisson associée à une mesure de probabilité borélienne, étalée et non-dégénérée est un bord fort pour G.*

Théorème 15.12 (Théorème 4 de [**Kai03**])**.** *Tout groupe localement compact σ-compact possède un bord fort.*

Pour un groupe moyennable G, tout espace de probabilité possédant une action faiblement mélangeante préservant la mesure est un bord fort. En particulier l'espace de probabilité réduit à un point est un bord fort pour tout groupe moyennable. Il existe cependant des exemples de groupes moyennables avec des frontières de Poisson non triviales comme c'est le cas pour le produit en couronne $\mathbb{Z}^3 \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui possède un bord de Poisson non trivial pour toute marche aléatoire symétrique de premier moment fini (voir l'exemple 6.2 de [**KV83**]).

15.3. Exemples. On va s'attacher à décrire dans la suite des exemples concrets de bords forts pour certains groupes localement compacts.

Exemple 15.13 (Groupes semi-simples)**.** Soit G un groupe de Lie semi-simple de type non compact à centre fini. Soit P un sous-groupe parabolique minimal (par exemple si $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, il est classique de choisir pour P, le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures). Le quotient G/P s'appelle le *bord de Furstenberg* de G (voir [**Fur73**]). Cet espace quotient s'identifie avec l'ensemble des chambres de Weyl de l'immeuble sphérique à l'infini de l'espace symétrique de G. En tant que stabilisateur du centre circonscrit d'une chambre de Weyl, P est un sous-groupe fermé moyennable de G. Comme nous l'avons déjà remarquer, en munissant G/P de l'unique classe de mesure borélienne régulière G-invariante (voir par exemple l'appendice B de [**BdlHV08**]), l'action $G \curvearrowright G/P$ est moyennable car P l'est (théorème 14.17).

Pour la double ergodicité, la décomposition de Bruhat sera bien utile. Si W désigne le groupe de Weyl de G alors G se décompose en double P-classes sous la forme

$$G = \bigsqcup_{w \in W} PwP$$

où la réunion est disjointe. L'application

$$\begin{array}{rccc} F\colon & G/P \times G/P & \to & P\backslash G/P \\ & (g_1P, g_2P) & \mapsto & Pg_1^{-1}g_2P \end{array}$$

est G-invariante pour l'action diagonale de G sur $G/P \times G/P$. De plus, $F(g_1P, g_2P) = F(g_1'P, g_2'P)$ si et seulement si (g_1P, g_2P) et $(g_1'P, g_2'P)$ sont dans la même G-orbite. Ainsi $G\backslash(G/P \times G/P)$ s'identifie avec $P\backslash G/P \simeq W$. Comme W est fini, l'action $G \curvearrowright G/P \times G/P$ n'a qu'un nombre fini d'orbites et une seule est de dimension maximale donc la mesure est supportée par cette unique orbite. Il faut ensuite utiliser le phénomène de Mautner pour obtenir la double ergodicité à coefficients.

Exemple 15.14 (Groupes hyperboliques)**.** Un groupe dénombrable est *hyperbolique* s'il existe un système de générateurs fini tel que le graphe de Cayley associé soit un espace Gromov-hyperbolique (voir la section 20). Le graphe de Cayley possède un bord hyperbolique qui ne dépend pas du système de générateurs et que l'on note ∂G. Un groupe hyperbolique est *élémentaire* s'il est fini ou virtuellement cyclique.

Théorème 15.15 (Théorème 8 de [**Kai94**])**.** *Soit G un groupe hyperbolique non-élémentaire et μ une mesure de probabilité non-dégénérée sur G d'entropie et de premier moment fini. La frontière de Poisson associée à la marche aléatoire de probabilité de transition μ coïncide avec ∂G muni de la mesure harmonique associée à μ*

Pour une définition exacte des termes entropie, moment et mesure harmonique, on se référera à l'article original.

16. Champs d'espaces de Hadamard

16.1. Définitions. La notion de champ d'espaces de Banach se généralise aux espaces métriques généraux. La notion de champ mesurable séparable d'espaces métriques

a été introduit dans [**DAP76**]. On pourra trouver une étude récente plus détaillée dans les thèses de M. Anderegg et P. Henry : [**And10**] et [**Hen10**]. Ici de tels champs arrivent comme des outils de travail et non comme des objets d'étude en eux-mêmes. C'est la situation du théorème 17.4 qui nous incite à les étudier. La situation est donnée par une action de groupe G sur un espace de Hadamard en présence d'un G-espace. En l'absence de G-espace, la minimalité de l'action est souvent bien agréable pour raisonner. En présence d'un G-espace, ce sera la donnée d'un *sous-champ minimal* qui jouera un rôle analogue important.

Définition 16.1. Soit Ω un espace borélien standard et μ une mesure borélienne sur Ω. Un champ d'espaces métriques $\mathbf{X}$ est la donnée d'une famille d'espaces métriques (non-vides) $\{(X_\omega, d_\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ et d'un sous-ensemble dénombrable $\mathcal{F} \subset \Pi_{\omega\in\Omega} X_\omega$ tels que

(i) pour tous $x, y \in \mathcal{F}$, l'application $\omega \mapsto d_\omega(x_\omega, y_\omega)$ est mesurable,

(ii) pour presque tout ω, $\{x_\omega |\ x \in \mathcal{F}\}$ est dense dans X_ω.

Dans ce cas Ω est appelée la *base* du champ, $\mathcal{F}$ est une *famille fondamentale* et une *section* est la classe à égalité presque partout d'un élément x de $\Pi_{\omega\in\Omega} X_\omega$ tel que $\mathcal{F} \cup \{x\}$ vérifie encore la condition (i) pour tout $y \in \mathcal{F}$. On appelle *structure mesurable*, de $\mathbf{X}$ l'ensemble $\mathcal{M}$ des sections de $\mathbf{X}$. Si x et y sont deux sections alors $\omega \mapsto d_\omega(x_\omega, y_\omega)$ est mesurable car

$$d_\omega(x_\omega, y_\omega) = \sup_{z\in\mathcal{F}} |d_\omega(x_\omega, z_\omega) - d_\omega(y_\omega, z_\omega)|.$$

Lemme 16.2. *Soit $\mathbf{X}$ un champ d'espaces métriques, $x \in \Pi_\omega X_\omega$ et (x^n) une suite de sections telle que $x^n_\omega \longrightarrow x_\omega$ presque partout. Alors x est une section.*

Démonstration. Soit y une section de $\mathbf{X}$ alors $d_\omega(x_\omega, y_\omega) = \lim_n d_\omega(x^n_\omega, y_\omega)$ pour presque tout ω et comme une limite simple de fonctions mesurables est mesurable, on a le résultat. □

Remarque 16.3. Dans les références citées précédemment, de tels champs sont pourvus de l'adjectif *mesurable*. Puisqu'il n'y aura pas d'autre type de champ, l'adjectif mesurable est implicite dans la définition donnée ci-dessus.

Exemple 16.4. Exemples de champ d'espaces métriques.

(1) Soit X un espace métrique séparable et (x^n) une famille dénombrable dense de X. On appelle *champ constant* sur X, le champ donné par $X_\omega = X$ pour tout ω et la famille fondamentale $\mathcal{F}$ constituée des applications de Ω dans X constantes égales à un des x_n.

(2) Au vu des définitions, un champ d'espaces de Banach séparable est un cas particulier de champ d'espaces métriques.

(3) Soit $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ deux champs d'espaces métriques de base commune Ω et de famille fondamentale respective $\mathcal{F}_\mathbf{X}$ et $\mathcal{F}_\mathbf{Y}$. On construit alors le champ *produit* $\mathbf{Z}$ défini par $Z_\omega = X_\omega \times Y_\omega$ et $\mathcal{F}_\mathbf{Z} = \{(x, y);\ x \in \mathcal{F}_\mathbf{X},\ y \in \mathcal{F}_\mathbf{Y}\}$.

Un champ d'espaces métriques $\mathbf{X}$ de base Ω sera dit CAT(0) (respectivement complet, compact, euclidien) si pour tout ω, X_ω est un espace CAT(0) (respectivement complet,

compact, euclidien). De plus, un champ d'espaces métriques CAT(0) et complet sera simplement appelé *un champ d'espaces de Hadamard.* De même, un champ d'espaces de Hadamard sera dit de dimension géométrique finie si X_ω est de dimension géométrique finie pour tout ω.

Définition 16.5. Soit G un groupe localement compact à base dénombrable. Une *action* de G sur $\mathbf{X}$ est la donnée d'une famille d'applications $\{\alpha(g,\omega)\}_{(g,\omega)}$ appelé *cocycle* telle que

(i) pour tout $g \in G$ et presque tout ω, $\alpha(g,\omega) \in$Homéo$(X_\omega, X_{g\omega})$,

(ii) pour tout $g, g' \in G$ et presque tout ω, $\alpha(gg',\omega) = \alpha(g,\omega)\alpha(g',\omega)$,

(iii) pour tout $g \in G$ et toutes sections x, x', la fonction $(g,\omega) \mapsto d_\omega(x_\omega, \alpha(g, g^{-1}\omega)x'_{g^{-1}\omega})$ est mesurable.

Une telle action définie une action (au sens usuel) sur les sections par $(gx)_\omega = \alpha(g.g^{-1}\omega)x_{g^{-1}\omega}$. Si de plus, pour tout g et presque tout ω, $\alpha(g,\omega) \in \mathrm{Isom}(X_\omega, X_{g\omega})$, on dit que G *agit par isométries.*

Définition 16.6. Soit $\mathbf{X}$ un champ d'espaces métriques de base Ω et de famille fondamentale $\mathcal{F}$. Un sous-champ $\mathbf{Y}$ de $\mathbf{X}$ est la donnée d'une famille $\{Y_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ et d'un sous-ensemble dénombrable $\mathcal{F}' \subseteq \Pi_{\omega\in\Omega} Y_\omega$ tels que

(i) Pour tout ω, $\emptyset \neq Y_\omega \subseteq X_\omega$,

(ii) pour tout $y \in \mathcal{F}'$, y est une section de X,

(iii) Pour presque tout ω, $\{y_\omega;\ y \in \mathcal{F}\}$ est dense dans Y_ω.

Un sous-champ d'un champ d'espaces métriques est donc aussi un champ d'espaces métriques. On munit l'ensemble des sous-champs d'un champ d'espaces métriques $\mathbf{X}$ d'une relation d'ordre définie par $\mathbf{Y} \leq \mathbf{Z}$ si $Y_\omega \subseteq Z_\omega$ pour presque tout ω. Soit $\mathbf{X}$ un champ d'espaces métriques muni d'une action de G donnée par un cocycle α. On peut définir une action $(g, (\mathbf{Y}, \mathcal{M})) \mapsto (g\mathbf{Y}, g\mathcal{M})$ sur les sous-champ par $(gY)_\omega = \alpha(g, g^{-1}\omega)Y_{g^{-1}\omega}$. Si $\mathbf{Y}$ est un sous-champ, on dit que $\mathbf{Y}$ est invariant si c'est un point fixe (avec identification presque partout) pour l'action que l'on vient de définir. De plus, un tel sous-champ est *minimal* s'il est minimal parmi les sous-champs invariants.

Si $\mathbf{X}$ est un champ d'espaces de Hadamard et $\mathbf{Y}$ est un sous-champ alors $\mathbf{Y}$ est *convexe fermé* si pour tout ω, Y_ω est une partie fermée et convexe de X_ω. Un sous-champ d'espaces de Hadamard est donc un champ d'espaces de Hadamard en particulier.

Remarque 16.7. Soit $\mathbf{X}$ un champ d'espaces métriques,$\mathbf{Y}$ un sous champ de $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Z}$ un sous-champ de $\mathbf{Y}$ alors $\mathbf{Z}$ est aussi un sous-champ de $\mathbf{X}$. En effet, si $\mathcal{F}'$ est une famille fondamentale de $\mathbf{Y}$, x une section de $\mathbf{X}$ et z une section de $\mathbf{Z}$ alors

$$d_\omega(x_\omega, z_\omega) = \inf_{y\in\mathcal{F}'} d_\omega(x_\omega, y_\omega) + d_\omega(y_\omega, z_\omega).$$

On peut exprimer la relation d'ordre sur les sous-champs convexes fermés à l'aide d'inégalités de distance pour les éléments d'une famille fondamentale.

Lemme 16.8. *Soit* $\mathbf{X}$ *un champ d'espaces* CAT(0) *muni d'une famille fondamentale* $\mathcal{F}$ *et* $\mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ *deux sous-champs convexes fermés de* $\mathbf{X}$. *Alors* $\mathbf{Y} \leq \mathbf{Z}$ *si et seulement si pour*

tout $x \in \mathcal{F}$ et presque tout ω, $d_\omega(x_\omega, Y_\omega) \geq d_\omega(x_\omega, Z_\omega)$ et $\mathbf{Y} < \mathbf{Z}$ si et seulement si $\mathbf{Y} \leq \mathbf{Z}$ et il existe $x \in \mathcal{F}$ tel que $\mu(\{\omega \mid d_\omega(x_\omega, Y_\omega) > d_\omega(x_\omega, Z_\omega)\} > 0$.

Démonstration. Pour $x \in \mathcal{F}$, posons $\Omega_x = \{\omega \mid d_\omega(x_\omega, Y_\omega) > d_\omega(x_\omega, Z_\omega)\}$ et $\overline{\Omega}_x = \{\omega \mid d_\omega(x_\omega, Y_\omega) \geq d_\omega(x_\omega, Z_\omega)\}$. Alors Ω_x et $\overline{\Omega}_x$ sont deux ensembles mesurables de Ω. Si $\mathbf{Y} \leq \mathbf{Z}$ alors pour tout $x \in \mathcal{F}$, $\overline{\Omega}_x$ est de mesure pleine. Réciproquement, si pour tout x, $\overline{\Omega}_x$ est de mesure pleine alors $\overline{\Omega} = \cap_x \overline{\Omega}_x$ est aussi de mesure pleine et par le lemme 1.16, pour presque tout $\omega \in \overline{\Omega}$, $Y_\omega \subseteq Z_\omega$. De plus, si $\mu(\Omega_x) > 0$ alors $\mathbf{Z} \not\leq \mathbf{Y}$. Ceci montre la deuxième assertion du lemme. □

Les quelques lemmes qui suivent ont pour but de montrer que les constructions classiques dans le cadre des espaces de Hadamard peuvent se faire mesurablement lorsque l'on étend ces définitions aux champs d'espaces de Hadamard.

Lemme 16.9. *Soit $\mathbf{X}$ un champ d'espaces de Hadamard, x, y deux sections et r une fonction positive mesurable alors*

$$\omega \mapsto d_\omega(y_\omega, B(x_\omega, r(\omega)))$$

est mesurable.

Démonstration. La restriction de cette fonction à $\{\omega \mid r(\omega) = 0\}$, qui est un ensemble mesurable, est égale à la fonction $\omega \mapsto d_\omega(x_\omega, y_\omega)$, qui est mesurable, donc on peut supposer $r > 0$. Soit $\mathcal{F}$ une famille fondamentale pour $\mathbf{X}$. Par le point (ii) de la définition 16.1, on a pour presque tout ω,

$$d_\omega(y_\omega, B(x_\omega, r(\omega))) = \inf\{d_\omega(y_\omega, z_\omega) \mid z \in \mathcal{F},\ z_\omega \in B(x_\omega, r(\omega))\}.$$

Pour $z \in \mathcal{F}$, définissons, $\overline{d}_\omega(y_\omega, z_\omega) = +\infty$ si $z_\omega \notin B(x_\omega, r(\omega))$ et $\overline{d}_\omega(y_\omega, z_\omega) = d_\omega(y_\omega, z_\omega)$ sinon. Alors $\omega \mapsto \overline{d}_\omega(y_\omega, z_\omega)$ est une fonction mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ et

$$d_\omega(y_\omega, B(x_\omega, r(\omega))) = \inf_{z \in \mathcal{F}} \overline{d}_\omega(y_\omega, z_\omega).$$

□

Lemme 16.10. *Soit $\mathbf{X}$ un champ d'espaces de Hadamard et $\mathbf{Y}$ un sous-champ convexe fermé. Alors pour toute section x de $\mathbf{X}$, $(\pi_{Y_\omega}(x_\omega))$ est une section de $\mathbf{X}$.*

Démonstration. Commençons par montrer que $\omega \mapsto d_\omega(x_\omega, Y_\omega)$ est mesurable. Soit $\mathcal{F}'$ une famille fondamentale pour $\mathbf{Y}$, la formule

$$d_\omega(x_\omega, \pi_{Y_\omega}(x_\omega)) = d_\omega(x_\omega, Y_\omega) = \inf_{y \in \mathcal{F}'} d_\omega(y_\omega, x_\omega)$$

conclut. Soit, maintenant, z une autre section de $\mathbf{X}$, on a

$$d_\omega(\pi_{Y_\omega}(x_\omega), z_\omega) = \lim_{n \to \infty} d_\omega\left(z_\omega, Y_\omega \cap B\left(x_\omega, d_\omega(x_\omega, Y_\omega) + 1/n\right)\right)$$

qui permet de conclure par le lemme 16.9. □

Lemme 16.11. *Soit $\mathbf{X}$ un champ d'espaces de Hadamard et $\{x^i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable de sections. Alors la fonction $\omega \mapsto \mathrm{rayon}(\{x^i_\omega\})$ est mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. De plus, si cette fonction est essentiellement finie alors la collection des centres est une section.*

Démonstration. La première partie du lemme tient au fait que

$$\text{rayon}(\{x^i_\omega\}_{i\in\mathbb{N}}) = \inf_{y\in\mathcal{F}} \sup_{i\in\mathbb{N}} d_\omega(x^i_\omega, y_\omega)$$

où $\mathcal{F}$ est une famille fondamentale de $\mathbf{X}$. Notons $r(\omega) = \text{rayon}(\{x^i_\omega\})$ et numérotons $\{y^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ les éléments de $\mathcal{F}$. Définissons

$$j(n,\omega) = \min\{j \in \mathbb{N} |\ \sup_{i\in\mathbb{N}} d_\omega(x^i_\omega, y^j_\omega) \leq r(\omega) + 1/n\}.$$

Alors $(y^{j(n,\omega)}_\omega)$ est une section et pour presque tout ω,

$$\lim_{n\to+\infty} y^{j(n,\omega)}_\omega = \text{centre}\left(\{x^i_\omega\}\right).$$

□

Lemme 16.12. *Soit* $\mathbf{X}$ *un champ d'espaces de Hadamard,* x, y *deux sections de* $\mathbf{X}$ *et* d *une fonction mesurable positive telle que pour presque tout* ω, $d(\omega) \leq d_\omega(x_\omega, y_\omega)$. *Si* z_ω *est le point sur le segment* $[x_\omega, y_\omega]$ *à distance* $d(\omega)$ *de* x_ω *alors* (z_ω) *est une section de* $\mathbf{X}$.

Démonstration. Comme toute fonction d, comme dans l'énoncé, est limite simple (presque partout) de fonctions de la forme $\omega \mapsto \lambda(\omega)d_\omega(x_\omega, y_\omega)$ où λ est une fonction simple à valeurs dyadiques, il suffit de montrer le résultat pour z_ω milieu de $[x_\omega, y_\omega]$. Dans un espace CAT(0), X, fixons deux points x et y. Alors l'ensemble

$$Z = \left\{ z \in X |\ \max(d(x,z), d(y,z)) \leq \frac{d(x,y)+\varepsilon}{2} \right\}$$

contient le milieu de $[x, y]$ et est de diamètre au plus ε. Il suffit alors de définir z_ω comme étant la limite, pour $n \to +\infty$, des projetés de x_ω sur l'intersection

$$\overline{B}\left(x_\omega, \frac{d(x_\omega, y_\omega)+1/n}{2}\right) \cap \overline{B}\left(y_\omega, \frac{d(x_\omega, y_\omega)+1/n}{2}\right)$$

pour voir que z_ω est le milieu de $[x_\omega, y_\omega]$ et qu'il s'agit bien d'une section. □

Remarque 16.13. Si X est un espace CAT(0), son bord à l'infini est un un objet important qui lui est attaché. On a donc naturellement envie de construire un champ à l'infini associé à un champ de Hadamard $\mathbf{X}$. La construction qui semble être la plus naturelle (parce qu'elle donne une distance invariante sur ∂X sous l'action de $\text{Isom}(X)$ par exemple), serait de considérer chaque bord ∂X_ω avec la métrique angulaire $\angle$. Malheureusement, on ne peut ainsi obtenir un espace séparable même si X_ω l'est. L'exemple de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^2$ le montre. En effet, muni de la distance angulaire, tous les points sont à distance π et le bord a la puissance du continu.

Dans leurs thèses respectives, M. Anderegg et P. Henry contournent cette difficulté en utilisant, pour les espaces propres, une distance sur ∂X qui définit la topologie conique. C'est possible, car dans ce cas, $\mathcal{C}_0(X)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les boules est un espace de Fréchet (e.v.t. métrisable par une distance complète) séparable.

Un moyen de contourner cette difficulté serait, peut-être, de considérer des champs d'espaces polonais (i.e. métrisables par une distance complète et séparables) avec des actions par homéomorphismes uniformément continus. Au lieu de développer une telle théorie générale, on utilisera la notion de section de fonctions de Busemann.

Proposition 16.14. *Soit* $\mathbf{X}$ *un champ d'espaces de Hadamard de dimension télescopique finie,* $(\mathbf{X}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une collection de sous-champs convexes fermés telle que pour tout* ω, $n < m \;\Rightarrow\; X^m_\omega \subseteq X^n_\omega$ *et* $\cap_{n\in\mathbb{N}} X^n_\omega = \emptyset$.

Alors il existe une famille d'applications $\beta_\omega : X_\omega \times X_\omega \to \mathbb{R}$ *telle que pour presque tout* ω, β_ω *est une fonction de Busemann de* X_ω *et pour toutes sections* x, y *de* $\mathbf{X}$, $\omega \mapsto \beta_\omega(x_\omega, y_\omega)$ *est mesurable.*

Démonstration. On définit alors β_ω comme étant la fonction de Busemann associée au centre des directions, ξ_ω, du théorème 6.1. La construction effectuée dans la preuve de ce théorème et les lemmes 16.10, 16.11 et 16.12 montrent que pour presque tout ω, ξ_ω est une limite dans $\overline{X}_\omega$ de z^n_ω où z^n est une section de $\mathbf{X}$. Ainsi, pour presque tout ω

$$\beta_\omega(x_\omega, y_\omega) = \lim_{n\to+\infty} d_\omega(x_\omega, z^n_\omega) - d_\omega(y_\omega, z^n_\omega).$$

□

Une famille de fonctions (β_ω) comme dans la proposition précédente sera simplement appelée *section de fonctions de Busemann.* Si $\alpha : G\times\Omega \to \mathrm{Isom}(\mathbf{X})$ est un cocycle alors G agit sur les sections de fonctions de Busemann par $(g\beta)_\omega = \beta_{g^{-1}\omega} \circ \alpha(g^{-1}, \omega) \times \alpha(g^{-1}, \omega)$.

Exemple 16.15. Si (x^n) est une suite de sections telle que pour presque tout ω, il existe $\xi_\omega \in \partial X_\omega$ avec $x^n_\omega \to \xi_\omega$ alors (β_{ξ_ω}) est une section de fonctions de busemann. En fait, toutes les sections de fonctions de Busemann sont de cette forme.

Proposition 16.16. *Soit* G *un groupe localement compact et* Ω *un* G*-espace ergodique. Soit* $\mathbf{X}$ *un champ d'espaces de Hadamard de dimension télescopique finie et* $\alpha : G \times \Omega \to \mathrm{Isom}(\mathbf{X})$ *un cocycle. Alors ou bien il existe une section de fonctions de Busemann invariante ou bien il existe un sous-champ convexe fermé de* X *invariant et minimal.*

Avant de passer à la preuve en elle-même, nous aurons besoin du lemme technique suivant.

Lemme 16.17. *Soit* A *un ensemble totalement ordonné et* $(\mathbf{X}^\alpha)_{\alpha\in A}$ *une chaîne décroissante de sous-champs convexes fermés invariants. Alors il existe une sous-famille dénombrable* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *cofinale.*

Dire que cette sous-famille dénombrable est cofinale c'est dire que pour tout $\beta \in A$, il existe n tel que pour presque tout ω, $X^{\alpha_n}_\omega \subseteq X^\beta_\omega$.

Démonstration. Soit $\mathcal{F}$ une famille fondamentale du champ $\mathbf{X}$. Pour $x \in \mathcal{F}$, posons $f^\alpha_x(\omega) = d_\omega(x_\omega, X^\alpha_\omega)$. Alors pour tout x et tout α, f^α_x est une fonction mesurable et

$$\alpha \geq \beta \iff \forall x \;\mathring{\forall}\omega\; f^\alpha_x(\omega) \geq f^\beta_x(\omega).$$

Par un résultat classique d'analyse (par exemple si μ est une mesure de probabilité, pour $p, q \in \mathbb{Q}^+$, on choisit $\alpha_{p,q} \in \{\alpha \mid \mu\left((f^\alpha_x)^{-1}([q, +\infty[)\right) \geq 1 - 1/p\}$ si cet ensemble

est non-vide), pour tout x, on peut trouver une suite (α_n) telle que $(f_x^{\alpha_n})_n$ est cofinale parmi les $\{f_x^\alpha\}_\alpha$(pour la relation d'ordre $f \geq g \iff \mathring{\forall}\omega\ f(\omega) \geq g(\omega)$) et puisque $\mathcal{F}$ est dénombrable, on peut supposer que c'est le cas pour tout les éléments de $\mathcal{F}$ simultanément. Grâce au lemme 16.8, la suite (α_n) est cofinale. □

Démonstration de la proposition 16.16. Supposons qu'il n'existe pas de section de fonctions de Busemann invariante. On va montrer que l'ensemble $\mathfrak{X}$ des sous-champs convexes fermés de $\mathbf{X}$ invariants muni de la relation d'ordre définie ci-dessus, est inductif (pour l'ordre renversé de $\geq$). Le lemme de Zorn fournira alors un sous-champ convexe fermé de X invariant et minimal.

Soit alors $\{\mathbf{X}^\alpha\}_{\alpha\in A}$ une chaîne de sous-champs convexes fermés de $\mathbf{X}$. Grâce au lemme 16.17, on choisit $A' \subset A$ dénombrable et cofinale. L'ensemble $\{\omega \in \Omega | \cap_{\alpha\in A'} X_\omega^\alpha = \emptyset\}$ est mesurable car c'est $\{\omega \in \Omega |\ d_\omega(x_\omega, X_\omega^\alpha) \to +\infty\}$ pour une section fixée x de $\mathbf{X}$. De plus, cet ensemble est G-invariant. Par ergodicité, il est de mesure pleine ou nulle. S'il est de mesure pleine, la proposition 16.14 fournit une section de fonctions de Busemann qui est de plus invariante car les $\mathbf{X}^\alpha$ le sont. On peut donc supposer que pour presque tout ω, $\cap_{\alpha\in A'} X_\omega^\alpha \neq \emptyset$. On pose alors $Y_\omega = \cap_{\alpha\in A'} X_\omega^\alpha$, c'est un sous-ensemble convexe fermé pour presque tout ω. Soit $\{x^n\}$ une famille fondamentale pour $\mathbf{X}$. Soit y_ω^n le projeté de x_ω^n sur Y_ω. Pour tout n, $y^n = (y_\omega^n)$ est une section de $\mathbf{X}$ car c'est la limite simple des $\pi_{X^{\alpha_n}}(x)$ (voir le lemme 1.17) et tous les $\pi_{X^{\alpha_n}}(x)$ sont des sections (voir le lemme 16.10). De plus, pour presque tout ω, $\{y_\omega^n\}$ est dense dans Y_ω car la projection sur Y_ω est 1-Lipshitz. Il est clair que $\mathbf{Y}$ est invariant et un minorant de $\{\mathbf{X}^\alpha\}_{\alpha\in A}$. □

16.2. Facteur euclidien de de Rham. Dans toute cette section, on se donne G un groupe localement compact, Ω un G-espace ergodique, $\mathbf{X}$ un champ d'espaces de Hadamard de dimension télescopique finie non réduit à une section et $\alpha : G \times \Omega \to \mathrm{Isom}(\mathbf{X})$ un cocycle tel que $\mathbf{X}$ soit minimal.

Remarques 16.18.
- Grâce à l'inégalité de la proposition 5.7, la fonction $\omega \mapsto \mathrm{DimTel}(X_\omega)$ est une fonction mesurable où DimTel désigne la dimension télescopique. De plus, cette fonction est α-invariante. Par ergodicité, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que pour presque tout ω, $\mathrm{DimTel}(X_\omega) = n$.

- Comme $\mathbf{X}$ est à la fois minimal et non-réduit à un section, pour presque tout ω, X_ω est non borné. En effet si $\mathcal{F}$ est une famille fondamentale de $\mathbf{X}$ alors $\omega \mapsto \mathrm{diam}(X_\omega) = \sup_{x,y\in\mathcal{F}} d_\omega(x_\omega, y_\omega)$ est une fonction mesurable et α-invariante à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Par ergodicité, cette fonction est essentiellement constante et si cette constante est finie, le lemme 16.11 montre que la famille des centres circonscrits des X_ω est une section, nécessairement invariante. Ce qui contredirait l'hypothèse de minimalité.

Proposition 16.19. *Si x est une section de $\mathbf{X}$ alors il existe un sous-champ $\mathbf{E}$ euclidien et un sous-champ $\mathbf{Y}$ tel que x soit aussi une section de $\mathbf{E}$ et de $\mathbf{Y}$, $\mathbf{X} = \mathbf{E} \times \mathbf{Y}$ et $\mathbf{E}$ est maximal pour l'inclusion.*

De plus, si y est une autre section et $\mathbf{E}' \times \mathbf{Y}'$ est une décomposition comme ci-dessus pour y alors pour presque tout ω, $\pi_{E_\omega}|_{E'_\omega}$ et $\pi_{Y_\omega}|_{Y'_\omega}$ sont des isométries. En particulier, si $x = y$, $E_\omega = E'_\omega$ et $Y_\omega = Y'_\omega$ pour presque tout ω.

Le sous-champ E est appelé *facteur euclidien de de Rham*. On dira que le champ $\mathbf{X}$ est *sans facteur euclidien* si le champ $\mathbf{E}$ est réduit à un point pour presque tout ω. À l'opposé, on dira que $\mathbf{X}$ est *euclidien* si $\mathbf{Y}$ est réduit à un point pour presque tout ω. À ω fixé, on retrouve le classique facteur euclidien de de Rham du théorème 1.7. La difficulté ici est technique, il faut réaliser cette décomposition mesurablement.

Pour cela, nous aurons besoin d'un équivalent dans un contexte mesurable de la proposition 7.7 donné par la proposition qui suit.
Fixons x_0 une section de $\mathbf{X}$ et notons $\mathcal{A}$ l'ensemble des familles de fonction $f = (f_\omega)$ telle que pour presque tout $\omega \in \Omega$, f_ω est une fonction affine sur X_ω et il existe x^i une suite de sections de $\mathbf{X}$ telle que pour presque tout ω, et tout $x \in X_\omega$,

$$f_\omega(x) = \lim_{i\to\infty} d_\omega(x, x^i_\omega) - d(x^0_\omega, x^i_\omega).$$

Pour presque tout ω, on note E_ω le facteur euclidien de X_ω donné par le théorème 1.7. A ce stade, on ne sait pas encore que la collection (E_ω) est un champ d'espace de Hadamard.

Proposition 16.20. *S'il existe $f \in \mathcal{A}$ alors pour presque tout ω, il existe $\xi_\omega \in \partial E_\omega$ tel que f_ω est une fonction de Busemann centrée en ξ_ω.*

La proposition 7.7 repose sur le lemme technique suivant.

Lemme 16.21 (Lemme 4.9 de [CL10a])**.** *Soit X un espace non borné de dimension télescopique finie. Alors il existe une suite (D_j) telle que pour tout j, $D_j > j$, une suite de nombres $\delta_j > 0$ tendant vers 0, une suite de points $p_j \in X$ et une suite de parties finies $Q_j \subset X$ avec les propriétés suivantes.*

(i) L'ensemble Q_j est inclus dans la boule de rayon $D_j(1+\delta_j)$ centrée en p_j.

(ii) Pour $s \in X$, il existe $q_j \in Q_j$ tel que $d(s, q_j) - d(s, p_j) \geq D_j - 1$.

La version mesurable pour le champ $\mathbf{X}$ devient la suivante.

Lemme 16.22. *Il existe une suite de nombres $D_j > j$, une suite de sections p^j de $\mathbf{X}$ et un ensemble fini de sections Q_j de $\mathbf{X}$ tels que*

(i) Pour tout $q \in Q_j$ et presque tout ω, $d_\omega(p^j_\omega, q_\omega) < D_j(1 + 1/j)$.

(ii) Pour presque tout ω et tout $x \in X_\omega$, il existe $q \in Q_j$ avec $d_\omega(x, q_\omega) - d_\omega(x, p^j_\omega) > D_j$.

Démonstration. On numérote une famille fondamentale $\mathcal{F} = \{x^i\}$ de $\mathbf{X}$. Pour $\omega \in \Omega$ et $j, n \in \mathbb{N}$, on note

$$D^j_{\omega,n} = \inf\left\{ r > j \;\middle|\; \exists i \in \mathbb{N},\ \exists i_1, \dots, i_n, \begin{array}{c} x^{i_1}_\omega, \dots, x^{i_n}_\omega \in B(x^i_\omega, r(1+1/j)) \\ \text{et } \forall l \in \mathbb{N}\ \exists k(l)\ d(x^l_\omega, x^{i_{k(l)}}_\omega) - d(x^l_\omega, x^i_\omega) > r \end{array} \right\}.$$

Par densité des x^i_ω dans X_ω, on remarque que

$$D^j_{\omega,n} = \inf\left\{ r > j \;\middle|\; \exists x \in X_\omega, \begin{array}{c} \exists x_1, \dots, x_n \in B(x, r(1+1/j)), \\ \text{avec } \forall y \in X_\omega\ \exists i,\ d(y, x_i) - d(x, x_i) > r \end{array} \right\}.$$

La première écriture de $D^j_{\omega,n}$ montre $\omega \mapsto D^j_{\omega,n}$ est mesurable. En effet, posons pour $r > 0$,

$$\Omega^j_{n,r} = \left\{ \omega \in \Omega \;\middle|\; \exists i \in \mathbb{N},\ \exists i_1, \dots, i_n, \begin{array}{c} x^{i_1}_\omega, \dots, x^{i_n}_\omega \in B(x^i_\omega, r(1+1/j)) \\ \text{et } \forall l \in \mathbb{N}\ \exists k(l)\ d(x^l_\omega, x^{i_{k(l)}}_\omega) - d(x^l_\omega, x^i_\omega) > r \end{array} \right\}.$$

Alors

$$\Omega^j_{n,r} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \bigcup_{i_1,\dots,i_n\in\mathbb{N}} \bigcap_{l\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\{i_1,\dots,i_n\}} \left\{ \omega \in \Omega \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall m \in [1,n]\ d(x^{i_m}_\omega, x^i_\omega) < r(1+1/j) \\ \text{et } d(x^l_\omega, x^{i_k}_\omega) - d(x^l_\omega, x^i_\omega) > r \end{array} \right\}$$

et donc $\Omega^j_{n,r}$ est une partie mesurable pour $n, j \in \mathbb{N}$ et $r > 0$. Finalement, comme les inégalités définissant $\Omega^j_{n,r}$ sont strictes, si $\omega \in \Omega^j_{n,r}$ alors il existe ε tel que pour tout r' avec $|r - r'| < \varepsilon$, $\omega \in \Omega^j_{n,r'}$ et donc

$$\left\{ \omega \in \Omega \,\middle|\, D^j_{\omega,n} < r \right\} = \bigcup_{j<r'<r} \Omega^j_{n,r'} = \bigcup_{j<r'<r,\ r'\in\mathbb{Q}} \Omega^j_{n,r'}\ .$$

Ce qui montre bien que $\omega \mapsto D^j_{\omega,n}$ est mesurable.

La deuxième écriture de $D^j_{\omega,n}$ montre que cette fonction est α invariante. Ainsi, par ergodicité, il existe $D^j_n > 0$ tel que pour presque tout ω, $D^j_{\omega,n} = D^j_n$.

A j fixé, le lemme 16.21 montre que pour presque tout ω, il existe n tel que $D^j_{\omega,n} < \infty$. Posons alors

$$n_j(\omega) = \inf\{n \in \mathbb{N} |\ D^j_{\omega,n} < \infty\}.$$

De nouveau, $\omega \mapsto n_j(\omega)$ est mesurable et α invariante donc il existe $n_j \in \mathbb{N}$ tel que pour presque tout ω, $n_j(\omega) = n_j$.

On pose alors $D_j = D^j_{n_j} + 1$ et

$$i^j(\omega) = \inf \left\{ i \in \mathbb{N} \;\middle|\; \exists i_1, \dots, i_n, \begin{array}{c} x^{i_1}_\omega, \dots, x^{i_n}_\omega \in B(x^i_\omega, D_j(1+1/j)) \\ \text{et } \forall l \in \mathbb{N}\ \exists k(l)\ d(x^l_\omega, x^{i_{k(l)}}_\omega) - d(x^l_\omega, x^i_\omega) > D_j - 1 \end{array} \right\}.$$

Alors $\omega \mapsto i^j(\omega)$ est mesurable et si on pose $p^j_\omega = x^{i^j(\omega)}_\omega$ alors $p^j = (p^j_\omega)$ est une section pour tout j.

On munit l'ensemble dénombrables des parties à n_j éléments de $\mathbb{N}$ d'un ordre provenant d'une bijection avec $\mathbb{N}$. On définit

$$I^j_\omega = \inf \left\{ \{i_1, \dots, i_{n_j}\} \;\middle|\; \begin{array}{c} x^{i_1}_\omega, \dots, x^{i_{n_j}}_\omega \in B(p^j_\omega, D_j(1+1/j)) \\ \text{et } \forall l \in \mathbb{N}\ \exists k(l)\ d(x^l_\omega, x^{i_{k(l)}}_\omega) - d(x^l_\omega, p^j_\omega) > D_j - 1 \end{array} \right\}.$$

Alors I^j_ω est mesurable et si on note $i_k(\omega)$ le k-ième élément de I^j_ω pour $k \in [1, 2, \dots, n_j]$ alors $\omega \mapsto i_k(\omega)$ est mesurable.

Finalement, on définit

$$Q_j = \left\{ (x^{i_k(\omega)}_\omega) |\ k \in [1, 2, \dots, n_j \right\}$$

et les propriétés annoncées sont vérifiées. □

Démonstration de la proposition 16.20. Pour $j \in \mathbb{N}$, posons

$$S_j = \left\{ x \text{ section de } X \;\middle|\; \forall f \in \mathcal{A},\ \mathring{\forall}\omega\ \exists z_\omega \in X_\omega\ , \quad \begin{array}{c} f_\omega(z_\omega) - f_\omega(x_\omega) = D_j - 1 \\ \text{et } d_\omega(x_\omega, z_\omega) \leq (1 + 1/j)D_j \end{array} \right\}.$$

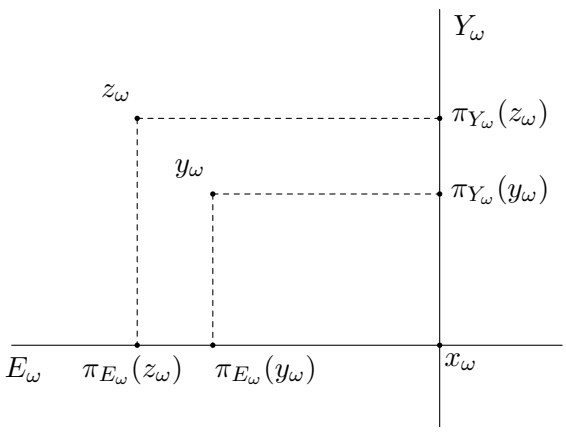
Par le lemme 16.22, $S_j \neq \emptyset$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. On pose alors $C_j = (C_\omega^j)$ où

$$C_\omega^j = \overline{Conv}\{x_\omega^j |\ x \in S_j\}.$$

Par lemme 16.12, C_j est un sous-champ convexe fermé de $\mathbf{X}$. Comme S_j est α-invariant, C_j l'est aussi donc par minimalité de $\mathbf{X}$, $C_\omega^j = X_\omega$ pour presque tout ω. Remarquons que S_j est stable par combinaisons convexes et limites simples. Ainsi, pour tout $f \in \mathcal{A}$, pour presque tout ω, et tout $x \in X_\omega$, il existe $z \in X_\omega$ tel que $f_\omega(z) - f_\omega(x) = D_j - 1$ et $d_\omega(x, z) \leq (1 + 1/j)D_j$. On peut alors appliquer le lemme 1.36 qui donne l'existence de ξ_ω tel que pour tout $x \in X_\omega$, $-f_\omega(x) = \beta_{\xi_\omega}(x, x_\omega^0)$. Appelons y_ω^n le point à distance n de x_ω^0 tel que $f_\omega(y_\omega^n) = n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Par construction de f_ω, pour tout $n \in \mathbb{N}$, (y_ω^n) est une section de $\mathbf{X}$ et pour presque tout ω, $-f = \lim_{n\to\infty} d(y_\omega^n, .) - n$. Ce qui montre que $(-f_\omega) \in \mathcal{A}$ et le même raisonnement que celui appliqué à (f_ω) donne ξ'_ω. De plus, si $x \in X_\omega$, la concaténation des rayons issus de x et pointant vers ξ_ω et ξ'_ω est une géodésique. Ainsi, X_ω est la réunion des géodésiques bi-infinies de ξ_ω à ξ'_ω et le théorème 1.19 donne la décomposition produit désirée. □

Démonstration de la proposition 16.19. Soit $X_\omega = E_\omega \times Y_\omega$ où E_ω est le facteur euclidien de de Rham (voir 1.7) de X_ω et l'on identifie E_ω et Y_ω avec deux parties convexes fermées de X_ω telles que $Y_\omega \cap E_\omega = \{x_\omega\}$. Supposons que

(i) pour toutes sections y, z ; $\omega \mapsto d_\omega(\pi_{E_\omega}(y_\omega), \pi_{E_\omega}(z_\omega))$ est mesurable.



On a alors

$$d_\omega(y_\omega, \pi_{E_\omega}(y_\omega)) = \sqrt{d_\omega(y_\omega, x_\omega)^2 - d_\omega(x_\omega, \pi_{E_\omega}(y_\omega))^2}.$$

Ainsi, comme $\pi_{E_\omega}(x_\omega) = x_\omega$, on a la mesurabilité de $\omega \mapsto d_\omega(y_\omega, \pi_{E_\omega}(y_\omega))$. Soit, maintenant, deux sections y et z. Comme

$$d_\omega(y_\omega, \pi_{E_\omega}(z_\omega))^2 = d_\omega(\pi_{E_\omega}(y_\omega), \pi_{E_\omega}(z_\omega))^2 + d_\omega(y_\omega, \pi_{E_\omega}(y_\omega))^2,$$

on a donc la mesurabilité de $\omega \mapsto d_\omega(y_\omega, \pi_{E_\omega}(z_\omega))$. Ceci montre donc que pour toute section z, $(\pi_{E_\omega}(z_\omega))$ est aussi une section de $\mathbf{X}$.

De même comme $d_\omega(\pi_{Y_\omega}(y_\omega), \pi_{Y_\omega}(z_\omega))^2 = d_\omega(y_\omega, z_\omega)^2 - d_\omega(\pi_{E_\omega}(y_\omega), \pi_{E_\omega}(z_\omega))^2$, pour toute section y de $\mathbf{X}$, $(\pi_{Y_\omega}(y_\omega))$ est aussi une section de $\mathbf{X}$.

Les projections fondamentales d'une famille fondamentale de $\mathbf{X}$ donne alors des familles fondamentales respectives de (Y_ω) et (E_ω) qui forment alors deux sous-champ de $\mathbf{X}$ notés respectivement $\mathbf{E}$ et $\mathbf{Y}$. Les deux dernières propriétés résultent juste des propriétés usuelles de la décomposition de de Rham pour chaque X_ω.

Il reste à vérifier la propriété (i). Fixons y et z deux sections de $\mathbf{X}$ et une famille fondamentale $(x^i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $\mathbf{X}$. Pour $\omega \in \Omega$, notons $\mathcal{C}_\omega$ l'ensemble des fonctions convexes 1-lipschitz qui s'annulent en x^0_ω. Pour $f \in \mathcal{C}_\omega$, posons $\Delta^{i,j}_\omega(f) = \frac{f(x^i_\omega)+f(x^j_\omega)}{2} - f(m^{i,j}_\omega)$ où $m^{i,j}_\omega$ est le milieu de $[x^i_\omega, x^j_\omega]$. Par convexité c'est une quantité positive. Notons f^k_ω la fonction de X_ω dans l'ensemble des nombres réels, $y \mapsto d_\omega(y, x^k_\omega) - d(x^0_\omega, x^k_\omega)$ et

$$K^n_\omega = \{k \in \mathbb{N} |\ d_\omega(x^k_\omega, x^0_\omega) \geq n \text{ et } \forall i, j \leq n,\ \Delta^{i,j}_\omega(f^k_\omega) \leq 1/n\}.$$

Nous affirmons alors que les égalités suivantes sont vérifiées (avec la convention que le suprémum d'une partie vide de $\mathbb{R}^+$ est 0) et donc la propriété (i) est assurée. Soit y et z deux sections de $\mathbf{X}$,

$$d_\omega(\pi_{E_\omega}(y_\omega)), \pi_{E_\omega}(z_\omega)) = \max_{f\in\mathcal{A}} |f_\omega(y_\omega) - f_\omega(z_\omega)| = \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\in K^n_\omega} |f^k_\omega(y_\omega) - f^k_\omega(z_\omega)|.$$

Par définition de $\mathcal{A}$, on sait que

$$\max_{f\in\mathcal{A}} |f_\omega(y_\omega) - f_\omega(z_\omega)| \leq \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\in K^n_\omega} |f^k_\omega(y_\omega) - f^k_\omega(z_\omega)|.$$

Pour vérifier l'inégalité inverse, posons

$$L^n_\omega = \left\{ i \in K^n_\omega \,\middle|\, |f^i_\omega(y_\omega) - f^i_\omega(z_\omega)| \geq \sup_{k\in K^n_\omega} |f^k_\omega(y_\omega) - f^k_\omega(z_\omega)| - 1/n \right\}$$

et définissons $k(n,\omega) = \min L^n_\omega$ puis $g^n_\omega = f^{k(n,\omega)}_\omega$. On a alors

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{k\in K^n_\omega} |f^k_\omega(y_\omega) - f^k_\omega(z_\omega)| = \lim_{n\to\infty} |g^n_\omega(y_\omega) - g^n_\omega(z_\omega)|.$$

Chaque $\mathcal{C}_\omega$ est compact pour la topologie de la convergence ponctuelle donc $\prod_{\omega\in\Omega} \mathcal{C}_\omega$ l'est aussi et quitte à extraire, on peut supposer que pour presque tout ω, g^n_ω converge vers un certain g_ω qui, par la proposition 16.20, est un élément de $\mathcal{A}$. Ainsi,

$$\max_{f\in\mathcal{A}} |f_\omega(y_\omega) - f_\omega(z_\omega)| \geq \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\in K^n_\omega} |f^k_\omega(y_\omega) - f^k_\omega(z_\omega)|$$

et pour presque tout ω, g_ω correspond à une fonction de Busemann de E_ω donc

$$d_\omega(\pi_{E_\omega}(y_\omega), \pi_{E_\omega}(z_\omega)) \geq \max_{f\in\mathcal{A}} |f_\omega(y_\omega) - f_\omega(z_\omega)|.$$

Comme pour presque tout ω, $(x^i_\omega)_{i\in\mathbb{N}}$ est dense dans X_ω, pour tout n, on peut trouver x^i_ω aussi proche que voulu de la géodésique bi-infinie $(\pi_\omega(y_\omega), \pi_\omega(z_\omega))$ dans E_ω et tel que $i \in K^n_\omega$.

□

Corollaire 16.23. *Soit G un groupe localement compact et Ω un G-espace. Soit $\mathbf{X}$ un champ d'espaces de Hadamard de dimension telescopique finie et $\mathbf{E}\times\mathbf{Y}$ une décomposition de de Rham. Si $\alpha : G\times\Omega \to \mathrm{Isom}(\mathbf{X})$ est un cocycle alors il existe deux cocycles $\alpha_1 : G\times\Omega\to\mathrm{Isom}(\mathbf{E})$ et $\alpha_2 : G\times\Omega\to\mathrm{Isom}(\mathbf{Y})$ tels que $\alpha = \alpha_1\times\alpha_2$.*

Démonstration. Soit $\mathbf{X} = \mathbf{E}\times\mathbf{Y}$ une décomposition de de Rham associée à une section x. Fixons $g\in G$ et posons

$$E'_\omega = \alpha(g, g^{-1}\omega)E_{g^{-1}\omega} \text{ et } Y'_\omega = \alpha(g, g^{-1}\omega)Y_{g^{-1}\omega}.$$

On a alors une nouvelle décomposition de de Rham $\mathbf{E}'\times\mathbf{Y}'$du champ $\mathbf{X}$ associée à la section gx. Par la deuxième partie de la proposition 16.19, les applications $\pi_{Y_\omega}|_{Y'_\omega}$ et $\pi_{E_\omega}|_{E'_\omega}$ sont des isométries. On définit alors $\alpha_1(g,\omega) = \pi_{E_{g\omega}}\circ\alpha(g,\omega)$ et $\alpha_2(g,\omega) = \pi_{Y_{g\omega}}\circ\alpha(g,\omega)$. Les propriétés de cocycle pour α_1 et α_2 découlent alors de celles de α. □

17. Théorème d'Adams-Ballman équivariant

17.1. Cocyclisme. Soit $\mathbf{X}$ un champ d'espaces de Hadamard, nous introduisons les champs d'espaces de Banach dont nous aurons besoin pour démontrer le théorème 17.4.

Soit Ω la base de $\mathbf{X}$ et $\{x^n\}$ une famille fondamentale . Choisissons pour section base x^0 alors pour $\omega\in\Omega$, on pose C_ω l'espace vectoriels des fonctions $f : X_\omega\to\mathbb{R}$ convexes telles que $f(x^0_\omega) = 0$. Munissons C_ω de la topologie de la converge ponctuelle, qui en fait un espace vectoriel topologie localement convexe. Une famille de semi-normes est donnée par $f\to|f(x)|$ pour $x\in X_\omega$. Notons $\mathcal{C}_\omega\subset C_\omega$ le sous-ensemble constitué des fonctions qui sont de plus 1-Lipschitz. Alors $\mathcal{C}_\omega$ est compact, convexe et métrisable. Une distance est donnée par la formule suivante

$$D_\omega(f,g) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|f(x^n_\omega) - g(x^n_\omega)|}{2^n d_\omega(x^n_\omega, x^0_\omega)}.$$

Notons $i_\omega\colon X_\omega\to\mathcal{C}_\omega$ l'application définie par $i_\omega(x) = d(x,.) - d(x^0_\omega, x)$ pour $x\in X_\omega$. Notons K_ω la clôture convexe de $i_\omega(X_\omega)$. On munit la collection $\mathbf{K} = \{(K_\omega, D_\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ de la famille dénombrable $\mathcal{F}'$ constituée des combinaisons convexes à coefficients rationnels d'éléments de $\{i(x^n_\omega)\}_n$. On a alors le fait suivant.

Lemme 17.1. *Le champ $\mathbf{K}$ est un champ d'espaces métriques compact.*

Une section f de $\mathbf{K}$ est dite *affine* si pour presque tout ω, f_ω est affine.

Proposition 17.2. *Si $\mathbf{X}$ est un champ d'espaces de Hadamard de dimension télescopique finie sans facteur euclidien, minimal et non-réduit à une section alors $\mathbf{K}$ ne contient pas de section affine.*

Démonstration. On utilise les mêmes notations que dans la preuve de la proposition 16.19. On introduit la fonction $\tau\colon \Omega \to \mathbb{R}$ avec

$$\tau(\omega) = \inf_{f\in K_\omega} \sup_{i,j} \Delta_\omega^{i,j}(f).$$

La fonction τ est mesurable et G-invariante donc par ergodicité, elle est essentiellement constante. Puisque K_ω est compact, $\tau(\omega) = 0$ signifie exactement que K_ω contient une fonction affine. De la même manière, on définit $\upsilon\colon \Omega \to \mathbb{R}$ où

$$\upsilon(\omega) = \inf_{f\in i_\omega(X_\omega)} \sup_{i,j} \Delta_\omega^{i,j}(f).$$

Alors υ est aussi une fonction essentiellement constante. On remarque que pour presque tout ω, $\upsilon(\omega) = \inf_{f\in\mathcal{A}} \sup_{i,j} \Delta_\omega^{i,j}(f)$. Puisque $\mathbf{X}$ n'a pas de facteur euclidien et est minimal, la proposition 16.20 implique que $\mathcal{A}$ est vide. Ainsi, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour presque tout ε, $\upsilon(\omega) = \varepsilon$. Le lemme 4.10 de [**CL10a**] montre que $\tau(\omega) > 0$ presque partout et donc $\mathbf{K}$ ne peut pas avoir de section affine. □

Si $\alpha : G \times \Omega \to \mathrm{Isom}(\mathbf{X})$ est un cocycle alors on a aussi un cocycle $\beta : G \times \Omega \to Hom(\mathbf{K})$ défini par $\beta(g,\omega)\cdot f = f \circ \alpha(g^{-1}, g\omega) - f(\alpha(g^{-1}, g\omega)x_\omega^0)$ pour $f \in K_\omega$. Introduisons alors le champ de Banach $\mathcal{C}(\mathbf{K})$ où $\mathcal{C}(K_\omega)$ où l'espace de Banach des fonctions continues sur l'espace compact K_ω muni de la norme de la convergence uniforme. Cet espace est naturellement muni d'un cocycle $\gamma : G \times \Omega \to \mathrm{Isom}(\mathcal{C}(\mathbf{K}))$ donné par

$$\gamma(g,\omega)\varphi(f) = \varphi(\beta(g^{-1}, g\omega)\cdot f)$$

où φ est une section de $\mathcal{C}(K_\omega)$ et $f \in K_{g\omega}$. Le champ dual $\mathcal{C}(\mathbf{K})^*$ est donc muni du cocycle dual γ^*.

Si $\mathcal{M}(\mathbf{K})$ désigne le sous-champ des mesures de probabilité sur $\mathbf{K}$ alors c'est un sous-champ convexe compact de $\mathcal{C}(\mathbf{K})_1^*$ invariant par le cocycle γ^*. De plus, ce cocycle se réexprime simplement pour $\mu \in \mathcal{M}(K_\omega)$,

$$\gamma(g,\omega)^*\mu = \beta(g,\omega)_*\mu.$$

Rappelons qu'il existe une application continue appelée *barycentre*, $b : \mathcal{M}(K) \to K$ pour K partie convexe compacte d'un espace localement convexe. Cette application est définie sur les combinaisons convexes de masses de Dirac par

$$b\left(\sum \lambda_i \delta_{k_i}\right) = \sum \lambda_i k_i.$$

La densité de telles combinaisons convexes dans $\mathcal{M}(K)$ (muni de la topologie faible-$*$) permet de définir b partout. De plus, si T est une transformation affine laissant invariant K alors $T \circ b(\mu) = b(T_*\mu)$ pour tout $\mu \in \mathcal{M}(K)$. De même, si $T : K \to K'$ est une application affine entre deux parties convexes compactes et b, b' sont les applications barycentres alors pour tout $\mu \in \mathcal{C}(K)$,

$$b'(T_*\mu) = T \circ b(\mu).$$

Ainsi, pour μ, section de $\mathcal{M}(\mathbf{K})$ invariante pour le cocycle γ^* nous définissons $k_\omega = b_\omega(\mu_\omega)$ où b_ω est l'application barycentre $b_\omega : \mathcal{M}(K_\omega) \to K_\omega$. Comme pour tout g et

presque tout ω, $\beta(g,\omega)$ est affine, on a

$$(\beta\cdot k)_\omega=\beta(g,g^{-1}\omega)k_{g^{-1}\omega}=b_\omega(\beta(g,g^{-1}\omega)_*\mu_{g^{-1}\omega})=\beta_\omega(\mu_\omega)=k_\omega.$$

Nous avons donc une section invariante de $\mathbf{K}$.

Remarque 17.3. La discussion précédente esquisse la preuve de l'énoncé suivant :

L'action $G\curvearrowright\Omega$ est moyennable si et seulement si pour tout $\mathbf{K}$ sous-champ invariant de convexes-compacts d'un G-champ $\mathbf{E}$ d'espaces localement convexes il existe une section de $\mathbf{K}$ invariante.

17.2. Théorème d'Adams-Ballmann équivariant.

Théorème 17.4. *Soit G un groupe localement compact à base dénombrable, X un espace de Hadamard de dimension télescopique finie, $\alpha:G\to\mathrm{Isom}(X)$ une action continue de G sur X et Ω un G-espace ergodique moyennable. Alors il existe une section de fonctions de Busemann invariante ou il existe un sous-champ de X euclidien et invariant du champ $\mathbf{X}$ constant égal à X au-dessus de Ω.*

Remarque 17.5. Dans le cas où X est localement compact et de dimension géométrique finie, c'est le résultat 4.2.6 de [**And10**] et 3.48 de[**Hen10**]. Dans le cas où Ω est réduit à un point alors on retrouve le théorème 7.8.

Démonstration. Considérons le champ $\mathbf{X}$ au dessus de Ω constant égal à X. Supposons qu'il n'existe pas de section de fonctions de busemann invariante alors grâce à la proposition 16.16, il existe un sous-champ minimal invariant $\mathbf{X}'$. Soit $\mathbf{X}'=\mathbf{E}\times\mathbf{Y}$ une décomposition de de Rham de $\mathbf{X}'$. La minimalité de $\mathbf{X}'$ impose la minimalité de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{Y}$. Il suffit alors de montrer que $\mathbf{Y}$ est réduit à une section ou $\mathbf{Y}$ possède une section de fonctions de Busemann invariante pour le cocycle α_2 donné par le corollaire 16.23.

Fixons une section x de $\mathbf{Y}$. Soit $\mathbf{K}$ le champ d'espaces métriques compact de la section précédente. Le champ d'espaces de Banach $\mathcal{C}(\mathbf{K})$, où $\mathcal{C}(K)_\omega$ est l'espace de Banach des fonctions continues sur K_ω à pour champ dual $\mathcal{C}(\mathbf{K})^*$. Par moyennabilité, le sous-champ convexe compact $\mathcal{M}(\mathbf{K})$ possède une section invariante. La fin de la section précédente explicite comment l'image de cette section par l'application barycentre donne une section invariante de $\mathbf{K}$. Notons f cette section invariante. Alors pour toute section y de $\mathbf{Y}$, $(g\cdot f)(y)=f(y)$ et plus précisément que pour toute section et presque tout ω,

$$f_\omega(y_\omega)=f_{g^{-1}\omega}(\alpha_2(g^{-1},\omega)y_\omega)-f_{g^{-1}\omega}(\alpha_2(g^{-1},\omega)x_\omega). \tag{17.1}$$

C'est à dire que la quantité $f_{g^{-1}\omega}(\alpha_2(g^{-1},\omega)y_\omega)-f_\omega(y_\omega)$ ne dépend pas de la section y. Posons alors $c(g,\omega)=f_{g\omega}(y_{g\omega})-f_\omega(\alpha_2(g^{-1},g\omega)y_{g\omega})$. Le fait que $(g,f)\mapsto g\cdot f$ soit une action issue d'un cocycle montre que $c:G\times\Omega\to\mathbb{R}$ est un cocycle additif et en particulier une application mesurable. Introduisons les trois sous-ensembles (bien définis à un ensemble de mesure nulle près) de Ω,

$$\begin{aligned}
\Omega_{\min} &= \{\omega\in\Omega|\ f_\omega \text{ possède un minimum}\},\\
\Omega_{\inf} &= \{\omega\in\Omega|\ f_\omega \text{ ne possède pas de minimum et } \inf f_\omega>-\infty\},\\
\Omega_{-\infty} &= \{\omega\in\Omega|\ \inf f_\omega=-\infty\}.
\end{aligned}$$

Ce sont bien des ensembles mesurables car f est une section. L'équation 17.1 se réécrit plus simplement en remplaçant ω par $g\omega$,

$$f_{g\omega} = f_\omega \circ \alpha_2(g^{-1}, g\omega) + c(g, \omega).$$

Ce qui montre que les trois ensembles précédents sont G-invariants. Leur réunion est de mesure pleine et comme $G \curvearrowright \Omega$ est ergodique, un de ses trois ensembles est de mesure pleine.

Si $\Omega_{\min}$ est de mesure pleine alors on définit $Y'\omega = f_\omega^{-1}(\min f_\omega)$ ce qui donne un sous-champ Y' de Y. Il est de plus, G-invariant donc par minimalité $\mathbf{Y}' = \mathbf{Y}$. Ce qui montre que pour presque tout ω, f_ω est une fonction constante sur Y_ω. Comme $\mathbf{Y}$ est minimal et sans facteur euclidien, la proposition 17.2 implique que $\mathbf{Y}$ est réduit à une section et donc $\mathbf{X}'$ est euclidien.

Si $\Omega_{\inf}$ est de mesure pleine, on définit $Y_\omega^r = f_\omega^{-1}(]-\infty, r])$ pour $r \in \mathbb{R}^-$ et si $\Omega_{-\infty}$ est de mesure pleine, on définit pour $r \in \mathbb{R}^+$, $Y_\omega^r = f_\omega^{-1}(]\inf f_\omega, \inf f_\omega + r])$. Dans les deux cas, $\mathbf{Y}^r$ est un sous-champ vérifiant la relation

$$\alpha_2(g, \omega) Y_\omega^r = Y_{g\omega}^{r+c(g,\omega)} \tag{17.2}$$

pour tout g, presque tout ω et tout $r > 0$. De plus, $\{Y_\omega^r\}_{r>0}$ ou $\{Y_\omega^r\}_{r<0}$ est une famille emboîtée d'intersection vide pour presque tout ω. On choisit un ensemble dénombrable dense D de $\mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{R}^-$, selon le cas, et on considère alors la famille $(\mathbf{Y}^r)_{r\in D}$ à laquelle on applique la proposition 16.14. On obtient alors une section de fonctions de Busemann. Grâce à la relation (17.2) et au lemme 6.3, cette section est α_2-invariante et donc α-invariante. $\square$

CHAPITRE V

Superrigidité géométrique

A la page 121 de [**Gro93**],exemple (c), on trouve la conjecture suivante de M. Gromov :

> Pour $p \geq 1$, il existe un groupe Γ de type fini agissant discrètement sur X_{p+1}, qui cependant n'admet pas d'action strictement non bornée sur X_p. En fait un réseau dans un groupe de Lie simple de dimension finie de rang réel supérieur à $p+1$ ne peut probablement pas agir discrètement sur X_p ou sur un autre espace symétrique « raisonnable » de rang plus petit que p .

Les notions d'action discrète et d'action strictement non-bornée sont à préciser. Pour une action (par isométries), M. Gromov propose qu'une action *discrète* possède au moins des orbites non bornées (ce qui empêche les points fixes) et une action *strictement non-bornée* vérifie que toute intersection d'une orbite et d'une partie bornée soit finie.

Cette conjecture est inspirée par le théorème de superrigidité de G. Margulis et suggère qu'un énoncé similaire doit être vrai. Il y a deux cas particuliers, où la partie concernant les réseaux de la conjecture est facilement vérifiée. Si $X = X_1(\mathbb{R})$ ou $X_1(\mathbb{C})$ (les espaces hyperboliques réels ou complexes de dimension infinie) alors la distance sur X est conditionnellement de type négatif (voir, par exemple, l'appendice C.2 de [**BdlHV08**] pour des généralités sur les noyaux conditionnellement de type négatif et voir [**FH74**] pour une preuve de cet énoncé). Cependant, un réseau Γ dans un groupe de Lie semi-simple de rang supérieur à 2 possède la propriété (T) de Kazhdan. Ainsi toute action isométrique de Γ sur X possède un point fixe et c'est même une caractérisation des groupes localement compacts σ-compacts possédant la propriété (T) (voir la section *A-T-menability* p. 177 de [**Gro93**] et la section 7.4.2 de [**CCJ+01**]).

18. Superrigidité géométrique

18.1. Rigidité forte de Mostow. Un *réseau* d'un groupe localement compact, G, est un sous-groupe discret Γ tel que le quotient G/Γ possède une mesure borélienne, régulière, finie et invariante sous l'action $G \curvearrowright G/\Gamma$ induite par la multiplication à gauche. Un réseau est dit *cocompact* si G/Γ est compact. La terminologie provient de l'exemple classique $\mathbb{Z}^n < \mathbb{R}^n$ où $\mathbb{Z}^n$ est alors un réseau cocompact. Un autre exemple classique de réseau non cocompact est donné par $\mathrm{Sl}_n(\mathbb{Z}) < \mathrm{Sl}_n(\mathbb{R})$ pour $n \geq 2$. Ce fait est dû à H. Minkowski et l'espace quotient $\mathrm{Sl}_n(\mathbb{R})/\mathrm{Sl}_n(\mathbb{Z})$ s'identifie naturellement à l'ensemble des réseaux unimodulaires de $\mathbb{R}^n$, qui n'est pas compact.

On peut penser à un réseau comme une discrétisation agréable du groupe G. Le terme de rigidité, dans ce cadre, signifie que cette discrétisation reflète complètement le groupe G.

Théorème 18.1 (Théorème A' de [Mos73]). *Soit G, G' deux groupes de Lie semi-simples sans centre ni sous-groupe compact normal non-trivial. Soit Γ, Γ' deux réseaux cocompacts respectivement de G et G'. Si G et G' ne possèdent pas de facteur isomorphe à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ invariant sous l'action de Γ, respectivement Γ', alors tout isomorphisme entre Γ et Γ' s'étend en un isomorphisme analytique entre G et G'.*

En considérant X l'espace symétrique de type non-compact associé à G et en voyant Γ comme le groupe fondamental de $Y := X/\Gamma$, on obtient la formulation géométrique suivante.

Théorème 18.2. *Soit Y, Y' des variétés riemanniennes compactes, localement symétriques, connexes et à courbure sectionnelle négative. Supposons que Y et Y' ne possèdent pas de facteur de de Rham local ou bien euclidien ou bien isométrique au plan hyperbolique. Si $\pi_1(Y)$ et $\pi_1(Y')$ sont isomorphes alors Y et Y' sont isométriques après renormalisation éventuelle des facteurs de de Rham locaux.*

La formulation qui sera la plus proche de ce qui suivra est la suivante.

Théorème 18.3. *Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe sans centre ni sous-groupe compact normal non trivial. Soit Γ un réseau cocompact de G ne laissant pas de facteur de G isomorphe à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ invariant.*
Soit X un espace symétrique de type non-compact ne possédant pas de facteur de de Rham isomorphe au plan hyperbolique.
Alors toute action de Γ sur X proprement discontinue par isométries telle que X/Γ est compact, provient d'un isomorphisme entre G et $\mathrm{Isom}(X)^\circ$.

18.2. Superrigidité de Margulis. La référence pour les résultats de superrigidité est [Mar91]. Nous reprenons les énoncés de [Pan09]. Le premier énoncé est formulé algébriquement alors que le second est formulé géométriquement. C'est cette seconde formulation qui nous inspirera.

Théorème 18.4. *Soit G, H des groupes algébriques semi-simples sur des corps locaux, sans facteurs compacts. On suppose que G a un rang supérieur à 2. Soit Γ un réseau irréductible de G.*
Tout homomorphisme $\Gamma \to H$ dont l'image est non-bornée et Zariski dense s'étend en un homomorphisme.

À l'aide du dictionnaire entre les groupes algébriques semi-simples à centre trivial et sans facteur compact, et les espaces symétriques de type non-compact ou les immeubles euclidiens, le théorème précédant se reformule ainsi.

Théorème 18.5. *Soit X, Y des espaces symétriques ou des immeubles euclidiens de dimension finie, de type non-compact. On suppose que le rang de X est supérieur à 2. Soit Γ un groupe discret irréductible d'isométries de X tel que $\mathrm{Vol}(\Gamma\backslash X)$ soit fini.*

Alors toute action isométrique non-élémentaire de Γ sur Y laisse stable ou bien un point, ou bien un sous-ensemble convexe de Y qui, à renormalisation des facteurs

près, est isométrique à un produit de facteurs irréductibles de X, sur lesquel l'action se prolonge en une action isométrique d'un quotient de $\mathrm{Isom}(X)$.

Pour montrer ce théorème, la démonstration originale procède en deux étapes (voir le chapitre 5 de [**Zim84**]).
Première étape : Construire une *application de Furstenberg* ϕ entre le bord de Furstenberg de G et un quotient H/L où L est un sous-groupe propre de H. Cette application est mesurable et Γ-équivariante.
Seconde étape : Montrer qu'une telle application est essentiellement rationnelle.

18.3. Généralisations. Le théorème suivant traite de superrigidité dans le cas où la condition de rang supérieur à 2 est obtenue par l'hypothèse de l'existence d'une décomposition en produit avec au moins deux facteurs. Il a été obtenu par N. Monod avec des techniques d'induction L^2. Il a été généralisé à des espaces possédant une condition de courbure négative moins restrictive que CAT(0) par A. Karlsson, G. Margulis et T. Gelander en utilisant des applications harmoniques généralisées (voir le théorème 1.1 de [**GKM08**])

Théorème 18.6 (Théorème 6 de [**Mon06**])**.** *Soit Γ un réseau irréductible cocompact dans un produit $G = G_1 \times \cdots \times G_n$ de groupes localement compacts et σ-compacts avec $n \geq 2$. Soit X un espace de Hadamard non isométrique à un espace euclidien de dimension finie.*
Si $\alpha\colon \Gamma \times X \to X$ une action par isométries réduite telle que les orbites sont fermées et non bornées alors α s'étend continûment en une action $\widetilde{\alpha}\colon G \times X \to X$.

Remarque 18.7. L'hypothèse *cocompact* sur le réseau peut-être affaiblie en supposant seulement que le réseau est *faiblement cocompact et de carré intégrable*. Pour plus de détails, on peut se reporter à l'appendice B de [**Mon06**]. Le même affaiblissement est aussi possible dans les deux corollaires qui suivent.

Dans [**CL10a**], les auteurs remarquent que l'hypothèse d'action *réduite* est en fait une conséquence de l'absence de point fixe à l'infini (voir la proposition 7.5) et on obtient alors le corollaire suivant.

Corollaire 18.8 (Corollaire 1.9 de [**CL10a**])**.** *Soit Γ un réseau irréductible cocompact dans un produit $G = G_1 \times \cdots \times G_n$ de groupes localement compacts et σ-compacts avec $n \geq 2$. Soit X un espace de Hadamard de dimension télescopique finie sans facteur euclidien.*
Alors toute action minimale par isométries et sans point fixe à l'infini de Γ s'étend continûment à G.

En utilisant le fait que les espaces X_p du chapitre III sont de dimension télescopique finie, on obtient alors le cas particulier suivant.

Corollaire 18.9. *Soit Γ un réseau irréductible cocompact dans un produit $G = G_1 \times \cdots \times G_n$ de groupes localement compacts et σ-compacts avec $n \geq 2$. Alors toute action minimale par isométries et sans point fixe à l'infini de Γ sur X_p s'étend continûment à G.*

18.4. Superrigidité pour le commensurateur. Soit G un groupe localement compact et Γ, Γ' deux sous-groupes fermés de G. On dit que Γ et Γ' sont *commensurables* si $\Gamma \cap \Gamma'$ est d'indice fini à la fois dans Γ et Γ'. De même, le *commensurateur*, $\mathrm{Comm}_G(\Gamma)$, de Γ dans G est le sous-groupe de G, $\{g \in G |\ g\Gamma g^{-1}$ et Γ sont commensurables$\}$.

Un des buts du théorème de superrigidité de G. Margulis était de montrer que les réseaux irréductibles sont arithmétiques. L'exemple standard de réseau arithmétique est le réseau $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Plus généralement, un réseau Γ d'un groupe de Lie semi-simple sans facteur compact et à centre trivial G est *arithmétique* si

(i) il existe un groupe algébrique réel semi-simple H et

(ii) un homomorphisme $\phi\colon H^\circ \to G$ surjectif

tel que ϕ est à noyau compact et les groupes $\phi(H(\mathbb{Z}) \cap H^\circ)$ et Γ sont commensurables.

Fixons G, un groupe de Lie semi-simple à centre trivial et sans facteur compact. Un célèbre théorème dû à A. Borel [**Bor66**] affirme qu'un réseau irréductible arithmétique Γ de G possède un commensurateur dense dans G (pour la topologie de groupe de Lie). Réciproquement, le théorème de superrigidité a permis à G. Margulis de montrer la réciproque.

Théorème 18.10. *Soit Γ un réseau irréductible de G. Si $\mathrm{Comm}_G(\Gamma)$ est dense dans G alors Γ est arithmétique.*

Dans le cas où le rang de G est supérieur à 2 alors l'énoncé est encore plus frappant : tout réseau irréductible $\Gamma \leq G$ est arithmétique.

Le théorème suivant apparaît alors comme un analogue du théorème de superrigidité en dehors du cadre des groupes algébriques semi-simples. Au sujet de la rigidité pour le commensurateur, on pourra se reporter à [**AB94**] et [**BM96**].

Théorème 18.11 (Théorème A1 de [**Mon06**])**.** *Soit G un groupe localement compact et σ-compact, $\Gamma < G$ un réseau cocompact et Λ un sous-groupe dense de G tel que $\Gamma < \Lambda < \mathrm{Comm}_G(\Gamma)$.*
Supposons que Λ agisse par isométries sur un espace de Hadamard X de manière non-evanescente. Alors, quitte à passer à une partie fermée convexe (non-vide) Λ-invariante, l'action s'étend continûment à G.

Ce théorème s'applique en particulier aux espaces X_p, en faisant la remarque supplémentaire que la condition d'« action non-évanescente » se remplace dans ce cas par l'absence de point fixe dans $\overline{X_p}$. (voir la proposition 7.5).

19. Applications de Furstenberg

On s'attache dans cette section à montrer l'existence d'applications de Furstenberg sous l'hypothèse de non élémentarité de l'action.

Théorème 19.1. *Soit G un groupe localement compact muni d'un bord fort B, agissant continûment et non-élémentairement par isométries sur un espace X_p, avec $p \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe une application G-équivariante mesurable $\varphi\colon B \to \partial X_p$ telle que pour tout*

$b \in B$, $\varphi(b)$ est le centre de la plus petite cellule contenant $\varphi(b)$.

Une telle application φ est appelée une application de Furstenberg en raison de la notion de bord dûe à H. Furstenberg d'un espace symétrique de type non-compact, qui possède un aspect géométrique et un aspect mesurable.

Nous nous plaçons dans les hypothèses du théorème 19.1. Au cours de la preuve de ce théorème, nous considérerons un champ d'espaces de Hadamard $\mathbf{Y}$, qui sera un champ constant égal à une partie convexe fermée de X_p. La base du champ sera l'espace B. Un sous-champ de $\mathbf{Y}$ aura donc pour fibres des parties de X_p. Ce champ $\mathbf{Y}$ sera muni d'une action par isométries de G via un cocycle $\alpha_{\mathbf{Y}}$. Nous aurons besoin de la proposition suivante qui est essentiellement un argument de séparabilité inspiré du lemme 15.8.

Proposition 19.2. *Soit $\mathbf{E}$ un sous-champ euclidien de $\mathbf{Y}$. Si $\mathbf{E}$ est invariant alors ou bien pour presque tout b, b', $\partial E_b \cap \partial E_{b'} \neq \emptyset$ ou bien il existe E_0 sous-espace euclidien de Y tel que pour presque tout b, $E_b = E_0$.*

Démonstration. Inspirés par la convergence de Gromov-Hausdorff, nous introduisons la fonction d_{GH} sur l'ensemble des sous-espaces euclidiens de X_p. Soit E et F deux espaces euclidiens de X_p, alors

$$d_{GH}(E,F) = \inf\{1/r > 0 |\ \exists x \in E,\ y \in F,\ d_H(E \cap B(x,r), F \cap B(y,r)) < 1/r\}.$$

Cette fonction n'est ni une distance ni un écart. Elle est cependant invariante par isométries et on peut trouver une quantité dénombrable d'ensembles de la forme

$$U(E,x,r) = \{F \text{ euclidien} |\ \exists y \in F,\ d_H(E \cap B(x,r), F \cap B(y,r)) < 1/r\}.$$

qui recouvrent tout l'ensemble des sous-espaces euclidiens de X_p. En effet, le groupe $\mathbf{O}(p,\infty)$ agit transitivement sur les pairs (x, A) où x est un point de A et A un sous-espace euclidien maximal de X_p. De plus, si $g \to e$ dans le groupe (séparable) $\mathbf{O}^2(p,\infty) = \mathbf{O}(p,\infty) \cap \mathbf{GL}^2(\mathcal{H})$ alors pour tout $x \in X_p$ et tout $r > 0$, g converge uniformément vers l'identité sur la boule $B(x,r)$. Fixons un point x dans un sous-espace euclidien maximal A de X_p. Pour chaque dimension $0 \leq i \leq p$, choisissons une famille dénombrable $(A_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-espaces euclidiens de A tels que pour tout sous-espace euclidien E de A contenant x et tout $r > 0$, il existe A_n^i tel que $d_H(E \cap B(x,r), A \cap B(x,r)) < 1/r$. Maintenant, choisissons un sous-ensemble dense D de $\mathbf{O}^2(p,\infty)$. Alors les ensembles $U(gA_n^i, gx, r)$, pour $g \in D$ et $i, n, r \in \mathbb{N}$, vérifient la propriété annoncée ci-dessus.

Par double ergodicité, l'application $(b,b') \mapsto d_{GH}(E_b, E_{b'})$ est essentiellement égale à un certain $r \geq 0$. Si $r > 0$, alors on choisit un sous-espace euclidien E et un point x tel que $U(E,x,r/2)$ est de mesure strictement positive pour la mesure image par $b \to E_b$ et on trouve donc une partie $P \subset B \times B$ de mesure strictement positive telle que pour tout $(b,b') \in P$, $d_{GH}(E_b, E_{b'}) < r/2$. Ainsi, $r = 0$.

Soit E, F deux sous espaces euclidiens tels que $d_{GH}(E,F) = 0$. Par définition, il existe deux suites (x_n) de E et (y_n) de F telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$d_H\left(E \cap \overline{B}(x_n, n), F \cap \overline{B}(y_n, n)\right) \leq 1/n$. Soit x une valeur d'adhérence de x_n dans $E \cup \partial E$. Si $x \in E$ alors $E = F$ et sinon $x \in \partial E \cap \partial F$.

Ainsi, pour presque tout b, b' ; $E_b = E_{b'}$ ou $\partial E_b \cap \partial E_{b'} \neq \emptyset$. Soit B^2 le sous-ensemble de $B \times B$ des paires (b, b') telles que $E_b = E_{b'}$. C'est un sous-ensemble mesurable et G-invariant de $B \times B$. S'il est de mesure pleine, cela signifie qu'il existe E_0 tel que pour presque tout b, $E_b = E_0$ et sinon cela signifie que pour presque tout b, b' ; $\partial E_b \cap \partial E_{b'} \neq \emptyset$. □

Démonstration du théorème 19.1. Par le lemme 7.5.(ii), Il existe $X \subset X_p$ fermé, convexe fermé, G-invariant et minimal pour ces conditions. Cet espace X possède une décomposition de Rham $X = E \times Y$ et l'action de G sur X est diagonale. De plus, Y se réalise comme un sous-espace convexe fermé de X_p. On retient alors les propriétés suivantes sur Y.

- L'espace Y est un espace de Hadamard de dimension télescopique finie.
- L'action de G sur Y est minimale.
- Le bord de Y est une partie de ∂X_p.

On remarque que l'action $G \curvearrowright Y$ n'est pas l'action $G \curvearrowright X_p$ restreinte à Y car ce dernier n'est pas, à priori, invariant. Cette action sur Y est donnée par $(g, y) \mapsto \pi_Y(gy)$. On remarque aussi que sur l'ensemble ∂Y, qui lui est un sous-ensemble invariant de ∂X_p, les deux actions (celle provenant de $G \curvearrowright X_p$ et celle provenant de $G \curvearrowright Y$) coïncident car Y et gY sont toujours parallèles.

Puisque Y est de dimension télescopique finie, le théorème 17.4 donne l'existence d'une section de fonctions de Busemann invariante ou d'un sous-champ euclidien invariant $\mathbf{E}$ du champ $\mathbf{Y}$ constant égal à Y au-dessus de B. Comme le bord ∂X_p muni de la topologie conique est homéomorphe à la sphère unité d'un espace de Hilbert séparable, une section de fonctions de Busemann invariante donne une application G-équivariante φ de B vers $\partial Y \subset \partial X_p$.

Supposons qu'il existe un sous-champ euclidien $\mathbf{E}$ non-trivial de $\mathbf{Y}$. On considère la structure d'immeuble sphérique à l'infini de ∂X_p comme un complexe dont les *cellules* ou *faces* (selon les terminologies) sont les intersections de chambres fermées. Notons C_b le plus petit sous-complexe de l'immeuble à l'infini $\mathcal{I}_p$ de X_p contenant E_b. On munit l'ensemble des sous-complexes de $\mathcal{I}_p$ de la topologie discrète.

Si C est un sous-complexe de $\mathcal{I}_p$ inclus dans un appartement, on appelle *type* de C la classe de C sous l'action de $\mathrm{Isom}(X_p)$. L'ensemble des types est fini car $\mathrm{Isom}(X_p)$ agit transitivement sur les appartements et un appartement est un complexe fini. Par le lemme 19.2, on sait que ou bien il existe E_0 tel que $E_b = E_0$ pour presque tout b ou bien pour presque tout (b, b'), $\partial E_b \cap \partial E_{b'} \neq \emptyset$. Dans le premier cas, $E \times E_0$ serait un sous-espace euclidien invariant pour l'action $G \curvearrowright X_p$ ce qui contredirait la non-élémentarité. Donc pour presque tout (b, b'), $C_b \cap C_{b'}$ est un complexe non vide. Le type est par définition invariant sous l'action de G. Par double ergodicité, il existe alors un type D tel

que pour presque tout (b, b'), $C_b \cap C_{b'}$ est de type D, ce que l'on notera $C_b \cap C_{b'} \simeq D$.

Montrons que l'application $(b, b') \mapsto C_b \cap C_{b'}$ est essentiellement constante. Pour cela posons $D_{b,b'} = C_b \cap C_{b'}$. Par le théorème de Fubini, il existe un ensemble de mesure pleine, B_0 de B tel que pour tout $b \in B_0$, il existe un ensemble B_b de mesure pleine de B tel que pour tout $b' \in B_b$, $D_{b,b'} \simeq D$. Fixons $b_1, b_2 \in B_0$ et notons $C_1 = C_{b_1}$ et $C_2 = C_{b_2}$. Les sous-complexes de C_1 étant en nombre fini, il existe B_1 de mesure strictement positive et D_1 sous-complexe de type D de C_1 tels que pour tout $b \in B_1$,

$$C_1 \cap C_b = D_1.$$

Comme pour presque $b, b' \in B_1$, $D_{b,b'} \simeq D$ et $(C_1 \cap C_b) \cap (C_1 \cap C'_b) \subseteq D_{b,b'}$, on a $C_b \cap C_{b'} = D_1$. Les sous complexes de C_2 sont aussi en nombre fini donc on trouve un sous-ensemble $B_2 \subseteq B_1$ de mesure strictement positive tel que pour tout $b, b' \in B_2$, $D_{b,b'} = C_2 \cap C_b = C_2 \cap C_{b'}$. Mais comme $C_1 \cap C_2$ est aussi de type D, on a $C_1 \cap C_2 = D_1$, c'est à dire que $b \mapsto D_{b_1,b}$ est essentiellement constante égale à D_1. Ainsi pour presque tout b, b' ; $D_{b_1,b} = D_1 = D_{b_1,b'}$ et comme $D_{b,b'}$ est de type D, on a bien $D_{b,b'} = D_1$. Ce complexe est donc invariant sous l'action de G.

Chaque cellule de D_1 est de diamètre plus petit que $\pi/4$ donc l'intersection de ∂Y avec chacune de ces cellules possède un unique centre circonscrit. Appelons f la moyenne des fonctions de Busemann associées à chacun de ces centres. C'est une fonction convexe continue invariante. Si f possède un minimum alors considérons Z l'ensemble des points où f atteint son minimum. Comme f est une somme finie de fonctions convexes, elle est aussi convexe. Par conséquent Z est un sous-ensemble fermé convexe G-invariant non vide. Par minimalité $Z = Y$, donc Y possède une somme finie de fonctions de Busemann constante donc en particulier affine. Une somme finie de fonctions convexes est affine si et seulement si chacune de ces fonctions convexes est affine. Ainsi, Y possède une fonction de Busemann affine et donc un facteur euclidien par le lemme 1.35. Ce qui est une contradiction.

Si f ne possède pas de minimum, l'intersection de ses sous-niveaux (non-vides) est une famille décroissante de parties convexe fermées invariantes de Y le centre des directions et alors invariant par la remarque 6.2. Ceci contredit la non-élémentarité.

Ainsi, on a l'existence de $\varphi\colon B \to \partial X_p$ mesurable G-équivariante. Quitte à remplacer $\varphi(b)$, on peut supposer que $\varphi(b)$ est le centre de la plus petite cellule contenant $\varphi(b)$.

□

Appendices

ANNEXE A

Applications de Furstenberg pour des espaces Gromov-hyperboliques

Cette annexe est le prolongement d'un travail réalisé en commun avec Nicolas Monod et a pour but de montrer le théorème suivant.

Théorème (Théorème 22.2)**.** *Soit G un groupe localement compact à base dénombrable, B un bord fort pour G et (Ω, ν) un G-espace ergodique où ν est une mesure de probabilité invariante. Soit X un espace hyperbolique dénombrable.*

Si $\alpha\colon G \times \Omega \to \mathrm{Isom}(X)$ est un cocycle mesurable non-élémentaire alors il existe une application mesurable $\phi\colon B \times \Omega \to \partial X$ G-équivariante. De plus, deux telles applications coïncident sur un ensemble de mesure pleine.

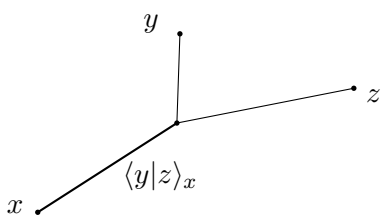
20. Espaces Gromov-hyperboliques

On reprend ici la définition d'hyperbolicité pour les espaces métriques donnée par M. Gromov dans [**Gro87**]. Cette définition est très générale et en particulier, il n'y a pas d'hypothèse de compacité locale ni d'existence de géodésique entre les points. Typiquement, l'orbite d'un groupe discret agissant par isométries sur un espace Gromov-hyperbolique sera encore Gromov-hyperbolique.

Soit (X, d) un espace métrique et $x \in X$ un point base. Le *produit de Gromov* entre y et z basé en x est le nombre positif

$$\langle y|z\rangle_x = \frac{1}{2}\left(d(y,x) + d(z,x) - d(y,z)\right)$$

et s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le point base x, on notera simplement $\langle y|z\rangle$.



Définition 20.1. Un espace métrique (X, d) est *δ-hyperbolique* pour $\delta \geq 0$ si pour tout $x_0, x, y, z \in X$

$$\langle x|z\rangle_{x_0} \geq \min\{\langle x|y\rangle_{x_0}, \langle y|z\rangle_{x_0}\} - \delta. \tag{20.1}$$

S'il existe $\delta \geq 0$ tel que (X, d) est δ-hyperbolique, on dit que (X, d) est *Gromov-hyperbolique*.

Soit (X, d) un espace Gromov-hyperbolique et (x_n) une suite de points de X. On dit que la suite (x_n) *part à l'infini* si $d(x_0, x_n) \to \infty$ et deux suites $(x_n), (y_n)$ qui partent à l'infini sont équivalentes si $\langle x_n|y_m\rangle \to \infty$ quand $n, m \to \infty$. Cette définition ne dépend pas du point base choisi et définit bien une relation d'équivalence. Le *bord à l'infini* est alors l'ensemble des classes d'équivalence de suites qui partent à l'infini. On note cet ensemble ∂X. Si une suite (x_n), qui part à l'infini, est dans la classe $\xi \in \partial X$, on dit que x_n *converge* vers ξ.

On étend le produit de Gromov en définissant, pour $\xi, \eta \in \partial X$

$$\langle \xi|\eta\rangle_{x_0} = \sup \liminf_{n,m\to\infty} \langle x_n|y_m\rangle_{x_0}$$

où le supremum est pris sur toutes les suites (x_n) convergeant vers ξ et toutes les suites (y_m) convergeant vers η. On définit aussi pour $\xi \in \partial X$ et $y \in X$,

$$\langle \xi|y\rangle_{x_0} = \sup \liminf_{n\to\infty} \langle x_n|y\rangle_{x_0}$$

en prenant de nouveau le supremum sur toutes les suites (x_n) convergeant vers ξ. Le chapitre 7.2 de [**GdlH90**] donne plus de détails.

Lemme 20.2. *Soit (X, d) un espace δ-hyperbolique et ξ, η, ζ des points de ∂X. Si (x_n) et (y_m) convergent respectivement vers ξ et η alors*

$$\liminf \langle x_n|y_m\rangle_{x_0} + 2\delta \geq \langle \xi|\eta\rangle_{x_0} \geq \liminf \langle x_n|y_m\rangle_{x_0}. \tag{20.2}$$

et

$$\langle \xi|\eta\rangle_{x_0} \geq \min(\langle \xi|\zeta\rangle_{x_0}, \langle \zeta|\eta\rangle_{x_0}) - 3\delta. \tag{20.3}$$

Démonstration. Voir le chapitre 7.2 de [**GdlH90**]. □

On définit une topologie sur ∂X grâce à la structure uniforme obtenue par le système d'entourages $\{V_l\}_{l\in\mathbb{R}}$ où $V_l = \{(\xi, \eta)|\ \langle \xi|\eta\rangle \geq l\}$. Cette topologie ne dépend pas du point base choisi. On munit ∂X de la structure borélienne associée. On aura besoin d'une structure borélienne sur l'ensemble $\mathcal{P}_{1,2}(\partial X)$ des parties du bord de cardinal 1 ou 2. De même, on définit $\mathcal{P}_1(\partial X)$ les parties à exactement 1 élément et $\mathcal{P}_2(\partial X)$ les parties à exactement 2 éléments. On définit

$$\tilde{V}_{y,l} = \left\{p \in \mathcal{P}_{1,2}(\partial X)|\ p \cap V_{y,l} \neq \emptyset\right\} \quad \text{avec} \quad V_{y,l} = \left\{\xi \in \partial X|\ \langle \xi|y\rangle \geq l\right\}$$

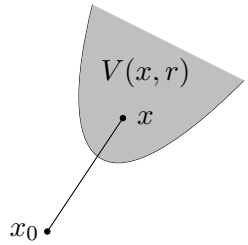
où $y \in X$ et $l \in \mathbb{N}$. On munit alors $\mathcal{P}_{1,2}(\partial X)$ de la structure borélienne associée.

Lemme 20.3. *Si X est un espace Gromov-hyperbolique dénombrable alors la structure borélienne sur $\mathcal{P}_{1,2}(\partial X)$ est à base dénombrable et $\mathcal{P}_1(\partial X)$ est alors une partie mesurable. La structure borélienne restreinte à $\mathcal{P}_1(\partial X)$ coïncide avec celle de ∂X après identification $\partial X \simeq \mathcal{P}_1(\partial X)$.*

Pour un point base x_0 et un réel positif $r \geq 0$, on définit *l'ombre*, $V(x,r)$, de taille r dans la direction de x depuis x_0 par

$$V(x,r) = \{y \in X |\ \langle x|y\rangle_{x_0} > r\}.$$

On y pense comme un analogue à l'infini de boule. Cette notion a été introduite par D. Sullivan dans [**Sul79**] à la différence qu'ici, les ensembles $V(x,r)$ sont des sous-ensembles de X et non de ∂X. On remarquera bien que $\tilde{V}_{y,l}$ est en revanche une partie de ∂X.



Les ombres dépendent implicitement du point base choisi. Le lemme suivant décrit comment les isométries transforment les ombres. Dans la suite (X,d) est un espace δ-hyperbolique dont on a choisi un point base x_0.

Lemme 20.4. *Pour $x \in X$, $\gamma \in \mathrm{Isom}(X)$ et $r, r' \geq 0$ tels que $r \geq r' + d(\gamma \cdot x_0, x_0)$, on a $\gamma V(x,r) \subset V(\gamma x, r')$.*

Démonstration. Pour $z \in X$ on a l'inégalité

$$\langle \gamma x|z\rangle_{x_0} = \langle x|\gamma^{-1}z\rangle_{\gamma^{-1}x_0} \geq \langle x|\gamma^{-1}z\rangle_{x_0} - d(\gamma^{-1}x_0, x_0).$$

□

Lemme 20.5. *Soit F un ensemble fini de trois points ou plus de ∂X et*

$$f\colon x \mapsto \sum_{\alpha\neq\beta;\ \alpha,\beta\in F} \langle \alpha|\beta\rangle_x\ .$$

Alors l'ensemble $C = \{x \in X |\ f(x) - \inf f \leq 1\}$ est une partie bornée.

Démonstration. On montre que la fonction $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{\alpha\neq\beta}\langle\alpha|\beta\rangle_x$, où α, β parcourent F est propre. Pour cela il suffit de montrer que f satisfait l'inégalité $f(x) + f(y) \geq d(x,y) - 2\delta$ pour tout $x, y \in X$ puisqu'ainsi, les sous-niveaux de f seront bornés. Puisque $|F| \geq 3$, il suffit de prouver la même inégalité pour $f'(x) = \langle a|b\rangle_x + \langle b|c\rangle_x + \langle c|a\rangle_x$ avec a, b, c quelconques dans X. Sans perte de généralité, on peut supposer $\langle a|y\rangle_x \geq \langle b|y\rangle_x, \langle c|y\rangle_x$. On a alors

$$f'(x) \geq \langle a|b\rangle_x + \langle c|a\rangle_x \geq \langle b|y\rangle_x + \langle c|y\rangle_x - 2\delta$$

en insérant y dans les produits. En ajoutant $f'(y) \geq \langle b|c\rangle_y$ et en développant les produits de Gromov, on obtient

$$f'(x) + f'(y) \geq d(x,y) + \langle b|c\rangle_x - 2\delta \geq d(x,y) - 2\delta.$$

□

21. Moyennes

Quand X est un espace Gromov-hyperbolique géodésique propre, il est courant de considérer l'espace des mesures de probabilités sur ∂X comme c'est le cas dans [**BM96**] par exemple. Dans notre contexte plus général, on remplace cet espace de mesures de probabilités par l'ensemble des moyennes sur X. Pour un espace dénombrable X, une *moyenne* est un élément positif de la sphère unité du dual topologique de $\ell^\infty(X)$. Par définition, une moyenne μ est une forme linéaire sur $\ell^\infty(X)$ telle que si $f \geq 0$ alors $\mu(f) \geq 0$ et $\mu(\mathbf{1}_X) = 1$. L'ensemble des moyennes sur X, noté $\mathcal{M}(X)$, est un sous espace convexe et compact de $\ell^\infty(X)^*$ pour la topologie faible-*. On pense aux moyennes comme à des mesures de probabilité « finiment additive » sur X en définissant $\mu(Y) = \mu(\mathbf{1}_Y)$ pour $Y \subseteq X$.

Si x_0 est un point base fixé d'un espace Gromov-hyperbolique X, il existe une identification classique entre X et un sous-espace de l'espace des fonctions continues et bornées sur X. A chaque point x, on associe la fonction $\beta(x)\colon y \mapsto d(y,x) - d(y,x_0)$ qui est continue et bornée. Si μ est une moyenne, on définit $f_\mu(x) = \mu(\beta(x))$. L'application $\mu \mapsto f_\mu$ est une fonction continue de $\mathcal{M}(X)$ vers l'espace vectoriel localement convexe des fonctions continues sur X s'annulant en x_0. Les lemmes et la proposition qui suivent, montrent qu'une moyenne sur un espace Gromov-hyperbolique se trouve devant l'alternative suivante : Ou bien la « masse » est distribuée autour d'une partie bornée de X ou bien la masse se répartit à l'infini sur un sous-espace de ∂X composé d'au plus deux points.

Une fonction f d'un espace métrique (X,d) est *propre* si les ensembles $f^{-1}((-\infty,\alpha])$ sont bornés pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Lemme 21.1. *Soit μ une moyenne d'un espace Gromov-hyperbolique X. S'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in X$, $\mu(V(x,r)) < 2/5$ alors f_μ est une fonction propre.*

Démonstration. On decompose $f_\mu(x)$:

$$f_\mu(x) = \mu(\beta_x \cdot \mathbf{1}_{V(x,r)}) + \mu(\beta_x \cdot \mathbf{1}_{X\setminus V(x,r)}).$$

Si $y \in X \setminus V(x,r)$ alors $d(x,x_0) + d(y,x_0) - d(x,y) < 2r$ et ainsi $\beta_x(y) > d(x,x_0) - 2r$. Donc, $\mu(\beta_x \cdot \mathbf{1}_{X\setminus V(x,r)}) > 3/5 d(x,x_0) - 6/5 r$.
Pour $y \in X$ on a $d(y,x) - d(y,x_0) \geq -d(x,x_0)$ et $\mu(\beta_x \cdot \mathbf{1}_{V(x,r)}) \geq -2/5 d(x,x_0)$. Finalement, $f_\mu(x) \geq 1/5\ d(x,x_0) - 6r/5$. □

Proposition 21.2. *Soit μ une moyenne d'un espace Gromov-hyperbolique X et (x_n) une suite de points de X telle que $\mu(V(x_n,n)) \geq 2/5$ pour tout n. Alors il existe une sous-suite de (x_n) convergeant vers un point du bord ∂X. De plus, il existe au plus deux valeurs d'adhérence de ∂X de (x_n) dans ∂X.*

Démonstration. On note $V^n = V(x_n,n)$ et on observe que l'inegalité (20.1) implique

$$\langle x_n | x_m \rangle \geq \min(n,m) - \delta \quad \text{si} \quad V^n \cap V^m \neq \emptyset.$$

On commence par montrer qu'il existe une extraction $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\mu(V^{n_k} \cap V^{n_{k'}}) \geq 1/15$ pour tout k, k'. Par l'absurde, on suppose qu'il existe une suite fini $n_1 < \ldots < n_K$

avec la propriété souhaitée mais qui ne peut être prolongée (au pire, $K = 1$). Ce qui signifie que pour $i > n_K$ il existe $1 \leq k(i) \leq K$ avec $\mu(V^i \cap V^{n_{k(i)}}) < 1/15$. Pour $1 \leq k \leq K$, l'ensemble $\{i|\ k(i) = k\}$ est infini. On peut alors prendre cet ensemble comme extraction puisque l'on vérifie que $\mu(V^i \cap V^j) \geq 1/15$ pour $k(i) = k(j)$.

Il suit alors que $\{x_{n_k}\}$ converge à l'infini car $V^{n_k} \cap V^{n_{k'}} \neq \emptyset$ pour tous k, k'. Finalement, soit $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \partial X$ tels qu'il existe des extractions $x_{n_{i,k}} \to \xi_i$ de $\{x_n\}$. Pour tout k, les trois ensembles $V^{n_{i,k}}$ ne peuvent être disjoints. Alors quitte à réextraire et à réordonner les ξ_i, on peut supposer que $V^{n_{1,k}} \cap V^{n_{2,k}} \neq \emptyset$ pour tout k. Ce qui implique $\xi_1 = \xi_2$. □

Lemme 21.3. *Soit X, μ et (x_n) comme dans la proposition 21.2. Supposons que $x_n \to \xi \in \partial X$. Si (x'_n) est une suite équivalente à (x_n) alors il existe une sous-suite (x'_{n_k}) telle que $\mu(V(x_{n_k}, k)) \geq 2/5$ pour tout k.*

Démonstration. Pour tout k, comme les suites sont équivalentes, on peut choisir n et n_k tels que $\langle x_n | x'_{n_k} \rangle \geq k + \delta$ et $n \geq k + \delta$. Pour tout $z \in V(x_n, n)$ on a

$$\langle z | x'_{n_k} \rangle \geq \min\left(\langle z | x_n \rangle, \langle x_n | x'_{n_k} \rangle\right) - \delta \geq k$$

et ainsi $V(x_n, n) \subseteq V(x'_{n_k}, k)$, ce qui fournit la borne souhaitée. □

22. Applications de Furstenberg

Soit G un groupe localement compact, Ω un G-espace et X un espace hyperbolique. Une application $\alpha\colon G \times \Omega \to \mathrm{Isom}(X)$ est un *cocycle mesurable* si pour tout g, g' et presque tout ω

$$\alpha(gg', \omega) = \alpha(g, g'\omega)\alpha(g', \omega)$$

et pour tout $x \in X$, l'application orbitale

$$\begin{array}{ccc} G \times \Omega & \to & X \\ (g\omega) & \mapsto & \alpha(g, \omega)x \end{array}$$

est mesurable. Un cocycle mesurable α est *élémentaire* s'il existe un sous champ $\mathbf{C} = (C_\omega)_{\omega \in \Omega}$ borné du champ constant égal à X ou s'il existe une application $\phi\colon \Omega \to \partial X$ mesurable et G-équivariante (c'est à dire $\phi(g\omega) = \alpha(g, \omega)\phi(\omega)$ pour tout g et presque tout ω) ou s'il existe une application $\phi\colon \Omega \to \mathcal{P}_2(\partial X)$ mesurable et G-équivariante. Pour les généralités sur les champs (mesurables), on se référera à la section 16.

Remarque 22.1. Dans le cas où X est dénombrable, la famille de sous-espaces fermés (C_ω) est un sous-champ du champ constant X si pour tout $x \in X$, $\{\omega \in \Omega|\ x \in C_\omega\}$ est une partie mesurable de Ω. En effet, dans ce cas, en munissant X d'un ordre provenant d'une bijection $X \simeq \mathbb{N}$, on peut définir une famille fondamentale en définissant $x^1_\omega = \inf\{x \in C_\omega\}$ puis $x^2_\omega = \inf\{x \in C_\omega \setminus \{x^1_\omega\}\}$ et ainsi de suite jusqu'à exhaustion des C_ω.

Théorème 22.2. *Soit G un groupe localement compact à base dénombrable, B un bord fort pour G et (Ω, ν) un G-espace ergodique où ν est une mesure de probabilité invariante. Soit X un espace hyperbolique dénombrable.*

Si $\alpha\colon G \times \Omega \to \mathrm{Isom}(X)$ est un cocycle mesurable non-élémentaire alors il existe une application mesurable $\phi\colon B \times \Omega \to \partial X$ G-équivariante. De plus, deux telles applications coïncident sur un ensemble de mesure pleine.

Une situation comme dans l'énoncé se présente lorsque Γ est un réseau de G, B un bord de Poisson associé à une marche aléatoire sur G symétrique, non dégénérée et étalée. Si X_0 est un espace hyperbolique sur lequel Γ agit par isométries via le morphisme $\pi\colon \Gamma \to \mathrm{Isom}(X_0)$, on choisit pour X une orbite de Γ. Dans ce cas, Ω est l'espace de probabilité G/Γ, on appelera β le cocycle de $G \times \Omega$ dans Γ correspondant au choix d'une section mesurable de la projection de G sur G/Γ. Alors α est le cocycle $\pi \circ \beta$. Cette construction est classique pour obtenir des résultats de superrigidité.

Démonstration. Par moyennabilité de l'action diagonale de G sur $\Omega \times B$ (puisque celle sur B l'est), il existe une application $(\omega, b) \mapsto \mu^b_\omega$ telle que pour presque tout (ω, b), $\mu^b_\omega \in \mathcal{M}(X)$, pour tout $g \in G$ et presque tout (ω, b),

$$\mu^{gb}_{g\omega} = \alpha(g, \omega)_* \mu^b_\omega$$

et $(\omega, b) \mapsto \mu^b_\omega$ est « faiblement mesurable » dans le sens où pour tout $x \in X, n \in \mathbb{N}$, $(\omega, b) \mapsto \mu^b_\omega(V(x, n))$ et $(\omega, b) \mapsto f_{\mu^b_\omega}$ sont des applications de $\Omega \times B$ vers $\mathbb{R}$ mesurables pour la structure borélienne produit sur $\Omega \times B$ et la structure borélienne usuelle sur $\mathbb{R}$. Posons

$$r(b, \omega) = \sup_{x \in X} \{r \in \mathbb{N} |\ \mu^b_\omega(V(x, r)) \geq 2/5\}.$$

L'application $(b, \omega) \mapsto r(\omega, b) \in \overline{\mathbb{N}}$ est mesurable et G-invariante. Par ergodicité de $G \curvearrowright \Omega \times B$ (voir le lemme 15.4), il existe r tel que pour presque tout (ω, b), $r(\omega, b) = r$.

Premier cas : Si r est fini alors posons $f^b_\omega = f_{\mu^b_\omega}$ comme dans la section 21. L'application $(\omega, b) \mapsto \inf_{x \in X} f^b_\omega(x)$ est mesurable car X est dénombrable. Posons

$$C^b_\omega = \{x \in X |\ f^b_\omega(x) \leq 1 + \inf f^b_\omega\}.$$

Pour presque tout (ω, b), C^b_ω est non-vide, borné (grâce au lemme 21.1) et pour tout g et presque tout (ω, b)

$$C^{gb}_{g\omega} = \alpha(g, \omega) C^b_\omega.$$

L'application $(\omega, b) \mapsto \mathrm{diam}(C^b_\omega)$ est alors mesurable et G-invariante donc constante égale à un certain D_1. Par la proposition 15.4, l'action diagonale $G \curvearrowright B \times B \times \Omega$ est encore ergodique et donc l'application mesurable

$$\begin{array}{rcl} B \times B \times \Omega & \to & \mathbb{R} \\ (b, b', \omega) & \mapsto & d\left(C^b_\omega, C^{b'}_\omega\right) \end{array}$$

est G-invariante donc constante égale à un certain D_2. Alors pour $\omega \in \Omega$, définissons $B^1_\omega = \{b \in B |\ \mathrm{diam}(C^b_\omega) = D_1\}$ et

$$B^2_\omega = \left\{(b, b') \in B^1_\omega \times B^1_\omega \,\middle|\, d\left(C^b_\omega, C^{b'}_\omega\right) = D_2\right\}.$$

Finalement posons

$$C_\omega = \bigcup_{(b,b') \in B^2_\omega} C^b_\omega \cup C^{b'}_\omega.$$

Alors pour presque tout ω, $\mathrm{diam}(C_\omega) \leq D_2 + 2D_1$ et pour tout $g \in G$ et presque tout ω

$$C_{g\omega} = \alpha(g, \omega) C_\omega.$$

Deuxième cas : Si r est infini, alors pour presque tout (ω, b), définissons

$$p_\omega^b = \left\{\xi \in \partial X |\ \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ x_n \to \xi,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \mu_\omega^b(V(x_n, n)) \geq 2/5\right\}.$$

Comme $r = +\infty$, pour presque tout (ω, b), p_ω^b est non-vide et la proposition 21.2 assure que $p_\omega^b \in \mathcal{P}_{1,2}(\partial X)$. Si on note $\Phi(\omega, b) = p_\omega^b$ alors

$$\Phi^{-1}(\tilde{V}_{y,l}) = \left\{(\omega, b) \in \Omega \times B |\ \forall\, n\, \exists\, x \in X \text{ avec } \langle x|y\rangle \geq l - 1/n \text{ et } \mu_\omega^b(V(x, n)) \geq 2/5\right\}.$$

Cette expression montre que $\Phi\colon \Omega \times B \to \mathcal{P}_{1,2}(\partial X)$ est mesurable et le lemme 20.4 montre que Φ est équivariante.

L'ensemble mesurable $\Phi^{-1}(\mathcal{P}_1(\partial X))$ est une partie mesurable et G-invariante de $\Omega \times B$. De nouveau, par ergodicité, cette partie est de mesure pleine ou nulle. Si elle est de mesure pleine, on définit $\phi(\omega, b)$ comme étant l'unique élément de $\Phi(\omega, b)$. Alors $\phi\colon \Omega \times B \to \partial X$ est mesurable et G équivariante comme annoncé dans l'énoncé du théorème.

Si pour presque tout (ω, b), $\#p_\omega^b = 2$ alors la proposition 22.3, qui suit, montre que le cocycle est élémentaire. De même, s'il existe deux applications $\phi, \phi'\colon \Omega \times B \to \partial X$, toutes les deux mesurables, G-équivariantes telles que $\{(\omega, b) \in \Omega \times B |\ \phi(\omega, b) = \phi'(\omega, b)\}$ n'est pas de mesure pleine alors par ergodicité, cet ensemble est de mesure nulle. On applique de nouveau la proposition 22.3 à l'application $\omega \mapsto (\phi(\omega), \phi'(\omega))$, ce qui montre qu'en fait le cocycle était élémentaire. □

Proposition 22.3. *Sous les hypothèses du théorème 22.2, s'il existe une application mesurable et G-équivariante Φ de $\Omega \times B$ dans $\mathcal{P}_2(\partial X)$ alors le cocycle est élémentaire.*

Démonstration. Comme précédemment, on notera $p_\omega^b = \Phi(\omega, b)$. L'hypothèse est alors que pour presque tout (ω, b), $\#p_\omega^b = 2$. Nous allons montrer que cette hypothèse implique que le cocycle α est élémentaire. Pour cela, définissons

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathcal{P}_2(\partial X) \times \mathcal{P}_2(\partial X) & \to & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ & (p, p') & \mapsto & \inf_{x\in X_0} [p; p']_x \end{array}$$

où $[p; p']_x = [\xi, \eta; \xi', \eta']_x = |\langle\xi|\xi'\rangle_x + \langle\eta|\eta'\rangle_x - \langle\xi|\eta'\rangle_x - \langle\eta|\xi'\rangle_x|$ (auquel on pense comme un analogue logarithmique du birapport classique) pour $(p, p') = (\{\xi, \eta\}, \{\xi', \eta'\})$. On observe que $\psi(p, p') = +\infty$ si et seulement si $p \cap p' \neq \emptyset$ et on a pour tous x et y dans X,

$$\big|\, [p; p']_x - [p; p']_y \,\big| \leq 12\delta. \tag{22.1}$$

Pour démontrer cette inégalité, choisissons des suites $(x_n), (x'_n), (y_n)$ et (y'_n) convergeant respectivement vers ξ, ξ', η et η' et telles que $\langle\xi|\xi'\rangle_x = \lim\langle x_n|x'_n\rangle_x$, $\langle\eta|\eta'\rangle_x = \lim\langle y_n|y'_n\rangle_x$. Quitte à extraire des sous-suites, toutes les limites inférieurs : $\liminf\langle x_n|y'_n\rangle_x$, $\liminf\langle y_n|x'_n\rangle_x$, $\liminf\langle x_n|y'_n\rangle_y$, $\liminf\langle y_n|y'_n\rangle_y$, $\liminf\langle x_n|y'_n\rangle_y$ et $\liminf\langle y_n|x'_n\rangle_y$ sont des limites classiques. L'inégalité du triangle renversée donne,

$$\begin{aligned} \big|\, [\xi, \eta; \xi', \eta']_x - [\xi, \eta; \xi', \eta']_y \,\big| \leq \big|\, &\langle\xi|\xi'\rangle_x + \langle\eta|\eta'\rangle_x - \langle\xi|\eta'\rangle_x - \langle\eta|\xi'\rangle_x \\ &- \langle\xi|\xi'\rangle_y - \langle\eta|\eta'\rangle_y + \langle\xi|\eta'\rangle_y + \langle\eta|\xi'\rangle_y \,\big|. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (20.2) pour les six derniers produits de Gromov, on obtient

$$\begin{aligned}\big|\,[\xi,\eta;\xi',\eta']_x - [\xi,\eta;\xi',\eta']_y\,\big| \leq \lim \big|\,&\langle x_n|x'_n\rangle_x + \langle y_n|y'_n\rangle_x - \langle x_n|y'_n\rangle_x - \langle y_n|x'_n\rangle_x \\ &- \langle x_n|x'_n\rangle_y - \langle y_n|y'_n\rangle_y + \langle x_n|y'_n\rangle_y + \langle x'_n|y_n\rangle_y\,\big| + 12\delta.\end{aligned}$$

En développant les produits de Gromov, on voit que le terme en valeur absolue à droite est nul.

De même, en utilisant quatre fois l'inégalité (20.3), on obtient, pour $p, p', p" \in \mathcal{P}_2(\partial X)$,

$$\psi(p,p'') \geq \psi(p,p') + \psi(p',p'') - 12\delta. \tag{22.2}$$

On définit alors

$$\begin{array}{rccc} F: & \Omega\times B\times B & \to & \mathbb{R}\cup\{+\infty\} \\ & (\omega,b,b') & \mapsto & \psi(\Phi(\omega,b),\Phi(\omega,b')). \end{array}$$

On observe que F est mesurable et, grâce à l'inégalité (22.1), que $F^{-1}(\{+\infty\})$ est G-invariant pour l'action diagonale $G \curvearrowright \Omega\times B\times B$. Ainsi par ergodicité de $G \curvearrowright \Omega\times B\times B$ (proposition 15.4), l'ensemble $F^{-1}(\{+\infty\})$ est une partie de mesure pleine ou nulle pour la mesure produit m, sur l'ensemble $\Sigma = \Omega\times B\times B$. Supposons par l'absurde que $m(F^{-1}(\{+\infty\})) = 0$. Par σ-additivité de la mesure m, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $m(F^{-1}([n,n+1])) > 0$. Posons, $\Sigma_n = F^{-1}([n,n+1])$ et $\Sigma' = G\cdot\Sigma_n = G\cdot F^{-1}([n,n+1])$. Ce dernier ensemble, Σ', est mesurable, de mesure strictement positive et G-invariant. De nouveau, par ergodicité de $G \curvearrowright \Sigma$, $m(\Sigma\setminus\Sigma') = 0$. L'inégalité (22.1) montre que $F(\Sigma') \subset [n-12\delta, n+1+12\delta]$. Comme la structure sur $\mathcal{P}_{1,2}(\partial X)$ est à base dénombrable (voir lemme 20.3), il existe une famille dénombrable $(p_i)_{i\in I}$ telle que

$$\mathcal{P}_{1,2} = \bigcup_{i\in I}\{p\in\mathcal{P}_{1,2}|\ \psi(p,p_i) > n+1+24\delta\}\,.$$

Ainsi, il existe $i \in I$ telle que $\Phi^{-1}(\{p\in\mathcal{P}_{1,2}|\ \psi(p,p_i) > n+1+24\delta\}) > 0$ et donc l'ensemble $\{(\omega,b,b') \in \Sigma|\ \psi(p^b_\omega, pi) > n+1+24\delta$ et $\psi(p^{b'}_\omega, pi) > n+1+24\delta\}$ est aussi de mesure strictement positive. Mais alors l'inégalité (22.2) et l'inclusion $F(\Sigma') \subseteq [n-12\delta, n+1+12\delta]$ donnent une contradiction. Ainsi, Pour presque tout $(\omega,b,b') \in \Sigma$, $F(\omega,b,b') = +\infty$, ce qui signifie exactement que pour presque tout (ω,b,b'), $p^b_\omega \cap p^{b'}_\omega \neq \emptyset$.

L'application $(\omega,b,b') \mapsto \#(p^b_\omega \cap p^{b'}_\omega)$ de Σ dans $\{1,2\}$ est mesurable est G-invariante donc constante. Si la valeur essentielle de cette application est 2, alors en notant λ la mesure sur B, l'application

$$\phi\colon \omega \mapsto \Big\{\xi\in\partial X \mid \forall n\in\mathbb{N}\,,\ \lambda\Big(B\setminus\{b\in B|\ p^b_\omega \in V_{\xi,n}\}\Big) = 0\Big\}\,.$$

est mesurable G-équivariante de Ω dans $\mathcal{P}_2(\partial X)$. Ce qui est un cas d'élémentarité.

Si 1 est la valeur essentielle de $(\omega,b,b') \mapsto \#(p^b_\omega \cap p^{b'}_\omega)$ alors notons

$$P_\omega = \Big\{\xi\in\partial X \mid \forall n\in\mathbb{N}\,,\ \lambda\Big(B\setminus\{b\in B|\ p^b_\omega \in V_{\xi,n}\}\Big) = 0\Big\}\,.$$

Pour presque tout ω, P_ω est de cardinal 0 ou 1. Si c'est 1 alors comme ci-dessus, on définit de nouveau

$$\phi\colon \omega \mapsto \left\{\xi \in \partial X \mid \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \lambda\left(B \setminus \{b \in B|\ p_\omega^b \in V_{\xi,n}\}\right) = 0\right\}.$$

est mesurable G-équivariante de Ω dans $\mathcal{P}_1(\partial X)$. Ce qui est un autre cas d'élémentarité.

Supposons maintenant que le cardinal de P_ω est essentiellement 1 et considérons

$$F_\omega = \left\{\xi \in \partial X \mid \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \lambda\left(\{b \in B|\ p_\omega^b \in V_{\xi,n}\}\right) > 0\right\}.$$

On montre par l'absurde que F_ω est de cardinal inférieur à 3 pour presque tout ω. Supposons par l'absurde que l'on trouve un ensemble de mesure strictement positive, Ω_1 tel que pour tout $\omega \in \Omega_1$, $\#F_\omega \geq 4$. Comme pour presque tout (ω, b, b'), $p_\omega^b \cap p_\omega^{b'} \neq \emptyset$, le théorème de Fubini donne l'existence de $\Omega' \subset \Omega_1$ de mesure strictement positive tel que pour $\omega \in \Omega'$ on trouve $B_0 \subset B$ tel que pour tout $b \in B_0$, pour presque tout b', $p_\omega^b \cap p_\omega^{b'} \neq \emptyset$.

Fixons $\omega \in \Omega'$ et B_0 associé. Soit $\{\xi_i\}_{i=1\ldots4}$ dans P_ω et $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $i \neq j$, $\langle \xi_i | \xi_j \rangle > n$. On note alors $V^i = V_{\xi_i,n}$ et on remarque que $i \neq j$ implique $V^i \cap V^j = \emptyset$. Par un raisonnement itéré du théorème de Fubini, on trouve

- $b_1 \in B_0$ tel que $p_\omega^{b_1} \in V^1$,
- $b_2 \in B_0$ tel que $p_\omega^{b_2} \in V^2$ et $\#(p_\omega^{b_1} \cap p_\omega^{b_2}) = 1$,
- $b_3 \in B_0$ tel que $p_\omega^{b_3} \in V^3$, $\#(p_\omega^{b_3} \cap p_\omega^{b_i}) = 1$ pour $i = 1, 2$ et $p_\omega^{b_1} \cap p_\omega^{b_2} \cap p_\omega^{b_3} = \emptyset$,
- $b_4 \in B_0$ tel que $p_\omega^{b_4} \in V^4$, $\#(p_\omega^{b_4} \cap p_\omega^{b_i}) = 1$ pour $i = 1, 2, 3$.

Si $p_\omega^{b_1} = \{u, v\}$ alors $p_\omega^{b_2} = \{v, w\}$ avec $w \neq u$ et alors nécessairement $p_\omega^{b_3} = \{u, w\}$ et $u, v, w \in V^1 \cup V^2 \cup V^3$. Dans ce cas, $p_\omega^{b_4}$ est constitué d'un point de V^4 et d'un autre point qui devrait être à la fois dans V^1, V^2 et V^3 ce qui est absurde.

Ainsi on a montré que pour presque tout ω, F_ω est de cardinal inférieur à 3. Par ergodicité, cette valeur est essentiellement constante. Si pour presque tout ω, $\#F_\omega \geq 2$, on retrouve un cas d'élémentarité. Si c'est 3 alors la partie C_ω associée à F_ω par le lemme 20.5 fournit un sous-champ G-invariant borné de X.

□

ANNEXE B

Dynamique des isométries

Cette section a pour but de rassembler différents résultats souvent connus mais éparpillés, sur le comportement d'une isométrie d'un espace CAT(0). C'est-à-dire que l'on étudie l'action du groupe le plus simple qui soit, un groupe cyclique. Certains de ces résultats sont complétés ou illustrés. On pourra en particulier se référer à [**Kar05**], qui dans un cadre un peu différent, s'intéresse à certaines questions communes à celles traitées ici.

23. Isométries d'un espace CAT(0)

Soit X un espace CAT(0) et γ une isométrie de X, la *longueur de déplacement* de γ est $|\gamma| = \inf_{x\in X} d_\gamma(x)$ où $d_\gamma(x) = d(\gamma x, x)$. Cette longueur de déplacement peut aussi s'interpréter comme un déplacement asymptotique puisque pour tout $x \in X$,

$$|\gamma| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\, d(\gamma^n x, x)$$

(voir l'exercice II.6.6.(1) de [**BH99**]). Il existe deux dichotomies pour classer les isométries. Cette longueur de déplacement peut-être nulle ou pas, ce qui donne lieu aux isométries *neutres* et *balistiques*. De même, l'infimum de la définition peut être atteint ou pas, ce qui donne lieu aux isométries *semi-simples* et aux isométries *paraboliques*. On résume la terminologie avec le tableau suivant.

	semi-simple $\lvert\gamma\rvert$ est atteint	parabolique $\lvert\gamma\rvert$ n'est pas atteint
neutre $\lvert\gamma\rvert = 0$	elliptique	parabolique neutre
balistique $\lvert\gamma\rvert > 0$	hyperbolique	parabolique balistique

Pour comprendre le système dynamique associé à une isométrie, on va attacher à cette isométrie une partie de $X \cup \partial X$ invariante qui devrait permettre de faciliter cette compréhension de la dynamique.

23.1. Isométries semi-simples.

Isométries Elliptiques. Les isométries les plus simples sont les isométries elliptiques, ce sont celles qui fixent un point.

Isométries hyperboliques. Les isométries hyperboliques ont aussi un comportement assez simple sur l'ensemble $\mathrm{Min}(\gamma) = \{x \in X |\ d(\gamma x, x) = |\gamma|\}$.

Proposition 23.1 (Théorème II.6.8 de [**BH99**]). *Soit X un espace* CAT(0) *complet et γ une isométrie hyperbolique. Alors* $\mathrm{Min}(\gamma)$ *est une partie convexe fermée isométrique à un produit $Y \times \mathbb{R}$. L'isométrie γ préserve cette décomposition en agissant trivialement sur Y et agit par translation de longueur $|\gamma|$ sur $\mathbb{R}$.*

23.2. Isométries paraboliques. Dans le cas où X est propre, alors toute isométrie parabolique fixe un point à l'infini et le corollaire 3.3 de [**CM09b**] précise la situation. La proposition 23.4 est un énoncé analogue au corollaire 3.3 de *loc. cit.* où l'hypothèse de compacité locale est remplacée par celle de dimension télescopique finie. Elle complète le corollaire 1.5 de [**CL10a**] et se réduit à remarquer que les arguments du corollaire 3.3 de [**CM09b**] fonctionnent aussi ici (voir aussi [**FNS06**] dans le cas localement compact et la proposition 10.5 de [**Buy98**]).

On aura besoin des deux lemmes suivants concernant les isométries balistiques.

Lemme 23.2. *Soit X un espace de Hadamard et γ une isométrie balistique. Alors, il existe deux points de ∂X, ω_γ et $\omega_{\gamma^{-1}}$, γ-invariants tels que :*

$$\forall x \in X,\ \gamma^{\pm n} x \to_{n \longrightarrow \infty} \omega_{\gamma^{\pm 1}}$$

De plus, $\angle(\omega_\gamma, \omega_{\gamma^{-1}}) = \pi$.

Démonstration. C'est un cas particulier du résultat principal de [**KM99**] où le groupe est $\mathbb{Z}$ et la marche aléatoire est associée à la mesure de Dirac en 1. On en redonne la preuve dans ce cas particulier. Fixons un point $x \in X$ et posons $\varepsilon(n) = d(\gamma^n x, x)/n - |\gamma| n$ pour $n > 0$. On a $\lim_{n\to\infty} \varepsilon(n)/n = 0$. La formule

$$\begin{aligned}
\cos(\overline{\angle}_x(\gamma^n x, \gamma^m x)) &= \frac{d(\gamma^n x, x)^2 + d(\gamma^m x, x)^2 - d(\gamma^m x, \gamma^n x)^2}{2 d(\gamma^n x, x) d(\gamma^m x, x)} \\
&= \frac{|\gamma|^2 \left((n+\varepsilon(n))^2 + (m+\varepsilon(m))^2 - ((m-n) - \varepsilon(m-n))^2\right)}{2|\gamma|^2 (n+\varepsilon(n))(m+\varepsilon(m))} \\
&\xrightarrow[n,m\to\infty]{} 1
\end{aligned}$$

montre que la suite $\overline{\angle}_x(\gamma^n x, \gamma^m x)$ converge vers 0 quand $n, m \to \infty$ (avec $m \geq n$) et donc $\gamma^n x$ converge vers un point du bord ω_γ. Soit $\rho_\pm$ le rayon géodésique issu de x et pointant vers $\omega_{\gamma^{\pm 1}}$. Si $x_n(t)$ est le point sur $[x, \gamma^n x]$ à distance $t \geq 0$ de x (ce point existe pour t fixé et $|n|$ assez grand) alors la formule ci-dessus montre que $(x_n(t))_n$ est de Cauchy et de limite $\rho_\pm(t)$. On a donc $\lim_{t\to\infty} \overline{\angle}_x(\rho_-(t), \rho_+(t)) = \lim_{n,t\to\infty} \overline{\angle}_x(x_n(t), x_{-n}(t)) \geq \pi - \lim_{n\to\infty} \overline{\angle}_x(x_{2n}(t), x_n(t)) = \pi$. Finalement, $\pi \geq \angle(\omega_\gamma, \omega_{\gamma^{-1}}) \geq \lim_{t\to\infty} \overline{\angle}_x(\rho_-(t), \rho_+(t)) = \pi$. □

Si γ fixe $\xi \in \partial X$, grâce à la relation de cocycle (1.1), le nombre $\beta_\xi(\gamma x, x)$ ne dépend pas de x. On note alors $\beta_\xi(\gamma)$ cette quantité. Avec cette notation, γ laisse invariante la fonction de Busemann associée à ξ si et seulement si $\beta_\xi(\gamma) = 0$.

Lemme 23.3 (Lemme 3.12 de [**CM09b**]). *Soit X un espace de Hadamard, $\xi \in \partial X$ et γ une isométrie de X fixant ξ telle que $|\beta_\xi(\gamma)| > 0$. Alors γ est une isométrie balistique et si $\beta_\xi(\gamma) > 0$ alors $\angle(\xi, \omega_\gamma) > \pi/2$.*

Démonstration. Comme $|\beta_\xi(\gamma)| = |\beta_\xi(\gamma x, x)| \leq d(\gamma x, x)$ pour tout $x \in X$, on a $|\beta_\xi(\gamma)| \leq |\gamma|$ et donc si $|\beta_\xi(\gamma)| > 0$ alors γ est balistique.

Supposons que $\beta_\xi(\gamma) > 0$. Soit $x \in X$ et ρ, σ les rayons géodésiques issus de x et pointant respectivement vers ξ et ω_γ. Par la proposition 1.24.(i), $\angle(\xi, \omega_\gamma) = \lim_{t,s\to\infty} \overline{\angle}_x(\rho(t), \sigma(s))$. Comme $\lim_{n,s\to\infty} \overline{\angle}_x(\gamma^n x, \sigma(s)) = 0$, on a $\angle(\xi, \omega_\gamma) = \lim_{n,t\to\infty} \overline{\angle}(\rho(t), \gamma^n x)$. De plus, la formule angulaire asymptotique du lemme 1.26 donne pour tout $n \geq 0$,

$$\lim_{t\to\infty} \cos(\overline{\angle}_x(\rho(t), \gamma^n x)) = \frac{-\beta_\xi(\gamma^n x, x)}{d(\gamma^n x, x)}.$$

Comme $\beta_\xi(\gamma^n x, x) = n\beta_\xi(\gamma)$ et $d(\gamma^n x, x) \leq nd(\gamma x, x)$, on obtient $\cos(\angle(\xi, \omega_\gamma)) \leq -\beta_\xi(\gamma)/d(\gamma x, x) < 0$ et donc $\angle(\xi, \omega_\gamma) > \pi/2$. □

Proposition 23.4. *Soit X un espace* CAT(0) *de dimension télescopique finie et γ une isométrie parabolique de X. Alors il existe un point ξ_γ de ∂X tel que*

(i) toute isométrie commutant avec γ fixe toute horofonction centrée en ξ_γ et

(ii) la boule de rayon $\pi/2$ centrée en ξ_γ contient tout point fixe à l'infini de γ.

Démonstration. Soit ξ le centre des directions du théorème 6.1 associée à la suite de parties convexes fermées décroissantes $(d_\gamma^{-1}((-\infty, \alpha]))_{\alpha>|\gamma|}$.

(i) Soit g une isométrie commutant avec γ. Ainsi, g laisse invariants les $X_\alpha = d_\gamma^{-1}((-\infty, \alpha])$ et donc g fixe ξ par la remarque 6.2.(iii). Si $|g| = 0$ alors $n\beta_\xi(g) = |\beta_\xi(g^n x, x)| \leq d(g^n x, x) = \circ(n)$ donc $|\beta_\xi(g)| = 0$. Si $|g| > 0$ alors par le lemme 23.2, il existe $\omega_{g^\varepsilon} \in \partial X$ tel que $g^{\varepsilon n} x \to_{n\longrightarrow\infty} \omega_{g^\varepsilon}$ pour $\varepsilon = \pm 1$. Pour tout $x \in X$, $d_\gamma(g^{\varepsilon n} x) = d_\gamma(x)$. Ainsi, pour tout $\alpha > |\gamma|$, X_α est invariant par $g^{\varepsilon n}$ et donc $\omega_{g^\varepsilon} \in \cap \partial X_\alpha$. Par le théorème 6.1, $\angle(\xi, \omega_{g^\varepsilon}) \leq \pi/2$. Par le lemme 23.3, $\beta_\xi(g^\varepsilon) \leq 0$. Comme $\beta_\xi(g^\varepsilon) = \beta_\xi(g^\varepsilon x, x) = \beta_\xi(x, g^{-\varepsilon} x) = -\beta_\xi(g^{-\varepsilon} x, x) = -\beta_\xi(g^{-\varepsilon})$, on a $\beta_\xi(g) = 0$.

(ii) Soit $\eta \in \partial X$ tel que $\gamma\eta = \eta$. Pour $x \in X_\alpha$, on note ρ_x, le rayon géodésique issu de x et pointant vers η. La fonction $d_\gamma \circ \rho_x \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est 2-Lipschitz, convexe et bornée puisque ρ_x et $g\rho_x$ sont des rayons équivalents. Cette fonction est donc décroissante et donc pour tout $t \geq 0$, $\rho_x(t) \in X_\alpha$. Ce qui montre que $\eta \in \cap \partial X_\alpha$ et le théorème 6.1 montre alors que $\angle(\xi, \eta) \leq \pi/2$.

□

23.3. Isométries balistiques et structures produit.

Définition 23.5. Un espace CAT(0) est *π-visible* si pour tout $\xi_+, \xi_- \in \partial X$ tels que $\angle(\xi_+, \xi_-) = \pi$ il existe une géodésique bi-infinie c, telle que $c(\pm\infty) = \xi_\pm$.

Les espaces pour lesquels toute paire de points de ∂X se trouve dans le bord d'un même plat sont des exemples. Parmi ceux-là, on trouve les espaces symétriques de type non-compact, les immeubles euclidiens et les espaces de Hilbert. Les espaces Gromov-hyperboliques sont aussi des exemples (voir la proposition 10.1 de [**Buy98**]) mais dans ce cas, le théorème suivant est vide car toute isométrie parabolique est neutre (voir la proposition 23.1). Il en est de même pour les immeubles car il n'y a pas d'isométrie parabolique.

Théorème 23.6. *Soit X un espace* CAT(0) *complet, π-visible et γ une isométrie balistique. Alors, il existe $Y \subset X$ convexe fermé et γ-invariant tel que Y est isométrique à un produit $X_0 \times \mathbb{R}$. De plus, γ préserve cette structure produit : $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1)$ où γ_1 est la translation de longueur $|\gamma|$ et γ_0 est une isométrie neutre, qui est parabolique si et seulement si γ l'est.*

Démonstration. Soit Y la réunion des droites géodésiques d'extrémités ω_γ et $\omega_{\gamma^{-1}}$. Par hypothèse de π-visibilité, Y est non-vide. Comme γ fixe ω_γ et $\omega_{\gamma^{-1}}$, γ laisse invariant Y. Par le théorème 1.19, Y est une partie convexe de X de la forme $Y_0 \times \mathbb{R}$. On montre que Y est fermée dans X. Soit x dans l'adhérence de Y dans X. Si (x_n) est une suite de points de Y convergeant vers x, on note c_n la droite géodésique reliant $\omega_{\gamma^{-1}}$ à ω_γ telle que $c_n(0) = x_n$. Alors la proposition 1.30 appliquée aux suites $(c_n(-n))$ et $(c_n(n))$ et au compact $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{x\}$ donne l'éxistence d'une géodésique c telle que $c(-\infty) = \omega_{\gamma^{-1}}$, $c(\infty) = \omega_\gamma$ et $c(0) = x$. Ce qui montre que Y est fermée.

Par définition si $\gamma|_Y$ est la restriction de γ à Y, on a $|\gamma|_Y| \geq |\gamma|$. Comme la projection $\pi_Y \colon X \to Y$ est 1-Lipschitz, pour tout $x \in X$, $d(\gamma x, x) \geq d(\pi_Y(\gamma x), \pi_Y(x))$ or $\pi_Y(\gamma x) = \gamma \pi_Y(x)$. Finalement, $|\gamma|_Y| = |\gamma|$. Comme l'image d'une géodésique d'extrémités ω_γ et $\omega_{\gamma^{-1}}$ par γ est aussi une géodésique d'extrémités ω_γ et $\omega_{\gamma^{-1}}$, γ préserve la structure produit $Y = Y_0 \times \mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'il existe $\gamma_0 \in \mathrm{Isom}(Y_0)$ et $\gamma_1 \in \mathbb{R}$ tels que γ est l'isométrie produit de γ_0 et de la translation de longueur γ_1. L'isométrie γ_0 est parabolique si et seulement si γ l'est.

Un calcul montre que $|\gamma|^2 = |\gamma_0|^2 + |\gamma_1|^2$. Supposons par l'absurde que $|\gamma_0| > 0$ alors par le même raisonnement que précédemment, il existerait $\omega_{\gamma_0} \in \partial Y_0$ tel que pour tout $x_0 \in Y_0$, $\gamma_0^n x_0 \to \omega_{\gamma_0}$ Ainsi, si $x \in Y$, la limite de $\gamma^n x$ serait le point $(\arccos(|\gamma_0|/|\gamma|), \omega_{\gamma_0}, \omega_\gamma)$ de $\partial Y_0 * \partial\mathbb{R} = \partial Y$ (voir la proposition 1.28) et non ω_γ. Ainsi $|\gamma_0| = 0$ et $|\gamma_1| = |\gamma|$. □

Remarques 23.7. (i) Dans le cas où γ est une isométrie hyperbolique, l'espace Y du théorème contient l'ensemble des axes $\mathrm{Min}(\gamma)$ et cette inclusion peut être stricte comme le montre l'exemple d'un vissage (composition d'une translation et d'une rotation d'axe parallèle à la translation) dans $\mathbb{R}^3$. Dans ce cas $Y = \mathbb{R}^3$ mais $\mathrm{Min}(\gamma)$ est réduit à une droite.

(ii) Ce théorème montre que les isométries à la dynamique « compliquée » sont les isométries paraboliques neutres.

Si γ est une isométrie d'un espace CAT(0), X, alors ∂X^γ désigne les points fixes de γ dans ∂X.

Proposition 23.8. *Soit γ une isométrie hyperbolique d'un espace de Hadamard X. Alors*

$$\partial X^\gamma = \partial \mathrm{Min}(\gamma).$$

Démonstration. Soit $\xi \in \partial X^\gamma$, $x \in \mathrm{Min}(\gamma)$ et c le rayon géodésique tel que $c(0) = x$ et $c(+\infty) = \omega_\gamma$. Par la proposition 1.24.(i), on sait que

$$\angle(\xi, \omega_\gamma) = \lim_{t\to\infty} \angle_{c(t)}(\xi, \omega_\gamma) = \lim_{n\to\infty} \angle_{c(n|\gamma|)}(\xi, \omega_\gamma).$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\angle_{c(n|\gamma|)}(\xi, \omega_\gamma) = \angle_{\gamma^n x}(\gamma^n \xi, \gamma^n \omega_\gamma) = \angle_x(\xi, \omega_\gamma).$$

Ainsi, $\angle(\xi, \omega_\gamma) = \angle_x(\xi, \omega_\gamma)$ et de même $\angle(\xi, \omega_{\gamma^{-1}}) = \angle_x(\xi, \omega_{\gamma^{-1}})$.

Par la proposition 1.23, $\angle(\xi, \omega_\gamma) + \angle(\xi, \omega_{\gamma^{-1}}) = \angle_x(\gamma x, \xi) + \angle_{\gamma x}(x, \xi) \leq \pi$. Donc un des deux angles $\angle(\xi, \omega_\gamma)$ ou $\angle(\xi, \omega_{\gamma^{-1}})$ est strictement inférieur à π. Si par exemple, $\angle(\xi, \omega_\gamma) < \pi$ alors par la proposition 1.25, il existe un secteur euclidien F^+ qui est l'enveloppe convexe des deux rayons géodésiques issus de x et pointant respectivement vers ξ et ω_γ. De plus, $\gamma F^+ \subseteq F^+$. En répétant le raisonnement au point $\gamma^n x$ pour $n \in \mathbb{Z}$, on obtient que la réunion $\cup_{n \in \mathbb{Z}} \gamma^n F^+$ est isométrique à un demi-plan euclidien sur lequel γ agit par translation, ainsi, ce demi-plan est composé d'axes de γ et donc $\xi \in \mathrm{Min}(\gamma)$.

Réciproquement, si $\xi \in \partial \mathrm{Min}(\gamma)$, comme $\mathrm{Min}(\gamma) \simeq Y \times \mathbb{R}$ et $\gamma \cdot (y, t) = (y, t + |\gamma|)$, il est clair que tout rayon géodésique de $\mathrm{Min}(\gamma)$ qui pointe vers ξ a pour image par γ un rayon qui lui est parallèle et donc $\gamma\xi = \xi$. □

23.4. Espace transverse à un point fixe à l'infini. Soit X un espace CAT(0) et $\xi \in \partial X$. Suivant [**Lee00**] et [**Cap09**], on note X_ξ^* l'ensemble des rayons géodésiques pointant vers ξ muni de la pseudo-distance

$$d(\rho_1, \rho_2) = \inf_{t_1, t_2 > 0} d(\rho_1(t_1), \rho_2(t_2)).$$

L'espace métrique quotient possède alors un complété qui est un espace de Hadamard (voir la proposition 2.8 de [**Lee00**]). On note X_ξ cet espace appelé *espace transverse* à ξ. Il existe une projection π_ξ de X sur X_ξ, qui à un point de X associe le rayon géodésique issu de x pointant vers ξ. Cette projection est 1-Lipschitz. Si γ est une isométrie laissant fixe ξ alors γ induit une isométrie de X_ξ notée γ_ξ.
On commence par un lemme sur les rayons géodésiques pointant vers un point du bord d'une partie convexe fermée.

Lemme 23.9. *Soit X un espace* CAT(0) *complet et C une partie convexe fermée de X. Si ρ est un rayon géodésique dont la distance à C reste bornée et si x_t désigne le projeté de $\rho(t)$ sur C alors la suite de fonctions $\psi_t : u \mapsto d(x_t, x_{t+u})$ converge uniformément vers la fonction identité quand $t \to +\infty$.*

Démonstration. La fonction $t \mapsto d(\rho(t), C) = d(\rho(t), x_t)$ est convexe et bornée donc décroissante. Posons $L = d(\rho(0), x_0)$. Par inégalités triangulaires et caractère 1-Lipschitz de la projection sur C, on a

$$\forall t, t' \geq 0, \ |t - t'| - 2L \leq d(x_t, x_{t'}) \leq |t - t'|. \tag{23.1}$$

Pour obtenir le résultat, il suffit de voir que

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists T \geq 0, \ \forall t' \geq t \geq T, \quad d(x_t, x_{t'}) \geq t' - t - \varepsilon. \tag{23.2}$$

On raisonne par l'absurde, ce qui donne un $\varepsilon > 0$ et deux suites (t_i) et (t'_i) telles que $t_i \to_{i\to\infty} \infty$, $t_i < t'_i < t_{i+1}$ et $d(x_{t_i}, x_{t'_i}) < t'_i - t_i - \varepsilon$. Ainsi,

$$\begin{aligned} d(x_{t_0}, x_{t_k}) \leq \sum_{i=0}^{k-1} d(x_{t_i}, x_{t_{i+1}}) &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \Big(d(x_{t_i}, x_{t'_i}) + d(x_{t'_i}, x_{t_{i+1}}) \Big) \\ &< \sum_{i=0}^{k-1} (t'_i - t_i) - k\varepsilon + \sum_{i=0}^{k-1} t_{i+1} - t'_i \\ &< t_k - t_0 - k\varepsilon \end{aligned}$$

Ce qui, pour $k > 2L/\varepsilon$, donne une contradiction avec l'inégalité (23.1). □

Proposition 23.10. *Soit X un espace de Hadamard et γ une isométrie hyperbolique. Si ξ est un point fixe de ∂X alors γ_ξ est une isométrie semi-simple de longueur de translation $|\gamma_\xi| = |\sin(\angle(\xi, \omega_\gamma))| \cdot |\gamma|$.*

L'idée pour montrer ce résultat est de réaliser que sur $\pi_\xi(\mathrm{Min}(\gamma))$ la longueur de translation est atteinte et ensuite que ce minimum est global.

Démonstration. Soit c un rayon géodésique de $\mathrm{Min}(\gamma)$ pointant vers ξ. Grâce aux propositions 23.8 et 23.1, on peut écrire $c(t)$ sous la forme $(c_1(\sin(\alpha)t), \cos(\alpha)t)$ où $\alpha = \angle(\xi, \omega_\gamma)$ et c_1 est une géodésique de Y. L'image de cette géodésique est alors $\gamma c(t) = (c_1(\sin(\alpha)t), \cos(\alpha)t + |\gamma|)$ et $d(c(t), \gamma c(t'))^2 = \sin(\alpha)^2(t'-t)^2 + (\cos(\alpha)t - \cos(\alpha)t' - |\gamma|)^2$. Un calcul montre alors que le minimum est atteint pour $|t' - t| = \cos(\alpha)|\gamma|$ et donc $|d_\xi(c, \gamma c)| = |\sin(\alpha)| \cdot |\gamma|$.

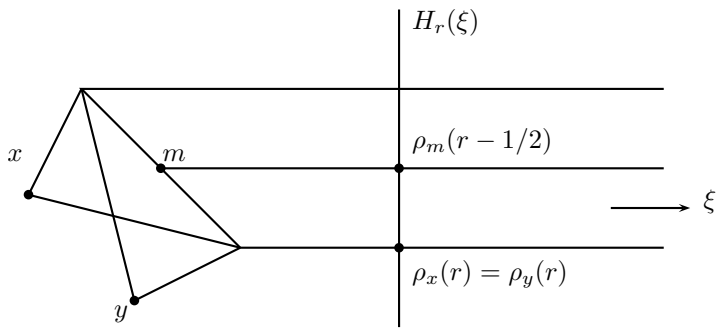
Maintenant si ρ est un rayon géodésique quelconque pointant vers ξ. On reprend les notations du lemme 23.9 qui s'applique avec $C = \mathrm{Min}(\gamma)$. On se donne $\varepsilon > 0$ et T tel que l'inégalité (23.2) ait lieu. On introduit c_t le rayon géodésique pointant vers ξ issu de $c_t(0) = x_t$. Par convexité de $\mathrm{Min}(\gamma)$, on sait que c_t est inclus dans $\mathrm{Min}(\gamma)$. On va considérer des temps $t'' \geq t' \geq t > T$. Si y est le projeté de $x_{t''}$ sur $c_t(\mathbb{R}^+)$ alors $d(x_{t''}, y) \leq d(x_{t''}, \rho(t'')) + d(\rho(t''), c_t(\mathbb{R}^+)) \leq 2L$ et donc $x_{t''}$ converge vers ξ. Soit z le point de $[x_t, x_{t''}]$ à distance $t' - t$ de x_t alors pour t'' assez grand, on a $d(z, c_t(t'-t)) \leq \varepsilon$. Maintenant, grâce à l'inégalité (23.2), on a $d(x_t, x_{t''}) \geq d(x_t, x_{t'}) + d(x_{t'}, x_{t''}) - 2\varepsilon$ et par comparaison CAT(0), on a $d(x'_t, z) \leq f(\varepsilon)$ avec $f(\varepsilon) \to_{\varepsilon\to 0} 0$. Donc pour t assez grand, et tout $t' \geq t$ on a $d(x_{t'}, c_t(t'-t)) < \varepsilon$. Finalement, $\gamma x_{t'}$ reste dans un ε-voisinage de $\gamma c_t(\mathbb{R}^+)$, ce qui donne

$$d(\rho(t).\gamma\rho(t')) \geq d(x_t, \gamma x_{t'}) \geq \inf_{u\geq 0} d(c_t(0), \gamma c_t(u)) - \varepsilon \geq |\gamma| \cdot |\sin(\alpha)| - \varepsilon.$$

Donc $d_\xi(\rho, \gamma\rho) \geq |\sin(\angle(\xi, \omega_\gamma))| \cdot |\gamma|$. □

Remarque 23.11. On remarque en passant que la projection π_ξ n'envoie pas partie convexe sur partie convexe en répondant par la négative à la question suivante.

Soient x et y deux points d'un espace CAT(0) et m leur milieu. On note ρ_x, ρ_y et ρ_m les rayons géodésiques issus respectivement de x, y et m et pointant vers un même point du bord ξ. Si $\lim d(\rho_x(t), \rho_y(t')) = 0$ a-t-on aussi $\lim d(\rho_x(t), \rho_m(t')) = 0$?



On considère deux bandes euclidiennes $[0,1]\times[0,\infty)\subset\mathbb{R}^2$ que l'on identifie sur $\{(a,b)\in\mathbb{R}^2|\ a+b\geq 1\}\cap[0,1]\times[0,\infty)$. On choisit pour x et y les images des deux origines dans le quotient. L'espace quotient est un espace CAT(0) qui possède un bord réduit à un unique point que l'on note ξ. Les rayons géodésiques issus de x et de y pointant vers ξ coïncident pour $t\geq 1$. Le milieu de $[x,y]$ est le point qui provient de $(1/2,1/2)$. On voit que $d(\rho_x,\rho_m)=d(\rho_m(r-1/2),\rho_x(r))$ pour tout $r\geq 1/2$. Ce qui répond par la négative à la question.

24. Exemples

24.1. Espaces Gromov-hyperboliques. Les espaces Gromov-hyperboliques sont des cas particuliers d'espaces de dimension télescopique finie (en fait de dimension au plus 1 voir la remarque 5.8(ii)) donc la proposition 6.1 s'applique et on peut être plus précis. On reformule ici des résultats dûs à Anders Karlsson. Voir la section 5 de [**Kar01**] et la proposition 4.1 de [**BIM05**].

Proposition 24.1. *Soit X un espace* CAT(0) *Gromov-hyperbolique et γ une isométrie parabolique. Alors γ est une isométrie neutre et γ fixe un unique point au bord ξ_γ. Pour tout $x\in X$ et toute extraction (n_i) telle que $d(\gamma^{n_i}x,x)\to\infty$, on a $\gamma^{\varepsilon n_i}x\to\xi_\gamma$ pour $\varepsilon=\pm 1$.*

Démonstration. Soit γ une isométrie parabolique. Si γ était balistique, le théorème 23.6 donnerait l'existence d'une partie convexe $Y\simeq X_0\times\mathbb{R}$ γ-invariante et deux isométries γ_0,γ_1 telle que γ_0 est une isométrie de X_0 et γ_1 la translation de longueur $|\gamma|$ sur $\mathbb{R}$. Comme Y est hyperbolique, X_0 est de diamètre borné et donc γ_0 possède un point fixe et γ possède alors un axe.

Comme un espace CAT(0) Gromov-hyperbolique est de dimension télescopique au plus 1, la proposition 23.4 s'applique et il existe $\xi_\gamma\in\partial X$ tel que la boule fermée de rayon $\pi/2$ pour la distance angulaire contient tous les points fixes à l'infini. Dans un espace CAT(0) hyperbolique deux points distincts ξ,η vérifie $\angle(\xi,\eta)=\pi$ donc γ possède un unique point fixe qui est ξ_γ.

Comme γ n'est pas elliptique, il existe une extraction $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $d(\gamma^{n_i}x,x)\to\infty$ pour tout $x\in X$. Posons $d_i=d(\gamma^{n_i}x,x)$ pour un x fixé. Quitte à faire une nouvelle extraction, on peut trouver une suite (n_i') telle que pour tout $i\in\mathbb{N}$, $d_i\geq d(\gamma^n x,x)$ pour

tout $n < n'_i$. Ainsi pour $j > i$ et $d'_i = d(\gamma^{n'_i}x, x)$,

$$\begin{aligned}\langle \gamma^{n'_i}x|\gamma^{n_j}x\rangle_x &= 1/2\left(d_i + d_j - d(\gamma^{n_j-n_i}x, x)\right)\\ &\geq 1/2\, d_j \to \infty\end{aligned}$$

Ce qui montre que la suite $(\gamma^{n_i}x)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers un point de ∂X. La suite $(\gamma^{n_i}x)_i$ et son image par γ sont à distance de Hausdorff au plus $d(\gamma x, x)$ ce qui montre que la limite de cette suite est un point fixé par γ, c'est ξ_γ. □

Dans le cas d'un espace métrique propre, on a le phénomème remarquable découvert par A. Calka.

Théorème 24.2 (Corollaire 4.5 de [**Cał84**])**.** *Soit (X, d) un espace métrique propre et f une isométrie de X. S'il existe x et une famille strictement croissante d'entiers positifs $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $f^{n_i}(x)$ est bornée alors toute orbite de f est bornée.*

Corollaire 24.3. *Sous les hypothèses de la proposition 24.1 et si de plus, X est propre alors $\gamma^{\varepsilon n}x \to \xi_\gamma$ pour $\varepsilon = \pm 1$.*

Démonstration. Le théorème 24.2 montre que $d(\gamma^n x, x) \to \infty$ et donc la proposition 24.1 donne le résultat. □

Dans le cas où l'espace n'est pas localement compact, la situation peut-être totalement différente comme l'a observé A. Karlsson dans [**Kar01**] (voir aussi p.7 de [**KN04**]). L'idée est de plonger un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ comme horosphère d'un espace Gromov hyperbolique et d'utiliser l'exemple 24.15 sur chacune de ces horosphères.

On considère la variété (de dimension infinie) produit $\mathbb{R} \times \mathcal{H}$ muni de la métrique $g_{(x,v)}((x_1, v_1), (x_2, v_2)) = x_1x_2 + \exp(2x) < v_1|v_2 >$. C'est un produit enroulé au sens de la section 7 de [**BO69**], isométrique à l'espace hyperbolique de dimension infinie $\mathbb{H}^\infty$. Si γ est l'isométrie de $\mathcal{H}$ donnée dans l'exemple 24.15 alors $\mathrm{Id} \times \gamma$ est une isométrie parabolique neutre avec un comportement de récurrence.

Remarque 24.4. Pour une construction générale des produits enroulés voir [**AB98b**], [**AB04**] et [**Che99**].

Remarque 24.5. La proposition 24.1 permet de réécrire la trichotomie *elliptique/hyperbolique/parabolique*. Si g est une isométrie d'un espace hyperbolique X alors :

- L'isométrie g est elliptique si et seulement si g possède un point fixe dans X.
- L'isométrie g est parabolique si et seulement si g ne possède pas de point fixe dans X mais un unique point fixe dans ∂X.
- L'isométrie g est hyperbolique si et seulement si g ne possède pas de point fixe dans X mais exactement deux points fixes dans ∂X.

Cette trichotomie apparaît pour les espaces $\mathrm{CAT}(-1)$ dans la proposition 4.1 de [**BIM05**]. Typiquement, un espace à la fois Gromov-hyperbolique et $\mathrm{CAT}(0)$ est $\mathrm{CAT}(-1)$ mais il existe aussi des espaces Gromov-hyperboliques et $\mathrm{CAT}(0)$ qui ne sont pas $\mathrm{CAT}(-1)$. L'exemple du « revêtement universel du string » en est un exemple sûrement aussi sexy que les X_p.

24.2. Espaces de Hilbert. Le cas particulier du théorème de Mazur-Ulam pour les espaces de Hilbert affirme que toute isométrie d'un espace de Hilbert est affine avec un opérateur unitaire comme partie linéaire.

Lemme 24.6. *Soit γ une isométrie d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Le point à l'infini associé à un vecteur unitaire u est un point fixe de γ si et seulement u est un point fixe de la partie linéaire de γ.*

Démonstration. Si $\gamma(x) = Ux + v$ alors pour tout $\lambda > 0$, $\gamma(\lambda u) = \lambda Uu + v$. Si u est point fixe de U alors la droite vectorielle engendrée par u est translatée par γ donc u et $-u$ sont des points fixes à l'infini de γe. Réciproquement, si u est point fixe à l'infini alors la droite engendré par u est translatée par γ donc $\gamma(\lambda u) = \lambda u + t$ pour un certain $t \in \mathcal{H}$ donc en divisant par λ et en faisant tendre ce dernier vers $+\infty$, on obtient $Uu = u$. □

On rappelle que pour les espaces de Hilbert, on a la classification suivante des isométries.

Proposition 24.7. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et γ une isométrie de $\mathcal{H}$. Cette isométrie est de la forme $x \mapsto Ux + v$ où U est un opérateur orthogonal et v un vecteur de $\mathcal{H}$. On note E_1 le noyau de $U - \mathrm{Id}$ et E_2 son orthogonal. Si v_i la projection de v sur E_i alors*

(i) γ est semi-simple si et seulement si $v_2 \in \mathrm{Im}(U - \mathrm{Id})$ et

(ii) la longueur de translation de γ est $||v_1||$.

Démonstration. La preuve de (i) est la même qu'en dimension finie (c.f. II.6.4(2) dans [**BH99**]). Si γ est l'isométrie $x \mapsto Ux + v$, on peut écrire $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ où $\gamma_1(x_1) = x_1 + v_1$ et $\gamma_2(x_2) = U_2x_2 + v_2$ où U_2 est la restriction de U au sous-espace E_2. Ainsi γ agit diagonalement sur $\mathcal{H} = E_1 \oplus E_2$. L'isométrie γ_1 est la translation de vecteur v_1 et γ_2 possède un point fixe si et seulement si $v_2 \in \mathrm{Im}(U_2 - \mathrm{Id}_{E_2}) = \mathrm{Im}(U - \mathrm{Id})$ et par le lemme 24.6, γ_2 ne possède pas de point fixe à l'infini.
Par les lemmes 23.2 et 24.6, γ_2 est neutre donc $|\gamma| = |\gamma_1| = ||v_1||$. □

Remarque 24.8. La trichotomie *elliptique/hyperbolique/parabolique* devient :

(i) L'isométrie γ est elliptique si et seulement $v \in \mathrm{Im}(U - \mathrm{Id})$.

(ii) L'isométrie γ est hyperbolique si et seulement $v_1 \neq 0$ et $v_2 \in \mathrm{Im}(U - \mathrm{Id})$.

(iii) L'isométrie γ est parabolique si et seulement $v_2 \notin \mathrm{Im}(U - \mathrm{Id})$.

Remarque 24.9. On peut reformuler cette trichotomie à l'aide de l'espace des déplacements $D = \{\gamma x - x |\ x \in \mathcal{H}\}$ (c.f. [**Paz71**]). C'est un sous-espace affine de $\mathcal{H}$, translaté de $\mathrm{Im}(U - \mathrm{Id})$ par v. On a alors :

i) La longueur de translation $|\gamma|$ vaut $d(0, D)$.

ii) γ est semi-simple si et seulement si le projeté de 0 sur $\overline{D}$ appartient à D.

Pour faire le lien avec la proposition 24.7, il faut remarquer que $\overline{\mathrm{Im}(U - \mathrm{Id})} = \ker(U^{-1} - \mathrm{Id})^{\perp} = \ker(U - \mathrm{Id})^{\perp} = E_2$.

Remarque 24.10. On peut aussi réécrire géométriquement la trichotomie *elliptique/ hyperbolique/ parabolique*. Si γ est une isométrie d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ alors :

– L'isométrie γ est elliptique si et seulement si γ possède un point fixe dans $\mathcal{H}$.
– L'isométrie γ est hyperbolique si et seulement si γ ne possède pas de point fixe dans $\mathcal{H}$ mais au moins deux points fixes dans $\partial\mathcal{H}$.
– L'isométrie γ est parabolique si et seulement si γ ne possède pas de sous-espace affine de dimension finie invariant.
– L'isométrie γ est parabolique neutre si et seulement si γ ne possède pas de point fixe dans $\mathcal{H} \cup \partial\mathcal{H}$.

Remarque 24.11. Si γ est une isométrie parabolique d'un espace de Hilbert récurrente (i.e. il existe x tel que $\inf_{n\in\mathbb{N}} d(\gamma^n x, x) = 0$) alors γ est neutre. En effet $|\gamma| = \lim d(\gamma^n x, x)/n$ donc il existe N tel que $\forall n > N$, $d(\gamma^n x, x) > n|\gamma|/2$. La réciproque est fausse puisque pour l'isométrie de $\ell^2(\mathbb{Z})$ associée au décalage sur $\mathbb{Z}$ de l'exemple 24.14, on a $d(\gamma^n 0, 0) = \sqrt{n}$ et donc $|\gamma| = 0$.

Le théorème 23.6 se réécrit dans le cas d'un espace de Hilbert sous la forme suivante.

Corollaire 24.12. *Soit γ une isométrie parabolique balistique d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Alors il existe un sous-espace de Hilbert $\mathcal{H}_0$ de complémentaire orthogonal une droite $\mathcal{D}$ telle que γ agit diagonalement sur le produit $\mathcal{H}_0 \times \mathcal{D} \simeq \mathcal{H}$. De plus, $\gamma|_{\mathcal{H}_0}$ est neutre et $\gamma|_{\mathcal{D}}$ est une translation de longueur $|\gamma|$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que la réunion de l'ensemble des droites parallèles à une droite donnée est tout l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$. □

Lemme 24.13. *Soit x_n une suite bornée d'un espace de Hilbert convergeant faiblement vers x. Notons c_n le centre circonscrit des $\{x_k|\ k > n\}$. Alors la suite (c_n) converge fortement vers x.*

Démonstration. Le point x coïncide avec l'intersection des demi-espaces fermés contenant tous les x_n sauf un nombre fini. Chacun des tels demi-espaces contient tous les c_n sauf un nombre fini. Par le lemme 11 de [**Mon06**], on sait que c_n converge fortement. De plus, cette limite est dans chacun des demi-espaces précédants, c'est donc x. □

Exemple 24.14 (Exemple II.8.25 de [**BH99**])**.** Soit $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z})$ et σ l'opérateur de décalage $(x_n) \mapsto (x_{n+1})$. Soit $\delta \in \mathcal{H}$ telle que $\delta_n = 0$ sauf en $\delta_0 = 1$ alors l'isométrie $\gamma\colon x \mapsto \sigma x + \delta$ est une isométrie sans point fixe à l'infini ni sous-espace euclidien de dimension finie invariant. Dans ce cas $d(\gamma^n 0, 0) = \sqrt{n}$. Ainsi les orbites partent à l'infini à une vitesse sous-linéaire et sans choisir de direction.

Exemple 24.15 (Théorème 1.1 de [**Ede64**])**.** On construit un exemple d'isométrie γ telle que γ soit une isométrie parabolique neutre n'ayant pas de point fixe à l'infini ni de sous-espace euclidien de dimension finie invariant. De plus, la dynamique de γ est très particulière. L'orbite de tout point est récurrente et non bornée.

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe séparable de base hilbertienne (e_n), c'est-à-dire isométrique à $\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$. On définit un opérateur unitaire U (qui est aussi un opérateur sur $\ell^\infty_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$) par $Ue_n = \exp(2i\pi/n!)e_n$. Soit $v = (v_n)$ la suite constante égale à 1. Cette suite n'est pas un élément de $\mathcal{H}$ mais un élément de $\ell^\infty_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$, par contre, $Uv - v \in \mathcal{H}$. On définit alors γ par

$$\gamma x = Ux + Uv - v.$$

Un calcul montre que γ n'a pas de point fixe dans $\mathcal{H}$ et comme 1 n'est pas valeur propre de U, γ ne possède pas de point fixe à l'infini non plus et comme tous les isométries d'un espace euclidien de dimension finie sont semi-simples, γ n'a pas non plus de sous-espace euclidien invariant.

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ alors

$$\begin{aligned}\gamma^k(0)_n &= \left(\sum_{l=0}^{k-1} \exp(2i\pi l/n!)\right)(\exp(2i\pi/n!) - 1) \\ &= \exp(2i\pi k/n!) - 1 = 2i\exp(ik\pi/n!)\sin(k\pi/n!).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$||\gamma^{k!}(0)||_2^2 = 4\sum_{n>k!} |\sin(k!\pi/n)|^2 \to_{k\to\infty} 0.$$

Soit $\Omega_\gamma(0)$ l'ensemble des points d'accumulation de l'orbite (positive) de 0. Alors

$$\Omega_\gamma(0) = \{\gamma^k(0)\}_{k\geq 0}.$$

On commence par remarquer que pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, l'ensemble $\{\gamma^k(0)_n\}_{k\geq 0}$ est fini. Si $\gamma^{k_i}(0)$ converge vers un certain x pour $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ strictement croissante alors pour tout n il existe $j \in [0, n! - 1]$ tel que $x_n = \exp(2i\pi j/n!) - 1$. Donc à partir d'un certain rang $n_i = j[n!]$. Mais si $n_i = j[n!]$ alors $n_i = j[m!]$ pour tout $m \leq n$. Ainsi, il existe j tel que $x_n = \exp(2i\pi j/n!) - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Réciproquement comme 0 est point récurrent, tout point de l'orbite est aussi récurrent.

Plus généralement, on remarque que par linéarité pour tout $x \in \mathcal{H}$, $\gamma^k(x) = \gamma^k(0) + U^k x$ et ainsi $\gamma^k(x)_n = (\exp(2ik\pi/n!)(1 + x_n) - 1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors le même raisonnement que ci-dessus montre que $\Omega_\gamma(x)$ est de nouveau l'orbite positive de x.

Question 24.16. Pour une isométrie parabolique neutre γ d'un espace de Hilbert, a-t-on la dichotomie

- $||\gamma^n(0)|| \to \infty$ (sans converger en direction)
- ou γ possède des points récurrents ?

Remarque 24.17. Par le corollaire 2 de [**dCTV08**], aucune orbite ne peut-être dense. L'action n'est pas minimale dans ce sens. De plus, il n'y a pas de demi-espace D tel que $\gamma D \subset D$ sinon le point à l'infini associé à D serait fixe par γ. Existe-t-il cependant un sous espace convexe invariant ? Il est équivalent de trouver un demi-espace D tel que $\cap_{n\in\mathbb{N}}\gamma^n D \neq \emptyset$.

Bibliographie

[AB94] Norbert A'Campo and Marc Burger. Réseaux arithmétiques et commensurateur d'après G. A. Margulis. *Invent. Math.*, 116(1-3) :1–25, 1994.

[AB98a] Scot Adams and Werner Ballmann. Amenable isometry groups of Hadamard spaces. *Math. Ann.*, 312(1) :183–195, 1998.

[AB98b] Stephanie B. Alexander and Richard L. Bishop. Warped products of Hadamard spaces. *Manuscripta Math.*, 96(4) :487–505, 1998.

[AB04] S. B. Alexander and R. L. Bishop. Curvature bounds for warped products of metric spaces. *Geom. Funct. Anal.*, 14(6) :1143–1181, 2004.

[AB08] Peter Abramenko and Kenneth S. Brown. *Buildings*, volume 248 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2008. Theory and applications.

[Ada94] S. Adams. Boundary amenability for word hyperbolic groups and an application to smooth dynamics of simple groups. *Topology*, 33(4) :765–783, 1994.

[ADR00] C. Anantharaman-Delaroche and J. Renault. *Amenable groupoids*, volume 36 of *Monographies de L'Enseignement Mathématique [Monographs of L'Enseignement Mathématique]*. L'Enseignement Mathématique, Geneva, 2000. With a foreword by Georges Skandalis and Appendix B by E. Germain.

[AEG94] Scot Adams, George A. Elliott, and Thierry Giordano. Amenable actions of groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 344(2) :803–822, 1994.

[Ale57] A. D. Alexandrow. Über eine Verallgemeinerung der Riemannschen Geometrie. *Schr. Forschungsinst. Math.*, 1 :33–84, 1957.

[And10] Martin Anderegg. *Moyennabilité et Courbure : G-espaces boréliens et espaces CAT(0)*. PhD thesis, EPFL, Juillet 2010.

[Arv02] William Arveson. *A short course on spectral theory*, volume 209 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2002.

[Bal95] Werner Ballmann. *Lectures on spaces of nonpositive curvature*, volume 25 of *DMV Seminar*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1995. With an appendix by Misha Brin.

[BdlHV08] Bachir Bekka, Pierre de la Harpe, and Alain Valette. *Kazhdan's property (T)*, volume 11 of *New Mathematical Monographs*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[Ber01] V. N. Berestovskii. Busemann spaces of aleksandrov curvature bounded above. Max Planck Institut preprint, 2001.

[BFS] Uri Bader, Alex Furman, and Ali Shaker. Superrigidity, weyl groups, and actions on the circle. math/0605276.

[BGS85] Werner Ballmann, Mikhael Gromov, and Viktor Schroeder. *Manifolds of nonpositive curvature*, volume 61 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1985.

[BH99] Martin R. Bridson and André Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[BIM05] Marc Burger, Alessandra Iozzi, and Nicolas Monod. Equivariant embeddings of trees into hyperbolic spaces. *Int. Math. Res. Not.*, (22) :1331–1369, 2005.

[BL05] Andreas Balser and Alexander Lytchak. Centers of convex subsets of buildings. *Ann. Global Anal. Geom.*, 28(2) :201–209, 2005.

[BM96] M. Burger and S. Mozes. CAT(-1)-spaces, divergence groups and their commensurators. *J. Amer. Math. Soc.*, 9(1) :57–93, 1996.

[BM02] M. Burger and N. Monod. Continuous bounded cohomology and applications to rigidity theory. *Geom. Funct. Anal.*, 12(2) :219–280, 2002.

[BO69] R. L. Bishop and B. O'Neill. Manifolds of negative curvature. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 145 :1–49, 1969.

[Bor66] Armand Borel. Density and maximality of arithmetic subgroups. *J. Reine Angew. Math.*, 224 :78–89, 1966.

[Buy98] S. V. Buyalo. Geodesics in Hadamard spaces. *Algebra i Analiz*, 10(2) :93–123, 1998.

[Cał84] Aleksander Całka. On conditions under which isometries have bounded orbits. *Colloq. Math.*, 48(2) :219–227, 1984.

[Cap09] Pierre-Emmanuel Caprace. Amenable groups and Hadamard spaces with a totally disconnected isometry group. *Comment. Math. Helv.*, 84(2) :437–455, 2009.

[CCJ+01] Pierre-Alain Cherix, Michael Cowling, Paul Jolissaint, Pierre Julg, and Alain Valette. *Groups with the Haagerup property*, volume 197 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2001. Gromov's a-T-menability.

[Che99] Chien-Hsiung Chen. Warped products of metric spaces of curvature bounded from above. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 351(12) :4727–4740, 1999.

[CL10a] Pierre-Emmanuel Caprace and Alexander Lytchak. At infinity of finite-dimensional CAT(0) spaces. *Math. Ann.*, 346(1) :1–21, 2010.

[CL10b] Cristian Conde and Gabriel Larotonda. Manifolds of semi-negative curvature. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 100(3) :670–704, 2010.

[CM09a] Pierre-Emmanuel Caprace and Nicolas Monod. Isometry groups of non-positively curved spaces : discrete subgroups. *J. Topol.*, 2(4) :701–746, 2009.

[CM09b] Pierre-Emmanuel Caprace and Nicolas Monod. Isometry groups of non-positively curved spaces : structure theory. *J. Topol.*, 2(4) :661–700, 2009.

[DAP76] C. Delode, O. Arino, and J.-P. Penot. Champs mesurables et multisections. *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B (N.S.)*, 12(1) :11–42, 1976.

[Day57] Mahlon M. Day. Amenable semigroups. *Illinois J. Math.*, 1 :509–544, 1957.

[dCTV08] Yves de Cornulier, Romain Tessera, and Alain Valette. Isometric group actions on Hilbert spaces : structure of orbits. *Canad. J. Math.*, 60(5) :1001–1009, 2008.

[Dix96] Jacques Dixmier. *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (algèbres de von Neumann)*. Les Grands Classiques Gauthier-Villars. [Gauthier-Villars Great Classics]. Éditions Jacques Gabay, Paris, 1996. Reprint of the second (1969) edition.

[dlH71] Pierre de la Harpe. Classification des L^*-algèbres semi-simples réelles séparables. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 272 :A1559–A1561, 1971.

[dlH72] Pierre de la Harpe. *Classical Banach-Lie algebras and Banach-Lie groups of operators in Hilbert space*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 285. Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[dlH00] Pierre de la Harpe. *Topics in geometric group theory*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 2000.

[Ebe85] Patrick Eberlein. Structure of manifolds of nonpositive curvature. In *Global differential geometry and global analysis 1984 (Berlin, 1984)*, volume 1156 of *Lecture Notes in Math.*, pages 86–153. Springer, Berlin, 1985.

[Ebe96] Patrick B. Eberlein. *Geometry of nonpositively curved manifolds*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1996.

[Ede64] Michael Edelstein. On non-expansive mappings of Banach spaces. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 60 :439–447, 1964.

[Eel66] James Eells, Jr. A setting for global analysis. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 72 :751–807, 1966.

[FD88] J. M. G. Fell and R. S. Doran. *Representations of *-algebras, locally compact groups, and Banach *-algebraic bundles. Vol. 1*, volume 125 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Boston, MA, 1988. Basic representation theory of groups and algebras.

[FH74] Jacques Faraut and Khélifa Harzallah. Distances hilbertiennes invariantes sur un espace homogène. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 24(3) :xiv, 171–217, 1974.

[FL08] Thomas Foertsch and Alexander Lytchak. The de Rham decomposition theorem for metric spaces. *Geom. Funct. Anal.*, 18(1) :120–143, 2008.

[FNS06] Koji Fujiwara, Koichi Nagano, and Takashi Shioya. Fixed point sets of parabolic isometries of CAT(0)-spaces. *Comment. Math. Helv.*, 81(2) :305–335, 2006.

[Fur73] Harry Furstenberg. Boundary theory and stochastic processes on homogeneous spaces. In *Harmonic analysis on homogeneous spaces (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXVI, Williams Coll., Williamstown, Mass., 1972)*, pages 193–229. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1973.

[GdlH90] É. Ghys and P. de la Harpe, editors. *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, volume 83 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1990. Papers from the Swiss Seminar on Hyperbolic Groups held in Bern, 1988.

[GKM08] Tsachik Gelander, Anders Karlsson, and Gregory A. Margulis. Superrigidity, generalized harmonic maps and uniformly convex spaces. *Geom. Funct. Anal.*, 17(5) :1524–1550, 2008.

[Gro87] M. Gromov. Hyperbolic groups. In *Essays in group theory*, volume 8 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 75–263. Springer, New York, 1987.

[Gro93] M. Gromov. Asymptotic invariants of infinite groups. In *Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991)*, volume 182 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 1–295. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.

[Hel01] Sigurdur Helgason. *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, volume 34 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. Corrected reprint of the 1978 original.

[Hen10] Philippe Henry. *Actions de relations d'équivalence sur les champs d'espaces métriques Actions de relation d'équivalence sur les champs d'espaces métriques CAT(0)*. PhD thesis, EPFL, Septembre 2010.

[Jor75] Camille Jordan. Essai sur la géométrie à n dimensions. *Bull. Soc. Math. France*, 3 :103–174, 1875.

[Kai94] Vadim A. Kaimanovich. The Poisson boundary of hyperbolic groups. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 318(1) :59–64, 1994.

[Kai03] V. A. Kaimanovich. Double ergodicity of the Poisson boundary and applications to bounded cohomology. *Geom. Funct. Anal.*, 13(4) :852–861, 2003.

[Kar01] Anders Karlsson. Non-expanding maps and Busemann functions. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 21(5) :1447–1457, 2001.

[Kar05] Anders Karlsson. On the dynamics of isometries. *Geom. Topol.*, 9 :2359–2394 (electronic), 2005.

[KL97] Bruce Kleiner and Bernhard Leeb. Rigidity of quasi-isometries for symmetric spaces and Euclidean buildings. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (86) :115–197 (1998), 1997.

[Kle99] Bruce Kleiner. The local structure of length spaces with curvature bounded above. *Math. Z.*, 231(3) :409–456, 1999.

[Kli95] Wilhelm P. A. Klingenberg. *Riemannian geometry*, volume 1 of *de Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, second edition, 1995.

[KM99] Anders Karlsson and Gregory A. Margulis. A multiplicative ergodic theorem and nonpositively curved spaces. *Comm. Math. Phys.*, 208(1) :107–123, 1999.

[KN04] Anders Karlsson and Guennadi A. Noskov. Some groups having only elementary actions on metric spaces with hyperbolic boundaries. *Geom. Dedicata*, 104 :119–137, 2004.

[Kui65] Nicolaas H. Kuiper. The homotopy type of the unitary group of Hilbert space. *Topology*, 3 :19–30, 1965.

[KV83] V. A. Kaĭmanovich and A. M. Vershik. Random walks on discrete groups : boundary and entropy. *Ann. Probab.*, 11(3) :457–490, 1983.

[Lan99] Serge Lang. *Fundamentals of differential geometry*, volume 191 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1999.

[Lar07] Gabriel Larotonda. Nonpositive curvature : a geometrical approach to Hilbert-Schmidt operators. *Differential Geom. Appl.*, 25(6) :679–700, 2007.

[Lee00] Bernhard Leeb. *A characterization of irreducible symmetric spaces and Euclidean buildings of higher rank by their asymptotic geometry*. Bonner Mathematische Schriften [Bonn Mathematical Publications], 326. Universität Bonn Mathematisches Institut, Bonn, 2000.

[LS97] Urs Lang and Viktor Schroeder. Jung's theorem for Alexandrov spaces of curvature bounded above. *Ann. Global Anal. Geom.*, 15(3) :263–275, 1997.

[Mar91] G. A. Margulis. *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, volume 17 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[Mca65] John Harris Mcalpin. *INFINITE DIMENSIONAL MANIFOLDS AND MORSE THEORY*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1965. Thesis (Ph.D.)–Columbia University.

[Mic39] A. D. Michal. General differential geometries and related topics. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 45 :529–563, 1939.

[Mic48] Aristotle D. Michal. Infinite dimensional differential metrics with constant curvature. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 34 :17–21, 1948.

[Mon01] Nicolas Monod. *Continuous bounded cohomology of locally compact groups*, volume 1758 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[Mon06] Nicolas Monod. Superrigidity for irreducible lattices and geometric splitting. *J. Amer. Math. Soc.*, 19(4) :781–814, 2006.

[Mos73] G. D. Mostow. *Strong rigidity of locally symmetric spaces*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1973. Annals of Mathematics Studies, No. 78.

[MS04] Nicolas Monod and Yehuda Shalom. Cocycle superrigidity and bounded cohomology for negatively curved spaces. *J. Differential Geom.*, 67(3) :395–455, 2004.

[MT86] Rached Mneimné and Frédéric Testard. *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*. Collection Méthodes. [Methods Collection]. Hermann, Paris, 1986.

[MZ55] Deane Montgomery and Leo Zippin. *Topological transformation groups*. Interscience Publishers, New York-London, 1955.

[Pan09] Pierre Pansu. Superrigidité géométique et applications harmoniques. In *Géométries à courbure négative ou nulle, groupes discrets et rigidités*, volume 18 of *Sémin. Congr.*, pages 373–420. Soc. Math. France, Paris, 2009.

[Paz71] A. Pazy. Asymptotic behavior of contractions in Hilbert space. *Israel J. Math.*, 9 :235–240, 1971.

[Per82] Daniel Perrin. *Cours d'algèbre*, volume 18 of *Collection de l'École Normale Supérieure de Jeunes Filles [Collection of the École Normale Supérieure de Jeunes Filles]*. École Normale Supérieure de Jeunes Filles, Paris, 1982. Edited with the collaboration of Marc Cabanes and Martine Duchene.

[Pet06] Peter Petersen. *Riemannian geometry*, volume 171 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2006.

[Saw99] P. Sawyer. Spherical functions on $\mathrm{SO}_0(p,q)/\mathrm{SO}(p)\times\mathrm{SO}(q)$. *Canad. Math. Bull.*, 42(4) :486–498, 1999.

[She95] B. U. Shergoziev. Infinite-dimensional spaces with bounded curvature. *Sibirsk. Mat. Zh.*, 36(5) :1167–1178, iv, 1995.

[Stu03] Karl-Theodor Sturm. Probability measures on metric spaces of nonpositive curvature. In *Heat kernels and analysis on manifolds, graphs, and metric spaces (Paris, 2002)*, volume 338 of *Contemp. Math.*, pages 357–390. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

[Sul79] Dennis Sullivan. The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (50) :171–202, 1979.

[Tum] A.B. Tumpach. Mostow's decomposition theorem for l*-groups and applications to affine coadjoint orbits and stable manifolds. math-ph/0605039v1.

[Var63] V. S. Varadarajan. Groups of automorphisms of Borel spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 109 :191–220, 1963.

[Zim78] Robert J. Zimmer. Amenable ergodic group actions and an application to Poisson boundaries of random walks. *J. Functional Analysis*, 27(3) :350–372, 1978.

[Zim84] Robert J. Zimmer. *Ergodic theory and semisimple groups*, volume 81 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1984.

Index

– **Symbols** –

D_κ . . . 2
E_0 . . . 40
E_1 . . . 10
$L(E,F)$ . . . 10
Q . . . 37
R . . . 11
S_κ . . . 2
T_x . . . 4
$V(x,r)$ . . . 92
$X_p(\mathbb{R}), X_p(\mathbb{C}), X_p(\mathbb{Q})$ . . . 14
$X_p, X(p,\infty), X(p,q), X(Q)$ . . . 40
$[X,Y]$ . . . 11
CAT(κ) . . . 1
Δ-direction . . . 53
DimGeo . . . 25
Isom(X) . . . 3
$\mathbf{O}(Q)$ . . . 38
$\mathbf{O}^2(\mathcal{H})$ . . . 13
Σ_x . . . 3
$\angle(\xi,\eta)$ . . . 7
$\angle_x(\xi,\eta)$ . . . 7
$\beta_\xi(y,x)$ . . . 7
∂X . . . 6
∂X^γ . . . 104
η . . . 6
$\langle y|z\rangle_x$ . . . 91
$\mathbf{GL}^2(\mathcal{H})$ . . . 13
$\mathbf{L}^2(\mathcal{H})$ . . . 13
$\mathbf{P}^2(\mathcal{H})$ . . . 14
$\mathbf{S}^2(\mathcal{H})$ . . . 14
$\mathcal{C}_0$ . . . 32
$\mathcal{D}$ . . . 32
$\mathcal{H}$ . . . 13
$\mathcal{M}(X)$ . . . 93
$\mathfrak{g}$ . . . 13
$\mathfrak{p}$ . . . 13
$\mathfrak{t}$ . . . 13
$\mathrm{Comm}_G(\Gamma)$ . . . 83
DimTel . . . 71
DimTop . . . 25
$\mathscr{T}_c$ . . . 31
$|\gamma|$ . . . 101
μ . . . 93
∇ . . . 11
ω . . . 26
$\overline{\mathcal{D}}$ . . . 8
$\rho(\infty)$ . . . 7
ξ . . . 6
d_γ . . . 101
d_{GH} . . . 85
x_0 . . . 41

– **A** –

action :
  évanescente . . . 31
  continue . . . 6
  réduite . . . 31
angle :
  d'Alexandrov . . . 3
angle de comparaison . . . 3
angles principaux . . . 43
appartement . . . 23
application de Furstenberg . . . 83
application différentiable . . . 10
arbre réel . . . 27, 52
atlas . . . 10

– **B** –

bord à l'infini . . . 6, 91

– **C** –

cône :
  asymptotique . . . 26
  euclidien . . . 4
  tangent . . . 4
carte . . . 10
cellule . . . 23, 86
centre :
  circonscrit . . . 2
  des centres . . . 26

des directions . . . 28, 103
chambre . . . 23
champ :
d'espaces de Banach . . . 56
euclidien . . . 71
cinquième problème de Hilbert . . . 33
cocycle :
élémentaire . . . 95
mesurable . . . 95
commensurateur . . . 83
compactification géométrique . . . 6
complexe de Coxeter :
euclidien . . . 53
sphérique à l'infini . . . 53
connection de Levi-Cività . . . 11
courbure sectionnelle . . . 12

– **D** –

décomposition de de Rham . . . 3
diamètre . . . 2
différentielle . . . 10
dimension :
géométrique . . . 25
télescopique . . . 27
distance angulaire . . . 7

– **E** –

enveloppe :
convexe . . . 4
convexe fermée . . . 5
espace :
δ-hyperbolique . . . 91
π-visible . . . 103
borélien . . . 55
CAT(0) . . . 1
de Hadamard . . . 1
des directions . . . 3
géodésique . . . 1
géodésiquement complet . . . 9
Gromov-hyperbolique . . . 91
irréductible . . . 3
riemannien symétrique . . . 11
symétrique de type non-compact . . . 12
totalement géodésique . . . 13
transverse . . . 105
exponentielle . . . 15

– **F** –

face . . . 23, 86
facteur euclidien de de Rham . . . 3, 71
famille fondamentale . . . 56
flat torus theorem . . . 6
fonction :
affine . . . 8
convexe . . . 8
de Busemann . . . 7
de Gromov-Hausdorff . . . 85
propre . . . 94
semi-continue supérieurement . . . 4
forme fortement non dégénérée . . . 38
formule angulaire asymptotique . . . 8

– **G** –

géodésique . . . 1
géodésique bi-infinie . . . 1
groupe :
commensurable . . . 83
hyperbolique . . . 65
hyperbolique :
élémentaire . . . 65
moyennable . . . 33
groupe de Weyl . . . 23
groupe de Weyl :
affine . . . 52
sphérique . . . 52, 53

– **H** –

horoboule . . . 7
horofonction . . . 7
horosphère . . . 7

– **I** –

immeuble :
épais . . . 23
sphérique . . . 23, 52, 86
inégalité de Bruhat-Tits . . . 1
inégalité de Jung . . . 25
indice . . . 37
intégrale sphérique . . . 21
isométrie . . . 11
isométrie :
baistique . . . 101
elliptique . . . 101
hyperbolique . . . 101
neutre . . . 101
parabolique . . . 101
semi-simple . . . 6, 101

– **J** –

joint sphérique . . . 4

– **L** –

lemme du sandwich . . . 6
logarithme . . . 16
longueur de déplacement . . . 101

– **M** –

moyennable . . . 55
moyenne . . . 55, 93

– **O** –
ombre 92
opérateur de Hilbert-Schmidt 13

– **P** –
partie :
convexe 4, 8
invariante 6
minimale 6
point plat à l'infini 9
polyèdre d'anisotropie 53
produit :
de Gromov 91
euclidien 3
propre 3, 6

– **R** –
réseau arithmétique 84
radical moyennable 33
rang 2
rayon :
circonscrit 2
géodésique 1
issu 6
pointant 7
rayons géodésiques équivalents 6

– **S** –
segment géodésique 1
sous-espace :
euclidien 2
plat 2
suite qui part à l'infini 91
symétrie géodésique 15

– **T** –
tenseur de courbure 11
topologie :
compact ouvert 33
conique 7
faible-* 93
visuelle 7
translation de Clifford 3
transvection 15
triangle de comparaison 2
type 86

– **U** –
ultrafiltre 26

– **V** –
variété :
banachique 10
riemannienne 11