



**HAL**  
open science

# Modélisation du rayonnement acoustique dans les guides traités par des matériaux absorbants à réaction localisée ou non localisée en présence d'écoulement par la méthode des éléments finis

Boureima Ouedraogo

► **To cite this version:**

Boureima Ouedraogo. Modélisation du rayonnement acoustique dans les guides traités par des matériaux absorbants à réaction localisée ou non localisée en présence d'écoulement par la méthode des éléments finis. Autre [cond-mat.other]. Université de Bourgogne, 2011. Français. NNT : 2011DI-JOS023 . tel-00674031

**HAL Id: tel-00674031**

**<https://theses.hal.science/tel-00674031>**

Submitted on 27 Feb 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE

LRMA-DRIVE - École Doctorale Carnot

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Bourgogne

Discipline : Mécanique et énergétique

par

**Boureima OUEDRAOGO**

le 28 septembre 2011

**Modélisation du rayonnement acoustique dans les guides  
traités par des matériaux absorbants à réaction localisée ou  
non localisée en présence d'écoulement par la méthode des  
éléments finis**

Directeur de thèse: **P. LECLAIRE**

Co-directeur de thèse: **E. REDON**

Jury :

M. Y. GERVAIS,	Professeur, ENSIP Poitiers,	Rapporteur
M. M. OUISSE,	Professeur, ENSMM Besançon,	Rapporteur
M. E. PERREY-DEBAIN,	Maître de conférences, UTC Compiègne,	Examineur
M. J.-F. MERCIER,	Chargé de Recherche, ENSTA Paris,	Examineur
M. P. LECLAIRE,	Professeur, ISAT Nevers,	Examineur
M. E. REDON,	Maître de conférences, ESIREM Dijon,	Examineur



# Remerciements

Ce travail de doctorat a été effectué au sein du Laboratoire de Recherche en Mécanique et Acoustique - Département de Recherche en Ingénierie des Véhicules pour l'Environnement (LRMA-DRIVE) de l'Université de Bourgogne à Dijon.

Je tiens à remercier tout d'abord M. Philippe LECLAIRE qui a accepté diriger cette thèse. Sa disponibilité et ses conseils ont été très précieux tout au long de ce travail. Je le remercie également pour les éclaircissements qu'il m'a apportés sur les matériaux poreux.

J'adresse mes plus vifs remerciements à M. Emmanuel REDON mon co-directeur de thèse qui m'a soutenu durant ces années. Il m'a fourni le cadre et les moyens nécessaires à la réalisation de la thèse. Un grand merci pour sa disponibilité, ses conseils, ses encouragements et surtout ses critiques toujours très constructives durant les travaux de recherche et lors de la rédaction du document final.

Je voudrais remercier M. Yves GERVAIS et M. Morvan OUISSE d'avoir accepté étudier mes travaux de thèse et d'en être les rapporteurs. Je remercie également M. Emmanuel PERREY-DEBAIN d'avoir accepté faire partie du jury en tant qu'examineur.

J'exprime ma reconnaissance à M. Jean-François Mercier qui a apporté sa contribution à ce travail et a accepté de faire partie des membres du jury.

Je tiens à remercier également M. Daniel MARTIN et Colin CHAMBEYRON pour leur aide utile et précieuse lors de mes simulations numériques avec le code MÉLINA.

J'exprime ma vive gratitude à Fabien CHEVILLOTTE du Laboratoire MATELYS pour m'avoir fourni les paramètres des matériaux poreux utilisés dans cette thèse.

Enfin, je remercie de tout mon coeur tous mes proches pour leur confiance, leur soutien et leur aide durant toutes ces années de recherche.



# Table des matières

Remerciements . . . . .	iii
Table des matières . . . . .	v
Table des figures . . . . .	ix
Liste des tableaux . . . . .	xiii
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
Plan de la thèse . . . . .	3
<b>1 Généralités sur la propagation acoustique guidée</b>	<b>5</b>
1 Introduction . . . . .	5
2 Influence de l'écoulement . . . . .	6
3 Influence de la température sur la propagation acoustique guidée . . .	11
4 Influence de l'absorbant : conditions limites sur les parois . . . . .	12
5 Conditions limites transparentes . . . . .	15
5.1 Couches absorbantes parfaitement adaptées : PML . . . . .	16
5.2 Opérateur Dirichlet-to-Neumann . . . . .	19
6 Position du problème . . . . .	20
6.1 Rappels sur la propagation acoustique dans les guides axisy- métriques rigides . . . . .	20
6.2 Écriture d'un opérateur DtN pour un guide cylindrique axisy- métrique rigide . . . . .	23
6.3 Exemple d'application . . . . .	26
7 Conclusion . . . . .	28
<b>2 Guides infinis axisymétriques traités par un matériau absorbant à réaction localisée sans écoulement</b>	<b>31</b>
1 Introduction . . . . .	31
2 Définition du problème . . . . .	32
3 Problème aux valeurs propres . . . . .	32
3.1 Comportement asymptotique des modes . . . . .	35
3.2 Vitesse de phase et atténuation des modes . . . . .	37
4 Relation d'orthogonalité des modes du guide . . . . .	38
5 Normalisation des modes . . . . .	40
6 Détermination de la condition limite transparente . . . . .	42
7 Tests numériques . . . . .	43
7.1 Exemple 1 : Guide axisymétrique rectiligne . . . . .	43
7.2 Exemple 2 : Guide axisymétrique non uniforme . . . . .	46
7.2.1 Équation de propagation et formulation variationnelle	46
7.2.2 Propagation acoustique dans les couches PML . . . . .	47

8	Conclusion . . . . .	50
<b>3</b>	<b>Guides infinis axisymétriques traités avec écoulement uniforme</b>	<b>51</b>
1	Introduction . . . . .	51
2	Problème étudié . . . . .	51
3	Recherche des modes . . . . .	53
4	Relation d'orthogonalité et normalisation des modes . . . . .	59
5	Détermination de la condition limite transparente . . . . .	63
6	Applications numériques . . . . .	64
6.1	Validation sur un cas académique . . . . .	65
6.2	Rayonnement d'une source acoustique dans un guide axisymétrique traité en présence d'un écoulement uniforme . . . . .	68
6.3	Étude de l'erreur en fonction du nombre de modes . . . . .	71
6.4	Influence des modes instables sur l'opérateur DtN . . . . .	73
7	Guide cylindrique non uniforme en présence d'un écoulement potentiel	75
7.1	Guide non uniforme rigide compris entre deux guides uniformes traités . . . . .	75
7.2	Guide non uniforme traité compris entre deux guides uniformes rigides . . . . .	80
8	Conclusion . . . . .	84
<b>4</b>	<b>Description des matériaux absorbants en acoustique</b>	<b>85</b>
1	Introduction . . . . .	85
2	Matériaux absorbants à réaction localisée . . . . .	86
3	Matériaux absorbants à réaction non localisée : matériaux poreux . . . . .	87
3.1	Modélisation acoustique des matériaux poreux . . . . .	88
3.1.1	Modèles simples en fluide équivalent . . . . .	88
	A - Modèle de Zwikker et Kösten . . . . .	88
	B - Modèle de Delany-Bazley . . . . .	88
	C - Modèle de Miki . . . . .	89
3.1.2	Modèles plus élaborés : formalisme de Biot . . . . .	89
	A. Formulation en déplacements $(\mathbf{u}, \mathbf{U})$ . . . . .	91
	B. Formulation $(\mathbf{u}, p)$ de l'équation du mouvement de Biot . . . . .	92
3.2	Modèle du fluide équivalent : formulation $(p)$ . . . . .	93
3.3	Paramètres du modèle de Johnson-Champoux-Allard . . . . .	94
4	Conclusion . . . . .	96
<b>5</b>	<b>Guides infinis traités par un matériau absorbant à réaction non localisée</b>	<b>99</b>
1	Introduction . . . . .	99
2	Guide 2D à paroi traitée sans écoulement . . . . .	100
2.1	Description du problème . . . . .	100
2.2	Détermination des modes . . . . .	103
2.2.1	Exemples de modes propres . . . . .	104
	A - Mousse d'aluminium . . . . .	104
	B - Laine de verre . . . . .	108
2.2.2	Orthogonalité des modes . . . . .	112

2.2.3	Normalisation des modes . . . . .	114
2.3	Condition limite transparente dans un guide traité avec des matériaux poreux . . . . .	115
2.3.1	Formulation variationnelle . . . . .	116
2.3.2	Résultats numériques . . . . .	117
	A - Guide semi infini . . . . .	118
	B - Guide infini . . . . .	120
3	Guide 2D avec matériaux poreux en présence d'un écoulement uniforme	122
3.1	Définition du problème . . . . .	123
3.2	Calcul des modes . . . . .	124
3.3	Relation d'orthogonalité . . . . .	126
4	Conclusion . . . . .	127
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>129</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>133</b>
	<b>Annexe 1</b>	<b>141</b>
	<b>Annexe 2</b>	<b>145</b>
	<b>Annexe 3</b>	<b>147</b>





# Table des figures

1.1	Profil d'écoulement cisailé proposé par Pridmore-Brown pour un guide rectangulaire uniforme . . . . .	6
1.2	Schéma de principe d'un guide cylindrique axisymétrique tronqué avec des couches PML . . . . .	17
1.3	Constante de propagation $\beta_n$ et $\beta_{n,\alpha}$ , Bécache <i>et al</i> 2003 [1] . . . . .	18
1.4	Constante de propagation $\beta_n$ et $\beta_{n,\alpha}$ , Bécache <i>et al</i> 2003 [1] présence d'un mode amont inverse . . . . .	18
1.5	Guide cylindrique axisymétrique infini . . . . .	23
1.6	Guide cylindrique axisymétrique tronqué . . . . .	23
1.7	Guide cylindrique axisymétrique . . . . .	26
1.8	Maillage du guide axisymétrique . . . . .	26
1.9	Partie réelle de la pression pour $k = 5$ , avec le premier mode imposé ( $\varphi_0(r) = J_0(\alpha_0 r)$ sur $\Sigma^-$ ) : (à gauche) Sans écoulement $M = 0$ , (à droite) avec écoulement uniforme $M = 0.3$ . . . . .	28
1.10	Partie réelle de la pression pour $k = 5$ , avec le deuxième mode imposé ( $\varphi_1(r) = J_0(\alpha_1 r)$ sur $\Sigma^-$ ) : (à gauche) Sans écoulement $M = 0$ , (à droite) avec écoulement uniforme $M = 0.3$ . . . . .	28
2.1	Guide cylindrique axisymétrique à paroi absorbante en l'absence d'écoulement - représentation 2D dans le plan $(r, z)$ . . . . .	32
2.2	Constantes de propagation $\beta_n$ pour $k = 5$ en l'absence d'écoulement : o modes propagatifs suivant les $z$ croissants; x modes propagatifs suivant les $z$ décroissants . . . . .	35
2.3	Partie réelle de la pression dans un guide cylindrique pour $k = 5$ . . . . .	36
2.4	Zoom du 100ème mode pour $k = 5$ . . . . .	36
2.5	Vitesse de phase $c_{\phi_n}$ en fonction de la pulsation $\omega$ en l'absence d'écoulement . . . . .	38
2.6	Atténuation des modes (partie imaginaire de $\beta_n$ ) en fonction de la pulsation $\omega$ en l'absence d'écoulement . . . . .	38
2.7	Zoom sur la partie inférieure de la courbe des parties imaginaires de $\beta_n$ . . . . .	39
2.8	Impédances critiques $Z_n^c$ pour $k = 5$ . . . . .	42
2.9	Guide cylindrique axisymétrique traité : a) Guide infini et b) guide tronqué . . . . .	42
2.10	Guide cylindrique axisymétrique infini tronqué en présence d'un absorbant . . . . .	44
2.11	Partie réelle de la pression pour $k = 5$ , $Z = 1.5 - 1.5i$ , premier mode ( $\varphi_1(r) = J_0(\alpha_1 r)$ ) imposé sur $\Sigma^-$ : (à gauche) solution avec éléments finis et DtN, (à droite) solution analytique . . . . .	45

2.12	Partie réelle de la pression pour $k = 5$ , $Z = 1.5 - 1.5i$ , deuxième mode ( $\varphi_2(r) = J_0(\alpha_2 r)$ ) imposé sur $\Sigma^-$ : (à gauche) solution avec éléments finis et DtN, (à droite) solution analytique . . . . .	45
2.13	Géométrie du problème . . . . .	46
2.14	Guide axisymétrique infini non uniforme tronqué . . . . .	47
2.15	Partie réelle de la pression pour $k = 5$ , $Z = 1.5 - 1.5i$ : a) solution avec DtN, b) Solution avec les couches PML, $\nu = 0.48(1 - i)$ . . . . .	49
2.16	Partie réelle de la pression pour $k = 9$ , $Z = 1.5 - 1.5i$ : a) solution avec DtN, b) Solution avec les couches PML, $\nu = 0.64(1 - i)$ . . . . .	49
3.1	Guide cylindrique axisymétrique infini tronqué à paroi absorbante avec écoulement uniforme . . . . .	52
3.2	Constantes de propagation $\beta_n$ pour un guide recouvert d'un matériau absorbant d'impédance $Z = 1.5(1 - i)$ , en présence d'un écoulement uniforme $M = 0.4$ , pour $k = 5$ : (o) pour $\beta_n^+$ et (x) pour $\beta_n^-$ . . . . .	54
3.3	Partie réelle de la pression dans un guide cylindrique traité en présence d'écoulement uniforme : $M = 0.4$ ; $k = 5$ ; $Z = 1.5(1 - i)$ . . . . .	56
3.4	Partie réelle de la pression dans un guide cylindrique traité en présence d'écoulement uniforme : zoom du 100ème mode, $M = 0.4$ ; $k = 5$ ; $Z = 1.5(1 - i)$ . . . . .	56
3.5	Vitesse de phase $c_{\phi_n}$ en fonction de la pulsation $\omega$ . . . . .	57
3.6	Zoom de la courbe de la vitesse de phase $c_{\phi_n}$ pour un guide traité en présence d'un écoulement uniforme : $M = 0.05$ , $Z = 1.5(1 - i)$ . . . . .	57
3.7	Vitesse de phase $c_{\phi_n}$ en fonction de la pulsation $\omega$ pour un guide traité en présence d'un écoulement uniforme : $M = 0.4$ , $Z = 1.5(1 - i)$ . . . . .	58
3.8	Atténuation des modes (partie imaginaire de $\beta_n$ ) en fonction de la pulsation $\omega$ . . . . .	58
3.9	Constantes de propagation $\beta_n$ pour un guide recouvert d'un matériau absorbant d'impédance $Z = 1.5(1 - i)$ , en présence d'un écoulement uniforme $M = 0.6$ , pour $k = 5$ avec un mode instable . . . . .	59
3.10	Impédances critiques $Z_n^c$ pour $k = 5$ et $M = 0.4$ . . . . .	62
3.11	Géométrie du problème . . . . .	65
3.12	Maillage du domaine tronqué . . . . .	65
3.13	Partie réelle de la pression en présence d'écoulement uniforme : $M = 0.3$ $k = 8$ , $Z = 4.5 + 4.5i$ avec le premier mode $p_1 = J_0(\alpha_1 r)$ imposé sur $\Sigma^+$ . . . . .	67
3.14	Partie réelle de la pression en présence d'écoulement $M = 0.3$ pour $k = 8$ , $Z = 4.5 + 4.5i$ avec le deuxième mode $p_2 = J_0(\alpha_2 r)$ imposé sur $\Sigma^+$ . . . . .	67
3.15	Guide cylindrique axisymétrique infini tronqué à paroi absorbante - rayonnement d'une source . . . . .	68
3.16	Partie réelle de la pression en présence d'un écoulement uniforme : $M = 0.4$ , $k = 5$ , $Z = 1.5 - 1.5i$ : a) solution avec DtN, b) Solution avec les couches PML, $\nu = 0.29(1 - i)$ . . . . .	70
3.17	Partie réelle de la pression en présence d'un écoulement uniforme $M = 0.35$ pour $k = 7$ , $Z = 1.5 - 1.5i$ : a) solution avec DtN, b) Solution avec les couches PML, $\nu = 0.42(1 - i)$ . . . . .	70

3.18	Logarithme de l'erreur relative en norme $L^2(\Omega)$ de la solution avec DtN en fonction du nombre de modes . . . . .	72
3.19	Partie réelle de la pression pour $k = 5$ (DtN calculé avec 4 modes) : a) guide rigide, b) guide traité ( $Z = 1.5(1 - i)$ ), c) guide traité avec un écoulement uniforme ( $Z = 1.5(1 - i)$ , $M = 0.4$ ) . . . . .	72
3.20	Constantes de propagation $\beta_n$ (o : $\beta_n^+$ , x : $\beta_n^-$ ) en présence d'un écoulement uniforme $M = 0.6$ pour $k = 8$ et $Z = 1.5 - 1.5i$ , présence d'un mode instable . . . . .	74
3.21	Logarithme de l'erreur relative en norme $L^2(\Omega)$ de la solution avec DtN en fonction du nombre de modes : le 11 <sup>eme</sup> mode est instable . . . . .	74
3.22	Schéma de principe . . . . .	76
3.23	Potentiel des vitesses $\phi_0$ . . . . .	77
3.24	Vitesse axiale $v_{0z}$ . . . . .	77
3.25	Vitesse radiale $v_{0r}$ . . . . .	78
3.26	Partie réelle de la pression dans le guide pour $k = 7$ , $Z = 0.5(1 - i)$ . . . . .	79
3.27	Partie imaginaire de la pression dans le guide pour $k = 7$ , $Z = 0.5(1 - i)$ . . . . .	79
3.28	Module de la pression dans le guide pour $k = 7$ , $Z = 0.5(1 - i)$ . . . . .	80
3.29	Schéma de principe . . . . .	81
3.30	Partie réelle de la pression dans le guide pour $k = 7$ , $Z = 0.5(1 - i)$ . . . . .	83
3.31	Partie imaginaire de la pression dans le guide pour $k = 7$ , $Z = 0.5(1 - i)$ . . . . .	83
3.32	Module de la pression dans le guide pour $k = 7$ , $Z = 0.5(1 - i)$ . . . . .	84
4.1	Matériau absorbant à réaction localisée : d'après S. Rienstra [2] . . . . .	86
4.2	Guide 2D à paroi absorbante à réaction localisée . . . . .	86
4.3	Représentation de $\Lambda$ et $\Lambda'$ dans les pores . . . . .	96
4.4	Guide 2D infini à paroi traitée par un matériau absorbant à réaction non localisée . . . . .	97
5.1	Guide 2D infini à paroi traitée : modèle du fluide équivalent . . . . .	100
5.2	Guide infini tronqué . . . . .	102
5.3	Guide 2D traité avec de la mousse d'aluminium . . . . .	104
5.4	Partie réelle des modes transverses $\theta_n$ pour $f = 100$ Hz. a) guide rigide; b) guide traité avec de la mousse d'aluminium. . . . .	106
5.5	Répartition de la partie réelle des modes transverses 5, 6 et 7 pour le guide traité avec de la mousse d'aluminium : $f = 100$ Hz. . . . .	107
5.6	Constante de propagation $\beta_n$ pour $f = 100$ Hz : a) guide rigide; b) guide contenant de la mousse d'aluminium : $f = 100$ Hz. . . . .	107
5.7	Guide 2D traité avec de la laine de verre. . . . .	108
5.8	Répartition de la partie réelle des modes transverses $\theta_n$ pour un guide traité avec de la laine de verre : $f = 100$ Hz. . . . .	109
5.9	Constante de propagation $\beta_n$ en présence de la laine de verre : $f = 100$ Hz. . . . .	110
5.10	Vitesse de phase $C_{\phi_n}$ pour un guide traité : a) avec une impédance locale $Z = 1.5(1 - i)$ , b) avec de la laine de verre. . . . .	110
5.11	Zoom de $C_{\phi_n}$ pour le guide traité avec la laine de verre : a) modes dans l'air, b) modes dans le poreux. . . . .	111

5.12	Atténuation (partie imaginaire de $\beta_n$ ) des modes propres en fonction de $\omega$ : a) guide à paroi absorbante avec $Z = 1.5 - 1.5i$ , b) guide contenant de la laine de verre. . . . .	111
5.13	Zoom sur la partie inférieure de l'atténuation des modes pour le guide à paroi recouverte de la laine de verre avec identification de chaque mode. . . . .	112
5.14	Guide 2D traité avec un matériau poreux : a) Guide infini ; b) guide tronqué . . . . .	115
5.15	Guide infini tronqué avec source . . . . .	117
5.16	Répartition de la partie réelle des modes transverses $\theta_n$ pour un guide traité avec de la laine de verre : $f = 400$ Hz. . . . .	118
5.17	Partie réelle de la pression dans le guide en présence de la laine de verre pour une fréquence $f = 400$ Hz ( $h_1 = 1$ , $k_1 = 7.306$ ; $h_2 = 1.5$ , $k_2 = 14.957 + 10.482i$ ) : (a) Solution par éléments finis et opérateur DtN; (b) solution analytique. Premier mode imposé sur $\Sigma_-$ . . . . .	119
5.18	(a) Partie réelle de la pression dans le guide en présence de la laine de verre pour une fréquence $f = 400$ Hz ( $h_1 = 1$ , $k_1 = 7.306$ ; $h_2 = 1.5$ , $k_2 = 14.957 + 10.482i$ ) : (a) Solution par éléments finis et opérateur DtN; (b) solution analytique. sixième mode imposé sur $\Sigma_-$ . . . . .	119
5.19	Partie réelle de la pression avec DtN pour une fréquence $f = 400$ Hz, source située dans l'air : (a) Solution par éléments finis et opérateur DtN; (b) Solution par éléments finis et couches PML ( $\nu = 0.31(1 - i)$ )	121
5.20	Partie réelle de la pression avec DtN pour une fréquence $f = 400$ Hz, source située dans la laine de verre : (a) Solution par éléments finis et opérateur DtN; (b) Solution par éléments finis et couches PML ( $\nu = 0.32(1 - i)$ ) . . . . .	121
5.21	Guide 2D infini traité avec un matériau poreux en présence d'écoulement uniforme . . . . .	123
5.22	Constantes de propagation $\beta_n$ avec la laine de verre pour une fréquence $f = 400$ Hz : a) sans écoulement ; b) en présence d'un écoulement uniforme $M = 0.3$ . . . . .	125
5.23	Guide axisymétrique rigide infini . . . . .	141
5.24	Schéma de principe . . . . .	147
5.25	Contour $\Gamma$ . . . . .	151
5.26	Représentation axisymétrique . . . . .	152

# Liste des tableaux

1.1	Zéros de la dérivée première de la fonction de Bessel . . . . .	22
2.1	Constantes de propagation pour un guide rigide et un guide traité : $k = 5, Z = 1.5(1 - i)$ . . . . .	34
2.2	Valeurs propres critiques $\alpha_n^c$ et impédances critiques $Z_n^c$ pour $k = 5$ et $R = 1$ . . . . .	41
3.1	Valeurs propres critiques $\alpha_n^c$ , constantes de propagation $\beta_n^c$ et impé- dances critiques $Z_n^c$ pour $k = 5, M = 0.4$ et $R = 1$ . . . . .	62
3.2	Erreurs relatives en norme $L^2(\Omega)$ pour un mode d'ordre $n$ , $\varphi_n(r) =$ $J_0(\alpha_n r)$ imposé sur $\Sigma_-$ : $k = 8, M = 0.3$ et $Z = 4.5(1 + i)$ . . . . .	68
3.3	Erreurs relatives en norme $L^2(\Omega)$ entre les solutions DtN et les solu- tions PML pour le rayonnement d'une source acoustique pour $k = 7,$ $Z = 0.5(1 - i)$ . . . . .	80
3.4	Erreurs relatives en norme $L^2(\Omega)$ entre les solutions DtN et les solu- tions PML pour le rayonnement d'une source acoustique pour $k = 7,$ $Z = 0.5(1 - i)$ . . . . .	84
5.1	Paramètres de Johnson-Champoux-Allard pour la mousse d'alumi- nium (d'après F. Chevillotte, Matelys [3]). . . . .	104
5.2	Constantes de propagation pour un guide rigide : $f = 100$ Hz, $h_1 =$ $h = 1.$ . . . . .	105
5.3	Constantes de propagation pour un guide traité avec de la mousse d'aluminium : $f = 100$ Hz, $h_1 = 1$ et $h_2 = 1.5.$ . . . . .	105
5.4	Paramètres de Johnson-Champoux-Allard pour la laine de verre (d'après F. Chevillotte, Matelys [3]). . . . .	108
5.5	Constantes de propagation pour un guide traité avec de la laine de verre : $f = 100$ Hz, $h_1 = 1$ et $h_2 = 1.5.$ . . . . .	109
5.6	Erreurs relatives en norme $L^2(\Omega)$ pour un mode d'ordre $n$ imposé sur $\Sigma_-$ pour une fréquence $f = 400$ Hz ( $h_1 = 1, k_1 = 7.306; h_2 = 1.5,$ $k_2 = 14.957 + 10.482i$ ) . . . . .	120
5.7	Nombres d'ondes radiaux $\alpha_n$ et constantes de propagation $\beta_n$ pour $k = 7.$ . . . . .	144



# Introduction

La lutte contre le bruit à l'origine des nuisances sonores est un sujet d'importance majeure pour les sociétés d'aujourd'hui, surtout avec le développement des industries aéronautiques, automobiles et ferroviaires.

Pour minimiser le bruit généré dans des systèmes comme les turboréacteurs d'avions, les ventilateurs, les compresseurs et les silencieux d'échappement des automobiles, plusieurs études ont été réalisées ces dernières années afin d'identifier les sources de bruit et de modéliser avec précision les milieux de propagation des ondes acoustiques. Dans la plupart de ces systèmes, avant de rayonner vers l'extérieur, le bruit est canalisé par des guides de géométries plus ou moins complexes (coudés, changement de section, présence d'obstacles) qui peuvent contenir des fluides dont le mouvement peut être plus ou moins rapide en fonction des applications (gaine de ventilation, lignes d'échappement) et plus ou moins complexes (turbulent, laminaire, pulsé etc).

Dans cette étude, on s'intéresse à la résolution par la méthode des éléments finis de la propagation acoustique dans des guides traités en présence d'écoulement. Les sources acoustiques sont supposées connues et on s'intéresse à leurs rayonnements dans des milieux guidés en négligeant le couplage entre les phénomènes acoustiques et aérodynamiques qui concerne plutôt, l'analogie de Lighthill [4, 5].

L'étude de la propagation acoustique dans les guides est un sujet ouvert sur lequel plusieurs travaux ont été menés. Dans certains travaux [6–8], on considère souvent des guides droits et un champ de vitesse uniforme avec ou non un traitement acoustique sur les parois. Dans ce cas, la propagation acoustique dans le guide est gouvernée par l'équation des ondes convectée. C'est un modèle qui permet d'avoir souvent des solutions analytiques. Dans certains cas (guides à section variable, écoulement autour d'un obstacle), on considère un champ de vitesse irrotationnel dont l'équation de propagation obéit au formalisme de potentiel de vitesse [9–11].

Un autre type d'écoulement mais qui n'entre pas dans le cadre de notre étude est l'écoulement cisailé adopté par des auteurs comme Pridmore-Brown [12], Mungur et Gladwell [13], Hersh et Catton [14] et Pagneux *et al* [15]. Contrairement à l'écoulement uniforme où il y a uniquement un effet de convection sur les ondes acoustiques, l'écoulement cisailé a pour effets la convection et la réfraction.

Cependant, pour des problèmes de propagation dans des guides à géométries et champs de vitesse complexes, la plupart des modèles acoustiques reposent sur les Equations d'Euler Linéarisées (EEL). Les EEL sont résolues par des méthodes numé-



riques comme la méthodes des éléments finis. Une alternative aux EEL est l'équation de Galbrun [16] basée sur une représentation mixte Lagrange/Euler. Le modèle de Galbrun a pour inconnue principale le déplacement et permet de prendre en compte aisément les conditions aux limites dans les problèmes d'interaction fluide-structure.

Nous avons adopté dans ce travail l'approche basée sur l'équation des ondes convectée pour les guides uniformes et le formalisme de potentiel de vitesse pour les guides non uniformes pour deux raisons. Premièrement, la méthode de résolution numérique des problèmes de propagation acoustique dans les guides que nous allons développer repose sur une représentation modale à inconnue scalaire qui est la pression acoustique. Deuxièmement, la propagation acoustique dans des guides à section lentement variable en présence d'un écoulement potentiel se raccorde bien avec l'écoulement uniforme lorsque le guide redevient uniforme.

Par ailleurs, une partie importante de nos travaux est consacrée à l'étude de l'atténuation et de l'absorption des ondes acoustiques. Le plus souvent, la méthode utilisée consiste à revêtir les surfaces internes des guides par des matériaux absorbants. Ces matériaux absorbants peuvent être classés en deux types principaux. Les matériaux absorbants qui se caractérisent en général par une impédance locale complexe que l'on introduit dans les conditions aux limites sur les parois du guide et les matériaux poreux. Tous ces traitements acoustiques sont dépendants de la fréquence des ondes acoustiques. Il est à noter que les phénomènes de convection et de réfraction des écoulements ont une influence particulière sur l'atténuation acoustique. En effet, il est montré dans [17] que l'atténuation des ondes sonores est plus importante dans le sens contraire de l'écoulement que dans le sens de l'écoulement.

Le volet le plus important de notre travail concerne l'étude des conditions limites transparentes. En effet, afin d'éviter certains phénomènes liés aux effets d'extrémités (réflexion, rayonnement à la sortie des guides), les guides sont souvent considérés infinis. Ainsi, l'étude par la méthode des éléments finis de la propagation acoustique dans ces guides nécessite de les borner par des frontières artificielles sur lesquelles des conditions de non réflexion doivent être écrites.

Une technique souvent utilisée est la méthode des éléments finis de frontière BEM (*Boundary Element Method*). Cependant la BEM nécessite une fonction de Green et est mieux adaptée pour les problèmes de propagation d'ondes en espace infini et en milieu homogène.

En propagation guidée, pour une résolution par la méthode éléments finis du problème, une condition limite transparente efficace est de considérer une condition aux limites issue d'un développement sur une base des fonctions propres du guide. La condition limite transparente de type opérateur *Dirichlet-to-Neuman* (DtN) [18–23] s'inscrit dans cette optique.

Une autre condition limite transparente appelée couches absorbantes parfaitement adaptées PML (*Perfectly Matched Layers*) a été développée récemment par Béranger [24] pour les problèmes transitoires en électromagnétisme. Par la suite, elle a été utilisée en acoustique par de nombreux auteurs [1, 25–27].

Dans cette étude, notre objectif est d'écrire une condition limite transparente basée sur un opérateur DtN pour des guides axisymétriques traités en présence d'un écoulement uniforme en régime harmonique. L'opérateur DtN est basé sur une décomposition de la pression acoustique sur une base des modes transverses du guide. Une partie importante de l'étude est donc consacrée à la recherche des modes. Cela permettra notamment de faire une étude des courbes de dispersion et du comportement asymptotique des modes. L'étude des modes permettra également d'établir une relation d'orthogonalité des modes, indispensable pour l'écriture de l'opérateur DtN. En effet, la décomposition modale nécessite la détermination de coefficients modaux et des coefficients de normalisation des modes du guide.

Pour le traitement acoustique, on considère d'abord le cas des guides traités avec des matériaux absorbants d'impédance locale  $Z \in \mathbb{C}$ . Ces matériaux absorbants sont formés par des cavités disposées en nids d'abeilles combinées à des plaques perforées. Ils possèdent de très bonnes propriétés mécaniques (légers, résistants à l'érosion et aux hautes températures) et sont très utilisés pour l'absorption acoustique en aéronautique.

On étudie ensuite le cas des guides traités avec des matériaux poreux. Les matériaux poreux sont utilisés comme absorbants dans l'industrie automobile et le domaine du bâtiment. Leur utilisation dans l'aéronautique reste limitée du fait des conditions extrêmes (vitesse et température importantes). Ils sont constitués d'un réseau de pores et d'un fluide saturant, généralement de l'air. Les matériaux poreux sont en général classés en deux catégories : les matériaux poreux à structure élastique et les matériaux poreux à structure rigide. Pour la dernière catégorie, on considère le matériau poreux comme un fluide équivalent avec des paramètres équivalents complexes (masse volumique dynamique équivalente et module de compressibilité dynamique équivalent).

## Plan de la thèse

La thèse se compose de cinq chapitres :

**Le premier chapitre** fait une synthèse des travaux effectués dans le domaine de la propagation guidée. On rappelle les différents modèles et les méthodes de résolution adoptés. Pour des guides uniformes, des solutions modales sont possibles, alors que dans le cas des guides à géométries complexes, l'utilisation de techniques numériques devient indispensable. On examine l'influence de l'écoulement et des différentes sortes de traitements acoustiques des parois sur la propagation acoustique dans le guide, on présente les conditions limites transparentes utilisées dans la méthode des éléments finis et enfin on écrit un opérateur DtN pour un guide axisymétrique rigide.

**Le deuxième chapitre et le troisième chapitre** sont consacrés à la résolution par la méthode des éléments finis de la propagation acoustique dans un guide cylindrique axisymétrique infini traité avec des matériaux absorbants à réaction localisée. Ces chapitres constituent une généralisation d'une précédente étude effectuée dans un guide bidimensionnel [28]. L'étude est faite dans le chapitre 2 en l'absence d'écoulement et nous montrons comment écrire une condition limite transparente

de type opérateur DtN sur les frontières artificielles du guide. En effet, en présence de l'absorbant, le problème aux valeurs propres n'est plus auto-adjoint et les modes du guide ne sont plus orthogonaux au sens du produit scalaire usuel. L'écriture de l'opérateur DtN peut se faire néanmoins en introduisant une relation de biorthogonalité entre les modes. On étudie ensuite le problème en présence d'écoulement uniforme dans le chapitre 3. Dans ce cas encore, les modes ne sont pas orthogonaux et il devient difficile d'écrire une condition limite transparente. Pour pouvoir écrire l'opérateur DtN, une relation d'orthogonalité asymptotique est développée. Des résultats numériques sont présentés pour des guides uniformes infinis traités en présence ou non d'écoulement. On termine le chapitre 3 par une application de notre méthode de résolution au cas d'un guide infini non uniforme en présence d'écoulement potentiel.

**Le quatrième chapitre** présente une bibliographie sur les matériaux absorbants en acoustique utilisés dans la suite de l'étude. On commence le chapitre par une description des matériaux absorbants à réaction localisée caractérisés par une impédance locale. On aborde ensuite le cas des matériaux absorbants à réaction non localisée (matériaux poreux) et on termine le chapitre par une description des différents modèles de matériaux poreux et les paramètres les caractérisant.

Dans **le chapitre 5**, nous écrivons un opérateur DtN pour un guide infini traité avec des matériaux absorbants à réaction non localisée modélisés par un fluide équivalent. La principale difficulté pour ce type de configuration est la prise en compte des conditions de continuité à l'interface des deux milieux dans la recherche des modes et dans la formulation variationnelle du problème. En l'absence d'écoulement, ces conditions de continuité sont faciles à prendre en compte et il est possible d'établir une relation de biorthogonalité qui fait intervenir les masses volumiques du fluide et du poreux. En présence d'écoulement, des dérivées tangentielles apparaissent dans la condition de continuité du déplacement à l'interface des deux milieux. Il n'existe plus dans ce cas de relation de biorthogonalité.

Des exemples de configurations de guides traités avec des matériaux poreux sont présentés avec des simulations numériques.

Nous terminons la thèse par une conclusion de l'étude réalisée et par des perspectives.

# Chapitre 1

## Généralités sur la propagation acoustique guidée

### 1 Introduction

Les bruits à l'origine de nuisances sonores se propagent souvent en espace libre, comme le bruit du trafic routier, des avions ou des trains, ou dans des espaces grands devant la surface de rayonnement comme le cas des machines industrielles. Avant d'être rayonnées vers l'extérieur, il est fréquent que les ondes acoustiques se propagent dans des systèmes confinés. Ces systèmes sont en général constitués de conduits de formes plus ou moins complexes comme les lignes d'échappement des automobiles, les gaines de ventilation, les circuits hydrauliques, les nacelles des turboréacteurs des avions. L'étude de la propagation acoustique guidée, qui fait l'objet de nos travaux, constitue encore aujourd'hui, un sujet important dans la communauté acoustique dont les objectifs sont de prédire et de mieux comprendre les phénomènes physiques mis en jeu (atténuation, absorption, convection, diffraction, réfraction ...) en fonction des nombreux paramètres qui peuvent intervenir dans de telles situations (écoulement, matériaux absorbants, température ...).

L'objectif de ce premier chapitre est de faire une synthèse des différents travaux réalisés dans ce domaine et d'en présenter les principaux modèles et résultats.

Dans le contexte particulier des guides d'ondes, il est fréquent de les considérer infiniment longs afin de s'affranchir des phénomènes physiques liés aux effets d'extrémités (ie. réflexion et rayonnement à la sortie d'une conduite par exemple). Ainsi, même si les guides infinis n'ont pas de réalité physique, leur étude permet de mettre en évidence des phénomènes physiques importants tels que les notions de coupure ou d'atténuation et de déterminer des fonctions de transfert des systèmes acoustiques plus complexes tels que les silencieux. La dernière partie de ce chapitre est donc consacrée à la synthèse bibliographique décrivant les techniques de modélisation des guides infinis et en particulier aux conditions limites transparentes utilisées dans la méthode des éléments finis.

## 2 Influence de l'écoulement

La théorie de la propagation des ondes acoustiques dans les guides rectilignes est bien connue dans les fluides au repos et les résultats qui en découlent constituent souvent la base de méthodes modales pour des problèmes plus complexes. La méthode de recherche des modes consiste à écrire l'équation d'onde avec les conditions aux limites imposées sur les parois. Dans le domaine fréquentiel, on se ramène à l'équation de Helmholtz dont les solutions sont cherchées par séparation des variables [29, 30].

Pour les systèmes industriels comme les souffleries, les conduits de ventilation, les réacteurs d'avions ou les silencieux d'échappement, l'écoulement constitue un paramètre important qu'il faut prendre en compte dans les études acoustiques. À ce stade, il est important de préciser qu'il existe deux grandes catégories de problèmes lorsque l'on s'intéresse à l'acoustique en écoulement : les problèmes liés à la production du bruit par l'écoulement et ceux qui concernent les mécanismes de propagation du son dans les écoulements, la source de bruit étant alors supposée connue. Dans le cadre de nos travaux, la génération du bruit par les écoulements turbulents, qui a largement été étudiée sur la base de la théorie de Lighthill [4, 5] dès 1952, ne sera pas considérée.

L'étude de l'influence d'un écoulement moyen a fait l'objet de beaucoup d'attention depuis les années 1950. L'un des premiers à s'intéresser à ce sujet est Pridmore-Brown. Ses travaux constituent une référence dans les années 1960 et sont la base de nombreux travaux dans les années 1980. Pridmore-Brown [12] a étudié en 1958 par une approche modale, l'influence de l'écoulement cisailé sur la propagation acoustique dans un guide rectiligne uniforme rigide (voir Figure 1.1).

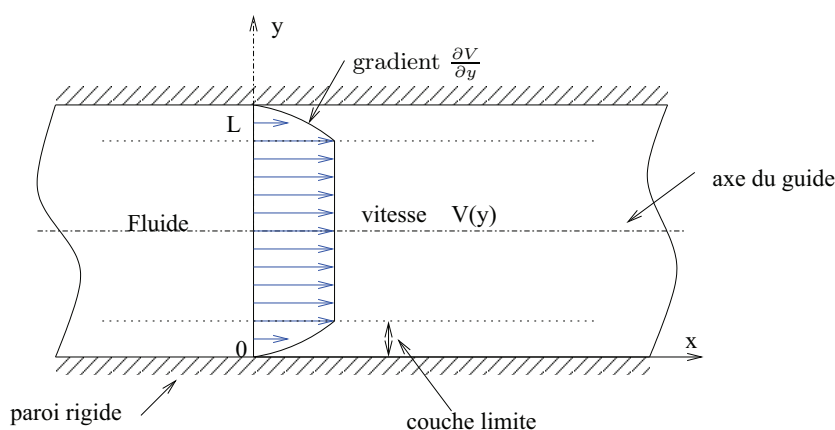


Figure 1.1 – Profil d'écoulement cisailé proposé par Pridmore-Brown pour un guide rectangulaire uniforme

Dans son approche, Pridmore-Brown propose une équation de propagation des ondes dans laquelle la couche limite à la paroi est prise en compte par un gradient de vitesse qui ne dépend que de la variable  $y$  en négligeant la viscosité du fluide :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = (1 - M^2) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{2M}{c} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} + 2\rho_0 c \frac{dM}{dy} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.1)$$

où  $p$ ,  $v$  et  $c$  désignent respectivement la pression acoustique, la vitesse particulière et la célérité du son,  $\rho_0$  représente la densité du milieu supposée constante. Le nombre de Mach  $M$  est donné par :  $M(y) = V(y)/c$ , avec  $V(y)$  la vitesse moyenne d'écoulement du fluide parallèle à l'axe du guide. En considérant des solutions harmoniques de la forme :

$$p = F(y)e^{i\frac{\omega}{c}(\beta x - ct)} \quad (1.2)$$

$$v = G(y)e^{i\frac{\omega}{c}(\beta x - ct)} \quad (1.3)$$

il obtient une équation aux valeurs propres dans la section du guide donnée par :

$$\frac{d^2 F}{dy^2} + \frac{2\beta}{1 - M\beta} \frac{dM}{dy} \frac{dF}{dy} + \frac{\omega^2}{c^2} \left[ (1 - M\beta)^2 - \beta^2 \right] F = 0 \quad (1.4)$$

où  $F$  et  $G$  sont liées par l'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{dF}{dy} = i\rho_0\omega(1 - \beta M)G \quad (1.5)$$

$\omega$  est la pulsation et  $\beta$  est un nombre d'onde complexe (constante de propagation) dans la direction  $x$ .

L'auteur propose une solution analytique à cette équation en considérant dans un premier temps un gradient de vitesse constant. La solution trouvée de cette première approximation est valide asymptotiquement et est basée sur une méthode proposée par Langer [31]. La méthode de Langer permet de résoudre l'équation d'onde à une dimension à l'aide de fonctions développées asymptotiquement sous forme d'une série (au premier ordre).

Pridmore-Brown propose ensuite un profil d'écoulement turbulent qui suit une loi de puissance :  $M(y) = M_0(y/L)^{1/7}$ , où  $M_0$  est la valeur de  $M$  pour  $y = L$ . Cependant, la solution obtenue par la méthode de Langer n'est plus valable près des parois en raison d'une singularité au niveau de la couche limite ( $y = 0$ ,  $M = 0$ ).

Mungur et Gladwell [13] ont repris la méthode de Pridmore-Brown en l'améliorant au voisinage de la paroi. Ils ont notamment proposé une méthode de résolution numérique de l'équation de Pridmore-Brown basée sur le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4. Cette méthode a permis de résoudre le problème de la singularité près des parois. Peube et Jallet [32] ont étendu la méthode de Pridmore-Brown aux guides cylindriques en présence d'écoulement laminaire.

En 1971, Hersh et Catton [14] ont montré l'effet d'un écoulement cisailé sur la propagation acoustique en s'appuyant sur les travaux de Pridmore-Brown. Ils ont étudié l'effet de l'écoulement aussi bien sur la propagation en amont (ie. sens contraire à l'écoulement) que la propagation en aval (ie. sens de l'écoulement), contrairement à Pridmore-Brown qui s'est limité à la propagation aval. Leur étude montre que la présence de la couche limite a pour effet de réfracter l'onde vers le centre du guide pour une propagation amont, et de réfracter l'onde vers la paroi pour une propagation aval. Ces effets dépendent notamment de l'épaisseur de la couche limite par rapport à la longueur d'onde.

Une méthode alternative à la méthode de Runge-Kutta a été proposée par Unruh et Eversman [33]. C'est une technique de résolution numérique de l'équation de Pridmore-Brown basée sur la méthode des résidus pondérés de Galerkin. Ces travaux abordent également l'influence d'une paroi traitée par un matériau absorbant.

Agarwal et Bull [34] ont résolu numériquement l'équation des ondes dans un guide circulaire en présence d'un écoulement turbulent plus réaliste pour la propagation amont et aval. Les résultats numériques obtenus montrent qu'en plus des effets de réfraction liés aux gradients de vitesse déjà mis en évidence par Hersh et Catton, l'écoulement cisailé a pour effet de rendre le mode plan dispersif.

Les auteurs ont également mis en évidence l'augmentation des fréquences de coupures pour leur profil d'écoulement comparé à celles d'un écoulement uniforme.

Plus récemment, Pagneux *et al* [15] ont étudié théoriquement et expérimentalement l'influence d'un écoulement parallèle cisailé sur la propagation multimodale des ondes acoustiques dans un conduit circulaire. Le modèle théorique est basé sur un développement asymptotique à faible nombre de Mach de la solution de l'équation de Pridmore-Brown. Ce développement permet d'explicitier des expressions simples des nombres d'onde axiaux, des modes transverses et des fréquences de coupures pour n'importe quel profil de la vitesse moyenne. Les résultats montrent que le mode fondamental n'est pas sensible à la forme spécifique du profil d'écoulement moyen contrairement aux modes d'ordre élevé. L'étude expérimentale est réalisée également à faible nombre de Mach ( $M < 0.05$ ) en considérant deux modes propagatifs. Les auteurs ont obtenu un bon accord entre les résultats théoriques et expérimentaux.

Boucheron *et al* [35] ont étudié analytiquement l'influence d'un écoulement moyen laminaire à nombre de Mach et de Reynolds faibles sur la propagation acoustique dans des guides rigides circulaires. Leur solution est basée sur celle proposée par Gogate et Munjal [17] pour des configurations axisymétriques en la généralisant à d'autres modes de propagation. Tous ces auteurs utilisent un profil d'écoulement unidirectionnel variant suivant la section du guide. En effet, pour un écoulement laminaire cisailé (voir Figure 1.1) ou turbulent permanent dans un guide rectiligne de section droite constante, la vitesse moyenne dépend uniquement de la coordonnée transversale.

Il est courant de négliger l'influence de la viscosité dans l'écoulement en utilisant l'hypothèse de fluide parfait, l'écoulement devient alors uniforme dans la section du guide :

$$V(x, y) = v_0 = \text{constante} \quad (1.6)$$

L'équation de propagation se réduit alors à l'équation de Helmholtz convectée :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + (1 - M^2) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2iMk \frac{\partial p}{\partial x} + k^2 p = 0 \quad (1.7)$$

où  $k = \omega/c$  désigne le nombre d'onde. La présence d'un écoulement uniforme permet d'exprimer aisément les modes du guide qui sont les mêmes que ceux d'un guide rigide puisque seuls interviennent les effets de convection. La présence de l'écoulement

uniforme permet également d'obtenir souvent des solutions analytiques. L'écoulement uniforme est souvent employé comme une première approximation en vue de traiter des configurations plus complexes. Par exemple la propagation acoustique dans un guide lentement variable en présence d'écoulement potentiel se raccorde bien avec l'écoulement uniforme lorsque le guide redevient uniforme.

Harel et Pérulli [6] ont examiné l'effet d'un écoulement uniforme sur la propagation acoustique dans des guides rigides et traités par un matériau absorbant. Ils ont montré notamment que dans le cas d'un écoulement subsonique et d'un écoulement supersonique, les modes qui se propagent en amont ont une longueur d'onde inférieure à ceux qui se propagent en aval.

Eversman et Beckemeyer [7] ont étudié la propagation acoustique dans un guide en présence d'une couche limite très mince aux parois. Les résultats obtenus montrent que la formulation d'un problème de propagation acoustique dans un guide en présence d'un écoulement à couches limites très minces est semblable à la formulation du même problème de propagation acoustique dans un guide en présence d'un écoulement uniforme.

Cependant, en présence d'écoulement uniforme, certaines difficultés peuvent survenir notamment près des parois traitées où il y a en général une couche limite. En effet, Rienstra et Vilenski ont montré dans [8] que la propagation acoustique dans un guide traité en présence d'un écoulement à couches limites minces présente des instabilités le long des parois. Ils montrent que ces instabilités disparaissent lorsque l'on augmente l'épaisseur de la couche limite ( $\delta$ ) selon un critère liant  $\delta$  à la pulsation  $\omega$ .

Dans le cas des guides à géométries complexes, l'écoulement n'est plus unidirectionnel et il n'est plus possible d'établir une équation de propagation pour la pression seule. Il est donc nécessaire d'utiliser les équations de Navier-Stokes qui se réduisent aux équations d'Euler linéarisées quand on néglige les effets de viscosité pour l'acoustique :

$$-i\omega\rho + \mathit{div}(\rho\mathbf{v}_0) + \mathit{div}(\rho_0\mathbf{v}) = 0 \quad (1.8)$$

$$\rho_0 \left[ -i\omega\mathbf{v} + (\mathbf{v}.\mathit{grad})\mathbf{v}_0 + (\mathbf{v}_0.\mathit{grad})\mathbf{v} \right] + \rho(\mathbf{v}_0.\mathit{grad})\mathbf{v}_0 + \mathit{grad}p = 0 \quad (1.9)$$

$$-i\omega s + (\mathbf{v}.\mathit{grad})s_0 + (\mathbf{v}_0.\mathit{grad})s = 0 \quad (1.10)$$

$$-i\omega\rho + k^2p + (\mathbf{v}.\mathit{grad})p_0 + (\mathbf{v}_0.\mathit{grad})p = 0 \quad (1.11)$$

où  $\mathbf{v}$ ,  $\rho$ ,  $p$  et  $s$  désignent respectivement les variables perturbées de la vitesse acoustique, de la masse volumique, de la pression et de l'entropie ( $\mathbf{v}_0$ ,  $\rho_0$ ,  $p_0$  et  $s_0$  sont des grandeurs moyennes),  $c_0$  est la célérité du son.

Les équations (1.8), (1.9), (1.10) et (1.11) désignent respectivement l'équation de conservation de la masse, l'équation de conservation de la quantité du mouvement, l'équation de conservation de l'énergie et l'équation d'état. Le champ de vitesse est désormais un paramètre du problème de propagation acoustique qu'il faut calculer au préalable.

Plusieurs auteurs ont proposé des modèles basés sur ces équations linéarisées.



C'est le cas de ces travaux récents [36–38].

Astley et Eversman [39] ont étudié par la méthode des éléments finis, le problème des valeurs propres dans un guide uniforme traité en présence d'un écoulement cisailé. Les résultats obtenus montrent que l'on peut atteindre un bon niveau de précision avec peu d'éléments de Lagrange.

Cependant, les auteurs constatent que des modes parasites apparaissent parmi les modes d'ordre élevé pour un petit nombre d'éléments. Pour résoudre ce problème de modes parasites, il faut augmenter le nombre d'éléments et faire un choix adéquat des fonctions d'interpolation. Dans un autre article [40], Astley et Eversman ont remplacé les éléments Lagrangiens par des éléments Hermitiens et en combinant avec une technique dite de "condensation". Cela permet non seulement d'éliminer les modes parasites, mais il permet également d'augmenter la précision et d'appliquer la méthode à des géométries axisymétriques.

Redon [36] a étudié par la méthode des éléments finis la propagation acoustique en espace confiné en présence d'écoulement non isotherme. Les premiers résultats proposés par l'auteur concernent le cas simple d'un milieu au repos. La méthode est ensuite appliquée aux cas particuliers d'écoulements laminaires et turbulents afin d'analyser les phénomènes de réfraction et de convection. Par la suite, l'auteur réalise l'étude d'un résonateur à deux cols dans lequel les champs moyens de vitesse et de température ne s'obtiennent plus à partir d'expressions analytiques, mais par un calcul aérodynamique.

Une alternative aux équations d'Euler linéarisées est le modèle de Galbrun [16]. Galbrun a procédé à une reformulation des équations d'Euler linéarisées basée sur une représentation mixte Lagrange-Euler des variables acoustiques.

En effet, dans la représentation d'Euler, une particule fluide est représentée par sa position  $x$  à l'instant  $t$ , la vitesse  $\mathbf{v}(t)$  étant l'inconnue d'Euler. Alors qu'en représentation Lagrangienne, la particule est représentée par sa position  $\mathbf{X}_0$  à l'instant de référence  $t_0$ , l'inconnue de Lagrange étant la trajectoire de la particule. La description de Lagrange est surtout utilisée en mécanique du solide où les particules subissent des mouvements moins importants. Par contre, en mécanique des fluides où les déplacements des particules sont importants, la description d'Euler est le plus utilisée. Pour cette raison, l'équation de Galbrun décrite par Poirée [41] et utilisée par Legendre [42] fut longtemps négligée :

$$\rho_0 \frac{d^2 \boldsymbol{\xi}}{dt^2} - \nabla(\rho_0 c_0^2 \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}) + (\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}) \nabla p_0 - {}^t \nabla \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p_0 = 0 \quad (1.12)$$

où  $\boldsymbol{\xi}$  est le déplacement de Lagrange. Le déplacement  $\boldsymbol{\xi}$  étant l'inconnue principale dans le modèle de Galbrun, les conditions aux limites dans les problèmes d'interaction fluide-structure sont généralement plus naturelles et le nombre d'inconnues est réduit par rapport aux équations d'Euler.

Certains auteurs ont adopté ce modèle pour la résolution des problèmes de propagation acoustique dans des guides en présence ou non d'écoulement uniforme [42, 43] et cisailé [44–48].

Bonnet-Ben-Dhia *et al* [43] ont mis en œuvre la méthode des éléments finis pour résoudre l'équation de Galbrun dans un conduit rigide avec un écoulement uniforme. La principale difficulté pour l'utilisation de l'équation de Galbrun dans la méthode des éléments finis concerne le fait que le problème est mal posé car l'équation de Galbrun et les conditions aux limites associées ne définissent pas un problème elliptique et leur discrétisation par des éléments finis nodaux conduit à un problème mal posé. Pour pallier ce problème, Bonnet-Ben-Dhia *et al* [46] ont proposé une méthode basée sur une formulation variationnelle régularisée du problème qui assure la convergence des éléments finis nodaux.

Une autre méthode introduite dans les années 1980 par Nédelec [49] et utilisée par Peyret [50] pour résoudre l'équation de Galbrun, consiste à utiliser les éléments d'arêtes. Cependant, l'étude de Peyret s'est limitée au cas sans écoulement. Une troisième méthode a été proposée par Treysède [51] pour résoudre les problèmes de stabilité découlant de la discrétisation de l'équation de Galbrun par la méthode des éléments finis classiques. Sa méthode dite d'éléments finis mixte est basée sur la condition inf-sup.

Peyret et Elias [45] ont étudié la propagation acoustique dans les conduits traités en présence d'un écoulement cisailé. Les résultats obtenus sont en bon accord avec les solutions provenant d'approches modales [13].

Nous venons de citer quelques travaux qui portent sur les effets de l'écoulement sur la propagation acoustique dans les guides. Un autre facteur qui influe sur la propagation acoustique guidée est la température. On trouve dans la littérature de nombreux travaux traitant ce phénomène [36, 52, 53].

### 3 Influence de la température sur la propagation acoustique guidée

La prise en compte de la température dans l'étude de la propagation acoustique dans les guides est intervenue à partir des années 1970 par des auteurs comme Kapur, Cummings et Mungur [54], Kapur et Mungur [53], Nayfeh et Sun [52].

Kapur, Cummings et Mungur [54] ont étudié la propagation d'ondes dans des chambres de combustion en prenant en compte les inhomogénéités causées par les gradients de température et de densité, le but de leur étude étant de prédire l'impédance acoustique de transfert (quotient de la pression acoustique à la sortie de la chambre de combustion par la différence de la vitesse à l'entrée et la sortie) pour le premier mode (mode plan en l'absence d'absorbant).

Par la suite, Kapur et Mungur [53] ont fait une analyse de la propagation du son dans un conduit annulaire ou circulaire traité en présence d'un écoulement hélicoïdal. Ils ont établi une équation de propagation qui prend en compte les gradients transverses de température et d'écoulement hélicoïdal. Les solutions de cette équation sont cherchées dans les directions axiale et angulaire et l'équation tridimensionnelle des ondes est réduite à une équation différentielle ordinaire de second degré. Cette étude constitue en quelque sorte une généralisation des travaux de Mungur et Plumbee [55] concernant l'étude de la propagation acoustique dans des guides en présence d'écoulements cisailés.

De leur côté, Nayfeh et Sun [52] ont repris l'équation de Pridmore-Brown en y introduisant un gradient transverse de température. Leur travail permet de décrire l'effet combiné d'un écoulement et d'un gradient de température transversal sur l'atténuation du son dans un guide bidimensionnel. Ils établissent l'équation ci-dessous pour la pression acoustique  $p$  :

$$\frac{d^2 p}{dy^2} - \left[ \frac{2ku'_0}{u_0k - \omega} - \frac{T'_0}{T_0} \right] \frac{dp}{dy} + \left[ \frac{M_c^2(u_0k - \omega^2)}{T_0} - k^2 \right] p = 0 \quad (1.13)$$

où  $u_0$  et  $T_0$  désignent respectivement la vitesse et la température moyenne,  $M_c$  est le nombre de Mach au centre du guide et  $u'_0$  et  $T'_0$  sont les dérivées respectives de  $u_0$  et de  $T_0$  par rapport à  $y$  :

$$u'_0 = \frac{du_0}{dy}; \quad T'_0 = \frac{dT_0}{dy} \quad (1.14)$$

Les résultats de cette étude montrent qu'en refroidissant les parois, le son est canalisé vers celles-ci dans les deux sens de propagation (en amont et en aval). Ils concluent que l'effet d'un gradient de température moyenne sur le taux d'atténuation des trois premiers modes est aussi important que celui d'un gradient de vitesse moyenne.

Plus tard, Gervais et Peube [56], ont étudié l'effet d'un écoulement laminaire et d'un gradient de température sur la propagation acoustique dans un guide bidimensionnel rigide. Ils montrent que le gradient de température a pour effet d'augmenter la vitesse de phase des modes longitudinaux et transverses, alors que le gradient de vitesse a pour effet d'augmenter uniquement la vitesse de phase des modes transverses. Ils montrent également que près des parois froides, le mode fondamental (premier mode) est fortement réfracté. Ce phénomène s'accroît quand le nombre de Mach augmente. Ces observations sont confirmées par les travaux de Bihhadi [37] et Redon [36].

Nous avons présenté quelques effets des gradients de température sur la propagation acoustique dans les guides. Nous examinons maintenant l'influence des parois absorbantes sur la propagation guidée.

## 4 Influence de l'absorbant : conditions limites sur les parois

La réduction du bruit est devenue une priorité surtout avec le développement croissant des moyens de transports. Deux méthodes de suppression ou de réduction du bruit, une active et l'autre passive, sont étudiées par les chercheurs. La méthode active consiste à générer un son de même amplitude que le son à supprimer, mais de phase opposée. Cette technique est généralement difficile à mettre en œuvre en pratique et nécessite une dépense supplémentaire d'énergie. La méthode passive consiste à absorber l'énergie sonore avec des matériaux absorbants placés sur la paroi. On s'intéresse dans cette étude, à l'absorption acoustique des matériaux absorbants.

On distingue deux types de matériaux absorbants : les matériaux à réaction localisée et les matériaux à réaction non localisée. Les matériaux à réaction localisée sont tels que deux points voisins n'interagissent pas entre eux. Ces matériaux sont souvent constitués de plaques perforées associées à des structures en nids d'abeilles dont chaque cellule se comporte comme un résonateur. Ils sont utilisés dans l'industrie aéronautique au niveau des turboréacteurs où les contraintes thermiques ne permettent pas l'usage de matériaux usuels. Ce caractère local permet de représenter les matériaux dans les modèles physiques par une condition limite locale sous la forme d'une impédance complexe  $Z$  au niveau d'une paroi. Cette représentation locale constitue une bonne approximation pour modéliser la présence des matériaux absorbants sur les parois.

Harel et Perulli [6] ont étudié la propagation acoustique dans un guide traité (avec une impédance locale) en présence d'un écoulement uniforme. Ils ont montré que l'onde subit un amortissement proportionnel à la partie réelle de l'impédance acoustique de la paroi.

Nayfeh et al [57] ont fait en 1975, une synthèse des travaux sur la propagation acoustique dans les guides en présence d'écoulements en y incluant les effets de la température et des traitements acoustiques sur les parois aussi bien avec des matériaux à réaction localisée qu'avec des matériaux absorbants à réaction non localisée.

Craggs [58] a proposé un modèle d'éléments finis pour les silencieux dissipatifs à chambre d'expansion en l'absence d'écoulement. Il étudie les pertes par transmission TL (Transmission Loss) d'un silencieux en présence d'un traitement à réaction localisée sur les parois de la chambre d'expansion. L'impédance acoustique locale est calculée à partir de relations empiriques [59]. Les résultats montrent que le traitement acoustique de la chambre d'expansion augmente fortement les pertes par transmission en particulier aux fréquences hautes où l'absorption est excellente. En outre, aux fréquences basses où il y a moins d'absorption, il y a une amélioration globale par rapport à une chambre non traitée.

Rienstra [60] a étudié la propagation acoustique dans un guide cylindrique traité par un matériau à réaction non localisée. Il propose des méthodes de résolution de l'équation de Helmholtz en considérant trois configurations de l'absorbant. Pour la première configuration, le matériau absorbant est un matériau poreux homogène et l'auteur détermine le champ acoustique par des méthodes modales. La deuxième configuration concerne un matériau poreux dont les propriétés varient lentement suivant la direction axiale. Une solution de type modale pure n'étant pas possible en général, Rienstra utilise une méthode multi-échelle pour déterminer le champ acoustique dans le guide. Pour la dernière configuration, le traitement acoustique est un ensemble de partitions annulaires rigides à l'intérieur desquelles se trouve le matériau poreux. L'ensemble se comporte comme un matériau absorbant à réaction localisée suivant l'axe du cylindre, mais reste un matériau absorbant à réaction non localisée circonférentiellement. Dans cette configuration, une méthode modale est possible également.

Certains auteurs se sont intéressés aux conditions limites sur les parois des guides

traités. On sait que dans le cas d'un guide à parois rigides la vitesse normale est nulle à la paroi et la condition aux limites à considérer est la condition de Neumann homogène :

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (1.15)$$

Dans le cas d'un guide à parois absorbantes, on peut se demander quelles sont les grandeurs continues à l'interface entre le fluide et la paroi absorbante. Pendant longtemps, la vitesse normale a été considérée continue, cette condition n'est valable que si le fluide est au repos. Cette hypothèse reste vraie en présence d'un écoulement présentant une couche limite (Mungur et Plumbee [55]). En présence d'un écoulement uniforme, il y a discontinuité de la vitesse tangentielle entre les deux milieux, il faut alors utiliser la continuité du déplacement à l'interface.

Myers [61] a défini une condition à la limite de paroi qui relie la composante normale de la vitesse au déplacement normal pour un guide à paroi absorbante en présence d'un fluide non visqueux en écoulement quelconque :

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \frac{d(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n})}{dt} - (\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{v}_0) \quad (1.16)$$

où  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\boldsymbol{\xi}$  et  $\mathbf{v}_0$  désignent respectivement la vitesse particulaire, la normale extérieure à la paroi et la vitesse moyenne. L'opérateur  $d/dt$  représente la dérivée particulaire donnée par :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \quad (1.17)$$

En régime harmonique, la condition de Myers s'écrit :

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \left( -i\omega + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \right) (\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n}) - (\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{v}_0) \quad (1.18)$$

Cette condition limite constitue aujourd'hui la référence pour l'étude de la propagation acoustique dans les guides en présence d'un absorbant du type impédance locale. Cependant, pour une résolution du problème de propagation acoustique dans le guide par la méthode des éléments finis, l'application de la condition de Myers dans un guide non uniforme en présence d'un écoulement potentiel pose un certain nombre de difficultés lors de l'écriture de la formulation variationnelle associée à ce problème de propagation. En effet, il est montré dans [9] par Eversman qu'appliquée sans simplification, la condition aux limites de Myers nécessite les dérivées normale et tangentielle des composantes normale et tangentielle respectives de la vitesse moyenne, ainsi que la dérivée de la densité et de l'admittance le long de la paroi.

Gogate et Munjal [17] ont proposé une solution analytique de la propagation acoustique dans des guides traités en présence d'écoulement laminaire. Ils constatent notamment que l'écoulement laminaire augmente l'atténuation des ondes en propagation en amont et la diminue en propagation en aval.

Les matériaux absorbants à réaction non localisée sont des matériaux poreux constitués d'une phase solide (squelette) saturée d'un fluide généralement de l'air. Depuis les années 1950, de nombreux modèles de matériaux poreux ont été développés. Les premiers modèles ont été proposés par Zwikker et Kösten [62], suivi

du modèle de Biot [63, 64]. Nous y reviendrons plus en détails dans le chapitre 4. Les matériaux absorbants à réaction non localisée sont utilisés pour absorber le son dans diverses situations. Ils sont communément utilisés dans les silencieux d'échappements et dans les circuits d'air conditionné.

Astley et Cummings [65] ont développé une méthode d'éléments finis pour l'étude du champ acoustique dans des guides à parois traitées avec des matériaux absorbants à réaction non localisée en présence d'un écoulement uniforme. Ils ont notamment appliqué leur méthode sur un guide rectangulaire dont les quatre parois sont tapissées de fibres de verre. Les résultats numériques et les mesures sont en bon accord. Ils constatent également qu'en basses fréquences, les modes sont moins atténués en propagation aval qu'en propagation amont. Par ailleurs, leur méthode d'éléments finis peut être appliquée à n'importe quel type de section transversale (circulaire, ovale) pourvu que le guide soit de section uniforme.

D'autres études ont été par la suite menées par Cummings et Chang [66, 67] dans le cas d'un guide traité en présence d'un écoulement uniforme aussi bien à l'intérieur du guide que dans le matériau absorbant à réaction non localisée (matériau poreux). Ils ont montré dans [66] que la présence de l'écoulement dans l'absorbant peut avoir un effet substantiel sur la propagation du mode fondamental. Ils ont notamment constaté qu'il y a une augmentation du taux d'atténuation surtout en propagation amont. Ces effets sont dus au fait que la présence de l'écoulement dans l'absorbant augmente la partie réelle de la résistivité du matériau poreux. A partir de ces résultats, les auteurs ont étudié dans [67] la perte par transmission ( $TL$ ) dans un silencieux d'échappement. Ils montrent que la présence de l'écoulement dans l'absorbant influe sur le  $TL$  de façon significative.

Peat et Rathi [68] ont proposé une formulation générale d'éléments finis pour analyser le champ acoustique dans un guide axisymétrique entouré d'un volume de matériaux poreux ou fibreux. Ils constatent que le champ de vitesse dans le fluide induit un champ acoustique non homogène, non linéaire et anisotrope dans l'absorbant même si celui-ci est un matériau homogène isotrope. Ils comparent leurs résultats avec ceux de Cummings et Chang [66, 67] pour lesquels des solutions analytiques et expérimentales sont disponibles.

De leur côté, Kakoty et Roy [69] ont proposé un modèle de propagation acoustique dans un guide rectangulaire dont les quatre côtés sont traités par un matériau absorbant à réaction non localisée en présence ou non d'un écoulement uniforme. Il s'agit d'un modèle théorique qui permet de prédire l'atténuation des modes que les auteurs calculent à l'aide de la méthode de Newton-Raphson. Ils comparent avec succès leurs résultats avec ceux de Astley et Cummings [65].

## 5 Conditions limites transparentes

La résolution par la méthode des éléments finis des équations de propagation acoustique dans un domaine infini, nécessite de borner ce dernier par des frontières artificielles. La principale difficulté est de trouver une condition limite de non

réflexion de l'onde sur ces frontières artificielles de telle sorte que la solution du problème dans le domaine borné soit la restriction à celui-ci de la solution dans le domaine infini.

Ces conditions sont en général appelées **conditions limites transparentes**, **NRBC** (Non-Reflecting Boundary Condition) ou **ABC** (Absorbent Boundary Condition).

Au cours des dernières décennies, plusieurs techniques numériques ont été développées pour résoudre des problèmes de propagation interne et externe en espace infini. On peut citer la méthode des éléments finis de frontières ou BEM (Boundary Element method), la DRBEM (Dual Reciprocity Boundary Element Method) qui est une évolution de la BEM utilisée notamment par Perrey-Debain [70] et Perrey-Debain *et al* [71] pour l'étude de la propagation externe. On peut citer également les couches PML (Perfectly Matched Layer), les opérateurs DtN (Dirichlet-to-Neumann) développés par Givoli et Keller [18] et les éléments infinis [72, 73].

## 5.1 Couches absorbantes parfaitement adaptées : PML

Les couches absorbantes parfaitement adaptées ou PML (Perfectly Matched Layer) ont été formulées pour la première fois par Bérenger [24] comme conditions limites transparentes pour résoudre les équations de Maxwell en régime transitoire. Cette méthode a été largement développée en électromagnétisme [24, 74, 75], mais a été par la suite employée dans d'autres domaines comme l'aéroacoustique [44], (voir aussi les travaux de Bécache *et al* [1, 76], de Legendre [42], de Poernomo [28] et de Hu [25–27]).

La Figure (1.2) ci-dessous montre le schéma de principe pour un guide cylindrique axisymétrique infini tronqué en  $z = 0$  et  $z = L$  par des couches PML d'épaisseur  $e$ .

La construction des conditions limites transparentes à l'aide des couches PML consiste à placer de part et d'autre du guide infini tronqué (aux frontières artificielles  $\Sigma^-$  et  $\Sigma^+$ ) des couches d'épaisseur  $e$  dans lesquelles les ondes seront atténuées. L'idée de construire des couches absorbantes à partir d'un modèle physique avec amortissement avait déjà été proposée avant les travaux de Bérenger en 1994, toutefois le changement d'impédance entre le domaine physique et les couches absorbantes était responsable de réflexions parasites. L'intérêt des couches PML est qu'elles sont parfaitement adaptées de sorte qu'elles sont parfaitement transparentes. Il est important de préciser que les couches PML ne peuvent pas être réalisées à partir de modèles physiques d'absorption et que la solution obtenue dans les couches n'a pas de réalité physique.

Dans le domaine spatial, le principe des couches PML est équivalent à un changement de variables complexes. Ainsi, pour passer de l'équation de propagation dans le domaine physique aux équations de propagation dans les domaines PML, il faut procéder à la transformation suivante (pour des couches PML suivant la direction  $z$ ) [24] :

$$\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow \alpha \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.19)$$

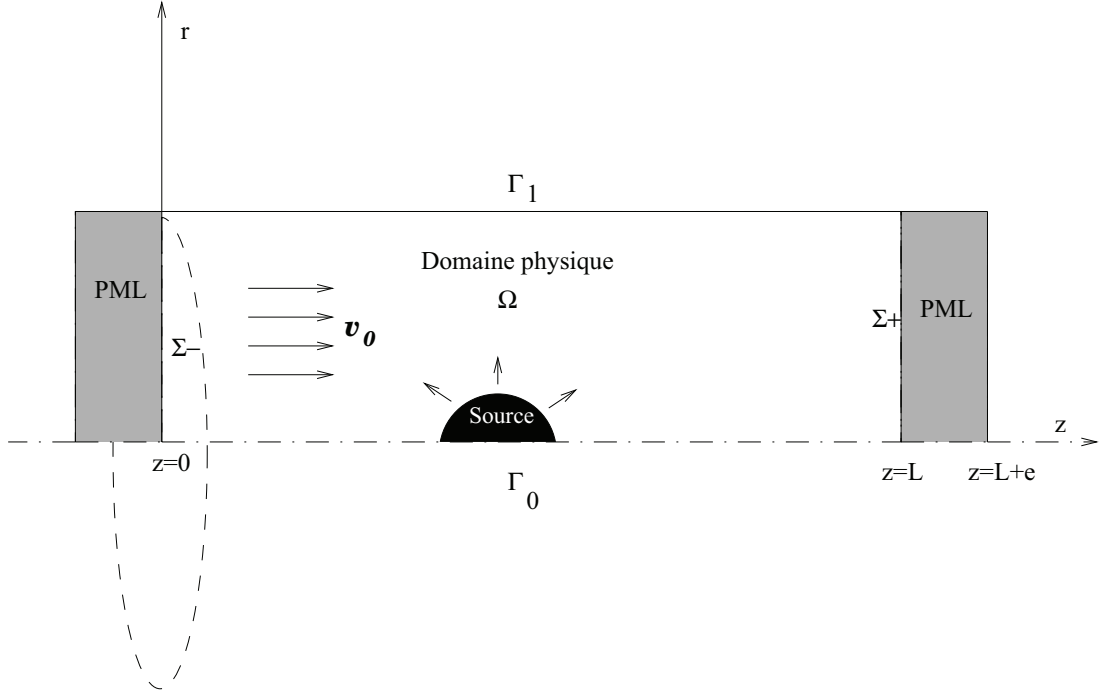


Figure 1.2 – Schéma de principe d'un guide cylindrique axisymétrique tronqué avec des couches PML

où  $\alpha$  est un nombre complexe tel que  $Im(\alpha) < 0$  et  $Re(\alpha) > 0$  avec  $\alpha = 1$  dans le domaine physique. Les PML de Béranger [24] consistent à choisir  $\alpha$  comme :

$$\alpha = \frac{1}{1 + \frac{i\sigma(z)}{\omega}} \quad (1.20)$$

où  $\sigma$  est un réel positif dépendant de  $z$ . Soient  $\beta_n$  les constantes de propagation dans le domaine physique, alors les constantes de propagation dans les domaines PML sont données par :

$$\beta_{n,\alpha} = \frac{\beta_n}{\alpha} \quad (1.21)$$

Ainsi, si  $Im(\alpha) < 0$  et  $Re(\alpha) > 0$ , tous les modes propagatifs dans le domaine physique (Figure 1.3 à gauche) deviennent évanescents dans les couches PML (Figure 1.3 à droite).

Les PML sont facile à mettre en œuvre et très performantes en général. De plus, l'atténuation complète dans les couches PML permet d'utiliser une condition limite simple, du type paroi rigide par exemple au bout des couches.

Après avoir été introduites pour les problèmes d'évolution en électromagnétisme par Béranger, Hu [25] a utilisé les couches PML pour des problèmes d'aéroacoustique basés sur les équations d'Euler linéarisées. Cependant, en présence d'écoulement, Hu [26, 27] a mis en évidence des instabilités liées aux signes des vitesses de phase et de groupe.

En effet, il est montré par Hu [27] qu'il existe des vitesses de groupe positives mais des vitesses de phase négatives dans le sens de l'écoulement. L'auteur a donc proposé un modèle de PML en présence d'un écoulement uniforme en employant une transformation spatio-temporelle des coordonnées avant l'application de la méthode



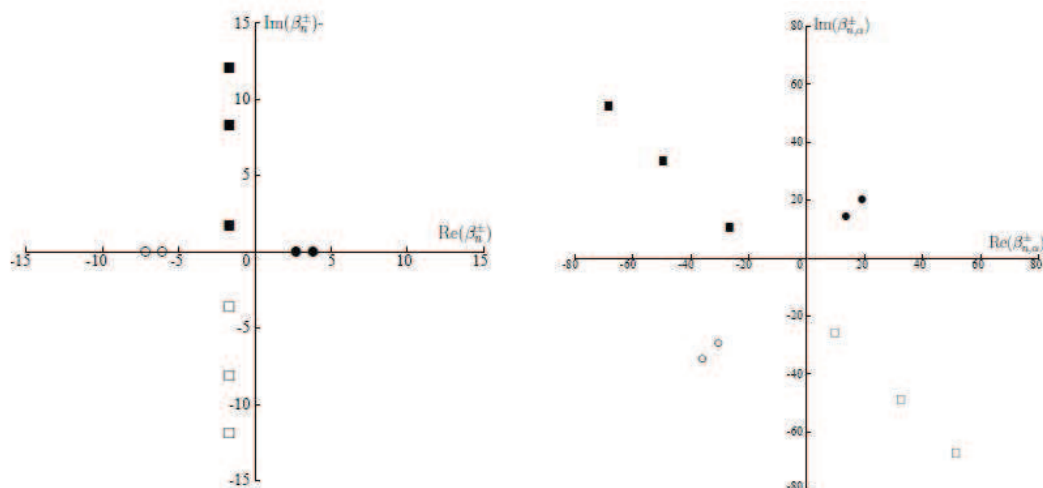


Figure 1.3 – Constante de propagation  $\beta_n$  et  $\beta_{n,\alpha}$ , Bécache *et al* 2003 [1]

des couches PML.

Bécache *et al.* [1] ont montré que la formulation initiale proposée par Béranger pose des problèmes en présence de modes amonts inverses pour l'équation de Helmholtz convectée. On rappelle que les modes amonts inverses sont des modes tels que les vitesses de phase et de groupe sont de signes opposés. Ainsi, l'application du changement de variable (1.19) fait apparaître le mode amont inverse dans la partie négative du plan complexe (cercle plein) de la Figure 1.4 à gauche. L'auteur a

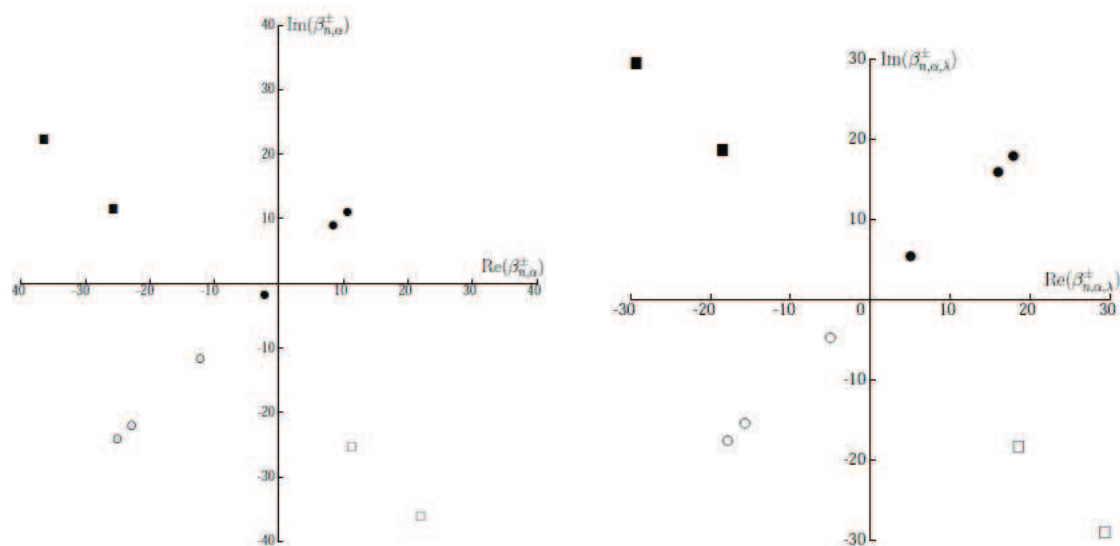


Figure 1.4 – Constante de propagation  $\beta_n$  et  $\beta_{n,\alpha}$ , Bécache *et al* 2003 [1] présence d'un mode amont inverse

proposé une nouvelle transformation pour les couches PML qui permet de rendre tous les modes dans ces couches évanescents. La méthode consiste à reformuler la

transformation précédente (1.19) par :

$$\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow \alpha \frac{\partial}{\partial z} + i\lambda \quad (1.22)$$

où

$$\lambda = \frac{kM}{1 - M^2} \quad (1.23)$$

est choisi de telle sorte que tous les modes “s'évanouissent” dans les couches PML (voir Figure 1.4 à droite).

Les couches PML sont une condition limite transparente efficace, surtout lorsqu'on a des inconnues vectorielles, mais présentent des instabilités numériques dont l'étude reste ouverte.

Une alternative à l'utilisation des couches PML comme condition limite transparente pour des propagations d'ondes en espace guidé et pour une résolution par éléments finis, est de considérer une condition aux limites exacte basée sur un développement sur une base des fonctions propres du problème.

## 5.2 Opérateur Dirichlet-to-Neumann

L'opérateur Dirichlet-to-Neumann (DtN) est une condition limite transparente exacte développée en 1989 par Keller et Givoli [18] pour l'équation de Helmholtz sur une frontière artificielle circulaire ou sphérique.

Comme les autres techniques susmentionnées, cet opérateur permet dans le cadre de la résolution des problèmes de propagation acoustique dans des guides infinis par la méthode des éléments finis, de tronquer le domaine infini par des frontières artificielles tout en ayant une réflexion nulle de l'onde sur ces frontières. Il est basé sur une décomposition modale de la pression sur la frontière artificielle.

L'opérateur DtN présente plusieurs avantages par rapport aux autres conditions limites transparentes. Il est exact si on considère une décomposition en série infinie de la pression sur la frontière, même si dans la pratique il est nécessaire de tronquer la série, le choix d'un nombre de modes conditionnant une bonne convergence. Il permet de réduire la taille du maillage par rapport aux PML.

Cependant, il n'est pas toujours aisé d'explicitier l'opérateur DtN, surtout en présence d'un absorbant et d'un écoulement même uniforme. Ceci est dû au fait que la décomposition de la pression sur la base des modes nécessite un calcul de coefficients modaux. Il faut donc une relation d'orthogonalité entre les modes du guide.

Poernomo [28] a montré que l'opérateur est simple à déterminer pour un guide rigide puisque les modes étant orthogonaux au sens du produit scalaire usuel, le calcul des coefficients modaux est trivial. Des difficultés apparaissent par contre en présence d'un matériau absorbant car le problème n'est plus auto adjoint [23]. Néanmoins, une relation de bi-orthogonalité existe pour un traitement acoustique seul. Cela permet donc d'exprimer l'opérateur DtN cherché.

En revanche, en présence d'un matériau absorbant et d'un écoulement, il n'existe plus de relation de bi-orthogonalité pour la pression seule. Une relation d'orthogonalité asymptotique est alors introduite pour expliciter l'opérateur DtN.

## 6 Position du problème

Par cette étude bibliographique succincte, nous constatons que l'opérateur DtN est appliqué dans la littérature uniquement pour des guides rigides [19] et des guides traités par des matériaux absorbants de type impédance locale [28].

Dans ce travail, notre objectif est dans un premier temps de généraliser la méthode pour des problèmes 3D axisymétriques, d'étudier l'erreur de convergence en fonction du nombre de modes, et de l'appliquer en présence d'écoulement potentiel. Ensuite nous l'appliquons pour des problèmes de propagation acoustique dans des guides à parois traitées par des matériaux absorbants à réaction non localisée caractérisés par des fluides équivalents.

Dans la suite, on rappelle les résultats importants sur la propagation acoustique dans les guides axisymétriques afin d'expliquer le principe de construction d'une condition limite transparente basée sur un opérateur DtN dans le cas simple d'un guide rigide.

### 6.1 Rappels sur la propagation acoustique dans les guides axisymétriques rigides

Le domaine d'étude est un guide cylindrique axisymétrique infini. L'équation de propagation des ondes acoustiques est établie à partir des équations de la mécanique des fluides dans le cadre général de la thermodynamique des milieux continus. On adopte les hypothèses classiques de l'acoustique linéaire.

Les contraintes visqueuses et les phénomènes de conduction thermique sont supposés négligeables du point de vue acoustique. Toutes les grandeurs physiques que nous utilisons sont des fonctions des variables d'Euler. Le fluide contenu dans le guide est soit au repos, soit en mouvement uniforme subsonique axisymétrique.

En présence d'un écoulement uniforme, la propagation du son obéit à l'équation d'onde convectée. En coordonnées cylindriques, elle est donnée par :

$$\Delta p - \frac{1}{c_0^2} \frac{d^2 p}{dt^2} = 0 \quad (1.24)$$

où  $p$  désigne la pression acoustique,  $c_0$  est la vitesse acoustique (célérité du son). L'opérateur  $\Delta$  est le Laplacien en coordonnées cylindriques :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

On définit la dérivée seconde particulaire par :

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2v_0 \frac{\partial}{\partial t} + v_0^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.25)$$

où  $v_0$  désigne la vitesse moyenne. En régime harmonique ( $e^{-i\omega t}$ ), l'équation (1.25) devient :

$$\frac{d^2}{dt^2} = -\omega^2 - 2i\omega v_0 + v_0^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.26)$$

L'équation de propagation acoustique (1.24) s'écrit :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + (1 - M^2) \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + 2iMk \frac{\partial p}{\partial z} + k^2 p = 0 \quad (1.27)$$

avec  $k = \omega/c_0$  le nombre d'onde et  $M = v_0/c_0$  le nombre de Mach ( $M < 1$ ).

On cherche la solution de l'équation (1.27) à variables séparées sous la forme :

$$p(r, \theta, z) = \varphi(r)\Theta(\theta)\Psi(z) \quad (1.28)$$

En reportant l'expression (1.28) dans l'équation (1.27) on a :

$$\frac{\varphi''}{\varphi} + \frac{1}{r} \frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''}{\Theta} + (1 - M^2) \frac{\Psi''}{\Psi} + 2iMk \frac{\Psi'}{\Psi} = -k^2 \quad (1.29)$$

$\Psi$  ne dépendant ni de  $r$  ni de  $\theta$ , la somme ne peut être constante que si les fonctions à variables indépendantes sont elles-mêmes constantes. On cherche  $\Psi(z)$  sous la forme :

$$\Psi(z) = A_z e^{i\beta z} \quad (1.30)$$

L'équation (1.29) devient :

$$\frac{\varphi''}{\varphi} + \frac{1}{r} \frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''}{\Theta} = (1 - M^2)\beta^2 + 2Mk\beta - k^2 \quad (1.31)$$

En multipliant l'ensemble par  $r^2$  et par un raisonnement identique que pour  $\Psi(z)$ , on peut choisir  $\Theta(\theta)$  sous la forme :

$$\frac{\Theta''}{\Theta} = -m^2 \Rightarrow \Theta(\theta) = A_\theta e^{im\theta} + B_\theta e^{-im\theta} \quad (1.32)$$

L'équation (1.31) s'écrit finalement :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial \varphi}{\partial s} + (1 - \frac{m^2}{s^2})\varphi = 0 \quad (1.33)$$

Où  $s = k_r r$ . On définit l'équation de dispersion par :

$$k_r^2 = k^2 - (1 - M^2)\beta^2 - 2Mk\beta \quad (1.34)$$

L'équation (1.33) est une équation de Bessel dont les solutions sont une combinaison des fonctions de Bessel  $J_m(k_r r)$  et de Neumann  $N_m(k_r r)$  d'ordre  $m$ .

$$\varphi(r) = aJ_m(k_r r) + bN_m(k_r r) \quad (1.35)$$

La fonction de Neumann tend vers l'infini lorsque  $r$  tend vers zéro, donc pour avoir une solution bornée au centre du guide, il faut choisir  $b = 0$ . D'où :

$$\varphi(r) = aJ_m(k_r r) \quad (1.36)$$

En reportant les solutions (1.30), (1.32) et (1.36) dans l'équation (1.29), la solution générale s'écrit :

$$p(r, \theta, z) = aA_z J_m(k_r r) \left( A_\theta e^{im\theta} + B_\theta e^{-im\theta} \right) e^{i\beta z} \quad (1.37)$$

Dans le cas d'un guide cylindrique à paroi rigide, la condition limite sur la paroi impose que la dérivée de la fonction de Bessel soit nulle :  $J'_m(k_r R) = 0$  où  $R$  désigne le rayon du cylindre. Dans ce cas, les nombres d'ondes  $k_r$  ne peuvent prendre que des valeurs discrètes notées  $k_{mn}$ ,  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$  [29].

L'équation de dispersion (1.34) devient :

$$k^2 = k_{mn}^2 + (1 - M^2)\beta^2 + 2Mk\beta \quad (1.38)$$

Le tableau (Tab. 1.1) montre les valeurs de  $k_{mn}$  pour  $m = 1, 2, 3$  et  $n = 1, 2, 3$ .

$m \setminus n$	0	1	2	3
0	0	3.83	7.02	10.17
1	1.84	5.33	8.54	11.71
2	3.05	6.71	9.97	13.17
3	4.20	8.02	11.35	14.59

Tableau 1.1 – Zéros de la dérivée première de la fonction de Bessel

Le champ acoustique dans le guide n'est pas forcément axisymétrique, mais c'est une fonction harmonique de la variable azimutale  $\theta$  avec  $m$  l'ordre du mode angulaire, l'étude peut donc se ramener dans le plan  $(r, z)$  (voir Figure 1.5). Dans toute la suite de l'étude, on ne considérera que les solutions axisymétriques ( $m = 0$ ), on se limitera donc aux fonctions de Bessel d'ordre 0,  $\varphi(r) = aJ_0(k_{0n}r)$ . La condition limite sur l'axe de symétrie au centre du guide ( $r = 0$ ) est une condition de Neumann homogène :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0$$

car

$$\frac{d\varphi}{dr} \Big|_{r=0} = ak_{0n} J'_0(r=0) = -ak_{0n} J_1(r=0) = 0$$

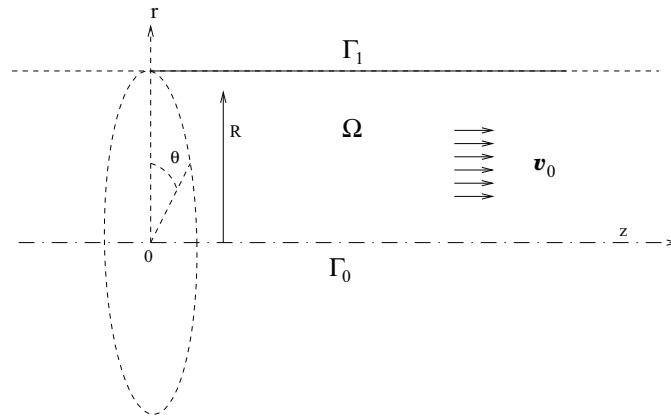


Figure 1.5 – Guide cylindrique axisymétrique infini

## 6.2 Écriture d'un opérateur DtN pour un guide cylindrique axisymétrique rigide

Nous explicitons dans cette section la méthode pour écrire une condition limite transparente basée sur un opérateur Dirichlet-to-Neumann (DtN) dans le cas simple d'un guide axisymétrique infini rigide.

Considérons la propagation acoustique dans un guide cylindrique axisymétrique infini de rayon  $R$  contenant un fluide en mouvement uniforme subsonique axisymétrique de vitesse  $\mathbf{v}_0$  suivant  $\mathbf{e}_z$ .

Afin de résoudre ce problème par la méthode des éléments finis, il est nécessaire de travailler dans un domaine borné. On définit donc deux frontières artificielles ( $\Sigma^-$  et  $\Sigma^+$ ) sur lesquelles il convient d'imposer des conditions limites transparentes (voir Figure 1.6).

Dans notre étude, ces conditions aux limites transparentes sont basées sur l'écriture d'un opérateur DtN, explicité à partir d'une décomposition modale de la pression acoustique sur les frontières  $\Sigma^-$  et  $\Sigma^+$ . Comme on l'a vu précédemment, en ne considérant que des solutions axisymétriques (ie.  $m = 0$ ), la propagation est décrite

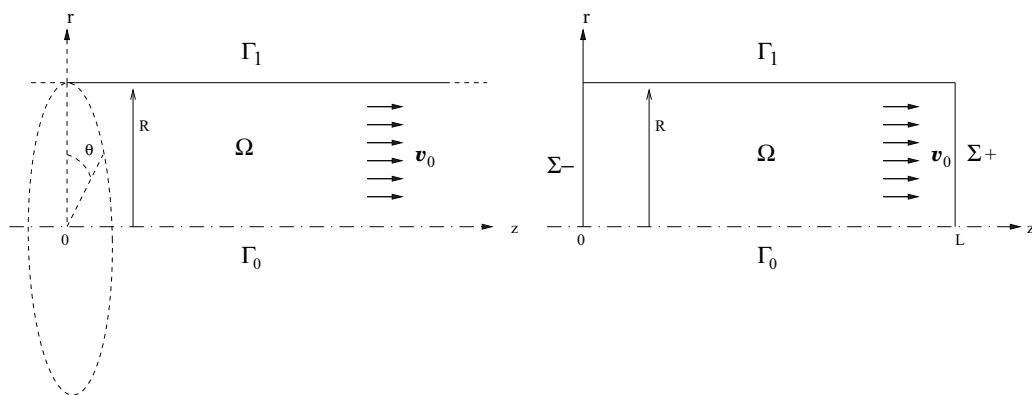


Figure 1.6 – Guide cylindrique axisymétrique tronqué

par l'équation de Helmholtz convectée (la pression dépend alors uniquement de  $r$  et

de  $z$ ) :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + (1 - M^2) \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + 2iMk \frac{\partial p}{\partial z} + k^2 p = 0 \quad (1.39)$$

L'opérateur DtN est défini sur les frontières  $\Sigma_{\pm}$  par la dérivée de la pression :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -T^{\pm}(p) \quad (1.40)$$

Les conditions aux limites sur la paroi rigide  $\Gamma_1$  et au centre de symétrie du guide  $\Gamma_0$  s'écrivent :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \quad (1.41)$$

où  $n$  désigne la normale extérieure. A l'aide de la méthode de séparation des variables, on choisit des solutions de la forme :

$$p_n(r, z) = \varphi_n(r) e^{i\beta_n z} \quad (1.42)$$

où  $\beta_n$  désigne la constante de propagation suivant l'axe  $z$ . Pour déterminer les opérateurs DtN sur les frontières  $\Sigma_-$  et  $\Sigma_+$ , on décompose la pression sur les modes transverses  $\varphi(r)$  du guide :

$$\forall z > L \quad p(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \varphi_n(r) e^{i\beta_n(z-L)} \quad (1.43)$$

où  $A_n$  sont des coefficients modaux à déterminer. La détermination de ces coefficients nécessite une relation d'orthogonalité entre les modes. Pour un guide rigide, il est connu que le problème aux valeurs propres est auto-adjoint. Les modes propres du guide sont orthogonaux au sens du produit scalaire usuel sur  $L^2(\Omega)$  :

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \int_0^R \varphi_n \bar{\varphi}_m r dr \quad (1.44)$$

où  $\bar{\varphi}$  représente le complexe conjugué de  $\varphi$ . On sait aussi que les modes forment une base complète qui justifie le développement (1.43). Il ne reste donc qu'à déterminer les modes dans une section droite transversale du guide. Ils sont solutions du problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} + (k^2 - \beta^2) \varphi &= 0 \quad r \in ]0, R[ \\ \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= 0 \quad \text{pour } r = 0 \text{ et } r = R \end{aligned}$$

Pour des solutions axisymétriques ( $m = 0$ ), les modes transverses sont sous la forme :  $\varphi_n(r) = a_n J_0(k_{0n} r)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), où  $k_{0n}$  représente les nombres d'ondes transversaux et les coefficients  $a_n$  représentent l'amplitude du mode d'ordre  $n$ .

Pour un souci de clarté, les nombres d'ondes transversaux  $k_{0n}$  sont notés désormais  $\alpha_n$ . Ils correspondent aux valeurs qui annulent la dérivée de la fonction de Bessel d'ordre 0 en  $r = R$ . La fonction de Bessel d'ordre 0 vérifie la condition limite au centre quelle que soit la valeur de  $\alpha_n$ . On obtient une équation de dispersion donnée par :

$$k^2 = \alpha_n^2 + (1 - M^2) \beta_n^2 + 2Mk\beta_n$$

Les modes se présentent en deux familles de modes [29] :

$$p_n^\pm(r, z) = \varphi_n^\pm(r) e^{i\beta_n^\pm z} \quad (1.45)$$

Le signe “+” indique la propagation aval et le signe “-” la propagation amont. On déduit facilement la distinction entre les modes propagatifs ( $\beta_n^\pm \in \mathbb{R}$ ) et les modes évanescents ( $\beta_n^\pm \notin \mathbb{R}$ ). On note également que :  $\varphi_n^+(r) = \varphi_n^-(r) = \varphi_n(r)$  et  $\beta_n^+ = -\beta_n^-$ .

Comme les modes sont orthogonaux, on peut alors calculer les amplitudes  $a_n$  des modes pour qu'ils forment une base orthonormée. On trouve :

$$\begin{aligned} \varphi_0(r) &= \sqrt{2}/R, \quad n = 0 \\ \varphi_n(r) &= \frac{\sqrt{2}}{J_0(\alpha_n R) R} J_0(\alpha_n r), \quad n \geq 1 \end{aligned} \quad (1.46)$$

Pour déterminer les opérateurs DtN, nous allons calculer d'abord les coefficients modaux  $A_n$ . Pour ce faire, on se sert du produit scalaire mentionné plus haut (1.44). Sur la frontière  $\Sigma_+$  ( $z = L$ ), on a :

$$p^+(r, z = L) = \sum_{n \geq 0}^{+\infty} A_n^+ \varphi_n(r) \quad (1.47)$$

En faisant le produit scalaire de  $p^+$  et d'un mode  $\varphi_m$ , il vient :

$$\begin{aligned} (p^+, \varphi_m)_{\Sigma_+} &= \int_0^R \sum_{n \geq 0}^{+\infty} A_n^+ \varphi_n(r) \bar{\varphi}_m(r) r dr \\ &= \sum_{n \geq 0}^{+\infty} A_n^+ \int_0^R \varphi_n(r) \bar{\varphi}_m(r) r dr \end{aligned} \quad (1.48)$$

Si  $n = m$ , puisque les modes sont orthonormés, on a :  $(\varphi_n, \varphi_n)_{\Sigma_+} = 1$ , alors on en déduit les coefficients modaux  $A_n^+$  :

$$A_n^+ = (p^+, \varphi_n)_{\Sigma_+}$$

L'équation (1.43) devient :

$$p^+(r, z) = \sum_{n \geq 0}^{+\infty} (p^+, \varphi_n)_{\Sigma_+} \varphi_n(r) e^{i\beta_n^+(z-L)} \quad (1.49)$$

On trouve alors la dérivée de la pression sur  $\Sigma_+$  :

$$\frac{\partial p^+(r, L)}{\partial z} = \sum_{n \geq 0}^{+\infty} i\beta_n^+ (p^+, \varphi_n)_{\Sigma_+} \varphi_n(r) \quad (1.50)$$

Finalement l'opérateur DtN se déduit de (1.50) par :

$$T^+(p) = - \sum_{n \geq 0}^{+\infty} i\beta_n^+ (p^+, \varphi_n)_{\Sigma_+} \varphi_n(r) \quad (1.51)$$

Par un raisonnement identique, on trouve l'opérateur DtN suivant les  $z$  décroissants :

$$T^-(p) = \sum_{n \geq 0}^{+\infty} i\beta_n^- (p^-, \varphi_n)_{\Sigma_-} \varphi_n(r) \quad (1.52)$$



### 6.3 Exemple d'application

Pour illustrer l'efficacité de la condition limite transparente, nous présentons le cas simple de résolution par éléments finis d'un problème de propagation acoustique dans un guide cylindrique semi infini axisymétrique rectiligne rigide de rayon  $R = 1$  et de longueur  $L = 5$  ( $\Sigma_E$  est situé à  $z = 0$  et  $\Sigma_+$  à  $z = 5$ ) comme indiqué sur la figure 1.7.

Une condition de Dirichlet du type  $p = g$  est imposée sur la frontière  $\Sigma_E$  et une condition limite transparente est écrite sur la frontière  $\Sigma_+$ . En considérant un guide semi infini, il est possible de calculer une solution analytique que nous utiliserons comme solution de référence pour la solution obtenue par éléments finis.

Le maillage (voir figure 1.8) est réalisé à l'aide de la bibliothèque d'éléments finis MODULEF [77]. Il s'agit d'un maillage non structuré composé de 1230 éléments de type P2 (éléments de Lagrange quadratiques). Toutes nos simulations sont réalisées avec la bibliothèque numérique MELINA [78].

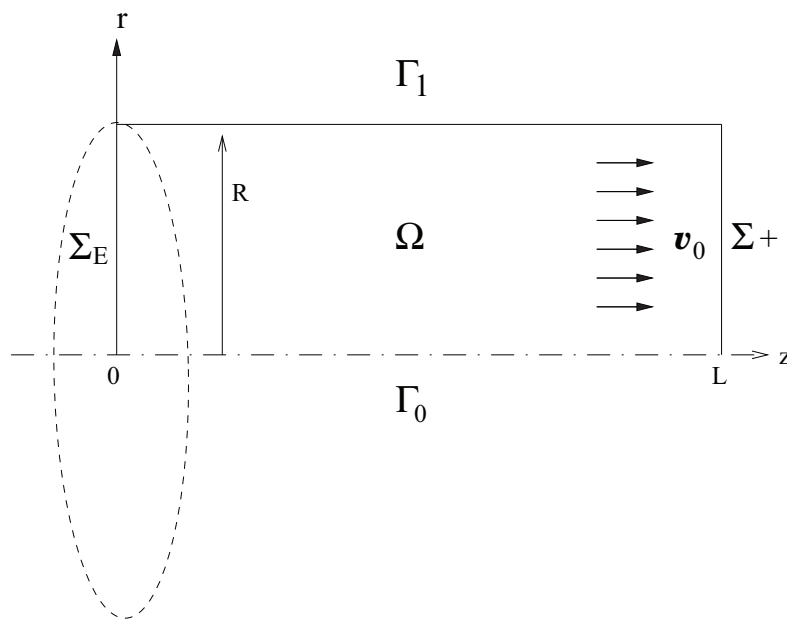


Figure 1.7 – Guide cylindrique axisymétrique

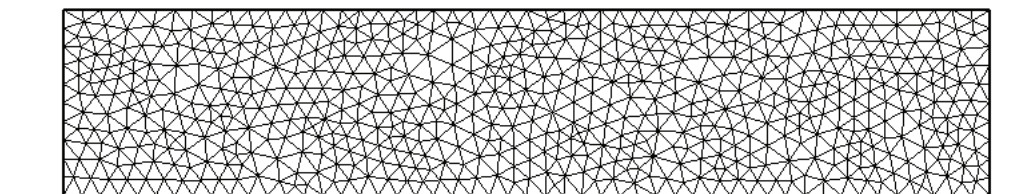


Figure 1.8 – Maillage du guide axisymétrique

L'équation de propagation et les conditions aux limites sont données par :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + (1 - M^2) \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + 2iMk \frac{\partial p}{\partial z} + k^2 p = 0 \quad \text{sur } \Omega \quad (1.53)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \quad (1.54)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -T^\pm(p) \quad \text{sur } \Sigma_+ \quad (1.55)$$

$$p = g \quad \text{sur } \Sigma_E \quad (1.56)$$

où  $g$  est un mode imposé ( $g = \varphi_n(r)$ ). Afin de résoudre ce problème par la méthode des éléments finis, il convient d'écrire la formulation variationnelle associée. On multiplie l'équation (1.53) par une fonction test régulière  $\psi \in H^1(\Omega)$  telle que  $\psi = 0$  sur  $\Sigma_E$  et on intègre sur  $\Omega$  :

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + (1 - M^2) \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + 2iMk \frac{\partial p}{\partial z} + k^2 p \right) \psi r dr dz = 0 \quad (1.57)$$

En appliquant le théorème de Green pour les termes d'ordre 2, on trouve :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left( -\frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + (1 - M^2) \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} + 2iMk \frac{\partial p}{\partial z} \psi + k^2 p \psi \right) r dr dz \\ & + \int_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Sigma_+} \frac{\partial p}{\partial n} \psi r d\Sigma = 0 \end{aligned} \quad (1.58)$$

En appliquant les conditions aux limites (1.54) et (1.55), la formulation variationnelle est donnée par :

trouver  $p \in H^1(\Omega)$ , telle que  $\forall \psi \in H^1(\Omega)$  et  $\psi = 0$  sur  $\Sigma_E$  :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left( \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + (1 - M^2) \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} - 2ikM \frac{\partial p}{\partial z} \psi - k^2 p \psi \right) r dr dz \\ & + (1 - M^2) \int_{\Sigma_+} T^+(p) \psi r d\Sigma = 0 \end{aligned} \quad (1.59)$$

La Figure 1.9 montre la répartition de la pression dans le guide axisymétrique lorsque le premier mode ( $\varphi_0(r)$ ) est imposé sur la frontière  $\Sigma_E$  ( $z = 0$ ) sans écoulement (Figure 1.9-a,-c) ) et avec un écoulement uniforme  $M = 0.3$  (Figure 1.9-b,-d) pour  $k = 5$ . L'opérateur DtN sur  $\Sigma_+$  est calculé avec les dix premiers modes. Les solutions obtenues par la méthode des éléments finis et de l'opérateur DtN (Figure 1.9-a) et Figure 1.9-b)) sont en bon accord avec les solutions analytiques (Figure 1.9-c) et Figure 1.9-d)). L'erreur relative en norme  $L^2(\Omega)$  entre les deux solutions est respectivement égale à 0.0494 % et 0.0509 %.

Sur la Figure 1.10, on impose maintenant le deuxième mode ( $\varphi_1(r)$ ) sur la frontière  $\Sigma_E$  du guide axisymétrique pour  $k = 5$ . L'opérateur DtN est encore calculé avec les dix premiers modes. Ici encore les solutions numériques (Figure 1.10-a) et Figure 1.10-b)) sont identiques aux solutions analytiques (Figure 1.10-c) et Figure 1.10-d)). L'erreur relative est égale à 0.0180 % et 0.0179 % respectivement.

Par ailleurs, on remarque que les solutions en présence d'écoulement uniforme présentent une longueur d'onde supérieure à celles en l'absence d'écoulement. Ce phénomène est dû à la convection.

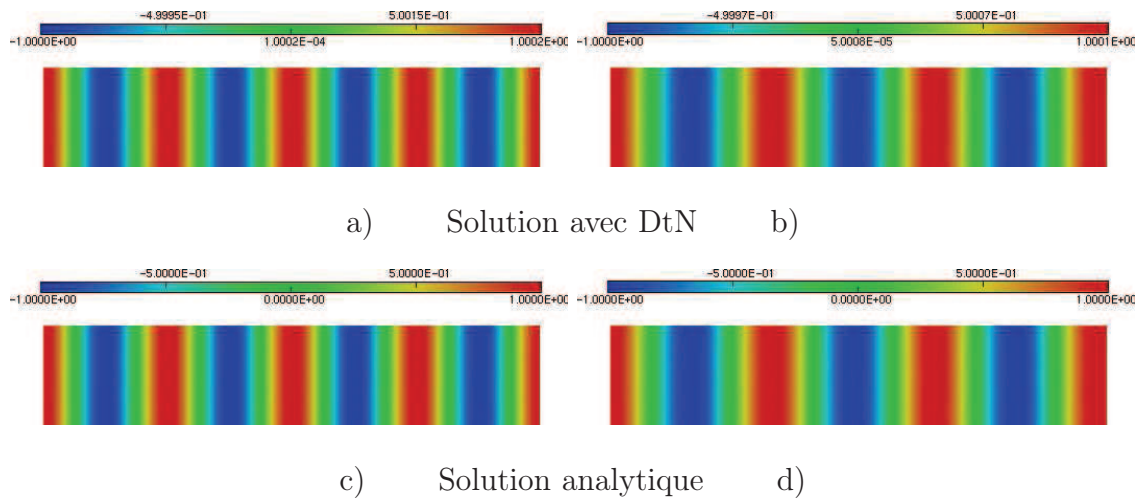


Figure 1.9 – Partie réelle de la pression pour  $k = 5$ , avec le premier mode imposé ( $\varphi_0(r) = J_0(\alpha_0 r)$  sur  $\Sigma^-$ ) : (à gauche) Sans écoulement  $M = 0$ , (à droite) avec écoulement uniforme  $M = 0.3$

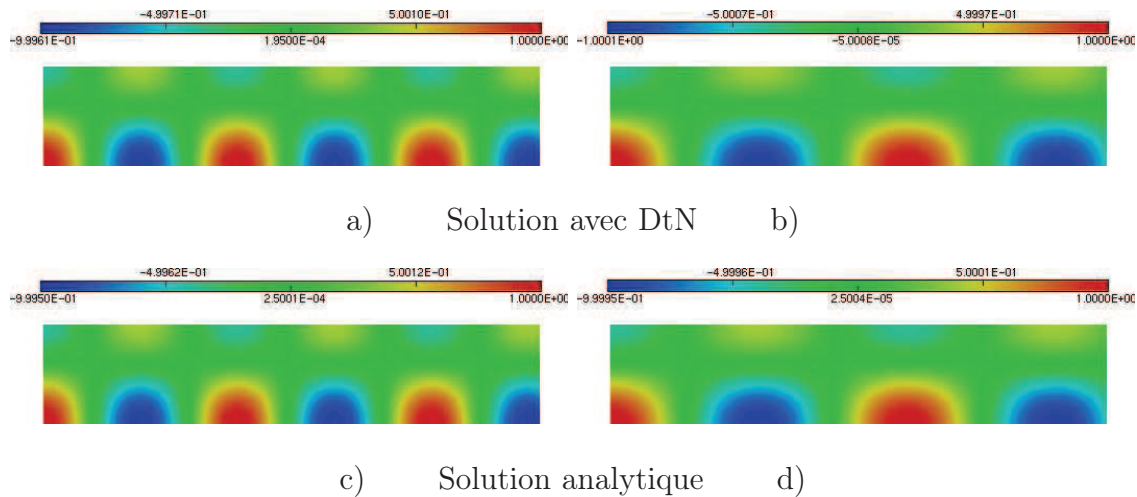


Figure 1.10 – Partie réelle de la pression pour  $k = 5$ , avec le deuxième mode imposé ( $\varphi_1(r) = J_1(\alpha_1 r)$  sur  $\Sigma^-$ ) : (à gauche) Sans écoulement  $M = 0$ , (à droite) avec écoulement uniforme  $M = 0.3$

## 7 Conclusion

Dans cette première partie de notre étude, nous avons présenté une étude bibliographique sur la propagation acoustique guidée en présence d'un fluide en mouvement. Nous avons notamment mis en évidence certains paramètres pouvant influencer la modélisation de ce problème.

Pour des guides droits, le problème de propagation acoustique peut être résolu par des approches modales. Par contre pour des configurations complexes, il faut avoir recours à des méthodes numériques comme la méthode des éléments finis, qui permettront de prendre en compte de façon satisfaisante les conditions aux limites.

Dans le cas de la propagation des ondes acoustiques dans les guides infinis, plusieurs conditions limites transparentes ont été proposées dans la littérature pour

borner le domaine. Parmi toutes ces méthodes, nous retenons l'opérateur DtN qui est une condition limite transparente basée sur une décomposition modale de la variable perturbée. Toutefois, la plupart des applications de cette condition limite transparente proposées dans la littérature concernent les guides rigides ou des guides 2D traités avec des matériaux absorbants à réaction localisée caractérisée par une impédance locale.

Il nous paraît donc intéressant de généraliser cette méthode pour des configurations axisymétriques en présence d'écoulement et d'examiner le cas des guides traités avec des matériaux absorbants à réaction non localisée caractérisée par un fluide équivalent.



# Chapitre 2

## Guides infinis axisymétriques traités par un matériau absorbant à réaction localisée sans écoulement

### 1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'écrire une condition limite transparente de type opérateur DtN dans un guide cylindrique infini traité avec un matériau absorbant à réaction localisée d'impédance  $Z \in \mathbb{C}$  en l'absence d'écoulement. Il constitue donc une suite de la méthode développée dans le chapitre 1 pour le cas du guide cylindrique rectiligne rigide.

Comme nous l'avons vu, une partie importante de la méthode repose sur une recherche des modes et un calcul des coefficients modaux. Pour un guide rectiligne rigide, il est facile d'explicitier l'opérateur DtN puisque les modes transverses sont orthogonaux au sens du produit scalaire usuel.

Une précédente étude réalisée par Poernomo Sari [28] pour des problèmes plans avait permis d'écrire un opérateur DtN pour des guides traités. Cette étude montre que le problème aux valeurs propres n'est plus auto-adjoint pour un guide traité avec un matériau absorbant d'impédance  $Z$  même en l'absence d'écoulement. L'opérateur DtN est néanmoins établi en exploitant la relation de biorthogonalité qui existe entre les modes [79]. Dans ce chapitre, nous généralisons les travaux de Poernomo Sari pour explicitier l'opérateur DtN pour des problèmes axisymétriques.

On commence le chapitre par l'écriture de l'équation de propagation et les conditions aux limites adéquates du problème étudié. On décrit ensuite les étapes essentielles conduisant à l'écriture de l'opérateur DtN pour le guide traité et on termine le chapitre par des résultats de simulations numériques.

## 2 Définition du problème

On considère un guide cylindrique rectiligne axisymétrique infini de rayon  $R$  et d'axe  $z$ . Sa paroi  $\Gamma_Z$  ( $r = R$ ) est recouverte d'un matériau absorbant caractérisé par une impédance  $Z$  ( $Z \in \mathbb{C}$ ). Comme dans le chapitre 1, la géométrie étant supposée à symétrie de révolution, on se ramène à un problème 2D dans le plan  $(r, z)$  (voir Figure 2.1).

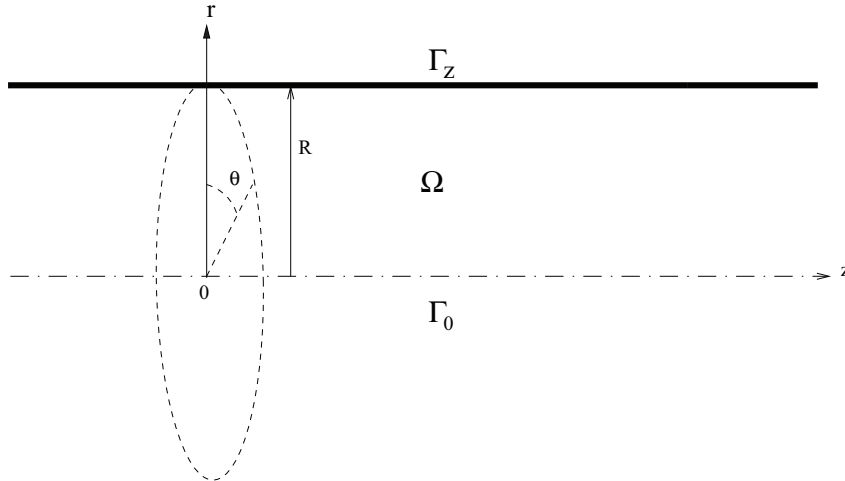


Figure 2.1 – Guide cylindrique axisymétrique à paroi absorbante en l'absence d'écoulement - représentation 2D dans le plan  $(r, z)$

En l'absence d'écoulement et en ne considérant que les solutions axisymétriques (ie.  $m = 0$ , cf. Chapitre 1) la propagation des ondes acoustiques harmoniques (ie.  $e^{-i\omega t}$ ) est régie par l'équation de Helmholtz homogène suivante :

$$\Delta p + k^2 p = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (2.1)$$

où  $\Delta$  désigne le Laplacien en coordonnées cylindriques axisymétriques :

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

La condition limite sur l'axe de symétrie du guide est donnée par [80] :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \quad (2.2)$$

Quant à la condition limite à la paroi  $\Gamma_Z$ , elle s'exprime en fonction de l'impédance  $Z \in \mathbb{C}$  de l'absorbant :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = ik \frac{p}{Z} \quad \text{sur } \Gamma_Z \quad (2.3)$$

## 3 Problème aux valeurs propres

On s'intéresse ici à la recherche des modes acoustiques dans la section transversale du guide. On cherche une solution axisymétrique de l'équation (2.1) à l'aide de la méthode de séparation des variables :

$$p(r, z) = \varphi(r) e^{i\beta z} \quad (2.4)$$

où le mode transverse  $\varphi(r)$  est solution de :

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} + (k^2 - \beta^2)\varphi = 0 \quad r \in ]0, R[ \quad (2.5)$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{ik\varphi}{Z} \quad r = R \quad (2.6)$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = 0 \quad r = 0 \quad (2.7)$$

L'équation (2.5) est une équation de Bessel dont la solution est une fonction de Bessel d'ordre 0 ( $\varphi(r) = aJ_0(\alpha r)$ ,  $m = 0$ ) et  $\beta$  désigne la constante de propagation.

Le nombre d'onde transversal  $\alpha$  ne correspond plus aux zéros de la dérivée des fonctions de Bessel d'ordre 0 ( $J'_0$ ) comme dans le cas du guide rigide. En effet, la condition limite (2.6) à la paroi ( $r = R$ ) du guide conduit à :

$$-\alpha J'_0(\alpha R) = \frac{ikJ_0(\alpha R)}{Z} \quad (2.8)$$

Le calcul des nombres d'ondes transversaux  $\alpha_n$  n'est plus trivial, ils sont solutions de l'équation transcendante suivante qui dépend de l'impédance  $Z$  :

$$-\alpha_n \frac{J_1(\alpha_n R)}{J_0(\alpha_n R)} = \frac{ik}{Z} \quad (2.9)$$

**Remarque :** Bien que l'impédance  $Z$  des matériaux soit une fonction de la fréquence dans les problèmes physiques, nous la considérons constante dans la suite de ce travail.

Dans cette étude, on détermine  $\alpha_n$  numériquement par la méthode de Newton-Raphson. Cependant, la méthode de Newton-Raphson nécessite des valeurs initiales de  $\alpha_n$  que l'on calcule par la méthode des éléments finis appliquée dans la section droite du guide. Les constantes de propagation  $\beta_n$  sont déterminées à l'aide de l'équation de dispersion déduite de (2.5) (cf. chapitre 1, page 21) :

$$\alpha_n^2 = k^2 - \beta_n^2 \quad (2.10)$$

La Figure 2.2 montre les courbes des constantes de propagation  $\beta_n$  dans le plan complexe en l'absence d'écoulement pour  $k = 5$  respectivement pour un guide rigide et un guide à paroi absorbante d'impédance  $Z = 1.5(1 - i)$ .

On rappelle que deux situations existent pour le guide rigide :

– Si  $k^2 > \alpha_n^2$ , la constante de propagation  $\beta_n$  est réelle (voir Figure 2.2-a) :

$$\beta_n^\pm = \pm \sqrt{k^2 - \alpha_n^2} \quad (2.11)$$

le mode d'ordre  $n$  est dit propagatif dans la direction des  $z$  croissants :  $\beta_n = \beta_n^+$  (respectivement décroissants :  $\beta_n = \beta_n^-$ ). Il existe notamment un nombre fini de modes propagatifs. On rappelle que les valeurs propres  $\alpha_n$  sont les zéros de la dérivée de la fonction de Bessel  $J_0$  (voir Tableau 2.1). Par ailleurs, le mode plan tel que :  $\beta_1 = k$  est toujours propagatif.



– Si  $k^2 < \alpha_n^2$ , alors la constante de propagation est imaginaire pure (voir Figure 2.2-a) :

$$\beta_n^\pm = \pm i\sqrt{\alpha_n^2 - k^2} \quad (2.12)$$

Le mode d'ordre  $n$  pour  $\beta_n = \beta_n^+$  (respectivement pour  $\beta_n = \beta_n^-$ ) est dit évanescent dans la direction des  $z$  croissants (respectivement décroissants). Il existe une infinité de modes évanescents. Dans le cas où  $k = \alpha_n$ , on définit la fréquence de coupure du mode d'ordre  $n$  ( $n > 1$ ) par :

$$f_{cn} = \frac{\alpha_n c_0}{2\pi} \quad (2.13)$$

Pour le guide traité les valeurs propres  $\alpha_n$  sont complexes (Tableau 2.1), tous les modes sont atténués. On constate toutefois que pour un nombre d'onde  $k$  fixé (ici  $k = 5$ ) et au delà d'un ordre  $n$  donné (ici  $n = 2$ ), la partie imaginaire de  $\beta_n$  devient grande devant sa partie réelle, le mode est alors fortement atténué ce qui correspond à un phénomène de pseudo-coupure (Figure 2.2). Les modes propagatifs et les modes évanescents présentent respectivement une faible partie imaginaire et une faible partie réelle contrairement au cas du guide rigide où  $\beta_n$  est soit réelle pure soit imaginaire pure.

n	Guide rigide		Guide traité	
	$\alpha_n$	$\beta_n^+$	$\alpha_n$	$\beta_n^+$
1	0.0000 - 0.0000i	5.0000 + 0.0000i	1.7147 - 0.3899i	4.7150 + 0.1418i
2	3.8317 - 0.0000i	3.2122 + 0.0000i	4.2840 - 0.3397i	2.6574 + 0.5476i
3	7.0155 - 0.0000i	0.0000 + 4.9212i	7.2598 - 0.2205i	0.3039 + 5.2677i
4	10.1734 - 0.0000i	0.0000 + 8.8599i	10.3398 - 0.1582i	0.1807 + 9.0509i
5	13.3236 - 0.0000i	0.0000 + 12.3499i	13.4499 - 0.1226i	0.1320 + 12.4861i
6	16.4706 - 0.0000i	0.0000 + 15.6933i	16.5724 - 0.0998i	0.1047 + 15.8002i
7	19.6158 - 0.0000i	0.0000 + 18.9679i	19.7012 - 0.0841i	0.0870 + 19.0561i
8	22.7600 - 0.0000i	0.0000 + 22.2040i	22.8335 - 0.0727i	0.0745 + 22.2794i
9	25.9036 - 0.0000i	0.0000 + 25.4165i	25.9681 - 0.0640i	0.0652 + 25.4822i
10	29.0468 - 0.0000i	0.0000 + 28.6132i	29.1043 - 0.0571i	0.0580 + 28.6716i

Tableau 2.1 – Constantes de propagation pour un guide rigide et un guide traité :  $k = 5$ ,  $Z = 1.5(1 - i)$

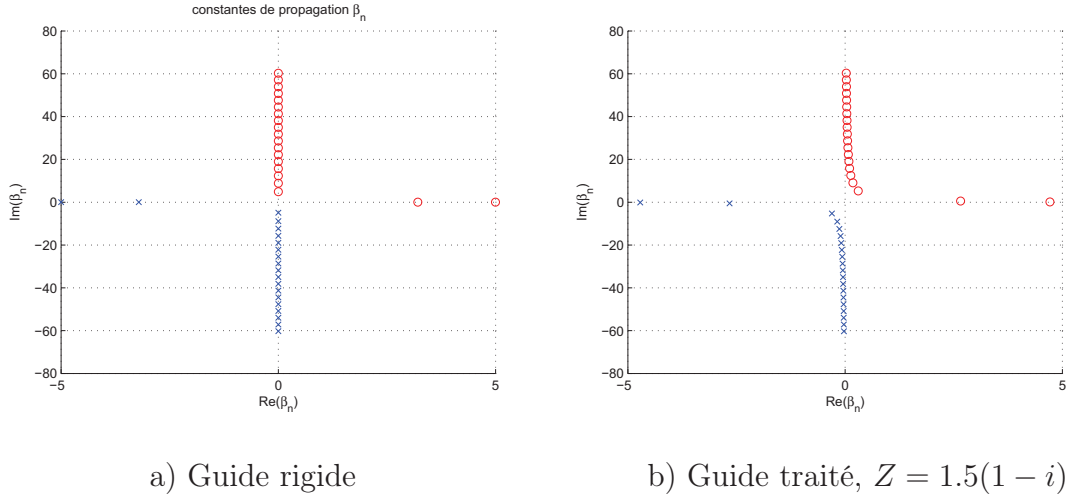


Figure 2.2 – Constantes de propagation  $\beta_n$  pour  $k = 5$  en l'absence d'écoulement :  $\circ$  modes propagatifs suivant les  $z$  croissants ;  $\times$  modes propagatifs suivant les  $z$  décroissants

Enfin, il faut noter que pour le guide rigide et le guide traité en l'absence d'écoulement, les modes propres sont identiques dans les deux sens de propagation, alors que comme le montre la Figure 2.2, les constantes de propagation sont opposées :

$$\begin{aligned} \alpha_n^+ &= \alpha_n^- = \alpha_n \\ \beta^+ &= -\beta_n^- \end{aligned} \quad (2.14)$$

### 3.1 Comportement asymptotique des modes

Dans le cas 2D rectangulaire, on observe que les modes d'un guide dont la paroi est traitée par un absorbant, se comportent asymptotiquement comme ceux d'un guide rigide [81]. On observe le même phénomène pour un guide axisymétrique. En effet, on sait que pour un guide axisymétrique à paroi rigide, la vitesse normale est nulle à la paroi :

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (2.15)$$

ce qui se traduit par une dérivée normale de la pression nulle à la paroi ( $\partial p / \partial n = 0$ ) que l'on vérifie facilement en observant l'allure des modes transverses sur la Figure 2.3-a, y compris les modes d'ordre élevé dont on visualise l'allure près de la paroi sur la Figure 2.4-a.

Pour un guide axisymétrique traité, la condition limite est donnée dans l'équation (2.3) :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{ik}{Z} p \quad (2.16)$$

qui dépend de l'impédance  $Z$ . La vitesse normale et la dérivée normale de la pression ne sont plus nulles à la paroi du guide, ce que l'on vérifie aisément sur la Figure 2.3-b. Néanmoins, quand on observe l'allure des modes d'ordre élevé près de la paroi absorbante (Figure 2.4-b), on constate que la dérivée normale de la pression redevient nulle, ce qui signifie que les modes se comportent asymptotiquement comme ceux

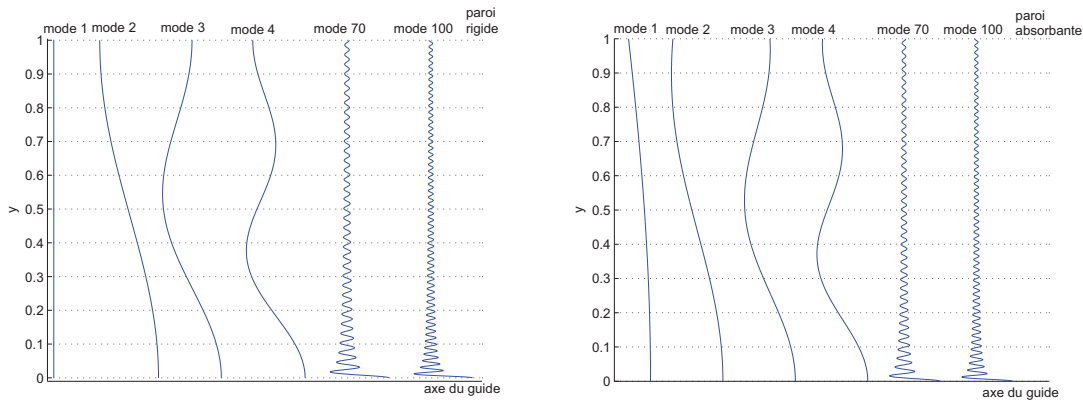
du guide rigide. On montre facilement ce résultat à partir de l'équation (2.9). En effet, comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\alpha_n| = +\infty \quad (2.17)$$

on déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{J_1(\alpha_n R)}{J_0(\alpha_n R)} = 0 \quad (2.18)$$

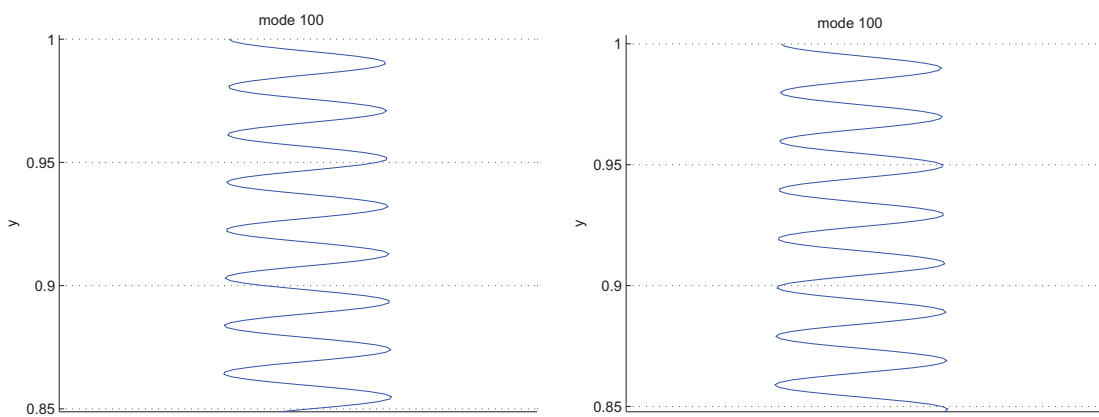
et comme  $J_1(\alpha_n R) = -J'_0(\alpha_n R)$ , cela implique que pour les modes d'ordre élevé, les  $\alpha_n$  correspondent aux zéros de la dérivée de la fonction de Bessel  $J_0$ .



a) Guide rigide

b) Guide traité,  $Z = 1.5(1 - i)$

Figure 2.3 – Partie réelle de la pression dans un guide cylindrique pour  $k = 5$



a) Guide rigide

b) Guide traité,  $Z = 1.5(1 - i)$

Figure 2.4 – Zoom du 100ème mode pour  $k = 5$

### 3.2 Vitesse de phase et atténuation des modes

Afin de bien comprendre l'effet de l'absorbant sur les modes, nous étudions maintenant la vitesse de phase et l'atténuation acoustique de l'onde. La vitesse de phase d'une onde est la vitesse à laquelle la phase de l'onde se propage, elle est aussi appelée la célérité [29, 82]. Pour un mode d'ordre  $n$ , elle est définie suivant l'axe  $Oz$  par :

$$c_{\phi_n} = \frac{\omega}{\beta_n} = \frac{\omega}{\sqrt{k^2 - \alpha_n^2}} \quad (2.19)$$

On a donc pour un guide rigide et pour le mode plan tel que  $\alpha_1 = 0$  :

$$c_{\phi_0} = \frac{\omega}{\beta_0} = \frac{\omega}{k} = c_0$$

La célérité du son  $c_0$  représente la vitesse de phase de l'onde plane dans un milieu homogène.

Pour un guide rigide, la vitesse de phase  $c_{\phi_n}$  est toujours supérieure à  $c_0$ , mais tend vers  $c_0$  lorsque  $\omega$  tend vers l'infini (voir Figure 2.5-a). Elle est infinie pour  $\omega$  égale à la pulsation de coupure  $\omega_c = 2\pi f_c$  (2.13). Cela s'explique par le fait que pour un guide rigide, la constante de propagation  $\beta_n$  est purement réelle pour les modes propagatifs et purement imaginaire pour les modes évanescents.

Par contre, dans le cas d'un guide à paroi traitée, la constante de propagation  $\beta_n$  est toujours complexe et présente pour les modes propagatifs, une faible partie imaginaire et pour les modes évanescents, une faible partie réelle (voir Figure 2.2). Cela se traduit sur la courbe de la vitesse de phase par un phénomène de pseudo-coupure (voir Figure 2.5-b). Les vitesses de phase ne tendent plus vers l'infini, les courbes de  $c_{\phi_n}$  présentent des maxima.

Par ailleurs, pour un mode donné, la partie imaginaire de la constante de propagation est proportionnelle à l'atténuation du mode. Ainsi, plus le matériau est absorbant, plus l'atténuation des modes propagatifs est élevée.

La Figure 2.6 présente la partie imaginaire de la constante de propagation  $\beta_n$  en fonction de  $\omega$  pour un guide rigide et un guide traité avec  $Z = 1.5(1 - i)$ . On constate que les constantes de propagation des deux guides présentent des parties imaginaires presque identiques, surtout pour les modes d'ordre élevé. La différence des deux courbes se situe au niveau des premiers modes. En effet, pour le guide rigide on remarque sur la Figure 2.7-a que la partie imaginaire est nulle à partir de la fréquence de coupure alors que pour le guide traité, puisque tous les modes sont atténués, il existe une partie imaginaire faible mais qui tend vers 0 lorsque  $\omega$  tend vers l'infini comme l'indique la Figure 2.7-b.

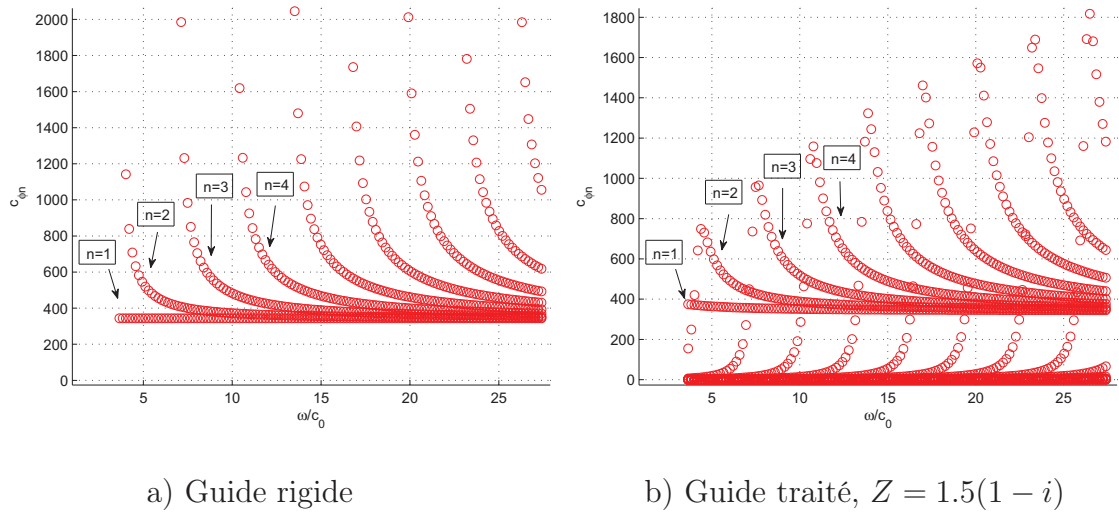


Figure 2.5 – Vitesse de phase  $c_{\phi_n}$  en fonction de la pulsation  $\omega$  en l'absence d'écoulement

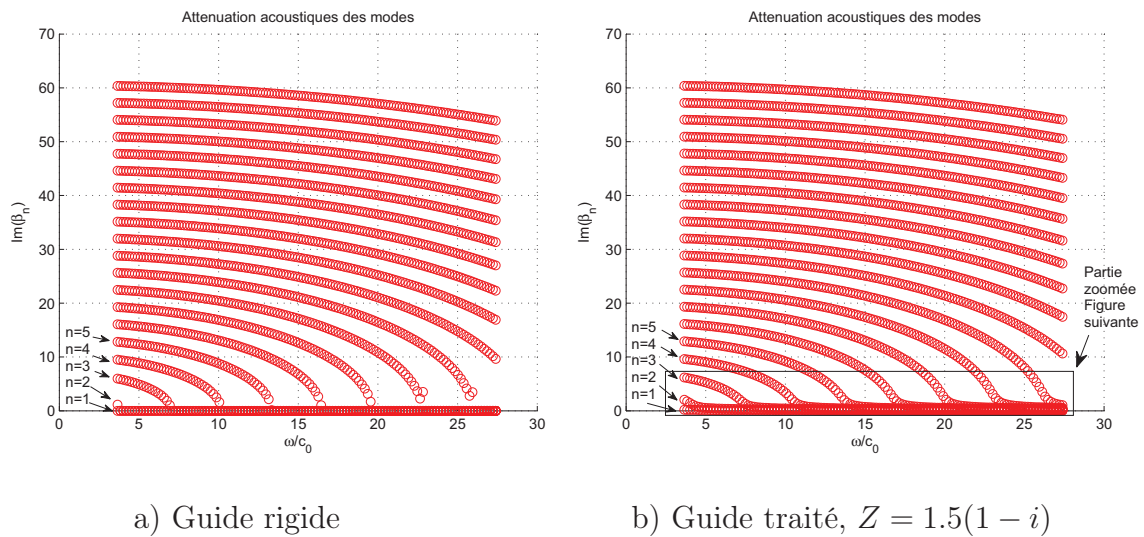


Figure 2.6 – Atténuation des modes (partie imaginaire de  $\beta_n$ ) en fonction de la pulsation  $\omega$  en l'absence d'écoulement

## 4 Relation d'orthogonalité des modes du guide

Pour écrire une condition limite transparente basée sur un opérateur DtN, il est nécessaire de calculer les coefficients modaux qui apparaissent dans la décomposition modale de la pression acoustique. Pour ce faire, comme nous l'avons présenté dans le chapitre 1, on utilise une relation d'orthogonalité. Cette relation est classique dans le cas d'un guide rigide puisque le problème aux valeurs propres est auto-adjoint. Avec absorbant, une situation différente se présente du fait que la condition à la paroi traitée fait intervenir l'impédance du matériau absorbant. Il est donc nécessaire d'examiner la relation qui existe entre les modes.

Considérons un mode d'ordre  $n$ ,  $p_n(r, z) = A_n \varphi_n(r) e^{i\beta_n z}$ , où  $\varphi_n(r)$  est le mode

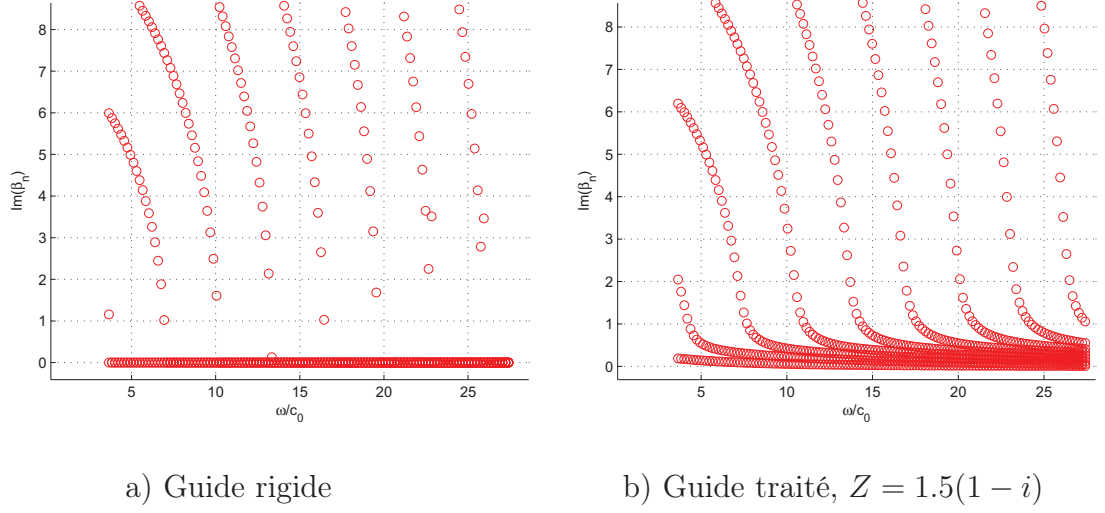


Figure 2.7 – Zoom sur la partie inférieure de la courbe des parties imaginaires de  $\beta_n$

transverse du guide, solution de l'équation aux valeurs propres suivante (2.5) :

$$\frac{d^2\varphi_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi_n}{dr} + (k^2 - \beta_n^2)\varphi_n = 0 \quad r \in ]0, R[ \quad (2.20)$$

$$\frac{d\varphi_n}{dr} = \frac{ik\varphi_n}{Z} \quad r = R \quad (2.21)$$

$$\frac{d\varphi_n}{dr} = 0 \quad r = 0 \quad (2.22)$$

En multipliant la première équation de (2.20) par  $\bar{\varphi}_m$  (où  $\bar{\varphi}_m$  est le conjugué de  $\varphi_m$ ) et en intégrant entre 0 et  $R$ , on a :

$$\int_0^R \left( \frac{d^2\varphi_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi_n}{dr} + (k^2 - \beta_n^2)\varphi_n \right) \bar{\varphi}_m r dr = 0 \quad (2.23)$$

En intégrant par parties et en prenant en compte les conditions aux limites on trouve :

$$\int_0^R \frac{d\varphi_n}{dr} \frac{d\bar{\varphi}_m}{dr} r dr - (k^2 - \beta_n^2) \int_0^R \varphi_n \bar{\varphi}_m r dr - \frac{ikR\varphi_n(R)}{Z} \bar{\varphi}_m(R) = 0 \quad (2.24)$$

En échangeant les rôles de  $m$  et  $n$  et en conjuguant, on trouve cette fois :

$$\int_0^R \frac{d\bar{\varphi}_m}{dr} \frac{d\varphi_n}{dr} r dr - (k^2 - \bar{\beta}_m^2) \int_0^R \bar{\varphi}_m \varphi_n r dr + \frac{ikR\bar{\varphi}_m(R)}{\bar{Z}} \varphi_n(R) = 0 \quad (2.25)$$

En soustrayant (2.25) et (2.24), on obtient la relation suivante :

$$ikR \left( \frac{1}{Z} + \frac{1}{\bar{Z}} \right) \varphi_n(R) \bar{\varphi}_m(R) - (\beta_n^2 - \bar{\beta}_m^2) \int_0^R \bar{\varphi}_m \varphi_n r dr = 0 \quad (2.26)$$

D'après (2.26), le problème aux valeurs propres n'est plus auto-adjoint [79], donc les modes ne sont plus orthogonaux au sens du produit scalaire usuel. On remarque

cependant que si on échange les rôles de  $m$  et  $n$  et sans conjuguer, l'équation (2.26) devient :

$$(\beta_n^2 - \beta_m^2) \int_0^R \varphi_m \varphi_n r dr = 0 \quad (2.27)$$

On définit donc une nouvelle relation d'orthogonalité entre les modes basée sur la relation (2.27) :

$$(\varphi_n, \varphi_m)_\Sigma^* = \int_\Sigma \varphi_n \varphi_m r dr = 0 \quad \text{pour } m \neq n \quad (2.28)$$

Cette relation est aussi appelée relation de biorthogonalité pour les problèmes non auto-adjoints [79].

**Remarque :** Si  $Z$  est très grande ou imaginaire pure, on se ramène au cas du guide rigide :

$$(\beta_n^2 - \bar{\beta}_m^2) \int_0^R \bar{\varphi}_m \varphi_n r dr = 0 \quad (2.29)$$

## 5 Normalisation des modes

On rappelle que pour construire l'opérateur DtN pour le guide traité, il faut normaliser les modes transverses  $\varphi_n(r)$ . Pour un mode transverse d'ordre  $n$ ,  $\varphi_n(r) = a_n J_0(\alpha_n r)$ , on calcule sa norme d'après la relation d'orthogonalité (2.28). D'après Abramowitz et Stegun [83], on trouve :

$$(\varphi_n, \varphi_n)_\Sigma^* = \int_0^R \varphi_n \varphi_n r dr = 1 = a_n^2 \frac{R^2}{2} [J_0^2(\alpha_n R) + J_1^2(\alpha_n R)] \quad (2.30)$$

Les coefficients de normalisation  $a_n$  sont donc donnés par :

$$a_n = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2}{J_0^2(\alpha_n R) + J_1^2(\alpha_n R)}} \quad (2.31)$$

Cette normalisation n'est possible que si :

$$J_0^2(\alpha_n R) + J_1^2(\alpha_n R) \neq 0 \quad (2.32)$$

Les valeurs discrètes  $\alpha_n^c$  racines de l'équation (2.32) sont associées à des valeurs critiques de l'impédance  $Z_n^c$  qui avaient déjà été discutées dans le cas 2D [23, 28]. Comme dans le cas cartésien, on note que la fonction

$$S(\alpha_n) = \alpha_n \frac{J_1(\alpha_n R)}{J_0(\alpha_n R)} + \frac{ik}{Z}$$

dont les racines sont solutions de (2.9) a pour dérivée :

$$S'(\alpha_n) = \frac{\alpha_n R}{J_0^2(\alpha_n R)} [J_0^2(\alpha_n R) + J_1^2(\alpha_n R)]$$

Cela implique que  $S(\alpha_n^c) = S'(\alpha_n^c) = 0$ . Les valeurs propres critiques  $\alpha_n^c$  sont donc des racines doubles [84] de l'équation (2.9) et l'équation (2.32).

Pour déterminer les impédances critiques pour un nombre d'onde  $k$  donné, on calcule d'abord les racines de (2.32) et on déduit  $Z_n^c$  à l'aide de l'équation transcendente (2.9).

La recherche des impédances critiques est ici plus compliquée que dans le cas d'un guide 2D ordinaire, car les modes s'expriment par des fonctions de Bessel. Les fonctions de Bessel  $J_0$  et  $J_1$  étant continues sur  $\mathbb{R}$ , posons :  $\alpha_n R = x + iy$ .

Il faut donc résoudre

$$h_c(x, y) = J_0^2(x + iy) + J_1^2(x + iy) = 0 \quad (2.33)$$

On sait que les fonctions  $J_0$  et  $J_1$  sont respectivement paire et impaire, mais leurs carrés sont paires. Cela implique que la somme des carrés de  $J_0$  et  $J_1$  est aussi paire.

Donc, si le couple  $(x, y)$  est solution de (2.33), alors les couples  $(-x, y)$ ,  $(x, -y)$  et  $(-x, -y)$  sont aussi solutions de (2.33). On peut donc se limiter à  $x \geq 0$  et  $y \geq 0$ .

Pour déterminer les zéros de l'équation (2.33), on choisit  $x$  et  $y$  de telle sorte que la fonction  $h_c$  soit proche de 0. Ces valeurs de  $x$  et de  $y$  sont ensuite raffinées par la méthode de Newton-Raphson pour trouver les valeurs exactes pour lesquelles la fonction  $h_c$  s'annule.

Les impédances critiques  $Z_n^c$  sont ensuite calculées à l'aide de la relation transcendante (2.9) :

$$Z_n^c = -ik \frac{J_0(\alpha_n^c R)}{\alpha_n^c J_1(\alpha_n^c R)} \quad (2.34)$$

Le tableau ci-dessous (Tableau 2.2) indique les parties réelles et imaginaires de  $\alpha_n^c$  et des impédances critiques calculées pour un nombre d'onde  $k = 5$  et pour les intervalles suivants de  $x$  et de  $y$  choisis pour que la fonction  $h_c$  soit proche de 0 :  $x \in [0, 25]$  et  $y \in [0, 5]$ . Pour ces intervalles de  $x$  et de  $y$ , on obtient sept impédances critiques décroissantes (voir Figure 2.8).

$n$	$Re(\alpha_n^c)$	$Im(\alpha_n^c)$	$Re(Z_n^c)$	$Im(Z_n^c)$
1	2.980382	1.279603	-1.416523	0.608173
2	6.175153	1.618717	-0.757636	0.198602
3	9.341961	1.818873	-0.515672	0.100401
4	12.498507	1.961460	-0.390432	0.061273
5	15.650104	2.072310	-0.313981	0.041576
6	18.798912	2.163011	-0.262498	0.030203
7	21.945980	2.239772	-0.225484	0.023012

Tableau 2.2 – Valeurs propres critiques  $\alpha_n^c$  et impédances critiques  $Z_n^c$  pour  $k = 5$  et  $R = 1$

Ces valeurs de l'impédance rendent impossible la normalisation des modes transverses  $\varphi_n$ , nous choisirons  $Z$  de telle sorte à pouvoir calculer les coefficients  $a_n$  et par la suite pouvoir déterminer les opérateurs DtN.



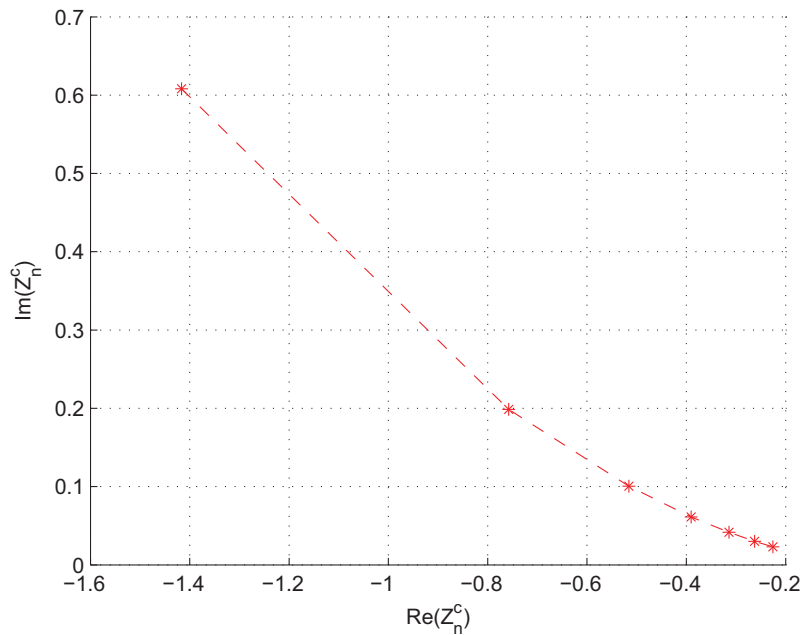


Figure 2.8 – Impédances critiques  $Z_n^c$  pour  $k = 5$

## 6 Détermination de la condition limite transparente

On cherche à écrire une condition limite transparente basée sur un opérateur DtN. Considérons maintenant le guide infini représenté sur la Figure 2.9-a tel que  $\Omega_\infty = \{-\infty < z < +\infty, 0 < r < R\}$  dans lequel est placée une source  $f \in L(\Omega_\infty)$  à support compact. Pour permettre la discrétisation par la méthode des éléments finis, le domaine est tronqué par des frontières artificielles  $\Sigma_-$  et  $\Sigma_+$  représentées sur la Figure 2.9-b. On définit les conditions aux limites sur ces frontières par :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -T_Z^\pm(p) \quad (2.35)$$

où  $T_Z^\pm(p)$  désignent les opérateurs DtN sur  $\Sigma_\pm$ . La détermination de la condition

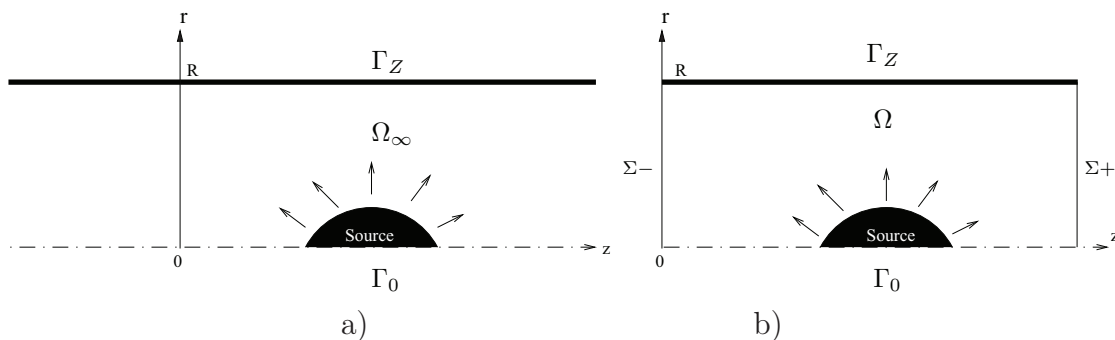


Figure 2.9 – Guide cylindrique axisymétrique traité : a) Guide infini et b) guide tronqué

limite transparente se fait comme dans le cas d'un guide rigide. L'opérateur DtN étant basé sur une décomposition modale (car les modes forment toujours une base

complète [79] comme dans le cas rigide) de la pression acoustique sur les frontières  $\Sigma_{\pm}$  qui tronquent le domaine physique, la relation de biorthogonalité (2.28) qui a permis de normaliser les modes du guide permettra également de déterminer les coefficients modaux issus de cette décomposition. En aval de la frontière  $\Sigma+$ , on a :

$$\forall z \geq L, \quad p^+(r, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n^+ \varphi_n(r) e^{i\beta_n^+(z-L)} \quad (2.36)$$

En particulier en  $z = L$ , on a :

$$p(r, z = L) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n^+ \varphi_n(r) ; \quad 0 \leq r \leq R \quad (2.37)$$

En formant le produit de  $p$  et d'un mode transverse  $\varphi_n(r)$  et en utilisant la relation de biorthogonalité (2.28), on obtient les expressions des coefficients modaux  $A_n^+$  :

$$A_n^+ = (p, \varphi_n)_{\Sigma}^* \quad (2.38)$$

En remplaçant  $A_n^+$  dans (2.36) et en dérivant par rapport à  $z$ , il vient :

$$\frac{\partial p}{\partial z}(r, z = L) = -T_Z^+(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} i\beta_n^+(p, \varphi_n)_{\Sigma}^* \varphi_n(r) \quad (2.39)$$

D'où, on déduit l'opérateur DtN sur  $\Sigma+$  :

$$T_Z^+(p) = - \sum_{n=0}^{+\infty} i\beta_n^+(p, \varphi_n)_{\Sigma}^* \varphi_n(r) \quad (2.40)$$

Par un raisonnement similaire, on trouve sur  $\Sigma-$  :

$$T_Z^-(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} i\beta_n^-(p, \varphi_n)_{\Sigma}^* \varphi_n(r) \quad (2.41)$$

## 7 Tests numériques

Dans cette section, nous présentons des résultats obtenus par la méthode des éléments finis de problèmes de propagation acoustique dans un guide cylindrique axisymétrique traité par un matériau absorbant d'impédance locale  $Z$ .

### 7.1 Exemple 1 : Guide axisymétrique rectiligne

Comme premier exemple on considère le cas simple d'un guide cylindrique axisymétrique rectiligne semi infini traité par un matériau absorbant d'impédance  $Z = 1.5(1 - i)$ . En appliquant un mode  $\varphi_n(r)$  sur la frontière  $\Sigma-$  et une condition limite transparente sur la frontière  $\Sigma+$ , il est facile de comparer la solution numérique à la solution analytique :

$$p_n(r, z) = \varphi_n(r) e^{i\beta_n z} \quad (2.42)$$

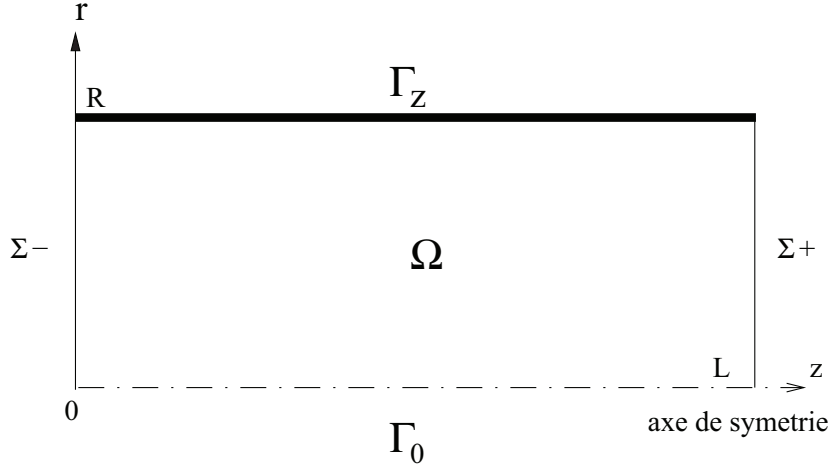


Figure 2.10 – Guide cylindrique axisymétrique infini tronqué en présence d’un absorbant

Le guide tronqué présente les dimensions suivantes :  $R = 1$  et  $L = 5$  (voir Figure 2.10). L’équation de propagation et les conditions aux limites sont données par :

$$\Delta p + k^2 p = 0 \quad \Omega \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{ik}{Z} p \quad \Gamma_Z \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \Gamma_0 \quad (2.45)$$

$$p = g \quad \Sigma - \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -T_Z^+(p) \quad \Sigma + \quad (2.47)$$

où  $g$  désigne un mode  $\varphi_n(r)$  imposé.

Pour écrire la formulation variationnelle associée au problème (2.43), considérons  $\psi \in H^1(\Omega)$  une fonction test régulière telle que  $\psi = 0$  sur  $\Sigma -$ . En multipliant cette équation par  $\psi$  et en intégrant sur le domaine  $\Omega$ , on a :

$$\int_{\Omega} (\Delta p + k^2 p) \psi r dr dz = \int_{\Omega} f \psi r dr dz \quad (2.48)$$

Soit :

$$\int_{\Omega} (\Delta p \psi r + k^2 p \psi r) dr dz = \int_{\Omega} f \psi r dr dz \quad (2.49)$$

En appliquant le théorème de Green, l’intégrale précédente devient :

$$\int_{\Omega} (-\nabla p \cdot \nabla \psi r + k^2 p \psi r) dr dz + \int_{\Gamma_0 \cup \Gamma_Z} \frac{\partial p}{\partial n} \psi r d\Gamma + \int_{\Sigma+} \frac{\partial p}{\partial n} \psi r d\Sigma = 0 \quad (2.50)$$

où  $\partial p / \partial n = \nabla p \cdot n$ .

En introduisant les conditions aux limites (2.44), (2.45) et les conditions limites sur la frontière fictive  $\Sigma +$  (2.47), la formulation variationnelle est donnée par :

trouver  $p \in H^1(\Omega)$  tel que  $\forall \psi \in H^1(\Omega)$  et  $\psi = 0$  sur  $\Sigma^-$ , on a :

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} - k^2 p \psi \right) r dr dz + \int_{\Sigma_+} T_Z^+(p) \psi r d\Sigma + \frac{ik}{Z} \int_{\Gamma_Z} p \psi r d\Gamma = 0 \quad (2.51)$$

Le maillage est réalisé à l'aide de la bibliothèque d'éléments finis MODULEF [77]. Il s'agit d'un maillage non structuré composé de 4916 éléments de type P2 (éléments de Lagrange quadratiques). Les simulations numériques sont réalisées avec la bibliothèque MÉLINA [78].

Les Figures (2.11) et (2.12) montrent la répartition de la pression dans le guide axisymétrique lorsque le premier et le deuxième mode transverse sont imposés respectivement sur la frontière  $\Sigma^-$ . L'opérateur DtN sur la frontière  $\Sigma_+$  est calculé avec 20 modes. On constate que les solutions obtenues par la méthode des éléments finis et l'opérateur DtN sont très proches des solutions analytiques (voir équation 2.42). Pour les deux cas, l'erreur relative en norme  $L^2(\Omega)$  entre les solutions numé-

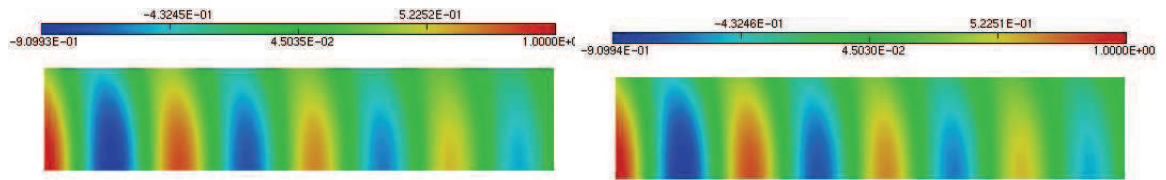


Figure 2.11 – Partie réelle de la pression pour  $k = 5$ ,  $Z = 1.5 - 1.5i$ , premier mode ( $\varphi_1(r) = J_0(\alpha_1 r)$ ) imposé sur  $\Sigma^-$  : (à gauche) solution avec éléments finis et DtN, (à droite) solution analytique

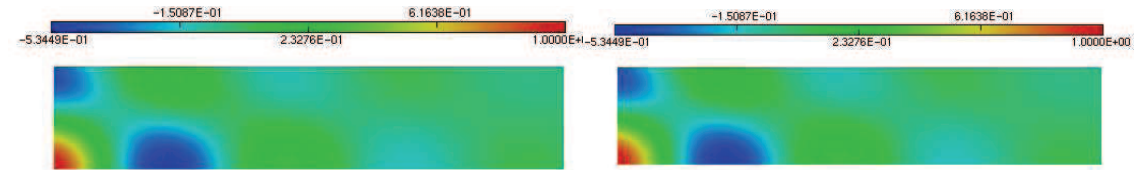


Figure 2.12 – Partie réelle de la pression pour  $k = 5$ ,  $Z = 1.5 - 1.5i$ , deuxième mode ( $\varphi_2(r) = J_0(\alpha_2 r)$ ) imposé sur  $\Sigma^-$  : (à gauche) solution avec éléments finis et DtN, (à droite) solution analytique

riques et analytiques est respectivement égale à 0.2615 % et 0.1965 %. Cela montre que l'opérateur DtN constitue une très bonne condition de non réflexion de l'onde pour un guide infini tronqué. Pour un guide traité, puisque tous les modes sont atténués, si la frontière fictive  $\Sigma_+$  sur laquelle est écrit l'opérateur DtN se situe à une distance  $L$  suffisamment grande par rapport à  $\Sigma^-$ , il n'est pas nécessaire d'utiliser une condition limite transparente, l'onde étant complètement atténuée. Par contre, si  $L$  est très petite, alors les modes ne sont pas complètement atténués, il est donc indispensable d'utiliser une condition limite transparente pour éviter une réflexion de l'onde.

## 7.2 Exemple 2 : Guide axisymétrique non uniforme

On présente maintenant, le rayonnement d'une source acoustique sphérique placée au centre d'un guide cylindrique axisymétrique infini tronqué par les frontières  $\Sigma^-$  et  $\Sigma^+$  sur lesquelles sont écrites des conditions limites transparentes. C'est un exemple de problème que l'on rencontre dans les systèmes industriels qui en général présentent des géométries complexes.

### 7.2.1 Équation de propagation et formulation variationnelle

Considérons une portion  $l$  d'un guide non uniforme recouvert d'un matériau d'impédance  $Z$  inséré entre deux tronçons infinis de section constante tronqués par les frontières  $\Sigma^-$  et  $\Sigma^+$  (voir Figure 2.13). Si l'on s'intéresse au rayonnement d'une source  $f$  à support compact, l'équation de propagation et les conditions aux limites sont données par :

$$\Delta p + k^2 p = f \quad \Omega \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{ik}{Z} p \quad \Gamma_Z \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \Gamma_0 \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -T_Z^\pm(p) \quad \Sigma_\pm \quad (2.55)$$

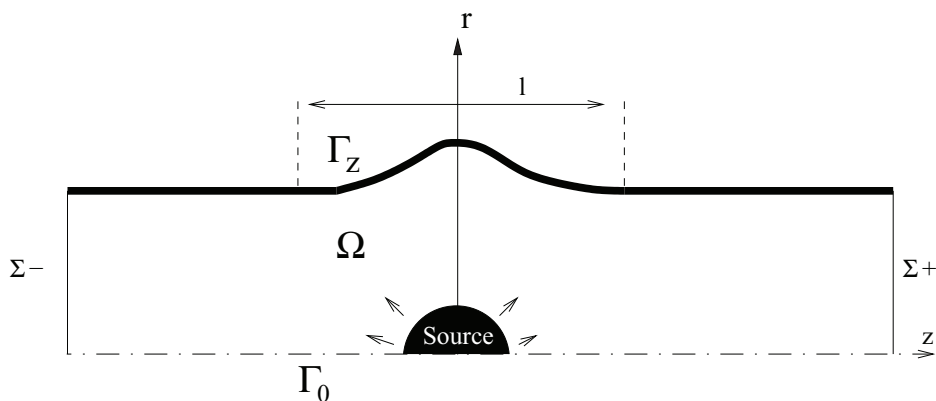


Figure 2.13 – Géométrie du problème

En s'inspirant de l'exemple précédent, la formulation variationnelle associée au problème de rayonnement de la source  $f$  est donnée par :

trouver  $p \in H^1(\Omega)$  tel que  $\forall \psi \in H^1(\Omega)$ , on a :

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} - k^2 p \psi \right) r \, dr dz + \int_{\Sigma^+} T_Z^+(p) \psi r \, d\Sigma \quad (2.56)$$

$$- \int_{\Sigma^-} T_Z^-(p) \psi r \, d\Sigma + \frac{ik}{Z} \int_{\Gamma_Z} p \psi r \, d\Gamma = - \int_{\Omega} f \psi r \, dr dz$$

Ne disposant pas de solutions analytiques, les solutions numériques calculées par la méthode des éléments finis et de l'opérateur DtN seront comparées à des solutions provenant de l'utilisation de couches PML.

### 7.2.2 Propagation acoustique dans les couches PML

On considère le guide présenté sur la Figure 2.13 dans lequel rayonne la source  $f$ . On place maintenant de part et d'autre des frontières fictives  $\Sigma^-$  et  $\Sigma^+$  des couches PML d'épaisseur  $e = 1$  comme indiqué sur la Figure 2.14.

On rappelle que les couches PML sont utilisées dans cette étude uniquement pour comparer les résultats trouvés avec les opérateurs DtN.

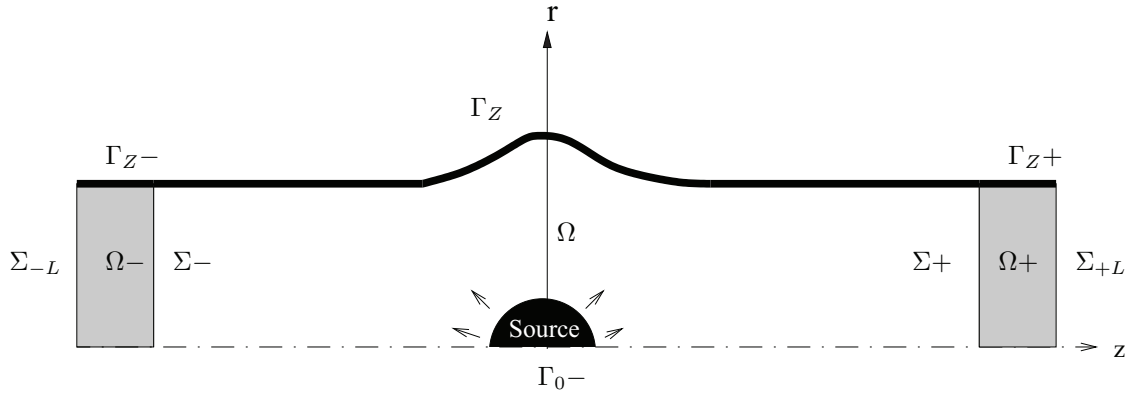


Figure 2.14 – Guide axisymétrique infini non uniforme tronqué

Dans les domaines PML (domaines  $\Omega_{\pm}$ ), l'équation de propagation s'écrit à partir de l'équation de propagation dans le domaine physique  $\Omega$  en remplaçant les dérivées par rapport à  $z$ ,  $\partial/\partial z$  par  $\nu\partial/\partial z$  où  $\nu$  est un nombre complexe. Les conditions aux limites sur les parois absorbantes  $\Gamma_{Z\pm}$  et sur l'axe du guide  $\Gamma_{0\pm}$  sont les mêmes que celles sur  $\Gamma_Z$  et  $\Gamma_0$  respectivement. En outre, comme l'onde est atténuée dans les couches PML, on considère les frontières  $\Sigma_{\pm L}$  rigides.

Dans les couches PML, l'équation de propagation et les conditions aux limites s'écrivent :

$$\frac{1}{\nu} \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{\nu r} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{k^2}{\nu} p = 0 \quad \text{sur } \Omega_{\pm} \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{ik}{Z} p \quad \text{sur } \Gamma_{Z-} \cup \Gamma_{Z+} \quad (2.58)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{0-} \cup \Gamma_{0+} \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_{-L} \cup \Sigma_{+L} \quad (2.60)$$

Par ailleurs, la continuité de la pression et de la vitesse normale doit être assurée à l'interface du domaine physique  $\Omega$  et des domaines PML :

$$p(r, 0-) = p(r, 0+) \quad \text{sur } \Sigma^- \quad (2.61)$$

$$p(r, L-) = p(r, L+) \quad \text{sur } \Sigma^+ \quad (2.62)$$

$$\nu \frac{\partial p}{\partial z}(r, 0-) = \frac{\partial p}{\partial z}(r, 0+) \quad \text{sur } \Sigma^- \quad (2.63)$$

$$\nu \frac{\partial p}{\partial z}(r, L-) = \frac{\partial p}{\partial z}(r, L+) \quad \text{sur } \Sigma^+ \quad (2.64)$$

La formulation variationnelle en présence des couches PML est la somme de la formulation variationnelle du domaine physique  $\Omega$  et de celles des domaines PML  $\Omega_{\pm}$ . La formulation variationnelle du domaine physique  $\Omega$  est celle donnée par :

trouver  $p \in H^1(\Omega)$  tel que  $\forall \psi \in H^1(\Omega)$ , on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} - k^2 p \psi \right) r \, dr dz - \int_{\Sigma_+} \frac{\partial p}{\partial z} \psi r \, d\Sigma \\ + \int_{\Sigma_-} \frac{\partial p}{\partial z} \psi r \, d\Sigma + \frac{ik}{Z} \int_{\Gamma_Z} p \psi r \, d\Gamma = - \int_{\Omega} f \psi r \, dr dz \end{aligned} \quad (2.65)$$

La formulation variationnelle dans les domaines PML est établie en procédant de la même manière que dans le domaine physique. On multiplie l'équation (2.57) par  $\psi$  et on intègre sur  $\Omega_{\pm}$ . On intègre par parties les termes d'ordre 2 et on prend en compte les conditions limites. La formulation variationnelle est donnée par :

trouver  $p \in H^1(\Omega)$ , telle que  $\forall \psi \in H^1(\Omega)$  :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{\pm}} \left( \frac{1}{\nu} \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \nu \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{k^2}{\nu} p \psi \right) r \, dr dz - \frac{ik}{Z} \int_{\Gamma_{Z\pm}} \frac{1}{\nu} p \psi r \, d\Gamma \\ - \nu \int_{\Sigma_-} \frac{\partial p}{\partial z} \psi r \, d\Sigma + \nu \int_{\Sigma_+} \frac{\partial p}{\partial z} \psi r \, d\Sigma = 0 \end{aligned} \quad (2.66)$$

La formulation variationnelle globale est la somme des deux formulations variationnelles (2.65) et (2.66). En tenant compte des conditions de continuité aux interfaces (2.61), (2.62), (2.63) et (2.64), la formulation variationnelle globale s'écrit :

trouver  $p \in H^1(\Omega)$ , telle que  $\forall \psi \in H^1(\Omega)$  :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} - k^2 p \psi \right) r \, dr dz + \int_{\Omega_{\pm}} \left( \frac{1}{\nu} \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \nu \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{k^2}{\nu} p \psi \right) r \, dr dz \\ - \frac{ik}{Z} \int_{\Gamma_Z} k^2 p \psi r \, d\Gamma - \frac{ik}{Z} \int_{\Gamma_{Z\pm}} \frac{1}{\nu} p \psi r \, d\Gamma = - \int_{\Omega} f \psi r \, dr dz \end{aligned} \quad (2.67)$$

Pour les simulations numériques, le domaine d'étude formé des domaines PML et du domaine physique est maillé avec 2984 éléments P2 (éléments triangulaires de Lagrange d'ordre 2).

Les Figures (2.15) et (2.16) montrent la répartition de la pression numérique dans le guide non uniforme traité pour des nombres d'onde  $k = 5$  et  $k = 9$  respectivement. Pour les solutions par la méthodes des éléments finis et de l'opérateur DtN (Figures 2.15-a et 2.16-a), l'opérateur DtN est calculé avec les 20 premiers modes.

Les solutions avec l'opérateur DtN sont en bon accord avec celles provenant de l'utilisation des couches PML. L'erreur relative en norme  $L(\Omega)$  entre les solutions est respectivement égale à 0.001046 et 0.000197. On remarque que l'onde rayonnée est atténuée près de la paroi  $\Gamma_Z$ . On remarque également une répartition symétrique de la pression par rapport à la source.

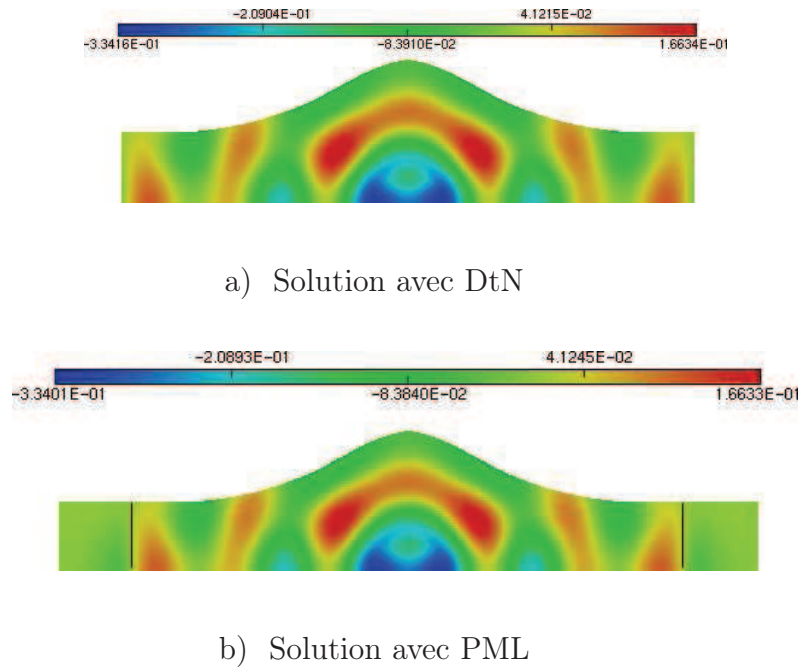


Figure 2.15 – Partie réelle de la pression pour  $k = 5$ ,  $Z = 1.5 - 1.5i$  : a) solution avec DtN, b) Solution avec les couches PML,  $\nu = 0.48(1 - i)$

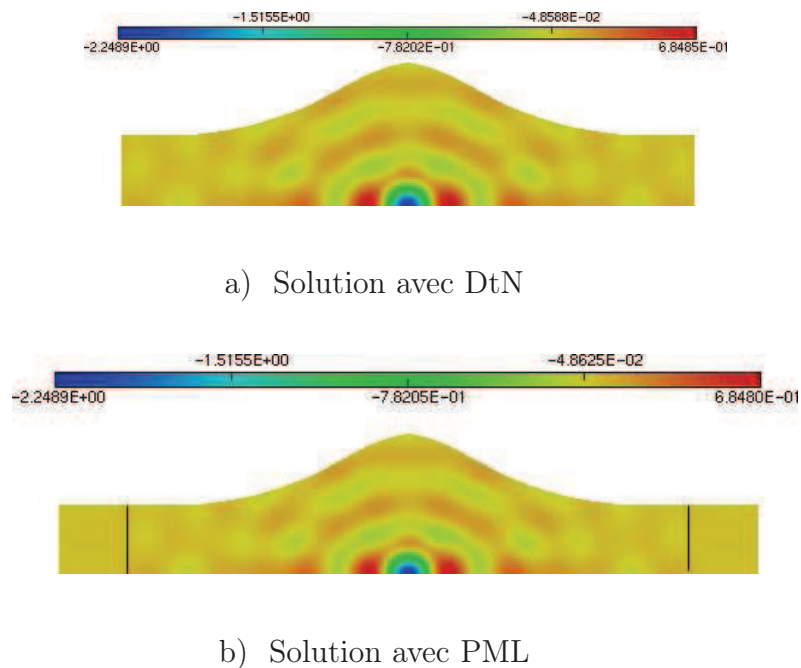


Figure 2.16 – Partie réelle de la pression pour  $k = 9$ ,  $Z = 1.5 - 1.5i$  : a) solution avec DtN, b) Solution avec les couches PML,  $\nu = 0.64(1 - i)$



## 8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une nouvelle méthode pour la modélisation d'une condition limite transparente dans les problèmes de propagation acoustique dans des guides cylindriques axisymétriques infinis à paroi recouverte d'un matériau absorbant à réaction localisée.

La détermination numérique des modes dans un guide cylindrique axisymétrique avec une paroi absorbante en l'absence d'écoulement nous a permis d'écrire de nouvelles conditions limites transparentes basées sur les opérateurs DtN. Ces opérateurs sont faciles à expliciter pour un guide à paroi rigide, mais deviennent complexes pour des guides traités. Dans le cas d'un guide traité sans écoulement, les modes ne sont plus orthogonaux au sens du produit scalaire usuel mais, il existe une relation de biorthogonalité qui permet d'explicitier les opérateurs DtN.

Dans le prochain chapitre, la méthode exposée ici sera appliquée aux guides axisymétriques traités par un matériau absorbant d'impédance  $Z$  en présence d'un écoulement uniforme.

# Chapitre 3

## Guides infinis axisymétriques traités avec écoulement uniforme

### 1 Introduction

Dans de nombreuses applications industrielles (gaines de ventilation, silencieux d'échappement, turboréacteurs d'avion etc.), le fluide ne peut pas être considéré au repos. On sait alors que l'écoulement est un paramètre qui joue un rôle important sur la propagation des ondes acoustiques dans les guides en raison des effets de convection et de réfraction qu'il induit. Les effets d'un traitement acoustique peuvent également être modifiés par la présence d'un fluide en mouvement.

Dans ce chapitre, notre objectif est d'écrire une condition limite transparente basée sur un opérateur DtN pour les guides traités en présence d'un écoulement uniforme. On s'intéresse à un guide cylindrique infini traité qui constitue la généralisation des travaux de Poernomo Sari [28]. L'étude concerne d'abord les guides rectilignes de façon à considérer l'écoulement uniforme et utiliser le modèle de l'équation de Helmholtz convectée pour décrire la propagation des ondes acoustiques.

À la fin du chapitre, nous verrons que le cas des guides non rectilignes peut également être examiné en considérant un écoulement irrotationnel et le formalisme du potentiel des vitesses acoustiques.

### 2 Problème étudié

On s'intéresse ici au rayonnement d'une source  $f \in L^2(\Omega_\infty)$  à support compact placée dans un guide cylindrique infini de rayon  $R$  :  $\Omega_\infty = \{-\infty < z < +\infty, 0 < r < R\}$  (voir Figure 3.1-a). Le guide est recouvert d'un matériau absorbant d'impédance  $Z$  en  $r = R$  et le fluide est animé d'un mouvement uniforme de vitesse  $\mathbf{v}_0$  suivant  $\mathbf{e}_z$ . En raison de la symétrie cylindrique du problème, la source représentée par un demi disque est placée sur l'axe du guide, elle correspond donc ici à une source sphérique.

Comme précédemment, l'utilisation de la méthode des éléments finis nous amène à tronquer le domaine physique  $\Omega_\infty$  par deux frontières verticales  $\Sigma^-$  et  $\Sigma^+$  placées respectivement en  $z = 0$  et  $z = L$  situées de part et d'autre de la source (Figure

3.1-b). La modélisation du problème dans le domaine de calcul tronqué  $\Omega$  nécessite alors l'utilisation de conditions limites transparentes sur les frontières  $\Sigma^-$  et  $\Sigma^+$ , elles sont à nouveau décrites par un opérateur DtN que nous explicitons dans la suite.

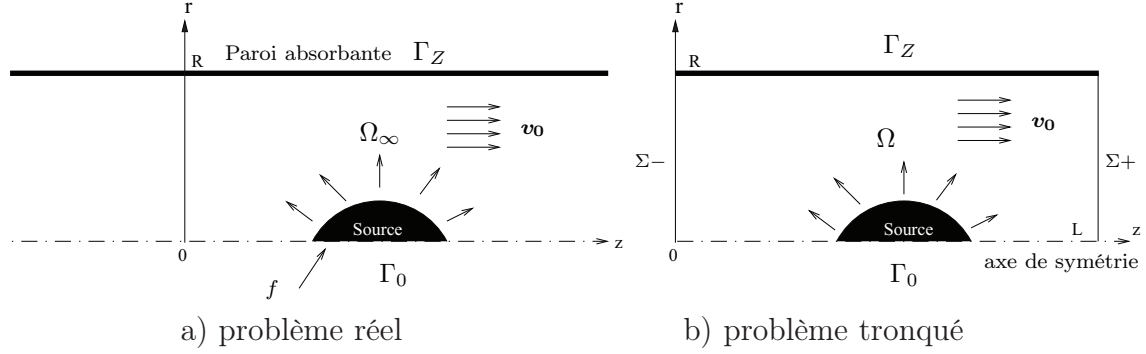


Figure 3.1 – Guide cylindrique axisymétrique infini tronqué à paroi absorbante avec écoulement uniforme

Le régime est supposé harmonique ( $e^{-i\omega t}$ ) et la solution angulaire est encore supposée axisymétrique (ie.  $e^{im\theta}$  avec  $m = 0$ ). Le problème de rayonnement acoustique de la source  $f$  dans le domaine  $\Omega$  est alors décrit par l'équation de Helmholtz convectée suivante :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + (1 - M^2) \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + 2ikM \frac{\partial p}{\partial z} + k^2 p = f \quad (3.1)$$

où  $M = v_0/c_0$  désigne le nombre de Mach.

La condition de symétrie sur l'axe du guide est décrite par une condition de Neumann homogène (ie.  $\partial p/\partial n = 0$  pour  $r = 0$ ) et la condition au niveau de la paroi absorbante  $\Gamma_Z$  en présence d'un écoulement est maintenant décrite par la condition de Myers [61]. Dans le cas d'un guide droit dont l'axe est parallèle à  $z$ , elle s'exprime sous la forme :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{i}{kZ} \left( -ik + M \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 p \quad (3.2)$$

En effet, la vitesse acoustique normale sur la paroi s'exprime en fonction de la dérivée particulière du déplacement normal. Pour un guide droit parcouru par un fluide en mouvement uniforme, on a simplement :

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = c_0 \left( -ik + M \frac{\partial}{\partial z} \right) (\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n}) \quad (3.3)$$

D'après l'équation de conservation de la quantité du mouvement, on a :

$$\rho_0 c_0 \left( -ik + M \frac{\partial}{\partial z} \right) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = -\frac{\partial p}{\partial n} \quad (3.4)$$

En remplaçant  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  par son expression (3.3) dans l'équation (3.4) on trouve :

$$\rho_0 c_0 \left( -ik + M \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 (\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n}) = -\frac{\partial p}{\partial n} \quad (3.5)$$

Par ailleurs, sur la paroi, le déplacement est lié à la pression par :

$$p = -i\omega Z_0(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n}) \quad (3.6)$$

D'après les équations (3.5) et (3.6), on trouve donc la condition aux limites sur  $\Gamma_Z$  :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{i}{kZ} \left( -ik + M \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 p \quad (3.7)$$

où  $Z = Z_0/c_0\rho_0$ . Cette condition s'exprime par des dérivées tangentielles de la pression et comme nous le verrons par la suite, cela va rendre l'écriture des opérateurs DtN plus compliquée que dans le cas du guide sans écoulement.

Finalement, les conditions aux limites du problème s'écrivent :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -T_{ZM}^\pm(p) \quad \text{sur } \Sigma_\pm \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{i}{kZ} \left( -ik + M \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 p \quad \text{sur } \Gamma_Z \quad (3.10)$$

L'écriture de l'opérateur DtN repose sur la décomposition modale de la pression, nous allons donc nous intéresser aux modes du guide.

### 3 Recherche des modes

On considère un guide axisymétrique rectiligne et comme dans le cas sans écoulement, on recherche les modes dans la section transversale du guide par la méthode des variables séparées. On cherche les solutions sous la forme :

$$p(r, z) = \varphi(r)e^{i\beta z} \quad (3.11)$$

où  $\varphi(r) = aJ_0(\alpha r)$ . En dehors de toute source ( $f = 0$ ), le problème aux valeurs propres est quadratique et s'écrit :

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} + \left[ k^2 - (1 - M^2)\beta^2 - 2Mk\beta \right] \varphi = 0 \quad r \in ]0, R[ \quad (3.12)$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{i}{kZ} \left( M\beta - k \right)^2 \varphi \quad r = R \quad (3.13)$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = 0 \quad r = 0 \quad (3.14)$$

On en déduit l'équation de dispersion :

$$k^2 = \alpha^2 + (1 - M^2)\beta^2 + 2kM\beta \quad (3.15)$$

où  $\alpha$  est maintenant solution d'une nouvelle équation transcendante qui dépend de  $\beta$  et de  $Z$  :

$$-\alpha \frac{J_1(\alpha R)}{J_0(\alpha R)} = \frac{i(\beta^2 + \alpha^2)}{kZ} \quad (3.16)$$

On peut noter que cette équation est assez similaire à celle trouvée dans le cas cartésien [28] :

$$-\alpha \tan(\alpha h) = \frac{i(\alpha^2 + \beta^2)}{kZ} \quad (3.17)$$

les fonctions circulaires étant remplacées par les fonctions de Bessel.

La résolution de l'équation transcendante (3.16) se fait avec l'équation de dispersion (3.15) de manière couplée. On décompose les solutions en deux familles suivant le signe de la partie imaginaire des constantes de propagation  $\beta_n$ . Ainsi, pour les couples  $(\alpha_n, \beta_n)$  solutions de (3.15) et (3.16), les modes se propagent vers l'aval (respectivement vers l'amont) quand  $Im(\beta_n) > 0$  (respectivement  $Im(\beta_n) < 0$ ). Ces couples sont notés  $(\alpha_n^+, \beta_n^+)$  (respectivement  $(\alpha_n^-, \beta_n^-)$ ) tels que :

$$p_n^\pm(r, z) = \varphi_n^\pm(r) e^{i\beta_n^\pm z} \quad (3.18)$$

où les  $\varphi_n^\pm$  sont les modes transverses du guide avec

$$\varphi_n^\pm(r) = a_n^\pm J_0(\alpha_n^\pm r) \quad (3.19)$$

où les  $a_n^\pm$  sont les coefficients de normalisation des modes. Les  $\alpha_n^\pm$  et les  $\beta_n^\pm$  sont encore cherchés numériquement par la méthode de Newton-Raphson à l'aide des équations (3.15) et (3.16). Un exemple de constantes de propagation obtenues pour  $k = 5$ ,  $Z = 1.5(1 - i)$  et  $M = 0.4$  est représenté sur la Figure (3.2).

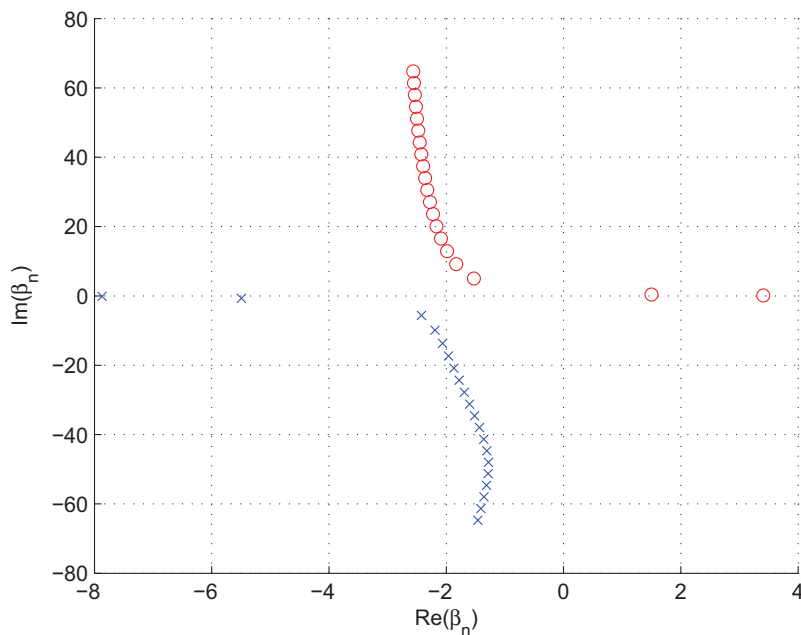


Figure 3.2 – Constantes de propagation  $\beta_n$  pour un guide recouvert d'un matériau absorbant d'impédance  $Z = 1.5(1 - i)$ , en présence d'un écoulement uniforme  $M = 0.4$ , pour  $k = 5$  : (o) pour  $\beta_n^+$  et (x) pour  $\beta_n^-$

Comme dans le cas du guide traité sans écoulement, tous les modes sont atténués, les constantes de propagation ont toujours une partie imaginaire non nulle, ce qui signifie qu'il n'existe plus de phénomène de coupure comme dans le cas rigide.

On note également que les constantes de propagation amonts et avals sont différentes sous l'effet de la convection. Ce qui se traduit par un décalage des constantes de propagation par rapport à l'axe des ordonnées sur la Figure 3.2.

**Remarque** : On rappelle que ce décalage vaut  $-kM/(1 - M^2)$  pour un guide rigide en présence d'un écoulement uniforme.

De plus les nombres d'ondes transversaux amonts  $\alpha_n^+$  et avals  $\alpha_n^-$  sont également différents, la position par rapport à la source des frontières fictives qui tronquent le domaine physique  $\Omega_\phi$  sera donc importante pour le choix des modes dans la décomposition modale.

Examinons maintenant le comportement asymptotique des modes. Ici encore nous avons :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\alpha_n| = +\infty \quad (3.20)$$

On déduit immédiatement d'après (3.16) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{J_1(\alpha_n R)}{J_0(\alpha_n R)} \right| = +\infty \quad (3.21)$$

$J_1$  étant borné, il vient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_0(\alpha_n R) = 0 \quad (3.22)$$

Les modes transverses du guide étant de la forme  $\varphi_n(r) = a_n J_0(\alpha_n r)$ , on retrouve le résultat établi dans le cas cartésien [81] qui montre que les modes d'ordre élevé se comportent comme les modes d'un guide à "paroi parfaitement molle" (ie.  $p = 0$  sur la paroi molle). La Figure 3.3 montre l'allure des quatre premiers modes et deux modes d'ordre élevé. On vérifie que la dérivée normale de la pression (ie. la vitesse normale) n'est pas nulle à la paroi du guide pour les premiers modes. Par contre l'allure des modes d'ordre élevé montre que la pression devient nulle à la paroi (Figure 3.4).

Analysons à présent la vitesse de phase et l'atténuation des modes en présence d'absorbant et d'un écoulement uniforme. On rappelle que pour un mode d'ordre  $n$ , la vitesse de phase ou célérité de l'onde acoustique est définie par :  $c_{\phi_n} = \omega / \beta_n$ . Ainsi, comme nous l'avons expliqué dans le cas du guide traité sans écoulement, les constantes de propagation  $\beta_n$  étant toujours complexes, ceci implique que  $c_{\phi_n}$  est toujours définie et bornée quel que soit l'ordre du mode et quel que soit  $\omega$  comme indiqué sur la Figure 3.5-a, contrairement au cas d'un guide rigide où  $c_{\phi_n}$  devient infinie pour  $\omega$  égale à la pulsation de coupure.

De plus en présence d'un écoulement uniforme, sous l'effet de la convection, les constantes de propagations avals  $\beta_n^+$  présentent des parties réelles négatives au delà d'un ordre  $n$  donné (voir Figure 3.2). Cela se traduit par des vitesses de phase négatives (ie.  $c_{\phi_n} < 0$ ) comme le montre les Figures 3.5-b et 3.6. Ce phénomène s'accroît lorsque le nombre de Mach augmente (Figure 3.7).

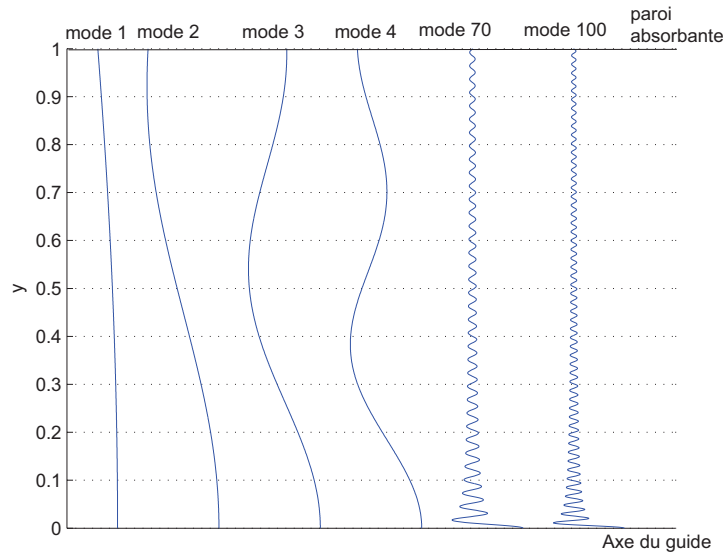


Figure 3.3 – Partie réelle de la pression dans un guide cylindrique traité en présence d'écoulement uniforme :  $M = 0.4$  ;  $k = 5$  ;  $Z = 1.5(1 - i)$

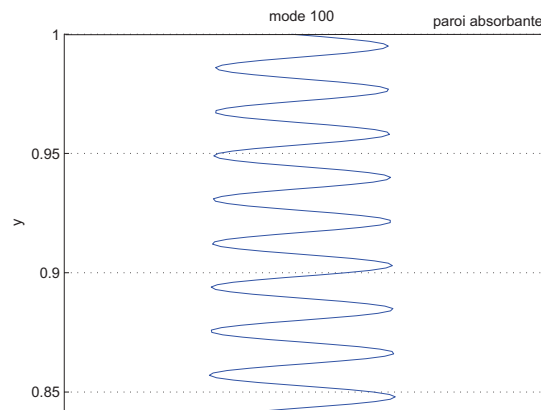
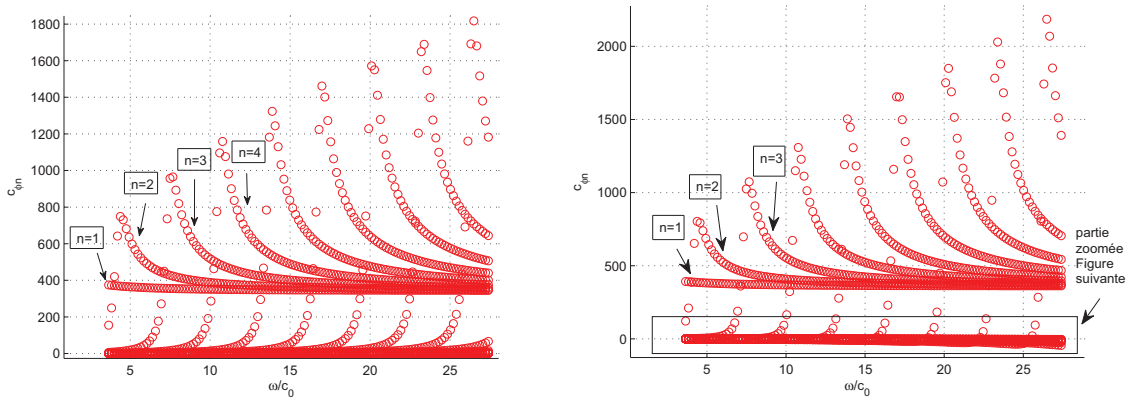


Figure 3.4 – Partie réelle de la pression dans un guide cylindrique traité en présence d'écoulement uniforme : zoom du 100ème mode,  $M = 0.4$  ;  $k = 5$  ;  $Z = 1.5(1 - i)$

Par ailleurs, on constate qu'en présence d'un absorbant et d'un écoulement uniforme les constantes de propagation ont des parties imaginaires plus grandes que dans le cas d'un absorbant seul (voir Figure 3.8). Cela veut dire que l'écoulement augmente l'atténuation des modes.



a) Guide traité,  $Z = 1.5(1 - i)$       b) Guide traité,  $Z = 1.5(1 - i)$ ,  $M = 0.05$

Figure 3.5 – Vitesse de phase  $c_{\phi_n}$  en fonction de la pulsation  $\omega$

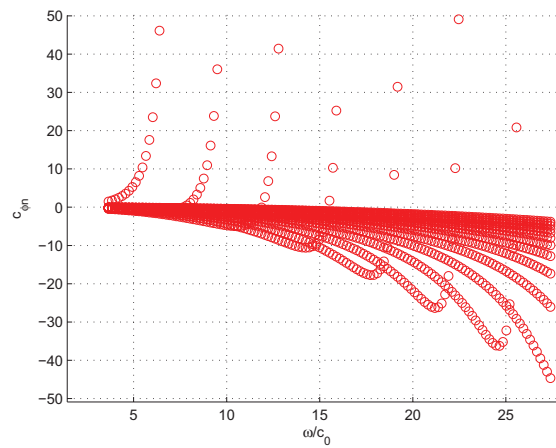


Figure 3.6 – Zoom de la courbe de la vitesse de phase  $c_{\phi_n}$  pour un guide traité en présence d'un écoulement uniforme :  $M = 0.05$ ,  $Z = 1.5(1 - i)$

### Remarque sur les modes instables

En présence d'un écoulement uniforme, il apparaît des modes appelés modes instables. On peut observer ce genre de modes sur la Figure 3.9 où il y a un mode qui se propage en amont mais se situe à droite de l'axe des ordonnées. Ce mode est un mode instable qui apparaît à partir d'une certaine vitesse du fluide (lorsque  $M$  augmente).

Les modes instables sont des modes dont l'explication n'est pas encore bien claire. Rienstra explique dans [85] que le phénomène d'instabilité qui apparaît uniquement en présence d'un absorbant et d'un écoulement est liée aux instabilités de Kelvin-Helmholtz classiques qui apparaissent à l'interface de deux fluides de vitesses différentes. Dans un guide d'onde, la paroi joue le rôle du deuxième fluide. Ainsi, pour un guide rigide, il n'existe pas de modes instables car la paroi inhibe tout mouvement normal à celle-ci. Par contre pour un guide traité avec un matériau à impédance locale, cette instabilité apparaît pour une certaine combinaison de l'im-



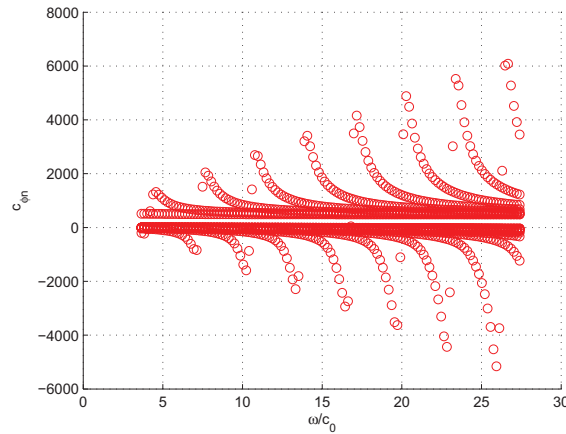
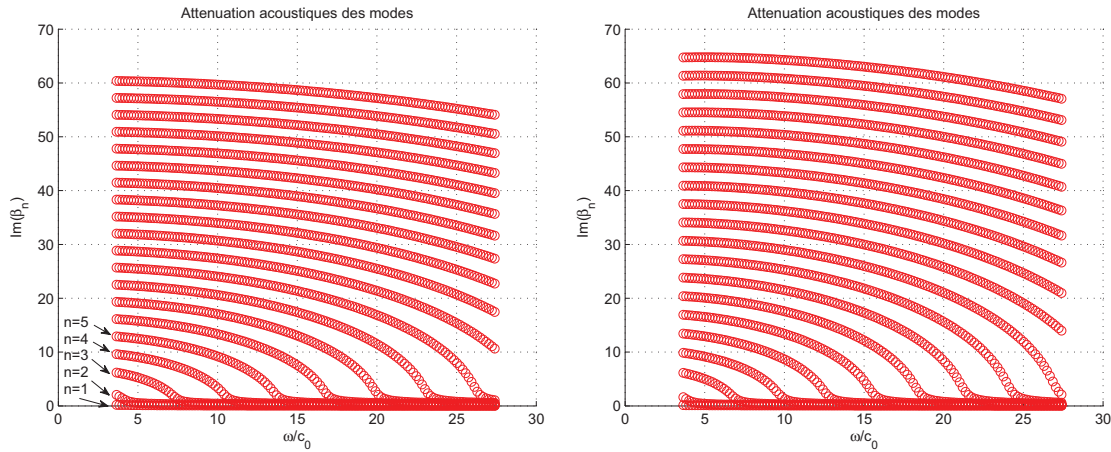


Figure 3.7 – Vitesse de phase  $c_{\phi_n}$  en fonction de la pulsation  $\omega$  pour un guide traité en présence d'un écoulement uniforme :  $M = 0.4$ ,  $Z = 1.5(1 - i)$



a) Guide traité,  $Z = 1.5(1 - i)$       b) Guide traité,  $Z = 1.5(1 - i)$ ,  $M = 0.4$

Figure 3.8 – Atténuation des modes (partie imaginaire de  $\beta_n$ ) en fonction de la pulsation  $\omega$

pédance  $Z$  et du nombre de Mach  $M$ . Il explique également que mathématiquement ces instabilités se manifestent sous forme de modes qui au lieu de décroître s'accroissent. Cela se traduit dans la courbe des  $\beta_n$  par des modes dont la partie réelle de  $\beta_n^-$  est positive comme l'indique la Figure 3.9.

Rienstra et Vilenski [8] montrent que le phénomène d'instabilité apparaît dans un guide traité avec un matériau à réaction non localisée en présence d'un écoulement moyen et d'une couche limite mince. Ils proposent donc un critère de stabilité en faisant varier l'épaisseur de la couche limite, la fréquence et l'impédance de la paroi.

De son côté, Brambley [86] refute le terme d'instabilité car le problème serait mal posé en présence d'un matériau absorbant à réaction localisée et d'un écoulement uniforme. Il soutient que les modes hydrodynamiques qui sont supposés être en cause sont généralement ignorés lors des calculs dans le domaine fréquentiel et que les instabilités sont filtrées dans le domaine temporel.

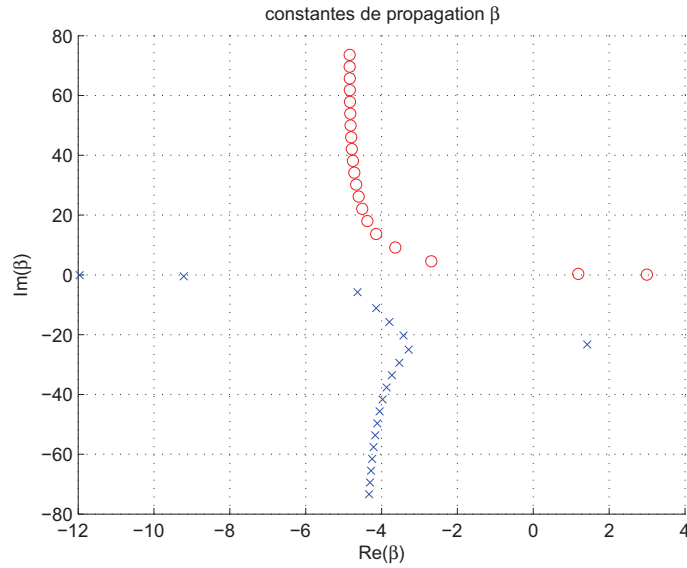


Figure 3.9 – Constantes de propagation  $\beta_n$  pour un guide recouvert d'un matériau absorbant d'impédance  $Z = 1.5(1 - i)$ , en présence d'un écoulement uniforme  $M = 0.6$ , pour  $k = 5$  avec un mode instable

En ce qui concerne les conditions limites transparentes, nous montrons par la suite par un exemple que la présence des modes instables n'a pas d'influence sur l'opérateur DtN.

## 4 Relation d'orthogonalité et normalisation des modes

Pour déterminer les amplitudes des modes dans le développement de la pression acoustique (3.11) nécessaire pour l'écriture de la condition limite transparente, nous avons besoin d'une relation d'orthogonalité.

On a vu qu'en présence d'un absorbant, le problème aux valeurs propres n'est plus auto-adjoint et que les modes transverses du guide ne sont plus orthogonaux au sens du produit scalaire usuel. Néanmoins, il est facile d'établir une relation d'orthogonalité en raison de la propriété de biorthogonalité.

Le fait de considérer un écoulement uniforme dans un guide traité modifie considérablement la nature du problème. Le problème aux valeurs propres reste non auto-adjoint, mais le caractère quadratique et la condition aux limites au niveau de la paroi absorbante qui fait apparaître des dérivées tangentielles de la pression ne permettent plus d'établir simplement une relation de biorthogonalité comme dans le cas sans écoulement. Établir une relation de biorthogonalité nécessiterait l'introduction de nouvelles inconnues [87] (la vitesse acoustique par exemple) ce qui ne permet plus de travailler avec un modèle scalaire basé sur l'équation de Helmholtz convectée.

En s'inspirant des travaux en 2D cartésien de Poernomo Sari [28, 81], notre choix s'est plutôt porté vers le développement d'une relation d'orthogonalité asymptotique.

Considérons un mode d'ordre  $n$  :  $p_n(r, z) = \varphi_n(r)e^{i\beta_n z}$  qui satisfait le problème

aux valeurs propres défini par (3.12), (3.13) et (3.14).

En s'inspirant de la méthode utilisée dans le cas sans écoulement, on multiplie par un mode  $\varphi_m$  (sans conjuguer) l'équation (3.12) vérifiée par un mode  $\varphi_n$  et on intègre sur la section transversale  $[0, R]$  :

$$\int_0^R \left( \frac{d^2 \varphi_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi_n}{dr} + \left[ k^2 - (1 - M^2)\beta_n^2 - 2Mk\beta_n \right] \varphi_n \right) \varphi_m r dr = 0 \quad (3.23)$$

Après intégration par parties et en prenant en compte les conditions aux limites au centre ( $r = 0$ ) et sur la paroi ( $r = R$ ), on trouve :

$$\begin{aligned} \int_0^R \frac{d\varphi_n}{dr} \frac{d\varphi_m}{dr} r dr - \left[ k^2 - (1 - M^2)\beta_n^2 - 2Mk\beta_n \right] \int_0^R \varphi_n \varphi_m r dr \\ - \frac{i}{kZ} \left[ k^2 + M^2\beta_n^2 - 2Mk\beta_n \right] R \varphi_n(R) \varphi_m(R) = 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

En échangeant les rôles de  $m$  et  $n$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^R \frac{d\varphi_m}{dr} \frac{d\varphi_n}{dr} r dr - \left[ k^2 - (1 - M^2)\beta_m^2 - 2Mk\beta_m \right] \int_0^R \varphi_m \varphi_n r dr \\ - \frac{i}{kZ} \left[ k^2 + M^2\beta_m^2 - 2Mk\beta_m \right] R \varphi_m(R) \varphi_n(R) = 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Par soustraction de (3.25) et (3.24), on obtient la relation :

$$\begin{aligned} (\beta_m - \beta_n) \left\{ \frac{iM}{kZ} \left[ M(\beta_m + \beta_n) - 2k \right] R \varphi_m(R) \varphi_n(R) \right. \\ \left. - \left[ (1 - M^2)(\beta_m + \beta_n) + 2Mk \right] \int_0^R \varphi_m \varphi_n r dr \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Pour  $m \neq n$ , on obtient :

$$\frac{iMR}{kZ} \left[ M(\beta_m + \beta_n) - 2k \right] \varphi_m(R) \varphi_n(R) - \left[ (1 - M^2)(\beta_m + \beta_n) + 2Mk \right] \int_0^R \varphi_m \varphi_n r dr = 0 \quad (3.27)$$

Cette équation ne constitue pas une relation d'orthogonalité puisqu'elle dépend encore de  $\beta_m$  et  $\beta_n$ . Cependant, pour les modes d'ordre élevé,  $\beta_m$  et  $\beta_n$  deviennent très grands devant les termes  $2iM/Z$  et  $2Mk$  :

$$\lim_{\substack{(\beta_m + \beta_n) \rightarrow +\infty \\ m \neq n}} \left[ \frac{iM^2 R}{kZ} \varphi_m(R) \varphi_n(R) - (1 - M^2) \int_0^R \varphi_m \varphi_n r dr \right] = 0 \quad (3.28)$$

On définit ainsi une relation d'orthogonalité asymptotique donnée par :

$$((\varphi_m, \varphi_n))_\Sigma = \int_\Sigma \varphi_m(r) \varphi_n(r) r dr - \frac{iM^2 R}{kZ(1 - M^2)} \varphi_m(R) \varphi_n(R) \quad (3.29)$$

C'est une relation bilinéaire constituée de la relation de biorthogonalité définie précédemment avec un absorbant seul et d'un terme au bord de  $\Gamma_Z$  en  $r = R$  :

$$((\varphi_m, \varphi_n))_\Sigma = (\varphi_m, \varphi_n)_\Sigma^* - \underbrace{\frac{iM^2R}{kZ(1-M^2)}\varphi_m(R)\varphi_n(R)}_{\text{terme de bord}} \quad (3.30)$$

Cette relation est similaire à celle développée dans le plan 2D [28] par Poernomo et constitue une généralisation aux problèmes axisymétriques. Nous verrons que le choix de cette relation d'orthogonalité asymptotique trouve sa justification lors de l'écriture de la formulation variationnelle où elle apparait naturellement. Cette relation (3.30) servira dans la suite au calcul des coefficients de normalisation des modes indispensable pour écrire l'opérateur DtN cherché.

Pour un mode transverse d'ordre  $n$ ,  $\varphi_n(r) = a_n J_0(\alpha_n r)$ , on calcule le coefficient de normalisation  $a_n$  à l'aide de la relation d'orthogonalité asymptotique (3.30) :

$$\begin{aligned} ((\varphi_n, \varphi_n))_\Sigma &= \int_0^R \varphi_n^2(r) r dr - \frac{iM^2R}{kZ(1-M^2)} \varphi_n^2(R) \\ &= a_n^2 \left[ \frac{R^2}{2} (J_0^2(\alpha_n R) + J_1^2(\alpha_n R)) - \frac{iM^2R}{kZ(1-M^2)} J_0^2(\alpha_n R) \right] \end{aligned} \quad (3.31)$$

On en déduit les coefficients  $a_n$  pour normer les modes  $\varphi_n$  :

$$a_n = \left[ \frac{R^2}{2} (J_0^2(\alpha_n R) + J_1^2(\alpha_n R)) - \frac{iM^2R}{kZ(1-M^2)} J_0^2(\alpha_n R) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (3.32)$$

Comme dans le cas sans écoulement, il existe des valeurs de  $\alpha_n$  qui ne permettent plus de normaliser les modes, elles correspondent aux racines de :

$$\frac{R^2}{2} (J_0^2(\alpha_n R) + J_1^2(\alpha_n R)) - \frac{iM^2R}{kZ(1-M^2)} J_0^2(\alpha_n R) = 0 \quad (3.33)$$

Il existe donc comme dans le cas sans écoulement des impédances critiques (cf. [28]) pour lesquelles il n'est plus possible de calculer les coefficients  $a_n$ . Cependant, la détermination de ces impédances critiques nécessite une deuxième équation car l'équation (3.33) fait intervenir  $Z$ . On peut utiliser pour cela l'équation transcendante (3.16) précédente qui elle-même fait intervenir les constantes de propagation  $\beta_n$  que l'on peut calculer à l'aide de l'équation de dispersion (3.15).

Par ailleurs, en remplaçant  $Z$  dans (3.33) par son expression dans (3.16) :

$$Z = -i \frac{(\beta_n^2 + \alpha_n^2)}{k} \frac{J_0(\alpha_n R)}{\alpha_n J_1(\alpha_n R)} \quad (3.34)$$

l'équation (3.33) devient :

$$(1 - M^2)R^2(\beta_n^2 + \alpha_n^2)(J_0^2(\alpha_n R) + J_1^2(\alpha_n R)) + M^2R\alpha_n J_0(\alpha_n R)J_1(\alpha_n R) = 0 \quad (3.35)$$

Finalement pour déterminer les impédances critiques pour lesquelles il n'est plus possible de normaliser les modes du guide, il convient de résoudre le système d'équation composé de (3.35) et (3.15)

$$(1 - M^2)R^2(\beta_n^2 + \alpha_n^2)(J_0^2(\alpha_n R) + J_1^2(\alpha_n R)) + M^2R\alpha_n J_0(\alpha_n R)J_1(\alpha_n R) = 0 \quad (3.36)$$

$$k^2 - \alpha_n^2 - (1 - M^2)\beta_n^2 - 2Mk\beta_n = 0 \quad (3.37)$$

et de reporter les valeurs critiques de  $\alpha_n$  et de  $\beta_n$  dans l'équation (3.34). Si  $M = 0$ , on retrouve évidemment le cas sans écoulement :

$$J_0^2(\alpha_n R) + J_1^2(\alpha_n R) = 0 \tag{3.38}$$

$$k^2 - \alpha_n^2 - \beta_n^2 = 0 \tag{3.39}$$

On rappelle que si un couple  $(\alpha_n, \beta_n)$  est solution de (3.36) et (3.37) alors  $(\bar{\alpha}_n, \bar{\beta}_n)$  et  $(-\alpha_n, -\beta_n)$  le sont aussi. On peut donc se limiter à la partie positive du plan complexe :  $Re(\cdot) \geq 0$  et  $Im(\cdot) \geq 0$ . Les racines  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  de (3.36) et (3.37) sont cherchées à l'aide de la méthode de Newton-Raphson. On utilise les solutions de (3.38) et (3.39) comme valeurs initiales et on recherche les solutions pour un nombre de Mach donné de proche en proche. Le Tableau 3.1 montre quelques valeurs critiques  $\alpha_n^c$ ,  $\beta_n^c$  et de l'impédance critique  $Z_n^c$  pour  $k = 5$  et  $M = 0.4$ . Comme dans le cas sans écoulement les impédances critiques  $Z_n^c$  sont décroissantes (voir Figure 3.10).

$n$	$\alpha_n^c$	$\beta_n^c$	$Z_n^c$
1	3.040451 + 1.176089 i	2.791066 - 0.823074 i	-0.912609 + 0.223345 i
2	6.149151 + 1.390116 i	0.296107 - 3.801271 i	-0.768862 - 0.271061 i
3	9.156519 + 1.535972 i	-0.317377 - 8.113608 i	-0.452732 - 0.613504 i
4	12.165295 + 1.666608 i	-0.352317 - 11.897970 i	-0.168975 - 0.744089 i
5	15.190410 + 1.788087 i	-0.292940 - 15.486231 i	0.061281 - 0.804675 i
6	18.232823 + 1.899148 i	-0.210578 - 18.993232 i	0.258287 - 0.836998 i
7	21.290262 + 1.999358 i	-0.124866 - 22.461381 i	0.434531 - 0.855835 i

Tableau 3.1 – Valeurs propres critiques  $\alpha_n^c$ , constantes de propagation  $\beta_n^c$  et impédances critiques  $Z_n^c$  pour  $k = 5$ ,  $M = 0.4$  et  $R = 1$

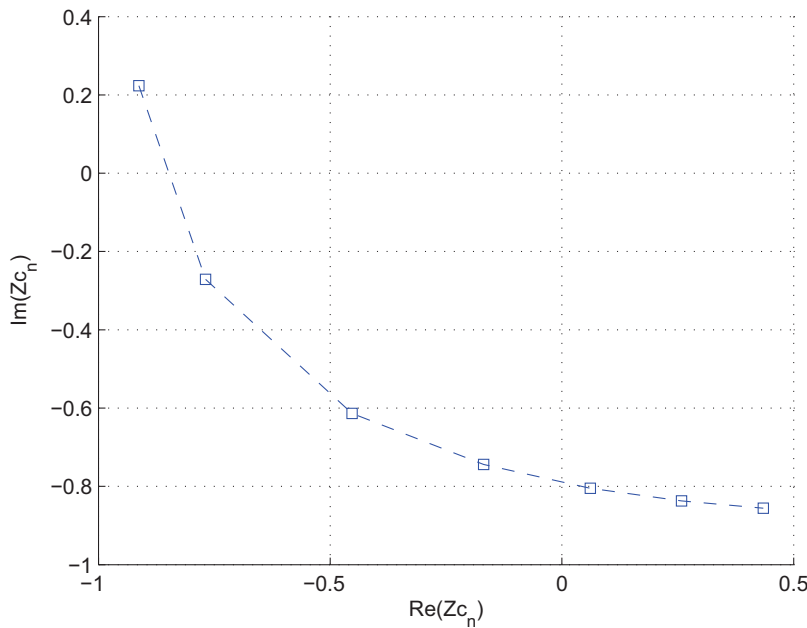


Figure 3.10 – Impédances critiques  $Z_n^c$  pour  $k = 5$  et  $M = 0.4$

Dans la suite, toutes les impédances utilisées pour les applications numériques sont choisies différentes de ces impédances critiques.

## 5 Détermination de la condition limite transparente

L'écriture de l'opérateur DtN en présence d'un écoulement uniforme suit les mêmes étapes que dans le cas du guide traité sans écoulement : même si la complétude des modes n'est pas démontrée dans ce cas, on fait l'hypothèse que l'on peut décomposer la pression sur la base des modes sur les frontières artificielles  $\Sigma_{\pm}$  et on calcule les coefficients modaux à l'aide de la relation d'orthogonalité asymptotique définie dans (3.29).

Ainsi, en aval de la frontière  $\Sigma_+$ , la pression  $p$  s'écrit :

$$\forall z \geq L \quad p(r, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n^+ \varphi_n^+(r) e^{i\beta_n^+(z-L)} \quad (3.40)$$

Contrairement aux cas précédents, l'absence de relation d'orthogonalité exacte ne permet plus d'exprimer les coefficients modaux  $A_n^+$  de façon simple. En effet, sans absorbant, on a vu que grâce à la propriété d'orthogonalité des modes, les coefficients modaux s'obtiennent par une projection de la pression sur les modes  $\varphi_n$  :

$$A_n = (p, \varphi_n)_{\Sigma_+} \quad (3.41)$$

De même, en présence d'absorbant, la relation de biorthogonalité permettait de calculer les coefficients modaux par projection :

$$A_n = (p, \varphi_n)_{\Sigma_+}^* \quad (3.42)$$

En présence d'un absorbant et d'un écoulement uniforme, les coefficients modaux  $A_n^+$  ne s'obtiennent plus par une simple projection de la pression sur les modes transverses du guide  $\varphi_n^+$  comme dans (3.41) et (3.42).

En pratique, le développement modal (3.40) doit être tronqué à un rang  $N$  :

$$\forall z \geq L \quad p(r, z) = \sum_{n=1}^N A_n^+ \varphi_n^+(r) e^{i\beta_n^+(z-L)} \quad (3.43)$$

En particulier sur  $\Sigma_+$ ,  $z = L$ , on a :

$$p(r, L) = \sum_{n=1}^N A_n^+ \varphi_n^+(r) \quad (3.44)$$

En formant le produit de  $p$  et d'un mode  $\varphi_m^+$  au sens du pseudo-produit scalaire défini par la relation d'orthogonalité asymptotique, on voit que les coefficients  $(A_n^+)_{0 \leq n \leq N}$  sont solutions du système linéaire suivant :

$$((p, \varphi_m^+))_{\Sigma_+} = \sum_{n=1}^N A_n^+ ((\varphi_n^+, \varphi_m^+))_{\Sigma_+} \quad \text{pour } m = 0, 1, \dots, N \quad (3.45)$$

On note alors  $O_N^+$  la matrice spectrale  $N \times N$  symétrique définie par :

$$[O_N^+]_{mn} = ((\varphi_n^+, \varphi_m^+))_{\Sigma^+} = \int_0^R \varphi_m^+(r) \varphi_n^+(r) r dr - \frac{iM^2 R}{kZ(1-M^2)} \varphi_m^+(R) \varphi_n^+(R) \quad (3.46)$$

Ainsi, si  $O_N^+$  est inversible on trouve :

$$A_n^+ = \sum_{m=1}^N [O_N^+]_{mn}^{-1} ((p, \varphi_m^+))_{\Sigma^+} \quad (3.47)$$

D'après (3.30), on note que pour  $M = 0$  la matrice spectrale  $O_N^+$  devient diagonale puisque  $((\varphi_n^+, \varphi_m^+))_{\Sigma^+} = (\varphi_n^+, \varphi_m^+)_{\Sigma^+}^* = \delta_{nm}$ . On retrouve alors la relation (3.42) obtenue avec l'absorbant seul. Finalement, l'introduction de la matrice spectrale  $O_N^+$  dans l'expression des coefficients modaux est directement liée à la non orthogonalité des modes. Dans le cas d'un guide rigide et d'un guide traité sans écoulement où les modes sont orthogonaux (ou biorthogonaux) et forment une base complète, elle se réduit à une matrice unitaire et donc n'apparaît pas dans l'expression des coefficients modaux. Dans le cas présent, cette matrice qui est pleine tend à devenir diagonale pour les modes d'ordre élevé en raison du caractère asymptotique de la relation d'orthogonalité. Nous verrons dans la suite que la qualité de la condition limite transparente ne nécessite pas d'atteindre le régime asymptotique, la détermination de la matrice spectrale avec un nombre  $N$  de modes adapté suffit.

Finalement l'opérateur  $T_{ZM}^+(p)$  se déduit facilement par dérivation de la pression :

$$T_{ZM}^+(p) = - \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N i\beta_n^+ [O_N^+]_{mn}^{-1} ((p^+, \varphi_m^+))_{\Sigma^+} \varphi_n^+(r) \quad (3.48)$$

De même on trouve sur la frontière  $\Sigma^-$ , l'opérateur DtN  $T_{ZM}^-(p)$  :

$$T_{ZM}^-(p) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} i\beta_n^- [O_N^-]_{mn}^{-1} ((p^-, \varphi_m^-))_{\Sigma^-} \varphi_n^-(r) \quad (3.49)$$

Ces opérateurs DtN que nous venons de déterminer sont utilisés dans les formulations variationnelles mises en œuvre dans les applications numériques.

## 6 Applications numériques

Nous présentons maintenant des exemples d'applications pour mettre en œuvre la condition limite transparente qui vient d'être présentée. Afin de valider notre méthode, nous traiterons le cas simple d'un guide semi infini dans lequel se propage un mode acoustique imposé à l'entrée du guide. La solution numérique sera comparée à la solution analytique. Nous étudierons ensuite le rayonnement d'une source sphérique placée dans un guide infini rectiligne, la solution sera alors comparée à une solution numérique obtenue avec des couches PML. Nous examinerons en particulier la convergence de la méthode en fonction du nombre des modes. Nous aborderons enfin le cas d'un guide non uniforme en présence d'un écoulement potentiel.

## 6.1 Validation sur un cas académique

Pour valider l'opérateur DtN établi dans le paragraphe précédent, on considère l'exemple académique du guide rectiligne uniforme semi infini de rayon  $R = 1$ . Le guide est recouvert d'un matériau absorbant d'impédance  $Z = 4.5(1 + i)$  et le fluide supposé parfait contenu dans le guide est animé d'un mouvement uniforme caractérisé par le nombre de Mach  $M = 0.3$  (voir Figure 3.11). Un mode transverse  $\varphi_n(r)$  du guide est imposé à l'entrée en  $z = 0$  sur la frontière  $\Gamma_E$  sous la forme d'une condition de Dirichlet. Le domaine réel (Figure 3.11-a) est tronqué par la

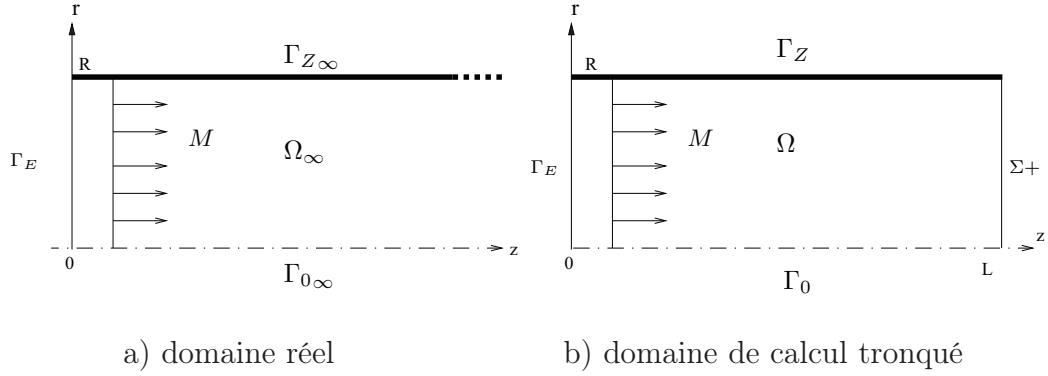


Figure 3.11 – Géométrie du problème

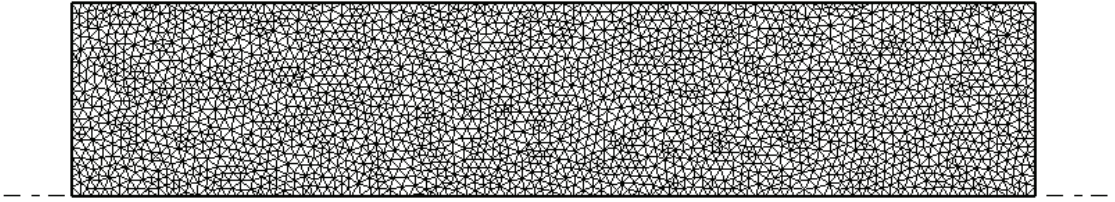


Figure 3.12 – Maillage du domaine tronqué

frontière  $\Sigma+$  en  $z = L = 5$  (voir Figure 3.11-b) sur laquelle notre condition limite transparente est appliquée. La formulation variationnelle associée à ce problème est donnée par :

trouver  $p \in H^1(\Omega)$  tel que  $\forall \psi \in H^1(\Omega)$  et  $\psi = 0$  sur  $\Gamma_E$ , on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + (1 - M^2) \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} - 2iMk \frac{\partial p}{\partial z} \psi - k^2 p \psi \right) r \, dr dz & \quad (3.50) \\ - \frac{i}{kZ} \int_{\Gamma_Z} \left[ M^2 \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} + 2iMk \frac{\partial p}{\partial z} \psi + k^2 p \psi \right] r \, d\Gamma \\ - (1 - M^2) \int_{\Sigma+} \frac{\partial p}{\partial z} \psi r \, d\Sigma + i \frac{M^2 R}{kZ} \frac{\partial p}{\partial z}(R, L) \psi(R, L) & = 0 \end{aligned}$$

D'après le nouveau produit scalaire (3.30) défini précédemment, on a :

$$\left( \frac{\partial p}{\partial z}, \psi \right)_{\Sigma} = \int_0^R \frac{\partial p}{\partial z} \psi r \, dr - \frac{iM^2 R}{kZ(1 - M^2)} \frac{\partial p}{\partial z}(R, L) \psi(R, L) \quad (3.51)$$



Cela implique que le dernier terme de l'équation (3.50) sur la frontière  $\Sigma_+$  s'écrit :

$$-(1 - M^2)\left(\frac{\partial p}{\partial z}, \psi\right)_\Sigma = (1 - M^2)\left(-\frac{\partial p}{\partial z}, \psi\right)_\Sigma \quad (3.52)$$

Or par définition de l'opérateur DtN,  $T_{ZM}^+(p)$  sur  $\Sigma_+$  :

$$T_{ZM}^+(p) = -\frac{\partial p}{\partial z}(R, L) = -\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N i\beta_n^+ [O_N^+]_{mn}^{-1} ((p^+, \varphi_m^+))_{\Sigma_+} \varphi_n^+(r)$$

on déduit la relation suivante :

$$(1 - M^2)\left(-\frac{\partial p}{\partial z}, \psi\right)_\Sigma = (1 - M^2)\left((T_{ZM}^+(p), \psi)\right)_\Sigma \quad (3.53)$$

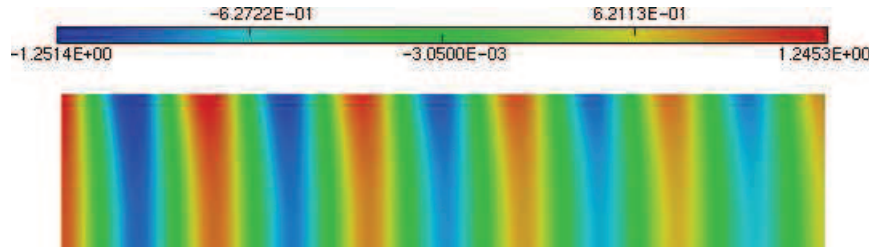
Finalemnt la formulation variationnelle s'écrit :

trouver  $p \in H^1(\Omega)$  tel que  $\forall \psi \in H^1(\Omega)$  et  $\psi = 0$  sur  $\Gamma_E$ , on a :

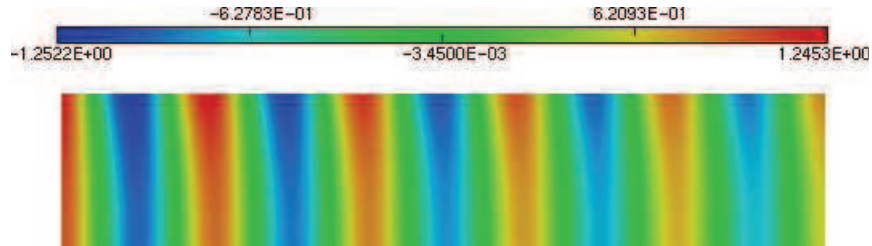
$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left( \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + (1 - M^2) \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} - 2iMk \frac{\partial p}{\partial z} \psi - k^2 p \psi \right) r \, dr dz \\ & - \frac{i}{kZ} \int_{\Gamma_Z} \left[ M^2 \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} + 2iMk \frac{\partial p}{\partial z} \psi + k^2 p \psi \right] r \, d\Gamma + (1 - M^2)\left((T_{ZM}^+(p), \psi)\right)_\Sigma = 0 \end{aligned} \quad (3.54)$$

Pour le calcul par la méthode des éléments finis, le domaine de calcul a été discrétisé par 4916 éléments triangulaires de Lagrange d'ordre 2 (éléments  $P_2$  voir Figure 3.12). Connaissant la constante de propagation  $\beta_n$  du mode transverse  $\varphi_n(r)$  imposé à l'entrée du guide, la solution analytique vaut  $p = \varphi_n(r)e^{i\beta_n z}$ .

Les Figures 3.13 et 3.14 montrent les répartitions de la pression acoustique et analytique pour  $k = 8$ . L'opérateur DtN est calculé en utilisant les 20 premiers modes, l'erreur est très faible, elle est inférieure à 1% (voir Tableau 3.2).

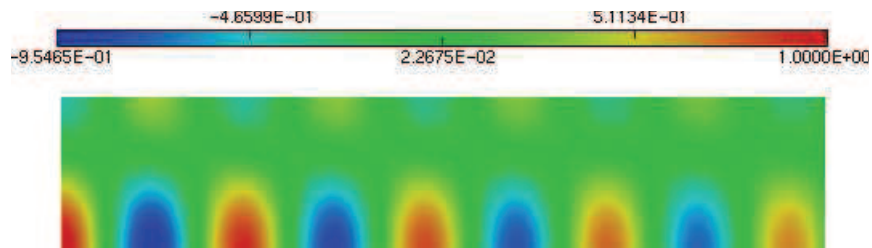


a) Solution avec DtN

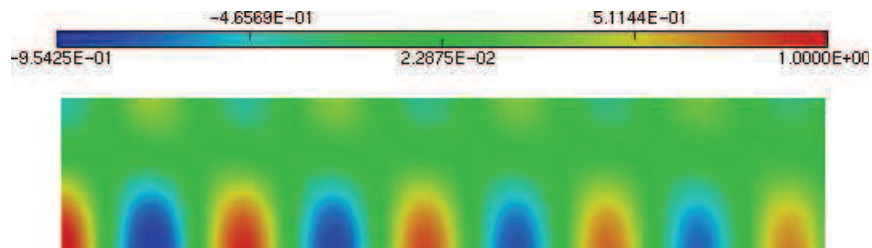


b) Solution analytique

Figure 3.13 – Partie réelle de la pression en présence d'écoulement uniforme :  $M = 0.3$   $k = 8$ ,  $Z = 4.5 + 4.5i$  avec le premier mode  $p_1 = J_0(\alpha_1 r)$  imposé sur  $\Sigma_+$



a) Solution avec DtN



b) Solution analytique

Figure 3.14 – Partie réelle de la pression en présence d'écoulement  $M = 0.3$  pour  $k = 8$ ,  $Z = 4.5 + 4.5i$  avec le deuxième mode  $p_2 = J_0(\alpha_2 r)$  imposé sur  $\Sigma_+$

Pour montrer l'efficacité de la méthode, un nouveau calcul a été effectué en utilisant uniquement les deux premiers modes du guide dans l'opérateur DtN. L'erreur

mode imposé $n$	erreur relative en norme $L^2(\Omega)$
$\alpha_1=0.572050 -1.166584 i$	0.003788
$\alpha_2=3.678775 -0.152067 i$	0.001645

Tableau 3.2 – Erreurs relatives en norme  $L^2(\Omega)$  pour un mode d'ordre  $n$ ,  $\varphi_n(r) = J_0(\alpha_n r)$  imposé sur  $\Sigma^-$  :  $k = 8$ ,  $M = 0.3$  et  $Z = 4.5(1 + i)$

est encore très faible (0.2041 ‰), ce qui montre que même si la condition limite transparente est basée sur une relation d'orthogonalité asymptotique, la prise en compte de quelques modes pour le calcul de la matrice spectrale permet à la méthode d'être toujours très performante, nous y reviendrons plus en détail dans la suite.

### 6.2 Rayonnement d'une source acoustique dans un guide axisymétrique traité en présence d'un écoulement uniforme

On considère maintenant un guide cylindrique infini axisymétrique dans lequel rayonne une source sphérique telle que  $f = 1$  (source omnidirectionnelle) de rayon  $R_f = 0.2$  placée sur l'axe de symétrie ( $r = 0$ ) du guide. La paroi  $\Gamma_Z$  du guide est recouverte d'un matériau absorbant d'impédance  $Z = 1.5(1 - i)$  et le fluide est en mouvement uniforme tel que  $M = 0.4$ . Le guide est ici tronqué par les frontières  $\Sigma^-$  et  $\Sigma^+$  en  $z = 0$  et  $z = L = 5$  respectivement sur lesquelles seront appliquées les conditions limites transparentes (voir Figure 3.15).

En l'absence de solution analytique, les solutions obtenues avec l'opérateur DtN seront comparées à celles obtenues avec des couches PML d'épaisseur  $e = 0.4$  placées de part et d'autre de  $\Sigma^-$  et  $\Sigma^+$ .

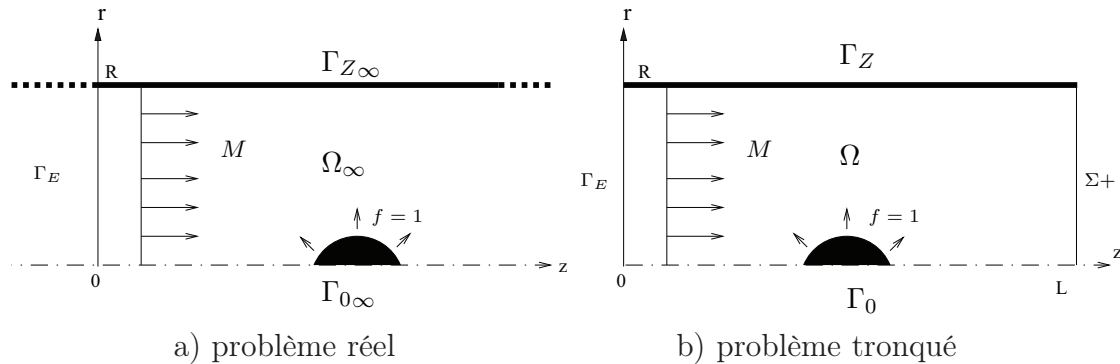


Figure 3.15 – Guide cylindrique axisymétrique infini tronqué à paroi absorbante - rayonnement d'une source

La formulation variationnelle associée à ce problème de rayonnement acoustique s'écrit :

trouver  $p \in H^1(\Omega)$  tel que  $\forall \psi \in H^1(\Omega)$ , on a :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left( \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + (1 - M^2) \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} - 2iMk \frac{\partial p}{\partial z} \psi - k^2 p \psi \right) r \, dr dz \\
& \quad - \frac{i}{kZ} \int_{\Gamma_z} \left[ M^2 \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} + 2iMk \frac{\partial p}{\partial z} \psi + k^2 p \psi \right] r \, d\Gamma \\
& \quad - (1 - M^2) \int_{\Sigma_+} \frac{\partial p}{\partial z} \psi r \, d\Sigma + i \frac{M^2 R}{kZ} \frac{\partial p}{\partial z}(R, L) \bar{\psi}(R, L) \\
& + (1 - M^2) \int_{\Sigma_-} \frac{\partial p}{\partial z} \psi r \, d\Sigma - i \frac{M^2 R}{kZ} \frac{\partial p}{\partial z}(R, 0) \bar{\psi}(R, 0) = - \int_{\Omega} f \psi r \, dr dz \quad (3.55)
\end{aligned}$$

En s'inspirant de la formulation variationnelle développée pour l'exemple précédent (3.54), la formulation variationnelle (3.55) s'écrit :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left( \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + (1 - M^2) \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} - 2iMk \frac{\partial p}{\partial z} \psi - k^2 p \psi \right) r \, dr dz \\
& \quad - \frac{i}{kZ} \int_{\Gamma_z} \left[ M^2 \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} + 2iMk \frac{\partial p}{\partial z} \psi + k^2 p \psi \right] r \, d\Gamma \\
& + (1 - M^2) ((T_{ZM}^+(p), \psi))_{\Sigma} - (1 - M^2) ((T_{ZM}^-(p), \psi))_{\Sigma} \\
& \quad = - \int_{\Omega} f \psi r \, dr dz \quad (3.56)
\end{aligned}$$

Le domaine  $\Omega$  est maillé avec 5980 éléments triangulaires  $P_2$ . Les Figures (3.16) et (3.17) montrent la répartition de la pression dans le guide avec  $k = 5$  et  $k = 7$  respectivement. L'opérateur DtN est encore calculé en utilisant les 20 premiers modes. On compare avec succès les solutions avec l'opérateur DtN et celles issues du modèle avec les couches PML. L'erreur quadratique relative entre les deux solutions est de 0.0188%. Contrairement au cas du guide traité en l'absence d'écoulement, on constate une répartition non symétrique de la pression par rapport à la source en raison des effets de convection.

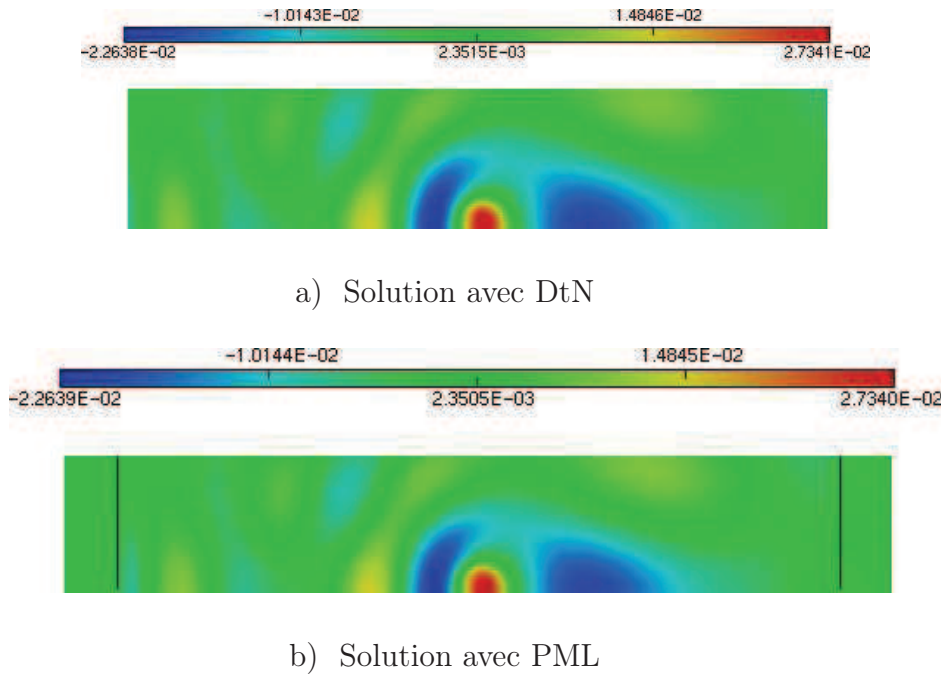


Figure 3.16 – Partie réelle de la pression en présence d'un écoulement uniforme :  $M = 0.4$ ,  $k = 5$ ,  $Z = 1.5 - 1.5i$  : a) solution avec DtN, b) Solution avec les couches PML,  $\nu = 0.29(1 - i)$

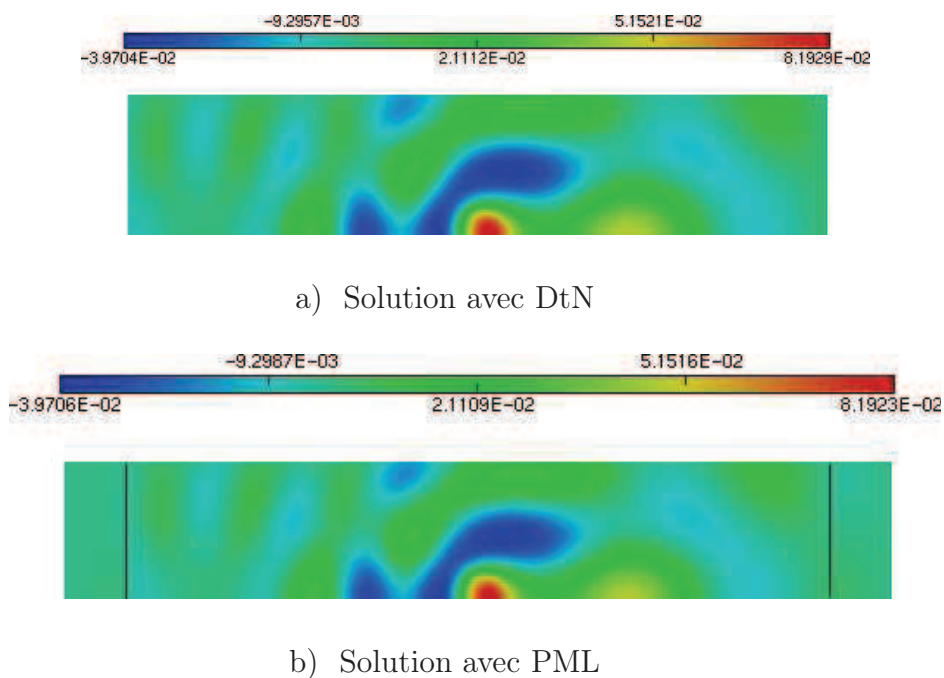


Figure 3.17 – Partie réelle de la pression en présence d'un écoulement uniforme  $M = 0.35$  pour  $k = 7$ ,  $Z = 1.5 - 1.5i$  : a) solution avec DtN, b) Solution avec les couches PML,  $\nu = 0.42(1 - i)$

### 6.3 Étude de l'erreur en fonction du nombre de modes

Nous étudions ici l'évolution de l'erreur en fonction du nombre de modes utilisés dans l'opérateur DtN que nous avons développé. En effet, la condition limite transparente est déduite d'un développement de la pression sur la base des modes du guide (3.48). En pratique, comme nous l'avons indiqué, la série doit être tronquée à un rang  $N$  qui va conditionner la précision de la méthode.

Pour un guide rigide en présence ou non d'un écoulement uniforme on sait que pour une fréquence donnée, il existe un nombre fini de modes propagatifs et un nombre infini de modes évanescents. Dans ce cas, le choix du nombre de modes consiste en général à considérer tous les modes propagatifs et quelques modes évanescents dans le développement [28]. Dans le cas du rayonnement d'une source acoustique, si les frontières artificielles sur lesquelles sont écrits les opérateurs DtN sont situées très près de la source, il faut choisir un nombre suffisant de modes évanescents car leur contribution devient non négligeable.

Dans le cas des guides traités sans écoulement, malgré l'atténuation des modes par l'absorbant, il convient de choisir tous les modes pseudo propagatifs tels que  $|Re(\beta_n^\pm)| > |Im(\beta_n^\pm)|$  et quelques modes évanescents.

Pour un guide traité en présence d'un écoulement uniforme, la relation d'orthogonalité asymptotique développée précédemment suggère qu'il faut choisir un nombre élevé de modes pour atteindre le régime asymptotique et obtenir une bonne précision.

Nous montrons néanmoins que l'opérateur DtN reste performant même avec un faible nombre de modes.

Considérons l'exemple précédent du rayonnement d'une source dans lequel on rapproche les frontières  $\Sigma^-$  et  $\Sigma^+$  près de la source ( $\Sigma^-$  en  $z = 0$ ,  $\Sigma^+$  en  $z = 0.5$ , la source de rayon  $R_f = 0.2$  est centrée en  $(r = 0.25, z = 0)$ ).

La figure 3.18 montre l'évolution du logarithme de l'erreur relative en norme  $L^2(\Omega)$  en fonction du nombre de modes utilisés dans l'opérateur DtN. Après avoir vérifié la convergence de la solution DtN avec 20 modes par rapport à une solution PML optimisée, on calcule l'erreur relative en faisant varier le nombre de modes ( $1 \leq N \leq 19$ ) par rapport à la solution calculée avec 20 modes.

Trois configurations sont étudiées pour le nombre d'onde  $k = 5$  : le cas d'un guide rigide, celui d'un guide traité ( $Z = 1.5(1 - i)$ ) et celui d'un guide traité en présence d'un écoulement uniforme ( $Z = 1.5(1 - i)$ ,  $M = 0.4$ ). Pour les trois cas étudiés, il existe deux modes "propagatifs" (pour le nombre d'onde  $k = 5$ ).

On remarque qu'à partir de quatre modes ( $N = 4$ ), l'erreur quadratique relative est inférieure à 1% pour les trois configurations (voir Figures 3.18 et 3.19). On constate donc que même avec la nouvelle relation d'orthogonalité asymptotique, la troncature du développement peut se faire par un nombre réduit de modes. Il suffit ici encore de prendre en compte tous les modes propagatifs et les premiers modes évanescents.

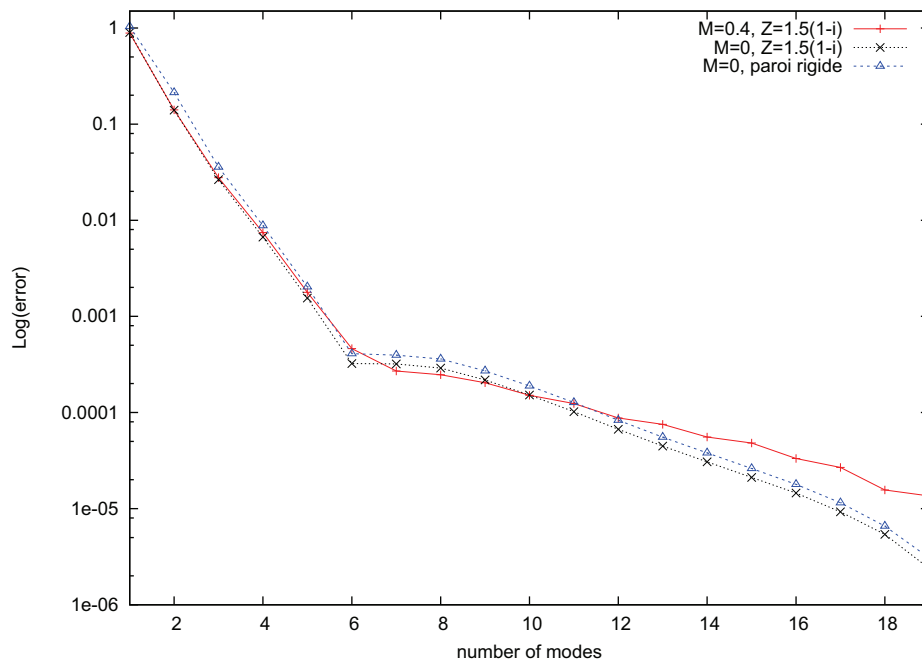


Figure 3.18 – Logarithme de l'erreur relative en norme  $L^2(\Omega)$  de la solution avec DtN en fonction du nombre de modes

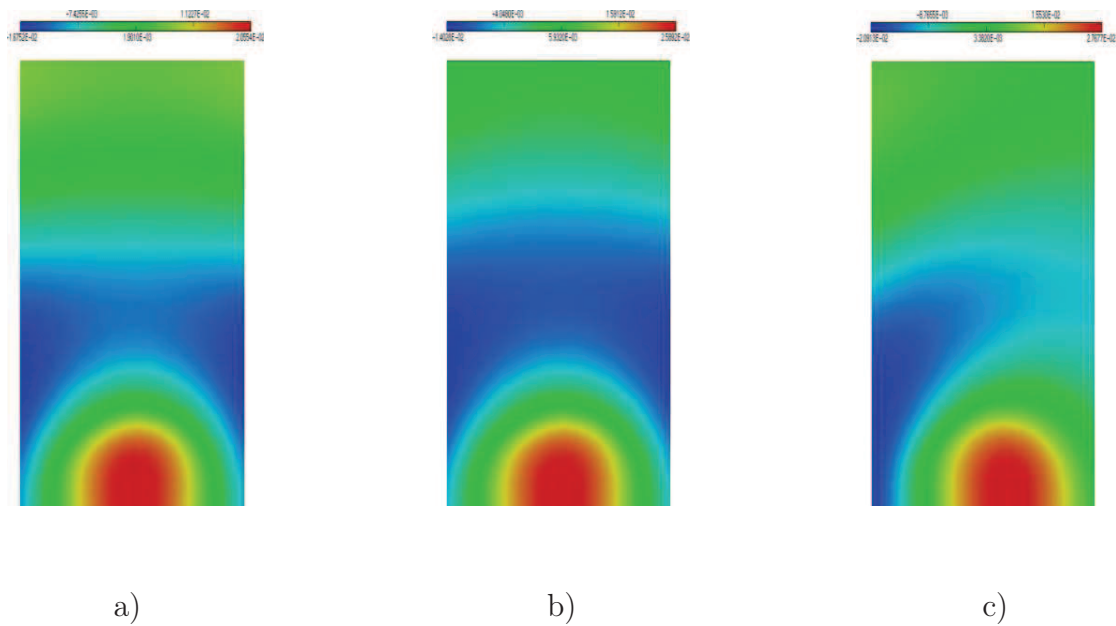


Figure 3.19 – Partie réelle de la pression pour  $k = 5$  (DtN calculé avec 4 modes) : a) guide rigide, b) guide traité ( $Z = 1.5(1 - i)$ ), c) guide traité avec un écoulement uniforme ( $Z = 1.5(1 - i)$ ,  $M = 0.4$ )

## 6.4 Influence des modes instables sur l'opérateur DtN

On présente maintenant un exemple de rayonnement d'une source acoustique placée dans un guide axisymétrique traité en présence d'un écoulement uniforme. Notre but ici est de tester la condition limite transparente quand un mode instable est pris en compte dans la décomposition modale.

En effet, même si la nature physique ou non des modes instables n'est pas encore clairement définie, on sait que ces modes peuvent apparaître lors du calcul des modes dans un guide traité en présence d'un écoulement uniforme pour certaines valeurs de l'impédance  $Z$  et du nombre de Mach  $M$ . Il est donc nécessaire d'étudier l'influence de ces modes instables sur l'opérateur DtN.

On considère la configuration précédente dans laquelle les frontières  $\Sigma^-$  et  $\Sigma^+$  étaient proches de la source. Une source  $f = 1$  à support compact est placée au centre du guide. La paroi du guide est recouverte d'un matériau absorbant d'impédance  $Z = 1.5(1 - i)$ . Le fluide est en mouvement uniforme de nombre de Mach  $M = 0.6$  et on note l'apparition d'un mode instable (mode 11) comme le montre la Figure 3.20.

La figure 3.21 montre la courbe de l'erreur relative en norme  $L^2(\Omega)$  en fonction du nombre des modes pour une fréquence  $k = 8$ . La solution avec DtN pour 20 modes est encore choisie comme solution de référence. On remarque comme précédemment qu'à partir de quatre modes ( $N = 4$ ), l'erreur relative est inférieure à 1%.

Pour  $N = 11$  qui correspond à la prise en compte du mode instable l'erreur quadratique est de 0.0383%. Il semble donc que le mode instable n'a pas d'influence particulière sur l'opérateur DtN. D'autre part, d'après l'étude de l'erreur précédente (§ 6.3 page 71) on sait que l'opérateur DtN reste efficace même si on ne prend qu'un nombre limité de modes incluant tous les modes propagatifs et quelques modes évanescents dans la décomposition de la pression acoustique, les modes instables ont alors peu de chance d'être pris en compte dans le développement.



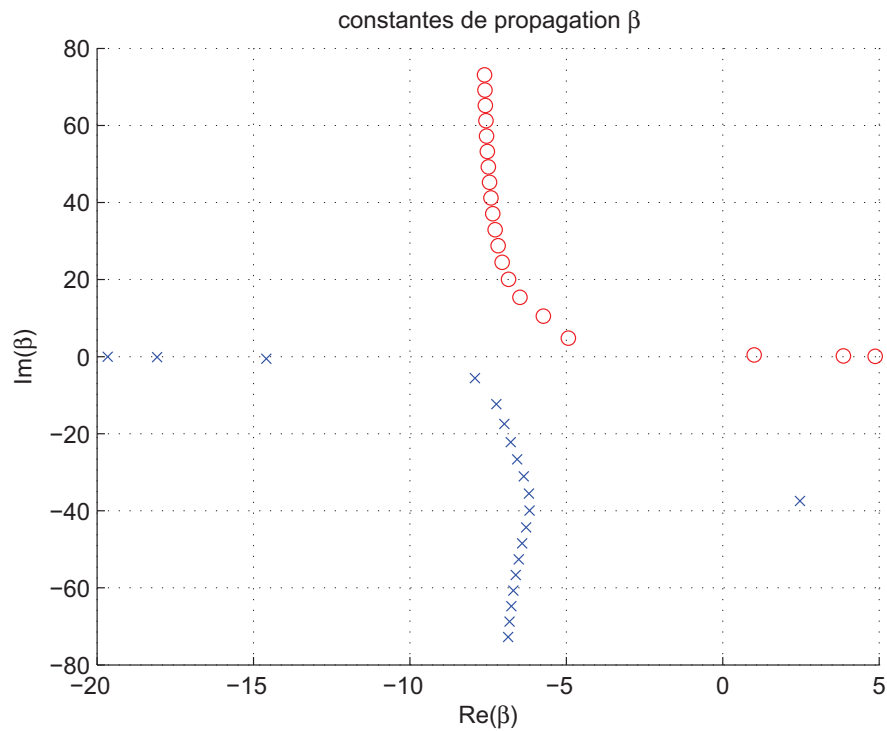


Figure 3.20 – Constantes de propagation  $\beta_n$  ( $\circ$  :  $\beta_n^+$ ,  $\times$  :  $\beta_n^-$ ) en présence d'un écoulement uniforme  $M = 0.6$  pour  $k = 8$  et  $Z = 1.5 - 1.5i$ , présence d'un mode instable

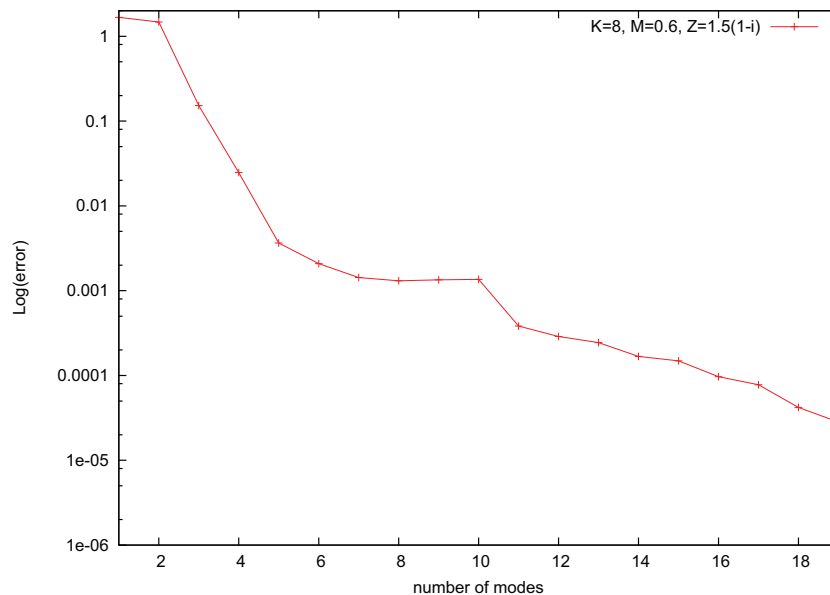


Figure 3.21 – Logarithme de l'erreur relative en norme  $L^2(\Omega)$  de la solution avec DtN en fonction du nombre de modes : le 11<sup>ème</sup> mode est instable

## 7 Guide cylindrique non uniforme en présence d'un écoulement potentiel

Les systèmes industriels tels que les échappements d'automobile, les turboréacteurs d'avions ou les systèmes de ventilation ne se réduisent pas à des guides rectilignes, mais ils peuvent souvent être décomposés en des systèmes élémentaires insérés entre deux guides de section uniforme. Dans ces conditions, notre méthode est encore applicable sous réserve de connaître le champ de vitesse dans la partie non uniforme. Dans cette étude, le champ de vitesse dans la partie non uniforme du guide est considéré irrotationnel (à potentiel de vitesse).

Comme dans le cas précédent, on suppose que la paroi du guide est recouverte d'un matériau absorbant d'impédance  $Z$ , la condition limite associée est encore la condition de Myers [61] mais pour des guides non uniformes :

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \left( -ik + M\mathbf{v}_0 \cdot \nabla - M\mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 \right) \zeta \quad (3.57)$$

où  $\zeta$  désigne le déplacement normal.

D'après Eversman [9], cette condition requiert maintenant la connaissance de la dérivée normale de la composante normale de la vitesse moyenne ainsi que les dérivées spatiales de la masse volumique moyenne le long de la paroi. Dans le cas d'un guide non uniforme à paroi traitée, ces termes sont difficiles à expliciter. Eversman et Okunbor [11] ont appliqué la condition de Myers en négligeant les dérivées normales et en utilisant une approximation pour les dérivées tangentielles. Cette méthode n'est valable que pour les géométries à section lentement variable. Eversman [9] utilise le théorème de Stokes pour s'affranchir du calcul de ces termes dans le cas d'un guide partiellement traité.

Afin d'utiliser la condition limite transparente développée précédemment pour les guides non uniformes, nous considérons deux configurations de guides qui permettront de nous affranchir des difficultés que nous venons de mentionner.

### 7.1 Guide non uniforme rigide compris entre deux guides uniformes traités

Nous étudions un premier exemple de guide cylindrique non uniforme constitué d'une partie non uniforme à paroi rigide comprise entre deux guides infinis uniformes de rayon  $R = 1$  recouverts d'un matériau absorbant comme le montre la Figure 3.22.

Dans la partie rectiligne du guide, l'écoulement est uniforme, il est donc possible d'utiliser les opérateurs DtN déterminés précédemment pour tronquer le domaine d'étude sur les frontières  $\Sigma^-$  et  $\Sigma^+$  placées respectivement à  $z = -L = -4.5$  et  $z = L = 4.5$ .

Dans la partie non uniforme, une source  $f = 1$  à support compact de rayon  $R_f = 0.25$  est placée sur l'axe du guide. L'écoulement moyen est supposé potentiel, les perturbations acoustiques le sont donc également et le potentiel acoustique  $\phi$  associé vérifie l'équation :

$$\operatorname{div}(\rho_0 \nabla \phi) - \rho_0 \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{c_0^2} \frac{d\phi}{dt} \right) = f \text{ dans } \Omega \quad (3.58)$$

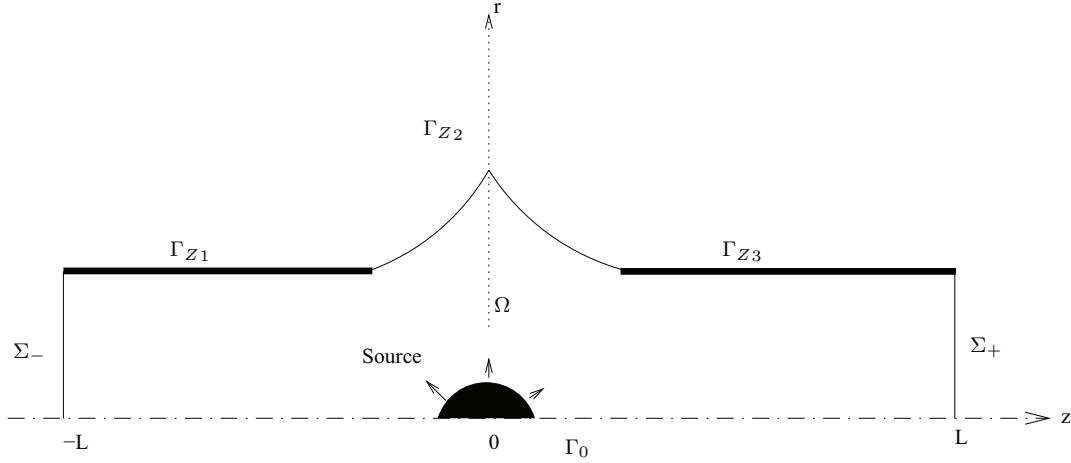


Figure 3.22 – Schéma de principe

où

$$\frac{d\phi}{dt} = -ik\phi + M\mathbf{v}_0 \cdot \nabla\phi \quad (3.59)$$

désigne la dérivée particulière avec  $M = v_\infty/c_\infty$  le nombre de Mach à l'infini ( $v_\infty$  et  $c_\infty$  sont respectivement la vitesse d'écoulement et la célérité à l'infini) et  $k = \omega/c_\infty$ . On définit par ailleurs les grandeurs adimensionnelles suivantes :

$$\mathbf{v}_0 = \frac{\nabla\phi_0}{v_\infty}, \quad \rho_0 = 1 + \frac{M^2}{2} (1 - |\mathbf{v}_0|^2), \quad c_0^2 = \rho_0^{\gamma-1} \quad (3.60)$$

où  $\gamma$  est le rapport des chaleurs spécifiques à pression et volume constants. Dans la partie rectiligne du guide ces grandeurs sont égales à l'unité :  $|\mathbf{v}_0| = \rho_0 = c_0 = 1$ .

Les conditions aux limites sont données par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial n} &= 0 && \text{sur } \Gamma_0 \cup \Gamma_{Z2} \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} &= -T_{ZM}^\pm(\phi) && \text{sur } \Sigma_\pm \end{aligned}$$

Celle sur les parois  $\Gamma_{Z1}$  et  $\Gamma_{Z3}$  sont les conditions de Myers [61] de la même forme que celle déjà développée dans le cas du guide rectiligne traité (3.2) :

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \frac{Y}{ik} \left( -ik + Mv_{0z} \frac{\partial}{\partial z} - M \frac{\partial v_{0r}}{\partial r} \right) (\rho_0 \frac{d\phi}{dt}) \quad (3.61)$$

où  $Y = 1/Z$  est l'admittance acoustique adimensionnelle de la paroi.

### Calcul de l'écoulement

Le potentiel des vitesses  $\phi_0$  est déterminé numériquement par la méthode des éléments finis en résolvant l'équation de Laplace, en considérant un guide rigide,

$v_{0r} = \partial\phi_0/\partial r$  est la vitesse radiale et  $v_{0z} = \partial\phi_0/\partial z$  désigne la vitesse axiale :

$$\Delta\phi_0 = 0 \quad \Omega \quad (3.62)$$

$$\phi_0 = g \quad \Sigma - \quad (3.63)$$

$$\frac{\partial\phi_0}{\partial n} = v_{0z} \quad \Sigma + \quad (3.64)$$

$$\frac{\partial\phi_0}{\partial n} = 0 \quad \Gamma_0 \cup \Gamma_{Z1} \cup \Gamma_{Z2} \cup \Gamma_{Z3} \quad (3.65)$$

où  $g$  est une constante correspondant à la valeur de  $\phi_0$  dans la partie rectiligne du guide. La formulation variationnelle associée est donnée par : trouver  $\phi_0 \in H^1(\Omega)$  tel que  $\forall\psi \in H^1(\Omega)$  et  $\psi = 0$  sur  $\Sigma -$ .

$$\int_{\Omega} \nabla\phi_0 \cdot \nabla\psi r dr dz = \int_{\Sigma -} v_{0z} \psi r d\Sigma \quad (3.66)$$

Les Figures 3.23, 3.24 et 3.25 montrent le potentiel des vitesses  $\phi_0$  et les composantes axiale et radiale de la vitesse  $\mathbf{v}_0$  pour  $\phi_0 = -4.1994$  et  $v_{0z} = 1.08517$  imposés respectivement sur  $\Sigma -$  et  $\Sigma +$ .

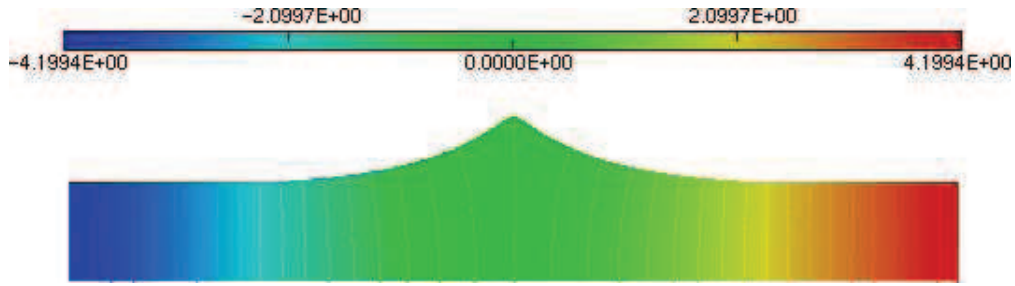


Figure 3.23 – Potentiel des vitesses  $\phi_0$

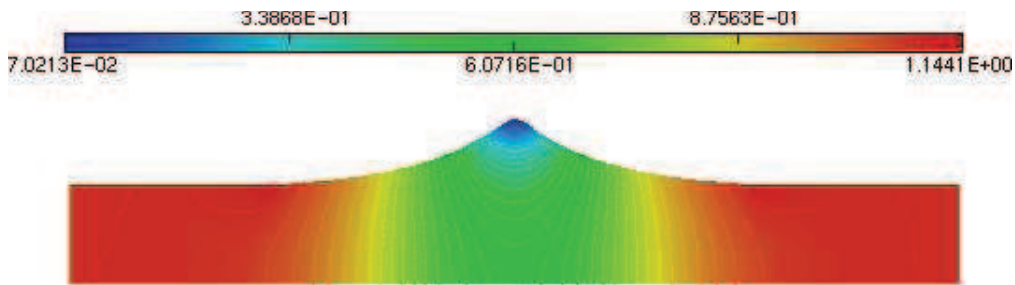
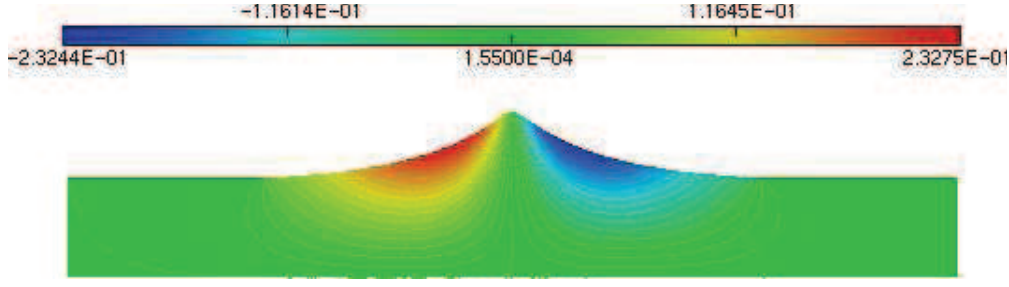


Figure 3.24 – Vitesse axiale  $v_{0z}$

Figure 3.25 – Vitesse radiale  $v_{0,r}$ 

Pour écrire la formulation variationnelle associée au problème acoustique (3.58), certains termes sont linéarisés (voir annexe 2). Ainsi, pour des nombres de Mach ( $M$ ) petits, la formulation variationnelle associée au problème est donnée par :

trouver  $\phi \in H^1(\Omega)$  tel que  $\forall \psi \in H^1(\Omega)$  :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \left[ \rho_0 \nabla \phi \cdot \nabla \psi r - k^2 \frac{\rho_0}{c_0^2} \phi \psi r - 2ikM \psi r \left( \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi \right) - ikM \phi \psi r \operatorname{div} \left( \frac{\rho_0}{c_0^2} \mathbf{v}_0 \right) \right. \\
 \left. - M^2 r \left( \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi \right) \left( \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi \right) \right] dr dz \\
 + \frac{Y}{ik} \int_{\Gamma_{Z_1} \cup \Gamma_{Z_3}} \rho_0^2 \left[ \left( k^2 - ikM \left( \frac{\partial v_{0r}}{\partial r} + \operatorname{div}(\mathbf{v}_0) \right) \right) \phi \psi + 2ikM \psi v_{0z} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right. \\
 \left. + M^2 v_{0z}^2 \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] r d\Gamma \\
 + (1 - M^2) ((T_{ZM}^+(\phi), \psi)) - (1 - M^2) ((T_{ZM}^-(\phi), \psi)) \\
 = - \int_{\Omega} f \psi r dr dz
 \end{aligned} \quad (3.67)$$

où

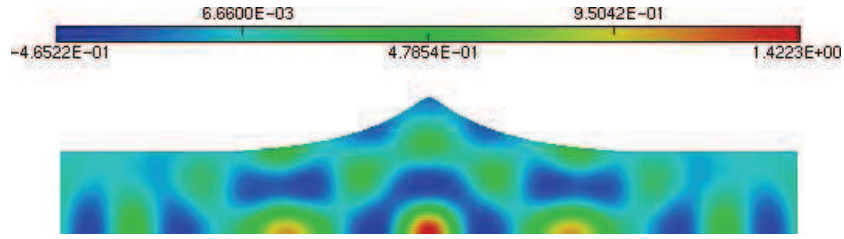
$$\begin{aligned}
 ((T_{ZM}^+(\phi), \psi)) &= - \int_{\Sigma_+} \frac{\partial \phi}{\partial z}(\phi) \psi r d\Sigma + \frac{iM^2 R}{kZ(1 - M^2)} \frac{\partial \phi}{\partial z}(R, L) \psi(R, L) \\
 ((T_{ZM}^-(\phi), \psi)) &= \int_{\Sigma_-} \frac{\partial \phi}{\partial z}(\phi) \psi r d\Sigma - \frac{iM^2 R}{kZ(1 - M^2)} \frac{\partial \phi}{\partial z}(R, -L) \psi(R, -L)
 \end{aligned}$$

Le domaine  $\Omega$  est constitué de 2868 éléments de Lagrange d'ordre 2. Les simulations numériques sont encore réalisées à l'aide la bibliothèque éléments finis MELINA [78].

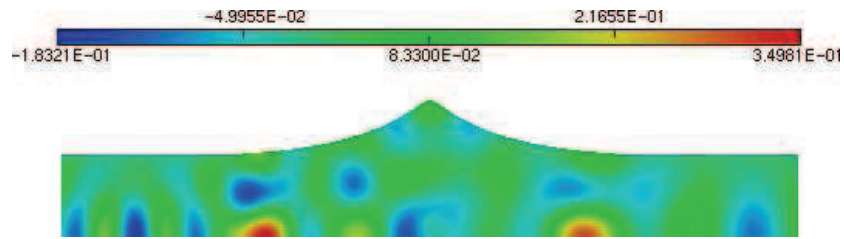
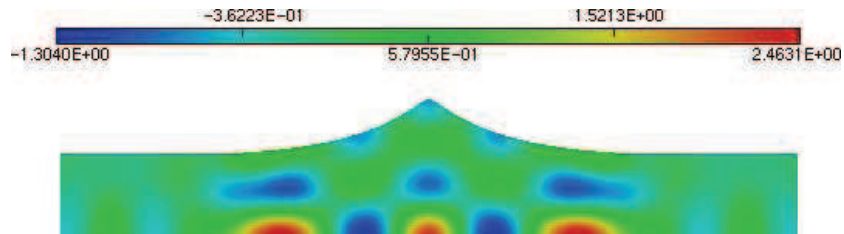
Comme précédemment, les solutions numériques trouvées avec les opérateurs DtN sont comparées avec les solutions provenant de l'utilisation des couches PML d'épaisseur  $e = 0.5$ .

Les Figures 3.26, 3.27 et 3.28 montrent la répartition de la pression acoustique dans le guide pour  $k = 7$  et  $Z = 0.5(1 - i)$  en l'absence d'écoulement (Figures 3.26-a, 3.27-a et 3.28-a) et en présence d'un écoulement uniforme ( $M = 0.3$ ) sur la partie rectiligne du guide (Figures 3.26-b, 3.27-b et 3.28-b). L'opérateur DtN est calculé en utilisant les 20 premiers modes.

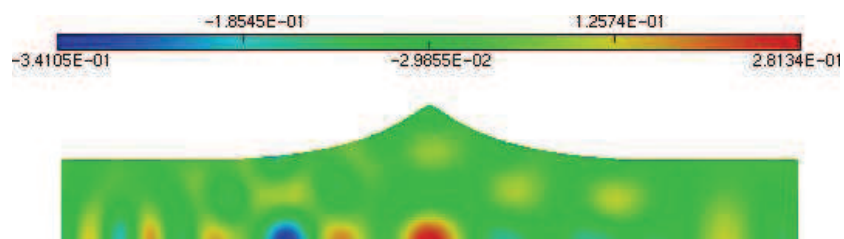
On distingue une atténuation de l'onde sur les portions traitées. En présence d'écoulement, en plus de l'atténuation, on observe les effets de convection. L'erreur relative en norme  $L^2(\Omega)$  entre les solutions DtN et les solutions PML est très faible (voir Tableau 3.3).

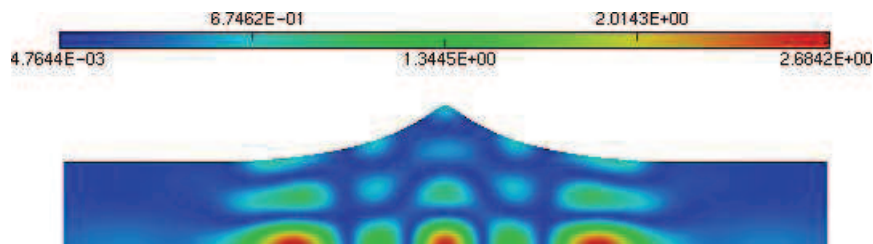


a) sans écoulement

b) avec un écoulement uniforme  $M = 0.3$ Figure 3.26 – Partie réelle de la pression dans le guide pour  $k = 7$ ,  $Z = 0.5(1 - i)$ 

a) sans écoulement

b) avec un écoulement uniforme  $M = 0.3$ Figure 3.27 – Partie imaginaire de la pression dans le guide pour  $k = 7$ ,  $Z = 0.5(1 - i)$



a) sans écoulement

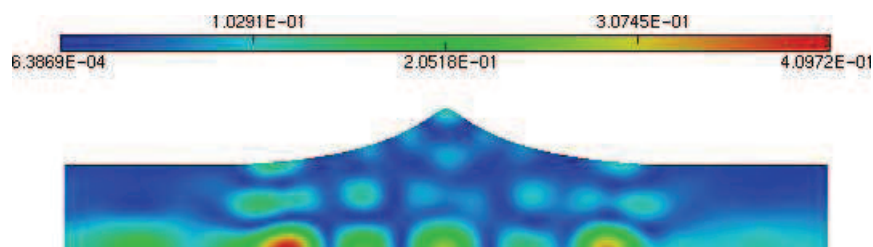

 b) avec un écoulement uniforme  $M = 0.3$ 

 Figure 3.28 – Module de la pression dans le guide pour  $k = 7$ ,  $Z = 0.5(1 - i)$ 

$M$	$\nu$	erreur relative en norme $L^2(\Omega)$
0	$0.35(1 - i)$	0.002176
0.3	$0.22(1 - i)$	0.011521

 Tableau 3.3 – Erreurs relatives en norme  $L^2(\Omega)$  entre les solutions DtN et les solutions PML pour le rayonnement d'une source acoustique pour  $k = 7$ ,  $Z = 0.5(1 - i)$ 

## 7.2 Guide non uniforme traité compris entre deux guides uniformes rigides

On présente maintenant un deuxième exemple de guide dont la partie non uniforme est recouverte d'un matériau absorbant d'impédance  $Z = 0.5(1 - i)$  tandis que la partie uniforme de rayon  $R = 1$  est rigide comme indiqué sur la Figure 3.29. Notre but ici est d'utiliser la méthode proposée par Eversman [9], ce qui nécessite d'avoir des parois rigides sur la partie uniforme du guide.

Le guide présente les mêmes dimensions que celui de l'exemple précédent § 7.1, les frontières  $\Sigma^-$  et  $\Sigma^+$  sont situées dans la partie rigide du guide respectivement à  $z = -L = -4.5$  et  $z = L = 4.5$  et le potentiel de vitesses  $\phi_0$  reste inchangé (Figure 3.23). Une source  $f = 1$  de rayon  $R_f = 0.3$  est placée sur l'axe dans la partie non uniforme du guide.

L'équation de propagation et les conditions aux limites sont données par :

$$\operatorname{div}(\rho_0 \nabla \phi) - \rho_0 \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{c_0^2} \frac{d\phi}{dt} \right) = f \quad \text{dans } \Omega \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \quad (3.69)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{Y}{ik} \left( (ik - M \mathbf{v}_0 \cdot \nabla + M \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0) \left( \rho_0 \frac{d\phi}{dt} \right) \right) \quad \text{sur } \Gamma_Z \quad (3.70)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -T^\pm(\phi) \quad \text{sur } \Sigma_\pm \quad (3.71)$$

où  $T(\phi)$  désigne l'opérateur DtN.

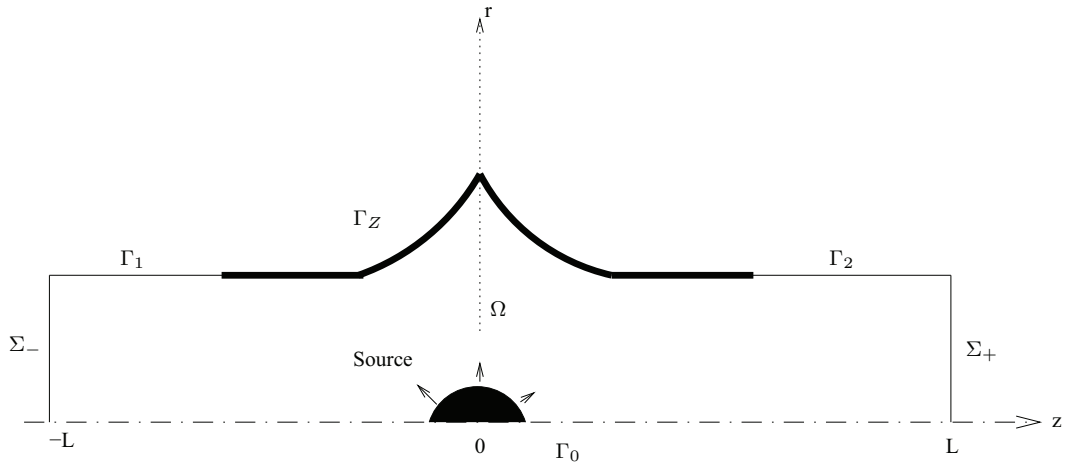


Figure 3.29 – Schéma de principe

Pour des nombres de Mach petits, la formulation variationnelle associée au problème s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ \rho_0 \nabla \phi \cdot \nabla \psi r - k^2 \frac{\rho_0}{c_0^2} \phi \psi r - 2ikM \psi r \left( \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi \right) - ikM \phi \psi r \operatorname{div} \left( \frac{\rho_0}{c_0^2} \mathbf{v}_0 \right) \right. \\ \left. - M^2 r \left( \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi \right) \left( \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi \right) \right] dr dz \\ - \int_{\Gamma_Z} \rho_0 \psi r \nabla \phi \cdot \mathbf{n} d\Gamma \pm (1 - M^2) \int_{\Sigma_\pm} \frac{\partial \phi}{\partial z} (\phi) \psi r d\Sigma = - \int_{\Omega} f \psi r dr dz \end{aligned} \quad (3.72)$$

En appliquant la condition de Myers [61] précédente (3.70), l'intégrale sur la paroi  $\Gamma_Z$  s'écrit :

$$\int_{\Gamma_Z} \rho_0 \psi r \nabla \phi \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \frac{Y}{ik} \int_{\Gamma_Z} \rho_0 \psi r \left( ik\eta - M \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \eta + M \eta \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 \right) d\Gamma \quad (3.73)$$

où  $\eta = \rho_0 d\phi/dt$ . On pose :

$$M \eta \rho_0 \psi r \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = M \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \eta \rho_0 \psi r \mathbf{v}_0 = M \frac{\partial}{\partial n} \left( \rho_0 \eta \psi r \mathbf{v}_{0n} \right)$$

où  $\mathbf{v}_{0n}$  est la composante normale de la vitesse  $\mathbf{v}_0$ .



L'intégrale sur la paroi  $\Gamma_Z$  s'écrit maintenant :

$$\int_{\Gamma_Z} \rho_0 \psi r \nabla \phi \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \frac{Y}{ik} \int_{\Gamma_Z} \left( ik\eta\rho_0\psi r - M\rho_0\psi r \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \eta + M \frac{\partial}{\partial n} (\rho_0 \eta \psi r \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}) \right) d\Gamma \quad (3.74)$$

L'intégrale sur  $\Gamma_Z$  (3.74) nécessite la connaissance de la dérivée normale de  $\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}$  ainsi que les dérivées spatiales de la masse volumique moyenne  $\rho_0$  le long de la paroi. Pour s'affranchir de cette difficulté, Eversman [9] fait un développement de l'intégrale sur la paroi en utilisant le théorème de Stokes. Nous adoptons ici cette démarche dont les détails du développement sont présentés dans l'annexe 3.

En utilisant le théorème de Stokes, l'intégrale 3.73 devient :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_Z} \rho_0 \psi r \nabla \phi \cdot \mathbf{n} d\Gamma = & -\frac{Y}{ik} \int_{\Gamma_Z} \rho_0^2 \left[ k^2 \phi \psi + ikM (\psi \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi - \phi \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi) \right. \\ & \left. + M^2 (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi) (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi) \right] r d\Gamma \end{aligned} \quad (3.75)$$

Finalement la formulation variationnelle associée au problème de rayonnement acoustique s'écrit :

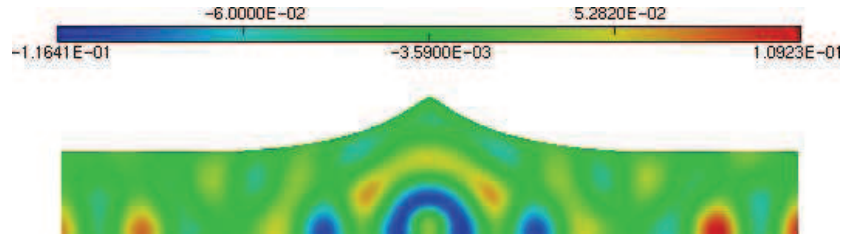
$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ \rho_0 \nabla \phi \cdot \nabla \psi r - k^2 \frac{\rho_0}{c_0^2} \phi \psi r - 2ikM \psi r (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi) - ikM \phi \psi r \operatorname{div} \left( \frac{\rho_0}{c_0^2} \mathbf{v}_0 \right) \right. \\ \left. - M^2 r (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi) (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi) \right] dr dz \\ + \frac{Y}{ik} \int_{\Gamma_Z} \rho_0^2 \left[ k^2 \phi \psi + ikM (\psi \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi - \phi \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi) + M^2 (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi) (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi) \right] r d\Gamma \\ \pm (1 - M^2) \int_{\Sigma_{\pm}} T^{\pm}(\phi) \psi r d\Sigma = - \int_{\Omega} f \psi r dr dz \end{aligned} \quad (3.76)$$

où  $T^{\pm}(\phi)$  désigne les opérateurs DtN écrits sur les frontières  $\Sigma^-$  et  $\Sigma^+$  situées dans la partie rigide du guide.

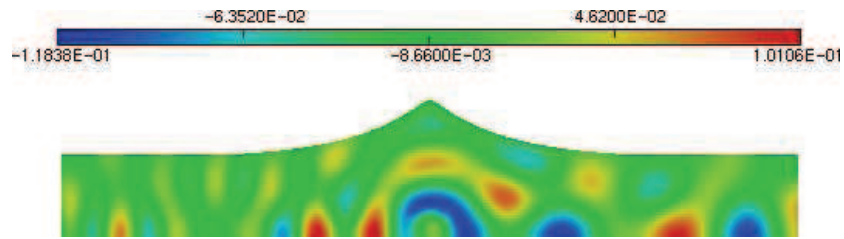
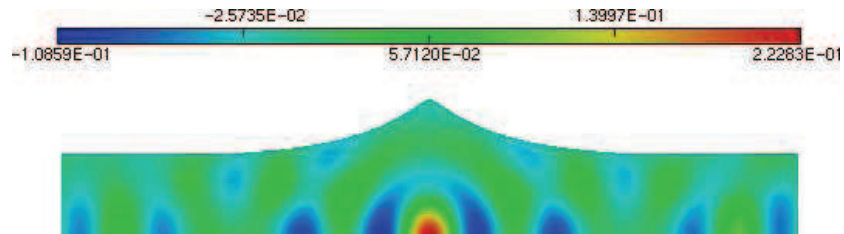
Le domaine  $\Omega$  est discrétisé à l'aide de 2634 éléments de Lagrange d'ordre 2. Les solutions numériques trouvées avec les opérateurs DtN sont encore comparées avec les solutions provenant de l'utilisation des couches PML d'épaisseur  $e = 0.5$ .

Les Figures 3.30, 3.31 et 3.32 montrent la répartition de la pression acoustique dans le guide pour  $k = 7$  et  $Z = 0.5(1 - i)$  en l'absence d'écoulement (Figure 3.30-a, 3.31-a et 3.32-a) et en présence d'un écoulement uniforme ( $M = 0.3$ ) sur la partie rectiligne du guide (Figure 3.30-b, 3.31-b et 3.32-b). L'opérateur DtN est encore calculé en utilisant les 20 premiers modes.

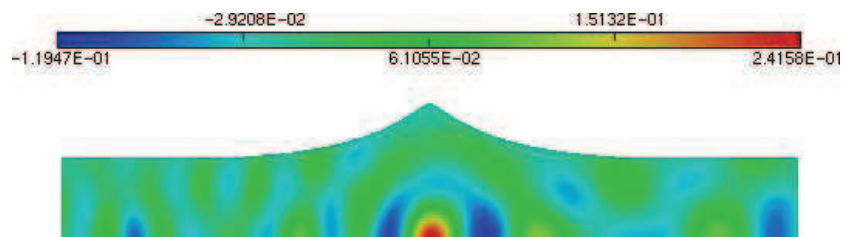
L'erreur relative en norme  $L^2(\Omega)$  entre les solutions DtN et les solutions PML est très faible (voir Tableau 3.4).

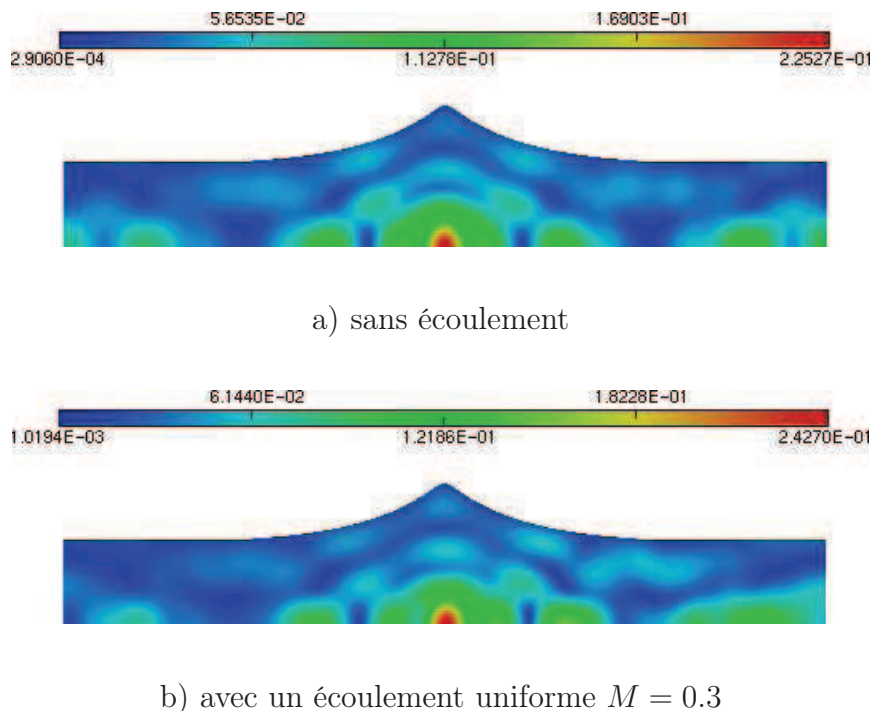


a) sans écoulement

b) avec un écoulement uniforme  $M = 0.3$ Figure 3.30 – Partie réelle de la pression dans le guide pour  $k = 7$ ,  $Z = 0.5(1 - i)$ 

a) sans écoulement

b) avec un écoulement uniforme  $M = 0.3$ Figure 3.31 – Partie imaginaire de la pression dans le guide pour  $k = 7$ ,  $Z = 0.5(1 - i)$

Figure 3.32 – Module de la pression dans le guide pour  $k = 7$ ,  $Z = 0.5(1 - i)$ 

$M$	$\nu$	erreur relative en norme $L^2(\Omega)$
0	$0.19(1 - i)$	0.004382
0.3	$0.26(1 - i)$	0.015390

Tableau 3.4 – Erreurs relatives en norme  $L^2(\Omega)$  entre les solutions DtN et les solutions PML pour le rayonnement d'une source acoustique pour  $k = 7$ ,  $Z = 0.5(1 - i)$ 

## 8 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de proposer une nouvelle condition limite transparente pour des guides cylindriques axisymétriques infinis à parois traitées avec des matériaux absorbants d'impédance  $Z$ .

Comme nous l'avons vu au chapitre 2, pour un guide traité sans écoulement, il existe une relation de biorthogonalité qui permet d'explicitier les opérateurs DtN. En présence d'un écoulement uniforme, les modes ne sont toujours pas orthogonaux mais, il est possible d'introduire une relation d'orthogonalité asymptotique. L'opérateur DtN peut alors être déterminé moyennant le calcul d'une matrice spectrale qui devient diagonale quand l'ordre des modes augmente.

La méthode développée dans cette étude a également été appliquée pour un guide non uniforme en présence d'un écoulement potentiel. Les résultats obtenus sont en bon accord avec ceux obtenus avec des couches PML.

Dans le prochain chapitre, les méthodes exposées ici seront appliquées à un guide traité par un matériau à réaction non localisée caractérisé par un fluide équivalent en présence ou non d'un écoulement uniforme.

# Chapitre 4

## Description des matériaux absorbants en acoustique

### 1 Introduction

Avec le développement des moyens de transport (automobiles, avions etc), la lutte contre le bruit et les nuisances sonores constitue une question importante pour les sociétés modernes. Les constructeurs subissent donc de plus en plus de pression pour la réduction de ces nuisances sonores. Une solution efficace consiste à traiter le problème dès la phase de conception. L'utilisation des matériaux absorbants constitue dans ce cas une option très intéressante. Cette perspective a eu pour effet de relancer l'intérêt des chercheurs pour l'étude des matériaux absorbants pour l'acoustique durant ces dernières décennies. On peut distinguer deux catégories de matériaux absorbants [57] : les matériaux absorbants à réaction localisée qui sont caractérisés par une impédance locale, et les matériaux absorbants à réaction non localisée. La dernière catégorie concerne essentiellement les matériaux poreux lorsque la longueur d'onde est grande devant la taille caractéristique des hétérogénéités.

Un matériau poreux est un matériau hétérogène constitué d'une phase solide ou squelette et d'une phase fluide. Le squelette peut être continu (mousses, céramiques) ou non (matériaux granulaires). Dans les applications en ingénierie acoustique, la phase fluide est généralement constituée d'air qui sature le réseau poreux. Le comportement acoustique du matériau poreux dépend non seulement de la phase fluide, mais aussi de la rigidité du squelette. Il existe une littérature bien fournie dans le domaine de la modélisation acoustique et les modèles proposés vont des modèles simples ou empiriques aux théories très élaborées.

Dans ce chapitre, nous présentons une description succincte des matériaux absorbants et les différents modèles existants. Nous abordons d'abord les matériaux absorbants à réaction localisée. Ensuite, le cas des matériaux absorbants à réaction non localisée (matériaux poreux pour des grandes longueurs d'onde) caractérisés par un fluide équivalent (lorsque le squelette peut être considéré comme rigide) est exposé.

## 2 Matériaux absorbants à réaction localisée

Nous présentons dans cette section, une description succincte des matériaux absorbants d'impédance  $Z$  que nous avons déjà utilisés dans les chapitres 2 et 3. Selon Nayfeh [57], les matériaux absorbants à réaction localisée (matériaux absorbants d'impédance  $Z$ ) ont pour propriété de ne permettre la propagation que dans la direction normale à la paroi. Ce sont des matériaux formés en général de plaques perforées couplées à des cavités en nids d'abeilles (honeycomb cavities) formant une succession de résonateurs de Helmholtz comme illustré sur la Figure 4.2. Il n'y a pas d'interaction entre deux points du milieu espacés d'une distance supérieure à la période des nids d'abeilles.

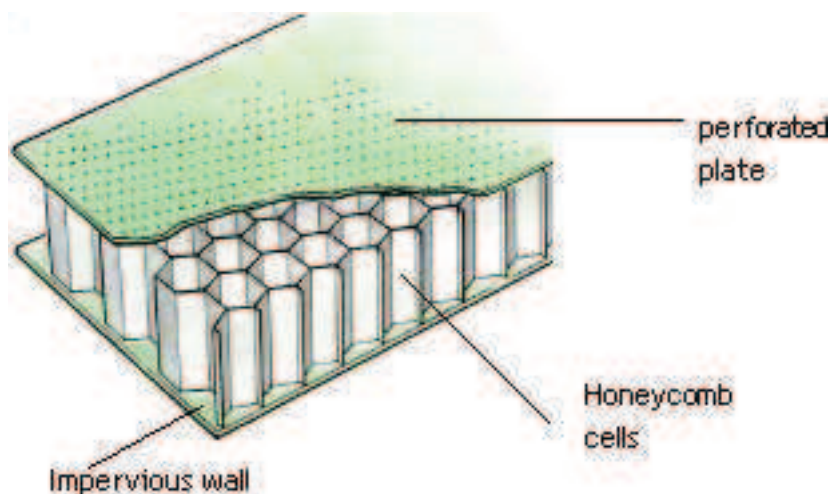


Figure 4.1 – Matériau absorbant à réaction localisée : d'après S. Rienstra [2]

Ils sont souvent utilisés dans l'aéronautique car ils présentent de très bonnes propriétés mécaniques (légers, structure solide) [57] et peuvent résister à de fortes températures. De même, ils sont faciles à fabriquer et sont caractérisés par une impédance acoustique de paroi (impédance locale) (voir Figure 4.2).

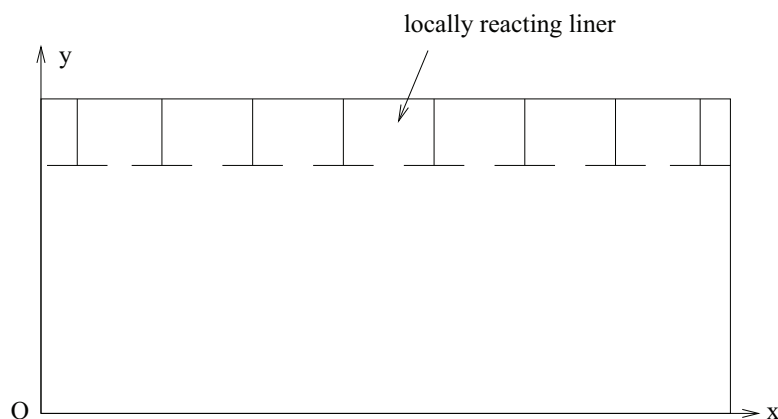


Figure 4.2 – Guide 2D à paroi absorbante à réaction localisée

L'impédance acoustique de paroi est définie comme le rapport de la pression acoustique sur la composante de la vitesse acoustique normale à la paroi, à sa surface

[88]. Elle est généralement notée  $Z_0$  :

$$Z_0 = \frac{p}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}} \quad (4.1)$$

où  $\mathbf{n}$  désigne la normale extérieure à la paroi. En général,  $Z_0$  est complexe et s'écrit sous la forme :

$$Z_0 = R_0 + iX_0$$

où  $R_0$  est la partie résistive et  $X_0$  est la partie réactive de l'impédance. Tous ces paramètres dépendent de la fréquence et du matériau constituant la paroi.

L'impédance acoustique de paroi est différente de l'impédance caractéristique ou spécifique  $Z_c$  du milieu de propagation (solide, liquide ou gazeux). Cette dernière est une propriété du matériau considéré et est égale au produit de la masse volumique du matériau  $\rho(\omega)$  par la vitesse du son  $c(\omega)$  dans ce même matériau :

$$Z_c = \rho(\omega)c(\omega) \quad (4.2)$$

Dans l'air, elle est donnée par :  $Z_c = \rho_0 c_0$ , où  $\rho_0$  et  $c_0$  sont respectivement la masse volumique et la célérité du son dans l'air. Le rapport de l'impédance acoustique de paroi sur l'impédance caractéristique dans l'air donne une impédance sans dimension appelée impédance réduite que l'on note :

$$Z = \frac{Z_0}{\rho_0 c_0} \quad (4.3)$$

Cependant comme nous l'avons vu au chapitre 3 (page 59), l'utilisation des matériaux absorbants à réaction localisée dans des guides en présence d'un écoulement uniforme présente quelques instabilités. Rienstra et Vilenski [8] ont constaté que ces instabilités apparaissent seulement en présence d'écoulement lorsque la couche limite est très mince. Ils montrent que ces instabilités disparaissent lorsque l'on augmente l'épaisseur de la couche limite. Un autre inconvénient des matériaux absorbants à réaction localisée est qu'ils ne sont efficaces que pour une gamme de fréquence donnée [60]. En effet, la capacité des résonateurs à absorber le son diminue pour des fréquences situées en dehors de cette gamme contrairement aux matériaux absorbants à réaction non localisée qui sont efficaces pour une large bande.

### 3 Matériaux absorbants à réaction non localisée : matériaux poreux

Les matériaux absorbants à réaction non localisée (bulk-reacting materials) permettent la propagation dans plusieurs directions si on considère que les longueurs d'onde sont grandes devant la taille des hétérogénéités. Tous les points du milieu interagissent les uns avec les autres. Ces absorbants sont des matériaux poreux isotropes ou anisotropes et sont largement utilisés dans des domaines comme l'automobile (habitacle, silencieux d'échappement etc) et le bâtiment.

Dans cette section, nous présentons les différents modèles proposés dans la littérature pour caractériser les matériaux poreux.

### 3.1 Modélisation acoustique des matériaux poreux

L'approche la plus générale de l'étude de la propagation acoustique dans les milieux poreux consiste à considérer des mouvements associés au passage des ondes aussi bien pour le squelette solide que pour le fluide saturant. Cependant dans certains cas, le fluide peut être considéré comme bien plus léger et compressible que le squelette solide. C'est le cas très souvent pour les matériaux poreux saturés d'air (matériaux en ingénierie acoustique) dans le domaine de fréquences utilisé. Cette situation correspond à l'approximation du squelette rigide dans laquelle le matériau est considéré comme étant un fluide "équivalent" avec des propriétés effectives.

En approximation du fluide équivalent, un certain nombre de modèles ont été établis au cours des années, parmi lesquels on trouve le modèle de Zwikker et Kösten [62], le modèle de Delany-Bazley [59] ou le modèle plus récent de Miki [89, 90].

Des modèles plus élaborés existent. Ces modèles sont pour la plupart basés sur la théorie originale de Biot [63, 64] et peuvent être utilisés dans l'approximation du fluide équivalent ou, tout aussi bien dans le cadre général de la poroélasticité proposée par Biot.

#### 3.1.1 Modèles simples en fluide équivalent

##### A - Modèle de Zwikker et Kösten

La modélisation du comportement dynamique des milieux poreux date des années 1950. Zwikker et Kösten [62] ont initié les premiers travaux. Leurs formulations et leurs modèles étaient relativement simples mais limités aux matériaux poreux à pores cylindriques. Ils ont introduit la notion de fréquence de découplage à partir de laquelle les mouvements de la phase fluide n'engendrent plus de déformations de la phase solide :

$$f_d = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma \phi^2}{\rho_1} \quad (4.4)$$

où  $\sigma$ ,  $\phi$  et  $\rho_1$  désignent respectivement la résistivité, la porosité et la densité de la phase solide du matériau poreux. Pour des fréquences supérieures à  $f_d$ , le squelette est considéré comme rigide. C'est le modèle de Zwikker et Kösten à deux paramètres ( $\sigma$  et  $\phi$ ).

Par ailleurs, Zwikker et Kösten ont pris en compte les effets visqueux et thermiques en modifiant respectivement, la masse volumique et le module de compressibilité dynamique de la phase fluide.

Attenborough [91] a proposé à la suite des travaux de Zwikker et Kösten, une formulation modifiée prenant en compte n'importe quel type de pores.

##### B - Modèle de Delany-Bazley

En 1970, Delany et Bazley ont formulé un modèle empirique de matériaux fibreux dont les paramètres sont l'impédance caractéristique  $Z_c$  et le nombre d'onde

complexe  $k$  fonctions de la fréquence.

$$Z_c = R(f) + jX(f) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} R(f) = \rho_0 c_0 [1 + 0.571x^{-0.754}] \\ X(f) = \rho_0 c_0 [-j0.087x^{-0.732}] \end{cases}$$

$$k = \alpha(f) + j\beta(f) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \alpha(f) = (\omega/c_0) [1 + 0.0978x^{-0.700}] \\ \beta(f) = (\omega/c_0) [-j0.189x^{-0.595}] \end{cases}$$

où  $x = \rho_0 f / \sigma$ . La fréquence  $f$  est liée à la pulsation  $\omega$  par  $\omega = 2\pi f$ . Les deux paramètres du modèle de Delany et Bazley ont été mesurés pour une large gamme de fréquences dans de nombreux matériaux fibreux dont la porosité est proche de l'unité. Ce modèle est toujours utilisé [92] étant donné sa simplicité car il ne nécessite que la connaissance de la résistance au passage à l'air ( $\sigma$ ).

### C - Modèle de Miki

Miki [89, 90] a repris les travaux de Delany et Bazley en suggérant différentes expressions empiriques de  $k$  et de  $Z_c$  pour des plages de fréquences spécifiques et pour différents matériaux.

Miki a constaté que la partie réelle de l'impédance du modèle de Delany et Bazley devient négative en basse fréquence [89] pour les matériaux à couches multiples. Il a alors introduit une modification des deux paramètres (impédance et nombre d'onde) et cela satisfait à la propriété physique  $R(f) \geq 0$ . Cette approche de Miki est basée sur l'analogie avec les circuits électriques. Constatant que son nouveau modèle empirique était néanmoins limité aux matériaux dont la porosité est proche de l'unité, Miki a procédé à une généralisation de ce modèle prenant en compte cette fois-ci la porosité, la tortuosité et du facteur de forme des pores. Miki a comparé son modèle avec celui d'Attenborough [93].

De son côté, Komatsu [94] a proposé tout récemment une méthode de prédiction des propriétés acoustiques de matériaux fibreux basée sur la résistivité du matériau et en introduisant une expression logarithmique dans les équations de l'impédance caractéristique.

A partir des modèles empiriques susmentionnés, il est possible de déduire une masse volumique complexe et un module de compression complexe du milieu. Ces modèles rentrent dans le cadre global du modèle du fluide équivalent.

A côté de ces modèles simples, des modèles plus élaborés ont été proposés. Ces modèles sont basés sur la théorie de Biot [63, 64].

#### 3.1.2 Modèles plus élaborés : formalisme de Biot

Biot a proposé en 1956, un modèle pour les matériaux poreux à squelette élastique dont les pores sont interconnectés et les longueurs d'onde suffisamment grandes devant la taille caractéristique des hétérogénéités.

Ce modèle fait suite à une première théorie développée par Biot lui-même en 1941 sur la consolidation des matériaux poreux isotropes [95], élargie par la suite aux



matériaux poreux anisotropes à squelette purement élastique [96]. Cette première théorie de l'élasticité des matériaux poreux s'applique avant tout à la prédiction au cours du temps des contraintes et des déformations dans un matériau solide poreux à travers lequel une infiltration de fluide se produit.

Biot a développé ensuite la théorie de la propagation des ondes élastiques dans un solide poreux saturé de fluide. Biot a établi une formulation  $(\mathbf{u}, \mathbf{U})$  symétrique où  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{U}$  désignent le déplacement du solide et du fluide respectivement. Biot a fait cette étude d'abord en basses fréquences [63] puis l'a étendue aux hautes fréquences [64] pour lesquelles l'écoulement du fluide dans les pores n'est plus celui de Poiseuille en introduisant un facteur de sinuosité et un facteur structural liés à la géométrie des pores.

En 1962, Biot a proposé une formulation alternative [97] à la formulation  $(\mathbf{u}, \mathbf{U})$  précédente en introduisant notamment un opérateur de tenseur viscodynamique qui permet de prendre en compte le mouvement relatif du fluide par rapport au squelette solide. C'est la formulation  $(\mathbf{u}, \mathbf{w})$  où  $\mathbf{w}$  désigne le déplacement relatif du fluide par rapport au solide.

La théorie acoustique de Biot de 1956 [63, 64] constitue la base de tous les modèles élaborés présentés dans cette section.

Attenborough [91] a proposé à la suite des travaux de Zwikker et Kosten et de Biot, un modèle phénoménologique pour les matériaux fibreux à squelette rigide. Il introduit notamment un facteur de forme des pores. Son modèle à quatre paramètres (porosité, résistivité, tortuosité et facteur de forme des pores) permet une meilleure prédiction des caractéristiques des matériaux poreux par rapport au modèle empirique de Delany et Bazley [59] basé uniquement sur la résistivité.

Johnson *et al* [98] ont étudié le comportement asymptotique hautes fréquences d'un fluide newtonien soumis à un gradient de pression dans les pores d'un milieu poreux isotrope à structure rigide. Ils introduisent un paramètre macroscopique  $\Lambda$  appelé longueur caractéristique visqueuse. Ce paramètre lié à la géométrie des pores, a permis aux auteurs de construire un modèle permettant d'étudier les effets visqueux basses et hautes fréquences. Ils ont notamment défini la tortuosité et la perméabilité dynamiques du milieu qui sont deux paramètres liés et constituent en quelques sortes des fonctions d'interpolations entre les comportements basses et hautes fréquences.

En s'inspirant des travaux de Johnson *et al*, Allard [99] et Champoux et Allard [100] se sont intéressés aux effets thermiques dans les matériaux poreux saturés d'air. Ils introduisent la longueur caractéristique thermique  $\Lambda'$  qui est un paramètre caractérisant le comportement asymptotique hautes fréquences. Le modèle du fluide équivalent ainsi développé est appelé le modèle de Johnson-Champoux-Allard à cinq paramètres. Lafarge *et al* [101] ont défini à la suite des travaux de Johnson et al et de Champoux et Allard, la perméabilité thermique  $k'_0$  qui modélise les échanges thermiques entre le squelette et le fluide saturant en basses fréquences.

Cependant, la résolution des équations de Biot par des méthodes numériques

comme la méthode des éléments finis nécessite un temps de calcul important du fait du grand nombre de degrés de liberté. Cette contrainte a amené certains auteurs à proposer de nouvelles formulations, certes basées sur celles de Biot [63, 64], mais en y incluant la pression acoustique  $p$ . Atalla *et al* [102] ont proposé un modèle numérique en acoustique des poreux basée sur une formulation  $(\mathbf{u}, p)$  où  $p$  désigne la pression. Cette formulation permet notamment d'étudier le problème poroélastique de Biot tout en diminuant le nombre de degré de liberté. Une autre formulation a été proposée par Dazel [103] tout récemment. Cette formulation appelée formulation  $(\mathbf{u}, p, \varphi)$  (où  $\varphi$  désigne le potentiel des déplacements fluides) se prête facilement à une interprétation énergétique en isolant notamment les énergies de déformations et cinétiques et la puissance dissipée dans le matériau poreux, mais conduit aux mêmes systèmes numériques à résoudre que la formulation  $(\mathbf{u}, \mathbf{U})$  de Biot.

Un des résultats de la théorie de Biot est que trois types d'ondes se propagent dans le milieu poreux à squelette continu (connexe) : deux ondes de compression et une onde de cisaillement. Le formalisme de Biot bien qu'au départ était appliqué en géophysique, est celui qui est encore utilisé de nos jours, même s'il a subi quelques modifications.

### A. Formulation en déplacements $(\mathbf{u}, \mathbf{U})$

Biot a défini les relations contrainte-déformation pour les matériaux poreux élastiques à partir de l'énergie potentielle de déformation. Les contraintes appliquées au squelette sont notées  $\sigma_{ij}^s$  et celles appliquées au fluide sont notées  $\sigma_{ij}^f$  avec :

$$\sigma_{ij}^f = -\beta p \delta_{ij} \quad (4.5)$$

où  $\beta$  désigne la porosité surfacique et  $\delta$  est le symbole de Kronecker. Dans le cas de matériaux poreux statistiquement isotropes,  $\beta$  est équivalente à la porosité volumique  $\phi$  :  $\sigma_{ij}^f = -\phi p \delta_{ij}$ . Les déformations du squelette  $\epsilon_{ij}^s$  et du fluide  $\epsilon_{ij}^f$  sont liées aux contraintes  $\sigma_{ij}^s$  et  $\sigma_{ij}^f$  par [99] :

$$\sigma_{ij}^s = [(P - 2N)div(\mathbf{u}) + Qdiv(\mathbf{U})] + 2N\epsilon_{ij}^s \quad (4.6)$$

$$\sigma_{ii}^f = -\phi p = Qdiv(\mathbf{u}) + Rdiv(\mathbf{U}) \quad (4.7)$$

Où  $N$  désigne le module de cisaillement du squelette et  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{U}$  représentent les vecteurs des déplacements macroscopiques du solide et du fluide respectivement. Dans le cas où le fluide est de l'air, les coefficients élastiques  $P$  et  $R$  et le coefficient de couplage élastique des phases solide et fluide  $Q$  sont donnés par Allard [99] :

$$P = \frac{(1 - \phi)^2}{\phi} K_f + 2N \frac{\nu}{1 - 2\nu} \quad (4.8)$$

$$R = \phi K_f \quad (4.9)$$

$$Q = (1 - \phi) K_f \quad (4.10)$$

où  $\nu$  désigne le coefficient de Poisson du squelette et  $K_f$  est le module de compression du fluide. Les relations (4.8), (4.9) et (4.10) sont données en supposant que le module

de compression du squelette  $K_b$  est très petit devant le module de compression du matériau constituant la phase solide  $K_s$  :  $K_s \gg K_b$ .

Biot a établi l'équation d'équilibre dynamique (équation du mouvement) en tenant compte de l'énergie potentielle de dissipation visqueuse et de l'énergie cinétique. Dans le cadre global de la théorie de Biot-Allard présentée en 1993 par Allard [99], cette équation est donnée par :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\sigma_{ij}^s) &= \rho_{11}\ddot{\mathbf{u}} + \rho_{12}\ddot{\mathbf{U}} + \tilde{b}(\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{U}}) \\ \operatorname{div}(\sigma_{ii}^f) &= \rho_{12}\ddot{\mathbf{u}} + \rho_{22}\ddot{\mathbf{U}} - \tilde{b}(\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{U}}) \end{aligned} \quad (4.11)$$

où les coefficients  $\rho_{11}$  et  $\rho_{22}$  sont respectivement les masses volumiques apparentes de Biot des phases solide et fluide qui rendent compte des énergies cinétiques dans les deux milieux. Le paramètre  $\rho_{12}$  est un coefficient de couplage inertiel entre les deux phases [99, 102]. Dans la théorie de Biot, ces coefficients de masse dépendent seulement des effets géométriques et sont liés aux masses volumiques du matériau ( $\rho_s$ ) et du fluide ( $\rho_0$ ) (voir Allard [99]) :

$$\rho_{11} = (1 - \phi)\rho_s - \rho_{12}; \quad \rho_{22} = \phi\rho_0 - \rho_{12}; \quad \rho_{12} = -\phi\rho_0(\alpha_\infty - 1) \quad (4.12)$$

où  $\alpha_\infty$  est la tortuosité du matériau poreux et  $\tilde{b}$  est un coefficient d'amortissement visqueux complexe dépendant de la fréquence qui rend compte des effets visqueux sur la propagation des ondes acoustiques et élastiques dans les milieux poreux. Il est lié à un correcteur de viscosité  $\tilde{G}$  introduit par Johnson *et al* [98]. Le paramètre  $\tilde{G}$  traduit le fait que l'écoulement dans les pores s'éloigne d'un écoulement de Poiseuille lorsque la pulsation  $\omega$  augmente :

$$\tilde{b} = \phi^2 \sigma \tilde{G} \quad (4.13)$$

Cependant, cette formulation nécessite un temps de calcul très long pour des résolutions par des méthodes numériques étant donné qu'il y a six degrés de liberté par noeud [102]. Une alternative à cette formulation est la formulation mixte  $(\mathbf{u}, p)$  qui ne nécessite que quatre degrés de liberté par noeud.

## B. Formulation $(\mathbf{u}, p)$ de l'équation du mouvement de Biot

Contrairement à la formulation précédente en déplacements  $(\mathbf{u}, \mathbf{U})$ , une formulation mixte déplacement-pression a été proposée [102, 104]. Elle dérive directement de l'équation poroélastique de Biot [63, 64] où  $p$  désigne la pression dans le milieu fluide. Elle est donnée en régime harmonique ( $e^{-i\omega t}$ ) par :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\sigma_{ij}^s) + \omega^2(\rho_{11}\mathbf{u} + \rho_{12}\mathbf{U}) &= 0 \\ -\phi\nabla p + \omega^2(\rho_{12}\mathbf{u} + \rho_{22}\mathbf{U}) &= 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Les masses volumiques dynamiques de Biot  $\tilde{\rho}_{11}$ ,  $\tilde{\rho}_{12}$  et  $\tilde{\rho}_{22}$  tiennent compte des effets d'inertie et visqueux. Elles sont données par :

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{11} &= \rho_{11} - \frac{\tilde{b}}{i\omega} \\ \tilde{\rho}_{22} &= \rho_{22} - \frac{\tilde{b}}{i\omega} \\ \tilde{\rho}_{12} &= \rho_{12} + \frac{\tilde{b}}{i\omega} \end{aligned} \quad (4.15)$$

La deuxième équation de (4.14) permet d'écrire :

$$\mathbf{U} = \frac{\phi}{\omega^2 \tilde{\rho}_{22}} \nabla p - \frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} \mathbf{u} \quad (4.16)$$

En reportant  $\mathbf{U}$  dans la première équation de (4.14), il vient :

$$\omega^2 \tilde{\rho}_s \mathbf{u} + \phi \frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} \nabla p + \text{div}(\sigma_{ij}^s) = 0 \quad (4.17)$$

$$\tilde{\rho}_s = \tilde{\rho}_{11} - \frac{(\tilde{\rho}_{12})^2}{\tilde{\rho}_{22}} \quad (4.18)$$

En prenant la divergence de  $\mathbf{U}$  dans (4.16) et en combinant avec l'équation (4.7), la formulation  $(\mathbf{u}, p)$  des phases solide et fluide du matériau s'écrit d'après [102] :

$$\begin{aligned} \text{div}(\sigma_{ij}^s) + \omega^2 \tilde{\rho}_s \mathbf{u} + \tilde{\gamma} \nabla p &= 0 \\ \Delta p + \omega^2 \frac{\tilde{\rho}_{22}}{\phi K_f} p - \omega^2 \frac{\tilde{\rho}_{22}}{\phi^2} \tilde{\gamma} \text{div}(\mathbf{u}) &= 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

où  $\tilde{\gamma}$  est un coefficient de couplage,  $\sigma_{ij}^s$  est un tenseur de contrainte *in vacuo*.

$$\tilde{\gamma} = \phi \left( \frac{1 - \phi}{\phi} - \frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} \right) \quad (4.20)$$

La formulation  $(\mathbf{u}, p)$  est adaptée pour les matériaux poroélastiques car elle tient compte des couplages entre la phase fluide et la phase solide tout en minimisant le nombre de variables. En plus, l'équation de la phase fluide est une équation de propagation d'onde avec un terme source :

$$\nabla p + \omega^2 \frac{\tilde{\rho}_{22}}{\phi K_f} p = \omega^2 \frac{\tilde{\rho}_{22}}{\phi^2} \tilde{\gamma} \text{div}(\mathbf{u}) \quad (4.21)$$

Pour des matériaux dont la matrice est supposée rigide ( $\mathbf{u} = 0$ ), on aboutit à une formulation dont la variable est la pression ( $p$ ).

### 3.2 Modèle du fluide équivalent : formulation ( $p$ )

Pour un matériau poreux à squelette rigide, une seule onde de compression se propage dans le milieu. On ne prend en compte dans la modélisation que le mouvement de la phase fluide. C'est le modèle du fluide équivalent.

La propagation du son dans un fluide équivalent est gouvernée par l'équation des ondes tout comme pour un milieu fluide. Cependant, on utilise une masse volumique dynamique complexe équivalente et un module de compressibilité dynamique complexe équivalent qui rendent compte respectivement des mécanismes de dissipation visqueuse et thermique dans le milieu poreux. La masse volumique dynamique et le module de rigidité dynamique s'expriment en fonction de cinq paramètres comme décrit dans le modèle de Johnson-Champoux-Allard [99] : la porosité  $\phi$ , la résistance à l'écoulement  $\sigma$ , la tortuosité  $\alpha_\infty$ , la longueur caractéristique visqueuse  $\Lambda$  et la longueur caractéristique thermique  $\Lambda'$ . Ces paramètres sont définis dans la section 3.3.

Pour un matériau poreux à squelette rigide, seule la deuxième équation de (4.19) est prise en compte. La propagation des ondes obéit donc à un modèle de fluide équivalent décrit par l'équation des ondes suivante [102, 105] :

$$\Delta p + \omega^2 \frac{\tilde{\rho}_e}{\tilde{K}_e} p = 0 \quad (4.22)$$

où  $\tilde{\rho}_e$  et  $\tilde{K}_e$  sont respectivement la masse volumique dynamique complexe et le module de rigidité dynamique complexe du fluide équivalent.

$$\tilde{\rho}_e = \frac{\rho_{22}}{\phi} ; \quad \tilde{K}_e = K_f \quad (4.23)$$

Ils sont donnés par [98, 99] :

$$\tilde{\rho}_e = \rho_0 \alpha_\infty - \frac{\phi}{i\omega} \sigma \tilde{G} ; \quad \tilde{G} = \sqrt{1 + \frac{4\alpha_\infty^2 \eta \rho_0 \omega}{i\sigma^2 \Lambda^2 \phi^2}} \quad (4.24)$$

$$\tilde{K}_e = \frac{\gamma P_0}{\gamma - (\gamma - 1) \left[ 1 + \frac{i8\eta}{\Lambda^2 \omega B^2 \rho_0} \tilde{G}' \right]^{-1}} ; \quad \tilde{G}' = \sqrt{1 + \frac{\omega \Lambda'^2 B^2 \rho_0}{i16\eta}} \quad (4.25)$$

où  $B$  désigne le nombre de Prandtl,  $\gamma$  est le rapport des chaleurs spécifiques de l'air,  $P_0$  est la pression atmosphérique et  $\eta$  est la viscosité dynamique de l'air.

### 3.3 Paramètres du modèle de Johnson-Champoux-Allard

Les paramètres du modèle de Johnson-Champoux-Allard [100] sont au nombre de cinq. Ces paramètres permettent notamment d'écrire la masse volumique dynamique complexe et le module de rigidité dynamique complexe du modèle du fluide équivalent déjà mentionné.

- La porosité volumique ou ouverte est le rapport du volume des pores  $V_{pores}$  sur le volume total du matériau poreux  $V_{tot}$  :

$$\phi = \frac{V_{pores}}{V_{tot}} \quad (4.26)$$

Plusieurs méthodes sont proposées dans la littérature pour mesurer la porosité [106].

P. Leclaire *et al* [107] ont proposé une méthode de mesure de la porosité pour les matériaux à pores ouverts, en s'inspirant de celle proposé par Beranek [108] en 1942. Cette méthode est basée sur une comparaison du volume d'air contenu dans deux chambres de mesure. Leur méthode est simple et permet de réduire considérablement l'effet de la température sur les résultats.

- La résistivité [109, 110] exprime la résistance du matériau au passage du fluide. Elle est liée à la perméabilité de Darcy  $k_0$  par :

$$\sigma = \frac{\eta}{k_0} \quad (4.27)$$

où  $\eta$  désigne la viscosité dynamique de l'air. Elle constitue le seul paramètre utilisé pour caractériser le matériau poreux dans les modèles de Delany-Bazley [59] et de Delany-Bazley-Miki [89].

- La tortuosité décrit le parcours du fluide dans le poreux [63, 98]. Elle est une grandeur adimensionnelle. Elle est donnée par :

$$\alpha_\infty = \frac{\frac{1}{V} \int_V \mathbf{v}^2 dV}{\left(\frac{1}{V} \int_V \mathbf{v} dV\right)^2} \quad (4.28)$$

où  $\mathbf{v}$  est la vitesse du fluide dans les pores en hautes fréquences et  $V$  désigne le volume du fluide contenu dans les pores.

- La longueur caractéristique visqueuse est un paramètre qui décrit les effets visqueux en moyennes et hautes fréquences. Elle a été introduite par Johnson *et al* [98] en 1987 pour la détermination de la masse volumique dynamique complexe. Ceci a permis de modéliser le matériau poreux tout en améliorant la modélisation des effets visqueux et en prenant en compte la distorsion du profil d'écoulement dans les pores en hautes fréquences. La nouvelle formule qu'ils ont proposée est compatible avec des pores de formes quelconques. Elle est donnée analytiquement par :

$$\frac{2}{\Lambda} = \frac{\int_S \mathbf{v}^2(r_w) dS}{\int_V \mathbf{v}^2(r) dV} \quad (4.29)$$

où  $S$  est la surface des pores.  $\mathbf{v}(r)$  représente la vitesse du fluide dans le volume des pores et  $\mathbf{v}(r_w)$  désigne cette vitesse sur la paroi des pores. La longueur  $\Lambda$  est définie pour un fluide parfait (sans viscosité) ou encore pour des fréquences infinies de sorte que l'épaisseur de la couche limite tende vers zéro [98].

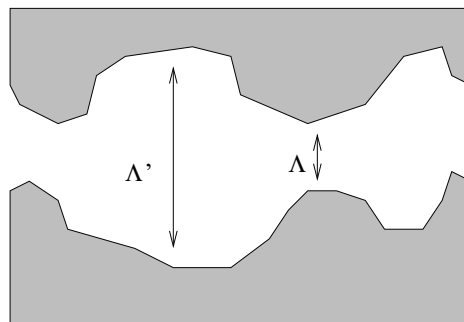
- La longueur caractéristique thermique a été introduite par Champoux et Allard [100] pour mettre en évidence les échanges thermiques internes au poreux en s'inspirant des travaux de Johnson, Koplik et Dashen [98]. Elle s'exprime par :

$$\frac{2}{\Lambda'} = \frac{\int_S dS}{\int_V dV} \quad (4.30)$$

Les deux paramètres caractéristiques ne dépendent que de la géométrie interne du poreux avec  $\Lambda < \Lambda'$  (voir Figure 4.3).

Leclaire *et al* [111] ont proposé une méthode de mesure ultrasonore des longueurs caractéristiques visqueuses et thermiques. Cette méthode consiste à remplacer l'air saturant le poreux par l'hélium et à étudier la transmission de l'onde acoustique en hautes fréquences. En exploitant la différence des propriétés physiques de l'air et de l'hélium et en combinant avec le comportement asymptotique des courbes de dispersion en hautes fréquences, leur méthode permet de déterminer simultanément les deux paramètres  $\Lambda$  et  $\Lambda'$ .

Fellah *et al* [112] ont proposé une méthode de résolution numérique du problème inverse de propagation acoustique dans les matériaux poreux à squelette rigide. Cette

Figure 4.3 – Représentation de  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  dans les pores

méthode, basée sur la méthode des moindres carrés dans le domaine temporel, utilise les données des ondes transmises et réfléchies obtenues par des mesures ultrasonores. Cette technique permet de déterminer simultanément tous les paramètres physiques intervenant dans la propagation. Les longueurs caractéristiques  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  sont estimées en considérant un rapport de trois entre elles ( $\Lambda'/\Lambda = 3$ ). Les paramètres obtenus sont en bon accord avec ceux donnés par les méthodes classiques [111, 113].

Par analogie aux longueurs caractéristiques visqueuses  $\Lambda$  et thermiques  $\Lambda'$ , Panneton [105] a introduit en 1996 la notion de fréquences caractéristiques visqueuses  $H$  et thermiques  $H'$ . Ces deux paramètres sont liés respectivement aux facteurs  $\tilde{G}$  et  $\tilde{G}'$  et permettent de séparer explicitement la partie réelle et la partie imaginaire de ces deux facteurs :

$$H = \frac{\sigma^2 \Lambda^2 \phi^2}{4\alpha_\infty^2 \eta \rho_0} ; \quad H' = \frac{16\eta}{\Lambda'^2 B^2 \rho_0} \quad (4.31)$$

Les facteurs  $\tilde{G}$  et  $\tilde{G}'$  s'écrivent maintenant :

$$\tilde{G} = \sqrt{1 + \frac{\omega}{iH}} ; \quad \tilde{G}' = \sqrt{1 + \frac{\omega}{iH'}} \quad (4.32)$$

Dans son étude, Panneton [105] a développé de nouveaux modèles par éléments finis du comportement vibroacoustique des matériaux poreux et du couplage élasto-poro-acoustique. Il a étudié le couplage d'un système composé d'un milieu poroélastique, d'un milieu élastique et d'un milieu acoustique. Cette étude a permis de comprendre l'influence des matériaux poreux et leurs conditions de montage (conditions aux limites et de couplage) sur le comportement vibroacoustique de systèmes élasto-poro-acoustiques.

## 4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les différents types de matériaux absorbants utilisés pour l'atténuation du son. Il s'agit des matériaux absorbants à réaction localisée modélisés par leurs impédances et les matériaux absorbants à réaction non localisée.

Nous avons en outre passé en revue la plupart des modèles sur les matériaux poreux utilisés pour l'absorption acoustique. Ces modèles sont classés suivant la rigidité

du squelette du poreux. Si le squelette est très rigide et bien plus lourd que le fluide saturant les pores, le matériau poreux peut être modélisé par un fluide équivalent. Par contre pour un matériau à squelette élastique, il faut tenir compte aussi bien du mouvement du fluide que du solide et le modèle le plus adapté pour ce type de matériau est un modèle basé sur la théorie de Biot.

Dans la suite de notre travail, nous étudions dans le chapitre 5 la propagation acoustique dans un guide 2D rectiligne infini composé d'un domaine fluide couplé avec un domaine poreux modélisé par un fluide équivalent (voir figure 4.4).

Tous les paramètres du fluide équivalent sont considérés comme des données, le but étant d'écrire une condition limite transparente pour ces types de configurations.

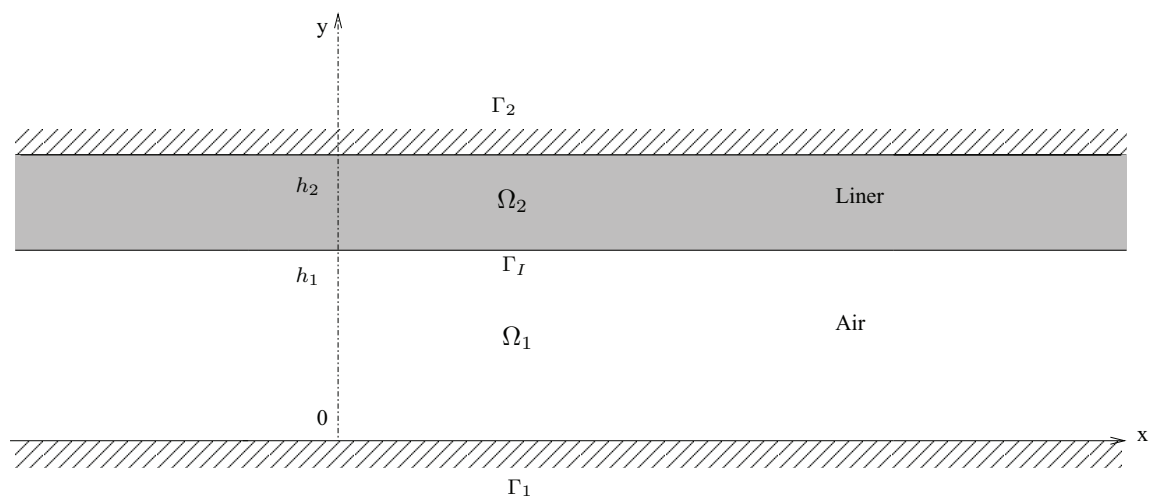


Figure 4.4 – Guide 2D infini à paroi traitée par un matériau absorbant à réaction non localisée





# Chapitre 5

## Guides infinis traités par un matériau absorbant à réaction non localisée

### 1 Introduction

Dans le chapitre 2, nous avons étudié la propagation des ondes acoustiques dans les guides traités par un matériau absorbant décrit par une condition limite d'impédance acoustique. Dans le chapitre 3, nous avons vu que cette modélisation correspond à des matériaux à réaction localisée applicables pour des configurations particulières (réseau de résonateurs dans les nacelles d'avion) mais souvent injustifiée pour la plupart des matériaux poreux utilisés pour l'absorption des ondes acoustiques. D'autre part, l'impédance acoustique des matériaux étant souvent mesurée sous incidence normale et sans écoulement, on peut alors s'interroger sur la qualité des modèles basés sur une condition limite d'impédance en propagation guidée puisque les ondes se propagent tangentiellement au traitement acoustique.

On s'intéresse donc dans ce dernier chapitre à l'écriture d'un opérateur DtN pour la modélisation des guides 2D infinis dont la paroi est traitée par un matériau absorbant à réaction non localisée modélisé par un fluide équivalent. Malgré les hypothèses liées à l'usage du modèle du fluide équivalent (cf chapitre 4 page 93), on sait qu'il donne d'excellents résultats pour une large gamme de matériaux poreux. De plus, le fluide équivalent étant gouverné par l'équation de Helmholtz, nous aurons à utiliser le même modèle pour le matériau poreux placé sur la paroi du guide que pour le fluide contenu dans le guide. De cette façon, nous pourrions appliquer la méthode présentée au chapitre 2 pour l'écriture de l'opérateur DtN associé au problème couplé poro-acoustique dont nous précisons les conditions de continuité à l'interface entre le fluide et le milieu poreux.

Une première partie du chapitre est consacrée à l'étude des modes dans un guide 2D et à l'influence de l'absorbant sur l'atténuation des ondes acoustiques. On présente ensuite la méthode permettant d'écrire l'opérateur DtN en l'absence d'écoulement. Enfin, on termine le chapitre par l'étude d'un guide 2D infini à paroi traitée par un matériau poreux en présence d'un écoulement uniforme.

## 2 Guide 2D à paroi traitée sans écoulement

### 2.1 Description du problème

On considère un guide 2D infini couplé composé d'un domaine fluide  $\Omega_1$  de hauteur  $h_1$  et d'un domaine poreux (matériau poreux à squelette rigide)  $\Omega_2$  de hauteur  $h_2 - h_1$ . L'interface entre ces deux domaines est désignée par  $\Gamma_I$ . Les parois  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont supposées rigides et désignent respectivement les parois du domaine fluide et du domaine poreux (Figure 5.1).

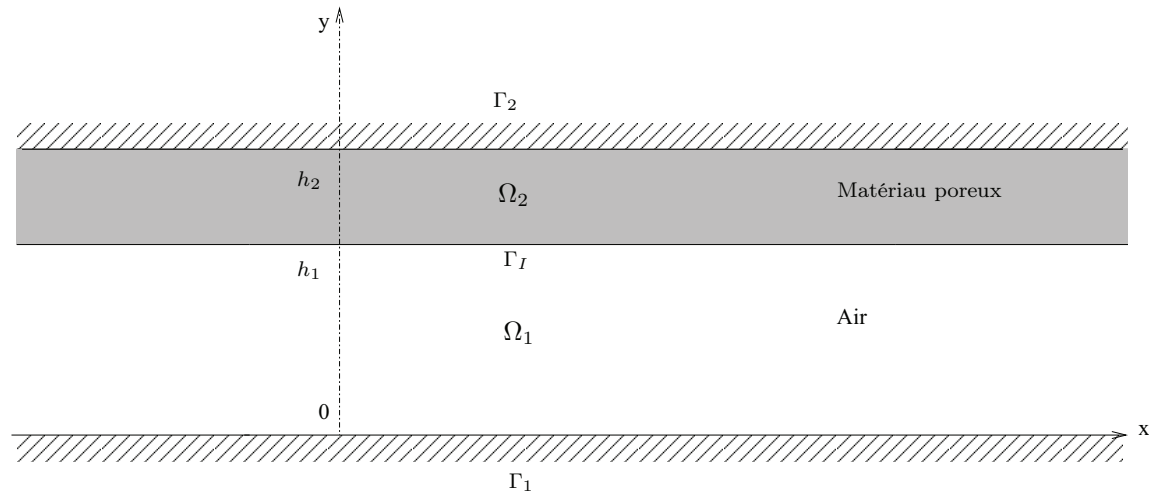


Figure 5.1 – Guide 2D infini à paroi traitée : modèle du fluide équivalent

- **Propagation acoustique dans l'air**

Le domaine  $\Omega_1$  contient un fluide supposé parfait compressible et non visqueux (de l'air) au repos. On adopte ici les hypothèses classiques de l'acoustique linéaire. En régime harmonique ( $e^{-i\omega t}$ ), la propagation de l'onde acoustique est décrite par l'équation de Helmholtz homogène :

$$\Delta p_1 + \frac{\omega^2}{c_1^2} p_1 = 0 \quad (5.1)$$

où  $c_1$  désigne la célérité du son dans l'air,  $p_1$  est la pression dans  $\Omega_1$  and  $\Delta$  est l'opérateur Laplacien en coordonnées catésiennes.

- **Propagation acoustique dans le matériau poreux**

Le domaine  $\Omega_2$  est un matériau poreux dont les pores contiennent de l'air au repos. Dans ce travail nous considérons un matériau poreux à squelette rigide et la propagation des ondes obéit donc à un modèle de fluide équivalent décrit par l'équation de Helmholtz suivante :

$$\Delta p_2 + \frac{\omega^2 \rho_2}{K_2} p_2 = 0 \quad (5.2)$$

où  $\rho_2$  désigne la masse volumique dynamique et  $K_2$  est le module de rigidité dynamique du fluide équivalent, ces deux paramètres sont complexes et dépendent de

la fréquence. Dans notre étude, ils sont issus du modèle de Johnson-Champoux-Allard [99]. Le choix du modèle du fluide équivalent est ici motivé par le fait que celui-ci nécessite un degré de liberté par nœud contrairement aux modèles de Biot poroélastiques [63, 64] et d'Atalla *et al* [102] qui nécessitent respectivement six et quatre degrés de liberté par nœud. Par ailleurs, le modèle du fluide équivalent constitue une bonne approximation pour un grand nombre de matériaux poreux surtout en ingénierie acoustique.

- **Conditions aux limites**

Les conditions aux limites sur les parois rigides  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont :

$$\frac{\partial p_1}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \quad (5.4)$$

Au niveau de l'interface  $\Gamma_I$ , la continuité de la pression et des déplacements normaux doit être assurée. Cela se traduit par [114] :

$$p_1 = p_2 \quad (5.5)$$

$$\boldsymbol{\xi}_1 \cdot \mathbf{n} = \phi \boldsymbol{\xi}_2 \cdot \mathbf{n} \quad (5.6)$$

où  $\boldsymbol{\xi}_1$  et  $\boldsymbol{\xi}_2$  désignent respectivement les vecteurs des déplacements particuliers des milieux fluide et poreux,  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire normal à la paroi et  $\phi$  la porosité. Les équations de conservation de la quantité du mouvement dans les deux milieux sont données en régime harmonique par :

$$ik_1 c_1 \rho_1 \mathbf{v}_1 = \nabla p_1 \quad (5.7)$$

$$ik_1 c_1 \rho_2 \mathbf{v}_2 = \nabla p_2 \quad (5.8)$$

où  $\rho_1$  et  $\rho_2$  représentent respectivement les masses volumiques de l'air et du milieu poreux,  $k_1 = \omega/c_1$ . Les vecteurs  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$  désignent respectivement les vitesses particulières dans l'air et dans le milieu poreux et sont liés aux déplacements respectifs  $\boldsymbol{\xi}_1$  et  $\boldsymbol{\xi}_2$  par :

$$-ik_1 c_1 \boldsymbol{\xi}_1 = \mathbf{v}_1 \quad (5.9)$$

$$-ik_1 c_1 \boldsymbol{\xi}_2 = \mathbf{v}_2 \quad (5.10)$$

En remplaçant les vitesses particulières dans (5.7) et (5.8) par leurs expressions dans les équations (5.9) et (5.10), on trouve les déplacements normaux sous la forme :

$$\boldsymbol{\xi}_1 \cdot \mathbf{n} = -\frac{1}{\rho_1} \nabla p_1 \cdot \mathbf{n} \quad (5.11)$$

$$\boldsymbol{\xi}_2 \cdot \mathbf{n} = -\frac{1}{\rho_2} \nabla p_2 \cdot \mathbf{n} \quad (5.12)$$

La continuité des déplacements normaux à l'interface  $\Gamma_I$  s'écrit finalement :

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial n} = \frac{\phi}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial n} \quad (5.13)$$

Comme nous l'avons déjà mentionné dans les chapitres précédents, la résolution du problème de propagation acoustique à l'aide de la méthode des éléments finis nécessite de tronquer le domaine infini à l'aide des frontières artificielles (Figure 5.2) sur lesquelles sont écrits les opérateurs DtN. Ils sont donnés par :

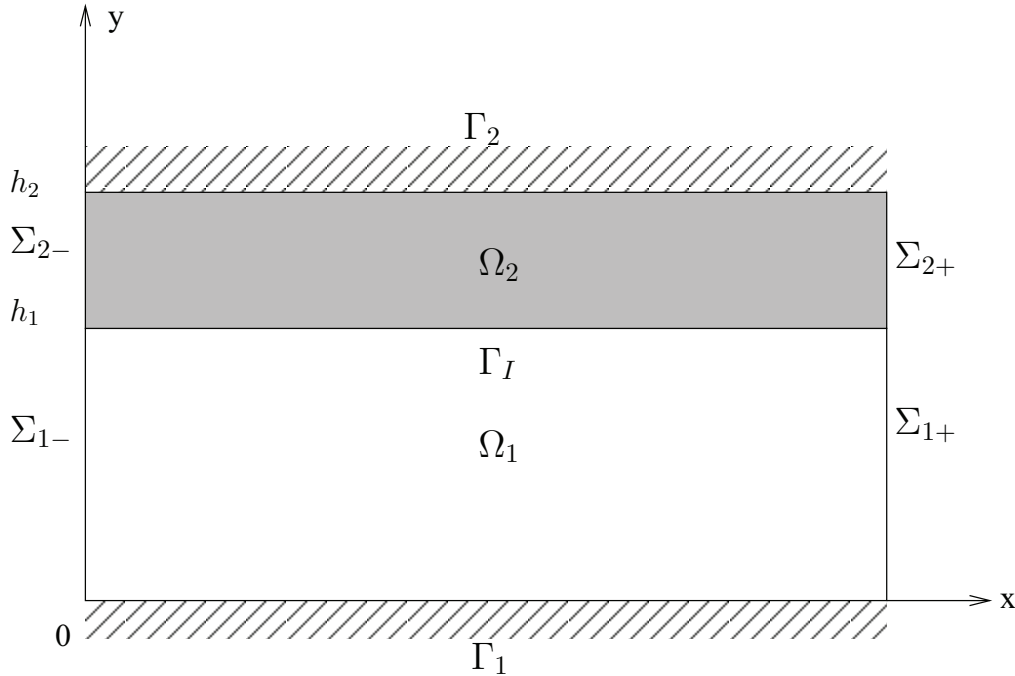


Figure 5.2 – Guide infini tronqué

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -T_p^\pm(p) \text{ sur } \Sigma_\pm \quad (5.14)$$

avec  $\Sigma_- = \Sigma_{1-} \cup \Sigma_{2-}$  et  $\Sigma_+ = \Sigma_{1+} \cup \Sigma_{2+}$ .

On rappelle que ces opérateurs DtN sont basés sur une décomposition modale de la pression acoustique sur les frontières artificielles :

$$p(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \theta_n(y) e^{i\beta_n(x-L)} \quad (5.15)$$

où  $A_n$  sont des coefficients modaux à déterminer. La fonction  $\theta_n$  représente les modes propres composés des modes dans le fluide  $\theta_{1n}$  et des modes dans le milieu poreux  $\theta_{2n}$  suivant la section transversale du guide :

$$\theta_n(y) = \begin{cases} \theta_{1n}(y) & \text{pour } 0 \leq y \leq h_1 \\ \theta_{2n}(y) & \text{pour } h_1 \leq y \leq h_2 \end{cases} \quad (5.16)$$

et  $\beta_n$  désigne la constante de propagation dans les deux milieux. En effet, la propagation se faisant suivant l'axe  $x$ , il existe une seule constante de propagation pour les milieux fluide et poreux. La principale difficulté dans l'écriture des opérateurs  $T_p^\pm(p)$  est la détermination des coefficients  $A_n$  qui nécessite à nouveau de connaître les modes du guide et de définir une relation d'orthogonalité.

## 2.2 Détermination des modes

On considère un guide 2D infini traité par un matériau absorbant à réaction non localisée dont l'on recherche les modes acoustiques dans la section transversale. On cherche une solution des équations (5.1) et (5.2) à l'aide de la méthode de séparation des variables. On pose :

$$p_n(x, y) = \theta_n(y)e^{i\beta_n x} \quad \text{avec} \quad \theta_n(y) = \begin{cases} \theta_{1n}(y) & \text{pour} \quad 0 \leq y \leq h_1 \\ \theta_{2n}(y) & \text{pour} \quad h_1 \leq y \leq h_2 \end{cases} \quad (5.17)$$

Le problème aux valeurs propres dans la section transversale du guide s'écrit alors :

$$\frac{d^2\theta_{1n}}{dy^2} + (k_1^2 - \beta_n^2)\theta_{1n} = 0 \quad 0 \leq y \leq h_1 \quad (5.18)$$

$$\frac{d^2\theta_{2n}}{dy^2} + (k_2^2 - \beta_n^2)\theta_{2n} = 0 \quad h_1 \leq y \leq h_2 \quad (5.19)$$

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{d\theta_{1n}}{dy} = \frac{\phi}{\rho_2} \frac{d\theta_{2n}}{dy} \quad y = h_1 \quad (5.20)$$

$$\frac{d\theta_{1n}}{dy} = 0 \quad y = 0 \quad (5.21)$$

$$\frac{d\theta_{2n}}{dy} = 0 \quad y = h_2 \quad (5.22)$$

$$\theta_{1n} = \theta_{2n} \quad y = h_1 \quad (5.23)$$

où  $k_2 = \omega\rho_2/K_2$  représente le nombre d'onde dans le matériau poreux.

D'après les équations (5.18) et (5.19), on trouve deux équations de dispersion :

$$\begin{aligned} k_1^2 &= \alpha_{1n}^2 + \beta_n^2 \\ k_2^2 &= \alpha_{2n}^2 + \beta_n^2 \end{aligned} \quad (5.24)$$

où  $\alpha_{1n}$  et  $\alpha_{2n}$  désignent respectivement les valeurs propres des milieux fluide et poreux. D'après les conditions (5.21) et (5.22) et la condition de continuité (5.23), on trouve les modes propres sous la forme :

$$\theta_{1n}(y) = a_{1n} \cos(\alpha_{1n}y) \quad (5.25)$$

$$\theta_{2n}(y) = a_{2n} \cos(\alpha_{2n}(y - h_2)) \quad (5.26)$$

Par ailleurs, les conditions de continuité à l'interface (5.5) et (5.13) conduisent à l'équation transcendente suivante :

$$tg(\alpha_{2n}h_2) - tg(\alpha_{2n}h_1) + \frac{\rho_2\alpha_{1n}}{\rho_1\phi\alpha_{2n}}tg(\alpha_{1n}h_1)[tg(\alpha_{2n}h_2)tg(\alpha_{2n}h_1) + 1] = 0 \quad (5.27)$$

Pour calculer les constantes de propagation  $\beta_n$  et les nombres d'onde transversaux  $\alpha_{1n}$  et  $\alpha_{2n}$ , on utilise la méthode de Newton-Raphson à travers les équations suivantes :

$$\alpha_{1n}^2 - \alpha_{2n}^2 = k_2^2 - k_1^2 \quad (5.28)$$

$$\alpha_{1n}^2 + \alpha_{2n}^2 + 2\beta_n^2 = k_2^2 + k_1^2 \quad (5.29)$$

$$tg(\alpha_{2n}h_2) - tg(\alpha_{2n}h_1) + \frac{\rho_2\alpha_{1n}}{\rho_1\phi\alpha_{2n}}tg(\alpha_{1n}h_1)[tg(\alpha_{2n}h_2)tg(\alpha_{2n}h_1) + 1] = 0 \quad (5.30)$$

Les valeurs initiales nécessaires pour la méthode de Newton-Raphson sont déterminées par la méthode des éléments finis dans une section droite du guide.

### 2.2.1 Exemples de modes propres

Nous présentons quelques exemples de modes propres et de la constante de propagation de deux configurations de guide à parois recouvertes de matériaux poreux. Pour les deux configurations, le domaine  $\Omega_1$  contient de l'air au repos avec les caractéristiques suivantes :  $c_1 = 344 \text{ m/s}$ ,  $\rho_1 = 1,2 \text{ kg/m}^3$ , indépendantes de la fréquence.

Dans le premier exemple, le domaine  $\Omega_2$  contient une mousse d'aluminium et dans le deuxième exemple, il contient de la laine de verre. Notre but ici est d'examiner l'influence de ces deux matériaux sur la propagation acoustique dans le guide.

#### A - Mousse d'aluminium

On considère un guide rigide dans lequel on a de l'air et une mousse d'aluminium avec  $h_1 = 1$  et  $h_2 = 1.5$  (voir Figure 5.3). Les paramètres de la mousse d'aluminium

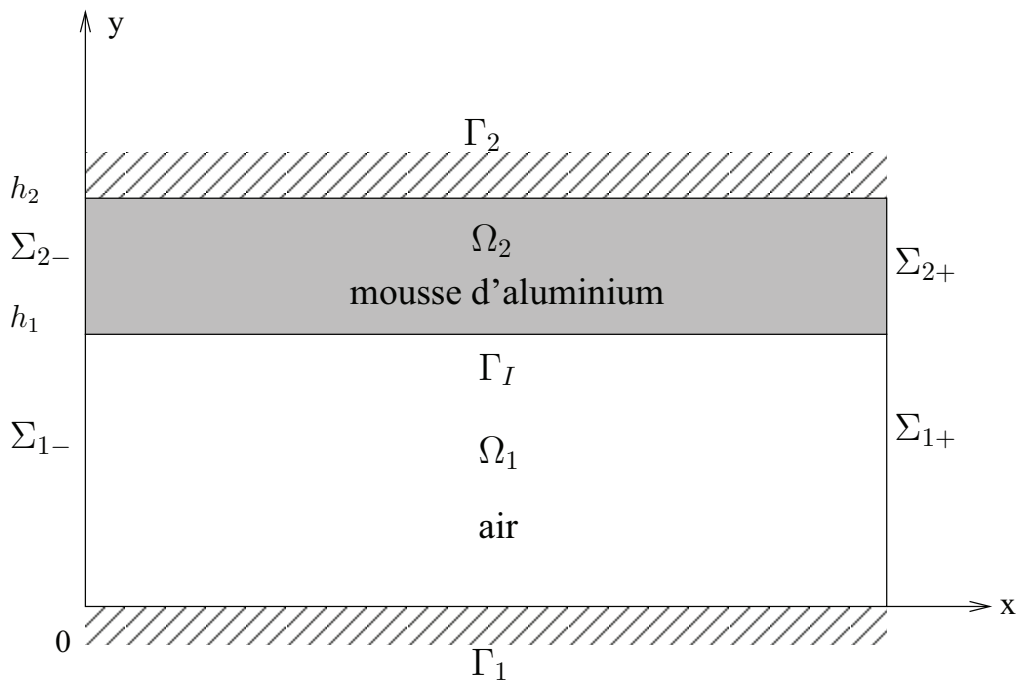


Figure 5.3 – Guide 2D traité avec de la mousse d'aluminium

sont donnés dans le Tableau 5.1 ci-dessous :

$\sigma$ (N.s.m-4)	$\phi$	$\Lambda$ (m)	$\Lambda'$ (m)	$\alpha_\infty$
353	0.92	1.02e-3	1.97e-3	1.10

Tableau 5.1 – Paramètres de Johnson-Champoux-Allard pour la mousse d'aluminium (d'après F. Chevillotte, Matelys [3]).

Les Tableaux 5.2 et 5.3 présentent respectivement les valeurs propres  $\alpha_n$  et les constantes de propagation  $\beta_n$  pour les onze premiers modes d'un guide rigide (qui va servir à titre de comparaison) et d'un guide contenant de la mousse d'aluminium pour une fréquence  $f = 100$  Hz ( $k_1 = 1.826$  et  $k_2 = 2.155 + 0.473i$ ).

Pour le guide rigide, seul le mode plan est propagatif ( $\beta_n$  est réelle), le reste des modes étant évanescents ( $\beta_n$  est imaginaire pure). Pour le guide traité, tous les modes sont atténués. Par ailleurs, dans le Tableau 5.3 on remarque que les modes 5, 8 et 11 présentent des valeurs propres  $\alpha_{1n}$  dont la partie imaginaire est positive contrairement au reste des  $\alpha_{1n}$  dont la partie imaginaire est négative. La présence de la mousse d'aluminium modifie la répartition des modes dans le guide. Pour étudier ce phénomène, nous traçons les modes transverses  $\theta_n$  et les constantes de propagation  $\beta_n$ .

n	$\alpha_n$	$\beta_n^+$
1	0.000000 + 0.000000i	1.826507 + 0.000000i
2	3.141593 + 0.000000i	0.000000 + 2.556086i
3	6.283185 + 0.000000i	0.000000 + 6.011967i
4	9.424778 + 0.000000i	0.000000 + 9.246529i
5	12.566371 + 0.000000i	0.000000 + 12.433894i
6	15.707963 + 0.000000i	0.000000 + 15.603328i
7	18.849556 + 0.000000i	0.000000 + 18.764193i
8	21.991149 + 0.000000i	0.000000 + 21.920345i
9	25.132741 + 0.000000i	0.000000 + 25.074197i
10	28.274335 + 0.000000i	0.000000 + 28.226345i
11	31.415931 + 0.000000i	0.000000 + 31.378056i

Tableau 5.2 – Constantes de propagation pour un guide rigide :  $f = 100$  Hz,  $h_1 = h = 1$ .

n	$\alpha_{1n}$	$\alpha_{2n}$	$\beta_n^+$
1	0.378549 - 0.688023i	1.107546 + 0.685252i	1.919535 + 0.135684i
2	2.119140 - 0.113772i	2.381548 + 0.326804i	0.220958 + 1.091125i
3	4.007643 - 0.197745i	4.136698 + 0.054853i	0.222074 + 3.568731i
4	6.252443 - 0.031441i	6.340036 + 0.129781i	0.032873 + 5.979988i
5	8.500070 + 0.064943i	8.565500 + 0.183459i	-0.066527 + 8.302184i
6	10.311059 - 0.154197i	10.362643 - 0.055057i	0.156709 + 10.149201i
7	12.550918 - 0.015495i	12.594314 + 0.065499i	0.015660 + 12.419394i
8	14.793564 + 0.088058i	14.830828 + 0.156572i	-0.088824 + 14.683788i
9	16.599846 - 0.140974i	16.632152 - 0.079409i	0.141929 + 16.503866i
10	18.839243 - 0.010303i	18.868123 + 0.043740i	0.010348 + 18.757506i
11	21.080650 + 0.097033i	21.106697 + 0.145211i	-0.097572 + 21.011186i

Tableau 5.3 – Constantes de propagation pour un guide traité avec de la mousse d'aluminium :  $f = 100$  Hz,  $h_1 = 1$  et  $h_2 = 1.5$ .

La Figure 5.4 présente les onze premiers modes transverses  $\theta_n$  du guide 2D sans absorbant (Figure 5.4-a) et avec absorbant (Figure 5.4-b) pour une fréquence  $f = 100$  Hz ( $k_1 = 1.826$ ,  $k_2 = 2.155 + 0.473i$ ). On constate que les modes avec la mousse



(partie colorée, Figure 5.4-a) sont assez semblables à ceux sans la mousse (Figure 5.4-b). Ceci s'explique par le fait que la mousse d'aluminium possède des caractéristiques (masse volumique, célérité) proches de celles de l'air.

En présence de la mousse d'aluminium, certains modes (modes 2 et 3, 5, 6, 8 et 11) ont des amplitudes plus grandes dans le poreux que dans l'air (voir Figure 5.5). Ces modes semblent être localisés essentiellement dans l'absorbant. Les modes 1, 4, 7 et 10 ont les mêmes amplitudes dans les deux milieux. Ces modes ont des valeurs propres  $\alpha_{1n}$  et des constantes de propagation  $\beta_n$  respectivement très proches de celles des modes 1, 3, 5 et 7 du guide rigide (voir Tableaux 5.2 et 5.3). Ces modes sont donc des modes situés dans l'air mais sont moins influencés par la présence de l'absorbant. Cela peut s'expliquer par le fait que la mousse d'aluminium a une masse volumique proche de celle de l'air, car la condition de continuité des vitesses normales à l'interface entre les deux milieux (5.20) fait intervenir les masses volumiques.

Sur la figure 5.6-b, on représente les constantes de propagation  $\beta_n$  dans le plan complexe, les modes propagatifs (respectivement évanescents) suivant les  $x$  croissants sont en rouge (o) et les modes propagatifs (respectivement évanescents) suivants les  $x$  décroissants sont en bleu (x). On distingue trois courbes en fonction de la position des modes : les modes qui ont la même amplitude dans les deux milieux sont situés sur la courbe au milieu et les modes qui ont une amplitude plus grande dans le poreux sont sur les autres courbes placées de part et d'autre de l'axe des ordonnées.

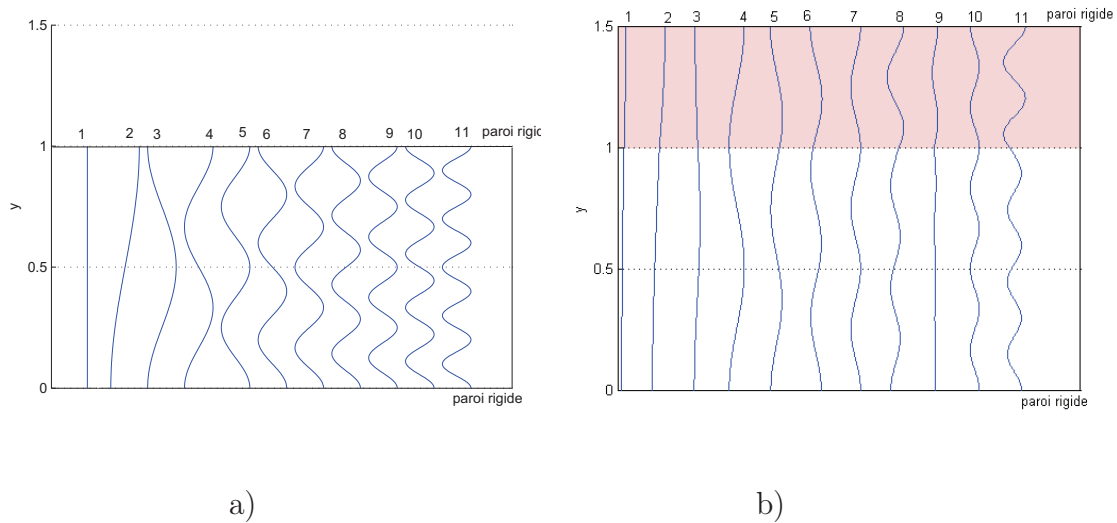


Figure 5.4 – Partie réelle des modes transverses  $\theta_n$  pour  $f = 100$  Hz. a) guide rigide ; b) guide traité avec de la mousse d'aluminium.

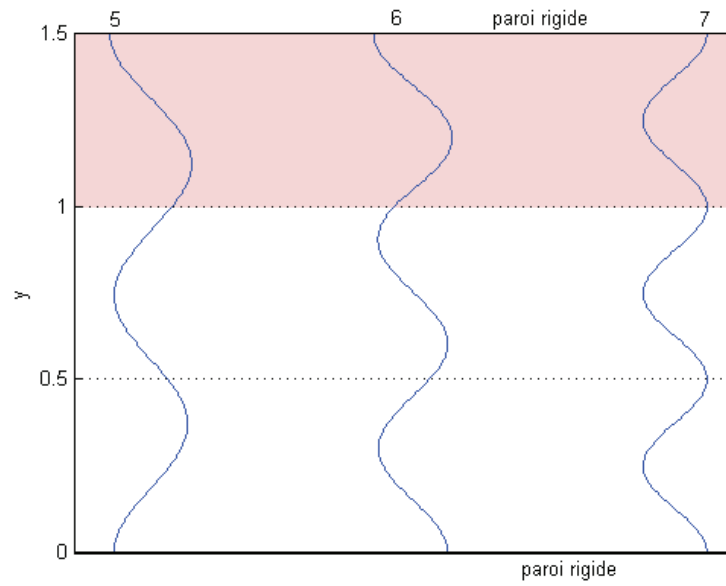


Figure 5.5 – Répartition de la partie réelle des modes transverse 5, 6 et 7 pour le guide traité avec de la mousse d'aluminium :  $f = 100$  Hz.

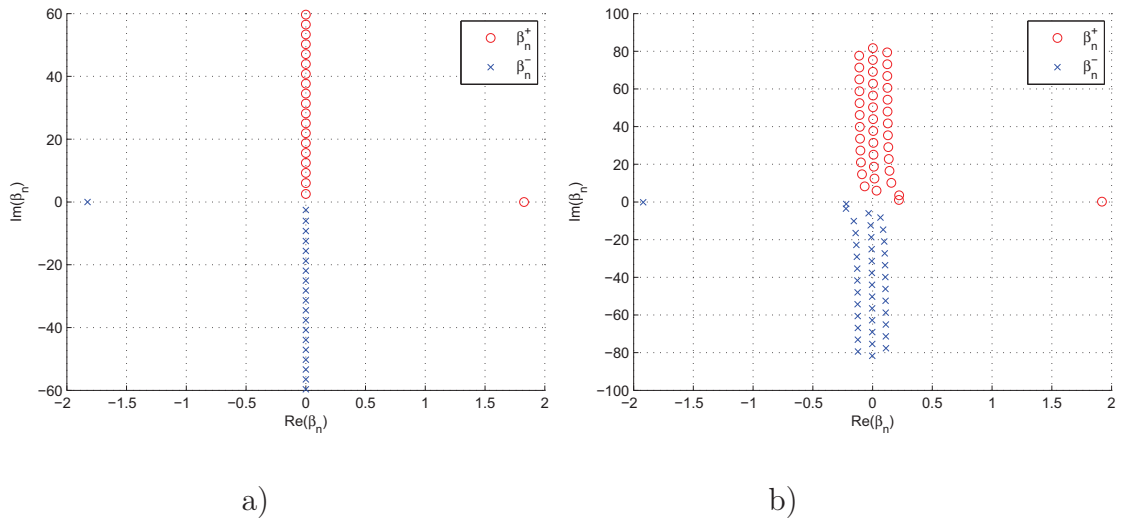


Figure 5.6 – Constante de propagation  $\beta_n$  pour  $f = 100$  Hz : a) guide rigide ; b) guide contenant de la mousse d'aluminium :  $f = 100$  Hz.

## B - Laine de verre

On considère maintenant un guide rigide dont la paroi intérieure est tapissée de la laine de verre avec encore  $h_1 = 1$  et  $h_2 = 1.5$  (voir Figure 5.7).

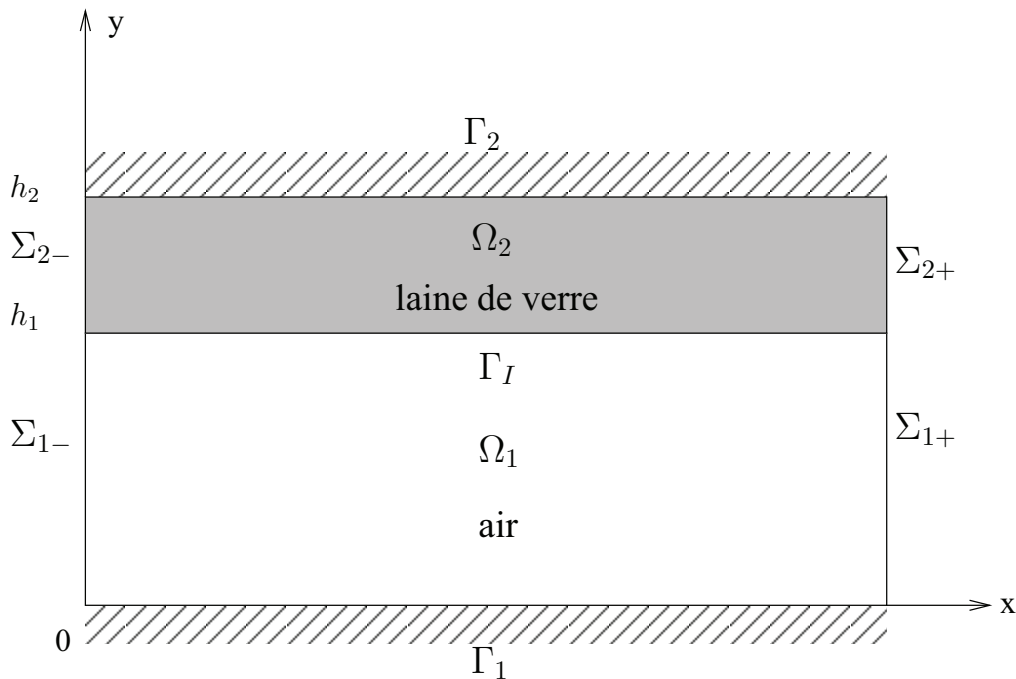


Figure 5.7 – Guide 2D traité avec de la laine de verre.

Les paramètres de Johnson-Champoux-Allard de la laine de verre pour une fréquence  $f = 100$  Hz ( $\rho_2 = 2.5166 + 20.701i$ ,  $c_2 = 52.351 - 47.822i$ ,  $k_2 = 6.542 + 5.976i$ ) sont données dans le Tableau 5.4 et les valeurs propres  $\alpha_n$  et les constantes de propagation  $\beta_n$  sont présentées dans le Tableau 5.5. On remarque que les constantes de propagation  $\beta_n$  des modes 4, 6 et 9 ont des parties réelles assez grandes par rapport à celles des  $\beta_n$  des modes 1, 2, 3, 5, 7, 8, 10 et 11. Ici aussi la présence de la laine de verre modifie la répartition des modes dans le guide.

$\sigma$ (N.s.m-4)	$\phi$	$\Lambda$ (m)	$\Lambda'$ (m)	$\alpha_\infty$
13000	0.97	110e-6	173e-6	1.07

Tableau 5.4 – Paramètres de Johnson-Champoux-Allard pour la laine de verre (d'après F. Chevillotte, Matelys [3]).

La figure 5.8 montre la répartition des onze premiers modes transverses  $\theta_n$  pour un guide 2D contenant de la laine de verre pour une fréquence  $f = 100$  Hz.

Contrairement au premier exemple avec la mousse d'aluminium, on remarque qu'il existe deux types de modes : les modes localisés dans l'air (modes 1, 2, 3, 5, 7 et 10) et les modes localisés dans le poreux (modes 4, 6, 8, 9 et 11). Cela se traduit dans la courbe des constantes de propagation  $\beta_n$  par un réseau de deux courbes : l'une pour les modes situés dans le poreux et l'autre pour les modes dans l'air (voir Figure 5.9).

n	$\alpha_{1n}$	$\alpha_{2n}$	$\beta_n^+$
1	0.359012 - 0.643478i	6.374991 + 6.097234i	1.906825 + 0.121152i
2	3.034869 - 0.122015i	6.763143 + 5.726705i	0.152674 + 2.425433i
3	6.215813 - 0.050995i	8.086247 + 4.796274i	0.053350 + 5.941418i
4	6.501553 - 5.999120i	3.167191 + 0.030699i	6.128537 + 6.364260i
5	9.366109 - 0.032789i	10.281492 + 3.773160i	0.033437 + 9.187160i
6	10.072469 - 3.838312i	9.511759 + 0.046211i	3.894118 + 9.928104i
7	12.514533 - 0.016263i	13.011515 + 2.989452i	0.016440 + 12.382596i
8	15.643094 - 0.021106i	15.948820 + 2.430943i	0.021300 + 15.540079i
9	15.883654 - 2.432233i	15.815341 + 0.029597i	2.447454 + 15.784785i
10	18.806368 - 0.008079i	19.016410 + 2.048173i	0.008108 + 18.724456i
11	21.913452 - 0.018011i	22.068634 + 1.753898i	0.018112 + 21.848099i

Tableau 5.5 – Constantes de propagation pour un guide traité avec de la laine de verre :  $f = 100$  Hz,  $h_1 = 1$  et  $h_2 = 1.5$ .

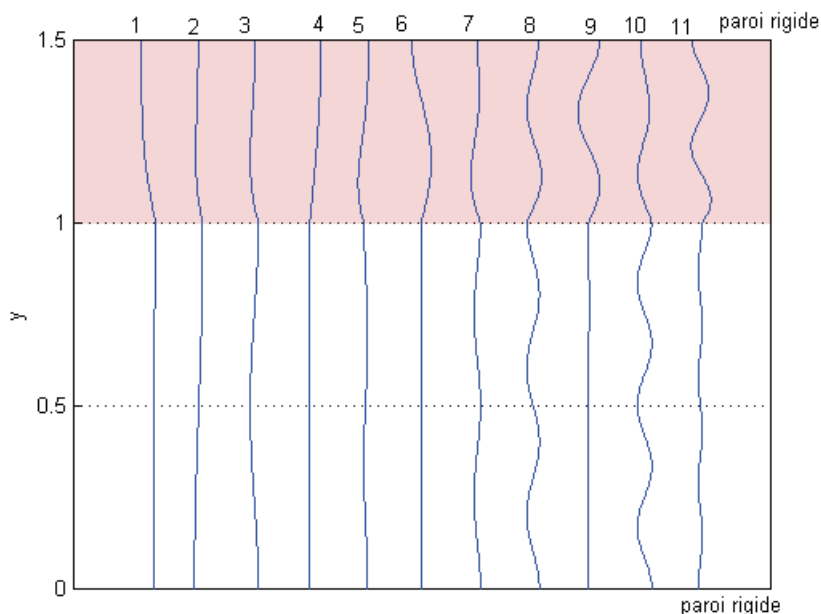


Figure 5.8 – Répartition de la partie réelle des modes transverse  $\theta_n$  pour un guide traité avec de la laine de verre :  $f = 100$  Hz.

Par ailleurs, une étude de la vitesse de phase et de l'atténuation des modes en présence du matériau poreux permet de comprendre davantage l'influence de celui-ci sur la propagation acoustique dans le guide.

En effet sur la Figure 5.10, on remarque que contrairement au cas d'un guide traité avec un matériau absorbant à réaction localisée avec  $Z = 1.5(1 - i)$  (Figure 5.10-a), il existe deux types de vitesses de phase (Figure 5.10-b) : la vitesse de phase dans le matériau poreux (o) et la vitesse de phase dans l'air (x). Evidemment pour les deux configurations, il n'existe plus de fréquences de coupure comme pour le guide rigide, mais les courbes montrent des maximums dus à l'absorption.

On remarque aussi que les courbes de la vitesse de phase dans l'air ne se coupent

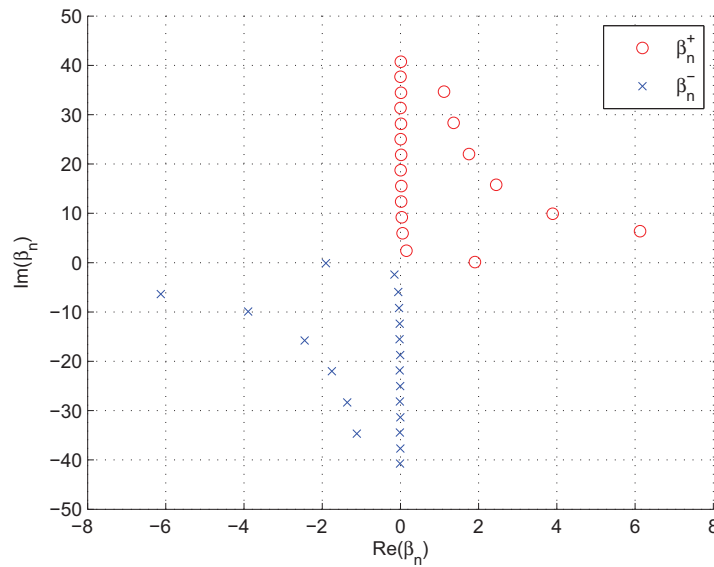


Figure 5.9 – Constante de propagation  $\beta_n$  en présence de la laine de verre :  $f = 100$  Hz.

pas (voir Figure 5.11-a). Ce phénomène est lié au couplage dans le milieu poreux comme il en existe dans le cas d'un système masse-ressort classique [115]. Il existe en effet trois types de couplages dans les matériaux poreux : un couplage élastique entre la phase solide et la phase fluide, un couplage inertiel lié à la géométrie des pores et un couplage viscothermique dus aux échanges visqueux et thermiques. Puisque nous considérons un modèle de fluide équivalent, le couplage élastique n'est plus pris en compte, il reste donc les couplages inertiels et viscothermiques dus aux paramètres  $\rho_{12}$  et  $\tilde{b}$  respectivement. Par contre les courbes de la vitesse de phase dans le poreux ne se repoussent pas (voir Figure 5.11-b). Ceci peut s'expliquer par le fait que les modes étant fortement atténués dans l'absorbant, alors ces modes sont moins couplés que ceux dans l'air.

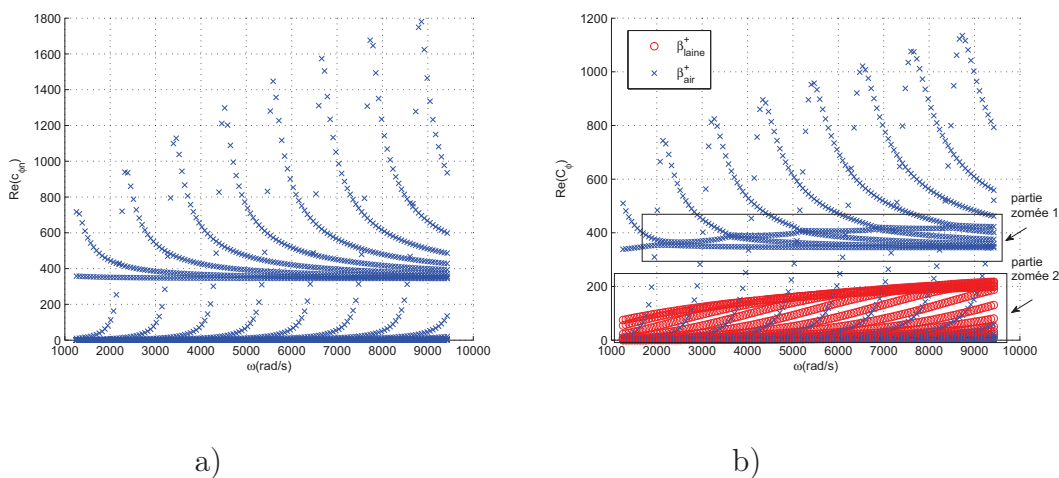


Figure 5.10 – Vitesse de phase  $C_{\phi_n}$  pour un guide traité : a) avec une impédance locale  $Z = 1.5(1 - i)$ , b) avec de la laine de verre.

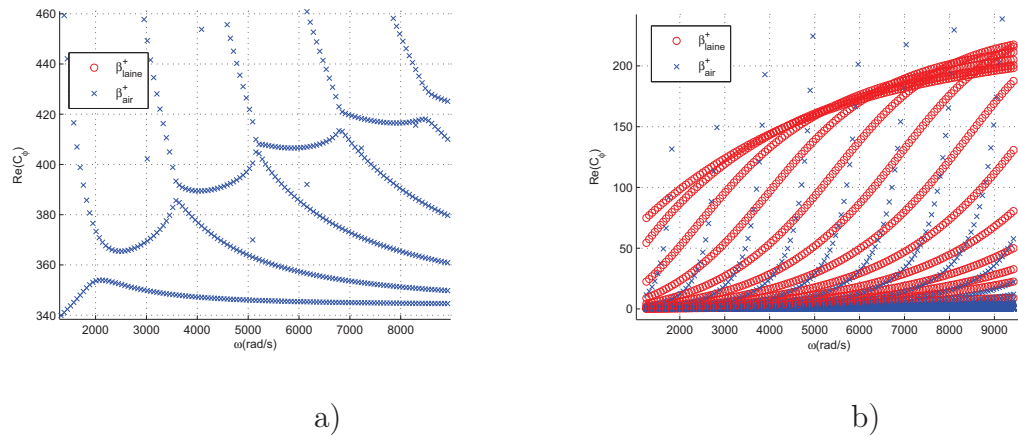


Figure 5.11 – Zoom de  $C_{\phi_n}$  pour le guide traité avec la laine de verre : a) modes dans l'air, b) modes dans le poreux.

Ce phénomène de couplage des modes est aussi mis en évidence sur la Figure 5.12. On distingue deux atténuations : l'atténuation dans le poreux en rouge  $\circ$  et l'atténuation dans l'air en bleu  $\times$  (Figure 5.12-b) contrairement au cas du guide traité avec une impédance locale (Figure 5.12-a). Les modes localisés dans l'absorbant sont fortement atténués, tandis que les modes dans l'air le sont moins. La Figure 5.13 montre le phénomène de repoussement déjà constaté pour les vitesses de phase : le couplage écarte les modes [115].

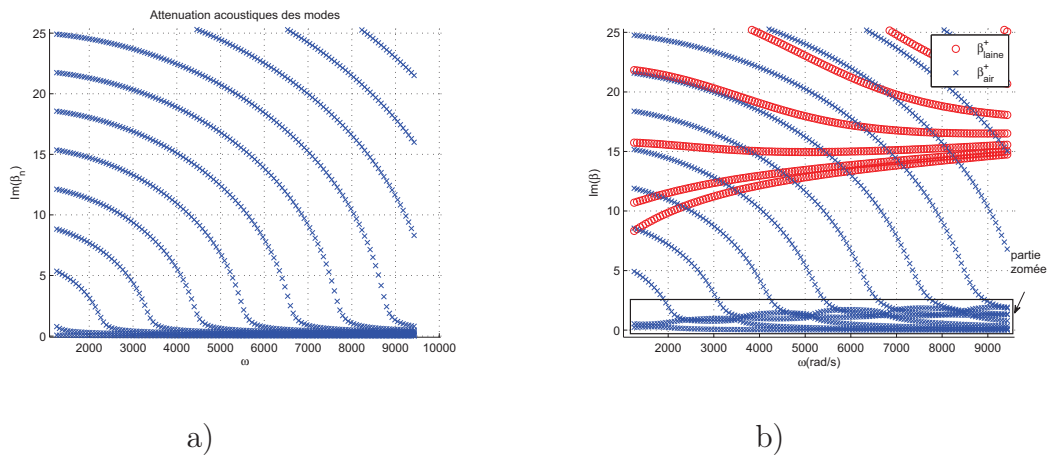


Figure 5.12 – Atténuation (partie imaginaire de  $\beta_n$ ) des modes propres en fonction de  $\omega$  : a) guide à paroi absorbante avec  $Z = 1.5 - 1.5i$ , b) guide contenant de la laine de verre.

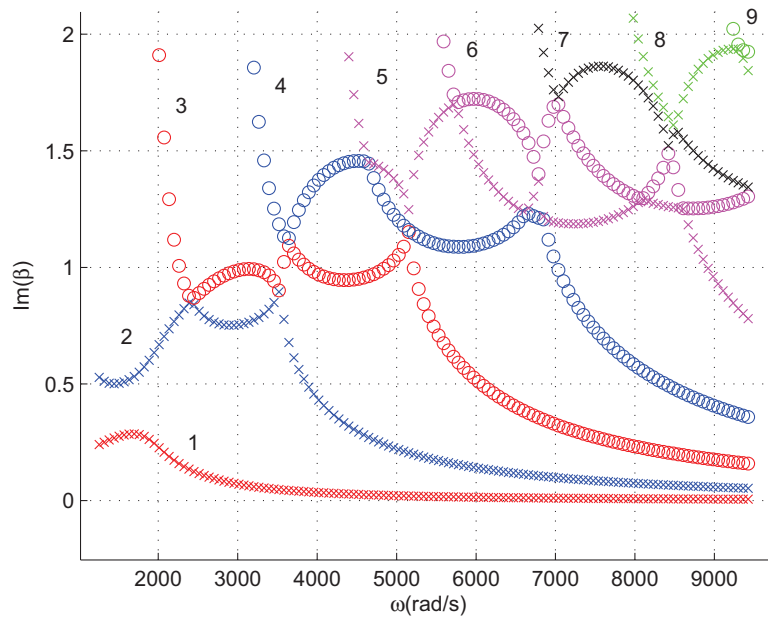


Figure 5.13 – Zoom sur la partie inférieure de l’atténuation des modes pour le guide à paroi recouverte de la laine de verre avec identification de chaque mode.

### 2.2.2 Orthogonalité des modes

Comme nous l’avons vu aux chapitres précédents, pour écrire une condition limite transparente basée sur un opérateur DtN, il est nécessaire de calculer les coefficients modaux  $A_n$  qui apparaissent dans la décomposition modale de la pression acoustique (5.15). Il est donc nécessaire d’établir une relation d’orthogonalité entre les modes. Au chapitre 2 nous avons vu que dans le cas d’un guide axisymétrique traité par un matériau absorbant d’impédance  $Z$ , il existe une relation de biorthogonalité entre les modes du guide permettant de calculer les coefficients modaux. Dans le cas d’un guide traité avec un matériau poreux, puisque l’étude se fait dans les deux milieux, la situation devient alors différente. De même il faut tenir compte des conditions de continuité (5.20) et (5.23) à l’interface du fluide et du poreux. Il est donc nécessaire d’examiner la relation qui existe entre les modes.

On considère les fonctions définies dans l’équation (5.17) par les modes d’ordre  $n$  se propageant suivant les  $x$  croissants. Pour tenir compte des conditions de continuité à l’interface des deux milieux, on réécrit les équations (5.18) et (5.19) sous la forme :

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{d^2 \theta_{1n}}{dy^2} = - \left( \frac{k_1^2}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_1} \beta_n^2 \right) \theta_{1n} \quad (5.31)$$

$$\frac{\phi}{\rho_2} \frac{d^2 \theta_{2n}}{dy^2} = - \phi \left( \frac{k_2^2}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_2} \beta_n^2 \right) \theta_{2n} \quad (5.32)$$

En multipliant (5.31) par  $\bar{\theta}_{1m}$  et (5.32) par  $\bar{\theta}_{2m}$  et en intégrant respectivement

sur les intervalles  $[0, h_1]$  et  $[h_1, h_2]$ , il vient :

$$\int_0^{h_1} \left( \frac{1}{\rho_1} \frac{d^2 \theta_{1n}}{dy^2} \right) \bar{\theta}_{1m} dy = - \left( \frac{k_1^2}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_1} \beta_n^2 \right) \int_0^{h_1} \theta_{1n} \bar{\theta}_{1m} dy \quad (5.33)$$

$$\int_{h_1}^{h_2} \left( \frac{\phi}{\rho_2} \frac{d^2 \theta_{2n}}{dy^2} \right) \bar{\theta}_{2m} dy = - \phi \left( \frac{k_2^2}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_2} \beta_n^2 \right) \int_{h_1}^{h_2} \theta_{2n} \bar{\theta}_{2m} dy \quad (5.34)$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} & \int_0^{h_1} \left( \frac{1}{\rho_1} \frac{d^2 \theta_{1n}}{dy^2} \right) \bar{\theta}_{1m} dy + \int_{h_1}^{h_2} \left( \frac{\phi}{\rho_2} \frac{d^2 \theta_{2n}}{dy^2} \right) \bar{\theta}_{2m} dy \\ &= - \left( \frac{k_1^2}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_1} \beta_n^2 \right) \int_0^{h_1} \theta_{1n} \bar{\theta}_{1m} dy - \phi \left( \frac{k_2^2}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_2} \beta_n^2 \right) \int_{h_1}^{h_2} \theta_{2n} \bar{\theta}_{2m} dy \end{aligned} \quad (5.35)$$

En intégrant par parties les termes d'ordre 2, on trouve :

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{\rho_1} \int_0^{h_1} \frac{d\theta_{1n}}{dy} \frac{d\bar{\theta}_{1m}}{dy} dy - \frac{\phi}{\rho_2} \int_{h_1}^{h_2} \frac{d\theta_{2n}}{dy} \frac{d\bar{\theta}_{2m}}{dy} dy \\ & + \underbrace{\left[ \frac{1}{\rho_1} \frac{d\theta_{1n}}{dy} \bar{\theta}_{1m} \right]_0^{h_1} + \left[ \frac{\phi}{\rho_2} \frac{d\theta_{2n}}{dy} \bar{\theta}_{2m} \right]_{h_1}^{h_2}}_{(1)} \\ &= - \left( \frac{k_1^2}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_1} \beta_n^2 \right) \int_0^{h_1} \theta_{1n} \bar{\theta}_{1m} dy - \phi \left( \frac{k_2^2}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_2} \beta_n^2 \right) \int_{h_1}^{h_2} \theta_{2n} \bar{\theta}_{2m} dy \end{aligned} \quad (5.36)$$

D'après les conditions limites en  $y = 0$  (5.21) et en  $y = h_2$  (5.22) et la condition de continuité à l'interface (5.20), les termes (1) s'annulent et l'intégrale (5.36) se réduit à :

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{\rho_1} \int_0^{h_1} \frac{d\theta_{1n}}{dy} \frac{d\bar{\theta}_{1m}}{dy} dy - \frac{\phi}{\rho_2} \int_{h_1}^{h_2} \frac{d\theta_{2n}}{dy} \frac{d\bar{\theta}_{2m}}{dy} dy \\ &= - \left( \frac{k_1^2}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_1} \beta_n^2 \right) \int_0^{h_1} \theta_{1n} \bar{\theta}_{1m} dy - \phi \left( \frac{k_2^2}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_2} \beta_n^2 \right) \int_{h_1}^{h_2} \theta_{2n} \bar{\theta}_{2m} dy \end{aligned} \quad (5.37)$$

En échangeant les rôles de  $m$  et de  $n$  et en conjugant, on trouve cette fois-ci :

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{\bar{\rho}_1} \int_0^{h_1} \frac{d\bar{\theta}_{1m}}{dy} \frac{d\theta_{1n}}{dy} dy - \frac{\phi}{\bar{\rho}_2} \int_{h_1}^{h_2} \frac{d\bar{\theta}_{2m}}{dy} \frac{d\theta_{2n}}{dy} dy \\ &= - \left( \frac{\bar{k}_1^2}{\bar{\rho}_1} - \frac{1}{\bar{\rho}_1} \bar{\beta}_m^2 \right) \int_0^{h_1} \bar{\theta}_{1m} \theta_{1n} dy - \phi \left( \frac{\bar{k}_2^2}{\bar{\rho}_2} - \frac{1}{\bar{\rho}_2} \bar{\beta}_m^2 \right) \int_{h_1}^{h_2} \bar{\theta}_{2m} \theta_{2n} dy \end{aligned} \quad (5.38)$$

En soustrayant (5.38) et (5.37), on obtient :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{\bar{\rho}_1} - \frac{1}{\rho_1} \right) \int_0^{h_1} \frac{d\bar{\theta}_{1m}}{dy} \frac{d\theta_{1n}}{dy} dy + \phi \left( \frac{1}{\bar{\rho}_2} - \frac{1}{\rho_2} \right) \int_{h_1}^{h_2} \frac{d\bar{\theta}_{2m}}{dy} \frac{d\theta_{2n}}{dy} dy \\ &= \left( \frac{\bar{k}_1^2}{\bar{\rho}_1} - \frac{k_1^2}{\rho_1} \right) \int_0^{h_1} \bar{\theta}_{1m} \theta_{1n} dy + \phi \left( \frac{\bar{k}_2^2}{\bar{\rho}_2} - \frac{k_2^2}{\rho_2} \right) \int_{h_1}^{h_2} \bar{\theta}_{2m} \theta_{2n} dy \\ &+ \left( \frac{1}{\rho_1} \beta_n^2 - \frac{1}{\bar{\rho}_1} \bar{\beta}_m^2 \right) \int_0^{h_1} \bar{\theta}_{1m} \theta_{1n} dy + \phi \left( \frac{1}{\rho_2} \beta_n^2 - \frac{1}{\bar{\rho}_2} \bar{\beta}_m^2 \right) \int_{h_1}^{h_2} \bar{\theta}_{2m} \theta_{2n} dy \end{aligned} \quad (5.39)$$



A partir du moment où  $\rho_2$  et  $k_2$  sont toujours complexes pour un matériau poreux, il apparait que le problème aux valeurs propres n'est pas auto-adjoint et par conséquent, les modes ne sont pas orthogonaux au sens du produit scalaire usuel.

En revanche, si on ne prend plus le conjugué de  $\theta_{1n}$ ,  $\theta_{2n}$ ,  $k_2$  et de  $\rho_2$ , l'équation (5.39) devient :

$$(\beta_n^2 - \beta_m^2) \left( \frac{1}{\rho_1} \int_0^{h_1} \theta_{1m} \theta_{1n} dy + \frac{\phi}{\rho_2} \int_{h_1}^{h_2} \theta_{2m} \theta_{2n} dy \right) = 0 \quad (5.40)$$

Ainsi, si  $\beta_n \neq \beta_m$ , cela signifie que :

$$\frac{1}{\rho_1} \int_0^{h_1} \theta_{1m} \theta_{1n} dy + \frac{\phi}{\rho_2} \int_{h_1}^{h_2} \theta_{2m} \theta_{2n} dy = 0 \quad (5.41)$$

On définit alors la relation d'orthogonalité suivante :

$$(\theta_n, \theta_m)_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2}^* = \frac{1}{\rho_1} \int_0^{h_1} \theta_{1m} \theta_{1n} dy + \frac{\phi}{\rho_2} \int_{h_1}^{h_2} \theta_{2m} \theta_{2n} dy = 0 \quad \text{si } n \neq m \quad (5.42)$$

**Remarque :** Pour un guide composé d'un seul milieu (ie.  $\rho_1 = \rho_2$ ), alors  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ , les modes redeviennent orthogonaux au sens du produit scalaire usuel sur  $L^2(\Omega)$  :

$$(\theta_n, \bar{\theta}_m)_\Sigma = \int_0^h \bar{\theta}_m \theta_n dy = 0 \quad \text{si } n \neq m \quad (5.43)$$

### 2.2.3 Normalisation des modes

La construction d'une condition limite transparente (opérateur DtN) sur les frontières artificielles nécessite de décomposer la pression sur une base des modes. Ce qui implique une détermination des coefficients modaux  $A_n$  déjà mentionnés plus haut. Pour calculer la norme d'un mode d'ordre  $n$ , on utilise la relation d'orthogonalité définie par (5.42) sur  $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$  :

$$(\theta_n, \theta_n)^* = \frac{1}{\rho_1} \int_0^{h_1} \theta_{1n} \theta_{1n} dy + \frac{\phi}{\rho_2} \int_{h_1}^{h_2} \theta_{2n} \theta_{2n} dy \quad (5.44)$$

avec :

$$\theta_{1n}(y) = a_{1n} \cos(\alpha_{1n} y) \quad (5.45)$$

$$\theta_{2n}(y) = a_{2n} \cos(\alpha_{2n}(y - h_2)) \quad (5.46)$$

où d'après la condition de continuité de la pression (5.23) :

$$a_{2n} = a_{1n} \frac{\cos(\alpha_{1n} h_1)}{\cos(\alpha_{2n}(h_1 - h_2))}$$

Après intégration de l'équation (5.44), les coefficients  $a_{1n}$  s'expriment par :

$$a_{1n} = \sqrt{\frac{1}{f+g}} ; \quad f+g \neq 0 \quad (5.47)$$

avec

$$f = \frac{2\alpha_{1n} h_1 + \sin(2\alpha_{1n} h_1)}{4\alpha_{1n} \rho_1}$$

$$g = \frac{\phi \cos^2(\alpha_{1n} h_1)}{4\alpha_{2n} \rho_2 \cos^2(\alpha_{2n}(h_1 - h_2))} \left[ 2\alpha_{2n}(h_2 - h_1) + \sin(2\alpha_{2n}(h_2 - h_1)) \right] \quad (5.48)$$

### 2.3 Condition limite transparente dans un guide traité avec des matériaux poreux

Notre but ici est d'appliquer les méthodes utilisées dans les chapitres précédents pour l'écriture d'une condition limite transparente basée sur un opérateur DtN pour des guides traités avec des matériaux poreux.

On considère le guide 2D infini représenté sur la Figure 5.14-a tel que  $\Omega_{1\infty} = \{-\infty < x < +\infty, 0 < y \leq h_1\}$  et  $\Omega_{2\infty} = \{-\infty < x < +\infty, h_1 \leq y < h_2\}$ . Une source  $f$  circulaire à support compact est placée dans le milieu 1  $\Omega_{1\infty}$ . Pour résoudre le problème de propagation acoustique dans le guide par la méthode des éléments finis, on tronque le domaine infini par les frontières artificielles  $\Sigma_-$  et  $\Sigma_+$  (voir Figure 5.14-b) sur lesquelles sont écrites des conditions limites transparentes (5.14). Ces conditions limites transparentes sont basées sur une décomposition de la pression sur la base des modes propres du guide (5.15).

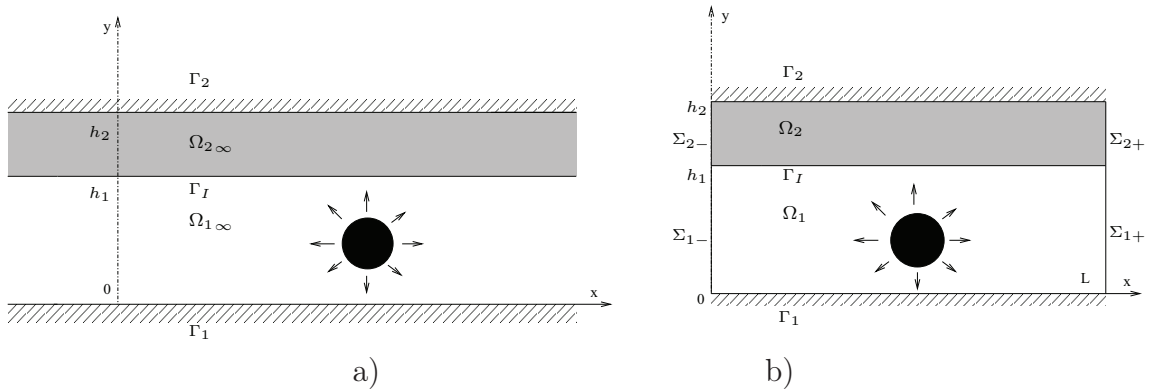


Figure 5.14 – Guide 2D traité avec un matériau poreux : a) Guide infini ; b) guide tronqué

D'après l'équation (5.44), les modes forment une base orthonormée sur  $L^2(\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2)$ . On peut donc décomposer la pression acoustique en aval de la frontière  $\Sigma_+$  dans cette base sous la forme :

$$p(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \theta_n(y) e^{i\beta_n^\pm(x-L)} \quad \text{avec} \quad \theta_n(y) = \begin{cases} \theta_{1n}(y) & \text{pour } 0 \leq y \leq h_1 \\ \theta_{2n}(y) & \text{pour } h_1 \leq y \leq h_2 \end{cases} \quad (5.49)$$

En particulier en  $x = L$ , on a :

$$p(L, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \theta_n(y) \quad (5.50)$$

En appliquant la relation d'orthogonalité (5.42) définie dans § 2.2.2 entre  $p$  et un mode

$$\theta_m(y) = \begin{cases} \theta_{1m}(y) & 0 \leq y \leq h_1 \\ \theta_{2m}(y) & h_1 \leq y \leq h_2 \end{cases} \quad (5.51)$$

il vient :

$$(p, \theta_m)_{\Sigma_+}^* = \int_0^{h_2} \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \theta_n(y) \theta_m(y) dy \quad (5.52)$$

Soit :

$$(p, \theta_m)_{\Sigma_+}^* = \int_0^{h_1} \frac{1}{\rho_1} \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \theta_{1n}(y) \theta_{1m}(y) dy + \int_{h_1}^{h_2} \frac{\phi}{\rho_2} \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \theta_{2n}(y) \theta_{2m}(y) dy \quad (5.53)$$

Ou encore :

$$(p, \theta_m)_{\Sigma_+}^* = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \left( \frac{1}{\rho_1} \int_0^{h_1} \theta_{1n}(y) \theta_{1m}(y) dy + \frac{\phi}{\rho_2} \int_{h_1}^{h_2} \theta_{2n}(y) \theta_{2m}(y) dy \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n (\theta_n, \theta_m)_{\Sigma_+}^* \quad (5.54)$$

D'après (5.44),  $(\theta_n, \theta_m)_{\Sigma_+}^* = \delta_{nm}$  d'où :

$$A_n = (p, \theta_m)_{\Sigma_+}^* \quad (5.55)$$

On trouve alors la dérivée de la pression sur  $\Sigma_+$  :

$$\frac{\partial p(L, y)}{\partial x} = \sum_{n=0}^{+\infty} i\beta_n^+(p, \theta_m)_{\Sigma_+}^* \theta_n(y) \quad (5.56)$$

L'opérateur DtN sur  $\Sigma_+$  est donc donné par :

$$T_p(p)^+ = - \sum_{n=0}^{+\infty} i\beta_n^+(p, \theta_m)_{\Sigma_+}^* \theta_n(y) \quad (5.57)$$

Par un raisonnement similaire on trouve l'opérateur DtN sur la frontière  $\Sigma_-$  :

$$T_p(p)^- = \sum_{n=0}^{+\infty} i\beta_n^-(p, \theta_m)_{\Sigma_-}^* \theta_n(y) \quad (5.58)$$

La résolution par la méthode des éléments finis du problème formé des équations (5.1) et (5.2) nécessite d'écrire une formulation variationnelle de ce problème en prenant en compte les conditions aux limites aux bords et à l'interface des deux milieux.

### 2.3.1 Formulation variationnelle

Pour écrire la formulation variationnelle associée au problème de propagation acoustique dans le guide tout en prenant en compte la condition (5.13) [58] à l'interface entre le fluide et le poreux, on réécrit les équations (5.1) et (5.2) comme suit :

$$\frac{1}{\rho_1} \Delta p_{1n} + \frac{k_1^2}{\rho_1} p_{1n} = f_s \quad \text{sur } \Omega_1 \quad (5.59)$$

$$\frac{\phi}{\rho_2} \Delta p_{2n} + \frac{\phi k_2^2}{\rho_2} p_{2n} = 0 \quad \text{sur } \Omega_2 \quad (5.60)$$

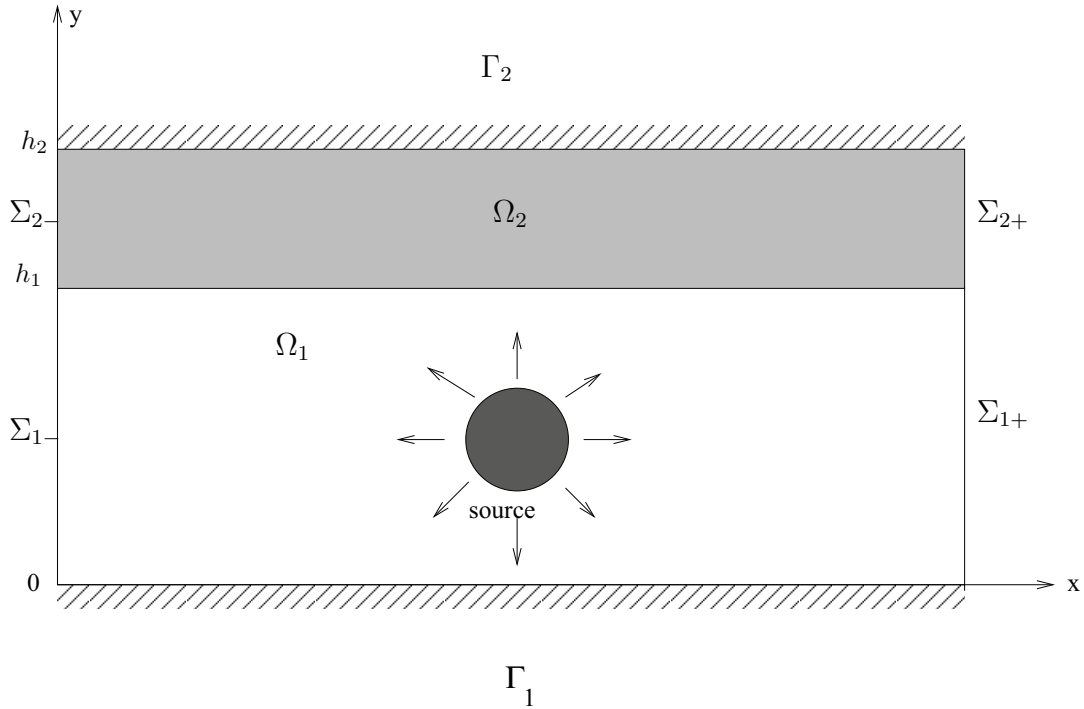


Figure 5.15 – Guide infini tronqué avec source

où  $f_s$  est une source acoustique à support compact qui rayonne dans le domaine  $\Omega_1$  comme indiqué dans la Figure (5.15).

En multipliant les équations (5.59) et (5.60) par  $\psi$  et en intégrant sur le domaine  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  et en prenant en compte les conditions aux limites (5.3), (5.4), (5.14) et la condition de continuité (5.20), la formulation variationnelle s'écrit : Trouver  $p \in H^1(\Omega)$ , tel que  $\forall \psi \in H^1(\Omega)$  :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \left( \frac{1}{\rho_1} \nabla p_1 \nabla \psi - \frac{k_1^2}{\rho_1} p_1 \psi \right) d\Omega + \int_{\Omega_2} \left( \frac{\phi}{\rho_2} \nabla p_2 \nabla \psi - \frac{\phi k_2^2}{\rho_2} p_2 \psi \right) d\Omega \quad (5.61) \\ + \int_{\Sigma_+} T^+(p) \psi d\Sigma - \int_{\Sigma_-} T^-(p) \psi d\Sigma = - \int_{\Omega_1} f_s \psi d\Omega \end{aligned}$$

On remarque que cette formulation variationnelle est la somme des formulations variationnelles associées au problème de propagation acoustique dans les deux milieux. De même, elle fait intervenir la masse volumique de l'air et la masse volumique et la porosité du matériau poreux.

### 2.3.2 Résultats numériques

On présente dans cette section quelques exemples d'illustration de la propagation acoustique dans un guide 2D infini traité avec un matériau absorbant à réaction non localisée modélisé par un fluide équivalent. Le domaine  $\Omega_1$  de hauteur  $h_1 = 1$  contient de l'air dont les caractéristiques sont :  $c_1 = 344 \text{ m/s}$ ,  $\rho_1 = 1,2 \text{ kg/m}^3$ . Le domaine  $\Omega_2$  est constitué d'une laine de verre dont les paramètres de Johnson-Champoux-Allard sont dans le Tableau 5.4.

On considère une première configuration où une condition de Dirichlet est imposée sur la frontière  $\Sigma_-$  permettant ainsi d'obtenir des solutions analytiques. Dans

ce cas, le problème de propagation change, il n'y a plus de second membre dans l'équation (5.59) ( $f_s = 0$ ) et seul l'opérateur DtN sur la frontière  $\Sigma_+$  apparaît dans la formulation variationnelle (5.61). Une dernière configuration où une source acoustique  $f_s$  circulaire est placée dans  $\Omega_1$  ou dans  $\Omega_2$  est présentée. Les résultats de cette configuration sont comparés avec des résultats provenant de l'utilisation des couches PML [1].

### A - Guide semi infini

On présente la répartition de la pression (isosurfaces) dans un guide 2D semi infini tronqué par la frontière  $\Sigma_+$  ( $x = L = 2$ ) dont une condition de Dirichlet est imposée sur la frontière  $\Sigma_-$  ( $x = 0$ ). Le guide est traité avec de la laine de verre avec  $h_1 = 1$  et  $h_2 = 1.5$  (voir Figure 5.7, page 108). Après la détermination des modes transverses du guide et les constantes de propagation associées, il est possible de calculer la pression dans n'importe quelle partie du guide. Les solutions analytiques obtenues permettent de valider la méthode développée dans cette étude en les considérant comme solutions de référence.

Le domaine de calcul est constitué de 740 éléments triangulaires de Lagrange d'ordre 2. Les simulations numériques sont réalisées à l'aide de la bibliothèque MELINA [78].

La Figure 5.17 montre la répartition de la pression dans le guide lorsque l'on impose le premier mode (premier mode situé dans l'air, voir Figure 5.16) sur la frontière  $\Sigma_-$  pour une fréquence  $f = 400$  Hz. On constate que le mode se propage dans l'air avec une décroissance rapide dans l'absorbant. Ce résultat confirme ce qui avait déjà été expliqué plus haut (section 2.2.1 page 109).

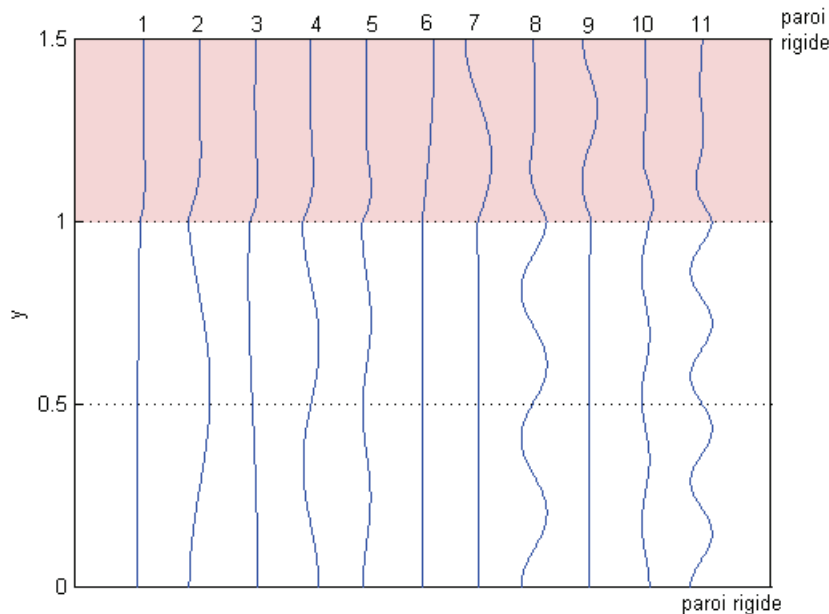


Figure 5.16 – Répartition de la partie réelle des modes transverses  $\theta_n$  pour un guide traité avec de la laine de verre :  $f = 400$  Hz.

La Figure 5.18 présente la répartition de la pression dans le guide lorsque l'on impose le sixième mode (premier mode situé dans le poreux, voir Figure 5.16) sur  $\Sigma_-$ . On constate que non seulement le mode se propage uniquement dans l'absorbant mais, il est fortement atténué. Pour les deux cas (Figure 5.17 et Figure 5.18), l'opérateur DtN sur la frontière  $\Sigma_+$  est calculé avec les dix premiers modes. L'erreur relative entre la solution analytique et la solution numérique est très faible (voir Tableau 5.6).

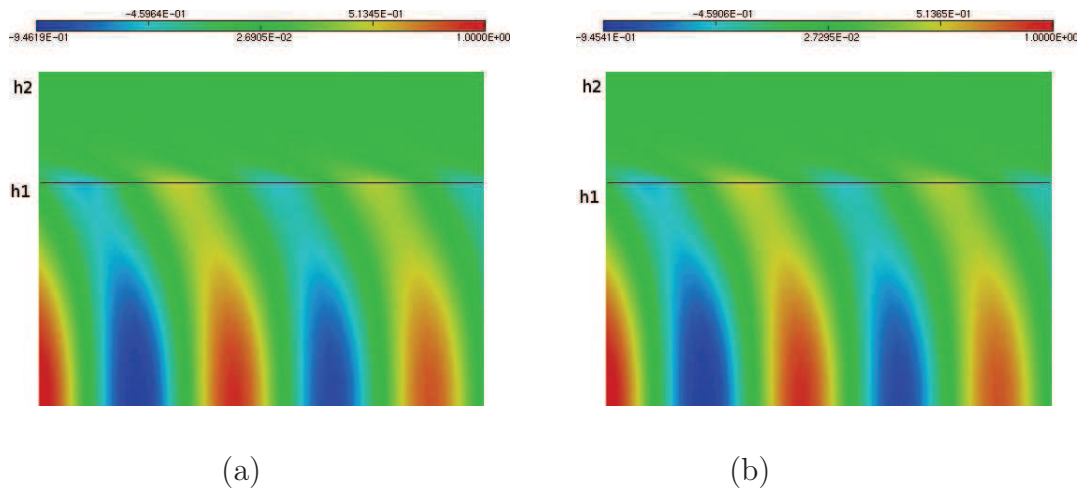


Figure 5.17 – Partie réelle de la pression dans le guide en présence de la laine de verre pour une fréquence  $f = 400$  Hz ( $h_1 = 1$ ,  $k_1 = 7.306$ ;  $h_2 = 1.5$ ,  $k_2 = 14.957 + 10.482i$ ) : (a) Solution par éléments finis et opérateur DtN; (b) solution analytique. Premier mode imposé sur  $\Sigma_-$ .

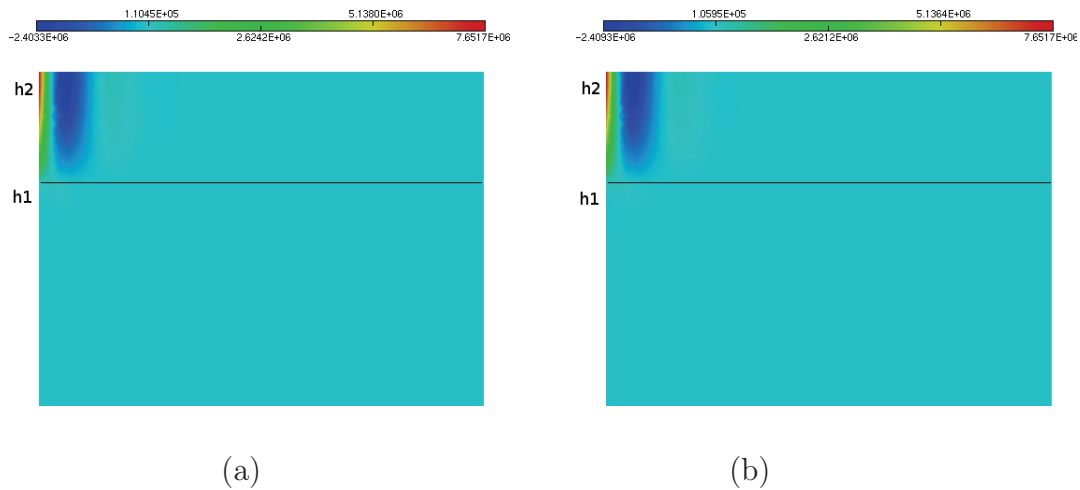


Figure 5.18 – (a) Partie réelle de la pression dans le guide en présence de la laine de verre pour une fréquence  $f = 400$  Hz ( $h_1 = 1$ ,  $k_1 = 7.306$ ;  $h_2 = 1.5$ ,  $k_2 = 14.957 + 10.482i$ ) : (a) Solution par éléments finis et opérateur DtN; (b) solution analytique. sixième mode imposé sur  $\Sigma_-$ .

n	mode imposé		erreur relat. en norme $L^2(\Omega)$	
	$\alpha_{1n}$	$\alpha_{2n}$	air	poreux
1	1.656256 - 0.497374i	13.805495 + 11.297389i	0.001902	0.009951
6	11.547283 - 13.558488i	3.158665 + 0.071587i	0.031939	0.007516

Tableau 5.6 – Erreurs relatives en norme  $L^2(\Omega)$  pour un mode d'ordre  $n$  imposé sur  $\Sigma_-$  pour une fréquence  $f = 400$  Hz ( $h_1 = 1$ ,  $k_1 = 7.306$ ;  $h_2 = 1.5$ ,  $k_2 = 14.957 + 10.482i$ )

## B - Guide infini

On considère maintenant un guide 2D infini dans lequel rayonne une source  $f_s = 1$  circulaire de rayon  $R_{f_s} = 0.15$  à support compact placée dans le domaine  $\Omega_1$ . Le guide est encore traité avec la laine de verre avec  $h_1 = 1$  et  $h_2 = 1.5$  (voir Figure 5.15). Il est tronqué par les frontières artificielles  $\Sigma_-$  et  $\Sigma_+$  (respectivement en  $x = 0$  et  $x = L = 1$ ) sur lesquelles seront appliquées les conditions limites transparentes.

Les solutions trouvées avec la méthode des éléments finis et de l'opérateur DtN sont comparées avec des solutions provenant de l'utilisation des couches PML d'épaisseur  $e = 0.4$  placées de part et d'autre de  $\Sigma_-$  et  $\Sigma_+$ . Le domaine de calcul est ici constitué de 2682 éléments triangulaires de Lagrange d'ordre 2.

La Figure 5.19 montre la répartition de la pression acoustique dans le guide pour une fréquence  $f = 400$  Hz. L'opérateur DtN sur les frontières artificielles  $\Sigma_-$  et  $\Sigma_+$  est calculé avec les dix premiers modes. On constate que le rayonnement se fait uniquement dans l'air, l'onde est absorbée dans le matériau poreux.

Afin de tester encore l'opérateur DtN, le rayonnement d'une source semi-circulaire de même rayon que celui de l'exemple précédent placée près de l'interface du fluide et du poreux est présenté sur la Figure 5.20. On constate encore que l'onde acoustique est fortement atténuée dans l'absorbant, la propagation se fait essentiellement dans l'air. Les solutions avec l'opérateur DtN et celles avec les PML sont en bon accord pour les deux cas (Figure 5.19 et Figure 5.20). L'erreur relative est inférieure à 1%.

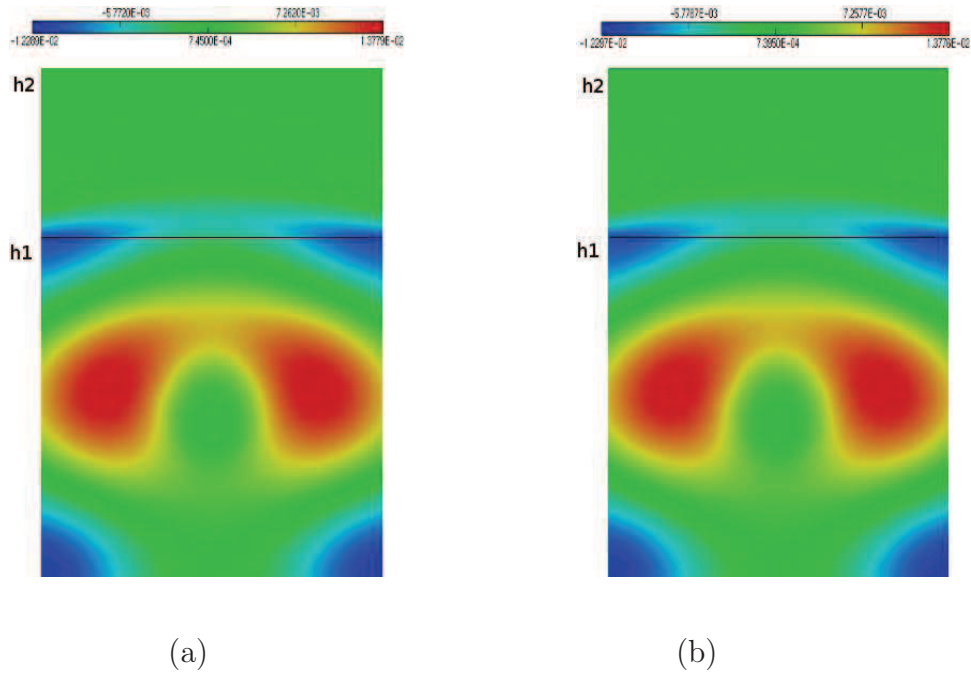


Figure 5.19 – Partie réelle de la pression avec DtN pour une fréquence  $f = 400$  Hz, source située dans l'air : (a) Solution par éléments finis et opérateur DtN ; (b) Solution par éléments finis et couches PML ( $\nu = 0.31(1 - i)$ )

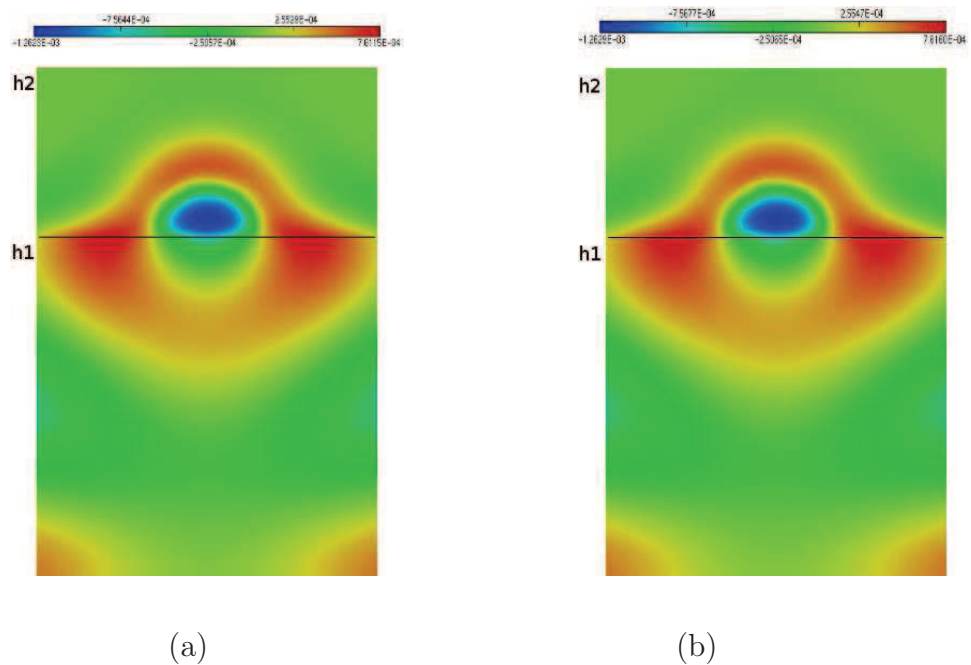


Figure 5.20 – Partie réelle de la pression avec DtN pour une fréquence  $f = 400$  Hz, source située dans la laine de verre : (a) Solution par éléments finis et opérateur DtN ; (b) Solution par éléments finis et couches PML ( $\nu = 0.32(1 - i)$ )



### 3 Guide 2D avec matériaux poreux en présence d'un écoulement uniforme

Dans cette section, notre objectif est d'étudier l'influence d'un écoulement uniforme sur l'écriture d'un opérateur DtN pour un guide bidimensionnel infini traité avec un matériau absorbant à réaction non localisée. Comme nous l'avons vu dans les sections précédentes, l'étude de la propagation acoustique se fait de manière séparée dans le milieu fluide et dans l'absorbant (matériau poreux). Le passage d'un milieu à un autre nécessite des conditions de continuité adéquates de la pression et du déplacement normal à l'interface. En l'absence d'écoulement, nous avons vu que la continuité du déplacement normal équivaut à la continuité de la vitesse normale (5.13). Pour déterminer les modes transverses dans les deux milieux, ces conditions de continuité doivent être impérativement prises en compte. De même, nous avons vu que les modes ne sont pas orthogonaux au sens du produit scalaire usuel. Pour écrire l'opérateur DtN nous avons donc utilisé une nouvelle relation de biorthogonalité (5.42) qui s'exprime en fonction des masses volumiques des deux milieux.

En présence d'un écoulement uniforme dans le guide, une situation différente se présente. En effet, comme nous le verrons par la suite, la condition de continuité du déplacement s'exprime maintenant par des dérivées tangentielles. La prise en compte de cette condition de continuité dans la recherche des modes est délicate. Comme dans le cas sans écoulement, les modes ne sont pas orthogonaux au sens du produit scalaire usuel. Cependant, il n'existe plus de relation de biorthogonalité entre les modes. De même, nous verrons qu'il n'existe pas non plus de relation d'orthogonalité asymptotique comme dans le cas du chapitre 3 où le guide était traité avec un matériau absorbant d'impédance  $Z$ .

Plusieurs auteurs ont utilisé les matériaux poreux comme absorbants dans les guides d'ondes. Cependant, la plupart des études sont basées sur des méthodes modales pour lesquelles il est possible de prendre en compte d'une manière relativement simple les conditions de continuité à l'interface fluide - poreux.

Astley et Cummings [65] ont proposé une méthode d'éléments finis pour l'étude de l'atténuation acoustique dans des guides tridimensionnels traités avec des matériaux absorbants à réaction non localisée en présence d'un écoulement uniforme. Ils calculent les modes du guide suivant la section transversale, ce qui permet de prendre facilement en compte les conditions de continuité à l'interface entre le fluide et le poreux.

Cummings et Chang [66] ont étudié théoriquement et expérimentalement le champ acoustique dans un guide axisymétrique traité avec un matériau poreux en présence d'écoulement uniforme dans les deux milieux. Leur méthode de résolution est aussi basée sur une méthode modale. Ces mêmes auteurs ont étudié dans [67] à l'aide de la méthode de mode matching l'effet d'un écoulement dans les pores sur les propriétés acoustiques du matériau poreux. Ils ont notamment étudié les pertes par transmission dans des silencieux dissipatifs à chambre d'expansion.

D'autres études ont été menées par la suite par Bies *et al* [116], Peat et Rathi [68], Kakoty et Roy [69] et Sun *et al* [117]. Toutes ces études sont basées sur des méthodes modales sauf celle de Peat et Rathi qui ont opté pour une méthode

d'éléments finis 3D en utilisant deux techniques dites "élimination du gradient " et "évaluation du gradient" pour assembler les matrices éléments finis des deux milieux. Cependant, leur méthode ne tient pas compte des modes dans le guide.

Étant donné qu'il n'existe plus de relation d'orthogonalité, il n'est plus possible de déterminer les coefficients modaux issus de la décomposition de la pression. Nous limiterons donc l'étude sur les modes propres du guide.

Nous commençons cette section par une définition du problème de propagation acoustique dans le guide. Ensuite nous effectuons une étude des modes propres et nous terminerons par une étude de la relation d'orthogonalité entre les modes.

### 3.1 Définition du problème

On considère un guide 2D infini traité avec un matériau absorbant à réaction non localisée en présence d'un écoulement uniforme comme l'indique la Figure 5.21. Dans le milieu poreux, le fluide est supposé au repos, l'équation de propagation

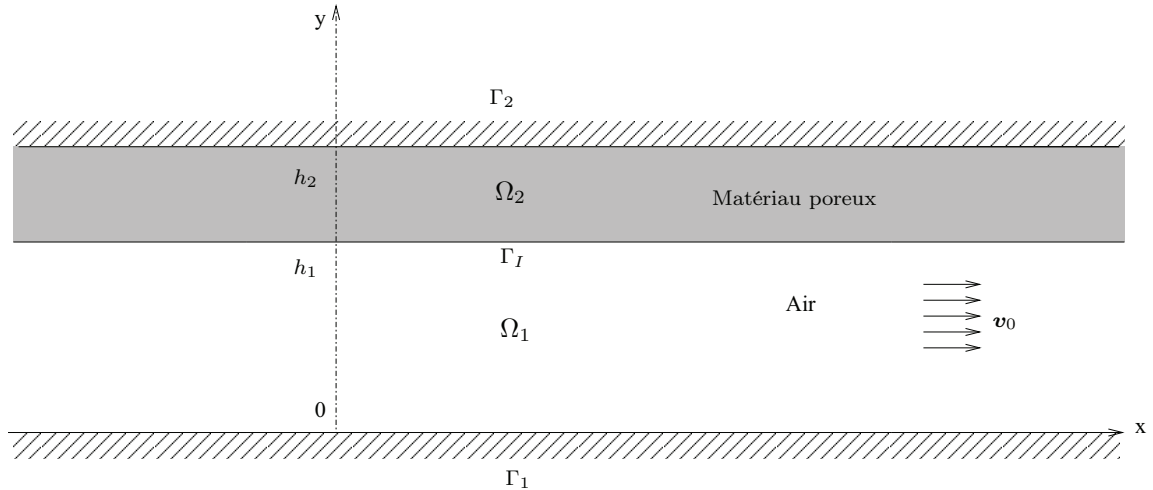


Figure 5.21 – Guide 2D infini traité avec un matériau poreux en présence d'écoulement uniforme

acoustique reste inchangée :

$$\frac{\partial^2 p_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} + k_2^2 p_2 = 0 \tag{5.62}$$

Dans le milieu fluide (domaine  $\Omega_1$ ), la propagation acoustique est donnée par l'équation de Helmholtz convectée :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2} + (1 - M^2) \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + 2ikM \frac{\partial p_1}{\partial x} + k_1^2 p_1 = 0 \tag{5.63}$$

où  $M$  est le nombre de Mach. Les conditions aux limites sur les parois  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont données par :

$$\frac{\partial p_1}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \tag{5.64}$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \tag{5.65}$$

La condition de continuité de la pression et du déplacement normal à l'interface des deux milieux implique que :

$$p_1 = p_2 \quad \text{sur } \Gamma_I \quad (5.66)$$

$$\boldsymbol{\xi}_1 \cdot \mathbf{n} = \phi \boldsymbol{\xi}_2 \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \Gamma_I \quad (5.67)$$

En présence de l'écoulement, l'équation de conservation de la quantité du mouvement dans le domaine fluide est donnée en régime harmonique ( $e^{-i\omega t}$ ) par :

$$\rho_1 c_1 (-ik_1 + M \frac{\partial}{\partial x}) \mathbf{v}_1 = -\nabla p_1 \quad (5.68)$$

$$c_1 (-ik_1 + M \frac{\partial}{\partial x}) \boldsymbol{\xi}_1 = \mathbf{v}_1 \quad (5.69)$$

En introduisant l'équation (5.69) dans l'équation (5.68) on trouve le déplacement normal  $\boldsymbol{\xi}_1 \cdot \mathbf{n}$  sous la forme :

$$\boldsymbol{\xi}_1 \cdot \mathbf{n} = -\frac{1}{\rho_1 c_1^2 (-ik_1 + M \frac{\partial}{\partial x})^2} \nabla p_1 \cdot \mathbf{n} \quad (5.70)$$

Le déplacement normal  $\boldsymbol{\xi}_2 \cdot \mathbf{n}$  à l'interface pour le milieu poreux est inchangé (voir équation 5.12). L'équation de continuité des déplacements devient :

$$-\frac{1}{\rho_1 (-ik_1 + M \frac{\partial}{\partial x})^2} \nabla p_1 \cdot \mathbf{n} = \frac{\phi}{\rho_2 k_1^2} \nabla p_2 \cdot \mathbf{n} \quad (5.71)$$

Soit :

$$\rho_2 k_1^2 \frac{\partial p_1}{\partial n} = -\left[ \rho_1 \phi (-ik_1 + M \frac{\partial}{\partial x})^2 \right] \frac{\partial p_2}{\partial n} \quad (5.72)$$

Cette condition de continuité s'exprime par des dérivées tangentielles de la pression et nous verrons que sa prise en compte dans la détermination d'une relation d'orthogonalité entre les modes n'est plus assurée.

### 3.2 Calcul des modes

Comme dans le cas sans écoulement on recherche les modes transverses du guide par la méthode de séparation des variables. On cherche les solutions sous la forme :

$$p(x, y) = \begin{cases} \theta_1(y) e^{i\beta x} & \left( \theta_1(y) = a_1 \cos(\alpha_1 y) \right) & 0 < y < h_1 \\ \theta_2(y) e^{i\beta x} & \left( \theta_2 = a_2 \cos(\alpha_2 (y - h_2)) \right) & h_1 < y < h_2 \end{cases} \quad (5.73)$$

Le calcul des modes nécessite la prise en compte des conditions aux limites (5.64) et (5.65) et de continuité (5.66) et (5.72) à l'interface des deux milieux. On réécrit donc les équations de propagation sous la forme suivante :

$$\rho_2 k_1^2 \left[ \frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2} + (1 - M^2) \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + 2iMk_1 \frac{\partial p_1}{\partial x} + k_1^2 p_1 \right] = 0 \quad \text{sur } \Omega_1 \quad (5.74)$$

$$\rho_1 \phi \left( M \frac{\partial}{\partial x} - ik_1 \right)^2 \left[ \frac{\partial^2 p_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} + k_2^2 p_2 \right] = 0 \quad \text{sur } \Omega_2 \quad (5.75)$$

On trouve le problème aux valeurs propres suivant :

$$\rho_2 k_1^2 \left[ \frac{d^2 \theta_1}{dy^2} + \left( k_1^2 - (1 - M^2) \beta^2 - 2M\beta k_1 \right) \theta_1 \right] = 0 \quad 0 \leq y \leq h_1 \quad (5.76)$$

$$\left[ \rho_1 \phi (M\beta - k_1)^2 \right] \left[ \frac{d^2 \theta_2}{dy^2} + \left( k_2^2 - \beta^2 \right) \theta_2 \right] = 0 \quad h_1 \leq y \leq h_2 \quad (5.77)$$

$$\left[ \rho_1 \phi (M\beta - k_1)^2 \right] \frac{d\theta_2}{dy} = \rho_2 k_1^2 \frac{d\theta_1}{dy} \quad y = h_1 \quad (5.78)$$

$$\theta_1 = \theta_2 \quad y = h_1 \quad (5.79)$$

$$\frac{d\theta_1}{dy} = 0 \quad y = 0 \quad (5.80)$$

$$\frac{d\theta_2}{dy} = 0 \quad y = h_2 \quad (5.81)$$

Ce problème aux valeurs propres permet d'écrire les équations de dispersion et de l'équation transcendante suivantes :

$$k_1^2 = \alpha_{1n}^2 + (1 - M^2) \beta_n^2 + 2M\beta_n k_1 \quad (5.82)$$

$$k_2^2 = \alpha_{2n}^2 + \beta_n^2 \quad (5.83)$$

$$\rho_2 k_1^2 \alpha_{1n} \tan(\alpha_{1n} h_1) = \left[ \rho_1 \phi \alpha_{2n} (M\beta_n - k_1)^2 \right] \tan(\alpha_{2n} (h_1 - h_2)) \quad (5.84)$$

On détermine les valeurs propres  $\alpha_{1n}$  et  $\alpha_{2n}$  et la constante de propagation  $\beta_n$  numériquement par la méthode de Newton-Raphson. Les valeurs initiales nécessaires pour cette méthode sont déterminées par la méthode des éléments finis suivant la section transversale du guide. La Figure 5.22 montre les premières constantes de propagation  $\beta_n$  dans le plan complexe pour un guide contenant de la laine de verre avec et sans écoulement respectivement pour une fréquence  $f = 400$  Hz.

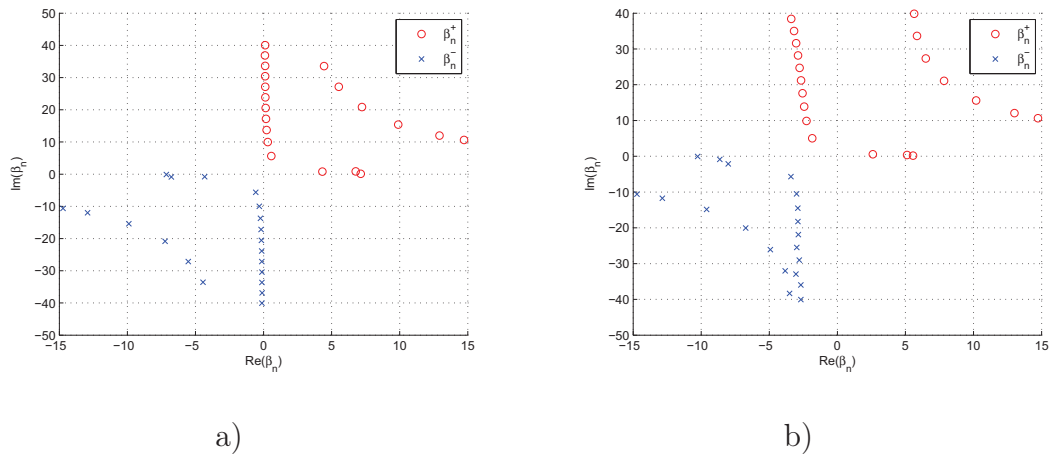


Figure 5.22 – Constantes de propagation  $\beta_n$  avec la laine de verre pour une fréquence  $f = 400$  Hz : a) sans écoulement ; b) en présence d'un écoulement uniforme  $M = 0.3$ .

On remarque qu'en présence d'écoulement, il y a un décalage de la courbe (Figure 5.22-b) par rapport à l'axe des ordonnées ( $Im(\beta_n)$ ). Ce décalage est dû au phénomène de convection de l'écoulement uniforme. On retrouve donc le phénomène classique de la convection des ondes présent dans les guides en présence d'écoulement déjà évoqué dans l'étude du guide cylindrique traité avec un matériau à réaction localisée (voir Chapitre 3). Il est donc possible de déterminer les modes dans un guide traité avec un matériau absorbant à réaction non localisée si les conditions de continuité à l'interface fluide-poreux sont bien prises en compte dans le problème aux valeurs propres du guide.

### 3.3 Relation d'orthogonalité

Comme nous l'avons déjà expliqué, la présence des dérivées tangentielles dans l'équation de continuité du déplacement normal à l'interface du fluide et du poreux ne permet plus de déterminer une relation d'orthogonalité entre les modes.

Reprenons le problème aux valeurs propres ci-dessus (5.76) et (5.77) avec les conditions aux limites (5.80) et (5.81) et de continuité à l'interface des deux milieux (5.78) et (5.79). En multipliant l'équation (5.76) par  $\theta_{1m}$  et l'équation (5.77) par  $\theta_{2m}$  et en intégrant respectivement sur les intervalles  $[0, h_1]$  et  $[h_1, h_2]$ , on a :

$$\rho_2 k_1^2 \left[ \int_0^{h_1} \frac{d^2 \theta_{1n}}{dy^2} \theta_{1m} dy + \left( k_1^2 - (1 - M^2) \beta_n^2 - 2M k_1 \beta_n \right) \int_0^{h_1} \theta_{1n} \theta_{1m} dy \right] = 0 \quad (5.85)$$

$$\left[ \rho_1 \phi (M \beta_n - k_1)^2 \right] \left[ \int_{h_1}^{h_2} \frac{d^2 \theta_{2n}}{dy^2} \theta_{2m} dy + (k_2^2 - \beta_n^2) \int_{h_1}^{h_2} \theta_{2n} \theta_{2m} dy \right] = 0 \quad (5.86)$$

En intégrant par partie les termes d'ordre 2 et en additionnant les intégrales (5.85) et (5.86), il vient :

$$\begin{aligned} & \rho_2 k_1^2 \left[ \int_0^{h_1} \frac{d\theta_{1n}}{dy} \frac{d\theta_{1m}}{dy} dy - \left( k_1^2 - (1 - M^2) \beta_n^2 - 2M k_1 \beta_n \right) \int_0^{h_1} \theta_{1n} \theta_{1m} dy \right] \quad (5.87) \\ & + \left[ \rho_1 \phi (M \beta_n - k_1)^2 \right] \left[ \int_{h_1}^{h_2} \frac{d\theta_{2n}}{dy} \frac{d\theta_{2m}}{dy} dy - (k_2^2 - \beta_n^2) \int_{h_1}^{h_2} \theta_{2n} \theta_{2m} dy \right] \\ & - \rho_2 k_1^2 \frac{d\theta_{1n}}{dy}(h_1) \theta_{1m}(h_1) + \left[ \rho_1 \phi (M \beta_n - k_1)^2 \right] \frac{d\theta_{2n}}{dy}(h_1) \theta_{2m}(h_1) = 0 \end{aligned}$$

D'après les équations de continuité à l'interface des deux milieux (5.78) et (5.79) les termes à l'interface (pour  $y = h_1$ ) de l'équation (5.87) s'annulent et on trouve l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned} & \rho_2 k_1^2 \left[ \int_0^{h_1} \frac{d\theta_{1n}}{dy} \frac{d\theta_{1m}}{dy} dy - \left( k_1^2 - (1 - M^2) \beta_n^2 - 2M k_1 \beta_n \right) \int_0^{h_1} \theta_{1n} \theta_{1m} dy \right] \quad (5.88) \\ & + \left[ \rho_1 \phi (M \beta_n - k_1)^2 \right] \left[ \int_{h_1}^{h_2} \frac{d\theta_{2n}}{dy} \frac{d\theta_{2m}}{dy} dy - (k_2^2 - \beta_n^2) \int_{h_1}^{h_2} \theta_{2n} \theta_{2m} dy \right] = 0 \end{aligned}$$

En échangeant les rôles de  $n$  et de  $m$  dans le problème aux valeurs propres et en

suivant les étapes précédentes, on obtient cette fois :

$$\begin{aligned} & \rho_2 k_1^2 \left[ \int_0^{h_1} \frac{d\theta_{1m}}{dy} \frac{d\theta_{1n}}{dy} dy - \left( k_1^2 - (1 - M^2)\beta_m^2 - 2Mk_1\beta_m \right) \int_0^{h_1} \theta_{1m}\theta_{1n} dy \right] \quad (5.89) \\ & + \left[ \rho_1 \phi (M\beta_m - k_1)^2 \right] \left[ \int_{h_1}^{h_2} \frac{d\theta_{2m}}{dy} \frac{d\theta_{2n}}{dy} dy - (k_2^2 - \beta_m^2) \int_{h_1}^{h_2} \theta_{2m}\theta_{2n} dy \right] = 0 \end{aligned}$$

En soustrayant (5.88) de (5.89), on obtient :

$$\begin{aligned} & \rho_2 k_1^2 \left[ (1 - M^2)(\beta_n^2 - \beta_m^2) + 2Mk_1(\beta_n - \beta_m) \right] \int_0^{h_1} \theta_{1m}\theta_{1n} dy \quad (5.90) \\ & + \rho_1 \phi \left[ M^2(\beta_n^2 - \beta_m^2) - 2Mk_1(\beta_n - \beta_m) \right] \int_{h_1}^{h_2} \frac{d\theta_{2m}}{dy} \frac{d\theta_{2n}}{dy} dy \\ & + \rho_1 \phi \left[ M(\beta_n^3 - \beta_m^3) - k_1^2(\beta_n^2 - \beta_m^2) - Mk_2^2(\beta_n - \beta_m) \right] \int_{h_1}^{h_2} \theta_{2m}\theta_{2n} dy = 0 \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned} & (\beta_n - \beta_m) \left[ \rho_2 k_1^2 \left( (1 - M^2)(\beta_n + \beta_m) + 2Mk_1 \right) \int_0^{h_1} \theta_{1m}\theta_{1n} dy \quad (5.91) \right. \\ & + \rho_1 \phi \left( M^2(\beta_n + \beta_m) - 2Mk_1 \right) \int_{h_1}^{h_2} \frac{d\theta_{2m}}{dy} \frac{d\theta_{2n}}{dy} dy \\ & \left. + \rho_1 \phi \left( M(\beta_n^2 + \beta_n\beta_m + \beta_m^2) - k_1^2(\beta_n + \beta_m) - Mk_2^2 \right) \int_{h_1}^{h_2} \theta_{2m}\theta_{2n} dy \right] = 0 \end{aligned}$$

Si  $(\beta_n \neq \beta_m)$ , cela implique que :

$$\begin{aligned} & \left[ \rho_2 k_1^2 \left( (1 - M^2)(\beta_n + \beta_m) + 2Mk_1 \right) \int_0^{h_1} \theta_{1m}\theta_{1n} dy \quad (5.92) \right. \\ & + \rho_1 \phi \left( M^2(\beta_n + \beta_m) - 2Mk_1 \right) \int_{h_1}^{h_2} \frac{d\theta_{2m}}{dy} \frac{d\theta_{2n}}{dy} dy \\ & \left. + \rho_1 \phi \left( M(\beta_n^2 + \beta_n\beta_m + \beta_m^2) - k_1^2(\beta_n + \beta_m) - Mk_2^2 \right) \int_{h_1}^{h_2} \theta_{2m}\theta_{2n} dy \right] = 0 \end{aligned}$$

Cette relation ne constitue pas une relation d'orthogonalité car elle fait intervenir des termes en  $\beta_n$  et  $\beta_m$  et il existe un terme de dérivée d'ordre 1 pour  $\theta_{2n}$  et  $\theta_{2m}$ . Les modes du guide ne sont donc orthogonaux ni au sens du produit scalaire usuel, ni au sens du produit scalaire développé précédemment pour le cas sans écoulement (5.42). Il n'est pas possible dans ces conditions d'explicitement une condition limite transparente pour le guide car il n'existe pas de relation d'orthogonalité qui permettrait de normaliser les modes et de déterminer les coefficients modaux.

## 4 Conclusion

Cette étude nous a permis d'examiner la propagation acoustique dans des guides 2D traités avec des matériaux poreux à structure rigide que l'on caractérise par un

fluide équivalent. Elle constitue une généralisation de l'étude sur les guides traités avec des matériaux absorbants à réaction localisée caractérisés par une impédance locale. Nous avons notamment pu établir de nouvelles conditions limites transparentes basées sur un opérateur DtN en l'absence d'écoulement.

Cependant, en présence d'écoulement uniforme, l'apparition des dérivées tangentielles dans les conditions de continuité à l'interface entre le milieu fluide et le milieu poreux est la source de difficultés ne permettant plus l'écriture de l'opérateur DtN. En effet, en présence d'écoulement uniforme, nous n'avons pas réussi à établir une relation d'orthogonalité entre les modes permettant de normaliser les modes et de calculer les coefficients modaux. Pour des guides uniformes, le problème peut être résolu par des méthodes modales, par contre pour des guides à géométries complexes, il incombe de trouver de nouvelles techniques permettant de contourner ces difficultés.

# Conclusion et perspectives

Dans cette étude, nous avons développé une condition limite transparente pour la résolution des problèmes de rayonnement acoustique dans des guides à parois traitées par des matériaux absorbants à réaction localisée ou non-localisée en présence d'écoulement. La condition limite transparente présentée est basée sur un opérateur Dirichlet-to-Neumann (DtN) utilisé dans la méthode des éléments finis afin de pouvoir étudier des systèmes complexes rencontrés dans l'industrie (turboréacteurs d'avions, silencieux ...).

L'étude bibliographique présentée dans le chapitre 1 nous a permis de présenter les principaux modèles utilisés pour la propagation acoustique dans les guides. Pour les géométries de forme complexe, la prise en compte d'écoulements réalistes nécessite l'utilisation des équations d'Euler linéarisées ou des équations de Galbrun qui sont des modèles vectoriels pour lesquels on sait que l'écriture de conditions limites transparentes devient délicate par la présence des modes hydrodynamiques. Nos travaux étant davantage orientés vers la prise en compte de matériaux absorbants placés en paroi, nous avons volontairement limité notre étude au cas d'un écoulement uniforme qui mène au modèle scalaire de l'équation de Helmholtz convectée. De plus, les matériaux absorbants à réaction non-localisée utilisés dans notre étude étant modélisés par un fluide équivalent basé également sur l'équation de Helmholtz, le couplage entre le milieu fluide et le milieu poreux se fait de manière naturelle. Cependant, nous avons mis en évidence de nombreuses difficultés liées à la prise en compte d'un matériau absorbant même sans écoulement.

L'écriture de l'opérateur DtN repose sur la décomposition de la pression acoustique sur la base des modes propres d'une section transverse du guide. Notre méthode permet donc de traiter des problèmes de propagation dans des guides à géométries complexes à condition que la partie à étudier soit comprise entre des portions rectilignes sur lesquelles il est possible de décomposer la pression. Pour l'ensemble des situations étudiées, une part importante de notre travail a donc été consacrée au calcul et à l'étude des modes. Les spectres des valeurs propres ont été représentés dans le plan complexe, les courbes de dispersion et d'atténuation ont été tracées et le comportement asymptotique des modes a été étudié pour les guides traités par des matériaux absorbants à réaction localisé.

Après une présentation des principales étapes pour établir l'expression de l'opérateur DtN dans le cas simple d'un guide rigide dans le premier chapitre, la méthode a été exposée en détail dans les chapitres 2, 3 pour différentes configurations en présence d'un matériau absorbant à réaction localisé caractérisé par une impédance complexe  $Z$ .

Dans le chapitre 2, un opérateur DtN pour des guides axisymétriques infinis traités



tés par des matériaux absorbants à réaction localisée a été développé en l'absence d'écoulement. Nous avons vu que les modes du guide ne sont pas orthogonaux au sens du produit scalaire usuel puisque le problème n'est plus auto-adjoint contrairement au cas du guide rigide. Néanmoins, l'existence d'une relation de biorthogonalité permet d'écrire l'opérateur DtN sauf pour des valeurs particulières de l'impédance. Des résultats originaux pour le rayonnement d'une source acoustique dans des guides non uniformes ont notamment été présentés et comparés avec succès avec des solutions obtenues avec des couches PML.

Dans le chapitre 3, nous avons étendu l'étude aux cas des guides axisymétriques traités par des matériaux absorbants à réaction localisée en présence d'un écoulement uniforme. Dans cette situation, les modes ne sont toujours pas orthogonaux mais, en s'inspirant de travaux réalisés en 2D [28, 81], une relation d'orthogonalité asymptotique incluant les valeurs de la pression sur la paroi traitée a été établie. L'opérateur DtN s'exprime alors en fonction d'une matrice spectrale qui tend à devenir diagonale quand l'ordre des modes augmente. Des résultats numériques ont permis de valider avec succès la méthode sur des guides droits. L'étude de l'erreur en fonction du nombre de modes utilisés dans la décomposition modale a permis de montrer que l'opérateur DtN reste précis même avec peu de modes, c'est à dire avant d'atteindre le régime asymptotique. Enfin, pour montrer que la méthode est applicable pour des exemples moins académiques, nous avons traité le cas d'un guide non uniforme en présence d'un écoulement potentiel et d'un matériau absorbant. Pour cet exemple, le champ des vitesses a été déterminé numériquement par la résolution de l'équation de Laplace, mais nous avons mis en évidence d'importantes difficultés qui relèvent de la prise en compte de la condition limite d'impédance traduite par la condition de Myers. En effet, la condition de Myers, qui s'exprime assez simplement dans le cas d'un guide droit, fait apparaître des dérivées normale et tangentielle difficiles à expliciter pour une section variable. La difficulté est levée par l'utilisation d'une méthode proposée par Eversman [9] basée sur l'utilisation du théorème de Stokes.

Après avoir étudié les guides traités par des matériaux absorbants à réaction localisée modélisés par une impédance de paroi, le cas des matériaux à réaction non localisée a été abordé. Le chapitre 4 nous a permis de présenter les principales caractéristiques et propriétés des matériaux absorbants à réaction localisée utilisés dans les chapitres 2 et 3 et celles des matériaux absorbants à réaction non localisée (matériaux poreux) utilisés dans le dernier chapitre. En particulier, nous avons distingué les matériaux poreux à squelette rigide des matériaux poroélastiques à squelette élastique. Nous nous sommes plus particulièrement intéressés aux matériaux poreux à squelette rigide que l'on peut décrire par des modèles de fluides équivalents. En effet, pour ces matériaux, des modèles performants basés sur un nombre de paramètres variable sont disponibles dans la littérature. Ces modèles de fluides équivalents permettent de modéliser avec précision le comportement d'une large gamme de matériaux utilisés dans l'industrie. D'autre part, la propagation acoustique dans ces milieux est décrite par une équation de Helmholtz pour la pression du même type que celle utilisée dans le milieu fluide, ce qui facilite la recherche des modes et le couplage entre les deux milieux.

Le calcul des modes dans un guide traité par un matériau poreux modélisé par un fluide équivalent a permis de mettre en évidence l'existence de deux type de modes

facilement identifiables sur les spectres des valeurs propres représentés dans le plan complexe. L'étude des vecteurs propres montre qu'une partie des modes correspond à une variation de la pression dans le milieu fluide tandis qu'une autre partie correspond à une variation de la pression dans le matériau poreux, les différences étant sensibles lorsque les densités des deux milieux sont plus importantes comme dans le cas de la laine de verre.

En l'absence d'écoulement, il existe une relation de biorthogonalité faisant intervenir la masse volumique du fluide, la porosité et la masse volumique dynamique complexe du matériau poreux. Elle permet de déterminer un opérateur DtN pour les milieux couplés. Les résultats numériques présentés sont comparés avec succès à des solutions analytiques ou à des résultats obtenus avec des couche PML .

Pour un fluide en mouvement uniforme couplé à un milieu poreux, il est toujours possible de calculer les modes dans une section transversale du guide, en revanche la présence de dérivées tangentielles dans la condition de continuité du déplacement normal à l'interface entre les deux milieux ne permet plus d'établir la relation d'orthogonalité nécessaire à l'écriture d'une condition limite transparente. Des difficultés apparaissent également pour la formulation du problème de rayonnement car il n'est plus possible d'écrire une forme variationnelle associée au problème.

La méthode présentée dans cette étude s'inscrit dans la continuité des travaux initiés par Poernomo [28] en 2D. Elle a permis d'obtenir des résultats pour des géométries 3D axisymétriques en ne considérant que des solutions elles mêmes axisymétriques ( $m=0$ ). La généralisation à des solutions azimutales d'ordre plus élevé est facile à développer mais doit être considérée afin de pouvoir traiter des situations rencontrées dans l'industrie aéronautique [118]. Nous avons également abordé le cas des géométries moins régulières en considérant un écoulement potentiel dans les sections variables raccordé à un écoulement uniforme dans les sections uniformes. Le cas d'un écoulement cisailé constitue une perspective naturelle à notre étude mais elle nécessite davantage de développements et implique le choix d'un nouveau modèle. L'exemple du guide traité par un matériau absorbant à réaction non-localisée a mis en évidence des résultats originaux dans le cas sans écoulement mais a montré les limites du modèle basé sur l'équation de Helmholtz convectée en présence d'un écoulement uniforme. La prise en compte d'un écoulement cisailé présentant une couche limite à l'interface entre le fluide et le milieux poreux s'inscrit dans la suite logique de ces travaux. Elle devrait permettre d'assurer une meilleure continuité entre les deux milieux y compris en considérant un écoulement induit dans le matériau poreux. Le modèle de Pridmore-Brown peut être envisagé pour les guides droits, alors que le cas des sections variables peut être abordé à l'aide de l'équation de Galbrun récemment utilisé par Nennig [48] pour des guides traités par des matériaux poroélastiques décrit par le formalisme de Biot.



# Bibliographie

- [1] E. Bécache, A.S. Bonnet-Ben Dhia, and G. Legendre. Perfectly matched layers for the convected helmholtz equation. *SIAM J. on Numerical Analysis*, 42 :409–433, 2004.
- [2] S. W. Rienstra. Impedance models in time domain including the extended helmholtz resonator model. *12th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, 8-10 May 2006 Cambridge, MA.
- [3] F. Chevillotte. *MATELYS*. <http://www.matelys.com/>.
- [4] M. J. Lighthill. On sound generated aerodynamically. i. general theory. *Proc. R. Soc. Lond., A* 211 :564–587, 1952.
- [5] M. J. Lighthill. On sound generated aerodynamically. ii. turbulence as a source of sound. *Proc. R. Soc. Lond., A* 222 :1–32, 1954.
- [6] P. Harel and M. Perulli. The influence of a stationary uniform axial flow on the propagation of acoustic modes of vibration in a cylindrical duct. *Journal of Sound and Vibration*, 15 :455–474, 22 April 1971.
- [7] W. Eversman and R. J. Beckemeyer. Transmission of sound in ducts with thin shear layers—convergence to the uniform flow case. *J. Acoust. Soc. Am.*, 52, Issue 1B :216–220, July 1972.
- [8] S. W. Rienstra and G. G. Vilenski. Spatial instability of boundary layer along impedance wall. *AIAA*, 14th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference :2008–2932, 5-7 May 2008, The Westin Bayshore Vancouver, Vancouver, Canada.
- [9] W. Eversman. The boundary condition at an impedance wall in a non-uniform duct with potential flow. *Journal of Sound and Vibration*, 246 :63–69, 2000.
- [10] W. Eversman. Errata. the boundary condition at an impedance wall in a non-uniform duct with potential flow. *Journal of Sound and Vibration*, 258 :791–792, 2002.
- [11] W. Eversman and D. Okunbor. Aft fan duct acoustic radiation. *Journal of Sound and vibration*, 213 :235–257, 1998.
- [12] D. C. Pridmore-Brown. Sound propagation in a fluid flowing through an attenuating duct. *J. Fluid Mech.*, 4 :393–406, 1958.
- [13] P. Mungur and G.M.L. Gladwell. Acoustic wave propagation in a sheared fluid contained in a duct. *Journal of Sound and vibration*, 9 :149–155, 1969.
- [14] A. S. Hersh and I. Catton. Effect of shear flow on sound propagation in rectangular ducts. *J. Acoust. Soc. Am.*, 50, Issue 3B :992–1003, September 1971.

- [15] V. Pagneux and B. Freolich. Influence of low mach number shear flow on acoustic propagation in ducts. *Journal of Sound and vibration*, 246 :137–155, 2001.
- [16] H. Galbrun. *Propagation d'une onde sonore dans l'atmosphère terrestre et théorie des zones de silence*. Gauthier-Villars, 1931.
- [17] G.R. Gogate and M.L. Munjal. Analytical solution of sound propagation in lined or unlined circular ducts with laminar mean flow. *J. Acoust. Soc. Am.*, 160(3) :465–484, 1993.
- [18] J.B. Keller and D. Givoli. Exact non-reflecting boundary conditions. *J. Comput. Phys.*, 82(1) :172–192, 1989.
- [19] I. Harari, I. Patlashenko, and D. Givoli. Dirichlet-to-neumann maps for unbounded wave guides. *Journal of Computational Physics*, 143 :200–223, June 10, 1998.
- [20] D. Givoli. High-order local non-reflecting boundary conditions : a review. *Wave Motion*, 39 :319–326, April 2004.
- [21] J. B. Keller. Artificial boundary conditions for axisymmetric slow viscous flow. *Journal of Computational Physics*, 204 :399–403, 10 April 2005.
- [22] M. J. Grote and J. B. Keller. On nonreflecting boundary conditions. *Journal of Computational Physics*, 122 :231–243, 1995.
- [23] E. Redon, B. Ouedraogo, A.-S. Bonnet-Ben Dhia, J.-F. Mercier, and C. Chambeyron. Transparent boundary condition for acoustic propagation in lined guide with mean flow. *Acoustics'08 Paris*, Juillet 2008.
- [24] J.-P. Bérenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, 114 :185–200, 1994.
- [25] F. Q. Hu. On absorbing boundary conditions of linearized euler equations by a perfectly matched layer. *Journal of Computational Physics*, 129 :201–219, 1996.
- [26] F. Q. Hu. Development of pml absorbing boundary conditions for computational aeroacoustics : A progress review. *Computers and Fluids*, 37(4) :336–348, 2008.
- [27] F. Q. Hu. A stable, perfectly matched layer for linearized euler equations in unsplit physical variables. *Journal of Computational Physics*, 173(2) :455–480, November 2001.
- [28] S. S. Poernomo. *Propagation acoustique dans les conduits à parois traités en présence d'un écoulement : modélisation par la méthode des éléments finis*. PhD thesis, Thèse de doctorat de l'Université de Bourgogne, 2008.
- [29] M. Bruneau. *Manuel d'Acoustique Fondamentale*. Hermes, 1998.
- [30] J.P. Lefebvre, P.J.T. Filippi, D. Habault, A. Bergassoli, J.L. Guyader, and C. Lesueur. *Acoustique générale*. 1994.
- [31] R. E. Langer. On the connection formulas and the solutions of the wave equation. *Phys. Rev.*, 51 :669–676, 1937.
- [32] J. L. Peube and M. F. Jallet. Propagation d'ondes acoustiques dans un écoulement en conduite cylindrique. *Acoustica*, 29 :85–92, 1973.

- [33] J. F. Unruh and W. Eversman. The utility of the galerkin method for the acoustic transmission in an attenuating duct. *Journal of Sound and Vibration*, 23(2) :187–197, 1972.
- [34] N. K. Agarwal and M. K. Bull. Acoustic wave propagation in a pipe with fully developed turbulent flow. *Journal of Sound and Vibration*, 132(2) :275–298, 1989.
- [35] R. Boucheron, H. Bailliet, and J. C. Valiere. Analytical solution of multimodal acoustic propagation in circular ducts with laminar mean flow profile. *Journal of Sound and vibration*, 292 :504–518, 2006.
- [36] E. Redon. *Etude de la propagation acoustique en espace confiné en présence d'écoulement non isotherme par la méthode des éléments*. PhD thesis, Thèse de doctorat de l'Université de Poitiers, 1996.
- [37] Abdelkader Bihhadi. *Etude de la propagation acoustique dans les conduits et les silencieux en écoulements non isothermes par une méthode de différences finis et enveloppe d'onde*. PhD thesis, Thèse de doctorat de l'Université de Poitiers, 1992.
- [38] R. M. Kandate. *Etude de champs acoustiques en écoulement interne par la méthode des éléments finis*. PhD thesis, Thèse de doctorat de l'Université de Poitiers, 1998.
- [39] R. J. Astley and W. Eversman. A finite element formulation of the eigenvalue problem in lined ducts with flow. *Journal of Sound and Vibration*, 65(1) :61–74, 1979.
- [40] R. J. Astley and W. Eversman. The finite element duct eigenvalue problem : an improved formulation with hermitian elements and no flow condensation. *Journal of Sound and Vibration*, 69(1) :13–25, 1980.
- [41] B. Poirée. Les équations de l'acoustique linéaire et non linéaire dans un écoulement de fluide parfait. *Acoustica*, 57 :5–25, 1985.
- [42] G. Legendre. *Rayonnement acoustique dans un fluide en écoulement : Analyse mathématique et numérique de l'équation de Galbrun*. PhD thesis, Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie, 2003.
- [43] A.-S. Bonnet-BenDhia, G. Legendre, and E. Lunéville. Analyse mathématique de l'équation de galbrun en écoulement uniforme. *C.R. Acad. Sci. Paris*, Tome 329, série II b :601–606, 2001.
- [44] E.-M. Duclairoir. *Rayonnement acoustique dans un écoulement cisailé : Une méthode d'éléments finis pour la simulation du régime harmonique*. PhD thesis, Thèse de doctorat de l'École Polytechnique de Paris, 2007.
- [45] G. Elias and C. Peyret. Finite-element methode to study harmonic aeroacoustics problems. *J. Acoust. Soc. Am.*, 110(2) :661–668, 2001.
- [46] A.-S. Bonnet-BenDhia, E.-M. Duclairoir, G. Legendre, and J.-F. Mercier. Time harmonic acoustic propagation in the presence of a shear flow. *Journal on Comput. Appl. Math*, 204 (2) :428–439, 2007.
- [47] G. Gabard, F. Treysède, and M. Ben Tahar. A numerical method for vibroacoustic problems with sheared mean flows. *Journal of Sound and Vibration*, 272 :991–1011, 2004.

- [48] B. Nennig. *Thèse : Contribution à l'étude de matériaux absorbants acoustiques en présence d'écoulement*. PhD thesis, Université de Technologie de Compiègne, novembre 2009.
- [49] J.-C. Nédelec. Mixed finite elements in r3. *Numer. Math.*, 35 :315–341, 1980.
- [50] C. Peyret. Mise en oeuvre d'éléments finis d'arêtes pour résoudre l'équation de galbrun. *Deuxièmes Journées sur l'acoustique de Galbrun*, 4-6 avril 2001 (Arcachon France, rapport ONERA TP 2001-113).
- [51] F. Treyssède. *Thèse : Etude de la propagation acoustique en présence d'écoulement non uniforme par une méthode d'éléments finis mixtes basée sur l'équation de Galbrun*. PhD thesis, Université de Technologie de Compiègne, Décembre 2002.
- [52] A. H. Nayfeh and J. Sun. Effect of transverse velocity and temperature gradients on sound attenuation in two-dimensional ducts. *Journal of Sound and vibration*, 34 :505–517, 1974.
- [53] A. Kapur and P. Mungur. Sound interaction with ducted helical flow. *Presented as Paper 73-1010 AIAA Aero-Acoustics Conference*, pages 15–17, oct 1973, Seattle.
- [54] A. Kapur, A. Cummings, and P. Mungur. Sound propagation in a combustion can with axial temperature and density gradients. *Journal of Sound and vibration*, 25(1) :129–138, 1972.
- [55] P. Mungur and H. E. Plumbee. Propagation and attenuation of sound in a soft-walled annular duct containing a sheared flow. *Basic Aerodynamic Research*, SP-207 :305, 1969, NASA.
- [56] Y. Gervais and J.-L. Peube. Sound propagation in duct in presence of both mean velocity and temperature gradients. *InterNoise*, 1 :567–570, 1990.
- [57] A. H. Nayfeh, J. E. Kaiser, and D. P. Telionis. Acoustics of aircraft engine-duct systems. *AIAA J.*, 13 :130–153, 1975.
- [58] A. Craggs. A finite element method for modelling dissipative mufflers with a locally reactive lining. *Journal of Sound and Vibration*, 54(2) :285–296, 1977.
- [59] M. E Delany and E N Bazley. Acoustical properties of fibrous absorbent materials. *Applied Acoustics*, 3 :105–116., 1970.
- [60] S. W. Rienstra. Contributions to the theory of sound propagation in ducts with bulk-reacting lining. *J. Acoust. Soc. Am.*, 77 :1681–1685, 1985.
- [61] K. Myers. On the acoustic boundary condition in the presence of flow. *Journal of Sound and vibration* 71, 71 :429–434, 1980.
- [62] C. Zwikker and C. Kosten. *Sound absorbing materials*. New York, Elsevier applied sciences, 1949.
- [63] M. Biot. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-filled-saturated porous solid - i. low frequency range. *Journal of the Acoustical Society of America*, 28 :168–178., 1956.
- [64] M. Biot. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-filled-saturated porous solid - ii. high frequency range. *Journal of the Acoustical Society of America*, 28 :179–191., 1956.

- [65] R. J. Astley and A. Cummings. A finite element scheme for attenuation in ducts lined with porous material : comparison with experiment. *Journal of Sound and Vibration*, 116(2) :239–263, 1987.
- [66] A. Cummings and I.-J. Chang. Internal mean effects on the characteristics of bulk-reacting liners in circular ducts. *Acustica*, 64(4) :169–178, 1987.
- [67] A. Cummings and I.-J. Chang. Sound attenuation of finite length dissipative flow duct silencer with internal mean flow in the absorbent. *Journal of Sound and Vibration*, 127(1) :1–17, 1988.
- [68] K. S. Peat and K. L. Rathi. A finite element analysis of the convected acoustic wave motion in dissipative silencers. *Journal of Sound and Vibration*, 184(3) :529–545, 1995.
- [69] S. K. Kakoty and V. K. Roy. Bulk reaction modeling of ducts with and without mean flow. *J. Acoust. Soc. Am.*, 112(1) :75–82, 2002.
- [70] E. Perrey-Debain. *Développement et application d'une méthode d'intégrales de frontière (dual reciprocity boundary element method) à l'étude de la propagation acoustique en écoulements anisothermes externes*. PhD thesis, Thèse de doctorat de l'Université de Poitiers, 1998.
- [71] E. Perrey-Debain, Y. Gervais, and M. Guilbaud. Calcul de la propagation acoustique en milieux non homogènes infinis par la DRBEM. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 326, Série II b :649–656, 1998.
- [72] R.J. Astley, G.J. Macaulay, and J.P. Coyette. Mapped wave envelope elements for acoustical radiation and scattering. *Journal of Sound and Vibration*, 170 :97–118, 1994.
- [73] P. Bettess. Infinite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 11 :53–64, 1977.
- [74] J.-P. Bérenger. Three dimensional perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, 127 :363–379, 1996.
- [75] J. S. Hesthaven. On the analysis and construction of perfectly matched layers for the linearized euler equations. *Journal of Computational Physics*, 142 :129–147, 1998.
- [76] E. Bécache, A.S. Bonnet-Ben Dhia, and G. Legendre. Perfectly matched layers for time-harmonic acoustics in the presence of a uniform flow. *SIAM J. on Numerical Analysis*, 44(3) :1191–1217, 2006.
- [77] INRIA. *MODULEF*. Hermes, <http://www-roc.inria.fr/Modulef/>.
- [78] D. Martin. *Librairie Mélina*. <http://perso.univ-rennes1.fr/daniel.martin/melina/s>.
- [79] C. Hazard and M. Lenoir. Determination of scattering frequencies for an elastic floating body. *SIAM J. Math. Anal.*, 24 :1458–1514, 1993.
- [80] Y. Yehya. *Propagation des ondes acoustiques dans les conduites cylindriques de révolution*. PhD thesis, Thèse de doctorat de l'Université de Poitiers, 1987.
- [81] E. Redon, A.-S. Bonnet-Ben Dhia, J.-F. Mercier, and S. Poernomo Sari. Non-reflecting boundary conditions for acoustic propagation in ducts with acoustic treatment and mean flow. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 86 :1360–1378, 2011.



- [82] P. Filippi, D. Habault, J.P. Lefebvre, and A. Bergassoli. *Acoustics : Basic physics, theory and methods*. 1994.
- [83] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Hermes, June 1964.
- [84] C. C. Gérono. *Démonstration d'une proposition relative aux équations transcendantes*. NUMDAM, <http://archive.numdam.org>, 1858. Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 :201-204.
- [85] S. W. Rienstra. A classification of duct modes based on surface waves. *Wave Motion*, 37 :119–135, 2003.
- [86] E. J. Brambley. Fundamental problems with the model of uniform flow over acoustic linings. *Journal of Sound and Vibration*, 322 :1026–1037, 2009.
- [87] V. Baronian, A.-S. Bonnet-Ben Dhia, and E. Lunéville. Transparent boundary conditions for the harmonic diffraction problem in an elastic waveguide. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234, Issue 6 :1945–1952, 15 July 2010.
- [88] L. Serge. *Acoustique industrielle et aéroacoustique*. Hermes, 2001.
- [89] Y. Miki. Acoustical properties of porous materials — modifications of delany-bazley models —. *J. Acoust. Soc. Jpn.*, 11 :19–24., 1990.
- [90] Y. Miki. Acoustical properties of porous materials — generalisations of empirical models —. *J. Acoust. Soc. Jpn.*, 11 :25–28., 1990.
- [91] K. Attenborough. Acoustical characteristics of rigid fibrous absorbants and granular materials. *Journal of the Acoustical Society of America*, 73, NO 3 :785–799., 1983.
- [92] M. Garai and F. Pompoli. A simple empirical model of polyester fibre materials for acoustical applications. *Applied Acoustics*, 66 :1383–1398, 2005.
- [93] K. Attenborough. Acoustical impedance models for outdoor ground surfaces. *J. Sound Vib.*, 99 :521–544., 1985.
- [94] T. Komatsu. Improvement of the delany-bazley and miki models for fibrous sound-absorbing materials. *Acoust. Sci. & Tech.*, 2 :121–129., 2008.
- [95] M. Biot. General theory of three-dimensional consolidation. *J. Appl. Phys.*, 12 :155–164., 1941.
- [96] M. Biot. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid. *J. Appl. Phys.*, 26(2) :182–185., 1955.
- [97] M. Biot. Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media. *Journal of the Acoustical Society of America*, 34, No. 5, PART 1 :1254–1264, 1962.
- [98] D.L. Johnson, J. Koplik, and R. Dashen. Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media. *J. Fluid Mech.*, 176 :379–402, 1987.
- [99] J.-F. Allard. *Propagation of sound in porous media, Modelling sound absorbing materials*. Elsevier Applied. New York and London, 1993.
- [100] Y. Champoux and J.-F. Allard. Dynamic tortuosity and bulk modulus in air-saturated porous media. *J. Appl. Phys.*, 70 (4) :1975–1979., 15 August 1991.

- [101] D. Lafarge, P. Lemarinier, and J.-F. Allard. Dynamic compressibility of air in porous structures at audible frequencies. *J. Acoust. Soc. Am.*, 102 (4) :1995–2006., October 1997.
- [102] N. Atalla, R. Panneton, and P. Debergue. A mixed displacement-pressure formulation for poroelastic materials. *Journal of the Acoustical Society of America*, 104, N0 3 :1444–1452., 1998.
- [103] O. Dazel. *Synthèse modale pour les matériaux poreux*. PhD thesis, Université Claude Bernard-Lyon I, 2003.
- [104] P. Göransson. A weighted residual formulation of the acoustic wave propagation through a flexible porous material and a comparison with a limp material model. *J. Sound Vib.*, 182 :479–494., 1995.
- [105] R. Panneton. *Thèse : Modélisation numérique tridimensionnelle par éléments finis des milieux poroélastiques*. PhD thesis, Université de Sherbrooke, Août 1996.
- [106] B. Brouard, B. Castagnède, M. Henry, D. Lafarge, and S. Sahraoui. *Mesure des propriétés acoustiques des matériaux poreux*. <http://www.techniques-ingenieur.fr/res/pdf/encyclopedia/TI-r6120.pdf>, 10 mars 2003.
- [107] P. Leclaire, O. Umnova, K. V. Horoshenkov, and L. Maillet. Porosity measurement by comparison of air volumes. *Review of Scientific Instruments*, 74(3) :1366 – 1370, March 2003.
- [108] L. L. Beranek. Acoustic impedance of porous materials. *J. Acoust. Soc. Am.*, 13 :248–260, 1942.
- [109] N. Sellen, O. Hilbrunner, and M.-A. Galland. Identification par contrôle actif des paramètres caractéristiques d’un matériau poreux. *XVème Congrès Français de Mécanique*, 448 :1–6, Nancy 3-7 septembre 2001.
- [110] D. A. Bies and C. H. Hansen. Flow resistance information for acoustical design. *Applied Acoustics*, 13 :357–391, 1980.
- [111] P. Leclaire, L. Kelders, W. Lauriks, M. Melon, N. Brown, and B. Castagnède. Determination of the viscous and thermal characteristic lengths of plastic foams by ultrasonic measurements in helium and air. *Journal of Applied Physics*, 80(4) :2009 – 2012, Aug 1996.
- [112] Z.E.A. Fellah, F.G. Mitri, M. Fellah, E. Ogam, and C. Depollier. Ultrasonic characterization of porous absorbing materials : Inverse problem. *Journal of Sound and Vibration*, 302 :746–759, 2007.
- [113] P. Leclaire, L. Kelders, W. Lauriks, J. F. Allard, and C. Glorieux. Ultrasonic wave propagation in reticulated foams saturated by different gases : High frequency limit of the classical models. *Applied Physics Letters*, 69(18) :2641 – 2643, Oct 1996.
- [114] H. Deresiewicz and R. Skalak. On uniqueness in dynamic poroelasticity. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 53 :783–788, 1963.
- [115] Y. Rocard. *Dynamique générale des vibrations (page 99)*. 1971.
- [116] D. A. Bies, C. H. Hansen, and G. E. Bridges. Sound attenuation in rectangular and circular cross-section ducts with flow and bulk-reacting liner. *Journal of Sound and Vibration*, 146(1) :47–80, 1991.

- 
- [117] X. Sun, L. Du, and V. Yang. A homotopy method for determining the eigenvalues of locally or non-locally reacting acoustic liners in flow ducts. *Journal of Sound and Vibration*, 303 :277–286, 2007.
- [118] S. W. Rienstra and W. Eversman. A numerical comparison between the multiple-scales and finite-element solution for sound propagation in lined flow ducts. *J. Fluid Mech.*, 437 :367–384, 2001.

# Annexe 1

## Calcul des modes dans la section transverse d'un guide cylindrique axisymétrique : méthode des éléments finis à une seule dimension

Considérons un guide cylindrique axisymétrique infini rigide de rayon  $R = 1$  représenté sur le plan  $(r, z)$  comme indiqué sur la Figure 5.23. La propagation acoustique dans ce guide est gouvernée par l'équation de Helmholtz homogène :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2 p = 0 \quad \text{sur } \Omega \quad (5.93)$$

Les conditions aux limites sur les parois sont données par :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \quad (5.94)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad (5.95)$$

Les solutions de l'équation (5.93) vérifiant les conditions limites (5.94) et (5.95)

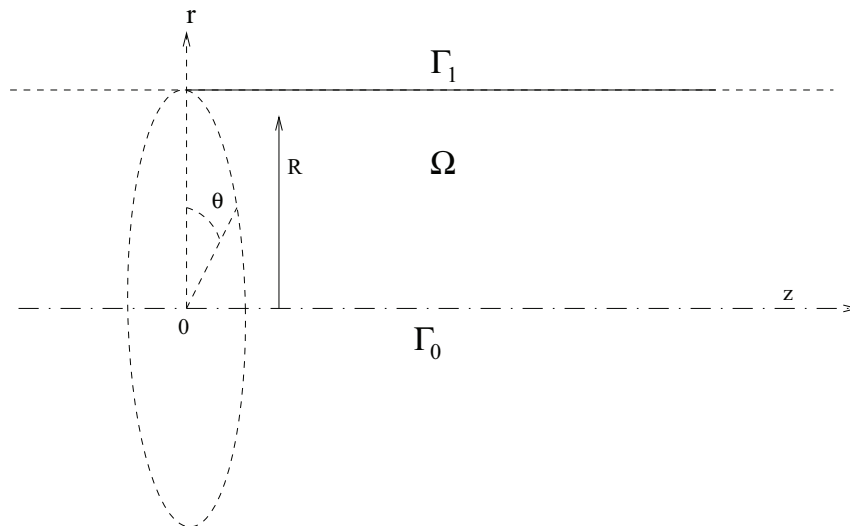


Figure 5.23 – Guide axisymétrique rigide infini

sont sous la forme :

$$p(r, z) = \varphi(r)e^{i\beta z} \quad (5.96)$$

où  $\varphi(r) = J_0(\alpha r)$  est la fonction de Bessel d'ordre 0 et  $\alpha$  et  $\beta$  sont respectivement les nombres d'onde suivant  $r$  et la constante de propagation.

L'équation aux valeurs propres du problème s'écrit alors :

$$\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} + \frac{d^2\varphi}{dr^2} + (k^2 - \beta^2)\varphi = 0 \quad \text{pour } 0 \leq r \leq R \quad (5.97)$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = 0 \quad \text{pour } r = 0 \text{ et } r = R \quad (5.98)$$

On développe dans cette section la méthode de Galerkin pour une seule dimension. Cela permettra de déterminer les nombres d'ondes  $\alpha$  et les constantes de propagations  $\beta$ .

On écrit la formulation variationnelle associée au problème aux valeurs propres ci dessus. On multiplie l'équation (5.97) par une fonction test régulière  $\psi$  et on intègre sur l'intervalle  $[0, R]$  :

$$\int_0^R \left( \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} + \frac{d^2\varphi}{dr^2} + (k^2 - \beta^2)\varphi \right) \psi r dr = 0 \quad (5.99)$$

En intégrant les termes d'ordre 2 par parties et en prenant en compte les conditions limites (5.98), la formulation variationnelle est donnée par :

trouver  $\varphi \in H^1(\Omega)$ , tel que  $\forall \psi \in H^1(\Omega)$  :

$$\int_0^R \frac{d\varphi}{dr} \frac{d\psi}{dr} r dr - (k^2 - \beta^2) \int_0^R \varphi \psi r dr = 0 \quad (5.100)$$

En discrétisant l'intervalle  $[0, R]$  en  $N$  sous intervalles  $T_i = [r_{i-1}, r_i]$ , alors on peut dire que  $\psi$  est une fonction continue et affine sur les  $T_i$ .

Soit  $V_h$ , l'espace vectoriel des fonctions continues affines par morceaux (sur les  $T_i$ ), alors chaque fonction  $\psi_h \in V_h$  est déterminée par manière unique par la donnée de ses valeurs aux points  $i = 1, N-1$ . Il existe  $N-1$  fonctions  $\omega_i \in V_h$  définies par  $N-1$  conditions :  $\omega_i(r_j) = \delta_{ij} \quad \forall i = 1, N-1 \quad \text{et} \quad \forall j = 1, N-1$ .

Ainsi, une fonction quelconque  $\psi_h$  s'écrit dans cette base :

$$\psi_h(r) = \sum_{i=1}^{i=N-1} \psi_i \omega_i(r) \quad (5.101)$$

Les coefficients  $\psi_i$  sont les valeurs de  $\psi_h$  aux points  $(r_i)$ . De même en prenant  $\varphi_h$ , une solution du problème approché dans  $V_h$ , dans la base des  $\omega_i$ , on a :

$$\varphi_h(r) = \sum_{j=1}^{j=N-1} \varphi_j \omega_j(r) \Rightarrow \dot{\varphi}_h(r) = \sum_{j=1}^{j=N-1} \varphi_j \dot{\omega}_j(r) \quad (5.102)$$

où  $\dot{\varphi} = d\varphi/dr$  et  $\varphi_j = \varphi_h(r_j)$  est la valeur approchée de la solution exacte au point  $(r_j)$ . On obtient alors la formulation variationnelle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N-1} \text{ tels que } \forall i = 1, N-1 \\ \sum_{j=1}^{j=N-1} \left( \int_0^R \dot{\omega}_j(r) \dot{\omega}_i(r) r dr - (k^2 - \beta^2) \int_0^R \omega_j(r) \omega_i(r) r dr \right) \varphi_j = 0 \end{array} \right.$$

Posons :

$$K_{ij} = \int_0^R \dot{\omega}_j(r) \dot{\omega}_i(r) r dr \quad (5.103)$$

$$M_{ij} = \int_0^R \omega_j(r) \omega_i(r) r dr \quad (5.104)$$

On calcule ces coefficients en sommant les contributions des différents éléments :

$$K_{ij} = \int_0^R \dot{\omega}_j(r) \dot{\omega}_i(r) r dr = \sum_{k=1}^{k=N} \int_{r_{k-1}}^{r_k} \dot{\omega}_j(r) \dot{\omega}_i(r) r dr \quad (5.105)$$

Ainsi, pour un élément  $T_i = [r_{i-1}, r_i]$ , il n'y a que deux fonctions de base non nulles  $\omega_{i-1}$  et  $\omega_i$  :

$$\omega_{i-1} = \frac{r_i - r}{r_i - r_{i-1}} \Rightarrow \dot{\omega}_{i-1} = \frac{-1}{r_i - r_{i-1}} = \frac{-1}{h} \quad (5.106)$$

$$\omega_i = \frac{r - r_{i-1}}{r_i - r_{i-1}} \Rightarrow \dot{\omega}_i = \frac{1}{r_i - r_{i-1}} = \frac{1}{h} \quad (5.107)$$

permettant d'obtenir une contribution aux quatre coefficients  $K_{i-1,i-1}$ ,  $K_{i-1,i}$ ,  $K_{i,i}$ ,  $K_{i,i-1}$ , avec  $i$  variant maintenant de 1 à  $N$  :

$$\begin{aligned} K_{i-1,i-1} &= \int_{r_{i-1}}^{r_i} \dot{\omega}_{i-1}(r)^2 r dr \\ &= \int_{r_{i-1}}^{r_i} \left( \frac{-1}{r_i - r_{i-1}} \right)^2 r dr = \frac{1}{2h} (r_i + r_{i-1}) \end{aligned} \quad (5.108)$$

$$\begin{aligned} K_{i-1,i} &= \int_{r_{i-1}}^{r_i} \dot{\omega}_{i-1}(r) \dot{\omega}_i(r) r dr \\ &= \int_{r_{i-1}}^{r_i} \frac{-1}{r_i - r_{i-1}} \frac{1}{r_i - r_{i-1}} r dr = -\frac{1}{2h} (r_i + r_{i-1}) \end{aligned} \quad (5.109)$$

$$K_{i,i} = \int_{r_{i-1}}^{r_i} \dot{\omega}_i(r)^2 r dr = \int_{r_{i-1}}^{r_i} \left( \frac{1}{r_i - r_{i-1}} \right)^2 r dr = \frac{1}{2h} (r_i + r_{i-1})$$

Comme il y a une symétrie ( $K_{i-1,i} = K_{i,i-1}$ ), un élément  $K_{i=1,N}$  est donné par :

$$K_i = \frac{1}{2h} (r_i + r_{i-1}) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme  $1 \leq i \leq N$ , posons  $r_i = ih$  et  $r_{i-1} = (i-1)h$ , ce qui donne toujours  $r_i - r_{i-1} = h$ , alors un élément  $K_i$  s'écrit maintenant :

$$K_i = \frac{2i-1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.110)$$

Les éléments  $M_i$  se calculent de la même manière que les  $K_i$ . En effet on a :

$$M_{i-1,i-1} = \int_{r_{i-1}}^{r_i} \omega_{i-1}(r)^2 r dr = \int_{r_{i-1}}^{r_i} \left( \frac{r_i - r}{r_i - r_{i-1}} \right)^2 r dr = \frac{h^2}{12} (4i-3) \quad (5.111)$$

$$M_{i-1,i} = \int_{r_{i-1}}^{r_i} \omega_{i-1}(r) \omega_i(r) r dr = \int_{r_{i-1}}^{r_i} \left( \frac{r_i - r}{r_i - r_{i-1}} \right) \left( \frac{r - r_{i-1}}{r_i - r_{i-1}} \right) r dr = \frac{h^2}{12} (2i-1)$$

$$M_{i,i} = \int_{r_{i-1}}^{r_i} \omega_i(r)^2 r dr = \int_{r_{i-1}}^{r_i} \left( \frac{r - r_{i-1}}{r_i - r_{i-1}} \right)^2 r dr = \frac{h^2}{12} (4i-1)$$

Donc pour un élément  $M_i$ , on a :

$$M_i = \frac{h^2}{12} \begin{pmatrix} 4i - 3 & 2i - 1 \\ 2i - 1 & 4i - 1 \end{pmatrix} \quad (5.112)$$

On obtient donc des matrices globales  $\mathbb{K}$  (matrice de rigidité) et  $\mathbb{M}$  (matrice de masse) , ce qui conduit à une équation de second degré en  $\beta$  que l'on note par  $\beta_n$  :

$$\mathbb{K} - k^2\mathbb{M} + \beta_n^2\mathbb{M} = 0 \Rightarrow A + \beta_n^2B = 0 \quad (5.113)$$

où  $A = \mathbb{K} - k^2\mathbb{M}$  et  $B = \mathbb{M}$ . L'équation (5.113) est un problème classique aux valeurs propres. Ainsi,  $\det(A + \beta_n^2B)$  a pour solution une matrice dont la diagonale contient  $-\beta_n^2$ .

En guise d'application de la méthode des éléments finis à une dimension, considérons le problème précédent (5.97) pour lequel  $R = 1$  et  $N = 2$ , c'est-à-dire que l'on a deux éléments avec trois noeuds, avec un pas  $h = 1/N = 1/2$  et un nombre d'onde  $k = 7$ . Les matrices de rigidité  $\mathbb{K}$  et de masse  $\mathbb{M}$  sont données par :

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 2 & -3/2 \\ 0 & -3/2 & 3/2 \end{pmatrix}; \quad \mathbb{M} = \begin{pmatrix} 1/48 & 1/48 & 0 \\ 1/48 & 1/6 & 1/16 \\ 0 & 1/16 & 7/48 \end{pmatrix}$$

Le calcul du déterminant de la matrice  $A + \beta_n^2B$  permet d'obtenir les constantes de propagation  $\beta_n$ , et à l'aide de l'équation de dispersion  $k^2 = \alpha_n^2 + \beta_n^2$ , on déduit les valeurs des nombres d'ondes radiaux  $\alpha_n$  (voir Tab. 5.7).

n	$\alpha_n$	$\beta_n^+$
1	0.000 - 0.000i	7.000 + 0.000i
2	3.832 - 0.000i	5.858 + 0.000i
3	7.015 - 0.000i	0.000 + 0.467i

Tableau 5.7 – Nombres d'ondes radiaux  $\alpha_n$  et constantes de propagation  $\beta_n$  pour  $k = 7$ .

## Annexe 2

### Écriture de l'équation de propagation acoustique en présence d'un écoulement potentiel

L'équation de propagation pour le potentiel de vitesse s'obtient à partir des équations d'Euler suivantes :

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \text{div}(\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}}) = 0 \quad (5.114)$$

$$\tilde{\rho} \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}} \right) = -\nabla \tilde{p} \quad (5.115)$$

$$\frac{d\tilde{p}}{dt} = \tilde{c}^2 \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} \quad (5.116)$$

Les grandeurs  $\tilde{p}$ ,  $\tilde{\rho}$ ,  $\tilde{\mathbf{v}}$  et  $\tilde{c}$  sont données par :

$$\tilde{p} = p_0 + p e^{-i\omega t} \quad (5.117)$$

$$\tilde{\rho} = \rho_0 + \rho e^{-i\omega t} ; \quad \gamma \tilde{p} = \tilde{\rho}^\gamma \quad (5.118)$$

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v} e^{-i\omega t} ; \quad \tilde{\mathbf{v}} = \nabla \tilde{\phi} \quad (5.119)$$

$$\tilde{c} = c_0 + c e^{-i\omega t} ; \quad \tilde{c}^2 = \tilde{\rho}^{\gamma-1} = \frac{\gamma \tilde{p}}{\tilde{\rho}} \quad (5.120)$$

où  $p_0$ ,  $\rho_0$ ,  $\mathbf{v}_0$  et  $c_0$  désignent respectivement les valeurs moyennes de la pression, de la masse volumique, de la vitesse et de la célérité et  $\tilde{\phi} = \phi_0 + \phi e^{-i\omega t}$  est le potentiel de vitesse.

Pour l'écoulement moyen stationnaire ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ), on a :

$$\text{div}(\rho_0 \mathbf{v}_0) = 0 \quad (5.121)$$

$$\rho_0 \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{v}_0 = -\nabla p_0 \quad (5.122)$$

$$c_0^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \quad (5.123)$$

En remplaçant  $\tilde{p}$ ,  $\tilde{\rho}$ ,  $\tilde{\mathbf{v}}$  et  $\tilde{c}$  dans (5.114), (5.115) et (5.116) par leurs expressions dans (5.117), (5.118), (5.119) et (5.120) puis en soustrayant les équations (5.121) et (5.122) et en linéarisant, on trouve :

$$-i\omega \rho + \text{div}(\rho \mathbf{v}_0 + \rho_0 \mathbf{v}) = 0 \quad (5.124)$$

$$\rho_0 \left( -i\omega \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \frac{\rho}{\rho_0} \nabla p_0 - \nabla p \quad (5.125)$$

$$p = c_0^2 \rho \quad (5.126)$$



En remplaçant  $\mathbf{v}$  par  $\nabla\phi$  dans (5.124) et (5.125), on a :

$$-i\omega\rho + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}_0 + \rho_0\nabla\phi) = 0 \quad (5.127)$$

$$\rho_0\left(-i\omega\nabla\phi + \nabla\phi\cdot\nabla\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0\cdot\nabla(\nabla\phi)\right) = \frac{\rho}{\rho_0}\nabla p_0 - \nabla p \quad (5.128)$$

Notons que

$$\nabla\phi\cdot\nabla\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0\cdot\nabla(\nabla\phi) = \operatorname{div}(\mathbf{v}_0\cdot\nabla\phi) \quad \text{et} \quad \nabla p_0 = \gamma\frac{p_0}{\rho_0}\nabla\rho_0 = c_0^2\nabla\rho_0$$

Alors l'équation (5.128) s'écrit :

$$\nabla\left(-i\omega\phi + \mathbf{v}_0\cdot\nabla\phi\right) = \frac{\rho c_0^2}{\rho_0^2}\nabla\rho_0 - \frac{1}{\rho_0}\nabla p \quad (5.129)$$

soit :

$$\nabla\left(-i\omega\phi + \mathbf{v}_0\cdot\nabla\phi\right) = \frac{p}{\rho_0^2}\nabla\rho_0 - \frac{1}{\rho_0}\nabla p = -\nabla\left(\frac{p}{\rho_0}\right) \quad (5.130)$$

En intégrant (5.130), on obtient :

$$-i\omega\phi + \mathbf{v}_0\cdot\nabla\phi + \frac{p}{\rho_0} = 0 \quad (5.131)$$

Finalement, on obtient les équations linéarisées suivantes :

$$-i\omega\rho + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}_0) + \operatorname{div}(\rho_0\nabla\phi) = 0 \quad (5.132)$$

$$-i\omega\phi + \mathbf{v}_0\cdot\nabla\phi + \frac{p}{\rho_0} = 0 \quad (5.133)$$

$$p = c_0^2\rho \quad (5.134)$$

A l'aide de la dérivée particulière et de l'équation (5.134) et en utilisant les propriétés de la divergence, on peut écrire :

$$\operatorname{div}(\rho_0\nabla\phi) + \frac{d\rho}{dt} + \rho\operatorname{div}(\mathbf{v}_0) = 0 \quad (5.135)$$

$$\rho = -\frac{\rho_0}{c_0^2}\frac{d\phi}{dt} \quad (5.136)$$

En remplaçant  $\rho$  dans (5.135) par son expression dans (5.136), on trouve l'équation de propagation acoustique sous la forme :

$$\operatorname{div}(\rho_0\nabla\phi) + \underbrace{\frac{d}{dt}\left(-\frac{\rho_0}{c_0^2}\frac{d\phi}{dt}\right) + \rho\operatorname{div}(\mathbf{v}_0)}_1 = 0 \quad (5.137)$$

En développant le terme (1), l'équation de propagation des ondes pour le potentiel des vitesses est donnée par :

$$\operatorname{div}(\rho_0\nabla\phi) - \rho_0\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{c_0^2}\frac{d\phi}{dt}\right) = 0 \quad (5.138)$$

# Annexe 3

## A.3 Formulation variationnelle associée à un guide cylindrique non uniforme recouvert d'un matériau absorbant en présence d'un écoulement potentiel : théorème de Stokes

On considère un guide non uniforme en présence d'un écoulement potentiel présenté dans la figure ci-dessous (Fig. 5.24). Le guide est axisymétrique et est composée d'un tronçon traité de paroi  $S_z$  inséré dans un guide infini rectiligne uniforme rigide de parois  $S_1$  et  $S_2$  dans lequel l'écoulement devient uniforme. Afin de résoudre le problème par la méthode des éléments finis, on tronque le guide par les frontières fictives  $S_-$  et  $S_+$  sur lesquelles des conditions limites transparentes de type opérateur DtN sont écrites.

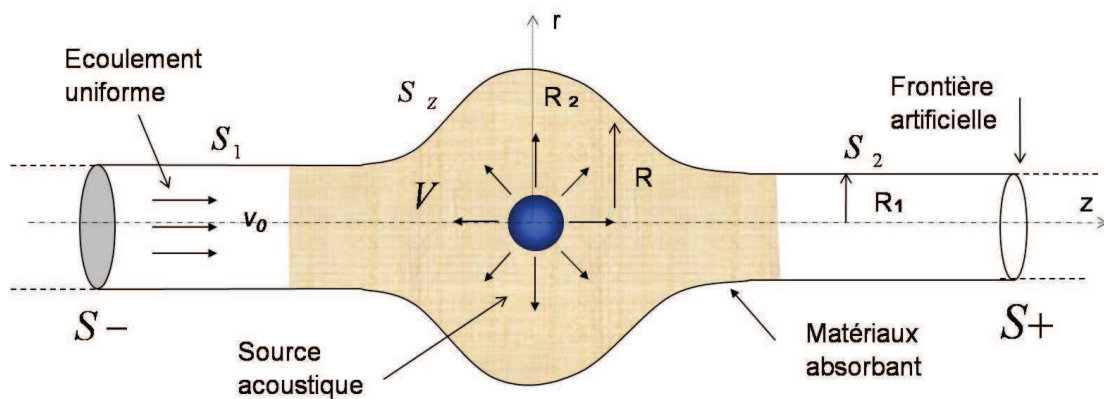


Figure 5.24 – Schéma de principe

### A.3.1 Equation de propagation et conditions aux limites

L'équation de propagation est donnée par (voir Annexe 2, page 146) :

$$\operatorname{div}(\rho_0 \nabla \phi) - \rho_0 \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{c_0^2} \frac{d\phi}{dt} \right) = f \quad \text{dans } \Omega \quad (5.139)$$

$$(5.140)$$

où  $f$  désigne une source acoustique sphérique à support compact,  $\rho_0$  et  $c_0$  sont respectivement la masse volumique moyenne et la célérité du son.

Les conditions limites sur les parois rigides  $S_1$  et  $S_2$  et sur l'axe du cylindre  $S_0$  sont données par la condition de Neumann homogène :

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{sur} \quad S_1 \quad (5.141)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{sur} \quad S_2 \quad (5.142)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{sur} \quad S_0 \quad (5.143)$$

Puisque les frontières fictives  $S^-$  et  $S^+$  sont situées sur la partie rigide du guide, les opérateurs DtN sont ceux d'un guide rigide (ie. les coefficients modaux issus de la décomposition de  $\phi$  sur la base des modes sont déterminés à l'aide du produit scalaire usuel) :

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -T^\pm(\phi) \quad \text{sur} \quad S_\pm \quad (5.144)$$

La condition limite sur la paroi absorbante  $S_Z$  est donnée par la condition de Myers [61] en régime harmonique ( $e^{-\omega t}$ ) :

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \nabla \phi \cdot \mathbf{n} = \left( -i\omega + \mathbf{v}_0^* \cdot \nabla - \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0^* \right) \xi_n \quad (5.145)$$

où  $\xi_n$  désigne le déplacement normal sur la paroi et  $\mathbf{v}_0^*$  est la vitesse moyenne. Par la suite toutes les grandeurs sont adimensionnalisées :

$$k = \frac{\omega}{c_\infty} ; \quad \mathbf{v}_0 = \frac{\mathbf{v}_0^*}{v_\infty} ; \quad M = \frac{v_\infty}{c_\infty} \quad (5.146)$$

où  $k$ ,  $c_\infty$  et  $v_\infty$  désignent respectivement le nombre d'onde, la célérité et la vitesse à l'infini. La condition limite sur  $S_Z$  s'écrit alors :

$$\nabla \phi \cdot \mathbf{n} = -ik\xi_n + M\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \xi_n - M\xi_n \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 \quad (5.147)$$

où

$$\xi_n = -\frac{Y}{ik} \left( \rho_0 \frac{d\phi}{dt} \right) \quad (5.148)$$

et  $Y = 1/Z$  avec  $Z$  l'impédance de la paroi.

### A.3.2 Formulation variationnelle

La formulation variationnelle associée au problème de propagation dans tout le domaine 3D ( $V$ ) est donnée par : trouver  $\phi \in H^1(V)$  tel que  $\forall \psi \in H^1(V)$ , on a :

$$\int_V \underbrace{(\text{div}(\rho_0 \nabla \phi))}_a - \underbrace{\rho_0 \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{c_0^2} \frac{d\phi}{dt} \right)}_b \psi dV = \int_V f \psi dV \quad (5.149)$$

Où  $dV = r dr d\theta dz$  désigne un élément de volume dans le domaine 3D et  $\phi = \phi(r, \theta, z)$  le potentiel des vitesses.

$$a = - \int_V (\rho_0 \nabla \phi \cdot \nabla \psi) dV + \int_S (\rho_0 \psi \nabla \phi \cdot \mathbf{n}) dS \quad (5.150)$$

avec  $S = S_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup S_Z \cup S_{\pm}$ .

$$b = \int_V \left( \frac{\rho_0}{c_0^2} k^2 \phi \psi + 2ikM\psi \frac{\rho_0}{c_0^2} (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi) + ikM\psi \phi \operatorname{div} \left( \frac{\rho_0}{c_0^2} \mathbf{v}_0 \right) \right) \quad (5.151)$$

$$+ M^2 \frac{\rho_0}{c_0^2} (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi) (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi) dV - \int_S (M\rho_0\psi\alpha\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} + ikM\frac{\rho_0}{c_0^2}\phi\psi\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}) dS$$

Où  $dS = Rr d\theta dz$  désigne un élément de surface sur la paroi du guide ( $R_1 \leq R \leq R_2$ ) et  $dS = r dr d\theta$  sur les sections du guide ( $S^- \cup S^+$ ). On pose  $\alpha = \frac{1}{c_0^2} \frac{d\phi}{dt}$ . La formulation variationnelle devient :

$$\int_V \left[ \rho_0 \nabla \phi \cdot \nabla \psi - \frac{\rho_0}{c_0^2} k^2 \phi \psi - 2ikM\psi \frac{\rho_0}{c_0^2} (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi) \right. \quad (5.152)$$

$$\left. - ikM\psi \phi \operatorname{div} \left( \frac{\rho_0}{c_0^2} \mathbf{v}_0 \right) - M^2 \frac{\rho_0}{c_0^2} (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi) (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi) \right] dV$$

$$+ \int_S (M\rho_0\psi\alpha\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} + ikM\frac{\rho_0}{c_0^2}\phi\psi\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} - \rho_0\psi \nabla \phi \cdot \mathbf{n}) dS = - \int_V f\psi dV$$

Posons :

$$I_S = I_{S_0} + I_{S_1} + I_{S_2} + I_{S_Z} + I_{S_{\pm}} = \int_S (M\rho_0\psi\alpha\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} + ikM\frac{\rho_0}{c_0^2}\phi\psi\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} - \rho_0\psi \nabla \phi \cdot \mathbf{n}) dS$$

Sur les sections  $S_1$  et  $S_2$ , le guide étant rigide, les intégrales  $I_{S_1}$  et  $I_{S_2}$  sont nulles, il en est de même de l'intégrale  $I_{S_0}$  sur l'axe du guide :  $\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} = \nabla \phi \cdot \mathbf{n} = 0$ . En remplaçant  $\alpha$  par son expression et en développant, l'intégrale  $I_{S_{\pm}}$  se réduit à :

$$I_{S_{\pm}} = \pm \int_{S_{\Sigma_{\pm}}} \rho_0 \left( 1 - M^2 \frac{|\mathbf{v}_0^2|}{c_0^2} \right) \psi \nabla \phi \cdot \mathbf{n} dS \quad (5.153)$$

Par ailleurs, la vitesse moyenne étant tangente à la paroi du guide on a  $\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $S_Z$ . L'intégrale  $I_{S_Z}$  s'écrit :

$$I_{S_Z} = \int_{S_Z} -\rho_0\psi \nabla \phi \cdot \mathbf{n} dS$$

D'après la condition aux limites (5.145), l'intégrale  $I_{S_Z}$  devient :

$$I_{S_Z} = \int_{S_Z} \left( ik\rho_0\psi\xi_n - M\rho_0\psi\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \xi_n + M\rho_0\psi\xi_n \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 \right) dS \quad (5.154)$$

Introduisons les relations vectorielles suivantes (voir [9]) :

$$M\rho_0\psi\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \xi_n = M \operatorname{div}(\rho_0\psi\mathbf{v}_0\xi_n) - M\xi_n\rho_0\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi - M\xi_n\psi \operatorname{div}(\rho_0\mathbf{v}_0) \quad (5.155)$$

$$\operatorname{div}(\rho_0\mathbf{v}_0) = 0 \quad (5.156)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_0 = 0 \quad (5.157)$$

$$M\rho_0\psi\xi_n \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = M\mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \rho_0\psi\xi_n \mathbf{v}_0 \quad (5.158)$$

Cela implique que (5.154) devient :

$$I_{S_Z} = \int_{S_Z} \left( ik\rho_0\psi\xi_n - M \operatorname{div}(\rho_0\psi\mathbf{v}_0\xi_n) + M\xi_n\rho_0\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi \right. \quad (5.159)$$

$$\left. + M\mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \rho_0\psi\xi_n \mathbf{v}_0 \right) dS$$

D'autre part, on sait que :

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

Posons :  $\vec{a} = \nabla$  ;  $\vec{b} = \mathbf{n}$  ;  $\vec{c} = \rho_0 \psi \xi_n \mathbf{v}_0$ , alors on a :

$$\mathbf{n} \cdot \left[ \nabla \wedge (\mathbf{n} \wedge \rho_0 \psi \xi_n \mathbf{v}_0) \right] = \mathbf{n} \cdot \left[ (\nabla \cdot \rho_0 \psi \xi_n \mathbf{v}_0) \mathbf{n} - (\nabla \cdot \mathbf{n}) \rho_0 \psi \xi_n \mathbf{v}_0 \right] \quad (5.160)$$

$$= \text{div}(\rho_0 \psi \xi_n \mathbf{v}_0) - \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \rho_0 \psi \xi_n \mathbf{v}_0 \quad (5.161)$$

L'intégrale  $I_{S_Z}$  est donc donnée par :

$$\begin{aligned} I_{S_Z} &= \int_{S_Z} \left( ik \rho_0 \psi \xi_n + M \xi_n \rho_0 \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi - M \mathbf{n} \cdot \nabla \wedge (\mathbf{n} \wedge \rho_0 \psi \xi_n \mathbf{v}_0) \right) dS \quad (5.162) \\ &= \int_{S_Z} (ik \rho_0 \psi \xi_n + M \xi_n \rho_0 \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi) dS - \int_{S_Z} (M \mathbf{n} \cdot \nabla \wedge (\mathbf{n} \wedge (\rho_0 \psi \xi_n \mathbf{v}_0))) dS \end{aligned}$$

D'après, Eversmann [9], l'intégrale :

$$\int_{S_Z} (M \mathbf{n} \cdot \nabla \wedge (\mathbf{n} \wedge (\rho_0 \psi \xi_n \mathbf{v}_0))) dS$$

peut être écrite comme une intégrale linéique sur le contour fermé  $\Gamma$  de la surface  $S_Z$  (voir Fig. 5.25) en utilisant le théorème de Stokes.

Soit  $\Gamma$ , une courbe fermée orientée dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $S$  une surface orientée dont le contour est  $\Gamma$ . L'orientation de  $\partial S$  est induite par l'orientation de  $S$ . Si le champ vectoriel  $\vec{V}$  admet des dérivées partielles continues, alors :

$$\iint_S \nabla \wedge \vec{V} \cdot d\vec{S} = \oint_{\Gamma} \vec{V} \cdot d\vec{l}$$

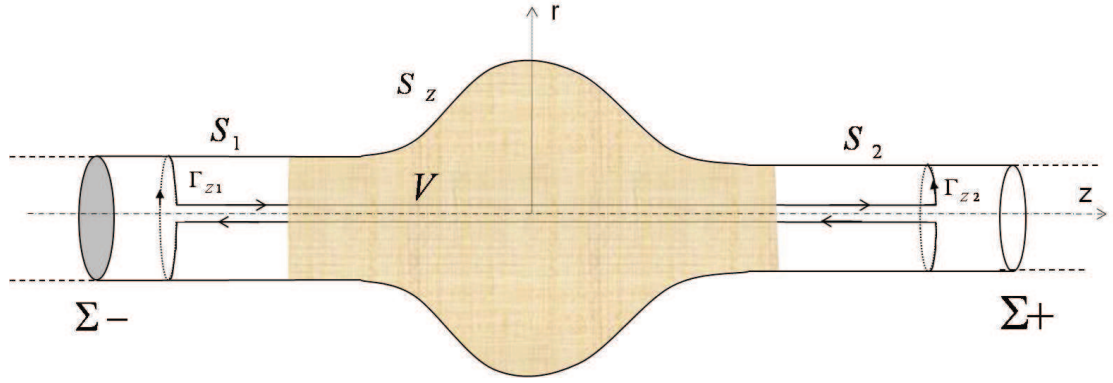
où  $d\vec{l}$  est le vecteur directeur de la courbe en tout point.

Dans notre cas, puisqu'une partie de  $\Gamma$  traverse deux fois la surface  $S_Z$  en sens inverse (la contribution de cette partie est nulle), alors l'intégrale  $I_{S_Z}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} &\int_{S_Z} (M \mathbf{n} \cdot \nabla \wedge (\mathbf{n} \wedge (\rho_0 \psi \xi_n \mathbf{v}_0))) dS \quad (5.163) \\ &= \int_{\Gamma} (M \mathbf{n} \wedge (\rho_0 \psi \xi_n \mathbf{v}_0)) \cdot d\vec{\Gamma} \\ &= \int_{\Gamma_{Z1}} (M \mathbf{n} \wedge (\rho_0 \psi \xi_n \mathbf{v}_0)) \cdot d\vec{\Gamma} + \int_{\Gamma_{Z2}} (M \mathbf{n} \wedge (\rho_0 \psi \xi_n \mathbf{v}_0)) \cdot d\vec{\Gamma} \end{aligned}$$

Les contours  $\Gamma_{Z1}$  et  $\Gamma_{Z2}$  sont situés sur  $S_1$  et  $S_2$  respectivement. Sur une paroi rigide le déplacement étant nulle, les intégrales linéiques sur  $\Gamma_{Z1}$  et  $\Gamma_{Z2}$  sont aussi nulles. Ce qui réduit l'intégrale de surface  $I_{S_Z}$  à :

$$I_{s_z} = \int_{S_Z} (ik \rho_0 \psi \xi_n + M \xi_n \rho_0 \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi) dS \quad (5.164)$$

Figure 5.25 – Contour  $\Gamma$ 

En remplaçant  $\xi_n$  par son expression dans (5.148) et en développant (5.164), on trouve :

$$I_{S_z} = \frac{Y}{ik} \int_{S_z} \rho_0^2 \left[ k^2 \phi \psi + ikM \left( \psi \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi - \phi \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi \right) + M^2 \left( \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi \right) \left( \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi \right) \right] dS$$

La formulation variationnelle devient :

$$\begin{aligned} & \int_V \left( \rho_0 \nabla \phi \cdot \nabla \psi - \frac{\rho_0}{c_0^2} k^2 \phi \psi - 2ikM \psi \frac{\rho_0}{c_0^2} \left( \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi \right) - ikM \psi \phi \operatorname{div} \left( \frac{\rho_0}{c_0^2} \mathbf{v}_0 \right) \right. \\ & \quad \left. - M^2 \frac{\rho_0}{c_0^2} \left( \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi \right) \left( \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi \right) \right) dV \quad (5.165) \\ & + \frac{Y}{ik} \int_{S_z} \rho_0^2 \left[ k^2 \phi \psi + ikM \left( \psi \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi - \phi \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi \right) + M^2 \left( \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi \right) \left( \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi \right) \right] dS \\ & \quad \pm \int_{S_{\pm}} \rho_0 \left( 1 - M^2 \frac{|\mathbf{v}_0|^2}{c_0^2} \right) \frac{\partial \phi}{\partial n} \psi dS \\ & \quad = - \int_V f \psi dV \end{aligned}$$

La géométrie du guide étant axisymétrique, l'étude peut donc se réduire sur le plan  $(r, z)$  (voir Fig. 5.26). Ainsi,  $\Omega$  et  $\Gamma$  sont la restriction de  $V$  et  $S$  respectivement dans le plan  $(r, z)$ . La formulation variationnelle devient :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left( \rho_0 \nabla \phi \cdot \nabla \psi - \frac{\rho_0}{c_0^2} k^2 \phi \psi - 2ikM \psi \frac{\rho_0}{c_0^2} \left( \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi \right) - ikM \psi \phi \operatorname{div} \left( \frac{\rho_0}{c_0^2} \mathbf{v}_0 \right) \right. \\ & \quad \left. - M^2 \frac{\rho_0}{c_0^2} \left( \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi \right) \left( \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi \right) \right) d\Omega \quad (5.166) \\ & + \frac{Y}{ik} \int_{\Gamma_z} \rho_0^2 \left[ k^2 \phi \psi + ikM \left( \psi \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi - \phi \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi \right) + M^2 \left( \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi \right) \left( \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi \right) \right] R d\Gamma \\ & \quad \pm \int_{\Sigma_{\pm}} \rho_0 \left( 1 - M^2 \frac{|\mathbf{v}_0|^2}{c_0^2} \right) \frac{\partial \phi}{\partial n} \psi r d\Sigma \\ & \quad = - \int_V f \psi d\Omega \end{aligned}$$

Où  $d\Omega = r dr dz$  et  $\phi = \phi(r, z)$ . Si le nombre de Mach  $M$  est petit, on peut faire les

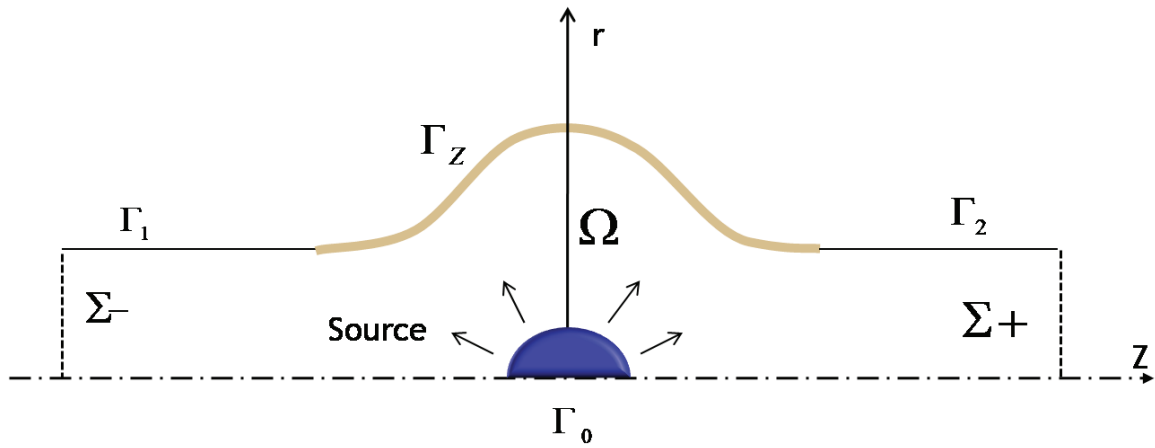


Figure 5.26 – Représentation axisymétrique

approximations suivantes sur la partie non rectiligne du guide :

$$\begin{aligned}\rho_0 &= 1 + \frac{M^2}{2}(1 - |\mathbf{v}_0|^2) ; \\ \rho_0^2 &= 1 + M^2(1 - |\mathbf{v}_0|^2) ; \\ \frac{\rho_0}{c_0^2} &= 1 + \frac{2-\gamma}{2}M^2(1 - |\mathbf{v}_0|^2) = 1 \text{ pour } \gamma = 2\end{aligned}$$

Sur la partie rigide du guide, on a  $\rho_0 = c_0 = |\mathbf{v}_0| = 1$ .

Pour des nombres de Mach  $M$  petits, la formulation variationnelle est donc donnée par : trouver  $\phi \in H^1(V)$  tel que  $\forall \psi \in H^1(V)$ , on a :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \left[ \left( 1 + \frac{M^2}{2}(1 - |\mathbf{v}_0|^2) \right) \nabla \phi \cdot \nabla \psi - k^2 \phi \psi - 2ikM\psi(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi) \right. & \quad (5.167) \\ & \quad \left. - ikM\psi \phi \operatorname{div}(\mathbf{v}_0) - M^2(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi)(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi) \right] d\Omega \\ + \frac{Y}{ik} \int_{\Gamma_Z} \left( 1 + M^2(1 - |\mathbf{v}_0|^2) \right) \left[ k^2 \phi \psi + ikM \left( \psi \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi - \phi \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi \right) \right. & \\ & \quad \left. + M^2(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi)(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi) \right] R d\Gamma \\ \pm \int_{\Sigma_{\pm}} \left( 1 - M^2 \right) \frac{\partial \phi}{\partial n} \psi r d\Sigma = - \int_V f \psi d\Omega & \end{aligned}$$





# Modeling by the finite element method of acoustic radiation in waveguides lined with locally or non locally reacting absorbent materials in the presence of flow

## ABSTRACT

Our concern in this work is the problem of acoustic propagation in guides lined with locally or non locally reacting materials with the presence of mean fluid flow. In several industrial systems such as aircraft jet engines, mufflers exhaust and ventilation systems, noise is mostly channeled outside by guides of more or less complex geometries.

A study of waveguides makes it possible to predict and understand the physical phenomena such as refraction, convection, absorption and wave attenuation. In waveguides studies, guides are often considered infinitely long to get rid of some phenomena (reflection for example) at their ends.

Solving the problem of acoustic propagation in infinite guides by finite element method requires to truncate the infinite domain by artificial boundaries on which transparent boundary conditions must be written. In this work, the transparent boundary conditions are written as a Dirichlet-to-Neumann (DtN) operators based on sound pressure decomposition on the eigenmodes basis of the studied guide by taking into account the influence of parameters such as flow and acoustic liners in the guide walls. Acoustic propagation in the guide is governed by a model based on the scalar Helmholtz equation and the used liners are locally reacting materials of local impedance  $Z$  and porous materials. In this study, we focused particularly rigid porous materials modeled by an equivalent fluid because the acoustic propagation in these materials is also governed by the Helmholtz equation as in a fluid medium. Results of studies of acoustic propagation in uniform straight lined guides with a uniform flow allowed to validate the method developed to truncate infinite domains. The study was also done successfully for non uniform lined guides with a potential mean flow.

## KEYWORDS

Acoustic propagation in waveguides, locally or non locally reacting absorbent material, equivalent fluid model, transparent boundary condition, DtN operator

## Modélisation du rayonnement acoustique dans les guides traités par des matériaux absorbants à réaction localisée ou non localisée en présence d'écoulement par la méthode des éléments finis

### RÉSUMÉ

On s'intéresse dans ce travail au problème de propagation acoustique dans des guides à parois traitées avec des matériaux absorbants à réaction localisée ou non localisée en présence d'écoulement. En effet, dans les systèmes industriels comme les turboréacteurs d'avions, les silencieux d'échappement et les systèmes de ventilation, le bruit est le plus souvent canalisé vers l'extérieur par des guides de géométries plus ou moins complexes.

Une étude des guides d'ondes permet donc de prédire et de comprendre les phénomènes physiques tels que la réfraction, la convection, l'absorption et l'atténuation des ondes. Dans l'étude des guides d'ondes, on considère souvent qu'ils sont infiniment longs afin de s'affranchir de certains phénomènes (réflexion par exemple) à leurs extrémités.

Résoudre le problème de propagation dans les guides infinis par la méthode des éléments finis nécessite de tronquer le domaine infini par des frontières artificielles sur lesquelles des conditions limites transparentes doivent être écrites. Dans ce travail, les conditions limites transparentes sont écrites sous forme d'un opérateur Dirichlet-to-Neumann (DtN) basé sur une décomposition de la pression acoustique sur la base des modes propres du guide étudié tout en prenant en compte l'influence des paramètres comme l'écoulement et le traitement acoustique avec des matériaux absorbants. La propagation acoustique dans le guide est régie par un modèle scalaire basé sur l'équation de Helmholtz et les matériaux absorbants utilisés sont des matériaux absorbants d'impédance locale  $Z$  et des matériaux poreux. Nous nous sommes intéressés en particulier aux matériaux poreux à squelette rigide que l'on modélise par un fluide équivalent car la propagation acoustique dans ces matériaux est aussi gouvernée par l'équation de Helmholtz comme dans un milieu fluide. Des résultats d'étude de la propagation acoustique dans des guides rectilignes uniformes traités en présence d'un écoulement uniforme ont permis de valider la méthode développée pour tronquer les domaines infinis. L'étude a aussi été menée avec succès pour des guides non uniformes traités en présence d'un écoulement potentiel.

### MOT-CLEFS

Propagation acoustique dans des guides d'ondes, matériau absorbant à réaction localisée ou non localisée, modèle du fluide équivalent, condition limite transparente, opérateur DtN