



HAL
open science

**Contribution à la caractérisation des milieux
(visco-)élastiques anisotropes et hétérogènes :
application au tissu osseux**

Mai Ba Vu

► **To cite this version:**

Mai Ba Vu. Contribution à la caractérisation des milieux (visco-)élastiques anisotropes et hétérogènes : application au tissu osseux. Autre. Université Paris-Est, 2011. Français. NNT : 2011PEST1128 . tel-00674157

HAL Id: tel-00674157

<https://theses.hal.science/tel-00674157v1>

Submitted on 7 Jul 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR

de

L'UNIVERSITÉ PARIS-EST

ÉCOLE DOCTORALE
SCIENCES, INGÉNIERIE ET ENVIRONNEMENT

SPÉCIALITÉ : SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

présentée par
Mai Ba VU

Titre de la thèse :

CONTRIBUTION À LA CARACTÉRISATION DES MILIEUX
(VISCO-)ÉLASTIQUES ANISOTROPES ET HÉTÉROGÈNES :
APPLICATION AU TISSU OSSEUX

soutenue le 11 octobre 2011

devant le jury composé de :

M. Jean-Marie CROLET	Professeur, Université de Franche-Comté	Rapporteur
M. Guillaume HAIAT	Chargé de recherche au CNRS, Université Paris-Est	Co-directeur de thèse
M. Alain LHEMERY	Chercheur CEA, expert senior, HDR	Rapporteur
M. Salah NAILI	Professeur, Université Paris-Est Créteil	Directeur de thèse
M. Vu-Hieu NGUYEN	Maître de conférences, Université Paris-Est Créteil	Examineur
M. Lalaonirina RAKOTOMANANA	Professeur, Université de Rennes 1	Président du jury

Table des matières

Introduction générale	5
1 Structure du tissu osseux et évaluation ultrasonore de l'os cortical	7
1.1 Le tissu osseux	7
1.1.1 Définition	7
1.1.2 Structure de l'os humain	8
1.1.3 Microstructure de l'os cortical	9
1.2 Vieillessement de l'os et Ostéoporose	10
1.2.1 Vieillessement de l'os	10
1.2.2 Ostéoporose	12
1.3 Technique d'évaluation ultrasonore de l'os cortical en transmission axiale .	13
1.4 Dispositifs ultrasonores en transmission axiale pour mesurer la vitesse du FAS	15
1.5 Conclusion	17
2 Influence d'un gradient de propriétés matérielles dans l'os cortical sur l'onde ultrasonore	19
2.1 Introduction	19
2.2 Méthode de simulation	21
2.2.1 Configuration géométrique de la transmission axiale	21
2.2.2 Modélisation de la configuration de la technique de TA	22

2.2.3	Détermination de la variation des propriétés mécaniques de l'os cortical	25
2.2.4	Ondes de Lamb et ondes latérales	27
2.2.5	Modélisation d'un gradient de propriétés matérielles homogénéisées	28
2.2.6	Modélisation d'un gradient de porosité	30
2.2.7	Profondeur équivalente pour une couche épaisse de solide	31
2.3	Résultats	33
2.3.1	Intervalle des propriétés de rigidité de l'os cortical	33
2.3.2	Variation de la vitesse du FAS vis-à-vis de changements de propriétés mécaniques de l'os cortical	33
2.3.3	Effet qualitatif d'un gradient de propriétés matérielles	34
2.3.4	Cas d'une couche solide épaisse	35
2.3.5	Cas d'une couche mince de solide	37
2.3.6	Cas d'un gradient de porosité	38
2.4	Conclusion	40
3	Influence de la viscosité sur la propagation des ondes ultrasonores dans l'os cortical	41
3.1	Introduction	41
3.2	Modélisation et simulation numérique	42
3.2.1	Configuration géométrique de la technique de transmission axiale .	42
3.2.2	Modélisation de la configuration de la technique de TA	42
3.2.3	Modélisation d'un gradient de propriétés matérielles homogénéisées	46
3.2.4	Calcul de la viscosité	49
3.3	Résultats	50
3.3.1	Intervalle des propriétés mécaniques du matériau	50
3.3.2	Dépendance de la vitesse du FAS vis-à-vis de la viscosité du fluide .	52
3.3.3	Dépendance de la vitesse du FAS vis-à-vis de la viscosité d'une couche homogène d'os cortical	52

3.3.4	Dépendance de la vitesse du FAS vis-à-vis d'un gradient des propriétés de viscosités de la couche d'os cortical	56
3.3.4.1	Cas d'une couche épaisse de solide	56
3.3.4.2	Cas d'une couche mince de solide	56
3.3.5	Dépendance de la vitesse du FAS vis-à-vis d'un gradient de porosité	58
3.4	Conclusion	59
4	Profondeur équivalente investie par l'onde latérale en transmission axiale dans l'os cortical viscoélastique	61
5	Méthode analytique pour déterminer les propriétés effectives d'élasticité de l'os cortical	81
5.1	Méthode analytique pour déterminer les propriétés effectives d'élasticité	81
5.1.1	Introduction	81
5.1.2	Hypothèses du modèle	85
5.1.3	Méthode d'homogénéisation asymptotique	87
5.1.3.1	Notation du tenseur d'élasticité isotrope transverse	87
5.1.3.2	Problème de cellule	89
5.1.3.3	Équations homogénéisées de la propagation d'ondes	93
5.1.3.4	Solution du problème de cellule	96
5.2	Méthode de micromécanique et calcul de bornes	97
5.2.1	Relation entre les composantes du tenseur d'élasticité et les caractéristiques mécaniques	97
5.2.2	Méthode de Mori-Tanaka	98
5.2.3	Détermination de bornes des propriétés matérielles effectives	100
5.2.3.1	Modèle d'assemblage de cylindres	101
5.2.3.2	Bornes de Hashin-Rosen	102
5.2.3.3	Bornes de Hashin-Shtrikman	104
5.2.4	Limites pour les cas d'os sec et humide	105

5.3 Résultats	106
5.3.1 Comparaison des résultats avec d'autres modèles	106
5.3.2 Comparaison des résultats avec des données expérimentales	112
5.4 Conclusion	116
Conclusion générale	117
Table des figures	126
Liste des tableaux	128
Bibliographie	128

Introduction générale

Plusieurs pathologies conduisent à des modifications de l'os cortical, caractérisées, en particulier, par une diminution de l'épaisseur corticale par résorption endostéale et un accroissement de la porosité intracorticale. Idéalement, on attend des mesures de caractérisation osseuse qu'elles soient sensibles, en particulier, à ces modifications. Plus généralement, pour caractériser l'os cortical par des méthodes ultrasonores, cela suppose une compréhension fine des phénomènes de propagation mis en jeu, de façon à pouvoir interpréter des différences de valeurs entre deux sujets ou une évolution des valeurs mesurées sur un sujet donné. Ces phénomènes restent à l'heure actuelle mal compris, notamment au travers des rôles de la géométrie complexe de l'os cortical (épaisseur corticale, aspect tridimensionnel), de son anisotropie et son atténuation. Ce travail de thèse vise à introduire des outils dans la caractérisation mécanique et géométrique des tissus biologiques, et en particulier, du tissu osseux.

L'os cortical est la partie compacte de l'os qui joue un rôle primordial dans la résistance osseuse (Rico, 1997). Les dispositifs dits de transmission axiale sont dédiés à la caractérisation de l'os cortical. Jusqu'à présent, les dispositifs ultrasonores de transmission axiale commercialisés utilisent la mesure de la vitesse du premier signal (FAS, First Arriving Signal) qui est un index pertinent et robuste de l'état de l'os cortical (Stegman et al., 1995; Barkmann et al., 2000; Hans et al., 1999). L'interprétation des résultats issus de ces mesures est essentiellement construite à partir de modèle mécanique en supposant que le tissu osseux se comporte comme un solide élastique.

Le développement de nouvelles modalités est actuellement nécessaire afin de mieux caractériser l'os cortical. L'approche sur laquelle se base ce travail de thèse est un calcul du FAS prenant en compte le caractère viscoélastique de la couche d'os cortical laquelle permet de fournir de nouvelles informations pertinentes sur le tissu osseux cortical et de déboucher sur une interprétation clinique plus pertinente. Le document comporte 5 chapitres organisées comme suit.

Le chapitre 1 décrit le contexte de ce travail de thèse. La structure du tissu osseux est décrite ainsi que les principales pathologies osseuses et les différentes techniques de caractérisation du tissu osseux.

Le chapitre 2 porte sur l'influence d'un gradient de propriétés matérielles sur la propagation d'onde ultrasonore dans l'os cortical pour une fréquence centrale autour de 1 MHz. En supposant que l'os cortical est un milieu élastique, le FAS est évaluée en présence d'un gradient de propriétés matérielles. Nous démontrons le lien entre la vitesse du FAS et les propriétés mécaniques de l'os cortical en présence d'un gradient de propriétés matérielles.

Le chapitre 3 porte sur l'influence de la viscosité des propriétés matérielles sur la propagation des ondes ultrasonores dans l'os cortical. Dans cette partie, l'os cortical est supposé avoir un comportement viscoélastique ; l'effet de la viscosité, non seulement de la couche corticale mais aussi des tissus environnants, est évalué.

Le chapitre 4 porte (article paru dans une revue à comité de lecture) concerne l'évaluation de la profondeur moyenne investie par l'onde latérale (ou onde tête) pour des variations radiales des propriétés matérielles dans l'os cortical.

Le chapitre 5 porte sur une nouvelle méthode analytique pour déterminer les propriétés effectives d'élasticité de l'os cortical. Ce travail a été mené lors d'un séjour de 3 mois à l'université de Manchester en Angleterre dans le département de Mathématiques sous la direction de William Parnell. Au cours de ce séjour, nous avons généralisé le modèle initié par ([Parnell and Abrahams, 2008](#)).

Le document se termine par une conclusion et les perspectives offertes par cette étude.

Chapitre 1

Structure du tissu osseux et évaluation ultrasonore de l'os cortical

Dans ce travail de thèse, l'os est considéré comme un matériau au sens du mécanicien. Il s'agit néanmoins de ne pas oublier son rôle en tant qu'organe. Quelques notions de physiologie de l'os sont donc proposées car elles seront utiles pour la modélisation du tissu osseux. Ainsi, ces notions n'étant ni nouvelles, ni originales, ce chapitre est largement inspiré des travaux de thèses traitant de sujets analogues, et en particulier, celles de [Sasso \(2007\)](#) et [Bossy \(2003\)](#).

1.1 Le tissu osseux

1.1.1 Définition

Selon l'échelle considérée, le tissu osseux est un matériau composite, hétérogène et anisotrope. Il est constitué deux phases : l'une minérale et l'autre organique. La phase minérale est composée de cristaux d'hydroxyapatite qui sont fixés à la matrice organique. Ces cristaux d'hydroxyapatite confèrent à l'os une certaine rigidité. La phase organique est une matrice protéique extra-cellulaire essentiellement constituée de fibres de collagène qui confèrent à l'os son élasticité.

Une des principale caractéristique du tissu osseux est sa capacité à se renouveler spontanément, à s’auto-réparer et à adapter sa masse, sa forme et ses propriétés mécaniques à son environnement. A ce sujet, comme pour la structure du tissu osseux, le lecteur pourra se reporter à l’ouvrage de synthèse édité par Cowin (Cowin, 2001).

1.1.2 Structure de l’os humain

Le squelette remplit à la fois des fonctions structurelle et métabolique lesquelles sont caractéristiques de l’ensemble des os d’un animal vertébré. Dans sa fonction structurelle, le squelette joue le rôle de charpente du corps, de levier rigide dans l’action musculaire et de bouclier de protection pour certains organes tels que le cerveau, le cœur ou la moelle osseuse. Dans sa fonction métabolique, le squelette constitue également la réserve de calcium de l’organisme.

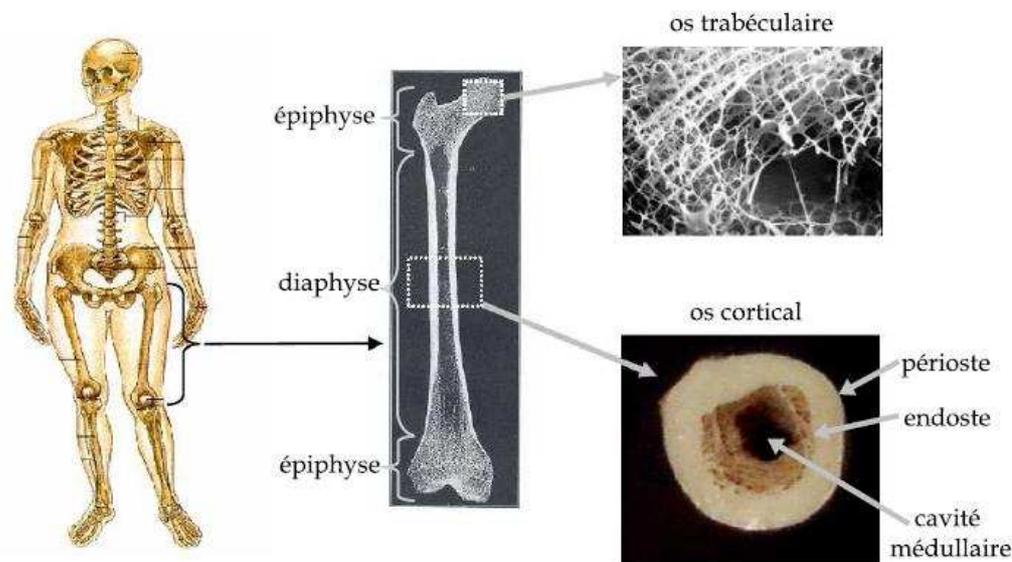


FIG. 1.1 – Structure d’un tissu osseux : os trabéculaire et cortical (tirée de Sasso (2007) avec son autorisation)

Le squelette humain est composé de 206 os qui sont classifiés suivant leur forme et leur taille selon 5 types : les os longs, les os courts, les os plats, les os particuliers et les os sésamoïdes (Cornuelle and Gronefeld, 1997).

Les os longs présentent une macrostructure plus longue que large. Ils jouent un rôle

prédominant dans la locomotion et servent de modèle à la description de la microstructure osseuse. Un os adulte typique est constitué d'un tronçon tubulaire appelé diaphyse et de deux extrémités plus larges et arrondies dénommées épiphyses (voir Fig. 1.1). La diaphyse est essentiellement composée d'os cortical alors que l'épiphyse est composée d'os trabéculaire entouré d'une couche d'os cortical.

L'os trabéculaire est un matériau poreux constitué de travées en forme de tiges appelées trabécules (voir Fig. 1.1). C'est un tissu spongieux rempli de moelle osseuse. C'est pour cette raison qu'il est aussi appelé os spongieux. Il constitue les épiphyses des os longs. L'os trabéculaire représente 20% de la masse osseuse mais 67% de la surface osseuse totale (Cowin, 2001). Son taux de remodelage est dit élevé, soit environ 26% (Cowin, 2001). Sa fonction est principalement métabolique et homéostatique ; sa résistance est dite plutôt faible.

L'os cortical est un matériau compacte (voir Fig. 1.1). Il constitue la diaphyse des os longs. Il représente 80% de la masse osseuse totale. Sa porosité est dite faible, soit de l'ordre de 5% (Cowin, 2001), et son taux de remodelage est dit plutôt faible bas, soit environ 3% (Cowin, 2001). Sa fonction est notamment biomécanique puisqu'il supporte la majeure partie du chargement mécanique du corps. Il joue également un rôle de protection de la moelle osseuse et de certains organes. L'enveloppe externe de l'os cortical est appelée périoste et son enveloppe interne est dénommée endoste. La microstructure corticale est décrite dans le paragraphe qui suit.

1.1.3 Microstructure de l'os cortical

A l'échelle millimétrique, l'os cortical se présente sous la forme d'un solide dense (voir Fig. 1.1). Une observation à l'échelle de la centaine de micromètres révèle une architecture organisée autour d'un élément structurant de base, l'ostéon ou système haversien. L'ostéon se présente sous la forme d'un long cylindre étroit d'une longueur de l'ordre de 10 mm, dont le diamètre est compris entre 100 et 300 μm . Chaque ostéon est composé d'un canal haversien central entouré d'une série de lamelles concentriques de matrice osseuse,

contenant des nerfs et des vaisseaux capillaires. Le diamètre des canaux de Havers est de l'ordre de $50 \mu\text{m}$. Comme illustré dans la Fig. 1.2, la diaphyse des os longs résulte d'un assemblage compact d'ostéons orientés le long de l'axe de l'os.

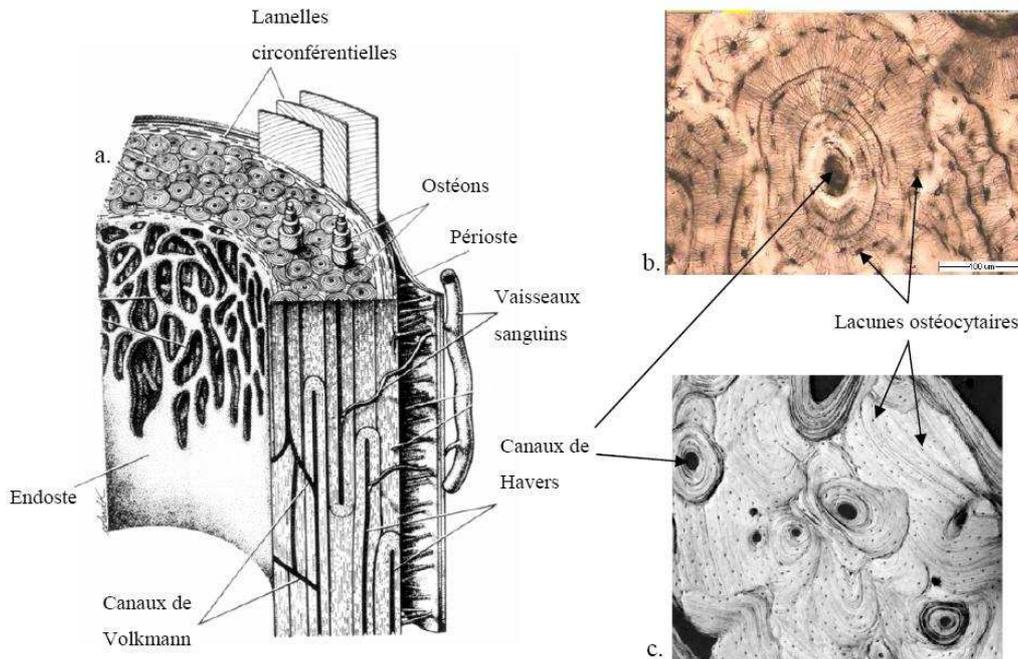


FIG. 1.2 – Microstructure d'os cortical (*tirée de Bossy (2003) avec son autorisation*)

Nous nous concentrerons dans ce paragraphe sur la microstructure de l'os cortical de la diaphyse des os longs. Le tissu osseux, qu'il soit trabéculaire ou cortical, est un tissu multi-échelle. L'organisation hiérarchique de l'os cortical est résumée dans le Tab. 1.1.

1.2 Vieillessement de l'os et Ostéoporose

1.2.1 Vieillessement de l'os

L'équilibre entre la formation et la résorption os est sensiblement du même ordre de grandeur jusqu'à environ l'âge de 35 ans. Ensuite, quand le processus de résorption prend le dessus sur le processus de formation, l'os se fragilise. L'ostéoporose n'est autre que l'accentuation pathologique de ce vieillissement naturel de l'os. Pour les hommes, la masse osseuse s'augmente durant la croissance. Pour les femmes, La perte osseuse est

niveau	échelle	structure	taille caractéristique
0	macrostructure	matériau solide	> mm
1	microstructure	ostéons (os haversien) plaques (os plexiforme) tissu interstitiel	100 à 300 μm
2	sous-microstructure	lamelles (os lamellaire) os tissé lacunes surfaces cémentantes	1 à 10 μm
3	nanostucture	collagène cristaux d'hydroxyapatite	100 nm à 1 μm
4	sous-nanostucture	molécules protéines	< 100 nm

TAB. 1.1 – Microstructure de l'os cortical (*tiré de (Sasso, 2007) avec son autorisation*)

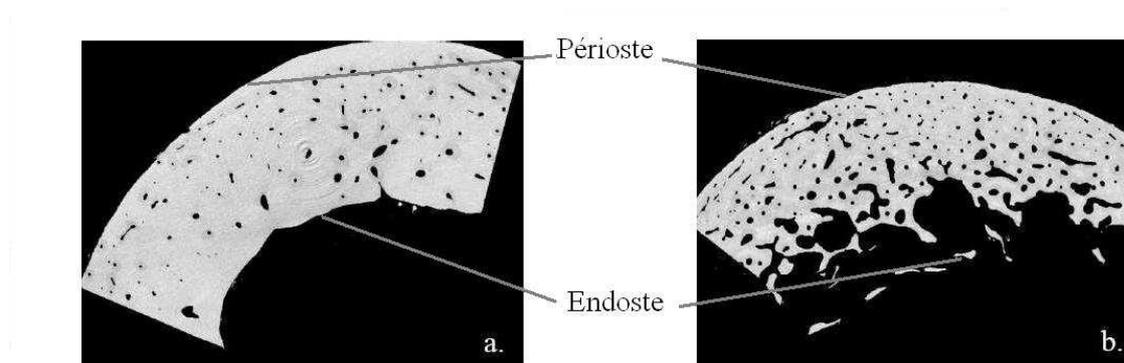


FIG. 1.3 – Vieillesse de l'os cortical. (a) Femme de 55 ans. (b) Femme de 90 ans. (*tirée de Bossy (2003) avec son autorisation*)

accélérée après la ménopause en raison de la carence soudaine en oestrogènes comme cela peut-être observé sur la figure 1.3. A partir de de l'âge de 30 ans, les femmes perdent 0.5% de leur masse osseuse par année. Pendant les 5 à 10 ans qui suivent la ménopause, elles perdent de 2 à 5% de leur masse osseuse tous les ans. Au cours des 10 années de vie qui suivent la ménopause, une femme peut perdre 30% de son tissu osseux et 50% au niveau des vertèbres.

1.2.2 Ostéoporose

En 1993 l'Organisation Mondiale de la Santé a définie l'ostéoporose comme étant une affection diffuse du squelette, caractérisée par une diminution de la masse osseuse conjointement à des altérations micro-architecturales du tissu osseux, induisant une augmentation de la fragilité osseuse et un risque accru de fracture (Kanis, 1994). Les sites tels que le col du fémur, les vertèbres (fractures communément appelées tassements vertébraux) ou le poignet (fracture de Pouteau-Colles) sont propices à des fractures car ils sont sujets à l'ostéoporose (Legrand et al., 2006). Elle se développe sans symptôme apparent et n'est généralement pas détectée jusqu'à ce qu'une fracture survienne (Kaste, 2004). L'ostéoporose est ainsi une maladie silencieuse. Néanmoins, l'ostéoporose est une maladie grave, présentant une forte morbidité et un fort taux de mortalité. Par exemple, Melton et al. (2005) a montré que le taux de mortalité consécutif à une fracture ostéoporotique survenant après 50 ans est de 40% chez la femme de type caucasien et de 13% chez l'homme. De plus, environ 40% des femmes de type caucasien ayant atteint la ménopause seront affectées par une fracture ostéoporotique avant la fin de leur vie (Melton et al., 2005). En outre, le risque de fracture augmente avec l'âge. Le taux de fracture du col de fémur est de 33% chez la femme de type caucasien et 17% chez l'homme à partir de 90 ans (Melton et al., 2005). Ainsi, en raison du vieillissement progressif des populations mondiales, l'ostéoporose devient un véritable enjeu de santé publique (Vellas et al., 2000). On estime qu'environ 200 millions de personnes sont atteintes d'ostéoporose dans le monde. En France, l'ostéoporose a été inscrite par le Haut Comité de la Santé Publique comme étant l'un des quatorze problèmes prioritaires de santé publique. L'Organisation Mondiale de la Santé a également classé l'ostéoporose comme un enjeu majeur de santé publique. Aux États-Unis, on estime à 14 milliards de dollars les dépenses de santé engagées chaque année pour traiter les fractures ostéoporotiques.

1.3 Technique d'évaluation ultrasonore de l'os cortical en transmission axiale

La première évaluation ultrasonore de l'os cortical en transmission axiale a été réalisée par Siegel et al. (1958) en 1958. Ensuite, il a fallu attendre les travaux de Tatarinov et al. (1990) et Lowet and van der Perre (1996) pour que cette technique soit de nouveau étudiée de façon attentive. De nombreux chercheurs se sont intéressés aux techniques dites de transmission axiale (voir par exemple (Foldes et al., 1995; Barkmann et al., 2000; Lefebvre et al., 2002; Nicholson et al., 2002; Moilanen et al., 2003; Bossy et al., 2004a; Protopappas et al., 2006)) depuis la fin des années 1990. Néanmoins, dans une majorité d'études, les méthodes de quantification ultrasonore restent confinées à l'évaluation de l'os trabéculaire en transmission transverse. L'évaluation de l'os cortical présente un intérêt certain pour la caractérisation du tissu osseux de laquelle il est possible d'évaluer une prédiction du risque de fracture. En effet, le rôle de l'os cortical est déterminant pour la résistance mécanique des os, notamment au fémur, car il représente plus de 80% de la masse du squelette. L'os cortical est lui aussi affecté par la résorption osseuse et l'ostéoporose qui provoquent un amincissement du cortex ainsi qu'une augmentation de la porosité, de la minéralisation et une diminution de la rigidité (Grynepas, 1993; Currey, 1969). De plus, la majorité des fractures ostéoporotiques touchent principalement l'os cortical qui est plus affecté par les pertes osseuses que l'os trabéculaire (Rico, 1997).

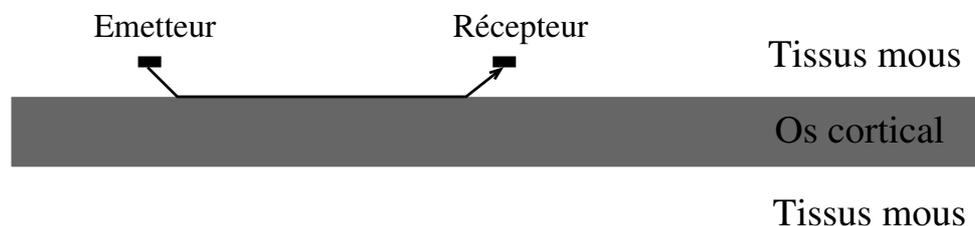


FIG. 1.4 – Schématisation de la technique de transmission axiale pour l'os cortical

La transmission axiale est une technique dédiée à l'évaluation de l'os cortical. En transmission axiale, le (ou les) émetteur(s) et le (ou les) récepteur(s) sont alignés du même côté du site osseux à évaluer comme cela est schématisé dans la Fig. 1.4 .

Les dispositifs fonctionnant en transmission axiale émettent une impulsion ultrasonore large bande où différents types de contribution sont excités puis acquis par le ou les récepteur(s). Ces différentes contributions arrivent à des temps différents et sont susceptibles d’être associées à plusieurs modes de propagation lesquels sont spécifiquement sensibles aux propriétés matérielles du tissu osseux.

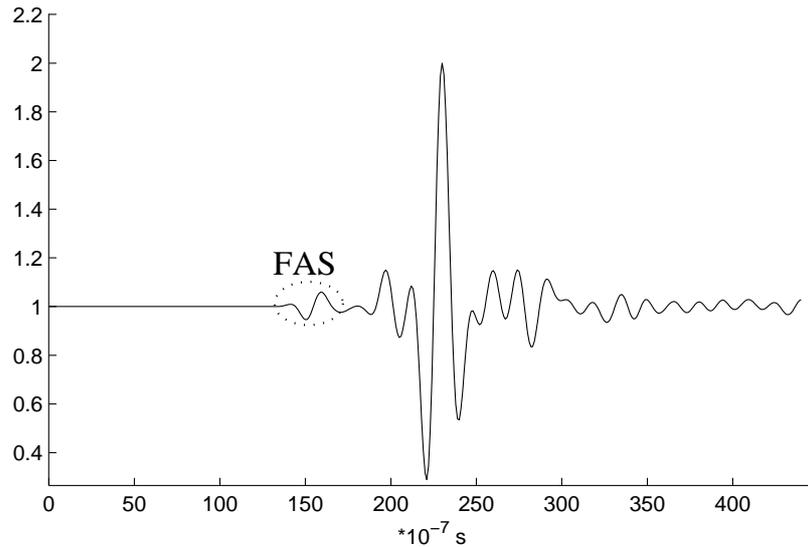


FIG. 1.5 – Exemple d’un signal reçu à un récepteur lors de l’utilisation de la technique de transmission axiale

Actuellement le seul paramètre clinique évalué en transmission axiale est la mesure de la vitesse du premier signal (First Arriving Signal, FAS) arrivant sur les récepteurs. La figure 1.5 montre un exemple de signal reçu sur l’un des récepteurs. Ce signal est obtenu via les méthodes développées dans le chapitre 2 ou 3.

Notons que des travaux récents basés sur des simulations numériques utilisant la méthode aux différences finies sur des plaques et des tubes élastiques ayant les propriétés mécaniques proches de celles de l’os cortical (Bossy et al., 2002, 2004b; Bossy, 2003) ont permis d’élucider les modes de propagation qui peuvent être associés au FAS. Ainsi, il a été montré que le FAS pouvait être associé à une onde latérale de compression lorsque l’épaisseur corticale était plus grande que la longueur d’onde et qu’il correspondait à un mode de Lamb symétrique S_0 lorsque l’épaisseur corticale était petite devant la longueur d’onde. Pour des rapports “épaisseur corticale” sur “longueur d’onde intermédiaire”, le

FAS résulte de l'interférence complexe entre différents modes de propagation. La configuration des dispositifs de transmission axiale est susceptible d'exciter de multiples modes de propagation comme cela peut être observé sur l'exemple d'un signal donné sur la Fig. 1.5. Depuis quelques années, un deuxième type de stratégie est apparu (Lefebvre et al., 2002; Nicholson et al., 2002) pour laquelle la vitesse d'une contribution particulière arrivant après le FAS est évaluée. Cette stratégie est mise en œuvre pour des dispositifs travaillant pour des fréquences généralement comprises entre 100 et 200 kHz avec lesquels des ondes guidées par le cortex peuvent être excitées. Les chercheurs se sont principalement intéressés à l'analyse d'une onde de flexion guidée qui correspond au mode de Lamb anti-symétrique A_0 (Lefebvre et al., 2002; Nicholson et al., 2002; Moilanen et al., 2003; Tatarinov et al., 2005; Ta et al., 2006). Certains chercheurs ont également étendu le modèle de propagation des ondes dans l'os cortical au modèle de la propagation dans les tubes (Lefebvre et al., 2002; Protopappas et al., 2006; Ta et al., 2006; Moilanen et al., 2007a) ou à un modèle bi-couche fluide/solide (Moilanen et al., 2006). Dans cette approche, cette vitesse mesurée peut être comparée à une vitesse prédite par un modèle de propagation donné. Ainsi, les propriétés matérielles ou géométriques de l'os peuvent être estimées par une procédure de type inversion. Parmi les propriétés d'intérêt, les propriétés matérielles (Lefebvre et al., 2002) ou l'épaisseur corticale (Moilanen et al., 2006, 2007a,b,c) peuvent ainsi être déterminés lesquelles sont des facteurs déterminants de la résistance de l'os.

1.4 Dispositifs ultrasonores en transmission axiale pour mesurer la vitesse du FAS

Les dispositifs mesurant la vitesse du premier signal opèrent entre 200 kHz et 2 MHz. L'évaluation de la vitesse du FAS mesurée par les différents dispositifs de transmission axiale repose généralement sur une évaluation temporelle de temps de vol (Time Of Flight (TOF) en anglais) reposant sur un marqueur temporel du signal. Deux types de dispositifs de transmission axiale mesurant le FAS sont commercialisés. Le premier, Soundscan,

est commercialisé par Myriad Ultrasound System. La mesure de vitesse obtenue avec ce dispositif est basée sur la propagation d'une onde ultrasonore de fréquence centrale de 250 kHz entre un émetteur et un récepteur espacés de 50 mm (Foldes et al., 1995). Le deuxième dispositif, Omnisense, est commercialisé par la société Sunlight Ultrasound Technologies. Le dispositif Omnisense dispose de plusieurs sondes émettant à plusieurs fréquences (500 kHz à 2 MHz) qui sont adaptées à la mesure de plusieurs sites osseux tels que le radius, le tibia, la phalange, les métatarses (Barkmann et al., 2000). Pour les deux appareils commercialisés, les constructeurs affirment qu'ils évaluent une valeur de vitesse qui est indépendante de l'effet des tissus mous. Cette caractéristique est importante car la présence des tissus mous présente une source potentielle d'erreur (Bossy, 2003).

Différentes équipes de recherche ont également développé des prototypes permettant de caractériser l'os cortical en transmission axiale. Le Laboratoire d'Imagerie Paramétrique (UMR CNRS 7623, Université Paris 6) a conçu un prototype de sonde de transmission axiale breveté, mais non commercialisé, qui mesure le FAS (Bossy et al., 2004a). Cette sonde est bi-directionnelle multi-récepteurs et émet une impulsion ultrasonore qui se propage le long de la surface de l'os dans les deux directions opposées. Une combinaison de plusieurs temps de vols permet de corriger efficacement l'inclinaison de la sonde par rapport à la surface de l'os et l'effet des tissus mous (Bossy et al., 2004a).

Un dispositif ultrasonore utilisant la transmission axiale et mesurant le FAS a également été développé par un groupe de l'université de Ioannina en Grèce pour le suivi de la reconstruction osseuse après fracture (Protopappas et al., 2005). Ce groupe effectue actuellement des recherches pour utiliser en complément du FAS les ondes guidées qui sont sensibles aux phases de la réparation osseuse et notamment à l'évolution géométrique du cal osseux (Protopappas et al., 2006).

1.5 Conclusion

Une description du tissu osseux, de sa structure et de ses fonctions a été proposée. Les notions de physiologie traitées dans ce chapitre devraient permettre d'aborder les travaux de modélisation mécanique dans les chapitres suivants. Des indications sur les techniques de mesures ultrasonores ont été aussi décrites. C'est à partir de ces techniques en usage dans le domaine clinique que nous proposerons des modèles aptes à aider dans l'analyse des signaux enregistrés par ce type de dispositifs.

Chapitre 2

Influence d'un gradient de propriétés matérielles dans l'os cortical sur l'onde ultrasonore

2.1 Introduction

La technique dite de transmission axiale (TA) (Axial Transmission en anglais) permet l'évaluation ultrasonore de l'os cortical. En utilisant la technique de TA, l'émetteur et les récepteurs sont placés du même côté selon la direction de l'axe longitudinale de l'os. Les premières contributions enregistrées (First Arriving Signal (FAS) en anglais) par les capteurs sont les plus souvent exploités pour mesurer la vitesse dans le domaine temporel. La vitesse du FAS est considérée comme un indice pertinent pour mesurer la qualité de l'os ([Stegman et al., 1995](#); [Barkmann et al., 2000](#); [Hans et al., 1999](#)).

La plupart des modèles de TA développés dans le passé ont considéré que l'os cortical est un matériau élastique homogène. Son comportement élastique a été décrit comme isotrope transverse (voir par exemple [Dong and Guo \(2004\)](#)). Cependant, à l'échelle macroscopique, on a observé que la porosité dans la direction transversale est hétérogène à tous les âges et pour les deux sexes ([Bousson et al., 2001](#); [Thomas et al., 2005](#); [Sansa-](#)

[lone et al., 2010](#)) : la porosité moyenne dans la région de l'endoste (partie interne de l'os cortical) est plus grande que dans la région du périoste (partie externe de l'os cortical). En outre, l'os cortical est affecté par la résorption osseuse liée à l'âge et à l'ostéoporose. L'augmentation de la porosité est susceptible d'affecter les propriétés mécaniques de la couche corticale (masse volumique et rigidité) ([Fritsch and Hellmich, 2007](#)). De même, l'augmentation de la porosité de l'os cortical est un facteur important de diminution de la résistance du tissu osseux ([Turner, 2002](#)).

[Bossy et al. \(2004b\)](#) ont évalué l'influence d'un gradient de vitesse des ondes longitudinales sur la vitesse du FAS. Leurs calculs ont été effectués en supposant i) que le comportement de l'os cortical est élastique isotrope et ii) que son épaisseur est plus grande que la longueur d'onde dans l'os cortical (ce qui correspond au cas d'une couche d'os corticale épaisse). Le but de cette étude est d'évaluer les effets de l'hétérogénéité de l'os cortical sur la réponse ultrasonore mesurée par les récepteurs. Dans ce travail, l'os cortical est modélisé comme un milieu de dimension 2 dont le comportement est élastique, linéaire et anisotrope (isotrope transverse) avec un gradient de propriétés matérielles dans la direction radiale.

Dans le passé, des méthodes analytiques ont été utilisées pour résoudre le système d'équations des ondes dans le domaine temporel. On pourra par exemple consulter à ce sujet les travaux de [Macocco et al. \(2005\)](#); [Grimal and Naili \(2006\)](#); [Macocco et al. \(2006\)](#). Cependant, ces méthodes ne sont pas appropriées pour prendre en compte les hétérogénéités des matériaux. Pour modéliser l'hétérogénéité de l'os, les méthodes numériques comme la méthode des éléments finis ou la méthode des différences finies sont plus appropriées pour prendre en compte des gradients de propriétés matérielles. Dans ce travail, la bibliothèque de programmes basée sur la méthode des éléments finis du code commercial Comsol Multiphysics (version 3.3) ([COMSOL Multiphysics, 2005](#)) a été utilisée pour résoudre numériquement le problème. La méthode des éléments finis est utilisée pour obtenir la solution du problème laquelle est brièvement décrite dans la section [2.2](#), puis la solution est utilisée pour calculer la dépendance de la vitesse du FAS vis-à-vis des

propriétés de l'os cortical hétérogène. Dans la section 2.3, on étudie : 1) le changement de la vitesse du FAS en faisant varier les coefficients élastiques et la densité de masse volumique pour les cas de matériaux homogènes ; et 2) l'effet d'un gradient constant de la masse volumique et des propriétés élastiques sur la vitesse du FAS.

2.2 Méthode de simulation

2.2.1 Configuration géométrique de la transmission axiale

Le système est modélisé par des couches bidimensionnelles ; il est composé par une couche élastique et isotrope transverse (correspondant à la couche d'os cortical) prise en sandwich entre deux couches de fluides acoustiques (voir la figure 2.1). L'épaisseur d'os cortical est notée h et l'axe z correspond à la direction transverse. La couche de fluide supérieure ($z > 0$) représente les tissus mous et la couche inférieure ($z < -h$) représente la moëlle. Les tissus mous et la moëlle sont assimilés à de l'eau, de densité 1 g.cm^{-3} et propageant les ondes acoustiques à la vitesse de 1500 m.s^{-1} .

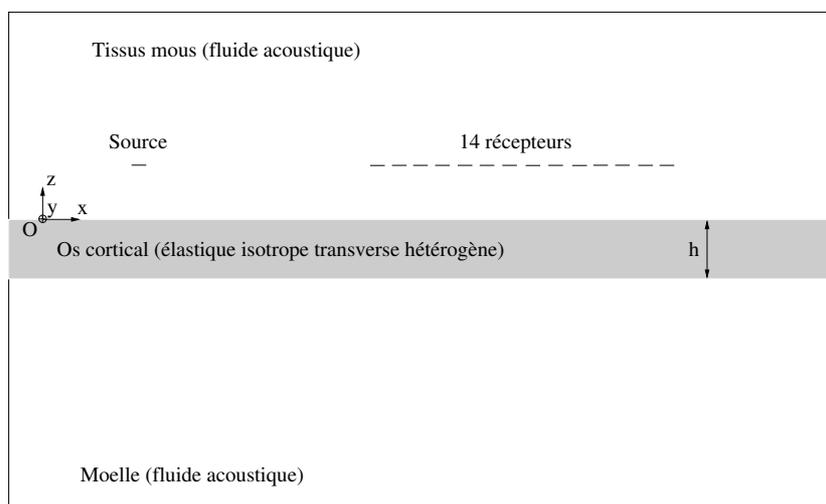


FIG. 2.1 – Configuration de la technique de TA pour l'os cortical.

Une source linéique de pression (dont la longueur est égale à 0.75 mm) est située dans le fluide supérieur à 2 mm de l'interface supérieure de la couche solide.

Le signal d'excitation est une impulsion gaussienne qui s'écrit sous la forme :

$$P(t) = P_0 \exp(-4(-1 + f_c t)^2) \times \sin(2\pi f_c t), \quad (2.1)$$

où P_0 est l'amplitude arbitrairement choisie, $f_c=1$ MHz est la fréquence centrale et t est le temps (voir la figure 2.2).

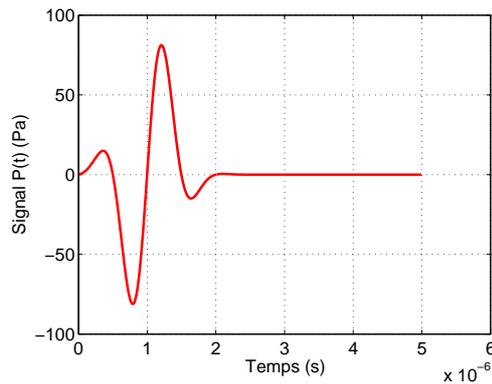


FIG. 2.2 – Histoire du signal d'excitation placé à la source.

Pour chaque simulation numérique de propagation des ondes, les 14 récepteurs enregistrent la pression sur toute la longueur de chaque capteur. Ces 14 récepteurs sont régulièrement espacés avec des espaces de 0.8 mm entre eux ; la distance de l'émetteur au récepteur le plus proche est égale à 11 mm (la longueur des récepteurs est de même longueur que la source, c'est-à-dire de 0.75 mm). Les signaux sont enregistrés sur chacun des 14 récepteurs. Le premier maximum du FAS est mesuré par chaque récepteur et les retards inter-récepteurs sont ensuite évalués en calculant la différence temporelle entre récepteurs adjacents (Bossy et al., 2004a). La vitesse du FAS estimée est ensuite calculée en utilisant les pentes des fonctions donnant la position de chaque récepteur en fonction du retard temporel par une régression linéaire via une méthode des moindres carrés.

2.2.2 Modélisation de la configuration de la technique de TA

Dans cette étude, nous négligeons tous les effets liés à la dissipation visqueuse. Les équations de la propagation des ondes acoustiques sont écrites en pression dans les deux

fluides. Par contre, les équations de l'élastodynamique dans la couche solide sont établies en déplacement.

Le vecteur position \mathbf{r} associé à un point du domaine est spécifié au travers de ses coordonnées (x, z) relativement à un trièdre Cartésien $\mathbf{R}(O; \mathbf{x}, \mathbf{z})$, où O désigne l'origine de l'espace de dimension 2 et (\mathbf{x}, \mathbf{z}) une base orthonormée de l'espace.

Équations pour les fluides L'équation de la propagation d'une onde acoustique dans un fluide non dissipatif, homogène, initialement au repos, est une théorie linéarisée des écoulements de faible vitesse mais de fréquences élevées. Les équations relatives à ce modèle sont données par :

$$\Delta p - \frac{1}{c_f^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

où $p(\mathbf{r}, t)$ désigne la pression dans le fluide, c_f est la célérité de l'onde dans le fluide et Δ est l'opérateur Laplacien.

Équations pour le solide Lorsque les forces de volume sont négligées, l'équation du mouvement dans le solide est donnée par :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{0}, \quad (2.2)$$

où $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ désigne le vecteur vitesse dont les composantes sont notées v_i , ρ est la densité volumique de masse du solide, $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}, t)$ est le tenseur des contraintes de Cauchy dans le solide et div est l'opérateur de divergence opérant sur un tenseur du 2e ordre. Les composantes du tenseur des contraintes sont notées σ_{ij} dans \mathbf{R} .

La loi de comportement du solide élastique est donnée par la loi de Hooke :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} \boldsymbol{\epsilon}, \quad (2.3)$$

où $\mathbb{C}(\mathbf{r})$ désigne le tenseur du 4e ordre de rigidité et $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{r}, t)$ est le tenseur des petites

déformations défini par la relation :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (\mathbf{grad} \mathbf{u} + (\mathbf{grad} \mathbf{u})^T), \quad (2.4)$$

où $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ désigne le vecteur déplacement, \mathbf{grad} est l'opérateur gradient et l'exposant \star^T est l'opérateur transposée.

L'équation de l'élastodynamique de la propagation des ondes est établie avec un tenseur de rigidité pour un milieu en dimension 2 et pour un comportement isotrope transverse lequel s'écrit en utilisant la notation de Voigt :

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} C_{11}(z) & C_{13}(z) & 0 \\ C_{13}(z) & C_{33}(z) & 0 \\ 0 & 0 & C_{55}(z) \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

où les constantes d'élasticité, ne dépendent que de z . Le plan isotrope correspond au plan (\mathbf{y}, \mathbf{z}) dans la figure 2.1. Dans ce modèle, la relation $C_{13} = C_{23}$ est imposée par le plan isotrope transverse. Les indices 1, 2 et 3 sont respectivement associés aux axes Ox, Oy et Oz .

On considère une variation continue des propriétés du matériau S (ce qui correspond à chaque coefficient de rigidité C_{ij} ou la masse volumique ρ) en fonction de z . Par conséquent, aucune discrétisation n'est introduite par la variation spatiale de la valeur S dans ce modèle et l'os cortical n'est pas divisé en couche de taille finie de différentes propriétés ce qui a été fait dans [Bossy et al. \(2004b\)](#).

Conditions aux interfaces, aux limites et initiales Aux interfaces entre le fluide et le solide sur les plans d'équations $z = 0$ and $z = -h$, on considère qu'il y a continuité pour la contrainte normale et que la contrainte tangentielle est nulle. Ces conditions sont

traduites par les relations :

$$\llbracket v_3(x, z, t) \rrbracket = 0, \quad \sigma_{33}(x, z, t) = -p(x, z, t), \quad \sigma_{13}(x, z, t) = 0, \quad (2.6)$$

où $\llbracket \star \rrbracket$ désigne le saut la quantité \star à la traversée de l'interface. On ajoute une condition sur la pression associée au signal d'excitation : $p(x, z, t) = P(t)$, où (x, z) sont les points localisant la source linéique de pression.

Les fluides et le solide sont au repos pour les instants $t < 0$ dans tout l'espace.

Résolution numérique Ce modèle décrit l'interaction entre les trois sous-domaines (fluide-solide-fluide), ce qui permet de tenir compte de tous les phénomènes de transmission, de réflexion et les effets de conversion. Pour chaque calcul, environ 186 000 éléments triangulaires quadratiques sont utilisés ce qui correspond à environ 393 000 degrés de liberté. La distance internodale dans les deux directions est choisie au moins inférieure à 0.15 mm dans le fluide et 0.25 mm dans le solide; cette distance est 1/6 plus faible que la plus petite longueur d'ondes dans toutes les directions et pour les 2 milieux. Cette condition conduit à une résolution spatiale satisfaisante pour les équations de propagation des ondes d'après Moser et al. (1999). Nous avons vérifié que la réduction de la taille maximale des éléments dans la couche solide à 0.2 mm ne modifie pas les résultats obtenus dans cette étude. Le pas de temps utilisé dans les calculs est de l'ordre de $10^{-3} \mu s$ et un calcul dure environ 5 heures sur une station de calcul standard.

2.2.3 Détermination de la variation des propriétés mécaniques de l'os cortical

Afin de définir des valeurs dans l'intervalle de variation physiologique du gradient des propriétés des différents os (voir dans la section 3.3.1), il est nécessaire de déterminer les valeurs limites de chaque propriété élastique. Dans ce travail, nous avons utilisés des résultats de mesures *in vitro* publiés dans Dong and Guo (2004) qui ont été réalisés sur 18

échantillons. Nous supposons que ces valeurs de propriétés matérielles sont appropriées pour être utilisées pour définir les intervalles de variations physiologiques. De plus, les composantes du tenseur de rigidité doivent vérifier la condition de stabilité thermodynamique.

Nous supposons que l'os cortical est isotrope transverse comme ce qui a été montré expérimentalement par différents auteurs (Dong and Guo, 2004; Reilly and Burnstein, 1974; Rho, 1996). Notons que cette hypothèse a été largement utilisée pour la simulation de la propagation des ondes ultrasonores dans l'os cortical (Bossy et al., 2004b; Protopappas et al., 2007).

À partir des valeurs des modules de Young longitudinal et transversal, des coefficients de Poisson longitudinal et transversal et du module de cisaillement longitudinal (notées E_L , E_T , ν_L , ν_T et G_L respectivement) qui ont été mesurés par Dong and Guo (2004), on peut déterminer les valeurs du tenseur de rigidité à partir des relations (Royer and Dieulesaint, 2000) :

$$C_{11} = \frac{E_L^2(1 - \nu_T)}{(E_L - E_L\nu_T - 2E_T\nu_L^2)}, \quad C_{33} = \frac{E_T(E_L - E_T\nu_L^2)}{(1 + \nu_T)(E_L - E_L\nu_T - 2E_T\nu_L^2)} \quad (2.7)$$

$$C_{13} = \frac{E_T E_L \nu_L}{(E_L - E_L\nu_T - 2E_T\nu_L^2)}, \quad C_{55} = G_L. \quad (2.8)$$

La valeur du coefficient de Poisson longitudinal ν_L est égale à 0.37 pour toutes les simulations numériques car elle correspond à une valeur moyenne donnée par Dong and Guo (2004). La valeur du coefficient de Poisson transversal ν_T est égale à 0.45 à partir de l'équation (2.8). Les valeurs maximale et minimale des propriétés matérielles sont obtenues en considérant respectivement les valeurs maximale et minimale de E_L et E_T qui sont données par Dong and Guo (2004) ; ainsi E_L varie de 13.37 GPa à 20.66 GPa et E_T varie de 6.46 GPa à 12.81 GPa. De plus, les propriétés élastiques calculées ci-dessus vérifient la condition de stabilité thermodynamique données par (Royer and Dieulesaint, 2000) :

$$C_{13} < \min\left(\frac{C_{11}}{2\nu_L}, 2 C_{33} \nu_L\right), \quad (2.9)$$

où $\min(\star)$ est le plus petit nombre réel \star .

Nous choisissons une valeur moyenne de la masse volumique ρ de 1.722 g.cm^{-3} (Maccocco et al., 2006) qui est donnée pour une porosité de 7% laquelle correspond approximativement à la porosité moyenne sur un rayon d'une couche d'os cortical (Baron et al., 2007). La porosité est supposée varier entre 3% et 15% (Bousson et al., 2001; Dong and Guo, 2004) et on utilise une règle des mélanges pour obtenir l'intervalle de variations de la masse volumique.

2.2.4 Ondes de Lamb et ondes latérales

Dans les études précédentes sur la propagation des ondes (en utilisant des modèles de plaque ou tube) avec un matériau isotrope transverse (Bossy et al., 2004b, 2002), il a été montré que la vitesse du FAS est liée au rapport de la longueur d'onde λ dans l'os et de l'épaisseur h . Lorsque $h/\lambda < 0.25$, la vitesse du FAS correspond à la vitesse de phase v_p de l'onde de Lamb symétrique S_0 qui est définie par l'expression suivante :

$$v_p = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho} \times \left(1 - \frac{C_{13}^2}{C_{11} \times C_{33}}\right)}. \quad (2.10)$$

Lorsque $h > \lambda$, la vitesse du FAS correspond à la vitesse des ondes latérales, c'est à dire d'une onde de compression longitudinale v_b à l'intérieur de la couche solide dans la direction parallèle à la surface de la couche qui est donnée par :

$$v_b = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}. \quad (2.11)$$

Dans cette étude, les simulations numériques ont été réalisées avec deux épaisseurs de couche solide : $h = 0.6 \text{ mm}$ et $h = 4 \text{ mm}$. En utilisant la valeur de la fréquence centrale et la variation de C_{11} , on trouve que le rapport h/λ varie dans un intervalle de 0.14 à 0.19 pour le cas $h = 0.6 \text{ mm}$ et de 0.96 à 1.25 pour le cas $h = 4 \text{ mm}$.

2.2.5 Modélisation d'un gradient de propriétés matérielles homogénéisées

On note par δ le vecteur gradient qui contrôle la propriété mécanique S . Le scalaire S correspond à un des coefficients de rigidité C_{ij} ou à la masse volumique ρ . Dans chaque simulation, une seule de ces propriétés du matériau est changée alors que les autres sont maintenues constantes (et correspondent aux valeurs de référence) au cours de la simulation.

Le vecteur gradient $\delta = \mathbf{grad} S = \delta \mathbf{z}$ est supposé être homogène dans tous les cas ; dans cette dernière relation \mathbf{z} est le vecteur unitaire de la direction z et \mathbf{grad} est l'opérateur gradient opérant sur un champ scalaire. La quantité δ est toujours positive puisque la porosité dans la partie de l'endoste est plus grande que celle dans la partie du périoste de l'os (Bousson et al., 2001).

On utilise les valeurs minimale et maximale données par Dong and Guo (2004) pour déterminer l'extremum S dans l'os cortical. En notant que S_M est la valeur de S à la surface supérieure ($z = 0$) et S_m est la valeur de S à la surface inférieure ($z = -h$), on définit la valeur maximale δ_M de δ par :

$$\delta_M = \frac{(S_M - S_m)}{h} > 0 \quad (2.12)$$

pour chaque valeur de h .

Deux cas différents (type 1 ou 2) de propriétés matérielles sont considérés et sont illustrés dans la figure 2.3.

Type 1. Le gradient de type 1 est tel que la propriété mécanique S prend la même valeur S_M à l'interface supérieure $z = 0$ de la couche solide pour toutes les valeurs du gradient δ . La quantité $S(z)$ est donnée par :

$$S(z) = S_M + \delta \times z, \quad (2.13)$$

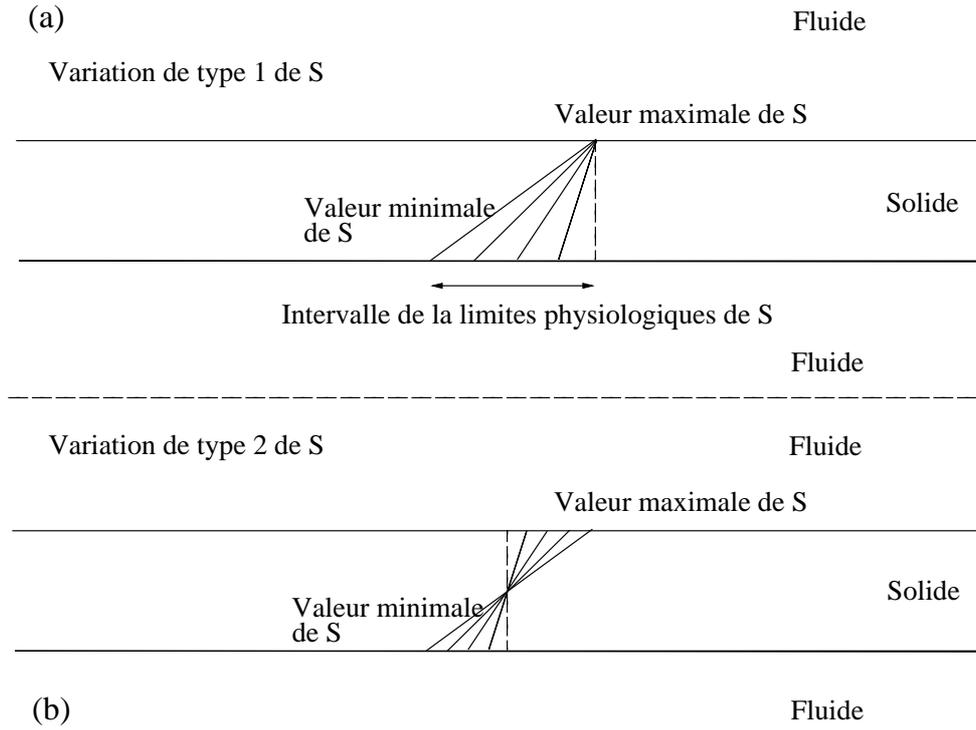


FIG. 2.3 – Représentation schématique des deux types de variations spatiales pour la propriété matérielle S correspondant aux coefficients de rigidité et de la masse volumique. Les traits pleins dans la couche de solide indiquent la dépendance spatiale de S . Le trait pointillé dans la couche de solide indique des propriétés matérielles homogènes correspondant aux propriétés du matériau de référence. La variation de type 1 présentée dans (a) correspond à la valeur constante à l'interface supérieure de l'os cortical (interface fluide-solide). La variation de type 2 présentée dans (b) correspond à la valeur constante au milieu de l'os cortical.

où S_M est la valeur maximale de la propriété S du matériau. La valeur maximale de δ est donnée par équation (2.12), montrant que toutes les valeurs de $S(z)$ sont toujours comprises entre S_m et S_M .

Type 2. Le gradient de type 2 est tel que la propriété physique S prend la même valeur au milieu de la couche solide ($z = -h/2$) pour toutes les valeurs du gradient δ . En outre, la valeur moyenne de la propriété S est constante pour tout δ . La quantité $S(z)$ est donnée par :

$$S(z) = \frac{(S_m + S_M)}{2} + \delta \times \left(z + \frac{h}{2}\right). \quad (2.14)$$

La valeur maximale de δ est donnée par l'équation (2.12) et toutes les valeurs de $S(z)$ sont toujours comprise entre S_m et S_M . Le gradient de type 2 conduit à une valeur

constante de la moyenne spatiale de S pour toutes les grandeurs de δ .

Pour les deux types de variations spatiales, on prend cinq valeurs différentes de δ variant entre 0 et δ_M pour chaque cas d'épaisseurs de la couche d'os cortical ; on a donc cinq simulations numériques pour chaque cas.

Dans la suite, les notations δ_{11} , δ_{13} , δ_{33} et δ_ρ correspondent à δ et S est respectivement C_{11} , C_{13} , C_{33} et ρ .

2.2.6 Modélisation d'un gradient de porosité

Pour l'os cortical, toutes les propriétés matérielles homogénéisées sont liées à la porosité laquelle augmente du périoste à l'endoste (Bousson et al., 2001). Lorsque la porosité s'augmente, les constantes d'élasticité homogénéisées et la masse volumique se diminuent. Ici, les variations spatiales de types 1 et 2 sont considérées comme dépendantes de la porosité (notée par P). Les valeurs minimale et maximale de la porosité P_m et P_M sont respectivement égales à 3% et 15%. La porosité P est donnée par :

Type 1 :

$$P(z) = P_M + \delta_P \times z \quad (2.15)$$

Type 2 :

$$P(z) = \frac{(P_m + P_M)}{2} + \delta_P \times \left(z + \frac{h}{2}\right). \quad (2.16)$$

La variation de la masse volumique est donnée par :

$$\rho(z) = \rho_m + \delta_\rho \times (P - 3). \quad (2.17)$$

Nous choisissons ρ_m variant de 1.753 à 1.66 g.cm⁻³ lorsque P varie de 3% à 15%, ce

qui donne $\delta_\rho = 7.7 \times 10^{-3} \text{ g.cm}^{-3}$. Ces valeurs correspondent à une masse volumique qui est égale à 1.722 g.cm^{-3} lorsque $P = 7\%$.

La dépendance des composantes C_{ij} vis-à-vis de la porosité a été étudiée dans [Baron et al. \(2007\)](#). Dans cette étude, la variation de la porosité entre 3% et 15% correspond approximativement à un changement de C_{11} et C_{33} de 4 GPa et 7.8 GPa respectivement :

$$C_{11}(z) = C_{11}^m + \delta_C \times (P - 3), \quad C_{33}(z) = C_{33}^m + \delta'_C \times (P - 3). \quad (2.18)$$

Les variations de C_{11} et C_{33} sont centrées sur leur valeur de référence. Par conséquent, les valeurs C_{11}^m et C_{33}^m sont respectivement égales à 21.6 et 14.95 GPa et les quantités δ_C et δ'_C sont respectivement égales à 0.33 et 0.65 GPa.

2.2.7 Profondeur équivalente pour une couche épaisse de solide

Dans le cas d'un os cortical épais, ce qui correspond à la propagation d'une onde latérale ([Grimal and Naili, 2006](#)), la réponse ultrasonore enregistrée par le dispositif de TA ne dépend pas explicitement de l'épaisseur de l'os cortical ([Bossy et al., 2002](#)). Ceci indique que la réponse ultrasonore ne dépend pas des propriétés matérielles de l'intérieur de la couche d'os cortical, mais seulement des propriétés matérielles de la surface supérieure d'os cortical. La variation de la vitesse du FAS en présence d'un gradient spatial de propriétés matérielles est étudiée dans le cas de la couche épaisse ($h > \lambda$) et permet d'estimer la profondeur équivalente H ([Bossy et al., 2004b](#)).

Dans la suite, une méthode simple pour estimer la valeur de cette profondeur équivalente H dans le cas d'une variation spatiale d'une donnée de propriétés matérielles S est présentée. La profondeur équivalente H est définie comme la profondeur à laquelle le taux de variation de v_b par rapport à δ (calculée à la profondeur H) et le taux de variation de la vitesse du FAS par rapport à δ (obtenu numériquement) sont égaux. Cette condition s'écrit :

$$\alpha \equiv \frac{dv_F}{d\delta}(\delta) = \frac{\partial v_b}{\partial \delta}(\delta, H), \quad (2.19)$$

où v_b est la vitesse des ondes de compression longitudinale dans la direction axiale qui dépend de z et v_F est la vitesse du FAS. La quantité α dans l'équation (2.19) est déterminée à partir des résultats numériques. Le terme dans la partie droite de l'équation (2.19) est déterminé analytiquement. Plus précisément, pour une variation spatiale de C_{11} de type 1, on a à partir des équations (2.19), (3.8) et (2.11) :

$$H_C^1 = -2\alpha \rho v_F^M, \quad (2.20)$$

où H_C^1 est la profondeur équivalente pour une variation spatiale de C_{11} de type 1 et v_F^M est la vitesse moyenne du FAS obtenue numériquement à partir de différentes valeurs de δ par une approximation au premier ordre. De même, pour une variation spatiale de C_{11} de type 2, on a à partir des équations (2.19), (3.9) et (2.11) :

$$H_C^2 = -2\alpha \rho v_F^M + \frac{h}{2}, \quad (2.21)$$

où H_C^2 est la profondeur équivalente pour une variation spatiale de C_{11} de type 2.

La valeur de α est déterminée directement sur le graphique en fonction de δ pour chaque type de variation en supposant une variation linéaire de la vitesse du FAS en fonction de δ . De même la façon, pour une variation spatiale de ρ correspondant à une variation de types 1 et 2, l'équation (2.19) devient :

$$H_\rho^1 = \frac{2\alpha \rho^M}{v_F^M}, \quad H_\rho^2 = \frac{2\alpha \rho^M}{v_F^M} + \frac{h}{2}, \quad (2.22)$$

où H_ρ^1 et H_ρ^2 sont obtenus par une approximation du premier ordre et désignent les profondeurs équivalentes pour une variation spatiale de ρ correspondant respectivement à une variation de types 1 et 2 ; la quantité ρ^M est la masse volumique moyenne à la surface ($z = 0$).

Pour un gradient de porosité, les profondeurs équivalentes peuvent être calculées de

la même manière par les expressions suivantes :

$$H_P^1 = \frac{2\alpha v_F^M \rho^M}{(\delta_\rho \times (v_F^M)^2 - \delta_C)}, \quad H_P^2 = \frac{2\alpha v_F^M \rho^M}{(\delta_\rho \times (v_F^M)^2 - \delta_C)} + \frac{h}{2}, \quad (2.23)$$

où H_P^1 et H_P^2 sont les profondeurs équivalentes pour une variation spatiale de porosité correspondant respectivement à une variation de types 1 et 2.

2.3 Résultats

2.3.1 Intervalle des propriétés de rigidité de l'os cortical

Le tableau 2.1 présente les valeurs moyennes, minimales et maximales de E_L , E_T et G_L lesquelles sont données par [Dong and Guo \(2004\)](#) ; les valeurs moyennes, minimales et maximales des 4 composantes (C_{11} , C_{13} , C_{33} et C_{55}) du tenseur de rigidité \mathbb{C} sont calculées à partir des équations (2.7)–(2.8). Les valeurs moyennes sont appelées valeurs de référence.

Quantité mécanique	E_L (GPa)	E_T (GPa)	C_{11} (GPa)	C_{13} (GPa)	C_{33} (GPa)	$C_{55} = G_L$ (GPa)	ρ (g.cm ⁻³)
Valeur moyenne (référence)	16.6	9.5	23.05	8.7	15.1	4.7	1.722
Minimum	13.4	6.5	17.6	5.1	9.1	3.3	1.66
Maximum	20.6	12.8	29.6	15.9	25.9	5.5	1.753

TAB. 2.1 – Les valeurs moyennes, minimales et maximales des modules d'Young longitudinale et transversale, des 4 constantes du tenseur de rigidité et de la masse volumique utilisées pour la simulation (voir la figure 2.1) ([Dong and Guo, 2004](#)).

2.3.2 Variation de la vitesse du FAS vis-à-vis de changements de propriétés mécaniques de l'os cortical

À partir des simulations numériques, la variation de la vitesse du FAS en fonction du changement des propriétés matérielles a été évaluée pour $h = 0.6$ et 4 mm dans le

cas d'une couche homogène d'os cortical. Les valeurs minimale (m) et maximale (M) de chaque constante du tenseur de rigidité sont testées, les autres propriétés matérielles restant égales à leur valeur de référence. Le tableau 3.5 montre les variations de la vitesse du FAS en fonction de ces paramètres.

Propriété S du matériau	C_{11} (GPa)		C_{13} (GPa)		C_{33} (GPa)		$C_{55} = G_L$ (GPa)		ρ (g.cm ⁻³)	
Intervalle physiologique $[S_m, S_M]$ (référence)	[17.6, 29.6]		[5.1, 11.1*]		[11.8*, 25.9]		[3.3, 5.5]		[1.66, 1.753]	
Épaisseur de la corticale h (mm)	0.6	4	0.6	4	0.6	4	0.6	4	0.6	4
Vitesse du FAS pour S_m (m.s ⁻¹)	2 920	3 182	3 599	3 633	3 348	3 618	3 435	3 628	3 499	3 688
Vitesse du FAS pour S_M (m.s ⁻¹)	3 968	4 101	3 244	3 655	3 500	3 610	3 435	3 631	3 408	3 591

TAB. 2.2 – Pour les 2 épaisseurs de la couche corticale, la sensibilité de la vitesse du FAS est testée vis-à-vis de changements de propriétés matérielles et de la masse volumique. La vitesse du FAS calculée est donnée pour les valeurs minimales et maximales de chaque variable correspondant à l'intervalle de variation réaliste obtenu. Ces résultats sont obtenus (i) en considérant les valeurs de référence du tableau 2.1, (ii) en vérifiant la condition de stabilité thermodynamique. Les valeurs résultant de cette dernière condition sont marquées par un astérisque.

2.3.3 Effet qualitatif d'un gradient de propriétés matérielles

La propagation des ondes dans le domaine multi-couche correspondant au cas d'une couche épaisse de solide ($h = 4$ mm) est présentée dans la figure 2.4, où l'échelle de gris représente l'amplitude normalisée de la pression dans les fluides et de la trace du tenseur des contraintes dans le solide. Ces deux quantités sont représentées dans une

échelle logarithmique normalisée pour faciliter la visualisation, à l'instant $t = 8 \mu\text{s}$. Les figures 2.4a et 2.4b correspondent respectivement à une couche de solide homogène et à une couche de solide hétérogène avec un gradient δ_{11} de C_{11} égal à $30 \text{ GPa}\cdot\text{cm}^{-1}$. Dans la couche de solide homogène (Fig. 2.4a), la première onde se propage suivant la direction longitudinale de l'os cortical, alors que dans la couche de solide hétérogène, ce profil est changé par rapport à la profondeur à cause du gradient de C_{11} . La différence entre les deux figures montre qualitativement l'influence d'un gradient de C_{11} .

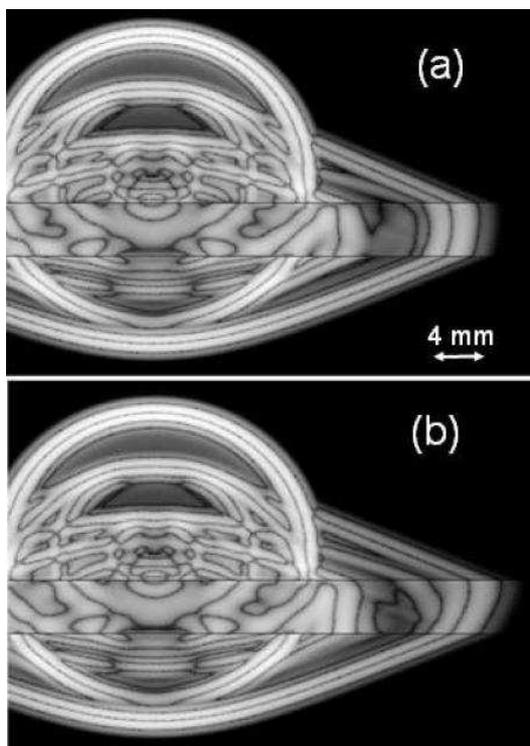


FIG. 2.4 – Propagation ultrasonore des ondes à l'instant $t = 8 \mu\text{s}$ dans le milieu tri-couche lequel est composé par une couche de solide isotrope transverse de 4 mm d'épaisseur mise entre deux couches de fluides acoustiques (a) la couche solide est homogène ; (b) la couche solide est hétérogène avec un gradient δ_{11} de C_{11} de $30 \text{ GPa}\cdot\text{cm}^{-1}$.

2.3.4 Cas d'une couche solide épaisse

On présente d'abord le cas d'une couche épaisse de solide ($h = 4 \text{ mm}$). La figure 2.5 montre la dépendance de la vitesse du FAS vis-à-vis de gradients de C_{11} et de ρ . Dans ce cas, seuls C_{11} et ρ ont un effet significatif sur la vitesse du FAS lorsque la couche solide

est homogène.

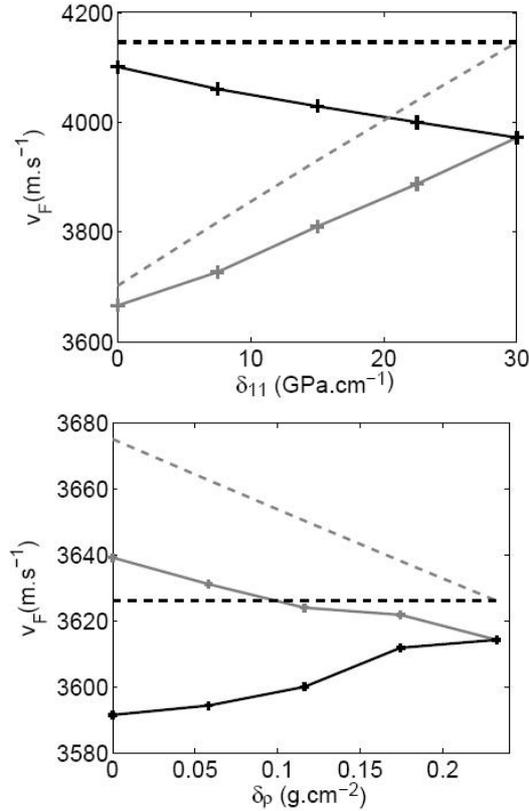


FIG. 2.5 – Cas de la couche de solide épais ($h = 4$ mm). Variation de v_F par rapport à (a) δ_{11} et (b) δ_ρ . Les courbes en trait noir correspondent à la variation de type 1 (valeur constante de (a) C_{11} et (b) ρ à $z = 0$) et en trait gris correspondent à la variation de type 2 (valeur constante de (a) C_{11} et (b) ρ à $z = -0.5h$). Les courbes en trait plein représentent les résultats obtenus à partir des simulations numériques. Les courbes en trait pointillé correspondent à la vitesse des ondes de compression longitudinale (donnée par l'équation (2.11)) à l'interface supérieure de l'os cortical.

Pour un gradient de type 1, la vitesse du FAS décroît avec δ_{11} tandis qu'elle croît avec δ_ρ . Pour un gradient de type 2, la vitesse du FAS croît avec δ_{11} et décroît légèrement avec δ_ρ .

Les courbes en trait pointillé de la figure 2.5 sont associés à la vitesse du FAS donnée par l'équation (2.11) où les valeurs C_{11} et ρ sont celles obtenues à la surface supérieure ($z = 0$). Pour l'os cortical homogène ($\delta = 0$), la vitesse du FAS est légèrement sur-estimée par rapport à la vitesse de compression longitudinale v_b . Comme discuté dans Bossy et al. (2004b), la vitesse du FAS est plus petite que v_b d'environ 1.5% (60 m.s⁻¹ environ) pour les distances entre l'émetteur et les récepteurs considérés dans ce travail du fait des effets

de champ proche.

La différence entre la dépendance de la vitesse du FAS vis-à-vis de δ et le comportement de v_b à l'interface supérieure est montrée par la figure 2.5 dans le cas d'une couche épaisse de solide. La vitesse du FAS est influencée par les propriétés de rigidité dans une certaine "profondeur équivalente" (Bossy et al., 2004b). Notons que si la vitesse $v_b(\delta, H)$ est tracée dans la figure 2.5 (H est la profondeur équivalente) comme fonction de δ , il devrait, par définition, avoir la même pente que celle donnée par les courbes en trait plein (lesquelles correspondent à la vitesse du FAS).

Dans le cas d'une variation spatiale de C_{11} , les valeurs de H_C^1 et H_C^2 trouvées en utilisant les équations (2.20) et (2.21) sont respectivement égales à 0.59 mm et 0.66 mm. Dans le cas d'une variation spatiale de ρ , les valeurs de H_ρ^1 et H_ρ^2 trouvées en utilisant l'équation (2.22) sont respectivement égales à 1.03 mm et 1.04 mm.

2.3.5 Cas d'une couche mince de solide

Dans le cas d'une couche mince de solide ($h = 0.6$ mm), les gradients de C_{11} , C_{13} , C_{33} et ρ ont été étudiés (voir figure 2.6) en utilisant les résultats de la vitesse du FAS présentés dans le tableau 3.5 de la section 2.3.2. Lorsque le gradient est de type 1, la vitesse du FAS est représentée comme une fonction décroissante par rapport à δ_{11} et à δ_{33} , tandis qu'elle est une fonction croissante par rapport à δ_{13} et à δ_ρ . Dans le cas d'un gradient de type 2, la vitesse du FAS est presque constante pour les différentes valeurs de δ_{11} , δ_{13} , δ_{33} et δ_ρ .

Lorsque le rapport entre l'épaisseur de l'os cortical et la longueur d'onde est petit, on constate que la vitesse du FAS tend vers la vitesse de phase v_p (Bossy et al., 2004b, 2002). L'équation caractéristique d'une couche de solide isotrope transverse immergée dans un fluide a été résolue pour obtenir le mode symétrique S_0 de l'onde de Lamb pour une couche mince ($f \times h = 10^{-3}$ mm.MHz, où f est la fréquence) (Nayfeh and Chimenti, 1988, 1989). Dans la figure 2.6, les traits pointillés correspondent à la vitesse de phase du mode S_0 obtenue en considérant les propriétés matérielles correspondant aux valeurs moyennes des constantes de rigidité et de la masse volumique du solide. Dans tous les cas, la droite en

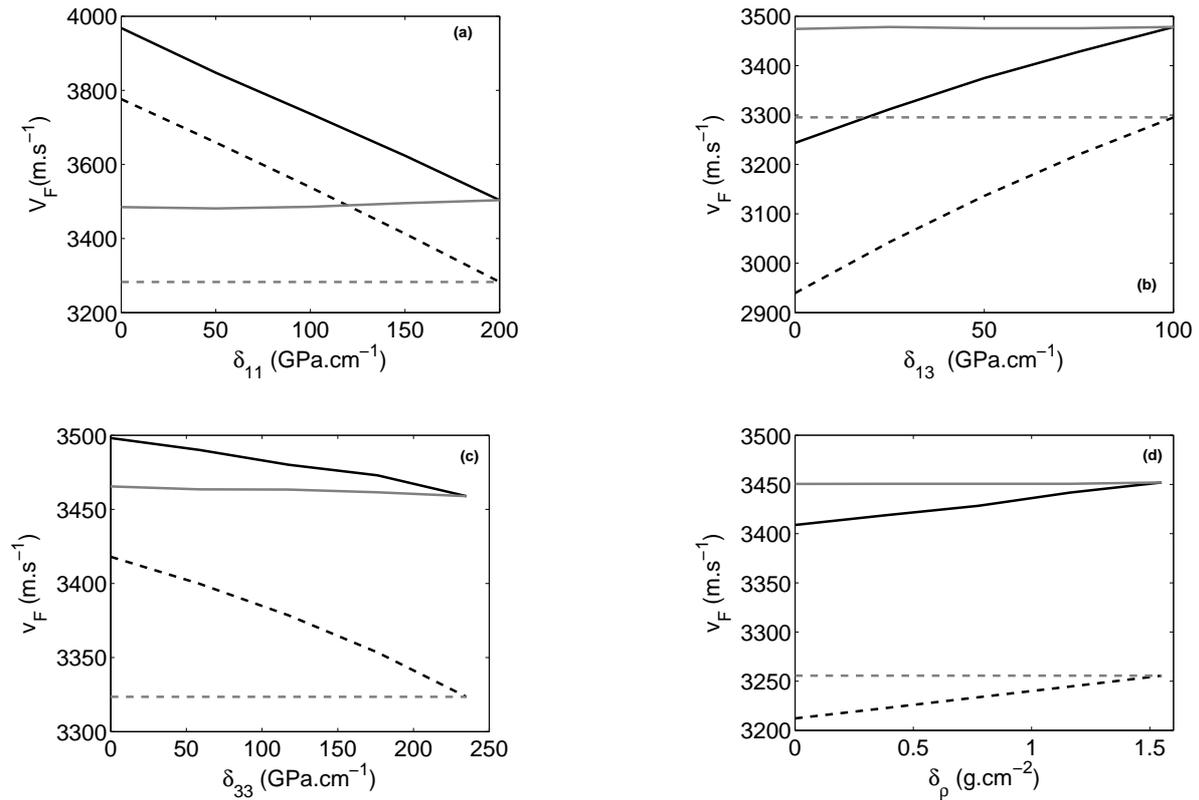


FIG. 2.6 – Cas d’une couche mince de solide ($h = 0.6$ mm). Variation de v_F par rapport à (a) δ_{11} , (b) δ_{13} , (c) δ_{33} et (d) δ_ρ . Les courbes en trait noir correspondent à une variation de type 1 (valeur constante de S en $z = 0$) et les courbes en trait gris correspondent à une variation de type 2 (valeur constante de S en $z = -0.5h$). Les courbes en trait plein indiquent les résultats obtenus par simulation numérique. Les courbes en trait pointillé correspondent aux vitesses de phase v_p à l’interface supérieure de l’os cortical obtenues par la méthode de [Nayfeh and Chimenti \(1988, 1989\)](#).

trait pointillé gris est horizontale puisque que la vitesse du FAS ne dépend pas de δ pour une variation de type 2.

2.3.6 Cas d’un gradient de porosité

La figure 2.7 montre les résultats obtenus respectivement pour $h = 0.6$ mm et 4 mm avec un gradient de porosité δ_P . Les traits pleins noirs et gris représentent les vitesses du FAS obtenues numériquement pour un gradient de porosité de types 1 et 2 respectivement. La courbe en trait pointillé de la figure 2.7(a) correspond à la vitesse de phase ([Nayfeh and Chimenti, 1988, 1989](#)). La courbe en trait pointillé de la figure 2.7(b) est obtenue en utilisant l’équation (2.11) en $z = -h/2$.

Pour une couche épaisse ainsi que pour une couche mince d'os cortical, la variation de la vitesse du FAS en fonction d'un gradient de porosité est qualitativement semblable à celle en fonction d'un gradient de C_{11} (voir figure 2.5). Ces derniers résultats montrent que dans le cas de couches épaisse ou mince, la variation de C_{11} induit par un changement de porosité joue un rôle plus important sur la vitesse du FAS.

Pour le cas de variations spatiales de porosité, les valeurs de H_P^1 et H_P^2 trouvées en utilisant l'équation (2.23) sont respectivement 0.46 mm et 0.63 mm. Ces dernières valeurs sont différentes mais restent du même ordre de grandeur. La différence obtenue dans le cas d'un gradient de porosité peut être expliquée par l'approximation du premier ordre réalisée afin de calculer H_P , qui n'est plus valable lorsque toutes les propriétés matérielles varient simultanément.

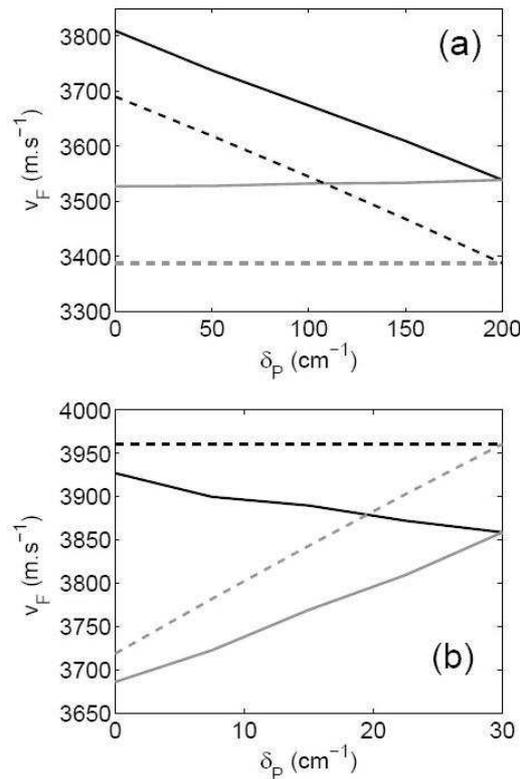


FIG. 2.7 – (a) Cas de la couche mince de solide ($h = 0.6$ mm) et (b) cas de la couche épaisse de solide ($h = 4$ mm). Variation de v_F en fonction de δ_P . (a) même légende que la figure 2.6 avec δ_P et (b) même légende que la figure 2.5 avec δ_P .

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, on a étudié l'effet d'une dépendance spatiale de propriétés matérielles isotropes transverses de l'os cortical vis-à-vis de la vitesse du FAS dans une configuration de la technique de transmission axiale pour différentes épaisseurs.

Dans le cas $h = 4$ mm, [Bossy et al. \(2004b\)](#) ont résolu ce problème en utilisant la méthode aux différences finies dans le domaine temporel pour déterminer l'effet d'un gradient de la vitesse des ondes longitudinales en considérant des propriétés matérielles isotropes pour la couche solide. Ils se sont concentrés sur le comportement de l'onde latérale lorsque l'épaisseur corticale était égale approximativement à 3 fois de la longueur d'onde. [Bossy et al. \(2004b\)](#) ont trouvé que lorsqu'un gradient de vitesse longitudinale de $100 \text{ m.s}^{-1}.\text{mm}^{-1}$ dans la couche corticale était considéré la vitesse du FAS diminuait d'environ 200 m.s^{-1} à la fréquence 1 MHz comparé au cas de propriétés matérielles homogènes. Dans ce travail, nous trouvons que la diminution de la vitesse du FAS est égale 198 m.s^{-1} avec le même gradient laquelle est du même ordre de grandeur que le résultat trouvé par [Bossy et al. \(2004b\)](#).

Dans le cas d'une couche corticale mince, plusieurs études ont prédit que quand le rapport h/λ tend vers 0, la vitesse du FAS tend vers la vitesse de phase du mode S_0 , vitesse dite de plaque (voir par exemple Fig. 11 de [Bossy et al. \(2004b\)](#)). Dans le présent travail pour $h = 0.6$ mm, la vitesse du FAS est toujours sous-estimée par une valeur comprise entre 112 et 195 m.s^{-1} (selon les valeurs de propriétés matérielles considérées) en comparaison de la vitesse du mode S_0 . Cette différence est essentiellement due au fait qu'une épaisseur de corticale de $h = 0.6$ mm n'est pas assez petite afin d'observer une convergence plus proche de la vitesse du mode S_0 .

Ce travail ne considère pas l'effet de la viscosité dans l'os cortical malgré le fait que plusieurs études ([Sasso et al., 2007, 2008](#); [Lakes et al., 1986](#)) ont souligné la nécessité de prendre en compte cette caractéristique. Le chapitre suivant explore cette situation.

Chapitre 3

Influence de la viscosité sur la propagation des ondes ultrasonores dans l'os cortical

3.1 Introduction

L'os cortical est un milieu atténuant où les ondes ultrasonores se propagent avec de la dissipation d'énergie (Lakes et al., 1986; Lees and Klopholz, 1992; Langton et al., 1990; Han et al., 1996; Serpe and Rho, 1996). L'atténuation ultrasonore peut être due au comportement viscoélastique de l'os cortical lequel présente un réseau de pores (Sasso et al., 2007, 2008). Sasso et al. (2007) a mesuré la dépendance de la fréquence en fonction de l'atténuation des ondes ultrasonores dans l'os cortical de bovins. Le paramètre de BUA (Broadband Ultrasonic Attenuation en anglais; défini comme la pente de du coefficient de l'atténuation en fonction de la fréquence) a été mesuré et est significativement lié à la microstructure (Sasso et al., 2008). En conséquence, le BUA est un paramètre important pour estimer la qualité de l'os cortical. Ainsi, les tissus mous situés autour de l'os (comme la peau, la graisse et les muscles et à l'intérieur de l'os (comme la moelle osseuse) sont des matériaux dans lesquels l'onde ultrasonore se propage avec de l'atténuation.

Le but de ce chapitre est d'évaluer l'effet de la viscoélasticité de l'os cortical et de la viscosité des tissus mous sur le comportement de l'onde ultrasonore en transmission axiale. La configuration géométrique sera prise identique à celle du chapitre précédent. En revanche, les comportements mécaniques de l'os cortical et des tissus mous sont supposés atténuants.

Dans la section 3.2, on va présenter le modèle pour la simulation. Dans la section 3.3, on va étudier : 1) le changement de vitesse du FAS en faisant varier les coefficients de viscosité et la masse volumique dans le cas d'un matériau homogène ; et 2) l'effet d'un gradient constant de la masse volumique et des propriétés de viscosité sur la vitesse du FAS.

3.2 Modélisation et simulation numérique

3.2.1 Configuration géométrique de la technique de transmission axiale

Le système est modélisé par des couches bidimensionnelles ; il est composé par une couche solide viscoélastique et isotrope transverse (correspondant à la couche d'os cortical) prise en sandwich entre deux couches de fluides (voir la figure 3.1). L'épaisseur d'os cortical est notée h et l'axe z correspond à la direction transverse. La couche supérieure de fluide ($z > 0$) représente les tissus mous et la couche inférieure ($z < -h$) représente la moëlle.

Une source linéique de pression (dont la longueur est 0.75 mm) est située dans la couche supérieure de fluide à 2 mm de l'interface supérieure de la couche solide. Le signal d'excitation est une impulsion gaussienne similaire à celle de la figure 2.2 du chapitre 2.

3.2.2 Modélisation de la configuration de la technique de TA

Dans ce chapitre, nous prenons en compte tout les effets liés à la dissipation visqueuse dans les couches solide et fluides. Les équations de la propagation des ondes acoustiques

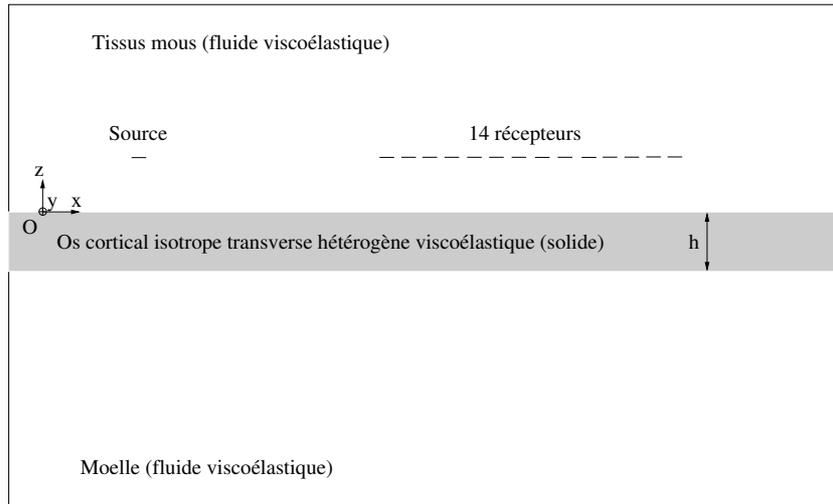


FIG. 3.1 – Configuration géométrique de la technique de TA pour l'os cortical dans le cas viscoélastique.

sont écrites en pression dans les deux fluides. Par contre, les équations de l'élastodynamique dans la couche solide sont données en déplacement.

Le vecteur position \mathbf{r} associé à un point du domaine est spécifié au travers de ses coordonnées (x, z) relativement à un trièdre Cartésien $\mathbf{R}(O; \mathbf{x}, \mathbf{z})$, où O désigne l'origine du plan de dimension 2 et (\mathbf{x}, \mathbf{z}) une base orthonormée du plan.

Équations pour les fluides L'équation de la propagation d'une onde acoustique dans un fluide, homogène, initialement au repos, est une théorie linéarisée des écoulements de faible vitesse mais de fréquences élevées. Les équations relatives à ce modèle sont données par (Royer and Dieulesaint, 2000) :

$$\Delta p + \eta_f \Delta \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{c_f^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

où $p(\mathbf{r}, t)$ désigne la pression dans le fluide au repos, c_f est la célérité de l'onde dans le fluide, η_f est la viscosité du fluide et Δ est l'opérateur Laplacien.

Équations pour le solide Lorsque les forces de volume sont négligées, l'équation du mouvement dans le solide est donnée par :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} - \rho_s \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{0}, \quad (3.1)$$

où $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ désigne le vecteur vitesse dont les composantes sont notées v_i , ρ_s est la densité volumique de masse du solide, $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}, t)$ est le tenseur des contraintes de Cauchy dans le solide et div est l'opérateur de divergence opérant sur un tenseur du 2e ordre. Les composantes du tenseur des contraintes sont notées σ_{ij} dans \mathbf{R} .

La loi de comportement du solide viscoélastique est donnée par :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} \boldsymbol{\epsilon} + \mathbb{E} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}, \quad (3.2)$$

où $\mathbb{C}(\mathbf{r})$ et $\mathbb{E}(\mathbf{r})$ désignent respectivement le tenseur du 4e ordre de rigidité et de viscosité, $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{r}, t)$ et $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{r}, t)$ sont respectivement les tenseurs des déformations et des taux de déformations définis par les relations :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (\mathbf{grad} \mathbf{u} + (\mathbf{grad} \mathbf{u})^T), \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{1}{2} (\mathbf{grad} \mathbf{v} + (\mathbf{grad} \mathbf{v})^T), \quad (3.3)$$

où $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ désigne le vecteur déplacement, \mathbf{grad} est l'opérateur gradient opérant sur un vecteur et l'exposant \star^T est l'opérateur transposée.

Le tenseur de rigidité pour un milieu en dimension 2 et pour un comportement isotrope transverse s'écrit en utilisant la notation de Voigt :

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} C_{11}(z) & C_{13}(z) & 0 \\ C_{13}(z) & C_{33}(z) & 0 \\ 0 & 0 & C_{55}(z) \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

où les constantes d'élasticité C_{ij} ne dépendent que de z .

La valeur du BUA dans la direction transverse est plus grande que dans la direction axiale (Sasso et al., 2007; Lakes et al., 1986; Lees and Klopholz, 1992). Par conséquent, on peut introduire un tenseur anisotrope (isotrope transverse) \mathbb{E} pour décrire le comportement dissipatif de l'os. Afin d'obtenir une variation dans un intervalle reflétant le comportement physiologique de l'atténuation dans l'os cortical, nous avons utilisé une étude réalisée sur des échantillons d'os cortical de bovins (Sasso et al., 2007) puisque nous n'avons pas trouvé dans la littérature des données concernant l'os cortical de l'humain.

Le tenseur de viscosité \mathbb{E} pour un milieu de dimension 2 et pour un comportement isotrope transverse s'écrit en utilisant la notation de Voigt :

$$\mathbb{E} = \begin{pmatrix} \eta_{11}(z) & \eta_{13}(z) & 0 \\ \eta_{13}(z) & \eta_{33}(z) & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{55}(z) \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

où tout les coefficients visqueux η_{ij} ne dépendent que de z . Le plan isotrope correspond au plan (\mathbf{y}, \mathbf{z}) dans la figure 3.1. Dans ce modèle, les relations $C_{13} = C_{23}$ et $\eta_{13} = \eta_{23}$ sont imposées par le plan isotrope transverse. Les indices 1, 2 et 3 sont respectivement associés aux axes Ox, Oy et Oz .

Conditions aux limites et initiales Aux interfaces entre les fluide et le solide correspondant à $z = 0$ et à $z = -h$, on impose la continuité des contraintes normales et des vitesses. Ces conditions sont traduites par les relations :

$$\llbracket v_3(x, z, t) \rrbracket = 0, \quad \sigma_{33}(x, z, t) = -(p(x, z, t) + \eta_f \dot{p}(x, z, t)), \quad \sigma_{13}(x, z, t) = 0, \quad (3.6)$$

où $\llbracket \star \rrbracket$ désigne le saut de la quantité \star à travers l'interface. On ajoute une condition sur la pression associée au signal d'excitation : $p(x, z, t) = P(t)$, où (x, z) sont les points localisant la source linéique de pression.

Résolution numérique La méthode de résolution numérique du problème décrit dans cette section est analogue à celle présentée dans le chapitre 2.

3.2.3 Modélisation d'un gradient de propriétés matérielles homogénéisées

On note δ le vecteur gradient qui contrôle la viscosité S . Le scalaire S correspond à l'un des coefficients viscoélastiques η_{ij} définis dans l'équation (3.5). Dans chaque simulation, une seule de ces propriétés de viscosité est changée lorsque les autres sont maintenues constantes (et correspondent aux valeurs de référence) afin d'évaluer l'influence d'un gradient de chacune.

Gradient de chaque propriété matérielle Le vecteur gradient $\delta = \text{grad } S = \delta \mathbf{z}$ est supposé d'être indépendant de x dans tous les cas ; dans cette dernière relation, grad est l'opérateur gradient opérant sur un champ scalaire. La quantité δ est toujours négative pour des variations de constantes viscoélastiques puisque la porosité dans la partie de l'endoste est plus grande que dans celle de la partie du périoste de l'os (Bousson et al., 2001; Sansalone et al., 2010) et que l'atténuation augmente avec la porosité.

Comme décrit en détail dans le chapitre précédent, deux types de gradients de constantes viscoélastiques (notés type 1 et 2) correspondant à des valeurs constantes de propriétés matérielles à la surface (respectivement à $z = -h/2$) ont été considérés. Ces deux cas sont illustrés dans la figure 3.2. Le gradient associé δ correspond à une description simple de la dépendance spatiale des propriétés matérielles. Nous avons choisi cette variation linéaire parce que les variations spatiales précises des propriétés matérielles du tissu osseux restent mal documentées.

En notant que S_m est la valeur de S à la surface supérieure ($z = 0$) et S_M est la valeur de S à la surface inférieure ($z = -h$), on définit la valeur maximale δ_M de δ par :

$$\delta_M = \frac{(S_m - S_M)}{h} < 0 \quad (3.7)$$

pour chaque valeur de h .

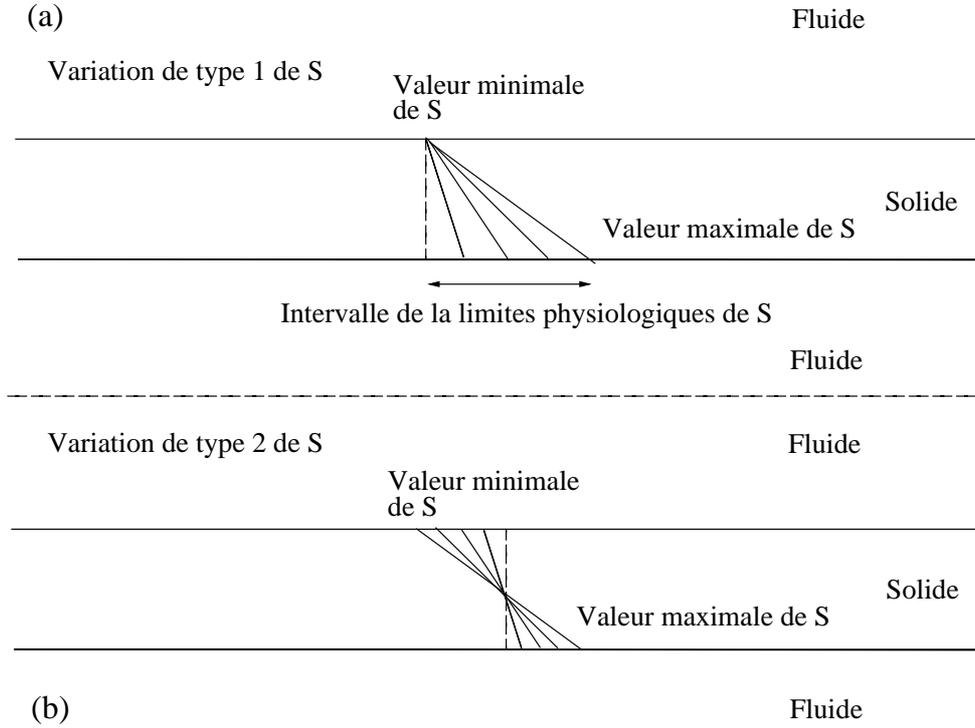


FIG. 3.2 – Représentation schématique des deux types de variations spatiales pour la propriété matérielle S correspondant aux coefficients de viscosité. Les traits pleins dans la couche de solide indiquent la dépendance spatiale de S . Le trait pointillé dans la couche de solide indique des propriétés homogènes de viscosité correspondant aux propriétés de viscosité de référence. La variation de type 1 présentée dans (a) correspond à la valeur constante à l'interface supérieure de l'os cortical (interface fluide-solide, $z = 0$). La variation de type 2 présentée dans (b) correspond à la valeur constante au milieu de l'os cortical ($z = h/2$).

Type 1. Le gradient de type 1 est tel que la propriété de viscosité S prend la même valeur S_m à l'interface supérieure $z = 0$ de la couche de solide pour toutes les valeurs du gradient δ . La quantité $S(z)$ est donnée par :

$$S(z) = S_m + \delta \times z, \quad (3.8)$$

où S_m est la valeur minimale de la propriété S du matériau. La valeur maximale de δ est donnée par l'équation (3.7), montrant que toutes les valeurs de $S(z)$ sont toujours comprises entre S_m et S_M .

Type 2. Le gradient de type 2 est tel que la propriété de viscosité S prend la même

valeur au milieu de la couche de solide ($z = -h/2$) pour toutes les valeurs du gradient δ . En outre, la valeur moyenne de la propriété S est constante pour tout δ . La quantité $S(z)$ est donnée par :

$$S(z) = \frac{(S_m + S_M)}{2} + \delta \times \left(z + \frac{h}{2}\right). \quad (3.9)$$

La valeur maximale de δ est donnée par l'équation (3.7) et toutes les valeurs de $S(z)$ sont toujours comprise entre S_m et S_M . Le gradient de type 2 conduit à une valeur constante de la moyenne spatiale de S pour toutes les grandeurs de δ .

Pour les deux types de variations spatiales, on prend cinq valeurs différentes de δ variant entre 0 et δ_M pour chaque cas d'épaisseurs de la couche d'os cortical ; on a donc cinq simulations numériques pour chaque cas.

Dans la suite, les notations δ_{11} , δ_{13} et δ_{33} correspondent à δ et S est respectivement η_{11} , η_{13} et η_{33} .

Gradient lié à la porosité Bien que le BUA a été montré pour croître quand les densités volumique de masse et minérale osseuse décroissent (Sasso et al., 2008), la relation précise entre la porosité et l'atténuation reste inconnue. Par conséquent, pour chaque coefficient de viscosité η_{ij} du tenseur \mathbb{E} , on suppose (i) une relation linéaire entre l'atténuation correspondant à 1 MHz et la porosité, (ii) que la valeur de l'atténuation ultrasonore pour P_m (respectivement pour P_M) correspond à sa valeur minimale (respectivement maximale) dans l'intervalle de variation physiologique. Comme dans le chapitre 2, les valeurs minimale et maximale de la porosité P_m et P_M sont respectivement égales à 3% et 15%. Ainsi, δ_P correspond à δ où S est la porosité P . Cette approche constitue un moyen simple d'étudier l'effet d'une variation de viscosité due à une porosité hétérogène.

3.2.4 Calcul de la viscosité

Atténuation dans le fluide. Le coefficient d'atténuation α_f est donné par (Auld, 1973; Royer and Dieulesaint, 2000) :

$$\alpha_f = \frac{1}{2} \frac{\eta_f}{c_f K_f} \omega^2, \quad (3.10)$$

pour $\omega \gg \alpha_f c_f$, où $\omega = 2\pi f$ est la fréquence angulaire et f est la fréquence, K_f est la module de compressibilité, c_f est la célérité dans le fluide au repos. Notons que pour une fréquence de 1 MHz, $\omega \sim 6.3 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$ et $\alpha_f c_f \sim 1.4 \times 10^5 \text{ s}^{-1}$.

La vitesse de phase v^ϕ est donnée par (Auld (1973) ou Royer and Dieulesaint (2000)) :

$$v^\phi = c_f \left(1 + \frac{3}{8} \frac{\eta_f^2}{K_f^2} \omega^2 \right). \quad (3.11)$$

Atténuation dans l'os cortical. Les coefficients d'atténuation longitudinale $\alpha_{L,x}$ et $\alpha_{L,z}$ sont respectivement donnés suivant les axes x et z par (Auld (1973) ou Royer and Dieulesaint (2000)) :

$$\alpha_{L,x} = \frac{1}{2} \frac{\eta_{11}}{c_{L,x} C_{11}} \omega^2, \quad \alpha_{L,z} = \frac{1}{2} \frac{\eta_{33}}{c_{L,z} C_{33}} \omega^2, \quad (3.12)$$

pour $\omega \gg \alpha_{L,x} c_{L,x}$ et $\omega \gg \alpha_{L,z} c_{L,z}$, où $c_{L,x} = \sqrt{C_{11}/\rho_s}$ et $c_{L,z} = \sqrt{C_{33}/\rho_s}$. Notons que pour une fréquence de 1 MHz, $\omega \sim 6.3 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$ et $\alpha_{L,x} c_{L,x} \sim 8.3 \times 10^4 \text{ s}^{-1}$.

En utilisant ces conditions, les vitesses de phase $v_{L,x}^\phi$ et $v_{L,z}^\phi$ sont respectivement données par :

$$v_{L,x}^\phi = c_{L,x} \left(1 + \frac{3}{8} \frac{\eta_{11}^2}{C_{11}^2} \omega^2 \right), \quad v_{L,z}^\phi = c_{L,z} \left(1 + \frac{3}{8} \frac{\eta_{33}^2}{C_{33}^2} \omega^2 \right). \quad (3.13)$$

Le coefficient d'atténuation transverse α_T est calculé avec la relation (3.12) (Auld (1973) ou Royer and Dieulesaint (2000)) :

$$\alpha_T = \frac{1}{2} \frac{\eta_{55}}{c_T C_{55}} \omega^2, \quad (3.14)$$

pour $\omega \gg \alpha_T c_T$, où $c_T = \sqrt{C_{55}/\rho_s}$. Notons que pour une fréquence de 1 MHz, $\omega \sim$

$6.3 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$ et $\alpha_T c_T \sim 1.7 \times 10^4 \text{ s}^{-1}$.

On peut également estimer la vitesse de phase transverse v_T^ϕ :

$$v_T^\phi = c_T \left(1 + \frac{3}{8} \frac{\eta_{55}^2}{C_{55}^2} \omega^2 \right). \quad (3.15)$$

Nous n'avons pas trouvé dans la littérature un moyen simple pour déterminer la valeur de η_{13} . On suppose donc que le tenseur de viscosité est isotrope. En conséquence, la valeur de η_{13} est donnée par :

$$\eta_{13} = \eta_{11} - 2\eta_{55}. \quad (3.16)$$

Condition de stabilité thermodynamique. Les valeurs minimales et maximales de η_{13} sont obtenues en vérifiant les conditions suivantes : i) toutes les valeurs du tenseur \mathbb{E} sont positives et ii) les conditions de stabilité thermodynamique doivent être vérifiées (Ohayon and Soize, 1998) :

$$\eta_{11} > 0, \quad \eta_{33} > 0, \quad \eta_{55} > 0, \quad -\eta_{13}^2 + \eta_{11} \eta_{33} > 0. \quad (3.17)$$

3.3 Résultats

3.3.1 Intervalle des propriétés mécaniques du matériau

Propriétés mécaniques des fluides. Nous supposons que les propriétés mécaniques des deux couches de fluides (tissus mous et moelle) sont homogènes. Ces deux domaines ont une masse volumique $\rho_f = 1 \text{ g.cm}^{-3}$ et une compressibilité $K_f = 2.25 \text{ GPa}$ qui correspond à une vitesse d'onde acoustique $c_f = 1\,500 \text{ m.s}^{-1}$ correspondant au cas sans atténuation, c'est-à-dire avec une viscosité nulle $\eta_f = 0$ (El Sariti et al., 2006).

Pour cette étude, les valeurs numériques de α_f sont données dans le tableau 3.1.

Propriétés physiques	α_f (1 MHz) (dB.cm ⁻¹)	η_f (Pa.s)
Valeur moyenne (référence)	1	1.97
Valeur minimale	0	0
Valeur maximale	2	3.94

TAB. 3.1 – Les valeurs moyennes, minimales et maximales du coefficient d'atténuation à la fréquence de 1 MHz ainsi que les valeurs de la viscosité de la moelle et des tissus mous. Ces valeurs sont tirées des travaux de [Dussik and Fritch \(1956\)](#); [Lehman and Johnson \(1958\)](#); [Goss et al. \(1978\)](#).

Propriétés mécaniques de l'os cortical. Pour le tenseur de rigidité de l'os cortical, on prend les mêmes valeurs de référence que celles utilisées dans le chapitre précédent et qui sont rappelées dans le tableau [3.2](#).

Quantité mécanique	C_{11} (GPa)	C_{13} (GPa)	C_{33} (GPa)	$C_{55} = G_L$ (GPa)	ρ_s (g.cm ⁻³)
Valeur moyenne (référence)	23.05	8.7	15.1	4.7	1.722
Minimum	17.6	5.1	11.8	3.3	1.66
Maximum	29.6	11.1	25.9	5.5	1.753

TAB. 3.2 – Les valeurs moyennes, minimales et maximales des 4 constantes du tenseur de rigidité et de la masse volumique utilisées pour la simulation ([Dong and Guo, 2004](#)).

Les coefficients d'atténuation longitudinale $\alpha_{L,x}$ et $\alpha_{L,z}$ à la fréquence de 1 MHz ont été calculés comme présenté dans [Sasso et al. \(2007\)](#) en supposant une relation linéaire entre les coefficients d'atténuation et la fréquence. La valeur moyenne du coefficient d'atténuation transverse α_T donnée dans le tableau [3.3](#) est tirée du travail de [Garcia et al. \(1978\)](#).

Quantité mécanique	$\alpha_{L,x}$ (dB.cm ⁻¹)	$\alpha_{L,z}$ (dB.cm ⁻¹)	α_T (dB.cm ⁻¹)	η_{11} (Pa.s)	η_{33} (Pa.s)	η_{55} (Pa.s)	η_{13} (Pa.s)
Valeur							
moyenne (référence)	3.2	4.2	4	157	109	18	121
Minimum	0.8	1.7	0	39	44	0	39
Maximum	10.6	12.8	8	521	334	36.2	449

TAB. 3.3 – Les valeurs moyennes, minimales et maximales de l’atténuation et les coefficients de viscosités pour l’os cortical. Les valeurs de $\alpha_{L,x}$ et $\alpha_{L,z}$ sont données dans le tableau 1 du travail de [Sasso et al. \(2007\)](#). La valeur moyenne de α_T est obtenue à partir de l’article de [Garcia et al. \(1978\)](#). La valeur de η_{55} est obtenue de l’équation (3.14) en utilisant les valeurs de référence du tableau 3.2. La valeur moyenne de η_{13} est obtenue en utilisant l’équation (3.16). Les valeurs minimale et maximale de η_{13} sont obtenues en utilisant les conditions thermodynamiques données par l’équation (3.17).

3.3.2 Dépendance de la vitesse du FAS vis-à-vis de la viscosité du fluide

Nous avons effectué quelques tests avec le modèle de fluides homogènes et visqueux pour des couches d’épaisseurs $h = 0.6$ mm et $h = 4$ mm. Les valeurs de référence du tableau 3.2 sont utilisées pour le tenseur de rigidité \mathbb{C} et celles du tableau 3.3 sont utilisées pour le tenseur de viscosité \mathbb{E} . Les valeurs minimale (m) et maximale (M) de η_f sont données dans le tableau 3.1.

Le tableau 3.4 montre que la vitesse du FAS est indépendante de la viscosité des fluides dans l’intervalle physiologique étudié. Par conséquent, on suppose qu’il n’y a pas de viscosité dans le fluide dans la suite.

3.3.3 Dépendance de la vitesse du FAS vis-à-vis de la viscosité d’une couche homogène d’os cortical

Afin de déterminer quelles sont les paramètres de viscosités les plus importants dans l’évaluation de la vitesse du FAS pour une couche d’os cortical homogène et visqueuse, nous réalisons des tests pour deux épaisseurs de couches $h = 0,6$ mm et $h = 4$ mm.

Propriété S du matériau	η_f dans les tissus mous (Pa.s)	η_f dans la moelles (Pa.s)		
Épaisseur de la corticale h (mm)	0.6	4	0.6	4
Vitesse du FAS pour S_m (m.s ⁻¹)	3 483	3 731	3 484	3 731
Vitesse du FAS pour S_M (m.s ⁻¹)	3 484	3 732	3 484	3 731

TAB. 3.4 – Pour les 2 épaisseurs de la couche corticale, la sensibilité de la vitesse du FAS est testée vis-à-vis de changements de la viscosité dans les fluides. La vitesse du FAS calculée est donnée pour les valeurs minimale et maximale de chaque variable correspondant à l'intervalle de variation réaliste obtenue à partir du tableau 3.1.

Pour ce faire, les propriétés matérielles du fluide et les propriétés matérielles pour sa partie élastique du solide sont représentées par leurs valeurs de référence données dans les tableaux 3.1 et 3.2. Les valeurs minimale (m) et maximale (M) de chaque composante du tenseur de viscosité \mathbb{E} de l'os cortical sont données dans le tableau 3.3. Le tableau 3.5 montre la vitesse FAS correspondant à une variation de chacun des propriétés matérielles.

Selon les variations de la vitesse du FAS entre S_M et S_m dans le tableau 3.5, on peut distinguer deux situations : la valeur absolue de la variation de la vitesse du FAS est (a) « grande » (supérieure à 67 m.s⁻¹) où (b) « petite » (inférieure à 4 m.s⁻¹).

Dans le cas d'une couche épaisse de solide ($h = 4$ mm), le tableau 3.5 montre que les variations de la vitesse du FAS en fonction des valeurs de η_{13} , η_{33} et η_{55} sont « petites ». Au contraire, la variation de la vitesse du FAS en fonction de la valeur de η_{11} est « grande ». La courbe en trait plein dans la figure 3.3 montre la variation de v_F en fonction de η_{11} qui représente une fonction croissante.

Dans le cas d'une couche mince de solide ($h = 0.6$ mm), le tableau 3.5 montre que la variation de la vitesse du FAS en fonction de η_{55} est « petite ». Au contraire, les variations de v_F en fonction des valeurs de η_{11} , η_{13} et η_{33} sont « grandes ». La figure 3.4

Propriété S du matériau	η_{11} (Pa.s)		η_{13} (Pa.s)		η_{33} (Pa.s)		η_{55} (Pa.s)	
Épaisseur de la corticale h (mm)	0.6	4	0.6	4	0.6	4	0.6	4
Vitesse du FAS pour S_m (m.s ⁻¹)	3 456	3 654	3 543	3 738	3 469	3 732	3 484	3 734
Vitesse du FAS pour S_M (m.s ⁻¹)	3 787	3 956	3 475	3 735	3 544	3 734	3 484	3 733
Variation de la vitesse entre S_M et S_m (m.s ⁻¹)	331	302	-68	-3	75	2	0	-1

TAB. 3.5 – Sensibilité de la vitesse du FAS aux changements de propriétés de viscosités de la couche homogène d'os cortical pour deux valeurs de l'épaisseur. Les vitesses du FAS calculées sont données pour les valeurs minimale et maximale de chaque variable correspondant à l'intervalle de variation réaliste obtenue dans le tableau 3.3.

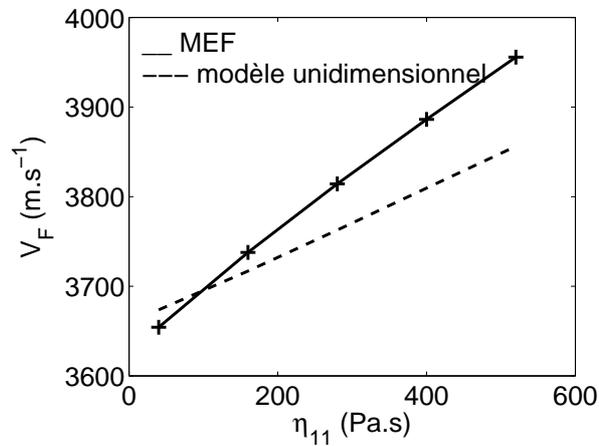


FIG. 3.3 – Cas de la couche épaisse de solide ($h = 4$ mm). Variation de v_F par rapport à η_{11} dans le cas de propriétés matérielle homogène. Le courbe en trait noir correspond aux résultats obtenus avec la méthode des éléments finis. La courbe en trait pointillé correspond au résultat obtenu à partir de l'équation 3.13.

montre que la vitesse du FAS est une fonction croissante de η_{11} et η_{33} . Cependant, elle est une fonction décroissante de η_{13} . Les composantes du tenseur de viscosité (η_{11} , η_{13} et η_{33}) ont respectivement qualitativement les influences en même sens sur v_F que celles des

composantes du tenseur de rigidité (C_{11} , C_{13} et C_{33}) (voir le chapitre précédent).

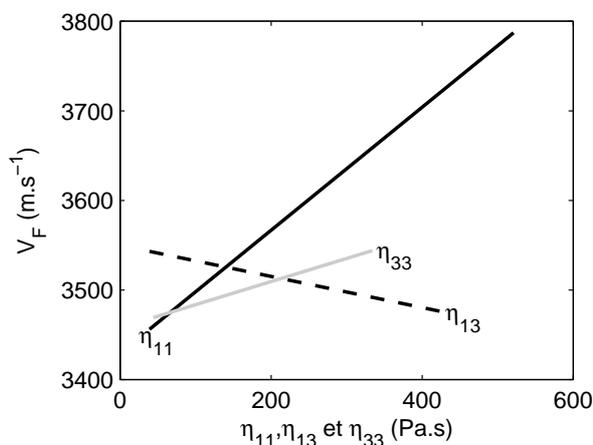


FIG. 3.4 – Cas de la couche mince de solide ($h = 0.6$ mm). Variation de v_F vis-à-vis de η_{11} (en trait noir), η_{13} (en trait pointillé) et η_{33} (en trait gris) dans le cas de propriétés matérielles homogènes.

La figure 3.5 présente les variations de la vitesse du FAS dans une couche homogène d'os cortical dans laquelle la porosité varie dans les limites physiologiques de 3% à 15%. Les résultats présentés dans la figure 3.5 indiquent que la vitesse du FAS est une fonction décroissante par rapport à la porosité.

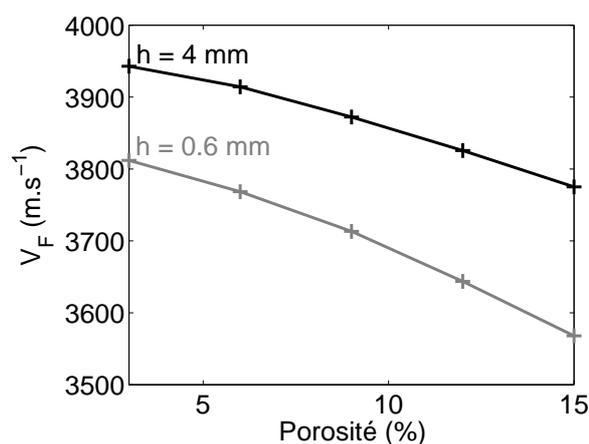


FIG. 3.5 – Variation de v_F par rapport à la porosité pour l'os cortical homogène. La courbe en trait noir correspond au cas d'une couche épaisse de solide ($h = 4$ mm) et la courbe en trait gris correspond au cas d'une couche mince de solide ($h = 0.6$ mm).

3.3.4 Dépendance de la vitesse du FAS vis-à-vis d'un gradient des propriétés de viscosités de la couche d'os cortical

3.3.4.1 Cas d'une couche épaisse de solide

La figure 3.6 présente la dépendance de la vitesse du FAS v_F vis-à-vis d'un gradient de η_{11} dans le cas d'une couche épaisse de solide ($h = 4$ mm). Pour le gradient de type 1, la vitesse du FAS est une fonction croissante par rapport à η_{11} . En revanche, c'est une fonction qui est légèrement décroissante par rapport à η_{11} pour le gradient de type 2.

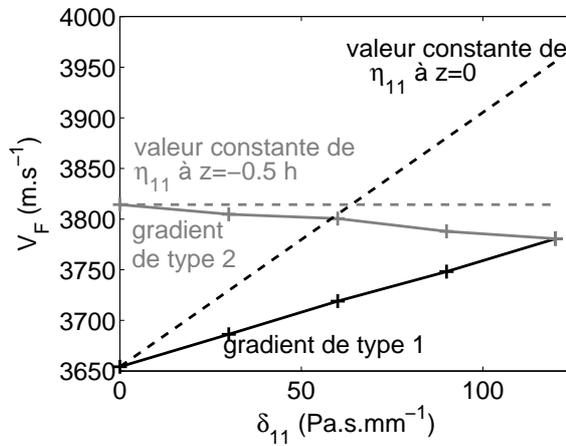


FIG. 3.6 – Cas d'une couche épaisse de solide ($h = 4$ mm). Variation de v_F vis-à-vis de δ_{11} . La courbe en trait noir correspond une variation de type 1 et la courbe en trait gris correspond une variation de type 2. Les courbes en trait plein représentent les résultats obtenus à partir des simulations numériques. Les courbes en trait pointillé correspondent à la vitesse de phase obtenue à partir de l'équation 3.13 (correspondant aux valeurs à $z = -0.5h$ pour la courbe en trait gris et à $z = 0$ pour la courbe en trait noir).

3.3.4.2 Cas d'une couche mince de solide

La figure 3.7 présente la dépendance de v_F vis-à-vis d'un gradient de η_{11} , η_{13} , et η_{33} . Pour le gradient de type 1, v_F est une fonction croissante de η_{11} et η_{33} , tandis qu'elle est une fonction croissante de η_{13} . Pour le gradient de type 2, v_F est presque constante vis-à-vis des gradients de δ_{11} , δ_{13} et δ_{33} .

Les courbes en trait pointillé dans la figure 3.7 représente les vitesses du FAS obtenues en utilisant les valeurs constantes de η_{11} , η_{33} et η_{13} à $z = -0.5h$.

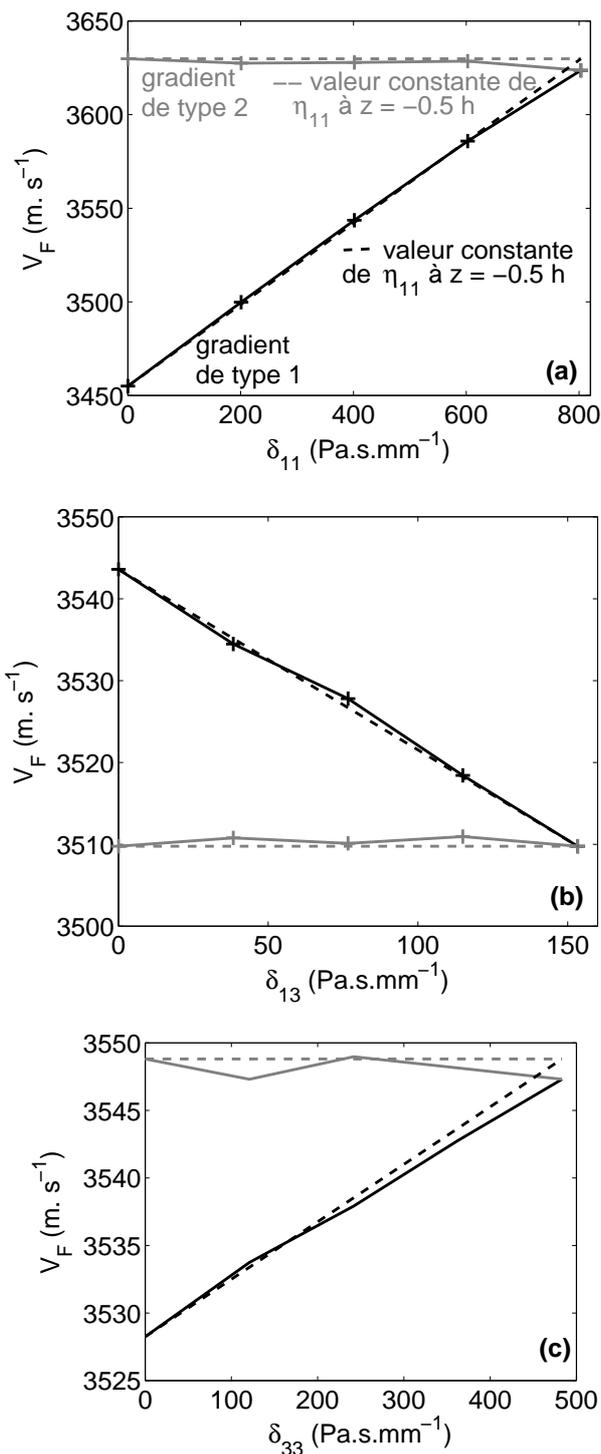


FIG. 3.7 – Cas d’une couche mince de solide $h = 0.6$ mm : variation de la vitesse du FAS v_F vis-à-vis de (a) δ_{11} , (b) δ_{13} et (c) δ_{33} . Les courbes en trait noir correspondent à une variation de type 1 et les courbes en trait gris correspondent à une variation de type 2. Les courbes en trait plein représentent les résultats obtenus à partir des simulations numériques. Les courbes en trait pointillé correspondent à la vitesse de phase v^ϕ obtenue à partir des équations (3.13)-(3.15) (correspondant aux valeurs à $z = -0.5h$).

3.3.5 Dépendance de la vitesse du FAS vis-à-vis d'un gradient de porosité

Les figures 3.8(a) et (b) présentent la variation de la vitesse du FAS v_F en fonction d'un gradient de porosité δ_P pour deux épaisseurs de couches $h = 0.6$ mm et $h = 4$ mm. Les courbes en traits noir et gris sont respectivement les vitesses du FAS obtenues pour des gradients de porosités de types 1 et 2. Les courbes en trait pointillé dans cette figure sont les résultats obtenus avec le modèle élastique lesquelles ont été présentées dans le chapitre 2.

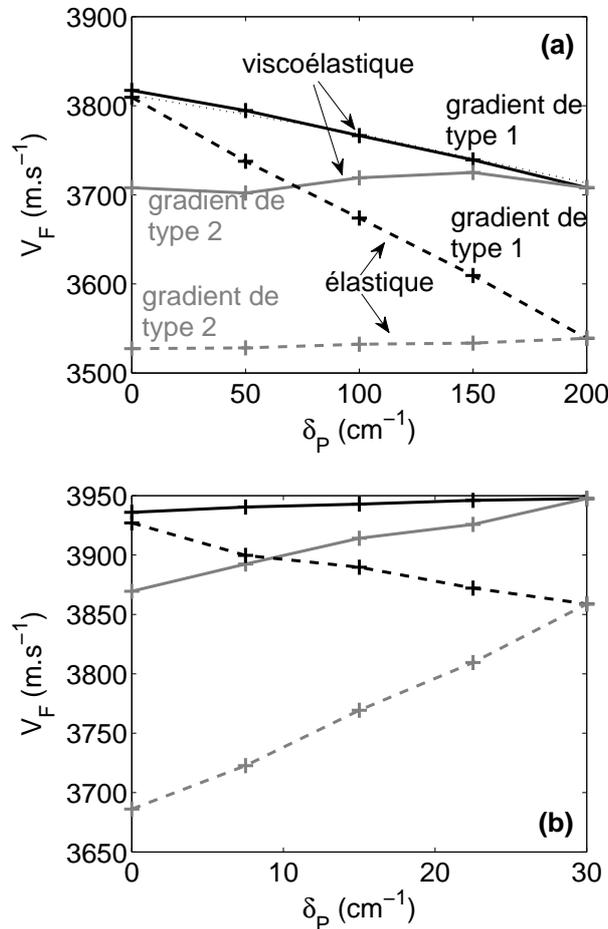


FIG. 3.8 – Variation de v_F vis-à-vis de la porosité pour (a) $h = 0.6$ mm et (b) $h = 4$ mm. Les courbes en trait noir correspondent à une variation de type 1 et les courbes en trait gris correspondent à une variation de type 2. Les courbes en trait plein présentent les résultats obtenus en variant de la masse volumique et les propriétés de rigidité ainsi que les coefficients de viscosités. Les courbes en trait pointillé présentent les résultats du modèle élastique qui ont été donné dans le chapitre 2.

On peut constater que les vitesses du FAS obtenues avec le modèle viscoélastique sont plus importantes que celles obtenues avec le modèle élastique. Pour le cas d'une couche mince solide $h = 0.6$ mm (voir Fig. 3.8(a)), v_F ne dépend pas du gradient de type 2; c'est un comportement similaire à celui obtenu avec le modèle élastique. Pour le gradient de type 1, v_F est aussi une fonction décroissante de δ_P comme dans le modèle élastique.

Dans le cas d'une couche épaisse de solide $h = 4$ mm (voir Fig. 3.8(b)), v_F est une fonction croissante de δ_P pour le gradient de type 2. En revanche, pour le type 1, v_F est légèrement croissant lorsque δ_P croît, tandis qu'elle est une fonction décroissante de δ_P dans le modèle élastique.

3.4 Conclusion

On a montré que l'atténuation de la propagation d'onde ultrasonore dans le fluide n'a pas d'influence significative sur la vitesse du FAS (voir dans le tableau 3.4). Cependant, les résultats présentés dans le tableau 3.5 indiquent que l'atténuation dans l'os cortical est une propriété importante pour l'évaluation du comportement des ondes ultrasonores dans la technique de transmission axiale dans l'os cortical. Pour les deux épaisseurs de couches $h = 0.6$ mm et $h = 4$ mm, les composantes influentes du tenseur de viscosité ainsi que son terme associé dans le tenseur de rigidité sur la vitesse du FAS sont les mêmes.

Ce travail présente certaines limitations :

1. à cause des difficultés liées à la détermination des valeurs de l'atténuation, les valeurs de η_{11} et η_{33} sont calculées en utilisant les valeurs du BUA mesurées à la fréquence 4 MHz présentées dans Sasso et al. (2007, 2008). En plus, on a supposé que le coefficient d'atténuation dépend linéairement à la fréquence dans la gamme entre 0 et 4 MHz;
2. la variation linéaire des propriétés matérielles en fonction de la profondeur z (gradients de types 1 et 2) dans la couche d'os cortical est une représentation simplifiée de la réalité.

Chapitre 4

Profondeur équivalente investie par l'onde latérale en transmission axiale dans l'os cortical viscoélastique

G. Haïat, S. Naili, M.-B. Vu, C. Desceliers, C. Soize *Equivalent contributing depth investigated by a lateral wave with axial transmission in viscoelastic cortical bone*, Journal of the Acoustical Society of America 129 (4), EL114 - EL120, 2011

Equivalent contributing depth investigated by a lateral wave with axial transmission in viscoelastic cortical bone

Guillaume Haiät

CNRS, Université Paris-Est, Laboratoire Modélisation et Simulation Multi Echelle, UMR 8208 CNRS, 94010 Créteil Cedex, France.

Electronic address: guillaume.haiat@univ-paris-est.fr

Salah Naili

Université Paris-Est, Laboratoire Modélisation et Simulation Multi Echelle, UMR 8208 CNRS, 94010 Créteil Cedex, France.

Mai Ba Vu

Université Paris-Est, Laboratoire Modélisation et Simulation Multi Echelle, UMR 8208 CNRS, 94010 Créteil Cedex, France.

Christophe Desceliers

Université Paris-Est, Laboratoire Modélisation et Simulation Multi Echelle, UMR 8208 CNRS, 77454 Marne la Vallée Cedex 2, France.

Christian Soize

Université Paris-Est, Laboratoire Modélisation et Simulation Multi Echelle, UMR 8208 CNRS, 77454 Marne la Vallée Cedex 2, France.

(Dated: 27th May 2011)

Running title: **Equivalent contributing depth in bone**

Abstract

Cortical bone is a viscoelastic heterogeneous medium which may be assessed with axial transmission. This work aims at evaluating the average depth investigated by the lateral wave for radial variations of material properties in relatively thick cortical bone. The equivalent contributing depth (ECD) is derived from the finite element simulation results for spatial variations of a viscoelastic coefficient (η_{11}) and of porosity. A value of ECD equal to around 1.6 mm is obtained for a spatial variation of η_{11} . The method fails to predict accurate values of the ECD for a spatial variation of porosity, because all parameters vary simultaneously.

PACS numbers: 43.80.Ev Acoustical measurement methods in biological systems and media, 43.20.Mv Waveguides, wave propagation in tubes and ducts, 43.20.Px Transient radiation and scattering, 43.40.Rj Radiation from vibrating structures into fluid media, 43.35.Pt Surface waves in solids and liquids, 43.35.Mr Acoustics of viscoelastic materials

I. INTRODUCTION

Osteoporosis may affect cortical bone quality, resulting in a deterioration of bone properties. The axial transmission (AT) technique is adapted to cortical bone evaluation. The wave velocity associated with the First Arriving Signal (FAS) is considered as a relevant index of bone status (Muller *et al.*, 2005; Talmant *et al.*, 2009) and has been shown to be related to bone properties using experimental (Bossy *et al.*, 2004c; Raum *et al.*, 2005) and numerical approaches (Bossy *et al.*, 2004b). When the cortical thickness h is comparable or larger than the wavelength λ (which is the configuration of interest in the framework of the present paper), the type of wave contributing to the FAS corresponds to a lateral wave (Bossy *et al.*, 2002).

Cortical bone can be considered as transverse isotropic (Dong and Guo, 2004; Haïat *et al.*, 2009; Naili *et al.*, 2010). At the organ scale, the mean porosity in the endosteal region (inner part of the bone) is higher than in the periosteal region (outer part of the bone) (Bousson *et al.*, 2001; Thomas *et al.*, 2005). In a recent study carried out by our group, we have shown that the degree of mineralization of bone tissue may also depend on the radial coordinate (associated with the bone cross-section) (Sansalone *et al.*, 2010). Moreover, cortical bone is an attenuating medium where the attenuation coefficient also depends on the porosity (Sasso *et al.*, 2007, 2008) and thus on the radial coordinate.

Numerical simulation tools have the potential advantage over experimental approaches to allow the determination of the influence of each bone property independently. Numerical simulation tools have been used to show that in the case of relatively thick bone width ($h > \lambda$), the velocity of the lateral wave does not depend on the cortical thickness (Bossy *et al.*, 2004b). The influence of a gradient of longitudinal wave velocity on the FAS velocity

was assessed initially using finite difference simulation tools (Bossy *et al.*, 2004b). More recently, a finite element model assuming lossless propagation in combination with a first order approximation has been used in order to derive an equivalent contributing depth (ECD) in the case of variations of stiffness coefficients, mass density and porosity, which corresponds physically to the average depth investigated by the lateral wave. The determination of the ECD is important to determine which part of the bone is assessed when employing axial transmission techniques. As shown in Haïat *et al.* (2009), the value of ECD is equal to 0.6 mm (respectively 1 mm) in the case of a spatial variation of C_{11} (respectively mass density). More recently, our group has evidenced the strong influence of viscoelastic effects in cortical bone on the FAS velocity (Naili *et al.*, 2010). However, the definition and the behavior of the ECD in the case of viscoelastic bone behavior remains unknown. The results obtained for the ECD in Haïat *et al.* (2009) are not realistic from the clinical point of view because bone viscoelasticity was neglected although it has been shown to significantly impact the results. The accurate determination of the ECD in the case of viscoelastic bone behavior could be used to help the clinicians to determine which anatomical parts of the bone are investigated by AT devices. The aim of this study is to define and to investigate the behavior of the ECD in the framework of a viscoelastic theory without memory for bone biomechanical behavior. The originality of this letter consists in the definition and the determination of the ECD in the viscoelastic case, which is important as it could help the clinician to relate the ultrasonic response and bone status, cortical bone being highly heterogeneous in the radial direction.

II. METHOD

A. Simulation of the axial transmission configuration

The approach, notations and coordinate systems used in the present study are the same as the one used in Haïat *et al.* (2009) and Naili *et al.* (2010). Readers are referred to these previous studies for further details. Briefly, a 2-D finite element method is used to solve the problem of transient wave propagation around 1 MHz. Cortical bone is modeled as a two-dimensional multilayer medium composed of one heterogeneous viscoelastic transverse isotropic solid layer sandwiched between two homogeneous acoustic lossless fluid layers. The cortical thickness is taken equal to 4 mm (which corresponds to a relatively thick bone thickness) because we are interested in the case of a lateral wave where an ECD can be defined. The FAS velocity is then determined following the procedure used in experiments with the actual probe (Bossy *et al.*, 2004a).

Here, we only consider radial variations of C_{11} , η_{11} and ρ_s (bone mass density) because these three parameters have been shown to be the only ones influencing the FAS velocity in the case of a relatively thick bone thickness ($h = 4$ mm) (Naili *et al.*, 2010). The mechanical properties of both fluid layers and of cortical bone are similar as in Haïat *et al.* (2009) and Naili *et al.* (2010). Table I summarizes the reference values of the different stiffness coefficients as well as the range of variation for the three parameters for which a spatial dependence is considered in what follows (C_{11} , η_{11} and ρ_s). The data relative to the stiffness coefficients and mass density were obtained from Dong and Guo (2004) and the data corresponding to the viscoelastic coefficients from Garcia *et al.* (1978) and Sasso *et al.* (2007, 2008).

Similarly as what was done in Haïat *et al.* (2009) and Naili *et al.* (2010), the impact of a controlled gradient vector $\boldsymbol{\delta}$ of a given material property S on the FAS velocity is investigated. The scalar S corresponds either to C_{11} , η_{11} or to ρ_s . In each set of simulations, all the other material properties are constant and equal to their reference values.

The same spatial dependence of S described in details in Haïat *et al.* (2009) and Naili *et al.* (2010) is considered herein. Briefly, the gradient vector $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{grad} S = \delta \mathbf{z}$ is assumed to be homogeneous, where \mathbf{z} is an unit vector in the direction perpendicular to the bone layer. The quantity δ is taken negative for η_{11} and ρ_s but positive for C_{11} (Haïat *et al.*, 2009; Naili *et al.*, 2010). Two different affine spatial dependences of S are considered (as illustrated in Fig. 2 of Naili *et al.* (2010)). The gradient of type 1 is such that the physical property S takes the same value at the upper interface $z = 0$ of the solid plate for all values of the gradient δ , whereas the gradient of type 2 is such that S takes the same value at the middle of the solid plate ($z = -h/2$) for all values of gradient δ . The definition of the two types of gradient constitutes a simple way of testing the definition of the ECD on two simple types of spatial dependences of S .

For both types of spatial variations, five different values of δ regularly distributed between the two extreme values of δ (defined so that S is always comprised within the physiological range) are arbitrarily considered. The notations δ_η , δ_C and δ_ρ correspond to δ when S is defined by η_{11} , C_{11} and ρ_s respectively.

B. Determination of an equivalent contributing depth for spatial variations of η_{11}

The method employed to define the ECD H_η corresponding to a spatial variation of η_{11} uses the relationship between the FAS velocity and η_{11} in the case of homogeneous material properties, noted $v_F(\eta_{11})$ in what follows. The relationship between v_F and η_{11} is derived from the numerical results shown in Fig. 5 of Naili *et al.* (2010). In the case of a gradient of types 1 and 2, η_{11} depends on z , so that we can define a function v_a of the variables δ_η and z given by:

$$v_a(\delta_\eta, z) = v_F(\eta_{11}(z)). \quad (1)$$

Note that v_a can be completely determined within the physiological range for each type of gradient using Fig. 5 and equations (8) and (10) of Naili *et al.* (2010).

The present method also uses the variation of the FAS velocity as a function of δ_η , noted $v_F^*(\delta_\eta)$ in what follows. The ECD H_η is defined as the depth at which the rate of variation of v_a computed at the depth $z = H_\eta$ and of the FAS velocity (obtained numerically) v_F^* versus δ_η are equal. This condition writes:

$$\alpha \equiv \frac{dv_F^*}{d\delta_\eta}(\delta_\eta) = \frac{\partial v_a}{\partial \delta_\eta}(\delta_\eta, H_\eta). \quad (2)$$

This method is similar to the one developed in Haiat *et al.* (2009), except that we previously used an analytical model to determine v_a , which is not possible in the viscoelastic case. Note that the value of α depends on the type of gradient.

In the case of a spatial variation of types 1 and 2 of η_{11} , Eq. (2) yields respectively:

$$H_\eta^1 = \alpha \left(\frac{dv_F}{d\eta_{11}} \right)^{-1}, \quad H_\eta^2 = \frac{h}{2} + \alpha \left(\frac{dv_F}{d\eta_{11}} \right)^{-1} \quad (3)$$

where H_η^1 and H_η^2 are the equivalent penetration depths for a spatial variation of η_{11} corresponding to a variation of types 1 and 2 respectively. The value of $\frac{dv_F}{d\eta_{11}}$ is determined from the plots shown in Fig. 5 of Naili *et al.* (2010).

C. Determination of an equivalent contributing depth for spatial variations of porosity

In the case of bone, all material properties (mass density, stiffness and viscoelastic coefficients) are expected to exhibit coupled spatial variations because they are all related to porosity (Bousson *et al.*, 2001) and degree of mineralization of bone tissue (Sansalone *et al.*, 2010), which increases from the periosteal to the endosteal part. Here, we used the same spatial variations of bone porosity as defined in subsection II.D of Naili *et al.* (2010). Spatial variations of types 1 and 2 are considered for the porosity (noted P), with the minimum and maximum values of porosity P_m and P_M equal respectively to 3 and 15%. In the case of a spatial variation of types 1 and 2, the porosity writes respectively:

$$P(z) = P_M + \delta_P \times z, \quad P(z) = \frac{(P_m + P_M)}{2} + \delta_P \times (z + \frac{h}{2}). \quad (4)$$

A contributing penetration depth H_P obtained in the case of a gradient of porosity was computed using the relationship between the FAS velocity and P for homogeneous viscoelastic materials shown in Fig. 7 of Naili *et al.* (2010) which is denoted $v_F(P)$ in what follows.

In the case of a gradient of types 1 and 2, P depends on z , so that it is possible to define a function v_a of δ_P and z given by:

$$v_a(\delta_P, z) = v_F(P(z)). \quad (5)$$

Note that v_a is known within the physiological range from the curve plotted in Fig. 7 of Naili *et al.* (2010).

The present method uses the variation of the FAS velocity as a function of δ_P , noted $v_F^P(\delta_P)$ in what follows. The contributing depth H_P is defined as the depth at which the

rate of variation of v_a computed at the depth H_P and of the FAS velocity v_F^P (obtained numerically) *versus* δ_P are equal. This condition writes:

$$\alpha \equiv \frac{dv_F^P}{d\delta_P}(\delta_P) = \frac{\partial v_a}{\partial \delta_P}(\delta_P, H). \quad (6)$$

In the case of a spatial variation of types 1 and 2 of P , Eq. (6) yields respectively:

$$H_P^1 = \alpha \left(\frac{dv_F}{dP} \right)^{-1}, \quad H_P^2 = \frac{h}{2} + \alpha \left(\frac{dv_F}{dP} \right)^{-1}, \quad (7)$$

where H_P^1 and H_P^2 are the ECD for a spatial variation of porosity corresponding to a variation of types 1 and 2 respectively. The value of $\frac{dv_F}{dP}$ is determined from the results shown in Fig. 7 of Naili *et al.* (2010).

III. RESULTS AND DISCUSSION

Figure 1 shows the dependence of the FAS velocity on the gradient of different material properties (C_{11} , ρ_s , η_{11} and porosity).

A. Equivalent contributing depth for spatial variations of η_{11}

Table II compares the results obtained in the present study for a gradient of η_{11} with those obtained in Haiat *et al.* (2009) for a gradient of C_{11} and ρ_s . Here, the value of α is determined graphically as the slope of the FAS velocity *versus* δ_η in Fig. 1(c). The values obtained for H_η for a gradient of types 1 and 2 are of the same order of magnitude, which constitutes a further validation of our approach. The results show that the ECD corresponding to a gradient of η_{11} is higher than that corresponding to a gradient of C_{11} and ρ_s found in Haiat *et al.* (2009).

B. Equivalent contributing depth for spatial variations of porosity

Table II also shows the results derived from Figs. 7 and 10(b) of Naili *et al.* (2010) for H_P^1 and H_P^2 , which are quite different. The value of α is determined graphically as the slope of the FAS velocity *versus* δ_P in Fig. 1(c). In addition, the value of H_P^1 is negative in the viscoelastic case, which is not a physically acceptable result. These results show that the approach described above is not adapted to define an equivalent penetration depth in the case of a gradient of porosity when taking into account bone viscoelastic behavior. Note that in the elastic case, the values of H_P^1 and H_P^2 were also different, but to a lesser extent. These results can be explained by the fact that the method described above is based on a first order approximation, which is not valid when all three parameters (η_{11} , C_{11} and ρ_s) vary simultaneously. In particular, the negative value obtained for H_P^1 can be explained by the fact that the FAS velocity decreases with porosity in the homogeneous case, whereas it slightly increases with a gradient of type 1 of porosity. In the case of a gradient of type 1, the contribution of spatial variations of η_{11} and ρ_s (corresponding to an increase of the FAS velocity) dominates that of the elastic properties C_{11} (corresponding to a decrease of the FAS velocity).

References

- Bossy, E., Talmant, M., and Laugier, P. (2002), “Effect of bone cortical thickness on velocity measurements using ultrasonic axial transmission: a 2D simulation study,” *J. Acoust. Soc. Am.* **112**(1), 297–307.
- Bossy, E., Talmant, M., and Laugier, P. (2004a), “Bi-directional axial transmission can improve accuracy and precision of ultrasonic velocity measurement in cortical bone: a validation on test material,” *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.* **51**(1), 71–79.
- Bossy, E., Talmant, M., and Laugier, P. (2004b), “Three-dimensional simulations of ultrasonic axial transmission velocity measurement on cortical bone models,” *J. Acoust. Soc. Am.* **115**(5), 2314–2324.
- Bossy, E., Talmant, M., Peyrin, F., Akrouf, L., Cloetens, P., and Laugier, P. (2004c), “An *in vitro* study of the ultrasonic axial transmission technique at the radius: 1-MHz velocity measurements are sensitive to both mineralization and intracortical porosity,” *Journal of Bone and Mineral Research* **19**(9), 1548–1556.
- Bousson, V., Meunier, A., Bergot, C., Vicaut, E., Rocha, M. A., Morais, M. H., Laval-Jeantet, A. M., and Laredo, J. D. (2001), “Distribution of intracortical porosity in human midfemoral cortex by age and gender,” *J. Bone Miner. Res.* **16**(7), 1308–1317.
- Dong, X. N. and Guo, X. E. (2004), “The dependence of transversely isotropic elasticity of human femoral cortical bone on porosity,” *J. Biomech.* **37**(8), 1281–1287.
- Garcia, B. J., Cobbold, R. S. C., Foster, F. S., and McNeill, K. G. (1978), “Ultrasonic attenuation in bone,” in *Proceedings of the IEEE Ultrasonic Symposium* (IEEE, Cherry Hill, NJ), pp. 327–330.

- Haïat, G., Naili, S., Grimal, Q., Talmant, M., Desceliers, C., and Soize, C. (2009), “Influence of a gradient of material properties on ultrasonic wave propagation in cortical bone: application to axial transmission,” *J. Acoust. Soc. Am.* **125**(6), 4043–4052.
- Muller, M., Moilanen, P., Bossy, E., Nicholson, P., Kilappa, V., Timonen, J., Talmant, M., Cheng, S., and Laugier, P. (2005), “Comparison of three ultrasonic axial transmission methods for bone assessment,” *Ultrasound Med. Biol.* **31**(5), 633–642.
- Naili, S., Vu, M., Grimal, Q., Talmant, M., Desceliers, C., Soize, C., and Haïat, G. (2010), “Influence of viscoelastic and viscous absorption on ultrasonic wave propagation in cortical bone: Application to axial transmission,” *J. Acoust. Soc. Am.* **127**(4), 2622–2634.
- Raum, K., Leguerney, I., Chandelier, F., Bossy, E., Talmant, M., Saied, A., Peyrin, F., and Laugier, P. (2005), “Bone microstructure and elastic tissue properties are reflected in QUS axial transmission measurements,” *Ultrasound Med. Biol.* **31**(9), 1225–1235.
- Sansalone, V., Naili, S., Bousson, V., Bergot, C., Peyrin, F., Zarka, J., Laredo, J. D., and Haïat, G. (2010), “Determination of the heterogeneous anisotropic elastic properties of human femoral bone: from nanoscopic to organ scale,” *J. Biomech.* **43**, 1857–1863.
- Sasso, M., Haïat, G., Yamato, Y., Naili, S., and Matsukawa, M. (2007), “Frequency dependence of ultrasonic attenuation in bovine cortical bone: an in vitro study,” *Ultrasound Med. Biol.* **33**(12), 1933–1942.
- Sasso, M., Haïat, G., Yamato, Y., Naili, S., and Matsukawa, M. (2008), “Dependence of ultrasonic attenuation on bone mass and microstructure in bovine cortical bone,” *J. Biomech.* **41**(2), 347–355.
- Talmant, M., Kolta, S., Roux, C., Haguenaer, D., Vedel, I., Cassou, B., Bossy, E., and Laugier, P. (2009), “*In vivo* performance evaluation of bi-directional ultrasonic axial transmission for cortical bone assessment,” *Ultrasound Med. Biol.* **35**(6), 912–919.

Thomas, C. D., Feik, S. A., and Clement, J. G. (2005), "Regional variation of intracortical porosity in the midshaft of the human femur: age and sex differences," *J. Anat.* **206**(2), 115–125.

Table I. Mean, maximum and minimum values of the four homogenized elastic and viscoelastic constants and of mass density affecting the ultrasonic propagation.

Mechanical quantity	C_{11} (GPa)	C_{13} (GPa)	C_{33} (GPa)	C_{55} (GPa)	ρ_s (g.cm ⁻³)	η_{11} (Pa.s)	η_{33} (Pa.s)	η_{55} (Pa.s)	η_{13} (Pa.s)
Mean value	23.05	8.7	15.1	4.7	1.722	157	109	18	121
(reference)									
Minimum	17.6	–	–	–	1.66	39	–	–	–
Maximum	29.6	–	–	–	1.753	521	–	–	–

Table II. Contributing depths corresponding to spatial variations of different parameters. Results are shown for both types of gradient. The six last column corresponds to results obtained in Haïat *et al.* (2009). The values in bold correspond to non physical results (see text for explanations).

Material property S	η_{11} (Pa.s)		P (%) (viscoelastic case)		C_{11} (GPa)		ρ_s (g.cm ⁻³)		P (%) (elastic case)	
	Type of gradient	1	2	1	2	1	2	1	2	1
Contributing length (mm)	1.68	1.55	-0.04	1.8	0.59	0.66	1.03	1.04	0.46	0.63

LIST OF FIGURES

- 1 Variation of the FAS velocity (v_F) *versus* (a) δ_C , (b) δ_ρ , (c) δ_η and (d) δ_P . The black (respectively grey) lines correspond to the variation of type 1 (respectively 2). In (d), the solid lines indicate the results obtained when considering a simultaneous variation in mass density and of the stiffness and viscoelastic coefficients; the dashed lines indicate the results obtained when considering a simultaneous variation in mass density and of the stiffness coefficients only, bone being considered as an elastic material. All these results were obtained in Haïat *et al.* (2009) and Naili *et al.* (2010). 79

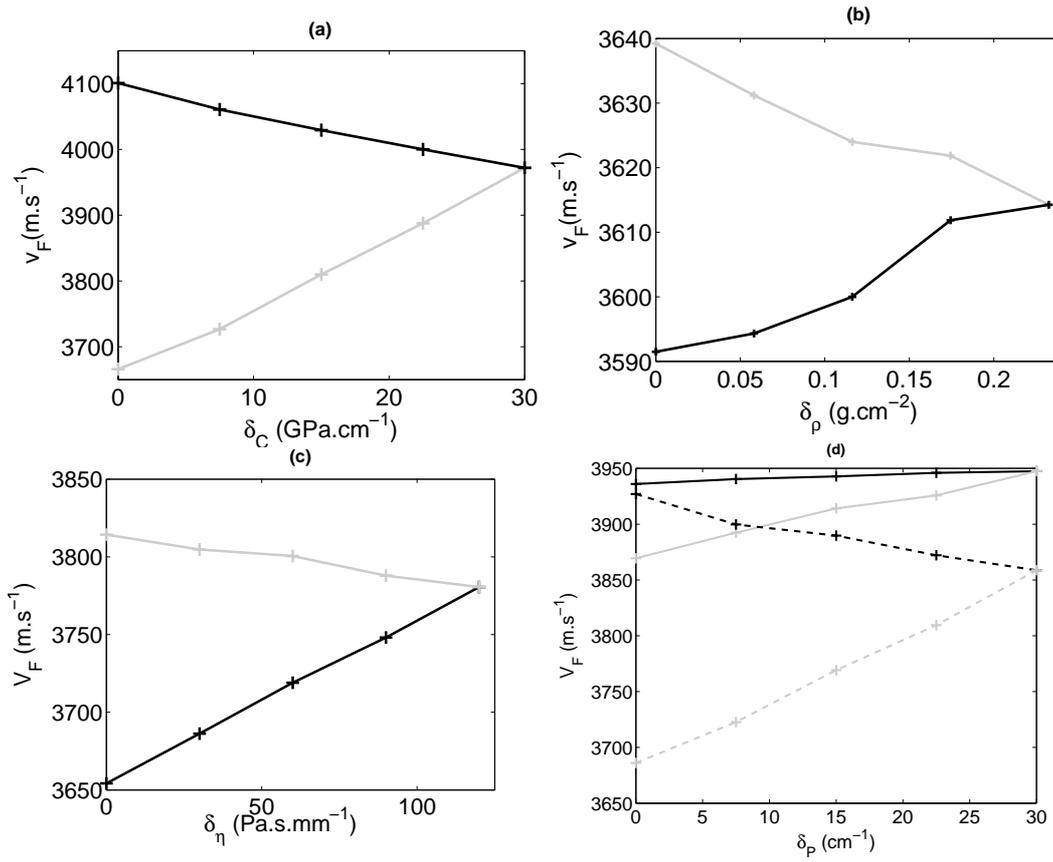


Figure 1.

Chapitre 5

Méthode analytique pour déterminer les propriétés effectives d'élasticité de l'os cortical

5.1 Méthode analytique pour déterminer les propriétés effectives d'élasticité

5.1.1 Introduction

Du point de vue mécanique, l'os cortical peut être considéré comme un matériau composite avec une hiérarchie de microstructures. À partir de l'échelle du visible à l'œil nu et en descendant jusqu'à l'échelle nanométrique, il est possible de distinguer : les tissus spongieux et cortical, le canal de Havers et l'ostéon, les lamelles, les fibres de collagène, les fibrilles de collagène et les constituants élémentaires (le collagène, les minéraux, l'eau, etc). Du point de vue des sciences des matériaux composites, les constituants élémentaires de l'os sont : une phase organique, principalement composée de collagène de type I, une phase minérale, essentiellement composée de cristaux d'hydroxyapatite, une phase liquide (l'eau et autres liquides organiques) remplissant partiellement la micro- et macro porosité.

Dans une approche purement macroscopique, l'existence d'un volume élémentaire représentatif (VER) doit être postulée afin que les lois de comportement macroscopique obtenues expérimentalement ou théoriquement, en utilisant le cadre de la thermomécanique, soient en mesure de donner la réponse du VER à des chargements variés. Toutefois, dans de nombreuses situations, les hétérogénéités présentes à la petite échelle jouent un rôle important dans le comportement global du matériau. Dans ce cas, l'homogénéisation et les méthodes de micromécanique sont des outils puissants, non seulement pour obtenir le comportement global du matériau *via* la détermination des propriétés d'ensemble du matériau qualifiées de propriétés effectives, mais aussi pour obtenir des informations sur le comportement des champs à l'échelle microscopique associées à la distribution locale des champs à l'échelle macroscopique.

Dans de nombreux matériaux, dont le tissu osseux est un bon exemple, il est possible d'utiliser sur certains d'entre eux des méthodes d'homogénéisation tout en maintenant la dépendance spatiale sur une échelle de longueur qui est plus petite que l'échelle macroscopique. Cette situation sera étudiée dans ce travail (ainsi que l'homogénéisation macroscopique) où nous définissons ce que l'on appelle l'*échelle mésoscopique* (Ostoja-Starzewski, 2008), laquelle a été discutée pour le tissu osseux par Grimal et al. (2008) et Parnell and Grimal (2009). En particulier, on peut noter que le volume sur lequel l'homogénéisation est réalisée est pris à une échelle de longueur mésoscopique permettant ainsi des variations des propriétés effectives avec la porosité à travers la section droite de l'os cortical par exemple.

Dans ce travail, nous utilisons la méthode d'homogénéisation asymptotique (notée AS, Asymptotic Scheme en anglais), en supposant que les pores dans la région d'intérêt sont périodiquement distribués dans la matrice du matériau. En particulier, nous supposerons que les pores forment un réseau hexagonal dans la matrice qui conduit à un matériau isotrope transverse pour des pores de section droite circulaire. Ce type de symétrie est considéré comme une approximation du comportement effectif de l'os cortical par de nombreux auteurs (Yoon and Katz, 1976a,b). La méthode d'homogénéisation asympto-

tique est l'une des méthodes les plus efficaces pour déterminer les propriétés effectives des milieux périodiques (Bakhvalov and Panasenko, 1989; Parton and Kudryavtsev, 1993). Cette méthode exploite la séparation des échelles dans les matériaux composites et utilise la méthode des échelles multiples afin de trouver une équation gouvernant le comportement effectif du matériau en question.

On peut citer plusieurs avantages de cette méthode :

1. pour une micro ou méso-structure donnée à l'intérieur de la cellule périodique, l'anisotropie induite est obtenue *naturellement* par l'équation homogénéisée ainsi établie.
2. les développements asymptotiques du champ de déplacements permettent de comprendre la nature des champs de contraintes et de déformations à l'échelle des micro et méso-structures.
3. un algorithme est naturellement fourni, au lieu d'un schéma *ad hoc*, avec lequel on peut déterminer les propriétés effectives.
4. les propriétés effectives sont définies en termes d'une solution d'un problème appelée *le problème de cellule* ; en général, les solutions de ce problème sont trouvées numériquement mais des solutions semi-analytiques peuvent être établies dans le cas bidimensionnel pour des matériaux composites renforcés par des fibres (Sabina et al., 2002; Parnell and Abrahams, 2006, 2008).

La méthode proposée est nouvelle pour résoudre le problème de cellule périodique. Elle est basée sur le travail développé par Parnell and Abrahams (2006, 2008) et elle a été appliquée avec succès dans le contexte industriel des matériaux composites renforcés. En particulier, la méthode semble être stable, même pour des porosités et des contrastes élevées de phases comme dans les cas limites où les fibres se comportent comme un corps rigide ou le vide. Notons que puisque les solutions sont trouvées en termes de développements asymptotiques, nous sommes conscients de l'ordre de l'erreur en ne retenant que la solution du premier ordre. En outre, la méthode n'introduit aucune hypothèse *ad hoc* laquelle est requise par les méthodes classiques comme la méthode micromécanique

de Mori-Tanaka, le schéma auto-cohérent et le schéma différentiel par exemple (Milton, 2002). C'est un point important qui n'est pas souvent discuté dans la littérature. Dans le travail de Parnell and Grimal (2009), cette méthode a été utilisée afin de prédire l'influence des effets géométriques de porosité sur l'anisotropie de l'os cortical. La matrice a été supposée isotrope. Cette étude a permis l'analyse de la contribution distincte de l'anisotropie osseuse due seulement aux effets géométriques de porosité.

Nous allons comparer les estimations obtenues par cette méthode, avec celles obtenues par deux approches alternatives pour la modélisation des matériaux hétérogènes : la méthode micromécanique de Mori-Tanaka et les bornes de Hashin-Rosen pour les matériaux hétérogènes avec des phases isotropes transverses. Nous notons en particulier que celles-ci n'ont pas été utilisées dans la littérature concernant l'os cortical même si elles donnent des informations très utiles sur l'efficacité d'une théorie spécifique. Nous allons également discuter les résultats en les comparant avec différentes expériences réalisées pour déterminer les propriétés matérielles à l'échelle *macroscopique* de l'os cortical.

Strictement parlant, l'os est un matériau poroélastique. Par conséquent, un cadre pertinent permettant d'étudier le comportement effectif de ce tissu est celui de la théorie de la poroélasticité initiée par Biot (1941) pour étudier le mouvement d'un fluide induit par une déformation. Cependant, dans de nombreuses situations où on s'intéresse seulement au comportement élastique effectif le fluide peut être considéré comme au repos. Ainsi, nous traitons le fluide au repos comme une phase dans le milieu élastique ; ce qui revient à considérer le fluide saturant le pore de l'os cortical comme une phase.

Dans Parnell and Grimal (2009), deux points fondamentaux ont été explorés :

- les modèles existants supposent un comportement spécifique du matériau à *l'intérieur* des pores. Par exemple, Sevostianov and Kachanov (2000) et Aoubiza et al. (1996) considèrent des pores vides (os sec) qui ne possèdent pas de rigidité. D'autres, par exemple Hellmich et al. (2004), considèrent que les pores sont saturés par un fluide et que ce fluide possède une rigidité significative ; ces pores devraient, par conséquent, être considérés comme des pores élastiques (os humide). L'influence de

ces hypothèses sur l'anisotropie globale de l'os n'est pas claire. On note que *in vitro*, les mesures des propriétés matérielles de l'os cortical ont été effectuées sur les deux types d'os cortical : *os sec* et *os humide* (Lang, 1970; Yoon and Katz, 1976b). En conséquence, les modèles de ces deux types d'os (*sec* et *humide*) sont pertinents pour interpréter de tels résultats expérimentaux.

- le niveau d'approximation d'un schéma d'homogénéisation est très souvent peu clair et on a besoin de le comparer à d'autres schémas alternatifs. Actuellement, parmi les nombreux schémas existants (Mori-Tanaka, auto-cohérent, homogénéisation asymptotique, approches numériques, etc ...) il est difficile de savoir quel est le schéma le plus approprié. En outre, la précision de la prédiction peut dépendre du degré de porosité et du niveau de contraste entre les phases. Notamment, il est important que le schéma soit stable lorsque la porosité et le contraste entre les phases varient considérablement dans un intervalle de variation physiologique.

Nous reviendrons sur ces points dans le cas où la phase de la matrice est isotrope transverse et nous étudierons la notion d'échelle mésoscopique.

Dans la section 5.1.2, nous décrivons les hypothèses du modèle mécanique dans le cadre de l'homogénéisation asymptotique pour l'os cortical. Nous présenterons cette méthode dans la section 5.1.3. Ensuite, en utilisant des données appropriées sur l'os cortical, c'est-à-dire issues de la littérature spécialisée et variant dans des limites physiologiques, les résultats obtenus seront présentés dans les sections 5.3.1 et 5.3.2. Dans la section 5.3.1, nous comparerons ces résultats avec ceux obtenus par la méthode de Mori-Tanaka et les bornes de Hashin-Rosen. Dans la section 5.3.2, nous comparerons nos résultats avec des résultats expérimentaux issus de la littérature.

5.1.2 Hypothèses du modèle

Comme présenté dans Parnell and Grimal (2009), on suppose que l'os cortical est un matériau composite à deux phases (la matrice et le pore). On utilise le système de coordonnées cartésiennes $\mathbf{R}(O; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ où l'axe \mathbf{x}_3 est parallèle à l'axe longitudinal

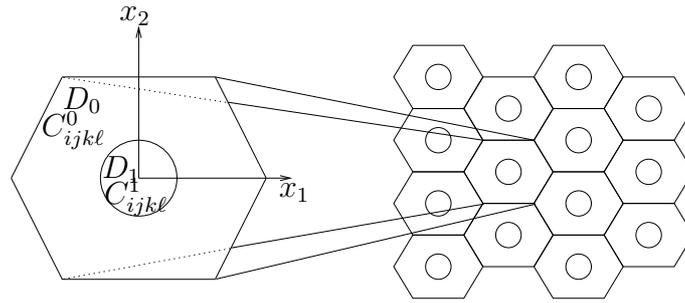


FIG. 5.1 – Géométrie de la microstructure d'un VER. (Parnell and Grimal, 2009).

de l'os. Pour simplifier le modèle, nous considérerons que la section droite des pores est *circulaire*. La méthode proposée dans Parnell and Abrahams (2008) et utilisée pour l'os cortical dans Parnell and Grimal (2009) permet de modéliser plusieurs pores à l'intérieur d'une cellule périodique. Dans ce travail, on considère qu'il y a un pore unique dans chaque cellule.

La figure 5.1 présente un réseau hexagonal périodique et la structure d'un volume élémentaire représentatif (VER) dans le plan $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ qui contient un pore cylindrique unique dans chaque cellule. La figure 5.2 présente le schéma par lequel la microstructure de l'os cortical est d'abord considéré comme un milieu périodique de structures hexagonales et ensuite il est homogénéisé en utilisant l'hypothèse d'un milieu périodique infini.

Les phases de la matrice et des pores sont respectivement supposées être des matériaux élastiques dont les densités volumiques de masse sont $\hat{\rho}_0$ et $\hat{\rho}_1$. Les modules d'élasticité sont respectivement notés \hat{C}^0_{ijkl} et \hat{C}^1_{ijkl} . La phase saturant les pores est supposée être isotrope, et par conséquent, elle peut être caractérisée par deux coefficients indépendants : le coefficient de Lamé λ_1 et le module de cisaillement m_1 . La phase de la matrice est supposée être isotrope transverse, et par conséquent, elle est caractérisée par cinq coefficients indépendants lesquels seront discutés dans la section suivante.

La distance entre les pores est définie par q . On note par D_1 le domaine du pore et par D_0 le domaine de la matrice. On note ainsi par $|D| = |D_0| + |D_1|$ le volume total.

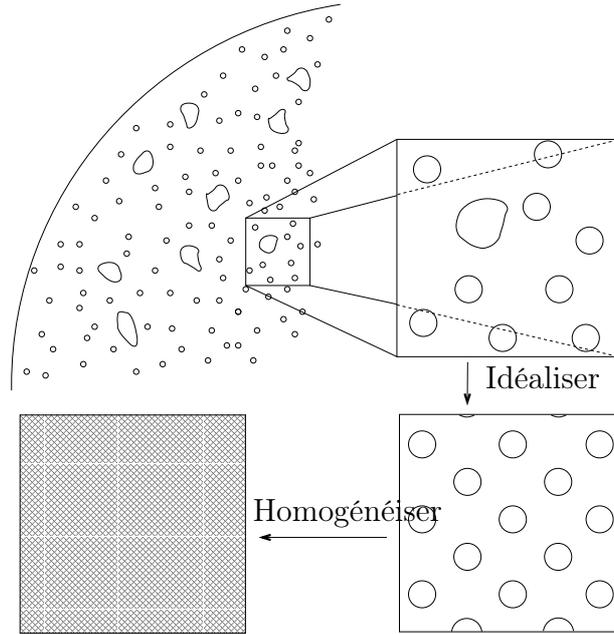


FIG. 5.2 – Procédure d’homogénéisation asymptotique pour l’os cortical (Parnell and Grimal, 2009).

5.1.3 Méthode d’homogénéisation asymptotique

Dans ce travail, nous utilisons la théorie qui a été développée par Parnell and Abrahams (2006, 2008) afin de déterminer les propriétés matérielles effectives pour la modélisation de la propagation des ondes harmoniques à faibles fréquences dans le matériau.

5.1.3.1 Notation du tenseur d’élasticité isotrope transverse

Un tenseur d’élasticité isotrope transverse peut être décomposé selon une base de tenseurs \mathcal{H}_{ijkl} de la façon suivante :

$$C_{ijkl} = \sum_{n=1}^6 X_n \mathcal{H}_{ijkl}^{(n)}, \quad (5.1)$$

où les X_n désignent des constantes associées aux caractéristiques mécaniques du matériau qui seront précisées dans la suite. En outre, les tenseurs $\mathcal{H}_{ijkl}^{(n)}$ sont définis par les relations :

$$\mathcal{H}_{ijkl}^{(1)} = \frac{1}{2} \Theta_{ij} \Theta_{kl}, \quad \mathcal{H}_{ijkl}^{(2)} = \Theta_{ij} \delta_{k3} \delta_{l3}, \quad \mathcal{H}_{ijkl}^{(3)} = \Theta_{kl} \delta_{i3} \delta_{j3}, \quad (5.2)$$

$$\mathcal{H}_{ijkl}^{(4)} = \delta_{i3}\delta_{j3}\delta_{k3}\delta_{l3}, \quad \mathcal{H}_{ijkl}^{(5)} = \frac{1}{2}(\Theta_{ik}\Theta_{lj} + \Theta_{il}\Theta_{kj} - \Theta_{ij}\Theta_{kl}), \quad (5.3)$$

$$\mathcal{H}_{ijkl}^{(6)} = \frac{1}{2}(\Theta_{ik}\delta_{l3}\delta_{j3} + \Theta_{il}\delta_{k3}\delta_{j3} + \Theta_{jk}\delta_{l3}\delta_{i3} + \Theta_{jl}\delta_{k3}\delta_{i3}), \quad (5.4)$$

avec

$$\Theta_{ij} = \delta_{ij} - \delta_{i3}\delta_{j3}. \quad (5.5)$$

Dans les relations qui précèdent, δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker lequel est le tenseur identité d'ordre 2 qui est égale à 1 si ses indices sont égaux et 0 sinon.

Nous introduisons la notation :

$$\mathcal{H}^{(m)}\mathcal{H}^{(n)} = \mathcal{H}_{ijpq}^{(m)}\mathcal{H}_{pqkl}^{(n)}, \quad (5.6)$$

laquelle définit la contraction entre les tenseurs de base \mathcal{H}_{ijkl} à partir des relations (5.2)-(5.4). Les contractions définies dans l'équation (5.6) sont résumées dans le tableau 5.1.

	$\mathcal{H}^{(1)}$	$\mathcal{H}^{(2)}$	$\mathcal{H}^{(3)}$	$\mathcal{H}^{(4)}$	$\mathcal{H}^{(5)}$	$\mathcal{H}^{(6)}$
$\mathcal{H}^{(1)}$	$\mathcal{H}^{(1)}$	$\mathcal{H}^{(2)}$	0	0	0	0
$\mathcal{H}^{(2)}$	0	0	$2\mathcal{H}^{(1)}$	$\mathcal{H}^{(2)}$	0	0
$\mathcal{H}^{(3)}$	$\mathcal{H}^{(3)}$	$2\mathcal{H}^{(4)}$	0	0	0	0
$\mathcal{H}^{(4)}$	0	0	$\mathcal{H}^{(3)}$	$\mathcal{H}^{(4)}$	0	0
$\mathcal{H}^{(5)}$	0	0	0	0	$\mathcal{H}^{(5)}$	0
$\mathcal{H}^{(6)}$	0	0	0	0	0	$\mathcal{H}^{(6)}$

TAB. 5.1 – Les contractions des tenseurs de base $\mathcal{H}_{ijkl}^{(n)}$.

5.1.3.2 Problème de cellule

Équations du mouvement. En négligeant les forces de volume, l'équation du mouvement pour des ondes harmoniques est donnée par (Graff, 1991) :

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}_j} \left(\hat{C}_{ijkl}(\hat{\mathbf{x}}) \frac{\partial u_k}{\partial \hat{x}_\ell} \right) + \hat{\rho}(\hat{\mathbf{x}}) \omega^2 u_i = 0, \quad (5.7)$$

où $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ sont respectivement les vecteurs de déplacement et de position d'un point du domaine ; \hat{C}_{ijkl} et $\hat{\rho}$ sont respectivement les tenseurs d'élasticité du matériau et sa densité volumique de masse ; ω est la fréquence angulaire. Pour définir le problème avec des variables sans dimension physiques, nous pouvons poser : $x_i = \hat{x}_i/q$, $C_{ijkl} = \hat{C}_{ijkl}/\hat{C}_{1212}^0$ et $\rho(\mathbf{x}) = \hat{\rho}(\hat{\mathbf{x}})/\hat{\rho}_0$; l'équation (5.7) devient :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijkl}(\mathbf{x}) \frac{\partial u_k}{\partial x_\ell} \right) + \epsilon^2 \rho(\mathbf{x}) u_i = 0, \quad (5.8)$$

où $\epsilon = qk_s$ et $k_s^2 = \omega^2 \hat{\rho}_0 / \hat{C}_{1212}^0$ est le nombre d'onde de cisaillement de la phase de la matrice.

En notant que le tenseur $C_{ijkl}(\mathbf{x})$ est constant dans chaque phase, on peut l'exprimer sous la forme :

$$C_{ijkl}(\mathbf{x}) = C_{ijkl}^r \chi_r(\mathbf{x}) \quad (5.9)$$

pour $r = 0, 1$ et $\chi_r(\mathbf{x})$ est la fonction caractéristique de la phase r :

$$\chi_r(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in D_r, \\ 0, & \mathbf{x} \notin D_r. \end{cases} \quad (5.10)$$

En utilisant la description des tenseurs isotropes transverses définie par la relation (5.1),

on peut écrire les deux tenseurs d'élasticité sous la forme :

$$C_{ijkl}^r = \sum_{n=1}^6 X_n^r \mathcal{H}_{ijkl}^{(n)}, \quad (5.11)$$

où les constantes X_n^r sont données par :

$$X_1^r = 2k_r, \quad X_2^r = X_3^r = \ell_r, \quad (5.12)$$

$$X_4^r = \nu_r, \quad X_5^r = 2\mu_{Tr}, \quad X_6^r = 2\mu_{Ar}. \quad (5.13)$$

Les tenseurs de base \mathcal{H}_{ijkl} sont définis dans les relations (5.2)-(5.4) ; k_r est le module de rigidité à la compression dans le plan ($\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$), μ_{Tr} est le module de cisaillement transverse dans le plan et μ_{Ar} est le module de cisaillement axial dans l'anti-plan, c'est-à-dire perpendiculaire au plan. On notera qu'un problème anti-plan est caractérisé par le fait que seule la composante selon \mathbf{x}_3 du déplacement est non nulle.

Puisque la phase de la matrice est isotrope transverse, les valeurs de C_{ijkl}^0 dépendent de 5 paramètres indépendants $k_0, \mu_{T0}, \ell_0, \nu_0$, et μ_{A0} qui s'écrivent sous la forme :

$$C_{1111}^0 = k_0 + \mu_{T0}, \quad C_{3333}^0 = \gamma_0, \quad C_{1122}^0 = k_0 - \mu_{T0}, \quad (5.14)$$

$$C_{1133}^0 = \ell_0 = k_0 - \mu_{T0} + \eta_0, \quad C_{2323}^0 = \mu_{A0} \quad C_{1212}^0 = (C_{1111}^0 - C_{1122}^0)/2 = \mu_{T0}. \quad (5.15)$$

La phase des pores est isotrope et est caractérisée par seulement deux coefficients indépendants :

$$C_{1111}^1 = k_1 + \mu_1, \quad C_{3333}^1 = \nu_1 = k_1 + \mu_1, \quad C_{1122}^1 = k_1 - \mu_1, \quad (5.16)$$

$$C_{1133}^1 = \ell_1 = k_1 - \mu_1, \quad C_{2323}^1 = \mu_{A1} = \mu_1, \quad (5.17)$$

où $\mu_1 = m_1/\hat{C}_{1212}^0$ et $k_1 = (\lambda_1 + m_1)/\hat{C}_{1212}^0$.

Puisque nous supposons travailler dans un régime de basses fréquences où la longueur d'onde des ondes qui se propagent est beaucoup plus grande que l'échelle mésoscopique

q , on peut supposer que le nombre sans dimension ϵ est très petit devant 1, c'est-à-dire $\epsilon \ll 1$. Par conséquent, il existe une séparation des échelles et on peut utiliser le cadre défini par l'analyse de l'homogénéisation asymptotique. Notons que l'on peut toujours redimensionner le problème avec un autre nombre d'onde associé à d'autres types d'ondes dans la matrice, mais la notion importante est la nouvelle définition du paramètre sans dimension $\hat{\epsilon}$ qui satisfait encore $\hat{\epsilon} \ll 1$.

L'analyse par homogénéisation asymptotique continue en définissant les variables d'échelle multiple suivantes :

$$x_\alpha = \xi_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \quad (5.18)$$

$$x_j = \frac{1}{L(\epsilon)} z_j, \quad j = 1, 2, 3 \quad (5.19)$$

où $L(\epsilon) = \epsilon + L_2 \epsilon^2 + \dots$ est une fonction du petit paramètre ϵ et $L_2 \in \mathbb{R}$ avec \mathbb{R} définissant l'ensemble des nombres réels.

En introduisant $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ et $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)$, nous notons à partir des relations (5.18)-(5.19) que ce sont les variables associées aux échelles de longueurs courte (ou encore rapide) ou longue (ou encore lente) respectivement. On voit qu'aucune variable de l'échelle mésoscopique n'est requise dans la direction de l'axe longitudinale de l'os, et par conséquent, les relations (5.18)-(5.19) permettent de définir les dérivées par rapport à \mathbf{x} comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} + L(\epsilon) \frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} = L(\epsilon) \frac{\partial}{\partial z_3}. \quad (5.21)$$

Notons que dans la suite, les indices grecs varient de 1 à 2 et les indices latins varient de 1 à 3.

Un développement asymptotique en ϵ pour les composantes du déplacement \mathbf{u} est

donné par :

$$u_k(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{z}) = u_{k0}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{z}) + \epsilon u_{k1}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{z}) + O(\epsilon^2), \quad (5.22)$$

où la notation grand O de Landau est utilisée pour désigner le caractère dominé d'une fonction par rapport à une autre. Dans la théorie de l'homogénéisation pour l'élastodynamique, on peut supposer que $u_{k0}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{z})$ est indépendant de $\boldsymbol{\xi}$:

$$u_{k0}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{z}) = U_k(\mathbf{z}), \quad (5.23)$$

et $u_{k1}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{z})$ peut s'écrire sous la forme :

$$u_{k1}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{z}) = N_k^{pm}(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial U_p(\mathbf{z})}{\partial z_m}, \quad (5.24)$$

où les N_k^{pm} sont des paramètres à déterminer. Le problème caractérisant les paramètres $N_k^{pm}(\boldsymbol{\xi})$ s'appelle le *problème de cellule*.

En remplaçant les relations (5.18)-(5.24) dans l'équation (5.8), on a (Parnell and Abrahams, 2008) :

$$k_r \mathbf{N}_{\alpha,1\alpha}^r + \mu_{Tr} \mathbf{N}_{1,\alpha\alpha}^r = 0, \quad \text{pour } r = 0, 1 \quad (5.25)$$

$$k_r \mathbf{N}_{\alpha,2\alpha}^r + \mu_{Tr} \mathbf{N}_{2,\alpha\alpha}^r = 0, \quad \text{pour } r = 0, 1 \quad (5.26)$$

$$\mu_{Ar} \mathbf{N}_{3,\alpha\alpha}^r = 0, \quad \text{pour } r = 0, 1 \quad (5.27)$$

où l'exposant r sur \mathbf{N}_k^r désigne la phase r .

Conditions aux limites. Sur l'interface entre les phases de la matrice et du pore (∂D_1), on impose la continuité des déplacements et des contraintes normales, c'est-à-dire :

$$[[u_i]]_{\pm}^{\pm} = 0, \quad [[\sigma_{ij} n_j]]_{\pm}^{\pm} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.28)$$

où σ_{ij} sont les composants du tenseur des contraintes de Cauchy, n_j est la composante j du vecteur unitaire normal à ∂D_1 et $[[f(z)]]_{\pm}^{\pm}$ désigne le saut de la fonction $f(z)$ à la traversée l'interface ∂D_1 .

En remplaçant les relations (5.18)-(5.24) dans l'équation (5.28), on obtient :

$$\mathbf{N}_k^0 \Big|_{\partial D_1^+} = \mathbf{N}_k^1 \Big|_{\partial D_1^-}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (5.29)$$

et

$$\left[(k_r + \mu_{Tr})\mathbf{N}_{1,1}^r + (k_r - \mu_{Tr})\mathbf{N}_{2,2}^r \right]_{-}^{+} n_1 + \left[\mu_{Tr}(\mathbf{N}_{1,2}^r + \mathbf{N}_{2,1}^r) \right]_{-}^{+} n_2 = \mathbf{A}n_1 + \mathbf{C}n_2, \quad (5.30)$$

$$\left[(k_r + \mu_{Tr})\mathbf{N}_{2,2}^r + (k_r - \mu_{Tr})\mathbf{N}_{1,1}^r \right]_{-}^{+} n_2 + \left[\mu_{Tr}(\mathbf{N}_{1,2}^r + \mathbf{N}_{2,1}^r) \right]_{-}^{+} n_1 = \mathbf{C}n_1 + \mathbf{B}n_2, \quad (5.31)$$

$$[\mu_{Ar}\mathbf{N}_{3,\alpha}^r]_{-}^{+} n_{\alpha} = \mathbf{D}_{\alpha}n_{\alpha}, \quad (5.32)$$

où les tenseurs du second ordre \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} et \mathbf{D}_{α} sont donnés par :

$$A_{pm} = (k_1 - k_0)\delta_{pm} + (\mu_1 - \mu_{T0})(2\delta_{1p}\delta_{1m} - \delta_{pm}) - \eta_0\delta_{p3}\delta_{m3}, \quad (5.33)$$

$$B_{pm} = (k_1 - k_0)\delta_{pm} + (\mu_1 - \mu_{T0})(2\delta_{2p}\delta_{2m} - \delta_{pm}) - \eta_0\delta_{p3}\delta_{m3}, \quad (5.34)$$

$$C_{pm} = (\mu_1 - \mu_{T0})(\delta_{1p}\delta_{2m} + \delta_{2p}\delta_{1m}), \quad (5.35)$$

$$D_{\alpha pm} = (\mu_1 - \mu_{A0})(\delta_{\alpha m}\delta_{3p} + \delta_{\alpha p}\delta_{3m}), \quad (5.36)$$

où δ_{pm} est le symbole de Kronecker.

5.1.3.3 Équations homogénéisées de la propagation d'ondes

Le but de cette section est de calculer les coefficients du tenseur d'élasticité effectif C_{ijkl}^* du matériau homogène.

Le problème à l'ordre $O(\epsilon^2)$ est utilisé pour déterminer l'équation effective des ondes gouvernant le déplacement au premier ordre $U_k(\mathbf{z})$. On réalise cela par intégration de l'équation établie à $O(\epsilon^2)$ sur la cellule périodique, en utilisant le théorème de la diver-

gence, en imposant les conditions aux limites et les conditions de double-périodicité en ξ sur le réseau hexagonal. En restreignant notre attention sur des pores à section droite circulaire, cela donne lieu au système d'équations effectives des ondes suivant (Parnell and Abrahams, 2006, 2008) :

$$c_{11}^* U_{1,11} + c_{66}^* U_{1,22} + c_{44}^* U_{1,33} + \frac{1}{2}(c_{11}^* + c_{12}^*) U_{2,12} + (c_{13}^* + c_{44}^*) U_{3,13} + d^* U_1 = 0, \quad (5.37)$$

$$c_{66}^* U_{2,11} + c_{11}^* U_{2,22} + c_{44}^* U_{2,33} + \frac{1}{2}(c_{11}^* + c_{12}^*) U_{1,12} + (c_{13}^* + c_{44}^*) U_{3,23} + d^* U_2 = 0, \quad (5.38)$$

$$c_{44}^* (U_{3,11} + U_{3,22}) + c_{33}^* U_{3,33} + (c_{13}^* + c_{44}^*) (U_{1,13} + U_{2,23}) + d^* U_3 = 0, \quad (5.39)$$

et

$$c_{66}^* = \frac{1}{2}(c_{11}^* - c_{12}^*), \quad (5.40)$$

où $U_{k,j}$ désigne la dérivée de U_k par rapport à z_j et $d^* = \rho_0(1 - \phi) + \rho_1\phi$ est la densité volumique de masse effective.

Dans le système d'équations (5.37)-(5.38), les notations de Voigt ont été utilisées :

$$c_{11}^* = C_{1111}^*, \quad c_{33}^* = C_{3333}^*, \quad c_{44}^* = C_{1313}^*, \quad (5.41)$$

$$c_{12}^* = C_{1122}^*, \quad c_{13}^* = C_{1133}^*, \quad c_{66}^* = C_{1212}^*, \quad (5.42)$$

La forme des équations d'ondes effectives données par les équations (5.37)-(5.39) auxquelles vient s'ajouter la relation (5.40) entre c_{66}^* , c_{11}^* et c_{12}^* sont équivalentes à la forme des équations de la propagation des ondes dans un milieu élastique isotrope transverse *homogène* dont les modules effectifs d'élasticité sont définis par c_{ij}^* . Les coefficients c_{ij}^* sont les *cinq* modules effectifs d'élasticité du matériau isotrope transverse. Pour définir complètement ces cinq coefficients, la solution du problème de cellule associé aux *trois* conditions aux limites (5.30)-(5.32) doit être déterminée. Il s'agit de problèmes dans le plan pour $p = m = 1$ et $p = m = 3$ et dans l'anti-plan pour $p = 3$ et $m = 1$.

Les cinq valeurs des modules effectifs d'élasticité sont définies par :

$$\begin{aligned} c_{11}^* &= k^* + \mu_T^* \\ &= (1 - \phi)(k_0 + \mu_{T0}) + \phi(k_1 + \mu_1) + (k_1 - k_0 - \mu_1 + \mu_{T0})(M_1 + M_2) + 2(\mu_1 - \mu_{T0})M_1, \end{aligned} \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned} c_{12}^* &= k^* - \mu_T^* \\ &= (1 - \phi)(k_0 - \mu_{T0}) + \phi(k_1 - \mu_1) + (k_1 - k_0 - \mu_1 + \mu_{T0})(M_1 + M_2) + 2(\mu_1 - \mu_{T0})M_2, \end{aligned} \quad (5.44)$$

$$c_{13}^* = \ell^* = (1 - \phi)(k_0 - \mu_{T0}) + \phi(k_1 - \mu_1) + (k_1 - \mu_1 - \ell_0)(M_1 + M_2), \quad (5.45)$$

$$c_{33}^* = \gamma^* = (1 - \phi)\gamma_0 + \phi(k_1 + \mu_1) + (k_1 - \mu_1 - \ell_0)M_3, \quad (5.46)$$

$$c_{55}^* = \mu_A^* = (1 - \phi)\mu_{A0} + \phi\mu_1 + (\mu_1 - \mu_{A0})M_4, \quad (5.47)$$

où $\phi = |D_1|/|D| = \pi R^2/|D|$ représente la porosité de l'os cortical et R est le rayon de la section droite circulaire des pores. Les coefficients de M_j dans les équations (5.43)-(5.47) sont déterminés en évaluant les intégrales N_k^{pm} définies sur le bord des pores cylindriques ∂D_1 :

$$M_1 = \frac{1}{|D|} \int_0^{2\pi} N_1^{11}(\theta) n_1(\theta) d\theta, \quad (5.48)$$

$$M_2 = \frac{1}{|D|} \int_0^{2\pi} N_2^{11}(\theta) n_2(\theta) d\theta, \quad (5.49)$$

$$M_3 = \frac{1}{|D|} \int_0^{2\pi} (N_1^{33}(\theta) n_1(\theta) + N_2^{33}(\theta) n_2(\theta)) d\theta, \quad (5.50)$$

$$M_4 = \frac{1}{|D|} \int_0^{2\pi} N_3^{31}(\theta) n_1(\theta) d\theta, \quad (5.51)$$

où les N_k^{pm} pour le problème de cellule sont définis par la relation (5.24) ; le système est défini en coordonnées polaires locales $\xi_1 = r \cos \theta$ et $\xi_2 = r \sin \theta$ (où r et θ sont respectivement les coordonnées radiale et angulaire) ; $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ est le vecteur unitaire normal à la frontière des pores. Comme cette interface est circulaire, on a : $n_1 = \cos \theta$ et $n_2 = \sin \theta$.

5.1.3.4 Solution du problème de cellule

Comme cela a été décrit dans la précédente sous-section, les propriétés effectives du milieu isotrope transverse sont définies à partir de la solution approchée des problèmes de cellule dans l'anti-plan et dans le plan. Ces problèmes ont été résolus dans le cas où les deux phases sont isotropes par [Parnell and Abrahams \(2006, 2008\)](#). Les méthodes utilisées sont basées sur la théorie des fonctions de variables complexes et des développements multipôles de fonctions doublement périodiques lesquelles ont été spécialement construites pour permettre la modélisation de micro et méso-structures.

Les développements asymptotiques de la solution locale sont définis à l'intérieur du pore et de la matrice, et sont ensuite égalisés sur l'interface ∂D_1 en utilisant les conditions aux limites pour résoudre le problème de cellule. Les équations ont été résolues à l'aide de conditions supplémentaires qui imposent une double périodicité en ξ . Le résultat est obtenu en construisant des développements multipôles via la méthode de [Rayleigh \(1892\)](#) dans la matrice et en termes de fonctions de base doublement périodiques.

En supposant que la section droite du pore est circulaire, la solution du problème de cellule a été présentée par [Parnell and Abrahams \(2006, 2008\)](#) :

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_1 = \frac{R}{2\mu_1} \Big[& ((K_1 - 1)\Re(\mathbf{b}_1) - \Re(\mathbf{b}_1) - 3R^2\Re(\mathbf{a}_3)) \cos \theta \\ & + (-(K_1 + 1)\Im(\mathbf{a}_1) + \Im(\mathbf{b}_1) + 3R^2\Im(\mathbf{a}_3)) \sin \theta + \dots \Big], \end{aligned} \quad (5.52)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_2 = \frac{R}{2\mu_1} \Big[& ((K_1 + 1)\Im(\mathbf{a}_1) + \Im(\mathbf{b}_1) + 3R^2\Im(\mathbf{a}_3)) \cos \theta \\ & + ((K_1 - 1)\Re(\mathbf{a}_1) + \Re(\mathbf{b}_1) + 3R^2\Re(\mathbf{a}_3)) \sin \theta + \dots \Big], \end{aligned} \quad (5.53)$$

où \Re et \Im désignent respectivement les opérateurs permettant d'extraire les parties réelle et imaginaire ; de plus $K_1 = (k_1 + 2\mu_1)/k_1$. Les termes supplémentaires désignés par $+\dots$ sont des termes d'ordre plus élevés associés à $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$. Notons encore une fois que cette solution est valable seulement dans le cas où la section droite du pore est *circulaire*.

Pour le problème anti-plan, on a :

$$\mathbf{N}_3 = \mathbf{c}_1 R \cos \theta + \dots \quad (5.54)$$

Nous avons utilisé le logiciel Mathematica pour calculer les quantités $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$ et \mathbf{N}_3 .

5.2 Méthode de micromécanique et calcul de bornes

Nous avons rassemblé dans cette section quelques détails concernant le calcul des modules effectifs par les méthodes classiques de micromécaniques et le calcul des bornes du type de celles initiées par Voigt et Reuss (Markov, 1999). Ces détails sont utiles puisque certaines de ces relations sont difficiles à trouver dans la littérature et sont fréquemment établies de façon inconsistante d'un auteur à l'autre. De plus, pour certaines d'entre elles, des erreurs typographiques sont rencontrées.

5.2.1 Relation entre les composantes du tenseur d'élasticité et les caractéristiques mécaniques

Étant donné la notation de Voigt des modules d'élasticité c_{ij} introduits dans (5.37)-(5.39), nous pouvons définir les composantes associées s_{ij} du tenseur symétrique de souplesse à partir des caractéristiques mécaniques, encore appelées notation ingénieur, comme :

$$s_{11} = 1/E_T, \quad s_{33} = 1/E_A, \quad s_{44} = 1/\mu_A, \quad (5.55)$$

$$s_{12} = -\nu_T/E_T, \quad s_{13} = -\nu_A/E_A, \quad s_{66} = 1/\mu_T. \quad (5.56)$$

où $E_{A,T}$ sont respectivement les modules d'Young axial (A) et transverse (T), $\nu_{A,T}$ sont respectivement les coefficients de Poisson axial (A) et transverse (T) et $\mu_{A,T}$ sont respectivement les modules de cisaillement axial (A) et transverse (T). Nous utilisons la notation

$\nu_A = \nu_{31}$ qui a été mesuré par la contraction dans la direction transverse définie par \mathbf{x}_1 due à une force appliquée dans la direction axiale \mathbf{x}_3 . Notons que :

$$\frac{\nu_{31}}{E_3} = \frac{\nu_A}{E_A} = \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{13}}{E_T}, \quad (5.57)$$

et pour un matériau isotrope transverse, on a $\nu_T = \nu_{12} = \nu_{21}$.

En inversant le tenseur de souplesse \mathbf{S} défini par ses composantes s_{ij} , on obtient le tenseur d'élasticité (ou de rigidité) \mathbf{C} défini par ses composantes c_{ij} . Nous avons les relations entre les caractéristiques mécaniques et les composantes du tenseur d'élasticité :

$$E_A = \frac{c_{11}c_{33} - 2c_{13}^2 + c_{33}c_{12}}{c_{11} + c_{12}}, \quad E_T = \frac{c_{11}^2c_{33} + 2c_{13}^2c_{12} - 2c_{11}c_{13}^2 - c_{33}c_{12}^2}{c_{11}c_{33} - c_{13}^2}, \quad (5.58)$$

$$\nu_A = \frac{c_{13}}{c_{11} + c_{12}}, \quad \nu_T = \frac{c_{12}c_{33} - c_{13}^2}{c_{11}c_{33} - c_{13}^2}, \quad \mu_A = c_{55}, \quad \mu_T = \frac{c_{11} - c_{12}}{2} = \frac{E_T}{2(1 + \nu_T)}, \quad (5.59)$$

et

$$c_{11} = \frac{E_T(E_A - E_T\nu_A^2)}{(1 + \nu_T)(E_A - E_A\nu_T - 2E_T\nu_A^2)}, \quad c_{12} = \frac{E_T(E_A\nu_T + E_T\nu_A^2)}{(1 + \nu_T)(E_A - E_A\nu_T - 2E_T\nu_A^2)}, \quad (5.60)$$

$$c_{13} = \frac{E_TE_A\nu_A}{E_A - E_A\nu_T - 2E_T\nu_A^2}, \quad c_{33} = \frac{E_A^2(1 - \nu_T)}{E_A - E_A\nu_T - 2E_T\nu_A^2}, \quad (5.61)$$

$$c_{44} = \mu_A, \quad c_{66} = \frac{c_{11} - c_{12}}{2} = \frac{E_T}{2(1 + \nu_T)} = \mu_T. \quad (5.62)$$

5.2.2 Méthode de Mori-Tanaka

Il est possible d'utiliser la méthode de Mori-Tanaka pour calculer les modules effectifs d'élasticité du matériau homogénéisé. Tout d'abord, il est possible de montrer en prenant les moyennes volumiques que l'expression pour le tenseur effectif d'élasticité d'un composite de particules à deux phases où la phase de particule a fraction volumique ϕ peut être décrit par (équation (2.64) de la page 49 de [Markov \(1999\)](#)) :

$$C_{ijkl}^* = C_{ijkl}^0 + \phi(C_{ijmn}^1 - C_{ijmn}^0)A_{mnkl}, \quad (5.63)$$

où A_{mnkl} est le tenseur de concentration de déformations de la phase du pore (phase 1).

Le tenseur de A_{mnkl} est calculé par :

$$\bar{e}_{ij}^1 = A_{ijkl}\bar{e}_{kl}, \quad (5.64)$$

où \bar{e}_{ij}^1 et \bar{e}_{ij} sont respectivement les déformations moyennes de la phase du pore et du matériau homogénéisé.

Le clé des approximations micromécaniques des modules effectifs est de savoir déterminer le tenseur de concentration de déformations. La méthode de Mori-Tanaka définit un tenseur de concentration secondaire B_{ijkl} par l'expression suivante :

$$\bar{e}_{ij}^1 = B_{ijkl}\bar{e}_{kl}^0, \quad (5.65)$$

où B_{ijkl} est le tenseur de concentration de déformations de la phase de la matrice.

En calculant la déformation moyenne totale :

$$\bar{e}_{ij} = \phi\bar{e}_{ij}^1 + (1 - \phi)\bar{e}_{ij}^0 = (\phi B_{ijkl} + (1 - \phi)\delta_{ik}\delta_{jl})\bar{e}_{kl}^0, \quad (5.66)$$

puis en remplaçant cette relation dans l'équation (5.64), on obtient :

$$\bar{e}_{ij}^1 = A_{ijkl}(\phi B_{klpq} + (1 - \phi)\delta_{kp}\delta_{lq})\bar{e}_{pq}^0. \quad (5.67)$$

Ensuite, on identifie les deux équations (5.67) et (5.65) pour obtenir :

$$B_{ijpq} = A_{ijkl}(\phi B_{klpq} + (1 - \phi)\delta_{kp}\delta_{lq}). \quad (5.68)$$

Un choix consistant pour le tenseur B_{ijkl} qui est valide pour des valeurs de ϕ près de 0 ou 1 est donné par $B_{ijkl} = A_{ijkl}^{dil}$ où l'exposant dil fait référence au tenseur de concentrations de déformations diluées lequel est trouvé pour résoudre le problème de l'inclusion unique où aucune interaction avec les autres inclusions n'est ressentie. Ce tenseur est

défini dans ce qui suit :

$$B_{ijmn}\tilde{B}_{mnkl} = I_{ijkl}, \quad \tilde{B}_{ijkl} = I_{ijkl} + P_{ijmn}(C_{mnkl}^1 - C_{mnkl}^0), \quad (5.69)$$

où I_{ijkl} est le tenseur identité d'ordre 4, P_{ijkl} est le tenseur d'Eshelby, avec $S_{ijkl} = C_{ijmn}^0 P_{mnkl}$ (Mura, 1991). En utilisant les notations définies par les relations (5.14)-(5.15) pour le tenseur d'élasticité et pour un matériau isotrope transverse, les composantes du tenseur d'Eshelby sont définies par (Parnell and Abrahams, 2008) :

$$\begin{aligned} S_{1111} = S_{2222} &= \frac{3k_0 + 2m_0}{4(k_0 + m_0)}, & S_{3333} &= 0, \\ S_{1122} = S_{2211} &= \frac{k_0 - 2m_0}{4(k_0 + m_0)}, & S_{1133} &= \frac{\ell_0}{2(k_0 + m_0)}, \\ S_{3311} &= 0, & S_{1313} = S_{3131} = S_{3113} = S_{1331} &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Ainsi, on peut voir que le choix (5.69) fait que l'expression (5.68) est valable à proximité de ϕ égal à 0 et 1 puisque à proximité de $\phi = 0$ nous avons $A_{ijkl} \sim B_{ijkl} = A_{ijkl}^{dil}$ et à proximité de $\phi = 1$ nous avons $A_{ijkl} \sim I_{ijkl}$.

Enfin, on peut calculer les coefficients du tenseur d'élasticité par la relation d'inversion $C_{ijkl} = S_{ijkl}^{-1}$.

5.2.3 Détermination de bornes des propriétés matérielles effectives

Hashin and Rosen (1964) ont trouvé des *bornes* strictes sur les propriétés effectives de matériaux composites dont la microstructure est *périodique*. Cependant, les phases sont supposées être isotropes. Les bornes sur les propriétés effectives de matériaux périodiques avec des phases isotropes transverses peuvent être trouvées dans Hashin (1979) qui a simplifié l'approche de Hashin and Rosen (1964).

Nous utilisons respectivement la notation des indices Tr ou Ar pour les propriétés matérielles transverse ou axiale qui sont associées à la phase r .

5.2.3.1 Modèle d'assemblage de cylindres

Le modèle d'assemblage de cylindres pour le matériau composite a été introduit par [Hashin and Rosen \(1964\)](#) permettant de trouver une solution analytique décrivant les modules effectifs d'élasticité des matériaux composites.

Les quatre premières composantes des modules effectifs d'élasticité sont données par :

$$k_c^*(\phi) = k_0 + \frac{\phi}{1/(k_1 - k_0) + (1 - \phi)/(k_0 + \mu_{T0})}, \quad (5.70)$$

$$E_{Ac}^*(\phi) = (1 - \phi)E_{A0} + \phi E_{A1} + \frac{4(\nu_{A1} - \nu_{A0})^2}{(1/k_1 - 1/k_0)^2} \left(\frac{(1 - \phi)}{k_0} + \frac{\phi}{k_1} - \frac{1}{k_c^*(\phi)} \right), \quad (5.71)$$

$$\nu_{Ac}^*(\phi) = (1 - \phi)\nu_{A0} + \phi\nu_{A1} - \frac{(\nu_{A1} - \nu_{A0})}{(1/k_1 - 1/k_0)} \left(\frac{(1 - \phi)}{k_0} + \frac{\phi}{k_1} - \frac{1}{k_c^*(\phi)} \right), \quad (5.72)$$

$$\mu_{Ac}^*(\phi) = \mu_{A0} + \frac{\phi}{1/(\mu_{A1} - \mu_{A0}) + (1 - \phi)/(2\mu_{A0})}. \quad (5.73)$$

Les bornes du module de cisaillement dans le plan sont données par :

$$\mu_{Tc(-)}^* \leq \mu_{Tc}^* \leq \mu_{Tc(+)}^*. \quad (5.74)$$

Si $\mu_{T1} > \mu_{T0}$ et $k_1 > k_0$:

$$\mu_{Tc(-)}^*(\phi) = \mu_{T0} + \frac{\phi\mu_{T0}}{1/(\gamma - 1) + (1 - \phi)/(1 + \beta_0)}, \quad (5.75)$$

$$\mu_{Tc(+)}^*(\phi) = \mu_{T0} \left[1 + \frac{(1 + \beta_0)\phi}{\rho - \phi(1 + 3\beta_0^2(1 - \phi)^2/(\alpha\phi^3 + 1))} \right], \quad (5.76)$$

où

$$\alpha = \frac{\beta_0 - \gamma\beta_1}{1 + \gamma\beta_1}, \quad \rho = \frac{\gamma + \beta_0}{\gamma - 1}, \quad \beta_0 = \frac{k_0}{k_0 + 2\mu_{T0}}, \quad \beta_1 = \frac{k_1}{k_1 + 2\mu_{T1}}, \quad \gamma = \frac{\mu_{T1}}{\mu_{T0}}. \quad (5.77)$$

Si $\mu_{T1} < \mu_{T0}$ et $k_1 < k_0$:

$$\mu_{Tc(-)}^*(\phi) = \mu_{T0} \left[1 + \frac{(1 + \beta_0)\phi}{\rho - \phi(1 + 3\beta_0^2(1 - \phi)^2/(\alpha\phi^3 - \beta_0))} \right], \quad (5.78)$$

$$\mu_{Tc(+)}^*(\phi) = \mu_{T0} + \frac{\phi\mu_{T0}}{1/(\gamma - 1) + (1 - \phi)/(1 + \beta_0)}. \quad (5.79)$$

5.2.3.2 Bornes de Hashin-Rosen

On définit le paramètre ϕ_c qui représente la fraction volumique du plus grand cercle qui peut être inscrit dans la cellule périodique en question. Ainsi, par exemple, pour un carré, on obtient $\phi_c = \pi/4$ et pour un hexagone, on obtient $\phi_c = \pi/(2\sqrt{3})$. Puisque ici, la cellule périodique est de forme *hexagonal*, $\phi_c = \pi/(2\sqrt{3})$. Les bornes sur les propriétés matérielles effectives sont obtenues en utilisant les résultats donnés par (5.70)-(5.73) lesquels sont associés à un assemblage de cylindres avec l'argument ϕ/ϕ_c (Hashin and Rosen, 1964) :

$$k_{(-)}^*(\phi) = \left(\frac{1 - \phi_c}{k_0} + \frac{\phi_c}{k_c^*(\phi/\phi_c)} \right)^{-1}, \quad k_{(+)}^*(\phi) = (1 - \phi_c)k_0 + \phi_c k_c^*(\phi/\phi_c), \quad (5.80)$$

$$\mu_{A(-)}^*(\phi) = \left(\frac{1 - \phi_c}{\mu_{A0}} + \frac{\phi_c}{\mu_{Ac}^*(\phi/\phi_c)} \right)^{-1}, \quad \mu_{A(+)}^*(\phi) = (1 - \phi_c)\mu_{A0} + \phi_c \mu_{Ac}^*(\phi/\phi_c), \quad (5.81)$$

$$E_{A(-)}^*(\phi) = (1 - \phi_c)E_0 + \phi_c E_{Ac}^*(\phi/\phi_c), \quad (5.82)$$

$$E_{A(+)}^*(\phi) = E_{A(-)}^* + \phi_c(1 - \phi_c) \frac{4(\nu_{Ac}^*(\phi/\phi_c) - \nu_{A0})^2 k_0 k_c^*(\phi/\phi_c)}{k_0(1 - \phi_c) + k_c^*(\phi/\phi_c)}. \quad (5.83)$$

Pour les bornes sur le coefficient effectif de Poisson axial ν_A^* , on définit les deux paramètres ν_a^* et ν_b^* :

$$\begin{aligned} \nu_a^* &= Q + Pk_0k_1 \left(\frac{1 - \phi_c}{k_0} + \frac{\phi_c}{k_c^*(\phi/\phi_c)} \right), \\ \nu_b^* &= Q + Pk_0k_1 \left(\frac{1}{(1 - \phi_c)k_0 + \phi_c k_c^*(\phi/\phi_c)} \right). \end{aligned} \quad (5.84)$$

où $P = (\nu_{A0} - \nu_{A1})/(k_1 - k_0)$ et $Q = (\nu_{A1}k_1 - \nu_{A0}k_0)/(k_1 - k_0)$

Ainsi, les bornes du coefficient de Poisson axial sont :

– si $P < 0$:

$$\nu_a^* \leq \nu_A^* \leq \nu_b^*, \quad (5.85)$$

– si $P > 0$:

$$\nu_b^* \leq \nu_A^* \leq \nu_a^*. \quad (5.86)$$

Noter que les bornes inférieure et supérieure correspondant aux quatre propriétés effectives ci-dessus coïncident au cas limite d'un assemblage composite de cylindres quand $\phi_c \rightarrow 1$. Par contraste avec ce qui suit sur les bornes du module de cisaillement transverse, les bornes ne coïncident pas avec ce cas limite. Ces bornes peuvent être écrites sous la forme :

$$\mu_{T(-)}^*(\phi) = \left(\frac{1 - \phi_c}{\mu_{T0}} + \frac{\phi_c}{\mu_{Tc(-)}^*(\phi/\phi_c)} \right)^{-1}, \quad (5.87)$$

$$\mu_{T(+)}^*(\phi) = (1 - \phi_c)\mu_{T0} + \phi_c\mu_{Tc(+)}^*(\phi/\phi_c). \quad (5.88)$$

Finalement, nous pouvons aussi borner E_T^* :

$$E_{T(\pm)}^*(\phi) = \frac{4k_{(\pm)}^*(\phi)\mu_{T(\pm)}^*(\phi)}{k_{(\pm)}^*(\phi) + M_{(\pm)}^*(\phi)\mu_{T(\pm)}^*(\phi)}, \quad (5.89)$$

où

$$M_{(\pm)}^*(\phi) = 1 + \frac{4k_{(\pm)}^*(\phi)\nu_{A(\mp)}^{*2}(\phi)}{E_{A(\pm)}^*(\phi)}. \quad (5.90)$$

Noter que cette dernière relation est une correction de l'expression correspondant à la page 546 de [Hashin \(1979\)](#).

Enfin, les bornes sur ν_T sont données par :

$$\nu_{T(\pm)}^*(\phi) = \frac{k_{(\pm)}^*(\phi) - M_{(\pm)}^*(\phi)\mu_{T(\mp)}^*(\phi)}{k_{(\pm)}^*(\phi) + M_{(\pm)}^*(\phi)\mu_{T(\mp)}^*(\phi)}. \quad (5.91)$$

5.2.3.3 Bornes de Hashin-Shtrikman

Puisque le résultat de Mori-Tanaka est obtenu pour une structure dont les hétérogénéités sont disposées aléatoirement alors pour que cela soit une prédiction valable des propriétés effectives il est nécessaire que les valeurs ainsi obtenues via cette prédiction se trouvent à l'intérieur des limites correspondantes, et dans ce cas, ce sont les bornes de Hashin-Shtrikman (HS) (Hashin and Shtrikman, 1963; Hashin, 1983) pour des composites avec des pores analogues à ceux définis par Hashin (1965, 1979). Ici, nous sommes particulièrement intéressés par les bornes sur ν_A^* puisque le résultat de Mori-Tanaka se trouve en dehors des bornes de Hashin-Rosen pour cette caractéristique mécanique. Pour définir les bornes de HS sur cette caractéristique mécanique nous avons besoin de d'autres paramètres supplémentaires. Nous définissons les éléments suivants :

$$\mathcal{M}_+ = \max(\mu_{T0}, \mu_{T1}), \quad \mathcal{M}_- = \min(\mu_{T0}, \mu_{T1}), \quad (5.92)$$

$$\mathcal{K}_+ = \max(k_0, k_1), \quad \mathcal{K}_- = \min(k_0, k_1). \quad (5.93)$$

Ensuite, les bornes suivantes de HS peuvent être définies sur les modules de compressibilité et de cisaillement dans l'anti-plan :

$$k_{(\pm)}^* = \left(\frac{k_0(1-\phi)}{k_0 + \mathcal{M}_{\pm}} + \frac{k_1\phi}{k_1 + \mathcal{M}_{\pm}} \right) \left(\frac{(1-\phi)}{k_0 + \mathcal{M}_{\pm}} + \frac{\phi}{k_1 + \mathcal{M}_{\pm}} \right)^{-1} \quad (5.94)$$

$$\mu_{T(\pm)}^* = \frac{\mathcal{G}_a}{\mathcal{G}_b}, \quad (5.95)$$

où

$$\mathcal{G}_a = \left(\frac{\mu_{T0}(1-\phi)}{2\mu_{T0}\mathcal{M}_{\pm} + \mathcal{K}_{\pm}(\mu_{T0} + \mathcal{M}_{\pm})} + \frac{\mu_{T1}\phi}{2\mu_{T1}\mathcal{M}_{\pm} + \mathcal{K}_{\pm}(\mu_{T1} + \mathcal{M}_{\pm})} \right), \quad (5.96)$$

$$\mathcal{G}_b = \left(\frac{(1-\phi)}{2\mu_{T0}\mathcal{M}_{\pm} + \mathcal{K}_{\pm}(\mu_{T0} + \mathcal{M}_{\pm})} + \frac{\phi}{2\mu_{T1}\mathcal{M}_{\pm} + \mathcal{K}_{\pm}(\mu_{T1} + \mathcal{M}_{\pm})} \right). \quad (5.97)$$

Les bornes sur le module d'Young axial sont données par :

$$E_{A(\pm)}^* = E_{A0}(1-\phi) + E_{A1}\phi - 4P^2k_1^2k_0^2 \left(\frac{1}{k_{(\pm)}^*} - \frac{\phi}{k_1} - \frac{(1-\phi)}{k_0} \right), \quad (5.98)$$

où nous rappelons au lecteur que $P = (\nu_{A0} - \nu_{A1})/(k_1 - k_0)$. En définissant les relations suivantes :

$$\nu_c = \nu_{A0}(1-\phi) + \nu_{A1}\phi + Pk_1k_0 \left(\frac{1}{k_{(-)}^*} - \frac{\phi}{k_1} - \frac{(1-\phi)}{k_0} \right), \quad (5.99)$$

$$\nu_d = \nu_{A0}(1-\phi) + \nu_{A1}\phi + Pk_1k_0 \left(\frac{1}{k_{(+)}^*} - \frac{\phi}{k_1} - \frac{(1-\phi)}{k_0} \right), \quad (5.100)$$

où avec $P < 0$, nous avons :

$$\nu_c \leq \nu_A^* \leq \nu_d \quad (5.101)$$

et avec $P > 0$ nous avons :

$$\nu_d \leq \nu_A^* \leq \nu_c. \quad (5.102)$$

Les bornes sur les propriétés transverses sont obtenues en utilisant les relations (5.92)-(5.102) dans les expressions (5.89)-(5.91).

5.2.4 Limites pour les cas d'os sec et humide

Cas de l'os sec. Dans ce cas, les caractéristiques mécaniques données à partir de la notation ingénieur du pore $k_1, E_{A1}, E_{T1}, \mu_{T1}$ et μ_{A1} tendent vers zéro. Le coefficient de

Poisson axial ν_A^* et le module de Young axial E_A^* sont définis par (Hashin, 1979) :

$$\nu_A^* = \nu_{A0}, \quad (5.103)$$

$$E_A^* = (1 - \phi)E_{A0}. \quad (5.104)$$

Nous devons faire attention lorsque nous calculons les cas limites des bornes sur le module de cisaillement anti-plan ci-dessus. En particulier, nous avons que $\gamma = \mu_{T1}/\mu_{T0} \rightarrow 0$ pour le pore. La limite de β_1 n'est pas claire. Par conséquent, puisque par ailleurs β_1 est multiplié par γ , à condition que G_{T1} et k_{T1} s'approche de zéro avec la même vitesse, alors $\gamma\beta_1 \rightarrow 0$. Par conséquent, pour le pore nous avons :

$$\gamma \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow \beta_0, \quad \rho \rightarrow -\beta_0, \quad (5.105)$$

et ces derniers doivent donc être utilisés dans les limites de μ_T^* .

Cas de l'os humide. Nous supposons que la phase du pore est l'eau. Cette eau est considérée se comporter comme un fluide parfait incompressible. Ainsi, nous prenons la limite $\mu_1 = \mu_{T1} = \mu_{A1} \rightarrow 0$ avec $\nu_1 = \nu_{T1} = \nu_{A1} = 1/2$ dans les relations données ci-dessus lesquelles ont un bon comportement avec ce cas limite.

5.3 Résultats

5.3.1 Comparaison des résultats avec d'autres modèles

Propriétés mécaniques des pores. Dans la littérature, de nombreuses hypothèses sont faites concernant les propriétés mécaniques de la phase des pores de l'os cortical. Ici, nous allons examiner les deux cas d'os *sec* et *humide* :

- pour le cas de l'os sec, nous supposons que les propriétés mécaniques κ_1 et μ_1 tendent vers zéro.
- pour le cas de l'os humide, nous supposons que les pores cylindriques sont saturés

d'eau au repos. Les propriétés mécaniques de l'eau, modélisée comme un fluide parfait, sont décrites par le module de compressibilité $\kappa_1 = 2.2$ GPa et le module de cisaillement $\mu_1 = 0$.

Propriétés mécaniques de la matrice. Nous utilisons les valeurs de propriétés mécaniques anisotropes pour la phase de la matrice d'os cortical décrites dans le travail expérimental de [Hofmann et al. \(2006\)](#) qui ont utilisé une combinaison de méthodes de microscopie acoustique et de nanoindentation. Les valeurs moyennes obtenues dans [Hofmann et al. \(2006\)](#) sur des lamelles d'ostéon pour les modules d'Young transverse et axial sont respectivement $E_{T0} = 23.4$ GPa et $E_{A0} = 26.5$ GPa. Le module de cisaillement axial est $\mu_{A0} = 10.4$ GPa. Nous utilisons l'hypothèse communément admise que les coefficients de Poisson transverse et axial sont respectivement $\nu_0 = \nu_{T0} = \nu_{A0} = 0.3$ pour toutes les directions. Ces valeurs correspondent aussi à $k_0 = 21.62$ GPa, $\mu_{T0} = 9$ GPa, $\gamma_0 = 34.28$ GPa and $\ell_0 = 12.97$ GPa. Les composantes du tenseur d'élasticité sont calculées en utilisant les relations (5.60)-(5.62) de la section 5.2.1 et sont données dans le tableau 5.2. Nous

c_{11}^0 (GPa)	c_{33}^0 (GPa)	c_{12}^0 (GPa)	c_{13}^0 (GPa)	c_{44}^0 (GPa)	c_{66}^0 (GPa)
30.62	34.28	12.62	12.97	10.40	9.00

TAB. 5.2 – Composantes du tenseur d'élasticité de la phase de la matrice tirées de l'article [Hofmann et al. \(2006\)](#).

présentons les résultats des caractéristiques mécaniques pour le cas de l'os humide dans les figures 5.3, 5.4 et 5.5 et pour le cas de l'os sec dans les figures 5.6 et 5.7. Nous avons tracé trois types de résultats différents obtenus par : la méthode asymptotique (AS), la méthode de Mori-Tanaka (MT) (voir les détails dans la section 5.2.2), et enfin, les bornes de Hashin-Rosen (HR) (voir les détails dans la section 5.2.3.2). Dans cette section, pour tous les résultats, nous redimensionnons la propriété matérielle discutée à sa valeur de la matrice associée de telle façon à ce que les courbes normalisées des modules effectifs donnent un module effectif qui prend la valeur unité lorsque $\phi = 0$. En outre, nous avons pris un intervalle de variation pour la fraction volumique défini par $\phi = [0, 0.2]$.

Le cas de l'os humide. Dans les figures 5.3 et 5.4, on constate que les résultats de AS et de MT sont à l'intérieur de l'intervalle défini par les bornes de HR pour une variation physiologique de la fraction volumique. Les variations du module d'Young axial E_A^* et du module de cisaillement axial μ_A^* sont presque linéaires par rapport à la fraction volumique. Les variations du module d'Young transverse E_T^* et du module de cisaillement transverse μ_T^* restent proche des bornes supérieures définies par HR.

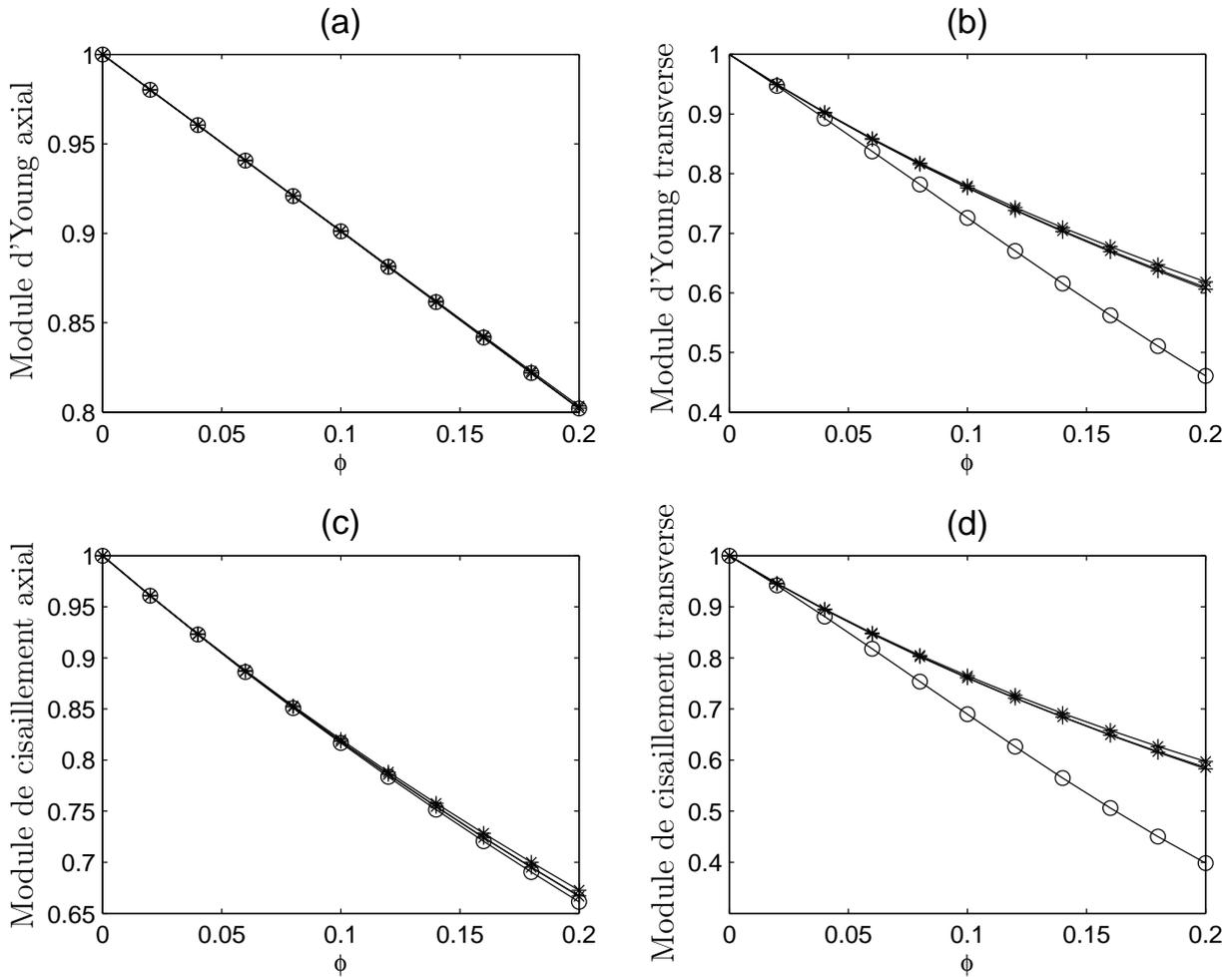


FIG. 5.3 – Cas de l'os humide. Variation des caractéristiques mécaniques en fonction de ϕ . (a) Module d'Young axial; (b) Module d'Young transverse; (c) Module de cisaillement axial; (d) Module de cisaillement transverse. Tous les résultats sont normalisés par rapport aux valeurs à $\phi = 0$. Dans chaque graphique, quatre courbes sont tracées : + pour la méthode asymptotique; \times pour la méthode de Mori-Tanaka; $*$ pour la borne supérieure de Hashin-Rosen; o pour la borne inférieure de Hashin-Rosen.

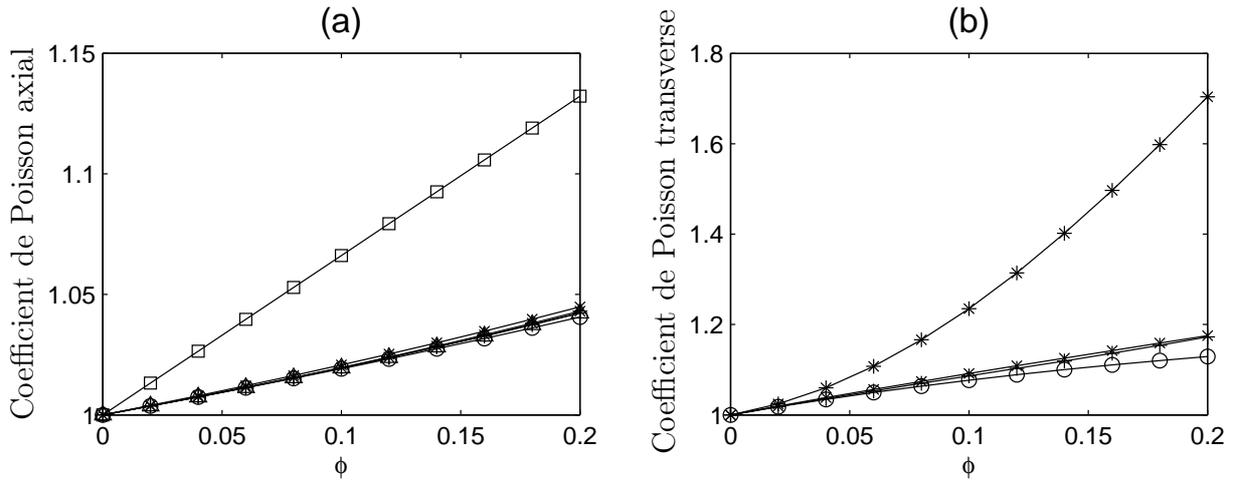


FIG. 5.4 – Cas de l'os humide. Variation des caractéristiques mécaniques en fonction de ϕ . (a) Coefficient de Poisson axial; (b) Coefficient de Poisson transverse. La légende est la même que celle de la figure 5.3.

Dans la figure 5.5, nous donnons une représentation différente de ces résultats lesquels permettent de voir comment les bornes de telles prédictions sont proches. Par exemple, dans la figure 5.5(a), les trois courbes tracées représentent les trois quantités $(E_A^* - E_{A(-)})/E_{A0}$, $(E_A^{MT} - E_{A(-)})/E_{A0}$ et $(E_{A(+)} - E_{A(-)})/E_{A0}$, où E_A^{MT} désigne le module d'Young axial obtenu par la méthode de Mori-Tanaka, $E_{A(+)}$ et $E_{A(-)}$ sont respectivement les bornes supérieure et inférieure de Hashin-Rosen.

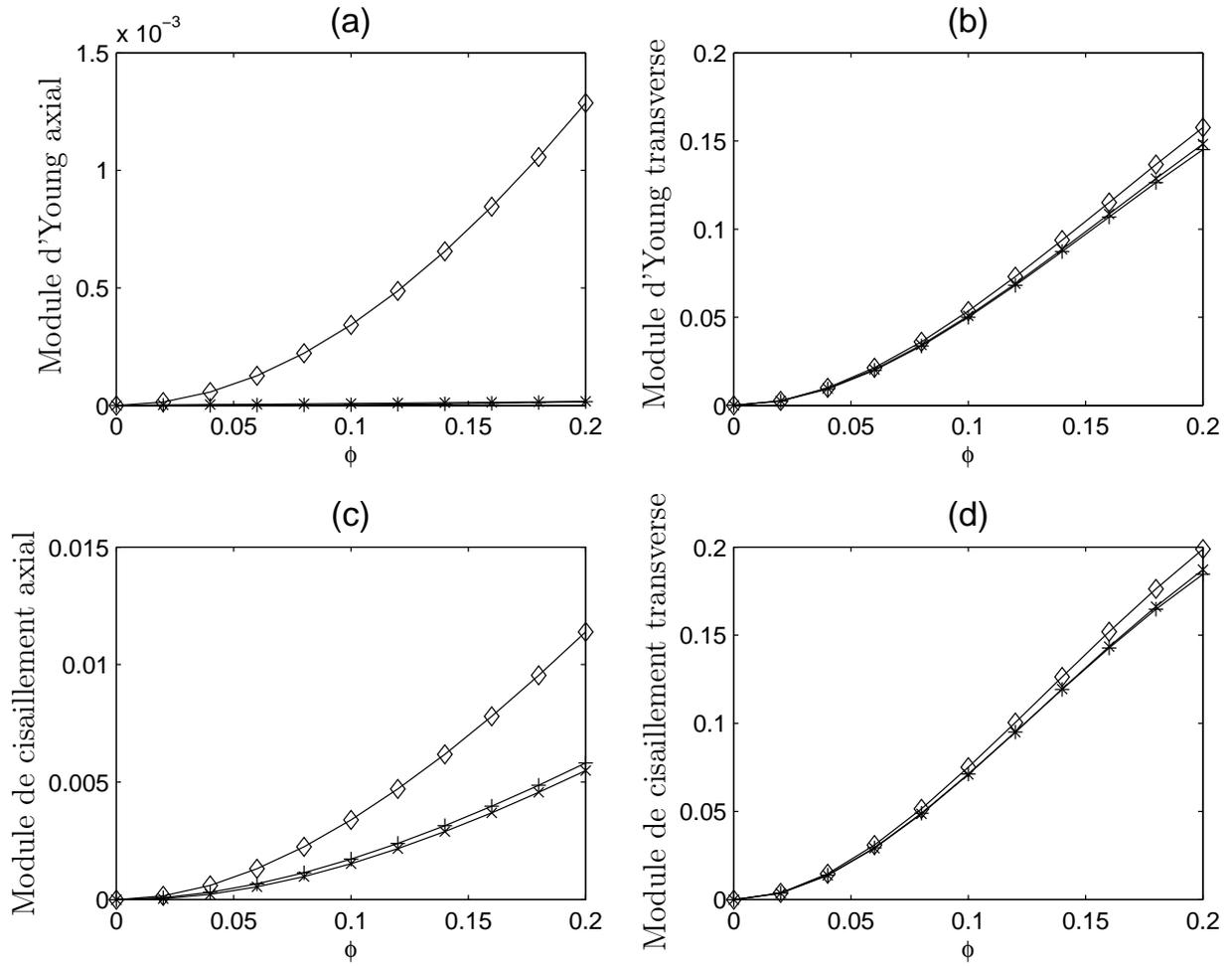


FIG. 5.5 – Cas de l'os humide. Dans chaque graphique, trois courbes sont tracées. Dans (a), les trois quantités sont les suivantes : + pour $(E_A^* - E_{A(-)})/E_{A0}$, \times pour $(E_A^{MT} - E_{A(-)})/E_{A0}$ et \diamond pour $(E_{A(+)} - E_{A(-)})/E_{A0}$. Les mêmes symboles sont utilisés dans les graphiques (b), (c) et (d).

Le cas de l'os sec. Dans la section 5.2.4, via les relations (5.103) et (5.104), nous avons donné les expressions exactes du module d'Young axial et du coefficient de Poisson définies respectivement par les relations $E_A^* = (1 - \phi)E_{A0}$ et $\nu_A^* = \nu_{A0}$. Ces relations ne dépendent que des propriétés de la phase de la matrice. Ainsi, il est inutile de tracer les variations de (E_A^*, ν_A^*) dans les 4 figures 5.6. Nous notons particulièrement que les résultats de μ_A^*, μ_T^* et E_T^* sont presque identiques au cas de l'os humide. La différence principale entre ces deux cas est la variation du coefficient de Poisson transverse ν_T^* .

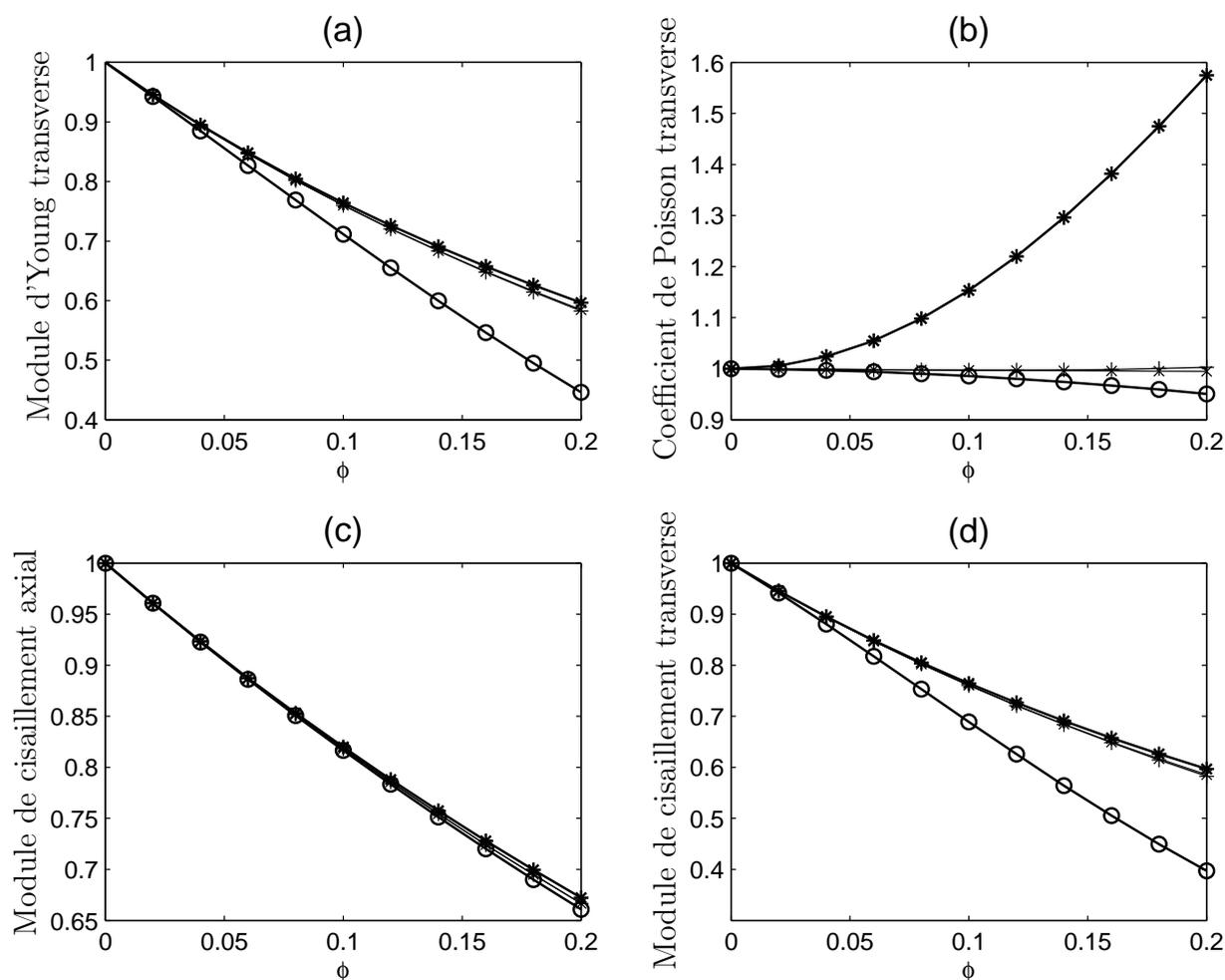


FIG. 5.6 – Cas de l'os sec. Variation des caractéristiques mécaniques en fonction de ϕ . (a) Module d'Young transverse; (b) Coefficient de Poisson transverse; (c) Module de cisaillement axial; (d) Module de cisaillement transverse. Dans chaque graphique, quatre courbes sont tracées : + pour la méthode asymptotique; \times pour la méthode de Mori-Tanaka; \star pour la borne supérieure de Hashin-Rosen; \circ pour la borne inférieure de Hashin-Rosen.

Dans la figure 5.7, nous donnons une représentation différente de ces résultats lesquels permettent de voir comment les bornes de telles prédictions sont proches pour le cas de l'os sec.

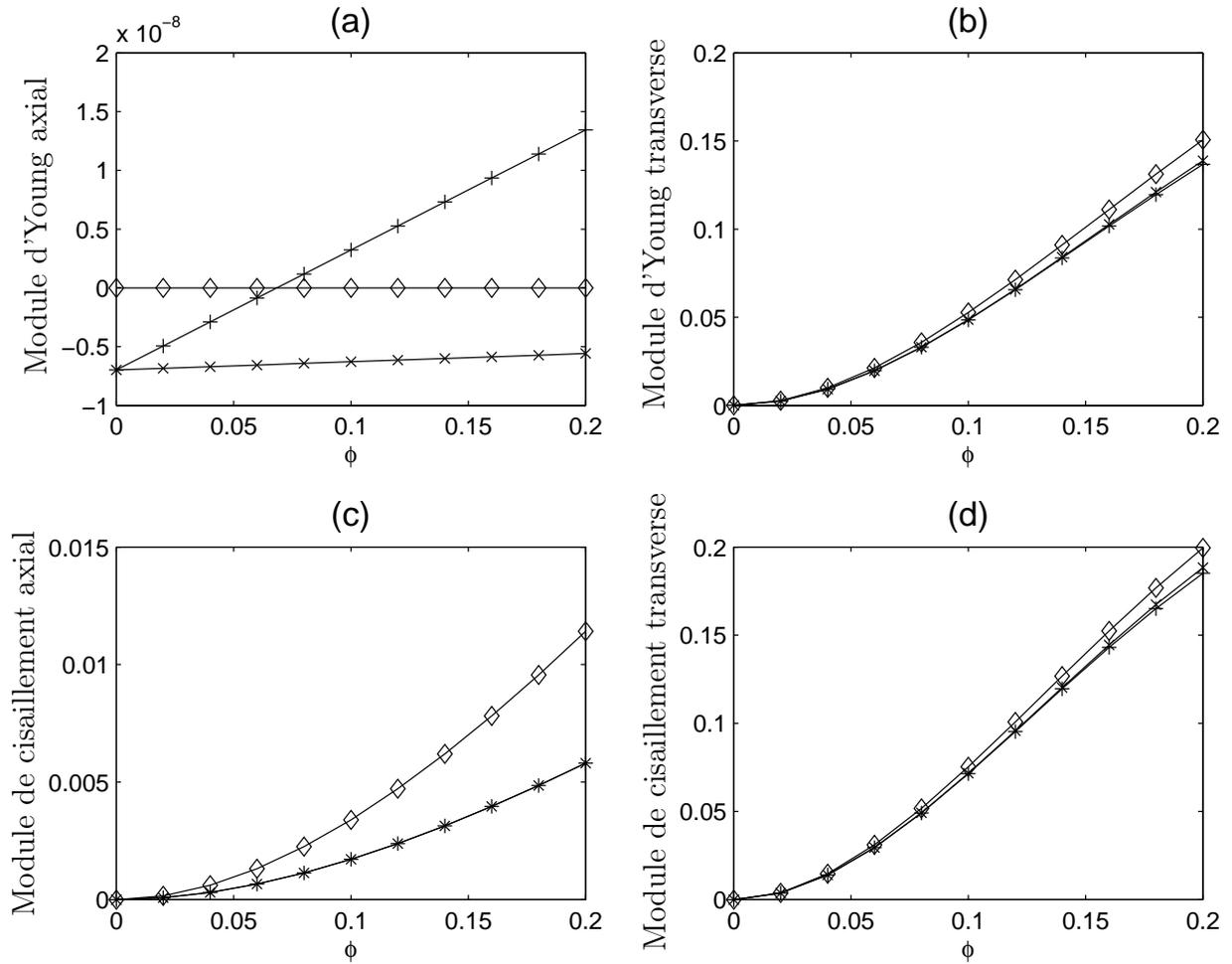


FIG. 5.7 – Cas de l'os sec. Variation des caractéristiques mécaniques en fonction de ϕ . Dans chaque graphique, trois courbes sont tracées. Par exemple, dans (a), les trois quantités sont : + pour $(E_A^* - E_{A(-)})/E_{A0}$, x pour $(E_A^{MT} - E_{A(-)})/E_{A0}$ et \diamond pour $(E_{A(+)} - E_{A(-)})/E_{A0}$. Les mêmes symboles sont utilisés dans les graphiques (b), (c) et (d).

5.3.2 Comparaison des résultats avec des données expérimentales

Dans les sections précédentes, nous avons indiqué que la méthode asymptotique est une méthode robuste avec laquelle nous pouvons prédire les propriétés matérielles effectives de l'os cortical. Dans cette section, nous décrivons comment les prédictions de cette méthode sont utilisées pour être comparées avec des résultats expérimentaux des propriétés matérielles effectives. Noter que de telles données correspondent à des tests macroscopiques où la taille du méso-domaine correspond à celle de la section droite de l'os cortical, et par conséquent, toute l'information contenue dans les échelles microscopique et mésoscopique a été homogénéisée. La méthode asymptotique est utilisée pour calculer les modules ef-

fectifs d'élasticité en utilisant les valeurs du tenseur d'élasticité de la phase de la matrice données dans le tableau 5.2 pour les cas d'os humide (figures 5.8 et 5.9) et sec (figures 5.10 et 5.11). Les courbes en trait pointillé au dessus et au dessous de la courbe en trait plein correspondent respectivement à une augmentation et à une diminution des valeurs du tenseur d'élasticité de la phase de la matrice de 10%. Cet écart permet une variation des propriétés mécaniques de la phase de la matrice dans les limites physiologiques (Grimal et al., 2008). Ensuite, nous comparons ces résultats avec les données expérimentales de Yoon and Katz (1976b) et Rho (1996). Malheureusement, dans ces études, la porosité macroscopique des échantillons utilisés n'a pas été mesurée et n'est donc pas disponible.

La distribution de la porosité dans les échantillons d'os fémoral humain a été étudiée par Bousson et al. (2001). Les porosités corticales moyennes pour les mâles et les femelles sont respectivement 8.26% et 9.72%. Les écarts types de la moyenne sont respectivement de $\pm 0.68\%$ et $\pm 0.62\%$. Ces valeurs sont utilisés pour calculer les intervalles de confiance sur les moyennes. En utilisant ces résultats, l'intervalle typique de la porosité d'os humain est donné par $[7.7, 10.32]\%$. Ce résultat est combiné avec ceux de Yoon and Katz (1976b) et Rho (1996) pour construire les lignes horizontales tracées dans les figures (5.8), (5.9), (5.10) et (5.11).

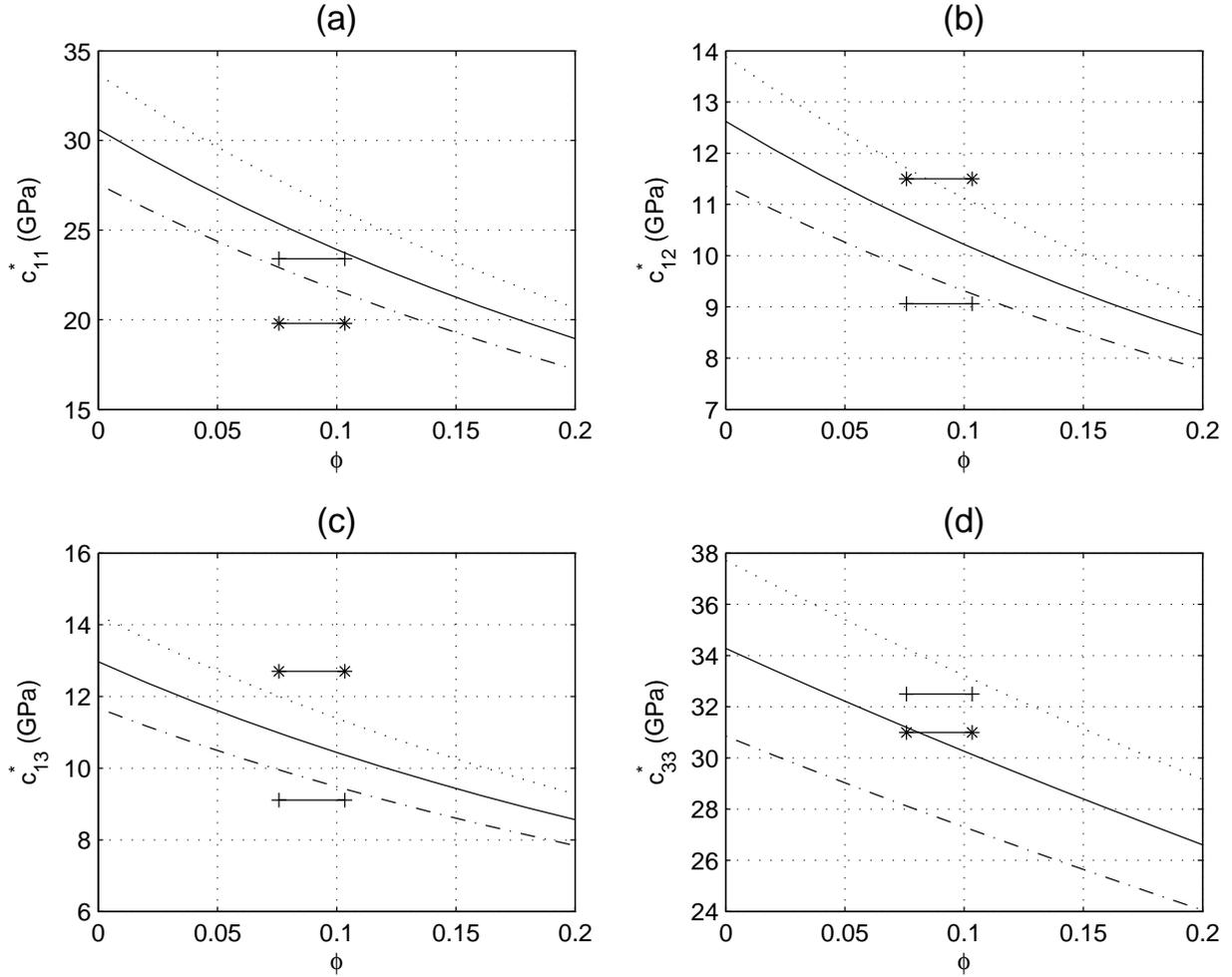


FIG. 5.8 – Cas de l'os humide. La variation des composantes du tenseur d'élasticité en fonction de ϕ . Les lignes continues sont obtenues en utilisant les valeurs des composantes du tenseur d'élasticité lesquelles sont données dans le tableau 5.2 pour la phase de la matrice. Les lignes pointillées sont obtenues en augmentant et en diminuant de 10% les valeurs des composantes du tenseur d'élastique associées à la phase de la matrice. Les symboles + et * sont respectivement associées aux résultats expérimentaux de Yoon and Katz (1976b) et Rho (1996). (a) pour c_{11}^* ; (b) pour c_{12}^* ; (c) pour c_{13}^* ; (d) pour c_{33}^* .

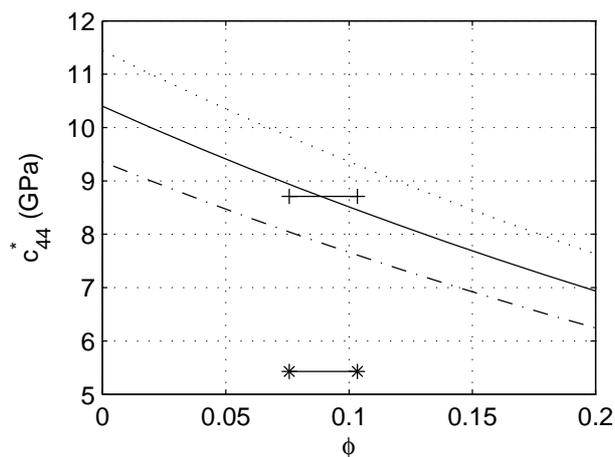


FIG. 5.9 – Cas de l'os humide. Variation de c_{44}^* en fonction de ϕ . Voir la légende dans la figure 5.8.

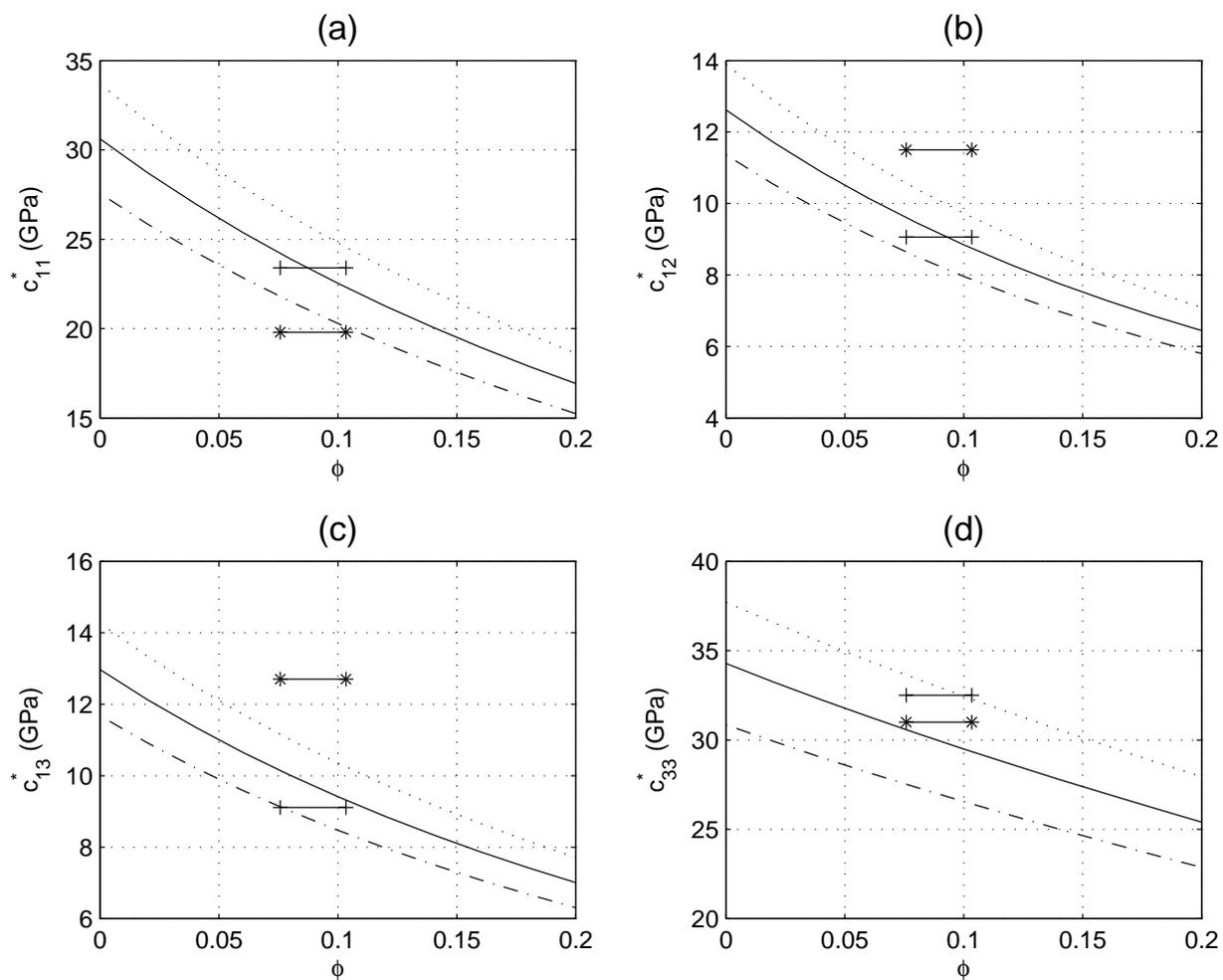


FIG. 5.10 – Cas de l'os sec. Variation des composantes du tenseur d'élasticité en fonction de ϕ . Voir la légende dans la figure 5.8.

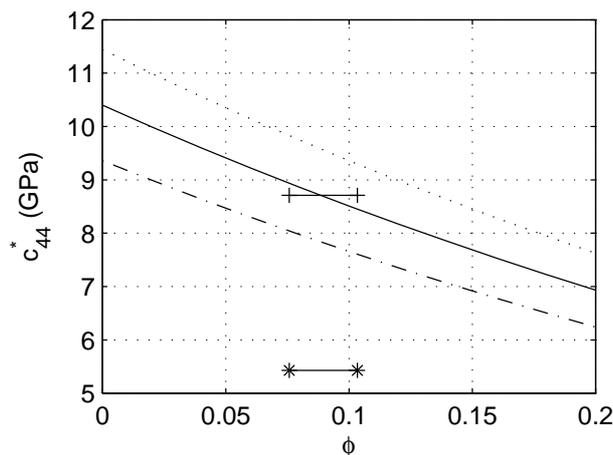


FIG. 5.11 – Cas de l'os sec. Variation de c_{44}^* en fonction de ϕ . Voir la légende dans la figure 5.8.

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé une nouvelle approche pour prédire les modules effectifs d'élasticité de l'os cortical qui se compose d'une phase de la matrice supposée isotrope transverse et d'une phase de pores cylindriques de section droite circulaire supposée isotrope. La méthode utilisée pour obtenir les modules effectifs d'élasticité est celle de l'homogénéisation asymptotique. La détermination de ces modules donne la possibilité de prédire les propriétés mécaniques effectives de l'os cortical dans un intervalle physiologique.

Nous avons comparé les résultats de la méthode d'homogénéisation asymptotique avec des résultats expérimentaux. La difficulté principale de ces comparaisons est due au fait que la porosité des échantillons utilisés pour obtenir ces résultats expérimentaux est inconnue. Nous devons supposer que cette porosité est associée à une moyenne de valeurs pour laquelle une erreur est évaluée.

Les perspectives de ce travail concernent l'extension de la méthode d'homogénéisation asymptotique au cas où la phase de la matrice est supposée avoir un comportement orthotrope. Pour valider nos résultats, il serait aussi appréciable d'obtenir des résultats expérimentaux au cours desquels la porosité serait finement mesurée.

Conclusion générale

Le travail décrit dans le présent document de thèse concerne une contribution pour la caractérisation mécanique de l'os cortical. Deux approches complémentaires sont utilisées pour atteindre cet objectif. Nous avons d'une part modélisé et simulé numériquement les phénomènes de propagation d'onde mis en jeu lors des mesures par les techniques de transmission axiale en vue de leur interprétation, et d'autre part, décrit une méthode originale d'homogénéisation permettant d'obtenir les propriétés matérielles effectives de l'os cortical.

Le document comporte cinq chapitres. Le premier chapitre donne les motivations de ce travail et fournit les principaux éléments concernant la physiologie et la fonction du tissu osseux.

Dans le chapitre deux, la technique de transmission axiale est décrite laquelle consiste en un dispositif permettant de sonder par ultrasons l'os cortical. Le dispositif permet l'acquisition de signaux ultrasonores par une sonde multi-éléments fonctionnant pour la transmission avec un signal d'excitation autour d'une fréquence centrale de 1 MHz. Les signaux acquis permettent d'obtenir un index via la vitesse du premier signal appelé FAS (pour First Arriving Signal) lequel a été montré pour être un index pertinent et robuste de l'état de l'os cortical. L'étude conduite vise à évaluer l'impact d'une variation spatiale des propriétés matérielles de la couche corticale vis-à-vis de la vitesse du FAS. Deux épaisseurs typiques de couche corticale sont étudiées. La méthode des éléments finis est utilisée

pour résoudre le système d'équations aux dérivées partielles associées aux conditions aux limites et initiales décrivant la configuration. Dans le cas d'une couche épaisse de 4 mm, nous avons montré qu'un gradient de propriétés matérielles modifie sensiblement la vitesse du FAS. Dans le cas d'une couche mince de 0.6 mm, nous avons montré qu'un gradient de propriétés matérielles modifie sensiblement la vitesse du FAS tout en se rapprochant de la vitesse de phase du mode symétrique S_0 de l'onde de Lamb, vitesse dite de plaque.

Dans le chapitre trois, en utilisant la configuration géométrique définie dans le chapitre deux, nous avons introduit un modèle apte à prendre en compte les effets visqueux dans le comportement décrivant les propriétés matérielles des couches modélisant les tissus mous et la corticale. Les effets visqueux sont décrits en utilisant la théorie de la viscoélasticité linéaire sans mémoire. Ici encore, la méthode des éléments finis est utilisée pour résoudre le système d'équations aux dérivées partielles associées aux conditions aux limites et initiales décrivant la configuration. Nous avons montré que l'atténuation de la propagation d'onde ultrasonore dans les tissus mous n'a pas d'influence significative sur la vitesse du FAS. En revanche, l'atténuation dans la couche cortical est une propriété importante pour l'évaluation du comportement des ondes ultrasonores par la technique de transmission axiale dans l'os cortical.

Le chapitre quatre utilise les résultats obtenus dans le chapitre trois pour évaluer la profondeur sondée par l'onde pour des variations radiales de propriétés matérielles dans le cas d'une couche corticale épaisse. La profondeur équivalente contribuant est obtenue via les résultats de simulation par éléments finis pour les variations spatiales d'un des coefficient de visco-élastique (η_{11}) et de la porosité. La profondeur équivalente contribuant est trouvée pour être égale à environ 1.6 mm pour une variation spatiale représentative de la physiologie de l'os cortical de η_{11} .

Dans le chapitre cinq de cette thèse, nous avons développé une nouvelle approche pour prédire les modules d'élasticité effective de l'os cortical par homogénéisation périodique du tissu hétérogène par une méthode de développement asymptotique. L'hétérogénéité du tissu est décrite par une matrice contenant une inclusion. La phase de la matrice est supposée isotrope transverse et la phase des inclusions décrit les pores du tissu. Ces pores sont supposés cylindriques de section droite circulaire et dont le comportement est supposé isotrope. Nous avons comparé les résultats obtenus via la méthode d'homogénéisation asymptotique avec ceux issus de méthodes de micro-mécaniques (Mori-Tanaka, bornes) et de tests expérimentaux. Pour les tests expérimentaux, la difficulté principale est due au fait que la porosité des échantillons utilisés pour obtenir ces résultats expérimentaux n'a pas été mesurée. Nous avons dû supposer que cette porosité est associée à une moyenne de valeurs pour laquelle une erreur est évaluée.

Perspectives

Les éléments de réponse apportés dans ce travail de thèse pour la caractérisation mécanique de l'os cortical nous conduisent à de nouvelles questions lesquelles permettent de donner quelques perspectives.

Les modèles développés dans le présent travail peuvent être utilisés non seulement pour aider à l'analyse des signaux enregistrés par les dispositifs de transmission axiale existants mais aussi pour concevoir de nouveaux dispositifs pour la caractérisation de tels tissus. En effet, le dispositif sur lequel nous avons porté notre attention fonctionne à la fréquence centrale autour de 1 MHz. Il serait utile dans le cadre de la conception de nouveaux dispositifs d'étudier l'impact d'autres fréquences sur la réponse du système. En outre, la configuration géométrique d'un tel dispositif pourrait elle aussi faire l'objet d'une étude approfondie. En lien avec ce qui vient d'être dit, sur le plan de la modélisation, le modèle de comportement viscoélastique sans mémoire pourrait aussi être amélioré, en particulier pour prendre en compte une certaine dépendance avec la fréquence. Ces modèles ne sont

utiles que si nous sommes en mesure de les fournir en données aussi réalistes que possibles. C'est ainsi qu'il serait aussi nécessaire de faire de nouveaux développements pour obtenir des propriétés effectives d'élasticité pour ce type de tissus pour lesquels la notion même de volume élémentaire représentatif peut être remise en cause, en particulier, en étudiant de façon plus approfondie la notion de méso-échelle que nous avons tenté d'introduire.

Table des figures

- 1.1 Structure d'un tissu osseux : os trabéculaire et cortical (*tirée de Sasso (2007) avec son autorisation*) 8
- 1.2 Microstructure d'os cortical (*tirée de Bossy (2003) avec son autorisation*) . 10
- 1.3 Vieillessement de l'os cortical. (a) Femme de 55 ans. (b) Femme de 90 ans. (*tirée de Bossy (2003) avec son autorisation*) 11
- 1.4 Schématisation de la technique de transmission axiale pour l'os cortical . . 13
- 1.5 Exemple d'un signal reçu à un récepteur lors de l'utilisation de la technique de transmission axiale 14

- 2.1 Configuration de la technique de TA pour l'os cortical. 21
- 2.2 Histoire du signal d'excitation placé à la source. 22
- 2.3 Représentation schématique des deux types de variations spatiales pour la propriété matérielle S correspondant aux coefficients de rigidité et de la masse volumique. Les traits pleins dans la couche de solide indiquent la dépendance spatiale de S . Le trait pointillé dans la couche de solide indique des propriétés matérielles homogènes correspondant aux propriétés du matériau de référence. La variation de type 1 présentée dans (a) correspond à la valeur constante à l'interface supérieure de l'os cortical (interface fluide-solide). La variation de type 2 présentée dans (b) correspond à la valeur constante au milieu de l'os cortical. 29

2.4	<p>Propagation ultrasonore des ondes à l'instant $t = 8 \mu\text{s}$ dans le milieu tri-couche lequel est composé par une couche de solide isotrope transverse de 4 mm d'épaisseur mise entre deux couches de fluides acoustiques (a) la couche solide est homogène; (b) la couche solide est hétérogène avec un gradient δ_{11} de C_{11} de 30 GPa.cm^{-1}.</p>	35
2.5	<p>Cas de la couche de solide épais ($h = 4 \text{ mm}$). Variation de v_F par rapport à (a) δ_{11} et (b) δ_ρ. Les courbes en trait noir correspondent à la variation de type 1 (valeur constante de (a) C_{11} et (b) ρ à $z = 0$) et en trait gris correspondent à la variation de type 2 (valeur constante de (a) C_{11} et (b) ρ à $z = -0.5h$). Les courbes en trait plein représentent les résultats obtenus à partir des simulations numériques. Les courbes en trait pointillé correspondent à la vitesse des ondes de compression longitudinale (donnée par l'équation (2.11)) à l'interface supérieure de l'os cortical.</p>	36
2.6	<p>Cas d'une couche mince de solide ($h = 0.6 \text{ mm}$). Variation de v_F par rapport à (a) δ_{11}, (b) δ_{13}, (c) δ_{33} et (d) δ_ρ. Les courbes en trait noir correspondent à une variation de type 1 (valeur constante de S en $z = 0$) et les courbes en trait gris correspondent à une variation de type 2 (valeur constante de S en $z = -0.5h$). Les courbes en trait plein indiquent les résultats obtenus par simulation numérique. Les courbes en trait pointillé correspondent aux vitesses de phase v_p à l'interface supérieure de l'os cortical obtenues par la méthode de Nayfeh and Chimenti (1988, 1989).</p>	38
2.7	<p>(a) Cas de la couche mince de solide ($h = 0.6 \text{ mm}$) et (b) cas de la couche épaisse de solide ($h = 4 \text{ mm}$). Variation de v_F en fonction de δ_P. (a) même légende que la figure 2.6 avec δ_P et (b) même légende que la figure 2.5 avec δ_P.</p>	39
3.1	<p>Configuration géométrique de la technique de TA pour l'os cortical dans le cas viscoélastique.</p>	43

3.2	Représentation schématique des deux types de variations spatiales pour la propriété matérielle S correspondant aux coefficients de viscosité. Les traits pleins dans la couche de solide indiquent la dépendance spatiale de S . Le trait pointillé dans la couche de solide indique des propriétés homogènes de viscosité correspondant aux propriétés de viscosité de référence. La variation de type 1 présentée dans (a) correspond à la valeur constante à l'interface supérieure de l'os cortical (interface fluide-solide, $z = 0$). La variation de type 2 présentée dans (b) correspond à la valeur constante au milieu de l'os cortical ($z = h/2$).	47
3.3	Cas de la couche épaisse de solide ($h = 4$ mm). Variation de v_F par rapport à η_{11} dans le cas de propriétés matérielle homogène. Le courbe en trait noir correspond aux résultats obtenus avec la méthode des éléments finis. La courbe en trait pointillé correspond au résultat obtenu à partir de l'équation 3.13.	54
3.4	Cas de la couche mince de solide ($h = 0.6$ mm). Variation de v_F vis-à-vis de η_{11} (en trait noir), η_{13} (en trait pointillé) et η_{33} (en trait gris) dans le cas de propriétés matérielles homogènes.	55
3.5	Variation de v_F par rapport à la porosité pour l'os cortical homogène. La courbe en trait noir correspond au cas d'une couche épaisse de solide ($h = 4$ mm) et la courbe en trait gris correspond au cas d'une couche mince de solide ($h = 0.6$ mm).	55
3.6	Cas d'une couche épaisse de solide ($h = 4$ mm). Variation de v_F vis-à-vis de δ_{11} . La courbe en trait noir correspond une variation de type 1 et la courbe en trait gris correspond une variation de type 2. Les courbes en trait plein représentent les résultats obtenus à partir des simulations numériques. Les courbes en trait pointillé correspondent à la vitesse de phase obtenue à partir de l'équation 3.13 (correspondant aux valeurs à $z = -0.5h$ pour la courbe en trait gris et à $z = 0$ pour la courbe en trait noir).	56

3.7	Cas d'une couche mince de solide $h = 0.6$ mm : variation de la vitesse du FAS v_F vis-à-vis de (a) δ_{11} , (b) δ_{13} et (c) δ_{33} . Les courbes en trait noir correspondent à une variation de type 1 et les courbes en trait gris correspondent à une variation de type 2. Les courbes en trait plein représentent les résultats obtenus à partir des simulations numériques. Les courbes en trait pointillé correspondent à la vitesse de phase v^ϕ obtenue à partir des équations (3.13)-(3.15) (correspondant aux valeurs à $z = -0.5h$).	57
3.8	Variation de v_F vis-à-vis de la porosité pour (a) $h = 0.6$ mm et (b) $h = 4$ mm. Les courbes en trait noir correspondent à une variation de type 1 et les courbes en trait gris correspondent à une variation de type 2. Les courbes en trait plein présentent les résultats obtenus en variant de la masse volumique et les propriétés de rigidité ainsi que les coefficients de viscosités. Les courbes en trait pointillé présentent les résultats du modèle élastique qui ont été donné dans le chapitre 2.	58
5.1	Géométrie de la microstructure d'un VER. (Parnell and Grimal, 2009).	86
5.2	Procédure d'homogénéisation asymptotique pour l'os cortical (Parnell and Grimal, 2009).	87
5.3	Cas de l'os humide. Variation des caractéristiques mécaniques en fonction de ϕ . (a) Module d'Young axial; (b) Module d'Young transverse; (c) Module de cisaillement axial; (d) Module de cisaillement transverse. Tous les résultats sont normalisés par rapport aux valeurs à $\phi = 0$. Dans chaque graphique, quatre courbes sont tracées : + pour la méthode asymptotique; \times pour la méthode de Mori-Tanaka; \star pour la borne supérieure de Hashin-Rosen; \circ pour la borne inférieure de Hashin-Rosen.	108
5.4	Cas de l'os humide. Variation des caractéristiques mécaniques en fonction de ϕ . (a) Coefficient de Poisson axial; (b) Coefficient de Poisson transverse. La légende est la même que celle de la figure 5.3.	109

5.5 Cas de l'os humide. Dans chaque graphique, trois courbes sont tracées. Dans (a), les trois quantités sont les suivants : + pour $(E_A^* - E_{A(-)})/E_{A0}$, \times pour $(E_A^{MT} - E_{A(-)})/E_{A0}$ et \diamond pour $(E_{A(+)} - E_{A(-)})/E_{A0}$. Les mêmes symboles sont utilisées dans les graphiques (b), (c) et (d). 110

5.6 Cas de l'os sec. Variation des caractéristiques mécaniques en fonction de ϕ . (a) Module d'Young transverse ; (b) Coefficient de Poisson transverse ; (c) Module de cisaillement axial ; (d) Module de cisaillement transverse. Dans chaque graphique, quatre courbes sont tracées : + pour la méthode asymptotique ; \times pour la méthode de Mori-Tanaka ; \star pour la borne supérieure de Hashin-Rosen ; \circ pour la borne inférieure de Hashin-Rosen. 111

5.7 Cas de l'os sec. Variation des caractéristiques mécaniques en fonction de ϕ . Dans chaque graphique, trois courbes sont tracées. Par exemple, dans (a), les trois quantités sont : + pour $(E_A^* - E_{A(-)})/E_{A0}$, \times pour $(E_A^{MT} - E_{A(-)})/E_{A0}$ et \diamond pour $(E_{A(+)} - E_{A(-)})/E_{A0}$. Les mêmes symboles sont utilisés dans les graphiques (b), (c) et (d). 112

5.8 Cas de l'os humide. La variation des composantes du tenseur d'élasticité en fonction de ϕ . Les lignes continues sont obtenues en utilisant les valeurs des composantes du tenseur d'élasticité lesquelles sont données dans le tableau 5.2 pour la phase de la matrice. Les lignes pointillées sont obtenues en augmentant et en diminuant de 10% les valeurs des composantes du tenseur d'élastique associées à la phase de la matrice. Les symboles + et \star sont respectivement associées aux résultats expérimentaux de [Yoon and Katz \(1976b\)](#) et [Rho \(1996\)](#). (a) pour c_{11}^* ; (b) pour c_{12}^* ; (c) pour c_{13}^* ; (d) pour c_{33}^* 114

5.9 Cas de l'os humide. Variation de c_{44}^* en fonction de ϕ . Voir la légende dans la figure 5.8. 115

5.10 Cas de l'os sec. Variation des composantes du tenseur d'élasticité en fonction de ϕ . Voir la légende dans la figure 5.8. 115

5.11 Cas de l'os sec. Variation de c_{44}^* en fonction de ϕ . Voir la légende dans la
figure 5.8. 116

Liste des tableaux

1.1	Microstructure de l'os cortical (<i>tiré de (Sasso, 2007) avec son autorisation</i>) . . .	11
2.1	Les valeurs moyennes, minimales et maximales des modules d'Young longitudinale et transversale, des 4 constantes du tenseur de rigidité et de la masse volumique utilisées pour la simulation (voir la figure 2.1) (Dong and Guo, 2004).	33
2.2	Pour les 2 épaisseurs de la couche corticale, la sensibilité de la vitesse du FAS est testée vis-à-vis de changements de propriétés matérielles et de la masse volumique. La vitesse du FAS calculée est donnée pour les valeurs minimales et maximales de chaque variable correspondant à l'intervalle de variation réaliste obtenu. Ces résultats sont obtenus (i) en considérant les valeurs de référence du tableau 2.1, (ii) en vérifiant la condition de stabilité thermodynamique. Les valeurs résultant de cette dernière condition sont marquées par un astérisque. . .	34
3.1	Les valeurs moyennes, minimales et maximales du coefficient d'atténuation à la fréquence de 1 MHz ainsi que les valeurs de la viscosité de la moelle et des tissus mous. Ces valeurs sont tirées des travaux de Dussik and Fritch (1956); Lehman and Johnson (1958); Goss et al. (1978).	51
3.2	Les valeurs moyennes, minimales et maximales des 4 constantes du tenseur de rigidité et de la masse volumique utilisées pour la simulation (Dong and Guo, 2004).	51

3.3	Les valeurs moyennes, minimales et maximales de l'atténuation et les coefficients de viscosités pour l'os cortical. Les valeurs de $\alpha_{L,x}$ et $\alpha_{L,z}$ sont données dans le tableau 1 du travail de Sasso et al. (2007) . La valeur moyenne de α_T est obtenue à partir de l'article de Garcia et al. (1978) . La valeur de η_{55} est obtenue de l'équation (3.14) en utilisant les valeurs de référence du tableau 3.2. La valeur moyenne de η_{13} est obtenue en utilisant l'équation (3.16). Les valeurs minimale et maximale de η_{13} sont obtenues en utilisant les conditions thermodynamiques données par l'équation (3.17).	52
3.4	Pour les 2 épaisseurs de la couche corticale, la sensibilité de la vitesse du FAS est testée vis-à-vis de changements de la viscosité dans les fluides. La vitesse du FAS calculée est donnée pour les valeurs minimale et maximale de chaque variable correspondant à l'intervalle de variation réaliste obtenue à partir du tableau 3.1.	53
3.5	Sensibilité de la vitesse du FAS aux changements de propriétés de viscosités de la couche homogène d'os cortical pour deux valeurs de l'épaisseur. Les vitesses du FAS calculées sont données pour les valeurs minimale et maximale de chaque variable correspondant à l'intervalle de variation réaliste obtenue dans le tableau 3.3.	54
5.1	Les contractions des tenseurs de base $\mathcal{H}_{ijkl}^{(n)}$	88
5.2	Composantes du tenseur d'élasticité de la phase de la matrice tirées de l'article Hofmann et al. (2006)	107

Bibliographie

- B. Aoubiza, J. Crolet, and A. Meunier. On the mechanical characterization of compact bone structure using the homogenization theory. *J. Biomech.*, 29(12) :1539–1547, 1996.
- B. A. Auld. *Acoustic fields and waves in solids*. Wiley Interscience, New York, 1973.
- N. Bakhvalov and G. Panasenko. *Homogenization : Averaging processes in periodic media*. Dordrecht : Kluwer, The Netherlands, 1989.
- R. Barkmann, E. Kantorovich, C. Singal, D. Hans, H. K. Genant, M. Heller, and C. C. Gluer. A new method for quantitative ultrasound measurements at multiple skeletal sites. *J. Clin. Densitometry*, 3 :1–7, 2000.
- C. Baron, M. Talmant, and P. Laugier. Effect of porosity on effective diagonal stiffness coefficients (c_{ii}) and anisotropy of cortical at 1 MHz : A finite-difference time domain study. *J. Acoust. Soc. Am.*, 122 :1810–1817, 2007.
- M. A. Biot. General theory of three-dimensional consolidation. *J. Appl. Phys.*, 12(2) : 155–164, 1941.
- E. Bossy. *Evaluation ultrasonore de l'os cortical par transmission axiale : Modélisation et expérimentation in vitro et in vivo*. PhD thesis, Université Paris 6, 2003.
- E. Bossy, M. Talmant, and P. Laugier. Effect of bone cortical thickness on velocity measurements using ultrasonic axial transmission : A 2D simulation study. *J. Acoust. Soc. Am.*, 112(1) :297–307, 2002.

- E. Bossy, M. Talmant, and P. Laugier. Bi-directional axial transmission can improve accuracy and precision of ultrasonic velocity measurement in cortical bone : A validation on test material. *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.*, 51(1) :71–79, 2004a.
- E. Bossy, M. Talmant, and P. Laugier. Three-dimensional simulations of ultrasonic axial transmission velocity measurement on cortical bone models. *J. Acoust. Soc. Am.*, 115(5) :2314–2324, 2004b.
- V. Bousson, A. Meunier, C. Bergot, E. Vicaut, M. A. Rocha, M. H. Morais, A. M. Laval-Jeantet, and J. D. Laredo. Distribution of intracortical porosity in human midfemoral cortex by age and gender. *J. Bone Miner. Res.*, 16(7) :1308–1317, 2001.
- COMSOL Multiphysics. Model library, 2005. Grenoble (France).
- A. G. Cornuelle and D. H. Gronefeld. *Radiographic Anatomy and Positioning : An Integrated Approach*. McGraw-Hill Medical Publishing, 1997.
- S. C. Cowin. *Bone Mechanics handbook*. CRC Press, Boca Raton, 2nd edition, 2001.
- J. D. Currey. The relationship between the stiffness and the mineral content of bone. *Biomechanics*, 2(4) :477–480, 1969.
- X. N. Dong and X. E. Guo. The dependence of transversely isotropic elasticity of human femoral cortical bone on porosity. *J. Biomech.*, 37(8) :1281–1287, 2004.
- K. Dussik and D. Fritch. Determination of sound attenuation and sound velocity in the structure constituting the joints, and of the ultrasonic field distribution with the joints of living tissues and anatomical preparations, both in normal and pathological conditions. Technical report, Progress Report to Public Health Service, National Institutes of Health Project A454, 1956.
- A. El Sariti, J. Evans, and J. Truscott. The temperature dependence of the speed of sound in bovine bone marrow at 750 kHz. *Ultrasound. Med. Biol.*, 32(6) :985–9, 2006.

- A. J. Foldes, A. Rimon, D. D. Keinan, and M. M. Popovtzer. Quantitative ultrasound of the tibia : A novel approach for assessment of bone status. *Bone*, 17(4) :363–367, 1995.
- A. Fritsch and C. Hellmich. 'Universal' microstructural patterns in cortical and trabecular, extracellular and extravascular bone materials : Micromechanics-based prediction of anisotropic elasticity. *J. Theor. Biol.*, 244(4) :597–620, 2007.
- B. J. Garcia, R. S. C. Cobbold, F. S. Foster, and K. G. McNeill. Ultrasonic attenuation in bone. In *Proceedings of the IEEE Ultrasonic Symposium*, pages 327–330, Cherry Hill, NJ, 1978. IEEE.
- S. Goss, R. Johnston, and F. Dunn. Comprehensive compilation of empirical ultrasonic properties of mammalian tissues. *J. Acoust. Soc Am.*, 64(2) :423–457, 1978.
- K. Graff. *Wave motion in elastic solids*. Dover, New York, 1991.
- Q. Grimal and S. Naili. A theoretical analysis in the time-domain of wave reflection on a bone plate. *Journal of Sound and Vibration*, 298(1-2) :12–29, 2006.
- Q. Grimal, K. Raum, A. Gerisch, and P. Laugier. Derivation of the mesoscopic elasticity tensor of cortical bone from quantitative impedance images at the micron scale. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, 11(2) :147–157, 2008.
- M. Grynblas. Age and disease-related changes in the mineral of bone. *Calcif Tissue Int.*, 53(1) :S57–S64, 1993.
- S. Han, J. Rho, J. Medige, and I. Ziv. Ultrasound velocity and broadband attenuation over a wide range of bone mineral density. *Osteoporos. Int.*, 6(4) :291–296, 1996.
- D. Hans, S. K. Srivastav, C. Singal, R. Barkmann, C. F. Njeh, E. Kantorovich, C. C. Gluer, and H. K. Genant. Does combining the results from multiple bone sites measured by a new quantitative ultrasound device improve discrimination of hip fracture? *J. Bone Miner. Res.*, 14(4) :644–651, 1999.

- Z. Hashin. On elastic behavior of fibre reinforced materials of arbitrary transverse phase geometry. *J. Mech. Phys. Sol.*, 13 :119–134, 1965.
- Z. Hashin. Analysis of properties of fiber composites with anisotropic constituents. *ASME J. Appl. Mech.*, 46 :543–550, 1979.
- Z. Hashin. Analysis of composite materials – a survey. *J. Appl. Mech.*, 50 :481–505, 1983.
- Z. Hashin and B. Rosen. The elastic moduli of fiber-reinforced materials. *ASME J. Appl. Mech.*, 31 :223–232, 1964.
- Z. Hashin and S. Shtrikman. A variational approach to the theory of elastic behaviour of multiphase materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 11 :127–140, 1963.
- C. Hellmich, F.-J. Ulm, and L. Dormieux. Can the diverse elastic properties of trabecular and cortical bone be attributed to only a few tissue-independent phase properties and their interactions? Arguments from a multiscale approach. *Biomech. Model. Mechanobiol.*, 2(4) :219–238, 2004.
- T. Hofmann, F. Heyroth, H. Meinhard, W. Fränzel, and K. Raum. Assessment of composition and anisotropic elastic properties of secondary osteon lamellae. *Journal of Biomechanics*, 39(12) :2282–2294, 2006.
- J. A. Kanis. Assessment of fracture risk and its application to screening for postmenopausal osteoporosis : Synopsis of a WHO report. *Osteoporosis International*, 4 :368–381, 1994. ISSN 0937-941X.
- S. C. Kaste. Bone-mineral density deficits from childhood cancer and its therapy. *Pediatr Radiol*, 34 :373–378, 2004.
- R. S. Lakes, H. S. Yoon, and J. L. Katz. Ultrasonic wave propagation and attenuation in wet bone. *J. Biomed. Eng.*, 8 :143–148, 1986.
- S. Lang. Ultrasonic method for measuring elastic coefficients of bone and results on fresh and dried bovine bones. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 17 :101–105, 1970.

- C. M. Langton, A. V. Ali, C. M. Riggs, J. A. Evans, and W. Bonfield. A contact method for the assessment of ultrasonic velocity and broadband attenuation in cortical and cancellous bone. *Clin. Phys. Physiol. Meas.*, 11(3) :243–249, 1990.
- S. Lees and D. Z. Klopholz. Sonic velocity and attenuation in wet compact cow femur for the frequency range 5 to 100 MHz. *Ultrasound. Med. Biol.*, 18(3) :303–308, 1992.
- F. Lefebvre, Y. Deblock, P. Campistron, D. Ahite, and J. J. Fabre. Development of a new ultrasonic technique for bone and biomaterials *in vitro* characterization,. *Biomed Mater Res*, 63(4) :441–446, 2002.
- E. Legrand, B. Bouvard, R. Levasseur, D. Chappard, and M. Audran. La densitométrie osseuse bone densitometry. *Rev Rhum*, 73 :795–803, 2006.
- J. Lehman and E. Johnson. Some factors influencing the temperature distribution in thighs exposed to ultrasound. *Arch. Phys. Med. Rehab.*, 39 :347–356, 1958.
- G. Lowet and G. van der Perre. Ultrasound velocity measurements in long bones : Measurement method and simulation of ultrasound wave propagation. *J. Biomech*, 29 : 1255–1262, 1996.
- K. Macocco, Q. Grimal, S. Naili, and C. Soize. Probabilistic modelling of an ultrasonic setup : Calculation of the dispersion on wave speed measurements. *Comptes Rendus Mécanique*, 333(7) :565–573, 2005.
- K. Macocco, Q. Grimal, S. Naili, and C. Soize. Elastoacoustic model with uncertain mechanical properties for ultrasonic wave velocity prediction : Application to cortical bone evaluation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 119(2) :729–740, 2006.
- K. Markov. Elementary micromechanics of heterogeneous media. In K. Markov and L. Preziosi, editors, *Heterogeneous media. Micromechanics modeling methods and simulations*. Birkhauser, Boston, 1999.

- L. J. Melton, E. A. Chrischilles, C. Cooper, A. W. Lane, and B. L. Riggs. How many women have osteoporosis? *Bone Miner Res*, 7(9) :1005–1010, 2005.
- G. Milton. *The Theory of Composites*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- P. Moilanen, P. H. Nicholson, T. Karkkainen, Q. Wang, J. Timonen, and S. Cheng. Assessment of the tibia using ultrasonic guided waves in pubertal girls. *Osteoporos. Int.*, 14(12) :1020–1027, 2003.
- P. Moilanen, P. H. Nicholson, V. Kilappa, S. Cheng, and J. Timonen. Measuring guided waves in long bones : Modeling and experiments in free and immersed plates. *Ultrasound Med Biol*, 32(5) :709–719, 2006.
- P. Moilanen, P. H. Nicholson, V. Kilappa, S. Cheng, and J. Timonen. Assessment of the cortical bone thickness using ultrasonic guided waves : Modelling and *in vitro* study. *Ultrasound Med Biol*, 33(2) :254–262, 2007a.
- P. Moilanen, M. Talmant, V. Bousson, P. H. Nicholson, S. Cheng, J. Timonen, and P. Laugier. Ultrasonically determined thickness of long cortical bones : Two-dimensional simulations of *in vitro* experiments. *J. Acoust. Soc. Am.*, 122(3) :1818–1826, 2007b.
- P. Moilanen, M. Talmant, P. H. F. Nicholson, S. Cheng, J. Timonen, and P. Laugier. Ultrasonically determined thickness of long cortical bones : Three-dimensional simulations of *in vitro* experiments. *J Acoust Soc Am*, 122(4) :2439–2445, 2007c.
- F. Moser, L. Jacobs, and J. Qu. Modeling elastic wave propagation in waveguides with the finite element method. *NDT E International*, 32(4) :225–234, 1999.
- T. Mura. *Micromechanics of defects in solids*. Kluwer, Dordrecht, 1991.
- A. H. Nayfeh and D. E. Chimenti. Ultrasonic wave reflection from liquid-coupled orthotropic plates with application to fibrous composites. *Journal of Applied Mechanics*, 55 : 863–870, 1988.

- A. H. Nayfeh and D. E. Chimenti. Free wave propagation in plates of general anisotropic media. *Journal of Applied Mechanics*, 56 :881–886, 1989.
- P. H. Nicholson, P. Moilanen, T. Karkkainen, J. Timonen, and S. Cheng. Guided ultrasonic waves in long bones : Modelling, experiment and *in vivo* application. *Physiol Meas*, 23 (4) :755–768, 2002.
- R. Ohayon and C. Soize. *Structural acoustic and vibration*. Academic Press, 1998.
- M. Ostoja-Starzewski. *Microstructural randomness and scaling in mechanics of materials*, volume 29 of *Modern Mechanics and Mathematics Series*. Chapman & Hall, CRC, Taylor & Francis, 2008.
- W. Parnell and I. Abrahams. Dynamic homogenization in periodic fibre reinforced media. Quasi-static limit for SH waves. *Wave Motion*, 43 :474–498, 2006.
- W. Parnell and I. Abrahams. Homogenization for wave propagation in periodic fibre-reinforced media with complex microstructure. I-Theory. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56 :2521–2540, 2008.
- W. Parnell and Q. Grimal. The influence of mesoscopic porosity on cortical bone anisotropy. Investigations via asymptotic homogenization. *Journal of the Royal Society Interface*, 6 :97–109, 2009.
- V. Parton and B. Kudryavtsev. *Engineering mechanics of composite structures*. CRC Press, Boca Raton, FL, 1993.
- V. C. Protopappas, D. A. Baga, D. I. Fotiadis, A. C. Likas, A. A. Papachristos, and K. N. Malizos. An ultrasound wearable system for the monitoring and acceleration of fracture healing in long bones,. *IEEE Trans Biomed Eng*, 52(9) :1597–1608, 2005.
- V. C. Protopappas, D. I. Fotiadis, and K. N. Malizos. Guided ultrasound wave propagation in intact and healing long bones. *Ultrasound Med Biol*, 32(5) :693–708, 2006.

- V. C. Protopappas, I. C. Kourtis, L. C. Kourtis, K. N. Malizos, C. V. Massalas, and D. I. Fotiadis. Three-dimensional finite element modeling of guided ultrasound wave propagation in intact and healing long bones. *J. Acoust. Soc. Am.*, 121(6) :3907–3921, 2007.
- L. Rayleigh. On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the properties of a medium. *Phil. Mag.*, 34 :481–503, 1892.
- D. T. Reilly and A. H. Burnstein. The mechanical properties of cortical bone. *J. Bone Joint Surg. Am.*, 56 :1001–1022, 1974.
- J. Y. Rho. An ultrasonic method for measuring the elastic properties of human tibial cortical and cancellous bone. *Ultrasonics*, 34(8) :777–783, 1996.
- H. Rico. The therapy of osteoporosis and the importance of cortical bone. *Calcif. Tissue Int.*, 61 :431–432, 1997.
- D. Royer and E. Dieulesaint. *Elastic Waves in Solids. I : Free and Guided Propagation*. Springer, 2000.
- F. Sabina, J. Bravo-Castillero, R. Guinovart-Díaz, R. Rodríguez-Ramos, and O. Valdiviezo-Mijangos. Overall behaviour of two-dimensional periodic composites. *Int. J. Solids Struct.*, 39 :483–497, 2002.
- V. Sansalone, S. Naili, V. Bousson, C. Bergot, F. Peyrin, J. Zarka, J. Laredo, and G. Haiät. Determination of the heterogeneous anisotropic elastic properties of human femoral bone : From nanoscopic to organ scale. *Journal of Biomechanics*, 43 :1857–1863, 2010.
- M. Sasso. *Traitement et Analyse du Signal Ultrasonore pour la Caractérisation de l’Os Cortical*. PhD thesis, Université Paris 12, 2007.
- M. Sasso, G. Haiät, Y. Yamato, S. Naili, and M. Matsukawa. Frequency dependence of ultrasonic attenuation in bovine cortical bone : An *in vitro* study. *Ultrasound Med. Biol.*, 33(12) :1933–1942, 2007.

- M. Sasso, G. Haiat, Y. Yamato, S. Naili, and M. Matsukawa. Dependence of ultrasonic attenuation on bone mass and microstructure in bovine cortical bone. *J. Biomech.*, 41(2) :347–355, 2008.
- L. Serpe and J. Rho. The nonlinear transition period of broadband ultrasound attenuation as bone density varies. *Journal of Biomechanics*, 29(7) :963–966, 1996.
- I. Sevostianov and M. Kachanov. Impact of the porous microstructure on the overall elastic properties of the osteonal cortical bone. *J. Biomech.*, 33(7) :881–888, 2000.
- I. M. Siegel, G. T. Anast, and T. Fields. The determination of fracture healing by measurements of sound velocity across the fracture site. *Surg Gynecol Obstet*, 107 :327–332, 1958.
- M. R. Stegman, R. P. Heaney, D. Travers-Gustafson, and J. Leist. Cortical ultrasound velocity as an indicator of bone status. *Osteoporos. Int.*, 5(5) :349–533, 1995.
- D. A. Ta, K. Huang, W.-Q. Wang, Y.-Y. Wang, and L. H. Le. Identification and analysis of multimode guided waves in tibia cortical bone. *Ultrasonics*, 44 :279–284, 2006.
- A. Tatarinov, S. L. Dubonos, A. Ianson Kh, V. S. Oganov, V. V. Dzenis, and A. S. Rakhmanov. Ultrasonic diagnosis of the changes in human tibia during 370-day antior-thostatic hypokinesia. *Kosm Biol Aviakosm Med*, 24(2) :29–31, 1990.
- A. Tatarinov, N. Sarvazyan, and A. Sarvazyan. Use of multiple acoustic wave modes for assessment of long bones : Model study. *Ultrasonics.*, 43(8) :672–680, 2005.
- C. D. Thomas, S. A. Feik, and J. G. Clement. Regional variation of intracortical porosity in the midshaft of the human femur : Age and sex differences. *J. Anat.*, 206(2) :115–125, 2005.
- C. H. Turner. Biomechanics of bone : Determinants of skeletal fragility and bone quality. *Osteoporos. Int.*, 13(2) :97–104, 2002.

- B. Vellas, S. Gillette-Guyonnet, F. Nourhashémi, Y. Rolland, S. Lauque, P. J. Ousset, S. Moulias, S. Andrieu, B. Fontan, D. Adoue, C. Lafont, R. Baumgartner, P. Garry, and J. L. Albarède. Chute, fragilité et ostéoporose chez la personne âgée : Un problème de santé publique. *Rev Méd Interne*, 21 :608–613, 2000.
- H. S. Yoon and J. L. Katz. Ultrasonic wave propagation in human cortical bone : I, Theoretical considerations for hexagonal symmetry. *J. Biomechanics*, 9 :407–412, 1976a.
- H. S. Yoon and J. L. Katz. Ultrasonic wave propagation in human cortical bone : II, Measurements of elastic properties and micro hardness. *J. Biomechanics*, 9 :459–464, 1976b.

Résumé

Ce travail est une contribution à la caractérisation mécanique de l'os cortical. Dans ce cadre, les méthodes ultrasonores sont des outils puissants pour aider à cette caractérisation. Ainsi, les phénomènes de propagation d'ondes mis en jeu lors des mesures par les techniques ultrasonores de transmission axiale à la fréquence centrale de 1 MHz sont modélisés. Des méthodes numériques basées sur la méthode des éléments finis sont mises en œuvre pour résoudre les systèmes d'équations aux dérivées partielles associées aux conditions aux limites et initiales pour des tissus dont le comportement est supposé (visco-)élastique, anisotrope et/ou hétérogène. L'analyse des résultats de simulation permet de discuter l'influence des divers paramètres, non seulement en termes de propriétés matérielles mais aussi géométriques, sur la nature des ondes qui se propagent dans les tissus. Nous avons ainsi pu analyser l'impact de ces paramètres sur la vitesse du premier signal laquelle est considérée comme un indice pertinent pour mesurer la qualité du tissu osseux. Toujours dans le but de caractériser le tissu osseux, et en particulier pour obtenir des valeurs de propriétés matérielles aussi proches que possible de la réalité, nous avons développé une nouvelle méthode basée sur les développements asymptotiques, du type homogénéisation périodique, pour prédire les modules d'élasticité effective de l'os cortical du tissu hétérogène.

Mots clés Propagation d'onde, Ultrason, Anisotropie, Hétérogénéité, Milieux (visco-)élastique, Premier signal, Homogénéisation périodique, Os cortical.

Abstract

This work provides some contributions to the mechanical characterization of cortical bone by using ultrasound. Thus, the wave propagation phenomena involved during the measurements by the ultrasound axial transmission techniques at the the central frequency of 1 MHz are modeled. The finite element method was used to solve the equations of waves propagating in bone tissues whose the behavior is assumed to be (visco)elastic, anisotropic and/or heterogeneous. The analysis of simulation results allows us to discuss on the influence of various parameters (not only in terms of material properties but also geometric features), on the nature of waves that propagates through the tissue. We were able to analyze the impact of these parameters on the velocity of the first arriving signal which is known as an appropriate index to measure the quality of bone tissue. Another aspect in characterizing the bone tissue has also been considered in which we have developed a new method based on asymptotic expansions, periodic homogenization type, for predicting effective properties of elasticity of heterogeneous cortical bone tissue.

Keywords Wave propagation, Ultrasound, Anisotropy, Heterogeneous, Viscoelastic medium, First arriving signal, Periodic homogenization, Cortical bone.

Laboratoire Modélisation et Simulation Multi Echelle (MSME), Equipe Biomécanique de l'UMR CNRS 8208, Université Paris-Est Créteil Val de Marne, 61 av. Général de Gaulle, 94010 Créteil