

OBSERVATOIRE DE PARIS

**ÉCOLE DOCTORALE
ASTRONOMIE ET ASTROPHYSIQUE D'ILE-DE-FRANCE**

**Doctorat
ASTRONOMIE ET ASTROPHYSIQUE**

Dynamique des Systèmes Gravitationnels

David BANCELIN

Étude de la dynamique des astéroïdes géocroiseurs

Application à (99942) Apophis

Thèse dirigée par William THUILLOT et Daniel HESTROFFER

Soutenue le 15 Décembre 2011 devant un jury composé de :

François MIGNARD (CASSIOPEE - OCA)	Président du Jury
Richard BINZEL (MIT - Massachussets, USA)	Rapporteur
Rudolf DVORAK (Inst. d'astronomie - Univ. de Vienne)	Rapporteur
Anne LEMAITRE (FUNDP - Namur)	Examineur
Detlef KOSCHNY (ESA - Noordwijk)	Examineur
Jean-Yves PRADO (CNES, Toulouse)	Examineur
William THUILLOT (IMCCE - Obs. de Paris)	Directeur de thèse
Daniel HESTROFFER (IMCCE - Obs. de Paris)	Directeur de thèse

Résumé

Mots-clés : Mécanique céleste, astéroïdes géocroiseurs, Apophis, keyhole, Gaia

L'étude des astéroïdes croisant les orbites planétaires met en œuvre en particulier l'astrométrie, la constitution puis l'exploitation de bases de données d'observations et enfin la modélisation dynamique. Dans ces trois domaines, la recherche du maximum de précision est un gage de solidité des résultats que l'on peut ensuite appliquer à des études spécifiques.

Dans un premier temps, je dresserai un état de l'art sur notre connaissance des astéroïdes orbitant à proximité de la Terre: les géocroiseurs. J'y présenterai les différentes familles dynamiques, la statistique de découverte ainsi que les différents types d'observations effectuées. Puis, je développerai une section consacrée au modèle dynamique utilisé en présentant les différentes forces pouvant agir sur les géocroiseurs. Je terminerai enfin cet état de l'art par une section dédiée à la détermination et la propagation d'orbite.

Je présenterai dans un deuxième chapitre une étude dynamique des astéroïdes géocroiseurs à travers l'exemple de l'astéroïde (99942)Apophis. J'y développerai les aspects liés à la sensibilité de son orbite ainsi qu'une étude détaillée de la géométrie et de la dynamique de la rencontre proche entre Apophis et la Terre en 2029. Je mettrai l'accent sur les "trous de serrure" (keyhole), terminologie nécessaire à notre compréhension et interprétation des risques de collision avec la Terre. J'exposerai pour clore ce chapitre l'apport de nouvelles observations (optiques et radars) sur la précision de son orbite à court et à long terme.

Enfin, je présenterai dans une troisième partie, l'apport d'observations spatiales pour l'orbite d'Apophis à travers la mission Gaia. J'exposerai, dans ce même chapitre, la méthode utilisée pour la détermination d'orbite pour des objets nouvellement découverts par Gaia à partir de deux observations et d'une stratégie de suivi à partir de la Terre. Je mettrai un accent particulier sur la synergie de données sol et espace pour les objets du Système Solaire.

Abstract

Dynamical study of the Near-Earth asteroids *Application to (99942)Apophis*

Key words: Celestial mechanics, Near-Earth asteroids, Apophis, keyhole, Gaia

The study of asteroids's orbit crossing planetary orbit is handled with astrometry, acquisition and exploitation of databases dedicated to observations and dynamical modelisation. In this three areas, the maximum of precision is required and is a guarantee of reliability that can be applied to specific studies.

In the first part, I will present a state of the art of our knowledge of near-Earth asteroids. I will present the different dynamical families known, discovery statistic as well as the kind of observations available. Then, a section will be dedicated to the dynamical model used, presenting the main forces acting on those asteroids. At the end, I will deal with orbit determination and propagation. Next, I will present a dynamical and geometrical analysis of the close encounter problem towards the example of the asteroid (99942) Apophis and its close encounter with the Earth in 2029. In this chapter, I will develop the sensitive side of its orbit and I will introduce the terminology of "keyholes" necessary to our understanding and interpretation of the risk of collision with the Earth. Then, I will analyse the effect of new ground-based observations on its orbit focusing on the error propagation.

The last part will be dedicated to the Gaia mission and its contributions to Apophis's orbit using its very accurate future data. After presenting the mission, I will analyse the effect of space data on the current and long term uncertainty of Apophis's orbit. Then, a chapter will be dedicated to orbit determination for poorly observed asteroids, specially in the case of the Gaia mission where only two observations will be available. The error propagation will be analysed and I will also study the synergy of space and ground-based data for near-Earth asteroids.

Remerciements

Je souhaiterais remercier en premier lieu, Anita Gomez, responsable du parcours Dynamique des Systèmes Gravitationnels à l'époque de mon M2 et responsable de l'école doctorale, qui a su me conseiller tout au long de mon M2 et qui m'a aussi fortement défendu pour l'obtention de la bourse ministérielle me permettant alors de pouvoir commencer une thèse. Je la remercie aussi pour m'avoir éclairer dans le choix de mon sujet. Mes remerciements vont aussi à David Katz qui m'a suivi durant mon M2 et qui a accepté d'être mon parrain de thèse (même s'il n'a jamais eu à intervenir, heureusement).

Tout mon travail effectué n'aurait pu se faire sans mes directeurs William Thuillot et Daniel Hestroffer. Je tiens à les remercier grandement pour leur disponibilité, encouragement, leurs nombreux conseils et aussi pour leur confiance. Je les remercie aussi pour avoir privilégié une relation chercheur-chercheur à une relation directeur-étudiant témoignant ainsi de l'intérêt qu'ils me portaient et de la confiance qu'ils ont placée en moi.

Mes remerciements vont ensuite aux professeurs Richard P. Binzel et Rudolf Dvorak, qui ont accepté de juger mon travail de thèse, ainsi que les autres membres du jury, Anne Lemaitre, François Mignard, Detlef Koschny et Jean-Yves Prado.

Je remercie aussi tous mes camarades de l'IMCCE, qui étaient présents au début ou à la fin de ma thèse (Lucie, Josselin, Julien, Pierre, Alrick, Camille, Yohan, Sylvain, Hervé, Laurène et aussi ceux que j'aurais oublié) et qui ont facilité le déroulement de ma thèse par leur aide, gentillesse, bonne humeur, etc. Je remercie aussi les nombreux stagiaires qui sont passés à l'IMCCE (en particulier Yvan et Clément) et qui ont contribué à cette bonne ambiance.

Je remercie aussi les chercheurs de l'IMCCE (Jérémie, Valéry, Patrick, Frédéric, Jérôme, Miriel, François et Florent) pour leurs nombreux conseils, ainsi que Isabelle et Agnès pour leur aide administrative indispensable.

Enfin, ce travail n'aurait pu être abouti sans le soutien et encouragement de ma famille et amis.

Table des matières

Introduction	7
I Bilan des connaissances actuelles sur les astéroïdes géocroiseurs	10
1 Population des astéroïdes du système solaire	12
1.1 Formation du Système Solaire	12
1.2 Les groupements d'astéroïdes dans le système solaire	13
1.2.1 Les objets transneptuniens (TNOs)	13
1.2.2 Les astéroïdes de la ceinture principale (MBAs)	13
1.3 Les objets géocroiseurs	16
1.3.1 Origine des NEOs	16
1.3.2 Famille dynamique	18
1.4 Les astéroïdes potentiellement dangereux (PHAs)	19
1.4.1 Le calcul du MOID	20
1.4.2 La surveillance des PHAs	21
1.4.3 Échelle de risque	21
1.4.4 Conséquences d'un impact avec la Terre	22
1.5 Propriétés physiques des astéroïdes	23
1.6 Statistique de découverte des géocroiseurs	27
1.7 Les différents types de mesures	31
2 Dynamique des géocroiseurs	34
2.1 Éléments orbitaux	34
2.2 Modèle de forces	35
2.2.1 La gravitation et la relativité	35
2.2.2 L'effet Yarkovsky	37
2.2.3 Autres forces non-gravitationnelles	40
2.3 Détermination, amélioration d'orbite et propagation d'erreur	41
2.3.1 Orbite préliminaire et Statistical Ranging	41
2.3.2 Ajustement aux observations	44
2.3.3 Propagation d'erreur	45
3 Intégration numérique	47
3.1 Généralité	47
3.2 Intégrateurs numériques	48
3.2.1 Runge-Kutta	48
3.2.2 Quadratures de Gauss-Radau	49
3.2.3 Bulirsch–Stoer	51
3.3 L'intégrateur de Lie	53
3.3.1 L'opérateur de Lie et les séries de Lie	54

3.3.2	Le problème à N corps	55
3.3.3	Généralisation de l'opérateur de Lie	56
3.3.4	Termes de Lie pour l'accélération gravitationnelle	57
3.3.5	Termes de Lie pour l'accélération relativiste	58
3.3.6	Termes de Lie pour l'effet Yarkovsky	58
3.4	Comparaisons entre intégrateurs	60
3.4.1	Tests CPU	60
3.4.2	Intégration des équations du mouvement de Apophis	61
3.4.3	Tests de validation pour l'algorithme de l'accélération relativiste	62
3.4.4	Test de validation pour l'algorithme de l'effet Yarkovsky	63
II	L'astéroïde (99942) Apophis	66
4	Apophis : un astéroïde sans précédent	68
4.1	Historique de la découverte	68
4.2	Les observations	72
4.2.1	Les observations optiques	72
4.2.2	Les observations radars	72
4.3	Les paramètres orbitaux	72
4.4	Les impacts à court et à long terme	73
4.5	Paramètres physiques	73
5	Étude dynamique et géométrique des passages proches	76
5.1	Géométrie des passages proches	76
5.1.1	Calculs des passages proches	76
5.1.2	Plan de Bessel (b-plane ou target plane)	77
5.1.3	Ellipse d'incertitude dans le plan de Bessel	80
5.2	La recherche d'impacteurs virtuels	80
5.2.1	La ligne de variation (LoV)	80
5.2.2	La technique Monte-Carlo	81
5.2.3	Section d'impact	81
5.3	Étude du passage proche d'Apophis avec la Terre en 2029	82
5.3.1	Plan de Bessel d'Apophis en 2029	82
5.3.2	Retour résonant	82
5.3.3	Les trous de serrure (keyholes)	84
6	Apport des observations de mars 2011	88
6.1	Les observations de mars 2011	88
6.1.1	La réduction astrométrique	88
6.1.2	Solutions nominales	90
6.2	Impact sur la dynamique d'Apophis	91
6.2.1	Le b-plane	91
6.2.2	Effet Yarkovsky	91
6.3	Amélioration future de l'orbite	93
6.3.1	Période de visibilité d'Apophis	93
6.3.2	Apport de futures campagnes d'observations	95
6.4	Évolution dynamique d'Apophis	97

III	Apport de la mission Gaia	100
7	La mission Gaia	102
7.1	Gaia : Le successeur d’Hipparcos	102
7.2	Gaia et le système solaire	103
7.2.1	La mission	103
7.2.2	Instruments à bord	104
7.2.3	Orbite et loi de balayage	106
7.2.4	La science pour le système solaire	107
7.2.5	Le futur catalogue Gaia	114
7.3	Les astéroïdes Atiras et les satellites d’observations	115
8	Astrométrie Gaia d’Apophis	118
8.1	Les observations d’Apophis par Gaia	118
8.2	Influence à court terme	119
8.2.1	Incertitude sur les éléments orbitaux	119
8.2.2	Incertitude sur la position	120
8.3	Effet dans le plan de Bessel	120
8.4	Apport du futur catalogue stellaire	121
8.5	Effet Yarkovsky	122
9	Stratégie de suivi au sol	124
9.1	Gaia DPAC	124
9.1.1	L’organisation	124
9.1.2	Traitement des données des objets du Système Solaire	126
9.2	Astrométrie pour les géocroiseurs nouvellement découverts	127
9.2.1	Gaia FUN-SSO et les alertes	127
9.2.2	Processus de redécouverte	129
9.2.3	Synergie sol/espace	131
	Conclusion	134
	Annexes	139
A	Numerical Integration with Lie Series	140
B	Asteroid (99942) Apophis : New predictions of Earth encounters for this PHA	155
C	Dynamics of asteroids and NEOs from Gaia Astrometry	160
	Bibliographie	169

Introduction

Notre système solaire, vieux de 4.5 milliards d'années, regorge de vestiges témoignant de sa formation. Parmi eux, on trouve des comètes et des astéroïdes. Ces derniers ont été les acteurs principaux de la théorie du bombardement tardif qui aurait eu lieu durant la période allant de 4.1-3.8 milliards d'années. Durant cette période, les planètes telluriques auraient subi un bombardement intense d'astéroïdes. Les preuves d'un tel phénomène viennent des échantillons de roches provenant des cratères lunaires, rapportés par les missions Apollo. Même si la Terre garde peu de traces de ces phénomènes, des cratères allant jusqu'à 180 km de diamètre ont pu être découverts, supposant que ce genre de phénomène aurait pu causer l'extinction massive d'êtres vivants et notamment des dinosaures. De ce fait, la crainte qu'un tel danger pourrait survenir durant l'ère humaine se pose. Quelles seraient les conséquences pour l'homme, les espèces vivantes et même pour la Terre ? Mais la question principale à laquelle s'attellent les astronomes et les scientifiques est de savoir comment prévoir un impact et surtout comment le prévenir. Cependant, le problème de l'identité de ces futurs impacteurs a déjà été résolu. Depuis la découverte de l'astéroïde Apollo, une population d'objets orbitant proche de la Terre a été mis à jour. Ces objets sont appelés *géocroiseurs*. Des travaux récents ont permis de déterminer leur provenance (phénomènes de résonance; transport dus aux forces non gravitationnelles) et grâce à l'évolution des technologies et de développement de sites d'observations dédiés à ces objets, on dénombre à ce jour près de 8000 géocroiseurs. Pour prévenir un impact, il faut déjà pouvoir le mettre en évidence et quantifier le niveau de probabilité de cet événement. Les objets pour lesquels des risques d'impacts avec la Terre sont possibles sont appelés des astéroïdes potentiellement dangereux (PHAs). Aucun de ces PHAs ne présentaient de risques majeurs pour la Terre d'après les centres de surveillance dédiés au suivi de ces objets, jusqu'à ce qu'un astéroïde ne pointe son nez dans le ciel le 19 juin 2004.

Lors de sa découverte en 2004, les astronomes étaient loin de penser que l'astéroïde 2004 MN₄ allait provoquer un tel vent de panique. Baptisé par la suite *Apophis*, 2004 MN₄ fut le premier objet pour lequel un impact possible en 2029 fut détecté avec une forte probabilité. Cependant, ce cas sans précédent a permis de tester les outils de calcul de risques des deux centres au monde spécialisés dans la surveillance de l'environnement terrestre. En effet, il a été mis en évidence un lien étroit entre probabilité d'impact, précision des observations, détermination d'orbite et propagation d'erreur. Même si pratiquement tout risque d'impact entre Apophis et la Terre semble écarté pour le siècle à venir, cet astéroïde reste un objet emblématique et un cas d'école incontournable pour mieux comprendre la dynamique de tels objets et pour mieux appréhender la possibilité de voir apparaître un autre Apophis.

L'objectif de ma thèse est de mieux comprendre la dynamique d'objets potentiellement dangereux à travers l'exemple de l'astéroïde (99942) Apophis et notamment d'étudier l'influence de futures campagnes d'observations sur la propagation d'erreur, la zone d'incertitude lors de son passage proche avec la Terre en 2029 ainsi que sur la position de zones dites *trous de serrure*, zones dans

lesquelles doit passer Apophis pour rentrer en collision avec la Terre dans le futur.

Je dresserai dans la première partie, un inventaire des connaissances sur la population des astéroïdes géocroiseurs et plus particulièrement sur la population des astéroïdes potentiellement dangereux pour la Terre, les PHAs. Je présenterai le modèle de forces que j'ai utilisé lors de mes travaux en faisant aussi un lien étroit entre les forces non gravitationnelles (plus particulièrement l'effet Yarkovsky) et le manque de connaissance sur les paramètres physiques. À la fin de cette partie, un chapitre est consacré à l'intégration numérique, outil nécessaire pour la propagation d'orbite et d'erreur, où j'y détaillerai mes travaux sur l'intégrateur de Lie.

La deuxième partie de ma thèse est entièrement consacrée à l'astéroïde Apophis dans laquelle je présente un historique sur sa découverte. Un chapitre sera consacré à une étude dynamique et géométrique de la rencontre proche en 2029 où je présente les techniques utilisées pour la recherche des impacts ainsi que sur la recherche de *trous de serrure*. Enfin, je présenterai mes résultats sur l'apport de nouvelles observations effectuées en mars 2011 permettant de déterminer une nouvelle solution nominale. J'analyserai leur influence sur la propagation d'erreur, sur la position de ces trous de serrures ainsi que sur les probabilités d'impact. Je mettrai aussi l'accent sur l'influence de la réduction astrométrique des observations sur la propagation d'orbite. Je montrerai ensuite ce qu'apporte cette nouvelle solution pour les forces non gravitationnelles, et plus précisément pour l'effet Yarkovsky. Enfin, j'analyserai l'apport de futures campagnes d'observations en 2013 sur la connaissance de l'orbite d'Apophis, ainsi que son évolution dynamique.

Pour terminer, une troisième partie sera consacrée à la mission Gaia. J'y effectuerai le même exercice que dans la deuxième partie, à savoir, une analyse de l'apport d'observations Gaia très précises sur les incertitudes liées à l'orbite d'Apophis. À la fin de cette troisième partie, un chapitre entier sera consacré à une stratégie de suivi au sol lorsque de nouveaux hypothétiques PHAs (entre autre Apophis) seront découverts par le satellite Gaia. J'y présenterai mon approche sur la gestion d'alertes potentielles pour le processus de récupération depuis la Terre ainsi que la synergie de données sol (observations optiques) et espace (observations Gaia), toujours en mettant l'accent sur l'incertitude liée à la propagation d'orbite.

Première partie

Bilan des connaissances actuelles sur les astéroïdes géocroiseurs

Chapitre 1

Population des astéroïdes du système solaire

Sommaire

1.1	Formation du Système Solaire	12
1.2	Les groupements d'astéroïdes dans le système solaire	13
1.2.1	Les objets transneptuniens (TNOs)	13
1.2.2	Les astéroïdes de la ceinture principale (MBAs)	13
1.3	Les objets géocroiseurs	16
1.3.1	Origine des NEOs	16
1.3.2	Famille dynamique	18
1.4	Les astéroïdes potentiellement dangereux (PHAs)	19
1.4.1	Le calcul du MOID	20
1.4.2	La surveillance des PHAs	21
1.4.3	Échelle de risque	21
1.4.4	Conséquences d'un impact avec la Terre	22
1.5	Propriétés physiques des astéroïdes	23
1.6	Statistique de découverte des géocroiseurs	27
1.7	Les différents types de mesures	31

1.1 Formation du Système Solaire

Il y a 4.5 milliards d'années se constituait notre système solaire à partir d'une nébuleuse solaire. Parmi les théories de formation, le modèle de Nice¹ est celui le plus utilisé pour expliquer la configuration actuelle des planètes du système solaire. Les auteurs de [Tsiganis et al. \[2005\]](#) proposent que, après dissipation du gaz et du disque solaire primordial, les quatre planètes gazeuses (Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune) auraient migré à partir d'une position compacte vers la position actuelle. En effet, ces planètes auraient eu des orbites coplanaires et quasi circulaires avec des demi-grand axes compris entre 5 UA et 15 UA. Un disque de planétésimaux de roches et de glaces, d'une masse d'environ 35 masses terrestres, s'étendait de l'orbite de Neptune jusqu'à 34 UA. La déstabilisation de cette position est due à la résonance orbitale 1:2 de Jupiter et Saturne, provoquant alors une augmentation de leur excentricité. Les orbites des quatre planètes sont alors rapidement modifiées et déstabilisent complètement le disque de planétésimaux qui se dispersent dans le système solaire externe et interne, produisant alors un afflux d'impacts avec les

¹Ce modèle porte ce nom car il fut initialement développé à l'observatoire de la côte d'azur à Nice

planètes telluriques: le bombardement massif tardif [Gomes et al., 2005]. Ainsi, durant ces étapes, les planétésimaux perturbés auraient formé la population des petits corps du système solaire externe, du nuage de Oort [Kuiper, 1951] jusqu'à la ceinture principale d'astéroïdes [Tsiganis, 2005].

1.2 Les groupements d'astéroïdes dans le système solaire

1.2.1 Les objets transneptuniens (TNOs)

Au-delà de l'orbite de Neptune se cachent des millions de corps glacés. À cause de leur distance au Soleil et de leur taille, les objets transneptuniens (TNOs) n'ont été observés qu'à partir de 1992. Mais, Pluton fut en fait le premier objet transneptunien découvert en 1930. D'abord considéré comme une planète, il fut déclassé au rang de planète naine en 2006, lors de l'assemblée générale de l'union astronomique internationale (IAU) suite à la découverte en 2003 de Éris, TNO alors estimé plus grand que Pluton.

Cette population est divisée en plusieurs catégories et leurs origines seraient en lien direct avec la migration de Neptune. Depuis 1992, près d'un millier de TNOs ont pu être observés. Quelques-uns ont pu être nommés tels Chaos, Huya, Senda, Varuna, etc... D'autres objets sont simplement désignés par leur nom provisoire comme 1992 QB1. Certains transneptuniens peuvent être binaires tel le système Pluton-Charon, orbitant l'un autour de l'autre.

D'après la définition dynamique des TNOs, tout objet avec un périhélie supérieur à 1.3 UA et une distance au soleil supérieur à 5.5 UA fait parti des TNOs. On peut donc y inclure la famille des Centaures, astéroïdes se situant entre les orbites de Jupiter et de Neptune. Ces objets sont essentiellement issus de la ceinture de Kuiper et sont sur des orbites instables donc provisoires.

1.2.2 Les astéroïdes de la ceinture principale (MBAs)

En 1801, Giuseppe Piazzi découvrit le premier astéroïde de ce groupement: Cérès. Au cours des années suivantes, trois autres corps furent découverts: Pallas, Vesta et Junon. Ce n'est qu'au fil des années et des découvertes que les scientifiques se sont rendus compte qu'il existe, entre les orbites de Mars et Jupiter (2 à 3.5 UA), une vaste région constituant le principal groupement d'astéroïdes (dont la distribution en éléments orbitaux et magnitude absolue est représentée sur la figure 1.1): la ceinture principale d'astéroïdes (MBA pour Minor Belt Asteroids). On y dénombre pas moins de 500 000 objets de taille (le plus grand est Cérés: 900 km de diamètre et le plus petit en-deçà du kilomètre), de forme (forme planétaire ou cacahuète) et de compositions différentes. Malgré leur nombre et leur taille, la distance entre deux MBAs peut aller jusqu'à plusieurs millions de kilomètres, permettant ainsi d'éviter les collisions et d'augmenter la durée de vie de ces objets.

Plusieurs familles ou groupements composent cette ceinture principale (Tab. 1.1) définis selon leurs paramètres orbitaux [Gradie et al., 1989] (demi-grand axe, excentricité et inclinaison). Les plus grands membres des MBAs sont représentés sur la figure 1.3 dont les caractéristiques sont indiquées ci-dessous:

- **Les astéroïdes Hungaria:** Cette famille est nommée d'après l'astéroïde (434) Hungaria, objet le plus grand de ce groupe (diamètre 11 km). Les objets de ce groupement orbitent autour du Soleil entre 1.78 UA et 2 UA avec une période orbitale d'environ 2.5 ans. Ils ont une excentricité inférieure à 0.18 et une inclinaison comprise entre 16° à 34° et sont en résonance 9:2 avec Jupiter et 3:2 avec Mars.
- **Les astéroïdes de Flore:** Groupe nommé d'après l'astéroïde (8) Flore (de diamètre 140 km qui représente environ 80 % de la masse totale de ce groupe). Les origines et les pro-

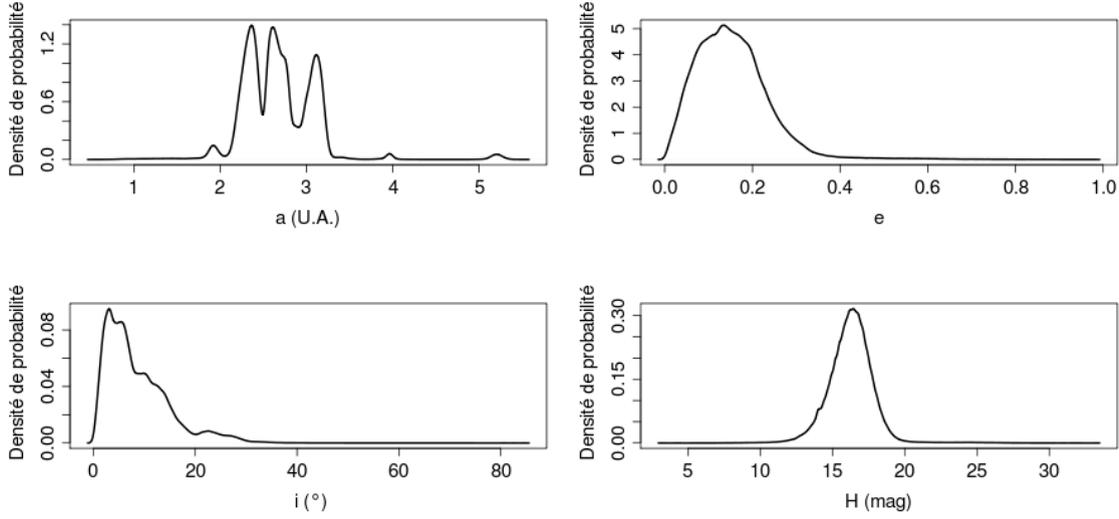


FIG. 1.1 – Distributions en demi-grand axe, excentricité, inclinaison (a, e, i) et magnitude absolue H pour des astéroïdes ayant $a \leq 5.5$ UA. La majeure partie de ces astéroïdes est dans la ceinture principale et a une excentricité $e < 0.2$. Ils ont une orbite relativement proche de l'écliptique ($i < 20^\circ$) et sont moyennement brillants ($12 < H < 17$).

TAB. 1.1 – Groupes d'éléments osculateurs pour les objets de la ceinture principale d'astéroïdes. D'après [Gradie et al. \[1989\]](#).

Group	Limits for a (AU)	Limits for e	Limits for i
Hungaria Group	$1.78 \leq a \leq 2.00$	$e \leq 0.18$	$16^\circ \leq i \leq 34^\circ$
Mars crossers	—	$q \leq 1.666$	—
Flora Family	$2.10 \leq a \leq 2.30$	—	$i \leq 11^\circ$
Phocaea Group	$2.25 \leq a \leq 2.50$	$e \leq 0.10$	$18^\circ \leq i \leq 32^\circ$
Nysa Family	$2.41 \leq a \leq 2.50$	$0.12 \leq e \leq 0.21$	$1.5^\circ \leq i \leq 4.3^\circ$
Main belt I	$2.30 < a \leq 2.50$	(limited by Mars Crossers)	$i < 18^\circ$
Pallas zone	$2.500 < a \leq 2.82$	(limited by Mars Crossers)	$33^\circ \leq i \leq 38^\circ$
Main belt IIa	$2.500 < a \leq 2.706$	(limited by Mars Crossers)	$i < 33^\circ$
Main belt IIb	$2.706 < a \leq 2.82$	(limited by Mars Crossers)	$i \leq 33^\circ$
Koronis zone	$2.83 < a \leq 2.91$	$e \leq 0.11$	$i \leq 3.5^\circ$
Eos zone	$2.99 \leq a \leq 3.03$	$0.01 \leq e \leq 0.13$	$8^\circ \leq i \leq 12^\circ$
Main belt IIIa	$2.82 < a \leq 3.03$	$e \leq 0.35$	$i \leq 30^\circ$
Themis zone	$3.08 \leq a \leq 3.24$	$0.09 \leq e \leq 0.22$	$i \leq 3^\circ$
Griqua Group	$3.10 \leq a \leq 3.27$	$e \leq 0.35$	—
Main belt IIIb	$3.03 < a \leq 3.27$	$e < 0.35$	$i \leq 30^\circ$
Cybele Group	$3.27 < a \leq 3.70$	$e \leq 0.35$	$i \leq 25^\circ$
Hilda Group	$3.70 < a \leq 4.20$	$e \leq 0.35$	$i \leq 20^\circ$
Trojen Group	$5.05 \leq a \leq 5.40$	—	—

priétés de ce groupe sont assez mal connues à l'heure actuelle. La naissance de cette famille semble résulter de l'agrégat gravitationnel de la majorité des morceaux créés par l'impact

(ou les impacts) du corps parent². Cette famille orbite autour du Soleil entre 2.17 UA et 2.33 UA. Toutefois, les bornes en excentricité et inclinaison sont assez mal définies³. L'un des membres les plus connus de cette famille est (951) Gaspra qui fut visité par la sonde Galileo en route vers Jupiter. Les études sur la densité des cratères de Gaspra semblent suggérer que cette famille est âgée d'environ 200 millions d'années.

- **Ceinture principale I-III:** Ce large groupement est caractérisé par des astéroïdes ayant un demi-grand axe compris entre 2.5 UA et 3.27 UA. On peut remarquer que ces trois groupements sont bien distincts de part une séparation bien nette délimitant ces régions. On appelle ces séparations des *lacunes de Kirkwood* (Fig. 1.2). Dans ces régions, la densité de population est très faible due à la perturbation gravitationnelle de Jupiter. Des objets se trouvant donc dans ces régions en résonance orbitale avec Jupiter vont être éjectés de cette région. Par exemple, la lacune entre la région de la ceinture principale I et II est la conséquence d'une résonance 3:1 avec Jupiter.

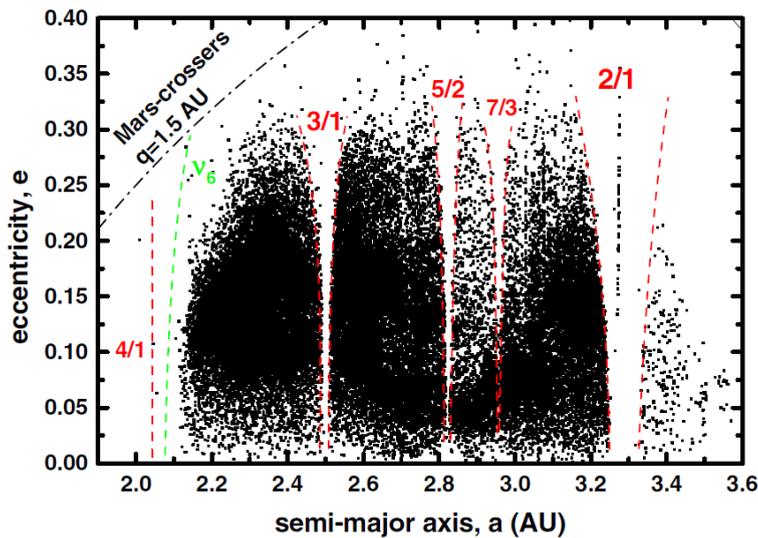


FIG. 1.2 – Distribution en demi-grand axe (a) et excentricité (e) de la population des MBAs. Les lacunes de Kirkwood sont indiquées par la présence de résonances en moyen mouvement et séculaire. D'après Tsiganis [2005].

- **Groupe Cybele:** Ce groupe d'astéroïdes orbite dans la partie externe de la ceinture principale avec un demi-grand axe compris entre 3.27 UA et 3.70 UA. Il a été nommé d'après son membre principale (65) Cybele. Ce groupe semble avoir été formé par la désagrégation d'un gros objet. Les membres principaux de ce groupe sont (87) Sylvia, (790) Pretoria ou (121) Hermione.
- **Groupe Hilda:** Les objets de ce groupe sont en résonance 3:2 avec Jupiter. Ils orbitent autour du Soleil avec un demi-grand axe compris entre 3.70 UA et 4.20 UA. et ont chacun leur propre orbite elliptique, justifiant le terme de groupe et non de famille. La particularité orbitale du groupe Hilda est que l'ensemble de ses membres forme à tout moment une configuration triangulaire qui semble être stable sur le long terme.
- **Les Troyens:** Le premier astéroïde troyen a été découvert par Max Wolf en 1906 et fut nommé (588) Achille. Depuis, d'autres objets ont été découverts. Ils se situent sur des orbites stables entre 5.05 UA et 5.40 UA. Les camps "grecs"⁴ (par exemple (588) Achille, (659)

²Qui semble avoir été détruit par l'impact

³Pour les objets numérotés, $0.00054 < e < 0.88$ et $0.04^\circ < i < 58.75^\circ$

⁴Parfois appelé groupe d'Achille

Nestor ou encore (1143) Odysée et "troyens" (par exemple (884) Priam, (1172) Énée ou encore (1173) Anchise) partagent l'orbite de Jupiter et sont situés respectivement au point L_4 et L_5 de Lagrange.

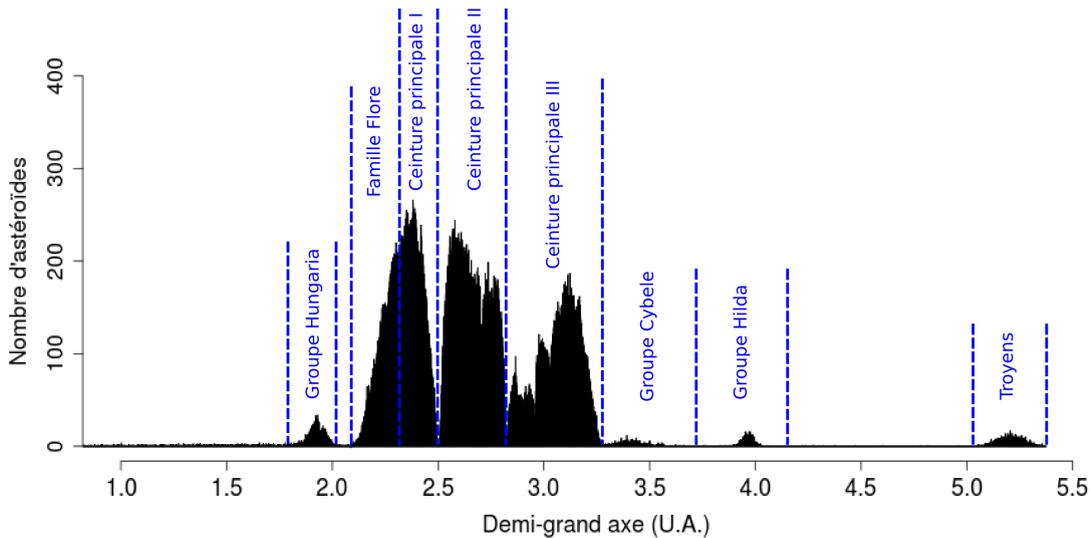


FIG. 1.3 – Groupes et familles composant la ceinture principale des astéroïdes.

1.3 Les objets géocroiseurs

La découverte de (433) Eros en 1898 a montré l'existence d'une population d'astéroïdes proches des planètes telluriques, croisant régulièrement leur orbite. La plupart de ces objets sont des astéroïdes mais on trouve aussi parfois des comètes. Quand ils croisent l'orbite de la Terre, on les appelle des *géocroiseurs* (NEOs pour Near-Earth Objects). Il est reconnu de nos jours que des collisions dans le passé ont joué un rôle significatif dans l'histoire géologique et biologique de notre planète.

1.3.1 Origine des NEOs

Les astéroïdes deviennent des NEOs [Morbidelli et al., 2002] en augmentant leur excentricité sous l'action de résonances (Fig. 1.2). La plus notable est la résonance séculaire ν_6 . Elle apparaît quand la fréquence de précession de la longitude du périhélie de l'astéroïde est égale au sixième de la fréquence séculaire de la planète (fréquence de précession de la longitude au périhélie de Saturne ou oscillation séculaire de l'excentricité de Jupiter). Cette résonance provoque une augmentation régulière et forte de l'excentricité de l'astéroïde et par conséquent des objets peuvent atteindre l'orbite de la Terre (mais aussi celle de Vénus et parfois entrer en collision avec le Soleil). Le temps moyen requis pour devenir un géocroiseur est d'environ 0.5 millions d'années et le temps passé dans la région des NEOs est de 6.5 millions d'années [Botke et al., 2002] et la probabilité moyenne de collision avec la Terre, intégrée sur le temps de vie dans la région croisant la Terre est d'environ 10^{-2} [Morbidelli and Gladman, 1998].

Des résonances en moyen mouvement avec Jupiter sont aussi la cause d'injection d'astéroïdes dans la zone des NEOs (Fig. 1.4). La résonance en moyen mouvement 3:1 provoque des variations en excentricité telles que cela va provoquer des rencontres proches avec Mars et par conséquent atteindre rapidement la région des NEOs [Morbidelli, 2002]. Pour une population uniformément

placée dans cette résonance, le temps médian requis pour croiser l'orbite de la Terre est d'environ 1 million d'années. La durée de vie médiane est d'environ 2 millions d'années et ils finissent dans 80% des cas par atterrir dans le Soleil et dans 20% des cas, ils sont placés sur une orbite elliptique [Gladman et al., 1997]. Le temps moyen passé dans la région des NEOs est de 2.2 millions d'années [Bottke et al., 2002] et la probabilité moyenne de collision avec la Terre est de 2×10^{-3} [Morbideilli and Gladman, 1998].

La résonance 5:2 entraîne une évolution rapide et chaotique de l'excentricité. Le temps médian pour croiser l'orbite de la Terre est très rapide ~ 0.3 millions d'années et le temps de vie médian est de 0.5 millions d'années. Vu que cette résonance est plus proche de Jupiter que les résonances ν_6 et 3:1, la fin la plus probable est une éjection du système en étant mis sur une orbite hyperbolique (dans 92% des cas) et dans le reste des cas, ils finissent en collision avec le Soleil [Gladman et al. [1997]. Le temps moyen passé dans la zone des NEOs est de 0.4 millions d'années et la probabilité moyenne de collision est de 2.5×10^{-4} .

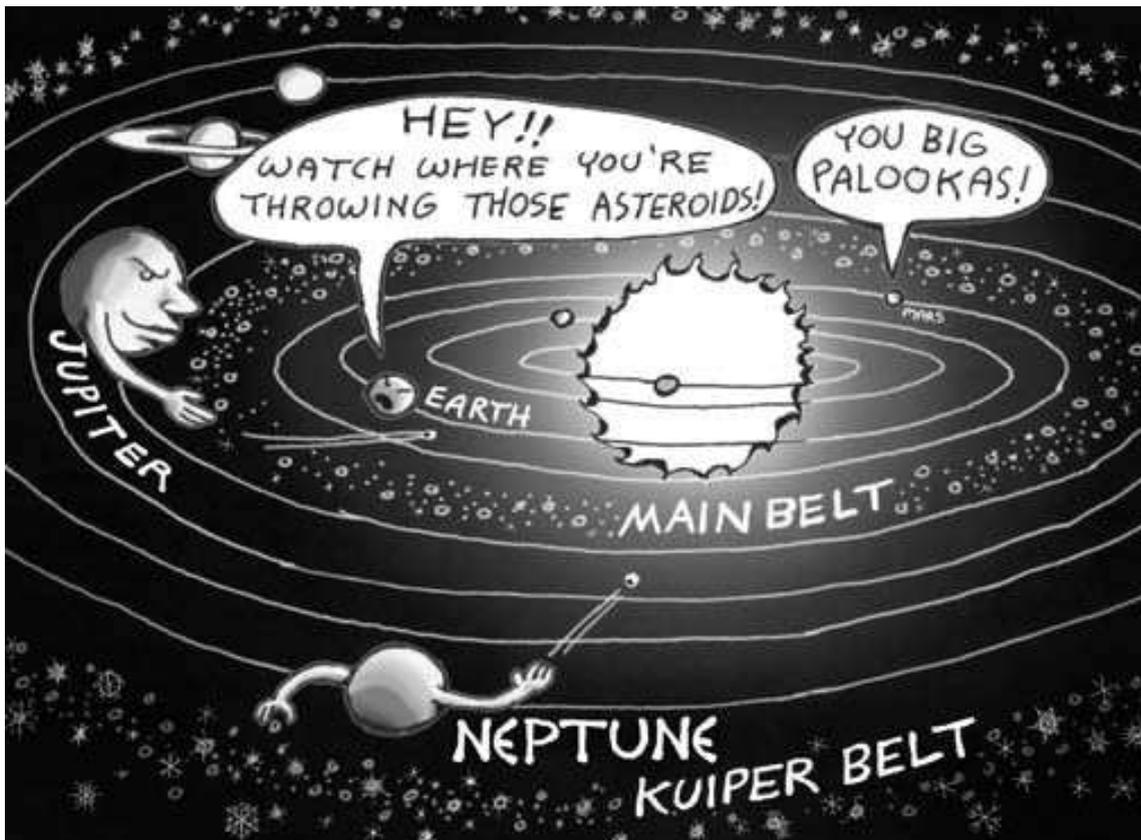


FIG. 1.4 – Dessin humoristique symbolisant l'injection d'astéroïdes de la ceinture principale, s'aventurant dans les lacunes de Kirkwood, dans le système solaire interne. De même, la planète Neptune peut parfois perturber la ceinture de Kuiper, injectant ainsi des comètes vers des orbites plus basses. (Credits: Ethan Siegel)

En plus de ces résonances, la ceinture principale d'astéroïdes est traversée par des centaines de fines résonances: des résonances en moyen mouvement d'ordre élevé avec Jupiter (le rapport des fréquences orbitales donne des grands nombres entiers), des résonances à trois corps avec Jupiter et Saturne, où la combinaison des fréquences orbitales de l'astéroïde vaut 0 [Murray et al., 1998, Nesvorný and Morbidelli, 1998, 1999]. À cause de ces résonances, l'orbite de la plupart des MBAs est chaotique [Nesvorný et al., 2002]. L'effet de cette chaotité est faible: la valeur

moyenne du demi-grand axe est limitée à la zone étroite résonante et l'excentricité et l'inclinaison propre varient lentement dans le temps [Knezevic et al., 2002] ce qui entraîne des rencontres proches avec Mars ou Jupiter avec une fréquence allant de 10^7 années à plusieurs milliards d'années [Murray and Holman, 1997]. Le temps médian pour qu'un Mars-croiseur devienne un géocroiseur est ~ 60 millions d'années: environ deux objets de 5 km de diamètre deviennent des NEOs chaque million d'années [Michel et al., 2000].

D'autres effets dynamiques dus à la perturbation gravitationnelle de la ceinture de Kuiper par Neptune peuvent provoquer l'injection de comètes dans le système solaire interne. D'autres facteurs, d'origines non gravitationnelles sont aussi des sources d'injection d'objets (voir Chap. 2).

1.3.2 Famille dynamique

Les astéroïdes géocroiseurs sont définis par une distance au périhélie $q \leq 1.3$ UA et sont divisés en quatre familles dynamiques (dont les caractéristiques orbitales sont résumées dans le tableau 1.2):

TAB. 1.2 – Définition des différents groupes dynamiques formant la famille des géocroiseurs. a désigne le demi-grand axe, q le périhélie et Q l'aphélie.

Groupe	Définition
Apollo	$a > 1.0$ UA $q \leq 1.017$ UA
Aten	$a < 1.0$ UA $Q > 0.983$ UA
Amor	$a > 1.0$ UA $1.02 < q \leq 1.3$ UA
Atira	$a < 1.0$ UA $q < 0.983$ UA

- **Les Apollos:** Tirant leur nom de l'astéroïde (1862) Apollo⁵, les objets de ce groupe croisent régulièrement l'orbite de la Terre, en raison de leur configuration orbitale: leur demi-grand axe est supérieur à celui de la Terre ($a > 1.0$ UA) et leur distance au périhélie $q \leq 1.017$ UA. Certains d'entre eux peuvent se rapprocher très près de la Terre, faisant d'eux une menace potentielle pour notre planète. On peut citer certains membres illustres de ce groupe tels (4179) Toutatis, (1566) Icarus ou encore (6489) Golevka. De part leur configuration orbitale, ces objets sont les plus faciles à observer. Ils représentent plus de 60% de la population des NEAs.
- **Les Atens:** Ce sous-groupe des NEAs est nommé d'après (2062) Aten, objet découvert en 1976 par Eleanor F. Helin. Ils possèdent un demi-grand axe plus petit que celui de la Terre ($a < 1.0$ UA) et un aphélie $Q > 0.983$ UA. Étant souvent contenus en dessous de l'orbite terrestre, ils restent moins facilement observables: à ce jour, moins de 700 Atens sont connus et répertoriés au MPC. Comme les Apollos, ils croisent régulièrement l'orbite de la Terre et un membre de ce groupe, (99942) Apophis (voir chap. 4) a constitué pendant

⁵découvert en 1932 par Karl Wilhelm Reinmuth, il fut perdu puis retrouvé en 1973

un bref moment une menace potentielle pour la Terre.

- **Les Amors**: Représentant plus de 30% de la population des géocroiseurs, cette famille bénéficie, comme pour les Apollos, de conditions orbitales favorables pour leurs observations. Ayant un demi-grand axe supérieur à celui de la Terre ($a > 1.0$ UA) et un périhélie défini par $1.02 \text{ AU} < q \leq 1.3 \text{ AU}$, leurs orbites sont par conséquent positionnées complètement au delà de celle de la Terre. Tirant leur nom de l'astéroïde (1221) Amor, ils approchent l'orbite de la Terre sans la croiser mais certains d'entre eux croisent l'orbite de Mars⁶. Un des membres les plus connus de cette famille est l'astéroïde (433) Eros qui fut visité par la sonde NEAR en février 2000 permettant ainsi une meilleure définition des paramètres physiques, orbitaux et gravitationnels de cet astéroïde [Konopliv et al., 2002].
- **Les Atiras**: Cette famille dynamique a vu le jour en 2003 avec la découverte de l'astéroïde (163593) Atira. Historiquement, le premier objet suspecté d'appartenir à cette famille est 1998 DK₃₆⁷ et le terme *Apohele* fut alors proposé pour caractériser cette objet. C'est un nom Hawaïen qui signifie *orbite* et fut choisi en raison de sa consonance avec les mots *apoapside* et *helios*. Encore appelés IEOs (Inner Earth Objects), le nom Atira a été choisi comme le veut la coutume d'attribuer le nom d'un groupe d'après son membre le plus important.
Ces objets ont un demi-grand axe plus petit que celui de la Terre ($a < 1.0$ UA) et un périhélie plus petit que celui de la Terre ($q < 0.983$ UA) et orbitent donc en-deçà de l'orbite terrestre. Par conséquent, il sont donc très difficilement observables. En effet, à ce jour seulement 10 Atiras⁸ sont répertoriés au MPC dont seulement deux possèdent un numéro permanent.

La figure 1.6 montre la répartition d'une population de plus de 8000 géocroiseurs selon la famille dynamique. Les Apollos et les Amors apparaissent comme les familles comptant le plus d'astéroïdes. Ces familles regroupent à elles seules 90% de la population des NEAs. Cela est dû à leur configuration orbitale, favorable à l'observation. Au contraire, les Atens et les Atiras se partagent le reste (à peine 0.13% pour les Atiras).

1.4 Les astéroïdes potentiellement dangereux (PHAs)

La connaissance de la distance orbitale de deux orbites képlériennes est déterminante dans la prédiction du risque de collision de deux corps ou de la probabilité de leur rapprochement. Cette distance est appelé MOID (Minimum Orbit Intersection Distance). Cet acronyme fut introduit par [Bowell and Muinonen \[1994\]](#) afin de définir les objets géocroiseurs pouvant constituer une menace pour la Terre: les PHAs (Potentially Hazardous Asteroids). Ces astéroïdes sont définis par deux paramètres: un $\text{MOID} \leq 0.05$ UA et une magnitude absolue $H \leq 22$. Autrement dit, tout objet s'approchant de la Terre à moins de 7 480 000 km et dont le diamètre est plus grand que 150 m est considéré comme PHA. Le MOID est une sorte d'indicateur d'alerte permettant de dire si tel astéroïde a un grand potentiel d'approche au plus près de la Terre.

⁶Les deux lunes de Mars, Deimos et Phobos, pourraient être des Amors qui auraient été capturés par Mars

⁷Découvert par David J. Tholen, cet objet a été considéré comme perdu dans la mesure où il n'a pas été ré-observé depuis le 24 Février 1998 et possède une orbite très mal définie

⁸Certains d'entre eux sont *cythérocroiseurs* (croisant l'orbite de Vénus) et *herméocroiseurs* (croisant l'orbite de Mercure)

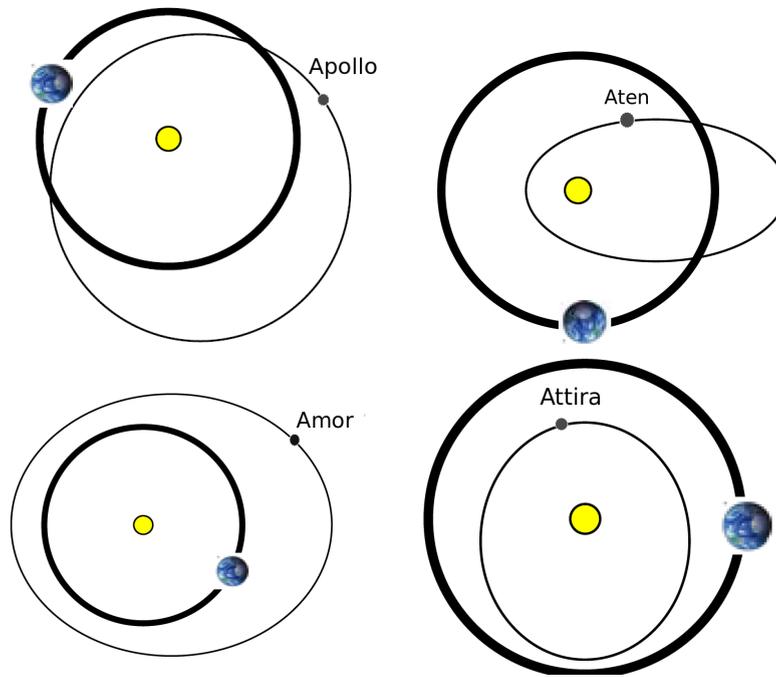


FIG. 1.5 – Familles dynamiques des astéroïdes géocroiseurs: en haut, les Apollos et les Atens qui croisent régulièrement l'orbite de la Terre. En bas, les Amors et les Atiras, qui orbitent respectivement au-dessus et en-dessous de l'orbite de la Terre. Leur configuration orbitale fait qu'ils sont des objets qui bénéficient de conditions d'observations moins favorables que les Apollos et les Atens, en particulier pour les Atiras.

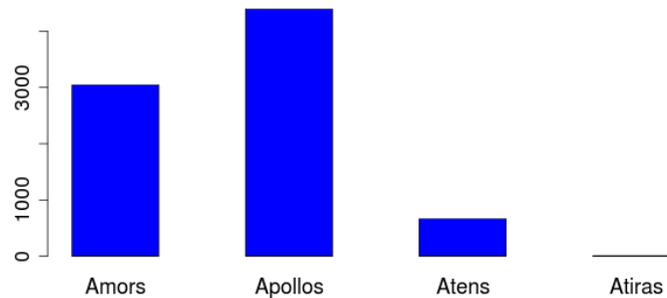


FIG. 1.6 – Répartition des géocroiseurs selon les familles dynamiques.

1.4.1 Le calcul du MOID

Le calcul du MOID se fait en calculant les points stationnaires du carré de la distance képlérienne d^2 entre deux ellipses centrées sur un repère commun. Une première méthode semi-analytique pour calculer les minimums de d avait été proposée par Sitarski [1968] pour les études de rapprochement entre les comètes et les planètes géantes. Des travaux récents [Kholshchevnikov and Vassiliev, 1999, Gronchi, 2005] proposent une approche algébrique pour le calcul de points stationnaires de la fonction d^2 dont l'avantage est non seulement la détermination du MOID mais aussi de tous les points stationnaires. Les auteurs de Bonanno [2000] et de Gronchi et al. [2007] présentent une méthode pour calculer l'incertitude liée au MOID (ou tout au moins une approxi-

mation). Avec cette grandeur calculée, ces auteurs ont montré que des astéroïdes n'étant pas classifiés comme NEAs ou PHAs dans la base de donnée du MPC, ont en fait une probabilité non négligeable d'appartenir à ces catégories.

1.4.2 La surveillance des PHAs

Actuellement, plus de 1200 géocroiseurs sont répertoriés comme étant des PHAs et comme l'indique la figure 1.7 la majorité d'entre eux sont de la famille des Apollos et moins de 0.2% des Atiras sont des PHAs. Environ 370 d'entre eux sont sous surveillance par des centres automatiques: SENTRY⁹[Chamberlin et al., 2001] (NASA-JPL) et NEODyS-CLOMON¹⁰ (Université de Pise¹¹). Ces systèmes permettent de calculer les probabilités d'approches et d'impacts possibles avec la Terre et classent ces objets selon le risque atteint sur l'échelle technique de risque d'impact de Palerme ou l'échelle de Turin.

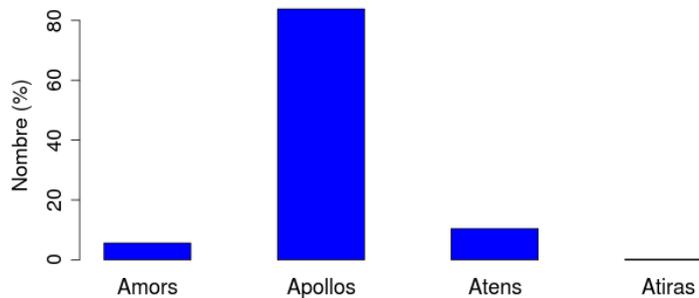


FIG. 1.7 – Répartition des PHAs par famille dynamique. 80% des astéroïdes apollo constituent la famille des PHAs ; les atiras ne représentent que 0.2%.

Depuis 2009, il existe un nouveau programme de l'ESA spécialisé dans la surveillance de l'environnement terrestre, le *Space Situational Awareness*¹² (SSA). Les principaux programmes sont la surveillance et le suivi d'objets en orbite terrestre (satellites actifs ou inactifs, les modules éjectés lors des phases de lancement ou encore les débris spatiaux), la météo spatiale (suivi des conditions dans le vent solaire et dans la magnétosphère, ionosphère et thermosphère qui pourraient affecter des infrastructures spatiales basées au sol ou mettre en danger la vie ou la santé humaines) et les objets géocroiseurs (détection d'objets naturels qui pourraient potentiellement impacter la Terre et causer des dégâts).

1.4.3 Échelle de risque

L'échelle de Palerme est une échelle logarithmique prenant en considération des paramètres comme l'énergie cinétique estimée, la probabilité d'impact et le temps restant avant le possible impact. Cette échelle compare la vraisemblance d'un impact possible avec le risque moyen posé par ces objets de même taille (ou plus grand) jusqu'à la date de l'impact potentiel. Ce risque moyen d'impacts aléatoires est appelé *risque de fond*. Il est important de comparer chaque menace avec ce risque de fond car en estimant ce paramètre, on définit une valeur pour la menace à partir de la

⁹<http://neo.jpl.nasa.gov/risk/>

¹⁰<http://newton.dm.unipi.it/neodys/index.php?pc=0>

¹¹Programme également installé à l'université de Valladolid en Espagne

¹²<http://www.esa.int/esaMI/SSA/>

population entière d'astéroïdes et des comètes, moyennée sur une longue période temporelle. Vu qu'il y a d'avantage de petits astéroïdes que de grands (vois section 1.6), la fréquence de ce risque de fond dépendra de la taille des géocroiseurs.

Pour calculer l'échelle de Palerme [Chesley et al., 2002], on calcule d'abord la fréquence annuelle d'impact de fond f_B , probabilité annuelle d'un impact avec une énergie E (exprimée en mégatonnes de TNT) au moins aussi grande que l'événement en question.

$$f_B = 0.03 \times E^{-4/5}$$

Puis on calcule le risque relatif R , calculé d'après la probabilité d'impact P_i de l'événement en question et le temps DT (exprimé en années) restant avant la date de l'impact.

$$R = P_i / (f_B \times DT)$$

L'échelle de Palerme PS est alors le logarithme de base 10 du risque relatif R .

$$PS = \log_{10} R$$

Ainsi, si un astéroïde a un niveau -2 sur l'échelle de Palerme, cela signifie que l'événement d'impact potentiel a seulement 1% de chance de se produire dans les années à venir par rapport à un événement aléatoire de fond. Une valeur de 0 indiquerait que l'événement est aussi menaçant qu'un risque de fond. Une valeur de +2 indiquerait un événement qui est 100 fois plus probable qu'un impact de fond par un objet au moins aussi grand.

Dans le tableau 1.3 est indiquée l'attention à porter à un événement selon la valeur atteinte sur l'échelle de Palerme. Actuellement, aucun objet ne présente une valeur positive sur l'échelle de Palerme.

TAB. 1.3 – Importance d'un événement en fonction de l'échelle de Palerme.

	Action
$PS < -2$	Aucun risque
$-2 < PS < 0$	À surveiller
$PS > 0$	Mérite un certain niveau d'attention

Une autre échelle, moins technique et plus accessible au grand public, permet de mesurer le niveau de risque d'impact avec la Terre. Il s'agit de l'échelle de Turin (Fig. 1.8). Numérotée de 0 à 10, cette échelle prend en compte la probabilité d'impact et la taille (permettant de déduire l'énergie cinétique libérée par l'impact) afin de quantifier les conséquences à l'échelle locale, régionale ou mondiale.

1.4.4 Conséquences d'un impact avec la Terre

Si un astéroïde venait à être menaçant, quelles seraient les conséquences d'un impact avec la Terre ? Contrairement aux autres planètes telluriques, notre planète garde peu de traces d'impacts du passé. L'érosion à court terme et la tectonique des plaques à long terme ont effacé ces traces. Ce n'est que récemment que nous avons pu découvrir des cratères d'impacts majeurs. Du cratère de Chicxulub au Mexique d'un diamètre de 180 km (qui a marqué la fin de l'espèce des dinosaures) à celui de Ries en Allemagne avec un cratère de 25 km, il a été possible d'évaluer les conséquences

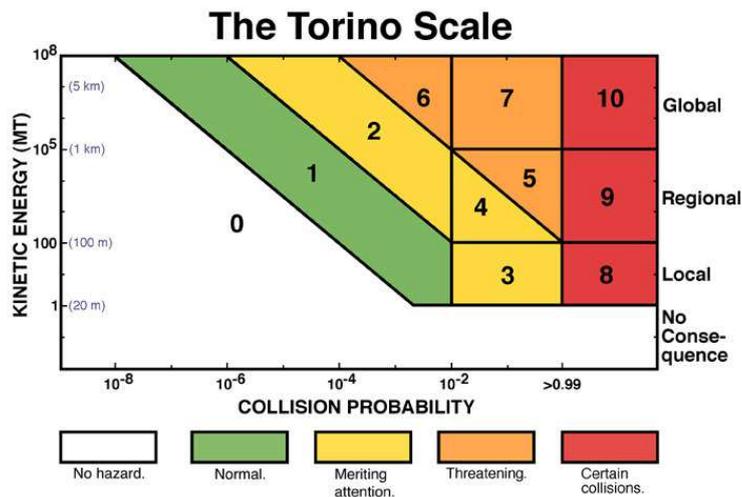


FIG. 1.8 – Échelle de Turin prenant comme paramètres d'entrée (pour une date d'impact donnée) la probabilité d'impact ainsi que l'énergie cinétique (estimée à partir de la masse) qui serait dégagée lors de l'impact. Le paramètre de sortie est un nombre compris entre 0 et 10 qui indique l'importance et les conséquences d'un possible impact.

environnementales causées par ces impacts. Nous avons aussi fait l'expérience d'événements mineurs tel l'impact de 2008 TC₃, objet de 2 à 5 mètres de diamètre, qui fut découvert quelques heures avant qu'il n'explose à environ 40 kilomètres au-dessus du désert de Nubie au Soudan. L'énergie libérée lors de l'explosion a été d'environ 1 à 2 kt de TNT. Entre les années 1973 et 2000, des capteurs sur des satellites ont détecté près de 518 événements, tous dans la classe de la kilotonne de TNT ou en dessous (objets de quelques mètres de diamètre voire moins). Ces événements n'ont pas été détectés sur Terre dans la mesure où ces objets ont explosé dans la haute atmosphère. La figure 1.9 représente l'intervalle moyen entre deux impacts selon le diamètre de l'objet¹³. Par exemple, pour un astéroïde de 100 mètres de diamètre, l'intervalle entre deux impacts est d'environ 3000 ans.

Les principaux effets d'impacts d'astéroïdes avec la Terre sont des ondes de chocs, des tsunamis, injection de matières dans l'atmosphère et des changements électromagnétiques au niveau de la surface. Bien sûr, leur importance dépend de la taille de l'objet et de leur vitesse d'entrée dans l'atmosphère. Le tableau 1.4, d'après Morrison et al. [1994] et incluant des données de Alan Harris, indique les effets environnementaux d'un impact avec la Terre, en fonction du diamètre du géocroiseur.

1.5 Propriétés physiques des astéroïdes

Les propriétés physiques des géocroiseurs sont d'un grand intérêt non seulement pour la compréhension scientifique des petits corps, de l'origine et l'évolution du système solaire, de la Terre et de la vie, mais aussi pour prévenir de l'importance d'un impact possible c'est-à-dire prévoir le comportement de ces objets lors de leur entrée dans l'atmosphère (selon leur forme, diamètre, masse, etc., ils se cassent différemment lors de leur entrée dans l'atmosphère) ou lors d'un impact au sol ou dans l'océan, et surtout étudier les possibilités de mitigation. Cependant leurs paramètres physiques sont beaucoup moins bien déterminés que pour les MBAs. Ceci est du

¹³Basée sur un diagramme non publié de Alan Harris de NASA/JPL incluant aussi des données de Rabinowitz et al. [2000]

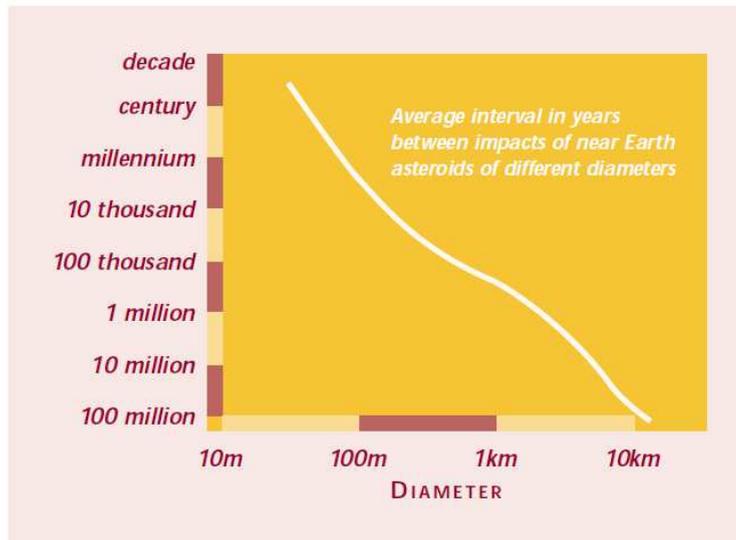


FIG. 1.9 – Intervalle moyen entre deux impacts exprimé en années.

au fait qu'ils sont petits et surtout de faible magnitude. Par conséquent, les techniques classiques (photométries, spectroscopie) fournissent des données avec une précision moindre. Cependant, une rencontre proche entre la Terre et un géocroiseur est une occasion pour effectuer certaines mesures précises, comme les mesures radar (cf. section 1.7), afin de déterminer ces paramètres. La principale difficulté est que, à cet instant, l'objet n'est visible que pendant un court laps de temps (cela peut aller de l'heure à plusieurs semaines) et se déplace rapidement, ce qui limite le nombre d'observations pouvant être effectuées.

Cependant, de futures missions spatiales permettant des observations in situ, permettront d'avoir une meilleure précision sur certaines données physiques: la mesure des masses et de la densité des NEOs permet une meilleure détermination de l'énergie d'impact qui est le paramètre d'intérêt pour l'évaluation des risques d'impact. Dans un même temps, la connaissance de la structure interne est nécessaire pour déterminer comment les NEOs se comportent à la fois lors de manœuvres de mitigation et aussi à l'entrée dans l'atmosphère terrestre. La vitesse de rotation combinée avec leur forme donne une limite basse à la masse d'un objet. Si un objet est un binaire, la période orbitale combinée à la forme et à la taille permet une détermination globale de la densité volumique de l'astéroïde. Cette méthode donne une valeur très précise de la masse mais nécessite une précision orbitale et des informations sur la forme de l'objet, ce qui ne peut être fait que sur une faible fraction de la population des binaires.

D'autre part, la connaissance de la structure et de la densité des couches de surface est cruciale pour des missions de mitigations. En effet, toutes les méthodes de déviation d'objet nécessitent l'interaction avec la surface. Sans connaissances détaillées des propriétés de surface, et donc de la réponse à un impact, la réussite d'une telle mission est incertaine. Des indications sur les propriétés de surface peuvent être obtenues grâce à des mesures radars mais les données sont difficilement interprétables.

De plus il est important de comprendre comment les caractéristiques physiques varient selon les populations de NEOs. En effet, les conséquences d'un impact d'un astéroïde ferreux de 100 m avec la Terre ne seront certainement pas les mêmes que pour un astéroïde carboné de 100 m de diamètre.

Enfin, notre compréhension actuelle du risque globale des NEOs est basée sur une extrapolation à partir de la population connue. Pour permettre une meilleure extrapolation, il est nécessaire de comprendre les propriétés de réflectance de la surface des NEOs comme l'albédo et la couleur au

TAB. 1.4 – Effets environnementaux d'un impact sur la Terre.

Diamètre de l'astéroïde	Énergie libérée (MT)	Diamètre du cratère (km)	Intervalle moyen entre impacts (années)	Conséquences
75m	10 à 100	1.5	1000	Cratères, poussières, destruction de villes (Moscou, Londres)
160m	100 à 1000	3	4000	Tsunamis significatifs, destruction de villes (New-York, Tokyo)
350m	1000 à 10000	6	16000	Cratères, larges tsunamis, destruction d'états (Delaware, Estonie)
700m	10000 à 100000	12	63000	Tsunamis hémisphériques, destruction de grands états (Virginie, Taiwan)
1.7km	100000 à 1M	30	250000	Tsunamis, destruction de l'ozone, destruction d'états (Californie, France, Japon)
3km	1M à 10M	60	1M	Rejets importants de poussière, changement climatique, destruction de grandes nations (Mexique, Inde)
7km	10M à 100M	125	10M	Effets climatiques prolongés, probable extinction massive, destruction à l'échelle continentale (Australie, Europe, USA)
16km	100M à 1000M	250	100M	Extinction massive

sein de l'ensemble de la population afin que les biais observationnels puissent être correctement pris en compte.

Les astéroïdes ont des formes, des compositions, des tailles et des propriétés de rotation diverses. Pour les plus gros astéroïdes – Cérès, Pallas, Vesta et Hygiea – la gravitation domine sur la résistance des matériaux et leurs formes sont relativement proches de l'équilibre hydrostatique. Pour des tailles plus petites (200-300 km), la résistance à la compression de la roche devient comparable à la pression due à la gravitation et la plupart des astéroïdes de cette taille ne sont pas sphériques (tels que Iris et Kleopatra). Pour des objets encore plus petits, comme Ganymed et Eros (les deux plus gros géocroiseurs), les propriétés granulaires de l'intérieur de ces astéroïdes déterminent leur forme globale et leur réponse aux impacts. Ces objets font généralement référence à des *rubble piles*¹⁴ [Harris, 1996, Pravec and Harris, 2000, Fujiwara et al., 2006], agrégats de roches dominés par la gravitation et avec une tension élastique négligeable (Fig. 1.10). Des objets encore plus petits (< 200 m) sont simplement formés d'un unique bloc rocheux.

¹⁴Agrégats gravitationnels

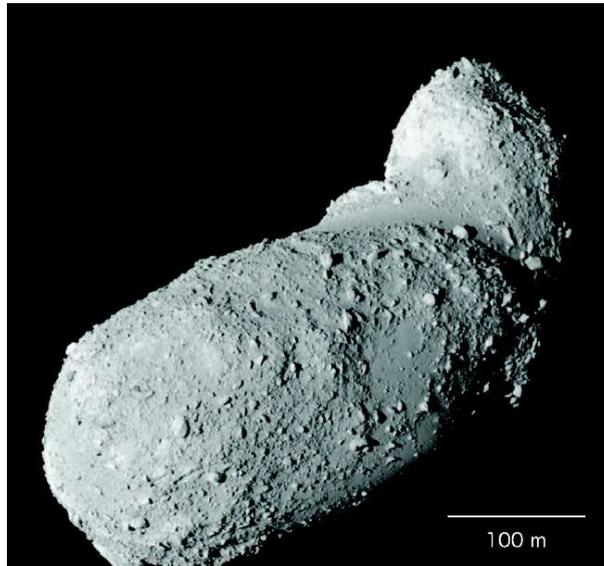


FIG. 1.10 – Image du géocroiseur Itokawa prise par la sonde Hayabusa. Itokawa a une longueur de 535 m et montre une structure de *rubble-pile*. D'après Fujiwara et al. [2006].

La plupart de nos connaissances sur la composition des astéroïdes vient de l'analyse en laboratoire de météorites [Burbine et al., 2002]. La spectroscopie optique et proche infrarouge fournit des informations sur la composition des astéroïdes actuellement dans l'espace en comparant le spectre d'astéroïdes, différents entre eux, afin d'identifier des caractéristiques spectrales communes – des types spectraux – aux spectres de météorites obtenus en laboratoire. Cela permet de relier des types spectraux à la présence de minéraux particuliers. Des observations *in situ* par des sondes spatiales ont été d'une grande utilité comme la mission NEAR vers Eros [Veverka et al., 2000] et comme le seront des retours d'échantillons avec la sonde Hayabusa vers l'astéroïde Itokawa [Fujiwara et al., 2006].

Les autres signatures importantes des astéroïdes sont leur couleur, leur albédo et leur spectre optique. Une partie des rayons lumineux incidents est soit dispersée ou absorbée par les grains à la surface de l'astéroïde. Cette fraction de rayon lumineux réfléchi par la surface dépend des propriétés optiques des grains et varie donc en fonction de la longueur d'onde. Les premières variations de couleur ont été mesurées à partir de mesures microphotométriques de spectres photographiques (se situant dans un intervalle de 0.39-0.47 μm) de 12 astéroïdes [Bobrovnikoff, 1929]. Puis, l'arrivée des détecteurs photoélectriques a permis, vers le milieu des années 50, de mettre en évidence deux populations distinctes d'objets, sur la base des propriétés de réflectance spectrale [Wood and Kuiper, 1963]. Mais la vraie nature des astéroïdes est devenue apparente avec les travaux de Chapman et al. [1971] qui utilisent des observations spectrophotométriques de haute résolution couvrant les longueurs d'onde de 0.3-1.1 μm permettant ainsi de développer la première taxonomie des astéroïdes [Chapman et al., 1975]. Le survey Eight-Color Asteroid Survey (ECAS) [Zellner et al., 1985] utilisant cette étude spectrophotométrique a permis d'accroître considérablement le nombre de spectres d'astéroïdes formant ainsi la base de la taxonomie de Tholen [Tholen, 1984]. Des outils statistiques, comme la méthode de l'analyse en composante principale, ont permis de mettre en évidence sept classes spectrales majeures (A, C, D, E, M, P, et S) et l'identification de trois nouvelles classes mineures (B, F, et G). Durant la même période, une nouvelle génération de spectrographes utilisant des CCD a été développée permettant ainsi l'obtention de spectres d'astéroïdes de faibles magnitudes et avec une bien meilleure résolution que les mesures spectrophotométriques. L'avantage est que les spectres de l'astéroïde et du fond

du ciel sont mesurés simultanément sur un large intervalle de longueur d'onde. Le survey Small Mainbelt Asteroid Spectroscopic Survey (SMASS) utilise cette technologie et la première phase (SMASSI) a permis la mesure de 316 spectres d'astéroïdes [Xu et al., 1995] permettant de classer ces objets dans les classes déjà existantes (majoritairement dans les classes S et C). D'autre part, 20 petits astéroïdes de type achondrite basaltique (composée à moins de 35% de métal) ont été mis en évidence. Cette première phase a aussi permis d'identifier deux nouvelles classes, J et O et aussi des astéroïdes riches en olivines dans la classe S. Alors que SMASSI était plutôt focalisée sur la population des MBAs, la deuxième phase SMASSII a plutôt ciblé la population de planétocroiseurs (NEAs et Mars-croiseurs) et de la famille de Vesta [Bus and Binzel, 2002a,b, Bus et al., 2002]. La figure 1.11 résume les caractéristiques des 26 classes taxonomiques dérivées de SMASSII.

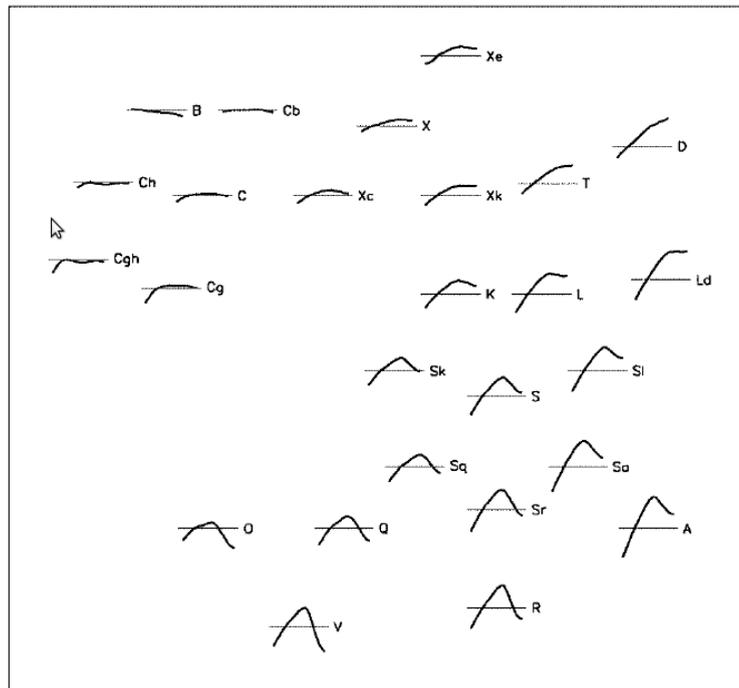


FIG. 1.11 – 26 classes taxonomiques dérivées de SMASSII. L'axe des abscisses représente la longueur d'onde entre 0.435–0.925 μm . L'axe des ordonnées représente la réflectance et la ligne horizontale représente une réflectance normée à 1.0. La disposition de ces spectres dans ce repère dépend de la pente moyenne des spectres (qui augmente en allant de la gauche de la droite) et de la profondeur de la bande d'absorption à $1\mu\text{m}$ de silicate qui augmente généralement de haut en bas. D'après Bus et al. [2002].

Les types taxonomiques, les albédos correspondant ainsi que les compositions minéralogiques des NEOs sont répertoriés dans le tableau 1.5

1.6 Statistique de découverte des géocroiseurs

Depuis les années 2000, le nombre de NEAs découverts augmente de façon exponentielle. En effet, comme le montre la figure 1.12, ce nombre a été multiplié par huit en dix ans et on connaît actuellement plus de 8000 astéroïdes géocroiseurs dont environ 1000 ont un diamètre supérieur à 1 km. On doit cette croissance à l'évolution des techniques d'observations ainsi qu'à la volonté de la communauté scientifique de mettre en place des programmes de surveillance de l'environnement terrestre.

TAB. 1.5 – Albédos et minéralogies des différents types taxonomiques identifiés dans la famille des NEOs. D’après Harris et al. [2004].

Type taxonomique	Albédo	Composition minéralogique
D, P	0.03 - 0.06	carbone, silicates
C, B, F, G	0.03 - 0.10	carbone, silicates hydratés
M	0.1 - 0.2	métaux, enstatite
S	0.1 - 0.3	silicates, métaux
Q	0.2 - 0.5	silicates
V	0.2 - 0.5	silicates (pyroxène, feldspath)
E	0.3 - 0.6	enstatite + silicates pauvres en fer
X	0.03 - 0.6	non connue

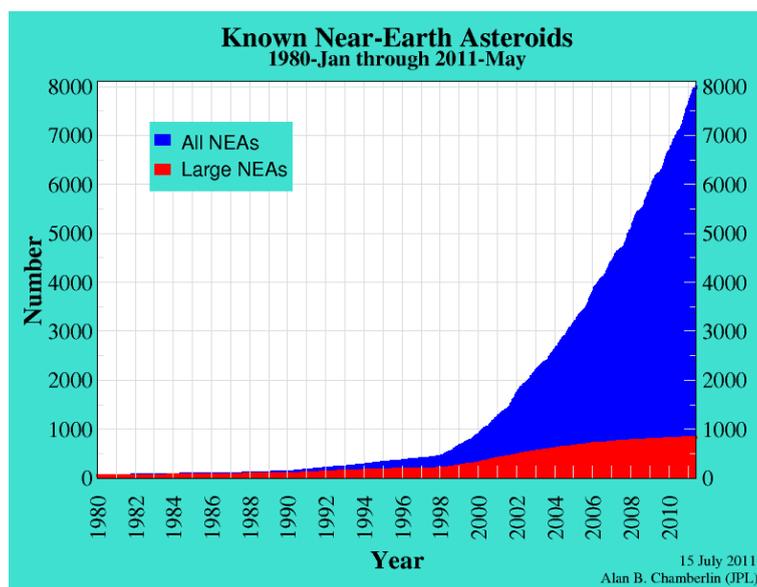


FIG. 1.12 – Évolution du nombre de découverte de NEAs de 1980 à nos jours. La croissance est exponentielle depuis les années 2000. La majeure partie des astéroïdes découverts sont de diamètre en-deçà du kilomètre [JPL, 2011b].

Apollo est le premier astéroïde géocroiseur découvert en 1932 grâce à des observations photographiques effectuées à Heidelberg. Mais il est resté perdu jusqu’en 1973. Durant les décennies suivantes, seulement quelques géocroiseurs ont été découverts et la plupart d’entre eux furent temporairement perdus. Les instruments utilisés étaient des télescopes Schmitt à champ large avec une ouverture modeste. Certains des programmes de recherche utilisant la technique photographique contribuent toujours à la découverte de NEOs avec de nouvelles techniques. Il y a par exemple le programme *Planet-Crossing Asteroid Survey* initié en 1973. C’est le plus ancien programme de recherche dédié à la recherche de NEAs qui utilise un télescope Schmitt de 0.46 m à l’observatoire de Palomar en Californie. Il existe un autre survey installé au Palomar et utilisant le même instrument, le *Palomar Asteroid and Comet Survey* débuté en 1982. Ces deux programmes couvrent à eux deux 6000 deg² du ciel par mois. Ils concentrent l’essentiel de leur recherche à l’opposition et le long de l’écliptique afin de couvrir un maximum du ciel chaque nuit. Au début des années 80, la technique des CCDs a fait son apparition. Un programme de recherche alternatif, utilisant des détecteurs CCD plutôt que des plaques photographiques a été mis en place

en 1981, le programme *Spacewatch*. Ce programme fonctionne encore maintenant et on lui doit d'avoir pu retrouver en 2000 l'astéroïde (719) Albert, rapidement perdu après avoir été observé en 1911. Il utilise un télescope Newton de 0.9 m de diamètre et utilise une large mosaïque de CCDs (quatre CCDs de 4608×2048 pixels chacun). D'autres programmes de recherche utilisant cette technique ont vu le jour, tels LINEAR (Lincoln Near-Earth Asteroid Research), NEAT (Near-Earth Asteroid Tracking), LONEOS (Lowell Observatory Near-Earth Object Search) et CSS (Catalina Sky Surveys) et peuvent avoir un champ jusqu'à 3 deg^2 . La figure 1.13 montre la contribution de ces surveys dans la découverte de géocroiseurs depuis 1995 jusqu'à nos jours.

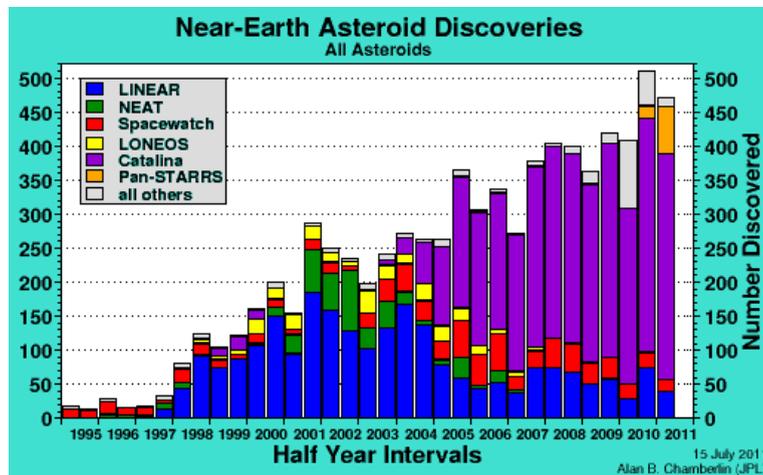


FIG. 1.13 – Statistique de découverte selon les programmes de recherches (surveys). Le nombre de découverte par survey est aussi indiqué [JPL, 2011b].

En 1992, une étude d'un congrès américain a produit un rapport dans lequel il souligne la nécessité d'un réseau de télescopes qui pourrait augmenter le taux de découverte mensuel de quelques géocroiseurs à quelques milliers. Ce réseau est appelé *Spaceguard* et les objets cibles sont des géocroiseurs de diamètre supérieur à 1 km, les comètes, des objets de la classe de l'impacteur de Tunguska et des objets de dimension comprise entre 100 m et 1 km. Les programmes de recherche membres du Spaceguard sont ceux décrits ci-dessus (utilisant les techniques CCDs) et bientôt, la nouvelle génération de surveys, qui a déjà commencé avec Pan-STARRS (Panoramic Survey Telescope & Rapid Response System) dont les performances ont été testées dans Vereš et al. [2009]. Il est composé de quatre miroirs observant la même région du ciel simultanément. Ainsi, Pan-STARRS couvre environ 6000 deg^2 par nuit et avec un temps d'exposition compris entre 30 et 60 secondes, permettant ainsi d'observer des objets de faible magnitude visuelle ($V \leq 24$).

Enfin, d'autres surveys et missions spatiales¹⁵ (futurs ou actuels) participent à la découverte des NEOs (Tab. 1.6). Outre Pan-STARRS déjà mentionné, un autre programme de recherche dédié à l'astrométrie, le Large Synoptic Survey Telescope (LSST), commencera le survey vers 2018. Il pourra fournir des observations jusqu'à 50 mas de précision et pourra observer des objets de magnitude $V > 20$. Quatre missions dédiées à l'astrométrie permettront d'obtenir des observations astrométriques sans précédent (de l'ordre du mas, voire en-deçà) et notamment le satellite Gaia (voir chap. 7, 8 et 9) dont le départ de la mission est prévu pour 2013.

Les géocroiseurs sont généralement découverts à des dates voisines de leur rencontre proche

¹⁵Bien que certaines missions ou surveys ne soient pas forcément dédiés à l'astrométrie

TAB. 1.6 – Missions actuelles et futures basées au sol (e) ou dans l’espace (s). D’après [Desmars et al. \[2010\]](#).

Mission	Date	Astrométrie ^(a)	Type	Precision
Pan-STARRS	2010 (PS1) –	✓	e	70–100 mas, $V > 20$
LSST	2018	✓	e	50–100 mas, absolute, $V > 20$
Nano-JASMINE ^(b)	2011 (2 ans)	✓	s	3–20 mas, $Kw < 11$
Gaia ^(c)	2012 (5 ans) – 2020	✓	s	0.3–10 mas, $V \leq 20$
SIM	2017 ? (5 ans)	✓	s	μ as – mas
J-MAPS	2013 (2 ans)	✓	s	mas level, $V \leq 14$
SPITZER	2003 (5+ans)	-	s	IR
HERSCHEL	2009 (3 ans)	-	s	IR
WISE	2009 (1+ans)	-	s	IR
HST	1990	-	s	≈ 500 mas, general
JWST	2014	-	s	general
New Horizons	2015	-	s	TNOs
ALMA	2012	-	e	sub-millimeter
SOFIA	2010	-	e	IR
TMT	2018	-	e	general
E-ELT	2018	-	e	general

(a) Certaines missions sont spécialement dédiées à l’astrométrie et vont optionnellement fournir des caractéristiques physiques des cibles ; d’autres, conçues dans d’autres buts, pourraient apporter des données astrométriques.

(b) Il y a une série de projets JASMINE au Japon: Nano, Small et ”full-scale”

(c) La mission s’étalera de 2013-2018 et la publication du catalogue astrométrique final est prévue pour 2020.

avec la Terre car ils peuvent être observés dans des conditions favorables. En fait, du fait de leur proximité, ils apparaissent plus brillants que d’habitude. Le figure 1.14 montre que la plupart des astéroïdes sont au plus proche de la Terre quand leur élongation solaire est proche de 90° car en effet, la plupart des orbites croisent celle de la Terre et ne sont pas tangentes. De plus, la plupart de ces astéroïdes sont découverts quand leur élongation solaire est voisine de 160° . Cette valeur correspond à la meilleure période d’observation en raison de sa proximité avec l’opposition.

Pour détecter de possibles PHAs, les campagnes d’observations devraient cibler leurs recherches lorsque l’élongation solaire est d’environ 90° . Cette éventualité a été étudiée dans [NASA \[2007\]](#). Les auteurs analysent différents programmes pour détecter et suivre des objets potentiellement dangereux (PHAs) et explorer des programmes de surveys alternatifs. Par rapport à des surveys basés au sol, ceux situés dans l’espace – au point L1 ou sur une orbite voisine de celle de Vénus – permettent d’accéder à presque tout le ciel à n’importe quel moment de la journée, sans interférence de la lumière du jour aux basses élongations solaires par exemple. Dépendant du système utilisé (téléscope optique ou infrarouge, taille du télescope), les surveys basés dans l’espace permettront de découvrir entre 82-92% des PHAs d’ici fin 2020, en comparaison au programme Spaceguard où ce nombre est de 14% et de 75% pour Pan-STARRS.

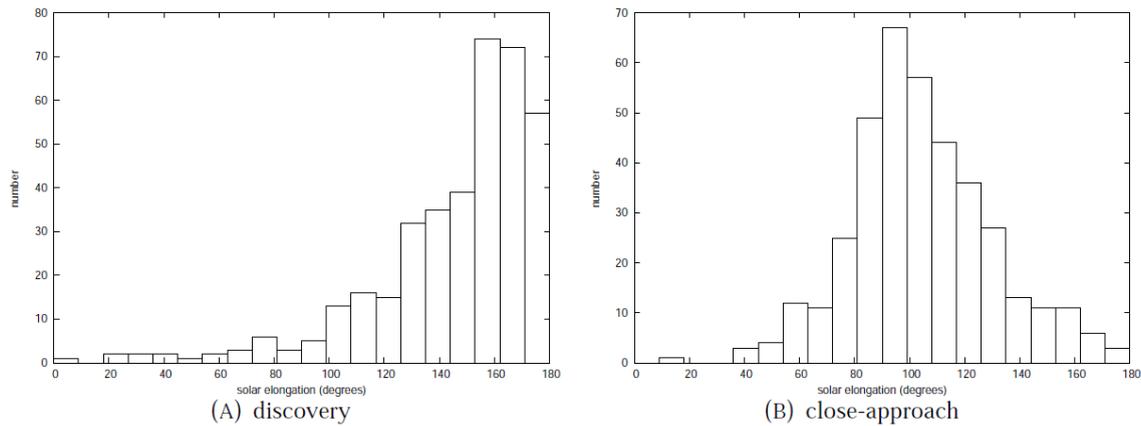


FIG. 1.14 – Répartition de l'élongation solaire pour 386 astéroïdes lors de leur découverte (A) et leur rencontre proche avec la Terre (B). D'après [Desmars et al. \[2010\]](#).

1.7 Les différents types de mesures

Le Minor Planet Center¹⁶ (MPC) fournit toutes les observations liées aux astéroïdes. Le tableau 1.7 fournit une statistique sur les différents types de mesures (représentant au total plus de 70 millions de mesures). Les premières observations d'astéroïdes ont été faites à l'aide de micromètres durant le XX^e siècle, dans un système de référence spécifique, et la plupart a été convertie en coordonnées J2000.0. Jusqu'au années 80, les plaques photographiques ont permis de meilleures mesures de positions d'astéroïdes. Puis les caméras CCD ont pris le relais en révolutionnant les mesures astrométriques et depuis, pratiquement toutes les observations optiques d'astéroïdes sont faites avec des CCDs. Des satellites d'observations tel WISE fournissent aussi un grand nombre de mesures astrométriques.

D'autres centres fournissent aussi des mesures astrométriques pour les astéroïdes tel AstDys¹⁷. Dans leurs fichiers d'observations sont aussi indiqués les résidus des valeurs O-C (position observée - position calculée) pour chaque type de mesure ainsi qu'un poids pour chaque observation suivant sa précision. Pour estimer la précision astrométrique pour chaque type de mesure présenté dans le tableau 1.7, on peut calculer une moyenne quadratique pondérée de tous les O-Cs. En effet, à chaque observation est assigné un poids statistique relatif à la précision de la mesure permettant ainsi le rejet ou non de l'observation lors de l'ajustement d'orbite. On résume dans le tableau 1.8 le nombre, le pourcentage de mesures acceptées et la précision estimée pour chaque type d'observation. À la vue ce tableau, les mesures radar apparaissent comme étant les plus précises. Viennent ensuite les observations dérivant des occultations (0.14 arcsec) et des observations "géocentriques" Hipparcos (0.18 arcsec). Bien sûr, les plus anciennes techniques d'observations, telles les plaques photographiques ou le micromètre, restent les moins précises (1.0-1.8 arcsec). Enfin, il apparaît que les observations provenant des satellites d'observations (HST, Spitzer ou WISE) ne sont pas très précises. L'explication réside dans le fait qu'ils ne sont pas dédiés aux mesures astrométriques et encore moins à celles qui concernent les astéroïdes.

¹⁶<http://www.minorplanetcenter.net/iau/ECS/MPCAT-OBS/MPCAT-OBS.html>

¹⁷<http://hamilton.dm.unipi.it/astdys/>

TAB. 1.7 – Statistique d’occurrence sur différents types de mesures fournis par la base de données du MPC. D’après [Desmars et al. \[2010\]](#).

code	type		pourcentage	Intervalle de temps
C	CCD		94.04%	1986-2010
S/s	Satellite observation		3.91%	1994-2010
		<i>HST</i>	0.11%	1994-2009
		<i>Spitzer</i>	0.01%	2004-2004
		<i>WISE</i>	99.88%	2010-2010
A	Observations from B1950.0 converted to J2000.0		0.87%	1802-1999
c	Corrected without republications CCD observation		0.62%	1991-2007
P	Photographic		0.47%	1898-2009
T	Méridien or transit cercle		0.04%	1984-2005
X/x	Discovery observations		0.02%	1891-2010
M	Micrometer		0.02%	1845-1954
H	Hipparcos geocentric observations		0.01%	1989-1993
R/r	Radar observation		0.00%	1968-2006
E	Occultations derived observations		0.00%	1961-2010
V/v	”Roving observer” observation		0.00%	2000-2010
n	Mini-normal place derived from averaging observations from video frames		0.00%	2009-2009
e	Encoder		0.00%	1993-1995

TAB. 1.8 – Précision des mesures fournies par le MPC. D’après [Desmars et al. \[2010\]](#).

Type	Nom	Nombre de mesures	Mesures acceptées [%]	Précision
C	CCD	59 591 264	99.28%	0.590 arcsec
S	Hubble Space Telesc.	763	96.85%	0.548 arcsec
S	Spitzer	45	20.00%	1.455 arcsec
S	WISE	994 547	99.93%	0.581 arcsec
A	B1950 to J2000	630 213	81.61%	1.026 arcsec
c	corrected ccd obs.	401 489	99.40%	0.565 arcsec
P	Photographic	340 862	85.51%	0.902 arcsec
T	Meridian/transit circle	26 968	99.73%	0.274 arcsec
M	Micrometer	12 081	90.02%	1.804 arcsec
H	Hipparcos obs.	5 494	100.00%	0.182 arcsec
E	Occultations	1 285	100.00%	0.143 arcsec
R	Ranging	493	97.57%	6.435 km
R	Doppler	367	98.91%	7.340 km/day
V	Roving observer	356	47.75%	0.720 arcsec
e	Encoder	16	100.00%	0.581 arcsec

Chapitre 2

Dynamique des géocroiseurs

Sommaire

2.1	Éléments orbitaux	34
2.2	Modèle de forces	35
2.2.1	La gravitation et la relativité	35
2.2.2	L'effet Yarkovsky	37
2.2.3	Autres forces non-gravitationnelles	40
2.3	Détermination, amélioration d'orbite et propagation d'erreur	41
2.3.1	Orbite préliminaire et Statistical Ranging	41
2.3.2	Ajustement aux observations	44
2.3.3	Propagation d'erreur	45

2.1 Éléments orbitaux

Les astéroïdes ont des orbites elliptiques dont l'un des foyers principaux est le Soleil. À partir de trois observations topocentriques (α , δ), une orbite peut être complètement définie par la détermination d'éléments orbitaux définissant la taille de l'orbite elliptique et l'orientation de celle-ci dans l'espace. Il existe différentes méthodes de détermination d'orbite à partir de trois observations dont les plus utilisées sont la méthode de Gauss et la méthode de Laplace. Il existe aussi des méthodes de détermination d'orbite à partir de deux observations telles la méthode Väisälä [Dubyago, 1961] et plus récemment la méthode du Statistical Ranging ([Virtanen et al., 2001]). Le processus de détermination d'orbite permet d'avoir un système d'éléments orbitaux dits conditions initiales, au nombre de 6, permettant de décrire cette orbite à une époque de référence T_0 :

Éléments képlériens

Les coordonnées képlériennes sont les coordonnées naturelles pour caractériser une orbite. Deux éléments déterminent sa taille : le demi-grand axe a et l'excentricité e ; les quatre autres déterminent soit son orientation dans l'espace – il s'agit de l'inclinaison i de l'orbite par rapport au plan de l'écliptique ; la longitude du nœud ascendant Ω étant l'angle entre le point vernal et la ligne des nœuds – soit repèrent l'objet sur son ellipse – l'argument au périhélie ω qui détermine la position de l'astéroïde par rapport à Ω lors de son passage au périhélie ; et enfin l'anomalie moyenne M qui est un angle qui repère temporellement l'astéroïde depuis son dernier passage au périhélie. Le système $(a, e, i, \Omega, \omega, M)$ de conditions initiales de l'orbite à l'époque T_0 est privilégié par le JPL pour la caractérisation orbitale des astéroïdes.

Éléments équinoxiaux

Ce système de coordonnées fut utilisé il y a plus de deux siècles par Lagrange pour l'étude des effets séculaires dus aux perturbations planétaires mutuelles. Ces éléments ont été choisis du fait qu'ils sont spécialement adaptés aux orbites ayant une excentricité et/ou une inclinaison nulle et aussi pour des inclinaisons valant 90° . Ainsi, ces éléments peuvent être utilisés pour la correction différentielle dans le processus de détermination d'orbite, mais aussi pour l'intégration d'orbite fortement perturbée.

Six éléments constituent ce système de coordonnées, construits à partir des éléments d'orbites képlériens $(a, e, i, \Omega, \omega, M)$. Les coordonnées (h, k) sont les composantes du vecteur excentricité e et (p, q) celles du vecteur nœud ascendant Ω .

$$\begin{aligned} a &= a \\ h &= e \sin(\omega + \Omega) \\ k &= e \cos(\omega + \Omega) \\ p &= \tan(i/2) \sin \Omega \\ q &= \tan(i/2) \cos \Omega \\ \lambda &= M + \omega + \Omega \end{aligned}$$

Ce système de coordonnées est particulièrement privilégié par le système NEODYs-Clomon.

Éléments cartésiens

À partir des éléments képlériens, il est aussi possible de représenter l'état de l'astéroïde sur son orbite, en terme de coordonnées de positions (\mathbf{x}) et de vitesses (\mathbf{v}) , avec des éléments dits cartésiens. Ils peuvent être exprimés dans un repère lié à l'écliptique ou à l'équateur. Le site de l'IMCCE privilégie ce système de coordonnées pour caractériser les conditions initiales d'un astéroïde.

2.2 Modèle de forces

2.2.1 La gravitation et la relativité

La gravitation est la force principale traduisant l'attraction réciproque de corps massifs entre eux sous l'effet de leur masse. Intuitivement comprise par Aristote, Galilée Galilei (1564-1642) fut le premier à en modéliser le principe à travers le pendule pesant et la vitesse de chute d'un corps dans le vide et dans l'air. C'est Isaac Newton (1643-1727) qui le premier établit la loi de la gravitation universelle suite à l'épisode – absolument légendaire (Fig. 2.1) – de la chute d'une pomme sur sa tête. Il établit les lois fondamentales de la dynamique, basées sur l'étude de l'accélération d'un corps (et non seulement de la vitesse).

Il publia en 1687, dans son œuvre maîtresse, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, une loi universelle de la gravitation, unifiant la mécanique terrestre et la mécanique céleste : L'accélération d'une particule v et de masse m_v est due à la contribution des forces de gravitation exercées par N particules telle que :

$$\mathbf{F}_G = m_v \ddot{\mathbf{r}}_v = -m_v k^2 \left[\frac{\mathbf{r}_v}{r_v^3} + \sum_{\mu=1, \mu \neq v}^N m_\mu \left(\frac{\mathbf{r}_\mu}{r_\mu^3} - \frac{\mathbf{r}_\mu - \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_\mu - \mathbf{r}_v\|^3} \right) \right] \quad (2.1)$$

où $\ddot{\mathbf{r}}_v$ est l'accélération de la particule v subissant une résultante de force gravitationnelle \mathbf{F}_G , k est la constante gravitationnelle de Gauss¹, \mathbf{r} la position du corps considéré exprimée dans un repère

¹ $k \approx 0.01720209895 \text{ AU}^{\frac{3}{2}} \text{ D}^{-1} \text{ M}_\oplus^{-\frac{1}{2}}$



FIG. 2.1 – Dessin humoristique sur la légende de Newton et la pomme. *Credits : Sanrankune et Irréconciliable.*

héliocentrique et m_μ la masse en unité de masse solaire² du corps μ perturbateur.

Un problème à deux corps ne suffit pas à rendre compte de l'exactitude du mouvement de géocroiseurs et notamment des PHAs. En effet, [Giorgini et al. \[2008\]](#) ont montré à travers l'exemple de l'astéroïde Apophis (voir chap. 5) que non seulement les perturbations de la Terre et de la Lune devaient être prises en compte séparément (et donc, non pas le barycentre du système Terre-Lune) mais aussi celles des MBAs tels que Cérés, Pallas et Vesta. Par conséquent, j'ai inclus dans mon modèle de forces gravitationnelles les perturbations du Soleil, des 8 planètes, de la Lune ainsi que celles de Cérés, Pallas et Vesta.

En 1915, Albert Einstein modélisa la gravitation comme une manifestation de la déformation de l'espace-temps sous l'effet de l'énergie de la matière qui s'y trouve. La théorie newtonienne est une approximation de la relativité générale d'Einstein, dans la limite des champs gravitationnels faibles et des vitesses petites devant la vitesse de la lumière. Pour notre système solaire, le Soleil est le corps responsable de la déformation de la géométrie de l'espace-temps. Dans l'approximation de masses $m_\nu \ll M_\odot$, masse du Soleil, la force relativiste exercée par le Soleil sur une particule ν , et que j'ai utilisée dans mon modèle de force, est :

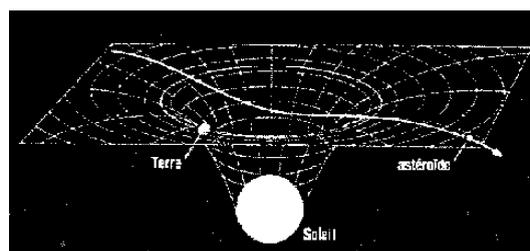


FIG. 2.2 – Déformation de l'espace temps par le Soleil.

² M_\odot est un facteur de conversion pour exprimer la masse M_μ du corps perturbateur en unité de masse solaire. Sa valeur numérique est égale à la masse du Soleil. Ainsi, m_μ est exprimée en unité de masse solaire, si $GM_\mu = k^2$

$$\mathbf{F}_R = m_v \frac{k^2}{c^2 r^3} \left[\mathbf{r} \left(\frac{4k^2}{r} - \dot{\mathbf{r}}^2 \right) + 4\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) \right] \quad (2.2)$$

2.2.2 L'effet Yarkovsky

L'effet Yarkovsky est la principale force non gravitationnelle agissant sur l'orbite d'objets ayant un diamètre $D \leq 20$ km environ et entraînant une variation à très long terme du demi-grand axe : à cause de la différence de température à la surface de l'astéroïde et de son inertie thermique, la ré-émission de la radiation solaire incidente dans l'infrarouge va être anisotrope, ce qui va affecter le mouvement orbital de l'astéroïde.

L'accélération de Yarkovsky peut être décomposée en une composante diurne et une composante saisonnière. La perturbation peut aussi avoir une composante radiale qui provoquera un léger changement du moyen mouvement, une composante normale qui agira sur l'inclinaison de l'orbite et une composante le long de la trajectoire qui va soit accélérer soit décélérer le mouvement de l'astéroïde et produire par conséquent une dérive séculaire du demi-grand axe. La difficulté pour connaître avec précision l'intensité de cette perturbation réside d'une part dans la modélisation de la force en elle même mais aussi sur la connaissance de paramètres physiques. Dans le cas où ces derniers sont inconnus ou mal connus, la modélisation la plus simple de l'effet Yarkovsky est de considérer une accélération transverse, inversement proportionnelle au carré de la distance héliocentrique [Chesley et al., 2008, Delbò et al., 2007] telle que :

$$\boldsymbol{\gamma}_Y = \frac{A_2}{r^2} \mathbf{T} \quad (2.3)$$

où $\boldsymbol{\gamma}_Y$ est l'accélération de Yarkovsky, A_2 un paramètre non-gravitationnel, r la distance héliocentrique et \mathbf{T} la composante transverse dépendant de la position et de la vitesse héliocentriques \mathbf{r} et $\dot{\mathbf{r}}$. On peut alors par la suite associer à cette accélération, un taux de variation du demi-grand axe. D'une manière générale, cette variation du demi grand-axe dépend à la fois de paramètres physiques et orbitaux :

$$da/dt = da/dt(D, P, \gamma, \kappa, \rho_s, \rho, C, a)$$

où D représente le diamètre, P la période de rotation, γ l'obliquité du spin (angle entre le vecteur rotation et la normale au plan orbital), κ la conductivité thermique surfacique, ρ_s la densité de surface, ρ la masse volumique et C la capacité calorifique. L'inertie thermique (dérivée de la connaissance de ρ , C et de κ) est tout juste connue pour les petits corps du système solaire. Ce paramètre a été mesuré pour des satellites gelés de certaines planètes (Jupiter et Saturne), durant une éclipse mutuelle par Mueller et al. [2010], pour des Troyens binaires, pour les satellites de Mars [Lunine et al., 1982] et pour plusieurs MBAs et NEAs [Delbo' and Tanga, 2009]. Il peut être obtenu indirectement à partir de spectres thermiques quand une forme et une modélisation thermique peuvent être obtenues [Lamy et al., 2008, 2010]. Des mesures infrarouges peuvent – de la corrélation inverse avec la taille – donner des indications sur l'inertie thermique [Delbo' et al., 2007].

La densité surfacique ρ_s est importante pour la propagation des ondes thermiques. Comme pour la rugosité, elle donne une indication sur l'inertie thermique (de fins régolites donneront une faible inertie thermique alors que des rochers rares à la surface donneront une forte inertie thermique). La masse volumique ρ est obtenue à partir du rapport masse/volume. La masse peut être obtenue avec une grande précision à partir d'observations au sol si l'astéroïde possède un satellite [Merline et al., 2002] ou durant une rencontre proche avec un plus petit corps (un astéroïde ou de préférence une sonde spatiale). Le volume estimé peut être donné par une bonne connaissance de la forme

(en incluant les concavités) et de la taille (ou un facteur d'échelle, une fois la forme déterminée). On l'obtient à partir de données photométriques obtenues à partir du sol combinées à des données radar et d'images optiques (ou d'observations de haute résolution angulaire) et vraisemblablement d'observations thermiques en infrarouge et d'occultations stellaires.

Le vecteur de rotation, la direction du pôle de rotation et la période de rotation peuvent être obtenus à partir de données photométriques (courbes de lumière) sur plusieurs apparitions ou plusieurs longitudes solaires [Magnusson et al., 1989], si possible combinées par imagerie afin de réduire les solutions erronées [Cellino et al., 2003, Marchis et al., 2006, Carry et al., 2008, 2010]. Ces données peuvent aussi être obtenues par de l'imagerie radar [Ostro et al., 2002].

L'effet Yarkovsky agissant sur les petits corps du système solaire n'a été considéré que récemment notamment pour comprendre les erreurs systématiques sur l'orbitographie du satellite artificiel LAGEOS [Rubincam, 1988] et plus tard pour expliquer l'évolution à long terme de l'orbite des astéroïdes [Rubincam, 1998, Vokrouhlicky, 1998, Vokrouhlicky and Farinella, 1998].

À ce jour, l'effet Yarkovsky a été clairement et directement mis en évidence pour un seul astéroïde, (6489) Golevka par Chesley et al. [2003] : les données utilisées regroupaient toutes les observations optiques de Golevka, des données radar (mesures ranging et Doppler) effectuées en 1991, 1993 et 1995 (lors de rapprochements avec la Terre) et deux modèles pour le mouvement de Golevka : Le premier en ne considérant que des perturbations gravitationnelles et le deuxième en y incluant l'effet Yarkovsky. Les données radars répertoriées dans Chesley et al. [2003] ont montré que ces prédictions étaient en dehors de l'intervalle d'erreur à 3σ pour le modèle purement gravitationnel mais étaient cohérentes avec celui incluant l'effet Yarkovsky (Fig. 2.3).

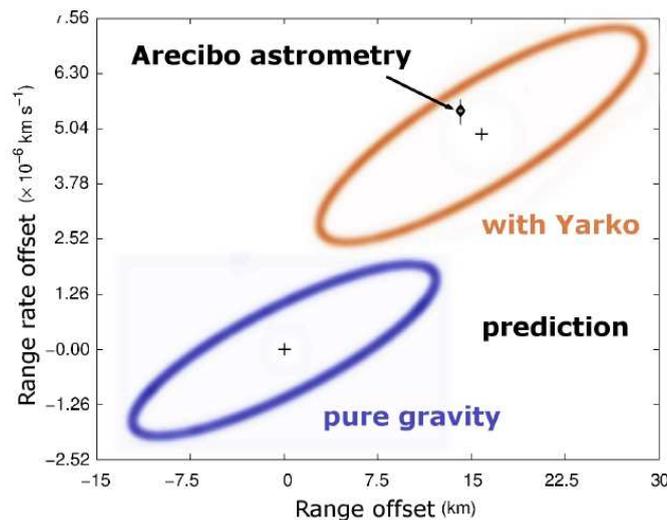


FIG. 2.3 – Quantités mesurées à Arecibo (range et range rate) en mai 2003 pour l'astéroïde (6489) Golevka. La prédiction de la position de Golevka en considérant deux modèles (la gravitation seule et en y incluant l'effet Yarkovsky) est représentée ainsi que l'ellipse de confiance à 90%. La mesure radar est représentée par le symbole noir. D'après Chesley et al. [2003]

Quelle peut être l'influence à long terme sur la dynamique des astéroïdes et quelles pourraient être les conséquences pour la Terre ? Par les mécanismes de source et de transport, les dynamiciens ont tenté de savoir si l'effet Yarkovsky pouvait, à long terme, être une source d'injection d'objets de la ceinture principale vers la population des géocroiseurs. Cela fait plus de 60 ans que le phénomène du transport de météorites de la ceinture principale dû à l'effet Yarkovsky est étudié. La première étude a été faite dans Öpik [1951]. D'autres publications [Peterson, 1976, Farinella et al., 1998, Vokrouhlický and Farinella, 1999, Bottke et al., 2000] ont montré que les météorites

peuvent atteindre la Terre en deux phases : (i) Un changement du demi grand-axe sur environ 10 millions d'années, du fait de l'accélération de Yarkovsky. (ii) une capture en résonance gravitationnelle qui augmente l'excentricité jusqu'à $e \sim 1$ en environ 1 million d'années (Fig.2.4). Environ 1% des météoroïdes entre en collision avec la Terre (et sont retrouvés sous la forme de météorites) et la plupart des autres tombent directement dans le soleil.

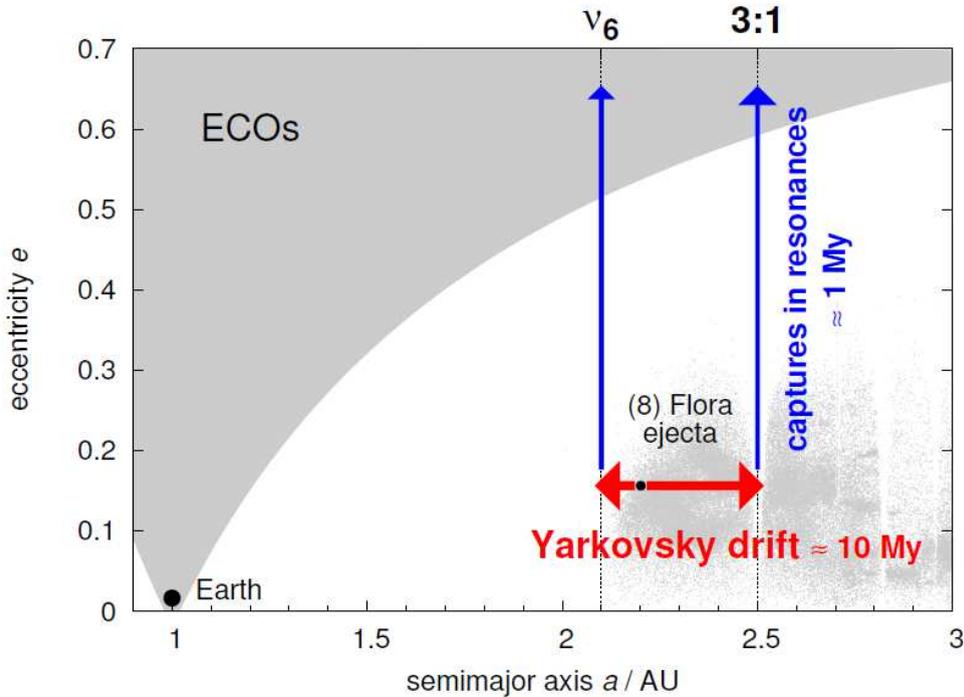


FIG. 2.4 – Représentation schématique du transport de météorites de la ceinture principale. Dans un premier temps, l'effet Yarkovsky modifie, en environ 10 millions d'années, le demi-grand axe des météoroïdes (présents dans la zone de la famille de Flora) vers des résonances gravitationnelles comme la résonance 3 :1 en moyen mouvement avec Jupiter et la résonance séculaire v_6 avec Saturne. Puis, dans un deuxième temps, les résonances augmentent rapidement l'excentricité et en environ 1 million d'années, les météoroïdes atteignent la zone des géocroiseurs (ECOs) avant de tomber sur Terre (1% d'entre eux) ou de tomber dans le soleil [Brož, 2006].

Un autre modèle de Yarkovsky/YORP (pour la définition de l'effet YORP, voir la sous-section 2.2.3), basé sur le même scénario que le transport de météoroïdes mentionné ci-dessus, a été construit par Morbidelli and Vokrouhlický [2003]. Les observations de géocroiseurs montrent que la distribution cumulée de leur magnitude absolue (pour $15.5 < H < 18.0$) a une pente $\gamma = 0.35$ et le taux d'expulsion causée par la diffusion des planètes est d'environ 200 objets (de diamètre $D > 1$ km) par millions d'années. En considérant une source de la ceinture principale de $\gamma = 0.26$ (toujours pour $15.5 < H < 18.0$), le modèle de Morbidelli and Vokrouhlický [2003] transporte un flux de 150-200 objets ($D > 1$ km) dans les résonances 3 :1 et v_6 et deviennent rapidement des géocroiseurs qui ont une pente de $\gamma = 0.33$. L'effet Yarkovsky/YORP pourrait alors expliquer que les géocroiseurs ont une pente plus importante que celle des MBAs.

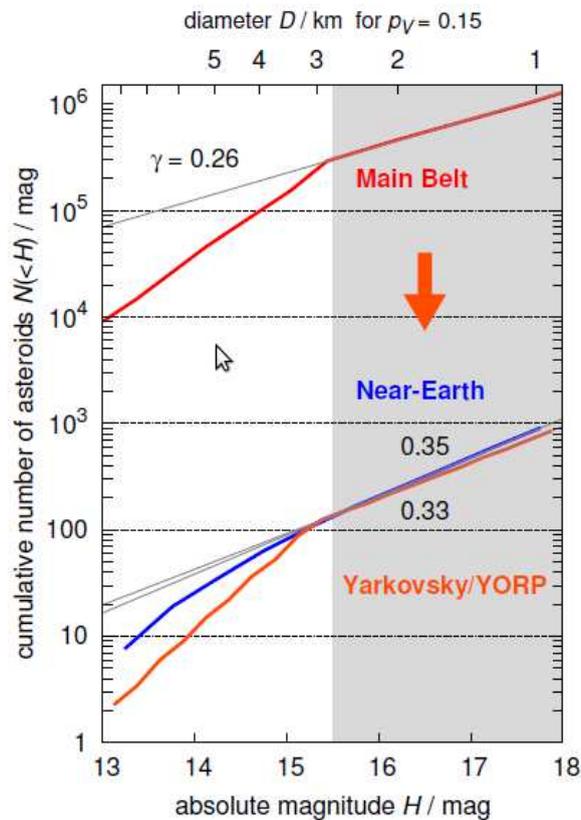


FIG. 2.5 – Distribution cumulée des magnitudes absolues H pour trois populations : les MBAs, les géocroiseurs et la population issue du modèle de Yarkovsky/YORP qui suppose le transfert de MBAs vers la zone des géocroiseurs [Morbidei and Vokrouhlický, 2003].

2.2.3 Autres forces non-gravitationnelles

Effet YORP

L'effet YORP (Yarkovsky-O'Keefe-Radzievskii-Paddack) peut être vu comme une approximation à l'ordre 2 de l'effet Yarkovsky. Les causes sont les mêmes mais pas les conséquences. L'effet YORP n'agit que sur des corps non-sphériques [Rubincam, 2000] et crée un couple de forces qui modifie, sur environ 10^8 ans, la période de rotation (qui peut tendre vers 0 ou $l' \infty$) et l'obliquité du spin (qui peut tendre vers 0° ou 180°). Des détections directes de l'effet YORP dans la rotation d'astéroïdes tels que 54509 YORP [Lowry et al., 2007, Taylor et al., 2007], 1862 Apollo [Kasalainen et al., 2007], 1620 Geographos [Durech et al., 2008] et 3103 Eger [Durech et al., 2009] ont prouvé son existence. Il existe différentes modélisations simplifiées de l'effet YORP [Breiter et al., 2007, Scheeres, 2007, Statler, 2009] dont la faiblesse est une extrême sensibilité aux détails de la forme de l'objet, la position de son centre de masse et l'orientation de son spin.

Pression de radiation solaire

C'est un effet [Vokrouhlický and Milani, 2000] thermique dû à la réémission ou la réflexion de rayons lumineux arrivant sur des objets avec un albédo zonale et une excentricité non nulle. La force agit dans la direction radiale Soleil-astéroïde et entraîne une précession du nœud et du périhélie en environ 10^3 - 10^5 années.

Force de Poynting-Robertson

À cause des radiations solaires, des particules de la taille de grains de poussières spiralent vers le Soleil en augmentant leur vitesse orbitale sur une longue échelle temps, environ 10^8 révolutions avant de tomber dans le Soleil, pour un objet sphérique de 1 cm de rayon [Robertson, 1937]. Cette force agit dans la direction opposée au mouvement orbital de la particule entraînant une diminution de son moment cinétique. En effet, dans un repère fixe lié au système solaire, la réémission des photons est anisotrope et par conséquent les photons réémis emportent une quantité du moment cinétique de la particule avec eux.

Activité cométaire

Certains astéroïdes peuvent présenter temporairement une activité cométaire. En effet, certains NEOs montrent temporairement une queue de poussière et une queue ionique [Toth, 2006]. Ils agissent comme des comètes mais ont une orbite typique d'un astéroïde (avec un paramètre de Tisserand par rapport à Jupiter > 3). L'effet d'une telle activité sur l'orbite n'est pas très bien connue.

Le tableau 2.1 donne un aperçu de l'intensité des accélérations non gravitationnelles agissant sur des corps de 10 cm à 10 km de diamètre comparée à l'accélération gravitationnelle du Soleil. L'effet Yarkovsky apparait comme la principale source d'effets non gravitationnels agissant sur les NEOs.

TAB. 2.1 – Valeurs approximatives des accélérations radiales et/ou transverses agissant sur des corps de tailles comprises entre 10 cm et 10 km. La force de gravitation exercée par le Soleil est ramenée à 1 [Brož, 2006].

accélération type	radial	transverse
Gravitation	$GM \simeq 1$	
Yarkovsky/YORP	10^{-7} - 10^{-11}	10^{-8} - 10^{-12}
Pression de radiation	10^{-6} - 10^{-11}	
Poynting-Robertson		10^{-10} - 10^{-15}

2.3 Détermination, amélioration d'orbite et propagation d'erreur

2.3.1 Orbite préliminaire et Statistical Ranging

Pour pouvoir déterminer complètement les éléments d'une orbite (en coordonnées cartésiennes ou en éléments orbitaux), au moins trois observations angulaires de l'objet sont nécessaires. Dans ce cas, certaines méthodes comme les méthodes de Gauss ou de Laplace [Danjon, 1959] permettent de résoudre ce problème. Quand seulement deux observations de l'objet sont disponibles, le problème est indéterminé et ne peut être résolu qu'en faisant des hypothèses ou à l'aide d'outils statistiques. Parmi les méthodes de déterminations d'orbite pour arc court en utilisant deux observations, il y a la méthode de Väisälä [Orlov, 1940, Dubyago, 1961] qui fait l'hypothèse que l'objet est au périhélie lors de la seconde observation. Cette hypothèse est plausible dans le sens où généralement les objets sont découverts ou davantage accessibles aux observations lorsqu'ils sont au plus près du Soleil. Il est alors possible, à partir d'une estimation de la distance géocentrique, de déterminer les positions héliocentriques de l'objet pour la première observation à l'aide d'un développement de Taylor au voisinage des positions héliocentriques à la seconde observation.

Une autre méthode, qui elle ne fait aucune hypothèse sur les observations a été étudiée dans [Virtanen et al. \[2001\]](#). Il s'agit du Statistical Ranging reposant sur une inversion statistique à l'aide de la technique de Monte Carlo en utilisant ou non des informations *a priori* (méthode bayésienne) pour en déduire des informations *a posteriori*. La méthode consiste à bruite les observations avec une erreur ε suivant une loi uniforme ou gaussienne et de donner des valeurs aléatoires à la distance astrocentrique ρ_1 au temps t_1 . On en déduit ensuite les éléments orbitaux de l'orbite les plus compatibles avec les observations. Alors que l'orientation de l'orbite (à travers les valeurs des éléments i , Ω et ω) est unique en considérant l'orientation des vecteurs positions héliocentriques \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 , j'ai étudié deux méthodes pour la détermination de la taille de l'orbite, à travers les valeurs des éléments a et e .

L'une d'elle, citée dans [Dubyago \[1961\]](#) et [Virtanen et al. \[2001\]](#) consiste à estimer le rapport de l'aire du secteur A_s et l'aire du triangle A_t formés par les positions \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 telle que

$$\frac{A_s}{A_t} = \frac{\tau\sqrt{p}}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|} \equiv cf_H$$

où p est le paramètre orbital de l'ellipse et $\tau = k(t_2 - t_1)$ (k étant la constante de Gauss et t_i les dates d'observations). cf_H est déterminé de manière itérative, une valeur approchée est donnée dans [Dubyago \[1961\]](#). Cette approche permet alors d'en déduire l'excentricité e (grâce à l'équation de l'ellipse) puis le demi-grand axe a .

L'autre méthode que j'ai testée est la méthode dite *p-itération* [[Bate et al., 1972](#)]. Contrairement à la méthode décrite ci-dessus, celle-ci va permettre de déduire le demi-grand axe de l'ellipse à l'aide d'un processus itératif pour la détermination du paramètre p . Soit Δt la différence de temps entre les deux observations, Δf la différence en anomalie moyenne entre ces deux dates et r_1 et r_2 les distances héliocentriques de l'objet. Il est alors possible de déterminer trois constantes :

$$\begin{cases} k = r_1 r_2 (1 - \cos \Delta f) \\ l = r_1 + r_2 \\ m = r_1 r_2 (1 + \cos \Delta f) \end{cases}$$

telle que

$$\begin{cases} a = \frac{mkp}{(2m-l^2)p^2 + 2klp - k^2} \\ p = \frac{k}{l \pm \sqrt{2m \cos \Delta E / 2}} \end{cases}$$

où ΔE est la variation en anomalie excentrique. Il est à noter que p à une valeur double comme cela est montré sur la figure 2.6 où est représentée la variation de a en fonction de p , indiquant ainsi l'intervalle de valeurs possibles p . Une fois p fixé, la valeur de a est donc unique, quelque soit le type d'orbite.

La détermination de p va se faire à l'aide d'une procédure itérative permettant de minimiser la différence entre le Δt^* calculée et le Δt désiré en partant des valeurs initiales pour p :

$$\begin{cases} p_i = \frac{k}{l + \sqrt{2m}} \\ p_{ii} = \frac{k}{l - \sqrt{2m}} \end{cases}$$

J'ai testé deux méthodes d'itération sur le paramètre p . La première est l'interpolation linéaire ou encore appelé *regula falsi* et va calculer les valeurs de p au rang $n+1$, jusqu'à convergence, de la manière suivante :

$$p_{n+1} = p_n + \frac{(\Delta t - \Delta t_n^*)(p_n - p_{n-1})}{\Delta t_n^* - \Delta t_{n-1}^*} \quad (2.4)$$

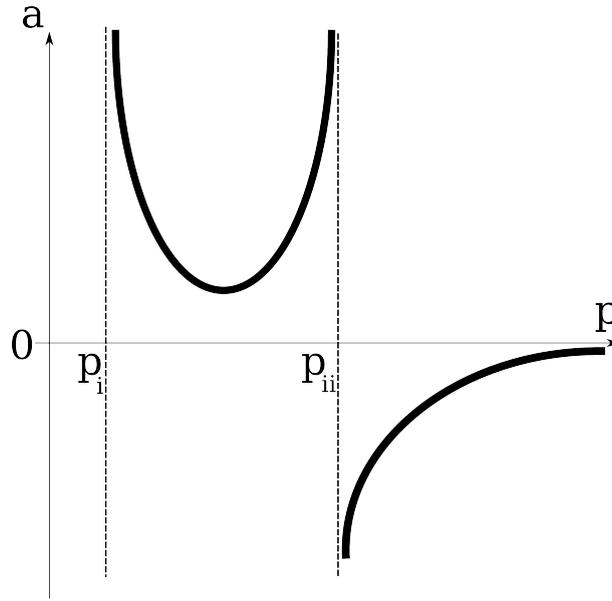


FIG. 2.6 – Variation de a en fonction de p . La zone des $a > 0$ correspond aux orbites elliptiques alors que la zone $a < 0$ correspond aux orbites hyperboliques. Les cas où $a \rightarrow \infty$ correspond aux orbites paraboliques.

L'autre méthode d'itération testée est dite *itération de Newton* et permet une convergence plus rapide en calculant la valeur de p au rang $n+1$ à l'aide de l'algorithme suivant :

$$p_{n+1} = p_n + \frac{\Delta t - \Delta t_n^*}{\left. \frac{d(\Delta t)}{dp} \right|_{p=p_n}} \quad (2.5)$$

mais cela nécessite le calcul de la pente de la courbe $\Delta t = f(p)$. J'ai donc choisi cette méthode pour le reste de mes simulations.

Les autres paramètres orbitaux déterminant l'orientation de l'orbite, i, Ω, ω, M sont calculés à partir des équations classiques. Soit $\mathbf{h} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$ le moment angulaire de l'astéroïde. Alors les autres éléments sont déterminés tels que :

$$\begin{cases} \cos i = \frac{h_z}{|\mathbf{h}|} \\ \tan \Omega = \frac{h_x}{-h_z} \\ \omega = \beta - f \\ M = E - e \sin E \end{cases} \quad (2.6)$$

où β détermine l'angle entre le nœud ascendant et \mathbf{r}_1 et f est l'anomalie moyenne. Ces grandeurs sont déterminées par les relations :

$$\begin{cases} \tan \beta = \frac{z_1}{\sin i (x_1 \cos \Omega + y_1 \sin \Omega)} \\ \cos f = \frac{p/r_1 - 1}{e} \end{cases} \quad (2.7)$$

Ces éléments d'orbites sont déterminés au temps t_1 de la première observation puis propagés à une époque uniforme T_0 .

Enfin le critère pour accepter ou rejeter les orbites calculées se fait à l'aide d'un test sur le χ^2 . Pour N orbites calculées, le χ^2 pour l'orbite k est calculé de la manière suivante :

$$\chi_k^2 = \sum_{i=1}^N \left[\frac{(\alpha_i^0 - \alpha_i)^2 \cos^2 \delta_0^i}{\sigma_{\alpha,i}^2} + \frac{(\delta_0^i - \delta_i)^2}{\sigma_{\delta,i}^2} \right] \quad (2.8)$$

Soit χ_{min}^2 le meilleur des χ^2 calculés, alors le critère d'acceptation sera la condition suivante à satisfaire [Virtanen et al., 2001] :

$$\Delta \chi^2 = \chi^2 - \chi_{min}^2 \leq 50.0 \quad (2.9)$$

où $\Delta \chi^2$ correspond à la région de confiance.

2.3.2 Ajustement aux observations

Quand de nouvelles données sont disponibles, c'est-à-dire des observations optiques, radars ou satellitaires, il est possible d'améliorer l'orbite en terme de valeurs des conditions initiales et de l'incertitude liée à ceux-ci. La méthode la plus utilisée est la méthode des moindres carrés, détaillée dans de nombreux ouvrages ou articles. J'en rappelle ici brièvement le principe.

Le principe de l'ajustement par la méthode des moindres carrés consiste à minimiser une fonction et à déterminer les valeurs optimales du vecteur $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_p)$ de p paramètres du modèle dynamique qui décrivent au mieux les observations. D'une manière générale, ces c_p peuvent être des coordonnées en positions vitesses, des masses, des coefficients non gravitationnels, etc...

Supposons que l'on dispose de N observations (α, δ) . Notons ξ , les résidus en (α, δ) correspondant à la différence entre les valeurs (α_o, δ_o) observées et celles calculées par notre modèle dynamique (α_c, δ_c) . Le vecteur ξ s'écrit alors :

$$\xi = \begin{pmatrix} \Delta \alpha_1 \\ \Delta \delta_1 \\ \vdots \\ \Delta \alpha_N \\ \Delta \delta_N \end{pmatrix}$$

Le vecteur ξ est de dimension $(2N)$ et on peut aussi attribuer un poids $(\bar{\sigma}_\alpha, \bar{\sigma}_\delta)$ à chaque observation. Ce poids peut être pris en compte en le définissant comme étant l'inverse de et l'incertitude $(\sigma_\alpha, \sigma_\delta)$ liée à l'observation et en le multipliant à chaque résidu ξ_i .

Une variation des paramètres initiaux $\Delta \mathbf{c} = (\Delta c_1, \dots, \Delta c_p)$ se traduit alors par une variation des coordonnées (α, δ) telle que $A = B \Delta C$ où :

$$A = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_N \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial c_1}(\mathbf{c}, t_1) & \cdots & \frac{\partial \xi}{\partial c_p}(\mathbf{c}, t_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \xi}{\partial c_1}(\mathbf{c}, t_N) & \cdots & \frac{\partial \xi}{\partial c_p}(\mathbf{c}, t_N) \end{pmatrix}, \Delta C = \begin{pmatrix} \Delta c_1 \\ \vdots \\ \Delta c_p \end{pmatrix}$$

La matrice B est donc une matrice de dimension $(2N, p)$ et le vecteur ΔC de dimension P . La fonction à minimiser est donc la fonction $F(\Delta \mathbf{c}) = \|A - B \Delta C\|^2$. L'équation à résoudre est $dF = 0$ et est résolue par procédure itérative jusqu'à convergence vers une solution nominale ΔC_p^* . La solution de cette équation se ramène à l'inversion d'une matrice et s'écrit : $\Delta C_p^* = (B^T B)^{-1} B^T A$. On peut donc en déduire la *matrice normale* N définie par $N = B^T B$ qui nous permet de déterminer la *matrice de covariance* Γ déterminée par $\Gamma = \sigma^2 N^{-1}$, le paramètre σ^2 représentant la variance des résidus. Cette matrice permet de connaître les incertitudes σ_p liées aux paramètres \mathbf{c} . En effet,

les éléments diagonaux de cette matrice correspondent à la variance $\sigma_p^2 = \Gamma_{pp}$ pour le paramètre c_p . Il est aussi possible de déterminer une *matrice de corrélation* D dont les éléments sont déterminés par : $D_{ij} = \frac{\sigma_i \sigma_j}{\sqrt{\sigma_i^2 \sigma_j^2}}$.

Le progiciel OrbFit utilisé à NEODYs-CLOMON permet de faire de l'ajustement d'orbite à partir d'observations optiques, radar et satellitaires (HST, WISE et Spitzer). Le poids assigné à chaque observation est donné en fonction d'un rms *à priori* sur les observations selon le code de l'observatoire qui fournit ces observations : [Carpino et al. \[2003\]](#) ont montré qu'en prenant en compte des fonctions de corrélations entre les coordonnées (α, δ) pour les observatoires fournissant le plus d'observations, il est possible de donner un rms *à priori* sur les observations. Quand ce processus n'est pas possible, c'est-à-dire quand l'observatoire ne possède pas suffisamment d'observations permettant de faire cette statistique, le poids est déterminé selon l'année de l'observations : les observations faites avant 1890 auront un rms *à priori* de 3 arcsec, celles effectuées entre 1890 et 1950 auront un rms de 2 arcsec et celles faites après 1950 auront un rms de 1 arcsec. Quand les observations sont très mauvaises (comme pour le cas d'Apophis, voir chap. 4), ce rms *à priori* peut être changé "manuellement" par l'utilisateur. Enfin, quand elle est disponible, l'ajustement prend aussi en compte la magnitude.

Ce progiciel fournit comme paramètres de sortie, les nouveaux éléments d'orbites ajustés (dont on peut choisir le type) ainsi que la matrice de covariance associée.

2.3.3 Propagation d'erreur

Pour savoir comment se propagent les incertitudes $(\sigma_1, \dots, \sigma_p)$ sur les conditions initiales d'un instant t_0 à un instant t lorsque la matrice de covariance est connue, il est nécessaire de propager la matrice de covariance. Soit la matrice de covariance à l'instant t_0

$$\Gamma_0 = \left(\frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{c}_0} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{c}_0} \right)^T$$

Si on la propage à un instant t , cette matrice devient :

$$\Gamma_t = \left(\frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{c}} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{c}} \right)^T$$

où $\mathbf{c}_0 = \mathbf{c}(t_0)$ et $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t)$. Notons Φ le flot dynamique permettant d'amener l'astéroïde de l'instant t_0 à l'instant t tel que : $\mathbf{c} = \Phi_{t_0}^t [\mathbf{c}_0]$. La différentielle de ce flot est exprimée en fonction d'une matrice de dérivées partielles, la matrice de transition d'état :

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \mathbf{c}_0} = D\Phi_{t_0}^t [\mathbf{c}_0]$$

qui est exactement la solution des équations variationnelles. Ainsi, en utilisant cette définition dans la matrice de covariance à l'instant t , on peut en déduire que :

$$\Gamma_t = \left(\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \mathbf{c}_0} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \mathbf{c}_0} \right)^T$$

Pour propager la matrice de covariance, il suffit simplement de résoudre les équations variationnelles par intégration numérique.

Lorsque la matrice de covariance n'est pas connue, on peut avoir recours à la méthode de Monte-Carlo pour propager l'incertitude liée à l'orbite. Dans ce cas, l'incertitude à propager correspond à la région de confiance donnée par l'équation 2.9.

Chapitre 3

Intégration numérique

Sommaire

3.1	Généralité	47
3.2	Intégrateurs numériques	48
3.2.1	Runge-Kutta	48
3.2.2	Quadratures de Gauss-Radau	49
3.2.3	Bulirsch–Stoer	51
3.3	L'intégrateur de Lie	53
3.3.1	L'opérateur de Lie et les séries de Lie	54
3.3.2	Le problème à N corps	55
3.3.3	Généralisation de l'opérateur de Lie	56
3.3.4	Termes de Lie pour l'accélération gravitationnelle	57
3.3.5	Termes de Lie pour l'accélération relativiste	58
3.3.6	Termes de Lie pour l'effet Yarkovsky	58
3.4	Comparaisons entre intégrateurs	60
3.4.1	Tests CPU	60
3.4.2	Intégration des équations du mouvement de Apophis	61
3.4.3	Tests de validation pour l'algorithme de l'accélération relativiste	62
3.4.4	Test de validation pour l'algorithme de l'effet Yarkovsky	63

3.1 Généralité

L'intégration des équations du mouvement de systèmes dynamiques gravitationnels, dans la mesure où ils ne sont pas intégrables quand plus de deux corps sont en interaction gravitationnelle, est généralement réalisée à l'aide d'intégrateurs numériques. Le système peut être intégré sur des échelles de temps allant de quelques jours au siècle pour la création d'éphémérides, ou sur de plus longues périodes de quelques millions d'années pour les études de stabilités. Les corps concernés peuvent très bien être de notre Système Solaire mais aussi de systèmes extra-solaires.

Les équations du mouvement d'un corps en interaction avec son environnement s'écrit sous la forme d'une équation différentielle ordinaire¹ (ODE) de la forme :

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \quad (3.1)$$

¹Une équation différentielle est dite *ordinaire* si l'équation implique les dérivées partielles d'une fonction par rapport à une seule variable. Si tel n'est pas le cas, l'équation différentielle est dite *partielle*.

où \mathbf{x} est le vecteur position du corps étudié. Cette ODE du deuxième ordre peut être découpée en deux équations du premier ordre formant le système :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v} \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \end{cases} \quad (3.2)$$

où \mathbf{v} est le vecteur vitesse du corps étudié. Le système 3.2 ne suffit pas seul à trouver une solution. Il faut aussi des conditions aux limites au problème qui sont les valeurs initiales $(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)$. Dans la section suivante, je présente les différentes méthodes numériques les plus utilisées pour l'intégration numérique des corps du système solaire.

3.2 Intégrateurs numériques

3.2.1 Runge-Kutta

La méthode de Runge-Kutta², notée *RK* par la suite, permet de propager une solution dans un intervalle en combinant les informations de plusieurs pas de temps du type *Euler* (chaque pas de temps permettant l'évaluation de la fonction force \mathbf{F}) et ajuste les informations obtenues à un développement en séries de Taylor à des ordres élevés. Soit h , le pas de temps intermédiaire, alors la méthode Runge-Kutta d'ordre 1, *RK1* est équivalente à la méthode d'Euler :

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h\mathbf{F}(\mathbf{x}_n, t_n) + O(h^2) \quad (3.3)$$

où $t_{n+1} = t_n + h$. La précision sur \mathbf{x} est connue à l'ordre 1 et il est clair qu'un tel ordre de RK n'est pas du tout précis.

La méthode d'ordre supérieur *RK2* utilise une composition de la méthode d'Euler en estimant la dérivée au milieu de l'intervalle d'intégration³ et en utilisant cette estimation pour calculer le pas réel pour amener la solution du temps t_n au temps t_{n+1} . Cet algorithme de *RK2* se traduit par :

$$\begin{cases} \mathbf{k}_1 = h\mathbf{F}(\mathbf{x}_n, t_n) \\ \mathbf{k}_2 = h\mathbf{F}(\mathbf{x}_n + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1, t_n + \frac{1}{2}h) \\ \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \mathbf{k}_2 + O(h^3) \end{cases} \quad (3.4)$$

La méthode *RK4* est la plus utilisée pour des versions du RK. Le principe consiste à évaluer deux fois la fonction \mathbf{F} au point milieu, et une fois au point initial et au point final. Elle est donc évaluée quatre fois à chaque pas de temps h suivant l'algorithme :

$$\begin{cases} \mathbf{k}_1 = h\mathbf{F}(\mathbf{x}_n, t_n) \\ \mathbf{k}_2 = h\mathbf{F}(\mathbf{x}_n + \mathbf{k}_1, t_n/2 + h/2) \\ \mathbf{k}_3 = h\mathbf{F}(\mathbf{x}_n + \mathbf{k}_2, t_n/2 + h/2) \\ \mathbf{k}_4 = h\mathbf{F}(\mathbf{x}_n + \mathbf{k}_3, t_n + h) \\ \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + k_1/6 + k_2/3 + k_3/3 + k_4/6 + O(h^5) \end{cases} \quad (3.5)$$

Cependant, lorsqu'une grande précision sur \mathbf{x} est requise, d'autres méthodes numériques, comme l'extrapolation et la méthode de prédicteur-correcteur, sont beaucoup plus efficaces que *RK4*. Mais, un moyen de garantir une grande précision avec le RK a été imaginé par Fehlberg

²Technique développée vers 1900 par les mathématiciens allemands C. Runge et M.W. Kutta

³Méthode dite du *point milieu*

[Fehlberg, 1969, 1970]. La méthode consiste à calculer la solution à l'ordre 4 avec des évaluations à des pas de temps différents de celles de l'équation (3.5) et de calculer cette même solution mais avec un RK5. La forme générale d'un RK5 sera :

$$\begin{cases} \mathbf{k}_1 = h\mathbf{F}(\mathbf{x}_n, t_n) \\ \mathbf{k}_2 = h\mathbf{F}(\mathbf{x}_n + b_{21}\mathbf{k}_1, t_n + a_2h) \\ \dots \\ \mathbf{k}_6 = h\mathbf{F}(\mathbf{x}_n + b_{61}\mathbf{k}_1 + \dots + b_{65}\mathbf{k}_5, t_n + a_6h) \\ \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + c_1\mathbf{k}_1 + c_2\mathbf{k}_2 + c_3\mathbf{k}_3 + c_4\mathbf{k}_4 + c_5\mathbf{k}_5 + c_6\mathbf{k}_6 + O(h^6) \end{cases} \quad (3.6)$$

Et la solution RK4 correspondante est de la forme :

$$\mathbf{x}_{n+1}^* = \mathbf{x}_n + c_1^*\mathbf{k}_1 + c_2^*\mathbf{k}_2 + c_3^*\mathbf{k}_3 + c_4^*\mathbf{k}_4 + c_5^*\mathbf{k}_5 + c_6^*\mathbf{k}_6 + O(h^5) \quad (3.7)$$

où les valeurs des c_i et c_i^* sont données par Cash and Karp [1990], ces valeurs apparaissant être plus efficaces que les valeurs données par Fehlberg. L'erreur estimée est de la forme :

$$\Delta = \|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_{n+1}^*\| \quad (3.8)$$

Le nouveau pas de temps intermédiaire est donnée par la formule suivante [Cash and Karp, 1990] :

$$h' = SF \times h \left(\frac{\varepsilon}{\Delta} \right)^{\frac{1}{5}} \quad (3.9)$$

où $SF = 0.9$ est un facteur de sureté et ε est la précision locale.

3.2.2 Quadratures de Gauss-Radau

Le principe de l'intégrateur Radau repose sur la recherche de solutions pour les équations différentielles du 1^{er} ordre, $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(x, t)$, et du 2^{eme} ordre, $\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(x, t)$, telles que ces solutions sont développées en une expansion d'une série temporelle. Bien qu'utilisant les mêmes bases que la méthode de Runge-Kutta, les formulations et algorithmes sont différents. L'une des premières publications décrivant les algorithmes du Radau est celle de Everhart [1974]. La série temporelle est ajustée à la fonction \mathbf{F} en plusieurs points inégalement espacés. L'intégrateur Radau permet de résoudre des équations différentielles de la forme :

$$\begin{cases} \text{Classe I} & \dot{x} = F(x, t) \\ \text{Classe IIS (spéciale)} & \ddot{x} = F(x, t) \\ \text{Classe II (générale)} & \ddot{x} = F(\dot{x}, x, t) \end{cases} \quad (3.10)$$

Considérons une équation de classe IIS $\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(x, t)$ à résoudre. Au début de la séquence, à $t_1 = 0$, la fonction F est développée en une série temporelle :

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{A}_1 t + \mathbf{A}_2 t^2 + \mathbf{A}_3 t^3 + \dots + \mathbf{A}_N t^N \quad (3.11)$$

Les positions, vitesses et accélérations initiales $(\mathbf{x}_1, \dot{\mathbf{x}}_1, \mathbf{F}_1)$ sont connues. L'intégration de Eq. 3.11 donne :

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \dot{\mathbf{x}}_1 t + \mathbf{F}_1 t^2/2 + \mathbf{A}_1 t^3/6 + \dots + \mathbf{A}_N t^{N+2}/[(N+1)(N+2)] \\ \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{F}_1 t + \mathbf{A}_1 t^2/2 + \mathbf{A}_2 t^3/3 + \dots + \mathbf{A}_N t^{N+1}/(N+1) \end{cases} \quad (3.12)$$

Contrairement à une série de Taylor, les coefficients A ne seront pas choisis pour représenter F au mieux que possible pour tous les temps t . Ils seront adaptés pour calculer \mathbf{x} et $\dot{\mathbf{x}}$ aussi précisément que possible pour un intervalle de temps τ donnée. Soit $F_n(\mathbf{x}_n, t_n)$ la fonction force évaluée à une des étapes intermédiaires, inégalement espacées, au temps t_n et à la position $\mathbf{x}_n(t_n)$. Les t_i sont telles que $\tau > t_i > t_1$ pour $i \in \mathbb{N}$. Pour déterminer les inconnus \mathbf{A} , on choisit un développement auxiliaire de F telle que :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \boldsymbol{\alpha} t + \boldsymbol{\alpha}_2 t(t - t_2) + \dots \quad (3.13)$$

Bien sûr, l'équation (3.13) doit être cohérente avec (3.11). La troncature de (3.13) permet de déterminer les coefficients $\boldsymbol{\alpha}_i$ tels que :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2 &= \mathbf{F}_1 + \boldsymbol{\alpha}_1 t_2 \\ \mathbf{F}_3 &= \mathbf{F}_2 + \boldsymbol{\alpha}_1 t_3 + \boldsymbol{\alpha}_2 t_3(t_3 - t_2) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.14)$$

La relation entre les coefficients \mathbf{A}_i et les valeurs de $\boldsymbol{\alpha}_i$ s'obtient en comparant les puissances de t des équations (3.12) et (3.13), les coefficients \mathbf{A} s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= c_{11} \boldsymbol{\alpha}_1 + c_{21} \boldsymbol{\alpha}_2 + c_{31} \boldsymbol{\alpha}_3 + \dots \\ \mathbf{A}_2 &= c_{22} \boldsymbol{\alpha}_2 + c_{32} \boldsymbol{\alpha}_3 + \dots \\ \mathbf{A}_3 &= c_{33} \boldsymbol{\alpha}_3 \dots \end{aligned} \quad (3.15)$$

où les coefficients c_{ij} sont définis par :

$$\begin{aligned} c_{ii} &= 1 \\ c_{i1} &= -t_i c_{i-1,1} \quad i > 1 \\ c_{ij} &= c_{i-1,j-1} - t_i c_{i-1,j} \quad 1 < j < i \end{aligned} \quad (3.16)$$

Supposons, par exemple, que l'on intègre une séquence suivant trois pas intermédiaires aux temps t_2 , t_3 et t_4 (non uniformément espacés⁴). Au point de départ $t_1 = 0$, les conditions initiales \mathbf{x}_1 , $\dot{\mathbf{x}}_1$ et \mathbf{F}_1 sont connues. Dans le cas de l'exemple d'une équation de classe IIS, il y aura donc trois équations dites *prédictrices* par pas intermédiaires :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2 &= \dot{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{F}_1 t_2^2/2 + [\mathbf{A}_1 t_2^3/6 + \mathbf{A}_2 t_2^4/12 + \mathbf{A}_3 t_2^5/20] \\ \mathbf{x}_3 &= \dot{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{F}_1 t_3^2/2 + [\mathbf{A}_1 t_3^3/6 + \mathbf{A}_2 t_3^4/12 + \mathbf{A}_3 t_3^5/20] \\ \mathbf{x}_4 &= \dot{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{F}_1 t_4^2/2 + [\mathbf{A}_1 t_4^3/6 + \mathbf{A}_2 t_4^4/12 + \mathbf{A}_3 t_4^5/20] \end{aligned} \quad (3.17)$$

et deux équations dites *correctrices* pour trouver les positions et vitesses à la fin de l'intervalle d'intégration :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\tau) &= \mathbf{x}_1 + \dot{\mathbf{x}}_1 \tau + \mathbf{F}_1 \tau^2/2 + \mathbf{A}_1 \tau^3/6 + \mathbf{A}_2 \tau^4/12 + \mathbf{A}_3 \tau^5/20 \\ \dot{\mathbf{x}}(\tau) &= \dot{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{F}_1 \tau + \mathbf{A}_1 \tau^2/2 + \mathbf{A}_2 \tau^3/3 + \mathbf{A}_3 \tau^4/4 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Le système (3.17) est implicite dans la mesure où les termes entre crochets ne sont pas connus en avance. Cependant, une estimation assez juste peut être faite dans la mesure où les valeurs $\boldsymbol{\alpha}_i$ varient très lentement d'une séquence à la suivante. Donc, s'il n'y a des valeurs connues de $\boldsymbol{\alpha}$,

⁴En fait, t_4 n'a pas besoin de coïncider avec la fin de la séquence de taille τ

alors une prédiction de \mathbf{x}_2 est possible, à partir de (3.17). L'évaluation de \mathbf{F}_2 permettra la correction de $\boldsymbol{\alpha}_1$ et par conséquent de \mathbf{A}_1 (en utilisant toujours les précédentes valeurs $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \dots$ mais en utilisant la valeur corrigée de $\boldsymbol{\alpha}_1$). En utilisant la deuxième équation du système (3.17), la valeur de \mathbf{x}_3 est déterminée, améliorant la valeur de \mathbf{A}_1 et les valeurs estimées de \mathbf{A}_2 et \mathbf{A}_3 . L'évaluation de \mathbf{F}_3 permet d'obtenir une meilleure estimation de $\boldsymbol{\alpha}_2$ et par conséquent \mathbf{A}_3 (à ce stade, seule $\boldsymbol{\alpha}_3$ n'est pas réactualisée). La procédure continue jusqu'à ce que toutes les valeurs de $\boldsymbol{\alpha}$ et \mathbf{A} aient été réactualisées. Il est préférable de faire plusieurs passages⁵ par séquence afin d'avoir des valeurs plus précises de $\boldsymbol{\alpha}$ et \mathbf{A} . Les nouvelles valeurs de $\boldsymbol{\alpha}$ et \mathbf{A} pourront alors être utilisées dans le système (3.18)

La détermination du pas de temps d'intégration variable est déterminée en considérant le terme du plus haut degré de τ du développement de \mathbf{x} dans le système (3.18). Pour trois étapes intermédiaires, t_2, t_3 et t_4 , le terme de plus haut degré est τ^5 . Soit $C = 10^{-L}$, ($L \in \mathbb{N}$) le paramètre de contrôle caractérisant le coefficient de ce dernier terme, $\mathbf{A}_3 \tau^5/20$. Soit $H = \|\mathbf{A}_3\|/20$, alors le nouveau pas de temps sera $\tau' = (C/H)^{1/5}$. Si le nombre de pas de sous-étapes est plus grand que trois (pour permettre une intégration à des ordres plus élevés que τ^5), alors le dernier terme de (3.18) et la valeur de τ' doivent être adaptés.

L'avantage de la quadrature de Gauss-Radau est la possibilité de choisir les espacements entre les sous-étapes t_2, t_3 et t_4 tels que les résultats de (3.18) soient précis à des ordres supérieurs de τ et cela, sans rajouter de nœuds supplémentaires. Le principe repose sur l'ajout de pas supplémentaires $t_{i>4}$, de constater l'amélioration des équations du système (3.18) et de choisir t_2, t_3 et t_4 tel que cette amélioration soit égale à 0. Par exemple, l'évaluation de \mathbf{F} à des étapes supplémentaires aux temps t_5 et t_6 permet d'avoir une précision à l'ordre 7 sur les valeurs du système (3.18). Le calcul de l'espacement entre chaque t_i est donné par des temps additionnés h_i compris entre 0 et 1 et tels que $h_i = t_i/\tau$. Everhart [1974] donne les valeurs des h_i selon l'ordre de τ . Le même raisonnement peut être appliqué pour des équations de classe I, $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(x, t)$, à la différence que les systèmes (3.17) et (3.18) se résument aux calculs sur la position \mathbf{x} . Un détail du code de l'algorithme pour un radau d'ordre 15, *RA15M* est donnée dans Everhart [1985].

3.2.3 Bulirsch–Stoer

La méthode de Bulirsch–Stoer [Stoer and Bulirsch, 1980] est connue pour obtenir des solutions avec une grande précision pour la résolution d'équations différentielles ordinaires et avec un minimum effort de calcul. Soit l'équation ordinaire à résoudre :

$$\dot{\mathbf{x}}_n = \mathbf{F}(\mathbf{x}_n, t_n) \quad (3.19)$$

La solution approchée de (3.19) au temps $t_n + \tau$ peut être évaluée en séparant l'intervalle en n_m intervalles tel que chaque sous-intervalle de temps τ_m aura une taille :

$$\tau_m = \frac{\tau}{n_m} \quad (3.20)$$

L'intégration de 3.19 se fait avec la méthode du point milieu modifié [Press et al., 1992] et est effectuée sur tous les intervalles n_m . Le fractionnement est répété de telle sorte que la taille de chaque pas τ_m soit réduit suivant une séquence proposée par Stoer and Bulirsch [1980] :

⁵En général, deux passages suffisent

$$n = 2, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 64, 96, \dots, [n_j = 2n_{j-2}], \dots \quad (3.21)$$

Des travaux récents de [Deuffhard \[1983\]](#) suggèrent que la séquence :

$$n = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \dots, [n_j = 2j], \dots \quad (3.22)$$

est plus efficace. Pour chaque pas de temps τ , on ne sait pas à l'avance jusqu'où ira la séquence (3.22). À chaque essai n_m , la solution de (3.19) est extrapolée suivant une fonction polynomiale supposée correspondre à la solution évaluée pour une infinité d'intervalle $n_m \rightarrow \infty$, autrement dit à un pas de temps $\tau_m \rightarrow 0$ (Fig. 3.1).

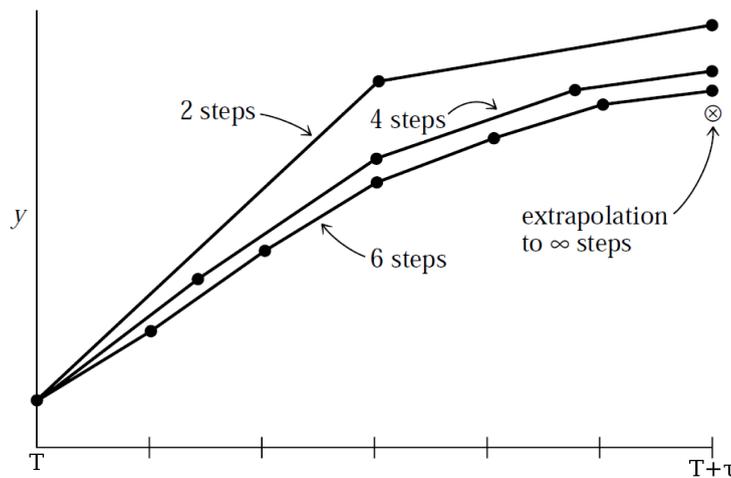


FIG. 3.1 – Extrapolation de Richardson. L'intervalle τ est divisé en différentes séquences de petits pas intermédiaires h . Le résultat est extrapolé pour correspondre en théorie à une solution pour $h \rightarrow 0$.

Cette extrapolation est généralement appelée *extrapolation de Richardson* [[Lether, 1996](#)]. Pour plus de clarté, posons $h = \tau_m$. Soit $z(t_n, h)$ l'approximation numérique de la solution x_n au temps t_n . Une fois l'extrapolation réalisée, la valeur extrapolée puis l'estimation de l'erreur déterminent si le fractionnement de l'intervalle doit continuer. Sinon, si l'erreur est satisfaisante, on passe au pas de temps τ suivant et la procédure reprend pour $n = 2$. Supposons d'autre part que l'erreur globale d'une méthode numérique a un développement en puissances de h de la forme :

$$z(t_n, h) = x(t_n) + \sum_{i=1}^q c_j(t_n) h^i + O(h^{q+1}) \quad (3.23)$$

L'extrapolation de Richardson suggère de combiner plusieurs solutions $z(t_n, h_j)$ obtenues avec différents pas de temps $h_j, j = 0, 1, \dots$, afin que les termes successifs du développement de l'erreur (Eq. 3.23) soient éliminés permettant ainsi une approximation d'ordre supérieur. La procédure d'extrapolation générale consiste à générer une séquence de solution $z(t_n, h_n), j = 0, 1, \dots, q$ avec $h_0 > h_1 > h_2 > \dots > h_q$ et à les interpoler par un polynôme de degré q noté $R_q(t_n, h)$. L'approximation d'ordre supérieur recherchée est la valeur du polynôme d'interpolation pour $h = 0$, c'est-à-dire, $R_q(t_n, 0)$.

L'algorithme de *Aitken-Neville* [[Mühlbach, 1978](#)] est un moyen simple pour générer les approximations nécessaires sous la forme d'un algorithme de récurrence. Soit $R_q^i(t_n, h) = R_q^i(h)$ l'unique polynôme de degré q satisfaisant les conditions d'interpolation :

$$R_q^i(h) = z(t_n, h_j) \quad j = i, i+1, \dots, i+q \quad (3.24)$$

Considérons $R_q^i(h)$ sous la forme :

$$R_q^i(h) = \Phi_{iq}(h) R_{q-1}^i(h) + (1 - \Phi_{iq}(h)) R_{q-1}^{i+1}(h) \quad (3.25)$$

où $\Phi_{iq}(h)$ est un polynôme linéaire en h défini par :

$$\Phi_{iq}(h) = \frac{h - h_{i+q}}{h_i - h_{i+q}} \quad (3.26)$$

Supposons d'autre part que :

$$\begin{cases} R_{q-1}^i(h) = z(t_n, h_j) & j = i, i+1, \dots, i+q-1 \\ R_{q-1}^{i+1}(h) = z(t_n, h_j) & j = i+1, i+2, \dots, i+q \end{cases} \quad (3.27)$$

Alors les conditions d'interpolation requises :

$$R_q^i(h) = z(t_n, h_j) \quad j = i+1, i+2, \dots, i+q-1 \quad (3.28)$$

sont réalisées quelque soit le choix de $\Phi_{iq}(h)$. Si de plus, on choisit :

$$\begin{cases} \Phi_{iq}(h_i) = 1 \\ \Phi_{iq}(h_{i+1}) = 0 \end{cases} \quad (3.29)$$

alors

$$\begin{cases} R_q^i(h_i) = R_{q-1}^i(h_i) = z(t_n, h_i) \\ R_q^i(h_{i+q}) = R_{q-1}^{i+1}(h_{i+q}) = z(t_n, h_{i+q}) \end{cases} \quad (3.30)$$

En combinant les équations (3.25) et (3.29), on a :

$$R_q^i(h) = \frac{(h - h_{i+q}) R_{q-1}^i(h) + (h_i - h) R_{q-1}^{i+1}(h)}{h_i - h_{i+q}} \quad (3.31)$$

Quand $h \rightarrow 0$, l'équation (3.32) devient :

$$R_q^i(0) = \frac{h_i R_{q-1}^{i+1}(0) - h_{i+q} R_{q-1}^i(0)}{h_i - h_{i+q}} \quad (3.32)$$

Les solutions extrapolées $R_q^i(0)$ sont répertoriées dans le tableau 3.1 :

3.3 L'intégrateur de Lie

L'intégration numérique au moyen des séries de Lie est basée sur le développement en série de Taylor d'une solution d'équations différentielles. C'est un intégrateur symplectique très rapide adapté pour le cas du problème à N corps. La construction des séries de Lie a été étudiée pour la première fois par [Hanslmeier and Dvorak \[1984\]](#), [Delva \[1985\]](#) et [Lichtenegger \[1984\]](#), bien que [Gröbner \[1967\]](#) avait déjà tenté d'écrire une formule de récurrence pour les séries de Lie. Il a aussi

TAB. 3.1 – Solutions $\mathbf{R}_q^i(0)$ extrapolées selon le degré q d'extrapolation.

Pas de temps	h_0	h_1	h_2	\dots	h_{q-2}	h_{q-1}	h_q
Résultats pour le pas de temps correspondant	\mathbf{R}_0^0	\mathbf{R}_0^1	\mathbf{R}_0^2	\dots	\mathbf{R}_0^{q-2}	\mathbf{R}_0^{q-1}	\mathbf{R}_0^q
1 ^{ère} extrapolation	\mathbf{R}_1^0	\mathbf{R}_1^1	\mathbf{R}_1^2	\dots	\mathbf{R}_1^{q-2}	\mathbf{R}_1^{q-1}	
2 ^{ème} extrapolation	\mathbf{R}_2^0	\mathbf{R}_2^1	\mathbf{R}_2^2	\dots	\mathbf{R}_2^{q-2}		
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots				
$(q-2)$ ^{ième} extrapolation	\mathbf{R}_{q-2}^0	\mathbf{R}_{q-2}^1	\mathbf{R}_{q-2}^2				
$(q-1)$ ^{ième} extrapolation	\mathbf{R}_{q-1}^0	\mathbf{R}_{q-1}^1					
q ^{ième} extrapolation	\mathbf{R}_q^0						

été développé pour l'étude de la stabilité et de l'évolution dynamique des NEOs du système solaire interne [Dvorak and Pilat-Lohinger, 1999] ou encore pour l'étude de la stabilité de systèmes extrasolaires. Enfin, il a aussi été développé pour l'intégration de corps à masses variables [Dvorak and Lichtenegger, 1983] et d'oscillateurs amorties [Dvorak and Hanslmeier, 1983].

Dans les études citées ci-dessus, une formule de récurrence pour les termes de Lie a été développée mais seulement pour le cas de corps soumis à leur attraction gravitationnelle mutuelle. Par conséquent, il ne peut pas être utilisé pour des corps (astéroïdes ou comètes) pour lesquels les perturbations relativistes ou non gravitationnelles ne peuvent être négligées. Quand d'autres forces sont prises en compte pour rendre compte du mouvement d'un corps, l'opérateur doit être reconstruit.

Je présente dans les parties suivantes mes travaux relatifs à la construction de l'opérateur de Lie pour des forces perturbatrices dépendant de la position et/ou de la vitesse.

3.3.1 L'opérateur de Lie et les séries de Lie

L'opérateur de Lie a déjà été étudié dans Hanslmeier and Dvorak [1984] et Eggl and Dvorak [2010]. Noté D , l'opérateur de Lie sur une variété de dimension N et définit par :

$$D = \sum_{k=1}^N \theta_k \frac{\partial}{\partial z_k} \quad (3.33)$$

où $\theta = (\theta_1(\mathbf{z}), \dots, \theta_N(\mathbf{z}))$ est une fonction holomorphe dans un domaine \mathcal{D} dans le \mathbf{z} -espace et par conséquent peut être développée en séries de puissances convergentes, et $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_N)$. En appliquant n fois l'opérateur D sur une fonction $f(\mathbf{z})$, holomorphe sur le même domaine \mathcal{D} , on a :

$$Df = \sum_{k=1}^N \theta_k \frac{\partial f}{\partial z_k} \quad ; \quad D^n f = D(D^{n-1} f) \quad (3.34)$$

Il en découle des propriétés utiles pour l'application de D sur une somme ou un produit de fonctions holomorphes :

$$\begin{cases} D^n(f + g) = D^n f + D^n g \\ D^n(f \cdot g) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k f D^{n-k} g \end{cases} \quad (3.35)$$

La définition des séries de Lie est donc :

$$L(\mathbf{z}, t) \equiv \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{t^\mu}{\mu!} D^\mu f(\mathbf{z}) \quad \mu \in \mathbb{N} \quad (3.36)$$

qui converge sur \mathcal{D} [Gröbner, 1967]. En remarquant que les séries de Lie ont une écriture identique au développement de la fonction exponentielle, on peut symboliquement écrire :

$$L(\mathbf{z}, t) \equiv e^{tD} f(\mathbf{z}) \quad (3.37)$$

Cette expression peut être utilisée pour résoudre un système d'équations différentielles tel que :

$$\dot{z}_k = \theta_k(\mathbf{z}) \quad (3.38)$$

Une solution de cette équation est $z_k = e^{tD}(\xi_k)$ où les ξ_k sont les conditions initiales et $D = \sum_{k=1}^N \theta_k(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_k}$. De même, la solution approchée de $\dot{\mathbf{z}} = \theta(\mathbf{z})$ au temps $t+\Delta t$ est :

$$\mathbf{z}(t + \Delta t) = L(\mathbf{z}, \Delta t) = e^{\Delta t D} \mathbf{z}(t) \quad (3.39)$$

3.3.2 Le problème à N corps

La méthode d'intégration de Lie peut être utilisée pour résoudre les équations du mouvement pour le problème à N - corps. Dans la mesure où je présenterai dans les sous-sections suivantes un développement de l'opérateur de Lie en incluant d'autres perturbations, je rappelle simplement ici les principes de la construction de l'opérateur de Lie pour le cas purement gravitationnel étudié dans Hanslmeier and Dvorak [1984].

D'après les lois de Newton, l'accélération résultant de forces agissant sur une particule v est :

$$\ddot{\mathbf{x}}_v = G \sum_{\mu=1, \mu \neq v}^N M_\mu \frac{(\mathbf{x}_\mu - \mathbf{x}_v)}{\|\mathbf{x}_\mu - \mathbf{x}_v\|^3} \quad (3.40)$$

où G représente la constante de gravitation, \mathbf{x}_v le vecteur position de la particule v dans un repère barycentrique de masse m_v . À l'aide d'un changement de variables, on peut transformer le système d'équations du 2nd ordre (3.40) en un système d'équations différentielles du 1^{er} ordre :

$$\dot{\mathbf{x}}_v = \mathbf{v}_v \quad (3.41)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_v = G \sum_{\mu=1, \mu \neq v}^N M_\mu \frac{(\mathbf{x}_\mu - \mathbf{x}_v)}{\|\mathbf{x}_\mu - \mathbf{x}_v\|^3} = GM_\star \sum_{\mu=1, \mu \neq v}^N m_\mu \mathbf{x}_{v\mu} \rho_{v\mu}^{-3} \quad (3.42)$$

telle que $\rho_{v\mu} = \|\mathbf{x}_\mu - \mathbf{x}_v\|$ et $\mathbf{x}_{v\mu} = \mathbf{x}_\mu - \mathbf{x}_v$.

Ici, M_\star représente un facteur de conversion pour exprimer la masse M_μ du corps perturbateur en unité de masse stellaire. Sa valeur numérique est égale à la masse de l'étoile centrale du système planétaire. Par conséquent, m_μ représente la masse du corps perturbateur exprimée en unité de masse stellaire (ou de masse solaire si $GM_\star = k^2$ avec k la constante de Gauss). L'opérateur de Lie D pour le problème à N corps a été donné dans Eggl and Dvorak [2010] et s'écrit :

$$D = \sum_{v=1}^N \left(\mathbf{v}_v \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_v} + GM_\star \sum_{\mu=1, \mu \neq v}^N m_\mu \mathbf{x}_{v\mu} \rho_{v\mu}^{-3} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_v} \right) \quad (3.43)$$

D'après les Eq. (3.33) et (3.38), les solutions des Eq. (3.41) et (3.42) sont données par le développement en séries :

$$\mathbf{x}_v(\tau) = e^{\tau D} \mathbf{x}_v(0) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n D^n}{n!} \right) \mathbf{x}_v(0) \quad (3.44)$$

$$\mathbf{v}_v(\tau) = e^{\tau D} \mathbf{v}_v(0) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n D^n}{n!} \right) \mathbf{v}_v(0) \quad (3.45)$$

où τ est le pas de temps défini par :

$$\tau = t_j - t_{j-1}$$

Pour être d'un usage pratique, une formule de récurrence doit être donnée afin de déterminer les termes d'ordre n de l'opérateur de Lie. Pour le problème à N corps, [Eggl and Dvorak \[2010\]](#) ont montré que :

$$D^n \mathbf{x}_v = GM_* \sum_{\mu=1, \mu \neq v}^N m_\mu \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} D^k \Phi_{v\mu} D^{n-2-k} \mathbf{x}_{v\mu} \quad (3.46)$$

où $\Phi_{v\mu} = \rho_{v\mu}^{-3}$

L'évolution des termes $\Phi_{v\mu}$ est donnée par :

$$D^n \Phi_{v\mu} = \rho_{v\mu}^{-2} \sum_{k=0}^{n-1} a_{n,k+1} D^{n-1-k} \Phi_{v\mu} D^k \Lambda_{v\mu} \quad (3.47)$$

Les coefficients $a_{i,j}$ définis pour $n \geq 1$ sont donnés par :

$$\begin{cases} a_{n,n} = -3 \\ a_{n,k} = a_{n-1,k-1} + a_{n-1,k} \quad \text{for } k > 1 \\ a_{n,1} = a_{n-1,1} - 2 \end{cases}$$

$\Lambda_{v\mu}$ est défini par : $\Lambda_{v\mu} = \mathbf{x}_{v\mu} \cdot \mathbf{v}_{v\mu}$ et son évolution est déterminée par :

$$D^n \Lambda_{v\mu} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^{n-k} \mathbf{x}_{v\mu} D^k \mathbf{v}_{v\mu} \quad (3.48)$$

où

$$D^n \mathbf{v}_{v\mu} = D^{n+1} \mathbf{x}_{v\mu} \quad (3.49)$$

Quand d'autres forces agissent sur la particule v les équations (3.41), (3.42) et (3.43) doivent être réécrites et une autre formule de récurrence doit être obtenue afin de déterminer les dérivées D^n de l'opérateur de Lie. C'est ce que je me propose d'étudier dans les sections suivantes pour les perturbations relativistes et le cas particulier d'une perturbation non gravitationnelle, l'effet Yarkovsky [[Bancelin et al., 2012](#)].

3.3.3 Généralisation de l'opérateur de Lie

Dans cette partie, je vais chercher à déterminer une expression générale de l'opérateur de Lie pour des forces dépendant de la position et/ou de la vitesse et agissant sur une particule v . Soit \mathbf{H}_v la contribution de toutes les accélérations venant de ces forces. Comme il a été vu dans la section précédente, le système d'équation du 2^{nd} ordre peut être découpé en six équations différentielles du 1^{er} ordre :

$$\dot{\mathbf{x}}_v = \mathbf{v}_v \quad (3.50)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_v = \mathbf{H}_v \quad (3.51)$$

L'opérateur de Lie s'écrit donc :

$$D = \sum_{\mu=1}^N \left[\mathbf{v}_\mu \cdot \frac{\partial \cdot}{\partial \mathbf{x}_\mu} + \mathbf{H}_\mu \cdot \frac{\partial \cdot}{\partial \mathbf{v}_\mu} \right] \quad (3.52)$$

En appliquant l'opérateur D à \mathbf{x} , la construction des termes de Lie s'écrit :

$$\begin{aligned} D^0 \mathbf{x}_v &= \mathbf{x}_v \\ D^1 \mathbf{x}_v &= \mathbf{v}_v \\ D^2 \mathbf{x}_v &= \mathbf{H}_v \\ D^3 \mathbf{x}_v &= D\mathbf{H}_v \end{aligned}$$

J'en déduis donc une formule de récurrence pour l'évolution des $D^n \mathbf{x}_v$ et $D^n \mathbf{v}_v$ qui s'écrit :

$$\begin{cases} D^n \mathbf{x}_v = D^{n-2} \mathbf{H}_v & n \geq 2 \\ D^n \mathbf{v}_v = D^{n+1} \mathbf{x}_v \end{cases} \quad (3.53)$$

Par la suite, je chercherai à écrire l'équation (3.53) selon l'expression des forces, ce qui signifie que je dois trouver une nouvelle formule de récurrence pour l'évolution des $D^n \mathbf{H}_v$. C'est ce que je ferai dans les sous-sections suivantes pour trois types d'accélération : gravitationnelle (γ_G), relativiste (γ_R) et l'accélération due à l'effet Yarkovsky (γ_Y). Par conséquent, on peut écrire $\mathbf{H} = \gamma_G + \gamma_R + \gamma_Y$.

3.3.4 Termes de Lie pour l'accélération gravitationnelle

L'accélération gravitationnelle $\gamma_{G/v}$ dérivée des forces gravitationnelles de N corps agissant sur une particule v s'écrit :

$$\gamma_{G/v} = GM_\star \sum_{\mu=1, \mu \neq v}^N m_\mu \Phi_{v\mu,3} \mathbf{x}_{v\mu} \quad (3.54)$$

J'introduis ici une nouvelle notation $\Phi_{v\mu,p} = \rho_{v\mu}^{-p}$ qui sera utile pour la suite. L'évolution des premières dérivées :

$$D \gamma_{G/v} = GM_\star \sum_{\mu=1, \mu \neq v}^N m_\mu (\Phi_{v\mu,3} D \mathbf{x}_{v\mu} + D \Phi_{v\mu,3} \mathbf{x}_{v\mu}) \quad (3.55)$$

$$D^2 \gamma_{G/v} = GM_\star \sum_{\mu=1, \mu \neq v}^N m_\mu (\Phi_{v\mu,3} D^2 \mathbf{x}_{v\mu} + 2 D \Phi_{v\mu,3} \mathbf{x}_{v\mu} + D^2 \Phi_{v\mu,3} \mathbf{x}_{v\mu}) \quad (3.56)$$

j'en déduis l'évolution de $D^n \gamma_{G/v}$:

$$D^n \gamma_{G/v} = GM_\star \sum_{\mu=1, \mu \neq v}^N m_\mu \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k \Phi_{v\mu,3} D^{n-k} \mathbf{x}_{v\mu} \quad (3.57)$$

L'évolution des termes $D^n \Phi_{v\mu,p}$ est régie par :

$$D^n \Phi_{v\mu,p} = \rho_{v\mu}^{-2} \sum_{k=0}^{n-1} a_{n,k+1} D^{n-1-k} \Phi_{v\mu,p} D^k \Lambda_{v\mu} \quad (3.58)$$

avec

$$\begin{cases} a_{n,n} = -p \\ a_{n,k} = a_{n-1,k-1} + a_{n-1,k} & \text{for } k > 1 \\ a_{n,1} = a_{n-1,1} - 2 \end{cases}$$

et l'algorithme pour les $D^n \mathbf{x}_{v\mu}$ est donné par l'équation.(3.53).

3.3.5 Termes de Lie pour l'accélération relativiste

À cause de leur complexité, l'intégration des équations EIH (Einstein-Infeld-Hoffmann) est très lente même en utilisant des processeurs modernes et ne sont pas pratiques quand il s'agit d'intégration à long terme. Suivant [Beutler \[2005\]](#), j'utilise une version simplifiée de l'accélération relativiste $\gamma_{R/v}$ (à la condition que la masse m_v soit négligeable par rapport à la masse de l'étoile centrale) afin de construire les termes de Lie :

$$\gamma_{R/v} = \frac{GM_\star}{c^2} \Phi_{\mu\nu,3} [(4GM_\star \Phi_{\mu\nu,1} - \dot{\mathbf{r}}^2) \mathbf{r} + 4(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) \dot{\mathbf{r}}] \quad (3.59)$$

où c désigne la vitesse de la lumière. Ici, \mathbf{r} and $\dot{\mathbf{r}}$ sont respectivement les positions et vitesses héliocentriques de la particule ν et sont reliées aux coordonnées barycentriques par :

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_\mu = \mathbf{x}_{\mu\nu} \\ \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_\nu - \mathbf{v}_\mu = \mathbf{v}_{\mu\nu} \\ r = \rho_{\mu\nu} \end{cases}$$

L'équation (3.59) peut être réécrite de la manière suivante :

$$\gamma_{R/v} = \frac{GM_\star}{c^2} \Phi_{\mu\nu,3} (\gamma_1 + \gamma_2) \quad (3.60)$$

où

$$\begin{cases} \gamma_1 = \mathbf{x}_{\mu\nu} (4GM_\star \Phi_{\mu\nu,1} - \mathbf{v}_{\mu\nu}^2) \\ \gamma_2 = 4\mathbf{v}_{\mu\nu} \Lambda_{\mu\nu} \end{cases} \quad (3.61)$$

En utilisant les propriétés de l'opérateur de Lie (Eq. 3.35), je montre que l'évolution de $D^n \gamma_{R/v}$ est régie par l'algorithme suivant :

$$D^n \gamma_{R/v} = \frac{GM_\star}{c^2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k \Phi_{\mu\nu,3} D^{n-k} (\gamma_1 + \gamma_2) \quad (3.62)$$

Toujours en utilisant les propriétés exprimées dans l'équation (3.35), je montre d'après l'évolution des premières dérivées, que l'évolution des $D^n \gamma_i$ s'écrit :

$$\begin{cases} D^n \gamma_1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^{n-k} \mathbf{x}_{\mu\nu} \left(4GM_\star D^k \Phi_{\mu\nu,1} - \sum_{k'=0}^k \binom{k}{k'} D^{k'} \mathbf{v}_{\mu\nu} D^{k-k'} \mathbf{v}_{\mu\nu} \right) \\ D^n \gamma_2 = 4 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k \mathbf{v}_{\mu\nu} D^{n-k} \Lambda_{\mu\nu} \end{cases} \quad (3.63)$$

Je rappelle que l'évolution des $D^n \mathbf{x}_\nu$ et $D^n \mathbf{v}_\nu$ est donnée par l'équation (3.53) et l'évolution des $D^n \Phi_{\nu\mu,p}$ et $D^n \Lambda_{\nu\mu}$ est donnée par les équations (3.58) et (3.48).

3.3.6 Termes de Lie pour l'effet Yarkovsky

Comme il a été indiqué dans la section 2.2, l'effet Yarkovsky est la plus importante force non gravitationnelle agissant sur les petits corps. De plus, [Giorgini et al. \[2008\]](#) et [Chesley \[2006\]](#) ont montré que l'effet Yarkovsky avait un effet non négligeable sur le mouvement orbital d'astéroïdes et de PHAs. En effet, ces auteurs ont montré que la force de Yarkovsky, à travers l'exemple de l'astéroïde (99942) Apophis (voir chap. 4, 5 et 6) était la principale source d'incertitude sur la distance Terre-Apophis lors de son rapprochement serré avec la Terre en 2029, mais aussi sur les probabilités d'impact avec la Terre après 2029. Bien que cette accélération soit dépendante de paramètres physiques des astéroïdes qui sont pour la plupart inconnus, il est possible de prendre en compte cet effet, sans aucune hypothèse sur les caractéristiques physiques des astéroïdes.

Suivant Marsden [1976], la force non gravitationnelle agissant sur les comètes peut être décomposée en trois composantes : radiale, transverse et normale. Pour les astéroïdes, la force non gravitationnelle engendrée par l'effet Yarkovsky diurne est dirigée principalement suivant la composante transverse. Ainsi, cette accélération s'écrit :

$$\boldsymbol{\gamma}_Y = A_2 g(r) \mathbf{T} \quad (3.64)$$

où $\mathbf{T} = (r\dot{\mathbf{r}} - (\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}/r)/h$ est le vecteur unitaire transverse (dans la direction du mouvement). Ici, $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ sont les coordonnées héliocentriques de l'astéroïde et $h = \|\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}\|$ est la norme du moment cinétique de l'astéroïde. Le coefficient A_2 est un paramètre non gravitationnel dépendant du petit corps étudié. Ce paramètre est généralement très bien déterminé avec trois apparitions de la comète ou avec des observations optiques et radars pour les astéroïdes. Par exemple, A_2 a pour valeur $\approx 10^{-14}$ UA/day² pour les astéroïdes et $\approx 10^{-8}$ UA/day² pour les comètes. Enfin, $g(r)$ est une fonction dépendant de la distance héliocentrique de l'objet. Pour les géocroiseurs, on peut écrire $g(r) = \left(\frac{1A.U.}{r}\right)^2$.

En utilisant les coordonnées barycentriques, on peut écrire :

$$\begin{cases} \mathbf{T} = (\rho_{\mu\nu} \mathbf{x}_{\mu\nu} - (\mathbf{v}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{x}_{\mu\nu}) \mathbf{x}_{\mu\nu} \rho_{\mu\nu}^{-1}) / h \\ h = \|\mathbf{x}_{\mu\nu} \wedge \mathbf{v}_{\mu\nu}\| \end{cases}$$

Afin d'utiliser les propriétés de l'équation (3.35), il est plus pratique d'écrire :

$$\boldsymbol{\gamma}_Y = A_2 \Phi_{\mu\nu,2} J (\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_2) \quad (3.65)$$

avec

$$\begin{cases} \mathbf{T}_1 = \Phi_{\mu\nu,-1} \mathbf{v}_{\mu\nu} \\ \mathbf{T}_2 = \Lambda_{\mu\nu} \Phi_{\mu\nu,1} \mathbf{x}_{\mu\nu} \\ J = h^{-1} \\ \Phi_{\mu\nu,2} = g(r) \end{cases}$$

D'une manière analogue aux sections suivantes, j'en déduis une formule de récurrence pour l'évolution de $\boldsymbol{\gamma}_Y$:

$$D^n \boldsymbol{\gamma}_Y = A_2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^{n-k} (\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_2) \sum_{k'=0}^k \binom{k}{k'} D^{k'} J D^{k-k'} \Phi_{\mu\nu,2} \quad (3.66)$$

Posons $J = (\mathbf{h} \cdot \mathbf{h})^{-1/2}$. Par conséquent, $DJ = -(\mathbf{h} \cdot \mathbf{h})^{-3/2} D\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}$. Si $\Gamma = D\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}$, alors

$$DJ = -J^3 \Gamma$$

L'évolution des premières dérivées de $D^n J$ s'écrit :

$$D^2 J = J^2 (-3\Gamma DJ - JD\Gamma)$$

Puis

$$D^3 J = -2JDJ(3\Gamma DJ + JD\Gamma) - J^2 (3D\Gamma DJ + 3\Gamma D^2 J + JD^2 \Gamma + DJD\Gamma)$$

$$D^3 J = -2J \times -J^3 \Gamma \times -\frac{D^2 J}{J^2} - J^2 (3D\Gamma DJ + 3\Gamma D^2 J + JD^2 \Gamma + DJD\Gamma)$$

$$D^3 J = J^2 (-5\Gamma D^2 J - 4D\Gamma DJ - JD^2 \Gamma)$$

et j'en déduis que :

$$D^n J = J^2 \sum_{k=0}^{n-1} a_{n,k+1} D^{n-1-k} JD^k \Gamma \quad (3.67)$$

où les coefficients $a_{i,j}$ sont définis, pour $n \geq 1$, par :

$$\begin{cases} a_{n,n} = -1 \\ a_{n,k} = a_{n-1,k-1} + a_{n-1,k} & \text{for } k > 1 \\ a_{n,1} = a_{n-1,1} - 2 \end{cases}$$

Maintenant, il reste à déterminer l'évolution de $D^n \Gamma$ à travers l'évolution de $D^n \mathbf{h}$. Dans un premier temps, il me faut trouver une propriété pour l'application de l'opérateur D sur un produit vectoriel de fonction. En appliquant l'opérateur de Lie sur le vecteur $\mathbf{x} \wedge \mathbf{v}$, on a :

$$D(\mathbf{x} \wedge \mathbf{v}) = [(v_y v_z - v_z v_y) + (v_z v_x - v_x v_z) + (v_x v_y - v_y v_x)] + [(H_z y - H_y z) + (H_x z - H_z x) + (H_y x - H_x y)]$$

D'après les équations (3.53), il est facile d'en déduire que :

$$D(\mathbf{x} \wedge \mathbf{v}) = D\mathbf{x} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{x} \wedge D\mathbf{v}$$

Par conséquent,

$$\begin{cases} D^n \mathbf{h} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k \mathbf{x}_{\mu\nu} \wedge D^{n-k} \mathbf{v}_{\mu\nu} \\ D^n \Gamma = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^{k+1} \mathbf{h} \cdot D^{n-k} \mathbf{h} \end{cases} \quad (3.68)$$

Ainsi, il en découle l'expression de $D^n \mathbf{T}_1$ et $D^n \mathbf{T}_2$:

$$D^n \mathbf{T}_1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k \Phi_{\mu\nu,-1}, D^{n-k} \mathbf{v}_{\mu\nu} \quad (3.69)$$

et

$$D^n \mathbf{T}_2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^{n-k} \mathbf{x}_{\mu\nu} \sum_{k'=0}^k \binom{k}{k'} D^{k'} \Lambda_{\mu\nu} D^{k-k'} \Phi_{\mu\nu,1} \quad (3.70)$$

3.4 Comparaisons entre intégrateurs

Je me propose dans cette section de comparer l'intégrateur de Lie avec différents intégrateurs à travers différents tests numériques. Des tests de temps de calcul et de précision numérique ont déjà été faits dans [Eggl and Dvorak \[2010\]](#) dans lequel les auteurs comparent un ensemble d'intégrateurs parmi lesquels le Radau 15, Bulirsch-Stoer et Lie. En complément de ces tests, j'ai testé le temps de calcul quand plusieurs corps sans masse sont simultanément intégrés. Puis, à travers l'exemple d'Apophis, je compare les valeurs de distances obtenues par ces intégrateurs lors de la rencontre proche entre Apophis et la Terre en 2029. Enfin, je propose d'autres tests pour la validation de l'algorithme pour la perturbation relativiste (à travers le calcul de la précession du périhélie de Mercure) et pour l'effet Yarkovsky (à travers le calcul de la dérive séculaire en demi-grand axe pour les astéroïdes).

3.4.1 Tests CPU

Je propose comme test de calculer le temps d'intégration pour un système solaire complet (du Soleil à Neptune en y incluant la Lune) et un nombre variable de corps sans masse. J'ai considéré une population synthétique de NEOs [\[Bottke et al., 2002\]](#) dont le mouvement n'est régi que par la gravitation. Le but de ce test est de comparer le temps d'intégration des intégrateurs Radau

et Lie quand plusieurs corps sont simultanément intégrés. Pour ce test, la précision interne de ces deux intégrateurs est de 10^{-13} , le type d'équations différentielles à résoudre pour Radau est du type classe IS et le nombre de termes pour le développement de l'opérateur D utilisé pour l'intégrateur de Lie est de 12. Il a été montré dans [Hanslmeier and Dvorak \[1984\]](#) que le nombre de 12 est optimal car au delà, il n'y a pas de gain en précision ou en temps de calcul CPU. Enfin, l'intégration numérique a été faite sur une période de 100 ans.

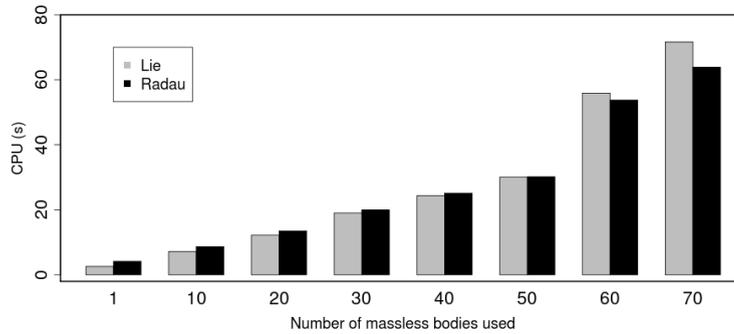


FIG. 3.2 – Temps CPU de calcul pour les intégrateurs de Lie (■) et Radau (■). L'axe des abscisses représente le nombre de petits corps intégrés simultanément.

Je représente sur la figure 3.2 le temps de calcul pour les deux intégrateurs. L'axe des abscisses représente le nombre de petits corps sans masse intégrés simultanément sur 100 ans. On remarque donc que le temps de calcul pour Lie augmente plus vite que celui de Radau en fonction du nombre de corps simultanément intégrés. Par conséquent, si Lie semble être plus rapide que Radau pour un nombre de corps inférieur à 50, au delà de ce nombre, Radau est plus efficace. Pour expliquer ce comportement, des recherches supplémentaires doivent être faites en étudiant par exemple le nombre de pas intermédiaires requis pour les deux intégrateurs ou encore l'utilisation du cache L2 au lieu du L1. Comme il a été noté dans [Eggli and Dvorak \[2010\]](#), l'usage de l'intégrateur de Lie dépend du problème à résoudre.

3.4.2 Intégration des équations du mouvement de Apophis

L'astéroïde Apophis est l'un des rares astéroïdes connus à passer si près de la Terre en 2029 (à l'intérieur de l'orbite des satellites géostationnaires). La perturbation gravitationnelle de la Terre va être telle que la trajectoire de l'astéroïde va en être fortement déviée. Je me propose dans cette partie de montrer comment l'intégrateur de Lie peut traiter la détermination d'une telle distance d'approche avec un pas de temps adapté. Je compare les résultats obtenus avec les intégrateurs Radau et Bulirsch-Stoer. Le modèle dynamique utilisé est le même que celui utilisé dans la partie précédente et les conditions initiales utilisées sont les mêmes pour les trois intégrateurs.

TAB. 3.2 – Date de la rencontre proche entre Apophis et la Terre en 2029 et distance d'approche calculées avec trois intégrateurs numériques différents : Lie, Bulirsch-Stoer et Radau.

Intégrateur	Date	Distance (UA)
Lie	2029 04 13.90716	0.000253446941
Bulirsch-Stoer	2029 04 13.90714	0.000253446071
Radau	2029 04 13.90725	0.000253444524

Je présente dans le tableau 3.2 les résultats obtenus pour la date du rapprochement et la distance

entre la Terre et Apophis en 2029 et calculées avec trois intégrateurs différents. On voit donc que les valeurs calculées par Lie sont en accord avec celles calculées par les deux autres intégrateurs, et avec une bonne précision. Mon test montre donc que non seulement l'intégrateur de Lie peut gérer la détermination précise de distances d'approches mais aussi qu'il peut être utilisé pour les analyses de rapprochements serrés et la détection d'impacts potentiels avec la Terre.

3.4.3 Tests de validation pour l'algorithme de l'accélération relativiste

Dans un premier temps, j'ai testé l'algorithme pour la relativité en intégrant les équations du mouvement de l'astéroïde (1566) Icarus. J'ai choisi cet astéroïde pour ce test dans la mesure où son excentricité est élevée ~ 0.82 et qu'il est connu pour être sensible aux perturbations relativistes. J'ai donc calculé l'intensité de la perturbation relativiste avec l'intégrateur de Lie que j'ai ensuite comparée avec la valeur obtenue par Radau. Pour les deux intégrateurs, la précision interne est de 10^{-13}

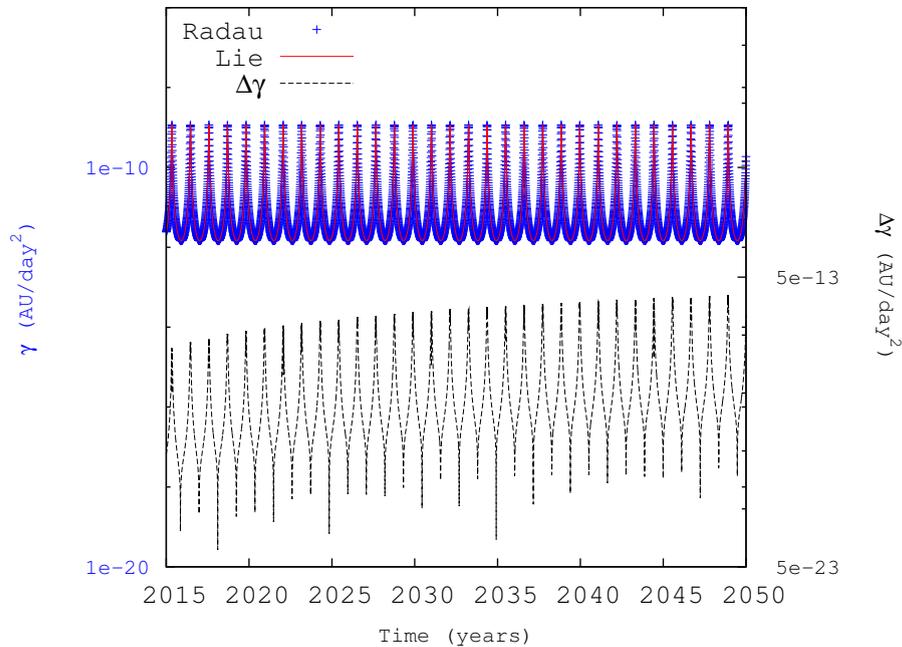


FIG. 3.3 – Intensité de l'accélération relativiste calculée avec l'intégrateur de Lie (+) et Radau (—) et la différence absolue $\Delta\gamma$ (---) entre les valeurs de γ calculées avec Radau et Lie. L'axe des ordonnées est en échelle logarithmique.

Je représente sur la figure 3.3 la valeur de cette accélération qui est comprise entre 10^{-11}AU/jour^2 et 10^{-9}AU/jour^2 calculée avec Lie et Radau. Cette figure montre que ces valeurs sont très proches dans la mesure où la différence absolue entre les valeurs calculées par Lie et Radau sont comprises entre 10^{-23}UA/jour^2 et 10^{-17}UA/jour^2 .

J'ai aussi testé l'algorithme de la relativité en calculant la précession du périhélie de Mercure et en comparant la valeur obtenue avec la valeur attendue. La relativité générale prédit une précession séculaire du périhélie de Mercure dont l'expression est [Balogh and Giampieri, 2002] :

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{6\pi GM_{\odot}}{c^2 a(1-e^2)} \approx 0.1035''/\text{révolution} \quad (3.71)$$

avec ω , a et e étant respectivement le périhélie, le demi-grand axe et l'excentricité de Mercure et M_{\odot} la masse du Soleil. La figure 3.4 montre l'effet de la perturbation relativiste sur le périhélie ω de Mercure sur cinq révolutions de Mercure. Ce graphique montre que, pour chaque année Mercurienne, la position du périhélie augmente de 0.1 arcsec. De plus, j'ai aussi calculé la différence absolue $\Delta(\Delta\omega)$ entre la quantité $\Delta\omega$ calculée avec l'équation 3.71 et celle calculée par Lie. Cette différence est $\sim 1.10^{-4}$ arcsec/révolution ce qui montre que la valeur calculée par Lie est en accord avec le résultat analytique.

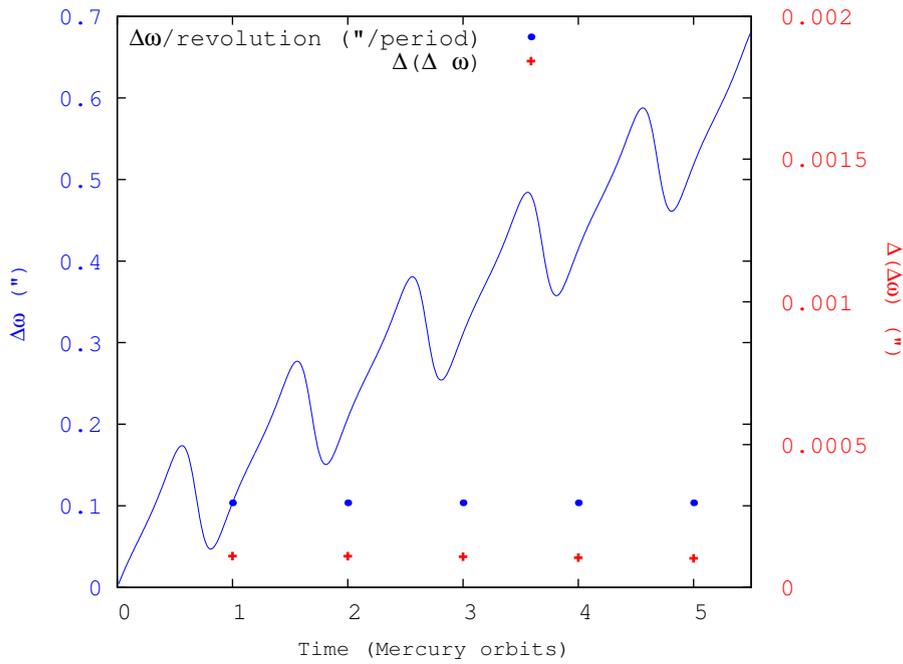


FIG. 3.4 – Effet relativiste sur le périhélie de Mercure calculé avec Lie et exprimé en arcsec(-). $\Delta(\Delta\omega)$ représente la différence absolue entre la valeur attendue et la valeur calculée avec Lie, exprimée en arcsec(+). J'ai aussi représenté la précession du périhélie par année Mercurienne (●).

3.4.4 Test de validation pour l'algorithme de l'effet Yarkovsky

Dans cette partie, je teste l'algorithme développé pour l'effet Yarkovsky en calculant la dérive séculaire du demi-grand axe (da/dt) causée par cet effet. Connaissant la valeur de (da/dt), je peux en déduire la valeur de la constante A_2 de l'équation (3.64). En effet, l'expression de la variation du demi-grand axe due à l'effet Yarkovsky dirigée selon la composante transverse est donnée par l'équation de Gauss⁶ :

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{\sqrt{(1-e^2)}n} (1+e \cos \theta) \|\gamma_T\| \quad (3.72)$$

⁶Il existe aussi des termes périodiques dirigés suivant l'axe radial que je ne prend pas en compte ici.

où θ est l'anomalie vraie. Ainsi, j'en déduis la dérive séculaire de a par révolution :

$$\Delta a = \frac{4\pi a}{k^2(1-e^2)} A_2$$

J'ai propagé les équations du mouvement de 9 astéroïdes candidats à l'effet Yarkovsky sur cinq révolutions képlériennes (ΔT) autour du Soleil. Les astéroïdes que j'ai considérés pour ce test sont ceux de la liste de Chesley [2006] avec la valeur de da/dt correspondante. J'ai ensuite comparé la valeur moyenne de da/dt calculée avec l'intégrateur de Lie, Radau et celle donnée dans Chesley [2006]. Les résultats que je présente dans le tableau 3.3 montrent que les résultats obtenus avec Lie sont en accord avec ceux trouvés avec Radau. De plus, ces valeurs sont proches de celles données par Chesley [2006], même si certaines valeurs sont d'environ 4% ou 5% différentes de celles de Chesley [2006]. Cette différence peut provenir du fait que le modèle de Yarkovsky que j'ai utilisé pour mes simulations doit être différent de celui de Chesley [2006].

TAB. 3.3 – Dérive séculaire du demi-grand axe par révolution pour certains astéroïdes, calculée avec Lie et Radau.

Astéroïdes	Période (jour)	A_2 (UA/jour ²)	da/dt (Chesley) km/rév	da/dt (Radau) km/rév	da/dt (Lie) km/rév
Golevka	1442.31	-1.47×10^{-14}	-0.3785	-0.3616	-0.3604
Apollo	651.17	-4.67×10^{-15}	-0.0642	-0.0612	-0.0611
Ra-Shalom	277.26	-1.20×10^{-14}	-0.0807	-0.0781	-0.0782
Bacchus	408.90	-2.22×10^{-14}	-0.1778	-0.1675	-0.1675
YORP	368.43	-5.49×10^{-14}	-0.3801	-0.3595	-0.3594
Hathor	283.32	-2.35×10^{-14}	-0.1622	-0.1405	-0.1405
Cerberus	409.94	-1.46×10^{-14}	-0.1313	-0.1324	-0.1323
Geographos	507.70	-2.68×10^{-15}	-0.0246	-0.0242	-0.0242
Toro	583.92	-1.13×10^{-15}	-0.0125	-0.0118	-0.0117

Deuxième partie

L'astéroïde (99942) Apophis

Chapitre 4

Apophis : un astéroïde sans précédent

Sommaire

4.1	Historique de la découverte	68
4.2	Les observations	72
4.2.1	Les observations optiques	72
4.2.2	Les observations radars	72
4.3	Les paramètres orbitaux	72
4.4	Les impacts à court et à long terme	73
4.5	Paramètres physiques	73

4.1 Historique de la découverte

[Sansaturio and Arratia \[2008\]](#) présentent un historique sur la découverte de Apophis ainsi que l'évolution de la menace de 2029. L'astéroïde Apophis fut découvert le 19 juin 2004 par Roy A. Tucker, David J. Tholen et Fabrizio Bernardi et reçut le nom provisoire de 2004 MN₄. Il fut observé pendant deux nuits consécutives avant d'être rapidement perdu¹. Il a été observé à nouveau le 18 décembre 2004 pendant trois nuits consécutives depuis l'Australie par Gordon Garrad à l'observatoire de Siding Spring et aussi les jours suivants un peu partout dans le monde (Fig. 4.1).

Dès ces premières observations, cet astéroïde s'est révélé être menaçant dans la mesure où les centres de surveillance automatique SENTRY et CLOMON2 ont détecté un impact possible avec la Terre en 2029 avec une probabilité de 10^{-4} et un niveau sur l'échelle de Turin (TS) de 1. Cependant, aux vues des résidus importants des observations de juin (Fig. 4.2), ces centres ont décidé de retarder la publication de ce résultat sur leur page web "Risk Pages", considérant ce résultat comme douteux. C'est pour cela que Steve Chesley, responsable de Sentry, a contacté D. Tholen à propos des observations problématiques de juin et a lancé un appel pour de nouvelles observations à un groupe d'observateurs.

Bien que cet appel n'ait pas été fructueux le 21 décembre, quatre nouvelles observations faites par l'observatoire E12 (Siding Spring) furent publiées et une réévaluation des mesures faites le 19 juin a été envoyée. L'amélioration de ces observations est claire (Fig. 4.3) mais les résidus pour les observations non corrigées du 20 juin sont devenus encore plus mauvais. Avec ces nouvelles observations, CLOMON2 et Sentry ont réévalué le risque pour 2029 mais ont obtenu des résultats encore plus inquiétants que les jours précédents dans la mesure où le niveau atteint par les échelles de risque étaient TS = 2 et PS = +0.72. Le 23 décembre, David Tholen a obtenu une réévaluation

¹Seules 6 observations furent répertoriées au MPC

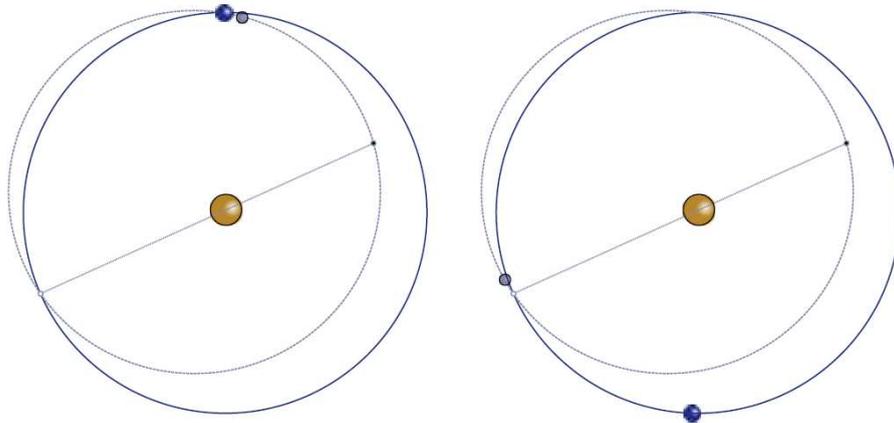


FIG. 4.1 – Position de la Terre (sphère bleue) et d'Apophis (sphère grise) sur leur orbite respective lors de la découverte de l'astéroïde le 19 juin 2004 (à gauche) et lorsqu'il fut observé à nouveau le 18 décembre 2004 (à droite). Les nœuds ascendant (point blanc) et descendant (point noir) d'Apophis reliés par la ligne des nœuds sont aussi représentés.

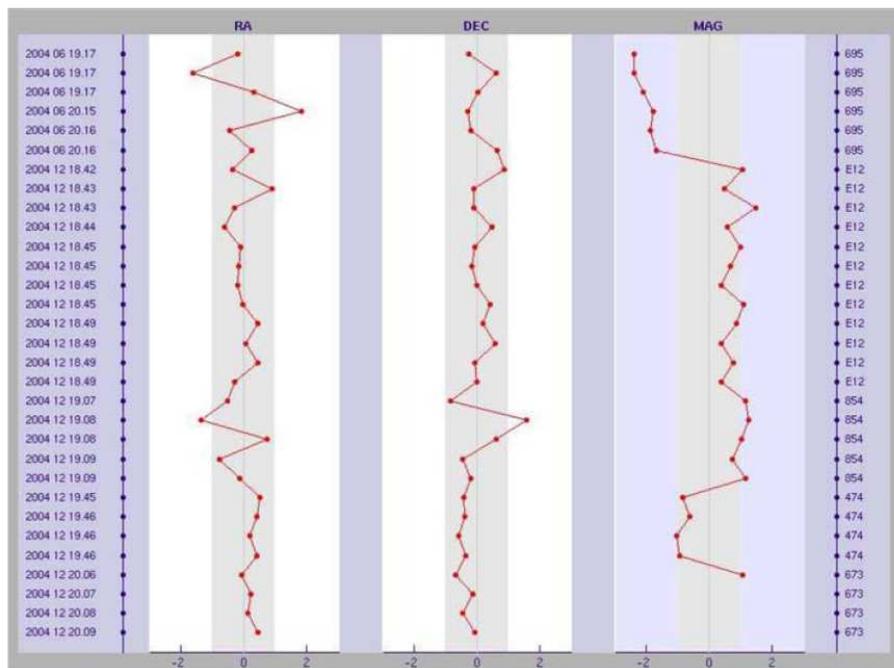


FIG. 4.2 – Résidus en ascension droite (RA), déclinaison (DEC) et magnitude (MAG) obtenus avec les données disponibles à la date du 20 décembre 2004. Pour les résidus en ascension droite et déclinaison, les fenêtres grisées ont une largeur de 2 arcsec alors que pour les résidus en magnitude, la largeur est de 2 unités de magnitude

très précise pour toutes les observations effectuées en juin 2004 mais les résultats ont maintenu un risque évalué à $TS = 2$ et $PS > 0$. D'un commun accord, CLOMON2 et Sentry ont décidé de publier ces résultats dans la mesure où il n'y avait plus aucun doute sur l'existence d'un réel risque en 2029. Bien sûr, il a été mis l'accent sur le fait que ces données étaient fort susceptibles de changer dans la mesure où de nouvelles observations allaient être disponibles dans cette même journée. Une douzaine d'autres observations ont permis de calculer une nouvelle solution orbitale.

La veille de Noël, ces centres ont mis à jour leurs résultats sur leur site indiquant un risque sans précédent sur les échelles de risque TS = 4 et PS > 1.0

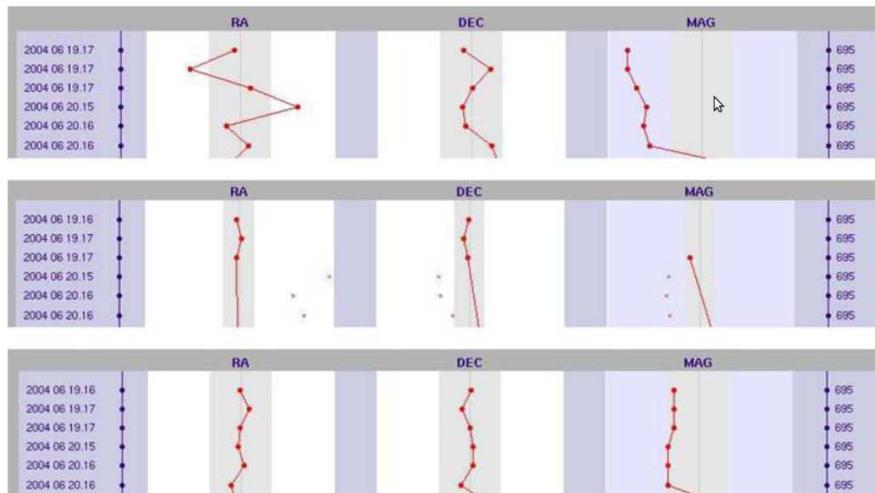


FIG. 4.3 – Comparaison des résidus obtenus pour les observations de juin 2004. Les résidus obtenus le 20 décembre sont représentés sur la figure du haut. Celle du milieu représente les résidus obtenus après correction en incluant les observations du 22 décembre. Pour cette figure, il est à noter que l'échelle a été réduite afin de pouvoir représenter les observations qui ont été rejetées (carrés gris) lors de l'ajustement de l'orbite. Sur la figure du bas, la correction des données inclut en plus les observations du 23 décembre.

Durant les deux jours suivants (25 et 26 décembre) de nouvelles observations sont arrivées au MPC. Devant un tel cas si particulier et inhabituel, des poids [Carpino et al., 2003] ont été appliqués sur les différentes observations à cause du grand nombre de données provenant de différents observatoires. Le 27 décembre, la probabilité de collision avec la Terre en 2029 a atteint son maximum : 1 sur 38. La figure 4.4 permet de comprendre pourquoi cette probabilité fut aussi grande. Avec un diamètre estimé à 300 m et une masse estimée à 7.0×10^{10} kg, les conséquences d'un tel impact seraient régionales.

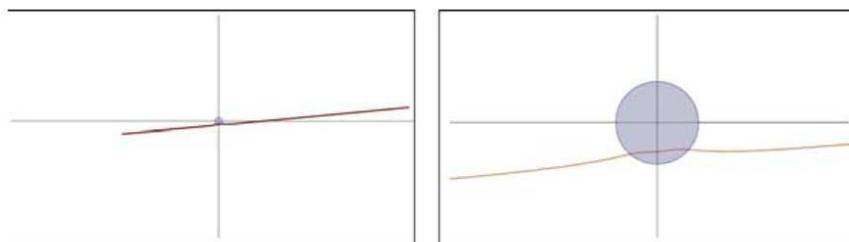


FIG. 4.4 – La figure de gauche représente la trace laissée dans le "target plan" par les astéroïdes virtuels générant les impacts virtuels en 2029. La figure de droite est un zoom de cette traînée au voisinage de la Terre. Dans les deux figures, le cercle représente la section d'impact de la Terre.

Cependant, quatre nouvelles circulaires électroniques (MPECs) du MPC, et principalement le MPEC-Y70 [Gleason et al., 2004] contenaient des observations de 2004 MN₄ datant de mars 2004 et provenant de Spacewatch augmentant ainsi la longueur de l'arc des observations. Presque simultanément, David Tholen envoya des corrections sur les données temporelles des observations du 19 juin. Ces nouvelles données ont alors permis d'écarter tout risque d'impact en 2029 mettant

ainsi fin à la menace de 2029 (voir le tableau 4.1 pour l'historique sur l'évolution de la probabilité d'impact en 2029).

TAB. 4.1 – Résumé de l'évolution de la probabilité d'impact (IP) en 2029 en fonction du nombre d'observations effectuées aux dates données dans le tableau. L'évolution du risque sur l'échelle de Turin (TS) ainsi que sur l'échelle de Palerme (PS) est aussi indiquée.

Run #	Date (CET)	IP (%)	TS	PS
1	20 Dec 19 :18	0.07	1	-0.52
2	22 Dec 22 :35	0.97	2	+0.72
3	23 Dec 18 :43	0.6 (1/120)	2	+0.42
4	23 Dec 21 :53	0.8 (1/125)	2	+0.65
5	24 Dec 19 :15	1.6 (1/60)	4	+1.01
6	25 Dec 15 :25	2.3 (1/43)	4	+1.03
7	25 Dec 21 :55	2.2 (1/45)	4	+1.02
8	26 Dec 16 :04	2.2 (1/45)	4	+0.98
9	27 Dec 14 :00	2.6 (1/38)	4	+1.07
10	28 Dec 01 :37	0	0	—

Fin janvier, des observations radar ont pu être effectuées à Arecibo et ont révélé des problèmes associés aux observations fournies par Spacewatch. En effet, ces observations n'étaient pas compatibles avec les observations radar dans la mesure où lors du processus d'ajustement, la distance ajustée a été revue d'un facteur 2. Selon les informations fournies par l'équipe de Spacewatch à l'époque, les images ont été faites même si les prédictions positionnaient l'astéroïde bien en dessous du seuil de détection. S.R. Chesley a donc contacté les membres de l'équipe de Spacewatch en leur demandant de revoir leurs mesures et ils ont même fait faire une réduction astrométrique externe (par le personnel de Tim Spahr du MPC) pour des vérifications. Les observations de Spacewatch ainsi corrigées ont ainsi pu être correctement pondérées et incluses dans la solution orbitale. Cependant, même sans cette correction, les seules données radar suffisaient pour écarter tout risque de collision en 2029 résumant ainsi la rencontre entre la Terre et Apophis en un simple frôlement d'une distance estimée à environ $5.64R_{\oplus}$. Il apparaîtra dans le ciel avec une magnitude visuelle $V = 3.4$ et sera visible à l'œil nu en Europe, en Afrique et dans l'ouest de l'Asie. Il devrait passer à l'intérieur de la zone orbitale des satellites géostationnaires mais avec une inclinaison orbitale de 40° . Bien que toute menace soit écartée en 2029, d'autres séries d'observations (optiques et radar) ont pu mettre en évidence un faible risque potentiel d'impact en 2036, menace qui persiste jusqu'à nos jours. À la date du 7 Octobre 2009, Sentry et CLOMON2 évaluait ce risque à 1 sur 250000.

2004 MN₄ reçut, le 19 juin 2005, le numéro permanent 99942 lui permettant ainsi d'être nommé Apophis le 19 juillet 2005 par ses découvreurs. Apophis est la traduction grecque de Apep² (serpent géant), dieu des forces du mal et de la nuit, personnification du chaos, du mal cherchant à anéantir la création divine (dans la mythologie égyptienne). Il fût l'ennemi du dieu soleil Râ et s'attaquait quotidiennement à sa barque afin de mettre fin au processus de création. Il fût à chaque fois vaincu et chaque lever du soleil marquait ainsi la victoire de Râ sur Apophis.

²R. Tucker et D. Tholen sont reconnus pour être des fans incondtionnels de la série Stargate SG-1

4.2 Les observations

4.2.1 Les observations optiques

À la date de calcul des probabilités d'impact (voir Tab. 4.4), Apophis possédait 1402 observations optiques réparties de 2004 à 2008.

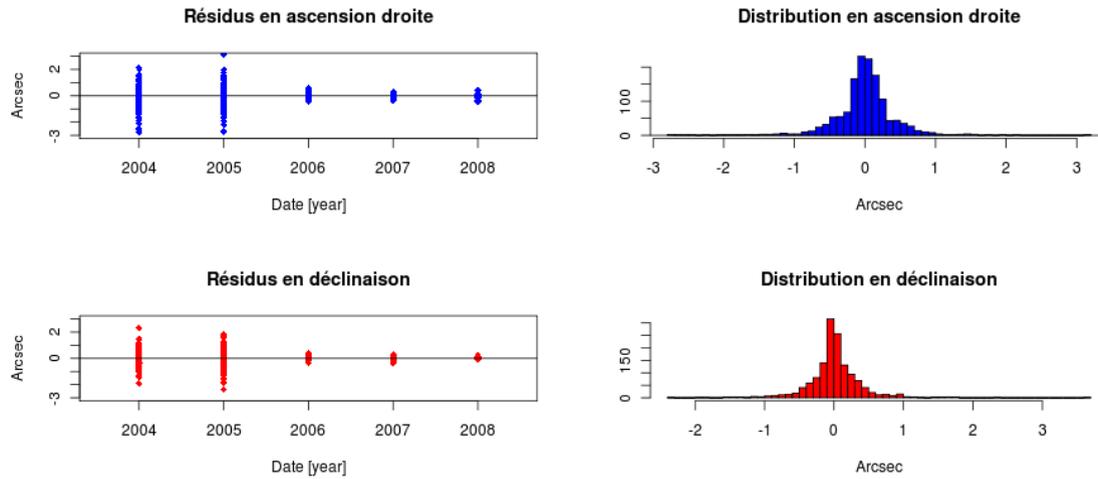


FIG. 4.5 – Résidus postfit des observations d'Apophis (à gauche) en ascension droite (bleu) et déclinaison (rouge), et histogramme des distributions.

4.2.2 Les observations radars

Apophis a pu être observé à partir d'Arecibo en 2005 et en 2006, période pendant laquelle cinq mesures d'écho doppler et deux mesures d'écho radar ont pu être faites (Tab. 4.2). Ces mesures ont été faites en bande S [Thorton and Border, 2003] à une fréquence d'émission de 2380 MHz.

TAB. 4.2 – Observations radars de Apophis [JPL, 2011c].

Date [TU]	Mesure [Hz ou μ s]	Distance Arecibo-Apophis [UA]	Type	sigma [Hz ou μ s]
2005-01-27 23 :31 :00	-100849.1434	0.912	R	0.250
2005-01-29 00 :00 :00	-102512.9059	0.912	R	0.250
2005-01-29 00 :00 :00	192028507.13	0.912	r	4.000
2005-01-30 00 :18 :00	-103799.8178	0.912	R	0.150
2005-01-30 00 :18 :00	195808170.79	0.912	r	4.500
2005-08-07 17 :07 :00	8186.8	0.268	R	0.2
2006-05-06 12 :49 :00	-118256.8	0.260	R	0.1

4.3 Les paramètres orbitaux

Les centres du JPL et de NEODyS fournissent les éléments orbitaux et incertitudes pour Apophis. N'ayant pas été observé depuis 2008, ces éléments ainsi que la matrice de covariance sont propagés à une date proche de la date actuelle.

TAB. 4.3 – Éléments orbitaux de Apophis. *Source : JPL*

Éléments orbitaux	Valeur	Incertitude σ
a [AU]	0.922443037062152	$1.878216074 \times 10^{-08}$
e	0.191202275457624	$6.838012387 \times 10^{-08}$
i [°]	3.3314961682811	$1,659593472 \times 10^{-06}$
Ω [°]	204.4404528986157	$7.658316066 \times 10^{-05}$
ω [°]	126.4151078455158	$7.608697135 \times 10^{-05}$
M [°]	240.9420786286169	$5.480617884 \times 10^{-05}$

4.4 Les impacts à court et à long terme

Le 7 Octobre 2009, le JPL publiait sur son site [JPL \[2011a\]](#) les impacts potentiels pour le siècle à venir (Tab. 4.4). La distance représente le minimum de distance dans le "target plane" entre la ligne de variation (LoV, voir chap. 5) et le centre de la Terre, exprimée en rayons terrestres, en prenant en compte dans le rayon terrestre, l'épaisseur de l'atmosphère. L'énergie d'impact, de nature cinétique, est calculée en tenant compte de la magnitude absolue et la vitesse d'impact de l'objet³. La principale source d'incertitude pour l'énergie est dominée par l'incertitude liée à la masse et l'énergie est souvent déterminée à un facteur trois près.

TAB. 4.4 – Impacts potentiels avec la Terre. Les distances sont exprimées en unités de rayon terrestre. L'énergie libérée par ces impacts est exprimée en mégatonnes de TNT. PS et TS correspondent respectivement aux échelles de Palerme et de Turin (voir chap. 1).

Date	Distance (R_{\oplus})	Probabilité d'impact	Energie d'impact (MT)	PS	TS
2036-04-13.37	0.53	4.3×10^{-6}	5.06×10^2	-3.08	0
2056-04-13.37	0.66	1.0×10^{-7}	5.06×10^2	-4.97	0
2068-04-13.37	0.02	2.5×10^{-6}	5.06×10^2	-3.70	0
2068-04-13.37	0.00	1.1×10^{-7}	5.06×10^2	-5.04	0
2076-04-13.37	0.10	2.2×10^{-7}	5.06×10^2	-4.79	0
2103-04-13.37	0.61	1.3×10^{-7}	5.06×10^2	-5.17	0

4.5 Paramètres physiques

Très peu de données physiques concernant Apophis sont disponibles (Tab. 4.5). Sa magnitude absolue H et son albédo p_v ont été déterminés par [Delbò et al. \[2007\]](#) ce qui a permis de déterminer son diamètre D . Des courbes de rotation obtenues sont répertoriées par [Behrend \[2005\]](#) et ont permis de déterminer la période de rotation P_s d'Apophis avec une très bonne précision. Beaucoup d'autres paramètres physiques, nécessaires à la détermination de l'effet Yarkosky (voir chap. 2) sont inconnus à ce jour. Il est impossible de prédire le signe de la variation d'énergie orbitale du fait que l'on ne connaît pas l'orientation de son axe de rotation. De plus, en l'absence de toute autre information, nous n'avons aucune connaissance sur la présence d'un satellite, si c'est un agrégat poreux ou alors un bloc monolithique ou même s'il tourne autour de son axe principal. Enfin, [Binzel et al. \[2009\]](#) ont pu déterminer sa classe spectrale en comparant et modélisant son spectre de

³Vitesse d'entrée dans l'atmosphère

réflectance dans le proche infrarouge par rapport aux caractéristiques spectrales et minéralogiques de météorites vraisemblablement analogues.

TAB. 4.5 – Paramètres physiques d’Apophis.

Paramètre	Symbole	Valeur	Incertitude	Référence
Période de rotation	P_s [d]	1.2667	0.0006	Behrend [2005]
Orientation du spin	(λ, β) ECJ2000	—	—	
Albédo géométrique	p_v	0.33	0.08	Delbò et al. [2007]
Magnitude absolue	H	19.7	0.4	Delbò et al. [2007]
Magnitude slope	G	0.25		Delbò et al. [2007]
Diamètre ^b	D [m]	270	60	Delbò et al. [2007]
Densité de surface ^a	ρ_s	—	—	
Conductivité thermique ^a	κ	—	—	
Chaleur spécifique ^a	C	—	—	
Inertie thermique ^a	$TI = \sqrt{(\rho C \kappa)}$	—	—	
Masse volumique	ρ	—	—	
Type spectral		Sq		Binzel et al. [2009]
Masse ^c	M [kg]	2.7×10^{10}		

(a) En principe, ces paramètres dépendent de la température

(b) Estimation basée sur la valeur de la magnitude absolue en supposant l’objet sphérique et avec un albédo visuel de 0.154

(c) Masse calculée en supposant l’objet sphérique et de densité 2.6 g/cm^3

Chapitre 5

Étude dynamique et géométrique des passages proches

Sommaire

5.1 Géométrie des passages proches	76
5.1.1 Calculs des passages proches	76
5.1.2 Plan de Bessel (b-plane ou target plane)	77
5.1.3 Ellipse d'incertitude dans le plan de Bessel	80
5.2 La recherche d'impacteurs virtuels	80
5.2.1 La ligne de variation (LoV)	80
5.2.2 La technique Monte-Carlo	81
5.2.3 Section d'impact	81
5.3 Étude du passage proche d'Apophis avec la Terre en 2029	82
5.3.1 Plan de Bessel d'Apophis en 2029	82
5.3.2 Retour résonant	82
5.3.3 Les trous de serrure (keyholes)	84

5.1 Géométrie des passages proches

Pour pouvoir étudier les propriétés dynamiques et géométriques d'un passage proche, il faut dans un premier la mettre en évidence avec la meilleure précision possible en terme de distance et de temps.

5.1.1 Calculs des passages proches

D'une manière générale, lorsque l'on choisit une intégration à pas variable, l'intégrateur se charge de déterminer ce pas. Ce pas de temps est généralement lié à la vitesse de l'astéroïde. Lorsque la distance entre la Terre et l'astéroïde diminue, la vitesse de ce dernier augmente et le pas de temps diminue. Lorsque la distance d'approche est faible, le pas de temps peut ne pas être suffisamment petit pour déterminer avec précision la date et la distance d'approche. Il est alors nécessaire d'imposer un pas de temps à l'intégrateur quand cette configuration arrive. Lorsque la distance entre l'astéroïde et la planète est minimum alors l'angle entre le vecteur position \mathbf{r} et le vecteur vitesse $\dot{\mathbf{r}}$ est tel que $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \alpha = +\pi/2$. Cela signifie qu'un passage proche commence si $\cos \alpha < 0$, ce qui signifie que l'astéroïde s'approche de la planète, et se termine quand $\cos \alpha > 0$, ce qui signifie que l'on s'éloigne de la planète. Ces deux conditions traduisent donc les variations de la distance en fonction du temps. La valeur de α nous donne donc l'angle entre les vecteurs

position et vitesse au temps t . Vu que le pas de temps T est donné par l'intégrateur numérique (pas de temps variable), il est alors nécessaire de lui imposer un pas de temps t dans le cas où $T \geq t$. Autrement dit, il faut forcer l'intégrateur à ralentir son pas afin d'atteindre le minimum de distance avec le maximum de précision.

Je présente dans le tableau 5.1 les prochaines distances d'approche sur un siècle entre Apophis et la Terre en utilisant les observations faites entre 2004 et 2008, telles que présentées au MPC. Seules les distances inférieures à 0.1 UA sont présentées dans le tableau.

TAB. 5.1 – Minimum de distance entre Apophis et la Terre sur un siècle. Durant cette période, Apophis croisera aussi Vénus à une distance ~ 0.08 UA

Planète	Année	Mois	Jour	Heure (TT)	Distance Δ [UA]
Terre	2013	1	9	11 :44	0.096661
Terre	2029	4	13	21 :46	0.000254
Terre	2044	8	30	09 :53	0.068793
Terre	2051	4	23	03 :54	0.053649
Terre	2066	9	13	21 :23	0.037389
Terre	2080	5	17	00 :14	0.097029
Terre	2087	4	10	02 :43	0.057356
Terre	2102	9	12	18 :08	0.022311

5.1.2 Plan de Bessel (b-plane ou target plane)

Öpik commença à développer une théorie des rencontres proches [Öpik, 1951, 1976] il y a près de 50 ans en ayant une approche d'un problème à deux corps "par morceaux" : l'astéroïde (mais cela peut aussi être une comète ou un météoroïde) a une orbite elliptique jusqu'à ce qu'il rentre dans la sphère d'influence d'une planète. À cet instant, s'enclenche une dynamique de problème à deux corps où l'orbite planétocentrique de l'astéroïde sera toujours, dans cette approximation, une orbite hyperbolique. Ensuite, les formules standards sont appliquées afin de déterminer les conditions initiales de la nouvelle orbite elliptique après cette rencontre proche. À l'instant de la rencontre proche, il est possible de représenter l'état de l'astéroïde dans un repère planétocentrique dont les coordonnées sont exprimées dans un plan appelé plan de Bessel (*b-plane* ou *target plane*).

Soit un repère (XYZ) centré sur la planète tel que l'axe Y coïncide avec la direction du mouvement de la planète et le Soleil est dans la direction des X négatifs (Fig. 5.1).

Si on note d'autre part \mathbf{V} , les composantes de la vitesse planétocentrique de l'astéroïde alors les coordonnées dans le repère (XYZ) du vecteur vitesse de la trajectoire asymptotique de l'astéroïde seront :

$$\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \sin \theta \sin \phi \\ V \cos \theta \\ V \sin \theta \cos \phi \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

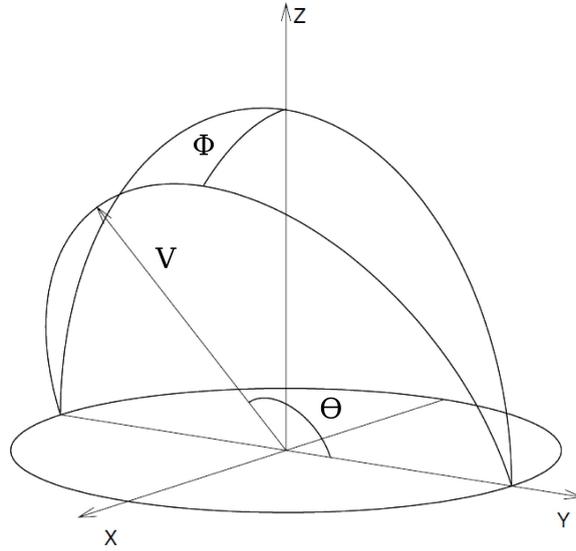


FIG. 5.1 – Repère XYZ centrée sur la planète. Le vecteur \mathbf{V} détermine la vitesse planétocentrique de l'astéroïde.

avec les angles θ et ϕ , tels que :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta = V_y/V \\ \sin \theta = \sqrt{V_x^2 + V_z^2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \cos \phi = V_z/\sqrt{V_x^2 + V_z^2} \\ \sin \phi = V_x/\sqrt{V_x^2 + V_z^2} \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

Le plan de Bessel [Valsecchi et al., 2003, Milani et al., 2002] est construit de telle sorte qu'il passe par le centre de la planète et est perpendiculaire à la vitesse planétocentrique \mathbf{V} de l'astéroïde. Un système de référence (ξ, η, ζ) est construit tel que l'axe négatif des ζ soit aligné dans la direction opposé au projeté dans le plan de Bessel de la vitesse héliocentrique de la Terre. L'axe positif des η est porté par la direction de la vitesse \mathbf{V} et l'axe positif des ξ complète le trièdre. En utilisant ces définitions, il est alors possible de passer du repère planétocentrique (XYZ) au repère du b-plane (ξ, η, ζ) en effectuant une première rotation d'angle $-\phi$ autour de l'axe Y puis une deuxième rotation d'angle $-\theta$ autour de l'axe ζ . En notation matricielle, les coordonnées planétocentriques (ξ, η, ζ) s'écrivent donc :

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \mathbf{R}_\zeta(-\theta) \mathbf{R}_Y(-\phi) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

avec

$$\mathbf{R}_\zeta(-\theta) \mathbf{R}_Y(-\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ \sin \phi \sin \theta & \cos \theta & \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \cos \theta & -\sin \theta & \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

Par conséquent, les coordonnées (ξ, ζ) appartiennent au plan de Bessel (fig. 5.2). Si l'astéroïde est en avance ou en retard de Δt sur la date T_0 de la rencontre (arrivant alors à la date $T_1 = T_0 + \Delta t$), seule la coordonnée ζ sera modifiée (fig. 5.3). En effet, si on considère les mouvements des deux corps comme rectilignes pendant le temps Δt , alors le centre du plan de Bessel aura bougé, vu que la Terre aura bougé. Alors, d'après la construction de l'axe des ζ , un déplacement de la Terre (suivant l'axe négatif des ζ) va entraîner un déplacement de la position A suivant l'axe positif des ζ .

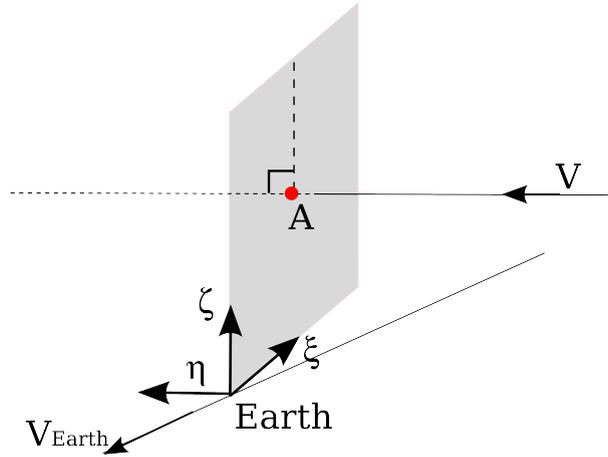


FIG. 5.2 – Plan de Bessel. V représente le vecteur vitesse géocentrique de l'astéroïde, V_{Earth} le vecteur vitesse héliocentrique de la Terre et A représente la position de l'astéroïde.

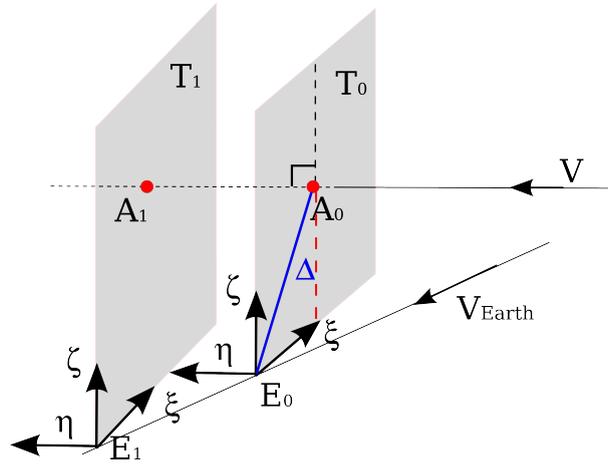


FIG. 5.3 – Influence du retard ou de l'avance de l'astéroïde, lors de la rencontre proche, sur les coordonnées (ξ, ζ) . (---) représente la projection de la position de l'astéroïde dans le plan de Bessel sur l'axe horizontale qui est exactement le MOID.

D'autre part, l'axe des ξ est dirigé le long du plus petit segment reliant l'orbite de la Terre et de l'astéroïde. En effet, toujours dans l'approximation linéaire, on sait que ce plus petit segment est perpendiculaire aux deux orbites. Or, par construction, l'axe des ξ est orthogonal à celui des η qui est parallèle à la vitesse géocentrique de l'objet. D'autre part, l'axe des ξ est à la fois orthogonal aux projections de la vitesse de la Terre sur l'axe des η et ζ . Par conséquent, la coordonnée ξ est par définition égale au MOID de l'astéroïde qui reste invariant pendant un temps Δt . On aura donc pour les deux coordonnées :

$$\begin{cases} \xi(T_0 + \Delta t) = \xi(T_0) \\ \zeta(T_0 + \Delta t) = \zeta(T_1) \end{cases}$$

La plus petite distance Δ entre l'astéroïde et la terre est déterminée par :

$$\Delta = \sqrt{\xi^2 + \zeta^2} \quad (5.5)$$

Le plan de Bessel permet donc de découpler les deux paramètres impliquées dans un passage

proche entre un astéroïde et la Terre : le MOID et le temps d'arrivée.

Dans l'approximation à deux corps, on peut considérer que la déviation de l'astéroïde est quasi-instantanée. L'angle de déviation entre la trajectoire non perturbée (asymptotique) et la trajectoire déviée, notée γ est telle que :

$$\tan \gamma = \frac{GM_{\oplus}}{bv_0^2} \quad (5.6)$$

où G est la constante de gravitation universelle, M_{\oplus} la masse de la Terre, b le paramètre d'impact et v_0 la vitesse asymptotique de l'astéroïde lorsqu'il rentre dans la sphère d'influence de la planète. La norme de la vitesse v_0 avant et après le passage proche reste inchangée mais sa direction n'est plus la même.

5.1.3 Ellipse d'incertitude dans le plan de Bessel

Si on génère un ensemble d'astéroïdes virtuels (VAs) correspondant à toutes les solutions possibles, proches de la solution nominale, l'intersection de tous ces VAs avec le b-plane formera une ellipse centrée sur les valeurs nominales (ξ_N, ζ_N) et dont les axes sont données par les incertitudes liées aux grandeurs (ξ, ζ). Pour déterminer ces incertitudes, on utilise la matrice de covariance initiale Γ_0 propagée au temps t correspondant à la date de la rencontre proche. On a vu dans le chapitre 2 qu'il suffit de résoudre les équations variationnelles afin de propager cette matrice de covariance. On peut alors convertir cette dernière, qui peut être exprimée suivant des coordonnées cartésiennes (dans un repère équatorial ou écliptique), des éléments képlériens ou équinoxiaux, en une matrice de covariance des coordonnées (ξ, η, ζ) en utilisant la relation suivante :

$$\Gamma(\mathbf{F}) = \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \right) \Gamma(\mathbf{X}) \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T = \begin{pmatrix} \sigma_{\xi}^2 & \sigma_{\xi} \sigma_{\eta} & \sigma_{\xi} \sigma_{\zeta} \\ \sigma_{\eta} \sigma_{\xi} & \sigma_{\eta}^2 & \sigma_{\eta} \sigma_{\zeta} \\ \sigma_{\zeta} \sigma_{\xi} & \sigma_{\zeta} \sigma_{\eta} & \sigma_{\zeta}^2 \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

où $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\xi, \eta, \zeta)$ et \mathbf{X} désignent un vecteur à 6 dimensions faisant référence au système de coordonnées utilisés (cartésiens, képlériens ou équinoxiaux). Les incertitudes de (ξ, η, ζ) sont donc déterminées par les éléments diagonaux de la matrice de covariance. Par conséquent, les demi-petit axe et demi-grand axe de l'ellipse sont données par ($3\sigma_{\xi}, 3\sigma_{\zeta}$)

5.2 La recherche d'impacteurs virtuels

5.2.1 La ligne de variation (LoV)

Lorsque la région de confiance est petite et que les résidus sont petits (cf. chap.2), il est possible d'approximer la région de confiance en un ellipsoïde de confiance (Fig. 5.4).

Il est alors possible, en utilisant les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice de covariance, de rechercher des impacteurs virtuels (VIs) suivant une ligne appelée *la ligne de variation (LoV)* [Milani et al., 2005], dans une approximation linéaire, ligne construite suivant le plus grand axe de l'ellipsoïde de confiance. Cet axe est déterminé par la valeur propre la plus grande, témoignant de la taille de la zone d'incertitude. Cette approche, utilisée par les systèmes CLOMON et Sentry, crée une population de VAs afin de rechercher de possibles impacteurs. Cependant, l'astéroïde Apophis étant un cas vraiment particulier et unique, les impacts déterminés par ces centres (cf. chap.4) sont calculées en créant un très grand nombre d'astéroïdes virtuels se situant, non pas sur l'axe le plus grand de l'ellipsoïde mais dans tout son volume.

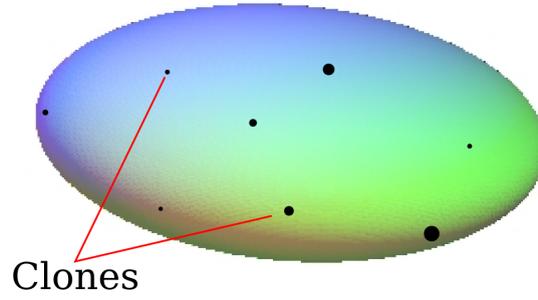


FIG. 5.4 – Ellipsoïde de confiance. Les points en noir représente les clones obtenus par une méthode d'échantillonnage.

5.2.2 La technique Monte-Carlo

Parmi les méthodes d'échantillonnage, on peut utiliser la méthode de Monte-Carlo pour analyser le volume de l'ellipsoïde de confiance. Pour cela, en supposant une erreur gaussienne $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_6)$ sur les six éléments orbitaux $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_6)$, on peut générer des clones de la solution nominale \mathbf{P}_0 tel que :

$$\mathbf{P} = A\boldsymbol{\varepsilon}^T + \mathbf{P}_0 \quad (5.8)$$

avec A la matrice triangulaire de la matrice de covariance telle que $\Gamma = A^T A$. Cette décomposition peut être faite en utilisant la méthode de Cholesky. L'avantage de cette décomposition est qu'elle permet de prendre en compte les corrélations entre les paramètres P_{ij} . On utilise alors la matrice de covariance entière et pas seulement les éléments diagonaux.

5.2.3 Section d'impact

Lorsqu'on traite des phénomènes d'impact, le concept de section d'impact est fondamental. Dans le cas d'impact d'astéroïdes avec la Terre, cette section d'impact est l'aire occupée par la Terre projetée sur un plan perpendiculaire à la direction du mouvement de l'astéroïde autrement dit le b-plane. L'aire de cette section d'impact est étroitement liée à la probabilité d'un impact. Plus l'aire est grande, plus probable sera l'impact (Fig. 5.5).

Dans la théorie, l'astéroïde approche la Terre avec une trajectoire non perturbée par l'attraction de la Terre. Par conséquent, la section d'impact correspond à l'aire projetée de la Terre dans le b-plane. Mais en réalité, la trajectoire de l'astéroïde va être courbée à cause de l'attraction gravitationnelle de la Terre. La section d'impact apparaît donc plus grande que dans la situation d'une trajectoire non perturbée. Si on note σ_{\oplus} cette section d'impact et b_{\oplus} le rayon augmenté de la Terre par le focus gravitationnel alors, dans l'approximation $M_{\oplus} \gg m$, on aura

$$\begin{cases} \sigma_{\oplus} = \pi b_{\oplus}^2 \\ b_{\oplus} = R_{\oplus} \sqrt{1 + \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus} v_0^2}} \end{cases} \quad (5.9)$$

où v_0 est la vitesse à l'infinie de l'astéroïde, G la constante de gravitation universelle et R_{\oplus} le rayon de la Terre.

Ainsi, un astéroïde sera un possible impacteur si le minimum de distance Δ avec la Terre est comparable à b_{\oplus} autrement si la condition $\Delta \leq b_{\oplus}$ est réalisée.

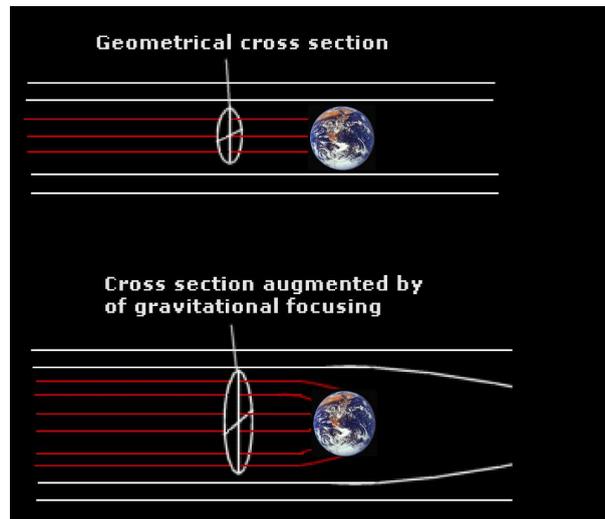


FIG. 5.5 – Section d’impact de la Terre.

5.3 Étude du passage proche d’Apophis avec la Terre en 2029

5.3.1 Plan de Bessel d’Apophis en 2029

Le tableau 5.2 suivant donne les positions nominales des coordonnées (ξ, ζ) dans le target plane, ainsi que leur incertitude $(\sigma_\xi, \sigma_\zeta)$ que l’incertitude σ_Δ sur le minimum de distance Δ à la date de la rencontre proche calculée d’après l’équation (5.5). Ces valeurs montrent que la zone d’incertitude en 2029 est une ellipse (Fig. 5.6) dont la composante principale, témoignant de la plus grande zone d’incertitude, est suivant l’axe des ζ et dont le demi-grand axe a une taille de $3\sigma_\zeta = 1036$ km. Ainsi, les clones de l’orbite nominale vont tous quasiment se situer le long de cette ligne de variation.

TAB. 5.2 – Valeurs et incertitudes sur les coordonnées (ξ, ζ) dans le b-plane de 2029. La taille de l’ellipse d’incertitude est donnée par les valeurs à $(3\sigma_\xi, 3\sigma_\zeta)$. Le minimum de distance Δ ainsi que son incertitude σ_Δ sont également indiqués.

$\xi \pm \sigma_\xi$ [km]	$\zeta \pm \sigma_\zeta$ [km]	$\Delta \pm \sigma_\Delta$ [km]
6980 ± 15	37440 ± 345	38086 ± 345

5.3.2 Retour résonant

Lors d’une rencontre proche avec la Terre, l’orbite d’un PHA peut être complètement modifiée. En 2029, à la distance d’environ $6 R_\oplus$, la perturbation gravitationnelle occasionnée par la Terre est telle que l’astéroïde Apophis va changer de famille dynamique. En effet, il passera de la famille des Atens à la famille des Apollos (Fig. 5.7). D’autre part, l’angle de déviation entre la trajectoire asymptotique non perturbée et la trajectoire déviée est estimée, d’après l’équation (5.6), à $\gamma \sim 27^\circ$.

Cependant, à cause de cet effet de balancier, les prédictions de positions après 2029 ne peuvent être faites avec forte une probabilité. En effet, il suffit de changer le modèle dynamique (par exemple prendre en compte les perturbations gravitationnelles engendrées par Cérès, Pallas et Vesta), la théorie planétaire (DE405 ou INPOP08) ou encore les conditions initiales (de l’ordre de 1σ) pour que l’orbite après 2029 ne soit plus la même. On pourrait presque dire que l’orbite

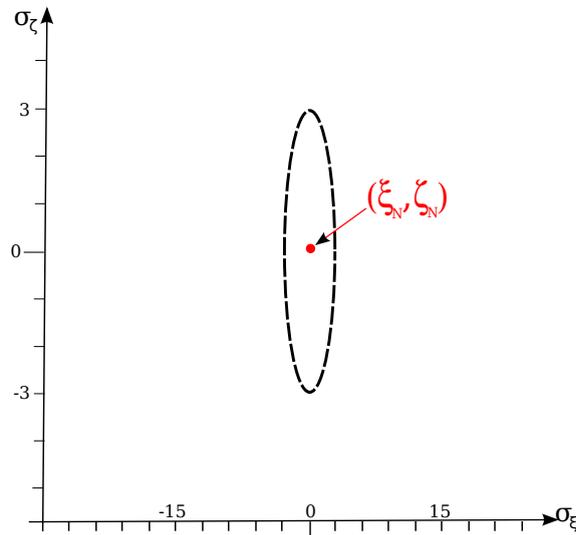


FIG. 5.6 – Ellipse d’incertitude de l’astéroïde Apophis dans le plan de Bessel de 2029 centrée sur la position nominale (ξ_N, ζ_N) . Les axes sont exprimés en unités σ .

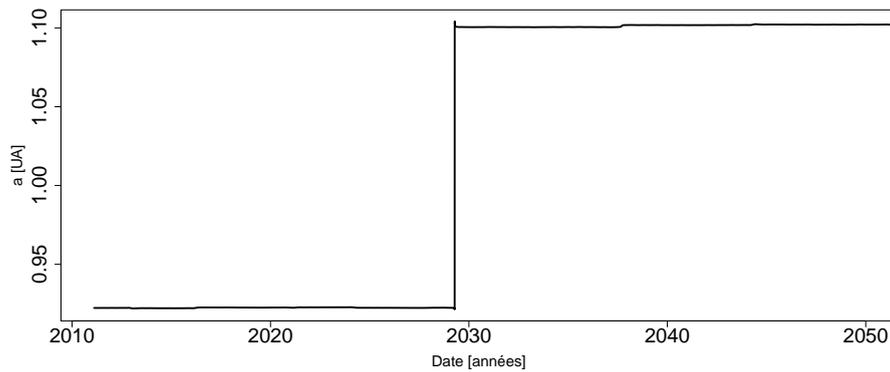


FIG. 5.7 – Variation du demi-grand axe en fonction du temps. La rencontre proche en 2029 avec la Terre va être telle que Apophis passera de la famille des Atens à la famille des Apollos.

d’Apophis, après la rencontre proche, est quasi-chaotique.

D’autre part, à cause de cette chaotïcité, Apophis aura plusieurs valeurs possibles de demi-grand-axe et donc plusieurs périodes possibles après 2029. On s’attend donc à ce que, après k révolutions d’Apophis autour de la Terre et h années, ces deux corps se rencontrent encore dans la même position. C’est ce qu’on appelle un *retour résonant* dont la définition est :

$$\frac{T_{ap}}{T_{\oplus}} = \frac{h}{k} \quad \text{avec } h \text{ et } k \in \mathbb{N}^*$$

T_{ap} désigne la période de révolution d’Apophis après 2029 et T_{\oplus} désigne celle de la Terre. Bien sur le rapport h/k n’est jamais rationnel. Ce qui signifie que la Terre sera en avance ou en retard par rapport à la rencontre proche de 2029. Le tableau 5.3, inspiré de Chesley [2006], présente les principaux retour résonants entre la Terre et Apophis.

TAB. 5.3 – Année du retour résonnant en fonction de la période de Apophis, après 2029.

Année	Résonance	Intervalle de période pour Apophis après 2029 (jour)
2034	5 :4	[456.2 :456.9]
2035	6 :5	[437.9 :438.6]
2036	7 :6	[425.7 :426.5]
2037	8 :7	[417.1 :417.8]
2038	9 :8	[410.5 :411.3]
2046	17 :15	[413.6 :414.3]
2048	19 :17	[407.9 :408.6]
2051	22 :19	[422.5 :423.3]

5.3.3 Les trous de serrure (keyholes)

Certains retours résonants indiquent simplement que Apophis aura une rencontre proche avec la Terre. Mais parfois, des impacts peuvent se produire à ces dates si l'astéroïde passe par une fenêtre, quasi unidimensionnelle, appelée *keyhole*¹ (Fig. 5.8).

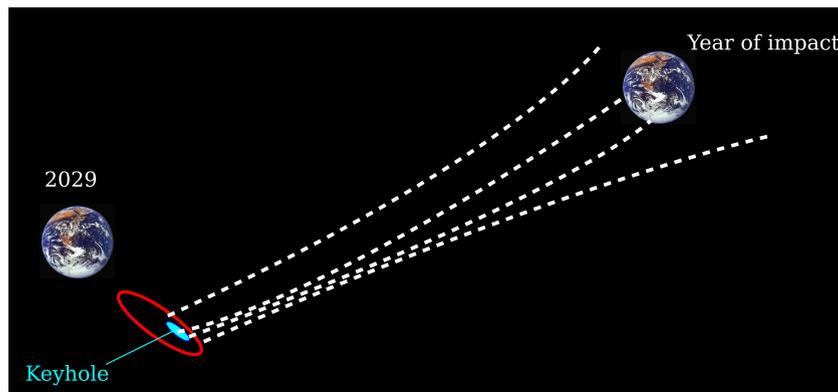


FIG. 5.8 – Keyhole (trou de serrure) gravitationnel entraînant des impacts pour une année de résonance donnée.

Ce terme fut introduit pour la première fois par Chodas [1999] concernant l'astéroïde 1999 AN10 pour lequel des probabilités d'impact ont été calculées si l'astéroïde passait par des trous de serrure gravitationnels en 2044, 2046 ou encore en 2039, après sa rencontre proche avec la Terre en 2027. L'astéroïde Apophis est aussi un astéroïde dans cette configuration. Les principaux trous de serrures d'Apophis sont indiqués dans le tableau 5.4 dont le plus célèbre est celui de 2036.

Le calcul de position et taille de trous de serrure peut se faire de façon analytique [Valsecchi et al., 2003] ou de façon numérique. Pour cette dernière méthode, il suffit de propager un échantillon de la population initiale (des clones de la solution nominale) aux dates des retours résonants. Certains clones issus de cette population vont donc passer par une fine zone dans le ciel qui est donc le keyhole. On qualifie les trous de serrure de *primaires* quand ils sont la conséquence directe d'une seule rencontre proche, en l'occurrence pour Apophis, de la rencontre proche en 2029. Cependant, proche de ces trous de serrure primaires, certains clones vont simplement engendrer des rencontres proches mais ces nouvelles rencontres proches pourront à leur tour produire d'autres impacts dans

¹Signifie *trou de serrure* en français

TAB. 5.4 – Taille des principaux trous de serrure d’Apophis. D’après [Chesley, 2006].

Année	Résonance	Dimension du keyhole (m)
2034	5 :4	560
2035	6 :5	560
2036	7 :6	610
2037	8 :7	570
2046	17 :15	660
2048	19 :17	410

le futur et donc d’autres trous de serrure qui sont qualifiés de *secondaires*. Les trous de serrure secondaires sont donc la conséquence de deux rencontres proches successives. Enfin, que ces trous de serrure soient primaires ou secondaires², les impacts avec la Terre peuvent survenir au nœud ascendant mais aussi au nœud descendant.

En utilisant le technique de Monte-Carlo, il est donc possible de mettre en évidence la présence de trous de serrure primaires et secondaires et de calculer leur position dans le b-plane. J’ai donc généré 10 millions de clones en utilisant la méthode de Monte-Carlo afin de pouvoir explorer une majeure partie de l’ellipsoïde d’incertitude et je les ai propagés jusqu’à cent ans à partir de la date nominale. Pour chaque orbite propagée, j’ai calculé sa position dans le b-plane et le minimum de distance Δ avec la Terre, distance que j’ai alors comparée au rayon de la section d’impact de la Terre valant $b_{\oplus} = 1.7R_{\oplus}$.

Le tableau 5.5 montre la position des trous de serrure³ trouvés par le clonage d’orbite. Le minimum de distance correspond à la plus petite distance d’impact trouvée avec la Terre et exprimée en unité de rayons terrestres. La position de chaque trou de serrure est indiquée suivant la principale composante de l’ellipse du b-plane c’est-à-dire suivant la composante ζ et correspond à la position par rapport au centre de l’ellipse (i.e. à la position nominale ζ_N). On voit donc que plusieurs trous de serrure sont proches de la solution nominale. Enfin, la probabilité d’impact associée à chaque keyhole est aussi indiquée.

Le code couleur présent dans le tableau 5.5 indique si un keyhole est primaire ou secondaire. La couleur noire indique qu’un keyhole est primaire, la couleur rouge indique que le keyhole est secondaire et que l’impact a lieu au nœud ascendant et enfin la couleur bleue indique que le keyhole est secondaire mais que l’impact a lieu au nœud descendant. Par exemple l’impact ayant lieu le 13 avril 2068 est un keyhole secondaire causé par la rencontre proche en 2029 puis celle de 2051. Le retour résonant de 2051 n’est pas un keyhole puisqu’à cette date, il n’y a pas d’impact avec la Terre. Cependant, Apophis passerait à environ 20000 km du centre de la Terre ($\sim 3R_{\oplus}$) l’entraînant inévitablement en collision avec la Terre en 2068. Autrement dit, si en 2029 Apophis passe par le keyhole de 2068, il sera ensuite sur une trajectoire l’amenant à une rencontre proche ~ 20000 km avec la Terre en 2051, puis cette nouvelle rencontre proche l’amènerait sur la trajectoire impactrice de 2068 .

La figure 5.9 montre la distribution de la population des astéroïdes virtuels suivant la coordonnées ζ exprimée en unités σ_{ζ} . La distribution est gaussienne et centrée sur la valeur nominale. Cette figure montre entre autre la position des keyholes sur cet histogramme.

Enfin, la figure 5.10 représente l’ellipse de dispersion dans le b-plane ainsi que la position des

²Il n’est pas absurde de penser qu’il existe des keyholes tertiaires

³Seules sont indiquées les dates pour lesquels plus d’un impact ont été trouvés.

TAB. 5.5 – Date des impacts trouvés en utilisant la méthode de Monte Carlo et la matrice de covariance complète. La position du centre de chaque trou de serrure est exprimée en fonction de l'incertitude σ_ζ . J'indique aussi le minimum de distance d'impact atteint en rayon terrestre (R_\oplus) ainsi que la probabilité d'impact associée. Le code couleur indique si un keyhole est primaire (noir) ou secondaire (rouge si l'impact a lieu au nœud ascendant et bleu s'il a lieu au nœud descendant).

Année	Distance	Position sur le LOV	I.P.
	$[R_\oplus]$	$[\sigma_\zeta]$	
2036	0.3287	-3.394	2.5×10^{-06}
2044	0.9836	-3.346	2.0×10^{-07}
2056	0.7121	0.308	2.0×10^{-07}
2068	0.5264	1.051	2.0×10^{-07}
2068	0.0191	0.327	2.5×10^{-06}
2068	0.1007	0.317	2.0×10^{-07}
2075	0.3416	0.225	2.0×10^{-07}
2076	0.2044	0.346	2.0×10^{-07}
2098	0.7373	0.318	2.0×10^{-07}
2105	0.1496	-0.553	2.0×10^{-07}

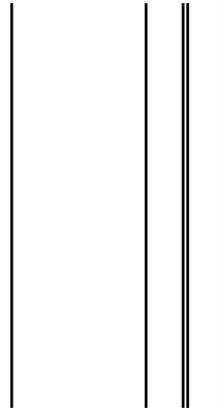


FIG. 5.9 – Distribution selon la coordonnées ζ exprimée en unité σ_ζ . Elle est centrée sur la valeur nominale et les positions des keyholes primaires et secondaires sont aussi indiquées (le code couleur est le même que celui utilisé dans le tableau 5.5)

trous de serrure. La section d'impact se situe à environ $(-465\sigma_\zeta, -110\sigma_\zeta)$ du centre de l'ellipse. Le tableau 5.5 ainsi que les figures 5.9 et 5.10 montrent donc la proximité de certains trous de serrure par rapport à la solution nominale. Cependant, la probabilité d'impact est aussi liée à la taille des trous de serrure. En effet, Le trou de serrure de 2036, situé à $-3.4\sigma_\zeta$ de la solution nominale a une probabilité plus élevée que certains trous de serrure proches du centre du fait de sa taille.

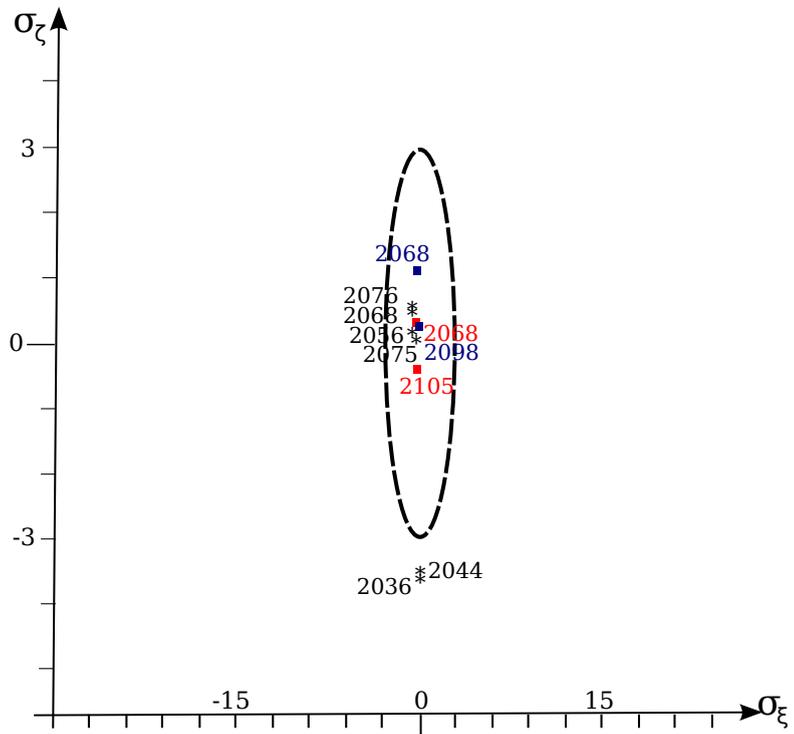


FIG. 5.10 – Zone d’incertiude à $(\sigma_{\xi}, \sigma_{\zeta})$ en 2029. La figure est centrée sur la valeur nominale (ξ, ζ) . La position de keyholes primaires (\star) et de keyholes secondaires dont les impacts avec la Terre se situent au nœud ascendant (■) ou au nœud descendant (■) sont aussi indiquées.

Chapitre 6

Apport des observations de mars 2011

Sommaire

6.1	Les observations de mars 2011	88
6.1.1	La réduction astrométrique	88
6.1.2	Solutions nominales	90
6.2	Impact sur la dynamique d'Apophis	91
6.2.1	Le b-plane	91
6.2.2	Effet Yarkovsky	91
6.3	Amélioration future de l'orbite	93
6.3.1	Période de visibilité d'Apophis	93
6.3.2	Apport de futures campagnes d'observations	95
6.4	Évolution dynamique d'Apophis	97

6.1 Les observations de mars 2011

L'astéroïde Apophis n'avait pas été observé depuis 2008. Depuis cette date, il est resté en dans une configuration défavorable pour l'observation dans la mesure où il était en conjonction avec le Soleil. Cependant, après cette longue période, Apophis a pu être observé de nouveau en mars 2011 depuis deux observatoires.

L'observatoire du Pic du Midi est situé dans les montagnes pyrénéennes françaises situé à une altitude d'environ 2800 m et bénéficie de conditions d'observations exceptionnelles permettant aux astronomes d'enregistrer des images de très grande qualité. À titre d'exemple, les images de la Lune nécessaires pour la préparation des missions Apollo y ont été faites durant les années 1960 avec le télescope de 1m encore en fonction pour les études planétaires. C'est avec ce télescope que l'astéroïde Apophis a pu être observé du 4 mars au 7 mars, intervalle pendant lequel 69 observations ont pu être faites dans des conditions assez difficiles : selon les données de l'IMCCE, Apophis était visible dans le ciel avec une magnitude de 21 et avec une élongation solaire de 49°. D'autre part, il était assez difficile de l'observer à cause de sa vitesse apparente assez élevée ~ 2.7 arcsec/min.

6.1.1 La réduction astrométrique

Une réduction astrométrique préliminaire a été faite en utilisant l'outil Astrometrica¹, logiciel proposant différents catalogues d'étoiles de référence comme PPMXL, UCAC3 ou encore NOMAD, pour la réduction de données astrométriques d'images CCD. Concernant les observations

¹<http://www.astrometrica.at/>

d'Apophis, cette réduction a été faite avec le catalogue USNO-B1.0.

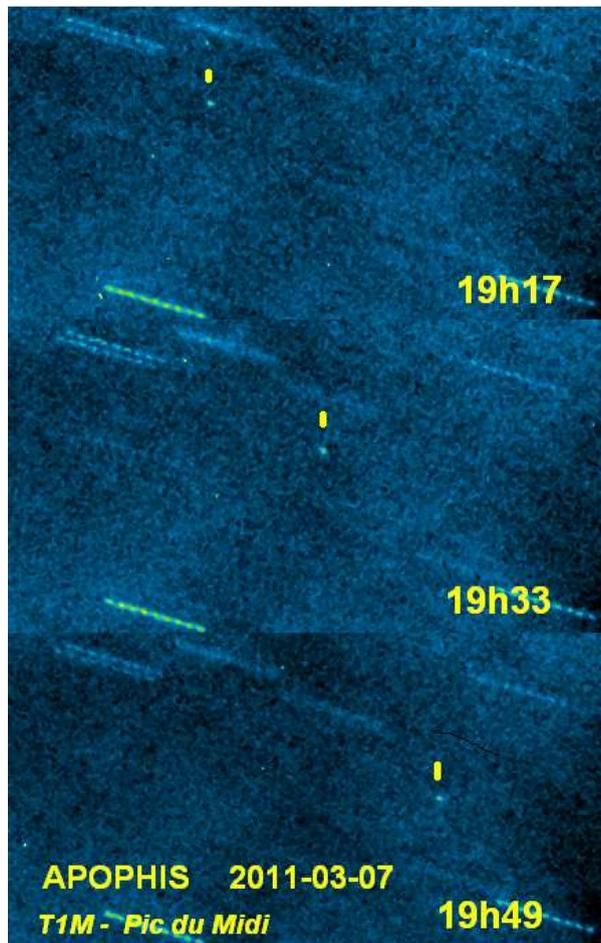


FIG. 6.1 – Apophis vu du Pic du Midi

J'ai dans un premier temps calculé la différence O-C entre les valeurs (α , δ) observées et celles calculées. Les coordonnées (α , δ) sont calculées à partir de la propagation des conditions initiales avec l'intégrateur de Lie, jusqu'aux dates des observations. Ces (O-C)s sont représentés sur la figure 6.2. On voit que les résidus de la première nuit d'observation sont larges (~ 2 arcsec)

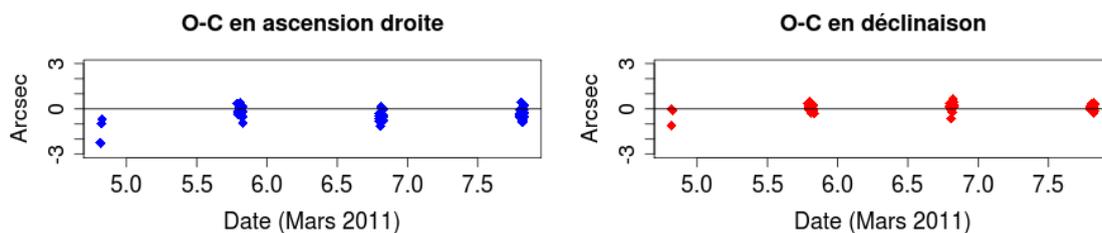


FIG. 6.2 – Résidus en (O-C) des observations du Pic du Midi (obtenue avec la réduction par Astrometrica) avant ajustement. Les résidus de la première nuit d'observations apparaissent élevés.

J'ai aussi testé la réduction astrométrique faite avec un outil indépendant, PRAIA [Assafin et al., 2010]. Les mesures des objets sont faites en utilisant un profil gaussien à deux dimensions ajustées selon une procédure itérative sur le centre d'un pixel à une fois la largeur à mi-hauteur du

centre. Les positions sont obtenues à partir des positions d'étoiles du catalogue 2MASS, utilisant un modèle de six constantes polynomiales pour relier les coordonnées mesurées et les coordonnées dans le catalogue de référence dans le plan tangent. Le système de référence de 2MASS est placé dans le système de UCAC2 en utilisant une transformation polynomiale dans le plan tangent entre les coordonnées listées dans les catalogues 2MASS et UCAC2 en utilisant des étoiles de référence en commun à l'époque de 2MASS. L'erreur moyenne sur les positions obtenues à partir des résidus en (O-C)s sur les positions de l'étoile de référence sont d'environ 76 mas en ascension droite et 87 mas en déclinaison. La dispersion des positions obtenues par rapport aux éphémérides est plus petite pour les deux dernières nuits d'un facteur de près de deux. En fait, l'objet a été très surexposé sur les images des deux premières nuits. C'est pour cela que la réduction faite par PRAIA n'a pu obtenir que 43 observations correspondant aux trois dernières nuits. Les valeurs en (O-C)s pour ces observations sont représentées sur la figure 6.3.

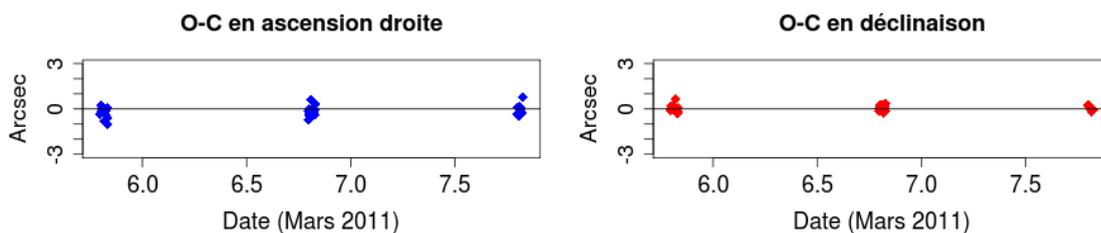


FIG. 6.3 – Résidus (O-C)s des observations fournies par PRAIA. Les résidus sont moindres que ceux obtenus dans la figure 6.2.

D'autres observations ont été faites à l'observatoire Magdalena Ridge situé dans les montagnes Magdalena au Nouveau-Mexique, à une altitude de 3230m. Quatre observations ont pu être faites avec un télescope de 2.4 m le 14 mars, augmentant la longueur de l'arc d'observation de 30 minutes. Les conditions d'observations ne sont pas très différentes de celles au Pic du Midi. J'ai donc inclus ces observations, telles que fournies par le MPC, dans mes calculs.

6.1.2 Solutions nominales

Afin d'analyser l'influence de ces nouvelles observations sur la dynamique d'Apophis, j'ai considéré quatre ensembles d'observations donnant quatre solutions nominales : La solution S_0 est obtenue en utilisant uniquement les observations entre 2004-2008. La solution S_1 est obtenue par ajustement sur toutes les observations disponibles au MPC, incluant les observations du Pic du Midi réduites à l'aide catalogue USNO-B1.0 et les observations faites au Magdalena Ridge. La solution S_2 est obtenue par ajustement sur les observations de S_1 débiaisées. En effet, Chesley et al. [2010] ont montré qu'il existe des biais dans certains catalogues stellaires et notamment le catalogue USNO-B1.0 et ont proposé une méthode pour retirer les biais dans les mesures astrométriques. Cette méthode a été récemment implémentée dans le progiciel OrbFit² et afin de prendre en compte cette méthode, j'ai utilisé les fichiers d'observations fournis par le site de NEO-DyS³. Enfin, la solution S_3 est obtenue en utilisant les observations fournies par PRAIA.

²Version 4.2

³<http://newton.dm.unipi.it/neodys/>

6.2 Impact sur la dynamique d'Apophis

6.2.1 Le b-plane

Dans cette partie, je compare les coordonnées nominales (ξ_N, ζ_N) ainsi que les incertitudes, avec celles calculées au chapitre 5. Ces valeurs sont données dans le tableau 6.1. La solution S_1 montre que Apophis semble passer à environ 600 km plus loin que la distance prédite par la solution S_0 . Le minimum de distance d'approche avec la Terre est d'environ 38680 km. Par conséquent, la zone d'incertitude va être décalée vers le haut comme indiqué sur la figure 6.4. En outre, l'apport de ces nouvelles observations permettra une amélioration de près de 140 km sur l'incertitude sur la position d'Apophis.

TAB. 6.1 – Coordonnées et incertitudes dans le b-plane en 2029. Le minimum de distance ainsi que son incertitude sont aussi indiqués. La dernière ligne indique la différence de distance entre les solutions S_i et la solution S_0 .

	S_0	S_1	S_2	S_3
$\xi \pm \sigma_\xi$ [km]	6980 ± 15	7000 ± 8	6992 ± 8	6985 ± 10
$\zeta \pm \sigma_\zeta$ [km]	37440 ± 345	38040 ± 211	38025 ± 208	37743 ± 242
$\Delta \pm \sigma_\Delta$ [km]	38086 ± 345	38680 ± 211	38662 ± 208	38384 ± 242
$\Delta_i - \Delta_0$ [km]	0	594	576	298

Le figure 6.4 montre les ellipses de dispersion à 3σ calculées avec les solution S_i . La fenêtre est centrée sur l'ellipse S_0 et les axes sont en unités (σ_ξ, σ_ζ) de la solution S_0 (voir Tab. 6.1). On voit donc qu'il y a un faible recouvrement entre les ellipses de dispersion à 3σ des solutions S_0 (en pointillés) et S_1 (en trait plein). La figure montre que si le traitement de débiasage, obtenue avec S_2 (en vert), ne provoque qu'un léger déplacement du centre de l'ellipse, obtenue avec la solution S_1 , de (-8,-15) km, la solution S_3 utilisant les données de PRAIA révèle que le minimum de distance attendue est moins surestimé. En effet, Apophis passerait à 38365 km de la Terre soit environ 300 km plus loin. Cette différence avec la solution S_1 viendrait du fait que la première nuit d'observation contient des observations non consistantes, avec des résidus élevés. La réduction faite par PRAIA a permis de filtrer les "mauvaises observations". Cette expérience met donc en relief l'importance de la réduction astrométrique des données sur la propagation d'orbite pour des objets tel Apophis. Pour le reste des simulations, je ferai référence à la solution S_3 comme étant la solution nominale.

Enfin, le tableau 6.2 montre les nouvelles positions de certains keyholes déjà mis en évidence dans le chapitre 5 et qui persistent en considérant la nouvelle solution S_3 mais aussi la position de nouveaux keyholes⁴ dont les tailles ou la proximité par rapport au centre de la solution S_0 n'a pas permis leur détection par la technique Monte-Carlo. Même si je n'indique que la position de keyholes pour lesquels plus d'un impact à été trouvé, j'indique dans le tableau la position du keyhole de 2036⁵ afin de comparer sa probabilité d'impact à celle obtenue dans le chapitre 5. Il est clair que la menace de 2036 a diminué du fait que la zone d'incertitude s'éloigne de ce keyhole.

6.2.2 Effet Yarkovsky

Comme mentionnée dans le chapitre 2, l'effet Yarkovsky dépend de paramètres physiques qui sont très souvent inconnus. Cependant, à partir d'une modélisation simple permettant d'estimer

⁴Le keyhole secondaire de 2102 n'apparaissait pas avec la solution S_0 .

⁵Je n'ai trouvé qu'un seul impact

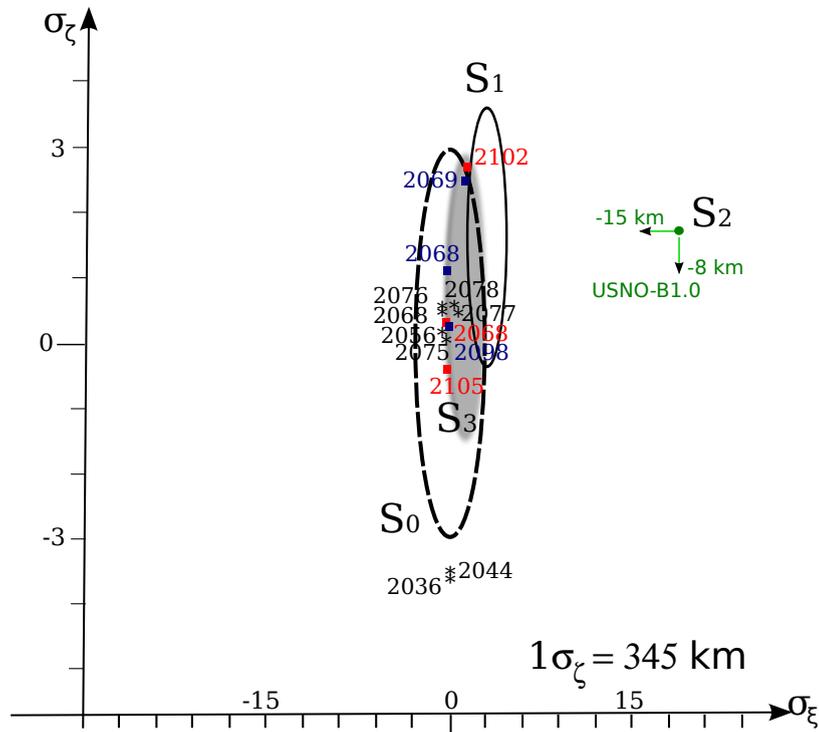


FIG. 6.4 – Ellipse d’incertitude à 3σ dans le b-plane d’Apophis en 2029. L’ellipse en pointillée est obtenue avec la solution S_0 . Celle en trait plein est obtenue avec la solution S_1 . Les flèches vertes représentent le déplacement du centre de l’ellipse S_1 en considérant la solution S_2 pour des observations non biaisées. L’ellipse floutée est obtenue avec la solution S_3 . Enfin la position de keyholes primaire (\star) et de keyholes secondaires dont les impacts avec la Terre se situent au nœud ascendant (\blacksquare) ou au nœud descendant (\blacksquare). D’après [Bancelin et al. \[2011b\]](#)

TAB. 6.2 – Tableau similaire à 5.5. Certains keyholes n’apparaissent plus du fait du déplacement de la zone d’incertitude. D’après [Bancelin et al. \[2011b\]](#).

Année	Distance	Position sur le LOV	I.P.
	$[R_{\oplus}]$	$[\sigma_{\zeta}]$	
2036	0.7920	-6.097	1.1×10^{-07}
2056	0.6876	-0.870	3.2×10^{-07}
2068	0.0295	-0.800	2.7×10^{-06}
2069	0.2314	2.545	3.2×10^{-07}
2077	0.4125	-0.795	2.1×10^{-07}
2078	0.2343	-0.818	3.2×10^{-07}
2102	0.6611	2.767	2.1×10^{-07}

l’intensité de l’accélération (Eq. 2.3), il est possible d’estimer la variation séculaire du demi-grand axe (Eq. 3.72). Dans [Chesley \[2006\]](#), les auteurs ont estimé cette valeur comprise entre $\pm 15 \times 10^{-4}$ UA/Myr en fonction de la conductivité thermique et de l’orientation du spin. La valeur négative est représentative du maximum de variation en demi-grand axe pour une rotation rétrograde et la valeur positive est représentative d’un maximum de variation pour une rotation prograde (Fig. 6.5).

Avec ce modèle et ces valeurs, j’ai propagé la solutions S_0 afin de voir l’impact dans le b-

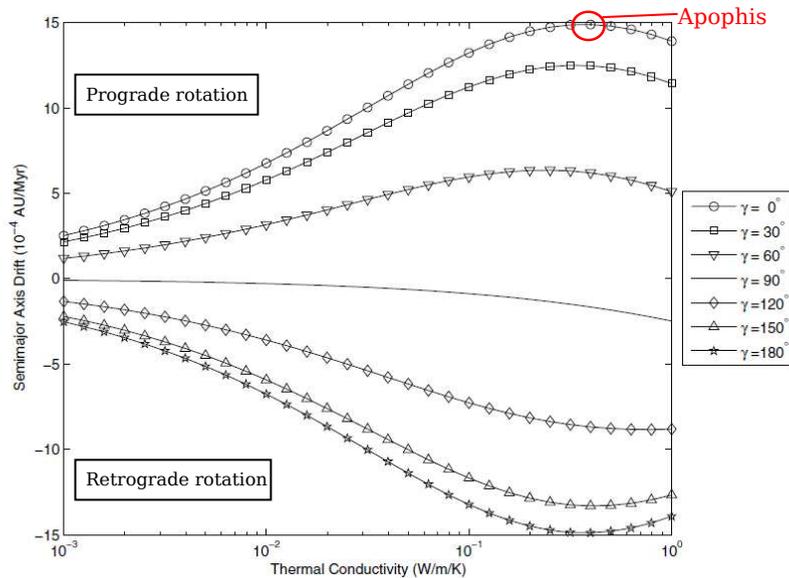


FIG. 6.5 – Variation de la dérive séculaire da/dt en fonction de la conductivité thermique K et de l'orientation de l'axe de rotation γ . D'après Chesley [2006].

plane. Mes résultats [Bancelin et al., 2011b] montrent que l'effet Yarkovsky a une forte influence, non pas sur la taille de l'ellipse mais sur sa position. En effet, la position des coordonnées (ξ , ζ) est déplacée de $\pm(10, 290)$ km (les signes ont la même signification que celle du signe de la variation séculaire en demi-grand axe). Ce résultat est consistant avec la solution S_3 . Si on ne peut rien conclure sur la valeur du spin, on peut cependant supposer que Apophis aurait un mouvement prograde (valeur de l'obliquité entre 0° et 90°).

6.3 Amélioration future de l'orbite

6.3.1 Période de visibilité d'Apophis

Il reste évident que l'apport de nouvelles observations permettra non seulement d'enrichir mieux l'orbite d'Apophis ainsi que les probabilités d'impact, mais aussi permettre de lever l'indétermination, tout au moins partielle, sur la connaissance de paramètres physiques (Tab. 4.5). Il en découlera alors une meilleure évaluation des forces non gravitationnelles telle l'effet Yarkovsky voire une meilleure modélisation. Dans un futur proche, il faudrait donc exploiter toutes les fenêtres d'observations possibles afin d'agrandir la longueur de l'arc d'observation. À très court terme, c'est-à-dire dans les deux ans à venir, Apophis pourra bénéficier d'une campagne d'observations optiques à partir de novembre 2011 jusqu'en octobre 2012 (Fig. 6.6 et 6.7). Cependant, les conditions d'observations seront les mêmes que pour celles de mars 2011 c'est-à-dire une magnitude faible (~ 20) et une vitesse apparente de 3.2 arcsec/min.

D'autres fenêtres d'observation plus favorables c'est-à-dire avec de meilleures conditions d'observations seront possibles en 2013 et en 2021 (Fig. 6.6 et 6.8). Chesley [2006] a indiqué les dates favorables pour les observations optiques mais aussi les possibilités d'observations ranging et/ou Doppler à partir d'Arecibo et Goldstone. Il en ressort qu'en 2013, une vaste campagne d'observation peut être organisée dans la mesure où les observations radars seront possibles entre février et avril 2013 puis entre juin et août 2013. À Arecibo, les mesures peuvent être faites à la condition que la déclinaison soit comprise entre 0° et $+36^\circ$ et la distance inférieure à 0.3 UA. Alors qu'à Goldstone, il faut que la déclinaison soit comprise entre -20° et $+40^\circ$ et la distance inférieure à 0.14 UA [Chesley, 2006].

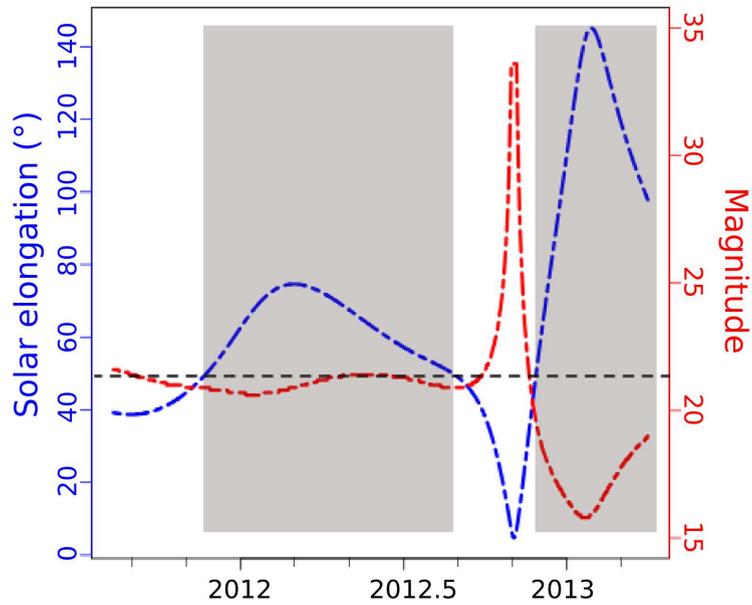


FIG. 6.6 – Période de visibilité d’Apophis à partir de novembre 2011 jusqu’à mi-2013.

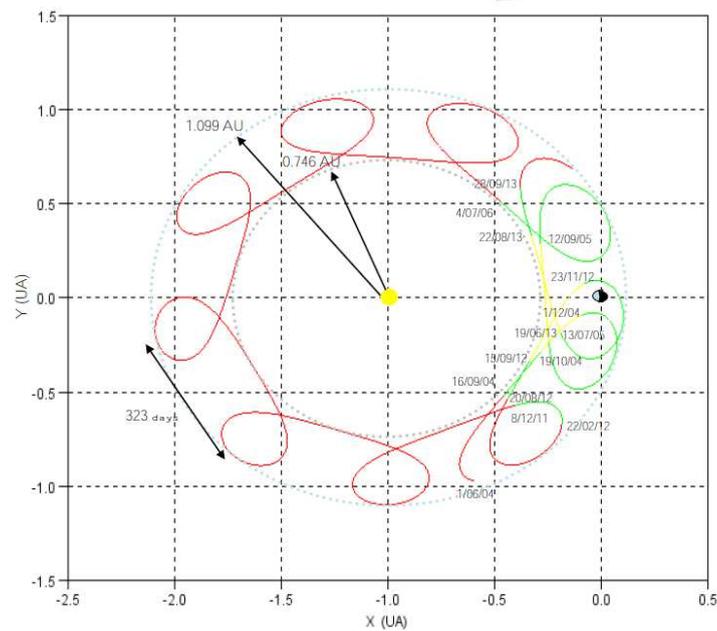


FIG. 6.7 – Trajectoire d’Apophis jusqu’en 2013 représentée dans un repère tournant centrée sur le Soleil. Les trajectoires représentées en rouge correspondent à des périodes de non observabilité. Celles en jaune traduisent des périodes où Apophis se situe à une distance $\Delta < 0.7$ UA mais où l’élongation solaire est inférieure à 45° (et donc des conditions d’observations difficiles). Enfin, les périodes où Apophis est visible avec de bonnes conditions d’observations sont représentées en vert. D’après Prado et al. [2011].

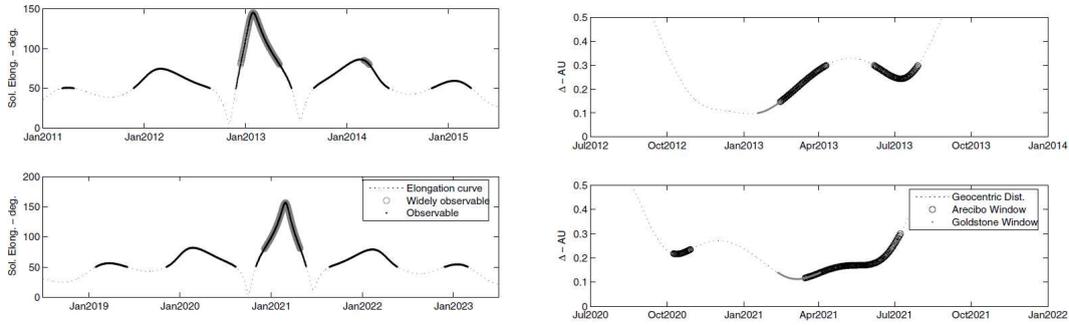


FIG. 6.8 – Fenêtre de visibilité de Apophis en 2013 et 2021. Le graphique de droite représente la variation de l'élongation solaire indiquant notamment la possibilité d'observations optiques. Les courbes de droite montre la variation de la distance géocentrique indiquant la possibilité d'observations radar.

Chesley [2006] ont aussi estimé, à l'aide de simulations, les dates favorables pour les observations radars en 2013 et 2021 en fonction du rapport signal sur bruit (SNR).

TAB. 6.3 – Période optimale pour des mesures radars à partir de 2013. D'après Chesley [2006]

Date	Δ [UA]	SNR	Sigma [μ s]
2013 Feb 14-20	0.15	40	1.0
2013 Jul 06-10	0.24	6	4.5
2020 Oct 09-12	0.22	8	4.5
2021 Mar 16-20	0.12	90	0.5

Je vais donc m'intéresser par la suite à l'impact de ces futures observations sur les incertitudes relatives à l'orbite d'Apophis.

6.3.2 Apport de futures campagnes d'observations

Les futures campagnes d'observations vont être cruciales pour quantifier l'incertitude de la position d'Apophis dans le b-plane mais aussi pour revoir les probabilités de passages dans les keyholes. J'ai donc simulé, à l'aide du progiciel OrbFit, une observation radar et une observation optique début 2013 durant la période optimale c'est-à-dire du 14 au 20 février. J'ai considéré le cas de "bonnes" observations en considérant respectivement une incertitude sur la mesure à 1σ de 1.0μ s et 0.5 arcsec et effectuée le 14 février 2013.

L'impact à court terme de ces observations peut être analysé à travers la valeur de l'incertitude sur la position à la date de calcul de la nouvelle solution nominale. La figure 6.9 montre l'évolution de cette incertitude jusqu'en 2028 exprimée en kilomètre. La nouvelle solution nominale a été calculée 15 jours après la future campagne c'est-à-dire le 1^{er} mars 2013 et il est clair que cette incertitude va très rapidement diminuer. En effet, elle passe de 30 km, valeur obtenue avec la solution déduite des données optiques et radars de 2004 à 2011, à 8 km en considérant la solution obtenue avec une mesure radar additionnelle, et à 6 km en considérant une observation optique supplémentaire. L'incertitude présente par la suite de faibles variations au cours du temps en restant bien en dessous de 50 km.

À plus long terme, j'analyse l'influence de ces observations en calculant la taille de l'ellipse dans le target plane. Les valeurs de σ_{ξ} et de σ_{ζ} données dans le tableau 6.4 sont obtenues par une

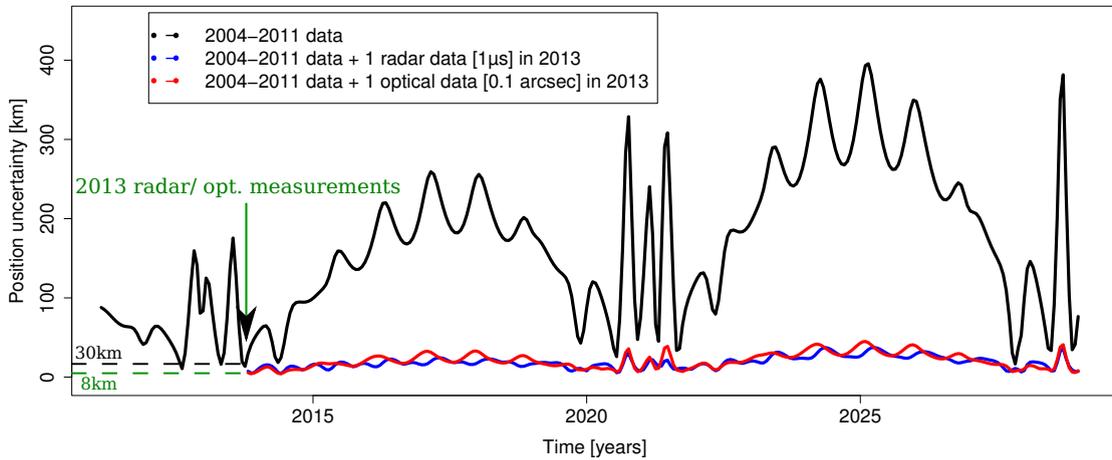


FIG. 6.9 – Évolution sur l’incertitude sur la position géocentrique d’Apophis. L’apport d’une future observation radar ($1\mu s$ d’incertitude) ou d’une observation optique (100 mas) lors de la campagne d’observations de 2013 permettra de réduire considérablement l’incertitude et de manière comparable. D’après [Bancelin et al. \[2011a\]](#).

propagation linéaire de la matrice de covariance. En considérant l’apport d’une observations radar, la zone d’incertitude est considérablement réduite et principalement selon la composante spatiale ζ . L’impact d’une observation optique n’est d’autre part pas négligeable. Dans le chapitre 8, je ferai le même exercice en considérant l’impact d’observations spatiales à travers la future mission Gaia.

TAB. 6.4 – Incertitude dans le b-plane selon l’apport d’une observation radar ou optique. L’observation radar apporterait une meilleure contribution à la réduction de l’incertitude sur la composante ζ . D’après [Bancelin et al. \[2011a\]](#).

	2004-2011 data	2004-2011 data and 1 radar [$1\mu s$]	2004-2011 data and one optical [100mas]
σ_{ξ} [km]	10	9	8
σ_{ζ} [km]	240	10.5	24

Enfin, d’après [Chesley \[2006\]](#), les mesures radars de la campagne de 2013 permettront de déterminer l’obliquité du spin de Apophis. Après 2013, la principale source d’incertitude sur l’effet Yarkovsky seront sur la mesure de la densité ρ et de la conductivité thermique K . Par conséquent, en 2014, l’incertitude sur l’accélération de Yarkovsky sera d’environ 15% et ce sera la principale source d’incertitude sur l’orbite d’Apophis. C’est avec les campagnes de 2021 que sera levée l’incertitude sur cette perturbation non gravitationnelle car les auteurs estiment à moins de 1% l’incertitude sur l’effet Yarkovsky. À cette date, pratiquement tous les paramètres physiques nécessaires au calcul de l’intensité de la force seront connus. La propagation des erreurs jusqu’au 13 avril 2029 sera telle que l’incertitude sur la position d’Apophis dans le b-plane de 2029 sera de l’ordre du kilomètre suivant la composante ζ , permettant ainsi une estimation précise de la distance d’approche entre Apophis et la Terre.

6.4 Évolution dynamique d'Apophis

Il a été mis en évidence dans le chapitre 5 que la perturbation gravitationnelle causée par la Terre en 2029 va être telle que Apophis changera de famille dynamique en devenant un Apollo. On peut donc se demander quel pourrait être le futur dynamique d'Apophis. Pour répondre à cette question, j'ai utilisé la technique de Monte Carlo afin de répondre statistiquement à cette question. Tout en cherchant des impacteurs virtuels, il est possible de chercher parmi les astéroïdes virtuels ceux qui vont permettre, après 2029, une rencontre proche telle que l'astéroïde changera de famille dynamique. J'ai donc montré dans [Bancelin et al. \[2011b\]](#) qu'il existe une probabilité estimée à 9.0×10^{-5} pour que Apophis change de famille dynamique en 2051. En effet, si Apophis passe à une distance géocentrique $\rho \leq 5 R_{\oplus}$ le 14 avril 2051, avec une incertitude sur la date de $\Delta t = 0.002$ jour, la déviation sera telle que Apophis deviendra un Aten avec les distributions en excentricité e et inclinaison i représentées sur la figure 6.10 en fonction de l'aphélie Q .

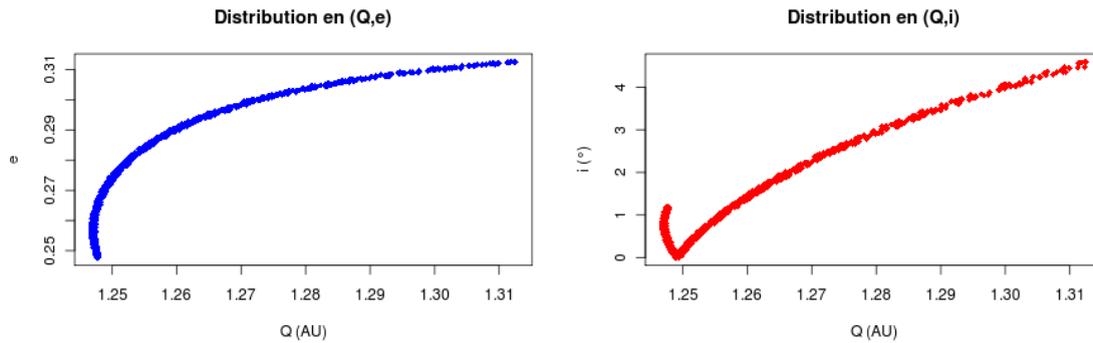


FIG. 6.10 – Distribution en aphélie (Q), excentricité (e) et inclinaison (i) de Apophis après la rencontre proche de 2051 entraînant un changement de famille dynamique. Le passage de la famille Apollo (dû à la rencontre proche en 2029) à la famille Aten (dû à la rencontre proche en 2051) est estimé avec un probabilité de 9.0×10^{-5} . D'après [Bancelin et al. \[2011b\]](#).

Troisième partie

Apport de la mission Gaia

Chapitre 7

La mission Gaia

Sommaire

7.1	Gaia : Le successeur d’Hipparcos	102
7.2	Gaia et le système solaire	103
7.2.1	La mission	103
7.2.2	Instruments à bord	104
7.2.3	Orbite et loi de balayage	106
7.2.4	La science pour le système solaire	107
7.2.5	Le futur catalogue Gaia	114
7.3	Les astéroïdes Atiras et les satellites d’observations	115

7.1 Gaia : Le successeur d’Hipparcos

Les principaux catalogues utilisés pour la réduction de données et répertoriés au MPC proviennent de l’observatoire Naval des États-Unis. Parmi les données qu’ils regroupent, certaines ont été réduites par les catalogues Tycho 1 et 2. Ces catalogues sont les produits directs de la mission Hipparcos (HIGH Precision PARallax COLlecting Satellite). Ce satellite de l’ESA, lancé en août 1989, pionnier dans l’astrométrie spatiale, fut dédié à la mesure précise de positions, parallaxes et mouvements propres des étoiles. Après trois ans de missions, le catalogue Tycho-1 fut terminé en 1996 comprenant plus d’un million d’étoiles avec une astrométrie de 20-30 mas. Il fut publié par l’ESA en 1997. Le catalogue Tycho-2 a été construit avec les mêmes observations qui ont servi à la construction de Tycho-1. De nouvelles techniques de réduction ont permis d’augmenter le nombre d’étoiles de référence et d’atteindre une précision améliorée. En effet, Tycho-2 [Høg et al., 2000] contient plus de 2.5 millions d’étoiles avec une précision astrométrique de 7.0 mas pour les étoiles de magnitude $V < 9$. Il a été publié en février 2000.

D’autres missions astrométriques ont été proposées et planifiées pour la décennie 2010 en vue de succéder à la mission Hipparcos. Alors que la précision astrométrique était de l’ordre de 1 mas (taille d’une pièce de monnaie à 1000 km de distance), les missions telle ROMER, FAME-1, FAME-2, DIVA, Lonomossov ou encore AMEX proposait une astrométrie avec une précision entre 50 μas et 200 μas (taille d’un ongle à 1000 km de distance) pour une magnitude $V = 9$. Cependant, ces missions n’ont pas eu de suite. La mission japonaise JASMINE, toujours en cours d’étude et prévue pour 2013-2015, permettra avec des observations dans l’infrarouge, d’avoir une précision d’environ 10 μas . La mission américaine SIM, annulée en décembre 2010, aurait permis des observations avec une précision de 1 μas . Enfin, deux futures missions astrométriques, proches du début de mission ou en fin de phase, Nano-JASMINE et J-MAPS permettront d’avoir une précision de l’ordre du mas. Enfin, la mission Gaia s’inscrit dans la lignée des grandes mis-

sions astrométriques et est désignée comme le successeur de la mission Hipparcos dans la mesure où elle permettra d'avoir des observations avec une précision de l'ordre de $10 \mu\text{as}$.

7.2 Gaia et le système solaire

7.2.1 La mission

Gaia (Global Astrometric Interferometer for Astrophysics) est une mission astrométrique de l'ESA dont le lancement est prévu pour le printemps 2013 pour une durée de 5 ans. Le but principal est de construire une carte en trois dimensions de notre Galaxie, la Voie Lactée, avec l'objectif de révéler sa composition, sa formation et son évolution. Le satellite fournira des mesures de positions et de vitesses radiales d'un milliard d'étoiles avec une précision maximum sans précédent : $7 \mu\text{as}$ pour une magnitude limite $V = 20$, précision nécessaire pour produire un recensement cinématique et spectroscopique de ces 1% de la population stellaire de notre Galaxie.

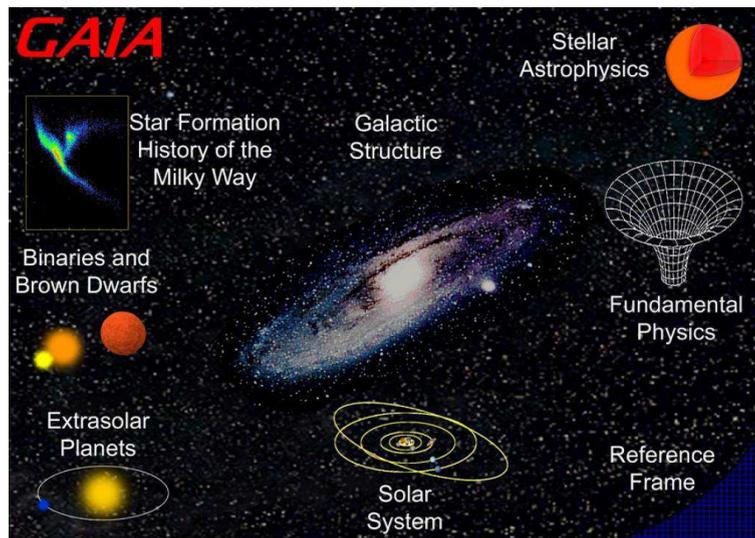


FIG. 7.1 – Rétombées scientifiques de la mission Gaia

Les connaissances détaillées de notre Galaxie obtenues par l'étude des données Gaia, fourniront des bases solides pour l'analyse d'autres galaxies pour lesquelles ce niveau de précision astrométrique ne peut être atteint avec des observations directes. Le large échantillon d'étoiles parmi tous les types d'étoiles observés par Gaia va grandement étendre notre compréhension de la structure et de l'évolution stellaires et permettra une importante amélioration de modèles théoriques pour la modélisation de l'intérieur des étoiles (taille des noyaux convectifs, la diffusion interne des éléments chimiques et les zones externes de convection). Par ailleurs, les observations Gaia permettront une avancée de notre connaissance des objets compacts tels que les naines blanches en fournissant des contraintes sur le rapport masse-rayon ou encore en comparant les modèles théoriques avec les propriétés observées de systèmes binaires de naines blanches.

La mission aura aussi une grande contribution à la science des planètes extra-solaires. Les résultats dérivés des données Gaia permettront d'améliorer notre compréhension des paramètres orbitaux des exoplanètes ainsi que leur distribution en fonction de leur masse. De plus, les modèles théoriques de formation, migration et évolution dynamique des systèmes planétaires seront mieux contraints. L'observation de plus de 500000 quasars distants aura des conséquences sur les systèmes de référence. Gaia fournira également un certain nombre de nouveaux tests pour la relativité générale et la cosmologie. Enfin, notre système solaire n'est pas en reste. Comme nous le verrons dans la section 7.2.4 près de 400000 objets (TNOs, MBAs et NEAs) seront observés

par Gaia et les données acquises auront des contributions directs.

7.2.2 Instruments à bord

Les instruments d'optiques

Gaia possède deux télescopes identiques pointant dans deux directions séparées par un angle basique de 106.5° et regroupés en un chemin commun à la pupille de sortie. Le chemin optique des deux télescopes est composé de six réflecteurs (M1-M6), les miroirs M5 et M6 étant communs. Les deux télescopes ont une ouverture de $1.45\text{m} \times 0.5\text{m}$ et une focale de 35m. Les éléments des télescopes sont construits autour du banc d'optique hexagonal d'environ 3m de diamètre ce qui permet un support structurel (Fig. 7.2).

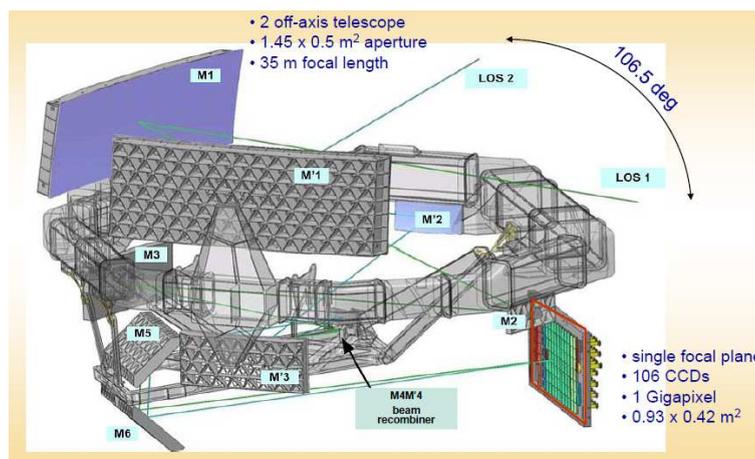


FIG. 7.2 – Instruments optiques à bord de Gaia. Credits : ESA.

Les instruments de mesure

Gaia aura à son bord trois instruments permettant des mesures astrométriques, photométriques et spectroscopiques (Fig. 7.3). Le principal objectif de l'instrument astrométrique ASTRO est d'obtenir des mesures précises des positions relatives de tout objet traversant les champs de visée des deux télescopes de Gaia. En mesurant les centroïdes d'images à partir de données envoyées au sol, Gaia mesurera la séparation relative des milliers d'étoiles présents simultanément dans les deux champs combinés. Une haute résolution angulaire (et donc une haute précision de positionnement) sera fournie par le large miroir primaire de chaque télescope. L'instrument ASTRO comprend les deux télescopes ainsi que les 62 CCDs du plan focal où les deux champs de visée sont combinés dans le champ astrométrique. Chaque CCD est lu en mode TDI¹ (Time Delay Integration) synchronisé avec le mouvement de balayage du satellite. La précision des mesures dépend du type d'étoile observée. Elle varie de $100 \mu\text{as}$ pour des étoiles de type M6V de magnitude $V = 20$, à $300 \mu\text{as}$ pour des étoiles de type B1V et G2V de magnitude $V = 20$. L'instrument photométrique fournira la distribution en énergie spectrale pour tout objet détecté. Ainsi, des quantités astrophysiques pourront être déduites telles la température, la masse, l'âge et la composition chimique. La fonction photométrique est réalisée par le biais de deux champs optiques à faible dispersion situés sur le chemin commun aux deux télescopes : un pour les courtes longueurs d'onde (Blue Photometer

¹Mode largement utilisé pour l'observation d'objets rapides : l'information acquise par les CCDs sur l'objet en déplacement est recueillie et additionnée simultanément

BP) – 320nm à 660 nm – et l'autre pour les grandes longueurs d'onde (Red Photometer RP) – 650 nm à 1000 nm. Enfin, l'instrument spectroscopique RVS (Radial Velocity Spectrometer) permettra de mesurer les vitesses radiales des étoiles. Ces vitesses mesurées le long de la ligne de visée complètent les mesures de mouvements propre déterminés par ASTRO. Pour cela, les spectres seront mesurés dans le proche infrarouge (847-874 nm) avec une résolution $\lambda/\Delta\lambda = 11500$. La dispersion spectrale des objets dans le champ de visée est réalisée au moyen d'un module optique situé entre le dernier miroir (M6) et le plan focal.

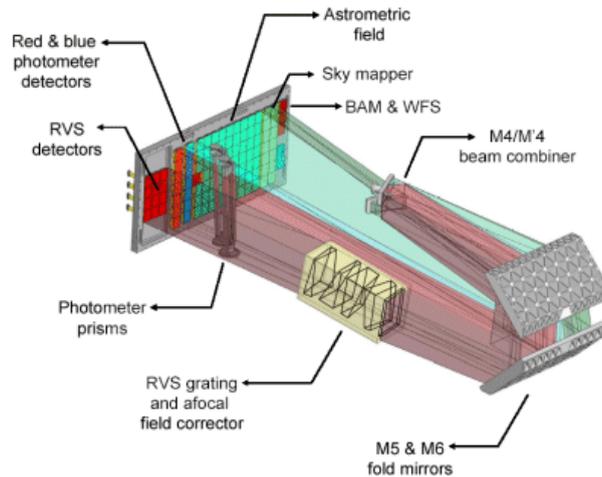


FIG. 7.3 – Les différents instruments à bord pour les mesures astrométriques, photométriques et spectroscopiques. *Credits : EADS Astrium.*

Le plan focal

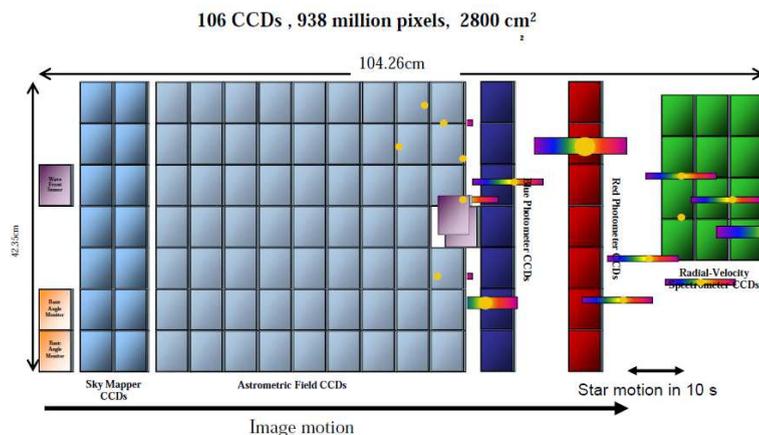


FIG. 7.4 – Plan focal. *Credits : ESA - A. Short.*

Il est composé de 106 CCDs représentant un total d'environ 1 Gigapixels et a pour dimension physique $0.5m \times 1m$. L'assemblage du plan focal est commun aux deux télescopes et sert à cinq fonctions principales :

- le wave-front sensor (WFS) et le basic-angle monitor (BAM)
- le Sky Mapper (SM), qui détecte automatiquement les objets entrant dans le champ de visée et communique les détails du transit de l'étoile aux CCDs suivants
- le champ astrométrique principal (AF) dédié aux mesures astrométriques

- les photomètres bleues et rouges (BP et BR) fournissant des mesures spectrométriques de basse résolution pour chaque objet dans le longueur d'onde 320-600 nm et 650-1000 nm respectivement
- le spectromètre de mesure de vitesse radiale (RVS) enregistrant les spectres de tous les objets ayant une magnitude $V > 17$

En principe, chaque objet traversant le plan focal est soit détecté par SM1 ou soit par SM2. Puis une fenêtre est allouée à l'objet et est propagée vers les CCDs de la ligne suivante. L'objet est confirmé par la première colonne du champ astrométrique AF1 afin d'éliminer les fausses détections (par exemple les rayons cosmiques). L'objet traverse progressivement les huit autres colonnes du champ astrométrique AF (Fig. 7.4) suivies par les détecteurs BP, BR et RVS. Le temps nominal d'intégration pour un CCD est de 4.22 secondes correspondant à 4500 pixels le long du scan. Pour des objets brillants, le temps d'intégration de AF1-AF9, BP et BR est réduit en activant des grilles électroniques TDI dans les détecteurs sur une courte période correspondant à la fenêtre de l'étoile brillante. le but de ces grilles TDI est de réduire le nombre effectif de pixels tout au long du balayage. Douze grilles sont disponibles dans le détecteur et permettent une optimisation de la collecte du signal pour les étoiles brillantes.

7.2.3 Orbite et loi de balayage

Le satellite Gaia sera lancé de la base de Kourou par un lanceur Soyuz-Fregat. Le composite Fregat-Gaia sera d'abord placé sur une orbite dite de parking puis la partie Fregat seule propulsera le satellite sur son orbite de transfert vers le point stable L2 de Lagrange (situé à 1.5 millions de kilomètres de la Terre dans la direction anti-solaire). L'orbite de Gaia sera de type Lissajous avec une période d'environ 180 jours et une taille d'orbite typique de 340000×90000 km. Le point L2 permet au satellite d'avoir un environnement thermiquement stable, une efficacité d'observation optimum (vu que le Soleil, la Terre et la Lune sont situés en dehors du champ de visée de l'instrument) et une faible exposition aux radiations.

Le satellite scannera le ciel en continu sans interruption avec une stratégie spécifique et optimale (Fig. 7.5) : les principes de mesures sont basés sur des observations répétées et systématiques des positions des étoiles dans deux champs de visée. Pour cela, le satellite tourne lentement autour de son axe de rotation (perpendiculaire au plan contenant les lignes de visée) avec une vitesse angulaire constante de $1^\circ/\text{min}$, décrivant ainsi un cercle dans le ciel en six heures. Avec un angle basique de 106.5° séparant les champs astrométriques de visée, les objets observés transitent dans la seconde ligne de visée 106,5 minutes après être passés dans la première. L'axe de rotation du satellite fait un angle de 45° avec la direction du Soleil, ce qui représente un point optimal entre les besoins astrométriques (qui nécessitent un grand angle) et les contraintes de réalisation (telles que la mise à l'ombre de la charge utile et l'efficacité des panneaux solaires). L'axe de rotation précède lentement autour de la direction Soleil-Terre avec une période moyenne de 63.12 jours ce qui permet à la loi de balayage d'être indépendante du positionnement orbital au point L2.

Deux autres paramètres sont pour le moment des constantes non fixées. Il s'agit de la phase de rotation initiale qui indique la position initiale des lignes de visée du satellite et aura une influence sur les dates d'observation. L'autre paramètre est l'angle de précession initial qui indique la position initiale de l'axe de rotation du satellite dans l'espace et aura une influence sur le nombre d'observations des objets (Fig. 7.6). Ces paramètres seront fixés au début de la mission et seront contraints à la fois par les buts scientifiques (par exemple la possibilité de réaliser des tests de physique fondamentale) et les exigences opérationnelles (fenêtre de liaison avec la Terre).

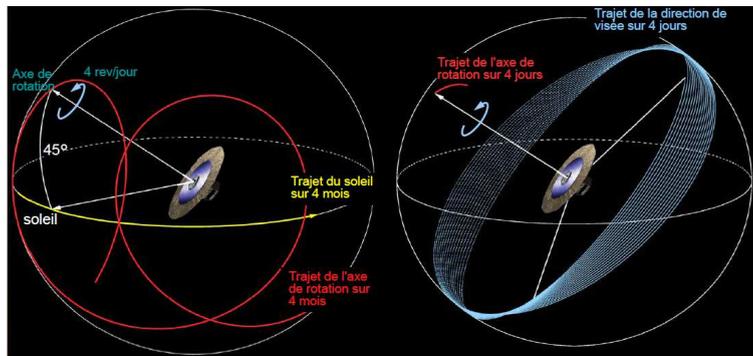


FIG. 7.5 – Représentation de la loi de balayage du satellite Gaia. La figure de droite montre la zone du ciel balayée après 4 jours de missions (cercles bleus).

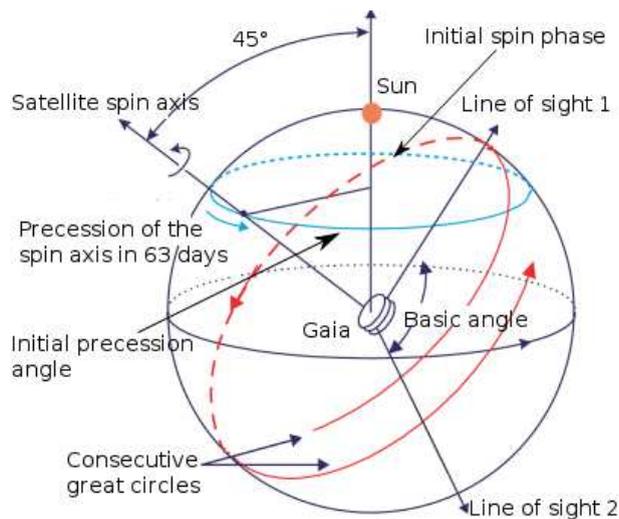


FIG. 7.6 – Représentation schématique de la loi de balayage. Les paramètres encore libres, l'angle de précession initial et la phase initiale du spin, sont indiqués sur la figure.

7.2.4 La science pour le système solaire

On s'attend aussi à ce que les données acquises par Gaia aient de grandes retombées scientifiques pour le système solaire [Mignard et al., 2007]. En effet, comme cela va être développé dans les items suivants, Gaia fournira des mesures directes des masses et des tailles de milliers d'astéroïdes, permettant ainsi d'en déduire une densité moyenne pour chaque population. Les observations acquises pour les objets connus pourront améliorer de manière considérable la précision de leur orbite, qui deviendra bien plus précise que celle basée sur des observations optiques au sol s'étalant sur deux siècles. Les données photométriques seront suffisantes pour déterminer des paramètres tels que les propriétés de leur axe de rotation ainsi que leur forme. La classe taxonomique de plusieurs dizaines de milliers d'objets pourra être obtenue.

Observations des objets du système solaire

Durant la mission, parmi les sources de magnitude $V < 20$ observées par le satellite, des milliers d'entre elles seront des objets du système solaire, parmi elles, des TNOs ou des troyens, mais en grande partie des MBAs. Comme l'indique la figure 7.7, ce nombre est estimé à environ 400000 objets [Tanga, 2011].

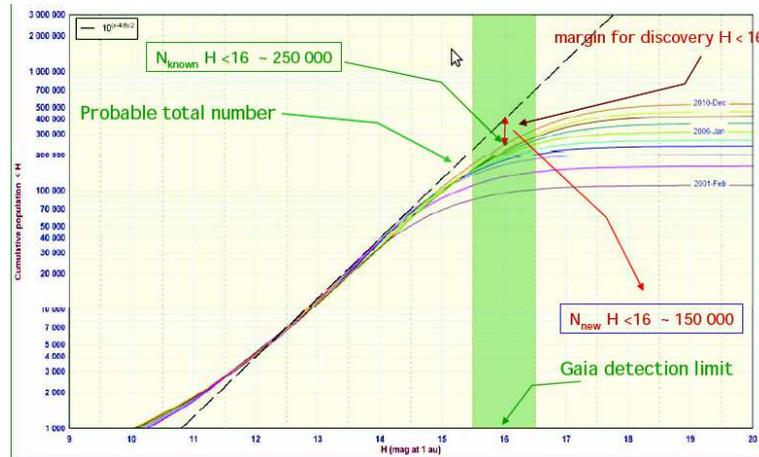


FIG. 7.7 – Nombre d’astéroïdes en fonction de la magnitude. La magnitude absolue limite de détection est $H = 16$ [Tanga, 2011].

Sa loi de balayage particulière empêche Gaia d’observer à l’intérieur d’un cône de 45° centré soit sur le Soleil soit dans la direction opposée. D’autre part, le cercle formé lors du balayage coupe le plan de l’écliptique à environ 90° d’élongation solaire. D’après Tanga [2011], la région observable s’étend de 45° à 135° en élongation solaire dans les deux directions (Fig. 7.18). En conséquence, la plupart du temps, les observations d’objets du système solaire auront lieu de manière séquentielle c’est-à-dire séparées par des périodes de non-observabilité allant jusqu’à six semaines. Durant un cycle de précession (63.12 jours), le cercle formé lors du balayage croise deux fois la zone observable recueillant plusieurs transits d’un astéroïde avec un mouvement lent orbital dans cette zone. En conséquence, un objet peut avoir des observations couvrant une période entière durant les cinq années de missions [Mignard et al., 2007] comme le montre la figure 7.8 à travers l’exemple de deux objets. L’astéroïde (2062) Aten aura en moyenne 96 observations durant la durée de la mission et couvrant plusieurs périodes. L’astéroïde (1000) Piazzi de la famille des MBAs aurait en moyenne 63 observations couvrant une période complète.

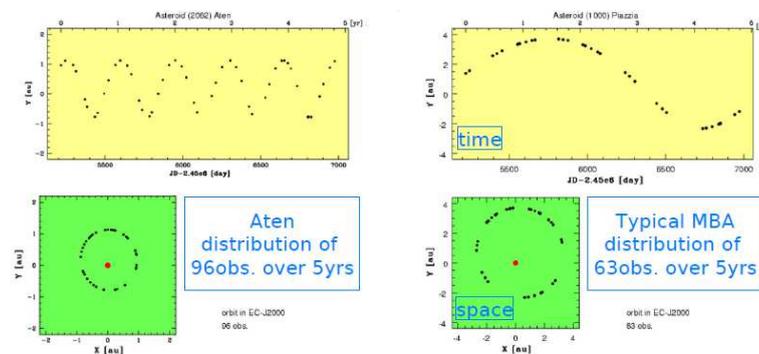


FIG. 7.8 – Répartition spatiale et temporelle des observations que Gaia pourrait apporter pour un astéroïde géocroiseur (à gauche) et un MBA (à droite). Les observations sont réparties sur l’ensemble de l’orbite.

Au contraire, d’autres objets peuvent être très peu observés durant la mission. Comme l’indique la figure 7.9 pour un NEO simulé (proche de la limite de détection), les observations prévues pour cet astéroïde ne sont réparties que sur environ 3 mois de la mission avec des observations très rapprochées couvrant à peine le quart de son orbite. Il en est de même pour le Troyen (624) Hector qui aura en moyenne 73 observations sur les cinq années de mission couvrant à peine la moitié de

son orbite.

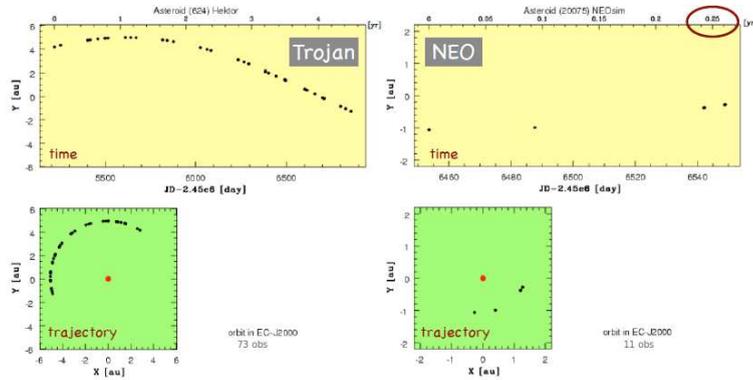


FIG. 7.9 – Répartition des observations Gaia pour un troyen (à gauche) et un NEO (à droite).

Le nombre moyen de géocroiseurs qui pourront être observés par Gaia n'est absolument pas dépendant des paramètres libres de la loi de balayage (voir sous-section 7.2.3). En effet, je montre dans [Bancelin et al. \[2011a\]](#) que le nombre de NEAs et de PHAs qui pourront être observés par le satellite est indépendant de la valeur de l'angle de précession initiale. La figure 7.10 montre une faible variation du nombre d'objets observés car l'écart-type pour la distribution des NEAs observés est de 16 et celle pour les PHAs 12. En calculant la moyenne pour chaque distribution, le nombre de NEAs observés par Gaia sera donc de 2180 ± 16 et celui pour les PHAs 585 ± 12 .

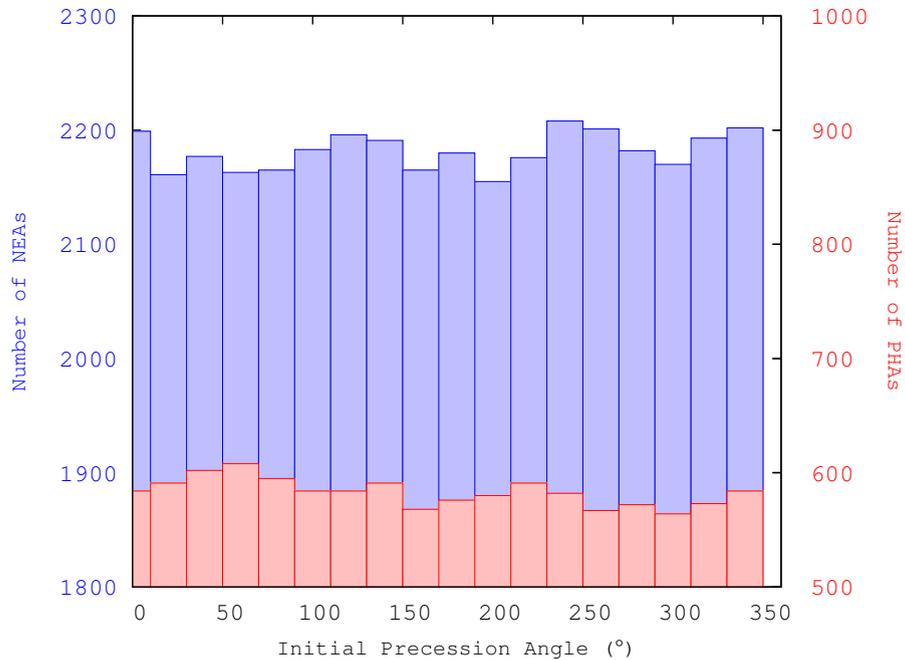


FIG. 7.10 – Variation du nombre de NEAs et du nombre de PHAs en fonction de l'angle de précession initiale [[Bancelin et al., 2011a](#)].

Le nombre moyen de NEAs en fonction de la famille dynamique est indiqué sur la figure 7.11. On remarque donc qu'un grand nombre d'astéroïdes de la famille des Apollos pourra être observé par le satellite ainsi qu'un nombre non négligeable de PHAs. On estime donc à environ 30% de la population des NEAs qui pourra être observée par le satellite.

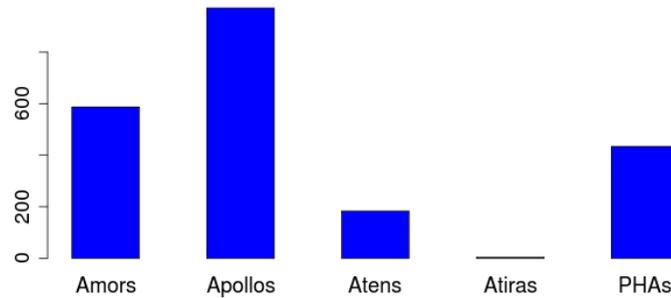


FIG. 7.11 – Nombre moyen de NEAs et PHAs qui seraient observés par Gaia [Bancelin et al., 2011a].

Mesure de la taille des astéroïdes

Gaia pourra déterminer la taille angulaire apparente d'un très grand nombre de grands astéroïdes. De ce fait, il permettra de produire pour la première fois une base de données de mesures directes de tailles d'astéroïdes. Une étude des performances attendues dans la mesure des tailles d'astéroïdes a été faite dans dell'Oro and Cellino [2005]. Les auteurs estiment que, pour des objets de diamètre apparent supérieur à 20 mas et de magnitude apparente M comprise entre 12 et 20, la détermination du diamètre pourra être faite avec une précision égale ou supérieure à 10% (Fig. 7.12)

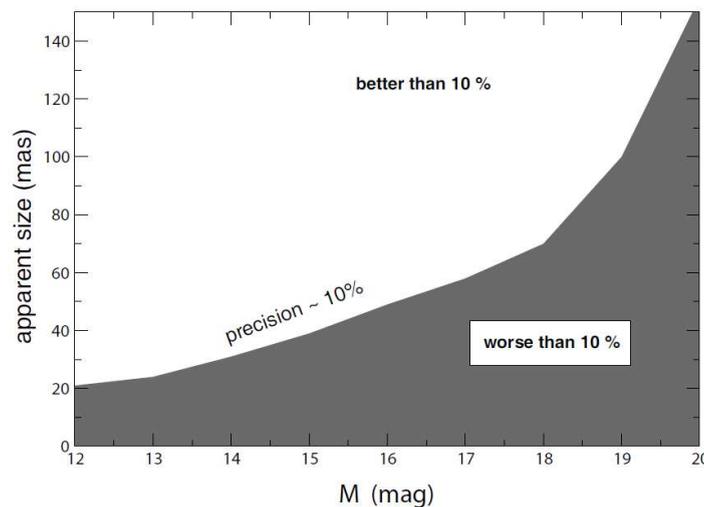


FIG. 7.12 – Précisions des mesures de tailles de MBAs attendues par Gaia. D'après dell'Oro and Cellino [2005].

Afin de déterminer l'efficacité et la capacité de Gaia à mesurer les tailles d'astéroïdes, principalement pour les MBAs, dell'Oro and Cellino [2005] ont utilisé des techniques numériques afin de

simuler les signaux d'astéroïdes produits dans le plan focal de l'instrument astrométrique de Gaia. Ces simulations fournissent une liste des transits attendus pour tous les MBAs traversant le plan focal ainsi que les distances r au satellite et les magnitudes apparentes M . Les objets sélectionnés dans cette liste sont des objets pour lesquels le diamètre IRAS D est connu. En supposant en première approximation des objets sphériques et en se limitant aux magnitudes M comprises entre 12 et 20, [dell'Oro and Cellino \[2005\]](#) ont pu déterminer, sur la base des données de la figure 7.12 l'efficacité $\rho = s/S$ de Gaia pour chaque objet, S représentant le nombre total d'observations pour un objet unique et s , le nombre total de *bonnes observations* (précision meilleure ou égale à 10%, voir Fig. 7.12). La figure 7.13 montre les résultats de ces simulations : chaque point représente l'efficacité et le diamètre réel pour chaque astéroïde. Le trait plein est la valeur moyenne de ρ en fonction du diamètre obtenu à l'aide d'une technique "running-box". Pour des astéroïdes de taille supérieure à 100 km, l'efficacité de la mesure Gaia est bien au dessus des 50% et presque toutes les observations Gaia sont bonnes, alors que pour des objets de taille inférieure à 20 km, aucune bonne observation n'est possible (précision inférieure à 10%) car les objets sont trop petits ou ont une magnitude trop faible. Pour des objets de taille comprise entre 20-30 km ρ est de quelques pourcents. En conclusion de cette étude, les auteurs ont montré que le diamètre de MBAs, s'il est supérieur à 30 km, pourra être mesuré avec une précision supérieure ou égale à 10%.

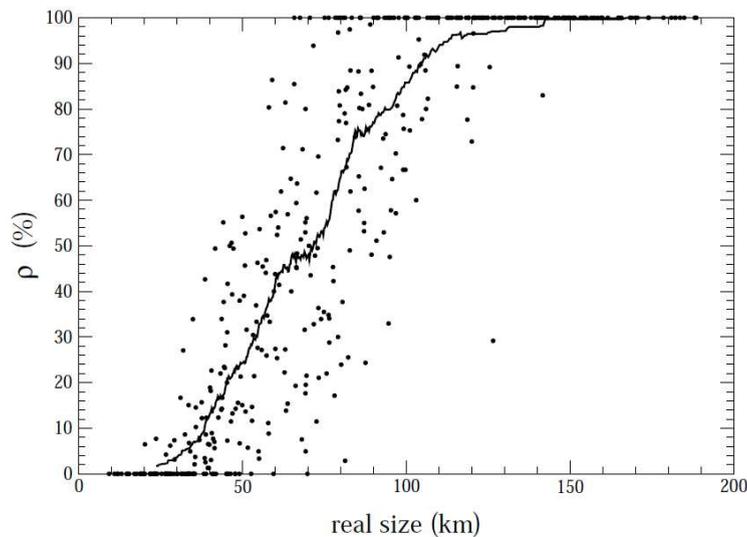


FIG. 7.13 – Efficacité des mesures effectuées par Gaia pour la détermination de tailles de MBAs. D'après [dell'Oro and Cellino \[2005\]](#).

Détermination de paramètres rotationnels et de la forme

Les données photométriques acquises par Gaia sont quelques peu différentes de données photométriques classiques. La principale différence est que Gaia n'obtiendra pas des courbes de lumière continues mais des données photométriques uniques ou éparées ce qui paraît, en premier abord, être une limite importante pour l'inversion photométrique. En effet, comment dériver des propriétés de rotation et de forme à partir de données photométriques éparpillées sur cinq ans de mission ? Il a été montré dans [Kaasalainen et al. \[2005\]](#) que l'inversion de données photométriques éparées est possible et peut fournir des informations fiables sur les propriétés de l'axe de rotation et la forme globale d'objets. Pendant les cinq années de mission, Gaia fournira entre 50 et 70 données photométriques instantanées par objet ; le problème est de pouvoir développer une technique d'inversion efficace capable de déterminer plusieurs inconnues à savoir la période de rotation, les coordonnées écliptiques de l'axe de rotation, des paramètres décrivant la forme

globale de l'objet, etc. Pour résoudre ce problème, un algorithme génétique est utilisé dans [Cellino et al. \[2006\]](#) pour la détermination de ces paramètres, en supposant principalement que la forme des astéroïdes peut être assimilée à un ellipsoïde triaxial d'axe a, b, c . Ainsi, les formes sont simplement représentées à l'aide de deux paramètres correspondant aux rapports b/a et c/a . Ainsi, la détermination des propriétés du spin par inversion de données photométriques acquises par Gaia pour environ 10000 objets apportera sa pierre à l'édifice sur l'étude des évolutions collisionnelles de la population astéroïdale, de l'effet Yarkovsky, de l'effet YORP sur l'évolution de l'axe de rotation et sur les propriétés rotationnelles de familles d'astéroïdes.

Taxonomie

La mission Gaia apportera aussi des résultats importants pour la taxonomie d'astéroïdes basés sur la collecte de données avec les détecteurs BP et BR (voir la sous-section 7.2.2). L'avantage des mesures Gaia est que les données spectrométriques proviendront d'une seule plateforme d'observation (pas de nécessité de combiner différentes données provenant de différents instruments) basée dans l'espace (pas d'interférences atmosphériques). Le nombre d'objets détectés par Gaia étant important (~ 400000), cela permettra de produire un très large échantillon d'objets qui sera utilisé pour développer cette nouvelle taxonomie et cela, même si, vu que les astéroïdes ont une faible réflectance aux basses longueurs d'onde, l'échantillon final d'objets suffisamment brillants pour produire un spectre couvrant l'intervalle de longueurs d'ondes entier des détecteurs BR et BP sera certainement plus petit que le nombre total d'objets détectés. La figure 7.14 montre une caractéristique majeure des courbes de réponse des détecteurs BP et BR : les données spectrométriques acquises par Gaia s'étendront jusqu'aux longueurs d'ondes relativement courtes dans la région bleue du spectre. C'est une propriété intéressante dans la mesure où cela compensera le fait que les récents surveys spectrométriques au sol [[Bus and Binzel, 2002a](#)], notamment SMASS et SMASS2, utilisent des détecteurs CCD présentant une faible sensibilité dans le bleu. Par conséquent, les surveys ne couvrent pas les longueurs d'ondes en-deçà de 500 nm [[Bus and Binzel, 2002b](#)] et certaines classes taxonomiques ne sont plus reconnues par les spectres CCDs modernes comme certaines sous-classes de la classe C, identifiées par d'anciennes méthodes taxonomiques (anciens tubes de détecteurs photométriques). Ainsi, la future taxonomie Gaia apportera beaucoup pour l'étude des propriétés d'objets primitifs et l'abondance de certains sous-groupes.

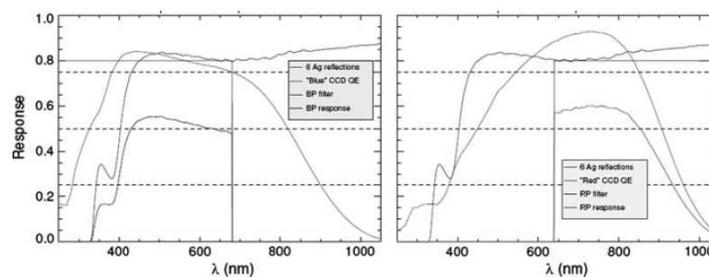


FIG. 7.14 – Courbes de réponse des détecteurs photométriques BR et BP.

Détermination et amélioration d'orbite

La détermination et l'amélioration d'orbite est au cœur des activités liées à l'analyse des données Gaia pour le Système Solaire. Selon les caractéristiques de l'objet détecté (forme, magnitude, position dans le plan $a-e$, distribution des observations) différents modèles seront utilisés durant le traitement des données : la méthode de l'inversion statistique qui consiste en une méthode non linéaire des moindres carrés utilisant des covariances linéarisées [[Bowell et al., 2002](#), [Muinonen and Bowell, 1993](#)], la méthode du volume de variation [[Muinonen et al., 2006](#)] et la méthode

du "ranging orbital" (voir chap. 2) [Virtanen et al., 2001, Muinonen et al., 2001].

La figure 7.15 illustre l'application de la méthode du ranging sur l'astéroïde (4) Vesta. Mignard et al. [2007] montre l'évolution de l'incertitude du demi-grand axe de cet objet en fonction de la précision de quatre observations Gaia simulées. On peut donc voir une transition de phase sur cette incertitude à mesure qu'augmente la précision des observations Gaia considérées. Une précision de l'ordre du mas permet de réduire considérablement cette incertitude.

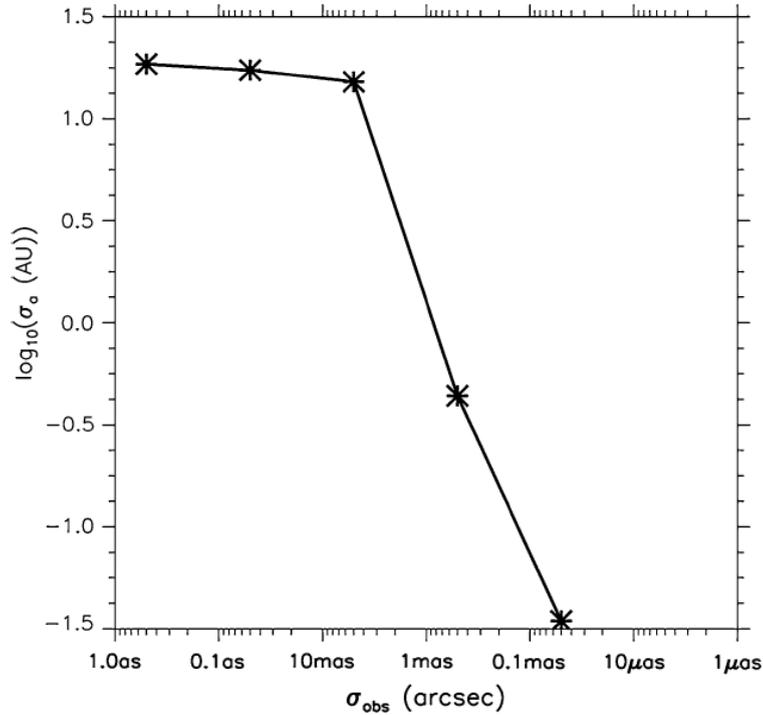


FIG. 7.15 – Application de la méthode Ranging sur l'astéroïde Vesta pour l'estimation de l'incertitude sur le demi-grand axe en fonction de la précision des observations de Gaia.

La figure 7.16 illustre une application de la méthode des covariances linéarisées sur une population de 1815 astéroïdes connus, à la fin de la mission. Mignard et al. [2007] montre l'incertitude en demi-grand axe et la longitude du nœud ascendant en fonction du demi-grand axe et de l'inclinaison, respectivement, à partir de données Gaia simulées.

Détermination des masses

La masse d'un astéroïde, d'un point de vue physique, reste un paramètre fondamental pour comprendre la formation et l'évolution des objets. Combinée avec le volume (c'est-à-dire la forme et la taille dérivées des données Gaia), elle fournit la densité de volume qui est un paramètre fondamental et pourtant toujours très mal connu. Ce paramètre permet de mieux interpréter la structure interne et la composition, ainsi que l'histoire collisionnelle et thermique de ces objets. Il y a deux moyens pour déterminer la masse des astéroïdes à partir des observations. L'analyse de l'orbite d'un possible satellite ou l'analyse de la perturbation gravitationnelle par un autre astéroïde lors d'un passage proche. À ce jour, l'analyse de systèmes binaires est l'approche la plus précise et celle qui a permis de déterminer la majorité des masses d'astéroïdes connus [Merline et al., 2002]. L'autre technique plus classique [Hilton, 2002] mesure des effets infimes de perturbations dynamiques et a été très utilisée sur les plus gros astéroïdes de la ceinture principale. Grâce à l'extrême précision des mesures Gaia, les variations des éléments osculateurs de l'astéroïde dues à cette rencontre proche pourront être mesurées et exploitées de façon à en déterminer les masses.

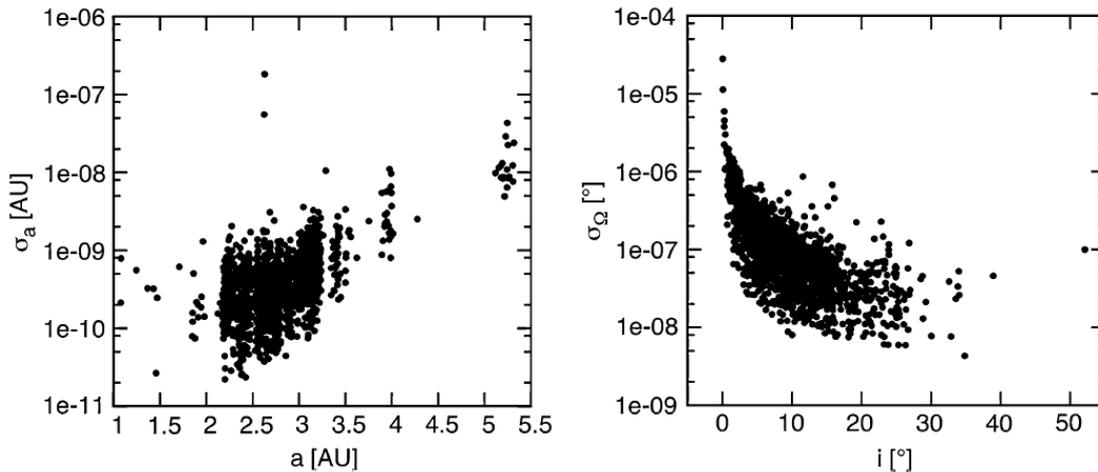


FIG. 7.16 – Application de la méthode des covariances linéarisées pour caractériser l’incertitude, à la fin de la mission, sur le demi-grand axe et la longitude de nœud ascendant sur une population de 1815 astéroïdes.

Mouret et al. [2007] montre la précision relative de la détermination de masse pour 544 astéroïdes. (Tab. 7.1). Ils montrent que la masse d’environ 150 astéroïdes pourra être déterminée avec un précision de 50%.

TAB. 7.1 – Nombre cumulative de masses déterminées en terme de précision relative.

Nombre d’astéroïdes perturbateurs	
Total	544
$\sigma(m)/m < 0.1\%$	2
$\sigma(m)/m < 1\%$	7
$\sigma(m)/m < 10\%$	42
$\sigma(m)/m < 15\%$	56
$\sigma(m)/m < 20\%$	76
$\sigma(m)/m < 30\%$	113
$\sigma(m)/m < 50\%$	150

7.2.5 Le futur catalogue Gaia

Ces grandes quantités de données acquises par le satellite au cours des cinq années de mission, nécessiteront une énorme quantité de moyens de stockage. En effet, la quantité de données attendue est estimée à 1 pétaoctet (10^{15} octets) ce qui équivaut à 250000 DVDs ou encore 50000 disques Blu-Ray. De plus, le futur catalogue Gaia, prévu pour 2020 nécessiterait environ 50000 livres de données contre 5 pour les catalogues Hipparcos (voir Fig. 7.17).

Le futur catalogue Gaia, dense en étoiles de référence, permettra une réduction des observations de tous les NEAs répertoriés au MPC permettant ainsi une amélioration considérable de leur orbite (voir chap. 8).

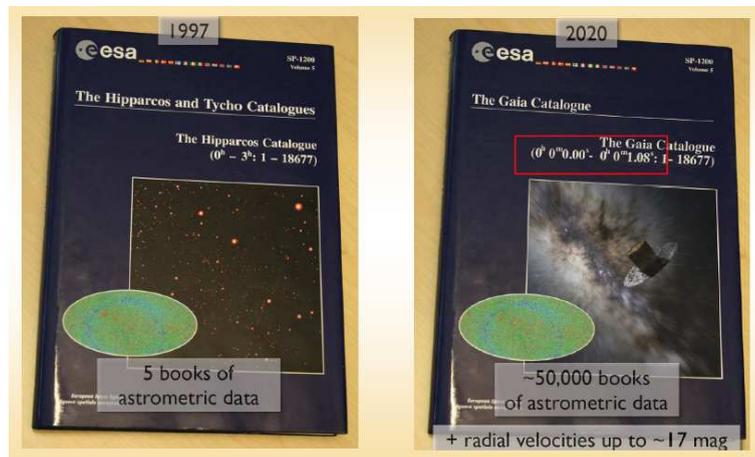


FIG. 7.17 – Volume de donnée du catalogue Gaia comparé à celui de Hipparcos. D’après B. Holl, Lund.

7.3 Les astéroïdes Atiras et les satellites d’observations

Les astéroïdes Atiras bénéficient de conditions d’observations défavorables vu leurs caractéristiques orbitales (voir chap. 1 sect. ??). En effet, ils orbitent en-deçà de l’orbite terrestre et restent donc souvent proches du Soleil. Les informations que l’on peut obtenir de cette population est une clef pour comprendre la contribution de ces petits corps sur les risques d’impact avec la Terre, mais aussi pour vérifier ou exclure les théories des réservoirs de planétésimaux et l’histoire de leur évolution orbitale.

De par son positionnement et sa loi de balayage nominale, on s’attend à ce que le satellite Gaia puisse observer certains Atiras connus (Fig. 7.11) et même en découvrir. En effet, comme on peut le voir sur la figure 7.18 [Tanga, 2011], Gaia pourra observer aux basses elongations solaires entre 45° - 60° , ce qui peut difficilement être fait depuis le sol.

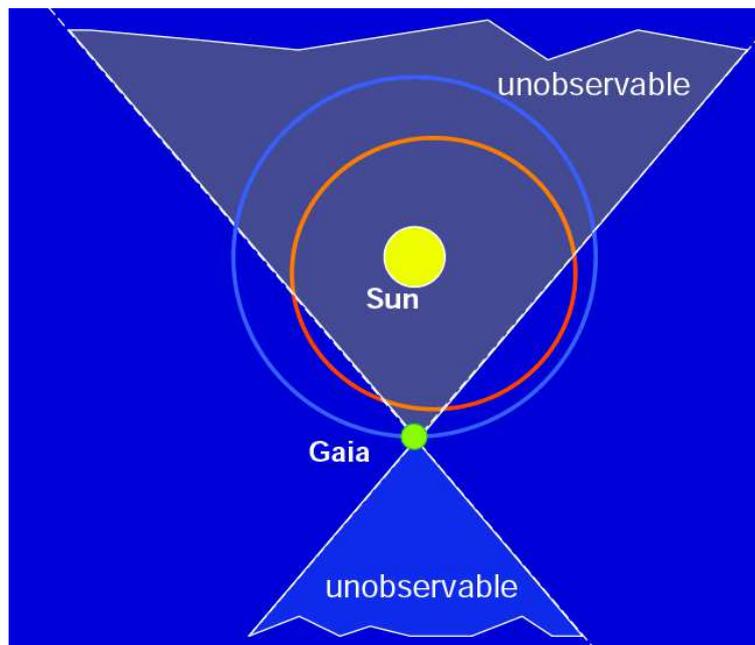


FIG. 7.18 – Zone d’observabilité du satellite Gaia.

Contrairement à Gaia qui n'est pas une mission dédiée pour les Atiras, deux autres missions sont entièrement dédiées à la recherche de ces objets. Le satellite AsteroidFinder conçu par le centre aérospatial allemand² (DLR) est le fruit d'un programme de missions spatiales basé sur des satellites bus standards (SSB). Ces générations de satellites compacts ont une masse d'environ 100 kg. AsteroidFinder a été sélectionné en 2008 pour être la première mission du DLR SSB et le lancement pour une mise en orbite basse est prévu en 2013. On pense qu'il existe plus de 1000 Atiras de diamètre de plus de 100 m et des simulations ont montré que AsteroidFinder pourrait alors en détecter des dizaines durant un période opérationnelle d'au moins un an et permettre ainsi de caractériser cette population en terme de nombre, de caractéristiques orbitales et de distribution de taille [Mottola et al., 2010].

Le projet de micro-satellite NEOSSat (Near Earth Objet Surveillance Satellite) sera le premier télescope basé dans l'espace entièrement dédié à l'observation et la recherche de NEAs. Il aura à son bord un télescope de 0.15 m de diamètre et un champ de vue de 0.86 deg^2 composé de 1.024×1024 CCD. Le satellite pourra rechercher des objets le long de l'écliptique et à basses elongations solaires (Fig. 7.19). Des simulations [Hildebrand et al., 2004] ont montré qu'un télescope de cette taille placé sur l'écliptique à 45° d'elongation pourra très certainement détecter des objets de faible magnitude $V = 19-20$. On s'attend à ce que NEOSSat trouve plus d'une centaine d'IEAs sur deux décennies d'observation.

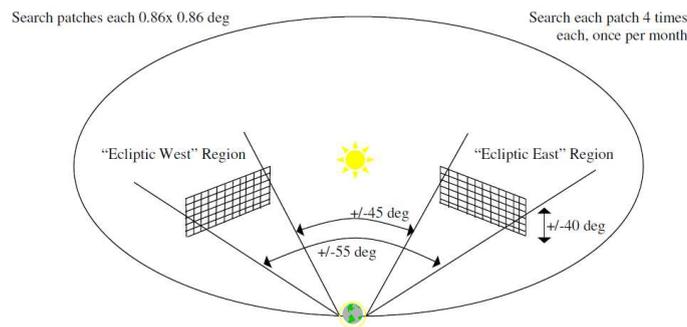


FIG. 7.19 – Zone d'observabilité du satellite NEOSSat. *Credits : Canadian Space Agency – Defense Research & Development.*

²http://www.dlr.de/pf/en/desktopdefault.aspx/tabid-174/319_read-18911/

Chapitre 8

Astrométrie Gaia d'Apophis

Sommaire

8.1	Les observations d'Apophis par Gaia	118
8.2	Influence à court terme	119
8.2.1	Incertitude sur les éléments orbitaux	119
8.2.2	Incertitude sur la position	120
8.3	Effet dans le plan de Bessel	120
8.4	Apport du futur catalogue stellaire	121
8.5	Effet Yarkovsky	122

8.1 Les observations d'Apophis par Gaia

Je me propose de montrer, à travers l'exemple de l'astéroïde Apophis, l'apport de données Gaia sur la détermination des orbites de géocroiseurs. J'insisterai essentiellement sur la précision des orbites à court et long terme.

Il a été souligné dans la sous-section 7.2.4 l'influence de la loi de balayage sur le nombre d'observations pour un objet. J'indique sur la figure 8.1 le nombre d'observations Gaia d'Apophis en fonction de l'angle de précession initial. Il est clair que selon la valeur de l'angle, la taille des ensembles d'observations est très variable. En effet, un set peut contenir moins de 10 observations aussi bien que plus de 20 observations.

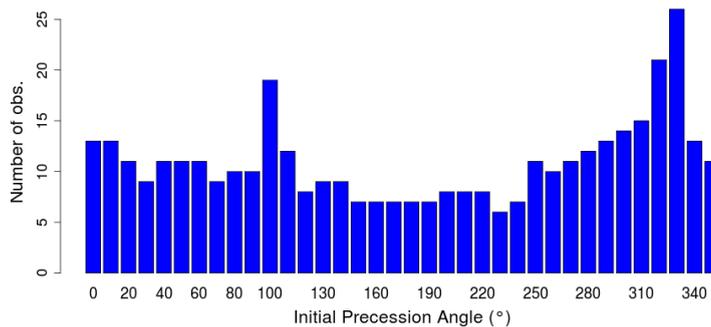


FIG. 8.1 – Observations Gaia d'Apophis en fonction de l'angle de précession initial.

Pour mes simulations, j'ai choisi un set d'observations, non pas en fonction du nombre d'observations mais en fonction de la longueur d'arc de ce set. En effet, l'orbite d'un objet est beaucoup

mieux contrainte quand les observations sont espacées dans le temps et non regroupées. Le set que j'ai donc choisi contient 12 observations dont les distributions temporelles et spatiales sont représentées sur la figure 9.9. On peut clairement voir que les observations couvrent environ la moitié de l'orbite d'Apophis. Chaque observation est estimée avec une précision de l'ordre de 5 mas.

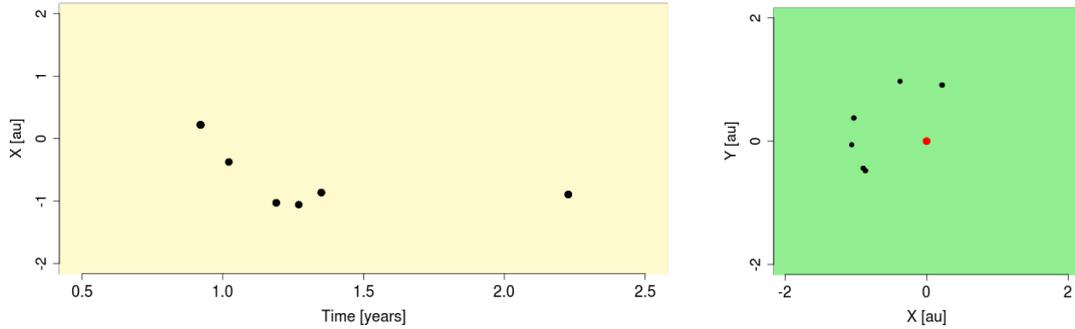


FIG. 8.2 – À gauche, distribution temporelle des observations de Apophis ; l'axe des abscisses est exprimé en fonction du nombre d'années écoulées après le début de la mission. La figure de droite représente la distribution spatiale des observations projetées sur l'écliptique et dans un repère centré sur le Soleil (●).

8.2 Influence à court terme

8.2.1 Incertitude sur les éléments orbitaux

Pour illustrer l'apport des observations Gaia à court terme, j'analyse dans un premier temps l'amélioration de la précision des éléments orbitaux d'Apophis . Pour cela, j'ai effectué un ajustement de l'orbite avec ces nouvelles observations en utilisant le progiciel OrbFit et j'ai ensuite comparé les données ajustées à celles provenant de l'ajustement obtenu en considérant uniquement les observations au sol. Le tableau 8.1 compare les rms des éléments orbitaux en considérant les observations au sol (σ_o) d'une part, puis en y rajoutant les observations Gaia (σ_{o+G}). Les données Gaia permettront de réduire d'un facteur de près de 1000 l'incertitude sur la valeur du demi-grand axe d'Apophis.

TAB. 8.1 – Apport des observations Gaia sur les éléments orbitaux d'Apophis.

	σ_o	σ_{o+G}
a [UA]	1.3×10^{-08}	6.8×10^{-11}
e	5.7×10^{-08}	3.9×10^{-09}
i [°]	1.8×10^{-06}	1.2×10^{-07}
Ω [°]	8.0×10^{-05}	2.2×10^{-06}
ω [°]	8.0×10^{-05}	2.3×10^{-06}
M [°]	5.5×10^{-05}	6.5×10^{-07}

8.2.2 Incertitude sur la position

J'illustre également l'apport des données Gaia à travers l'évolution de l'incertitude sur la position. À partir d'une propagation linéaire de la matrice de covariance initiale (obtenue par la solution des moindres carrés), l'incertitude sur les éléments orbitaux est propagée jusqu'à la date du passage proche en 2029. J'ai réalisé cette expérience en considérant la propagation de solutions nominales obtenues à partir de l'ajustement avec différents ensembles d'observations (Fig. 8.3) :

- S_1 (-) : comprend les observations optiques de 2004-2008, les données optiques de 2011 réduites par PRAIA (voir chap. 6), les observations de l'observatoire de Magdalena Ridge de 2011 et les données radars ;
- S_2 (-) : comprend les observations utilisées dans S_1 et en y ajoutant les 12 observations Gaia de précision 5 mas ;
- S_3 (-) : comprend les observations utilisées dans S_1 en y ajoutant une future observation radar en 2013 et de précision $1\mu\text{s}$ (mesure d'un écho radar) ;
- S_4 (-) : comprend les observations utilisées dans S_1 en y ajoutant une future observation optique en 2013 et de précision 0.1 arcsec ;
- S_5 (-) : comprend les observations utilisées dans S_1 et en considérant le cas hypothétique où Gaia ne fournirait qu'une seule observation de précision 5 mas.

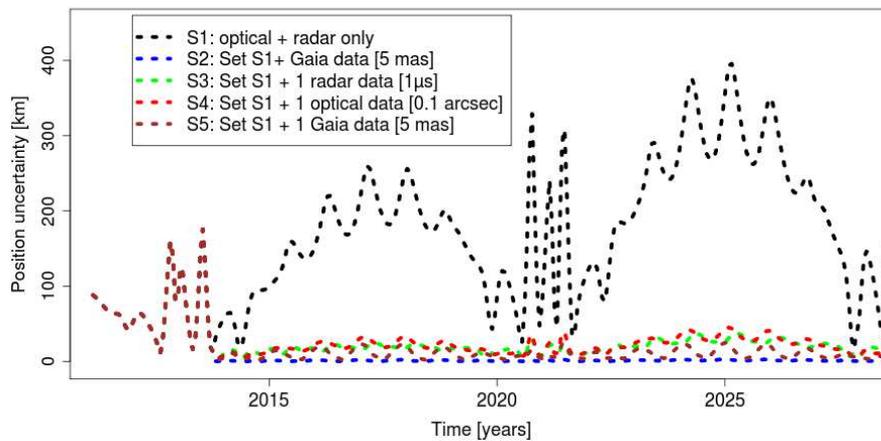


FIG. 8.3 – Évolution temporelle de l'incertitude sur la position d'Apophis en considérant plusieurs ensembles d'observations. Alors que les sets S_3 , S_4 et S_5 réduisent l'incertitude à un même niveau, le set S_2 permet d'amener l'incertitude sur la position en deçà du kilomètre.

On peut remarquer sur la figure 8.3 que les données Gaia (S_2) permettent de réduire considérablement l'incertitude en dessous du kilomètre. De plus, l'apport d'une seule observation Gaia (S_5) serait suffisante pour réduire significativement l'incertitude sur la position, et peut être comparée à l'effet d'une observation radar (S_3) et optique (S_4).

8.3 Effet dans le plan de Bessel

Je me propose dans un deuxième temps d'analyser l'apport des ensembles d'observations S_i sur la taille de la zone d'incertitude dans le plan (ξ, ζ) d'Apophis en 2029. Le tableau 8.2 réunit les valeurs à 1σ des dimensions de l'ellipse d'incertitude $(\sigma_\xi, \sigma_\zeta)$. Une future observation radar (S_3) ou optique (S_4) en 2013 augmentera de plus de 700 jours la longueur de l'arc d'observation permettant ainsi de mieux contraindre l'orbite et de réduire considérablement la taille de l'ellipse

en comparaison de celle obtenue avec le set S_1 . La contribution d'une seule observation Gaia (S_2) aurait une influence plus important sur cette ellipse. Mais la contribution d'un ensemble d'observations Gaia (S_2) serait sans comparaison puisque l'incertitude attendue serait bien en dessous du kilomètre permettant ainsi une bien meilleure connaissance sur la position d'Apophis lors de son passage proche en 2029.

TAB. 8.2 – Taille de l'ellipse d'incertitude (σ_ξ, σ_ζ) dans le target plane d'Apophis en 2029 en considérant divers ensembles d'observations.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
σ_ξ	10	0.3	7	8	6
σ_ζ	240	1.6	10.5	24	11.5

Enfin, il serait intéressant de représenter la position de keyholes primaires et secondaires dans le b-plane de 2029 en considérant les ellipses d'incertitude obtenues avec les sets S_1 et S_2 . J'ai donc représenté sur la figure 8.4 la position des centres de ces keyholes calculée numériquement et en utilisant l'intégrateur de Lie (voir Chap. 3). L'ellipse représentée en noir est obtenue à partir du set S_2 et on voit donc bien que l'on s'éloigne du centre des keyholes, diminuant ainsi les probabilités d'impacts associées.

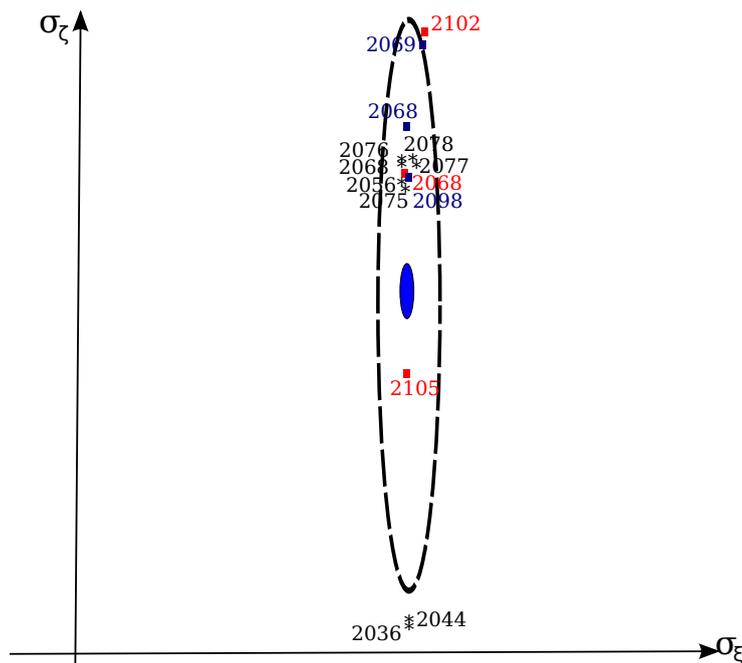


FIG. 8.4 – Ellipse d'incertitude à 3σ dans le b-plane d'Apophis en 2029. Les positions des centres des keyholes primaires (*) et secondaires engendrant une collision avec la Terre au nœud ascendant (■) et au nœud descendant (■) sont aussi représentés. L'ellipse représentée en bleu est obtenue à l'aide du set S_2 avec les données Gaia et l'ellipse en pointillés à l'aide du set S_1 .

8.4 Apport du futur catalogue stellaire

Même sans fournir d'observations pour un objet particulier, la mission Gaia, grâce au futur catalogue astrométrique permettra de réduire les observations astrométriques existantes avec une

précision bien meilleure que celle connue jusqu'à présent. En effet, le catalogue sera presque dépourvu d'erreurs zonales et très dense en étoiles de référence. J'ai donc considéré que toutes les observations d'Apophis auraient, après réduction par le futur catalogue Gaia, une précision de ± 50 mas. Comme pour le tableau 8.1, j'ai estimé l'incertitude sur les paramètres orbitaux quand les observations auront été réduites par le catalogue Gaia (Tab. 8.3).

TAB. 8.3 – Incertitude sur les éléments orbitaux d'Apophis en considérant le cas d'observations réduites par le futur catalogue Gaia.

	Sans réduction	Avec réduction
a [UA]	1.3×10^{-08}	1.3×10^{-09}
e	5.7×10^{-08}	4.9×10^{-09}
i [°]	1.8×10^{-06}	9.9×10^{-09}
Ω [°]	8.0×10^{-05}	3.9×10^{-06}
ω [°]	8.0×10^{-05}	3.9×10^{-06}
M [°]	5.5×10^{-05}	5.6×10^{-06}

On remarque donc une amélioration d'un facteur 10 sur le demi-grand axe. Même si ce résultat est faible en comparaison de celui obtenu dans le tableau 8.1, l'amélioration de l'orbite de PHAS ayant de grandes incertitudes sur leurs paramètres orbitaux sera important pour le calcul de risque d'impact.

Pour terminer cet exercice, je quantifie aussi les incertitudes sur la position dans le b-plane d'Apophis en 2029 (Tab. 8.4) en propageant l'incertitude liée à l'orbite obtenue avec des observations réduites avec le futur catalogue Gaia. On peut comparer ces valeurs à celles obtenues dans le tableau 8.2. La précision selon la composante ζ peut être comparée à l'apport d'une observation optique de 100mas en 2013.

TAB. 8.4 – Taille de la zone d'incertitude dans le b-plane d'Apophis en considérant le cas d'observations réduites en utilisant le futur catalogue Gaia.

	Sans réduction	Avec réduction
σ_{ξ}	10	1.5
σ_{ζ}	240	23.5

8.5 Effet Yarkovsky

Comme déjà mentionnée dans les chapitres précédent, l'effet Yarkovsky reste la principale source d'incertitude sur l'orbite d'Apophis (voir chap. 6). Si cette incertitude sera partiellement levée avec les futures campagnes d'observations radar en 2013 (voir chap. 6), on peut s'attendre à ce que la mission Gaia apporte sa contribution à la résolution de cette incertitude. En effet, on a vu dans le chapitre 4 que peu de paramètres physiques d'Apophis sont connus à ce jour et les retombées scientifiques pour le système solaire seront telles que cette incertitude pourra certainement être levée complètement avec les données Gaia et radar combinées.

Chapitre 9

Stratégie de suivi au sol

Sommaire

9.1 Gaia DPAC	124
9.1.1 L'organisation	124
9.1.2 Traitement des données des objets du Système Solaire	126
9.2 Astrométrie pour les géocroiseurs nouvellement découverts	127
9.2.1 Gaia FUN-SSO et les alertes	127
9.2.2 Processus de redécouverte	129
9.2.3 Synergie sol/espace	131

9.1 Gaia DPAC

En réponse à un appel d'offre de participation de l'ESA fin 2006, une grande équipe européenne d'experts scientifiques et de développeurs de logiciels a présenté sa proposition d'un système global capable de gérer la taille et la complexité des données Gaia. En mai 2007, le Comité des programmes de l'ESA a approuvé la proposition faite par le Consortium de traitement et d'analyse de données (DPAC). À ce moment, le DPAC est devenu officiellement responsable du traitement et de l'analyse des données de Gaia.

9.1.1 L'organisation

Les membres du DPAC sont essentiellement européens et regroupent environ 400 scientifiques et ingénieurs répartis dans plus de 20 pays. Le DPAC est une structure formée autour d'un ensemble d'Unités de Coordination (CU), chaque unité étant responsable d'un aspect spécifique pour le traitement des données Gaia (Fig. 9.1). Chaque CU est divisé en sous-groupes appelés Unité de Développement (DU) en charge d'une ou plusieurs tâches spécifiques. Les CUs sont appuyés par un ensemble de Centres de Traitement de Données (DPC) et la coordination générale est assurée par l'exécutif du consortium (DPACE).

Le DPAC est responsable de plusieurs tâches :

- la préparation et la conception d'algorithmes d'analyse pour la réduction de données astrométriques, photométriques et spectroscopiques ;
- la production et la fourniture de données simulées pour appuyer la conception, le développement et le test de tout le système de traitement de données ;
- la conception, le développement et le fonctionnement de tous les aspects de l'environnement matériel et logiciel nécessaire pour traiter les données de mission à travers les simulations, les opérations de la mission et les phases de production du catalogue final ;

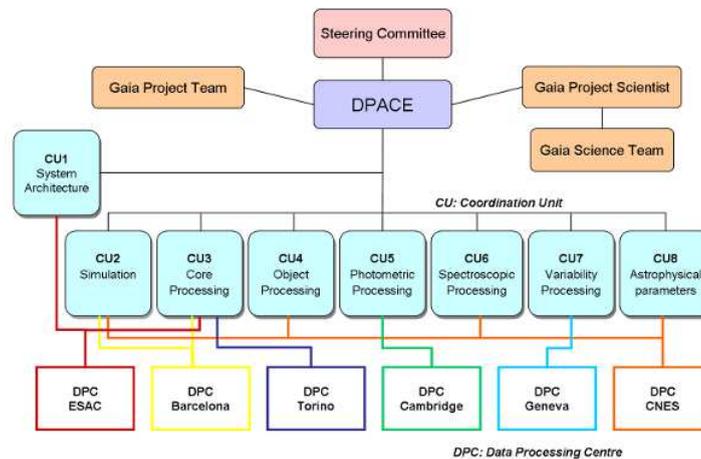


FIG. 9.1 – Organigramme du DPAC.

- la conception, le développement et l’exploitation de la base de données Gaia qui contiendra la production intermédiaire et finale de la mission pour la communauté scientifique au sens large.

Le DPACE est divisé en 9 unités CU :

- le CU1 (architecture du système) a le rôle principale de l’organisation et aide le DPAC à définir la philosophie globale du système de traitement, l’architecture et la stratégie. Il fournira au DPAC et au DPACE des conseils et du soutien dans le domaine de la technologie et la conception de logiciels ;
- le CU2 (simulations de données) a la responsabilité de couvrir les besoins en simulation pour les travaux des autres CUs, s’assurant que des données de simulations fiables sont disponibles à différentes étapes du développement des traitements de données ;
- le CU3 (noyau de traitement) couvre la chaîne entière de développement allant de la réception de données télémétriques brutes à la production de solutions astrométriques. Il y aura une forte interaction avec les CU4, CU5 et CU6 à la fois pour le développement d’algorithmes et pour le traitement proprement dit ;
- le CU4 (traitement des objets) va traiter tous les objets au comportement qualifié d’anormal qui surgissent dans la réduction des données issue du traitement opéré dans le CU3, CU5 ou CU6. De tels objets pourraient être des étoiles binaires, des objets du système solaire ou des objets étendus. Les tâches principales du DU dédiés aux objets du système solaire (dont les principaux membres se situent en Europe, voir Fig. 9.2) sont la caractérisation orbitale des objets et le traitement des alertes (voir Sect. 9.2) ;
- le rôle du CU5 (traitement des données photométriques) est de fournir les données photométriques traitées ainsi que les paramètres de calibration pour le sky mapper, le champ astrométrique et les photomètres BR et BP
- le CU6 (réduction spectroscopique) sera en charge du traitement et de l’analyse des données spectroscopiques obtenues avec l’instrument RVS. Le but du système de traitement spectroscopique est de surveiller l’état du spectrographe et de calibrer ses paramètres caractéristiques, de fournir les vitesses radiales, d’alerter si un objet a besoin d’être rapidement suivi au sol et enfin de fournir des spectres propres et calibrés nécessaires aux autres unités (notamment le CU8) ;
- le CU7 (traitement de la variabilité) sera en charge de caractériser la variabilité spectrale et photométrique par la dérivation de paramètres statistiques et l’ajustement de modèles simples ;

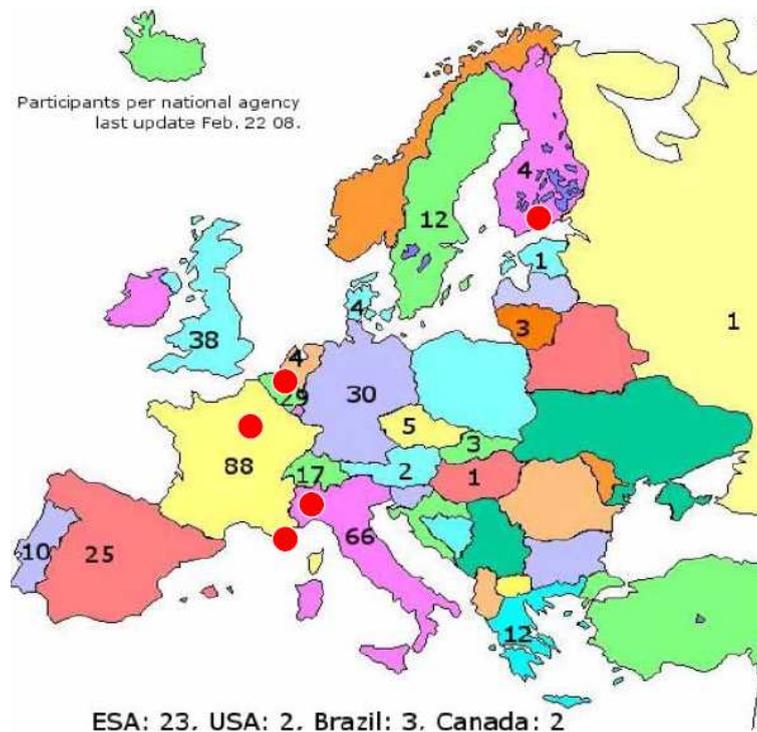


FIG. 9.2 – Répartition géographique des membres du DPAC.

- le CU8 (paramètres astrophysiques) sera responsable des tâches de classification. Les données d'entrées seront des données astrométriques, photométriques et spectroscopiques parfaitement calibrées et permettront d'avoir en sortie la classification d'objets (étoiles, galaxies, quasars, astéroïdes, etc.), l'estimation de leurs paramètres astrophysiques, l'identification de binaires non résolues et enfin l'identification de nouveaux types d'objets (principalement de nouveaux types d'étoiles) ;
- le CU9 enfin sera en charge du futur catalogue Gaia et de l'exploitation scientifique.

9.1.2 Traitement des données des objets du Système Solaire

Il y a deux types de schémas pour le traitement de données selon le type d'objet détecté et selon si c'est un objet connu ou non.

Pour le long terme

Le traitement à long terme (Fig. 9.3) concerne les objets existants dans les bases de données. L'objet, lorsqu'il est identifié comme un objet du système solaire, subit un traitement dit *initial* puis ses coordonnées vont être liées aux astéroïdes connus des bases de données afin de déterminer si un lien existe. Si c'est le cas, une étape d'amélioration d'orbite, détermination ou amélioration de paramètres physiques et autres paramètres globaux pourra être faite.

Pour le court terme

Dans le traitement à court terme (Fig. 9.4), journalier, si l'objet est identifié par la base de données, alors le processus s'arrête. Par contre, si ce n'est pas le cas, une orbite préliminaire va être calculée et cet objet va être classé comme un nouvel objet du système solaire.

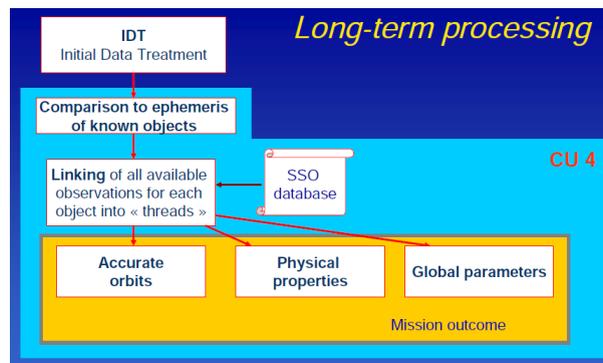


FIG. 9.3 – Schéma de traitement des données pour long terme.

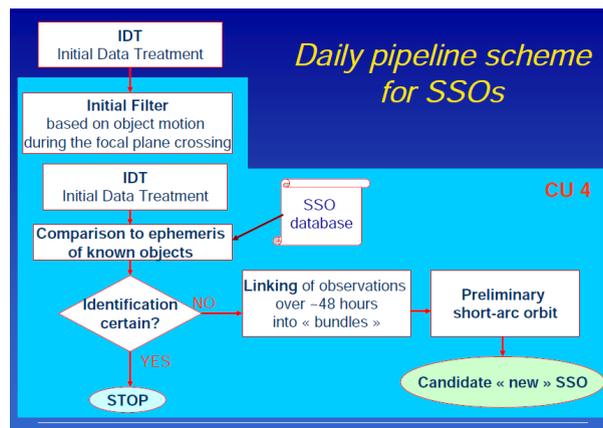


FIG. 9.4 – Schéma de traitement quotidien des données.

9.2 Astrométrie pour les géocroiseurs nouvellement découverts

Durant la mission, on s'attend à ce que le satellite découvre de nouveaux objets. Cependant, à cause de la loi de balayage, ces objets nouvellement découverts auront, à la date de leur découverte, deux observations espacées d'environ $\delta t \sim 1.5$ h. D'autre part, la mission n'est absolument pas dédiée au suivi d'objets qu'ils soient connus ou pas. Une fois l'objet observé, les données sont sauvegardées et seront traitées suivant les schémas indiqués dans la sous-section 9.1.2. S'il s'avère que cet objet est nouveau, il constitue donc une alerte. Parmi ces alertes potentielles, on s'attend à ce qu'il y ait parmi elles des PHAs et quelques Atiras. Si aucun suivi n'est organisé de la Terre, il se peut que cet objet soit rapidement perdu. C'est pour cela qu'un réseau de suivi au sol est en train d'être organisé afin d'être prêt pour gérer ces alertes potentielles.

9.2.1 Gaia FUN-SSO et les alertes

Pour ces cas particuliers d'objets, le CU4 à travers la tâche du DU459 a envisagé de mettre en place un réseau au sol afin d'effectuer des observations complémentaires en mode alerte. Ce réseau baptisé Gaia-FUN-SSO [Thuillot et al., 2011, Bancelin et al., 2011a] (Gaia Follow-Up Network for Solar System Objects) est toujours en cours d'évolution et compte plus de 25 sites d'observations en octobre 2011 (Fig. 9.5) et d'autres stations rejoindront le réseau d'ici peu ce qui permettra d'avoir une grande zone de couverture géographique.

Ce réseau regroupe pour l'instant plus de 35 instruments ayant pour diamètres de 0.25 m à 2.4 m. Quatre d'entre eux sont des télescopes Schimdt, permettant ainsi de couvrir un large champ optimisant ainsi la récupération d'astéroïdes, et cinq d'entre eux sont des télescopes robotiques qui



FIG. 9.5 – Sites d’observations des membres du Gaia-FUN-SSO.

seront précieux pour les observations en mode alerte. Le but principal étant d’effectuer des observations astrométriques, les caractéristiques attendues pour ces télescopes sont d’avoir un champ d’observation d’au moins 10 arcmin, une taille de pixel d’au moins 1 arcsec et une magnitude limite d’environ 20. Mais dans la mesure où il y aura forcément besoin de chercher de nouveaux objets dans des champs larges, même des champs avec des plus grande taille de pixel seront utiles. Le rôle de ce réseau sera d’améliorer l’orbite de nouveau objets nouvellement découverts afin de permettre à Gaia de les identifier lors d’un autre passage. Ce réseau est structuré autour d’un nœud central qui convertira les données brutes obtenues par Gaia en éphémérides utiles pour les observations. Toutes les mesures effectuées par ce réseau seront alors envoyées au MPC et permettront de mettre à jour la base de données auxiliaires utilisée par Gaia afin de pouvoir identifier ces objets [Thuillot, 2011] (Fig. 9.6).

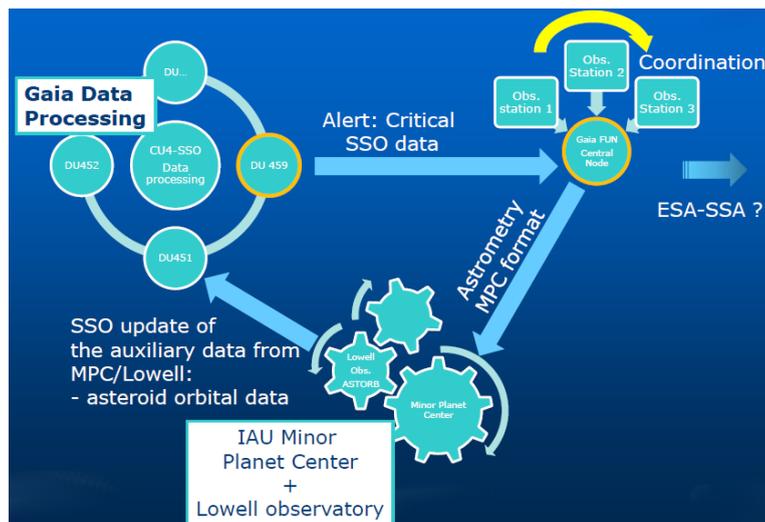


FIG. 9.6 – Coordination entre le DPAC, Gaia-FUN-SSO et le MPC.

Il est important de connaître le nombre d’alertes attendues afin de pouvoir les gérer de manière optimale. Pour cela, j’ai considéré en première approche un échantillon d’une population synthétique construit selon le modèle de Bottke et al. [2002]. Les auteurs ont modélisé les distributions des éléments orbitaux ainsi que de la magnitude absolue et de la taille pour les NEOs (incluant les comètes) ayant une magnitude absolue compris entre 13 et 22. Cette modélisation a

été faite en combinant une fonction de probabilité représentant les biais observationnels associés au survey Spacewatch, une distribution en magnitude absolue et des distributions de probabilité représentant au mieux la provenance des NEOs¹. Pour un échantillon composé de 20000 objets aléatoirement disposés dans le système solaire interne, j'ai estimé le nombre moyen de NEAs par famille dynamique qui pourraient être observés par Gaia. Je l'ai ensuite comparé au nombre moyen de NEAs connus dans les bases de données qui seront observés par Gaia durant les cinq ans de mission (Fig. 9.7). J'ai ainsi montré qu'on attend en moyenne un faible nombre d'alertes de géocroiseurs, estimé à une alerte tous les quatre jours [Bancelin et al., 2011a]. Cependant, une étude plus poussée devrait être faite pour savoir si ce nombre d'alerte varie linéairement sur les cinq ans de mission ou alors si ce taux diminue en fonction du temps. En effet, une fois les objets découverts, ils ne seront alors plus considérés comme des alertes. Lors du prochain rendez-vous avec Gaia, ils apparaîtront alors comme objets connus.

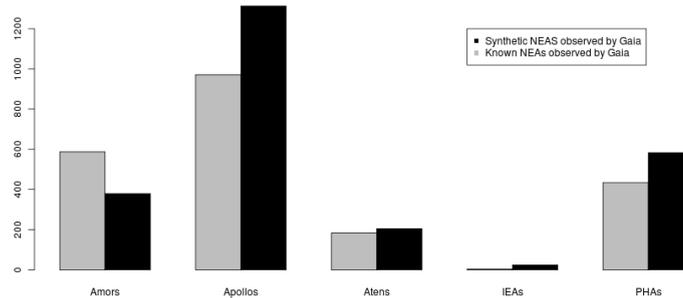


FIG. 9.7 – Histogramme du nombre d'objets connus qui seront observés par Gaia (gris) et le nombre d'objets issus de la population synthétique qui seraient observés par Gaia (noir).

9.2.2 Processus de redécouverte

Une fois une alerte émise, il est important de savoir où regarder dans le ciel pour pouvoir retrouver l'objet nouvellement découvert par Gaia. Une stratégie pour retrouver ces objets du sol est résumée selon la figure 9.8. Une fois détecté, le traitement enverra sous 24 h les coordonnées Gaïacentriques de l'objet à la Terre. Il faudrait alors rapidement calculer une orbite préliminaire, compatible avec ces observations, afin de pouvoir prédire la position (α , δ) de l'astéroïde sur la sphère céleste. Avec cette approche, on pourra ainsi savoir où regarder dans le ciel mais surtout de combien de temps on dispose afin de pouvoir retrouver cet objet.

J'ai donc utilisé, pour la stratégie de redécouverte, la méthode du Statistical Ranging (voir chap. 2) afin de générer la population d'orbites satisfaisant l'équation 2.9. Puis, chaque orbite est propagée dans le temps jusqu'à 10 jours après la découverte de l'objet par le satellite, à intervalle régulier de un jour. Cependant, les distributions calculées peuvent être assez larges. En effet leur taille va dépendre du nombre de jours écoulés depuis la découverte mais aussi de la vitesse apparente de l'objet. En cas d'alerte, on ne peut pas se permettre de scanner la zone entière de la distribution. Pour y remédier, il serait plus judicieux d'extraire des informations statistiques de la distribution. À chaque date, on peut calculer le maximum de vraisemblance (ML) pour la distribution (α , δ) et de centrer une fenêtre de télescope de taille (FOV_α , FOV_δ) sur ce ML. La comparaison de ce ML avec la position théorique de l'objet (donnée par les serveurs d'éphémérides, par exemple celui de l'IMCCE) déterminera la taille minimale de la fenêtre, nécessaire pour que l'objet soit dans ce champ. J'ai donc testé cette approche sur plusieurs PHAs hypothétiques qui

¹À partir de cinq zones d'injection

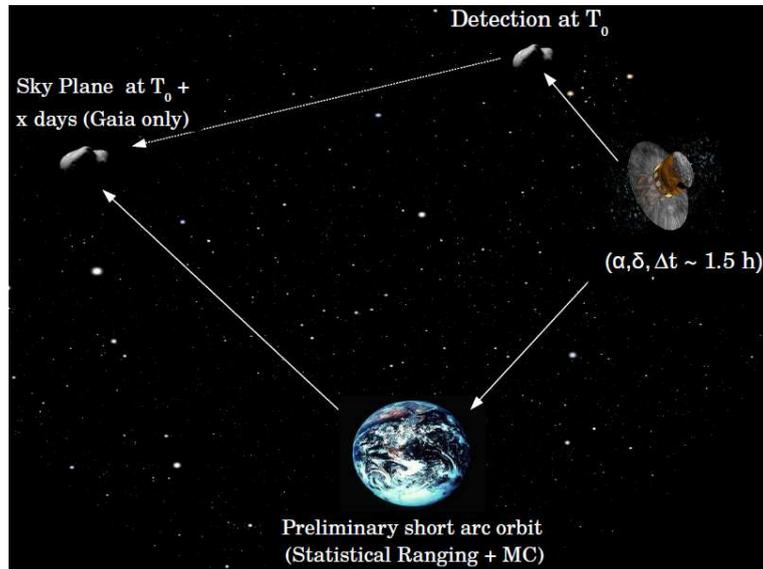


FIG. 9.8 – Stratégie de redécouverte au sol lorsqu’un astéroïde non identifié par Gaia traverse son champ.

seraient découverts par Gaia, afin de voir comment se comportaient les tailles des distributions (α, δ) en fonction de la vitesse apparente de l’astéroïde $(\dot{\alpha}, \dot{\delta})$ et du nombre de jours écoulés depuis la découverte de l’astéroïde. Le tableau 9.1 donne les caractéristiques des vitesses apparentes calculées comme la variation des coordonnées, exprimée en $''/h$, en fonction du temps écoulé entre les deux observations. J’ai choisi l’astéroïde (4183) Cuno dont la vitesse est faible en (α, δ) , l’astéroïde (3200) Phaethon ayant une forte variation suivant ces coordonnées et enfin trois autres astéroïdes intermédiaires (1620) Géographos, (99942) Apophis et (4179) Toutatis ayant des variations intermédiaires comparées aux deux objets précédents.

TAB. 9.1 – Vitesses apparentes $(\dot{\alpha}, \dot{\delta})$ pour cinq hypothétiques PHAs qui seraient découverts par le satellite.

Astéroïde	$\dot{\alpha}$	$\dot{\delta}$
Cuno	0.9 $''/h$	-6 $''/h$
Géographos	82 $''/h$	-33 $''/h$
Apophis	36 $''/h$	51 $''/h$
Toutatis	102 $''/h$	17 $''/h$
Phaethon	61 $''/h$	292 $''/h$

La figure 9.9 illustre, à travers l’exemple d’un Géographos hypothétique qui serait découvert par Gaia, l’approche que j’ai proposée pour pouvoir retrouver cet objet. Les trois distributions (●) sont calculées à partir de prédictions faites, respectivement, quatre, sept et dix jours après la découverte et sur lesquelles sont représentés le maximum de vraisemblance (●) et la position attendue de l’astéroïde (▼), position calculée à partir de la propagation des éléments orbitaux fournis par la base de données *”Asterb”* [Bowell, 2011]. Chaque graphique a une largeur d’un champ typique de 24×24 arcmin² et les distributions sont centrées sur le maximum de vraisemblance. On voit bien comment évolue la taille de ces distributions en fonction du temps et que cet hypothétique Géographos est toujours dans un champ de 24 arcmin² jusqu’à sept jours après sa découverte.

Toujours suivant cette approche, j’ai voulu étudier la variation de la taille du champ minimum

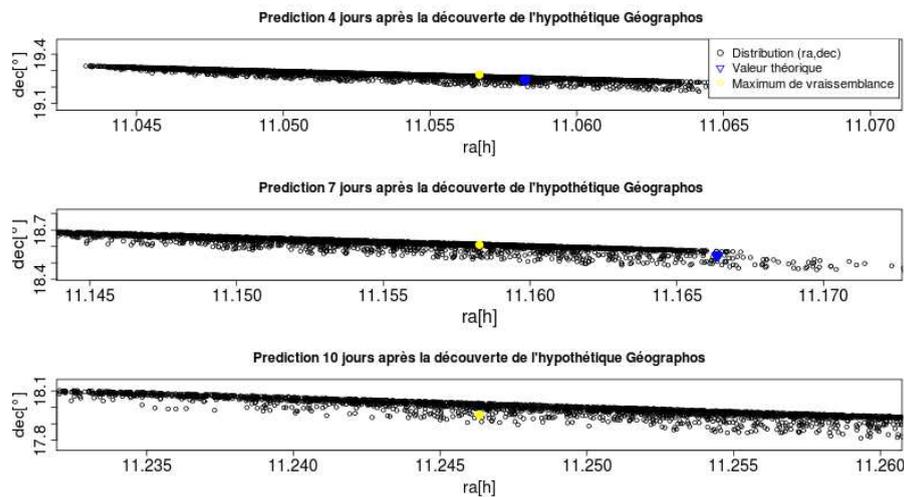


FIG. 9.9 – Prédiction (α, δ) jusqu'à 10 jours après la découverte d'un hypothétique Geographos par Gaia. La fenêtre de la distribution (\bullet) est centrée sur le maximum de vraisemblance de la distribution (\bullet) et a une taille de $24' \times 24'$ arcmin². Cette figure montre que Geographos peut être retrouvé jusqu'à au moins sept jours après sa découverte car la position attendue (\blacktriangledown) est dans cette fenêtre.

(FOV) requis pour retrouver cet objet, en fonction du nombre de jours écoulés après sa découverte. J'ai appliqué cette approche pour les objets listés dans le tableau 9.1. La figure 9.10 présente ces résultats. La figure du haut représente la variation du FOV, exprimée en arcmin², pour les astéroïdes Toutatis, Geographos et Cuno. On voit que le cas de Cuno est le meilleur dans la mesure où, même dix jours après sa découverte, le FOV n'excède pas 25 arcmin² du fait d'une faible pente. Geographos présente une pente légèrement plus importante que Cuno et le FOV n'excède pas 50 arcmin². Pour Toutatis, le FOV présente une plus forte variation que les deux autres astéroïdes et en à peine trois jours, la taille de 50 arcmin² est atteinte. La figure du bas montre les résultats plus pessimistes pour les astéroïdes Apophis et Phaethon. En effet, même après un jour après leur découverte, il faudrait une taille de champ au minimum du deg².

En fait, la dégradation des prédictions en fonction du temps peut être reliée à la distance géocentrique de ces astéroïdes lors de leur découverte. En effet, plus l'objet sera proche de la Terre, plus les perturbations gravitationnelles vont être fortes. À l'époque de leur découverte, Cuno et Geographos sont respectivement situés à une distance de 2.5 UA et 1.1 UA ce qui expliquerait que les prédictions sont moins dégradées à mesure que passe le temps. Toutatis, Phaethon, Apophis sont situés respectivement à 0.55 UA, 0.45 UA et 0.21 UA. Cette proximité avec la Terre expliquerait que Apophis soit l'objet dont la prédiction est la plus difficile.

9.2.3 Synergie sol/espace

Le suivi au sol est une étape importante pour la mission Gaia. En effet, ce processus permettra de traquer des objets nouvellement découverts permettant ainsi de les intégrer dans la base de données du MPC. Cela permettra au satellite, lors du prochain rendez-vous avec ces objets, de les identifier en tant qu'objets connus et non comme des objets nouveaux, optimisant ainsi le mode alerte. D'autre part, l'effet de la parallaxe permettra de mieux contraindre les orbites et ainsi permettre son amélioration. Je me propose d'étudier l'influence de cette parallaxe sur la taille de la distribution (α, δ) . Pour cela, j'ai supposé que l'astéroïde est retrouvé, trois jours après sa découverte par le satellite Gaia. La longueur d'arc initiale augmentée de trois jours permettra de mieux contraindre l'orbite initiale calculée avec les deux observations Gaia. J'ai donc considéré le

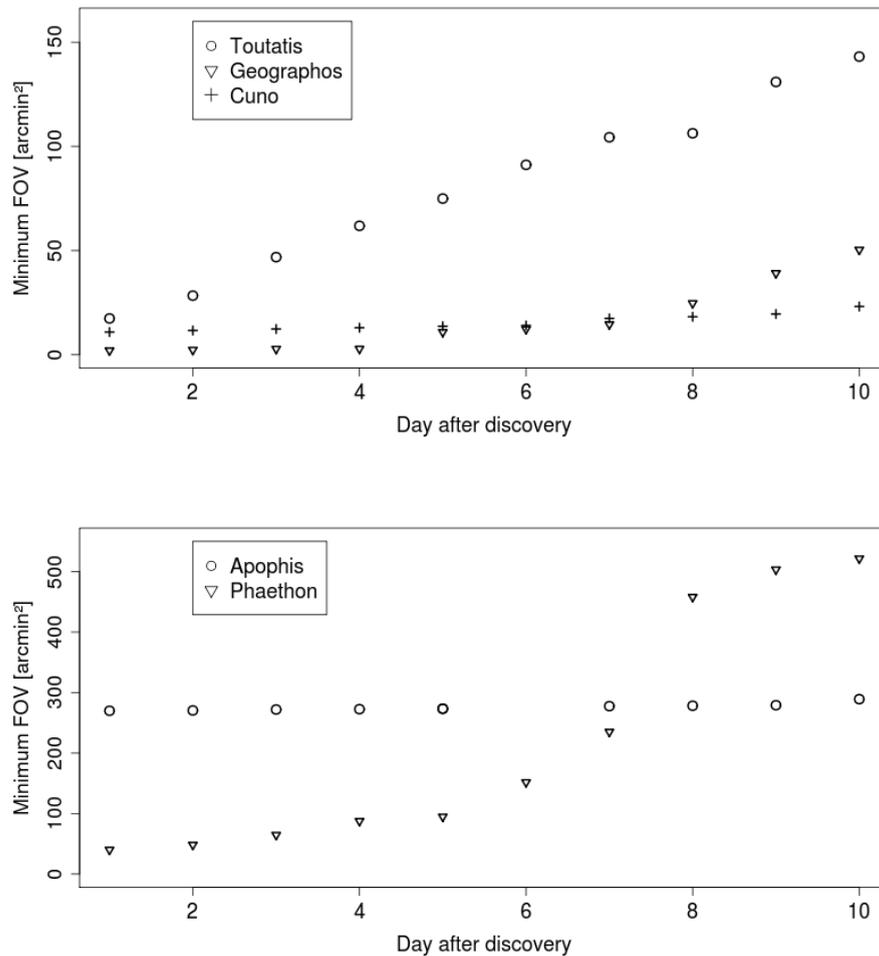


FIG. 9.10 – Variation du champ minimum (FOV) nécessaire pour le processus de redécouverte en fonction du temps. La figure du haut concerne les astéroïdes Toutatis, Geographos et Cuno. La figure du bas concerne les astéroïdes Apophis et Phaethon.

cas où l'astéroïde serait suivi pendant une nuit entière à raison d'une observation par heure fournissant au total 8 observations. J'ai appliqué cette approche pour l'astéroïde Geographos en utilisant les mêmes observations gaiacentriques que précédemment. La figure 9.11 montre l'influence de cette parallaxe sur la variation du FOV nécessaire au suivi au sol. La diminution de la distribution (α, δ) permet de réduire la taille du champ et donc un suivi par des télescopes ayant des champs plus petits que ceux requis dans le cas où seules deux observations Gaia étaient disponibles.

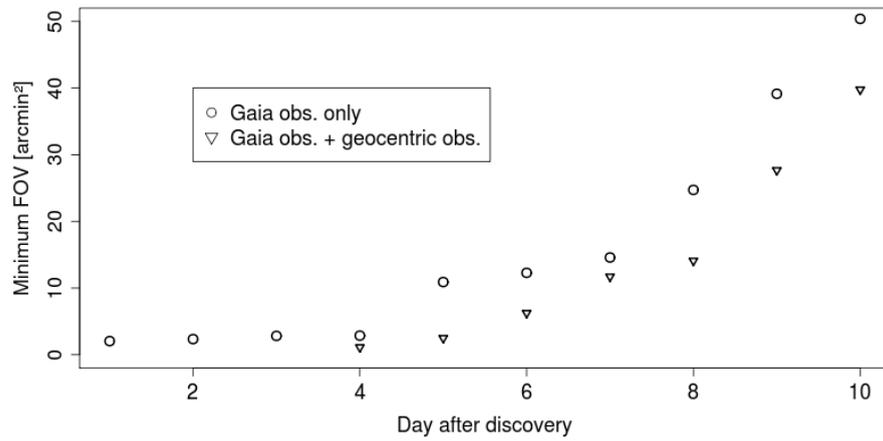


FIG. 9.11 – Variation du FOV dans le cas de l'astéroïde Geographos en considérant des observations géocentriques effectuées 3 jours après sa découverte par Gaia. L'effet de la parallaxe permet de réduire la distribution (α, δ) et donc une meilleure prédiction, comme l'indique cette figure. Cet objet peut alors continuer à être traqué par des télescopes aux champs plus petits.

Conclusion

J'ai présenté dans ce manuscrit mes travaux relatifs à l'étude dynamique des géocroiseurs (NEAs) à travers l'exemple de l'astéroïde Apophis. Cet astéroïde emblématique pour les astronomes est le premier à avoir atteint un risque non négligeable de collision avec la Terre en 2029. Étant un cas sans précédent, il a permis de tester les outils de calcul de risques des deux centres JPL-SENTRY et NEODyS-CLOMON dédiés à la surveillance de ce type d'objet, les astéroïdes potentiellement dangereux. Dans l'éventualité de voir apparaître un autre Apophis dans le futur, il est nécessaire de comprendre la dynamique de tels objets, ce que j'ai entrepris durant ma thèse. J'ai dans un premier temps dressé un bilan de nos connaissances sur la population des géocroiseurs dans lequel il apparaît que le manque de connaissances ou la méconnaissance de leurs paramètres physiques est un frein en terme de quantification de l'incertitude de l'orbite. En effet, outre les forces gravitationnelles et relativistes régissant leur mouvement, des forces non gravitationnelles, tel l'effet Yarkovsky, sont fortement dépendantes des paramètres physiques. La propagation de l'incertitude de l'orbite, pour ce type d'objet, nécessite une intégration numérique dont les outils numériques utilisés permettent de gérer des pas de temps pouvant gérer la détermination de passages proches comme celui d'Apophis avec la Terre en 2029 d'une distance d'environ 36000 km. J'ai donc entrepris le développement d'un intégrateur numérique, l'intégrateur de Lie, lorsque des forces relativistes et non gravitationnelles doivent être prises en compte. Cet intégrateur peut être comparé aux intégrateurs les plus utilisés pour l'intégration numérique de NEAs, tels Radau et Bulirsch-Stoer, et son principal avantage se révèle dans sa rapidité de calcul.

J'ai consacré une deuxième partie à l'astéroïde Apophis. Même si très peu de paramètres physiques sont à l'heure actuelle connus (diamètre, albédo, magnitude absolue, période de rotation) son orbite couvre un arc de plus de 4 ans, à la date de sa dernière observation en 2008. J'ai ensuite fait une étude dynamique et géométrique des passages proches. Cette étude se fait dans un plan particulier, le *plan de Bessel*, permettant ainsi de mieux représenter l'état d'un astéroïde lors d'un passage proche et aussi son incertitude liée à la propagation de la matrice de covariance initiale. J'ai ensuite proposé une méthode numérique, utilisant la technique de Monte-Carlo pour la recherche d'impacts avec la Terre et la mise en évidence de zones à risque, dites *keyholes*, zones par lesquelles doit passer Apophis pour pouvoir impacter la Terre dans le futur. Avec cette approche, j'ai pu déterminer leurs positions dans le b-plane et y associer des probabilités d'impacts. Dans la mesure où Apophis a pu être réobservé en mars 2011, je me suis intéressé à l'influence de l'augmentation de la longueur de l'arc d'observation sur l'incertitude en 2029 dans le b-plane, mais aussi sur la position des keyholes par rapport à la zone d'incertitude. Cette étude a montré que ces nouvelles observations améliorent de manière significative l'incertitude sur la position d'Apophis de près de 100 km en distance. Cette étude a aussi révélé l'influence de la réduction des données sur la position géocentrique nominale dans le b-plane. Suivant que la réduction des données a été faite avec le catalogue USNO-B1.0 ou par un package indépendant (PRAIA), la position nominale est déplacée de +600 km ou +300 km respectivement, suivant l'axe des ordonnées. Ce déplacement aura une conséquence directe sur la position des keyholes et donc sur les probabilités d'impacts. Le nombre de keyholes n'étant pas limité, j'ai montré que si on s'éloigne des keyholes situés en dessous de la zone d'incertitude, on se rapproche par conséquent, des keyholes situés au dessus de cette zone. Les probabilités calculées ont donc un lien étroit entre la position du keyhole et sa taille. D'autre part, l'effet Yarkovsky étant la principale source d'incertitude sur l'orbite d'Apophis, j'ai montré qu'avec un modèle simplifié de cet effet, la position nominale était déplacée de +300 km, situation d'avantage compatible avec les données

issues de PRAIA. J'ai enfin étudié l'influence de futures campagnes d'observations en 2013 sur la propagation d'erreurs concluant qu'une seule observation radar ou optique pourra réduire d'un facteur 10 l'incertitude sur la position d'Apophis en 2029.

J'ai dans une troisième partie étudié l'influence d'observations spatiales d'une précision sans précédent sur l'orbite d'Apophis, à travers la mission Gaia dont le lancement du satellite est prévu pour 2013. La loi de balayage particulière du satellite pourra fournir des ensembles d'observations inégaux pour Apophis (allant de 5 à plus de 20 observations). À partir d'un ensemble test de 12 observations d'une précision de 5 mas, j'ai montré que l'incertitude sur la position d'Apophis en 2029 serait de l'ordre du kilomètre ce qui réduirait considérablement les probabilités d'impact. L'influence du futur catalogue Gaia, prévu en 2020, permettrait de réduire d'un facteur 10 cette incertitude. Enfin, je me suis intéressé à la détermination d'orbites d'objets qui seront découverts par Gaia. Le satellite ne fournira que deux observations des objets (à l'époque de leur découverte) séparées d'environ 1.5 h. Dans la mesure où ces objets ne seront pas suivis par le satellite, il est nécessaire qu'ils soient retrouvés et suivis par des télescopes basés sur Terre. En utilisant la méthode du Statistical Ranging sur plusieurs hypothétiques PHAs qui seront découverts par Gaia (entre autre, un hypothétique Apophis), je me suis intéressé à la variation du champ de télescope requis pour pouvoir retrouver ces objets de la Terre, en fonction du temps. J'ai donc montré que les objets au plus proche de la Terre lors de leur découverte par Gaia nécessitent un grand champ de télescope dans la mesure où leur vitesse est plus grande. C'est le cas par exemple d'un hypothétique Apophis qui serait à 0.21 UA de la Terre lors de sa découverte par Gaia. Pour finir, j'ai mis l'accent sur la nécessité d'un suivi au sol favorable pour l'amélioration de l'orbite, étape essentielle pour l'optimisation du mode alerte de Gaia. À travers l'exemple d'un hypothétique Geographos, j'ai montré que, même en étant retrouvé sur Terre 3 jours après sa découverte par Gaia, l'addition d'observations topocentriques 4 jours après sa découverte permettra de réduire la distribution des prédictions (α , δ). Ainsi, les télescopes aux champs réduits pourront être utilisés pour le suivi au sol, permettant de réserver ceux ayant un champs de taille supérieure à la recherche des objets qui le nécessitent, comme l'hypothétique Apophis.

Annexes

Annexe A

Numerical Integration with Lie Series

Numerical integration of dynamical systems with Lie series

Relativistic acceleration and non-gravitational forces

D. Bancelin · D. Hestroffer · W. Thuillot

Received: 5 July 2011 / Revised: 16 November 2011 / Accepted: 12 December 2011 /
Published online: 18 January 2012
© Springer Science+Business Media B.V. 2012

Abstract The integration of the equations of motion in gravitational dynamical systems—either in our Solar System or for extra-solar planetary systems—being non integrable in the global case, is usually performed by means of numerical integration. Among the different numerical techniques available for solving ordinary differential equations, the numerical integration using Lie series has shown some advantages. In its original form (Hanslmeier and Dvorak, *Astron Astrophys* **132**, 203 1984), it was limited to the N -body problem where only gravitational interactions are taken into account. We present in this paper a generalisation of the method by deriving an expression of the Lie terms when other major forces are considered. As a matter of fact, previous studies have been done but only for objects moving under gravitational attraction. If other perturbations are added, the Lie integrator has to be re-built. In the present work we consider two cases involving position and position-velocity dependent perturbations: relativistic acceleration in the framework of General Relativity and a simplified force for the Yarkovsky effect. A general iteration procedure is applied to derive the Lie series to any order and precision. We then give an application to the integration of the equation of motions for typical Near-Earth objects and planet Mercury.

Keywords Numerical integration · Lie series · General relativity · Yarkovsky effect

1 Introduction

The integration of the equations of motion in gravitational dynamical systems, since they are not integrable in closed form with more than 2 massive bodies involved, is usually

D. Bancelin (✉) · D. Hestroffer · W. Thuillot
IMCCE, Paris Observatory, CNRS, UPMC, 77, Av. Denfert-Rochereau, 75014 Paris, France
e-mail: bancelin@imcce.fr

D. Hestroffer
e-mail: hestro@imcce.fr

W. Thuillot
e-mail: thuillot@imcce.fr

performed by means of numerical integration. This can be done over times scales of a few days or a century for establishing ephemerides, or longer periods of several million years to establish stability properties (Pál and Süli 2007). It concerns bodies in our own Solar System as well as extra-solar planetary systems. Several algorithms have been used or developed in particular in Celestial Mechanics to solve ordinary differential equations (hereafter ODEs) such as Runge-Kutta method, Everhart's integrator, Bulirsch-Stoer, Adams, Lie series, etc. Numerical integration by means of Lie series (Hanslmeier and Dvorak 1984), which is based on generating the Taylor expansion of an ODEs solution, has shown some interest. It is a high speed symplectic integrator adapted to the case of the N -body problem. The construction of Lie series integrators was first investigated by Hanslmeier and Dvorak (1984), Delva (1985) and Lichtenegger (1984). It has also been developed for studying the stability and dynamical evolution of Near-Earth Objects (NEOs) in the inner Solar System (Dvorak and Pilat-Lohinger 1999; Pál and Süli 2007), or the stability of extra-solar systems (Schwarz et al. 2005). It has been developed to also integrate the case of varying masses (Dvorak and Lichtenegger 1983) and the damped oscillator (Dvorak and Hanslmeier 1983).

In the previous works, a recurrence formula for the Lie terms has been developed but only for masses moving under their mutual gravitational attraction. As a consequence, it cannot be used as such for masses (e.g., asteroids and comets) for which relativistic or non-gravitational forces are non-negligible.

When dealing with comets, NEOs, highly eccentric orbits, and extra-solar systems, other forces and acceleration can come into play. Objects close to their star with significant eccentricity will show a precession of their perihelion from the relativistic acceleration. Such perihelion precession will affect the transit time determination in extra-solar planets quests (Pál and Kocsis 2008). It can also affect general studies of long-term stability as it has been put into evidence in our Solar System (Laskar 2009), since secular resonances can eventually be avoided or induced from this additional frequency. It will also affect the ephemerides of comets and NEOs because these can have small perihelion distance and large eccentricities. In addition to the relativistic acceleration, NEOs can also be affected by the Yarkovsky effect (Vokrouhlický 1998, Bottke et al. 2002). This effect is caused by a recoil force of anisotropically emitted thermal radiation and is of importance for small bodies ($\lesssim 20$ km in diameter) close to the Sun, for much smaller bodies the solar radiation pressure will have a larger influence. The Yarkovsky effect can be divided into a seasonal and diurnal effect, depending on the orientation of the spin axis. It is the diurnal force that will have a major effect on the orbit of an asteroid, by yielding a secular variation of the semi-major axis (Bottke et al. 2002).

Although the use of Lie series for integrating the N -body problem has been studied by Gröbner (1967) it was not successfully implemented until the major breakthrough from Hanslmeier and Dvorak (1984) who provided a recurrence formula for practical use of the series expansion. As a matter of fact, the Lie integrator has to be redesigned when other forces are taken into account.

After a brief introduction of the Lie operator and use of Lie series for the numerical integration of the N -body problem (see Sect. 2), we present in Sect. 3 a generalised expression of the Lie series integration by providing the recurrence formula applicable to the case of a relativistic acceleration and a velocity-dependent force (applicable to the case of the Yarkovsky effect). We give some numerical tests and an application to the integration of the equation of motions for NEOs and planet Mercury in Sect. 4. We then conclude and discuss future possible developments in Sect. 5.

2 Lie operator and Lie series

2.1 Lie derivative

A brief sum up of Lie operator will be given in this section, as it has already been studied in [Hanslmeier and Dvorak \(1984\)](#); [Dvorak and Lichtenegger \(1983\)](#); [Eggl and Dvorak \(2010\)](#). The Lie operator D over a manifold of dimension N is defined as:

$$D = \sum_{k=1}^N \theta_k \frac{\partial \cdot}{\partial z_k} \tag{1}$$

where $\theta = (\theta_1(\mathbf{z}), \dots, \theta_N(\mathbf{z}))$ is a holomorphic function over a domain \mathcal{D} in the \mathbf{z} -space, that is, it can be expanded in a converging power series, and $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_N)$.

Applying n times this operator on a function $f(\mathbf{z})$, holomorphic over the same domain \mathcal{D} , we have:

$$Df = \sum_{k=1}^N \theta_k \frac{\partial f}{\partial z_k}; \quad D^n f = D(D^{n-1} f) \tag{2}$$

We remind here some useful properties of linearity and Leibniz rule of Lie operator such as:

$$\begin{cases} D^n(f + g) = D^n f + D^n g \\ D^n(f \cdot g) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k f D^{n-k} g \end{cases} \tag{3}$$

The Lie series is then defined as:

$$L(\mathbf{z}, t) \equiv \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{t^\mu}{\mu!} D^\mu f(\mathbf{z}) \quad \mu \in N \tag{4}$$

which is convergent over \mathcal{D} ([Gröbner 1967](#)). And from its similarity with the expansion of the exponential function, we can write symbolically:

$$L(\mathbf{z}, t) \equiv e^{tD} f(\mathbf{z}) \tag{5}$$

This expression can be used to solve a system of ODEs such as:

$$\dot{z}_k = \theta_k(\mathbf{z}) \tag{6}$$

The solution is $z_k = e^{tD}(\xi_k)$, where ξ_k are the initial conditions, and $D = \sum_{k=1}^N \theta_k(\xi) \frac{\partial \cdot}{\partial \xi_k}$. Similarly, the approximate solution of $\dot{\mathbf{z}} = \theta(\mathbf{z})$ at time $t + \Delta t$ is:

$$\mathbf{z}(t + \Delta t) = L(\mathbf{z}, \Delta t) = e^{\Delta t D} \mathbf{z}(t) \tag{7}$$

2.2 The N -body problem

We can apply the Lie integration method to solve the equations of motion of the N -body problem. Since we will generalise this problem by including additional forces, we remind here the general steps of the procedure for the purely gravitational N -body case as given in [Hanslmeier and Dvorak \(1984\)](#).

According to the law of attraction, the Newtonian acceleration resulting from the forces acting on a particle ν is:

$$\ddot{\mathbf{x}}_\nu = G \sum_{\mu=1, \mu \neq \nu}^N M_\mu \frac{(\mathbf{x}_\mu - \mathbf{x}_\nu)}{\|\mathbf{x}_\mu - \mathbf{x}_\nu\|^3} \tag{8}$$

where G is the gravitational constant and \mathbf{x}_ν the barycentric position vector of particle ν with mass M_ν . By introducing a new variable \mathbf{v} , the 2nd order system (8) can be transformed into a system of 1st order differential equations.

$$\dot{\mathbf{x}}_\nu = \mathbf{v}_\nu \tag{9}$$

$$\dot{\mathbf{v}}_\nu = G \sum_{\mu=1, \mu \neq \nu}^N M_\mu \frac{(\mathbf{x}_\mu - \mathbf{x}_\nu)}{\|\mathbf{x}_\mu - \mathbf{x}_\nu\|^3} = GM_\star \sum_{\mu=1, \mu \neq \nu}^N m_\mu \mathbf{x}_{\nu\mu} \rho_{\nu\mu}^{-3} \tag{10}$$

such as $\rho_{\nu\mu} = \|\mathbf{x}_\mu - \mathbf{x}_\nu\|$ and $\mathbf{x}_{\nu\mu} = \mathbf{x}_\mu - \mathbf{x}_\nu$.

Here M_\star is a conversion factor to express the mass M_μ of the perturbing body in the unit of star mass. Its numeric value is equal to the central star’s mass of the planetary system. Thus m_μ is the mass of the perturbing body in the unit of star mass (or Solar mass if $GM_\star = k^2$ with k representing the Gauss constant.¹)

The Lie operator for the Newtonian gravitational N -body system has been given by [Eggl and Dvorak \(2010\)](#) and can be expressed as:

$$D = \sum_{\nu=1}^N \left(\mathbf{v}_\nu \frac{\partial \cdot}{\partial \mathbf{x}_\nu} + GM_\star \sum_{\mu=1, \mu \neq \nu}^N m_\mu \mathbf{x}_{\nu\mu} \rho_{\nu\mu}^{-3} \frac{\partial \cdot}{\partial \mathbf{v}_\nu} \right) \tag{11}$$

According to Eqs. (1) and (6) the solutions of Eqs. (9) and (10) are given by the series expansion:

$$\mathbf{x}_\nu(\tau) = e^{\tau D} \mathbf{x}_\nu(0) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n D^n}{n!} \right) \mathbf{x}_\nu(0) \tag{12}$$

$$\mathbf{v}_\nu(\tau) = e^{\tau D} \mathbf{v}_\nu(0) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n D^n}{n!} \right) \mathbf{v}_\nu(0) \tag{13}$$

where τ is the current step-size and is defined by:

$$\tau = t_j - t_{j-1}$$

For this method to be of practical use, a recurrence formula has to be given to derive any order of the Lie operator. This was given in [Eggl and Dvorak \(2010\)](#) for the N -body problem:

$$D^n \mathbf{x}_\nu = GM_\star \sum_{\mu=1, \mu \neq \nu}^N m_\mu \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} D^k \Phi_{\nu\mu} D^{n-2-k} \mathbf{x}_{\nu\mu} \tag{14}$$

where $\Phi_{\nu\mu} = \rho_{\nu\mu}^{-3}$.

The evolution of $\Phi_{\nu\mu}$ is given by:

$$D^n \Phi_{\nu\mu} = \rho_{\nu\mu}^{-2} \sum_{k=0}^{n-1} a_{n,k+1} D^{n-1-k} \Phi_{\nu\mu} D^k \Lambda_{\nu\mu} \tag{15}$$

¹ G has to be converted first in $\text{AU}^3 \text{kg}^{-1} \text{day}^{-2}$.

the $a_{i,j}$ coefficients being defined for $n \geq 1$:

$$\begin{cases} a_{n,n} = -3 \\ a_{n,k} = a_{n-1,k-1} + a_{n-1,k} & \text{for } k > 1 \\ a_{n,1} = a_{n-1,1} - 2 \end{cases}$$

$\Lambda_{v\mu}$ is defined by: $\Lambda_{v\mu} = \mathbf{x}_{v\mu} \cdot \mathbf{v}_{v\mu}$ and its evolution is ruled by:

$$D^n \Lambda_{v\mu} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^{n-k} \mathbf{x}_{v\mu} D^k \mathbf{v}_{v\mu} \tag{16}$$

where

$$D^n \mathbf{v}_{v\mu} = D^{n+1} \mathbf{x}_{v\mu} \tag{17}$$

Now if additionnal forces or accelerations act on the particule ν , we have to re-write the system (9), (10), the Lie operator (11), and derive a new recurrence formula to obtain the n th derivative D^n of the Lie operator.

3 A generalisation of the Lie operator

This section is dedicated to a generalised expression of the Lie operator for position-dependent and velocity-dependent forces acting on a particle ν . Let \mathbf{H}_ν be the contribution of all the accelerations derived from those forces acting on body ν .

As in the previous section, the second order ODE is split into a system of six first-order differential equations:

$$\dot{\mathbf{x}}_\nu = \mathbf{v}_\nu \tag{18}$$

$$\dot{\mathbf{v}}_\nu = \mathbf{H}_\nu \tag{19}$$

The Lie operator becomes:

$$D = \sum_{\mu=1}^N \left[\mathbf{v}_\mu \cdot \frac{\partial \cdot}{\partial \mathbf{x}_\mu} + \mathbf{H}_\mu \cdot \frac{\partial \cdot}{\partial \mathbf{v}_\mu} \right] \tag{20}$$

Applying D to \mathbf{x} , the construction of the Lie terms begins as:

$$D^0 \mathbf{x}_\nu = \mathbf{x}_\nu$$

$$D^1 \mathbf{x}_\nu = \mathbf{v}_\nu$$

$$D^2 \mathbf{x}_\nu = \mathbf{H}_\nu$$

$$D^3 \mathbf{x}_\nu = D \mathbf{H}_\nu$$

From which we can deduce the recurrence formula for $D^n \mathbf{x}_\nu$ and $D^n \mathbf{v}_\nu$ as following:

$$\begin{cases} D^n \mathbf{x}_\nu = D^{n-2} \mathbf{H}_\nu & n \geq 2 \\ D^n \mathbf{v}_\nu = D^{n+1} \mathbf{x}_\nu \end{cases} \tag{21}$$

The next step is to express Eq. (21) according to the expression of the forces which means that we have to find a recurrence formula for $D^n \mathbf{H}_\nu$. This will be done in the following sections for three kinds of accelerations: gravitational ($\boldsymbol{\gamma}_G$), relativistic ($\boldsymbol{\gamma}_R$) and non-gravitational accelerations ($\boldsymbol{\gamma}_Y$). Thus $\mathbf{H} = \boldsymbol{\gamma}_G + \boldsymbol{\gamma}_R + \boldsymbol{\gamma}_Y$.

3.1 Lie terms for the gravitational acceleration

The gravitational acceleration $\boldsymbol{\gamma}_{G/v}$ derived from the gravitational forces of N bodies acting on a body v is:

$$\boldsymbol{\gamma}_{G/v} = GM_{\star} \sum_{\mu=1, \mu \neq v}^N m_{\mu} \Phi_{v\mu,3} \mathbf{x}_{v\mu} \tag{22}$$

Here we have introduced the new variable $\Phi_{v\mu,p} = \rho_{v\mu}^{-p}$ as it will be useful in the other sections.

From the first applications of the Lie operator on $\boldsymbol{\gamma}_{G/v}$:

$$D \boldsymbol{\gamma}_{G/v} = GM_{\star} \sum_{\mu=1, \mu \neq v}^N m_{\mu} (\Phi_{v\mu,3} D \mathbf{x}_{v\mu} + D \Phi_{v\mu,3} \mathbf{x}_{v\mu}) \tag{23}$$

$$D^2 \boldsymbol{\gamma}_{G/v} = GM_{\star} \sum_{\mu=1, \mu \neq v}^N m_{\mu} (\Phi_{v\mu,3} D^2 \mathbf{x}_{v\mu} + 2 D \Phi_{v\mu,3} \mathbf{x}_{v\mu} + D^2 \Phi_{v\mu,3} \mathbf{x}_{v\mu}) \tag{24}$$

we can deduce the evolution of $D^n \boldsymbol{\gamma}_{G/v}$:

$$D^n \boldsymbol{\gamma}_{G/v} = GM_{\star} \sum_{\mu=1, \mu \neq v}^N m_{\mu} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k \Phi_{v\mu,3} D^{n-k} \mathbf{x}_{v\mu} \tag{25}$$

The evolution of the $D^n \Phi_{v\mu,p}$ is ruled by:

$$D^n \Phi_{v\mu,p} = \rho_{v\mu}^{-2} \sum_{k=0}^{n-1} a_{n,k+1} D^{n-1-k} \Phi_{v\mu,p} D^k \Lambda_{v\mu} \tag{26}$$

with

$$\begin{cases} a_{n,n} = -p \\ a_{n,k} = a_{n-1,k-1} + a_{n-1,k} \quad \text{for } k > 1 \\ a_{n,1} = a_{n-1,1} - 2 \end{cases}$$

and the algorithms for $D^n \mathbf{x}_{v\mu}$ and $D^n \Lambda_{v\mu}$ are given respectively by Eqs. (21) and (16).

3.2 Lie terms for relativistic acceleration

Because of their complexity, the integration of the EIH (Einstein-Infeld-Hoffman) equations is very slow even using modern computers and are not suitable for long time integration. Following Beutler (2005), the expression of the relativistic acceleration $\boldsymbol{\gamma}_{R/v}$ used to generate the Lie terms is a lighter version (provided that the mass m_v of the massless body is negligible compared to the mass of the central star) expressed as

$$\boldsymbol{\gamma}_{R/v} = \frac{GM_{\star}}{c^2} \Phi_{\mu v,3} [(4 GM_{\star} \Phi_{\mu v,1} - \dot{\mathbf{r}}^2) \mathbf{r} + 4 (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) \dot{\mathbf{r}}] \tag{27}$$

where c represents the speed of light and μ the Sun.

Here, \mathbf{r} and \mathbf{P} are the heliocentric position and velocity of the body ν and are related with the barycentric coordinates by:

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_\mu = \mathbf{x}_{\mu\nu} \\ \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_\nu - \mathbf{v}_\mu = \mathbf{v}_{\mu\nu} \\ r = \rho_{\mu\nu} \end{cases}$$

Equation (27) can be written as follows:

$$\boldsymbol{\gamma}_{R/\nu} = \frac{GM_\star}{c^2} \Phi_{\mu\nu,3} (\boldsymbol{\gamma}_1 + \boldsymbol{\gamma}_2) \tag{28}$$

where

$$\begin{cases} \boldsymbol{\gamma}_1 = \mathbf{x}_{\mu\nu} (4 GM_\star \Phi_{\mu\nu,1} - \mathbf{v}_{\mu\nu}^2) \\ \boldsymbol{\gamma}_2 = 4 \mathbf{v}_{\mu\nu} \Lambda_{\mu\nu} \end{cases} \tag{29}$$

In the same way, the first derivatives of $D^n \boldsymbol{\gamma}_{R/\nu}$ lead to the algorithm:

$$D^n \boldsymbol{\gamma}_{R/\nu} = \frac{GM_\star}{c^2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k \Phi_{\mu\nu,3} D^{n-k} (\boldsymbol{\gamma}_1 + \boldsymbol{\gamma}_2) \tag{30}$$

We will now express the evolution of the $D^n \boldsymbol{\gamma}_i$ by watching the evolution of their first derivatives. Using the Lie properties expressed in Eq. (3) there is no difficulty to find this evolution. This approach leads to the recurrence formulas:

$$\begin{cases} D^n \boldsymbol{\gamma}_1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^{n-k} \mathbf{x}_{\mu\nu} \left(4 GM_\star D^k \Phi_{\mu\nu,1} - \sum_{k'=0}^k \binom{k}{k'} D^{k'} \mathbf{v}_{\mu\nu} D^{k-k'} \mathbf{v}_{\mu\nu} \right) \\ D^n \boldsymbol{\gamma}_2 = 4 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k \mathbf{v}_{\mu\nu} D^{n-k} \Lambda_{\mu\nu} \end{cases} \tag{31}$$

We remind that the evolution of the $D^n \mathbf{x}_\nu$ and $D^n \mathbf{v}_\nu$ are given by Eq. (21) and the evolution of the $D^n \Phi_{\nu\mu,p}$ and $D^n \Lambda_{\nu\mu}$ are given by Eqs. (26) and (16).

3.3 Lie terms for Yarkovsky acceleration

Yarkovsky force is a non-gravitational perturbation caused by a recoil force of an anisotropically emitted thermal radiation and acting on objects close to the Sun and having diameter smaller than ≈ 20 km (Bottke et al. 2002). This force depends on the physical parameters of the asteroid (diameter, spin period, spin obliquity, surface density, thermal conductivity, etc...), and for many asteroids most of these physical parameters can be unknown. While the radial component only affects the orbital velocity, the transversal component causes a change of semimajor axis. Thus the Yarkovsky effect is the strongest non-gravitational force acting on small bodies when comparing with the intensity of Poynting-Robertson and solar radiation pressure effect.

This force can be decomposed into two effects (Vokrouhlický et al. 2000):

- the diurnal acceleration that depends on the rotation frequency of the body around its spin axis, is maximum when the spin vector is perpendicular to the orbital plane (it means that obliquity is equal to 0° or 180°) and causes a drift in semimajor axis (positive or negative depending on the value of the spin obliquity).
- the seasonal acceleration that depends on the mean motion frequency of the object around the Sun, acts when the spin is in-plane (with obliquity equals to 90°) and causes a steady decrease of the semimajor axis.

Many tests have been done to see the impact of Yarkovsky effect on the orbital motion of asteroids and potentially hazardous asteroids (PHAs) (Giorgini et al. 2008; Chesley 2006). Those authors showed that the Yarkovsky force cannot be neglected as it has an effect on the post-close encounter orbit of PHAs. Although some physical parameters can be unknown, it is possible to take this effect into account without any assumptions regarding physical characteristics of asteroids.

Following Marsden (1976), the non-gravitational acceleration acting on comets can be decomposed into three components: radial, transverse and normal. For asteroids, the main non-gravitational perturbation due to the Yarkovsky effect is caused by the transverse component. So, we can simply express the acceleration like:

$$\boldsymbol{\gamma}_Y = A_2 g(r) \mathbf{T} \tag{32}$$

where $\mathbf{T} = (r \dot{\mathbf{r}} - (\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}/r)/h$ is the transverse unit vector (in the direction of motion). Here $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ are the heliocentric position and velocity of the asteroid and $h = \|\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}\|$ is the norm of the angular momentum of the asteroid. The coefficient A_2 is a non gravitational parameter depending on the body. This parameter is generally accurately determined with three apparitions of a comet, or with optical and radar observations for asteroids. For instance, the value of A_2 for an asteroid is $\approx 10^{-14}$ AU/day² and $\approx 10^{-8}$ AU/day² for comets.

Finally, $g(r)$ is a function depending on the heliocentric distance of the object. For Near-Earth Objects, we can simply express this function as: $g(r) = (\frac{1 A.U.}{r})^2$

Using the barycentric coordinates:

$$\begin{cases} \mathbf{T} = (\rho_{\mu\nu} \mathbf{x}_{\mu\nu} - (\mathbf{v}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{x}_{\mu\nu}) \mathbf{x}_{\mu\nu} \rho_{\mu\nu}^{-1}) / h \\ h = \|\mathbf{x}_{\mu\nu} \wedge \mathbf{v}_{\mu\nu}\| \end{cases}$$

To express the Lie terms for the Yarkovsky acceleration, it is better to write $\boldsymbol{\gamma}_Y$ like:

$$\boldsymbol{\gamma}_Y = A_2 \Phi_{\mu\nu,2} J (\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_2) \tag{33}$$

with:

$$\begin{cases} \mathbf{T}_1 = \Phi_{\mu\nu,-1} \mathbf{v}_{\mu\nu} \\ \mathbf{T}_2 = \Lambda_{\mu\nu} \Phi_{\mu\nu,1} \mathbf{x}_{\mu\nu} \\ J = h^{-1} \\ \Phi_{\mu\nu,2} = g(r) \end{cases}$$

As in the previous sections, it is easy to find the recurrence formula for the evolution of $\boldsymbol{\gamma}_Y$:

$$D^n \boldsymbol{\gamma}_Y = A_2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^{n-k} (\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_2) \sum_{k'=0}^k \binom{k}{k'} D^{k'} J D^{k-k'} \Phi_{\mu\nu,2} \tag{34}$$

Let $J = (\mathbf{h} \cdot \mathbf{h})^{-1/2}$. Thus, $DJ = -(\mathbf{h} \cdot \mathbf{h})^{-3/2} D\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}$. If $\Gamma = D\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}$ then

$$DJ = -J^3 \Gamma$$

The construction of $D^n J$ goes as:

$$\begin{aligned} D^2 J &= J^2 (-3\Gamma DJ - JD\Gamma) \\ D^3 J &= J^2 (-5\Gamma D^2 J - 4D\Gamma DJ - JD^2\Gamma) \end{aligned}$$

and we can deduce that:

$$D^n J = J^2 \sum_{k=0}^{n-1} a_{n,k+1} D^{n-1-k} J D^k \Gamma \tag{35}$$

where the coefficients $a_{i,j}$ are defined, for $n \geq 1$, by:

$$\begin{cases} a_{n,n} = -1 \\ a_{n,k} = a_{n-1,k-1} + a_{n-1,k} & \text{for } k > 1 \\ a_{n,1} = a_{n-1,1} - 2 \end{cases}$$

Using the Leibniz-rule, one can easily note that:

$$D(\mathbf{x} \wedge \mathbf{v}) = D \mathbf{x} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{x} \wedge D \mathbf{v}$$

Thus

$$\begin{cases} D^n \mathbf{h} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k \mathbf{x}_{\mu\nu} \wedge D^{n-k} \mathbf{v}_{\mu\nu} \\ D^n \Gamma = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^{k+1} \mathbf{h} \cdot D^{n-k} \mathbf{h} \end{cases} \tag{36}$$

Finally, the expression of $D^n \mathbf{T}_1$ and $D^n \mathbf{T}_2$ can readily be found:

$$D^n \mathbf{T}_1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k \Phi_{\mu\nu,-1}, D^{n-k} \mathbf{v}_{\mu\nu} \tag{37}$$

and

$$D^n \mathbf{T}_2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^{n-k} \mathbf{x}_{\mu\nu} \sum_{k'=0}^k \binom{k}{k'} D^{k'} \Lambda_{\mu\nu} D^{k-k'} \Phi_{\mu\nu,1} \tag{38}$$

The evolution of $D^n \mathbf{x}_v$ and $D^n \mathbf{v}_v$ are again given by Eq. (21).

4 Numerical tests

In this section, we provide some numerical tests of validation for the redesigned Lie series. Previous CPU and accuracy tests have already been provided in [Eggl and Dvorak \(2010\)](#) wherein the authors compared two packages of integrators among them Radau 15, Bulirsch-Stoer and Lie. As a complement to the previous CPU tests, we tested the computation time for those integrators when considering massless bodies simultaneously integrated. Then, we compare the close encounter results between the Earth and asteroid (99942) Apophis with the Radau and Bulirsch-Stoer integrators. Finally, we propose some tests for the relativistic algorithm (towards computation of the precession of Mercury’s perihelion) and for the Yarkovsky effect algorithm (towards computation of secular drift of semi-major axis for some asteroids).

4.1 CPU tests

As a complement to the previous CPU tests already done ([Eggl and Dvorak 2010](#)), we propose in this part to investigate the integration time for a complete Solar System (Sun to Neptune, including Moon) and some varying number of massless bodies. Those minor bodies are taken from a synthetic population of NEOs moving only under gravitation. The purpose of this test is to compare the CPU time efficiency of Lie and Radau integrators when integrating simultaneously massless bodies. For this test, the internal accuracy for both integrators is set to

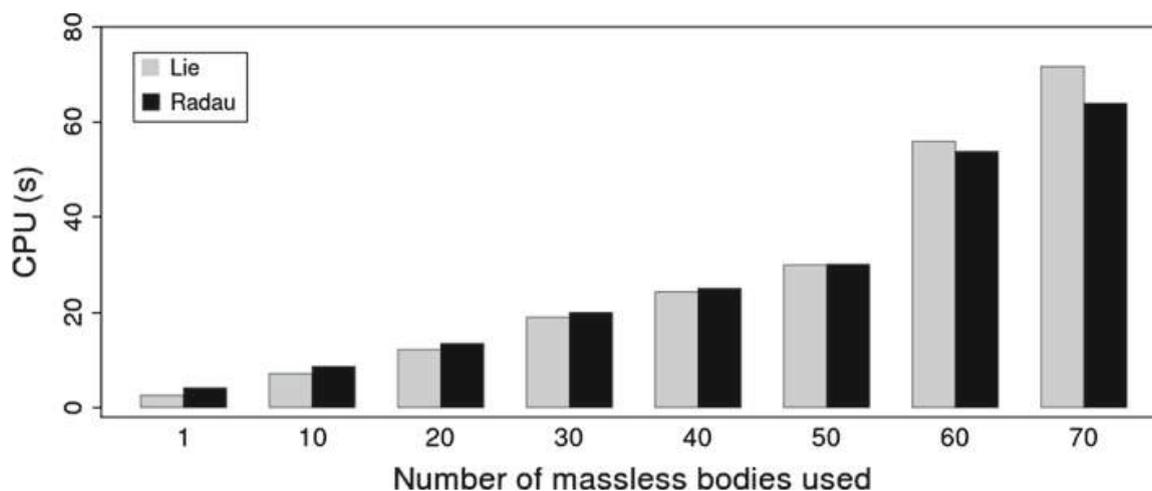


Fig. 1 CPU time for Lie and Radau integrators. The abscissa represents the number of minor bodies simultaneously integrated

10^{-13} . The ODE solved for Radau is a $N_{\text{class}} = 1$ type and the number of terms used for Lie integrator is 11. Finally, those minor bodies are integrated over one century.

We represented in Fig. 1 the CPU time for both integrators. The abscissa represents the number of massless bodies integrated over 100 years. One can see that the time computation for Lie increases faster than Radau as a function of the number of massless bodies simultaneously integrated. As a consequence, if Lie is faster for a number less than 50 minor bodies, up to this number, Radau becomes more efficient. More investigations have to be done to explain this behaviour e.g., required work-steps for both integrators, use of the L2 cache instead of L1 cache, etc. So, as noted in [Eggl and Dvorak \(2010\)](#) the use of Lie integrator depends on the problem to be solved.

4.2 Integration of asteroid (99942) Apophis equation of motion

Asteroid Apophis (previously designed 2004 MN4) is a PHA discovered in 2004. This asteroid was revealed to be a threatening object since it has a potential impact with Earth in 2036. Because of a deep close encounter in 2029 with Earth, this asteroid is put on a quasi-chaotic orbit and on possible impact trajectories. We propose here to show how Lie integrator can handle the determination of such close approaches distances with an adapted step-size. We compare our results with Radau and Bulirsh-Stoer integrators. Here, the same dynamical model and initial conditions were used for all three integrators.

Table 1 shows the results for the 2029-close approach of asteroid Apophis computed with three different integrators: Lie, Bulirsh and Radau. We can see that the value of the distance and date of close approach computed with Lie integrator is in a good agreement with the value computed with Radau and Bulirsh-Stoer integrator. This test shows that, now, Lie integrator can handle deep close approach determination with a good precision, comparable to other integrators. It could thus be used for close-approach analysis and detection of impacts with Earth.

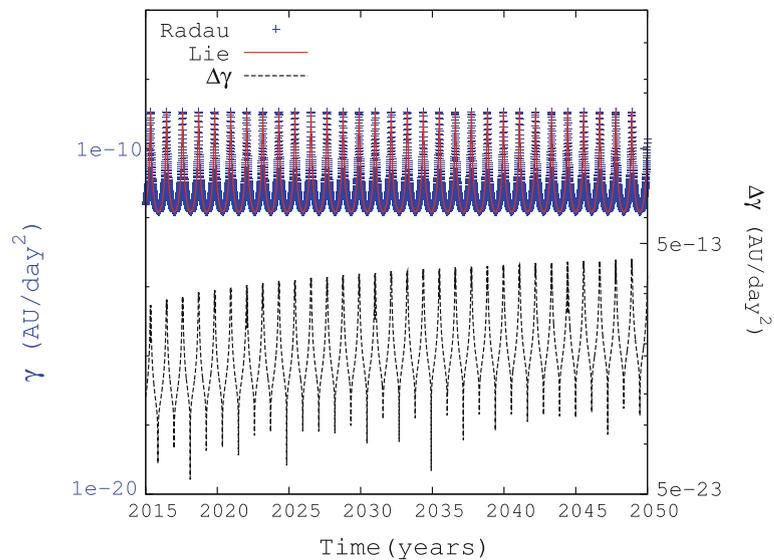
4.3 Validation test for General Relativity algorithm

First of all, we tested our General Relativity algorithm by integrating the equation of motion of asteroid (1566) Icarus. This asteroid is a good example for this test inasmuch as, its

Table 1 Date and distance of the 2029-close approach of asteroid Apophis computed with three numerical integrators: Radau, Bulirsch and Lie

Integrator	Date of close approach	Distance of close approach (AU)
Lie	2029 04 13.90716	0.000253446941
Bulirsch-Stoer	2029 04 13.90714	0.000253446071
Radau	2029 04 13.90725	0.000253444524

Fig. 2 Relativistic acceleration calculated with Lie (solid line) and Radau Integrator (plus) and the absolute difference $\Delta\gamma$ (dashed line) between the value of γ calculated with Radau and Lie integrators. The y axis is on a logarithmic scale



eccentricity is ~ 0.82 and it is known to be sensitive to general relativistic effect. We calculate the relativistic acceleration with Lie series and then we compare our results with Radau integrator. For both integrators, the numerical precision is set to 10^{-13} . Figure 2 represents the value of this acceleration (between $\sim 10^{-11}$ and $\sim 10^{-9}$) calculated with Lie and Radau and shows that those values are very close. The absolute difference between those values validates the Lie algorithm as this difference lies between $\sim 10^{-23}$ and $\sim 10^{-17}$.

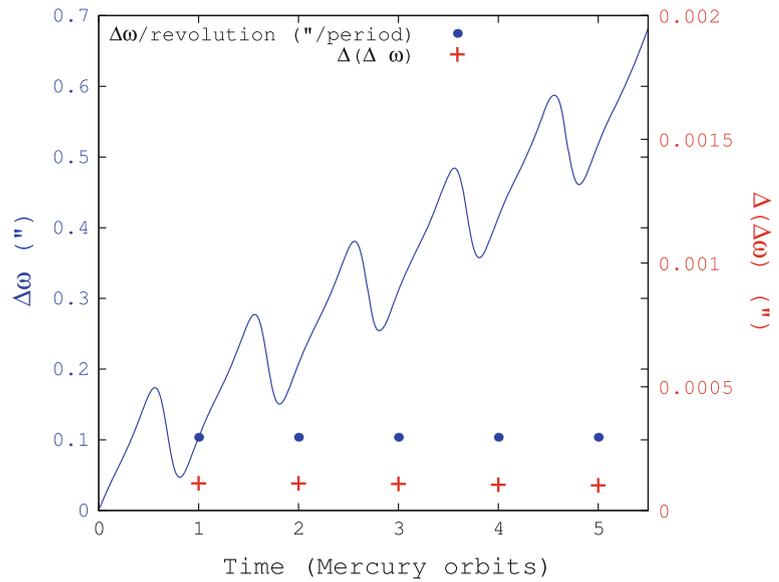
We also tested our algorithm by calculating the perihelion precession of Mercury and compared with the expected value. The General Relativity predicts a secular precession of Mercury’s perihelion the expression of which is (Balogh and Giampieri 2002):

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{6\pi GM_{\odot}}{c^2 a(1 - e^2)} \approx 0.103526''/\text{revolution} \tag{39}$$

where ω , a and e are respectively, the perihelion, semimajor axis and eccentricity of Mercury, M_{\odot} the mass of the Sun.

Figure 3 represents the relativistic effect on orbital parameter ω for 5 Mercury orbital periods. This graphic shows that Mercury’s perihelion position shifts of about 0.1 arcsec for each Mercury year. Moreover, we also compute the absolute difference $\Delta(\Delta\omega)$ between $\Delta\omega$ calculated with Eq. (39) and with the Lie integrator. This difference is about 1.10^{-4} arcsec/revolution what shows the Lie value is in a good agreement with the analytical result.

Fig. 3 Relativistic effect on Mercury’s perihelion calculated with Lie integrator in arcsec (*solid line*). $\Delta(\Delta\omega)$ represents the absolute difference between the theory and Lie value in arcsec (*plus*). We also represented the perihelion precession per revolution (*filled circle*)



4.4 Validation test for the Yarkovsky effect algorithm

In this section, we test our Yarkovsky effect algorithm by calculating the secular drift (da/dt) of the semimajor axis caused by this effect. From the knowledge of da/dt , we can deduce a value for the constant component A_2 in Eq. (32). As a matter of fact, the expression of the semimajor axis variations due to Yarkovsky effect along the transverse component, given by Gauss equations, is:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{\sqrt{(1 - e^2)} n} (1 + e \cos \theta) \|\boldsymbol{\gamma}_Y\|$$

with θ the true anomaly. Thus, we deduce that the secular drift of the semimajor axis per revolution of the object is:

$$\Delta a = \frac{4 \pi a}{k^2 (1 - e^2)} A_2 \tag{40}$$

We propagated the motion of nine candidate asteroids for Yarkovsky perturbation over five Keplerian revolutions (ΔT) around the Sun. The asteroids considered here are taken from Chesley et al. (2008), with the correspondent value of the da/dt given. We compared the mean value of da/dt calculated with Lie integrator, with Radau integrator to the one provided in Chesley et al. (2008). The results listed in Table 2 show that the value of da/dt found with Lie integrator is in good agreement with Radau’s one. Moreover, those values are not far from Chesley’s one (~ 4 or 5% higher or lower). This difference can come from the fact that the Yarkovsky model used in our simulation may be different than Chesley’s one.

5 Conclusion and perspectives

We presented in this paper a redesigned Lie integrator including relativistic and simplified Yarkovsky forces. In addition to the CPU and accuracy tests already performed, the numerical tests presented here show the great capacities of this extended Lie integrator that make it a useful and complete integrator. This integrator can be useful when dealing with long-time integration and it can also handle simultaneous integration of massless bodies as well as

Table 2 Secular drift of semimajor axis per revolution calculated with Lie and Radau integrator

Asteroids	Period (day)	A_2 (AU/day ²)	da/dt (Chesley) km/rev	da/dt (Radau) km/rev	da/dt (Lie) km/rev
Golevka	1442.31	-1.47×10^{-14}	-0.3785	-0.3616	-0.3604
Apollo	651.17	-4.67×10^{-15}	-0.0642	-0.0612	-0.0611
Ra-Shalom	277.26	-1.20×10^{-14}	-0.0807	-0.0781	-0.0782
Bacchus	408.90	-2.22×10^{-14}	-0.1778	-0.1675	-0.1675
YORP	368.43	-5.49×10^{-14}	-0.3801	-0.3595	-0.3594
Hathor	283.32	-2.35×10^{-14}	-0.1622	-0.1405	-0.1405
Cerberus	409.94	-1.46×10^{-14}	-0.1313	-0.1324	-0.1323
Geographos	507.70	-2.68×10^{-15}	-0.0246	-0.0242	-0.0242
Toro	583.92	-1.13×10^{-15}	-0.0125	-0.0118	-0.0117

Radau integrator. Besides, the integration of PHAs and the study of close encounters and impact probabilities can also be done now thanks to the relativistic acceleration and Yarkovsky effect algorithms.

For the future, the Lie integrator can be extended to the problem of the integration of comets's motion. The Yarkovsky effect algorithm is already a first approach for this study in that, the transverse vector is already implemented. Besides, one can consider the generalization of the Lie integrator for any position and velocity dependent forces.

References

- Balogh, A., Giampieri, G.: Mercury: the planet and its orbit. *Rep. Prog. Phys.* **65**, 529–560 (2002)
- Beutler, G.: *Methods of celestial mechanics. vol. I: Physical, Mathematical, and Numerical Principles.* Beutler, G. (2005)
- Botke, W.F., Jr., Vokrouhlický, D., Rubincam, D.P., Broz, M.: The effect of Yarkovsky thermal forces on the dynamical evolution of asteroids and meteoroids (2002)
- Chesley, S.R.: Potential impact detection for Near-Earth asteroids: the case of 99942 Apophis (2004 MN 4). In: L. Daniela, M. Sylvio Ferraz, F.J. Angel, (eds.) *Asteroids, Comets, Meteors*, vol. 229 of IAU Symposium, pp. 215–228 (2006)
- Chesley, S.R., Vokrouhlický, D., Ostro, S.J., Benner, L.A.M., Margot, J.-L., Matson, R.L., Nolan, M.C., Shepard, M.K.: Direct estimation of Yarkovsky accelerations on Near-Earth asteroids. *LPI Contributions* **1405**, 8330 (2008)
- Delva, M.: A Lie integrator program and test for the elliptic restricted three body problem. *Astron. Astrophys.* **60**, 277–284 (1985)
- Dvorak, R., Hanslmeier, A.: Numerical integration with Lie-series. In: Ferraz-Mello S., Nacozy P.E. (eds.) *The Motion of Planets and Natural and Artificial Satellites*, pp. 65 (1983)
- Dvorak, R., Lichtenegger, H.: On the two-body problem with variable masses. In: Ferraz-Mello S., Nacozy, P.E. (eds.) *The Motion of Planets and Natural and Artificial Satellites*, pp. 11–17 (1983)
- Dvorak, R., Pilat-Lohinger, E.: On the dynamical evolution of the Atens and the Apollos. *Planet. Space Sci.* **47**, 665–677 (1999)
- Eggl, S., Dvorak, R.: An introduction to common numerical integration codes used in dynamical astronomy. In: Souchay J., Dvorak, R. (eds.) *Lecture Notes in Physics*, vol. 790 of *Lecture Notes in Physics*, pp. 431–480. Berlin, Springer, (2010)
- Giorgini, J.D., Benner, L.A.M., Ostro, S.J., Nolan, M.C., Busch, M.W.: Predicting the Earth encounters of (99942) Apophis. *Icarus* **193**, 1–19 (2008)
- Gröbner, W.: *Die Lie-Reihen und ihre Anwendungen.* VEB Deutscher Verlag (1967)
- Hanslmeier, A., Dvorak, R.: Numerical integration with Lie series. *Astron. Astrophys.* **132**, 203 (1984)
- Laskar, J.: Large scale solar system simulations. In *AAS/Division of Dynamical Astronomy Meeting*, vol. 40 of *AAS/Division of Dynamical Astronomy Meeting*, May 2009

- Lichtenegger, H.: The dynamics of bodies with variable masses. *Celest. Mech.* **34**, 357–368 (1984)
- Marsden, B.G.: Nongravitational forces on comets. *NASA Special Publ.* **393**, 465–488 (1976)
- Pál, A., Kocsis, B.: Periastron precession measurements in transiting extrasolar planetary systems at the level of general relativity. *MNRAS* **389**, 191–198 (2008)
- Pál, A., Süli, Á.: Solving linearized equations of the N-body problem using the Lie-integration method. *MNRAS* **381**, 1515–1526 (2007). doi:[10.1111/j.1365-2966.2007.12248.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2007.12248.x)
- Schwarz, R., Pilat-Lohinger, E., Dvorak, R., Érdi, B., Sándor, Z.: Trojans in habitable zones. *Astrobiology* **5**, 579–586 (2005)
- Vokrouhlický, D.: Diurnal Yarkovsky effect as a source of mobility of meter-sized asteroidal fragments. I. Linear theory. *Astron. Astrophys.* **335**, 1093–1100 (1998)
- Vokrouhlický, D., Milani, A., Chesley, S.R.: Yarkovsky effect on small Near-Earth asteroids: mathematical formulation and examples. *Icarus* **148**, 118–138 (2000)

Annexe B

Asteroid (99942) Apophis : New predictions of Earth encounters for this PHA

Asteroid (99942) Apophis : New predictions of Earth encounters for this PHA[★]

D. Bancelin¹, F. Colas¹, W. Thuillot¹, D. Hestroffer¹, and M. Assafin^{2,1,★★}

¹ IMCCE, Observatoire de Paris, UPMC, CNRS UMR8028

77 av. Denfert-Rochereau, F-75014 Paris, France

e-mail: david.bancelin@imcce.fr,

thuillot@imcce.fr, colas@imcce.fr, hestro@imcce.fr

² Universidade Federal do Rio de Janeiro, Observatorio do Valongo,

Ladeira Pedro Antonio 43, CEP 20.080 - 090 Rio De Janeiro RJ, Brazil

e-mail: massaf@astro.ufrj.br

Received —, 2011; accepted —

ABSTRACT

Context. The potentially hazardous asteroid – PHA – (99942) Apophis, previously designed 2004 MN₄, is emblematic of the study of asteroids that could impact the Earth in the near future. Orbit monitoring and error propagation analysis are mandatory to predict the probability of an impact and, further, its possible mitigation. Several aspects for such prediction have to be investigated, in particular the orbit adjustment and prediction updates when new astrometric data are available.

Aims. We give in this paper an analysis of Apophis orbit and impact predictions based on new observational data, and including moreover several orbit propagation.

Methods. New astrometric data of Apophis have been acquired recently at Pic du Midi T1m one meter telescope. Indeed, this asteroid was again visible from ground-based stations after a period of several years of unfavorable conjunction with the Sun. We present in this letter the original astrometric data and reduction, and the new orbit obtained from the adjustment to all data available at MPC.

Results. We give the new sketch of keyholes and impacts for the next century. Additionally we discuss observational errors, astrometric reduction, orbit adjustment, and adequateness of the dynamical model used.

Key words. Celestial mechanics – Astrometry – Methods: data analysis – Minor planets, asteroids: individual: Apophis

1. Introduction

Among asteroids evolving in our Solar System, the Near Earth Asteroids (NEAs) are transient bodies that generally originate from the main belt and are transported to the inner part of the Solar System through an interplay of collisions, non-gravitational forces drift and secular resonance, among other sources. The dynamical lifetime of these transient bodies is of the order of a few Myr [Morbidelli, 2001]. NEOs are separated into different dynamical classes depending on their orbital parameters (semi-major axis and eccentricity). In several cases the orbit can intersect the orbit of a terrestrial planet leading to possible collision. Such threatening orbits are identified primarily by their close distance to the Earth trajectory (as a geometric definition, the trajectories can be close but the bodies out of phase). The MOID, for minimum orbit intersection distance, can act as a warning indicator. For the terrestrial planets, an asteroid brighter than absolute magnitude $H < 20$ and with a MOID ≤ 0.05 AU will be considered as potentially hazardous to the Earth (Gronchi [2005], Gronchi et al. [2007]), and will need special attention to its orbit monitoring. The Potentially Hazardous Asteroid (PHA) Apophis – previously temporarily designed 2004 MN₄ is emblematic of the situation of studies of PHAs, and is one of the closest approachers to the Earth presently known. Observations gathered since its discovery in 2004 have ruled out any possibil-

ity of collision with the Earth in 2029 [Sansaturio and Arratia, 2008]. However, Apophis will pass at about 33500 km from the Earth surface, that is, below the position of geosynchronous orbit, and should be visible to the naked eye. Apophis will remain a companion of the Earth for decades and will show subsequent close approaches. The next one in 2036 should not be on a collisional orbit neither, but could put the asteroid on a impacting trajectory for subsequent returns. The high sensitiveness of the orbit to small effects because of the close encounter with the Earth and the gravitational pull together with the current uncertainty on the orbit and dynamical modeling prevent any accurate prediction for the far future. On the one hand a small change on the orbit well in advance in time can avoid any collision trajectory, on the other hand the orbit is not accurate enough to enable to predict with high confidence the trajectory. Observational data—and in particular astrometric positions—are thus mandatory to monitor the orbit of a PHA.

Here we report on new observations of (99942) Apophis made at the Pic du Midi (French Pyrreneas) 1metre telescope during March 2011, i.e. during its recent apparition after a long period of conjunction with the Sun. We describe the instrumentational setup and the data reduction used to obtain the astrometric position in Sect. 2. We then present the orbit adjustment and orbit propagation in Sect. 3, and discuss the results and further analysis to perform in Sect. 4.

[★] Based on observations made at Pic du Midi station and data from IAU-MPC

^{★★} Invited researcher at IMCCE

2. Observations

Apophis was observed from 4.8 to 7.8 of March 2011 at the Pic du Midi observatory, located in the French Pyrenean mountain (altitude 2800 m). **69 observations could have been made with a 1meter telescope.** According to the IMCCE website¹, the asteroid was visible in the sky with a magnitude of 21 and the solar elongation was around 49°. Observations were also challenging because of its high velocity ($\sim 2,7$ arcsec/min). The time exposure for all observations were 90 s. The CCD model is a "DZ936BV Marconi libandorusb". Pixel scale was 0.49 arcsec/pixel and the FOV is a 5.6'×5.6' window (the first night at March 4th was made with a larger FOV of about 8'×8' with a pixel scale of 0.44 arcsec/pixel). The filter was of large R band, Schott RG610. A preliminary astrometry of the CCD images was made using the Astrometrica tool². The mostly used USNO-B1.0 catalog was chosen for the position reduction. The results showed that observed positions were far from the predicted position. **Table 1 shows the prefit and postfit statistic (mean μ and standard deviation σ) in (α, δ) . The prefit statistic are computed using the residuals obtained with the astrometry done by Astrometrica and the postfit statistic are computed using the OrbFit package³**

Table 1. Prefit and postfit informations, mean μ and standard deviation σ in (α, δ) , for both Astrometrica and PRAIA reduction.

		Prefit statistic	Postfit statistic
Astr. Red.	$\mu_\alpha \pm \sigma_\alpha$	-0.3629 ± 0.4010	-0.1798 ± 0.3939
	$\mu_\delta \pm \sigma_\delta$	0.1244 ± 0.2648	0.1671 ± 0.2646
PRAIA Red.	$\mu_\alpha \pm \sigma_\alpha$	-0.1857 ± 0.3295	-0.1129 ± 0.3234
	$\mu_\delta \pm \sigma_\delta$	0.051 ± 0.1803	0.064 ± 0.1803

We have double-checked the astrometric results using an independant package, PRAIA [Assafin et al. [2010] and references therein]. Object measurements were made using 2-dimensional Gaussian profiles adjusted in an interactive procedure over central pixels within 1 FWHM of the center. Positions were obtained with 8 2MASS catalog stars on average, using a 6 Constant polynomial model to relate the measured and reference catalogue coordinates in the tangent plane. The 2MASS reference frame was placed in the UCAC2 system by applying polynomial transformations in the tangent plane between the coordinates listed in both catalogues for common UCAC2/2MASS stars at the 2MASS epoch. The mean error of the obtained positions inferred from the (O-C)s residuals in the reference star positions were 76 mas for right ascensions and 87 mas for declinations. The dispersion of the obtained positions with regard to ephemeris is smaller for the last two nights by a factor of almost two. Given the short time span and the use of the same instrument configuration and reduction procedures for the entire run, the explanation should lay on the response of PRAIA to some change in the SNR regime of Apophis images. Indeed, the objet was severely underexposed in the images of the first two nights. For this reason, only the results of the last two nights were used here. This situation is not uncommon. We are studying the use of image co-addition centered on the moving object to improve its SNR and thus, better the astrometry of past and future observations of

¹ <http://www.imcce.fr/langues/fr/>

² <http://www.astrometrica.at/>

³ <http://adams.dm.unipi.it/orbfit/>

Apophis. The PRAIA reduction enable to retrieve 43 observations corresponding to the three last nights. **When comparing the pre and postfit informations from PRAIA reductwithion the Astrometrica reduction (see Tab. 1), one can see that mean values obtained by the PRAIA reduction is well below the values obtained with Astrometrica.**

3. Results

In this section, we present the results obtained thanks to the new observations from Pic du Midi and Magdalena Ridge Observatory as available from the IAU Minor Planet Center (MPC). The fit on the observations were made using OrbFit package. This ajustement provides us the new orbital elements and the covariance matrix that will be used to estimate the accuracy on the position of Apophis during the 2029-close encounter with the Earth. The dynamical model used in the orbit propagation includes all the planets and the Moon. Besides, the perturbation from the biggest Main Belt Asteroids – Ceres, Pallas and Vesta– was also included. Last but not least, the relativistic correction were also taken into account. The planetary ephemerides used is DE405. For this study, we used the Lie integrator [Bancelin et al., 2012] where the number of terms used is 11. This parameter represents the number of terms of the Taylor expansion for the exponential function. The internal accuracy is set to 10^{-13} . **Even if the integrator used for the orbit ajustment is not the same as the one used for the propagation (Lie integrator), the authors of Bancelin et al. [2012] showed that the propagation of Apophis's motion until the 2029-close encounter with three different integrators lead to a difference of distance < 0.5 km.**

We propose to compare three sets of observations, providing three new orbital solutions, with the solution S_0 obtained with the 2004-2008 data. The first one, solution S_1 , is obtained using the fit of all observations available on IAU-MPC including the Pic du Midi observations reduced by USNO-B1.0 catalog. Solution S_2 is obtained by using a debias treatment of all optical data available. Chesley et al. [2010] showed that biases exist in stellar catalogs (particularly in the widely used USNO-B1.0) and proposed a method to remove them from the astrometric measurements. This method has been recently implemented in the OrbFit package and in order to remove the biases in (α, δ) , we used this software and the files provided in the NEODYs website⁴. For the last three nights, the mean biases in $(\alpha, \delta) = (-120, 168)$ mas are consistent to those obtain with PRAIA $(-103, 170)$ mas. Besides, the observations's weights are statistically computed as suggested in [Carpino et al., 2003]. Finally, solution S_3 is obtained using PRAIA reduction as seen in Sect. 2.

Using a linear propagation of the covariance matrix, we have a new estimation of the size of the ellipse uncertainty on the 2029-b-plane [Valsecchi et al., 2003]. We remind that this plane passes through the Earth center and is perpendicular to the geocentric velocity of the asteroid. Thus, it will have two geocentric coordinates (ξ, ζ) and the projection of the ellipsoid uncertainty in this plane is just an ellipse centered on the nominal value of the coordinates (ξ_N, ζ_N) and with its semimajor and semiminor axis equal to $3\sigma_\zeta$ and $3\sigma_\xi$ respectively. Thus, the distance of closest approach is equal to: $\sqrt{\xi_N^2 + \zeta_N^2}$. Table 2 gives the size of the ellipse uncertainty, through the value of the $(\sigma_\xi, \sigma_\zeta)$, and the geocentric distance Δ_{min} , for each solutions. Those values show that those new optical data shrinks the size of the ellipse uncertainty thanks

⁴ <http://newton.dm.unipi.it/neodys/>

tainty, but on its location. As a matter of fact, we propagated the nominal orbit from observations spanning 2004-2008 adding a transversal perturbation for the Yarkovsky effect and we found out that the (ξ, ζ) coordinates are displaced by $\pm(10, 290)$ km (the signs have the same meaning as for the secular drift sign). So this shift can give us a clue on both the spin direction and secular drift value of the semimajor axis: comparing this results with the position of the (ξ, ζ) coordinates of the nominal orbit using the March observations, we can guess that Apophis might have a prograde rotation what means that the obliquity (angle between the spin orientation and the normal to the orbital plane) lies between 0° and 90° . Moreover, since the position are shifted by 300 km, the secular drift would match with upper the value of $+15 \times 10^{-4}$ AU/Myr.

If there are no apparent risks of collision in the next 50 years, we can expect Apophis to have other deep close approaches. Using Monte Carlo techniques, some deep close encounters occurring in 2051 can lead to dynamical changes for Apophis on 14th April 2051: this asteroid can go back to the Aten family with a low probability estimated to 2.7×10^{-4} and an uncertainty on the date $\sim \Delta t = 0.002$ day. Besides to cause such a deflection, the asteroid will have to come close to the Earth by less than $5R_\oplus$.

4. Discussion

The new observations of March 2011 enable to rule out the possibility of collision with the Earth in 2036. But it seems to be clear that the data reduction has a direct influence on the location of Apophis in 2029 and hence on the impact probability. Due to the difficult observational conditions, some observations of the four nights at Pic du Midi present large residuals. The PRAIA reduction (solution S_3), corresponding to the three last nights, retrieved only the "good" observations contrary to the solution S_1 for which all Pic du Midi observations were selected for the orbit improvement. Since the effect of astrometric biases (solution S_2) were of the order of 20 km in difference of distance in 2029 and since the Yarkovsky effect should lead at most to a difference of ± 270 km in 2029, solution S_3 seems to be more consistent with a drift from Yarkovsky force and prograde spinning body. But, other additionnal perturbations or systematic effects may participate in the displacement of the ellipse uncertainty. Disregarding several observations from our March run shows a strong displacement on the nominal solution. The dynamical model could also have to be improved (i.e. including J_2 or J_4 of the Earth). In order to go further in this study, one can consider other resampling methods such as Bootstrap method as applied in Desmars et al. [2009] or Markov Chain Monte Carlo method (MCMC), as applied in Oszkiewicz et al. [2009], in order to estimate the impact of the ellipse's sizes and also on the keyhole location and impact probabilities. Some dedicated observation campaigns are scheduled in 2013 when good optical observations and radar measurements could be done. Some space-based measurements are also expected after the launch of the satellite Gaia on spring 2013. Very accurate Gaia data hence significantly enhance Apophis' orbit [Bancelin et al., 2011]. But before those expected measurements, Apophis will still be favorably visible from November 2011 to August 2012 (as shown on Fig. 2, the solar elongation will be below 50°) and with the same observational conditions, i.e. with maximum brightness about magnitude 20 and an apparent rate of 3.2 arcsec/min.

Acknowledgements. The authors are grateful to F. Vachier and M. Birlan for the astrometric reduction of Apophis's observations and also to L. Magana, undergraduate trainee at IMCCE for her work on the observations planning.

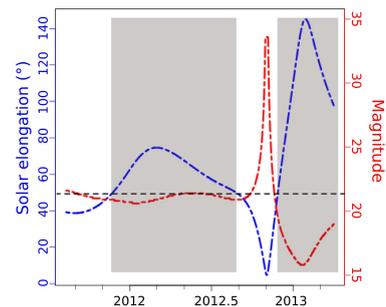


Fig. 2. Period of visibility of Apophis for the next months. The favorable windows for the observations are represented by the blurred rectangles. As the solar elongation will be up to 50° , Apophis could be observed from November 2011 with maximum brightness around magnitude 20.

References

- M. Assafin, J. I. B. Camargo, R. Vieira Martins, A. H. Andrei, B. Sicardy, L. Young, D. N. da Silva Neto, and F. Braga-Ribas. Precise predictions of stellar occultations by Pluto, Charon, Nix, and Hydra for 2008-2015. *A&A*, 515:A32+, June 2010. .
- D. Bancelin, D. Hestroffer, and W. Thuillot. Dynamics of asteroids and NEOs from Gaia Astrometry. *Planetary and Space Science*, accepted, 2011.
- D. Bancelin, D. Hestroffer, and W. Thuillot. Numerical integration of dynamical systems with Lie series. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, page 4, January 2012. .
- W. F. Bottke, Jr., D. Vokrouhlický, D. P. Rubincam, and M. Broz. *The Effect of Yarkovsky Thermal Forces on the Dynamical Evolution of Asteroids and Meteoroids*. 2002.
- M. Carpino, A. Milani, and S. R. Chesley. Error statistics of asteroid optical astrometric observations. *Icarus*, 166:248–270, December 2003. .
- S. R. Chesley. Potential impact detection for Near-Earth asteroids: the case of 99942 Apophis (2004 MN 4). In L. Daniela, M. Sylvio Ferraz, & F. J. Angel, editor, *Asteroids, Comets, Meteors*, volume 229 of *IAU Symposium*, pages 215–228, 2006.
- S. R. Chesley, D. Vokrouhlický, S. J. Ostro, L. A. M. Benner, J.-L. Margot, R. L. Matson, M. C. Nolan, and M. K. Shepard. Direct Estimation of Yarkovsky Accelerations on Near-Earth Asteroids. *LPI Contributions*, 1405:8330–+, 2008.
- S. R. Chesley, J. Baer, and D. G. Monet. Treatment of star catalog biases in asteroid astrometric observations. *Icarus*, 210:158–181, November 2010.
- J. Desmars, S. Arlot, J.-E. Arlot, V. Lainey, and A. Vienne. Estimating the accuracy of satellite ephemerides using the bootstrap method. *A&A*, 499:321–330, May 2009. .
- J. D. Giorgini, L. A. M. Benner, S. J. Ostro, M. C. Nolan, and M. W. Busch. Predicting the Earth encounters of (99942) Apophis. *Icarus*, 193:1–19, January 2008.
- G. F. Gronchi. An Algebraic Method to Compute the Critical Points of the Distance Function Between Two Keplerian Orbits. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 93:295–329, September 2005. .
- G. F. Gronchi, G. Tommei, and A. Milani. Mutual geometry of confocal Keplerian orbits: uncertainty of the MOID and search for virtual PHAs. In G. B. Valsecchi, D. Vokrouhlický, & A. Milani, editor, *IAU Symposium*, volume 236 of *IAU Symposium*, pages 3–14, 2007. .
- A. Morbidelli. Origin and evolution of Near Earth Asteroids. In M. Y. Marov & H. Rickman, editor, *Astrophysics and Space Science Library*, volume 261 of *Astrophysics and Space Science Library*, pages 289–302, 2001.
- D. Oszkiewicz, K. Muinonen, J. Virtanen, and M. Granvik. Asteroid orbital ranging using Markov-Chain Monte Carlo. *Meteoritics and Planetary Science*, 44:1897–1904, January 2009. .
- M. E. Sansaturio and O. Arratia. Apophis: the Story Behind the Scenes. *Earth Moon and Planets*, 102:425–434, June 2008. .
- G. B. Valsecchi, A. Milani, G. F. Gronchi, and S. R. Chesley. Resonant returns to close approaches: Analytical theory. *A&A*, 408:1179–1196, September 2003.
- D. Vokrouhlický, A. Milani, and S. R. Chesley. Yarkovsky Effect on Small Near-Earth Asteroids: Mathematical Formulation and Examples. *Icarus*, 148:118–138, November 2000.

Annexe C

Dynamics of asteroids and NEOs from Gaia Astrometry

Dynamics of asteroids and near-Earth objects from Gaia Astrometry

D. Bancelin^a, D. Hestroffer^a, W. Thuillot^a

^a IMCCE, Paris Observatory, CNRS, UPMC
77, Av. Denfert-Rochereau 75014 Paris France

Abstract

Gaia is an astrometric mission that will be launched in spring 2013. There are many scientific outcomes from this mission and as far as our Solar System is concerned, the satellite will be able to map thousands of main belt asteroids (MBAs) and near-Earth objects (NEOs) down to magnitude ≤ 20 . The high precision astrometry (0.3 – 5 mas of accuracy) will allow orbital improvement, mass determination, and a better accuracy in the prediction and ephemerides of potentially hazardous asteroids (PHAs).

We give in this paper some simulation tests to analyse the impact of Gaia data on known asteroids's orbit, and their value for the analysis of NEOs through the example of asteroid (99942) Apophis. We then present the need for a follow-up network for newly discovered asteroids by Gaia, insisting on the synergy of ground and space data for the orbital improvement.

Keywords:

Gaia, Asteroids, Near-Earth Objects, Astrometry, Dynamics

1. Introduction

Science of asteroids and comets, from near-Earth objects (NEOs) to trans-Neptunian objects (TNOs), and small bodies of the Solar System at large is fundamental to understand the formation and evolution of the Solar System starting from the proto-Sun and the planetary embryos. Having little geological evolution and being atmosphere free, their pristine character makes them good tracers of the constitution of the primordial Solar System. Being numerous and spread over a wide range of heliocentric distances they act also as good constraints for planetary formation scenario and the Solar System dynamical evolution at large. Last, knowledge of the process within our Solar System is useful if not mandatory to understand formations and evolution of other planetary system than our own Solar System.

While some objects can be considered as small world on their own, such as targets of space probes, the vast majority will be considered through general groups and classes. Some asteroids are planet crossers or evolving in the vicinity of Earth's orbit. Among the latter, a small fraction of potentially hazardous asteroids (PHAs) can show particular threat of collision with the Earth while others have no incidence at all. Near-Earth objects are also of interest to understand the physics process as non-gravitational forces (in particular the Yarkovsky effect) and fundamental physics with local tests of General Relativity.

2. Gaia detection and observations of asteroids

Gaia will observe a large number of asteroids, however with some specificity and limits. The limiting magnitude is modest when compared to present and future ground-based surveys

aimed at making a census of small bodies¹. On another hand Gaia will enable observations with a single instrument of the entire celestial sphere and also at low solar elongation, making a difference between space-based observations – such as AsteroidFinder (Mottola et al., 2010) and NEOSat (Hildebrand et al., 2004)– and typical ground-based observations and surveys. As seen in Mignard et al. (2007), the Gaia satellite will have a peculiar scanning law enabling a full coverage of the entire sky over 6 months, which coverage is repeated over the 5 years mission providing stellar parallaxes and proper motions. Besides, only objects detected and confirmed in the front CCDs forming the sky mapper will be subsequently observed through the main astrometric field-of-view. This ensures that no cosmic rays are treated as scientific sources and enables to download to ground only small windows around a scientific source and not all the pixels of the large CCD mosaic. Nevertheless the detection algorithm is so that extended sources, when too wide, are not detected by the on-board algorithm. As shown in Fig. 1, there is no clear detection limit, solar system objects in the size range 0.7-0.9 arcsec will not be systematically detected, while objects larger than 0.9 arcsec will not be observed.

The sequence of observation of any object hence depends on this scanning law, the on-board detection, and the limiting magnitude. Starting with the *astorb* database (Bowell et al., 1994) of orbital elements, one can compute dates of rendez-vous of asteroids crossing the Gaia FOV with the CU4 Solar System Simulator. Simulations in the focal plane of images making use of the GIBIS tool (Luri and Babusiaux, 2011) will enable to set the detection of large asteroids and planetary satellites. Making use of the GIBIS tool, Fig. 1 shows some detection limits

¹The objectif reclaimed to the NASA by the US congress is to catalogue 90% of NEOs larger than 140 m.

for binary objects and large asteroids. These are, in the case of binary systems, the detection in the SM CCD that are binned (2×2) and hence of lower resolution. In such case each component will be treated individually with an associated patch and windowing for observation in the subsequent CCDs. While not detected at the SM level, binary systems can still be observed in the AF field, with higher, but basically one dimensional patches resolution (personal communication). Concerning large asteroids, it appears that even Ceres and some planetary satellites will be basically detected and observed.

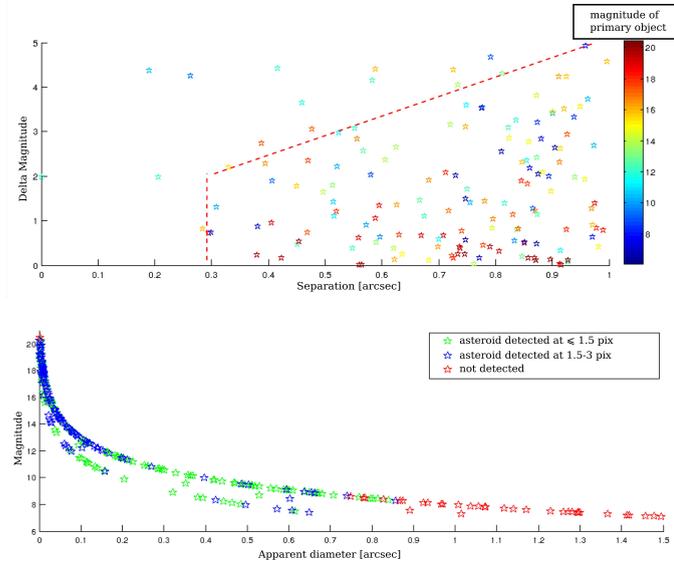


Figure 1: Detection limits, in the sky mapper, for binary objects (top) and large asteroids (bottom). Top panel: the detection is given as a function of the separation of the pair (irrespective of its position angle) and the magnitude difference between the secondary and the primary; the colour code indicates the magnitude of the primary. The detection in the binned sky mapper CCDs stops at a separation of less than approximately 0.3 arcsec (corresponding to ≈ 2.5 binned pixel). Bottom panel: the detection is given as function of the apparent diameter of the object. The corresponding apparent magnitude is derived for a given albedo and three different heliocentric distances. Objects larger than 0.7 arcsec will not be systematically detected; when detected, their predicted position can show an offset from the true one by several pixels.

Statistics on observations of asteroids have been reported in Mignard et al. (2007); Hestroffer et al. (2010a). On the average there are 60 transits (or observations) per object over the mission duration. Fast moving objects will not be observed correctly through the whole astrometric field of view because the windowing scheme is adapted to the relative motion of a star (personal communication). Objects like fast NEOs will however be observed in good conditions in the first and middle CCDs (which has a larger associated window).

3. Dynamic of asteroids

Gaia will provide astrometry of asteroids and comets with unprecedented accuracy. Being a space-mission designed optimally for doing astrometry it has some obvious advantages. Gaia will in particular enable both local astrometry from relative positions and refined calibration, and global astrometry

with absolute positions. Compared to classical ground-based observations, there are—among other—no limitation between northern and southern hemisphere, no atmospheric refraction or turbulent effects, reduced zonal errors, and positions directly in the Gaia sphere of reference and the optical ICRF. Such astrometry will yield improved orbital elements for almost all objects observed (see Fig. 2), together with detection of small effects and determination of dynamical parameters. In particular, one will be able to derive masses of asteroids (from close encounter and binary objects) and to perform local tests of general relativity (GR). We do not consider here preliminary orbit determination for newly detected objects that will be treated in Sect. 5, neither dynamics of planetary satellites that will not be treated within DPAC with Gaia data alone.

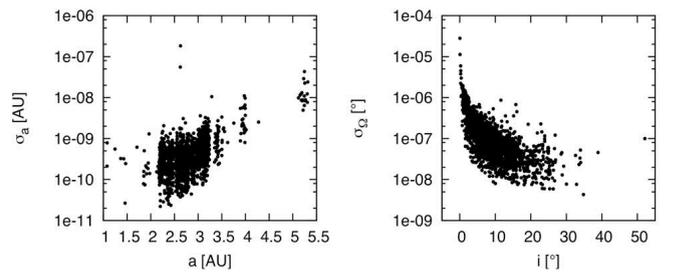


Figure 2: Orbit improvement in semi-major axis and orbital plane orientation. The improvement is given as the precision on the correction to the state vector or orbital elements from a linear least squares fit from Gaia observations alone. For a small percentage of objects the number of observations and/or their distribution will be too small to derive a complete orbit (rank deficiency in the linear least squares inversion), but for the vast majority the astrometric precision of the order of 0.3–5 mas will enable orbit improvement by factor $\approx 10 - 50$.

The mass of an asteroid can be measured during a close encounter from the trajectory's deflection caused on a perturbed smaller body (Hilton, 2002). The situation is improved and less subject to systematic errors when several perturbers per perturber asteroid are involved. In the Gaia data processing scheme a preselected list of perturber asteroids has been done based on computation of close encounters during the mission (Mouret et al., 2007). Simulation of a global inversion of the problem involving 43 500 perturbed targets and 600 massive asteroids (in 78 800 close approaches) has shown that 150 asteroids (i.e. $\approx 25\%$) could have their mass derived to better than 50% (Mouret, 2007), see Fig. 3. There are 36 asteroids with their mass determined to better than 10% (including Vesta and Ceres that are presently observed by the Dawn mission, and some binary asteroids) distributed in several taxonomic classes. This number is slightly increased when complementing the Gaia observations by ground-based data for those close encounters that happen just before or after the mission (Hudkova et al., 2008). Good knowledge of their volume will be mandatory to derive reliable estimates of their bulk density and further indication of their porosity (personal communication). With a pixel size of 0.06 arcsec, observations of some resolved binary systems will also be possible with Gaia—though one dimensional—including the Pluton/Charon system for which the relative positions acquired over 5 years will provide substantial refinement

of the knowledge of the system’s mass (Beauvalet, 2011). On the other hand, Gaia can also detect in principle astrometric binaries, this has to be investigated further.

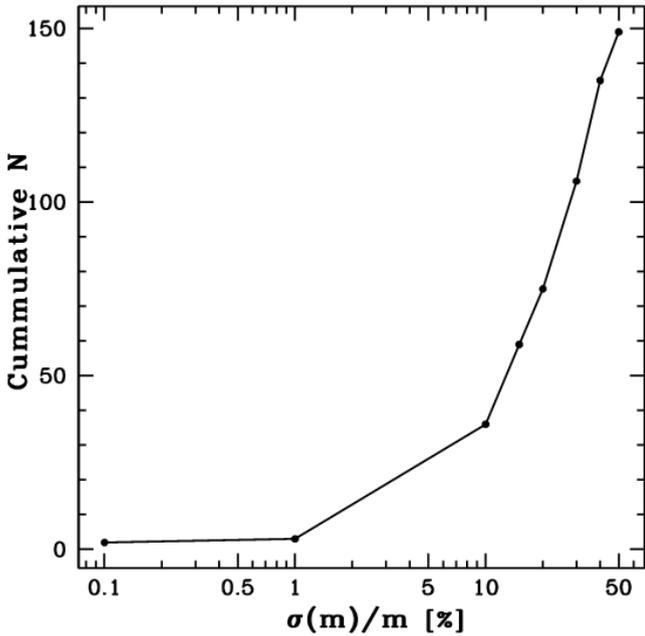


Figure 3: Mass determination from close encounters. Cumulative distribution as a function of the relative precision reached (Mouret et al., 2007).

The refined orbits of asteroids will also provide valuable inputs for local tests of General Relativity, basically derivation of the PPN parameter β (Will, 2010) from monitoring the precession of perihelion of eccentric NEOs (i.e. large eccentricity e , small semi-major axis a) together with the derivation of the solar quadrupole J_2 . Additionally all asteroids will contribute to a test of a possible time variation of the gravitational constant dG/dt and a possible residual rotation dW/dt between the kinematic reference frame materialised by the QSO and the dynamical reference frame materialised by the motion of the asteroids. It has been shown in Hestroffer et al. (2010b) that—due to the good (e, a) plane coverage, good monitoring of both perihelion ω , node Ω and inclination I , and the large number of test particles involved—the parameters β and J_2 will be derived individually to a precision of $\approx 10^{-4}$ and $\approx 10^{-8}$, respectively. Such precision is similar to what is obtained from other techniques, yet independently and directly without assumptions on the Sun interior or the Nordvedt parameter. Combination of Gaia astrometry of NEOs to radar data (Margot and Giorgini, 2010) can in principle bring a higher time leverage for measuring this secular effect, this has to be investigated further.

It is worth to mention that the Gaia data alone from direct observation astrometry of Solar System objects can yield scientific outputs as shown above, but it can also complement ground-based data over long time span. Last, the Gaia catalogue of stars will provide the astrometry of tomorrow including re-reduction or debiasing of ancient CCD observations, better prediction of stellar occultation, and dense catalogue for small fields reduc-

tion without severe zonal errors.

4. Observations of PHAs

During the 5 years mission, Gaia will continuously scan the sky with a specific strategy as shown in Fig. 4: Objects will be observed from two lines of sight separated with a constant basic angle. Some constants already fixed determine the nominal scanning law of Gaia: The inertial spin rate ($1^\circ/\text{min}$) that describes the rotation of the spacecraft around an axis perpendicular to those of the two fields of view, the solar-aspect angle (45°) that is the angle between the Sun and the spacecraft spin axis, the precession period (63.12 days) which is the precession of the spin axis around the Sun-Earth direction. Two other constants are still free parameters: the initial spin phase which has an influence on the observation’s dates and the initial precession angle which has an influence on the number of observations for a given target. Those parameters will be fixed at the start of the nominal science operations. These latter are constrained by scientific outcome (e.g. possibility of performing test of fundamental physics) together with operational requirements (downlink to Earth windows).

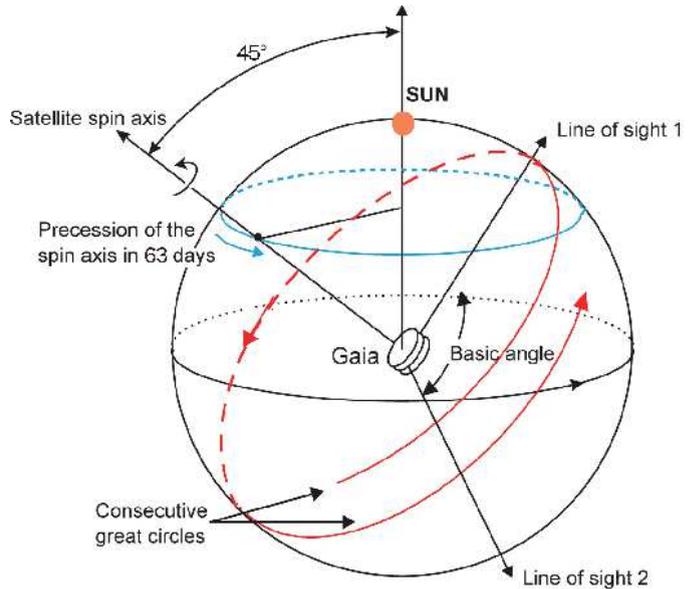


Figure 4: Nominal scanning law of Gaia (Source: ESA). Six parameters determine this scanning law: the basic-angle (angle between the two lines of sight), the inertial spin rate (angular speed of the spacecraft), the solar-aspect angle (angle between the Sun direction and the satellite spin axis), the precession period (rotation of the spacecraft around the Sun-Earth direction), the inertial spin phase and the initial precession angle.

Different sequences of observations of NEOs will be possible according to the initial value of the initial precession angle. Figure 5 is an histogram showing the number of NEOs and PHAs that would be observed by the satellite (an object is considered to be observed at the first detection). We can first see that the number of NEOs that could be observed is weak compared to the population of known NEOs ($\sim 30\%$). Besides, the

number of objects observed do not vary greatly regarding the initial precession angle. As a matter of fact, the mean value and standard deviation for each distribution is 2180 ± 16 NEOs observed by Gaia and 585 ± 12 for PHAs. So we can just give the mean value of objects that would be observed, regarding their dynamical family as shown on Fig. 6.

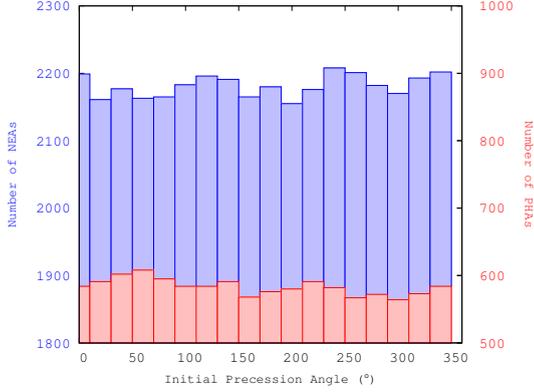


Figure 5: Number of NEOs and PHAs that would be observed by Gaia with respect to the initial precession angle. Only 30% of the NEOs population could be observed by Gaia. Among the most hazardous population, the PHAs, Gaia would observe only 1/4 of them.

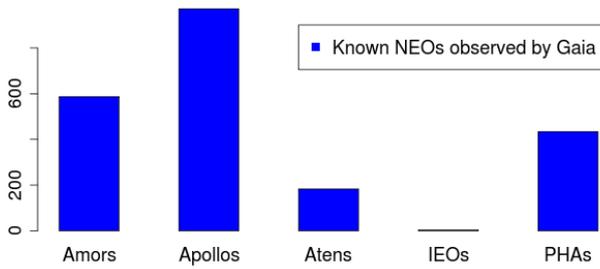


Figure 6: Statistic of observations for the near-Earth objects with respect to their dynamical family. The weak variation of the number of observed objects with respect to the initial precession angle as seen in Fig. 5, justifies to consider a mean value of the population possibly observed by Gaia.

To illustrate the impact of Gaia observations on PHAs orbit, we will consider here the case of the asteroid (99942) Apophis (previously designed 2004 MN₄). This PHA was discovered in June 2004 by R. Tucker, D. Thollen and F. Bernardi at the Kitt Peak observatory in Arizona. Since the first observations, it was revealed to be a threatening and hazardous asteroid in as much as it reached the level four of Torino Scale for a possible impact with the Earth in April 2029. Since, new observations ruled out every possibility of collision for this date but this risk remains in 2036. The 2029-threat is now just a 2029-close deep encounter within a distance of ~ 38000 km with the Earth. Because of this close encounter, the 2029-post orbit of Apophis is chaotic-like

in so far as, the orbit is sensitive to initial conditions, dynamical modelling, etc... Due to this high sensitivity, some virtual Apophis (clones of the nominal orbit around the nominal value) can be virtual impactors and to quantify and well appreciate the impact probabilities, it is necessary to well estimate the orbit uncertainties.

Apophis has 1366 optical observations and five radar observations spanning 2004-2011 (available at the IAU MPC). Figure 7 shows the number of observations that Gaia will provide for this asteroid. One can see that we have inhomogeneous size of sets in as much as we can have more than 20 observations as well as less than 10 observations. For our simulations, we chose a set with the longest arc length (with 12 Gaia observations) and with a 5 mas accuracy.

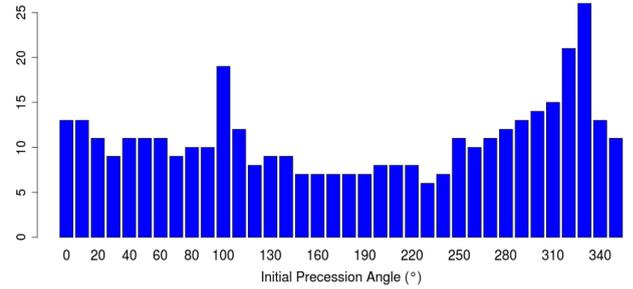


Figure 7: Number of Gaia observations for the asteroid Apophis with respect to the initial precession angle. Here, we have a great variation of the number of observations for a single object. Some sets can have more than 25 observations as well as less than 10.

We can first analyse the improvement on the accuracy of the Keplerian elements due to the Gaia contribution. Table 1 compares the standard deviation of Apophis' orbital elements with (σ_{O+G}) and without (σ_O) Gaia observations. It is clear that the impact of those space data on Apophis's orbit can be seen through the improvement of the semimajor axis value as the uncertainty is improved by a factor 1000.

Table 1: Standard deviations of Apophis's keplerian elements without (σ_O) and with (σ_{O+G}) Gaia observations.

	σ_O	σ_{O+G}
a [A.U.]	1.9×10^{-08}	6.8×10^{-11}
e	7.0×10^{-08}	3.9×10^{-09}
i [°]	1.9×10^{-06}	1.2×10^{-07}
Ω [°]	1.0×10^{-04}	2.2×10^{-06}
ω [°]	1.0×10^{-04}	2.3×10^{-06}
M [°]	7.4×10^{-05}	6.5×10^{-07}

The impact of Gaia data can also be analysed through the improvement of the position uncertainty. From a linear propagation of the covariance matrix (provided by the least square solution), the uncertainty of the keplerian elements is propagated until the date of close approach in 2029. Fig. 8 shows the

comparison of the propagation of nominal orbits obtained from the fit of different sets of observations:

- S_1 (-): using all optical and radar data available;
- S_2 (-): using set S_1 with additional Gaia data with 5 mas accuracy;
- S_3 (-): using set S_1 with one additional future radar measurement in 2013 with $1\mu s$ accuracy (measurement of a timing echo);
- S_4 (-): using set S_1 with one future optical observation done in 2013 with 0.1 arcsec accuracy;
- S_5 (-): using set S_1 and the case that Gaia would provide only one observation with 5 mas accuracy.

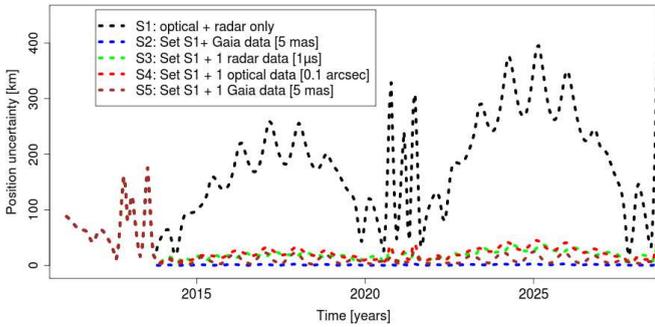


Figure 8: Evolution of the position uncertainty of asteroid Apophis considering several different sets of observations. While the sets S_3 , S_4 and S_5 lead to the same level of accuracy, the set S_2 using all Gaia data enable to decrease the position uncertainty down to the kilometer level.

This figure shows that the Gaia data enable to reduce the position uncertainty knowledge down to the kilometer level (set S_2) and it keeps this value until the close approach. For comparison, the effect of future accurate measurements (radar and optical) can be comparable to the impact of one future Gaia data.

Other simulations can be done to compare the impact of future Gaia data with ground-based measurements by quantifying the position uncertainty at the date of close encounter. Generally, the uncertainty region is represented in the b-plane or target plane (Valsecchi et al., 2003). This plane better represents the state of an asteroid when approaching the Earth. It passes through the Earth center and is perpendicular to the geocentric velocity of the asteroid. Thus, it will have two geocentric coordinates (ξ, ζ) . As a consequence, the projection of the ellipsoid uncertainty in this plane is just an ellipse centered on the nominal value of the geocentric coordinates (ξ_N, ζ_N) and with its semimajor and semiminor axis respectively equal to the standard deviations $3\sigma_\zeta$ and $3\sigma_\xi$ calculated with a linear propagation of the initial covariance matrix until 2029.

Due to this close approach, the orbit of Apophis will be altered and both Apophis and the Earth are expected to be in

the same position after some revolutions of Apophis around the Sun and many years later. The most famous resonant return occurs in 2036 where after 6 revolutions of Apophis and 7 years later, both objects will meet again. As the 2029-post orbit of Apophis is chaotic, some clones of Apophis (simulating by Monte-Carlo the present orbital uncertainty) can lead to impact with the Earth at some resonant return and the pre-images of those impacts in the b-plane are called keyholes (Chodas and Yeomans, 1999). The most famous keyhole is the 2036-keyhole with a size around 600 m. They can be primary keyholes if they are spawned by one close approach and secondary if they are spawned by two consecutive close encounters. So, the risk can be estimated by comparing the keyhole position with the size of the ellipse uncertainty in the b-plane. A better knowledge of the region uncertainty is necessary to prepare some deflection missions in case there is an important collision threat.

The size of the region uncertainty, in the (ξ, ζ) plane, will depend on the kind of measurements available. Table 2 presents the size of the ellipse uncertainty using the different sets S_i of observations as explained above. Even if Gaia would provide only one observation, the gain in accuracy would be unprecedented by comparison with the gain obtained with optical or radar data. While the impact of one Gaia data can be compared to the effect of one radar measurement, one set of Gaia observations can bring the uncertainties around the kilometer level.

Table 2: Uncertainties $(\sigma_\xi, \sigma_\zeta)$ on the 2029 b-plane of Apophis considering various sets S_i of observations.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
σ_ξ (km)	10	0.3	7	8	6
σ_ζ (km)	240	1.6	10.5	24	11.5

Finally, it could be interesting to map the primary and secondary keyholes in the 2029 b-plane in order to illustrate the improvement due to the Gaia data. Figure 9 shows the position of the center of those keyholes. Those positions were numerically computed using Monte-Carlo technique and using the Lie integrator (Bancelin et al., 2011). So, as the region uncertainty shrinks thanks to the Gaia data (small ellipse), the collision probabilities will also decrease as the distance between the keyholes center and the center of the ellipse increases.

5. Gaia-FUN-SSO network

During the mission, various unidentified objects will be observed by the satellite. Because of the scanning law, at the epoch of these discoveries, those objects will have at least two observations separated by approximately $\Delta t \sim 1.5$ hours. But, as Gaia is not a follow-up satellite, the newly discovered asteroids can be rapidly lost if there is no follow-up from the Earth. Among the potential alerts, we expect some NEOs (and among them PHAs) to be discovered. We also expect the discovery of several Inner-Earth Objects (IEOs) due to the L2 positioning of the probe and of the 45 degrees solar elongation which will allow it to investigate inside the Earth orbit. We can also expect

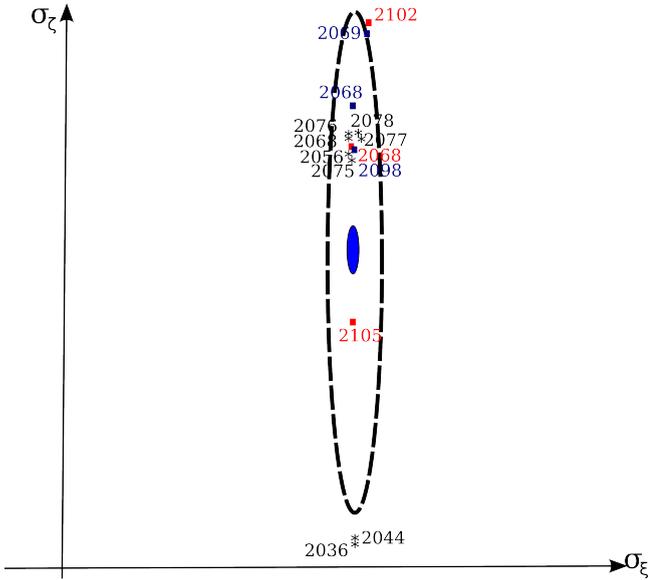


Figure 9: 3σ ellipse uncertainty on the 2029 b-plane of Apophis and position of the center of primary (*) and secondary keyholes leading to collision at ascending node (■) and descending node (■). The dotted ellipse is computed using set S_1 and the filled one using set S_2 . The coordinates are expressed in σ units.

the discovery of new comets. In order to be ready to handle those alerts, we first have to statistically quantify the number of unknown NEOs that could be discovered by Gaia. In a first approach, using a synthetic population of NEOs (Bottke et al., 2002), we do expect a small number of alerts (~ 1 alert every 4 days) by comparing the number of known and synthetic NEOs that would be observed by the satellite during the 5 years mission (Fig. 11).

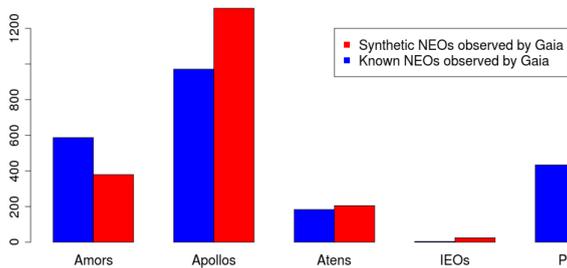


Figure 10: Number of known and synthetic NEOs that would be observed by the satellite.

According to the previous considerations upon the interest of a ground-based follow-up network, we have set up a ground-based network of observing sites labelled Gaia-FUN-SSO (standing for Gaia Follow-Up Network for Solar System Objects). This network included nineteen locations at the beginning of 2011 but several more stations are still expected in order to have a large geographical coverage (candidate sites can get in touch with us at the address gaia-fun-ss@imcce.fr). The telescope diameters of the network are spanning from 0.25 to

2.4 m; four telescopes have large field, which will be useful for recoveries, and five are robotics ones, which will be precious for observations on alert. Since the goal is mainly to perform astrometric measurements, the standard specificities of telescopes are expected to be a field of view of at least 10 arcmin, pixel size at less than 1 arcsec, and limiting magnitude around 20. But, since we certainly need to search for new discovered objects in quite large field and larger field even with bigger pixel size will be very useful.

The role of this network will be to improve the orbit of some objects and to enable Gaia to identify them during a further scan. This network is structured around a central node which will convert raw Gaia data into ephemerides useful for observations and will collect the data. All the measurements performed by this network will be sent to the Minor Planet Center and will thus allow the update of the database of auxiliary data used in the Gaia system to perform the identification of SSO. A first workshop has been held in Paris in November 2010 and resulted in several discussions among the member of the network; proceedings are accessible at the address: gaia-fun-ss@imcce.fr.



Figure 11: Observing sites of the Gaia-FUN-SSO network in May 2011

6. Synergy ground/space data

When an alert occurs, we have to know where to look in the celestial sphere and how much time we have in order to recover, from the Earth, an unidentified asteroid observed by Gaia. Knowing the threat of PHAs, we can not afford to lose them if no strategy is established. A way to deal with potential alerts can be represented in Fig. 12: If an unidentified PHA is observed by Gaia, the satellite can send an alert to the Earth within 24 hours. Then, a short preliminary arc orbit, compatible with the Gaia observations, can be computed using the Statistical Ranging method (Virtanen et al., 2001; Muinonen, 2011). This method is based on estimating the gaia-centric distance using Monte-Carlo technique with at least two observations. It will provide the orbital elements compatible with the Gaia observations and propagate each orbit to a given date. Then, from the (α, δ) distribution computed few days after its discovery, we can extract the maximum likelihood of this distribution. We can then just center a telescope field of view on this maximum likelihood so that observers can be able

to know which part of the sky to scan and how much time they have until the asteroid is lost.

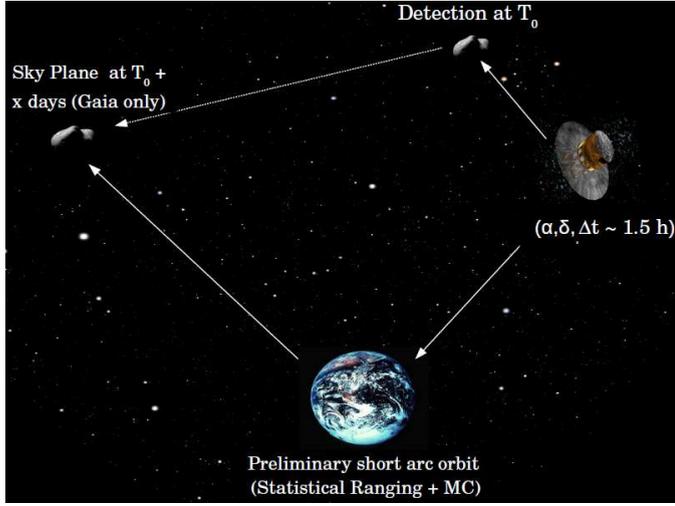


Figure 12: Strategy of recovery from Earth for newly discovered PHAs. Gaia will provide two observations before sending the coordinates to Earth within 24 hours where a short preliminary arc orbit, compatible with the observations, can be computed using the Statistical Ranging method. (MC denotes Monte-Carlo Technique). Thus, an (α, δ) distribution can be computed few days after the discovery of the asteroid by Gaia.

As an example, we considered an hypothetical PHA, Geographos, that would be discovered by Gaia. Figure 13 shows the (α, δ) distribution on the sky plane (\circ) until 10 days after the discovery of Geographos. Each window is centered on the maximum likelihood (\bullet) and the size of the window is the size of a 24×24 arcmin telescope field of view. So, the asteroid can still be recovered until 7 days after its discovery because the true value (\blacktriangle), computed from the real initial state of Geographos, lies in this window for this given field of view.

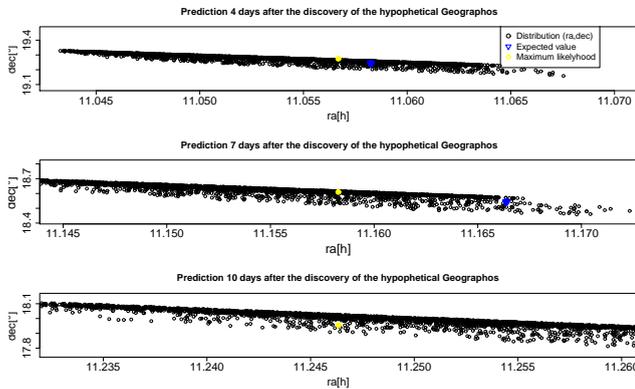


Figure 13: Prediction on the sky plane of a hypothetical Geographos discovered by Gaia, until 10 days after its discovery by Gaia.

Finally, when the asteroid is recovered from Earth, it will be followed, at least, during one night. Thus, optical data can

be done and can be combined with the space data in order to improve the (α, δ) prediction in the sky plane. We considered four observations made during that night with a 0.5 arcsec accuracy, two days after its discovery by the satellite. The optical data enable to better constrain the preliminary short arc orbit and as seen in Fig.14, the parallax effect allows a better (α, δ) prediction as the size of the distribution is well-reduced (light circles), compared to the distribution obtained only with Gaia data (black circles).

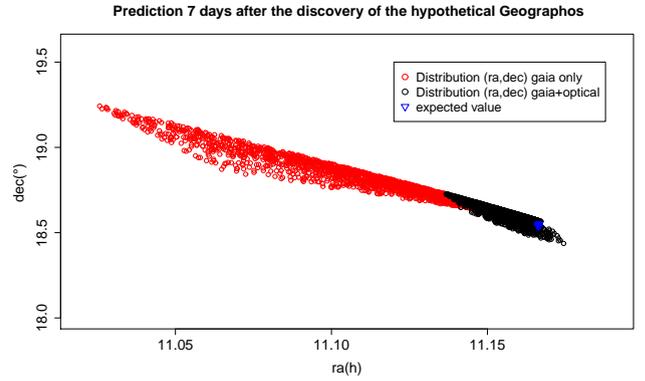


Figure 14: Distribution (α, δ) considering additional ground-based data, two days after the discovery of the hypothetical Geographos by Gaia.

7. Conclusion

We have given a broad overview of results and actions connected to the astrometry of asteroids and NEOs with Gaia. This includes the orbit improvement, mass determination, test of GR. This paper also presented the usefulness of Gaia data thanks to an unprecedented data accuracy reached. Orbit of NEOs and PHAs could really be improved, even if the number of observations provided by the satellite is faint. This improvement can be shown through the improvement of orbital elements, position uncertainty and even for close-approach statistics.

Even if Gaia won't be a big NEOs discoverer and is not a follow-up mission, a strategy has to be settled in order to be able to recover newly discovered PHAs from Earth. Statistical tools can enable observers to know where to focus on the celestial sphere with only two Gaia data. Besides, the parallax effect, with additional ground-based data, will allow a better follow-up from Earth.

Acknowledgements: The authors wish to thank J. Blanchot and M. Sylvestre – master trainees at IMCCE – for her work on GIBIS detection, C. Ordenovic and F. Mignard (OCA) for providing the CU4 Solar System Simulator, and all the colleagues from Gaia DPAC CU4/SSO and REMAT groups at large for fruitful discussions.

References

- Bancelin, D., Hestroffer, D., Thuillot, W., 2011. Numerical Integration of dynamical systems with Lie Series: Relativistic acceleration and non-gravitational forces. *Celestial Mechanics* .
- Beauvalet, L., 2011. Constraining Pluto's system with Gaia. this issue .
- Botke, W.F., Morbidelli, A., Jedicke, R., Petit, J.M., Levison, H.F., Michel, P., Metcalfe, T.S., 2002. Debiased Orbital and Absolute Magnitude Distribution of the Near-Earth Objects. *Icarus* 156, 399–433.
- Bowell, E., Muinonen, K., Wasserman, L.H., 1994. A Public-Domain Asteroid Orbit Data Base, in: Milani, A., di Martino, M., Cellino, A. (Eds.), *IAU Symp. 160: Asteroids, Comets, Meteors 1993*, pp. 477–481.
- Chodas, P.W., Yeomans, D.K., 1999. Could Asteroid 1997 XF11 Collide with Earth After 2028?, in: *AAS/Division of Dynamical Astronomy Meeting #31*, pp. 1227–+.
- Hestroffer, D., Dell'Oro, A., Cellino, A., Tanga, P., 2010a. The Gaia Mission and the Asteroids, in: J. Souchay & R. Dvorak (Ed.), *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, pp. 251–340.
- Hestroffer, D., Mouret, S., Mignard, F., Tanga, P., Berthier, J., 2010b. Gaia and the asteroids: Local test of GR, in: S. A. Klioner, P. K. Seidelmann, & M. H. Soffel (Ed.), *IAU Symposium*, pp. 325–330.
- Hildebrand, A.R., Carroll, K.A., Tedesco, E.F., Faber, D.R., Cardinal, R.D., Matthews, J.M., Kuschnig, R., Walker, G.A.H., Gladman, B., Pazder, J., Brown, P.G., Larson, S.M., Worden, S.P., Wallace, B.J., Chodas, P.W., Muinonen, K., Cheng, A., 2004. Advantages of Searching for Asteroids from Low Earth Orbit: the NEOSat Mission. *Earth Moon and Planets* 95, 33–40.
- Hilton, J.L., 2002. Asteroid Masses and Densities. *Asteroids III* , 103–112.
- Hudkova, L., Ivantsov, A., Pinigin, G., Shulga, A., 2008. Current state and development of the minor planets research in Nikolaev Astronomical Observatory. *Planetary and Space Science* 56, 1835–1838.
- Luri, X., Babusiaux, C., 2011. Gaia data simulations: a powerful tool to prepare for the Gaia scientific exploitation, in: *EAS Publications Series*, pp. 25–30.
- Margot, J.L., Giorgini, J.D., 2010. Probing general relativity with radar astrometry in the inner solar system, in: S. A. Klioner, P. K. Seidelmann, & M. H. Soffel (Ed.), *IAU Symposium*, pp. 183–188.
- Mignard, F., Cellino, A., Muinonen, K., Tanga, P., Delbò, M., Dell'Oro, A., Granvik, M., Hestroffer, D., Mouret, S., Thuillot, W., Virtanen, J., 2007. The Gaia Mission: Expected Applications to Asteroid Science. *Earth Moon and Planets* 101, 97–125.
- Mottola, S., Kuehrt, E., Michaelis, H., Hoffmann, H., Spietz, P., Jansen, F., Thimo Grundmann, J., Hahn, G., Montenegro, S., Findlay, R., Boerner, A., Messina, G., Behnke, T., Tschentscher, M., Scheibe, K., Mertens, V., Heidecke, A., 2010. The DLR AsteroidFinder for NEOs, in: *38th COSPAR Scientific Assembly*, pp. 4261–+.
- Mouret, S., 2007. Investigations on the dynamics of minor planets with Gaia. Ph.D. thesis. Observatoire de Paris.
- Mouret, S., Hestroffer, D., Mignard, F., 2007. Asteroid masses and improvement with Gaia. *A&A* 472, 1017–1027.
- Muinonen, K., 2011. Asteroid orbital inversion using Markov-chain Monte Carlo methods . this issue .
- Valsecchi, G.B., Milani, A., Gronchi, G.F., Chesley, S.R., 2003. Resonant returns to close approaches: Analytical theory. *A&A* 408, 1179–1196.
- Virtanen, J., Muinonen, K., Bowell, E., 2001. Statistical Ranging of Asteroid Orbits. *Icarus* 154, 412–431.
- Will, C.M., 2010. The confrontation between general relativity and experiment, in: S. A. Klioner, P. K. Seidelmann, & M. H. Soffel (Ed.), *IAU Symposium*, pp. 198–199.

Bibliographie

- M. Assafin, J. I. B. Camargo, R. Vieira Martins, A. H. Andrei, B. Sicardy, L. Young, D. N. da Silva Neto, and F. Braga-Ribas. Precise predictions of stellar occultations by Pluto, Charon, Nix, and Hydra for 2008-2015. *A&A*, 515 :A32+, June 2010. 89
- A. Balogh and G. Giampieri. Mercury : the planet and its orbit. *Reports on Progress in Physics*, 65 :529–560, April 2002. 62
- D. Bancelin, D. Hestroffer, and W. Thuillot. Dynamics of asteroids and NEOs from Gaia Astrometry. *Planetay and Space Science, accepted*, 2011a. 96, 109, 110, 127, 129
- D. Bancelin, D. Hestroffer, and W. Thuillot. Asteroid (99942) Apophis : New predictions of Earth encounters for this PHA. *A&A, submitted*, 2011b. 92, 93, 97
- D. Bancelin, D. Hestroffer, and W. Thuillot. Numerical integration of dynamical systems with Lie series. Relativistic acceleration and non-gravitational forces. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 112 :221–234, February 2012. 56
- R. R. Bate, D. D. Mueller, and J. E. White. *Fundamentals of astro-dynamics*. 1972. 42
- S. Behrend. Asteroids and comets rotation curves, CdR. Observatoire de Genève, 2005. http://obswww.unige.ch/~behrend/page_cou.html, 2005. 73, 74
- G. Beutler. *Methods of celestial mechanics. Vol. I : Physical, mathematical, and numerical principles*. Beutler, G., 2005. 58
- R. P. Binzel, A. S. Rivkin, C. A. Thomas, P. Vernazza, T. H. Burbine, F. E. DeMeo, S. J. Bus, A. T. Tokunaga, and M. Birlan. Spectral properties and composition of potentially hazardous Asteroid (99942) Apophis. *Icarus*, 200 :480–485, April 2009. 73, 74
- N. T. Bobrovnikoff. The spectra of minor planets. *Lick Observatory Bulletin*, 14 :18–27, 1929. 26
- C. Bonanno. An analytical approximation for the MOID and its consequences. *A&A*, 360 :411–416, August 2000. 20
- W. F. Bottke, A. Morbidelli, R. Jedicke, J.-M. Petit, H. F. Levison, P. Michel, and T. S. Metcalfe. Debaised Orbital and Absolute Magnitude Distribution of the Near-Earth Objects. *Icarus*, 156 :399–433, April 2002. 16, 17, 60, 128
- W. F. Bottke, Jr., D. P. Rubincam, and J. A. Burns. Dynamical evolution of main belt meteoroids : Numerical simulations incorporating planetary perturbations and Yarkovsky thermal forces. *Icarus*, 145 :301–331, June 2000. 38
- E. Bowell. The asteroid orbital elements database, 2011. <ftp://ftp.lowell.edu/pub/elgb/astorb.html>. 130

- E. Bowell and K. Muinonen. Earth-crossing Asteroids and Comets : Groundbased Search Strategies. In T. Gehrels, M. S. Matthews, & A. M. Schumann, editor, *Hazards Due to Comets and Asteroids*, pages 149–+, 1994. 19
- E. Bowell, J. Virtanen, K. Muinonen, and A. Boattini. Asteroid Orbit Computation. *Asteroids III*, pages 27–43, 2002. 112
- S. Breiter, H. Michalska, D. Vokrouhlický, and W. Borczyk. Radiation-induced torques on spheroids. *A&A*, 471 :345–353, August 2007. 40
- M. Brož. *Yarkovsky Effect and the Dynamics of the Solar System*. Phd thesis, Charles University, Faculty of Mathematics and Physics Astronomical Institute, 2006. 39, 41
- T. H. Burbine, T. J. McCoy, A. Meibom, B. Gladman, and K. Keil. Meteoritic Parent Bodies : Their Number and Identification. *Asteroids III*, pages 653–667, 2002. 26
- S. J. Bus and R. P. Binzel. Phase II of the Small Main-Belt Asteroid Spectroscopic Survey The Observations. *Icarus*, 158 :106–145, July 2002a. 27, 112
- S. J. Bus and R. P. Binzel. Phase II of the Small Main-Belt Asteroid Spectroscopic Survey A Feature-Based Taxonomy. *Icarus*, 158 :146–177, July 2002b. 27, 112
- S. J. Bus, F. Vilas, and M. A. Barucci. Visible-Wavelength Spectroscopy of Asteroids. *Asteroids III*, pages 169–182, 2002. 27
- M. Carpino, A. Milani, and S. R. Chesley. Error statistics of asteroid optical astrometric observations. *Icarus*, 166 :248–270, December 2003. 45, 70
- B. Carry, C. Dumas, M. Fulchignoni, W. J. Merline, J. Berthier, D. Hestroffer, T. Fusco, and P. Tamblyn. Near-infrared mapping and physical properties of the dwarf-planet Ceres. *A&A*, 478 :235–244, January 2008. 38
- B. Carry, M. Kaasalainen, C. Leyrat, W. J. Merline, J. D. Drummond, A. Conrad, H. A. Weaver, P. M. Tamblyn, C. R. Chapman, C. Dumas, F. Colas, J. C. Christou, E. Dotto, D. Perna, S. Fornasier, L. Bernasconi, R. Behrend, F. Vachier, A. Kryszczyńska, M. Polinska, M. Fulchignoni, R. Roy, R. Naves, R. Poncy, and P. Wiggins. Physical properties of the ESA Rosetta target asteroid (21) Lutetia. II. Shape and flyby geometry. *A&A*, 523 :A94+, November 2010. 38
- J. R. Cash and Alan H. Karp. A variable order runge-kutta method for initial value problems with rapidly varying right-hand sides. *ACM Trans. Math. Softw.*, 16 :201–222, September 1990. 49
- A. Cellino, E. Diolaiti, R. Ragazzoni, D. Hestroffer, P. Tanga, and A. Ghedina. Speckle interferometry observations of asteroids at tng*. *Icarus*, 162 :278–284, April 2003. 38
- A. Cellino, M. Delbò, V. Zappalà, A. Dell’Oro, and P. Tanga. Rotational properties of asteroids from Gaia disk-integrated photometry : A genetic algorithm. *Advances in Space Research*, 38 : 2000–2005, 2006. 112
- A. B. Chamberlin, S. R. Chesley, P. W. Chodas, J. D. Giorgini, M. S. Keesey, R. N. Wimberly, and D. K. Yeomans. Sentry : An Automated Close Approach Monitoring System for Near-Earth Objects. In *AAS/Division for Planetary Sciences Meeting Abstracts #33*, volume 33 of *Bulletin of the American Astronomical Society*, pages 1116–+, November 2001. 21
- C. R. Chapman, T. V. Johnson, and T. B. McCord. A Review of Spectrophotometric Studies of Asteroids. *NASA Special Publication*, 267 :51–+, 1971. 26

- C. R. Chapman, D. Morrison, and B. Zellner. Surface properties of asteroids - A synthesis of polarimetry, radiometry, and spectrophotometry. *Icarus*, 25 :104–130, May 1975. 26
- S. R. Chesley. Potential impact detection for Near-Earth asteroids : the case of 99942 Apophis (2004 MN 4). In L. Daniela, M. Sylvio Ferraz, & F. J. Angel, editor, *Asteroids, Comets, Meteors*, volume 229 of *IAU Symposium*, pages 215–228, 2006. 58, 64, 83, 85, 92, 93, 95, 96
- S. R. Chesley, P. W. Chodas, A. Milani, G. B. Valsecchi, and D. K. Yeomans. Quantifying the Risk Posed by Potential Earth Impacts. *Icarus*, 159 :423–432, October 2002. 22
- S. R. Chesley, S. J. Ostro, D. Vokrouhlický, D. Čapek, J. D. Giorgini, M. C. Nolan, J.-L. Margot, A. A. Hine, L. A. M. Benner, and A. B. Chamberlin. Direct Detection of the Yarkovsky Effect by Radar Ranging to Asteroid 6489 Golevka. *Science*, 302 :1739–1742, December 2003. 38
- S. R. Chesley, D. Vokrouhlický, S. J. Ostro, L. A. M. Benner, J.-L. Margot, R. L. Matson, M. C. Nolan, and M. K. Shepard. Direct Estimation of Yarkovsky Accelerations on Near-Earth Asteroids. *LPI Contributions*, 1405 :8330, 2008. 37
- S. R. Chesley, J. Baer, and D. G. Monet. Treatment of star catalog biases in asteroid astrometric observations. *Icarus*, 210 :158–181, November 2010. 90
- P. W. Chodas. Orbit uncertainties, keyholes, and collision probabilities. In *Bulletin of the American Astronomical Society*, volume 31 of *Bulletin of the American Astronomical Society*, pages 1117–+, 1999. 84
- A. Danjon. *Astronomie Générale. Astronomie sphérique et éléments de mécanique céleste*. Senac J.& R., 1959. 41
- M. Delbo' and P. Tanga. Thermal inertia of main belt asteroids smaller than 100 km from IRAS data. *Planet. Space Sci.*, 57 :259–265, February 2009. 37
- M. Delbò, A. Cellino, and E. F. Tedesco. Albedo and size determination of potentially hazardous asteroids : (99942) Apophis. *Icarus*, 188 :266–269, May 2007. 37, 73, 74
- M. Delbo', A. Dell'Oro, A. W. Harris, S. Mottola, and M. Mueller. Thermal inertia of near-Earth asteroids and implications for the magnitude of the Yarkovsky effect. *Icarus*, 190 :236–249, September 2007. 37
- A. dell'Oro and A. Cellino. Asteroid Sizes from Gaia Observations. In C. Turon, K. S. O'Flaherty, & M. A. C. Perryman, editor, *The Three-Dimensional Universe with Gaia*, volume 576 of *ESA Special Publication*, pages 289–+, January 2005. 110, 111
- M. Delva. A Lie integrator program and test for the elliptic restricted three body problem. *A&AS*, 60 :277–284, May 1985. 53
- J. Desmars, D. Bancelin, D. Hestroffer, and W. Thuillot. Asteroid Ephemerides. Technical report, IMCCE, Paris Observatory, September 2010. 30, 31, 32
- P. Deuffhard. Order and stepsize control in extrapolation methods. *Num. Math.*, 41 :399–422, 1983. 52
- A. D. Dubyago. *The determination of orbits*. The Macmillan company, 1961. 34, 41, 42
- J. Durech, D. Vokrouhlický, M. Kaasalainen, D. Higgins, Y. N. Krugly, N. M. Gaftonyuk, V. G. Shevchenko, V. G. Chiorny, H. Hamanowa, H. Hamanowa, V. Reddy, and R. R. Dyvig. Detection of the YORP effect in asteroid (1620) Geographos. *A&A*, 489 :L25–L28, October 2008. 40

- J. Durech, D. Vokrouhlicky, D. Polishook, Y. N. Krugly, N. M. Gaftonyuk, R. D. Stephens, B. D. Warner, M. Kaasalainen, J. Gross, W. Cooney, and D. Terrel. Detection of the YORP Effect in Asteroid (3103) Eger. In *AAS/Division for Planetary Sciences Meeting Abstracts #41*, volume 41 of *AAS/Division for Planetary Sciences Meeting Abstracts*, pages #56.04–+, September 2009. 40
- R. Dvorak and A. Hanslmeier. Numerical Integration with Lie-Series. In S. Ferraz-Mello & P. E. Nacozy, editor, *The Motion of Planets and Natural and Artificial Satellites*, pages 65–+, 1983. 54
- R. Dvorak and H. Lichtenegger. On the two-body problem with variable masses. In S. Ferraz-Mello & P. E. Nacozy, editor, *The Motion of Planets and Natural and Artificial Satellites*, pages 11–17, 1983. 54
- R. Dvorak and E. Pilat-Lohinger. On the dynamical evolution of the Atens and the Apollos. *Planet. Space Sci.*, 47 :665–677, May 1999. 54
- S. Eggl and R. Dvorak. An Introduction to Common Numerical Integration Codes Used in Dynamical Astronomy. In J. Souchay & R. Dvorak, editor, *Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag*, volume 790 of *Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag*, pages 431–480, March 2010. 54, 55, 56, 60, 61
- E. Everhart. Implicit Single-Sequence Methods for Integrating Orbits. *Celestial Mechanics*, 10 : 35–55, August 1974. 49, 51
- E. Everhart. An efficient Integrator that uses Gauss-Radau Spacings. *Dynamics of comets : Their Origin and Evolution*, page 185, 1985. 51
- P. Farinella, D. Vokrouhlicky, and W. K. Hartmann. Meteorite Delivery via Yarkovsky Orbital Drift. *Icarus*, 132 :378–387, April 1998. 38
- E. Fehlbberg. Low-order classical Runge-Kutta formulas with step size control and their application to some heat transfer problems. *NASA Technical Report*, 315, 1969. 49
- E. Fehlbberg. Klassische Runge-Kutta-Formeln vierter und niedrigerer Ordnung mit Schrittweiten-Kontrolle und ihre Anwendung auf Wärmeleitungsprobleme. *Computing (Arch. Elektron. Rechnen)*, 6 :61, 1970. 49
- A. Fujiwara, J. Kawaguchi, D. K. Yeomans, M. Abe, T. Mukai, T. Okada, J. Saito, H. Yano, M. Yoshikawa, D. J. Scheeres, O. Barnouin-Jha, A. F. Cheng, H. Demura, R. W. Gaskell, N. Hirata, H. Ikeda, T. Kominato, H. Miyamoto, A. M. Nakamura, R. Nakamura, S. Sasaki, and K. Uesugi. The Rubble-Pile Asteroid Itokawa as Observed by Hayabusa. *Science*, 312 :1330–1334, June 2006. 25, 26
- J. D. Giorgini, L. A. M. Benner, S. J. Ostro, M. C. Nolan, and M. W. Busch. Predicting the Earth encounters of (99942) Apophis. *Icarus*, 193 :1–19, January 2008. 36, 58
- B. J. Gladman, F. Migliorini, A. Morbidelli, V. Zappala, P. Michel, A. Cellino, C. Froeschle, H. F. Levison, M. Bailey, and M. Duncan. Dynamical lifetimes of objects injected into asteroid belt resonances. *Science*, 277 :197–201, 1997. 17
- A. E. Gleason, J. A. Larsen, A. S. Descour, and G. V. Williams. 2004 MN4. *Minor Planet Electronic Circulars*, pages 70–+, December 2004. 70
- R. Gomes, H. F. Levison, K. Tsiganis, and A. Morbidelli. Origin of the cataclysmic Late Heavy Bombardment period of the terrestrial planets. *Nature*, 435 :466–469, May 2005. 13

- J. C. Gradie, C. R. Chapman, and E. F. Tedesco. Distribution of taxonomic classes and the compositional structure of the asteroid belt. *Asteroids II*, pages 316–335, 1989. 13, 14
- W. Gröbner. Die Lie-Reihen und ihre Anwendungen. *VEB Deutscher Verlag*, 1967. 53, 55
- G. F. Gronchi. An Algebraic Method to Compute the Critical Points of the Distance Function Between Two Keplerian Orbits. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 93 :295–329, September 2005. 20
- G. F. Gronchi, G. Tommei, and A. Milani. Mutual geometry of confocal Keplerian orbits : uncertainty of the MOID and search for virtual PHAs. In G. B. Valsecchi, D. Vokrouhlický, & A. Milani, editor, *IAU Symposium*, volume 236 of *IAU Symposium*, pages 3–14, 2007. 20
- A. Hanslmeier and R. Dvorak. Numerical Integration with Lie Series. *A&A*, 132 :203–+, March 1984. 53, 54, 55, 61
- A. H. Harris, W. Benz, A. Fitzsimmons, S. F. Green, P. Michel, and G. B. Valsecchi. Space Missions Priorities for Near-Earth Objects Risk Assessment and Reduction. Technical report, ESA, July 2004. 28
- A. W. Harris. The Rotation Rates of Very Small Asteroids : Evidence for 'Rubble Pile' Structure. In *Lunar and Planetary Institute Science Conference Abstracts*, volume 27 of *Lunar and Planetary Inst. Technical Report*, pages 493–+, March 1996. 25
- A. R. Hildebrand, K. A. Carroll, E. F. Tedesco, D. R. Faber, R. D. Cardinal, R. Matthews, J. M. and Kuschnig, G. A. H. Walker, B. Gladman, J. Pazder, P. G. Brown, S. M. Larson, S. P. Worden, B. J. Wallace, P. W. Chodas, K. Muinonen, and A. Cheng. Advantages of Searching for Asteroids from Low Earth Orbit : the NEOSat Mission. *Earth Moon and Planets*, 95 :33–40, December 2004. 116
- J. L. Hilton. Asteroid Masses and Densities. *Asteroids III*, pages 103–112, 2002. 113
- E. Høg, C. Fabricius, V. V. Makarov, S. Urban, T. Corbin, G. Wycoff, U. Bastian, P. Schwekendiek, and A. Wicenec. The Tycho-2 catalogue of the 2.5 million brightest stars. *A&A*, 355 :L27–L30, March 2000. 102
- JPL. Earth Impact Risk Summary for 99942 Apophis (2004 MN4), 2011. <http://neo.jpl.nasa.gov/risk/a99942.html>, 2011a. 73
- JPL. NEO Discovery Statistics. <http://neo.jpl.nasa.gov/stats/>, 2011b. 28, 29
- JPL. Past Radar Astrometry, 2011. <http://ssd.jpl.nasa.gov/?radar&fmt=html&grp=ast>, 2011c. 72
- M. Kaasalainen, D. Hestroffer, and P. Tanga. Physical Models and Refined Orbits for Asteroids from Gaia Photometry and Astrometry. In C. Turon, K. S. O'Flaherty, & M. A. C. Perryman, editor, *The Three-Dimensional Universe with Gaia*, volume 576 of *ESA Special Publication*, pages 301–+, January 2005. 111
- M. Kaasalainen, J. Ďurech, B. D. Warner, Y. N. Krugly, and N. M. Gaftonyuk. Acceleration of the rotation of asteroid 1862 Apollo by radiation torques. *Nature*, 446 :420–422, March 2007. 40
- K. V. Kholshchevnikov and N. N. Vassiliev. On the Distance Function Between Two Keplerian Elliptic Orbits. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 75 :75–83, October 1999. 20

- Z. Knezevic, A. Lemaître, and A. Milani. The Determination of Asteroid Proper Elements. *Asteroids III*, pages 603–612, 2002. 18
- A. S. Konopliv, J. K. Miller, W. M. Owen, D. K. Yeomans, J. D. Giorgini, R. Garmier, and J.-P. Barriot. A Global Solution for the Gravity Field, Rotation, Landmarks, and Ephemeris of Eros. *Icarus*, 160 :289–299, December 2002. 19
- G. P. Kuiper. On the Origin of the Solar System. *Proceedings of the National Academy of Science*, 37 :1–14, January 1951. 13
- P. L. Lamy, L. Jorda, S. Fornasier, O. Groussin, M. A. Barucci, J. Carvano, E. Dotto, M. Fulchignoni, and I. Toth. Asteroid 2867 Steins. III. Spitzer Space Telescope observations, size determination, and thermal properties. *A&A*, 487 :1187–1193, September 2008. 37
- P. L. Lamy, O. Groussin, S. Fornasier, L. Jorda, M. Kaasalainen, and M. A. Barucci. Thermal properties of asteroid 21 Lutetia from Spitzer Space Telescope observations. *A&A*, 516 :A74+, June 2010. 37
- F. R. Lether. The Use of Richardson Extrapolation in One-Step Methods with Variable Step-Size. *Mathematics of Computation*, 20 :379, 1996. 52
- H. Lichtenegger. The dynamics of bodies with variable masses. *Celestial Mechanics*, 34 :357–368, December 1984. 53
- S. C. Lowry, A. Fitzsimmons, P. Pravec, D. Vokrouhlický, H. Boehnhardt, P. A. Taylor, J.-L. Margot, A. Galád, M. Irwin, J. Irwin, and P. Kusnirák. Direct Detection of the Asteroidal YORP Effect. *Science*, 316 :272–, April 2007. 40
- J. I. Lunine, G. Neugebauer, and B. M. Jakosky. Infrared observations of PHOBOS and Deimos from Viking. *J. Geophys. Res.*, 871 :10297–10305, November 1982. 37
- P. Magnusson, M. A. Barucci, J. D. Drummond, K. Lumme, S. J. Ostro, J. Surdej, R. C. Taylor, and V. Zappalà. Determination of pole orientations and shapes of asteroids. In R. P. Binzel, T. Gehrels, & M. S. Matthews, editor, *Asteroids II*, pages 66–97, 1989. 38
- F. Marchis, M. Kaasalainen, E. F. Y. Hom, J. Berthier, J. Enriquez, D. Hestroffer, D. Le Mignant, and I. de Pater. Shape, size and multiplicity of main-belt asteroids. I. Keck Adaptive Optics survey. *Icarus*, 185 :39–63, November 2006. 38
- B. G. Marsden. Nongravitational forces on comets. *NASA Special Publication*, 393 :465–488, 1976. 59
- W. J. Merline, S. J. Weidenschilling, D. D. Durda, J. L. Margot, P. Pravec, and A. D. Storrs. Asteroids Do Have Satellites. *Asteroids III*, pages 289–312, 2002. 37, 113
- P. Michel, F. Migliorini, A. Morbidelli, and V. Zappalà. The population of Mars-Crossers : Classification and dynamical evolution. *Icarus*, 145 :332–347, June 2000. 18
- F. Mignard, A. Cellino, K. Muinonen, P. Tanga, M. Delbò, A. Dell’Oro, M. Granvik, D. Hestroffer, S. Mouret, W. Thuillot, and J. Virtanen. The Gaia Mission : Expected Applications to Asteroid Science. *Earth Moon and Planets*, 101 :97–125, December 2007. 107, 108, 113
- A. Milani, S. R. Chesley, P. W. Chodas, and G. B. Valsecchi. Asteroid Close Approaches : Analysis and Potential Impact Detection. *Asteroids III*, pages 55–69, 2002. 78

- A. Milani, S. R. Chesley, M. E. Sansaturio, G. Tommei, and G. B. Valsecchi. Nonlinear impact monitoring : line of variation searches for impactors. *Icarus*, 173 :362–384, February 2005. 80
- A. Morbidelli. *Modern celestial mechanics : aspects of solar system dynamics*. 2002. 16
- A. Morbidelli and B. Gladman. Orbital and temporal distributions of meteorites originating in the asteroid belt. *Meteoritics and Planetary Science*, 33 :999–1016, September 1998. 16, 17
- A. Morbidelli and D. Vokrouhlický. The Yarkovsky-driven origin of near-Earth asteroids. *Icarus*, 163 :120–134, May 2003. 39, 40
- A. Morbidelli, W. F. Bottke, Jr., C. Froeschlé, and P. Michel. Origin and Evolution of Near-Earth Objects. *Asteroids III*, pages 409–422, 2002. 16
- D. Morrison, C. R. Chapman, and P. Slovic. The Impact Hazard. In T. Gehrels, M. S. Matthews, & A. M. Schumann, editor, *Hazards Due to Comets and Asteroids*, pages 59–+, 1994. 23
- S. Mottola, E. Kuehrt, H. Michaelis, H. Hoffmann, P. Spietz, F. Jansen, G. Thimo Grundmann, J. and Hahn, S. Montenegro, R. Findlay, A. Boerner, G. Messina, T. Behnke, M. Tschentscher, K. Scheibe, V. Mertens, and A. Heidecke. The DLR AsteroidFinder for NEOs. In *38th COSPAR Scientific Assembly*, volume 38, pages 4261–+, 2010. 116
- S. Mouret, D. Hestroffer, and F. Mignard. Asteroid masses and improvement with Gaia. *A&A*, 472 :1017–1027, September 2007. 114
- M. Mueller, F. Marchis, J. P. Emery, A. W. Harris, S. Mottola, D. Hestroffer, J. Berthier, and M. di Martino. Eclipsing binary Trojan asteroid Patroclus : Thermal inertia from Spitzer observations. *Icarus*, 205 :505–515, February 2010. 37
- G. Mühlbach. The General Neville-Aitken-Algorithm and Some Applications. *Numerische Mathematik*, 31 :97, 1978. 52
- K. Muinonen and E. Bowell. Asteroid orbit determination using Bayesian probabilities. *Icarus*, 104 :255–279, August 1993. 112
- K. Muinonen, J. Virtanen, and E. Bowell. Collision Probability for Earth-Crossing Asteroids Using Orbital Ranging. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 81 :93–101, 2001. 113
- K. Muinonen, J. Virtanen, M. Granvik, and T. Laakso. Asteroid orbits using phase-space volumes of variation. *MNRAS*, 368 :809–818, May 2006. 112
- N. Murray and M. Holman. Diffusive chaos in the outer asteroid belt. *AJ*, 114 :1246–1259, September 1997. 18
- N. Murray, M. Holman, and M. Potter. On the Origin of Chaos in the Asteroid Belt. *AJ*, 116 : 2583–2589, November 1998. 17
- NASA. *Near-Earth Object Survey and Deflection Analysis of Alternatives*, March 2007. Report to Congress. 30
- D. Nesvorný and A. Morbidelli. Three-Body Mean Motion Resonances and the Chaotic Structure of the Asteroid Belt. *AJ*, 116 :3029–3037, December 1998. 17
- D. Nesvorný and A. Morbidelli. An Analytic Model of Three-Body Mean Motion Resonances. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 71 :243–271, 1999. 17

- D. Nesvorný, S. Ferraz-Mello, M. Holman, and A. Morbidelli. Regular and Chaotic Dynamics in the Mean-Motion Resonances : Implications for the Structure and Evolution of the Asteroid Belt. *Asteroids III*, pages 379–394, 2002. 17
- E. J. Öpik. Collision probability with the planets and the distribution of planetary matter. *Proc. R. Irish Acad. Sect. A*, vol. 54, p. 165-199 (1951)., 54 :165–199, 1951. 38, 77
- E. J. Öpik. *Interplanetary encounters : close-range gravitational interactions*. 1976. 77
- Orlov B. A. Orlov, A. Y. Kurs teoreticheskoi astronomii (Course in Theoretical Astronomy). 1940. 41
- S. J. Ostro, R. S. Hudson, L. A. M. Benner, J. D. Giorgini, C. Magri, J. L. Margot, and M. C. Nolan. Asteroid Radar Astronomy. *Asteroids III*, pages 151–168, 2002. 38
- C. Peterson. A source mechanism for meteorites controlled by the Yarkovsky effect. *Icarus*, 29 : 91–111, September 1976. 38
- J. Y. Prado, D. Bancelin, F. Colas, D. Hestroffer, and W. Thuillot. APOPHIS : Impact risks for the long-term. Planetary Defense Conference, Bucarest, March 2011. 94
- P. Pravec and A. W. Harris. Fast and Slow Rotation of Asteroids. *Icarus*, 148 :12–20, November 2000. 25
- W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical recipes in Fortran 77*. Cambridge University Press, 1992. 51
- D. Rabinowitz, E. Helin, K. Lawrence, and S. Pravdo. A reduced estimate of the number of kilometre-sized near-Earth asteroids. *Nature*, 403 :165–166, January 2000. 23
- H. P. Robertson. Dynamical effects of radiation in the solar system. *MNRAS*, 97 :423–+, April 1937. 41
- D. P. Rubincam. Radiative Spin-up and Spin-down of Small Asteroids. *Icarus*, 148 :2–11, November 2000. 40
- D. P. Rubincam. Yarkovsky thermal drag on LAGEOS. *J. Geophys. Res.*, 93 :13805–13810, 1988. 38
- D. P. Rubincam. Yarkovsky thermal drag on small asteroids and Mars-Earth delivery. *J. Geophys. Res.*, 103 :1725–+, January 1998. 38
- M. E. Sansaturio and O. Arratia. Apophis : the Story Behind the Scenes. *Earth Moon and Planets*, 102 :425–434, June 2008. 68
- D. J. Scheeres. The dynamical evolution of uniformly rotating asteroids subject to YORP. *Icarus*, 188 :430–450, June 2007. 40
- G. Sitarski. Approaches of the Parabolic Comets to the Outer Planets. *Acta Astron.*, 18 :171–+, 1968. 20
- T. S. Statler. Extreme sensitivity of the YORP effect to small-scale topography. *Icarus*, 202 : 502–513, August 2009. 40
- J. Stoer and R. Bulirsch. Introduction to Numerical Analysis. *Introduction to Numerical Analysis, Second Edition, New York*, 1980. 51

- P. Tanga. The Solar System as seen by Gaia. *Pisa workshop "Solar System science with Gaia"*, 2011. 107, 108, 115
- P. A. Taylor, J.-L. Margot, D. Vokrouhlický, D. J. Scheeres, P. Pravec, S. C. Lowry, A. Fitzsimmons, M. C. Nolan, S. J. Ostro, L. A. M. Benner, J. D. Giorgini, and C. Magri. Spin Rate of Asteroid (54509) 2000 PH5 Increasing Due to the YORP Effect. *Science*, 316 :274–, April 2007. 40
- D. J. Tholen. *Asteroid taxonomy from cluster analysis of Photometry*. PhD thesis, Arizona Univ., Tucson., 1984. 26
- C. L. Thornton and J. S. Border. Radiometric Tracking Techniques for Deep-Space Navigation. In Yuen J.H., editor, *Deep-Space Communications and Navigation Series*, 2003. 72
- W. Thuillot. Ground-based follow-up of asteroids observed by Gaia. *Pisa workshop "Solar System science with Gaia"*, 2011. 128
- W. Thuillot, D. Hestroffer, and P. Tanga. Complementary ground-based observations for Solar System applications. In *EAS Publications Series*, volume 45 of *EAS Publications Series*, pages 237–242, February 2011. 127
- I. Toth. Search for comet-like activity in asteroid 7968 Elst-Pizarro and limitation of its rotational pole orientation. *A&A*, 446 :333–343, January 2006. 41
- K. Tsiganis. Early dynamical evolution of the Solar System : constraints from asteroid and KBO dynamics. In D. W. Kurtz, editor, *IAU Colloq. 196 : Transits of Venus : New Views of the Solar System and Galaxy*, pages 279–292, April 2005. 13, 15
- K. Tsiganis, R. Gomes, A. Morbidelli, and H. F. Levison. Origin of the orbital architecture of the giant planets of the Solar System. *Nature*, 435 :459–461, May 2005. 12
- G. B. Valsecchi, A. Milani, G. F. Gronchi, and S. R. Chesley. Resonant returns to close approaches : Analytical theory. *A&A*, 408 :1179–1196, September 2003. 78, 84
- P. Vereš, R. Jedicke, R. Wainscoat, M. Granvik, S. Chesley, S. Abe, L. Denneau, and T. Grav. Detection of Earth-impacting asteroids with the next generation all-sky surveys. *Icarus*, 203 : 472–485, October 2009. 29
- J. Veverka, M. Robinson, P. Thomas, S. Murchie, J. F. Bell, N. Izenberg, C. Chapman, A. Harch, M. Bell, B. Carcich, A. Cheng, B. Clark, D. Domingue, D. Dunham, R. Farquhar, M. J. Gaffey, E. Hawkins, J. Joseph, R. Kirk, H. Li, P. Lucey, M. Malin, P. Martin, L. McFadden, W. J. Merline, J. K. Miller, W. M. Owen, C. Peterson, L. Prockter, J. Warren, D. Wellnitz, B. G. Williams, and D. K. Yeomans. NEAR at Eros : Imaging and Spectral Results. *Science*, 289 : 2088–2097, September 2000. 26
- J. Virtanen, K. Muinonen, and E. Bowell. Statistical Ranging of Asteroid Orbits. *Icarus*, 154 : 412–431, December 2001. 34, 42, 44, 113
- D. Vokrouhlický. Diurnal Yarkovsky effect as a source of mobility of meter-sized asteroidal fragments. I. Linear theory. *A&A*, 335 :1093–1100, July 1998. 38
- D. Vokrouhlický and P. Farinella. The Yarkovsky Seasonal Effect on Asteroidal Fragments : A Nonlinearized Theory for Spherical Bodies. *AJ*, 118 :3049–3060, December 1999. 38
- D. Vokrouhlický and P. Farinella. Orbital evolution of asteroidal fragments into the nu₆ resonance via Yarkovsky effects. *A&A*, 335 :351–362, July 1998. 38

-
- D. Vokrouhlický and A. Milani. Direct solar radiation pressure on the orbits of small near-Earth asteroids : observable effects ? *A&A*, 362 :746–755, October 2000. 40
- H. J. Wood and G. P. Kuiper. Photometric studies of asteroids *XI*. *Publications of the Goethe Link Observatory*, 53 :1279–1285, 1963. 26
- S. Xu, R. P. Binzel, T. H. Burbine, and S. J. Bus. Small main-belt asteroid spectroscopic survey : Initial results. *Icarus*, 115 :1–35, May 1995. 27
- B. Zellner, D. J. Tholen, and E. F. Tedesco. The eight-color asteroid survey - Results for 589 minor planets. *Icarus*, 61 :355–416, March 1985. 26