



HAL
open science

Imagerie de Réflecteurs Electromagnétiques en Régime Diffusif: Méthode et Applications en Géophysique

Benoît Tournerie

► **To cite this version:**

Benoît Tournerie. Imagerie de Réflecteurs Electromagnétiques en Régime Diffusif: Méthode et Applications en Géophysique. Géophysique [physics.geo-ph]. Université Rennes 1, 1995. Français. NNT: . tel-00675894

HAL Id: tel-00675894

<https://theses.hal.science/tel-00675894>

Submitted on 2 Mar 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

B. TOURNERIE

ISSN 1240-1498

ISBN 2-905532-69-6

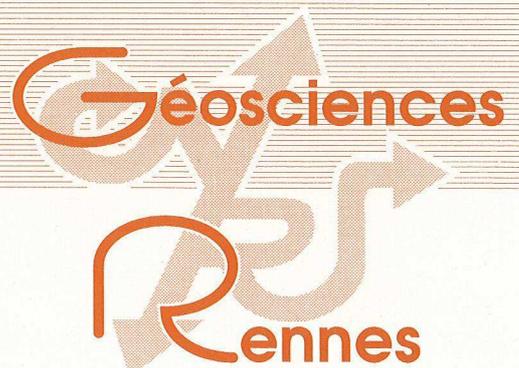
**imagerie de réflecteurs
électromagnétiques
en régime diffusif**

**METHODE ET APPLICATIONS
EN GEOPHYSIQUE**

MEMOIRES

1996

n° 70



MEMOIRES DE GEOSCIENCES - RENNES

n° 70

Benoît TOURNERIE

**IMAGERIE DE REFLECTEURS ELECTROMAGNETIQUES
EN REGIME DIFFUSIF :
Méthode et Applications en Géophysique**

**Thèse de Doctorat de l'Université de Rennes I
soutenue le 1er Décembre 1995**

**Géosciences - Rennes
UPR-CNRS n°4661
Université de Rennes I
Campus de Beaulieu
F - 35042 - RENNES Cédex
(France)**

1995

ISSN : 1240-1498

ISBN : 2-905532-69-6

1995

**GEOSCIENCES-RENNES
UPR-CNRS n°4661
Université de Rennes I - Campus de Beaulieu
F-35042-RENNES Cédex (France)**

Benoît TOURNERIE

**Imagerie de Réflecteurs Electromagnétiques en Régime Diffusif :
Méthode et Applications en Géophysique.**

Mémoires de Géosciences Rennes, n° 70, 165 p.

Je tiens à remercier Dominique Gibert pour m'avoir accueilli dans le laboratoire de géophysique de Géosciences Rennes. Sa disponibilité, ses conseils et encouragements, sa gentillesse, sa bonne humeur quotidienne, ont contribué au bon déroulement de cette thèse.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Christian Willaime pour avoir accepté de présider mon jury de thèse.

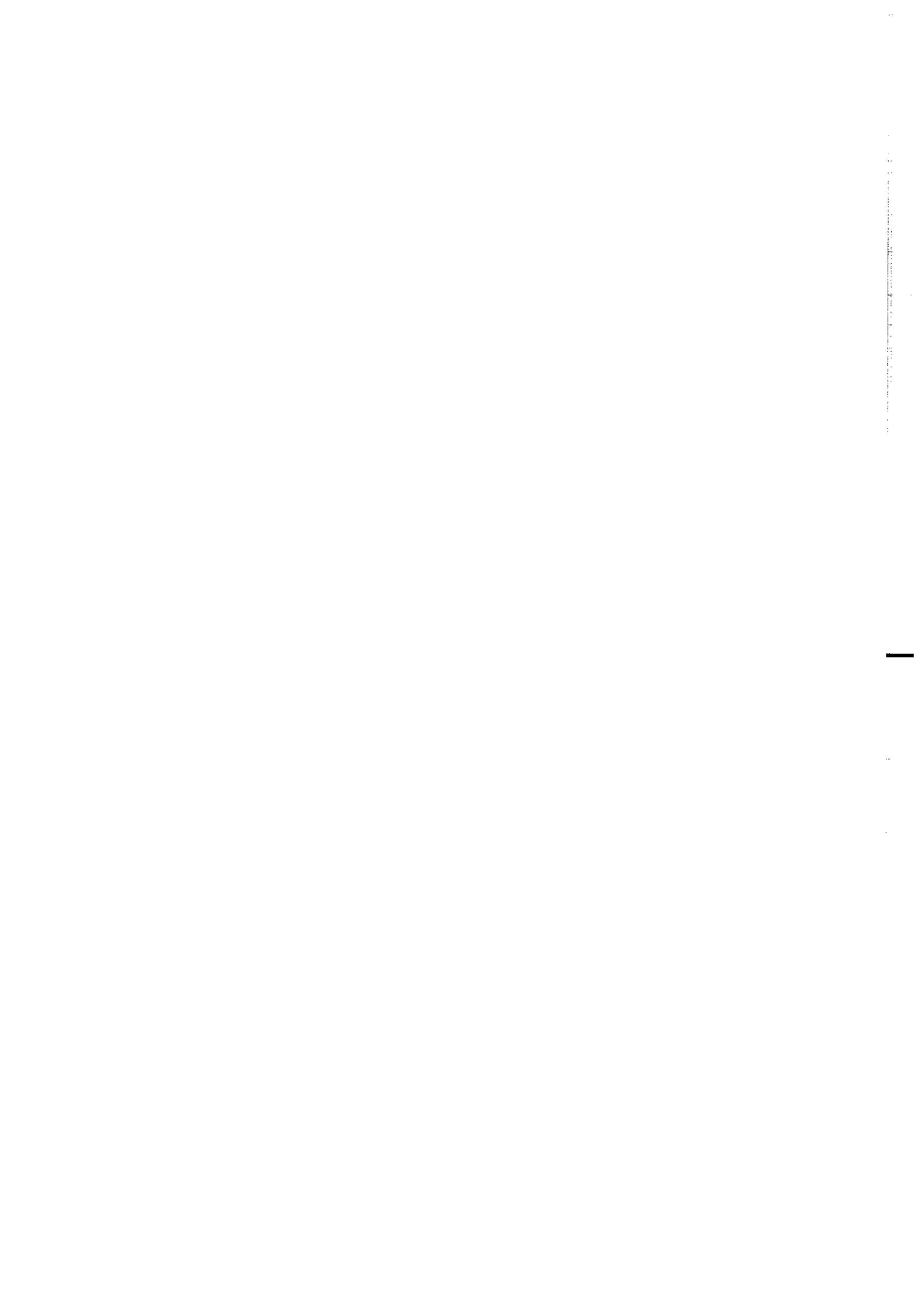
Je remercie vivement Michel Chouteau d'avoir accepté d'être l'un des rapporteurs de ce travail, et aussi de nous avoir prêté le matériel magnétotellurique de l'école Polytechnique sans lequel le levé ARMOR n'aurait pu se faire (pensée également pour Marianne Mareschal). Ces remerciements vont également à Jean Virieux qui a dit oui à la charge de rapporteur, et qui a suivi de près et de loin le déroulement de cette thèse, à Philippe Côte et Pol Guennoc pour avoir accepté de faire partie de mon jury, à Guy Marquis pour sa participation au jury et pour l'aide précieuse qu'il m'a apportée pendant et après la mission ARMOR.

Je dis un grand merci à Ginette, Florence et Annick pour leurs commentaires sur ce mémoire, à Jean Pierre pour le temps passé à m'expliquer la géologie du Cadomien, à Bernard pour le coup de main sur ARMOR.

Je tiens à exprimer toute ma sympathie aux personnes du laboratoire de géophysique, aux occupants du bureau 211, à tous mes camarades de promotions (DEA et thèse), et aux amis cotoyés à Géosciences Rennes pendant toutes ces années.

Abstract

A means of low frequency electromagnetic structural imaging similar to that used seismic consists of an integral equation that transforms a diffusive field to a dual propagative. This transformation involves a Fredholm integral equation of the first kind for which the inversion is poorly constrained due to noisy or incomplete data. The introduction of a priori information on the solution, which is needed to stabilize the inverse problem, allows a numerical inversion of the integral to be developed. Coupling both the simulated annealing algorithm and the downhill simplex method allows us to work in the continuous space of the solution. Results on synthetic models show that reflectors associated with the edges of conductive blocks are well localized. The magnitude and the sign of the amplitude are important information for the estimation of the resistivities of the blocks. The approach was validated by applying our imaging method to the COPROD2 data set (Canada) and comparing the results with other geophysical sections. A second application was performed with a data set recorded by our team during summer 1995 along the seismic reflection profile *ARMOR* in Brittany (France). Preliminary results show that two domains separated by a contact along the Baie de la Fresnaye have opposing resistive characteristics: resistive strata overlie conductive strata to the north of the contact; conductive strata overlie resistive strata to the south. Static corrections and more inversions need to be done before complete interpretation of the section can be proposed.



SOMMAIRE

Abstract	v
I INTRODUCTION GÉNÉRALE	1
II DE L'ÉQUATION DE DIFFUSION À L'ÉQUATION DES ONDES	7
III RÉOLUTION DE L'ÉQUATION INTÉGRALE	13
1 Introduction	15
2 Expression de l'intégrale	17
3 Calcul des fonctions propres et des valeurs propres	19
a Expression générale	19
b Fonctions et valeurs propres pour $s=1/2 + i\xi$	20
c Symétrie et orthogonalité des fonctions propres	21
d Conclusion	22
4 Reconstruction de la solution	23
5 Spectre des valeurs propres — Effet du bruit	25
a Étude du spectre des valeurs propres	25
b Effet du bruit	26
c Exemple	28
d Conclusion	31
6 Conclusion	33

IV	ALGORITHME DE L'INVERSION NUMÉRIQUE	35
1	Introduction	37
2	Informations a priori et paramètres de l'inversion	39
3	Algorithme de l'inversion	43
	a Le recuit simulé	43
	b La méthode de descente du simplexe	44
	c L'évolution de la température	46
	d Exemple de recherche du minimum d'une fonction	50
4	Conclusion	53
V	TESTS SYNTHÉTIQUES	55
1	Introduction	57
2	Les données et représentation des résultats	59
	a Les données	59
	b Représentation des résultats	61
3	Inversion de modèles 1D	63
	a Les modèles	63
	b Les résultats	63
	c Bilan	68
4	Inversion de modèles 2D	69
	a Préambule	69
	b Modèle BISEAU	69
	c Modèle FAILLE	75

d	Modèle VARLAT	80
e	Bilan	85
5	Conclusion	87
VI	APPLICATIONS DE TERRAIN	89
1	Introduction	91
2	Données COPROD2 — CANADA	93
a	Présentation	93
b	Article publié dans Geophysical Research Letters	94
c	Discussion	99
3	Données ARMOR — FRANCE	105
a	Présentation générale	105
b	Les levés magnétotelluriques	105
c	Les données	111
d	Inversion et discussion	117
4	Conclusion	125
VII	CONCLUSION et PERSPECTIVES	127
ANNEXE 1	Rapport entre les termes diffusif et propagatif de l'équation du télégraphiste.	131
ANNEXE 2	Calcul de l'épaisseur de peau δ	137
ANNEXE 3	Article Inverse Problem	141

BIBLIOGRAPHIE 157

I
INTRODUCTION GÉNÉRALE



L'essor de l'industrie pétrolière a, dans les années 30, conduit à l'apparition de la prospection géophysique dont l'objectif était de fournir aux foreurs des informations sur la structure du sous-sol. Les premières techniques employées — grâce notamment aux frères *Schlumberger* — furent les méthodes électriques, puis celles utilisant les champs électromagnétiques. Après la seconde guerre mondiale et l'invention du sonar, la sismique fit son apparition. L'atout majeur de cette méthode — dont le principe est l'échographie — est de fournir des informations simples à interpréter : les images obtenues en sismique réflexion, même sans traitements sophistiqués, fournissent souvent des informations suffisantes sur les structures du sous-sol. Par opposition, l'inconvénient majeur de l'électromagnétisme est que les champs qui pénètrent suffisamment profond dans le sous-sol diffusent au lieu de se propager à l'instar des ondes élastiques. Le principe de l'échographie ne peut plus être directement utilisé pour reproduire des images de la structure du sous-sol, et l'interprétation des mesures électromagnétiques relève généralement du travail d'expert. Cette différence fit rapidement de la sismique la technique reine de la géophysique pétrolière, reléguant les autres méthodes au rang d'accessoires.

Aujourd'hui, l'électromagnétisme est pratiquement absent de la scène de la géophysique pétrolière et son utilisation principale est en physique du Globe où son intérêt est majeur pour étudier la structure de la croûte, de la lithosphère et du manteau supérieur.

Néanmoins, la géophysique industrielle change, ses objectifs se modifient : on n'a plus seulement besoin de connaître le sous-sol pour trouver du pétrole, mais aussi pour l'exploration minière, percer des tunnels, trouver de l'eau, contrôler des sites pollués. Face à ces nouveaux besoins, la sismique n'est plus la méthode reine soit parce qu'elle réagit peu aux cibles à détecter, soit parce que son efficacité est diminuée. A l'opposé, la plus faible profondeur des terrains à sonder et les progrès de l'électronique rendent les méthodes électromagnétiques plus performantes et de nombreux équipements sont aujourd'hui disponibles sur le marché. Paradoxalement, ces avancées technologiques n'ont pas été accompagnées de progrès équivalents en ce qui concerne les méthodes d'interprétation des données : les algorithmes actuels sont généralement conçus pour reconstruire la distribution de conductivité électrique du sous-sol.

Suggérée il y a une vingtaine d'année, la notion de réflectivité électromagnétique (par analogie avec la notion de réflectivité sismique) n'a été que fort peu considérée. Les premiers travaux concernant la migration électromagnétique ont été réalisés par [Zhdanov and Frenkel, 1983] et [Filatov, 1984] et différentes formulations du problème ont été proposées par [Lee *et al.*, 1987, Virieux *et al.*, 1994]. Cette lacune est probablement explicable par le fait que le champ électromagnétique est diffusif tandis que la réflectivité est clairement attachée à la physique ondulatoire. Rien cependant ne s'oppose à l'utilisation de ce concept dans le cas de champs

diffusifs si ce n'est que l'obtention directe d'images échographiques n'est pas possible.

L'objectif de cette thèse est d'explorer les voies par lesquelles cette notion pourrait être utilisée pour construire de nouvelles méthodes d'imagerie en électromagnétisme fournissant des images analogues aux classiques sections sismiques non migrées. Les études les plus directement rattachées à cette idée sont ceux de [Levy *et al.*, 1988] et [Gibert and Virieux, 1991]. Cette approche peut être considérée comme une étape intermédiaire vers l'objectif plus idéaliste qui consiste à réaliser une migration électromagnétique équivalente à ce qui se fait en sismique.

Pour obtenir ces images de la réflectivité électromagnétique du sous-sol, il est nécessaire de préalablement transformer le champ diffusif en un analogue ondulatoire susceptible de révéler les échos électromagnétiques masqués par la diffusion. Cette relation introduite dans le chapitre [II] nous montre que rechercher la distribution des conductivités électriques du sous-sol est un analogue à la tomographie sismique dont le faible pouvoir de résolution est bien connu.

Le chapitre [III] est consacré à l'étude théorique de l'équation transformante. Une première étape consiste à rechercher une solution formelle donnant le champ propagatif en fonction de son analogue diffusif. L'analyse du comportement de cette solution face à des données bruitées et/ou incomplètes nous indique que cette transformation constitue un difficile problème inverse dont la non-linéarité et l'aspect mal posé sont très proches de ceux rencontrés dans l'inversion numérique de la transformée de Laplace. Cette analyse nous donne également les conditions requises pour le développement d'une approche numérique de haute résolution.

Les récents progrès de la théorie des problèmes inverses ont produits des algorithmes très efficaces pour traiter le genre de problème auxquels nous sommes confrontés et nous montrons dans le chapitre [IV] comment les techniques du recuit simulé — dont le principe est emprunté à la physique statistique — couplées avec la méthode de descente du simplexe peuvent être utilisées pour explorer l'espace continu des solutions et pour obtenir celle représentant le mieux les données.

Des applications de la méthode sont présentées dans le chapitre [V] où différents modèles synthétiques 1D et 2D ont été analysés. Nous présentons les résultats sous forme de deux pseudo-sections (pseudo-traces sismiques et courbes des probabilités) dont la superposition donne accès à l'image de la réflectivité électromagnétique liées à un modèle de résistivité.

Le dernier chapitre (chapitre [VI]) présente l'application de notre méthode sur des données magnétotelluriques de terrain. La première est réalisée avec des données enregistrées au *Canada* (données *COPROD2*) dans le bassin de *Williston (Saskatchewan)*. Ces données ont été fournies par *A. Jones (Geological Survey of Canada)* dans le cadre d'un projet de comparaison de diverses méthodes d'inversion. Elles ont été analysées dans le cadre de ce travail pour tester notre méthodes sur de vraies données. La seconde application consiste au traitement des données magnétotelluriques

ARMOR (programme *GeoFrance 3D*) que nous avons enregistrées durant l'été 1995. La proximité des dates d'acquisitions fait que nous ne présentons ici que quelques résultats préliminaires de l'étude des résistivités apparentes et des phases.



II
DE L'ÉQUATION DE DIFFUSION
À L'ÉQUATION DES ONDES



Réaliser une image de la structure ou des propriétés physiques des roches du sous-sol est l'objet de nombreuses méthodes d'exploration de la géophysique. Les informations obtenues après l'analyse de ces "coupes" sont d'un grand intérêt pour la compréhension de la structure étudiée et pour son interprétation géologique. Ces méthodes d'exploration trouvent de nombreuses applications dans la recherche pétrolière, minière ou d'aquifère du fait des relations reliant la nature des roches et leurs propriétés physiques.

Parmi ces méthodes, l'électromagnétisme est défini à partir de l'analyse des champs électriques et magnétiques modifiés par le sous-sol. Le paramètre que l'on recherche est la distribution de la résistivité électrique ρ (ou de la conductivité $\sigma = 1/\rho$) en fonction de la profondeur. Ce paramètre variant de plusieurs ordres de grandeur suivant la nature des roches, les méthodes électromagnétiques apparaissent bien adaptées pour la caractérisation des roches ou des structures géologiques du sous-sol.

Les lois physiques décrivant le comportement du champ électromagnétique sont données par les *équations de Maxwell* (milieu isotrope) :

$$\begin{cases} (1) & \nabla \times \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ (2) & \nabla \times \mathbf{h}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{d}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ (3) & \nabla \cdot \mathbf{d}(\mathbf{r}, t) = q \\ (4) & \nabla \cdot \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) = 0 \end{cases} \quad (\text{éq. II.1.1})$$

avec :

- $\mathbf{e}(\mathbf{r}, t)$: champ électrique [$V.m^{-1}$],
- $\mathbf{d}(\mathbf{r}, t)$: champ de déplacement électrique [$C.m^{-2}$],
- $\mathbf{h}(\mathbf{r}, t)$: champ magnétique [$A.m^{-1}$],
- $\mathbf{b}(\mathbf{r}, t)$: champ d'induction magnétique [$Wb.m^{-2}$],
- $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$: densité de courant électrique [$A.m^{-2}$],
- q : densité de charge [$C.m^{-3}$],

La permittivité diélectrique $\varepsilon(\mathbf{r})$ ($[F.m^{-1}]$) est définie par $\mathbf{d}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{e}(\mathbf{r}, t)$. La conductivité électrique $\sigma(\mathbf{r})$ ($[\Omega^{-1}.m^{-1}]$) est donnée par la loi d'Ohm $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sigma(\mathbf{r})\mathbf{e}(\mathbf{r}, t)$. La perméabilité magnétique μ ($[H.m^{-1}]$) relie entre eux le champ magnétique et le champ d'induction par $\mathbf{b}(\mathbf{r}, t) = \mu\mathbf{h}(\mathbf{r}, t)$. Nous ferons ici l'hypothèse selon laquelle μ est donnée par sa valeur dans

le vide, c'est à dire $\mu \simeq \mu_0 = 4\pi 10^{-7} H.m^{-1}$.

En calculant le rotationnel de la première équation de Maxwell, nous obtenons

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) + \mu \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times \mathbf{h}(\mathbf{r}, t)] = 0, \quad (\text{éq. II.1.2})$$

qui devient, en utilisant la seconde équation de Maxwell et la loi d'Ohm,

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) + \mu\sigma(\mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mu\varepsilon(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 \mathbf{e}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{éq. II.1.3})$$

Cette équation porte le nom de *l'équation du télégraphiste*. L'analyse du rapport entre les deux termes de différenciation par rapport au temps de cette équation (voir annexe [1]) nous montre que l'étude des structures profondes du sous sol passe par l'analyse du champ électromagnétique sur de basses fréquences ($< 10^5$ Hz). Dans ces conditions, l'équation [II.1.3] se simplifie par l'équation de diffusion

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) + \mu\sigma(\mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0. \quad (\text{éq. II.1.4})$$

C'est à partir de cette équation, ou plus précisément des équations de Maxwell associées dans lesquelles on néglige le courant de déplacement $\frac{\partial \mathbf{d}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$ de l'équation [II-(2)] :

$$\begin{cases} (1) & \nabla \times \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) = -\mu \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ (2) & \nabla \times \mathbf{h}(\mathbf{r}, t) = \sigma(\mathbf{r}) \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) \\ (3) & \nabla \cdot \mathbf{d}(\mathbf{r}, t) = q \\ (4) & \nabla \cdot \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) = 0, \end{cases} \quad (\text{éq. II.1.5})$$

que l'électromagnétisme basses fréquences s'est développé, dont en particulier la méthode magnétotellurique [Cagniard, 1953b]. Une description générale des différentes méthodes est donnée dans [Nabighian, 1987, Valla, 1991, Weaver, 1994, Zhdanov and Keller, 1994].

D'une manière générale, les méthodes électromagnétiques mises en oeuvre actuellement recherchent à déterminer la loi de conductivité du milieu à partir de données enregistrées en surface. La particularité de ces méthodes est qu'elles travaillent (inversion des données) dans le domaine diffusif du champ : on essaie de résoudre les équations de Maxwell pour le domaine étudié. Les résultats de ce type d'approche restent parfois ambigus comme l'illustre l'article de [Jones, 1993] où différents algorithmes ont analysé un même jeu de données (voir figure [VI.3], chapitre [VI]) : de grandes variations sont visibles au niveau de la résolution des structures apparentes entre les différentes sections proposées.

Une alternative à ces méthodes consiste à développer des algorithmes inspirés de la sismique. Il peut s'agir par exemple d'adapter au problème diffusif soit des méthodes de migration issues de la sismique [Zhdanov and Frenkel, 1983, Zhdanov *et al.*, 1994, Lee *et al.*, 1987] soit des méthodes de tracés de rais asymptotiques [Virieux *et al.*, 1994].

Une autre possibilité consiste à ne plus étudier le problème en terme de conductivité électrique, mais en terme de structures conductrices dans le but de cartographier les bordures ou interfaces des objets étudiés. Cette approche est similaire à celle permettant d'obtenir les sections (x,t) de la sismique cartographiant des couches à vitesses de propagation constantes. Dans le but d'utiliser les connaissances et le savoir faire des analyses dans le régime propagatif, une solution consiste à transposer le problème diffusif dans le domaine propagatif, c'est à dire :

• Développer une méthode d'imagerie électromagnétique basses fréquences cartographiant les limites des structures conductrices du sous sol par transformation du champ diffusif en un dual propagatif.

Ce type d'approche en électromagnétisme a fait l'objet d'études par d'autres auteurs tels que [Kunetz, 1972, Levy *et al.*, 1988, Zorgati, 1990, Lee and Xie, 1993]. L'équation reliant entre eux un champ diffusif $\mathbf{d}(\mathbf{r}, t)$ (ne pas confondre avec le courant de déplacement) et un champ propagatif $\mathbf{w}(\mathbf{r}, q)$, vérifiant respectivement les équations suivantes :

$$\begin{cases} \nabla \times \nabla \times \mathbf{d}(\mathbf{r}, t) + \mu\sigma(\mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{d}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mathbf{s}_d(\mathbf{r}, t) \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{w}(\mathbf{r}, q) + \frac{1}{c^2(\mathbf{r})} \frac{\partial^2 \mathbf{w}(\mathbf{r}, q)}{\partial q^2} = \mathbf{s}_w(\mathbf{r}, q) \end{cases} \quad (\text{éq. II.1.6})$$

où $\mathbf{s}_d(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{s}_w(\mathbf{r}, q)$ représentent les termes sources, est une équation intégrale de Fredholm de 1^{ère} espèce. Elle est donnée par [Bragg and Dettman, 1968, Filippi and Frisch, 1969, Isaev and Filatov, 1981, Filatov, 1984, Lee *et al.*, 1989] :

$$\mathbf{d}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}} \int_0^{+\infty} q \exp\left(-\frac{q^2}{4t}\right) \mathbf{w}(\mathbf{r}, q) dq, \quad (\text{éq. II.1.7})$$

Il est important de noter d'une part que le pseudo-temps q a pour dimension la racine carré du temps physique t (\sqrt{s}), et que, d'autre part, la vitesse de propagation du champ propagatif $\mathbf{w}(\mathbf{r}, q)$ est fonction de la conductivité puisque

$$c(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\mu\sigma(\mathbf{r})}}, \quad (\text{éq. II.1.8})$$

et s'exprime en $m.s^{-1/2}$. Par le biais de cette expression, nous voyons qu'une méthode d'imagerie où l'on va rechercher la loi de conductivité $\sigma(\mathbf{r})$ est similaire à une imagerie en terme de loi

de vitesse de propagation $c(\mathbf{r})$ connue pour être de faible résolution. Ceci nous conforte dans le caractère inapproprié de ce genre de méthode pour une haute résolution des structures. De plus, nous voyons dans l'équation [II.1.7] que la transformation ne s'opère que sur la variable temporelle. La transformation spatiale est implicite et, dans la suite de ce document, cette dépendance ne sera plus mentionnée dans les équations. Cependant, pour ne pas oublier cette dépendance, nous écrirons par la suite les champs diffusif et propagatif en majuscule : $\mathbf{D}(t)$ et $\mathbf{W}(q)$.

Des études concernant l'inversion de l'équation [II.1.7] sont présentées dans [Lee and Xie, 1993, Wilson, 1994]. Cependant, comme les mesures de terrain en électromagnétisme sont généralement exprimées en fonction de la fréquence (exemple $[\rho_a, \phi](\omega)$ en magnétotellurique), il nous a semblé plus approprié d'étudier la transformée de Fourier définie par

$$\begin{cases} TF & \tilde{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt, \\ TF^{-1} & f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{F}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega, \end{cases} \quad (\text{éq. II.1.9})$$

de l'équation [II.1.7] (dépendance du champ en $\exp(i\omega t)$) et donnée par :

$$\tilde{\mathbf{D}}(\omega) = \int_0^{+\infty} \exp(-q\sqrt{i\omega}) \mathbf{W}(q) dq. \quad (\text{éq. II.1.10})$$

Cette équation constitue le point de départ de notre travail. Nous allons, au cours des chapitres suivants, étudier d'un point de vue mathématique l'équation [II.1.10]. Le but de cette étude est de déterminer et d'étudier la solution générale de cette équation intégrale. Nous aborderons ensuite l'aspect numérique de l'inversion. Cette dernière partie sera argumentée successivement par des tests synthétiques et des applications sur des données de terrain.

III
RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION INTÉGRALE



1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous proposons de rechercher la solution de l'équation intégrale de Fredholm de 1^{ère} espèce liant les champs diffusif et propagatif. Le théorème de *Picard* (voir énoncé dans l'encart [III.1]) nous dit que, si le noyau de l'intégrale est réel et symétrique, une solution peut être trouvée en décomposant l'opérateur d'intégration sur une base de fonctions propres.

Afin de répondre aux conditions du théorème, une première opération consistera à rendre le noyau de l'intégrale transformante réel et symétrique. Après avoir calculé les fonctions et valeurs propres du noyau, nous proposerons une équation reconstruisant le champ propagatif connaissant son homologue diffusif. Nous étudierons enfin le comportement de cette solution face à des données incomplètes et/ou bruitées.

Encart III.1 Théorème de Picard ([Krasnov *et al.*, 1977])

Une équation intégrale de Fredholm de première espèce $f(x) = \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt$ admet une solution et une seule dans la classe $L_2(a,b)$ (carré intégrable sur (a,b)) si :

- Le noyau $K(x,t)$ est réel symétrique ($\{K(x,t) = K(t,x)\} \in \mathbb{R}$)
- La série $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 f_k^2$ est convergente. Ici les λ_k sont les nombres caractéristiques du noyau $K(x,t)$ et $f_k = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx$, où $\varphi_k(x)$ sont les fonctions propres de $K(x,t)$ correspondant aux nombres caractéristiques λ_k .
- Le système de fonctions propres $\{\varphi_k(x)\}$ est complet sur $[a,b]$.

La solution de l'équation intégrale s'obtient dans ce cas comme $\varphi(x) = \sum_k \lambda_k f_k \varphi_k(x)$.

Remarque : Nous rappelons que nous avons remplacé la notation du champ diffusif $\mathbf{d}(\mathbf{r}, t)$ par $\mathbf{D}(t)$ puisque la transformation intégrale est indépendante de la dimension spatiale $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Cette même convention est également appliquée pour le champ $\mathbf{w}(\mathbf{r}, q)$ qui devient $\mathbf{W}(q)$.



2 Expression de l'intégrale

L'équation intégrale reliant entre eux les champ diffusif $\mathbf{D}(t)$ et propagatif $\mathbf{W}(q)$ et sa transformée de Fourier sont données par :

$$\begin{cases} \mathbf{D}(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}} \int_0^{+\infty} q \exp\left(-\frac{q^2}{4t}\right) \mathbf{W}(q) dq, & t > 0, \\ \tilde{\mathbf{D}}(\nu) = \int_0^{+\infty} \exp(-q\nu\sqrt{i}) \mathbf{W}(q) dq, & \nu = \sqrt{\omega} > 0. \end{cases} \quad (\text{éq. III.2.1})$$

Le champ $\tilde{\mathbf{D}}(\nu)$ peut s'écrire également sous la forme de la somme d'une partie réelle et d'une partie imaginaire telles que :

$$\begin{cases} \Re[\tilde{\mathbf{D}}(\nu)] = \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{q\nu}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{q\nu}{\sqrt{2}}\right) \mathbf{W}(q) dq, \\ \Im[\tilde{\mathbf{D}}(\nu)] = - \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{q\nu}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{q\nu}{\sqrt{2}}\right) \mathbf{W}(q) dq. \end{cases} \quad (\text{éq. III.2.2})$$

Or, comme $\mathbf{D}(t)$ est une fonction causale, nous pouvons écrire $\Im[\tilde{\mathbf{D}}(\nu)] = -\mathcal{H}\{\Re[\tilde{\mathbf{D}}(\nu)]\}$ où $\mathcal{H}\{f(t)\}$ est la transformée de Hilbert de $f(t)$ définie par :

$$\mathcal{H}\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{\pi(x-y)} dy \equiv \frac{1}{\pi x} * f(x), \quad (\text{éq. III.2.3})$$

où $*$ est l'opérateur de convolution. Ceci permet alors de définir complètement le champ $\tilde{\mathbf{D}}(\nu)$ à partir de sa partie réelle $\Re[\tilde{\mathbf{D}}(\nu)]$ avec $\tilde{\mathbf{D}}(\nu) = \Re[\tilde{\mathbf{D}}(\nu)] - i\mathcal{H}\{\Re[\tilde{\mathbf{D}}(\nu)]\}$. La solution de chacune des équations du système précédent peut alors s'écrire

$$\begin{cases} \mathbf{W}(q) = f\left(\Re[\tilde{\mathbf{D}}(\nu)]\right) \\ \mathbf{W}(q) = g\left(\Im[\tilde{\mathbf{D}}(\nu)]\right) = g\left(-\mathcal{H}\{\Re[\tilde{\mathbf{D}}(\nu)]\}\right) \end{cases} \quad (\text{éq. III.2.4})$$

où (f, g) sont les fonctions reconstruisant $\mathbf{W}(q)$. Il apparaît clairement que ce système d'équations n'est fonction que de la partie réelle du champ diffusif, et que, par conséquent, la solution de l'équation intégrale permettant de passer de $\tilde{\mathbf{D}}(\nu)$ à $\mathbf{W}(q)$ peut être obtenue à partir de la solution de l'équation intégrale de $\Re[\tilde{\mathbf{D}}(\nu)]$. Pour résoudre cette équation intégrale, nous allons rechercher les fonctions propres et les valeurs propres satisfaisant :

$$\int_0^{+\infty} K(xy)\Phi_s(y)dy = \lambda_s\Phi_s(x), \quad \text{avec } K(z) = \exp\left(-\frac{z}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right). \quad (\text{eq. III.2.5})$$

3 Calcul des fonctions propres et des valeurs propres

a Expression générale

Considérons la fonction $\Phi_s(x) = Ax^{-s} + Bx^{s-1}$ [McWhirter and Pike, 1978], où A, B et s sont des nombres complexes. Nous obtenons par substitution de cette fonction sous l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} K(xy)\Phi_s(y)dy &= A \int_0^{+\infty} K(xy)y^{-s}dy + B \int_0^{+\infty} K(xy)y^{s-1}dy \\ &= Ax^{s-1} \int_0^{+\infty} K(xy)(xy)^{-s}d(xy) + Bx^{-s} \int_0^{+\infty} K(xy)(xy)^{s-1}d(xy) \\ &= Ax^{s-1}\check{K}(1-s) + Bx^{-s}\check{K}(s) \end{aligned} \quad (\text{éq. III.3.1})$$

où $\check{K}(s)$ est la transformée de Mellin de $K(z) = e^{-\frac{z}{\sqrt{2}}} \cos\left(-\frac{z}{\sqrt{2}}\right)$ définie par

$$\check{K}(s) = \int_0^{+\infty} K(z)e^{s-1}dz, \quad (z \in \mathbb{R} \text{ et } s \in \mathbb{C}) \quad (\text{éq. III.3.2})$$

et donnée par [Gradshteyn and Ryzhik, 1980 (page 490)] :

$$\check{K}(s) = \Gamma(s) \cos\left(\frac{\pi s}{4}\right). \quad (\text{éq. III.3.3})$$

En posant $A = \sqrt{\check{K}(s)}$ et $B = \sqrt{\check{K}(1-s)}$, nous obtenons

$$\int_0^{+\infty} K(xy)\Phi_s(y)dy = \sqrt{\check{K}(s)\check{K}(1-s)} \left[\sqrt{\check{K}(s)}x^{-s} + \sqrt{\check{K}(1-s)}x^{s-1} \right], \quad (\text{éq. III.3.4})$$

qui représente la solution de l'équation [III.2.5] où les fonctions propres $\Phi_s(x)$ et les valeurs propres λ_s sont définies par :

$$\begin{cases} \Phi_s(x) &= x^{-s}\sqrt{\check{K}(s)} + x^{s-1}\sqrt{\check{K}(1-s)} \\ \lambda_s &= \sqrt{\check{K}(s)\check{K}(1-s)} \end{cases} \quad (\text{éq. III.3.5})$$

b Fonctions et valeurs propres pour $s=1/2 + i\xi$

Le choix particulier de $s = \frac{1}{2} + i\xi$ permet d'obtenir $1 - s = s^*$ où s^* représente le complexe conjugué de s . De ce fait, puisque $\Gamma(s^*) = [\Gamma(s)]^*$ et $\cos(s^*) = [\cos(s)]^*$, nous avons également $\check{K}(1 - s) = \check{K}(s^*) = [\check{K}(s)]^*$ et, par déduction, $|\check{K}(\frac{1}{2} + i\xi)| = |\check{K}(\frac{1}{2} - i\xi)|$ et $\arg[\check{K}(\frac{1}{2} - i\xi)] = -\arg[\check{K}(\frac{1}{2} + i\xi)]$. En utilisant ces propriétés, les valeurs propres sont données par :

$$\lambda_{\frac{1}{2}+i\xi} = \left| \check{K}\left(\frac{1}{2} + i\xi\right) \right| = \sqrt{\frac{\pi}{2 \cosh(\pi\xi)} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \cosh\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) \right]} \quad (\text{éq. III.3.6})$$

Les fonctions propres se réécrivent sous la forme

$$\begin{aligned} \Phi_{\frac{1}{2}+i\xi}(x) &= x^{-\frac{1}{2}-i\xi} \sqrt{\check{K}\left(\frac{1}{2} + i\xi\right)} + x^{-\frac{1}{2}+i\xi} \sqrt{\check{K}\left(\frac{1}{2} - i\xi\right)} \\ &= \frac{\sqrt{|\check{K}(\frac{1}{2} + i\xi)|}}{\sqrt{x}} \left[e^{i\left(\frac{\theta_\xi}{2} - \xi \ln(x)\right)} + e^{-i\left(\frac{\theta_\xi}{2} - \xi \ln(x)\right)} \right], \quad (\text{éq. III.3.7}) \\ \text{avec } \theta_\xi &= \arg \left[\check{K}\left(\frac{1}{2} + i\xi\right) \right]. \end{aligned}$$

En divisant ces fonctions par $2\sqrt{\pi|\check{K}(\frac{1}{2} + i\xi)|}$, l'écriture des fonctions propres $\Phi_{\frac{1}{2}+i\xi}$ se simplifie pour donner finalement :

$$\Phi_{\frac{1}{2}+i\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \cos \left[\frac{\theta_\xi}{2} - \xi \ln(x) \right], \text{ avec } \theta_\xi = \arg \left[\check{K}\left(\frac{1}{2} + i\xi\right) \right] \quad (\text{éq. III.3.8})$$

c Symétrie et orthogonalité des fonctions propres

Symétrie : A partir de l'expression [III.3.8] donnée précédemment, nous pouvons déduire que :

$$\begin{aligned}\Phi_{\frac{1}{2}-i\xi}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \cos \left[\frac{\theta_{-\xi}}{2} + \xi \ln(x) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \cos \left[-\frac{\theta_{\xi}}{2} + \xi \ln(x) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \cos \left[\frac{\theta_{\xi}}{2} - \xi \ln(x) \right]\end{aligned}\quad (\text{éq. III.3.9})$$

puisque $\theta_{-\xi} = -\theta_{\xi}$ (voir la section précédente), et donc que

$$\Phi_{\frac{1}{2}-i\xi}(x) = \Phi_{\frac{1}{2}+i\xi}(x). \quad (\text{éq. III.3.10})$$

Cette relation nous indique que l'étude du domaine $\xi \geq 0$ est suffisante.

Orthogonalité : Pour vérifier si les fonctions propres forment bien une base orthogonale, nous devons calculer le produit scalaire défini par :

$$\langle \Phi_{\frac{1}{2}+i\xi} | \Phi_{\frac{1}{2}+i\xi'} \rangle = \int_0^{+\infty} \Phi_{\frac{1}{2}+i\xi}(x) \Phi_{\frac{1}{2}+i\xi'}(x) dx. \quad (\text{éq. III.3.11})$$

En partant de l'expression de $\Phi_{\frac{1}{2}+i\xi}$, nous obtenons

$$\langle \Phi_{\frac{1}{2}+i\xi} | \Phi_{\frac{1}{2}+i\xi'} \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos \left[\frac{\theta_{\xi}}{2} - \xi \ln(x) \right] \cos \left[\frac{\theta_{\xi'}}{2} - \xi' \ln(x) \right] \frac{dx}{x}. \quad (\text{éq. III.3.12})$$

Le changement de variable $y = \ln(x)$ ($dy = d[\ln(x)] = \frac{dx}{x}$) permet d'obtenir

$$\begin{aligned}\langle \Phi_{\frac{1}{2}+i\xi} | \Phi_{\frac{1}{2}+i\xi'} \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \left[\frac{\theta_{\xi}}{2} - \xi y \right] \cos \left[\frac{\theta_{\xi'}}{2} - \xi' y \right] dy \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i \left(\frac{\theta_{\xi} + \theta_{\xi'}}{2} \right)} e^{-iy(\xi + \xi')} dy + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i \left(\frac{\theta_{\xi} + \theta_{\xi'}}{2} \right)} e^{iy(\xi + \xi')} dy \right\} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i \left(\frac{\theta_{\xi} - \theta_{\xi'}}{2} \right)} e^{-iy(\xi - \xi')} dy + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i \left(\frac{\theta_{\xi} - \theta_{\xi'}}{2} \right)} e^{iy(\xi - \xi')} dy \right\}.\end{aligned}\quad (\text{éq. III.3.13})$$

Chacune des ces intégrales se définit au sens des distributions avec :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy(x-x')} dy = 2\pi \delta(x-x'). \quad (\text{éq. III.3.14})$$

Nous obtenons alors

$$\langle \Phi_{\frac{1}{2}+i\xi} | \Phi_{\frac{1}{2}+i\xi'} \rangle = \cos \left[\frac{\theta_\xi - \theta_{\xi'}}{2} \right] \delta(\xi - \xi') + \cos \left[\frac{\theta_\xi + \theta_{\xi'}}{2} \right] \delta(\xi + \xi') \quad (\text{éq. III.3.15})$$

En utilisant la condition de symétrie des fonctions propres énoncée précédemment, nous pouvons voir que les fonctions propres $\Phi_{\frac{1}{2}+i\xi}$ sont orthogonales mais pas normalisables.

d Conclusion

• Nous venons de calculer un ensemble de fonctions propres et de valeurs propres solutions de

$$\int_0^{+\infty} K(xy) \Phi_s(y) dy = \lambda_s \Phi_s(x), \quad \text{avec} \quad K(z) = \exp \left(-\frac{z}{\sqrt{2}} \right) \cos \left(\frac{z}{\sqrt{2}} \right) \quad (\text{éq. III.3.16})$$

dont les expressions sont données par :

$$\begin{cases} \Phi_{\frac{1}{2}+i\xi}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \cos \left[\frac{\theta_\xi}{2} - \xi \ln(x) \right] \\ \lambda_{\frac{1}{2}+i\xi} &= \sqrt{\frac{\pi}{2 \cosh(\pi\xi)}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \mp \cosh \left(\frac{\pi\xi}{2} \right) \right] \end{cases} \quad (\text{éq. III.3.17})$$

avec $\begin{cases} \theta_\xi &= \arg \left[\check{K} \left(\frac{1}{2} + i\xi \right) \right] \\ \check{K} \left(\frac{1}{2} + i\xi \right) &= \Gamma \left(\frac{1}{2} + i\xi \right) \cos \left[\frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{2} + i\xi \right) \right] \end{cases}$

• Nous avons vu que ces fonctions propres forment une base orthogonale. Cette condition est indispensable pour pouvoir décomposer les champs sur cet espace de fonctions.

Remarque : Les équations présentées ci-dessus diffèrent de celles présentées dans l'article publié dans la revue *Inverse Problem* [Gibert *et al.*, 1994] (voir annexe [3]). En effet, après une ultime vérification lors de la rédaction de ce manuscrit, nous nous sommes aperçus que la condition $\check{K}(1-s) = [\check{K}(s)]^*$ pour $s = \frac{1}{2} + i\xi$ garantissant des fonctions et valeurs propres réelles n'est vérifiée que si le noyau $K(z)$ est réel et symétrique (condition de Picard [Krasnov *et al.*, 1977, Bertero and Pike, 1991]). Or, dans l'article, nous n'avions pas décomposé ce noyau en sa partie réelle et imaginaire. Si le noyau est complexe, on trouve alors des modules de valeurs propres complexes, ce qui est impossible (ex : dans notre cas, $\lambda^2 = \Gamma(s)\Gamma(1-s) \exp(-i\frac{\pi}{4})$). On retrouve le même type de phénomène si l'on recherche directement les valeurs propres de la transformée de Fourier avec $K(\omega t) = \exp(-i\omega t)$.

4 Reconstruction de la solution

Nous venons de voir qu'il est possible de trouver des fonctions propres et de valeurs propres satisfaisant l'équation intégrale :

$$\int_0^{+\infty} K(xy) \Phi_{\frac{1}{2}+i\xi}(y) dy = \lambda_{\frac{1}{2}+i\xi} \Phi_{\frac{1}{2}+i\xi}(x). \quad (\text{éq. III.4.1})$$

Puisque ces fonctions forment une base orthogonale, il est possible de décomposer $\Re e [\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \nu)]$ sur cette base de fonctions :

$$\begin{aligned} \Re e [\tilde{\mathbf{D}}(\nu)] &= \int_0^{+\infty} a_{\frac{1}{2}+i\xi} \Phi_{\frac{1}{2}+i\xi}(\nu) d\xi \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{a_{\frac{1}{2}+i\xi}}{\lambda_{\frac{1}{2}+i\xi}} \right) \lambda_{\frac{1}{2}+i\xi} \Phi_{\frac{1}{2}+i\xi}(\nu) d\xi \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{a_{\frac{1}{2}+i\xi}}{\lambda_{\frac{1}{2}+i\xi}} \right) d\xi \int_0^{+\infty} K(q\nu) \Phi_{\frac{1}{2}+i\xi}(q) dq \\ &= \int_0^{+\infty} K(q\nu) dq \int_0^{+\infty} \left(\frac{a_{\frac{1}{2}+i\xi}}{\lambda_{\frac{1}{2}+i\xi}} \right) \Phi_{\frac{1}{2}+i\xi}(q) d\xi \end{aligned} \quad (\text{éq. III.4.2})$$

où les $a_{\frac{1}{2}+i\xi}$ correspondent aux coefficients de $\Re e [\tilde{\mathbf{D}}(\nu)]$ sur la base des fonctions propres $\Phi_{\frac{1}{2}+i\xi}(x)$, et sont données par :

$$a_{\frac{1}{2}+i\xi} = \int_0^{+\infty} \Re e [\tilde{\mathbf{D}}(\nu)] \Phi_{\frac{1}{2}+i\xi}(\nu) d\nu. \quad (\text{éq. III.4.3})$$

• Par substitution, la solution de l'équation intégrale reliant le champ diffusif $\tilde{\mathbf{D}}(\nu)$ au champ propagatif $\mathbf{W}(q)$ est donnée par :

$$\mathbf{W}(q) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{a_{\frac{1}{2}+i\xi}}{\lambda_{\frac{1}{2}+i\xi}} \right) \Phi_{\frac{1}{2}+i\xi}(q) d\xi, \text{ avec } a_{\frac{1}{2}+i\xi} = \int_0^{+\infty} \Re e [\tilde{\mathbf{D}}(\nu)] \Phi_{\frac{1}{2}+i\xi}(\nu) d\nu. \quad (\text{éq. III.4.4})$$



5 Spectre des valeurs propres — Effet du bruit

a Étude du spectre des valeurs propres

L'analyse du spectre des valeurs propres, et plus particulièrement le degré de décroissance, permet de quantifier le degré de résolution de la solution obtenue [Hansen, 1992], et ainsi de caractériser l'aspect plus ou moins mal posé du problème inverse [Craig and Thompson, 1994, Wampler and Wilets, 1988]. En effet, la quantité d'informations extraite des données est "inversement proportionnelle" à la loi de décroissance des valeurs propres [McWhirter and Pike, 1979]. C'est pourquoi, il apparaît intéressant de comparer le spectre des valeurs propres obtenues dans cette étude avec celles des transformées de Fourier et de Laplace dont on connaît les qualités et défauts.

Les expressions des noyaux des transformées de Fourier en cosinus et en sinus, et de Laplace sont

$$\begin{cases} K^{F_{\cos}}(z) &= \cos(2\pi z), \\ K^{F_{\sin}}(z) &= \sin(2\pi z), \\ K^L(z) &= e^{-z}. \end{cases} \quad (\text{éq. III.5.1})$$

Les transformées de Mellin de ces fonctions sont données par :

$$\begin{cases} \check{K}^{F_{\cos}}(s) &= (\pi^s \Gamma(\frac{1-s}{2})) / (2\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{s}{2})), \\ \check{K}^{F_{\sin}}(s) &= (\pi^s \Gamma(1 - \frac{s}{2})) / (2\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1+s}{2})), \\ \check{K}^L(s) &= \Gamma(1-s). \end{cases} \quad (\text{éq. III.5.2})$$

et les valeurs propres $\lambda_s = \sqrt{\check{K}(s)\check{K}(1-s)}$ pour $s = \frac{1}{2} + i\xi$ par :

$$\begin{cases} \lambda_{\frac{1}{2}+i\xi}^{F_{\cos}} &= \frac{1}{2}, \\ \lambda_{\frac{1}{2}+i\xi}^{F_{\sin}} &= \frac{1}{2}, \\ \lambda_{\frac{1}{2}+i\xi}^L &= \sqrt{\frac{\pi}{\cosh(\pi\xi)}}. \end{cases} \quad (\text{éq. III.5.3})$$

Le spectre de chacune des valeurs propres en fonction de ξ est représenté sur la figure [III.1]. La valeur constante des valeurs propres pour la transformée de Fourier permet d'avoir une reconstruction complète de la solution tant analytiquement que numériquement [McWhirter and Pike, 1978]. C'est pour cette raison que cette transformée est souvent utilisée. Par contre, le spectre des valeurs propres de la transformée de Laplace décroît très rapidement avec ξ . Même si une formule analytique permet de faire une transformée de Laplace inverse, on montre qu'elle ne

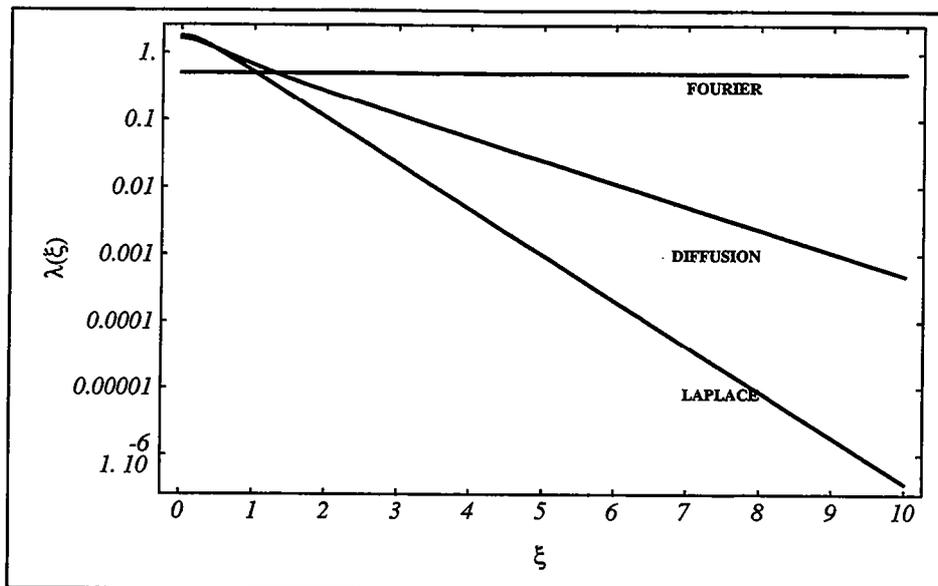


Figure III.1 Courbes des valeurs propres pour les transformations de Fourier ($\lambda^F_{1/2+i\xi}$), de Laplace ($\lambda^L_{1/2+i\xi}$) et de la transformation diffusion-propagation ($\lambda_{1/2+i\xi}$).

permettra pas de retrouver un résultat complet [McWhirter and Pike, 1978, Craig and Thompson, 1994].

Concernant l'équation intégrale étudiée ici, la courbe des valeurs propres $\lambda_{\frac{1}{2}+i\xi}$ (voir l'expression dans les sections précédentes) est comprise entre celle des $\lambda^F_{\frac{1}{2}+i\xi}$ (cosinus et sinus) et des $\lambda^L_{\frac{1}{2}+i\xi}$. Ceci nous indique que le problème inverse à résoudre sera plus instable que celui de la transformée de Fourier inverse. Cependant, sa stabilité sera meilleure que celle de la transformée de Laplace inverse.

b Effet du bruit

Jusqu'à maintenant, nous n'avons considéré que le cas où les données sont non bruitées et complètes. Or, il est impossible d'avoir de telles informations. L'étude sur des données bruitées ou incomplètes apparaît alors fondamentale. Nous entendons par le terme de bruit aussi bien le bruit enregistré par les appareils de mesure (bruit externe ou interne aux instruments) que les erreurs ou incertitudes sur les mesures en elles-mêmes. Les $b_{\frac{1}{2}+i\xi} = a_{\frac{1}{2}+i\xi} / \lambda_{\frac{1}{2}+i\xi}$ représentent les coefficients du champ $W(q)$ sur la base des fonctions propres et sont donc significatifs de telles perturbations [Hansen, 1992]. Plus précisément, ce sont les coefficients $a_{\frac{1}{2}+i\xi}$ qui contiennent l'information

provenant des données (voir la définition de ces paramètres dans les sections précédentes). Cette information correspond au signal théorique auquel il faut ajouter le bruit. Le fait de diviser ces $a_{\frac{1}{2}+i\xi}$ par les valeurs propres $\lambda_{\frac{1}{2}+i\xi}$ implique que la qualité de la reconstruction sera dépendante des valeurs des $\lambda_{\frac{1}{2}+i\xi}$ quand $\xi \rightarrow \infty$: plus ces valeurs propres seront petites quand $\xi \rightarrow \infty$, plus le bruit contenu dans les $a_{\frac{1}{2}+i\xi}$ prendra de l'importance dans la reconstruction de la solution [McWhirter and Pike, 1979]. Or, nous avons vu, dans la section précédente, que les valeurs propres de la transformation diffusion-propagation décroissent très rapidement lorsque $\xi \rightarrow \infty$ (figure [III.1]).

L'idée consiste à introduire une limite ξ_{max} dans l'équation de reconstruction pour la "séparer" en deux parties. Ce paramètre ξ_{max} peut être estimé à partir du rapport signal/bruit des données (voir [Bertero and Pike, 1983] pour un exemple) puisque les valeurs propres sont dépendantes de l'erreur sur les données [Parker, 1977, McWhirter and Pike, 1978] (voir figure [III.2]) :

$$\left[\frac{\text{signal}}{\text{bruit}} \right] \longrightarrow \lambda(\xi_{max}) \longrightarrow \xi_{max}. \quad (\text{éq. III.5.4})$$

En appliquant cette coupure sur la formule de reconstruction précédemment calculée, nous obtenons :

$$\begin{aligned} W(q) &= \underbrace{\int_0^{\xi_{max}} \left(\frac{a_{\frac{1}{2}+i\xi}}{\lambda_{\frac{1}{2}+i\xi}} \right) \Phi_{\frac{1}{2}+i\xi}(q) d\xi}_{W_d(q)} + \underbrace{\int_{\xi_{max}}^{+\infty} \left(\frac{a_{\frac{1}{2}+i\xi}}{\lambda_{\frac{1}{2}+i\xi}} \right) \Phi_{\frac{1}{2}+i\xi}(q) d\xi}_{W_b(q)} \\ &= W_d(q) + W_b(q). \end{aligned} \quad (\text{éq. III.5.5})$$

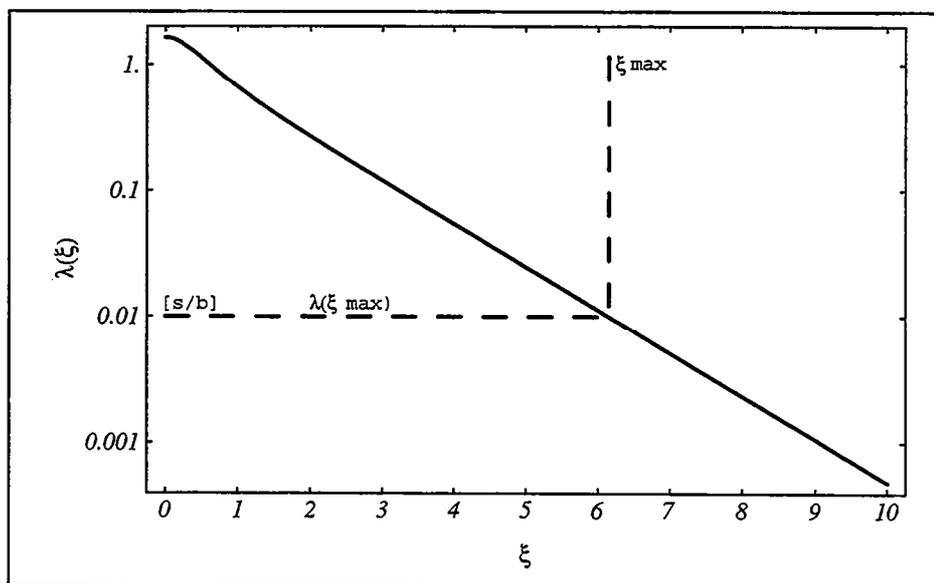


Figure III.2 Courbe des valeurs propres pour la transformation diffusion-propagation ($\lambda_{1/2+i\xi}$). Un rapport signal/bruit ($[s/b]$) permet d'estimer la valeur du paramètre ξ_{max} .

En fait, la résolution de la solution générale $W(q)$ suit la distribution des valeurs de q pour lesquelles $\Phi_{\frac{1}{2}+i\xi}(q) = 0$. Or, nous pouvons voir sur la figure [III.3] que cette distribution décroît très rapidement quand $q \rightarrow \infty$ (les q pour lesquels $\Phi_{\frac{1}{2}+i\xi}(q) = 0$ sont de plus en plus espacés), l'échelle des axes horizontaux de la figure étant logarithmique. Cependant, il faut également noter que l'on a l'effet inverse avec les ξ . Le fait de couper l'intégrale à ξ_{max} va donc limiter la résolution de la solution : on filtre les petites longueurs d'ondes (ou les hautes fréquences) pour obtenir la solution lissée $W_d(q)$ puisque, sans informations supplémentaires permettant de repousser la limite ξ_{max} , nous devons mettre $W_b(q) = 0$ [Parker, 1977, McWhirter and Pike, 1978, McWhirter, 1980, Ostrowsky *et al.*, 1981, Hansen, 1992].

c Exemple

Pour illustrer l'étude que nous venons de faire, nous allons recalculer le signal $W(q)$ à partir de données bruitées et/ou incomplètes. Nous avons choisi le cas très simple où le champ propagatif recherché est donné par :

$$W(q) = \delta(q - q_0), \quad \text{avec } q_0 = \sqrt{2}. \quad (\text{éq. III.5.6})$$

où δ est donnée par :

$$\delta(q - q_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } q = q_0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{éq. III.5.7})$$

Le choix particulier de q_0 permet de simplifier les équations. Le calcul direct de l'intégrale transformante donne :

$$\begin{aligned} \Re e [\tilde{D}(\nu)] &= \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{q\nu}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{q\nu}{\sqrt{2}}\right) W(q) dq \\ &= \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{q\nu}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{q\nu}{\sqrt{2}}\right) \delta(q - q_0) dq \\ &= \exp\left(-\frac{q_0\nu}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{q_0\nu}{\sqrt{2}}\right) \\ &= e^{-\nu} \cos(\nu), \quad \text{avec } q_0 = \sqrt{2}. \end{aligned} \quad (\text{éq. III.5.8})$$

La valeur de la fonction $f(\nu) = e^{-\nu} \cos(\nu)$ est négligeable pour $\nu > 10$ à cause de l'exponentielle décroissante. Cette valeur constitue la borne ν_{max} des données qui seront bruitées avec un bruit blanc gaussien de variance connue. La solution $W(q)$ est calculée par une décomposition en valeurs propres *via* le logiciel *Mathematica*[®] [Wolfram-Research-Inc., 1990]. Deux inversions sont

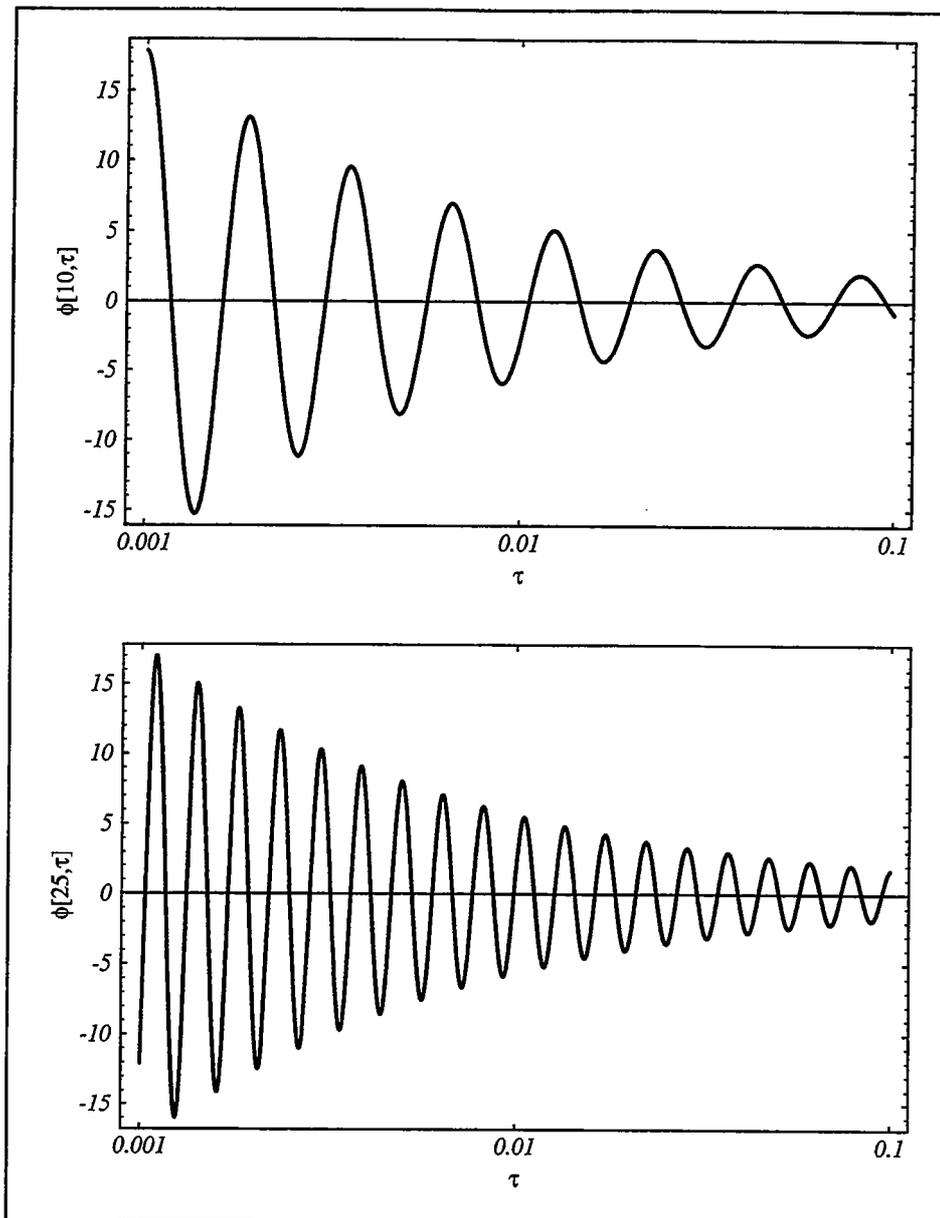


Figure III.3 Courbes de deux fonctions propres $\Phi_{1/2+10i}(\tau)$ et $\Phi_{1/2+25i}(\tau)$ dont l'expression générale est donnée dans le texte. L'échelle sur l'axe horizontal des τ est logarithmique .

présentées sur la figure [III.4]. Chacune d'entre elles est réalisée avec un bruit différent définissant un rapport signal sur bruit particulier (label $rsb = 10 \log [signal^2/bruit^2]$). Le spectre des valeurs propres correspondant à la décomposition du noyau de l'intégrale est donnée sur la figure [III.5].

Dans le cas où aucun bruit n'est introduit dans les données ($rsb = \infty$), la solution reconstruite est proche du signal attendu (figure en bas à gauche dans la figure [III.4]) et nous pouvons localiser l'événement recherché. Par contre, dès que l'on ajoute un tout petit peu de bruit dans les données ($rsb \simeq 147$), la solution obtenue présente un grand nombre d'oscillations ne permettant pas d'isoler

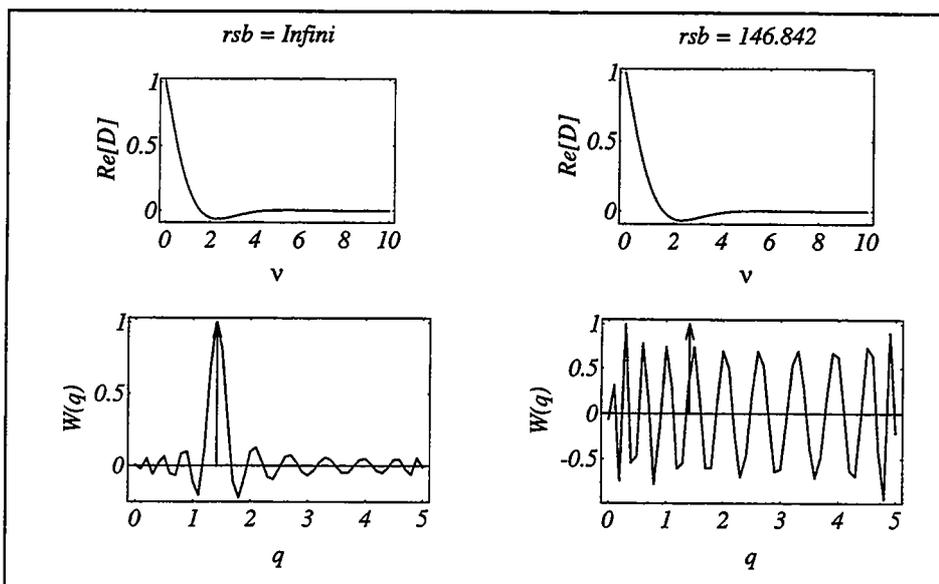


Figure III.4 Reconstruction du signal $W(q)$ (figures du bas) à partir de données plus ou moins bruitées (figures du haut, rapport signal sur bruit indiqué par rsb). Le signal théorique est marqué par la flèche verticale.

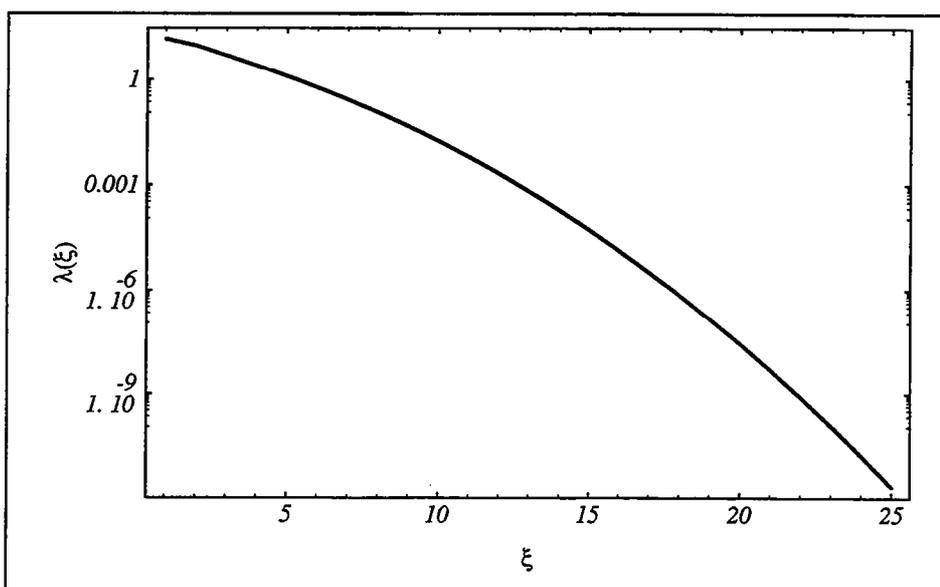


Figure III.5 Courbe des valeurs propres λ relatives au noyau de l'intégrale.

clairement une solution. Nous pouvons ainsi voir que les faibles valeurs propres utilisées lors du calcul de $W(q)$ (voir figure [III.5]) augmentent l'importance du bruit dans la reconstruction du signal source. Ces observations confirment le résultat précédent indiquant qu'une solution haute résolution ne peut être obtenue si l'on analyse des données bruitées et/ou incomplètes.

d Conclusion

• Cette étude sur les valeurs propres a permis de mettre en évidence le caractère mal posé du problème inverse face au bruit. La conséquence de cela fait que, sans informations supplémentaires, la solution trouvée sera de faible résolution.

6 Conclusion

• Le but de cette partie était d'étudier théoriquement l'équation intégrale de Fredholm de 1^{ère} espèce reliant le champ diffusif $D(t)$ et son dual propagatif $W(q)$. Une solution analytique au problème inverse posé a été calculée par décomposition spectrale de l'opérateur d'intégration. A partir de l'étude du spectre des valeurs propres et des fonctions propres, nous avons pu voir que le problème inverse est mal posé au sens où l'analyse de données bruitées et/ou incomplètes limite la résolution de la solution sur les grandes longueurs d'onde. L'amélioration de la résolution de la solution peut se faire soit par des méthodes de régularisation, soit par l'introduction d'informations *a priori* dans le système.



IV
ALGORITHME DE L'INVERSION NUMÉRIQUE

1 Introduction

L'étude théorique de l'équation de Fredholm réalisée dans le chapitre précédent a montré combien l'inversion de l'intégrale

$$\tilde{\mathbf{D}}(\nu) = \int_0^{\infty} \exp(-q\nu\sqrt{i}) \mathbf{W}(q) dq, \quad \text{avec } \omega = \nu^2, \quad (\text{éq. IV.1.1})$$

est mal posée face à des données bruitées. Une façon de stabiliser ce problème inverse consiste à introduire dans le modèle des informations supplémentaires [Sabatier, 1977, Tarantola and Valette, 1982, Sabatier, 1989, Hopcraft and Smith, 1992]. De plus, cette opération permet d'obtenir une solution "haute résolution".

Nous allons, dans ce chapitre, introduire dans le problème inverse de telles informations dans le but de réaliser une inversion numérique de l'équation intégrale. Dans un premier temps, nous présenterons les contraintes que nous avons posées, puis après avoir reformulé le problème inverse à résoudre, nous présenterons un algorithme de *recuit simulé* permettant de rechercher la solution du problème posé : recherche du minimum d'une fonction coût.

Vertical text or markings along the right edge of the page, possibly a page number or header.

2 Informations a priori et paramètres de l'inversion

La principale contrainte que nous avons utilisée est de considérer que la solution recherchée possède un spectre discret, c'est à dire qu'elle ne prend ses valeurs que sur des points précis de ce spectre [Levy and Fullagar, 1981]. En effet, si l'on considère que la source $S_w(q)$ est brève, le signal enregistré à l'arrivée des fronts d'ondes peut être considéré comme étant la somme décalée dans le temps de répliques de cette source (voir [Virieux, 1986] pour des exemples numériques). C'est à dire que la solution recherchée peut se mettre sous la forme

$$W(q) = \sum_{n=1}^N W_n S_w(q - q_n). \quad (\text{éq. IV.2.1})$$

En considérant que le signal source propagatif peut être assimilé à

$$S_w(q) = \delta(q) \quad (\text{éq. IV.2.2})$$

où

$$\delta(q - q_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } q = q_n, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (\text{éq. IV.2.3})$$

alors, d'une part, la transformée de Fourier du signal source diffusif est donnée par $S_d(\omega) = 1$ qui est la transformée de Fourier de $\delta(t)$ (on retrouve ici l'hypothèse sur l'égalité des sources, condition nécessaire pour obtenir l'équation intégrale transformante [Lee and Xie, 1993]), et, d'autre part, le champ propagatif se réécrit comme

$$W(q) = \sum_{n=1}^N W_n \delta(q - q_n). \quad (\text{éq. IV.2.4})$$

L'utilisation d'une telle contrainte est très puissante et permet de stabiliser les problèmes inverses tels que le nôtre [Donoho, 1992].

L'équation intégrale se réécrit alors sous la forme

$$\tilde{D}(\nu) = \sum_{n=1}^N W_n \exp(-q_n \nu \sqrt{i}). \quad (\text{éq. IV.2.5})$$

Dans cette expression, $\tilde{D}(\nu)$ correspond aux données, et :

$$\mathcal{P} = \{N, q_1, q_2, \dots, q_N, W_1, W_2, \dots, W_N\} \quad (\text{éq. IV.2.6})$$

constitue l'ensemble des paramètres à rechercher où

- N est le nombre d'événements caractérisant les limites de blocs conducteurs (c'est à dire le nombre de "couches" conductrices),
- $\{q_1, q_2, \dots, q_N\}$, les positions en pseudo-temps
- et $\{W_1, W_2, \dots, W_N\}$ les amplitudes de ces évènements.

Nous pouvons voir que le problème inverse est hautement non linéaire par rapport à la recherche de \mathcal{P} . Par contre, si le nombre de couches N et les pseudo-temps q_n sont donnés, l'inversion de (IV.2.5) est linéaire sur les amplitudes W_n . Le système reste néanmoins sur-déterminé : on a plus d'équations que de paramètres. La résolution de ce problème inverse doit se faire en plusieurs étapes : (1) estimation de N , (2) calcul des couples $\{q_n, W_n\}$.

Le premier paramètre que nous devons estimer est le nombre N . Ceci peut se faire par exemple en reformulant l'équation [IV.2.5] sous une forme similaire au modèle de *Prony* [Kay and Marple, 1981, Davies, 1983, Gibert and Virieux, 1991] :

$$\tilde{D}(\nu_m) = \sum_{n=1}^N W_n [{}_0Z_n] [Z_n]^m \quad (\text{éq. IV.2.7})$$

avec :
$$\begin{cases} \nu_m &= \nu_0 + m\delta\nu, \quad m = 1 \dots M \\ [{}_0Z_n] &= \exp(-q_n \nu_0 \sqrt{i}) \\ [Z_n] &= \exp(-q_n \delta\nu \sqrt{i}) \end{cases}$$

où M est le nombre total de fréquences. Le nombre N correspond alors à l'ordre du modèle de *Prony* (nombre de pôles) et est donné par l'analyse de la matrice de covariance des données en déterminant le minimum du critère d'*Akaike* [Akaike, 1973, van Blaricum and Mitra, 1978, Wax *et al.*, 1984, Wax and Kailath, 1985, Biondi and Kostov, 1989] donné par :

$$AIC(N) = 2N(2N' - N) - 2\text{Log} \left[\frac{\prod_{i=N+1}^{N'} \lambda_i^{\frac{1}{N'-N}}}{\frac{1}{N'-N} \sum_{i=N+1}^{N'} \lambda_i} \right]^{(N'-N)(M-N')} \quad (\text{éq. IV.2.8})$$

où les λ_i sont les valeurs propres de la matrice de covariance des données et où $N' \gg N$ (voir l'annexe dans [Gibert and Virieux, 1991]).

Après avoir estimé le nombre N , la recherche des couples $\{q_n, W_n\}$ constitue la phase principale du problème inverse. Un moyen pour le résoudre consiste à rechercher le modèle des paramètres $\mathcal{M}_s = \{q_n, W_n\}$ minimisant une fonction mesurant "l'efficacité" de ce modèle [Parker, 1994]. Cette fonction est généralement appelée fonction coût. Le problème inverse peut alors se réécrire

sous la forme symbolique suivante :

$$\mathcal{M}_s \quad | \quad C(\mathcal{M}_s) = \min_{\mathcal{M}_i \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}} C(\mathcal{M}_i), \quad (\text{éq. IV.2.9})$$

où $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ représente l'espace des modèles possibles et où $C(\mathcal{M})$ est donné, par exemple, par la norme L_2 suivante [Gibert and Virieux, 1991, Pullammanappallil and Louie, 1993, Sen *et al.*, 1993] :

$$C(\mathcal{M} = \{q_n, W_n\}) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \left[\tilde{\mathbf{D}}_{\text{obs}}(\nu_m) - \tilde{\mathbf{D}}_{\text{mod}}(\nu_m, \{q_n, W_n\}) \right]^2. \quad (\text{éq. IV.2.10})$$

où M est le nombre de données à inverser. Une solution de l'équation [IV.2.9] peut être obtenue par l'utilisation d'une méthode itérative. Celle-ci consiste à partir d'un modèle des paramètres initial \mathcal{M}_i auquel correspond le coût $C(\mathcal{M}_i)$, puis à perturber aléatoirement un ou plusieurs paramètres du modèle pour obtenir un second modèle $\mathcal{M}_j = \mathcal{M}_i + \Delta\mathcal{M}_j$ de coût $C(\mathcal{M}_j)$. Si $C(\mathcal{M}_j) < C(\mathcal{M}_i)$, alors on garde le modèle perturbé comme nouveau modèle initial, sinon on teste une autre perturbation. La solution est obtenue lorsque l'on ne trouve plus de modèle diminuant la fonction coût. Le problème d'une telle méthode est qu'elle converge le plus souvent vers un minimum local de la fonction coût, et non vers le minimum global recherché. Ceci est dû au fait que la convergence de l'algorithme est dépendante du choix du modèle des paramètres initial \mathcal{M}_i . Une première solution consiste à réaliser un grand nombre d'exécutions de la méthode en partant à chaque fois de modèles initiaux différents, et à garder, en final, le meilleur résultat. Cependant, ce type d'approche devient très coûteux en temps calcul dès que l'espace à explorer est vaste. Pour s'affranchir de ces minima locaux, l'autre solution consiste à permettre à l'algorithme de sortir des minima locaux, c'est à dire de remonter les puits d'énergie liés à chaque minimum de la fonction coût. [Kirkpatrick *et al.*, 1983] ont développé un algorithme permettant ce type d'opération : *le recuit simulé*.

Pratiquement, la recherche des couples $\{q_n, W_n\}$ sera réalisée en recherchant l'ensemble des pseudo-temps $\{q_1, q_2, \dots, q_N\}$ grâce à un algorithme de recuit simulé modifié pour travailler dans le domaine continu des solutions (couplage de l'algorithme avec la méthode de descente du simplexe). Cet algorithme, publié par [Press and Teukolsky, 1991], sera décrit dans la prochaine section. Les amplitudes $\{W_1, W_2, \dots, W_N\}$ seront ajustées à chaque essai d'un ensemble $\{q_1, q_2, \dots, q_N\}$ à l'aide de moindres carrés sous contrainte [Lawson and Hanson, 1974] de telle manière qu'elles minimisent la fonction coût [IV.2.10].

Vertical text on the right edge of the page, possibly a page number or margin indicator.

3 Algorithme de l'inversion

a Le recuit simulé

L'algorithme du *recuit simulé* a été développé par [Kirkpatrick *et al.*, 1983] pour trouver la configuration d'un système minimisant une fonction. Cette méthode est basée sur le principe du "bain-marie" rencontré en métallurgie. Elle consiste à laisser refroidir lentement un solide préalablement réchauffé à haute température. Par ce procédé, les atomes se réorganisent depuis une structure désordonnée (haute énergie) vers une structure ordonnée (minimum d'énergie) à chaque palier en température (équilibre thermodynamique). On obtient alors un composé dont la structure est stable et dont le nombre de défauts est réduit.

A chaque palier en température, la probabilité pour que le système soit dans un état d'énergie E_i est donné par la distribution de Gibbs-Boltzmann :

$$P_b(E_i) = \frac{1}{Z(T)} \exp\left(-\frac{E_i}{k_B T}\right) \quad (\text{éq. IV.3.1})$$

où

- E_i est l'énergie du système,
- $Z(T)$ la fonction de partition donnée par $Z(T) = \sum_i e^{-E_i/k_B T}$,
- T la température,
- et k_B la constante de Boltzmann ($k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$).

L'évolution du système vers son état d'équilibre, pour une température donnée, est simulée par l'algorithme de Métropolis [Métropolis *et al.*, 1953]. A une structure donnée \mathcal{M}_i , il est possible d'appliquer une perturbation sur un ou plusieurs de ses éléments (coordonnées des atomes) pour obtenir une seconde structure \mathcal{M}_j . Cette variation entre les deux systèmes est accompagnée d'un changement d'énergie $\Delta E = E(\mathcal{M}_j) - E(\mathcal{M}_i)$. On définit alors une probabilité P_a liée à ΔE par :

$$P_a = \min \left[1, \exp\left(-\frac{\Delta E}{k_b T}\right) \right]. \quad (\text{éq. IV.3.2})$$

Le nouveau modèle \mathcal{M}_j est retenu si cette probabilité est supérieure à un nombre aléatoire p tiré dans $[0, 1]$ à chaque test. En réalisant ces opérations un grand nombre de fois, le système évolue vers une structure stable, d'énergie minimum. En effet, de par la définition de P_a , nous voyons que

si $\Delta E < 0$, le modèle est automatiquement sélectionné puisque $P_a = 1$. Par contre, si $\Delta E > 0$, on laisse une possibilité à l'algorithme pour garder le modèle grâce au tirage aléatoire du nombre p . L'algorithme peut alors conserver des modèles dont l'énergie est supérieure au modèle de référence, c'est à dire sortir d'un minimum secondaire [Jeffrey and Rosner, 1986, Mitra *et al.*, 1986]. Ceci implique que la convergence de l'algorithme vers le minimum global n'est pas dépendante du choix du modèle initial (tirage aléatoire de celui-ci).

L'algorithme du recuit simulé (voir figure [IV.1]) consiste à faire évoluer l'algorithme de Métropolis un grand nombre de fois dans une boucle interne afin de simuler l'équilibre thermodynamique, une boucle externe est là pour faire diminuer progressivement la température. L'analogie avec les problèmes d'optimisation est réalisée en confondant l'énergie du système avec la fonction coût. La température devient un paramètre de contrôle de convergence de l'algorithme de dimension identique à la fonction coût. La probabilité pour accepter un modèle P_a est alors donnée par :

$$P_a = \min \left[1, \exp \left(-\frac{\Delta C}{T} \right) \right]. \quad (\text{éq. IV.3.3})$$

La simplicité de mise en oeuvre de cette méthode a permis de l'appliquer sur de nombreux problèmes d'optimisation dont celui du voyageur de commerce [Kirkpatrick *et al.*, 1983, Kirkpatrick and Toulouse, 1985, Bonomi and Lutton, 1988]. D'autres applications existent en spectrophotométrie [Kalivas *et al.*, 1989], en sismique [Mosegaard and Vestergaard, 1991, Sen and Stoffa, 1991, Pullammanappallil and Louie, 1993, Billings, 1994], et en électromagnétisme [Franchois *et al.*, 1989, Gibert and Virieux, 1991, Sen *et al.*, 1993], et bien d'autres encore. Une revue plus complète de l'algorithme illustrée de nombreux exemples est donnée dans [van Laarhoven and Aarts, 1987].

Les deux points importants de l'algorithme sont d'une part le procédé utilisé pour perturber un modèle et, d'autre part, le paramètre température. Le premier contrôle l'exploration de l'espace des solutions et le second la convergence de l'algorithme vers le minimum global. Ce sont ces deux éléments que nous allons aborder dans les prochaines sections.

b La méthode de descente du simplexe

L'exploration de l'espace des solutions est conditionné par la manière dont on va perturber les modèles. Dans la plupart des cas, l'espace des solutions est discrétisé et les perturbations sur chacun des paramètres sont alors fonction du pas d'échantillonnage. De plus, ce type d'approche implique un espace des solutions borné. Dans le but de travailler dans le domaine continu des solutions, la méthode choisie pour sélectionner un nouveau modèle est celle de la *descente du*

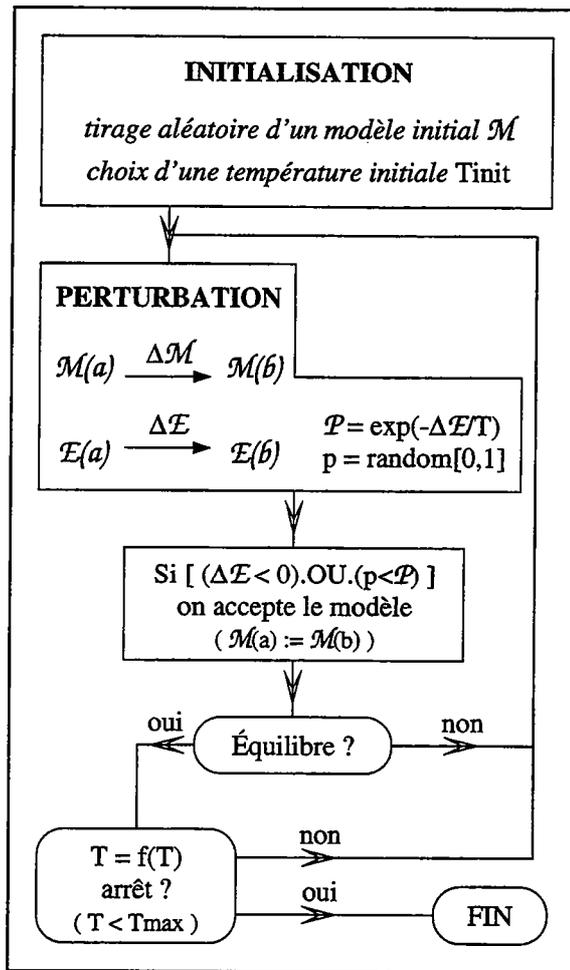


Figure IV.1 Schéma général de l'algorithme du recuit simulé.

simplexe introduite par [Nedler and Mead, 1965]. Il faut noter que cette méthode n'est pas celle du simplexe rencontrée en programmation linéaire [Tarantola, 1987, Forrest and Goldfarb, 1992]. Le principe de cette méthode est basé sur une recherche géométrique de la solution [Nedler and Mead, 1965, Press and Teukolsky, 1991, Estrera *et al.*, 1992]. On définit un simplexe comme étant un ensemble de $N + 1$ modèles des paramètres $\mathcal{M} = \{x_1, \dots, x_N\}$ où N est le nombre de variables recherchées. Chacun de ces modèles peut être représenté par un point dans le repère à N dimensions \mathcal{R}_N . Par exemple, pour $N = 2$, le simplexe est un triangle, et pour $N = 3$ un tétraèdre. A chacun des ces points est associée la valeur de la fonction coût en ce point de telle sorte que le simplexe est totalement défini par :

$$\text{Simplexe} \equiv \left[\left\{ (x_1, \dots, x_N)^1, C^1 \right\}, \dots, \left\{ (x_1, \dots, x_N)^{N+1}, C^{N+1} \right\} \right]. \quad (\text{éq. IV.3.4})$$

La méthode de descente du simplexe consiste à réaliser diverses opérations géométriques sur les points du simplexe par rapport à celui dont le coût est le plus faible, donnant ainsi naissance à un

nouveau simplexe (voir figure [IV.2]). Ces opérations sont effectuées jusqu'à effondrement de la structure autour d'un seul point représentant la solution recherchée.

L'introduction de cette méthode dans l'algorithme du recuit simulé est réalisée en faisant intervenir le paramètre température dans le choix des nouveaux modèles [Press and Teukolsky, 1991]. L'idée est d'augmenter le coût des points du simplexe initial et de réduire celui des points testés en fonction de la température (voir figure [IV.4]). La condition de sélection d'un modèle $P_a > p$ de l'algorithme du recuit simulé simple est remplacée par l'introduction d'un nombre aléatoire p dans le calcul de la perturbation en température :

$$f(T) = T \ln \left(\frac{1}{p} \right). \quad (\text{éq. IV.3.5})$$

La perturbation apportée aux coûts des modèles varie ainsi à chaque nouveau test. Cette procédure répétée de nombreuses fois (équilibre thermodynamique) remplace l'algorithme de Métropolis décrit précédemment. La structure finale de l'algorithme du recuit simulé couplé avec la méthode de descente du simplexe est donnée dans les figures [IV.3] et [IV.4].

c L'évolution de la température

Que ce soit dans l'algorithme du recuit simulé avec ou sans la méthode de descente du simplexe, la convergence vers le minimum global est très largement dépendante de la manière dont décroît la température. En effet, si cette diminution est trop rapide, on va figer la solution du problème dans un minimum secondaire tout comme on va geler le solide dans une structure métastable. Par contre, si la décroissance est trop lente, la méthode est très longue à converger, et devient alors équivalente à une méthode de Monte Carlo. L'idée consiste à choisir une loi représentant un juste milieu entre ces deux limites.

L'évolution de la température est reliée à 3 éléments que nous allons développer par la suite [van Laarhoven and Aarts, 1987] :

- la température initiale T_{init} ,
- la température finale T_{final} ,
- la loi de décroissance $\Upsilon(T)$.

La seule condition que doit satisfaire la température initiale T_{init} est qu'elle doit être suffisamment élevée pour permettre la sélection d'un grand nombre de modèles quels que soient leurs coûts ($P_a \approx 1$). Le choix de [Gibert and Virieux, 1991] donné par :

$$T_{init} = \langle C(N_{T_{init}}) \rangle + sd(C(N_{T_{init}})) \quad (\text{éq. IV.3.6})$$

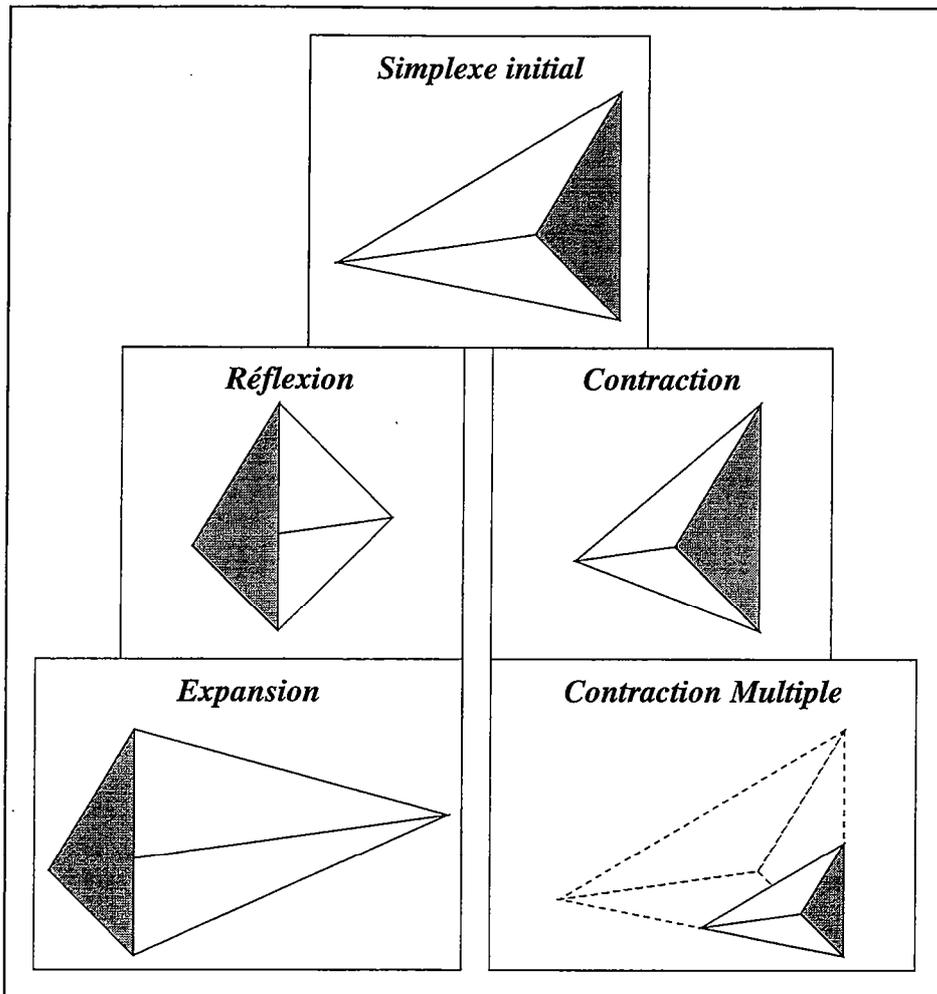


Figure IV.2 Représentation des opérations géométriques réalisées dans la méthode de descente du simplexe [Press and Teukolsky, 1991]. Des opérations géométriques sont appliquées sur les points du simplexe, donnant ainsi naissance à une autre figure géométrique. Ces opérations sont réalisées soit par rapport à la surface contenant les points de plus faible coût (réflexion, contraction, expansion), soit par rapport au sommet d'énergie la plus faible (contraction multiple)..

où $\langle C(N_{T_{init}}) \rangle$ est la valeur moyenne et $sd(C(N_{T_{init}}))$ la déviation standard des coûts calculés à partir de $N_{T_{init}}$ modèles aléatoires permet de sélectionner initialement environ 80% des modèles testés, condition proposée par [Kirkpatrick *et al.*, 1983]. La température finale T_{final} est déterminée à partir du niveau de bruit dans les données par [Koren *et al.*, 1991, Gibert and Virieux, 1991]

$$T_{final} = \frac{sd(bruit)^2}{100}. \quad (\text{éq. IV.3.7})$$

La loi de décroissance en température est le paramètre majeur à déterminer. La recherche de la "bonne loi" a fait l'objet d'études de nombreux auteurs [Huang *et al.*, 1986, van Laarhoven and Aarts, 1987, Nulton and Salamon, 1988, Ruppeiner, 1988, Salamon *et al.*, 1988, Basu and

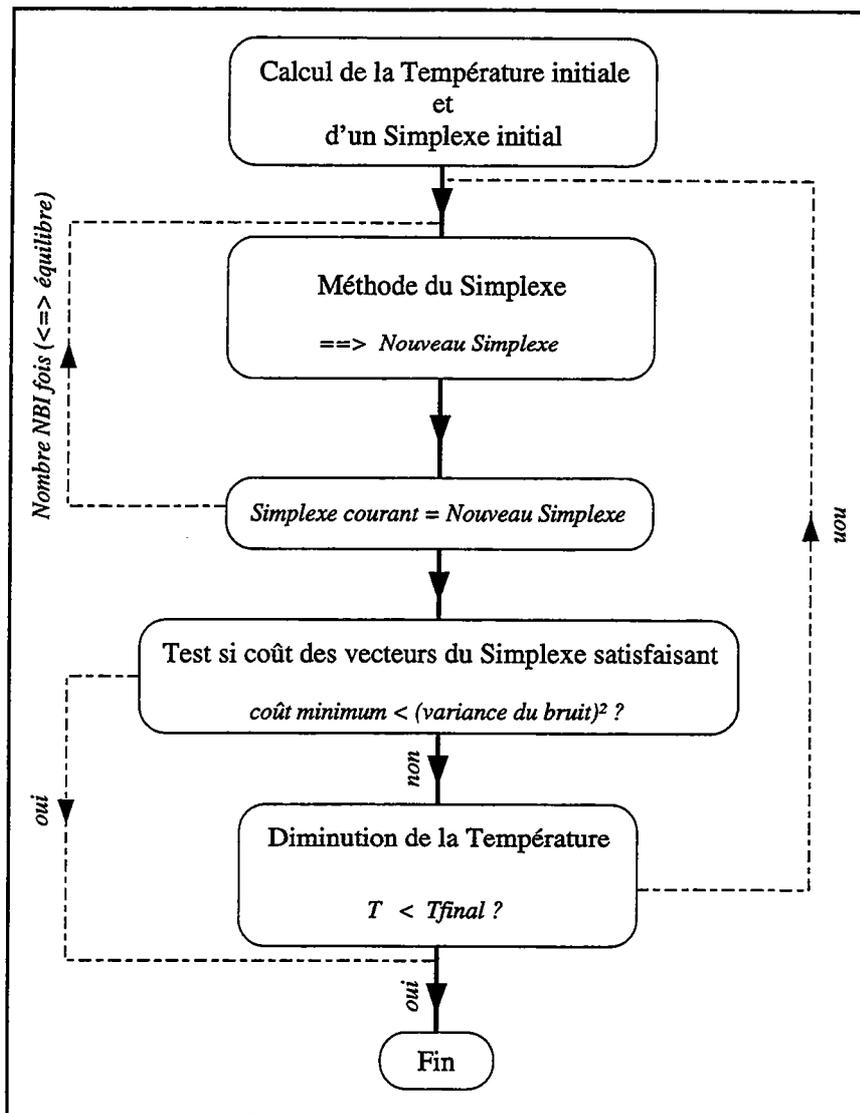


Figure IV.3 Schéma de l'algorithme du recuit simulé. L'algorithme de la méthode de descente du simplexe est représenté en détail figure (IV.4).

Frazer, 1990], mais en fait, pratiquement, de nombreux choix sont possibles [Szu and Hartley, 1987, Ruppeiner *et al.*, 1991, Billings, 1994, Thomson *et al.*, 1994]. La comparaison de quelques lois est donnée dans [Mirkin *et al.*, 1993]. Cette étude montre que les meilleurs résultats (énergie de la solution trouvée par rapport au nombre d'itérations pour arriver à la solution) sont obtenues à partir de la loi de Huang [Huang *et al.*, 1986] donnée par :

$$T(t + 1) = T(t) \exp \left[-\lambda \frac{T(t)}{\text{sd}(E(t))} \right], \quad (\text{éq. IV.3.8})$$

$T(t)$ est la température à l'itération t , $\text{sd}(E(t))$ la déviation standard de l'énergie du système et λ la vitesse de décroissance (voir [Mirkin *et al.*, 1993 ; figure 2]). Dans cette loi, deux paramètres

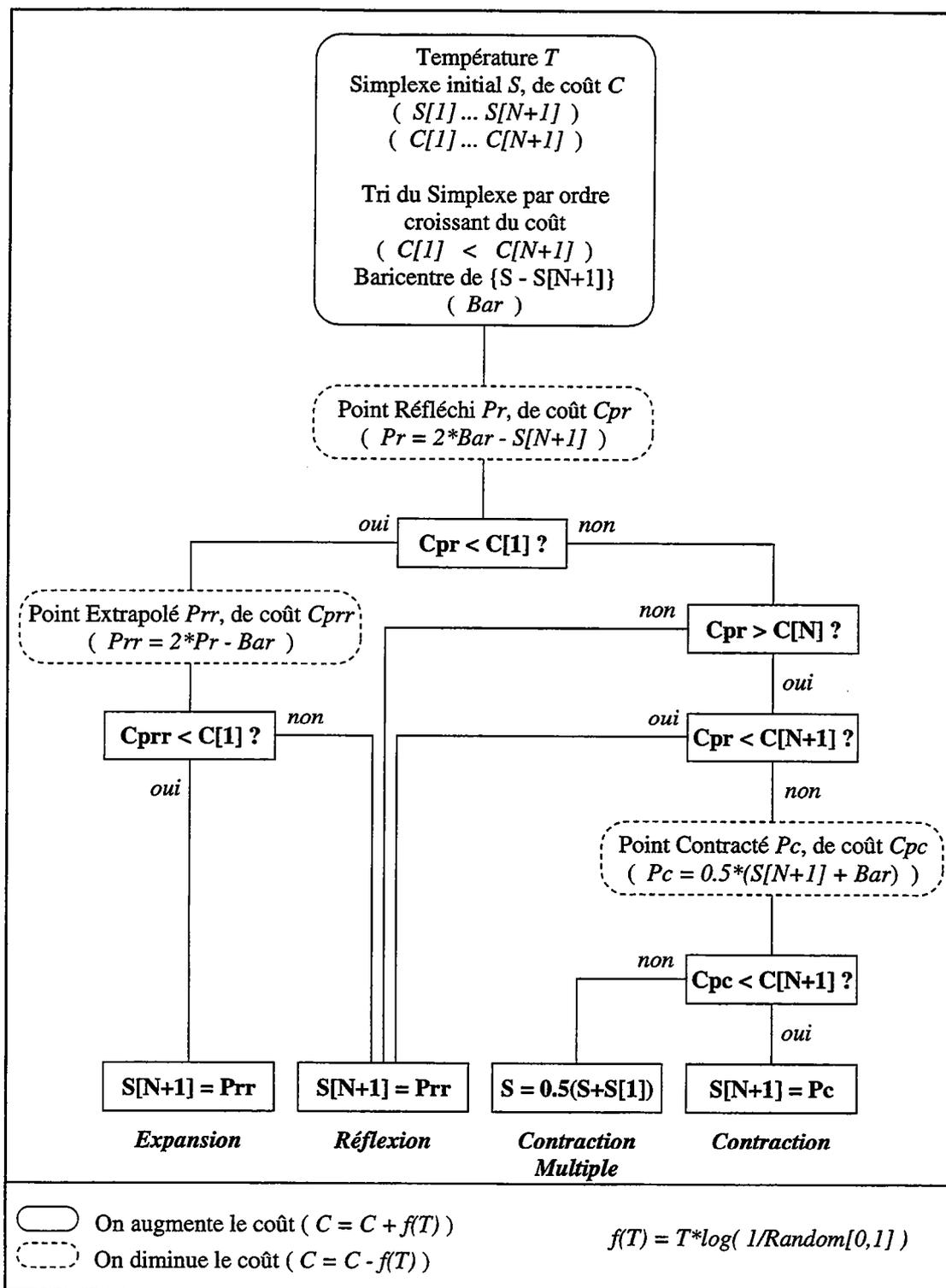


Figure IV.4 Schéma de la méthode de descente du simplexe.

sont à estimer. Le premier est la vitesse de décroissance λ et le second le nombre d'itérations N_{eq} réalisées à température fixe (équilibre) pour le calcul de $sd(E(t))$. Il faut cependant déterminer

conjointement ces paramètres car l'augmentation de la vitesse de décroissance λ ou la diminution du nombre d'itérations ont le même effet sur la convergence de la méthode : elles la ralentissent. Le compromis optimum donné dans [Mirkin *et al.*, 1993 ; figure 3 + texte] entre ces deux paramètres est le suivant : une vitesse de refroidissement λ assez élevée ($0.5 < \lambda < 1$) avec un nombre d'itérations N_{eq} relativement faible ($10 < N_{eq} < 50$). Pour notre part, nous avons choisi d'utiliser $\lambda = 0.75$ et $N_{eq} = 20$.

L'intérêt de cette loi de décroissance est qu'elle est adaptative dans le sens où elle est fonction, en quelque sorte, des paramètres du système *via* $sd(E(t))$. Nous verrons dans la section suivante plus en détail cette particularité.

d Exemple de recherche du minimum d'une fonction

Afin d'illustrer et de tester l'algorithme précédemment décrit, nous allons rechercher le minimum de la fonctionnelle donnée par la relation suivante :

$$\mathcal{F}(x) = x^2 + p[1 - \cos(50\pi x)] \quad (\text{éq. IV.3.9})$$

où p est un paramètre que nous allons faire varier. Il représente en quelque sorte un certain niveau du bruit observable par les faibles fluctuations de la fonction coût autour d'une courbe convexe. Pour illustrer notre propos, deux valeurs ont été choisies : $p = 0.005$ et $p = 0.020$. Les résultats de la recherche du minimum pour les fonctions $f(x)$ ($p = 0.005$) et $g(x)$ ($p = 0.020$) sont représentés respectivement sur les figures (IV.5 et IV.6) (les figures (a) représentent les courbes des fonctions, (b) l'évolution de l'espace exploré au cours des itérations, et (c) l'évolution du paramètre température). Pour la fonction $f(x)$, il est intéressant de noter ici la variation dans l'évolution de la température entre les itérations 2 et 3 (figure (IV.5-c)). Ceci correspond au moment où l'algorithme restreint la zone d'exploration : les points du simplexe se regroupent (figure (IV.5-b)). Ce phénomène souligne le caractère adaptatif de la loi de refroidissement utilisée. Le même phénomène est également observé pour la fonction $g(x)$. Dans ce cas, la diminution de la pente de la courbe en température est plus importante et est caractérisée par deux zones. La première (entre les itérations 2 et 3) correspond au même phénomène que celui précédemment décrit. La seconde rupture de pente (entre les itérations 3 et 5) marque une recherche de la solution dans un espace localisé autour de la meilleure solution. En effet, dans cette zone, les "puits" des minima locaux proches voisins du minimum global sont plus importants pour la fonction $g(x)$ que pour la fonction $f(x)$ ($\Delta h_g \simeq 4\Delta h_f$), alors que la différence de coût entre ces minima et le minimum global est très faible ($\simeq 10^{-3}$). La conséquence de cela est qu'il est plus difficile au simplexe de sortir de ces

minima locaux pour $g(x)$ que pour $f(x)$ lorsque la température est faible ($T \simeq 10^{-3} - 10^{-4}$) puisque les fluctuations aléatoires introduites dans le calcul des coûts sont faibles. Il faut signaler que le minimum global des fonctions n'est pas toujours obtenu, mais cependant, les solutions trouvées correspondent aux premiers ou seconds minima locaux situés de part et d'autre du minimum global.

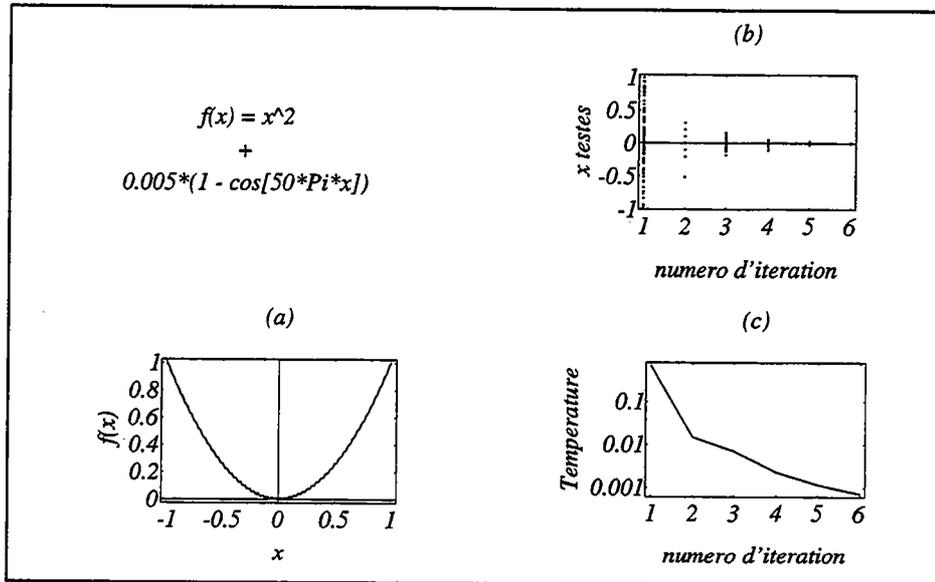


Figure IV.5 Résultats de la recherche du minimum de la fonction $f(x)$ représentée sur la figure (a) ($f(x) = x^2 + 0.005\{1 - \cos(50\pi x)\}$). L'évolution de l'espace exploré au cours des itérations est représentée sur la figure (b) alors que la figure (c) montre l'évolution de la température au cours de la recherche.

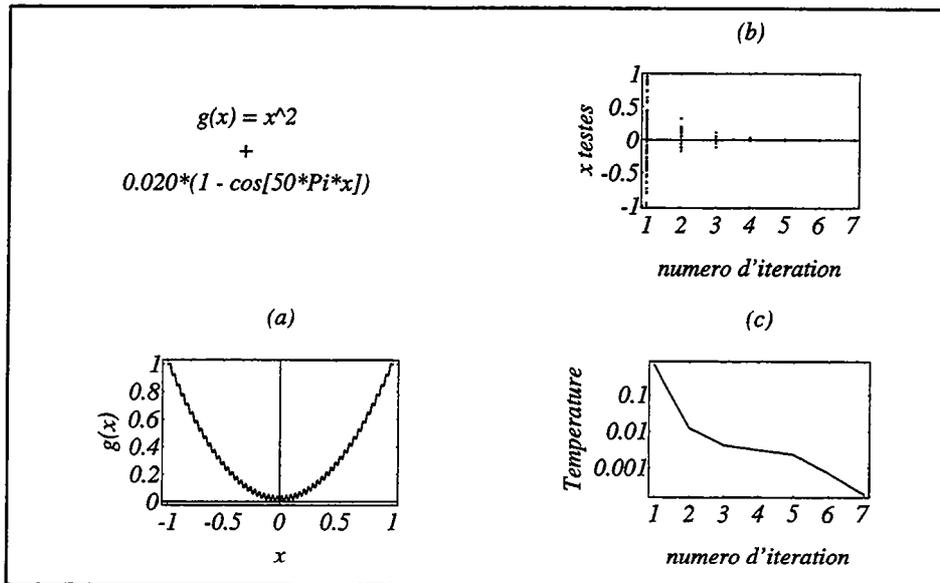


Figure IV.6 Résultats de la recherche du minimum de la fonction $g(x)$ représentée sur la figure (a) ($g(x) = x^2 + 0.020(1 - \cos(50\pi x))$). L'évolution de l'espace exploré au cours des itérations est représentée sur la figure (b) alors que la figure (c) montre l'évolution de la température au cours de la recherche.

4 Conclusion

- Nous avons vu, dans ce chapitre, que le fait d'introduire des informations *a priori* dans la solution permet de stabiliser le problème inverse.

- L'algorithme proposé pour résoudre numériquement l'équation intégrale est celui du recuit simulé couplé avec la méthode de descente du simplexe. Le couplage de ces deux méthodes permet d'évoluer dans le domaine continu des solutions.

- A travers l'exemple proposé, nous avons montré le caractère adaptatif de la loi de refroidissement du recuit simulé. Cet exemple a permis de mettre en évidence également la robustesse de l'algorithme lorsque la fonction coût dont on recherche le minimum global n'est pas convexe.

V
TESTS SYNTHÉTIQUES

Vertical text or markings on the right edge of the page.

Small horizontal mark on the right edge.

1 Introduction

Nous nous proposons de tester l'algorithme présenté précédemment sur des modèles de résistivités uni- et bi-dimensionnels. Cette étape est indispensable avant d'aborder le traitement de données de terrain. Elle permettra d'indiquer les limites de résolution de la méthode, de définir clairement quelles sont les informations obtenues par cette inversion, et ainsi, de valider ou non notre méthode.

Nous présenterons dans un premier temps quelles sont les données dont nous avons besoin et comment nous les calculons. Les résultats de l'analyse de données synthétiques issues de deux modèles 1D et de trois modèles 2D seront ensuite présentés et analysés.

2 Les données et représentation des résultats

a Les données

Les tests numériques que nous présentons ont été réalisés à partir de simulations de la réponse magnétotellurique de modèles de conductivités uni- ou bi-dimensionnels. Cette réponse est donnée par la résistivité apparente ρ_a et par la phase ϕ en fonction de la fréquence ω . Ces paramètres sont définis par [Cagniard, 1953a, Nabighian, 1987] :

$$\begin{cases} \rho_a(\omega) &= \frac{1}{\omega\mu_0} |Z(\omega)|^2, \\ \phi(\omega) &= \arg [Z(\omega)], \\ \text{avec } Z(\omega) &= \frac{\tilde{\mathbf{E}}(\omega)}{\tilde{\mathbf{H}}(\omega)}. \end{cases} \quad (\text{éq. V.2.1})$$

Pour les modèles 1D, après avoir défini un profil en résistivité $\rho(z)$, la résistivité apparente et la phase pour chaque fréquence sont données à partir de la relation de récurrence suivante (hypothèse d'un milieu stratifié à N couches horizontales) [Nabighian, 1987] :

$$\begin{cases} \rho_a(\omega) &= \frac{1}{\omega\mu_0} |Z_1(\omega)|^2 \\ \phi(\omega) &= \arg [Z_1(\omega)] \\ \check{Z}_N &= Z_N \\ \check{Z}_i &= Z_i \left\{ \frac{1-r_i \exp(-2ik_i h_i)}{1+r_i \exp(-2ik_i h_i)} \right\}, \quad (i = N-1, \dots, 1) \\ \text{avec : } \begin{cases} r_i &= \frac{Z_i - \check{Z}_{i+1}}{Z_i + \check{Z}_{i+1}}, \\ Z_i &= \frac{\omega\mu_0}{k_i}, \\ k_i &= \sqrt{-i\omega\mu_0\sigma_i}. \end{cases} \end{cases} \quad (\text{éq. V.2.2})$$

où σ_i et h_i sont respectivement la conductivité ($= 1/\rho_i$) et l'épaisseur de la couche i ($h_N = \infty$).

Cette expression est obtenue en considérant la solution (champs électrique et magnétique \mathbf{E} et \mathbf{H}) des équations de *Maxwell* dans chacune des couches i du milieu stratifié et des équations de continuité aux interfaces (conditions aux limites). Considérant la solution particulière pour la première couche, c'est à dire Z_1 , [Levy *et al.*, 1988] ont développé une relation permettant de relier cette mesure Z_1 à la réflectivité du milieu (contraste des impédances) introduite dans [Claerbout, 1976]. Cette équation est donnée par :

$$\tilde{\mathbf{D}}_{\text{obs}}(\nu) = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\frac{\rho_a(\nu)}{\rho_s}} \exp \left[i \left(\phi(\nu) - \frac{\pi}{4} \right) \right] - 1 \right\}, \quad (\text{éq. V.2.3})$$

où ρ_s est à la résistivité en surface ($\rho_s \equiv \rho_1$). Cette expression permet d'obtenir un champ complexe $\tilde{D}_{\text{obs}}(\nu)$ mesurant la réflectivité électromagnétique du milieu (contraste des conductivités). La comparaison de ce champ $\tilde{D}_{\text{obs}}(\nu)$ avec le modèle $\tilde{D}_{\text{mod}}(\nu)$ est réalisée en recherchant le minimum global de la fonction coût $C(\mathcal{M})$, les couples $\{q_n, W_n\}$ solutions du problème inverse marquant respectivement la position et l'amplitude des contrastes.

L'équation [V.2.3] tient compte de la présence de réflexions multiples dans les données. Il est possible d'obtenir une expression similaire pour le cas où l'on ne voudrait pas inclure ces multiples. Cependant, nous avons préféré utiliser l'équation [V.2.3] considérant que l'algorithme d'inversion (voir chapitre précédent) est susceptible de détecter ce type de réflecteurs (voir les exemples présentés dans [Levy *et al.*, 1988]). Cette transformation sera utilisée sur les couples $\{\rho_a, \phi\}$ issus des modèles 1D, mais également 2D, considérant que l'approximation de stratification du milieu reste valide le long du chemin suivi par l'onde [Virieux *et al.*, 1994].

Dans l'équation de transformation [V.2.3], la résistivité de surface ρ_s doit être fournie par l'opérateur. [Tournerie *et al.*, 1995] (voir le chapitre sur les données *COPROD2*) ont montré par des tests numériques que seule une "bonne" estimation de ce paramètre est nécessaire pour l'inversion des données $\tilde{D}_{\text{obs}}(\nu)$. Des mesures de surface ou la résistivité apparente haute fréquence ($\rho_a[HF]$) sont deux solutions possibles pour ρ_s . Cependant le choix de $\rho_a[HF]$ permet de nous soustraire de l'effet des statiques puisque, par ce choix, le rapport ρ_a/ρ_s ne change pas. On rappelle que ces statiques ont pour effet de translater par un facteur indépendant de la fréquence la courbe des résistivités apparentes (les phases n'étant pas affectées par ce phénomène) [Jones, 1988]. Une fois le choix de la résistivité ρ_s fait, les valeurs de $\tilde{D}_{\text{obs}}(\nu)$ constituent les données que nous allons analyser à l'aide de l'algorithme de recuit simulé couplé avec la méthode du simplexe. Pour chacun des cas étudiés, un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance connue (paramètre donné par l'opérateur) est ajouté au champ $\tilde{D}_{\text{obs}}(\nu)$.

Pour les modèles 2D, nous traiterons les données calculées à partir des deux modes de polarisation des champs *TE* (le champ électrique \mathbf{E} est parallèle à la structure) et *TM* (le champ électrique \mathbf{E} est perpendiculaire à la structure) définis après rotation de la matrice des impédances Z [Nabighian, 1987, Orange, 1989] :

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{bmatrix} \xrightarrow{R} Z' = \begin{bmatrix} 0 & Z'_{xy} \\ Z'_{yx} & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{éq. V.2.4})$$

où les composantes du tenseur Z sont donnés par la relation suivante :

$$E_i(\omega) = Z_{ii}H_i(\omega) + Z_{ij}H_j(\omega), \quad (i, j) = (x, y). \quad (\text{éq. V.2.5})$$

Les résistivités apparentes et phases pour chacun de ces modes sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_a^{TE}(\omega) = \frac{1}{\omega\mu_0} \left| Z'_{xy} \right|^2, \\ \phi^{TE}(\omega) = \arg \left[Z'_{xy} \right], \\ \text{avec } Z'_{xy} = \frac{E_x(\omega)}{H_y(\omega)}, \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_a^{TM}(\omega) = \frac{1}{\omega\mu_0} \left| Z'_{yx} \right|^2, \\ \phi^{TM}(\omega) = \arg \left[Z'_{yx} \right], \\ \text{avec } Z'_{yx} = \frac{E_y(\omega)}{H_x(\omega)}. \end{array} \right. \quad (\text{éq. V.2.6})$$

A partir de la matrice des impédances, il est également possible de définir d'autres résistivités apparentes et phases indépendantes de la rotation appliquée. Ces paramètres sont données en calculant le déterminant de la matrice des impédances (les phases sont exprimées en degré) :

$$Z^{DET} = \begin{vmatrix} 0 & Z'_{xy} \\ Z'_{yx} & 0 \end{vmatrix} \equiv \begin{cases} \rho_a^{DET}(\omega) = \sqrt{\rho_a^{TE}(\omega) \times \rho_a^{TM}(\omega)}, \\ \phi^{DET}(\omega) = \frac{1}{2}(\phi^{TE}(\omega) + \phi^{TM}(\omega) + 180.). \end{cases} \quad (\text{éq. V.2.7})$$

L'équation intégrale reliant le champ diffusif au champ propagatif n'étant fonction que de la fréquence (relation implicite sur $\mathbf{r} = (x, y, z)$), chaque site de mesure sera analysé indépendamment des autres.

b Représentation des résultats

Les solutions trouvées par l'algorithme de recuit simulé (ensemble des $\{q_n, W_n\}$) seront représentées suivant deux méthodes différentes. La première consiste en une pseudo-trace sismique dans laquelle chaque événement n est représenté par $W_n \delta(q - q_n)$ où

$$\delta(q - q_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } q = q_n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{éq. V.2.8})$$

Cette méthode permettra de visualiser sur l'axe des pseudo-temps q chaque "réflecteur" trouvé, ainsi que son amplitude. La seconde méthode choisie pour représenter les résultats consiste à calculer pour chacun des q_k pris dans $[0, q_{max}]$ la probabilité conditionnelle [Gibert and Virieux, 1991] :

$$\mathcal{P}_a(q_n = q_k) = \frac{\exp(-C_k/T)}{\sum_{k=1}^K \exp(-C_k/T)}, \quad (k = 1, \dots, K), \quad (\text{éq. V.2.9})$$

les autres événements étant fixés à leur valeur donnée par l'inversion. La température est prise égale à $T = \text{sd}(bruit)^2$. Cette probabilité nous indiquera si les réflecteurs q_n sont bien localisés ou non.

De plus, pour les modèles 1D, nous présenterons une inversion *Niblett-Bostick*. Cette méthode permet d'obtenir, à partir des courbes $[\rho_a, \phi](\omega)$, une estimation rapide de la résistivité en fonction de la profondeur. Ces valeurs sont données par [Weaver, 1994] :

$$\begin{cases} z & = \sqrt{\frac{\rho_a}{\omega\mu_0}}, \\ \rho(z) & = \rho_a \left[\frac{\pi}{2\phi} - 1 \right]. \end{cases} \quad (\text{éq. V.2.10})$$

Vertical text on the right edge of the page, possibly a page number or header.

Vertical text on the right edge of the page, possibly a page number or header.

Vertical text on the right edge of the page, possibly a page number or header.

Vertical text on the right edge of the page, possibly a page number or header.

3 Inversion de modèles 1D

a Les modèles

Les deux modèles de résistivité (A et B) choisis sont représentés sur la figure [V.1] et caractérisés par :

$$\begin{aligned} A & \begin{cases} \rho_1 = 100 \ \Omega.m, & z_1 = 300 \ m, \\ \rho_2 = 10 \ \Omega.m. \end{cases} \\ B & \begin{cases} \rho_1 = 100 \ \Omega.m, & z_1 = 300 \ m, \\ \rho_2 = 10 \ \Omega.m, & z_2 = 800 \ m, \\ \rho_3 = 50 \ \Omega.m. \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{éq. V.3.1})$$

Les courbes des résistivités apparentes et des phases ont été déterminées à partir de l'équation [V.2.2] pour des fréquences comprises entre 1 et 1500 Hz, régulièrement réparties en racine carré de la fréquence. Ce type particulier d'échantillonnage est celui suggéré lorsque l'on réécrit l'équation intégrale transformant le champ $\tilde{D}(\nu)$ en $W(q)$ suivant le modèle de *Prony* (voir chapitre précédent). Cependant, ceci ne correspond nullement à un critère décisif de la méthode, d'autres types d'échantillonnage sont possibles. Ces courbes, ainsi que l'inversion *Niblett-Bostick* sont représentées sur la figure [V.2]. Nous pouvons voir sur cette figure que la valeur de la résistivité apparente aux hautes fréquences est proche de 100 $\Omega.m$. Cette valeur que l'on retrouve dans les inversion de *Niblett-Bostick* a été choisie pour le calcul du champ $\tilde{D}_{\text{obs}}(\nu)$ (équation [V.2.3]) pour les deux modèles. Afin d'étudier l'effet du bruit sur l'inversion, deux jeux de données (champs $\tilde{D}_{\text{obs}}(\nu)$) ont été calculés : le premier avec un bruit blanc gaussien de variance $\sigma^2 = 10^{-5}$, et le second avec $\sigma^2 = 10^{-3}$. Les champs respectifs (parties réelles et imaginaires) sont représentés sur la figure [V.3]. Les valeurs théoriques des couples $\{q_n, W_n\}$ sont données dans le tableau [V.1]. Ces valeurs ont été calculées à partir de la propagation d'une onde d'amplitude initiale égale à 1 [Claerbout, 1976].

b Les résultats

Pour le modèle A et pour un faible niveau de bruit ($\sigma^2 = 10^{-5}$), deux événements peuvent être localisés (figures [V.4 – A.1 et A.2]) sur les trois recherchés (nombre obtenu d'après le critère d'Aikake AIC (tableau [V.2])) : le premier couple $\{q, W\}$ déterminé par l'algorithme a une amplitude très faible (voir tableau [V.2]) et n'est donc pas représentatif d'une variation de la

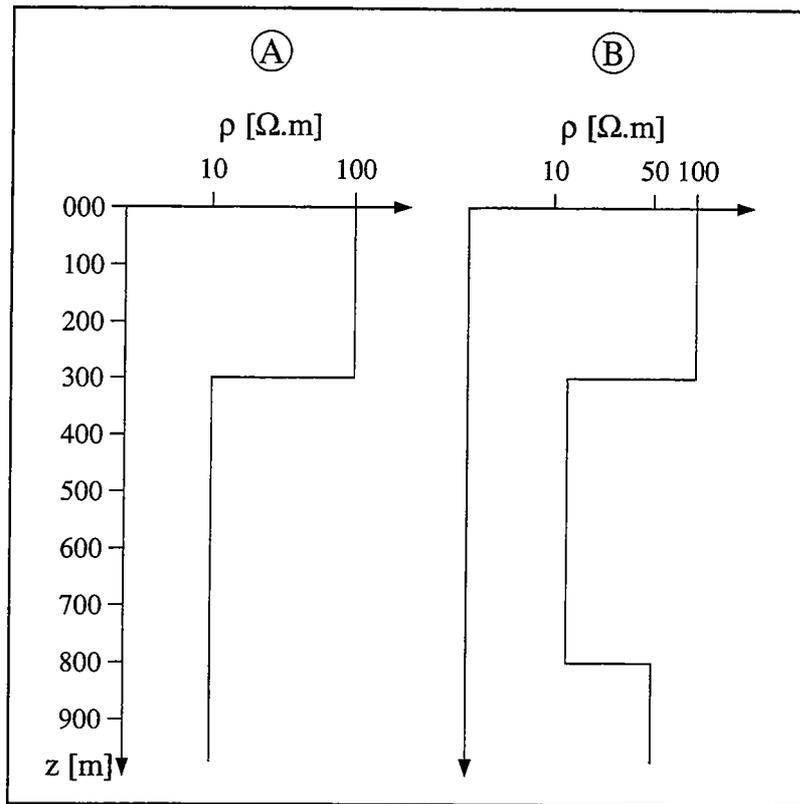


Figure V.1 Modèles de résistivité 1D A et B.

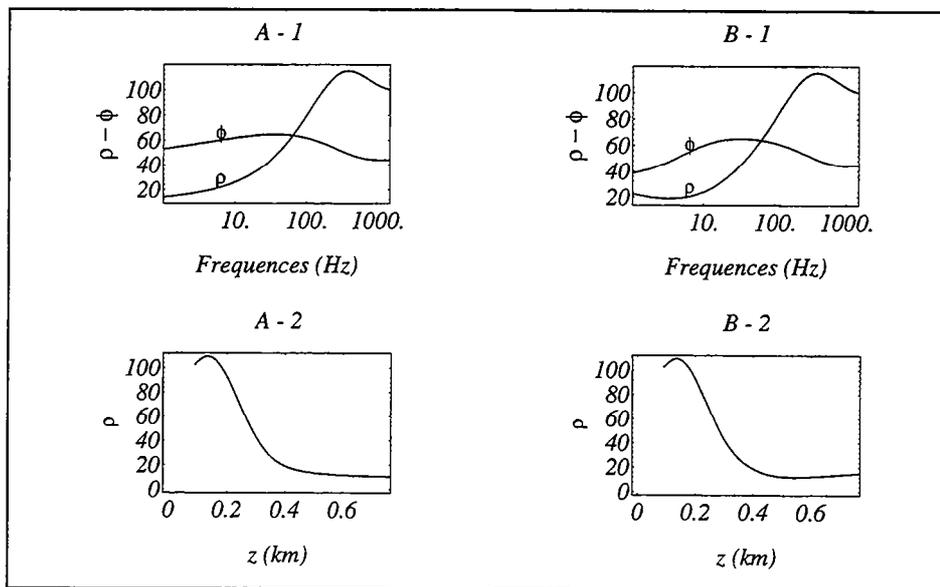


Figure V.2 Courbes de la résistivité apparente ρ_a et de la phase ϕ (haut) et résultat de l'inversion *Niblett-Bostick* (bas) pour les deux modèles A et B.

résistivité. Le réflecteur positionné en $q = 0.0692 \sqrt{s}$ est très bien localisé (figure [V.4 – A.2]) et

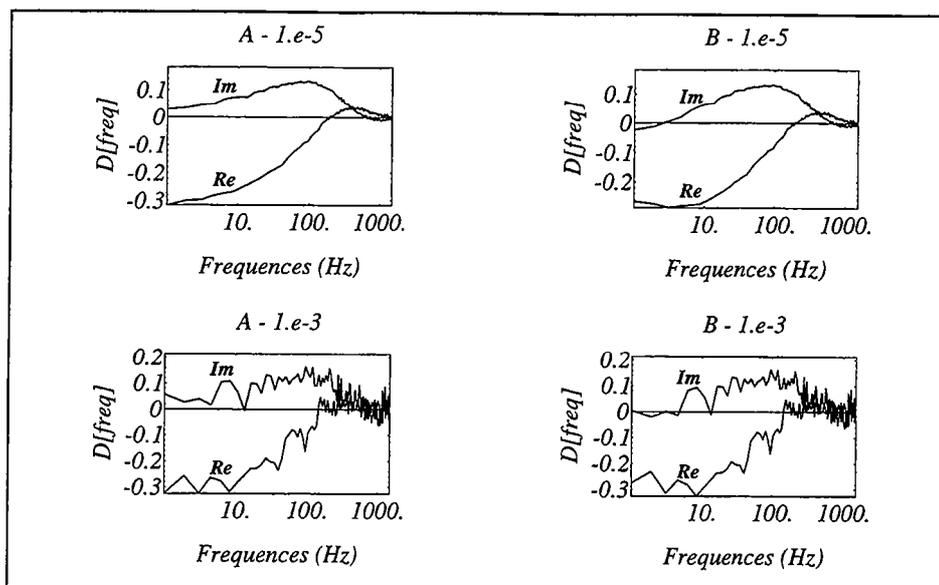


Figure V.3 Courbes du champ $D_{obs}(\omega)$ (partie réelle et imaginaire) pour les deux modèles A (à gauche) et B (à droite), et pour les deux niveaux de bruits ($\sigma^2=10^{-5}$ en haut et $\sigma^2=10^{-3}$ en bas).

MODELE	temps q ($s^{1/2}$)	amplitude W
A	0.06728	- 0.51949
B	0.06728	- 0.51949
	0.42175	+ 0.27888

Tableau V.1 Valeurs théorique des couples $\{q, W\}$ pour chacun des modèles A et B.

peut être associé au contraste de résistivité ρ_1/ρ_2 du modèle A (voir tableau [V.1]). L'erreur relative est de 3% sur le pseudo-temps et de 15% sur l'amplitude. Pour le second événement visible, il est possible de l'associer au premier multiple du réflecteur principal puisque l'on trouve $W_3 \approx (W_1^{th})^2$ (erreur de 4%). Si tel est le cas, la localisation de cet événement n'est pas très bonne : erreur de 20% sur q . Lorsque l'on augmente le niveau de bruit ($\sigma^2 = 10^{-3}$), le nombre de réflecteurs recherchés est plus faible ($N = 2$, tableau [V.2]). La solution trouvée est pratiquement la même que celle obtenue avec $\sigma^2 = 10^{-5}$. Il faut cependant noter que la localisation est moins bonne (figure [V.4 - A.4]) et que l'erreur sur chacun des paramètres est plus forte : 6% sur q_1 , 24% sur q_2 , 35% sur W_1 et 37% sur W_2 .

Dans le cas du second modèle (B) et pour un faible niveau de bruit ($\sigma^2 = 10^{-5}$), nous arrivons

MODELE	BRUIT	AIC	temps q ($s^{1/2}$)	amplitude W
A	$\sigma^2 = 10^{-5}$	AIC = 3	0.0001	- 0.0002
			0.0692	- 0.5958
			0.1077	+ 0.2596
A	$\sigma^2 = 10^{-3}$	AIC = 2	0.0713	- 0.7041
			0.1026	+ 0.3717

Tableau V.2 Tableau des couples $\{q, W\}$ solutions des inversions des données du modèle A suivant le niveau de bruit des données.

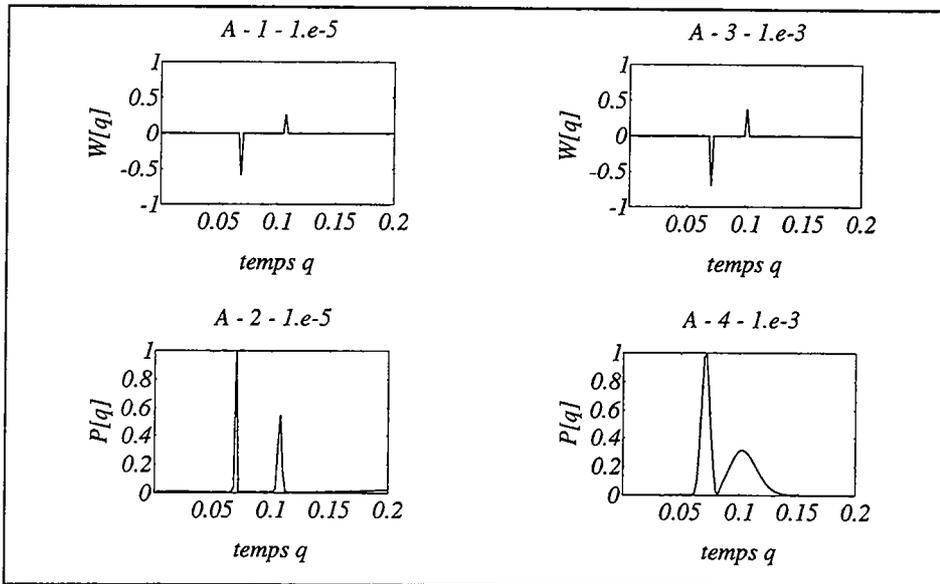


Figure V.4 Pseudo-traces sismiques en haut et courbes des probabilités en bas associées aux solutions des inversions des données du modèle A (bruit : $\sigma^2=10^{-5}$ à gauche et $\sigma^2=10^{-3}$ à droite).

à déterminer correctement le premier réflecteur, ainsi que son multiple (tableau [V.3] et figures [V.5 – B.1 et B.2]) avec des erreurs respectives de 1.3 et 13% sur les pseudo-temps q et de 7 et 15% sur les amplitudes. Le second contraste en résistivité (ρ_2/ρ_3) est également détecté mais avec une moins bonne localisation (figure [V.5 – B.2]) : probabilités plus faible et plus étendues. L'erreur est d'environ 7% sur la position et de 52% sur l'amplitude. En augmentant le niveau de bruit dans les données, seuls deux événements sont recherchés (tableau [V.3]). Le premier reste bien localisé

(figure [V.5 – B.4]) et peut être assimilé au contraste ρ_1/ρ_2 du modèle. L'erreur est de 3% sur q et de 7% sur l'amplitude. Le second réflecteur trouvé par l'algorithme ne peut s'interpréter ni comme un multiple, ni comme le deuxième contraste en résistivité. Le fait qu'il soit délocalisé le long de l'axe des pseudo-temps (figure [V.5 – B.4]) nous suggère qu'au cours de l'inversion, l'algorithme a réuni le multiple et le second réflecteur en un seul événement, ne réussissant pas à les séparer.

<i>MODELE</i>	<i>BRUIT</i>	<i>AIC</i>	<i>temps q (s^{1/2})</i>	<i>amplitude W</i>
B	$\sigma^2 = 10^{-5}$	<i>AIC</i> = 3	0.06820	– 0.5547
			0.11625	+ 0.2287
			0.44950	+ 0.1347
B	$\sigma^2 = 10^{-3}$	<i>AIC</i> = 2	0.06532	– 0.4852
			0.16031	+ 0.2127

Tableau V.3 Tableau des couples $\{q, W\}$ solutions des inversions des données du modèle *B* suivant le niveau de bruit des données.

Après avoir isolé une solution, il est possible de donner une estimation du profil en résistivité. Par exemple, pour le modèle *A*, si l'on considère le couple $\{0.0692, -0.5958\}$, et connaissant la résistivité du premier milieu (choix de $\rho_1 = 100 \Omega.m$ pour le calcul de $\tilde{D}_{obs}(\nu)$), l'épaisseur h_1 et la résistivité du second milieu ρ_2 sont données par :

$$\begin{cases} h_1 = \frac{q_1}{2} \sqrt{\frac{\rho_1}{\mu_0}} \\ \rho_2 = \rho_1 \left(\frac{1+W_1}{1-W_1} \right)^2 \end{cases} \quad (\text{éq. V.3.2})$$

qui donne :

$$\begin{cases} (1) \begin{cases} \rho_1 = 100 \Omega.m \\ h_1 \approx 308 m \end{cases} \\ (2) \begin{cases} \rho_2 \approx 6.4 \Omega.m \\ h_2 = \infty. \end{cases} \end{cases} \quad (\text{éq. V.3.3})$$

Par contre, si l'on prend le couple $\{0.0713, -0.7041\}$, nous arrivons à :

$$\begin{cases} (1) \begin{cases} \rho_1 = 100 \Omega.m \\ h_1 \approx 313 m \end{cases} \\ (2) \begin{cases} \rho_2 \approx 3 \Omega.m \\ h_2 = \infty \end{cases} \end{cases} \quad (\text{éq. V.3.4})$$

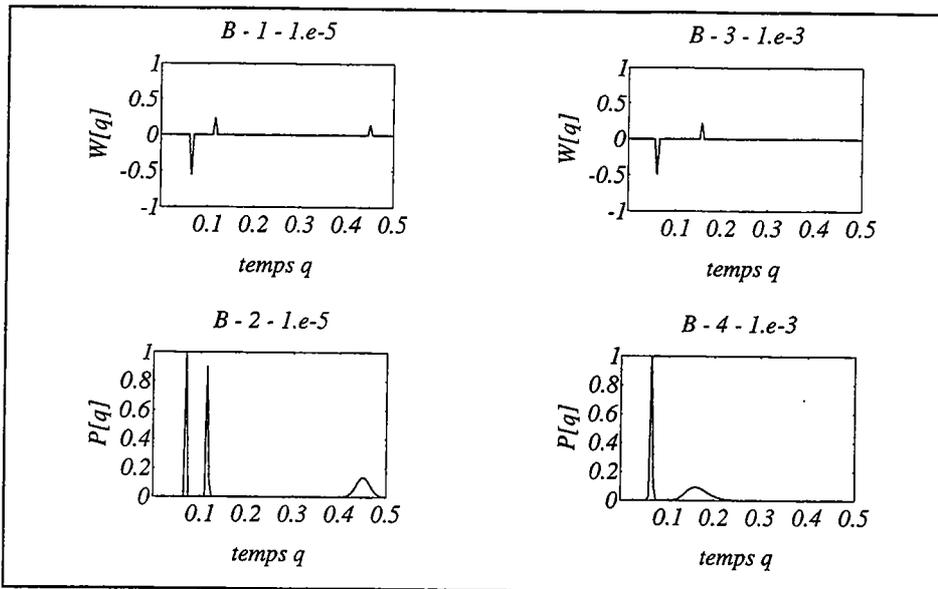


Figure V.5 Pseudo-traces sismiques en haut et courbes des probabilités en bas associées aux solutions des inversions des données du modèle A (bruit : $\sigma^2=10^{-5}$ à gauche et $\sigma^2=10^{-3}$ à droite).

Pour le modèle *B* et avec la solution

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} q_1 = 0.06820 \\ W_1 = -0.5547 \\ q_2 = 0.44950 \\ W_2 = +0.1347 \end{array} \right. \quad (\text{éq. V.3.5})$$

nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \rho_1 = 100 \Omega.m \\ z_1 \approx 304 m \\ \rho_2 \approx 8.2 \Omega.m \\ z_2 \approx 791 m \\ \rho_3 \approx 18 \Omega.m \\ h_2 = \infty \end{array} \right. \quad (\text{éq. V.3.6})$$

c Bilan

L'analyse des deux exemples 1D nous montre que le premier contraste en résistivité est bien déterminé, même avec un niveau de bruit assez fort. La localisation des autres réflecteurs (multiples inclus) dépend fortement de la qualité du premier couple $\{q, W\}$ détecté. En effet, puisque les contrastes ρ_{i+1}/ρ_i sont fonctions des amplitudes des réflecteurs précédants, l'erreur sur les W va se propager en augmentant avec la profondeur. Ceci a pour conséquence de réduire la résolution du profil $\rho(z)$ estimé à partir des couples $\{q, W\}$.

4 Inversion de modèles 2D

a Préambule

Pour l'ensemble des modèles testés, nous avons calculé des résistivités apparentes et des phases pour des fréquences variant de 1 à 1500 Hz grâce à un programme de différence finie développé par *T. R. Madden (MIT, USA)* [Madden and Thompson, 1965, Swift, 1971], repris par *C. Flores-Luna (CICESE, Mexique)*. Ces calculs ont été faits pour les deux modes de polarisations *TE* et *TM*, mais également pour le déterminant *DET*. A partir de ces valeurs et pour chacun des 31 sites de mesures des modèles, nous avons déterminé les champs $\tilde{D}_{\text{obs}}(\nu)$ en prenant $\rho_1 = 100 \Omega.m$ (valeur identique pour tous les modèles). Un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance $\sigma^2 = 10^{-5}$ a été ajouté à ces valeurs pour constituer, en final, les données de l'inversion. Dans la suite, nous présentons les résultats concernant trois modèles différents. Pour chacune des figures présentées, l'axe vertical a pour unité le pseudo-temps double de propagation.

b Modèle BISEAU

Le profil de résistivité du modèle *BISEAU* est représenté sur la figure [V.6]. Deux blocs de résistivité respective $10 \Omega.m$ et $50 \Omega.m$ définissent deux anomalies en conductivité au sein d'une matrice uniforme de $100 \Omega.m$. Le premier contraste correspond à une couche de $10 \Omega.m$ d'épaisseur $200 m$ pentée vers la droite du modèle et le second s'identifie par un bloc de $50 \Omega.m$ positionné dans la partie droite de la section et dont l'épaisseur varie progressivement de $100 m$ (partie centrale du modèle) à $300 m$ (à droite du modèle). Les couples $\{q, W\}$ calculés avec l'hypothèse d'un milieu 1D dans chaque partie du modèle sont donnés dans le tableau [V.4]. Les résultats de l'inversion (pseudo-traces sismiques *TS* et courbes des probabilités *Pa*) sont représentés sous forme de sections (x, q) sur la figure [V.7] pour le mode *TE*, [V.8] pour *TM* et [V.9] pour *DET*.

Globalement, les résultats obtenus pour le mode *TE* sont comparable en tous points avec ceux de *DET*, le réflecteur localisé entre 0.4 et $0.5 \sqrt{s}$ ayant une probabilité négligeable. Cependant, nous observons que ces sections diffèrent largement avec celles du mode *TM*. Pour les deux modes *TE* et *DET*, on retrouve une structure très proche du modèle initial, les réflecteurs étant bien localisés en temp et continus horizontalement. De plus, l'ordre de grandeur des amplitudes des réflecteurs détectés pour ces deux modes est bon (voir tableau [V.4]). En particulier, l'amplitude W_1 observée

dans la partie gauche de la section *TS* est plus élevée que celle de la partie droite. Ceci est indicatif d'une variation de la résistivité plus forte dans la première partie du modèle ($\rho_1/\rho_2 = 10$ à gauche et $\rho_1/\rho_2 = 2$ à droite). Concernant le mode *TM*, seule la première interface est clairement détectée, mais avec une amplitude inversée. Ceci est dû au réflecteur positionné en $q \approx 0 \sqrt{s}$ ($q < 10^{-3} \sqrt{s}$) dont l'amplitude est $W \approx -1$ (visible sur la courbe des probabilités).

(q, W)	<i>Gauche</i>	<i>Droite</i>
q_1	$0.04484 s^{1/2}$	$0.04484 s^{1/2}$
q_1^m	$0.08968 s^{1/2}$	$0.08968 s^{1/2}$
q_2	$0.18664 s^{1/2}$	$0.13996 s^{1/2}$
q_3	—	$0.28176 s^{1/2}$
W_1	- 0.51949	- 0.17157
W_1^m	+ 0.26987	+ 0.02943
W_2	+ 0.37930	- 0.37072
W_3	—	+ 0.43064

Tableau V.4 Couples $\{q, W\}$ calculés pour le modèle *BISEAU* en faisant l'hypothèse d'un milieu 1D pour chaque partie du modèle. L'exposant *m* est mis pour *multiple*.

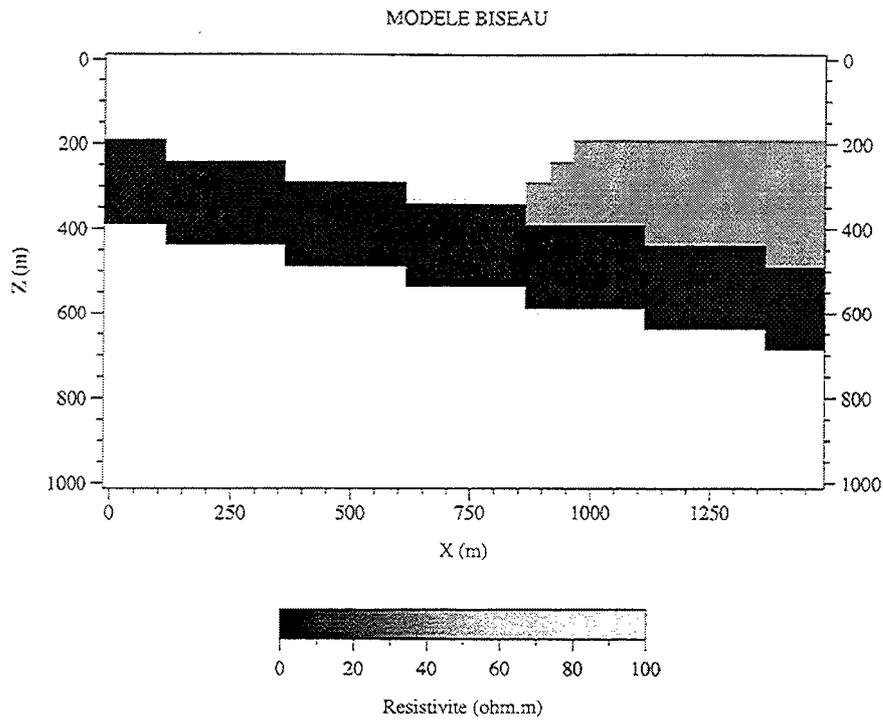


Figure V.6 Profil en résistivite du modèle *BISEAU*.

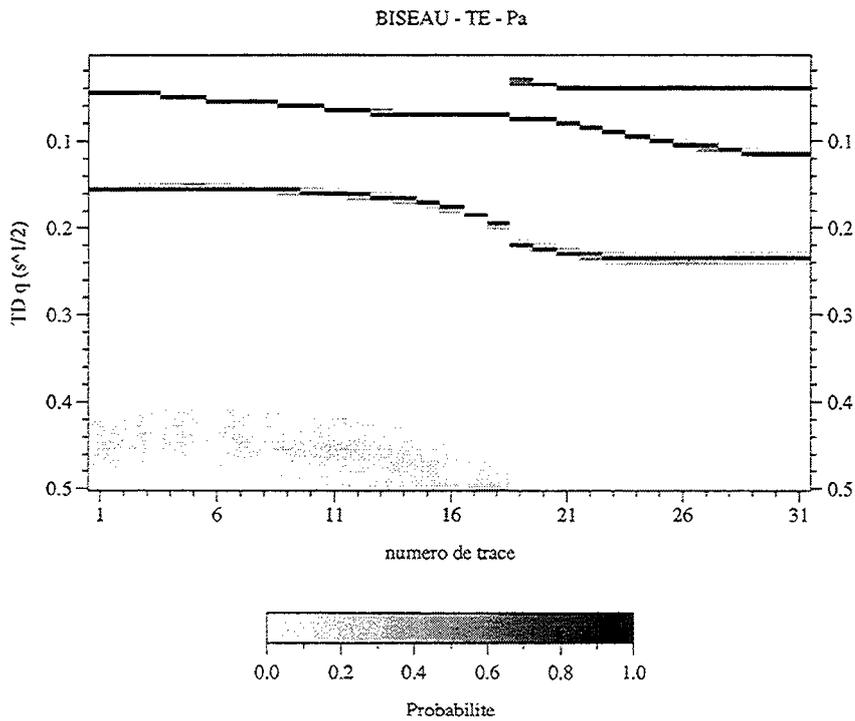
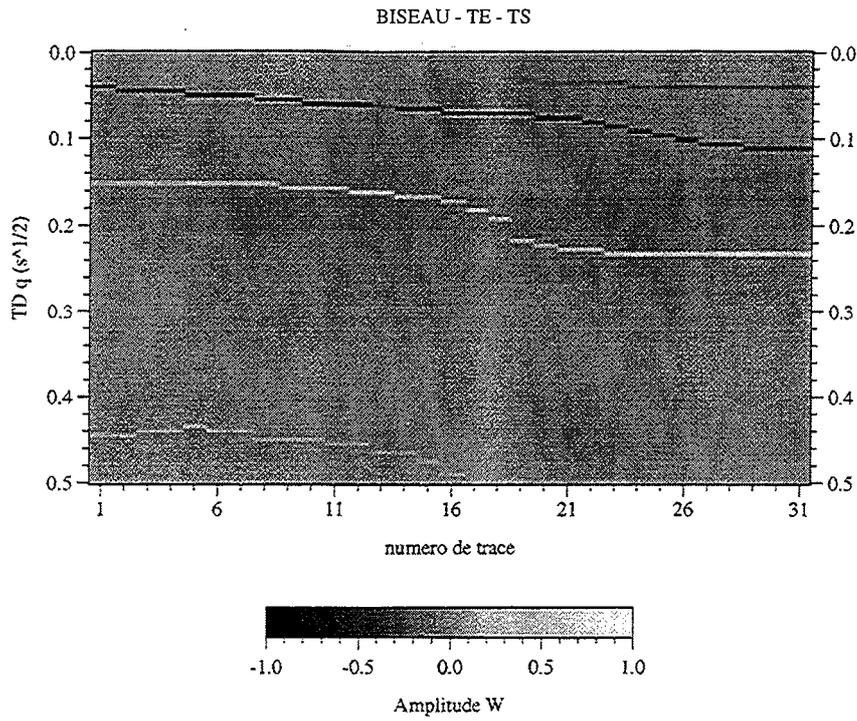


Figure V.7 Images des pseudo-traces sismiques (en haut — label *TS*) et des probabilités (en bas — label *Pa*) du modèle *BISEAU*, mode *TE*.

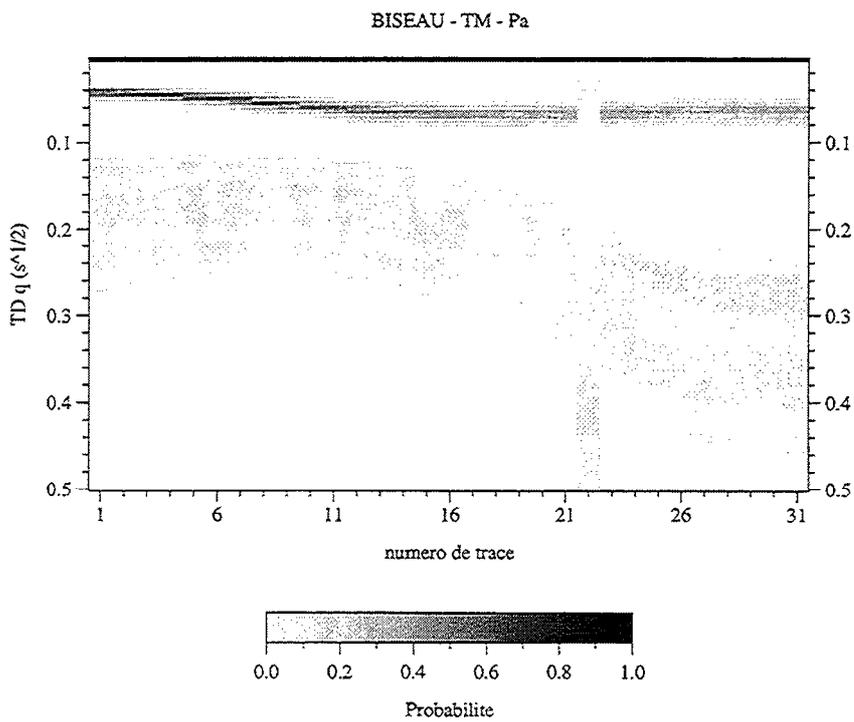
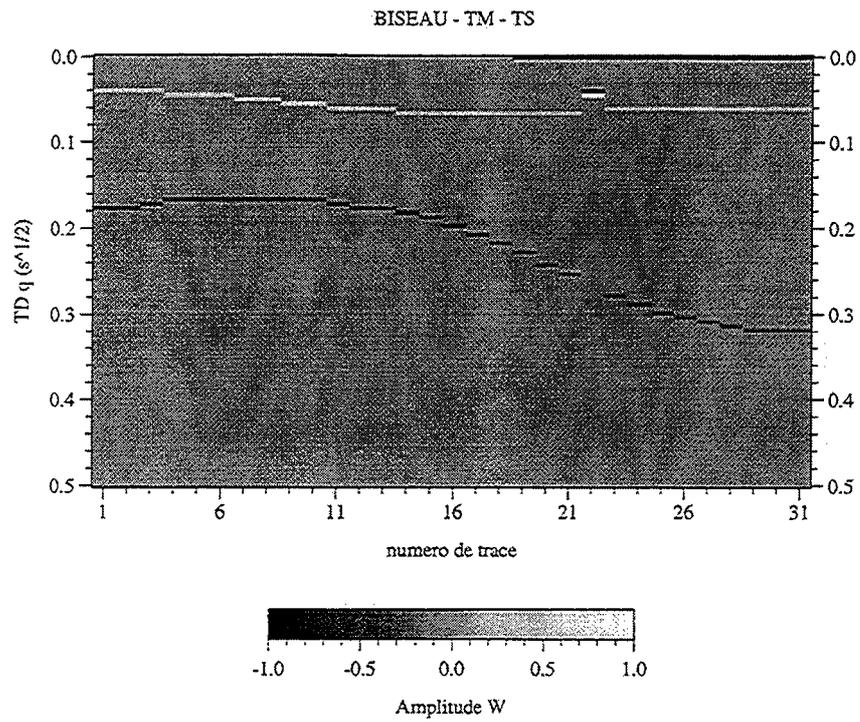


Figure V.8 Images des pseudo-traces sismiques (en haut — label *TS*) et des probabilités (en bas — label *Pa*) du modèle *BISEAU*, mode *TM*.

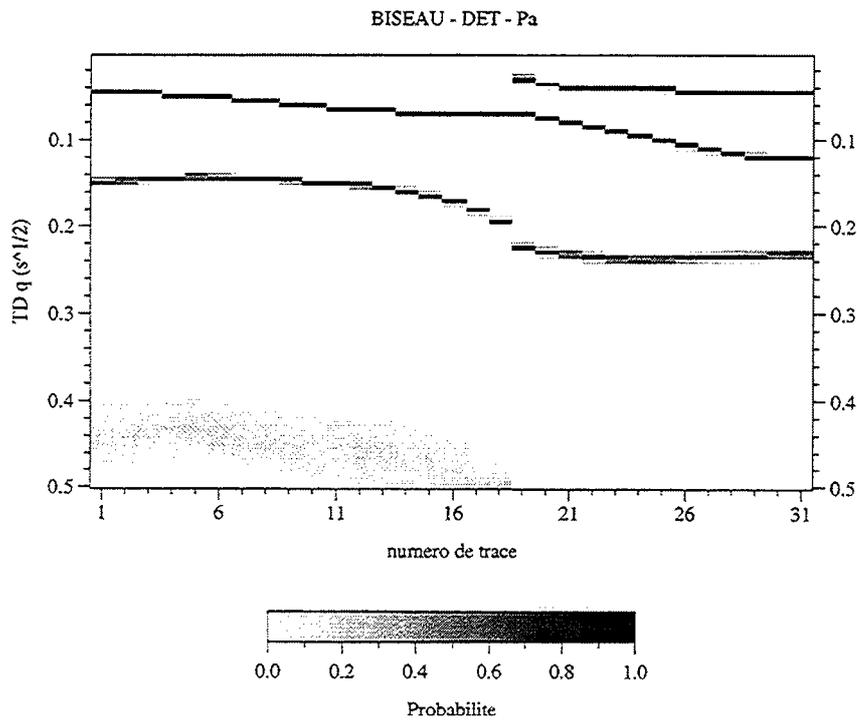
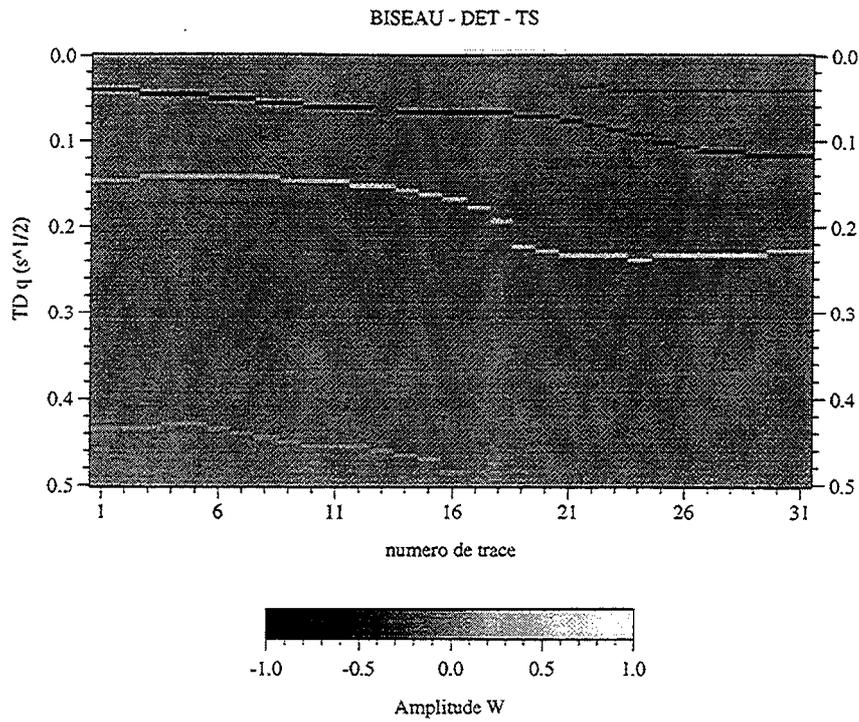


Figure V.9 Images des pseudo-traces sismiques (en haut — label *TS*) et des probabilités (en bas — label *Pa*) du modèle *BISEAU*, mode *DET*.

c Modèle FAILLE

Le modèle *FAILLE* est représenté sur la figure [V.10]. Il est constitué d'une inclusion de résistivité $10 \Omega.m$ et d'épaisseur ne dépassant pas $75 m$ dans une matrice de résistivité de $100 \Omega.m$. Les couples $\{q, W\}$ calculés avec l'hypothèse d'un milieu 1D dans chaque partie du modèle sont donnés dans le tableau [V.5]. Les résultats des inversions pour chaque mode sont donnés sur les figures [V.11] (mode *TE*), [V.12] (mode *TM*) et [V.13] (mode *DET*).

A partir des sections représentant les pseudo-traces sismiques (*TS*), nous voyons que les résultats finaux sont semblables quel que soit le mode traité. Des différences apparaissent lorsque l'on compare ces sections avec les images des probabilités correspondantes. Plus particulièrement pour le mode *TE*, la juxtaposition des deux sections montre que seule la partie où le numéro de trace est supérieur à 11 est résolue correctement. Cette zone marque le sommet de l'anomalie, le contraste inférieur n'est pas détecté. Pour le mode *TM*, un réflecteur positionné en $q \approx 0 \sqrt{s}$ possède une forte probabilité. Ce réflecteur a une amplitude $W \approx -1$ (comme pour le modèle *BISEAU*), impliquant l'inversion du signe de l'amplitude du premier événement détecté. De plus, nous pouvons voir que le dernier réflecteur possède une très faible probabilité. Enfin, nous pouvons voir que les meilleurs résultats (cohérence entre les pseudo-sections sismiques et les probabilités) sont obtenus à partir de l'analyse du déterminant (*DET*). On retrouve pour ces sections la structure du modèle avec une bonne cohérence latérale des réflecteurs ainsi qu'une résolution verticale satisfaisante marquée par la faible largeur des pics des probabilités.

(q, W)	<i>Gauche</i>	<i>Droite</i>
q_1	$0.04484 \text{ s}^{1/2}$	$0.12331 \text{ s}^{1/2}$
q_1^m	$0.08968 \text{ s}^{1/2}$	$0.24662 \text{ s}^{1/2}$
q_2	$0.08029 \text{ s}^{1/2}$	$0.15876 \text{ s}^{1/2}$
W_1	$- 0.51949$	$- 0.51949$
W_1^m	$+ 0.26987$	$+ 0.26987$
W_2	$+ 0.37930$	$+ 0.37930$

Tableau V.5 Couples $\{q, W\}$ calculés pour le modèle *FAILLE* en faisant l'hypothèse d'un milieu 1D pour chaque partie du modèle. L'exposant m est mis pour *multiple*.

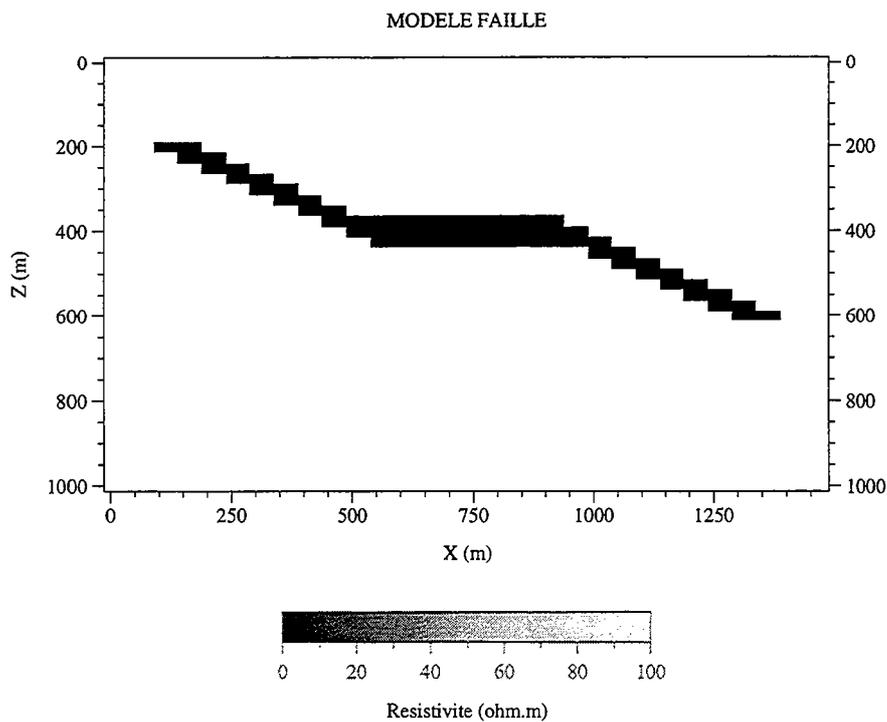


Figure V.10 Profil en résistivite du modèle *FAILLE*.

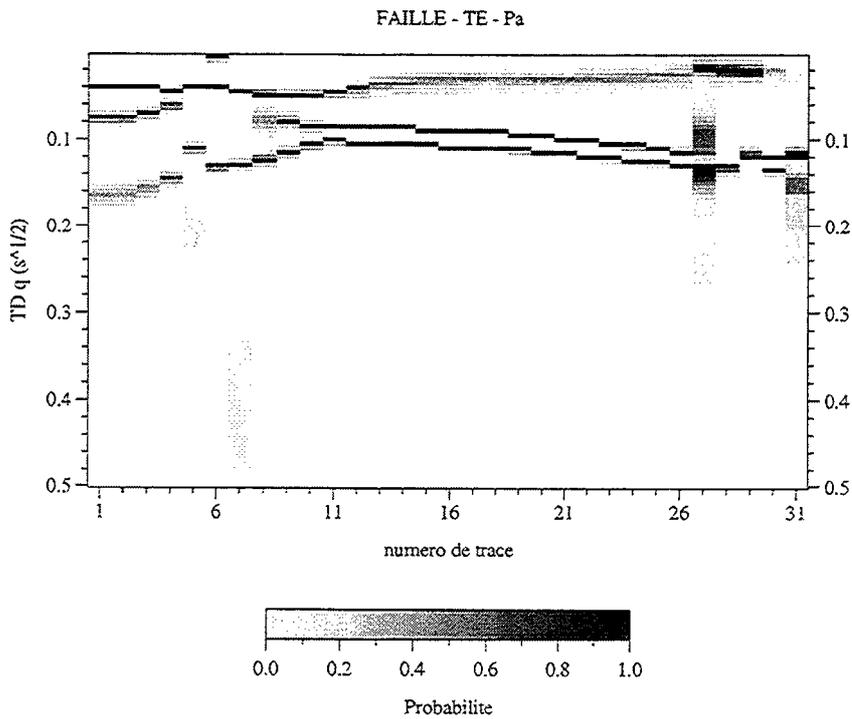
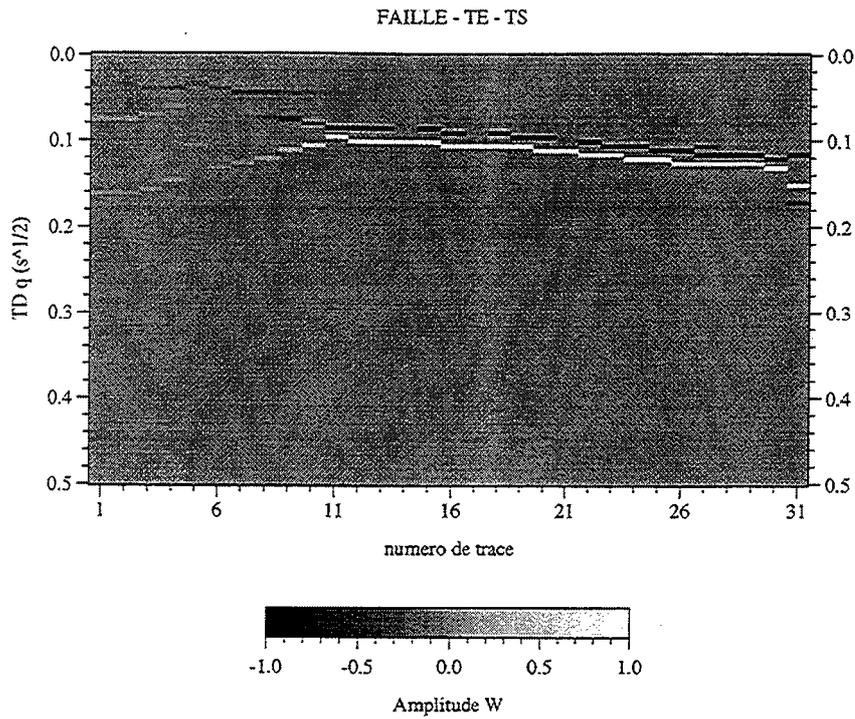


Figure V.11 Images des pseudo-traces sismiques (en haut — label *TS*) et des probabilités (en bas — label *Pa*) du modèle *FAILLE*, mode *TE*.

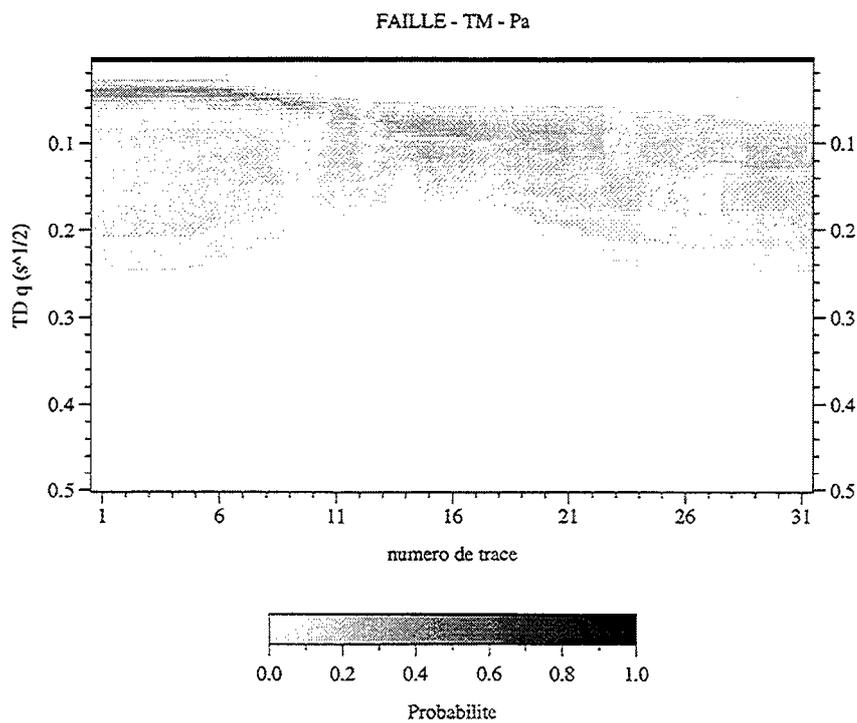
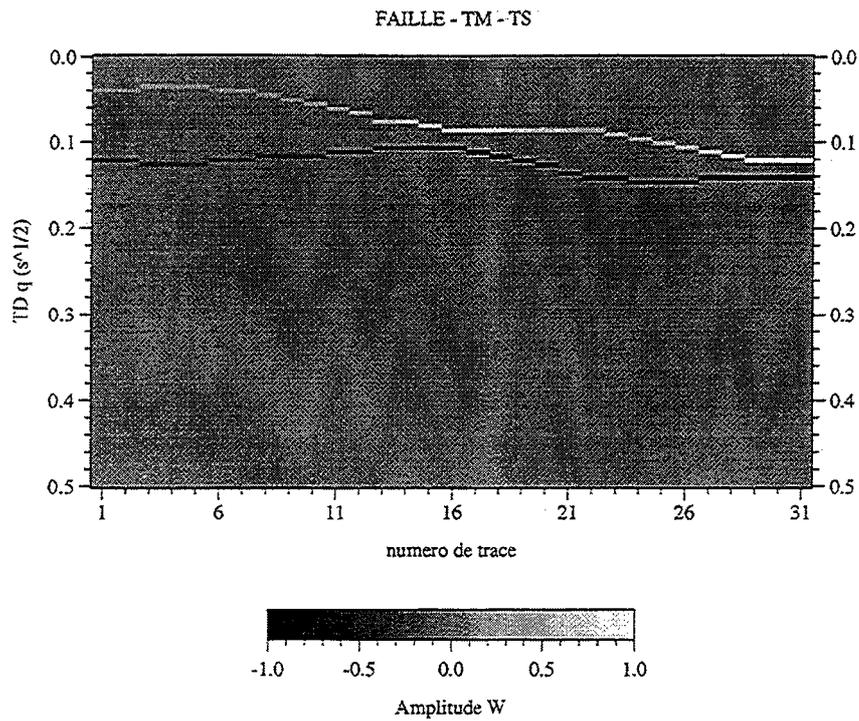


Figure V.12 Images des pseudo-traces sismiques (en haut — label *TS*) et des probabilités (en bas — label *Pa*) du modèle *FAILLE*, mode *TM*.

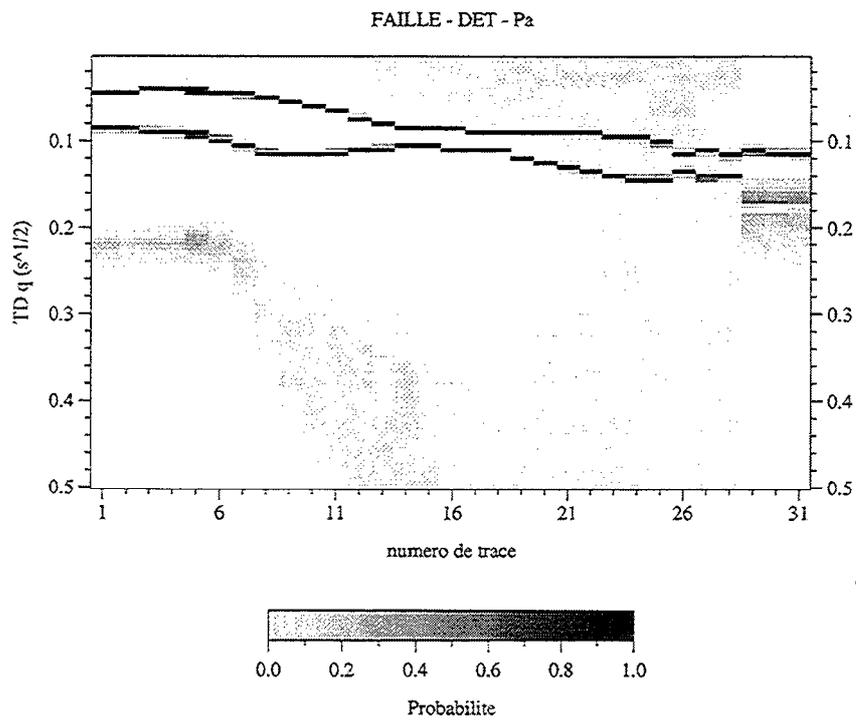
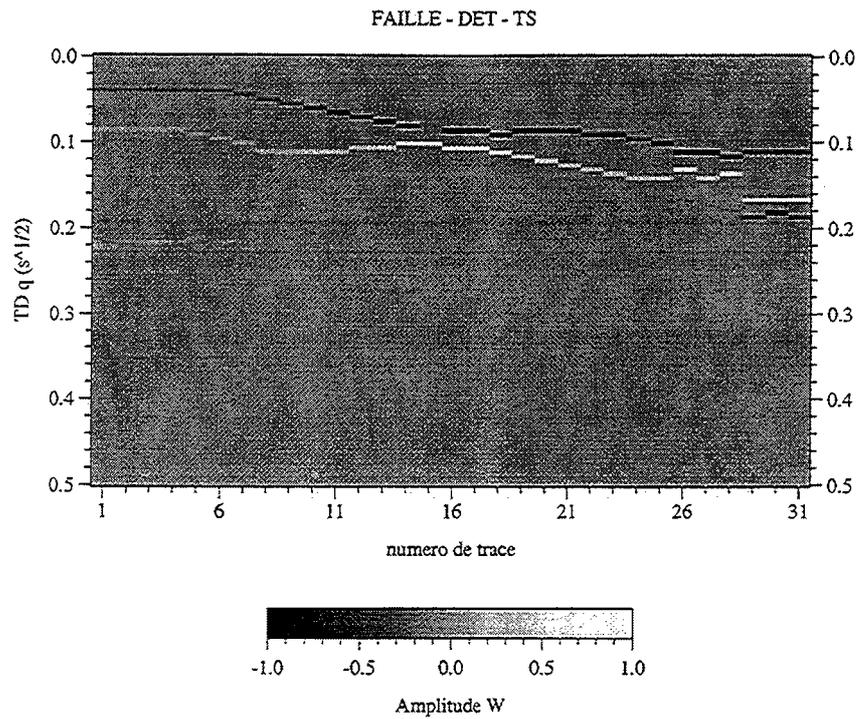


Figure V.13 Images des pseudo-traces sismiques (en haut — label *TS*) et des probabilités (en bas — label *Pa*) du modèle *FAILLE*, mode *DET*.

(q, W)	<i>Gauche</i>	<i>Droite</i>
q_1	$0.04484 \text{ s}^{1/2}$	$0.04484 \text{ s}^{1/2}$
q_1^m	$0.08968 \text{ s}^{1/2}$	$0.08968 \text{ s}^{1/2}$
q_2	$0.18664 \text{ s}^{1/2}$	$0.10822 \text{ s}^{1/2}$
W_1	$- 0.51949$	$- 0.17157$
W_2	$+ 0.37930$	$+ 0.16652$

Tableau V.6 Couples $\{q, W\}$ calculés pour le modèle *VARLAT* en faisant l'hypothèse d'un milieu 1D pour chaque partie du modèle. L'exposant m est mis pour *multiple*.

d Modèle *VARLAT*

Le modèle *VARLAT* est constitué d'une couche horizontale d'épaisseur 200 m dont la résistivité varie latéralement : 10 $\Omega.m$ de 0 à 750 m et 50 $\Omega.m$ de 750 à 1500 m. La résistivité de l'encaissant est de 100 $\Omega.m$. Les couples $\{q, W\}$ (hypothèse d'un milieu 1D dans chaque partie du modèle) sont donnés dans le tableau [V.6]. Pseudo-traces sismiques et courbes des probabilités déterminées après l'inversion des données sont représentées sur les figures [V.15] (mode *TE*), [V.16] (mode *TM*) et [V.17] (mode *DET*).

Pour tous les modes, le premier réflecteur est assez bien localisé. Nous observons également une variation latérale de son amplitude : elle diminue lorsque l'on passe de la gauche vers la droite de la section. Cette variation nous informe sur la variation latérale de la résistivité du deuxième milieu. En ce qui concerne les réflecteurs plus profonds, nous observons à partir des images en probabilité et suivant les modes une plus ou moins bonne résolution. Par contre, la continuité horizontale de ces marqueurs est contraire à celle attendue : puisque $\rho_2^g < \rho_2^d$, alors $v_2^g < v_2^d$ et donc le second réflecteur pour la partie gauche devrait "arriver" plus tard que celui qui est à droite. En effet, dans la partie gauche des sections, on localise le premier multiple du contraste ρ_1/ρ_2 , puis le contraste ρ_2/ρ_3 alors qu'à droite, le second réflecteur détecté peut s'interpréter comme un intermédiaire entre l'image des deux contrastes : q_1^m (multiple de q_1) et q_2^d (contraste ρ_2/ρ_3) sont proches l'un de l'autre (voir tableau [V.6]). Il faut également noter que l'on retrouve pour le mode *TM* le changement de signe de l'amplitude W_1 déjà décrit pour les autres modèles.

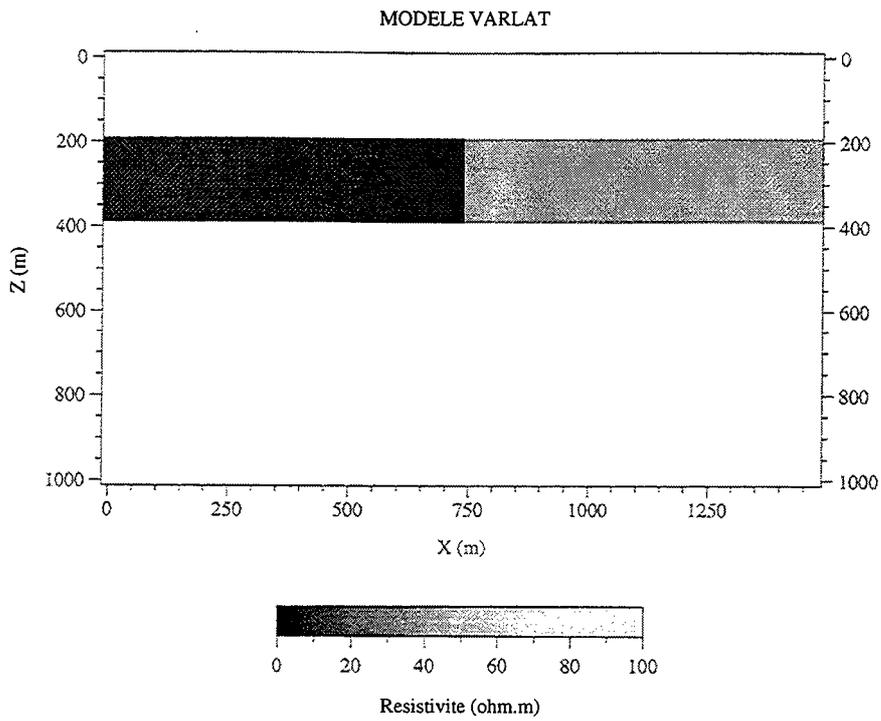


Figure V.14 Profil en résistivite du modèle *VARLAT*.

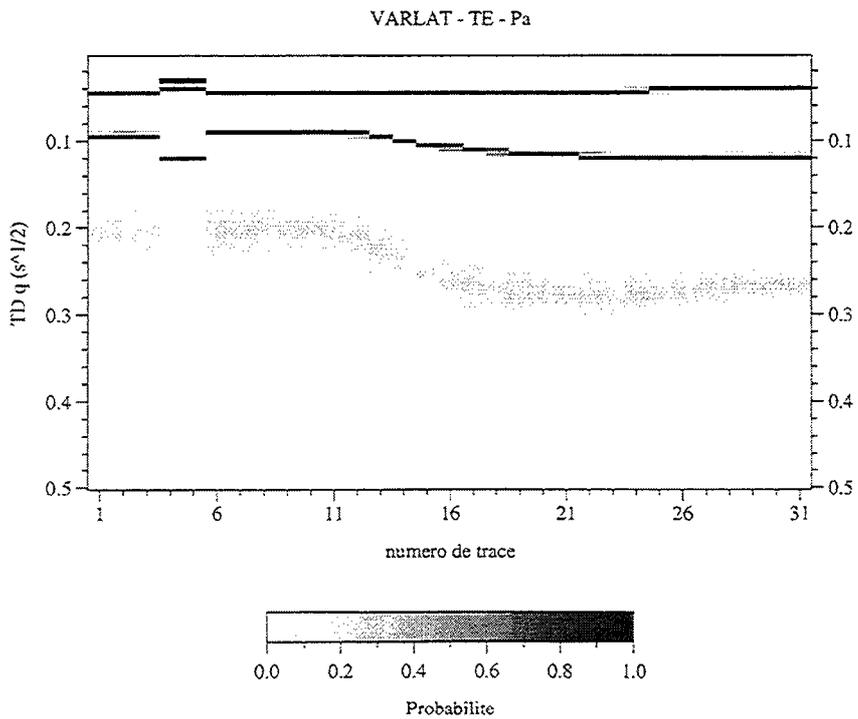
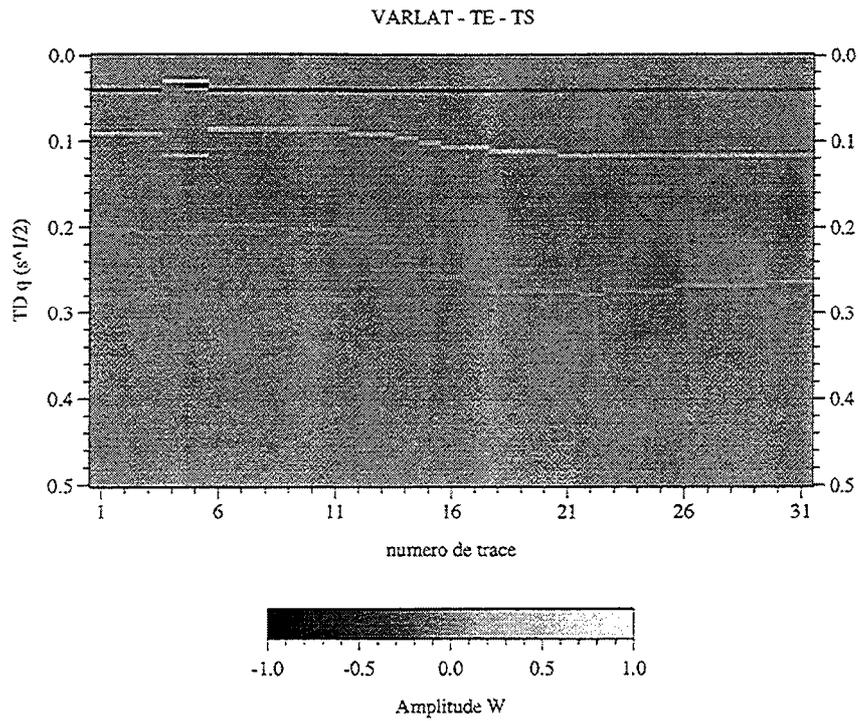


Figure V.15 Images des pseudo-traces sismiques (en haut — label *TS*) et des probabilités (en bas — label *Pa*) du modèle *VARLAT*, mode *TE*.

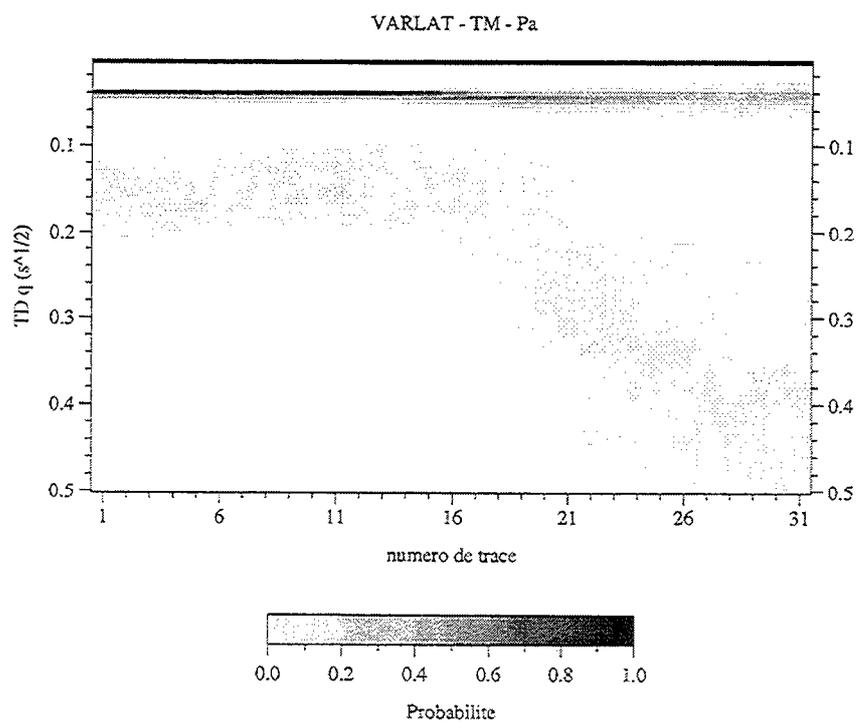
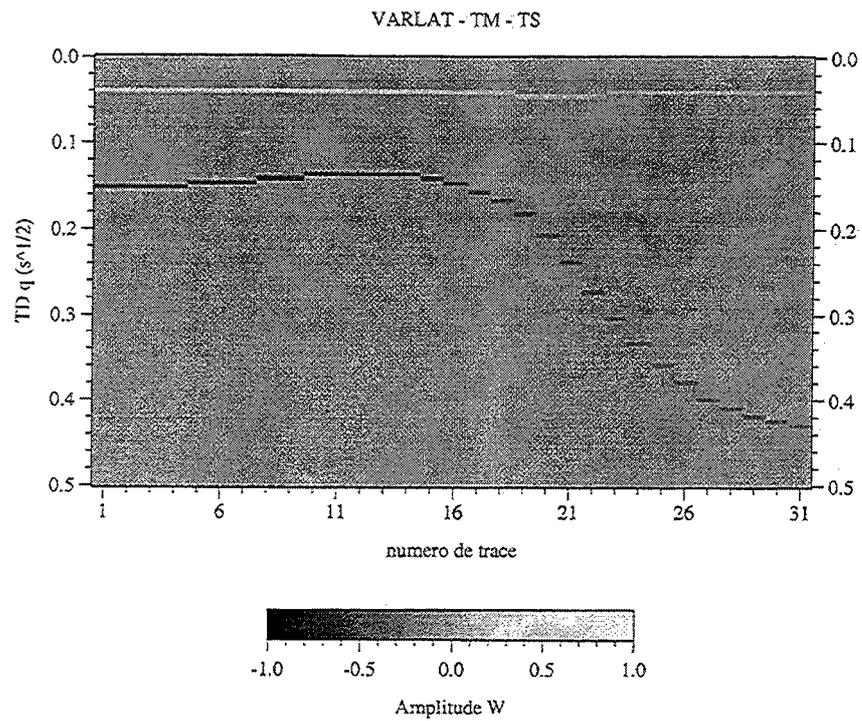


Figure V.16 Images des pseudo-trace sismique (en haut — label *TS*) et des probabilités (en bas — label *Pa*) du modèle *VARLAT*, mode *TM*.

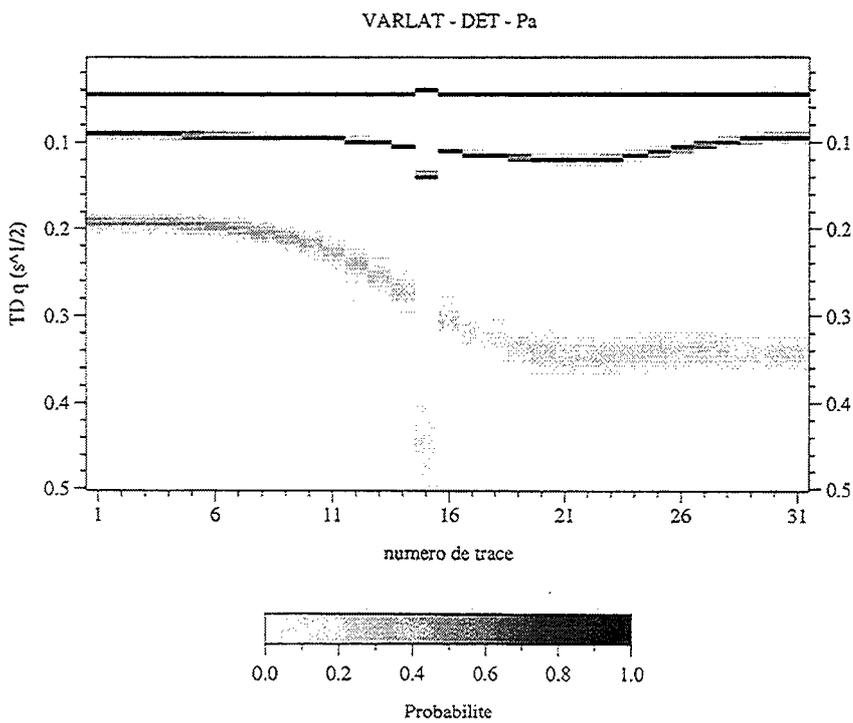
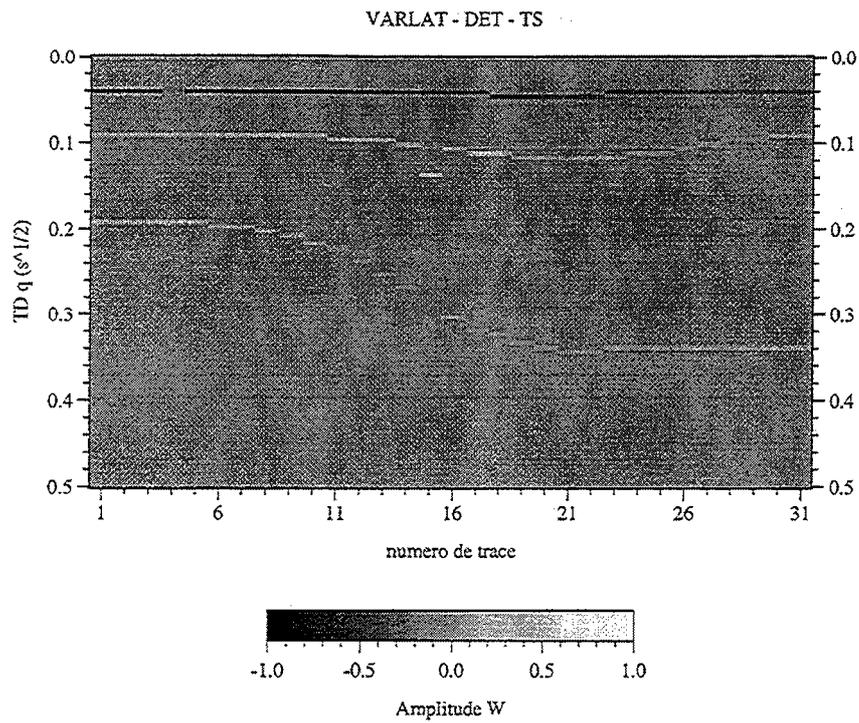


Figure V.17 Images des pseudo-trace sismique (en haut — label *TS*) et des probabilités (en bas — label *Pa*) du modèle *VARLAT*, mode *DET*.

e Bilan

A partir des exemples 2D proposés et des commentaires sur les résultats, nous pouvons faire ressortir plusieurs points quant à la qualité de la méthode.

A l'exception du mode TM que nous commenterons plus loin, nous avons vu que la juxtaposition des deux sections représentant les résultats (pseudo-traces sismiques et probabilités) permet de mettre en évidence la structure du modèle de résistivité. En particulier, nous avons vu que le premier contraste ρ_1/ρ_2 est bien détecté, tant sur sa position sur l'axe q qu'au niveau de l'ordre de grandeur de l'amplitude (contraste ρ_1/ρ_2). Pour les marqueurs plus profonds, la qualité des résultats est fonction de la qualité du premier événement détecté, mais également de la présence ou non de multiples qui peuvent jouer le rôle de masque.

A partir de ces sections, il est possible de réaliser une coupe (x, q) synthétique de la réflectivité du milieu. Une estimation de la loi de conductivité $\sigma(x, z)$ peut alors être calculée en réalisant une "migration" 1D sur chacune des traces (voir l'exemple sur les modèle 1D). Cependant, cette méthode nécessite au préalable une identification précise de chacun des événements détectés : marqueur principal où/et multiples, et plutôt que d'estimer le profil $\rho(z)$ par cette méthode, nous pouvons donner l'amplitude des contrastes en résistivité correspondant aux réflecteurs détecté. Normalement, remonter à la distribution des résistivités en fonction de la profondeur devrait se faire en réalisant une migration 2D des sections (x, q) . L'utilisation des algorithmes de migration de la sismique est une possibilité mais reste assez délicate puisque la vitesse "électromagnétique" $c(\mathbf{r}) = (\mu\sigma(\mathbf{r}))^{-1/2}$ que l'on doit prendre va varier comme la conductivité, c'est à dire sur plusieurs ordres de grandeur. Ce point reste à développer.

En ce qui concerne le mode TM , nous obtenons pour chaque modèle des images ne cartographiant que le premier contraste ρ_1/ρ_2 . Cependant, lorsque l'on tourne les phases ϕ^{TM} dans le premier quadrant ($[0, 90]$) (opération réalisée pour le calcul de Z^{DET}), nous obtenons des images comparables à celles obtenues avec les données du mode TE . Ceci s'explique par le fait que la relation transformant les couples $\{\rho_a, \phi\}$ en $\tilde{D}_{obs}(\nu)$ provient d'une hypothèse 1D du milieu, c'est à dire pour laquelle $Z^{TE} \equiv Z^{TM}$.



5 Conclusion

- Le but de ce chapitre était de tester l'algorithme d'inversion sur des données magnétotelluriques calculées sur des modèles synthétiques 1D et 2D. Le premier point développé concerne la relation de transformation permettant d'obtenir le champ $\bar{D}_{\text{obs}}(\nu)$ à partir des couples $\{\rho_a, \phi\}$. Cette transformation est un élément incontournable pour des applications en magnétotellurique, et constitue alors un élément du problème inverse.

- Les résultats obtenus sur les modèles synthétiques montrent que les réflecteurs associés aux contrastes en résistivités sont détectés avec une assez bonne précision, notamment pour le premier d'entre eux. À partir des pseudo-sections sismiques, nous pouvons identifier les structures du modèle, la présence de chaque réflecteur étant validée ou non par l'image des probabilités. On peut noter également pour les modèles 2D que ce sont les modes *TE* et *DET* qui fournissent les meilleures images.

- Le manque de résolution sur les amplitudes ne permet pas une reconstruction directe (par une méthode 1D) du profil de résistivité. Cependant, il faut retenir que l'on obtient l'ordre de grandeur de ce paramètre, ce qui permet d'avoir une information sur l'amplitude du contraste ρ_i/ρ_{i+1} .

VI
APPLICATIONS DE TERRAIN

1 Introduction

Nous allons aborder, dans ce chapitre, l'application de notre méthode d'imagerie à des données de terrain. Dans un premier temps, nous présenterons nos résultats obtenus sur les données *COPROD2 (CANADA)*. Ces données ont déjà été traitées par de nombreuses méthodes (voir [Jones, 1993] pour une revue). Elles nous permettront surtout de "caler" l'inversion sur des données de terrain. Dans un deuxième temps, nous présenterons les données *ARMOR* acquises en Juillet 1995 dans le cadre du programme *GéoFrance 3D*¹, ainsi que les résultats préliminaires obtenus de l'analyse de ces données.

¹ Programme INSU-BRGM

2 Données COPROD2 — CANADA

a Présentation

Des sondages géomagnétiques profonds (*GDS*) [Reitzel *et al.*, 1970, Gough and Camfield, 1972, Camfield and Gough, 1977, Handa and Camfield, 1984] montrent la présence d'une grande anomalie en conductivité s'étendant sur une ligne de plus de 2000 *km* de long partant du centre des *Etats Unis* jusqu'à la *Baie de Hudson* (*NE* du *Canada*). Cette anomalie porte le nom de "*North American Central Plains conductivity anomaly*" (anomalie de conductivité des Plaines Centrales Nord Américaines) et est reconnue sous le sigle *NACP*. Elle est également observée sur les cartes magnétiques, gravimétriques et sur les mesures de flux de chaleur [Jones and Craven, 1990, Morel-A-L'Huissier *et al.*, 1990].

Dans le but de mieux caractériser cette anomalie, des campagnes de mesures géophysiques (sismiques, électromagnétiques) ont été menées dans le bassin de *Williston*, situé sur la frontière entre les *Etats Unis* et le *Canada* (voir figure de localisation dans l'article présenté dans la section suivante). Les profils de sismique réfraction [Hajnal *et al.*, 1984, Morel-A-L'Huissier *et al.*, 1987] ne permettent pas d'identifier cette anomalie, mais cartographient clairement le bassin sédimentaire et quelques réflecteurs crustaux.

Les données magnétotelluriques que nous avons traitées ont été enregistrées le long d'un profil d'environ 400 *km* de long (35 stations). Ces mesures recueillies pour des fréquences allant de 320 à 0.00055 *Hz* forment un jeu de données auquel a été attribué le sigle "*COPROD2*" pour "*Comparison of One-dimensional PROfiles from MT Data*" (comparaison d'inversion 1D sur des données magnétotelluriques), le nombre 2 faisant référence à des données 2D [Jones, 1993]. Ces données ont été corrigées de l'effet des statiques [Jones, 1988] et sont disponibles auprès de A. Jones². L'accès à ces données constitue un projet au sein de la communauté de l'électromagnétisme de comparer différentes méthodes d'inversion magnétotellurique sur un même jeu de données.

Dans la section suivante, l'article publié dans la revue *Geophysical Research Letters* [Tournerie *et al.*, 1995] présente nos résultats obtenus par inversion des données *COPROD2*. Nous commenterons ces résultats avec ceux obtenus par d'autres méthodes dans la discussion générale qui suit l'article.

² Geological Survey of Canada, 1 Observatory Crescent, Ottawa, Ont. CANADA K1A0Y3
jones@cg.emr.ca

b Article publié dans *Geophysical Research Letters*

B. Tournerie, D. Gibert and J. Virieux
Inversion of the COPROD2 magnetotelluric data
using a Diffusive-to-Propagative Mapping (DPM),
Geophysical Research Letters, vol 22, n°16, p 2187–2190, 1995

Résumé de l'article en français : L'imagerie par transformation du champ électromagnétique diffusif en un analogue propagatif permet d'obtenir des images de la réflectivité électromagnétique similaire aux sections non migrées de la sismique. Une application de cette méthode sur les données *COPROD2* met en évidence trois réflecteurs majeurs s'interprétant comme des contrastes de résistivités localisés entre 2 et 50 km de profondeur. Le réflecteur le plus profond pourrait correspondre à un marqueur majeur mis en évidence à partir des données sismique *COCORP*.

Inversion of the COPROD2 magnetotelluric data using a Diffusive-to-Propagative Mapping (DPM)

Benoît Tournier and Dominique Gibert

Géosciences Rennes (CNRS: UPR 4661) and Université de Rennes 1, France

Jean Virieux

Institut de Géodynamique, Université de Nice Sophia-Antipolis, France

Abstract. Diffusive-to-Propagative Mapping (DPM) transforms a diffusive electromagnetic field into a dual wave field to produce electromagnetic reflectivity images similar to non-migrated seismic sections. An application of DPM to the COPROD2 data set gives reflectivity images showing three distinct reflectors attributed to resistivity jumps located at depths ranging from 2 to 50 km. The deeper reflector may be related to a major west-dipping seismic reflector detected with the COCORP seismic data.

Introduction

Diffusion disables direct application of seismic imaging techniques to low-frequency electromagnetic soundings, and the seminal papers by *Zhdanov and Frenkel* [1983] and *Filatov* [1984] motivated the development of migration-like algorithms for diffusive fields. Encouraging theoretical results have since been obtained by several authors [*Lee et al.*, 1987; *Levy et al.*, 1988; *Gibert and Virieux*, 1991; *Zorgati et al.*, 1991; *Lee and Xie*, 1993; *Zhdanov et al.*, 1993; *Gibert et al.*, 1994; *Virieux et al.*, 1994; *Wilson*, 1994], and we present an application of the Diffusive-to-Propagative Mapping (DPM) [*Gibert and Virieux*, 1991; *Gibert et al.*, 1994] to the magnetotelluric COPROD2 data set [*Jones*, 1993].

DPM images the sharp gradients of electrical conductivity and allows a direct and high-resolution imaging of electromagnetic reflectivity. The link with the seismic approach is made through a Bäcklund transformation relating solutions, $\vec{D}(\vec{x}, t)$, of the diffusion equation to solutions, $\vec{W}(\vec{x}, q)$, of the wave equation [*Bragg and Dettman*, 1968; *Filippi and Frisch*, 1969; *Filatov*, 1984; *Lee et al.*, 1989]. We have,

$$\vec{D}(\vec{x}, t) = \int_0^\infty \frac{q}{2\sqrt{\pi t^3}} \exp\left(-\frac{q^2}{4t}\right) \vec{W}(\vec{x}, q) dq \quad (1)$$

where the diffusive field $\vec{D}(\vec{x}, t)$ is either the electrical or the magnetic field and verifies the diffusion equation

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{D}(\vec{x}, t) + \frac{\mu}{\rho(\vec{x})} \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}(\vec{x}, t) = 0, \quad (2)$$

while the dual the field, $\vec{W}(\vec{x}, q)$, obeys a wave equation

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{W}(\vec{x}, q) + \frac{\mu}{\rho(\vec{x})} \frac{\partial^2}{\partial q^2} \vec{W}(\vec{x}, q) = 0, \quad (3)$$

where $\rho(\vec{x})$ is the electrical resistivity and μ is the magnetic permeability. The ratio $\mu/\rho(\vec{x})$ appearing in equation (3) gives a wave 'velocity',

$$c(\vec{x}) = \sqrt{\frac{\rho(\vec{x})}{\mu}}, \quad (4)$$

expressed in unit of length per square-root of physical time t . The independent variable q is a pseudo-time given in square-root of t . DPM is made by solving equation (1) in order to reconstruct the wave field \vec{W} from the diffusive field \vec{D} and to produce reflectivity sections in the (\vec{x}, q) space in a way very similar to the well-known seismic reflection images. Equation (1) can be solved either in the time, t , domain [*Lee and Xie*, 1993] or in the dual, ω , Fourier space [*Gibert and Virieux*, 1991; *Gibert et al.*, 1994] where it reads

$$\vec{D}(\vec{x}, \omega) = \int_0^\infty \exp(-q\sqrt{i\omega}) \vec{W}(\vec{x}, q) dq. \quad (5)$$

This latter possibility is more adapted to the present purpose since magnetotelluric data are traditionally given as apparent resistivity and phase with respect to frequency [*Zhdanov and Keller*, 1994]. An issue of critical importance encountered when solving either equation (1) or (5) is the considerable ill-posedness attached to both noisy and incomplete data. Indeed, the numerical resolution of equation (5) is a very unstable inverse problem requiring much care, and a detailed numerical study indicates that fully non-linear inverse techniques like simulated annealing produce stable solutions [*Gibert et al.*, 1994]. As shown by *Donoho* [1992] the numerical inversion of integral equations with Laplace-

Copyright 1995 by the American Geophysical Union.

Paper number 95GL02016
0094-8534/95/95GL-02016\$03.00

like kernels can be strongly regularized if the unknown solution \vec{W} satisfies some sparsity constraints. In the present study we assume that \vec{W} is a sequence of echoes reflected by the edges of the objects to detect,

$$\vec{W} = \sum_{n=1}^N \vec{W}_n \delta(q - q_n), \quad (6)$$

and the inverse problem is to estimate both the amplitudes, \vec{W}_n , and the occurrence times, q_n , of the arrivals. A detailed description of the numerical techniques used to estimate these parameters is given by *Gibert et al.* [1994].

Analysis of the COPROD2 data set

Presentation of the COPROD2 data

A detailed description of the magnetotelluric COPROD2 data set is given by *Jones* [1993]. The apparent resistivity and phase have been measured in the $5.5 \times 10^{-3} - 384$ Hz frequency range. The data are available at 35 stations located along a 407 km profile almost perpendicular to the North American Central Plain (NACP) magnetic anomaly in the Williston Basin (Figure 1). Both the TM and TE modes, which correspond to a geometry where the magnetic field is respectively parallel or perpendicular to the strike of the geological structures, have been considered. In order to allow a full comparison of our results with those already obtained by other authors [*Jones*, 1993], the data used in the present study are corrected for the static shifts [*Jones*, 1988] and are shown as apparent resistivity and phase curves on Figure 2.

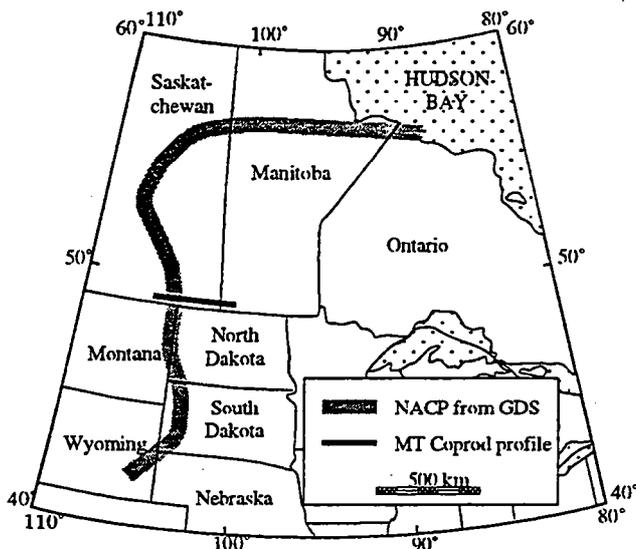


Figure 1. Localization of the COPROD2 magnetotelluric profile (heavy solid line). The center of the NACP magnetic anomaly is also shown (grey ribbon). Modified from *Jones and Craven* [1990].

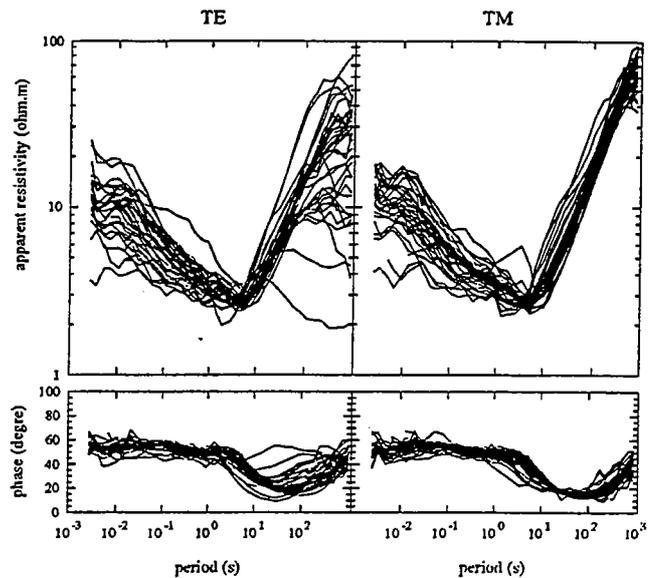


Figure 2. Apparent resistivity and phase curves recorded at the 35 station of the COPROD2 profile and corrected for the static shifts.

DPM applied to the COPROD2 data set

The basic data needed to invert equation (5) are the Fourier coefficients of either the electrical field or the magnetic field. Moreover, since the time dependence of the ionospheric sources creating the magnetotelluric signals is unknown, some deconvolution is needed to obtain the Earth's electromagnetic response corresponding to an impulsive source. Fortunately, the standard processing of magnetotelluric data involves the computation of impedance functions which are implicitly deconvolved for the ionospheric source function. The only non-standard computation we applied is the transformation of both apparent resistivity, $\rho_a(\omega)$, and phase, $\Phi(\omega)$, into the diffusive response,

$$D(\omega) = \frac{\exp[i(\Phi(\omega) - \pi/4)]}{2} \sqrt{\frac{\rho_a(\omega)}{\rho_s} - \frac{1}{2}}, \quad (7)$$

where ρ_s is the electrical resistivity of the shallow layers in the Earth. $D(\omega)$ is the diffusive impulse response corresponding to the conductive geological structures and was derived by *Levy et al.* [1988] for 1-D layered media. The same response is reasonably valid for 2-D structures as shown by the asymptotic simulations (i.e. the equivalent of ray theory for diffusion) performed by *Virieux et al.* [1994]. This response constitutes the data used to invert equation (5) and obtain the wave field \vec{W} .

The choice of a surficial resistivity, ρ_s , fixes a surficial velocity, c_s , which controls the static shifts of the reconstructed wave field. This choice is not too critical unless large unrealistic resistivities are used. Figure 3 represents *DPM* results obtained for the TM data of the westernmost station preprocessed through equation

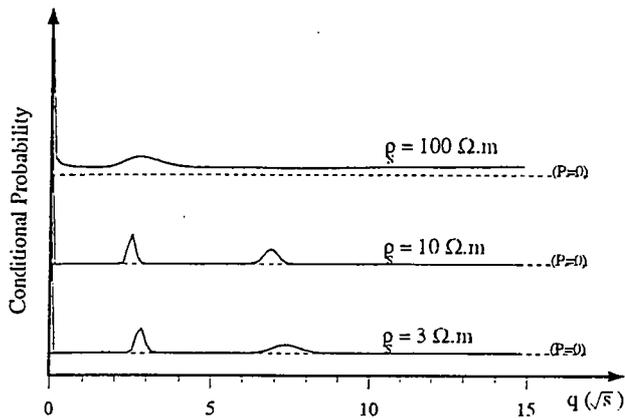


Figure 3. DPM inversions of the TM data for westernmost station. The three plots show the probability curves of the reflected echoes computed for different assigned values of the surface resistivity.

(7) with $\rho_s = 3, 10,$ and $100 \Omega.m$. These results represent the conditional probability to have an echo at a particular pseudo-time (see *Gibert and Virieux* [1991] and *Gibert et al.* [1994] for more details). Both DPM obtained for the lower two values of resistivity are essentially identical but for a small time lag: the echoes reconstructed for $\rho_s = 3 \Omega.m$ are late with respect to their equivalent for $\rho_s = 10 \Omega.m$. This observation agrees with equation (4) which shows that the larger the resistivity, the larger the velocity. A precise computation of the static shifts is intractable since it involves an integration over unknown depths for which the surficial resistivity acts. The DPM results obtained for $\rho_s = 100 \Omega.m$ are strongly biased and only the latest echo remains, the former being now anticausal and totally delocalized (i.e. constant conditional probability along the pseudo-time axis). In the remaining, a surficial resistivity $\rho_s = 3 \Omega.m$ corresponding to the mean resistivity obtained from laterologs performed along the profile has been used for all stations [*Jones, 1988*].

The DPM sections obtained for all 35 stations and for both the TM and TE modes are represented in Figure 4. It must be emphasized that the displayed sections were obtained by plotting together all 35 individual DPM traces (like those in Figure 3). Each inversion was performed independently from the others and no inter-trace coherency criterion was applied.

Interpretation and discussion

Most reflections inverted from the TE data arrange themselves onto 4 reflectors labelled from 1 to 4 on Figure 4. Reflector 1 is tracked across the whole profile and is also coherently recovered from the TM data. This reflector has a rough synclinal shape with an average two-way pseudo-time of $3\sqrt{s}$, a shallower easternmost end with pseudo-times decreasing to $2\sqrt{s}$, and a deeper middle part with pseudo-times around $4\sqrt{s}$. Assuming

a mean resistivity of $3 \Omega.m$ for the shallow sedimentary layers, these pseudo-times give an average depth of $2.3 km$, and depths of $1.5 km$ and $3.0 km$ for the easternmost end and the middle part respectively. This geometry is fully compatible with the shallow electrical structure derived from laterologs which evidenced a sharp increase of electrical resistivity associated with the Ashern dolomite marker [*Jones, 1988*]. Both the sharpness of reflector 1 and the coherency of the results indicate that reflector 1 can be confidently attributed to this geological interface.

Reflectors 2 and 3 are not equally recovered from the TE and TM sections. When grouped altogether, the tracked reflectors form a reflectivity ribbon crossing the whole profile with two-way pseudo-times varying from $6\sqrt{s}$ to $9\sqrt{s}$. The general shape of reflectors 2 and 3 mimics the one of reflector 1 and, although the pseudo-times of the latter are not exactly half of those for the former, it cannot be totally excluded that reflectors 2 and 3 are segments of the first multiple of reflector 1. However, we give a low probability to this possibility since our previous synthetic tests never displayed such multiples, even for much stronger reflectors than the presently discussed ones. An alternative interpretation is that reflectors 2 and 3 are primary and created by a resistivity jump with a depth ranging from $7 km$ to $11 km$ (assuming $\rho = 10 \Omega.m$ below reflector 1), the shallower depths being on the easternmost wing of the profile. Such a resistivity variation may be associated with a strong seismic reflector evidenced with seismic refraction data [*Morel-à-l'Huissier et al., 1987*].

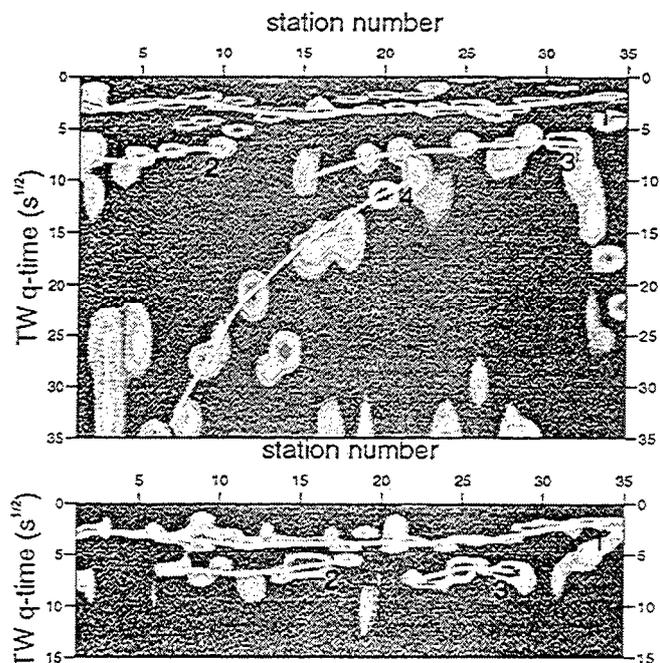


Figure 4. DPM electromagnetic reflectivity images obtained for the TE (top) and TM (bottom) COPROD2 data. Labelled white lines enhance the reflectors discussed in the text.

Reflector 4 is only recovered from the TE data and constitutes an alignment with a steep westward deepening. Two-way pseudo-times range from $10\sqrt{s}$ to $35\sqrt{s}$. The unrecovery of reflector 4 from the TM data set illustrates the differential sensitivity between TE and TM modes to a given structure and cannot be attributed to the noise whose amount is the same in both data sets (see Figure 2). Such a discrepancy has also been observed in synthetic inversions and emphasized by Levy *et al.* [1988]. The depth range of the resistivity jumps producing reflector 4 strongly depends on the resistivities of the overlying rocks. As stated in the introduction, the magnetotelluric approximation corresponds to a seismic design which disables any kind of velocity analysis, and we must use velocities computed with resistivity estimates furnished by other inversion methods [Jones, 1993]. Although strongly dependent upon the particular inversion algorithm used, these resistivity estimates mostly fall in the $[1, 1000] \Omega.m$ interval, with an average value of the order of $10 \Omega.m$ (see Jones [1993] for a review). Taking this last estimate for the resistivity, we find a depth range $[15, 50] km$ for reflector 4. Of course, these estimates are rough and more precise values could be obtained by migrating the reflectivity images of Figure 4. Let us notice however that the top of reflector 4 coincides with the low-resistivity body found by Jones [1993] and we may conjecture that the whole electromagnetic reflector fits with the west-dipping reflectivity zone found in the COCORP seismic survey performed $100 km$ to the south of the COPROD2 profile [Nelson *et al.*, 1993].

Acknowledgments. We are pleased to thank Dr. Alan Jones for both his kind supplying of the high-quality COPROD2 data set and his very constructive comments. Thanks to Guy Marquis and Andrew Wilson for their comments. Processings were done with the computational facilities operated by the Centre des Ressources Informatiques from Université de Rennes 1, and we thank Jean-Pierre Boulard, François Dagorn and Eric Picheral for their skilled assistance. This study was supported by CNRS/INSU grants (DBT 'Fluides & Failles', ATP 'Tomographie').

References

- Bragg, L.R., and J.W. Dettman, Related problems in partial differential equations, *Bull. Am. Math. Soc.*, **74**, 375-378, 1968.
- Donoho, D.L., Superresolution via sparsity constraints, *SIAM J. Math. Anal.*, **23**, 1309-1331, 1992.
- Filatov, V.V., Construction of focusing transformations of non-stationary electromagnetic fields, *Geol. i Geofiz. (Soviet Geology and Geophysics)*, **25**, 89-95, 1984.
- Filippi, P., and U. Frisch, Relation entre l'équation de la chaleur et l'équation des ondes de Helmholtz, *Comptes Rendus Acad. Sciences Paris*, **A268**, 804-807, 1969.
- Gibert, D., and J. Virieux, Electromagnetic imaging and simulated annealing, *J. Geophys. Res.*, **B96**, 8057-8067, 1991.
- Gibert, D., B. Tournerie, and J. Virieux, Superresolution electromagnetic imaging of the conductive Earth's interior, *Inverse Problems*, **10**, 341-351, 1994.
- Jones, A.G., The COPROD2 data set: Tectonic setting, recorded MT data, and comparison of models, *J. Geomag. and Geoelec.*, **45**, 933-955, 1993.
- Jones, A.G., and J.A. Craven, The North American Central Plain conductivity anomaly and its correlation with gravity, magnetic, seismic, and heat flow data in Saskatchewan Canada, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **60**, 169-194, 1990.
- Jones, A.G., Static shift of magnetotelluric data and its removal in sedimentary basin environment, *Geophysics*, **53**, 967-978, 1988.
- Lee, S., G. McMechan, and C.L. Aiken, Phase-field imaging: the electromagnetic equivalent of seismic migration, *Geophysics*, **52**, 1678-1693, 1987.
- Lee, K.H., G. Liu, and H.F. Morrison, A new approach to modeling the electromagnetic response of conductive media, *Geophysics*, **54**, 1180-1192, 1989.
- Lee, K.H., and G. Xie, A new approach to imaging with low-frequency electromagnetic fields, *Geophysics*, **58**, 780-796, 1993.
- Levy, S., D.W. Oldenburg, and J. Wang, Subsurface imaging using magnetotelluric data, *Geophysics*, **53**, 104-117, 1988.
- Morel-A-l'Huissier, P., A.G. Green, and C.J. Pike, Crustal refraction surveys across the Trans-Hudson Orogen Williston basin of South Central Canada, *J. Geophys. Res.*, **92**, 6403-6420, 1987.
- Nelson, K.D., D.J. Baird, J.J. Walters, M. Hauck, L.D. Brown, J.E. Oliver, J.L. Ahern, Z. Hajnal, A.G. Jones, and L.L. Sloss, Trans-Hudson orogen and Williston basin in Montana and North Dakota: New COCORP deep-profiling results, *Geology*, **21**, 447-450, 1993.
- Virieux, J., C. Flores-Luna, and D. Gibert, Asymptotic theory for diffusive electromagnetic imaging *Geophys. J. Int.*, **119**, 857-868, 1994.
- Wilson, A.J.S., Seismic processing of multichannel transient electromagnetic data, in *Proc. EAEG-EAPG meeting*, Vienna, Austria, 1994.
- Zhdanov, M., and M.A. Frenkel, The solution of the inverse problems on the basis of analytical continuation of the transient electromagnetic field in reverse time, *J. Geomag. and Geoelec.*, **35**, 747-765, 1983.
- Zhdanov, M., P. Traynin, and O. Portniaguine, Migration and analytic continuation in geoelectric imaging, *Soc. Expro. Geophys. 64th Meeting, extended abstract*, 357-360, 1994.
- Zhdanov, M., and G.V. Keller, *The geoelectrical methods in geophysical exploration*, Elsevier, New-York, 1994.
- Zorgati, R., B. Duchêne, D. Lesselier, and F. Pons, Eddy current testing of anomalies in conductive materials: 1. Qualitative imaging via diffraction tomography techniques, *IEEE Trans. Magn.*, **27**, 4416-4437, 1991.

B. Tournerie, and D. Gibert, Géosciences Rennes, Université de Rennes 1, Bât. 15 Campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, France. (e-mail: tourneri@univ-rennes1.fr; gibert@univ-rennes1.fr)

J. Virieux, Institut de Géodynamique, Université de Nice Sophia-Antipolis, Av. A. Einstein, 06560 Valbonne, France. (e-mail: viri@mimosa.unice.fr)

(received February 14, 1995; revised June 19, 1995; accepted June 22, 1995.)

c Discussion

L'analyse des données *COPROD2* nous a permis d'identifier trois réflecteurs majeurs (les numeros 2 et 3 sont interprétés ensemble) à partir des sections des probabilités (voir figure 4 de l'article). Le premier (label 1) corrèle très bien avec la limite Paléozoïque Supérieur/Inférieur du bassin de *Williston* identifié sur un *Laterolog* [Jones, 1988] (voir figure [VI.1]). La géométrie de cette interface telle que nous la voyons est identique à celle définie lors des corrections des statiques [Jones, 1988] et se retrouve également sur les profils de sismique réfraction [Hajnal *et al.*, 1984, Morel-A-L'Huissier *et al.*, 1987].

L'interprétation des réflecteurs 2 et 3 est plus difficile car deux possibilités existent : soit ils correspondent au premier multiple de la première interface, soit ils caractérisent le sommet de blocs plus résistants. On peut cependant noter que ces deux réflecteurs coïncident avec le sommet des deux blocs résistants ($\rho > 300 \Omega.m$) mis en évidence par une inversion *OCCAM* [Constable *et al.*, 1987, deGroot Hedin and Constable, 1990] dont une synthèse est présentée dans [Jones and Craven, 1990, Morel-A-L'Huissier *et al.*, 1990] (voir figure [VI.2]).

La discontinuité latérale entre les deux réflecteurs 2 et 3 coïncide avec la présence d'un quatrième plus tardif (label 4) observé seulement en mode *TE*. On retrouve sur l'image de l'inversion *OCCAM* la signature de ce réflecteur marquant le sommet d'un bloc conducteur. Il est important de signaler que la courbure et la pente de ce 4^{ième} réflecteur sont concordants avec les résultats obtenus par d'autres méthodes d'inversions magnétotelluriques (voir figure [VI.3] et [Jones, 1993] pour une revue). De plus, le profil de sismique réflexion récemment acquis dans le programme *COCORP* montre également des réflecteurs identiques (même localisation verticale et même pendage vers l'Ouest) [Nelson *et al.*, 1993]. Il faut cependant noter que des réflecteurs à pendages Est sont également observés sur cette section sismique [Nelson *et al.*, 1993], et que l'on ne les retrouve pas dans nos inversions. Ce réflecteur est interprété comme étant le sommet d'un bloc conducteur profond, dont la présence expliquerait l'anomalie *NACP*.



Figure VI.1 Laterolog sur le profil magnétotellurique *COPROD2* présenté dans [Jones, 1988].

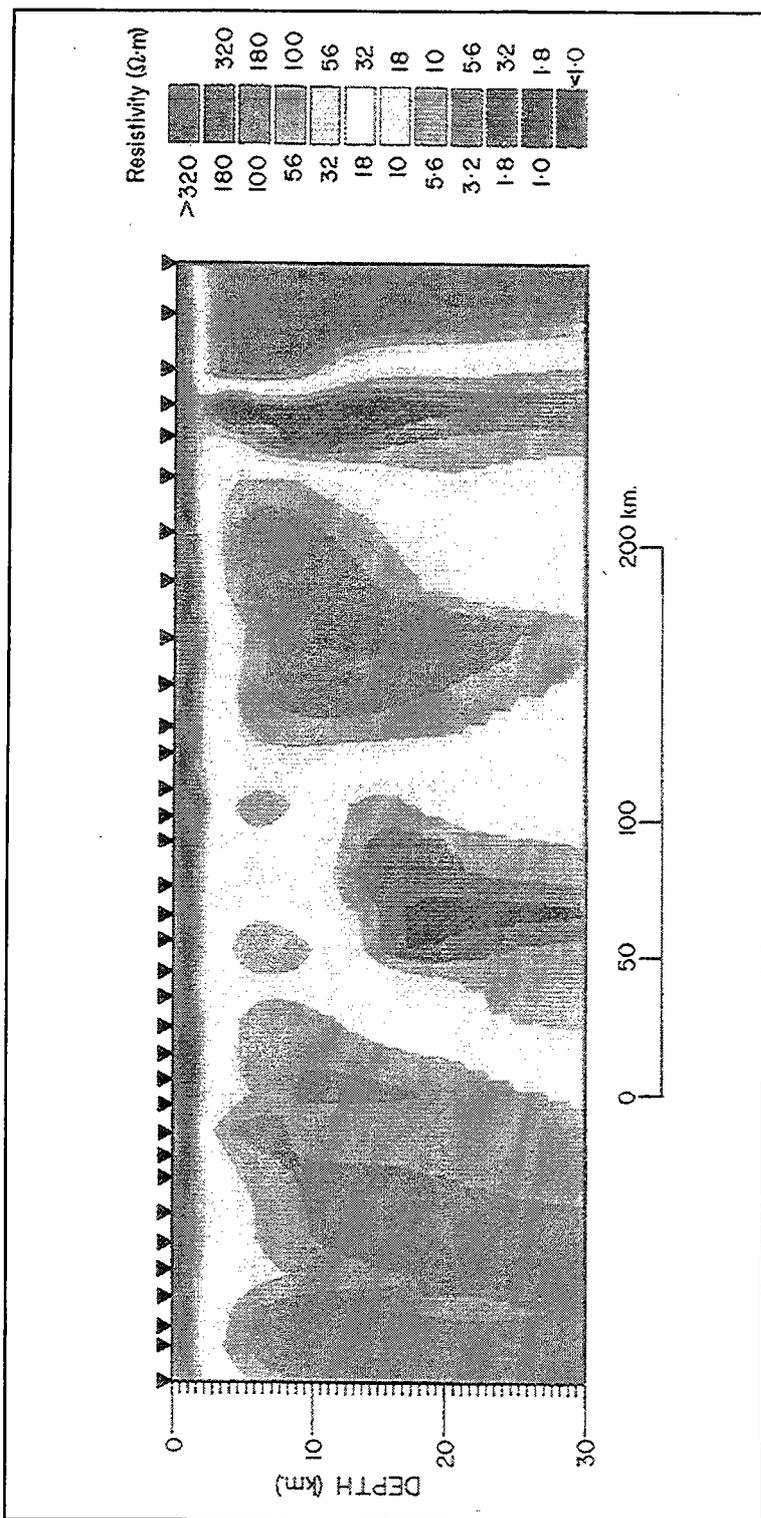


Figure VI.2 Modèle de résistivité obtenu par une inversion *OCCAM* des données *COPROD2* [Constable *et al.*, 1987, deGroot Hedin and Constable, 1990]. Image présentée dans [Jones and Craven, 1990, Morel-A-L'Huissier *et al.*, 1990].

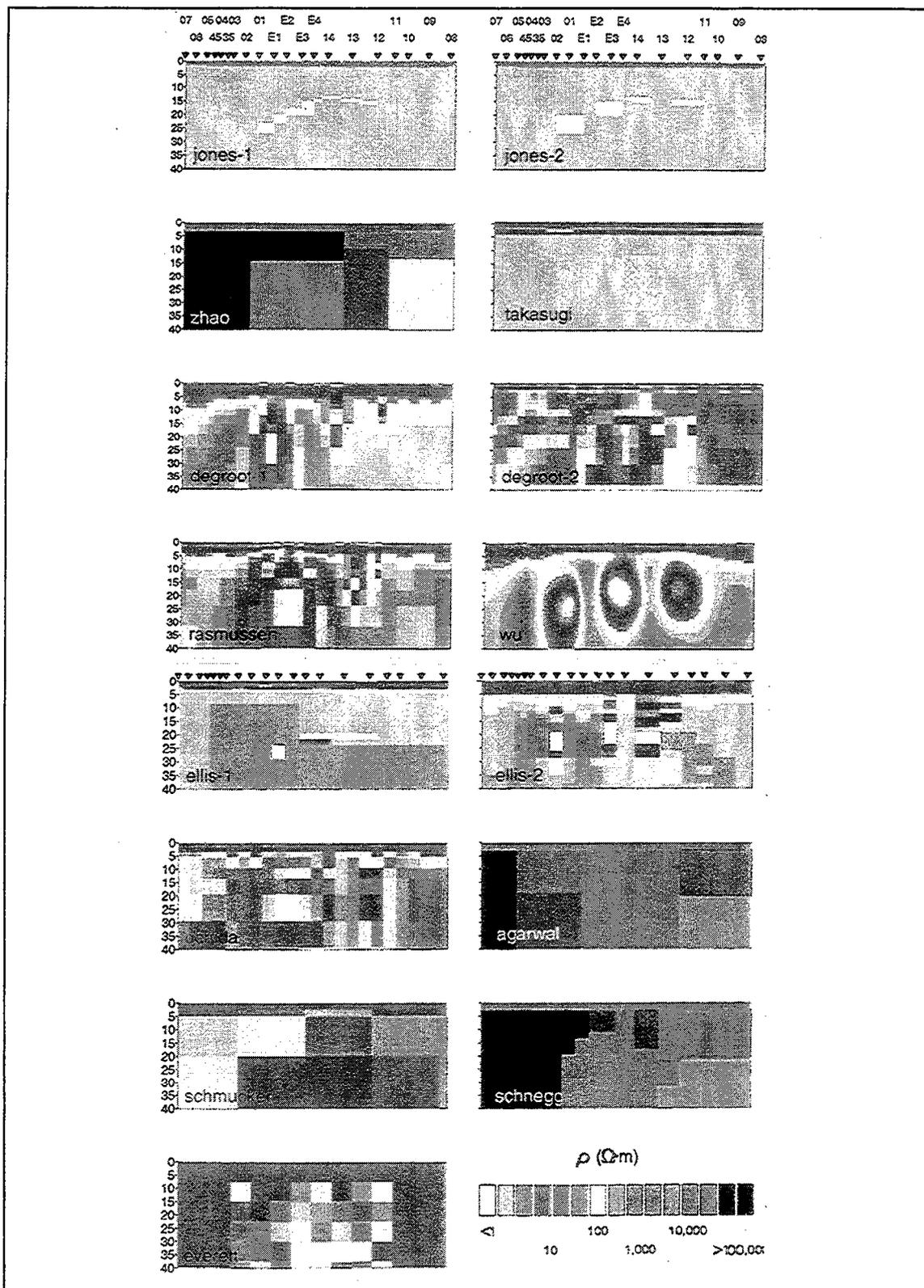
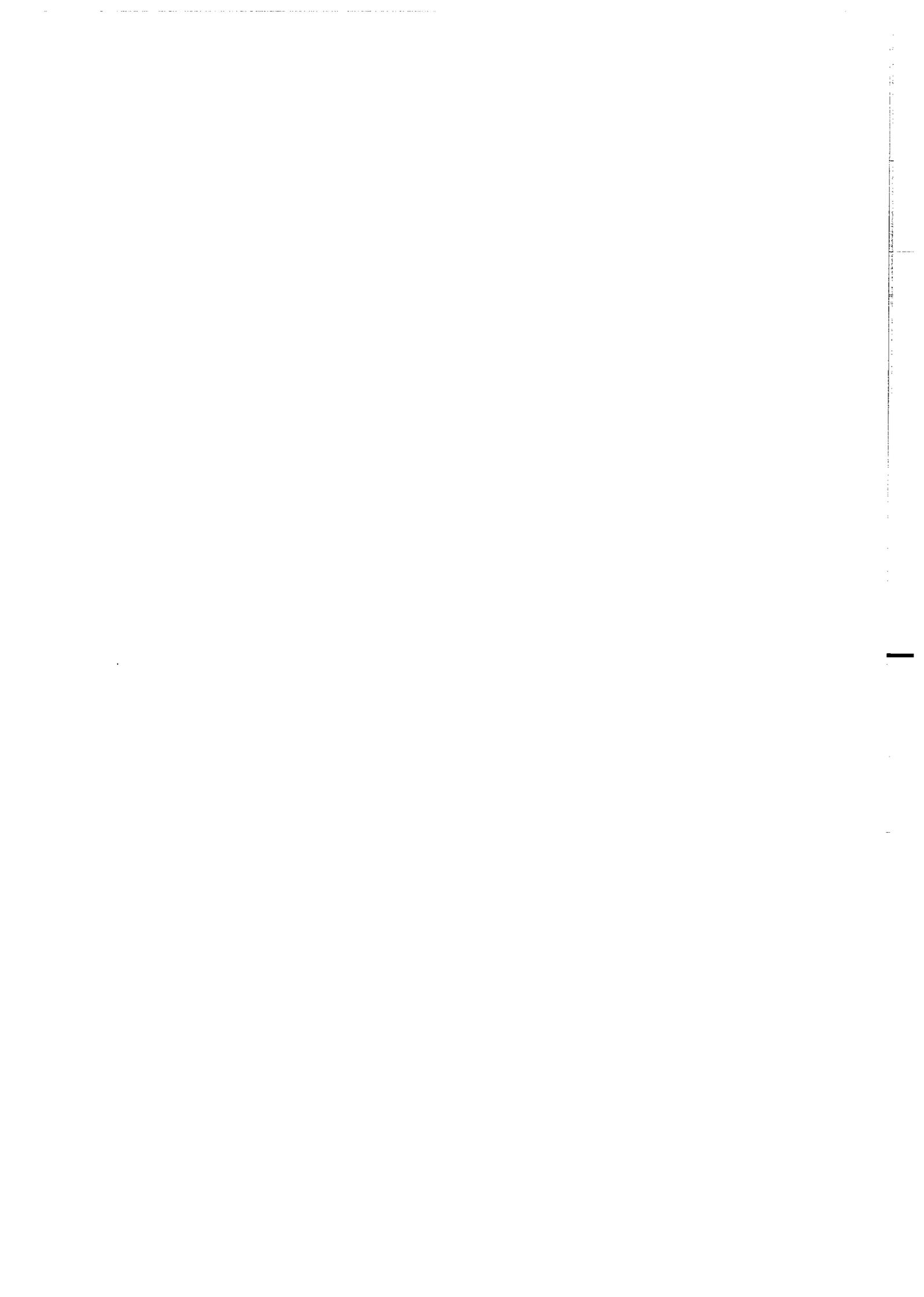


Figure VI.3 Images obtenues par l'analyse par différents auteurs et méthodes d'inversion d'une partie des données *COPROD2*. Compilation présentée dans [Jones, 1993].

• L'analyse des données *COPROD2* nous a permis de mettre en évidence les différentes structures déjà imagées par d'autres méthodes d'inversions. Ces résultats nous confortent sur la possibilité d'utiliser cette nouvelle méthode d'imagerie sur des applications de terrain puisque les structures majeures responsable du signal électromagnétique observé sont détectées.

• La principale différence avec les autres méthodes est que l'on cartographie avec une assez bonne résolution le sommet des contrastes en conductivité permettant ainsi de mieux caractériser les structures en profondeur.



3 Données ARMOR — FRANCE

a Présentation générale

Le domaine orogénique *Cadomien* (600–540 Ma) de Bretagne représente une zone délimitée à l'ouest par la *Baie de Lanion* (complexe du *Léon*), à l'est par la bordure Ouest du *Cotentin* (série mésozoïque du Bassin de Paris), et au sud par le Cisaillement Nord Armoricain (*CNA*) (voir figure [VI.4]). Les structures cadomiennes ont été très peu affectées par l'orogène *Hercynien* (360–280 Ma) [Brun and Balé, 1990, Hebert, 1993], donnant ainsi accès à des structures assez bien conservées. Le contact entre les domaines de *Saint Brieuc* et de *Saint Malo* possède une forme en arc observée tant sur la carte géologique simplifiée (voir figure [VI.4]) que sur les cartes magnétique et gravimétrique [Brun and Balé, 1990 ; figures 12 et 13]. Cette zone porte le nom de *zone de cisaillement de la Baie de Fresnaye (ZCBF)* et constitue la structure principale cadomienne.

Afin d'obtenir une information sur la géométrie en profondeur des structures cadomiennes, un profil de sismique réflexion et des mesures magnétotelluriques ont été réalisées durant l'été 1995. Les deux séries de mesures ont été effectuées le long d'un profil identique *ARMOR* (voir figure [VI.5]), laissant l'opportunité d'une comparaison future des résultats. Ce profil est constitué de deux segments d'orientations différentes, chacune des sections restant perpendiculaire aux structures géologiques croisées. Le premier profil (*AR1*) croise la zone de cisaillement de la Baie de la Fresnaye, et le second (*AR2*) le cisaillement Nord Armoricain.

b Les levés magnétotelluriques

Les mesures magnétotelluriques ont été effectuées durant l'été 1995, du 9 Juillet au 6 Août, par *G. Marquis (EOPG Strasbourg)*, *B. Tournerie (Géosciences Rennes)*, *B. Giroux (Ecole Polytechnique de Montréal, Canada)* et *D. Gibert (Géosciences Rennes)* à l'aide d'un système magnétotellurique aimablement prêté par Mme *Marianne Mareschal*³ et M *Michel Chouteau (Ecole Polytechnique de Montréal, Canada)*. Les sites de mesure sont répartis le long du profil *ARMOR* (voir sa localisation sur la figure [VI.5]). L'écart désiré entre les stations est d'environ 3 km, cependant, des problèmes techniques nous ont contraints à réduire le nombre des sites préalablement défini (11 sites retenus

³ décédée le 11 Juillet 1995

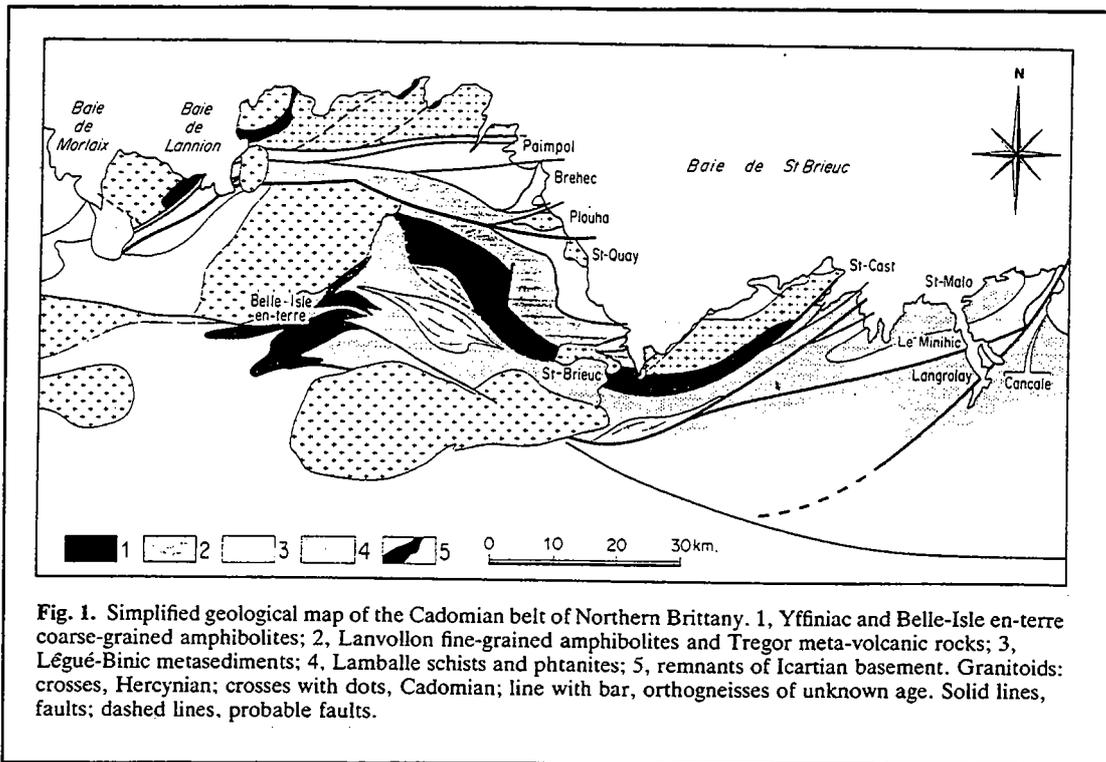


Figure VI.4 Carte géologique simplifiée du cadomien de Bretagne Nord (France), d'après [Brun and Balé, 1990]. 1: formation d'Yffiniac et de Belle Isle en Terre; 2: formation de Lanvollon; 3: formation de Légué-Binic; 4: schistes de Lamballe; 5: reliques de l'Icartien; croix: granitoïdes; croix+points: Cadomien; lignes barrées: orthogneiss (age inconnue); lignes continues: failles; lignes discontinues: failles incertaines.

au lieu de 16). Certaines stations ont été placées plus près des deux contacts majeurs (ZCBF et CNA). La localisation précise des onze sites est donnée dans le tableau [VI.1].

Le système magnétotellurique utilisé au cours de ce levé est le système d'acquisition *Phoenix* (Toronto, Canada) (V-5 MT plus deux SPV-5) associé avec des capteurs magnétiques *Metronix* et des pots poreux $Pb-PbCl_2$ pour les électrodes (voir figure [VI.6]). Un schéma général du dispositif est donné sur la figure [VI.7] sur laquelle est représenté la station de mesure, une station de référence et les différents capteurs. Afin de réduire le rapport signal sur bruit, et donc d'améliorer la qualité des mesures, [Goubau *et al.*, 1978, Gamble *et al.*, 1979, Goubau *et al.*, 1984] suggèrent l'emploi d'une référence éloignée. Celle-ci a été installée à environ 100 m pour chacun des sites de mesure du profil.

Le système d'acquisition enregistre les champs électrique et magnétique pour des fréquences allant de 320 à 0.00055 Hz, donnant ainsi le tenseur d'impédance

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{bmatrix} \quad (\text{éq. VI.3.1})$$

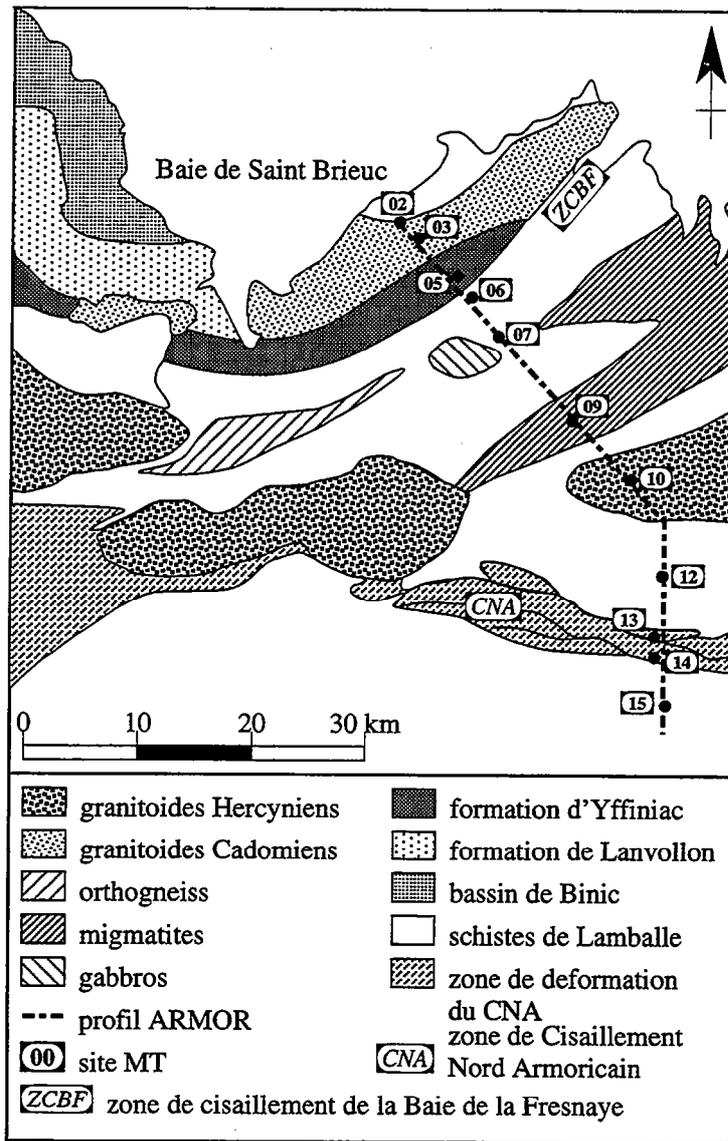


Figure VI.5 Localisation du profil sismique *ARMOR* et des sites MT.

dont les composantes sont donnés par la relation suivante :

$$E_i(\omega) = Z_{ii}H_i(\omega) + Z_{ij}H_j(\omega), \quad (i, j) = (x, y). \quad (\text{éq. VI.3.2})$$

Dans le cas de structures 2D non affectées par une distortion galvanique, la rotation de cette matrice d'un angle θ permet d'obtenir le nouveau tenseur donné par

$$\begin{bmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{bmatrix} \xrightarrow{R(\theta)} \begin{bmatrix} 0 & Z'_{xy} \\ Z'_{yx} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{éq. VI.3.3})$$

caractérisant les deux modes de polarisations *TE* — Z'_{xy} — (le champ électrique est orienté parallèlement à la structure) et *TM* — Z'_{yx} — (le champ électrique est orienté perpendiculairement

à la structure). Cette réduction n'est cependant pas toujours réalisable (structures 3D, données affectées par une distortion galvanique,). L'analyse des données doit alors être faite en considérant l'ensemble des éléments du tenseur mesurés [Groom and Bailey, 1989, Chakridi *et al.*, 1992, Marquis *et al.*, 1995], cette analyse permettant alors de recouvrir les impédances régionales Z'_{xy} et Z'_{yx} .

A cause des problèmes techniques rencontrés (carte de communication brûlée), nous n'avons pas pu enregistrer sur chaque site le tenseur complet des impédances, les valeurs des résistivités apparentes et des phases étant prises manuellement et accessibles que pour seules les orientations XY et YX . Cet incident survenu au début des mesures nous a contraint à disposer sur l'ensemble des sites les capteurs magnétiques et électriques parallèlement (orientation x) et perpendiculairement (orientation y) à la géologie. Puisque les structures géologiques sont principalement linéaires (voir figure [VI.4]), nous pouvons faire l'hypothèse que les mesures prises sur les sites sont très proches de celles des deux modes TE et TM . Cette opération a été confirmée par le calcul de l'angle de rotation θ de 35 degré et 45 degré pour les sites $ar02$ et $ar03$ orientés initialement $N-S$, concordant avec l'orientation du dispositif $N45$ choisie pour $AR1$. Nous avons fait de même pour la seconde partie en orientant le système d'acquisition $N90$.

<i>SITE</i>	<i>Latitude Nord</i>	<i>Longitude Ouest</i>
<i>ar02</i>	48.573	2.519
<i>ar03</i>	48.557	2.494
<i>ar05</i>	48.539	2.444
<i>ar06</i>	48.532	2.432
<i>ar07</i>	48.506	2.417
<i>ar09</i>	48.441	2.327
<i>ar10</i>	48.404	2.284
<i>ar12</i>	48.326	2.220
<i>ar13</i>	48.287	2.228
<i>ar14</i>	48.276	2.243
<i>ar15</i>	48.228	2.220

Tableau VI.1 Localisation des stations magnétotelluriques.

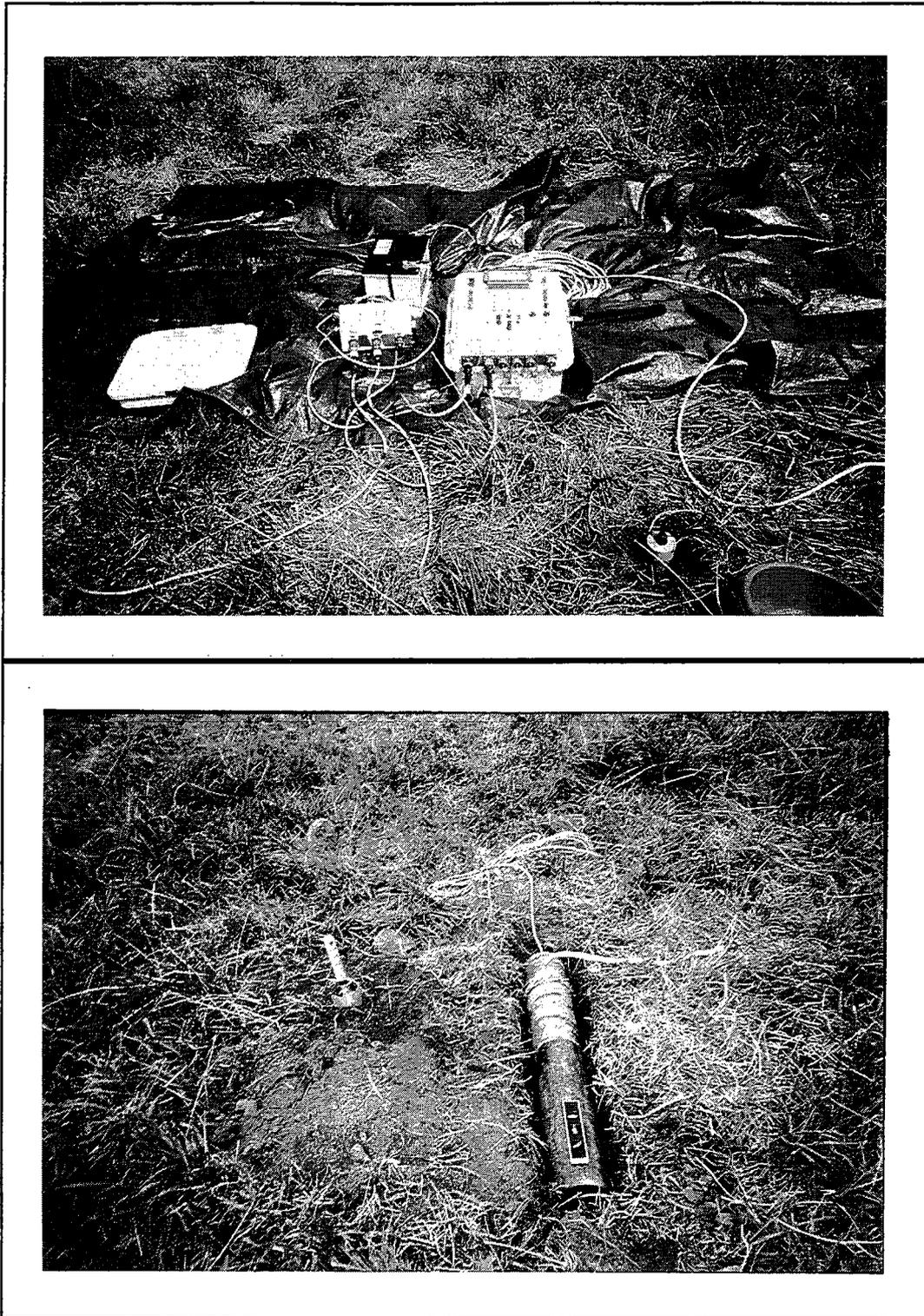


Figure VI.6 Photos représentant une partie du système d'acquisition *Phoenix* (photo du haut) et un capteur magnétique *Metronix* (photo du bas). Un schéma général du dispositif est donné sur la figure [VI.7].

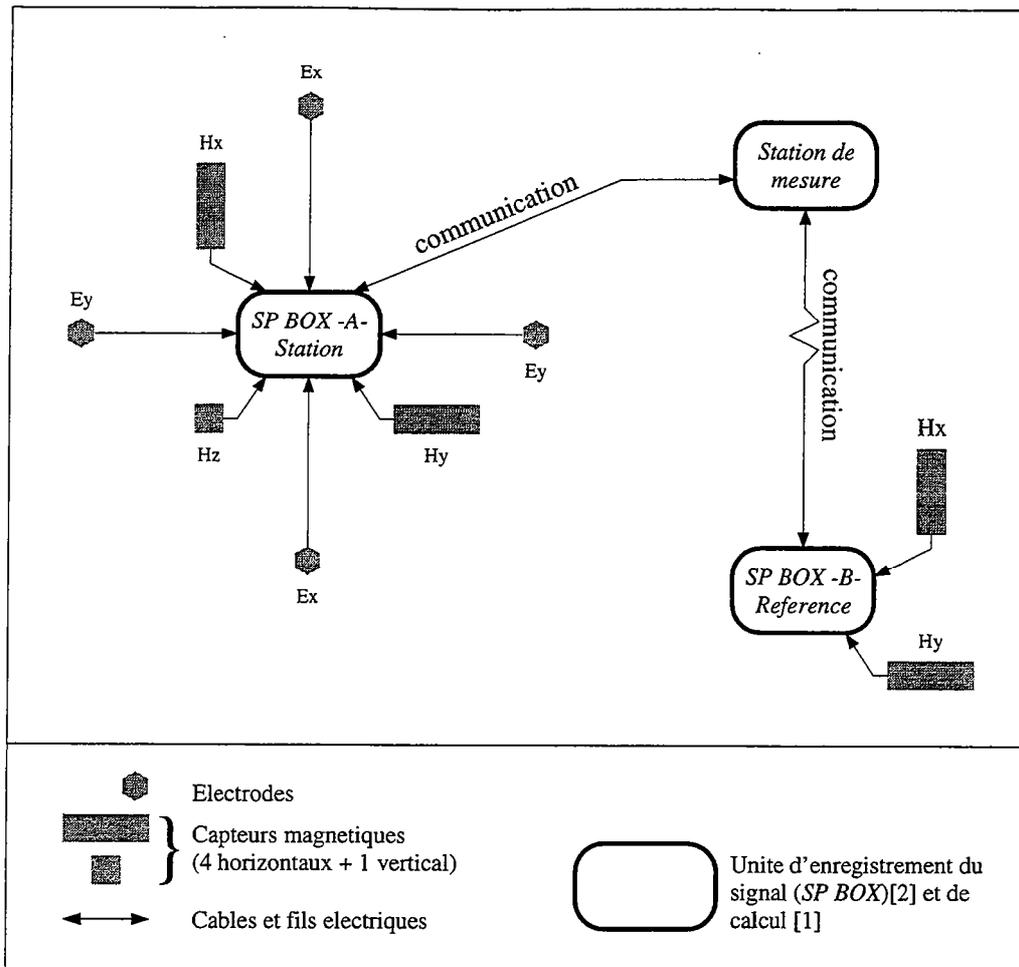


Figure VI.7 Schéma du dispositif expérimental de mesure de données magnétotelluriques.

c Les données

Les courbes des résistivités apparentes et des phases pour les deux orientations du dispositif (parallèle et perpendiculaire aux structures) sont représentées sur les figures [VI.8] pour XY et [VI.9] pour YX, la direction X étant mise parallèle aux contacts géologiques.

D'une manière générale, nous pouvons voir que les résistivités apparentes ρ_a^{XY} peuvent se regrouper en trois groupes : résistant au nord, conducteur au centre et intermédiaire au sud. Cette répartition semble être liée à la lithologie des roches en surface (voir figure [VI.5]). Pour l'orientation YX, nous pouvons distinguer deux groupes particuliers définis par la valeur de ρ_a^{YX} grandes périodes. Les courbes des phases ϕ sont consistantes entre elles dans chacun des deux modes (quelques points particuliers sont cependant mal définis). Ceci nous suggère qu'il faudrait corriger ces courbes pour les ramener sur une valeur identique aux faibles fréquences (effet des statiques ?)

— cette valeur indique que la résistivité de la croûte profonde est assez homogène latéralement sur la longueur du profil *ARMOR* — comme l'a réalisé [Jones, 1988] pour les données *COPROD2*. D'ailleurs, nous pouvons voir que les courbes des résistivités apparentes du déterminant semblent se rejoindre aux longues périodes (voir figure [VI.10]). On peut également noter des variations importantes de la résistivité apparente sur certains sites. Par exemple, on observe pour le site *ar05* une chute de deux ordres de grandeur de la résistivité apparente ρ_a^{YX} à $T \approx 1$ s alors que, pour le site *ar06*, la courbe est plus régulière (présence d'une faille ?).

La pseudo-section des phases ϕ^{XY} (figure [VI.11]) nous montre que ces dernières sont plus élevées pour les périodes supérieures à 10 s (période à laquelle $\phi^{XY} \simeq 45^\circ$) indiquant des conductivités pour la croûte moyenne et inférieure plus fortes qu'en surface. On observe également dans la partie nord du profil (partie gauche de la section) des variations plus locales de la phase. Ces anomalies pourraient correspondre à des variations significatives de la conductivités en profondeur et/ou latéralement.

Dans la section suivante, nous présentons les résultats de l'inversion de la première section du profil (*ARI* : site *ar02* à *ar09*) obtenus par traitement du déterminant du tenseur des impédances calculé pour chaque site non corrigé de l'effet des statiques.

G3D - ARMOR

- XY -

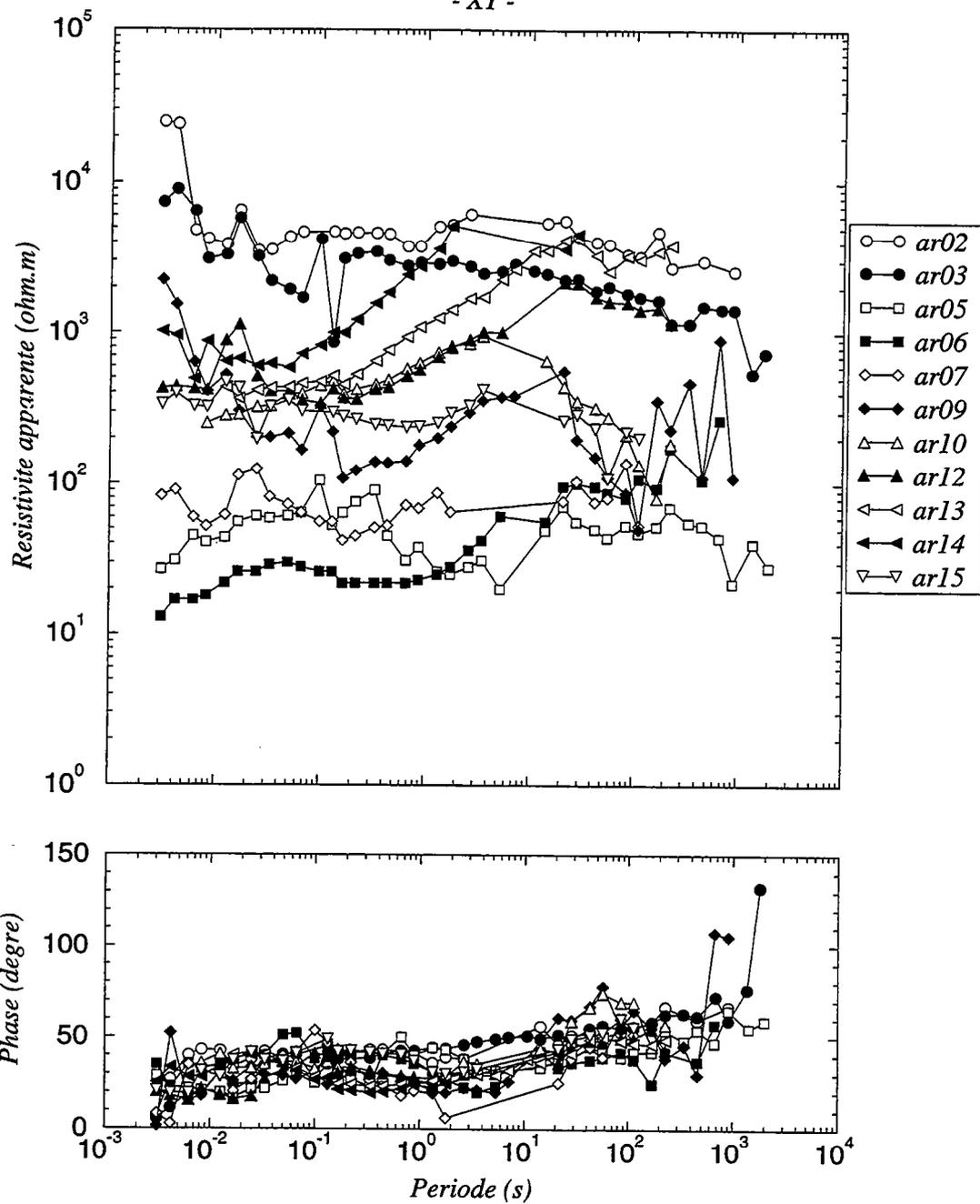


Figure VI.8 Courbes des résistivités apparentes ρ_a et des phases ϕ de tous les sites MT du profil ARMOR suivant l'orientation XY.

G3D - ARMOR

- YX -

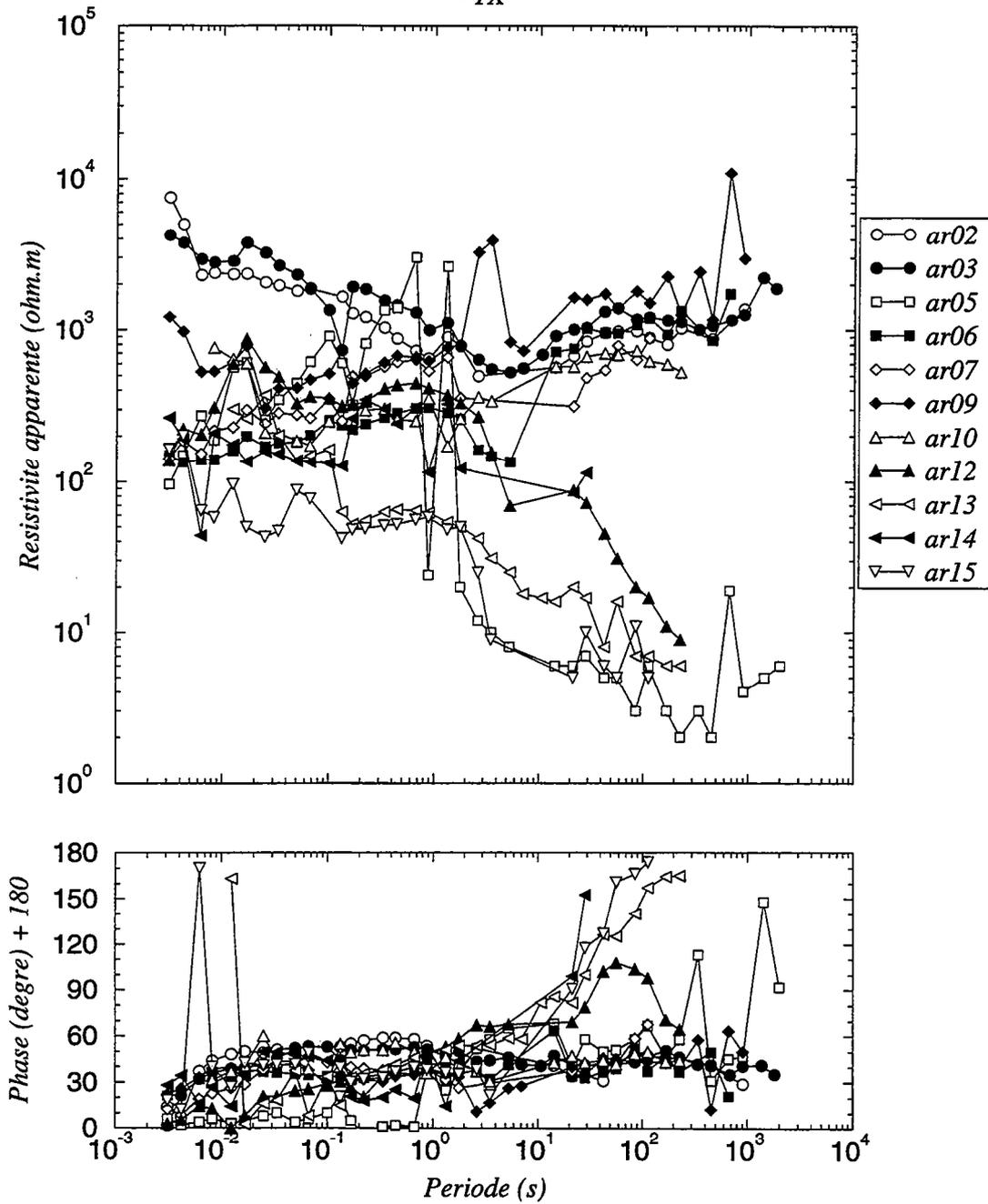


Figure VI.9 Courbes des résistivités apparentes ρ_a et des phases ϕ de tous les sites MT du profil ARMOR suivant l'orientation YX.

G3D - ARMOR

- DET -

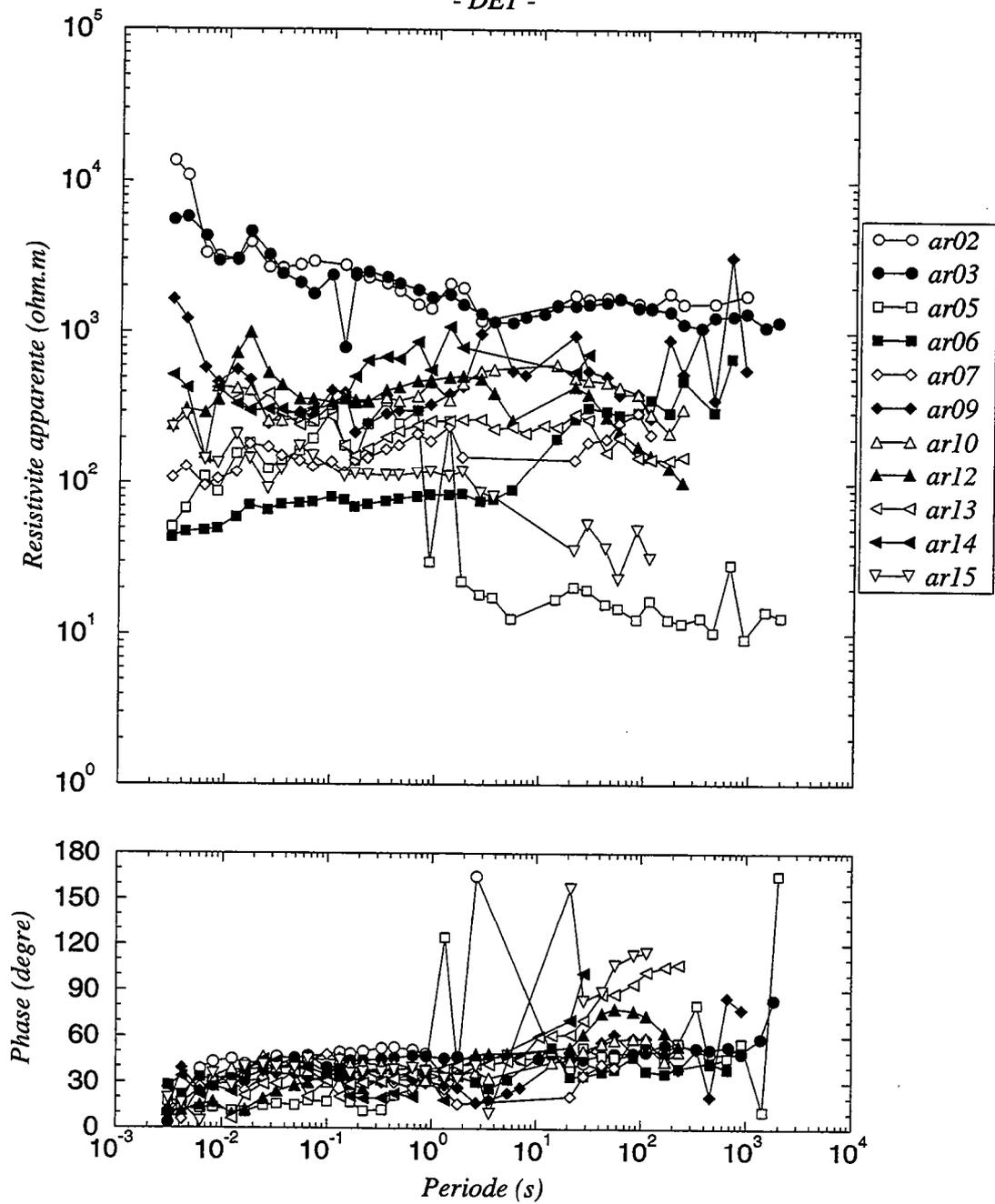


Figure VI.10 Courbes des résistivités apparentes ρ_a et des phases ϕ de tous les sites MT du profil ARMOR pour le déterminant DET.

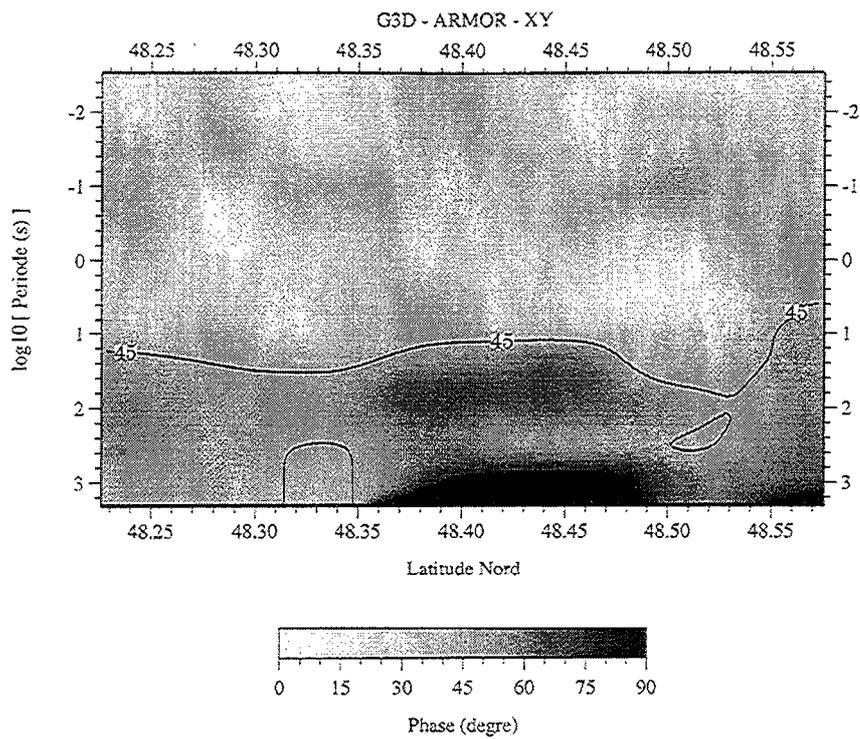


Figure VI.11 Pseudo-section des phases ϕ^{XY} en fonction du logarithme de la période.

d Inversion et discussion

Les résultats de l'inversion (pseudo-traces sismiques et courbes des probabilités) des données *ARMOR — DET* sont représentés sur la figure [VI.12] pour les sites *ar02*, *ar03* et *ar05* et [VI.13] pour les sites *ar06*, *ar07* et *ar09*. Nous avons également reporté dans le tableau [VI.2] les valeurs des couples solutions $\{q, W\}$.

Pour quelques sites, des pseudo-temps q sont mis pratiquement à zéro, mais avec des amplitudes non nulles (stations *ar02*, *ar03* et *ar09*). On interprète ces événements comme des réflecteurs permettant de réajuster la valeur de la résistivité de surface ρ_s utilisée lors de l'inversion et dans l'estimation du profil 1D $\rho(z)$. On n'associera pas de contraste en conductivité à ces événements.

A partir des courbes des probabilités conditionnelles, nous pouvons voir que les réflecteurs détectés sont assez bien définis. Les roches n'étant pas homogènes en surface, une section 2D des pseudo-traces sismiques ou des probabilités n'apportera pas d'informations sur la géométrie des structures en profondeur. Il est nécessaire ici de réaliser une étape supplémentaire permettant d'estimer le profil en résistivité $\rho(z)$ ou le rapport des contrastes. Les résultats (voir dans le chapitre "Tests Synthétiques" la section "Inversion de modèles 1D") sont donnés dans le tableau [VI.2] où les contrastes importants ont été grisés. Nous avons également représenté sur une coupe ces réflecteurs particuliers avec des symboles différents suivant la nature du contraste (R/C pour résistant sur conducteur ou C/R pour l'opposé) (voir figure [VI.14]).

Les valeurs des contrastes (tableau [VI.2]) nous montrent la présence de deux réflecteurs importants. Le premier, déterminé au niveau du site *ar05*, correspond à une interface résistant sur conducteur (R/C) dont le rapport des résistivités est d'environ 30 et est localisé entre 3 et 4 *km* de profondeur. Le second, déterminé sur le site *ar06*, est de polarité inverse du précédent, c'est à dire que l'on a conducteur sur résistant (C/R), d'amplitude $\rho^C/\rho^R \ll 10^{-3}$ et positionné à une profondeur d'environ 6 – 7 *km*.

On observe également une certaine homogénéité des contrastes pour les sites répartis de part et d'autre du contact de la *Baie de la Fresnaye* (voir figure [VI.14]). Au nord de ce contact, c'est à dire pour les sites *ar02–03–05*, on observe une interface R/C alors que dans la partie sud, sites *ar06–09*, on a l'inverse, c'est à dire C/R . Cette variation latérale, déjà observée sur les données (MT et géologie), nous montre clairement la présence d'un accident tectonique entre ces deux zones.

A partir de la figure [VI.14] représentant les différents réflecteurs détectés et de la carte géologique simplifiée (figure [VI.4]), nous pouvons dessiner une coupe schématique correspondant au profil *AR1* (figure [VI.14]) dans laquelle on a prolongé en profondeur des accidents tectoniques observés en surface (voir [Brun and Balé, 1990]). Les réflecteurs de la partie nord du profil sont

interprétés comme la signature en profondeur du contact de la *Baie de la Fresnaye* (label *CBF*). Le contraste détecté sous le site *ar06* pourrait correspondre à la signature d'un contact observé sur la plage des *4 Vaux* (en face de *St Jacut*). Enfin, on attribue le premier réflecteur du site *ar09* à la zone de cisaillement de *Cancale* qui disparaît sous le granite de *Dinan*. Il faut également signaler que l'on retrouve une succession de réflecteurs pentés vers le nord pratiquement à l'aplomb de ce site *ar09* sur le profil sismique (stack provisoire du profil ; communication personnelle de *J.P. Brun*⁴. Cette opération met en évidence des blocks de conductivités très différentes pentés tous vers le nord-ouest. Cette inclinaison principale coïncide avec l'hypothèse d'un chevauchement oblique des structures cadomiennes décrite par [Brun and Balé, 1990] (figure [VI.15]). Cette interprétation n'est bien sûr que préliminaire, et peut être remise en question très rapidement. Pour arriver à une interprétation plus complète de cette section, il nous faut réaliser des traitements supplémentaires. Le premier consiste à corriger les données de l'effet des statiques afin de ramener la totalité des courbes des résistivités apparentes sur une valeur équivalente à grande période. Ces corrections devraient également réajuster les résistivités et les profondeurs déterminées par notre méthode, l'amplitude des contrastes étant sauvegardée. Des inversions sur chaque orientation devraient nous apporter des informations supplémentaires sur la géométrie et la résistivité des structures géologiques. Il est également important d'analyser la partie sud du profil. Les résultats obtenus sur le premier secteur permettront alors de contraindre la partie nord de *AR2*. La réunion des deux profils nous montrera alors une coupe globale sur le domaine orogénique *Cadomien* de Bretagne.

⁴ Géosciences Rennes – UPR 4661, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes, France.

G3D - ARMOR

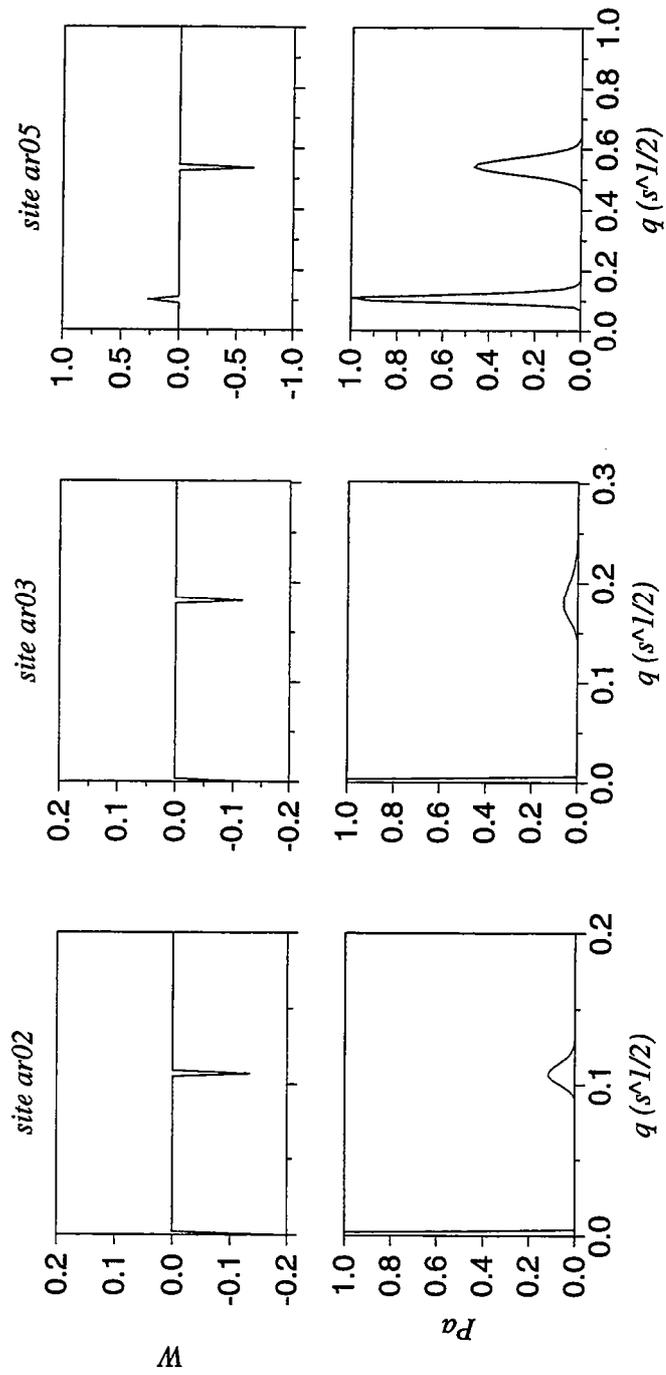


Figure VI.12 Pseudo-traces sismiques et courbes des probabilités obtenues après inversion du déterminant des sites *ar02*, *ar03* et *ar05*.

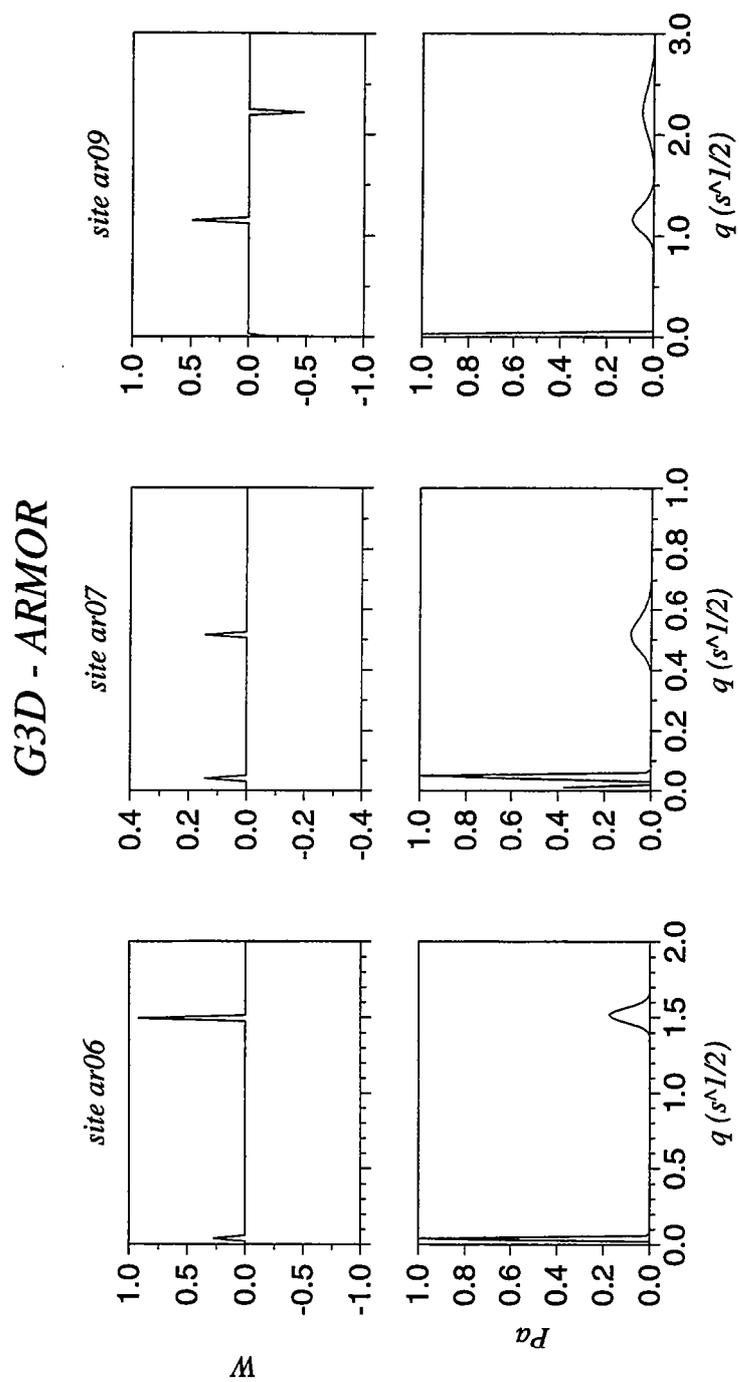


Figure VI.13 Pseudo-traces sismiques et courbes des probabilités obtenues après inversion du déterminant des sites *ar06*, *ar07* et *ar09*.

<i>SITE</i>	ρ_s ($\Omega.m$)	q ($s^{1/2}$)	W	Z (km)	ρ_i/ρ_{i+1}
<i>ar02</i>	10 000	$2.5 \cdot 10^{-6}$	- 0.1849	0.0	2.1
		0.10804	- 0.1331	3.3	1.7
<i>ar03</i>	5 000	$1.6 \cdot 10^{-8}$	- 0.1308	0.0	1.7
		0.18307	- 0.1151	4.4	1.6
<i>ar05</i>	100	0.10644	+ 0.2559	0.5	0.35
		0.54430	- 0.6432	3.8	31.5
<i>ar06</i>	40	$4.7 \cdot 10^{-2}$	+ 0.2760	0.1	0.32
		1.15113	+ 0.9226	7.4	$\ll 10^{-3}$
<i>ar07</i>	100	$4.6 \cdot 10^{-2}$	+ 0.1441	0.2	0.56
		0.51847	+ 0.1441	3.0	0.55
<i>ar09</i>	1 000	$6.5 \cdot 10^{-8}$	- 0.1911	0.0	2.2
		1.1649	+ 0.4899	11.1	0.1
		2.2297	- 0.4714	42.4	23.9

Tableau VI.2 Couples $\{q, W\}$ solutions des inversions, résistivités de surface ρ_s utilisée pour chaque site et valeurs approximatives des profondeurs et des contrastes en résistivité associées à ces solutions. Les zones grisées correspondent aux réflecteurs retenus comme significatifs. Les valeurs pour z mises à 0.0 correspondent à des profondeurs calculées inférieures au mètre (valeur non significative d'un contraste, elle permet de réajuster la résistivité de surface ρ_s).

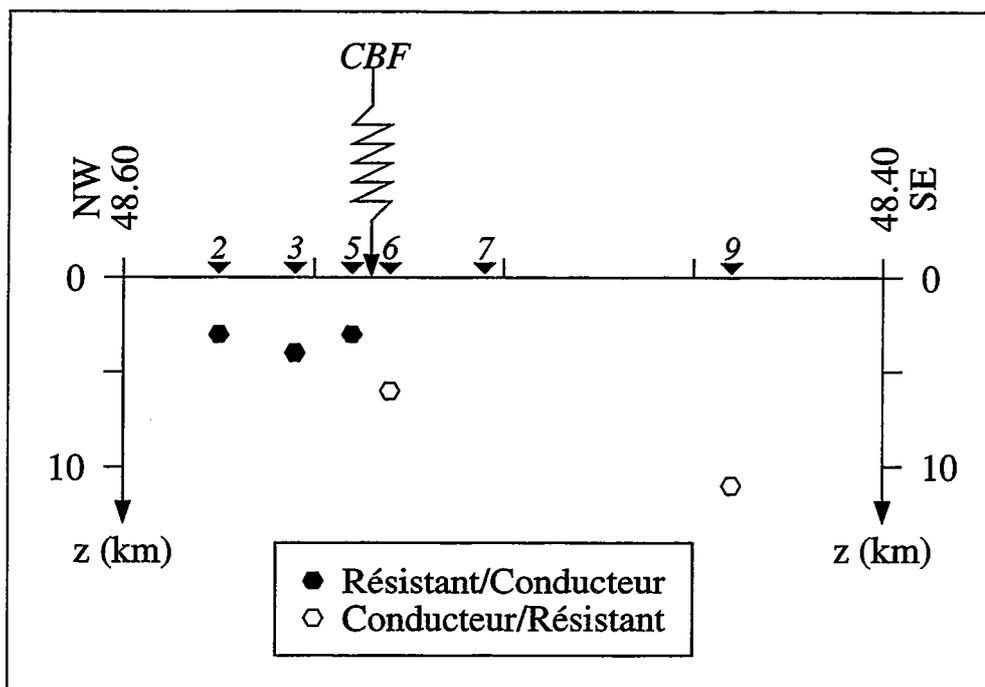


Figure VI.14 Localisation des réflecteurs trouvés sur une coupe (*latitude, profondeur*). Des symboles différents sont utilisés pour chaque type de contraste : hexagones pleins pour une interface résistant sur conducteur (R/C) et vides pour l'inverse (C/R).

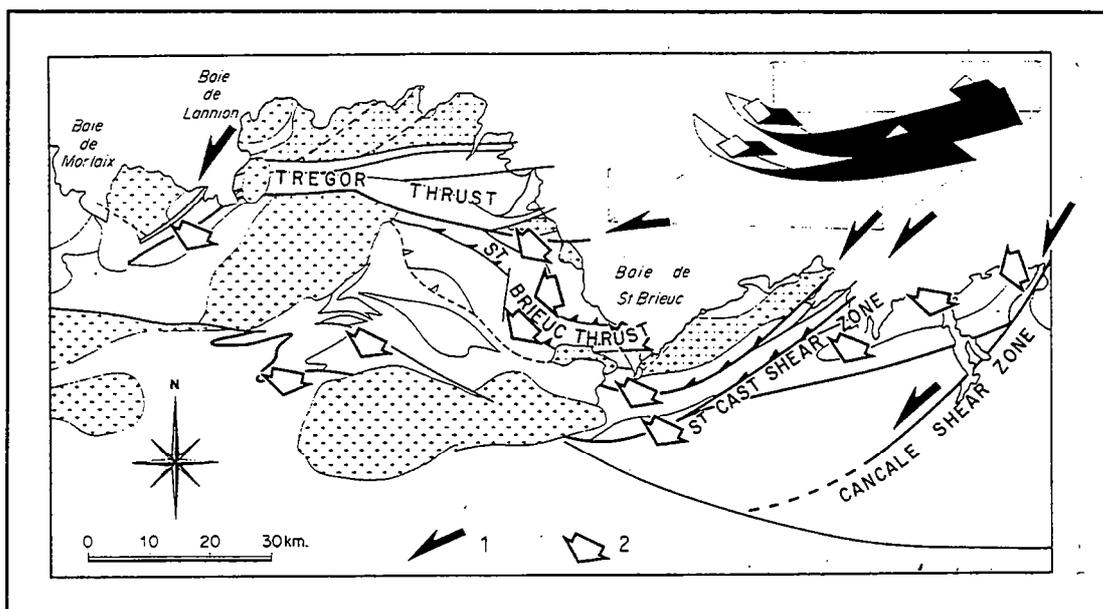


Figure VI.15 Modèle tectonique schématique du *Cadomien* de Bretagne (France) d'après [Brun and Balé, 1990]. Les flèches indiquent les mouvements dominant (1: cisaillement; 2: chevauchement;).

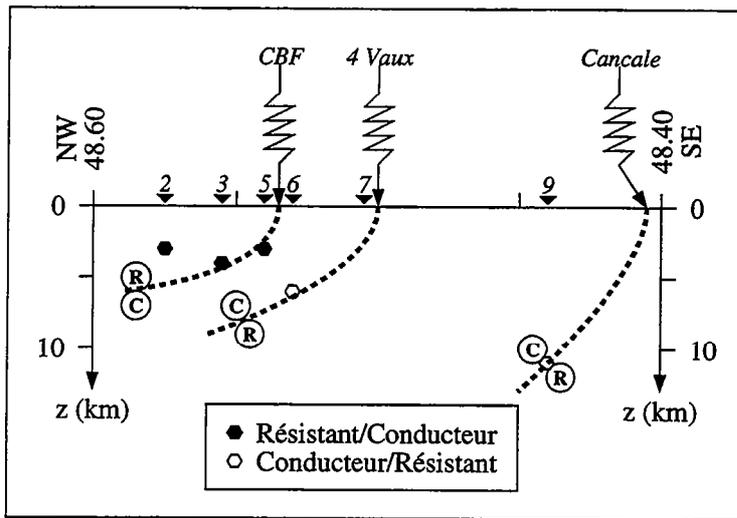
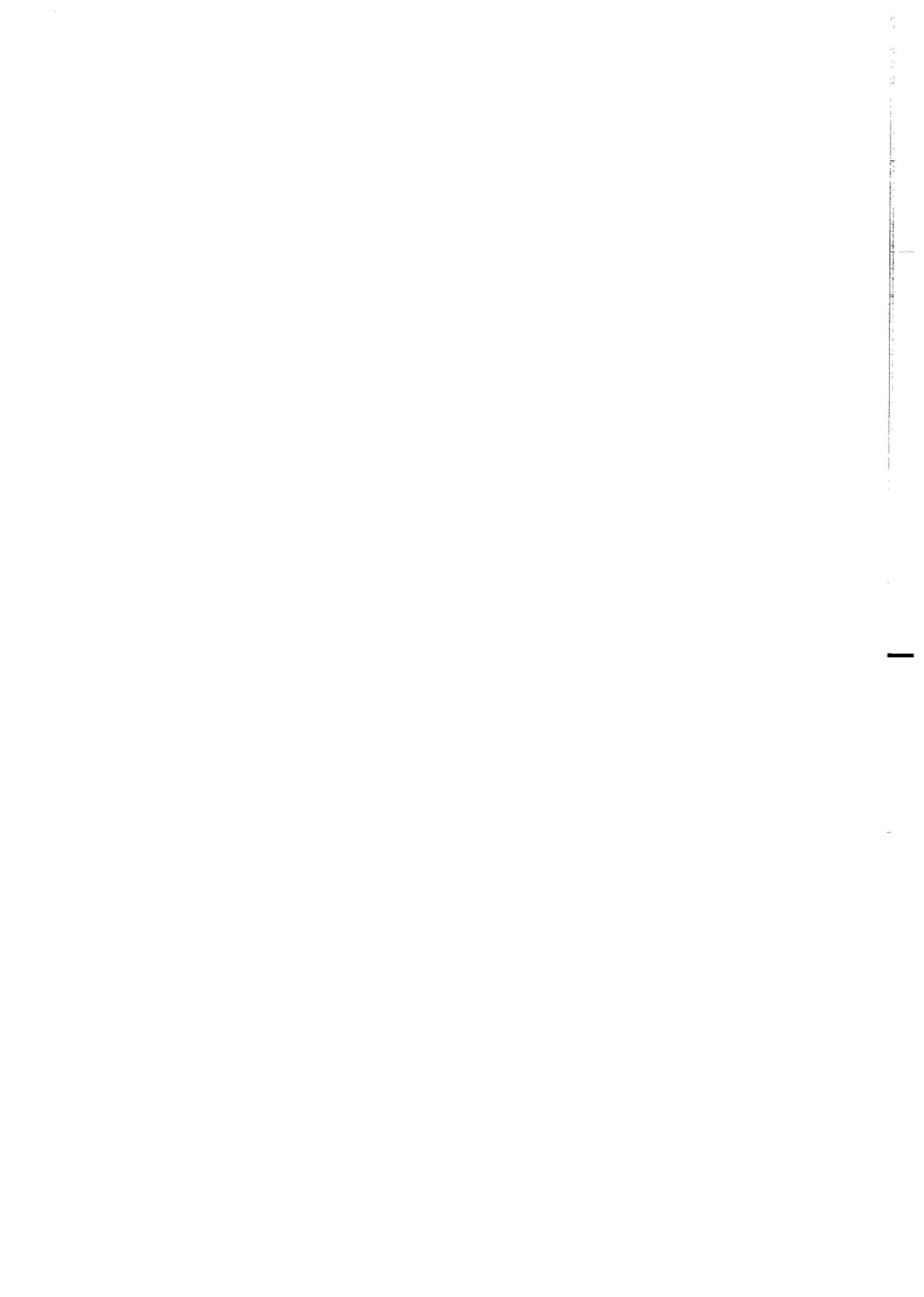
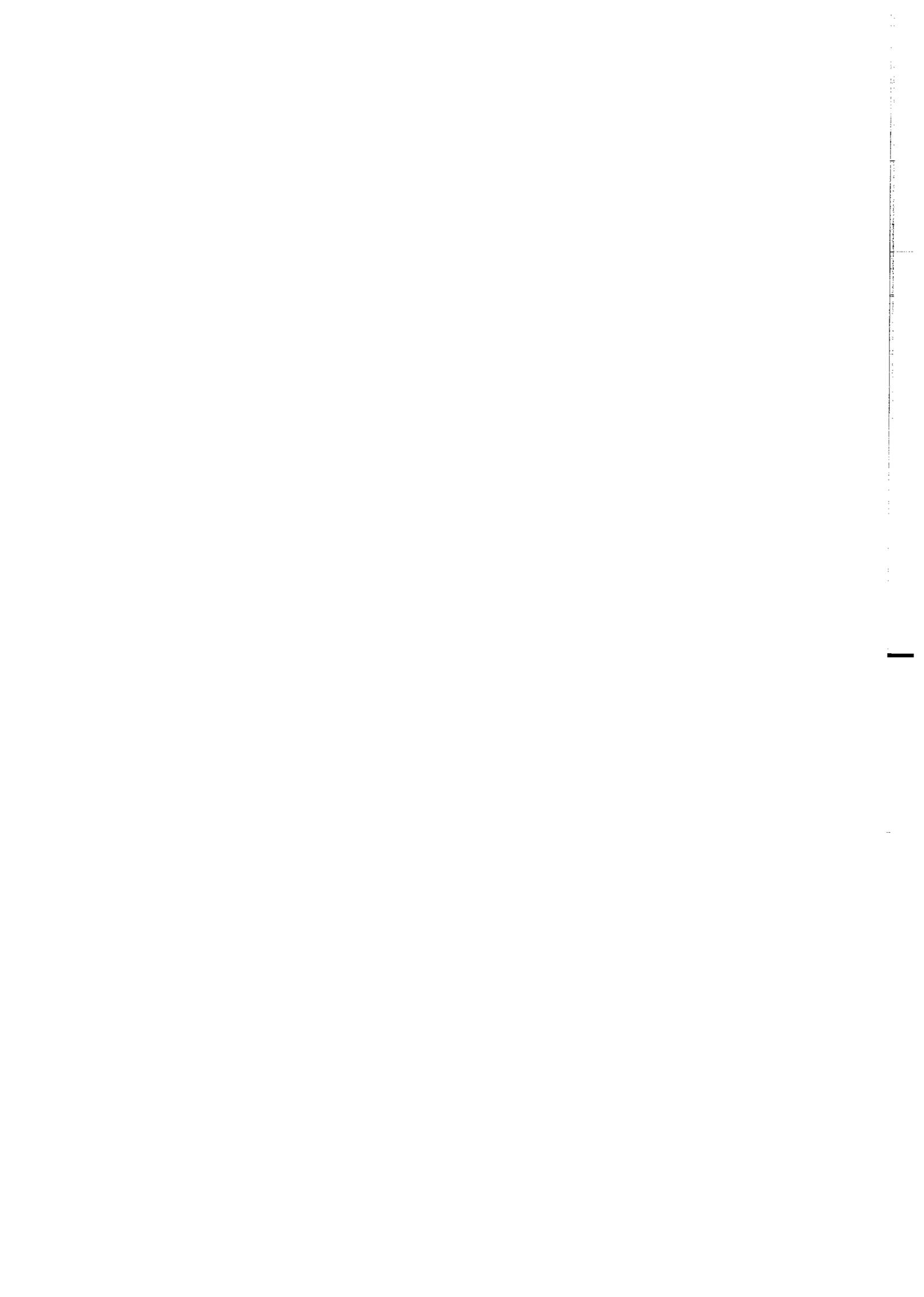


Figure VI.16 Coupe schématique tenant compte des réflecteurs trouvés (figure [VI.14]) et de la carte géologique simplifiée (figure [VI.4]; [Brun and Balé, 1990]).

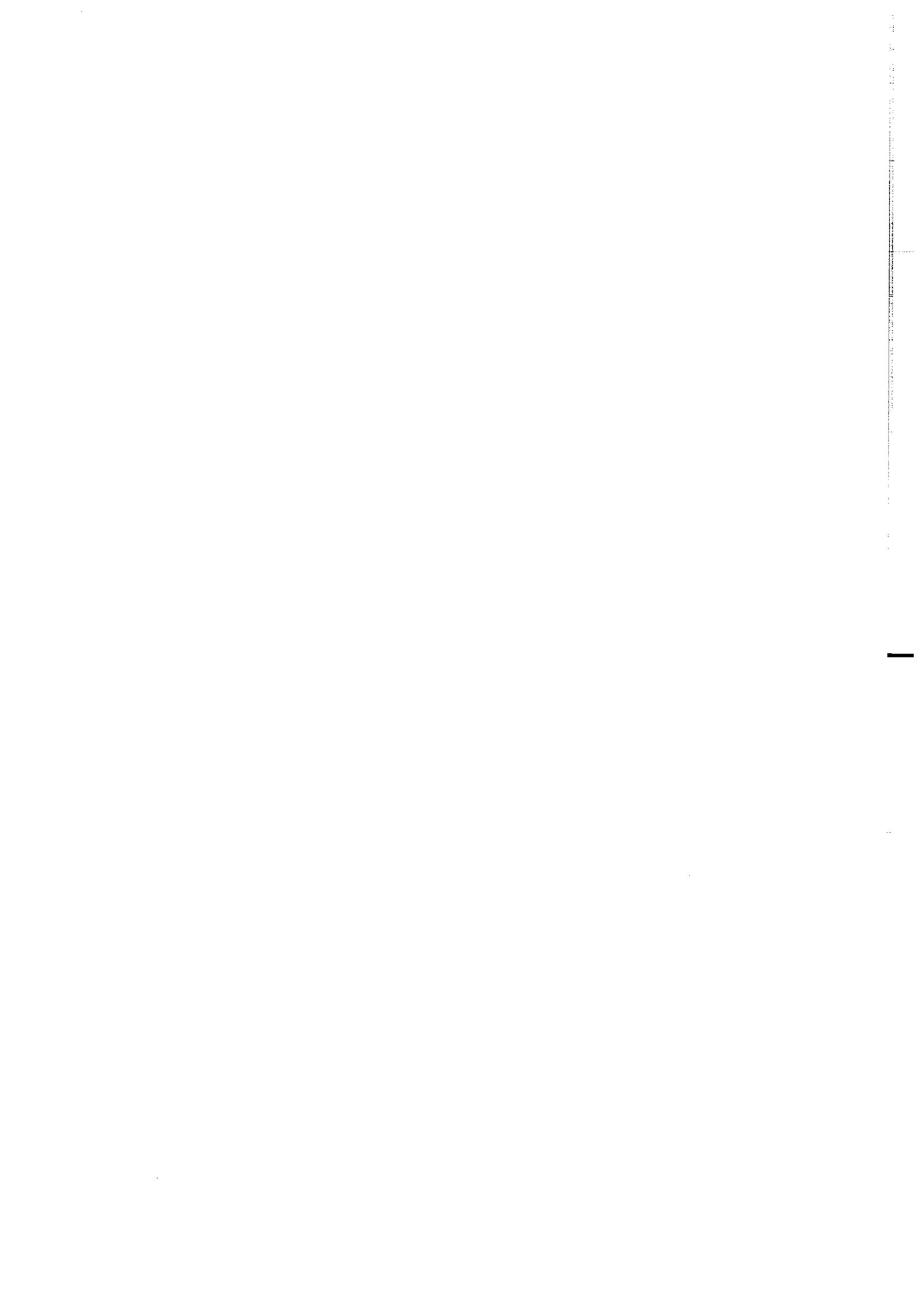


4 Conclusion

- Nous avons présenté dans ce chapitre deux applications de notre méthode d'imagerie.
- L'analyse des données *COPROD2* a permis de mettre en évidence des contrastes en profondeur de la conductivité. La comparaison de nos résultats avec d'autres images électromagnétiques nous indique que les structures mises en évidence au cours de cette étude sont tout à fait compatibles avec celles précédemment détectées. La différence majeure avec ces autres modèles est la bonne cartographie des sommets des blocs conducteurs mis en cause, validant ainsi notre méthode.
- La seconde application (données *ARMOR*) est encore dans une phase préliminaire, des corrections devant être réalisées sur les données et les résultats des inversions confrontées avec ceux de la sismique. Nous pouvons cependant noter la présence de deux réflecteurs importants situés de part et d'autre du contact de la *Baie de la Fresnaye*, ainsi que la différence des contrastes de la résistivité entre les parties Nord et Sud du contact. L'interprétation donnée de ces réflecteurs semble être en accord avec un modèle tectonique de chevauchement oblique, mais il faut attendre d'avoir la totalité des résultats du programme *GéoFrance 3D* — *ARMOR* (sismique, électromagnétisme, magnétisme, gravimétrie) pour dessiner une coupe interprétative de la région.



VII
CONCLUSION et PERSPECTIVES



L'objectif de ce travail de thèse a consisté à développer une nouvelle méthode d'imagerie en électromagnétisme basses fréquences basée sur la cartographie des interfaces des structures plutôt que de leur résistivité. Afin d'obtenir ces images mesurant la réflectivité électromagnétique du sous-sol, il est nécessaire d'inverser une équation intégrale de Fredholm de première espèce transformant le champ électromagnétique diffusif en un dual propagatif.

Pour résoudre le problème, une première approche a consisté à rechercher la solution formelle en décomposant le noyau de l'intégrale transformante sur une base de fonctions propres. L'étude de la solution trouvée nous a montré que le problème inverse à résoudre est mal posé face à des données bruitées et/ou incomplètes, nous restreignant ainsi à une solution de basse résolution. L'accès à plus de précision peut être obtenu cependant en introduisant des informations *a priori* sur la solution recherchée. Cette contrainte permet alors de stabiliser le problème inverse, nous permettant ainsi de développer une inversion numérique de l'intégrale transformante.

La seconde étape de ce travail a été de rechercher une solution numérique au problème inverse via un algorithme de recuit simulé couplé avec la méthode de descente du simplexe. La combinaison de ces deux méthodes permet d'explorer le domaine continu et non borné de l'espace des solutions. Les résultats obtenus à partir des tests synthétiques proposés montrent clairement que des réflexions associées à des contrastes en conductivité peuvent être détectées par cette méthode.

L'étape suivante qui consiste à appliquer la méthode sur des données de terrain montrent des images où l'on localise très bien les sommets de blocs plus ou moins conducteurs (données *COPROD2*). La similitude de nos résultats avec ceux obtenus par d'autres méthodes ouvre l'accès sur d'autres applications de terrain.

L'analyse du deuxième jeu de données n'est que préliminaire puisque de nombreuses corrections et inversions sont encore à réaliser, les données que nous avons enregistrées sur le terrain durant l'été 1995 étant, semble-t-il, perturbées par des statiques. Néanmoins, les premiers résultats nous indiquent la présence de deux domaines différents séparés par un contact tectonique majeur du Cadomien.

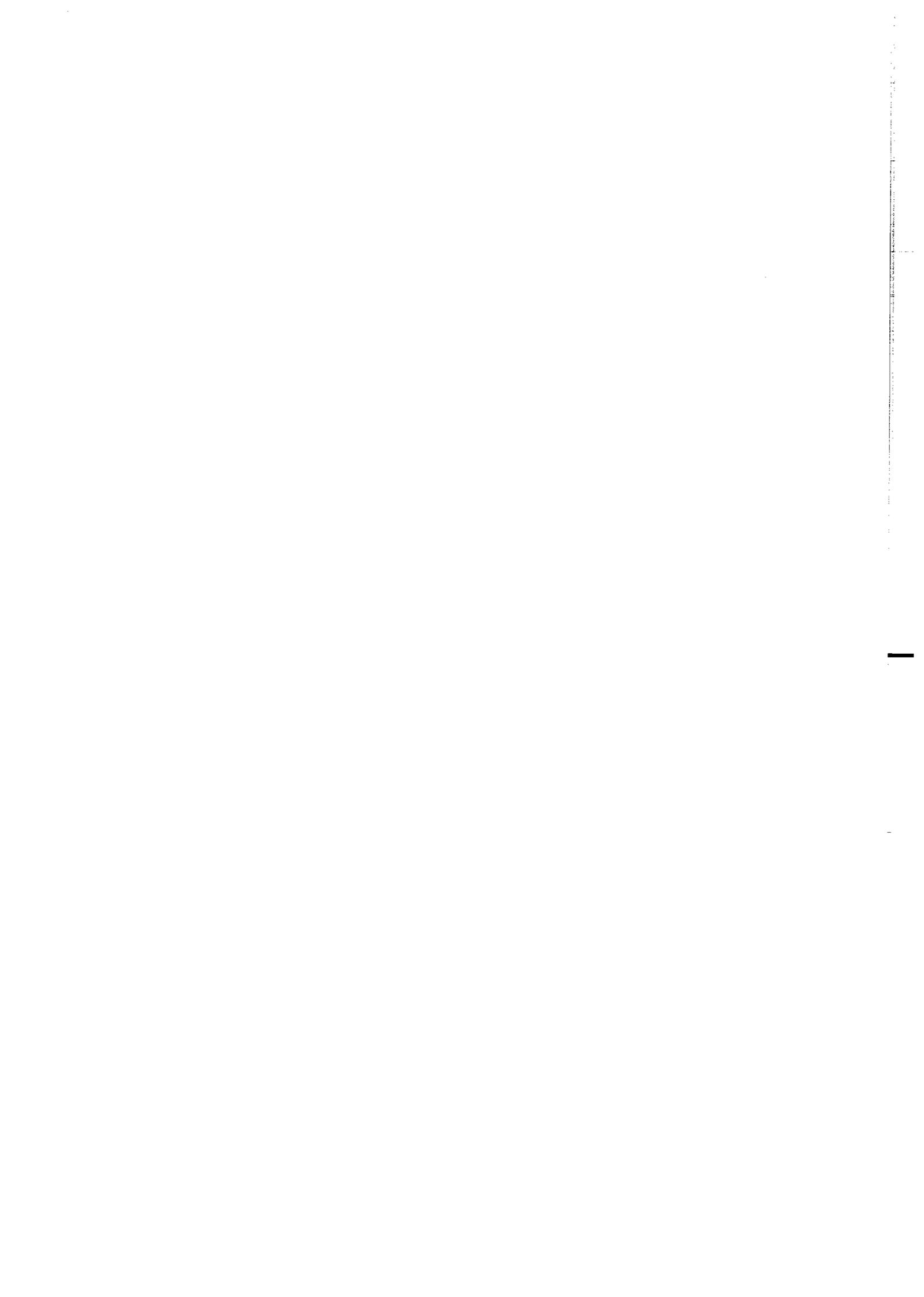
Les applications présentées dans ce travail proviennent toutes du domaine magnétotellurique. Néanmoins, l'intérêt de l'approche réside dans la variabilité des applications de la méthode puisque l'équation transformante ne change pas quel que soit les fréquences. Le domaine d'application de la méthode suivant les fréquences utilisées est donc très large : de la subsurface pour les hautes fréquences à la lithosphère pour les grandes périodes.

Il nous apparaît cependant que le domaine magnétotellurique n'est pas forcément le plus adapté à notre méthode. En effet, le fait de ne pas connaître le signal source nous empêche d'analyser directement le champ électromagnétique issu du sous-sol. Pour la magnétotellurique, le rapport

des champs électriques et magnétiques permet de nous soustraire de cette source puisque ceci revient à faire une déconvolution (principe identique en sismique lorsque l'on fait le rapport des composantes du signal enregistré).

Un domaine plus approprié pour appliquer cette méthode d'imagerie est celui des sources contrôlées. Dans ce cas, il est possible d'obtenir le signal source, et donc, par différence, le signal électromagnétique issu du sous-sol. De plus, ce type d'application permettrait de nous rapprocher du système d'acquisition des données de la sismique réflexion. Le développement de ce type de méthode permettrait alors de faire des analyses de "vitesse électromagnétique" que l'on connecterait ensuite aux pseudo-sections sismiques obtenues par notre méthode. Le résultat serait une méthode d'imagerie tout à fait comparable à celles de la sismique, mais dont le point de départ est un champ diffusif.

Annexe 1
Rapport entre les termes diffusif et
propagatif de l'équation du télégraphiste.



L'équation du télégraphiste est donnée par :

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) + \mu\sigma(\mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mu\varepsilon(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 \mathbf{e}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{éq. 1.1.1})$$

Dans cette équation, nous pouvons distinguer deux termes caractérisés par l'ordre de différenciation du champ par rapport au temps. Le premier ($\frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$) introduit le caractère diffusif du champ (similitude avec l'équation de diffusion), et le second ($\frac{\partial^2 \mathbf{e}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}$) l'aspect propagatif (correspondance avec l'équation des ondes). Il nous apparaît intéressant de regarder la relative importance de chacun de ces termes par rapport à l'autre. Pour cela, nous allons appliquer, sur l'équation du télégraphiste, une transformée de Fourier définie par :

$$\begin{cases} TF & \tilde{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt, \\ TF^{-1} & f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{F}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega. \end{cases} \quad (\text{éq. 1.1.2})$$

En considérant une dépendance du champ en $\exp(i\omega t)$, nous obtenons :

$$\nabla \times \nabla \times \tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{r}, \omega) + [i\omega\mu\sigma(\mathbf{r}) - \omega^2\mu\varepsilon(\mathbf{r})]\tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad (\text{éq. 1.1.3})$$

que l'on peut exprimer sous la forme

$$\nabla \times \nabla \times \tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{r}, \omega) + i\omega\mu\sigma(\mathbf{r}) \left\{ 1 + i\omega \frac{\varepsilon(\mathbf{r})}{\sigma(\mathbf{r})} \right\} \tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{r}, \omega) = 0. \quad (\text{éq. 1.1.4})$$

Nous avons ainsi, à travers $\tau = \omega\varepsilon(\mathbf{r})/\sigma(\mathbf{r})$, le rapport entre le terme propagatif ($\frac{\partial^2 \mathbf{e}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}$) et le diffusif ($\frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$) et la comparaison de ce paramètre τ par rapport à 1 nous informera sur la relative importance de chacun de ces deux termes : $\tau < 1 \rightarrow$ diffusion et $\tau > 1 \rightarrow$ propagation. Afin de se représenter plus précisément les différents cas possibles, nous pouvons représenter graphiquement les variations de τ en fonction de ω et de $\sigma(\mathbf{r})$ en posant $\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon_0$ avec $\varepsilon_0 = (\mu_0 c^2)^{-1} F.m^{-1}$ et $c \approx 3.10^8 m.s^{-1}$ (figure [1.1]). Nous avons également tracé quelques courbes à épaisseur de peau constante. On rappelle que l'épaisseur de peau δ est définie par la profondeur à laquelle l'onde est atténuée d'un facteur $1/e$. Son expression est donnée dans l'annexe [2].

On note sur la figure [1.1] qu'il faut des fréquences de l'ordre de quelques centaines de MHz à quelques GHz et des conductivités faibles pour avoir $\tau > 100$, significatif d'un domaine où la propagation l'emporte sur la diffusion. Dans de telles conditions, nous pouvons voir que l'épaisseur de peau est faible ($\delta \simeq 10$ m), c'est à dire que l'absorption est importante. Si on se place vers les plus basses fréquences ($< 10^5$ Hz), c'est le terme diffusif qui devient prédominant ($\tau < 0.01$). L'épaisseur de peau est alors beaucoup plus importante ($\delta > 1000$ m), et l'absorption est beaucoup plus faible.

• Cette étude nous indique clairement que les méthodes d'imageries électromagnétiques dépendent des fréquences utilisées. Dans le domaine des hautes fréquences, le champ électromagnétique vérifie l'équation des ondes

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) + \mu\epsilon(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 \mathbf{e}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{éq. 1.1.5})$$

et ainsi, l'imagerie va pouvoir bénéficier des connaissances des méthodes sismiques. Cette particularité se "paie" par une très faible profondeur de pénétration de l'onde. Si l'on veut étudier des structures à de grandes profondeurs (de l'ordre du kilomètre ou plus), il faut descendre dans le spectre des fréquences. Le champ électromagnétique satisfait alors l'équation de diffusion

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) + \mu\sigma(\mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0. \quad (\text{éq. 1.1.6})$$

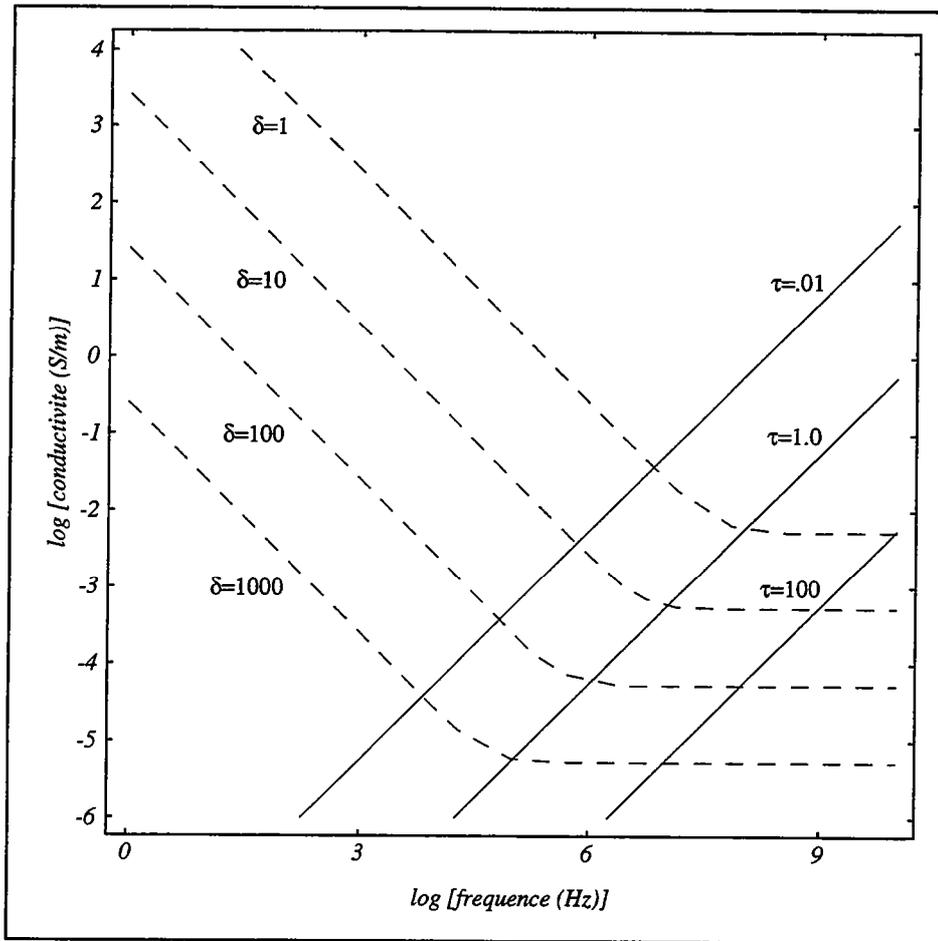
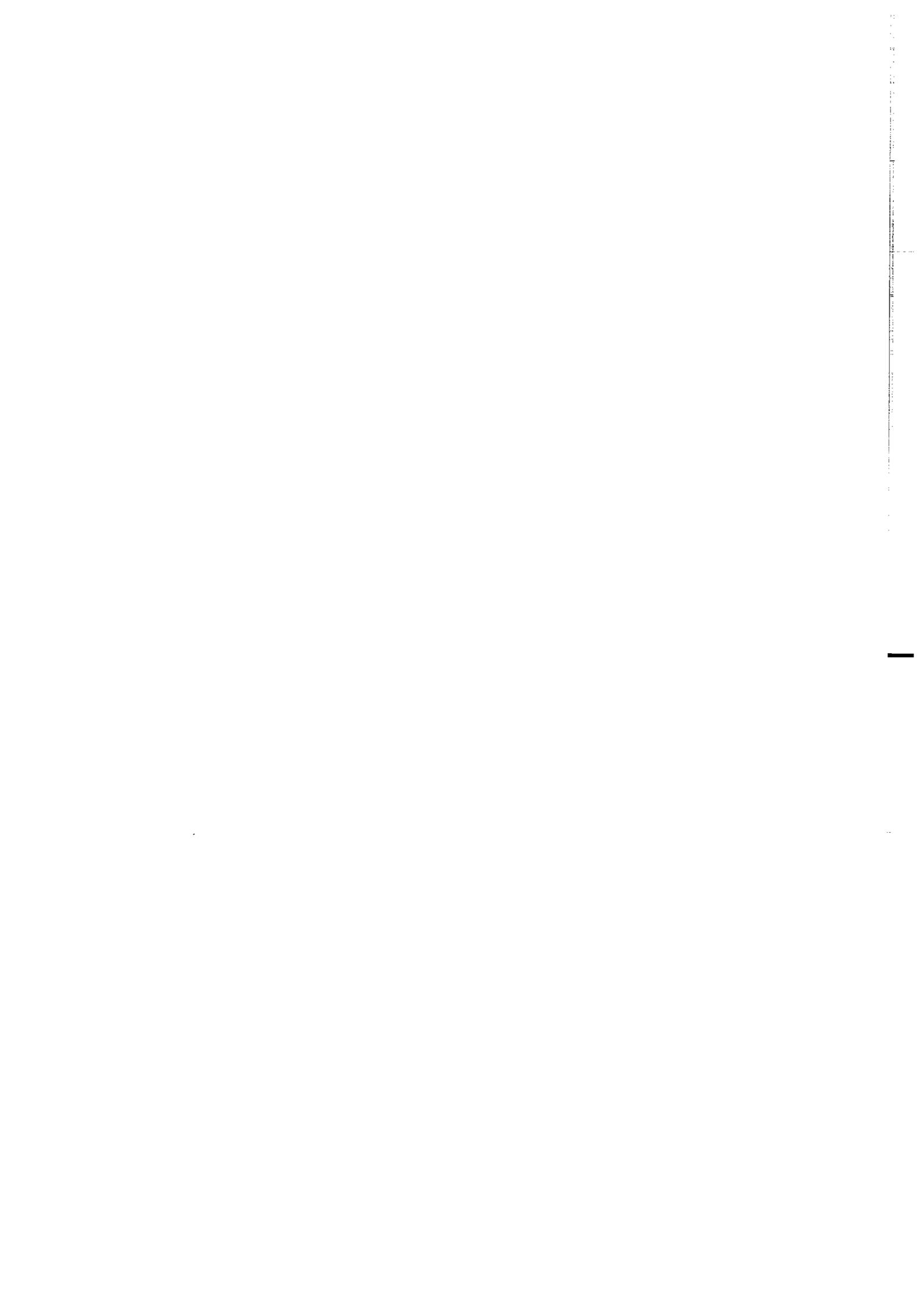


Figure 1.1 Représentation du rapport entre le terme diffusif et le terme propagatif de l'équation du télégraphiste. Trois courbes particulières de $\tau = \omega \epsilon_0 / \sigma$ ($\tau = 100, 1, 0.01$) sont tracées illustrant les domaines où propagation ou diffusion prédomine. Quatre courbes d'isovaleurs de l'épaisseur de peau δ ($\delta = 1, 10, 100, 1000$ m) sont tracées indiquant la profondeur d'investigation de l'onde.



Annexe 2
Calcul de l'épaisseur de peau δ

En considérant une direction de propagation suivant l'axe z de $\tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{r}, \omega)$ et en posant $\nabla \cdot \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) = 0$, l'équation vérifiée par le champ électromagnétique est :

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{e}}(z, \omega) + k^2 \tilde{\mathbf{e}}(z, \omega) = 0, \quad (\text{éq. 2.1.1})$$

avec $k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon(\mathbf{r}) - i\omega \mu \sigma(\mathbf{r})$. Les solutions de cette équation peuvent se mettre sous la forme (en posant $k = \alpha - i\beta$) :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{e}}(z, \omega) &= e_0 \exp(i\omega t) \exp(-ikz) \\ &= e_0 \exp(-\beta z) \exp[i(\omega t - \alpha z)]. \end{aligned} \quad (\text{éq. 2.1.2})$$

Le terme $\exp(-\beta z)$ représente l'atténuation de l'onde avec la profondeur, et $\exp[i(\omega t - \alpha z)]$ la propagation de l'onde suivant l'axe z avec une vitesse de phase α . Les expressions de α et β sont données par la résolution du système :

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 &= \mu \varepsilon \omega^2 \\ 2\alpha\beta &= \mu \sigma \omega \end{cases} \quad (\text{éq. 2.1.3})$$

puisque $k^2 = (\alpha - i\beta)^2 = \omega^2 \mu \varepsilon(\mathbf{r}) - i\omega \mu \sigma(\mathbf{r})$. En substituant α ou β de la seconde expression dans la première, nous arrivons à :

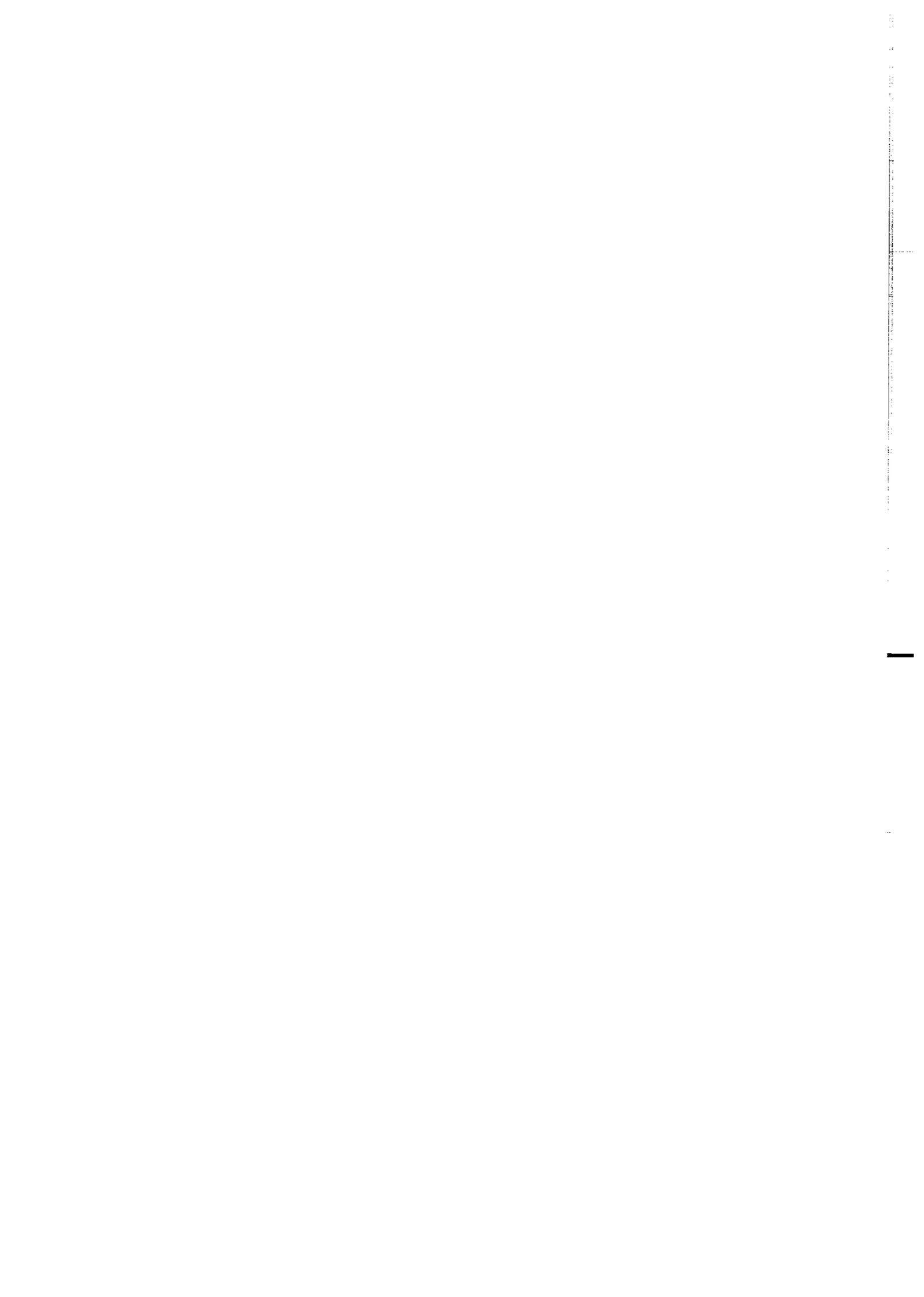
$$\begin{cases} \beta &= \sqrt{\frac{\varepsilon \mu \omega^2}{2} \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon}\right)^2} - 1 \right\}} \\ \alpha &= \sqrt{\frac{\varepsilon \mu \omega^2}{2} \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon}\right)^2} + 1 \right\}} \end{cases} \quad (\text{éq. 2.1.4})$$

L'épaisseur de peau δ est définie par :

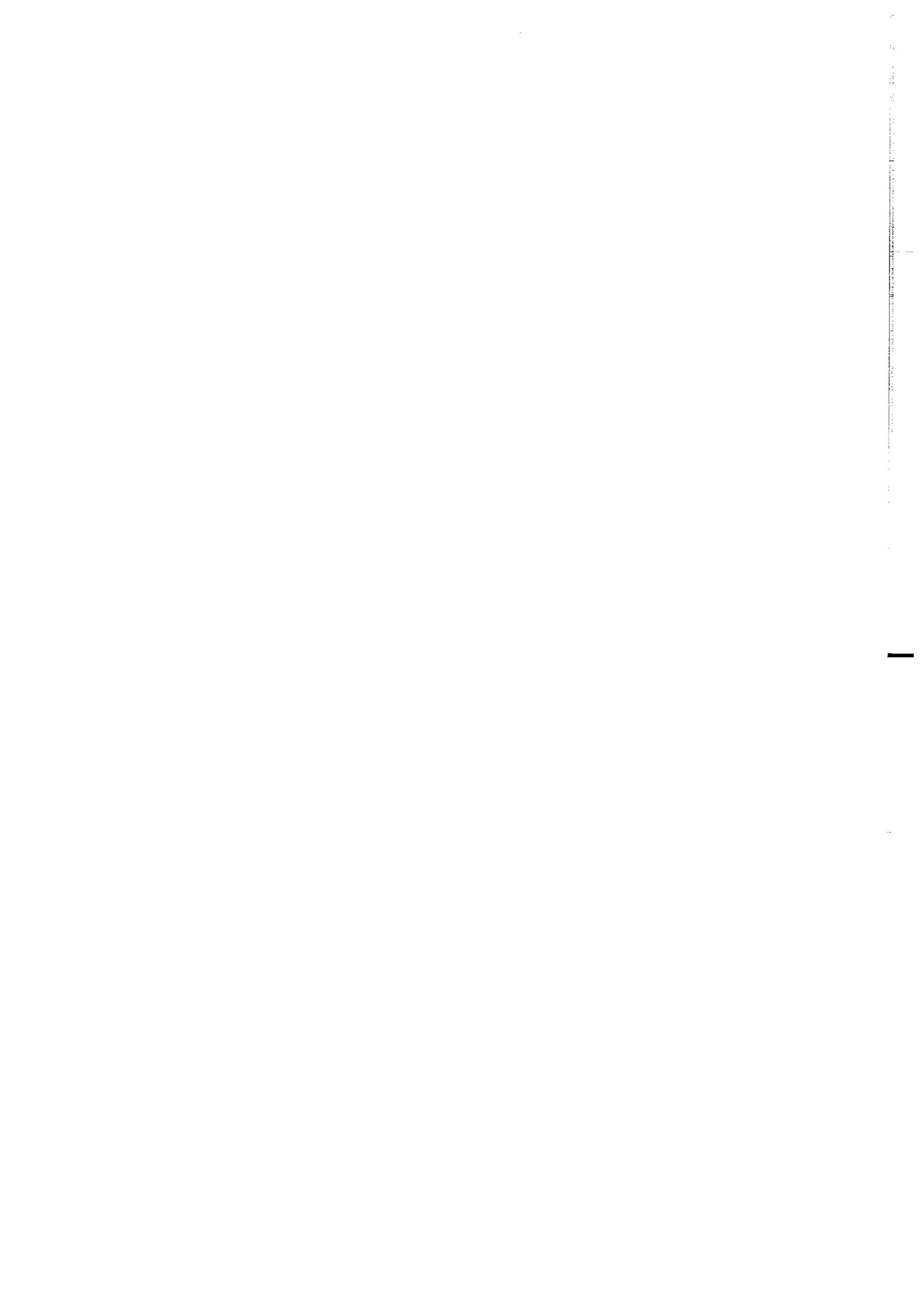
$$\frac{E(z = \delta, \omega)}{E(z = 0, \omega)} = \frac{1}{e} \quad (\text{éq. 2.1.5})$$

qui n'est vérifié que pour $\delta = \beta^{-1}$. Son expression est donc :

$$\delta = \left[\frac{\varepsilon \mu \omega^2}{2} \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon}\right)^2} - 1 \right\} \right]^{-1/2} \quad (\text{éq. 2.1.6})$$

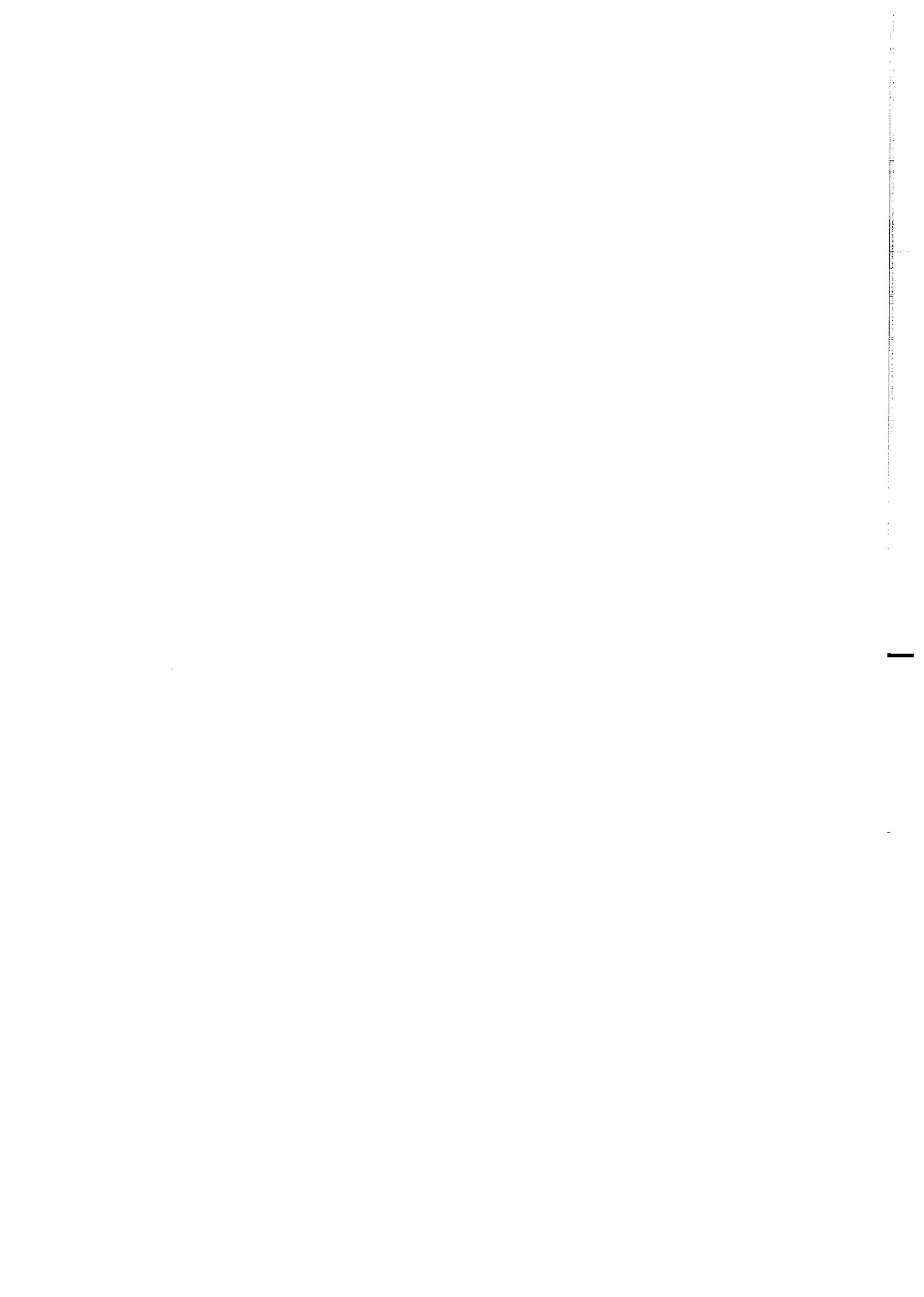


Annexe 3
Article Inverse Problem



D. Gibert, B. Tournerie and J. Virieux
Superresolution Electromagnetic Imaging of the Conductive Earth Interior,
Inverse Problem, 10, p 341-351, 1994.

Résumé en français : Le faible pouvoir de pénétration des méthodes d'imagerie électromagnétiques hautes fréquences implique une étude basse fréquence du champ pour sonder les parties profondes du sous-sol. Malheureusement, ce champ basse fréquence vérifie l'équation de diffusion, ne permettant pas le développement d'une imagerie haute résolution du milieu comme celle rencontrée en sismique ou en géoradar. Un moyen pour réaliser une imagerie haute résolution vient d'une équation intégrale de Fredholm de première espèce liant le champ diffusif à un analogue propagatif. Si cet analogue propagatif peut être déterminé par inversion de l'intégrale, alors les méthodes d'imageries sismiques pourront être utilisées, tout du moins d'un point de vue théorique, pour construire des images électromagnétiques de haute résolution. La décomposition spectrale de l'opérateur d'intégration montre que le problème inverse est numériquement très mal posé face à des données incomplètes et/ou bruitées. L'accès à une haute résolution ne peut être obtenu qu'en considérant que la solution recherchée ne prend ses valeurs qu'en des points précis de l'espace des solutions. Cette information *a priori* stabilise énormément l'inversion, mais le problème inverse reste non-linéaire. Le calcul numérique du champ propagatif est obtenu à l'aide d'un algorithme couplant le recuit simulé et la méthode de descente du simplexe, ce qui permet de travailler dans l'espace continu des solutions. Des applications sur des données synthétiques bruitées montrent que des réflecteurs peuvent être détectés par cette méthode.



High-resolution electromagnetic imaging of the conductive Earth interior

Dominique Gibert†§, Benoît Tourneriet†|| and Jean Virieux†¶

† Géosciences Rennes, Université Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, France

‡ Institut de Géodynamique, CNRS, Avenue A Einstein, 06560 Valbonne, France

Received 15 July 1993

Abstract. Ohmic dissipation in conductive media considerably limits the penetrative power of high-frequency electromagnetic imaging methods and implies that deep regions can be probed only with low-frequency fields. Unfortunately, these low-frequency fields are governed by a diffusive equation which prevents direct high-resolution imaging as in seismic and georadar imaging. However, a clue for high-resolution imaging in the diffusive approximation is given by a Fredholm integral equation of the first kind which links diffusive fields to their propagative duals. If these duals could be recovered by inverting this integral equation, the seismic imaging toolbox might be used, at least from a theoretical point of view, to produce fine electromagnetic images. Spectral decomposition of the integral operator shows that the inverse problem is numerically ill-posed for both noisy and/or incomplete data. High-resolution can be achieved only by adding sparsity constraints upon the sought solution to the information content of the data. This type of *a priori* information also strongly regularizes the inversion but implies that the inverse problem must be treated as non-linear. A numerical algorithm, designed to work in a continuous parameter space, couples both the simulated annealing and the simplex to recover the propagative field. Numerical applications for pseudo-data with additive noise reveal that reflective interfaces can be imaged even within the poorly-favourable magnetotelluric setup.

1. Introduction

Imaging the Earth's interior is a major task in geophysics which involves different techniques depending on both the nature and the depth of the targets to detect. For instance, elastic body waves radiated from seismic regions are used to image the main discontinuities found in the whole Earth [7], long-period surface waves are an efficient tool to probe the upper mantle down to 700 km in depth [26], while artificially-created elastic waves constitute the preferred means to image the first kilometers of the subsurface in the context of petroleum exploration [4]. Another and growing field of interest in high-resolution imaging techniques is subsurface geophysics which involves areas such as prospecting for water resources, waste disposal and civil engineering. Up to now, the main operational imaging techniques used in shallow geophysics are seismic [20] and georadar [5] soundings which respectively use information carried by elastic waves and electromagnetic waves. While seismic imaging can be adapted to any penetration depth, the georadar suffers a dramatic limitation to its penetrating power due to ohmic dissipation. The basic reason for such a limitation comes

§ E-mail address: gibert@univ-rennes1.fr

|| E-mail address: tourneri@univ-rennes1.fr

¶ E-mail address: viri@mimosá.unice.fr

from the fact that rocks are electrical, conductive media inside which the electromagnetic field is governed by the telegrapher equation,

$$\nabla \times \nabla E(\mathbf{r}, t) + \mu\varepsilon(\mathbf{r}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} E(\mathbf{r}, t) + \mu\sigma(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial t} E(\mathbf{r}, t) = S(\mathbf{r}, t) \quad (1)$$

where μ , ε and σ stand for the magnetic permeability, and the electric permittivity and conductivity respectively. $S(\mathbf{r}, t)$ represents a source term. General solutions to this equation are damped waves but in the Earth, where the conductivity is large, the wave-like character of the electromagnetic field disappears very quickly to the benefit of the diffusive behavior [29] and, for most geophysical models, the electromagnetic field is given by the diffusion equation,

$$\nabla \times \nabla E(\mathbf{r}, t) + \mu\sigma(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial t} E(\mathbf{r}, t) = S(\mathbf{r}, t). \quad (2)$$

High-resolution electromagnetic imaging in this diffusive context has long been considered as an impossible challenge, mainly for the theoretical reason that diffusion constitutes a formal barrier to any 'diffraction-like' tomography. Links exist, however, between diffusion and propagation [9, 17, 27] and their study could cast new insights upon the possibilities for high-resolution electromagnetic imaging in a diffusive context. The need for a detailed study of the transformation from a diffusive to a propagative field is further motivated by the fact that the state of the art of wave-field imaging, which is now well developed [3], might be used to the benefit of diffusive-field imaging if a bridge could be put between the two domains [38]. For instance, and to illustrate this strategy, it is well established that wave-field imaging does not allow for high-resolution reconstructions of the velocity distribution but does for the reflectivity (i.e. impedance gradients) [13]. This result is also valid for the diffusive case and indicates that imaging in terms of the conductivity distribution (the electromagnetic equivalent of seismic velocity) will not allow for a high resolution which could be reached only in terms of conductivity gradients (i.e. the equivalent of seismic reflectivity). This strongly guides the way to parametrize the inverse problem. The goals of this paper are both to precisely document the formal inversion from a diffusive to a propagative field and, then, to rely on this formal inverse to set up a practical numerical inversion which could operate on actual data. Section 2 documents the links between propagation and diffusion and solves the inverse problem of transforming a diffusive field into a propagative dual. Section 3 examines and discusses the various constraints we use to stabilize the inversion of incomplete and noisy data. A numerical solution using simulated annealing is presented in section 4, and realistic synthetic examples are presented in section 5. Although primarily designed for geophysical purposes this study also applies to other fields interested in imaging conductive media such as in non-destructive control and medical imaging [41, 42].

2. From a diffusive to a propagative field

To set a link between diffusion and propagation we follow the approach given in [19] which formally introduces a field satisfying the wave equation

$$\nabla \times \nabla U(\mathbf{r}, q) + \mu\sigma(\mathbf{r}) \frac{\partial^2}{\partial q^2} U(\mathbf{r}, q) = F(\mathbf{r}, q) \quad (3)$$

where q is an independent variable playing the role of pseudo-time with a physical dimension of square-root of time, and $F(r, q)$ is a source term. The wave speed $c(r) = 1/\sqrt{\mu\sigma(r)}$. An integral equation between $E(t)$ and $U(q)$,

$$E(t) = \int_0^\infty \frac{q}{2\sqrt{\pi t^3}} \exp\left(-\frac{q^2}{4t}\right) U(q) dq \quad (4)$$

introduces a kernel corresponding to the three-dimensional Green function of the diffusion equation. The spatial dependence of the fields has been left implicit since the transformation only involves the time t and the variable q . The source terms $S(r, t)$ and $F(r, q)$ are related by the same expression. The direct problem of transforming a propagative field into a diffusive one is numerically stable as one may expect from the damped nature of the integral kernel in (4), and the inverse transformation from a diffusive field $E(r, t)$ into its propagative dual $U(r, q)$ it must be stressed is highly unstable. This is more understandable in the Fourier domain ($t \rightarrow \nu$) where (4) transforms into

$$E(\nu) = \int_0^\infty \exp(-q\sqrt{i\nu}) U(q) dq. \quad (5)$$

This Fredholm equation possesses the nice property that its kernel only depends upon the product of the dual variables. Such a property is verified for many integral equations encountered in mathematical physics such as, for instance, in laser anemometry [23], light scattering by polydispersive media [30], and inverse diffraction [2]. Solutions of such dilationally-invariant Fredholm integral equations can be given under the form of an eigenfunction expansion [22]. Following this approach and looking for eigenfunctions Φ_ω verifying

$$\Phi_\omega(\nu) = \lambda_\omega^{-1} \int_0^\infty \exp(-q\sqrt{i\nu}) \Phi_\omega(q) dq \quad (6)$$

we find the collection ($\omega \in \mathbb{R}^+$)

$$\Phi_\omega^+(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi s}} \cos\left(\frac{\theta_\omega}{2} - \omega \ln s\right) \quad \Phi_\omega^-(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi s}} \sin\left(\frac{\theta_\omega}{2} - \omega \ln s\right) \quad (7)$$

where

$$\theta_\omega = \arg\left[\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\omega\right) \exp\left(\frac{\pi(\omega - i/2)}{4}\right)\right] \quad (8)$$

and

$$\lambda_\omega^\pm = \pm \sqrt{\frac{\pi \exp(\frac{1}{2}\pi\omega)}{\cosh(\pi\omega)}}. \quad (9)$$

The set $\{\Phi_\omega^\pm, \omega \in \mathbb{R}^+\}$ constitutes an orthogonal basis when the functional space is equipped with the scalar product $\langle f, g \rangle \equiv \int_0^\infty f(\xi)g(\xi) d\xi$, and projecting† both the diffusive and the propagative fields upon this basis gives

$$U(q) = \int_0^\infty d\omega \frac{\Phi_\omega^\pm(q)}{\lambda_\omega^\pm} \int_0^\infty E(\nu) \Phi_\omega^\pm(\sqrt{\nu}) d\nu. \quad (10)$$

† Since our scalar product is defined for real-valued functions, the projection of the Fourier transform $E(\nu)$ implies thinking in terms of real-valued sine and cosine transforms. Integration restricted to $\nu \geq 0$ causes no loss of information since $E(t)$ is real-valued.

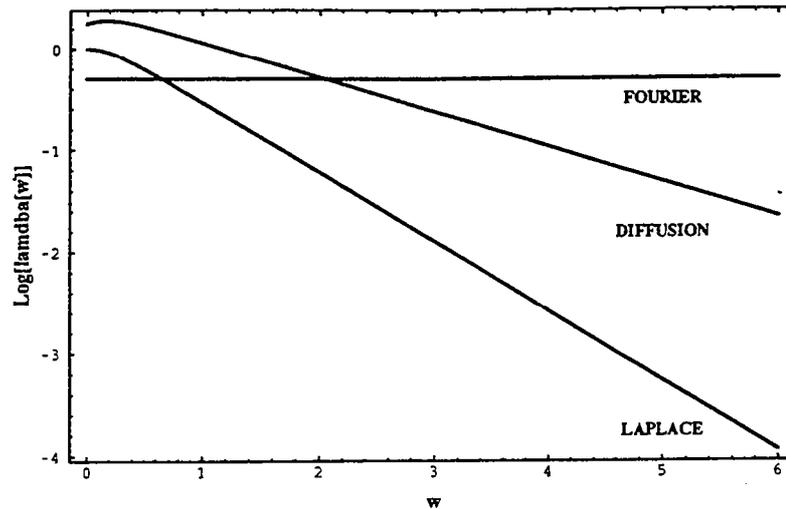


Figure 1. Eigenvalue spectra for different integral operators. The constant spectrum is for the Fourier transform while the most-decreasing one is for the Laplace transform. The spectrum labelled 'diffusion' corresponds to (9).

Provided that $E(\nu)$ is noiseless and known for every $\nu \geq 0$, (10) gives the complete solution to our inverse problem. The eigenvalues λ_ω^\pm quantify the efficiency by which their corresponding eigenfunctions are transmitted into the data (see (6)): the larger the eigenvalue the more efficient the transmission of the information element. Eigenfunctions whose eigenvalues are too small become lost in the noise, and the process of dividing by such small eigenvalues in (10) will dramatically amplify any noise present in the data. Unfortunately, the spectrum (9) decays asymptotically to zero as $\omega \rightarrow \infty$ (figure 1), and this makes reconstruction (10) ill posed. Including the high-mode eigenfunctions in the solution will produce meaningless results, and our solution may be rewritten as the sum of two components,

$$\begin{aligned}
 U(q) &= \int_0^{\omega_{\max}} d\omega \frac{\Phi_\omega^\pm(q)}{\lambda_\omega^\pm} \int_0^\infty E(\nu) \Phi_\omega^\pm(\sqrt{\nu}) d\nu + \int_{\omega_{\max}}^\infty d\omega \frac{\Phi_\omega^\pm(q)}{\lambda_\omega^\pm} \int_0^\infty E(\nu) \Phi_\omega^\pm(\sqrt{\nu}) d\nu \\
 &= U_d(q) + U_n(q)
 \end{aligned} \tag{11}$$

where the cutoff ω_{\max} depends on the signal-to-noise ratio. The components $U_d(q)$ and $U_n(q)$ correspond respectively to the part of the solution which can be recovered from the data and to the one which cannot be. $U_d(q)$ is a low-pass filtered version of the true solution $U(q)$ and is insufficient to allow for a high-resolution reconstruction. In fact, the resolution follows the distribution of the zero-crossings of $\Phi_{\omega_{\max}}^\pm$ and rapidly deteriorates when q increases (figure 2). The only way to improve the resolution is to perform the inversion not only with data but also with some *a priori* information [34] whose role will be to extrapolate the reconstruction beyond the cutoff ω_{\max} . From the point of view of inverse problem theory, this extrapolation may be considered as using *a priori* information to complete the basic solution $U_d(q)$ with a non-null $U_n(q)$ constructed in the null space generated by the basis $\{\Phi_\omega^\pm, \omega > \omega_{\max}\}$.

3. Constraints and parametrization

The *a priori* information suitable to our inverse problem are of three types. The first constraint concerns the causality of the field $U(q)$ and limits the support of the solution to \mathbb{R}^+ .

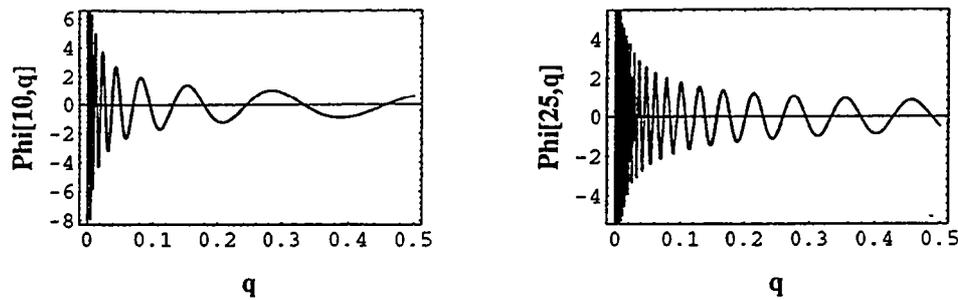


Figure 2. $\Phi_{\omega}^{+}(q)$ for $\omega = 10$ and $\omega = 25$.

A second constraint comes from the objectives of imaging which are of structural concern. In other words, the goal is to detect the edges of the more or less numerous homogeneous blocks which constitute the media to probe. This explains why the reflectivity is the right parameter to seek, since it is directly related to the edges of the structures where most of the jumps of the electromagnetic properties of the body occur. By definition these edges form a very sparse and irregular lattice in space which, thanks to the Huygens principle, will back-scatter sparse wavefronts when visited by an incident wavefront. As a consequence, and assuming an impulsive source term, $F(q)$, the sequences, $U(q)$, recorded at each receptor will be sparse trains of replicas of this initial short pulse (see numerical simulations in [37]). This will be true only for real reflection coefficients and, equivalently, if the incident wavefront attacks the edges of the structures under subcritical conditions. This allows the success of the seismic method under near-normal reflection conditions. Were these conditions to be violated, several reflection coefficients might become complex, and the corresponding reflected events would no longer be simple replicas of the source term [1]. In the remaining part of this discussion we shall assume that all reflection coefficients are real and that

$$U(q) = \sum_{n=1}^N U_n F(q - q_n) \quad (12)$$

is verified. Such a sparsity constraint upon the unknown field has been recognized to strongly stabilize ill-posed inverse problems similar to the present one [6]. Indeed, such a constraint has already successfully been applied to deconvolution of noisy seismic data [21]. The last constraint acts upon the nature of the source terms. If the electromagnetic source is known or if it is possible to deconvolve the data, which is merely the case in magnetotellurics, we may assume a Dirac impulse for the initial pulse $S(t)$. The corresponding propagative source term, $F(q)$, is also a Dirac impulse as is readily seen from (5) and (12) becomes

$$U(q) = \sum_{n=1}^N U_n \delta(q - q_n) \quad (13)$$

which, when inserted into (5), gives

$$E(v) = \sum_{n=1}^N U_n \exp(-q_n \sqrt{iv}). \quad (14)$$

In practice, the data are known for a finite set of discrete frequencies $\{E_{\text{data}}(v_1), E_{\text{data}}(v_2), \dots, E_{\text{data}}(v_M)\}$ from which one has to get estimates of the unknown parameters $\{N, q_1, q_2, \dots, q_N, U_1, U_2, \dots, U_N\}$. This is the actual inverse problem which is discussed in the following section.

4. Computer implementation by simulated annealing

The inverse problem defined in the preceding section is linear with respect to the U_i s and highly non-linear with respect to both the q_i s and N as seen in (14). Provided a suitable frequency sampling, model (14) can be recast under the form of the Prony model [10] for which linearized sub-optimal solutions exist and whose lack of robustness is well known [14]. Indeed, we found that the presence of a very small noise in the data renders any linearized inversion impossible. This led us to attack the inverse problem with a fully non-linear strategy and, among the various powerful algorithms recently proposed, we retain simulated annealing [15] because of its clear theoretical links with the theory of inverse problems [34]. Although simulated annealing has the potential power to allow for a simultaneous inversion of all parameters, we preferred to decouple them, essentially because a simultaneous inversion implies the use of a multiparameter cost function whose components proved very difficult to balance. Since all parameters do not play the same role with respect to the inversion, we decoupled the algorithm into three main blocks. The first one consists of an analysis of the information content of the data set to estimate the number, N , of events to invert. Selecting this number is very important and makes the problem more stable. This is particularly true for Prony analysis [14] and, among the many ways to evaluate the order of Prony's model, we have found the spectral analysis of the data covariance matrix [35] a very efficient method [10]. Once we know how many reflectors are expected, we must locate them: this is our non-linear inverse problem. Simulated annealing uses an explicit computation of the cost function which allows for a decoupling between the U_i s and the q_i s. In practice we applied the simulated annealing algorithm to the restricted parameter set $\{q_1, q_2, \dots, q_N\}$, and incorporated the linear parameters $\{U_1, U_2, \dots, U_N\}$ into the cost function by computing them once a set of q_i s had been selected. In the present study, the U_i s are computed by numerically solving a Vandermonde system with standard least-squares techniques [18, 31]. This fixes the cost function to be the \mathbb{L}_2 norm defined by

$$S = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M [E_{\text{data}}(v_m) - E(v_m | q_1, q_2, \dots, q_N)]^2 \quad (15)$$

and implies a Gaussian noise in the data for the inversion being optimal from a probabilistic point of view [34]. Just to make this section self-consistent, let us recall the basis of simulated annealing. The algorithm is a two-loop procedure whose inner loop consists of starting from a model $\{q_1, q_2, \dots, q_N\}$ with cost S , then perturbing it to obtain $\{q'_1, q'_2, \dots, q'_N\}$ with cost S' , and finally retaining this new model with the probability $\mathcal{P} = \min [1, \exp(-(S' - S)/T)]$ where the parameter T , called the temperature for historical reasons, is kept fixed. Looping over this constitutes the Metropolis algorithm [24], and, provided there are a very large number of iterations, it can be shown that the sequence of accepted models satisfies the Boltzmann distribution, $\mathcal{P}_B = Z^{-1} \exp(-S/T)$, where Z is a normalizing partition function. The outer loop of simulated annealing is the cooling schedule which iterates over the Metropolis algorithm while the temperature is gradually lowered until no significant improvement occurs in the model perturbations. The two main questions to be answered when implementing the algorithm concern the lowering of the temperature in the cooling schedule and the way the parameter space is explored in the Metropolis algorithm. These two questions are addressed in the next two paragraphs.

The cooling schedule appears critical in the simulated annealing algorithm because it controls the overall convergence towards the best model. A too rapid decrease of the temperature will 'freeze' the solution into a local minimum of the cost function by forbidding

any tunnelling effect which could allow the trapped model to escape from the local minimum. Conversely, a too slow decrease may result in prohibitive computational costs. Various cooling schedules have been proposed [16], and several studies [28, 25] about practical implementation of the simulated annealing algorithm favour the cooling schedule [12, 33]

$$T(n+1) = T(n) \exp\left(-\frac{\lambda T(n)}{\text{sd}(S(n))}\right) \quad (16)$$

where λ is a parameter called the thermodynamic speed, and $\text{sd}(S(n))$ is the standard deviation of the costs of the models accepted during the Metropolis algorithm at temperature $T(n)$. The choice of the value for λ is not crucial and we retain $\lambda = 0.75$. This cooling schedule is adaptive in the sense that the decrease of the temperature is slower when the models accepted during the preceding Metropolis loops have almost identical costs. In doing so, the schedule reiterates a sequence of Metropolis loops at an only-slightly lowered temperature such that the probability for an escape from an eventual local minimum is kept high. The initial temperature in this cooling schedule must be taken sufficiently high to allow for a wide exploration of the parameter space and the final temperature is set to one hundredth of the noise variance [10].

The second question to answer when implementing the algorithm is: how to perturb the current model to obtain the new model to be tested? Most applications of simulated annealing deal with (very large) discrete sets of models as, for instance, in combinatorial minimizations like the famous travelling salesman tour [15]. Such fundamentally discrete problems possess natural minimal increments and the difficulty is essentially how to combine them [8]. Many inverse problems, however, operate in continuous spaces where no 'atomic' minimum step may be simply defined. Choosing a too large *a priori* step-size in such a continuous space implies discretizing the parameter space with a coarse rigid frame which prevents any future fine zooming over the solution. Conversely, a too fine step-size produces an enormous number of models to visit and results in a dramatic decrease of the convergence rate analogous to the well known critical slowing-down phenomena encountered in Monte Carlo simulation [11]. This difficulty led several authors [36] to implement an adaptive-step version of simulated annealing by characterizing the local topology of the cost function from the size of the domain explored during the preceding Metropolis loops. In the same spirit, a merging of both the simulated annealing algorithm and the simplex method has recently been proposed [32]. The basic idea is to use simulated annealing to relax, more or less, the downhill updating in the simplex procedure which explores the continuous parameter space. This allows the simplex to escape from basins of attraction attached to local minima of the cost function by augmenting the costs of the vertices of the simplex while decreasing the costs of the attempted moves of the highest point of the simplex. From an intuitive point of view, we may conjecture that this procedure has the net effect of making the 'cost landscape' stochastically convex and, then, ensures convergence towards the absolute minimum. The main advantage of this algorithm is that it is free from any *a priori* discretization of the parameter space while it offers very attractive convergence rates.

5. A practical example

The algorithm described above has been tested with a 1D example previously inverted with a discretized version of simulated annealing [10]. The solutions are identical within the numerical accuracy interval. These tests show an important improvement of the convergence rates with the algorithm described in the present paper. The global behaviour

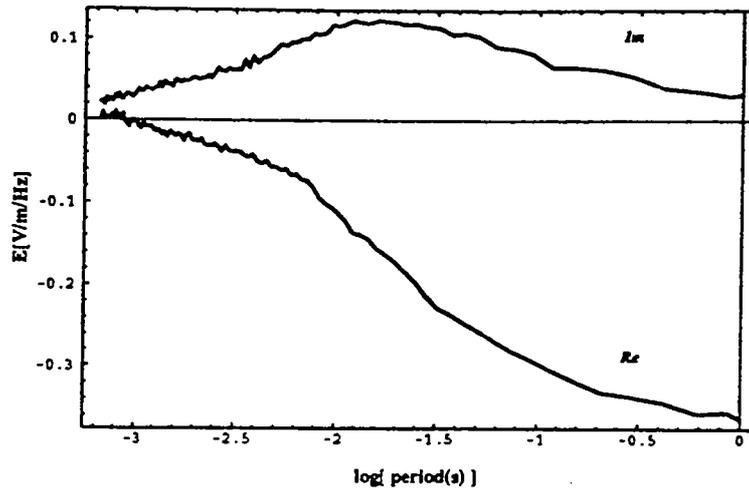


Figure 3. Pseudo-data for a station ($x = 750$ m) of the *en biseau* model (top of figure 4).

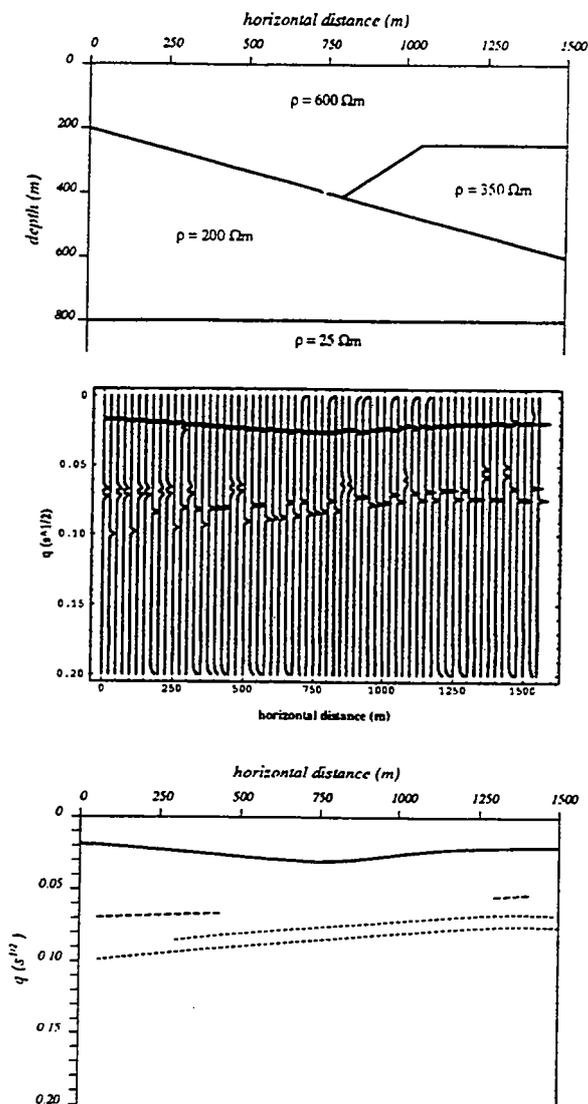


Figure 4. *En biseau* model. Top: sketch of the structure from which pseudo-data are computed. Middle, conditional probabilities of the inverted reflector. Bottom: main reflectors picked from the conditional-probability section.

of this algorithm follows what we described in our previous paper, namely a hierarchical determination of the parameters and a jump of the specific heat when approaching a parameter determination (see [10] for more details).

Two inversions of 2D models have been done. The first model consists of an *en biseau* structure (top of figure 4) from which we generated pseudo-magnetotelluric data at 63

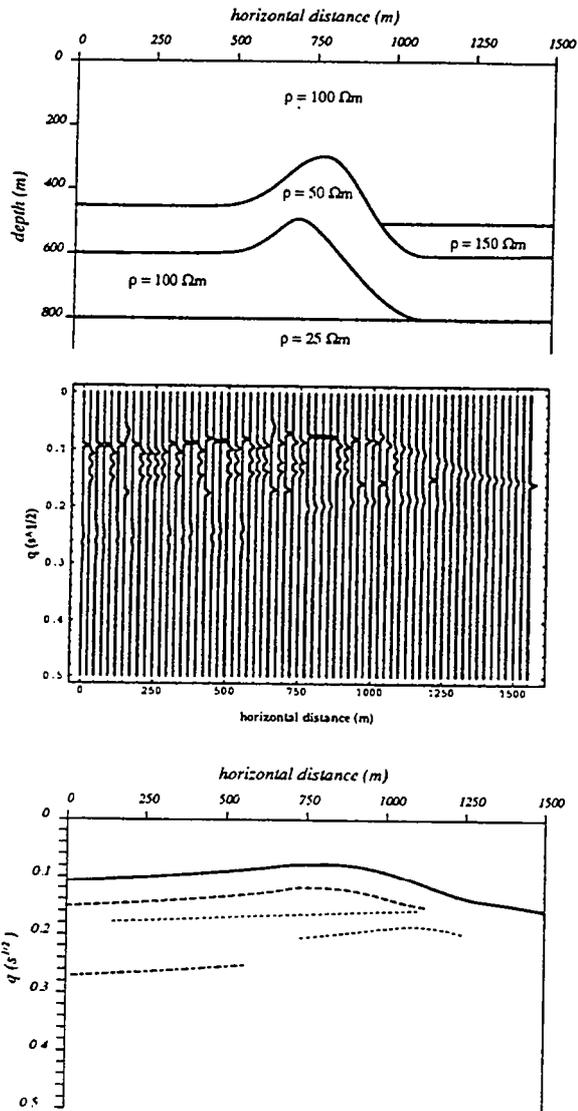


Figure 5. Anticlinal model. Top: sketch of the structure from which pseudo-data are computed. Middle: conditional probabilities of the inverted reflector. Bottom: main reflectors picked from the conditional-probability section.

equidistant stations along the surface. A finite-element program is used for this purpose [39]. The data for each station are computed for frequencies ranging from 1 to 1500 Hz with an additive white Gaussian noise ($\sigma^2 = 10^{-5}$) corresponding roughly to a signal-to-noise ratio of 30 dB (figure 3). Each trace is inverted independently and our inversion consists, in fact, of a succession of 1D inverse problems identical to the one recalled at the beginning of this section. The analysis of information content of the data indicates 3 events for almost all traces. Once the final temperature is reached, conditional probabilities

$$\mathcal{P}_A(q_n, k) = \frac{\exp(-S_k/T)}{\sum_{k=1}^K \exp(-S_k/T)} \quad (17)$$

are computed for $T = \sigma^2$. This allows evaluation of the uncertainties upon the location of the events (middle of figure 4).

This procedure furnishes an electromagnetic reflectivity (x, q) section analogous to the classical non-migrated seismic (x, t) images. Deriving an (x, z) section would involve a migration, a further step in the processing which has not yet been undertaken. Reflections from the first shallow interface are very well detected (bottom of figure 4) while deeper interfaces produce less strong, but coherent, wavefronts. A more complicated model consists of an anticlinal structure with a low-resistivity (i.e. low-velocity in the seismic sense) folded layer (top of figure 5). The conditional probabilities are more difficult to analyse (middle of

figure 5): the shallowest reflector remains well-detected but the deeper ones are somewhat interlaced and do not allow for a clear unambiguous interpretation (bottom of figure 5). This partial failure of the inversion appeals for a true 2D inverse algorithm which could ensure coherency between adjacent traces.

6. Conclusion

We have shown that reflectivity electromagnetic imaging in a diffusive context is possible provided a careful parametrization of the inverse problem is used. This demonstrates the importance of *a priori* information such as sparsity constraints which, however, make the inverse problem highly non-linear. Use of simulated annealing coupled with the simplex algorithm allows for a rapid convergence without neglecting resolution. Synthetic assessments of the method with pseudo-data show that good results are obtained when the data are corrupted with a reasonable amount of noise. More stable results could be reached if the inversions of section-traces could be performed simultaneously by accounting for some coherency criteria. This next step is in progress and will be described in a future paper.

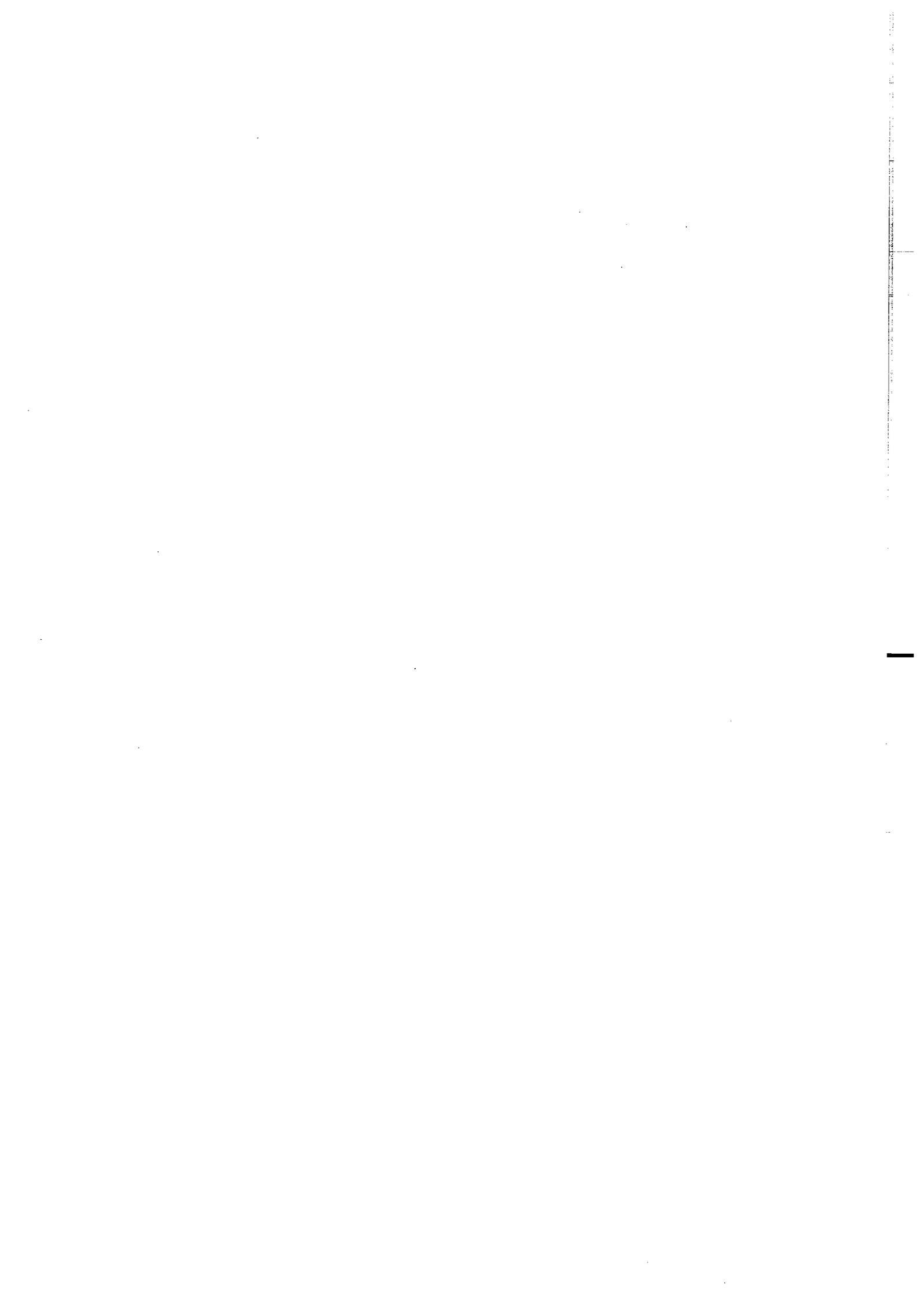
Acknowledgments

The present study has been partly granted by the Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS-INSU) via ATP 'Tomographie'. Discussions with Uriel Frisch, Dominique Lesselier, Douglas Oldenburg and Albert Tarantola strongly influenced and motivated our work. Most of the computations were done with the processing facilities of the 'Centre des Ressources Informatiques' from Université de Rennes 1. We are pleased to acknowledge Eric Picheral and François Dagorn for their technical support. A Mathematica [40] package implementing simulated annealing coupled with the simplex algorithm is available upon request to the authors.

References

- [1] Aki K and Richards P G 1980 *Quantitative Seismology, Theory and Methods* (San Francisco: Freeman) vol I and II
- [2] Bertero M, De Mol C, Gori F and Ronchi L 1983 Number of degrees of freedom in inverse diffraction *Opt. Acta* **30** 1051-65
- [3] Bleistein N 1987 On the imaging of reflectors in the Earth *Geophys.* **52** 931-42
- [4] Claerbout J 1990 *Imaging of the Earth's Interior* (Dordrecht: Reidel)
- [5] Daniels D J, Gunton D J and Scott H E 1988 Introduction to subsurface radar *IEE Proc.* vol 135 pp 278-320
- [6] Donoho D L 1992 Superresolution via sparsity constraints *SIAM J. Math. Anal.* **23** 1309-31
- [7] Dziewonski A M and Woodhouse J H 1987 Global images of the Earth's interior *Science* **236** 37-48
- [8] Ettelaie R and Moore M A 1987 Zero-temperature scaling and simulated annealing *J. Physique* **48** 1255-63
- [9] Filippi P and Frisch U 1969 Relation entre l'équation de la chaleur et l'équation des ondes de Helmholtz *C. R. Acad. Sci. A* **268** 804-7
- [10] Gibert D and Virieux J 1991 Electromagnetic imaging and simulated annealing *J. Geophys. Res.* **96** 8057-67
- [11] Gould H and Tobochnik J 1989 Overcoming critical slowing down *Comput. Phys.* **3** 82-6
- [12] Huang M D, Romeo F and Sangiovanni-Vincentelli A L 1986 An efficient general cooling schedule for simulated annealing *Proc. IEEE Int. Conf. Computer-Aided Design (Santa Clara)* pp 381-4
- [13] Jannane M et al 1989 Wavelengths of Earth structures that can be resolved from seismic reflection data *Geophys.* **54** 906-10
- [14] Kay S M and Marple S L 1981 Spectrum analysis: a modern perspective *Proc. IEEE* **69** 1380-419
- [15] Kirkpatrick S, Gelatt C D and Vecchi M P 1983 Optimization by simulated annealing *Science* **220** 671-80

- [16] van Laarhoven P J and Aarts E H 1987 Simulated annealing: theory and applications *Mathematics and its applications* (Dordrecht: Reidel)
- [17] Lavrent'ev M M, Romanov V G and Shishatskii S P 1980 *Ill-posed Problems of Mathematical Physics and Analysis* (Moscow: Nauka)
- [18] Lawson C L and Hanson R L 1974 *Solving Least-squares Problems* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall)
- [19] Lee K H, Liu G and Morrison H F 1989 A new approach to modeling the electromagnetic response of conductive media *Geophys.* **54** 1180–92
- [20] Lericolais G, Allenou J-P, Berné S and Morvan P 1990 A new system for acquisition and processing of very high-resolution seismic reflection data *Geophys.* **55** 1036–46
- [21] Levy S and Fullagar P K 1981 Reconstruction of a sparse spike train from a portion of its spectrum, and application to high-resolution deconvolution *Geophys.* **46** 1235–43
- [22] McWhirter J G and Pike E R 1978 On the numerical inversion of the Laplace transform and similar Fredholm integral equations of the first kind *J. Phys. A: Math. Gen.* **11** 1729–45
- [23] McWhirter J G and Pike E R 1979 The extraction of information from laser anemometry data *Phys. Scr.* **19** 417–25
- [24] Metropolis N, Rosenbluth A, Rosenbluth N, Teller A and Teller E 1953 Equation of state calculations by fast computing machines *J. Chem. Phys.* **21** 1087–92
- [25] Mirkin G, Vasudevan K, Cook F A, Laidlaw W G and Wilson W G 1993 A comparison of several cooling schedules for simulated annealing implemented on a residual statics problem *Geophys. Res. Lett.* **20** 77–80
- [26] Montagner J-P and Tanimoto T 1991 Global upper-mantle tomography of seismic velocities and anisotropies *J. Geophys. Res.* **96** 20337–51
- [27] Morette-DeWitt C and Foong S K 1989 Path-integral solutions of wave equations with dissipation *Phys. Rev. Lett.* **62** 2201–4
- [28] Mosegaard K and Vestergaard P D 1991 A simulated annealing approach to seismic model optimization with sparse prior information *Geophys. Prospecting* **39** 599–611
- [29] Oristaglio M and Hohmann G W 1984 Diffusion of electromagnetic fields into a two-dimensional Earth: a finite-difference approach *Geophys.* **49** 870–94
- [30] Ostrowsky N, Sornette D, Parker P and Pike E R 1981 Exponential sampling method for light scattering polydispersity analysis *Optica Acta* **28** 1059–70
- [31] Press W H, Flannery B P, Teukolsky S A and Vetterling W T 1986 *Numerical Recipes* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [32] Press W H and Teukolsky S A 1991 Simulated annealing optimization over continuous spaces *Computers in Phys.* **5** 426–9
- [33] Ruppeiner G 1988 Implementation of an adaptive, constant thermodynamic speed simulated annealing schedule *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **5A** 116–21
- [34] Tarantola A 1987 *Inverse Problem Theory* (Amsterdam: Elsevier)
- [35] Van Blaricum M L and Mitra R 1978 Problems and solutions associated with Prony's method for processing transient data *IEEE Trans. Antennas Propag.* **26** 174–82
- [36] Vanderbilt D and Louie S G 1984 A Monte Carlo simulated annealing approach to optimization over continuous variables *J. Comput. Phys.* **56** 259–71
- [37] Virieux J 1986 P-SV wave propagation in heterogeneous media: velocity–stress finite-difference method *Geophys.* **51** 889–901
- [38] Virieux J, Flores-Luna C and Gibert D 1994 Asymptotic theory for diffusive electromagnetic imaging *Geophys. J. Int.* in press
- [39] Wannamaker P E, Stodt J A and Rijo L 1985 PW2D finite element program for solution of magnetotelluric responses of two-dimensional Earth resistivity structure *Technical Report* Earth Sci. Lab., University of Utah Research Institute
- [40] Wolfram Research Inc. 1990 *Mathematica: a System for Doing Mathematics by Computer* Wolfram Research, Inc. Version 2.2
- [41] Zorati R, Duchêne B, Lesselier D and Pons F 1991 Eddy current testing of anomalies in conductive materials: I. Qualitative imaging via diffraction tomography techniques *IEEE Trans. Magn.* **27** 4416–37
- [42] Zorati R, Duchêne B, Lesselier D and Pons F 1992 Eddy current testing of anomalies in conductive materials: II. Quantitative imaging via deterministic and stochastic inversion techniques *IEEE Trans. Magn.* **28** 1850–62



BIBLIOGRAPHIE

- H. Akaike. Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. In *Proc. 2nd Int. Symp. Inform. Theory, suppl. Problems of Control and Inform. Theory*, pages 267–281, 1973.
- A. Basu and N. Frazer. Rapid determination of the critical temperature in simulated annealing inversion. *Science*, 249:1409–1412, 1990.
- M. Bertero and E. R. Pike. Particle size distributions from fraunhofer diffraction. 1– an analytic eigenfunction approach. *Optica Acta*, 30(8):1043–1049, 1983.
- M. Bertero and E. R. Pike. Exponential-sampling method for laplace and other dilationally invariant transforms: 1– singular-system analysis. *Inverse Problems*, 7:1–20, 1991.
- S. D. Billings. Simulated annealing for earthquake location. *Geophysical Journal Interior*, 118:680–692, 1994.
- B. L. Biondi and C. Kostov. High-resolution velocity spectra using eigenstructure methods. *Geophysics*, 54(7):832–842, 1989.
- E. Bonomi and J. L. Lutton. Le recuit simulé. *Pour la sciences*, 129:68–77, 1988.
- L. R. Bragg and J. W. Dettman. Related problems in partial differential equation. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 74:375–378, 1968.
- J. P. Brun and P. Balé. Cadomien tectonics in northern brittany. In R. S. D’Lemos, R. A. Strchan, and C. G. Topley, editors, *The Cadomian Orogeny*, pages 95–114. Geological Society Special Publication No 51, 1990.
- L. Cagniard. Basic theory of the magnetotelluric method of geophysical prospecting. *Géophysique*, 18(3):605–635, 1953.
- L. Cagniard. Principe de la méthode magnétotellurique, nouvelle méthode de prospection géophysique. *Annales de Géophysique*, 9(2):95–125, 1953.
- P. A. Camfield and D. I. Gough. A possible proterozoic plate boundary in north america. *Canadian Journal of Earth Science*, 14:1229–1238, 1977.
- R. Chakridi, M. Chouteau, and M. Mareschal. A simple technique for analysing and partly removing galvanic distortion from the magnetotelluric impedance tensor: Application to abitibi and kapuskasing data (canada). *Geophysical Journal Interior*, 108:917–929, 1992.
- J. Claerbout. *Fundamentals of Geophysical Data Processing : with Applications to Petroleum Prospecting*. International Series in the Earth and Planetary Sciences. McGraw-Hill, 1976.
- S. C. Constable, R. L. Parker, and C. G. Constable. Occam’s inversion: A practical algorithm for generating smooth models from electromagnetic sounding data. *Geophysics*, 52(3):289–300, 1987.
- I. J. D. Craig and A. M. Thompson. Why laplace transforms are difficult to invert numerically. *Computers in Physics*, 8(6):648–654, 1994.
- P. Davies. A recursive approach to prony parameter estimation. *Journal of Sound and Vibration*, 89(4):571–583, 1983.
- C. deGroot Hedin and S. Constable. Occam’s inversion to generate smooth, two-dimensional models from magnetotelluric data. *Geophysics*, 55(12):1613–1624, 1990.
- D. L. Donoho. Superresolution via sparsity constraints. *SIAM J. Math. Anal.*, 23(5):1309–1331, 1992.

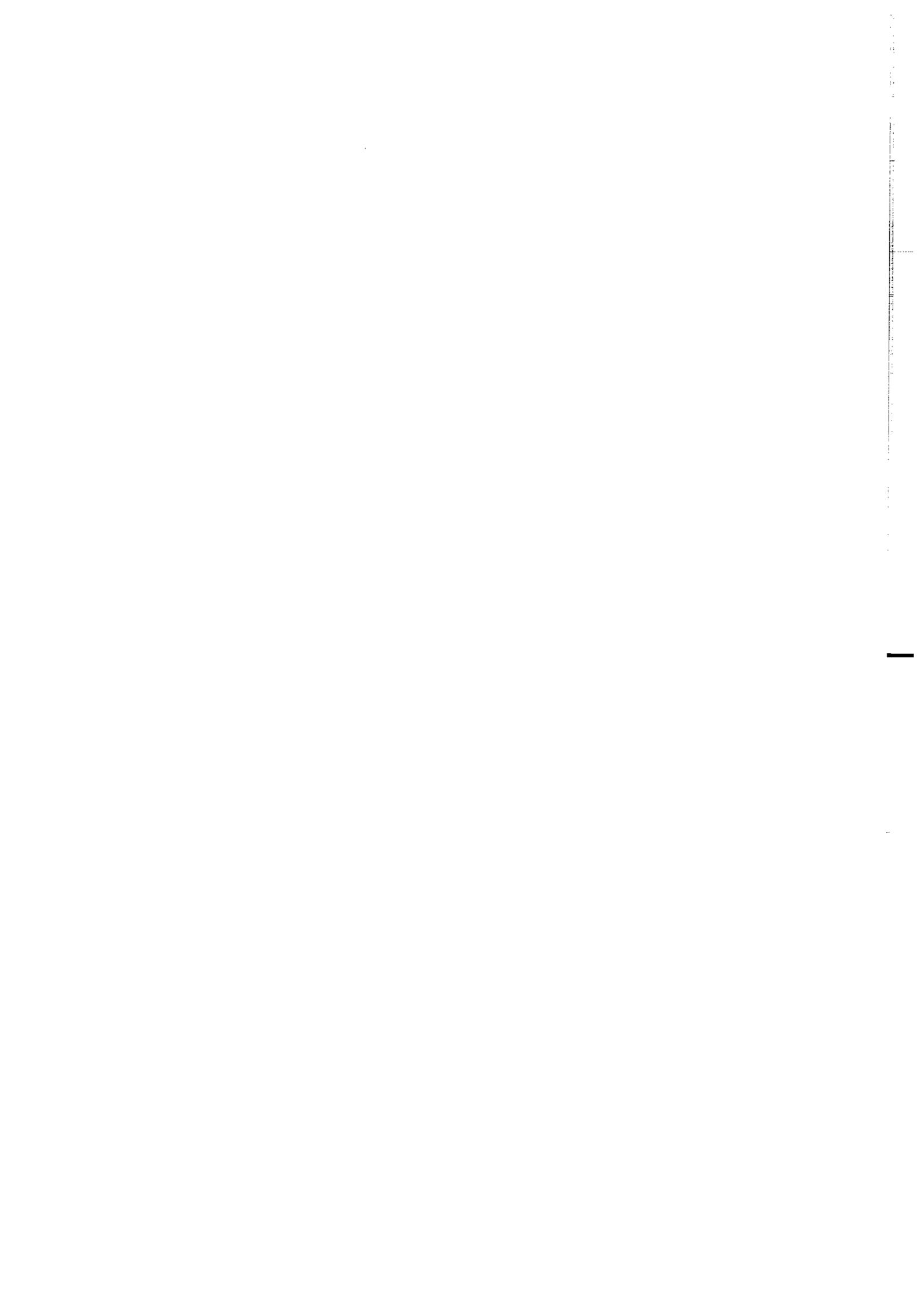
- J. P. Estrera, W. M. Duncan, and S. R. Slaughter. Lineshape analysis for optical transitions in iii-v semiconductors using a sequential simplex procedure. *Computers in Physics*, 6(4):360–370, 1992.
- V. V. Filatov. Construction of focusing transformations of non-stationary electromagnetic fields. *Geol i Geofiz (Soviet Geology and Geophysics)*, 25:89–95, 1984.
- P. Filippi and U. Frisch. Relation entre l'équation de la chaleur et l'équation des ondes de helmholtz. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, A-268:804–807, 1969.
- J. J. Forrest and D. Goldfarb. Steepest-edge simplex algorithms for linear programming. *Mathematical Programming*, 57:341–374, 1992.
- A. Franchois, L. Garnero, and J. P. Hugonin. Application of the simulated annealing technique to microwave tomography: Preliminary results. In P. C. Sabatier, editor, *Inverse Methods in Action, Proceedings of the Multicentennials Meeting on Inverse Problems*, pages 62–68. Springer-Verlag, 1989.
- T. D. Gamble, W. M. Goubau, and J. Clarke. Magnetotellurics with a remote magnetic reference. *Geophysics*, 44(1):53–68, 1979.
- D. Gibert and J. Virieux. Electromagnetic imaging and simulated annealing. *Journal of Geophysical Research*, 96(B5):8057–8067, 1991.
- D. Gibert, B. Tournerie, and J. Virieux. Superresolution electromagnetic imaging of the conductive earth interior. *Inverse Problem*, 10:341–351, 1994.
- W. M. Goubau, T. D. Gamble, and J. Clarke. Magnetotelluric data analysis: Removal of bias. *Geophysics*, 43(6):1157–1166, 1978.
- W. M. Goubau, P. M. Maxton, R. H. Koch, and J. Clarke. Noise correlation lengths in remote reference magnetotellurics. *Geophysics*, 49(4):433–438, 1984.
- D. I. Gough and P. A. Camfield. Convergent geophysical evidence of a metamorphic belt through the black hills of south dakota. *Journal of Geophysical Research*, 77(17):3168–3170, 1972.
- I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series and Products*. Academic Press, 1980.
- R. W. Groom and R. C. Bailey. Decomposition of magnetotelluric impedance tensors in the presence of local three-dimensional galvanic distortion. *Journal of Geophysical Research*, 94(B2):1913–1925, 1989.
- Z. Hajnal, C. M. R. Fowler, R. F. Mereu, E. R. Kanasewich, G. L. Cumming, A. G. Green, and A. Mair. An initial analysis of the earth's crust under the williston basin: 1979 cocrust experiment. *Journal of Geophysical Research*, 89(B11):9381–9400, 1984.
- S. Handa and P. A. Camfield. Crustal electrical conductivity in north-central saskatchewan: the north american central plain anomaly and its relation to a proterozoic plate boundary. *Canadian Journal of Earth Science*, 21:533–543, 1984.
- P. C. Hansen. Numerical tools for analysis and solution of fredholm integral equations of the first kind. *Inverse Problems*, 8:848–872, 1992.
- R. Hebert. *Evolution Tectonometamorphique d'un Arc Insulaire au Protérozoïque Supérieur : Le Domaine de Saint Brieuc (Massif Armoricain)*. PhD thesis, Université de Rennes 1, 1993.

- K. I. Hopcraft and P. R. Smith. *An Introduction to Electromagnetic Inverse Scattering*. Developments in Electromagnetic Theory and Applications. Kluwer Academic Publishers, 1992.
- M. D. Huang, F. Romeo, and A. L. Sangiovanni-Vincentelli. An efficient general cooling schedule for simulated annealing. In *Proc. IEEE Int. conf. Computer-Aided Design*, pages 381–384, Santa Clara, 1986.
- G. A. Isaev and V. V. Filatov. Physical and mathematical principals of visual observation of non-stationary electromagnetic fields. *Geol i Geofiz (Soviet Geology and Geophysics)*, 22:89–95, 1981.
- W. Jeffrey and R. Rosner. On strategies for inverting remote sensing data. *The Astrophysical Journal*, 310:463–472, 1986.
- A. G. Jones and J. A. Craven. The north american central plains conductivity anomaly and its correlation with gravity, magnetic, seismic, and heat flow data in saskatchewan canada. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 60:169–194, 1990.
- A. G. Jones. Statics shift of magnetotelluric data and its removal in sedimentary basin environment. *Geophysics*, 53(7):967–978, 1988.
- A. G. Jones. The coprod2 dataset: Tectonic setting, recorded mt data, and comparison of models. *Journal of Geomagnetism and Geoelectricity*, 45(9):933–955, 1993.
- J. H. Kalivas, N. Roberts, and J. M. Sutter. Global optimization by simulated annealing with wavelength selection for ultraviolet-visible spectrophotometry. *Analytical Chemistry*, 61(18):2024–2030, 1989.
- S. M. Kay and S. L. Marple. Spectrum analysis — a modern perspective. *Proceedings of the IEEE*, 69(11):1380–1419, 1981.
- S. Kirkpatrick and G. Toulouse. Configuration space analysis of travelling salesman problems. *Journal de Physique*, 46:1277–1292, 1985.
- S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt, and M. P. Vecchi. Optimization using simulated annealing. *Sciences*, 220(4598):671–680, 1983.
- Z. Koren, K. Mosegaard, E. Landa, P. Thore, and A. Tarantola. Monte carlo estimation and resolution analysis of seismic background velocities. *Journal of Geophysical Research*, 96(B12):20,289–20,299, 1991.
- M. Krasnov, A. Kisselev, and G. Makarenko. *Équations Intégrale : problèmes et exercices*. MIR, 1977. Traduction Française.
- G. Kunetz. Processing and interpretation of magnetotelluric soundings. *Geophysics*, 37(6):1005–1021, 1972.
- C. L. Lawson and R. L. Hanson. *Solving Least Squares Problems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1974.
- K. H. Lee and G. Xie. A new approach to imaging with low-frequency electromagnetic fields. *Geophysics*, 58(4):780–796, 1993.
- S. Lee, G. A. McMechan, and C. L. V. Aiken. Phase-field imaging: the electromagnetic equivalent of seismic migration. *Geophysics*, 52(5):678–693, 1987.

- K. H. Lee, G. Liu, and H. F. Morrison. A new approach to modeling the electromagnetic response of conductive media. *Geophysics*, 54(9):1180–1192, 1989.
- S. Levy and P. K. Fullagar. Reconstruction of a sparse spike train from a portion of its spectrum and application to high-resolution deconvolution. *Geophysics*, 46(9):1235–1243, 1981.
- S. Levy, D. Oldenburg, and J. Wang. Subsurface imaging using magnetotelluric data. *Geophysics*, 53(1):104–117, 1988.
- T. R. Madden and Thompson. Low-frequency electromagnetic oscillations of the earth-ionosphere cavity. *Reviews of Geophysics*, 3:211–254, 1965.
- G. Marquis, A. G. Jones, and R. D. Hyndman. Coincident conductive and reflective middle and lower crust in southern british columbia. *Geophysical Journal Interior*, 120:111–131, 1995.
- J. G. McWhirter and E. R. Pike. On the numerical inversion of the laplace transform and similar fredholm integral equations of the first kind. *Journal of Physics A*, 11(9):1729–1745, 1978.
- J. G. McWhirter and E. R. Pike. The extraction of information from laser anemometry data. *Physica Scripta*, 19:417–425, 1979.
- J. G. McWhirter. A stabilized model-fitting approach to the processing of laser anemometry and other photon-correlation data. *Optica Acta*, 27(1):83–105, 1980.
- N. Métropolis, A. Rosenbluth, N. Rosenbluth, A. Teller, and E. Teller. Equation of state calculations by fast computing machines. *Journal of Chemical Physics*, 21(6):1087–1092, 1953.
- G. Mirkin, K. Vasudevan, F. A. Cook, W. G. Laidlaw, and W. G. Wilson. A comparison of several cooling schedules for simulated annealing implemented on a residual statics problem. *Geophysical Research Letters*, 20(1):77–80, 1993.
- D. Mitra, F. Romeo, and A. Sangiovanni-Vincentelli. Convergence and finite-time behavior of simulated annealing. *Advance in Applied Probability*, 18:747–771, 1986.
- P. Morel-A-L'Huissier, A. G. Green, and C. J. Pike. Crustal refraction surveys across the trans-hudson orogen/williston basin of south central canada. *Journal of Geophysical Research*, 92(B7):6403–6420, 1987.
- P. Morel-A-L'Huissier, A.G. Green, A. G. Jones, T. Latham, J. A. Majorowicz, M. J. Drury, and M. D. Thomas. The crust beneath the intracratonic williston basin from geophysical data. In B. Pinet and C. Blois, editors, *The Potential of Deep Seismic Profiling for Hydrocarbon Exploration*, pages 141–160. Les Éditions Technip, Paris, 1990.
- K. Mosegaard and P. D. Vestergaard. A simulated annealing approach to seismic model optimization with sparse prior information. *Geophysical Prospecting*, 39:599–611, 1991.
- M. N. Nabighian. *Electromagnetic Methods in Applied Geophysics; volume 1 & 2*. Investigations in Geophysics. SEG, 1987.
- J. A. Nedler and R. Mead. A simplex method for function minimisation. *Computer Journal*, 7:308–313, 1965.
- K. D. Nelson, D. J. Baird, J. J. Walters, M. Hauck, L. D. Brown, J. E. Oliver, J. L. Ahern, Z. Hajnal, A. G. Jones, and L. L. Sloss. Trans-hudson orogen and williston basin in

- montana and north dakota: New cocorp deep-profiling results. *Geology*, 21:447–450, 1993.
- J. D. Nulton and P. Salamon. Statistical mechanics of combinatorial optimization. *Physical Review A*, 37(4):1351–1356, 1988.
- A. S. Orange. Magnetotelluric exploration for hydrocarbon. *Proceedings of the IEEE*, 77(2):287–317, 1989.
- N. Ostrowsky, D. Sornette, P. Parker, and E. R. Pike. Exponential sampling method for light scattering polydispersity analysis. *Optica Acta*, 28(8):1059–1070, 1981.
- R. L. Parker. Understanding inverse theory. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, 5:35–64, 1977.
- R. L. Parker. *Geophysical Inverse Theory*. Princeton, 1994.
- W. H. Press and S. A. Teukolsky. Simulated annealing optimization over continuous spaces. *Computers in Physics*, 5(4):426–429, 1991.
- S. K. Pullammanappallil and J. N. Louie. Inversion of seismic reflection traveltimes using a nonlinear optimization scheme. *Geophysics*, 58(11):1607–1620, 1993.
- J. S. Reitzel, D. I. Gough, H. Porath, and C. W. Anderson. Geomagnetic deep sounding and upper mantle structure in the western united states. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 19:213–235, 1970.
- G. Ruppeiner, J. M. Pedersen, and P. Salamon. Ensemble approach to simulated annealing. *Journal de Physique I*, 1:455–470, 1991.
- G. Ruppeiner. Implementation of an adaptative, constant thermodynamic speed simulated annealing schedule. *Nuclear Physics B (Proc. Suppl.)*, 5A:116–121, 1988.
- P. C. Sabatier. On geophysical inverse problems and constraints. *Journal of Geophysics*, 43:115–137, 1977.
- P. C. Sabatier. Modelling or solving inverse problems? In P. C. Sabatier, editor, *Inverse Methods in Action, Proceedings of the Multicentennials Meeting on Inverse Problems*, pages 1–14. Springer-Verlag, 1989.
- P. Salamon, J. D. Nulton, J. R. Harland, J. Pedersen, G. Ruppeiner, and L. Liao. Simulated annealing with constant thermodynamic speed. *Computer Physics Communications*, 49:423–428, 1988.
- M. K. Sen and P. L. Stoffa. Nonlinear one-dimensional seismic waveform inversion using simulated annealing. *Geophysics*, 56(10):1624–1638, 1991.
- M. K. Sen, B. B. Bhattacharya, and P. L. Stoffa. Nonlinear inversion of resistivity sounding data. *Geophysics*, 58(4):496–507, 1993.
- C. W. Swift. Theoretical magnetotelluric and turam response from two-dimensional inhomogeneities. *Geophysics*, 36:38–52, 1971.
- H. Szu and R. Hartley. Fast simulated annealing. *Physics Letters A*, 122(3–4):157–162, 1987.
- A. Tarantola and B. Valette. Inverse problem = quest for information. *Journal of Geophysics*, 50:159–170, 1982.
- A. Tarantola. *Inverse Problem Theory*. Elsevier, Amsterdam, 1987.

- L. C. Thomson, R. J. Enkin, and W. Williams. Simulated annealing of three dimensional micromagnetic structures and simulated thermoremanent magnetization. *Journal of Geophysical Research*, 99(B1):603–609, 1994.
- B. Tournerie, D. Gibert, and J. Virieux. Inversion of the coprod2 magnetotelluric data using a diffusive-to-propagative mapping (dpm). *Geophysical Research Letters*, 22(16):2187–2190, 1995.
- P. Valla. *Application de la Modélisation Numérique aux Méthodes d'Électromagnétisme Fréquentiel en Prospection Géophysique*. PhD thesis, Université de Montpellier II, 1991. Document BRGM n°206.
- M. L. van Blaricum and R. Mitra. Problems and solutions associated with prony's method for processing transient data. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, AP-26(1):174–182, 1978.
- P. J. M. van Laarhoven and E. H. C. Aarts. *Simulated Annealing: Theory and Applications*. Mathematics and its applications. D. Reidel Publishing Company, 1987.
- J. Virieux, C. Flores-Luna, and D. Gibert. Asymptotic theory for diffusive electromagnetic imaging. *Geophysical Journal Interior*, 119(3):857–868, 1994.
- J. Virieux. P-sv wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method. *Geophysics*, 51(4):889–901, 1986.
- K. D. Wampler and L. Willets. On the numerical solution of the hill-wheeler equation. *Computers in Physics*, 2(4):53–58, 1988.
- M. Wax and T. Kailath. Detection of signals by information theoretic criteria. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, ASSP-33(2):387–392, 1985.
- M. Wax, T. J. Shan, and T. Kailath. Spacio-temporal spectral analysis by eigenstructure methods. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, ASSP-32(4):817–827, 1984.
- J. T. Weaver. *Mathematical Methods for Geo-Electromagnetic Induction*. Applied and Engineering Mathematics Series. Research Studies Press Ltd., 1994.
- A. J. S. Wilson. Seismic processing of multichannel transient electromagnetic data. In *EAEG/EAPG meeting*, Vienna, Austria, 1994.
- Wolfram-Research-Inc. *Mathematica: a System for Doing Mathematics by Computer*. Wolfram Research Inc., version 2.2 edition, 1990.
- M. S. Zhdanov and M. A. Frenkel. The solution of the inverse problems on the basis of analytical continuation of the transient electromagnetic field in reverse time. *Journal of Geomagnetism and Geoelectricity*, 35:747–765, 1983.
- M. S. Zhdanov and G. V. Keller. *The Geoelectrical Methods in Geophysics Exploration*. Methods in Geochemistry and Geophysics. Elsevier, 1994.
- M. S. Zhdanov, P. Traynin, and O. Portniaguine. Migration and analytic continuation in geoelectric imaging. In *64 th Annual Internat. Mtg.*, pages 357–360. Soc. Expl. Geophys., Extended Abstract, 1994.
- R. Zоргати. *Imagerie par Courants de Foucault. Application au Contrôle Non Destructif*. PhD thesis, Université de Paris VII, 1990.



MEMOIRES DE GEOSCIENCES-RENNES
Université de Rennes I - Campus de Beaulieu
35042 - RENNES Cedex tel : 99.28.60.80

Dans la même collection :

N°1 - H. MARTIN - Nature, origine et évolution d'un segment de croûte continentale archéenne : contraintes chimiques et isotopiques. Exemple de la Finlande orientale. 392 p., 183 fig., 51 tabl., 4 pl. (1985). Epuisé

N°2 - G. QUERRE - Palingénèse de la croûte continentale à l'Archéen : Les granitoïdes tardifs (2,5-2,4 Ga) de Finlande Orientale. Pétrologie et géochimie. 226 p., 74 fig., 41 tabl., 3 pl. (1985). Epuisé

N°3 - J. DURAND - Le Grès Armoricaïn. Sédimentologie. Traces fossiles. Milieux de dépôt. 150 p., 76 fig., 9 tabl., 19 pl. (1985). Epuisé

N°4 - D. PRIOUR - Genèse des zones de cisaillement : Application de la méthode des éléments finis à la simulation numérique de la déformation des roches. 157 p., 106 fig., 7 tabl. (1985). 55F.

N°5 - V. NGAKO - Evolution métamorphique et structurale de la bordure sud-ouest de la "série de Poli", segment camerounais de la chaîne panafricaine. 185 p., 76 fig., 16 tabl., 12 pl. (1986). Epuisé

N°6 - J. DE POULPIQUET - Etude géophysique d'un marqueur magnétique situé sur la marge continentale sud-armoricaine. 159 p., 121 fig., 5 tabl. (1986). 55F.

N°7 - P. BARBEY - Signification géodynamique des domaines granulitiques. La ceinture des granulites de Laponie : une suture de collision continentale d'âge protérozoïque inférieur (1.9-2.4 Ga). 324 p., 89 fig., 46 tabl., 11 pl. (1986). Epuisé

N°8 - Ph. DAVY - Modélisation thermo-mécanique de la collision continentale. 233 p., 72 fig., 2 tabl. (1986). Epuisé

N°9 - Y. GEORGET - Nature et origine des granites peralumineux à cordiérite et des roches associées. Exemple des granitoïdes du Massif Armoricaïn (France) : Pétrologie et géochimie. 250 p., 140 fig., 67 tabl. (1986). Epuisé

N°10 - D. MARQUER - Transfert de matière et déformation progressive des granitoïdes. Exemple des massifs de l'Aar et du Gothard (Alpes Centrales Suisses). 287 p., 134 fig., 52 tabl., 5 cartes hors-texte (1987). 120 F.

N°11 - J.S. SALIS - Variation séculaire du champ magnétique terrestre. Direction et Paléointensité sur la période 7.000-70.000 BP dans la Chaîne des Puys. 190 p., 73 fig., 28 tabl., 1 carte hors-texte (1987). 90F.

N°12 - Y. GERARD - Etude expérimentale des interactions entre déformation et transformation de phase. Exemple de la transition calcite-aragonite. 126 p., 42 fig., 3 tabl., 10 pl. (1987). 75F.

N°13 - H. TATTEVIN - Déformation et transformation de phases induites par ondes de choc dans les silicates. Caractérisation par la microscopie électronique en transmission. 150 p., 50 fig., 1 tabl., 13 pl. (1987). 95F.

N°14 - J.L. PAQUETTE - Comportement des systèmes isotopiques U-Pb et Sm-Nd dans le métamorphisme éclogitique. Chaîne Hercynienne et Chaîne Alpine. 190 p., 88 fig., 39 tab., 2 pl. (1987). 95F.

N°15 - B. VENDEVILLE - Champs de failles et tectonique en extension; modélisation expérimentale. 392 p., 181 fig., 1 tabl., 82 pl. (1987). Epuisé

N°16 - E. TAILLEBOIS - Cadre géologique des indices sulfurés à Zn, Pb, Cu, Fe du secteur de Gouézec-St-Thois : Dévono-Carbonifère du flanc Sud du Bassin de Châteaulin (Finistère). 195 p., 64 fig., 41 tabl., 8 pl. photo., 8 pl. h.texte. (1987). 110F

N°17 - J.P. COGNE - Contribution à l'étude paléomagnétique des roches déformées. 204 p., 86 fig., 17 tabl. (1987). 90F.

N°18 - E. DENIS - Les sédiments briovériens (Protérozoïque supérieur) de Bretagne septentrionale et occidentale : Nature, mise en place et évolution. 263 p., 148 fig., 26 tab., 8 pl. (1988). 140F.

N°19 - M. BALLEVRE - Collision continentale et chemins P-T : l'Unité pennique du Grand Paradis (Alpes Occidentales). 340 p., 146 fig., 10 tabl., (1988). Epuisé

N°20 - J.P. GRATIER - L'équilibrage des coupes géologiques. Buts, méthodes et applications. Atelier du Groupe d'Études Tectoniques le 8 Avril 1987 à Rennes. 165 p., 82 fig., 2 tabl. (1988). 85F.

N°21 - R.P. MENOT - Magmatismes paléozoïques et structuration carbonifère du Massif de Belledonne (Alpes Françaises). Contraintes nouvelles pour les schémas d'évolution de la chaîne varisque ouest-européenne. 465 p., 101 fig., 31 tab., 6 pl., (1988). 200F

- N°22 - S. BLAIS - Les ceintures de roches vertes archéennes de Finlande Orientale : Géologie, pétrologie, géochimie et évolution géodynamique. 312 p., 107 fig., 98 tab., 11pl. photo, 1 pl. h.texte, (1989). 160F
- N°23 - A. CHAUVIN - Intensité du champ magnétique terrestre en période stable de transition, enregistrée par des séquences de coulées volcaniques du Quaternaire. 217 p., 100 fig., 13 tab. (1989). 100F.
- N°24 - J.P. VUICHARD - La marge austroalpine durant la collision alpine; évolution tectonométamorphique de la zone de Sesia-Lanzo. 307 p., 143 fig., 26 tab., 6 pl. hors-texte. (1989). 170F.
- N°25 - C. GUERROT - Archéen et Protérozoïque dans la chaîne hercynienne ouest-européenne : géochimie isotopique (Sr-Nd-Pb) et géochronologie U-Pb sur zircons. 180 p., 68 fig., 29 tab., 1 pl. (1989) 90F.
- N°26 - J.L. LAGARDE - Granites tardi-carbonifères et déformation crustale. L'exemple de la Méseta marocaine. 353 p., 244 fig., 15pl. (1989) 210F.
- N°27 - Ph. BARDY - L'orogène cadomien dans le Nord-Est du Massif Armoricain et en Manche Occidentale. Etude tectonométamorphique et géophysique. 395 p., 142 fig., 7 tab., 1 pl. hors-texte. (1989). 175F.
- N°28 - D. GAPAIS - Les Orthogneiss : Structures, mécanismes de déformation et analyse cinématique. 377 p., 184 fig., 3 tab. (1989). 275F.
- N°29 - E. LE GOFF - Conditions pression-température de la déformation dans les orthogneiss : Modèle thermodynamique et exemples naturels. 321 p., 146 fig., 42 tab. (1989). 150F.
- N°30 - D. KHATTACH - Paléomagnétisme de formations paléozoïques du Maroc. 220 p., 97 fig., 35 tab., (1989). 100F.
- N°31 - A. HAIDER - Géologie de la formation ferrifère précambrienne et du complexe granulitique encaissant de Buur (Sud de la Somalie). Implications sur l'évolution crustale du socle de Buur. 215 p., 18 fig., 42 tab., 7 pl. (1989). 130 F.
- N°32 - T. DANIEL - Traitement numérique d'image appliqué à l'analyse texturale de roches déformées. 186 p., 121 fig., 4 tab. (1989). 210 F.
- N°33 - C. LECUYER - Hydrothermalisme fossile dans une paléocroûte océanique associée à un centre d'expansion lent : Le complexe ophiolitique de Trinity (N. Californie, U.S.A). 342 p., 109 fig., 73 tab. (1989). 200 F.

- N°34 - P. RICHARD - Champs de failles au dessus d'un décrochement de socle: modélisation expérimentale. 382 p., 137 fig. (1989). 400 F.
- N°35 - J. de BREMOND d'ARS - Estimation des propriétés rhéologiques des magmas par l'étude des instabilités gravitaires. Pétrologie du complexe plutonique lité de Guernesey. 370 p., 128 fig., 64 tabl. (1989). 180 F.
- N°36 - A. LE CLEACH - Contribution à l'étude des propriétés physiques des minéraux à haute pression : Spectroscopie et calcul des grandeurs thermodynamiques de la lawsonite, des épidotes et des polymorphes de SiO₂. 190 p., 72 fig., 37 tabl. (1989). 100 F.
- N°37 - O. MERLE - Cinématique des nappes superficielles et profondes dans une chaîne de collision. 280 p., 165 fig., 3 tabl. (1990). 160F.
- N°38 - P. ALLEMAND - Approche expérimentale de la mécanique du rifting continental. 205 p., 106 fig., 13 tabl. (1990). 160F.
- N°39 - Ch. BASILE - Analyse structurale et modélisation analogique d'une marge transformante : l'exemple de la marge de Côte-d'Ivoire - Ghana. 230 p., 161 fig., 7 tabl. (1990). 130F.
- N°40 - M. AUDIBERT - Déformation discontinue et rotations de blocs. Méthodes numériques de restauration. Application à la Galilée. 250 p., 80 fig., 5 tabl., (1991). 150F.
- N°41 - G. RUFFET - Paléomagnétisme et ⁴⁰Ar/³⁹Ar : étude combinée sur des intrusions précambriennes et paléozoïques du Trégor (Massif Armoricain) . 261 p., 80 fig., 19 tabl. (1991). 120F.
- N°42 - P. SUZANNE - Extrusion latérale de l'Anatolie : Géométrie et mécanisme de la fracturation. 262 p., 100 fig., 12 pl., 5 tabl. (1991). 210F.
- N°43 - G. FIQUET - Propriétés thermodynamiques de minéraux du manteau supérieur. Calorimétrie à haute température et spectroscopie Raman à haute pression et haute température. 274 p., 101 fig., 53 tabl. (1991). 130F.
- N°44 - J. MARTINOD - Instabilités périodiques de la lithosphère (Flambage, Boudinage en compression et en extension). 283 p., 117 fig., 3 tabl., 2 pl. couleur. (1991). 170F.
- N°45 - M.O. BESLIER - Formation des marges passives et remontée du manteau: Modélisation expérimentale et exemple de la marge de la Galice. 257 p., 86 fig., 5 tab., 2 pl. noir/blanc, 2 Pl. couleur. (1991). 180F.

- N°46 - J.B.L. FRANCOLIN - Analyse structurale du Bassin du Rio Do Peixe. (Brésil) : 250 p., 83 fig., 3 tab., 9 pl. couleur. (1992). 300F.
- N° 47 - S. TOURPIN - Perte des mémoires isotopiques (Nd, Sr, O) et géochimiques (REE) primaires des komatiites au cours du métamorphisme : exemple de la Finlande Orientale. 185 p., 53 fig., 23 tabl. (1992). 100F.
- N° 48 - J.A. BARRAT - Genèse des magmas associés à l'ouverture d'un domaine océanique : Géochimie des laves du Nord-Est de l'Afrique (Mer Rouge - Afar) et d'Arabie. 175 p., 47 fig., 23 tab. (1992). 100F.
- N° 49 - E. HALLOT - Injection dans les réservoirs magmatiques. Contraintes pétrologiques (Massifs de Fort La Latte et de Saint Brieuç, Bretagne Nord) et modélisation analogique. 331 p., 101 fig., 30 tabl. (1993). 180F.
- N°50 - T. SOURIOT - Cinématique de l'extension post-pliocène en Afar. Imagerie SPOT et modélisation analogique. 225 p., 2 pl. coul., 1 tabl., 91 fig., 16 pl. photo., 1 carte H.Texte. (1993). 190F.
- N° 51 - T. EUZEN - Pétrogenèse des granites de collision post- épaisissement. Le cas des granites crustaux et mantelliques du Complexe de Pontivy-Rostrenen (Massif Armoricain, France). 350 p., 2 pl. coul., 34 tabl. en annexe, (1993). 190F.
- N° 52 - J. LE GALL - Reconstitution des dynamismes éruptifs d'une province paléovolcanique : l'exemple du graben cambrien du Maine (Est du Massif Armoricain). Pétrogenèse des magmas andésitiques et ignimbristiques et leur signification dans l'évolution géodynamique cadomienne. 370 p., 30pl. photo., 1 pl. coul. (1993). 350 F.
- N° 53 - J. C. THOMAS - Cinématique tertiaire et rotations de blocs dans l'ouest de l'Asie Centrale (Tien Shan Kirghiz et dépression Tadjik). Etude structurale et paléomagnétique. 330 p., 107 fig., 2 pl. coul., 18 tabl., 1 carte, annexes. (1993). 220 F.
- N°54 - F. LAFONT - Influences relatives de la subsidence et de l'eustatisme sur la localisation et la géométrie des réservoirs d'un système deltaïque. Exemple de l'Eocène du bassin de Jaca, Pyrénées Orientales., 270 p., 115 fig., dont 17 pl. couleur. (1994). 150 F.
- N° 55 - C. BIELLMANN - Stabilité et réactivité des carbonates à très hautes pression et température. Implications pour le stockage du Carbone dans le manteau terrestre., 230 p., 74 fig., 11 tabl., 1 pl. couleur (1993). 175 F.

N°56 - A. POTREL - Evolution tectono-métamorphique d'un segment de croûte continentale archéenne. Exemple de l'Amsaga (R.I. Mauritanie), dorsale Réguibat (Craton Ouest Africain). 400 p., (dont annexes) 125 fig., 21 tabl., 1 pl. couleur, 43 pl. photo (1994). 270 F.

N° 57 - M. KUNTZ - Approche expérimentale de la déformation dans les systèmes préfracturés : Contribution à l'étude de l'inversion tectonique des bassins sédimentaires. 220 p., 19 pl., 87 fig., 3 tabl. (1994). 155 F.

N° 58 - D. ROUBY - Restauration en carte des domaines faillés en extension. Méthode et applications. 266 p., 98 fig. dont annexes (1994). 180 F.

N° 59 - J.J. TONDJI-BIYO - Chevauchements et bassins compressifs. Influence de l'érosion et de la sédimentation. Modélisation analogique et exemples naturels. 426 p., 141 fig., 4 pl. couleur, 21 tableaux, dont annexes (1995). 270 F.

N° 60 - H. BOUHALLIER - Evolution structurale et métamorphique de la croûte continentale archéenne (Craton de Dharwar, Inde du Sud). 277 p., 100 fig., dont 5 pl. coul., 7 tab., dont annexes (1995). 150 F.

N° 61 - P. GAUTIER - Géométrie crustale et cinématique de l'extension tardi-orogénique dans la domaine centre-égéen (îles des Cyclades et d'Eubée, Grèce). 430 p., 89 fig., dont 4 pl. coul., 1 tabl., dont annexes (1995). 220F.

N° 62 - M.T. ROMAN BERDIEL - Mécanismes d'intrusion des granites supracrustaux. Modèles analogiques et exemples naturels. 270 p., 75 fig., 5 pl. laser, 9 tabl. (1995). 160F.

N° 63 - M. JULLIEN - Polytypisme, ordre d'empilement et interstratification dans la cookéite et les phyllosilicates non micacés du métamorphisme. Influence de la pression. 226 p., 61 fig., 8 tabl. (1995). 150 F.

N° 64 - Y. LAHAYE - L'altération des komatiites. 224 p., 70 fig., 29 tabl., + annexes (1995). 150 F.

N° 65 - A. CRAVE - Quantification de l'Organisation des réseaux hydrographiques. 210 p., 68 fig., dont annexe (1995). 120 F.

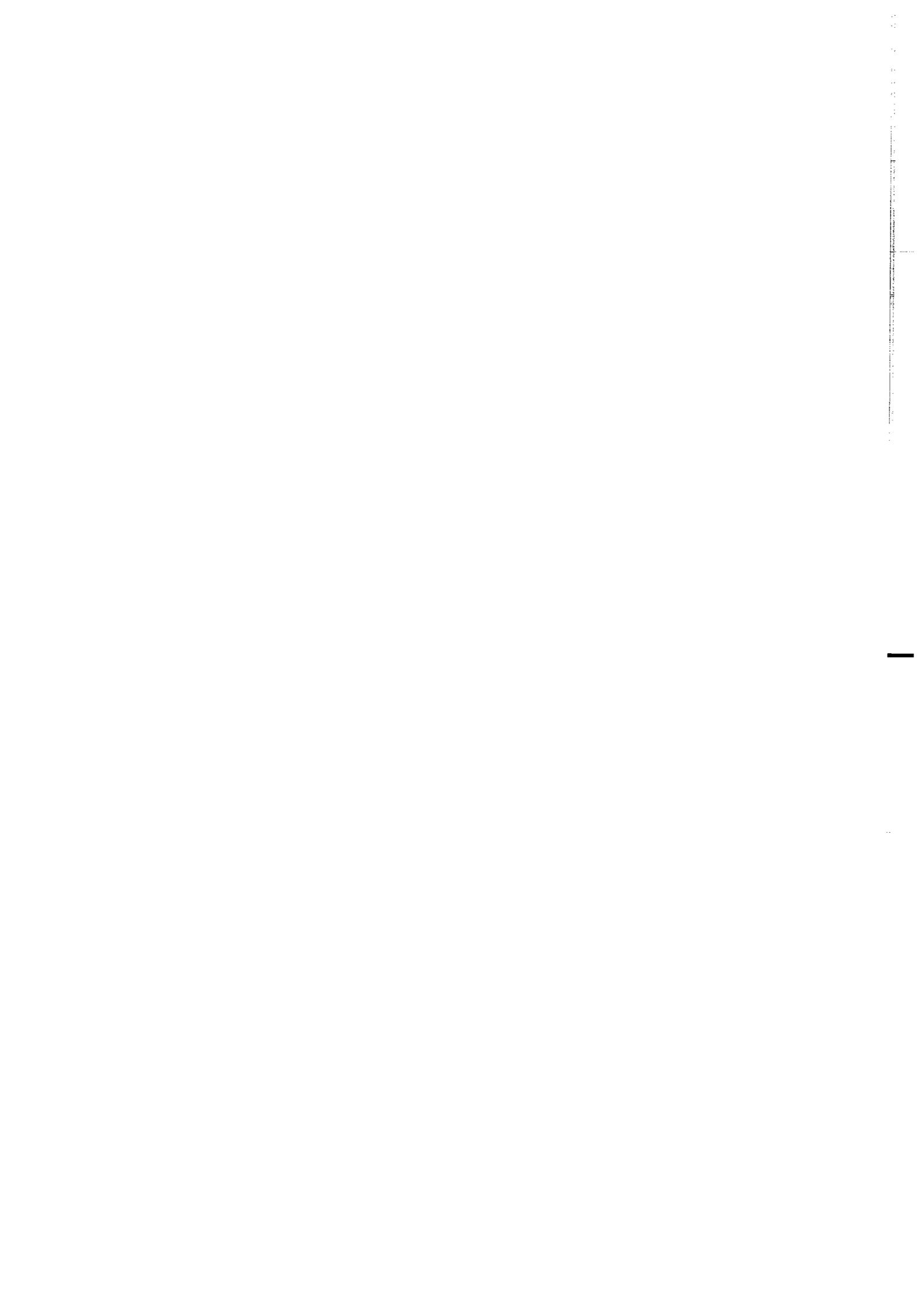
N° 66 - A. ESSAIFI - Relations entre magmatisme-déformation et altération hydrothermale : L'exemple des Jebilet centrales (Hercynien, Maroc). 331 p., 248 fig., 4 tabl., dont annexes (1995). 170 F.

N° 67 - M. LE RAVALEC - Vitesses et perméabilité des roches : modélisation du rôle des fluides et des fissures. 276 p., 119 fig. 3 pl. couleur, 5 tabl., dont annexe (1995). 140 F.

n° 68 - A. SEMIANI - Métallogénie de la zone de cisaillement aurifère est-ouzzalienne : structure, pétrologie et géochimie des gisements d'or de Tirek-Amesmessas (Hoggar occidental, Algérie). 262 p., 72 fig., 36 tabl., 4 pl. couleur + annexes, (1995). 130 F.

N° 69 - F. MOREAU - Méthodes de traitement de données géophysiques par transformée en ondelettes. 177 p., 57 fig., + annexes. (1995). 100 F.

N° 70 - B. TOURNERIE - Imagerie de réflecteurs électromagnétiques en régime diffusif : Méthode et applications en Géophysique. 165 p., 45 fig., 8 tabl., + annexes, (1995). 100 F.



BON DE COMMANDE

à retourner à : Arlette FALAISE
 GÉOSCIENCES-RENNES I
 Université de Rennes
 35042 - RENNES Cédex (France)
 Tél : (33) 99.28.60.80 Fax : (33) 99.28.60.80

NOM
 ORGANISME

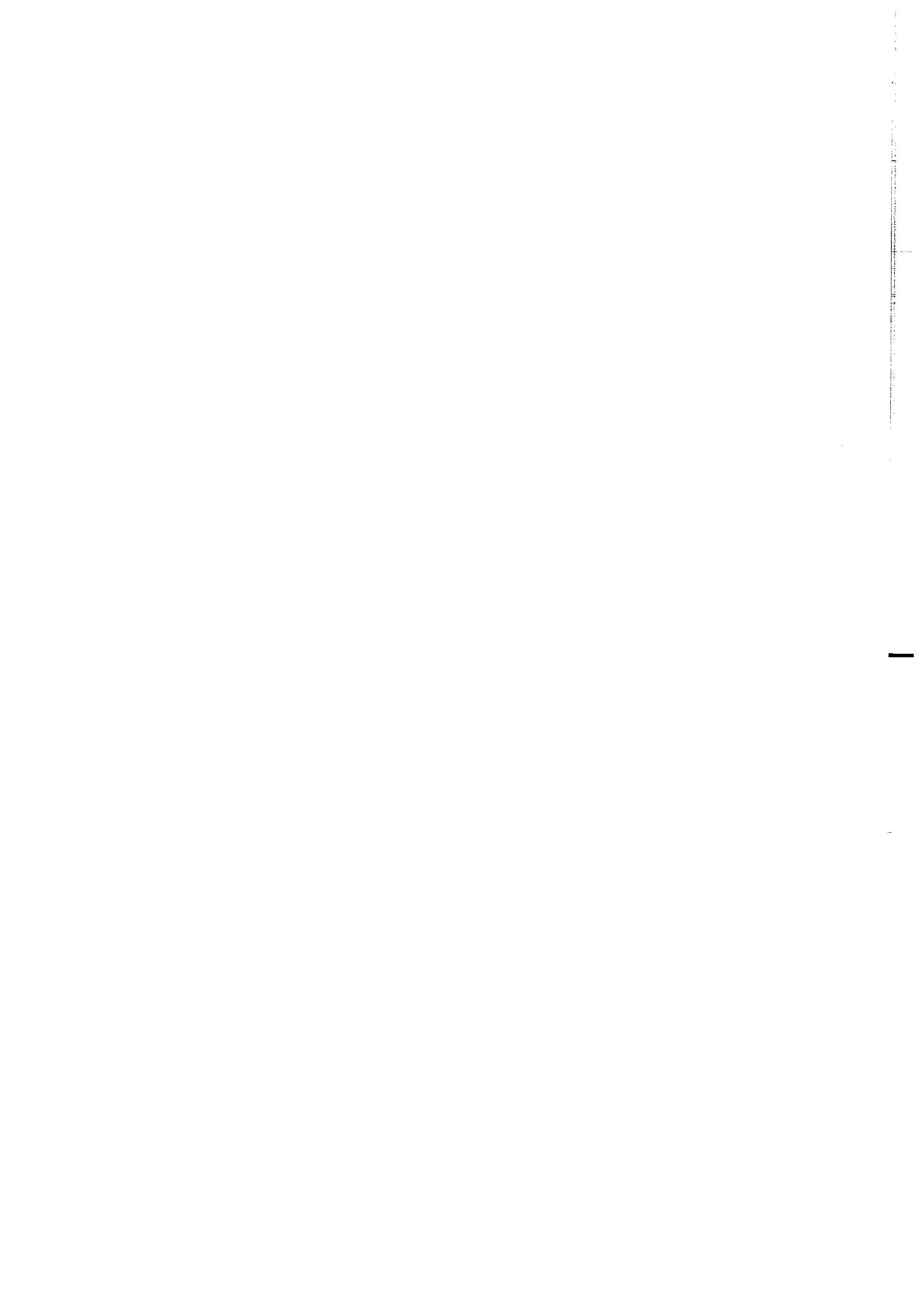
 ADRESSE

Veillez me faire parvenir les ouvrages suivants :

N°	Auteur	Nb exemplaires	P.U.	Total
Frais d'envoi : 20,00F par volume			Total	
par volume supplémentaire : 5,00 F			Frais d'envoi	
			Montant total	

Nous acceptons les bons de commandes.

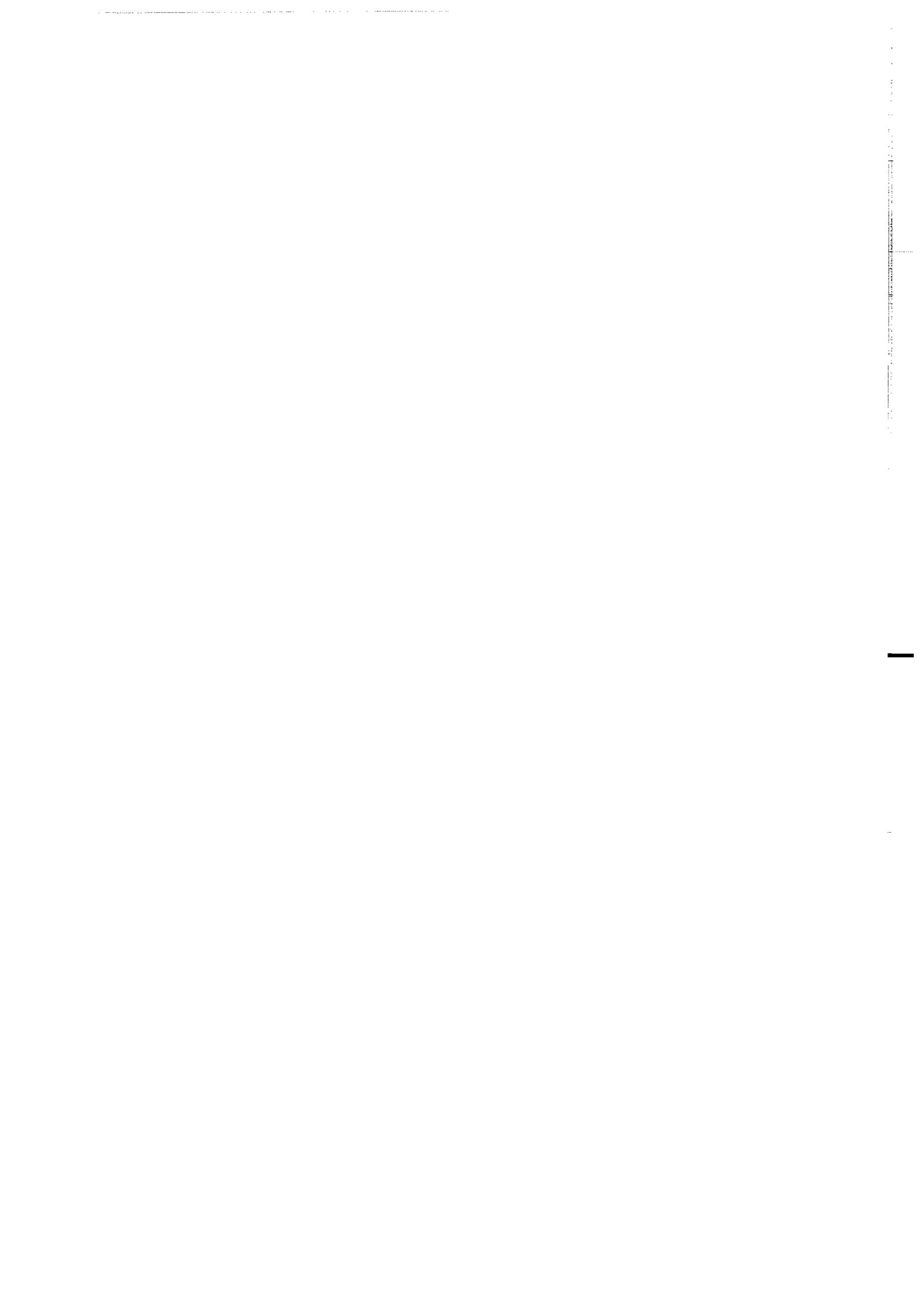
Si vous réglez par chèque veuillez établir votre chèque au nom de :
Monsieur l'Agent Comptable de l'Université de Rennes I.



Imprimé à l'Université de Rennes I

Dépot Légal

2ème trimestre 1996



Résumé

L'imagerie électromagnétique basses fréquences développée actuellement essaie de reconstruire, à partir de données de terrain, la loi de conductivité $s(r)$ de la zone étudiée. On montre que cette approche est similaire à l'imagerie des vitesses sismiques. Ces méthodes n'offrent généralement pas la possibilité de cartographier précisément les limites des objets étudiés. L'objet de cette étude a été de développer une méthode d'imagerie permettant de visualiser des interfaces séparant deux milieux de conductivité différente. Afin de bénéficier des connaissances du domaine sismique, nous avons abordé le problème par l'étude de la transformation d'un champ diffusif en un dual propagatif. Ce lien est réalisé via une équation intégrale de Fredholm de première espèce que l'on doit inverser. Deux approches ont été suivies. La première consiste à trouver une solution à cette équation par décomposition en fonctions et valeurs propres de l'opérateur d'intégration. Celle-ci nous a permis de rendre compte du caractère mal posé de l'inversion face à des données bruitées et/ou incomplètes, et ainsi, de préciser l'importance d'introduire des informations a priori sur le modèle pour régulariser le problème inverse. Dans la seconde approche, nous avons développé une inversion numérique de l'équation intégrale. Nous avons utilisé un algorithme de recuit simulé couplé avec la méthode de descente du simplexe. La réunion de ces deux méthodes nous permet d'explorer le domaine continu des solutions. Des données synthétiques 1D et 2D ont été traitées (l'inversion 2D se fait par juxtaposition d'inversions 1D). Les résultats de ces inversions montrent que la position des réflecteurs est résolue correctement (tout du moins pour les premiers d'entre eux). Ceci est très important pour le développement futur d'une migration des images obtenues. La loi de conductivité $s(r)$ peut être estimée approximativement à partir des amplitudes des réflecteurs.

Une application de cette méthode d'imagerie a été réalisée sur des données enregistrées au Canada (données *Coprod2* fournies par A. Jones (*Geological Survey of Canada*)). L'inversion séparée des données des deux modes de polarisations TE et TM nous montre la présence d'un premier réflecteur s'interprétant comme la limite entre le Paléozoïque supérieur et inférieur, et d'un second, plus profond, représentant le sommet d'un bloc conducteur sans doute à l'origine de l'anomalie de conductivité NACP (*North American Central Plain*) préalablement identifiée par des données GDS (*Geomagnetic Deep Sounding*).

Une seconde application traite des données que nous avons recueillies sur le terrain le long d'un profil de sismique réflexion en Bretagne (France). Les résultats préliminaires de l'analyse des résistivités apparentes et des phases de la partie nord du profil met en évidence deux zones situées de part et d'autre du contact de la Baie de la Fresnaye avec des contrastes en conductivité opposés: Résistant sur Conducteur (R/C) au nord du contact et Conducteur sur Résistant (C/R) au sud.

Mots clés:

Géophysique - Électromagnétisme - Imagerie Structurale - Problème Inverse - Intégrale de Fredholm - Recuit Simulé