

UNIVERSITÉ DE NANTES  
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES

ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES ET TECHNOLOGIES  
DE L'INFORMATION ET DES MATHÉMATIQUES

Année : 2011

N B.U. : 

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

**Constructions de métriques extrémales :  
résolutions de singularités,  
déformations complexes.**

**Thèse de Doctorat de l'Université de Nantes**

Spécialité : MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

*Présentée et soutenue publiquement par*

**Carl Tipler**

*le 05 décembre 2011, devant le jury ci-dessous*

*Président du jury* : Gilles CARRON      Professeur (Université de Nantes)  
*Rapporteurs* : Vestislav APOSTOLOV Professeur (Université du Québec à Montréal)  
Frank PACARD      Professeur (École Polytechnique)  
*Examineurs* : Gilles CARRON      Professeur (Université de Nantes)  
Philippe EYSSIDIEUX Professeur (Université de Grenoble)  
Paul GAUDUCHON      Professeur (École Polytechnique)  
Michael SINGER      Professeur (University of Edinburgh)  
*Directeur de thèse* : Yann ROLLIN      Professeur (Université de Nantes)  
*Laboratoire* : Laboratoire Jean Leray(UMR 6629 UN-CNRS-ECN)

N E.D. : 0503- ???



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Métriques extrémales et champs de vecteurs holomorphes</b>	<b>15</b>
1.1	L'équation des métriques extrémales . . . . .	15
1.1.1	Un premier exemple . . . . .	17
1.2	Champs de vecteurs holomorphes . . . . .	17
1.2.1	Potentiels d'holomorphic . . . . .	18
1.2.2	Théorème de Calabi sur les isométries des métriques extrémales	19
1.2.3	L'invariant de Futaki . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Théorie de recollement pour les métriques extrémales et résolution de singularités isolées</b>	<b>21</b>
2.1	Introduction . . . . .	21
2.2	Singularités de type Hirzebruch-Jung, modèle local de résolution . . . .	24
2.3	Description de la méthode . . . . .	26
2.4	Linéarisation du problème . . . . .	28
2.5	Perturbation de la métrique sur $M^*$ . . . . .	29
2.6	Perturbation de la métrique sur $Y_R$ et recollement . . . . .	34
2.7	Métriques extrémales sur les variétés toriques, équation d'Abreu . . . .	38
<b>3</b>	<b>Structures paraboliques et métriques extrémales</b>	<b>43</b>
3.1	Variétés réglées et métriques à courbure scalaire constante . . . . .	43
3.2	Structures paraboliques stables et métriques CSC . . . . .	44
3.3	Structures paraboliquement instables et métriques extrémales . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Stabilité des métriques extrémales sous déformations complexes</b>	<b>52</b>
4.1	Stabilité des variétés kählériennes et déformations de structures complexes	52
4.2	Théorie de déformation de Lebrun et Simanca . . . . .	54
4.3	Métriques extrémales et déformations complexes . . . . .	54
4.4	Applications . . . . .	56
<b>A</b>	<b>"Extremal Kähler metrics on blow-ups of parabolic ruled surfaces"</b>	<b>58</b>
<b>B</b>	<b>"Stability of extremal metrics under complex deformations"</b>	<b>92</b>



## Introduction

Étant donnée une variété kählérienne compacte  $(M, J, \omega)$ , est-il possible de trouver un meilleur représentant de la classe de Kähler  $[\omega]$  ? Dans son article [C1], Calabi propose de chercher les métriques minimisant la norme  $L^2$  de la courbure scalaire. Posons

$$\mathcal{M}_\Omega = \{\omega \in \Omega^{1,1}(M, \mathbb{R}), d\omega = 0/\omega(\cdot, J\cdot) > 0, [\omega] = \Omega\}$$

l'ensemble des formes de Kähler dans la classe de Kähler  $\Omega \in H^{1,1}(M) \cap H^2(M, \mathbb{R})$ . On peut alors définir la fonctionnelle de Calabi

$$\begin{aligned} \mathcal{C} : \mathcal{M}_\Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto \int_M s(\omega)^2 \frac{\omega^n}{n!} \end{aligned}$$

où  $s(\omega)$  désigne la courbure scalaire de  $\omega$  et  $n$  la dimension complexe de la variété  $M$ . Les points critiques de cette fonctionnelle sont appelés métriques extrémales. L'équation d'Euler-Lagrange associée à cette équation est

$$\bar{\partial}\partial^\sharp s(\omega) = 0$$

où l'opérateur  $\partial^\sharp$  est défini par

$$\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{C}), \bar{\partial}f = g(\partial^\sharp f, \cdot)$$

et  $g = \omega(\cdot, J\cdot)$  est la métrique associée.

En particulier les métriques à courbure scalaire constante sont des métriques extrémales. De même, les métriques de Kähler-Einstein satisfaisant l'équation d'Einstein

$$\rho = \lambda\omega,$$

où  $\rho$  est la forme de Ricci et  $\lambda$  une constante, sont des cas particuliers de métriques extrémales.

On peut s'interroger sur le choix de la fonctionnelle de Calabi. Ainsi, on peut chercher les métriques minimisant la norme  $L^2$  du tenseur de Riemann ou de la courbure de Ricci de la variété. Cependant, Calabi démontre dans le même article que ces deux fonctionnelles sont affinement liées à  $\mathcal{C}$  par des constantes topologiques et dépendant de la structure complexe  $J$ . Les métriques extrémales minimisent donc les normes  $L^2$  de ces courbures.

L'unicité d'un représentant extrémal est assurée par les travaux de Chen et Tian [CT] et [CT2] qui démontrent que dans une classe de Kähler donnée, deux métriques extrémales diffèrent d'un biholomorphisme de la variété. Le problème de l'existence n'est quand à lui pas encore résolu. Des exemples de variétés kählériennes sans métrique extrémale sont donnés par Burns et De Bartolomeis [BB], Levine [L] et Tian [T2].

Si la variété est polarisée par un fibré en droites ample  $L \rightarrow M$ , l'existence d'une métrique extrémale dans la classe  $c_1(L)$  est liée à une notion de stabilité, au sens de la théorie des invariants géométriques, de la paire  $(M, L)$ . Les travaux de Yau, [Y], Tian [T], Donaldson [D] puis Székelyhidi [S1] proposent alors une conjecture sur l'existence

d'une métrique extrémale. Une telle métrique existerait dans la classe  $c_1(L)$  si et seulement si la paire  $(M, L)$  serait relativement  $K$ -polystable. Jusqu'à présent on sait que l'existence d'une métrique extrémale implique la  $K$ -polystabilité relative ([SS]).

Le problème général de l'existence semble pour l'instant hors de portée et il est intéressant d'obtenir de nouveaux exemples de métriques extrémales. Afin de construire de tels exemples, on adapte un théorème d'Arezzo, Pacard et Singer [APS] à la résolution de singularités isolées de surfaces complexes. Si  $M$  est munie d'une métrique extrémale, Arezzo, Pacard et Singer démontrent que si l'on choisit convenablement les points  $p_j$  sur  $M$  on peut obtenir une métrique extrémale sur l'éclatement de  $M$  aux points  $p_j$ . Cette métrique est proche de la métrique de départ en dehors des diviseurs exceptionnels et petite sur ces diviseurs. La preuve repose sur un argument de perturbation des métriques extrémales et le recollement d'un modèle extrémal local et ALE, la métrique de Burns et Simanca sur l'éclatement de  $\mathbb{C}^n$  en un point.

On s'intéresse alors à des surfaces orbifolds complexes extrémales. Si les singularités sont isolées et de type Hirzebruch-Jung, Calderbank et Singer construisent une métrique ALE à courbure scalaire nulle sur le modèle local de résolution. Ce modèle permet alors d'appliquer les techniques de recollement développées par Arezzo, Pacard et Singer et d'obtenir le résultat suivant :

**Théorème 1.** *Soit  $(M, J, \omega)$  un orbifold kählérien extrémal de dimension 2. On suppose que les singularités de  $M$  sont isolées et de type Hirzebruch-Jung. On note  $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$  la résolution minimale de  $M$  obtenue en utilisant les cordes de Hirzebruch-Jung. Soient  $E_j$  les sphères holomorphes qui forment les diviseurs exceptionnels de la résolution. Alors pour tout choix de nombres positifs  $a_j$  il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que  $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  il existe une métrique extrémale sur  $\widetilde{M}$  dans la classe de Kähler*

$$[\pi^*\omega] - \varepsilon^2 \sum_j a_j PD[E_j]$$

On appliquera alors ce théorème aux espaces projectifs à poids qui peuvent être munis de métriques extrémales grâce aux travaux de Bryant [B] et Abreu [A1]. Ceci nous permet de construire de nouveaux exemples de métriques extrémales. On décrit un exemple :

Soit  $\widetilde{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$  l'éclatement itéré trois fois de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$  supportant la chaîne de courbes :

$$\frac{H}{-2} \circ \frac{E_3}{-1} \circ \frac{E_2}{-2} \circ \frac{E_1}{-2}$$

Ici  $H$  est la transformée stricte d'une ligne de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$  où repose le premier point d'éclatement.  $E_1, E_2$  et  $E_3$  sont les transformées strictes des premier, deuxième et troisième diviseurs exceptionnels. Les points représentent les intersections et les nombres sous les lignes sont les auto-intersections.

**Corollaire 1.** *Pour tous nombres positifs  $a, a_1, a_2, a_3$  il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que pour tout  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ , il y a une métrique extrémale  $\omega_\varepsilon$  à courbure scalaire non-constante  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$  qui satisfait*

$$\begin{aligned} [\omega_\varepsilon] \cdot H &= \varepsilon^2 a_3, \\ [\omega_\varepsilon] \cdot E_3 &= a, \quad [\omega_\varepsilon] \cdot E_2 = \varepsilon^2 a_2 \end{aligned}$$

et

$$[\omega_\varepsilon] \cdot E_1 = \varepsilon^2 a_1.$$

Le théorème de résolution 1 permet d'obtenir de nombreux nouveaux exemples à partir de surfaces orbifolds géométriquement réglées. Ces exemples s'inscrivent dans le cadre des surfaces paraboliques instables. Soit  $M$  une surface géométriquement réglée. Cette surface est par définition l'espace total d'une fibration

$$\mathbb{P}(E) \rightarrow \Sigma$$

où  $E$  est un fibré holomorphe de rang 2 sur  $\Sigma$  une surface de Riemann compacte de genre  $g$ . Dans ce cas l'existence d'une métrique spéciale sur  $M$  est liée à la stabilité du fibré  $E$ . On notera par exemple le résultat de Apostolov, Calderbank, Gauduchon et Tønnesen-Friedman [ACGT] qui stipule que si  $g > 1$ , alors  $M$  admet une métrique à courbure scalaire constante si et seulement si  $E$  est polystable. Sous la même hypothèse sur le genre, Tønnesen-Friedman démontre que l'existence d'une métrique extrémale à courbure scalaire non-constante sur  $M$  est équivalente à l'existence d'une décomposition  $M = \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus L)$  où  $L$  est un fibré de degré strictement positif. Dans ce cas le fibré  $E$  est instable.

Afin de considérer des fibrations plus générales

$$\mathbb{P}(E) \rightarrow \Sigma^*$$

avec  $\Sigma^*$  une surface de Riemann compacte privée d'un nombre fini de points marqués, on munit la surface réglée d'une structure parabolique  $\mathcal{P}$  (voir définition 3.2.1). Dans ce cas, Rollin et Singer démontrent [RS2] que si la surface est paraboliquement polystable et non-sporadique il existe une métrique à courbure scalaire constante sur un éclatement itéré  $Bl(M, \mathcal{P})$  de  $M = \mathbb{P}(E)$  encodé par la structure parabolique.

On s'interroge alors sur le cas des métriques extrémales à courbure scalaire non-constante. Comme dans le cas des surfaces réglées sur les surfaces de Riemann compactes, l'existence d'une métrique extrémale sur  $Bl(M, \mathcal{P})$  impose la forme  $M = \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus L)$  et certaines conditions sur les points de la structure parabolique. Réciproquement, si une structure parabolique vérifie ces conditions, on cherche à obtenir une métrique extrémale sur  $Bl(M, \mathcal{P})$ . Le résultat d'éclatement de métriques extrémales d'Arezzo, Pacard et Singer permet d'obtenir de telles métriques dans le cas où  $g \geq 1$  et le degré de  $L$  est non nul, en partant de métriques extrémales déjà connues sur  $\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus L)$  :

**Proposition 1.** *Soit  $M = \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus L)$  une surface réglée sur une surface de Riemann de genre  $g \geq 1$  avec  $L$  un fibré holomorphe de degré strictement positif. Si  $\mathcal{P}$  est une structure parabolique instable sur  $M$  dont tous les points marqués sont sur la section infinie ou la section nulle, alors l'éclatement itéré  $Bl(M, \mathcal{P})$  admet une métrique extrémale à courbure scalaire non-constante.*

Cependant les cas  $g = 0$  et  $\deg(L) = 0$  ne peuvent pas être directement traités par cette méthode. Le théorème 1 permet d'obtenir de nouvelles métriques extrémales sur des surfaces du type  $Bl(M, \mathcal{P})$ , notamment dans certains cas où  $g = 0$  et où le degré de  $L$  est nul. On part pour cela de l'ansatz de Tønnesen-Friedman qui constitue [Tf] une métrique extrémale sur  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{D}$ . On considère ensuite une représentation du groupe fondamental de la surface de Riemann orbifold  $\bar{\Sigma}$  associée à  $\Sigma$  et  $\mathcal{P}$  dans  $\text{Aut}(\mathbb{D})$ . On peut obtenir une représentation de ce groupe sur  $\text{Aut}(\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{D})$  tel que l'action soit par isométries sur la métrique de Tønnesen-Friedman. Le quotient obtenu est alors une

surface orbifold qui satisfait les conditions du théorème 1 et la résolution est exactement  $Bl(M, \mathcal{P})$ . On obtient alors :

**Théorème 2.** Soient  $r$  et  $(q_j)_{j=1..s}$  des entiers strictement positifs tels que pour tout  $j$ ,  $q_j \geq 3$  et  $\text{pgcd}(r, q_j) = 1$ . Pour tout  $j$  on définit

$$p_j \equiv -r [q_j], 0 < p_j < q_j, n_j = \frac{p_j + r}{q_j}.$$

Soit  $\Sigma$  une surface de Riemann de genre  $g$  avec  $s$  points marqués  $A_j$ . Soit

$$\check{M} = \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus (L_{r, (q_j)} \otimes L_0))$$

avec

$$L_{r, q_j} = \mathcal{K}^r \otimes_j [A_j]^{r-n_j}$$

où  $\mathcal{K}$  désigne le fibré canonique et  $L_0$  un fibré plat. On définit une structure parabolique  $\mathcal{P}$  sur  $\check{M}$  qui consiste en les points  $B_j$  dans la section infinie au-dessus de  $A_j$  et les poids  $\frac{p_j}{q_j}$ . Si

$$\chi(\Sigma) - \sum_j (1 - \frac{1}{q_j}) < 0$$

Alors  $Bl(\check{M}, \mathcal{P})$  admet une métrique extrémale à courbure scalaire non-constante. Cette métrique n'est pas nécessairement petite sur tous les diviseurs exceptionnels.

Les exemples obtenus par cette méthode sont différents de ceux obtenus par la méthode d'Arezzo, Pacard et Singer. En effet, les classes de Kähler ne sont pas les mêmes. On obtient par exemple une métrique extrémale sur un éclatement itéré trois fois de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{T}^2$  dont la classe de Kähler est grosse sur un diviseur exceptionnel. On considère  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{T}^2$  l'éclatement itéré trois fois de l'espace total de

$$\pi : \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2.$$

Cet éclatement contient la chaîne de courbes suivante :

$$\frac{E_1}{-2} \circ \frac{E_2}{-2} \circ \frac{E_3}{-1} \circ \frac{F}{-3}$$

Ici  $F$  est la transformée stricte de la fibre de  $\pi$  contenant le premier point éclaté et  $E_1$ ,  $E_2$  et  $E_3$  sont les transformées strictes des diviseurs exceptionnels. Soit  $S_0$  la transformée stricte de la section nulle. On peut alors énoncer :

**Corollaire 2.** Pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}_+^{*,2}$  tels que  $\frac{a}{b} < k_2$  avec  $k_2$  une constante définie dans [Tf] et pour tout  $(a_1, a_2, a_3)$  positifs, il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que pour tout  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ , il y a une métrique extrémale à courbure scalaire non-constante  $\omega$  sur  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{T}^2$ . Sa classe de Kähler vérifie

$$[\omega] \cdot S_0 = \frac{2}{3}\pi b,$$

$$[\omega] \cdot F = \varepsilon^2 a_1, [\omega] \cdot E_1 = \varepsilon^2 a_2, [\omega] \cdot E_2 = \varepsilon^2 a_3$$

et

$$[\omega] \cdot E_3 = (b - a)\frac{\pi}{3}.$$



Dans l'article [Tf], Tønnesen-Friedman exhibe des variétés kählériennes qui admettent des métriques extrémales dans certaines classes de Kähler de son cône de Kähler uniquement. On pose

$$\mathcal{K}(M, J) = \{\Omega \in H^{1,1}(M, J) \cap H^2(M, \mathbb{R}) / \exists \omega \in \Omega / d\omega = 0, \omega(\cdot, J\cdot) > 0\}$$

le cône de Kähler de la variété complexe  $(M, J)$  et

$$\mathcal{K}^e(M, J) = \{\Omega \in \mathcal{K} / \exists \omega \in \mathcal{M}_\Omega / \bar{\partial} \partial_\omega^\sharp(s(\omega)) = 0\}$$

le cône extrémal, c'est à dire l'ensemble des classes de Kähler qui admettent un représentant extrémal. Les exemples de Tønnesen sont des surfaces complexes pour lesquelles  $\mathcal{K}^e \neq \emptyset$  et  $\mathcal{K}^e \neq \mathcal{K}$ . On peut alors s'interroger sur les propriétés du cône extrémal au sein du cône de Kähler. Lebrun et Simanca ont démontré dans [LS2] que le cône extrémal était un ouvert du cône de Kähler. Le cône de Kähler étant connexe, le cône extrémal n'est pas nécessairement fermé comme le montre les exemples de Tønnesen.

L'ouverture du cône extrémal peut être interprétée comme une stabilité des métriques extrémales sous perturbations des classes de Kähler.

Pour définir la fonctionnelle de Calabi il est nécessaire de fixer une structure complexe sur la variété ainsi qu'une classe de Kähler pour cette structure complexe. On peut également étudier la stabilité des métriques extrémales sous perturbation de la structure complexe. Il faut noter que grâce aux théorèmes de Kodaira et Spencer [KS], les variétés kählériennes sont stables sous perturbation complexe et ce problème de stabilité a donc un sens.

Le premier résultat dans cette direction est celui de Lebrun et Simanca [LS1] qui étudient la stabilité des métriques kählériennes à courbure scalaire constante lors d'une modification de la structure complexe. Sous hypothèse de non-dégénérescence de l'invariant de Futaki, ils démontrent qu'il est possible de suivre une métrique à courbure scalaire constante selon une perturbation de la structure complexe. Un deuxième résultat concernant les métriques extrémales et les déformations complexes provient de [ACGT]. En s'inspirant de [LS2], Apostolov, Calderbank, Gauduchon et Tønnesen démontrent la stabilité des métriques extrémales sous perturbation complexe avec une forme de Kähler fixée dans  $\Omega^2(M, \mathbb{R})$  et compatible avec chaque structure complexe. Cependant, leur résultat nécessite de préserver un large groupe de symétries. Plus précisément, un tore maximal de symplectomorphismes est préservé par la déformation de la structure complexe. Cette hypothèse est motivée par les travaux de Székélihidly sur la stabilité relative [S] qui nécessite de travailler modulo un tore maximal.

Un travail de collaboration avec Yann Rollin et Santiago Simanca nous a permis d'apporter des précisions concernant ce problème. Soit  $(\mathcal{X}, \Omega)$  une variété polarisée et soit  $(\mathcal{M} \rightarrow B, \Theta)$  une déformation polarisée de  $(\mathcal{X}, \Omega)$  (voir définition 4.1.3). On considère des déformations complexes polarisées munies d'une action holomorphe d'un sous-groupe compact et connexe  $G$  de  $\text{Aut}(\mathcal{X})$ . Ceci est motivé par le théorème de Calabi 1.2.4 qui stipule que si  $(\mathcal{X}, g)$  est extrémale, son groupe d'isométries est un sous-groupe compact maximal du groupe  $\text{Aut}(\mathcal{X})$ . Les hypothèses nécessaires pour assurer la stabilité de la métrique extrémale lors de la perturbation complexe sont alors géométriques. Pour préserver le champ de vecteur extrémal, on demande que ce dernier soit inclus dans l'algèbre de Lie de  $G$ . On définira pour cela la courbure scalaire réduite  $s_g^G$  et cette hypothèse deviendra  $s_g^G = 0$ . L'action de  $G$  doit être suffisamment régulière

sur la déformation. Enfin, l'invariant de Futaki relatif (voir section 2.1. Annexe B) doit être non-dégénéré sur la fibre centrale de la déformation, ce qui assure que l'on va pouvoir prolonger le champ de vecteur extrémal, et donc la métrique extrémale. On obtient alors :

**Théorème 3.** *Soit  $(\mathcal{M} \rightarrow B, \Theta)$  une famille polarisée de déformations d'une variété complexe compacte sans bord  $(\mathcal{X}, \Omega)$ . Supposons que  $\Omega$  admette un représentant extrémal  $\omega$  et  $G$  soit un sous-groupe compact connexe de  $G' = \text{Isom}_0(\mathcal{X}, g)$ , la composante connexe de l'identité du groupe d'isométries, tel que*

- $G$  agit holomorphiquement sur  $\mathcal{M} \rightarrow B$ ,
- la courbure scalaire réduite  $g$  satisfait  $s_g^G = 0$ ,
- l'invariant de Futaki relatif à  $G$  est non-dégénéré en  $g$ .

*Soit  $\beta$  un représentant  $G$ -invariant de la polarisation  $\Theta$  tel que la métrique  $g_0$  induite sur  $\mathcal{M}_0$  corresponde à  $g$  via l'isomorphisme  $\mathcal{M}_0 \simeq \mathcal{X}$ . Alors, quitte à restreindre  $B$  dans un petit voisinage de l'origine, l'espace des métriques de Kähler sur  $\mathcal{M}_t$  dont la courbure scalaire réduite s'annule dans un petit voisinage de  $g_t$  induite par  $\beta$  est une variété lisse de dimension  $h^{1,1}(\mathcal{X})$ .*

*En particulier, il existe des déformations arbitrairement petites  $\Theta'$  de la polarisation  $\Theta$  telles que  $\Theta'_t$  soit représentée par une métrique extrémale pour  $t$  suffisamment petit.*

Le cas  $G = \{\text{id}\}$  correspond alors à la théorie de déformation des métriques à courbure scalaire constante développée par Lebrun et Simanca [LS1]. Le cas  $G = \text{Isom}_0(\mathcal{X}, g)$  pour une perturbation triviale de la structure complexe correspond à celui de la perturbation de la classe de Kähler de [LS2].

On applique en particulier le théorème 3 à la variété de Mukai et Umemura  $\mathcal{X}$ , de groupe d'automorphismes  $\text{Aut}(\mathcal{X}) = \mathbb{P}\text{SL}(2, \mathbb{C})$ . Donaldson a démontré que cette variété admet une métrique de Kähler-Einstein dans la classe anti-canonique [D2]. On peut appliquer une extension du théorème de déformation au cas de certains groupes non-connexes et obtenir :

**Corollaire 3.** *Soit  $(\mathcal{M} \rightarrow B, \Theta)$  une déformation polarisée de la 3-variété de Mukai et Umemura avec polarisation  $(\mathcal{X}, c_1(\mathcal{X}))$  et  $\Theta_t = c_1(\mathcal{M}_t)$ . Supposons que  $\mathcal{M} \rightarrow B$  soit une déformation décrite dans la section 3.3.1. de l'annexe B, munie d'une action holomorphe d'un groupe  $G \subset \mathbb{P}\text{SL}(2, \mathbb{C})$  isomorphe à un groupe diédral d'ordre 8 ou au produit semi-direct  $S^1 \rtimes \mathbb{Z}/2$ . Alors pour tout  $t \in B$  suffisamment petit,  $\Theta_t$  est représentée par une métrique de Kähler-Einstein sur  $\mathcal{M}_t$ .*

On retrouve ainsi un résultat démontré par Donaldson dans [D2].

Le document est organisé de la façon suivante :

**Chapitre 1** : On rappelle quelques résultats importants concernant les métriques extrémales et les symétries de ces dernières. On donne l'équation d'Euler-Lagrange associée et le lien avec les champs de vecteurs holomorphes de la variété.

**Chapitre 2** : Ce chapitre est consacré à la preuve du théorème 1 et une première application de ce dernier dans le cadre de la géométrie torique.

**Chapitre 3** : On résume les définitions et résultats obtenus à l'aide du théorème 1 pour les éclatements de surfaces réglées paraboliques. On y trouvera ainsi les théorèmes 2 et le corollaire 2. Les preuves de ces résultats proviennent de l'article [Ti] fournit en Annexe A.

**Chapitre 4** : On expose les résultats obtenus avec Yann Rollin et Santiago Simanca sur les déformations complexes et les métriques extrémales. Le théorème 3 est expliqué. Les preuves proviennent de l'article [RST] donné en Annexe B.

**Annexe A** : article [Ti].

**Annexe B** : article [RST].



## Remerciements

Je souhaite avant tout remercier mon directeur de thèse Yann Rollin, pour son investissement et sa patience dans le partage et l'explication de ses idées, mais surtout pour ses encouragements et sa confiance qui furent un moteur précieux. Nos nombreuses discussions ont constitué une aide indispensable dans la réalisation de ce travail.

Je tiens à remercier vivement Vestislav Apostolov, Frank Pacard et Paul Gauduchon pour leur travail de rapporteurs, ainsi que Gilles Carron, Philippe Eyssidieux et Michael Singer pour avoir accepté d'être membres du jury. C'est un honneur pour moi de pouvoir exposer mon travail à chacun d'entre eux.

Par ailleurs je remercie chaleureusement Paul Gauduchon pour m'avoir communiqué son livre, pour toutes les réponses qu'il m'a apportées et pour les discussions mathématiques que nous avons eues.

Je remercie également Simon Donaldson pour ses conseils et suggestions concernant le travail effectué avec Yann Rollin et Santiago Simanca.

Je remercie particulièrement Santiago Simanca pour le temps qu'il a passé à m'expliquer ses idées mathématiques, en géométrie kählérienne comme dans les autres domaines.

J'ai eu la chance de pouvoir travailler avec Andrew Clarke pendant ces deux années. Je le remercie pour ses conseils et son sourire permanent.

De nombreuses personnes m'ont introduit à la géométrie kählérienne. Je tiens en particulier à remercier Michael Singer et Vestislav Apostolov pour leurs explications dans le domaine.

Je suis très heureux d'avoir travaillé au sein du laboratoire de Mathématiques Jean Leray. Son environnement calme et sa bonne ambiance, je pense notamment à l'équipe soudée des thésards, sont très favorables à la recherche mathématique. Je remercie en particulier ses membres Gilles Carron, Friedrich Wagemann, François Laudénbach et Robert Petit pour avoir pris le temps de m'écouter et de répondre à mes questions.

Enfin je remercie ma famille et mes amis pour leur soutien extra-mathématiques inestimable. Merci Camille, Alexandre et Martina pour avoir cru en mon travail, pour la motivation que vous m'avez transmise et surtout pour votre bonne humeur.



# Chapitre 1

## Métriques extrémales et champs de vecteurs holomorphes

Ce chapitre regroupe des résultats connus sur les métriques extrémales qui seront utilisés par la suite. Le formalisme est issu du livre [Ga]. En particulier, les résultats de la section 1.1 sont démontrés dans le chapitre 3 de ce livre.

Soit  $(M, J, \omega)$  une variété kählérienne de dimension complexe  $n$ . Sauf mention explicite du contraire,  $M$  sera toujours supposée compacte. On notera  $g = \omega(\cdot, J\cdot)$  la métrique associée. Par abus de langage,  $\omega$  et  $g$  feront références à la métrique de Kähler. On pose  $\Omega = [\omega] \in H^{1,1}(M, \mathbb{C}) \cap H^2(M, \mathbb{R})$  la classe de Kähler de la variété. Les indices tels que  $g, \omega$  où  $\Omega$  seront utilisés pour faire référence aux métriques considérées et seront omis si la situation est claire. Ainsi  $s_g$  désigne la courbure scalaire de la variété et  $\rho_g$  la forme de Ricci de  $g$ . On notera  $dvol_g = \frac{\omega^n}{n!}$  la forme volume associée. On s'intéressera parfois à des perturbations de la métrique du type  $\omega + i\partial\bar{\partial}\phi$  avec  $\phi \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ , auquel cas la courbure scalaire pourra être désignée par  $s(\omega + i\partial\bar{\partial}\phi)$ .

La classe de Kähler  $\Omega$  étant fixée, on s'intéresse à la recherche d'un meilleur représentant de la métrique de Kähler. Suivant Calabi on s'intéresse aux métriques extrémales. D'après un théorème de Calabi, les métriques extrémales sont celles qui donnent le plus de symétries à la variété. Le groupe d'isométrie d'une variété kählérienne compacte est un sous-groupe compact du groupe des biholomorphismes de cette dernière. Si la métrique est extrémale, ce groupe est un sous-groupe compact maximal du groupe des transformations holomorphes.

Cette propriété importante est l'objet d'étude de ce chapitre introductif, qui rassemble des résultats sur les métriques extrémales et les différents groupes de transformations d'une variété kählérienne.

### 1.1 L'équation des métriques extrémales

Un des avantages des variétés kählériennes compactes dans la recherche de métriques particulières est le lemme  $\partial\bar{\partial}$ . En effet, celui-ci permet de caractériser, à constante près, chaque représentant d'une classe de Kähler par un potentiel :

$$\mathcal{M}_\Omega = \{\omega + i\partial\bar{\partial}\phi > 0, \phi \in C^\infty(M, \mathbb{R})\}.$$

Si on fixe  $\omega$  comme point base de  $\mathcal{M}_\Omega$ , l'indice  $\phi$  est utilisé pour préciser qu'on considère la métrique  $\omega + i\partial\bar{\partial}\phi$ . La fonctionnelle de Calabi peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} : C^\infty(M, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \phi &\mapsto \int_M s_\phi^2 \frac{\omega_\phi^n}{n!}. \end{aligned}$$

Afin d'obtenir l'équation d'Euler-Lagrange associée à cette fonctionnelle, on introduit quelques opérateurs. L'opérateur  $\Delta$  désigne le Laplacien  $dd^* + d^*d$  induit par la métrique. Si  $(\cdot, \cdot)_g$  est le produit scalaire induit par  $g$  et étendu de manière  $\mathbb{C}$ -linéaire, l'opérateur  $\partial^\sharp$  est défini par la relation suivante :

$$\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{C}), \quad \bar{\partial}f = g(\partial^\sharp f, \cdot).$$

Des identités

$$\begin{aligned} \rho &= i\partial\bar{\partial}\log((\omega^n/n!)), \\ s\omega^n &= 2n\rho \wedge \omega^{n-1} \end{aligned}$$

et

$$\Delta_g \phi = -2(\omega, i\partial\bar{\partial}\phi)_g$$

on déduit que l'équation d'Euler-Lagrange associée à  $\mathcal{C}$  s'écrit :

$$(\nabla^- d)^* \nabla^- d s_\phi = 0$$

avec  $\nabla^- \alpha$  la partie  $J$  anti-invariante du 2 tenseur  $\nabla \alpha$  pour toute 1-forme  $\alpha$ . On définit l'opérateur de Lichnérowicz :

$$\begin{aligned} L_g : C^\infty(M, \mathbb{C}) &\rightarrow C^\infty(M, \mathbb{C}) \\ f &\mapsto (\bar{\partial}\partial^\sharp)^* \bar{\partial}\partial^\sharp f \end{aligned}$$

et l'opérateur de Lichnérowicz réel :

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_g : C^\infty(M, \mathbb{R}) &\rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ f &\mapsto (\nabla^- d)^* \nabla^- d f. \end{aligned}$$

Les points critiques de  $\mathcal{C}$  vérifient alors

$$L_g s_g = 0$$

ou de manière équivalente

$$\mathbb{L}_g s_g = 0.$$

En effet, ces deux opérateurs vérifient la relation :

$$2L_g(f) = \mathbb{L}_g(f) + \frac{i}{2}\mathcal{L}_K f.$$

où  $\mathcal{L}_K$  est la dérivée de Lie par rapport au champ de vecteur  $K = J\text{grad}_g(s_g)$ . D'autre part

$$\mathcal{L}_K s_g = g(\text{grad } s, J\text{grad } s) = 0$$

et ces deux équations sont bien équivalentes.



Calabi démontre que les points critiques de  $\mathcal{C}$  sont en fait des minima. On voit alors qu'une métrique  $g$  est extrémale si et seulement si  $\partial^\sharp s_g$  est un champ de vecteur holomorphe ou, de manière équivalente, si et seulement si  $J\text{grad}_g s_g$  est un champ de Killing (voir section suivante). Dans ce cas,  $J\text{grad}_g s_g$  est appelé *champ de vecteur extrémal* de  $(M, J, g)$ . Ceci donne un premier lien important entre les métriques extrémales et les groupes de transformations de la variété.

Les définitions précédentes sont faites dans le cadre de variétés kählériennes compactes lisses. Si la variété considérée est non compacte ou singulière, on prendra comme définition qu'une métrique est extrémale si le champ de vecteur  $J\text{grad}_g(s_g)$  est un champ de Killing.

### 1.1.1 Un premier exemple

Les métriques à courbure scalaire constante sont des exemples de métriques extrémales. Un premier exemple de métrique extrémale à courbure scalaire non-constante est celui de la métrique de Calabi construite sur les surfaces de Hirzebruch  $\mathbb{F}_n$ . La surface  $\mathbb{F}_n$  est définie comme l'espace total du fibré

$$\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(n)) \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$$

L'idée de Calabi pour construire une métrique extrémale sur cette surface est d'utiliser le revêtement sur

$$\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{F}_n^*$$

donné par

$$\begin{aligned} (x_0, x_1) &\rightarrow (z, y) = \left(\frac{x_0}{x_1}, x_0^n\right) \in U_0^* && \text{si } x_1 \neq 0 \\ (x_0, x_1) &\rightarrow (z, y) = \left(\frac{x_1}{x_0}, x_1^n\right) \in U_1^* && \text{si } x_0 \neq 0. \end{aligned}$$

où

$$\mathbb{F}_n^* = \mathbb{F}_n \setminus S_0 \cup S_\infty$$

et  $S_0$  et  $S_\infty$  désignent les sections nulles et infinies de la fibration. Calabi construit alors une métrique extrémale sous la forme

$$\omega = i\partial\bar{\partial}u(t)$$

avec  $t = |z|^2$ . L'équation se ramène alors à une EDO qu'il résout. Il donne ensuite des conditions qui permettent d'étendre la métrique obtenue aux surfaces entières. Cette méthode se généralise en dimension supérieure [Si2].

## 1.2 Champs de vecteurs holomorphes

Les champs de vecteurs holomorphes jouent un rôle majeur dans l'étude des métriques extrémales. On va rappeler des propositions qui font le lien entre les champs de Killing, les champs de vecteurs holomorphes et le noyau de l'opérateur de Lichnerowicz.

### 1.2.1 Potentiels d'holomorphic

L'opérateur  $\partial^\sharp$  permet d'associer à toute fonction complexe sur  $M$  un champ de vecteur. Ce dernier est holomorphe dès que l'équation

$$\bar{\partial}\partial^\sharp f = 0$$

est vérifiée. Une proposition due à Lichnerowicz [Li] précise quels sont les champs de vecteurs holomorphes obtenus de cette manière :

**Proposition 1.2.1.** [Li] *Soit  $X$  un champ de vecteur holomorphe sur une variété kählérienne compacte  $(M, J, \omega)$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $X$  a un zéro sur  $M$
- (ii) il existe une fonction  $f \in C^\infty(M, \mathbb{C})$  solution de  $L_g(f) = 0$  telle que  $X = \partial^\sharp f$

On pose alors  $\text{Aut}(M, J)$  le groupe des biholomorphismes de  $(M, J)$  et  $\mathfrak{h}(M, J)$  (ou  $\mathfrak{h}$ ) son algèbre de Lie. La proposition précédente permet de définir l'idéal  $\mathfrak{h}_0$  des champs de vecteurs holomorphes qui s'annulent sur  $M$ . La proposition précédente et la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \ker L_g \rightarrow \mathfrak{h}_0(M, J) \rightarrow 0$$

permettent de voir que la dimension du noyau de  $L_g$  ne dépend pas de la métrique  $g$  compatible avec  $J$ . Les éléments de ce noyau sont appelés *potentiels d'holomorphic* de  $(M, J)$  pour la métrique  $g$ .

Les potentiels réels solutions de  $L_g(f) = 0$  correspondent quand à eux aux champs de Killing :

**Proposition 1.2.2.** [Li] *Soit  $X$  un champ de Killing sur une variété kählérienne compacte  $(M, J, \omega)$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $X$  a un zéro sur  $M$
- (ii) il existe une fonction  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  solution de  $L_g(f) = 0$  telle que  $X = J\text{grad}(f)$

**Remarque 1.2.3.** *Contrairement à  $\mathbb{L}_g$ , l'opérateur  $L_g$  n'est pas un opérateur réel. La dimension de son noyau restreint aux fonctions réelles varie avec la métrique  $g$  compatible avec  $J$ . Certaines métriques d'une classe de Kähler ont plus d'isométries que d'autres.*

On notera  $\text{Isom}(M, g)$  le groupe d'isométries de  $(M, J, g)$  et  $\mathfrak{k}$  sont algèbre de Lie. Comme pour les champs de vecteurs holomorphes, on pose  $\mathfrak{k}_0$  l'idéal des champs de Killing qui s'annulent sur  $M$ .

Ces propositions sont définies dans le cadre de variétés kählériennes lisses. Il est cependant possible de les étendre au cas des orbifolds kählériens dont les singularités sont isolées. On peut trouver une preuve de ces propositions pour le cas lisse dans [LS1]. Les outils sont essentiellement des identités algébriques et l'utilisation de la théorie de Hodge sur les variétés kählériennes. Les identités algébriques sont purement locales et se vérifient de la même manière sur les orbifolds en travaillant dans des cartes uniformisantes. Pour la théorie de Hodge, les travaux de Kawasaki tels que

[KA] fournissent les outils qui permettent d'étendre les résultats classiques à ces orbifolds. Les formes différentielles sont par exemple définies localement dans les cartes uniformisantes. La compatibilité avec les groupes orbifolds et les changements de cartes suffit à les définir globalement.

### 1.2.2 Théorème de Calabi sur les isométries des métriques extrémales

L'étude de la structure de l'algèbre de Lie des transformations holomorphes d'une variété kählérienne a permis à Calabi de démontrer le théorème suivant :

**Théorème 1.2.4. Calabi [C1]** *Soit  $(M, J, g)$  une variété kählérienne compacte dont la métrique  $g$  est extrémale. Le groupe d'isométries de  $(M, g)$  est un sous-groupe compact maximal du groupe des transformations holomorphes de  $(M, J)$ .*

Ce théorème généralise des résultats obtenus par Matsushima [Mat] et Lichnerowicz [Li] dans les cas des métriques Kähler-Einstein et des métriques à courbure scalaire constante.

Ce théorème permettra de simplifier l'analyse dans la recherche des métriques extrémales. En effet, on pourra fixer un sous-groupe compact maximal  $G \subset \text{Aut}(M, J)$  à priori et rechercher les métriques extrémales parmi les métriques  $G$ -invariantes.

Comme application directe de ce théorème, Lévine [L] a exhibé des exemples de variétés kählériennes qui n'admettent pas de métrique extrémale, quelque soit la classe de Kähler considérée.

### 1.2.3 L'invariant de Futaki

Futaki a introduit un invariant important des variétés kählériennes [Fu].

**Définition 1.2.5.** *Soit  $(M, J, g)$  une variété kählérienne compacte. Pour chaque forme de Kähler  $\omega$ , on définit le potentiel de Ricci  $\psi_\omega$  via la décomposition de Hodge*

$$\rho_\omega = \rho_\omega^H + i\partial\bar{\partial}\psi_\omega$$

avec  $\rho_\omega^H$  harmonique et  $\psi_\omega$  orthogonale aux constantes. Ceci permet de définir l'invariant de Futaki  $\mathcal{F}_\Omega$  par :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathfrak{h}(M, J) \times \mathcal{K}(M, J) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (X, [\omega]) &\mapsto \int_M \mathcal{L}_X \psi_\omega \frac{\omega^n}{n!}. \end{aligned}$$

Futaki démontre que cet invariant est bien défini, c'est à dire qu'il ne dépend pas du choix du représentant de la classe de Kähler. Cet invariant admet une autre formulation très utile. On considère une classe de Kähler  $[\omega] \in \mathcal{K}$ . Soit  $X \in \mathfrak{h}_0$  et soit  $f \in C^\infty(M, \mathbb{C})$  un potentiel d'holomorphic de  $X$  pour  $g_\omega$ . L'invariant de Futaki satisfait alors :

$$\mathcal{F}(X, [\omega]) = - \int_M f (s_\omega - s_\omega^0) \frac{\omega^n}{n!}.$$

où la constante  $s_\omega^0$  est la projection orthogonale de  $s_\omega$  sur les constantes,  $s_\omega^0 = \int_M s_\omega \frac{\omega^n}{n!}$ .

L'invariant de Futaki permet alors de distinguer les métriques à courbure scalaire constante parmi les métriques extrémales. La formule ci-dessus permet de démontrer ([Fu]) :

**Proposition 1.2.6.** *Soit  $(M, J, \omega)$  une variété kählérienne compacte munie d'une métrique extrémale  $g$ . La métrique  $g$  est à courbure scalaire constante si et seulement si l'invariant de Futaki est identiquement nulle en cette classe, c'est à dire  $\mathcal{F}(\cdot, [\omega]) = 0$ .*

On verra que cet invariant joue un rôle important dans la théorie de perturbation des variétés extrémales sous déformations complexes.

## Chapitre 2

# Théorie de recollement pour les métriques extrémales et résolution de singularités isolées

### 2.1 Introduction

Un procédé standard de géométrie complexe est la résolution des singularités. Il est intéressant de s'interroger sur la stabilité des métriques extrémales lors de ce procédé.

Arezzo et Pacard ont développé une théorie de recollement des métriques à courbure scalaire constante dans les articles [AP1] et [AP2]. Soit  $(M, J, \omega)$  un orbifold kählérien compact muni d'une métrique à courbure scalaire constante. On suppose que les singularités de  $M$  sont isolées. Dans un premier lieu, Arezzo et Pacard exhibent une méthode pour obtenir une métrique à courbure scalaire constante sur une résolution de  $M$ . Ce résultat est démontré dans [AP1] sous l'hypothèse  $h(M, J) = 0$ . Il nécessite l'existence d'un modèle local de résolution de chacune des singularités équipé d'une métrique ALE à courbure scalaire nulle et dont le potentiel de Kähler soit contrôlé à l'infini. La méthode s'applique également dans le cadre de l'éclatement en un point de  $M$ , auquel cas la métrique locale utilisée est la métrique de Burns-Simanca. Dans tous les cas, la métrique obtenue est petite sur les diviseurs exceptionnels formés dans le processus d'éclatement ou de résolution.

La méthode de recollement procède schématiquement en trois étapes. La première consiste à perturber la métrique de Kähler sur  $M_\varepsilon = M \setminus \cup_i B(x_i, \varepsilon)$ , où  $B(x_i, \varepsilon)$  désigne une boule centrée en un point à désingulariser ou à éclater de  $M$  de rayon  $\varepsilon$ . Cette perturbation doit se faire sous deux contraintes, garder une métrique à courbure scalaire constante et obtenir un meilleur contrôle du potentiel de Kähler de la métrique sur le bord de  $M_\varepsilon$ . La deuxième étape est la perturbation du potentiel de Kähler de la métrique choisie sur le modèle local de résolution, ou de l'éclatement, avec des contraintes similaires. Enfin il s'agit de coller les morceaux, c'est à dire vérifier que les potentiels des métriques sur les modèles locaux et sur  $M_\varepsilon$  peuvent être choisis pour coïncider sur les bords. Un argument de régularité elliptique permet alors de conclure que la métrique obtenue est lisse.

Dans le deuxième article [AP2], la théorie est développée pour les éclatements en présence de champs de vecteurs holomorphes. Les arguments de perturbations et de recollements sont essentiellement les mêmes. La différence majeure est que la présence de champs de vecteurs holomorphes fait apparaître des obstructions dans la théorie de perturbation et des conditions sur le choix des points d'éclatement sont nécessaires pour assurer le fonctionnement de la méthode. D'autres contraintes liées à ces symétries apparaissent. Ces idées sont reprises dans ce qui suit, on va se consacrer au cas extrémal.

Une généralisation de ces résultats est obtenue par Arezzo Pacard et Singer [APS] dans le cadre des métriques extrémales. Dans ce cas il est crucial de bien maîtriser les symétries de la variété. On désigne par  $(M, J, \omega)$  une variété kählérienne compacte lisse et on suppose  $\omega$  extrémale. On souhaite éclater  $M$  aux points  $(p_j)$  et obtenir une métrique extrémale sur l'éclatement  $Bl_{p_1, \dots, p_m}(M)$  de  $M$  aux points  $(p_j)$ . On note

$$\pi : Bl_{p_1, \dots, p_m}(M) \rightarrow M$$

l'application d'écrasement et  $E_j$  les diviseurs exceptionnels associés aux points  $p_j$ . La méthode utilisée étant une méthode de perturbation, la métrique obtenue sur l'éclatement sera proche de la métrique initiale en dehors des diviseurs exceptionnels. Le champ de vecteur extrémal doit donc être préservé lors de la procédure et on va donc éclater des points qui sont fixés sous son action. On va alors prescrire des symétries à préserver lors du processus d'éclatement. Soit  $K$  le groupe des biholomorphismes de  $(M, J)$  qui sont également des symplectomorphismes exactes. Le groupe  $K$  est compact et on peut considérer l'application moment normalisée associée à son action :

$$\xi : M \rightarrow \mathfrak{k}^*.$$

où  $\mathfrak{k}$  est l'algèbre de Lie de  $K$ . Cette application est définie par les relations :

$$\forall X \in \mathfrak{k}, -d\langle \xi, X \rangle = \omega(X, \cdot),$$

l'invariance

$$\forall x \in M, \forall k \in K, \xi(k \cdot x) = \text{Ad}(k)^* \xi(x)$$

et la normalisation

$$\forall X \in \mathfrak{k}, \int_M \langle \xi, X \rangle \frac{\omega^n}{n!} = 0.$$

Cette application moment permet d'identifier les éléments de  $\mathfrak{k}$  et de son dual  $\mathfrak{k}^*$  à l'aide du produit scalaire suivant :

$$\forall (X, Y) \in \mathfrak{k}^2, \langle X, Y \rangle = \int_M \langle \xi, X \rangle \langle \xi, Y \rangle \frac{\omega^n}{n!}.$$

On va prescrire un groupe d'isométries  $T$  sur l'éclatement de  $M$ . Soit  $T \subset K$  un tore. Notons que pour préserver ce tore d'isométries, il est nécessaire de choisir des points fixés par ce dernier. On souhaite préserver le champ de vecteur extrémal  $X_s = J \text{grad}_g(s_g)$  donc on suppose que l'algèbre de Lie  $\mathfrak{t}$  de  $T$  contient ce dernier. On travaille alors de manière  $T$ -invariante et il convient de considérer les champs de vecteurs qui sont  $T$ -invariants. Soit  $H$  le sous-groupe de  $\text{Aut}(M, J)$  constitué des symplectomorphismes exacts qui commutent avec  $T$ . On note  $\mathfrak{h}$  son algèbre de Lie. Parmi les éléments de  $\mathfrak{h}$ , certains donneront des champs de Killing sur l'éclatement de  $M$  et peuvent être utilisés comme candidats afin de perturber le champ de vecteur  $X_s$ . On définit

alors  $\mathfrak{h}' = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}$  et  $\mathfrak{h}''$  un supplémentaire tel que  $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{h}''$ . Si  $p \in \text{Fix}(T)$ , alors  $\xi(p) \in \mathfrak{h}$  et on peut définir l'application moment relative via la projection  $\xi''(p)$  sur  $\mathfrak{h}''^*$ . Par  $PD(E)$  on désignera le dual de poincaré d'un diviseur. On peut maintenant énoncer le théorème d'Arezzo, Pacard et Singer :

**Théorème 2.1.1. Arezzo, Pacard et Singer [APS]** Soit  $(M, J, \omega)$  une variété kählérienne extrémale de champ de vecteur extrémal  $X_s$ . Soit  $T \subset K$  un tore tel que  $X_s \in \mathfrak{t}$ . Fixons des points  $(p_j) \in \text{Fix}(T)$ . Supposons alors que les conditions suivantes sont satisfaites :

- (i) Il existe des réels  $a_j > 0$  tels que  $\sum_j a_j^{n-1} \xi''(p_j) = 0$ ,
- (ii)  $\sum \mathbb{R} \xi''(p_j) = \mathfrak{h}''$

Alors il existe  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $c > 0$  et  $\theta > 0$ , tels que pour tout  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  il existe une métrique extrémale sur  $Bl_{p_1, \dots, p_m}(M)$  dans la classe de Kähler

$$\pi^*[\omega] - \varepsilon^2 \sum_j \tilde{a}_j PD[E_j],$$

où  $\tilde{a}_j$  dépendent de  $\varepsilon$  et  $|\tilde{a}_j - a_j| \leq c\varepsilon^\theta$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

De plus, s'il n'existe pas d'élément non nul de  $\mathfrak{h}''$  qui s'annule aux points  $(p_j)$ , on peut supposer  $\tilde{a}_j = a_j$ .

Les contraintes du théorème apparaissent naturellement lorsque l'on souhaite inverser les opérateurs liés à l'équation des métriques extrémales. La première contrainte est appelée condition d'équilibre. Cette condition est liée à la théorie géométrique des invariants. Elle fait le lien entre la stabilité de la configuration des points  $p_j$  considérés et la stabilité de la variété. La deuxième contrainte, condition de généricité, n'est en réalité pas nécessaire comme le démontre Székelyhidi [S]. La méthode qu'il emploie est un peu différente. Il commence par recoller la métrique de Burns-Simanca au voisinage des diviseurs exceptionnels à la métrique extrémale initiale. La métrique obtenue n'est plus extrémale et est perturbée après recollement. Il démontre que l'on peut effectuer cette perturbation quitte à modifier légèrement le point éclaté dans son orbite sous l'action de la complexification de  $K$ .

On obtient une version de ce théorème qui concerne les métriques extrémales et la résolution de certaines singularités. La méthode d'Arezzo, Pacard et Singer est adaptée au cas des singularités isolés de type Hirzebruch-Jung :

**Théorème 2.1.2.** Soit  $(M, J, \omega)$  un orbifold kählérien extrémal de dimension 2. On suppose que les singularités de  $M$  sont isolées et de type Hirzebruch-Jung. On note  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  la résolution minimale de  $M$  obtenue en utilisant les cordes de Hirzebruch-Jung. Soient  $E_j$  les sphères holomorphes qui forment les diviseurs exceptionnels de la résolution. Alors pour tout choix de nombres positifs  $a_j$  il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que  $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  il existe une métrique extrémale sur  $\tilde{M}$  dans la classe de Kähler

$$[\pi^*\omega] - \varepsilon^2 \sum_j a_j PD[E_j]$$

**Remarque 2.1.3.** Les hypothèses de ce théorème semblent plus légères que celles du théorème d'Arezzo, Pacard et Singer. Le théorème est démontré en travaillant modulo un tore maximal du groupe des isométries qui sont des symplectomorphismes exacts. On verra dans les sections suivantes que les obstructions qui apparaissaient dans

les résultats d'Arezzo Pacard et Singer ou Székelyhidi disparaissent lorsque l'on travaille modulo un tore maximal. Dans ce cas, le théorème d'Arezzo Pacard et Singer présente les mêmes hypothèses que le théorème 2.1.2. Une version aussi générale que le théorème 2.1.1 dans le cas orbifold ne présente pas un réel intérêt car les singularités sont toujours des points fixes du groupe des isométries. Les hypothèses plus générale servent à utiliser un cadre équivariant utilisant un groupe plus petit, avec plus de points fixes, et donc potentiellement plus de points à éclater.

**Remarque 2.1.4.** On notera également que le théorème s'applique dans le cas où la métrique de départ est à courbure scalaire constante, mais que la métrique obtenue sur la résolution ne sera pas à priori à courbure scalaire constante. Il faut pour cela que des conditions d'équilibre et de généricité soient satisfaites, comme le montrent les travaux d'Arezzo et Pacard [AP2] et Rollin et Singer [RS2].

La suite de ce chapitre est organisée de la façon suivante : en premier lieu on va décrire le modèle local de résolution qui sera utilisé dans la méthode de recollement. Ensuite on donnera une description plus précise de la méthode de recollement, en soulignant les différences avec [APS] qui proviennent du cadre orbifold. En troisième section, on donnera les résultats de perturbations des métriques et on procèdera au recollement de ces dernières. Ceci terminera la preuve du théorème 2.1.2. Enfin, on donnera un premier exemple d'application du théorème dans le cadre de la géométrie torique.

## 2.2 Singularités de type Hirzebruch-Jung, modèle local de résolution

On décrit ici le modèle local qui sera recollé à la variété initiale pour résoudre ses singularités.

**Définition 2.2.1.** Soient  $p$  et  $q$  deux entiers premiers entre eux, avec  $p < q$ . On définit le groupe  $\Gamma_{p,q}$  comme le sous-groupe fini de  $U(2)$  engendré par la matrice

$$\gamma := \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{2i\pi}{q}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(\frac{2i\pi p}{q}\right) \end{pmatrix}$$

Le groupe  $\Gamma_{p,q}$  agit sur  $\mathbb{C}^2$  :

$$\forall (z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2, \gamma \cdot (z_0, z_1) := \left( \exp\left(\frac{2i\pi}{q}\right) \cdot z_0, \exp\left(\frac{2i\pi p}{q}\right) \cdot z_1 \right).$$

**Définition 2.2.2.** Soient  $p$  et  $q$  deux entiers premiers entre eux, avec  $p < q$ . Une singularité  $A_{p,q}$  est une singularité isomorphe à  $\mathbb{C}^2/\Gamma_{p,q}$ . Une singularité de type Hirzebruch-Jung est une singularité de ce type.

On va rappeler quelques résultats concernant les résolutions de ces singularités.

Tout d'abord, du point de vue algébrique,  $\mathbb{C}^2/\Gamma_{p,q}$  est une surface orbifold complexe avec une singularité isolée en 0. Il existe une résolution minimale

$$\pi : Y_{p,q} \rightarrow \mathbb{C}^2/\Gamma_{p,q}$$



appelée la résolution d'Hirzebruch-Jung. La variété  $Y_{p,q}$  est une surface complexe lisse et possède un diviseur exceptionnel  $E := \pi^{-1}(0)$ . le morphisme  $\pi$  est un biholomorphisme de  $Y_{p,q} - E$  vers  $\mathbb{C}^2 - \{0\}/\Gamma$ . Enfin,  $E$  est une réunion de sphères holomorphes  $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k$  et la matrice d'intersection des  $S_i$  à la forme :

$$[S_i \cdot S_j] = \begin{bmatrix} -e_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -e_2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -e_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -e_k \end{bmatrix}$$

où les entiers  $e_j \geq 2$  sont définis par le développement en fraction continue :

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{e_1 - \frac{1}{e_2 - \dots - \frac{1}{e_k}}}$$

On renvoie à [BPV] pour plus de détails concernant ces résolutions.

Ensuite,  $\mathbb{C}^2/\Gamma_{p,q}$  et  $Y_{p,q}$  sont des variétés toriques. l'action du tore  $\mathbb{T}^2$  est celle qui provient de l'action usuelle sur  $\mathbb{C}^2$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^2 \times \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{C}^2 \\ (\theta_1, \theta_2), (w_1, w_2) &\mapsto (e^{i\theta_1}w_1, e^{i\theta_2}w_2) \end{aligned}$$

Sur cet aspect de la résolution on renvoie au livre de Fulton [F].

Enfin, Calderbank et Singer on construit une métrique kählérienne ALE à courbure scalaire nulle sur ces modèles de résolution [CS]. La construction de cette métrique repose sur le travail de Joyce [J2] et utilise les symétries toriques de  $Y_{p,q}$ , cette métrique est donc  $\mathbb{T}^2$ -invariante. On souligne cette particularité qui sera utilisée dans la méthode de recollement où l'on travaillera modulo un tore d'isométries. De plus, cette métrique peut être choisie en fixant arbitrairement les volumes des diviseurs  $S_j$ . Enfin, le comportement à l'infini de cette métrique est suffisamment contrôlé pour permettre le recollement :

**Proposition 2.2.3.** ([RS], corollaire 6.4.2.) *Dans la carte holomorphe*

$$\mathbb{C}^2 - \{0\}/\Gamma_{p,q},$$

La métrique  $\omega_r$  est donnée par  $\omega_r = dd^c f$ , avec

$$f(z) = \frac{1}{2}|z|^2 + a \log(|z|^2) + \mathcal{O}(|z|^{-1})$$

et  $a \leq 0$ . La notation  $\mathcal{O}(|z|^{-1})$  désigne une fonction lisse dont toutes les dérivées partielles d'ordre  $l \geq 0$  par rapport aux  $|z|\partial_{z_i}$  et  $|z|\partial_{\bar{z}_i}$  sont bornées par une constante dépendant de  $l$  fois  $|z|^{-1}$ .

Enfin, avant de passer à la preuve du théorème 2.1.2, on rappelle le résultat de Cartan [CA] :

**Théorème 2.2.4.** *Soit  $G$  un groupe cyclique fini agissant sur une surface complexe lisse  $X$ . Le quotient  $X/G$  a uniquement des singularités de type Hirzebruch-Jung.*

Les exemples d'applications du théorème 2.1.2 seront construits sur le modèle du théorème de Cartan 2.2.4 et les singularités seront donc du type Hirzebruch-Jung.

## 2.3 Description de la méthode

La méthode pour démontrer le théorème 2.1.2 est celle employée par Arezzo, Pacard et Singer. Nous allons donner ici les différentes étapes de la preuve en faisant référence à leur article [APS] pour les démonstrations. On soulignera seulement les différences qui apparaissent dans le cas orbifold.

Soit  $(M, J, \omega)$  une surface orbifold extrémale. On suppose ses singularités isolées et de type Hirzebruch-Jung et on note  $(p_j)$  ces dernières. Soit  $\widetilde{M}$  une résolution minimale de  $M$  utilisant les résolutions de Hirzebruch-Jung de la section 2.2.1. Pour chaque singularité  $p_j$ , on fixe un système de coordonnées locales orbifolds  $(z_1^j, z_2^j)$  centrées en  $p_j$  telles qu'un voisinage de  $p_j$  dans  $M$  soit identifié par ces coordonnées au quotient sous l'action d'un groupe  $\Gamma_j$  de la boule unité dans  $\mathbb{C}^2$ . On note  $B_r^j = \{|z^j| < r\}$ ,  $r < 1$ , les boules orbifolds centrées en  $p_j$  et de rayon  $r$  supposé suffisamment petit pour qu'elles soient disjointes. Soit  $\overline{M}_r = M \setminus \cup_j B_r^j$ . C'est une variété à bord munie d'une métrique extrémale.

A chaque point singulier  $p_j$  on a associé un groupe fini  $\Gamma_j$  définissant la singularité. On regarde maintenant les modèles locaux de résolution  $Y_j$  définis dans la section 2.2.1 et associés à chaque singularité  $\mathbb{C}^2/\Gamma_j$ . Soient  $(v_1^j, v_2^j)$  des systèmes de coordonnées sur chacune de ces résolutions, coordonnées définies en dehors des diviseurs exceptionnels et qui seront vues comme des coordonnées asymptotiques. On définit alors les variétés à bord  $Y_{j,R} = Y_j \setminus \{|v_j| > R\}$  pour tout  $R > 0$ .

On pose  $Y_R$  la réunion des  $Y_{j,R}$ . Avant de se concentrer sur les métriques, les structures complexes sont recollées avec les applications de dilatation suivantes :

$$\forall \varepsilon > 0, 0 < r < \frac{1}{2}, R = \frac{r}{\varepsilon}$$

et pour chaque  $j$  on définit une application de dilatation

$$i_\varepsilon^j : \begin{array}{ccc} \{\frac{r}{2} < |z^j| < 2r\} & \rightarrow & \{\frac{R}{2} < |v^j| < 2R\} \\ z^j & \mapsto & v^j = \frac{z^j}{\varepsilon} \end{array}$$

Ces applications sont des biholomorphismes et induisent un difféomorphisme des bords  $\partial M_r$  et  $\partial Y_R$ . De plus, on peut voir  $\widetilde{M}$  comme la réunion de  $\overline{M}_r$  et  $Y_R$  recollés le long de leur bord via les applications  $i_\varepsilon^j$ . On peut maintenant essayer de trouver des métriques extrémales sur chacune de ces composantes et les faire coïncider sur les bords. On va recoller les variétés  $\overline{M}_r$  et  $Y_{j,R}$  en munissant la première de sa métrique extrémale et les autres de métriques de Joyce, Calderbank et Singer que l'on notera  $\omega_{cs}$ . Sur  $\overline{M}_r$  on prendra  $r$  suffisamment petit afin d'avoir une métrique proche de la métrique euclidienne. En effet, une particularité des variétés kählériennes est l'existence de coordonnées holomorphes qui osculent la métrique euclidienne à l'ordre 2. Pour les modèles locaux

$Y_{j,R}$ , on considèrera  $R$  grand et on utilisera le caractère ALE de la mètrique de Joyce Calderbank et Singer. Il faut perturber ces mètriques afin de les faire coïncider. On se contente d'exposer la mèthode dans le cas d'une seule singularité de groupe orbifold  $\Gamma$ . Afin de comprendre la mèthode de perturbation employée par Arezzo Pacard et Singer, et suivant leur exposé, on se ramène à l'anneau de  $\mathbb{C}^2/\Gamma$  :

$$A = A^o \cup A^i$$

avec

$$A^i = \{x \in \mathbb{C}^2 / \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1\} / \Gamma$$

et

$$A^o = \{x \in \mathbb{C}^2 / 1 \leq |x| \leq 2\} / \Gamma$$

On pose  $S = A^o \cap A^i$ . Soit  $j_a(x) = ax$ , et l'on identifiera  $A^o$  avec  $\{z \in \overline{M}_r / r \leq |z| \leq 2r\}$  via  $j_r$  et  $A^i$  avec  $\{z \in Y_R / \frac{R}{2} \leq |v| \leq R\}$  via  $j_R$ . On perturbe maintenant les mètriques  $\omega$  sur  $M$  et  $\omega_{cs}$  sur  $Y_R$  par des fonctions  $f_M$  et  $f_Y$  et on obtient sur  $A$  :

$$\omega^o = j_r^*(\omega + i\partial\bar{\partial}f_M) = i\partial\bar{\partial}\left(\frac{|x|^2}{2r^2} + \psi^o(x)\right) \text{ dans } A^o$$

et

$$\omega^i = \varepsilon^2 j_R^*(\omega_{cs} + i\partial\bar{\partial}f_Y) = i\partial\bar{\partial}\left(\frac{|x|^2}{2r^2} + \psi^i(x)\right) \text{ dans } A^i$$

Si les potentiels  $\psi^o$  et  $\psi^i$  se recollent de manière lisse le long de  $S$ , on peut voir les mètriques  $\omega + i\partial\bar{\partial}f_M$  et  $\omega_{cs} + i\partial\bar{\partial}f_Y$  comme les restrictions d'une mètrique lisse sur  $\widetilde{M}$ . La première étape consiste alors à perturber la mètrique  $\omega$  sur  $\overline{M}_r$  en une mètrique extrémale avec des conditions aux bords

$$(f_M)_{|\partial\overline{M}_r} = h$$

et

$$\Delta(f_M)_{|\partial\overline{M}_r} = k$$

où l'on prescrit les fonctions  $h$  et  $k$ . Ensuite, on procède de même avec la mètrique  $\omega_Y = a^2(\omega_{cs} + i\partial\bar{\partial}f_Y)$  et des conditions de bords

$$(f_Y)_{|\partial Y_R} = h'$$

et

$$\Delta(f_Y)_{|\partial Y_R} = k'.$$

Étant données des conditions de bord  $h, k, h'$  et  $k'$ , on peut obtenir des mètriques extrémales sur  $A$  satisfaisant ces conditions de bord. Les potentiels obtenus  $\psi^o$  et  $\psi^i$  vérifient alors la même équation sur  $A \setminus S$ . Si ces potentiels et leurs dérivées coïncident jusqu'à l'ordre 3, ils seront alors égaux par unicité des solutions du problème de Cauchy considéré. La dernière étape de la démonstration consiste alors à montrer que les conditions initiales peuvent être choisies de telle sorte que les potentiels  $\psi^i$  et  $\psi^o$  ainsi que leurs dérivées soient égaux à l'ordre 3.

## 2.4 Linéarisation du problème

On expose des résultats généraux sur la perturbation de métriques extrémales. D'après le théorème de Calabi 1.2.4, si  $\widetilde{M}$  est extrémale, le groupe des isométries de  $\widetilde{M}$  sera un sous-groupe compact maximal de  $Aut(M, J)$ . On va alors chercher à travailler modulo un tore maximal d'isométries sur  $M$  afin de simplifier l'analyse. Soit  $X_s$  le champ de vecteur extrémal de  $M$ ,  $K$  le sous-groupe de  $Isom(M, g)$  dont les éléments sont des symplectomorphismes exactes et  $T$  un sous-groupe abélien maximal de  $K$ . Notons ici que  $K$  est un groupe de Lie compact comme dans le cas lisse. En effet, un théorème de Bagaev et Zhukova [BZ] stipule que le groupe d'isométries d'un orbifold est muni d'une unique structure de groupe de Lie lisse. De plus, si l'orbifold est compact, le groupe est également compact. On peut alors définir de la même façon l'application moment associée à l'action de  $K$  :

$$\xi_\omega : M \rightarrow \mathfrak{k}^*,$$

où  $\mathfrak{k}$  est l'algèbre de Lie de  $K$ . On rappelle que cette application est définie par les relations :

$$\forall X \in \mathfrak{k}, -d\langle \xi_\omega, X \rangle = \omega(X, \cdot),$$

l'invariance

$$\forall x \in M, \forall k \in K, \xi_\omega(k \cdot x) = \text{Ad}(k)^* \xi_\omega(x)$$

et la normalisation

$$\forall X \in \mathfrak{k}, \int_M \langle \xi_\omega, X \rangle d\text{vol}_g = 0.$$

On aura besoin du lemme suivant pour pouvoir travailler de manière  $T$ -invariante sur  $Y_R$  :

**Lemme 2.4.1. Annexe A, lemme 2.4.3.**  *$T$  fixe les singularités de  $M$ . Au voisinage de chaque singularité de  $M$  de groupe orbifold  $\Gamma_j$  il existe une carte orbifold  $U_j/\Gamma_j$ ,  $U_j \subset \mathbb{C}^2$  tel que dans cette carte  $T$  agisse comme un sous-groupe du tore  $\mathbb{T}^2$  agissant de manière standard sur  $\mathbb{C}^2$ .*

*On appellera des coordonnées complexes sur un tel ouvert  $U$  des coordonnées normales.*

La métrique  $\omega$  étant extrémale, la courbure scalaire  $s$  est dans le noyau de l'opérateur de Lichnerowicz et le champ de vecteur  $X_s$  définit une action hamiltonienne sur  $M$ . De plus,  $X_s \in \mathfrak{t}$  (voir lemme 2.4.3. Annexe A). Si on pose

$$c_s = \int_M s d\text{vol}_g$$

on a alors

$$s = \langle \xi_\omega, X_s \rangle + c_s.$$

On note l'espace des fonctions lisses  $T$ -invariantes  $C^\infty(M, \mathbb{R})^T$  et de manière générale, l'exposant  $T$  sur un espace de fonction désignera sa partie  $T$ -invariante. Si l'on perturbe la métrique  $\omega$  par des fonctions  $T$ -invariantes la métrique obtenue sera extrémale si et seulement si sa courbure scalaire est dans le noyau de l'opérateur de Lichnerowicz. D'après les rappels de la partie 1, ceci est équivalent au fait que la courbure scalaire

soit un potentiel d'holomorphic pour la nouvelle métrique, autrement dit que la courbure scalaire soit un hamiltonien pour une action par isométries. Notons que si  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})^T$ , alors  $\omega + i\partial\bar{\partial}f$  est encore  $T$ -invariante et les equations que l'on cherche à résoudre sont alors

$$s(\omega + i\partial\bar{\partial}f) = \langle \xi_{\omega+i\partial\bar{\partial}f}, X_s + X \rangle + c_s + c$$

et

$$X \in \mathfrak{t}$$

où  $\xi_{\omega+i\partial\bar{\partial}f}$  est l'application moment associée à l'action de  $K$  pour la forme  $\omega + i\partial\bar{\partial}f$  et  $c$  est déterminée par la condition de normalisation. Si l'on travail sur  $M$  et non pas sur  $\overline{M}_r$ , l'opérateur étudié pour l'équation des métriques extrémales est alors :

$$\begin{aligned} F : C^\infty(M, \mathbb{R})^T \times \mathfrak{t} \times \mathbb{R} &\rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})^T \\ (f, X, c) &\mapsto s(\omega + i\partial\bar{\partial}f) - \langle \xi_{\omega+i\partial\bar{\partial}f}, X_s + X \rangle + c_s + c. \end{aligned}$$

En effet, les zéros de cet opérateur sont exactement les solutions des deux équations précédentes. On tire alors la proposition suivante de [APS] :

**Proposition 2.4.2.** [APS], *proposition 4.2.* *Si  $\omega$  est extrémale, alors la linéarisation de  $F$  en 0 est donnée par*

$$DF_0(f, X, c) = -\frac{1}{2}L_\omega - \langle \xi_\omega, X \rangle - c.$$

## 2.5 Perturbation de la métrique sur $M^*$

Les idées et le développement qui suivent proviennent de [APS]. On les adapte au cadre orbifold. D'après ce qui précède, on veut perturber chacune des métriques  $\omega$  sur  $\overline{M}_r$  et  $\omega_{cs}$  sur  $Y_R$  en gardant le caractère extrémal. Pour cela, il faut définir les espaces fonctionnels adaptés à l'analyse de l'opérateur  $F$  sur  $\overline{M}_r$  et  $Y_R$ . Ces espaces doivent permettre un contrôle suffisant des croissances des fonctions aux voisinages des singularités.

Pour tout  $r > 0$ , on pose  $B_r$  la boule ouverte de rayon  $r$  de  $\mathbb{C}^2$  centrée en 0,  $\overline{B}_r$  sa fermeture,  $\overline{B}_r^*$  la boule fermée privée du point 0. On aura également besoin de définir des anneaux :

$$C_r = \mathbb{C}^2 \setminus \overline{B}_r \text{ et } \overline{C}_r = \mathbb{C}^2 \setminus B_r$$

On pose  $M^* = M \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$  l'orbifold privé de ses singularités. On définit alors pour chaque point  $p_j$  un système de coordonnées complexes normales comme dans le lemme 2.4.1 et on dénote  $B_r^j, \overline{B}_r^j$  et  $\overline{B}_r^{*,j}$  respectivement les boules orbifolds ouvertes, fermées et épointées de rayon  $r$  définies par ces systèmes de coordonnées. Soit  $r_0$  suffisamment petit pour que pour chaque  $r \leq 4r_0$  les boules  $\overline{B}_r^j$  soient disjointes. On définit alors une quantité qui mesure la croissance des fonctions au voisinages des singularités.

Soit  $l \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$  et  $\delta \in \mathbb{R}$ . On pose pour chaque  $j \in \{1..n\}$ ,

$$\forall f \in C_{loc}^{l,\alpha}(M^*) \quad \|f\|_{C_\delta^{l,\alpha}(\overline{B}_{r_0}^{*,j})} = \sup_{r \leq \frac{r_0}{2}} (r^{-\delta} \|f|_{B_r^j}(r \cdot)\|_{C^{l,\alpha}((\overline{B}_2 \setminus B_1)/\Gamma_j)}).$$

On pose

$$\overline{M}_r = M \setminus \cup_j B_r^j.$$

On va alors définir des espaces de Hölder à poids sur  $M^*$  :

**Définition 2.5.1.** Soit  $l \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$  et  $\delta \in \mathbb{R}$ . L'espace  $C_\delta^{l,\alpha}(M^*)$  est alors l'espace des fonctions de  $C_{loc}^{l,\alpha}(M^*)$  pour lesquelles la norme

$$\|f\|_{C_\delta^{l,\alpha}(M^*)} = \|f\|_{C^{l,\alpha}(\overline{M}_{r_0})} + \sum_j \|f\|_{C_\delta^{l,\alpha}(\overline{B}_{r_0}^{*j})}$$

est finie.

Afin de pouvoir étudier l'opérateur  $DF$  sur  $\overline{M}_r$ , on se ramène au même opérateur sur  $M^*$ . Pour cela, on introduit les fonctions plateaux  $\chi_j$  identiquement nulles en dehors de  $M \setminus B_{r_0}^j$  et égales à 1 sur  $B_{r_0/2}^j$ . On introduit également les fonctions  $\tilde{G}_j$  sur  $\overline{B}_{r_0}^{j*}$  solutions de l'équation homogène  $L_\omega(\tilde{G}_j) = 0$ . Ces fonctions existent et sont bien définies d'après le lemme 4.1. de [AP2]. On définit alors l'espace  $\mathcal{D}$  comme étant l'espace engendré par les fonctions  $\chi_j$  et les fonctions  $\chi_j \tilde{G}_j$ . Cet espace a pour rôle de rendre l'opérateur  $DF$  surjectif :

**Proposition 2.5.2. Proposition 5.1. [APS]** Soit  $\delta \in (0, 1)$ . On définit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\delta : (C_\delta^{4,\alpha}(M^*) \oplus \mathcal{D})^T \times \mathfrak{t} \times \mathbb{R} &\rightarrow C_{\delta-4}^{0,\alpha}(M^*)^T \\ (f, X, \mu) &\mapsto -\frac{1}{2}L_\omega f - \langle \xi_\omega, X \rangle - \mu. \end{aligned}$$

L'opérateur  $\mathcal{L}_\delta$  est surjectif.

**Preuve: schéma de démonstration** La preuve provient des résultats sur les espaces fonctionnels à poids que l'on retrouvera dans [Me], [LM] et en particulier dans [Maz] pour les espaces de Hölder à poids.

Pour ces choix d'indices dans les espaces de Sobolev considérés, on a

$$C_{\delta-4}^{0,\alpha}(M^*)^T \subset L^1(M).$$

On considère  $\psi \in C_{\delta-4}^{0,\alpha}(M^*)^T$  que l'on étend à  $L^1(M)$  en

$$\psi + \sum_j a_j \delta_{p_j}.$$

On résout alors

$$-\frac{1}{2}L_\omega f - \langle \xi_\omega, X \rangle - \mu = \psi + \sum_j a_j \delta_{p_j}$$

c'est à dire

$$-\frac{1}{2}L_\omega f = \langle \xi_\omega, X \rangle + \mu + \psi + \sum_j a_j \delta_{p_j}$$

dans  $W^{3,q}(M)$  pour  $q \in (1, \frac{4}{3})$ .  $L_\omega$  est auto-adjoint, cette équation a donc une solution si le membre de droite est dans l'orthogonal du noyau de  $L_\omega$ . On rappelle que ce dernier est isomorphe à  $\mathbb{R} \oplus \mathfrak{t}$  d'après la proposition 1.2.1 et car on travail modulo  $T$ . La liberté de choix de la constante  $\mu$  et de  $X \in \mathfrak{t}$  permet de se placer de manière orthogonale à  $\mathbb{R} \oplus \mathfrak{t}$ . On a alors une solution  $f \in W^{3,q}(M)$ . Enfin, la théorie de régularité sur ces espaces impose  $f \in (C_\delta^{4,\alpha}(M^*) \oplus \mathcal{D})^T$ . C.Q.F.D.

Notons ici que l'analyse dans notre cadre orbifold ne change rien à la preuve de ce résultat.

Schématiquement, il s'agit maintenant de travailler sur  $\overline{M}_r$  et de trouver des solutions à l'équation  $F(f, X, c) = 0$ . On linéarise le problème en 0 et l'on cherche à résoudre :

$$F(f, X, c) = F(0, 0, 0) + DF_0(f, X, c) + Q(f, X, c) = 0$$

où  $Q$  désigne les termes quadratiques et d'ordres supérieurs. Comme la métrique de départ est extrémale,  $F(0, 0, 0) = 0$  et le problème revient à trouver un inverse à gauche de  $DF$  sur un espace de fonctions sur  $\overline{M}_r$ . En effet, on se ramène alors à un théorème de point fixe de la forme :

$$(f, X, c) = DF_0^{-1}(Q(f, X, c) - F(0, 0, 0)).$$

Il est possible de définir un opérateur d'extension des fonctions (définition 6.2. [APS]) qui permet d'utiliser les espaces de Hölder à poids  $C_\delta^{l,\alpha}(M^*)$  sur  $M^*$ . La proposition 2.5.2 assure alors que l'inverse recherché existe bien.

On réclame cependant que cette perturbation soit faite avec des conditions permettant le recollement des métriques et on va se donner des conditions aux bords. De plus, le potentiel  $\psi^i$  définissant la métrique sur  $Y_R$  a un développement asymptotique particulier qu'il faut prendre en compte pour obtenir un potentiel  $\psi^o$  sur  $\overline{M}_r$  permettant le recollement. Ce développement impose une adaptation de la preuve d'Arezzo, Pacard et Singer que l'on va détailler.

A chaque point singulier  $p_j$  on a associé un groupe orbifold  $\Gamma_j$ . On choisit alors une classe de Kähler sur  $Y_j$  la résolution d'Hirzebruch-Jung de  $\mathbb{C}^2/\Gamma_j$  et on fixe dans cette classe la métrique  $\omega_{cs}^j$  construite par Calderbank et Singer. La proposition 2.2.3 assure alors l'existence de constantes  $a_j^0$  telles que la métrique  $\omega_{cs}^j$  soit donnée par  $\omega_{cs}^j = i\partial\bar{\partial}f^j$ , avec

$$f^j(v^j) = \frac{1}{2}|v^j|^2 + a_j^0 \log(|v^j|^2) + \mathcal{O}(|v^j|^{-1}).$$

On fixe alors  $n$  réels positifs  $a_j^1$  qui seront liés aux volumes des diviseurs exceptionnels de la résolution. Enfin on pose  $a_j = a_j^0 a_j^1$  et  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ . On peut alors fixer une fonction  $T$ -invariante  $\Gamma_{\mathbf{a}}$ , un champ de vecteur  $X_{\mathbf{a}} \in \mathfrak{t}$  et une constante  $\lambda_{\mathbf{a}}$  tels que

$$L_\omega \Gamma_{\mathbf{a}} + \langle \xi_\omega, X_{\mathbf{a}} \rangle + \lambda_{\mathbf{a}} = - \sum_j a_j \delta_{p_j}.$$

En effet, pour assurer l'existence de  $\Gamma_{\mathbf{a}}$  il suffit que

$$\langle \xi_\omega, X_{\mathbf{a}} \rangle + \lambda_{\mathbf{a}} + \sum_j a_j \delta_{p_j}$$

soit dans la partie  $T$ -invariante de l'orthogonal du noyau de  $L_\omega$ , qui correspond à  $\mathbb{R} \oplus \mathfrak{t}$ , ou aux fonctions du type  $\beta + \langle \xi_\omega, V \rangle$  avec  $\beta \in \mathbb{R}$  et  $V \in \mathfrak{t}$ . On vérifie alors que

$$\lambda_{\mathbf{a}} = - \sum_j a_j$$

et

$$X_{\mathbf{a}} = - \sum_j a_j \xi(p_j)$$

satisfont à ces équations.

On commencera alors par chercher une perturbation de  $\omega$  sous la forme  $\omega + i\partial\bar{\partial}(\Gamma_{\mathbf{a}} + \psi)$ . Cette métrique sera définie en dehors de petites boules centrées en les  $p_j$ . Les poids  $a_j$  correspondent aux "masses" des diviseurs exceptionnels  $Y_j$  que l'on va recoller.  $\Gamma_{\mathbf{a}}$  permet d'assurer le recollement des métriques aux premiers ordres.

**Remarque 2.5.3.** *Il y a ici une différence à noter par rapport au cas des métriques à courbure scalaire constante. Rollin et Singer ont adapté les résultats de Arezzo et Pacard [AP2] dans le cadre des métriques à courbure scalaire constante et la résolution de singularités isolées [RS2]. Dans ce cas, le développement asymptotique de la métrique de Calderbank et Singer ne leur permet pas nécessairement de recoller les métriques si le terme en log du développement s'annule. Le problème vient de l'inversion de l'opérateur considéré. Dans le cas CSC, la linéarisation de l'opérateur courbure scalaire  $S$  donne*

$$DS = L_{\omega}$$

et on cherche alors à résoudre

$$L_{\omega}\phi = \psi.$$

Pour trouver une solution, on modifie  $\psi$  afin qu'il soit dans l'orthogonal du noyau de  $L_{\omega}$  et on résout

$$L_{\omega}\phi = \psi - \int_M \psi d\text{vol}_g - \sum_j a_j \langle \xi_{\omega}, X_j \rangle (p_j) \delta_{p_j}$$

où les poids  $a_j$  doivent être solutions du système

$$\int_M \psi \langle \xi_{\omega}, X_j \rangle d\text{vol}_g = \sum_l a_l \langle \xi_{\omega}, X_j \rangle (p_l)$$

Les poids  $a_j$  sont alors imposés par les contraintes qu'apporte le noyau de  $L_{\omega}$ . Ce noyau provient de certains champs de vecteurs holomorphes sur la variété d'après la proposition 1.2.1. Dans le cas extremal présenté ici en revanche, on peut travailler dans l'orthogonal du noyau de  $L_{\omega}$  et imposer les valeurs des poids  $a_j$  comme on l'a fait. Les champs de vecteurs holomorphes sont dans ce cas une aide précieuse pour inverser l'opérateur  $DF$ . Le fait d'imposer les valeurs des poids  $a_j$  ce répercute sur les développements asymptotiques des métriques qui peuvent être recollées malgré l'absence du terme en log dans la métrique de Calderbank et Singer.

Moralement, rechercher des métriques extrémales est plus simple que rechercher des métriques à courbure scalaire constante où la contrainte  $\text{grad}_g(s_g) = 0$  est ajoutée, et les symétries de la variété deviennent des obstructions.

On va ajouter au potentiel de perturbation une fonction  $W_{\varepsilon, \mathbf{h}, \mathbf{k}}$  qui va permettre de contrôler les valeurs aux bords jusqu'à l'ordre 2.

On pose  $r_{\varepsilon} = \varepsilon^{\frac{3}{5}}$  le rayon des boules orbifolds  $B_{r_{\varepsilon}}^j$  que l'on va enlever à  $M$ . Pour chaque composante du bord de  $\overline{M}_{r_{\varepsilon}}$  on se donne des fonctions

$$h_j \in C^{4, \alpha}(\partial B_1 / \Gamma_j)^T \text{ et } k_j \in C^{2, \alpha}(\partial B_1 / \Gamma_j)^T$$

satisfaisant les conditions

$$\|h_j\|_{C^{4, \alpha}(\partial B_1 / \Gamma_j)} + \|k_j\|_{C^{2, \alpha}(\partial B_1 / \Gamma_j)} \leq \kappa r_{\varepsilon}^4$$



où la constante  $\kappa$  sera une constante suffisamment petite déterminée dans l'analyse. On demande également

$$\int_{\partial B_1/\Gamma_j} k_j d\text{vol}_{g_0} = 0$$

où  $\omega_0$  est la métrique euclidienne standard. Ces données de bord permettent de construire des fonctions ([AP1] proposition 5.6.)

$$W_j^o \in C_{-1}^{4,\alpha}(\overline{C_1}/\Gamma_j)^T$$

satisfaisant

$$\Delta_{\omega_0}^2 W_j^o = 0 \text{ dans } \overline{C_1}/\Gamma_j$$

et

$$W_j^o = h_j \text{ et } \Delta_{\omega_0} W_j^o = k_j \text{ sur } \partial B_1/\Gamma_j.$$

et de normes contrôlées :

$$\|W_j^o\|_{C_{-1}^{4,\alpha}(\overline{C_1}/\Gamma_j)} \leq \|h_j\|_{C^{4,\alpha}(\partial B_1/\Gamma_j)} + \|k_j\|_{C^{2,\alpha}(\partial B_1/\Gamma_j)}.$$

On notera

$$\mathbf{h} = (h_j)$$

et

$$\mathbf{k} = (k_j)$$

pour faire référence à ces données de bord. On se donne des fonctions plateaux  $\chi_j'$  qui valent 1 sur  $B_{r_0}^j$  et 0 en dehors de  $\overline{B_{2r_0}^j}$  et on définit sur  $M$  la fonction

$$W_{\varepsilon,\mathbf{h},\mathbf{k}} = \sum_j \chi_j' W_j^o(\cdot/r_\varepsilon).$$

Les perturbations sur  $\overline{M}_r$  seront alors du type

$$\omega + i\partial\bar{\partial}(\varepsilon^2\Gamma_{\mathbf{a}} + W_{\varepsilon,\mathbf{h},\mathbf{k}} + \psi)$$

avec  $\psi$  suffisamment petite. On a alors le résultat de perturbation suivant :

**Proposition 2.5.4. [APS] Proposition 6.2.** *Il existe  $\theta > 0$ ,  $c > 0$  et pour tout  $\kappa > 0$  il existe  $\varepsilon_\kappa > 0$  tel que pour tout  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\kappa)$  il existe une fonction  $\phi_{\varepsilon,\mathbf{h},\mathbf{k},\mathbf{a}} \in C^{4,\alpha}(\overline{M}_{r_\varepsilon})^T$ , un champ de vecteur  $Y_{\varepsilon,\mathbf{h},\mathbf{k},\mathbf{a}} \in \mathfrak{t}$  et une constante  $\lambda_{\varepsilon,\mathbf{h},\mathbf{k},\mathbf{a}}$  tels que sur  $\overline{M}_{r_\varepsilon}$  l'équation*

$$F(\varepsilon^2\Gamma_{\mathbf{a}} + W_{\varepsilon,\mathbf{h},\mathbf{k}} + \phi_{\varepsilon,\mathbf{h},\mathbf{k},\mathbf{a}}, X_s + \varepsilon^2 X_{\mathbf{a}} + Y_{\varepsilon,\mathbf{h},\mathbf{k}}, \lambda_{\varepsilon,\mathbf{h},\mathbf{k},\mathbf{a}}) = 0$$

soit satisfaite. La forme

$$\omega_{\varepsilon,\mathbf{h},\mathbf{k}} = \omega + i\partial\bar{\partial}(\varepsilon^2\Gamma_{\mathbf{a}} + W_{\varepsilon,\mathbf{h},\mathbf{k}} + \phi_{\varepsilon,\mathbf{h},\mathbf{k},\mathbf{a}})$$

est une forme de Kähler extrémale sur  $\overline{M}_{r_\varepsilon}$ . Enfin, on a les estimées suivantes :

$$\|Y_{\varepsilon,\mathbf{h},\mathbf{k},\mathbf{a}}\| + |s(\omega_{\varepsilon,\mathbf{h},\mathbf{k}}) - s| \leq c\varepsilon^\theta$$

et

$$\sup_j \|(\phi_{\varepsilon,\mathbf{h},\mathbf{k},\mathbf{a}})|_{\overline{B_{2r_\varepsilon}^j} \setminus B_{r_\varepsilon}^j}(r_\varepsilon \cdot)\|_{C^{4,\alpha}(\overline{B_2} \setminus B_1)/\Gamma_j} \leq cr_\varepsilon^4.$$

**Remarque 2.5.5.** *La dernière estimée est celle qui assure que les termes dominants du potentiel de perturbation sont bien les termes prescrits  $\varepsilon^2\Gamma_{\mathbf{a}} + W_{\varepsilon, \mathbf{h}, \mathbf{k}}$ .*

La preuve repose sur l'inversibilité à gauche de l'opérateur  $\mathcal{L}_\delta$  sur  $M^*$  de la proposition 2.5.2. On passe des fonctions sur  $M_r$  aux fonctions sur  $M^*$  via un opérateur d'extension qui est continu et on se ramène aux espaces de Hölder sur  $M^*$ . L'inversibilité à gauche de  $\mathcal{L}_\delta$  (proposition 2.5.2) permet alors de ramener le problème à un problème de point fixe de la forme

$$(f, X, c) = DF_0^{-1}(Q(f, X, c))$$

et le choix des espaces de Hölder ainsi que les estimations sur les normes des fonctions  $h_j$  et  $k_j$  permettent alors de conclure à l'existence de telles perturbations du potentiel de  $\omega$ .

## 2.6 Perturbation de la métrique sur $Y_R$ et recollement

On va maintenant perturber la métrique des modèles locaux. On pose

$$R_\varepsilon = \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon}$$

et si  $\pi_j : Y_j \rightarrow \mathbb{C}^2/\Gamma_j$  désigne la résolution de Hirzebruch-Jung de  $\mathbb{C}^2/\Gamma_j$  on pose

$$\overline{N}_R^j = Y_j \setminus \pi_j^{-1}(C_R/\Gamma_j)$$

et

$$N_R^j = Y_j \setminus \pi_j^{-1}(\overline{C}_R/\Gamma_j).$$

On rappelle que  $C_R = \mathbb{C}^2 \setminus \overline{B}_r$ . La section précédente nous fournit, pour chaque donnée de bord  $(\mathbf{a}, \mathbf{h}, \mathbf{k})$  une métrique extrémale perturbée et il s'agit, en appliquant les mêmes idées que dans la section précédente, de perturber les métriques  $\omega_{cs}^j$ . Cette fois-ci cependant le champ de vecteur extrémal est imposé par la métrique

$$\omega_{\varepsilon, \mathbf{h}, \mathbf{k}} = \omega + i\partial\bar{\partial}(\varepsilon^2\Gamma_{\mathbf{a}} + W_{\varepsilon, \mathbf{h}, \mathbf{k}} + \phi_{\varepsilon, \mathbf{h}, \mathbf{k}, \mathbf{a}})$$

dont le champ de vecteur extrémal est

$$X_{\varepsilon, \mathbf{h}, \mathbf{k}} = X_s + \varepsilon^2 X_{\mathbf{a}} + Y_{\varepsilon, \mathbf{h}, \mathbf{k}}.$$

On pose pour tout  $j$  la constante  $a'_j = \sqrt{a_j^1}$ . On se donne maintenant une collection de données de bord pour perturber les métriques sur les  $Y_R^j$ . On fixe des fonctions

$$\mathbf{h}' = (h'_j) \text{ et } \mathbf{k}' = (k'_j)$$

satisfaisant

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} \ h'_j \in C^{4, \alpha}(\partial B_1/\Gamma_j)^T \text{ et } k'_j \in C^{2, \alpha}(\partial B_1/\Gamma_j)^T,$$

$$\int_{\partial B_1/\Gamma_j} (8h - k) dvol_{g_0} = 0$$

et

$$\|h_j\|_{C^{4,\alpha}(\partial B_1/\Gamma_j)} + \|k_j\|_{C^{2,\alpha}(\partial B_1/\Gamma_j)} \leq \kappa R_\varepsilon^{-1}$$

On pose également

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \eta_j = \int_{\partial B_1/\Gamma_j} s(\omega_{\varepsilon, \mathbf{h}, \mathbf{k}})(r_\varepsilon \cdot) d\text{vol}_{g_0}.$$

Le champ de vecteur  $X_{\varepsilon, \mathbf{h}, \mathbf{k}}$  se relève en un champ de vecteur  $X'_j$  sur chaque composante  $\overline{N}_{R_\varepsilon/a'_j}^j$  et d'après le lemme 2.4.1, on peut supposer que son action infinitésimale est un champ de Killing pour la métrique  $\omega_{cs}^j$ . Ces constantes  $\eta_j$  et ces champs de vecteurs  $X'_j$  vont être imposés à la perturbation des métriques  $\omega_{cs}^j$ . De plus, les données de bord  $h_j$  et  $k_j$  nous permettent de construire des fonctions ([API] proposition 5.6.)

$$W_j^i \in C_1^{4,\alpha}(\overline{B}_1/\Gamma_j)^T$$

satisfaisant

$$\Delta_{\omega_0}^2 W_j^i = 0 \text{ dans } \overline{B}_1/\Gamma_j$$

et

$$W_j^i = h'_j \text{ et } \Delta_{\omega_0} W_j^i = k'_j \text{ sur } \partial B_1/\Gamma_j.$$

et de normes contrôlées :

$$\|W_j^i\|_{C_1^{4,\alpha}(\overline{B}_1/\Gamma_j)} \leq \|h'_j\|_{C^{4,\alpha}(\partial B_1/\Gamma_j)} + \|k'_j\|_{C^{2,\alpha}(\partial B_1/\Gamma_j)}.$$

On définit des fonctions plateaux  $\chi'_j$  qui valent 0 dans  $N_1^j$  et 1 dans  $\pi_j^{-1}(C_2/\Gamma_j)$  et on pose

$$W_{\varepsilon, a'_j, h'_j, k'_j}^j = \chi'_j W_j^i(a'_j \pi_j(\cdot)/R_\varepsilon).$$

On peut alors énoncer le résultat suivant :

**Proposition 2.6.1.** *Il existe  $\theta > 0$ ,  $c > 0$  et pour tout  $\kappa > 0$  il existe  $\varepsilon_\kappa > 0$  tel que pour tout  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\kappa)$  il existe des fonctions  $\phi_{\varepsilon, a'_j, \eta_j, X'_j, h'_j, k'_j}^j \in C^{4,\alpha}(\overline{N}_{R_\varepsilon/a'_j}^j)^T$  telles que  $\forall j \in \{1, \dots, n\}$  la forme*

$$\omega^j = (a'_j)^2 \omega_{cs}^j + i\partial\bar{\partial}(W_{\varepsilon, a'_j, h'_j, k'_j}^j + \phi_{\varepsilon, a'_j, \eta_j, X'_j, h'_j, k'_j}^j)$$

soit une forme de Kähler extrémale sur  $\overline{N}_{R_\varepsilon/a'_j}$ . Sa courbure scalaire  $s_j = s(\omega^j)$  satisfait

$$-ds_j = \varepsilon^4 \omega^j(X'_j, \cdot)$$

et

$$\int_{\partial B_1/\Gamma_j} s_j(R_\varepsilon \cdot /a'_j) d\text{vol}_{g_0} = \varepsilon^2 \eta_j \text{vol}(\partial B_1/\Gamma_j)$$

Enfin, on a les estimées suivantes :

$$\|(\phi_{\varepsilon, a'_j, \eta_j, X'_j, h'_j, k'_j}^j)(R_\varepsilon \cdot /a'_j)\|_{C^{4,\alpha}(\overline{B}_1 \setminus B_{1/2}/\Gamma_j)} \leq c R_\varepsilon^{-1}.$$

Les formes de Kähler ainsi perturbées ont comme champ de vecteur extrémal le champ de vecteur prescrit par la forme  $\omega_{\varepsilon, \mathbf{h}, \mathbf{k}}$ . De plus, les perturbations de la forme  $W_{\varepsilon, a'_j, h'_j, k'_j}^j + \phi^j$  permettent de contrôler suffisamment les potentiels sur les bords pour assurer le recollement par la suite. La condition sur la moyenne au bord de  $s_j$  est une condition de normalisation.

**Preuve: schéma de preuve, voir [APS] proposition 6.4.** On donne seulement les grandes lignes de la démonstration, la preuve étant la même que celle de la proposition 6.4. de l'article [APS], cette fois-ci utilisant la métrique de Joyce, Calderbank et Singer. On se ramène au cas d'une unique singularité et on omet l'indice  $j$  pour plus de lisibilité.

La courbure scalaire admet le développement suivant :

$$s(a^2\omega_{cs} + i\partial\bar{\partial}f) = -\frac{1}{2}a^{-4}L_{\omega_{cs}}f + a^{-2}Q_{\omega_{cs}}(a^{-2}\nabla^2f)$$

où l'opérateur  $Q_{\omega_{cs}}(a^{-2}\nabla^2f)$  rassemble les termes d'ordre supérieur. On cherche une fonction  $f$  qui soit  $T$ -invariante et telle que

$$-ds(a^2\omega_{cs} + i\partial\bar{\partial}f) = (a^2\omega_{cs} + i\partial\bar{\partial}f)(X_{\varepsilon, \mathbf{h}, \mathbf{k}}, \cdot).$$

Autrement dit, on cherche  $f$  telle que  $s(a^2\omega_{cs} + i\partial\bar{\partial}f)$  soit un hamiltonien pour  $X_{\varepsilon, \mathbf{h}, \mathbf{k}}$  par rapport à la forme symplectique  $a^2\omega_{cs} + i\partial\bar{\partial}f$ . D'après le lemme 4.1. de [APS], si  $\zeta$  est un hamiltonien pour  $X_{\varepsilon, \mathbf{h}, \mathbf{k}}$  par rapport à  $a^2\omega_{cs}$ ,

$$\zeta - \frac{1}{2}J\mathcal{L}_{X_{\varepsilon, \mathbf{h}, \mathbf{k}}}f$$

est un hamiltonien pour  $X_{\varepsilon, \mathbf{h}, \mathbf{k}}$  par rapport à  $a^2\omega_{cs} + i\partial\bar{\partial}f$ . Si  $f$  est  $T$ -invariante,  $\mathcal{L}_{X_{\varepsilon, \mathbf{h}, \mathbf{k}}}f = 0$  et on voit alors que l'on impose la condition à la fonction  $f$  :

$$s(a^2\omega_{cs} + i\partial\bar{\partial}f) = \varepsilon^4(\zeta) + c_{s'}$$

où la constante  $c_{s'}$  est imposée par la condition de bord  $\eta'$ . L'équation se ramène alors à

$$-\frac{1}{2}a^{-4}L_{\omega_{cs}}f = -a^{-2}Q_{\omega_{cs}}(a^{-2}\nabla^2f) - \varepsilon^4(\zeta) + c_{s'}$$

et, décomposant  $f = W_{\varepsilon, a', h', k'} + \phi$ , le problème devient un problème de point fixe sur  $\phi$  si l'on peut trouver un inverse à gauche de  $L_{\omega_{cs}}$ . L'analyse se fait initialement sur  $\bar{N}_{R\varepsilon/a'}$  mais on peut définir un opérateur borné d'extension pour travailler sur  $N$ . Afin d'avoir les bonnes estimées sur la perturbation  $\phi$ , on définit des espaces de Hölder à poids appropriés :

Soit  $l \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$  et  $\delta \in \mathbb{R}$ . L'espace  $C_{\delta}^{l, \alpha}(N)$  est alors l'espace des fonctions de  $C_{loc}^{l, \alpha}(N)$  pour lesquelles la norme

$$\|f\|_{C_{\delta}^{l, \alpha}(N)} = \|f\|_{C^{l, \alpha}(N \setminus C_1)} + \sup_{R \geq R_0} R^{-\delta} \|f|_{C_2/\Gamma_j}(R \cdot)\|_{C^{l, \alpha}(\bar{B}_2 \setminus B_1)/\Gamma_j}$$

est finie. Et l'opérateur à inverser est alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{\delta} : C_{\delta}^{4, \alpha}(N)^T &\rightarrow C_{\delta-4}^{0, \alpha}(N)^T \\ f &\mapsto -\frac{1}{2}L_{\omega_{cs}}f. \end{aligned}$$

Les propositions 5.4. et 5.5. de [AP1] effectuant l'analyse de ces opérateurs dans le cas orbifold permettent alors de conclure que  $\mathcal{L}'_{\delta}$  est surjectif. Schématiquement, comme la métrique  $\omega_{cs}$  est ALE, les opérateurs  $L_{\omega_{cs}}$  et  $\Delta_{\omega_0}^2$  ont les mêmes racines indicielles. Celles du bi-Laplacien sont les entiers relatifs. En dehors de ces racines,  $\mathcal{L}'_{\delta}$  est Fredholm et  $\mathcal{L}'_{\delta}$  est surjectif si et seulement si  $\mathcal{L}'_{-\delta}$  est injectif. Or si  $\delta$  est négatif,  $\mathcal{L}'_{-\delta}$

est injectif car une solution de  $\mathcal{L}'_\delta = 0$  donne naissance à un champ de vecteur holomorphe que l'on prolonge grâce au théorème d'Hartogs à  $\mathbb{C}^2$ . La décroissance imposée par l'espace de Hölder à poids impose alors à ce champ de vecteur de s'annuler. Son potentiel d'holomorphie est donc constant, et encore une fois la décroissance imposée par  $C_\delta^{4,\alpha}(N)^T$  implique qu'il est nul.

L'opérateur  $\mathcal{L}_\delta$  est alors surjectif pour  $\delta \in (0, 1)$  et un théorème de point fixe permet de conclure comme pour la proposition 2.5.4. C.Q.F.D.

Il ne reste plus qu'à voir que l'on peut choisir les différentes données de bord  $\mathbf{h}, \mathbf{k}$ , et  $\mathbf{h}', \mathbf{k}'$  telles que les potentiels des métriques  $\omega_{\varepsilon, \mathbf{h}, \mathbf{k}}$  et  $\omega_j$  coïncident. D'après la proposition 3.1. de [APS], la métrique  $\omega$  admet les développement suivant sur les boules  $\overline{B}_{2r_\varepsilon}^j$

$$\omega = i\partial\bar{\partial}\left(\frac{1}{2}|z|^2 + \phi^j(z)\right),$$

où  $\phi^j = \mathcal{O}(|z|^4)$ . La métrique perturbée  $\omega_{\varepsilon, \mathbf{h}, \mathbf{k}}$  s'écrit alors

$$\omega_{\varepsilon, \mathbf{h}, \mathbf{k}} = i\partial\bar{\partial}\left(\frac{1}{2}|z|^2 + \phi^j(z) + \varepsilon^2\Gamma_{\mathbf{a}} + W_{\varepsilon, \mathbf{h}, \mathbf{k}} + \phi_{\varepsilon, \mathbf{h}, \mathbf{k}, \mathbf{a}}\right)$$

dans  $\overline{B}_{2r_\varepsilon}^j \setminus B_{r_\varepsilon}^j$ . On désignera alors par  $\mathcal{O}_{C^{l,\alpha}}(f)$  une fonction dont la norme  $C^{l,\alpha}$  est majorée par  $f$  multipliée par une constante indépendante de  $\varepsilon$  et  $\kappa$  pour  $\varepsilon$  suffisamment petit. On définit alors sur  $(\overline{B}_2 \setminus B_1)/\Gamma_j$  les potentiels

$$\psi^{o,j} = (\phi^j + \varepsilon^2\Gamma_{\mathbf{a}} + W_{\varepsilon, \mathbf{h}, \mathbf{k}} + \phi_{\varepsilon, \mathbf{h}, \mathbf{k}, \mathbf{a}})(r_\varepsilon \cdot)$$

On utilise le développement au point  $p_j$  (lemme 6.1. [APS])

$$\Gamma_{\mathbf{a}} = a_j \log(|z|) + b_j + c_j \cdot z + \mathcal{O}_0(|z|^2 \log(|z|))$$

avec  $b_j \in \mathbb{C}$  et  $c_j \in \mathbb{C}^n$ , et où  $\mathcal{O}_0(|z|^2 \log(|z|))$  désigne une fonction lisse définies en dehors de 0 dont les dérivées partielles par rapport aux champs de vecteurs  $|z|\partial_{z_i}$  et  $|z|\bar{\partial}_{z_i}$  sont bornées par une constante multipliée par  $|z|^2 \log(|z|)$ . Ce développement ainsi que les estimées de la proposition 2.5.4 impliquent le développement de  $\psi^{o,j}$  :

$$\psi^{o,j} = \varepsilon^2(a_j \log(r_\varepsilon) + b_j) + a_j \varepsilon^2 \log(|z|) + W_j^o + \mathcal{O}_{C^{4,\alpha}}(r_\varepsilon^4).$$

On a alors

$$\omega_{\varepsilon, \mathbf{h}, \mathbf{k}} = i\partial\bar{\partial}\left(\frac{1}{2}|z|^2 + \psi^{o,j}(r_\varepsilon \cdot)\right)$$

sur  $\overline{B}_{2r_\varepsilon}^j \setminus B_{r_\varepsilon}^j$ . On procède de même avec les métriques  $\omega_j$  en utilisant cette fois-ci le développement de la métrique de Joyce, Calderbank et Singer, ainsi que les estimées de la proposition 2.6.1 et on définit le potentiel qui définit les métriques  $\omega_j$  par

$$\varepsilon^2\omega_j = i\partial\bar{\partial}\left(\frac{1}{2}\varepsilon^2(a'_j)^2\frac{1}{2}|z|^2 + \psi^{i,j}\right)$$

dans  $B_{R_\varepsilon/a'_j}^j \setminus B_{R_\varepsilon/2a'_j}^j$ . On pose

$$\psi^{i,j} = \left(\varepsilon^2 a'_j \left(f^j - \frac{1}{2}|\cdot|^2\right) + \varepsilon^2 (W_{\varepsilon, a'_j, h'_j, k'_j}^j + \phi_{\varepsilon, a'_j, \eta_j, X'_j, h'_j, k'_j}^j)\right)(R_\varepsilon \pi_j(\cdot)/a'_j).$$

dans  $\pi_j^{-1}((\overline{B}_1 \setminus B_{\frac{1}{2}}))/\Gamma_j$  et  $\psi^{i,j}$  satisfait le développement

$$\psi^{i,j} = a_j^0 \varepsilon^2 \log(\varepsilon) + a_j^0 a_j^1 \varepsilon^2 \log(|\cdot|) + \varepsilon^2 W_{\varepsilon, a_j^1, h_j^1, k_j^1}^j + \mathcal{O}_{C^{4,\alpha}}(r_\varepsilon^4).$$

On ramène alors les métriques à  $(\overline{B}_2 \setminus B_1)/\Gamma_j$  et  $(\overline{B}_1 \setminus B_{\frac{1}{2}})/\Gamma_j$  et on obtient les expressions

$$\omega^{i,j} = i\partial\bar{\partial}\left(\frac{1}{2}|v|^2 + \psi^{o,j}\right)$$

et

$$\omega^{o,j} = i\partial\bar{\partial}\left(\frac{1}{2}|v|^2 + \psi^{i,j}\right).$$

On peut supprimer les constantes des potentiels, ceci ne change pas la métrique et on a alors

$$\psi^{i,j} = a_j \varepsilon^2 \log(|v|) + W_i^j + \mathcal{O}_{C^{4,\alpha}}(r_\varepsilon^4)$$

et

$$\psi^{o,j} = a_j \varepsilon^2 \log(|v|) + W_j^o + \mathcal{O}_{C^{4,\alpha}}(r_\varepsilon^4).$$

La fin de la preuve consiste alors à montrer que les conditions de bord  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{h}'$  et  $\mathbf{k}'$  peuvent être choisies de telle sorte que les fonctions  $W_i^j + \mathcal{O}_{C^{4,\alpha}}(r_\varepsilon^4)$  et  $W_j^o + \mathcal{O}_{C^{4,\alpha}}(r_\varepsilon^4)$  ainsi que leur dérivées jusqu'à l'ordre 3 coïncident sur le bord. On rappelle que les fonctions  $W_i^j$  et  $W_j^o$  satisfont les conditions de bord

$$W_j^i = h_j^i \text{ et } \Delta_{\omega_0} W_j^i = k_j^i$$

et

$$W_j^o = h_j^o \text{ et } \Delta_{\omega_0} W_j^o = k_j^o$$

et la recherche des bonnes données initiales peut être ramenée à un théorème de point fixe. La fin de la preuve est exactement celle de [APS], on renvoie à la section 7 de cet article pour cette démonstration. Il est alors possible de recoller les métriques, ce qui termine la preuve du théorème 2.1.2.

**Remarque 2.6.2.** *Les classes de Kähler obtenues sont calculées dans l'Annexe A, dans la section 5.4.*

## 2.7 Métriques extrémales sur les variétés toriques, équation d'Abreu

On va donner une première application du théorème 2.1.2 dans le cadre de la géométrie torique. On commence par rappeler les résultats utilisés dans la suite concernant les métriques extrémales sur les variétés toriques. Cette section suit l'exposé de l'article d'Abreu [A].

**Définition 2.7.1.** *On appelle orbifold symplectique torique de dimension  $2n$  la donnée  $(M, \omega, \tau)$  d'un orbifold (réel)  $M$  de dimension réelle  $2n$  muni d'une structure symplectique  $\omega$  et d'une action hamiltonienne effective du tore  $\mathbb{T}^n$  :*

$$\tau : \mathbb{T}^n \rightarrow \text{Diff}(M, \omega).$$

On appelle  $\xi$  l'application moment associée à cette action :

$$\xi : M \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*.$$

D'après les résultats de Atiyah [ATI] et Guillemin-Sternberg [GS], l'image  $\Delta = \xi(M)$  de l'application moment est, dans le cas lisse, l'enveloppe convexe des images des points fixés par l'action de  $\mathbb{T}^n$ . De plus, dans ce cas, un théorème de Delzant [Del] précise que le polytope  $\Delta$  détermine de manière unique la variété symplectique torique, à symplectomorphisme équivariant près. Ce résultat a été généralisé par Lerman et Tolman [LM] dans le cas orbifold, en ajoutant au polytope des labels. Dans les deux cas, la preuve de ce résultat associe au polytope labellé  $P$  un orbifold symplectique torique  $(M_P, \omega_P, \tau_P)$  construit explicitement. Cet orbifold est naturellement muni d'une structure complexe  $\mathbb{T}^n$ -invariante et compatible  $J_P$  et l'orbifold ainsi construit est kählérien.

La recherche de métriques extrémales sur un orbifold symplectique torique se fait alors en modifiant la structure complexe compatible avec la forme  $\omega_P$  fixée. Les résultats qui suivent proviennent de [A1] et [A2]. On note  $\xi_P$  l'application moment associée à l'action de  $\mathbb{T}^n$  sur  $M_P$ . Soit  $P^\circ$  l'intérieur de  $P$  et  $M_P^\circ = \xi_P^{-1}(P^\circ)$ .  $M_P^\circ$  est un ouvert lisse et dense de  $M_P$  et consiste en l'ensemble des points de  $M_P$  où l'action de  $\mathbb{T}^n$  est libre. On le munit d'un système de coordonnées symplectiques :

$$M_P^\circ \simeq P^\circ \times \mathbb{T}^n = \{(x, \theta) / x \in P^\circ, \theta \in R^n / 2\pi\mathbb{Z}^n\}$$

et dans ces coordonnées symplectiques

$$\omega_P = dx \wedge d\theta = \sum_j dx_j \wedge d\theta_j.$$

Toute structure presque-complexe  $J$  intégrable, torique et  $\omega_P$ -compatible sur  $M_P$  permet de définir un *potentiel*  $g \in C^\infty(P^\circ)$ . On peut choisir les coordonnées symplectiques  $(x, \theta)$  de  $\omega_P$  telles que  $J$  ait la forme

$$J = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & -G^{-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ G & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

avec  $G(x) = [\frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_k}(x)]_{j,k}$ . En particulier,  $G$  est symétrique, définie, positive et la métrique de Kähler associée  $g_J = \omega_P(\cdot, J\cdot)$  est donnée dans ces coordonnées par la matrice :

$$\begin{bmatrix} G & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & G^{-1} \end{bmatrix}.$$

On pose alors  $g^{jk}$  les coefficients de la matrice  $G^{-1}$  dans ces coordonnées et la courbure scalaire de  $g_J$  est alors donnée par la formule :

$$s_{g_J} = - \sum_{jk} \frac{\partial^2 g^{jk}}{\partial x_j \partial x_k}.$$

L'équation des métriques extrémales devient alors

$$\frac{\partial s_{g_J}}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1..n.$$

Autrement dit, la métrique  $g_J$  est extrémale si et seulement si la courbure scalaire est une fonction affine du paramètre  $x$ . Le cadre torique fournit alors un contexte où la recherche de métriques extrémales est simplifiée. On notera les travaux de Abreu [A] et Legendre [Le] qui fournissent des exemples explicites d'orbifolds kählériens extrémaux en résolvant cet équation. En particulier, Abreu retrouve les métriques Bochner-Kähler construites par Bryant [B] sur les espaces projectifs à poids. On rappelle leur définition :

**Définition 2.7.2.** Soit  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{n+1}) \in (\mathbb{N}^*)^{n+1}$ . On définit une action de  $\mathbb{C}^*$  sur  $\mathbb{C}^{n+1}$  associée aux poids  $\mathbf{a}$  par

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{C}^{n+1} \\ (t, z_1, \dots, z_{n+1}) &\mapsto (t^{a_1} z_1, \dots, t^{a_{n+1}} z_{n+1}) \end{aligned}$$

et on définit l'espace projectif à poids  $\mathbb{C}\mathbb{P}_{\mathbf{a}}^n$  comme le quotient de  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus 0$  sous cette action :

$$\mathbb{C}\mathbb{P}_{\mathbf{a}}^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus 0) / \mathbb{C}^*.$$

Ces variétés sont des orbifolds kählériens toriques. Abreu obtient alors le résultat suivant :

**Théorème 2.7.3. Abreu, [A] corollaire 1** Chaque espace projectif à poids  $\mathbb{C}\mathbb{P}_{\mathbf{a}}^n$  admet une métrique extrémale.

**Remarque 2.7.4.** V.Apostolov m'a souligné le fait que l'existence de ces métriques peut être vue comme une conséquence d'un résultat de Webster. Ce dernier identifie la courbure de Bochner du quotient kählérien d'une structure sasakienne avec la courbure de Chern-Moser de la structure CR correspondante. Ensuite, le fait qu'une métrique de Kähler à courbure de Bochner nulle soit extrémale permet de conclure.

On va utiliser ce résultat afin d'appliquer le théorème 2.1.2. Pour cela, il nous faut tout d'abord étudier les singularités de ces espaces. Soit  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in (\mathbb{N}^*)^3$ . On note  $[z_1, z_2, z_3]$  les coordonnées homogènes de  $\mathbb{C}\mathbb{P}_{\mathbf{a}}^2$ . On remarque tout d'abord que les points  $z = [z_1, z_2, z_3] \in \mathbb{C}\mathbb{P}_{\mathbf{a}}^2$  pour lesquels les  $z_i$  sont tous non nuls sont des points réguliers de la variété. Ensuite, si deux des poids ne sont pas premiers entre eux, par exemple  $a_1$  et  $a_2$ , la droite  $\{z_3 = 0\}$  a un stabilisateur non trivial sous l'action de  $\mathbb{C}^*$ , ce qui donne lieu à des points singuliers non isolés. On suppose alors les poids  $a_i$  deux à deux premiers entre eux. Dans ce cas, les seuls points éventuellement singuliers sont les points isolés  $[0, 0, 1]$ ,  $[0, 1, 0]$  et  $[1, 0, 0]$ . Dans la carte  $\{z_3 \neq 0\}$  par exemple, la singularité provient du quotient sous l'action

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_{a_3} \times \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{C}^2 \\ (\zeta_{a_3}^j, (w_1, w_2)) &\mapsto (\zeta_{a_3}^{a_1 j} w_1, \zeta_{a_3}^{a_2 j} w_2) \end{aligned}$$

où  $\mathbb{Z}_{a_3}$  désigne le groupe cyclique des racines  $a_3$ -ème de l'unité et  $\zeta_{a_3}$  est une racine primitive  $a_3$ -ème de l'unité. En particulier le résultat de Cartan 2.2.4 implique que cette singularité est du type Hirzebruch-Jung.

On peut alors énoncer le théorème suivant :



**Théorème 2.7.5.** Soit  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in (\mathbb{N}^*)^3$ . On suppose les  $(a_i)$  deux à deux premiers entre eux. Soit  $\pi : \widetilde{\mathbb{C}\mathbb{P}}_{\mathbf{a}}^2 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}_{\mathbf{a}}^2$  la résolution de Hirzebruch-Jung de  $\mathbb{C}\mathbb{P}_{\mathbf{a}}^2$ . Soient  $E_j$  les sphères holomorphes qui forment les diviseurs exceptionnels de la résolution. Alors pour tout choix de nombres positifs  $b_j$  il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que  $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  il existe une métrique extrémale sur  $\widetilde{\mathbb{C}\mathbb{P}}_{\mathbf{a}}^2$  dans la classe de Kähler

$$[\pi^*\omega] - \varepsilon^2 \sum_j b_j PD[E_j]$$

*Preuve:* D'après ce qui précède, les singularités de  $\mathbb{C}\mathbb{P}_{\mathbf{a}}^2$  sont isolés et du type Hirzebruch-Jung. On obtient alors le résultat en appliquant le théorème 2.1.2 à  $\mathbb{C}\mathbb{P}_{\mathbf{a}}^2$  muni de la métrique extrémale construite par Abreu 2.7.3. C.Q.F.D.

On va donner un exemple précis de nouvelle métrique obtenue par ce procédé. L'espace de départ considéré est  $\mathbb{C}\mathbb{P}_{(1,2,3)}^2$ . L'étude de l'éventail associé à cet orbifold, suivant Fulton [Fu], permet alors de décrire la résolution d'Hirzebruch-Jung comme un éclatement itéré trois fois de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ . On va décrire cet éclatement. Soit  $\widetilde{\mathbb{C}\mathbb{P}}^2$  l'éclatement itéré trois fois de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$  supportant la chaîne de courbes :

$$\frac{H}{-2} \circ \frac{E_3}{-1} \circ \frac{E_2}{-2} \circ \frac{E_1}{-2}$$

Ici  $H$  est la transformée stricte d'une ligne de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$  où repose le premier point d'éclatement.  $E_1, E_2$  et  $E_3$  sont les transformées strictes des premier, deuxième et troisième diviseurs exceptionnels. Les points représentent les intersections et les nombres sous les lignes sont les auto-intersections des courbes. On obtient cette chaîne de courbes en éclatant un premier point intersection de deux hyperplans sur  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$  :

$$\frac{\quad}{1} \circ \frac{\quad}{1}$$

on obtient alors :

$$\frac{H}{0} \circ \frac{E_1}{-1} \circ \frac{\quad}{0}$$

où l'on note  $H$  pour la transformée stricte d'un hyperplan contenant le point éclaté et  $E_1$  le premier diviseur exceptionnel. On éclate alors l'intersection de  $H$  et  $E_1$  :

$$\frac{H}{-1} \circ \frac{E_2}{-1} \circ \frac{E_1}{-2}$$

On note  $E_2$  le deuxième diviseur exceptionnel et on garde les notations précédentes pour désigner les transformées strictes de  $H$  et  $E_1$ . Enfin, on éclate l'intersection de  $H$  et  $E_2$  :

$$\frac{H}{-2} \circ \frac{E_3}{-1} \circ \frac{E_2}{-2} \circ \frac{E_1}{-2} .$$

**Corollaire 2.7.6.** Pour tout nombres positifs  $a, a_1, a_2, a_3$  il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que pour tout  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ , il y a une métrique extrémale  $\omega_\varepsilon$  à courbure scalaire non-constante  $\widetilde{\mathbb{C}\mathbb{P}}^2$  qui satisfait

$$[\omega_\varepsilon] \cdot H = \varepsilon^2 a_3,$$

$$[\omega_\varepsilon] \cdot E_3 = a, [\omega_\varepsilon] \cdot E_2 = \varepsilon^2 a_2$$

et

$$[\omega_\varepsilon] \cdot E_1 = \varepsilon^2 a_1.$$

**Remarque 2.7.7.** *Si on considère  $\mathbb{F}_1$  munie de la métrique de Calabi et si l'on utilise la méthode d'Arezzo, Pacard et Singer pour construire une métrique extrémale sur  $\widetilde{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$ , on obtient des classes de Kähler de la forme*

$$[\omega_\varepsilon] \cdot H = b,$$

$$[\omega_\varepsilon] \cdot E_3 = \varepsilon^2 a_3, \quad [\omega_\varepsilon] \cdot E_2 = \varepsilon^2 a_2$$

*et*

$$[\omega_\varepsilon] \cdot E_1 = a.$$

*avec  $a$  et  $b$  des nombres positifs et  $\varepsilon$  petit. Les classes de Kähler obtenues dans le corollaire 2.7.6 sont donc nouvelles.*

La preuve de ce résultat est donnée dans l'Annexe A, section 6.1.

## Chapitre 3

# Structures paraboliques et métriques extrémales

Dans ce chapitre on s'intéresse au cas des surfaces réglées. On commencera par rappeler des résultats concernant l'existence de métriques extrémales et la stabilité de la fibration. Puis on exposera les résultats obtenus dans le cas des surfaces réglées paraboliques instables.

### 3.1 Variétés réglées et métriques à courbure scalaire constante

Soit  $M$  une surface géométriquement réglée, espace total d'un fibré projectif

$$\mathbb{P}(E) \rightarrow \Sigma$$

où  $E \rightarrow \Sigma$  est un fibré holomorphe de rang deux sur une surface de Riemann compacte  $\Sigma$  de genre  $g$ . Sauf mention explicite, les surfaces de Riemann considérées dans cette section sont compactes. L'existence d'une métrique extrémale sur  $M$  est fortement liée à la stabilité du fibré  $E$ . On rappelle tout d'abord la notion de stabilité pour un fibré.

**Définition 3.1.1.** Soit  $F \rightarrow \Sigma$  un fibré holomorphe de rang  $r$  sur une surface de Riemann  $\Sigma$ . On appelle pente de  $F$  le nombre rationnel

$$\mu(F) = \frac{\deg(F)}{r}$$

avec  $\deg(F)$  le degré de  $F$ . Le fibré  $F$  est alors stable (resp. semi-stable) si pour tout sous-fibré holomorphe  $G \subset F$ , on a  $\mu(G) < \mu(F)$  (resp  $\mu(G) \leq \mu(F)$ ). Sinon,  $F$  est dit instable.

On s'intéresse au cas particulier du rang 2 et dans ce cas on voit que la stabilité est caractérisée par le nombre

$$t(E) = \max_{L \subset E} \deg(L) - \frac{\deg(E)}{2}$$

où le max est pris sur l'ensemble des sous-fibrés holomorphes en droites de  $E$ . On a également la notion de polystabilité :

**Définition 3.1.2.** Soit  $E$  un fibré holomorphe de rang deux sur une surface de Riemann  $\Sigma$ . On dit que  $E$  est polystable si  $E$  est stable ou s'il existe deux fibrés en ligne holomorphes  $L_1$  et  $L_2$  sur  $\Sigma$  et de même degré tels que  $E = L_1 \oplus L_2$ .

Le théorème de Narasimhan et Seshadri [NS] permet de faire un premier lien entre la stabilité du fibré  $E$  et l'existence de métriques extrémales sur sa projectivisation :

**Théorème 3.1.3. Narasimhan et Seshadri, [NS]** Soit  $F \rightarrow \Sigma$  un fibré holomorphe de rang  $r$  sur une surface de Riemann  $\Sigma$ .  $F$  est polystable si et seulement si il existe une représentation projective unitaire du groupe fondamental de  $\Sigma$

$$\rho : \pi_1(\Sigma) \rightarrow PU(r)$$

telle que

$$\mathbb{P}(F) = (\tilde{\Sigma} \times \mathbb{C}\mathbb{P}^r) / \pi_1(\Sigma)$$

où  $\tilde{\Sigma}$  désigne le revêtement universel de  $\Sigma$  et l'action de  $\pi_1(\Sigma)$  est l'action du revêtement universel sur le premier facteur et  $\rho$  sur le deuxième.

En particulier, si  $E$  est polystable, l'action de  $\pi_1(\Sigma)$  sur  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  muni de la métrique de Fubini-Study est une action par isométries. Il en est de même sur le revêtement universel muni de sa métrique standard d'après le théorème d'uniformisation. La métrique produit sur  $\tilde{\Sigma} \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  passe alors au quotient et donne une métrique à courbure scalaire constante sur  $\mathbb{P}(E)$ . Dans l'autre direction, Burns et Bartolomeis ont démontré [BB] que si le genre  $g$  est supérieur à deux, il existe une métrique kählérienne à courbure scalaire nulle sur  $\mathbb{P}(E)$  si et seulement si  $E$  est polystable. De nombreux auteurs ont travaillé sur le lien entre la stabilité de  $\mathbb{P}(E)$ , la stabilité du fibré  $E$  et l'existence d'une métrique extrémale sur  $\mathbb{P}(E)$ . On renvoie à [ACGT] pour plus de références et on se limitera à citer le résultat :

**Théorème 3.1.4. Apostolov, Calderbank, Gauduchon, Tønnesen-Friedman[ACGT]** Soit  $\mathbb{P}(E)$  un fibré holomorphe projectif sur une surface de Riemann de genre supérieur à deux. Alors  $\mathbb{P}(E)$  admet une métrique à courbure scalaire constante dans une classe de Kähler (et donc dans toutes les classes de Kähler) si et seulement si  $E$  est polystable.

On va maintenant s'intéresser aux surfaces géométriquement réglées munie d'une structure parabolique.

## 3.2 Structures paraboliques stables et métriques CSC

Une généralisation du théorème de Narasimhan et Seshadri a été démontrée par Metha et Seshadri [MS] dans le cadre des fibrés paraboliques. La structure parabolique ajoutée permet de prendre en compte le cas de certaines surfaces de Riemann non-compactes, à savoir des surfaces de Riemann compactes privées d'un nombre fini de points appelés *points marqués*. On citera alors des résultats de Rollin et Singer qui font le lien entre la stabilité parabolique et l'existence d'une métrique à courbure scalaire constante. On se limite au cas de la dimension deux mais les notions de structures paraboliques et stabilité parabolique existent pour les fibrés de rang supérieur.

**Définition 3.2.1.** Soit  $\Sigma$  une surface de Riemann compacte munie d'un nombre fini de points marqués  $A_j$ . Soit  $E \rightarrow \Sigma$  un fibré holomorphe de rang deux sur  $\Sigma$ . Une

structure parabolique  $\mathcal{P} = (B_j, \alpha_j)$  sur  $\mathbb{P}(E)$  consiste en la donnée pour chaque point  $A_j$  d'un point  $B_j$  dans la fibre de  $\mathbb{P}(E)$  au-dessus de  $A_j$  ainsi que d'un poids  $\alpha_j = \frac{p_j}{q_j} \in ]0, 1[ \cap \mathbb{Q}$ ,  $p_j$  et  $q_j$  premiers entre eux. Une surface  $\mathbb{P}(E)$  munie d'une structure parabolique  $\mathcal{P}$  sera appelée une surface réglée parabolique.

La définition donnée ici correspond à la notion de structure parabolique pour les fibrés donnée par Metha et Seshadri [MS]. Dans le cas de fibré de rang deux, une structure parabolique est la donnée pour chaque point marqué  $A_j$  d'une filtration

$$F_1 E_{A_j} = E_{A_j} \supset F_2 E_{A_j} = L_j \supset 0$$

et de poids  $0 \leq \mu_1^j \leq \mu_2^j < 1$ . La structure définie dans la définition 3.2.1 fournit une telle filtration en considérant les lignes  $L_j$  correspondant au point  $B_j$  et les poids  $\mu_1^j = 0$  et  $\mu_2^j = \alpha_j$ . On définit maintenant les notions de stabilité associées.

**Définition 3.2.2.** Soit  $M = \mathbb{P}(E)$  une surface réglée parabolique et  $\mathcal{P} = (B_j, \alpha_j)$  la structure associée. On note  $\pi$  la projection de  $\mathbb{P}(E)$  sur la surface de Riemann associée. Pour toute section holomorphe  $S \subset \mathbb{P}(E)$  de  $\pi$ , on appelle pente de  $S$  l'entier relatif  $\mu(S)$  :

$$\mu(S) = S^2 + \sum_{B_j \notin S} \alpha_j - \sum_{B_j \in S} \alpha_j.$$

La surface réglée parabolique  $M$  est alors stable (resp. semi-stable) si et seulement si pour toute section  $S$  de  $\pi$  on a  $\mu(S) > 0$  (resp.  $\mu(S) \geq 0$ ). On dit que  $M$  est polystable si elle est stable où si elle est semi-stable et admet deux sections holomorphes ne s'intersectant pas et de pentes nulles.

On notera l'analogie de ces définitions avec les notions de stabilité des fibrés. En fait, ces définitions sont équivalentes aux définitions de stabilité données par Metha et Seshadri [MS]. Leur notion de stabilité fait intervenir la *pente parabolique* du fibré  $E$  muni des filtrations et des poids comme ci-dessus. Dans ce cas la pente parabolique de  $E$  est donnée par :

$$\mu_p(E) = \frac{\text{degpar}(E)}{\text{rang}(E)}$$

où le *degré parabolique* est défini par

$$\text{degpar}(E) = \text{deg}(E) + \sum_j \mu_1^j + \mu_2^j.$$

Chaque section  $S$  de  $\pi : \mathbb{P}(E) \rightarrow \Sigma$  donne alors un sous-fibré  $L$  de  $E$  et sa pente parabolique est

$$\mu_p(L) = \frac{\text{degpar}(L)}{\text{rang}(L)}$$

avec

$$\text{degpar}(L) = \text{deg}(L) + \sum_j \mu_2^j.$$

L'homologie  $H^2(\mathbb{P}(E), \mathbb{Z})$  est engendrée par la classe d'une fibre  $F$  et  $H = c_1(\mathcal{O}(1))$  la première classe de Chern du fibré hyperplan (voir [Be]). On a les relations suivantes

$$H^2 = \text{deg}(E), F^2 = 0 \text{ et } F \cdot H = 1$$

et

$$S = H + \deg(L)F$$

donc

$$S^2 = \deg(E) - 2\deg(L).$$

On en déduit que la pente de  $S$  vérifie

$$\mu(S) = \deg(E) - 2\deg(L) + \sum_j \alpha_j - 2 \sum_{Q_j \in S} \alpha_j$$

donc

$$\mu(S) = \deg(E) - 2\deg(L) + \sum_j \mu_1^j + \mu_2^j - 2 \sum_{Q_j \in S} \mu_2^j$$

et  $\mu(S) > 0$  est alors équivalent à

$$\mu_p(L) < \mu_p(E).$$

La stabilité parabolique au sens de Metha et Seshadri est définie par

$$\forall L \subset E, \mu_p(L) < \mu_p(E)$$

où l'on considère tous les sous-fibrés holomorphe de  $E$ . Les deux définitions de stabilité parabolique sont donc les mêmes. Si  $\Sigma$  est une surface de Riemann munie de points marqués  $A_j$ , on note  $\Sigma^*$  la surface de Riemann  $\Sigma \setminus \{A_i\}$ . On peut alors énoncer le théorème de Metha et Seshadri :

**Théorème 3.2.3. Metha-Seshadri, [MS]** Soit  $F$  un fibré holomorphe parabolique de rang 2 et de degré parabolique 0 sur une surface de Riemann  $\Sigma$ . On note  $\mu_1^j$  et  $\mu_2^j$  les poids associés à la structure parabolique.  $F$  est paraboliquement stable si et seulement si il existe une représentation unitaire irréductible de  $\pi_1(\Sigma^*)$  dans  $U(2)$

$$\rho : \pi_1(\Sigma^*) \rightarrow U(2)$$

qui envoie un lacet  $l_j$  autour du point marqué  $A_j$  sur une matrice conjuguée à la matrice

$$\begin{bmatrix} e^{2i\pi\mu_1^j} & 0 \\ 0 & e^{2i\pi\mu_2^j} \end{bmatrix}$$

et telle que

$$F = \mathbb{C}^2 \times \tilde{\Sigma} / \pi_1(\Sigma^*).$$

où l'action est donnée par le revêtement universel sur le premier facteur et par  $\rho$  sur le deuxième.

Ce théorème est démontré par Metha et Seshadri pour des fibrés de rang supérieur.

Supposons que  $\mathbb{P}(E)$  soit une surface réglée parabolique stable sur  $\Sigma$ . D'après le théorème de Metha et Seshadri, il existe

$$\rho : \pi_1(\Sigma^*) \rightarrow U(2)$$

et telle que

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \tilde{\Sigma} / \pi_1(\Sigma^*).$$

Ceci permet à Rollin et Singer d'obtenir le résultat suivant :

**Théorème 3.2.4. Rollin et Singer, [RS2]** Soit  $M \rightarrow \Sigma$  une surface parabolique polystable et non-sporadique. Alors l'éclatement itéré associé à  $M$  admet une métrique à courbure scalaire constante.

Les structures sporadiques de cet énoncé correspondent à quelques cas particuliers exclus pour des raisons techniques. L'éclatement itéré associé est décrit par une procédure que l'on va exposer dans la section suivante. L'idée de la preuve consiste à associer à  $M$  une surface orbifold  $\overline{M}$  munie d'une métrique à courbure scalaire constante. Pour cela, on définit via la structure parabolique  $\mathcal{P} = (B_j, \frac{p_j}{q_j})$  une surface de Riemann orbifold  $\overline{\Sigma}$  qui est topologiquement équivalente à  $\Sigma$  mais avec les points orbifolds  $A_j$  de groupes orbifolds  $\mathbb{Z}_{q_j}$ . Cet orbifold est obtenu sous la forme

$$\overline{M} = \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \tilde{\Sigma} / \pi_1^{orb}(\Sigma)$$

avec une représentation du groupe fondamental orbifold  $\pi_1^{orb}(\Sigma)$  de la surface  $\overline{\Sigma}$  obtenue grâce au théorème de Metha et Seshadri. Le théorème de recollement d'Arezzo et Pacard [AP2] dans le cas CSC s'adapte alors et permet de munir une résolution de cet orbifold d'une métrique CSC. Ensuite, la structure parabolique  $\mathcal{P}$  de  $M$  encode un éclatement itéré  $Bl(M, \mathcal{P})$  de cette dernière. La représentation  $\rho$  permet de montrer que  $Bl(M, \mathcal{P})$  et la résolution de  $\overline{M}$  sont isomorphes, ce qui donne le résultat.

Dans la section suivante, on va s'intéresser au cas des structures paraboliques instables.

### 3.3 Structures paraboliquement instables et métriques extrémales

Soit  $\mathbb{P}(E)$  une surface géométriquement réglée fibrant sur une surface de Riemann  $\Sigma$  de genre  $g$ . Le théorème 3.1.4 relate la stabilité de  $E$  à l'existence d'une métrique à courbure scalaire constante sur  $\mathbb{P}(E)$ . Dans le cas des métriques extrémales, on a le résultat suivant due à Tønnesen-Friedman :

**Théorème 3.3.1. Tønnesen-Friedman [Tf]**  $M = \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus L)$  avec  $\deg(L) > 0$ , si et seulement si  $M$  admet une métrique extrémale à courbure scalaire non-constante.

On remarque que dans ce cas le fibré est instable.

Le théorème [ACGT] a son analogue partiel dans le cas des surfaces réglées paraboliques quitte à remplacer  $M$  par un éclatement itéré encodé par la structure parabolique. On peut alors s'intéresser à une généralisation des résultats de Rollin et Singer pour les métriques extrémales à courbure scalaire non-constantes, avec une structure parabolique instable. Les résultats qui suivent sont issus de l'Annexe A et on en trouvera les preuves dans la section 5.2.

On s'intéresse au problème suivant : Si  $\mathcal{P}$  est une structure parabolique instable sur  $M = \mathbb{P}(E)$ , y a-t-il une métrique extrémale à courbure scalaire non-constante sur l'éclatement itéré  $Bl(M, \mathcal{P})$  associé à cette structure parabolique ?

On rappelle tout d'abord la construction de  $Bl(M, \mathcal{P})$  :

$$\Phi : Bl(M, \mathcal{P}) \rightarrow M.$$

Supposons que la structure parabolique de  $M$  consiste en un point  $B$  dans la fibre  $F$  au-dessus de  $A \in \Sigma$ , et du poids  $\alpha = \frac{p}{q}$ . On note les développements en fractions continues de  $\frac{p}{q}$  et  $\frac{q-p}{q}$  par :

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{e_1 - \frac{1}{e_2 - \dots \frac{1}{e_k}}}$$

et

$$\frac{q-p}{q} = \frac{1}{e'_1 - \frac{1}{e'_2 - \dots \frac{1}{e'_l}}}$$

On suppose que les entiers  $e_i$  et  $e'_i$  sont plus grands que 2 pour assurer l'unicité de ces développements. Alors d'après la proposition 2.1.1. de [RS] il existe un unique éclatement itéré

$$\Phi : Bl(M, \mathcal{P}) \rightarrow M$$

avec  $\Phi^{-1}(F)$  égale à la chaîne de courbes suivante :

$$\overset{-e_1}{\text{---}} \circ \overset{-e_2}{\text{---}} \circ \text{---} \circ \overset{-e_{k-1}}{\text{---}} \circ \overset{-e_k}{\text{---}} \circ \overset{-1}{\text{---}} \circ \overset{-e'_i}{\text{---}} \circ \overset{-e'_{i-1}}{\text{---}} \circ \text{---} \circ \overset{-e'_2}{\text{---}} \circ \overset{-e'_1}{\text{---}} \text{---} .$$

Les traits sont les courbes rationnelles d'auto-intersection les nombres au-dessus d'eux. Les points représentent les intersections de ces courbes. La courbe d'auto-intersection  $-e_1$  est la transformée stricte de  $F$ .

Pour obtenir cet éclatement, on commence par éclater le point  $B$  pour obtenir :

$$\overset{\text{---}}{\text{---}} \circ \overset{\text{---}}{\text{---}} .$$

La courbe de gauche est la transformée stricte de  $F$  et celle de droite le premier diviseur exceptionnel. On éclate ensuite l'intersection de ces deux points :

$$\overset{\text{---}}{\text{---}} \circ \overset{\text{---}}{\text{---}} \circ \overset{\text{---}}{\text{---}} .$$

Ensuite, on itère le procédé en choisissant à chaque étape l'un des deux points d'intersection que le dernier diviseur exceptionnel fournit et on obtient :

$$\overset{-e_1}{\text{---}} \circ \overset{-e_2}{\text{---}} \circ \text{---} \circ \overset{-e_{k-1}}{\text{---}} \circ \overset{-e_k}{\text{---}} \circ \overset{-1}{\text{---}} \circ \overset{-e'_i}{\text{---}} \circ \overset{-e'_{i-1}}{\text{---}} \circ \text{---} \circ \overset{-e'_2}{\text{---}} \circ \overset{-e'_1}{\text{---}} \text{---} .$$

Si la structure parabolique possède plus de points marqués, on effectue ce procédé pour chacun des points et on obtient  $Bl(M, \mathcal{P})$ .

La donnée d'une métrique extrémale sur  $Bl(M, \mathcal{P})$  impose des restrictions sur la structure parabolique et sur  $E$ , comme dans le cas du théorème de Tønnesen :



**Proposition 3.3.2.** Soit  $M = \mathbb{P}(E)$  une surface réglée parabolique sur une surface de Riemann de genre  $g$  munie d'une structure parabolique  $\mathcal{P}$ . Supposons que  $Bl(M, \mathcal{P})$  admette une métrique extrémale à courbure scalaire non-constante. Alors  $M = \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus L)$ . On note  $\frac{p_j}{q_j}$  les poids de  $\mathcal{P}$ . Si

$$2 - 2g - \sum_j \left(1 - \frac{1}{q_j}\right) \leq 0,$$

les points marqués de  $\mathcal{P}$  reposent sur la section nulle ou infinie de  $L$ .

On rappelle que la section nulle  $S_0$  de  $\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus L)$  est donnée par la section nulle de  $L$  et la section infinie  $S_\infty$  par les points à l'infini de la compactification  $\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus L)$ .

Dans le cas  $g > 0$ ,

$$\mu(S_0) = \deg(L) + \sum_{B_j \in S_\infty} \alpha_j - \sum_{B_j \in S_0} \alpha_j = -\mu(S_\infty)$$

et l'une de ces deux sections peut destabiliser  $M$  si les deux pentes ne sont pas nulles.

On a alors une réponse partielle à la question posée :

**Proposition 3.3.3.** Soit  $M = \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus L)$  une surface réglée sur une surface de Riemann de genre  $g \geq 1$  et  $L$  un fibré holomorphe de degré strictement positif. Si  $\mathcal{P}$  est une structure parabolique instable sur  $M$  dont tous les points marqués reposent sur la section nulle ou la section infinie, Alors  $Bl(M, \mathcal{P})$  admet une métrique extrémale à courbure scalaire non-constante.

La preuve de ce résultat repose sur une application du théorème d'Arezzo Pacard et Singer [APS]. On part d'une métrique extrémale sur  $M$  et on itère le théorème 2.1.1 afin d'obtenir le résultat. Dans cette construction, la métrique obtenue est petite sur tous les diviseurs exceptionnels. Si on utilise en revanche le théorème 2.1.2, on peut construire de nouveaux exemples de métriques extrémales dont les classes de Kähler ne sont pas petites sur tous les diviseurs exceptionnels. Le résultat le plus précis est le suivant :

**Théorème 3.3.4.** Soient  $r$  et  $(q_j)_{j=1..s}$  des entiers strictement positifs tels que pour tout  $j$ ,  $q_j \geq 3$  et  $\text{pgcd}(r, q_j) = 1$ . Pour tout  $j$  on définit

$$p_j \equiv -r [q_j], \quad 0 < p_j < q_j, \quad n_j = \frac{p_j + r}{q_j}.$$

Soit  $\Sigma$  une surface de Riemann de genre  $g$  avec  $s$  points marqués  $A_j$ . Soit

$$\tilde{M} = \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus (L_{r, (q_j)} \otimes L_0))$$

avec

$$L_{r, (q_j)} = \mathcal{K}^r \otimes_j [A_j]^{r-n_j}$$

et  $L_0$  un fibré plat. On définit une structure parabolique  $\mathcal{P}$  sur  $\tilde{M}$  qui consiste en les points  $B_j$  dans la section infinie au-dessus de  $A_j$  et les poids  $\frac{p_j}{q_j}$ .

Si

$$\chi(\Sigma) - \sum_j \left(1 - \frac{1}{q_j}\right) < 0$$

Alors  $Bl(\tilde{M}, \mathcal{P})$  admet une métrique extrémale à courbure scalaire non-constante. Cette métrique n'est pas nécessairement petite sur tous les diviseurs exceptionnels.

Ici  $\mathcal{K}$  désigne le fibré canonique de  $\Sigma$  et  $[A_j]$  le fibré associé au diviseur  $A_j$ .

Pour démontrer ce théorème, on commence par construire des surfaces orbifolds munies de singularités isolées de type Hirzebruch-Jung. Ces surfaces sont construites en s'inspirant de la construction de métriques extrémales de Tønnesen [T]. La construction est détaillée dans la section 4 de l'annexe A. On applique alors le théorème 2.1.2 et on obtient des surfaces lisses extrémales. Le travail de la section 5.1. de l'annexe A permet de reconnaître l'éclatement itéré des surfaces du précédent théorème. Notons que les classes de Kähler peuvent être calculées selon la section 5.4. de l'Annexe A.

On peut ensuite essayer de voir quels sont les degrés des fibrés obtenus par cette méthode et on a :

**Théorème 3.3.5.** *Soit  $\Sigma$  une surface de Riemann de caractéristique d'Euler  $\chi$  et  $L$  un fibré en ligne holomorphe de degré  $d$  sur  $\Sigma$ . Si  $\chi < 0$ , on suppose que  $d = -\chi$  ou  $d \geq 1 - 2\chi$ . Alors il existe une structure parabolique instable  $\mathcal{P}$  sur  $M = \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus L)$  telle que  $Bl(M, \mathcal{P})$  admette une métrique extrémale à courbure scalaire non-constante. La classe de Kähler obtenue n'est pas petite sur tous les diviseurs exceptionnels.*

**Remarque 3.3.6.** *Ce résultat donne de nouvelles classes de Kähler par rapport à l'application du théorème d'Arezzo Pacard et Singer. De plus, ce théorème donne des exemples où le genre  $g = 0$ . Enfin, il fournit aussi des exemples où le fibré est de degré 0.*

On va donner un exemple simple de métrique extrémale obtenue par ces résultats.

On considère  $\widetilde{\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{T}^2}$  l'éclatement itéré trois fois de l'espace total de

$$\pi : \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2.$$

Cet éclatement contient la chaîne de courbes suivante :

$$\frac{E_1}{-2} \circ \frac{E_2}{-2} \circ \frac{E_3}{-1} \circ \frac{F}{-3}$$

Ici  $F$  est la transformée stricte de la fibre de  $\pi$  contenant le premier point éclaté et  $E_1$ ,  $E_2$  et  $E_3$  sont les transformées strictes des diviseurs exceptionnels. Soit  $S_0$  la transformée stricte de la section nulle. Pour obtenir cet éclatement, on commence par éclater un point intersection d'une fibre  $F$  et de la section nulle :

$$\frac{S_0}{-1} \circ \frac{E_1}{-1} \circ \frac{F}{-1}$$

On éclate ensuite le point intersection de la transformée stricte de  $F$  et du dernier diviseur exceptionnel obtenu :

$$\frac{E_1}{-2} \circ \frac{E_2}{-1} \circ \frac{F}{-2}$$

puis

$$\frac{E_1}{-2} \circ \frac{E_2}{-2} \circ \frac{E_3}{-1} \circ \frac{F}{-3}$$

On peut alors énoncer :

**Théorème 3.3.7.** *Pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}_+^{*,2}$  tels que  $\frac{a}{b} < k_2$  avec  $k_2$  une constante définie dans [Tf] et pour tout  $(a_1, a_2, a_3)$  positifs, il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que pour tout  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ , il y a une métrique extrémale à courbure scalaire non-constante  $\omega$  sur  $\widetilde{\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{T}^2}$ . Sa classe de Kähler vérifie*

$$[\omega] \cdot S_0 = \frac{2}{3}\pi b,$$

$$[\omega] \cdot F = \varepsilon^2 a_1, \quad [\omega] \cdot E_1 = \varepsilon^2 a_2, \quad [\omega] \cdot E_2 = \varepsilon^2 a_3$$

et

$$[\omega] \cdot E_3 = (b - a)\frac{\pi}{3}.$$

Avant de clore ce chapitre, on remarque que les classes de Kähler pour lesquelles  $\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus L)$  admet une métrique extrémale selon la construction de Tønnesen-Friedman sont exactement celles qui donnent la stabilité relative au sens de Székelyhidi [S1]. Il serait intéressant de comprendre la stabilité relative dans le cas de surfaces réglées paraboliques. On pourrait alors espérer comprendre dans quelles classes de Kähler on peut obtenir une métrique extrémale sur l'éclatement itéré.

## Chapitre 4

# Stabilité des métriques extrémales sous déformations complexes

Ce chapitre, indépendant des précédents, est dédié à la description de résultats obtenus en collaboration avec Yann Rollin et Santiago Simanca. Les preuves des résultats sont présentes dans l'article [RST] donné en annexe B.

On s'intéresse à la stabilité des métriques extrémales sous perturbations de la structure complexe. Soit  $(M, J, \omega)$  une variété kählérienne compacte extrémale. On considère une famille lisse de structures complexes

$$t \mapsto J_t$$

sur  $M$  telle que  $J_0 = J$ . D'après un résultat de Kodaira et Spencer, il existe une famille lisse  $t \mapsto \omega_t$  de 2-formes réelles telles que  $(M, J_t, \omega_t)$  soit kählérienne pour  $t$  suffisamment petit. Est-il possible de choisir ces formes de telle sorte que  $(M, J_t, \omega_t)$  soit extrémale ?

La première section de ce chapitre donne des rappels sur les déformations complexes et la stabilité des variétés kählérienne. La deuxième rappelle des résultats de Lebrun et Simanca concernant la stabilité des métriques extrémales. Enfin, la dernière section présente la généralisation de ces résultats et les applications présentes dans l'article [RST].

### 4.1 Stabilité des variétés kählériennes et déformations de structures complexes

On rappelle dans cette section la notion de déformation complexe et le théorème de stabilité de Kodaira et Spencer. Concernant les notations, les variétés réelles seront notées  $M$  ou  $\mathcal{M}$  et les variétés réelles munies de structures presque complexes  $(M, J)$ . On parlera de variété complexes  $\mathcal{X}$  en omettant de préciser la structure presque complexe. On parlera de métriques kählériennes sur ces dernières et il sera sous-entendu que dans ce cas les métriques sont compatibles avec la structure complexe sous-jacente.

**Définition 4.1.1.** *Une famille lisse de déformations complexes est la donnée de :*

- (i) un voisinage ouvert connexe de l'origine  $B$  dans  $\mathbb{R}^m$ , une variété lisse  $\mathcal{M}$  et une submersion lisse et propre  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow B$ ,
- (ii) un recouvrement ouvert  $\{\mathcal{U}_j\}_{j \in I}$  de  $\mathcal{M}$  et des fonctions lisses à valeur complexe  $z_j = (z_j^1, \dots, z_j^n)$  définies sur chaque  $\mathcal{U}_j$ , telle que les fonctions

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_j \cap \varphi^{-1}(t) &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ p &\mapsto (z_j^1(p), \dots, z_j^n(p)) \end{aligned}$$

définissent un atlas holomorphe sur chaque variété  $\varphi^{-1}(t)$ .

On notera  $\mathcal{M} \rightarrow B$  une telle déformation et les fibres munies de leur structure complexe induites  $\varphi^{-1}(t)$  seront notés  $\mathcal{M}_t$ . Une déformation complexe d'une variété complexe  $\mathcal{X}$  est la donnée d'une famille de déformations  $\mathcal{M} \rightarrow B$  et d'un isomorphisme  $\mathcal{X} \simeq \mathcal{M}_0$ .

D'après un résultat d'Ehresmann (voir [V] théorème 9.3 par exemple) les familles lisses de déformations complexes sont localement triviales. Soit  $M$  la variété différentielle sous-jacente à la fibre centrale  $\mathcal{M}_0$  d'une famille  $\mathcal{M} \rightarrow B$ . Quitte à diminuer  $B$  si nécessaire, on peut trouver un difféomorphisme  $\mathcal{M} \rightarrow B \times M$  tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{\quad} & B \times M \\ & \searrow & \swarrow \pi_B \\ & B & \end{array}$$

où  $\pi_B$  désigne la projection sur le premier facteur. Ce difféomorphisme est une *trivialisat*ion de la famille lisse de déformation complexe  $\mathcal{M} \rightarrow B$ . Cette trivialisat

**Définition 4.1.2.** On appelle *polarisation* d'une variété complexe  $\mathcal{X}$  la donnée d'une classe  $\Omega \in H^2(\mathcal{X}, \mathbb{R})$  telle qu'il existe une métrique kählérienne  $\omega$  sur  $\mathcal{X}$  dont la classe représente  $\Omega$ .

Soit  $(\mathcal{X}, \Omega)$  une variété complexe polarisée, et une famille lisse de déformations complexes  $\mathcal{M} \rightarrow B$  de  $\mathcal{X} \simeq \mathcal{M}_0$ . Soit  $E \rightarrow B$  le fibré vectoriel de fibre le deuxième groupe de cohomologie de la fibration  $\mathcal{M} \rightarrow B$ , dont les fibres sont  $E_t = H^2(\mathcal{M}_t, \mathbb{R})$ .

**Définition 4.1.3.** On appelle *polarisation* de la famille  $\mathcal{M} \rightarrow B$  la donnée d'une section lisse  $\Theta$  de  $E \rightarrow B$  telle que  $\Theta_t$  admette un représentant kählérien  $\omega_t$  sur  $\mathcal{M}_t$  pour tout  $t$  dans  $B$ . On obtient ainsi une famille  $(\mathcal{M}_t, \Theta_t)$  de variétés polarisées paramétrée par  $t \in B$ . On appelle alors *déformation polarisée* d'une variété polarisée  $(\mathcal{X}, \Omega)$  la donnée d'une famille polarisée de variétés complexes  $(\mathcal{M} \rightarrow B, \Theta)$  ainsi qu'un isomorphisme  $\mathcal{X} \simeq \mathcal{M}_0$  qui envoie  $\Omega$  sur la classe  $\Theta_0$ .

On s'intéresse à la stabilité des métriques extrémales dans les déformations complexes. Supposons que  $(\mathcal{X}, \Omega)$  soit une variété complexe polarisée et que  $\Omega$  admette un représentant extrémal. Soit  $\mathcal{M} \rightarrow B$  une déformation complexe de  $\mathcal{X}$ . Un résultat profond de Kodaira et Spencer permet alors de donner un sens au problème pour cette

déformation. En effet, quitte à diminuer  $B$  si nécessaire, on peut supposer que la déformation  $\mathcal{M}$  est une déformation polarisée. De plus, on peut suivre de manière lisse un représentant kählérien de la polarisation :

**Théorème 4.1.4. Kodaira et Spencer, [KS]** Soit  $(\mathcal{X}, \Omega)$  une variété complexe polarisée et  $\mathcal{M} \rightarrow B$  une déformation complexe de  $\mathcal{X}$ . Quitte à restreindre  $B$  si nécessaire, il existe  $\Theta$  une polarisation de  $\mathcal{M} \rightarrow B$  telle que  $(\mathcal{M} \rightarrow B, \Theta)$  soit une déformation polarisée de  $(\mathcal{X}, \Omega)$ .

Si  $\omega_g$  est une forme de Kähler qui représente  $\Omega$ , il existe une famille lisse de métriques kählériennes sur  $\mathcal{M}_t$  qui étendent  $\omega_g$  et représentent  $\Theta_t$  pour tout  $t$

## 4.2 Théorie de déformation de Lebrun et Simanca

Soit  $(\mathcal{M} \rightarrow B, \Theta)$  une déformation polarisée de la variété polarisée  $(\mathcal{X}, \Omega)$ . On suppose que  $\Omega$  admette un représentant extrémal  $\omega_g$ . Un premier résultat de stabilité a alors été démontré par Lebrun et Simanca dans le cas où  $\omega_g$  est une métrique à courbure scalaire constante c'est à dire  $s_g - s_g^0 = 0$ . Le résultat fait intervenir la notion d'invariant de Futaki non-dégénéré.

**Définition 4.2.1.** La différentielle de l'invariant de Futaki de  $\mathcal{X}$  en  $[\omega_g]$  par rapport aux classes de Kähler induit une application :

$$d\mathcal{F}_{[\Omega]} : \mathfrak{h}_0(\mathcal{X}) \rightarrow (H^{1,1}(\mathcal{X}) \cap H^2(\mathcal{X}, \mathbb{R}))^*$$

L'invariant de Futaki est non-dégénéré en  $\Omega$  si cette application est une injection.

Le théorème de Lebrun et Simanca est alors le suivant :

**Théorème 4.2.2. Lebrun et Simanca, [LS1]** Soit  $(\mathcal{M} \rightarrow B, \Theta)$  une déformation polarisée de la variété polarisée  $(\mathcal{X}, \Omega)$  avec  $B$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $\Omega$  admette un représentant à courbure scalaire constante  $\omega_g$ . On suppose de plus que l'invariant de Futaki est non-dégénéré en  $\Omega$ .

Il existe alors un voisinage de l'origine  $U$  dans  $B$  tel que pour tout  $t \in U$  il existe une famille de dimension  $h^{1,1}$  de métriques à courbures scalaires constantes sur  $\mathcal{M}_t$ .

Un deuxième résultat de stabilité concerne les déformations complexes triviales. Les déformations polarisées associées sont alors des déformations de la classe de Kähler. On cite alors :

**Théorème 4.2.3. Lebrun et Simanca, [LS2]** Soit  $(\mathcal{X}, \Omega)$  une variété polarisée. On suppose que  $\Omega$  admette un représentant extrémal  $\omega_g$ . Il existe un voisinage  $U$  de  $\Omega$  dans le cône de Kähler  $\mathcal{K}(\mathcal{X})$  tel que toute classe de  $U$  admette un représentant extrémal. Autrement dit,  $\mathcal{K}^e(\mathcal{X})$  est ouvert dans  $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ .

La section suivante présente un résultat qui généralise les deux théorèmes précédents.

## 4.3 Métriques extrémales et déformations complexes

Le théorème de Calabi 1.2.4 permet de rechercher les métriques extrémales parmi les métriques qui ont des symétries prescrites à l'avance. Ceci nous incite à considérer des déformations complexes qui préservent certaines symétries. Soit  $(\mathcal{X}, \Omega)$  une variété polarisée et soit  $(\mathcal{M} \rightarrow B, \Theta)$  une déformation polarisée de  $(\mathcal{X}, \Omega)$ .

**Définition 4.3.1.** Soit  $G$  un groupe de Lie connexe et compact agissant de manière lisse sur  $\mathcal{M}$ . On dit que  $G$  agit holomorphiquement sur  $\mathcal{M}$  si

- les fibres  $\mathcal{M}_t$  sont préservées sous l'action,
- l'action induite sur chaque fibre  $\mathcal{M}_t$  est holomorphe,
- $G$  agit fidèlement sur  $\mathcal{M}_0$  et est identifié à un sous-groupe de la composante connexe de l'identité du groupe des transformations biholomorphes  $\text{Aut}(\mathcal{M}_0)$ .

Supposons que la métrique  $g$  sur  $\mathcal{X}$  soit extrémale,  $G' = \text{Isom}_0(\mathcal{X}, g)$  est alors un sous-groupe compact connexe maximal de  $\text{Aut}(\mathcal{X})$ . Dans ce cas  $G'$  agit holomorphiquement sur la fibre centrale  $\mathcal{M}_0$  de  $\mathcal{M} \rightarrow B$ . Cependant cette action ne s'étend pas forcément en une action holomorphe de  $G'$  sur  $\mathcal{M} \rightarrow B$ . On suppose alors que cette action s'étend partiellement. On suppose que  $\mathcal{M} \rightarrow B$  est munie d'une action holomorphe d'un sous-groupe connexe compact  $G \subset G'$ .

On définit alors la courbure scalaire réduite  $s_g^G$  (cf. section 2.2.3. Annexe B) et l'invariant de Futaki relatif (cf. section 2.3. Annexe B) qui sont les équivalents de la courbure scalaire et de l'invariant de Futaki dans le cadre équivariant. On pose

$$\mathfrak{F}_{G,\Omega}^c : \mathfrak{q}/\mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R},$$

l'invariant de futaki relatif à  $G$ , où  $\mathfrak{g}$  est l'algèbre de Lie de  $G$  et  $\mathfrak{q}$  son normalisateur dans  $\mathfrak{h}(\mathcal{X})$ . Les métriques qui satisfont à la condition  $s_g^G = 0$  sont extrémales. La différentielle de l'invariant de Futaki relatif à  $G$  induit une application linéaire :

$$\mathfrak{q}/\mathfrak{g} \rightarrow (H^{1,1}(\mathcal{X}) \cap H^2(\mathcal{X}, \mathbb{R}))^*.$$

**Définition 4.3.2.** On dit que l'invariant de Futaki relatif est non-dégénéré si l'application

$$d\mathfrak{F}_{G,\Omega}^c : \mathfrak{q}/\mathfrak{g} \rightarrow (H^{1,1}(\mathcal{X}) \cap H^2(\mathcal{X}, \mathbb{R}))^*.$$

restreinte à  $\mathfrak{p}_0/\mathfrak{g}_0$  est injective. Ici,  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{h}_0(\mathcal{X})$  et  $\mathfrak{p}$  est le normalisateur de  $\mathfrak{g}$  dans  $\mathfrak{g}'$  et  $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}_0(\mathcal{X})$ .

En utilisant l'action holomorphe de  $G$  sur  $\mathcal{M} \rightarrow B$ , on peut modifier la construction de  $\beta$  un représentant de la polarisation  $\Theta$  tel que chaque métrique de Kähler  $g_t$  induite par  $\beta$  sur  $\mathcal{M}_t$  soit  $G$ -invariante. Un tel choix de représentant  $\beta$  nous permet d'utiliser  $\omega_t$  comme l'origine de l'espace affine des métriques  $G$ -invariantes sur  $\mathcal{M}_t$  qui représentent  $\Theta_t$ . Soit  $\mathbb{H}_t$  l'espace des  $(1, 1)$ -formes  $g_t$ -harmoniques sur  $\mathcal{M}_t$ . D'après la théorie de Kodaira et Spencer, quitte à restreindre  $B$ , les espaces  $\mathbb{H}_t$  forment les fibres d'un fibré vectoriel lisse  $\mathbb{H}_t \rightarrow B$ . Afin d'expliquer les idées, on évite pour le moment le choix des bons espaces de Sobolev qui permettront l'analyse, et on considère  $C_G^\infty(\mathcal{M})$ , l'espace des fonctions lisses et  $G$ -invariantes sur  $\mathcal{M}$ . Etant donnée une section  $\alpha$  de  $\mathbb{H} \rightarrow B$  et une fonction  $\phi \in C_G^\infty(\mathcal{M})$  suffisamment petite, on peut considérer les métriques  $g_{t,\alpha,\phi}$  sur  $\mathcal{M}_t$  définies par les formes de Kähler

$$\omega_{t,\alpha,\phi} = \omega_t + \alpha|_{\mathcal{M}_t} + dd^c\phi|_{\mathcal{M}_t}.$$

Ces métriques sont  $G$ -invariantes par construction. Si  $g$  est extrémale sur  $\mathcal{X}$ , on essaie de résoudre l'équation :

$$s_{g_{t,\alpha,\phi}}^G = 0$$

pour des petites perturbations  $(t, \alpha, \phi)$  proches de 0. Cette application est Fredholm pour un bon choix d'espaces de Banach. De plus, c'est une submersion à l'origine si et seulement si l'invariant de Futaki relatif est non-dégénéré. L'application du théorème des fonctions implicites permet alors de montrer :

**Théorème 4.3.3.** Soit  $(\mathcal{M} \rightarrow B, \Theta)$  une famille polarisée de déformations d'une variété complexe compacte sans bord  $(\mathcal{X}, \Omega)$ . Supposons que  $\Omega$  admette un représentant extrémale  $\omega$  et  $G$  soit un sous-groupe compact connexe de  $G' = \text{Isom}_0(\mathcal{X}, g)$  tel que

- $G$  agit holomorphiquement sur  $\mathcal{M} \rightarrow B$ ,
- la courbure scalaire réduite  $g$  satisfait  $s_g^G = 0$ ,
- l'invariant de Futaki relatif à  $G$  est non-dégénéré en  $g$ .

Soit  $\beta$  un représentant  $G$ -invariant de la polarisation  $\Theta$  tel que la métrique  $g_0$  induite sur  $\mathcal{M}_0$  corresponde à  $g$  via l'isomorphisme  $\mathcal{M}_0 \simeq \mathcal{X}$ . Alors, quitte à restreindre  $B$  dans un petit voisinage de l'origine, l'espace des métriques de Kähler sur  $\mathcal{M}_t$  dont la courbure scalaire réduite s'annule dans un petit voisinage de  $g_t$  induite par  $\beta$  est une variété lisse de dimension  $h^{1,1}(\mathcal{X})$ .

En particulier, il existe des déformations arbitrairement petites  $\Theta'$  de la polarisation  $\Theta$  telles que  $\Theta'_t$  soit représentée par une métrique extrémale pour  $t$  suffisamment petit.

**Remarque 4.3.4.** On peut obtenir plus de précision sur la classe de Kähler obtenue sous certaines hypothèses. Ainsi, sous les hypothèses du théorème 4.3.3, si on choisit un sous-espace  $V \subset \mathbb{H}_0(M)$  tel que la linéarisation de l'invariant de Futaki relatif  $\mathfrak{p}_0/\mathfrak{g}_0 \rightarrow V^*$  soit injective, on peut considérer les perturbations de la métrique de la forme

$$\omega_{t,\alpha,\phi} = \omega_t + \alpha|_{\mathcal{M}_t} + dd^c\phi|_{\mathcal{M}_t}$$

avec  $\alpha|_{\mathcal{M}_t} \in V$  et obtenir des métriques extrémales dans les classes  $[\omega_t + \alpha|_{\mathcal{M}_t}]$ .

## 4.4 Applications

Le théorème 4.3.3 généralise les résultats de [LS1, LS2] cités plus haut. En effet, le cas  $G = \{1\}$  correspond à la théorie de déformation des métriques à courbure scalaire constante et le cas  $G = G' = \text{Isom}_0(\mathcal{X}, g)$  correspond à la théorie de déformation des classes de Kähler des métriques extrémales (cf. section 5.1. Annexe B). On donne ci-dessous quelques exemples d'applications qui sont décrits dans l'annexe B.

**Corollaire 4.4.1.** Soit  $(\mathcal{M} \rightarrow B, \Theta)$  une famille polarisée de déformations d'une variété compacte connexe  $(\mathcal{X}, \Omega)$ . Supposons que  $\Omega$  admette un représentant extrémal et que  $\mathcal{M} \rightarrow B$  soit munit d'une action holomorphe d'un tore maximal  $G = T \subset \text{Aut}(\mathcal{X})$ . Alors pour  $t \in B$  suffisamment petit,  $\Theta_t$  est représenté par une métrique extrémale sur  $\mathcal{M}_t$ .

Ce corollaire est très proche du lemme [ACGT, Lemma 4], où un résultat de perturbation de métriques extrémales sous déformations complexes préservant un tore maximal est obtenu. Le résultat de déformation de [ACGT], est le même que celui du corollaire 4.4.1, cependant une hypothèse supplémentaire y est faite, à savoir que la classe de  $H^2(M, \mathbb{R})$  représentée par la polarisation soit constante.

Le corollaire précédent implique :

**Corollaire 4.4.2.** Soit  $(\mathcal{M} \rightarrow B, \Theta)$  une famille polarisée de déformations toriques de  $(\mathcal{X}, \Omega)$ , une variété compacte complexe torique telle que  $\Omega$  admette un représentant extrémal. Alors  $\mathcal{M}_t$  admet une famille  $h^{1,1}(\mathcal{X})$ -dimensionnelle de métriques extrémales de classe de Kähler  $\Theta_t$  pour  $t$  suffisamment petit.



On peut appliquer le théorème 3 à la variété de Mukai et Umemura  $\mathcal{X}$ , de groupe d'automorphismes  $\text{Aut}(\mathcal{X}) = \mathbb{P}\text{SL}(2, \mathbb{C})$ . Donaldson a démontré que cette variété admet une métrique de Kähler-Einstein dans la classe anti-canonique [D2]. On peut appliquer une extension du théorème de déformation au cas de certain groupes non-connexes et obtenir :

**Corollaire 4.4.3.** *Soit  $(\mathcal{M} \rightarrow B, \Theta)$  une déformation polarisée de la 3-variété de Mukai et Umemura avec polarisation  $(\mathcal{X}, c_1(\mathcal{X}))$  et  $\Theta_t = c_1(\mathcal{M}_t)$ . Supposons que  $\mathcal{M} \rightarrow B$  soit une déformation décrite dans la section 3.3.1. de l'annexe B, munie d'une action holomorphe d'un groupe  $G \subset \mathbb{P}\text{SL}(2, \mathbb{C})$  isomorphe à un groupe diédral d'ordre 8 ou au produit semi-direct  $S^1 \rtimes \mathbb{Z}/2$ . Alors pour tout  $t \in B$  suffisamment petit,  $\Theta_t$  est représenté par une métrique de Kähler-Einstein sur  $\mathcal{M}_t$ .*

On remarque que le résultat ci-dessus était démontré dans [D2]. La méthode employée dans [D2] est différente. L'idée est de réduire le problème de l'existence d'une métrique spéciale à une notion de stabilité sur l'espace des déformations complexes infinitésimales. Cette technique est également développée dans [S2] et fait intervenir les aspects algèbro-géométriques du problème. Son spectre d'application est encore une fois limité à des déformations complexes préservant la classe de Kähler dans  $H^2(M, \mathbb{R})$ .

Les déformations de cette variété que l'on considère sont précisées dans la section 3.3.1. de l'annexe B et proviennent de la description donnée par Donaldson dans [D2]. La preuve du corollaire 4.4.3 repose alors sur le corollaire 4.4.1 et est donnée dans la section 5.3. de l'annexe B.

## Annexe A

# ”Extremal Kähler metrics on blow-ups of parabolic ruled surfaces”

On fournit en annexe A l'article qui décrit la construction de nouvelles métriques extrémales à partir du théorème de gluing 2.1.2. Les résultats des chapitres 2 et 3 y sont démontrés.

Cet article est organisé de la façon suivante :

Section 1 : Introduction.

Section 2 : Métriques extrémales et résolution de singularités Hirzebruch-Jung. Cette section résume le théorème 2.1.2.

Section 3 : Première construction de surfaces orbifolds extrémales à partir de l'exemple de Calabi.

Section 4 : Deuxième construction de surfaces orbifolds extrémales à partir de la construction de Tønnesen-Friedman.

Section 5 : Étude des surfaces lisses obtenues après résolution des singularités des orbifolds de la section 4. Applications aux structures paraboliques instables et les éclatements associés, preuves des théorèmes 3.3.4, 3.3.5. Calcul des classes de kähler obtenues.

Section 6 : Exemples.

# EXTREMAL KÄHLER METRICS ON BLOW-UPS OF PARABOLIC RULED SURFACES

CARL TIPLER

ABSTRACT. We provide new examples of extremal Kähler metrics on blow-ups of parabolic ruled surfaces. The method that we use is based on the gluing construction of Arezzo, Pacard and Singer [5]. This enables us to endow ruled surfaces of the form  $\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus L)$  with special parabolic structures such that the associated iterated blow-up admits an extremal metric of non-constant scalar curvature.

## 1. INTRODUCTION

In this paper we consider the problem of existence of Kähler extremal metrics on ruled surfaces. An extremal Kähler metric on a compact Kähler manifold  $M$  is a metric that minimize the Calabi functional in a given Kähler class  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} \{\omega \in \Omega^{1,1}(M, \mathbb{R}), d\omega = 0, \omega > 0 / [\omega] = \Omega\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto \int_M s(\omega)^2 \omega^n. \end{aligned}$$

Here,  $s(\omega)$  stands for the scalar curvature of  $\omega$  and  $n$  is the complex dimension of  $M$ . Constant scalar curvature metrics are examples of extremal metrics. If the manifold is polarised by an ample line bundle  $L$  the existence of such a metric on a polarized manifold  $(M, L)$  in the class  $c_1(L)$  is related to a notion of stability of the pair  $(M, L)$ . More precisely, the works of Yau [32], Tian [30], Donaldson [13] and lastly Székelyhidi [28], led to the conjecture that a polarized manifold  $(M, L)$  admits an extremal Kähler metric in the Kähler class  $c_1(M)$  if and only if it is relatively K-polystable. So far we only know that the existence of an extremal metric imply the relative K-polystability [29].

We will focus on the special case of complex ruled surfaces. First consider a geometrically ruled surface  $M$ . This is the total space of a fibration

$$\mathbb{P}(E) \rightarrow \Sigma$$

where  $E$  is a holomorphic bundle of rank 2 on a compact Riemann surface  $\Sigma$ . In that case, the existence of extremal metrics on such surfaces is related to the stability of the bundle  $E$ . A lot of work has been done in this direction, we refer to [6] for a survey on this topic.

Moreover, in this paper, Apostolov, Calderbank, Gauduchon and Tønnesen-Friedman prove that if the genus of  $\Sigma$  is greater than two, then  $M$  admits a metric of constant scalar curvature in some class if and only if  $E$  is polystable. Another result is due to Tønnesen-Friedman [31] and states that if the genus of  $\Sigma$  is greater

---

*Date:* June 2011.

*2000 Mathematics Subject Classification.* Primary 53C55; Secondary 32Q26.

than two, then there exists an extremal Kähler metric of non-constant scalar curvature on  $M$  if and only if  $M = \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus L)$  with  $L$  a line bundle of positive degree. Note that in that case the bundle is unstable.

There exist results of this form in the case of parabolic ruled surfaces (see definition 1.0.1). In the papers [24] and [25], Rollin and Singer showed that the parabolic polystability of the parabolic ruled surface implies the existence of a constant scalar curvature metric on an iterated blow-up of the surface. This iterated blow-up is encoded by the parabolic structure.

Now we can ask for such a result in the extremal case. If there exists an extremal metric of non-constant scalar curvature on an iterated blow-up of a parabolic ruled surface, the existence of the extremal vector field implies that  $M$  is of the form  $\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus L)$ . Moreover, the marked point of the parabolic structure must lie on the zero or infinity section of the ruling. Inspired by the results mentioned above, we can ask if for every unstable parabolic structure on a minimal ruled surface of the form  $M = \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus L)$ , with marked points on the infinity section of the ruling, one can associate an iterated blow-up of  $M$  supporting an extremal Kähler metric of non-constant scalar curvature.

Arezzo, Pacard and Singer, and then Székelyhidi, proved that under some stability conditions, one can blow-up an extremal Kähler manifold and obtain an extremal Kähler metric on the blown-up manifold for sufficiently small metric on the exceptional divisor. This blow-up process enables to prove that many of the unstable parabolic structures give rise to extremal Kähler metrics of non-constant scalar curvature on the associated iterated blow-up. A modification of their argument will enable to get more examples of extremal metrics on blow-ups encoded by unstable parabolic structures.

In order to state the result, we need some definitions about parabolic structures.

Let  $\Sigma$  be a Riemann surface and  $\check{M}$  a geometrically ruled surface, total space of a fibration

$$\pi : \mathbb{P}(E) \rightarrow \Sigma$$

with  $E$  a holomorphic bundle.

**Definition 1.0.1.** A parabolic structure  $\mathcal{P}$  on

$$\pi : \check{M} = \mathbb{P}(E) \rightarrow \Sigma$$

is the data of  $s$  distinct points  $(A_i)_{1 \leq i \leq s}$  on  $\Sigma$  and for each of these points the assignment of a point  $B_i \in \pi^{-1}(A_i)$  with a weight  $\alpha_i \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ . A geometrically ruled surface endowed with a parabolic structure is called a *parabolic ruled surface*.

In the paper [24], to each parabolic ruled surface is assigned an iterated blow-up

$$\Phi : Bl(\check{M}, \mathcal{P}) \rightarrow \check{M}.$$

Let  $\check{M}$  be a parabolic ruled surface whose parabolic structure consists of a point  $A \in \Sigma$ ,  $Q \in F := \pi^{-1}(A)$  and the weight  $\alpha = \frac{p}{q}$ , with  $p$  and  $q$  coprime integers,  $0 < p < q$ . We denote the expansions of  $\frac{p}{q}$  and  $\frac{q-p}{q}$  into continuous fractions

by:

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{e_1 - \frac{1}{e_2 - \dots - \frac{1}{e_k}}}$$

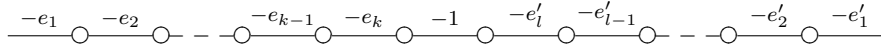
and

$$\frac{q-p}{q} = \frac{1}{e'_1 - \frac{1}{e'_2 - \dots - \frac{1}{e'_l}}}$$

We suppose that the integers  $e_i$  and  $e'_i$  are greater or equal than two so that these expansions are unique. Then from [24] we know that there exists a unique iterated blow-up

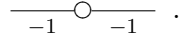
$$\Phi : Bl(\check{M}, \mathcal{P}) \rightarrow \check{M}$$

with  $\Phi^{-1}(F)$  equal to the following chain of curves:

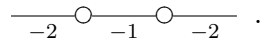


The edges stand for the rational curves, with self-intersection numbers the number above them. The dots are the intersection of the curves, of intersection number 1. Moreover, the curve of self-intersection  $-e_1$  is the proper transform of the fiber  $F$ .

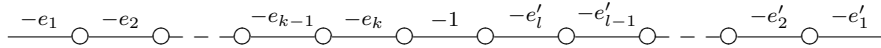
In order to get this blow-up, start by blowing-up the marked point and obtain the following curves:



Here the curve on the left is the proper transform of the fiber and the one on the right is the first exceptional divisor. Then blow-up the intersection of these two curves to obtain



Then choosing one of the two intersection points that the last exceptional divisor gives and iterating the process, we can obtain the following chain of curves



**Remark 1.0.2.** The chain of curves on the left of the one of self-intersection number  $-1$  is the chain of a minimal resolution of a singularity of  $A_{p,q}$  type and the one on the right of a singularity of  $A_{q-p,q}$  type.

**Remark 1.0.3.** In [24], the curve of self-intersection  $-e_1$  is the proper transform of the exceptional divisor of the first blow-up. Here we obtain the proper transform of the fiber  $F$ .

We can define an iterated blow-up associated to any parabolic ruled surface iterating this process at each marked point.

Fix positive integers  $r$  and  $(q_j)_{j=1..s}$  such that for each  $j$ ,  $q_j \geq 3$  and

$$\gcd(q_j, r) = 1.$$

*Extremal Kähler metrics on blow-ups of parabolic ruled surfaces*

For each  $j$ , let

$$p_j \equiv -r [q_j], \quad 0 < p_j < q_j, \quad n_j = \frac{p_j + r}{q_j}.$$

Then consider a Riemann surface  $\Sigma$  of genus  $g$  with  $s$  marked points  $(A_j)$  on it. The previous integers define a parabolic structure  $\mathcal{P}$  on

$$\check{M} = \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus L_{r,(q_j)})$$

with

$$L_{r,q_j} = \mathcal{K}^r \otimes_j [A_j]^{r-n_j}$$

where  $\mathcal{K}$  is the canonical line bundle of  $\Sigma$  and  $[A_j]$  the line bundle associated to the divisor  $A_j$ . Recall that the zero section of a ruled surface  $\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus L)$  is the section given by the zero section of  $L \rightarrow \Sigma$  and the inclusion  $L \subset \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus L)$ . The infinity section is given by the zero section of  $\mathcal{O} \rightarrow \Sigma$  in the inclusion  $\mathcal{O} \subset \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus L)$ . The parabolic structure consists of the points  $(B_j)$  in the infinity section of the ruling of  $\check{M}$  over the points  $(A_j)$  together with the weights  $(\frac{p_j}{q_j})$ .

We also consider the orbifold Euler characteristic of the orbifold Riemann surface  $\bar{\Sigma}$  associated to  $\Sigma$  and the weights  $q_j$ :

$$\chi^{orb}(\bar{\Sigma}) = \chi(\Sigma) - \sum_j \left(1 - \frac{1}{q_j}\right)$$

Then we have :

**Theorem A.** *Let  $r$  and  $(q_j)_{j=1..s}$  be positive integers such that for each  $j$ ,  $q_j \geq 3$  and*

$$\gcd(q_j, r) = 1.$$

*For each  $j$ , let*

$$p_j \equiv -r [q_j], \quad 0 < p_j < q_j, \quad n_j = \frac{p_j + r}{q_j}.$$

*Let  $\Sigma$  be a Riemann surface of genus  $g$  and  $s$  marked points  $(A_j)$  on it. Define a parabolic structure  $\mathcal{P}$  on*

$$\check{M} = \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus (\mathcal{K}^r \otimes_j [A_j]^{r-n_j}))$$

*consisting of the points  $(B_j)$  in the infinity section of the ruling of  $\check{M}$  over the points  $(A_j)$  together with the weights  $(\frac{p_j}{q_j})$ . If*

$$\chi(\Sigma) - \sum_j \left(1 - \frac{1}{q_j}\right) < 0$$

*then there exists an extremal Kähler metric of non-constant scalar curvature on  $Bl(\check{M}, \mathcal{P})$ . This metric is not small on every exceptional divisor.*

**Remark 1.0.4.** The parabolic structure is unstable. We will see that the infinity section destabilises the parabolic surface.

**Remark 1.0.5.** The Kähler classes of the blow-up which admit the extremal metric can be explicitly computed; this will be explain in Section 5.4. Moreover, these classes are different from the one that could be obtained from the work of Arezzo, Pacard and Singer.

Using a slightly more general construction, we will obtain:

**Theorem B.** *Let  $M = \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus L)$  be a ruled surface over a Riemann surface of genus  $g$ , with  $L$  a line bundle of degree  $d$ . If  $g \geq 2$  we suppose  $d = 2g - 2$  or  $d \geq 4g - 3$ . Then there exists explicit unstable parabolic structures on  $M$  such that each associated iterated blow-up  $Bl(M, \mathcal{P})$  admits an extremal Kähler metric of non-constant scalar curvature. The Kähler class obtained is not small on every exceptional divisor.*

**Remark 1.0.6.** In fact, Székelyhidi have shown in [28] that the extremal Kähler metrics obtained by Tønnesen-Friedman in [31] lie in the classes that give relatively stable polarisations. Thus the unstable parabolic structure obtained might be in fact "relatively stable" parabolic structures, in a sense that remains to be understood.

1.1. **Example.** We now consider  $\widetilde{\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{T}^2}$  the three times iterated blow-up of the total space of the fibration

$$\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2.$$

The blow-up we consider contains the following chain of curves:

$$\frac{E_1}{-2} \circ \frac{E_2}{-2} \circ \frac{E_3}{-1} \circ \frac{F}{-3}$$

Here  $F$  is the proper transform of a fiber of the ruling

$$\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2.$$

$E_1$ ,  $E_2$  and  $E_3$  are the exceptional divisors of the iterated blow-ups. Let  $S_0$  stands for the proper transform of the zero section. Then we have:

**Theorem C.** *For each  $(a, b) \in \mathbb{R}_+^{*,2}$  such that  $\frac{a}{b} < k_2$  where  $k_2$  is a constant defined in [31] and for each  $(a_1, a_2, a_3)$  positive numbers, there exists  $\varepsilon_0 > 0$  such that for every  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ , there exists an extremal metric  $\omega$  with non-constant scalar curvature on  $\widetilde{\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{T}^2}$ . This metric satisfies*

$$[\omega] \cdot S_0 = \frac{2}{3}\pi b,$$

$$[\omega] \cdot F = \varepsilon^2 a_1, \quad [\omega] \cdot E_1 = \varepsilon^2 a_2, \quad [\omega] \cdot E_2 = \varepsilon^2 a_3$$

and

$$[\omega] \cdot E_3 = (b - a)\frac{\pi}{3}.$$

1.2. **Strategy.** The Theorem A will be obtained from a more general process. The first step is to consider Kähler orbifolds endowed with extremal metrics. Such orbifolds can be obtained from the work of Bryant [8] and Abreu [1] on weighted projective spaces. Legendre also provide examples in the toric case [20]. Other examples come from the work of Tønnesen-Friedman [31]. These orbifolds will have isolated Hirzebruch-Jung singularities. The work of Joyce and then Calderbank and Singer enables us to endow a local model of resolution of these singularities with a scalar-flat Kähler metric [12]. Then the gluing method of Arezzo, Pacard and Singer [5] is used to glue these models to the orbifolds and obtain manifolds with extremal Kähler metrics. Note that there exists an improvement of the arguments of [5] by Székelyhidi in [27].

**Remark 1.2.1. Higher dimensional case** The gluing process described in [5] works in higher dimension but there are no such metrics on local models of every resolution of isolated singularities in higher dimension. However, Joyce constructed ALE scalar-flat metrics on Crepant resolutions [17]. Then we can expect to generalize the process described below in some cases of higher dimension.

Using this gluing method we obtain an other simple example. In order to state the results, we introduce some notation. Let us consider  $\widetilde{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$  the three-times iterated blow-up of  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$  with the following chain of curves :

$$\frac{H}{-2} \circ \frac{E_3}{-1} \circ \frac{E_2}{-2} \circ \frac{E_1}{-2}$$

Here  $H$  denotes the proper transform of a line in  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$  on which the first blown-up point lies.  $E_1$ ,  $E_2$  and  $E_3$  stand for the proper transform of the first, second and last exceptional divisors. The dots represent the intersections and the numbers below the lines are the self-intersection numbers. If  $X$  is a divisor, lets denote by  $PD(X)$  its Poincaré dual. Then we can state:

**Theorem D.** *For every  $a, a_1, a_2, a_3$  positive numbers there exists  $\varepsilon_0 > 0$  such that for every  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ , there is an extremal Kähler metric  $\omega_\varepsilon$  of non-constant scalar curvature on  $\widetilde{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$  satisfying*

$$[\omega_\varepsilon] \cdot H = \varepsilon^2 a_3,$$

$$[\omega_\varepsilon] \cdot E_3 = a, \quad [\omega_\varepsilon] \cdot E_2 = \varepsilon^2 a_2$$

and

$$[\omega_\varepsilon] \cdot E_1 = \varepsilon^2 a_1.$$

**Remark 1.2.2.** If one starts with  $F_1$  endowed with the Calabi metric and use the work of Arezzo, Pacard and Singer to construct extremal metrics on  $\widetilde{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$ , the Kähler classes obtained are of the form

$$[\omega_\varepsilon] \cdot H = b,$$

$$[\omega_\varepsilon] \cdot E_3 = \varepsilon^2 a_3, \quad [\omega_\varepsilon] \cdot E_2 = \varepsilon^2 a_2$$

and

$$[\omega_\varepsilon] \cdot E_1 = a.$$

with  $a$  and  $b$  positive real numbers and  $\varepsilon$  small enough . The Kähler classes obtained with the new process can be chosen arbitrarily far from the one obtained by Arezzo, Pacard and Singer.

**1.3. Plan of the paper.** In the section 2 we set up the general gluing theorem for resolutions following [5] and [3]. In the sections 3 and 4 we build the orbifolds with extremal metrics that will be used in the gluing construction. Then in the section 5 we give the proof of the main theorem A stated in the introduction. In the last section we show how to obtain the examples of the introduction.



**Acknowledgments.** I'd like to thank especially my advisor Yann Rollin for his help and encouragement. I am grateful to Paul Gauduchon and Michael Singer for all the discussions we had. I'd also like to thank Vestislav Apostolov who pointed to me Abreu's and Legendre's work. I thank Frank Pacard and Gabor Székelyhidi for their remarks on the first version of this paper. And last but not least a special thank to Andrew Clarke for all the time he spend listening to me and all the suggestions he made to improve this paper.

## 2. HIRZEBRUCH-JUNG SINGULARITIES AND EXTREMAL METRICS

We present here the global method to obtain extremal metrics from Kähler orbifolds endowed with extremal metrics.

**2.1. Local model.** We first present the local model which is used to resolve the singularities.

**Definition 2.1.1.** Let  $p$  and  $q$  be coprime non-zero integers, with  $p < q$ . We define the group  $\Gamma_{p,q}$  to be the multiplicative subgroup of  $U(2)$  generated by the matrix

$$\gamma := \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{2i\pi}{q}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(\frac{2i\pi p}{q}\right) \end{pmatrix}$$

The group  $\Gamma_{p,q}$  acts on  $\mathbb{C}^2$  :

$$\forall (z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2, \gamma \cdot (z_0, z_1) := \left( \exp\left(\frac{2i\pi}{q}\right) \cdot z_0, \exp\left(\frac{2i\pi p}{q}\right) \cdot z_1 \right).$$

**Definition 2.1.2.** Let  $p$  and  $q$  be coprime non zero integers, with  $p < q$ . An  $A_{p,q}$  singularity is a singularity isomorphic to  $\mathbb{C}^2/\Gamma_{p,q}$ . A *singularity of Hirzebruch-Jung type* is any singularity of this type.

We recall some results about the resolutions of these singularities.

First, from the algebraic point of view,  $\mathbb{C}^2/\Gamma_{p,q}$  is a complex orbifold with an isolated singularity at 0. There exists a minimal resolution

$$\pi : Y_{p,q} \rightarrow \mathbb{C}^2/\Gamma_{p,q}$$

called the Hirzebruch-Jung resolution. The manifold  $Y_{p,q}$  is a complex surface with exceptional divisor  $E := \pi^{-1}(0)$  and  $\pi$  is a biholomorphism from  $Y_{p,q} - E$  to  $\mathbb{C}^2 - \{0\}/\Gamma$ . For more details about resolutions see [7].

Next,  $\mathbb{C}^2/\Gamma_{p,q}$  and  $Y_{p,q}$  are toric manifolds. The action of the torus  $\mathbb{T}^2$  is the one that comes from the diagonal action on  $\mathbb{C}^2$ . For more details on this aspect of the resolution see [14].

Lastly, the minimal resolution can be endowed with an ALE scalar-flat Kähler metric  $\omega_r$  in each Kähler class as constructed by Joyce, Calderbank and Singer in [12]. The exceptional divisor of the resolution is the union of  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ s embedded in  $Y_{p,q}$  and the volume of each of these curves can be chosen arbitrarily. This metric is  $\mathbb{T}^2$ -invariant and its behaviour at infinity is controlled:

**Proposition 2.1.3.** ([24], *Corollary 6.4.2.*) *In the holomorphic chart*

$$\mathbb{C}^2 - \{0\}/\Gamma_{p,q}$$

*Extremal Kähler metrics on blow-ups of parabolic ruled surfaces*

the metric  $\omega_r$  is given by  $\omega_r = dd^c f$ , with

$$f(z) = \frac{1}{2}|z|^2 + a \log(|z|^2) + \mathcal{O}(|z|^{-1})$$

and  $a \leq 0$ .

**2.2. The gluing method.** The gluing method presented here comes from [5]. Let  $(M, J, \omega)$  be a Kähler orbifold with extremal metric. We suppose that the singular points of  $M$  are isolated and of Hirzebruch-Jung type. We denote by  $p_i$  the singular points of  $M$  and  $B(p_i, \varepsilon) := B(p_i, \varepsilon)/\Gamma_i$  orbifold balls around the singularities of radius  $\varepsilon$  with respect to the metric of  $M$ . We fix  $r_0 > 0$  such that the  $B(p_i, \varepsilon)$  are disjoint for  $\varepsilon < r_0$ . We consider, for  $0 < \varepsilon < r_0$  the manifold  $M_\varepsilon := M - \cup B(p_i, \varepsilon)$ . Let  $Y_i$  stand for a local model of the resolution of the singularity  $p_i$ , endowed with the metric of Joyce-Calderbank-Singer. The aim is to glue the  $Y_i$  to  $M_\varepsilon$  in order to obtain a smooth Kähler manifold  $\widetilde{M}$  which resolves  $M$  and has an extremal Kähler metric. To do this, one needs to perturb the Kähler potentials of the metrics to make them agree on the boundaries of the different pieces, keeping the extremal condition on these potentials. If we consider small enough  $\varepsilon$ , the metric will look like the euclidian metric in holomorphic chart because it is Kähler. On the other hand, the Joyce-Calderbank-Singer metric is ALE so one can hope to glue the metrics together with a slight perturbation.

Let  $s$  be the scalar curvature of  $\omega$ . We define the operator :

$$\begin{aligned} P_\omega : C^\infty(M) &\rightarrow \Lambda^{0,1}(M, T^{1,0}) \\ f &\mapsto \frac{1}{2}\bar{\partial}\Xi f \end{aligned}$$

with

$$\Xi f = J\nabla f + i\nabla f.$$

A result of Calabi asserts that a metric is extremal if and only if the gradient field of the scalar curvature is a real holomorphic vector field. Therefore a metric  $\omega'$  is extremal if and only if  $P_{\omega'}(s(\omega')) = 0$ , with  $s(\omega')$  denoting the scalar curvature. We denote by  $P_\omega^*$  the adjoint operator of  $P_\omega$ . We will use the following proposition:

**Proposition 2.2.1.** [21]  $\Xi \in T^{1,0}$  is a Killing vector field with zeros if and only if there is a real function  $f$  solution of  $P_\omega^* P_\omega(f) = 0$  such that  $\omega(\Xi, \cdot) = -df$ .

This result is initially proved for manifolds but the proof extends directly to orbifolds with isolated singularities, working equivariantly in the orbifold charts.

We recall a result of Calabi ([11]) which states that the isometry group of an extremal metric is a maximal compact subgroup of the group of biholomorphisms of the manifold. Thus in the gluing process we can prescribe a compact subgroup  $T$  of the group of biholomorphisms of  $M$  to become a subgroup of the isometry group of  $\widetilde{M}$  and work  $T$ -equivariantly. We want this group  $T$  to be contained in the isometry group of  $M$  because the metric that will be obtained on  $\widetilde{M}$  will be near to the one on  $M$  away from the exceptional divisors. Moreover, its algebra must contain the extremal vector field of  $\omega$  for the same reason. Let  $K$  be the subgroup of  $Isom(M, \omega)$  consisting of exact symplectomorphisms. Let  $T$  be a compact subgroup of  $K$  such that its Lie algebra  $\mathfrak{t}$  contains  $X_s := J\nabla s$ , the extremal vector field of the metric. Let  $\mathfrak{h}$  be the Lie algebra of real-holomorphic hamiltonian vector fields which are  $T$ -invariant. These are the vector fields that remains in the  $T$ -equivariant setup.  $X_s$  is contained in  $\mathfrak{h}$ .  $\mathfrak{h}$  splits as  $\mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{h}''$  with  $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{t}$ . The

*Extremal Kähler metrics on blow-ups of parabolic ruled surfaces*

deformations of the metric must preserve the extremal condition so we consider deformations

$$f \longmapsto \omega_e + i\partial\bar{\partial}f$$

such that

$$(2.1) \quad -ds(\omega + i\partial\bar{\partial}f) = (\omega + i\partial\bar{\partial}f)(X_s + Y, \cdot)$$

with  $Y \in \mathfrak{h}'$ . As  $X_s + Y \in \mathfrak{h}'$ , the proposition of Lebrun and Simanca above ensures that these deformations are extremal. Moreover, the vector fields from  $\mathfrak{h}'$  are precisely the ones that give extremal deformations.

In order to obtain such deformations, we consider the moment map  $\xi_\omega$  associated to the action of  $K$ :

$$\xi_\omega : M \rightarrow \mathfrak{k}^*.$$

$\xi_\omega$  is defined such that for every  $X \in \mathfrak{k}$  the function  $\langle \xi_\omega, X \rangle$  on  $M$  is a hamiltonian for  $X$ , wich means

$$\omega(X, \cdot) = -d\langle \xi_\omega, X \rangle.$$

Moreover,  $\xi_\omega$  is normalized such that

$$\int_M \langle \xi_\omega, X \rangle \omega^n = 0.$$

The equation 2.1 can now be reformulated:

$$s(\omega + i\partial\bar{\partial}f) = \langle \xi_{\omega+i\partial\bar{\partial}f}, X_s + h \rangle + constant.$$

If we work  $T$ -equivariantly, we are interested in the operator :

$$\begin{aligned} F : \mathfrak{h} \times C^\infty(M)^K \times \mathbb{R} &\rightarrow C^\infty(M)^K \\ (X, f, c) &\mapsto s(\omega + i\partial\bar{\partial}f) - \langle \xi_{\omega+i\partial\bar{\partial}f}, X \rangle - c - c_s \end{aligned}$$

where  $C^\infty(M)^K$  stands for the  $T$ -invariant functions.  $c_s$  is the average of the scalar curvature of  $\omega$ . There is a result which is due to Calabi and Lebrun-Simanca:

**Proposition 2.2.2.** [5] *If  $\omega$  is extremal and if  $X_s \in \mathfrak{h}$ , then the linearisation of  $F$  at 0 is given by*

$$(f, X, c) \mapsto -\frac{1}{2}P_\omega^*P_\omega f - \langle \xi_\omega, X \rangle - c.$$

The vector fields in  $\mathfrak{h}'$  are the "good ones" as they will give perturbations in the isometry group of the future metric. It remains to use the implicit function theorem to get the scalar curvature in term of these vector fields.  $\mathfrak{h}''$  stands for the obstruction.

**2.3. Extremal metrics on resolutions.** We choose a group  $T$  of isometries of  $M$  so that working  $T$ -equivariantly will simplify the analysis. It is necessary to choose a neighborhood of the singularities in which  $T$  will appear as a subgroup of the isometry group of the metric of Joyce-Calderbank-Singer. Moreover, in order to lift the action of  $T$  to  $\widetilde{M}$ , it is necessary that  $T$  fixes the singularities. We will see in lemma 2.4.3 that if we let  $T$  be a maximal torus in  $K$  then these conditions will be satisfied. Thus the equivariant setup of [5] can be used all the same in this orbifold case.

Lastly,  $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}$  and no obstruction will appear in the analysis. Following [3] and [5], we can state the theorem:

**Theorem 2.4.** *Let  $(M, \omega)$  be an extremal Kähler orbifold of dimension 2. We suppose that the singularities of  $M$  are isolated and of Hirzebruch-Jung type. We denote by  $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$  the minimal resolution of  $M$  obtained using the Hirzebruch-Jung strings. We denote by  $E_j$  the  $\mathbb{CP}^1$ s that forms the Hirzebruch-Jung strings in the resolution. Then for every choice of positive numbers  $a_j$  there exists  $\varepsilon_0 > 0$  such that  $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  there is an extremal Kähler metric on  $\widetilde{M}$  in the Kähler class*

$$[\pi^*\omega] - \varepsilon^2 \sum_j a_j PD[E_j]$$

**Remark 2.4.1.** We notice that if  $s(\omega)$  is not constant, the metrics obtained on the resolution are extremal of non-constant scalar curvature. Indeed, the metrics converge to  $\pi^*\omega$  away from the exceptional divisors, so does the scalar curvature. On the other hand, if  $\omega$  is of constant scalar curvature, then the extremal metric obtained on the resolution need not be of constant scalar curvature. Genericity and balancing conditions has to be satisfied to preserve a CSC metric [4] and [25].

**Remark 2.4.2.** The proof is the one in [5] so we refer to this text. The tools and ideas are used here in an orbifold context, using the work of [3]. In the paper [3] the gluing method is developed in the orbifold context for constant scalar curvature metrics. On the other hand, the paper [5] deals with extremal metrics but in the smooth case. One of the differences in the analysis between the constant scalar curvature case and the extremal case is that one needs to lift objects to the resolution such as holomorphic vector fields. Thus we will only give a proof of the following lemma which ensures that we can lift the vector fields needed during the analysis.

**Lemma 2.4.3.** *Let  $(M, \omega)$  be an extremal Kähler orbifold of dimension 2. We suppose that the singularities of  $M$  are isolated and of Hirzebruch-Jung type. Let  $K$  be the subgroup of  $Isom(M, \omega)$  which are exact symplectomorphisms. Let  $T$  be a maximal torus in  $K$ . Then  $T$  fixes the singularities. Its Lie algebra contains the extremal vector field. Moreover at each singularity of  $M$  with orbifold group  $\Gamma$  there exists an orbifold chart  $U/\Gamma$ ,  $U \subset \mathbb{C}^2$  such that in this chart  $T$  appears as a subgroup of the torus acting in the standard way on  $\mathbb{C}^2$ .*

*Proof.* Let  $p \in M$  be a singularity with orbifold group  $\Gamma$  and  $U \subset \mathbb{C}^2$  such that  $U/\Gamma$  is an open neighbourhood of  $p$  in  $M$ .  $T \subset Isom(M, \omega)$  so we can lift the action of  $T$  to  $U$  such that it commutes with the action of  $\Gamma$ . Thus  $T$  fixes  $p$ .

We see that  $X_s$  belongs to  $\mathfrak{t}$ . Indeed,

$$\forall X \in \mathfrak{h}, [X, X_s] = \mathcal{L}_X X_s = 0$$

because  $X$  preserves the metric. Thus  $X_s \in \mathfrak{h}$  and as  $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}$ ,  $X_s \in \mathfrak{t}$ . Then we follow the proof of [5]. By a result of Cartan, we can find holomorphic coordinates on  $U$  such that the action of  $T$  is linear. More than that, we can suppose that the lift of  $\omega$  in these coordinates  $(z_1, z_2)$  satisfies

$$\omega = \partial\bar{\partial}\left(\frac{1}{2}|z|^2 + \phi\right)$$

where  $\phi$  is  $T$  invariant and  $\phi = O(|z|^4)$ . In this coordinates  $T$  appears as a subgroup of  $U(2)$ . Thus  $T$  is conjugate to a group whose action on  $\mathbb{C}^2$  is diagonal. As  $T$  and  $\Gamma$  commute, we can diagonalize simultaneously these groups. In the new

*Extremal Kähler metrics on blow-ups of parabolic ruled surfaces*

coordinates, the action of  $\Gamma$  is described by definition 2.1.1 and  $T \subset \mathbb{T}^2$  with  $\mathbb{T}^2$  action on  $\mathbb{C}^2$  given by

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^2 \times \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{C}^2 \\ (\theta_1, \theta_2), (w_1, w_2) &\mapsto (e^{i\theta_1} w_1, e^{i\theta_2} w_2) \end{aligned}$$

Q.E.D.

**Remark 2.4.4.** Note that there exists a refinement of the proof of Arezzo, Pacard and Singer in the blow-up case. This is given in the paper of Székelyhidi [27]. Basically, the idea is to glue the metric of Burns-Simanca to the extremal metric on the blow-up manifold. This give an almost extremal metric. It remains to perturb the metric to obtain an extremal one. Moving the blown-up point if necessary, this problem becomes a finite dimensional problem. This argument might be used in the case of resolution of isolated singularities.

### 3. THE FIRST CONSTRUCTION: TORIC CASE

In this section we build orbifold toric ruled surfaces endowed with extremal metrics. We study their singularities in order to use the result of the last section. The first manner to get such a surface is to study the extremal metric equation in the toric context. This has been done by Abreu [1] and Legendre [20] and provides examples of toric orbifolds with extremal metrics. We will use this work in the examples section.

We will focus here on another way of constructing orbifold toric surfaces because this method will be also used in the next section. The idea is to start from a manifold which already carries an extremal metric of non-constant scalar curvature. From a theorem of Calabi, we know that this metric admits a non-trivial group of isometries. We fix a discrete subgroup of this isometry group and look at the quotient orbifold obtained by its action. Then we check that this orbifold satisfies the hypothesis of the theorem of gluing, in other words we study the singularities obtained.

**3.1. Construction of the orbifold, study of singularities.** We start from the Hirzebruch ruled surfaces  $\mathbb{F}_n$ . These surfaces are the total spaces of the holomorphic bundles:

$$\pi_n : \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(n)) \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1.$$

In [10], Calabi constructs a family of extremal metrics on  $\mathbb{F}_n$ . He considers the open set

$$\mathbb{F}_n^* := \mathbb{F}_n - (S_0 \cup S_\infty),$$

where  $S_0$  and  $S_\infty$  are the zero and infinity sections of  $\pi_n$ . Let

$$U_j := \{[x_0, x_1] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1, x_j \neq 0\}, j = 0..1$$

and

$$U_j^* := \pi_n^{-1}(U_j) \cap \mathbb{F}_n^*.$$

Calabi considers the  $n$ -fold covering

$$\mathbb{C}^2 - \{0\} \longrightarrow \mathbb{F}_n^*$$

*Extremal Kähler metrics on blow-ups of parabolic ruled surfaces*

given by

$$\begin{aligned} (x_0, x_1) &\rightarrow (z, y) = \left(\frac{x_0}{x_1}, x_0^n\right) \in U_0^* \quad \text{if } x_0 \neq 0 \\ (x_0, x_1) &\rightarrow (z, y) = \left(\frac{x_1}{x_0}, x_1^n\right) \in U_1^* \quad \text{if } x_1 \neq 0. \end{aligned}$$

The idea of Calabi is then to look for an extremal metric of the form  $\omega = i\partial\bar{\partial}u(t)$  on  $\mathbb{C}^2 - \{0\}$  with  $\exp(t) = |x_0|^2 + |x_1|^2$ . It turns out that in such a form the PDE associated to extremal metrics reduces to an ODE on  $u(t)$ . Calabi manages to prove the existence of a solution of this equation on  $\mathbb{C}^2 - \{0\}$  and to find sufficient conditions for this metric to extend on  $\mathbb{F}_n$ . Moreover,  $H_2(\mathbb{F}_n, \mathbb{R})$  is generated by  $S_0$  and  $S_\infty$  and the conditions of extendability of the metric are related to the value of the metric on these cycles. The result can be stated as follows:

**Proposition 3.1.1.** [10] *For every  $(a, b) \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $a < b$ , there exists a non-constant scalar curvature extremal Kähler metric in the Kähler class  $a PD(S_0) + b PD(S_\infty)$ .*

**Remark 3.1.2.** The fact that the scalar curvature of these metrics are non-constant comes from the obstruction on the Lie algebra of holomorphic vector fields provided by a theorem of Matsushima and Lichnerowicz ([21],[22]).

We now consider a Hirzebruch surface  $\mathbb{F}_n$  endowed with an extremal Kähler metric arising from this construction. We will consider the action of a finite group  $\Gamma_{p,q}$  on this surface. First  $\Gamma_{p,q}$  acts on  $\mathbb{C}^2 - \{0\}$  in a usual way with the action defined in the section 2.1. Let  $\omega_0$  be the metric on  $\mathbb{C}^2 - \{0\}$  from which  $\omega$  is constructed. As  $\omega_0$  is  $U(2)$  invariant, it is  $\Gamma_{p,q}$ -invariant. The action of this group on  $\mathbb{C}^2 - \{0\}$  induces an action on  $\mathbb{F}_n^*$ . In local coordinates, if  $\gamma$  denotes a generator for this action and  $\xi = \exp(\frac{2i\pi}{q})$  as in 2.1,

$$\gamma \cdot (z, y) = (\xi^{p-1}z, \xi^n y)$$

in  $U_0^*$  and

$$\gamma \cdot (z, y) = (\xi^{1-p}z, \xi^{np}y)$$

in  $U_1^*$ . By density, it gives rise to an isometric action on the whole  $\mathbb{F}_n$ . Moreover, if  $\gcd(q, p-1) = 1$  and  $\gcd(q, n) = 1$ , we get an action of  $\mathbb{Z}_q$  on  $\mathbb{F}_n$  with isolated fixed points. These four fixed points are the points  $(0, 0)$  and  $(0, \infty)$  in the charts  $U_0^*$  and  $U_1^*$ . From now on, we suppose that  $p, q$  and  $n$  satisfy these conditions.

We will now recognize more precisely the type of these singularities. We recall that a finite group acting on an algebraic surface gives rise to Hirzebruch-Jung singularities ([7]).

In  $U_0^*$ , let  $r \in \mathbb{N}$ ,  $r < q$  such that  $r \equiv n[q]$ . The action is then given by:

$$\gamma \cdot (z, y) = (\xi^{q-1}z, \xi^r y)$$

As  $n \equiv 1[q]$ ,  $r \equiv 1[q]$  and we can fix  $p'$  such that  $rp' \equiv 1[q]$ . Then let  $s \in \mathbb{N}$ ,  $0 < s < q$  such that  $s \equiv (p-1)p'[q]$ . We get

$$\gamma \cdot (z, y) = (\xi^{sr}z, \xi^r y).$$

Lastly, as  $\gcd(r, q) = 1$ , we recognize the usual action of  $\Gamma_{q,s}$  on  $\mathbb{C}^2$  with  $\gcd(q, s) = 1$  by construction. We can proceed in the same way to recognize the three other singularities.

**Proposition 3.1.3.** *Let  $(n, p, q)$  be three non zero integers satisfying  $p < q$ , and  $\gcd(p, q) = \gcd(q, p - 1) = \gcd(q, n) = 1$ . We consider the action of  $\mathbb{Z}_q$  defined above. Then the quotient of the surface  $\mathbb{F}_n$  endowed with the Calabi metric under this action is an extremal Kähler orbifold with isolated singularities.*

Using the Theorem 2.4 we have proved:

**Corollary 3.1.4.** *Let  $(M, \omega)$  be the orbifold defined in proposition 3.1.3 and*

$$\pi_M : \widetilde{M} \rightarrow M$$

*the Hirzebruch-Jung resolution of  $M$ . Then  $\widetilde{M}$  can be endowed with extremal Kähler metrics that converge to  $\pi_M^*(\omega)$  on every compact set away from the exceptional divisors. These metrics are of non-constant scalar curvature.*

#### 4. THE SECOND CONSTRUCTION: NON-TORIC CASE

In this section we use the same ideas as in the last section but on non-toric objects.

**4.1. Construction of the orbifold.** The starting point of the second construction is the pseudo-Hirzebruch surfaces constructed by Tønnesen-Friedman in [31]. These are total spaces of fibrations

$$\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus L) \rightarrow \Sigma_g$$

where  $\Sigma_g$  is a Riemann surface of genus  $g$  and  $L$  a positive line bundle. We briefly recall the construction of extremal metrics on such a surface.

Let

$$U := \{(z_0, z_1) / |z_0|^2 > |z_1|^2\} \subset \mathbb{C}^2$$

and

$$\mathbb{D} := \{(z_0, z_1) \in U / z_0 = 1\}.$$

We can then consider  $U$  as a principal bundle over the Poincaré disc  $\mathbb{D}$  which admits the trivialisation :

$$\begin{aligned} U &\rightarrow \mathbb{C}^* \times \mathbb{D} \\ (z_0, z_1) &\mapsto (z_0, (1, \frac{z_1}{z_0})). \end{aligned}$$

The vector bundle associated to  $U$  is trivial and we can consider it as the extension of  $U$  over zero. We will denote by  $U^q$  the tensor powers of this vector bundle.

We recall that  $U(1, 1)$  is the group of isomorphisms of  $\mathbb{C}^2$  which preserve the form

$$u(z, w) = -z_0 \overline{w_0} + z_1 \overline{w_1}.$$

Moreover,

$$U(1, 1) = \{e^{i\theta} \begin{pmatrix} \alpha & \overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix}; \alpha \overline{\alpha} - \beta \overline{\beta} = 1; \theta \in \mathbb{R}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2\}.$$

and  $U(1, 1)$  acts on  $U$ .

One of the central results of this work of Tønnesen-Friedman is then (see [31]):

**Theorem 4.2.** *Let  $q$  be a non zero integer. There exists a constant  $k_q$  such that for every choice of constants  $0 < a < b$  such that  $\frac{b}{a} < k_q$ , there is a  $U(1, 1)$ -invariant extremal Kähler metric with non-constant scalar curvature on  $U$ . This metric can be extended in a smooth way on  $\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus U^q)$ .*

**Remark 4.2.1.** The value of the scalar curvature is  $-\frac{4}{b}$  on the zero section and  $-\frac{4}{a}$  on the infinity section.

**Remark 4.2.2.** Here the considered manifolds are non-compact and we say that the metric is extremal if the vector field  $J\nabla s$  associated to the metric is holomorphic.

Tønnesen-Friedman uses this result to obtain extremal metrics on pseudo-Hirzebruch surfaces. Let  $\Sigma$  a Riemann surface of genus greater or equal than two and let  $\Gamma$  be its fundamental group.  $\Gamma$  can be represented as a subgroup of  $U(1, 1)$  and we obtain a holomorphic bundle:

$$\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus U^q)/\Gamma \rightarrow \mathbb{D}/\Gamma = \Sigma.$$

Tønnesen-Friedman shows that  $\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus U^q)$  is isomorphic to  $\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{K}^{\frac{q}{2}})$  where  $\mathcal{K}$  stands for the canonical line bundle. The result of Tønnesen-Friedman provides extremal metrics on  $\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{K}^{\frac{q}{2}})$ .

**Remark 4.2.3.** It was pointed to me by Apostolov that this construction of extremal metrics was initiated by Calabi in the case of genus 0 and by Hwang and Guan in the case of genus 1.

Now we consider an orbifold Riemann surface  $\bar{\Sigma}$  of genus  $g$ . The genus  $g$  is no longer assumed to be greater than two but we assume that the orbifold Euler characteristic is strictly negative. In that case, the orbifold fundamental group  $\Gamma$  of  $\bar{\Sigma}$  can be represented as a subgroup of  $U(1, 1)$  such that

$$\bar{\Sigma} = \mathbb{D}/\Gamma.$$

We refer to [24] for more details on orbifold Riemann surfaces.

We saw that

$$U \cong \mathbb{C}^* \times \mathbb{D}$$

The action of  $U(1, 1)$  in this chart is given by:

$$\gamma \cdot (\xi, z) \mapsto (e^{iq\theta}(\alpha + \bar{\beta}z)^q \xi, \frac{\beta + \bar{\alpha}z}{\alpha + \bar{\beta}z})$$

where

$$\gamma = e^{i\theta} \begin{pmatrix} \alpha & \bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in U(1, 1).$$

The action of  $U(1, 1)$  on  $\mathbb{C}^{\otimes q} \times \mathbb{D}$  is then given by:

$$\gamma \cdot (\xi, z) \mapsto (e^{iq\theta}(\alpha + \bar{\beta}z)^q \xi, \frac{\beta + \bar{\alpha}z}{\alpha + \bar{\beta}z})$$

and the change of coordinates

$$(\xi, z) \rightarrow (\xi^{-1}, z)$$

enables us to extend this action on the infinity section of  $\pi$  and to define

$$\bar{M} = \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus U^q)/\Gamma.$$

This naturally fibres over  $\bar{\Sigma}$  to define a ruling of the orbifold

$$\pi : \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus U^q)/\Gamma \rightarrow \bar{\Sigma}.$$

We need some definitions and results about orbifolds. We adopt here the convention from [26].



**Definition 4.2.4.** An orbifold line bundle over an orbifold  $M$  is given by local invariant line bundles  $L_i$  over each orbifold charts  $U_i$  such that the following cocycle condition is satisfied:

Suppose that  $V_1, V_2$  and  $V_3$  are open sets in  $M$  with orbifold groups  $G_i$ , and orbifold charts  $U_i$ , such that  $V_i = U_i/G_i, i = 1..3$ .

Then by definition of an orbifold there are charts  $U_{ij}$  such that  $V_i \cap V_j = V_{ij} \cong U_{ij}/G_{ij}$  with inclusions  $U_{ij} \rightarrow U_i$  and  $G_{ij} \rightarrow G_i, \{i, j\} \subset \{1, 2, 3\}$ . Pulling back  $L_j$  and  $L_i$  to  $U_{ij}$ , there exists an isomorphism  $\phi_{ij}$  from  $L_j$  to  $L_i$  intertwining the actions of  $G_{ij}$ . Moreover, pulling-back to  $U_{123}$ , the cocycle condition is that over  $U_{123}$  we have:

$$\phi_{12}\phi_{23}\phi_{31} = 1 \in L_1 \otimes L_2^* \otimes L_2 \otimes L_3^* \otimes L_3 \otimes L_1^*.$$

The orbifold canonical bundle  $\mathcal{K}_{orb}$  is defined to be  $\mathcal{K}_U$  on each orbifold chart  $U$ . This definition can be generalised to define orbifold vector bundles, tensor products, direct sums and projectivisations of orbifold bundles. Indeed, we define these operation on orbifold charts  $U_i$  and verify that the cocycle condition is still satisfied.

**Remark 4.2.5.** We will see in the study of the singularities that we need to consider  $q$  even.

With these definitions in mind, we prove the following:

**Lemma 4.2.6.** *Suppose that  $q = 2r$ . Then the surface  $\overline{M}$  is isomorphic to  $\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{K}_{orb}^r)$ .*

*Proof.* Following Tønnesen-Friedman ([31]), we compute the transition functions. Recall that the action of  $\Gamma$  on  $\mathbb{D} \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  is given by:

$$\forall \gamma \in \Gamma, \gamma \cdot (\xi, z) = (e^{2ir\theta}(\alpha + \bar{\beta}z)^{2r}\xi, \frac{\beta + \bar{\alpha}z}{\alpha + \bar{\beta}z})$$

in the chart  $\mathbb{D} \times \mathbb{C}^{\otimes 2r}$ . As  $\mathbb{D}/\Gamma = \Sigma$ , the transition functions are given by the maps:

$$z \mapsto \gamma \cdot z$$

with  $\gamma \in \Gamma$ . Thus the transition functions for the bundle  $(\mathbb{D} \times U^{2r})/\Gamma$  are

$$z \mapsto (\alpha + \bar{\beta}z)^{2r}$$

Now the transition functions for  $\mathcal{K}_{orb}$  are computed by

$$d(\gamma z) = d\left(\frac{\beta + \bar{\alpha}z}{\alpha + \bar{\beta}z}\right) = \left(\frac{1}{\alpha + \bar{\beta}z}\right)^2 dz$$

because  $\gamma \in U(1, 1)$ . It shows that they are equal to

$$z \mapsto (\alpha + \bar{\beta}z)^{-2}$$

and  $(\mathbb{D} \times U^{2r})/\Gamma = \mathcal{K}_{orb}^r$ . So  $\overline{M} = \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{K}_{orb}^r)$  on  $\overline{\Sigma}$ .

Q.E.D.

The extremal metric mentioned in Theorem 4.2 is  $\Gamma$ -invariant as it is  $U(1, 1)$ -invariant and the result of Theorem [31] extend to the case of orbundles:

**Proposition 4.2.7.** *Let  $q = 2r$  be a non zero even integer. There exists a constant  $k_q$  such that for every choice of constants  $0 < a < b$  such that  $\frac{b}{a} < k_q$ , there is an extremal Kähler metric with non-constant scalar curvature on  $\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{K}_{orb}^r)$ . The restrictions of this metric to the zero and infinity sections of*

$$\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{K}_{orb}^r) \rightarrow \bar{\Sigma}$$

*are constant scalar curvature metrics. The value of the scalar curvature on the zero section is  $-\frac{4}{b}$  and  $-\frac{4}{a}$  on the infinity section.*

We have obtained extremal metrics on orbifold ruled surfaces.

**4.3. Singularities.** We now proceed to the study of the singularities of the orbifolds. Let  $(A_i)$  denote the singular points of  $\bar{\Sigma}$  and let  $q_i$  be the order of the singular point  $A_i$ .

As  $\chi^{orb}(\bar{\Sigma}) < 0$ , there exists a morphism :

$$\bar{\phi} : \Gamma \rightarrow Sl_2(\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2 = Isom(\mathbb{H}^2)$$

such that  $\bar{\Sigma} = \mathbb{H}^2/Im(\bar{\phi})$ . The transformation

$$z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$$

that sends the half-plane to the Poincaré disc gives :

$$\phi_0 : \Gamma \rightarrow SU(1, 1)/\mathbb{Z}_2.$$

We recall a description of  $\Gamma$ :

$$\Gamma = \langle (a_i, b_i)_{i=1..g}, (l_i)_{i=1..s} \mid \prod [a_i, b_i] \prod l_i = l_i^{q_i} = 1 \rangle.$$

Then we have matrice  $A_i, B_i, L_i$  in  $SU(1, 1)$  satisfying the relations

$$\prod [A_i, B_i] \prod L_i = \pm Id; L_i^{q_i} = \pm Id.$$

As the action of  $-Id$  is :

$$(\xi, z) \rightarrow ((-1)^q \xi, z),$$

in order to obtain isolated singularities, we will suppose that  $q$  is even. In that case the action of  $-Id$  is trivial on  $\mathbb{C}^{\otimes q} \times \mathbb{D}$ .

To simplify notation we will denote by  $\Gamma$  the image of  $\phi_0$ . The singular points of  $\bar{M}$  come from the points of  $\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus U^q)$  with non-trivial stabilizer under the action of  $\Gamma/\mathbb{Z}_2$ . We will deal with points on the zero section in the chart  $\mathbb{C}^{\otimes q} \times \mathbb{D}$ . Let  $(\xi_0, z_0)$  be a point whose stabilizer under the action of  $\Gamma$  is not reduced to  $\{\pm Id\}$  and let  $\gamma \neq \pm id$  in  $\Gamma$  fix  $(\xi_0, z_0)$ .  $\gamma \in U(1, 1)$  can be written:

$$\gamma = \pm \begin{pmatrix} \alpha & \bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

and in particular

$$\frac{\beta + \bar{\alpha}z_0}{\alpha + \bar{\beta}z_0} = z_0.$$

The stabilizer of  $(\xi_0, z_0)$  is then include in the one of  $z_0 \in \mathbb{D}$  under the action of  $\Gamma$  on  $\mathbb{D}$ . The point  $z_0$  gives a singular point  $A_i$  of  $\bar{\Sigma} = \mathbb{D}/\Gamma$  and the point  $(\xi_0, z_0)$  gives rise to a singular point in  $\bar{M}$  in the singular fiber  $\pi^{-1}(A_i)$ . The isotropy group of  $A_i$  is  $\mathbb{Z}_{q_i}$  and we can suppose that  $\gamma$  is a generator of this group.  $\gamma$  is an element of  $SU(1, 1)$  of order  $q_i$ , its characteristic polynomial is

$$X^2 \pm 2Re(\alpha)X + 1.$$

*Extremal Kähler metrics on blow-ups of parabolic ruled surfaces*

If  $Re(\alpha) = \delta$  with  $\delta \in \{-1, +1\}$ , there exists a basis in which  $\gamma$  is one of the following matrices:

$$\begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \delta & 1 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}.$$

It is not possible because  $\gamma$  is suppose to be different from  $\pm Id$  and of finite order. Thus the characteristic polynomial of  $\gamma$  admits two distinct complex roots and in an appropriate basis the matrix of  $\gamma$  is

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

We note that  $\gamma$  is diagonalizable in  $SU(1, 1)$  so we can fix  $P \in SU(1, 1)$  such that

$$P^{-1} \cdot \gamma \cdot P = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

$\gamma$  is of finite order  $q_i$  and  $\det(\gamma) = 1$  so we can fix  $\xi_{q_i}$  a primitive  $q_i$ th root of unity such that

$$P^{-1} \cdot \gamma \cdot P = \begin{pmatrix} \xi_{q_i} & 0 \\ 0 & \xi_{q_i}^{-1} \end{pmatrix}.$$

As  $P \in SU(1, 1)$ ,  $P$  preserves  $U$  and induces a change of coordinates in a neighbourhood of the fixed point.

Indeed, the action of  $P$  on the coordinates  $(\xi, z)$  is given by:

$$P \cdot (\xi, z) = ((c + \bar{d}z)^q \xi, \frac{d + \bar{c}z}{c + \bar{d}z})$$

with

$$P = \begin{pmatrix} c & \bar{d} \\ d & \bar{c} \end{pmatrix}.$$

We compute the differential at  $(\xi_0, z_0)$ :

$$DP_{(\xi_0, z_0)} = \begin{pmatrix} q\bar{d}(c + \bar{d}z_0)^{q-1}\xi_0 & (c + \bar{d}z_0)^q \\ 1/(c + \bar{d}z_0)^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

and the determinant of this matrix is

$$\det(DP_{(\xi_0, z_0)}) = -(c + \bar{d}z_0)^{q-2}.$$

Note that  $q \geq 2$ . As we don't have  $c = d = 0$ , this determinant is zero if and only if  $z_0 = -\frac{c}{\bar{d}}$ . But  $|z_0|^2 < 1$  so it would imply  $|c|^2 < |d|^2$  which is impossible because

$$\det(P) = |c|^2 - |d|^2 = 1.$$

Thus  $P$  defines a change of coordinates near the singular point. In these new coordinates  $(\xi', z')$ , the action of  $\gamma$  is

$$(\xi', z') \mapsto (\xi_{q_i}^q \xi', \xi_{q_i}^{-2} z').$$

The only fixed points of  $\gamma$  in this local chart are  $(0, 0)$  and  $(\infty, 0)$ , the point at the infinity corresponds to the action

$$(\xi', z') \mapsto (\xi_{q_i}^{-q} \xi', \xi_{q_i}^{-2} z').$$

As the singular points of  $\bar{\Sigma}$  are isolated, the singular fibers of  $\bar{M}$  are isolated. Moreover, we see that the singular points are on the zero and infinity sections in the initial coordinates system, as the transformation  $P$  preserves the ruling and the zero and infinity sections. We can recognize precisely the Hirzebruch-Jung type of

these singularities using the same method as in 3.1. To simplify we will suppose  $\gcd(r, q_j) = 1$ . If we set  $\zeta_i = \xi_{q_i}^{-2}$ , the action is

$$(\xi', z') \mapsto (\zeta_i^{-r} \xi', \zeta_i z').$$

We can summarize:

**Proposition 4.3.1.** *Let  $\bar{\Sigma}$  be an orbifold Riemann surface with strictly negative orbifold Euler characteristic. Let  $(A_i)_{1 \leq i \leq s}$  be its singular points that we suppose to be of order strictly greater than 2. Then if  $q = 2r$  is an even integer, the orbifold  $\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{K}_{orb}^r)$  defined in the above construction has  $2s$  singular points, two of them in each fiber  $\pi^{-1}(A_i)$ . Moreover, if  $\gcd(r, q_j) = 1$ , the singular points are of type  $A_{p_i, q_i}$  and  $A_{q_i - p_i, q_i}$  in each fiber, with  $p_i \equiv -r[q_i]$ .*

**Remark 4.3.2.** The hypothesis on the order of the singularity of  $\bar{\Sigma}$  is needed to avoid an isotropy group of the form  $\{\pm Id\}$ .

We can now apply the Theorem 2.4.

**Corollary 4.3.3.** *Let  $\bar{M}$  be a orbifold surface as in Proposition 4.3.1, endowed with an extremal metric arising from Proposition 4.2.7. Let  $\pi : \tilde{M} \rightarrow \bar{M}$  be the Hirzebruch-Jung resolution of  $\bar{M}$ . Then,  $\tilde{M}$  admits extremal Kähler metrics with non-constant scalar curvature that converges to  $\pi^*\omega$  on every compact set away from the exceptional divisors.*

## 5. SURFACES AND KÄHLER CLASSES OBTAINED, APPLICATIONS TO UNSTABLE PARABOLIC STRUCTURES

In this section we study in more details the surfaces and the Kähler classes that we obtained in the last two sections. The second construction will give new examples of extremal metrics on blow-ups of unstable parabolic ruled surfaces.

**5.1. The surfaces.** We want to describe the surfaces that we obtain after desingularisation. For the first construction, these are toric surfaces and it is known that the only non-singular compact toric surfaces are obtained from blow-ups of  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$  or  $\mathbb{F}_a$  (see [14]). We will see on examples how the fan description enables us to recognize these surfaces. In the following we will focus on the surfaces that come from the second construction.

Let's consider  $\bar{M}$  obtained in the Corollary 4.3.3.  $\bar{M}$  is the total space of a singular fiber bundle

$$\bar{\pi} : \bar{M} \rightarrow \bar{\Sigma}.$$

The  $2s$  singular points are situated on  $s$  singular fibers  $F_i$ , each of them admits a singularity of type  $A_{p_i, q_i}$  on the zero section and of type  $A_{q_i - p_i, q_i}$  on the infinity section.

We consider  $\Sigma$  the smooth Riemann surface topologically equivalent to  $\bar{\Sigma}$ . We define a parabolic ruled surface  $\tilde{M}$  in the following way:

First let  $r$  be defined by  $\bar{M} = \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{K}_{orb}^r)$  with the notation of Section 4.1. We set

$$n_j = \frac{p_j + r}{q_j}$$

for each singular fiber. Note that by construction  $n_j$  is an integer. We define the line bundle  $L$  on  $\Sigma$ :

$$L = \mathcal{K}^r \otimes_j [A_j]^{r - n_j}.$$

*Extremal Kähler metrics on blow-ups of parabolic ruled surfaces*

where the  $A_j$  stand for the points on  $\Sigma$  corresponding to the singular points of  $\bar{\Sigma}$ ,  $[A_j]$  are the line bundles associated to these divisors and  $\mathcal{K}$  is the canonical line bundle on  $\Sigma$ . We set

$$\check{M} = \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus L).$$

The parabolic structure on  $\check{M}$  consists of  $s$  points  $A_j \in \Sigma$  which correspond to the  $s$  singular points of the topologically equivalent  $\bar{\Sigma}$ . We choose the  $B_j \in \pi^{-1}(A_j)$  to be on the infinity section and the corresponding weights to be  $\alpha_j := \frac{p_j}{q_j}$ .

Let  $Bl(\check{M}, \mathcal{P})$  be the iterated blow-up associated to  $\check{M}$ .

**Proposition 5.1.1.** *The smooth surface obtained by the minimal resolution of  $\bar{M}$  is  $Bl(\check{M}, \mathcal{P})$ .*

*Proof.* We denote by

$$\bar{\pi} : \widetilde{M} \rightarrow \bar{M}$$

the minimal resolution of  $\bar{M}$ . This is a ruled surface so it comes from blow-ups of a minimal ruled surface  $M$ :

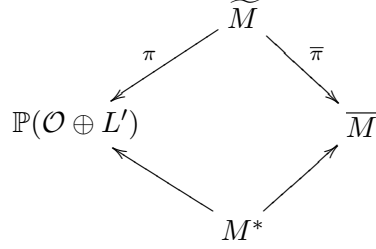
$$\begin{array}{ccc} & \widetilde{M} & \\ \pi \swarrow & & \searrow \bar{\pi} \\ M & & \bar{M} \end{array}$$

$M$  is the total space of a fibration  $\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus L')$  over  $\Sigma$ . Indeed,  $M$  is birationally equivalent to  $\bar{M}$  so  $M$  is a ruled surface over  $\Sigma$ . As  $M$  is minimal, it is of the form  $\mathbb{P}(E)$  where  $E$  is a holomorphic bundle of rank 2 on  $\Sigma$ . Then, to show that  $E$  splits, we consider the vector field  $X_s = J\nabla s$  on  $\bar{M}$ , with  $s$  the scalar curvature of a metric from Corollary 4.3.3.  $X_s$  is vertical and can be lifted to  $N$ . It projects to a vertical holomorphic vector field on  $M$ . This can be used to show that  $E$  splits. The idea is that the two zeros of this vector field restricted to each fiber give two holomorphic sections of  $\mathbb{P}(E)$  and describe the splitting we look for. The number of zeros of this vector field does not change on  $\Sigma$  as it is a holomorphic function, so the two sections don't meet each other. And we are sure that there are two zeros because it is an  $S^1$  action and not a  $\mathbb{R}$  action. Tensoring by a line bundle if necessary, we can suppose that  $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus L')$ .

$$\begin{array}{ccc} & \widetilde{M} & \\ \pi \swarrow & & \searrow \bar{\pi} \\ \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus L') & & \bar{M} \end{array}$$

It remains to recognize  $L'$ .

We set  $M^* := \mathbb{D}^* \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1/\Gamma$ , where  $\mathbb{D}^*$  denotes the Poincaré disc minus the fixed points under the action of  $\Gamma$ .  $M^*$  is the surface obtained from  $\bar{M}$  by taking away the singular fibers. As  $\bar{\pi}$  and  $\pi$  are biholomorphisms away from the exceptional divisors, we get a natural injection from  $M^*$  to  $M$ .  $M$  appears as a smooth compactification of  $M^*$ . Moreover,  $M^* = \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{K}_{orb}^r)$  on  $\Sigma^*$ .



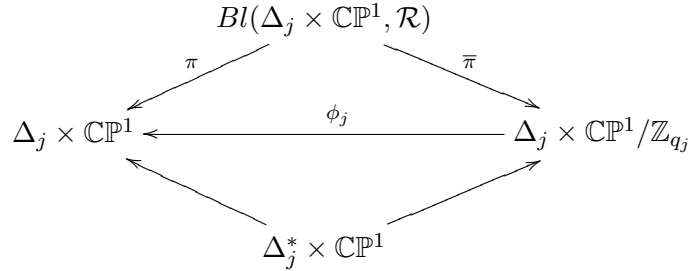
We can understand the way of going from  $\overline{M}$  to  $M$  in the neighbourhood of the singular fibers using the work of [24]. If  $A_j$  is a singular point of  $\overline{\Sigma}$  of order  $q_j$  and  $\Delta_j$  a small disc around  $A_j$  then  $\Delta_j \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1/\mathbb{Z}_{q_j}$  is a neighbourhood of the singular fiber over  $A_j$ . It follows from section 4.1 that the action of  $\mathbb{Z}_{q_j}$  is given by:

$$\begin{aligned}
 \Delta_j \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1 &\rightarrow \Delta_j \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \\
 (z, [u, v]) &\mapsto (\zeta_{q_j} z, [u, \zeta_{q_j}^{p_j} v]).
 \end{aligned}$$

with  $\zeta_{q_j}$  a  $q_j^{\text{th}}$  primitive root of unity and  $p_j \equiv -r[q_j]$ . We get a neighbourhood  $\Delta_j \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  of the corresponding point in  $M$  by the map:

$$\begin{aligned}
 \phi_j : (\Delta_j \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1)/\mathbb{Z}_{q_j} &\rightarrow \Delta_j \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \\
 (z, [u, v]) &\mapsto (z^{q_j}, [u, z^{-p_j} v]).
 \end{aligned}$$

Indeed, the resolution of Hirzebruch-Jung singularities and blow-down  $-1$ -curves are toric processes. From the theorem 3.3.1. of [24], we know that the fan of the Hirzebruch-Jung resolution of  $\Delta_j \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1/\mathbb{Z}_{q_j}$  is the same as the one of the iterated blow-up  $Bl(\Delta_j \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1, \mathcal{R})$  of  $\Delta_j \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  described in the introduction, with parabolic structure  $\mathcal{R}$  consisting in the point  $(0, [0, 1])$  with the weight  $\frac{p_j}{q_j}$ . Moreover, the resulting map from  $\Delta_j \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1/\mathbb{Z}_{q_j}$  to  $\Delta_j \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  is  $\phi_j$ .



We get  $M$  by gluing to  $M^*$  the open sets  $\Delta_j \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  on the open sets  $(\Delta_j^* \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1)/\mathbb{Z}_{q_j}$  with the maps  $\phi_j$ . We now show that these maps modify  $\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{K}_{orb}^r)$  on  $\Sigma^*$  to  $\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus L)$  on  $\Sigma$ . Indeed, from the identity

$$dz = x^{\frac{1}{q_j} - 1} dx$$

on  $\Delta_j^*/\mathbb{Z}_{q_j}$ , we see that on  $\Delta_j^*$ , a local trivialisation for  $L'$  is given by

$$x \mapsto x^{r - \frac{r}{q_j}} (dx)^{\otimes r}.$$

Then the maps  $\phi_j$  give

$$u' = u, v' = z^{-p_j} v = x^{-\frac{p_j}{q_j}} v$$

wich implies that the section extends over  $\Delta_j$  in  $\Sigma$  by

$$x \mapsto x^{r - \frac{p_j+r}{q_j}} dx^{\otimes r}.$$

In other words, gluing  $\Delta_j \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  to  $M^*$  using the  $\phi_j$  is the same as tensoring  $\mathcal{K}_{orb}^r$  with the  $[A_j]^{\frac{-p_j}{q_j}}$ . Thus we conclude that  $L' = \mathcal{K}^r \otimes_j [A_j]^{r-n_j} = L$ .

So far, we have seen that  $\widetilde{M}$  comes from  $\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus L)$  from an iterated blow-up. The iterated blow-up is described locally in the toric framework in [24] and it exactly corresponds to the one of  $Bl(\widetilde{M}, \mathcal{P})$ , which ends the proof. Q.E.D.

**Remark 5.1.2.** We see that the parabolic structure associated to  $\widetilde{M}$  consists of the points  $B_j$  at infinity over the marked points  $A_j$  together with the weights  $\frac{p_j}{q_j}$ . Indeed, following [23], this structure can be associated to a parabolic structure on  $\mathcal{O} \oplus L$ . The marked point at infinity corresponds to the bundle  $L$  and this give the flag over  $A_j$ :

$$\mathcal{O} \oplus L \supset L \supset \{0\}$$

with the weights

$$0 \leq \frac{p_j}{q_j} < 1.$$

This parabolic structure enables us to see  $\mathcal{O} \oplus L$  as the quotient of  $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{H}$  by the group  $\pi_1(\Sigma^*)$  using a locally unitary representation  $\rho$  of  $\pi_1(\Sigma^*)$  to act on  $\mathbb{C}^2$ . This representation sends a small loop around  $A_j$  to

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta_{q_j}^{p_j} \end{pmatrix}.$$

Together with the action on the base in local coordinates:

$$z \mapsto \zeta_{q_j} z$$

we recognise the action that defined the orbifold.

**5.2. Unstable parabolic structures, proof of theorem B.** Let  $M = \mathbb{P}(E)$  be a ruled surface over a Riemann surface  $\Sigma$ .

From [6] we know that if the genus of  $\Sigma$  is greater than two, then  $M$  admits a metric of constant scalar curvature in some class if and only if  $E$  is polystable.

On the other hand, Tønnesen-Friedman has proved in [31] that  $M = \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus L)$  with  $\deg(L) > 0$ , if and only if  $M$  admits an extremal Kähler metric of non-constant scalar curvature. In that case the bundle is decomposable and not polystable.

We now focus on parabolic ruled surfaces, doing the analogy with the previous results mentioned.

Suppose that the ruled surface is equipped with a parabolic structure  $\mathcal{P}$ . In that case, we know from Rollin and Singer [24] that if the bundle is parabolically stable then there exists a scalar-flat Kähler metric on  $Bl(M, \mathcal{P})$ . More generally, if the surface is parabolically polystable and non-sporadic, then there exists a constant-scalar curvature metric on  $Bl(M, \mathcal{P})$  ([25]).

Given a parabolically unstable ruled surface, is there an extremal metric of non-constant scalar curvature on  $Bl(M, \mathcal{P})$ ?

Let's recall the definition of parabolic stability from [24]:

*Extremal Kähler metrics on blow-ups of parabolic ruled surfaces*

We consider a geometrically ruled surface  $\pi : \check{M} \rightarrow \Sigma$  with a parabolic structure given by  $s$  points  $P_j$  in  $\Sigma$ , and for each of these points a point  $B_j \in \pi^{-1}(A_j)$  with a weight  $\alpha_j \in ]0, 1[ \cap \mathbb{Q}$ .

**Definition 5.2.1.** A parabolic ruled surface  $\check{M}$  is parabolically stable if for every holomorphic section  $S$  of  $\pi$  its slope is strictly positive:

$$\mu(S) = S^2 + \sum_{j \notin I} \alpha_j - \sum_{j \in I} \alpha_j > 0$$

where  $j \in I$  if and only if  $B_j \in S$ .

**Remark 5.2.2.** If  $\check{M} = \mathbb{P}(E)$ , one can check that this definition is equivalent to the fact that  $E$  is parabolically stable in the sense of Mehta-Seshadri [23].

First of all, we show that if  $Bl(M, \mathcal{P})$  admits an extremal metric of non-constant scalar curvature, then the bundle  $E$  is decomposable and one of the zero or infinity section might destabilise  $M$ . Thus the situation looks like in the case studied by Tønnesen where there is no parabolic structure.

**Proposition 5.2.3.** *Let  $M = \mathbb{P}(E)$  be a parabolic ruled surface over a Riemann surface of genus  $g$  with a parabolic structure  $\mathcal{P}$ . Let  $\frac{p_i}{q_j}$  be the weights of the parabolic structure. Suppose that  $Bl(M, \mathcal{P})$  admits an extremal metric of non-constant scalar curvature. Then  $M = \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus L)$ . Moreover, if*

$$2 - 2g - \sum_j \left(1 - \frac{1}{q_j}\right) \leq 0$$

*the marked points of the parabolic structure all lie on the zero section or the infinity section induced by  $L$ .*

**Remark 5.2.4.** If

$$2 - 2g - \sum_j \left(1 - \frac{1}{q_j}\right) \leq 0$$

we can suppose that the marked point all lie on the same section. Indeed, the iterated blow-up associated to the point  $B$  on the zero section with weight  $\frac{p}{q}$  is the same as the one with marked point in the same fiber on the infinity section with weight  $\frac{q-p}{q}$ .

Moreover, we see that the infinity and zero sections have opposite slopes so one of them might destabilizes the surface.

*Proof.* Let  $\chi^{orb} = 2 - 2g - \sum_j \left(1 - \frac{1}{q_j}\right)$ . In the case  $\chi^{orb} > 0$  the genus  $g$  of  $\Sigma$  is 0 and in that case every ruled surface is of the form  $\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus L)$ . We suppose that  $\chi^{orb} \leq 0$ .

$Bl(M, \mathcal{P})$  admits an extremal metric of non-constant scalar curvature. Thus the extremal vector field is not zero. It generates an action by isometries on the manifold. Using the openness theorem of Lebrun and Simanca [18] we can suppose that the Kähler class of the metric is rational. In that case, the periodicity theorem of Futaki and Mabuchi [15] implies that the action induced by the extremal metric is a  $S^1$ -action. The extremal vector field is the lift under the iterated blow-up process of a vector field  $X$  on  $M$ . This vector field projects to the basis of the ruling  $\Sigma$ .



The projection vanishes and  $X$  is vertical. Indeed, as  $\chi^{orb} \leq 0$ , this projection is parallel and as  $X$  lifts to the blow-ups it has to vanish somewhere, thus its projection vanishes and is zero. The restriction of  $X$  on each fiber vanishes twice because it is an  $S^1$  action. The zero locus provides two sections of the ruling and  $E$  splits. Moreover, in order to preserve this vector field under the blow-up process, the marked point need to be on the zero or infinity section.

Q.E.D.

We can state a partial answer to the question of this section:

**Proposition 5.2.5.** *Let  $M = \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus L)$  be a ruled surface over a Riemann surface of genus  $g \geq 1$  with  $L$  a holomorphic line bundle of strictly positive degree. If  $\mathcal{P}$  is an unstable parabolic structure on  $M$  with every marked point on the infinity or zero section, then the iterated blow-up  $Bl(M, \mathcal{P})$  carries an extremal Kähler metric of non-constant scalar curvature.*

**Remark 5.2.6.** With the work of Tønnesen-Friedman in mind, and the previous result, we could expect that every unstable parabolic structure who give rise to extremal metric of non-constant scalar curvature on the iterated blow-up would lie on a surface of the form  $\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus L)$  with  $L$  of degree different from zero. The theorem 5.3 prove that this is not the case.

*Proof.* This is an application of the main theorem in [5].

From [6], we know that there exists extremal Kähler metrics of non-constant scalar curvature on  $M$ . Then, the action of the extremal vector field is an  $S^1$  action which rotates the fibers, fixing the zero and infinity sections. Indeed, the maximal compact subgroup of biholomorphisms of these surfaces is isomorphic to  $S^1$  and by Calabi's theorem the isometry group of these metrics must be isomorphic to  $S^1$ . Then we can apply the result of Arezzo, Pacard and Singer to each step of the blow-up process, working modulo this maximal torus of hamiltonian isometries. Q.E.D.

The gluing method of section 2 enables to obtain more extremal metrics from unstable parabolic structures. The end of this section consists in the proof of the following result:

**Theorem 5.3.** *Let  $\Sigma$  be a Riemann surface of Euler characteristic  $\chi$  and  $L$  a line bundle of degree  $d$  on  $\Sigma$ . If  $\chi < 0$ , we suppose that  $d = -\chi$  or  $d \geq 1 - 2\chi$ . Then there exists an unstable parabolic structure on  $\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus L)$  such that the associated iterated blow-up admits an extremal Kähler metric of non-constant scalar curvature. The Kähler class obtained is not small on every exceptional divisor.*

**Remark 5.3.1.** This theorem provide extremal metrics on iterated blow-ups of parabolically unstable surfaces in different Kähler classes that the one that we got in the proposition 5.2.5.

It also gives examples in the case  $g = 0$ .

In the cases where  $g = 0$  or  $g = 1$ , it also provides examples in the case of a line bundle of degree 0.

**Remark 5.3.2.** The work of Székelyhidi [28] shows that the Kähler classes of the metrics constructed by Tønnesen-Friedman are exactly those which are relatively K-polystable. It might be possible to find a notion of relative parabolic stability that corresponds to the different parabolic unstable structures considered.

*Extremal Kähler metrics on blow-ups of parabolic ruled surfaces*

We will slightly modify the construction of section 4 in order to obtain more general results. Let  $\Sigma$  be a Riemann surface. If  $L_1$  and  $L_2$  are two line bundles over  $\Sigma$  of same degree, then  $L_1 \otimes L_2^{-1}$  is a flat line bundle. We will try to write every line bundle on  $\Sigma$  in the following manner:

$$\mathcal{K}^r \otimes_j [A_j]^{r-n_j} \otimes L_0$$

with  $L_0$  a flat line bundle.

Let  $L$  be a flat line bundle on  $\Sigma$ . Let  $\bar{\Sigma}$  be an orbifold Riemann surface topologically equivalent to  $\Sigma$  with strictly negative orbifold euler characteristic . Recall that

$$\pi_1^{orb}(\bar{\Sigma}) \cong \langle (a_i, b_i)_{i=1..g}, (l_i)_{i=1..s} \mid \prod [a_i, b_i] \prod l_i = l_i^{q_i} = 1 \rangle .$$

and

$$\pi_1(\Sigma) \cong \langle (a_i, b_i)_{i=1..g} \mid \prod [a_i, b_i] = 1 \rangle .$$

There is a morphism:

$$\psi : \pi_1^{orb}(\bar{\Sigma}) \rightarrow \pi_1(\Sigma)$$

which sends  $l_i$  to 1. As  $L$  is flat, there exists a representation

$$\rho : \pi_1(\Sigma) \rightarrow U(1)$$

such that

$$L = \tilde{\Sigma} \times \mathbb{C} / \pi_1(\Sigma),$$

where  $\tilde{\Sigma}$  is the universal cover of  $\Sigma$ . The action on the first factor comes from the universal covering and on the second factor from  $\rho$ . Thus we have an other representation:

$$\rho' : \pi_1^{orb}(\bar{\Sigma}) \rightarrow U(1)$$

given by

$$\rho' = \rho \circ \psi$$

and a flat bundle on  $\bar{\Sigma}$ :

$$L' = \mathbb{D} \times \mathbb{C} / \pi_1^{orb}(\bar{\Sigma}).$$

We consider the orbifold Kähler surface

$$\bar{M} = \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus (\mathcal{K}_{orb}^r \otimes L')).$$

Following an idea of Tønnesen-Friedman , we see that this orbifold admits an extremal Kähler metric of non-constant scalar curvature. Indeed, there is an extremal metric on  $\mathcal{K}_{orb}^r$  which extends to  $\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{K}_{orb}^r)$ . This metric and the flat metric on  $L'$  provide an extremal metric on  $\mathcal{K}_{orb}^r \otimes L'$  which extends similarly.

Moreover, the singularities of this orbifold are the same as the one of  $\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{K}_{orb}^r)$ . Indeed, the choice of the representation

$$\rho' : \pi_1^{orb}(\bar{\Sigma}) \rightarrow U(1)$$

is such that

$$\rho'(l_i) = 1$$

so the computations done in section 4.1 work in the same way. We can use the result of theorem 2.4 and we obtain a smooth ruled surface with an extremal Kähler metric. This surface is an iterated blow-up of a ruled surface which is

$$\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus (L_r \otimes L))$$

where

$$L_r = \mathcal{K}^r \otimes_j [A_j]^{r-n_j}$$

*Extremal Kähler metrics on blow-ups of parabolic ruled surfaces*

as in section 5.1 because the resolution and blow-down process does not affect the “ $L'$  part”. We can state:

**Proposition 5.3.3.** *Fix positive integers  $r$  and  $(q_j)_{j=1..s}$  such that for each  $j$ ,  $q_j \geq 3$  and  $\gcd(r, q_j) = 1$ . For each  $j$ , let*

$$p_j \equiv -r [q_j], \quad 0 < p_j < q_j, \quad n_j = \frac{p_j + r}{q_j}.$$

*Then consider a Riemann surface  $\Sigma$  of genus  $g$  with  $s$  marked points  $A_j$ . The previous integers define a parabolic structure on*

$$\check{M} = \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus (L_{r, (q_j)} \otimes L_0))$$

*with*

$$L_{r, q_j} = \mathcal{K}^r \otimes_j [A_j]^{r-n_j}$$

*and  $L_0$  any flat line bundle. The parabolic structure  $\mathcal{P}$  consists of the points  $B_j$  in the infinity section of the ruling of  $\check{M}$  over the points  $A_j$  together with the weights  $\frac{p_j}{q_j}$ . If*

$$\chi(\Sigma) - \sum_j \left(1 - \frac{1}{q_j}\right) < 0$$

*then  $Bl(\check{M}, \mathcal{P})$  admits an extremal Kähler metric of non-constant scalar curvature.*

We now end the proof of theorem 5.3

*Proof.* (theorem 5.3)

Now, in order to prove theorem 5.3, it remains to show that to any Riemann surface  $\Sigma$  and to each line bundle  $L$  on it, we can associate an orbifold Riemann surface  $\bar{\Sigma}$  defined by  $\Sigma$ , marked points  $(A_j)$  and weights  $q_j \geq 3$  such that  $\chi^{orb}(\bar{\Sigma}) < 0$  and

$$L = \mathcal{K}^r \otimes_j [A_j]^{r-n_j} \otimes L_0$$

where  $L_0$  is a flat line bundle. Then the associated iterated blow-up admits an extremal metric from proposition 5.3.3.

So let  $L$  be a line bundle over  $\Sigma$  and let  $d$  be its degree. We only need to show that there is a line bundle of the form

$$L_r = \mathcal{K}^r \otimes_j [A_j]^{r-n_j}$$

with degree  $d$  on  $\Sigma$ , keeping in mind the euler characteristic condition. If we manage to build such a line bundle, then  $L_0 = L \otimes L_r^{-1}$  is a flat line bundle and following the last proposition, we know how to obtain an iterated blow-up of  $\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus L)$  with an extremal metric.

We can suppose  $d \geq 0$  because

$$\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus L) \cong \mathbb{P}(L^{-1} \oplus \mathcal{O})$$

and  $\deg(L) = -\deg(L^{-1})$ . We will consider three cases.

First we suppose that the genus  $g$  of  $\Sigma$  is 0, that is  $\chi = 2$ . We consider the orbifold Riemann surface with  $s \geq 4$  marked points  $A_j$  with orders  $q_1 = q_2 = \dots = q_s = 3$  and we set  $r = 2$ . With this choice we have

$$\chi^{orb} = (2 - 2g) - \sum \left(1 - \frac{1}{q_j}\right) < 0.$$

*Extremal Kähler metrics on blow-ups of parabolic ruled surfaces*

Then we compute the degree  $d'$  of

$$\mathcal{K}^r \otimes [A_j]^{r-n_j}.$$

$$d' = r(2g - 2) + \sum (r - n_j) = -2r + s(r - 1) = -4 + s.$$

Then  $s = 4 + d$  gives the desired degree.

For  $g = 1$ , we consider  $d$  marked points of order 3 and  $r = 2$ . The degree of the bundle is then equal to  $d$ .

It remains to study the  $\chi < 0$  case. We use the same method,  $s$  marked point of order 3. Then  $d' = -\chi r + s(r - 1)$  if  $r = 1$  or  $r = 2$ .  $r = 1$  gives  $d' = -\chi$  and  $r = 2$  gives  $d' = s - 2\chi$ , which give the restriction stated in 5.3.

It is not difficult to see that the surfaces considered in the theorem A with the parabolic structure of section 5.1 are not parabolically stable. Indeed, if we consider  $\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus L)$ , and if we denote  $S_0$  and  $S_\infty$  the zero and infinity sections, following [24] we have

$$\mu(S_\infty) = S_\infty^2 - \sum_j \alpha_j$$

and

$$S_\infty^2 = \text{deg}(\mathcal{O} \oplus L) - 2\text{deg}(L) = -\text{deg}(L).$$

So

$$\mu(S_\infty) = -(-r\chi + \sum_j (r - n_j)) - \sum_j \frac{p_j}{q_j}$$

$$\mu(S_\infty) = r(\chi - \sum_j (1 - \frac{1}{q_j}))$$

Thus

$$\mu(S_\infty) = r\chi^{orb} < 0$$

And  $S_\infty$  destabilises  $\tilde{M}$ . Q.E.D.

**Remark 5.3.4.** If we consider more general constructions, we have

$$d' = (-\chi + s)r - \sum_j n_j$$

with  $s$  marked points. However the left part grows linearly in  $r$  while if we write  $r = q_j r_j - p_j$  the right part decrease as  $-r_j$  so we do not expect to obtain smaller degrees with this method.

**5.4. The Kähler classes.** Let  $(\overline{M}, \omega)$  be an orbifold extremal Kähler surface and  $(\tilde{M}, \omega_\varepsilon)$  the smooth surface obtained after desingularisation with an extremal metric as in Proposition 2.4

$$\overline{\pi} : \tilde{M} \rightarrow \overline{M}.$$

Away from the exceptional divisors,  $\omega_\varepsilon$  is obtained by a perturbation of the form  $\omega_\varepsilon = \omega + \partial\bar{\partial}f$  so the Kähler class doesn't change. In order to determine  $[\omega_\varepsilon]$  we just have to integrate  $\omega_\varepsilon$  along a basis for  $H_2(\tilde{M}, \mathbb{R})$ . We will compute the Kähler class in the case of the second construction with a unique singular fiber, the general case can be deduced from this one. We denote by  $M = \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus L)$  the minimal model associated to  $\tilde{M}$

$$\pi : \tilde{M} \rightarrow M.$$

*Extremal Kähler metrics on blow-ups of parabolic ruled surfaces*

Its homology  $H_2(M, \mathbb{R})$  is generated by the zero section and the class of a fiber. Thus the homology  $H_2(\widetilde{M}, \mathbb{R})$  is generated by the proper transform of these two cycle and the exceptional divisors. We consider the chain of curves coming from the resolution of the singular fiber of  $\overline{M}$

$$\begin{array}{cccccccccccc} -e_1 & -e_2 & & -e_{k-1} & -e_k & -1 & -e'_1 & -e'_{l-1} & & -e'_2 & -e'_1 \\ \circ & \circ & - & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & - & \circ & \circ \\ E_1 & E_2 & & E_{k-1} & E_k & S & E'_1 & E'_{l-1} & & E'_2 & E'_1 \end{array}$$

Note that  $S$  is the proper transform under  $\overline{\pi}$  of the singular fiber of  $\overline{M}$ .  $E'_1$  is the proper transform under  $\pi$  of a fiber of  $M$ . The construction of  $\omega_\varepsilon$  shows that integrating

$$\sum_j \int_{E_j} \omega_\varepsilon = \varepsilon^2 V$$

or

$$\sum_i \int_{E'_i} \omega_\varepsilon = \varepsilon^2 V'$$

for small positive number  $\varepsilon$  and  $V$  and  $V'$  depending on the volume of the metric on each resolution. The construction of the metric of Joyce, Calderbank and Singer enables to choose the volume of each curve  $E_j$  and  $E'_i$  provided that the sum is equal to  $V$  and  $V'$  respectively. Thus if we choose  $(a_j)$  and  $(a'_i)$  such that

$$\sum_j a_j = V$$

and

$$\sum_i a'_i = V'$$

we get

$$\int_{E_j} \omega_\varepsilon = \varepsilon^2 a_j$$

and

$$\int_{E'_i} \omega_\varepsilon = \varepsilon^2 a'_i$$

If we denote by  $S_0$  the proper transform of the zero section of  $M$  with  $\pi$ , it remains to compute  $[\omega_\varepsilon] \cdot S_0$  and  $[\omega_\varepsilon] \cdot S$ . These two integrals can be computed on  $\overline{M}$  following Tønnesen-Friedman [31]. On the zero section, the metric is of constant sectional curvature and its scalar curvature is equal to  $b$  so the Gauss-Bonnet formula for orbifolds gives

$$A = \int_{S_0} \omega_\varepsilon = -\pi b \chi^{orb}.$$

On  $S$ , the explicit form of the metric on  $U$  enables to compute

$$B = \int_S \omega_\varepsilon = 2\pi \frac{(b-a)}{2rq}.$$

where  $r$  is related to the degree  $d$  of  $L$  by  $d = -r\chi + \sum_j (r - n_j)$ ,  $a$  and  $b$  are constants satisfying  $\frac{a}{b} < k_{2r}$  and  $q$  is the order of the singularities of the singular fiber.



*Extremal Kähler metrics on blow-ups of parabolic ruled surfaces*

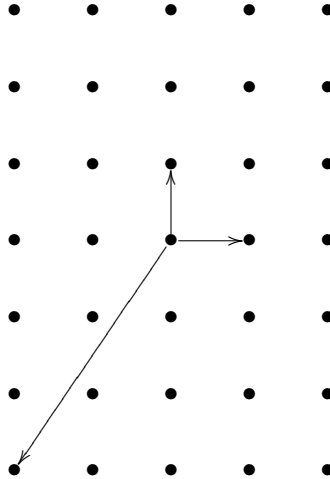
6.1. **First example: Toric case.** Here we will use the extremal metrics on weighted projective spaces constructed by Bryant [8]. We also refer to the work of Abreu [1]. In his paper, he constructed extremal Kähler metrics with non-constant scalar curvature on weighted projective spaces

$$\mathbb{C}P^2_{a,b,c} := \mathbb{C}^3 / \mathbb{C}^*$$

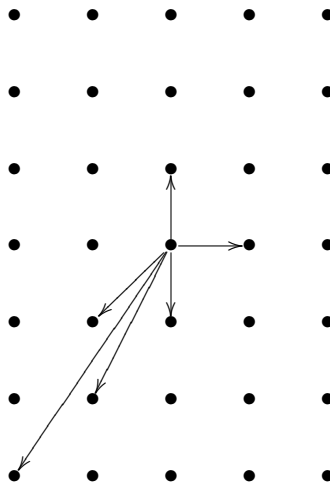
where the action is

$$\forall t \in \mathbb{C}^*, t.(x, y, z) := (t^a x, t^b y, t^c z).$$

In particular, we can endow  $\mathbb{C}P^2_{1,2,3}$  with an extremal metric. This orbifold has two isolated singularities:  $A_{1,2}$  at  $[0, 1, 0]$  and  $A_{2,3}$  at  $[0, 0, 1]$ . Thus we can endow a minimal resolution  $X$  of  $\mathbb{C}P^2_{1,2,3}$  with an extremal Kähler metric. We will show that  $X$  is a three times iterated blow-up of  $\mathbb{C}P^2$ . Following Fulton ([14]), we use the fan description of these toric manifolds. The fan associated to  $\mathbb{C}P^2_{1,2,3}$  is:



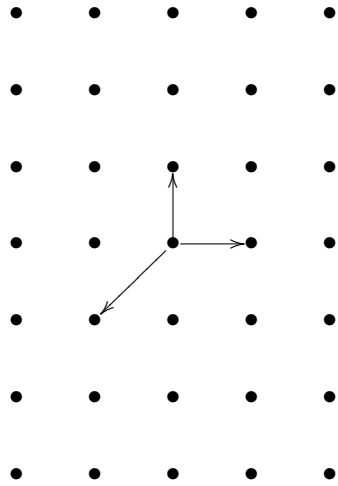
and the minimal resolution is :



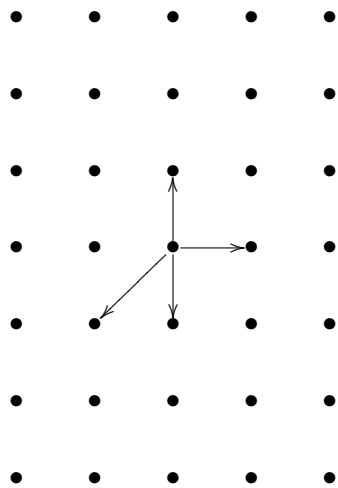
Indeed, two adjacent vectors of this fan form a basis of the lattice so this manifold is not singular.

*Extremal Kähler metrics on blow-ups of parabolic ruled surfaces*

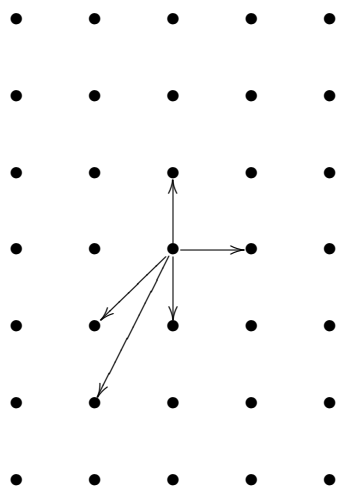
On the other hand, the toric description of  $\mathbb{C}P^2$  is :



A first blow-up gives:



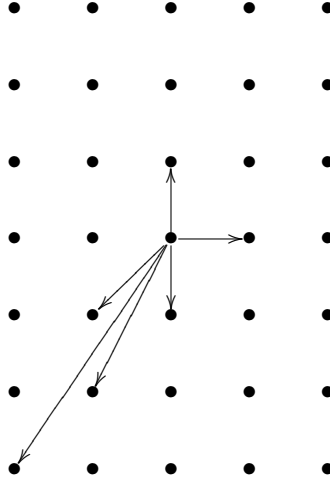
We can iterate the blow-up process:



and



Extremal Kähler metrics on blow-ups of parabolic ruled surfaces



And we recognize the minimal resolution of  $\mathbb{C}\mathbb{P}_{1,2,3}^2$ .

Now we describe the Kähler classes which arise this way. The singular homology group  $H_2(X, \mathbb{Z})$  is generated by  $H, E_1, E_2$  and  $E_3$  where  $H$  is the proper transform of a hyperplane in  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$  and the  $E_i$ 's are the successive exceptional divisors. If the first blow-up is done on a point of  $H$ , we get the following chain of curves:

$$\frac{H}{-2} \circ \frac{E_3}{-1} \circ \frac{E_2}{-2} \circ \frac{E_1}{-2} .$$

$E_1$  and  $E_2$  come from the resolution of the  $A_{2,3}$  singularity and  $H$  from the resolution of the  $A_{1,2}$  singularity of  $\mathbb{C}\mathbb{P}_{1,2,3}^2$ . So these divisors are small.  $E_3$  comes from  $\mathbb{C}\mathbb{P}_{1,2,3}^2$  as the pull back of the line  $\overline{H}$  joining the two singularities, and integrating the metric on it will be related to the volume of  $\mathbb{C}\mathbb{P}_{1,2,3}^2$ , which can be chosen arbitrarily. Indeed, the construction of the metric by Abreu is done on a space  $\mathbb{C}\mathbb{P}_{[1,2,3]}^2$  and then pulled back to  $\mathbb{C}\mathbb{P}_{1,2,3}^2$  by a map

$$p : \mathbb{C}\mathbb{P}_{1,2,3}^2 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}_{[1,2,3]}^2 .$$

As  $\mathbb{C}\mathbb{P}_{[1,2,3]}^2$  is diffeomorphic to  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$  (it is even biholomorphic but not as an orbifold), its homology group  $H_2(\mathbb{C}\mathbb{P}_{[1,2,3]}^2, \mathbb{Z})$  is one dimensional and evaluating the metric on  $p(\overline{H})$  will give a constant proportional to the volume. So it is for  $\overline{H}$ . Next, following the method of Section 5.4, we compute the intersection form  $Q$  in the basis  $H, E_3, E_2$  and  $E_1$

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} .$$

Then

$$I = [\varepsilon^2 a_3, a, \varepsilon^2 a_2, \varepsilon^2 a_1]^t$$

with  $a$  and the  $a_i$  arbitrary positive numbers and  $\varepsilon$  small enough. The computation of  $Q^{-1} \cdot I$  gives the Kähler class

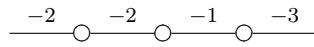
$$(3a + \varepsilon^2(a_3 + 2a_2 + a_1))PD(H) + (2a + \varepsilon^2(a_3 + a_2))PD(E_1)$$

*Extremal Kähler metrics on blow-ups of parabolic ruled surfaces*

$$+(4a + \varepsilon^2(2a_3 + 2a_2 + a_1))PD(E_2) + (6a + \varepsilon^2(3a_3 + 4a_2 + 2a_1))PD(E_3).$$

It proves Theorem D.

**6.2. Second example.** We now consider the orbifold Riemann surface of genus 1 with a singularity of order 3. In this case  $\chi^{orb} < 0$  and we can use the results of Corollary 4.3.3 with  $r = 1$ . The associated orbifold ruled surface has two singular points of order 3 and from Proposition 5.1.1 we know that a minimal resolution is a three times iterated blow-up of the surface  $\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus L)$  over  $\Sigma_1 \simeq \mathbb{T}^2$ . Here  $L = \mathcal{O}$ . Thus we get an extremal Kähler metric on a three times blown-up of  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{T}^2$ . The iterated blown-up can be made more precise. The first point to be blown-up is the point on the zero section above the marked point of  $\bar{\Sigma}$ . The iterated blow-up replace the fiber  $F$  by the chain of curves:



with the  $-3$  self-intersection curve corresponding to the proper transform of the fiber  $F$  above the first blown-up point. This ends the proof of the Theorem C stated in the introduction.

REFERENCES

- [1] *M.Abreu*, Kähler metrics on toric orbifolds, *J. Differential Geom.* **58** (2001), no. 1, 151187.
- [2] *V.Apostolov and C.W. Tønnesen-Friedman*, A remark on Kähler metrics of constant scalar curvature on ruled complex surfaces, *Bull. London Math. Soc.* **38** (2006), no. 3, 494500.
- [3] *C.Arezzo and F.Pacard*, Blowing up and desingularising constant scalar curvature Kähler manifolds, *Acta Math.* **196** (2006), no. 2, 179228.
- [4] *C.Arezzo and F.Pacard*, Blowing up constant scalar curvature Kähler manifolds II, *Ann. of Math. (2)* **170** (2009), no. 2, 685738.
- [5] *C.Arezzo, F.Pacard and M.Singer*, Extremal Metrics on blow ups, *Duke Math. J. Volume 157*, Number 1 (2011), 1-51.
- [6] *V.Apostolov, D.M.J. Calderbank, P.Gauduchon, C.W. Tønnesen-Friedman*, Extremal Kähler metrics on projective bundles over a curve, arXiv, math.DG/0905.0498v2.
- [7] *W.Barth, C.Peters and A. Van de Ven*, Compact complexe surface, Springer 1984.
- [8] *R.Bryant*, Bochner-Kähler metrics, *J.Amer.Math.Soc.* **14** (2001), 623-715.
- [9] *D.Burns and P. de Bartolomeis*, Stability of vector bundles and extremal metrics, *Invent. Math.* **92** (1988), 403-407.
- [10] *E.Calabi*, Extremal Kähler metrics, "Seminar on Differential Geometry" (ed.S.-T. Yau), Princeton, 1982.
- [11] *E.Calabi*, Extremal Kähler metrics II, "Differential Geometry and Complex Analysis" (ed. I. Chavel et H.M. Farkas), Springer-Verlag, 1985.
- [12] *D.Calderbank and M.Singer*, Einstein metrics and complex singularities, *Invent.Math.***156** (2004),no2, 405-443.
- [13] *S.K. Donaldson*, Scalar curvature and stability of toric varieties, *J. Differential Geom.* **62** (2002), no. 2, 289349.
- [14] *W.Fulton*, Toric Varieties, Princeton University Press 1993.
- [15] *A.Futaki and T.Mabuchi*, Bilinear forms and extremal Kähler vector fields associated with Kähler classes, *Math. Ann.* **301** (1995), no. 2, 199210. .
- [16] *R.C.Gunning*, Lectures on Riemann Surfaces, Princeton mathematical notes. Princeton University Press 1966.
- [17] *D.D.Joyce*, Compact manifolds with special holonomy, Oxford University press 2000.
- [18] *C.Lebrun and S.Simanca*, Extremal Kähler metrics and complexe deformation theory, *Geom. Func. Anal.***4** (1994), 298-336.
- [19] *M.levine* A remark on extremal Kähler metrics, *J. Differential Geom.* **21** (1985), 73-77.
- [20] *E.Legendre*, Toric geometry of convex quadrilaterals, arXiv, math.DG/0909.4512v1.
- [21] *A.Lichnerowicz*, Géométrie des groupes de transformation, Travaux et recherches mathématiques **3**, Dunod (1958).

*Extremal Kähler metrics on blow-ups of parabolic ruled surfaces*

- [22] *Y.Matsushima*, Sur la structure du groupes d'homéomorphismes analytiques d'une certaine variété Kählérienne, Nagoya Maths. J. **11** (1957), 145-150.
- [23] *V.B.Mehta and C.S.Seshadri* Moduli of vector bundles over curves with parabolic structures, Math. Ann. **248** (1980), 205-239.
- [24] *Y.Rollin and M.Singer*, Non-minimal scalar-flat Kähler surfaces and parabolic stability, Invent. Math. **162** (2005), 235-270.
- [25] *Y.Rollin and M.Singer*, Constant scalar curvature Kähler surfaces and parabolic polystability, J. Geom. Anal. **19** (2009), no. 1, 107136.
- [26] *J. Ross and R.Thomas*, Weighted projective embeddings, stability of orbifolds and constant scalar curvature Kähler metrics, arXiv, math.DG/0907.5214v2.
- [27] *G. Székelyhidi* On blowing up extremal Kähler manifolds, arXiv, math.DG/ 1010.5130v2 .
- [28] *G. Székelyhidi*, Extremal metrics and K-stability, Bull. Lond. Math. Soc. **39** (2007), no. 1, 7684.
- [29] *G. Székelyhidi and J.Stoppa*, Relative K-stability of extremal metrics, arXiv, math.DG/0912.4095v1 .
- [30] *G.Tian*, Kähler-Einstein metrics with positive scalar curvature, Invent. Math. **130** (1997), 1-37.
- [31] *C.W. Tønnesen-Friedman*, Extremal Kähler metrics on Ruled Surfaces, Institut for Matematik og Datalogi Odense Universitet, Preprint 1997, Nr. **36**.
- [32] *S.Y. Yau*, Open problems in Geometry, in 'Differential geometry: partial differential equations on manifolds'(Los Angeles, CA, 1990) , Proc.Sympos.Pure Math., AMS **54**, 1-28.

CARL TIPLER, LABORATOIRE JEAN LERAY LMJL, NANTES FRANCE  
E-mail address: carl.tipler@univ-nantes.fr

## **Annexe B**

# **”Stability of extremal metrics under complex deformations”**

L’annexe B est l’article réalisé avec Yann Rollin et Santiago Simanca concernant la stabilité des métriques extrémales et les déformations complexes. Les résultats du chapitre 4 y sont démontrés.

Cet article est organisé de la façon suivante :

Section 1 : Introduction.

Section 2 : Définition de la courbure scalaire réduite. Définition de l’invariant de Futaki relatif et propriétés de ce dernier.

Section 3 : Déformations complexes et exemple de Mukai et Umemura.

Section 4 : Actions de groupes holomorphes et déformations complexes. Déformations de métriques extrémales. Preuve du théorème 4.3.3

Section 5 : Applications. Corollaire 4.4.3 sur la variété de Mukai-Umemura et ses déformations.

# STABILITY OF EXTREMAL METRICS UNDER COMPLEX DEFORMATIONS

YANN ROLLIN, SANTIAGO R. SIMANCA, AND CARL TIPLER

ABSTRACT. Let  $(\mathcal{X}, \Omega)$  be a closed polarized complex manifold,  $g$  be an extremal metric on  $\mathcal{X}$  that represents the Kähler class  $\Omega$ , and  $G$  be a compact connected subgroup of the isometry group  $\text{Isom}(\mathcal{X}, g)$ . Assume that the Futaki invariant relative to  $G$  is nondegenerate at  $g$ . Consider a smooth family  $(\mathcal{M} \rightarrow B)$  of polarized complex deformations of  $(\mathcal{X}, \Omega) \simeq (\mathcal{M}_0, \Theta_0)$  provided with a holomorphic action of  $G$ . Then for every  $t \in B$  sufficiently small, there exists an  $h^{1,1}(\mathcal{X})$ -dimensional family of extremal Kähler metrics on  $\mathcal{M}_t$  whose Kähler classes are arbitrarily close to  $\Theta_t$ . We apply this deformation to show that certain complex deformations of the Mukai-Umemura 3-fold admits a Kähler-Einstein metric.

## 1. INTRODUCTION

Every closed Kähler manifold is stable under complex deformations. Indeed, the classical result of Kodaira and Spencer [12] allows us to follow differentiably the Kähler metric under small perturbations of the complex structure. Our goal here is the study of the stability of the *extremal* condition of a Kähler metric under complex deformations.

Let us recall that a cohomology class  $\Omega \in H^2(\mathcal{X}, \mathbb{R})$  on a complex manifold  $(\mathcal{X}, J)$  is called a *polarization* of  $\mathcal{X}$  if  $\Omega$  can be represented by the Kähler form  $\omega_g$  of a Kähler metric  $g$  on  $\mathcal{X}$ . In this case, the pair  $(\mathcal{X}, \Omega)$  is called a polarized complex manifold. In what follows, we shall sometimes use the metric  $g$  and its Kähler form  $\omega_g$  interchangeably. We shall denote by  $c_1 = c_1(\mathcal{X}, J)$  the first Chern class of  $(\mathcal{X}, J)$ .

The set of all Kähler forms on  $\mathcal{X}$  representing a given polarization  $\Omega$  is denoted by  $\mathfrak{M}_\Omega$ . The search for a canonical representative  $g$  of  $\Omega$  is done by looking for a critical point of the functional

$$(1) \quad \begin{aligned} \mathfrak{M}_\Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ g &\mapsto \int_{\mathcal{X}} s_g^2 d\mu_g \end{aligned} .$$

Here,  $s_g$  is the scalar curvature of  $g$  and  $d\mu_g$  its volume form. These critical points are the extremal metrics of Calabi [4]. The condition for  $g$  to be such can be stated simply by saying that the gradient of  $s_g$  is a real holomorphic vector field, which in itself shows a subtle interplay between extremal metrics and the complex geometry of  $\mathcal{X}$ .

We denote by  $\text{Aut}(\mathcal{X})$  the automorphism group of  $\mathcal{X}$ . The space  $\mathfrak{h}(\mathcal{X})$  of holomorphic vector fields on  $\mathcal{X}$  is its Lie algebra. The space  $\mathfrak{h}_0(\mathcal{X})$  of holomorphic vector fields with zeroes is an ideal of  $\mathfrak{h}(\mathcal{X})$ . The identity component  $G' = \text{Isom}_0(\mathcal{X}, g)$  of the isometry group of the metric  $g$  is identified

with a compact subgroup of  $\text{Aut}(\mathcal{X})$ , and its Lie algebra is denoted  $\mathfrak{g}'$ . If  $g$  is extremal, then  $G'$  is a *maximal connected compact subgroup* of  $\text{Aut}(\mathcal{X})$  [5].

**1.1. Main result.** Let us consider a polarized complex manifold  $(\mathcal{X}, \Omega)$  and a smooth family of complex deformations  $\mathcal{M} \rightarrow B$  of  $\mathcal{X} \simeq \mathcal{M}_0$ . Here  $B$  is some open neighborhood of the origin in an Euclidean space  $\mathbb{R}^m$  for some  $m \geq 0$  (see §3 for definitions). We let  $E \rightarrow B$  be the vector bundle of second fiber cohomology of the fibration  $\mathcal{M} \rightarrow B$ , whose fibers are  $E_t = H^2(\mathcal{M}_t, \mathbb{R})$ . A smooth section  $\Theta$  of  $E \rightarrow B$  such that  $\Theta_t$  admits a Kähler representative  $\omega_t$  in  $\mathcal{M}_t$  for all  $t$  in  $B$  is said to be a polarization of the family  $\mathcal{M} \rightarrow B$ . We obtain a family  $(\mathcal{M}_t, \Theta_t)$  of polarized manifolds parametrized by  $t \in B$ . A polarized family of complex manifolds  $(\mathcal{M} \rightarrow B, \Theta)$ , and a polarized complex manifold  $(\mathcal{X}, \Omega)$  together with an isomorphism  $\mathcal{X} \simeq \mathcal{M}_0$  that makes  $\Omega$  and  $\Theta_0$  correspond to each other, is said to be a polarized deformation of  $(\mathcal{X}, \Omega)$ .

By shrinking the neighborhood of the origin  $B$  if necessary, the Kodaira-Spencer theory allows us to choose a smooth 2-form  $\beta$  in  $\mathcal{M}$  such that  $\omega_t = \beta|_{\mathcal{M}_t}$  is a Kähler form in  $\mathcal{M}_t$  representing  $\Theta_t$ . In this expression,  $\beta|_{\mathcal{M}_t}$  denotes the pullback of  $\beta$  by the canonical inclusion  $\mathcal{M}_t \hookrightarrow \mathcal{M}$ . Such a  $\beta$  is said to represent the polarization  $\Theta$ . If  $g$  is a Kähler metric on  $\mathcal{X}$  whose Kähler form  $\omega_g$  represents  $\Omega$ ,  $\beta$  can be constructed so that  $\omega_0$  and  $\omega_g$  agree under the isomorphism  $\mathcal{X} \simeq \mathcal{M}_0$ .

Let us now assume that the metric  $g$  is extremal. It is then a natural to ask if the representative  $\beta$  of the polarization  $\Theta$  can be chosen so that the metric  $g_t$ , of Kähler form  $\omega_t$  on  $\mathcal{M}_t$ , is extremal.

A positive answer to this general statement is not to be expected, and as it has been pointed out in [14], “the answer is an emphatic *no*” (cf. [3] for some counter-examples). However, if we assume some symmetries for  $\mathcal{M}$  and the nondegeneracy of the relative Futaki invariant, the answer is actually *yes* provided we allow the polarization  $\Theta$  to be deformed also.

If the metric  $g$  on  $\mathcal{X}$  is extremal, then  $G' = \text{Isom}_0(\mathcal{X}, g)$  is a maximal connected compact subgroup of  $\text{Aut}(\mathcal{X}, g)$  that acts holomorphically on the central fiber  $\mathcal{M}_0$  of  $\mathcal{M} \rightarrow B$ . In general though, this action will not extend as a *holomorphic action* of  $G'$  (cf. §4.1 for a precise definition of this terminology) to the total space of deformations  $\mathcal{M} \rightarrow B$ . We shall assume that the action of  $G'$  extends partially, and we have a connected compact subgroup  $G$  of  $G'$  that acts holomorphically on  $\mathcal{M} \rightarrow B$ . We denote by  $C_G^\infty(\mathcal{M})$  the space of  $G$ -invariant smooth functions on  $\mathcal{M}$ .

It is then possible to introduce the notion of reduced scalar curvature  $s_g^G$  for any  $G$ -invariant Kähler metric on  $\mathcal{X}$  (cf. §2.2.3), and the Futaki invariant relative to  $G$  (cf. §2.3) [10]

$$\mathfrak{F}_{G, \Omega}^c : \mathfrak{q}/\mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R},$$

where  $\mathfrak{g}$  is the Lie algebra of  $G$  and  $\mathfrak{q}$  is the normalizer of  $\mathfrak{g}$  in  $\mathfrak{h}(\mathcal{X})$ . The extremal condition of a metric is encoded in the equation  $s_g^G = 0$ , and a  $G$ -invariant extremal metric representing  $\Omega$  have vanishing reduced scalar curvature if, and only if,  $\mathfrak{F}_{G, \Omega}^c$  vanishes identically [8, 5]. This characterization of extremal metrics reinterprets in this manner a presentation advocated elsewhere [16, 17, 21].

*Stability of extremal metrics under complex deformations*

Let  $\mathfrak{p}$  be the normalizer of  $\mathfrak{g}$  in  $\mathfrak{g}'$ . We set  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{h}_0(\mathcal{X})$  and  $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}_0(\mathcal{X})$ , respectively. The differential of the relative Futaki invariant induces a linear map

$$\mathfrak{q}/\mathfrak{g} \rightarrow (H^{1,1}(\mathcal{X}) \cap H^2(\mathcal{X}, \mathbb{R}))^*.$$

We say that  $\mathfrak{F}_{G,\Omega}^c$  is nondegenerate if the restriction of this map to  $\mathfrak{p}_0/\mathfrak{g}_0$  is injective.

Using the holomorphic action of  $G$  on  $\mathcal{M} \rightarrow B$ , we refine the construction of the representative  $\beta$  of the polarization  $\Theta$  so that the Kähler metric  $g_t$  it induces on  $\mathcal{M}_t$  is  $G$ -invariant (cf. §4.2) for all  $t \in B$ . We then use the corresponding Kähler form  $\omega_t$  as the origin of the affine space of Kähler metrics on  $\mathcal{M}_t$  that represent the polarization  $\Theta_t$ . Let  $\mathbf{H}_t$  be the space of real  $g_t$ -harmonic  $(1,1)$ -forms on  $\mathcal{M}_t$ . By the Kodaira-Spencer theory, and perhaps shrinking  $B$  to a sufficiently small neighborhood of the origin, the spaces  $\mathbf{H}_t$  are the fibers of a smooth vector bundle  $\mathbf{H} \rightarrow B$ . Given a section  $\alpha$  of the bundle  $\mathbf{H} \rightarrow B$  and a sufficiently small function  $\phi \in C_G^\infty(\mathcal{M})$ , we consider the family of Kähler metrics  $g_{t,\alpha,\phi}$  on  $\mathcal{M}_t$  defined by the Kähler forms

$$\omega_{t,\alpha,\phi} = \omega_t + \alpha|_{\mathcal{M}_t} + dd^c \phi|_{\mathcal{M}_t}.$$

Assuming that  $g_0 = g$  is extremal, we seek solutions  $g_{t,\alpha,\phi}$  of the equation

$$s_{g_{t,\alpha,\phi}}^G = 0$$

for values of  $(t, \alpha, \phi)$  in a sufficiently small neighborhood of  $(0, 0, 0)$  where the solution takes on the value  $g_{0,0,0} = g$ . Introducing suitable Banach spaces, the said equation defines a Fredholm map that is a submersion at the origin if, and only if, the relative Futaki invariant is nondegenerate. The implicit function theorem then yields our main result:

**Theorem A.** *Let  $(\mathcal{M} \rightarrow B, \Theta)$  be a polarized family of deformations of a closed polarized complex manifold  $(\mathcal{X}, \Omega)$ . Suppose that  $g$  is an extremal metric whose Kähler form  $\omega_g$  represents  $\Omega$ , and that  $G$  is a compact connected subgroup of  $G' = \text{Isom}_0(\mathcal{X}, g)$  such that*

- $G$  acts holomorphically on  $\mathcal{M} \rightarrow B$ ,
- the reduced scalar curvature  $s_g^G$  of  $g$  is zero,
- the Futaki invariant relative to  $G$  is nondegenerate at  $g$ .

*Then, given any  $G$ -invariant representative  $\beta$  of the polarization  $\Theta$  such that induced metric  $g_0$  on  $\mathcal{M}_0$  agrees with  $g$  via the isomorphism  $\mathcal{M}_0 \simeq \mathcal{X}$ , and shrinking  $B$  to a sufficiently small neighborhood of the origin if necessary, the space of Kähler metrics on  $\mathcal{M}_t$  with vanishing reduced scalar curvature lying sufficiently close to the metric  $g_t$  induced by  $\beta$  is a smooth manifold of dimension  $h^{1,1}(\mathcal{X})$ . In particular, there are arbitrarily small perturbations  $\Theta'$  of the polarization  $\Theta$  such that  $\Theta'_t$  is represented by an extremal metric.*

**Remark 1.1.1.** Theorem 4.4.3 is a more precise and technical version of Theorem A. In particular, it contains more information about the kind of deformations  $\Theta'$  of the polarization  $\Theta$ . This refined version of the above theorem will lead to the applications below.

**1.2. Applications.** Theorem A generalizes the results of [13, 14]. The case  $G = \{1\}$  corresponds to the deformation theory of constant scalar curvature Kähler metrics whereas the case  $G = G' = \text{Isom}_0(\mathcal{X}, g)$  corresponds to the deformation theory of extremal metrics (cf. §5 for details). The cases corresponding to intermediate choices for the group  $G$  is new. We illustrate the power of Theorem A with the analysis of some new examples of extremal metrics, and some cases of interest. However, we observe that the applicability of our theorem to these follows by elementary reasons, and the nondegeneracy of the relative Futaki invariant is easy to see. It would be of interest to find applications of our result in more demanding situations, which could illustrate the problem at hand in further detail. Some highly nontrivial applications were already given in [14].

**1.2.1. Maximal torus symmetry.** Extremal Kähler metrics are automatically stable under complex deformations with maximal torus symmetry:

**Corollary B.** *Let  $(\mathcal{M} \rightarrow B, \Theta)$  be a polarized family of deformations of a closed polarized complex manifold  $(\mathcal{X}, \Omega)$ . Assume that  $\Omega$  admits an extremal representative and that  $\mathcal{M} \rightarrow B$  is endowed with a holomorphic action of a maximal compact torus  $G = T \subset \text{Aut}(\mathcal{X})$ . Then for  $t \in B$  sufficiently small,  $\Theta_t$  is represented by an extremal Kähler metrics on  $\mathcal{M}_t$ .*

Corollary B may look reminiscent of [1, Lemma 4], where a stability result of the extremal condition under complex deformations with symmetries is obtained as an extension of the theory of [13]. This result is carried out under such restrictive assumptions on the deformation of the complex structure and the Kähler class that the scope of its applicability is rather limited.

**1.2.2. The Mukai-Umemura 3-fold.** We may apply Theorem A to the study of the Mukai-Umemura Fano 3-fold  $\mathcal{X}$ , with automorphism group  $\text{Aut}(\mathcal{X}) = \mathbb{P}\text{SL}(2, \mathbb{C})$ . Donaldson has proven that this variety admits a Kähler-Einstein metric [7]. Our deformation theorem applies. We obtain the following result:

**Corollary C.** *Let  $(\mathcal{M} \rightarrow B, \Theta)$  be a polarized deformation of the Mukai-Umemura 3-fold with polarization  $(\mathcal{X}, c_1(\mathcal{X}))$  and  $\Theta_t = c_1(\mathcal{M}_t)$ . Assume  $\mathcal{M} \rightarrow B$  is one of the deformations described at §3.3, endowed with a holomorphic action of a group  $G \subset \mathbb{P}\text{SL}(2, \mathbb{C})$  isomorphic to a dihedral group of order 8 or a semidirect product  $\mathbb{S}^1 \rtimes \mathbb{Z}/2$ . Then for every  $t \in B$  sufficiently small,  $\Theta_t$  is represented by a Kähler-Einstein metric on  $\mathcal{M}_t$ .*

The result above was proved already in [7] using a different approach which was later refined by Székelyhidi [20]. Using this method it is possible to understand general small complex deformations of the Mukai-Umemura 3-fold. It turns out that small deformations corresponding to polystable orbits under the action of  $\mathbb{P}\text{SL}(2, \mathbb{C})$  are exactly the one which carry Kaehler-Einstein metrics.

**1.3. Plan of the paper.** In §2 we recall further details and relevant facts about extremal metrics and real holomorphy potentials and relative Futaki invariant that we shall use throughout our work. We proceed in §3 to provide detailed definitions of complex and polarized deformations in a way suitable to our work. The deformation problem that we treat by the implicit



function theorem is presented in §4, where we prove an expanded version of our main Theorem A. The applications are given in §5. We begin in §5.1 comparing our result to the LeBrun-Simanca deformation theory, and put the new contributions in proper perspective. We then study deformations with maximal torus symmetry in §5.2, where we prove Corollary B. The Mukai-Umemura manifold and its deformations are discussed in §5.3, where we prove Corollary C.

**1.4. Acknowledgments.** We would like to thank Professor Simon Donaldson for pointing out an error in the attempt to apply our deformation theory to the Mukai-Umemura 3-fold in an earlier version of this work. We also thank Professor Paul Gauduchon for making the preliminary version of his book [10] available to us.

## 2. EXTREMAL METRICS

Let  $(X, \Omega)$  be a closed polarized complex manifold of dimension  $n$ . The polarizing assumption on the class  $\Omega$  may be stated by saying that there exist Kähler metrics  $g$  whose Kähler form  $\omega_g$  represents it. We let  $\mathfrak{M}_\Omega$  be the set of all such metrics. If  $g \in \mathfrak{M}_\Omega$ , the projection of the scalar curvature  $s_g$  onto the constants is given by

$$(2) \quad s_\Omega = 4n\pi \frac{c_1 \cup \Omega^{n-1}}{\Omega^n},$$

and there exists a vector field  $X_\Omega \in \mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{h}$  [8, 9] such that for every  $g \in \mathfrak{M}_\Omega$  we have

$$(3) \quad \int_X s_g^2 d\mu_g \geq s_\Omega^2 \frac{\Omega^n}{n!} - \mathfrak{F}(X_\Omega, \Omega).$$

The equality is achieved if, and only if, the metric is extremal. This lower bound was known earlier [11, 18] for metrics in  $\mathfrak{M}_\Omega$  that are invariant under a maximal compact subgroup of  $\text{Aut}(X)$ . It was proven by Chen [6] to hold in general, for any metric in  $\mathfrak{M}_\Omega$ . The lower bound varies smoothly as a function of the polarizing class  $\Omega$  [18].

**2.1. Holomorphic vector fields.** The subset  $\mathfrak{h}_0$  of holomorphic vector fields with zeroes is an ideal of  $\mathfrak{h}$ , and the quotient algebra  $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0$  is Abelian. A smooth complex-valued function  $f$  gives rise to the  $(1, 0)$ -vector field  $f \mapsto \partial_g^\# f$  defined by the expression

$$g(\partial_g^\# f, \cdot) = \bar{\partial} f.$$

This vector field is holomorphic if, and only if  $\bar{\partial} \partial_g^\# f = 0$ , a condition equivalent to  $f$  being in the kernel of the *Lichnerowicz operator*

$$(4) \quad L_g f := (\bar{\partial} \partial_g^\#)^* \bar{\partial} \partial_g^\# f = \frac{1}{4} \Delta_g^2 f + \frac{1}{2} r^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu f + \frac{1}{2} (\nabla^{\bar{\ell}} s_g) \nabla_{\bar{\ell}} f.$$

The ideal  $\mathfrak{h}_0$  consists of vector fields of the form  $\partial_g^\# f$ , for a function  $f$  in the kernel of  $L_g$ . Or put differently, a holomorphic vector field  $\Xi$  can be written as  $\partial_g^\# f$  if, and only if, the zero set of  $\Xi$  is nonempty [14]. The kernel  $\mathcal{H}_g$  of  $L_g$  is called the *space of holomorphy potentials* of  $(X, g)$ . Since

$L_g$  is elliptic,  $\mathcal{H}_g$  is finite dimensional complex vector space and consists of smooth functions.

Generally speaking, the Lichnerowicz operator  $L_g$  of a metric  $g$  is not a real operator, and so the real and imaginary parts of a function in its kernel do not have to be elements of the kernel also. In studying the geometry of Kähler manifolds, it is often convenient to use real quantities and operators. We introduce the terminology that allows us to do so here. We follow the conventions of [2, 10].

Let us consider the operator  $d^c$  on functions defined by  $d^c = Jd$ . Given a real holomorphic vector field  $\Xi$  on  $\mathcal{X}$ , the Hodge theory provides a unique decomposition  $\xi = \Xi^\flat = \xi_h + du_\Xi + d^c v_\Xi$ , where  $\xi_h$  is a harmonic 1-form,  $u_\Xi, v_\Xi$  are real valued functions, and  $d^c v_\Xi$  is coclosed. The functions  $u_\Xi, v_\Xi$  are uniquely determined up to an additive constant. The dual of this identity gives rise to the decomposition  $\Xi = \Xi_h + \text{grad } u_\Xi + J\text{grad } v_\Xi$ , and it follows that  $\Xi^{1,0} = \frac{1}{2}(\Xi - iJ\Xi) = \Xi_h^{1,0} + \partial_g^\# f_\Xi$ , where  $f_\Xi = u_\Xi + iv_\Xi$ . It follows that  $\Xi$  is real holomorphic if, and only if,  $\Xi^{1,0}$  is complex holomorphic, that is to say, if, and only if,  $L_g f_\Xi = 0$ . If we extend the Lie bracket operation linearly in each component, the integrability of the complex structure makes of the map  $\Xi \rightarrow \Xi^{1,0}$  an isomorphism of Lie algebras.

As indicated above, the condition  $\Xi_h = 0$  is equivalent to  $\Xi$  being Hamiltonian, and characterizes  $\mathfrak{h}_0(\mathcal{X})$ . If  $\Xi \in \mathfrak{h}_0(\mathcal{X})$ , the potential  $f_\Xi$  of  $\Xi$  is a solution of the equation  $\mathcal{L}_{\Xi^{1,0}}\omega_g = \frac{1}{2}dd^c f$ . On the other hand, a holomorphic vector field  $\Xi$  is parallel if, and only if,  $\Xi$  is the dual of a harmonic 1-form.

A vector field  $\Xi$  is a Killing field if, and only if, it is holomorphic and its potential function  $f_\Xi = iv_\Xi$  is, up to a constant, a purely imaginary function [14]. In that case,  $v_\Xi$  will be called the Killing potential of  $\Xi$ .

If  $\xi$  is a 1-form, we let  $\nabla^- \xi$  be the  $J$  anti-invariant component of the 2-tensor  $\nabla^g \xi$ . Let  $\xi = \Xi^\flat$  for a real vector field  $\Xi$ . The condition  $\nabla^- \xi = 0$  is equivalent to  $\Xi$  being a real holomorphic vector field, and can be expressed as  $\delta\delta\nabla^- \xi = 0$ .

We have the identities

$$(5) \quad \delta\nabla^- \xi = \frac{1}{2}\Delta_g \xi - J\xi^\# \lrcorner \rho_g$$

and

$$(6) \quad \delta\delta\nabla^- \xi = \frac{1}{2}\Delta_g \delta\xi - \langle d^c \xi, \rho_g \rangle + \frac{1}{2}\langle \xi, ds_g \rangle,$$

respectively.

We introduce the operator  $\mathbb{L}_g$  defined by

$$\mathbb{L}_g f = (\nabla^- d)^*(\nabla^- d)f = \delta\delta\nabla^- df.$$

This is a real elliptic operator of order four, and if  $f$  is a real valued function, we have that  $\mathbb{L}_g f = 0$  if, and only if,  $\text{grad } f$  is a real holomorphic vector field; by the observations above, every Hamiltonian Killing field is of the form  $J\text{grad } f$  for a function  $f$  of this type.

By (6) we derive the identities

$$(7) \quad \begin{aligned} \mathbb{L}_g f &= \frac{1}{2}\Delta_g^2 f + \langle dd^c f, \rho_g \rangle + \frac{1}{2}\langle df, ds_g \rangle, \\ \delta\delta\nabla^- d^c f &= -\frac{1}{2}\mathcal{L}_{J\text{grad } s_g} f, \end{aligned}$$

and by (4), we see that

$$(8) \quad 2L_g f = \mathbb{L}_g f + \frac{i}{2} \mathfrak{L}_{J \text{grad } s_g} f.$$

**Lemma 2.1.1.** *For any Kähler metric  $g$ , the space of real solutions of the equation  $\mathbb{L}_g f = 0$  coincide with the space of real solutions of  $L_g f = 0$ .*

*Proof.* By (8), if  $f$  is a real valued function such that  $L_g f = 0$ , then  $\mathbb{L}_g f = 0$  and  $\mathfrak{L}_{J \text{grad } s_g} f = 0$ . Conversely, let us assume that  $\mathbb{L}_g f = 0$ . This implies that  $\Xi = J \text{grad } f$  is a Killing field. Then

$$\mathfrak{L}_{J \text{grad } s_g} f = \langle d^c s_g, df \rangle = -\langle ds_g, d^c f \rangle = -\mathfrak{L}_{\Xi} s_g = 0,$$

and by (8), we conclude that  $L_g f = 0$ . □

**2.2. The group of isometries of a Kähler metric.** Let  $(\mathcal{X}, \Omega)$  be a polarized complex manifold and  $G, G'$  be connected compact Lie subgroups of  $\text{Aut}(\mathcal{X})$ , with  $G \subset G'$ . By taking a  $G'$ -average if necessary, we represent the polarization  $\Omega$  the Kähler form  $\omega_g$  of a  $G'$ -invariant Kähler metric  $g$ . We attach to this data a relative Futaki invariant.

**2.2.1. Lie algebras.** The Lie algebras  $\mathfrak{g}$  and  $\mathfrak{g}'$  of  $G$  and  $G'$  are naturally identified with subalgebras of the algebra  $\mathfrak{h}(\mathcal{X})$  of holomorphic vector fields. We define  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{h}_0(\mathcal{X})$  and  $\mathfrak{g}'_0 = \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{h}_0(\mathcal{X})$ . We then introduce the Lie algebras  $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{z}' \subset \mathfrak{g}'$ ,  $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}'$  and  $\mathfrak{z}'' \subset \mathfrak{h}$ ,  $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{h}$ , where

- $\mathfrak{z} = Z(\mathfrak{g})$ , the center of  $\mathfrak{g}$ ,
- $\mathfrak{z}' = C_{\mathfrak{g}'}(\mathfrak{g})$ , the centralizer of  $\mathfrak{g}$  in  $\mathfrak{g}'$ ,
- $\mathfrak{z}'' = C_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g})$ , the centralizer of  $\mathfrak{g}$  in  $\mathfrak{h}$ ,
- $\mathfrak{p} = N_{\mathfrak{g}'}(\mathfrak{g})$ , the normalizer of  $\mathfrak{g}$  in  $\mathfrak{g}'$ , and
- $\mathfrak{q} = N_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g})$ , the normalizer of  $\mathfrak{g}$  in  $\mathfrak{h}$ .

If  $\mathfrak{t}$  is any of these Lie algebras, we shall denote by  $\mathfrak{t}_0$  the ideal of Hamiltonian vector fields  $\mathfrak{t}_0 = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}_0(\mathcal{X})$ , and by  $\mathcal{H}_g^{\mathfrak{t}_0}$  the corresponding spaces of holomorphy potentials.

The space of holomorphy potentials  $\mathcal{H}_g^{\mathfrak{z}_0}$  (respectively  $\mathcal{H}_g^{\mathfrak{z}'_0}$ ,  $\mathcal{H}_g^{\mathfrak{z}''_0}$ ) is identified to the  $G$ -invariant potentials of  $\mathcal{H}_g^{\mathfrak{g}_0}$  (respectively  $\mathcal{H}_g^{\mathfrak{g}'_0}$ ,  $\mathcal{H}_g$ ). Notice that  $\mathcal{H}_g^{\mathfrak{z}_0} \subset \mathcal{H}_g^{\mathfrak{g}_0}$  and  $\mathcal{H}_g^{\mathfrak{z}'_0} \subset \mathcal{H}_g^{\mathfrak{g}'_0}$  consists of purely imaginary functions whose imaginary parts define Killing potentials.

Now  $\mathfrak{z}$  is an ideal of  $\mathfrak{z}'$  and  $\mathfrak{z}''$ . On the other hand,  $\mathfrak{g}$  is an ideal of  $\mathfrak{p}$  and  $\mathfrak{q}$ . We have canonical injections

$$(9) \quad \mathfrak{z}'/\mathfrak{z} \hookrightarrow \mathfrak{p}/\mathfrak{g}, \quad \mathfrak{z}'_0/\mathfrak{z}_0 \hookrightarrow \mathfrak{p}_0/\mathfrak{g}_0, \quad \mathfrak{z}''/\mathfrak{z} \hookrightarrow \mathfrak{q}/\mathfrak{g}, \quad \mathfrak{z}''_0/\mathfrak{z}_0 \hookrightarrow \mathfrak{q}_0/\mathfrak{g}_0.$$

**Lemma 2.2.2.** *The canonical injections (9) are surjective, and we have canonical isomorphisms of Lie algebras*

$$\mathfrak{z}'/\mathfrak{z} \simeq \mathfrak{p}/\mathfrak{g}, \quad \mathfrak{z}'_0/\mathfrak{z}_0 \simeq \mathfrak{p}_0/\mathfrak{g}_0, \quad \mathfrak{z}''/\mathfrak{z} \simeq \mathfrak{q}/\mathfrak{g}, \quad \mathfrak{z}''_0/\mathfrak{z}_0 \simeq \mathfrak{q}_0/\mathfrak{g}_0.$$

*Proof.* We prove that  $\mathfrak{p} = \mathfrak{z}' + \mathfrak{g}$ . Let  $\Xi$  be a Killing field in  $\mathfrak{g}'$ . We have that

$$\Xi = \Xi_h + J \text{grad } v_{\Xi}$$

where  $\Xi_h$  is the dual vector field of a harmonic 1-form, and  $v_{\Xi}$  is a real function. The vector field  $\Xi$  belongs to  $\mathfrak{p}$  if, and only if,

$$(10) \quad [Y, \Xi] = \mathfrak{L}_Y \Xi \in \mathfrak{g} \quad \text{for all } Y \in \mathfrak{g}.$$

*Stability of extremal metrics under complex deformations*

Since  $\mathfrak{L}_Y \Xi_h = 0$  because  $Y$  is Killing, this condition is equivalent to  $\mathfrak{L}_Y J \text{grad } v_\Xi \in \mathfrak{g}$ . In turn, this is equivalent to having  $J \text{grad } (Y \cdot v_\Xi) \in \mathfrak{g}$  since  $Y$  preserves  $J$  and the metric, which means that  $Y \cdot v_\Xi \in i\mathcal{H}_g^{\mathfrak{g}^0}$  for every  $Y \in \mathfrak{g}$ . This implies that for every  $\gamma \in G$ , we have  $\gamma^* v_\Xi - v_\Xi \in i\mathcal{H}_g^{\mathfrak{g}^0}$ . We can then average the function  $v_\Xi$  under the group action to obtain a  $G$ -invariant function  $\tilde{v}_\Xi$  on  $\mathcal{X}$  such that  $\hat{v} = v_\Xi - \tilde{v}_\Xi \in i\mathcal{H}_g^{\mathfrak{g}^0}$ , and

$$\Xi = (\Xi_h + J \text{grad } \tilde{v}_\Xi) + J \text{grad } \hat{v},$$

where  $J \text{grad } \hat{v} \in \mathfrak{g}$  and  $\Xi_h + J \text{grad } \tilde{v}_\Xi = \Xi - J \text{grad } \hat{v} \in \mathfrak{g}'$  is  $G$ -invariant and so an element of  $\mathfrak{z}'$ .

An analogous argument shows that  $\mathfrak{q} = \mathfrak{z}'' + \mathfrak{g}$ , which finishes the proof.  $\square$

**2.2.3. The reduced scalar curvature.** Let  $L_k^2(\mathcal{X})$  be the  $k$ th Sobolev space defined by  $g$ . The space  $L_{k,G}^2(\mathcal{X})$  of  $G$ -invariant functions in  $L_k^2(\mathcal{X})$  can be obtained as metric completion of  $C_G^\infty(\mathcal{X})$ . If  $k > n$ ,  $L_k^2(\mathcal{X})$  is a Banach algebra. In fact, the Sobolev embedding theorem says that if  $k > n + l$  we have  $L_k^2(\mathcal{X})$  continuously contained in  $C^l(\mathcal{X})$ , the space of functions with continuous derivatives of order at most  $l$ . We shall work below always imposing this restriction over  $k$ .

The  $L^2$ -Hermitian product on  $L_{k,G}^2(\mathcal{X})$  induced by the Riemannian metric  $g$  allows us to define the orthogonal  $W_{k,g}$  of  $i\mathcal{H}_g^{\mathfrak{g}^0}$ . Thus we have an orthogonal decomposition

$$L_{k,G}^2(\mathcal{X}) = i\mathcal{H}_g^{\mathfrak{g}^0} \oplus W_{k,g}$$

together with the associated projections

$$\pi_g^W : L_{k,G}^2(\mathcal{X}) \rightarrow W_{k,g} \quad \text{and} \quad \pi_g^G : L_{k,G}^2(\mathcal{X}) \rightarrow i\mathcal{H}_g^{\mathfrak{g}^0}.$$

We introduce the *reduced scalar curvature*  $s_g^G$  defined by

$$s_g^G = \pi_g^W(s_g) = (\mathbb{1} - \pi_g^G)(s_g)$$

By construction, the condition

$$(11) \quad s_g^G = 0$$

is equivalent to  $s_g \in i\mathcal{H}_g^{\mathfrak{g}^0}$ , and since  $\mathcal{H}_g^{\mathfrak{g}^0} \subset \mathcal{H}_g$ , this condition implies the extremality of the metric  $g$ .

**2.2.4. The reduced Ricci form.** Let  $L^2\Lambda_{k,G}^{1,1}(\mathcal{X})$  be the space of real  $G$ -invariant  $(1,1)$ -forms on  $\mathcal{X}$  in  $L_k^2$ . We lift the projection  $\pi_g^G$  to the a projection

$$\Pi_g^G : L^2\Lambda_{k+2,G}^{1,1}(\mathcal{X}) \rightarrow L^2\Lambda_{k,G}^{1,1}(\mathcal{X})$$

defined by

$$\Pi_g^G \beta = \beta + dd^c f,$$

where  $f = G_g(\pi_g^W(\omega_g, \beta))$  and  $G_g$  is the Green operator of  $g$  [19, 16, 21]. It follows that  $(\omega_g, \Pi_g^G(\beta)) = \pi_g^G(\omega_g, \beta)$ .

We apply this projection map to the Ricci form, and define the reduced Ricci form [16]

$$\rho^G := \Pi^G \rho.$$

*Stability of extremal metrics under complex deformations*

We then obtain the identity

$$(12) \quad \rho_g = \rho^G + \frac{1}{2} dd^c \psi_g^G,$$

where  $\psi_g^G = 2G_g(\pi_g^W(\omega_g, \rho)) = G_g \pi_g^W(s_g) = G_g(s_g^G)$ . In particular,  $\rho^G = \rho_g$  if, and only if,  $s_g^G = 0$ .

2.2.5. *Variational formulas.* Given a Kähler metric  $g$ , we consider infinitesimal deformations of it given by

$$\omega_t = \omega_g + t\alpha + tdd^c\phi$$

of the Kähler class  $\omega_g$ , where  $\phi$  is a smooth function and  $\alpha$  is a  $g$ -harmonic  $(1, 1)$ -form, respectively. These variations have Kähler classes given by  $[\omega_g] + t[\alpha]$ . In order to avoid confusion, the derivative at  $g$  of various geometric quantities will be denoted by  $D_g$  below. Sometime later, and when confusion cannot occur, these same derivatives will be denoted by a dot superimposed on the quantities themselves.

The holomorphy potential of a holomorphic vector field depends upon the choice of the metric. Its infinitesimal variation when moving the metric in the direction of  $\phi$  or  $\alpha$  is described in the following lemma:

**Lemma 2.2.6.** *Let  $\Xi$  be a real holomorphic vector field in  $\mathfrak{h}_0(\mathcal{X})$ , with holomorphy potential  $f_\Xi = u_\Xi + iv_\Xi \in \mathcal{H}_g$ . The variation  $D_g f_\Xi(\phi)$  of  $f_\Xi$  at  $g$  in the direction of  $\phi$  is given by*

$$D_g f_\Xi(\phi) = 2\mathfrak{L}_{\Xi^{1,0}} f_\Xi,$$

which is equivalent to the expressions  $(D_g u_\Xi)(\phi) = \mathfrak{L}_\Xi \phi$  and  $(D_g v_\Xi)(\phi) = -\mathfrak{L}_{J\Xi} \phi$  for the variations of the real and imaginary parts of  $f_\Xi$ . The variations  $D_g u_\Xi(\alpha)$  and  $D_g v_\Xi(\alpha)$  at  $g$  in the direction of a trace-free form  $\alpha$  are given by

$$\begin{aligned} D_g u_\Xi(\alpha) &= -G_g(\delta(J\Xi \lrcorner \alpha)), \\ D_g v_\Xi(\alpha) &= G_g(\delta(\Xi \lrcorner \alpha)). \end{aligned}$$

The variation of the reduced scalar curvature  $s_g^G$  is described by:

**Lemma 2.2.7.** *Let  $g$  be a  $G$ -invariant Kähler metric on  $\mathcal{X}$ . The variation of the reduced scalar curvature  $s_g^G$  when moving the metric in the direction of  $\phi$  is given by*

$$(D_g s_g^G)(\phi) = -2\mathbb{L}_g \phi + \langle d\phi, ds_g^G \rangle.$$

If  $s_g^G = 0$ , the variation of  $s_g^G$  when varying the metric in the direction of a trace-free form  $\alpha$  is given by

$$(D_g s_g^G)(\alpha) = \pi^W(G_g(\langle \alpha, dd^c s_g \rangle) - 2\langle \alpha, \rho_g \rangle).$$

2.3. **The relative Futaki invariant.** Given any  $G$ -invariant Kähler metric  $g$  on  $\mathcal{X}$  with Kähler form  $\omega_g$  and Ricci-form  $\rho_g$ , we define the Futaki function of  $(G, g)$  by

$$\mathfrak{F}_{G, \omega_g}^\mathcal{E}(\Xi) = \int_{\mathcal{X}} d^c \psi_g^G(\Xi) d\mu_g = \int_{\mathcal{X}} -\mathfrak{L}_{J\Xi} \psi_g^G d\mu_g$$

for any real holomorphic vector field  $\Xi$  on  $\mathcal{X}$ . Here,  $\psi_g^G$  is the Ricci potential (12) of the metric  $g$ . This function is defined in terms the Kähler metric

$g$ , but depends only upon the Kähler class  $\Omega = [\omega_g]$  [8, 5], as we briefly recall below. The resulting function  $\mathfrak{F}_{G,\Omega}^c$  shall be referred to as the Futaki invariant of  $\Omega$  relative to  $G$ , or relative Futaki invariant for short, when the group  $G$  and class  $\Omega$  are understood. Let us observe that the usual definition of the real Futaki invariant applied to a holomorphic vector field  $\Xi$  is given by  $\mathfrak{F}_{G,\Omega}(\Xi) = \mathfrak{F}_{G,\Omega}^c(J\Xi)$ . We have introduced this notation for convenience. Put differently, there is a complex valued version of the Futaki invariant such that  $\mathfrak{F}_{G,\Omega}$  is its real part and  $\mathfrak{F}_{G,\Omega}^c$  the imaginary part.

**2.3.1. Properties of the Futaki invariant.** The function  $\mathfrak{F}_{G,\omega_g}^c(\Xi)$  vanishes on parallel holomorphic vector fields. Indeed, let  $\Xi_h$  be the dual of a harmonic 1-form  $\xi_h$ . Then

$$\mathfrak{F}_{G,\omega}^c(\Xi_h) = \int_{\mathcal{X}} \langle J\xi_h, d\psi_g^G \rangle d\mu_g = \int_{\mathcal{X}} \langle \delta J\xi_h, \psi_g^G \rangle d\mu_g.$$

Since the space of harmonic 1-forms is  $J$ -invariant, so  $\delta J\xi_h = 0$ , and it follows that  $\mathfrak{F}_{G,\omega_g}^c(\Xi_h) = 0$ .

This function  $\mathfrak{F}_{G,\omega_g}^c$  can be expressed alternatively in terms of the reduced scalar curvature. For if  $\Xi$  is a Hamiltonian holomorphic vector field on  $(\mathcal{X}, g)$ , it can be written as  $\Xi = \text{grad } u_{\Xi} + J\text{grad } v_{\Xi}$  for some real valued functions  $u_{\Xi}, v_{\Xi}$ , and with  $d^c u_{\Xi}$  orthogonal to the space of closed forms. Hence,  $\mathfrak{F}_{G,\omega}^c(\Xi) = \langle dv_{\Xi}, d\psi_g^G \rangle = \langle v_{\Xi}, \delta d\psi_g^G \rangle = \langle v_{\Xi}, \Delta_g \psi_g^G \rangle$ . It follows that

$$(13) \quad \mathfrak{F}_{G,\omega_g}^c(\Xi) = \mathfrak{F}_{G,\omega_g}^c(\text{grad } u_{\Xi} + J\text{grad } v_{\Xi}) = \int_{\mathcal{X}} v_{\Xi} s_g^G d\mu_g.$$

The expression above shows that if  $\Xi$  is any Killing field in  $\mathfrak{g}$ , then  $\mathfrak{F}_{G,\omega}^c(\Xi) = 0$ . It follows that  $\mathfrak{F}_{G,\omega_g}^c$  induces a  $\mathbb{R}$ -linear map

$$(14) \quad \mathfrak{F}_{G,\omega_g}^c : \mathfrak{q}/\mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R},$$

where  $\mathfrak{q}$  is the normalizer of  $\mathfrak{g}$  in  $\mathfrak{h}(\mathcal{X})$ .

The fundamental properties of this function is now stated in the form of a Theorem. This was proven originally by Futaki [8], and generalized a bit later by Calabi [5]. The version given here follows its presentation in [10].

**Theorem 2.3.2.** *The relative Futaki function  $\mathfrak{F}_{G,\omega_g}^c : \mathfrak{q}/\mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$  defined in (14) is independent of the particular  $G$ -invariant Kähler representative  $\omega_g$  of the class  $\Omega$ , and so it induces an invariant function*

$$\mathfrak{F}_{G,\Omega}^c : \mathfrak{q}/\mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$$

*of the class, the relative Futaki invariant of  $\Omega$ . The relative Futaki invariant vanishes for a class  $\Omega$  if, and only if, any  $G$ -invariant extremal metric  $g$  that represents  $\Omega$  has vanishing reduced scalar curvature  $s_g^G$ . If  $g$  is any  $G$ -invariant extremal Kähler metric and  $G' = \text{Isom}_0(\mathcal{X}, g)$ , the vanishing of  $\mathfrak{F}_{G,\Omega}^c$  is equivalent to the vanishing of its restriction*

$$\mathfrak{F}_{G,\Omega}^c : \mathfrak{p}_0/\mathfrak{g}_0 \rightarrow \mathbb{R}.$$

*Proof.* The invariance is proven in [8], and generalized in [5, Proposition 4.1, p. 110].

The proof of the second statement follows by (13). For if  $s_g^G = 0$ , then  $\mathfrak{F}_{G,\omega}^c(\Xi) = 0$  for every  $\Xi \in \mathfrak{q}_0$ . Conversely, let us assume that  $\mathfrak{F}_{G,\Omega}^c$  vanishes

*Stability of extremal metrics under complex deformations*

on  $\mathfrak{q}$  and, therefore, on  $\mathfrak{q}_0 = \mathfrak{q} \cap \mathfrak{h}_0(\mathcal{X})$ . Let  $g$  be a  $G$ -invariant extremal Kähler metric that represents the class  $\Omega$ , and let  $G' = \text{Isom}_0(\mathcal{X}, g)$ . Then  $\Xi = J\text{grad } s_g \in \mathfrak{g}'_0$ , and by [5, Theorem 1, p. 97],  $\mathfrak{L}_\Xi Z = 0$  for all Killing fields  $Z$ . Thus, we have that  $\Xi \in \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ . But

$$\mathfrak{F}_{G,\Omega}^c(\Xi) = 0 = \int_{\mathcal{X}} s_g s_g^G d\mu_g = \|s_g^G\|_g^2,$$

and so  $s_g^G = 0$ .

The final statement follows easily by the argument above.  $\square$

**2.3.3. Nondegeneracy of the Futaki invariant.** Let  $g$  be a metric such that  $[\omega_g] = \Omega$ . Given any real  $g$ -harmonic  $(1,1)$ -form, we may use the metric  $g$  to compute the derivative

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{F}_{G,\Omega+t\alpha}^c \Big|_{t=0} .$$

We have the following:

**Lemma 2.3.4.** *Let  $g$  be a  $G$ -invariant extremal Kähler metric on  $\mathcal{X}$  such that  $[\omega_g] = \Omega$ , and let  $\alpha$  be a real  $g$ -harmonic trace-free  $(1,1)$ -form. If  $\Xi = \text{grad } u_\Xi + J\text{grad } v_\Xi$  is a holomorphic vector field in  $\mathfrak{q}_0$ , then*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathfrak{F}_{G,\Omega+t\alpha}^c \Big|_{t=0} (\Xi) &= \int_{\mathcal{X}} v_\Xi (D_g s_g^G)(\alpha) d\mu_g \\ &= \int_{\mathcal{X}} \pi^W(v_\Xi) (G_g(\langle \alpha, dd^c s_g \rangle) - 2\langle \alpha, \rho_g \rangle) d\mu_g . \end{aligned}$$

*Proof.* Since  $\alpha$  is trace-free, the infinitesimal variation of the volume form is zero. We use this fact in the differentiation of the relative Futaki invariant given by expression (13), and obtain that

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{F}_{G,\Omega+t\alpha}^c \Big|_{t=0} (\Xi) = \int_{\mathcal{X}} \dot{v}_\Xi(\alpha) s_g^G d\mu_g + \int_{\mathcal{X}} v_\Xi \dot{s}_g^G(\alpha) d\mu_g = \int_{\mathcal{X}} v_\Xi \dot{s}_g^G(\alpha) d\mu_g$$

where the last equality follows because the reduced scalar curvature  $s_g^G$  of  $g$  vanishes. We then use Lemma 2.2.7 to obtain that

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{F}_{G,\Omega+t\alpha}^c \Big|_{t=0} (\Xi) = \int_{\mathcal{X}} \pi^W(v_\Xi) (G_g(\langle \alpha, dd^c s_g \rangle) - 2\langle \alpha, \rho_g \rangle) ,$$

which finishes the proof.  $\square$

Notice that we can state the result above using  $\rho_g^G$  instead because  $\rho_g = \rho_g^G$  for metric  $g$  with vanishing reduced scalar curvature.

The differential of the relative Futaki invariant of Lemma 2.3.4 defines a linear mapping

$$(15) \quad \mathfrak{q}/\mathfrak{g} \rightarrow (H^{1,1}(\mathcal{X}) \cap H^2(\mathcal{X}, \mathbb{R}))^* .$$

This leads to a very important concept in our work:

**Definition 2.3.5.** Let  $G$  and  $G'$  be connected compact subgroups of  $\text{Aut}(\mathcal{X})$  such that  $G \subset G'$ . The Futaki invariant  $\mathfrak{F}_{G,\Omega}^c$  relative to  $G$  is said to be  $G'$ -nondegenerate at  $\Omega$  if the linear map (15) restricted to

$$\mathfrak{p}_0/\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{z}'_0/\mathfrak{z}_0 \rightarrow (H^{1,1}(\mathcal{X}) \cap H^2(\mathcal{X}, \mathbb{R}))^*$$

is injective. If  $g$  is a Kähler metric representing  $\Omega$  such that  $G' = \text{Isom}_0(\mathcal{X}, g)$  and this condition holds for some  $G \subset G'$ , we say that  $g$  is Futaki nondegenerate relative to  $G$ .

We briefly illustrate this notion in a particular case next.

**2.3.6. Nondegeneracy of the Futaki invariant relative to a maximal compact torus.** In the presence of certain maximal torus symmetries on the underlying manifold, the relative Futaki invariant vanishes.

**Lemma 2.3.7.** *Let  $\mathcal{X}$  be a complex manifold, and let  $T$  be a maximal compact torus subgroup of  $\text{Aut}(\mathcal{X})$ . Then for  $G = T$ , we have  $\mathfrak{q}/\mathfrak{g} = 0$  and the relative Futaki invariant  $\mathfrak{F}_{G,\Omega}^c$  is identically zero for any Kähler class  $\Omega$  in  $\mathcal{X}$ . Given any compact connected Lie group  $G' \subset \text{Aut}(\mathcal{X})$ , then for  $G = T \subset G'$  the relative Futaki invariant  $\mathfrak{F}_{G,\Omega}^c$  is  $G'$ -nondegenerate.*

*Proof.* The Lie algebra  $\mathfrak{g}$  of  $G = T$  is Abelian and so equal to its center  $\mathfrak{z}$ . The centralizer  $\mathfrak{z}''$  of  $\mathfrak{g}$  in  $\mathfrak{h}$  contains  $\mathfrak{z}$ . If  $\mathfrak{z}$  were strictly contained in  $\mathfrak{z}''$ , we could find an element of  $\mathfrak{z}'' \setminus \mathfrak{z}$  that together with  $\mathfrak{z}$  would generate an Abelian Lie algebra, and this would contradict the maximality of  $\mathfrak{z}$  in  $\mathfrak{h}$ . Thus,  $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}''$ , and by Lemma 2.2.2,  $\mathfrak{q}/\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{z}''/\mathfrak{z} = 0$ . The result follows.  $\square$

### 3. DEFORMATIONS OF THE COMPLEX STRUCTURE

In this section we recall the theory of smooth deformations of a complex manifold and that of smooth polarized deformations. We illustrate the concept exhibiting a deformation of the Hirzebruch surface  $\mathcal{F}_1$ . This deformation will reappear in one of our applications in §5.

**3.1. Complex deformations.** A smooth family of complex deformations consists of the following data:

- (1) an open connected neighborhood  $B$  of the origin in  $\mathbb{R}^m$ , a smooth manifold  $\mathcal{M}$  and a smooth proper submersion  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow B$ ,
- (2) an open covering  $\{\mathcal{U}_j\}_{j \in I}$  of  $\mathcal{M}$  and smooth complex valued functions  $z_j = (z_j^1, \dots, z_j^n)$  defined on each  $\mathcal{U}_j$ , such that the collection of mappings

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}_j \cap \varphi^{-1}(t) & \rightarrow & \mathbb{C}^n \\ p & \mapsto & (z_j^1(p), \dots, z_j^n(p)) \end{array}$$

define a holomorphic atlas on each manifold  $\varphi^{-1}(t)$ .

Such a family of complex deformations will be denoted simply by  $\mathcal{M} \rightarrow B$ , and the fibers  $\varphi^{-1}(t)$  together with their canonical complex structure by  $\mathcal{M}_t$ . A complex manifold  $\mathcal{X}$  and a family of deformations  $\mathcal{M} \rightarrow B$  together with a given isomorphism  $\mathcal{X} \simeq \mathcal{M}_0$  is called a complex deformation of  $\mathcal{X}$ .

Smooth families of complex deformations are smoothly locally trivial. Indeed, let  $M$  be the underlying differentiable manifold of the central fiber  $\mathcal{M}_0$  of a family  $\mathcal{M} \rightarrow B$ . At the expense of shrinking  $B$  if necessary, we can find a diffeomorphism  $\mathcal{M} \rightarrow B \times M$  such that the diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{\quad} & B \times M \\ & \searrow & \swarrow \pi_B \\ & B & \end{array}$$



commutes. Here  $\pi_B$  denotes the projection map onto the first factor. We refer to this diffeomorphism as a trivialization of the given family of complex deformations. By way of such a trivialization, we see that all the  $M_t$ s are diffeomorphic to  $M$  for  $t$ s that are in a sufficiently small neighborhood of the origin in  $\mathbb{R}^m$ , and that the family of complex manifolds  $\mathcal{M}_t$  can be seen as a differentiable family  $\{J_t\}$  of integrable almost complex structures on  $M$ . From this point of view,  $\mathcal{M}_t$  and  $(M, J_t)$  are identified as complex manifolds.

**3.2. Polarized deformations.** Let us now assume that  $(\mathcal{X}, \Omega)$  is a polarized complex manifold, and that  $(\mathcal{M} \rightarrow B, \Theta)$  is a polarized complex deformation of it. If  $\omega_g$  is a Kähler form on  $\mathcal{X}$  that represents  $\Omega$ , a deep result of Kodaira and Spencer [12] shows that we can find a smooth family of Kähler metrics on  $\mathcal{M}_t$  that extends  $\omega_g$  and represents  $\Theta_t$  for each  $t$  (cf. §1.1). For in the language of integrable almost complex structures  $\{J_t\}$  on  $M$  that a trivialization of the deformation allows, the function  $t \rightarrow h_t^{p,q} = \dim_{\mathbb{C}} H^q(M, \Omega_{J_t}^p)$  is upper semi-continuous and if  $(M, J, \omega_g)$  is Kähler, this function is in fact constant in a sufficiently small neighborhood of the origin. Then it follows that there exists a smooth family  $t \rightarrow \omega_t$  of 2-forms on  $M$  such that  $\omega_t$  is Kähler with respect to  $J_t$ ,  $[\omega_t] = \Theta_t \in H^2(M; \mathbb{R})$ , and  $\omega_0$  and  $\omega_g$  agree with each other via the identification  $\mathcal{X} \simeq \mathcal{M}_0 \simeq (M, J_0)$ . This point of view is best adapted to our work here. We obtain a 2-form  $\beta$  on  $\mathcal{M}$  such that  $\beta|_{\mathcal{M}_t} = \omega_t$ . Such a form  $\beta$  is said to represent the polarization  $\Theta$ .

**3.3. Example: the Mukai-Umemura 3-fold.** Let  $V$  be a 7-dimensional complex vector space,  $Gr_3(V)$  be the Grassmanian of complex 3-dimensional subspaces of  $V$  and  $U \rightarrow Gr_3(V)$  be the tautological rank 3-bundle over  $Gr_3(V)$ . Notice that  $Gr_3(V)$  is 12-dimensional.

Any  $\varpi \in \Lambda^2 V^*$  defines a section  $\sigma_{\varpi}$  of the bundle  $\Lambda^2 U^* \rightarrow Gr_3(V)$ . Let  $Z_{\varpi} \subset Gr_3(V)$  be the zero set of  $\sigma_{\varpi}$ . So  $Z_{\varpi}$  is the subset of isotropic 3-planes of  $\varpi$ , the points  $P$  in  $Gr_3(V)$  such that  $\varpi|_P = 0$ . For a generic  $\varpi$ ,  $Z_{\varpi}$  is a smooth subvariety of codimension three, and given three linearly independent forms,  $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3$ , we obtain the 3-fold

$$X_{\Pi} = X_{\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3} = Z_{\varpi_1} \cap Z_{\varpi_2} \cap Z_{\varpi_3} \subset Gr_3(V),$$

that depends only on the 3-plane  $\Pi$  spanned by the  $\varpi_i$ s in  $\Lambda^2 V^*$ , and not in the basis chosen to represent it. The action of the group  $\mathbb{S}\mathbb{L}(V)$  on  $V$  induces an action on  $Gr_3(\Lambda^2 V^*)$ , and 3-planes  $\Pi_1$  and  $\Pi_2$  define isomorphic complex varieties  $X_{\Pi_1}$  and  $X_{\Pi_2}$  if, and only if, the planes  $\Pi_1$  and  $\Pi_2$  lie in the same  $\mathbb{S}\mathbb{L}(V)$  orbit. We obtain a set of equivalence classes of 3-folds parametrized by the quotient  $\mathcal{U}/\mathbb{S}\mathbb{L}(V)$ .

There is a Zariski open set  $C \subset Gr_3(\Lambda^2 V^*)$  of 3-planes  $\Pi$  such that  $X_{\Pi}$  is a smooth subvariety of dimension 3. It has an obvious family of complex deformations. For if  $\mathcal{N} = \{(\Pi, x) \in C \times Gr_3(V) \mid x \in X_{\Pi}\}$ , we may consider this smooth complex manifold together with its canonical projection  $\mathcal{N} \rightarrow C$ . The  $\mathbb{S}\mathbb{L}(V)$ -action on  $C \times Gr_3(V)$  induces an equivariant action on  $\mathcal{N} \rightarrow C$ , and two fibers are isomorphic if, and only if, they are above the same orbit in  $C$ .

The Mukai-Umemura manifold is a particular smooth 3-fold in this family. It can be described efficiently as follows. The six symmetric power  $\text{Sym}^6(\mathbb{C}^2)$  is the standard irreducible 7-dimensional representation of  $\mathbb{S}\mathbb{L}(2, \mathbb{C})$ . We take

*Stability of extremal metrics under complex deformations*

$V = \text{Sym}^6(\mathbb{C}^2)$  with its induced  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ -action. The representation  $\Lambda^2 V^*$  decomposes into irreducible representations as

$$\Lambda^2(\text{Sym}^6(\mathbb{C}^2)) = \text{Sym}^{10}(\mathbb{C}^2) \oplus \text{Sym}^6(\mathbb{C}^2) \oplus \text{Sym}^2(\mathbb{C}^2),$$

The summand  $\text{Sym}^2(\mathbb{C}^2)$  corresponds to a 3-plane  $\Pi_0$  in  $\Lambda^2 V^*$  that defines the Mukai-Umemura variety  $X_{\Pi_0}$ . The plane  $\Pi_0$  is invariant under  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ , so this group acts naturally on  $X_{\Pi_0}$ .

Since many of the deformations are equivalent via the  $\text{SL}(V)$ -action, it is important to describe the quotient of  $Gr_3(\Lambda^2 V^*)$ . This is done carefully in [7], where it is proven that the quotient of the tangent space to  $Gr_3(\Lambda^2 V^*)$  at  $\Pi_0$  by the tangent space to the orbit can be identified with  $\text{Sym}^8(\mathbb{C}^2)$  with its standard  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ -action, the stabilizer of  $\Pi_0$  in  $\text{SL}(V)$ . By the theory for equivariant slices of Lie group actions, there is a neighborhood of the origin  $B \subset \text{Sym}^8(\mathbb{C}^2)$  and a  $\mathbb{P}\text{SL}(2, \mathbb{C})$ -equivariant embedding  $j : B \rightarrow Gr_3(\Lambda^2 V^*)$  such that for  $t_1, t_2 \in B$ , the images  $j(t_1)$  and  $j(t_2)$  are in the same  $\text{SL}(V)$ -orbit if, and only if,  $t_1$  and  $t_2$  are in the same  $\mathbb{P}\text{SL}(2, \mathbb{C})$  orbit. If  $B$  is taken to be sufficiently small, we have  $j(B) \subset C$  and  $\mathcal{M} \rightarrow B$ , defined as the fiber product  $\mathcal{M} = B \times_C \mathcal{N}$ , is a smooth family of complex deformations of  $\mathcal{M}_0 \simeq X_{\Pi_0}$ .

**3.3.1. Deformations with symmetries.** In particular, the deformations corresponding to polynomials  $p = C(u^4 - \alpha v^4)(v^4 - \alpha u^4)$  for  $\alpha, C \in \mathbb{C}^\times$  have a stabilizer  $G$  in  $\mathbb{P}\text{SL}(2, \mathbb{C})$  isomorphic to a dihedral group of order 8. In the case where  $\alpha = 0$ , the stabilizer of  $p$  is the subgroup of  $\mathbb{P}\text{SL}(2, \mathbb{C})$  spanned by the one parameter subgroup  $\lambda \cdot [u : v] = [\lambda u : \lambda^{-1} v]$  and the rotation  $[u : v] \mapsto [v : u]$ . Hence, we have a maximal compact subgroup  $G$  of the stabilizer of  $p$  that is isomorphic to  $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{S}^1$ .

We can consider the family of deformation of  $X_{\Pi_0}$  obtained by restricting  $B$  to the subspace of polynomials of the form  $tp$  as above for  $t \in \mathbb{C}$ . Thus, we get a family of deformation  $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$  endowed with a holomorphic action of  $G$ , where  $G$  is a dihedral group of order 8, or the semidirect product of  $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{S}^1$  in the case where  $\alpha = 0$ . In addition, the group  $G$  acts on the central fiber as a subgroup of  $\mathbb{P}\text{SL}(2, \mathbb{C})$ , the identity component of the automorphism group of  $X_{\Pi_0}$ . Therefore,  $G$  acts trivially on the cohomology of every fiber  $\mathcal{M}_t$  of the deformation  $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$ .

#### 4. DEFORMATIONS OF EXTREMAL METRICS

In this section we prove a criterion that ensures the stability of the extremal condition of a Kähler metric under complex deformations. We assume some symmetries of the family of deformations and the nondegeneracy of the relative Futaki invariant.

Let  $\mathcal{M} \rightarrow B$  be a smooth family of complex deformations of a complex manifold  $\mathcal{X} \simeq \mathcal{M}_0$ . If we assume that  $\mathcal{X}$  is of Kähler type, then it follows that all fibers  $\mathcal{M}_t$  are Kähler provided we shrink the set of parameters  $t \in B$  to a sufficiently small neighborhood of the origin [12]. In particular, the Lie algebra of holomorphic vector fields  $\mathfrak{h}(\mathcal{M}_t)$  contains the ideal  $\mathfrak{h}_0(\mathcal{M}_t)$  consisting of holomorphic vector fields with zeroes somewhere (cf. §2). Throughout this section, we shall always assume that  $\mathcal{X}$  is of Kähler type and that  $B$

has been so restricted. We shall indicate the occasions where the latter restriction may be necessary.

**4.1. Holomorphic group actions.** Let  $G$  be a compact connected Lie group acting smoothly on  $\mathcal{M}$  such that:

- The fibers  $\mathcal{M}_t$  are preserved under the action.
- The induced action on each  $\mathcal{M}_t$  is holomorphic,
- $G$  acts faithfully on  $\mathcal{M}_0$ , and it is identified to a subgroup of the connected component of the identity of  $\text{Aut}(\mathcal{M}_0)$ .

Under this conditions, we say that  $G$  acts *holomorphically* on  $\mathcal{M}$ .

As discussed in §3, we may think of the deformation  $\mathcal{M} \rightarrow B$  as a smoothly varying family of integrable almost complex structure  $J_t$  on the underlying manifold  $M$  of the central fiber such that  $(M, J_t) \simeq \mathcal{M}_t$ , and using the smooth trivialisation of the deformation near the central fiber, the holomorphic  $G$ -action on  $\mathcal{M}$  can be seen as a smoothly varying family of  $G$ -actions

$$\begin{aligned} a : B \times G \times M &\rightarrow M \\ (t, g, x) &\mapsto a_t(g, x) \end{aligned}$$

where  $a_t$  is a  $J_t$ -holomorphic action that is identified to the  $G$ -action on  $\mathcal{M}_t$  modulo the isomorphism  $(M, J_t) \simeq \mathcal{M}_t$ .

By [15], we know that compact Lie group actions are rigid up to conjugation. Hence, there exists a smooth isotopy  $f_t : M \rightarrow M$  that intertwines the  $a_t$  and  $a_0$  actions,

$$f_t^{-1} \circ a_t(g, f_t(x)) = a_0(g, x) \text{ for all } t \in B, g \in G, x \in M,$$

possibly after restricting  $B$  to some smaller neighborhood of the origin. So acting by  $f_t$  on the family of complex structures  $J_t$ , we may assume that the action of  $G$  is independent of  $t$ , and that it is holomorphic relative to each  $J_t$ .

The triviality of the smooth deformation of the action of  $G$  on  $M$  has some strong consequences on the complex geometry. Firstly, there is a canonical morphism of the Lie algebra  $\mathfrak{g}$  of the group  $G$  into the space of smooth vector fields on  $M$ ,

$$\xi : \mathfrak{g} \hookrightarrow C^\infty(M, TM).$$

a map that is injective because the action of  $G$  is assumed to be faithful on the central fiber. We may therefore think of  $\mathfrak{g}$  as a subalgebra of  $C^\infty(M)$ . We will do so, and drop  $\xi$  from the notation when no confusion can arise. Notice also that since the  $G$ -action is  $J_t$  holomorphic,  $\mathfrak{g}$  is a subalgebra of  $\mathfrak{h}(M, J_t)$  for all  $t \in B$ .

We consider the ideal  $\mathfrak{h}_0(M, J_t)$  of Hamiltonian holomorphic vector fields in  $\mathfrak{h}(M, J_t)$ , the space of holomorphic vector fields with a nontrivial zero set [13]. Then the ideal of  $\mathfrak{g}$  given by  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{h}_0(M, J_t)$  consists of the vector fields in  $\mathfrak{g} \subset C^\infty(M, TM)$  that vanish somewhere, and since this properties is independent of the complex structure  $J_t$ ,  $\mathfrak{g}_0$  is independent of  $t$ .

We summarize the discussion above into the following proposition:

**Proposition 4.1.1.** *Let  $\mathcal{M} \rightarrow B$  be a family of complex deformations of a manifold  $\mathcal{X}$  of Kähler type. Let  $G$  be a compact connected Lie group acting holomorphically on  $\mathcal{M}$ , and let  $\mathfrak{g}$  be its Lie algebra. If  $B$  is restricted to a*

sufficiently small neighborhood of the origin, there exists a smooth trivialization  $\mathcal{M}_t \simeq (M, J_t)$  such that  $\mathcal{M}_t$  is Kähler for all  $t \in B$ , the action of  $G$  on  $\mathcal{M}_t$  is independent of  $t$ , the image of the natural embedding  $\mathfrak{g} \subset C^\infty(M, TM)$  is contained in  $\mathfrak{h}(M, J_t)$  for all  $t \in B$ , and  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{h}_0(M, J_0)$  is an ideal of  $\mathfrak{g}$  that is independent of  $t$ .

**Definition 4.1.2.** Let  $\mathcal{M} \rightarrow B$  be a family of complex deformations of a manifold  $\mathcal{X}$  of Kähler type, and let  $G$  be a compact connected Lie group acting holomorphically on  $\mathcal{M}$ . A smooth trivialisation  $\mathcal{M}_t \simeq (M, J_t)$  that satisfies the properties of Proposition 4.1.1 is said to be an *adapted trivialization* for  $\mathcal{M} \rightarrow B$  relative to  $G$ .

**4.2. The equivariant deformation problem.** Let  $(\mathcal{M} \rightarrow B, \Theta)$  be a polarized family of complex deformations of a polarized manifold  $(\mathcal{X}, \Omega)$ , and let  $G$  be a compact connected Lie group acting holomorphically on  $\mathcal{M}$ . Since  $G$  is connected it acts trivially on the cohomology of the fibers  $\mathcal{M}_t$ , and in particular on  $\Theta_t$ . Let  $(M, J_t) \simeq \mathcal{M}_t$  be an adapted trivialization for  $\mathcal{M} \rightarrow B, \Theta$  relative to  $G$ . With some abuse of notation, we denote by  $\Theta_t$  the polarization induced on  $M$  via the isomorphism  $\mathcal{M}_t \simeq (M, J_t)$ . Then we have the following:

**Lemma 4.2.1.** *Let  $(\mathcal{M} \rightarrow B, \Theta)$  be a polarized deformation of  $(\mathcal{X}, \Omega) \simeq (\mathcal{M}_0, \Theta_0)$  provided with a holomorphic action of a compact connected Lie group  $G$ . Consider an adapted trivialization  $(M, J_t) \simeq \mathcal{M}_t$ , and let  $g$  be an extremal metric on  $\mathcal{X}$  that represents the Kähler class  $\Omega$ . Then, if  $B$  is restricted to a sufficiently small neighborhood of the origin, there exists a smooth family of  $G$ -invariant Kähler metrics  $g_t$  on  $(M, J_t)$  that represent the Kähler classes  $\Theta_t$ , and such that  $g_0$  is identified to the metric  $g$  by the isomorphism  $\mathcal{X} \simeq \mathcal{M}_0$  up to conjugation by an element of  $\text{Aut}(\mathcal{X})$ .*

*Proof.* The connected component of the identity in the group of isometries denoted  $\text{Isom}_0(\mathcal{X}, g)$  is a maximal compact connected subgroup of  $\text{Aut}(\mathcal{X})$  [5]. Thus, we may assume that  $G \subset \text{Isom}_0(\mathcal{X}, g)$  up to conjugation by an element of  $\text{Aut}(\mathcal{X})$ .

Let  $g_0$  be the  $G$ -invariant metric on  $(M, J_0)$  that corresponds to  $g$  by the isomorphism  $\mathcal{X} \simeq (M, J_0)$ . By the Kodaira-Spencer theory, we can extend  $g_0$  to a smooth family of Kähler metrics  $g_t$  on  $(M, J_t)$  that represent  $\Theta_t$  for  $t$ s sufficiently small. We can average these metrics if necessary to make of them  $G$ -invariant. Since  $G$  acts isometrically on  $g_0$ , the averaging process leaves  $g_0$  unchanged. On the other hand,  $G$  acts trivially on the cohomology, and hence, on  $\Theta_t$ . So the averaging of the metric  $g_t$  does not change the Kähler class that the metric represents. This finishes the proof.  $\square$

**Definition 4.2.2.** Let  $(\mathcal{M} \rightarrow B, \Theta)$  be a polarized family of deformations of  $(\mathcal{X}, \Omega)$  provided with a holomorphic action of a compact connected Lie group  $G$ . Assume that  $\Omega$  is represented by an extremal metric  $g$ . A smooth family of  $G$ -invariant Kähler metrics  $g_t$  satisfying the properties given by Lemma 4.2.1 for an adapted trivialization is said to be an *adapted smooth family of Kähler metrics*.

Let us notice that for the adapted family of metrics  $g_t$  of Lemma 4.2.1, the metric  $g_0$  coincides with the metric  $g$  on  $\mathcal{X}$  up to the conjugation by an automorphism. Throughout the rest of the paper, we shall assume that the isomorphism  $\mathcal{X} \simeq \mathcal{M}_0$  has been so conjugated so that  $g_0$  and  $g$  coincide.

In our considerations below, the group  $G'$  of §2.2 will always be the connected component of the identity in the isometry group  $\text{Isom}(\mathcal{X}, g)$  of  $g$ .

**4.3. Analytical considerations.** Let  $(\mathcal{M} \rightarrow B, \Theta)$  be a polarized deformation of  $(\mathcal{X}, \Omega)$ , and let  $G$  be a compact Lie group acting holomorphically on  $\mathcal{M} \rightarrow B$ . We assume that  $G$  is contained in  $G'$ . Let  $g$  be an extremal metric on  $\mathcal{X}$  that represents the class  $\Omega$ . We consider an adapted trivialization  $\mathcal{M}_t \simeq (M, J_t)$  and adapted family of Kähler metrics  $g_t$  on  $(M, J_t)$  (cf. §4.1 and 4.2) such that  $g_0 = g$ .

Let  $L_k^2(M)$  be the  $k$ th Sobolev space defined by  $g$ , and let  $L_{k,G}^2$  be space of elements in  $L_k^2$  that are  $G$ -invariant. The latter can be defined as the Banach space completion of  $C_G^\infty(M)$  in the  $L_k^2$  norm.

We denote by  $\omega_t$  the Kähler form of the metric  $g_t$  on  $(M, J_t)$  of the adapted family. Let  $\mathbf{H}_t(M)$  be the space of  $g_t$ -harmonic real  $(1, 1)$ -forms on  $(M, J_t)$ . By Hodge theory, we have that

$$\mathbf{H}_t(M) \simeq H^{1,1}(M, J_t) \cap H^2(M, \mathbb{R}).$$

Since  $G$  is connected, it acts trivially on the cohomology of  $M$ . By the uniqueness of the harmonic representative of a close form, it therefore acts trivially on  $\mathbf{H}_t$  also. Further, the Kodaira-Spencer theory shows that all the spaces  $\mathbf{H}_t(M)$  are isomorphic for  $t$ s sufficiently small, and form the fibers of a vector bundle  $\mathbf{H}(M) \rightarrow B$ .

For a given function  $\phi \in L_{k+4,G}^2(M)$  and  $\alpha \in \mathbf{H}_t(M)$  sufficiently small, one can define a new Kähler metric  $g_{t,\alpha,\phi}$  on  $(M, J_t)$  with Kähler form

$$\omega_{t,\alpha,\phi} = \omega_t + \alpha + dd^c \phi.$$

By definition, the deformed metric  $g_{t,\alpha,\phi}$  is automatically invariant under the  $G$ -action and represents the Kähler class  $\Theta_{t,\alpha} = \Theta_t + [\alpha]$ .

The real and complex Lichnerowicz operator of  $g_{t,\alpha,\phi}$  will be denoted  $\mathbb{L}_{t,\alpha,\phi}$  and  $L_{t,\alpha,\phi}$  respectively. The space of Killing potentials for the metric  $g_{t,\alpha,\phi}$  is given by  $i \ker \mathbb{L}_{t,\alpha,\phi}$ .

Since  $G$  acts isometrically on  $g_{t,\alpha,\phi}$ , the Lie algebra  $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{h}_0(M, J_t)$  consists of Hamiltonian Killing fields for the metric  $g_{t,\alpha,\phi}$  as well. Let  $\mathcal{H}_{t,\alpha,\phi}^{\mathfrak{g}_0}$  be the space of holomorphy potentials corresponding to the Killing fields in  $\mathfrak{g}_0$  for the metric  $g_{t,\alpha,\phi}$ . The space  $\mathcal{H}_{t,\alpha,\phi}^{\mathfrak{g}_0}$  consists of purely imaginary functions of the form  $iv$  where  $v$  is a Killing potential for some Killing vector field in  $\mathfrak{g}_0$  relative to the metric  $g_{t,\alpha,\phi}$ . Using the notations of §2.2.1, we introduce  $\mathcal{H}_{t,\alpha,\phi}^{\mathfrak{g}_0}$  as the  $G$ -invariant part of  $\mathcal{H}_{t,\alpha,\phi}^{\mathfrak{g}_0}$ . An essential feature of  $\mathcal{H}_{t,\alpha,\phi}^{\mathfrak{g}_0}$  is that it is identified to  $\mathbb{R} \oplus \mathfrak{g}_0^G$ , where  $\mathfrak{g}_0^G$  is the Lie subalgebra of  $Ad(G)$ -invariant vector fields in  $\mathfrak{g}_0$  (or equivalently the  $G$ -invariant one when  $\mathfrak{g}_0$  is considered as a Lie subalgebra of  $\mathfrak{f}(M)$ ).

It follows that the spaces  $\mathcal{H}_{t,\alpha,\phi}^{\mathfrak{g}_0}$  have constant dimension and that they are the fibers of a vector bundle  $\mathcal{H}^{\mathfrak{g}_0}$  over a neighborhood of the origin in the total space of the bundle  $L_{k+4,G}^2(M) \oplus \mathbf{H}(M) \rightarrow B$ .

*Stability of extremal metrics under complex deformations*

The  $L^2$ -norm on  $L_{k',G}^2(M)$  induced by the Riemannian metric  $g_{t,\alpha,\phi}$  allows us to define the orthogonal  $W_{k',t,\alpha,\phi}$  of  $i\mathcal{H}_{t,\alpha,\phi}^{\mathfrak{H}^0}$  and an orthogonal direct sum

$$L_{k',G}^2(M) = i\mathcal{H}_{t,\alpha,\phi}^{\mathfrak{H}^0} \oplus W_{k',t,\alpha,\phi}$$

varying smoothly with  $(t, \alpha, \phi)$ . This construction provides Banach bundles

$$W_{k'} \rightarrow \mathcal{V}$$

where  $\mathcal{V}$  is a sufficiently small neighborhood of the origin in the total space of  $L_{k+4,G}^2(M) \oplus \mathbf{H}(M) \rightarrow B$ . We shall denote by

$$\pi_{t,\alpha,\phi}^W : L_{k',G}^2(M) \rightarrow W_{k',t,\alpha,\phi} \quad \text{and} \quad \pi_{t,\alpha,\phi}^G : L_{k',G}^2(M) \rightarrow i\mathcal{H}_{t,\alpha,\phi}^{\mathfrak{H}^0}$$

the canonical projection associated to the above splitting. The *reduced scalar curvature*  $s_{t,\alpha,\phi}^G$  of  $g_{t,\alpha,\phi}$  is given by  $s_{t,\alpha,\phi}^G = \pi_{t,\alpha,\phi}^W(s_{g_{t,\alpha,\phi}}) = (\mathbb{1} - \pi_{t,\alpha,\phi}^G)(s_{g_{t,\alpha,\phi}})$ . We are looking for particular extremal metrics near  $g$ , namely the one with vanishing reduced scalar curvature

$$(16) \quad s_{t,\alpha,\phi}^G = 0.$$

The LHS of (16) can be interpreted as a section of the bundle  $W_{k'} \rightarrow \mathcal{V}$ . Our goal is to seek the zeroes of this section of Banach bundle. Keeping a more prosaic style we can express equation (16) more concretely by using suitable trivialisations of the relevant bundles as follows: the metric  $g_0$  induces an  $L^2$ -norm and an associated orthogonal projection  $P = \pi_0^W : L_{k+4,G}^2(M) \rightarrow W_{k,0}$ . For parameters  $(t, \alpha, \phi)$  sufficiently small, the restriction

$$P : W_{k,t,\alpha,\phi} \rightarrow W_{k,0},$$

is automatically an isomorphism.

The bundle of harmonic real  $(1,1)$ -forms  $\mathbf{H}(M) \rightarrow B$ , admits a trivialization in a neighborhood of the central fiber. Thus we have a smooth isomorphism of vector bundle  $h$ , up to the cost of shrinking  $B$  to some smaller neighborhood of the origin, which commutes with the canonical projections

$$\begin{array}{ccc} B \times \mathbf{H}_0(M) & \xrightarrow{h} & \mathbf{H}(M) \\ & \searrow & \swarrow \\ & B & \end{array}$$

and such that  $h$  restricted to the central fiber is the identity. We shall use the notation  $h(t, \alpha) = h_t(\alpha) \in \mathbf{H}_t(M)$ .

Let  $\mathcal{U}$  be a sufficiently small open neighborhood of the origin in  $B \times \mathbf{H}_0(M) \times W_{k+4,0}$  such that the following map is defined

$$(17) \quad \mathcal{S} : \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \rightarrow & B \times W_{k,0} \\ (t, \alpha, \phi) & \mapsto & \left( t, P \left( s_{t,h_t(\alpha),\phi}^G \right) \right) \end{array}$$

**Lemma 4.3.1.** *The map  $\mathcal{S}$  is  $C^1$  and its differential is a Fredholm operator. Assuming that the Kähler metric  $g$  on  $\mathcal{X}$  has vanishing reduced scalar curvature  $s_g^G = 0$ , the differential at  $(t, \alpha, \phi) = 0$  is given by given by a linear operator of the form*

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ * & S_{G,g} \end{pmatrix}$$

*Stability of extremal metrics under complex deformations*

where

$$S_{G,g}(\dot{\alpha}, \dot{\phi}) = -2\mathbb{L}_g\dot{\phi} + P(\dot{s}_g^G(\dot{\alpha}))$$

is the differential of  $P(s^G)$  at  $g$  in the direction of  $(\dot{\alpha}, \dot{\phi})$ . In the case where  $\dot{\alpha}$  is tracefree, we have

$$S_{G,g}(\dot{\alpha}, 0) = \dot{s}_g^G(\dot{\alpha}) = P(G_g(\langle \dot{\alpha}, dd^c s_g \rangle) - 2\langle \dot{\alpha}, \rho \rangle).$$

*Proof.* The map  $\mathcal{S}$  is  $C^1$  since the reduced scalar curvature depends in a  $C^1$  manner of the data  $(t, \alpha, \phi)$ . The computation of the differential of  $\mathcal{S}$  is deduced from Lemma 2.2.7.  $\square$

At this point, we may compute the index of the differential of  $\mathcal{S}$ :

**Lemma 4.3.2.** *Under the assumption  $s_g^G = 0$ , the index of the differential of  $\mathcal{S}$  at the origin is equal to  $h^{1,1}(\mathcal{X})$ .*

*Proof.* By Lemma 4.3.1, the operator  $S_{G,g}$  is a compact perturbation of the map

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0(M) \times W_{k+4,0} &\rightarrow W_{k,0} \\ (\alpha, \phi) &\mapsto -2\mathbb{L}_g\phi \end{aligned}$$

The Lichnerowicz operator  $\mathbb{L}_g : W_{k+4,0} \rightarrow W_{k,0}$  has index 0. We conclude that the differential of  $\mathcal{S}$  has index  $\dim \mathbf{H}_0(M) = h^{1,1}(\mathcal{X})$ .  $\square$

**4.4. Surjectivity.** We return to the study of the map  $\mathcal{S}$  with the notations of §4.2.

**Proposition 4.4.1.** *Under the additional assumption that  $g$  is an extremal metric on  $\mathcal{X}$  with  $s_g^G = 0$ , the map  $\mathcal{S}$  defined at (17) is a submersion at the origin if and only the relative Futaki invariant  $\mathfrak{F}_{G,\Omega}^c$  is non degenerate at  $\Omega$ , the Kähler class of  $g$ .*

*Proof.* The cokernel of the differential of  $\mathcal{S}$  is identified to  $\psi \in W_{k,0}$  such that

$$\langle \mathbb{L}_g\dot{\phi}, \psi \rangle = 0, \quad \langle P(\dot{s}_g^G(\dot{\alpha})), \psi \rangle = 0$$

for all  $\dot{\phi} \in W_{k+4,0}$  and  $\dot{\alpha}$   $g$ -harmonic  $(1,1)$ -forms on  $(M, J_0) \simeq \mathcal{X}$ .

The first equation implies that  $\mathbb{L}_g\psi = 0$ . Therefore we have  $\psi \in i\mathcal{H}_g^{\mathfrak{z}'_0} \simeq \mathbb{R} \oplus \mathfrak{z}'_0$ . Let  $\Xi \in \mathfrak{z}'_0$  be the Killing field represented by  $\psi$ . Using the second condition in the particular case where  $\dot{\alpha}$  is tracefree, we see that

$$0 = \langle P(\dot{s}_g^G(\dot{\alpha})), \psi \rangle = \langle \dot{s}_g^G(\dot{\alpha}), \psi \rangle = \int_{\mathcal{X}} \psi \dot{s}_g^G(\dot{\alpha}) d\mu_g = \check{\mathfrak{F}}_{G,\Xi,\Omega}^c(\dot{\alpha}),$$

where the last equality is given by Lemma 2.3.4. The relative Futaki non-degeneracy condition implies that  $\Xi \in \mathfrak{z}_0$ , in other words  $\psi \in i\mathcal{H}_g^{\mathfrak{z}'_0}$ . By definition  $\psi$  is orthogonal to  $i\mathcal{H}_g^{\mathfrak{z}'_0}$ , hence  $\psi = 0$  and  $\mathcal{S}$  is a submersion.

Conversely, it is easy to check that if the relative Futaki invariant is degenerate, then  $\mathcal{S}$  is not a submersion.  $\square$

**Remark 4.4.2.** Under the Futaki nondegeneracy assumption, we may choose any linear subspace  $V \subset \mathbf{H}_0(M)$  such that the linearized Futaki invariant induces an injective map  $\mathfrak{p}_0/\mathfrak{g}_0 \rightarrow V^*$ . Then the corresponding restriction of  $\mathcal{S}$  is still a submersive map at the origin.

In conclusion, we obtain the following theorem:

**Theorem 4.4.3.** *Let  $(\mathcal{M} \rightarrow B, \Theta)$  be a polarized family of complex deformations of a polarized manifold  $(\mathcal{X}, \Omega)$ . Assume that  $\mathcal{M} \rightarrow B$  is endowed with a holomorphic action of a connected compact Lie group  $G$  and that  $\mathcal{X}$  admits a  $G$ -invariant extremal metric  $g$  with Kähler class  $\Omega$  and such that  $s_g^G = 0$ .*

*Given an adapted trivialization  $\mathcal{M}_t \simeq (M, J_t)$  defined for  $t$  sufficiently small, let  $g_t$  be any adapted smooth family of  $G$ -invariant Kähler metrics on  $(M, J_t)$  representing  $\Theta_t$  (cf. §4.1 and §4.2).*

*Assume that the relative Futaki invariant  $\mathfrak{F}_{G, \Omega}^c$  is non degenerate at  $g$ , then choose a space  $V \subset \mathbf{H}_0(M)$  such that the linearized relative Futaki invariant restricted to  $\mathfrak{p}_0/\mathfrak{g}_0 \rightarrow V^*$  is injective. Then, the space of solutions*

$$S = \{(t, \alpha, \phi) \in \mathcal{U} \mid \alpha \in V \text{ and } s_{g_t, h_t(\alpha), \phi}^G = 0\}$$

*is a smooth manifold of real dimension  $\dim V + \dim B$ , in a sufficiently small neighborhood of the origin. For any  $(t, \alpha, \phi) \in S$ ,  $\alpha$  and  $\phi$  are automatically smooth.*

*The canonical projection  $S \rightarrow B$  is a submersion near the origin and the fibers are  $\dim V$ -dimensional submanifold of  $S$  corresponding to families of  $G$ -invariant Kähler metrics  $g_{t, \alpha, \phi}$  on  $\mathcal{M}_t$  with vanishing reduced scalar curvature representing a perturbation of the polarization given by  $\Theta_t + [\alpha]$ .*

*Proof.* The hypothesis imply that the map  $S$  restricted to  $\mathcal{U}' = \{(t, \alpha, \phi) \in \mathcal{U} \mid \alpha \in V\}$  is a submersion at the origin. The kernel  $K$  of the differential of  $S$  has dimension equal to its index  $\dim V$ . Let  $\pi_K : W_{k+4} \rightarrow K$  be the orthogonal projection onto  $K$ . By definition, the map

$$\mathcal{U}' \xrightarrow{\pi_K \times S} K \times B \times W_{k,0}$$

is an isomorphism. The implicit function theorem provides the desired solutions parametrized by  $B \times K$ .  $\square$

**Remark 4.4.4.** When  $\mathfrak{q}/\mathfrak{g} = 0$ , the Futaki invariant is automatically non degenerate and Theorem 4.4.3 applies for any subspace  $V \subset \mathbf{H}_0(M)$ . Setting  $V = 0$ , the theorem provides for every  $t$  sufficiently small a unique extremal metric on  $\mathcal{M}_t$  with Kähler class  $\Theta_t$ . In other words, the original polarization  $\Theta$  does not have to be perturbed in this case.

**4.5. Generalization to nonconnected groups.** Although to this point the group  $G$  has been assumed to be connected, this assumption is not necessary to a large extent. The connectedness was used to ensure that  $G$  acts trivially on the cohomology of the manifold, hence on harmonic forms. Thus, we merely need the assumption that  $G$  acts trivially on the relevant Kähler classes.

For instance, if  $G$  is contained in the connected component of the identity of  $\text{Aut}(\mathcal{X})$ , then  $G$  acts trivially on the cohomology of  $\mathcal{X}$ . We can check that the definition of the Futaki invariant relative to  $G$  still makes sense. The analysis developed at §4.2 extends trivially in this case by working  $G$ -equivariantly. The only difference in this more general framework will appear in Proposition 4.4.1. For in order to make sure that this proposition still holds, we should change slightly the definition of relative Futaki nondegeneracy. Let us recall that the linearized relative Futaki invariant induces



*Stability of extremal metrics under complex deformations*

a map  $\mathfrak{z}'_0/\mathfrak{z}_0 \rightarrow (H^{1,1}(\mathcal{X}) \cap H^2(\mathcal{X}, \mathbb{R}))^*$ . If  $G$  is connected,  $\mathfrak{z}'_0$  agrees with the space of  $G$ -invariant Hamiltonian Killing fields on  $(\mathcal{X}, g)$ . But if  $G$  is not connected, there is a residual action of  $G$  on  $\mathfrak{z}'_0$  by a finite group action. The space of  $G$ -invariant vector fields in  $\mathfrak{z}'_0$  is denoted  $\mathfrak{z}'_{0,G}$ . Similarly we denote by  $\mathfrak{z}_{0,G}$  the  $G$ -invariant part of  $\mathfrak{z}_0$ . There is an embedding  $\mathfrak{z}'_{0,G}/\mathfrak{z}_{0,G} \subset \mathfrak{z}'_0/\mathfrak{z}_0$  and we shall say that the Futaki invariant  $\mathfrak{F}_{\Omega,G}^c$  is nondegenerate at  $g$  if the map

$$\mathfrak{z}'_{0,G}/\mathfrak{z}_{0,G} \rightarrow (H^{1,1}(\mathcal{X}) \cap H^2(\mathcal{X}, \mathbb{R}))^*$$

is injective.

Using this new definition of the Futaki nondegeneracy, we can drop the connectivity assumption on  $G$  and just assume that  $G \subset G' = \text{Isom}_0(\mathcal{X}, g)$  in Theorem 4.4.3. We can then derive the same conclusions.

## 5. APPLICATIONS

In this section we apply Theorem A in some particular situations, and especially to produce new examples of Kähler manifolds with extremal metrics.

**5.1. Relation to LeBrun-Simanca deformation theory.** It is easy to see that Theorem A enables us to recover the deformation theory of [14].

5.1.1. *Case  $G = \{1\}$ .* Let  $g$  be a Kähler metric on  $\mathcal{X}$  with Kähler class  $\Omega$ . Then, we have  $s_g^G = s_g - \bar{s}_g$ , where  $\bar{s}_g$  is the average of  $s_g$  on  $\mathcal{X}$ . So the condition  $s_g^G = 0$  is equivalent to the property that  $g$  has constant scalar curvature. Furthermore the Futaki invariant relative to  $G = \{1\}$  agrees with the non-relative Futaki invariant. In this case, Theorem A is equivalent to the deformation theory for cscK metrics of [14].

5.1.2. *Case  $G = G'$ .* If  $g$  is extremal, then  $G' = \text{Isom}_0(\mathcal{X}, g)$  is a maximal connected compact subgroup of  $\text{Aut}(\mathcal{X})$ . Then every extremal metric is  $G$ -invariant, upto conjugation, and the condition  $s_g^G = 0$  for a  $G$ -invariant Kähler metric is equivalent to the metric being extremal.

Theorem A applies. In the case of trivial complex deformations with  $B = \{0\}$ , one recovers the openness theorem of [14]. We actually seem to have a more general result for it is possible to allow complex deformations with a holomorphic action of  $G$ .

**5.2. Deformations with maximal torus symmetry.** The deformation theory under a maximal compact torus symmetry is particularly well behaved. Let  $\mathcal{X}$  be complex manifold and  $g$  an extremal metric on  $\mathcal{X}$  with Kähler class  $\Omega$ . We shall denote by  $G = T^n \subset \text{Aut}(\mathcal{X})$  a maximal compact torus. Up to conjugation by an automorphism, we may assume that the metric  $g$  is  $G$ -invariant so that  $G \subset G' = \text{Isom}_0(\mathcal{X}, g)$ . The vector field  $\Xi = J \text{grad } s_g$  is in  $\mathfrak{z}' \subset \mathfrak{z}''$ . But in this case  $\mathfrak{z}'' = \mathfrak{z}$  by maximality of  $\mathfrak{z}$  (cf. proof of Lemma 2.3.7). Hence  $\Xi \in \mathfrak{z} \subset \mathfrak{g}$ , which implies  $s_g^G = 0$ . The Futaki invariant is trivial, hence nondegenerate (cf. Lemmas 2.3.7). So we may apply Theorem A to polarized deformations  $(\mathcal{M} \rightarrow B, \Theta)$  of  $(\mathcal{X}, \Omega)$  endowed with a holomorphic action of  $G$ . Thus we have proved Corollary B.

**5.3. The Mukai-Umemura 3-fold.** Let  $X_{\Pi_0}$  be the Mukai-Umemura 3-fold of §3.3. We use the deformation  $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$  of  $X_{\Pi_0}$  that we described there, which is provided with an holomorphic action of a group  $G$  isomorphic to the dihedral group of order 8 or the semi-direct product of  $\mathbb{Z}/2 \rtimes \mathbb{S}^1$ .

*Proofs of Corollaries C.* We use the fact that  $X_{\Pi_0}$  admits a Kähler-Einstein metric [7]. Notice that although the group  $G$  is disconnected, it acts trivially on the cohomology of  $\mathcal{M}_t$  (cf. §4.5). So it suffices to show that the relative Futaki invariant of  $X_{\Pi_0}$  at the Kähler-Einstein metric is nondegenerate in the sense §4.5. This follows trivially from the fact that the space of  $G$ -invariant holomorphic vector fields on  $X_{\Pi_0}$  is reduced to 0 since the action of  $G$  does not fix any point in  $\mathbb{P}^1$ . Thus  $z'_{0,G} = 0$  and the Futaki invariant is nondegenerate necessarily nondegenerate. We may apply Theorem 4.4.3, with the choice of space  $V = 0$ . Thus every class  $\Theta_t$  is represented by a  $G$ -invariant extremal Kähler metric  $g_t$  for  $t$  sufficiently small. Thus the holomorphic vector field  $\text{grad } s_{g_t}$  must be  $G$  invariant. As the action of  $G$  does not fix any point in  $\mathbb{P}^1$ , it follows that there are no nontrivial  $G$ -invariant holomorphic vector fields on  $\mathcal{M}_t$ . Thus  $s_{g_t}$  is constant and this finishes the proof of Corollary C.  $\square$

#### REFERENCES

- [1] V. Apostolov, D.M.J. Calderbank, P. Gauduchon & C.W. Tøennesen-Friedman, *Extremal Kähler metrics on projective bundles over a curve*, arXiv:0905.0498.
- [2] A. L. Besse, *Einstein manifolds*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete; 3 Folge, Band 10, Springer-Verlag, 1987.
- [3] D. Burns & P. De Bartolomeis, *Stability of vector bundles and extremal metrics*, Invent. Math. 92 (1988), no. 2, pp. 403-407.
- [4] E. Calabi, *Extremal Kähler metrics*, Seminars on Differential Geometry (S. T. Yau Ed.), Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 1982, pp. 259–290.
- [5] E. Calabi, *Extremal Kähler Metrics II*, Differential Geometry and Complex Analysis (eds. Chavel & Farkas), Springer-Verlag, 1985, pp. 95–114.
- [6] X. Chen, *Space of Kähler metrics. III. On the lower bound of the Calabi energy and geodesic distance*. Invent. Math. 175 (2009), (3), pp. 453-503.
- [7] S. K. Donaldson *Kähler geometry on toric manifolds, and some other manifolds with large symmetry*, preprint (2008).
- [8] A. Futaki, *An obstruction to the existence of Kähler-Einstein metrics*, Invent. Math., 73 (1983), pp. 437-443.
- [9] A. Futaki & T. Mabuchi, *Bilinear forms and extremal Kähler vector fields associated with Kähler classes*, Math. Annalen, 301 (1995), pp. 199–210.
- [10] P. Gauduchon, *Calabi's extremal metrics: An elementary introduction*, book in preparation (2011).
- [11] A. Hwang, *On the Calabi energy of extremal Kähler metrics*, Internat. J. Math. 6 (1995), pp. 825-830.
- [12] K. Kodaira & D.C. Spencer, *On deformations of complex analytic structures. III. Stability theorems for complex structures*, Ann. of Math., 71 (1960), pp. 43-76.
- [13] C. LeBrun & S.R. Simanca, *Extremal Kähler Metrics and Complex Deformation Theory*, Geom. Func. Analysis 4 (1994), pp. 298–336.
- [14] C. LeBrun & S.R. Simanca, *On the Kähler Classes of Extremal Metrics*, Geometry and Global Analysis, (First MSJ Intern. Res. Inst. Sendai, Japan) eds. Kotake, Nishikawa & Schoen, 1993.
- [15] R. Palais & T.E. Stewart, *Deformations of compact differentiable transformation groups*, Amer. J. Math. 82 (1960), pp. 935-937.
- [16] S.R. Simanca, *A K-energy characterization of extremal Kähler metrics*, Proc. Amer. Math. Soc. 128 (2000), no. 5, pp. 1531-1535.

*Stability of extremal metrics under complex deformations*

- [17] S.R. Simanca, *Heat Flows for Extremal Kähler Metrics*. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 5 (4) (2005), no. 2, pp 187-217.
- [18] S.R. Simanca, *Precompactness of the Calabi Energy*, Internat. J. Math., 7 (1996) pp. 245-254.
- [19] S.R. Simanca, *Strongly Extremal Kähler Metrics*, Ann. Global Anal. Geom. 18 (2000), no. 1, pp. 29-46.
- [20] G. Székelyhidi, *The Kähler-Ricci flow and K-polystability*, Amer. J. Math., 132 (2010), no 4, pp. 1077-1090.
- [21] S.R. Simanca & L. Stelling, *Canonical Kähler classes*. Asian J. Math. 5 (2001), no. 4, pp. 585-598.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, LABORATOIRE JEAN LERAY, 2, RUE DE LA HOUSSINIÈRE  
- BP 92208, F-44322 NANTES, FRANCE

*E-mail addresses:* `yann.rollin@univ-nantes.fr`, `srsimanca@gmail.com`, `carl.tipler@univ-nantes.fr`

# Bibliographie

- [A] M.Abreu. *Kähler metrics on toric orbifolds*. J. Differential Geom. **58** (2001), no. 1, 151187.
- [A1] M.Abreu. *Kähler geometry of toric varieties and extremal metrics*, Internat. J. Math.**9**, (1998),641-651.
- [A2] M.Abreu. *Kähler geometry of toric manifolds in symplectic coordinates*, Symplectic and contact topology : interactions and perspectives (Toronto, ON/Montreal, QC, 2001), 124, Fields Inst. Commun., 35, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [AT] V.Apostolov and C.W. Tønnesen-Friedman . *A remark on Kähler metrics of constant scalar curvature on ruled complex surfaces*. Bull. London Math. Soc. **38** (2006), no. 3, 494500.
- [ATI] M.F.Atiyah *Convexity and commuting Hamiltonians* Bull. London Math. Soc. **14**,1982,1-15.
- [AP1] C.Arezzo and F.Pacard. *Blowing up and desingularising constant scalar curvature Kähler manifolds*. Acta Math. **196** (2006), no. 2, 179228.
- [AP2] C.Arezzo and F.Pacard. *Blowing up constant scalar curvature Kähler manifolds II*. Ann. of Math. (2) **170** (2009), no. 2, 685738.
- [APS] C.Arezzo, F.Pacard and M.Singer. *Extremal Metrics on blow ups*. Duke Math. J. Volume **157**, Number 1 (2011), 1-51.
- [ACGT] V.Apostolov, D.M.J. Calderbank, P.Gauduchon, C.W. Tønnesen-Friedman.*Extremal Kähler metrics on projective bundles over a curve*. Adv. Math. **227** (2011), 2385-2424.
- [B] R.Bryant. *Bochner-Kähler metrics*. J.Amer.Math.Soc. **14** (2001), 623-715.
- [BB] D.Burns and P. de Bartolomeis. *Stability of vector bundles and extremal metrics*. Invent. Math. **92**, 403-407 (1988).

- [Be] A.Beauville. *Complex algebraic surfaces* Lond. Math. Soc. Lect. Notes, vol.68, Cambridge University Press.
- [BZ] A.V.Bagaev et N.I.Zhukova. *The isometry groups of riemannian orbifolds.* Sib.Math.Journal, vol .48, No 4, 579-592, 2007.
- [BPV] W.Barth, C.Peters and A.Van de Ven. *Compact complex surfaces.* Springer 1984.
- [C1] E.Calabi. *Extremal Kähler metrics.* "Seminar on Differential Geometry" (ed.S.-T. Yau), Princeton, 1982.
- [C2] E.Calabi. *Extremal Kähler metrics II.* "Differential Geometry and Complex Analysis" (ed. I. Chavel et H.M. Farkas), Springer-Verlag, 1985.
- [CA] H.Cartan. *Quotient d'un espace analytique par un groupe d'automorphismes.* "Algebraic geometry and topology", Princeton univ. press, Princeton, (1957),90-102.
- [CT] X.Chen and G.Tian. *Uniqueness of extremal Kähler metrics.*C. R. Math. Acad. Sci. Paris 340 (2005), no. 4, 287290.
- [CT2] X.Chen and G.Tian. *Geometry of Kähler metrics and holomorphic foliations by discs.* Publ.Math. Inst.Hautes Etudes Sci. No. 107 (2008), 1107.
- [CS] D.Calderbank and M.Singer. *Einstein metrics and complex singularities.* Invent.Math.**156** (2004),no2, 405-443.
- [D] S.K. Donaldson. *Scalar curvature and stability of toric varieties.* J. Differential Geom. **62** (2002), no. 2, 289349.
- [D2] S. K. Donaldson *Kähler geometry on toric manifolds, and some other manifolds with large symmetry*,Handbook of geometric analysis. No. 1, 2975, Adv. Lect. Math. (ALM), 7, Int. Press, Somerville, MA, 2008..
- [D3] S.K.Donaldson. *Stability, birational transformations and the Kähler-Einstein problem* arXiv :1007.4220v1 [math.DG].
- [Del] T.Deelzant,*Hamiltoniens périodiques et image convexe de l'application moment* Bull. Soc. Math. France **116** (1988),315-339.
- [F] W.Fulton. *Toric Varieties.* Princeton University Press 1993.
- [FM] A.Futaki and T.Mabuchi. *Bilinear forms and extremal Kähler vector fields associated with Kähler classes,* Math. Ann. **301** (1995), no. 2, 199210. .

- [Fu] A.Futaki. *Kähler-Einstein metrics and integral invariants*. Lect. Notes in Math. 1314, Springer-Verlag, 1998.
- [Ga] P.Gauduchon. *Calabi's extremal Kähler metrics : An elementary introduction..* Preprint.
- [Gu] R.C.Gunning. *Lectures on Riemann Surfaces*. Princeton mathematical notes. Princeton University Press 1966.
- [Gui] V.Guillemenin. *Kähler structures on toric varieties* J. Diff. Geom. **40** (1994), 285-309.
- [GS] V.Guillemin and S.Sternberg, *Convexity properties of the moment mapping I*, Invent. Math. **67** (1982), 491-513.
- [J] D.D.Joyce. *Compact manifolds with special holonomy*. Oxford University press 2000.
- [J2] D.D.Joyce *Explicit construction of self-dual 4-manifolds*. Duke Math.J. **77** (1995) 519-552.
- [KA] T.Kawasaki. *The signature theorem for V-manifolds*. Topology Vol. **17**. Pergamon Press 1978.
- [KS] K. Kodaira & D.C. Spencer. *On deformations of complex analytic structures. III. Stability theorems for complex structures*, Ann. of Math., 71 (1960), pp. 43-76.
- [LS1] C. LeBrun and S.R. Simanca, *Extremal Kähler Metrics and Complex Deformation Theory*, Geom. Func. Analysis, 4 (1994), pp. 298–336.
- [LS2] C. LeBrun & S.R. Simanca, *On the Kähler Classes of Extremal Metrics*, Geometry and Global Analysis, (First MSJ Intern. Res. Inst. Sendai, Japan) eds. Kotake, Nishikawa & Schoen, 1993.
- [L] M.levine. *A remark on extremal Kähler metrics*. J. Differential Geom. 21 (1985), 73-77.
- [Le] E.Legendre. *Toric geometry of convex quadrilaterals*. arXiv, math.DG/0909.4512v1.
- [Li] A. Lichnerowicz. *Géométrie des groupes de transformation..* Travaux et recherches mathématiques **3**, Dunod (1958).

- [LM] R.B. Lockhart and R.C. McOwen. *Elliptic differential operators on non-compact manifolds*. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Cl Sci, **12**, 409-447 (1985).
- [Mat] Y.Matsushima. *Sur la structure du groupes d'homéomorphismes analytiques d'une certaine variété kählérienne*, Nagoya Maths. J.**11**, (1957), 145-150.
- [Maz] .R.Mazzeo. *Elliptic theory of differential edge operators I*. Communication Partial Differ. Equations **16**,1615-1664 (1991).
- [Me] R.B.Melrose. *The Atiyah-Padoti-Singer index theorem*. Wellesley, MA : AK Peters Ltd.1993.
- [MS] V.B.Mehta and C.S.Seshadri *Moduli of vector bundles of curves with parabolic structures*, Math. Ann.**248** 205-239,(1980).
- [NS] M.S. Narasimhan and C.S.Seshadri *Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface* Ann. of Math. **82** (1965) ,540-564.
- [RS] Y.Rollin and M.Singer. *Non-minimal scalar-flat Kähler surfaces and parabolic stability*. Invent.Math.**162** (2005), 235-270.
- [RS2] Y.Rollin and M.Singer. *Constant scalar curvature Kähler surfaces and parabolic polystability*. J. Geom. Anal. **19** (2009), no. 1, 107136.
- [RST] Y.Rollin, S.Simanca and C.Tipler. *Stability of extremal metrics under complex deformations*. arXiv, math DG/ arXiv :1107.0456v1.
- [RT] J. Ross and R.Thomas. *Weighted projective embeddings, stability of orbifolds and constant scalar curvature Kähler metrics*. arXiv, math.DG/0907.5214v2.
- [Si] S.Simanca. *canonical metrics on compact almost complex manifolds*. Publicacoes Mathematicas do IMPA, Instituto de Matemtica Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2004. 97 pp.
- [Si2] S.Simanca. *Kähler metrics of constant scalar curvature on bundles over  $\mathbb{C}P_{n-1}$* , Math. Ann. **291** (1991), no.2, 239-246.
- [S] G. Székelyhidi. *On blowing up extremal Kähler manifolds*. arXiv, math.DG/1010.5130v2 .
- [S1] G. Székelyhidi. *e Extremal metrics and K-stability*, Bull. Lond. Math. Soc. **39** (2007), no. 1, 7684.
- [S2] G. Székelyhidi. *The Kähler-Ricci flow and K-polystability*, Amer. J. Math., 132 (2010), no 4, pp. 1077-1090.

- [SS] G. Székelyhidi and J.Stoppa. *Relative K-stability of extremal metrics*. arXiv,math.DG/ 0912.4095v1 .
- [T] G.Tian. *Kähler-Einstein metrics with positive scalar curvature*, Invent. Math. **130** (1997), 1-37.
- [T2] G.Tian. *Canonical metrics in Kähler Geometry*, Notes taken by Meike Akveld. Lectures in Mathematics ETH Zrich. Birkhuser Verlag, Basel, **2000**.
- [Ti] C.Tipler.*Extremal Kähler metrics on blow-ups of parabolic ruled surfaces*, arXiv :1104.4315.
- [Tf] C.W. Tønnesen-Friedman. *Extremal Kähler metrics on Ruled Surfaces*. Institut for Matematik og Datalogi Odense Universitet, Preprint 1997, Nr. **36**, September 1997.
- [V] C.Voisin. *Hodge theory and complex algebraic geometry*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **76**, Cambridge University Press 2002.
- [Y] S.Y. Yau. *Open problems in Geometry*. in 'Differential geometry : partial differential equations on manifolds'(Los Angeles, CA, 1990), 1-28, Proc.Sympos.Pure Math. **54**, AMS.