



**HAL**  
open science

# Etude d'un système non linéaire à chocs sous excitation large bande : application à un tube de générateur de vapeur

Thibaud Thenint

► **To cite this version:**

Thibaud Thenint. Etude d'un système non linéaire à chocs sous excitation large bande : application à un tube de générateur de vapeur. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Centrale Paris, 2011. Français. NNT : 2011ECAP0053 . tel-00677440

**HAL Id: tel-00677440**

**<https://theses.hal.science/tel-00677440>**

Submitted on 8 Mar 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**ÉCOLE CENTRALE DES ARTS  
ET MANUFACTURES  
« ÉCOLE CENTRALE PARIS »**

**THÈSE**  
présentée par

**Thibaud Thénint**

pour l'obtention du

**GRADE DE DOCTEUR**

**Spécialité : Mécanique**

**Laboratoire d'accueil : MSSMAT**

**SUJET : Étude d'un système non-linéaire à chocs sous excitation large bande.  
Application à un tube de générateur de vapeur.**

**soutenue le : 2 décembre 2011**

**devant un jury composé de :**

**M. Gaetan Kerschen  
M. Emmanuel Foltete  
M. Bruno Cochelin  
M. Philippe Piteau  
M. Etienne Balmes  
M. Mathieu Corus**

**Rapporteur  
Rapporteur  
Examinateur  
Examinateur  
Directeur de thèse  
Co-directeur de thèse**



# Remerciements

D'aucuns souhaiteraient que cette page soit une ode à la grandiloquence et découle d'une folie créative. Il n'en sera rien, le propos étant de remercier les personnes m'ayant accompagné au cours de cette thèse.

Mes remerciements vont d'abord à mon directeur de thèse, Étienne Balmès, et à mon co-directeur de thèse, Mathieu Corus. Ils ont eu la patience de m'encadrer et de me transmettre une partie de leur savoir pendant quatre années, stage compris.

Je remercie aussi Bruno Cochelin, Emmanuel Foltête, Gaëtan Kerschen et Philippe Piteau pour leur participation à mon jury de thèse ainsi que la pertinence de leurs remarques. Un merci particulier à Emmanuel Foltête pour sa traque méticuleuse de coquilles et autres ignominies orthographiques.

Je remercie ensuite mes collègues de T61, et plus largement du département AMA, pour leur aide, que ce soit théorique, expérimentale, informatique, culturelle, culinaire, morale. Ce fut un plaisir de partager et d'échanger sur tout et sur rien, du futile à l'utile. Un merci particulier à Albert, Lise, Laurent, Nicolas B., Nicolas G., Charles, Émeric, Jean-Christophe pour tout et pour rien. Merci à Pierre, Laurent et Albert pour leur salutaire tacle double-lame.

Enfin, merci à Maxime, Pierre-Yves, Vassili, Nico, Gino et Dr Listel pour leur soutien lors de la rédaction de la partie portant sur l'influence de la base de réduction. Merci à Arthur pour avoir su rester pour le moins discret lors de la soutenance ; merci à Rémy, Alex, Félix pour avoir fait l'effort de se libérer.

Dernier point mais non des moindres, merci à mes parents, frère et sœurs pour avoir supporté ma mauvaise humeur lorsqu'ils abordaient *le* sujet.



# Nomenclature

On présente ici la liste des différentes notations utilisées dans le document. Si il y a ambiguïté sur la taille des grandeurs manipulées, on notera les matrices  $[a]$  entre crochets, les vecteurs  $\{a\}$  entre accolades et les scalaires  $a$  tels quels. Si besoin, on précisera la taille de ces grandeurs en indices :  $[a]_{b \times c}$  ou  $\{a\}_{b \times 1}$ .

Le module est noté  $|a|$ , le produit scalaire  $\langle a, b \rangle$ , la norme  $\|a\|$ , la partie positive  $(a)^+$ , la valeur moyenne  $\bar{a}$ .

$M$	: Matrice de masse assemblée
$K$	: Matrice de raideur assemblée
$C$	: Matrice d'amortissement assemblée
$q$	: Degrés de liberté globaux
$N$	: Nombre de degrés de liberté globaux
$q_R$	: Degrés de liberté généralisés
$NR$	: Nombre de degrés de liberté généralisés
$T$	: Base de réduction, de taille $N \times NR$
$T_L$	: Base de réduction constituée de modes libres
$T_A$	: Base de réduction constituée de modes appuyés
$T_B$	: Base de réduction constituée de modes encastrés
$T_{CS}$	: Base de réduction constituée de corrections statiques
$T_C$	: Famille de déformées issue de la concaténation de plusieurs bases
$M_R$	: Matrice réduite de masse
$K_R$	: Matrice réduite de raideur
$C_R$	: Matrice réduite d'amortissement
$[c]_{NS \times N}$	: Matrice d'observation
$[b]_{N \times NA}$	: Matrice de commande
$\{u\}_{NA \times 1}$	: Entrée d'un système d'état
$\{y\}_{NS \times 1}$	: Sortie d'un système d'état
$t$	: Variable de temps

$f$	: Fréquence
$\omega$	: Pulsation, variable de Fourier
$s$	: Variable de Laplace
$h$	: Pas de temps des simulations numériques
$t_n$	: Instant d'une discrétisation temporelle
$q_n$	: Valeur d'une estimation de $q$ à l'instant $t_n$
$\gamma$	: Paramètre du schéma de Newmark
$\beta$	: Paramètre du schéma de Newmark
$i$	: Nombre complexe tel que $i^2=-1$
$j$	: Indice d'un mode propre
$n$	: Indice d'un instant
$m$	: Indice d'un tirage d'un processus aléatoire
$k$	: Indice de fréquence dans la TFD
$\omega_j$	: Pulsation réduite du mode propre $j$
$\zeta_j$	: Amortissement réduit du mode propre $j$
$\phi_j$	: Déformée du mode propre normal $j$
$\psi_j$	: Déformée du mode propre complexe $j$
$\lambda_j$	: Pôle du mode propre complexe $j$
$NM$	: Nombre de modes propres
$K_{CB}$	: Matrice de raideur due au contact bilatéral
$K_{CB,R}$	: Matrice réduite de raideur due au contact bilatéral
$k$	: Raideur de contact bilatéral, en N/m, intégrée sur l'épaisseur de la PE
$c$	: Amortissement de contact bilatéral, en Ns/m, intégré sur l'épaisseur de la PE
$k_{cont}$	: Raideur de contact du modèle d'obstacle
$k_{cont,dis}$	: Densité de raideur de contact du modèle d'obstacle, par unité de longueur
$k_{loc}$	: Raideur locale sur la relation effort / déplacement des nœuds de choc
$k_{sec}$	: Raideur sécante sur la relation effort / déplacement des nœuds de choc
$z_A$	: Altitude du point de contre-réaction colocalisée proportionnelle à la vitesse
$[C_A]$	: Matrice d'observation associée à la déstabilisation
$C_A$	: Matrice d'amortissement associée à la déstabilisation
$C_{A,R}$	: Matrice réduite d'amortissement associée à la déstabilisation
$a$	: Gain de la déstabilisation
$x$	: Coordonnée de l'espace, orthogonale au plan du tube cintré
$y$	: Coordonnée de l'espace, contenue dans le plan du tube cintré

$z$	: Coordonnée de l'espace, verticale contenue dans le plan du tube cintré
$R$	: Rayon du cintre du tube
$d_i$	: Diamètre intérieur du tube
$d_e$	: Diamètre extérieur du tube
$L_k$	: Longueur d'une partie du tube, droite ou non
$e$	: Épaisseur d'une plaque entretoise
$g$	: Jeu entre le tube et la plaque entretoise
$\delta$	: Pénétration d'un nœud affecté de conditions de contact
$f$	: Effort extérieur
$F$	: Niveau RMS d'un effort extérieur ponctuel
$f_{pot}$	: Effort appliqué par un pot vibrant
$f_{contact}^{NL}$	: Effort non-linéaire de contact
$s_r$	: Pulsation réduite
$C_d$	: Terme d'amortissement de la corrélation fluide-élastique
$C_k$	: Terme de raideur de la corrélation fluide-élastique
$U$	: Vitesse moyenne de l'écoulement externe
$V$	: Vitesse du fluide externe
$DX$	: Degré de liberté de translation selon la direction $x$
$DY$	: Degré de liberté de translation selon la direction $y$
$DZ$	: Degré de liberté de translation selon la direction $z$
$DRX$	: Degré de liberté de rotation autour de l'axe $x$
$DRY$	: Degré de liberté de rotation autour de l'axe $y$
$DRZ$	: Degré de liberté de rotation autour de l'axe $z$
$N_{moy}$	: Nombre de points de la moyenne glissante
$S_q$	: DSP du signal temporel $q$
$\psi_{id}$	: Déformée en fonctionnement (ODS)
$\omega_{id}$	: Pulsation identifiée sur la réponse non-linéaire
$\zeta_{id}$	: Amortissement réduit identifié sur la réponse non-linéaire
$\theta$	: Paramètres (aléatoires) d'un modèle





# Table des matières

Remerciements .....	i
Nomenclature.....	iii
Table des matières .....	vii
Chapitre 1. Introduction générale .....	1
1.1. Contexte industriel et problème posé .....	1
1.2. Plan général et apports de la thèse .....	4
Chapitre 2. État de l'art.....	7
2.1. Analyse des systèmes non-linéaires à jeu .....	7
2.1.1. Excitation harmonique .....	8
2.1.2. Excitation aléatoire .....	10
2.1.3. Linéarisation statistique .....	11
2.1.4. Difficulté d'utilisation des modes non-linéaires .....	12
2.1.5. Système stochastique linéaire équivalent.....	13
2.1.6. Conclusion .....	15
2.2. Schéma d'intégration temporelle non-linéaire .....	15
2.2.1. Principe du schéma de Newmark et implémentation non-linéaire .....	16
2.2.2. Propriétés du schéma .....	18
2.2.3. Bilan d'énergie.....	19
2.3. Caractérisation spectrale des processus.....	21
2.3.1. Stationnarité et ergodicité .....	21
2.3.2. Estimateur de DSP .....	26
2.3.3. Conclusion .....	30
Chapitre 3. Validation d'un modèle numérique réduit adapté à la simulation temporelle de chocs                   33	
3.1. Construction du modèle de tube.....	34
3.1.1. Présentation de la maquette GV-LOCAL.....	34
3.1.2. Analyse modale du tube libre .....	35
3.1.3. Résultats d'identification.....	36
3.1.4. Corrélation calcul/essai .....	38
3.1.5. Recalage des raideurs en pied de tube .....	40
3.1.6. Analyse de sensibilité locale.....	41
3.1.7. Conclusion et choix d'un jeu de raideurs.....	42

3.2.	Modélisation de la zone de contact tube/PE.....	43
3.2.1.	Modélisation du contact avec ovalisation .....	43
3.2.2.	Influence du nombre de points de contact retenus sur une PE.....	46
3.2.3.	Liens avec les modèles à DDL bloqués utilisés dans GEVIBUS .....	49
3.2.4.	Blocages pour le modèle de poutre Timoshenko .....	51
3.2.5.	Blocages pour le modèle de poutre de Bernoulli .....	53
3.2.6.	Analyse des modes avec PE bloquée .....	55
3.2.7.	Analyse détaillée de l'influence de la raideur de contact .....	57
3.3.	Réduction de modèle .....	61
3.3.1.	Synthèse modale avec corrections statiques .....	62
3.3.2.	Bases enrichies.....	64
3.3.3.	Ensemble de vecteurs et base.....	64
3.3.4.	Bases considérées.....	66
3.4.	Erreurs sur les fréquences induite par la réduction .....	67
3.4.1.	Bases contenant des modes libres .....	68
3.4.2.	Modes bloqués au centre des PE.....	71
3.4.3.	Modes bloqués sur les PE et corrections statiques.....	74
3.4.4.	Comparaison des bases contenant un type de déformées et des corrections statiques	76
3.4.5.	Bases contenant plusieurs types de déformées .....	78
3.4.6.	Choix d'une base de réduction.....	81
3.5.	Choix des paramètres du schéma d'intégration numérique .....	82
3.5.1.	Paramètres du schéma sur des simulations linéaires (sans choc) .....	82
3.5.2.	Analyse de la conservation d'énergie en non-linéaire.....	84
3.5.3.	Cas test : lâcher conservatif .....	85
3.5.4.	Non conservation de l'énergie pour des chocs élevés .....	87
3.5.5.	Analyse détaillée des variations d'énergie au cours des chocs .....	90
3.5.6.	Simulations non-linéaires : de l'importance des hautes fréquences .....	91
3.5.7.	Effet de la modification des modes haute fréquence sur les temporels .....	94
3.5.8.	Bilan sur le choix du pas de temps.....	97
3.5.9.	Conclusions.....	99
Chapitre 4.	Caractérisation expérimentale et numérique de systèmes à choc .....	101
4.1.	Validation du modèle numérique par corrélation calcul-essai .....	102
4.1.1.	Conditions d'essai et simulation .....	102
4.1.2.	Impossibilité de comparer des temporels.....	106
4.1.3.	Corrélation des DSP de déplacement hors-plan.....	109
4.1.4.	Corrélation des DSP de déplacement dans le plan.....	114
4.1.5.	Conclusion .....	116
4.2.	Analyse en fonction de raideurs et amortissements apparents .....	117
4.2.1.	Réponses non-linéaires et linéaires .....	117
4.2.2.	Comparaison avec un système linéaire à contact bilatéral.....	118
4.2.3.	Raideurs et amortissements apparents obtenus à partir du pic non-linéaire prépondérant.....	123
4.2.4.	Raideurs et amortissements apparents obtenus à partir de la déformée en fonctionnement non-linéaire .....	127
4.2.5.	Raideurs et amortissements apparents obtenus à partir de la DSP non-linéaire	130

4.2.6.	Système linéaire équivalent dépendant de l'amplitude.....	132
4.3.	Évaluation d'une description stochastique du comportement.....	134
4.3.1.	Choix d'un descripteur de raideur.....	135
4.3.2.	Statistiques sur les raideurs apparentes.....	137
4.3.3.	Densités de probabilité sur la raideur de contact .....	140
4.3.4.	Construction d'une DSP équivalente .....	142
4.3.5.	DSP équivalente dépendant de l'amplitude .....	144
4.3.6.	Conclusion .....	145
Chapitre 5.	Effet stabilisateur du contact.....	147
5.1.	Analyse de stabilité en contact bilatéral à raideur variable.....	148
5.1.1.	Méthodologie employée.....	148
5.1.2.	Cartes de stabilité.....	149
5.1.3.	Gain maximal en fonction de l'altitude .....	151
5.1.4.	Évolution des fréquences et amortissements .....	152
5.1.5.	Évolution des déformées.....	154
5.2.	Analyse de stabilité dans des temporels non-linéaires .....	155
5.2.1.	Limites de pénétration et critère d'arrêt des temporels.....	155
5.2.2.	Recherche d'un gain limite .....	157
5.2.3.	Conclusions partielles .....	163
5.3.	Essais de déstabilisation par rétro-action .....	164
5.3.1.	Protocole expérimental .....	165
5.3.2.	Propriétés de la chaîne de contrôle .....	167
5.3.3.	Analyse expérimentale de l'influence du gain de déstabilisation.....	169
5.4.	Vers un calcul de stabilité fluide-élastique .....	175
5.4.1.	Grandeurs thermo-hydrauliques et mécaniques.....	176
5.4.2.	Stabilité et réponse dans le domaine fréquentiel.....	178
5.4.3.	Réponse dans le domaine temporel.....	181
5.4.4.	Prise en compte du contact .....	183
Chapitre 6.	Conclusions et perspectives .....	187
	Références bibliographiques.....	191



# Chapitre 1. Introduction générale

## 1.1. Contexte industriel et problème posé

Dans une centrale nucléaire de type Réacteur à Eau Pressurisée (REP), le Générateur de Vapeur (GV) joue le rôle d'échangeur thermique entre l'eau du circuit primaire et l'eau du circuit secondaire. Il est constitué, entre autres, d'un faisceau de tubes en U inversés dans lesquels circule le fluide primaire. Ces tubes sont fixés en leur base à la plaque tubulaire et plusieurs Plaques Entretoise (PE) servent de guidage pour les maintenir verticalement. Le fluide secondaire remonte le long des tubes et passe à travers l'espace séparant les tubes des plaques entretoise. L'échange de chaleur se fait par le contact du fluide secondaire avec les tubes. Le fluide secondaire se transforme ainsi en vapeur pour faire tourner la turbine.

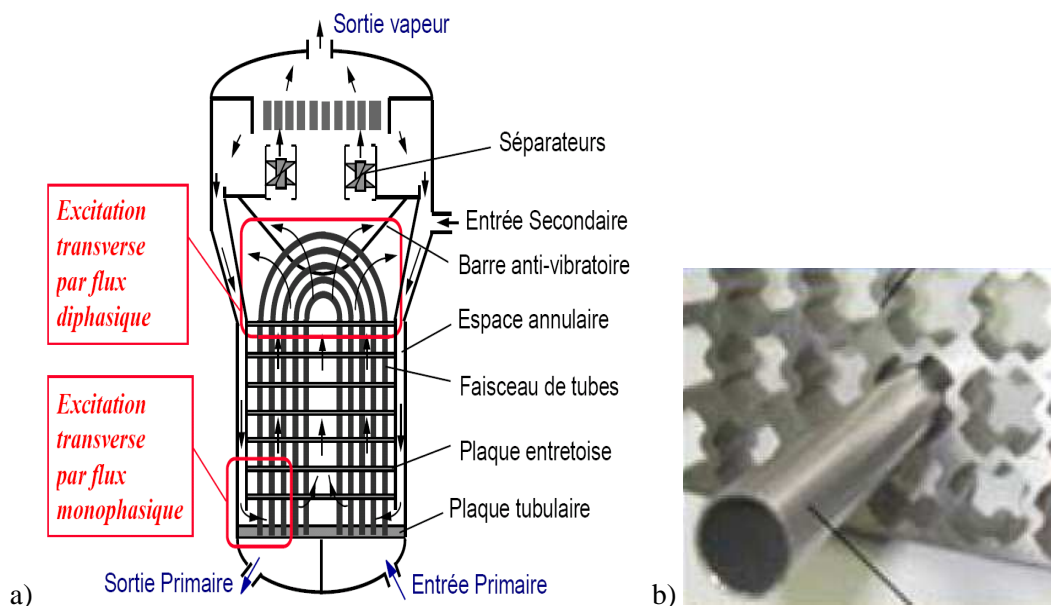


Figure 1.1. a) Schéma de principe d'un générateur de vapeur. b) Détail de la liaison tube-plaque entretoise. On remarque la forme quadrifoliée des trous : les quatre lobes permettent le passage du fluide secondaire et les quatre isthmes maintiennent le tube.

On a constaté, dans certains GV de classe 900 MW, que cet espace de passage, initialement en forme de trous quadrifoliés, est plus ou moins comblé par des dépôts d'oxydes métalliques, qui tendent à obstruer le passage du fluide. Ce phénomène de colmatage des plaques entretoise peut entraîner un fonctionnement du GV hors de son hypothèse de conception. D'une part, ce colmatage entraîne une augmentation de la vitesse du fluide en

partie centrale du GV : le tube est excité sur sa partie cintrée par un fluide qui arrive à une vitesse relativement élevée. D'autre part, la réduction du jeu entre le tube et la plaque entretoise modifie la condition de liaison entre ces deux structures. La combinaison de ces deux phénomènes, en modifiant la répartition fréquentielle de l'énergie, peut favoriser l'apparition de phénomènes d'instabilité fluide-élastique, se traduisant par amortissement négatif, ainsi qu'une intensification des contraintes à l'interface tube plaque entretoise. On peut donc être confronté à la ruine rapide de certains tubes non protégés par les Barres Anti Vibratoires (notamment ceux de rayon de cintrage R8 situés dans la partie centrale du GV, comme à Cruas) par rupture du tube au droit de la surface haute de la plaque entretoise supérieure. Ces ruptures nécessitent un arrêt de tranche, ce qui rend indisponible un moyen de production d'électricité et conduit donc à un manque à gagner. Pour prévenir ces arrêts, certains tubes à la limite de stabilité sont bouchés : ils ne contiennent plus de fluide primaire, moins de chaleur est transférée au fluide secondaire et le rendement global diminue. Il est donc intéressant, tant du point de vue de la sûreté nucléaire que de l'augmentation du coefficient de disponibilité (Kd), de mieux comprendre ce phénomène d'instabilité fluide-élastique.

La démarche actuelle pour l'analyse du risque potentiel d'instabilité est la modélisation du comportement du tube de GV par chaînage du code de thermo-hydraulique THYC et de l'outil-métier de *Code\_Aster*, GEVIBUS. Le code THYC permet d'évaluer le chargement hydraulique et le code GEVIBUS permet de calculer le comportement vibratoire du tube et le risque d'instabilité. GEVIBUS est un code de calcul mécanique opérant sur un modèle linéaire ou non linéaire, selon l'objectif des calculs. Dans le cas linéaire, la liaison entre le tube de GV et la plaque entretoise est modélisée soit par un appui simple (les 3 degrés de liberté en translation sont bloqués au niveau de chaque PE), soit par un encastrement (les 6 degrés de liberté sont bloqués au niveau de chaque PE). Le comportement vibratoire du tube dépend bien évidemment de cette liaison tube-plaque entretoise. Un calcul préliminaire a montré que la fréquence propre du premier mode du cintre du tube R8 (mode de flexion hors-plan) passe de 28,2 Hz pour une condition aux limites appuyée pour toutes les plaques entretoises, à 71,1 Hz pour une condition aux limites encastree en plaque supérieure [Ado3]. Cette augmentation de la fréquence est accompagnée :

- d'une diminution de l'amortissement modal total d'un facteur 10, de 2 % (amortissement structurel, amortissement lié aux chocs et à la présence du fluide) à 0,2 % (amortissement structurel uniquement) ;
- d'une augmentation de la contrainte mécanique sur le tube au droit de la plaque entretoise supérieure.

Des travaux préliminaires [The1] avaient mis en évidence une transition du comportement non-linéaire en fonction d'une amplitude pour un système à 2 degrés de liberté à chocs. On observe ainsi en Figure 1.2 la transition de la DSP de la masse sans condition de contact. Lors de la diminution du jeu, soit une augmentation de l'amplitude, la réponse, initialement calée sur les fréquences des deux modes *libres*, voit son contenu fréquentiel se modifier. Pour finir, la réponse est calée sur la fréquence du mode *bloqué*. En identifiant des fréquences et amortissements par une méthode de sous-espace, on montre l'apparition d'un troisième mode au cours de la transition. L'énergie est répartie sur une plus large bande de fréquence, comme le montrent les forts amortissements et la diminution de l'amplitude des pics. Le nombre de chocs par unité de temps augmente avec l'amplitude. Les fréquences augmentent avec l'amplitude. Les amortissements augmentent puis diminuent.

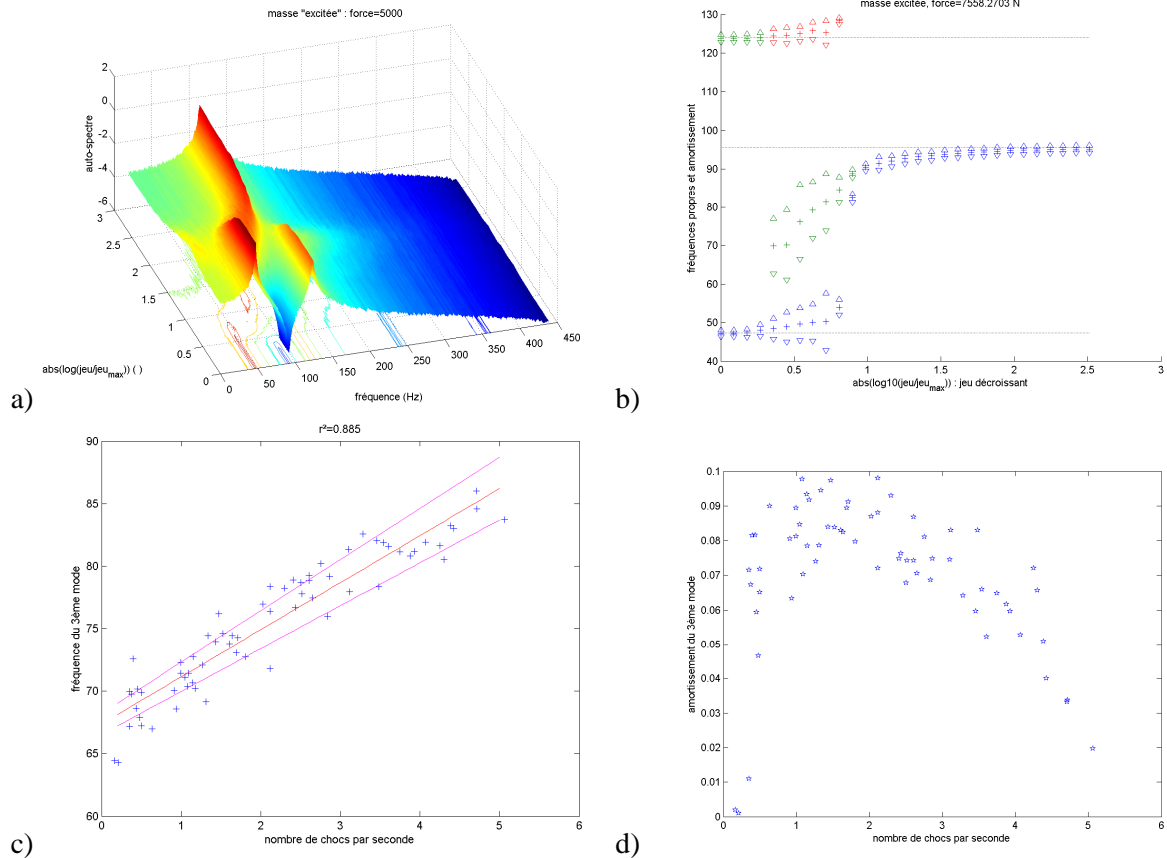


Figure 1.2. a) DSP du déplacement en fonction du jeu (0 correspond au jeu maximal et 3 au jeu minimal). b) Identification de paramètres modaux sur cette DSP. La croix représente la fréquence, l'espace entre les deux triangles l'amortissement. Les fréquences propres des systèmes libre et bloqué sont rappelées. Fréquence (c) et amortissement (d) du mode intermédiaire en fonction du nombre de chocs par unité de temps, représentatif d'une amplitude croissante.

Les objectifs de la thèse sont donc dans un premier temps de valider une modélisation adaptée à la représentation des interactions non-linéaires de tubes de générateur de vapeur complets avec un nombre réaliste de plaques entretoise. La validation doit en particulier être basée sur la confrontation avec les résultats expérimentaux obtenus sur le banc d'essais, GV-LOCAL, qui comprend une portion de tube cintré avec entretoise. Les calculs de la thèse étant réalisés dans l'environnement MATLAB/SDT une attention particulière est mise à bien expliciter les procédures pour permettre un portage dans l'environnement *Code\_Aster*.

Dans un deuxième temps, la capacité de simulation doit permettre d'analyser les caractéristiques de réponse non-linéaire et si possible de proposer des modélisations simplifiées pouvant être utilisées dans le code de dimensionnement GEVIBUS. La construction d'un modèle linéaire équivalent et sa justification est en particulier une demande industrielle forte. L'influence des caractéristiques des passages d'entretoise, colmatage en particulier, doit pouvoir être analysée à travers les approches proposées afin de pouvoir envisager une mission d'expertise et une maintenance prédictive.

Enfin, l'analyse de l'évolution non-linéaire d'un système instable en l'absence de chocs est nécessaire en vue de bien comprendre une stabilisation non-linéaire que l'on peut pressentir au vu des amortissements qui semblent augmenter dans les réponses non-linéaires du système à 2 DDL.



## 1.2. Plan général et apports de la thèse

Le contexte scientifique de ce travail combine systèmes non-linéaires à jeux, méthodes numériques et méthodes de traitement du signal. En section 2.1, on liste différentes méthodes d'étude de systèmes non-linéaires à jeu. Ces méthodes sont analytiques, basées sur des simulations numériques ou probabilistes. Les excitations sont harmoniques ou aléatoires. Cet état des études connues ne montre aucun travail prenant en compte, pour des simulations non-linéaires, la géométrie réelle d'un tube de GV avec tous ses obstacles. Cet objectif est une première motivation de la thèse. Pour l'intégration numérique, un schéma classique de Newmark sera retenu. La section 2.2 en rappelle les fondements, la justification de sa validité pour l'application visée étant réalisée en section 3.5. La section 2.3 reprend les notions de stationnarité et d'ergodicité et détaille la construction d'un estimateur de Densité Spectrale de Puissance adapté au contexte de l'étude.

Le Chapitre 3, constitue le premier apport de la thèse : la construction et la validation d'un modèle numérique adapté à la simulation temporelle de chocs. On commence par présenter la construction du module de tube en section 3.1. Le traitement de la zone de contact conditionne la précision et la rapidité des intégrations numériques. En section 3.2, on montre que discrétiser chaque PE par cinq obstacles circulaires équi-répartis sur son épaisseur suffit à bien représenter la répartition des efforts de contact. On fait alors le lien avec les configurations à DDL bloqués considérées dans GEVIBUS ; l'implémentation logicielle des modèles de poutre a son importance. L'influence d'une raideur de contact variable sur les évolutions linéaires est montrée. L'utilisation de bases de réduction permet d'accélérer les simulations numériques. On montre en section 3.3 comment construire des bases de réduction enrichies et contenant des corrections statiques. Ces bases de réduction sont aussi orthonormalisées afin de garder des matrices réduites diagonales. En section 3.4, on applique ces techniques à la construction effective de la base de réduction. On juge de la qualité d'une base par l'erreur commise, par comparaison avec le modèle complet, lors de la résolution du problème modal sur une large plage de raideur de contact permanent. L'utilisation de déformées issues de différentes conditions de blocages, bases enrichies, permet effectivement de projeter fidèlement la dynamique pour une large plage de raideur. L'utilisation de corrections statiques limite l'erreur tout en limitant le nombre de modes retenus. Dans l'optique de calculs de stabilité par simulation numérique à amortissement faible voire négatif, on est tenu de s'assurer de la qualité de l'intégration numérique. On montre en section 3.5 que les chocs sont responsables d'une non-conservation de l'énergie, mais que ces problèmes disparaissent sous réserve de diminuer le pas de temps. On remarquera aussi que le traitement des très hautes fréquences influe peu sur la dynamique basse fréquence confirmant ainsi la validité des modèles réduits proposés.

Le Chapitre 4 porte sur la caractérisation expérimentale et sa corrélation avec le modèle numérique du tube cintré soumis à la non-linéarité de choc. En section 4.1, le modèle numérique est validé et on détaille les caractéristiques d'une transition du comportement en fonction de l'amplitude de l'excitation. Cette transition est analysée plus en détail en section 4.2. On exhibe le changement de contenu fréquentiel, le remplissage des anti-résonances au décalage et à l'étalement des pics. À partir de trois grandeurs opérationnelles, on montre une équivalence entre amplitude et raideur apparente. Cette proposition d'utiliser une raideur apparente de contact bilatéral permanent et sa validation détaillée constitue un deuxième apport important de la thèse. Une implémentation d'une procédure d'obtention de DSP à partir de systèmes stochastiques linéaires équivalents est réalisée en section 4.3. On montre

alors que l'étalement des pics est un effet de moyenne de système à raideur variable et non un effet d'amortissement.

Le Chapitre 5 aborde le dernier enjeu et apport de la thèse, qui est l'analyse de l'évolution non-linéaire d'un système instable en l'absence de chocs. Cette question est fondamentale car il est difficile de garantir l'absence totale d'instabilité fluide-élastique sur tous les tubes de GV. Réutilisant la notion de raideur apparente, on montre en section 5.1 que des modes instables en libre peuvent, dans certaines conditions, être stabilisés par la présence d'une raideur de contact. En section 5.2, la pertinence de cette analyse est reprise en réalisant des simulations temporelles non-linéaires ouvrant la question de définir la stabilité à l'aide de critères pertinents. En section 5.3, cet effet stabilisateur est retrouvé expérimentalement malgré certaines limitations expérimentales. La section 5.4 apporte enfin une réflexion sur l'insertion dans des études de stabilité sous instabilité fluide-élastique de la non-linéarité de contact, en fréquentiel linéaire et en temporel non-linéaire.

Conclusions et perspectives pour des travaux futurs sont enfin données au Chapitre 6.



# Chapitre 2. État de l'art

Ce chapitre donne un bref état de l'art de trois domaines se rapportant au sujet de thèse.

Dans un premier temps, en section 2.1, on s'intéresse aux propriétés des systèmes non-linéaires. On trace un bref historique de l'étude de leur comportement, de l'étude analytique de systèmes à un DDL sous excitation harmonique à l'étude numérique de systèmes à grand nombre de DDL sous excitation aléatoire. L'extrême sensibilité aux conditions initiales est rappelée. On peut décrire le comportement périodique ou chaotique à long-terme du système ou s'intéresser à des grandeurs physiques, comme par exemple, la probabilité de dépassement d'un seuil. Deux méthodes de linéarisation sont présentées. La linéarisation stochastique, historiquement la plus ancienne, n'est pas opérante : la non-linéarité de contact est trop forte et le système est trop peu amorti. La recherche d'un Système Stochastique Linéaire Équivalent (ELSS) permet d'écrire la DSP non-linéaire comme espérance mathématique de DSP linéaires. La mise en œuvre simplifiée de cette méthode est abordée en section 4.2.

Le schéma d'intégration de Newmark utilisé pour la résolution numérique de la dynamique du tube est présenté dans son implémentation non-linéaire en section 2.2. On rappelle son origine, comme développement limité de la solution exacte, et les quadratures numériques utilisées pour approcher les restes intégraux. Les différents termes du bilan d'énergie sont présentés. La non-conservation du bilan d'énergie est à relier au caractère non-linéaire de la dynamique. Même si le schéma de Newmark est souvent critiqué sur ses capacités de résolution de problèmes de contact, il est souvent utilisé. La conservation d'une certaine énergie mécanique peut expliquer cette utilisation.

Dans une dernière section, en 2.3, on présente des outils d'analyse du signal. On définit dans un premier temps la stationnarité et l'ergodicité. On utilisera plus particulièrement la stationnarité en moyenne d'ordre deux ou des critères très subjectifs. La définition de la DSP comme transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation est rappelée. Dans un dernier temps, on exhibe un estimateur numérique de DSP et une représentation graphique prenant en compte sa dispersion autour d'une valeur moyenne.

## 2.1. Analyse des systèmes non-linéaires à jeu

De nombreux systèmes industriels peuvent être considérés comme des modèles globalement linéaires auxquels s'ajoutent des non-linéarités localisées. Les excitations auxquelles sont soumises ces structures peuvent être de trois types : harmonique (excitation par le balourd d'un arbre en rotation,...), déterministe (excitation par un impact maîtrisé,...) ou aléatoire (excitation par le vent,...). Dans le domaine du nucléaire, plusieurs systèmes de

cette nature sont étudiés : les tubes de générateur de vapeur multi-supportés par des plaques entretoise sous excitation aléatoire, l'interaction entre les différentes ailettes d'une roue aubagée de turbine sous excitation harmonique, la réponse des cœurs de réacteur au séisme, etc. Dans le cas de non-linéarités de type contact ou impact, des phénomènes d'usure, de fatigue ou de bruit peuvent apparaître.

Dans les prochaines sous-sections, différentes méthodes d'analyse applicables aux systèmes non-linéaires sont présentées. Dans un premier temps, en 2.1.1, on rassemble des méthodes essayant de prédire le type de comportement de systèmes à jeux sous excitation harmonique. En 2.1.2, on introduit des méthodes donnant des informations plus quantitatives (DSP ou densité de probabilité) pour des systèmes sous excitation aléatoire. En 2.1.3, on présente la linéarisation statistique, permettant d'approcher une faible non-linéarité par un système linéaire. En 2.1.4, on aborde brièvement la construction de modes non-linéaires (MNL). Enfin, la construction d'un système stochastique linéaire équivalent (ELSS) est abordée en 2.1.5. Des conclusions partielles sont exprimées en 2.1.6.

### 2.1.1. Excitation harmonique

Les premiers travaux concernant la dynamique du régime établi des systèmes non-linéaires portaient sur des systèmes à un degré de liberté. Parmi ces travaux sur les systèmes à choc on peut citer [Hol1,Sha1] qui étudient un système à 1 DDL à choc avec excitation harmonique. Un tel modèle peut représenter une balle rebondissante ou un système masse-ressort mais aussi un mode de tube. En supposant que la dissipation n'a lieu que lors des chocs, il est possible d'obtenir une représentation analytique du mouvement entre les chocs. La loi de rebond permet ensuite de décrire l'évolution au moment des chocs, supposés instantanés : la vitesse après impact est inférieure en valeur absolue à la vitesse avant impact [Hol1] voire nulle [Sha1].

En étudiant les points fixes de l'application associant à  $(t_i, v_i)$  les instant et vitesse  $(t_{i+1}, v_{i+1})$  du choc  $(i+1)$ , on peut cartographier les différents types de comportement en fonction des paramètres du système tels que la fréquence ou l'amplitude de l'excitation. La stabilité de ces points fixes est riche de conséquences. On observe des comportements périodiques de période multiple de l'excitation harmonique, des bifurcations avec doublement de la période, des transitions avec diminution de la période, des comportements de très longue période et même des comportements chaotiques.

Dans [Gon1] un système similaire est traité mais l'obstacle n'est plus placé à la position d'équilibre de l'oscillateur. Les points fixes des sections de Poincaré  $(t_i, v_i)$  sont de nouveau étudiés. La recherche ne se limite plus aux comportements ne contenant qu'un rebond. Des mouvements périodiques de période  $n$  fois la période de l'excitation et comprenant  $k$  rebonds sont exhibés. Par une méthode de continuation, on construit le diagramme des bifurcations et ces comportements sont suivis dans l'espace des paramètres. Une cascade de bifurcations est calculée de manière précise. On obtient ainsi des comportements chaotiques, gouvernés par un attracteur étrange. L'espace des paramètres du modèle est alors partitionné en fonction des comportements prédits ; pour une même valeur des paramètres, plusieurs attracteurs peuvent coexister et les conditions initiales conditionnent alors le comportement du système. Ces méthodes sont adaptées pour être appliquées à un système à plusieurs DDL [Tou1]. Les mêmes types de comportements (cascade de bifurcation, transition vers le chaos, ...) sont retrouvés analytiquement. Ces résultats sont confirmés par des expériences. Il faut souligner que prendre en compte plusieurs degrés de liberté est important : la stabilité des points fixes est modifiée. Des résultats équivalents sont trouvés dans [Knu1] pour une poutre amortie à

chocs, modélisant un assemblage combustible. Pour les comportements périodiques, la puissance d'usure est estimée en fonction de la fréquence d'excitation. Des algorithmes ont été développés pour trouver numériquement les instants de contact.

La généralisation de ces méthodes pour des systèmes à plus grand nombre de DDL est vite très coûteuse. Dans [Van1], l'espace d'état est découpé en cellules. Par le calcul, on sait en quelle cellule est transformée une cellule donnée après une certaine durée. On peut donc trouver les comportements périodiques. Le découpage de l'espace d'état est optimisé pour diminuer les temps de calcul. Ainsi, on a accès au déplacement maximal d'un point de la structure en fonction de la fréquence d'excitation. On calcule alors de nombreuses sous-harmoniques, associés à des périodes plus longues que celle de l'excitation. Les branches stables et instables sont discriminées. Ces résultats sont confrontés à des résultats expérimentaux. La méthode, appliquée à un système à deux DDL, permet de cartographier le comportement à long terme en fonction des conditions initiales. Cette cartographie est très chahutée, mettant ainsi en évidence l'extrême sensibilité des systèmes non-linéaires aux conditions initiales. La dynamique oscille de manière très différente autour des différents attracteurs même pour des conditions initiales très proches : ce phénomène, vulgarisé sous le nom « d'effet papillon », a été pour la première fois présenté dans le cadre de la prévision météorologique par Lorenz [Lor1].

Les systèmes réels ne peuvent être qu'approchés par un système à un degré de liberté. Une discrétisation élément fini peut être suffisante ([Van1] considère une poutre contrainte en déplacement en un nœud par une raideur purement élastique ou un contact de Hertz). La généralisation classique consiste à prendre en compte une base modale. Par exemple, [Erv1] considère une masse reliée par deux poutres à un bâti ayant un mouvement harmonique. En section 3.3, on analysera des bases de réduction plus riches que la base modale.

La gestion de chocs non instantanés est abordée en [Erv1]. Le contact est traité par une méthode de pénalisation. Ainsi, les expressions analytiques de l'évolution du déplacement sont accessibles pour les phases sans contact (système libre) et avec contact (système contraint). En calculant précisément les instants de contact et en projetant lors de la transition les coordonnées modales sur la base adéquate, on résout de proche en proche les phases de vol libre et de contact. On retrouve les cascades de bifurcation décrits dans [Sha1] ou [Tou1]. Les simulations et des essais ont montré que le comportement est plus complexe quand la raideur de contact est forte et/ou que l'amortissement structural est faible. La position du point de contact et le jeu ont une influence notable. Il est important de noter que même si quelques modes suffisent à projeter la dynamique, ils balayent un large spectre de fréquences.

En conclusion, des méthodes analytiques ont été développées pour distinguer les différents comportements à long-terme multi-impacts, multi-périodes de systèmes à multiples degrés de liberté, pour une zone de contact (unilatéral ou bilatéral, de Hertz ou relation pénétration/effort). Ces méthodes sont basées sur la recherche des points fixes de section de Poincaré de l'espace d'état et de leur stabilité. Des attracteurs, des diagrammes de bifurcation et des comportements chaotiques sont exhibés. L'extrême sensibilité aux conditions initiales est mise en évidence. Les résultats sont surtout descriptifs des comportements possibles.

Le passage à des méthodes numériques est clairement une extension utile pour traiter des comportements plus complexes. Par exemple, [Dor1, Liu1] traite un système composé de deux masses liées rigidement avec contact-frottement au niveau des deux masses et la possibilités de contacts simultanés multiples. Différents modes de comportement peuvent émerger en fonction des caractéristiques géométriques du système, des paramètres de l'excitation et du modèle de contact, notamment un mouvement global de dérive où le

système se translate horizontalement à une vitesse quasi-constante. Ces phénomènes sont vérifiés expérimentalement et permettraient de mieux comprendre l'arrangement d'un milieu granulaire vibrant.

### 2.1.2. Excitation aléatoire

Pour l'application considérée ici, l'excitation par le fluide n'est pas harmonique. Les méthodes précédentes ne sont donc pas directement exploitables. L'intégration numérique est l'approche la plus simple pour prendre en compte cette excitation. On peut cependant chercher à retrouver certaines caractéristiques des comportements harmoniques.

Van de Wouw considère en [Van2] une poutre d'Euler excitée par la base et avec un contact à l'extrémité libre. De l'amortissement hystérétique peut être ajouté au modèle de contact [DeK1]. La dynamique est projetée sur une base constituée des quelques premiers modes propres libres de la structure. Il est montré que le comportement calculé avec plus d'un mode est plus complexe que celui calculé avec un seul mode. Les DSP simulées, comparativement à celles mesurées, sont aussi mieux estimées. La table vibrante est animée d'un mouvement aléatoire. Ce bruit est filtré sur différentes bandes de fréquence. Cela permet d'exhiber le phénomène suivant : si  $f_l$  est la première fréquence propre libre, exciter par un bruit filtré par un passe-bande centré sur un multiple de  $f_l$  entraîne une réponse très large-bande et dont le niveau maximal est atteint sur un pic centré sur  $f_l$ . On remarque aussi la présence d'harmoniques de  $f_l$ . La non-linéarité de choc a donc réparti l'énergie sur une large gamme de fréquences.

Cette répartition de l'énergie est mise en évidence avec une excitation déterministe mais de faible largeur de bande, de nouveau dans le cadre d'une poutre à chocs [Sam1]. Le système est considéré comme aléatoire : les matrices de masse, raideur et amortissement, ainsi que la raideur de contact sont probabilisées. Le jeu est un paramètre de l'étude. Pour chaque valeur du jeu, on tire donc un certain nombre (2000) de configurations du modèle. Un degré de non-linéarité est défini comme le rapport entre le jeu et l'amplitude de l'excitation. Les simulations numériques issues des différents tirages sont effectuées sur base modale avec un schéma de Newmark inconditionnellement stable. La base modale construite ici est plus riche que pour les études précédentes : 40 modes sont considérés, pour une excitation centrée autour du deuxième mode, les premier et sixième modes étant respectivement à 26,9 Hz et 1685 Hz. Des intervalles de confiance sur la répartition spectrale de l'énergie mécanique sont alors calculés pour chaque valeur du jeu. On tire deux enseignements de cette étude. Quelque soit le degré de non-linéarité, même très faible, ce qui correspond à un système presque linéaire, le contenu spectral des réponses est à beaucoup plus large bande que la bande étroite considérée en excitation. En regardant la proportion d'énergie mécanique hors de la bande d'injection, on peut classer l'effet de la non-linéarité : celle-ci a un effet maximal pour une non-linéarité moyenne, ni trop grande, ni trop faible.

On retient des deux études précédentes que l'on peut effectuer des calculs sur base modale, qui doit être assez riche si on s'intéresse à des critères énergétiques. La non-linéarité de type choc répartit l'énergie mécanique sur une large gamme de fréquences. On retrouve cependant les grands comportements de l'excitation harmonique (présence de sous-harmoniques, ...).

Comme autre application d'intérêt, on peut citer [Col1] qui optimise et analyse la sensibilité des paramètres d'un absorbeur dynamique couplé à un pendule choquant dans le

but de limiter les déplacements d'une structure de génie civil sous l'effet de sollicitations aléatoires (vent ou séisme).

### 2.1.3. Linéarisation statistique

Les méthodes de *linéarisation équivalente* ou de *linéarisation statistique* [Rob1], cherchent à représenter le système non linéaire par un système linéaire approchant la dynamique

$$M\ddot{q} + h(q, \dot{q}; \theta) = f(t), \quad (2.1)$$

où  $M$  est une matrice symétrique réelle définie positive de taille  $N \times N$ ,  $h$  un vecteur de longueur  $N$  regroupant les efforts non linéaires portant sur les déplacements  $q$  et les vitesses  $\dot{q}$ ,  $f(t)$  un vecteur de longueur  $N$  représentant le chargement extérieur. La non-linéarité  $h$  dépend de paramètres tels que le jeu, la raideur de contact, un amortissement de choc, etc. regroupés dans le vecteur  $\theta$ . On cherche un système linéaire équivalent sous la forme

$$M_e \ddot{q}_e + C_e \dot{q}_e + K_e q_e = f(t), \quad (2.2)$$

où l'indice  $e$  fait référence à « équivalent » ;  $M_e$ ,  $C_e$  et  $K_e$  sont de taille  $(N, N)$  et  $q_e$  est un vecteur de longueur  $N$ . Ces quatre quantités dépendent évidemment de  $\theta$ . On ne rappelle pas explicitement cette dépendance dans les équations suivantes, afin de ne pas les alourdir.

Le mouvement du système équivalent (2.2) n'est pas identique à celui du système non linéaire, le déplacement  $q_e$  ne vérifie donc pas l'équation (2.1). On cherche donc les matrices  $M_e$ ,  $C_e$  et  $K_e$  minimisant, le plus souvent au sens de la norme quadratique, l'une des deux erreurs suivantes

$$\varepsilon_e(t; \theta) = M\ddot{q}_e + h(q_e, \dot{q}_e; \theta) - M_e \ddot{q}_e - C_e \dot{q}_e - K_e q_e, \quad (2.3)$$

$$\varepsilon(t; \theta) = M\ddot{q} + h(q, \dot{q}; \theta) - M_e \ddot{q} - C_e \dot{q} - K_e q. \quad (2.4)$$

Si on a résolu numériquement la dynamique (2.1), l'utilisation de l'erreur (2.4) permet de conclure. On parle alors de *linéarisation vraie*. Sinon, on boucle la résolution de (2.2) avec une minimisation de l'erreur (2.3). Comme  $q_e$  dépend de  $M_e$ ,  $C_e$  et  $K_e$ , on itère jusqu'à convergence, mais celle-ci n'est pas garantie. Le plus souvent, on se donne des hypothèses sur la réponse  $q_e$ . Comme la réponse d'un système linéaire à une excitation gaussienne est gaussienne, souvent, les excitations sont supposées gaussiennes. On parle alors de *linéarisation gaussienne* et les matrices équivalentes sont calculées par les expressions

$$\left\{ \begin{array}{l} [M_e(\theta)] = M \\ [K_e(\theta)]_{i,j} = E \left[ \frac{\partial h_i}{\partial q_j} \right], \\ [C_e(\theta)]_{i,j} = E \left[ \frac{\partial h_i}{\partial \dot{q}_j} \right] \end{array} \right. \quad (2.5)$$

qui montrent qu'on a effectué un développement au premier ordre de  $h$  : on remplace la non-linéarité par une raideur instantanée moyenne et un amortissement instantané moyen.



La linéarisation statistique peut donner des résultats satisfaisants et comparables à un tirage de Monte-Carlo couplé à la résolution temporelle de la dynamique, par exemple pour un modèle de contact oblique entre ailettes de turbine [Tou2]. La linéarisation statistique semble cependant peu adaptée à notre problème technique, l'amortissement de la structure étant faible et les phénomènes de chocs induisant de fortes discontinuités (de la raideur principalement). On peut arriver à bien représenter l'écart-type des déplacements (et éventuellement des vitesses) mais les DSP des déplacements sont mal représentées.

En résumé, la linéarisation statistique approche un système non-linéaire par l'espérance des raideurs et amortissements instantanés. Mais, comme rappelé dans [Gui1] ou [Rob1], elle ne s'applique pas au cas de systèmes peu amortis et soumis à de fortes non-linéarités, dont fait partie la non-linéarité de choc. L'obtention d'une expression analytique de la DSP d'un système non-linéaire semble impossible, à part pour certains cas particuliers [Dim1].

#### 2.1.4. Difficulté d'utilisation des modes non-linéaires

On vient de voir que les systèmes non-linéaires ne peuvent tous être approchés par un système linéaire. Pour étendre la notion linéaire de modes, de nombreux auteurs se sont penchés sur la notion de *Modes Non Linéaires* (MNL) ou *Non-linear Normal Modes* (NNM). Les MNL servent à localiser, diagnostiquer la non-linéarité et éventuellement retrouver ses paramètres. Ils mettent en évidence des transferts irréversibles d'énergie entre différentes sous-structures.

Une première définition des MNL d'un système conservatif est un mouvement où tous les points de la structure atteignent leur maximum ou sont nuls en même temps [Ros1,Vak1]. Une seconde définition repose sur des variétés de l'espace des phases : Shaw et Pierre définissent un MNL comme un mouvement inclus dans une variété invariante de dimension deux de l'espace des phases [Pie1]. Concrètement, cela revient à choisir le DDL  $i$  comme *maître* et de chercher à exprimer les DDL restants, les *esclaves*, en fonction du déplacement et de la vitesse du maître, soit

$$\begin{cases} q_i(t) = a_i(t) \cos(\theta_i(t)) \text{ et } \dot{q}_i(t) = -\omega_i a_i(t) \sin(\theta_i(t)) \\ q_n(t) = P_n(a_i, \theta_i) \text{ et } \dot{q}_n(t) = Q_n(a_i, \theta_i) \text{ pour } n \neq i \end{cases} \quad (2.6)$$

où les expressions de  $P_n$  et  $Q_n$  caractérisent les modes non-linéaires. Cette définition a été étendue pour prendre en compte une excitation harmonique ou une non-linéarité affine par morceaux [Jia1].

Pour calculer ces modes non-linéaires, des développements asymptotiques, des méthodes de continuation, etc. sont à mettre en œuvre. Malheureusement, comme rappelé dans [Ker1], ces outils ne sont pas encore applicables à tous les systèmes. Il faut agir au cas par cas, en prenant en compte le nombre de DDL, la nature de la non-linéarité, sa régularité, le type d'excitation, l'amortissement... Des preuves mathématiques d'existence des MNL et des algorithmes numériques de calcul ont été récemment présentés [Haz1].

Les MNL semblent adaptés pour réduire les modèles et expliquer les phénomènes induits par la non-linéarité. Ils sont, à ce titre, très complémentaires des analyses harmoniques. En revanche, comme rappelé dans l'article de revue [Ker1], le principe de superposition, qui fait le grand attrait des modes linéaires, ne se généralise pas. Dans le cadre d'excitations aléatoires riches, l'utilisation directe des MNL semble donc difficile.

### 2.1.5. Système stochastique linéaire équivalent

Pour étendre le principe de superposition a des systèmes non-linéaires. Bouc et Bellizi [Bel1] ont proposé un système linéaire équivalent non-constant, qui sera donc considéré comme stochastique. On s'intéresse au système non-linéaire

$$M\ddot{q}(t) + 2\zeta C\dot{q}(t) + F(q(t)) = 2\sqrt{\zeta} [S] \dot{W}(t), \quad (2.7)$$

où  $\dot{W}$  est le bruit blanc gaussien centré,  $[S]$  localise l'excitation et  $F(q(t))$  est monotone et continument dérivable par morceaux. On cherche à approcher sa dynamique par celle du *Système Stochastique Linéaire Equivalent* (ELSS)

$$M\ddot{q}_l(t) + 2\zeta C\dot{q}_l(t) + [K(A)]q_l(t) + L_0(A) = 2\sqrt{\zeta} [B(A)][S] \dot{W}(t), \quad (2.8)$$

dépendant d'un vecteur d'amplitudes  $A$ .

Pour construire cette approximation, on suppose l'existence d'une représentation du déplacement de la forme (transformation amplitude-phase)

$$\begin{cases} q(t) = \psi_0(a(t)) + \sum_{n=1}^N a_n(t) \psi_n(a(t)) \cos(\theta_n(t)) \\ \dot{q}(t) = -\sum_{n=1}^N \Omega_n(a(t)) a_n(t) \psi_n(a(t)) \sin(\theta_n(t)), \\ \theta_n(t) = \int_0^t \Omega_n(a(s)) ds + \varphi_n(t) \end{cases} \quad (2.9)$$

où les  $\psi_n$  sont appelés *modes non-linéaires*, même si cette définition ne correspond pas à l'une de celles évoquées dans la section précédente (voir aussi l'article de revue [Ker1]). Les déformées  $\psi_n(a)$  et fréquences  $\Omega_n(a)$  dépendent de l'amplitude du mouvement  $a$ , tirage de  $A$ . Des travaux ultérieurs les font dépendre de l'amplitude et de la phase [Bel2]. Le déplacement et la vitesse sont donc exprimés comme des combinaisons linéaires de  $N$  modes non-linéaires, ce qui étendrait le principe de superposition.

L'effort non-linéaire, fonction multi-périodique en  $\theta$ , est alors développé au premier ordre en

$$F(q(t)) = F_0(a, \Psi) + \sum_{n=1}^N F_n(a, \Psi) \cos(\theta_n) + \zeta F_H(a, \Psi). \quad (2.10)$$

Après des développements algébriques et des comparaisons d'ordres de grandeur, les modes non-linéaires sont finalement solutions de

$$\frac{1}{a_n} F_n(a, \Psi) = M \psi_n(a) \Omega_n^2(a), \text{ avec } \psi_n^T M \psi_n = 1, \quad (2.11)$$

et sont calculés de proche en proche à partir de leur solution en  $a=0$ . Ces MNL calculés permettent alors de linéariser l'effort  $F(q(t))$  en norme quadratique, à  $a$  fixé selon

$$\frac{1}{(2\pi)^N} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \left\| \left( F(q(a, \Psi, \theta)) - L_0(a) - [K(a)]q(a, \Psi, \theta) \right) \right\|^2 d\theta_1 \dots d\theta_N. \quad (2.12)$$

On remarque que l'expression *modes non linéaires* prend tout son sens car les MNL sont les éléments propres du système linéaire conservatif de masse  $[M]$  et de raideur  $[K(a)]$

$$[K(a)]\psi_n(a) = \Omega_n^2(a)M\psi_n(a). \quad (2.13)$$

Les variations de l'amplitude  $a$  sont considérées comme lentes. Des développements algébriques et l'application d'un théorème de la moyenne stochastique, permettent alors de trouver l'équation de Fokker-Planck vérifiée par  $p(a)$ . Cette équation n'est pas soluble analytiquement mais une expression semi-empirique est adoptée, comme produit des densités de probabilité trouvées pour le cas à un DDL [Gui1].

Pour  $a$  fixé,  $B(a)$  est calculé pour assurer la même énergie mécanique entre le système non-linéaire et le système linéaire. Enfin, on exprime facilement la *Matrice de Densité Spectrale de Puissance* (MDSP) de  $q_l$  à partir de la fonction de transfert du système linéaire et de la MDSP de  $\dot{W}$ . On finit par calculer la MDSP de  $q$ , que l'on qualifie d'analytique, comme espérance mathématique de la MDSP du ELSS

$$[S_Q(\omega)] = \int [S_{Q_l}(\omega; a)] p(a) da. \quad (2.14)$$

Dans ses travaux de thèse [Gui1], P. Guihot analyse cette approche comme l'utilisation d'un système à raideur variable. Ayant constaté l'impossibilité d'utiliser la linéarisation statistique gaussienne, la raideur est alors considérée comme une quantité stochastique (et non variable en temps) variant entre le cas libre et le contact permanent. En tirant, un certain nombre de fréquences, on obtient la DSP du système non-linéaire comme moyenne probabiliste de la réponse linéaire de chaque système tiré. Tout le travail consiste à obtenir analytiquement la densité de probabilité de cette fréquence apparente. Pour un système à 1DDL, celle-ci peut être obtenue analytiquement en résolvant une équation de Fokker-Planck.

Les comparaisons entre DSP analytiques et calculées après intégration temporelle sont bonnes au niveau du pic ([Gui1] et [Bel5]). Par contre, il faut prendre en compte un certain nombre de systèmes linéaires pour s'affranchir d'un effet *peigne*. Les niveaux des basses et hautes fréquences sont mal représentés. Il n'y a pas de solution analytique à l'équation de Fokker-Planck si le système contient plusieurs DDL. Néanmoins, cette approche a été développée au cours des années par Bellizzi et Bouc. Un jeu non-symétrique et un amortissement ont été pris en compte sur un système à un DDL [Bel3]. Le système peut contenir plusieurs DDL [Bou1]. Finalement, seuls quelques MNL peuvent être utilisés pour projeter la dynamique [Bel1, Bel5].

De plus, les paramètres de la non-linéarité peuvent être retrouvés en minimisant l'écart entre la MDSP analytique et la MDSP simulée numériquement ou mesurée expérimentalement. Dans le cadre d'une poutre droite à un nœud de choc mais avec un jeu et des raideurs de contact non symétriques, on peut retrouver avec une bonne précision (20%) les jeux et l'ordre de grandeur des raideurs de contact [Bel4].

La méthode semble intéressante mais le formalisme de construction des densités de probabilité et des modes non-linéaires est assez complexe et donc difficile à mettre en œuvre de manière générale. On cherchera cependant en section 4.3 à faire des statistiques sur une raideur de contact apparente, puis à calculer la DSP comme moyenne de DSP du système à contact permanent de façon à tester les hypothèses sous-jacentes à cette approche.

### 2.1.6. Conclusion

Les études de la dynamique à long terme des systèmes non-linéaires ne sont pas unifiées par un outil mathématique commun. Selon qu'on s'intéresse à caractériser les différents régimes périodiques sous excitation harmonique ou que l'on cherche à approcher les DSP sous excitation aléatoire, les méthodes mathématiques employées sont totalement différentes. Cependant, on remarque toujours la présence d'harmoniques et de sous-harmoniques.

Si la non-linéarité est localisée, des simulations numériques peuvent être effectuées sur des bases modales. Le principe de superposition est étendu par le concept de *Modes Non Linéaires* (MNL), dans la seule mesure où la réponse est calculée comme une somme de fonctions de l'espace pondérées par des fonctions temporelles. La réponse à la somme de deux excitations n'est cependant pas la somme des réponses à ces excitations. Ces modes, définis comme mouvement en phase de la structure ou comme variété invariante de l'espace des phases, peuvent servir à réduire le système dynamique. Ces MNL peuvent aussi servir à diagnostiquer la non-linéarité et à expliquer des transferts d'énergie entre différentes sous-structures.

Des méthodes semi-analytiques ont été développées pour calculer la MDSP de système non linéaire. Ces méthodes sont le plus souvent appliquées à des poutres en mouvement plan et à une zone de contact, pour des résultats très satisfaisants.

Un tube cintré contenant plusieurs obstacles circulaires est plus complexe que les cas d'applications présentés dans la littérature. Les outils mathématiques demanderaient du temps pour être implémentés ou adaptés. La recherche de la stabilité du système dynamique doit se faire par le calcul temporel de la solution, car un mode instable non-excité n'entraîne pas une solution instable. Ces différents verrous nous font suivre une approche basée sur le calcul de l'évolution temporelle de la dynamique pour calculer les DSP. Néanmoins, le calcul de MNL et de ELSS est gardé comme perspective intéressante pour comparaison ou des travaux futurs. Une implémentation simplifiée de l'ELSS est d'ailleurs présentée en 4.3.

## 2.2. Schéma d'intégration temporelle non-linéaire

On cherche à résoudre numériquement le problème dynamique suivant

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + f(q) = g(t), \quad (2.15)$$

où le terme  $f(q) = Kq + F_{NL}(q)$  contient le terme de raideur du tube  $Kq$  et les efforts non-linéaires de contact  $f_{NL}(q)$ .

De nombreux schémas numériques sont disponibles dans la littérature. Le schéma de Newmark [New1] est l'un des plus répandus dans les codes de calcul de mécanique des structures. Il est cependant souvent critiqué pour ses capacités de résolution dans les problèmes de contact. Par exemple, de l'énergie mécanique est créée au cours du calcul du choc entre deux barres déformables [Mag1]. Les déplacements calculés sont alors très différents de la solution analytique. Comme rappelé dans 2.2, cette limitation n'a cependant pas empêché l'utilisation régulière de ce schéma pour calculer la dynamique de structures avec des non-linéarités localisées de type poutre avec impact ponctuel. Les tests réalisés ici ont donné des résultats satisfaisants et le schéma de Newmark a donc été retenu. La section

2.2.1 présente l'implémentation non-linéaire du schéma, telle que décrite dans [Ger1] par exemple. La section 2.2.2 décrit quelques propriétés du schéma. La section 2.2.3 montre comment sont calculés les différents termes du bilan d'énergie et explique en quoi le schéma de Newmark est finalement assez adapté au problème non-linéaire de contact.

Les schémas de type HHT [Hil1], sont des évolutions classiques du schéma de Newmark conçues spécifiquement pour amortir les hautes et non les basses fréquences, qui sont souvent les grandeurs d'intérêt. Nous préférons ici étudier les effets d'amortissement dans le modèle, comme cela est réalisé en 3.5.7. Des schémas conservant intrinsèquement l'énergie, la quantité de mouvement et le moment cinétique ont par ailleurs été développés [Lau1, Arm1, Jea1] mais n'ont pas été étudiés ici.

### 2.2.1. Principe du schéma de Newmark et implémentation non-linéaire

Un développement de Taylor avec reste intégral permet d'écrire exactement vitesse et déplacement au pas de temps  $n+1$

$$\begin{cases} \dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{q}(\tau) d\tau \\ q_{n+1} = q_n + h\dot{q}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \tau) \ddot{q}(\tau) d\tau \end{cases}, \quad (2.16)$$

où  $h = t_{n+1} - t_n$  et  $q_n = q(t_n)$ .

Le principe du schéma est d'introduire une quadrature numérique pour calculer les restes intégraux apparaissant dans (2.16). Pour cela, un développement limité donne  $\ddot{q}(t_n)$  et  $\ddot{q}(t_{n+1})$  à partir de  $\ddot{q}(\tau)$ ,

$$\begin{cases} \ddot{q}(t_n) = \ddot{q}(\tau) + q^{(3)}(\tau)(t_n - \tau) + \frac{1}{2} q^{(4)}(\tau)(t_n - \tau)^2 + \dots \\ \ddot{q}(t_{n+1}) = \ddot{q}(\tau) + q^{(3)}(\tau)(t_{n+1} - \tau) + \frac{1}{2} q^{(4)}(\tau)(t_{n+1} - \tau)^2 + \dots \end{cases}. \quad (2.17)$$

Ceci permet d'obtenir les expressions suivantes de  $\ddot{q}(\tau)$  faisant apparaître des coefficients de pondération  $\gamma$  et  $\beta$  entre le début et la fin du pas de temps

$$\begin{cases} \ddot{q}(\tau) = (1 - \gamma)\ddot{q}(t_n) + \gamma\ddot{q}(t_{n+1}) + q^{(3)}(\tau)(\tau - t_n - \gamma h) + O(h^2) \\ \ddot{q}(\tau) = (1 - 2\beta)\ddot{q}(t_n) + 2\beta\ddot{q}(t_{n+1}) + q^{(3)}(\tau)(\tau - t_n - 2\beta h) + O(h^2) \end{cases}. \quad (2.18)$$

Les intégrales apparaissant dans (2.16) se calculent alors comme

$$\begin{cases} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{q}(\tau) d\tau = (1-\gamma)h\ddot{q}_n + \gamma h\ddot{q}_{n+1} + O(h^2) \\ \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \tau) \ddot{q}(\tau) d\tau = \left(\frac{1}{2} - \beta\right)h^2\ddot{q}_n + \beta h^2\ddot{q}_{n+1} + O(h^3) \end{cases} \quad (2.19)$$

Le schéma de Newmark utilise une approximation au premier ordre en  $h$  de la vitesse et au deuxième ordre en  $h$  du déplacement. Les déplacements  $q_{n+1}$  et les vitesses  $\dot{q}_{n+1}$  s'obtiennent à partir de  $\ddot{q}_{n+1}$  par

$$\begin{cases} \dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + (1-\gamma)h\ddot{q}_n + \gamma h\ddot{q}_{n+1} = \dot{q}_{n+1}^* + \gamma h\ddot{q}_{n+1} \\ q_{n+1} = q_n + h\dot{q}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)h^2\ddot{q}_n + \beta h^2\ddot{q}_{n+1} = q_{n+1}^* + \beta h^2\ddot{q}_{n+1} \end{cases}, \quad (2.20)$$

en introduisant les prédicteurs  $\dot{q}_{n+1}^*$  et  $q_{n+1}^*$ , ne dépendant que de grandeurs calculées à l'instant  $t_n$ . Le schéma est donc implicite si  $\gamma$  ou  $\beta$  sont non nuls, les vitesses et déplacements à l'instant  $t_{n+1}$  nécessitant alors l'accélération  $\ddot{q}_{n+1}$ .

L'état exprimé en  $t_{n+1}$ , compte-tenu de (2.20), s'écrit en fonction d'une seule inconnue. En effet, le système (2.20) donne deux relations linéaires entre  $q_{n+1}$ ,  $\dot{q}_{n+1}$  et  $\ddot{q}_{n+1}$  : on peut choisir l'une de ces trois grandeurs, que l'on note  $\bar{q}_{n+1}$  et exprimer les deux autres en fonction de celle-ci. Le choix de la grandeur  $\bar{q}$  est souvent pragmatique. On peut choisir  $\ddot{q}$  dans le cas linéaire, variable se détachant de la mise en équation (2.20). Dans le cadre non-linéaire, on choisit souvent  $q$ , pour profiter des efforts de programmation déjà réalisés pour calculer des réponses en statique non-linéaire de type  $K(q)q=f$ . Si la dynamique est linéaire, on obtient alors  $\bar{q}_{n+1}$  par inversion d'un système linéaire. La matrice à inverser est constante et cette inversion peut être réalisée une unique fois en début de simulation. Les deux grandeurs restantes sont alors calculées par (2.20). Si la dynamique est non-linéaire  $\bar{q}_{n+1}$  est alors solution d'une équation non-linéaire

$$r(\bar{q}_{n+1}; q_n, \dot{q}_n, \ddot{q}_n, t_{n+1}) = 0. \quad (2.21)$$

On peut résoudre cette équation par la méthode de Newton-Raphson, en itérant sur la valeur de  $\bar{q}_{n+1}$  jusqu'à ce que le résidu  $r$  soit inférieur à un certain seuil, en erreur absolue ou en erreur relative. Ici, on fait le choix de tout exprimer en déplacement. En développant  $r$  au premier ordre, on fait apparaître la matrice jacobienne du résidu, qu'il faut recalculer pour chaque itération de chaque pas de temps,

$$r(q_{n+1}^{k+1}) = r(q_{n+1}^k) + S(q_{n+1}^k)(q_{n+1}^{k+1} - q_{n+1}^k), \text{ avec } S(q_{n+1}^k) = \left( \frac{\partial r}{\partial q} \right)_{q_{n+1}^k}. \quad (2.22)$$

Communément, les déplacements, vitesses et accélérations sont initialisées aux prédicteurs de déplacement et vitesse, avec une accélération nulle

$$q_{n+1}^0 = q_{n+1}^*, \dot{q}_{n+1}^0 = \dot{q}_{n+1}^*, \ddot{q}_{n+1}^0 = 0. \quad (2.23)$$

La correction de déplacement  $\Delta q$  s'obtient en supposant que l'on a atteint la convergence et donc que  $r(q_{n+1}^{k+1})$  est nul

$$-r(q_{n+1}^k) = S(q_{n+1}^k)\Delta q, \quad (2.24)$$

et les corrections de vitesse et d'accélération s'obtiennent à partir des expressions (2.20) par

$$\Delta \ddot{q} = \frac{1}{\beta h^2} \Delta q \text{ et } \Delta \dot{q} = \frac{\gamma}{\beta h} \Delta q. \quad (2.25)$$

## 2.2.2. Propriétés du schéma

Dans le cas conservatif et linéaire, les propriétés du schéma s'obtiennent à partir de la réponse d'un système à un DDL. En effet, les équations de la dynamique sont alors découplées. On peut citer les propriétés suivantes [Ger1], prouvant la convergence du schéma :

- le schéma est consistant : la limite du taux d'accroissement du vecteur d'état tend vers la dérivée du vecteur d'état lorsque le pas de temps tend vers 0 ;
- en l'absence d'amortissement, le schéma présente le diagramme de stabilité suivant.

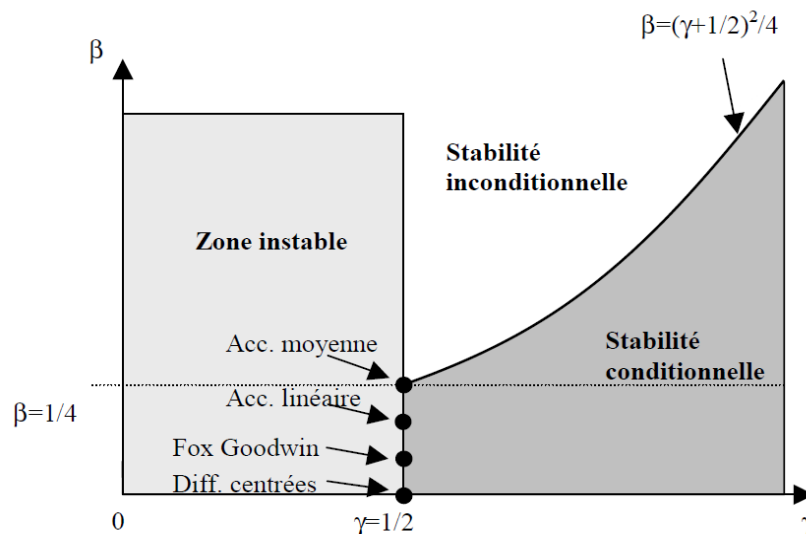


Figure 2.1. Stabilité du schéma de Newmark en fonction des paramètres  $\gamma$  et  $\beta$ .

Le schéma conservatif et linéaire est inconditionnellement stable si  $\beta \geq (\gamma + 1/2)^2 / 4$ . Cette propriété est très utile dans la mesure où le pas de temps n'est alors absolument pas lié à la plus grande fréquence du système. Si  $\gamma < 1/2$ , le schéma est instable : une perturbation sur une condition initiale entraîne une erreur croissante et non bornée. Dans la zone de stabilité conditionnelle, le pas de temps doit être choisi en fonction de la plus haute fréquence du système. L'amortissement, non pris en compte ici, stabilise le schéma tant que, pour un modèle d'amortissement modal, les amortissements restent petits.

Le schéma de Newmark est un schéma d'ordre 2. Les solutions approchées, calculées avec un pas de temps  $h$ , d'un système à un DDL non amorti de pulsation  $\omega$ , présente des erreurs relatives d'amplitude  $\rho-1$  et de périodicité  $\Delta T/T$  par rapport à la solution exacte,

$$\begin{cases} \rho-1 = -\frac{1}{2}(\gamma-\frac{1}{2})\omega^2 h^2 + O(h^4) \\ \frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2}(\beta-\frac{1}{12})\omega^2 h^2 + O(h^3) \end{cases} \quad (2.26)$$

Ces deux erreurs sont d'autant plus grandes que la fréquence du mode et le pas de temps sont grands. On remarque que cela implique, même si il n'y a pas de règle de convergence de type CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) à respecter, que le pas de temps choisi doit être compatible avec la plus haute fréquence du système. Les schémas tels que  $\gamma=1/2$  ont une erreur d'amplitude très faible, ce qui est le cas de l'accélération moyenne. Les schémas tels que  $\beta=1/12$  ont une erreur de périodicité très faible mais sont tous au mieux conditionnellement stables. L'accélération moyenne ( $\gamma=1/2$  et  $\beta=1/4$ ) est donc le schéma de Newmark inconditionnellement stable de précision maximale [Ger1]

### 2.2.3. Bilan d'énergie

On peut calculer le bilan d'énergie associé à la dynamique et au schéma. On voit comment l'énergie injectée par le biais des travaux des efforts extérieurs se répartit en énergie cinétique, potentielle et en dissipation. On accède à la dissipation due à l'amortissement numérique du schéma. Le bilan d'énergie exprime la variation d'énergie mécanique sur un pas de temps en fonction du travail des forces dissipative et du travail des forces extérieures. Ici, le travail des efforts de contact est considéré comme extérieur. Par pré-multiplication à gauche par  $\dot{q}$  et intégration de

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = g(t) - f_{NL}(q) = p(t), \quad (2.27)$$

on aboutit classiquement à l'expression du bilan d'énergie [Ger1]

$$[T]_n^{n+1} + [V]_n^{n+1} = P_n + D_n, \quad (2.28)$$

qui indique que la somme des variations d'énergie potentielle élastique et d'énergie cinétique sur un pas de temps est égale à la somme du travail des forces extérieures et de l'intégrale de la dissipation sur ce même pas de temps. Compte-tenu des expressions reliant déplacements, vitesses et accélérations, on aboutit aux expressions, valables pour  $\gamma=1/2$  et  $\beta=1/4$  :



$$\begin{cases} [T]_n^{n+1} = \frac{1}{2}(\dot{q}_{n+1} - \dot{q}_n)^T M(\dot{q}_{n+1} + \dot{q}_n) \\ [V]_n^{n+1} = \frac{1}{2}(q_{n+1} - q_n)^T K(q_{n+1} + q_n) \\ P_n = \frac{1}{2}(q_{n+1} - q_n)^T (p_{n+1} + p_n) \\ D_n = \frac{h}{4}(\dot{q}_{n+1} + \dot{q}_n)^T C(\dot{q}_{n+1} + \dot{q}_n) \end{cases} \quad (2.29)$$

Si d'autres paramètres du schéma de Newmark sont adoptés, les expressions ci-dessus sont modifiées [Mah1]. Dans le cas d'un système conservatif ( $C=0$ ), linéaire ( $f_{NL}(q)=0$ ) et sans excitation extérieure ( $g(t)=0$ ), on vérifiera que le schéma conserve l'énergie mécanique. Si de l'énergie mécanique est créée par l'intégration, le schéma est instable. Le bilan sur un système non linéaire permet d'avoir une idée de la stabilité du schéma vis-à-vis des non-linéarités. On vérifiera que le bilan d'énergie est bien respecté, avec une création d'énergie négligeable en moyenne.

Comme rappelé dans [Wes1], le schéma de Newmark n'est pas conçu pour conserver ni l'énergie mécanique, ni la quantité de mouvement. On peut cependant transformer cette faiblesse en atout : contrôler la qualité du bilan d'énergie peut permettre de contrôler la qualité de l'intégration numérique. Dans le cas où les paramètres sont différents de  $\gamma=1/2$  et  $\beta=1/4$ , une énergie équivalente se conserve [Kre1]. Ceci est montré, dans le cas linéaire, en écrivant le bilan d'énergie à l'aide uniquement de formes quadratiques. Cette propriété de conservation d'une énergie mécanique est montrée par une autre approche dans [Kan1], où on montre que le schéma de Newmark est symplectique dans un certain sens. Si le système non-linéaire et conservatif dérive d'un potentiel, alors une certaine énergie se conserve et l'énergie mécanique oscille autour d'une valeur moyenne.

Lors de l'intégration numérique d'un système non-linéaire, on peut considérer que sa raideur a changé au cours du pas de temps courant. Ceci influe sur la stabilité du schéma. Dans [Cha1], il est montré que le schéma de Newmark à accélération moyenne est inconditionnellement stable si la raideur a diminué au cours du pas de temps. Il y a stabilité conditionnelle si la raideur a augmenté au cours du pas de temps. Cependant, si le pas de temps est suffisamment petit, l'erreur commise dans les phases instables numériquement est faible. Dans le cas du schéma de Newmark confronté à différentes non-linéarités (principalement des matrices de raideur fonction du temps), une règle semble se dégager : le pas de temps doit être choisi pour que l'erreur en période commise sur chaque mode soit inférieure à 1%. Les paramètres du système, de la non-linéarité et du schéma influent sur ce constat.

Des deux remarques précédentes, on retient que le schéma de Newmark conserve une énergie mécanique équivalente et que diminuer le pas de temps permet de bien intégrer le système. Ceci a été vérifié numériquement en section 3.5. Même si la raideur est de plus en plus importante, le schéma reste conditionnellement stable et les erreurs commises à chaque pas de temps sont faibles.

## 2.3. Caractérisation spectrale des processus

L'étude du tube à chocs réalisée est l'étude d'un système mécanique déterministe (le tube libre), soumis à un effort aléatoire injecté par le pot et un effort non-linéaire dû aux forces de chocs. Les déplacements ou autres grandeurs vibratoires obtenus numériquement ou expérimentalement sont donc des processus aléatoires. Lorsqu'une configuration d'étude est figée, on peut obtenir plusieurs échantillons de ces grandeurs en réalisant plusieurs calculs ou plusieurs essais. Ces échantillons diffèrent par un tirage différent de l'effort aléatoire injecté par le pot. Comme on ne peut pas tirer un nombre infini d'échantillons de longueur infinie, on doit extraire de l'information des quelques tirages disponibles.

L'étude des vibrations aléatoires est un domaine assez récent. Dans son historique des vibrations aléatoires, L. Paez fait remonter les premières applications pratiques au début des années 50 [Pae1], notamment la réponse de structures à une excitation par du bruit généré par des moteurs à réaction. La théorie permettant ces applications s'est construite durant la première moitié du XX<sup>ème</sup> siècle, le premier article traitant de manière mathématique les vibrations aléatoires paraissant en 1905 : l'article d'A. Einstein sur le mouvement brownien. L'outil fondamental permettant l'étude des structures mécaniques stationnaires a été formalisé en 1930 par N. Wiener : la Densité Spectrale de Puissance (DSP). Ainsi, un signal aléatoire stationnaire est décrit par la répartition fréquentielle du carré de son amplitude, ce qui se rapproche de l'approche modale utilisée pour décrire les systèmes linéaires : par bande de fréquences, on a la répartition de la participation à la valeur RMS du signal.

Dans un premier temps, en section 2.3.1, on s'intéresse aux questions de stationnarité et d'ergodicité, qui donnent des hypothèses sous lesquelles on peut extraire de l'information de quelques tirages de durée finie. Dans un deuxième temps, en section 2.3.2, on présente notre grandeur d'intérêt, la Densité Spectrale de Puissance (DSP).

### 2.3.1. Stationnarité et ergodicité

De nombreuses applications en mécanique des vibrations aléatoires sont étudiées. Par exemple, les vibrations de crayons combustibles soumis à un effort fluide, donc aléatoire et réparti, sont étudiées par L. Perotin et S. Granger dans [Per1]. L'effort étant supposé stationnaire et gaussien, on arrive à le caractériser par le biais de mesures de déplacements. Des structures à chocs sont l'objet de développements mathématiques. En supposant un effort dépendant de manière non linéaire du déplacement, S. Bellizzi et R. Bouc obtiennent la densité de probabilité des déplacements [Bel1]. L'effort extérieur est encore une fois supposé stationnaire et gaussien. Les déplacements sont *a priori* supposés stationnaires. Il semble que la stationnarité soit toujours requise mais rarement testée. Peu de critères sont définis dans le cadre de la mesure en vibration. L'ergodicité est souvent supposée.

L'économétrie consiste en l'application de notions statistiques à des grandeurs économiques. De nombreux auteurs s'intéressent à la notion de stationnarité et d'ergodicité des données et modèles, par exemple [Cor1, Dom1 et Sin1]. Ces travaux concernent des développements mathématiques sur différents modèles de données. L'approche retenue est cependant beaucoup trop spécifique et abstraite pour être applicable à notre cas d'intérêt. Néanmoins, on retient que des recherches continuent à être faites pour trouver des tests pratiques de stationnarité et d'ergodicité.

## Définitions générales

Définissons dans un premier temps stationnarité et ergodicité. On s'intéresse ici à un processus stochastique  $X$  à valeurs réelles. Pour simplifier, on considère par exemple une coordonnée du déplacement d'un nœud mais les notions se transposent de manière immédiate à des processus à valeurs vectorielles. Concrètement, on dispose de  $M$  tirages  $(x_1, \dots, x_M)$  de longueur finie  $[0 ; T]$ . La Figure 2.2 montre trois tirages différents d'un même processus : le déplacement d'un nœud pour différents tirages de l'excitation. On voit qu'on peut effectuer deux types de moyennes sur ces différents tirages : des moyennes statistiques et des moyennes temporelles. À chaque instant, on peut moyenner sur les différents tirages ; si ces moyennes statistiques, comme la moyenne ou l'écart-type, ne dépendent pas de l'instant, on parle de *stationnarité*. Pour chaque tirage, on peut moyenner sur les différents instants ; si ces moyennes temporelles ne dépendent pas de l'échantillon, on parle d'*ergodicité*. La stationnarité nécessite beaucoup de tirages, l'ergodicité nécessite des tirages longs. Si le processus est stationnaire et ergodique, les moyennes statistiques et temporelles sont égales. De plus, les moyennes statistiques sont alors indépendantes de l'instant et peuvent être calculées par moyenne temporelle sur un échantillon suffisamment long.

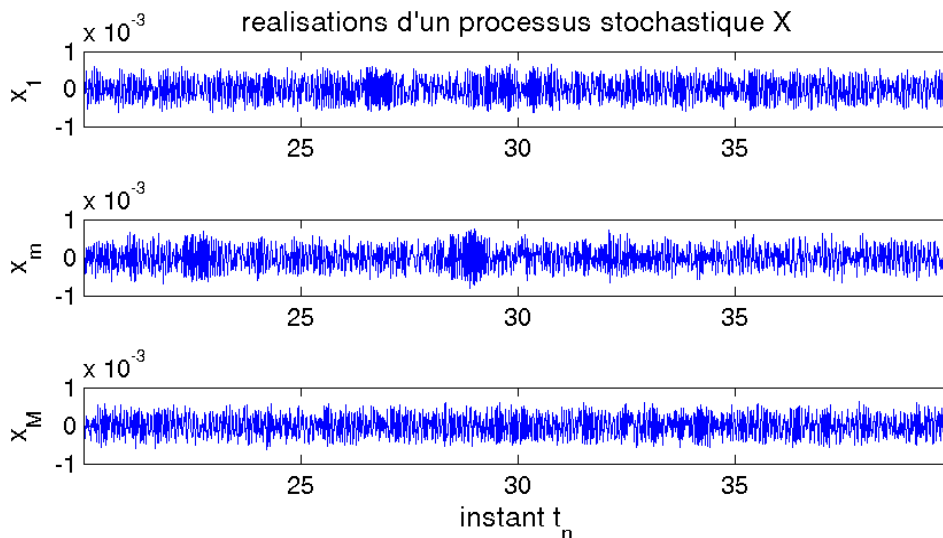


Figure 2.2. Différents tirages  $x_m$  d'un même processus stochastique  $X$ .

La définition précise de la stationnarité est assez restrictive. Comme présenté dans [Soi1], le processus  $X$  à valeurs réelles est stationnaire si et seulement si quelque soit l'entier  $n$ , quelques soient les instants  $(t_1, \dots, t_n)$  et quelque soit le décalage  $\tau$ , les variables aléatoires  $(X(t_1), \dots, X(t_n))$  et  $(X(t_1 + \tau), \dots, X(t_n + \tau))$  ont la même loi de probabilité sur  $\mathbb{R}^n$ . Il est impossible de vérifier ce critère sur des signaux réels, qui sont notamment de longueur finie et ne permettent pas de vérifier la définition précédente pour toute valeur du décalage  $\tau$ .

Ici, nous nous contenterons de prendre une approche de sens commun, comme présentée dans [Tho1]. Elle consiste à s'assurer que les signaux mesurés sont au moins raisonnablement stationnaire, ce qui est illustré par la Figure 2.3. Le déplacement calculé en a) peut être considéré comme stationnaire, son aspect général ayant l'air conservé sur les 20 s de l'observation. Le signal calculé en b) n'est visiblement pas stationnaire, trois intervalles (de 23 à 25 s, de 29 à 30 s et de 36 à 38 s) ayant des caractéristiques visiblement différentes. Une analyse sur les 20 s donne au mieux un ordre de grandeur des grandeurs moyennes. Les informations sur le régime d'amplitude la plus importante ne sont pas mises en évidence.

Cette approche *de bon sens* sera utilisée par la suite pour distinguer différents régimes de fonctionnement sur des résultats expérimentaux.

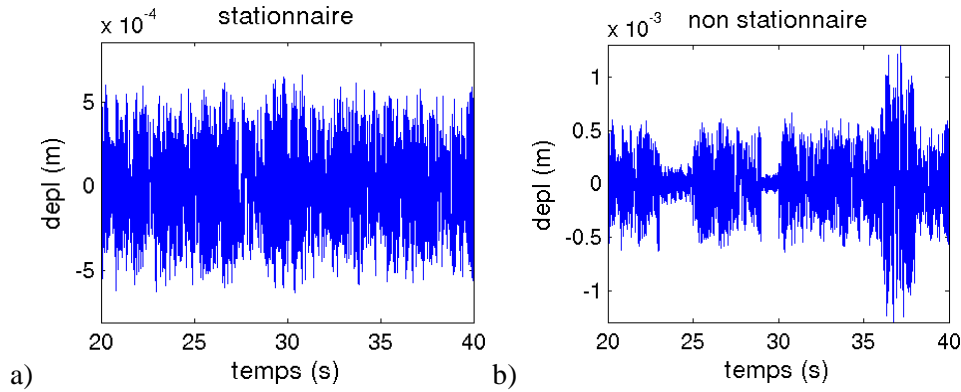


Figure 2.3 .Deux exemples de signaux : a) stationnaire, b) non stationnaire.

Un processus du *second ordre* est un processus dont le carré de l'amplitude a une espérance mathématique finie à chaque instant [Soi1] : il est associé à une énergie finie. Un processus stochastique est dit *stationnaire en moyenne d'ordre deux* (m.o.d.) si :

- il est du second ordre :  $E(X(t)^2) < +\infty$  pour tout  $t$  ;
- sa moyenne est stationnaire :  $E(X(t)) = \mu_X$  ;
- sa fonction d'*auto-corrélation* ne dépend que de l'écart entre les deux instants :

$$R_{XX}(t, t') = \iint_{\mathbb{R} \mathbb{R}} xy f_{X(t), X(t')}(x, y; t, t') dx dy = R_{XX}(t - t') = R_{XX}(\tau). \quad (2.30)$$

### Vérification de la stationnarité en m.o.d. et de l'ergodicité

Pour vérifier la stationnarité en m.o.d. et l'ergodicité, on commence par tirer plusieurs échantillons. Pour cela, on calcule la réponse de la structure à différents tirages de l'excitation. Puis ces différents tirages sont découpés en échantillons de longueur plus petite ; les échantillons se recouvrent pour augmenter arbitrairement leur nombre. Cette procédure permet de disposer de  $M$  échantillons de  $N$  points. Pour l'exemple, on découpe ce signal en 1759 tronçons de 1s, avec un recouvrement de 62,5 %. On estime ensuite :

- la moyenne statistique par  $\mu_X(t_n) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M x_m(t_n)$  ;
- la moyenne temporelle par  $\hat{\mu}_X(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_m(t_n)$  ;
- la variance statistique par  $\sigma_X^2(t_n) = \frac{1}{M-1} \sum_{m=1}^M (x_m(t_n) - \mu_X(t_n))^2$  ;
- la variance temporelle par  $\hat{\sigma}_X^2(m) = \frac{1}{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} (x_m(t_n) - \hat{\mu}_X(m))^2$  ;

- l'auto-covariance, reliée à l'auto-corrélation par

$$C_{XX}(t_n, t_l) = \frac{1}{M-1} \sum_{m=1}^M (x_m(t_n) - \mu_X(t_n))(x_m(t_l) - \mu_X(t_l)) = R_{XX}(t_n, t_l) - \mu_X^2.$$

La Figure 2.4 représente le déplacement hors-plan d'un point du cintre pour une excitation non-colocalisée sur le cintre. L'excitation est choisie suffisamment importante pour qu'il y ait de nombreux chocs. La vue générale et les différents zooms semblent indiquer une assez bonne stationnarité du signal. Des critères quantifiables renforcent cette impression. Grâce à quelques simulations numériques, on a pu s'assurer que les déplacements calculés s'approchent de processus stationnaires en moyenne d'ordre deux et ergodiques.

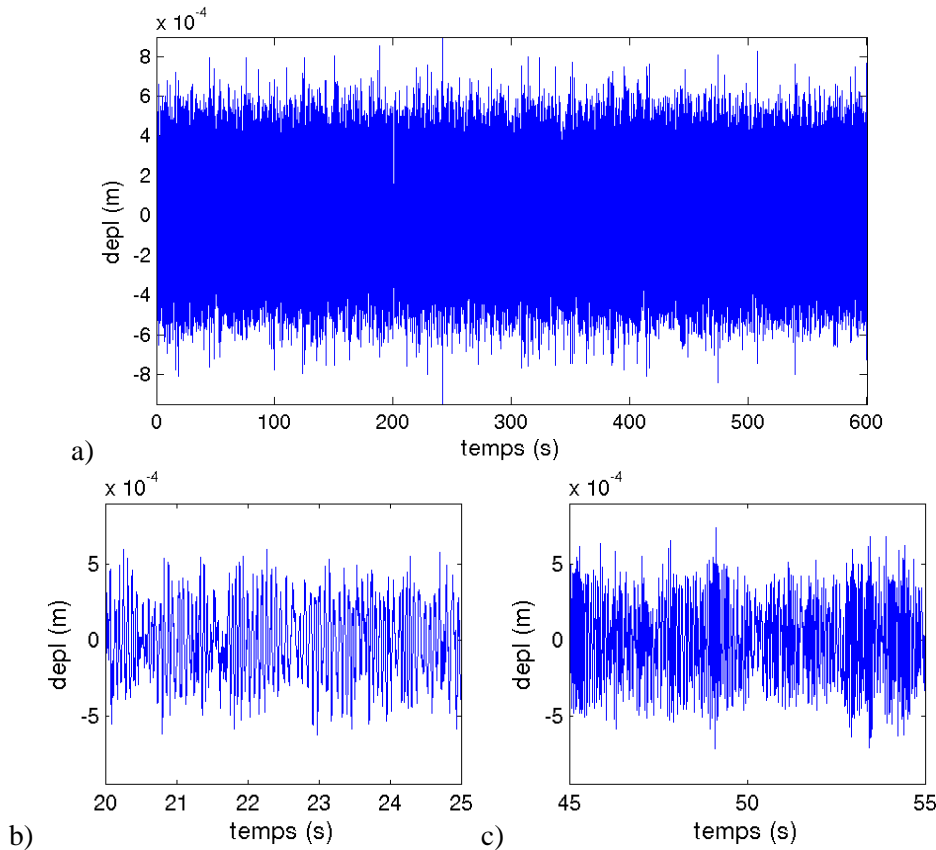


Figure 2.4. Signal, issu de la concaténation de plusieurs tirages, servant à l'étude de stationnarité et ergodicité. a) Vue générale. b) et c) Zooms.

On conclut dans un premier temps sur le caractère du deuxième ordre du processus ; comme à chaque instant, la moyenne et la variance, tracées en Figure 2.5, sont finies, l'espérance mathématique du carré du signal est finie. Concernant la stationnarité, les moyennes et variances statistiques dépendent clairement de l'instant. Le signal concaténé de la Figure 2.4 avait une amplitude d'environ 1 mm. La moyenne statistique est cent fois plus faible, donc plus proche de zéro, comme attendu pour une structure excitée par un effort de moyenne nulle. On peut donc considérer que le processus est centré. On remarque que le carré de la moyenne statistique est négligeable devant la variance : variance et valeur RMS sont équivalentes. De même, on peut faire l'hypothèse que l'auto-covariance et l'auto-corrélation sont équivalentes.

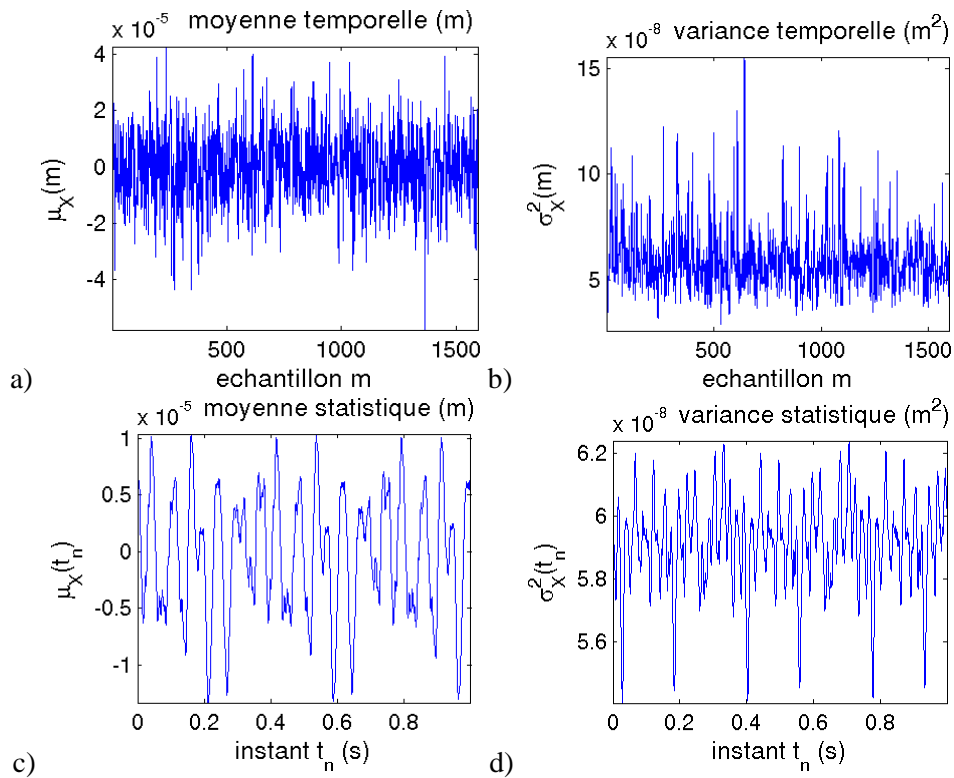


Figure 2.5. Moyenne et variance temporelles et statistiques.

Les moyennes et variances temporelles, concernant le caractère ergodique des signaux, sont plus dispersées que leurs équivalents statistiques (Figure 2.5). Elles dépendent plus de l'échantillon que les moyennes et variances statistiques ne dépendent de l'instant. L'hypothèse d'ergodicité semble donc être moins vérifiée que celle de stationnarité.

Si on considère plusieurs découpages du signal concaténé, on peut dans un premier temps constater que la moyenne d'une grandeur « statistique » est égale à la moyenne de la grandeur « temporelle » correspondante : moyenner sur les instants puis sur les échantillons est parfaitement équivalent à moyenner sur les échantillons puis sur les instants. Ceci était évident pour les moyennes mais est constaté avec une bonne précision pour les variances. On peut néanmoins tirer un enseignement de la comparaison de la moyenne des différentes grandeurs. Comme montré dans le Tableau 2.1, les moyennes du déplacement sont différentes pour les deux découpages considérés. Par contre, les moyennes des variances sont égales. On a vérifié que cette valeur est égale à la variance temporelle du signal concaténé. La variance (ou la valeur RMS, le carré de la moyenne étant négligeable) est donc la grandeur d'intérêt, étant invariante par les traitements statistiques. Pour les deux découpages, la variance statistique est moins dispersée que la variance temporelle, ce qui confirme les observations faites graphiquement précédemment.

	1595 fenêtres de 1s		315 fenêtres de 5s	
	Moyenne	Écart-type	Moyenne	Écart-type
Moyenne statistique (m)	$-1,20 \cdot 10^{-7}$	$5,42 \cdot 10^{-6}$	$-6,77 \cdot 10^{-8}$	$1,45 \cdot 10^{-5}$
Moyenne temporelle (m)	$-1,20 \cdot 10^{-7}$	$1,26 \cdot 10^{-5}$	$-6,77 \cdot 10^{-8}$	$5,02 \cdot 10^{-6}$
Variance statistique (m <sup>2</sup> )	$5,91 \cdot 10^{-8}$	$1,43 \cdot 10^{-9}$	$5,90 \cdot 10^{-8}$	$3,57 \cdot 10^{-9}$
Variance temporelle (m <sup>2</sup> )	$5,90 \cdot 10^{-8}$	$1,42 \cdot 10^{-8}$	$5,90 \cdot 10^{-8}$	$6,48 \cdot 10^{-9}$

Tableau 2.1. Statistiques sur les moyennes et variances temporelles et statistiques pour deux découpages du signal concaténé.

La Figure 2.6 montre l'auto-covariance calculée pour le découpage en fenêtres de 1s. On voit que l'auto-corrélation statistique dépend majoritairement de la différence entre les instants  $t_n$  et  $t_l$ . Ceci montre donc que la dernière condition suffisante pour qu'un processus stochastique soit stationnaire en m.o.d. est remplie. De plus, cette auto-corrélation décroît rapidement vers zéro lorsque les instants sont de plus en plus éloignés : les nombreux chocs décorrèlent les évolutions temporelles des déplacements. Le caractère ergodique de l'auto-corrélation n'a pas été abordé ; au vu des résultats précédents, on le suppose.

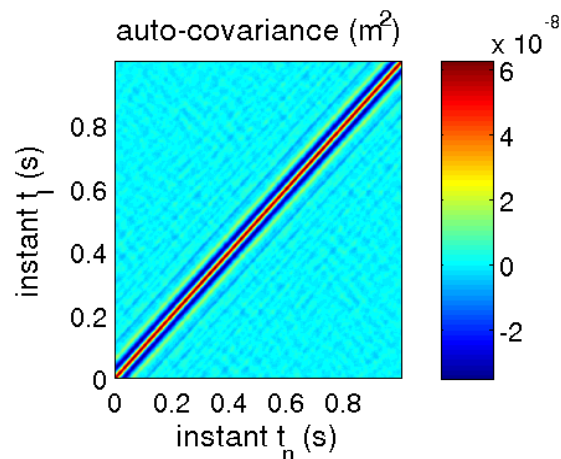


Figure 2.6. Auto-covariance pour 1595 fenêtres de 1 s.

Des techniques, telles que l'analyse par ondelettes [Mal1], ont été développées spécifiquement pour traiter des données non-stationnaires, par exemple pour l'étude de la parole ou de signaux musicaux [Eva1]. Cependant, l'étude précédente montre que les signaux ici d'intérêt (des grandeurs vibratoires) peuvent être raisonnablement considérés comme stationnaires, quitte à augmenter la fenêtre d'étude. Une analyse temps/fréquence n'est donc pas nécessaire. De plus, on souhaite conserver une approche *modale* typique de la mécanique des structures. Les hypothèses requises étant considérées comme vérifiées, on décide d'utiliser la Densité Spectrale de Puissance, indiquant comment la valeur RMS se répartit fréquemment.

### 2.3.2. Estimateur de DSP

Un signal continu aléatoire stationnaire n'est pas intégrable. Comme observé précédemment en Figure 2.6, l'auto-corrélation d'un processus stationnaire en m.o.d. et centré

décroît rapidement vers zéro. Elle serait donc intégrable et on pourrait donc en calculer une transformée de Fourier. Ces propriétés sont décrites dans [Wir1] :

- $|R_{XX}(\tau)|$  tend vers 0 quand  $|\tau|$  tend vers  $+\infty$ , car le processus est centré : des évènements très éloignés dans le temps ne sont pas corrélés ;
- $R_{XX}(\tau)$  est absolument intégrable.

Cette dernière propriété permet de définir la *Densité Spectrale de Puissance* (DSP) comme la transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation. On a donc la relation suivante, définissant ce qui est parfois appelé la paire de Wiener-Kintchine (2.31). La DSP étant paire, on peut ne la définir que pour des fréquences positives par  $G_{XX}(\omega) = 2.S_{XX}(\omega)$  si  $\omega > 0$ ,

$$\begin{cases} S_{XX}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ R_{XX}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \end{cases} \quad (2.31)$$

L'auto-corrélation définie précédemment de manière statistique (2.30) est peu pratique à estimer si on ne connaît pas la distribution conjointe de probabilité des évènements  $\{X(t)=x\}$  et  $\{X(t')=y\}$ . En particulier, cette distribution conjointe est peu fiable si on travaille avec quelques tirages de signaux discrets. En considérant que le signal est ergodique sur la moyenne et l'auto-corrélation, on peut la définir de manière équivalente comme la moyenne temporelle

$$R_{XX}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau) dt. \quad (2.32)$$

En faisant  $\tau=0$  dans les équations (2.31) et (2.32), on obtient alors une relation liant l'intégrale de la DSP à la valeur RMS (2.33). La Densité Spectrale de Puissance est bien la densité fréquentielle de la valeur RMS du processus, car

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(\omega) d\omega = R_{XX}(0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)^2 dt = \sigma_x^2. \quad (2.33)$$

Si on s'en tient à la définition de la DSP, il faudrait calculer la fonction d'auto-corrélation puis sa transformée de Fourier, sous réserve qu'on puisse accéder à au moins un tirage du processus  $X$  qui soit de longueur infinie. En effet, on considère des signaux stationnaires en m.o.d., centrés et ergodiques. La pratique numérique et expérimentale ne permet que de manipuler des tirages échantillonnés et de longueur finie ; de même, on ne peut effectuer que des Transformées de Fourier Discrètes (TFD). On considère donc qu'on a à disposition  $M$  tirages de  $N$  points, échantillonnés avec un pas de temps  $\delta$ , soit une longueur  $T=N.\delta$ . En pratique, ces tirages sont souvent issus du découpage d'un tirage plus long, ce découpage étant éventuellement effectué avec un recouvrement. On construit une fenêtre  $w$  de  $N$  points. Pour calculer un *estimateur* de la DSP, on utilise la procédure suivante, présentée dans [Wir1] :



- multiplication de chaque tirage par la fenêtre :  $x_{m,w}(n) = x_{m,w}(t_n) = x_m(t_n).w(n.\delta t)$  ;
- calcul de la TFD :  $X_{m,w}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_m(t_n).w(n.\delta t)e^{-2.j\pi\frac{nk}{N}}$  ;
- calcul du carré du module de la TFD :  $|X_{m,w}(k)|^2$  ;
- moyenne sur les différents tirages ;
- expression pour les fréquences positives et normalisation

On aboutit donc à l'estimateur de DSP (sans multiplication par 2 pour  $\omega_k=0$ ), que l'on note abusivement  $S$ ,

$$S_{XX}(\omega_k) = \frac{2\delta t}{\sum_{n=0}^{N-1} w(n.\delta t)^2} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M |X_{m,w}(k)|^2. \quad (2.34)$$

Dans la suite, on s'intéresse aux effets des différents paramètres de cet estimateur de DSP : le type de fenêtre, sa longueur (la durée des tirages) et le recouvrement. Pour cela, on prend comme signal de référence, une réponse linéaire de 200 s, dont le pas de temps est de  $10^{-4}$  s. On en construit une version sous-échantillonnée à  $10^{-3}$  s par DTF, suppression des hautes fréquences et DFT inverse. On a ainsi deux signaux dont le contenu basses fréquences est identique mais dont les discrétisations temporelles sont différentes. On va s'intéresser à quatre jeux de paramètres, résumés dans le Tableau 2.2. Deux jeux de paramètres consécutifs ne diffèrent que par la valeur d'un paramètre.

	Fenêtre	Longueur	Recouvrement
Cas 1	naturelle	30 s	0
Cas 2	Hann	30 s	0
Cas 3	Hann	10 s	0
Cas 4	Hann	10 s	66 %

Tableau 2.2. Différents paramètres pour l'estimateur de DSP.

On rappelle, par exemple d'après [Wir1], que la fenêtre de Hann est une arche de sinusöide nulle à ses deux extrémités. Cette fenêtre permet de diminuer le *leakage*, étalement des pics dû à la non-périodicité des tirages de longueur finie. Pour une fenêtre de longueur  $T$ , on a :

$$w(t) = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \right) \quad (2.35)$$

On trace ci-après les évolutions des DSP en fonction des paramètres de l'estimateur et du pas d'échantillonnage. On effectue quatre comparaisons de courbes sur la Figure 2.7. Avec le même jeu de paramètres, on vérifie que la DSP du signal de référence et la DSP du signal

sous-échantillonné se superposent. Ceci justifie par exemple de comparer la DSP d'une grandeur mesurée et la DSP d'une grandeur calculée, dont les fréquences d'échantillonnage sont différents. On a aussi vérifié que la DSP d'un signal sous-échantillonné en ne retenant qu'un certain nombre d'instant est très comparable, dans les basses fréquences, à celle du signal de référence. Ce dernier sous-échantillonnage est valide pour les signaux dont la DSP décroît en fonction de la fréquence. L'effet de la fenêtre se fait surtout sentir sur les hautes fréquences, le niveau de la DSP calculée avec la fenêtre naturelle tendant à être plus élevé qu'avec la fenêtre de Hann ; ce phénomène est cependant négligeable, les amplitudes en hautes fréquences étant beaucoup plus faibles que celles en basses fréquences, et de moindre intérêt. On remarque cependant, que les anti-résonances, présentes sur cette réponse linéaire, sont mieux estimées par la fenêtre de Hann. On retient donc ce type de fenêtre, étudiant les réponses vibratoires de systèmes pouvant être linéaires. Diminuer la longueur de la fenêtre diminue la résolution fréquentielle ( $\delta\omega=2\pi/T$ ), ce qui peut être préjudiciable pour bien représenter les pics de structures peu amorties. Par contre, comme on a augmenté le nombre de tirages, on a effectué une moyenne sur plus d'échantillons : la variance de l'estimateur a diminué, la DSP a un aspect moins bruité. Augmenter le recouvrement augmente le nombre de moyennes et permet donc d'avoir une DSP d'aspect plus lisse.

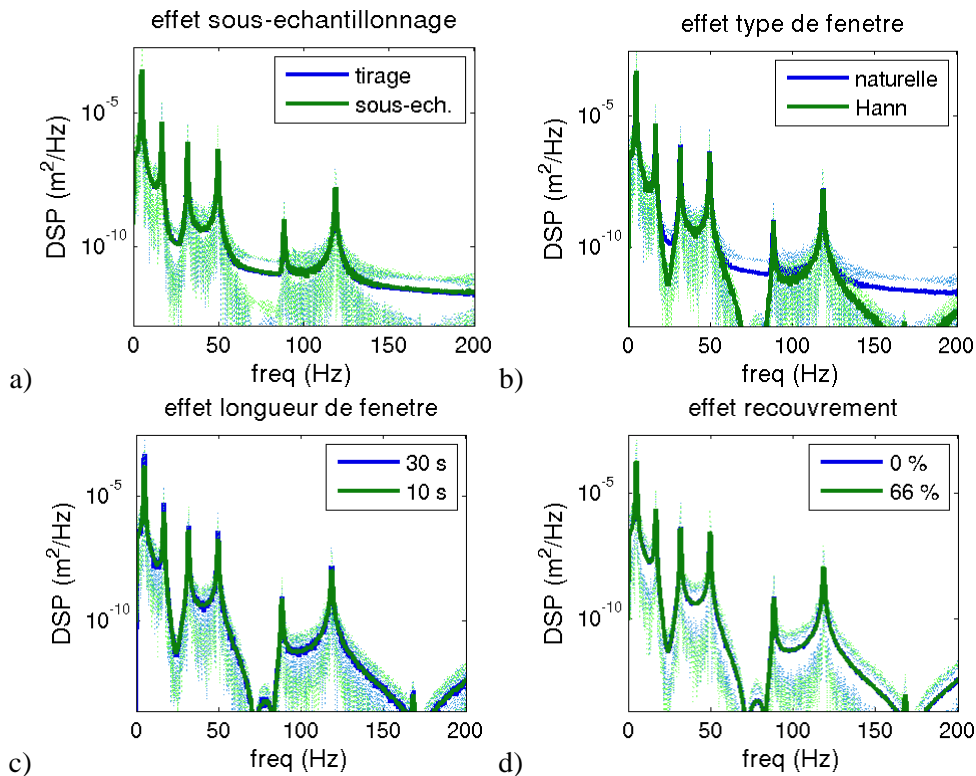


Figure 2.7. DSP calculées pour une variation d'un paramètre : a) de l'échantillonnage, b) du type de fenêtre, c) de la longueur de la fenêtre et d) du recouvrement.

On vérifie dans le Tableau 2.3 que la relation (2.33) reliant intégrale de la DSP et carré de la valeur RMS est bien vérifiée. Pour cela, on y reporte les valeurs des deux membres de l'égalité estimées par :

$$- \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} S_{XX}(\omega_k) \text{ pour l'intégrale } \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(\omega) d\omega ;$$

-  $\frac{1}{N_{total}} \sum_{n=0}^{N_{total}-1} |x(t_n)|^2$  pour l'intégrale  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$ , donnant la moyenne temporelle.

(10 <sup>-8</sup> m <sup>2</sup> )	Pas de temps 10 <sup>-4</sup> s	Pas de temps 2.10 <sup>-3</sup> s
Moyenne temporelle	6,0998	6,0998
Moyenne Cas 1	6,0967	6,0967
Moyenne Cas 2	6,1992	6,1992
Moyenne Cas 3	6,3208	6,3218
Moyenne Cas 4	6,1037	6,1045

Tableau 2.3. Valeurs RMS et intégrales de la DSP pour différents paramètres et pas de temps.

De longues fenêtres naturelles permettent d'approcher de manière très précise le carré de la valeur RMS. La fenêtre de Hann et, surtout, la diminution de la longueur de la fenêtre, dégradent cette estimation. Augmenter le nombre de moyennes permet de rendre cette estimation plus précise. On note la très bonne concordance des estimations entre les deux échantillonnages considérés.

### 2.3.3. Conclusion

On a à disposition un estimateur de DSP permettant de comparer des DSP de signaux d'échantillonnages différents et calculés avec des paramètres différents. Les valeurs RMS sont bien retrouvées par intégration de la DSP.

Les considérations théoriques montrent qu'il faut utiliser des fenêtres les plus longues possibles, pour avoir une résolution fréquentielle suffisamment élevée et avoir, en quelque sorte, une auto-corrélation (2.32) bien estimée. Il faut aussi utiliser le plus de tirages possible, pour avoir une moyenne sur beaucoup d'échantillons et faire diminuer la variance de l'estimateur de DSP. Fenêtrer par une fenêtre de Hann permet de limiter le leakage, de bien représenter les anti-résonances et de mieux estimer les contributions des hautes fréquences.

Dans la pratique, comme rappelé notamment dans [Wir1] et [Tre1], il faut faire au mieux avec les données disponibles. Il faut commencer par s'assurer que les signaux sont raisonnablement stationnaires [Tho1]. Puis, il faut réaliser un compromis entre la longueur et le nombre des fenêtres. Le recouvrement permet d'augmenter artificiellement le nombre de fenêtres. Des valeurs entre 0,5 et 0,75 sont suggérées, 0,625 permettant une bonne estimation de l'énergie. Les paramètres doivent éventuellement être adaptés au cas d'étude.

Pour conclure, on présente l'affichage graphique servant à comparer la DSP de deux signaux. Un exemple en est donné en Figure 2.8. Pour limiter l'aspect chahuté de la DSP moyennée dû à un nombre de moyennes insuffisants, on la lisse sur  $2 \times N_{moy} - 1$  points de fréquence selon

$$\begin{cases} S_{moy}(\omega_k) = \frac{1}{N_2 - N_1 + 1} \sum_{l=N_1}^{N_2} S(\omega_l) \\ N_1 = \max(k - N_{moy}, 1), N_2 = \min(k + N_{moy}, N). \end{cases} \quad (2.36)$$

Pour visualiser la dispersion autour de cette moyenne, on trace aussi, pour chaque fréquence, la valeur minimale et la valeur maximale de la DSP pour les différents échantillons fenêtrés disponibles. La DSP lissée sera notée  $S_x$ .

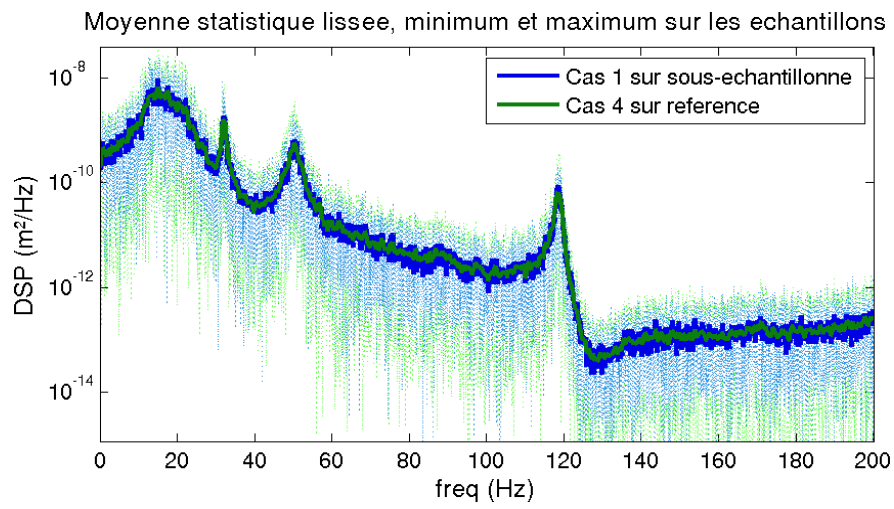


Figure 2.8. Présentation de l'affichage servant à comparer deux DSP.



# Chapitre 3. Validation d'un modèle numérique réduit adapté à la simulation temporelle de chocs

Ce chapitre se concentre sur la modélisation du tube de GV et des conditions de contact entre le tube et la PE. Dans un second temps, on cherche à réduire le système de manière efficace. Enfin, on choisira les paramètres du schéma d'intégration dans un dernier temps.

La construction d'un modèle numérique pour le tube est abordée en section 3.1. Une analyse modale permet d'obtenir les fréquences, déformées et amortissements réduits expérimentaux de la maquette GV-LOCAL. Ces informations modales permettent de recalibrer les paramètres de raideurs discrètes liant les pieds du tube au bâti. On a alors les valeurs numériques des paramètres physiques permettant de construire un modèle numérique représentatif.

La section 3.2 se concentre sur la modélisation du contact entre le tube et la PE. La forme foliée de l'obstacle est simplifiée par l'adoption d'un obstacle circulaire. La répartition des efforts de contact sur l'épaisseur de la PE est effectuée en y répartissant des obstacles discrets. Ensuite, par l'étude de configuration où les DDL de contact sont bloqués, on choisit une formulation d'Euler-Bernoulli plutôt qu'une formulation de Timoshenko. Une analyse détaillée de l'influence de la raideur de contact est réalisée en fin de section. On montre notamment que les modes appuyés au niveau de la PE sont semblables aux modes affectés de conditions de contact bilatéral permanent. Les DSP linéaires sont modifiées quand la raideur de contact augmente : les pics se décalent vers les hautes fréquences.

On aborde ensuite dans les sections 3.3 et 3.4 la réduction de modèle. La section 3.3 présente les fondements théoriques de la réduction de modèle. La construction de corrections statiques est abordée. On montre comment enrichir la base de réduction en la rendant compatible avec l'ensemble des comportements du tube lorsque la raideur de contact varie. Une orthonormalisation permet d'extraire une famille libre générant le sous-espace de projection. Le choix des déformées à inclure dans la base de projection est effectué en section 3.4. Il est important d'utiliser plusieurs types de déformées et les corrections statiques permettent une convergence plus rapide que l'ajout de modes.

La section 3.5 est consacrée au choix du pas de temps et des paramètres du schéma de Newmark, que l'on a présenté en 2.2. On retient un schéma de Newmark d'accélération moyenne, sans actualisation du jacobien. Diminuer le pas de temps permet de respecter le bilan d'énergie du tube linéaire et non-conservatif. Les phases de contact sont responsables de

la non-conservation de l'énergie mécanique. Un gain ou une perte est affecté à chaque épisode de choc ; aucune tendance claire ne se dégage pour les évolutions à long terme. Diminuer le pas de temps est le plus efficace pour améliorer la conservation de l'énergie. On conclut cette section par des considérations de temps de calcul, ce qui permet de choisir un pas de temps de  $2.10^{-5}$  s pour l'ensemble des simulations numériques non-linéaires effectuées au cours de cette thèse.

### 3.1. Construction du modèle de tube

On cherche à avoir un modèle numérique représentatif de la maquette du banc GV-LOCAL, que l'on présente en section 3.1.1. On effectue donc en section 3.1.2 une analyse modale du tube libre, qui permet d'identifier les modes propres expérimentaux en section 3.1.3. Les modes expérimentaux et du modèle expérimental initial sont comparés en section 3.1.4. On recale alors en section 3.1.5 les paramètres du modèle. Une analyse de sensibilité locale est présentée en section 3.1.6.

#### 3.1.1. Présentation de la maquette GV-LOCAL

Le banc GV-LOCAL comprend une portion de tube de GV, bridé à sa base pour simuler un encastrement. Les deux parties rectilignes du tube sont introduites dans un obstacle quadrifolié reprenant la géométrie des plaques entretoise. Ces obstacles permettent de maîtriser le jeu entre la plaque entretoise et le tube GV. Le niveau de dépôt d'oxydes est représenté par une valeur de jeu entre le tube et la PE. Les jeux seront exprimés en pourcentage du diamètre du tube. Trois jeux sont accessibles expérimentalement : le jeu nominal de 1,3 %, un jeu intermédiaire de 0,9 % et un jeu réduit de 0,23 %. L'excitation est réalisée à l'aide d'un pot vibrant, dont on peut modifier la position. Cette excitation extérieure est aléatoire, et son contenu spectral est situé dans une bande de fréquences réglable. Les accélérations sont mesurées en quelques points.

On peut ajouter une instrumentation plus fine autour d'une zone de contact. Des capteurs de force et des accéléromètres placés sur un module de PE permettent de remonter aux efforts de contact. Des capteurs à courant de Foucault permettent d'interpoler le déplacement du tube sur l'épaisseur de la PE. Cette instrumentation a servi à mesurer une raideur de contact entre le tube et les modules de PE, voir la section 3.2.1.

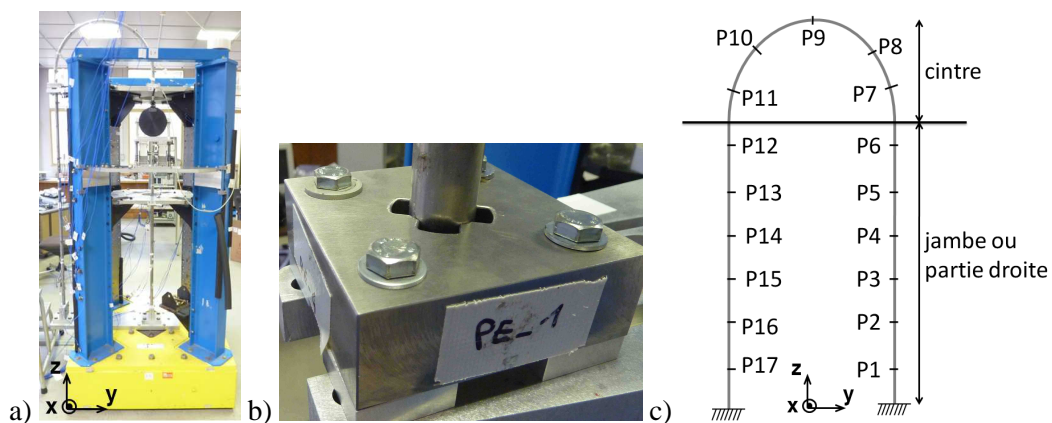


Figure 3.1. a) Vue d'ensemble du banc GV-LOCAL et son repère local. b) Détail du tube passant dans un module de PE. c) Maillage capteur utilisé pour l'analyse modale expérimentale.

### 3.1.2. Analyse modale du tube libre

Un maillage capteur, présenté en Figure 3.1, a été construit à partir de 17 points de mesure, répartis de manière homogène sur le tube pour une bonne visualisation des déformées identifiées. Des procédures d'optimisation du maillage capteur existent [Bal4] mais n'ont pas été utilisées ici, le maillage choisi permettant de bien discriminer les différents modes. Chaque nœud a été affecté de deux capteurs d'accélération :

- pour les jambes, selon les directions  $DX$  et  $-DY$  ;
- pour le cintre, selon les directions  $DX$  et normale au tube dans le plan du tube, dirigée vers le centre du cintre.

En pratique, on ne disposait pas de 34 capteurs et on a réalisé les acquisitions en trois fois, les capteurs étant successivement placés sur une jambe, puis l'autre et enfin sur le cintre. Il n'y a pas de différence majeure sur les modes identifiés : la masse ajoutée et déplacée par les capteurs est négligeable par rapport à la masse du tube.

L'excitation, mesurée, a été réalisée par des impacts de marteau de choc ou par un pot vibrant. En règle générale, les excitations au marteau ont été difficiles à calibrer, le tube y étant sensible, surtout sur sa partie cintrée. Pour garantir l'absence de choc entre le tube et les PE, on a introduit de la cire sur les isthmes des obstacles. Ceci peut éventuellement conduire à des amortissements surestimés. Finalement, on a réalisé des acquisitions pour les excitations suivantes :

- impact au nœud P2 dans la direction  $DX$  ;
- impact au nœud P2 dans la direction  $-DY$  ;
- bruit blanc au nœud P9, dans la direction  $DX$  ;
- balayage de sinus au nœud P9, dans la direction  $DX$ .

Chaque excitation donne  $17 \times 2 = 34$  transferts accélération/force mesurés dont 1 colocalisé. Le pas de fréquence des mesures est de 0,125 Hz, qui est trop important pour bien identifier les amortissements des premiers modes.

Les *Fonctions de Transfert* permettent de détecter des modes. Sur une résonance, le module de la fonction de transfert est maximal et la phase perd  $180^\circ$ . On vérifie que l'on a trouvé tous les modes sur une bande de fréquences grâce au *Multivariate Mode Indicator Function* (MMIF), qui est le rapport entre la partie réelle et l'amplitude de la réponse fréquentielle [Bal1]. Son passage à 0 indique que la réponse est imaginaire pure, donc une résonance (sous l'hypothèse de modes séparés et peu amortis, à la résonance le système se comporte comme un système à 1 DDL). Le MMIF est tracé en Figure 3.2. On remarque la mauvaise qualité des mesures dans les 15-20 premiers Hz. Cela est dû aux accéléromètres, qui ne sont pas assez sensibles en basses fréquences car trop petits et donc trop légers pour engendrer une réaction suffisante de la pastille piézoélectrique des accéléromètres. Leur courbe de sensibilité, donnée par le constructeur, commence à 5Hz et le retour des essayeurs indique une mauvaise qualité des résultats jusqu'à 10-15 Hz. Des capteurs plus gros auraient été plus sensibles mais ils auraient trop perturbé le comportement dynamique du tube. Un vélocimètre laser aurait certainement permis de mieux mesurer les comportements aux basses fréquences.



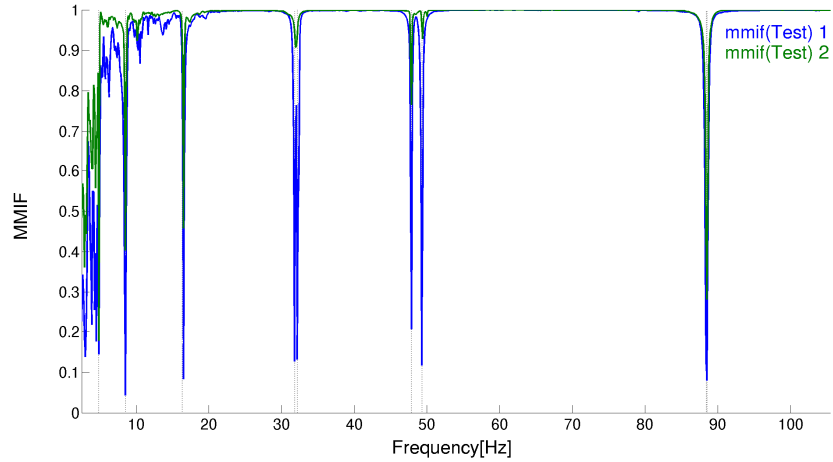


Figure 3.2. MMIF pour l'excitation selon DX (bleu) et selon DY (vert).

### 3.1.3. Résultats d'identification

On cherche à identifier les paramètres d'un modèle de modes normaux, en construisant une matrice de transfert identifiée par

$$[H^{identified}(s)] = \sum_{j \in \text{identified}} \left( \frac{[T_j]}{s^2 + 2\zeta_j \omega_j s + \omega_j^2} \right) + [E] + \frac{[F]}{s^2}, \quad (3.1)$$

avec  $[T_j]$  les résidus associés aux modes identifiés d'indice  $j$ ,  $[E]$  et  $[F]$  les résidus basses et hautes fréquences,  $s$  la variable de Laplace,  $\omega_j = 2\pi f_j$  les pulsations propres et  $\zeta_j$  les amortissements réduits. Chaque pôle est optimisé sur une petite bande de fréquence. Puis, on vérifie si les interpolations locales donnent de bons résultats sur une plus large gamme de fréquence. Les transferts colocalisés permettront d'obtenir des modes normaux à partir des informations pôles et résidus en normant les déformées modales. Pour des résultats d'identification plus précis, on a identifié les modes dans le plan pour une excitation dans le plan et les modes ayant des composantes hors-plan pour une excitation hors-plan.

En comparant les résultats d'identification modale pour les trois excitations disponibles (impact, bruit blanc, balayage de sinus), on obtient des valeurs de fréquences et d'amortissements, présentées dans le Tableau 3.1, où l'on est relativement confiant sur les valeurs trouvées pour les neuf premiers modes. Les cinq premières déformées modales associées sont affichées sur la Figure 3.3. À part pour les modes 8 et 9, un mode double, les déformées identifiées sont soit hors-plan, soit dans le plan. On a une assez bonne idée de la forme du mode : flexion hors-plan, torsion ou flexion dans le plan.

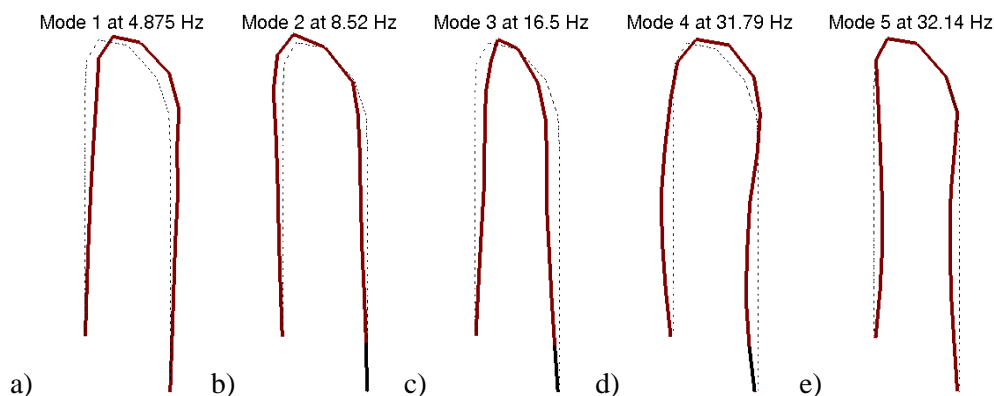


Figure 3.3. Déformées modales expérimentales du tube libre.

Les amortissements ont été plus difficiles à identifier que les fréquences. Les premiers modes sont tels qu'il n'y a que quelques points sur la largeur du pic. De plus, ces modes sont perturbés par la cire ajoutée pour éliminer les chocs : les premiers modes sont sur-amortis. Les modes 4 à 12 ont des valeurs d'amortissements de l'ordre de 0,2 %. Ces valeurs d'amortissement sont donc cohérentes avec la valeur standard d'EDF pour l'amortissement modal des structures métalliques multi-supportées. L'amortissement du mode 13 s'écarte de cette valeur car ce mode est mal identifié quant à l'amortissement et à la déformée.

Mode $j$	$f_j$ (Hz)	$\zeta_j$ (%)	Type de déformée
1	4,9	1,5	Mode 1 de flexion hors-plan
2	8,5	1,5	Mode 1 de flexion dans le plan
3	16,5	0,44	Mode 1 de torsion
4	31,8	0,26	Mode 2 de flexion hors-plan
5	32,2	0,29	Mode 2 de flexion dans le plan
6	47,8	0,17	Mode 3 de flexion dans le plan
7	49,30	0,19	Mode 2 de torsion
8 et 9	88,5	0,17	Mode 4 de flexion dans le plan Mode 3 de flexion hors-plan
10	116,8	0,19	Flexion dans le plan
11	118,2	0,15	Mode 3 de torsion
12	167,6	0,14	Flexion hors-plan
13	177,0	0,88	Flexion dans le plan

Tableau 3.1. Fréquences, amortissements réduits et déformées identifiés.

On donne un aperçu de la qualité des interpolations large bande entre les résultats de test et les modes normaux identifiés en Figure 3.4. Les transferts entre un impact et une accélération mesurés dans la même direction sont plus lisses et sont plus faciles à approcher. Les transferts entre un impact et une accélération selon des directions différentes sont beaucoup plus chahutés et les caractéristiques des modes linéaires (phase plate entre 2 modes, sauts de phase de  $+180^\circ$  ou  $-180^\circ$ , pics symétriques, ...) sont moins visibles.

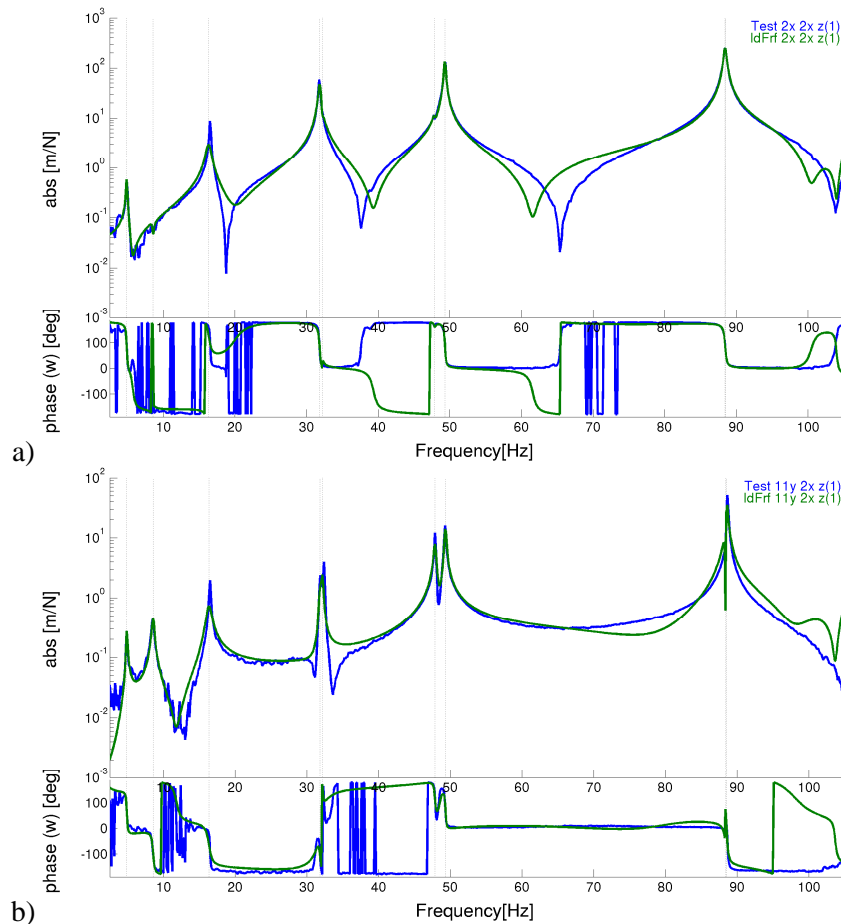


Figure 3.4. Comparaison de FRF mesurées et identifiées. a) transfert colocalisé. b) transfert quelconque.

### 3.1.4. Corrélation calcul/essai

On cherche à comparer les premiers modes propres calculés numériquement à partir d'un modèle de tube encastéré aux modes propres identifiés dans la section précédente. On considère dans un premier temps un encastrement en pied de chaque jambe du tube : les six DDL sont bloqués. L'erreur relative en fréquence, tracée en Figure 3.5, varie entre 8% et 20% sur les 13 premiers modes. La condition aux limites entre le tube et le bâti n'est donc clairement pas modélisable par un encastrement. On tire néanmoins un enseignement de cet écart relatif. Expérimentalement, on avait identifié un mode double (d'indice 8 et 9) aux alentours de 88,5 Hz. Or l'écart relatif en fréquence n'est pas égal pour les modes 8 et 9 : le modèle ne contient pas de mode double et les fréquences sont initialement séparées d'environ 4 Hz. On peut même s'attendre à l'inversion de ces modes lors du recalage, le mode 9 ayant un écart relatif des fréquences plus faible.

On compare aussi les déformées identifiées et numériques. Pour cela, on projette les déformées numériques sur le maillage capteur, en prenant soin de respecter les orientations locales de chaque capteur. On trace le MAC (*cf infra*) en Figure 3.5. Ici, les 7 premiers modes sont clairement corrélés. La corrélation douteuse des modes 8 et 9, mode double expérimental, s'explique en partie par la difficulté d'identifier proprement ces déformées à partir des résultats expérimentaux. On observe une inversion des modes 10 et 11 (flexion dans

le plan et torsion) entre le modèle et l'expérience. La déformée du mode 13 est mal identifiée, d'où le faible MAC.

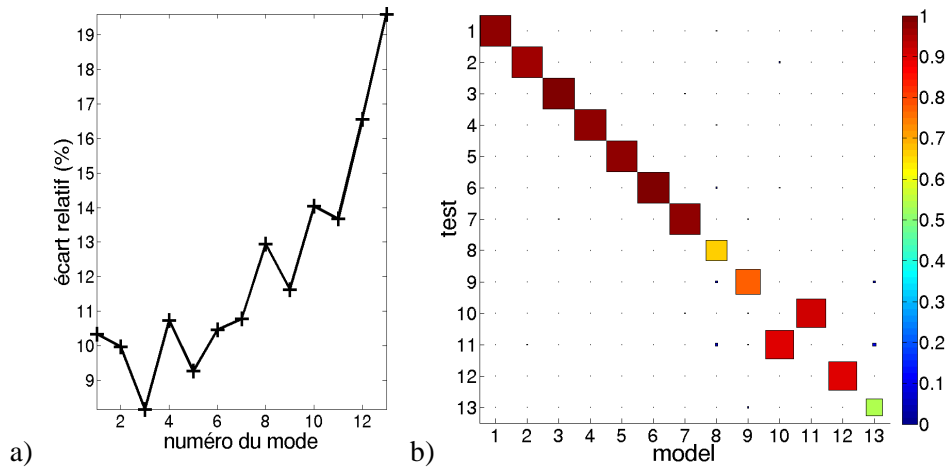


Figure 3.5. Comparaison des modes numériques encastrés en pied de tube aux modes expérimentaux identifiés. a) valeur absolue de l'écart relatif des fréquences. b) MAC entre les déformées sur maillage capteur.

Le *Modal Assurance Criterion* (MAC) indique si deux vecteurs  $U$  et  $V$ , de même taille, sont *linéairement* corrélés [Ball]. Pour une valeur proche de 1, les déformées sont presque colinéaires. Pour une valeur faible, les déformées sont dites orthogonales. Le MAC est en quelque sorte un produit scalaire normé entre les deux vecteurs  $U$  et  $V$ , car

$$MAC(U, V) = \frac{|\langle U, V \rangle|^2}{\langle U, U \rangle \langle V, V \rangle}, \quad (3.2)$$

où  $\langle *, * \rangle$  désigne un produit scalaire et  $|*|$  le module. Le MAC est indépendant de la norme de chaque vecteur et compare les profils des déformées. En effet,  $MAC(\alpha U, V) = MAC(U, V) = MAC(U, \beta V)$ , si  $\alpha$  et  $\beta$  sont non nuls. Sur le maillage capteur, on choisira le produit scalaire canonique. Si on compare des déformées numériques, on ne les projette pas et on utilise le produit scalaire défini par la matrice de masse, qui est symétrique, définie et positive. En utilisant la matrice de masse, on pondère les DDL par la masse volumique et on rend le MAC, alors noté MAC-M, indépendant du maillage retenu. Dans notre cas, cela est utile car le maillage est très raffiné autour des PE et cette zone est sur-représentée dans le MAC canonique.

Les écarts de fréquences et les inversions de modes nous conduisent donc à chercher à modéliser les conditions de liaison du tube au bâti du banc. Pour cela, on suppose que chaque extrémité du tube est reliée à une raideur discrète dans une direction. On cherche aussi certains paramètres physiques comme le module d'Young ou la masse volumique.

### Construction d'une fonctionnelle d'erreur

On utilise les informations portant sur les fréquences pour construire une fonctionnelle d'erreur. Une fois celle-ci minimisée, on se sert des déformées identifiées expérimentalement pour vérifier que les modes sont bien appariés. La fonctionnelle  $J$  est basée sur l'écart relatif des fréquences et a pour expression,

$$J(p) = \sum_{j \in \text{choisis}} \left| \frac{f_j^{\text{test}} - f_j^{\text{model}}(p)}{f_j^{\text{test}}} \right|^2 \quad (3.3)$$

où  $p$  désigne les paramètres à recalculer. Des tests ont été réalisés en prenant en compte des valeurs de MAC dans la fonctionnelle mais n'ont pas été concluants, celle-ci n'ayant déjà pas les bonnes propriétés mathématiques, notamment la convexité, avec les seules fréquences. Quatre modes ont été choisis pour l'identification : ils étaient bien identifiés et/ou apparaissaient dans des résultats préliminaires d'essais non-linéaires :

- le deuxième mode de flexion hors-plan à 31,8 Hz, soit le numéro 4 ;
- le deuxième mode de torsion à 49,3 Hz, soit le numéro 7 ;
- l'un des modes doubles à 88,5 Hz, soit le numéro 9 ;
- le troisième mode de torsion à 118,2 Hz, soit le numéro 11.

Le vecteur des paramètres  $p$  regroupait six valeurs de raideurs, le module d'Young et la masse volumique du tube. Les raideurs des deux pieds de tube sont supposées égales. *A posteriori*, il aurait été avantageux de peser le tube et d'en déduire la masse volumique.

### 3.1.5. Recalage des raideurs en pied de tube

La minimisation de la fonctionnelle par un algorithme de descente de type BFGS [Bon1] n'a pas abouti. En effet, la fonctionnelle présente de nombreux minima locaux. En fonction des conditions initiales de la recherche, on n'aboutit pas vers le même minimum. Un grand nombre de vecteurs des paramètres donnent ainsi une erreur très faible. Ceci sera confirmé par l'analyse de sensibilité faite en section 3.1.6. Finalement, on décide de tirer aléatoirement des vecteurs de paramètres variant entre :

- $3 \cdot 10^2$  et  $3 \cdot 10^9$  N/m pour les raideurs en translation  $DX$  et  $DY$  ;
- $1 \cdot 10^8$  et  $1 \cdot 10^{12}$  N/m pour les raideurs en translation  $DZ$  ;
- $2 \cdot 10^2$  et  $2 \cdot 10^8$  Nm/rad pour les raideurs en rotation autour des axes horizontaux, soit  $DRX$  et  $DRY$  ;
- $1 \cdot 10^8$  et  $1 \cdot 10^{12}$  Nm/rad pour les raideurs en rotation autour de l'axe vertical, soit  $DRZ$  ;
- 2 % autour de la valeur nominale pour le module de Young ;
- 2 % autour de la valeur nominale pour la masse volumique.

Un jeu de paramètres minimisant l'erreur peut être exhibé. Néanmoins, les résultats sont mitigés et différents si on effectue une seconde recherche, les tirages étant alors différents. On a amélioré les écarts relatifs de fréquences sur la plupart des modes, qui passent de plus de 10 % à moins de 2 %. Quant aux déformées, on a réussi à inverser les modes 10 et 11, qui ont numériquement des fréquences de 117,4 Hz et 118,6 Hz. Cette inversion est visible sur le MAC de la Figure 3.6. L'ordre du mode double 8 et 9 autour de 88,5 Hz s'est aussi inversé.

L'ordre des deux derniers modes est inversé au niveau des formes. Plusieurs causes expliquent ceci. Le mode 13 est mal identifié expérimentalement et le modèle numérique contient deux modes aux alentours de 167 Hz et 167,7 Hz. Le premier de ces deux modes, de flexion dans le plan, n'a pas été identifié expérimentalement. On en déduit que l'inversion des modes 12 et 13 et le mauvais MAC entre mode 13 numérique et mode 12 expérimental est dû à la qualité de l'analyse modale expérimentale. Cet argument de mauvaise identification des déformées modales expérimentales explique aussi l'inversion des modes 8 et 9.

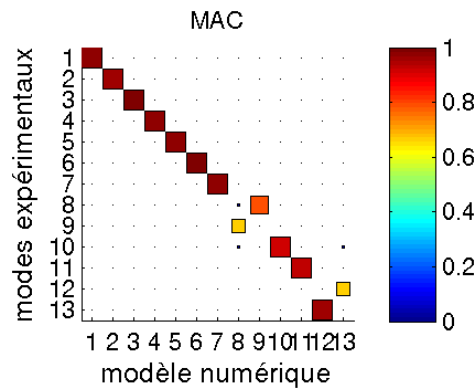


Figure 3.6. MAC entre les modes numériques calculés pour le jeu de raideurs minimisant l'erreur et les modes expérimentaux.

L'analyse des différents vecteurs de paramètres minimisant la fonctionnelle montre qu'il n'y a clairement pas unicité de la configuration de raideurs permettant de bien approcher les fréquences. Ceci est confirmé en classant les tirages de paramètres par erreur décroissante, comme montré en Figure 3.7. Il y a clairement une tendance à l'augmentation conjointe des raideurs en translation pour minimiser l'écart des fréquences. Par contre, plusieurs ordres de grandeurs donnent des résultats comparables. Cela est aussi vrai pour des erreurs très proches de l'erreur finale, environ 0,01 % pour les 100 derniers tirages.

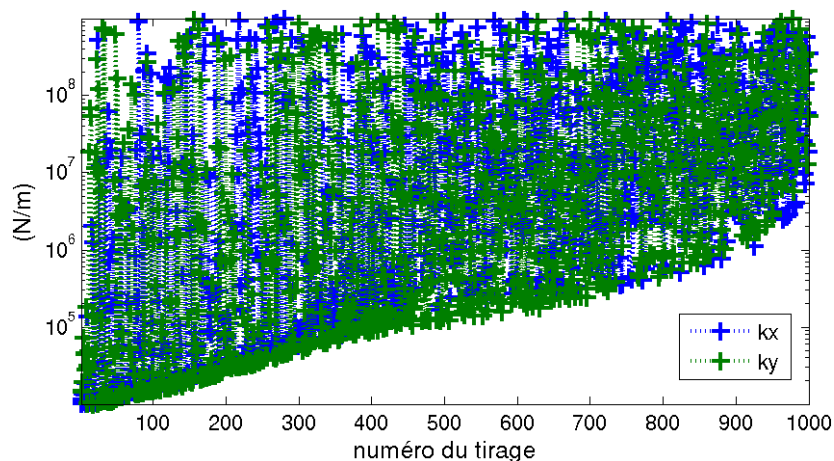


Figure 3.7. Raideurs selon x et y ordonnées par erreur décroissante.

### 3.1.6. Analyse de sensibilité locale

Dans cette sous-partie, on effectue une analyse de sensibilité locale autour d'un jeu de paramètres. On calcule les évolutions des fréquences en fonction de chacune des six raideurs. On trace par exemple l'évolution des fréquences propres pour une variation de la raideur

selon  $DY$  (Figure 3.8). On reproduit aussi les fréquences identifiées expérimentalement (horizontale en pointillés verts) et la valeur de raideur donnée par le tirage (verticale rouge). Plus le mode est d'ordre élevé, plus la raideur permettant une stabilisation de la fréquence de ce mode est élevée. Pour les cinq autres raideurs, si celles-ci sont supérieures à une valeur seuil alors toutes les valeurs supérieures donnent les mêmes résultats. Cette stabilisation de la fréquence explique pourquoi nous obtenons tant de combinaisons différentes de raideur minimisant l'erreur sur les fréquences.

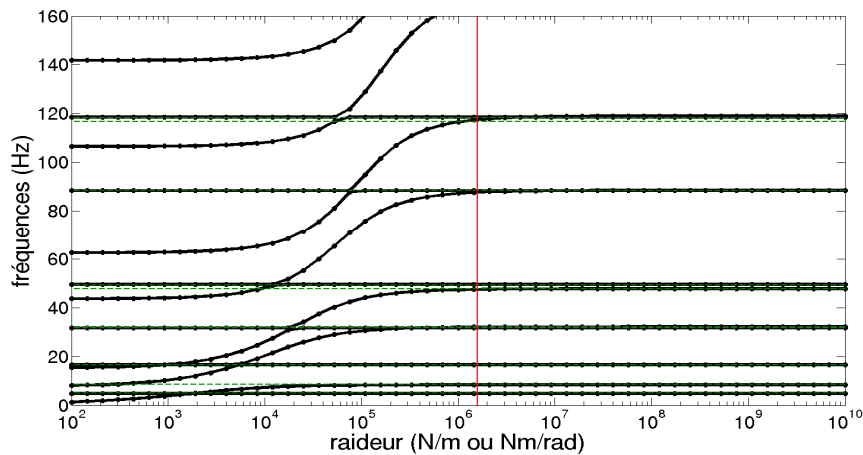


Figure 3.8. évolution des fréquences propres en fonction de la raideur en pied de tube selon  $DY$ .

Les modes non considérés lors du recalage du modèle (ceux au-dessus de 200 Hz) et présents dans la base de réduction peuvent avoir leur fréquence sensible à une ou plusieurs valeurs de raideur.

### 3.1.7. Conclusion et choix d'un jeu de raideurs

Nous avons vu que de très nombreux jeux de paramètres conduisent aux mêmes fréquences propres du tube supporté par des raideurs discrètes en pied. De plus, les raideurs discrètes ne sont sensibles que sur une faible gamme. On ne peut pas parfaitement recalibrer notre modèle numérique. On a donc choisi arbitrairement un jeu de paramètres parmi ceux minimisant l'erreur construite précédemment. Il est associé au MAC tracé en Figure 3.6. Pour les simulations numériques de la dynamique non-linéaire du tube, on retient donc les valeurs du Tableau 3.2. Les amortissements modaux seront pris à 1 % pour les deux premiers modes, 0,4 % pour les troisième et 0,2 % pour les suivants. Cette valeur est communément admise pour les structures métalliques multi-supportées. Les amortissements plus élevés des premiers modes sont liés au processus expérimental utilisé, de la cire ayant été introduite pour réduire les non-linéarités de contact lors de l'acquisition. Cette cire n'a pu être totalement enlevée, ce qui explique que les amortissements sur-estimés sont gardés pour les simulations non-linéaires. Pour enlever totalement la cire, il aurait fallu faire sortir le tube de la PE, donc pour cela le libérer de sa bride. Il aurait donc fallu refaire une identification modale des nouveaux paramètres de serrage et pour cela sûrement remettre de la cire...

Paramètre	Valeur
$\rho$	8357 kg/m <sup>3</sup>
$E$	2,056.10 <sup>11</sup> N/m <sup>2</sup>
$k_{DX}$	6,201.10 <sup>6</sup> N/m
$k_{DY}$	1,575.10 <sup>6</sup> N/m
$k_{DZ}$	10 <sup>12</sup> N/m
$k_{DRX}$	4,502.10 <sup>7</sup> Nm/rad
$k_{DRY}$	1,984.10 <sup>7</sup> Nm/rad
$k_{DRZ}$	10 <sup>12</sup> Nm/rad

Tableau 3.2. Paramètres du modèle numérique recalé.

## 3.2. Modélisation de la zone de contact tube/PE

Après avoir construit un modèle de tube recalé, on construit ici un modèle de contact. On construit en section 3.2.1 un modèle de contact discret, reproduisant l'effet de l'épaisseur de la PE. La discrétisation des points de contact sur l'épaisseur de la PE est étudiée en section 3.2.2. Des configurations à DDL bloqués sont introduites en section 3.2.3 afin de fournir des comparaisons avec GEVIBUS. On choisit la formulation de poutre en sections 3.2.4 et 3.2.5 en étudiant les blocages de DDL introduits pour des poutres de Timoshenko ou de Bernoulli. On étudie plus finement une configuration limite de blocage de DDL en section 3.2.6. Enfin, une analyse détaillée de l'influence de la raideur de contact bilatéral et une comparaison avec des blocages particuliers sont réalisées en section 3.2.7.

### 3.2.1. Modélisation du contact avec ovalisation

On suppose qu'un modèle de contact entre solides déformables serait une bonne approximation du contact entre le tube et la plaque. Le tube est cependant modélisé à l'aide de poutres dont la section est non déformable et les plaques entretoise sont considérées rigides.

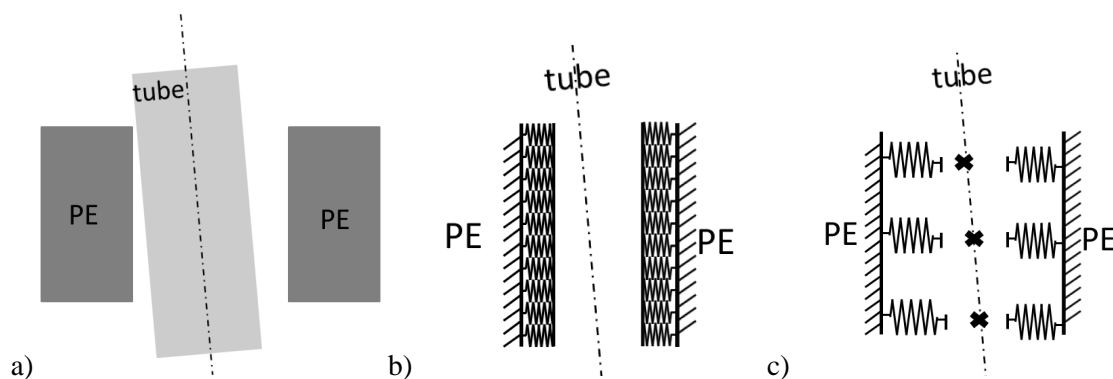


Figure 3.9. Trois modélisations du contact. a) entre solides. b) entre une fibre neutre et une densité de raideur. c) entre une fibre neutre et des raideurs discrètes.



Pour approcher le modèle idéal, on utilise comme indiqué en Figure 3.9 une densité de raideur de contact. En considérant un contact sans frottement, le traitement exact des conditions de non-pénétration des surfaces donne en série :

- une raideur associée à la déformation du tube, que l'on peut assimiler à la raideur d'ovalisation du tube ;
- la condition de contact parfait, équivalente à une raideur unilatérale infinie ;
- une raideur associée à la déformation de la PE, *a priori* d'ordre de grandeur supérieur à la raideur d'ovalisation du tube.

La mise en série de ces trois raideurs conduit à une raideur de contact, qui satisfait à l'égalité

$$\frac{1}{k_{cont}} = \frac{1}{k_{oval}} + 0 + \frac{1}{k_{PE}}. \quad (3.4)$$

La valeur de la raideur de contact globale entre le tube et la PE,  $k_{cont}$ , a été évaluée expérimentalement sur le banc GV-LOCAL [And1] : moyenne de  $4,6 \cdot 10^6$  N/m avec un écart-type de  $3,7 \cdot 10^6$  N/m. Cette raideur de contact, mesurée sur le banc GV-LOCAL dans ses conditions spécifiques d'utilisation, sans colmatant notamment, est du même ordre de grandeur que la raideur d'ovalisation du tube, donnée empiriquement dans [Ant1] en fonction du module d'Young du tube  $E$  et de l'épaisseur et du diamètre moyen par

$$k_{oval}^{theorique} = 1,9E \left( \frac{d_e - d_i}{2} \right) \left( \frac{d_e - d_i}{d_e + d_i} \right)^{3/2}. \quad (3.5)$$

Cette raideur théorique est ici évaluée à  $7,6 \cdot 10^6$  N/m. Cela confirme que la raideur du module de PE est très supérieure à la raideur d'ovalisation du tube. En effet, comme

$$\frac{1}{k_{oval}^{theorique}} \approx \frac{1}{k_{oval}} + \frac{1}{k_{PE}},$$

on peut raisonnablement déduire que la raideur en traction-compression de la PE, plaque massive en acier, est bien telle que  $k_{PE} \gg k_{oval}$ . Ainsi, la PE est beaucoup plus rigide que le tube et on peut donc considérer que le tube entre en contact avec des obstacles indéformables. Ceci est en partie vérifié par une étude de sensibilité du module d'Young sur les fréquences propres d'un modèle 3D en contact permanent [Mik1].

En pratique, le contact n'est pas établi sur l'ensemble de l'épaisseur de la PE. On répartit donc la raideur globale introduite plus haut en une densité linéique constante de raideur de contact,  $k_{cont,dis}$ , en N/m<sup>2</sup>. La discrétisation de cette raideur linéique peut être plus ou moins fine comme illustré en section 3.2.2. Il convient alors de pondérer les raideurs affectées aux obstacles discrets de façon à conserver la raideur globale obtenue pour une translation rigide du tube.

Par ailleurs par rapport aux essais, la géométrie de la zone de contact a été simplifiée, en adoptant une forme circulaire pour l'obstacle, à la place du foliage original.

Le contact est supposé n'être décrit que par une raideur normale de contact. Ni frottement, ni raideur tangentielle, ni amortissement de choc ne sont pris en compte. La loi effort/déplacement associée au contact a donc une forme linéaire par morceaux. Si l'on note  $\rho_{nc}$  le déplacement radial (dans le plan perpendiculaire à la fibre neutre) du nœud de choc  $nc$ , cette relation s'écrit, en notant  $(*)^+$  la partie positive de  $*$ ,

$$\vec{F}_{contact}^{NL} = \sum_{nc} k_{cont,dis} (\rho_{nc} - g)^+ \frac{-\vec{\rho}_{nc}}{\rho_{nc}}. \quad (3.6)$$

Cette relation effort/déplacement est tracée en Figure 3.10. Tant que le déplacement est inférieur au jeu, la force de contact est nulle. Dès que le déplacement est supérieur au jeu, la relation est affine de pente  $k_{cont,dis}$ . La force de contact est donc continue. Elle est dérivable partout sauf au niveau du jeu. De cette relation, on peut extraire deux valeurs de raideur. La raideur locale est la pente locale de la courbe. Elle est nulle à gauche ou égale à  $k_{cont,dis}$  à droite. La raideur sécante est la pente de la droite reliant le point courant à l'origine. Cette raideur sécante varie de 0 à  $k_{cont,dis}$  pour un déplacement tendant vers l'infini. Elle correspond à une vision globale de la relation effort/déplacement, sans tenir compte de détails du modèle de contact. On les notera  $k_{loc}$  et  $k_{sec}$ .

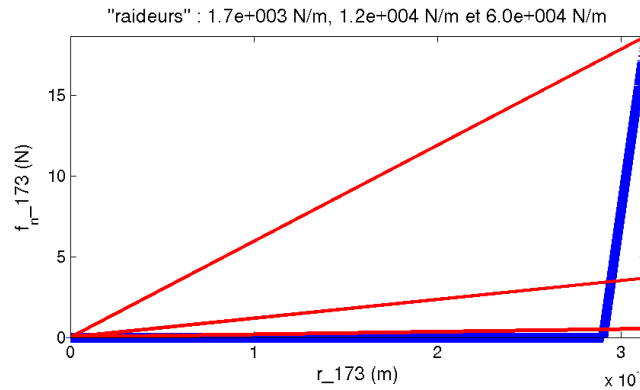


Figure 3.10. Relation effort normal / déplacement radial à un nœud de contact. En bleu, les différents points calculés. En rouge, différentes raideurs sécantes.

Pour un tube GV dans son environnement, notamment en présence de colmatage, lorsque le jeu tend vers 0, le comportement se rapproche d'un comportement en contact permanent. L'ovalisation du tube est alors contrainte et la raideur correspondante doit être plus élevée qu'au nominal. Les propriétés mécaniques du colmatant sont mal connues et dépendent de sa composition précise [Tur1]. Le module d'Young, mesuré sur des pétales de colmatant, est de l'ordre de  $3,5-5 \cdot 10^{10}$  Pa, moins d'un ordre de grandeur sous le module de l'acier inox des PE. L'étude de sensibilité [Mik1] montre qu'on peut donc considérer le colmatant comme étant constitué du même matériau que les PE. Au final, la raideur de contact dépendrait donc principalement de l'ovalisation du tube. Néanmoins, une large gamme de raideur sécante  $k_{cont}$  [ $10 - 10^{14}$ ] N/m sera considérée pour les analyses paramétriques linéaires.

En partant de l'hypothèse que le comportement non-linéaire à un niveau d'excitation donné peut être analysé en définissant une raideur bilatérale équivalente (raideur sécante par exemple), on commence par analyser les caractéristiques du système linéaire en contact bilatéral avec une raideur variable. Les fréquences, tracées en Figure 3.11, présentent trois paliers. Entre ces trois paliers, deux phases où les fréquences évoluent rapidement, avec de nombreux croisements de modes. Certains modes, par exemple le premier, de flexion hors-plan, ne croisent aucun mode. D'autres, par exemple les modes 2 à 5, finissent par converger vers un mode quadruple. Cela est conforme à l'intuition de ce que sont les modes lorsque le

tube est bloqué au niveau des PE : des modes de cintre et des modes quadruples de jambe. Sur le second palier, les fréquences sont proches de celles du système avec un appui simple au niveau de chaque PE.

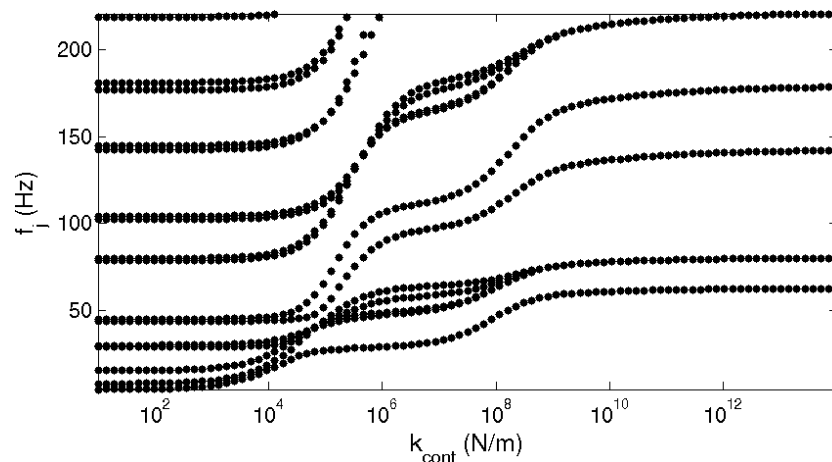


Figure 3.11. Évolution des seize premières fréquences propres du modèle complet en fonction de la raideur de contact bilatéral pour vingt-et-un niveaux d'obstacles.

En observant les déformées du premier mode (Figure 3.12), on remarque que la transition se fait bien d'un tube *libre* à un tube *encastré au niveau des PE*, en passant par un tube *appuyé*. Dans le cas libre, pour de faibles raideurs de contact bilatéral, la raideur de contact n'a pas d'influence sur les fréquences et déformées. Dans le cas appuyé, pour des raideurs de contact bilatéral intermédiaires, le déplacement est contraint aux environs de la PE mais la déformée semble libre d'osciller autour d'un point. Pour de fortes raideurs de contact bilatéral, le déplacement et la rotation sont annulés au niveau des PE et le déplacement sur les jambes est nul.

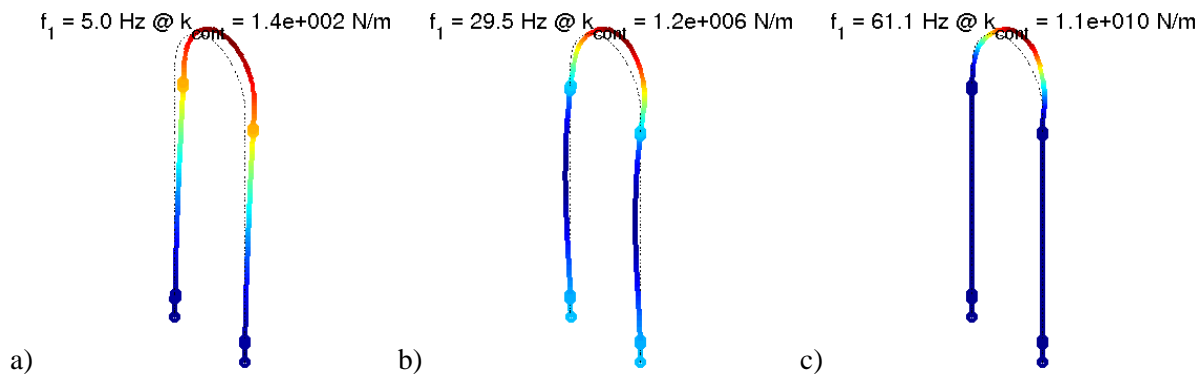


Figure 3.12. Déformée du premier mode de flexion hors-plan du modèle complet calculée pour trois raideurs de contact bilatéral et vingt-et-un niveaux d'obstacle.

### 3.2.2. Influence du nombre de points de contact retenus sur une PE

On considère des configurations du tube à contact permanent, des raideurs discrètes selon  $DX$  et  $DY$  étant connectées au tube pour chaque niveau d'obstacle de chaque module de PE. On considérera un nombre de niveaux d'obstacles variable ; vingt-et-un niveaux définissent le comportement limite vers lequel on tend quand le nombre d'obstacles augmente. On étudie,

sur modèle complet, l'effet de la raideur de contact bilatéral sur les modes propres. On résout donc l'équation (3.19).

L'évolution des fréquences propres en fonction de la valeur de raideur de contact permanent, tracée sur la Figure 3.13 nous donne deux indications. À valeur de raideur fixée, la distribuer en augmentant le nombre de niveaux d'obstacles assouplit la structure. En effet, les fréquences obtenues pour deux niveaux sont plus élevées que celles obtenues pour plus de niveaux. Il y a certes plus de raideurs discrètes connectées au tube mais elles sont de raideur plus faible. On facilite ainsi les rotations du tube autour de la PE. Deuxièmement, on retrouve, sur les premiers modes, les évolutions de fréquence du système libre au système bloqué, comme montré en Figure 3.11.

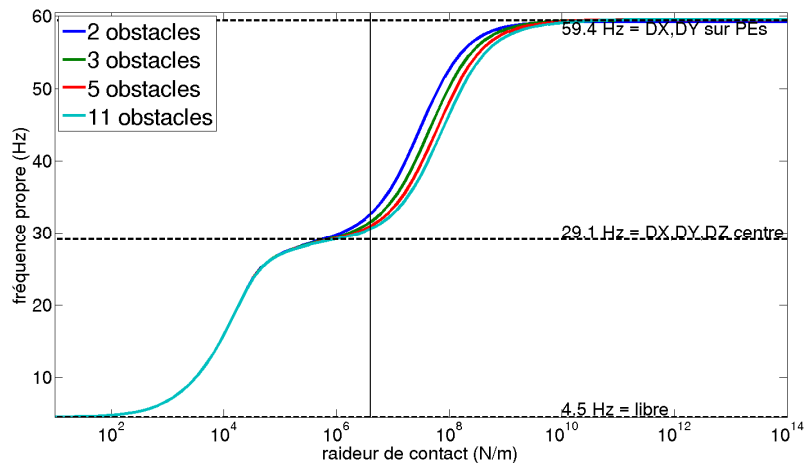


Figure 3.13. Influence de la raideur de contact sur la fréquence du mode 1. Les quatre configurations convergent vers la fréquence du premier mode de cintre « bloqué ». Modèle de poutre de Timoshenko.

La première courbe a été réalisée avec un modèle de poutre de Timoshenko. L'influence de cette formulation sera discutée en sections 3.2.4 et 3.2.5. En Figure 3.14, on retrouve les mêmes tendances pour un modèle de Bernoulli. Pour une raideur de contact inférieure à  $10^6$  N/m, l'écart de fréquence entre 5, 11 et 21 obstacles est très faible. Le choix de cinq niveaux paraît donc un bon compromis précision/coût.

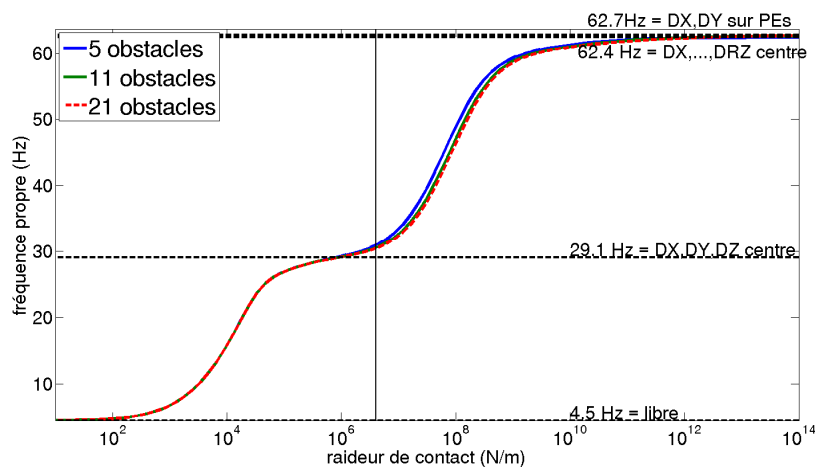


Figure 3.14. Évolution des fréquences propres 1, 2, 6 et 7 en fonction de la raideur de contact, pour cinq, onze et vingt-et-un niveaux d'obstacles. Les fréquences tendent vers les fréquences « bloquées ». Modèle de poutre de Bernoulli.

Avec cinq niveaux d'obstacles par PE, on retrouve en Figure 3.15 les évolutions de fréquence calculées avec vingt-et-un niveaux d'obstacle. Le mode 1 reste le mode 1. Les modes 2 à 5 se croisent et convergent vers un mode quadruple de jambes. Les modes 6 et 7 restent dans cet ordre et deviennent les deuxième et troisième modes de cintre. Les quatre modes suivants se transforment en un autre mode quadruple. On remarque de nouveau que, plus la fréquence d'un mode est élevée, plus la valeur de raideur commençant à influencer cette fréquence est élevée.

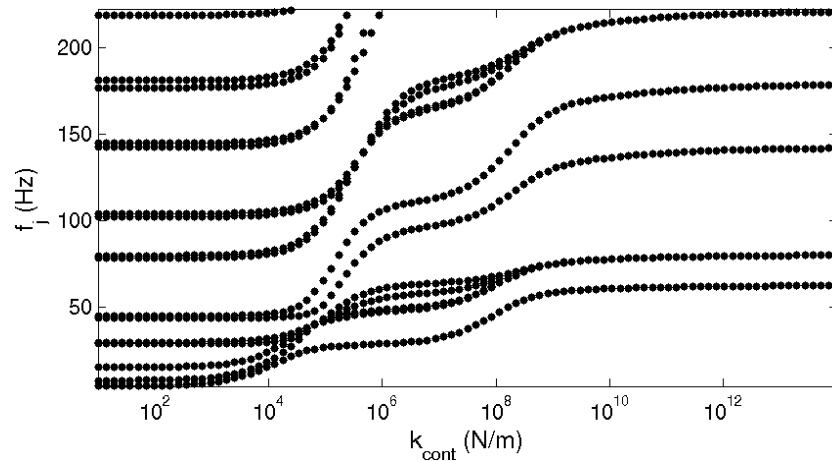
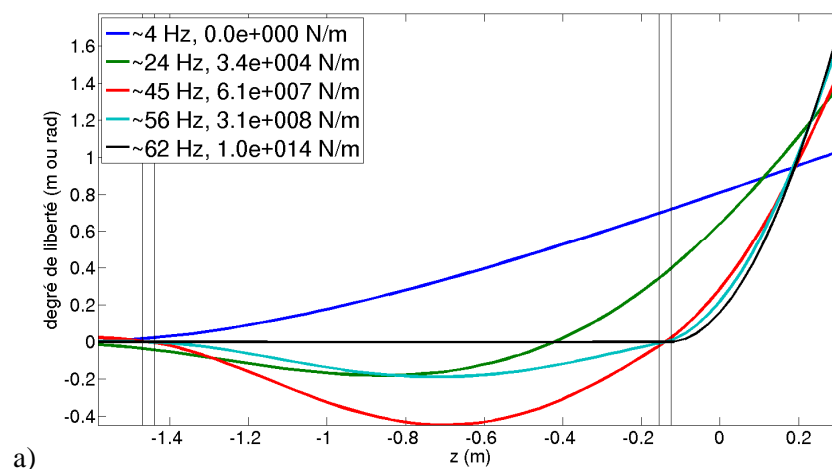


Figure 3.15. Évolution des premières fréquences propres en fonction de la raideur de contact. Calcul à cinq niveaux d'obstacles.

Il est utile d'observer la transformation des composantes des déformées modales quand la raideur de contact augmente. Le mode 1 du tube libre (flexion hors-plan) se transforme en mode 1 du cintre (flexion hors-plan) comme cela est montré en Figure 3.16 par l'évolution des degrés de liberté  $DX$  et  $DRY$ . Pour une raideur nulle, donc un système libre, les DDL  $DX$  et  $DRY$  sont faibles en pied de tube, où une raideur discrète est placée, et ne présentent aucun nœud de vibration. Augmenter la raideur tend à faire diminuer le DDL considéré au niveau des PE. Un nœud de vibration apparaît alors au niveau de chaque PE et le système est alors proche de conditions appuyées. Pour des raideurs plus élevées, le DDL et sa dérivée deviennent nuls sur la PE : on a convergé vers une configuration se rapprochant d'un encastrement.



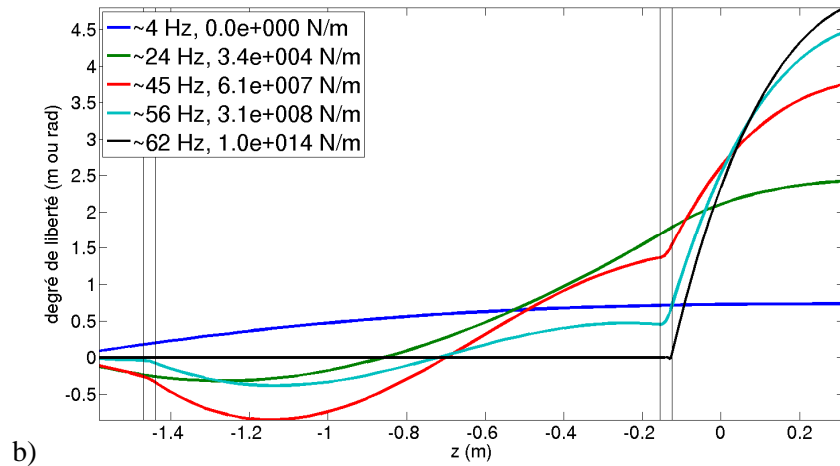


Figure 3.16. a) DDL DX pour le premier mode b) DDL DRY pour le premier mode. Cinq niveaux d'obstacles ont été considérés, en fonction de l'altitude, paramétré par la raideur de contact permanent.

En Figure 3.17, on considère le mode 7 qui est, pour la structure libre, le mode 2 de torsion. Il se transforme en mode 1 de torsion du cintre. Pour des raideurs élevées, le mouvement DX est nul sur la jambe du tube.

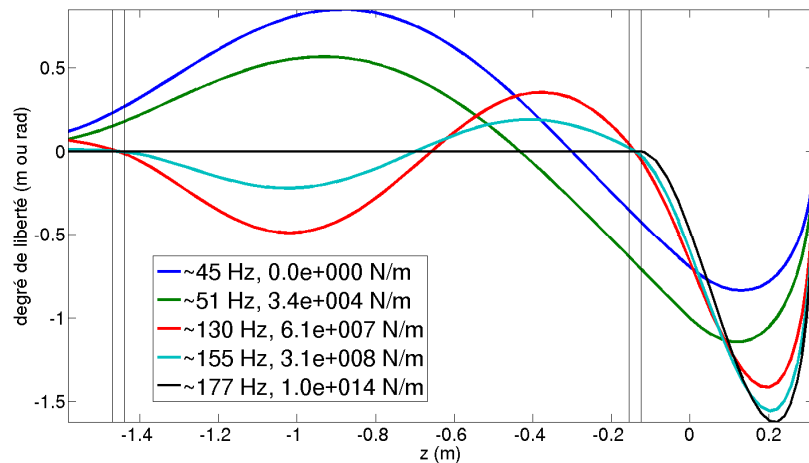


Figure 3.17. DDL DX pour le septième mode, en fonction de l'altitude, paramétré par la raideur de contact permanent. Cinq niveaux d'obstacles ont été considérés.

### 3.2.3. Liens avec les modèles à DDL bloqués utilisés dans GEVIBUS

Pour réaliser les calculs de stabilité, GEVIBUS ne prend actuellement en compte que deux conditions aux limites, toutes deux appliquées sur le nœud supérieur de chaque PE : l'appui simple (ou rotule) et l'encastrement. En généralisant un peu cette approche, on considère ici les conditions de blocage du Tableau 3.3. Ce choix de configuration permet de percevoir l'effet des DDL DZ et DRZ ainsi que des DDL de rotation DRX et DRY.

Configuration	DDL bloqués					
	$DX$	$DY$	$DZ$	$DRX$	$DRY$	$DRZ$
1	$DX$	$DY$	$DZ$	$DRX$	$DRY$	$DRZ$
2	$DX$	$DY$	$DZ$	$DRX$	$DRY$	
3	$DX$	$DY$		$DRX$	$DRY$	$DRZ$
4	$DX$	$DY$	$DZ$			$DRZ$
5	$DX$	$DY$		$DRX$	$DRY$	
6	$DX$	$DY$				$DRZ$
7	$DX$	$DY$	$DZ$			
8	$DX$	$DY$				
9						

Tableau 3.3. Description de neuf configurations de blocage de DDL.

En considérant dans un premier temps l'application de ces blocages à un ou plusieurs niveaux d'obstacles, on voit en Figure 3.18 que les configurations à un obstacle ne bloquant pas les rotations  $DRX$  et  $DRY$  (4,6,7,8) ont des fréquences très différentes de celles à plusieurs obstacles. Par exemple, pour plus de un niveau d'obstacle, les fréquences de la configuration 7 (appui simple) sont plus proches de la fréquence d'encastrement (configuration 1) que de la fréquence d'appui. Ce comportement attendu (équivalence rotation/translation différentielle), permet d'éliminer les configurations à un obstacle des analyses ultérieures. En effet, la loi de contact ne porte que sur les déplacements radiaux : en bloquant des DDL de translation, on doit pouvoir s'approcher d'un appui continu.

Les configurations 1, 2, 3 et 5 donnent des fréquences très proches : bloquer les rotations  $DRX$  et  $DRY$ , même sur un niveau d'obstacle, rapproche le comportement de celui d'un appui continu. Ceci est représentatif du comportement d'un tube dont les translations selon  $DX$  et  $DY$  sont bloquées sur les 3 cm de l'épaisseur des PE. On remarque aussi, en comparant les configurations 2 et 3 et les configurations 7 et 6, que la rotation  $DRZ$  a plus d'influence que la translation  $DZ$ . Cela s'explique par la très grande raideur en translation selon  $z$  en pied de tube et par le fait que les modes de flexion, notamment hors-plan, induisent des rotations  $DRZ$  non nulles.

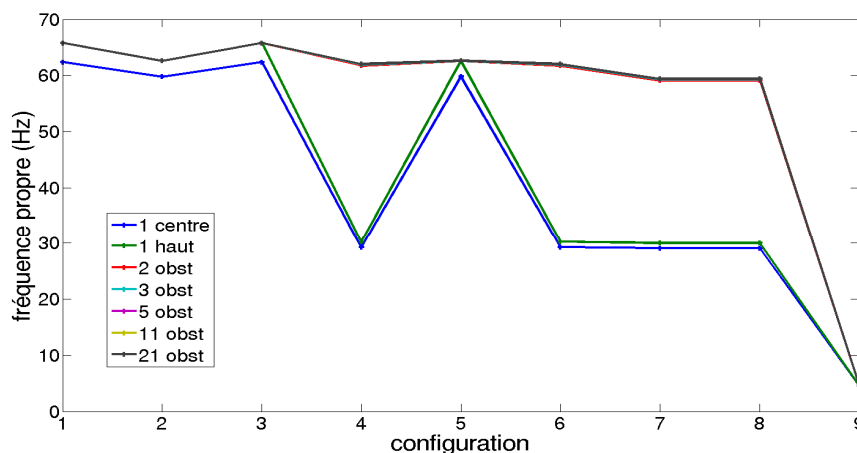


Figure 3.18. Évolution de la première fréquence propre en fonction de la configuration des DDL bloqués et du nombre d'obstacles par module de PE.

De manière générale, bloquer au moins deux niveaux d'obstacle donne des fréquences très comparables. Pour les analyses ultérieures on élimine donc les modèles à un niveau d'obstacle et applique les mêmes blocages à tous les niveaux.

### 3.2.4. Blocages pour le modèle de poutre Timoshenko

Deux formulations d'éléments de poutre sont utilisées couramment : la formulation de Timoshenko et la formulation d'Euler-Bernoulli. On cherche dans cette section à choisir entre les deux formulations.

Dans le Tableau 3.4, on relève les fréquences des trois premiers modes de cintre, pour un blocage sur vingt-et-un niveaux d'obstacles. En effet, bloquer des DDL entraîne l'apparition de modes quadruples, où le mouvement est principalement concentré sur les jambes du tube. La comparaison des déformées de quelques configurations explique les écarts de fréquence.

	DDL bloqués	Mode 1 (Hz)	Mode 2 (Hz)	Mode 3 (Hz)
1	$DX, DY, DZ, DRX, DRY, DRZ$	65,8	142,5	183,2
2	$DX, DY, DZ, DRX, DRY$	62,6	142,5	178,2
3	$DX, DY, DRX, DRY, DRZ$	65,8	141,3	183,2
4	$DX, DY, DZ, DRZ$	62,0	133,3	172,5
5	$DX, DY, DRX, DRY$	62,6	141,3	178,2
6	$DX, DY, DRZ$	62,0	132,2	172,5
7	$DX, DY, DZ$	59,4	133,3	166,2
8	$DX, DY$	59,4	132,2	166,2
9	aucun	4,5	7,8	15,5

Tableau 3.4. Fréquences des trois premiers modes de cintre, en fonction des blocages de DDL. Modèle de Timoshenko.

On constate cependant un écart d'environ 5% entre les trois fréquences de cintre entre les configurations 5 et 8. Un tel écart semble étrange car bloquer les translations  $DX$  et  $DY$  sur vingt-et-un niveaux répartis sur 3 cm semblerait suffisant pour annuler les rotations sur cette épaisseur. La différence serait donc entre des rotations très faibles et des rotations nulles. On constate en Figure 3.19 que la rotation  $DRY$  n'est pas nulle sur la PE 8. L'annuler en configuration 5 raidit donc la structure. Cette apparente contradiction est liée au cisaillement possible dans le modèle de Timoshenko qui distingue donc  $DRY$  de la pente de  $DX$ . Il semble possible que le phénomène soit amplifié par la technique classique de sous-intégration à un point pour la raideur en cisaillement utilisée par SDT. Cette technique évite le phénomène de verrouillage en cisaillement pour des éléments de longueur significative mais trouve peut être ici sa limite. Pour l'application présente, le modèle de Bernoulli sera préféré, car il ne présente pas cet effet mal compris. Seule une analyse 3D détaillée pourrait vraiment étayer le caractère plus physique de l'un ou l'autre.



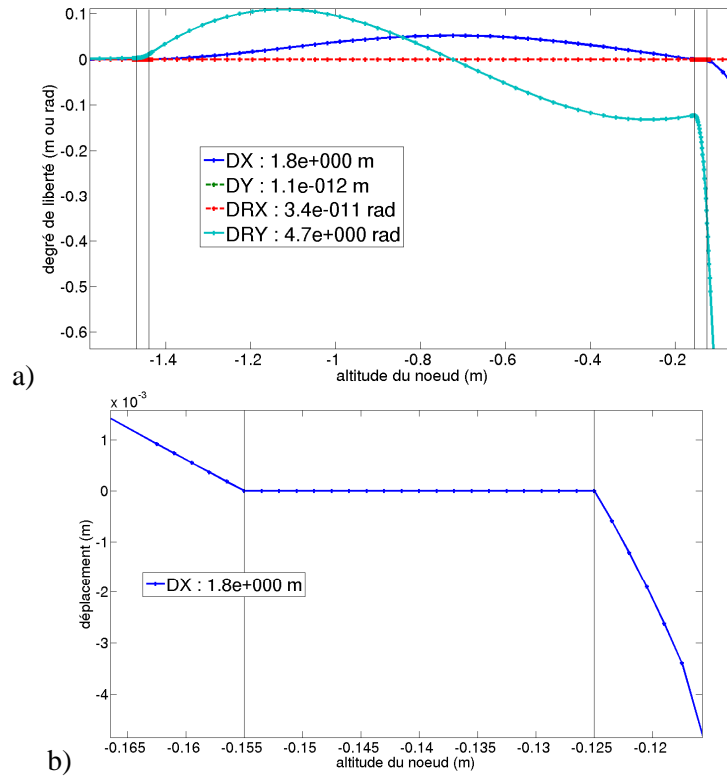


Figure 3.19. a) DDL  $DX$ ,  $DY$ ,  $DRX$  et  $DRY$  pour le premier mode de cintre de la configuration 8 ( $DX$  et  $DY$  bloqués). b) DDL de translation  $DX$  pour le premier mode de cintre de la configuration 8 ( $DX$  et  $DY$  bloqués), zoom autour de la PE8. Vingt-et-un niveaux d'obstacles ont été considérés.

Par ailleurs, contraindre  $DZ$  fait gagner 1 Hz au deuxième mode de cintre entre la configuration 4 et la configuration 6. Les fréquences des modes 1 et 3 de cintre ne sont pas impactées par le blocage de  $DZ$  car le maximum de déplacement selon  $DZ$  est respectivement de  $2.10^{-14}$  m et  $2.10^{-10}$  m. Le deuxième mode de cintre, une flexion dans le plan, a lui une composante  $DZ$  non nulle. Comme tracé sur une moitié de tube en Figure 3.20, le déplacement  $DZ$  est non nul en pied de tube. Le tube s'allonge sur la jambe et s'écrase verticalement au niveau du cintre.

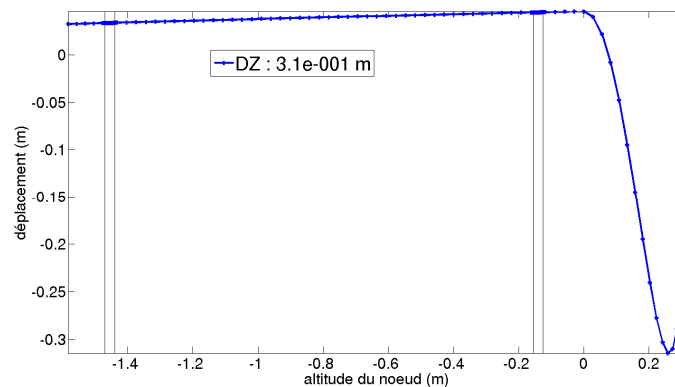


Figure 3.20. DDL de translation  $DZ$  pour le second mode de cintre de la configuration 6. Vingt-et-un niveaux d'obstacles ont été considérés.

L'affichage des degrés de liberté a montré que bloquer les DDL de translation  $DX$  et  $DY$  sur les vingt-et-un nœuds de la PE ne permet pas, pour une formulation de Timoshenko, d'annuler les DDL de rotation  $DRX$  et  $DRY$ . De plus, la lecture du Tableau 3.4 permet de tirer quelques conclusions sur le modèle de contact :

- bloquer *DZ* n'affecte que le deuxième mode de cintre, pour une variation de la fréquence de moins de 1%. Cela semble indiquer qu'il n'y a pas besoin de considérer la friction selon la direction axiale ;
- bloquer *DRZ* affecte tous les modes, avec notamment une influence de 5% sur les modes 1 et 3 de cintre. Cela semble indiquer qu'il faille prendre en compte la friction dans la direction circonférentielle. Ceci n'a pas été réalisé, ayant décidé d'utiliser une loi de contact sans dissipation.

### 3.2.5. Blocages pour le modèle de poutre de Bernoulli

Les écarts de fréquence affichés en Figure 3.21 décroissent quand le nombre de niveaux d'obstacles augmente. On n'atteint cependant pas une convergence sur la configuration 8 (*DX* et *DY* bloqués) : il y a une différence de l'ordre de 0,2% sur la première fréquence propre, entre prendre onze ou vingt-et-un niveaux. Mais cet ordre de grandeur est acceptable vis à vis de la précision du calcul modal et d'une démarche de corrélation calcul-essai. La configuration à deux niveaux est elle clairement inacceptable.

On note, sans explication claire, que les écarts sont plus importants que pour le modèle de Timoshenko (2% plutôt que 0.4%, l'écart entre les configurations à onze et vingt-et-un niveaux d'obstacles, bien que de l'ordre de 0,2%, est deux cent fois supérieur à la valeur du modèle de Timoshenko).

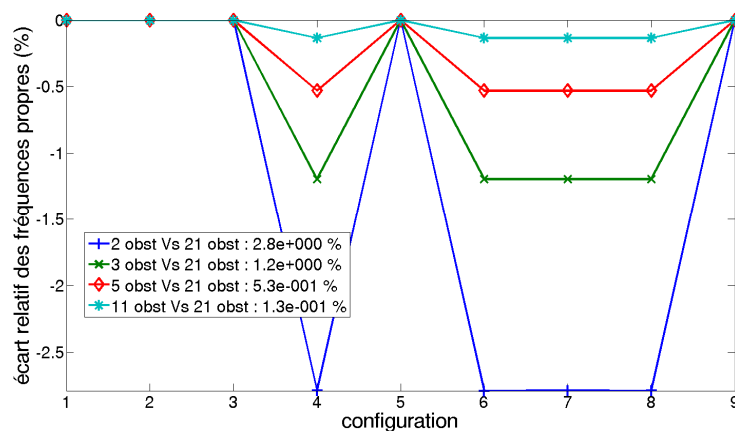


Figure 3.21. Écart relatif sur la première fréquence propre en fonction de la configuration des ddl bloqués et paramétré par le nombre d'obstacles considérés. La valeur maximale de l'écart pour les couples de configurations tracés est affichée en légende.

Observons maintenant les deux déformées modales qui nous avaient paru bizarres avec le modèle de poutre de Timoshenko. Si on compare les configurations 8 et 5, le DDL de rotation *DRY* du premier mode de cintre (flexion hors plan) a maintenant des valeurs plus proches de 0 sur la jambe que précédemment. Comme montré sur la Figure 3.22, seule la configuration à deux niveaux d'obstacles par module de PE donne des rotations *DRY* sur les jambes non négligeables par rapport à ces mêmes rotations sur le cintre. On remarque aussi que les profils de la rotation *DRY* sur le cintre sont assez comparables. Si on ne s'intéresse qu'à une zone autour de l'apex, le nombre d'obstacles influencerait peu. Ajouter plus de niveaux d'obstacles entraîne bien une diminution de la rotation *DRY* au niveau des PE. Les valeurs en limite inférieure et supérieure de la PE8 diminuent en amplitude pour se rapprocher de 0.

L'amplitude est aussi plus faible dans l'épaisseur de la PE, la rotation *DRY* ayant de plus en plus de nœuds de vibration lorsque le nombre d'obstacles augmente, ce qui semble cohérent. On remarque aussi que les pentes avant et après la PE sont comparables entre les différents nombres d'obstacles. On peut donc dès à présent éliminer les configurations à deux et à trois niveaux d'obstacles par PE : elles autorisent de trop grandes rotations *DRY* sur la jambe du tube.

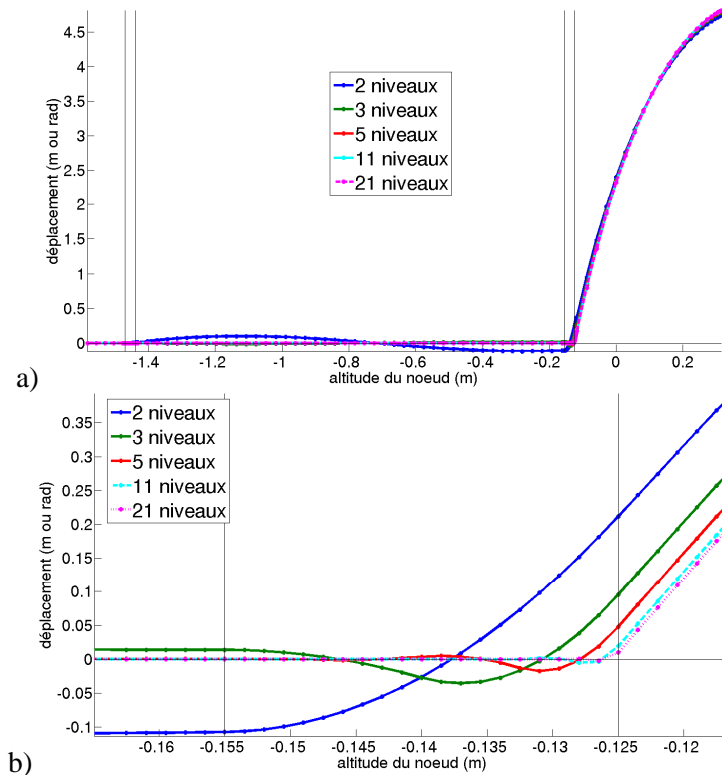


Figure 3.22. DDL de rotation *DRY* pour la configuration 8 (*DX* et *DY* bloqués). a) vue sur l'ensemble du tube. b) zoom sur la PE8.

Les valeurs maximales des rotations *DRY* au niveau des PE et sur la jambe sont reproduites dans le Tableau 3.5. Onze niveaux et vingt-et-un niveaux annulent les rotations *DRY* sur la jambe. Cinq niveaux permettent de les rendre négligeables sur la jambe par rapport à trois niveaux. Les maxima sur la PE8 étant du même ordre de grandeur (il y a environ un rapport 2 entre deux configurations successives), ces valeurs ne permettent pas une discrimination. Le choix de discrétisation de l'obstacle porte donc entre cinq et onze niveaux.

Nombre de niveaux	PE7 (rad)	PE8 (rad)	Jambe (rad)
2	$6,0 \cdot 10^{-3}$	$2,1 \cdot 10^{-1}$	$1,2 \cdot 10^{-1}$
3	$3,6 \cdot 10^{-4}$	$9,5 \cdot 10^{-2}$	$1,5 \cdot 10^{-2}$
5	$6,5 \cdot 10^{-6}$	$4,8 \cdot 10^{-2}$	$5,6 \cdot 10^{-4}$
11	$3,9 \cdot 10^{-10}$	$1,9 \cdot 10^{-2}$	$8,4 \cdot 10^{-8}$
21	$1,4 \cdot 10^{-12}$	$9,7 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-11}$

Tableau 3.5. Valeurs maximales des rotations *DRY* sur différentes parties du tube, pour différents nombres de niveaux d'obstacles.

Comme le deuxième mode de cintre, une flexion dans le plan du tube, présente encore un déplacement  $DZ$  non nul pour la configuration 6, on s'attend à retrouver le même écart de fréquences que précédemment vis-à-vis de la configuration 4. On récapitule, dans le Tableau 3.6, les fréquences des trois premiers modes de cintre pour la poutre de Bernoulli et indique l'écart relatif par rapport à la poutre de Timoshenko. Ces fréquences sont calculées en affectant les blocages aux vingt-et-un nœuds des PE.

	DDL bloqués	Mode 1 (H)	Écart (%)	Mode 2 (Hz)	Écart (%)	Mode 3 (Hz)	Écart (%)
1	$DX, DY, DZ, DRX, DRY, DRZ$	65,9	0,2	143,7	0,8	184,2	0,5
2	$DX, DY, DZ, DRX, DRY$	62,8	0,3	143,7	0,8	179,1	0,5
3	$DX, DY, DRX, DRY, DRZ$	65,9	0,1	142,4	0,8	184,2	0,5
4	$DX, DY, DZ, DRZ$	65,8	5,8	143,4	7,0	183,9	6,2
5	$DX, DY, DRX, DRY$	62,8	0,3	142,4	0,8	179,1	0,5
6	$DX, DY, DRZ$	65,8	5,8	142,2	7,0	183,9	6,2
7	$DX, DY, DZ$	62,7	5,3	143,4	7,0	178,8	7,0
8	$DX, DY$	62,7	5,3	142,2	7,0	178,8	7,0
9	aucun	4,5	0	7,8	0	15,5	0

Tableau 3.6. Fréquence des trois premiers modes de cintre pour un modèle de poutre de Bernoulli, pour différentes conditions de blocage, et écart relatif par rapport au modèle de poutre de Timoshenko.

On remarque que débloquer les rotations  $DRX$  et  $DRY$  a peu d'effet : on retrouve les mêmes fréquences que si elles étaient bloquées. On peut donc conclure que bloquer les translations  $DX$  et  $DY$  suffit à bloquer convenablement les rotations  $DRX$  et  $DRY$ . Cela se retrouve au niveau de l'écart entre les deux modélisations de poutre : inférieur à 0,5 % lorsque  $DRX$  et  $DRY$  sont bloquées, indiquant donc que les deux modélisations sont alors équivalentes, l'écart entre fréquences devient plus grand que 5 % lorsque  $DRX$  et  $DRY$  sont débloquées, indiquant que pour Timoshenko,  $DRX$  et  $DRY$  sont non nulles tandis qu'elles sont maintenues proches de 0 pour Bernoulli par les blocages de  $DX$  et  $DY$ .

Comme précédemment, débloquer  $DZ$  n'a qu'un effet limité sur le second mode de cintre. Débloquer  $DRZ$  a encore un effet sur les modes 1 et 3. La remarque précédente est donc encore valable : il faudrait considérer la friction dans le plan normal au tube et pas la friction dans la direction de la fibre neutre.

Le modèle de Bernoulli donne, vis-à-vis des blocages de DDL, des résultats plus satisfaisants physiquement que le modèle de Timoshenko : nous adoptons cette modélisation.

### 3.2.6. Analyse des modes avec PE bloquée

Il est utile pour la compréhension de détailler un peu plus les caractéristiques des modes obtenus dans la configuration limite de PE bloquée. On considère donc la configuration 8 ( $DX$  et  $DY$  bloqués) à vingt-et-un niveaux d'obstacle.

On trace sur la Figure 3.23 les déformées modales et l'évolution des degrés de liberté  $DX$ ,  $DY$ ,  $DRX$ ,  $DRY$  en fonction de l'altitude pour les trois premiers modes de cintre (modes 1, 6 et 7). Les DDL considérés sont nuls sous la PE8 : ces modes sont de vrais modes de cintre. Les modes 2 à 5 étant des modes de jambe, leurs déformées apportent peu d'information sur le mouvement du cintre. On vérifie que le mode 1 est un mode de flexion hors-plan, le mode 6 est un mode de flexion dans le plan et le mode 7 un mode de torsion selon la verticale. Les modes 2 à 5 sont un mode quadruple de jambes à 80,2 Hz ; les modes 8 à 11 sont un mode quadruple de jambes à 221 Hz.

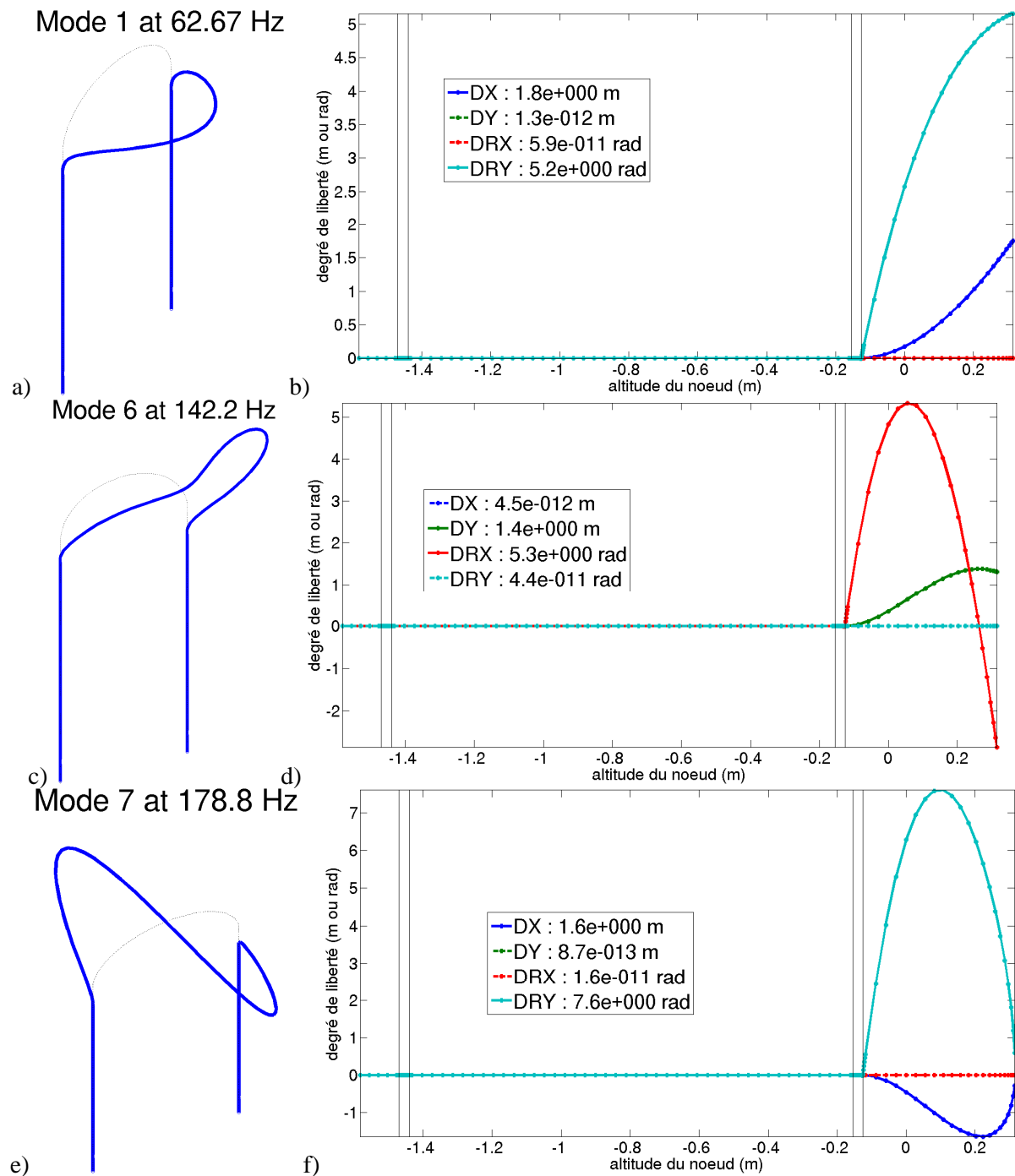


Figure 3.23. Déformée modale (a, c, f) et DDL en fonction de l'altitude, pour une moitié de tube (b, d, f). Trois premiers modes de cintre. Poutre de Bernoulli.

On observe que sur le premier mode (flexion hors-plan),  $DY$  et  $DRX$  sont quasi-nuls. De plus,  $DZ$  est nul et  $DRZ$  est antisymétrique par rapport à la verticale. Pour le deuxième mode (flexion dans le plan),  $DRZ$  est quasi-nul ;  $DZ$  est non nul et antisymétrique. Cela est dû au fait que les conditions aux limites en pied de tube ne sont pas un encastrement (blocage des six DDL) mais la connexion à une raideur discrète ; le tube, en fléchissant dans le plan, lève une jambe et abaisse l'autre. Le troisième mode (torsion) est tel que  $DY$ ,  $DZ$  et  $DRX$ .  $DX$  et  $DRY$  sont antisymétriques,  $DRZ$  est symétrique.

### 3.2.7. Analyse détaillée de l'influence de la raideur de contact

Ayant étayé le choix d'une formulation de poutre de type Bernoulli, de l'utilisation de cinq niveaux d'obstacles par PE, on cherche à analyser plus en détail les variations de fréquence avec la raideur de contact bilatérale affichées en section 3.2.1. On vérifie en particulier que les comportements libres, appuyés et bloqués se retrouvent sur l'évolution en fonction de la raideur bilatérale.

Pour une raideur globale de  $10^2$  N/m, on retrouve les modes libres. L'écart relatif de fréquence est de 8%, 3% et 1% pour les trois premiers modes, puis inférieur à 0,1%. Les MAC-M sont très proches de 1. Après le premier croisement de modes, on retrouve un palier sur l'évolution des fréquences. Les modes pour une raideur globale de  $4.10^6$  N/m sont semblables aux modes avec les  $DX$  et  $DY$  bloqués au centre de chaque PE. Ces modes seront désignés abusivement comme des modes *appuyés*. L'écart relatif sur les fréquences et le MAC-M (MAC construit avec le produit scalaire associé à la matrice de masse, symétrique, définie et positive) sont tracés en Figure 3.24. L'écart relatif des fréquences est compris entre 8% et -2,5 %. Le MAC-M le plus faible est de 0,995 sur les modes de fréquence inférieure à 200 Hz. Les modes se ressemblent tant sur les fréquences que sur les déformées.

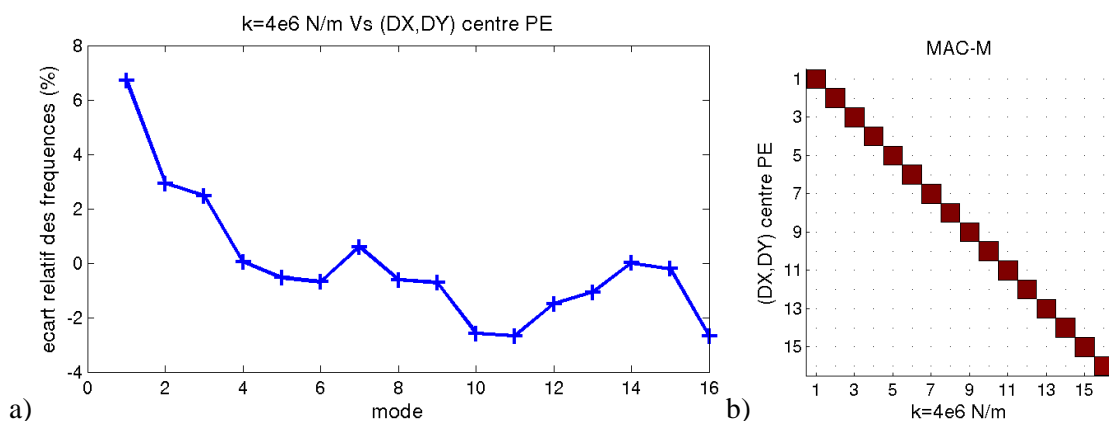


Figure 3.24. Comparaison des modes pour une raideur globale de  $4.10^6$  N/m et un blocage de  $DX$  et  $DY$  au centre des PE. a) écart relatif des fréquences. b) MAC-M.

On superpose les déformées en Figure 3.25. Celles-ci coïncident parfaitement.

À partir de  $10^8$  N/m, certaines fréquences convergent vers des modes de jambe, qui sont quadruples voir la Figure 3.27 avec le mode 5, et des modes de cintre. Les modes sont stables pour des raideurs supérieures à cette valeur et semblables aux modes avec les DDL  $DX$  et  $DY$  bloqués sur cinq niveaux pour chaque PE. Ces modes seront désignés abusivement comme des modes *bloqués* ou *encastres*. L'écart relatif sur les fréquences et le MAC-M sont tracés en

Figure 3.26. L'écart relatif des fréquences est compris entre 0% et -2,5 %. Le MAC-M le plus faible est de 0,995 sur les modes de fréquence inférieure à 200 Hz.

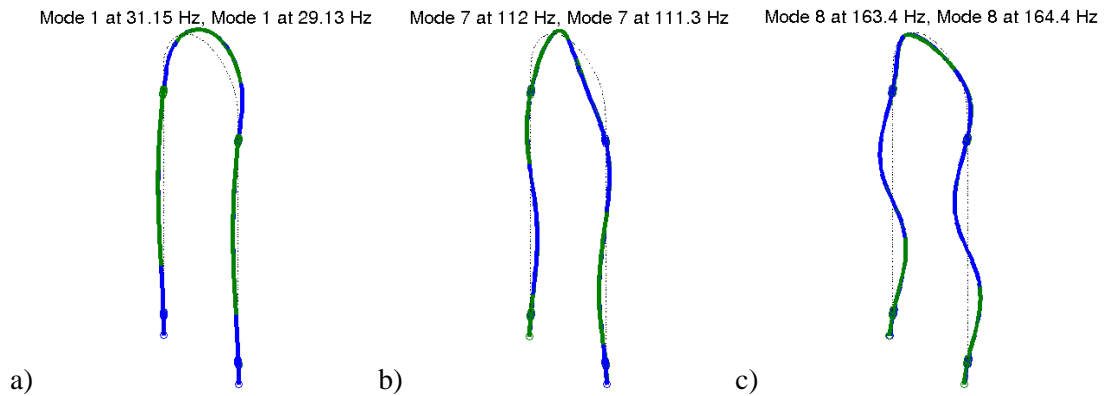


Figure 3.25. Superposition des déformées calculées pour une raideur globale de  $4 \cdot 10^6$  N/m (bleu) et un blocage de DX et DY au centre des PE (vert). Les déformées sont : a) flexion hors-plan, b) torsion, c) flexion hors-plan. Les MAC-M sont : 100,0 % (a), 99,8 % (b) et 99,7 % (c).

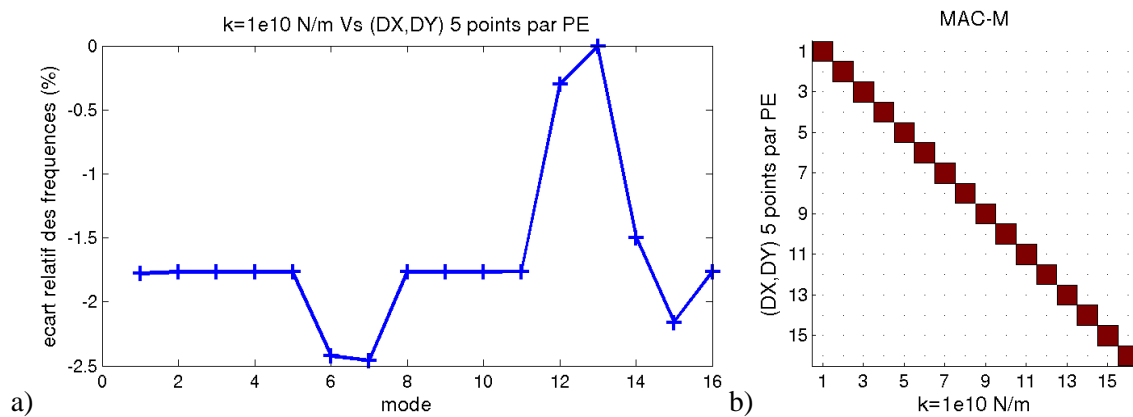


Figure 3.26. Comparaison des modes pour une raideur globale de  $10^{10}$  N/m et un blocage de DX et DY sur l'épaisseur des PE. a) écart relatif des fréquences. b) MAC-M.

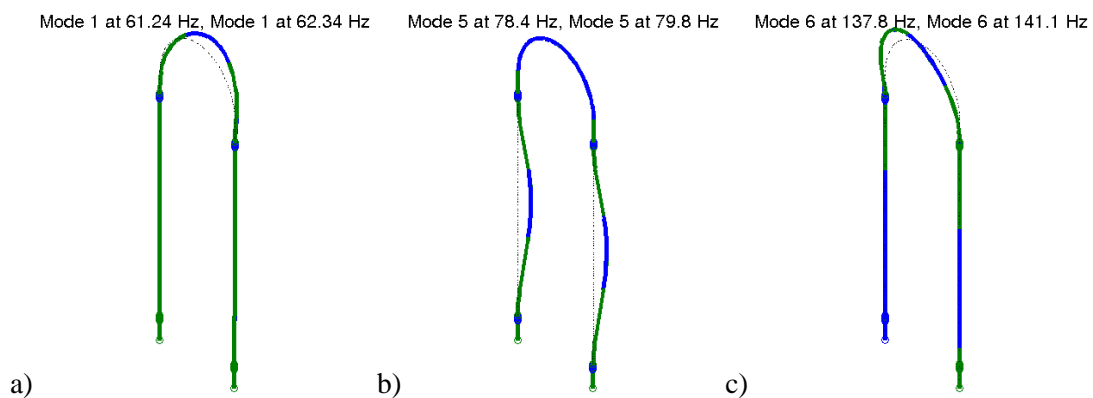


Figure 3.27. Superposition des déformées calculées pour une raideur globale de  $10^{10}$  N/m (bleu) et un blocage de DX et DY sur l'épaisseur des PE (vert). Les déformées sont : a) flexion hors-plan du cintre, b) mode de jambe, c) flexion dans le plan du cintre. Les MAC-M sont : 100,0 % (a), 100,0 % (b) et 100,0 % (c).

Certaines déformées issues de différentes configurations se ressemblent et ont des fréquences proches. On en présente quelques unes sur la Figure 3.28. Par exemple, le

deuxième mode de flexion hors-plan libre (mode 4) est très semblable au premier mode de flexion hors-plan appuyé (mode 1), car un nœud de vibration est proche de la PE8. Le deuxième mode de torsion libre (mode 7) ressemble au premier mode de torsion appuyé (mode 2). Sur le cintre, le mode 7 appuyé est très semblable au mode 7 bloqué. Par contre, le premier a un mouvement non nul sur les jambes, au contraire du second. Cela transparaît sur la fréquence, qui est plus élevée pour le second.

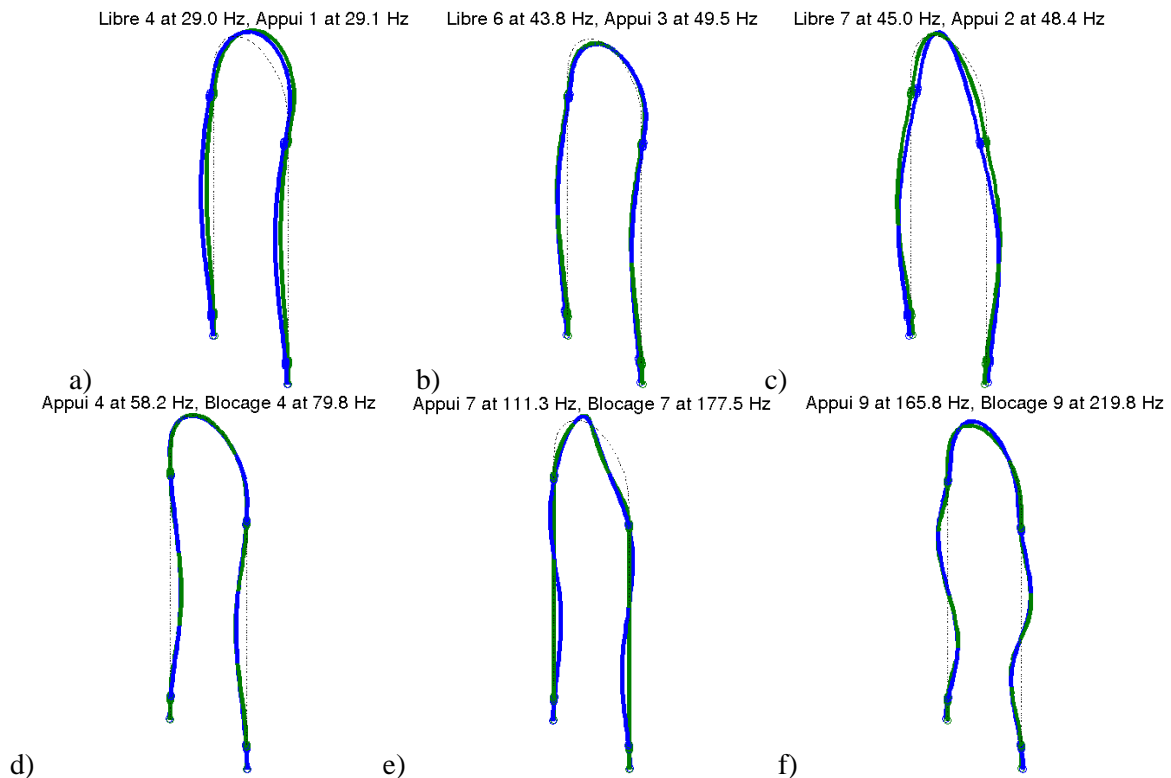


Figure 3.28. Comparaison de déformées pour différentes conditions de blocage. La configuration, le numéro de mode et la fréquence sont précisés au-dessus de la déformée, à gauche pour celle tracée en bleu, à droite pour celle tracée en vert. Les MAC-M sont : 75,4 % (a), 93,7 % (b), 78,4 % (c), 98,2 % (d), 66,9 % (e) et 90,1 % (f).

On vérifie la proximité de certaines déformées en calculant le MAC et le MAC-M en Figure 3.29. Un MAC élevé indique une proximité des coordonnées des deux vecteurs. Un MAC-M élevé indique une même participation au mouvement de la structure. Les trois configurations libres, appuyées et bloquées ont donc certains modes difficiles à distinguer. Ceci est valable pour des modes de flexion hors-plan, des modes de flexion dans le plan et des modes de torsion. Cependant, généralement, une information parmi la fréquence, la visualisation de la déformée, le MAC ou le MAC-M permet de distinguer les deux modes. Par exemple, le MAC-M pour le mode libre 4 et le mode appuyé 1, ou éventuellement les déformées, alors que les fréquences et le MAC coïncident.



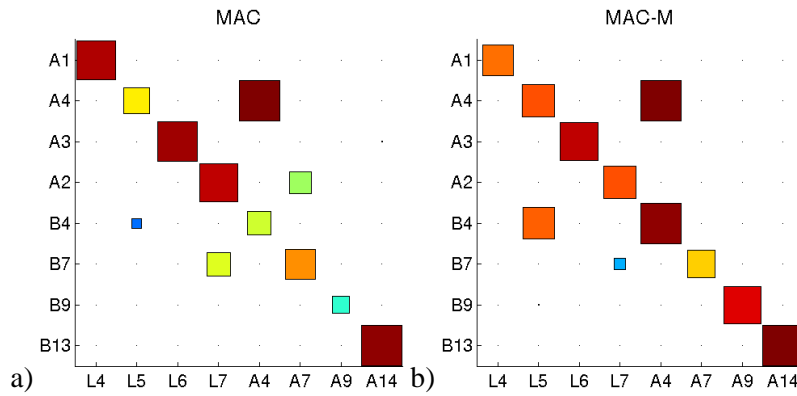


Figure 3.29. a) MAC et b) MAC-M entre deux familles de déformées issues de différentes conditions de blocage. Les vecteurs sont précisés sur les axes.

On retrouve ces évolutions de fréquence sur les réponses linéaires du tube en fonction de la raideur de contact bilatéral. Pour cela, on excite le tube selon le DDL 261.01, soit hors-plan (direction  $DX$ ) sur le milieu du cintre. Le spectre de l'excitation est majoritairement concentré entre 0 et 200 Hz et plat. On calcule les réponses temporelles linéaires puis les DSP de celles-ci. Quatre comparaisons de DSP sont présentées sur la Figure 3.30. On y trace la DSP du DDL 210.01, le nœud symétrique du nœud 261. Tous les modes hors-plan, de flexion ou de torsion, sont susceptibles d'être excités et mesurés. On remarque que l'augmentation de la raideur de contact  $k$  modifie le contenu fréquentiel par le bas, en commençant par les pics de fréquence les plus faibles (a). Lorsqu'on arrive près du premier plateau (b), le premier mode est peu impacté, au contraire des modes plus hautes fréquences. Sur le premier plateau, les modes basse fréquence sont très peu impactés et les spectres se superposent pour une fréquence inférieure à 100 Hz. On aborde alors la seconde transition dans le tracé (d). Le premier mode est très impacté, passant d'environ 30 Hz à environ 50 Hz. Le mode à 120 Hz passe à 140 Hz. Les réponses pour le second palier ne sont pas tracées ici car il correspond à des raideurs très supérieures à la raideur de contact estimée.

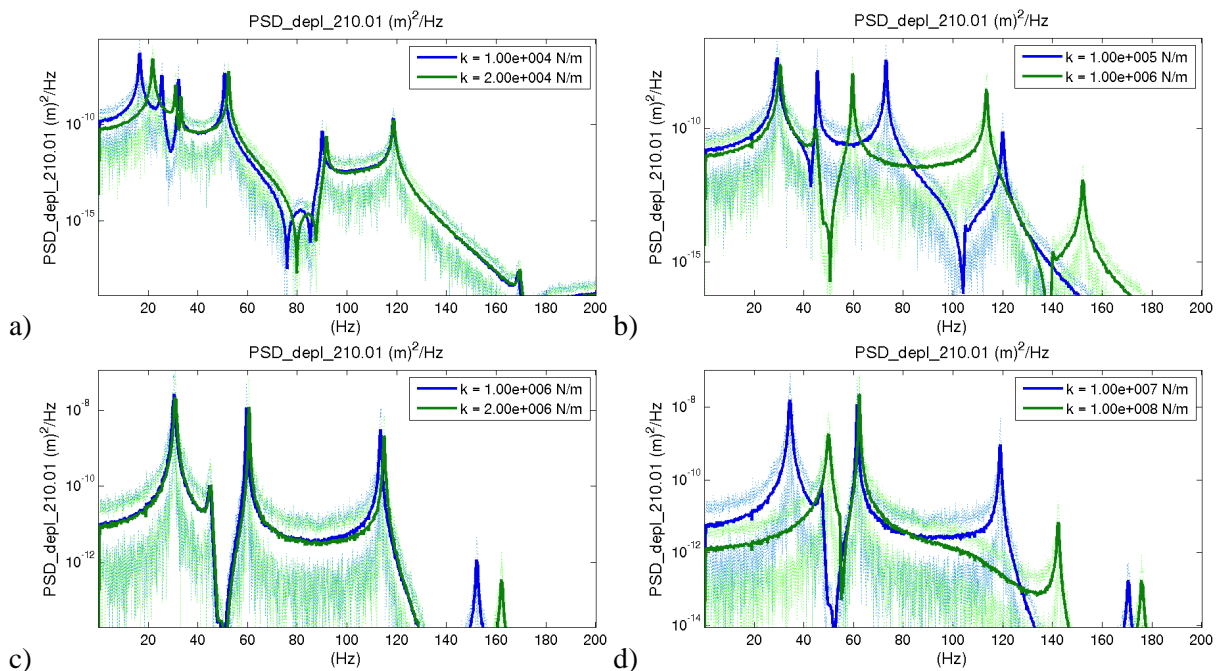


Figure 3.30. Comparaison de DSP d'évolutions linéaires en fonction de la raideur de contact bilatéral.

Pour compléter cette analyse, on trace en Figure 3.31 ces DSP sous forme de nappes. On peut suivre les modifications de fréquence et les disparitions / fusions de pics. Les pics perdent en intensité lorsque la raideur de contact augmente. On perçoit, dans certaines phases de transition, un léger étalement des pics. Ces évolutions de DSP fournissent une information complémentaire aux évolutions de fréquence tracées en Figure 3.11 ou Figure 3.15, car seuls les modes effectivement excités apparaissent.

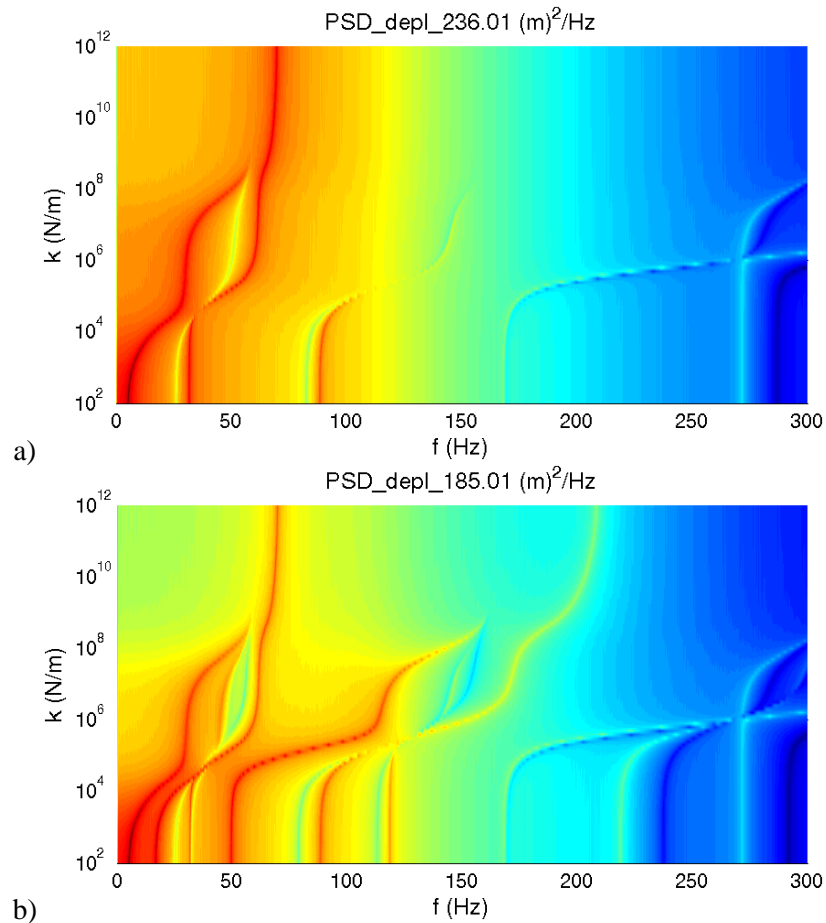


Figure 3.31. DSP linéaires en fonction de la raideur de contact bilatéral.

### 3.3. Réduction de modèle

Cette section présente le cadre théorique de la réduction de modèle. En 3.3.1, on exprime la solution sur un espace plus petit, ce qui permet de diminuer la taille du système mathématique à résoudre ; on introduit aussi la notion de corrections statiques, qui permettent de mieux approcher la solution en basses fréquences. On utilise des bases enrichies, présentées en 3.3.2. Trois configurations de blocage de DDL permettent de tenir compte de variations de la raideur de contact sur une large gamme. L'obtention d'une famille libre, et même orthogonale, du sous-espace de projection est décrite en 3.3.3. Les bases considérées dans la suite de la thèse sont présentées en 3.3.4.

### 3.3.1. Synthèse modale avec corrections statiques

Partant du problème continu pour décrire le mouvement du tube, construisant une formulation variationnelle de ce problème et adoptant une discrétisation du tube, on aboutit à l'écriture de la dynamique du tube sous forme de l'équation dynamique

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = f_{pot}(t) + f_{contact}^{NL}(q) \quad (3.7)$$

où les efforts extérieurs sont séparés entre, d'une part l'effort  $f_{pot}$  injecté par le pot vibrant, et d'autre part les efforts de contact entre le tube et les modules de PE. Les matrices assemblées de masse  $M$ , raideur  $K$  et amortissement visqueux  $C$  se rapportent à la configuration libre du tube. Le vecteur  $q$  des DDL globaux contient les valeurs des différents degrés de liberté aux différents nœuds du maillage. Il a  $N$  composantes.

Les méthodes de Rayleigh-Ritz donnent un cadre général pour la réduction des équations dynamiques. Dans le cadre des vibrations, ces méthodes sont connues sous le nom de synthèse modale ou sous-structuration. On se référera, parmi bien d'autres, aux articles de synthèse [Cra1, DeK2] ou aux livres [Ger1, Cra2, Bal1]. On suppose l'existence d'une base de réduction  $T_{N \times N_R}$  permettant d'exprimer le mouvement sur les DDL initiaux par l'approximation

$$q = Tq_R \quad (3.8)$$

où  $q_R$  sont les DDL généralisés. L'approche de Rayleigh-Ritz suppose ensuite que le travail de l'équation (3.7) est nul pour toute projection sur  $T$  ce qui conduit à

$$T^T M T \ddot{q}_R + T^T C T \dot{q}_R + T^T K T q_R = T^T f_{pot}(t) + T^T f_{choc}^{NL}(Tq_R) \quad (3.9)$$

On peut donc exprimer  $q$  sur une autre base de  $\mathbb{R}^N$ , par exemple la base des modes propres associés à  $M$  et  $K$ . Il n'y a pas de perte d'information tant qu'on les utilise tous. Les nouvelles inconnues, ou degrés de liberté *généralisés*, ne sont plus reliées directement à des degrés de liberté *physiques* mais décomposent le mouvement sur des fonctions dont le support est presque égal à la fibre neutre de la structure. Ce nouveau problème est de taille  $N_R \times N_R$ , inférieure à  $N \times N$ , taille du problème original. Dans le cas général,  $T$  ne génère pas le sous-espace des DDL physiques  $q$ ; une erreur est donc introduite. Les différentes méthodes de réduction se distinguent alors par les stratégies retenues pour générer le sous-espace  $T$ .

La synthèse modale simple, dite méthode des déplacements modaux, suppose une base tronquée de modes  $T = [\phi_1, \dots, \phi_{NM}]$ . Dans le cadre des méthodes de sous-structuration, cette base a été en particulier considérée en [Rub1, Mac1].

L'enrichissement le plus classique consiste à rajouter des réponses statiques aux efforts (non volumiques) imposés, comme cela sera abordé en section 3.3.1.

La raideur de contact sera ici considérée comme un paramètre variable. Dans le cadre de modèles paramétrés, les approches multi-modèles proposées par Balmes [Bal2, Bob1, Ste1] sont discutées en 3.3.2 et seront utilisées ici.

L'utilisation de bases enrichies pose des difficultés de générations de bases bien conditionnées du sous-espace de réduction. Les méthodes associées seront discutées en 3.3.3.

## Corrections statiques

Dans cette sous-partie, on introduit la notion de corrections statiques, comme présenté dans [Bal1]. On se place dans le cadre d'un problème linéaire ; l'amortissement n'est pas pris en compte, pour ne pas surcharger les équations. De même, le système est considéré comme à une entrée et à une sortie. On considère donc le système (3.10), mis sous forme d'état avec les entrées  $u(t)$ , les commandes *physiques*, et les sorties  $y(t)$ , les grandeurs *physiques* mesurées. Ces grandeurs sont reliées à l'effort injecté et aux déplacements calculés par une matrice de commande  $[b]$  et une matrice d'observation  $[c]$ .

$$\begin{cases} M\ddot{q} + Kq = f(t) \\ f(t) = [b]u(t) \\ y(t) = [c]q(t) \end{cases} \quad (3.10)$$

Le transfert  $H(\omega)$  entre  $u(t)$  et  $y(t)$  s'écrit alors, en prenant en compte les conditions d'orthonormalité des modes propres :

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{y(\omega)}{u(\omega)} = [c] [-\omega^2 M + K]^{-1} [b] \\ &= \sum_{j=1}^N \frac{[c] \{\phi_j\} \{\phi_j\}^T [b]}{-\omega^2 + \omega_j^2} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Le système a  $N$  DDL, donc  $N$  modes. On considère que les  $NM$  premiers modes sont dans la bande de fréquence d'intérêt et donc que  $\omega_j^2 \gg \omega^2$  pour les modes hors de cette bande de fréquence. Ces modes hautes fréquences ont un comportement quasi-statique car  $-\omega^2 + \omega_j^2 \sim \omega_j^2$ , ce qui revient à considérer que  $\omega \sim 0$ . La somme de (3.11) peut être découpée entre participation des basses fréquences et participation des hautes fréquences. On remarque que la deuxième somme, pour des indices  $NM+1$  à  $N$ , peut être calculée à partir des contributions d'efforts statiques appliqués aux mêmes endroits que les excitations sur la structure et des premiers modes normaux de la structure. En effet,

$$\sum_{j=NK+1}^N \frac{[c] \{\phi_j\} \{\phi_j\}^T [b]}{\omega_j^2} = [c] [K]^{-1} [b] - \sum_{j=1}^{NM} \frac{[c] \{\phi_j\} \{\phi_j\}^T [b]}{\omega_j^2} \quad (3.12)$$

On voit donc que les solutions d'un problème statique et les  $NM$  premiers modes propres permettent d'approcher la fonction de transfert d'un système linéaire sur la bande de fréquence d'intérêt

$$H(\omega) = \sum_{j=1}^{NM} \frac{[c] \{\phi_j\} \{\phi_j\}^T [b]}{-\omega^2 + \omega_j^2} + [c] [K]^{-1} [b] - \sum_{j=1}^{NM} \frac{[c] \{\phi_j\} \{\phi_j\}^T [b]}{\omega_j^2} \quad (3.13)$$

Dans le cadre de la thèse, les efforts injectés à la structure et les efforts de contact peuvent être considérés comme des entrées et résulter en des corrections statiques. Ces corrections statiques sont regroupées dans une famille  $T_{CS}$  de déformées. Elle contient autant de déformées que de DDL *commandés* par  $[b]$ .

### 3.3.2. Bases enrichies

La raideur de contact est un paramètre du modèle. Les approches multi-modèles proposées par Balmes [Bal2, Bob1, Ste1] montrent alors comment réduire le modèle initial. Ne prendre que des modes de la structure calculés pour une valeur des paramètres ne permet pas de bien résoudre le problème modal réduit pour l'ensemble des valeurs permises des paramètres. Ce problème modal réduit est résolu de manière plus précise si on enrichit la base des modes avec des déformées basses fréquences issues de différentes valeurs des paramètres. On peut donc utiliser les modes basses fréquences calculés pour différentes valeur de la raideur. Ici, on s'inspire de cette méthode et on utilisera différentes conditions de blocage cinématique des DDL affectés des conditions de contact. En effet, on a vu en section 3.2.5 que les évolutions des fréquences et des déformées en fonction de la raideur de contact bilatéral présentaient trois régimes particuliers : libre, appuyé et encasté. Les fréquences et déformées évoluent continûment de libre à encasté, en passant par appuyé. On considère donc que construire des bases avec ces trois conditions de blocage cinématique permet de prendre en compte l'ensemble des comportements possibles du tube sous contact bilatéral permanent. Cela revient à prendre une valeur faible, une valeur intermédiaire et une valeur élevée de la raideur.

La construction de ces différentes bases est précisée en section 3.3.4.

### 3.3.3. Ensemble de vecteurs et base

En concaténant dans une même famille de vecteurs  $T_C$  des déformées issues de différents problèmes modaux, rien n'assure de la qualité de la famille de vecteurs ainsi construite. On sait qu'elle génère un certain sous-espace mais on ne sait pas si elle est libre. Or, utiliser des bases de réduction qui ne sont pas de rang maximal implique que le problème réduit est au mieux mal conditionné et singulier dans le pire des cas. Construire une base, au sens de famille libre et génératrice, à partir d'une famille de vecteurs est donc nécessaire.

En algèbre linéaire, différentes méthodes permettent d'obtenir des bases d'un sous-espace bien conditionnées. La simple application du pivot de Gauss, en cherchant la solution (nulle si la famille est libre) de  $[T_C]\{q\}=\{0\}$ , permet d'extraire une *famille libre* du sous-espace engendré par la famille de vecteurs. Comme les espaces vectoriels que l'on manipule sont généralement munis de produits scalaires, canoniques ou associés aux matrices de masse ou de raideur, l'approche classique pour générer une base bien conditionnée consiste à extraire une *base orthonormée* du sous-espace. Cela nécessite de maîtriser deux problèmes. Il faut garantir l'orthogonalité malgré les erreurs d'arrondi numérique. Il faut trouver un critère pour éliminer les vecteurs linéairement dépendants.

Les méthodes de Gram-Schmidt, voir [Boi1] par exemple, sont une méthode classique pour extraire une base orthonormée d'une famille de vecteurs. Elles consistent à construire itérativement un vecteur orthogonal à tous ceux construits précédemment en lui soustrayant sa projection sur ces vecteurs. Il est ensuite normé pour assurer l'orthonormalité. Ces méthodes sont sensibles à l'arrondi numérique mais permettent d'éliminer les vecteurs dépendants et de fournir une base orthonormée.

La Décomposition en Valeurs Singulières (SVD) [Gol1] est l'approche la plus robuste pour construire une base orthonormale. Cependant, elle est associée à la norme euclidienne du vecteur des degrés de liberté. Cette norme n'est pas particulièrement adaptée aux applications mécaniques, surtout si les degrés de liberté contiennent des informations différentes, comme

des déplacements et des rotations. Balmes a montré en [Bal3] comment étendre la SVD à la mécanique. Cette démarche est reprise ici pour transformer la famille de vecteurs  $T_C$  en une base  $T$ . On détaille ci-après les différentes étapes de la méthode appliquée ici.

Dans un premier temps, on construit une matrice de masse réduite  $M_{I,R}$ , que l'on norme éventuellement par une matrice diagonale  $D$ , afin d'assurer que les normes de chaque vecteur de  $T_C$  sont comparables,

$$[M_{I,R}]_{NC \times NC} = [D^T]_{NC \times NC} [T_C^T]_{NC \times N} [M]_{N \times N} [T_C]_{N \times NC} [D]_{NC \times NC} \quad (3.14)$$

On vérifie alors numériquement que cette matrice n'est pas de rang maximal. Une décomposition en valeurs singulières est alors appliquée et on ne retient que les  $NR$  vecteurs singuliers à droite, contenus dans  $V$ , associés à des valeurs singulières significatives,

$$[M_{I,R}]_{NC \times NC} = [U]_{NC \times NC} [\Sigma]_{NC \times NC} [V^T]_{NC \times NC} \quad (3.15)$$

ce qui permet de construire une base de réduction intermédiaire  $T_1$ , ne contenant que des vecteurs dont l'énergie cinétique est significative, par

$$[T_1]_{N \times NR} = [T_C]_{N \times NC} [D]_{NC \times NC} [\{V_1\}, \dots, \{V_{NR}\}]_{NC \times NR} \left[ \text{diag} \left( \frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_{NR}} \right) \right]_{NR \times NR} \quad (3.16)$$

Cette base de réduction intermédiaire, telle que  $T_1^T M T_1$  est proche de l'identité, permet de construire une matrice de raideur réduite  $K_{2,R}$ , que l'on décompose en valeurs singulières,

$$[K_{2,R}]_{NR \times NR} = [T_1^T]_{NR \times N} [K]_{N \times N} [T_1]_{N \times NR} = [\hat{U}]_{NR \times NR} [\hat{\Sigma}]_{NR \times NR} [\hat{V}^T]_{NR \times NR} \quad (3.17)$$

On réorganise alors les vecteurs singuliers à gauche par énergie de déformation croissante, c'est-à-dire par valeur singulière croissante. Finalement, on aboutit à la base de réduction par

$$[T]_{N \times NR} = [T_1]_{N \times NR} [\{\hat{U}_{NR}\}, \dots, \{\hat{U}_1\}]_{NR \times NR} \quad (3.18)$$

Cette base de réduction  $T$  est alors telle que la matrice réduite de masse  $M_R = T^T M T$  est égale à l'identité et la matrice réduite de raideur  $K_R = T^T K T$  est égale à une diagonale de nombres réels positifs. On corrige les erreurs d'arrondis numériques en annulant les termes extra-diagonaux. On note aussi que toutes les déformées présentes dans la base de réduction  $T$ , même celles issues du traitement de corrections statiques sont affectées de fréquences.

La qualité de la base orthonormale  $T$  sera discutée en section 3.4 pour différentes familles concaténées  $T_C$ . On cherchera si la base orthonormalisée permet de conserver l'information de blocage de DDL lors de la réduction de modèle : par exemple, avec une base contenant des modes libres et des corrections statiques, peut-on retrouver, sur le modèle réduit, les modes du système bloqué sur l'épaisseur de la PE ? On ajoutera des conditions de contact bilatéral sur les DDL  $DX$  et  $DY$  des nœuds des obstacles. En fonction de la raideur de contact, on calculera l'erreur commise sur les fréquences propres du problème réduit, en considérant des calculs effectués sur le modèle complet comme une référence exacte.

### 3.3.4. Bases considérées

On va ici considérer que le modèle doit pouvoir reproduire les comportements, estimés sous forme de modes, pour un ensemble de configurations correspondant à un contact bilatéral sur toute l'épaisseur des plaques entretoises avec une raideur  $k_{cont}$  variable entre 0 (fonctionnement libre) et  $4.10^6$  N/m (fonctionnement en contact permanent), la raideur globale de contact utilisée pour les simulations non-linéaires. Le choix d'une base de réduction sera donc dicté par la capacité à reproduire ces comportements, présentés précédemment en 3.2.5.

Pour calculer la matrice de raideur  $K_{CB}$  associée à l'ajout de raideurs discrètes sur les degrés de liberté de choc, on peut créer un nouveau modèle en ajoutant des raideurs discrètes unitaires sur chaque DDL de contact. La matrice de raideur  $K_{CB}$  est alors la différence entre les matrices de raideur assemblées. On peut aussi la calculer à partir de la matrice d'observation des DDL de contact, auxquels correspondent des efforts colocalisés.

Finalement, le problème modal sur modèle complet s'écrit

$$\left[ -\omega^2 M + K + k K_{CB} \right] \{\phi\} = \{0\} \quad (3.19)$$

On projette ce système sur la base réduite  $T$ . On calcule alors l'erreur introduite par la projection de modèle en comparant les fréquences obtenues pour le problème assemblé et pour le problème projeté, dans lequel est introduite la matrice réduite de contact bilatéral  $K_{CB,R} = T^T K_{CB} T$ ,

$$\left[ -\omega_R^2 M_R + K_R + k K_{CB,R} \right] \{\phi_R\} = \{0\} \quad (3.20)$$

La base de réduction doit être suffisamment riche pour permettre une résolution précise de la dynamique mais doit contenir peu de déformées pour permettre des simulations numériques rapides. Cette base doit permettre de projeter tous les comportements entre le tube libre et le tube encasté, lorsque le jeu tend vers 0. L'erreur en fréquence doit donc être faible sur une large plage de variation du paramètre  $k$ . De plus, la base de réduction doit permettre l'injection d'efforts ponctuels au niveau des nœuds de choc. Cela est réalisé en concaténant des déformées :

- $T_L$  du tube libre au niveau des PE, pour bien projeter les phases de vol ;
- $T_A$  du tube avec les degrés de liberté  $DX$  et  $DY$  bloqués au centre de la PE, un régime non linéaire de type *appui* apparaissant notamment dans les essais expérimentaux ; ce régime d'appui est similaire au régime à contact permanent ;
- $T_B$  du tube avec les degrés de liberté  $DX$  et  $DY$  bloqués sur l'épaisseur des PE (pratiquement, seulement sur les nœuds affectés de condition de contact), pour bien projeter les phases de contact et tenir compte du comportement *encasté* ; ce régime nécessite des raideurs de contact plus élevées que celles considérées ici mais étend la plage de validité de la réduction ;
- $T_{CS}$  de corrections statiques associées à des efforts unitaires sur chaque degré de liberté de contact, afin de corriger le niveau de réponse en basse fréquence et de bien projeter les efforts ponctuels de choc.

L'étude de la réduction pour chacune des bases prises séparément ou pour des concaténations  $T_C$  de bases est effectuée en section 3.4. Dans les différentes sous-parties, on étudie des bases contenant un type de déformées modales, puis deux, puis trois avec ou sans correction statique. Les nombres de modes seront choisis par rapport aux valeurs du Tableau 3.1, indiquant pour chaque condition de blocage, le nombre de modes inférieurs à une certaine fréquence. Le nombre de corrections statiques dépend du nombre de niveaux d'obstacles (0, 1, 2, 3 ou 5) choisis par module de PE, qui sont eux en nombre pair (un par jambe du tube cintré). Par niveau d'obstacle, deux directions (hors-plan et dans le plan) sont prises en compte. Par exemple, si on considère uniquement la PE8 et trois niveaux d'obstacles, on doit prendre en compte douze corrections statiques. La configuration à cinq niveaux d'obstacles pour deux PE engendre un nombre important ( $5 \times 2 \times 2 \times 2 = 40$ ) de corrections statiques, qui semblent être similaires.

Fréquence (Hz)	Nombre de modes retenus par condition de blocage		
	Tube libre	$DX$ et $DY$ sur épaisseur PE	$DX$ et $DY$ au centre PE
200	15	7	11
500	27	19	19
1000	39	27	33
2000	57	49	53
5000	101	91	95
7500	130	126	126
10000	157	144	152

Tableau 3.1. Nombre de modes inférieurs à une certaine fréquence, pour différents blocages de degrés de liberté.

### 3.4. Erreurs sur les fréquences induite par la réduction

Dans cette partie, on étudie la qualité de différentes bases telles que construites en 3.3, vis-à-vis de la réduction de modèle. On compare les fréquences et déformées à celles du modèle complet, pour différents blocages ou en fonction de la raideur de contact bilatéral.

Les résultats présentés ci-après ont été obtenus à partir d'une configuration de tube contenant deux niveaux de PE. La PE inférieure était située près des pieds de tube. Son influence, par l'ajout de contact bilatéral, est minime. Cette PE a été ultérieurement retirée. La démarche de construction de base de réduction ainsi que les différentes remarques faites ci-après s'appliquent néanmoins à la configuration à une PE.

On désignera éventuellement les bases sous des notations de type  $T_{L+B+CS,RA}$  pour une base contenant des modes libres, des modes bloqués et des corrections statiques et orthonormalisée par rapport au système appuyé. Pour tracer des écarts relatifs de fréquence entre différentes bases, on affecte une fréquence arbitraire à toutes les corrections statiques :  $\pi$  fois la plus haute fréquence libre.



### 3.4.1. Bases contenant des modes libres

On considère dans un premier temps la base ne contenant que des modes libres. Cette base  $T_L$ , ensuite réduite par rapport au système libre, n'est évidemment pas modifiée par l'étape de réorthonormalisation. La Figure 3.32 trace la première fréquence propre. On observe que mettre plus de modes aide à minimiser l'erreur pour de fortes valeurs de raideur de contact. Cela semble logique : les modes à hautes fréquences sont à faibles longueurs d'onde. En ajouter de plus en plus permet de mieux représenter un déplacement nul sur l'épaisseur des PE, pour les DDL  $DX$  et  $DY$ . On peut faire une analogie avec la représentation en série de Fourier d'une fonction porte : plus on ajoute de modes hautes fréquences, plus l'approximation est juste. Il n'est cependant pas évident que la convergence soit efficace. À 157 modes, l'erreur reste très élevée, de l'ordre de 15 %.

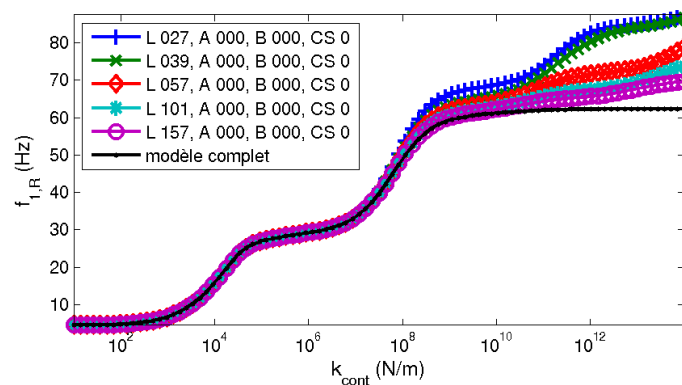


Figure 3.32. Première fréquence propre des modèles réduit et complet, en fonction de la raideur de contact. Les compositions des bases avant orthonormalisation par le système libre sont indiquées en légende.

Les courbes semblent présenter trois paliers pour l'erreur : pour  $k_{cont}$  inférieure à  $10^7$  N/m, pour  $k_{cont}$  entre  $10^8$  et  $10^{10}$  N/m et pour  $k_{cont}$  supérieure à  $10^{12}$  N/m. Les évolutions des fréquences du modèle à contact bilatéral, montrées en 3.2.2, présentent aussi trois paliers, correspondants aux comportements libre, appuyé et bloqué. Les raideurs correspondant à ces paliers sont :  $k_{cont}$  inférieure à  $10^3$  N/m,  $k_{cont}$  entre  $10^5$  et  $10^7$  N/m et  $k_{cont}$  supérieure à  $10^9$  N/m. Les paliers sur l'écart relatif en fréquence entre modèle réduit et modèle complet n'est donc pas lié aux transitions entre différents régimes. L'erreur est négligeable sur une zone correspondant aux comportements libre et appuyé. L'erreur est non négligeable sur une zone correspondant majoritairement au comportement bloqué : la fréquence du modèle réduit augmente alors qu'elle est stable pour le modèle non réduit. Pour représenter finement le blocage de DDL au niveau des PE (typiquement  $k_{cont} \geq 10^{10}$  N/m), il faut avoir suffisamment de modes libres pour assurer une bonne qualité de la matrice de raideur réduite  $K_{CB,R}$ .

Se pose alors la question de l'utilité de l'ajout de corrections statiques. On considère 27 modes libres et 24 corrections statiques, ce qui correspond à trois niveaux par PE (haut, centre, bas). Comme montré par la suite, trois niveaux de corrections statiques enrichissent suffisamment le modèle. Cinq niveaux de CS, soit autant que de nœuds de choc, ont pu être considérés mais ajoutaient trop d'information redondante et dégradait parfois la réduction. La Figure 3.33 montre les fréquences affectées aux modes de la base  $T$  obtenue après orthonormalisation. Pour les 27 premières valeurs on retrouve les modes libres. Les fréquences associées aux déformées issues des corrections statiques augmentent ensuite plus vite que celles des modes libres. Les corrections statiques ne sont pas la poursuite des hautes

fréquences et introduisent donc une information sur les hautes fréquences différente des modes libres.

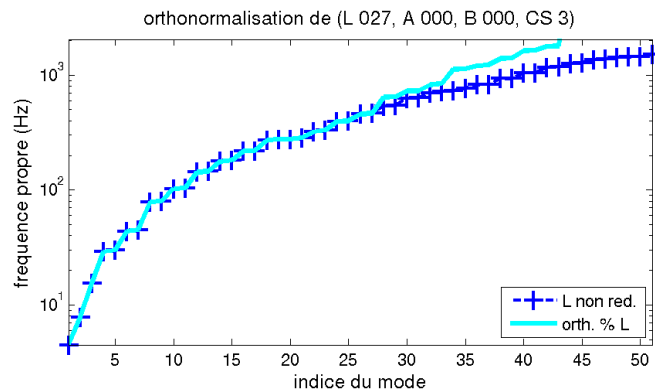


Figure 3.33. Fréquences des modes orthonormalisés. La base concaténée contient 27 modes libres et 24 corrections statiques.

Les déformées issues des corrections statiques ont un MAC-M supérieur à 80 %. Cependant, comme montré en a) sur la Figure 3.34 par l'auto MAC-M de la base concaténée, toutes les corrections statiques ont des déformées très proches. Elles sont aussi proches du premier mode de flexion hors-plan ou du premier mode de flexion dans le plan. On y retrouve donc approximativement les modes libres mais l'information est notablement distincte. L'orthonormalisation, effectuée ici par rapport au système libre, ne modifie pas les modes libres : on retrouve les déformées telles quelles. Les modes hautes fréquences de la base orthonormalisée sont orthogonaux par rapport aux premiers modes libres et aux déformées des corrections statiques (b). Ces modes hautes fréquences orthonormalisés permettent de retrouver une partie de l'information des modes libres hautes fréquences (c). Mais on voit clairement que les corrections statiques ont ajouté de l'information non contenue dans les modes libres.

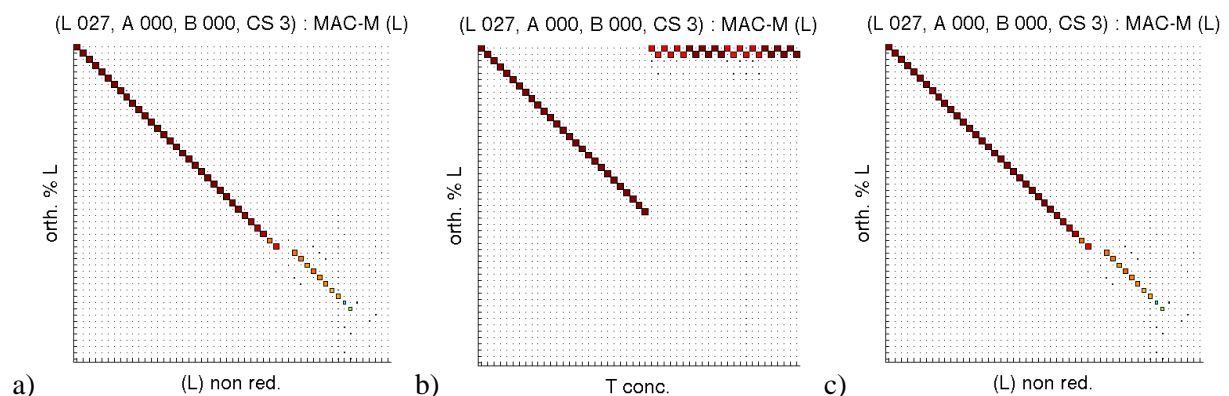


Figure 3.34. a) auto MAC-M de la base concaténée. b) MAC-M entre la base concaténée et la base orthonormalisée par rapport au système libre. C) MAC-M entre la base orthonormalisée et les modes libres. Les MAC-M sont calculés avec la matrice de masse du système libre.

Les déformées des corrections statiques, tracées en Figure 3.35, sont visuellement proches des premiers modes de flexion. On note cependant que ces déformées ne sont pas parfaitement symétriques, surtout pour les corrections statiques associées à des nœuds de la PE 7 (a) et c)). Les modes orthonormalisés hautes fréquences sont d'amplitude maximale au niveau des PE. Ceux associés à la PE7 (f) et h)) sont de fréquence plus élevée que ceux associés à la PE8.

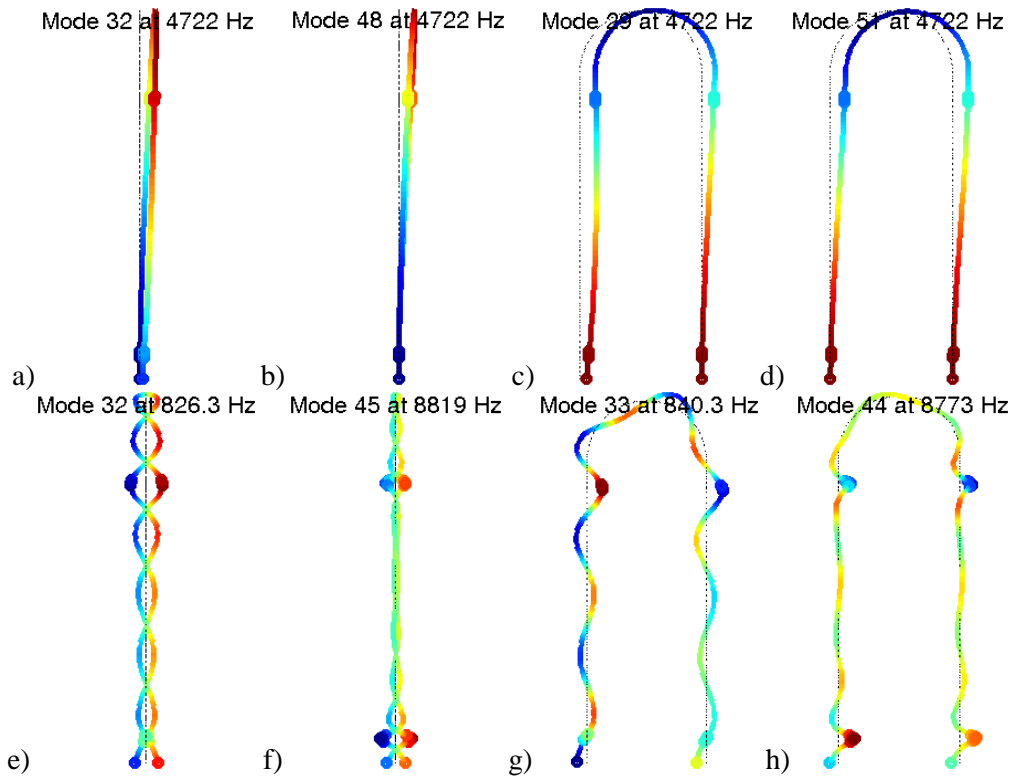


Figure 3.35. a) à d) Déformées de corrections statiques. e) à h) déformées de modes orthonormalisés hautes fréquences.

Ajouter des corrections statiques aux déformées libres permet d'avoir un écart relatif par rapport au modèle complet faible pour de plus grandes valeurs de raideur de contact permanent. Ajouter trois niveaux de corrections statiques aux 27 modes libres permet de gagner quatre ordres de grandeur sur la raideur avant d'avoir un écart relatif trop important. La Figure 3.36 montre que l'écart relatif pour 27 modes libres et 3 niveaux de CS est inférieur à celui calculé pour 157 modes libres pour toutes les raideurs inférieures à  $10^{12}$  N/m. Dans ce cas précis, le palier central d'erreur (pour  $k_{cont}$  entre  $10^8$  et  $10^{10}$  N/m) est annulé par les corrections statiques. L'effet des corrections statiques est donc principalement de retarder la divergence par rapport au modèle complet quand la raideur augmente. Les phases de contact sont donc mieux calculées.

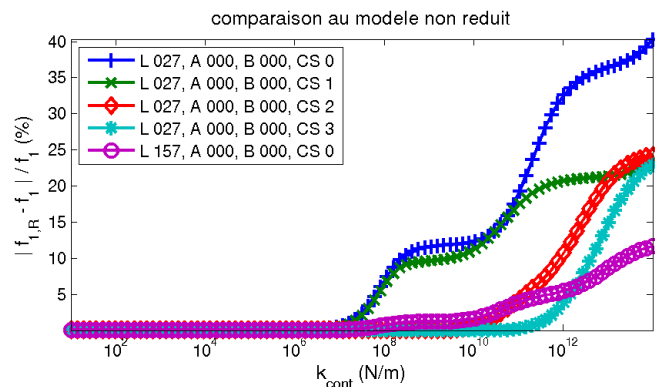


Figure 3.36. Écart relatif entre la première fréquence propre des modèles réduits et complet, en fonction de la raideur de contact. Les compositions des bases avant orthonormalisation par le système libre sont indiquées en légende.

On remarque ci-après que trois niveaux de corrections statiques semblent être un choix optimal. En effet, l'erreur sur le modèle à contact permanent est faible sur une plus large gamme de raideur  $k_{cont}$ , comme montré en Figure 3.37. Les écarts relatifs sont très inférieurs à 0,1% pour des raideurs allant jusqu'à  $10^{11}$  N/m. Or, cette valeur de raideur permet une quasi-convergence des fréquences vers les fréquences des modes bloqués.

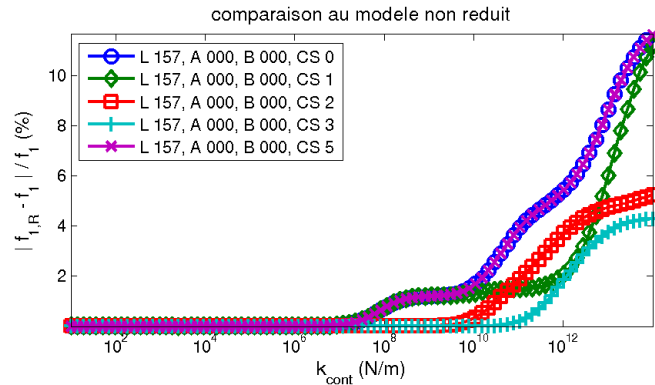


Figure 3.37. Écart relatif entre la première fréquence propre des modèles réduits et complet, en fonction de la raideur de contact. Les compositions des bases avant orthonormalisation sont indiquées en légende.

Ajouter des corrections statiques aux modes libres est plus efficace que rajouter des modes libres et permet de mieux projeter la matrice de raideur du contact bilatéral. Dans la section suivante, on testera la qualité de bases de réduction construites à partir de modes appuyés et de corrections statiques.

### 3.4.2. Modes bloqués au centre des PE

Les évolutions des déformées modales, lors du palier *appui*, laissent à penser que, pour des valeurs de raideur de contact « intermédiaires », le tube se déforme avec des DDL  $DX$  et  $DY$  très faibles au centre de la PE, comme si la structure y était en appui. Dans cette optique, on étudie des bases  $T_A$  contenant des déformées obtenues en bloquant les DDL  $DX$  et  $DY$  au centre des PE.

Si on ne prend que des déformées du système appuyé, l'orthonormalisation par rapport au système libre ne permet pas de retrouver des déformées de type libre. L'ajout de corrections statiques permet après réorthonormalisation par rapport au système libre de retrouver les déformées des premiers modes libres. Les MAC-M tracés en Figure 3.38 le montrent. La base  $T_A$  décrit un sous-espace dont le déplacement est bloqué sur certains DDL. Après orthonormalisation par rapport au système libre, qui n'introduit donc pas de contrainte sur les DDL bloqués, ceux-ci restent bloqués. Ajouter des corrections statiques ajoute des déformées dont ces DDL ne sont pas contraints : on décrit donc un sous-espace dont tous les DDL sont libres. En ajoutant des corrections statiques, on aurait alors une base de projection compatible avec tous les mouvements.

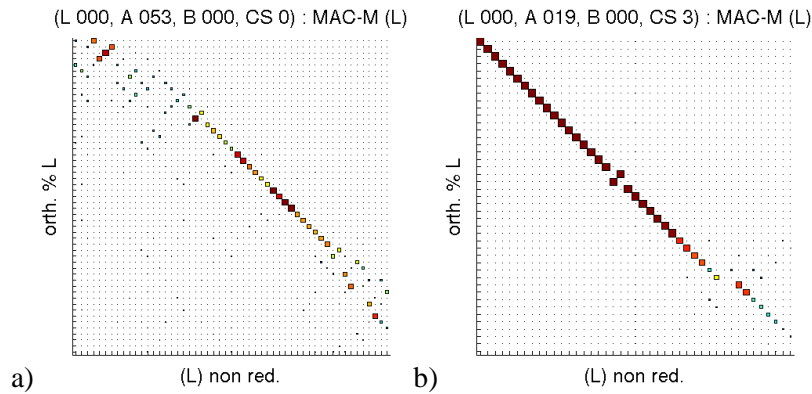


Figure 3.38. MAC entre la base orthonormalisée par rapport au système libre et les déformées libres. a) base ne contenant que des modes appuyés. b) base contenant des modes appuyés et des corrections statiques.

Si on compare les fréquences des bases orthonormalisées, on retrouve les fréquences appuyées pour une orthonormalisation par rapport au système appuyé et les fréquences libres pour une orthonormalisation par rapport au système libre (Figure 3.39). Les modes hautes fréquences ne sont le prolongement ni des modes libres, ni des modes appuyés. On retrouve 19 modes appuyés et 27 modes libres. L'information sur la dynamique du système jusqu'à 500 Hz pour une condition de blocage est transformée en information jusqu'à 500 Hz pour une autre condition de blocage.

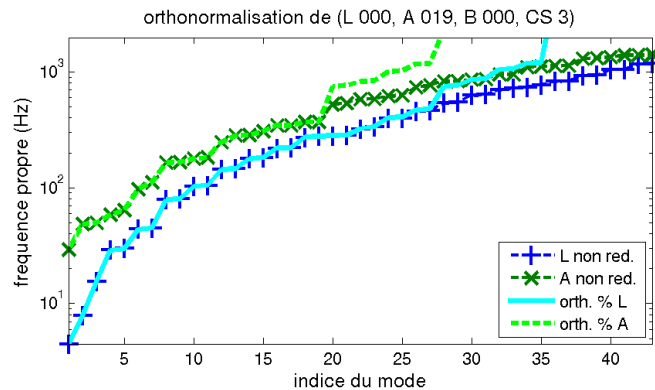


Figure 3.39. Fréquences des modes orthonormalisés. La base concaténée contient 19 modes appuyés et 24 corrections statiques.

On peut orthonormaliser la base  $T_A$  par rapport au système libre ou au système appuyé. On peut alors réduire le système libre ou le système appuyé. On a donc quatre systèmes réduits. L'erreur sur les fréquences, calculée pour 19 modes appuyés et 24 CS, est tracée en Figure 3.40 pour le système libre puis le système appuyé. On retrouve les 27 premières fréquences libres avec moins de 3 % d'erreur pour la réduction du système libre par l'orthonormalisée par rapport au système libre. On retrouve quasi exactement les 19 premières fréquences appuyées pour une réduction du système appuyé par l'orthonormalisée par rapport au système libre. L'erreur est encore plus faible pour la réduction du système appuyé par le système appuyé. Un blocage est donc bien réduit si la base de réduction a été orthonormalisée par rapport à un système bloquant moins de DDL : on approche le système appuyé par réduction sur une base orthonormalisée par rapport au système libre mais on n'approche pas le système libre par réduction sur une base orthonormalisée par rapport au système appuyé.

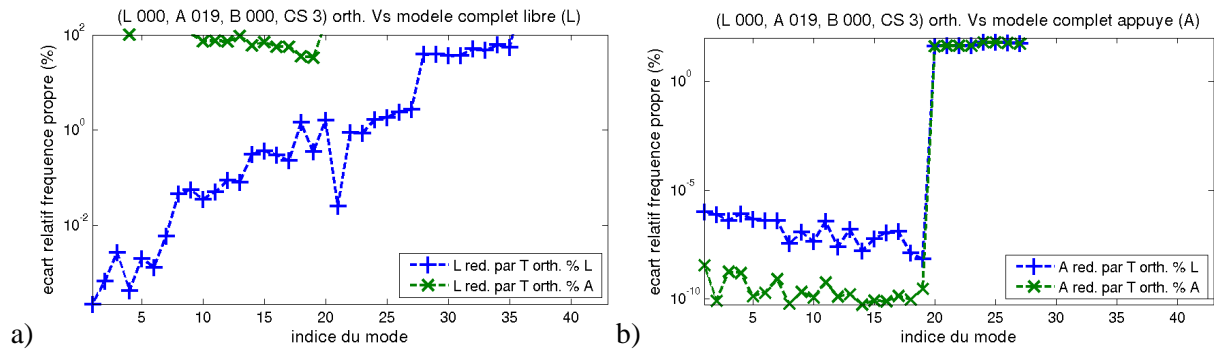


Figure 3.40. Effet de l'orthonormalisation sur le système libre (a) et le système appuyé (b). La base concaténée contient 19 modes libres et 3 niveaux de CS.

La qualité de la réduction dépend de l'écart des fréquences (et des déformées) au modèle non réduit pour une large gamme de raideur de contact, tracé en Figure 3.41. La base de réduction ne contenant que des modes appuyés et pas de corrections statiques donne, comme attendu, une erreur très importante pour de faibles valeurs de  $k_{cont}$ , la fréquence étant celle du système appuyé. Plus il y a de corrections statiques, plus l'erreur est faible. Le palier à environ 10 % d'erreur entre  $10^8$  et  $10^{10}$  N/m disparaît pour plus de deux niveaux de corrections statiques. Trois niveaux de CS conjugués à 19 modes appuyés donnent une erreur plus faible que 157 modes libres. L'erreur de la base contenant 19 modes appuyés et trois niveaux de CS est parfaitement comparable à celle de la base contenant 27 modes libres et trois niveaux de CS. De nouveau, on retrouve une équivalence entre les résultats obtenus pour des bases construites à partir d'une information jusqu'à 500 Hz et des corrections statiques.

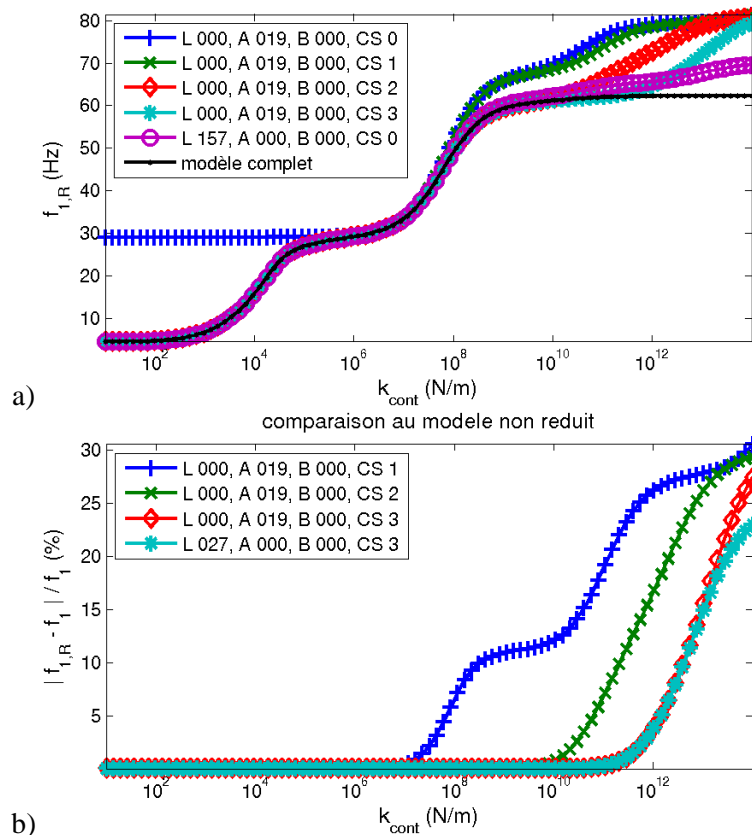


Figure 3.41. Comparaison (a) et écart relatif (b) entre la première fréquence propre des modèles réduits et complet, en fonction de la raideur de contact. Les compositions des bases avant orthonormalisation par le système libre sont indiquées en légende.

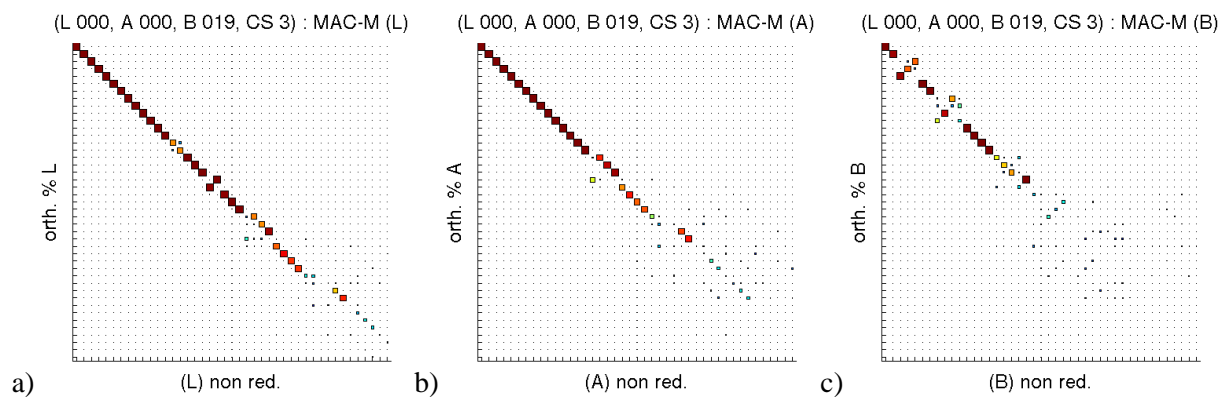
Cependant, pour de très fortes valeurs de raideur, l'écart des fréquences par rapport au modèle complet finit par atteindre 25%. Les modes bloqués au centre des PE, couplés avec des corrections statiques, ne forment pas une base suffisamment riche vis-à-vis du système linéaire à contact permanent pour décrire l'ensemble du comportement.

Pour bien représenter un blocage, il faudrait mettre des déformées de ce type dans la base concaténée et réduire par un système associé à un blocage moins restrictif (libre par exemple pour un appui). Les corrections statiques permettent d'élargir le sous-espace décrit : les DDL bloqués sont en quelque sorte libérés. La qualité de la réduction du modèle à contact permanent est équivalente à celle réalisée avec des modes libres et des corrections statiques. L'erreur est élevée pour de fortes raideurs. Dans la sous-section suivante, on verra si les bases contenant des modes bloqués et des corrections statiques ont le même comportement.

### 3.4.3. Modes bloqués sur les PE et corrections statiques

On considère une base  $T_B$  contenant des modes dont les DDL  $DX$  et  $DY$  sont bloqués sur l'épaisseur de la PE et des corrections statiques au niveau des points de contact. La réorthonormalisation, par rapport à n'importe quel blocage, donnera une autre famille de vecteurs mais ceux-ci généreront le même sous-espace où les déplacements sont nuls sur les PE. La base obtenue par réorthonormalisation ne contient donc que des déformées à DDL bloqués et ajouter des raideurs discrètes n'a aucun effet. Les fréquences sont indépendantes de la raideur de contact et correspondent aux fréquences des modes bloqués.

Ajouter des déformées statiques enrichit notablement la base de projection. En effet, on ajoute des déformées de DDL  $DX$  et  $DY$  non nuls sur les PE. En réorthonormalisant par rapport au système idoine, on retrouve les modes libres, appuyés ou bloqués. Les fréquences et les MAC des bases orthonormalisées sont tracés en Figure 3.42. L'information jusqu'à 500 Hz introduite par les 19 modes bloqués se retrouvent bien jusqu'à 500 Hz dans les 19 modes appuyés et les 27 modes libres. Les écarts de fréquence sont de moins de 2 % jusqu'à 500 Hz. Les 27 premiers modes libres sont bien retrouvés, comme montré par le MAC. Deux modes sont inversés et deux autres sont mal retrouvés. Seuls les 15 premiers modes appuyés sont retrouvés avec un MAC satisfaisant. Pour ces deux blocages, des modes plus hautes fréquences sont retrouvés avec des MAC non négligeables. Les 19 premiers modes bloqués sont globalement retrouvés. Des blocs de quatre déformées sont globalement retrouvés mais mal appariés : ils correspondent aux déformées de la jambe du tube. Après orthonormalisation, on ne retrouve aucun mode bloqué de fréquence supérieure à 500 Hz.





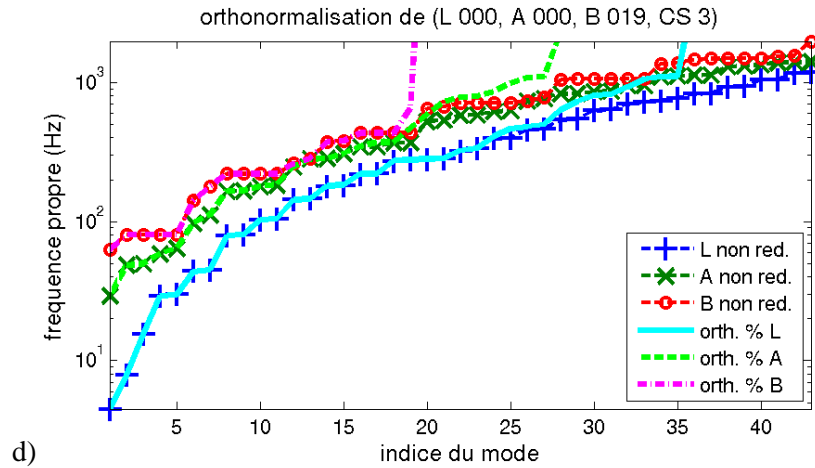
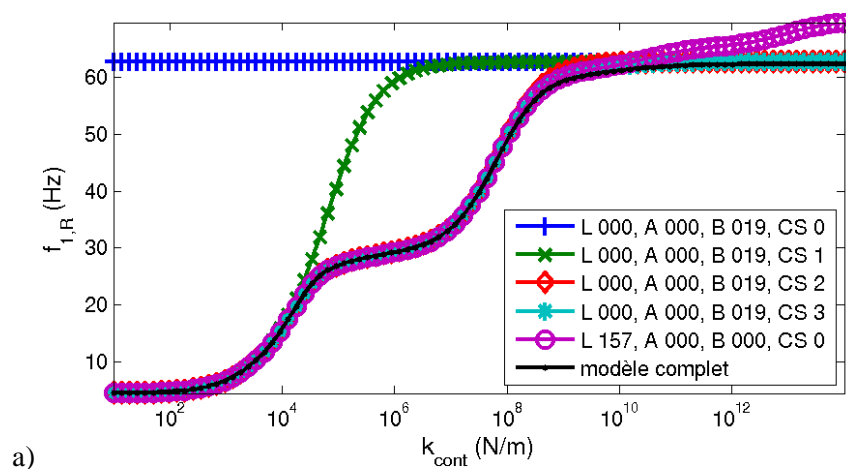


Figure 3.42. MAC et fréquences de l'orthonormalisation par rapport aux systèmes libres, appuyés et bloqués. La base concaténée contient 19 modes bloqués et 24 CS.

De nouveau, on observe la qualité de la base de réduction en comparant les valeurs des fréquences du modèle réduit et du modèle complet pour une large gamme de raideur  $k_{cont}$  (Figure 3.43). Sans correction statique, les DDL bloqués sont restés bloqués et le modèle réduit est alors indépendant de la raideur de contact bilatéral : les seuls mouvements décrits sont ceux bloqués sur les PE. Ajouter un niveau de PE permet de retrouver les modes libres mais on ne retrouve pas le comportement appuyé : on passe directement au comportement bloqué. Les bases contenant deux et trois niveaux de CS ont une erreur maximale de 2,7 et 1,3 %, sur le second palier d'erreur, correspondant au début du comportement bloqué. Pour les très grandes valeurs de  $k_{cont}$ , l'erreur est de l'ordre de 0,5 %, ce qui est très inférieur à celle obtenue pour les bases de réductions construites précédemment à partir de modes libres ou de modes appuyés.

En orthonormalisant par rapport au modèle libre une base obtenue par concaténation de modes bloqués et de plus de deux niveaux de corrections statiques par PE, on retrouve les modes libres. Cette base orthonormalisée permet de projeter assez bien le modèle libre et le modèle appuyé. L'erreur sur le modèle réduit à contact permanent est très faible pour de très grandes valeurs de  $k_{cont}$  mais est supérieure à celle induite par le modèle libre entre  $10^3$  et  $10^{11}$  N/m : les modes bloqués enrichissent la base de projection mais ne suffisent pas. Dans la sous-section suivante, on compare les trois types de base de réduction étudiés jusqu'ici.





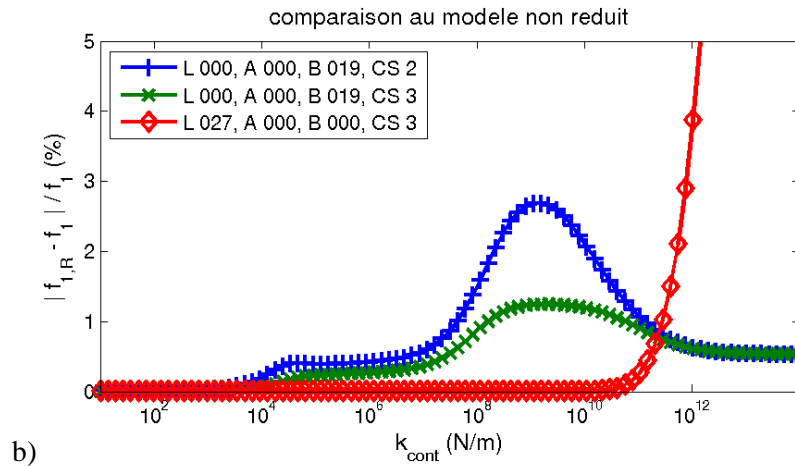
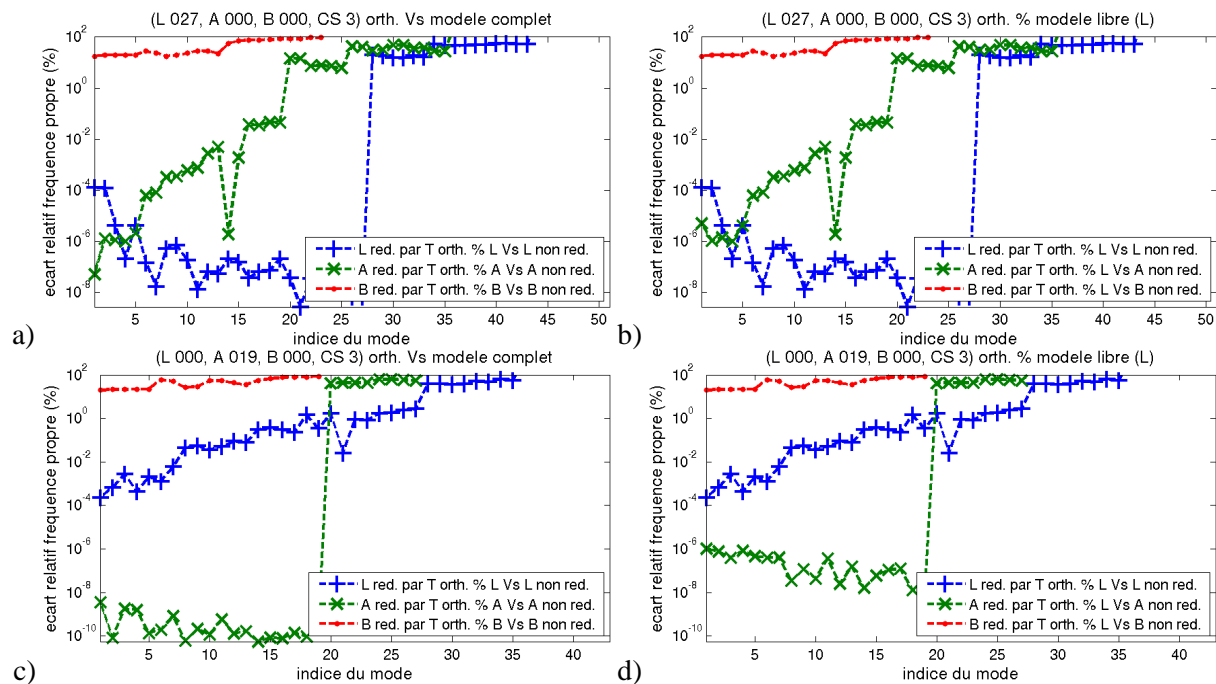


Figure 3.43. Comparaison (a) et écart relatif (b) entre la première fréquence propre des modèles réduits et complet, en fonction de la raideur de contact. Les compositions des bases avant orthonormalisation par le système libre sont indiquées en légende.

### 3.4.4. Comparaison des bases contenant un type de déformées et des corrections statiques

À ce stade, la réduction du système sur des bases contenant un type de déformée et des corrections statiques a été étudiée. Ces trois types de base de réduction doivent être comparés. On considère ici les modes de fréquence inférieure à 500 Hz, soit 27 pour le tube libre, 19 pour le tube bloqué au centre des PE et 19 pour le tube bloqué sur cinq points des PE. De plus, on prend en compte les corrections statiques selon  $DX$  et  $DY$  sur trois niveaux (haut, centre, bas) des quatre modules de PE, soit 24 corrections statiques.



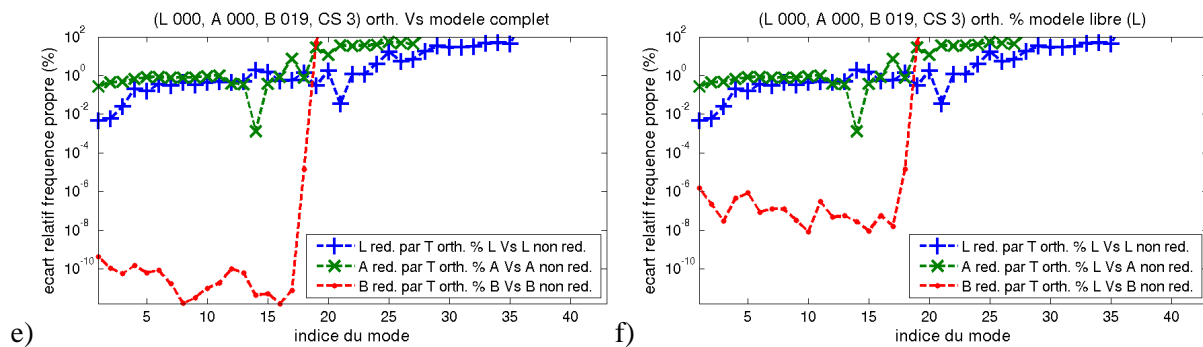


Figure 3.44. Erreur sur les modèles réduits par une base orthonormalisée par rapport aux mêmes conditions de blocage (colonne de gauche) ou par rapport au système libre (colonne de droite). La base contient, en plus des corrections statiques, des modes libres (a, b), des modes appuyés (c, d) ou des modes bloqués (e, f).

Dans un premier temps, on compare l'erreur introduite par la réduction. Pour les trois types de base considérés ici, on calcule et trace en Figure 3.44 l'erreur commise sur la réduction d'un modèle par la base orthonormalisée par rapport à ce même modèle. La base contenant 27 modes libres approche parfaitement le modèle libre. Si on la réduit par rapport au modèle appuyé, on retrouve avec moins de 0,1 % d'erreur les 19 premiers modes du modèle appuyé. Si on la réduit par rapport au modèle bloqué, on ne retrouve pas les 19 premiers modes du modèle bloqué. La base contenant des modes appuyés approche parfaitement le modèle appuyé. On retrouve avec moins de 1 % d'erreur les 27 premiers modes du système libre. On ne retrouve toujours pas les premiers modes du système bloqué en orthonormalisant par rapport à ce modèle. La base contenant des modes bloqués approche parfaitement le modèle bloqué. L'erreur sur le modèle libre et le modèle appuyé est de l'ordre de 1 %, dès les premiers modes. Aucun des trois types de base n'approche donc les trois conditions de blocage avec une précision suffisante.

Orthonormaliser par rapport au modèle libre n'entraîne une augmentation de l'erreur de réduction que par rapport aux modèles appuyé et bloqué réduits par eux-mêmes. Cela transparait en comparant les deux colonnes de la Figure 3.44. De plus, l'erreur par rapport au modèle non réduit reste inférieure à  $10^{-6}$  %. On conclut donc qu'orthonormaliser par rapport au modèle libre permet de conserver toute l'information du modèle. De plus, la réduction du modèle à contact permanent par rapport au modèle libre a donné, si la base de réduction était suffisamment riche, des résultats satisfaisants sur une large gamme de raideur  $k_{cont}$ .

En conséquence de la perte d'information lors de la réduction observée précédemment, aucun des trois types de base ne permet de bien reproduire l'évolution du système à contact permanent. Pour de faibles valeurs de raideur  $k_{cont}$ , la Figure 3.45 montre que les modes libres et bloqués au centre donnent de meilleurs résultats que les modes bloqués sur les PE. Passé une valeur de  $10^6$  N/m, les modes libres ou bloqués au centre donnent les mêmes résultats. Passé une valeur d'environ  $10^{11}$  N/m, les modes bloqués sur les PE donnent l'écart le plus faible, qui reste quand même de l'ordre de 1%. Ajouter plus de déformées dans la base concaténée n'a amélioré la réduction que sur une meilleure prise en compte du comportement à  $k_{cont}$  faible pour la base contenant des modes appuyés. L'erreur pour  $k_{cont}$  très élevée a été légèrement améliorée pour la base contenant des modes libres.

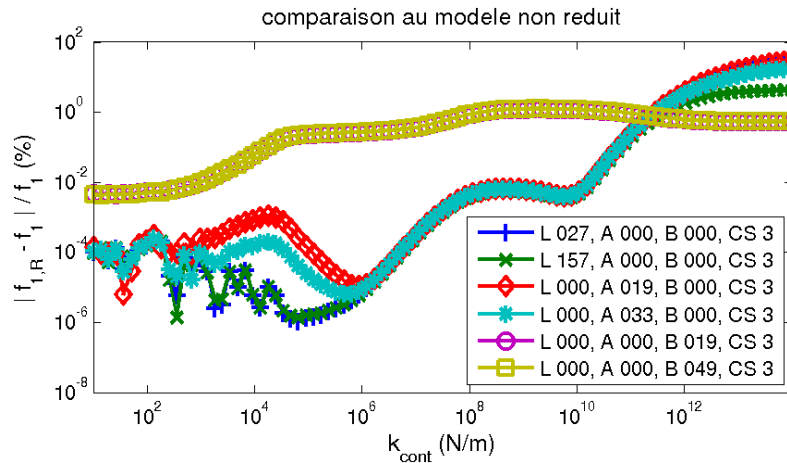


Figure 3.45. Écart relatif entre la première fréquence propre des modèles réduits et complet, en fonction de la raideur de contact. Les compositions des bases avant orthonormalisation par le système libre sont indiquées en légende.

Il semble impératif de prendre des modes libres et des modes bloqués sur les PE, afin d'approcher le modèle complet à contact permanent pour de faibles et de fortes raideurs de contact permanent. Dans la section suivante, on étudie la qualité de la réduction par des bases contenant plus d'un type de blocage.

### 3.4.5. Bases contenant plusieurs types de déformées

Dans un premier temps, on vérifie que l'orthonormalisation par rapport au système libre est bien la seule permettant de réduire correctement les trois conditions de blocage. On trace donc les fréquences des modèles libre, appuyé et bloqué en Figure 3.46. On superpose les fréquences du modèle non réduit et du modèle réduit par différentes orthonormalisations de la base de réduction. La base concaténée  $T_C$  contient des déformées libres, appuyées, bloquées et des corrections statiques : elle contient donc des informations sur les différents blocages du tube et permet d'injecter des efforts discrets au niveau des nœuds de contact. Seule l'orthonormalisation par rapport au modèle libre permet de bien projeter les trois blocages. Orthonormaliser par rapport au système appuyé ne permet pas de projeter correctement le système libre. Orthonormaliser par rapport au modèle bloqué ne permet pas de projeter les modèles libres et appuyés. Comme ces trois blocages sont représentatifs de l'évolution du modèle à contact permanent lorsque la raideur de contact  $k_{cont}$  augmente, on en déduit que seule l'orthonormalisation par rapport au modèle libre, quand bien même la base concaténée contienne tous les types de déformées, permet de bien projeter le modèle à contact permanent sur une large gamme de  $k_{cont}$ . En conséquence, pour la suite de la thèse, on ne considérera plus qu'une réduction par rapport au système libre.

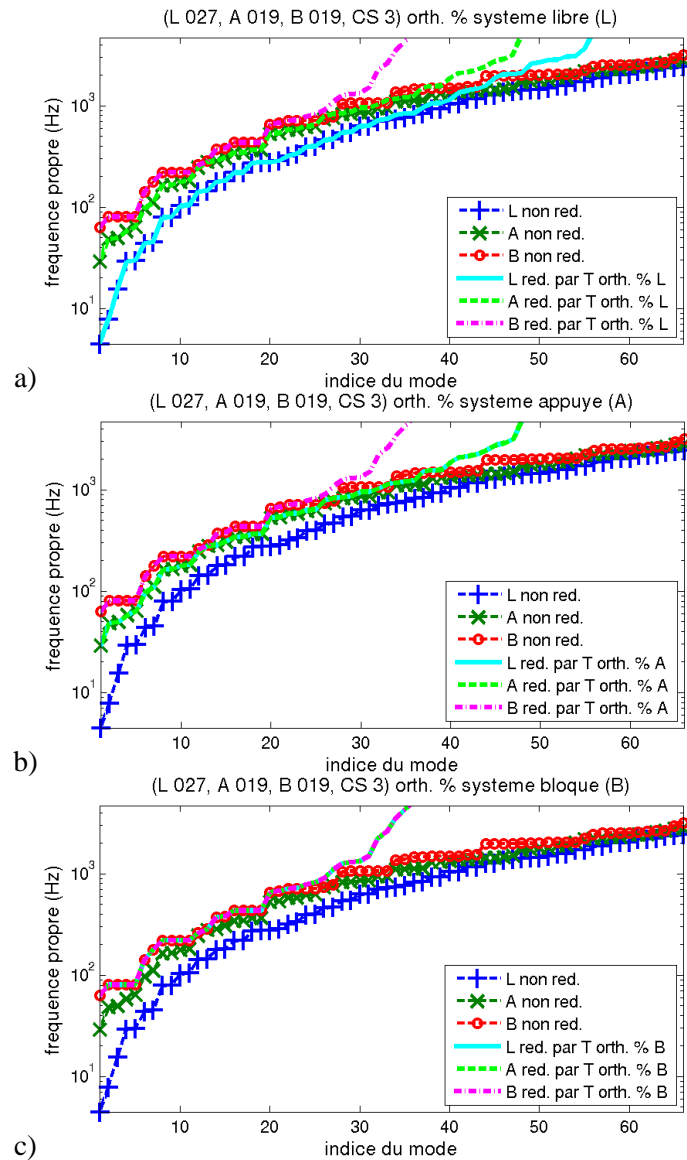


Figure 3.46. Fréquences des trois modèles bloqués, non réduits et réduits par une base orthonormalisée par rapport au modèle libre (a), appuyé (b) et bloqué (c). La basse concaténée contenait 27 modes libres, 19 modes appuyés, 19 modes bloqués et 3 niveaux de corrections statiques.

Pour visualiser l'effet de l'orthonormalisation de la base concaténée, on trace le MAC entre la base concaténée et la base orthonormalisée en Figure 3.47. On distingue quatre blocs bien distincts sur la matrice de MAC. Les modes libres ne sont pas modifiés. Des modes hautes fréquences ont été éliminés. Tous les modes autres que les modes libres ont été modifiés et ont été transformés en des modes qui leur sont linéairement indépendants. Ceci est dû à l'orthonormalisation par rapport à la matrice de masse. On remarque de nouveau que les modes appuyés se projettent sur les modes libres de manière plus évidente que les modes bloqués : le bloc correspondant dans la matrice de MAC a une allure plus diagonale. Ceci s'explique par la proximité de certaines déformées bloquées au centre avec des déformées libres, ces dernières ayant un nœud très proche de la PE.

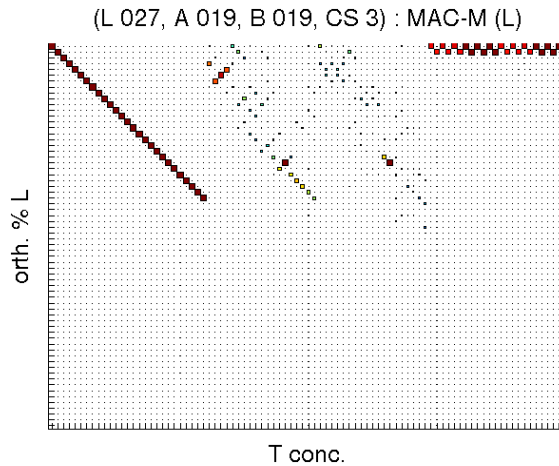


Figure 3.47. MAC entre une base contenant 27 modes libres, 19 modes bloqués sur les PE, 19 modes bloqués au centre des PE et 24 corrections statiques et cette même base orthonormalisée par rapport aux matrices de masse et de raideur du système libre.

Les bases contenant des modes libres et des modes bloqués sur les PE permettent d'approcher les fréquences obtenues avec le modèle complet avec moins de 1% d'erreur, comme montré sur la Figure 3.48. Ceci a été vérifié sur les quinze premiers modes. On remarque que l'ajout des corrections statiques à la base constituée des modes de fréquence inférieure à 500 Hz (27 modes libres et 19 modes bloqués) améliore peu les résultats. La base contenant les trois blocages mais pas de corrections statiques a une erreur plus faible que celle avec CS : dans certains cas, l'ajout de corrections statiques n'améliore pas la réduction du modèle à contact permanent. La prise en compte des trois conditions de blocage a amélioré la projection pour des raideurs de contact inférieures à  $10^7$  N/m. Ce qui est bénéfique puisque c'est l'ordre de grandeur de la raideur de contact utilisée dans le modèle de contact.

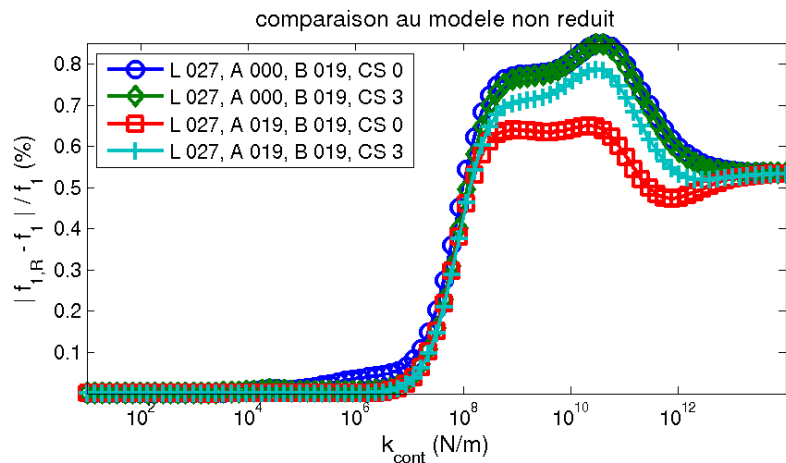


Figure 3.48. Écart relatif entre la première fréquence propre des modèles réduits et complet, en fonction de la raideur de contact. Les compositions des bases avant orthonormalisation sont indiquées en légende.

Si on utilise une base de modes libres et de modes bloqués sur les PE contenant initialement plus de modes libres et bloqués mais pas de correction statique, la qualité de la base orthonormalisée peut être dégradée. Dans ce cas précis, la Figure 3.49 montre qu'ajouter des corrections statiques sur trois niveaux améliore très peu les écarts relatifs de fréquence. Il faut rajouter les modes bloqués au centre de la PE pour obtenir une amélioration relative. Cette amélioration est relative car on obtient de meilleurs résultats qu'avec 57 modes libres,

49 modes bloqués sur les PE et trois niveaux de correction statique mais on retrouve les mêmes résultats qu'avec 39 modes libres, 27 modes bloqués et 3 niveaux de correction statique. Cependant, la base la plus complète donne ici les meilleurs résultats.

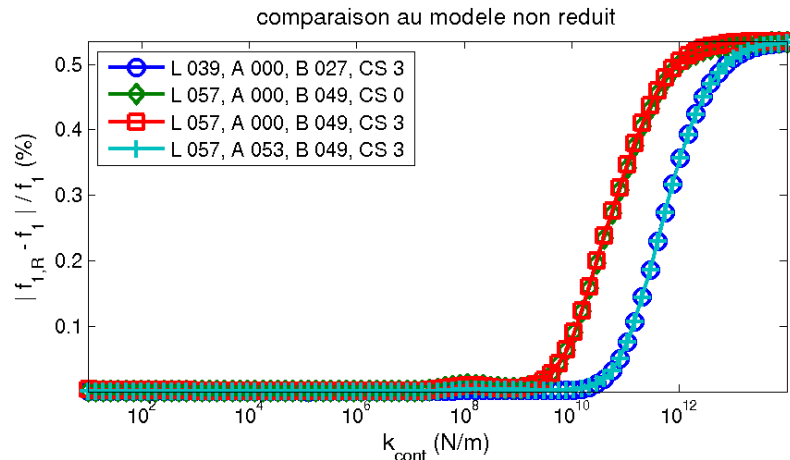


Figure 3.49. Écart relatif entre la première fréquence propre des modèles réduits et complet, en fonction de la raideur de contact. Les compositions des bases avant orthonormalisation sont indiquées en légende.

On vient de voir que la base contenant tous les types de déformées était celle approchant le mieux le modèle complet pour une très large gamme de raideur de contact  $k_{cont}$ . Cette base permet effectivement de minimiser l'erreur par rapport à une base contenant uniquement des modes libres pour les fortes valeurs de  $k_{cont}$ . On voit en Figure 3.50 que plus la base est riche, plus l'erreur est faible. Néanmoins, on ne tend pas vers 0 lorsque  $k_{cont}$  devient très grand. Ce biais n'est pas gênant en pratique : il est situé beaucoup trop haut en raideur, le tube étant bloqué dès  $10^{10}$  N/m.

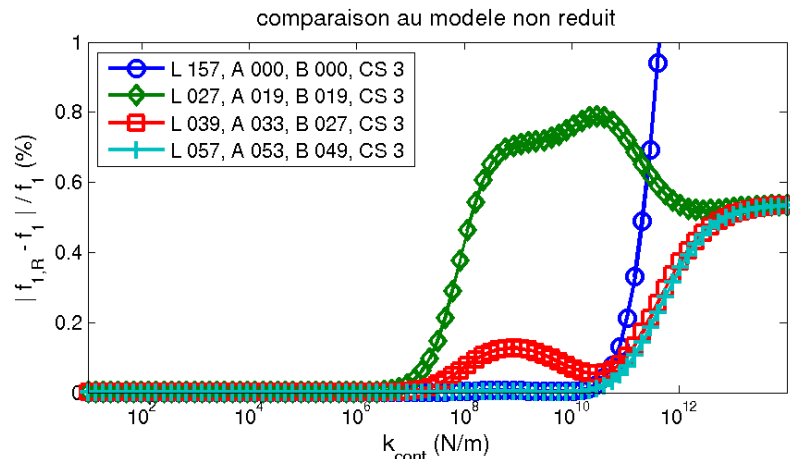


Figure 3.50. Écart relatif entre la première fréquence propre des modèles réduits et complet, en fonction de la raideur de contact. Les compositions des bases avant orthonormalisation sont indiquées en légende.

### 3.4.6. Choix d'une base de réduction

De l'étude précédente, on retient dans un premier temps que l'ajout de corrections statiques ajoute plus d'information à la base concaténée que l'ajout de déformées modales. La

convergence de l'erreur est alors plus rapide. En n'utilisant que des modes appuyés ou que des modes bloqués, on retrouve les modes libres si le nombre de corrections statiques est suffisant. Il faut orthonormaliser la base concaténée par rapport au modèle libre : toute autre orthonormalisation ne permet pas de retrouver les trois comportements libres, appuyés et bloqués. Trois niveaux de corrections statiques semblent un bon compromis. Pour ajouter plus d'information et minimiser l'erreur sur une large gamme de fréquences et de raideurs, il faut utiliser les trois types de blocage. Au final, la base de réduction est donc composée de modes libres, de modes appuyés, de modes bloqués et de trois niveaux de corrections statiques par PE.

### **3.5. Choix des paramètres du schéma d'intégration numérique**

Cette section s'intéresse à l'influence de différents paramètres du schéma d'intégration numérique sur les réponses temporelles ou fréquentielles. En 3.5.1, on montre que la diminution du pas de temps permet d'équilibrer le bilan d'énergie d'un système non-conservatif. Le calcul de l'énergie mécanique, comprenant l'énergie potentielle élastique associée au contact, est présenté en 3.5.2. La sous-section 3.5.3 décrit le cas-test servant dans la suite de la section à visualiser l'influence des paramètres sur la dynamique non-linéaire : un lâcher conservatif, d'amplitude variable. On constate en 3.5.4 la non-conservation de l'énergie mécanique pour différents jeux de paramètres. Selon les cas, il peut y avoir croissance ou diminution de l'énergie mécanique totale. Une analyse détaillée montre en 3.5.5 que les phases de contact sont celles au cours desquelles l'énergie mécanique ne se conserve pas. Diminuer le pas de temps améliore la conservation. En 3.5.6, on montre comment on peut modifier arbitrairement les fréquences et amortissements des modes hautes-fréquences, pour lesquels on n'a pas de valeur de référence. Ces modifications de paramètres sont présentées en 3.5.7, pour une influence moindre sur la conservation de l'énergie mécanique que la diminution du pas de temps. Différents pas de temps sont comparés en 3.5.8 vis-à-vis du nombre d'itérations nécessaires à chaque pas de temps et du temps CPU total. On conclut en 3.5.9 et adopte la valeur de  $2.10^{-5}$  s.

#### **3.5.1. Paramètres du schéma sur des simulations linéaires (sans choc)**

En réalisant des simulations linéaires, sans choc avec un jeu très important et/ou une force d'excitation très faible, on vérifie que le schéma est stable et que le décalage et l'amortissement des hautes fréquences perturbent peu les simulations.

##### **Influence du pas de temps**

On commence dans un premier temps par étudier l'influence du pas de temps sur des simulations linéaires. Les simulations sont effectuées sur une base orthonormalisée contenant initialement des modes libres jusqu'à 500 Hz, des modes bloqués et des corrections statiques. On obtient des résultats comparables avec une base contenant des modes jusqu'à 7 500 Hz. En effet, ces bases vont loin en fréquence une fois orthonormalisée et la réponse du système linéaire est alors la même dans les basses fréquences. On ne modifie pas les fréquences des modes hautes-fréquences et on affecte tous les modes d'un amortissement modal de 0,2%. L'excitation en apex est un bruit filtré entre 1 et 100 Hz, de valeur RMS 0,2 N. Le jeu est mis

arbitrairement grand afin d'être sûr qu'il n'y aura aucune non-linéarité de choc. Les évolutions dynamiques ont été calculées avec un schéma de Newmark d'accélération moyenne pour des pas de temps allant de  $10^{-3}$  s à  $10^{-5}$  s.

On observe, comme prévu, une convergence des simulations lorsque le pas de temps diminue [Ger1]. On remarque que les amplitudes se conservent. On observe aussi le phénomène de décalage des fréquences, qui diminue lorsque le pas de temps diminue. Ceci est compatible avec les propriétés du schéma énoncées en 2.3.3. En observant la vitesse hors-plan à l'apex et sa DSP sur la Figure 3.51, on se rend compte que  $10^{-4}$  s doit être dorénavant être le plus grand pas de temps à prendre en compte : c'est celui qui permet, en linéaire, une bonne convergence des temporels et une bonne convergence de la dynamique sur les 200 premiers Hz (et même plus haut en fréquence).

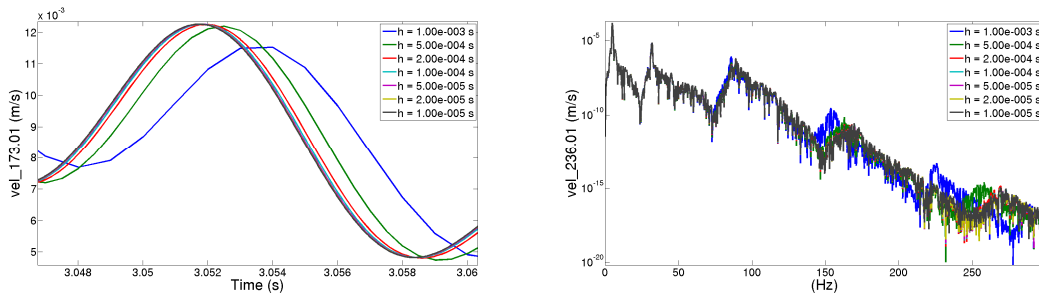


Figure 3.51. a) Zoom sur l'évolution temporelle de la vitesse d'un nœud de choc. b) DSP de cette vitesse.

Pour évaluer le besoin de raffiner le pas de temps, on compare la dissipation

$$D_n = \frac{h}{4} (\dot{q}_{n+1} + \dot{q}_n)^T C (\dot{q}_{n+1} + \dot{q}_n) \quad (3.21)$$

au bilan d'énergie mécanique sur un pas de temps

$$\begin{aligned} [T]_n^{n+1} + [V]_n^{n+1} - P_n = & \frac{1}{2} (\dot{q}_{n+1} - \dot{q}_n)^T M (\dot{q}_{n+1} + \dot{q}_n) + \frac{1}{2} (q_{n+1} - q_n)^T K (q_{n+1} + q_n) - \\ & \frac{1}{2} (q_{n+1} - q_n)^T (p_{n+1} + p_n). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Ce bilan peut s'effectuer sur la base canonique avec les DDL globaux et les matrices assemblées ou sur la base réduite avec les DDL généralisés et les matrices projetées. Cette dernière approche est utilisée ici.

Notons par avant que comparer variation d'énergie mécanique et travail des forces extérieures plus la dissipation n'est pas très pertinent. En effet, la dissipation est plus faible que les trois autres termes et n'influe donc pas vraiment la somme travail des forces extérieures et de la dissipation. De plus, la dissipation est toujours positive, ce qui est un renseignement supplémentaire. En comparant en Figure 3.52 les bilans d'énergie pour une simulation réalisée avec un pas de temps de  $10^{-4}$  s et une simulation réalisée avec un pas de temps de  $10^{-5}$  s, on voit que le bilan d'énergie n'est pas équilibré avec le pas de temps le plus élevé. Il est presque totalement équilibré avec le pas de temps le plus faible,  $[T]_n^{n+1} + [V]_n^{n+1} - P_n$  étant presque toujours positif.



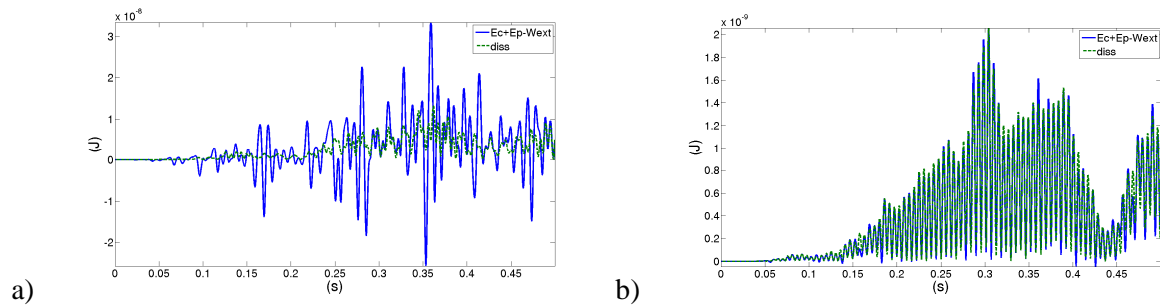


Figure 3.52. Bilans d'énergie sur chaque pas de temps réalisés pour un pas de temps de  $10^{-4}$  s (a) et un pas de temps de  $10^{-5}$  s (b).

Comme on veut réaliser des calculs rapides, on cherche un pas de temps élevé, les calculs avec un pas de temps faibles étant globalement plus long que les calculs avec un pas de temps plus élevé. Il faut réaliser donc un compromis entre précision du calcul, nombre d'itérations par pas de temps et nombre total d'itérations.

### 3.5.2. Analyse de la conservation d'énergie en non-linéaire

Cette partie s'intéresse au bilan d'énergie du schéma d'intégration en non-linéaire : celui-ci est finalement conservatif seulement durant les phases de vol libre. L'influence de différents paramètres est présentée. Le schéma de Newmark non linéaire à accélération moyenne est censé ne pas engendrer d'amortissement numérique dans le cas linéaire et cela a été vérifié dans la partie précédente, à la condition que le pas de temps soit suffisamment faible.

Comme il n'y a pas de terme d'amortissement, on s'intéresse ici aux énergies cinétique et potentielle à chaque pas de temps. L'énergie potentielle est séparée entre celle élastique du tube et celle élastique des raideurs de contact. En l'absence d'effort extérieur, l'énergie mécanique doit se conserver.

Tous les calculs se rapportent à la configuration à jeu nominal. Le calcul s'est décomposé en deux étapes :

- Calcul de la réponse du tube, très amorti (7 % ou 70 % sur tous les modes, valeur arbitraire) pour gagner en temps de calcul, à un effort constant  $f_0$  hors-plan à l'apex. On vérifie alors qu'il y a convergence des coordonnées modales. La déformée finale est prise comme condition initiale du calcul suivant. Cette déformée subit une transformation entre le premier mode de flexion hors-plan et le second mode hors-plan / premier mode d'appui. Les déplacements selon  $DY$  sont négligeables.
- Lâcher du tube, à vitesse initiale nulle, sans aucun amortissement, à partir de la déformée identifiée ci-dessus. Calcul effectué sur différentes durées (au plus long 500 s) avec différents pas de temps (au plus fin  $10^{-6}$  s).

Si  $q_R$  est le vecteur des coordonnées généralisées, les énergies potentielle et cinétique sont calculées comme

$$V = \frac{1}{2} \dot{q}_R^T K_R \dot{q}_R \text{ et } T = \frac{1}{2} \dot{q}_R^T M_R \dot{q}_R \quad (3.23)$$

Si  $\{\delta\}$  désigne le vecteur des pénétrations,  $\{f_{contact}^{NL}\}$  le vecteur des efforts de contact et  $k_{cont}$  la raideur de contact discrète affectée à chaque nœud de contact, l'énergie potentielle des raideurs de pénalisation est

$$V_c = \frac{1}{2} k_{cont} \{\delta\}^T \{\delta\} = \frac{1}{2k_{cont}} \{f_{contact}^{NL}\}^T \{f_{contact}^{NL}\}. \quad (3.24)$$

On peut parler d'énergie potentielle des raideurs de contact et les forces de contact (sans amortissement de choc ni frottement) sont conservatives. En effet, elles dérivent bien d'un potentiel

$$U(r, \theta) = \begin{cases} \frac{k_{cont}}{2} (r - g)^2 & \text{si } r > g \\ 0 & \text{si } r \leq g \end{cases} \quad (3.25)$$

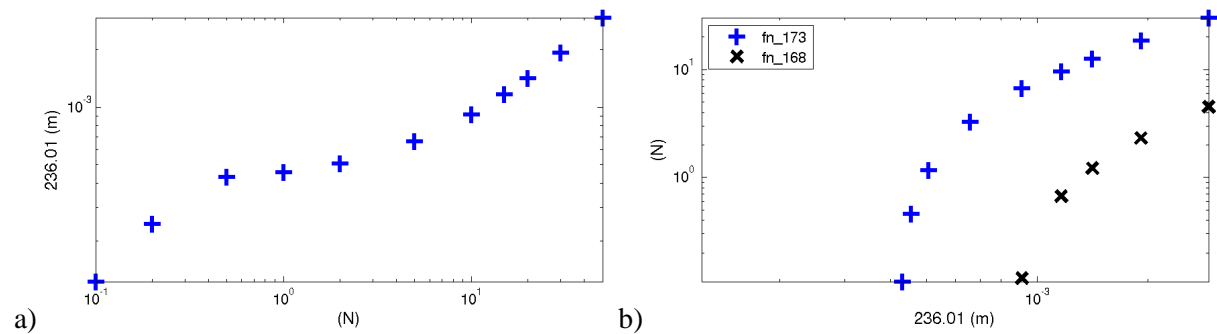
qui est dérivable, de dérivée l'expression des forces de contact

$$\vec{f}_{contact}^{NL}(r, \theta) = -\nabla U = \begin{cases} -k_{cont} (r - g) \vec{u}_r & \text{si } r > g \\ \vec{0} & \text{si } r \leq g \end{cases}. \quad (3.26)$$

L'énergie mécanique  $E_m$  est la somme des trois grandeurs  $T$ ,  $V$ ,  $V_c$ . Elle est censée se conserver si le système est linéaire.

### 3.5.3. Cas test : lâcher conservatif

On récapitule ici les différentes conditions initiales utilisées. On trace en Figure 3.53 le déplacement  $U$  (hors-plan) de l'apex en fonction de  $f_0$ , les forces de contact initiales en fonction du déplacement de l'apex et l'énergie initiale en fonction du déplacement de l'apex. Le Tableau 3.7 synthétise les valeurs maximales de ces grandeurs ; des déformées initiales sont ensuite présentées.



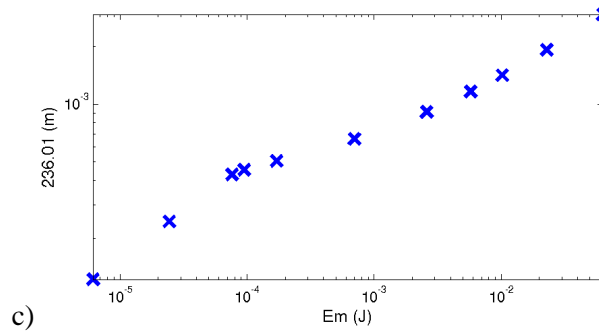


Figure 3.53. a) Déplacement final de l'apex en fonction de l'effort constant. b) Forces de choc (non nulles) initiales en fonction du déplacement de l'apex. c) Déplacement de l'apex en fonction de l'énergie mécanique initiale.

Les deux premiers calculs (0,1 et 0,2 N) sont donc linéaires : il n'y a pas contact à l'instant initial. Le troisième calcul (0,5 N) présente une légère non-linéarité initiale. Les trois suivants (1, 2 et 5 N) n'activent que l'obstacle supérieur. Les cinq derniers calculs (10, 15, 20, 30 et 50 N) sont tels qu'il y ait contact initialement sur les deux niveaux d'obstacles supérieurs. On vérifie que le déplacement à l'apex, les forces normales de choc et l'énergie mécanique sont croissants en fonction de l'effort constant.

F (N)	0,1	0,5	10	50
$E_m$ (J)	$6,1 \cdot 10^{-6}$	$7,6 \cdot 10^{-5}$	$2,6 \cdot 10^{-3}$	$6,3 \cdot 10^{-2}$
U (mm)	0,12	0,43	0,91	2,93
$F_n$ 173 (N)	0	0,11	6,63	30,2
$F_n$ 458 (N)	0	0,11	6,63	30,2
$F_n$ 168 (N)	0	0	0,12	4,52
$F_n$ 453 (N)	0	0	0,12	4,52

Tableau 3.7. Grandeurs initiales pour 4 lâchers.

À noter que les valeurs de force de contact initiales pour 50 N sont respectivement 4,52329, 4,52349, 30,2108, 30,211 N. Les changements portent sur le cinquième chiffre significatif. Il y a une légère dissymétrie initiale. Le phénomène de perte de symétrie est mis en évidence sur la Figure 3.54 par l'évolution des forces de choc. Celles-ci ont des évolutions qui finissent par être notablement différentes, les chocs ne se produisant plus en même temps. Cependant, même sans légère dissymétrie initiale, le tube a une évolution non symétrique : des erreurs d'arrondi portant sur le calcul de la direction de la force de choc entraînent des rebonds sur une direction légèrement différente de  $DX$ .

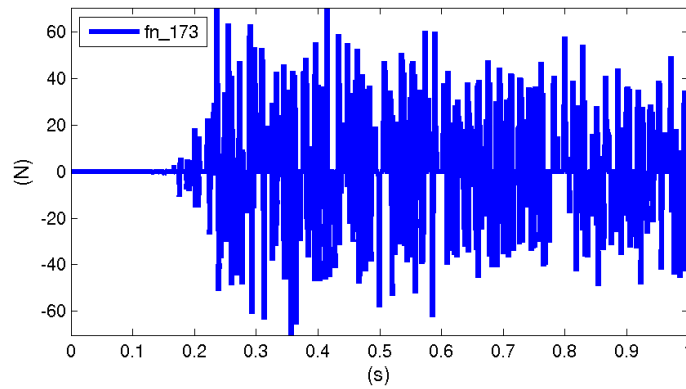


Figure 3.54. Différence entre force de choc aux nœuds 173 et 458 (même altitude mais sur une jambe différente).

La Figure 3.55 présente l'évolution de la déformée initiale : du système libre au système en contact permanent / appuyé.

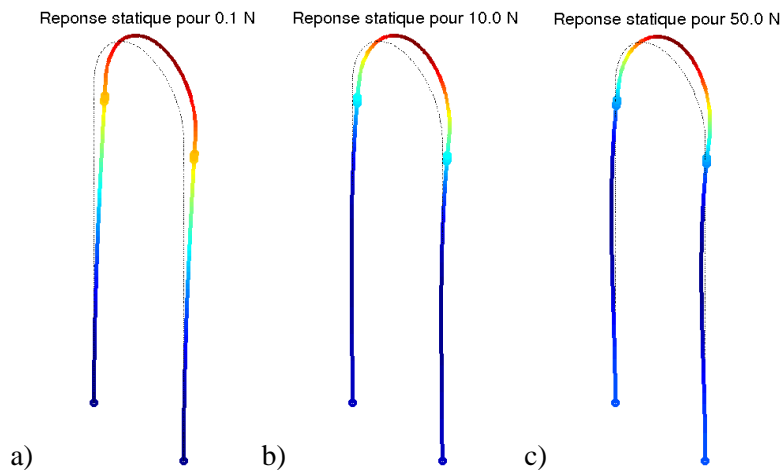


Figure 3.55. Évolution des déformées initiales en fonction de l'effort constant appliqué. La couleur indique le déplacement selon DX.

### 3.5.4. Non conservation de l'énergie pour des chocs élevés

Dans cette partie, on étudie le lâcher du tube. Sauf mention contraire, les paramètres suivants sont choisis :

- pas d'actualisation du jacobien ;
- tolérance relative sur le résidu de  $10^{-6}$  ;

On compare l'énergie mécanique pour des simulations effectuées sur 500 s avec un pas de temps de  $10^{-4}$  s. On ne stocke les valeurs que toutes les 0,1 s. Les évolutions sont présentées en pourcentages de la valeur initiale.

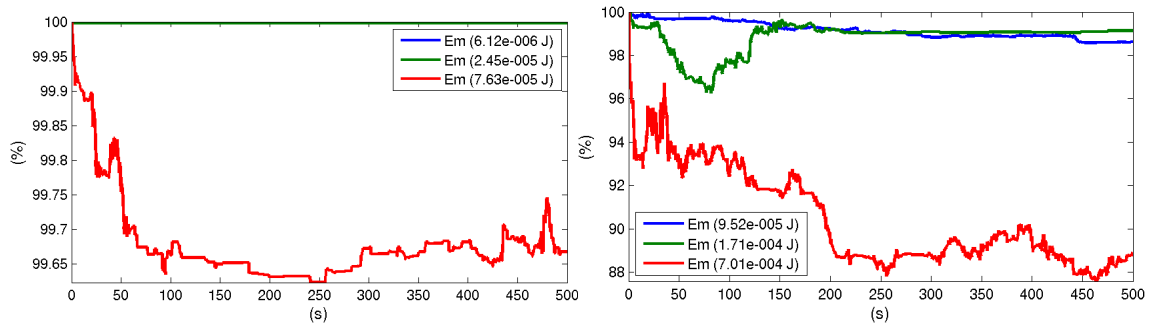


Figure 3.56. Énergie mécanique de différents lâchers.

Pour les lâchers de faible amplitude, sans contact initial, l'énergie mécanique se conserve. Le cas 0,5 N perd moins de 0,5 % d'énergie mécanique. Les trois cas suivants (1, 2 et 5 N) correspondent à des déformées initiales n'activant aussi que l'obstacle supérieur. On en tire les observations suivantes :

- la non-linéarité de contact entraîne une non-conservation de l'énergie mécanique totale ;
- il peut y avoir perte ou création d'énergie ;
- l'évolution dépend mais non de façon monotone de l'effort constant appliqué précédemment.

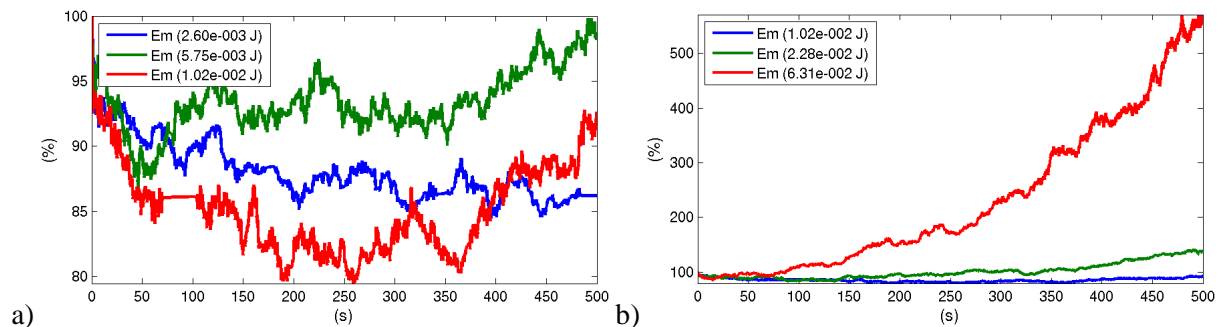


Figure 3.57. Énergie mécanique de différents lâchers.

La perte initiale d'énergie est plus forte quand le lâcher est de plus grande amplitude ; le gain d'énergie postérieur est plus important aussi quand le lâcher est de plus grande amplitude.

Diminuer le pas de temps permet une meilleure conservation de l'énergie. On trace Figure 3.58 l'évolution temporelle de l'énergie mécanique pour différents pas de temps. Pour le lâcher 50 N,  $10^{-5}$  s semble une valeur permettant une bonne conservation de l'énergie.

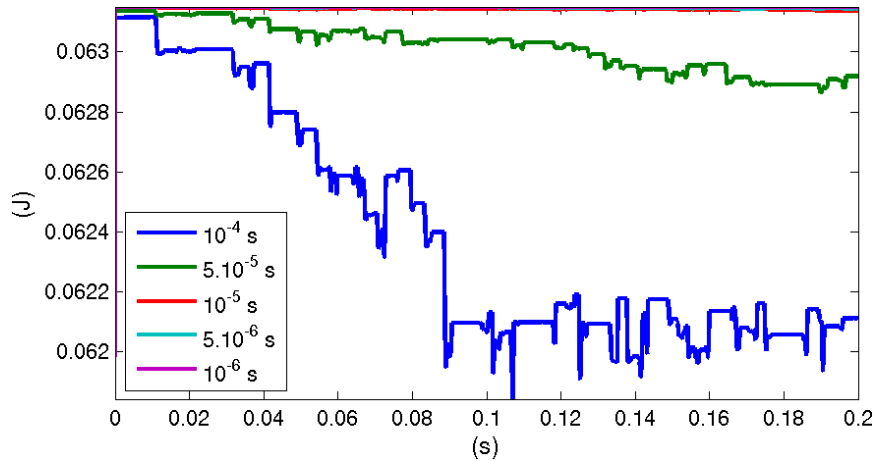


Figure 3.58. Bilan d'énergie, lâcher 50N, pas de temps variable.

L'influence de nombreux paramètres a été testée ; ils ont tous un effet mais aucun n'a l'air aussi déterminant que le pas de temps. Selon les différents cas étudiés en Figure 3.59, on a symétrisé ou non la déformée initiale sur base physique : les déplacements selon  $DY$ ,  $DZ$  et  $DRX$  sont annulés. Le retour sur base modale entraîne par lui même une dissymétrie des conditions initiales. On peut utiliser des matrices de masse et de raideur pleines, au sens où les valeurs extra-diagonales, qui sont presque nulles par construction des matrices projetées, sont prises en compte. On peut aussi actualiser le jacobien à chaque itération de chaque pas de temps.

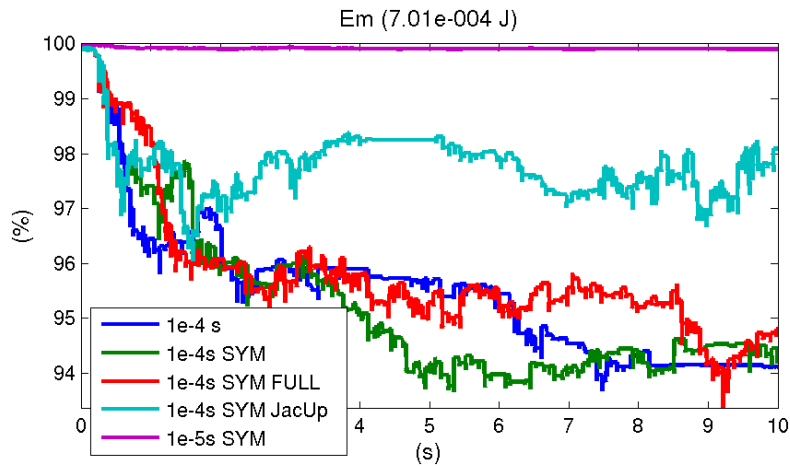


Figure 3.59. Influence de la symétrisation, de l'utilisation de matrices pleines, de la mise à jour du jacobien et du pas de temps.

Diminuer la tolérance relative à  $10^{-9}$  au lieu de  $10^{-6}$  pour le lâcher à 50 N ne permet pas d'empêcher la divergence lente de l'énergie : en 500 s, pour un pas de temps de  $10^{-4}$  s, on a 250 % au lieu de 500 % de l'énergie initiale.

Ici et dans la suite de ce travail, comme dans [Ver1], on ne calcule pas la jacobienne à chaque itération de chaque pas de temps. On la prend constante et égale à celle du système libre. On peut donc la calculer et l'inverser une fois pour toute en début de simulation temporelle. Ici, la taille du système est petite (environ 200 DDL) mais on cherche à faire beaucoup de pas de temps. Les gains de temps sont conséquents.

### 3.5.5. Analyse détaillée des variations d'énergie au cours des chocs

Il semble que le bilan d'énergie soit exact dans les phases de vol libre et que seules les phases de contact entraînent un gain ou une perte d'énergie. Ceci est conforme à la théorie de Newmark. C'est le cas sur tous les cas étudiés. On le montre ici en Figure 3.60 pour le lâcher 5 N, avec un pas de temps de  $10^{-5}$  s. Par des triangles, on indique les épisodes de choc : un triangle pointant vers le haut indique le dernier instant où les forces de choc sont nulles, un triangle pointant vers le bas indique le premier instant où les forces de choc sont nulles. L'évolution de l'énergie au cours d'une phase de contact n'est pas monotone mais elle commencerait toujours pas décroître.

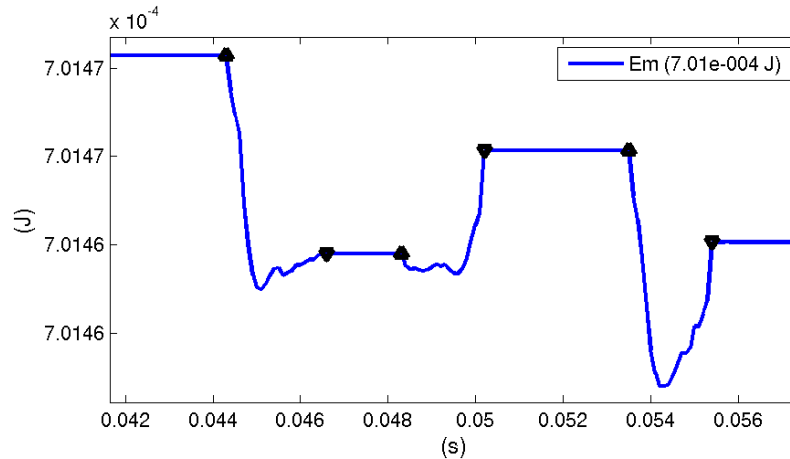


Figure 3.60. Énergie mécanique totale. Les triangles délimitent les épisodes de choc.

Les phases de contact sont donc celles entraînant le gain ou perte d'énergie. Cela est confirmé par la suite.

Le lâcher, même pour l'effort initial à 0,1 N, entraîne une perte d'énergie. Celle-ci est faible (0,002 %) et circonscrite après le lâcher, qui s'apparente à un choc (on a relâché brusquement l'effort initial). Après cette phase, la tendance globale est plutôt à la hausse, mais dans une proportion bien moindre que la baisse observée initialement : on ne regagne pas l'énergie perdue. Cette tendance à la légère perte d'énergie lors du lâcher a toujours été observée. Elle est circonscrite au premier pas de temps lorsque celui-ci devient petit ( $10^{-6}$  s). Une explication plausible est le fait que les efforts de contact ne sont pas pris en compte initialement. A l'instant final de la première étape, il y a un effort extérieur et des efforts de contact. A l'instant initial du lâcher, la déformée est la même mais il n'y a plus ni effort extérieur ni effort de contact, le calcul de l'équilibre mécanique serait donc imprécis sur le premier instant.

La modification du pas de temps semble être le paramètre principal pour conserver l'énergie mécanique du système. On se rend compte grâce à la Figure 3.61 que les forces de choc sont mal calculées si le pas de temps est trop grand, notamment  $10^{-4}$  s. Cependant, la forme des pics est assez bien représentée. Les durées de choc sont très sensiblement les mêmes : les différents pas de temps sont compatibles avec la valeur de raideur du modèle de contact. L'amplitude et l'aire sous les pics sont aussi très proches. On vérifie que l'énergie est constante durant les phases de vol libre. L'énergie mécanique est d'autant mieux conservée que les forces de choc sont calculées de manières plus précises.

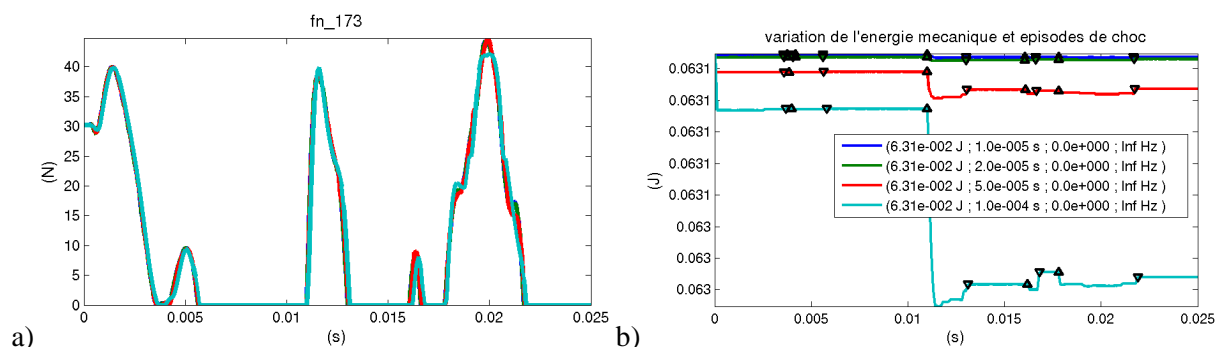


Figure 3.61. Force de choc et énergie mécanique en fonction du temps. Comparaison de 4 pas de temps. Les instants d'entrée et de sortie du contact sont indiqués par des triangles ascendants et descendants.

Les mêmes remarques tiennent encore si on considère une gamme de pas de temps plus fins : de  $10^{-5}$  à  $10^{-6}$  s (Figure 3.62). Néanmoins, les profils des forces de contact sont identiques : on peut donc considérer que  $10^{-5}$  s, voire  $2 \cdot 10^{-5}$  s, est un pas de temps suffisamment faible pour permettre la convergence du calcul des efforts de contact, donc suffisamment faible pour bien représenter la dynamique du tube.

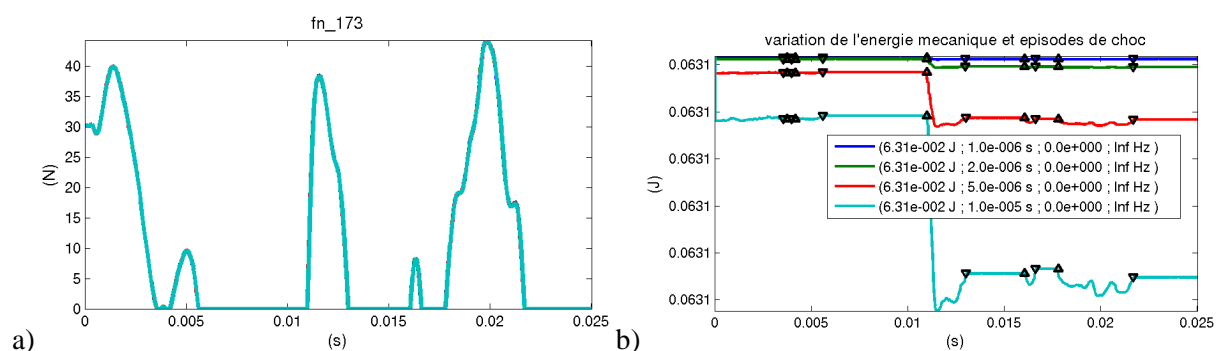


Figure 3.62. Force de choc et énergie mécanique en fonction du temps. Comparaison de 4 pas de temps. Les instants d'entrée et de sortie du contact sont indiqués par des triangles ascendants et descendants.

On peut aussi remarquer sur les deux figures précédentes, que la perte d'énergie sur le premier pas de temps est d'autant plus faible que le pas de temps l'est.

A ce stade on a vu que la diminution du pas de temps vers  $10^{-5}$  s ou  $2 \cdot 10^{-5}$  s permettait une représentation plus fine des efforts de contact et une meilleure conservation de l'énergie mécanique. L'idée étant de s'affranchir de la croissance de l'énergie observée pour la simulation non-linéaire sans amortissement et avec un pas de temps  $10^{-4}$  s, on étudie dans la partie suivante l'effet de l'ajout d'un amortissement sur les hautes fréquences.

### 3.5.6. Simulations non-linéaires : de l'importance des hautes fréquences

On remarque ici la nécessité d'avoir suffisamment de modes comparativement au large spectre des forces de choc. On montre qu'il est impossible de comparer deux évolutions temporelles : celles-ci sont très sensibles aux paramètres du calcul. Par contre, les DSPs des déplacements (ou accélérations) en basses-fréquences sont peu sensibles à ces paramètres et peuvent être retenues comme variable d'observation.



Au cours des premiers calculs non-linéaires, le rôle prépondérant joué par les hautes fréquences est apparu. En prenant seulement des modes jusqu'à 500 Hz, les simulations numériques n'étaient pas satisfaisantes. En étudiant le spectre d'un impact, on voit que le contenu fréquentiel d'un impact est effectivement à très large bande, résultat classique de transformée de Fourier d'un signal à support *étroit*. Le spectre d'un impact sévère représentatif a été tracé. Comme montré sur la Figure 3.63, ils présentent des lobes, le lobe principal étant aux environs de 2 000-3 000 Hz. Le lobe principal est d'autant plus large que le choc est court, et donc le plus souvent associé à une faible pénétration. Nous considérons qu'en prenant des modes libres jusqu'à 7 500 Hz (arbitraire), nous reproduisons très fidèlement les évolutions linéaires du tube sur la largeur du spectre des efforts de contact. Cette valeur de fréquence est retenue pour la suite des études dans la construction des bases de réduction plus riches.

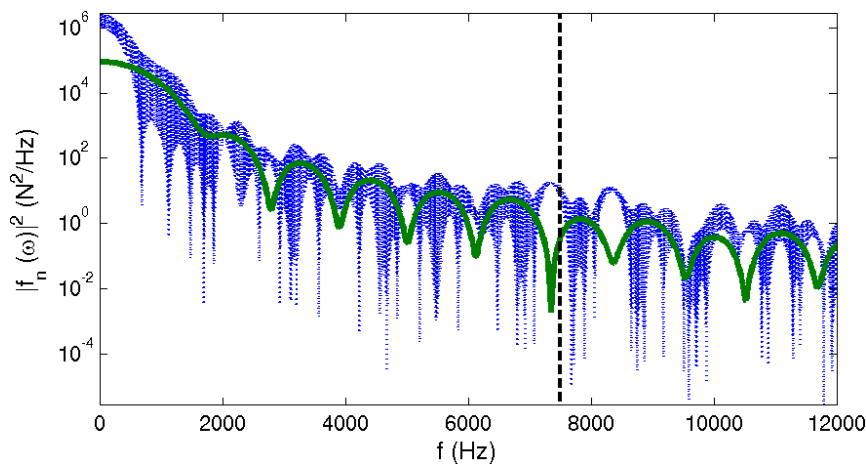


Figure 3.63. DSP, représentative, de deux impacts.

La non-linéarité de contact induit donc des hautes-fréquences. Le modèle mécanique retenu n'est pas valide pour ces hautes fréquences. Ici, on les modifie et on regarde les conséquences sur les temporels et les DSP.

On réalise des calculs sur base modale. Ces bases contiennent des modes libres et des modes apportant de l'information sur les déformées lorsque le jeu est faible et/ou le tube choque : modes « bloqués » sur l'épaisseur de la PE, modes « bloqués » au centre de la PE et corrections statiques sur les DDL de contact. Après orthonormalisation, ces modes hautes fréquences ont des fréquences très élevées. La construction de ces bases de réduction a été abordée en 3.3. On sait que notre modèle est faux pour ces fréquences (maillage trop grossier, modèle de poutre pas adapté, ...) et ce qui nous intéresse est leur comportement basses-fréquences. Donc nous nous intéressons ici à l'effet de modifications du modèle pour les hautes fréquences en décalant et/ou amortissant les modes de fréquences élevées.

Comme on ne peut a priori décider quels paramètres du schéma de Newmark nous allons utiliser, on ne peut exclure les zones de stabilité conditionnelle. Le pas de temps critique est alors inversement proportionnel à la plus haute fréquence du système. De plus, les propriétés de stabilité ne sont pas vraiment établies en non-linéaire : une dépendance de la stabilité à la taille du pas de temps n'est pas à exclure. On peut donc penser que la taille du pas de temps influe la stabilité, même pour des paramètres inconditionnellement stables en linéaire, ce qui a été présenté en 2.3.

Le principe du décalage de fréquences et du changement d'amortissement est explicité sur la Figure 3.64. On se donne l'amplitude de la fonction de transfert d'un système à un DDL, de pulsation  $\omega_0$  et d'amortissement réduit  $\zeta_0$ ,

$$|H_0(\omega)| = \frac{A_0}{|-\omega^2 + 2i\zeta_0\omega_0\omega + \omega_0^2|}. \quad (3.27)$$

On cherche les paramètres ( $\omega_{1DOF}$ ,  $\zeta_{1DOF}$ ) d'un autre système à un DDL tels que sur une bande de fréquences basse fréquence  $[0; \omega_{BF}]$ , les deux fonctions de transfert soient *proches*, ce qui est assuré par le critère suivant, où  $r$  est un réel supérieur à 1,

$$|H_{1DOF}(\omega_{BF})| \leq r |H_0(0)|. \quad (3.28)$$

En demandant de plus que les valeurs en 0 soient égales, on aboutit à la valeur de l'amplitude

$$A_{1DOF} = A_0 \frac{\omega_{1DOF}^2}{\omega_0^2}, \quad (3.29)$$

et les fréquences et amortissements ( $\omega_{1DOF}$ ,  $\zeta_{1DOF}$ ) sont solutions de l'inégalité

$$\frac{\omega_{1DOF}^2}{|-\omega_{BF}^2 + 2i\zeta_{1DOF}\omega_{1DOF}\omega_{BF} + \omega_{1DOF}^2|} \leq r, \quad (3.30)$$

fonction des paramètres  $r$  et  $\omega_{BF}$ . Cette dernière inéquation est résolue numériquement. En se donnant une valeur de l'amortissement  $\zeta_{1DOF}$ , la valeur de  $\omega_{1DOF}$  est immédiate.

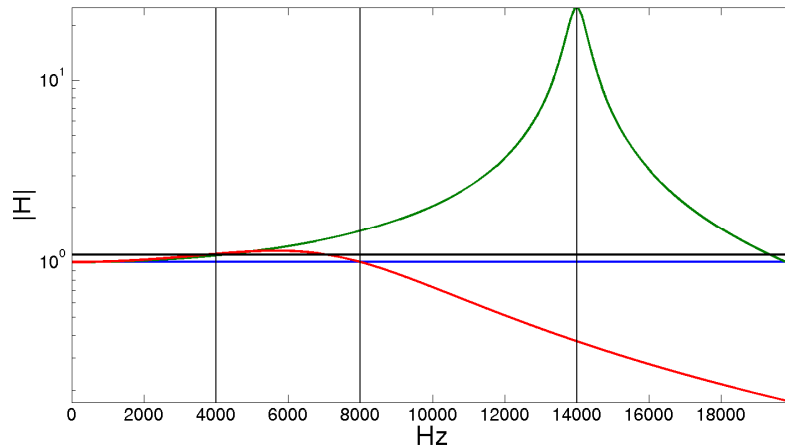


Figure 3.64. Amplitude d'un mode (vert), son asymptote BF (bleu), une marge d'erreur (noir) et une amplitude d'un mode plus amorti respectant la marge d'erreur.

Une fois que l'on a décidé quelle fréquence et amortissement vont être affectés à un mode, se pose la question de la réalisation pratique : que faut-il modifier ? Changer l'amortissement est facile si on a choisi un modèle d'amortissement modal. Par contre, il ne faut pas oublier de modifier les vecteurs de la base modale. On suppose la matrice de masse égale à l'identité. Les modes propres avant et après modification des fréquences doivent être tels que

$$\phi_n^T K \phi_n = \omega_n^2 \text{ et } \tilde{\phi}_n^T K \tilde{\phi}_n = \tilde{\omega}_n^2 \quad (3.31)$$

Comme la fréquence a été modifiée, les déformées doivent l'être aussi. Comme on ne modifie pas l'allure des déformées, on doit avoir

$$\tilde{\phi}_n = \alpha \phi_n \text{ avec } \alpha = \frac{\tilde{\omega}_n}{\omega_n} \quad (3.32)$$

Les coordonnées modales seront modifiées mais les grandeurs sur bases physiques ne le seront pas. Ceci a été vérifié sur des simulations linéaires.

### 3.5.7. Effet de la modification des modes haute fréquence sur les temporels

On regarde ici l'influence de modifications de la base de projection. On décale vers les basses fréquences tous les modes supérieurs à une certaine fréquence et les affecte arbitrairement d'un fort amortissement modal, car ils ne participent pas à la réponse globale de la structure. On calcule alors la dynamique du tube pour une excitation donnée, un pas de temps de  $10^{-4}$  s. Postérieurement, cette valeur de pas de temps a été diminuée à  $2.10^{-5}$  s. Le jeu est le jeu nominal et la valeur RMS de l'excitation en apex est 0,5 N, ce qui entraîne un nombre important de chocs par unité de temps. Les décalages de fréquences ont été calculés pour une erreur voulue de 1 % sur le niveau basses fréquences des fonctions de transfert pour un amortissement modal de 0,6, soit 60 %. Les fréquences retenues sont présentées dans le Tableau 3.8.

Fréquence de la zone d'intérêt (Hz)	Fréquence retenue (Hz)
3000	16300
5000	27200
10000	54400
30000	106000

Tableau 3.8. Fréquence de la zone où l'on veut une faible erreur sur le niveau BF des fonctions de transfert et fréquence minimale des modes satisfaisant ce critère.

Les allures des DSPs sur large bande sont très comparables, quelques décalages de pics apparaissant pour les très hautes fréquences. Les allures des déplacements et contraintes tracés en Figure 3.65 sur la bande [0 Hz ; 250 Hz] sont très comparables. On aperçoit une seule différence de comportement, aux alentours de 20 Hz. Il n'y a pas de modes vers 20 Hz : le premier mode de torsion est à 16,7 Hz et le second mode de flexion hors-plan est à 31,7 Hz. Cela laisse penser à un effet indésirable du moyennage des DSP. Le mode d'intérêt, le deuxième mode de flexion initialement à 31,7 Hz) est peu impacté par le changement de base.

L'impact de la base de projection est faible pour les simulations numériques implicites. On propose donc de ne pas décaler les fréquences. La question de seulement amortir les hautes fréquences sera débattue ultérieurement. Ces questions ont beaucoup plus d'importance si des simulations explicites sont envisagées, le pas de temps critique dépendant (en linéaire) de la plus haute fréquence présente dans le système.

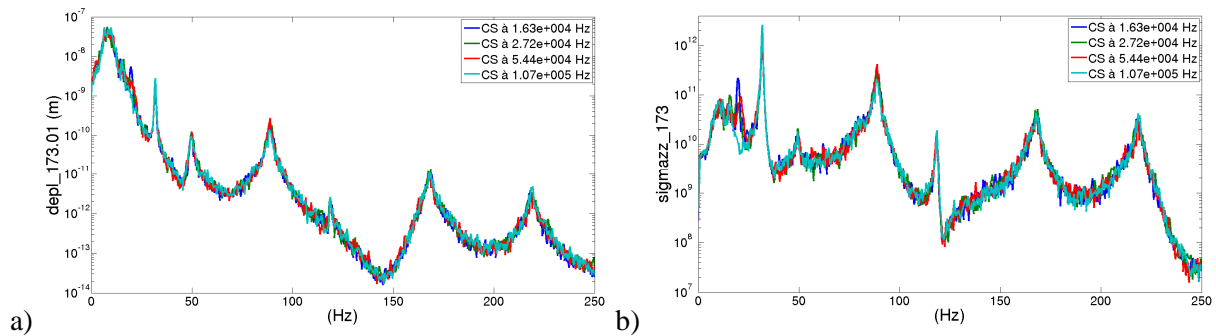


Figure 3.65. a) Déplacement selon  $x$  du nœud de choc supérieur. b) Moment de flexion au nœud de choc supérieur.

L'amortissement ayant été choisi modal, les modes de fréquence supérieure à 7 500 Hz ont été affectés d'un amortissement forfaitaire. On rappelle que 7 500 Hz est la fréquence du mode libre le plus élevé présent dans la base de projection.

Dans un premier temps, on ajoute de l'amortissement sur les hautes fréquences en conservant le pas de temps de  $10^{-4}$  s. Différents cas sont tracés en Figure 3.66. On remarque que l'ajout d'amortissement, même pour une valeur relativement élevée de 0,2 %, n'empêche pas la croissance de l'énergie. Il n'y a pas de tendance générale en fonction de l'amortissement introduit : la valeur la plus forte n'implique pas la plus faible croissance de l'énergie.

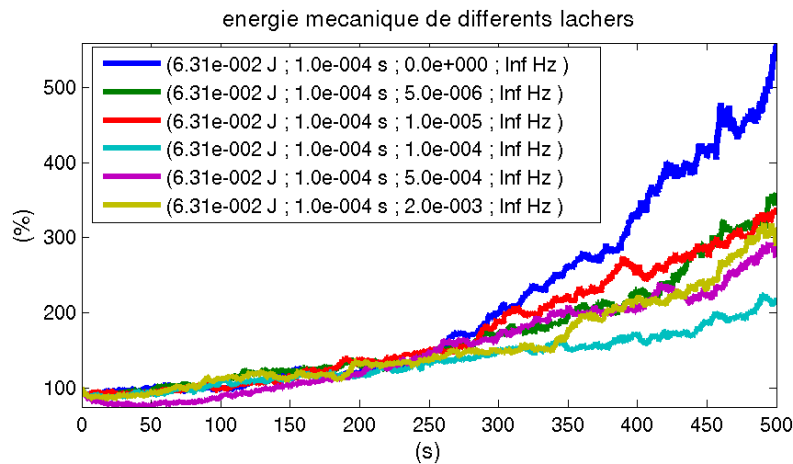


Figure 3.66. Variation d'énergie mécanique pour différents amortissements des hautes fréquences et un pas de temps de  $10^{-4}$  s.

On observe une non-croissance globale de l'énergie, tracée en Figure 3.67, si le pas de temps est de  $5 \cdot 10^{-5}$  s. La diminution la plus importante n'est pas observée pour l'amortissement introduit le plus élevé. Pour les différents amortissements considérés, on remarque des croissances passagères, signe que le pas de temps ne serait pas suffisamment faible pour assurer la convergence des simulations. Cependant, l'objectif est atteint : il n'y a plus de croissance de l'énergie.

En fixant l'amortissement à la valeur de  $5 \cdot 10^{-6}$ , valeur de l'amortissement thermo-élastique, on montre sur la Figure 3.68 que le pas de temps reste le paramètre déterminant pour la conservation de l'énergie.  $2 \cdot 10^{-5}$  s semble être un bon compromis.  $5 \cdot 10^{-5}$  s entraîne une perte globale d'énergie plus importante, des hausses locales plus importantes mais pourrait convenir.

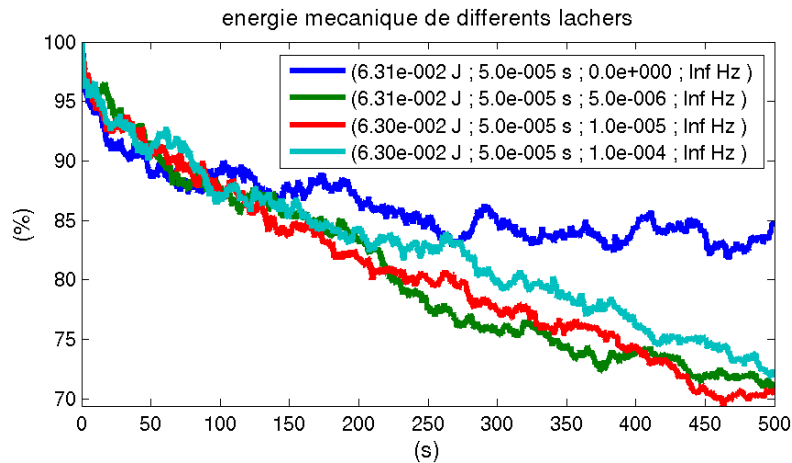


Figure 3.67. Variation d'énergie mécanique pour différents amortissements des hautes fréquences et un pas de temps de  $5.10^{-5}$  s.

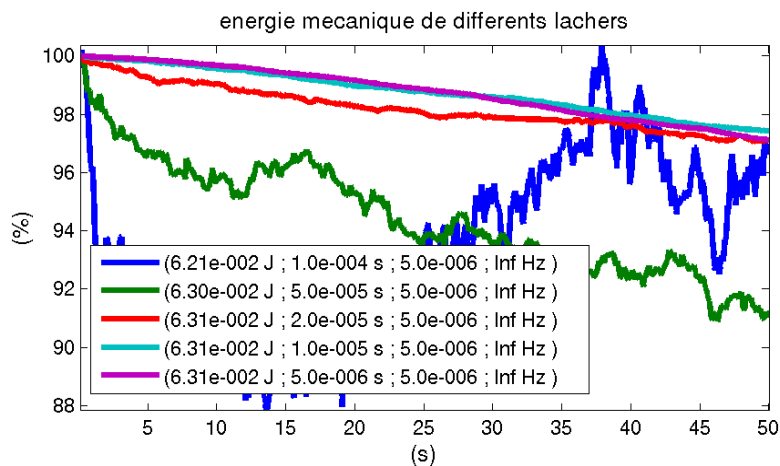


Figure 3.68. Variation d'énergie mécanique pour un amortissement hautes-fréquences de  $5.10^{-6}$  et différents pas de temps.

Quelle que soit la valeur de l'amortissement hautes-fréquences, un pas de temps égal à  $5.10^{-5}$  s n'entraîne pas de croissance à long terme de l'énergie ; cette valeur semble être une borne supérieure pour la valeur de pas de temps à retenir. En effet, elle est la plus élevée n'introduisant pas d'énergie. L'ajout d'amortissement sur les hautes fréquences a peu d'effet sur les basses fréquences.

Étudions maintenant l'effet du décalage des hautes fréquences. En effet, les fréquences issues de la ré-orthonormalisation des derniers modes, et même de ceux autres que les modes libres, n'ont pas vraiment de sens physique. On regarde alors l'effet de leur modification. Pour différentes valeurs arbitraires, nous avons déplacé tous les modes supérieurs à une fréquence vers celle-ci. On observe peu d'effets (Figure 3.69) sur le bilan local ou global : les cinq valeurs donnent des comportements assez équivalents à long terme. Il n'y a pas de hiérarchie entre les différentes valeurs de fréquence. Il n'y a pas non plus d'effet sur les forces de contact calculées.

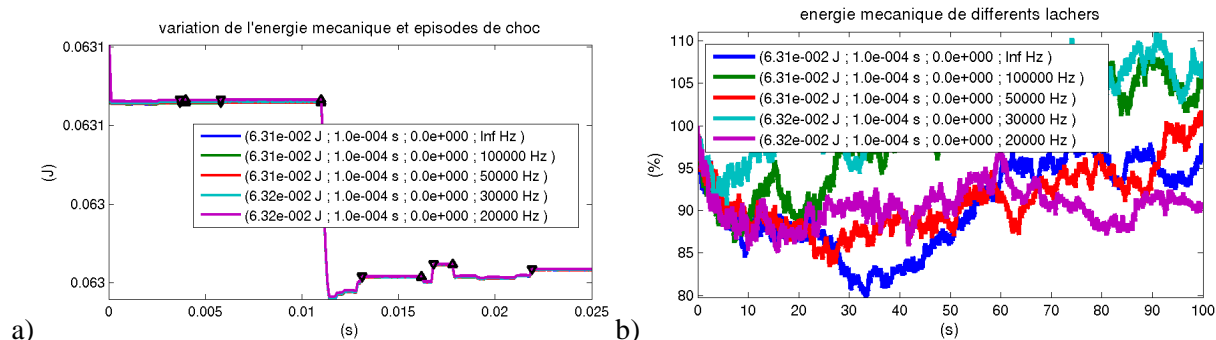


Figure 3.69. Variation d'énergie mécanique pour différentes valeurs de fréquence maximale de la base modale, pour un pas de temps de  $10^{-4}$  s et deux durées de simulations.

### 3.5.8. Bilan sur le choix du pas de temps

On a vu, notamment sur la Figure 3.68, que  $5.10^{-5}$  s était suffisamment petit pour ne pas entraîner de croissance de l'énergie mécanique sur le long terme. Ajouter un amortissement de  $5.10^{-6}$  sur les hautes fréquences (après 7 500 Hz) et utiliser un pas de temps de  $2.10^{-5}$  s entraînent une perte de 2 % de l'énergie mécanique initiale en 50 s. Cette perte est très faible devant l'amortissement structural, qui sera pris en compte dans les simulations : la perte d'énergie due au schéma sera négligeable devant la dissipation dans la structure. On propose ici de choisir entre ces deux valeurs de pas de temps.

Différentes simulations non-linéaires ont été faites, que ce soit avec un effort constant ou un effort aléatoire. La plupart des simulations sont effectuées sur 1 s. On reporte la comparaison entre les pas de temps  $5.10^{-5}$  s,  $2.10^{-5}$  s et  $10^{-5}$  s dans le Tableau 3.9. On reporte temps CPU de la simulation et nombre total d'itérations. On peut tirer les conclusions suivantes : il est relativement plus rapide de faire des simulations avec un pas de temps faible, moins d'itérations étant nécessaire en moyenne par pas de temps. En absolu, il est évidemment plus long de faire un calcul avec un pas de temps plus faible. Le pas de temps  $5.10^{-5}$  s étant le plus souvent associé à deux itérations par pas de temps, les itérations et les durées sont similaires, que la simulation soit purement linéaire ou que le nombre de chocs soit élevé. Les évolutions du nombre d'itérations pour les pas de temps  $10^{-5}$  s et  $2.10^{-5}$  s en fonction du niveau injecté se retrouvent peu sur les évolutions des durées des simulations. On remarque, pour l'excitation aléatoire, que plus le pas de temps est faible, plus le niveau RMS doit être élevé pour faire augmenter significativement le nombre d'itérations.

simulations de 1 s	pdt $10^{-5}$ s		pdt $2 \cdot 10^{-5}$ s		pdt $5 \cdot 10^{-5}$ s		$2 \cdot 10^{-5}$ s Vs $10^{-5}$ s		$5 \cdot 10^{-5}$ s Vs $10^{-5}$ s	
	itérations	durée (s)	itérations	durée (s)	itérations	durée (s)	itérations	durée	itérations	durée
effort constant (N)										
0,01	100327	60,01	50324	32,01	20591	11,98	0,502	0,533	0,205	0,200
1	100327	63,57	51034	31,46	37522	15,66	0,509	0,495	0,374	0,246
100	102315	61,96	65464	34,09	40000	17,19	0,640	0,550	0,391	0,277
effort RMS (N)										
0,01	100624	65,83	52878	34,08	34299	16,47	0,526	0,518	0,341	0,250
0,1	100624	63,45	52878	33,36	34299	16,25	0,526	0,526	0,341	0,256
0,7	109813	62,87	70953	33,98	38190	16,14	0,646	0,540	0,348	0,257
1	113665	65,85	76574	36,87	39491	16,59	0,674	0,560	0,347	0,252
2	152775	80	98386	40,44	39944	16,45	0,644	0,506	0,261	0,206
10	150261	72,33	99762	41,03	40111	16,36	0,664	0,567	0,267	0,226

Tableau 3.9. Comparaison du nombre d'itérations et du temps CPU pour des simulations non-linéaires sur 1 s. Données brutes et écarts relatifs entre deux valeurs du pas de temps.

On reporte en Figure 3.70 différentes évolutions du nombre d'itérations en fonction du temps. Le cas d'un effort constant de 100 N – trois niveaux d'obstacles sont considérés - montre que  $5 \cdot 10^{-5}$  s serait trop important : il faut toujours deux itérations. Le pas de temps  $10^{-5}$  s, passées les premières phases de contact, limite à une itération par pas de temps. Le pas de temps à  $2 \cdot 10^{-5}$  s nécessite entre une et deux itérations par pas de temps.

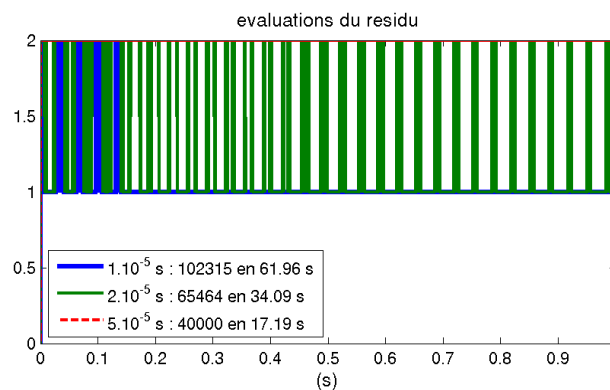


Figure 3.70. Évolutions du nombre d'itérations par pas de temps. Trois niveaux d'effort constant sont considérés.

Le cas d'évolutions sur des durées plus longues, reporté en Figure 3.71, confirme ces observations. Plus le pas de temps est petit, moins d'itérations sont nécessaires. Compte-tenu de l'objectif initial de bonne conservation de l'énergie mécanique et compte-tenu des durées de calcul qui deviennent assez importantes, de 5 min pour le pas de temps à  $5 \cdot 10^{-5}$  s jusqu'à 20 ou 30 min pour le pas de temps à  $10^{-5}$  s, on propose de sélectionner le pas de temps de  $2 \cdot 10^{-5}$  s.

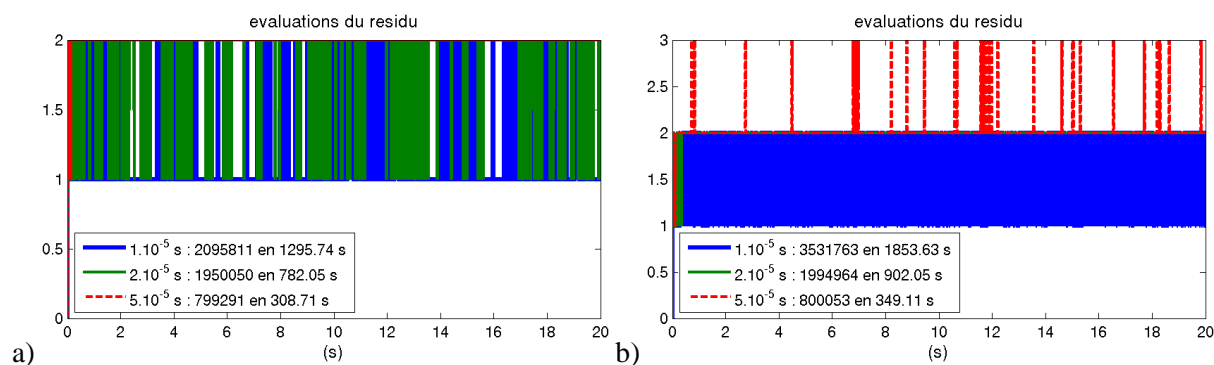


Figure 3.71. Évolutions du nombre d'itérations par pas de temps. Deux niveaux d'effort aléatoire sont considérés.

Sur les cas évoqués ici, les durées de calcul sont de l'ordre de 15 min pour 20 s de simulations. Pour des simulations sur environ 100 s, il faudrait alors environ 1h15 de temps de calcul. Le problème se pose alors de la gestion des données. L'observation en temps réel permet de limiter le nombre de grandeurs de sortie. Il faut s'assurer d'un sous-échantillonnage en sortie. On a pu effectuer un calcul à 5 millions de pas de temps (100 s de simulations avec un pas de temps de  $2.10^{-5}$  s) en 53 min. En sortie, un déplacement et les dix efforts normaux de contact : il restait 252 Mo de disponible pour un plus grand array stockable de 37 Mo.

### 3.5.9. Conclusions

Les phases de choc sont responsables de la non-conservation d'énergie mécanique. Ce qui est surprenant est qu'on ne peut prévoir s'il y aura, localement ou globalement, gain ou perte d'énergie. Le bilan d'énergie pour un lâcher sans choc n'est pas assuré à 100 %. Les causes perturbant les phases de contact sont notamment l'erreur sur le calcul des forces de choc et la projection des forces de choc sur la base modale (le conditionnement de la base de projection est de l'ordre de 100).

Les paramètres du schéma influent sur le bilan d'énergie. Le paramètre le plus influent est le pas de temps, qu'il faudrait dans l'absolu prendre à  $10^{-5}$  s. Néanmoins,  $5.10^{-5}$  s permet une non-croissance de l'énergie sur des simulations de 500s, quelle que soit la valeur de l'amortissement hautes-fréquences retenu. Au maximum, la perte d'énergie sera de 30 %. Pour les « vraies » simulations non-linéaires du tube, il y a toujours de l'amortissement sur les hautes fréquences : on pourrait donc se satisfaire d'un pas de temps de  $5.10^{-5}$  s. Au vu des nombres d'itérations, on choisit définitivement le pas de temps de  $2.10^{-5}$  s, qui permet une résolution plus précise pour un surplus limité d'itérations.

L'effet sur la dynamique linéaire de modifications de la base de projection a été étudié. Le décalage des fréquences hautes-fréquences n'influe pas vraiment le bilan énergétique, ni les temporels et les DSP. Cette étude nous permet de conclure que le nombre de modes libres doit concorder avec la fréquence maximale de l'excitation, résultat classique pour les systèmes linéaires.





# Chapitre 4. Caractérisation expérimentale et numérique de systèmes à choc

Dans le Chapitre 2, on a introduit le schéma d'intégration utilisé pour la résolution numérique de la dynamique non-linéaire ainsi que l'estimateur de DSP. Dans le Chapitre 3, on a détaillé les différentes étapes de la construction du modèle numérique du tube, de la zone de contact tube / PE, de la réduction du modèle numérique et des paramètres du schéma d'intégration. Dans ce chapitre, on étudie numériquement la dynamique non-linéaire en fonction de l'amplitude de l'excitation. Seul le dernier niveau de PE est pris en compte.

La section 4.1 valide le modèle numérique par corrélation calcul – essai. Les spectres des accélérations mesurées et les pseudo-spectres des accélérations calculées ont des profils comparables. Ils se modifient de manière équivalente lors de l'augmentation de l'amplitude de l'excitation. Les déplacements hors-plan sont mieux approchés que les déplacements dans le plan. Néanmoins, le modèle numérique et la procédure de résolution sont validés.

La section 4.2 consiste en une étude purement numérique de la transition des DSP des déplacements lorsque le niveau RMS  $F$  de l'excitation augmente. Les nappes de DSP, normées par  $F$ , ont un profil très semblable aux nappes de DSP de réponse linéaire en fonction de la raideur de contact  $k$ . Le comportement est celui du tube libre pour de faibles  $F$  ou  $k$ . Lorsque  $F$  devient grand, le comportement se rapproche de celui observé pour  $k$  valant  $k_{cont}$ , la raideur identifiée expérimentalement. On considère que le pic prépondérant, celui de plus grand niveau de DSP, permet de suivre la transition. On peut extraire une fréquence et une largeur de bande de ce pic, ainsi qu'une déformée en fonctionnement. Ces deux types d'information permettent d'associer une valeur de raideur  $k$  et d'amortissement  $c$  à chaque valeur de  $F$ . On a aussi cherché quel couple  $(k,c)$  donnait la DSP linéaire la plus proche de la DSP non-linéaire. Ces trois évolutions de  $k$  en fonction de  $F$  sont très comparables. La transition du comportement non-linéaire en fonction de l'amplitude de l'excitation peut être approchée par la transition du comportement linéaire en fonction de la raideur de contact.

La section 4.3 montre que la DSP non-linéaire, sous certaines hypothèses, peut être calculée comme moyenne probabiliste de DSP linéaires. Cette étape s'inspire des travaux de Bouc et Bellizzi tels que présentés dans la section 2.1. En fonction de l'amplitude  $F$ , on obtient la fonction de densité de probabilité d'une raideur de contact. En moyennant les réponses linéaires correspondant à ces raideurs, on peut approcher la DSP non-linéaire. Cette section permet aussi de cartographier précisément les efforts de contact sur l'épaisseur de la PE, ce qui conduit à critiquer la répartition homogène choisie précédemment.

## 4.1. Validation du modèle numérique par corrélation calcul-essai

On cherche ici à valider le modèle numérique construit au Chapitre 3. En comparant les réponses mesurées et calculées pour différentes valeurs du niveau RMS  $F$  de l'excitation, on s'assure que la construction d'un modèle de tube, la modélisation simplifiée de la zone de contact tube / PE, la réduction de modèle et les paramètres du schéma d'intégration sont cohérents et compatibles avec la dynamique mesurée. Cette configuration correspond à la chaîne classique de la boucle ouverte allant de l'injection d'un effort imposé à la mesure des accélérations, et peut se schématiser comme présenté en Figure 4.1.

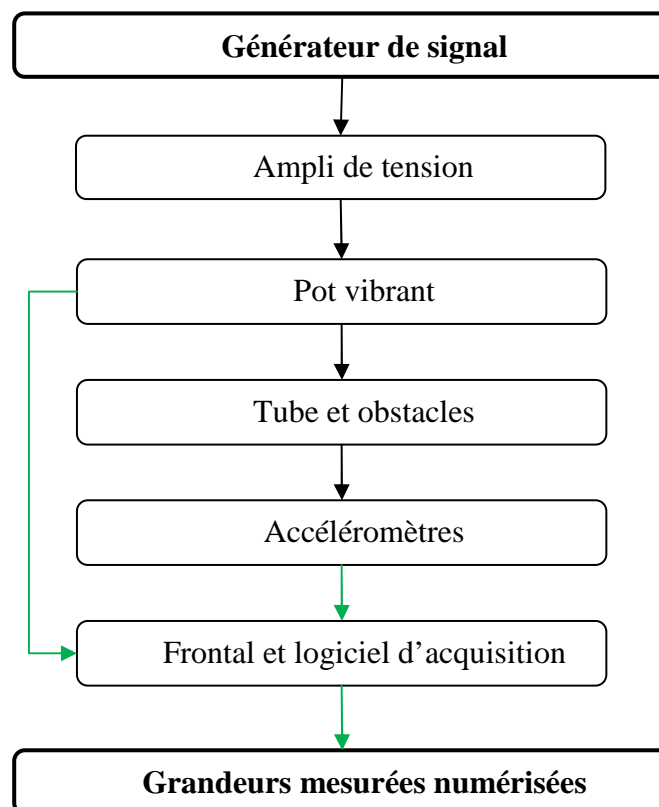


Figure 4.1. Schéma de la chaîne de mesure en boucle ouverte. En vert, le processus de mesure.

Les paramètres expérimentaux et des simulations numériques sont présentés en 4.1.1. La comparaison directe de temporels n'a pas de sens et cela est illustré en 4.1.2. On présente ensuite la corrélation entre les calculs et les essais, par superposition de DSP, pour des déplacements hors-plan en 4.1.3 et dans le plan en 4.1.4. Des conclusions sont données en section 4.1.5.

### 4.1.1. Conditions d'essai et simulation

Dans cette section, après avoir présenté le maillage capteur et les paramètres d'acquisition, on récapitule les paramètres du modèle numérique. Ces propriétés, telles celles du modèle physique du tube et de ses raideurs en pied, du modèle de contact et le nombre d'obstacles, de la base de projection et des paramètres du schéma d'intégration, découlent des résultats trouvés précédemment au Chapitre 3.

On s'intéresse principalement aux grandeurs vibratoires dans la direction hors-plan, car ce sont celles sensibles dans le cas d'instabilité fluide-élastique (voir le contexte industriel en 1.1). On cherche à vérifier que le modèle numérique non-linéaire en air est prédictif dans ces directions, notamment sur sa partie cintrée, qui est la plus critique. Pour cette comparaison calcul-essai, on excite le tube à l'apex dans la direction hors-plan  $DX$ . Le pot vibrant est alimenté par un bruit blanc filtré entre 10 et 40 Hz, dont l'amplitude est réglée via un amplificateur de tension. On note que sur les premières secondes de chaque essai, le niveau de la force a été augmenté progressivement de 0 à la valeur choisie par l'utilisateur grâce au réglage de l'ampli de tension.

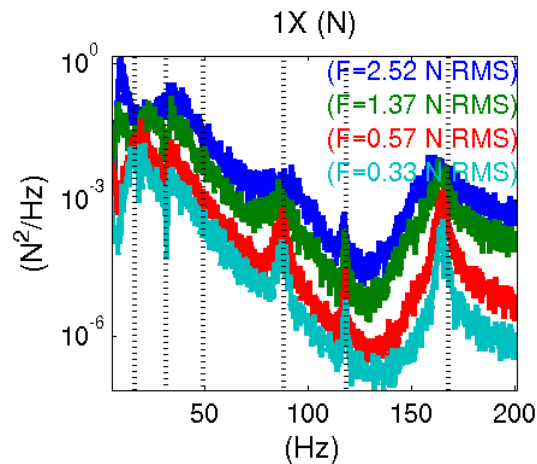
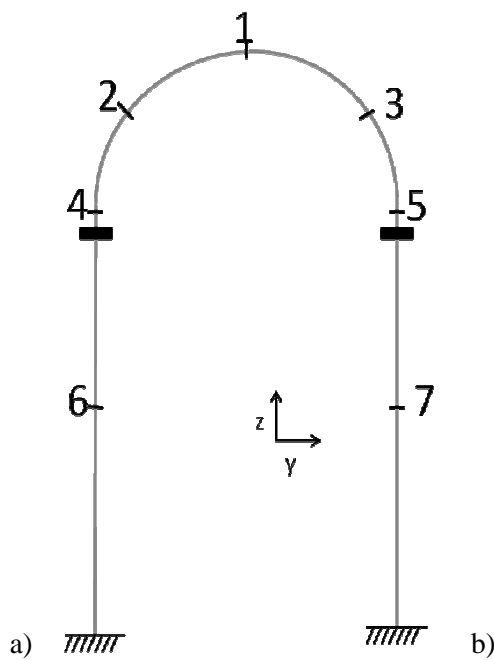


Figure 4.2. DSP des quatre efforts injectés par le pot vibrant. Leur niveau RMS est indiqué en légende.

L'effort injecté est mesuré, ainsi que des accélérations selon  $DX$  (hors-plan) sur le cintre et des accélérations selon  $DX$  et  $DY$  sur la partie droite et les jambes. Comme montré en Figure 4.2, l'effort injecté par le pot vibrant est clairement modulé par une interaction pot – structure. Il sera difficile de comparer les réponses pour différents niveaux RMS, le profil du spectre n'étant pas constant. Les accéléromètres sont de type B&K 4375. Les signaux sont numérisés par un frontal d'acquisition LMS Scadas III et piloté par le logiciel LMS Test.Lab. La position des capteurs, ainsi que la correspondance avec les DDL du modèle numérique, est rappelée en Figure 4.3. Les DDL du modèle numérique sont notés sous la forme xxx.yy, où xxx est le numéro du nœud et yy le numéro du DDL (numérotés de 01 à 06 pour  $DX$  à  $DRZ$ ). Ainsi, 236.01 et 1X se rapportent tous deux à l'apex dans la direction hors-plan mais le premier est d'origine numérique tandis que le second est d'origine expérimentale. Les grandeurs mesurées sont échantillonnées à un pas de temps de  $4,88 \cdot 10^{-4}$  s, ce qui correspond à une fréquence d'échantillonnage de 2 048 Hz.

Le tube est constitué de deux jambes, droites et d'environ 1,60 m de longueur, et d'une partie cintrée d'environ 30 cm de rayon. Il est modélisé comme une poutre courbe d'Euler-Bernoulli et est discrétisé par un élément à 12 DDL, avec interpolation linéaire de la traction et la torsion et interpolation cubique de la flexion (voir [Ger1] par exemple). Les éléments sont de 1 cm sauf sur une zone englobant la PE, où leur longueur est diminuée à 1,5 mm (soit 21 sur l'épaisseur de la PE). Des raideurs discrètes en pied de tube modélisent son encastrement au massif.



Voie	Grandeur mesurée	DDL correspondant
1	Force, P1, X	ft
2	Accélération, P1, X	236.01
3	Accélération, P2, X	210.01
4	Accélération, P3, X	261.01
5	Accélération, P4, X	185.01
6	Accélération, P4, Y	185.02
7	Accélération, P5, X	471.01
8	Accélération, P5, Y	471.02
9	Accélération, P6, X	75.01
10	Accélération, P6, Y	75.02
11	Accélération, P7, X	360.01
12	Accélération, P7, Y	360.02

Figure 4.3. a) Position des points de mesure. Les points 4 et 5 correspondent à la limite entre partie droite et partie cintrée. b) Correspondance voie de mesure – grandeur mesurée – DDL du modèle numérique. 471.02 et 5Y correspondent au nœud 471, dans la direction DY.

La valeur de la raideur de contact globale entre le tube et la PE,  $k_{cont}$ , a été évaluée expérimentalement sur le banc GV-LOCAL. Des capteurs de force triaxiaux mesurent les forces exercées par le module de PE sur le bâti. Des accéléromètres triaxiaux mesurent l'accélération du module de PE. Par différence, l'équilibre dynamique permet alors de calculer les efforts exercés par le tube sur le module de PE. Dans le même temps, des capteurs à courants de Foucault mesurent les déplacements du tube au-dessus et en-dessous du module de PE. Par interpolation linéaire, on accède alors au déplacement du point de la fibre neutre situé au centre de la PE. Lorsque la force de contact dépasse un certain seuil, nul en théorie mais il faut s'extraire du bruit de mesure, on note la valeur du déplacement. Pour les autres instants de l'épisode de choc, on a accès à la force de contact et à la pénétration. On peut donc calculer des raideurs de contact instantanées. Cette raideur de contact a été mesurée en moyenne à  $4,6 \cdot 10^6$  N/m avec un écart-type de  $3,7 \cdot 10^6$  N/m ([And1]). L'écart-type élevé peut s'expliquer par :

- la précision de  $0,4 \mu\text{m}$  sur la mesure de déplacement pour un déplacement du tube pendant l'épisode de choc de l'ordre de  $2 \mu\text{m}$  ;
- la diversité des positionnements du tube lors des épisodes de contact alors que l'on ne considère que le déplacement interpolé au centre de la PE et non un contact réparti.

Chaque PE est modélisée par des obstacles circulaires superposés. La raideur de contact globale, prise à  $4 \cdot 10^6$  N/m, est répartie uniformément sur cinq niveaux. Pour chacun des niveaux d'obstacle, la relation effort normal / déplacement radial est ainsi linéaire avec un jeu, pris ici à sa valeur nominale de 1,3 % du diamètre extérieur du tube, conformément à l'obstacle folié utilisé lors de cet essai. Aucun frottement, amortissement de contact ou

raideur tangentielle n'est pris en compte. Les obstacles sont considérés comme immobiles. Les chocs ne sont pas dissipatifs et n'influent que sur la direction normale.

La dynamique est projetée sur une base de réduction constituée des modes *libres*, *appuyés* et *bloqués* de fréquence inférieure à 7 500 Hz ainsi que des corrections statiques, deux par obstacle et une pour l'injection de l'effort extérieur. La base concaténée  $T_{CS}$  contient donc  $130+126+126+2\times 5\times 2+1=403$  déformées. Après orthonormalisation par rapport au système libre, la base  $T$  de réduction contient 199 déformées, et balaie une plage de fréquences de 4,9 Hz à 180 000 Hz, avec une nette cassure pour les douze dernières fréquences, supérieures à 35 000 Hz.

Le schéma d'intégration est un schéma de Newmark d'accélération moyenne ( $\gamma=1/2$  et  $\beta=1/4$ ) dans son implémentation non-linéaire. Le jacobien n'est pas actualisé et est égal à celui du système sans contact. Le pas de temps des simulations numériques est de  $2.10^{-5}$  s. L'amortissement est pris modal. Les modes de fréquence inférieure à 7 500 Hz sont affectés d'un amortissement forfaitaire de 0,2 %, les trois premiers modes de respectivement 1 %, 1 % et 0,4 % et les modes de fréquence supérieure à 7 500 Hz d'un amortissement arbitraire à  $5.10^{-4}$  %.

L'excitation extérieure du tube est obtenue à partir de celle mesurée expérimentalement. Elle est interpolée par zero-padding (bourrage de zéros sur le spectre) de  $4,88.10^{-4}$  s à  $2.10^{-5}$  s. Elle dure 49 s.

Les grandeurs mesurées sont des accélérations et les grandeurs calculées des déplacements. Passer de l'accélération au déplacement par double intégration numérique ou passer du déplacement à l'accélération par double dérivation numérique sont deux processus instables. De plus, comme montré en sous-section 4.1.2, les simulations numériques sont sensibles aux perturbations (*effet papillon*, mentionné en 2.1.1). Il est donc vain de vouloir comparer les temporels. Donc, pour comparer d'une part des déplacements et d'autre part des accélérations, nous allons comparer des DSPs moyennées. On construira des pseudo-spectres en accélération, en multipliant la DSP des déplacements simulés par  $\omega^4$ . Les pseudo-spectres en accélération, par rapport aux pseudo-spectres en déplacement, permettent d'éviter de diviser par de très faibles fréquences et remontent le niveau des hautes-fréquences : la visualisation de celles-ci est plus aisée. Bien qu'essais et simulations n'aient pas le même pas de temps, les mêmes paramètres sont utilisés ici pour calculer les DSP, conformément aux conclusions de la section 2.3.3 :

- fenêtre de Hann de longueur 10 s avec recouvrement de 66 % ;
- élimination des 8 premières secondes de signal, durée approximative pendant laquelle la valeur RMS de la force est progressivement augmentée.

Dans la suite de la partie, on considère un modèle tel que décrit ci-dessus. On essaie de voir si les accélérations mesurées et simulées sont comparables, dans la direction hors-plan DX en 4.1.3, et dans la direction dans le plan DY en 4.1.4. Avant cela, on montre que les DSP sont bien les grandeurs d'intérêt en 4.1.2. Cette sous-section présente aussi le tirage d'effort aléatoire utilisé pour toutes les simulations numériques, notamment l'analyse de la transition du comportement en fonction de l'amplitude en 4.2 et la tentative de linéarisation équivalente en 4.3.

### 4.1.2. Impossibilité de comparer des temporels

Dans cette section, on montre par l'exemple qu'il est impossible de comparer les évolutions temporelles, même entre deux simulations numériques. Il est alors encore plus vain de vouloir comparer les temporels des simulations numériques et des simulations expérimentales, l'une des deux étant de plus modifiée par une double intégration numérique ou une double dérivation numérique. Par contre, les DSP sont superposables.

On compare donc des temporels calculés de la même manière que lors de la transition du comportement en fonction de l'amplitude, présentée dans la section suivante en 4.2. Les paramètres du modèle numérique sont tels que décrits ci-dessus en 4.1.1. Nous allons comparer quatre cas de simulations numériques. Pour obtenir des modèles numériques proches mais différents, on joue sur le traitement des hautes-fréquences, ce qui est particulier à cette sous-section. On rappelle que dans le reste de la thèse, on garde les hautes-fréquences telles que données par l'orthonormalisation et affectées d'un amortissement modal forfaitaire. Les quatre cas considérés ici sont les suivants :

- Cas 1 : modèle brut, effort tiré aléatoirement ;
- Cas 2 : fréquences supérieures à 50 000 Hz ramenées à 50 000 Hz, même tirage de l'effort que le cas 1 ;
- Cas 3 : fréquences supérieures à 50 000 Hz ramenées à 50 000 Hz, amortissement de 0,2 % pour les modes de fréquence supérieure à 7 500 Hz, même tirage de l'effort que le cas 1 ;
- Cas 4 : modèle brut, autre tirage de l'effort aléatoire.

Le spectre de l'effort aléatoire est un filtre passe-bande, de type Butterworth, dont le spectre, en fonction de la fréquence  $f$ ,

$$|F(f)| = \frac{\left(\frac{f}{f_1}\right)^{a_1}}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{f}{f_1}\right)^{a_1}\right)\left(1 + \left(\frac{f}{f_2}\right)^{a_2}\right)}} \quad (4.1)$$

dépend de deux fréquences de coupures,  $f_1$  (basse) et  $f_2$  (haute). Les ordres  $a_1$  et  $a_2$  sont choisis de telle sorte que le spectre soit plat et chute rapidement sur ces extrémités. Les paramètres choisis, et utilisés en 4.2 et 4.3, sont respectivement 0,5 Hz, 110 Hz, 5 et 10. Le spectre est fixé à 0 pour des fréquences supérieures à 1 000 Hz. Le niveau RMS est fixé par multiplication par une constante positive. Ce spectre est alors multiplié, fréquence par fréquence, par une phase aléatoire uniformément répartie entre 0 et  $2\pi$ . On prend alors la partie réelle de la transformée de Fourier inverse. On montre les deux tirages aléatoires et leur spectre en Figure 4.4. Les évolutions temporelles sont clairement différentes mais les spectres sont très superposables et quasiment plats entre 1 et 100 Hz.

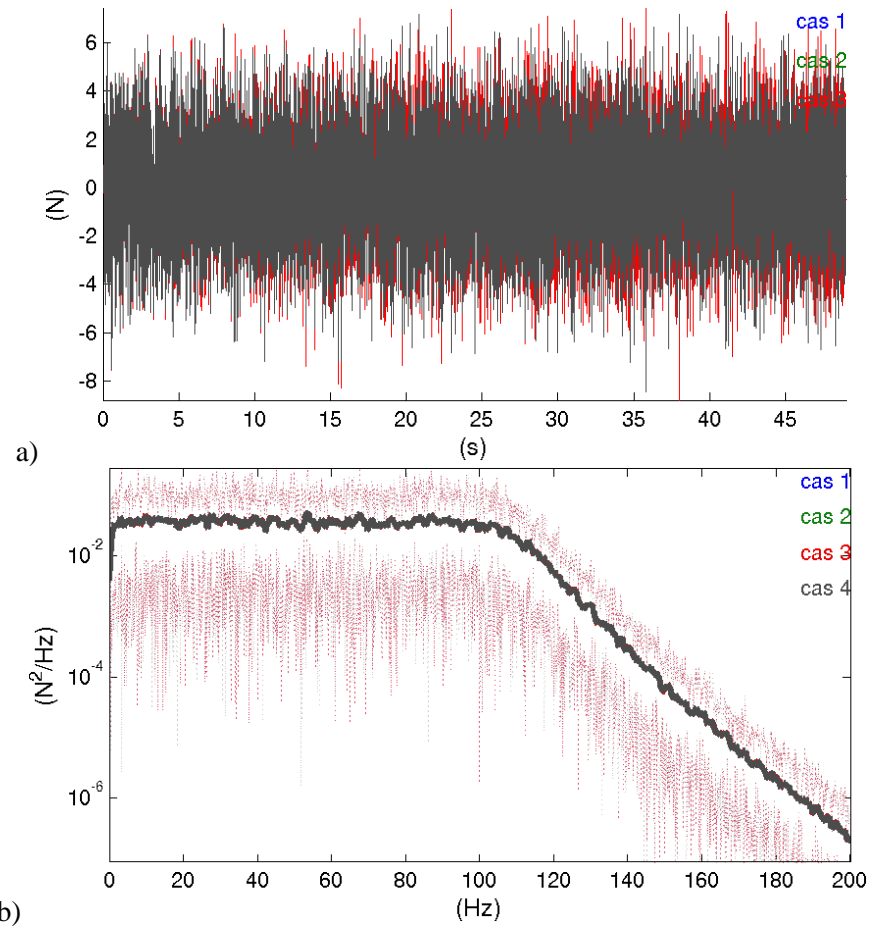


Figure 4.4. Évolution temporelle (a) et DSP (b) de l'effort aléatoire injecté dans le modèle numérique.

Les premiers instants de chaque tirage sont modifiés par multiplication par une demi-période de cosinus et une fonction affine afin de fixer une valeur et une pente nulles à l'origine. On montre en Figure 4.5 le zoom sur les premiers instants des forces. La croissance est lente sur les premiers instants. À noter, sans explication claire, la concordance sur ces premiers instants entre les deux tirages (cas 1-3 et cas 4). Cela est dû à la procédure de tirage aléatoire : la fonction *rand* de Matlab s'actualise à une valeur fixe à chaque ouverture de session et *rand*, suite périodique de très longue période, prend alors les mêmes valeurs. La différence entre les deux tirages n'est donc due qu'à un décalage de la suite aléatoire utilisée comme phase des tirages.

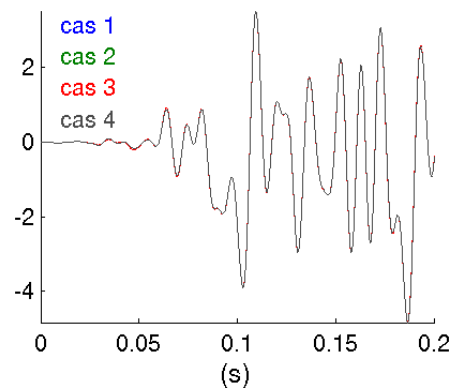


Figure 4.5. Zoom sur les premiers instants des tirages de force. La modification porte sur les valeurs jusqu'à 0,1 s.



Après cette parenthèse sur le tirage des excitations extérieures, on montre en Figure 4.6 les déplacements temporels du DDL 210.01. Ils sont clairement différents sur le long terme. Les différences interviennent rapidement : en moins de 1 s, les quatre évolutions temporelles sont clairement différenciées. Cette différence de comportements est d'autant plus frappante pour les cas 1 et 4, qui ne diffèrent que par un tirage différent de la force, ces deux tirages étant très proches sur les premiers instants. De légères différences dans le modèle numérique engendrent bien des comportements très différents sur le long terme.

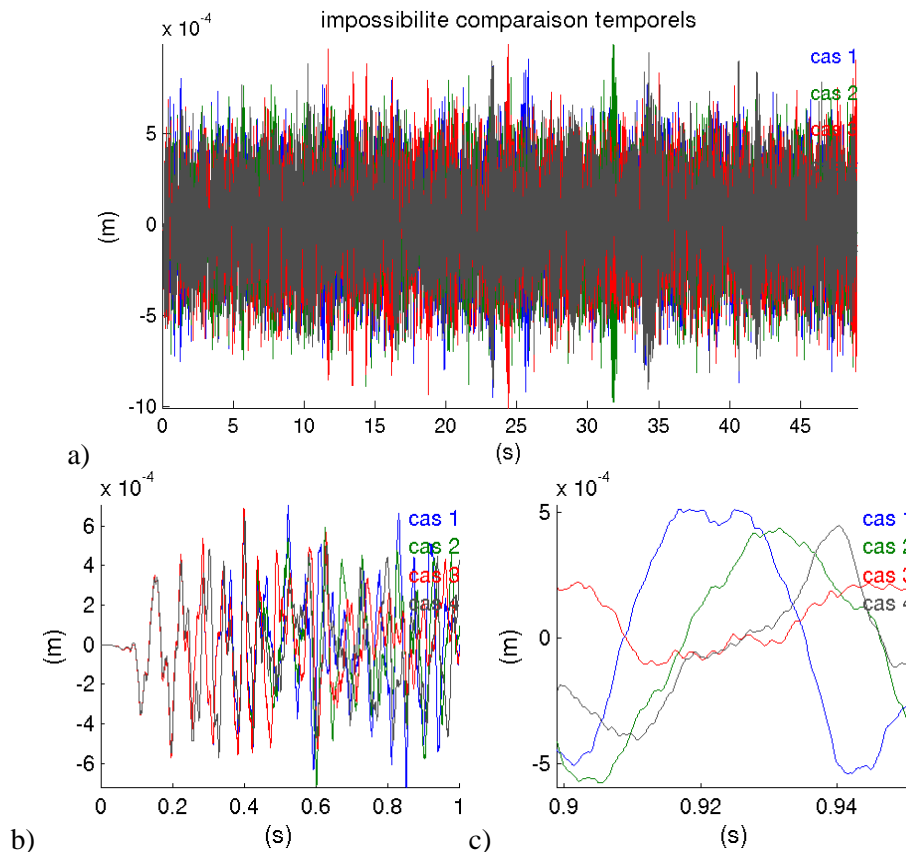


Figure 4.6. Déplacements calculés pour les 4 cas considérés.

Les modes hautes-fréquences sont issus de modes *appuyés* ou *bloqués* au niveau de la PE et de corrections statiques, donc de modes dont les degrés de liberté de rotation varient sur de faibles longueurs. En quelque sorte, agir sur leur fréquence modifie les longueurs d'onde des modes *locaux* permettant de représenter les phases de contact et donc sur leur réponse. Agir sur l'amortissement change la réponse des modes locaux excités lors du choc, le comportement global est donc aussi modifié. Une légère modification de l'effort extérieur a des répercussions sur l'ensemble de la gamme de modes excités et leur réponse sera donc différentes lors des épisodes de choc. Les petites différences s'ajoutent et de proche en proche, les quatre déplacements calculés divergent.

Les DSP de ces déplacements sont calculées avec une fenêtre de Hann de 10 s et un recouvrement de 66 %. On élimine la première seconde pour ne garder qu'un régime établi. Les DSP sont tracées en Figure 4.7. Elles se superposent sur la bande de fréquences 0 – 200 Hz. Les étendues et amplitudes des pics sont aussi bien représentées. Cependant, il peut y avoir, sur la DSP lissée, des écarts assez importants en valeur, par exemple  $\times 3$  sur la valeur à 20 Hz entre le cas 2 et le cas 4. On ne note pas de tendance particulière entre les différents cas considérés ici ; les quatre réponses concordent sur une large gamme de fréquences. Les

enveloppes, indiquant le max et le min pour chaque fréquence, sont confondues. Le contenu fréquentiel basses fréquences est donc sensiblement identique.

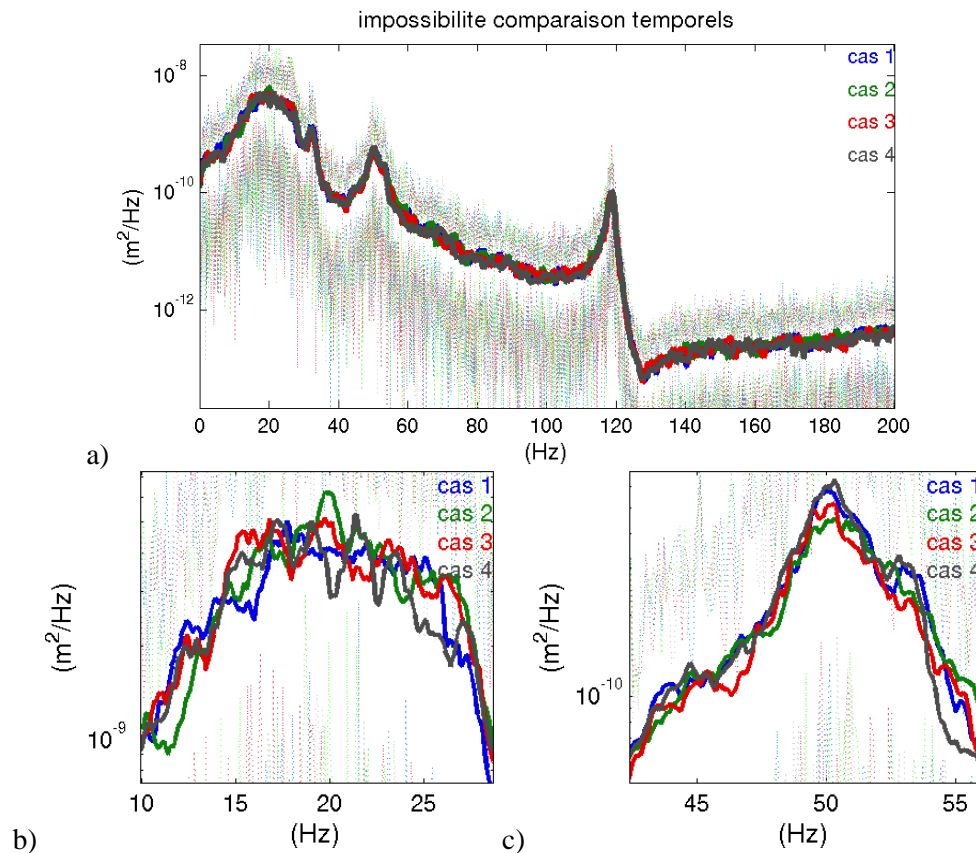


Figure 4.7. Superposition des DSP pour les quatre cas considérés. Vue globale (a) et zoom sur deux pics (b et c).

On peut retirer deux enseignements de cette section. Les évolutions temporelles ne sont pas les grandeurs adéquates pour comparer deux réponses d'un système non-linéaire : elles divergent à la moindre perturbation. Les DSP, en fournissant des réponses fréquentielles moyennées, sont alors les grandeurs à observer. On note aussi que le traitement des hautes fréquences de la base de réduction (décalées ou non, amorties ou non) est sans effet notable sur le contenu basses fréquences de la réponse. Cela nous conduit donc dorénavant pour le reste de la thèse à considérer des bases de réduction non décalées, en gardant donc les très hautes fréquences issues de l'orthonormalisation, avec un amortissement arbitraire de  $5 \cdot 10^{-4} \%$  pour les modes supérieurs à 7 500 Hz.

#### 4.1.3. Corrélation des DSP de déplacement hors-plan

Dans cette section, on montre que les déplacements hors-plan, particulièrement ceux du cintre, sont bien corrélés sur une large gamme de fréquences et pour une gamme d'excitation. Cela est vrai par exemple pour le déplacement hors-plan à l'apex, noté 236.01 pour les simulations numériques et 1X pour les simulations expérimentales, tracé en Figure 4.8. Pour un faible RMS, le système est presque linéaire car il y a très peu de chocs. On note alors la très bonne concordance des fréquences des pics avec les fréquences des modes hors-plan (flexion ou torsion) du modèle libre. Les simulations numériques donnent des niveaux légèrement plus élevés que l'expérience. Lors de l'augmentation du niveau RMS, les pics se

déforment et la répartition de l'énergie change. Les profils de DSP numériques suivent des transformations comparables aux DSP expérimentales. Les niveaux des pics ne concordent pas toujours. Une transition du premier mode libre vers le mode à contact permanent, avec fusion de pic, semble se produire tant sur les résultats numériques qu'expérimentaux. On note de nouveau que de nombreuses fréquences libres ou appuyées / en contact permanent concordent et sont les fréquences prépondérantes. Le mode de torsion ressort à 118 Hz expérimentalement, et non numériquement, l'apex étant un nœud de ce mode.

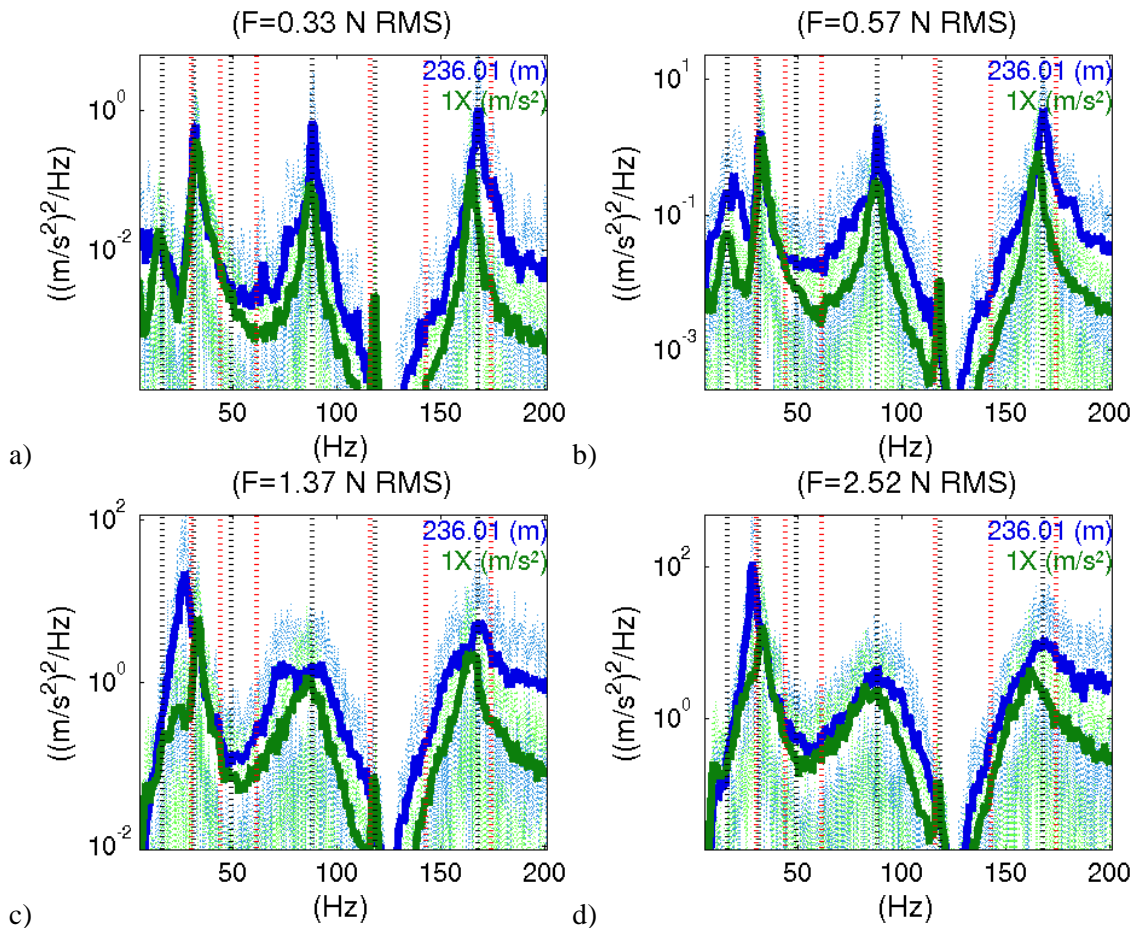


Figure 4.8. DSP de l'accélération, calculée et mesurée, à l'apex dans la direction hors-plan. Les pointillés verticaux tracent les fréquences des modes hors-plan libres (noir) et appuyés (rouge).

En regardant le déplacement d'un point du cintre (2X ou 210.01), on se rend compte, en Figure 4.9, que tous les modes hors-plan libres sont effectivement excités pour de faibles RMS. Ce DDL permet donc de détecter la présence des modes hors-plan du cintre. On observe de nouveau une transition du comportement en fonction de l'amplitude. Pour de forts niveaux RMS, seuls deux pics répondent et ils sont moins étalés qu'à l'apex. La réponse se concentre sur les deux paires de modes suivantes : les modes de flexion hors-plan, libre et appuyé, aux alentours de 30 Hz et les modes de torsion, libre et appuyé, aux alentours de 118 Hz. La concordance des fréquences est excellente pour les quatre niveaux d'excitation. Les niveaux des pics coïncident, excepté pour la transition du premier pic.

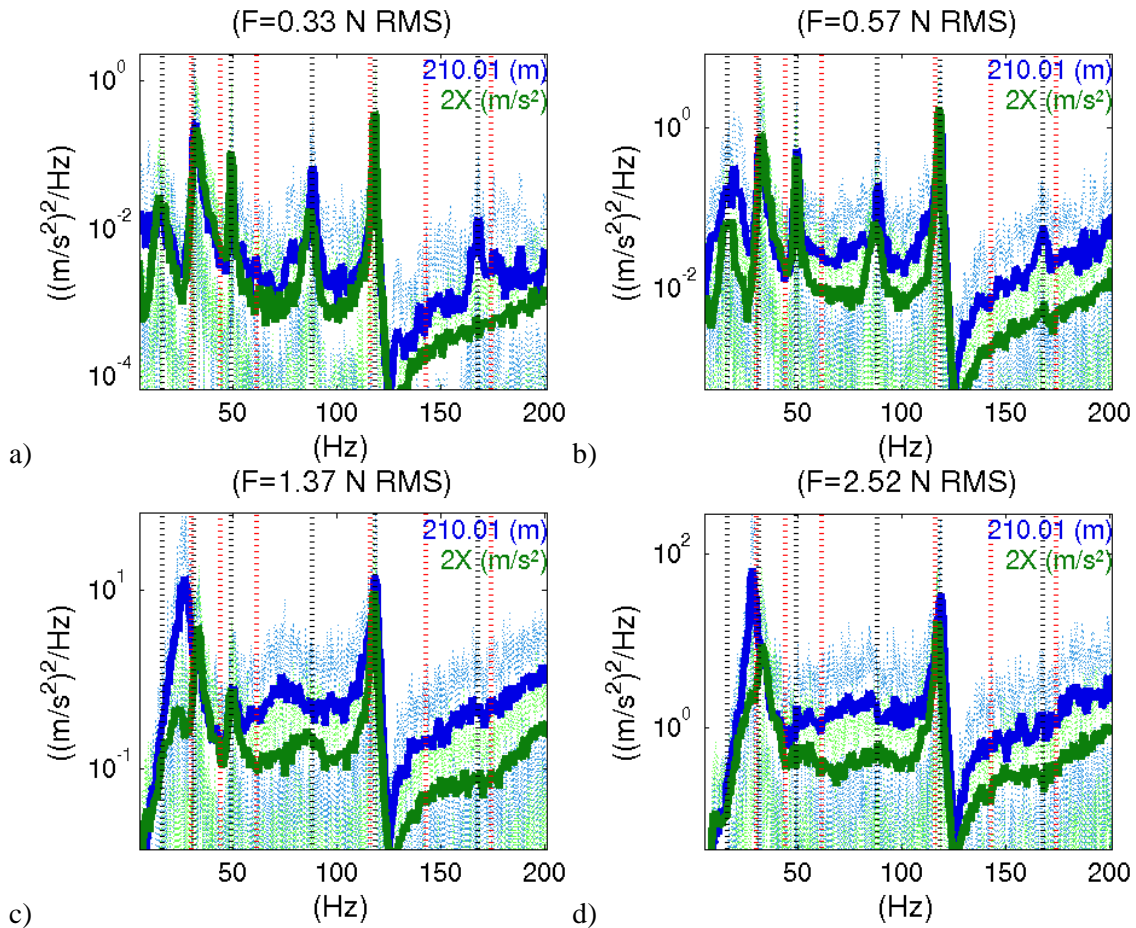


Figure 4.9. DSP de l'accélération, calculée et mesurée, sur le cintre dans la direction hors-plan. Les pointillés verticaux tracent les fréquences des modes hors-plan libres (noir) et appuyés (rouge).

Les DSP expérimentales et numériques coïncident sur le cintre. La Figure 4.10 montre la comparaison calcul-essai pour un point de la jambe du tube. Regarder un point de la jambe permet de s'assurer que le filtrage de l'information entre ce qui se passe au-dessus de l'obstacle et ce qui se passe en-dessous de l'obstacle est bien reproduit numériquement. De nouveau, les fréquences sont bien reproduites : le modèle numérique du tube et de son encastrement a été correctement recalé. Certaines amplitudes de pics sont très bien reproduites pour les quatre niveaux d'excitation. Mis à part le mode de flexion hors-plan à 168 Hz, les modifications des profils de DSP sont comparables entre mesure et simulation. On note que l'on peut tirer des conclusions erronées si l'on ne regarde qu'un seul DDL : la transition vers 168 Hz est bien représentée sur 1X (236.01) et très mal représentée sur 6X (75.01).



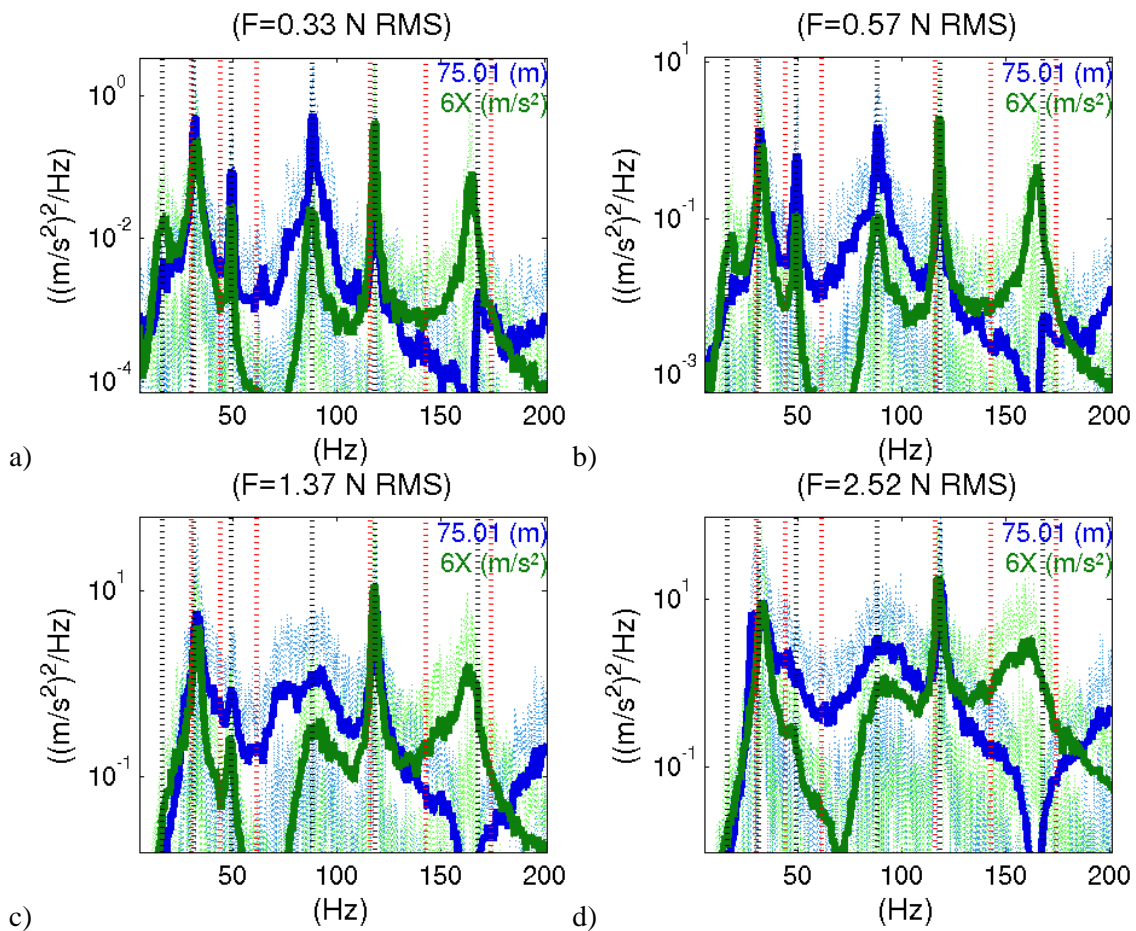
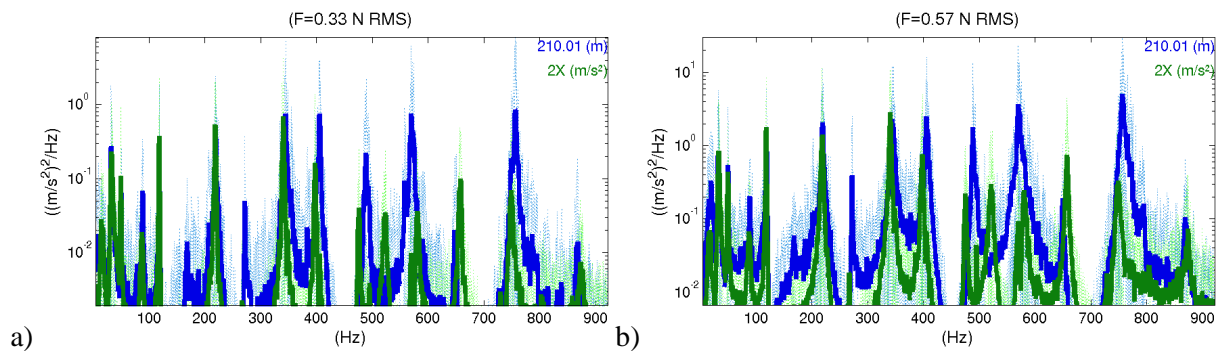


Figure 4.10. DSP de l'accélération, calculée et mesurée, sur la jambe dans la direction hors-plan. Les pointillés verticaux tracent les fréquences des modes hors-plan libres (noir) et appuyés (rouge).

La corrélation calcul-essai est bonne dans la bande de fréquences où le tube a été recalé sur la seule base de l'erreur en fréquence de quatre modes. Elle est aussi honorable sur une beaucoup plus large bande de fréquences. En effet, la Figure 4.11 montre que les fréquences de la réponse numérique coïncident assez bien avec les fréquences de la réponse expérimentale. Les pics s'élargissent et s'aplatissent de concert même si les amplitudes des pics ne sont pas retrouvées. La réponse peut sembler plus importante en amplitude pour les hautes fréquences mais cela s'explique facilement par la visualisation de DSP en accélération : elles sont multipliées par  $\omega^4$  par rapport à des DSP en déplacement, qui sont donc majoritairement basse fréquence (un pic ayant la même amplitude à 80 et 800 Hz en accélération a quatre ordres de grandeur d'écart en déplacement).



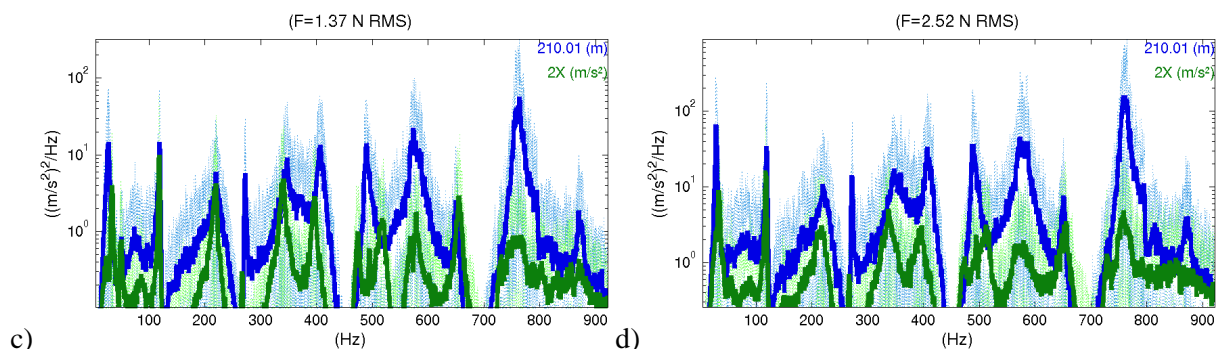


Figure 4.11. DSP de l'accélération, calculée et mesurée, sur le cintre dans la direction hors-plan.

Les simulations numériques et les essais répondent sur des fréquences libres ou à contact permanent. Pour savoir si le système, pour une excitation donnée, est plus proche du système libre ou du système en contact permanent, on compare ces trois réponses pour les quatre niveaux d'excitation sur la Figure 4.12. On peut seulement conclure que la réponse non-linéaire est très différente des réponses linéaires. Celles-ci changent en fonction du niveau donc en fonction du spectre injecté, qui dépend d'un couplage pot – structure. Les transitions des DSP non-linéaires ne passent pas clairement de la condition libre à la condition en contact permanent. La réponse est majoritairement concentrée sur les pics communs à ces deux systèmes. Une caractéristique des réponses non-linéaires est qu'elles ont une énergie beaucoup plus répartie fréquemment.

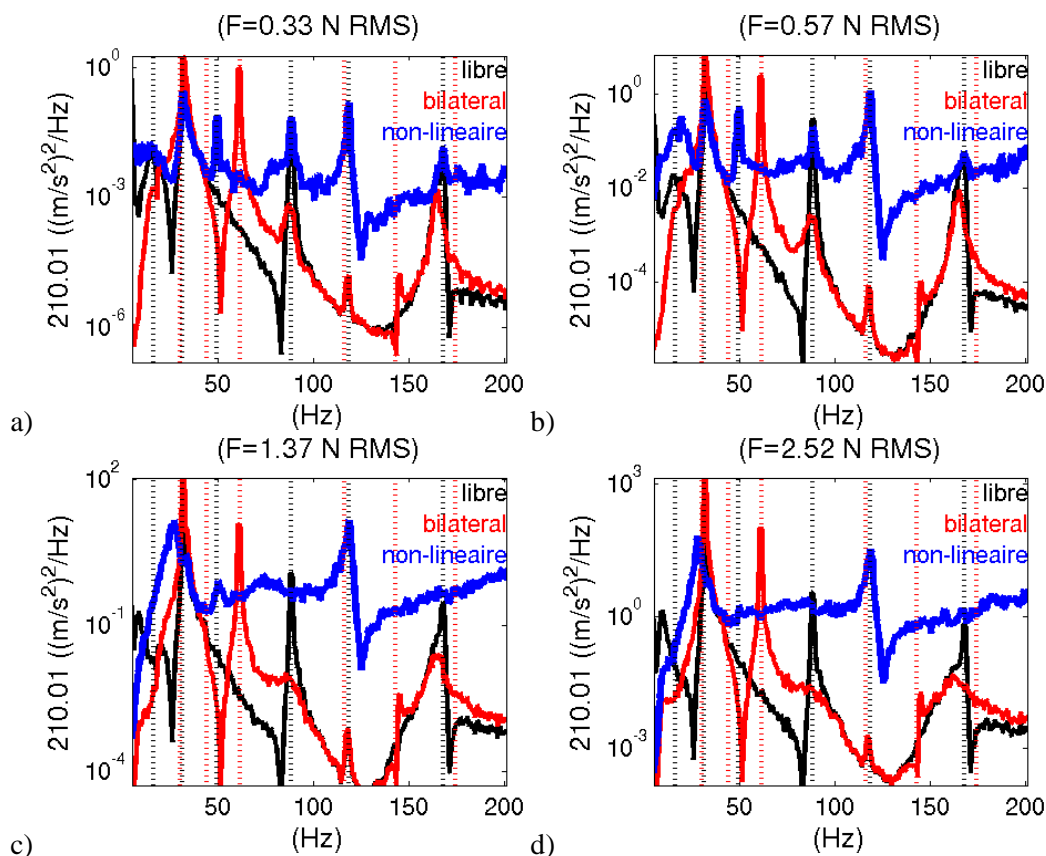


Figure 4.12. DSP de l'accélération sur la jambe dans la direction hors-plan, calculée en non-linéaire, libre et contact permanent. Les pointillés verticaux tracent les fréquences des modes hors-plan libres (noir) et appuyés (rouge).

Essais et simulations numériques sont donc bien corrélés dans la direction hors-plan. Les simulations numériques, et donc les essais, sont différents des conditions aux limites linéaires libres ou en contact permanent / appuyé. La corrélation est bonne sur la bande de fréquences 0 – 200 Hz et correcte au-delà. Le modèle numérique du tube est donc bien recalé. Le modèle de contact permet de bien reproduire les transitions de comportement vibratoire observé. Ces transitions de comportement en fonction de l'amplitude sont analysées en détail en section 4.2. On en montre un aperçu en Figure 4.13. La transition est visible numériquement et expérimentalement. Dans la section 4.1.4, on examine la corrélation calcul-essai dans la direction dans le plan, orthogonale à la direction de l'effort injecté par le pot vibrant. Les possibles limitations de la corrélation sont examinées en partie en 4.1.5.

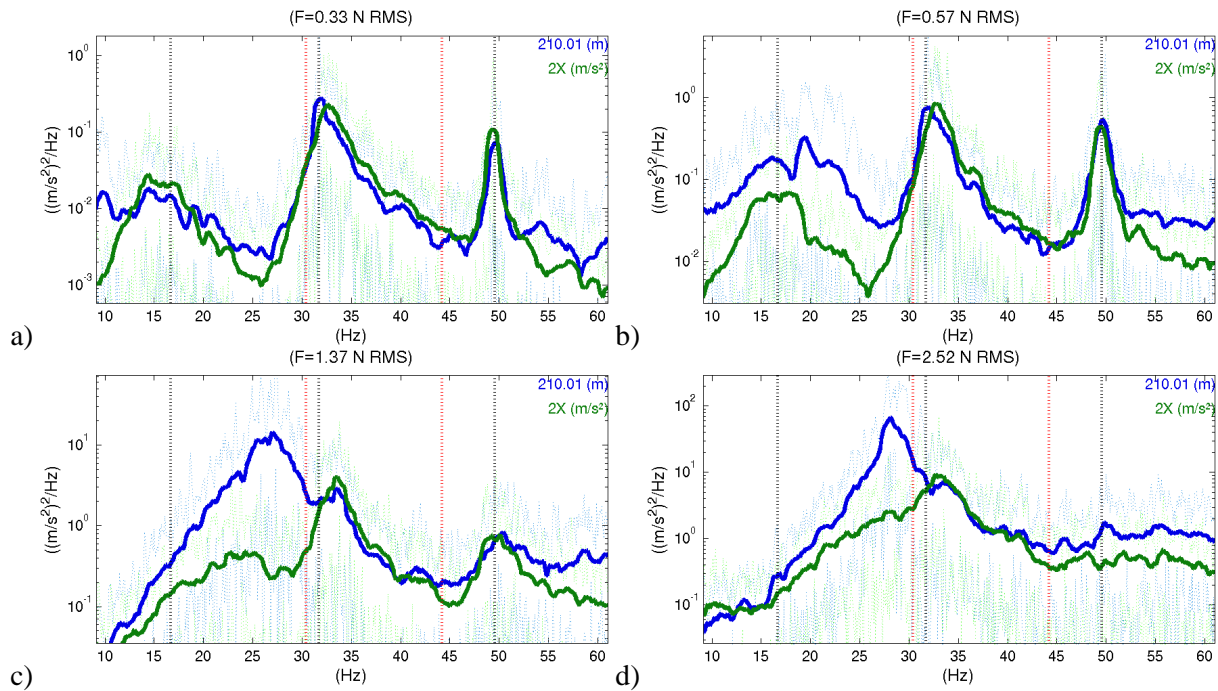


Figure 4.13. DSP de l'accélération, calculée et mesurée, sur le cintre dans la direction hors-plan. Zoom sur la transition de comportement, entre 10 et 60 Hz. Les pointillés verticaux tracent les fréquences des modes hors-plan libres (noir) et appuyés (rouge).

#### 4.1.4. Corrélation des DSP de déplacement dans le plan

On a mesuré les accélérations dans la direction dans-le-plan à deux altitudes. En Figure 4.14, on visualise les accélérations à la limite cintre – partie droite pour les quatre niveaux d'excitation. Pour le plus faible, la réponse numérique est quasi-nulle et non représentée ici. Le pot ou les chocs ont excité la direction  $DY$  expérimentalement mais pas numériquement. Le cas 0,33 N RMS est donc bien un cas presque linéaire. Il a donc bien permis de recalibrer le modèle du tube. Les trois autres niveaux d'excitation ont suffisamment de chocs pour exciter numériquement la direction  $DY$ . Les fréquences concordent entre essais et simulations. On note que la plupart des pics sont situés sur des modes hors-plan : le pot excite ceux-ci prioritairement et les chocs excitent les modes dans le plan. Les amplitudes sont beaucoup plus différentes que pour la direction hors-plan et sont grandement surestimées par la simulation numérique.

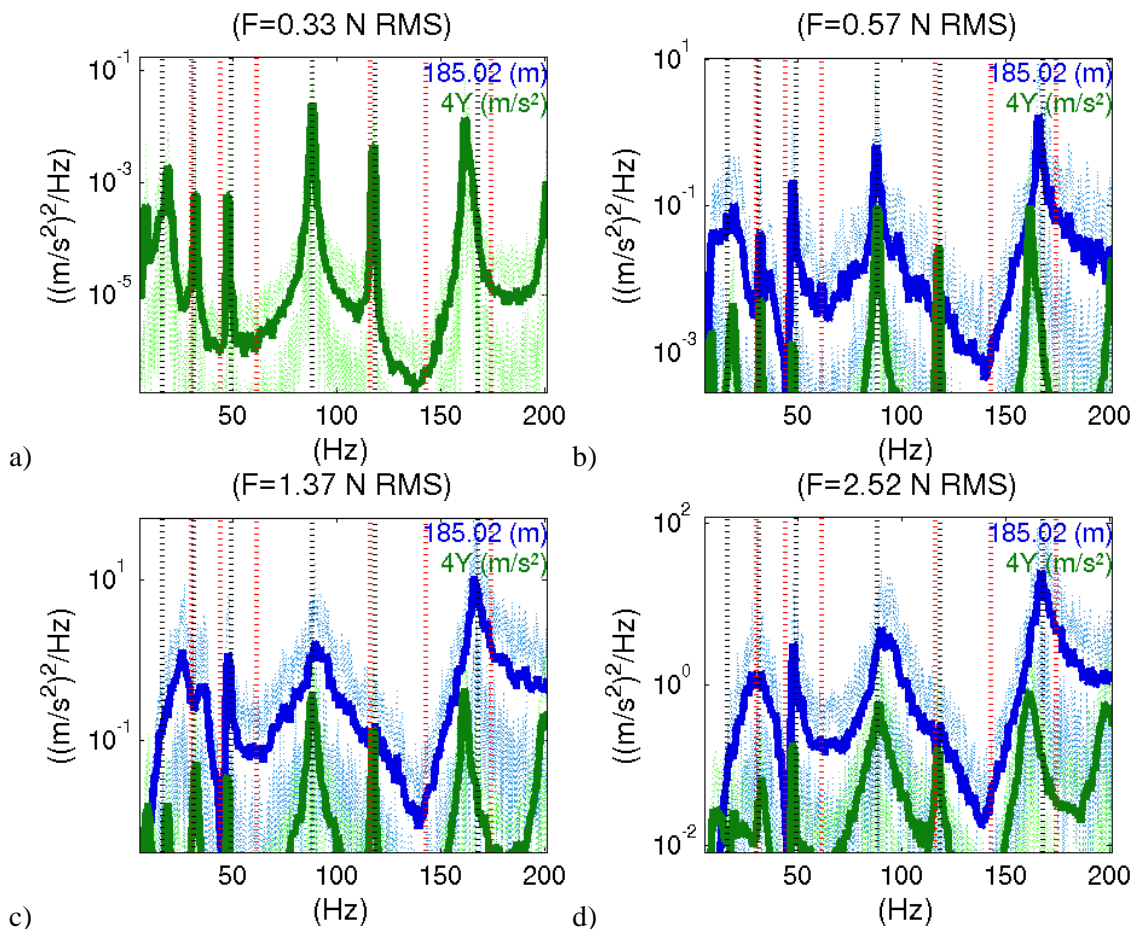


Figure 4.14. DSP de l'accélération, calculée et mesurée, sur le haut de la partie droite dans la direction dans le plan. Les pointillés verticaux tracent les fréquences des modes hors-plan libres (noir) et appuyés (rouge).

En comparant les accélérations dans la direction 4Y, sur la jambe du tube, en Figure 4.15, on voit que calcul et essai diffèrent. Les mêmes remarques que pour la corrélation 4Y/185.02 s'appliquent. Cela laisse à penser que le traitement numérique du choc est différent de ce qui se passe en réalité : l'énergie injectée par le pot n'est pas diffusée de la même manière entre essai et calcul. Ces différences pourraient aussi venir de la modélisation de l'obstacle : le foliage a deux directions privilégiées alors que l'obstacle circulaire n'en a aucune. Ceci pourrait être gênant si on veut modéliser plusieurs PE : il faudrait voir en quoi la mauvaise représentation de ce qui se passe sous la PE (typiquement toute la longueur de la jambe avec les sept autres PE) impacte ce qui se passe au-dessus de la PE.



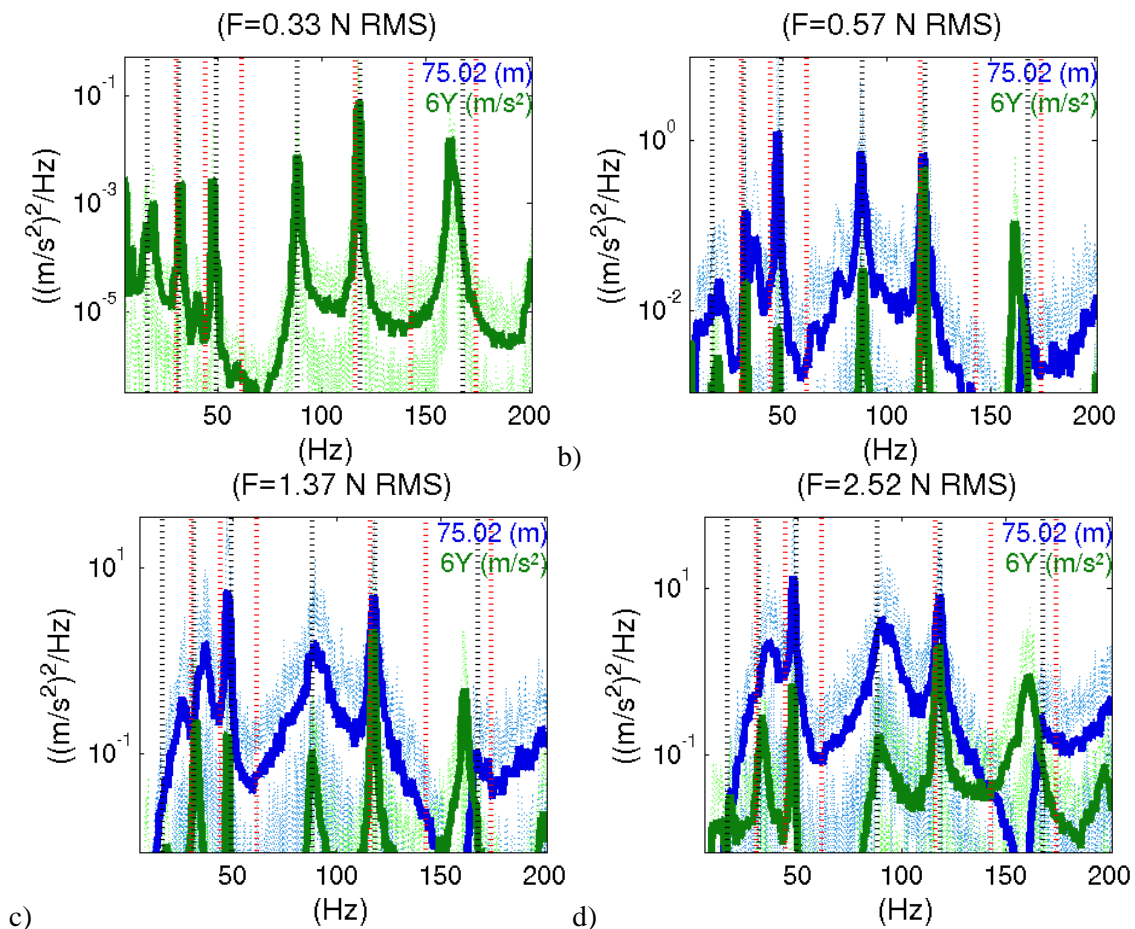


Figure 4.15. DSP de l'accélération, calculée et mesurée, sur la jambe dans la direction dans le plan. Les pointillés verticaux tracent les fréquences des modes hors-plan libres (noir) et appuyés (rouge).

#### 4.1.5. Conclusion

Les accélérations dans la direction hors-plan, et particulièrement celles mesurées au-dessus de la PE8, sont assez bien représentées numériquement sur la bande de fréquences d'intérêt 0 – 200 Hz. En particulier, on observe bien le décalage des fréquences et l'étalement des pics, phénomènes liés aux chocs. Les fréquences dans la direction  $DY$  sont cohérentes mais on remarque que le modèle de contact choisi implique une surestimation des mouvements selon  $DY$  par rapport aux essais. On estime cependant que la corrélation est suffisamment bonne pour valider le modèle numérique de tube et le modèle de contact.

On observe une transition du comportement avec déplacement du premier pic de flexion hors-plan vers le premier mode de flexion appuyé – en contact permanent puis fusion de ces pics. Certains modes, comme les modes de torsion vers 110 Hz sont peu modifiés. Plus de détails sur la transition en fonction de l'amplitude seront donnés en section 4.2.

Le point négatif, en plus de la surestimation générale des grandeurs numériques et de la moins bonne corrélation selon  $DY$ , est la mauvaise représentation de la transition du mode de flexion hors-plan initialement aux alentours de 5 Hz : fréquences, amplitudes et étalements sont mal représentés. Les accélérations selon  $Y$  et sous la PE sont assez mal représentées. On peut peut-être incriminer le modèle de contact, qui fera l'objet de quelques critiques en section 4.3. L'obstacle circulaire n'a pas de direction privilégiée, contrairement au foliage, qui de plus n'est pas orienté purement selon  $DX$ . De plus, expérimentalement, on n'a pas accès

pour le moment à la répartition des efforts de contact sur l'épaisseur de la PE : on ne sait donc pas si la répartition homogène de raideur choisie est valide. On peut aussi incriminer le banc. A posteriori, on s'est rendu compte que certaines parties censées être immobiles bougeaient, notamment un des modules de PE, qui se trouvait effectivement en porte-à-faux. Le banc a depuis été rigidifié en conséquence.

## 4.2. Analyse en fonction de raideurs et amortissements apparents

Dans cette section, on décrit l'évolution du système non-linéaire à chocs en fonction d'une amplitude : le niveau RMS  $F$  de l'excitation. Dans un premier temps, en 4.2.1, on présente la méthode de calcul retenue pour calculer les réponses linéaires et non-linéaires. En 4.2.2, on présente l'évolution de la DSP de certains DDL, dont le choix est précisé, en fonction du RMS de l'excitation et on la compare à l'évolution de systèmes linéaires dépendant de la raideur de contact. Puis, on cherche à remonter à des descripteurs de raideur et amortissement discrets, affectés à la zone de contact, à partir de la fréquence et la largeur du pic prépondérant en 4.2.3, ou à partir de la déformée en fonctionnement en 4.2.4 ou à partir de la réponse fréquentielle exprimée sous forme de DSP en 4.2.5. Chacune de ces trois recherches de paramètres linéaires commence par une description de la grandeur extraite des simulations non-linéaires à approcher par un système linéaire. Enfin, en 4.2.6, on compare les résultats d'identification obtenus par ces trois méthodes.

### 4.2.1. Réponses non-linéaires et linéaires

Le tube est excité sur sa partie cintrée dans la direction hors-plan, sur le DDL 261.01. Ainsi, l'ensemble des modes ayant des composantes hors-plan est excité, y compris les modes de torsion. Des niveaux  $F$  entre 0,01 N RMS et 20 N RMS sont considérés et permettent de bien mettre en évidence la transition du comportement dynamique. Le jeu reste constant et égal au jeu nominal au cours de cette étude. La base de réduction est construite à partir des modes de fréquence inférieure à 7500 Hz pour les trois conditions de blocage et des corrections statiques. La dynamique non linéaire est donc donnée par

$$M_R \ddot{q}_R + C_R \dot{q}_R + K_R q_R = f_{\text{contact}}^{NL}(q_R) + F [b] \{u\}, \quad (4.2)$$

où  $F$  norme l'effort extérieur,  $[b]$  indique sa localisation spatiale et  $\{u\}$  est le tirage aléatoire d'un bruit blanc filtré. L'amortissement libre est modal. L'intégration numérique est effectuée par un schéma de Newmark d'accélération moyenne avec un pas de temps de  $2 \cdot 10^{-5}$  s sur une durée de 100 s.

On considère par ailleurs un système linéaire à contact permanent et amortissement visqueux permanent au niveau des DDL de contact. La matrice d'amortissement associée à un amortissement permanent unitaire est égale à la matrice de raideur associée à un contact permanent unitaire : chaque DDL subit deux forces, l'une opposée à sa vitesse et l'autre opposée à son déplacement. Les expressions des matrices sont donc égales. Matriciellement, cela s'écrit

$$M \ddot{q} + (C + cK_{CB}) \dot{q} + (K + kK_{CB}) q = F [b] \{u\}, \quad (4.3)$$

où les unités sont portées par  $c$  et  $k$ ,  $K_{CB}$  étant sans unité. On considère les plages de paramètres suivantes :  $1 - 4 \cdot 10^6$  N/m pour  $k$  et  $0,01 - 100$  Ns/m pour  $c$ . 90 et 41 valeurs

logarithmiquement équi-réparties sont respectivement prises en compte. La matrice d'observation  $[b]$  est différente de celle de (4.2), car la dynamique linéaire est ici exprimée sur base non réduite, mais la même notation est gardée pour ne pas surcharger. De cette dynamique linéaire, on peut extraire les modes propres complexes à raideur et amortissement permanent,

$$\left[ \lambda_j^2 M + \lambda_j (C + cK_{CB}) + (K + kK_{CB}) \right] \{\psi_j\} = \{0\}. \quad (4.4)$$

Du pôle, on tire les fréquences (en rad/s ici) et amortissements réduits par

$$\lambda_j = -\zeta_j \omega_j + i \omega_j \sqrt{1 - \zeta_j^2}. \quad (4.5)$$

Les déformées modales sont normées par rapport à la masse. On trie les modes selon deux critères. Quand  $k$  prend sa plus faible valeur et  $c$  est nul, les modes sont réels et on les classe par fréquence croissante. Pour toute autre configuration, on se rapporte à la configuration avec la valeur de  $k$  immédiatement plus petite et on apparie les déformées selon la concordance de leur MAC-M. Ainsi, on suit les déformées et non les fréquences. Pour les cas testés, avec quelques ajustements manuels, cette méthode est robuste aux croisements de modes. Il est important de noter que le premier mode de flexion hors-plan reste toujours celui de fréquence minimale.

En mettant le système (4.3) sous forme d'état, on accède à la réponse fréquentielle de quelques déplacements  $\{y\}$  par

$$\begin{cases} \left[ -\omega^2 M + i\omega(C + cK_{CB}) + (K + kK_{CB}) \right] \{q\} = F[b] \{u\} \\ \{y\} = [c] \{q\} \end{cases}, \quad (4.6)$$

que l'on peut projeter sur une base modale assez réduite, mais compatible avec la fréquence de coupure de l'excitation, diagonalisant  $M$  et  $K + kK_{CB}$  afin d'accélérer les calculs. On obtient alors les évolutions temporelles des DDL de sortie  $\{y(t)\}$  par transformée de Fourier inverse.

Les DSP des réponses linéaires et non-linéaires sont calculées avec une fenêtre de Hann de longueur 10 s et un recouvrement de 66 %.

#### 4.2.2. Comparaison avec un système linéaire à contact bilatéral

Dans un premier temps, on cherche à trouver quels sont les DDL à observer qui contiennent le plus d'informations sur le contenu spectral du signal. Pour cela, on compare les DSP, obtenues à partir de simulations numériques non-linéaires, de plusieurs DDL pour différents niveaux RMS  $F$  de l'excitation. On trace en Figure 4.16 les DSP des déplacements hors-plan suivants :

- le DDL 236.01, à l'apex ;
- les DDL 210.01 et 261.01, points situés à 45° entre l'apex et la partie droite ;
- les DDL 186.01 et 471.01, limites cintre – partie droite ;
- les DDL 141.01 et 426.01, symétriques par rapport au centre de la PE des points précédents.

On note en premier lieu une symétrie entre les deux branches du tube, alors que l'excitation sur le DDL 261.01 ne l'est pas, contrairement à une excitation à l'apex. En effet,

les DDL 141.01 et 426.01, symétriques par rapport à l'axe de symétrie du cintre, ont des évolutions comparables, quand bien même ces DDL ont un niveau vibratoire plus faible que celui des autres DDL : leur amplitude vibratoire est limitée par la PE située 8,5 cm plus haut. Les DDL 186.01 (vert) et 471.01 (magenta) ont aussi des évolutions fréquentielles très comparables. Leur niveau vibratoire est plus élevé que celui des DDL précédents car même si ils sont aussi proches de la PE, ils sont au-dessus de celle-ci et les niveaux vibratoires sont plus élevés sur le cintre du fait de l'excitation et des caractéristiques de masse et raideur du tube. Les mêmes remarques tiennent pour les DDL de la moitié du cintre (210.01 et 261.01). L'apex (236.01) est le DDL dont le niveau vibratoire est le plus élevé. On tire donc les deux enseignements de cette comparaison de DDL : une symétrie apparaît sur les DSP de simulations non-linéaires et les différents DDL ont des évolutions très comparables en fonction du niveau RMS. Comme les niveaux vibratoires sont les plus élevés près de l'apex, dans la suite, on se focalisera sur les DDL 236.01 et 210.01. On capte ainsi toutes les évolutions du contenu fréquentiel en fonction de l'amplitude de l'excitation.

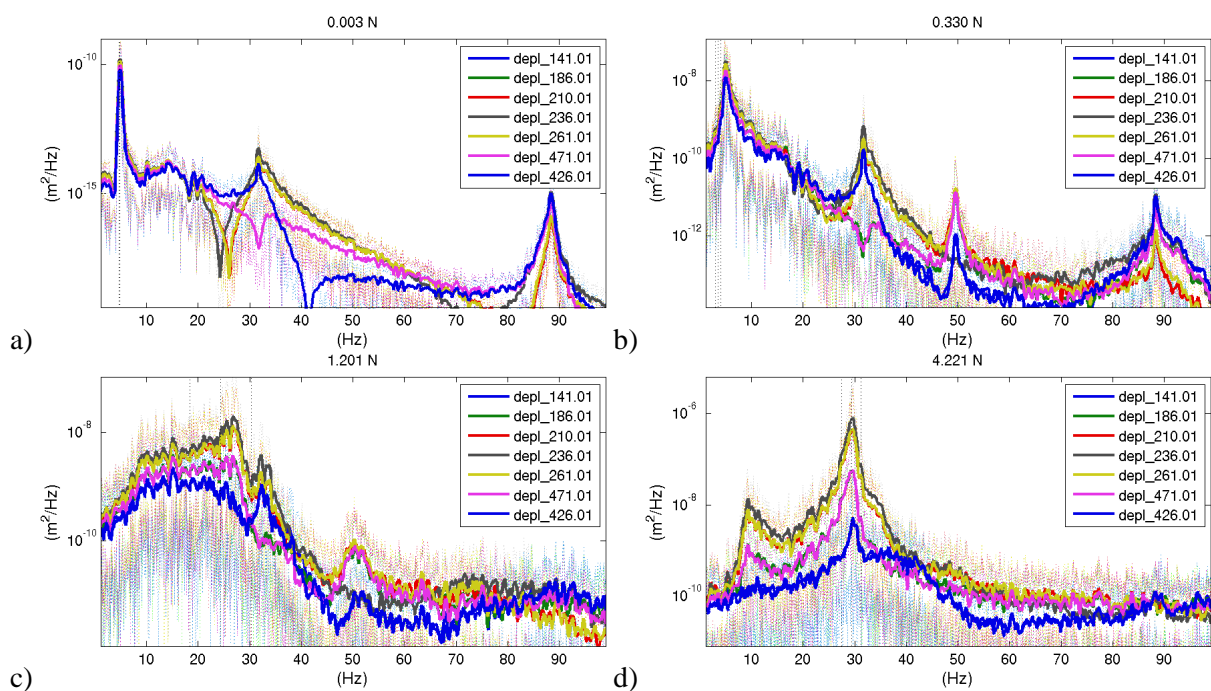


Figure 4.16. DSP de déplacements hors-plan pour différents niveaux RMS de l'excitation.

Ayant décidé de n'observer que deux DDL du cintre, on peut maintenant tracer, en Figure 4.17, les évolutions de leur DSP en fonction du niveau RMS de l'excitation. Comme on cherche à comparer ces DSP à des DSP de systèmes linéaires, on norme chaque DSP par  $F$ . Ainsi, les différences de niveau entre deux DSP ne sont plus imputables qu'à une répartition spectrale différente. Comme le spectre de l'effort injecté au DDL 261.01 est plat entre 0,1 et 100 Hz, on se rapproche aussi d'une construction d'une sorte de fonction de transfert entre 0 et 100 Hz. Les deux DSP normées présentent des évolutions comparables. On observe sur les DSP tracées une transition du premier mode de flexion libre vers un mode plus hautes fréquences.

Lorsque  $F$  est faible, le système est linéaire et présente des anti-résonances. Celles-ci sont annulées et le niveau vibratoire se répartit alors sur une large gamme de fréquences. Ce remplissage des anti-résonances est caractéristique de l'apparition de la non-linéarité et pourrait servir à la diagnostiquer. On retrouve clairement ce phénomène sur la Figure 4.12.

Les DSP des systèmes linéaires y présentent des anti-résonances, quel que soit le niveau de l'excitation. Le niveau est égalisé pour les réponses non-linéaires.

Le premier mode libre de flexion hors-plan est le plus modifié au cours de la transition du comportement : son amplitude diminue et sa largeur de bande augmente. Pour un système linéaire, cela est lié à une forte augmentation de l'amortissement. Nous verrons par la suite si on peut donner un sens plus précis à cette affirmation. Les réponses sur les modes autres que le premier mode libre de flexion hors-plan semblent conserver la même amplitude et la même largeur de bande et semblent peu impactés par l'évolution globale du comportement. La transition sur le cintre (DDL 210.01) est compliquée par la présence du premier mode libre de torsion, à 16 Hz. Alors, les deux premiers modes semblent se mélanger et l'amplitude diminue moins que lors de la transition du DDL 236.01. Lorsque  $F$  est grand, on observe une transition inverse : les amplitudes des pics augmentent, les pics deviennent plus étroits et le niveau en-dehors des pics diminue. Cela laisse à penser que la réponse se dirige vers celle d'un système linéaire, qui serait vraisemblablement le système à contact permanent décrit en 3.2.1.

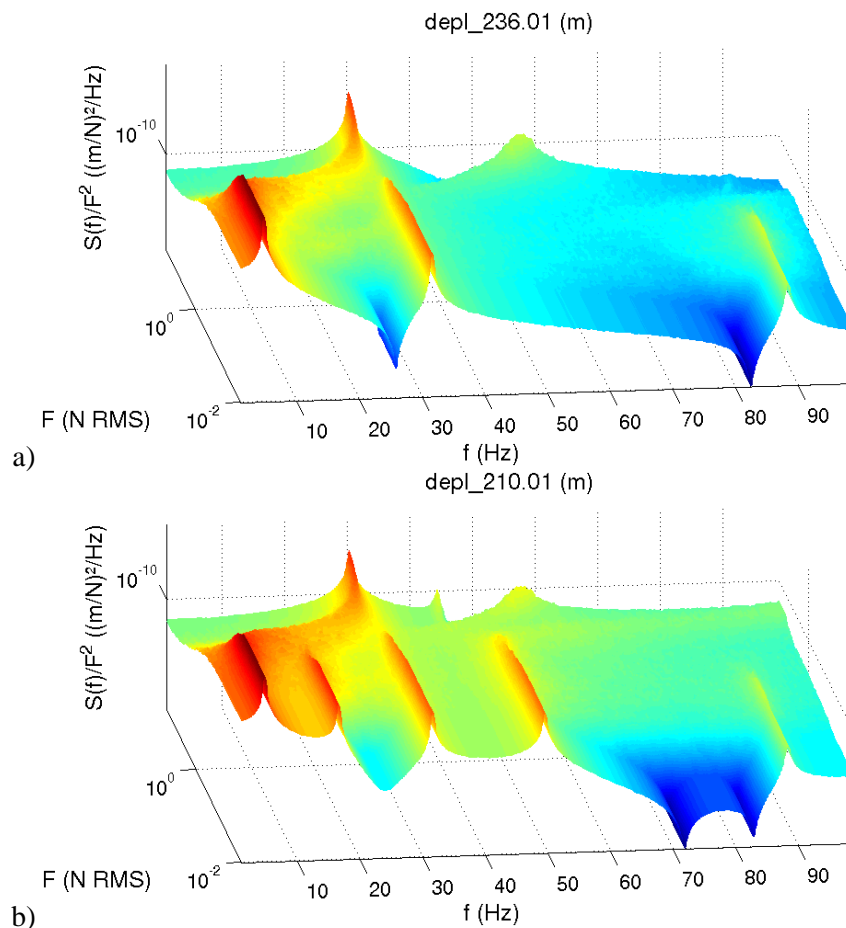


Figure 4.17. Nappes de DSP de déplacements issues de simulations non-linéaires en fonction de la fréquence  $f$  et du niveau RMS  $F$ . Les DSP non-linéaires ont été normalisées par  $F$ .

L'observation de la nappe de DSP du DDL 210.01 est désormais privilégiée car elle permet d'accéder à la transition des modes de flexion hors-plan et des modes de torsion du cintre. On l'observe en fonction du niveau RMS  $F$  en Figure 4.18. On a ainsi une visualisation des niveaux extrêmes de la DSP, entre 1 et 100 Hz, pour chaque valeur de  $F$ . Lorsque  $F$  est faible et le système linéaire, il y a dix ordres de grandeur entre le minimum et le maximum de

la DSP : les pics et les anti-résonances sont acérés. Dès  $F$  égal à 0.06 N RMS, les anti-résonances disparaissent et le niveau maximal diminue. Le niveau minimal est à peu près constant jusqu'à 5 N RMS puis augmente légèrement et finit par diminuer après 10 N RMS. Le niveau maximal diminue jusqu'à  $F$  égal à 2 N RMS. Il y a alors trois ordres de grandeur entre la valeur minimale et la valeur maximale. La valeur maximale augmente à partir de 2 N RMS : on observe la transition du début mais effectuée à l'envers et on se rapprocherait d'un système linéaire.

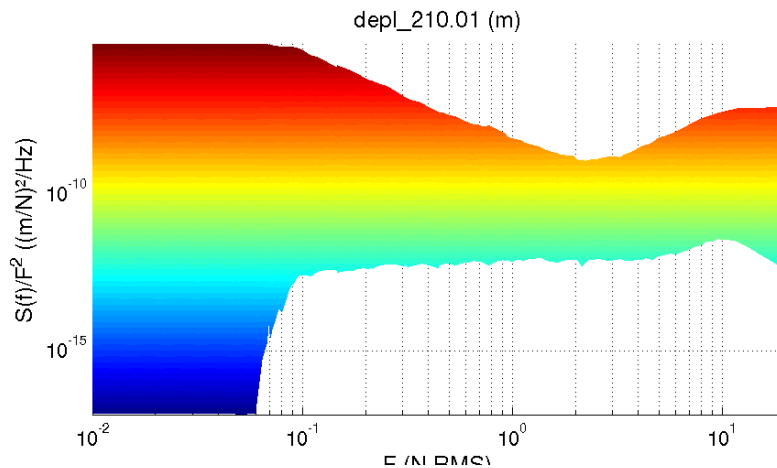


Figure 4.18. DSP du DDL 210.01, vue dans le plan  $(F,S)$ . Les fréquences  $f$  entre 1 et 100 Hz ont été gardées pour cette visualisation.

On vient de voir que le tube, lors de l'augmentation de  $F$  de 0,01 N RMS à 20 N RMS, subirait une transition entre le système libre et un autre système linéaire qui serait le système à contact bilatéral permanent. On trace donc en Figure 4.19 la nappe de DSP en superposant les valeurs  $F$ . On visualise aussi les DSP linéaires calculées avec  $k$  valant 1 N/m et  $4.10^6$  N/m. Ces DSP linéaires sont calculées avec une excitation valant 1 N RMS : elles sont déjà normalisées. Comme prévu, on retrouve une bonne concordance entre le profil de la nappe de DSP et la DSP linéaire libre. Les pics à 4,9 Hz, 16,7 Hz, 31,7 Hz, 49,6 Hz et 88,4 Hz, alternativement flexion hors-plan et torsion, coïncident. Les anti-résonances à 71 Hz et 82 Hz sont retrouvées, tout comme la zone de faible réponse vers 23 Hz. On voit donc que la nappe de DSP comprend la réponse libre. La DSP à contact bilatéral permanent à  $4.10^6$  N/m a ses pics à 32 Hz, 45,3 Hz et 61 Hz, respectivement de flexion hors-plan, torsion et flexion hors-plan. Ces modes ne correspondent pas à des pics de la nappe de DSP. Celle-ci a un niveau significatif vers 32 Hz mais on ne peut faire la part des choses entre la participation du système libre et celle du système à contact bilatéral. Il y a cependant un pic émergent (mais peu visible sur la figure) vers 43 Hz et une bosse sous les 60 Hz. Ces émergences ne sont pas liées au système libre, elles constituent donc un indice supplémentaire que le comportement tend vers le comportement à contact bilatéral permanent. Un autre indice est la concordance du niveau minimal de la nappe en basses fréquences et du niveau maximal de la nappe pour des fréquences supérieures à 77 Hz avec la DSP à contact permanent.

Le comportement pour de faibles  $F$  est (heureusement !) le même que pour une faible raideur de contact. On retrouve le comportement libre du tube. Le comportement pour de forts  $F$  se rapproche du comportement à contact permanent à  $4.10^6$  N/m. Sur la Figure 4.20, on compare les transitions, projetées dans le plan  $(f,F)$  ou le plan  $(f,k)$ , des DSP non-linéaires dépendant de  $F$  et des DSP linéaires dépendant de  $k$ . Les allures sont très ressemblantes. Même si les DSP non-linéaires sont beaucoup plus étalées, on retrouve les mêmes transitions de pic. Les anti-résonances disparaissent subitement sur les DSP non-linéaires alors qu'elles

subissent une transition douce sur les DSP linéaires. Pour de forts  $F$  et de forts  $k$ , on retrouve le même comportement : réponse à 32 Hz, augmentation du niveau vers 43 Hz et 60 Hz et diminution du niveau entre ces deux fréquences, à mettre en parallèle avec les deux anti-résonances visibles sur la réponse linéaire à contact permanent.

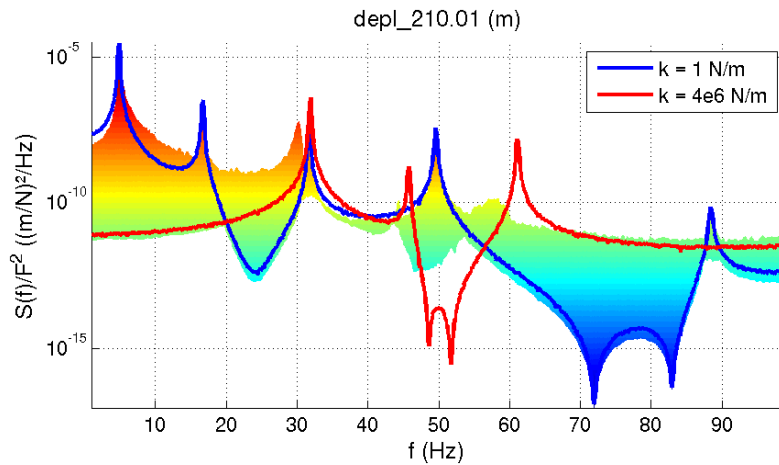


Figure 4.19. DSP du DDL 210.01, vue dans le plan  $(f, S)$ . Les amplitudes  $F$  de l'excitation entre 0,01 et 20 N RMS ont été gardées.

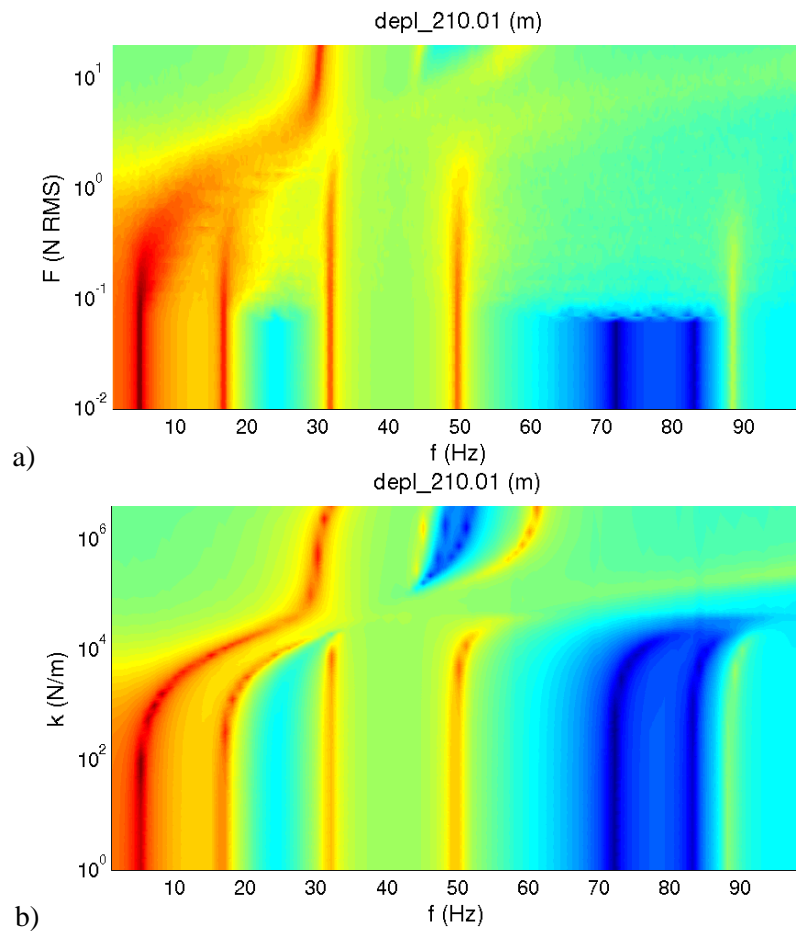


Figure 4.20. Comparaison de DSP non-linéaires (a) et linéaires (b). Les DSP non-linéaires sont tracées en fonction de  $F$  ; les DSP linéaires sont tracées en fonction de  $k$ .



Ainsi, qualitativement, les évolutions des DSP non-linéaires  $S_{NL}(f; F)$  en fonction de  $F$  et des DSP linéaires  $S_L(f; k, c)$  en fonction de  $k$  sont très semblables. Le système non-linéaire dépendant de l'amplitude semble se transformer comme un système linéaire dépendant de la raideur. Dans les trois sous-sections suivantes, nous allons essayer de relier  $F$  à  $k$  et  $c$  selon trois critères. Deux sont assez locaux en fréquence, à savoir la fréquence et la largeur du pic prépondérant, en 4.2.3, et la déformée en fonctionnement évaluée sur une bande de fréquences contenant cette largeur de bande, en 4.2.4. Le dernier, le profil de la DSP, en 4.2.5, est plus global en fréquence. Cependant, la déformée en fonctionnement utilise les informations de toutes les coordonnées généralisées tandis que les informations sur le pic et la DSP n'utilisent qu'un déplacement observé.

### 4.2.3. Raideurs et amortissements apparents obtenus à partir du pic non-linéaire prépondérant

On cherche à extraire les informations de fréquence et d'amortissement du pic prépondérant, défini comme le pic de niveau maximal sur la DSP. Pour un système linéaire peu amorti, la fréquence associée au pic est celle où la DSP est maximale. On la note ici  $f_{pic}$ . On cherche alors la bande passante à -3dB de ce pic, ce qui est réalisé sur la DSP en cherchant les points où la DSP vaut un quart de la valeur du pic. On note  $\Delta f_{pic}$  la largeur de la bande. Alors, les paramètres modaux du pic estimés sont

$$f_{es} = f_{pic} \text{ et } \zeta_{es} = 2 \frac{\Delta f_{pic}}{f_{pic}}. \quad (4.7)$$

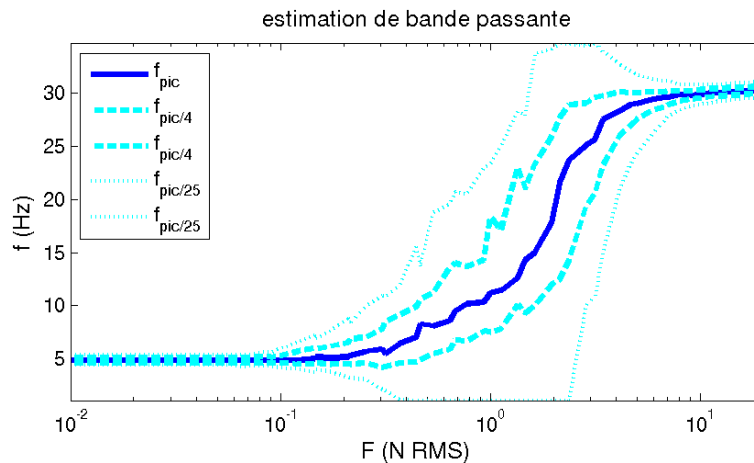


Figure 4.21. Bande passante arbitraire délimitant la bande de recherche des déformées.  $f_{pic}$  est la fréquence du maximum.  $f_{pic/4}$  désigne les deux bornes de la bande passante à -3dB.  $f_{pic/25}$  est un indicateur de l'étalement du pic, il correspond aux bornes d'une bande passante définie par un rapport 25 par rapport au maximum de la DSP.

Comme les DSP non-linéaires sont assez bruitées et l'échantillonnage en fréquence assez grossier (0,1 Hz), ces estimateurs ne sont pas très fiables. Parfois, ils se focalisent sur un pic local de la bosse de la DSP et l'amortissement est alors très faible ; parfois, il manque de points pour bien estimer la largeur de bande. On applique alors la procédure de recherche sur des DSP filtrées par moyenne glissante sur cinq points. La fréquence du pic prépondérant et la largeur de bande sont alors tracées sur la Figure 4.21. On y a ajouté un critère permettant de prendre en compte une largeur de bande plus cohérente avec leur aspect aplati et étendu (voir



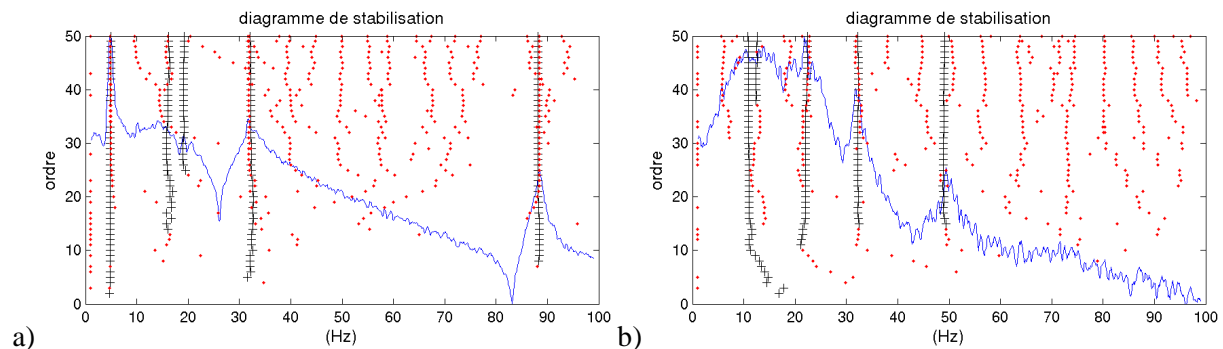
Figure 4.16 par exemple). Ce critère est une bande passante à un plus faible niveau que la bande passante à -3dB. On délimite donc les fréquences dont la DSP est supérieure à 1/25ème du maximum de la DSP. Lorsque  $F$  est faible ou élevé, les deux bandes passantes sont très étroites, indiquant donc un pic très acéré. Lors de la transition, les deux bandes passantes s'élargissent. On a vérifié pour chacune des 53 valeurs prises par  $F$  que la bande passante élargie englobait bien l'étendue de la bosse.

Les bandes passantes estimées ci-dessus sont très dépendantes de l'échantillonnage et du moyennage, qui donnent le côté chahuté des DSP. On cherche à les comparer avec les fréquences et amortissements réduits obtenus par des méthodes plus sophistiquées dérivées des travaux de thèse de Verboven [Ver2] sur l'identification de paramètres modaux. En prenant la racine carrée de la DSP, on obtient une grandeur qui se rapproche du module d'une fonction de transfert, d'autant plus que le spectre de l'excitation imposée est plat entre 1 et 100 Hz. La fonction de transfert est supposée écrite comme un quotient de deux polynômes. Une transformation en  $z$  a été effectuée et les polynômes dépendent d'une variable  $\Omega_f$  dépendant de la pulsation discrète  $\omega_f$ . On cherche à trouver les coefficients du dénominateur  $A$  en résolvant le problème au moindre carré

$$\varepsilon(B_0, \dots, B_b, A_0, \dots, A_a) = \sum_{f=1}^{N_f} \left| \sum_{\beta=1}^b B_{\beta} \Omega_f^{\beta} - \sqrt{S_{NL}(\omega_f)} \sum_{\alpha=1}^a A_{\alpha} \Omega_f^{\alpha} \right|^2 \quad (4.8)$$

sur une bande de fréquences contenant  $N_f$  fréquences discrètes. Connaissant les coefficients du dénominateur  $A$ , on trouve les pôles, qui en sont les racines. On ne retient que les pôles stables, dont la partie réelle est négative. En augmentant le degré de  $A$ , on augmente l'ordre du modèle. On trace alors des diagrammes de stabilisation. On voit sur la Figure 4.22 que les pôles stables convergent en fonction de l'ordre du modèle. Les paramètres modaux sont censés être mieux approchés quand l'ordre est élevé. Cependant, lorsque le pic est mal défini ou que l'ordre est trop élevé, plusieurs pôles stables peuvent être trouvés sur un seul pic. Comme on ne cherche à décrire le pic prépondérant que comme un seul mode, on choisit donc, pour chaque  $F$ , l'ordre maximal ne donnant qu'un pôle stable dans la bande passante élargie au 1/25<sup>ème</sup>.

On compare sur la Figure 4.23 les bandes passantes et les fréquences et amortissements réduits correspondants. Les évolutions sont très comparables. L'estimation grossière est cependant plus chahutée mais l'identification des paramètres modaux conduit à un amortissement surestimé pour des  $F$  importants. On choisit arbitrairement les paramètres issus de l'identification et non de l'estimation. On retrouve bien des évolutions de fréquence croissante et un amortissement qui augmente puis diminue lors de la transition. C'est ce qui a été proposé dans les études de EDF R&D sur le comportement des tubes encrassés [Gau1].



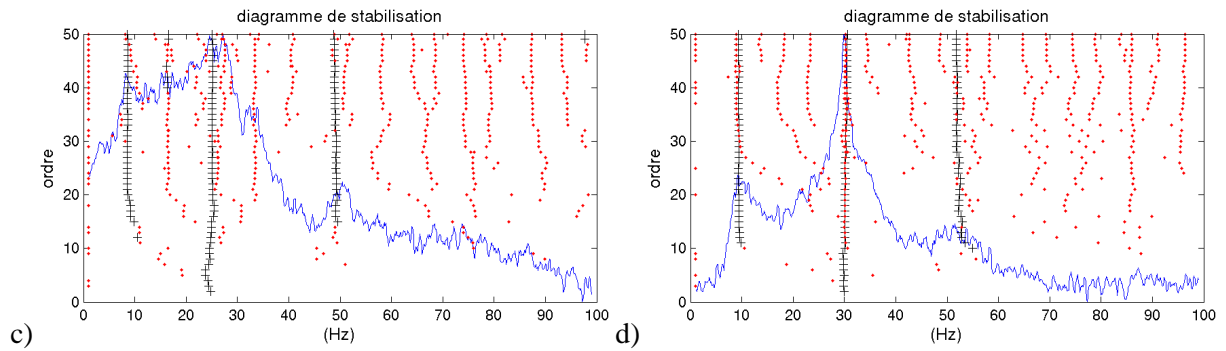


Figure 4.22. Diagrammes de stabilisation sur la DSP pour quatre niveaux RMS : (a) 0,003 N, (b) 0,68 N, (c) 1,23 N, (d) 6,24 N. Les pôles stables sont indiqués par une croix noire, les pôles instables par des points rouges.

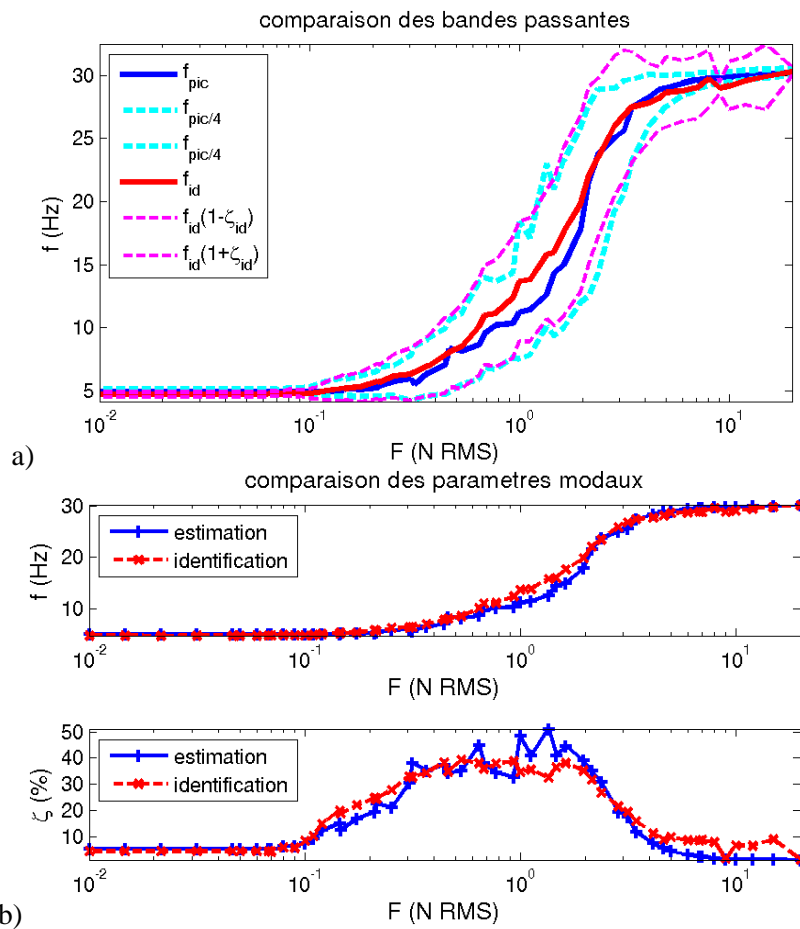


Figure 4.23. Recherche d'un indicateur de bande passante : estimation de la largeur de bande à -3dB ou identification à un système linéaire. On visualise en a) les deux bandes passantes trouvées et en b) les fréquences et amortissements réduits correspondants.

On a donc identifié 53 pôles complexes  $\lambda_{id}(F)$  dépendant de l'amplitude de l'excitation. Il faut donc trouver le couple  $(k,c)$  parmi les 3690 couples disponibles retrouvant au mieux cette information, parmi les 3690 couples disponibles. La fonctionnelle portant sur l'écart relatif des pôles dans le plan complexe

$$\varepsilon(k, c; \lambda_{id}) = \frac{|\lambda_{id} - \lambda_1(k, c)|}{|\lambda_{id}|} \quad (4.9)$$

permet d'utiliser les informations de fréquence et d'amortissement sans chercher de pondération entre ces deux informations. De plus, cette fonctionnelle ne présente qu'un minimum sur la grille des paramètres  $(k, c)$ . On voit en Figure 4.24 cependant que pour de forts  $F$ , la gamme d'amortissement considérée n'est pas assez étendue. En effet, alors les déplacements sont très limités au niveau des PE et les amortisseurs ne travaillent pas. Ils influent alors peu les modes complexes du tube. En conséquence, la grille de paramètres est trop peu étendue en  $c$  pour bien optimiser la fonctionnelle lorsque  $k$  est élevé mais permet quand même de l'optimiser avec suffisamment de précision pour expliquer le phénomène.

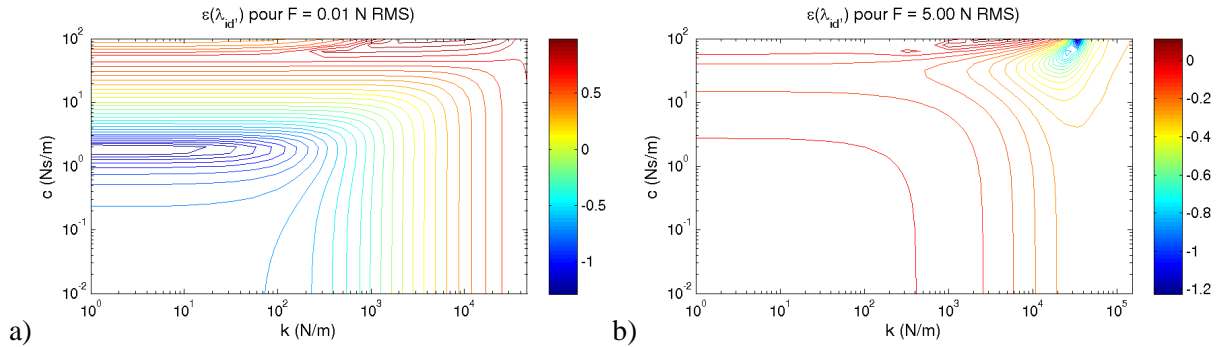


Figure 4.24. Iso-valeurs de la fonctionnelle d'erreur sur la position des pôles dans le plan complexe. Les iso-valeurs se rapportent au log de cette erreur.

Une fois l'optimisation effectuée, on trace les valeurs optimales de  $k$  et  $c$  sur la Figure 4.25. Pour  $F$  inférieur à 0,1 N RMS, les valeurs de  $k$  et  $c$  trouvées sont constantes. La valeur non minimale trouvée pour  $c$  est sûrement à mettre au compte du lissage des DSP, qui a aplati les pics de la DSP non-linéaire. Puis,  $k$  et  $c$  augmentent avec  $F$ .  $c$  sature pour les valeurs élevées de  $F$  alors qu'aucune tendance nette ne se dégage pour  $k$ .

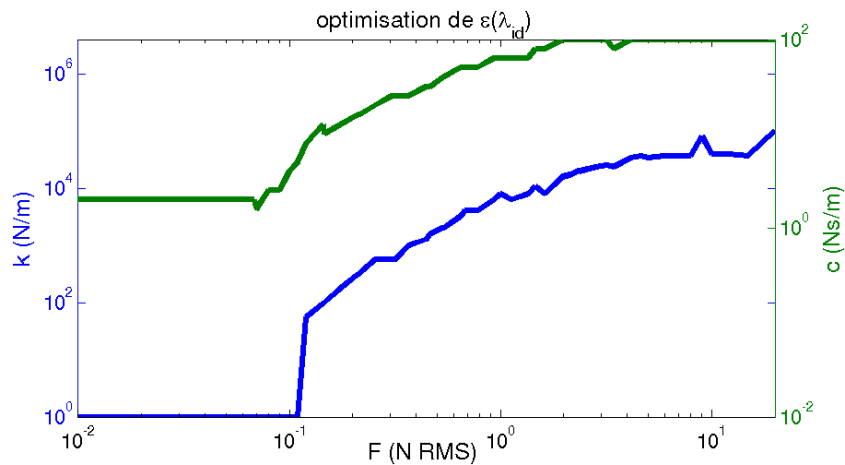


Figure 4.25. Raideur et amortissement linéaires de la zone de contact, obtenus à partir du pôle identifié.

#### 4.2.4. Raideurs et amortissements apparents obtenus à partir de la déformée en fonctionnement non-linéaire

Dans la sous-section précédente, on a extrait une fréquence et un amortissement réduit du pic prépondérant. Ici, on extrait une déformée en fonctionnement de la bande passante. On calcule donc l'interspectre entre l'effort injecté, qui sert de référence de phase, et les coordonnées généralisées. On a donc des variations de phase et d'amplitude pour chaque coordonnée généralisée. Ces variations dépendent de la fréquence. Pour collecter l'information la plus large possible, on sélectionne toutes les fréquences discrètes comprises dans la bande passante élargie au  $1/25^{\text{ème}}$ . On a donc une matrice comprenant autant de lignes que de coordonnées généralisées et autant de colonnes que de fréquences discrètes. Cette matrice indique le couplage, dépendant de la fréquence, entre les différentes composantes de la déformée du tube. On sélectionne alors les vecteurs singuliers à gauche significatifs. Si l'on se réfère à la procédure d'orthonormalisation décrite en 3.3, on vient de sélectionner les déformées dont l'énergie de déformation est significative. En effet, en travaillant avec les coordonnées généralisées, on travaille sur une base telle que la matrice de masse réduite est égale à l'identité. De plus, on n'a pas surpondéré l'influence des DDL de contact lors de cette étape, le fait que le maillage est plus fin autour des PE n'influant pas la réduction de modèle. On ne sélectionne alors que les valeurs singulières plus grande que 1 % de la première, qui est la plus grande. Les déformées sont restituées sur base physique afin d'être visualisées.

On trace en Figure 4.26 les valeurs singulières calculées, en fonction de  $F$ . Plus la bande passante élargie est large, plus il y a de colonnes à la matrice d'interspectres et plus il y a de valeurs singulières. On note en magenta les valeurs singulières significatives. Il n'y en a qu'une pour de faibles ou de forts  $F$  : une seule déformée participe significativement au mouvement, sur la bande de fréquence élargie. Comme les pics prépondérants des DSP sont alors acérés, cela se rapproche du comportement d'une structure ne répondant que sur un mode. L'augmentation de la valeur singulière minimale vers 0,05 N RMS est à mettre en parallèle avec l'annulation des anti-résonances comme présentée en Figure 4.18. Lorsque la DSP présente une large bosse, plusieurs déformées participent au mouvement. En effet, on s'attend à ce que tous les modes présents dans cette bande de fréquences aient une contribution significative.

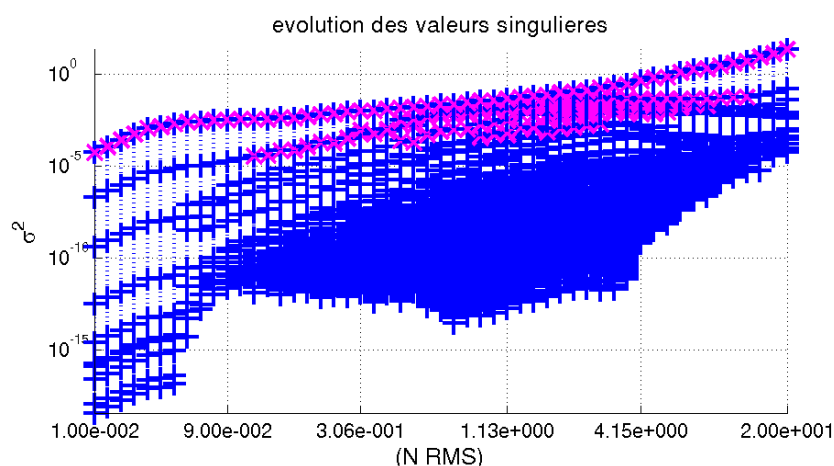


Figure 4.26. Valeurs singulières trouvées sur cette bande. L'échelle de cette dernière courbe est arbitraire mais permet une meilleure visualisation.

Les déformées principales sont toutes de type hors-plan. Elles sont très peu complexes et de type flexion hors-plan. On en présente quelques unes en Figure 4.27. Pour  $F$  augmentant, on part du premier mode de flexion hors-plan libre pour arriver à un mode appuyé au niveau de la PE, qui correspond au deuxième mode de flexion hors-plan libre mais beaucoup plus vraisemblablement à un mode à contact permanent de raideur à déterminer. Un nœud de vibration apparaît et s'élève quand  $F$  augmente.

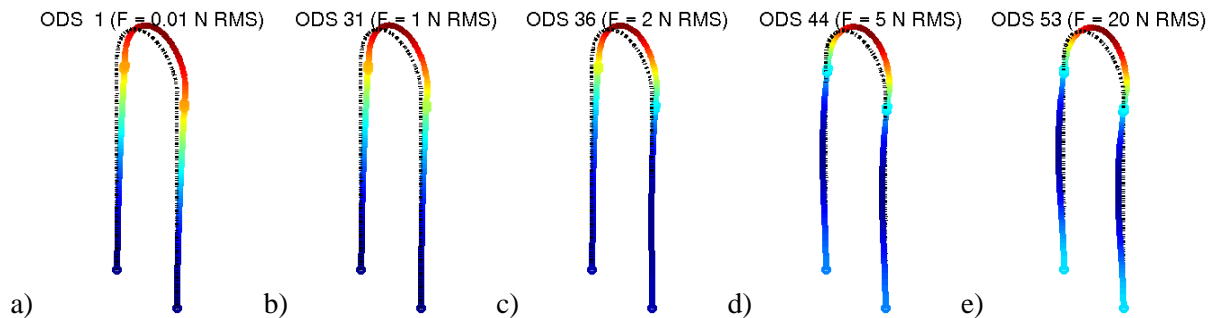


Figure 4.27. Déformée en fonctionnement (ODS) associée à la plus grande valeur singulière de chaque niveau RMS  $F$  de l'excitation. Les couleurs indiquent le déplacement selon  $DX$ .

Cependant, à partir de 0,44 N RMS, les déformées identifiées commencent à ressembler à des déformées complexes : un déphasage apparaît entre les différentes composantes, qui ne sont plus maximales au même instant. Des composantes dans le plan du tube apparaissent aussi. Visuellement, on a l'impression que le tube a un mouvement de flexion hors-plan selon le mode 1, couplé à un mouvement local au niveau des PE, le tube y ayant un mouvement circulaire autour de l'obstacle. À partir de 2,5 N RMS, le déphasage entre les jambes du tube diminue. Pour plus de 5 N RMS, la déformée identifiée retrouve une symétrie entre les jambes gauche et droite du tube : il n'y a plus de déphasage entre les deux moitiés du tube cintré. Par contre, il reste un déphasage entre le cintre et les jambes et le tube se déplace au niveau de la PE. Le maximum de déplacement n'est pas atteint en même temps sur la jambe et le cintre. Dès 10 N RMS, les déformées ont l'air réelles, sans aucun déphasage entre n'importe quelle portion du tube. On a alors un mouvement selon le second mode de flexion hors-plan ou le premier mode de flexion à contact bilatéral, indiscernables visuellement. Un point du tube, au niveau de la PE, a l'air fixé. Il semble intéressant de remarquer que le caractère plus ou moins complexe de l'ODS identifiée apparaît dans les mêmes zones de valeurs de  $F$  que l'agrandissement de la bande passante, donc l'augmentation du nombre de valeurs singulières, et l'augmentation du nombre de valeurs singulières significatives. La SVD pourrait alors donner un indicateur du degré de non-linéarité du système : peu de valeurs singulières et une valeur singulière significative indiquent une faible bande passante et une déformée identifiée par une seule forme.

Par curiosité, observons en Figure 4.28 les déformées associées aux différentes valeurs singulières significatives pour  $F$  associé à une grande bande passante élargie (1 – 25 Hz). On retrouve des déformées ressemblant à des déformées libres dont certaines sont hors de la bande de fréquences élargies : mode 1 de flexion hors-plan (4,9 Hz), mode 1 de flexion dans le plan (8,4 Hz), mode 1 de torsion (16,7 Hz), mode 2 de flexion hors-plan (31,7 Hz), mode 2 de flexion dans le plan (32,1 Hz) et mode 2 de torsion (49,6 Hz). De nombreuses déformées participent donc significativement au mouvement de la structure. La présence de déformées dans le plan du tube montre que les chocs ont réparti le mouvement selon  $DX$  et  $DY$ .

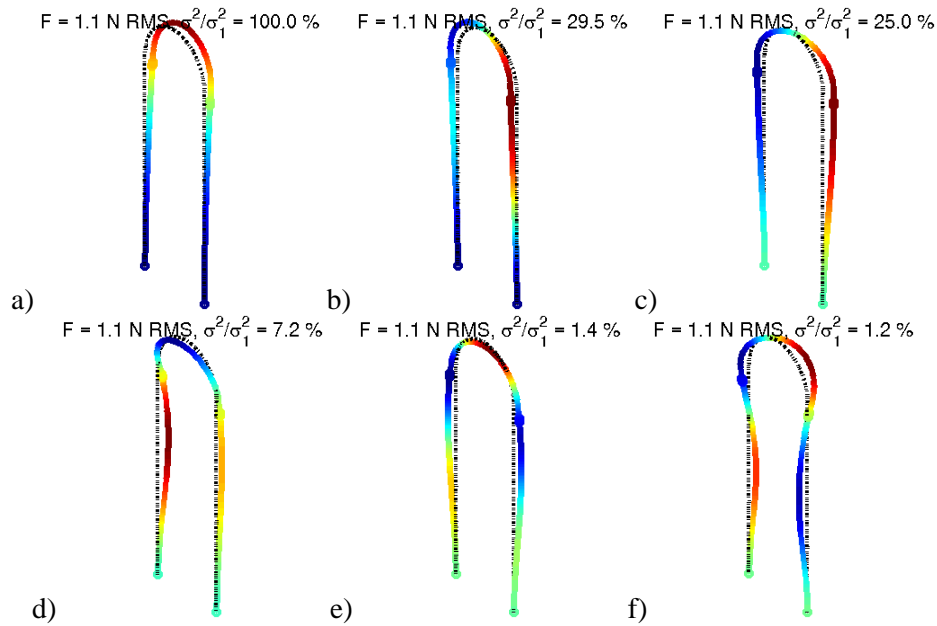


Figure 4.28. Déformées identifiées associées aux valeurs singulières significatives pour  $F=1,1$  N RMS.

L'ODS prépondérante est du type flexion hors-plan. On a noté précédemment, en 4.2.1, que le premier mode à contact permanent est aussi de type flexion hors-plan. On va donc chercher à apparier chaque ODS  $\psi_{id}(F)$  à un premier mode à contact et amortissement permanent  $\psi_1(k,c)$ . Pour cela, on va chercher le couple  $(k,c)$  maximisant le MAC-M entre ces deux déformées. Cependant, cette fonctionnelle est peu sensible à l'amortissement  $c$ , comme montré par la Figure 4.29. Elle présente aussi un plateau sur lequel le MAC-M est élevé et varie très peu. On s'attend donc à des résultats moyens quant à la raideur  $k$  et médiocres quant à l'amortissement  $c$ . La déformée optimisée ressemble clairement à la déformée identifiée, le MAC-M étant proche de 98 %. L'écart entre ces déformées est porté par de la torsion.

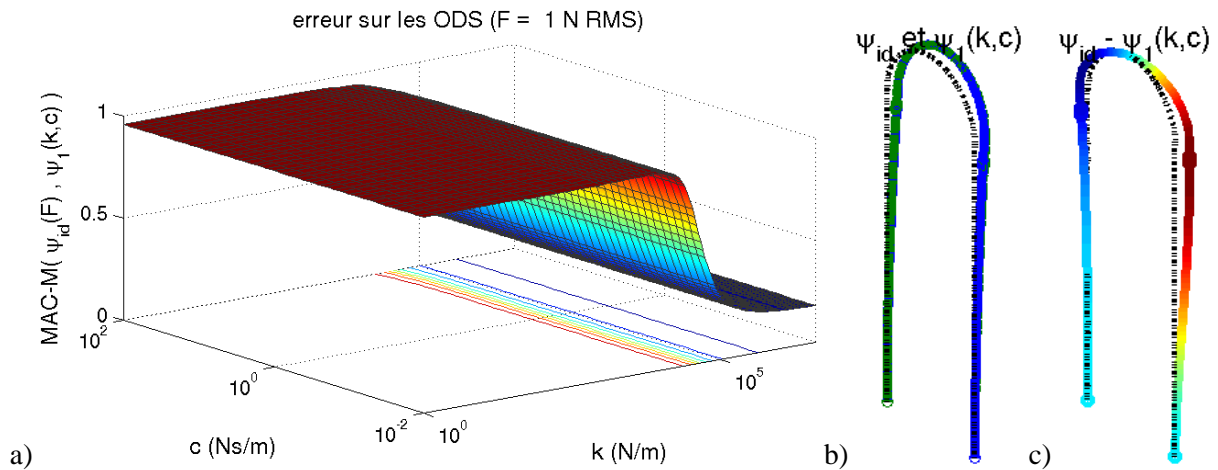


Figure 4.29. a) MAC-M entre la déformée identifiée et le premier mode à contact permanent. b) superposition de la déformée identifiée et de la déformée optimisée. c) différence entre ces déformées.

Les couples de raideur et amortissement dépendant de l'amplitude sont tracés sur la Figure 4.30. La raideur est identifiée à 1 N/m quand le tube ne subit pas de chocs. Puis, elle augmente avec  $F$ . L'amortissement est mal identifié, comme attendu vu l'allure de la fonctionnelle d'erreur.

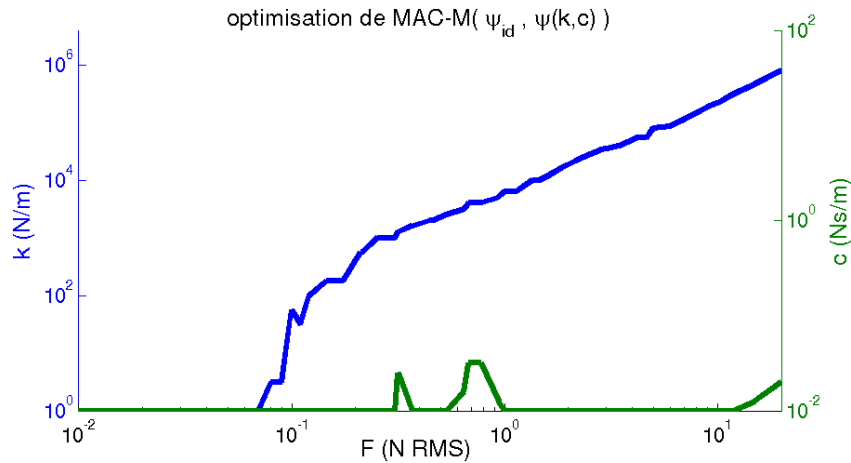
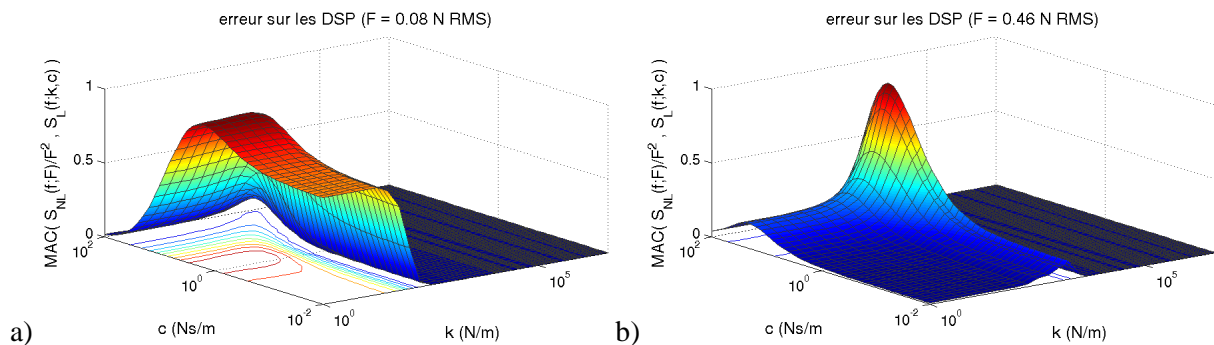


Figure 4.30. Raideur et amortissement linéaires de la zone de contact, obtenus à partir de la déformée en fonctionnement identifiée.

#### 4.2.5. Raideurs et amortissements apparents obtenus à partir de la DSP non-linéaire

Pour chaque valeur de  $F$ , on a calculé la DSP de la réponse non-linéaire. Pour chaque valeur de  $(k,c)$ , on a calculé la DSP de la réponse linéaire. On cherche le profil de DSP linéaire le plus proche d'une DSP non-linéaire. On pourrait penser à une erreur relative entre ces deux DSP, intégrées sur une bande de fréquences. Cependant, cette erreur est sensible à la norme de chaque DSP. Même si les DSP non-linéaires et les DSP linéaires (par construction) ont été normées par le RMS de l'excitation et malgré l'intuition donnée par la Figure 4.19, on n'est pas sûr que leurs niveaux soient comparables. Le coefficient de corrélation est l'indicateur privilégié, car il est indépendant de la norme de chaque DSP. Ce coefficient de corrélation est implémenté sous forme de MAC dans les logiciels de calcul mécanique. En effet, en considérant les fréquences discrètes comme un maillage filaire et le niveau de la DSP comme une déformée, on cherche à calculer la corrélation entre ces deux déformées. On a tracé les valeurs de ce MAC (utilisé en lieu et place de *coefficient de corrélation*) en Figure 4.31 pour quatre valeurs de  $F$ . Pour les valeurs extrêmes de  $F$ , la recherche du maximum semble peu précise : le maximum n'est pas clairement délimité pour les faibles valeurs de  $F$  ; il est bien délimité pour les fortes valeurs de  $F$  mais ne semble pas être le maximum global, celui-ci étant vraisemblablement trouvé pour des  $c$  plus importants que ceux considérés ici. Pour les valeurs de  $F$  comprises dans la zone de transition, la MAC présente un pic bien délimité et les valeurs optimales de  $(k,c)$  sont bien délimitées.





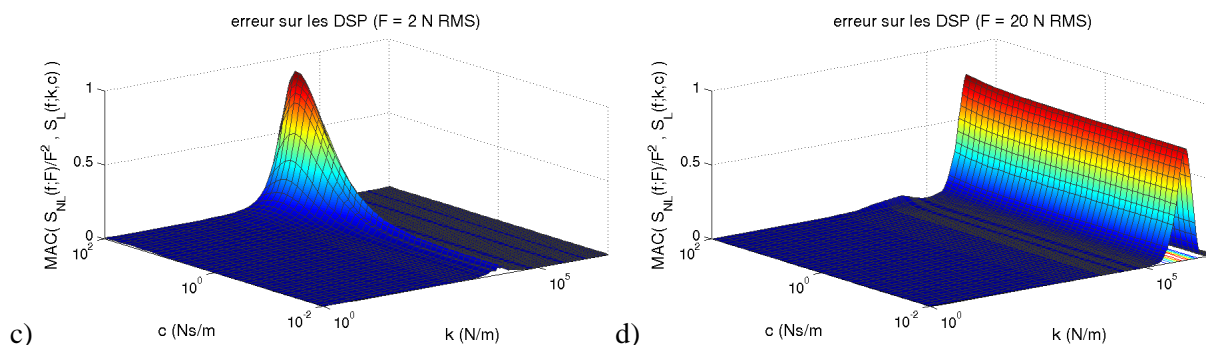


Figure 4.31. Coefficient de corrélation entre la DSP non-linéaire et la DSP à contact permanent. Ce MAC dépend de  $(k, c)$  et est paramétré par  $F$ .

Les DSP optimisées correspondant aux quatre fonctionnelles d'erreur ci-dessus sont tracées en Figure 4.32. On remarque que les niveaux sont cohérents entre signaux non-linéaires et signaux linéaires : normer par  $F$  est donc nécessaire. La concordance est très bonne pour de faibles ou de forts  $F$ , mis à part le pic à 60 Hz pour 20 N RMS. Pour les valeurs intermédiaires de  $F$ , le niveau de la DSP non-linéaire est réparti sur une large gamme de fréquences et l'optimisation ne porte pas uniquement sur le pic prépondérant mais aussi sur les autres pics, plus hauts en fréquence, de niveau plus faible mais moins étalés. La DSP est bien approchée en large bande sur 1-100 Hz. Les anti-résonances et le niveau général après 60 Hz ne concordent pas mais l'on pouvait s'y attendre : la réponse non-linéaire est clairement différente de celle d'un système linéaire. Les changements d'allure des DSP sont quand même bien reproduits par les DSP linéaires. On reproduit dans une certaine mesure l'étalement des pics.

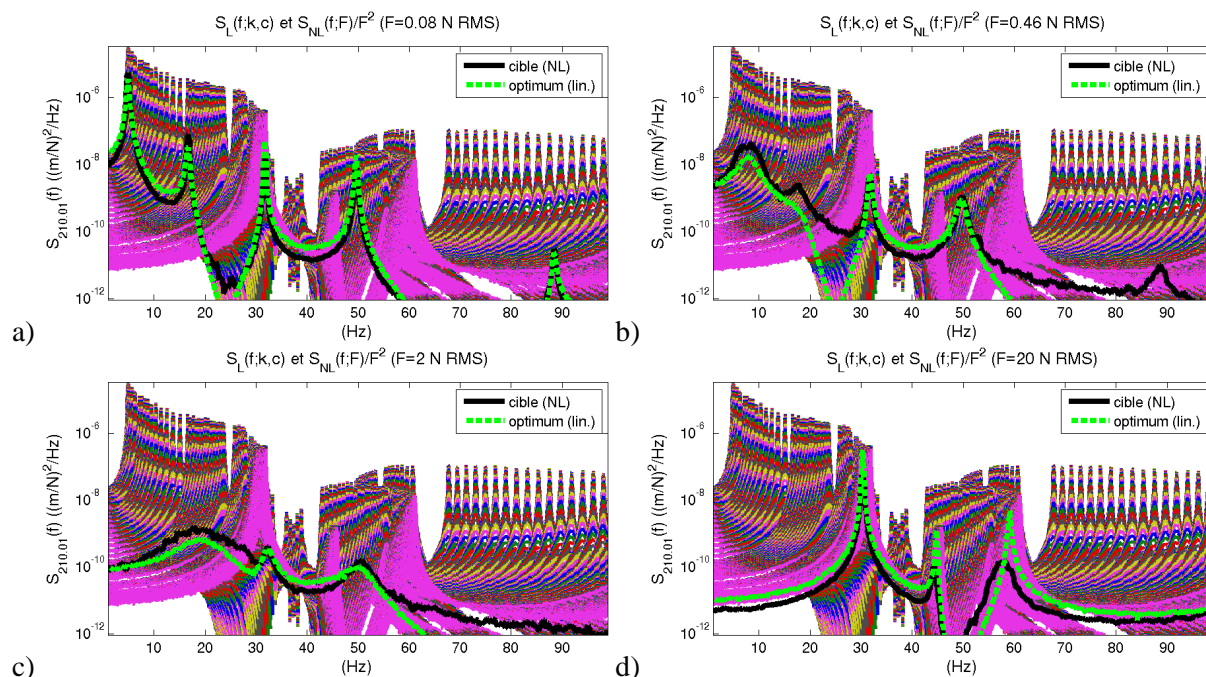


Figure 4.32. DSP non-linéaire (cible) et optimum linéaire trouvé (vert) pour quatre valeurs de  $F$ . On trace en fond toutes les DSP linéaires disponibles.

Les couples de raideur et amortissement dépendant de l'amplitude sont tracés sur la Figure 4.33.  $k$  et  $c$  sont constants tant que  $F$  est inférieur à 0,07 N RMS : le comportement libre initial est bien identifié comme constant. La raideur  $k$  n'est pas identifiée à la plus faible



valeur possible,  $c$  non plus.  $k$  augmente régulièrement jusqu'à  $10^6$  N/m ;  $c$  sature encore pour des valeurs élevées de  $F$ .

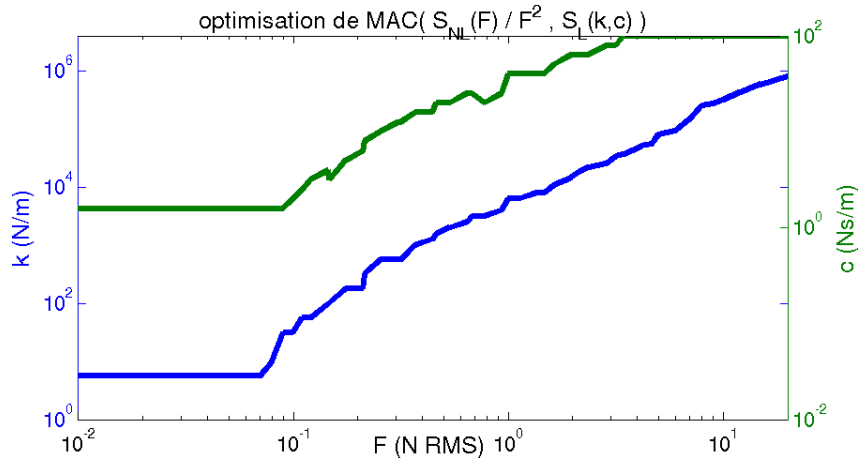


Figure 4.33. Raideur et amortissement linéaires de la zone de contact, obtenus à partir de la DSP non-linéaire.

#### 4.2.6. Système linéaire équivalent dépendant de l'amplitude

On a une transition du comportement non-linéaire en fonction du niveau RMS  $F$  de l'excitation. On a globalement croissance de la fréquence prépondérante, de la fréquence libre à une fréquence en contact permanent. La raideur finale est différente de  $4 \cdot 10^6$  N/m, raideur distribuée du modèle de contact. Les déformées suivent aussi cette évolution. L'énergie est spectralement répartie différemment. Lors de la transition, des pics n'émergent plus et la DSP a une forme de bosse. Cette grande largeur de bande peut être vue comme un fort amortissement. Elle est concomitante de la présence de plusieurs déformées significatives. Néanmoins, on va discuter cette hypothèse dans la partie suivante où on exprime la DSP non-linéaire comme somme de DSP linéaires.

On compare les raideurs  $k$  et amortissements  $c$  identifiés par les trois méthodes sur la Figure 4.34. Les profils de raideur sont très comparables. L'identification sur les DSP surestime légèrement la raideur pour de faibles  $F$ , mais 1 ou 10 N/m sont équivalentes. L'identification sur la bande passante détecte la transition légèrement plus tardivement. Passé 0,11 N/m, les évolutions de raideurs sont très comparables ; le pôle et la DSP donnent des raideurs  $k$  égales. Passé 3 N/m, l'identification par le pôle sature en raideur, tandis que les deux autres raideurs continuent à augmenter vers  $10^6$  N/m. Cette raideur finale est du même ordre de grandeur que la raideur de contact du modèle d'obstacle.

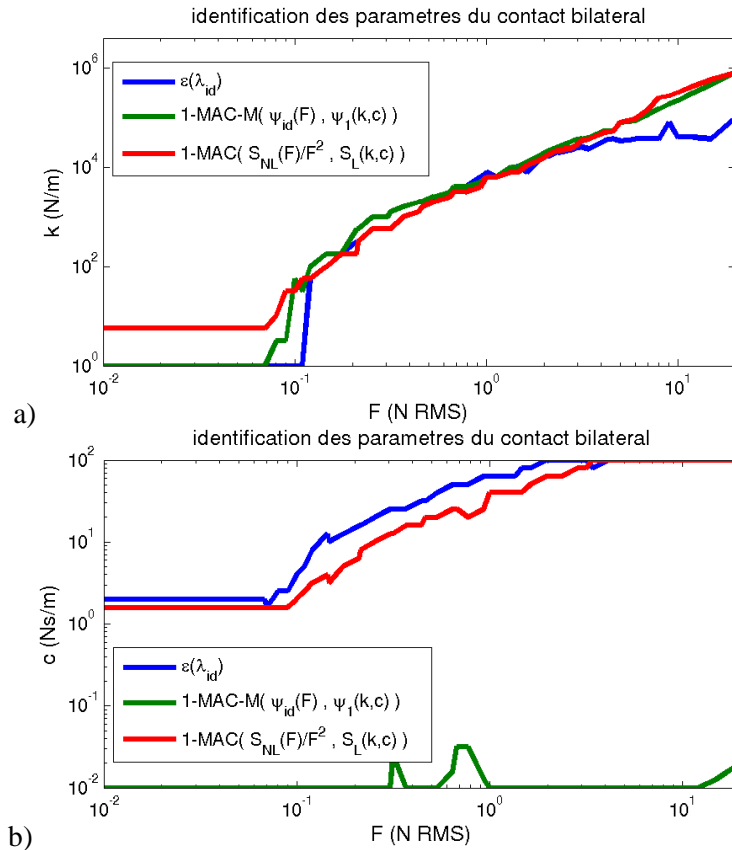


Figure 4.34. Raideur  $k$  (a) et amortissement  $c$  (b) de contact permanent identifiés en fonction de  $F$ .

L'identification du pôle et de la DSP donnent des amortissements assez comparables ; l'identification par le pôle donne des  $c$  plus élevés. En perspective, l'analyse du vecteur singulier à droite, lors de la recherche de l'ODS, permettrait d'obtenir des informations sur la largeur de bande, ce qui permettrait de mieux identifier  $c$ .

L'erreur sur les trois indicateurs n'est pas répartie de manière identique. Elle est tracée en Figure 4.35. L'identification sur le pôle donne une erreur homogène en fonction de  $F$ . L'identification sur la déformée donne une erreur très faible pour  $F$  faible ou fort mais élevée au cours de la transition. L'identification sur les DSP donne une erreur élevée et globalement croissante avec  $F$ . Si on cherche à ne retenir qu'une méthode d'identification, chaque méthode a ses inconvénients, que ce soit sur les profils de  $k$  et  $c$  ou l'erreur commise.

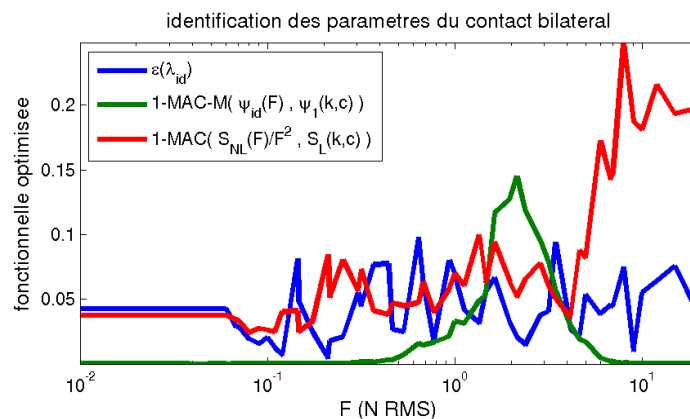


Figure 4.35. Erreur minimale commise lors de la recherche de  $(k,c)$  en fonction de  $F$  pour les trois identifications effectuées.

On a cherché le couple  $(k,c)$  optimisant une fonctionnelle en n'utilisant que les valeurs d'une grille arbitraire de paramètres. Vu les allures des fonctionnelles portant sur la proximité du pôle dans le plan complexe et le MAC des DSP, on aurait pu optimiser ces fonctionnelles avec un algorithme de descente, type BFGS ([Bon1]). En effet, les fonctionnelles sont régulières, localement convexes et convexes au niveau de leur extremum local, quitte à minimiser 1-MAC au lieu de maximiser MAC. La fonctionnelle portant sur le MAC-M entre ODS et déformée linéaire présente généralement deux paliers et n'est pas sensible à l'amortissement linéaire de contact : elle ne se prête pas à un algorithme de descente. L'utilisation de la fonctionnelle sur les DSP est sûrement à privilégier car elle ne nécessite d'autres hypothèses que le calcul de DSP de deux signaux temporels mais ce choix doit être mis en balance avec le coût numérique des trois méthodes. À chaque étape de l'optimisation, il faut calculer un problème modal complexe et trier les résultats pour obtenir le premier mode et la première déformée ou calculer une réponse linéaire.

Les identifications donnent des résultats cohérents pour trois identifications réalisées sur trois grandeurs différentes. L'une est locale en espace et ne porte que sur la largeur de bande, une seconde est locale mais à large bande, la DSP, et une troisième est globale mais à faible bande, la déformée en fonctionnement. La variation de la raideur de contact  $k$  est donc une caractéristique du comportement moyen à une amplitude donnée.

On peut se servir des méthodes développées ici pour caractériser le contact entre le tube et la plaque. On pense notamment au diagnostic du degré de colmatage. Connaissant la réponse à un bruit, on peut retrouver, par le biais de la DSP ou de la fréquence du pic prépondérant, une raideur de contact équivalente. Cette mesure pourrait être réalisée par la SVS (Sonde Vibrante Souple), outil de diagnostic dont le développement a récemment été repris en main à la R&D [Luz1]. Elle consiste en un actionneur, un moteur électrique à balourd, et deux accéléromètres bi-axiaux, reliés par une gaine plastique et insérés dans un tube GV [Ger2]. Idéalement, on excite sur le cintre les premiers modes du tube et on mesure les accélérations au-dessus et en-dessous de la PE8. Si on arrive à la modifier pour injecter un bruit blanc filtré, les méthodes développées ici pourraient s'appliquer et on pourrait avoir une raideur équivalente dépendant de l'amplitude. Reste donc à trouver une raideur équivalente au jeu, application immédiate de la méthode d'identification : il suffit de réaliser des calculs non-linéaires en faisant baisser le jeu. L'amplitude de l'excitation participera alors à la transition de comportement lors de la diminution du jeu. On pourra adopter un descriptif de la non-linéarité comme dans [Sam1], qui permettrait de faire varier indifféremment  $F$  et  $g$ , ou essayer de relier augmentation du colmatage à augmentation de la vitesse du fluide externe, donc augmentation de l'amplitude de l'excitation. Les simulations linéaires à contact permanent sont déjà effectuées.

### 4.3. Évaluation d'une description stochastique du comportement

Les méthodes de représentation stochastique, basées sur les travaux de Guhiot, Bouc et Bellizzi présentés en 2.1.5, sont parmi les plus aboutis sur l'analyse des systèmes à choc sous excitation large bande. Cette section cherche donc à utiliser les capacités de simulation non-linéaire mises en place dans cette thèse pour analyser la possibilité d'utiliser des représentations stochastiques. La première étape est une caractérisation de l'influence de l'amplitude. À partir de simulations non-linéaires, on propose d'estimer des densités de

probabilité de raideur apparente. Dans un premier temps, on présente en 4.3.1 la raideur sécante choisie pour décrire le comportement non-linéaire. On étudie ensuite l'évolution et la corrélation entre les différentes raideurs sécantes de chaque obstacle en 4.3.2. Ceci permet notamment de visualiser la répartition des efforts de contact sur l'épaisseur de la PE. En 4.3.3, on aborde enfin la construction des fonctions de répartition et des densités de probabilité. À partir des lois de probabilité, on peut tirer des jeux de valeurs de raideurs discrètes à affecter aux obstacles discrets. On calcule alors les DSP des différents systèmes linéaires considérés en section 4.3.4. L'évolution des DSP non-linéaires et stochastiques avec l'amplitude sont ensuite comparées en 4.3.5 avant de donner une conclusion partielle de l'étude.

### 4.3.1. Choix d'un descripteur de raideur

Il a plusieurs descripteurs pour une raideur *équivalente* lors d'un épisode de choc. On peut notamment choisir de se baser sur la raideur *maximale* ou la valeur *moyenne* vue au cours du temps. Pour chaque obstacle et chaque pas de temps, la raideur *sécante instantanée* est calculée comme le rapport entre la force de choc calculée et le déplacement radial de la fibre neutre. Elle vaut 0 si la force de choc est nulle. La raideur *instantanée* ne prend que deux valeurs, la relation effort-déplacement n'ayant que deux valeurs de dérivées. Cependant, il faut que l'indicateur retenu puisse tenir compte de la particularité de chacun des épisodes de contact, notamment de la durée variable des impacts. La Figure 4.36 montre quatre exemples de profils de force de choc. Ces profils sont très différents : une arche (a), deux arches (d), une rupture de pente (b), des rebonds (c et d). Ces profils de force de choc sont très semblables aux profils de raideur instantanée, le déplacement radial lors des phases de contact étant du même ordre de grandeur que le jeu (car la pénétration maximale est petite devant celui-ci). Le descripteur de raideur choisi doit donc prendre en compte ces comportements différents.

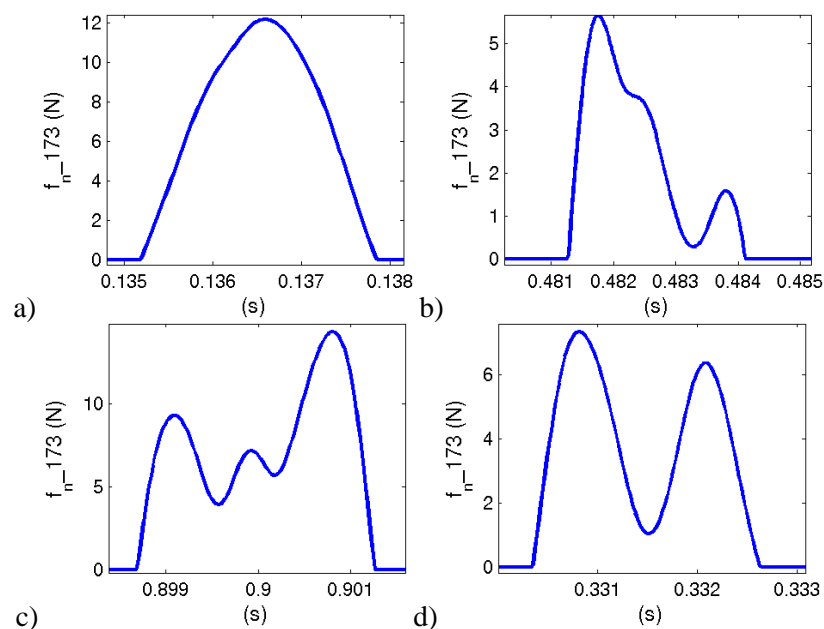


Figure 4.36. Force de choc observée au cours de 4 épisodes de choc.

Il semble difficile de choisir un descripteur permettant de prendre en compte les chocs dans leur totalité, avec des profils différents, en ne les réduisant pas à quelques descripteurs arbitraires et peu représentatifs, comme force de choc maximale, temps de choc, etc. On décide de garder le maximum d'information sur chaque profil en faisant des statistiques sur la

raideur sécante instantanée. On note dorénavant cette raideur  $k_a$ , en faisant référence à une raideur *apparente*. On va regarder la répartition des efforts de contact sur l'épaisseur de la PE et les éventuelles corrélations entre ces différents efforts au travers des dix raideurs apparentes. Les nœuds de contact sont identifiés en Figure 4.37. On aura alors accès à une information fine sur la localisation des efforts de contact.

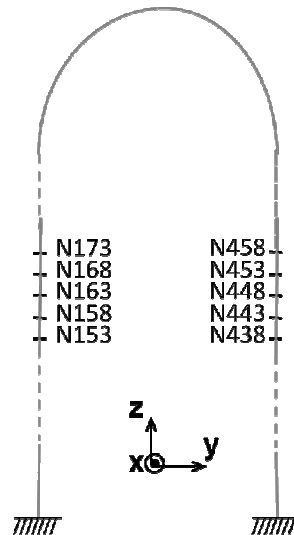
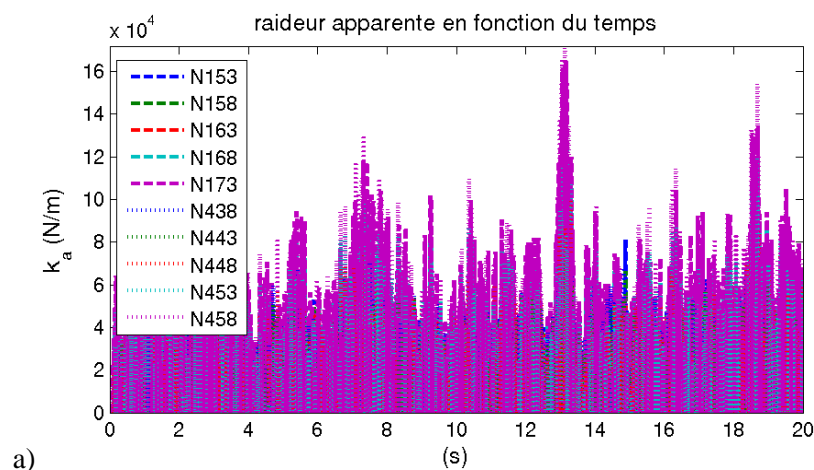


Figure 4.37. Nœuds de contact de la PE 8. Obstacles gauche et droite correspondent à  $y > 0$  et  $y < 0$ . Les échelles ne sont pas respectées.

Les évolutions de raideur apparente sont présentées ci-après en Figure 4.38. De prime abord, on voit que les raideurs apparentes des nœuds supérieurs (N173 et N458) sont supérieures aux raideurs calculées aux autres nœuds de choc. En zoomant sur quelques épisodes de choc, on retrouve deux scénarios de choc : attaque par l'obstacle supérieur ou attaque, plus rare, par l'obstacle inférieur. On note que les raideurs vues par la PE gauche et la PE droite semblent assez peu liées : sur les exemples présentés, il y a choc sur une PE et pas sur l'autre. La corrélation entre obstacle gauche et obstacle droite est abordée en 4.3.2. Pour chaque PE, les évolutions des raideurs au cours d'un épisode de choc ont souvent le même profil : le contact est réparti sur l'épaisseur de la PE et est rarement ponctuel. Bien que la base de réduction contienne des informations très locales, le comportement du tube au voisinage des obstacles n'est pas piloté uniquement par des modes locaux.



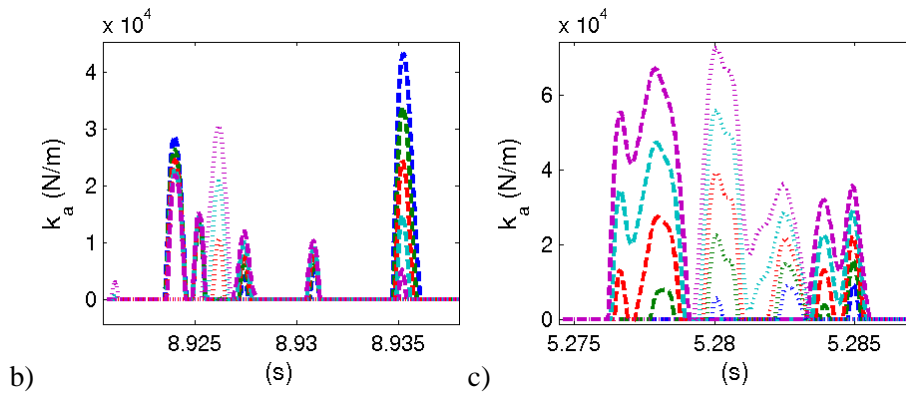


Figure 4.38. Vue globale et zooms sur les variations de raideur apparente en fonction du temps

### 4.3.2. Statistiques sur les raideurs apparentes

Dans cette sous-section, on s'intéresse aux moyennes et aux corrélations entre ces différentes raideurs. Les résultats présentés ici sont issus de post-traitements de simulations non-linéaires de 20 s, réalisées avec un pas de temps de  $2 \cdot 10^{-5}$  s. Le jeu est le jeu nominal. L'excitation est le bruit filtré de niveau RMS variable, appliqué sur le DDL 261.01 (milieu du cintre). Quatre niveaux ont été choisis afin de parcourir la zone de transition du comportement : 0,3 N RMS, 0,7 N RMS, 2,0 N RMS et 5,0 N RMS. Les systèmes linéaires extrêmes ne sont pas étudiés ici, le libre ne choquant évidemment pas.

La raideur apparente choisie est la raideur sécante instantanée, quotient de la force de choc et du déplacement radial, et donc la pente de la droite reliant un point de la relation effort-déplacement d'un nœud de choc à l'origine. À chaque instant, on décrit donc la relation effort-déplacement comme celle d'un système linéaire, dont la raideur changerait au cours du temps. On montre sur la Figure 4.39 un tel diagramme. Trois raideurs apparentes sont reportées : la raideur moyenne, la moyenne des raideurs strictement positives (correspondant uniquement aux phases de contact) et la raideur maximale. Il y a un ordre de grandeur entre chacune de ces trois grandeurs. Ces écarts dépendent de la répartition entre temps de vol et temps en contact et donc de l'amplitude.

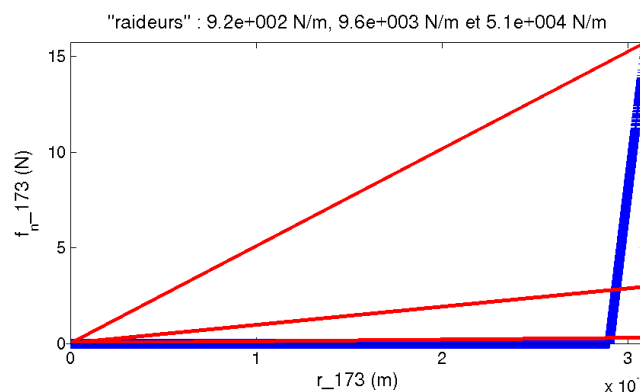


Figure 4.39. Relation effort-déplacement au nœud de choc 173. Les raideurs moyennes et maximales sont reportées en titre.

Les raideurs moyennes et maximales ont des profils similaires (Figure 4.40). Globalement, les raideurs sont maximales sur le haut de la PE et décroissent lorsqu'on se déplace sur l'épaisseur de la PE. Les raideurs sont minimales en bas de la PE, éventuellement sur l'avant-

dernier nœud de choc : les chocs sont plus « raides » en haut de la PE. Ceci s'expliquerait par l'excitation placée en apex, le cintre étant plus mobile que les jambes.

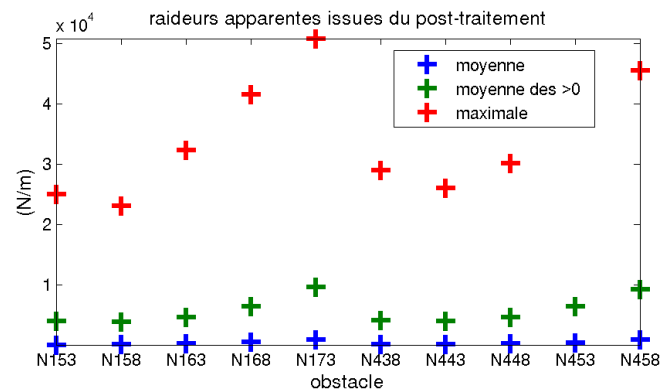


Figure 4.40. Raideurs moyennes et maximale pour les différents nœuds de choc. Le niveau de l'excitation est de 3 N RMS.

Intéressons-nous à la corrélation entre ces valeurs de raideurs. Pour cela, nous allons observer :

- La covariance :  $\text{cov}(X, Y) = E((X - \mu_X)(Y - \mu_Y))$ ,  $\mu_X$  désignant la moyenne de  $X$ . Elle a des valeurs élevées si  $X$  et  $Y$  sont au-dessus (ou en-dessous) de leurs moyennes respectives en même temps ; elle est proche de 0 si pour des valeurs de  $X$  supérieures à sa moyenne,  $Y$  est tantôt au-dessus, tantôt en-dessous de sa moyenne.
- Le coefficient de corrélation :  $\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$ ,  $\sigma$  désignant l'écart-type de  $X$ . Il norme la covariance. 1 et -1 indiquent une relation linéaire entre les deux variables. 0 indique l'absence de relation linéaire. Cependant, cela ne veut pas dire absence de corrélation :  $\rho(X, X^2) = 0$  pour une loi uniforme sur  $[-1; 1]$  !

Commençons par observer les covariances, *i.e.* la variation de distribution de raideur de contact en fonction de l'amplitude. On voit clairement en Figure 4.41 que les raideurs de contact d'une PE sont reliées très majoritairement aux autres raideurs de cette PE. Il y a aussi un lien entre les raideurs des nœuds supérieurs de chaque PE (N173 et N458). Les écarts-types des raideurs vues par les nœuds N173 et N458 sont très supérieurs aux autres écarts-types : les raideurs apparentes des obstacles supérieurs sont plus dispersées et prennent des valeurs plus élevées. Ceci est sûrement à relier au fait que les valeurs moyennes et maximales des raideurs des obstacles supérieurs sont supérieures aux autres (cf Figure 4.40). On remarque que plus l'amplitude est élevée (ici le niveau RMS de l'excitation), plus les écarts-type des raideurs apparentes sont élevés : plus on excite le tube avec un niveau élevé, plus il choque. On remarque aussi un couplage plus élevé entre les différents obstacles de la PE lorsque l'amplitude augmente. Ce couplage semble diminuer pour la plus forte amplitude, où le système se rapproche du système linéaire à contact permanent. La dissymétrie introduite par l'effort injecté sur le cintre ne se retrouve pas sur les covariances des raideurs : obstacles gauche et droit sont différents mais on ne peut conclure que l'un voit des raideurs plus élevées que l'autre.

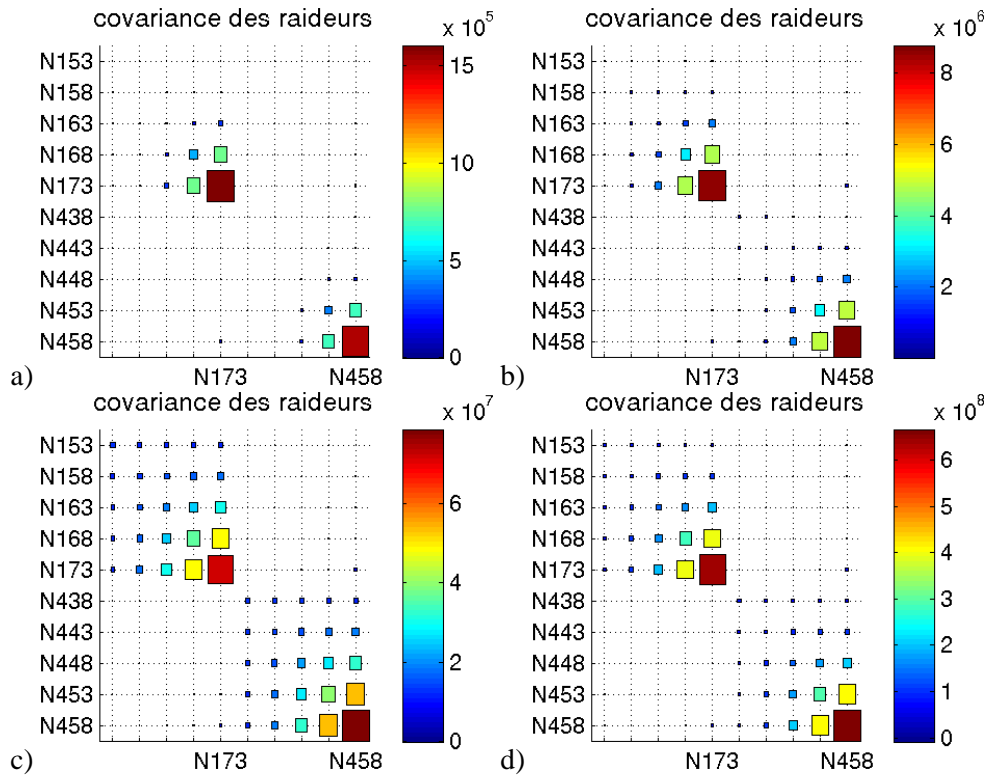


Figure 4.41. Matrice de covariance (en  $(N/mm)^2$ ) entre les dix raideurs de contact. Les RMS de l'excitation sont (a)  $0,3 N$ , (b)  $0,7 N$ , (c)  $2,0 N$  et (d)  $5,0 N$ .

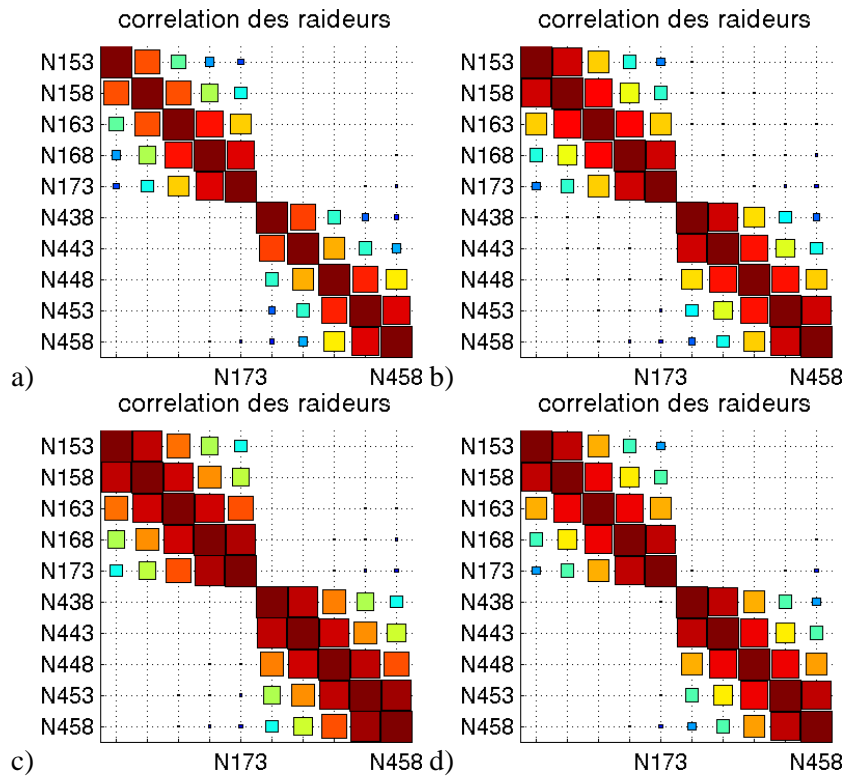


Figure 4.42. Matrice de corrélation entre les dix raideurs de contact. Les RMS de l'excitation sont (a)  $0,3 N$ , (b)  $0,7 N$ , (c)  $2,0 N$  et (d)  $5,0 N$ .



Observons maintenant les corrélations en Figure 4.42. On remarque que les différentes  $k_a$  sont très clairement non linéairement corrélées entre les deux PE. On voit que les raideurs des nœuds supérieurs de chaque PE sont très corrélées. Le constat est le même pour les deux nœuds inférieurs de chaque PE. Les nœuds milieux (N163 et N448) semblent plus indépendants des nœuds les entourant. La raideur vue par chaque obstacle est fortement corrélée à celle vue par les nœuds de choc l'entourant. Cette corrélation diminue avec la distance entre les nœuds de choc. Dans une certaine mesure, elle augmente quand le niveau RMS (donc les forces de choc) augmente. Les chocs seraient alors de plus en plus répartis sur l'épaisseur de la PE, plusieurs obstacles étant activés en même temps. Pour bien décrire la répartition des probabilités sur l'épaisseur de la PE en fonction du RMS, on sent que des moments statistiques d'ordre plus élevé sont nécessaires. Cela n'a pas été fait ici, le but étant d'appliquer grossièrement une méthode de linéarisation.

### 4.3.3. Densités de probabilité sur la raideur de contact

On estime les densités de probabilité, notées  $f$ , en comptant le nombre d'instants où la raideur est dans un certain intervalle. On divise par le nombre total d'instants. Il faut alors diviser par la longueur de l'intervalle, ce qui revient à supposer une distribution uniforme sur cet intervalle de valeurs. On construit alors la fonction de répartition, notée  $g$ , en réalisant l'intégration numérique de la densité de probabilité. On vérifie que la valeur limite de la fonction de répartition est 1 : la densité de probabilité est bien normée.

On présente ci-après en Figure 4.43 les densités de probabilité et les fonctions de répartition pour une excitation 5 N RMS. Les intervalles de raideur apparente ont été choisis pour avoir des fonctions de répartition lisses. On a alors choisi un découpage logarithmique pour prendre avoir suffisamment de faibles et fortes raideurs apparentes. Ce découpage a été raffiné pour permettre plus de détails sur les densités de probabilité. Les densités de probabilité sont chahutées pour de faibles valeurs de raideur apparente. Entre environ  $10^2$  et plus de  $10^4$  N/m, les densités de probabilité sont constantes. Les densités sont faibles pour de grandes valeurs de raideur, ce qui est logique : les chocs très importants sont assez peu nombreux. Le renseignement le plus important à tirer de la fonction de répartition est la grande probabilité que chaque raideur soit nulle : 0,75 pour l'obstacle supérieur à 0,92 pour l'obstacle inférieur. On pourrait penser que pendant 80% de son temps, le tube est en vol libre mais cette proportion est sans doute moindre, les deux PE étant quasiment indépendantes. Les fonctions de répartition respectent l'ordre des obstacles de chaque PE : à raideur égale, elles sont d'autant plus importantes que l'obstacle est élevé dans l'épaisseur de la PE. Les fonctions de répartition de chaque niveau d'obstacle sont légèrement différentes entre la PE droite (N4xx) et la PE gauche (N1xx) : la non-symétrie de l'effort injecté se retrouve sur les raideurs apparentes, qui sont plus élevées du côté de l'injection d'effort.

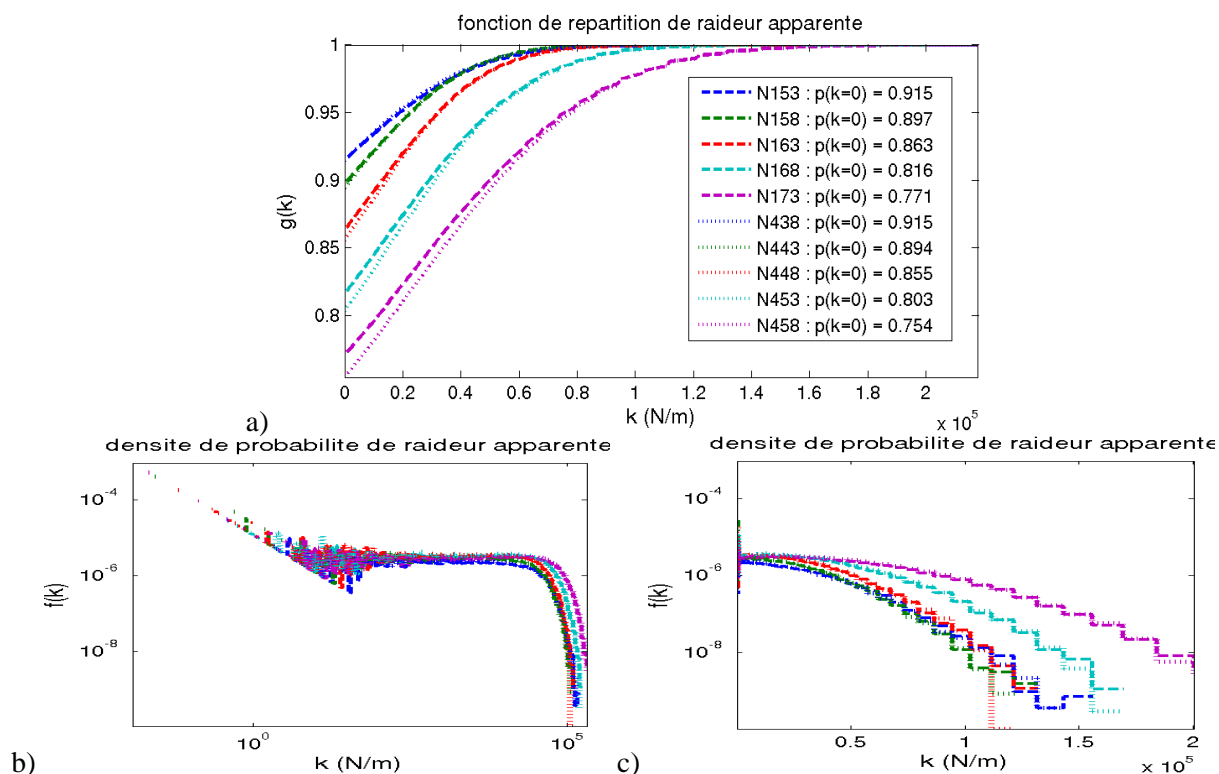


Figure 4.43. a) Fonction de répartition. b) et c) Densité de probabilité des raideurs apparentes. Excitation de 5 N RMS.

En observant l'évolution des fonctions de répartition, on voit bien qu'il y a de plus en plus d'épisodes de contact lorsque le niveau RMS augmente (Figure 4.44). La probabilité de raideur nulle diminue et la raideur maximale augmente. La dissymétrie est de plus en plus présente et est d'autant plus visible que l'obstacle est vers le haut de la PE. On conclut donc que le tube choque plus sur le haut de la PE que sur le bas de celle-ci.

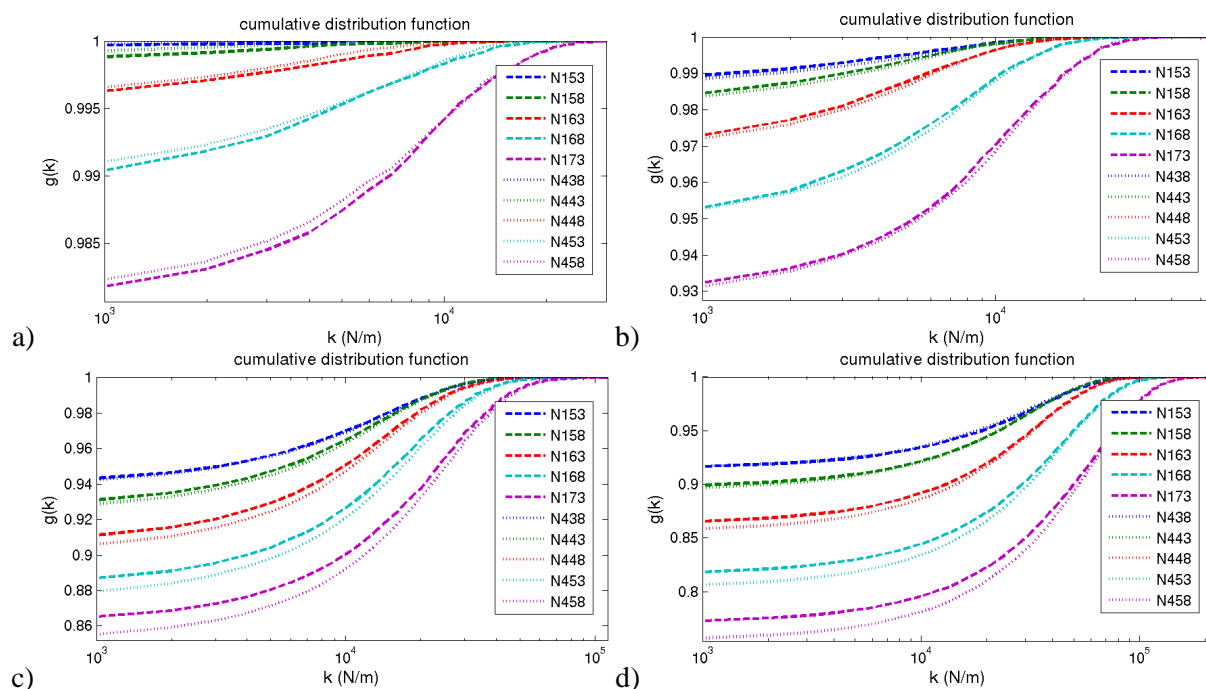


Figure 4.44. Fonctions de répartition des dix raideurs apparentes pour les quatre RMS considérés.

La diminution de la probabilité de raideur nulle avec l'augmentation de l'amplitude est à relier à la plus longue durée de chaque épisode de contact mais surtout au nombre plus important d'épisodes de contact par unité de temps.

#### 4.3.4. Construction d'une DSP équivalente

Pour tirer des valeurs de raideur dépendant de l'amplitude, le tirage d'une variable  $y$  suivant une loi uniforme sur  $[0 ; 1]$  suffit. En effet, son antécédent  $k=g^{-1}(y)$  par la fonction de répartition existe car la fonction de répartition est monotone et il suit effectivement la loi de probabilité  $f$  désirée. Ici, il est même unique car la fonction de répartition est strictement monotone. Ceci peut être montré en calculant l'espérance mathématique d'une fonction quelconque  $P$  dépendant de la variable aléatoire  $X$ , de loi de probabilité  $f(x)$ . Par définition, la fonction de répartition est telle que

$$g(x) = \int_{-\infty}^x f(s) ds. \quad (4.10)$$

Le changement de variables  $y=g(x)$  dans le calcul de l'espérance mathématique de  $P$  donne

$$E[P] = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) f(x) dx = \int_0^1 P(g^{-1}(y)) dy, \quad (4.11)$$

ce qui justifie la méthode.

Une explication graphique du tirage est présentée en Figure 4.45. À une valeur de  $y$ , correspond dix valeurs de  $k=g^{-1}(k)$ , une par obstacle. La configuration libre est exclue si rencontrée lors d'un tirage ; au moins une raideur  $k_a$  sur les dix du système est donc non nulle. Le cas  $y=1$  est aussi exclu. Ces deux hypothèses sont posées dans 2.1.5. Chacun des systèmes linéaires tirés est strictement compris entre les deux systèmes linéaires limites : le libre et le contact permanent.

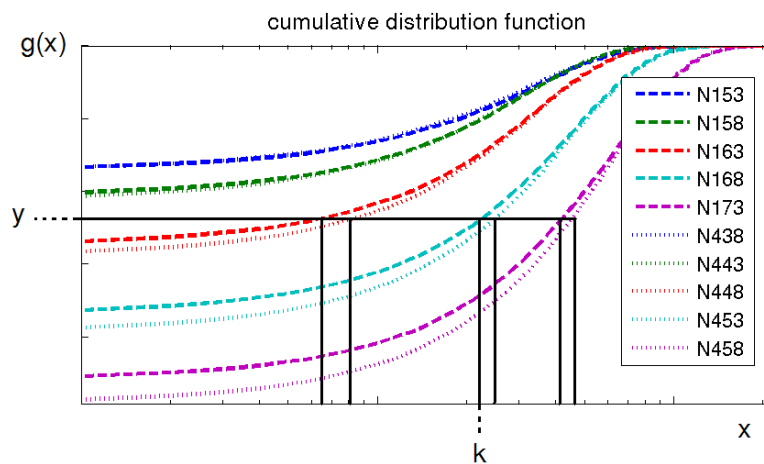


Figure 4.45. Tirage de raideur  $k$  par recherche d'antécédent de la fonction de répartition.

Dans la partie précédente, on a vu qu'il n'y avait globalement pas de relation linéaire entre les raideurs vues par la PE droite et celles vues par la PE gauche. Nous faisons donc l'hypothèse que ces raideurs sont indépendantes. On ne peut affirmer la validité de cette hypothèse : mathématiquement, la covariance entre deux variables indépendantes est nulle mais il n'y a aucun résultat sur la réciproque.

La raideur d'un obstacle est très fortement corrélée à celle des raideurs des obstacles l'entourant. Cette corrélation diminue pour les obstacles plus éloignés. En supposant les raideurs suivant une loi gaussienne, on aurait pu tirer des raideurs à partir de la seule information de la moyenne et de la covariance. Vu les densités de probabilités et le fait que la raideur est positive, les raideurs ne peuvent suivre une loi gaussienne. Pour introduire une certaine dépendance entre les différents obstacles, nous jouons sur les tirages de  $y$ , en adoptant trois stratégies :

- Tirage d'un seul  $y$ , applicable à tous les obstacles ;
- Tirage de deux  $y$ , un pour les cinq obstacles droite et un pour les cinq obstacles gauche ;
- Tirage de dix  $y$ , un par obstacle, ce qui revient à les considérer comme indépendants.

On utilisera ces trois stratégies au 4.3.5 lorsque l'on présentera l'évolution de la DSP équivalente en fonction de l'amplitude. Elles permettent de suivre une amplitude croissante et donc une raideur de contact croissante.

Les DSP équivalentes sont alors estimées numériquement comme l'espérance des différentes DSP linéaires calculées

$$S_{eq}(\omega) = \int_0^{+\infty} S_{lin}(w; k).f(k).dk = \int_0^1 S_{lin}(w; g^{-1}(y)).dy \approx \frac{1}{N_{tir}} \sum_{n=1}^{N_{tir}} S_{lin}(w; g^{-1}(y_n)), \quad (4.12)$$

où chaque DSP linéaire est normée à la même valeur RMS que la DSP non-linéaire. Ce traitement a été adopté pour remplacer la matrice  $B(a)$ , introduite au 2.1.5, assurant la même énergie mécanique entre le système non-linéaire et le système linéaire.

Reste à estimer le nombre de tirages à réaliser pour faire converger l'estimateur d'espérance mathématique. On trace en Figure 4.46 les DSP équivalentes (pour 5 N RMS) pour quatre valeurs de  $N_{tir}$ . Pour de faibles valeurs, ici 20 ou 100, on observe bien un effet peigne comme rappelé en 2.1.5 d'après les travaux de P. Guihot. Les DSP sont alors très chahutées. 1 000 tirages permettent une bonne convergence de la DSP. On retient cette valeur, qui permet bien de représenter des pics très aplatis comme moyenne de pics acérés.

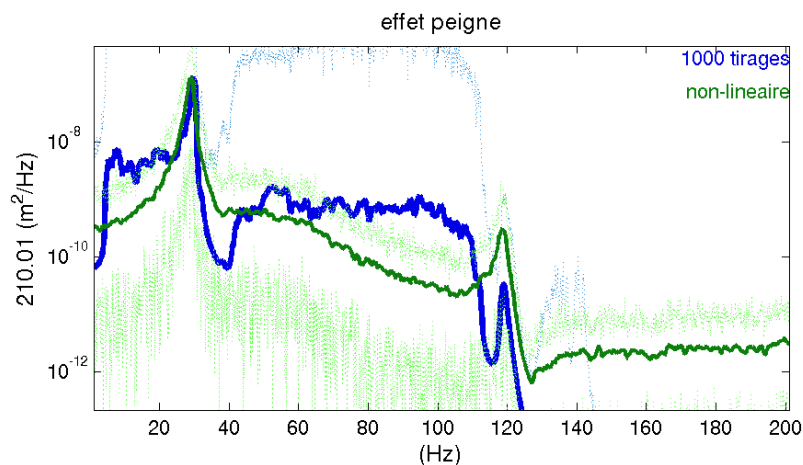


Figure 4.46. DSP équivalente en fonction du nombre de tirages.

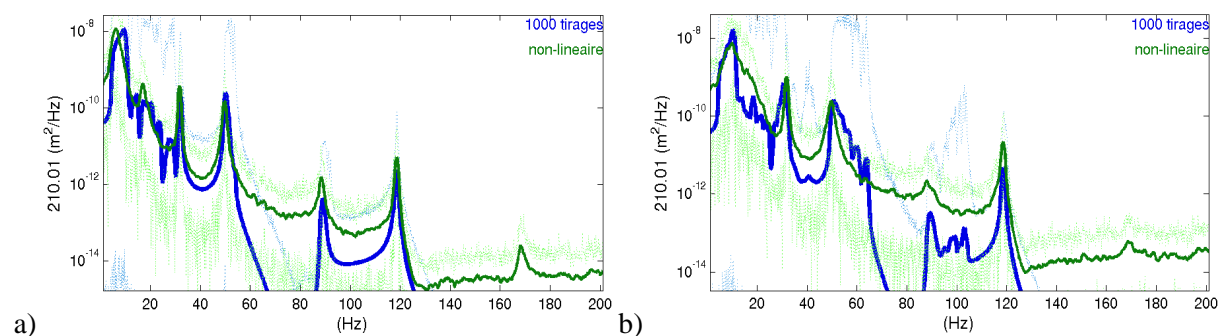
L'implémentation assez sommaire d'un processus de construction de DSP équivalentes est encourageante : malgré de nombreuses hypothèses, on retrouve l'allure d'un DSP notablement différente de celle d'un système linéaire. La comparaison non linéaire / équivalent est effectuée ci-après.

#### 4.3.5. DSP équivalente dépendant de l'amplitude

Les DSP non-linéaires et moyennes de DSP linéaires à comparer sont issues de simulations portant sur 100 s, effectuées avec un pas de temps de  $2 \cdot 10^{-5}$  s dans le cas non-linéaire et de  $10^{-3}$  s dans le cas linéaire.  $10^{-3}$  s suffisent car on regarde sur 0 – 200 Hz et l'excitation chute très notablement après 100 Hz. On observe le déplacement hors-plan du nœud N210, situé au milieu du cintre et distant des nœuds de choc et de l'excitation. Les DSP sont de nouveau estimées avec une fenêtre de Hann, de longueur 10 s avec un recouvrement de 66 %.

Pour chacune des quatre amplitudes, on a choisi parmi les trois stratégies de tir de  $y$ , celle donnant la meilleure concordance avec la DSP non-linéaire. Les quatre comparaisons de DSP non-linéaires et équivalentes sont effectuées en Figure 4.47. Seul le cas 0,3 N RMS présente une bonne corrélation entre les deux méthodes. Les amplitudes et largeurs des pics sont bien représentées. Cependant, le niveau entre les pics, particulièrement entre 60 et 85 Hz et au-delà de 125 Hz est très sous-estimé sur la DSP équivalente. La distribution d'énergie est donc mal représentée. La DSP équivalente est de plus en plus éloignée de la DSP non-linéaire à mesure que l'amplitude augmente. Les fréquences et les amplitudes sont assez bien représentées pour 0,7 N RMS au contraire de la largeur des pics. Le niveau après 60 Hz, même pour le pic à 120 Hz est sous-estimé sur la DSP équivalente. Le pic très étalé entre 0 et 35 Hz pour 2 N RMS est modélisé par un autre pic très étalé mais dont l'amplitude et la fréquence centrale sont différentes. Le niveau après 40 Hz est surestimé puis sous-estimé après 100 Hz. Fréquence, amplitude et largeur du pic prépondérant à 30 Hz sont bien représentés pour l'amplitude 5 N RMS. Quant au niveau général, les mêmes remarques que pour l'amplitude 2 N RMS s'appliquent. La procédure implémentée de calcul de DSP équivalente permet donc de plus ou moins bien représenter la transition du pic prépondérant.

Pour les quatre amplitudes, le niveau de la DSP équivalente chute brutalement après 100 Hz, alors que le niveau de la DSP non-linéaire reste plus constant. Cette chute est d'autant plus visible après le pic vers 120 Hz. Cela s'explique par le processus de construction de la DSP équivalente, valide en cas d'excitation par un bruit blanc. Notre excitation étant filtrée, l'excitation chute après 100 Hz donc les réponses des systèmes linéaires chutent aussi. Ceci constitue une preuve que les chocs répartissent bien l'énergie sur une large gamme de fréquences : l'énergie injectée sur la bande de fréquence 0 – 100 Hz y reste pour le cas équivalent, car somme de linéaires, et est dispersée pour le cas non-linéaire.



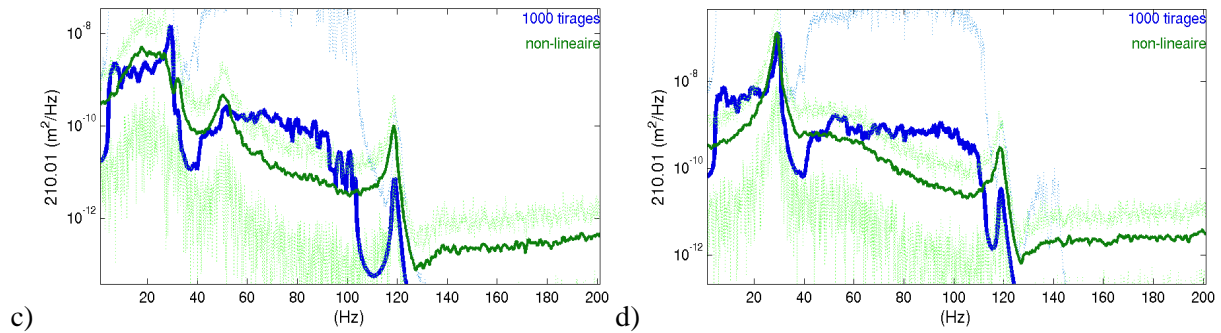


Figure 4.47. Comparaison de DSP non-linéaire et de DSP équivalente. Les amplitudes sont respectivement 0,3 N RMS (a), 0,7 N RMS (b), 2 N RMS (c), 5 N RMS (d). Les nombres de  $y$  indépendants sont respectivement 10 (a), 2 (b), 1 (c) et 1 (d).

Les stratégies de tir de  $y$  donnant les meilleurs résultats sont :

- Dix  $y$  indépendants pour 0,3 N RMS ;
- Deux  $y$  indépendants pour 0,7 N RMS ;
- Un  $y$  pour 2 N RMS et 5 N RMS.

Cet ordre est conforme à une amplitude croissante et donc à une raideur de contact globale de plus en plus élevée. Si on a un tirage retenu de  $y$ , vecteur de dix raideurs, il a au moins une raideur non nulle. Mais au vu de la probabilité élevée que chacune des raideurs soit nulle, la probabilité qu'une autre raideur non nulle soit présente dans ce tirage est faible. Tirer dix raideurs permet donc d'obtenir des raideurs globales (intégrées sur la PE) faibles et donc de retrouver le cas quasi-libre de 0,3 N RMS. Tirer deux raideurs indépendantes (une pour les obstacles droite, l'autre pour les obstacles gauche) implique des raideurs plus élevées. En effet, au moins un des obstacles supérieurs (N173 ou N458) a une raideur non nulle et plus  $y$  est élevé, plus d'obstacles sous cet obstacle activé sont aussi affectés de raideur non nulle. La raideur globale augmente donc. Les deux valeurs de  $y$  étant indépendantes, il y a environ 7 % de chances que les deux côtés de la PE soient activés en même temps (cf Figure 4.44). La probabilité d'avoir une raideur élevée est donc plus grande que pour le tirage indépendant d'une raideur par obstacle. En ne tirant qu'un antécédent  $y$  pour les dix obstacles, on augmente encore la raideur globale puisqu'en général les deux obstacles supérieurs seront activés, leurs fonctions de répartition étant très proches. En comparant les amplitudes 2 N RMS et 5 N RMS sur les fonctions de répartition de la Figure 4.44, on se rend compte que le cas 5 N RMS donnera des raideurs plus élevées.  $y=0,86$  conduit à la seule raideur du nœud N458 à environ  $2 \cdot 10^3$  N/m pour 2 N RMS, tandis qu'il conduit à au moins quatre obstacles activés avec des raideurs supérieures à  $2 \cdot 10^4$  N/m pour le cas 5 N RMS.

#### 4.3.6. Conclusion

On a choisi de baser nos calculs de DSP linéaires sur la valeur de raideur apparente vue par chaque obstacle. À chaque instant, cette raideur est définie comme le rapport entre la force de choc et le déplacement radial du nœud de choc. Elle permet de regrouper toutes les informations sur la dynamique propre de chaque épisode de contact. Les corrélations entre les raideurs vues par les différents obstacles montrent qu'il y a un lien fort entre les raideurs de chaque PE, d'autant plus que les nœuds de choc sont proches. Par contre, les corrélations entre les raideurs des deux PE sont nulles. La probabilité que la raideur apparente de chaque

obstacle soit nulle est élevée mais diminue avec l'amplitude : il y a alors plus de chocs par unité de temps. On peut aussi reconstruire les fonctions de répartition de chaque obstacle. On observe une dissymétrie gauche – droite.

Moyennant différentes hypothèses, on peut reconstruire une DSP équivalente comme somme de DSP linéaires. Le tirage des raideurs affectées à chacun des systèmes linéaires est l'étape nécessitant le plus d'hypothèses simplificatrices. Elle devra être traitée avec plus de justesse et de précision si la recherche de DSP équivalente devait être améliorée. Les DSP équivalentes obtenues permettent de suivre grossièrement la transition du pic prépondérant. La concordance est moins bonne quand ce pic est très étalé et aplati. Les niveaux en-dehors de ce pic sont d'autant plus mauvais que l'amplitude est élevée. Pour obtenir des DSP de systèmes non-linéaires, la simulation temporelle non-linéaire est donc à préconiser, d'autant plus qu'elle est plus rapide (environ un rapport 2 si on considère 1000 tirages).

Néanmoins, on retient de la recherche de DSP équivalente que l'on peut obtenir des pics très étalés sans ajouter de forts amortissements. Sommer différents pics acérés permet d'obtenir un pic aplati. Cela remet donc en cause la pertinence de la recherche d'un système linéaire équivalent dépendant de l'amplitude, effectuée en 4.1.2. Ceci avait abouti à une raideur moyenne et à un très fort amortissement modal équivalent. La recherche de DSP équivalente montre que la DSP non-linéaire peut être considérée comme l'espérance mathématique d'un système linéaire dont la raideur est un processus aléatoire. Mais plus l'amplitude est élevée, plus la densité de probabilité de la raideur de contact est étalée et moins cela a de sens de chercher un système linéaire équivalent. On ne peut aborder l'étude du tube GV à chocs que sous l'optique d'un système à raideur non constante. Soit par l'intégration temporelle d'un système à raideur variable dans le temps, soit comme espérance mathématique d'un système linéaire dont la raideur est une variable aléatoire. En plus des hypothèses simplificatrices rappelées ci-dessus, on est donc aussi confronté à l'ergodicité du système mécanique. On effectue des moyennes *temporelles* de la raideur de contact pour trouver la DSP non-linéaire tandis qu'on effectue des moyennes *statistiques* de la raideur de contact pour trouver la DSP équivalente. On ne peut conclure quant à l'ergodicité du système, DSP non-linéaire et DSP équivalente étant différente, mais on rappelle que cette hypothèse semble justifiée par la convergence des DSP non-linéaires lorsque le nombre de fenêtres utilisées augmente.

# Chapitre 5. Effet stabilisateur du contact

Dans le Chapitre 4, on a vu que selon l'indicateur que l'on cherche à satisfaire, on peut voir sous les transitions de DSP un amortissement apparent  $c$  augmentant avec l'amplitude  $F$ . Dans ce chapitre, on s'intéresse à la manière selon laquelle la non-linéarité de contact pourrait stabiliser un tube instable. On ne prend en compte aucun effet fluide. L'instabilité à amortissement négatif est approchée mécaniquement : en injectant un effort colocalisé proportionnel à la vitesse du point, on injecte à tout instant de l'énergie dans le système. Ceci revient formellement à ajouter un amortissement visqueux négatif. Cette déstabilisation va être traitée sous trois aspects. Deux paramètres définissent cette déstabilisation : l'altitude  $z_A$  de la tige du pot et le gain  $a$  liant vitesse mesurée et force injectée.

Dans un premier temps, en section 5.1, on regarde le problème modal à amortissement ajouté et contact permanent. Comme vu en section 4.2, le contact permanent permet de suivre la transition de comportement en fonction de l'amplitude. En fonction des paramètres  $(z_A, a, k)$  on étudie la stabilité de différentes configurations d'instabilité. On obtient une carte donnant le gain maximal permettant la stabilité en fonction de l'altitude de la déstabilisation.

Dans un second temps, en section 5.2, on étudie numériquement la stabilité des simulations numériques non-linéaires. Cette fois, seuls les paramètres de la déstabilisation sont variables ; les paramètres de la zone de contact sont ceux du modèle numérique recalé. L'instabilité est définie comme le dépassement d'une force de contact. On peut de nouveau cartographier le gain maximal en fonction de l'altitude de la déstabilisation. Les gains maximaux dépendent fortement du critère d'arrêt choisi et dans une moindre mesure de l'excitation extérieure. En perspective, on pourrait étudier plus finement le départ en instabilité pour essayer de relier le gain maximal obtenu à celui issu de la résolution du problème modal en section 5.1.

Finalement, on étudie expérimentalement en section 5.3 la stabilité des simulations non-linéaires. Une boucle de rétroaction, inspirée des travaux de thèse de S. Caillaud ([Cai1]), permet d'injecter un effort dépendant d'une vitesse mesurée. Des limitations techniques, tel le transfert entre l'alimentation du pot et l'effort injecté perturbé par le couplage pot-structure, empêche la proportionnalité de cette relation et donc toute tentative de corrélation calcul-essai. On observe des comportements de croissance exponentielle des déplacements mesurés puis plusieurs régimes permanents, de niveau RMS fini. On a donc la preuve expérimentale que la seule non-linéarité de contact peut stabiliser la dynamique du tube.



Dans un dernier temps, en section 5.4, on présente le couplage fluide-structure dans le cadre de l'interaction entre des tubes et un écoulement transverse. Cette section permet d'insérer le sujet de la thèse dans une perspective industrielle. Ce couplage est initialement exprimé en fréquentiel, par le biais d'un opérateur dépendant de la fréquence et de la vitesse d'écoulement, modifie les termes de raideur et d'amortissement. Le pôle est alors solution d'une équation non-linéaire et s'obtient par un algorithme de descente. Une vitesse d'écoulement  $U$  est dite instable si elle implique un amortissement négatif. Ensuite, on présente, d'après la littérature, comment le couplage est exprimé en temporel. La prise en compte de modèles fluides est une perspective intéressante de poursuite des travaux présentés ici.

## 5.1. Analyse de stabilité en contact bilatéral à raideur variable

La stabilisation sur le système à contact permanent a été étudiée en fonction de trois paramètres indépendants : l'altitude où on situe la contre-réaction à la vitesse, le gain de la contre-réaction et la raideur de contact bilatéral. On a ainsi accès aux configurations stables.

Dans une première partie, en 5.1.1, on expose succinctement la méthodologie. En 5.1.2, on présente plus en détail les cartes de stabilité. Le gain maximal en fonction de l'amplitude est tracé en 5.1.3. Quelques fréquences propres et amortissements sont reportés en 5.1.4

Une petite précision lexicale pour les calculs d'instabilité s'impose. Comme ces calculs sont induits par la présence d'une contre-réaction colocalisée sur la vitesse, j'omettrai souvent de le préciser. Je distinguerai alors les trois types de configuration suivants :

- *libre*, le tube n'étant affecté d'aucune raideur bilatérale sur les nœuds de choc ;
- à *raideur bilatérale* ou à *contact permanent*, le tube étant affecté d'une raideur bilatérale quelconque sur les nœuds de contact ;
- à *raideur bilatérale annulée* désigne le type de calcul suivant : après avoir recherché le gain maximal sur le tube à raideur bilatérale de  $4 \cdot 10^6$  N/m, on regarde la stabilité du tube libre affecté de ce gain.

### 5.1.1. Méthodologie employée

On part de l'équation de la dynamique où on écrit que l'effort extérieur est une contre-réaction colocalisée à la vitesse d'un point. Sur base réduite, cela s'écrit

$$M_R \ddot{q}_R + C_R \dot{q}_R + K_R q_R = [T]^T [c_A]^T a [c_A] [T] \dot{q}_R \quad (5.1)$$

où on reconnaît les coordonnées généralisées  $q_R$ , la base de projection  $[T]$  et les matrices réduites de masse, amortissement (de type modal) et de raideur.  $[c_A]$  est la matrice d'observation d'un DDL physique ; elle dépend du point, d'altitude  $z_A$ , où on souhaite déstabiliser le tube et de la direction. Comme, le plus souvent, on déstabilise selon la direction hors-plan et sur la même jambe, on note abusivement  $z_A$  le DDL déstabilisé.  $[c_A]$  est alors une ligne de 0 avec un 1 correspondant au DDL observé.  $a$  est le gain scalaire de la boucle de contre-réaction. On peut introduire la matrice d'amortissement associée à la déstabilisation  $C_A = [c_A]^T [c_A]$  et la matrice réduite d'amortissement associé à la déstabilisation

$C_{A,R}=[T]^T C_A [T]=[T]^T [c_A]^T [c_A] [T]$ . On remarque que la puissance instantanée de l'effort déstabilisateur est bien positive et donc qu'on injecte de l'énergie à tout instant. En effet,

$$P_{coloc} = \{\dot{q}_R\}^T . a C_{A,R} . \{\dot{q}_R\} = a \{c_A T \dot{q}_R\}^T \{c_A T \dot{q}_R\} \geq 0 \quad (5.2)$$

Deux paramètres sont réglables pour déstabiliser le tube :

- La position  $z_A$  d'injection de l'effort colocalisé à la vitesse ;
- Le gain  $a$  définissant l'*amortissement négatif* apporté par la rétroaction.

Les efforts de contact sont dus à une raideur bilatérale  $k_{cont,dis} K_{CB,R}$  où  $K_{CB,R}$  est la matrice réduite de raideur ajoutée par une condition de contact bilatérale de raideur unitaire sur les DDL  $DX$  et  $DY$  pour les cinq nœuds par PE affectés de condition de contact. On associe à la densité de raideur de contact  $k_{cont,dis}$ , que l'on notera désormais  $k$  par souci de légèreté, une raideur de contact globale de l'obstacle  $k_{cont}$  en multipliant  $k$  par l'épaisseur de la PE ou par le nombre de niveaux d'obstacles discrets. C'est cette raideur de contact globale  $k_{cont}$  qui est présentée dans les figures.

Au final, nous devons trouver les modes complexes  $(\lambda, \psi)$  du système suivant, dépendant de 3 paramètres  $(z_A, a, k)$

$$\left[ \lambda^2 M_R + \lambda (C_R - a C_{A,R}(z_A)) + (K_R + k K_{CB,R}) \right] \{\psi\} = \{0\} \quad (5.3)$$

Si, pour un triplet de paramètres, un des pôles  $\lambda$  a une partie réelle strictement négative alors cette configuration (ce triplet) est désignée comme instable. Les pôles  $\lambda$  sont décomposés suivant une fréquence  $\omega/2\pi$  et un amortissement  $\zeta$

$$\lambda = \omega \left( -\zeta + i \sqrt{1 - \zeta^2} \right) \quad (5.4)$$

qui sont celles fournies par le solveur modal. Dans tous les cas, quatorze modes ont été calculés ; pour le tube libre, cela correspond aux treize modes de fréquence inférieure à 200 Hz, plus le suivant. L'origine des altitudes correspond à la limite partie droite - cintre : le pied du tube est à -1,59 m et le bas de la PE à -0.115 m. L'amortissement modal est de 0,2 % pour les modes de fréquence inférieure à 7 500 Hz (les modes libres retenus) et de  $5 \cdot 10^{-6}$  pour les autres (hautes-fréquences). Les trois amortissements modaux identifiés expérimentalement sont retenus : 1 % pour les modes 1 et 2 et 0,4 % pour le mode 3.

### 5.1.2. Cartes de stabilité

Pour réaliser les cartes de stabilité on fait varier les trois paramètres de la manière suivante :

- $z_A$  entre -1,44 m et -0,22 m, avec un pas de 5 cm ;
- $a$  entre 0 et 25, avec un pas de 1 ;
- $k$ , en N/m<sup>2</sup>, suit une répartition selon une échelle logarithmique et correspondant à des raideurs globales  $k_{cont}$  de 10 points entre 10 et  $10^3$  N/m, 21 points entre  $10^5$  N/m et

$10^7$  N/m, plus 0 et  $4 \cdot 10^6$  N/m ;

Dans un premier temps, observons la carte brute (Figure 5.1). On peut en tirer quelques enseignements. Une large plage de l'espace des trois paramètres ne permet aucune stabilité, tout au moins pour la plage de raideurs considérée. Toutes les configurations avec  $a=0$  sont stables, comme prévu. Il est difficile de déstabiliser le tube si la contre-réaction est proche des encastrements ( $z_A$  très négatif).

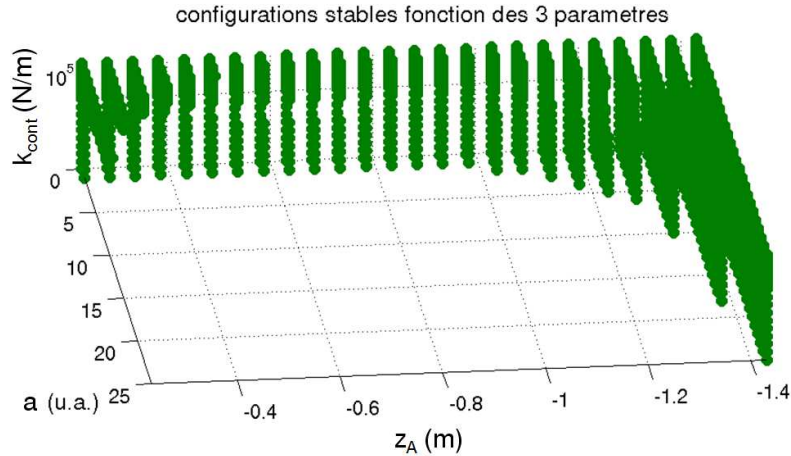


Figure 5.1. Carte de stabilité du tube avec contre-réaction à la vitesse et raideur bilatérale.

On peut comparer les zones de stabilité pour les deux valeurs extrêmes de raideur 0 N/m et  $4 \cdot 10^6$  N/m, tube libre et tube à contact permanent (Figure 5.2). Le tube affecté d'une raideur bilatérale est d'autant plus stable (au sens où il faut un coefficient  $a$  plus élevé pour avoir un amortissement modal négatif) que la contre-réaction est colocalisée près de l'encastrement ou près des PE. Ceci est dû à la faible valeur des déformées modales près de l'encastrement, ce qui pilote la destabilisation étant le produit du gain par l'observabilité modale. Pour les configurations avec colocalisation près de l'encastrement, initialement stables, ajouter une raideur bilatérale limite la zone de stabilité. On rajoute une contrainte sur le déplacement au niveau de la PE : les déformées modales hors-plan sont donc plus *bombées* entre la PE et l'encastrement et l'observabilité modale augmente. Par contre, près des PE, ajouter une raideur bilatérale permet bien d'agrandir la zone de stabilité.

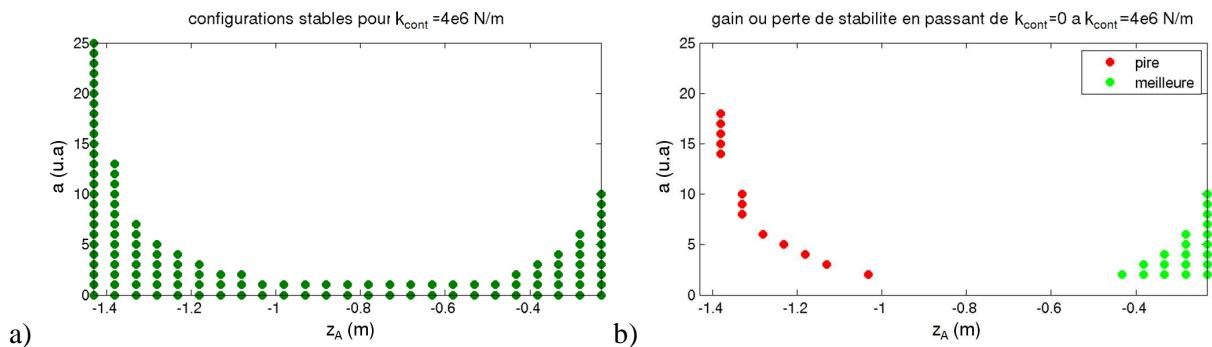


Figure 5.2. Cartes de stabilité pour le tube libre et le tube avec raideur bilatérale.

### 5.1.3. Gain maximal en fonction de l'altitude

Regardons maintenant le gain maximal permettant la stabilité du tube avec contre-réaction à la vitesse et raideur bilatérale. Ce gain maximal a été trouvé en utilisant une discrétisation beaucoup plus fine de  $a$ . La tendance observée sur les cartes de stabilité plus grossières est bien retrouvée sur la Figure 5.3. Un gain inférieur à 1 entraîne toujours la stabilité du tube. Le gain maximal ne dépasse pas 5 entre -0,3 m et -1,3 m. Au-delà de ces altitudes, donc près des deux contraintes sur les déplacements, le gain maximal augmente rapidement.

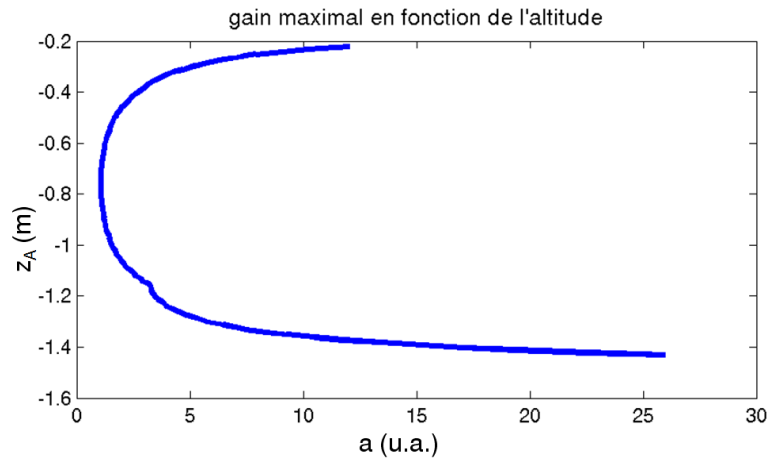


Figure 5.3. Gain maximal permettant la stabilité du tube avec raideur bilatérale en fonction de l'altitude.

On peut comparer ce gain maximal avec celui permettant la stabilité pour un tube libre. On remarque en Figure 5.4 que le tube tolère des gains plus grands si la contre-réaction est située vers l'encastrement en pied. Par contre, quand on s'approche de la PE, il n'y a pas augmentation du gain maximal. On retrouve donc le gain et la perte de stabilité observé sur les cartes de stabilité. On observe aussi une convergence du gain maximal lorsque la raideur du contact permanent varie :  $4 \cdot 10^6$  N/m et  $10^7$  N/m donnent des gains maximaux fonction de l'altitude quasi-égaux. On vérifie par ailleurs que le gain maximal dépend bien de la raideur de contact.

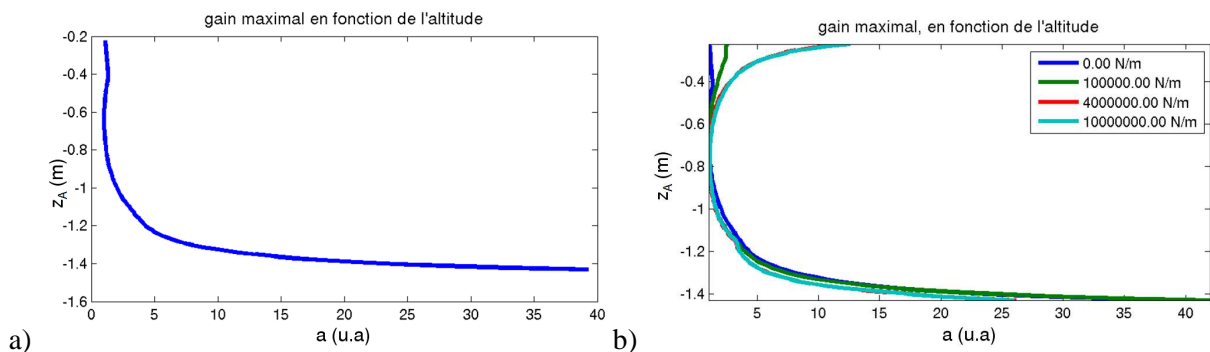


Figure 5.4. Gain maximal permettant la stabilité du tube avec raideur bilatérale en fonction de l'altitude.

### 5.1.4. Évolution des fréquences et amortissements

Après avoir déterminé des zones de stabilité dans l'espace des paramètres ( $z_A, a, k$ ) et des gains maximaux dépendants de l'altitude et paramétrés par la raideur de contact, on s'intéresse ici aux fréquences et amortissements des modes partant en instabilité.

Lors d'un départ en instabilité, on peut considérer que le tube partirait d'une configuration libre pour aller vers le système linéaire à raideur bilatérale. Il semble utile de savoir quel mode (libre) part le premier en instabilité. Cette fréquence est tracée en Figure 5.5 en fonction de l'altitude  $z_A$ . À mesure que la contre-réaction sur la vitesse est placée plus haut sur la jambe, les modes déstabilisés présentent de moins en moins de nœuds et leur fréquence diminue. Ce sont les modes dont l'observabilité modale est la plus importante qui partent donc en instabilité les premiers. Les fréquences et déformées sont celles des modes libres. Seuls les modes ayant des composantes hors-plan apparaissent ; modes de torsion et modes de flexion peuvent être instables.

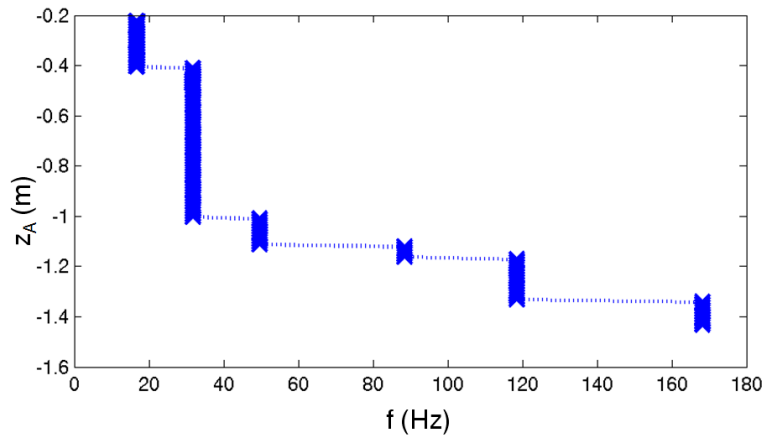


Figure 5.5. Fréquence du mode instable libre avec contre-réaction en fonction de l'altitude.

On trace en Figure 5.6 les évolutions de la fréquence du premier mode dont l'amortissement devient négatif avec  $k_{cont}=4.10^6$  N/m. On remarque que la fréquence diminue avec l'altitude, comme pour la configuration libre. Les valeurs de fréquence sont bien celles de la configuration raideur bilatérale car les amortissements ne sont pas suffisamment élevés pour modifier les fréquences ou les déformées.

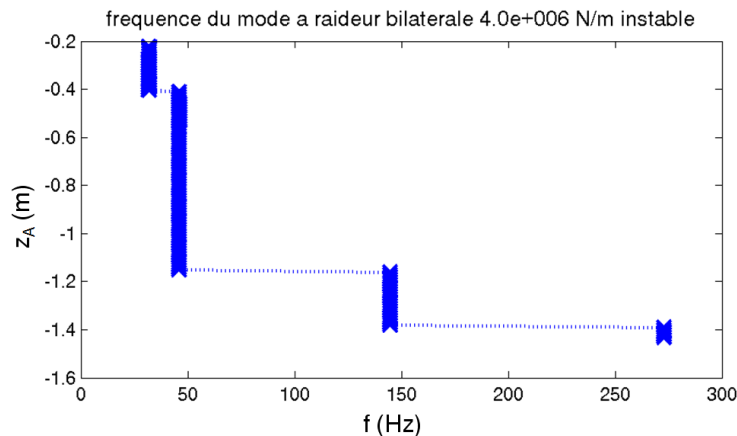


Figure 5.6. Fréquence du mode instable avec contre-réaction et raideur bilatérale en fonction de l'altitude.

Pour chaque altitude, on a trouvé le gain maximal permettant la stabilité des configurations libre et à raideur bilatérale. Observons les fréquences et amortissements si, pour le même gain, nous enlevons la raideur bilatérale. On accède ainsi en Figure 5.7 à un ordre de grandeur des amortissements modaux négatifs que la raideur bilatérale peut stabiliser. On ne trace que les modes dont l'amortissement modal est négatif. On remarque, comme prévu par les cartes de stabilité, que seules les configurations où la contre-réaction est suffisamment proche des PE sont instables sans raideur bilatérale : le gain de stabilité entre libre et à contact permanent n'est possible que pour une déstabilisation *haute* sur la jambe, ou de manière équivalente pour des modes basses fréquences, typiquement le second mode de flexion libre à 30 Hz. Plus la contre-réaction est d'altitude élevée, plus on déstabilise de modes (de un à cinq). Les fréquences sont constantes mais les amortissements varient : pour l'altitude maximale prise en compte, le premier mode, à 5 Hz, a un amortissement de -7% et le deuxième mode, à 16,7 Hz, a un amortissement de -4%. L'ajout de la raideur de contact  $k_{cont}$  à  $4.10^6$  N/m stabilise donc des systèmes libres *très* instables.

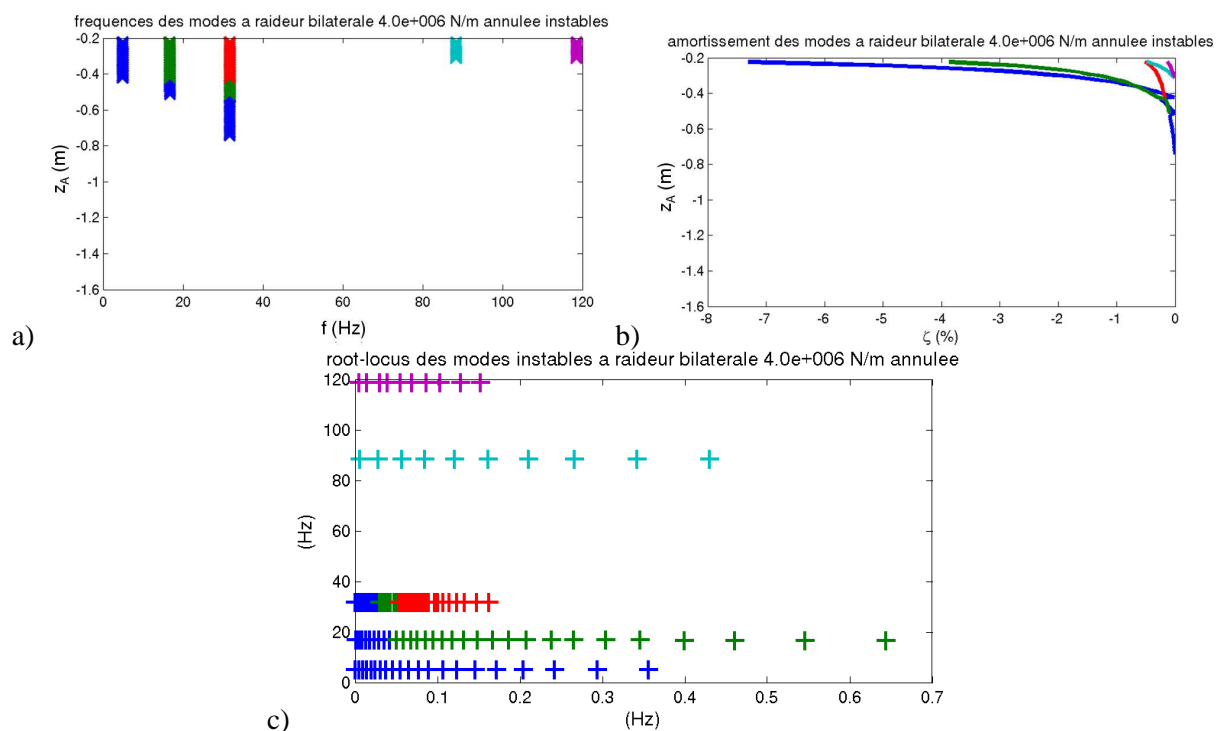


Figure 5.7. Fréquence (a), amortissement (b) et root-locus (c) des modes à la limite de stabilisation avant ajout de la raideur bilatérale. Les modes sont classés par fréquence croissante.

Le root-locus confirme que les amortissements ne sont pas suffisants pour modifier notablement les fréquences et les déformées : par exemple, si  $\zeta < 10\%$  alors  $(1-\zeta^2)^{1/2} > 0,995$ . D'où les courbes en forme de droite horizontale sur le root-locus : partie réelle  $-\zeta\omega$  variable dépendant de l'amortissement et partie imaginaire  $\omega(1-\zeta^2)^{1/2}$  constante et égale au module, donc à la fréquence. L'évolution des amortissements du premier mode de flexion hors-plan et du premier mode de torsion est plus importante que celle des modes plus hautes fréquences.

On a donc tiré un enseignement primordial quant à la stabilité des tubes de GV : la stabilité du tube libre ne présage en rien de la stabilité du tube à contact permanent. Sans ajouter d'amortissement supplémentaire, l'ajout d'une raideur de contact à un tube libre instable peut le stabiliser en rendant tous ses amortissements modaux positifs. Ceci présage d'un mécanisme auto-régulateur : le fluide (ou la contre-réaction colocalisée proportionnelle à

la vitesse) déstabilise le tube libre. Celui-ci voit donc son déplacement maximal, une amplitude, augmenter. Il va donc choquer de plus en plus. La raideur de contact apparente, telle que décrite en 4.2 et 4.3, va donc augmenter. La fréquence va augmenter et la déformée en fonctionnement (ODS) se modifier. Lorsque l'amplitude dépassera un certain seuil, la raideur de contact apparente sera suffisante pour stabiliser le tube : un transfert non-linéaire d'énergie vers d'autres fréquences puis une dissipation compensera l'apport d'énergie de la déstabilisation. On aura un régime stabilisé de choc ou une décroissance de l'amplitude jusqu'à une prochaine déstabilisation.

### 5.1.5. Évolution des déformées

Comme dit précédemment, les gains  $a$  pris en compte impliquent des amortissements négatifs inférieurs à 10% : fréquences et déformées des modes complexes sont très peu différents des modes normaux. Commençons par montrer en Figure 5.8 les déformées des premiers modes libres instables. Les modes instables sont alternativement du type torsion puis flexion hors-plan. Lorsque l'altitude augmente, le passage d'un type de mode à l'autre semble corrélé à la présence des ventres : on change de type de déformée avant que l'altitude de la contre-réaction colocalisée corresponde à un ventre. En fait, on change de mode instable lorsque l'observabilité modale d'un mode devient plus élevée que celle du mode instable pour une altitude plus faible. On remarque aussi que la présence d'un nœud ou d'un ventre au droit des PE n'influe pas la stabilité des modes.

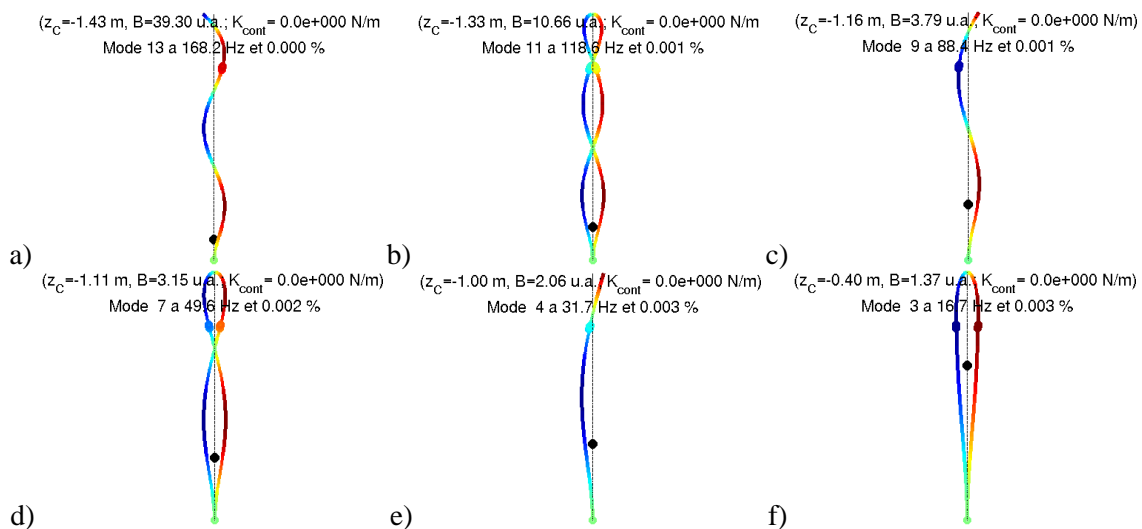


Figure 5.8. Déformées du mode devenant instable, pour le tube libre, en vue de côté. Les couleurs dénotent le déplacement hors-plan. Un point noir signale l'altitude de la contre-réaction sur la vitesse. Dans les légendes, il faut lire respectivement  $z_A$ ,  $a$  et  $k_{cont}$  en lieu et place de  $z_C$ ,  $B$  et  $K_{cont}$ .

Les mêmes remarques tiennent pour les modes à contact permanent devenant instables. Modes de flexion hors-plan ou de torsion peuvent être instables. L'observabilité modale  $[c_A][T]$  pilote la stabilité des modes.

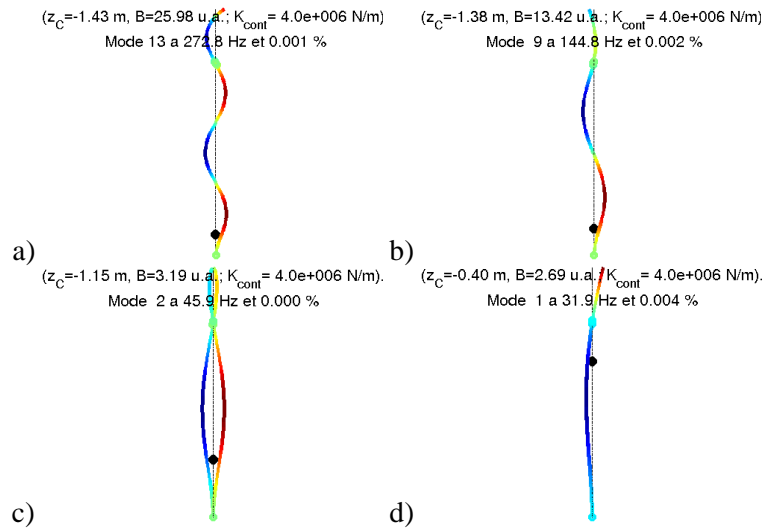


Figure 5.9. Déformées du mode devenant instable, pour le tube à raideur bilatérale, en vue de côté. Les couleurs dénotent le déplacement hors-plan. Un point noir signale l'altitude de la contre-réaction sur la vitesse. Dans les légendes, il faut lire respectivement  $z_A$ ,  $a$  et  $k_{cont}$  en lieu et place de  $z_C$ ,  $B$  et  $K_{cont}$ .

## 5.2. Analyse de stabilité dans des temporels non-linéaires

Dans cette section, on cherche à illustrer la stabilisation possible liée aux chocs. On considère donc un amortissement visqueux négatif ponctuel (boucle de rétro-action colocalisée en vitesse dont on fait varier le gain) en  $z_A = -0,35 \text{ m}$ , soit environ 20 cm sous le bas de la PE. En section 5.2.1, on commence par définir un critère d'arrêt des simulations numériques définissant la divergence par le caractère non réaliste des simulations. En section 5.2.2, avant quelques perspectives, on recherche un gain limite et analyse les évolutions de spectre associés à l'augmentation de la déstabilisation.

### 5.2.1. Limites de pénétration et critère d'arrêt des temporels

Un critère d'arrêt a été intégré aux simulations non-linéaires : l'intégration s'arrête si une pénétration dépasse un certain seuil, paramétrable mais valant l'épaisseur du tube, environ 1,30 mm, par défaut, soit 1 000 N. Ce critère d'arrêt a deux buts. Il permet de s'assurer, quitte à diminuer le seuil, que la modélisation de type poutre est encore valide. En effet, si la pénétration, donc l'ovalisation, est élevée, il serait plus juste de prendre une modélisation en tuyau et d'ainsi modéliser la section variable. Si le seuil est élevé, il permet de repérer des divergences des simulations numériques, qu'elles soient purement numériques ou liées à une injection d'amortissement négatif dans la structure.

Si on injecte un effort statique affine par morceaux, on obtient en Figure 5.10 les évolutions suivantes des déplacements et forces de choc : ce sont des évolutions linéaires par morceaux, les pentes changeant lorsqu'on active un niveau d'obstacle supplémentaire. Les déplacements de nœuds éloignés des obstacles ont l'air linéaires et ont des changements de pente moins marqués que les déplacements des nœuds de choc : ils évoluent linéairement en fonction de l'effort injecté, indépendamment de la répartition des efforts de contact. Loin de



l'obstacle, la répartition de l'effort global de contact sur les différents niveaux d'obstacles passe donc inaperçue, ce qui est rassurant. Les déplacements des nœuds de choc s'effectuent initialement dans le même sens que l'effort injecté ; dès l'activation du deuxième obstacle, les nœuds inférieurs (N163, N158 et N153) se déplacent dans le sens contraire. Au final, les deux nœuds supérieurs et les deux nœuds inférieurs sont en contact, mais pas du même côté du plan du tube ( $x>0$  et  $x<0$ ). On retrouve la transition de déformée entre le premier mode libre et le premier mode à contact permanent, proche du premier mode appuyé. En statique, le critère d'arrêt est très lâche. Si on le fixe à 1,6 mm, ce qui correspond a une force maximale de 1 000 N sur un obstacle, il se déclenche quand le déplacement hors-plan de l'apex atteint presque 6 cm, ce qui est considérable. L'effort injecté est alors de 1 200 N.

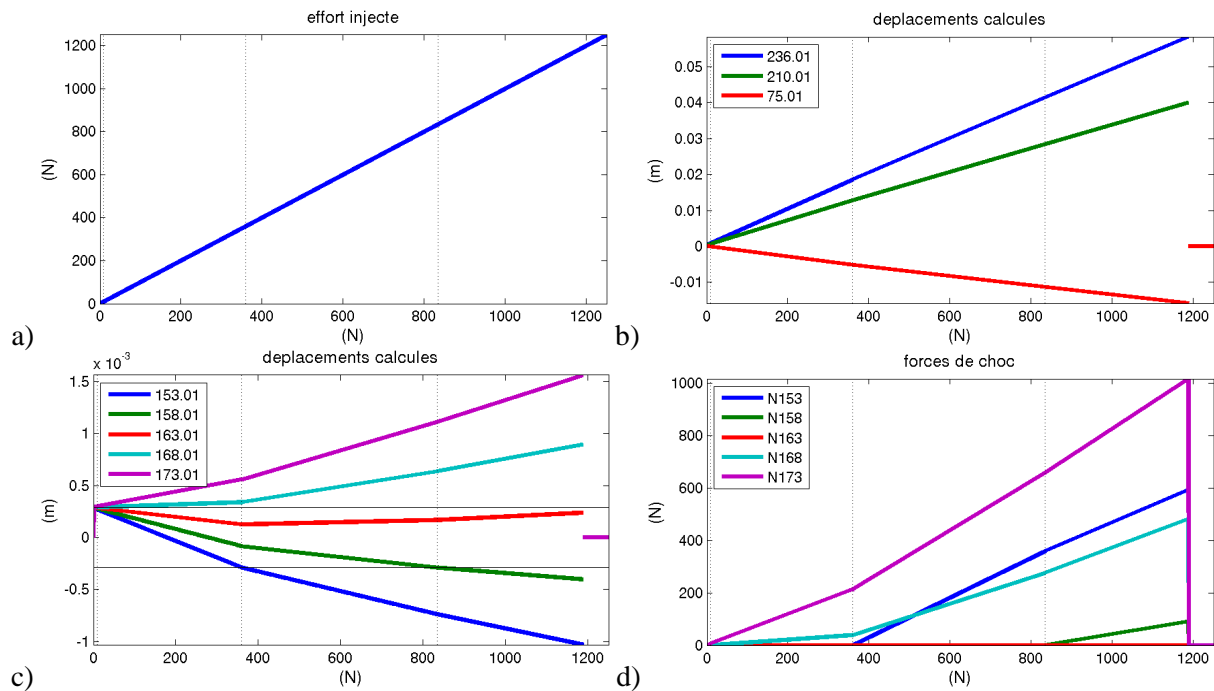


Figure 5.10. a) effort injecté en apex. b) déplacements hors-plan de points du tube. c) déplacements hors-plan des nœuds de choc en fonction du temps. d) efforts de contact en fonction de l'effort injecté.

Le même exercice a été fait en injectant un bruit d'amplitude croissante. On a tiré un échantillon aléatoire, puis on l'a multiplié par une rampe. On a alors calculé l'évolution dynamique du tube. On remarque d'abord en Figure 5.11 que l'effort injecté est de moins grande amplitude lorsque le critère d'arrêt est atteint. Les déplacements à l'apex le sont aussi : 4,5 cm au lieu de 6 cm. Les cinq niveaux d'obstacles ont été activés très rapidement et presque simultanément. Les déplacements  $DY$  dans le plan des nœuds de choc atteignent la valeur du jeu alors que pour l'effort linéaire par morceaux, ils n'ont jamais dépassé  $10^{-9}$  m. Le mouvement des nœuds de choc est réparti dans le plan normal à la fibre neutre par les erreurs d'arrondi sur le calcul de la normale. L'arrêt de la simulation s'effectue au même critère d'arrêt.

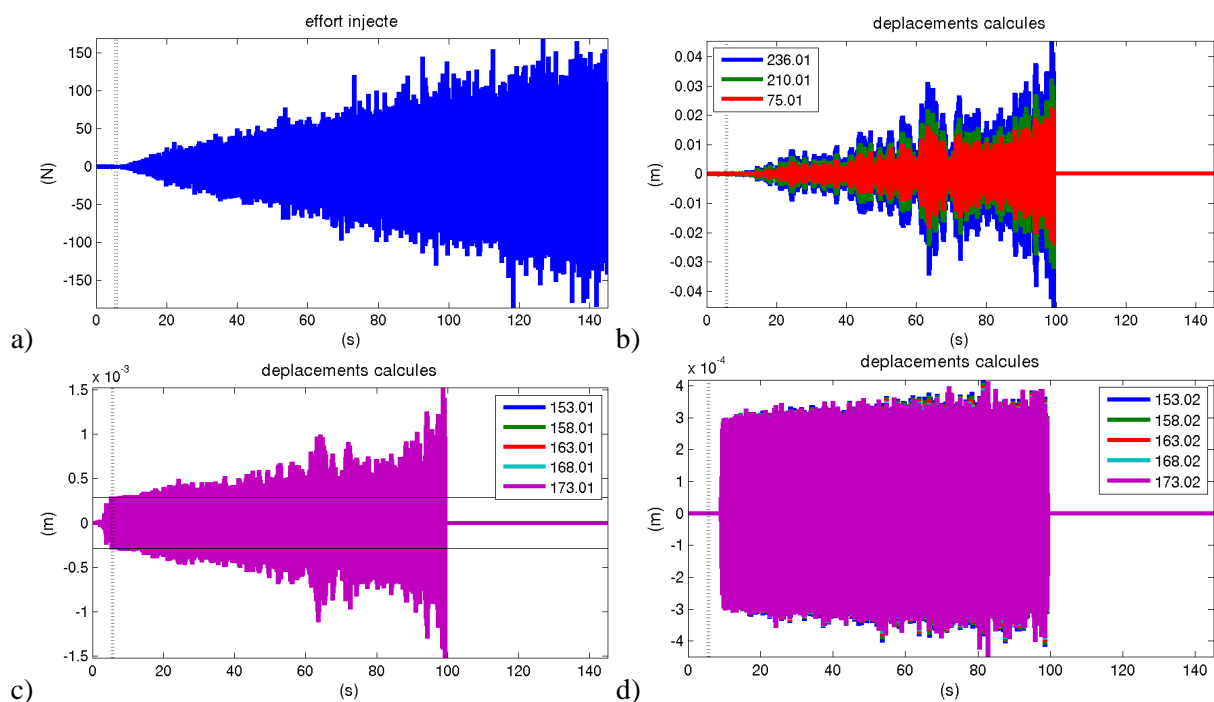


Figure 5.11. a) effort injecté en apex. b) déplacements hors-plan de points du tube. c) déplacements hors-plan des nœuds de choc. d) déplacements dans le plan des nœuds de choc.

Pour rechercher un gain de déstabilisation limite, on garde ce critère : une évolution dynamique est considérée instable si le critère d'arrêt à 1 000 N est activé. Les déplacements hors-plan à l'apex de l'ordre de 4,5 cm sont très élevés. La pénétration correspond alors à 1,6 mm, soit environ 10 % du diamètre du tube. En perspective pour de travaux futurs, il faudrait affiner le critère d'arrêt définissant une instabilité sur des évolutions temporelles.

## 5.2.2. Recherche d'un gain limite

On considère une excitation affine par morceaux de la forme suivante : 0 à  $t=0$ , 1000 N à  $t=0,01$  s et 0 à  $t=0,0105$  s, ce qui correspond à une sorte d'impact. Cette excitation est appliquée sur la jambe du tube opposée à l'application de la contre-réaction. Il semble plus parlant de considérer un impact comme excitation : la réponse temporelle est alors représentative du système étudié, en mettant en balance le gain et le modèle de contact. Il n'y a pas de forçage du comportement par un effort extérieur.

On recherche la stabilité en effectuant une dichotomie sur la valeur du gain. On fait donc l'hypothèse qu'il y a une valeur limite de  $a$  permettant la stabilité. Cette hypothèse est justifiée car si  $a$  est le seul paramètre variable, l'augmenter fait diminuer l'amortissement, indépendamment de l'altitude de la rétro-action  $z_A$  ou de la raideur de contact (bilatérale)  $k_{cont}$ . Une valeur de gain est dite *instable* si le calcul, initialement d'une durée de 50 s, s'arrête car une pénétration a dépassé un certain seuil (ici 1000 N sur une force de contact d'un obstacle). On s'arrête arbitrairement quand l'intervalle de la dichotomie a une largeur inférieure à 5 % de sa borne inférieure. Les intervalles de confiance évaluent de la manière tracée en Figure 5.12. Il y a bien convergence vers un intervalle de faible longueur et contenant une valeur limite de  $a$ .

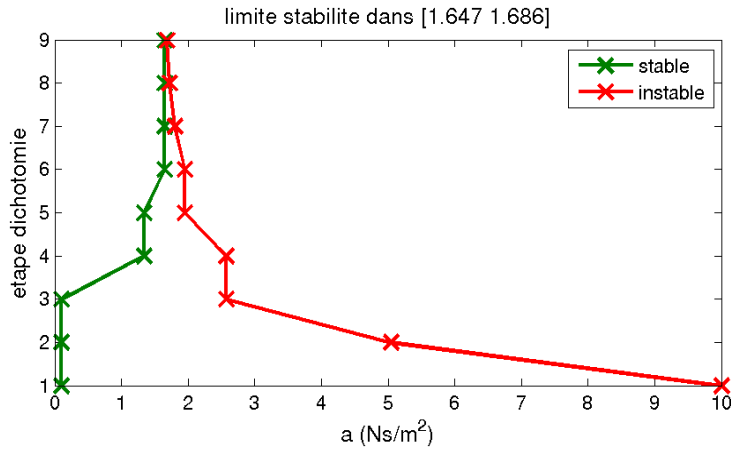


Figure 5.12. Évolution, lors de la dichotomie, de l'intervalle contenant le gain maximal, pour un impact hors-plan à l'apex.

On compare ci-après les temporels et les DSP des déplacements et des efforts de contact, ou plutôt de leur somme, pour visualiser simplement tous les instants de contact, pour différentes valeurs de gain. L'évolution globale du comportement est conforme à ce qu'on pouvait attendre, du tube libre au tube en contact permanent.

Le premier cas,  $a=0,10 \text{ Ns/m}^2$ , tracé en Figure 5.13, est très proche du tube libre. Le décroissement des déplacements est parfaitement exponentiel. La DSP des déplacements est celle du tube libre. L'impact élevé sur la jambe du tube entraîne une forte excitation de l'ensemble du tube. En effet, le déplacement 236.01 est maximal à  $t=0,062 \text{ s}$  (fin de l'impact à  $t=0,01 \text{ s}$ ) et vaut alors 1,2 mm. Le dernier épisode de contact a lieu à  $t=2,82 \text{ s}$ . Cette rude entrée en matière se retrouve dans toutes les évolutions temporelles avec  $a$  plus important. Le cas  $a=0,10 \text{ Ns/m}^2$  correspond donc au système libre et la déstabilisation est insuffisante pour compenser l'amortissement naturel de la structure.

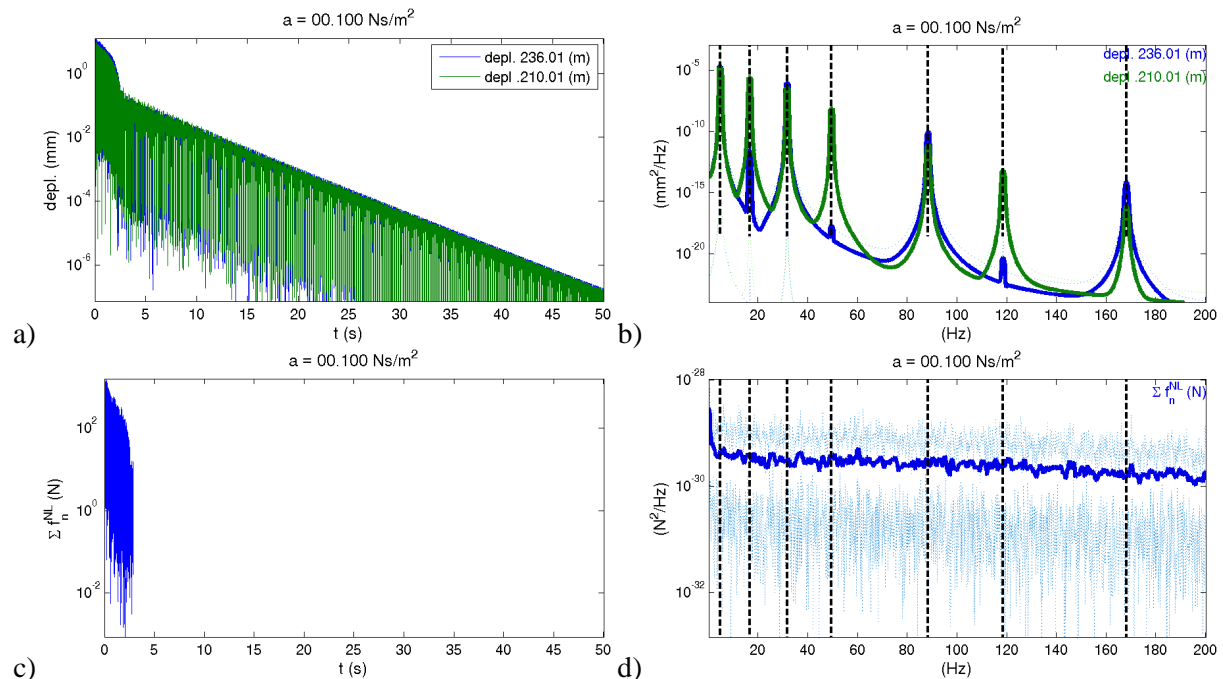


Figure 5.13. Cas  $a=0,1 \text{ Ns/m}^2$ . Déplacements hors-plan sur le centre : temporels (a) et DSP (b). Somme des forces de contact : temporels (c) et DSP (d). Les pointillés noirs verticaux marquent les fréquences propres du tube libre.

Le second cas correspond à une déstabilisation plus de dix fois plus importante. On trace les quatre mêmes grandeurs en Figure 5.14. Les DSP des déplacements hors-plan sur le cintre ont encore l'air parfaitement linéaires, lisses avec des pics acérés. Par rapport au cas précédent, on remarque un changement d'amplitude de certains pics. La plupart des pics ont l'air aussi plus acérés, ce qui dénoterait un amortissement modal plus faible. Ceci est confirmé par l'allure des évolutions temporelles des déplacements : leur pente est clairement plus faible en valeur absolue, ce qui dénote un amortissement modal plus faible. Un mode est déstabilisé : il croît très lentement et ne se ressort qu'à partir de  $t=40$  s. Passé l'épisode initial de contacts multiples, il n'y a plus d'épisode de contact : le tube est bien libre. La durée de la simulation ne permet pas à la participation du mode instable de croître suffisamment pour qu'il y ait à nouveau contact.

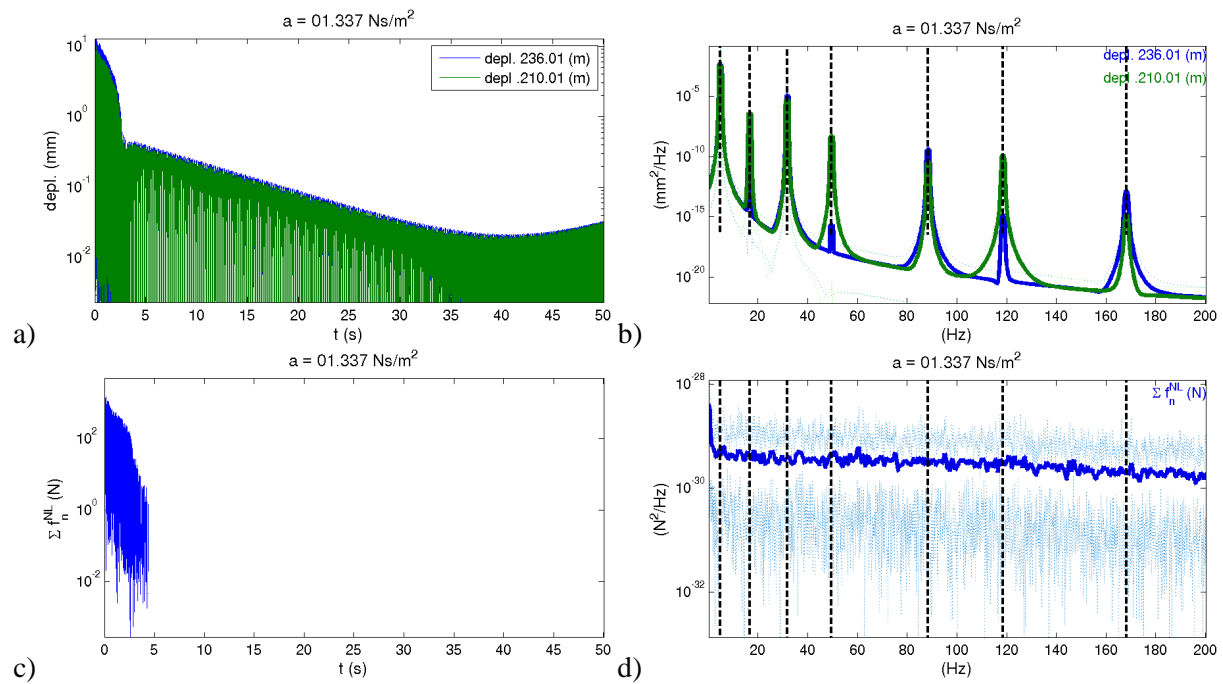


Figure 5.14. Cas  $a=1,34 \text{ Ns/m}^2$ . Déplacements hors-plan sur le cintre : temporels (a) et DSP (b). Somme des forces de contact : temporels (c) et DSP (d). Les pointillés noirs verticaux marquent les fréquences propres du tube libre.

Si on augmente légèrement  $a$ , on a un régime d'amplitude vibratoire à peu près constante tracé en Figure 5.15. À partir de  $t=18$  s, des épisodes de contact sont présents, de plus en plus rapprochés et la force maximale de contact au cours d'un obstacle augmente régulièrement. On observe des sortes de bouffées sur le temporel des déplacements, qui augmentent et diminuent. On aurait donc alternance entre un système libre instable et un système en contact permanent stable. Le système répond sur les fréquences des modes libres mais l'allure de la DSP est plus chahutée et n'est plus celle d'un système linéaire. Cependant, si on se réfère à la transition en fonction du comportement de la section 4.2, la raideur de contact apparente serait faible, car les pics ne sont pas décalés, et donc l'amplitude et par conséquent le nombre de chocs par seconde seraient peu élevés. La DSP des efforts de contact présente des harmoniques associés à un fondamental à 13 Hz, bien distinct des fréquences propres. On peut imaginer que cette fréquence dépend du nombre de chocs par unité de temps.

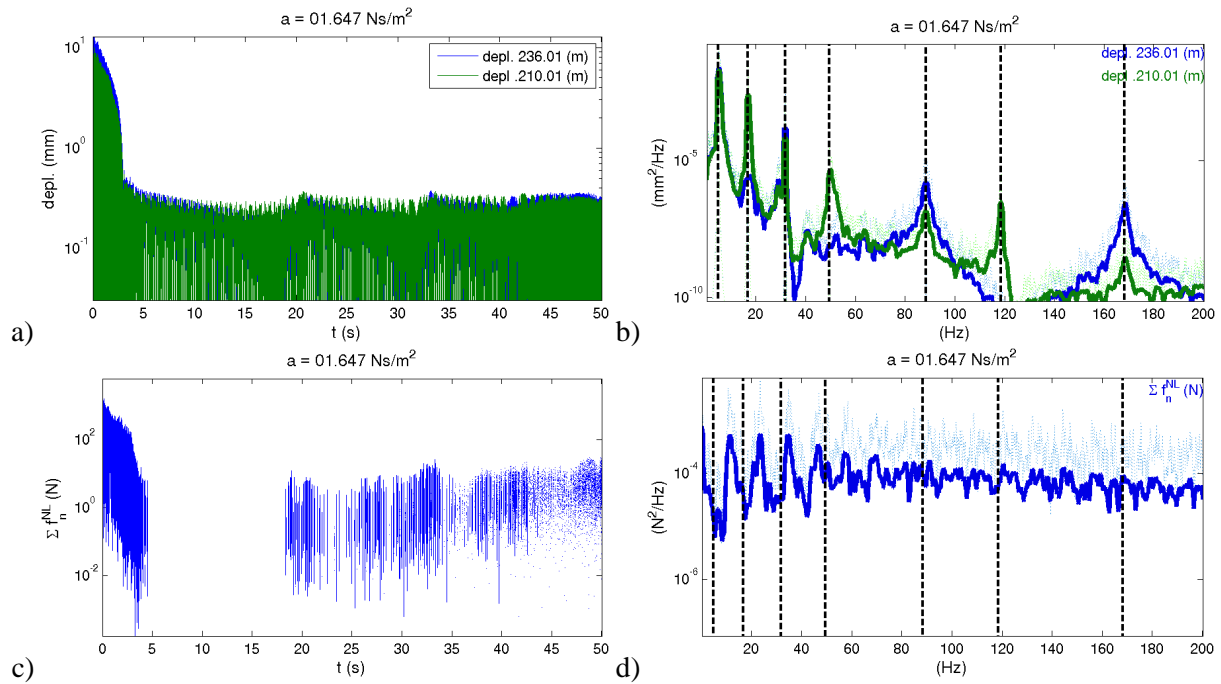
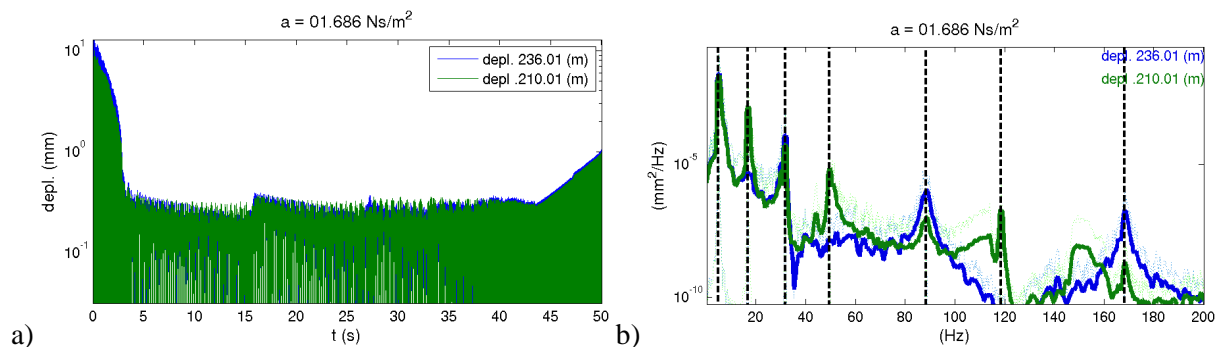


Figure 5.15. Cas  $a=1,65 \text{ Ns/m}^2$ . Déplacements hors-plan sur le cintre : temporels (a) et DSP (b). Somme des forces de contact : temporels (c) et DSP (d). Les pointillés noirs verticaux marquent les fréquences propres du tube libre.

La valeur suivante du gain,  $a=1,69 \text{ Ns/m}^2$ , est la borne inférieure de l'intervalle contenant la valeur limite de  $a$ . C'est donc la valeur prise en compte de  $a$  la plus élevée donnant une dynamique calculée stable. On retrouve sur la Figure 5.16, les bouffées des temporels observées pour  $a=1,65 \text{ Ns/m}^2$ . On remarque que l'amortissement est plus négatif car le premier épisode de choc arrive plus rapidement que précédemment. À partir de  $t=45 \text{ s}$ , on voit un départ en instabilité : les déplacements ont une croissance exponentielle et le tube subit des chocs de plus en plus forts. Cependant, cette valeur de  $a$  est considérée comme stable : le critère d'arrêt des simulations numériques n'a pas été activé. Il faut donc garder à l'esprit que le critère d'arrêt conditionne la stabilité perçue d'un système numérique. Les DSP sont modifiées par rapport au cas précédent car l'amplitude a encore augmenté. Il n'y a plus d'harmoniques sur la DSP des efforts de contact.



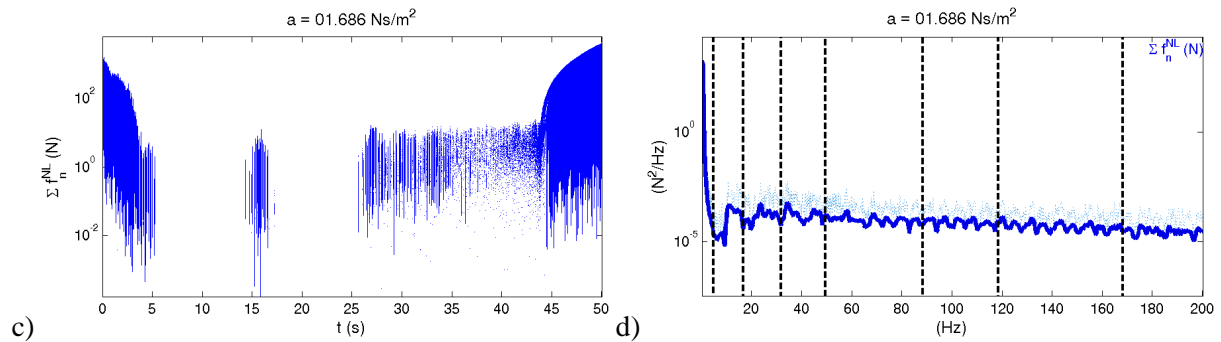


Figure 5.16. Cas  $a=1,69 \text{ Ns/m}^2$ . Déplacements hors-plan sur le cintre : temporels (a) et DSP (b). Somme des forces de contact : temporels (c) et DSP (d). Les pointillés noirs verticaux marquent les fréquences propres du tube libre.

Le gain  $a=1,72 \text{ Ns/m}^2$  est la plus faible valeur utilisée conduisant à une simulation dite instable. Les quatre grandeurs tracées en Figure 5.17 ont la même allure que celles afférentes au gain  $a=1,69 \text{ Ns/m}^2$ . L'amortissement est légèrement plus négatif car le premier épisode de choc post-relaxation de l'impact initial se produit encore plus tôt. Le déplacement hors-plan du cintre a une croissance exponentielle à partir de  $t=40 \text{ s}$ . Le critère d'arrêt, définissant l'instabilité, est activé à  $t=46 \text{ s}$ . Cela montre bien l'arbitraire inhérent au choix d'un critère d'arrêt : en laissant la simulation du cas  $a=1,69 \text{ Ns/m}^2$  se poursuivre quelques secondes, le critère d'arrêt est activé et la simulation est déclarée instable. Cependant le critère d'arrêt sur la pénétration maximale (ou la force de contact maximale) est plus pertinent qu'un critère sur un déplacement maximal : lors du départ en instabilité, le déplacement hors-plan à l'apex est de l'ordre de  $1 \text{ mm}$  alors qu'il était de  $1 \text{ cm}$  suite à l'impact initial.

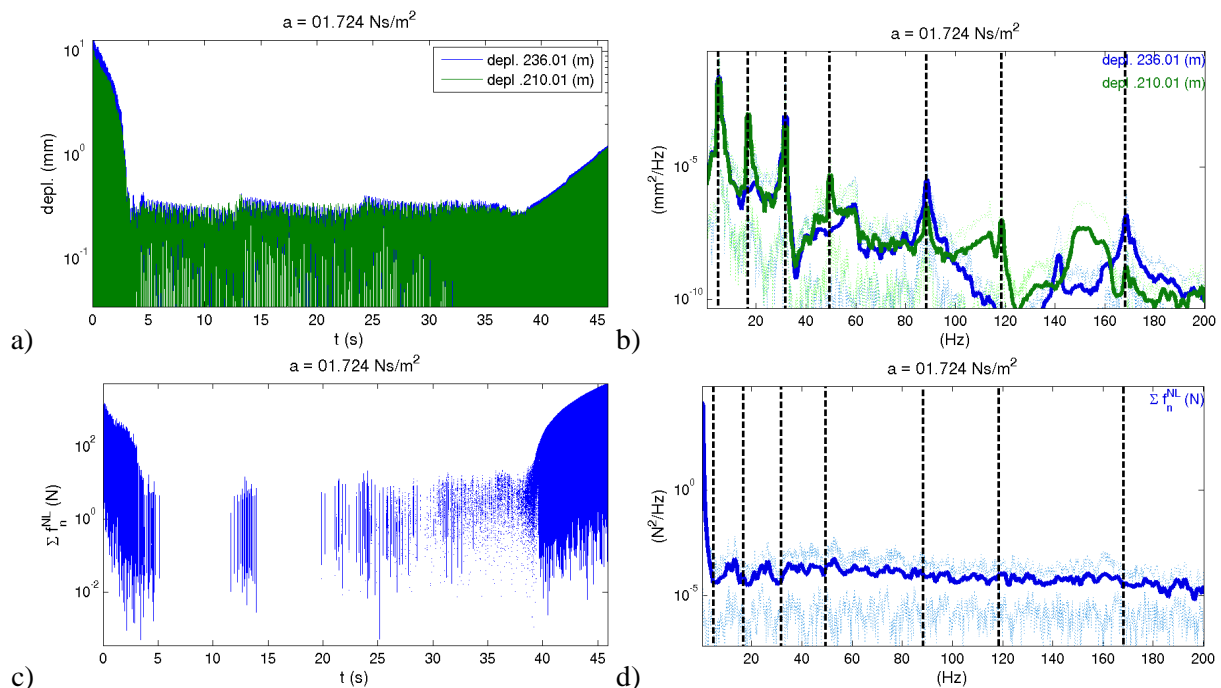


Figure 5.17. Cas  $a=1,72 \text{ Ns/m}^2$ . Déplacements hors-plan sur le cintre : temporels (a) et DSP (b). Somme des forces de contact : temporels (c) et DSP (d). Les pointillés noirs verticaux marquent les fréquences propres du tube libre.

En augmentant encore le gain  $a$ , le départ en instabilité se produit encore plus tôt (voir la Figure 5.18). Il n'y a plus de période sans contact suite à la relaxation de l'impact initial. Le tube répond encore sur les modes libres : l'amplitude reste peu élevée.

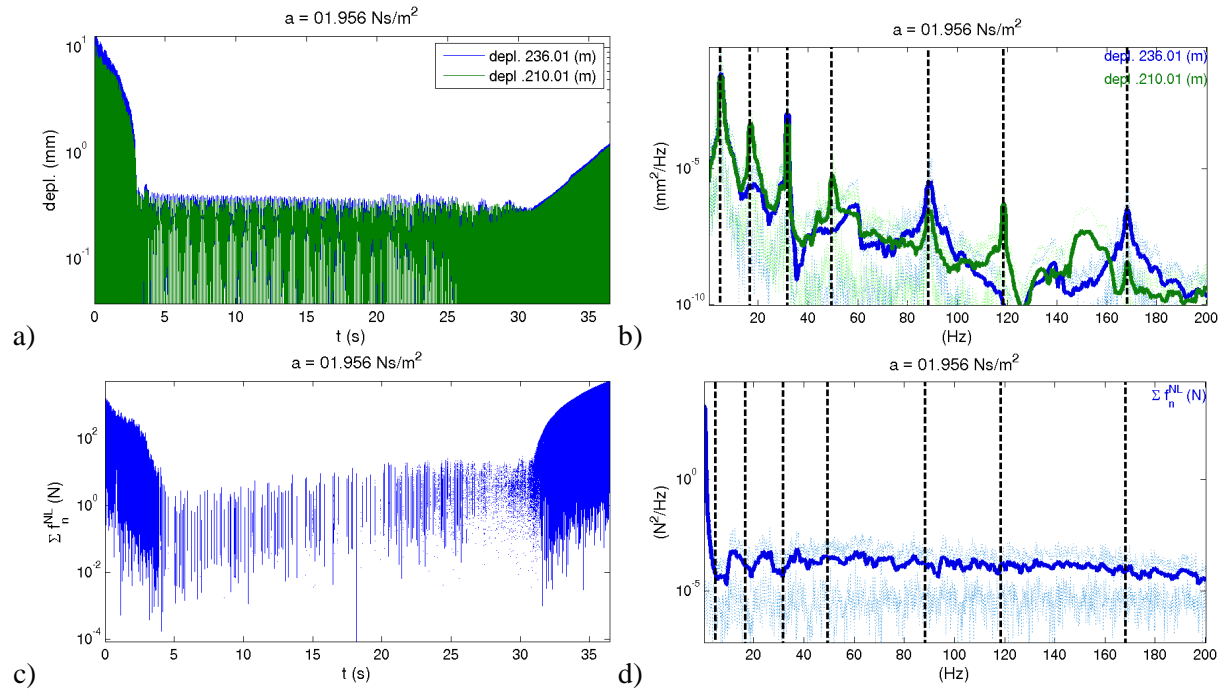
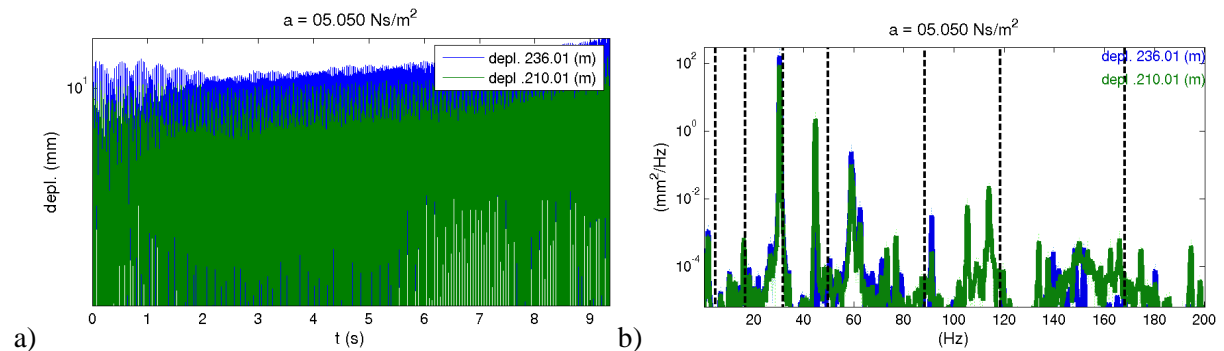


Figure 5.18. Cas  $a=1,96 \text{ Ns/m}^2$ . Déplacements hors-plan sur le cintre : temporels (a) et DSP (b). Somme des forces de contact : temporels (c) et DSP (d). Les pointillés noirs verticaux marquent les fréquences propres du tube libre.

Si  $a=5,05 \text{ Ns/m}^2$ , le critère d'arrêt est activé en un peu plus de 9 s (cf Figure 5.19). la phase de relaxation est immédiatement suivie par le départ en instabilité. Cette fois, l'amplitude est importante : le tube ne répond plus sur les fréquences du tube libre mais sur celles du tube à raideur permanente. En effet, la réponse s'effectue à 32 Hz, qui est certes la deuxième fréquence de flexion hors-plan libre, mais aussi la première en contact permanent. Cela est confirmé par les efforts de contact, qui ne sont presque jamais nuls. On a donc changé de linéaire sous-jacent. Lors de l'instabilité, le déplacement hors-plan de l'apex est de 2 cm, soit 4 cm crête à crête, valeur significative et supérieure au déplacement induit par l'impact initial. Des harmoniques multiples de 30 Hz se retrouvent dans les efforts de contact : la fréquence des chocs est donc plus élevée que celle observée sur le tube peu déstabilisé. La moyenne de la somme des efforts de contact, liée à la valeur initiale de la DSP, a augmenté en même temps que le gain : on a bien effectué une transition en fonction de l'amplitude.





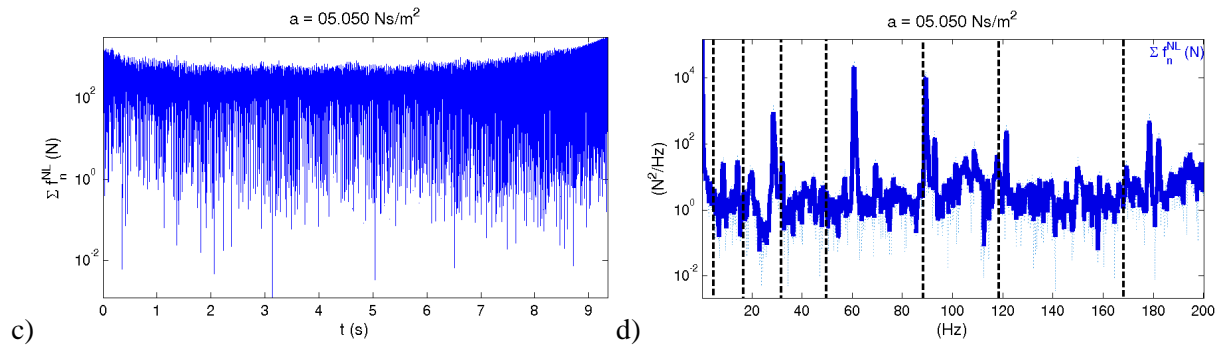


Figure 5.19. Cas  $a=5,05 \text{ Ns/m}^2$ . Déplacements hors-plan sur le cintre : temporels (a) et DSP (b). Somme des forces de contact : temporels (c) et DSP (d). Les pointillés noirs verticaux marquent les fréquences propres du tube libre.

La transition en fonction de l'amplitude est clairement montrée par les niveaux RMS et le maximum de déplacement du cintre, tracés en Figure 5.20. Le RMS croît en fonction du gain  $a$ . Le niveau reste constant jusqu'à  $a=2 \text{ Ns/m}^2$ , car il est alors atteint juste après l'impact excitateur, et est de l'ordre de 10 mm pour le DDL 210.01 et de l'ordre de 13 mm pour le DDL 236.01. Dès  $a=5 \text{ Ns/m}^2$ , les niveaux du maximum et du RMS dénotent des vibrations de grande amplitude. Cette augmentation du niveau vibratoire est accompagnée d'une augmentation de la durée des phases de contact. En-dessous de l'instabilité, le tube est la plupart du temps (98 %) en vol libre. Pour  $a$  très grand, les obstacles inférieurs passent 73 % de leur temps en contact. Pour des valeurs raisonnables de  $a$ , le tube choque sur les obstacles du dessus de la PE. Pour les deux valeurs maximales de  $a$ , le tube choque de plus en plus sur les obstacles inférieurs, ce qui est cohérent avec la déstabilisation placée sur une jambe du tube et *sous* la PE. Aucune dissymétrie entre la PE gauche et la PE droite ne semble apparaître.

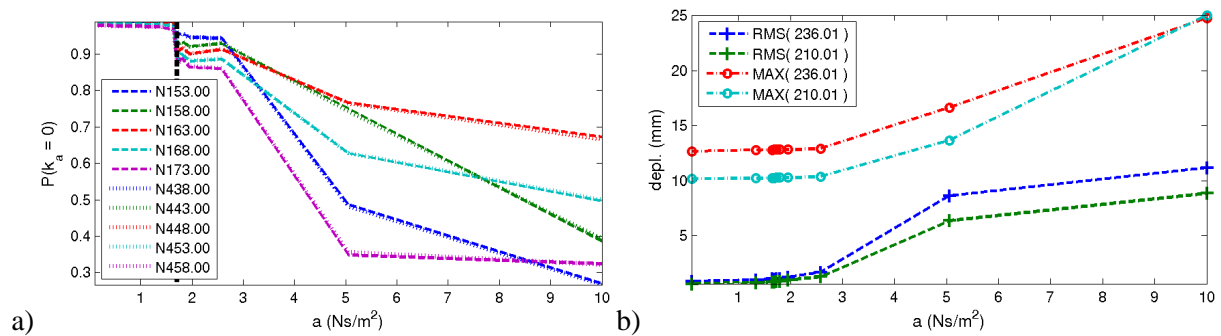


Figure 5.20. a) Évolution de la probabilité de raideur apparente nulle en fonction du gain  $a$ . b) Déplacements maximaux et RMS du cintre en fonction du gain  $a$ .

### 5.2.3. Conclusions partielles

Dans cette section, on a exhibé un intervalle de gain contenant une valeur limite de gain permettant la stabilité de simulations temporelles à modèle de contact non-linéaire et à contre-réaction colocalisée à la vitesse. Cet intervalle,  $1,69 - 1,72 \text{ Ns/m}^2$  est différent de l'intervalle issu de la carte de stabilité de la section 5.1.1, donnant une valeur limite de gain entre 3 et  $4 \text{ Ns/m}^2$ . On a donc instabilité alors que le système limite à contact permanent est stable. L'instabilité d'une simulation temporelle résulte donc de la mise en balance de composantes stables et instables du mouvement.



Dans un premier temps, mis à part le début de la simulation perturbé par l'excitation mettant en mouvement le tube, les déplacements se comportent comme des exponentielles décroissantes. Pour des valeurs intermédiaires du gain  $a$ , une transition de comportement apparaît. Une *compétition* apparaît entre les modes libres déstabilisés et les modes libres et/ou à contact permanent stables : cela explique les bouffées croissance / décroissance des déplacements. Le cas  $a=1,65$  est un régime stationnaire où le tube choque régulièrement. On finit par exhiber des simulations numériques instables,  $a=1,72$  Ns/m<sup>2</sup>, où, après une période de régime établi, le comportement du tube devient chahuté puis part en divergence physique. On voit un départ des déplacements hors-plan du cintre en exponentielle croissante. Passé ce gain limite, le départ en instabilité est de plus en plus rapide.

Le critère de stabilité est vraiment discriminant. On préconise donc, en guise de perspective pour des travaux futurs, d'adopter un critère d'arrêt plus proche des préoccupations industrielles, comme une limite plastique ou une limite de rupture, et d'automatiser le calcul de la durée des simulations numériques en la forçant à se poursuivre si on détecte une croissance exponentielle en fin de simulation. Cela permettra de s'affranchir du cas  $a=1,69$  déclaré stable mais visiblement instable.

La valeur limite de  $a$  semble peu dépendre de l'excitation. En gardant  $z_A=-0,35$  m, on a effectué une autre recherche de la valeur limite de  $a$ . Le critère d'arrêt était alors fixé à 5 mm de déplacement sur un nœud de choc, ce qui est clairement beaucoup trop élevé. La valeur maximale du gain serait comprise entre 3,34 et 3,38 pour un impact d'amplitude 100 N excitant initialement la structure à l'apex. Si cet impact, de même durée que celui à 1000 N, est remplacé par un bruit filtré de 5 N RMS en pied de tube, la valeur maximale du gain est comprise entre 3,63 et 3,69. L'ordre de grandeur est retrouvé avec un écart de 10 % entre ces deux recherches.

Vu l'allure des temporels et des DSP des forces de contact, on a bien affaire à un système dont la raideur de contact, directement reliée aux efforts de contact, est variable au cours du temps. Il faut aussi qu'il y ait un certain niveau (de déplacement donc de gain) pour avoir un certain nombre de chocs (par unité de temps) et donc voir les fréquences prépondérantes des DSP des déplacements se modifier. La recherche d'un amortissement limite est donc concomitante d'une transition en fonction de l'amplitude présentée en 4.2. Le calcul de DSP alors que la raideur apparente est non constante est à mettre en perspective avec la recherche en 4.3 d'un système stochastique linéaire équivalent. Ici, la dynamique est celle d'une succession de systèmes mécaniques à raideurs et amortissements variables. Il faudrait voir si on peut relier la stabilité globale à la stabilité de chacun de ces systèmes.

### 5.3. Essais de déstabilisation par rétro-action

Dans cette partie, on présente le banc GV-LOCAL dans sa configuration de contrôle actif colocalisé, avec injection d'un effort colocalisé proportionnel à une vitesse. Cette déstabilisation permet de simuler un amortissement négatif, moyen retenu pour simuler une instabilité fluide-élastique. Dans un premier, une description schématique de la procédure de déstabilisation est présentée en section 5.3.1. On décrit aussi le matériel utilisé et la procédure expérimentale. En 5.3.2, on présente brièvement les propriétés de la chaîne de contrôle. Le transfert entre vitesse mesurée et effort injecté n'est pas parfaitement plat et est dégradé par le pot. Enfin, en section 5.3.3, on détaille les résultats expérimentaux. Sur les temporels, on

sépare les phases de croissance des déplacements et plusieurs régimes stabilisés. Ces différents régimes stabilisés contiennent les mêmes fréquences mais dans des proportions différentes.

### 5.3.1. Protocole expérimental

Dans cette configuration, on n'impose pas directement l'effort excitant le tube. Celui-ci s'auto-excite, éventuellement sous la condition d'une légère déstabilisation initiale mais généralement le bruit induit dans la boucle de rétroaction suffit à provoquer un mouvement vibratoire. Un accéléromètre combiné avec un ampli de charge B&K 2635 fournit une tension  $P$  proportionnelle à la vitesse  $V$  d'un point. Cette tension sert à alimenter le pot vibrant, injectant ainsi un effort  $F$  dépendant de la vitesse mesurée, qui induit alors une accélération  $A$ . Le processus expérimental peut se schématiser comme montré sur la Figure 5.21. On note la différence par rapport au cas de la boucle ouverte : la tension fournie à l'ampli de tension alimentant le pot n'est plus issue d'un générateur de signal, comme dans 4.1.1 par exemple, mais est reliée directement à la sortie du B&K 2635 donnant la vitesse du point d'injection de la force.

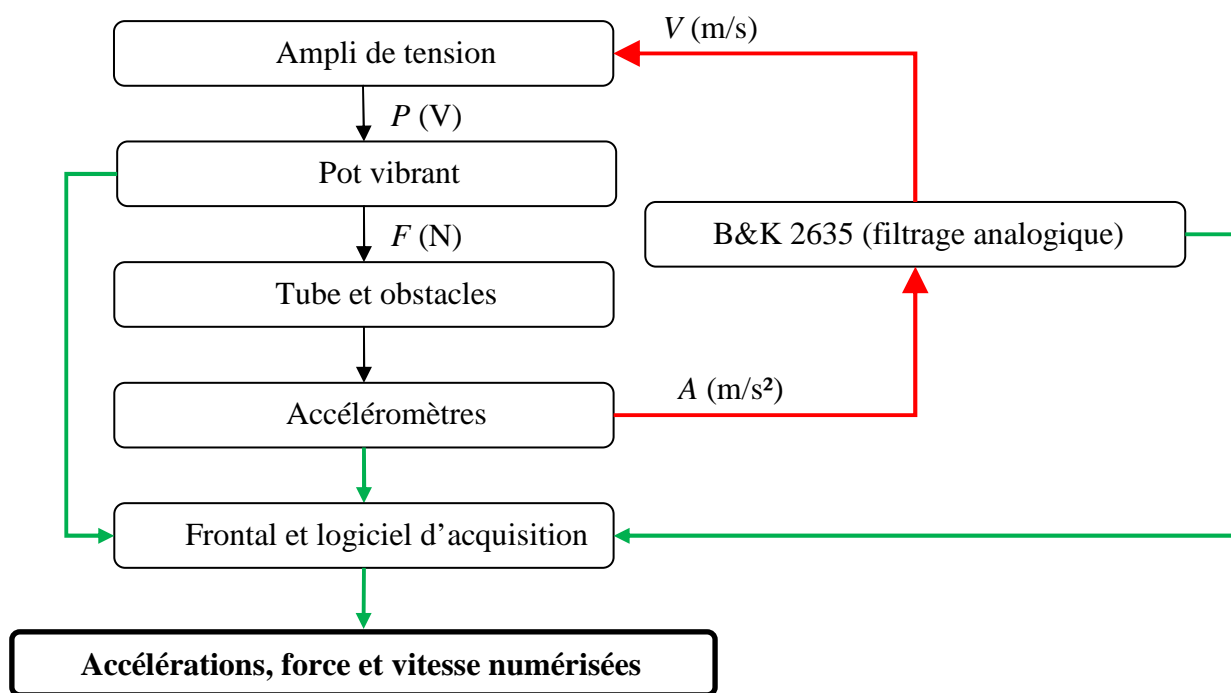


Figure 5.21. Schéma de la chaîne de mesure en boucle fermée. En vert, le processus de mesure, en rouge la contre-réaction colocalisée. On précise les quatre grandeurs de la boucle de rétro-action,  $A$ ,  $V$ ,  $P$  et  $F$ .

Deux paramètres sont réglables pour déstabiliser le tube :

- La position  $z_A$  d'injection de l'effort colocalisé à la vitesse. Pour cela, un dispositif, photographié en Figure 5.22, composé d'une plaque que l'on peut fixer sur les poteaux du massif à diverses altitudes prédéfinies et d'une table élévatrice permet de régler l'altitude de la tige du pot vibrant. À noter que ce dispositif ne permet que d'exciter la direction hors-plan.

- Le gain  $a$  définissant l'amortissement négatif ; celui-ci est réglable sur l'ampli de tension chargé d'alimenter le pot vibrant à partir de la mesure de vitesse.

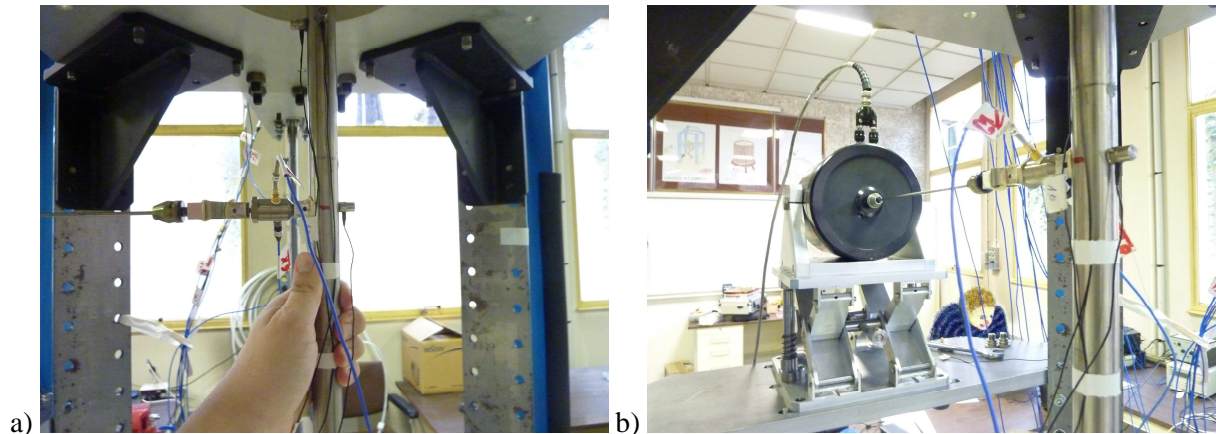


Figure 5.22. a) vue d'un arrêt manuel du tube. Capteur de référence et mesure de la force injectée. b) Vue globale du pot et de sa table élévatrice.

La gestion des conditions initiales est assez problématique. En effet, on aimerait bien voir de la manière la plus complète l'instabilité du système libre. Pour cela, il est souhaitable que le système soit immobile à l'instant initial, afin de voir autant que faire se peut l'exponentielle croissante. Le réglage du gain s'effectuant par une molette, qu'il ne faut plus toucher une fois réglée. Il faut donc trouver le moyen de conserver le réglage de gain tout en n'injectant aucune force par le pot. Éteindre l'ampli de tension n'est pas une solution : lorsqu'on met celui-ci sous tension, il émet un pulse de courant, qui entraîne un fort déplacement de la tige du pot et donc du tube. On entend d'ailleurs un *clac* caractéristique. Le plus souvent, il y a un choc entre le tube et la PE. Parfois, l'ampli de tension sature même. Dans tous les cas, il y a de l'énergie initialement injectée dans le système et la croissance des amplitudes vibratoires n'est pas visible : un régime à chocs est établi. La solution pratique utilisée est la suivante :

- Se mettre en boucle fermée ;
- Mettre en marche tous les appareils ;
- Régler la valeur de gain : à ce stade, le tube est excité et vibre ;
- Arrêter manuellement le tube, comme montré en Figure 5.22 : en bloquant la tige de pot et le tube, on immobilise le tube ;
- Lancer l'acquisition ;
- Lâcher le tube et la tige du pot.

À noter que si une seule personne réalise l'essai, l'ordre est légèrement modifié : on lance l'acquisition, immobilise le tube et la tige du pot puis on lâche. Le réglage du gain se fait majoritairement à l'*oreille*, en fonction du nombre de chocs perçus par unité de temps et de l'intensité sonore, dénotant l'intensité des chocs tube / PE.

De nombreux accéléromètres ont été disposés sur le tube. Leurs positions et orientations sont précisées en Figure 5.23. Les noms des points de mesure sont aussi précisés. Les DDL mesurés portent le nom du point de mesure et de la direction du capteur. Les voies contenant

X sont toutes hors-plan, comme P1X ou P8X. Les voies notées Y sont majoritairement orientées selon  $DY$ , comme P10Y, à part sur le cintre où elles ont des composantes selon  $DZ$  : de manière abusive, on les nomme quand même Y, comme P6Y.

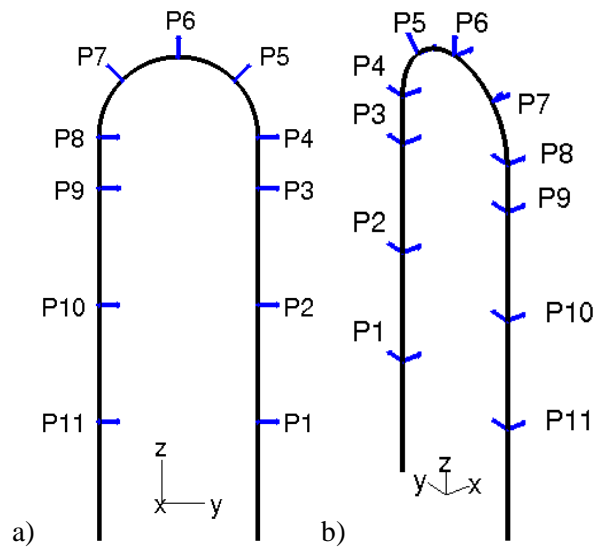


Figure 5.23. Deux vues du maillage capteur. Chacun des 22 accéléromètres est représenté par une flèche.

Par ailleurs, quatre voies sont dévolues à la boucle de rétro-action :

- l'accélération  $A$  du point de référence, typiquement situé entre P2 et P3 ;
- la vitesse  $V$  obtenue par intégration analogique de  $A$  dans un B&K 2635 ;
- la tension  $P$ , transformation de  $V$  par un ampli de tension et fournie au pot ;
- la force  $F$  effectivement injectée dans le tube et mesurée par une tête d'impédance entre la tige et le tube.

### 5.3.2. Propriétés de la chaîne de contrôle

On cherche à injecter un effort qui soit strictement proportionnel à la vitesse. Or, chaque composant de la chaîne de contrôle a sa propre fonction de transfert : des atténuations, amplifications, déphasages sont introduits par chaque composant. Dans cette sous-section, on trace les fonctions de transferts composant par composant. On se place ici en boucle ouverte :  $V$  n'est pas fourni à l'ampli de tension mais un balayage de sinus entre 2 et 1 000 Hz. Les acquisitions ont une durée de 1 050 s pour une fréquence d'échantillonnage de 5 120 Hz.

La fonction de transfert de l'ampli de tension n'est pas tracée ici. Il a été vérifié par ailleurs qu'elle est plate, sauf pour les très basses fréquences. La phase est nulle. La tension en sortie est donc proportionnelle à la tension d'entrée. On a alors cartographié la correspondance entre des graduations arbitraires de la molette de gain et le gain effectif. Ce gain est sans unité et on utilise ici une échelle arbitraire de valeurs.

Les transferts du pot vibrant, de la structure et de l'intégrateur analogique sont tracés en Figure 5.24. Le transfert entre la force injectée dans le tube par le pot vibrant et l'accélérateur

de référence servant à mesurer la vitesse n'est pas plat. Le tube répond plus ou moins selon les fréquences. Comme cette fonction de transfert est colocalisée, on remarque l'alternance des résonances et anti-résonances par le gain et la perte de  $\pi$  radians sur la phase. Le transfert entre l'accélération et la vitesse est globalement satisfaisant. Le module a l'allure d'une fonction inverse et la phase est majoritairement à  $-\pi/2$  radians. Le transfert entre la force exercée par le pot vibrant et la tension l'alimentant n'est pas plat. Elle présente des pics sur le gain et un déphasage non constant. Sur les pics, le déphasage est de presque  $\pi$ . L'effort réellement injecté est donc en opposition de phase avec la commande, ce qui rend problématique l'injection d'un effort contrôlé. Comme montré dans ([Cha3] et [Sma1]), un pot vibrant est un objet complexe, siège de couplage électro-magnétique et couplé à la structure excitée. On pourrait se servir de ces travaux pour modifier en temps réel la commande  $P$  du pot. Cela n'a pas été réalisé ici, la maquette étant un démonstrateur de faisabilité de déstabilisation – restabilisation. Pour parfaire le contrôle de la déstabilisation, une thèse de doctorat, en partenariat EDF R&D / FEMTO, a été lancée sur la thématique des *essais hybrides*, où une partie de la structure testée est simulée numériquement, ce qui permet d'ajuster en temps réel les efforts extérieurs. Une des applications visées est d'injecter un effort  $F$  qui soit bien proportionnel à  $V$ .

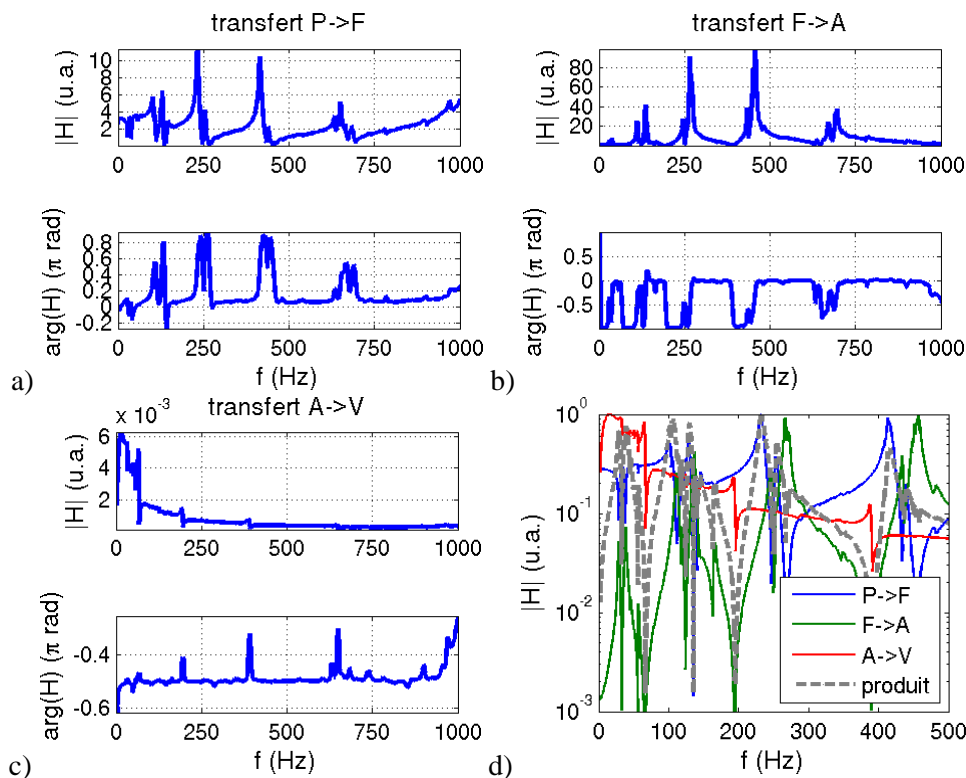


Figure 5.24. Fonctions de transfert du pot vibrant (a), de la structure (b) et de l'intégrateur analogique (c). Superposition des trois modules et de leur produit, chacune des courbes à son maximum normé à 1 (d).

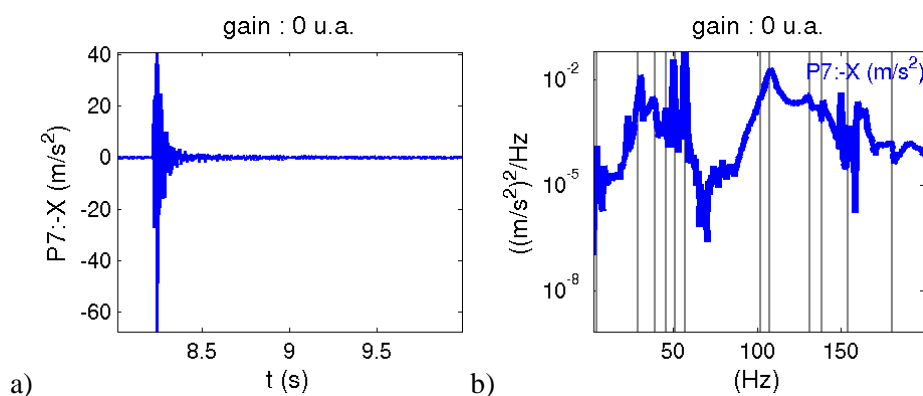
La comparaison de ces trois transferts sur la bande 0 – 500 Hz montre que chacun a ses propres pics. Le produit de ces trois transferts n'est pas plat. Or, si on les multiplie par le transfert *plat* de l'ampli de tension, on devrait trouver une fonction de transfert égale à 1 pour toutes les fréquences, qui est la fonction de transfert entre  $F$  et  $F$  de la boucle fermée. On voit donc que le contrôle actif ne sera pas parfait. Le transfert entre  $V$  et  $F$ , donc proportionnel au transfert entre  $P$  et  $F$ , n'est pas plat et n'a pas un déphasage nul. En contrôle actif, on n'injectera donc pas la bonne quantité d'énergie fréquence par fréquence. Surtout, on injectera

parfois de l'énergie en opposition de phase par rapport à la déstabilisation souhaitée : sur certaines fréquences, le pot aura un effet stabilisateur et non déstabilisateur. Néanmoins, on verra dans la section suivante que, malgré ces limitations, on réussit à déstabiliser le tube. On garde donc telle quelle la chaîne de contrôle actif mais aucune corrélation calcul-essai ne sera possible.

### 5.3.3. Analyse expérimentale de l'influence du gain de déstabilisation

Dans cette section, on adopte la même démarche que pour les simulations numériques de la section 5.2. On place la contre-réaction colocalisée à la même altitude  $z_A = -0,35$  m, soit légèrement sous le point P3. On va augmenter le gain de la boucle de rétro-action et présenter les différents comportements observés. On peut effectivement rendre instable le tube libre et les chocs stabilisent la dynamique globale du système. Comme en 4.2 et 4.3, on regarde principalement la dynamique locale du DDL P7X, situé au milieu du cintre et qui permet d'observer tous les modes hors-plan. Les acquisitions sont réalisées à une fréquence d'échantillonnage de 5120 Hz. Les DSP sont calculées avec une fenêtre de Hann de 10 s, et un recouvrement de 66 %. Si le phénomène observé dure moins de 10 s, on n'utilise qu'une fenêtre, aussi longue que le phénomène : l'estimateur de DSP ne se base alors que sur une fenêtre (donc pas de moyenne) et la résolution fréquentielle est plus grande que 0,1 Hz.

Dans un premier temps, on considère un gain quasi nul. Le tube n'est pas excité par la boucle de rétroaction et on est quasiment en boucle ouverte. En l'absence d'effort extérieur, le tube est immobile. On observe en Figure 5.25 les évolutions temporelles et les DSP de l'accélération P7X. On excite manuellement le tube par des chiquenaudes. Suite à ces impacts, même d'amplitude plus élevée, le tube se relaxe selon une exponentielle décroissante typique. La DSP d'une exponentielle décroissante ou moyennée sur l'ensemble de l'évolution temporelle sont proches. Lors de cet essai, il n'y avait pas de choc entre le tube et la PE, ce qui est confirmé par la présence d'anti-résonances sur les DSP. On peut donc considérer qu'on a une caractérisation du système libre avec son seul amortissement structural. On relève les fréquences prépondérantes des vingt-deux DSP, celles qui ressortent lorsqu'on les trace en échelle linéaire, afin de détecter une modification des fréquences de réponse en fonction du gain. Ces fréquences sont différentes de celles considérées jusqu'ici car le banc a été modifié entre les essais de corrélation calcul-essai et ceux de déstabilisation.



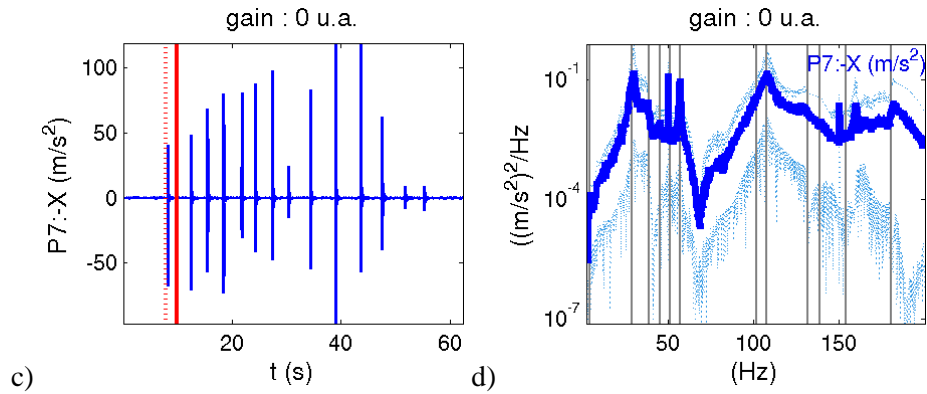


Figure 5.25. Dynamique observée en P7X pour un gain  $a$  de 0 u.a.. Zoom temporel sur une relaxation (a) et DSP correspondante (b). Évolution temporelle totale (c), où les traits rouges séparent les différents comportements, et DSP correspondante (d). Les traits verticaux gris notent les fréquences prépondérantes de réponse (hors-plan et dans le plan) pour un gain  $a$  de 0 u.a..

En augmentant le gain  $a$  à 34 u.a., on a toujours un système libre stable mais son amortissement est plus faible. On trace le comportement observé en Figure 5.26. On remarque que le temps caractéristique de décroissance est plus élevé que précédemment. La DSP moyennée est très semblable à celle observée précédemment. La DSP correspondant à une chiquenaude a des pics dont les fréquences sont celles du système libre mais les amplitudes sont différentes.

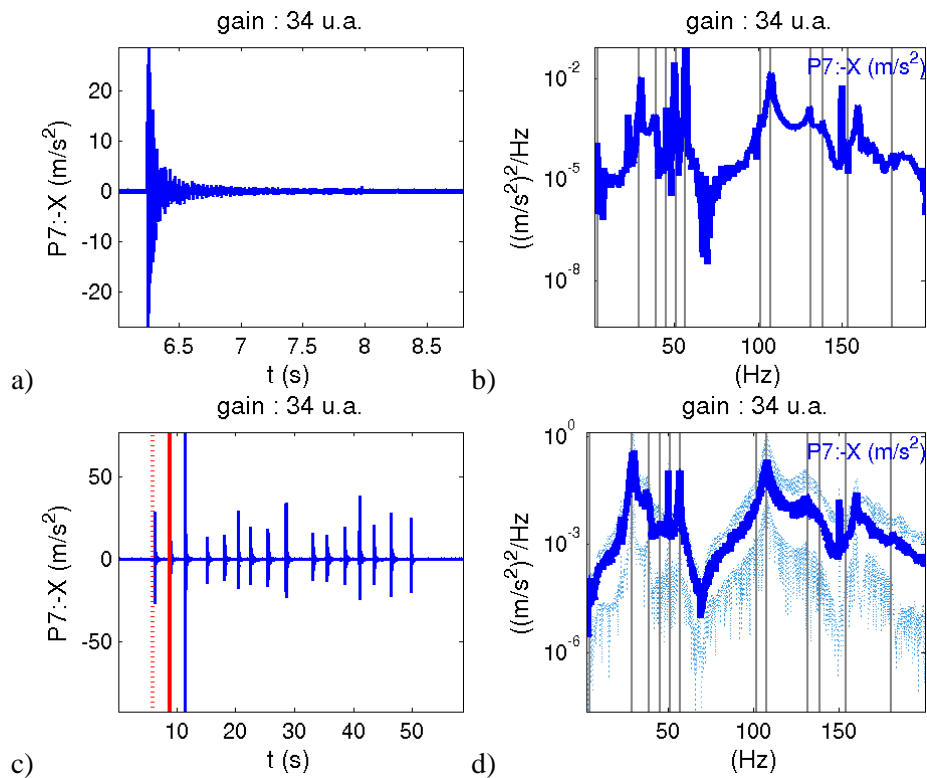


Figure 5.26. Dynamique observée en P7X pour un gain  $a$  de 34 u.a.. Zoom temporel sur une relaxation (a) et DSP correspondante (b). Évolution temporelle totale (c), où les traits rouges séparent les différents comportements, et DSP correspondante (d). Les traits verticaux gris notent les fréquences prépondérantes de réponse (hors-plan et dans le plan) pour un gain  $a$  de 0 u.a..

Le comportement reste linéaire pour  $a=38$  u.a. et est tracé en Figure 5.27. L'amortissement reste positif mais se rapproche de zéro, la relaxation étant encore plus lente.



Tant sur la DSP d'une relaxation que sur la DSP moyenne, les fréquences de réponse ne sont pas modifiées. Les amplitudes des différents pics varient.

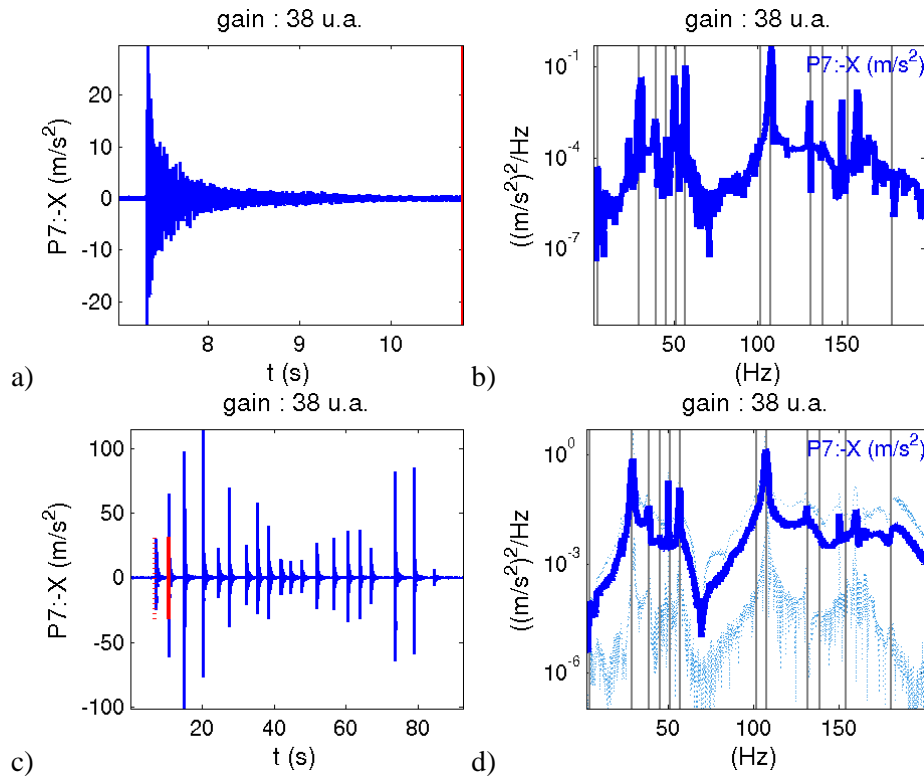
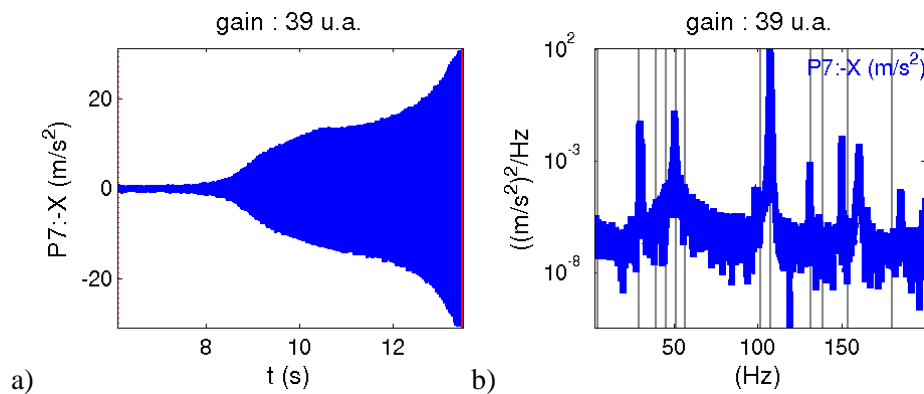


Figure 5.27. Dynamique observée en P7X pour un gain  $a$  de 38 u.a.. Zoom temporel sur une relaxation (a) et DSP correspondante (b). Évolution temporelle totale (c), où les traits rouges séparent les différents comportements, et DSP correspondante (d). Les traits verticaux gris notent les fréquences prépondérantes de réponse (hors-plan et dans le plan) pour un gain  $a$  de 0 u.a..

Une très légère augmentation de  $a$  à 39 u.a. rend la dynamique instable, comme le montre l'exponentielle croissante de la Figure 5.28. Plusieurs modes semblent instables car la déstabilisation semble résulter d'au moins deux exponentielles croissantes. La DSP de la phase de déstabilisation initiale répond toujours aux fréquences libres. Il doit donc y avoir peu de chocs car la raideur apparente est faible (sinon, les fréquences de réponses auraient augmenté). Il y a des chocs, comme le montre la disparition des anti-résonances.





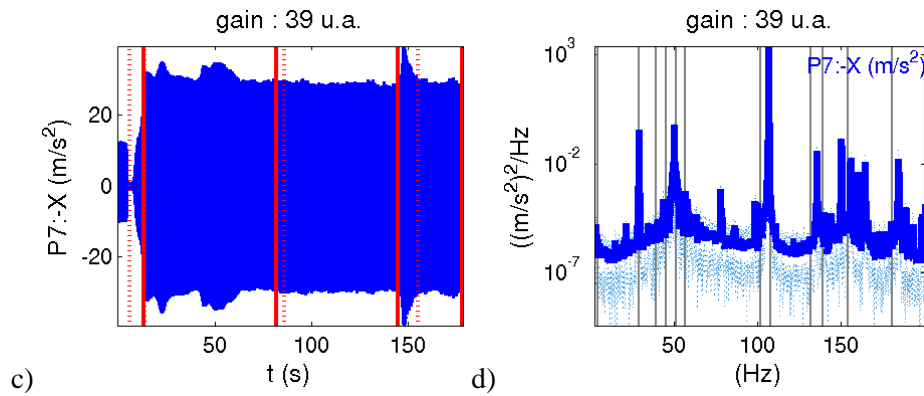


Figure 5.28. Dynamique observée en P7X pour un gain  $a$  de 39 u.a.. Zoom temporel sur une relaxation (a) et DSP correspondante (b). Évolution temporelle totale (c), où les traits rouges séparent les différents comportements, et DSP du régime stabilisé entre 86 s et 145 s (d). Les traits verticaux gris notent les fréquences prépondérantes de réponse (hors-plan et dans le plan) pour un gain  $a$  de 0 u.a..

On sépare l'évolution temporelle en différents comportements en observant les vingt-deux évolutions temporelles : les différences de comportement sont très visibles, les amplitudes de chaque accélération étant constantes sur de longues périodes de temps et changeant simultanément (Figure 5.29). On signale, sur les évolutions temporelles, par un pointillé vertical rouge et un trait plein vertical rouge le début et la fin de chaque comportement stable observé. On note l'apparition de régimes stabilisés de longues durées, supérieures à la minute.

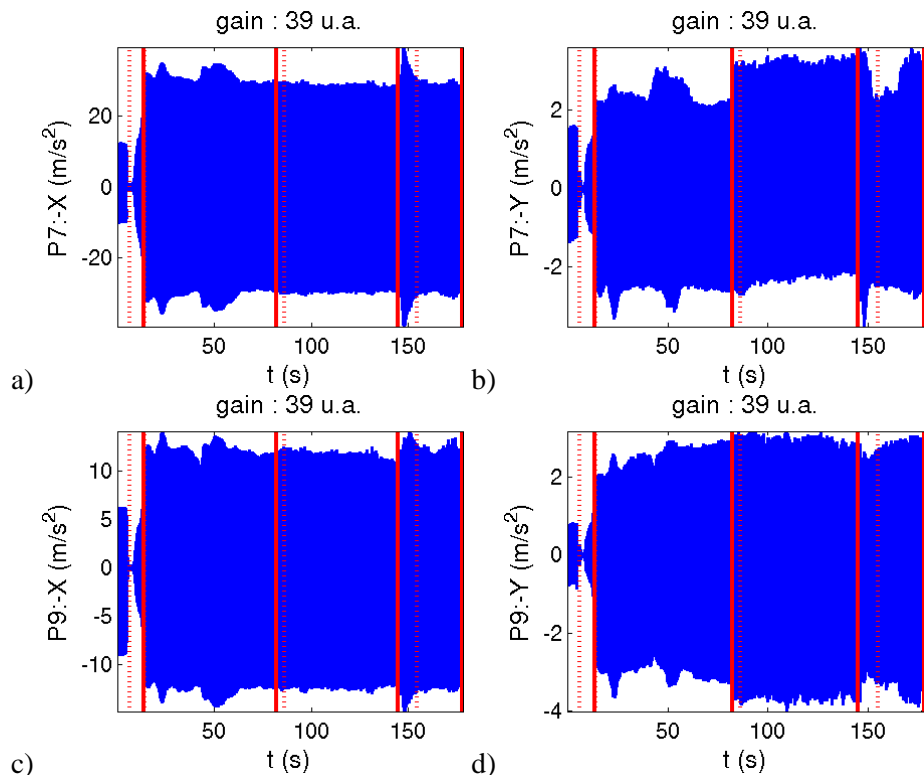


Figure 5.29. Dynamique observée en P7X pour un gain  $a$  de 39 u.a.. Zoom temporel sur une relaxation (a) et DSP correspondante (b). Évolution temporelle totale (c), où les traits rouges séparent les différents comportements, et DSP du régime stabilisé entre 86 s et 145 s (d). Les traits verticaux gris notent les fréquences prépondérantes de réponse (hors-plan et dans le plan) pour un gain  $a$  de 0 u.a..

Les fréquences des DSP ne changent pas selon les comportements mais seulement les amplitudes. Ceci est vérifié en Figure 5.30 où on trace les DSP pour quatre comportements différents. Les DSP selon  $DX$  présentent ici des différences mineures et les fréquences changent peu. En observant toutes les DSP, on se rend compte que les différents comportements résultent d'une répartition différente du mouvement entre  $DX$  et  $DY$ . Le couplage entre ces directions, introduit par l'obstacle folié, peut changer au cours du temps. On n'a pas cherché à mieux comprendre ces changements de comportements, qui se traduisent par les changements d'amplitude des pics de DSP.

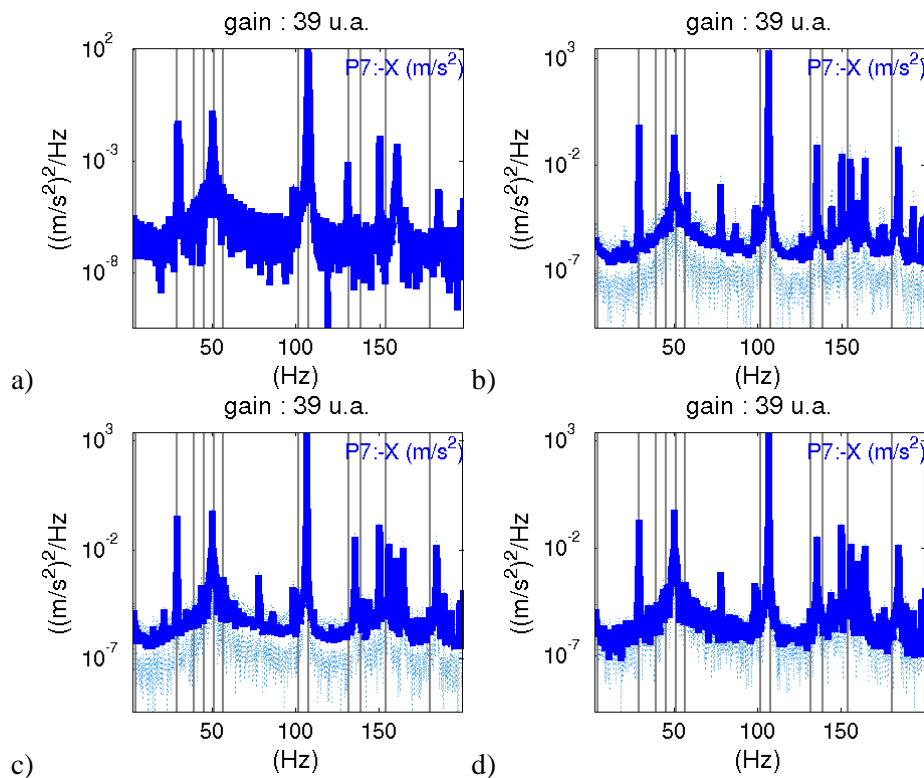


Figure 5.30. DSP de quatre régimes stabilisés pour le DDP P7X et un gain  $a$  de 39 u.a. : exponentielle croissante entre 6,1 et 13,5 s (a), bouffées entre 14 et 82 s (b), régime stabilisé entre 86 et 145 s (c), régime stabilisé entre 155 et 178 s. Les traits verticaux gris notent les fréquences prépondérantes de réponse (hors-plan et dans le plan) pour un gain  $a$  de 0 u.a..

Une augmentation du gain conduit, comme prévu, à une phase d'exponentielle croissante plus courte, comme montré en Figure 5.31. Sur le DDL P7X, l'exponentielle semble s'arrêter vers 11,2 s avant d'entrer dans un régime d'amplitude constante mais l'accélération, notamment sur des DDL dans le plan, continue cette phase d'exponentielle croissante jusqu'à 12,6 s. Les chocs ne sont pas encore suffisants pour faire varier les fréquences de réponses. Les DSP ont cependant changé d'allure par rapport au cas  $a=39$  u.a. : les pics sont plus larges et le niveau minimal n'est plus constant sur la bande de fréquences considérée ici. La DSP de l'exponentielle croissante est chahutée car la résolution fréquentielle est faible.

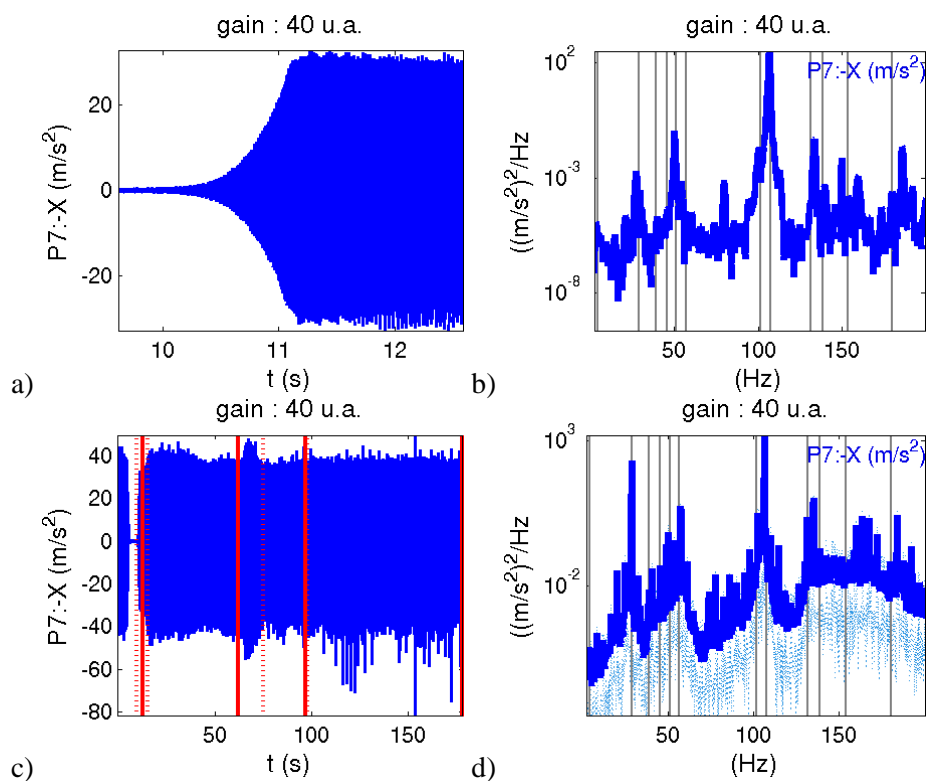
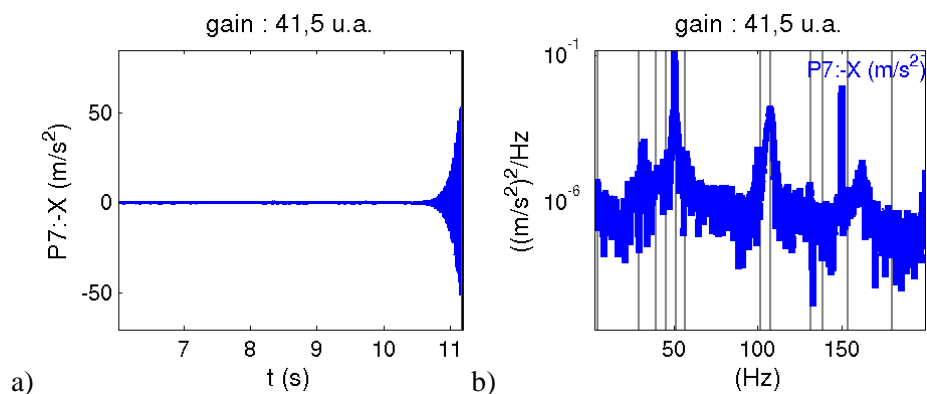


Figure 5.31. Dynamique observée en P7X pour un gain  $a$  de 40 u.a.. Zoom temporel sur une relaxation (a) et DSP correspondante (b). Évolution temporelle totale (c), où les traits rouges séparent les différents comportements, et DSP du régime stabilisé entre 98 s et 178 s (d). Les traits verticaux gris notent les fréquences prépondérantes de réponse (hors-plan et dans le plan) pour un gain  $a$  de 0 u.a..

La valeur de gain la plus forte accessible expérimentalement a été 41,5 u.a., pour des raisons de saturation de l'électronique, décollement de la fixation de la tige du pot au tube et éventuellement flambement de celle-ci. Comme montré sur la Figure 5.32, la phase d'exponentielle croissante dure moins d'une seconde. Dès que le tube est relâché, les déplacements croissent très vite et on aboutit à un régime permanent de chocs. Les amplitudes de l'accélération P7X sont environ trois fois plus élevées que pour le cas  $a=40$  u.a.. Lors du régime stabilisé, le tube ne répond que sur un pic à 107,5 Hz : la répartition des amplitudes des pics a notablement changé. On aborderait une partie de transition en fonction de l'amplitude. À noter que le niveau sonore induit par cet essai nécessite de porter des protections auditives : les impacts entre tube et PE sont très bruyants. Pour de valeurs plus élevées du gain, l'ampli de tension ou le pot saturaient.



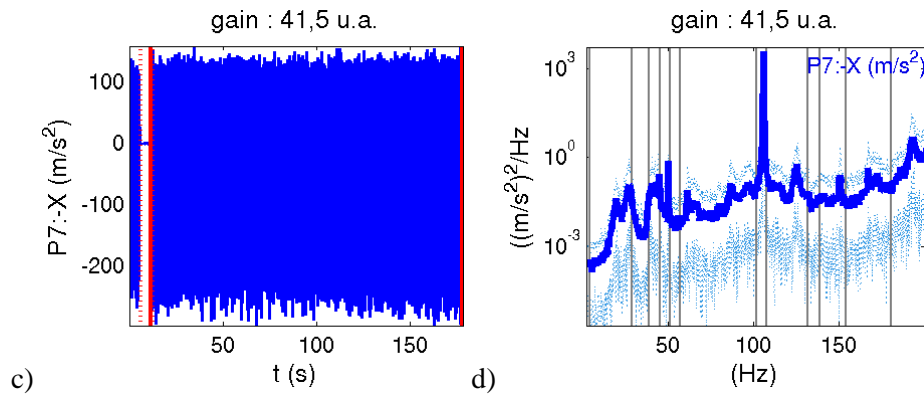


Figure 5.32. Dynamique observée en P7X pour un gain  $a$  de 40 u.a.. Zoom temporel sur une relaxation (a) et DSP correspondante (b). Évolution temporelle totale (c), où les traits rouges séparent les différents comportements, et DSP du régime stabilisé entre 98 s et 178 s (d). Les traits verticaux gris notent les fréquences prépondérantes de réponse (hors-plan et dans le plan) pour un gain  $a$  de 0 u.a..

Cet essai valide la démarche de déstabilisation-restabilisation. En augmentant le gain de la boucle de contre-réaction colocalisée à la vitesse, on fait diminuer l'amortissement de la structure libre. Une fois le tube instable lâché, la contre-réaction colocalisée sur la vitesse multiplie le bruit de mesure puis entraîne une augmentation de l'amplitude des déplacements. Différents régimes stabilisés d'amplitude bornée se succèdent. Pour les régimes identifiés et les capteurs considérés, les pics prépondérants sont tous de fréquence inférieure à 500 Hz et le plus souvent de fréquence inférieure à 200 Hz : on déstabilise bien les basses fréquences. On a donc une preuve expérimentale que la seule non-linéarité de contact peut stabiliser un système libre instable.

Les résonances se font aux mêmes fréquences pour les différents régimes ; les amplitudes des pics changent. Certes le banc a été modifié par rapport à la configuration ayant servi à montrer la transition en fonction de l'amplitude en 4.2, mais en cas de telle transition, on devrait voir les fréquences bouger. Ici, le banc a changé, donc les fréquences libres aussi. Mais les fréquences des DSP associées au gain le plus élevé sont égales aux fréquences libres. Donc, le nombre de chocs par unité de temps doit être faible. Ceci est confirmé à l'oreille lors des essais, où chaque choc reste discernable. Donc, pour analyser une raideur équivalente expérimentale, il faut avoir un banc d'essais et une boucle de contrôle permettant d'avoir plus de chocs par seconde. Pour le moment, on en a soit trop peu, soit directement une instabilité par saturation des équipements.

En perspective de travaux futurs, on pourrait réaliser des *spectrogrammes*, nappe de DSP de chaque fenêtre, en fonction de l'instant de début de la fenêtre. Cet outil d'analyse temps-fréquence permettrait de gagner de l'information sur les transitions de comportement. Par ailleurs, la mesure des forces de choc et l'estimation d'une raideur de contact permettraient de cartographier un degré de non-linéarité.

## 5.4. Vers un calcul de stabilité fluide-élastique

On a vu au Chapitre 4 que le tube subissait une transition en fonction de l'amplitude, la répartition des raideurs apparentes dépendant de cette amplitude. On vient de voir dans les

trois sections précédentes, que l'instabilité du tube libre ne présageait pas forcément de celle du tube sous contact, qu'il soit linéaire (permanent) ou non-linéaire. Dans cette section, on essaie de montrer comment on pourrait coupler le contact avec les outils de couplage fluide-structure implémentés à EDF, notamment l'outil-métier GeViBus. La plupart des références portent vers des notes EDF R&D de capitalisation ; pour plus de détails, se référer aux références qu'elles contiennent. On commence par introduire les grandeurs thermo-hydrauliques et mécaniques nécessaires aux calculs fluide-structure en 5.4.1. En 5.4.2, on montre comment l'effet du fluide est décrit par des corrélations fluide-élastique adimensionnelles. Ces corrélations permettent de prédire la stabilité en résolvant un problème fréquentiel. En 5.4.3, on aborde la stabilité de simulations temporelles, la difficulté est alors d'exprimer le couplage fluide-structure. On montre comment prendre en compte le contact en 5.4.4.

### 5.4.1. Grandeurs thermo-hydrauliques et mécaniques

Les calculs fluide-structure présentés ci-après résultent plus du chaînage de code que du couplage à proprement parler. Des calculs thermo-hydrauliques de GV complet sont effectués et stockés dans une base de données. On a alors les masses volumiques des fluides interne (primaire) et externe (secondaire), la vitesse du fluide externe et le taux de vide, proportion d'eau vapeur dans le mélange diphasique constituant le fluide externe, en tout point du GV. Seule la composante  $V$  de la vitesse orthogonale au tube et dans le plan du tube est prise en compte dans les études EDF [Gau1]. La position de cette composante est explicitée sur le schéma de la Figure 5.33. D'autres industriels utilisent la composante normale au tube  $(U^2+V^2)^{1/2}$ .

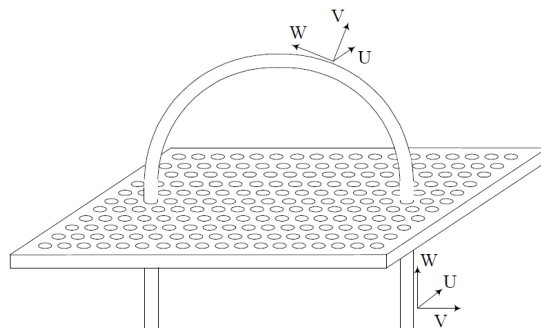


Figure 5.33. Décomposition de la vitesse du fluide externe sur un repère dépendant de l'abscisse curviligne.

Le long d'un tube, on a donc accès à  $\rho_i(x)$ ,  $\rho_e(x)$  et  $V(x)$  en fonction de l'abscisse curviligne  $x$ . Ces trois grandeurs sont tracées en Figure 5.34. Les masses volumiques des fluides internes et externes varient différemment selon l'abscisse curviligne. La masse volumique interne décroît peu entre l'entrée de branche froide et la sortie de branche chaude. La masse volumique du fluide externe a un profil en U : maximale en bas du GV et minimale à l'apex. Cette évolution est due à la nature diphasique du fluide externe : eau liquide en bas et diphasique eau-vapeur en haut avec des taux de vide de plus de 90%. La composante orthogonale au tube et dans le plan du tube de la vitesse du fluide externe présente deux zones caractéristiques. Cette composante est élevée au niveau du cintre. Sauf aux endroits où le fluide externe est injecté, sa vitesse  $V$  est faible. Elle est élevée au niveau du cintre. On remarque l'effet du passage au travers des PE sur les jambes du tube : le fluide a alors un mouvement plutôt tangent au tube et la composante  $V$  s'annule. L'excitation par le fluide

externe est donc concentrée au niveau du cintre et excite les modes de cintre ayant de fortes composantes hors-plan.

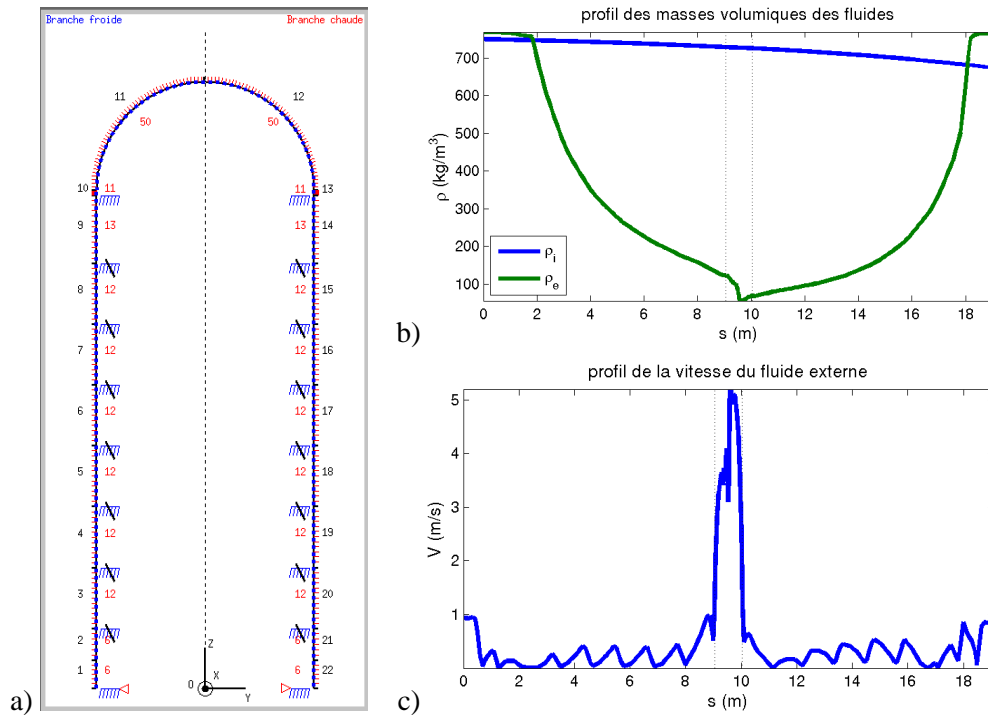


Figure 5.34. a) Maillage d'un tube obtenu en chargeant un calcul thermo-hydraulique THYC. Les conditions aux limites appliquées aux PE sont affichées. En noir, l'indice du tronçon ; en rouge, le nombre de nœuds du tronçon. b) Masses volumiques des fluides interne (bleu) et externe (vert) en fonction de l'abscisse curviligne. c) Vitesse  $V$  du fluide externe en fonction de l'abscisse curviligne.

Une fois les grandeurs thermo-hydrauliques chargées, on peut modéliser numériquement chaque tube. Les études ne se font pour le moment qu'avec un seul tube, modélisé dans GeViBus comme une poutre de Bernoulli. En choisissant le type de GV et la position du tube dans ce GV, la géométrie et les paramètres matériaux sont donnés. La discrétisation de la poutre est imposée par le maillage utilisé pour le calcul thermo-hydraulique : il n'est pas suffisamment raffiné au niveau des PE pour implémenter le modèle de contact distribué retenu depuis la section 3.2.

Les conditions aux limites imposées au tube sont linéaires pour le calcul de stabilité. Elles sont montrées sur la Figure 5.34. Le tube est encastré au niveau de sa base et appuyé sur les PE inférieures. La liaison considérée entre le tube et la PE supérieure est soit un appui géométrique, soit un encastrement géométrique. En situation dégradée, cette liaison peut cependant être inexistante, cas considéré par l'EPRi dans leurs calculs de stabilité. On peut aussi définir une non-linéarité de choc et effectuer des simulations numériques temporelles non-linéaires. L'implémentation du modèle de contact distribué ne devrait pas poser de problème, une fois le maillage raffiné. L'ajout de raideurs de contact linéaires est possible. L'implémentation d'un modèle de contact, non-linéaire ou permanent, ne suppose donc qu'une modification manuelle des scripts de lancement de calcul *Code\_Aster*.

Les efforts extérieurs, effet du fluide sur la structure, étant décrits ultérieurement en 5.4.2, il ne reste plus qu'à définir un modèle d'amortissement pour compléter la modélisation du tube. Si le tube est encastré, la pratique à EDF consiste à ne retenir que l'amortissement

structurel, pris modal à 0,2 %. Si le tube est appuyé, des sources supplémentaires d'amortissement entrent en jeu :

- La viscosité du fluide (même au repos), prise en compte dans les corrélations fluide-élastiques ;
- non-linéaire associé aux chocs et aux frottements dans les supports à jeu ;
- de film fluide induit par l'écrasement de la lame fluide entre le tube et les PE ;
- lié à la nature diphasique du fluide.

En fonction du cas de calcul, différents termes sont donc à sommer. Ces différentes contributions à l'amortissement ont été analysées expérimentalement puis tabulées ou interpolées. On retrouve dans [Gau1] les expressions

$$\begin{cases} \zeta_{NL} = 0,7 \frac{N-1}{N} \% \\ \zeta_{LF} = \frac{2200}{f} \frac{N-1}{N} \frac{\bar{\rho}_e d_e^2}{\rho_{eq} (d_e^2 - d_i^2)} \left(\frac{e}{l}\right)^{0,6} \end{cases} \quad (5.5)$$

de l'amortissement non-linéaire et de l'amortissement de lame fluide en fonction du nombre  $N$  de supports, de la fréquence  $f$ , d'une masse volumique équivalente  $\rho_{eq}$  et d'une longueur caractéristique  $l$ . L'amortissement modal en condition appuyé, donc prenant en compte ces cinq contributions, est alors de l'ordre de 2 %.

#### 5.4.2. Stabilité et réponse dans le domaine fréquentiel

L'effet du fluide sur la structure a été étudié grâce à des maquettes représentatives, en similitude de structure et de fluide par rapport à un tube GV réel. L'effet du fluide est décomposé en deux parties [Ado2] :

- une partie  $B$  dépendant du mouvement de la structure, dite *fluide-élastique*, qui modifie les paramètres modaux de la structure ;
- une partie  $f_{turb}$  indépendante du mouvement de la structure, dite *turbulente*, générée par les instationnarités naturelles de l'écoulement, comme la turbulence ou l'aspect diphasique.

Dans le domaine de Laplace et sur base complète, le mouvement peut s'écrire

$$\left[ Ms^2 + Cs + K - B(U, s) \right] \{q(U, s)\} = \{f_{turb}(U, s)\}. \quad (5.6)$$

Les différentes grandeurs dépendent de la vitesse moyenne de l'écoulement extérieur  $U$  et de la variable de Laplace  $s$ . Les spectres d'excitation turbulent ont été identifiés sur la base d'essais expérimentaux [Bod1] et tabulés [Ado1]. Ils dépendent d'une longueur de corrélation et l'excitation répartie n'est pas totalement spatialement décorrélée le long du tube.

Par ailleurs, les paramètres modaux de la structure sont différents en air, en fluide au repos et en fluide en écoulement. Une démarche générale, présentée notamment dans [Bod1] et [Gos1], consiste à modéliser ces changements de paramètres modaux comme une masse, un

amortissement et une raideur ajoutés par le fluide. En comparant les paramètres modaux de ces trois configurations, on arrive à remonter aux matrices ajoutées par le fluide. On fait différentes hypothèses, notamment de séparation et de non-couplage des modes. On considère que les déformées en écoulement sont égales aux déformées au repos.

On considère que le fluide au repos n'a qu'un effet de *masse ajoutée*. Pour le prendre en compte, on ne calcule pas la contribution  $[M_r]$  du fluide à la matrice de masse  $[M+M_r]$ . On calcule directement une matrice de masse  $[M+M_r]$  d'un tube de masse volumique apparente  $\rho_{eq}(x)$ , dépendante de l'abscisse curviligne  $x$  et des grandeurs thermo-hydrauliques,

$$\rho_{eq}(x) = \frac{1}{d_e^2 - d_i^2} \left( \rho (d_e^2 - d_i^2) + \rho_i(x) d_i^2 + \rho_e(x) \frac{2C_m}{\pi} d_e^2 \right). \quad (5.7)$$

Elle correspond à un tube de même section mais de masse volumique moyennée, pondération de celle du fluide interne, du matériau du tube et du fluide externe. Le coefficient  $C_m$ , coefficient de masse ajoutée, dépend du type de GV (confinement, pas du réseau de tube,...) et est identifié à partir de résultats expérimentaux. Il décrit sur quelle distance le fluide externe *colle* au tube. On calcule alors les modes en fluide en repos

$$\left[ K - (M + M_r) \omega_{j,r}^2 \right] \{ \phi_{j,r} \} = \{ 0 \}. \quad (5.8)$$

Comme on a fait l'hypothèse que l'écoulement ne changeait pas les déformées par rapport à la configuration en fluide au repos, on a donc directement les déformées modales  $\{ \psi_{j,e} \}$  en écoulement. La pratique à EDF consiste à ne retenir que les composantes orthogonales au plan du tube, donc celles selon  $DX$  [Gau1], notées  $\tilde{\psi}$ . Ce choix est cohérent avec celui de ne retenir que la composante  $V$  de la vitesse.

Les profils de vitesse externe, définis pour une zone d'excitation précise d'abscisse curviligne comprise entre  $x_e$  et  $x_e+L_e$ , généralement le cintre du tube, sont adimensionnalisés selon

$$V(x) \frac{U}{\frac{1}{L_e} \int_{x_e}^{x_e+L_e} V(x) dx} = \frac{V(x)}{\bar{V}} U. \quad (5.9)$$

En changeant arbitrairement la vitesse moyenne, on peut artificiellement explorer une large gamme de *vitesse d'écoulement*  $U$ . On note dorénavant  $V$  cette vitesse normée. On introduit une vitesse réduite adimensionnalisée, dépendant de la vitesse, de la fréquence et d'une grandeur caractéristique comme

$$V_r(x; U, s) = \frac{V(x; U)}{f \cdot d_e}. \quad (5.10)$$

On introduit alors les corrélations fluide-élastique,  $C_d$  et  $C_k$ , qui permettent d'exprimer le couplage, supposé diagonal, sur la base des modes propres en fluides au repos par

$$\begin{aligned} \{ \psi_{j,e} \}^T B(U, s) \{ \psi_{j,e} \} = s \cdot \int_{x_e}^{x_e+L_e} \frac{1}{2} \rho_e(x) V(x) d_e C_d(V_r(x)) \{ \tilde{\psi}_{j,e}(x) \}^T \{ \tilde{\psi}_{j,e}(x) \} dx \\ + \int_{x_e}^{x_e+L_e} \frac{1}{2} \rho_e(x) V(x)^2 C_k(V_r(x)) \{ \tilde{\psi}_{j,e}(x) \}^T \{ \tilde{\psi}_{j,e}(x) \} dx. \end{aligned} \quad (5.11)$$

On reconnaît l'adimensionnalisation classique de mécanique des fluides. Les corrélations ne sont que la traduction d'un amortissement et d'une raideur, apportés mode par mode par



l'écoulement et constatés expérimentalement. Elles sont définies sur des intervalles de vitesse réduite. Sur chaque intervalle, elles sont exprimées comme somme de monômes de degré -3 à 7 de la vitesse réduite  $V_r$  : ce sont des fractions rationnelles. La continuité et la dérivabilité ont été assurées lors de l'interpolation des essais expérimentaux. Elles sont extrapolées pour les vitesses réduites inaccessibles expérimentalement. On les considère nulles pour les faibles vitesses réduites. Les corrélations fluide-élastiques sont donc régulières : au moins  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^+$  et  $C^\infty$  par morceaux. Sur chaque plage de vitesse  $j$ , on a

$$C_{d|k}^j(V_r) = \sum_{l=-3}^7 \alpha_{j,l}^{d|k} V_r^l. \quad (5.12)$$

Des corrélations issues de la campagne d'essais Viscache 2 [Gos1] et souvent utilisés pour l'étude de stabilité sont tracées en Figure 5.35. Il y a un effet de diminution soudaine de l'amortissement et d'augmentation régulière de la rigidité quand  $V_r$  augmente. Les fréquences propres augmentent donc et, passé une certaine vitesse réduite, l'amortissement d'un mode peut devenir négatif.

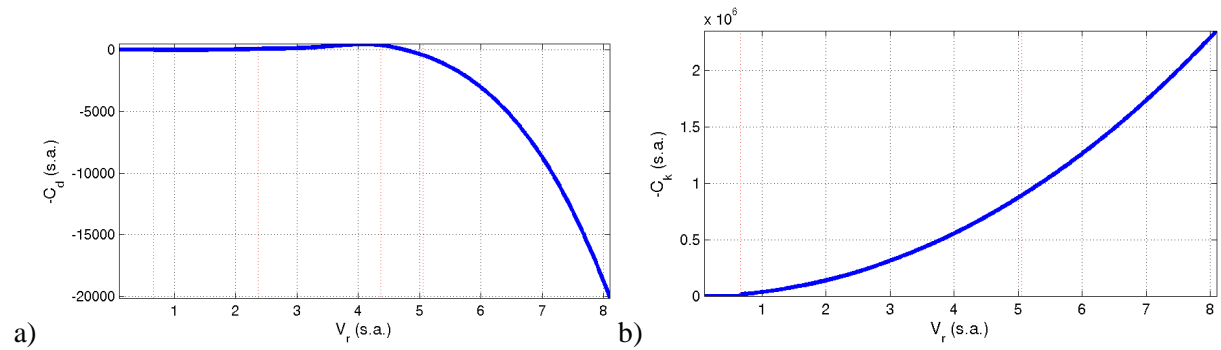


Figure 5.35. Tracé de  $C_d$  (a) et  $C_k$  (b) pour un essai de la campagne Viscache 2.

Mode par mode, on peut donc chercher les valeurs propres, connaissant les déformées. Chaque pôle  $\lambda_{j,e}$  est décomposé en fréquence et amortissement selon

$$\lambda_{j,e} = -\zeta_{j,e} \omega_{j,e} + i \omega_{j,e} \sqrt{1 - \zeta_{j,e}^2} \quad \text{avec} \quad |\lambda_{j,e}| = \omega_{j,e} = 2\pi f_{j,e}, \quad (5.13)$$

et est solution de

$$\begin{aligned} & \left( \{\psi_{j,e}\}^T [M + M_r] \{\psi_{j,e}\} \right) \lambda_{j,e}^2 + \\ & \left( \{\psi_{j,e}\}^T [C] \{\psi_{j,e}\} - \int_{x_e}^{x_e+L_e} \frac{1}{2} \rho_e(x) V(x) d_e C_d \left( 2\pi \frac{V(x)}{|\lambda_{j,e}| d_e} \right) \{\tilde{\psi}_{j,e}(x)\}^T \{\tilde{\psi}_{j,e}(x)\} dx \right) \lambda_{j,e} + \\ & \left( \{\psi_{j,e}\}^T [K] \{\psi_{j,e}\} - \int_{x_e}^{x_e+L_e} \frac{1}{2} \rho_e(x) V(x)^2 C_k \left( 2\pi \frac{V(x)}{|\lambda_{j,e}| d_e} \right) \{\tilde{\psi}_{j,e}(x)\}^T \{\tilde{\psi}_{j,e}(x)\} dx \right) = \{0\}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

On doit donc trouver la racine d'une fraction rationnelle en  $\lambda_{j,e}$ , de degré *a priori* compris entre -7 et 4. Même si les corrélations fluides-élastiques s'écrivent sous forme de fractions rationnelles en la vitesse réduite, le problème ne se résume pas à trouver les racines d'une fraction rationnelle : la dépendance des corrélations fluides-élastiques en la fréquence oblige à considérer un problème d'optimisation non-linéaire. En effet, les coefficients affectant les monômes de la fraction rationnelle dépendent eux-mêmes de la racine à trouver par le biais de l'intégrale des corrélations fluides-élastiques. Ce problème non-linéaire de minimisation

d'une fonction (au moins)  $C^2$  par morceaux est résolu par une méthode quasi-Newton de type BFGS.

Les pôles sont recherchés pour différentes vitesses d'écoulement  $U$ . La plus faible donnant un amortissement modal négatif est définie comme la vitesse critique d'instabilité. Une telle vitesse d'écoulement ne doit pas se retrouver dans un GV. Pour une vitesse d'écoulement stable, comme on connaît le spectre turbulent, on peut par la suite calculer en fréquentiel l'amplitude vibratoire.

Les modes n'ayant pas de composantes de translation sur la direction hors-plan ne peuvent être instables, sous le formalisme décrit ci-dessus. En effet, les deux intégrales apparaissant dans (5.14) sont alors nulles. Les modes instables ont donc forcément des composantes hors-plan non nulles : ce sont des modes de flexion hors-plan ou de torsion.

Même si le terme  $\rho_e V$  est comparativement plus faible à l'apex qu'en pied de tube, les modes les plus susceptibles d'être instables sont bien ceux qui ont les plus fortes déformations sur le cintre. En effet, comme  $V$  est maximale sur le cintre,  $C_d$  est très négative sur le cintre. Cette participation dans l'intégrale n'est pas annulée par le terme  $\{\psi_{j,e}(x)\}^T \{\psi_{j,e}(x)\}$  pour les modes ayant de grandes déformations selon  $DX$  sur le cintre. Alors, le terme de correction fluide-élastique sur l'amortissement devient très négatif. Les modes les plus instables sont donc les modes de flexion hors-plan ou de torsion autour de l'axe vertical ayant des composantes sur le cintre relativement importantes.

Comme la corrélation est négative et croissante en fonction de la fréquence, quand celle-ci est suffisamment faible, les modes basses fréquences sont plus susceptibles d'être instables. En effet, si  $f$  diminue,  $V_r$  augmente et  $-C_d$  devient encore plus négatif. On voit donc que les modes instables sont les premiers modes de flexion hors-plan ou de torsion. Un bon candidat est donc le premier mode de flexion hors-plan. Cette même remarque montre que les chocs pourraient avoir un effet stabilisateur en fluide-élastique. En effet, s'il y a des chocs, la fréquence apparente augmente, donc la vitesse réduite diminue :  $-C_d$  augmente et éventuellement redevient positif. Deux mécanismes stabiliseraient donc le tube : diminution de la déstabilisation fluide-élastique et modification des pôles complexes sous l'effet d'une raideur bilatérale.

Par ailleurs, toute la procédure décrite dans cette section peut s'écrire de manière immédiate sur une base réduite. Ceci ne permettrait cependant qu'un gain de temps sur la recherche des déformées modales en fluide au repos.

### 5.4.3. Réponse dans le domaine temporel

On vient de voir qu'en fréquentiel, l'effet des corrélations fluide-élastiques consistait en une modification des fréquences et amortissements, les déformées restant celles associées au fluide au repos. Ceci a conduit à une prise en compte simplifiée, et naturelle de prime abord, des corrélations fluide-élastique pour des simulations temporelles avec non-linéarité de contact [Gay1]. La dynamique est projetée sur la base des modes libres en eau ; les fréquences et amortissements sont ceux issus de la recherche en (5.14) des pôles sous couplage fluide-élastique. Des limitations des algorithmes d'intégration temporelle alors implémentés dans *Code\_Aster* empêchaient de bien représenter le départ en instabilité, les algorithmes n'étant pas adaptés à de faibles amortissements modaux.

Un schéma d'intégration spécialement dédié au calcul des tubes de GV sous excitation fluide-élastique et non-linéarité de choc a alors été développé à EDF R&D [Gay1] : le schéma ITMI (Intégration Temporelle par Moyenne Intégrale), qui a été réanalysé récemment [Bri1]. Les non-linéarités de choc ne sont pas traitées comme des efforts non-linéaires au second membre. La démarche se rapproche de celle utilisée en [Erv1], à savoir le basculement entre le système en vol libre et le système en contact. Comme la relation effort-déplacement est affine avec un jeu et comme l'obstacle est circulaire, le système en contact est un système linéaire. Ainsi, les expressions analytiques de l'évolution du déplacement sont accessibles pour les phases sans contact (système libre) et avec contact (système contraint). En calculant précisément les instants de contact et en projetant lors de la transition les coordonnées modales sur la base adéquate, on résout de proche en proche les phases de vol libre et de contact. À chaque changement de système, un problème modal est résolu afin de réorthonormaliser les matrices de masse, raideur et amortissement. L'amortissement extra-diagonal est considéré nul. Le saut de raideur apportée par le fluide est négligé devant le saut de raideur de contact ; l'amortissement apporté par le fluide est réactualisé. La prise en compte des corrélations fluide-élastiques dépend donc de la non-linéarité de contact et le contact est parfaitement résolu sous réserve d'une précision infinie sur la recherche des instants d'entrée et rupture de contact.

D'autres auteurs proposent une autre approche du calcul temporel des instabilités fluide-élastiques, sous non-linéarité de contact, présentée notamment par une équipe du CEA dans [Pit1]. Cette approche utilise une expression directe des corrélations fluide-élastiques dans le domaine temporel. Alors que l'on s'attendrait à faire en temporel des produits de convolution, car la corrélation s'écrivait comme un produit dans le domaine de Laplace, on ajoute simplement des termes de masse, amortissement et raideur ajoutés à l'équation de la dynamique. Sur la base modale  $T$  contenant des modes libres en eau, le mouvement s'écrit alors

$$\begin{aligned} & \left( [M_R] + [M_{r,R}] \right) \{ \ddot{q}_R(t) \} + \left( [C_R] + [C_{fe,R}(t)] \right) \{ \dot{q}_R(t) \} + \\ & \left( [K_R] + [K_{fe,R}(t)] \right) \{ q_R(t) \} = [T^T] \{ f_{turb}(t) \} + [T^T] \{ f_{contact}^{NL}(t) \} \end{aligned} \quad (5.15)$$

en fonction des matrices de masse, amortissement et raideur de la structure libre, de la matrice de masse ajoutée par le fluide  $[M_{r,R}]$  et des matrices, dépendant du temps, d'amortissement  $[C_{fe,R}(t)]$  et de raideur  $[K_{fe,R}(t)]$  ajoutés par l'écoulement. Les expressions de ces deux dernières matrices se rapprochent de celles de (5.14) et sont estimées par

$$\begin{cases} [C_{fe,R}(t)]_{j,k} = \int_{x_e}^{x_e+L_e} \frac{1}{2} \rho_e(x) V(x) d_e C_d \left( 2\pi \frac{V(x)}{f_{inst}(x,t) d_e} \right) \{ \tilde{\psi}_{j,e}(x) \}^T \{ \tilde{\psi}_{k,e}(x) \} dx \\ [K_{fe,R}(t)]_{j,k} = \int_{x_e}^{x_e+L_e} \frac{1}{2} \rho_e(x) V(x)^2 C_k \left( 2\pi \frac{V(x)}{f_{inst}(x,t) d_e} \right) \{ \tilde{\psi}_{j,e}(x) \}^T \{ \tilde{\psi}_{k,e}(x) \} dx \end{cases} \quad (5.16)$$

en gardant à l'esprit que les déformées modales se rapportent au problème libre en eau. Il reste donc à estimer la fréquence  $f_{inst}(x,t)$  instantanée, et locale, de la réponse. Ceci est réalisé à partir des déplacements calculés et observés  $y(x,t)$ , en estimant une fréquence *quasi-instantanée* estimée entre  $t-\tau$  et  $t$ , par une formule de Rice

$$f_{inst}(x,t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{y}}(x,t;\tau)}{\sigma_y(x,t;\tau)} \quad (5.17)$$

utilisant les écarts-type de la vitesse et du déplacement. On peut aussi approcher la réponse par celle d'un système à 1DDL libre en résolvant un problème aux moindres carrés du type

$$\begin{Bmatrix} \ddot{y}(x,t) \\ \vdots \\ \ddot{y}(x,t-\tau) \end{Bmatrix} + \alpha \begin{Bmatrix} \dot{y}(x,t) \\ \vdots \\ \dot{y}(x,t-\tau) \end{Bmatrix} + \beta \begin{Bmatrix} y(x,t) \\ \vdots \\ y(x,t-\tau) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (5.18)$$

qui donne  $\beta = (2\pi f_{inst}(x,t))^2$ . Ces deux méthodes donnent des résultats comparables. Les auteurs retrouvent numériquement les comportements observés sur une maquette de portion droite de tube avec contact plan, en prenant  $\tau$  de l'ordre de la période associée au premier mode libre.

#### 5.4.4. Prise en compte du contact

Si l'on s'oriente vers une étude de la stabilité dans le domaine fréquentiel, on peut facilement implémenter un ajout de matrices de contact permanent. Ces études de stabilité sont pour le moment faites avec des conditions appuyées et un amortissement comprenant, entre autres, un amortissement de choc ou faites avec des conditions encastrees et le seul amortissement structurel. En fonction du colmatage, on peut discuter du bien-fondé du blocage des DDL  $DZ$  et  $DRZ$  car le tube propre peut librement glisser le long de la PE. Se pose la question d'un ajout de frottement sec, axial ou circonférentiel, entre le tube et la PE, comme soulevé en sections 3.2.4 et 3.2.5. Ces conditions aux limites peuvent très bien se représenter par l'ajout d'un contact permanent distribué sur l'épaisseur des PE. On a montré en section 3.2.6 une évolution détaillée des fréquences et déformées du tube en fonction de la raideur de contact permanent : en faisant varier la raideur de contact globale  $k_{cont}$  entre 0 et  $10^{10}$  N/m, on balaie l'ensemble des comportements du libre à l'encastree, en passant par l'appuyé. On pourrait donc réaliser des études de stabilité dépendant de la vitesse d'écoulement  $U$  et de la raideur de contact  $k_{cont}$ . Comme rappelé plus haut, il faudrait cependant raffiner le maillage localement au niveau des PE. La démarche de calcul des déformées en fluides en repos puis de recherche des paramètres modaux en écoulement est alors toujours valide, sous réserve de prendre en compte le contact pour calculer les déformées. Le calcul de stabilité se projette aisément en base réduite. En ajoutant le spectre turbulent au second membre, on peut aussi calculer la réponse fréquentielle du tube.

Se posent deux questions quant au sens physique de cette démarche. La première concerne la définition de la stabilité. À l'heure actuelle, en fonction du degré de colmatage estimé, on la calcule pour un appui ou un encastrement, avec les termes d'amortissement *ad hoc*. La vitesse critique est alors bien définie : il suffit de prendre la plus faible donnant un amortissement modal négatif sur les premiers modes hors-plan, typiquement ceux de fréquence inférieure à 200 Hz. L'analyse des cartes de stabilité en air de la section 5.1 a montré que l'ajout de contact permanent bilatéral distribué modifie les pôles complexes, donc les fréquences et les amortissements. La stabilité dépend de la raideur de contact. On aurait donc une vitesse critique dépendant de la raideur de contact. Que dire si un écoulement à  $U=5$  m/s est instable pour  $k_{cont}=10^2$  N/m, à la limite de stabilité pour  $k_{cont}=10^5$  N/m et stable pour  $k_{cont}=10^8$  N/m ? La connaissance de cette raideur de contact est donc discriminante pour le diagnostic de stabilité. Elle doit être reliée plus finement au degré de colmatage réel du GV. Cela semble difficile au vu de la méconnaissance relative de la composition chimique, de la cinétique de déposition, de la répartition sur l'épaisseur de la PE et des propriétés physiques du colmatant. L'utilisation de la SVS, abordée en 4.1.2 devrait permettre de trouver la raideur de contact équivalent. Si on trouve  $k_{cont}=10^4$  N/m, l'écoulement à  $U=5$  m/s est clairement instable. Si on trouve  $k_{cont}=10^6$  N/m, la réponse n'est pas possible :  $k_{cont}$  reflète un comportement *moyen* et la

raideur de contact *apparente* sera tantôt supérieure à  $10^6$  N/m, tantôt inférieure à  $10^6$  N/m. Le système sera donc tantôt stable, tantôt instable. *A priori*, seules des simulations numériques temporelles non-linéaires permettent de conclure.

La deuxième question sur le sens physique de la démarche porte sur la prise en compte de l'amortissement. En effet, pour le moment, il est pris à 2 % en condition appuyé et à 0,2 % en condition encasturé. Il n'est pas précisé pour la condition libre, non prise en compte à l'heure actuelle. La participation, en fréquentiel, des cinq termes le composant doit donc être variable en fonction de  $k_{cont}$ . L'amortissement structural est toujours à prendre en compte, tout comme l'amortissement visqueux, qui est intégré aux corrélations fluides-élastiques. L'amortissement non-linéaire associé aux chocs et aux frottements doit être variable en fonction de  $k_{cont}$ . Il ne doit plus servir à représenter ce qui n'est pas une dissipation due à la non-linéarité mais un étalement de l'énergie puis une dissipation dans les hautes-fréquences. On pourra éventuellement affiner la valeur d'amortissement modal à affecter aux hautes-fréquences pour mieux représenter cette dissipation. L'introduction d'un amortissement modal pour modéliser la perte d'énergie par frottement circonférentiel sur l'obstacle n'est pas tranchée. Dans le cas de simulations numériques temporelles non-linéaires, on peut ajouter du frottement tube – PE, même si cela n'a pas été considéré au cours de la thèse car la valeur du coefficient de frottement est difficile à estimer, compte-tenu des propriétés du colmatant. Ne pas prendre en compte cet amortissement rendrait la prédiction de stabilité conservative. L'amortissement lié à la nature diphasique du fluide externe ne dépend pas du jeu. On doit donc toujours le prendre en compte ; il est faible quand le mélange est homogène, soit que de l'eau, soit que de la vapeur. L'amortissement de film fluide induit par l'écrasement de la lame fluide dans les supports à jeu doit évidemment être pris en compte et doit être variable en fonction du jeu. La question de sa dépendance au jeu ne sera pas traitée ici et nécessite sûrement une campagne d'essais dédiée. Lors de simulations temporelles, il faudra donc revoir les différents termes participant à l'amortissement.

Des méthodes pour calculer la réponse temporelle avec couplage fluide-élastique et non-linéarité de choc ont été présentées en 5.4.3. L'algorithme ITMI permet une prise en compte du couplage fluide-structure et une très bonne précision sur le contact. Cependant, on peut lui voir deux désagréments. Tout d'abord, une phase de contact doit être vue comme le basculement entre un système libre et un système avec un certain nombre de raideurs de contact activées. Toutes les géométries d'obstacles ne peuvent se représenter sous cette forme et, à terme, on pourrait être intéressé par des obstacles ni plans, ni circulaires. Puis, il faut calculer un problème modal pour chacune des configurations de contact rencontrées au cours de la simulation. Si on les calcule tous *a priori*, même si toutes les configurations ne seront pas rencontrées au cours de la simulation, il faudra en réaliser  $2^{N_{obst}}$  avant d'effectuer le moindre pas de temps. Pour les 10 obstacles considérés au cours de la thèse, cela reste réalisable mais semble prohibitif dès que l'on considérera plus de PE affectées de conditions de contact. On peut envisager de ne calculer les problèmes modaux qu'à la première apparition d'une configuration d'obstacles activés.

La méthode développée au CEA par Piteau et *al.* [Pit1] permet d'utiliser tout modèle de contact et tout schéma d'intégration. Elle permet d'exprimer le couplage fluide-élastique dans le domaine temporel en se basant sur une vitesse réduite instantanée. Bien qu'utilisant des corrélations fluide-élastique mesurées en régime linéaire et stationnaire, les simulations numériques non-linéaires et non-stationnaires sont bien corrélées aux essais expérimentaux : cette démarche est validée sur la maquette présentée dans l'article, à savoir un tube droit et court affecté de contact plan. En perspective, on pourrait implémenter cette procédure au modèle de tube GV-LOCAL voire à un tube GV complet. En effet, le traitement de la non-

linéarité de contact et le traitement du couplage fluide-structure sont découplés. On pourrait donc calculer l'évolution temporelle d'un tube GV complet, sous écoulement et avec prise en compte des huit PE. Cependant, il n'est pas sûr que les résultats numériques soient corrélés aux résultats expérimentaux, le tube étant long, cintré et les obstacles au mieux circulaires. L'adaptation du traitement du couplage fluide-structure à cette configuration n'a pas été prouvée. De plus, reste la difficulté à réaliser les essais expérimentaux non-linéaires et en eau à l'échelle 1, en monophasique et en diphasique. L'utilisation de la SVS dans un vrai GV pourrait être une alternative.

Le post-traitement de simulations numériques non-linéaires avec couplage fluide-élastique devrait permettre de mieux choisir les critères d'arrêt éventuels des simulations numériques. Pour les configurations stables, on pourra faire des études classiques de fatigue vibratoire à grand nombre de cycles. Pour les configurations totalement instables, en libre et en contact permanent, on pourra valider l'hypothèse de rupture à faibles nombre de cycles. Le post-traitement des simulations instables en libre mais stabilisées par le contact devrait donner un critère d'arrêt plus fiable, qu'il soit en déplacement d'un nœud choisi, en contrainte maximale ou autre. On pourrait aussi faire le lien entre les historiques temporels des contraintes et la répartition spectrale moyennée donnée par leurs DSP.



# Chapitre 6. Conclusions et perspectives

Le premier apport de la thèse est la validation numérique et expérimentale d'un modèle de tube en contact non-linéaire avec les PE.

L'utilisation d'une relation effort-déplacement prise affine par morceau, soit une raideur linéaire associée à un jeu, a été validée expérimentalement pour les essais réalisés. Pour améliorer ce modèle de contact, on peut rechercher une éventuelle dépendance de la raideur de contact au jeu entre le tube et la plaque. En effet, on a vu en section 3.2.1, que la raideur de contact mesurée était majoritairement due à l'ovalisation du tube. Or, pour de très faibles jeux, la section du tube ne pourra plus se déformer librement et la raideur de contact ne consistera plus qu'en la mise en série du module d'Young du tube, de celui du colmatant et de celui de la plaque, ces deux derniers étant du même ordre de grandeur. Cette valeur sera notablement plus élevée que la raideur mesurée pour le jeu nominal, mise en série des trois raideurs précédentes et de la raideur d'ovalisation. La modélisation du dépôt du colmatant est aussi moins aisée pour un obstacle folié alors qu'une diminution du diamètre de l'obstacle circulaire suffit à l'heure actuelle. Des efforts expérimentaux et/ou numériques doivent donc être faits pour obtenir une géométrie et une raideur de contact dépendant du jeu.

D'un point de vue numérique, on a montré qu'une discrétisation des efforts de contact sur cinq obstacles circulaires répartis de façon équidistante sur l'épaisseur de la PE était suffisante. Ce modèle de contact peut parfaitement être implémenté pour des modèles complets de tube contenant huit PE, en faisant simplement des raffinements de maillage pour bien représenter chaque zone de contact.

Le système étant sous excitation aléatoire, des analyses statistiques sont fondamentalement nécessaires. Pour analyser le modèle non linéaire des intégrations temporelles longues sont indispensables. L'utilisation de modèles réduits est nécessaire pour cet objectif. On a montré ici que le système présente des comportements que l'on peut approcher par une très large plage de variation de la raideur de contact apparente, avec comme comportement extrêmes le système libre et celui en contact permanent. Pour construire une base de réduction très précise, on a proposé de retenir les déformées des configurations *libre*, *appuyé* au centre des PE et *bloqué* sur l'épaisseur des PE, et des corrections statiques. Pour obtenir une base, on orthonormalise cette famille de vecteurs par rapport aux matrices de masse et raideur du système libre pour obtenir des matrices réduites diagonales. Cette approche, standard dans SDT, serait facilement implémentée dans *Code\_Aster*<sup>®</sup>.



Une fréquence de coupure à 7 500 Hz sur chacune des trois bases de déformées modales a été retenue pour les simulations présentées ici. On a montré, en 3.5.7, que la fréquence et l'amortissement des contributions hautes-fréquences du modèle réduit n'influent pas vraiment le bilan énergétique, les temporels ou les DSP. On peut donc conclure que la non-linéarité ne dépend pas de ces très hautes fréquences. Il en résulte que la base de réduction pourrait certainement être restreinte. En prenant moins de modes, il faut s'assurer de garder, dans la base de réduction orthonormalisée, suffisamment de modes libres pour bien représenter la dynamique basses fréquences du tube et suffisamment de modes appuyés, bloqués ou de correction statique pour avoir suffisamment de modes hautes fréquences pour bien représenter localement les phases de contact. La démarche de validation de modèle, présentée en 3.4 pourrait être réutilisée afin de valider la précision de bases de réduction plus petites.

Dans l'optique de calculs temporels de stabilité, la vérification de la conservation d'énergie lors l'intégration numérique paraît essentielle. Les phases de contact sont responsables de la non-conservation d'énergie mécanique, mais on ne peut prévoir s'il y aura, localement ou globalement, gain ou perte d'énergie. Les sources de ces variations sont en particulier l'erreur sur le calcul des forces de choc et dans une moindre mesure la projection des forces de choc sur la base modale. Les paramètres du schéma influent sur le bilan d'énergie, mais seule la diminution du pas de temps semble efficace pour améliorer le bilan d'énergie. Avec un pas de temps suffisamment faible,  $2.10^{-5}$  s a été retenu depuis la section 3.5.9, l'intégration numérique se passe sans erreur visible pour de fortes non-linéarités et des amortissements modaux faibles voire négatifs. La méthodologie affichée permettrait de revalider des simulations avec des pas de temps plus grands.

Par rapport aux essais réalisés, le modèle reproduit très correctement l'évolution avec l'amplitude des caractéristiques de la dynamique hors-plan du tube. Pour les mouvements dans le plan, les résultats sont moins bons et il faudrait répartir obstacle par obstacle l'énergie selon la direction hors-plan et la direction dans le plan. Cela peut être fait en utilisant la vraie géométrie du trou folié. La prise en compte de cette géométrie, conçue pour soutenir le tube tout en laissant passer le fluide secondaire, ne poserait pas de problème majeur.

Le deuxième apport important de la thèse est une analyse détaillée des évolutions de comportement d'un tube à choc sous excitation aléatoire.

Les simulations et les essais permettent de caractériser l'évolution des caractéristiques spectrales du banc GV-LOCAL en faisant varier l'amplitude de l'effort extérieur. Au cours de la transition, la répartition spectrale de l'énergie change. Le premier symptôme de la non-linéarité de contact est le remplissage des antirésonances sur les DSP des déplacements mesurés. Lorsque l'amplitude augmente, le niveau global s'uniformise sur une très grande largeur spectrale. Les pics s'aplatissent et se décalent, vers les hautes fréquences le plus souvent. Lorsqu'il y a suffisamment de chocs par unité de temps, le comportement se rapproche de celui du système linéaire à contact permanent et les pics redeviennent acérés.

Il a été proposé d'analyser ces transitions comme une augmentation d'une raideur de contact apparente d'un système à contact permanent. Par identification de trois grandeurs vibratoires, analyse modale opérationnelle, analyse de la déformée opérationnelle, et corrélation de DSP, on a montré que l'on pouvait définir une équivalence entre le niveau RMS et la raideur de contact variable. Le comportement moyen est donc intrinsèquement lié à l'amplitude. L'analyse de l'influence combinée du jeu et de l'amplitude est une perspective

claire dont devrait ressortir un degré de non-linéarité lié au rapport entre l'amplitude de l'effort extérieur et le jeu.

La caractérisation du colmatage est une demande industrielle nette. Une caractérisation fine de la relation entre le jeu et la raideur de contact à l'aide de simulations numériques permet d'envisager la résolution d'un problème inverse. L'utilisation d'une sonde SVS en air lors des arrêts de tranche, pourrait permettre de remonter à une caractérisation expérimentale de relation niveau - fréquence apparente et par comparaison avec les simulations estimer les propriétés du colmatant.

Si on considère que l'étalement des pics est à relier à une augmentation de l'amortissement, on a montré pouvoir recalculer un amortissement dépendant de l'amplitude. Cependant, une implémentation rapide d'ELSS a montré qu'on peut obtenir des DSP très aplatis comme moyennes probabilistes de DSP de systèmes linéaires, la raideur de contact étant alors une variable aléatoire. L'étalement des pics n'est donc pas une augmentation de l'amortissement, mais une modification de la répartition spectrale d'énergie. Le tube voit une raideur de contact apparente qui est variable au cours du temps. La densité de probabilité de cette raideur apparente de contact change en fonction de l'amplitude. Le comportement moyen est reflété par la DSP, comme moyenne temporelle sur les simulations non-linéaires ou comme moyenne statistique sur des simulations linéaires.

Le troisième apport de la thèse a été d'analyser les effets d'une déstabilisation qui est physiquement liée à une instabilité fluide/élastique.

On a d'abord montré, numériquement et expérimentalement, que l'ajout de conditions de contact peut stabiliser, jusqu'à un certain point, un tube libre instable et ceci sans relation avec un effet de couplage fluide-élastique. En présence de fluide externe, les conditions de contact stabiliseront donc intrinsèquement un tube libre déstabilisé par le couplage fluide-élastique. La démonstration, basée sur une déstabilisation par un amortisseur négatif ponctuel réalisé à l'aide d'un asservissement, était limitée expérimentalement par la saturation des systèmes de contrôle. L'extension de cette idée d'essais hybrides où l'instabilité fluide/élastique est approchée par une boucle de contrôle est une perspective importante de la thèse.

Un second effet est la diminution de la déstabilisation fluide-élastique par augmentation de la fréquence et de la raideur de contact apparentes. Le besoin d'une analyse comparative de l'importance de ces deux effets est une perspective claire.

Par rapport à l'objectif général de prédiction de la stabilité d'un tube cintré soumis à un écoulement transverse de fluide extérieur et à non-linéarité de contact, on peut à l'issue de cette thèse proposer deux orientations correspondant à des simulations en fréquentiel et en temporel.

En fréquentiel, la représentation par une raideur de contact variable paraît très adaptée pour reproduire la transition du comportement en fonction de l'amplitude. Une double boucle sur la vitesse d'écoulement et la raideur, au lieu d'une simple boucle sur la vitesse, permet alors de trouver la vitesse limite. Il reste cependant à trouver un critère de stabilité global : un

tube instable pour  $k_{cont} \leq 10$  N/m mais stable pour toute raideur supérieure à cette valeur sera effectivement globalement stable. Qu'en est-il pour un tube stable seulement pour  $k_{cont} \geq 10^5$  N/m ?

L'utilisation de critères fréquentiels pose cependant d'autres questions. On a, dans ce travail, retenu l'objectif classique de reproductions des DSP de réponse et obtenu des stratégies pertinentes pour atteindre cet objectif. Les modèles d'endommagement, a priori pertinents pour le dimensionnement, sont en général des quantités liées au cumul de dépassement de seuils temporels. La Figure 6.1 illustre comment deux signaux simples peuvent avoir un même nombre de passage de seuil et des DSP très différentes. La bonne approche pour relier DSP et dimensionnement reste donc une question ouverte.

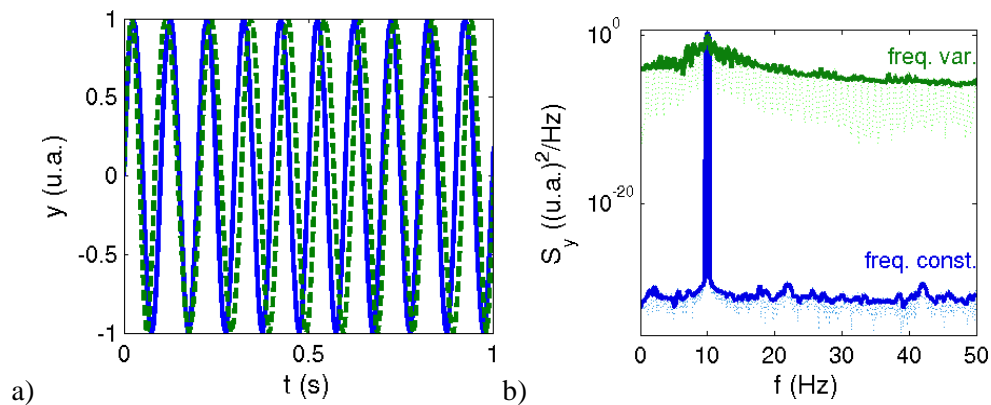


Figure 6.1. Deux temporels (a) présentant le même cumul min / max avec les DSP correspondantes (b) n'ayant pas du tout la même allure.

En temporel, un dimensionnement non-linéaire est tout à fait accessible en air, la difficulté étant de trouver de bons indicateurs de stabilité, critères d'arrêt. En eau, en plus de cette question d'indicateurs, il faut faire fonctionner de concert le modèle non-linéaire de contact et le modèle de couplage fluide-structure. La difficulté est plutôt d'exprimer le couplage fluide-structure en temporel, la question du contact ayant été traitée dans cette thèse. Un schéma d'intégration spécifique au tube GV sous écoulements et intégrant exactement le contact a été, par le passé, implémenté dans *Code\_Aster*. Une méthode de prise en compte des corrélations fluide-élastiques en temporel a été développée au CEA, ne nécessitant que le calcul d'une fréquence instantanée dépendant du temps et de l'abscisse curviligne. On a donc un schéma d'intégration fonctionnel et une méthodologie nécessitant peu de développement et compatible avec tous les schémas d'intégration. La faisabilité de simulations numériques comprenant un grand nombre d'obstacles non plans sur un tube cintré n'a pas été abordée mais devrait être facilement prouvée, tout au moins pour la méthode basée sur la fréquence instantanée, ne nécessitant qu'une légère surcouche. La difficulté principale restera certainement de corrélérer ces simulations numériques sur les résultats expérimentaux issus d'une maquette représentative.

# Références bibliographiques

[Ado1] A. Adobes, L. Vivan. Modélisation des excitations turbulentes. *Manuel de référence de Code\_Aster*, Vol. R4.07.02-B, 2005.

[Ado2] A. Adobes, M. Lainet. Couplage fluide-structure pour les structures tubulaires et les coques. *Manuel de référence de Code\_Aster*, Vol. R4.07.04-C, 2007.

[Ado3] A. Adobes, J. Pillet et al.. Contribution d'EDF R&D aux actions de court terme engagées suite à l'arrêt fortuit de CRUAS 4 du 11/02/06. *note EDF R&D*, Vol. HI-84/06/015/P, 2006.

[And1] H. Andriambololona. Caractérisation mécanique du banc GV-LOCAL et présentation de la première campagne de mesure. *note EDF R&D*, Vol. H-T61-2008-04521-FR, 2009.

[Ant1] J. Antunes et al.. Méthodes d'analyse en dynamique non-linéaire des structures. *Cours IPSI, 28-30 mai 1991*, 1991.

[Arm1] F. Armero, E. Petőcz. Formulation and analysis of conserving algorithms for frictionless dynamic contact/impact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 158(3-4), pages 269-300, 1998.

[Bal1] E. Balmes. *Methods for vibration design and validation*. Notes de cours Ecole Centrale de Paris, 2006.

[Bal2] E. Balmes. Parametric families of reduced finite element models. Theory and applications. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 10(4), pages 381-394, 1996.

[Bal3] E. Balmes. Optimal Ritz vectors for component mode synthesis using the singular value decomposition. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol. 34(6), pages 1256-1260, 1996.

[Bal4] E. Balmes. Orthogonal Maximum Sequence Sensor Placements Algorithms for modal tests, expansion and visibility. *International Modal Analysis Conference*, 2005.

[Bel1] S. Bellizzi, R. Bouc. Analysis of multi-degree of freedom strongly non-linear mechanical systems with random input. Part I: Non-linear modes and stochastic averaging. *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 14(3), pages 229-244, 1999.

- [Bel2] S. Bellizzi, R. Bouc. A new formulation for the existence and calculation of nonlinear normal modes. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 287(3), pages 545-569, 2005.
- [Bel3] S. Bellizzi, R. Bouc. Spectral response of asymmetrical random oscillators. *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 11(1), pages 51-59, 1996.
- [Bel4] S. Bellizzi, M. Defilippi. Non-linear mechanical systems identification using linear systems with random parameters. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 17(1), pages 203-210, 2003.
- [Bel5] S. Bellizzi, R. Bouc. Analysis of multi-degree of freedom strongly non-linear mechanical systems with random input. Part II: Equivalent linear system with random matrices and power spectral density matrix. *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 14(3), pages 245-256, 1999.
- [Bob1] A. Bobillot. *Méthodes de réduction pour le recalage. Application au cas d'Ariane 5*. PhD Thesis, Ecole Centrale de Paris, 2002.
- [Bod1] C. Bodel. Identification d'efforts fluides sur structure filaire. *Manuel de référence de Code\_Aster*, Vol. R4.07.07-A, 2009.
- [Boi1] O. Boiteau, O. Nicolas. Algorithme de résolution pour le problème généralisé. *Manuel de référence de Code\_Aster*, Vol. R5.01.01-D, 2007.
- [Bon1] J-F. Bonnans et al.. *Numerical optimization: Theoretical and practical aspects*. Springer, seconde édition, 2006.
- [Bou1] R. Bouc, M. Defilippi. Multimodal nonlinear spectral response of a beam with impact under random input. *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 12(3), pages 163-170, 1997.
- [Bri1] N. Brie. Analyse du schéma d'intégration ITMI de Code\_Aster. *Note EDF R&D*, Vol. H-T61-2011-00248-FR, 2011.
- [Cai1] S. Caillaud. *Excitation force et contrôle actif pour la mesure des forces fluies-élastiques*. PhD thesis, Université Paris VI, 1999.
- [Cha1] S-Y Chang. Studies of Newmark method for solving nonlinear systems: (I) Basic analysis. *Journal of the Chinese Institute of Engineers*, Vol. 27(5), pages 651-662, 2004.
- [Cha2] S-Y Chang. Studies of Newmark method for solving nonlinear systems: (II) Verification and guideline. *Journal of the Chinese Institute of Engineers*, Vol. 27(5), pages 663-675, 2004.
- [Cha3] C.P. Chapman. Derivation of the mathematical transfer function of an electrodynamic vibration exciter. *National Aeronautics and Space Administration*, Vol. Technical Report No. 32-934, 1966.
- [Col1] F.S. Collette. A combined tuned absorber and pendulum impact damper under random excitation. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 216(2), pages 199-213, 1998.

[Cor1] V. Corradi, N. R. Swanson, H. White. Testing for Stationarity-ergodicity and for comovements between nonlinear discrete time Markov processes. *Journal of Econometrics*, Vol. 96(1), pages 39-73, 2000.

[Cra1] R.R. Craig. A Review of Time-Domain and Frequency Domain Component Mode Synthesis Methods. *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, Vol. 2(2), pages 59-72, 1987.

[Cra2] R.R. Craig, A.J. Kurdila. *Fundamentals of structural dynamics*. John Wiley & Sons, 2008.

[DeK1] A. de Kraker et al.. Identification of nonlinear phenomena in a stochastically excited beam system with impact. *International Conference on Noise and Vibration Engineering (ISMA 23)*, 1998.

[DeK2] D. de Klerk, D.J. Rixen, S.N. Voormeeren. General Framework for Dynamic Substructuring: History, Review, and Classification of Techniques. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol. 46(5), pages 1169-1181, 2008.

[Dim1] M. Dimentberg, Z. Hou, M. Noori. Spectral density of a non-linear single-degree-of-freedom system's response to a white-noise random excitation : a unique case of an exact solution. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 30(5), pages 673-676, 1995.

[Dom1] I. Domowitz, M. A. El-Gamal. A Consistent Test of Stationary-Ergodicity. *Econometric Theory*, Vol. 9, pages 589-681, 1993.

[Dor1] S. Dorbolo et al.. Dynamics of a bouncing dimer. *Physical Review Letters*, Vol. 95(4), pages 044101.1-044101.4, 2005.

[Eva1] G. Evangelista. Flexible wavelets for music signal processing. *Journal of New Music Research*, Vol. 30(1), pages 13-22, 2001.

[Erv1] E.K. Ervin. *Repetitive impact response of beam structure through constraint and modal mapping methods*. PhD thesis, Department of Mechanical Engineering, Carnegie Institute of Technology, Pittsburgh, 2006.

[Gau1] M. Gaudin. Méthodologie de calcul vibratoire des tubes de générateur de vapeur. *Note d'étude EDF*, Vol. ENRETM040246 A, 2004.

[Gay1] N. Gay, S. Granger, T. Friou. Présentation d'une méthode de simulation de couplage fluide-élastique en régime non-linéaire. *Note EDF DER*, Vol. HT-32/94/015/A, 1994.

[Ger1] M. Géradin, D. Rixen. *Théorie des vibrations : application à la dynamique des structures*. Masson, seconde édition, 1996.

[Ger2] J.P. Gerardin. Essais de qualification de la sonde de détection d'encastrement des cintres dans les GV 900 MW. *note EDF DER*, Vol. HP-27/96/004/A, 1996.

[Gol1] G.H. Golub, C.F. Van Loan. *Matrix computations*. John Hopkins University Press, 1983.

[Gon1] C. Gontier, C. Toulemonde. Approach to the periodic and chaotic behaviour of the impact oscillator by a continuation method. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, Vol. 16(1), pages 141-163, 1997.

[Gos1] A. Gosse, S. Lemerrier, A. Blanguernon. Base de données GEVIBUS : synthèse de la validation des coefficients de couplage fluide-élastiques issus des campagnes d'essais VISCACHE 2 pas carré. *Note EDF R&D*, Vol. HI-86/01/023/A, 2002.

[Gui1] P. Guihot. *Analyse de la réponse de structures non linéaires sollicitées par des sources d'excitation aléatoires, Application au comportement des lignes de tuyauteries sous l'effet d'un séisme.*, PhD thesis, Université Paris VI, 1990.

[Haz1] H. Hazim. *Vibrations of a beam with a unilateral spring. Periodic solutions - Nonlinear normal modes.* PhD thesis, Université de Nice - Sophia Antipolis, 2010.

[Hil1] H.M Hilber, T.J.R Hughes, R.L. Taylor. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 5(3), pages 283-292, 1977.

[Hol1] P.J. Holmes. The dynamics of repeated impact with a sinusoidally vibrating table. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 84(2), pages 173-189, 1982.

[Jia1] D. Jiang, C. Pierre, S.W. Shaw. Large-amplitude non-linear normal modes of piecewise linear models. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 272(3), pages 869-891, 2004.

[Kan1] C. Kane et al.. Variational Integrators and the Newmark Algorithm for Conservative and Dissipative Mechanical Systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 49, pages 1295-1325, 2000.

[Ker1] G. Kerschen et al.. Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 20(3), pages 505-592, 2006.

[Knu1] J. Knudsen, A.R. Massih. Dynamic stability of weakly damped oscillators with elastic impacts and wear. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 263(1), pages 175-204, 2003.

[Kre1] S. Krenk. Energy conservation in Newmark based time integration algorithms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 195, pages 6110-6124, 2006.

[Jea1] M. Jean. The non-smooth contact dynamics method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 177, pages 235-257, 1999.

[Lau1] T.A. Laursen, V. Chawla. Design of energy conserving algorithms for frictionless dynamic contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40(5), pages 863-886, 1997.

[Liu1] C. Liu, Z. Zhao, B. Brogliato. Variable structure dynamics in a bouncing dimer. *Rapport de recherche INRIA*, Vol. 6718, 2008.

[Lor1] E.N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the atmospheric sciences*, Vol. 20(2), pages 130-141, 1963.

[Luz1] E. Luzzato, A. Adobes. Affaire B961/A11HT - Préparation du projet GV-SCOPE : estimation des contributions AMA-T61. *Compte-rendu EDF R&D - AMA*, Vol. CR-AMA 06,169, 2006.

[Mac1] R.H. MacNeal. A Hybrid method of component mode synthesis. *Computers and Structures*, Vol. 1(4), pages 581-601, 1971.

[Mag1] B. Magnain, Z-Q Feng, J-M Cros. Schéma d'intégration adapté aux problèmes d'impact. *8ème Colloque National en Calcul des Structures (Giens 2007)*, 2007.

[Mah1] N. Mahjoubi. *Méthode générale de couplage de schéma d'intégration multi-échelle en temps en dynamique des structures*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2010.

[Mal1] S. Mallat. *A wavelet tour of signal processing*. Academic Press, second edition, 1999.

[Man1] M.P. Manahan. Determining of the physical properties of steam generator tube scale using miniature specimens. *Nuclear technology*, Vol. 85, pages 324-333, 1989.

[Mik1] A. Mikchevitch. Analyse du comportement mécanique d'un tube de générateur de vapeur bloqué dans une plaque entretoise à trous quadrifoliés à l'aide d'une modélisation non linéaire de contact. Causes possibles de la fissuration du tube R08 de Cruas 4 dans le contexte de colmatage. *note EDF R&D*, Vol. H-T61-2009-03294-FR, 2010.

[New1] N.M. Newmark. A method of computation for structural dynamics. *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. 85(EM3), pages 67-94, 1959.

[Pae1] T. L. Paez. The history of random vibrations through 1958. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 20(8), pages 1783-1818, 2006.

[Per1] L. Perotin, S. Granger. An inverse method for the identification of a distributed random excitation acting on a vibrating structure. Part 1: Theory. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 13(1), pages 53-65, 1999.

[Pie1] C. Pierre, D. Jiang, S. Shaw. Nonlinear normal modes and their application in structural dynamics. *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2006, pages Article ID 10847, 2006.

[Pit1] P. Piteau et al.. Vibro-impact experiments and computations of a gap-supported tube subjected to single-phase fluid-elastic coupling forces. *Proceedings of the 7th International Symposium on Fluid-Structure Interaction, Flow-Sound Interaction, Flow-Induced Vibration and Noise*, 2010.

[Rob1] J.B. Roberts, P.D. Spanos. *Random vibration and statistical linearization*. John Wiley & Sons, 1990.

[Ros1] R.M. Rosenberg. On Nonlinear Vibrations of Systems with Many Degrees of Freedom. *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 9, pages 155-242, 1966.



[Rub1] S. Rubin. Improved Component-Mode Representation for Structural Dynamic Analysis. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol. 13(8), pages 995-1006, 1975.

[Sam1] R. Sampaio, C. Soize. On measures of nonlinearity effects for uncertain dynamical systems - Application to a vibro-impact system. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 303(3), pages 659-674, 2007.

[Sin1] C.Y. Sin. Admissible parameters for stationarity, ergodicity and finite moments of the Log-ACD, and comparisons with the power ACD. *Far Eastern and South Asian Meeting of the Econometric Society*, 2008.

[Sha1] S.W. Shaw, P.J. Holmes. Periodically forced linear oscillator with impact: chaos and long-period motions. *Physical Review Letters*, Vol. 51(8), pages 623-626, 1983.

[Sma1] D.O. Smallwood. Characterizing electrodynamic shakers. *Proceedings of the Institute of Environmental Sciences*, Vol. SAND 96-2791C, 1997.

[Soi1] C. Soize. *Méthodes mathématiques en analyse du signal*. Masson, 1993.

[Ste1] A. Sternchüss, E. Balmes. On the reduction of quasi-cyclic disks with variable rotation speeds. *Proceedings of the international Conference on Advanced Acoustics and Vibration Engineering (ISMA)*, pages 3925-3939, 2006.

[The1] T. Thénint. *Etude de conditions aux limites à jeu, Application à la liaison de tubes de générateurs de vapeur à travers une plaque entretoise*. Rapport de stage de fin d'études ECP, 2007.

[Tho1] D. Thorby. *Structural Dynamics and Vibration in Practice : An Engineering Handbook*. Butterworth-Heinemann, 2008.

[Tou1] C. Toulemonde. Periodic behaviour of impact oscillators : single degree of freedom and multiple degrees of freedom, experiment. *2nd European Nonlinear Oscillations Conference*, 1996.

[Tou2] E. Tournu. *Modélisation stochastique du comportement dynamique non linéaire d'un ailetage de turbine: application à une poutre avec contact oblique*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, 1996.

[Tre1] M. W. Trethewey. Window and overlap processing effects on power estimates from spectra. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 14(2), pages 267-278, 2000.

[Tur1] C.W. Turner, M.E. Blimkie, P.A. Lavoie. Physical and chemical factors affecting sludge consolidation. *Publications du gouvernement canadien*, Vol. COG-96-492-I, 1997.

[Vak1] A.F. Vakakis. Non-linear normal modes (NNMs) and their applications in vibration theory : an overview. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 11(1), pages 3-22, 1997.

[Van1] D.H. Van Campen et al.. Long-term dynamics of non-linear MDOF engineering systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 8(4), pages 455-477, 1997.

[Van2] N. van de Wouw, A. de Kraker, H. Nijmeijer. Stochastic nonlinear dynamics of a beam system with impact. *ASME Design Engineering Technical Conferences*, 2001.

[Ver1] G. Vermot des Roches et al.. Time simulation of squeal phenomena in realistic brake models. *International Conference on Noise and Vibration Engineering (ISMA 2008)*, 2008.

[Ver2] P. Verboven. *Frequency-domain system identification for modal analysis*. PhD thesis, Faculteit Toegepaste Wetenschappen, Vrije Universiteit Brussel, 2002.

[Wes1] M. West et al.. Variational integrators, the Newmark scheme, and dissipative systems. *International Conference on Differential Equations, Berlin, 1999*, 1999.

[Wir1] P.H. Wirsching, T.L. Paez, K. Ortiz. *Random vibrations. Theory and practice*. Dover, 2006.