



**HAL**  
open science

# CONTRIBUTION AU PRONOSTIC DES SYSTÈMES NON LINÉAIRES À BASE DE MODÈLES : THÉORIE ET APPLICATION

David Gucik-Derigny

► **To cite this version:**

David Gucik-Derigny. CONTRIBUTION AU PRONOSTIC DES SYSTÈMES NON LINÉAIRES À BASE DE MODÈLES : THÉORIE ET APPLICATION. Automatique. Université Paul Cézanne - Aix-Marseille III, 2011. Français. NNT: . tel-00680291

**HAL Id: tel-00680291**

**<https://theses.hal.science/tel-00680291>**

Submitted on 19 Mar 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE**

Présentée par :

**David Gucik-Derigny**

Pour obtenir le grade de :

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PAUL CÉZANNE AIX-MARSEILLE III**

**Faculté des Sciences et Techniques**

*Discipline : Automatique*

**Contribution au pronostic des systèmes à  
base de modèles : théorie et application**

**ANNÉE : 2011**

Soutenue publiquement le 09 décembre 2011 , devant le jury composé de :

M. Mohammed M'SAAD	Professeur	Rapporteur
M. Vincent COCQUEMPOT	Professeur	Rapporteur
Mme. Louise TRAVÉ-MASSUYES	DR CNRS	Examineur
M. Michel ZASADZINSKI	Professeur	Examineur
M. Rachid OUTBIB	Professeur	Directeur de thèse
M. Mustapha OULADSINE	Professeur	Co-directeur de thèse



*Quelle que soit la qualité d'un pronostic,  
la réalité la dépassera toujours.*



---

# Remerciements

---

Tout d'abord, je tiens à remercier mon directeur de thèse Rachid OUTBIB et mon codirecteur Mustapha OULADSINE pour m'avoir proposé de réaliser une thèse au sein du LSIS sur la thématique innovante et porteuse du pronostic de systèmes. Puis, je souhaiterais remercier plus particulièrement, mon directeur de thèse, pour son soutien, son attention et son aide jusqu'à la fin de la thèse, me permettant de présenter aujourd'hui des travaux de recherche de qualité, et qui font l'objet de ce présent mémoire.

Mes remerciements s'adressent, tout naturellement ensuite, aux membres du jury M. Vincent COCQUEMPOT et M. Mohammed M'SAAD qui ont accepté de me faire l'honneur d'être les rapporteurs de mes travaux de recherche, ainsi que Mme Louise TRAVE-MASSUYES et M. Michel ZASADZINSKI pour avoir accepté d'être les examinateurs lors de la soutenance de ma thèse.

Je tiens à remercier également pour leur soutien sans faille mes parents et ma famille pour tout ce qu'ils m'apportent jour après jour, également pour leur soutien indéfectible et pour toute l'attention qu'ils m'ont accordé au fur et à mesure de ses années lorsque l'on avance sur les sentiers de sa propre vie.

Je tiens particulièrement à remercier tous mes amis et à exprimer ma plus profonde gratitude à Guillaume GRATON et Thibaut RAHARIJAONA pour leur présence chaleureuse, la richesse de leur échange, leur soutien continu au quotidien, dont ils ont fait preuve à mon égard, durant toutes ses années de thèse, avec les difficultés et les doutes personnelles que l'on peut rencontrer.

Je tiens également à adresser mes remerciements à toutes les personnes du laboratoire LSIS qui m'ont apporté leur aide, leur écoute durant ses années de thèse et qui ont été présents, tant d'un point de vue professionnel pour notre mission d'enseignement et de recherche, que privé par des échanges plus personnels.

Je n'ai qu'un mot à dire à vous tous, merci.



---

# Table des matières

---

<b>Table des matières</b>	<b>vi</b>
<b>Notations</b>	<b>vii</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>I Généralités sur le pronostic</b>	<b>5</b>
I.1 Introduction . . . . .	6
I.2 Terminologie de base liée au diagnostic/pronostic . . . . .	6
I.3 "Prognostic and Health Management" (PHM) . . . . .	7
I.3.1 Architecture du PHM . . . . .	7
I.3.2 Impact de la stratégie PHM . . . . .	9
I.4 Description des étapes de l'architecture PHM . . . . .	10
I.4.1 Connaissance à priori des défaillances . . . . .	10
I.4.2 Acquisition de données . . . . .	10
I.4.3 Traitement des données . . . . .	11
I.4.4 Diagnostic et pronostic . . . . .	12
I.4.4.1 Concepts de diagnostic et de pronostic . . . . .	12
I.4.4.2 Définition du concept de pronostic . . . . .	13
I.4.4.3 Causalité et diagnostic/pronostic . . . . .	13
I.4.4.4 Les trois principales approches du pronostic . . . . .	15
I.4.4.5 Métriques de la performance du pronostic . . . . .	29
I.4.4.6 Pronostic de niveau composant et de niveau système . . . . .	31
I.4.5 Aide à la décision . . . . .	32
I.5 Pronostic et maintenance intelligente . . . . .	33
I.5.1 Performance globale d'un système . . . . .	33



I.5.2	Vision globale de l'évolution des stratégies de maintenance . . . . .	34
I.5.3	Émergence de la maintenance intelligente . . . . .	35
I.6	Challenges liés au PHM . . . . .	37
I.7	Conclusion . . . . .	39
<b>II</b>	<b>Concept et modèles pour le pronostic et procédé d'application</b>	<b>41</b>
II.1	Introduction . . . . .	42
II.2	Concept de pronostic . . . . .	42
II.2.1	Notion de système . . . . .	43
II.2.1.1	Définition . . . . .	43
II.2.1.2	Entrée du système . . . . .	43
II.2.2	Notion d'accessibilité . . . . .	45
II.2.2.1	Espaces accessibles . . . . .	45
II.2.2.2	Construction numérique des espaces accessibles . . . . .	46
II.2.3	Concepts de base liés au diagnostic et au pronostic . . . . .	47
II.2.3.1	Défaut, panne, tâche et performance . . . . .	47
II.2.3.2	États de fonctionnement normal et défaillant . . . . .	49
II.2.3.3	Disponibilité . . . . .	49
II.2.4	Définitions des concepts . . . . .	50
II.2.4.1	Découpage de l'horizon de temps . . . . .	50
II.2.4.2	Diagnostic . . . . .	51
II.2.4.3	Diagnostic prédictif . . . . .	51
II.2.4.4	Pronostic . . . . .	52
II.2.4.5	Estimation du temps de vie restant . . . . .	53
II.3	Modélisation du comportement de la dégradation . . . . .	53
II.3.1	Modèles de dégradation macroscopiques . . . . .	53
II.3.2	Modèles de dégradation multi-échelles . . . . .	56
II.3.2.1	Notion de multi-échelles . . . . .	56
II.3.2.2	Mécanismes de dégradation . . . . .	57
II.3.2.3	Classification des mécanismes de dégradation . . . . .	57
II.3.2.4	Choix d'un modèle de dégradation . . . . .	58
II.3.2.5	Exemple d'un modèle de loi unifiée de dégradation isotropique . . . . .	58
II.3.2.6	Implémentation des modèles par les éléments finis . . . . .	60
II.3.3	Discussion . . . . .	60
II.4	Système électromécanique considéré . . . . .	61
II.4.1	Motivation du choix de l'application considérée . . . . .	61
II.4.2	Modèle de comportement du système . . . . .	61
II.4.2.1	Système composé d'une batterie . . . . .	62
II.4.2.2	Système composé de deux batteries . . . . .	64

## Table des matières

---

II.4.3	Valeurs numériques associées aux paramètres du modèle . . . . .	65
II.5	Conclusion . . . . .	66
<b>III</b>	<b>Pronostic à base d'observateurs : comparaison de méthodes</b>	<b>67</b>
III.1	Introduction . . . . .	68
III.2	Hypothèses de travail . . . . .	69
III.3	Méthodologie du pronostic . . . . .	70
III.3.1	Synthèse de trois observateurs à entrée inconnue . . . . .	71
III.3.1.1	Observateur linéaire à entrée inconnue . . . . .	72
III.3.1.2	Observateur à grand gain . . . . .	76
III.3.1.3	Observateur à mode glissant . . . . .	78
III.3.2	Technique d'identification . . . . .	81
III.3.3	Évaluation des performances . . . . .	82
III.4	Application à l'oscillateur électromécanique . . . . .	83
III.4.1	Observateur linéaire . . . . .	83
III.4.1.1	Synthèse . . . . .	83
III.4.1.2	Résultats de simulation . . . . .	84
III.4.2	Observateur à grand gain et à entrée inconnue . . . . .	87
III.4.2.1	Synthèse . . . . .	87
III.4.2.2	Résultats de simulation . . . . .	88
III.4.3	Observateur à mode glissant . . . . .	89
III.4.3.1	Synthèse . . . . .	89
III.4.3.2	Résultats de simulation . . . . .	91
III.4.4	Dérivée numérique : outil et problème . . . . .	94
III.4.5	Estimation des paramètres de la dynamique lente . . . . .	95
III.4.6	Prédictions du temps de vie restant . . . . .	96
III.5	Vecteur de dégradation d'ordre supérieur . . . . .	100
III.5.1	Synthèse de l'observateur . . . . .	100
III.5.2	Prédictions obtenues du temps de vie restant . . . . .	101
III.5.3	Remarque . . . . .	102
III.6	Conclusion . . . . .	102
<b>IV</b>	<b>Pronostic par utilisation de modèles incertains</b>	<b>103</b>
IV.1	Introduction . . . . .	104
IV.2	Description de la méthodologie . . . . .	105
IV.2.1	Résumé de l'approche . . . . .	105
IV.2.2	Synthèse d'observateur . . . . .	107
IV.2.2.1	Lemme technique . . . . .	107
IV.2.2.2	Positionnement du problème . . . . .	107
IV.2.2.3	Synthèse de l'observateur . . . . .	110

---

IV.2.3	Encadrement de l'entrée inconnue . . . . .	115
IV.2.4	Estimation du temps de vie restant . . . . .	118
IV.2.4.1	Système soumis à une commande connue . . . . .	118
IV.2.4.2	Système soumis à une commande admissible . . . . .	119
IV.2.5	Critères de performances de la méthodologie de pronostic . . . . .	120
IV.3	Application à l'oscillateur électromécanique . . . . .	121
IV.3.1	L'observateur par intervalle . . . . .	122
IV.3.1.1	Synthèse . . . . .	122
IV.3.1.2	Résultats de simulation . . . . .	126
IV.3.2	Estimation des paramètres . . . . .	129
IV.3.3	Prédictions du temps de vie restant . . . . .	130
IV.4	Conclusion . . . . .	131
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>133</b>
	<b>Liste des publications</b>	<b>137</b>
	<b>Références bibliographiques</b>	<b>151</b>
	<b>Index des illustrations</b>	<b>155</b>
	<b>Index des tableaux</b>	<b>157</b>
<b>A</b>	<b>Modélisation du système électromécanique</b>	<b>159</b>
<b>B</b>	<b>Stratégie de calcul d'espaces accessibles</b>	<b>163</b>

---

# Notations et Définitions

---

$\ \cdot\ $	Norme euclidienne
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
$\mathbb{R}_+$	Ensemble des nombres réels positifs
$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels
$\mathbb{N}^*$	Ensemble des entiers naturels non nuls
$\mathbb{R}^s$	Espace réel de dimension $s$
$\mathbb{R}^{r \times s}$	Espace réel de dimension $r \times s$
$\mathcal{B}(0, r)$	Boule de $\mathbb{R}^n$ de centre zéro et de rayon $r > 0$
$\mathbb{M}_{n \times m}$	Ensemble des matrices réelles de $n$ lignes et $m$ colonnes
$\mathbb{M}_{n \times m}^+$	Ensemble des matrices réelles à coefficients positifs
$I_n$	Matrice identité de $\mathbb{M}_{n \times n}$
$0_{n,m}$	Matrice nulle de $\mathbb{M}_{n \times m}$
$\lambda_{min}(A)$	Valeur propre minimale de la matrice $A$
$\lambda_{max}(A)$	Valeur propre maximale de la matrice $A$
$A^T$	Transposée de la matrice $A$
$A^{-1}$	Inverse de la matrice $A$
$A^\dagger$	Peudo-inverse à gauche de la matrice $A$
$A^\ddagger$	Peudo-inverse à droite de la matrice $A$
$A^+$	Matrice de $\mathbb{M}_{n \times m}$ définie par $A^+ = \text{Max}(0, A)$
$A^-$	Matrice de $\mathbb{M}_{n \times m}$ définie par $A^+ = \text{Min}(0, A)$ ou encore $A^- = A - A^+$
$A^{\cdot }$	Matrice désignant $A^+ - A^-$
$[AB]^+$	Désigne la matrice $A^+B^+ + A^-B^-$
$[AB]^-$	Désigne la matrice $A^+B^- + A^-B^+$

$A^*$	Matrice de $\mathbb{M}_{2n \times 2m}$ définie par $\begin{bmatrix} A^+ & A^- \\ A^- & A^+ \end{bmatrix}$
$(AB)^*$	Matrice de $\mathbb{M}_{2n \times 2m}$ définie par $\begin{bmatrix} [AB]^+ & [AB]^- \\ [AB]^- & [AB]^+ \end{bmatrix}$ pour $A \in \mathbb{M}_{n \times r}$ et $B \in \mathbb{M}_{r \times m}$
$\bar{A}$	Matrice de $\mathbb{M}_{2n \times 2m}$ définie par $\begin{bmatrix} A & 0_{n \times m} \\ 0_{n \times m} & A \end{bmatrix}$ pour $A \in \mathbb{M}_{n \times m}$
$\overline{\overline{A}}$	Matrice de $\mathbb{M}_{2n \times 2m}$ définie par $\begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix}$ pour $A \in \mathbb{M}_{n \times m}$
$\geq$	Symbole de comparaison sur $\mathbb{R}^n$ indiquant que $x_i \geq y_i$ pour $i = 1, \dots, n$  D'une façon analogue, on pourra définir les symboles de comparaison $\leq, <, >$ .
$Span$	Ensemble engendré par les vecteurs

---

# Introduction générale

---

Dans le contexte de compétitivité économique mondiale, un enjeu majeur est celui de l'optimisation de la performance globale des entreprises et en particulier dans les secteurs clés (militaire, aéronautique, aérospatiale, nucléaire, etc). Pour ce faire, ce sont de nouvelles stratégies de développement à concevoir en vue de l'augmentation de la disponibilité des systèmes dynamiques considérés (procédé de production, machines, etc). L'objectif principal est de minimiser les coûts et/ou d'assurer la sécurité des personnes et des biens. Ainsi, et tout au long de l'exploitation d'un système, un processus de surveillance doit être mis en oeuvre afin d'assurer cet objectif.

Dans le cadre de la surveillance des systèmes, la communauté des automaticiens a développé, durant les quarante dernières années, des méthodologies en vue de détecter, de localiser et d'identifier des défaillances pouvant survenir sur un processus. D'une façon générale, les méthodologies du diagnostic sont conçues pour des situations après apparition de la défaillance. Cependant, certains résultats ont été dédiés au problème du diagnostic prédictif. Ce type de diagnostic est basé sur la prédiction de la défaillance avant son occurrence sans contrainte temporelle. Plus récemment, le nouveau concept de pronostic a émergé au sein de la communauté et se définit comme étant une nouvelle problématique de l'automatique moderne. En général, dans la littérature, le but est de prédire le temps restant avant défaillance. Ainsi, ce nouveau concept permet de mieux satisfaire les challenges socio-économiques en assurant la disponibilité des systèmes pour l'optimisation des coûts d'exploitation et/ou pour garantir la sécurité des personnes et des biens. Le développement des méthodologies du pronostic sera à la base de la conception des nouveaux processus de surveillance, destinés à anticiper l'apparition des défaillances. L'un des intérêts potentiels du pronostic est son champ d'application, d'un point de vue économique, au domaine de la maintenance industrielle.

Dans ce travail, et pour donner toute la pertinence à la prédiction réalisée, une notion de contrainte temporelle est introduite. Le pronostic se définira alors comme la prédiction du temps de vie restant sous contrainte temporelle. Il s'agit d'anticiper l'apparition des défaillances sur des horizons de temps de prédiction étendus <sup>1</sup>.

Dans le cadre de la surveillance à base de pronostic, le suivi de l'état de santé du système en fonction des sollicitations et de l'environnement est fondamental. Ce suivi est fondé sur les prédictions du temps restant avant d'éventuelles défaillances. Pour assurer une grande efficacité, les prédictions nécessitent d'être associées à des indicateurs d'évaluation de performance afin d'estimer la confiance qui leur est accordée. Les prédictions et les indicateurs de performance pourraient être l'entrée d'un processus de décision. Ainsi, la problématique de surveillance comme démarche globale est une activité de recherche en soi et ne sera que peu évoquée dans ce travail.

Actuellement dans la littérature, les résultats proposés sur la problématique du pronostic peuvent être regroupés en trois catégories. La première catégorie est celle basée sur l'expérience et la connaissance experte acquise, par exemple, sur l'historique des pannes ou sur les mécanismes de dégradation des systèmes considérés. Il s'agit alors d'exploiter ces connaissances d'une façon pertinente. La deuxième catégorie est guidée par les données du fonctionnement contenues dans une base. La stratégie consiste alors à traiter les données afin de dégager des indicateurs pertinents pour l'analyse. Les résultats de la troisième catégorie sont obtenus à travers des modèles mathématiques établis, par exemple, à partir des lois de la physique. Cependant, il convient de préciser que, de nos jours, peu de travaux ont été consacrés à la problématique du pronostic par utilisation de modèles.

Les travaux de la présente thèse se situent dans le cadre de la troisième catégorie et les modèles utilisés sont sous forme de systèmes d'équations différentielles. Il s'agit de modèles permettant la description simultanée de l'état du système et de la dégradation. Ces modèles sont interconnectés et sont à échelle de temps multiple. Plus précisément, un modèle à échelle de temps multiple traduit une différence d'évolution entre les dynamiques rapide du modèle de comportement du système et lente du modèle d'évolution de la dégradation.

Tout au long de ce travail, nous considérons la classe de systèmes non linéaires à échelle de temps multiple (SNLETM) définie par :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, \lambda(\phi), u, t) \\ \dot{\phi} = \epsilon g(\phi, x, t) \\ y = h(x, \phi, u) \end{cases} \quad (1)$$

---

1. Par le terme "horizon de temps de prédiction", on entend l'intervalle de temps s'étendant de l'instant où une prédiction est réalisée jusqu'à l'instant d'apparition d'une défaillance.

## Table des matières

---

où  $x \in \mathbb{R}^n$  désigne l'état du système, une variable supposée à dynamique rapide.  $\phi \in \mathbb{R}^q$  est une variable à dynamique lente caractérisant la dégradation.  $u \in \mathbb{R}^m$  désigne la commande et  $y \in \mathbb{R}^p$  décrit la sortie du système.  $\epsilon$  représente le ratio des échelles entre les dynamiques rapide et lente avec  $0 < \epsilon \ll 1$ .  $\lambda(\phi)$  désigne la déviation des paramètres physiques par rapport à l'évolution de la dégradation.  $f$ ,  $g$  et  $h$  sont des fonctions régulières de bonne dimension.

Le modèle (1) offre l'avantage de décrire le comportement d'un système en tenant compte de l'influence de la dégradation sur l'état du système. Cependant, une première difficulté principale de l'utilisation de ce type de modèles réside dans le fait que seule la structure du sous-modèle, décrivant l'évolution de la dégradation peut être connue alors que les paramètres sont en général inaccessibles.

Les contributions de la présente thèse peuvent être résumées de la façon suivante. Tout d'abord, une première contribution est une tentative de définition mathématique précise de ce nouveau concept : le pronostic. Notre motivation est due essentiellement à l'absence, à notre connaissance, d'une définition claire et universelle qui soit admise par la communauté. Pour ce faire, nous ferons appel à la théorie du système. Le but est d'établir une définition mathématique qui soit générale et indépendante des approches considérées. La deuxième contribution consiste à lier ce nouveau concept, qu'est le pronostic, à une notion classique de la théorie du contrôle ; à savoir l'accessibilité. Finalement, la troisième contribution, et la principale, est constituée de résultats de synthèse d'observateurs qui peut être exploitée, en vue de répondre à la problématique du pronostic. Il convient de préciser que dans la littérature sur le diagnostic, la synthèse d'observateurs a déjà été utilisée pour la détection et la localisation de défauts. Cependant, les deux concepts sont différents et dans le cadre du pronostic, la connaissance du modèle considéré n'est que partielle. Ainsi, les stratégies classiques de synthèse d'observateurs en vue du diagnostic ne peuvent pas être appliquées directement.

Plus précisément, dans ce travail, nous allons montrer comment la théorie de synthèse d'observateurs à entrée inconnue et celle des observateurs à convergence en temps fini peuvent être combinées pour répondre à la problématique du pronostic. Par ailleurs, nous allons associer la notion des observateurs par intervalle aux méthodes de construction des espaces accessibles, afin d'établir une stratégie pour le pronostic des systèmes assujettis à des perturbations, et quand les modèles considérés comportent des paramètres inconnus. Pour illustrer la pertinence des différentes méthodologies, des résultats de simulations sur un système d'oscillateur électromécanique seront proposés.

La présente thèse est organisée en quatre chapitres.

Le premier chapitre présente des généralités sur le pronostic. Le développement de proces-



sus de surveillance nécessite le suivi de l'état de santé d'un système et de prédire le temps de vie restant. Pour cela, différentes architectures décrivant la structure de ce processus de surveillance ont été proposées. Une de ces architectures sera détaillée ainsi que les connaissances dans le domaine des sciences de l'ingénieur qu'elles impliquent pour sa réalisation. Le pronostic et l'évaluation des performances de prédictions obtenues sont clés et font l'objet d'un développement précis. Par ailleurs, l'exemple d'une application potentielle du concept de pronostic pour la maintenance dite "intelligente" sera explicité.

Le deuxième chapitre est dédié aux définitions mathématiques des concepts de base liées au pronostic. Ces définitions sont données dans le formalisme de la théorie des systèmes. Le but est de disposer d'une définition claire et générale des concepts. Puis, deux grandes approches de modélisation de la dégradation existantes dans la littérature seront présentées. Enfin, un exemple académique constitué d'un système électromécanique est introduit. Ce système offre l'avantage que la dégradation est complètement accessible et permettra, tout au long de ce travail, d'illustrer la pertinence des différentes méthodologies de pronostic proposées.

Le troisième chapitre est consacré au développement d'une stratégie de pronostic pour les systèmes dont le comportement peut être décrit par le modèle dynamique considéré (1). L'objectif de ce chapitre est double. Premièrement, une nouvelle stratégie basée sur la synthèse d'observateurs, sera présentée pour le pronostic de systèmes. Cette stratégie est fondée sur l'utilisation d'observateurs à entrée inconnue et à convergence en temps fini, puis, sur des techniques numériques d'identification. Deuxièmement, une étude comparative de différentes méthodologies, dédiées à la synthèse d'observateurs sera proposée. Il s'agit de trois approches classiques sur la synthèse d'observateur ; à savoir, l'approche basée sur les modèles linéaires, la technique fondée sur les modèles non linéaires à grand gain et celles à modes glissants. Les performances des différentes approches seront illustrées au travers de résultats de simulations.

Le quatrième chapitre étend la stratégie de pronostic présentée dans le troisième chapitre au cas de la présence de perturbations et de paramètres incertains. En effet, la prise en compte des incertitudes de modélisation et des perturbations dans la prédiction des temps de vie restant est clé pour le pronostic. Plus précisément, la stratégie sera fondée sur l'association de la synthèse d'observateurs par intervalle et la construction, par des méthodes numériques, des espaces accessibles en temps fini. L'intérêt d'associer des observateurs à la construction des espaces accessibles est dû au fait que les méthodes numériques proposées dans la littérature sur l'accessibilité ne sont pas adaptées aux systèmes à échelle de temps multiple considérés. Des résultats de simulations, basées sur des méthodes numériques, seront également présentés.

Finalement, une conclusion et des perspectives seront données dans la dernière partie de la thèse.

# CHAPITRE I

---

## Généralités sur le pronostic

---

*"Le véritable voyage de découverte ne consiste pas à chercher de nouveaux paysages, mais à avoir de nouveaux yeux."*

*Marcel Proust*

<b>I.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>6</b>
<b>I.2</b>	<b>Terminologie de base liée au diagnostic/pronostic</b>	<b>6</b>
<b>I.3</b>	<b>"Prognostic and Health Management" (PHM)</b>	<b>7</b>
I.3.1	Architecture du PHM	7
I.3.2	Impact de la stratégie PHM	9
<b>I.4</b>	<b>Description des étapes de l'architecture PHM</b>	<b>10</b>
I.4.1	Connaissance à priori des défaillances	10
I.4.2	Acquisition de données	10
I.4.3	Traitement des données	11
I.4.4	Diagnostic et pronostic	12
I.4.5	Aide à la décision	32
<b>I.5</b>	<b>Pronostic et maintenance intelligente</b>	<b>33</b>
I.5.1	Performance globale d'un système	33
I.5.2	Vision globale de l'évolution des stratégies de maintenance	34
I.5.3	Émergence de la maintenance intelligente	35
<b>I.6</b>	<b>Challenges liés au PHM</b>	<b>37</b>
<b>I.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>39</b>

## I.1 Introduction

Ce chapitre est constitué de généralités sur le pronostic. Le but est de donner des définitions de base liées au diagnostic/pronostic et de situer le pronostic dans son environnement à la croisée de plusieurs domaines des sciences de l'ingénieur. Une architecture de pronostic et de gestion de l'état de santé d'un système sera présentée, en détaillant les étapes la constituant. L'étape du pronostic et du choix de ses métriques d'évaluation de performance sera évoquée. Finalement, l'exemple d'une application potentielle du concept de pronostic à la maintenance intelligente sera explicité.

## I.2 Terminologie de base liée au diagnostic/pronostic

Dans ce qui suit et pour des raisons de clarté, la terminologie de base liée au diagnostic/pronostic est introduite.

La notion de défaut<sup>1</sup> est centrale dans les opérations de surveillance des systèmes industriels. Elle se définit comme étant l'écart entre la caractéristique observée sur le dispositif et celle théorique attendue. Cet écart est idéalement nul en l'absence de défaut. Il convient de préciser que les défauts peuvent apparaître au niveau des capteurs, des actionneurs ou au niveau du système lui-même. Ces défauts apparaissent suite à la naissance et à l'évolution dynamique d'une dégradation dans un système.

Une dégradation<sup>2</sup> est un processus d'altération causée par des changements dans les propriétés structurelles inhérentes d'un système, affectant les performances présentes et futures de manière irréversible.

Une défaillance<sup>3</sup> correspond à une cessation de l'aptitude d'une entité à accomplir des fonctions requises. Une défaillance partielle correspond à une dégradation de l'aptitude d'un système à accomplir des fonctions requises, par opposition à une défaillance complète représentée par une cessation de l'aptitude d'un système à accomplir l'ensemble des fonctions requises [4]. Une défaillance implique obligatoirement l'apparition d'un défaut au préalable. Par contre, un défaut n'implique pas nécessairement une défaillance car le système peut-être exploité en assurant sa fonction principale.

1. "Fault" en anglais
2. "Damage" en anglais
3. "Failure" en anglais

### **I.3. "Prognostic and Health Management" (PHM)**

---

Une panne<sup>4</sup> est l'inaptitude d'un système à accomplir une fonction requise. Une panne résulte toujours d'une défaillance.

Un indicateur de défaillance<sup>5</sup> est une quantité d'information pertinente permettant de détecter l'apparition d'une défaillance.

Un système est dit dans un état de fonctionnement normal lorsque ses variables le caractérisant (variables d'état, variables de sortie, variables d'entrée, paramètres du système) demeurent au voisinage de leurs valeurs nominales.

## **I.3 "Prognostic and Health Management" (PHM)**

Le PHM<sup>6</sup> est une discipline de science de l'ingénieur focalisée sur la détection, la prédiction et le management de l'état de santé des systèmes complexes. Cette discipline est transversale aux domaines de l'instrumentation, du traitement de données et des signaux, de la surveillance des systèmes jusqu'au développement d'un processus d'aide à la décision. L'objectif de cette discipline est d'optimiser le compromis de disponibilité d'un système tout en assurant la sécurité des biens et des personnes par une utilisation de la maintenance industrielle de manière adéquate.

### **I.3.1 Architecture du PHM**

L'une des architectures développées les plus connues est appelée OSA/CBM<sup>7</sup> (voir [13], [98], [143] et [159]). Cette architecture intègre la transversalité des domaines intervenant dans la discipline PHM. Elle établit un cadre de communication entre le système, le système de surveillance et les différents experts concernés au travers de la maintenance industrielle (voir [76]).

Diverses architectures basées sur l'OSA/CBM ont été développées et appliquées à l'aérospatial, l'aéronautique, aux systèmes militaires, à l'électronique ou au nucléaire (voir [78], [99], [100], [149], [162] et [167]).

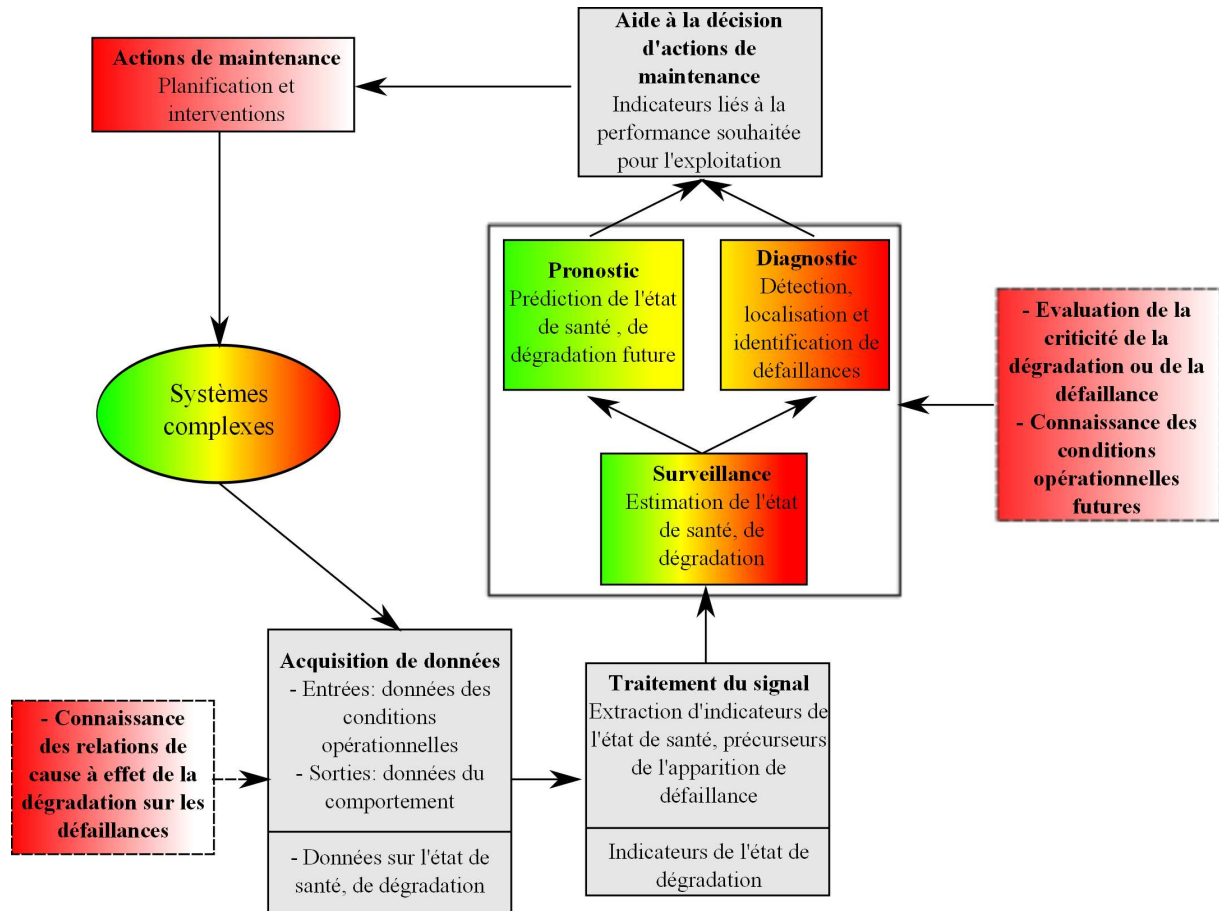
Une vision globale de cette architecture PHM est donnée par la Figure I.1. La connaissance nécessaire a priori de cette architecture dépend des mécanismes des relations de cause à effet menant à la dégradation et de leurs influences sur l'apparition des défaillances. Le deuxième

4. "Break-down" en anglais

5. "Failure feature" en anglais

6. "Pronostic et Gestion de la Santé" en français

7. Open System Architecture for Condition-Based-Maintenance



**Figure I.1** – L'architecture Prognostic and Health Management

élément concerne l'acquisition de données d'entrée<sup>8</sup>, de données de sortie<sup>9</sup>, ainsi que potentiellement des données sensibles à l'évolution de l'état de santé ou de dégradation d'un système. L'étape suivante consiste à extraire des indicateurs de qualité de l'état de santé ou de dégradation, précurseurs de l'apparition de défaillances à partir des données acquises. Ces indicateurs peuvent être traités séparément ou encore être fusionnés<sup>10</sup> avec d'autres indicateurs, afin de concevoir de nouveaux indicateurs possédant certaines propriétés recherchées.

L'étape de surveillance, de diagnostic et de pronostic consiste à fusionner intelligemment ces indicateurs, de sorte à obtenir une estimation de l'état global de santé ou de dégradation d'un système. Puis, deux stratégies peuvent être envisagées suivant l'état de santé du système. Dans le cas de présence de défaillances sur le système, un processus de diagnostic est alors mis en place afin de détecter, de localiser et d'identifier le ou les composants en défaillance. Dans le cas d'absence de défaillances, un processus de pronostic est mis en place en vue d'estimer

8. Conditions opérationnelles  
9. Données de comportement  
10. "Data fusion" en anglais

### I.3. "Prognostic and Health Management" (PHM)

le temps de vie restant suivant les conditions opérationnelles<sup>11</sup>, à partir d'un horizon de temps d'observation donné sur un système.

Enfin, les deux dernières étapes concernent l'aide à la décision pour maintenir la disponibilité d'un système, tout en assurant un compromis entre la sécurité et les coûts d'exploitation. Certaines actions peuvent être entreprises comme la planification/réalisation d'actions de maintenance suivant les impératifs d'exploitation associés au système.

#### I.3.2 Impact de la stratégie PHM

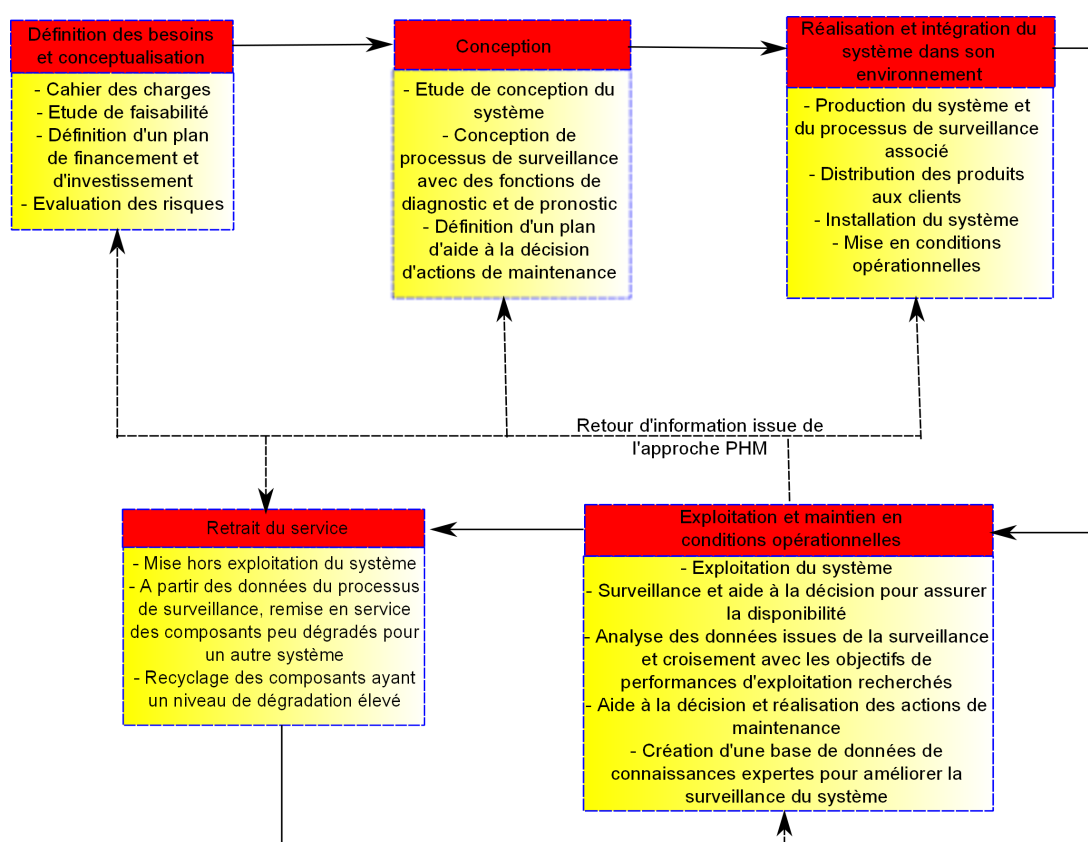


Figure I.2 – Retour d'information PHM sur les cinq étapes du cycle de vie du système

Par le passé, une quantité de systèmes était utilisée et étudiée pour des profils pré-établis de conditions opérationnelles jusqu'à l'apparition de défaillances. Un comportement moyen de dégradation était déduit afin de prédire l'instant où un système risquait de subir une défaillance. L'approche de la discipline PHM permet d'obtenir une base de données à partir de l'instrumentation présente dans le système, de sorte à déterminer le comportement spécifique de ce système se dégradant suivant l'historique des sollicitations. Ceci permet de mieux analyser l'évolution

11. Conditions de sollicitation et d'environnement

des différents types de mécanismes de dégradation et de fournir un retour d'information, tant sur l'ensemble du cycle de vie d'un système comme décrit dans la Figure I.2 que sur le développement de méthodologies de pronostic plus performantes. Cette démarche participe à une meilleure gestion du cycle de vie et de ses coûts associés.

### I.4 Description des étapes de l'architecture PHM

Cette sous-section a pour objectif de décrire plus précisément l'ensemble des étapes constituant l'architecture PHM.

#### I.4.1 Connaissance à priori des défaillances

La connaissance à priori des relations de causes à effets de la dégradation est regroupée sous forme de modèles causaux qualitatifs décrivant l'influence de la dégradation sur l'apparition de défaillances sur un système. La construction de ces modèles est basée sur des méthodes d'analyses fonctionnelles et structurelles. Certaines méthodes d'analyse des modes de défaillance, de leurs effets et de leurs criticités<sup>12</sup>, fournissent une compréhension structurée des modes de défaillances, en analysant et en isolant les effets de chaque mode de défaillance, en se basant sur une logique inductive. D'autres méthodes à logique inductive comme l'arbre d'évènements, permettent, à partir d'une séquence logique d'occurrence d'évènements ou d'états, d'identifier les conséquences et potentiellement la probabilité d'occurrence de la naissance d'une défaillance. Enfin, un arbre de défaillance détaille les relations d'interactions entre chaque élément d'un système afin de mettre en évidence l'apparition d'une défaillance sur la base d'une logique déductive.

#### I.4.2 Acquisition de données

Les données collectées au sein de l'architecture PHM peuvent être de deux natures différentes : soit basées sur les évènements ou soit issues du processus de surveillance d'un système. Le premier type de données inclut les informations relatives à l'historique d'évènements<sup>13</sup> survenus sur un système, et les actions réalisées pour dépasser l'apparition de ces évènements<sup>14</sup>. Le deuxième type de données est issu du processus de surveillance incluant les mesures sensibles à l'état de santé, ou de dégradation du système. Ces deux types d'informations sont complémentaires. Il convient de noter que les données basées sur les évènements apparaissent de nature plus subjective et sont liées à l'interprétation d'experts pour leur exploitation. Toutefois, l'inté-

12. AMDEC

13. Installation, révisions, pannes et leurs causes potentielles

14. Actions de maintenance

## **I.4. Description des étapes de l'architecture PHM**

---

rêt reste principalement d'utiliser cette base de connaissance, pour faciliter le choix de mesures sensibles à l'état de santé au cours du développement d'un processus de surveillance.

Trois sous-catégories sont distinguées selon les auteurs de [81] : données de type valeurs, de type forme d'onde ou encore de type multidimensionnel. Les données de type valeurs<sup>15</sup> sont des données collectées à des instants spécifiques dans le temps, comme de simples variables surveillées. Les données de type forme d'onde<sup>16</sup> sont des données disponibles sous forme de séries temporelles. Enfin les données de type multidimensionnel sont issues, par exemple, d'images à rayons X, d'images visuelles, de thermographies infrarouges, etc).

Le traitement de ces données est à présent exposé.

### **I.4.3 Traitement des données**

Une fois les données collectées, un traitement est réalisé en vue d'extraire des indicateurs<sup>17</sup> pertinents. Il est possible d'utiliser, soit directement les données brutes pré-traitées, soit d'extraire d'autres indicateurs de l'état de santé. Pour ce faire, cette section présentera différents types de traitements existant dans la littérature.

Une étape de pré-traitement est en général considérée afin de mettre en forme les données acquises. La mise en forme permet de traiter les données acquises<sup>18</sup> en diminuant l'effet du bruit, en corrigeant les inconsistances et en réduisant leur taille, etc. Se référer à [73] pour plus de détails. Puis, des indicateurs de l'état de santé sont extraits. Dans le cas de données de type valeurs, l'extraction d'indicateurs consiste à traduire les données constituant l'espace d'observation, dans d'autres espaces possédant des propriétés mathématiques spécifiques recherchées. Le but est de faciliter la détection et l'isolation de nouveaux indicateurs plus spécifiques de l'état de santé. Parmi les approches existantes dans la littérature pour les données de type forme d'onde, on pourra citer l'analyse du domaine temporel et/ou du domaine fréquentiel d'un signal. Chaque type d'analyse est à présent brièvement relaté.

L'analyse au travers du domaine temporel [90] permet d'extraire, à partir des données, des indicateurs statistiques. Pour ce faire, des algorithmes de lissage de données, de calculs d'indicateurs de statistiques descriptives peuvent être utilisés. D'autres algorithmes de calculs pouvant

15. Par exemple la température, la pression, l'humidité, etc

16. Par exemple les données de vibration, les émissions acoustiques, les signaux ultrasoniques, le courant d'un moteur, etc

17. "Features" en anglais

18. "Data cleaning" en anglais



être des distributions<sup>19</sup>, des mesures temporelles, ou des moyennes à temps synchronisé<sup>20</sup>, sont également couramment considérés.

L'analyse au travers du domaine fréquentiel (voir [61] et [138]) possède l'avantage d'extraire des indicateurs présents dans les composantes fréquentielles de certaines données. Pour ce faire, la transformée de Fourier rapide, bien que couramment appliquée, ne permet pas de traiter des signaux de type impulsions, caractéristiques de l'évolution de défauts. Dans ce cas, certains algorithmes d'analyses du spectre de puissance, d'enveloppe, ou à structures de bandes<sup>21</sup> sont couramment utilisés. D'autres formes d'analyse comme la transformation Hilbert-Huang ou encore la décomposition en modes empiriques peuvent être aussi considérées.

L'analyse au travers du domaine temporel-fréquentiel [109] permet de traiter les cas de signaux non stationnaires, caractérisant l'évolution de défauts dans le temps. Les indicateurs spécifiques d'un défaut sont localisés sur certaines composantes fréquentielles particulières évoluant dans le temps. Pour cela, des algorithmes [75] de calculs de la transformée de Fourier courte, de spectrogramme, de distributions<sup>22</sup> sont utilisés. La transformation en ondelette peut également être considérée. Elle est basée sur le principe d'analyse multi-échelles d'un signal<sup>23</sup>. Différentes formes de transformations par ondelettes<sup>24</sup> permettent d'extraire ces indicateurs par une mesure de similarité entre le signal et la forme de transformation par ondelette considérée.

Dans le cas de données multi-dimensionnelles [86], l'extraction d'indicateurs sera réalisée par une analyse en composantes principales. Cette analyse est basée sur une transformation orthogonale permettant de réduire la dimension d'un ensemble de signaux mesurés par un nouvel espace réduit de dimension inférieure, orientée par des composantes principales<sup>25</sup>. Plusieurs transformations<sup>26</sup> sont utilisées afin de maximiser les variances pour chacune des composantes principales.

### I.4.4 Diagnostic et pronostic

#### I.4.4.1 Concepts de diagnostic et de pronostic

Le diagnostic permet la détection, l'isolation et l'identification d'un défaut ayant atteint un seuil critique. La détection de ce défaut consiste à indiquer si une défaillance apparaît sur le

19. Par histogrammes ou paramétriques

20. "Time Synchronous Average" en anglais

21. "Side band structure" en anglais

22. Distributions de Wiener-Ville ou bilinéaires

23. Par les propriétés de dilatation ou de translation d'un signal

24. Morlet, Mexican hat, Haar, etc

25. Composantes non corrélées dues à la propriété d'orthogonalité si l'ensemble des signaux est à distribution normale.

26. Karhunen-Loève, de Hotelling ou encore décomposition orthogonale propre

## **I.4. Description des étapes de l'architecture PHM**

---

système surveillé. L'isolation d'une défaillance permet de localiser le composant du système en défaillance. Enfin, l'identification d'une défaillance consiste à déterminer la nature de la défaillance à partir de l'instant où elle a été détectée.

Depuis quarante ans, de nombreuses méthodologies ont été développées dans la littérature (voir par exemple [81], [164], [165] et [166] ainsi que leurs références) afin de réaliser un diagnostic sur un système en panne. Le choix de l'une de ces techniques dépend essentiellement de la connaissance dont on dispose sur le système. L'idée générale réside dans une comparaison entre le fonctionnement courant du système<sup>27</sup> et le fonctionnement normal<sup>28</sup>. La connaissance liée au modèle de référence est issue soit d'un historique d'évènements passés, soit de la connaissance d'experts liée à leur expérience du système, soit de données prélevées sur le système en fonctionnement nominal, ou encore issue d'un modèle connu du système.

### **I.4.4.2 Définition du concept de pronostic**

Dans [60], des définitions du pronostic ont été regroupées et comparées. De manière générale, le pronostic consiste à prédire l'évolution de l'état futur de santé d'un système et d'estimer le temps vie restant d'un système avant qu'une ou plusieurs défaillances n'apparaissent sur ce dernier.

### **I.4.4.3 Causalité et diagnostic/pronostic**

Le diagnostic est postérieur à l'apparition d'une défaillance sur le système, tandis que le pronostic est antérieur à l'apparition d'une défaillance. Dans ce travail, le pronostic se positionne par rapport à l'étude de l'effet direct ou indirect du phénomène qui donne naissance aux défauts au travers d'une analyse de dégradation. Il convient de noter que l'analyse de dégradation ne représente toutefois pas l'ensemble des approches existantes pour la problématique du pronostic.

L'ensemble diagnostic/pronostic relie les concepts "causes-conséquences" de la chaîne de causalité "dégradation-défaut-panne". Les Figures I.3 et I.4 illustrent ce principe de chaîne de causalité et introduisent les deux types de maintenance permettant de ramener un système à un fonctionnement normal.

Aussi, les indicateurs de l'état de santé utilisés pour le diagnostic ou le pronostic de système sont généralement de natures différentes. L'utilisation d'indicateurs de dérive des états

27. Comportement en présence de défauts ayant atteint un seuil critique

28. Comportement nominal sans défaut

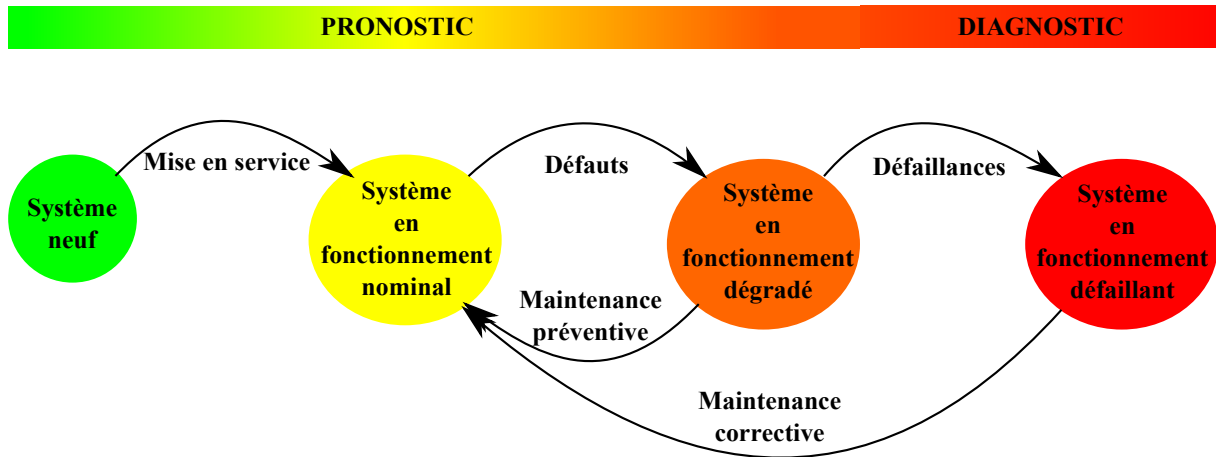


Figure I.3 – Causalité et modes de fonctionnement d'un système

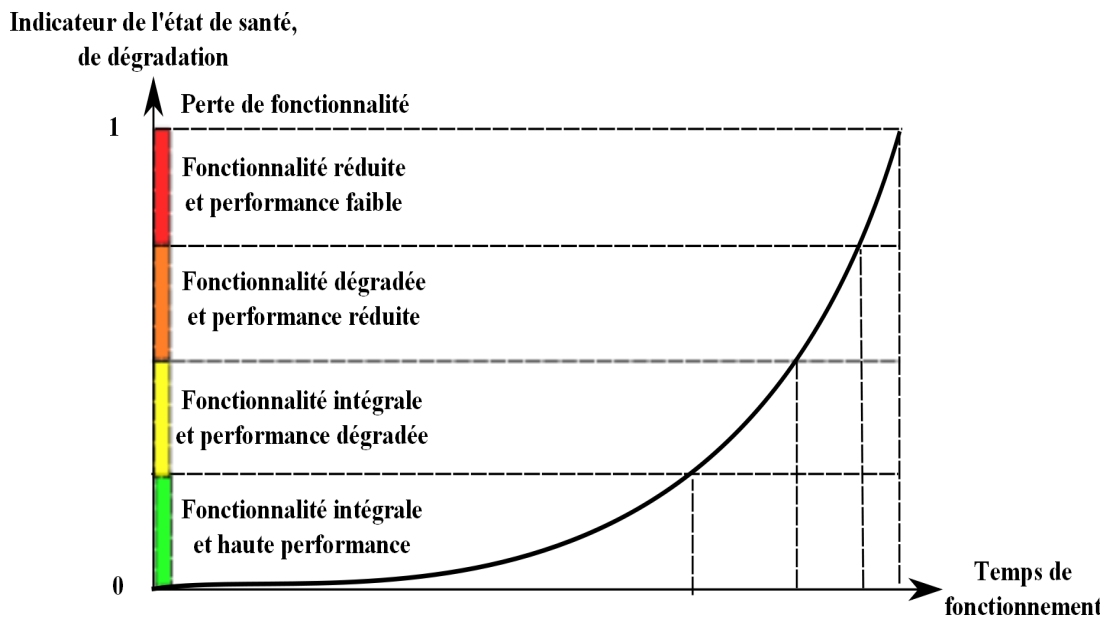


Figure I.4 – Évolution de la dégradation

de comportement du système par rapport au système en fonctionnement nominal est plus répandue pour le diagnostic ou le diagnostic prédictif, et les indicateurs d'évolution dynamique de la dégradation sont plutôt retenus pour le pronostic. Ces derniers indicateurs comportent une notion d'information en "avance de phase" dans la chaîne de causalité dégradation-défauts-défaillances, à la différence des indicateurs précédents.

Pour illustrer ces deux types d'indicateurs, considérons l'exemple d'un roulement à bille comme décrit en Figure I.5. Pour ce système, l'indicateur de l'évolution dynamique de la dégradation est la propagation d'une fissure évoluant suivant les sollicitations de charges exercées

## I.4. Description des étapes de l'architecture PHM

---

sur ce système en rotation. Tandis que la dérive de l'état du comportement du système pourrait être les vibrations engendrées par la propagation de la fissure, ou encore une cartographie thermique due aux échauffements mécaniques qui en résultent.

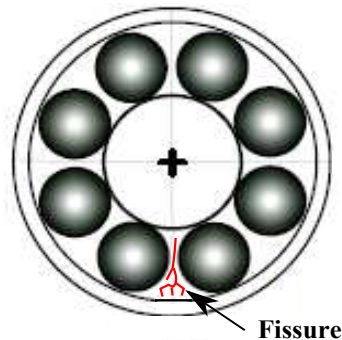


Figure I.5 – Roulement à billes

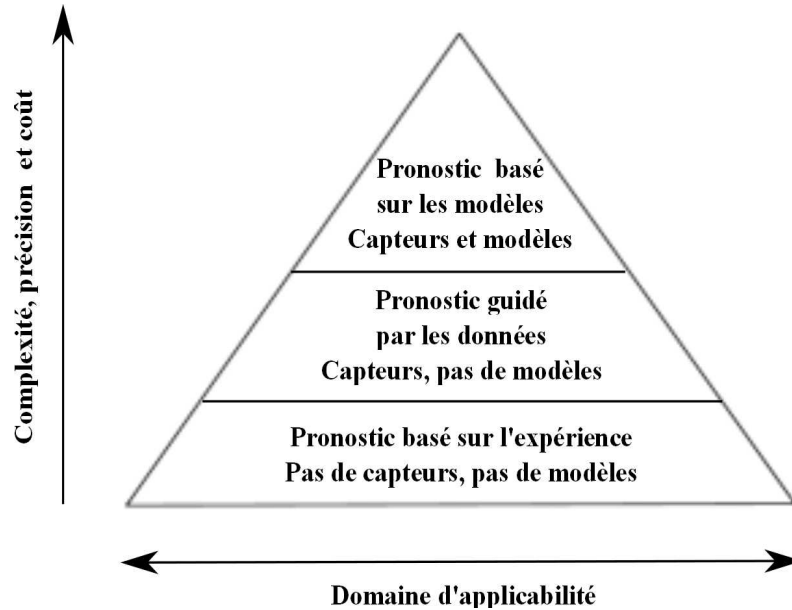
### I.4.4.4 Les trois principales approches du pronostic

Les différentes approches pour le pronostic peuvent être regroupées en trois catégories ; à savoir, les méthodes basées sur l'expertise, les techniques guidées par les données et celles fondées sur les modèles.

Comme il a été noté auparavant, le pronostic consiste à estimer le temps de vie restant d'un système avant qu'une défaillance n'apparaisse. L'évolution de la dégradation par rapport aux conditions opérationnelles, la manière dont elle influence le comportement du système, et la possibilité de mesurer directement ou indirectement l'état de dégradation ou l'image de ses effets, sont des connaissances clés pour le pronostic. Plus grandes sont ces connaissances, meilleure sera la performance de la prédiction du temps de vie restant.

Le choix d'une approche de pronostic est basé principalement sur le type de connaissance disponible sur le système. La Figure I.6 illustre la classification des approches de pronostic par rapport à leur domaine d'applicabilité, à leur complexité, à leur précision et à leur coût.

Dans le cas où une connaissance experte est majoritairement disponible sur un système, au travers de l'observation et de la réalisation d'études empiriques, alors le pronostic basé sur l'expérience de l'expert est considéré. Ce type de pronostic est basé sur la formalisation des mécanismes physiques de détérioration, en utilisant des modèles dont les paramètres sont ajustés, à partir du retour d'expérience de l'expert et de sa connaissance du système.



**Figure I.6** – Classification des approches liées au pronostic [98]

L'approche, fondée sur les données, repose sur deux grandes hypothèses, à savoir que les caractéristiques statistiques des données sont relativement inchangées, à moins qu'un défaut de fonctionnement ne soit la cause de l'apparition d'un changement, et que les données intègrent les relations subtiles de cause à effet de l'apparition de ce défaut.

Enfin, si la connaissance des principes physiques de naissance et d'évolution de la dégradation permettant l'établissement de modèles de dégradation et une instrumentation sont disponibles, alors l'approche du pronostic à base de modèle peut être considérée. Ce type de pronostic est basé sur la formalisation des relations causales issues de la physique pour traduire l'évolution de la dégradation sur le système.

#### **A. Pronostic basé sur l'expertise**

Cette approche est fondée sur l'exploitation de la connaissance experte. La connaissance experte regroupe un ensemble de connaissances empiriques acquises à partir de l'observation et de l'étude de systèmes. A partir de ce type de connaissance, une modélisation de cause à effet du comportement de la dégradation ou du comportement de la détérioration de fonctionnalités d'un système est obtenue. Cette modélisation peut se représenter par exemple comme un tracé d'abaques de dégradation pour différents modes de sollicitation et d'environnement. Ou encore, on pourrait considérer la détermination de paramètres des lois de probabilité afin de modéliser les observations du comportement de la détérioration d'un système. Ces modélisations sont ensuite assemblées afin d'établir une prédiction du temps de vie restant d'un système.

## I.4. Description des étapes de l'architecture PHM

---

Cette approche de pronostic convient particulièrement pour le cas de systèmes faisant intervenir plusieurs mécanismes complexes interconnectés de dégradation, de détérioration sur un système. Toutefois, la variabilité des conditions opérationnelles peut s'avérer difficile à intégrer dans les modèles de connaissances expertes, nécessitant un retour d'expérience important pour être considéré. Dans ce qui suit, trois approches de pronostic basées sur l'expertise sont présentées ; à savoir les pronostics basés sur l'approche fiabiliste, sur les processus stochastiques et sur les systèmes experts.

### A1. Pronostic basé sur l'approche fiabiliste

Dans l'approche fiabiliste, une connaissance à priori issue de l'exploitation de l'historique de données et d'évènements disponibles sur un ensemble de systèmes étudiés est supposée disponible. A partir de cette connaissance, le principe de l'approche repose sur la modélisation probabiliste de l'instant d'apparition d'une défaillance sur ces systèmes. Pour cela, une fonction de fiabilité  $R(t)$  peut ainsi être introduite par :

$$R(t) = \frac{\text{Nombre de systèmes défaillants à l'instant } t}{\text{Nombre de systèmes encore en fonctionnement}}, \forall t \geq 0 \quad (\text{I.1})$$

La densité de probabilité de l'instant de défaillance  $f(t)$  caractérise alors la probabilité d'apparition de l'instant de défaillance entre l'instant  $[t, t + dt]$ . Elle est décrite par :

$$f(t) = -\frac{dR(t)}{dt}, \forall t \geq 0 \quad (\text{I.2})$$

La durée moyenne de vie<sup>29</sup> (DMV) d'un système avant l'instant d'apparition d'une défaillance parmi une population de systèmes étudiés peut être calculée par

$$DMV = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} R(t) dt \quad (\text{I.3})$$

La prédiction du temps de vie restant d'un système est réalisée en utilisant l'évolution du taux de défaillance  $\lambda(t) = 1/DMV$  jusqu'à l'instant considéré. Dans le but de modéliser la fonction de fiabilité  $R(t)$  d'un système, la distribution de Weibull peut être utilisée. Cela permet de modéliser l'évolution du taux de défaillance  $\lambda(t)$  comme suit :

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta} \left( \frac{t - \gamma}{\eta} \right)^{\beta-1}, \forall t \geq 0 \quad (\text{I.4})$$

où  $\beta$  est un paramètre de forme,  $\eta$  est un paramètre d'échelle et  $\gamma$  est un paramètre de décalage. Suivant les valeurs de  $\beta$ , trois périodes de la vie d'un système peuvent être décrites, à savoir la période de jeunesse si  $\beta < 1$ , la période de d'exploitation si  $\beta \approx 1$  et la période de vieillesse si  $\beta > 1$ .

29. "Mean Time To Failure" en anglais

D'autres distributions peuvent également être utilisées pour modéliser le taux de défaillance comme la loi binomiale, la loi de Poisson, la loi exponentielle, la loi normale, la loi log-normale ou encore la loi gamma, etc.

Dans les conditions normales d'utilisation d'un système, l'évolution de la fiabilité liée à la dégradation est influencée par deux facteurs principaux : les conditions de sollicitations (ou modes de fonctionnement) et les conditions environnementales. Pour cela, d'autres modèles sont utilisés pour tenir compte de ces facteurs. On pourra citer le modèle de vie accélérée<sup>30</sup> et le modèle à risque proportionnel<sup>31</sup>, où un vecteur d'entrées exogènes  $z(t)$  est introduit dans l'expression de  $R(t)$  ou  $\lambda(t)$ .

Le modèle de vie accélérée ([52]) est décrit par la relation suivante :

$$R(t) = R_0(t)^{\Psi(z(t))}, \forall t \geq 0 \quad (\text{I.5})$$

où  $\Psi(z(t))$  est une fonction de  $z(t)$  et  $R_0$  est la fiabilité de défaillance dans les conditions nominales. Ici le processus d'évolution de la fiabilité  $R(t)$  est simplement accéléré au travers de l'insertion du vecteur  $z(t)$ .

Le modèle à risque proportionnel ([36]) est, quant à lui, décrit par la relation suivante :

$$\lambda(t) = \Psi(z(t))\lambda_0(t), \forall t \geq 0 \quad (\text{I.6})$$

où  $\Psi(z(t))$  est une fonction de  $z(t)$  et  $\lambda_0(t)$  est le taux de défaillance dans les conditions nominales. Ici le taux de défaillance  $\lambda(t)$  est augmenté au travers de l'insertion du vecteur  $z(t)$ .

Certaines applications de ces méthodes peuvent être trouvées dans [34] et [80].

Une autre approche de pronostic, basée sur la connaissance de modèles de dégradation sous forme d'abaques, a été développée dans [137] pour le cas déterministe et dans [131] et [132] pour le cas probabiliste.

### *A2. Pronostic basé sur les processus stochastiques*

Dans cette approche, le processus de dégradation, de détérioration est modélisé par un processus stochastique. En général dans la littérature, les processus stochastiques peuvent être modélisés par des processus semi-markoviens ([63] et [92]). L'expert détermine dans ce cas, à partir de son expérience, les probabilités de transition entre l'état de fonctionnement normal et l'état de

30. "Accelerated Life Model" expression anglaise associée

31. "Proportional Hazard Model" expression anglaise associée

## I.4. Description des étapes de l'architecture PHM

---

fonctionnement défaillant d'un système.

Ce processus décrit l'évolution d'une variable aléatoire, ici l'état du système à un instant considéré, à partir des états aux instants précédents, en fonction du temps d'occupation passé dans chacun de ses états. De plus, dans l'objectif de tenir compte de l'évolution du processus de dégradation pouvant être influencée par les conditions opérationnelles, des processus markoviens à changements de régimes peuvent être introduits. Pour plus d'informations, le lecteur pourra se référer à [127]. L'estimation des paramètres de ces processus peut être réalisée au travers de deux approches : fréquentielle et bayésienne. La démarche fréquentielle est privilégiée dans le cas de volumes de données ou de paramètres importants. La démarche bayésienne permet d'incorporer une partie de la connaissance experte, comme par exemple l'historique de données des évènements.

Des applications de ces techniques peuvent-être trouvées dans [32], [42], [43], [96] et [178].

### *A3. Pronostic à base de systèmes experts*

L'approche à base de connaissances expertes est fondée sur la connaissance explicite des relations de cause à effet menant à l'apparition d'une défaillance sur un système. Elle est utilisée lorsque les connaissances sur les phénomènes sous-jacents de naissance et d'évolution des défauts menant à la défaillance ne sont pas directement disponibles. La conception de tels systèmes est divisée en trois étapes de conception : acquisition et structuration d'une base de connaissance, développement de règles d'expert et développement d'un moteur d'inférence.

L'acquisition d'une base de connaissance est réalisée à partir d'un ensemble de faits observés sur un système et en choisissant une structure de représentation et d'organisation de cette connaissance. Puis, un ensemble de règles de raisonnement est développé afin de créer un lien entre la base de faits disponible et la connaissance basée sur l'expérience du comportement du système. Enfin, un moteur d'inférence utilise la base de faits et de règles pour produire de nouvelles données. Ces règles sont basées sur un agencement de faits reliés par des opérateurs logiques et des règles de test. Le moteur d'inférence produit ainsi de nouvelles données qui sont insérées dans la base de faits au cours du temps. Le pronostic est alors réalisé en prédisant le temps de vie restant à partir de la base de faits produits. Pour un exemple d'application, se référer à [40].

Cette approche nécessite un retour d'expérience d'un expert pour être considérée, et les lois de raisonnement pour le processus de pronostic restent spécifiquement développées pour un système donné. Une remise à jour des règles de l'expert au fur et à mesure de l'évolution de la base de faits peut s'avérer nécessaire.



### **B. Pronostic guidé par les données**

Basé sur un ensemble de séries temporelles d'entrées/sorties d'un système traduisant l'évolution d'indicateurs de l'état de santé d'un système, le pronostic guidé par les données peut être considéré. Dans la littérature, il existe deux principales approches [18] : le pronostic par analyse de tendance et le pronostic par l'apprentissage.

#### *B1. Pronostic par analyse de tendance*

L'objectif consiste à estimer la dérive des indicateurs temporels ou fréquentiels de l'état de santé d'un système par rapport au cas du fonctionnement nominal. Pour cela, les méthodologies d'analyse de séries temporelles et de classification multivariable sont appliquées afin d'estimer un modèle par régression de ces indicateurs et de prédire leur évolution future. Les prédictions sont réalisées au travers de régressions de type linéaire, de type exponentiel lisse [12] et [17], auto-régressifs ou auto-régressifs à moyenne glissante (voir [91] et [173]). Cependant, les techniques décrites ne semblent pas permettre de prendre en compte la variabilité des conditions opérationnelles. D'autres méthodes de classifications multivariées peuvent être utilisées comme l'analyse en composante principale et la discrimination linéaire quadratique [11].

Des applications de ce type de pronostic ont été réalisées en développant un système de pronostic embarqué par analyse de tendance sur les moteurs de turbine à gaz de chars [64], ou concernant les boîtes de vitesse d'hélicoptère [87].

#### *B2. Pronostic par l'apprentissage*

Le pronostic par l'apprentissage est basé sur la construction de modèles d'intelligence artificielle. L'une des techniques d'apprentissage les plus couramment utilisées reste les réseaux de neurones artificiels. L'objectif est de déterminer le modèle de comportement d'un système par rapport à la connaissance des vecteurs d'entrées et de sorties donnés. La convergence de l'apprentissage du modèle d'intelligence artificielle est réalisée au travers d'un algorithme d'optimisation. Le but est de faire tendre le comportement du réseau de neurones au plus près du comportement souhaité, par rapport à la sortie connue. Puis, en utilisant un autre jeu de données, ce réseau de neurones est ensuite utilisé pour détecter et classifier le type de scénario sous lequel le système évolue couramment, et aussi de prédire l'évolution des indicateurs de l'état de santé du système.

Cette approche nécessite un grand nombre de jeu de données intégrant l'évolution des divers scénarios jusqu'aux défaillances pouvant apparaître sur le système suivant les conditions opérationnelles. Car, si un scénario de défaillance n'est pas utilisé dans le jeu de données d'apprentissage, le réseau de neurones ne sera pas en mesure de le classifier et encore moins d'anticiper le comportement du système jusqu'à l'apparition d'une défaillance. Ce type d'approche

## **I.4. Description des étapes de l'architecture PHM**

---

reste néanmoins lié au système considéré et tout changement sur le système nécessite un nouvel apprentissage.

Parmi ces méthodologies, on peut citer les neurones à ondelettes dynamiques [170], les neurones à fonction de bases radiales [176] ou encore le réseau neuro-flou [169]. Les réseaux de neurones à ondelettes possèdent plusieurs avantages à leur utilisation dont la possibilité de combiner des types d'informations d'entrées différents (temporel-fréquentiel) permettant une utilisation croisée d'indicateurs d'état de santé afin d'améliorer le pronostic. La logique neuro-flou a été intégrée afin de permettre une meilleure convergence de l'apprentissage du réseau de neurones.

A titre d'exemples d'applications de ce type de techniques, on peut citer l'utilisation de réseau neuro-flou se pour l'analyse de fissure se propageant au travers des engrenages [169], ou encore l'application de neurones à fonction de bases radiales sur un four à gaz [177].

Plus récemment, de nouvelles techniques basées sur le Relevance Vector Machine ou le Support Vector Machine ont été explorées en vue du pronostic guidé par les données. L'objectif est de construire un modèle à partir des données du comportement d'un système en dégradation. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer à [136].

### **C. Pronostic fondé sur les modèles**

Cette approche est basée sur la compréhension des principes et des mécanismes physiques de dégradation se produisant sur un système. Cette connaissance permet de construire un modèle de comportement d'un système intégrant l'évolution dynamique de la dégradation. Dans ce cas, la dégradation est une variable continue dont l'évolution est décrite par un processus déterministe ou stochastique. Les modèles les plus utilisés sont composés d'équations aux différences, d'équations différentielles ou encore de modèles d'équation aux dérivées partielles.

Ces types de modèles physiques utilisés pour le pronostic permettent d'intégrer la connaissance de l'ensemble des conditions opérationnelles ainsi que l'effet de leur variabilité sur le comportement du système (voir [2], [37] et [102]). De plus, ils intègrent également l'évolution dynamique de la dégradation ainsi que son effet sur la dérive de comportement du système. Ici, le pronostic est alors réalisé au travers de l'analyse de dégradation (voir [25] et [108]).

#### *C1. Représentation multi-échelles*

Le domaine le plus avancé dans la compréhension des mécanismes de dégradation est bien celui de la dégradation des matériaux. En effet, des méthodologies d'analyse structurelle (analyse

de stress, de déformation de structures et de composantes) ont été développées et intègrent un cadre d'analyse pour l'initialisation et la localisation de la dégradation, le choix d'un modèle de dégradation pertinent, le choix d'un critère de défaillance et enfin la prédiction de l'apparition de défaillances. Les modèles considérés dans la mécanique de dégradation sont des modèles déterministes paramétrés dans la plupart des cas dont les paramètres sont donnés dans des tables de référence.

Au travers d'une analyse structurelle, la variable de dégradation est en général une variable scalaire dans le cas d'une dégradation isotropique<sup>32</sup> ou une variable de dégradation tensorielle lorsque la dégradation est anisotropique<sup>33</sup>. Pour une explication détaillée, le lecteur est référé à [102] ou [168]. La première étape de l'analyse structurelle concerne la détection, la localisation de microfissures dans un matériau par rapport aux sollicitations de type stress/contrainte exercées sur ce dernier. Ce type d'analyse s'effectue à une échelle intermédiaire entre l'échelle microscopique<sup>34</sup> et l'échelle macroscopique<sup>35</sup>, appelée mésoscopique<sup>36</sup>. Concernant la détection et la localisation des microfissures, un critère d'accumulation de contraintes locales fournit une valeur seuil d'initiation de propagation de ces fissures ainsi que leurs directions.

Puis, le choix d'un modèle de dégradation est effectué. L'objectif est de décrire l'évolution des fissures selon le type de mécanisme de dégradation considéré. Dans le cas de charge proportionnelle, les modèles de dégradation isotropique décrivent de manière fidèle et simple l'évolution d'une fissure dans un matériau. Dans le cas de charges non proportionnelles, les modèles anisotropiques sont utilisés. Le but est de refléter au mieux l'accumulation de dégradation et la propagation des fissures, dues aux conditions de sollicitation et d'environnement. Dans l'analyse de fatigue mécanique, les modèles tenant compte de la proximité des micro-défauts pourraient être choisis afin de refléter la réalité de plus près. La difficulté principale lors de l'utilisation de ce type de modèle est liée à des problèmes numériques de simulation et de résolutions d'équations.

Les modèles de dégradation sont en général implémentés sous un logiciel de résolution par éléments finis permettant de simuler l'évolution géométrique de la fissure et de l'évolution conjointe de la structure sous les charges de sollicitation [120]. Puis, une prédiction du temps est estimée à partir duquel la fissure atteindra une taille critique, engendrant un mécanisme de fracture au sein du matériau. Les temps de simulation associés peuvent parfois s'avérer élevés selon la complexité du système et du mécanisme de dégradation considéré. Des méthodologies

---

32. Fissure se propageant dans le plan perpendiculaire à la composante de stress principale

33. Fissure ne se propageant pas uniquement dans le plan perpendiculaire à la composante de stress principale

34. Échelle des plans d'atomes

35. Échelle de l'évolution des fissures

36. Échelle où se produisent les naissances de micro-fissures

#### I.4. Description des étapes de l'architecture PHM

---

d'analyse structurelle pour des mécanismes de dégradation plus localisés ont été développées en ajoutant un étage supplémentaire d'analyse locale à une micro-échelle de l'initialisation de micro-fissures et de sa propagation à une échelle mésoscopique [102].

La difficulté d'utiliser des modèles aussi complexes a été contournée pour certaines applications embarquées, en ne considérant uniquement que des modèles simplifiés d'évolution de dégradation, notamment comme l'utilisation de la loi de Paris Erdogan [154], pour une vision simplifiée de la propagation de fissure sur des systèmes mécaniques (engrenages, des roulements, etc). Ce type de modèle est étudié par rapport à des cycles de fonctionnement d'hystérésis complet de stress par rapport à la contrainte exercée. Des méthodologies [1] ont été développées de sorte à déterminer, à partir d'une fonction de sollicitation, le nombre de cycles constitutifs qui le compose et ainsi pouvoir faire évoluer les variables internes des lois de dégradation basées sur cette approche. Le modèle de propagation de fissure de Paris Erdogan est régi par :

$$\frac{dD}{dN} = C(\Delta K(N))^m \quad (\text{I.7})$$

où  $D$  est la variable de dégradation (ici la largeur de la fissure),  $N$  étant les cycles de fonctionnement,  $\Delta K(N)$  est un facteur dépendant de la géométrie de la fissure sur un cycle de fonctionnement.  $C$  et  $m$  sont des constantes caractérisant le matériau constitutif de la pièce mécanique étudiée avec  $0 < C \ll 1$  et  $m \in [2, 4]$ . Une application [135] couplant l'approche de l'analyse structurelle par éléments finis et la loi de Paris Erdogan sur un système de transmission d'hélicoptère est présentée dans la Figure I.7.

D'autres modèles d'évolution de dégradation peuvent être utilisés comme celui de Palmgren-Miner [118]. Ce modèle repose sur la description de l'évolution de l'accumulation de la dégradation, en fonction du rapport entre le nombre de cycles considéré, et le nombre maximum de cycles avant rupture. Plus précisément, pour une succession de  $i$  profils de charges différents, la loi de Palmgren-Miner est donnée par :

$$\frac{dD}{dN} = \sum_i \frac{n_i}{N_i} \quad (\text{I.8})$$

où  $N_i$  correspond au nombre de cycles de charge de profil  $i$  pour atteindre le niveau maximum de dégradation,  $n_i$  est le nombre de cycles subi par le matériau considéré.

D'autres modèles de dégradation sont présentés dans la littérature (voir [51]). Par exemple, un modèle de dégradation stochastique non linéaire de propagation de fissures dynamiques dues à la fatigue mécanique, est introduit dans [145] pour l'implémentation temps réel du taux d'accumulation de dégradation dans les études de structures.

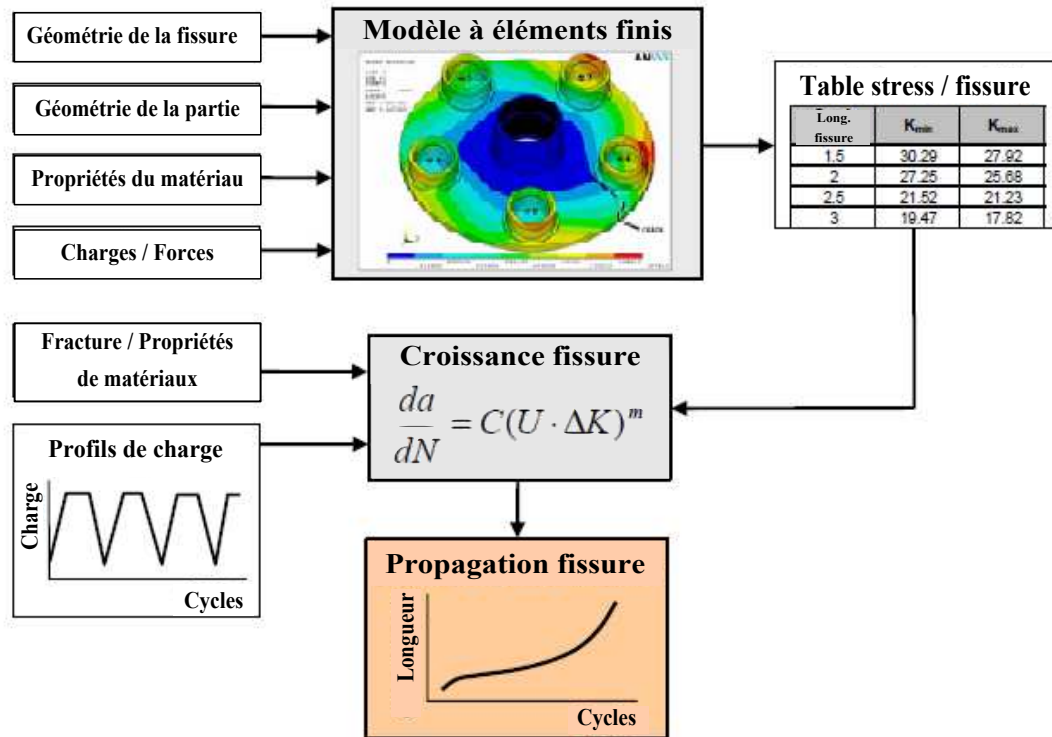


Figure I.7 – Analyse structurale d’une boîte de transmission d’hélicoptère [135]

### C2. Modèles discrets

La construction d’un estimateur de l’état de santé est particulièrement adaptée au cas des mécanismes de dégradation assez lents. L’évolution de l’état est supposée modélisable par un processus stochastique discret pouvant s’écrire sous la forme :

$$\begin{cases} x_{k+1} = f_k(x_k, u_k, \omega_k) \\ z_k = g_k(x_k, v_k) \end{cases} \quad (I.9)$$

où  $x_k$  est un vecteur contenant l’état de dégradation et les paramètres de l’environnement qui influencent l’évolution de la dégradation.  $u_k$  est le vecteur de commande et  $z_k$  est le vecteur de sortie.  $\omega_k$  et  $v_k$  désignent des bruits.  $f_k$  et  $g_k$  sont des fonctions non linéaires. Dans le cas où les fonctions  $f_k$  et  $g_k$  sont linéaires alors le modèle devient :

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + D_x \omega_k \\ z_k = C_k x_k + D_z v_k \end{cases} \quad (I.10)$$

où  $A_k$ ,  $B_k$  sont respectivement les matrices d’état et de commande.  $C_k$  représente la matrice de sortie.  $D_x$  et  $D_z$  désignent respectivement les matrices de propagation des bruits  $\omega_k$  et  $v_k$  sur les états  $x$  et  $z$ .

## I.4. Description des étapes de l'architecture PHM

---

Le pronostic est réalisé en estimant des prédictions des séquences de l'état  $\{x_{k+i}\}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  jusqu'à atteindre un seuil critique. Pour résoudre le problème de la prédiction de cette séquence en milieu bruité, certains auteurs utilisent des techniques de filtrage (voir [157] et [175]) comme un filtre de Kalman ou des filtres particulières (voir [31], [129] et [130]).

### C3. Représentation par modèles continus

Dans ce sous-paragraphe, la représentation de processus par modèles continus est donnée par

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, \lambda(\phi), u, t) \\ \dot{\phi} = \epsilon g(\phi, x, t) \\ y = h(x, \phi, u) \end{cases} \quad (\text{I.11})$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  désigne l'état du système, une variable supposée à dynamique rapide.  $\phi \in \mathbb{R}^q$  est une variable à dynamique lente caractérisant la dégradation.  $u \in \mathbb{R}^m$  désigne la commande et  $y \in \mathbb{R}^p$  décrit la sortie du système.  $\epsilon$  représente le ratio des échelles entre les dynamiques rapide et lente avec  $0 < \epsilon \ll 1$ .  $\lambda(\phi)$  désigne la déviation des paramètres physiques par rapport à l'évolution de la dégradation.  $f$ ,  $g$  et  $h$  sont des fonctions régulières de bonne dimension.

Dans [22] (voir aussi [21], [25] et [37]), on propose une méthode pour estimer l'état de dégradation non mesuré (I.11), entraînant une dérive lente du comportement de l'état du système. Cette dérive traduit l'évolution indirectement de la dégradation et constitue un indicateur à étudier. Plus précisément, cet indicateur est basé sur la comparaison de l'espace des phases du système courant, intégrant les effets de la dégradation, avec l'espace des phases du système de référence sans influence de la dégradation, à partir des observations disponibles sur le système. L'estimation de cet indicateur est ensuite utilisée en entrée d'un filtre non-linéaire récursif de type "unscented filter", permettant d'estimer l'état de dégradation du système dans le futur et de prédire le temps de vie restant d'un système. Cette méthodologie a été illustrée entre autres sur un oscillateur électromécanique, représenté par la Figure I.8. Pour ce procédé, la dégradation est représentée par la tension de décharge de la batterie alimentant le système électromécanique. En appliquant cette méthodologie, la variable de dégradation estimée se comporte comme décrit dans la Figure I.9.

La méthode proposée précédemment a été étendue à l'identification de processus de dégradation multidimensionnelle dans [23], [24], [26] et [27]. Pour ce faire, les décompositions orthogonale lisse et orthogonale propre ont été introduites afin d'identifier les modes de dégradations dominants. Puis des prédictions du temps de vie restant sont estimées. Dans [30], une méthode d'identification de la dégradation est basée sur la décomposition orthogonale lisse et permet d'extraire les modes normaux linéaires et les fréquences naturelles de systèmes vibratoires à plusieurs degrés de liberté et à paramètres distribués. Une autre approche de pronostic

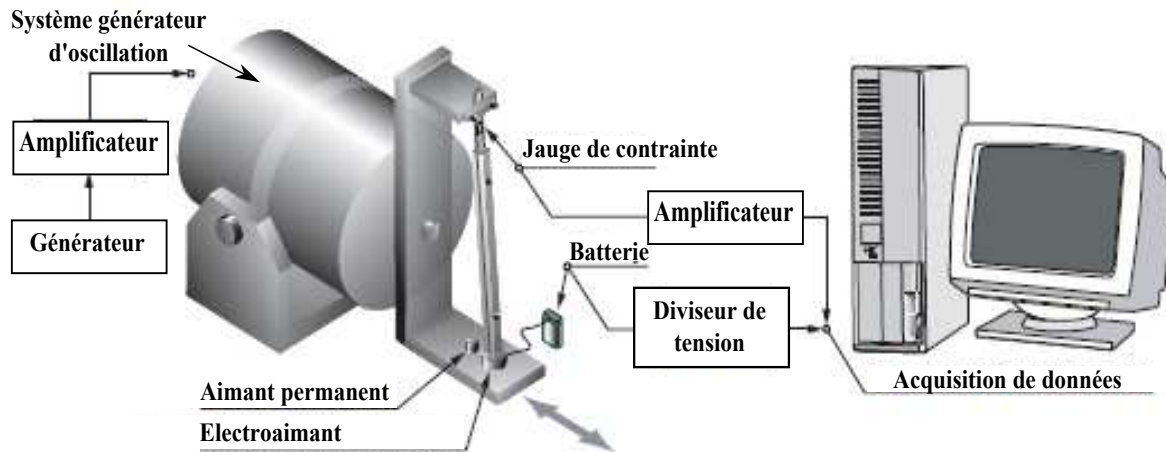


Figure I.8 – Représentation de l'oscillateur électromécanique [22]

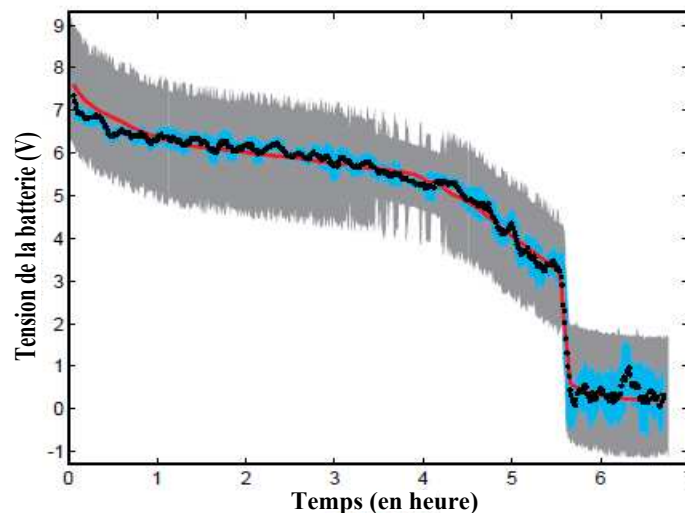


Figure I.9 – Estimation de l'état de décharge de la batterie [22]

est explorée au travers de l'estimation de la variation du flux locale dans [28] et [107]. La fonction de distribution de probabilité de la trajectoire du système à dynamique rapide dans l'espace des phases est considérée comme une fonction de l'état de dégradation. Les estimations attendues autour de cette trajectoire à différents endroits de l'espace des phases permettent de caractériser le processus de dégradation. L'identification de la dégradation est réalisée par une décomposition orthogonale lisse et est utilisée pour le pronostic.

Une autre méthode de pronostic pour le système (I.11) a été proposée dans [108]. L'approche repose sur la connaissance complète du modèle (I.11), cependant l'état de dégradation n'est pas mesuré. Le principe de moyenne est appliqué afin d'ouvrir la structure d'interconnexion entre

#### I.4. Description des étapes de l'architecture PHM

la partie du système à dynamique lente et rapide. Ainsi, la partie du système à dynamique lente devient constante sur un certain intervalle de temps, et est réinjectée dans la partie à dynamique rapide. Un modèle de dégradation est déduit pour chaque mode de sollicitation. L'état de dégradation n'étant pas mesuré, un indicateur de mesure indirecte de son effet est considéré. Le but est de prédire en finalité l'état de dégradation et sa variance. Pour ce faire, un filtre de modèles multiples en interaction est utilisé pour le pronostic selon les différents modes considérés de sollicitation. Cette méthodologie a été appliquée sur la suspension d'un demi-véhicule pour différents profils de route et est représentée par la Figure I.10. L'état de dégradation non mesuré a été estimé au travers d'un indicateur, représenté par la Figure I.11 pour différents profils de route. Puis, la dégradation représentant la longueur d'une fissure se propageant sur le ressort de la suspension est illustrée par la Figure I.12. La dérive associée au paramètre physique de raideur de la suspension est donnée dans la Figure I.12.

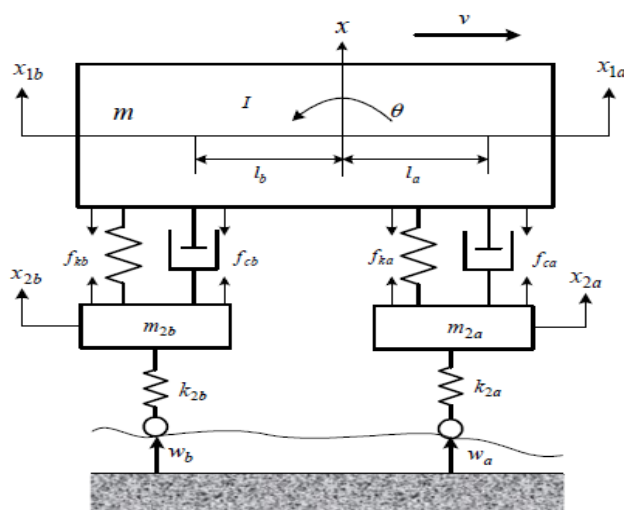


Figure I.10 – Schéma d'une suspension d'un demi-véhicule [108]

Dans [103], on propose des modèles numériques traduisant l'accumulation de dégradation pour les matériaux et une méthode de simulation des systèmes à échelle de temps multiple pour le pronostic. Dans [104], les auteurs proposent une méthodologie de pronostic basée sur un modèle de propagation de défaillance déterministe pour estimer le temps de vie restant de roulement à bille. Dans [105], la méthodologie précédente a été étendue au travers du développement d'un modèle stochastique de propagation de défaillance pour les roulements à bille, afin de tenir compte de la nature incertaine même de la propagation de défaillance. Dans [139], les auteurs présentent un modèle de pronostic basé sur l'évolution de la raideur d'un système mécanique pour les roulements à billes. Ce modèle est basée sur l'analyse de la réponse vibratoire et de la mécanique de dégradation pour le pronostic. Dans [49], on traite de la problématique de la précision, de la confiance et de la fiabilité des estimations du temps de vie restant sur une



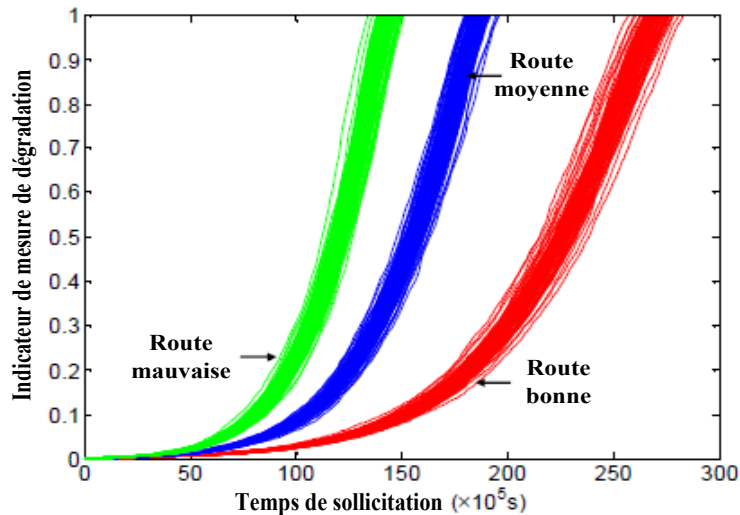


Figure I.11 – Évolution de l'indicateur de dégradation pour trois profils de routes [108]

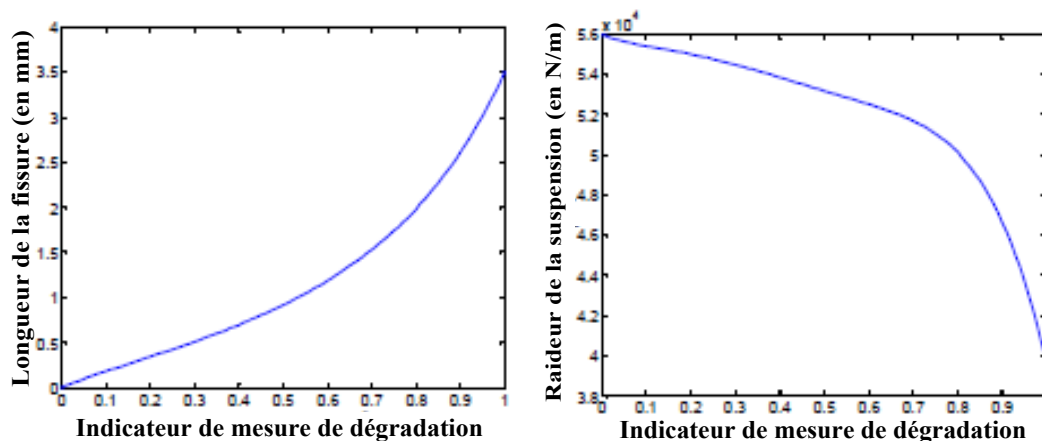


Figure I.12 – Évolution de la dégradation et dérive du paramètre de raideur du ressort [108]

boîte de vitesse d'hélicoptère. Au travers de [2], les auteurs proposent une méthodologie pour extraire des indicateurs caractéristiques de dégradation, à partir de données modales d'entrées sorties de structures avec des matériaux hétérogènes et à plusieurs composants. Dans [128], des filtres sont utilisés sur des modèles physiques pour caractériser l'état d'une machine. Ils sont couplés à la loi de propagation de fissure de Forman afin de déterminer le nombre de cycles restant avant apparition d'une défaillance. Dans [88], les auteurs proposent une méthodologie de pronostic d'une boîte de vitesse d'hélicoptère au travers de l'étude d'un modèle stochastique de dégradation de structure.

## I.4. Description des étapes de l'architecture PHM

---

### D. Synthèse des approches de pronostic

Les principaux avantages et inconvénients de l'utilisation de ces trois types d'approches sont présentés dans le tableau I.1. Le lecteur pourra trouver aussi des éléments comparatifs d'avantages

Approche de pronostic	Avantages	Inconvénients
Basée sur l'expérience	Connaissances disponibles dans de nombreux domaines d'expertise	Nécessite un bon retour d'expérience. Intégration simplifiée des variations de conditions opérationnelles
Guidée par les données	Connaissance des mécanismes de dégradation directement incluse dans les données	Nécessite des scénarios de dégradation pour différentes conditions opérationnelles
Fondée sur les modèles	Meilleures performances de pronostic obtenues. Flexibilité de l'approche due à l'intégration de connaissance de la structure des mécanismes de dégradation	Nécessite une connaissance liée au mécanisme de dégradation

Tableau I.1 – Avantages et inconvénients des trois approches de pronostic

tages et d'inconvénients relatifs à chacune des méthodologies de pronostic développées pour les trois approches dans [74] et [81].

#### I.4.4.5 Métriques de la performance du pronostic

L'évaluation de la performance des prédictions est une étape importante dans l'analyse. En effet, la performance définit la précision de l'estimation obtenue et la confiance que l'on peut attribuer à cette prédiction, en tenant compte des incertitudes et des perturbations, inhérentes à la réalité de tout système. Dans cette sous-section, l'évaluation des performances du pronostic sera présentée au travers de l'introduction de deux ensembles de métriques liés soit à la disponibilité d'un système, soit à l'évaluation de l'apport économique de l'application du pronostic.

##### A. Métriques liées à la disponibilité

Quatre métriques présentées dans [150] et [151] sont considérées comme les plus adaptées pour l'évaluation de la performance du pronostic et se déclinent comme suit.

##### A1. Horizon de pronostic

L'horizon de pronostic se définit comme la différence entre l'instant d'apparition d'une défaillance  $T_d$ , soustrait à l'instant  $T_{cf}$  auquel la précision de l'indice de santé estimé est inférieure à un seuil donné. Ce seuil est défini par un paramètre  $\alpha$ . Une illustration de cette métrique est donnée par la Figure I.13.

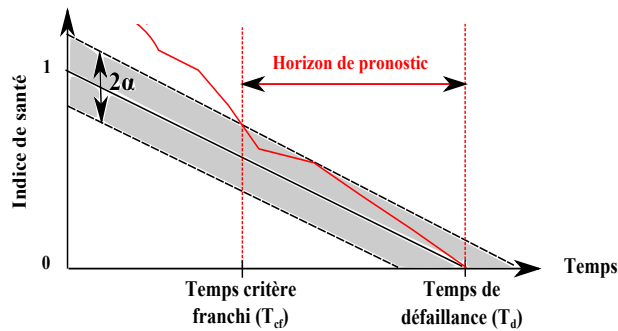


Figure I.13 – Horizon de pronostic

### A2. Performance

Cette métrique est destinée à évaluer si le pronostic réalisé reste dans des niveaux de performance (erreur de prédiction inférieure à une valeur donnée) désirés à un instant donné, selon deux critères. Le premier critère concerne la précision de la prédiction réalisée qui doit rester inférieure à un seuil donné, défini par un paramètre  $\alpha \times 100\%$ . De plus, un second critère est associé à la notion de temps. Il est défini à partir de l'instant de détection d'un défaut  $t_{ad}$  sur un horizon de temps, paramétré par  $\lambda$ , jusqu'à l'apparition de la défaillance à l'instant  $T_d$ . Cette métrique est illustrée au travers de la Figure I.14.

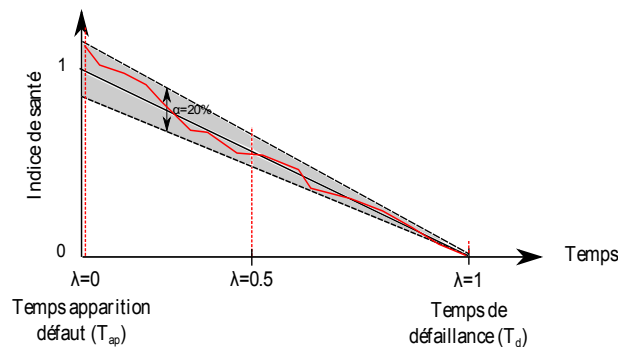


Figure I.14 – Performance  $\alpha - \lambda$

### A3. Exactitude relative

Il s'agit d'une métrique destinée à évaluer l'erreur de prédiction réalisée lors d'un pronostic. Elle se définit à chaque instant par la différence entre la prédiction estimée et sa valeur de référence.

### A4. Convergence

La convergence est une métrique destinée à évaluer si l'algorithme de pronostic converge à

## **I.4. Description des étapes de l'architecture PHM**

---

partir de l'augmentation de l'horizon d'observation disponible sur un système. La convergence quantifie l'évolution de la précision croissante au cours du temps de la prédiction du temps de vie restant.

D'autres métriques (voir par exemple [19], [150], [151] et [161]) peuvent être considérées en vue de respecter des critères que sont la robustesse, l'application en temps réel et la sensibilité des prédictions réalisées. Des travaux ont été proposés pour maîtriser les erreurs de prédictions par réseau neuro-flou [163] et en intégrant la confiance à un modèle prédictif neuro-flou [46].

### **B. Métriques liées à l'aspect économique**

Des métriques plus adaptées à l'évaluation des bénéfices apportés par le pronostic ont été proposées. En effet, la recherche sur le pronostic est en partie conditionnée par la capacité d'évaluer l'apport potentiel de ce nouveau concept. Dans ce qui suit, trois métriques sont présentées pour évaluer l'apport du pronostic.

#### **B1. Ratio MTBF<sup>37</sup>/pronostic**

Cette métrique mesure le ratio de temps entre la durée d'utilisation moyenne avant remplacement d'un système, et la durée de vie restant estimée par un processus de surveillance d'un système.

#### **B2. Coût du cycle de vie avec/sans pronostic**

Cette métrique évalue le coût du cycle de vie<sup>38</sup> d'un système équipé d'un processus de surveillance d'un système, avec une fonction de pronostic. Un bénéfice économique de l'utilisation du pronostic est évalué par comparaison des coûts de cycle de vie d'un système équipé avec et sans fonction de pronostic intégrée dans le processus de surveillance.

#### **B3. Retour sur investissement**

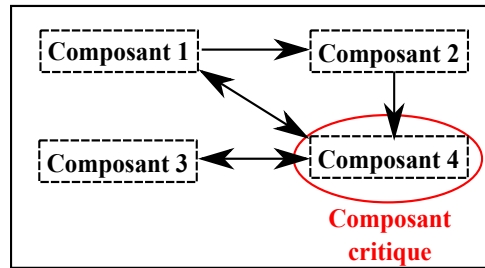
Le gain est le bénéfice financier réalisé entre le coût de développement, d'installation et de maintien du système de surveillance avec une fonction de pronostic et les bénéfices économiques dégagés par l'utilisation de ce processus de surveillance.

### **I.4.4.6 Pronostic de niveau composant et de niveau système**

Le pronostic peut-être considéré au niveau composant ou à l'échelle d'un système global. On peut définir un système comme un ensemble de composants (voir Figure I.15). Ainsi, le pronostic au niveau composant est principalement réalisé sur des composants critiques pour le système. Par critique, on entend les composants assurant les fonctions principales pour les-

37. Mean Time Between Failure

38. Coût de construction, d'acquisition et coût de maintenance



**Figure I.15** – Système comme un ensemble de composants

quelles un système (issu de l'aéronautique, l'aérospatiale, du nucléaire) est conçu au regard de la disponibilité. Sur un système complexe, il apparaît difficile de réaliser un pronostic sur chacun de ses composants. Généralement, dans la littérature, une grande partie des travaux sur le pronostic est conçue au niveau composant (voir [88], [104], [108], [135] et [139]).

Des travaux récents de pronostic appliqués à l'échelle d'un système global ont été proposés (voir [136]). Cette méthodologie est basée sur la décomposition d'un système complexe selon trois axes : le Process, la Mission et l'Environnement et tient compte de l'influence des conditions opérationnelles sur la dynamique des trajectoires de dégradation. Le pronostic est réalisé à partir de la connaissance a priori des trajectoires de dégradation, disponibles sous forme d'abaques de dégradation, suivant des conditions opérationnelles considérées. Dans [41], on introduit une architecture distribuée de pronostic de Systèmes Techniques Complexes de Grande Dimension. Cette approche est basée sur une analyse fonctionnelle, structurelle, comportementale et topologique d'un système complexe. Enfin, l'auteur de [35] a présenté un formalisme de pronostic générique au niveau système évaluant la dégradation future des composants d'un système.

### I.4.5 Aide à la décision

Le processus d'aide à la décision facilite les actions à entreprendre afin d'assurer la disponibilité d'un système. L'une des actions possibles consiste à réaliser une action de maintenance sur le système. Le but est de rétablir le niveau de performance du système à un degré acceptable pour son exploitation. Cette prise de décision est basée sur un ensemble de critères prédéfinis comme ceux donnés dans [45] et [127]. Des travaux proposent également des modélisations et des outils d'évaluation de stratégies de maintenance [179]. L'objectif est de développer un formalisme d'aide à la décision de maintenance. Dans [147], on s'intéresse à l'optimisation de la maintenance des systèmes industriels complexes, en mettant en place une architecture de supervision dotée de la fonction du pronostic. L'objectif est de faciliter l'aide à la prise de décisions d'actions de maintenance.

# I.5 Pronostic et maintenance intelligente

L'objectif de cette section est de présenter plus précisément l'application du pronostic au domaine de la maintenance<sup>39</sup>. Pour ce faire, la notion de performance globale d'un système est introduite, afin de préciser en quoi l'application du pronostic constitue un apport aux stratégies de maintenance existante jusqu'à l'émergence de la maintenance intelligente.

### I.5.1 Performance globale d'un système

L'évolution des systèmes complexes nécessite le développement de stratégies de maintenance coûteuses et sophistiquées pour assurer la disponibilité des systèmes. Ainsi, pour les usines américaines, il a été estimé dans [74] que le pays dépensait 600 milliards de dollars pour assurer la disponibilité de ces systèmes en 1981, et ce chiffre aurait doublé au cours des vingt années qui ont suivi. Il est également établi qu'entre un tiers et la moitié de ces dépenses sont considérées comme inappropriées avec une stratégie de maintenance inefficace. Au travers de ce constat, l'amélioration constante de la performance globale des systèmes reste une nécessité.

Ainsi, le concept de performance globale d'un système a été introduit dans [153] comme l'obtention conjointe de la pertinence (adéquation des objectifs et des moyens), l'efficacité (adéquation des moyens et des résultats) et de l'efficacités (adéquation des résultats et des objectifs), appréciée en terme de coût et de valeurs, sur l'intégralité du cycle de vie d'un système. En général, la performance globale des systèmes est recherchée d'un point de vue économique sur des horizons de temps, pouvant s'étendre du court terme au long terme, en optimisant les coûts d'exploitation, tout en assurant la sécurité des biens et des personnes. De plus, une recherche d'optimisation de la maîtrise des coûts d'exploitation est recherchée sur l'ensemble de son cycle de vie (voir [10]).

En effet, la maintenance industrielle a une influence transversale à l'ensemble du cycle de vie des systèmes en exploitation. Par conséquent, c'est au coeur de celle-ci qu'existe un levier d'augmentation de performance globale des systèmes qui n'a pas été exploité jusqu'alors pleinement et où le pronostic pourra trouver toute son application. L'intérêt d'anticiper l'apparition de défaillance sur un système permet d'assurer une bien meilleure maîtrise des coûts sur l'ensemble du cycle de vie de ce système.

---

39. Par "maintenance", il est sous-entendu l'ensemble des actions permettant de maintenir ou de rétablir un bien dans un état spécifié ou en mesure d'assurer un service déterminé, [4].

## I.5.2 Vision globale de l'évolution des stratégies de maintenance

Cette sous-section a pour objectif de mettre en perspective l'émergence de la stratégie de maintenance intelligente par rapport aux stratégies de maintenance existantes. Parmi les différentes stratégies de maintenance (voir [93], [158] et [171]), il existe deux principales familles : la maintenance corrective et la maintenance préventive. La première famille caractérise les méthodologies de maintenance où l'on subit la panne sans aucune action de prédiction ou d'anticipation de défaillances. La seconde famille est la maintenance préventive possédant une action de prédiction et d'anticipation plus ou moins précoce avant l'apparition de défaillances. L'articulation des différentes stratégies de maintenance est détaillée dans la Figure I.16.

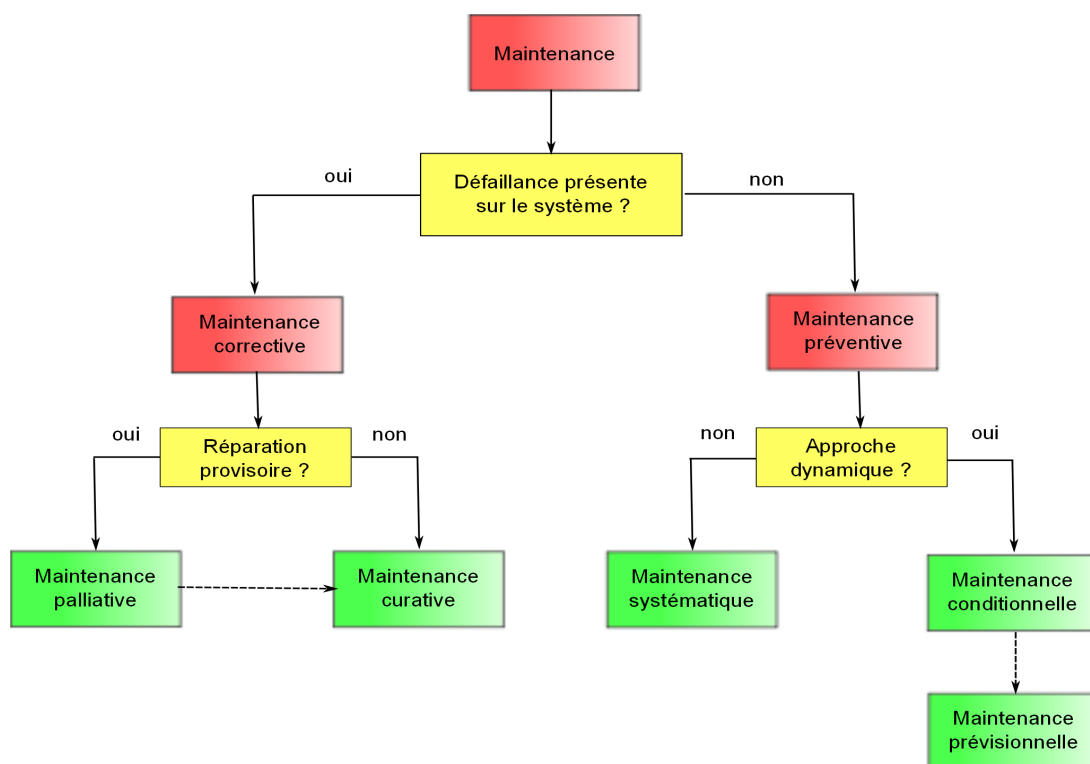


Figure I.16 – Les différentes stratégies de maintenance

L'une des stratégies les plus simples de la maintenance consiste à exploiter un système industriel sans aucune action d'anticipation de l'apparition d'une ou plusieurs défaillances, pouvant être partielles ou complètes. Une stratégie de maintenance corrective<sup>40</sup> pouvant être curative<sup>41</sup> ou palliative<sup>42</sup> sera déployée afin de permettre de nouveau l'exploitation du système.

40. La maintenance corrective est une action exécutée après détection d'une panne et destinée à remettre un bien dans un état dans lequel il peut accomplir une fonction requise, [4]

41. La maintenance curative est une action de réparation qui modifie l'état du système de sorte à lui permettre d'assurer de nouveau les fonctions pour lesquelles celui-ci a été conçu avec un niveau de performance acceptable.

42. La maintenance palliative consiste à dépanner et modifier l'état d'un système temporairement de sorte à

## **I.5. Pronostic et maintenance intelligente**

---

Le coût associé est élevé car le système en exploitation n'est plus disponible durant toute la période de maintenance.

Afin de réduire les coûts et les conséquences liés à l'apparition d'une ou de plusieurs défaillances non anticipée(s), une stratégie de maintenance préventive<sup>43</sup> est à présent considérée. Elle se décline en trois stratégies de maintenance : la maintenance systématique, la maintenance conditionnelle et la maintenance prévisionnelle.

La maintenance systématique est une action de maintenance préventive exécutée à des intervalles de temps préétablis mais sans contrôle préalable de l'état du bien. Ces intervalles de temps préétablis sont estimés à partir de la distribution du taux de défaillance (voir [141]), pour des types de sollicitations préétablies. Toutefois, ces intervalles de temps ne tiennent pas compte des conditions opérationnelles réelles, impliquant des majorations excessives dans les estimations et entraînant des actions de maintenances non justifiées.

La maintenance conditionnelle est basée sur la surveillance d'un ensemble de paramètres spécifiques d'un système en les comparant par rapport à des valeurs de référence. En franchissant un certain seuil prédéterminé, une défaillance est prédite de manière imminente en supposant que les conditions opérationnelles sont constantes. Or, un système est soumis à un ensemble de perturbations et de variations de conditions opérationnelles, causant des déviations des paramètres surveillés non considérées avec cette approche de maintenance.

La maintenance prévisionnelle permet de remonter des conséquences de l'apparition de défauts aux causes les engendrant, en fournissant une meilleure compréhension du mécanisme de dégradation suivant la variation des conditions opérationnelles. L'ajout de cette connaissance dans les processus de surveillance permet de prédire et d'anticiper l'apparition des défaillances sur des horizons de temps de prédiction étendus. L'objectif est d'optimiser et de planifier les actions de maintenance à réaliser en temps masqué, augmentant la disponibilité et la sécurité d'un système. L'application du concept de pronostic prend ici tout son intérêt.

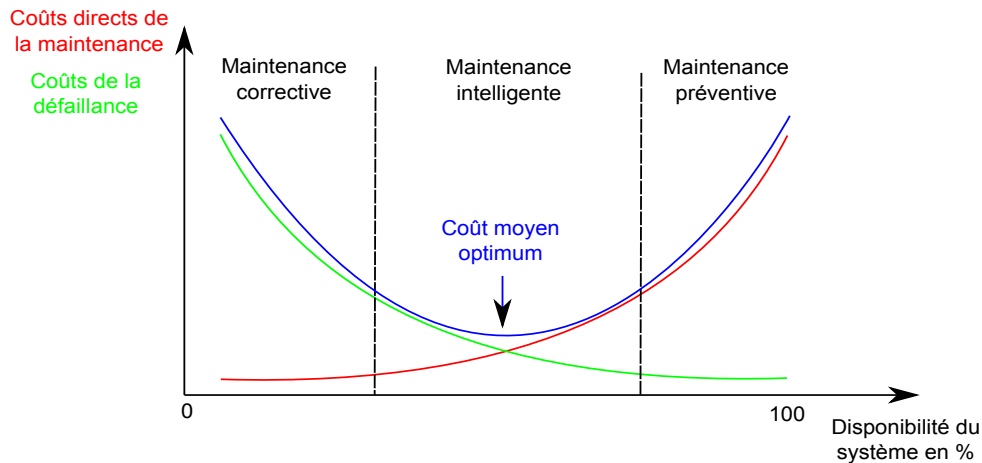
### **I.5.3 Émergence de la maintenance intelligente**

L'optimisation du coût de la maintenance repose sur un équilibre entre le choix des stratégies de maintenance corrective et de maintenance préventive. Cette démarche caractérise la ce qu'il puisse assurer tout ou partie des fonctions pour lesquelles il a été conçu avec un niveau de performance acceptable.

43. La maintenance préventive est une maintenance exécutée à des intervalles prédéterminés ou selon des critères prescrits et destinée à réduire la probabilité de défaillance ou la dégradation du fonctionnement d'un bien, [4].



stratégie de maintenance intelligente. En effet, l'équilibre de l'optimisation du coût de la maintenance repose sur un critère triple : limiter les coûts de maintenance, assurer la disponibilité et la sécurité d'un système.



**Figure I.17** – Coûts en fonction de la disponibilité du système

La Figure I.17 illustre cet équilibre. En effet, la courbe rouge indique une augmentation des coûts directs de la maintenance en déployant une maintenance préventive afin d'assurer le taux le plus élevé de disponibilité du système. En parallèle, la courbe verte représente le coût élevé engendré par les défaillances non anticipées, faisant diminuer la disponibilité du système. Plus une action de maintenance est anticipée et planifiée plus son coût de développement est élevé, et plus son coût direct de maintenance diminue. Plus on subit une défaillance non anticipée, plus le coût de la maintenance corrective sera élevée. L'équilibre des coûts se trouve dans un compromis entre les deux courbes. Cette stratégie de maintenance est appelée maintenance intelligente.

La maintenance intelligente est basée sur l'ensemble des stratégies de maintenance existantes, les combinant de sorte à assurer la recherche d'une performance globale des systèmes exploités. La fonction de pronostic se trouve intégrée au cœur de la maintenance intelligente, en fournissant des méthodologies, destinées à anticiper avec précision l'apparition de défaillances sur des horizons de temps de prédiction les plus étendus possibles. Ceci facilite une prise de décisions de planification et de réalisation d'actions de maintenance plus adaptées et participe activement à l'amélioration de la recherche de performance globale des systèmes sur l'ensemble de leur cycle de vie.

### I.6 Challenges liés au PHM

Cette section est consacrée plus spécifiquement à la présentation des besoins pour le pronostic de demain.

Depuis plus d'une décennie, de nombreux travaux ont permis de développer des méthodologies de pronostic. Cependant, un certain nombre de challenges subsistent afin de contribuer à une théorie du pronostic suffisamment avancée pour envisager son application sur les systèmes complexes. Le développement de méthodologies de pronostic génériques reste nécessaire. Il est à noter que très récemment, certains travaux s'orientent dans cette direction [35], [41], [136] et [147].

Dans [74], les auteurs proposent sept orientations de recherche, résumées au travers des propositions suivantes et synthétisées dans la Figure I.18.

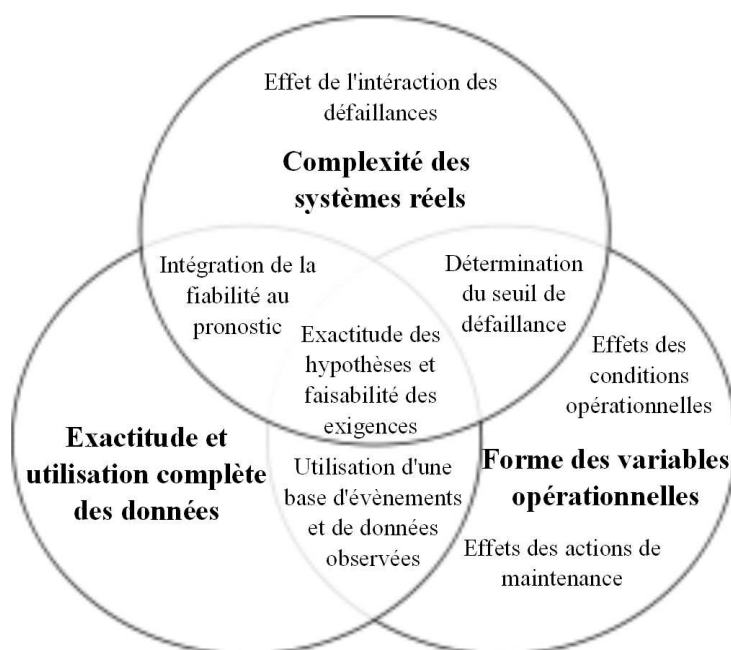


Figure I.18 – Les challenges du pronostic [74]

#### A. Intégration de la fiabilité et des données d'observation

Les modèles de fiabilité reposent sur des données d'évènements produits pour l'estimation du temps de vie, à partir d'un échantillon de population d'un même système. Cette approche est basée sur une utilisation moyenne d'une population entière d'unités identiques, afin d'en déduire un comportement moyen de la détérioration sur le système et de planifier des maintenances systématiques. Cependant, le comportement d'un système isolé et l'évolution de sa détérioration

est dépendant des changements de conditions opérationnelles et de l'interaction des défaillances entre chaque composant. C'est pourquoi les conditions opérationnelles doivent être enregistrées dans des bases de données également en vue de leur exploitation. Les données issues de l'observation contiennent l'information de l'évolution spécifique d'un système. Ces prédictions ne sont pas toujours exploitables pour l'aide à la décision si elles sont trop tardives. La possibilité de croiser les données reflétant le comportement d'une population caractéristique pour une utilisation moyenne, et les données issues de la surveillance du système pourraient faire évoluer la qualité des prédictions du temps de vie restant réalisées sur un système.

### **B. Données d'évènements et d'observations**

Le pronostic guidé par les données nécessite l'utilisation de base de données contenant des scénarios jusqu'à l'apparition de défaillance. L'objectif est de pouvoir réaliser des prédictions du temps de vie restant pour d'autres systèmes identiques dont les conditions d'exploitation sont basées sur ces mêmes scénarios. Cependant, dans de nombreux cas, cette base de données n'est pas complètement disponible. En effet, certains systèmes ne peuvent pas être exploités et le comportement enregistré jusqu'à l'apparition de défaillance. La possibilité de concevoir des méthodologies de pronostic performantes à partir d'une base de données de scénarios incomplets serait une amélioration.

### **C. Effets des actions de maintenance**

Un autre objectif concerne l'optimisation de la planification et la réalisation des actions de maintenance. Cependant, il apparaît nécessaire de surveiller les changements opérés dans une unité de systèmes exploités après une action de maintenance et d'estimer le changement de la fiabilité au sein de cette unité. L'intérêt est d'évaluer les différentes évolutions du taux de détérioration après les actions de maintenance entreprises. Ces effets devraient être pris en considération lors du développement de modèles de pronostic, en intégrant la modélisation de la fiabilité des systèmes réparés.

### **D. Effets des conditions opérationnelles**

Un système en exploitation est soumis à des conditions opérationnelles variantes dans le temps. Cette forme de variation se retrouve au travers d'une modification de l'énergie mesurée dans les signaux surveillés sur le système. Un pronostic efficace serait seulement sensible aux changements dans les mesures causées par la détérioration du système surveillé et insensible aux influences de sources de non-détérioration. Les modèles de pronostic dans la littérature ne tiennent pas compte en général de la variation des conditions opérationnelles. L'évaluation de l'influence de la variabilité des conditions opérationnelles sur la performance de pronostic constituerait donc une amélioration intéressante.

## I.7. Conclusion

---

### **E. Effet de l'interaction de défaillances**

Un système est composé d'une interaction entre composants. La capacité de surveiller et de prédire l'évolution de la dégradation d'un composant ne permet pas nécessairement de prédire l'état de santé, de dégradation à l'échelle d'un système global. L'initiation d'une dégradation peut initier ou accélérer l'évolution d'autres dégradations sur d'autres composants. La littérature sur ce sujet est quasi inexistante. Seuls certains travaux existent dans le domaine de la fiabilité pour modéliser l'interaction de défaillances. Le pronostic nécessiterait de prendre en compte cette interaction de dégradation entre différents composants d'un système.

### **F. Exactitude des hypothèses et faisabilité des exigences**

Le pronostic implique la réalisation de prédictions qui sont, par définition, même incertaines. L'une des approches de pronostic dont les résultats de prédiction semblent être les plus performants correspond à l'approche fondée sur les modèles. La possibilité d'émettre des hypothèses simplificatrices lors de l'étude de systèmes complexes est parfois nécessaire. En effet, les relations spécifiques entre les composants d'un système et l'influence de son environnement sont parfois trop complexes pour être complètement modélisées. Toutefois, de petites variations paramétriques dans la modélisation de l'évolution de la dégradation peuvent engendrer des déviations non négligeables dans l'estimation du temps de vie restant d'un système complexe. C'est pourquoi l'introduction de modèles stochastiques permettrait de mieux capturer et d'adapter les caractéristiques stochastiques de l'évolution incertaine de la dégradation pour le pronostic.

### **G. Évaluation des performances du pronostic**

La standardisation de métriques d'évaluation de la performance d'un pronostic a fait l'objet d'une présentation dans la sous-section I.4.4.5. Des efforts supplémentaires afin de développer d'autres métriques d'évaluation plus spécifiques et adaptées aux systèmes complexes restent nécessaires.

## I.7 Conclusion

La présentation de généralités sur le pronostic a fait apparaître un certain nombre de voies de recherche restant pour le pronostic de systèmes. Premièrement, parmi les définitions existantes du pronostic, il ne semble pas qu'une définition mathématique du concept de pronostic ait été proposée dans la littérature et soit communément admise par la communauté. De plus, de nombreux travaux ont proposé des contributions pour la problématique du pronostic, principalement pour les approches du pronostic basées sur l'expertise et guidées par les données. Le développement de méthodologies de pronostic fondées sur les modèles reste un besoin, notamment pour l'analyse des systèmes à échelle de temps multiple. La présente thèse proposera, entre autres, des contributions par rapport à ces besoins.



## CHAPITRE II

---

# Concept et modèles pour le pronostic et procédé d'application

---

*"Un concept est une invention à laquelle rien ne correspond exactement, mais à laquelle nombre de choses ressemblent."*

*Friedrich Nietzsche*

<b>II.1 Introduction</b> . . . . .	<b>42</b>
<b>II.2 Concept de pronostic</b> . . . . .	<b>42</b>
II.2.1 Notion de système . . . . .	43
II.2.2 Notion d'accessibilité . . . . .	45
II.2.3 Concepts de base liés au diagnostic et au pronostic . . . . .	47
II.2.4 Définitions des concepts . . . . .	50
<b>II.3 Modélisation du comportement de la dégradation</b> . . . . .	<b>53</b>
II.3.1 Modèles de dégradation macroscopiques . . . . .	53
II.3.2 Modèles de dégradation multi-échelles . . . . .	56
II.3.3 Discussion . . . . .	60
<b>II.4 Système électromécanique considéré</b> . . . . .	<b>61</b>
II.4.1 Motivation du choix de l'application considérée . . . . .	61
II.4.2 Modèle de comportement du système . . . . .	61
II.4.3 Valeurs numériques associées aux paramètres du modèle . . . . .	65
<b>II.5 Conclusion</b> . . . . .	<b>66</b>

## **II.1 Introduction**

Le pronostic est un concept nouveau de l'automatique moderne. Il peut être considéré comme une extension du diagnostic. En effet, l'introduction de la prédiction est tout à fait pertinente pour la surveillance des systèmes. Cependant, il convient de lui donner une définition mathématique claire, précise, et qui soit partagée par une grande partie de la communauté.

La première partie de ce chapitre sera dédiée à des généralités sur la théorie des systèmes et à l'introduction de la notion d'accessibilité. Des définitions mathématiques des concepts du diagnostic, du diagnostic prédictif et du pronostic seront proposées à partir de la théorie des systèmes. En particulier, les problématiques de prédictions seront liées à la notion d'accessibilité qui est bien définie dans la théorie des systèmes. Par ailleurs, et en vue de situer clairement le pronostic vis-à-vis du diagnostic ou du diagnostic prédictif et de donner toute la pertinence à la prédiction, une contrainte de temps est introduite.

La deuxième partie de ce chapitre sera consacrée à la modélisation de l'évolution de la dégradation. Ainsi, deux approches importantes de la littérature seront introduites. Il s'agit de la modélisation de la dégradation considérée à une échelle macroscopique et à un niveau multi-échelles. La différence entre ces deux approches sera explicitée.

La troisième partie de ce chapitre concerne le procédé considéré en vue d'illustrer les résultats théoriques obtenus dans la présente thèse. Il s'agit d'un oscillateur électromécanique (voir Figure I.8). L'intérêt de considérer ce procédé est double. D'une part, son modèle d'évolution, et même s'il est non linéaire, reste relativement simple. D'autre part, la variable de dégradation est accessible. Deux modèles selon la configuration du procédé considéré seront présentés.

## **II.2 Concept de pronostic**

Cette section est dédiée aux définitions mathématiques des concepts du diagnostic, du diagnostic prédictif et du pronostic. Ces définitions sont données dans le cadre de la théorie des systèmes. L'intérêt est de donner des définitions mathématiques claires et qui soient indépendantes des méthodologies considérées. Pour ce faire, des rappels de la notion de système et du concept d'accessibilité sont donnés.

## II.2. Concept de pronostic

---

### II.2.1 Notion de système

#### II.2.1.1 Définition

Soit  $\mathcal{T}$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ . Un intervalle se définit de la manière suivante :

$$[a, b[ = \{t \in \mathcal{T}; a \leq t < b\}$$

Par extension, on définit  $\mathcal{T}_+$  par

$$\mathcal{T}_+ = \{t \in \mathcal{T}; t \geq 0\}$$

Pour un sous-ensemble  $E$  et un intervalle  $I$ , nous définissons  $E^I$  par :

$$E^I = \{\omega \mid \omega : I \rightarrow E\}$$



Figure II.1 – Notion de système

Un système est défini schématiquement comme dans la Figure II.1 et se caractérise par :

$$\Sigma = (\mathcal{T}, \mathcal{M}, \mathcal{U}, \mathcal{F}, \mathcal{Y}, \mathcal{H}) \quad (\text{II.1})$$

où  $\mathcal{T}$  est défini comme précédemment et représente le temps.  $\mathcal{M}$  (ensemble non vide) désigne l'espace d'état d'un système  $\Sigma$ .  $\mathcal{U}$  (ensemble non vide) introduit l'espace des entrées du système  $\Sigma$ .  $\mathcal{F} : \mathcal{D}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{M}$  est une cartographie du système  $\Sigma$  où

$$\mathcal{D}_{\mathcal{F}} \subset \mathcal{D} = \{(\tau, \sigma, x, \omega) \mid \sigma, \tau \in \mathcal{T}, \sigma \leq \tau, x \in \mathcal{M}, \omega \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau[}\}$$

$\mathcal{Y}$  est l'espace de valeurs des sorties  $\Sigma$ .  $\mathcal{H} : \mathcal{T} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{Y}$  est une cartographie de mesure.

**Remarque 1.** Le système  $\Sigma$  est supposé vérifier les propriétés classiques de non-trivialité, de restriction, de semi-groupe et d'identité (voir par exemple [155], page 26).

#### II.2.1.2 Entrée du système

L'entrée du système est supposée être une fonction qui prend ses valeurs dans  $\mathcal{U}$  et possède comme argument des valeurs prises dans un ensemble  $\mathcal{C}$ .



Une contrainte sur l'ensemble peut être définie par :

$$f : \begin{cases} \mathcal{C} & \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{U}) \\ c & \rightarrow f(c) \in \mathcal{P}(\mathcal{U}) \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

où  $\mathcal{P}(E)$  désigne l'ensemble des parties de  $E$ .

Si  $I \subset \mathcal{T}$ , on dit que  $u \in \mathcal{U}_{\mathcal{C},f}^I$  (ou plus simplement  $u \in \mathcal{U}_{\mathcal{C}}^I$ ) si  $u$  vérifie la contrainte  $f$ , définie par rapport à  $\mathcal{C}$  sur l'intervalle  $I$ .

Dans ce qui suit, on présente quelques exemples pour illustrer les concepts de contraintes liés aux entrées.

### Exemple 1 : Système continu

On pose  $u = \mathbb{R}$ . Si  $\mathcal{C} = \mathcal{T}$ , on pourra définir un système en boucle ouverte. Maintenant, en prenant  $\mathcal{C} = \mathcal{M}$ , on peut définir un système avec retour d'état. Finalement, en posant  $\mathcal{C} = \mathcal{M} \times \mathcal{E}$ , où  $\mathcal{E}$  est un ensemble de valeurs environnementales. On définit un retour d'état dépendant de l'environnement.

### Exemple 2 : Système à évènements discrets



**Figure II.2** – Système à évènements discrets

Un système à évènements discrets, représenté par la Figure II.2, peut être modélisé par (voir par exemple [134]) :

$$G = (\mathcal{X}, \mathcal{E}, f_e, g, E_v)$$

où  $\mathcal{X}$  est un ensemble d'états.  $\mathcal{E}$  désigne l'ensemble des évènements.  $f_e : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  décrit les transitions.  $g : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{E}) - \{\emptyset\}$  est la fonction associant un état à un ensemble d'états possibles.  $E \subset \mathcal{E}^{\mathbb{N}}$  est l'ensemble des suites d'évènements valides.  $E_N \subset E$  est l'ensemble des évènements valides.

Ce modèle peut être représenté dans le présent formalisme. En effet, il suffit de prendre

$$\mathcal{C} = \mathcal{X}, f = g, \mathcal{T} = \mathbb{N}, \mathcal{M} = \mathcal{X}, \mathcal{U} = \mathcal{E}$$

## II.2. Concept de pronostic

---

$\mathcal{F}$  est la cartographie générée par  $f_e$  et

$$\mathcal{D}_{\mathcal{F}} = \{(k_1, k_2, x_0, E_k) \mid k_1, k_2 \in \mathbb{N}, k_1 < k_2, x \in \mathcal{X}, E_k \in \mathcal{E}^{[k_1, k_2+1[ \cap E_v}\} \quad (\text{II.3})$$

### II.2.2 Notion d'accessibilité

Dans cette sous-section, la notion d'espaces accessibles est introduite ainsi que la construction numérique de ces derniers.

#### II.2.2.1 Espaces accessibles

Soit les sous-ensembles d'espaces d'état et de commandes admissibles définis respectivement par  $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$ ,  $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$  et l'intervalle  $[a, b[ \subset \mathcal{T}$ . On définit l'ensemble des états atteints à l'instant  $t \in [a, b[$  sous la commande admissible  $\omega_0 \in \mathcal{U}_0^{[a, b[}$ , à partir de la condition initiale  $x_0 \in \mathcal{M}_0$  par :

$$\mathcal{F}_t^{\omega_0}(x_0) = \mathcal{F}(a, t, x_0, \omega_0) \quad (\text{II.4})$$

Pour  $I = [a, b[$ , on définit l'ensemble des états atteints sur l'intervalle de temps  $I$  sous la commande admissible  $\omega_0 \in \mathcal{U}_0^{[a, b[}$ , à partir de la condition initiale  $x_0 \in \mathcal{M}_0$  par :

$$\mathcal{F}_I^{\omega_0}(x_0) = \{\mathcal{F}(a, t, x_0, \omega_0) \mid t \in I\} \quad (\text{II.5})$$

Pour le sous-ensemble des commandes admissibles  $\mathcal{U}_a \subset \mathcal{U}_0^{[a, b[}$ , on définit l'ensemble des états atteints sur l'intervalle de temps  $I$  sous la commande admissible  $\omega_0 \in \mathcal{U}_0^{[a, b[}$ , à partir de la condition initiale  $x_0 \in \mathcal{M}_0$  par :

$$\mathcal{F}_I^{\mathcal{U}_a}(x_0) = \{\mathcal{F}(a, t, x_0, \omega_0) \mid t \in I, \omega_0 \in \mathcal{U}_a\} \quad (\text{II.6})$$

Finalement, on définit l'espace accessible à partir de  $\mathcal{M}_0$  sous l'action de  $\mathcal{U}_0$  durant la période  $I$  comme étant l'ensemble des états atteints sur l'intervalle de temps  $I$  sous la commande admissible  $\omega_0 \in \mathcal{U}_0^{[a, b[}$ , à partir du sous-ensemble de conditions initiales  $\mathcal{M}_0$  par :

$$\mathcal{F}_I^{\mathcal{U}_0}(\mathcal{M}_0) = \{\mathcal{F}(a, t, x, \omega) \mid t \in I, \omega_0 \in \mathcal{U}_a \text{ et } x \in \mathcal{M}_0\} \quad (\text{II.7})$$

D'une manière identique, on définit la cartographie de mesures des états atteints liée à l'espace de sortie par :

$$\mathcal{H}_I^{\mathcal{U}_0}(\mathcal{M}_0) = \{\mathcal{H}(a, t, \mathcal{F}(a, t, x, \omega_0), \omega_0) \mid t \in I, \omega_0 \in \mathcal{U}_a \text{ et } x \in \mathcal{M}_0\} \quad (\text{II.8})$$

Dans la théorie mathématique du contrôle, le problème d'accessibilité a suscité l'intérêt de plusieurs auteurs. Les résultats sont intéressants, cependant restent théoriques et ne sont pas exploitables pour la problématique étudiée dans ce travail. Un des résultats les plus connus est le théorème de Chow [20]. Le résultat caractérise topologiquement les ensembles accessibles mais ne fournit pas une forme explicite de l'évolution de l'espace accessible au cours du temps. En fait, ce type de résultat utilise explicitement la solution du système, ce qui impliquerait la connaissance de la solution analytique du système, ce qui est, d'une façon générale, difficilement réalisable pour les systèmes non linéaires. Afin de contourner cette difficulté, ce problème est ramené dans la littérature à la problématique de résolution numérique d'un espace accessible, calculé par approximation et majoration de solutions analytiques connues de systèmes linéaires.

### II.2.2.2 Construction numérique des espaces accessibles

Le calcul d'espace atteignable en temps fini est réalisable dans le cas de systèmes linéaires commandés et ceci dans des conditions spécifiques (voir [97]). Dans ce cas, une solution analytique pour le système existe et peut être utilisée pour le calcul d'espace accessible. Pour un système non linéaire incertain, l'estimation de l'espace accessible est obtenue par majoration de l'espace accessible. Le système est linéarisé par une méthode de linéarisation conservative<sup>1</sup>. L'objectif est de ramener l'erreur de linéarisation comme une entrée incertaine additionnelle pour le système, en utilisant la propriété de superposition inhérente à un système linéaire. Par ailleurs, la démarche de linéarisation peut entraîner une propagation de l'erreur de linéarisation<sup>2</sup>, à cause de majorations itérées de l'espace atteignable. Un algorithme a été proposé dans la littérature afin de s'affranchir de cet effet (voir [59]).

La majoration de l'espace atteignable pour les systèmes non linéaires incertains nécessite l'utilisation de représentation appropriée de ces espaces. Ces espaces peuvent être représentés par des polytopes [33], des ellipsoïdes [95], des zonotopes [7] ou une combinaison entre des zonotopes et des polytopes [8]. Dans le cas où les entrées sont considérées comme incertaines pour le système, les zonotopes et les fonctions de support possèdent la représentation de l'espace accessible la plus optimale [57], [58] en terme de précision et de volume de calculs pour leur estimation. Ces représentations d'espace accessible sont données dans la Figure II.3 (voir [5] et [9]). Dans ce travail, les techniques de construction numérique seront exploitées afin de répondre au problème du pronostic.

---

1. Terminologie anglaise "On the fly partitioning linearization"  
2. Terminologie anglaise "Wrapping effect"

## II.2. Concept de pronostic

---

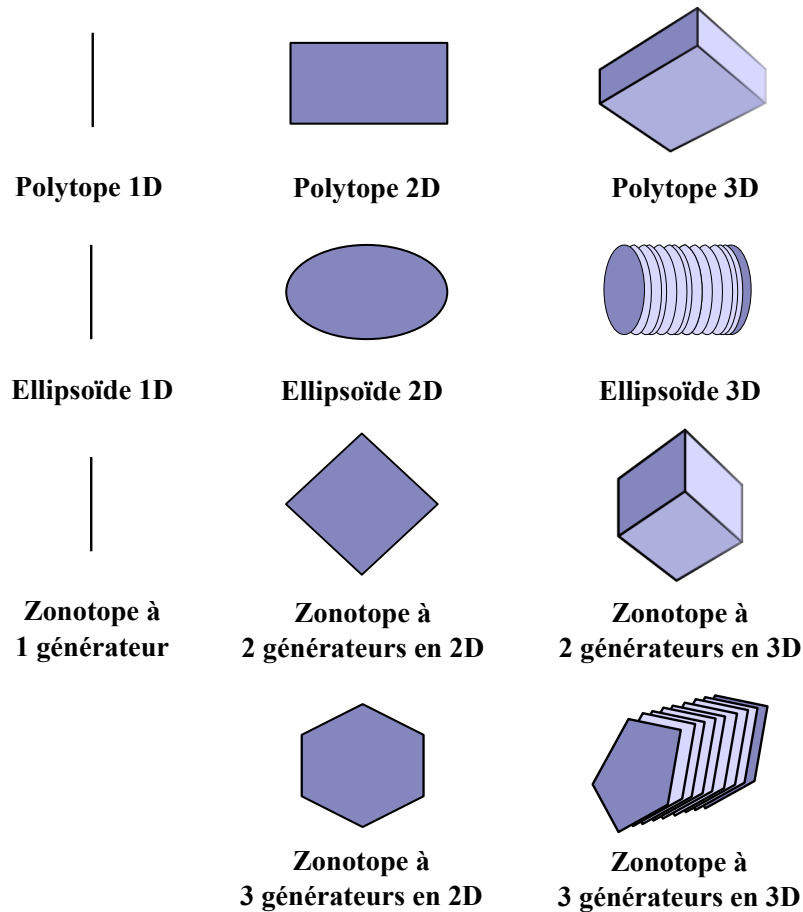


Figure II.3 – Représentation d'espace accessible

### II.2.3 Concepts de base liés au diagnostic et au pronostic

Dans cette partie, on se propose de définir les concepts liés au diagnostic et au pronostic que peuvent être la défaillance, le fonctionnement normal et la disponibilité. Plus précisément, le procédé étudié sera considéré comme un système Entrée/Sortie (voir II.1). L'objectif principal est de définir mathématiquement, et d'une façon précise, les concepts fondamentaux en vue du pronostic (voir [133]), en se basant sur la théorie des systèmes (voir par exemple [89]). Il convient de noter que le but principal est de proposer des définitions qui soient générales et indépendantes des approches considérées.

#### II.2.3.1 Défaut, panne, tâche et performance

Un **défaut** est quantifiable comme un espace d'état où les performances sont dégradées mais restent à un niveau acceptable. Une **panne** est l'état critique d'un système où les performances dégradées sont inacceptables.

## Chapitre II. Concept et modèles pour le pronostic et procédé d'application

---

Une **tâche** est l'utilisation d'un système  $\Sigma$  pour une sollicitation donnée, dans un environnement donné durant un intervalle de temps donné. Soit  $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}$ ,  $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}$ ,  $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}$ , une **tâche** est définie par un ensemble  $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}$  par :

$$\mathcal{C}_1 = \mathcal{M}_1 \times \mathcal{E}_1 \times \mathcal{T}_1 \quad (\text{II.9})$$

où  $\mathcal{E}_1$  est l'ensemble des valeurs environnementales.

La **performance** d'un système  $\Sigma$  peut être définie par la capacité à réaliser une tâche (ou un ensemble de tâches) sous des contraintes spécifiques fixées. Soit  $P$  une fonction définissant la **performance** comme suit :

$$P : \mathcal{P}(\mathcal{M}) \times \mathcal{P}(\mathcal{U}) \times \mathcal{P}(\mathcal{F}) \times \mathcal{P}(\mathcal{T}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{M}) \quad (\text{II.10})$$

où  $\mathcal{P}(E)$  désigne l'ensemble des sous-ensembles de  $E$ .

Un **état**  $\bar{x}$  est dit **défaillant** au regard de la performance  $P$ , si il existe  $\bar{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}$ ,  $\bar{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}$  et  $\bar{\mathcal{T}} \subset \mathcal{T}$  tel que :

$$\bar{\mathcal{F}}^{\bar{\mathcal{U}}}(\bar{x}) \notin P(\{\bar{x}\}, \bar{\mathcal{U}}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathcal{T}})$$

**Remarque 2.** La définition ci-dessus concerne les défaillances associées aux états du système. Il convient de préciser qu'il est également possible de définir la notion de défaillance relative aux actionneurs ou aux capteurs (voir II.4).



**Figure II.4** – Ensemble Système-Actionneurs-Capteurs

En effet, et concernant les capteurs, on peut introduire la notion de performance comme une fonction  $P_M$  définie par

$$P_M : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{Y}) \quad (\text{II.11})$$

pour lier les mesures à l'état du système. On peut supposer que la défaillance des capteurs survient à un instant donné  $T$  si

$$\mathcal{H}(T, x) \notin P_M(x) \quad (\text{II.12})$$

D'une façon analogue, il serait possible de définir la performance relative par rapport aux actionneurs. Par exemple, on pourrait se doter d'une fonction  $P_A$  définie par

$$P_A : \mathcal{P}(\mathcal{U}) \times \mathcal{P}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{M}) \quad (\text{II.13})$$

## II.2. Concept de pronostic

---

pour quantifier le fonctionnement normal. Dans ce cas, le système est dit dans un état de défaillance actionneur pour le sous-ensemble de commande admissible  $\mathcal{U}_0$  si il existe  $\mathcal{M}_0$  et  $\mathcal{T}_0$  tel que :

$$\mathcal{F}_{\mathcal{T}_0}^{\mathcal{U}_0}(\mathcal{U}_0, \mathcal{M}_0) \not\subset P_A(\mathcal{U}_0, \mathcal{M}_0) \quad (\text{II.14})$$

**Remarque 3.** *Il est facile d'étendre cette définition au cas de plusieurs défaillances (ou défauts) en relation avec les performances  $P_i$ , ( $i = 1, \dots, p$ ) à respecter.*

### II.2.3.2 États de fonctionnement normal et défaillant

Soit  $\mathcal{M}_n$  et  $\mathcal{M}_d$  deux sous-ensembles de  $\mathcal{M}$  tels que :

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_n \cup \mathcal{M}_d \text{ et } \mathcal{M}_n \cap \mathcal{M}_d = \emptyset$$

Il est à noter que les ensembles  $\mathcal{M}_n$  et  $\mathcal{M}_d$  peuvent être définis avec la notion de performance où  $\mathcal{M}_d$  est constitué des états dits défaillants et où  $\mathcal{M}_n$  est composé des états dits en fonctionnement normal.

#### Exemple 3 : État défaillant

Supposons que  $x = (z, \phi)$  désigne l'état du système global où  $\phi$  désigne la dégradation. Dans ce cas, l'état de défaillance peut être défini, par exemple, relativement à la performance  $\|\phi\| \leq \phi_0$ . Alors,

$$\mathcal{M}_d = \{x = (z, \phi) \mid \|\phi\| > \phi_0\} \quad (\text{II.15})$$

Dans ce qui suit, on utilise  $\mathcal{M}_d^j$  ( $j = 1, \dots, n$ ),  $n \in \mathbb{N}$  pour désigner l'ensemble des états correspondant à une défaillance  $j$  et on suppose que  $\mathcal{M}_d = \bigcup_{j=1, \dots, n} \mathcal{M}_d^j$ .

Par ailleurs, on notera  $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_n$  l'ensemble des conditions initiales supposées être des états en fonctionnement normal. On utilisera aussi  $\mathcal{U}_0$  pour représenter l'ensemble des contrôles admissibles.

### II.2.3.3 Disponibilité

Soit  $C_T = \{C_i, i = 1, \dots, q\} \subset C$  un ensemble de tâches et on associe à chaque tâche  $C_i$ , ( $i = 1, \dots, q$ ) une sollicitation  $\mathcal{U}_i$  ( $i = 1, \dots, q$ ). Soit aussi, pour  $i = 1, \dots, q$ ,

$$I_i = [a_i, b_i[ \subset \mathcal{T}_i \subset \mathcal{T}$$

des intervalles de temps. Pour un ensemble de tâches  $C_T$ , l'ensemble des états atteignables est défini à partir de l'ensemble des conditions initiales  $\mathcal{M}_0$  sur un intervalle  $I_i$ . On définit une

performance  $P_i$  pour la tâche  $\mathcal{C}_i$  ( $i = 1, \dots, q$ ) sur un intervalle  $I_i$  de manière analogue à (II.10).

La disponibilité peut être définie comme une notion basée sur la performance. Ainsi, un système peut être considéré comme disponible au regard de la performance  $P_i$  si

$$\left( \mathcal{F}_{I_i}^{\mathcal{U}_i} \otimes \mathcal{F}_{I_{i-1}}^{\mathcal{U}_{i-1}} \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_{I_1}^{\mathcal{U}_1} \right) (\mathcal{M}_0) \subset P_i(\mathcal{M}_i, \mathcal{U}_i, \mathcal{F}_{I_i}^{\mathcal{U}_i}, \mathcal{T}_i) \quad (\text{II.16})$$

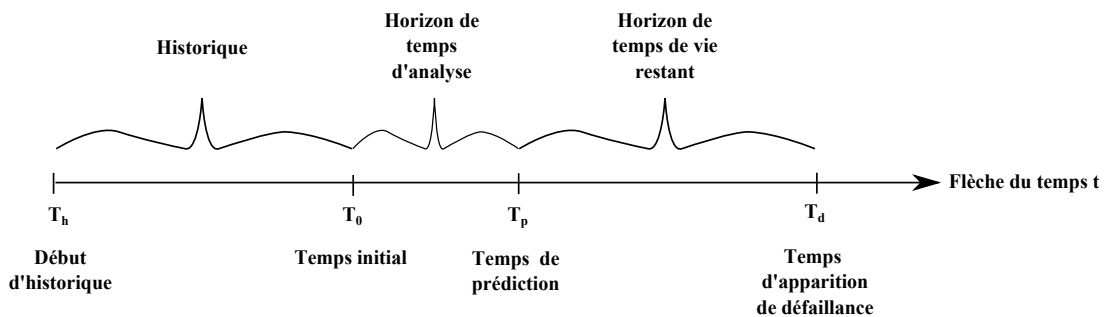
où  $\otimes$  est l'opérateur de concaténation.

## II.2.4 Définitions des concepts

Dans cette sous-section, les concepts de diagnostic, de diagnostic prédictif et de pronostic sont définis mathématiquement en considérant le formalisme introduit précédemment. Pour ce faire, un découpage de l'horizon de temps est introduit pour définir ces différents concepts.

### II.2.4.1 Découpage de l'horizon de temps

Les concepts de diagnostic, de diagnostic prédictif et de pronostic sont tous les trois des concepts liés au temps, mais dont l'application est considérée sur des horizons de temps différents. Une nuance est introduite à ce propos dans la Figure II.5. Les horizons de temps d'histo-



**Figure II.5** – Découpage temporel pour le pronostic

rique sur  $[T_h, T_0[$ , d'analyse sur  $[T_0, T_p]$  et de temps de vie restant sur  $]T_p, T_d]$  sont considérés. Le premier cas représente l'ensemble des connaissances et les tâches de maintenance effectuées sur le système. Le second cas comprend l'ensemble des observations disponibles sur le système jusqu'à l'instant fixé de la contrainte temporelle  $T_p$ . Le dernier cas correspond à un horizon de temps de prédiction avant apparition d'une défaillance.

Différents cas suivants peuvent être considérés pour le découpage de l'horizon de temps :

- $T_h = -\infty$  : Disponibilité de l'historique de connaissance complète.

## II.2. Concept de pronostic

---

- $T_h = T_0$  : Aucun historique de connaissance disponible.
- $T_d \leq T_p$  : Analyse et prédiction avant l'apparition de défaillances.
- $T_d = T_0$  : Analyse et prédiction à l'apparition de défaillances.
- $T_p \geq T_d$  : Analyse et prédiction après l'apparition de défaillances.
- $T_0 = T_p$  : Prédiction instantanée.
- $T_d = +\infty$  : Aucune défaillance.

A présent, on introduit les définitions des concepts de diagnostic, de diagnostic prédictif et de pronostic.

### II.2.4.2 Diagnostic

Le diagnostic peut être défini comme étant la détection, la localisation et l'identification des défaillances sur un système.

#### A. Détection

Soit  $\mathcal{M}_h$  étant l'espace des états initiaux à l'instant  $T_h$ . Connaissant  $\mathcal{H}_{[T_h, T_d]}^{\mathcal{U}_0}(\mathcal{M}_h)$ , l'objectif est de déterminer si  $x \in \mathcal{M}_d$ .

#### B. Localisation et identification

En supposant que  $x \in \mathcal{M}_d$  et en connaissant  $\mathcal{H}_{[T_h, T_d]}^{\mathcal{U}_0}(\mathcal{M}_h)$ , l'objectif est de déterminer  $j$  tel que  $x \in \mathcal{M}_d^j$ .

**Remarque 4.** Dans le diagnostic, on suppose que  $T_0 = T_d$  et  $T_p \geq T_d$ . Ici, aucune contrainte sur  $T_p$  n'est imposée. Plus petit est ce temps, meilleure sera l'efficacité du diagnostic. Si  $T_h = T_0$  ce qui signifie qu'aucun historique n'est disponible, il semble difficile d'imposer  $T_p = T_0$ .

### II.2.4.3 Diagnostic prédictif

Le diagnostic prédictif peut être défini comme étant la détection, la localisation et l'identification des défaillances qui vont survenir sur un système.

#### A. Détection

Il existe  $T_p \in [T_0, T_d[$  tel qu'en connaissant  $\mathcal{H}_{[T_h, T_p]}^{\mathcal{U}_0}(\mathcal{M}_h)$ , il est possible de déterminer si  $x(T_d) \in \mathcal{M}_d$ .

#### B. Localisation et identification

En supposant que  $x(T_d) \in \mathcal{M}_d$  et en connaissant  $\mathcal{H}_{[T_h, T_p]}^{\mathcal{U}_0}(\mathcal{M}_h)$ , l'objectif est de déterminer  $j$  tel que  $x(T_d) \in \mathcal{M}_d^j$ .



### II.2.4.4 Pronostic

Le pronostic consiste à estimer le temps de vie restant d'un système sous une contrainte temporelle de temps de prédiction.

#### A. Détection

Étant donné  $T_p \in [T_0, +\infty[$ , l'objectif est de déterminer le temps de vie restant seulement à partir de la connaissance de  $\mathcal{H}_{[T_h, T_p]}^{\mathcal{U}_0}(\mathcal{M}_h)$ .

Le temps de vie restant est décrit par la relation suivante :

$$\begin{aligned} T_{RUL} &= T_d - T_p \\ &= \underset{T_d \in ]T_p, +\infty[}{\text{Min}} \left( \mathcal{F}_{[T_h, T_p]}^{\mathcal{U}_0}(\mathcal{M}_h) \cap \mathcal{M}_d \neq \emptyset \right) - T_p \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

#### B. Localisation et identification

L'objectif est de déterminer  $j$  sous la connaissance seulement de  $\mathcal{H}_{[T_h, T_p]}^{\mathcal{U}_0}(\mathcal{M}_h)$  tel que

$$T_{RUL} = \underset{T_d \in ]T_p, +\infty[}{\text{Min}} \left( \mathcal{F}_{[T_h, T_p]}^{\mathcal{U}_0}(\mathcal{M}_h) \cap \mathcal{M}_d^j \neq \emptyset \right) - T_p \quad (\text{II.18})$$

**Remarque 5.** *La notion de contrainte temporelle a été introduite dans le concept de pronostic pour donner toute pertinence à la prédiction réalisée. Une prédiction réalisée trop tardivement et ne permettant pas d'anticiper l'apparition d'une défaillance bien en amont, ne représente pas un grand intérêt.*

**Remarque 6.** *Un aspect probabiliste dans la prédiction peut être défini par une confiance relative. Dans ce cas,  $T_p$  serait relié à un taux de confiance.*

**Remarque 7.** *Une manière d'exploiter le pronostic adapté aux tâches de maintenance pourrait être illustrée comme suit. Étant donné  $(\beta, T_\beta)$ , l'objectif est de déterminer  $\mathcal{U}_\beta$  sur un horizon de temps fini  $[T_0, T_\beta]$  tel que  $T_d - T_\beta > \beta$  où  $\beta$  désigne une période de temps nécessaire afin de réaliser une action de maintenance sur un système. Cette période est définie à partir de la connaissance experte.  $T_\beta$  est une période d'exploitation désirée par l'utilisateur du système. L'objectif est de garder le système disponible au moins pendant la période  $T_\beta$ . Le problème consiste à déterminer  $\mathcal{U}_\beta$  l'ensemble des modes admissibles et de contrôler les plus larges tels que :*

$$\mathcal{F}_{[T_0, T_\beta + \beta]}^{\mathcal{U}_\beta}(\mathcal{M}_0) \cap \mathcal{M}_d = \emptyset \quad (\text{II.19})$$

Il est à noter que les définitions données ne préjugent pas de la faisabilité de prédiction du temps de vie restant. Plus précisément, la "pronosticabilité" est, à notre avis, une question en soi et n'est pas abordée dans ce travail.

## II.3. Modélisation du comportement de la dégradation

---

### II.2.4.5 Estimation du temps de vie restant

Soit  $U_0 \subset U$  et  $I_p = [T_0, T_p]$  un horizon de temps. Le but est de réaliser une prédiction à partir des observations sur  $I_p$ ; à savoir  $\mathcal{H}_{[T_0, T_p]}^{U_0}(\mathcal{M}_0)$ . L'ensemble atteignable sur l'horizon  $I_p$  est défini par  $\mathcal{F}_{[T_0, T_p]}^{U_0}(\mathcal{M}_0)$ . Il s'agit donc d'estimer la plus petite valeur de  $T_p$  telle que

$$\mathcal{F}_{[T_0, T_p]}^{U_0}(\mathcal{M}_0) \cap \mathcal{M}_d \neq \emptyset \quad (\text{II.20})$$

en se basant uniquement sur  $\mathcal{H}_{[T_0, T_p]}^{U_0}(\mathcal{M}_0)$ .

Il convient de préciser que l'analyse dépendra fortement de  $U_0$ . En effet, si par exemple, l'entrée  $U$  du système est supposée connue sur  $[T_0, +\infty[$ , l'analyse diffère du cas où l'entrée est seulement supposée appartenir à un ensemble.

## II.3 Modélisation du comportement de la dégradation

Pour analyser le comportement de la dégradation, on dispose d'au moins deux approches. Dans la première approche, on procède par une analyse à travers des modèles décrivant l'évolution à l'échelle de l'observation macroscopique. Ces modèles peuvent s'avérer être moins précis et ne représenter que globalement des phénomènes physiques. Cependant, ils peuvent être précieux pour des applications sur la problématique du pronostic. La deuxième approche est fondée sur l'étude d'un mécanisme de dégradation pouvant s'étendre d'une échelle microscopique liée aux atomes, à une échelle macroscopique associée à l'échelle de propagation d'une fissure, par exemple. Ce type de modèle traduit le comportement de l'évolution géométrique et structurelle des matériaux par rapport à des sollicitations de charge. Ces modèles peuvent être très précis et pertinents en vue de la modélisation et de l'analyse des dégradations. Cependant, ils sont trop complexes pour être exploités en automatique. Ils sont plutôt utilisés pour des travaux en physique ou éventuellement pour la simulation. En automatique, les modèles utilisés pour l'analyse ou la synthèse (commande ou observateur) doivent être réalistes mais simples. En effet, il faut qu'ils soient suffisamment réalistes pour représenter ces phénomènes étudiés, mais doivent rester simples pour leurs exploitations.

### II.3.1 Modèles de dégradation macroscopiques

Dans ce travail, on s'intéresse aux modèles interconnectés (1) qui décrivent simultanément les comportements de l'état et de la dégradation et illustrent les influences réciproques sur les dynamiques. Généralement, la description du comportement de l'état du système est déduit

des lois de la physique ou de lois empiriques. L'influence de la dégradation est introduite pour rendre le modèle plus réaliste. Dans de nombreux cas, le sous-modèle décrivant l'état du système peut être adapté à partir des modèles existants dans la littérature. Il n'en est pas de même pour l'évolution de la dégradation. En effet, si le comportement de la dégradation peut être représenté par la Figure II.6, on ne dispose généralement pas de lois physiques directement exploitables. En général, les auteurs considèrent les dynamiques polynomiales (voir [2], [37] et [108]) et procèdent à une identification quand la dégradation est accessible afin d'approcher en modélisant le comportement donné par la Figure II.6.

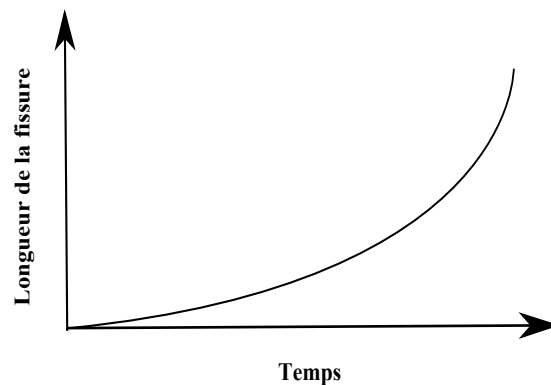


Figure II.6 – Comportement de la propagation d'une fissure

Dans la suite de ce sous-paragraphe, on présente un exemple, en mécanique, utilisant une forme polynomiale particulière pour décrire le comportement de la dégradation (voir [2]). Dans ce cas, il est supposé que le comportement de l'accumulation de la dégradation se décline en trois phases : initiation de la fissure, croissance brusque avec arrêt de la plasticité et propagation catastrophique d'une fissure entraînant une rupture. Ces trois phases sont décrites par les équations différentielles non linéaires qui sont différentes afin d'exprimer chacun des phénomènes respectivement.

- Initiation d'une fissure

$$\dot{\phi} = \gamma_1 \phi - \phi^2 \quad (\text{II.21})$$

- Croissance de fissure brusque avec arrêt de plasticité

$$\dot{\phi} = \gamma_1 - \gamma_2 \phi - \phi^3 \quad (\text{II.22})$$

- Propagation catastrophique d'une fissure entraînant une rupture

$$\dot{\phi} = \gamma_1 \phi + \phi^3 \quad (\text{II.23})$$

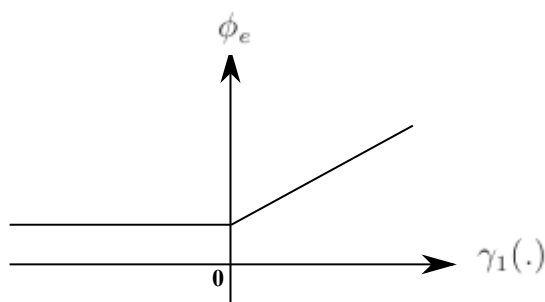
Dans les trois modèles,  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont des fonctions de l'état de comportement à dynamique rapide

### II.3. Modélisation du comportement de la dégradation

---

$x$ . Ces termes traduisent les déviations en position, en vitesse ou encore une combinaison des deux. En outre, il est supposé que  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont des paramètres dont la dynamique d'évolution est lente et quasi constante. Par ailleurs, si l'on considère une condition initiale de dégradation non nulle, alors un changement de variable peut être réalisé par  $\Delta\phi = \phi - \phi_0$ , et peut ramener le problème en zéro. Il est à noter que l'ensemble des paramètres  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  décrit les différents types de bifurcations considérés et traduit le comportement des modèles de croissance de fissure.

Le système (II.21) décrit le comportement d'une initiation de fissure à une échelle macroscopique. En réalité, en amont de ce phénomène d'initiation de fissure, des modifications progressives de la structure du matériau se produisent à l'échelle microscopique au cours des premiers cycles de stress. Puis, leurs accumulations donnent naissance à la fissure. Ce phénomène peut être considéré comme un aspect "tout ou rien", modélisé par une bifurcation transcritique. L'analyse du comportement global peut être effectuée en fonction du signe de  $\gamma_1$ . En effet, si  $\gamma_1 < 0$ , il existe un point d'équilibre double  $\phi_e = 0$ , dans le cas où la naissance de la fissure ne s'est pas effectuée. Maintenant, si  $\gamma_1 = 0$  ou  $\gamma_1 > 0$ , la fissure s'initie et se traduit par un changement dans la stabilité des points d'équilibre comme décrit dans la Figure II.7.



**Figure II.7** – Bifurcation transcritique modélisant la naissance d'une fissure

Une fois la dégradation initiée, le système (II.22) décrit l'évolution de la croissance d'une fissure avec arrêt de plasticité. Ce type de comportement est modélisé par une bifurcation décrite par l'évolution des paramètres  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  dans (II.22). Pour  $\gamma_2$  fixé, un ou trois points d'équilibre  $\phi_e$  différents peuvent exister. Pour  $\gamma_2 > 0$ , un changement brusque de  $\phi_e$  s'effectue lorsque  $\gamma_1$  décroît vers 0. Une bifurcation s'opère et est illustrée dans la Figure II.8. Ce changement s'aplanit lorsque  $\gamma_1$  continue de se réduire.

Le système décrit par (II.23) traduit le mécanisme de rupture d'un système suite à une croissance d'une fissure, sans mécanisme d'arrêt de plasticité. Ce type de comportement est modélisé par une bifurcation, traduisant la transition entre un état de dégradation stable à un état de dégradation instable. Cette bifurcation produit ainsi une fissure avec un taux de croissance élevé.

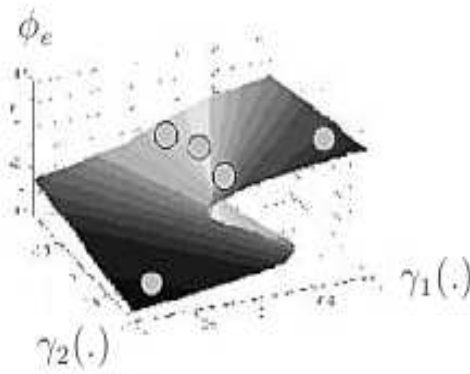


Figure II.8 – Bifurcation influençant la croissance d'une fissure avec arrêt de plasticité [2]

### II.3.2 Modèles de dégradation multi-échelles

#### II.3.2.1 Notion de multi-échelles

Les modèles de dégradation multi-échelles [102] sont issus de l'analyse et de la modélisation des mécanismes de dégradation intervenant au sein de la structure des matériaux, soumis à des sollicitations de charges. Les mécanismes de dégradation sont assez divers et variés suivant la nature du matériau considéré, le type de charges appliquées et la température à laquelle le matériau est sollicité. Néanmoins, malgré une diversité de la complexité des structures physiques rencontrées suivant les matériaux considérés, les mécanismes qualitatifs de dégradation restent toutefois assez similaires dans leur fondement et leur comportement générique. Ainsi, certaines propriétés de la dégradation sont régies et expliquées par quelques mécanismes d'énergie qui sont communs à tous les matériaux.

La modélisation du comportement de la dégradation d'un matériau soumis à une charge est réalisée à des échelles différentes. En effet, trois échelles [101] sont considérées : l'échelle microscopique<sup>3</sup>, l'échelle mésoscopique<sup>4</sup> et l'échelle macroscopique<sup>5</sup>. Au niveau microscopique, l'accumulation de microstress au voisinage de microdéfauts ou d'imperfections présents dans un matériau, ainsi que la détérioration des liens entre les atomes<sup>6</sup> sont caractéristiques d'un matériau en dégradation. A l'échelle mésoscopique, la coalescence de microfissures ou de micro-vides dans le matériau traduit la naissance d'une fissure. A une échelle macroscopique,

3. Échelle de représentation d'un ensemble d'atomes
4. Échelle de représentation d'un ensemble de cristaux ou de molécules d'un matériau
5. Échelle de représentation de la propagation d'une fissure
6. Formant les cristaux ou les molécules

### **II.3. Modélisation du comportement de la dégradation**

---

la fissure croît et s'étend au sein du matériau, soumis à des sollicitations de charges.

Les variables d'état de dégradation peuvent être étudiées par des moyennes de microfissures ou de micro-vides sur un certain volume de matériau représentant l'échelle mésoscopique. Une représentation par élément de volume doit être adoptée. Ce volume doit être fixé suffisamment petit pour éviter de lisser les phénomènes de haut gradient des microprocessus de dégradation et suffisamment grand pour représenter une moyenne de ces microprocessus. A l'échelle macroscopique, la variable d'état de la dégradation est la croissance de la fissure.

#### **II.3.2.2 Mécanismes de dégradation**

Les mécanismes impliqués dans l'évolution de la dégradation sont l'élasticité, la plasticité, les microcontraintes et les microstress (voir [101]). En effet, à l'échelle microscopique se situent l'agencement des atomes et les liens entre ces derniers, résultant de l'interaction de leurs champs magnétiques. L'élasticité est liée au mouvement relatif des atomes à cette échelle soumis à des contraintes de stress. Lorsque des liens "se brisent" suite à des contraintes exercées sur l'agencement d'atomes à cette échelle, le processus de dégradation s'initie.

Les imperfections et les microdéfauts sont présents dans tout matériau au travers d'atomes manquants, entraînant à des phénomènes de dislocations. Autour de ces lieux de dislocations apparaissent des zones de concentrations de microstress et de microcontraintes, donnant lieu à la naissance ou à l'arrêt de nouvelles dislocations, suivant l'équilibre de l'agencement des plans d'atomes. Ces mécanismes créent des microcontraintes plastiques. La plasticité est directement relative aux glissements, apparaissant au travers d'escalade ou de jumelage de mouvements de dislocation. Ces phénomènes de dégradation présents à l'échelle microscopique jusqu'à l'échelle mésoscopique influencent les contraintes plastiques irréversibles puisque l'aire élémentaire de résistance décroît au fur et à mesure que les liens entre les atomes se rompent. La dégradation n'influence pas directement le mécanisme de glissement par lui-même mais augmente le stress effectif subi par le matériau.

Pour résumer, à l'échelle microscopique, les mécanismes de contraintes associés au mécanisme de dégradation du matériau sont considérés. A l'échelle mésoscopique, les équations constitutives de l'analyse du mécanisme de dégradation sont considérées. Enfin, à une échelle macroscopique, les structures sont étudiées par l'analyse de la propagation des fissures.

#### **II.3.2.3 Classification des mécanismes de dégradation**

Les principaux mécanismes de dégradation sont nommés dégradation cassante, dégradation ductile, dégradation de fluage, dégradation sous un faible nombre de cycles de fatigue et

dégradation sous un fort nombre de cycles de fatigue. Le classement de ces mécanismes de dégradation est caractérisé par les formes que prennent les diagrammes de stress/contraintes du matériau étudié [101].

Après avoir classifié les mécanismes de dégradation, leur modélisation est présentée plus en détails.

### **II.3.2.4 Choix d'un modèle de dégradation**

D'un point de vue général, deux types de variable de dégradation sont considérés au sein d'une représentation par élément de volume, suivant que l'on considère les cas de dégradation isotropique ou anisotropique. En effet, dans le cas d'une dégradation isotropique<sup>7</sup>, une variable scalaire normalisée est utilisée pour décrire l'évolution de la dégradation. Dans le cas tridimensionnelle d'une dégradation anisotropique<sup>8</sup>, une variable tensorielle est utilisée (voir [101]). De plus, la méconnaissance de la condition initiale de la dégradation au sein de l'étude d'une structure est traitée dans [102].

Le choix d'un modèle de dégradation dépend de la fidélité de description du mécanisme de dégradation recherchée par rapport à une simplicité d'implémentation et de coût de calculs associés. Dans le cas de charge proportionnelle, les modèles de dégradation isotropique décrivent de manière fidèle et simple l'évolution d'une fissure au travers d'un matériau. Dans le cas de charges non proportionnelles, les modèles anisotropiques sont préférés, de sorte à refléter au plus près l'accumulation de dégradation et la propagation des fissures, dues aux sollicitations de charges. Pour les modèles liés au phénomène de fatigue mécanique, les modèles tenant compte de la proximité des microdéfauts sont à utiliser préférentiellement. L'ensemble de ces modèles est détaillé dans [102]. Ces modèles traduisent le comportement des systèmes non linéaires à échelle de temps multiple et à échelle d'espace multiple.

### **II.3.2.5 Exemple d'un modèle de loi unifiée de dégradation isotropique**

Dans cette sous-section, un exemple de modèle particulier de dégradation isotropique est donné. L'effet des microdéfauts liés à la dégradation est négligé à des fins de simplicité. Dans cet exemple, il est supposé que le comportement de l'accumulation de la dégradation se décline en trois phases : incubation de défauts donnant naissance à la dégradation, naissance d'une fissure et sa propagation au sein du matériau.

7. Fissures se propageant perpendiculairement aux sollicitations de charges

8. Fissures ne se propageant pas perpendiculairement à la plus grande composante de sollicitations de charge

### II.3. Modélisation du comportement de la dégradation

---

Les variables  $\omega_s$ ,  $\omega_\Phi$  désignent respectivement l'énergie emmagasinée dans un élément de la représentation par élément de volume et le seuil d'énergie emmagasinée dans un matériau donné. Il convient de noter que l'initiation de la dégradation est relative à la quantité d'énergie nécessaire pour "incuber" ces défauts. Le seuil dépend du matériau considéré et dépend aussi du type de charge considéré.

A présent, le modèle de dégradation (voir [102]) est présenté pour les trois phases.

- Si  $\max \omega_s < \omega_\Phi$ , on a

$$\dot{\Phi} = 0 \quad (\text{II.24})$$

où  $\Phi$  désigne la variable de dégradation, ici considérée comme la propagation d'une fissure à l'échelle macroscopique.

- Si  $\max \omega_s = \omega_\Phi$ , on a

$$\Phi = \Phi_c \text{ "Initiation d'une mésolfissure" } \quad (\text{II.25})$$

où  $\Phi_c$  est un paramètre dépendant du matériau considéré.

- Si  $\max \omega_s > \omega_\Phi$ , on a

$$\dot{\Phi} = \left( \frac{Y}{S} \right)^s \dot{p} \quad (\text{II.26})$$

où  $S$ ,  $s$  sont des paramètres liés au matériau, fonction de la température.  $Y$  désigne le taux libéré de densité d'énergie et  $\dot{p}$  décrit le taux de contrainte plastique accumulée. Leurs expressions respectives sont données par

$$\begin{cases} Y = \frac{\tilde{\sigma}_{eq} R_\nu}{2E} \\ R_\nu = \frac{2}{3} (1 + \nu) + 3 (1 - 2\nu) \left( \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \right)^2 \end{cases} \quad (\text{II.27})$$

où  $E$  est le module d'élasticité déduit à partir du tracé d'un diagramme de stress/contrainte,  $\tilde{\sigma}_{eq}$  désigne le stress effectif de von Mises, fonction de la variable  $\Phi$ .  $\nu$  décrit le ratio de Poisson.  $\left( \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \right)$  traduit la triaxialité des contraintes de stress<sup>9</sup>.

$\dot{p}$  est régi par le phénomène de plasticité, par la loi de viscosité ou de plasticité cyclique suivant le type de dégradation considéré. Par exemple, pour le cas le plus simple d'un phénomène

9. Voir la définition de la triaxialité donnée dans [101]



élastoplasticité, on a

$$\dot{p} = \frac{\dot{\lambda}}{1 - \Phi} \quad (\text{II.28})$$

où  $\dot{\lambda}$  est le multiplicateur plastique lié à une fonction de critère de rendement  $f$  lorsque  $f = 0$  et  $\dot{f} = 0$ .

### II.3.2.6 Implémentation des modèles par les éléments finis

Étant donné qu'il est très difficile, voire impossible d'exploiter la solution analytique du modèle de dégradation multi-échelles pour tout point d'une structure considérée, alors la recherche d'une approximation de la solution est ramenée à la résolution d'un problème numérique par éléments finis (voir [102]). L'analyse numérique de défaillance d'une structure sous contraintes de charges considérées est réalisée par une décomposition de la structure au travers d'un maillage à éléments finis. Le but est de propager les contraintes de stress au travers de la structure. Le maillage permet de créer une représentation par éléments de volume. En chaque sommet de ces éléments de volume sont implémentés les modèles de dégradation multi-échelles. Par ailleurs, la croissance d'une fissure macroscopique modifie la géométrie de la structure considérée. L'évolution de cette géométrie nécessite d'être prise en compte en calculant un nouveau maillage. Ce maillage est affiné au voisinage de la présence de la fissure<sup>10</sup>.

### II.3.3 Discussion

La complexité de modélisation des mécanismes de dégradation dans une représentation multi-échelles peut difficilement être intégrée dans un processus embarqué de surveillance de systèmes. En effet, le volume de calculs nécessaires à la simulation de ces modèles par éléments finis reste élevé. L'utilisation de modèles de dégradation dans une représentation macroscopique apparaît plus pertinente par rapport à l'aspect temps réel soulevé. Cependant, la modélisation du comportement global de la dégradation reste décrit uniquement à une échelle macroscopique. Une précision suffisante et une simplicité d'utilisation étant ici recherchées principalement. Il reste néanmoins faisable de considérer la possibilité d'établir des modèles précis à mi-chemin entre les deux types de représentation examinés auparavant. Ces modèles fourniraient une plus grande précision tout en restant compatibles avec les contraintes du temps réel. Une discrétisation spatiale des modèles d'équations aux dérivées partielles de la dégradation multi-échelles pourrait permettre d'obtenir des modèles approximés basés sur des équations différentielles pour le pronostic.

10. Lieu où se trouve les contraintes plastiques les plus fortes pour la structure

### II.4 Système électromécanique considéré

Cette section a pour objectif de présenter le système électromécanique considéré ainsi que les modèles de comportement pour une ou deux batteries alimentant ce système. Le modèle de ce système sera utilisé pour illustrer les résultats obtenus dans les chapitres suivants de cette thèse.

#### II.4.1 Motivation du choix de l'application considérée

Cette application a été choisie pour deux raisons principales. D'une part, son modèle de comportement, qui même s'il est non linéaire, reste relativement simple. D'autre part, la variable de dégradation est accessible. Par ailleurs, les paramètres de ce modèle ont été identifiés dans [24] et [37] sur un système réel. Ainsi, les simulations proposées pour illustrer la pertinence des résultats obtenus dans ce travail relatent un comportement proche de la réalité.

#### II.4.2 Modèle de comportement du système

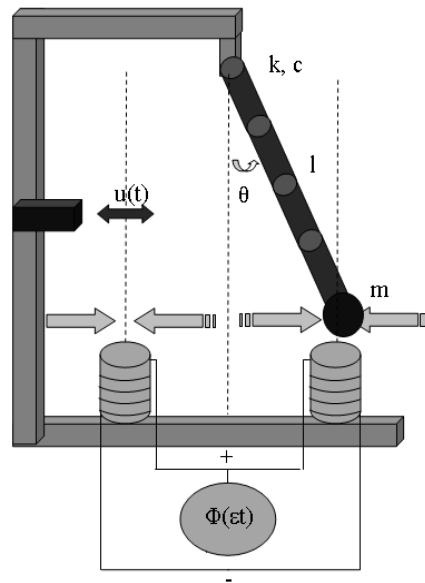


Figure II.9 – Système électromécanique : cas d'une seule batterie

Le système décrit dans la Figure II.9 est un système d'oscillateur électromécanique non linéaire. Ce système est composé de deux sous-systèmes interconnectés : un sous-système mécanique couplé à un sous-système électromagnétique. Le mouvement d'oscillation du pendule est réalisé au travers d'un système d'agitateur électromécanique commandé en fréquence et en amplitude. Le pendule oscille entre deux électroaimants qui sont alimentés en tension par une

batterie. Lorsque la batterie se décharge, la diminution du coefficient de raideur, dans le potentiel du puits des électroaimants entraîne une diminution également de la fréquence d'oscillation du sous-système mécanique. De la même manière, le déplacement du balancier du pendule avec sa masse excite les électroaimants en retour. Deux capteurs sont utilisés pour mesurer l'angle du pendule par rapport à la verticale et le courant de la batterie alimentant les électroaimants.

### II.4.2.1 Système composé d'une batterie

Le comportement de l'oscillateur électromécanique est à présent modélisé (voir [37]) sur la base d'un oscillateur de Duffing à un degré de liberté, à partir du théorème des moments cinétiques pour le sous-système mécanique et des lois de conservation d'énergie pour la partie électromagnétique. Deux hypothèses ont été émises pour l'élaboration de ce modèle. Les effets de la gravité et les pertes d'énergie par courants de Foucault, dans le pendule avec sa masse, sont négligés. Ainsi, les étapes de modélisation du modèle de comportement du système ont été détaillées en annexe A. Le modèle du système considéré est donné par

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\theta} + \mu\dot{\theta} + L(\phi)\theta + \alpha_3\theta^3 + \frac{K(\theta - \lambda)}{(1 + K(\theta - \lambda)^2)^2}\psi^2 = u \\ \frac{1}{1 + K(\theta - \lambda)^2}\dot{\psi} + \left[ \frac{2K(\lambda - \theta)\dot{\theta}}{(1 + K(\theta - \lambda)^2)^2} + r \right] \psi = \phi \\ \dot{\phi} = -\epsilon\psi(1 + \gamma(\phi - \eta)^2) \end{array} \right. \quad (\text{II.29})$$

où l'état du système est décrit par le vecteur d'état du sous-système de comportement à dynamique rapide  $(\theta, \dot{\theta}, \psi) \in \mathbb{R}^3$ , correspondant respectivement à l'angle de l'oscillateur mécanique, de la vitesse angulaire de l'oscillateur mécanique et du courant s'écoulant au travers des électroaimants. La variable d'état du sous-système de comportement à dynamique lente  $\phi \in \mathbb{R}$ , décrit la tension à vide de la batterie, alimentant le circuit électrique composé des deux électroaimants. On suppose pouvoir mesurer les grandeurs  $x_1$  et  $\psi$ .

Les paramètres physiques du modèle (II.29) sont décrits par le paramètre d'amortissement effectif  $\mu$ , le coefficient  $\alpha_3$ , l'amplitude d'inductance  $K$ , l'échelle de temps de relaxation  $r$  de la période d'oscillation du sous-système électromécanique, et  $\gamma > 0$  et  $\eta > 0$  sont deux constantes positives liées aux caractéristiques de la batterie. Le ratio entre les dynamiques de comportement lente et rapide est défini par  $0 < \epsilon \ll 1$ . Enfin,  $u$  décrit le contrôle appliqué sur le système.

Le système possède trois phases de comportement suivant l'état de décharge de la batterie,

---

## II.4. Système électromécanique considéré

comme décrit dans la Figure II.10.  $\phi_N$  désigne la valeur de la tension à vide de la batterie.

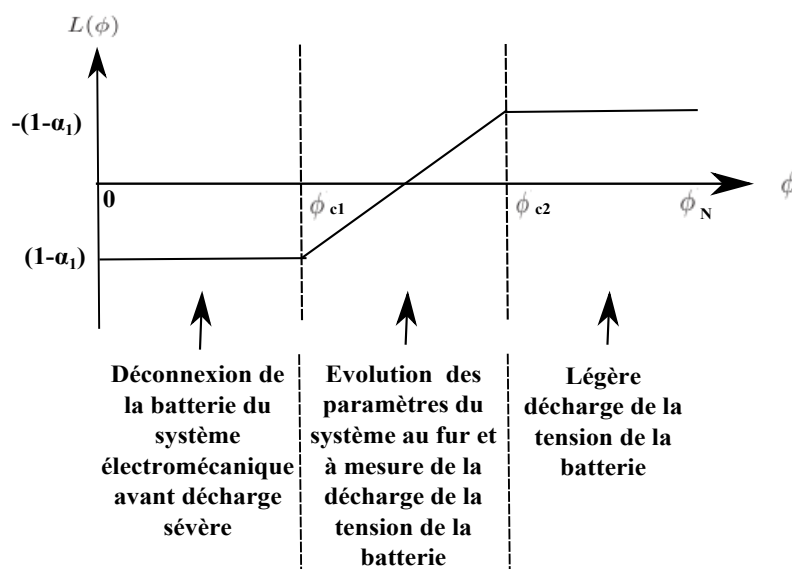


Figure II.10 – Évolution du paramètre  $L(\phi)$

Les valeurs de  $\phi_{c1}$ ,  $\phi_{c2}$  sont spécifiques à la caractérisation empirique du comportement non linéaire de la batterie. Les trois phases de comportement sont décrites au travers de l'évolution du comportement non linéaire du paramètre  $L(\phi)$  comme suit

$$L(\phi) = \begin{cases} \alpha_1 - 1 \text{ pour } \phi \in [\phi_{c1}, \phi_N[ \\ (\alpha_1 - 1) \frac{2\phi - \phi_{c1} - \phi_{c2}}{\phi_{c1} - \phi_{c2}} \text{ pour } \phi \in [\phi_{c2}, \phi_{c1}[ \\ 1 - \alpha_1 \text{ pour } \phi \in [0, \phi_{c2}[ \end{cases} \quad (\text{II.30})$$

où  $\alpha_1$  est un coefficient supérieur à 1.

A partir de (II.29), une représentation dans l'espace d'état est introduite. En appliquant la transformation définie par  $(x_1, x_2) = (\theta, \dot{\theta})$  dans (II.29), le modèle d'état suivant est obtenu

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\mu x_2 + L(\phi)x_1 + u - \alpha_3 x_1^3 - \frac{K(x_1 - \lambda)}{(1 + K(x_1 - \lambda)^2)^2} \psi^2 \\ \dot{\psi} = (1 + K(x_1 - \lambda)^2) \left( \phi - \left[ \frac{2K(\lambda - x_1)x_2}{(1 + K(x_1 - \lambda)^2)^2} + r \right] \psi \right) \\ \dot{\phi} = -\epsilon \psi (1 + \gamma(\phi - \eta)^2) \\ y_1 = x_1 \\ y_2 = \psi \end{cases} \quad (\text{II.31})$$

## Chapitre II. Concept et modèles pour le pronostic et procédé d'application

L'analyse des points d'équilibre du sous-système mécanique, composé des variables d'état de comportement à dynamique rapide, permet de décrire trois types de comportement. Pour ce faire, on pose  $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{x}_3 = 0$ , et la commande du système est défini par  $u = 0$ . En négligeant le terme  $\frac{K(x_1 - \lambda)}{(1 + K(x_1 - \lambda)^2)^2} \psi^2$  traduisant l'image de l'effet de la variable à dynamique lente sur le sous-système mécanique, on détermine l'existence de trois points d'équilibre  $(x_1^{e_i}, x_2^{e_i})$ ,  $i = 1, 2, 3$  suivant les valeurs de  $L(\phi)$ .

Cas A :  $L(\phi) = -(1 - \alpha_1)$ , on a

$$(x_1^{e_1}, 0) = (0, 0), (x_1^{e_2}, 0) = \left( \sqrt{\frac{(\alpha_1 - 1)}{\alpha_3}}, 0 \right), (x_1^{e_3}, 0) = \left( -\sqrt{\frac{(\alpha_1 - 1)}{\alpha_3}}, 0 \right).$$

Cas B :  $L(\phi) = (1 - \alpha_1)$ , on a

$$(x_1^{e_1}, 0) = (x_1^{e_2}, 0) = (x_1^{e_3}, 0) = (0, 0).$$

Dans le cas A,  $(x_1^{e_1}, 0)$  est une selle (instable) et  $(x_1^{e_2}, 0)$ ,  $(x_1^{e_3}, 0)$  sont deux puits (stables) correspondant au cas où le pendule oscille d'un électroaimant à un autre. La commande  $u$  sur le système permet de commander l'agitateur électromécanique. Le but est de générer des oscillations agissant sur le pendule afin de maintenir l'oscillation entre les deux attracteurs que constituent les puits des électroaimants. Dans le cas B, un point d'équilibre triple stable est positionné en  $(0, 0)$  et décrit le système dans le cas où la batterie n'est plus alimentée. Le cas C intermédiaire décrit par  $L(\phi)$  dans (II.30) traduit l'évolution des points d'équilibre entre le cas A et B.

### II.4.2.2 Système composé de deux batteries

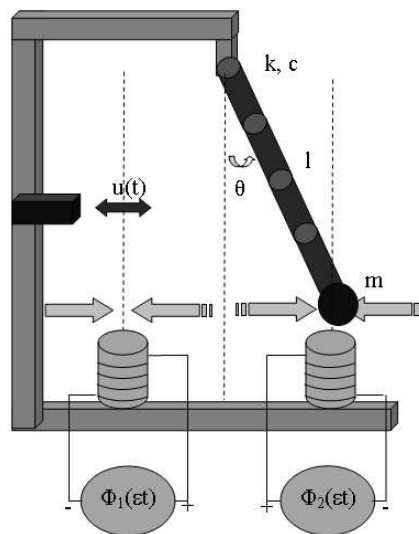


Figure II.11 – Système électromécanique : cas de deux batteries

## II.4. Système électromécanique considéré

A présent, le modèle décrivant le comportement de l'application considérée est présenté dans le second cas où il est alimenté par deux batteries. Chacune des batteries fournit une tension d'alimentation à chaque électroaimant. Dans ce cas, la dimension du vecteur d'état de dégradation est égale à 2.

Le modèle de comportement de l'application considérée en Figure II.11 est décrit par le modèle d'état suivant [23] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\mu x_2 + L(\phi)x_1 + u - \alpha_3 x_1^3 - \frac{K(x_1 - \lambda_1)}{(1 + K(x_1 - \lambda_1)^2)^2} \psi_1^2 \\ \quad - \frac{K(x_1 + \lambda_2)}{(1 + K(x_1 + \lambda_2)^2)^2} \psi_2^2 \\ \dot{\psi}_1 = (1 + K(x_1 - \lambda_1)^2) \left( \phi_1 - \left( \frac{2K(\lambda_1 - x_1)x_2}{(1 + K(x_1 - \lambda_1)^2)^2} + r \right) \psi_1 \right) \\ \dot{\psi}_2 = (1 + K(x_1 + \lambda_2)^2) \left( \phi_2 - \left( \frac{2K(-\lambda_2 - x_1)x_2}{(1 + K(x_1 + \lambda_2)^2)^2} + r \right) \psi_2 \right) \\ \dot{\phi}_1 = -\epsilon_1 \psi_1 (1 + \gamma_1 (\phi_1 - \eta_1)^2) \\ \dot{\phi}_2 = -\epsilon_2 \psi_2 (1 + \gamma_2 (\phi_2 - \eta_2)^2) \\ y_1 = x_1 \\ y_2 = \psi_1 \\ y_3 = \psi_2 \end{array} \right. \quad (\text{II.32})$$

### II.4.3 Valeurs numériques associées aux paramètres du modèle

Variable	Valeur numérique
$\mu$	0.088
$\alpha_1$	2.6558
$\alpha_3$	0.8805
$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$	1.7367
$K$	0.07
$r$	8
$\gamma = \gamma_1 = \gamma_2$	1
$\eta = \eta_1 = \eta_2$	10.539
$\epsilon = \epsilon_1 = \epsilon_2$	$5.5 \times 10^{-4}$

Tableau II.1 – Valeurs numériques des paramètres des modèles [24], [37]

Les valeurs numériques associées à (II.31) et (II.32) nécessaires à la simulation du com-

portement de l'application considérée sont données dans le tableau II.1. Ces paramètres ont été identifiés sur un système réel (voir [24], [37]). Ainsi, le modèle de comportement obtenu décrit un comportement proche du système réel. Par ailleurs, le contrôle appliqué au système électromécanique est donné par  $u(t) = f \cos(\Omega t)$  où  $f = 1$  et  $\Omega = 1.7608$ .

### II.5 Conclusion

Ce chapitre a été dédié aux définitions mathématiques des notions fondamentales liées au diagnostic et au pronostic. Le concept de pronostic a été défini en introduisant la notion de contrainte temporelle et a été lié à la notion d'espace accessible en temps fini. Les différents types de modèles de dégradation ont été présentés, leurs avantages et leurs inconvénients ont été discutés. L'utilisation du modèle de dégradation macroscopique est fondamentale en vue du développement de méthodologies du pronostic à travers l'approche considérée dans ce travail. Par ailleurs, l'application considérée ainsi que son modèle ont été présentés afin d'illustrer la pertinence des résultats obtenus dans les chapitres suivants.

## CHAPITRE III

---

# Pronostic à base d'observateurs : comparaison de méthodes

---

*"Mieux vaut s'attendre au prévisible que d'être surpris par l'inattendu."*

*Pierre Dac*

<b>III.1 Introduction</b> . . . . .	<b>68</b>
<b>III.2 Hypothèses de travail</b> . . . . .	<b>69</b>
<b>III.3 Méthodologie du pronostic</b> . . . . .	<b>70</b>
III.3.1 Synthèse de trois observateurs à entrée inconnue . . . . .	71
III.3.2 Technique d'identification . . . . .	81
III.3.3 Évaluation des performances . . . . .	82
<b>III.4 Application à l'oscillateur électromécanique</b> . . . . .	<b>83</b>
III.4.1 Observateur linéaire . . . . .	83
III.4.2 Observateur à grand gain et à entrée inconnue . . . . .	87
III.4.3 Observateur à mode glissant . . . . .	89
III.4.4 Dérivée numérique : outil et problème . . . . .	94
III.4.5 Estimation des paramètres de la dynamique lente . . . . .	95
III.4.6 Prédiction du temps de vie restant . . . . .	96
<b>III.5 Vecteur de dégradation d'ordre supérieur</b> . . . . .	<b>100</b>
III.5.1 Synthèse de l'observateur . . . . .	100
III.5.2 Prédiction obtenue du temps de vie restant . . . . .	101
III.5.3 Remarque . . . . .	102
<b>III.6 Conclusion</b> . . . . .	<b>102</b>



## III.1 Introduction

Dans ce chapitre, on considère le système décrit par

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, \lambda(\phi), u, t) \\ \dot{\phi} = \epsilon g(\phi, x, t) \\ y = h(x, \phi, u) \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  désigne l'état du système, une variable supposée à dynamique rapide.  $\phi \in \mathbb{R}^q$  est une variable à dynamique lente caractérisant la dégradation.  $u \in \mathbb{R}^m$  désigne la commande et  $y \in \mathbb{R}^p$  décrit la sortie du système.  $\epsilon$  représente le ratio des échelles entre les dynamiques rapide et lente avec  $0 < \epsilon \ll 1$ .  $\lambda(\phi)$  désigne la déviation des paramètres physiques par rapport à l'évolution de la dégradation.  $f$ ,  $g$  et  $h$  sont des fonctions régulières de bonne dimension.

L'objectif de la démarche est double. Premièrement, une nouvelle stratégie de pronostic de systèmes est introduite, basée sur la synthèse d'observateurs. Deuxièmement, une étude comparative de différentes méthodologies, dédiées à la synthèse d'observateurs est présentée ([67], [66], [68] et [69]).

Sous l'hypothèse que l'état à dynamique lente n'est pas mesuré et que l'état à dynamique rapide n'est que partiellement mesuré, la stratégie de pronostic est considérée en deux étapes. Premièrement, différents types d'observateurs à entrée inconnue et à convergence en temps fini sont synthétisés. Le but est d'estimer l'état à dynamique rapide. Puis, le problème de la détermination de l'état de comportement à dynamique lente et les paramètres de sa dynamique sont exprimés comme un problème de reconstruction d'entrée inconnue en temps fini et de dérivation numérique.

Le problème des observateurs à entrée inconnue a attiré l'intérêt de plusieurs auteurs (voir [39], [50], [55], [65], [77], [84], [106], [113], [160], [172] et [174]) et un grand nombre de résultats ont été proposés. Cependant, peu d'observateurs à entrée inconnue permettent une estimation conjointe de l'état et de l'entrée inconnue. Par rapport aux méthodologies de synthèse d'observateurs à entrée inconnue développées dans la littérature, une classification de trois approches principales peut être proposée. Dans la première approche, des hypothèses particulières sont supposées sur la nature de la structure des entrées inconnues (voir [84], [113]). Ces connaissances particulières sur la nature de structure des entrées inconnues ne sont pas disponibles facilement pour tout système et représentent finalement une condition restrictive d'application. Une autre approche est basée sur la transformation de coordonnées telle que le système dynamique obtenu dans la nouvelle base ne soit pas perturbé par l'entrée inconnue (voir [39], [65], [77], [172] et [174]). Le système dynamique obtenu est ensuite utilisé pour

## III.2. Hypothèses de travail

---

la synthèse d'observateurs classiques. Toutefois, peu de conceptions d'observateurs permettent généralement d'estimer l'entrée inconnue. Dans une troisième approche, les observateurs à entrée inconnue permettent simultanément l'estimation conjointe de l'état et de l'entrée inconnue (voir [55] et [106]) comme nécessaire pour la conception de notre méthodologie. Deux catégories d'observateurs non linéaires sont considérées : l'observateur à grand gain et l'observateur à mode glissant.

La notion de convergence en temps fini d'un observateur est une notion relativement moins répandue dans la littérature que la convergence asymptotique. Elle a nécessité le développement de nouvelles conditions de stabilité et de stabilisation en temps fini dans la théorie de Lyapunov, dont les résultats ont été présentés dans [15], [16], [125] et [126]. Des méthodologies de synthèse d'observateurs à convergence en temps fini ont été proposés dans [48], [79] et [116] pour les systèmes linéaires, et dans [114], [115], [117] et [122] pour les systèmes non linéaires. Plus précisément, des techniques de synthèse d'observateurs à entrée inconnue et à convergence en temps fini, ont été développées dans [140] pour le cas linéaire, et dans [55] pour les observateurs par mode glissant.

Dans ce chapitre, une étude comparative a été réalisée sur un système électromécanique. Plus précisément, trois observateurs à entrée inconnue en vue du pronostic ont été considérés et le but a été d'obtenir l'estimateur le plus précis.

## III.2 Hypothèses de travail

Cette section a pour objectif de présenter les hypothèses de travail adoptées.

**(H1)**  *$f$ ,  $h$  et la structure de  $g$  sont supposées parfaitement connues.*

**(H2)** *Les variables d'état à dynamique lente sont supposées non mesurables sur le système.*

**(H3)** *Les variables d'état à dynamique rapide sont supposées partiellement mesurées sur le système.*

**(H4)** *Les conditions opérationnelles sont supposées parfaitement connues quelle que soit l'instant considéré.*

**Remarque 8.** *Généralement, dans la littérature, la dynamique de l'état à dynamique lente*

est supposée être une fonction polynomiale. De plus, la condition initiale de la variable de dégradation est supposée inconnue.

Sous les hypothèses **(H1)** à **(H4)**, nous allons synthétiser un observateur pour le modèle (III.1), afin d'estimer l'état du système à partir des observations sur l'horizon de temps  $[T_0, T_p]$ , et de réaliser une prédiction du temps de vie restant sur l'horizon de temps  $]T_p, +\infty[$ . Pour ce faire, on considère un modèle estimé sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= \hat{f}(\hat{x}, \lambda(\hat{\phi}), u) \\ \dot{\hat{\phi}} &= \hat{g}_{\hat{\epsilon}}(\hat{x}, \hat{\phi}) \\ \hat{y} &= h(\hat{x}, \hat{\phi}, u) \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

où  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  est l'état estimé du système de comportement à dynamique rapide.  $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^r$  dénote le vecteur de paramètres supposé être une fonction de  $\hat{\phi} \in \mathbb{R}^q$ , défini comme étant l'état de comportement à dynamique lente.  $u \in U \subset \mathbb{R}^m$  désigne le vecteur d'entrée où  $U$  est l'ensemble des commandes admissibles.  $\hat{y} \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur des sorties de l'observateur.  $\hat{f}$ ,  $h$  et la structure de  $\hat{g}_{\hat{\epsilon}}$  sont supposées connues.  $\hat{g}_{\hat{\epsilon}}$  dépend du ratio estimé des dynamiques de comportement lente/rapide, défini par  $\hat{\epsilon}$  supposé vérifié  $0 < \hat{\epsilon} \ll 1$ .

### III.3 Méthodologie du pronostic

La stratégie de pronostic pour les systèmes décrits par des modèles SNLETM est présentée dans cette section. La présente méthodologie de pronostic est constituée de trois principales étapes. Sous l'hypothèse que l'état de dégradation n'est pas mesuré et que l'état du système n'est que partiellement mesuré, la première étape consiste à synthétiser un observateur à entrée inconnue et à convergence en temps fini. Le but est d'estimer conjointement l'état et l'entrée inconnue. Puis, on procède par dérivation numérique afin d'estimer les paramètres et de constituer un modèle dynamique de la dégradation. On déduit ainsi la dynamique du modèle global. Finalement, le temps de vie restant peut être estimé. Les étapes de la méthodologie sont résumées dans la Figure III.1.

Dans cette méthodologie, l'estimation conjointe de l'état et de l'entrée inconnue nécessite d'être réalisée avec précision et en un temps fini. Dans ce qui suit, des observateurs de trois types seront synthétisés dans le cas du système électromécanique. Le but est de comparer la précision et donc la pertinence de leurs éventuelles utilisations en vue du pronostic.

### III.3. Méthodologie du pronostic

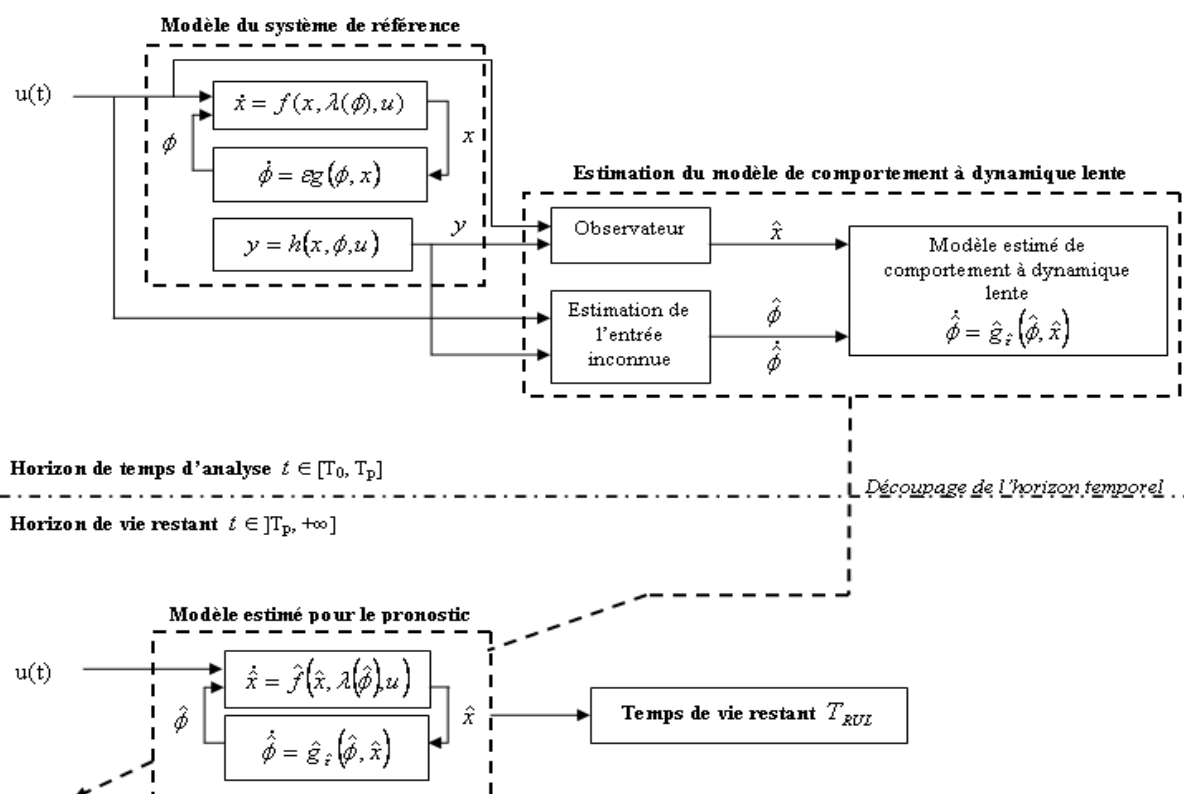


Figure III.1 – Méthodologie de pronostic

#### III.3.1 Synthèse de trois observateurs à entrée inconnue

Dans cette sous-section, trois méthodologies de synthèse d'observateurs à entrée inconnue issues de la littérature sont présentées. Ces observateurs sont synthétisés pour la partie du modèle de comportement à dynamique rapide de (III.1). A la différence de l'utilisation classique de la littérature, où la convergence est asymptotique, dans ce travail, la convergence en temps fini est considérée. Le but est de rendre les observateurs synthétisés exploitables pour le pronostic.

Dans le reste de ce paragraphe, trois méthodologies de synthèse d'observateurs à entrée inconnue sont introduites : un observateur linéaire, un observateur non linéaire à grand gain et un observateur non linéaire à mode glissant. Le choix de ces types d'observateurs est motivé par le fait qu'ils soient adaptés à l'estimation conjointe de l'état et de l'entrée inconnue.

Le reste de ce paragraphe est constitué essentiellement de trois parties. Chaque partie correspond à la description d'un observateur et sera suivie d'une partie discussion sur les avantages et les inconvénients de leur utilisation respective.

### III.3.1.1 Observateur linéaire à entrée inconnue

#### A. Méthodologie

Sous l'hypothèse de la linéarité de la sortie et de son indépendance, au regard de l'entrée et de l'état de comportement à dynamique lente, une sous-classe pour  $f$  est considérée :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\phi)x + B(\phi)u \\ y = Cx \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  désigne l'état du système.  $\phi \in \mathbb{R}^q$  est une variable à dynamique lente caractérisant la dégradation.  $u \in \mathbb{R}^m$  désigne la commande et  $y \in \mathbb{R}^p$  décrit la sortie du système. Les matrices  $A, B, C$  représentent respectivement les matrices d'état, de commande et d'observation.

Sous l'hypothèse que  $A(\phi)$  et  $B(\phi)$  peuvent être développées sous les formes linéaires

$$A(\phi) = A_0 + \sum_{i=1}^q A_i \phi_i$$

et

$$B(\phi) = B_0 + \sum_{i=1}^q B_i \phi_i$$

Ces hypothèses conduisent à réécrire (III.3) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = A_0x + B_0u + \Delta(x, u, \phi) \\ y = Cx \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

Dans la suite, l'hypothèse suivante est assumée.

**(H5)**  $\Delta = D\Delta_1$  où  $D$  est une matrice constante vérifiant  $\text{Rang}(D) = q \leq p$ .

Dans cette analyse, la partie  $\Delta$  est considérée comme étant l'entrée inconnue pour le système. La synthèse de l'observateur est similaire à celle décrite dans [77].

Sous (H5), le système (III.4) peut se réécrire sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = A_0x + B_0u + D\Delta_1(x, u, \phi) \\ y = Cx \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

et il existe  $q$  colonnes indépendantes dans la matrice  $D$ . Soit  $D_1$  une matrice  $\in \mathbb{M}_{n,q}$  composée de ces  $q$  vecteurs colonnes indépendants. Pour le reste de cette section, nous assumons

### III.3. Méthodologie du pronostic

---

aussi l'hypothèse suivante.

**(H6)** La matrice  $CD_1$  est de rang plein colonne.

Soit  $N \in \mathbb{M}_{n,(n-q)}$  une matrice, et en vertu du théorème de la base incomplète, telle que la matrice  $T = \begin{bmatrix} N & D_1 \end{bmatrix}$  est inversible. Posons  $\bar{x} = T^{-1}x$ .

Soit aussi  $P$  une matrice de transformation non singulière telle que :

$$\begin{aligned} \bar{D} &= T^{-1}DP^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0_{n-q,n-q} & 0_{n-q,q} \\ 0_{q,n-q} & I_{q,q} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

On pose

$$v(\bar{x}, u, \phi) = P\Delta_1(T\bar{x}, u, \phi) \quad (\text{III.6})$$

Alors

$$\bar{D}v(\bar{x}, u, \phi) = \begin{bmatrix} 0 \\ v_q \end{bmatrix} \quad (\text{III.7})$$

Le système (III.5) peut être réécrit sous la forme compacte suivante :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \bar{A}_{11}\bar{x}_1 + \bar{A}_{12}\bar{x}_2 + \bar{B}_1u_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 = \bar{A}_{21}\bar{x}_1 + \bar{A}_{22}\bar{x}_2 + \bar{B}_2u_2 + v_q \\ y = \bar{C}\bar{x} \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

où  $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$  avec  $\bar{x}_1 \in \mathbb{R}^{n-q}$  et  $\bar{x}_2 \in \mathbb{R}^q$ .  $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$  est le contrôle dans les dimensions appropriées et

$$\begin{cases} \bar{A}_0 &= T^{-1}A_0T \\ &= \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}, \\ \bar{B}_0 &= T^{-1}B \\ &= \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix}, \\ \bar{C} &= CT. \end{cases}$$

Sous (H6), il existe  $Q \in \mathbb{M}_{p,(p-q)}$ , la matrice  $U = \begin{bmatrix} CD_1 & Q \end{bmatrix}$  est non singulière, alors on

définit la transformation de sortie non singulière

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{bmatrix} \\ &= U^{-1}y\end{aligned}\tag{III.9}$$

où  $\bar{y}_1 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\bar{y}_2 \in \mathbb{R}^{p-q}$  et on pose

$$U = \left( \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix}^T \right)^{-1}\tag{III.10}$$

où  $U_1 \in \mathbb{M}_{q,p}$ ,  $U_2 \in \mathbb{M}_{p-q,p}$ .

Suite à un raisonnement simple, une partie du système (III.8) peut alors s'écrire :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1(t) = \tilde{A}_1 \bar{x}_1(t) + \bar{B}_1 u(t) + E_1 y(t) \\ \bar{y}_2(t) = \tilde{C}_1 \bar{x}_1 \end{cases}\tag{III.11}$$

où les matrices utilisées dans (III.11) sont définies par

$$\begin{cases} \tilde{A}_1 &= \bar{A}_{11} - \bar{A}_{12} U_1 C N \\ E_1 &= \bar{A}_{12} U_1 \\ \tilde{C}_1 &= U_2 C N \end{cases}$$

A présent, sous les hypothèses que

$$\begin{aligned} \text{Rang}(D_1) &= \text{Rang}(C D_1) \\ \text{Rang} \left( \begin{bmatrix} sI_{n-q} - \bar{A}_{11} & -\bar{A}_{12} \\ C N & C D_1 \end{bmatrix} \right) &= n, \forall s \in \mathbb{C}, \text{Re}(s) \geq 0, \end{aligned}\tag{III.12}$$

le système défini par

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t) = (\tilde{A}_1 - L\tilde{C}_1)\hat{x}_1(t) + \bar{B}_1 u(t) + (L U_2 + E_1)y(t) \\ \hat{x}(t) = T \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ U_1 y(t) - U_1 C N \hat{x}_1(t) \end{bmatrix} \end{cases}\tag{III.13}$$

est un observateur à entrée inconnue pour (III.4), où  $L$  est le gain de l'observateur.

Ce type d'observateur possède une propriété de convergence asymptotique. Or, pour des applications au pronostic, il est nécessaire d'estimer l'état de comportement à dynamique rapide en temps fini. Ce temps fini est prédéfini comme étant  $t_0 + \tau$  où  $t_0$  est l'instant du début de l'analyse et  $\tau$  est la durée d'analyse.

### III.3. Méthodologie du pronostic

---

Ainsi, l'observateur à entrée inconnue (III.13) est adapté afin d'obtenir la propriété de convergence en temps fini. En fait, nous considérons plutôt l'observateur suivant (voir [140]), qui est à convergence en temps fini, et donc adapté à l'application au pronostic

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Fz(t) + Hy(t) + Gu(t) \\ q(t) = \tilde{K} [z(t) - e^{F\tau} z(t - \tau)] \\ \hat{x} = T \begin{bmatrix} q(t) \\ U_1 y(t) - U_1 CN q(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

où les matrices de l'observateur sont définies par

$$\begin{aligned} F &= \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 - L_1 \tilde{C}_1 & 0_{n-q, n-q} \\ 0_{n-q, n-q} & \tilde{A}_1 - L_2 \tilde{C}_1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} L_1 U_2 + E_1 \\ L_2 U_2 + E_1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} I_{n-q} \\ I_{n-q} \end{bmatrix} \\ G &= \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{K} = \begin{bmatrix} I_{n-q} & 0_{n-q, n-q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & e^{F\tau} S \end{bmatrix}^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

L'entrée inconnue est définie par :

$$\begin{aligned} \hat{v} &= U_1 \dot{y} + (U_1 CN \bar{A}_{11} + U_1 CN \bar{A}_{12} U_1 CN - \bar{A}_{21} + \bar{A}_{22} U_1 CN) q \\ &\quad + (-U_1 CN \bar{B}_1 - \bar{B}_2) u + (-U_1 CN \bar{A}_{12} U_1 - \bar{A}_{22} U_1) y \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

et est estimée en temps fini  $t_0 + \tau$ . Notez que son expression contient la dérivée de la sortie  $\dot{y}$ . On déduit alors explicitement sa valeur en précédent par un calcul de dérivée numérique de la sortie.

D'après (III.6) et (III.16), nous avons

$$\hat{v} = P \Delta_1(T \hat{x}, u, \hat{\phi}) \quad (\text{III.17})$$

Le vecteur d'état de comportement à dynamique lente de dimension  $q$  est obtenue en résolvant un problème inverse :

$$\hat{v}_q = (P \Delta_1)_{q,1}(T \hat{x}, u, \hat{\phi}) \quad (\text{III.18})$$

Finalement, on en déduit le résultat suivant.

**Proposition 1.**  $\hat{\phi}$  est solution de l'équation (III.18) où  $u$  est connue et  $\hat{x}$ ,  $\hat{v}_q$  sont estimés.

#### B. Commentaires sur l'observateur synthétisé

L'avantage de ce type d'observateur réside dans la facilité de sa synthèse. Cependant, l'estimation de l'entrée inconnue nécessite un calcul de dérivée numérique de la sortie. L'estimation de la partie de l'état à dynamique lente est ici obtenue en résolvant un problème inverse. En cas de présence de bruit sur la sortie, cette résolution numérique pourrait poser un problème quant à la précision du résultat obtenu, ce qui peut être une limite de l'approche présentée.



Pour s'affranchir de la résolution d'un problème inverse, pour l'estimation de l'état de comportement à dynamique lente, à partir de l'entrée inconnue, le problème de l'observation est posé différemment en synthétisant deux types d'observateurs non linéaires à entrée inconnue.

### III.3.1.2 Observateur à grand gain

#### A. Méthodologie

Dans cette section, la méthodologie de synthèse d'observateur est décrite dans [106], basée sur l'observateur non linéaire à grand gain [56]. Pour des raisons de clarté, les principales étapes et les hypothèses seront rappelées. Ici, l'état de comportement à dynamique lente  $\phi$  dans (III.1) est ramené à une entrée inconnue, désignée par  $v$ .

Un modèle multi-entrées/multi-sorties pour la partie du modèle de comportement à dynamique rapide du système (III.1), est supposée être décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) + G(u, s)v \\ y = Cx = x^1 \end{cases} \quad (\text{III.19})$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  désigne l'état du système.  $s$  est un signal connu borné à dérivée première bornée.  $u \in U$ , ici  $U$  est défini comme l'ensemble des fonctions continues absolument<sup>1</sup> bornées avec des dérivées bornées.  $y \in \mathbb{R}^p$  décrit la sortie du système.  $C$  est la matrice d'observation.  $v \in \mathbb{R}^q$  est une entrée inconnue. Notez que dans ce cas,  $v$  désigne directement la dégradation.

Il est supposé que le champ de vecteurs  $f$  utilisé dans (III.19) admet la structure triangulaire suivante :

$$f(x, u) = \begin{pmatrix} f^1(u, x^1, x^2) \\ f^2(u, x^1, x^2, x^3) \\ \vdots \\ f^{Q-1}(u, x) \\ f^Q(u, x) \end{pmatrix}$$

avec  $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^Q \end{pmatrix}$ , où  $x^k \in \mathbb{R}^{n_k}$ ,  $k = 1, \dots, Q$  et  $p = n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_Q$  avec  $\sum_{k=1}^Q n_k = n$ .

1. Soit  $A = [a, b]$  un intervalle et  $f$  une fonction continue sur cet intervalle dont l'intégrale est définie par  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ . On dit que la fonction  $F$  est absolument continue sur  $A$  si, pour tout réel  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que, pour toute suite  $([a_n, b_n])$ ,  $n \in \mathbb{N}$  de sous-intervalles de  $A$  d'intérieurs disjoints,  $\sum_{n \geq 0} (b_n - a_n) < \delta \Rightarrow \sum_{n \geq 0} (|F(a_n) - F(b_n)|) < \epsilon$

### III.3. Méthodologie du pronostic

---

$v \in \mathbb{R}^q$ ,  $q \leq p$ , est une entrée inconnue dont la dérivée est supposée être bornée uniformément.

Cette partition induit la structure suivante pour la matrice  $G$  :

$$G(u, s) = \begin{pmatrix} G^1(u, s) \\ G^2(u, s) \\ \vdots \\ G^Q(u, s) \end{pmatrix}$$

où chaque sous-matrice  $G^k(u, s)$  est de dimension  $n_k \times q$ . Il est supposé que  $G^1$  peut être décomposée de la façon suivante :

$$G^1 = \begin{pmatrix} G_1^1(u, s) \\ G_2^1(u, s) \end{pmatrix}$$

où  $G_1^1(u, s)$  est une sous-matrice de rang plein colonne de dimension  $q_0 \times q$  avec  $q \leq q_0 \leq p$  et est telle que

**(H7)**  $G^1(u, s(t))$  est une matrice de rang plein colonne pour tout  $u \in U$  et pour tout  $t \geq 0$ .  
Et on a

$$\text{Rang}(CG(u, s)) = \text{Rang}(G^1(u, s)) = q, \forall u \in U, \forall t \geq 0.$$

**(H8)** Les fonctions  $f^k(u, x^1, x^2, \dots, x^{k+1})$  sont supposées satisfaire une hypothèse (voir [106]) qui garantit l'observabilité uniforme.

**(H9)**  $\forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times U, t \geq 0$ ,

$$\text{Rang} \left( \frac{\partial f^1}{\partial x^2}(u, x^1, x^2) G^1(u, s) \right) = n_2 + q$$

Sous (H7) à (H9), un observateur à grand gain conventionnel est synthétisé dans les coordonnées originelles comme suit

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= f(u, \hat{x}) + G(u, s)\hat{v} + H(u, s, \hat{x}, x^1, \tilde{\theta})(\hat{x}^1 - x^1) \\ \dot{\hat{v}} &= -\tilde{\theta}^2(G^1(u, s))^{\dagger}(\hat{x}^1 - x^1) \end{cases} \quad (\text{III.20})$$

où  $H$  est une fonction régulière dépendant du système (III.19), de différentes transformations appliquées sur (III.19) et est détaillée dans [106].

**B. Commentaires sur l'observateur synthétisé**

Il est à noter que l'observateur (III.20) n'est pas à convergence en temps fini. Cependant, pour tout  $\epsilon > 0$ , un choix judicieux de  $\tilde{\theta}$  permet d'assurer que l'erreur est inférieure à  $\epsilon$  et donc "presque" en temps fini. Cet observateur permet d'estimer l'état de comportement à dynamique rapide, avec la propriété de convergence exponentielle, dans une boule de rayon dépendant du choix du paramètre  $\tilde{\theta}$ . Théoriquement, le rayon de la boule est choisi aussi petit que désiré, il suffit de choisir  $\tilde{\theta}$  grand. Cependant, un compromis sur le choix  $\tilde{\theta}$  est nécessaire afin d'éviter une amplification trop forte du bruit présent sur la sortie. La relation entre le choix de la valeur  $\tilde{\theta}$  et son effet sur la détermination de  $\tau$  reste néanmoins difficile à établir. De plus, la dynamique  $\dot{\phi}$  de l'état de comportement à dynamique lente est directement estimée au travers de l'observateur et seule une intégration numérique est nécessaire afin d'obtenir  $\phi$ . Cet observateur peut souffrir du phénomène de pic durant l'étape de convergence de l'observateur. Des travaux ont été consacrés au problème de diminution de ce phénomène de pic (voir par exemple [47]).

**III.3.1.3 Observateur à mode glissant****A. Méthodologie**

Dans cette section, un observateur à mode glissant et à entrée inconnue est introduit ([55]). Les principales étapes et hypothèses de synthèse de cet observateur seront rappelées.

Un modèle multi-entrées/multi-sorties pour la partie du modèle de comportement (III.1) est supposé être décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + G(x)v \\ y = h(x) \end{cases} \quad (\text{III.21})$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $G = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & \dots & g_p \end{bmatrix}^T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times p}$  et  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  sont des fonctions régulières sur  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .  $y, v \in \mathbb{R}^p$ . Notez que dans ce cas,  $v$  désigne directement la dégradation.

L'observateur est synthétisé en deux étapes. Premièrement, une transformation de coordonnées est appliquée de sorte à ce que la propriété et la forme canonique d'observabilité soient obtenues par le modèle dans la nouvelle base. Deuxièmement, un observateur à mode glissant est synthétisé dans cette nouvelle base.

Dans cette partie, les hypothèses suivantes (voir [55]) sont considérées.

**(H10)** *Au voisinage de tout point  $x \in \Omega$  où la distribution  $\Gamma = \text{Span} \{g_1, g_2, \dots, g_p\}$  est*

### III.3. Méthodologie du pronostic

---

*involutive*<sup>2</sup>.

**(H11)** Le système décrit par (III.21) est supposé avoir un degré de vecteurs relatifs  $r = (r_1, r_2, \dots, r_p)$ , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} L_{g_j} L_f^k h_i(x) &= 0, \forall j = 1, \dots, p, \forall k < r_i - 1, \forall i = 1, \dots, p \\ L_{g_j} L_f^{r_i-1} h_i(x) &\neq 0, \text{ pour au moins un } j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

**(H12)** La matrice

$$E(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1}(L_f^{r_1-1} h_1) & L_{g_2}(L_f^{r_1-1} h_1) & \dots & L_{g_p}(L_f^{r_1-1} h_1) \\ L_{g_1}(L_f^{r_2-1} h_2) & L_{g_2}(L_f^{r_2-1} h_2) & \dots & L_{g_p}(L_f^{r_2-1} h_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_1}(L_f^{r_p-1} h_p) & L_{g_2}(L_f^{r_p-1} h_p) & \dots & L_{g_p}(L_f^{r_p-1} h_p) \end{bmatrix}$$

est non singulière.

Sous les hypothèses (H10) à (H12), et en supposant que le degré relatif total  $r = \sum_{i=1}^p r_i$  soit strictement inférieur à  $n$ , une transformation de coordonnées appropriées  $\Phi(x)$  dans  $\mathbb{R}^n$  (voir [55]) peut être appliquée. La forme du changement de coordonnées est donnée par :

$$\Phi(x) = \left[ \left\{ \zeta_1^1(x), \dots, \zeta_{r_1}^1(x), \dots, \zeta_1^p(x), \dots, \zeta_{r_p}^p(x), \zeta_{r+1}(x), \dots, \zeta_n(x) \right\} \right] \quad (\text{III.22})$$

Cela conduit à exprimer le système dans la nouvelle base de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{\xi}^i = \Lambda_i \xi^i + \psi^i(\xi, \eta) + \lambda^i(\xi, \eta, v(t)), \forall i = 1, \dots, p \\ \dot{\eta} = \varphi(\xi, \eta) \end{cases} \quad (\text{III.23})$$

où

$$\Lambda_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}^{r_i \times r_i},$$

---

2. La distribution  $\Gamma$  est dite involutive si, et seulement si, pour tout couple de champs de vecteurs  $g_i, g_j$  de  $\Gamma$ , où  $i, j \in \{1, \dots, p\}$  et  $i \neq j$ , on a  $[g_i, g_j] \in \Gamma$

$$\psi^i(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ L_f^{r_i} h_i(\Phi^{-1}(\xi, \eta)) v_j(t) \end{pmatrix},$$

et

$$\lambda^i(\xi, \eta, v(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sum_{j=1}^p L_{g_j} L_f^{r_i-1} h_i(\Phi^{-1}(\xi, \eta)) v_j(t) \end{pmatrix}$$

Étant donné que  $\Gamma$  est involutive, alors il est toujours possible de trouver des fonctions  $\zeta_{r+1}(x), \dots, \zeta_n(x)$ , afin de déduire la fonction  $\varphi(\cdot)$  telle que

$$L_{g_j} \zeta_i(x) = 0, \quad \forall i = r+1, \dots, n \quad \forall j = 1, \dots, p \quad (\text{III.24})$$

dans un voisinage de tout point  $x \in \Omega$ .

Il est supposé dans [55] que toutes les dynamiques internes relatives à la deuxième partie du modèle de (III.23) sont localement asymptotiquement stables. En appliquant le difféomorphisme local inverse  $\Phi^{-1}(\xi, \eta)$ , le système est réécrit dans les coordonnées originelles, soit

$$x = \Phi^{-1}(\xi, \eta) \quad (\text{III.25})$$

Finalement, l'observateur à mode glissant d'ordre supérieur pour le système (III.21), dans les nouvelles coordonnées est décrit par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{\xi}}_1^i = v_0^i \\ v_0^i = -\lambda_0^i \left| \hat{\xi}_1^i - y_i(t) \right|^{\frac{r_i}{r_i+1}} \text{sign}(\hat{\xi}_1^i - y_i(t)) + \hat{\xi}_2^i \\ \dot{\hat{\xi}}_2^i = v_1^i \\ v_1^i = -\lambda_1^i \left| \hat{\xi}_2^i - v_0^i \right|^{\frac{r_i-1}{r_i}} \text{sign}(\hat{\xi}_2^i - v_0^i) + \hat{\xi}_3^i \\ \vdots \\ \dot{\hat{\xi}}_{r_i-1}^i = v_{r_i-1}^i \\ v_{r_i-1}^i = -\lambda_{r_i-1}^i \left| \hat{\xi}_{r_i-1}^i - v_{r_i-2}^i \right|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\hat{\xi}_{r_i-1}^i - v_{r_i-2}^i) + \hat{\xi}_{r_i}^i \\ \dot{\hat{\xi}}_{r_i}^i = -\lambda_{r_i}^i \text{sign}(\hat{\xi}_{r_i}^i - v_{r_i-1}^i), \forall i = 1, \dots, p \end{array} \right.$$

où  $\lambda_0^i, \dots, \lambda_{r_i}^i$  sont les gains de l'observateur et  $r_i$  désigne le vecteur de degré relatif pour la sortie  $y_i$ .

### III.3. Méthodologie du pronostic

---

Puis les estimés exacts de l'état (en cas d'absence de bruit sur la sortie) sont disponibles en temps fini :

$$\begin{cases} \hat{\xi}^i = \begin{pmatrix} \hat{\xi}_1^i \\ \hat{\xi}_2^i \\ \vdots \\ \hat{\xi}_{r_i}^i \end{pmatrix}, \hat{\xi} = \begin{pmatrix} \hat{\xi}^1 \\ \hat{\xi}^2 \\ \vdots \\ \hat{\xi}^p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^r \\ \dot{\hat{\eta}} = \varphi(\hat{\xi}, \hat{\eta}) \end{cases} \quad (\text{III.26})$$

Puis, le difféomorphisme local inverse (III.25) est appliqué, afin d'exprimer l'observateur dans les coordonnées originelles, la forme suivante est ainsi déduite :

$$\hat{x} = \Phi^{-1}(\hat{\xi}, \hat{\eta}) \quad (\text{III.27})$$

Le type de convergence de l'observateur dépend du vecteur de degré relatif  $r$ . Si  $r = \sum_{i=1}^p r_i < n$ , la convergence de l'observateur est réalisée asymptotique. Dans le cas où  $r = n$ , la convergence de l'observateur se traduit par une convergence en temps fini.

Enfin, l'estimé  $\hat{v}(t)$  de  $v(t)$  converge avec le même type de raisonnement pour la convergence que celui introduit pour le vecteur de degré relatif :

$$\hat{v}(t) = E^{-1}(\Phi^{-1}(\hat{\xi}, \hat{\eta})) \left[ \begin{pmatrix} \dot{\hat{\xi}}_{r_1}^1 \\ \dot{\hat{\xi}}_{r_2}^2 \\ \vdots \\ \dot{\hat{\xi}}_{r_p}^p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} L_f^{r_1} h_1(\Phi^{-1}(\hat{\xi}, \hat{\eta})) \\ L_f^{r_2} h_2(\Phi^{-1}(\hat{\xi}, \hat{\eta})) \\ \vdots \\ L_f^{r_p} h_p(\Phi^{-1}(\hat{\xi}, \hat{\eta})) \end{pmatrix} \right] \quad (\text{III.28})$$

#### B. Commentaires sur l'observateur synthétisé

Cet observateur possède, et en vue de l'application au pronostic, une caractéristique intéressante. Plus précisément, l'estimation exacte de l'état est effectuée en temps fini. De plus, il possède une insensibilité au regard de l'effet de l'entrée inconnue. Cependant, le phénomène de "chattering" classique inhérent à la méthodologie du mode glissant est présent, nécessitant le déploiement d'une stratégie de filtrage afin de diminuer l'effet de ce phénomène. Enfin, l'application de cet observateur pour le pronostic nécessite un filtrage pour atténuer les effets de "chattering" ainsi que le calcul d'une dérivée numérique de l'entrée inconnue.

### III.3.2 Technique d'identification

L'objectif de cette sous-section est d'identifier les paramètres inconnus du modèle du système à dynamique lente dont la structure est supposée connue à priori.

Sous l'hypothèse que la dynamique de la dégradation possède une forme polynomiale, il vient que

$$\epsilon g(\hat{x}, \hat{\phi}) = P(\hat{x}, \hat{\phi}). \quad (\text{III.29})$$

Plus précisément, nous avons  $P = (P_1, \dots, P_q)^T$  où  $P_j, j = 1, \dots, q$  sont définis par :

$$P_j(\hat{x}, \hat{\phi}) = \sum_{\substack{p_1, \dots, p_q, j \\ l_1, \dots, l_n}} b_{l_1, \dots, l_n}^{p_1, \dots, p_q, j} \hat{x}_1^{l_1}, \dots, \hat{x}_n^{l_n} \hat{\phi}_1^{p_1}, \dots, \hat{\phi}_q^{p_q} \quad (\text{III.30})$$

$$\sum_{j=1}^q p_j \leq M_{\hat{\phi}}$$

$$\sum_{i=1}^n l_i \leq M_{\hat{x}}$$

où  $b_{l_1, \dots, l_n}^{p_1, \dots, p_q, j} \in \mathbb{R}$  et  $M_{\hat{x}}, M_{\hat{\phi}}$  sont deux entiers représentant les puissances maximales du polynôme relativement à  $\hat{x}$  et  $\hat{\phi}$ .

La détermination des paramètres inconnus  $b_{l_1, \dots, l_n}^{p_1, \dots, p_q, j}$  de la dynamique de dégradation est réalisée à travers la résolution d'un problème d'optimisation par minimisation de l'erreur quadratique, définie par

$$b_{l_1, \dots, l_n}^{p_1, \dots, p_q, j} = \text{Argmin} \left( \dot{\hat{\phi}} - P(\hat{\phi}, \hat{x}) \right)^2 \quad (\text{III.31})$$

Pour calculer le temps de vie restant, on procède comme décrit dans la section II.2.4.5.

### III.3.3 Évaluation des performances

L'évaluation des performances de la méthodologie de pronostic est basée sur cinq critères de précision. Ces critères concernent la précision :

- de l'estimé de l'état de comportement à dynamique rapide  $\hat{x}$  en temps fini par rapport à sa référence.
- de l'estimé de l'état de comportement à dynamique lente  $\hat{\phi}$  en temps fini par rapport à sa référence.
- de l'estimé de la dynamique  $\dot{\hat{\phi}}$  par rapport à sa référence en temps fini.
- des paramètres du modèle de comportement estimé de la dégradation.
- des prédictions du temps de vie restant. Pour évaluer les performances de ces prédictions parmi les quatre métriques développées dans la sous-section I.4.4.5 pouvant être utilisées, la performance  $\alpha - \lambda$  est retenue.

**Remarque 9.** La performance  $\alpha - \lambda$  nécessite d'être simplement définie et calculée par rapport à la notion de contrainte temporelle  $T_p$ , notion introduite dans ce travail pour définir le concept de pronostic.

## III.4 Application à l'oscillateur électromécanique

Cette section est dédiée à l'application de la méthodologie décrite dans la section III.3 sur un oscillateur électromécanique décrit par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\mu x_2 - (1 - \alpha_1)x_1 + u - \alpha_3 x_1^3 - \frac{K(x_1 - \lambda)}{(1 + K(x_1 - \lambda)^2)^2} \psi^2 \\ \dot{\psi} = (1 + K(x_1 - \lambda)^2) \left( \phi - \left[ \frac{2K(\lambda - x_1)x_2}{(1 + K(x_1 - \lambda)^2)^2} + r \right] \psi \right) \\ \dot{\phi} = -\epsilon \psi (1 + \gamma(\phi - \eta)^2) \\ y_1 = x_1 \\ y_2 = \psi \end{array} \right. \quad (\text{III.32})$$

Dans ce chapitre, le cas où  $L(\phi) = -(1 - \alpha_1)$  décrit dans (II.30) est considéré pour illustrer la méthodologie de pronostic. Les deux autres cas de  $L(\phi)$  pourront être déduits par un raisonnement analogue.

La première étape consiste à synthétiser les trois observateurs à entrée inconnue (III.14), (III.20) ou (III.26) et à comparer les résultats d'estimation obtenus. Puis, à partir des estimés et pour chaque observateur, les paramètres de la dynamique de dégradation seront identifiés. Enfin, une prédiction du temps de vie restant pour chaque modèle de comportement est réalisée et les résultats de prédiction seront comparés selon les critères d'évaluation des performances définis précédemment.

### III.4.1 Observateur linéaire

#### III.4.1.1 Synthèse

Sous (H5) et (H6), un observateur linéaire à entrée inconnue est synthétisé comme décrit dans le paragraphe III.3.1.1. Dans le cas présent, la méthodologie est appliquée seulement sur l'état réduit  $(x_1, x_2)$  représentant la partie linéaire du modèle considéré. L'expression de l'entrée inconnue est donnée par :

$$\Delta(x, u, \phi) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha_3 x_1^3 - \frac{K(x_1 - \lambda)}{(1 + K(x_1 - \lambda)^2)^2} \psi^2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.33})$$



Les matrices définies dans (III.5) sont données par :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$D$  est directement obtenue sous la forme recherchée, alors les matrices  $T$  et  $P$  sont par conséquent définies par des matrices identités de dimensions appropriées.

Après avoir réalisé un placement de pôles approprié, les matrices de synthèse de l'observateur (III.14) sont données par :

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } \tilde{K} = \begin{bmatrix} 10.5 & -9.5 \end{bmatrix}.$$

L'estimation de l'entrée inconnue est calculée numériquement à partir de (III.16). L'état estimé  $\hat{\psi}$  est déduit à partir de la résolution du problème inverse à partir de (III.18), comme suit :

$$\hat{\psi} = \left( \left| \frac{(1 + K(\hat{x}_1 - \lambda)^2)^2}{\hat{x}_1 - \lambda} (\alpha_3 \hat{x}_1^3 + \hat{v}_q) \right| \right)^{1/2} \quad (\text{III.34})$$

#### III.4.1.2 Résultats de simulation

La résolution de problème inverse soulève des problèmes de précision en cas de présence de bruit sur la sortie, de perturbation ou d'incertitude. Pour des raisons de simplicité, aucune présence de bruit n'est considérée.

Le choix de la commande  $u(t) = f \cos(\Omega t)$  crée des points de singularité en nombre fini lorsque  $\hat{x}_1(t) - \lambda = 0$ , qui se retrouve dans l'estimé de l'entrée inconnue. Ces points de singularité sont remplacés ainsi que leur voisinage par de nouveaux points calculés par un algorithme d'interpolation.

La convergence de l'observateur en temps fini est fixée par  $\tau = 0.1$ . Les estimations de l'état du système et de l'entrée inconnue convergent en temps fini  $\tau$ , comme décrit dans les Figures III.2, III.3 et III.4. Après résolution du problème inverse, l'estimé de l'état de comportement à dynamique rapide  $\psi$  converge en temps fini  $\tau$  comme illustré dans la Figure III.5. Ensuite, une dérivée numérique  $\dot{\psi}$  est calculée avec un degré de précision élevé. L'expression de l'état de comportement à dynamique lente  $\hat{\phi}$  est déduite à partir de (III.16) et est représentée dans la Figure III.6. Enfin, la dérivée numérique de  $\hat{\phi}$  est calculée et est illustrée dans la Figure III.7. A partir de ces estimés, les paramètres du modèle de comportement à dynamique lente sont identifiés et un pronostic est réalisé (voir III.4.5), pour l'ensemble des estimés au travers des différents observateurs.

### III.4. Application à l'oscillateur électromécanique

---

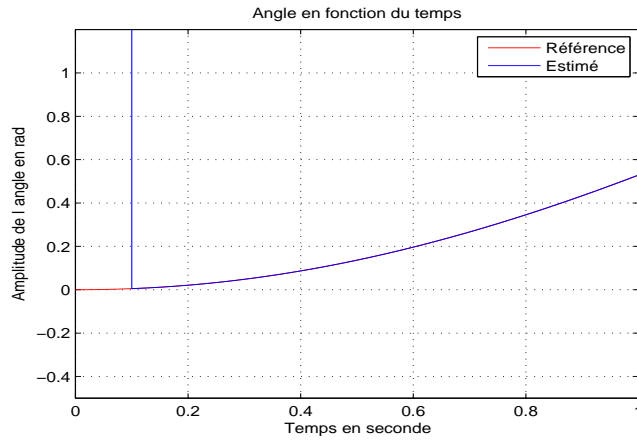


Figure III.2 – Estimé  $\hat{x}_1$  de l'état  $x_1$

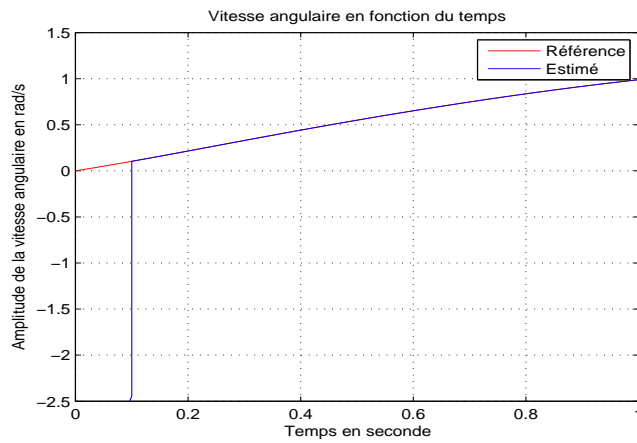


Figure III.3 – Estimé  $\hat{x}_2$  de l'état  $x_2$

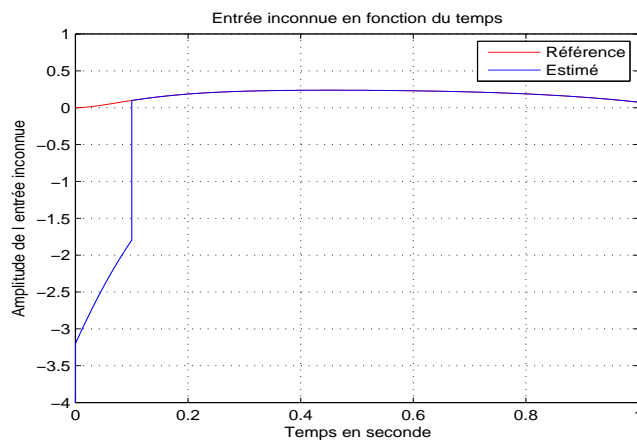


Figure III.4 – Estimé  $\hat{v}$  de l'entrée inconnue  $v$

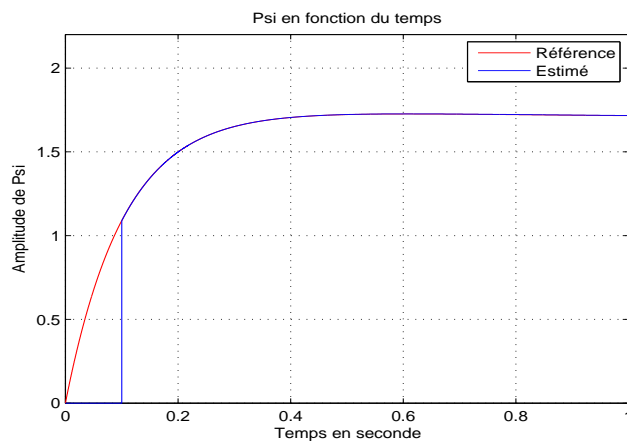


Figure III.5 – Estimé  $\hat{\psi}$  de l'état  $\psi$

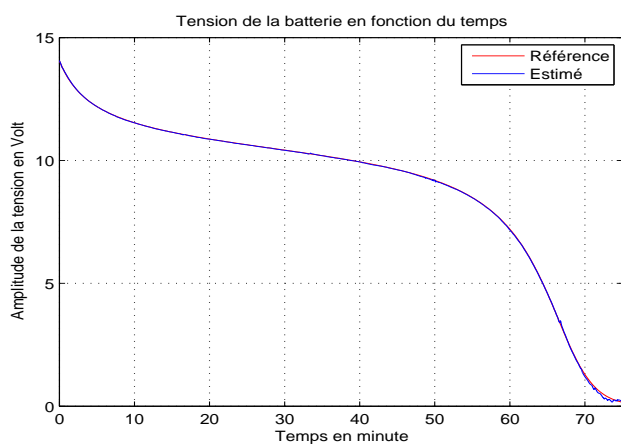


Figure III.6 – Estimé  $\hat{\phi}$  de l'état  $\phi$

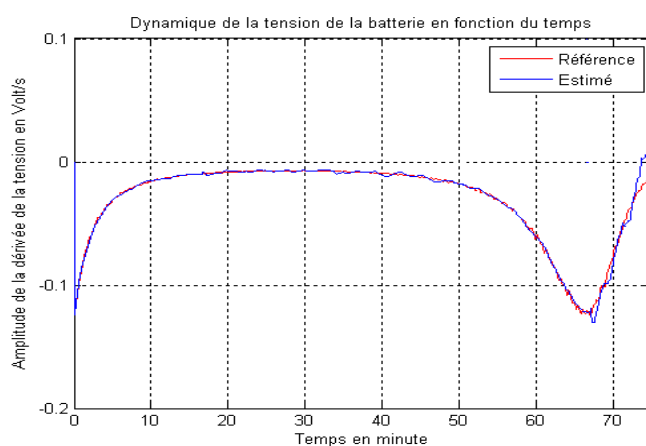


Figure III.7 – Estimé  $\dot{\hat{\phi}}$  de  $\dot{\phi}$

### III.4. Application à l'oscillateur électromécanique

---

#### III.4.2 Observateur à grand gain et à entrée inconnue

##### III.4.2.1 Synthèse

Sous (H7) et (H9), un observateur non linéaire à grand gain à entrée inconnue est synthétisé comme décrit dans III.3.1.2. Les états  $(x_1, \psi)$  sont supposés être mesurés, donc  $p = 2$  et la dimension de la variable de dégradation est égale à  $q = 1$ .

La condition de

$$\begin{aligned} \text{Rang}(G^1) &= \text{Rang} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 + K(x_1 - \lambda)^2 \end{pmatrix} \\ &= 1 \end{aligned}$$

est vérifiée et la matrice  $G$  est définie dans (III.19) par

$$G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 + K(x_1 - \lambda)^2 \end{pmatrix},$$

ce qui induit les partitions suivantes pour (III.19).

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}, x^1 = \begin{pmatrix} \psi \\ x_1 \end{pmatrix}, x^2 = x_2 \quad (\text{III.35})$$

et

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{pmatrix} f^1(x^1, x^2) \\ x_2 \end{pmatrix}, \\ f^1(x^1, x^2) &= \begin{pmatrix} -\mu x_2 - (1 - \alpha_1 x_1 + u - \alpha_3 x_1^3 - \frac{K(x_1 - \lambda)}{(1 + K(x_1 - \lambda)^2)^2} \psi^2) \\ (1 + K(x_1 - \lambda)^2) \left( \phi - \left[ \frac{2K(\lambda - x_1)x_2}{(1 + K(x_1 - \lambda)^2)^2} + r \right] \psi \right) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (\text{III.36})$$

Tout d'abord, on procède à la vérification des hypothèses (H7) à (H9). Un raisonnement simple montre que (H7) à (H8) sont vérifiées, il reste à vérifier (H9).

Nous avons

$$\begin{aligned} \text{Rang} \left( \frac{\partial f^1(x, u)}{\partial x^2} \right) &= \text{Rang} \begin{pmatrix} -\mu \\ -(1 + K(x_1 - \lambda)^2)^2 \end{pmatrix} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (\text{III.37})$$

Maintenant,

$$\begin{aligned} \text{Rang} \left( \frac{\partial f^1(x, u)}{\partial x^2} \quad G^1(u, s) \right) &= \text{Rang} \begin{pmatrix} -\mu & 0 \\ -(1 + K(x_1 - \lambda))^2 & (1 + K(x_1 - \lambda))^2 \end{pmatrix} \\ &= 2 \end{aligned} \quad (\text{III.38})$$

Finalement, l'hypothèse (H9) est bien vérifiée.

Puisque les hypothèses (H7) à (H9) sont vérifiées alors, et en utilisant (III.20), un observateur à grand gain et à entrée inconnue est donné par

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 - 2\tilde{\theta}_1(\hat{x}_1 - y_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = (\alpha_1 - 1)\hat{x}_1 - \mu\hat{x}_2 + u - \frac{K(\hat{x}_1 - \lambda)\hat{\psi}^2}{(1 + K(\hat{x}_1 - \lambda))^2} \\ \quad - \alpha_3\hat{x}_1^3 - \tilde{\theta}_2^2(\hat{x}_1 - y_1) \\ \dot{\hat{\psi}} = (1 + K(\hat{x}_1 - \lambda))^2 \left( \hat{\phi} - \frac{(2K(\lambda - \hat{x}_1)\hat{x}_2)}{(1 + K(\hat{x}_1 - \lambda))^2} + r \right) \hat{\psi} \\ \quad - 2\tilde{\theta}_1(\hat{\psi} - y_2) \\ \dot{\hat{\phi}} = \frac{-\tilde{\theta}_1^2(\hat{\psi} - y_2)}{(1 + K(y_1 - \lambda))^2} \end{array} \right. \quad (\text{III.39})$$

### III.4.2.2 Résultats de simulation

Les valeurs utilisées pour les résultats de simulation sont données dans le Tableau III.1. En cas de présence de bruit sur la sortie, les estimés de l'état de comportement à dynamique

Signal ou paramètre	Valeur associée
Absence de bruit sur la sortie	
$\tilde{\theta}_1$	1000
$\tilde{\theta}_2$	1000
Présence de bruit sur la sortie	
Caractéristique du bruit sur $y_1$	$N(0, 10^{-2})$
Caractéristique du bruit sur $y_2$	$N(0, 10^{-3})$
$\tilde{\theta}_1$	100
$\tilde{\theta}_2$	100

**Tableau III.1** – Valeurs numériques liées à l'observateur à grand gain

rapide sont présentés dans les Figures III.8, III.9, III.10. On constate que ces estimations sont de bonne qualité. Les paramètres donnés dans le Tableau III.1 sont fixés de sorte à obtenir la convergence de l'état approximativement au temps  $\tau$ . La dynamique de l'erreur d'observation décroît ici de manière exponentielle. Après avoir réalisé un traitement numérique de lissage, l'état de comportement à dynamique lente ainsi que sa dynamique sont estimés et présentés dans

## III.4. Application à l'oscillateur électromécanique

les Figures III.11 et III.12. A partir de ces estimés, les paramètres du modèle de comportement

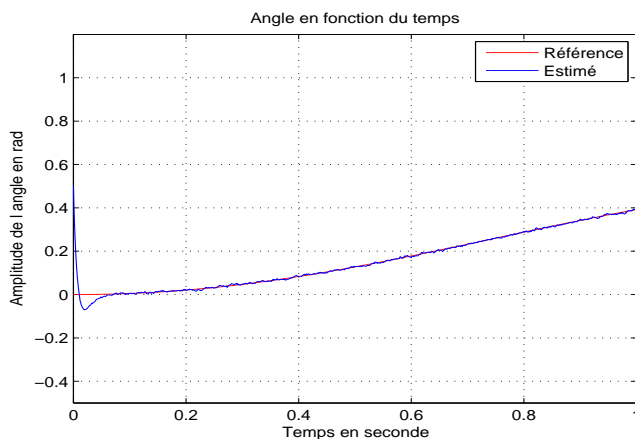


Figure III.8 – Estimé  $\hat{x}_1$  de l'état  $x_1$

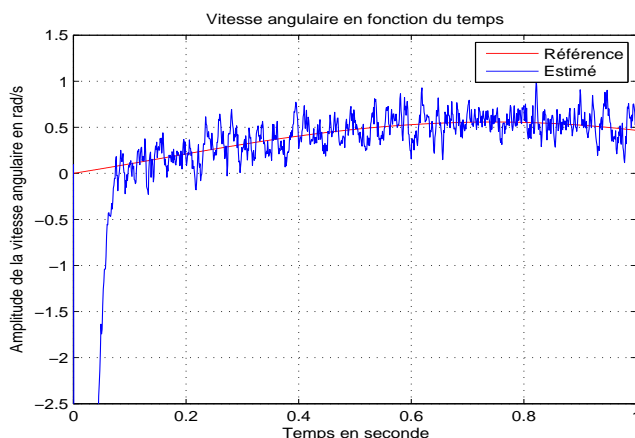


Figure III.9 – Estimé  $\hat{x}_2$  de l'état  $x_2$

à dynamique lente sont ainsi identifiés.

### III.4.3 Observateur à mode glissant

#### III.4.3.1 Synthèse

Dans cette sous-section, le raisonnement de synthèse d'un observateur à mode glissant à entrée inconnue, présenté en III.3.1.3, est suivi. Deux états de comportement à dynamique rapide sont mesurés ; à savoir  $h_1(x) = x_1$  et  $h_2(x) = \psi$ .

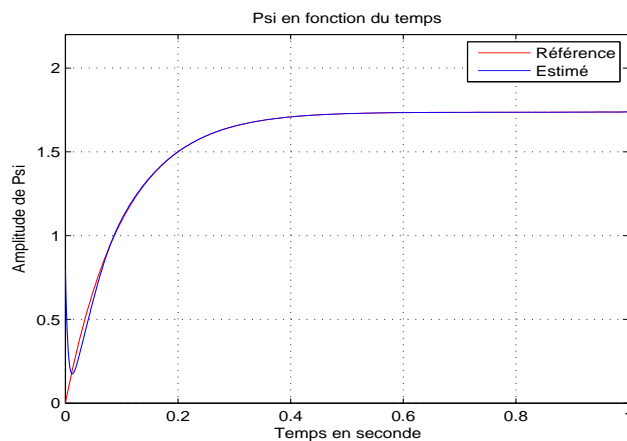


Figure III.10 – Estimé  $\hat{\psi}$  de l'état  $\psi$

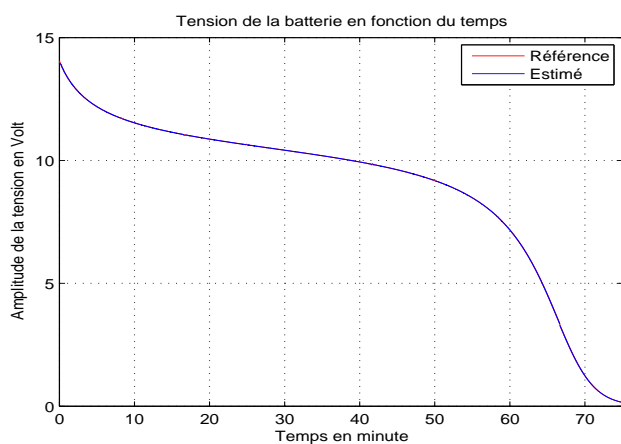


Figure III.11 – Estimé  $\hat{\phi}$  de l'état  $\phi$

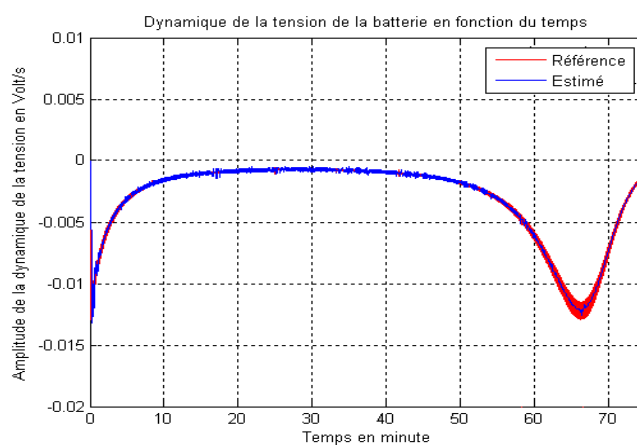


Figure III.12 – Estimé  $\hat{\dot{\phi}}$  de  $\dot{\phi}$

### III.4. Application à l'oscillateur électromécanique

Les degrés relatifs pour chaque sortie sont donnés par

$$\left\{ \begin{array}{l} h_1(x) = x_1 \\ L_g h_1(x) = 0 \\ L_g L_f h_1(x) = 0 \\ L_g L_f^2 h_1(x) \neq 0 \\ h_2(x) = \psi \\ L_g h_2(x) = 0 \\ L_g L_f h_2(x) \neq 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.40})$$

Le degré relatif  $r_1$  associé à la sortie  $h_1(x) = x_1$  est égal à 3. Le degré relatif  $r_2$  associé à la sortie  $h_2(x) = \psi$  est égal à 2.

De plus, les hypothèses (H11) et (H12) sont vérifiées. Sous ces hypothèses, la transformation de coordonnées suivantes existe et est donnée par :

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(x) \\ L_f h_1(x) \\ h_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \psi \end{pmatrix} \quad (\text{III.41})$$

c'est à dire que dans ce cas, il n'y a pas de transformation.

Enfin, l'observateur à mode glissant à entrée inconnue est synthétisé sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}}_1 = v_0^1 \\ v_0^1 = -\lambda_0^1 |\hat{x}_1 - y_1(t)|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(\hat{x}_1 - y_1(t)) + \hat{x}_2 \\ \dot{\hat{x}}_2 = v_1^1 \\ v_1^1 = -\lambda_1^1 |\hat{x}_2 - v_0^1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\hat{x}_2 - v_0^1) + \dot{\hat{x}}_2 \\ \ddot{\hat{x}}_2 = -\lambda_2^1 \text{sign}(\hat{x}_2 - v_1^1) \\ \dot{\hat{\psi}} = v_0^2 \\ v_0^2 = -\lambda_0^2 |\hat{\psi} - y_2(t)|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\hat{\psi} - y_2(t)) + \dot{\hat{\psi}} \\ \ddot{\hat{\psi}} = -\lambda_1^2 \text{sign}(\hat{\psi} - v_0^2) \\ \hat{\phi} = \frac{1}{1 + K(\hat{x}_1 - \lambda)^2} \left( (\dot{\hat{\psi}} + (1 + K(\hat{x}_1 - \lambda)^2) \left( \frac{2K(\lambda - \hat{x}_1)\hat{x}_2}{(1 + K(\hat{x}_1 - \lambda)^2)^2} + r \right) \hat{\psi} \right) \end{array} \right. \quad (\text{III.42})$$

#### III.4.3.2 Résultats de simulation

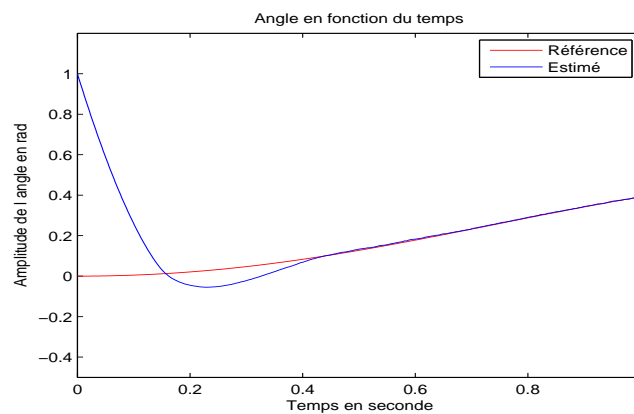
Les valeurs utilisées pour les résultats de simulation sont données dans le Tableau III.2.



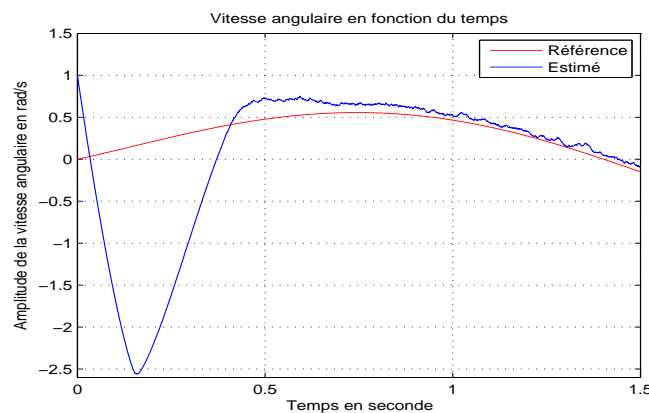
Signal ou paramètre	Valeur associée
Présence de bruit sur la sortie	
$\lambda_0^1$	10
$\lambda_1^1$	10
$\lambda_2^1$	25
$\lambda_0^2$	10
$\lambda_1^2$	25
Caractéristique du bruit sur $y_1$	$N(0, 10^{-2})$
Caractéristique du bruit sur $y_2$	$N(0, 10^{-3})$

**Tableau III.2** – Valeurs numériques liées à l'observateur à mode glissant

En cas de présence de bruit sur la sortie, les estimés de l'état de comportement à dynamique rapide sont présentés dans les Figures III.13, III.14, III.15. Ces estimations sont de bonne qualité. Les paramètres utilisés pour la simulation sont donnés dans le Tableau III.2. Dans le cas de présence de bruit sur les sorties, les estimés de l'état de comportement à dynamique lente et le calcul de sa dérivée numérique sont présentés dans les Figures III.16 et III.17.



**Figure III.13** – Estimé  $\hat{x}_1$  de l'état  $x_1$



**Figure III.14** – Estimé  $\hat{x}_2$  de l'état  $x_2$

### III.4. Application à l'oscillateur électromécanique

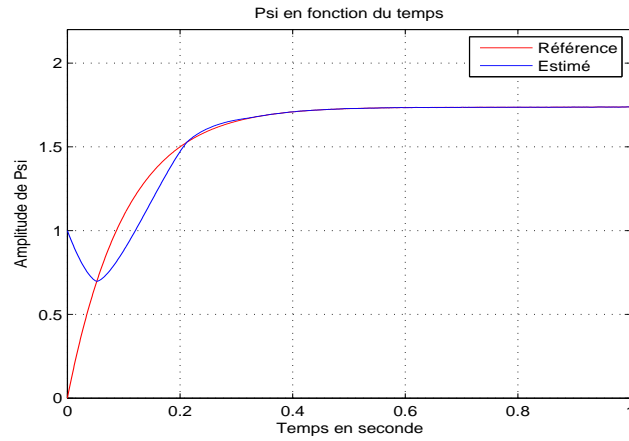


Figure III.15 – Estimé  $\hat{\psi}$  de l'état  $\psi$

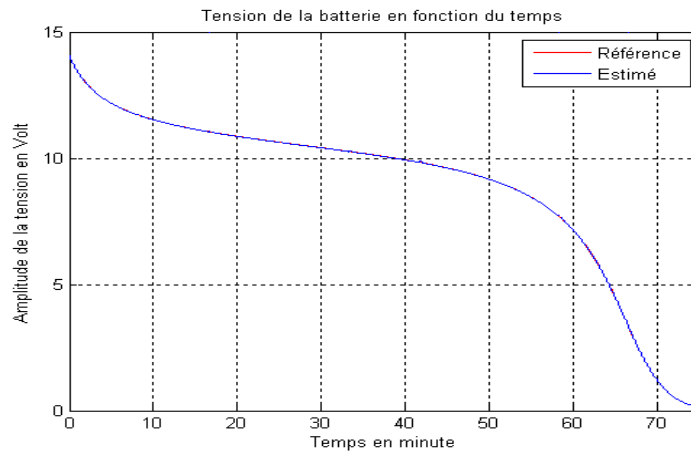


Figure III.16 – Estimé  $\hat{\phi}$  de l'état  $\phi$  après traitement numérique

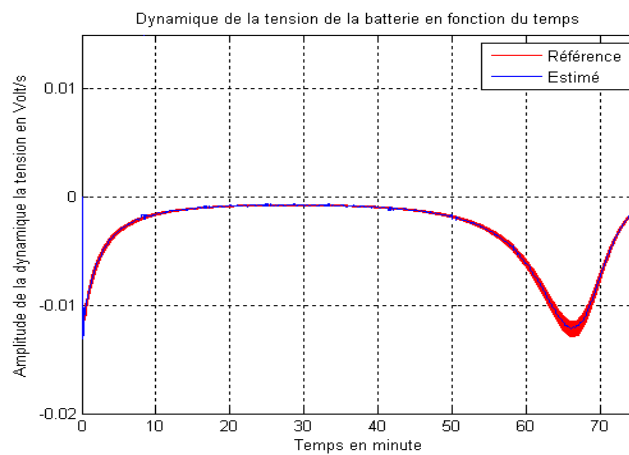


Figure III.17 – Estimé  $\dot{\hat{\phi}}$  de l'état  $\dot{\phi}$  après traitement numérique

### III.4.4 Dérivée numérique : outil et problème

Dans ce travail, et comme généralement en automatique, il est supposé que l'on dispose de certaines mesures. Cependant, dans notre démarche en vue du pronostic, il est nécessaire de connaître les dérivées des mesures. Pour ce faire, et comme on ne dispose pas de la forme analytique des mesures, on procède par une dérivée numérique.

Ce type de calculs peut faire apparaître un certain nombre de problèmes de précision non négligeable sur l'estimé. Ainsi, cette problématique a attiré l'intérêt de certains auteurs [53] et [112]. Ces auteurs ont proposé une méthodologie pour calculer avec précision la dérivée numérique d'un signal bruité. Le dérivateur numérique proposé est basé sur un calcul itératif d'intégrales possédant les propriétés d'un filtre passe-bas, atténuant ainsi l'effet du bruit. Dans le reste de cette sous-section, le dérivateur numérique présenté dans [112] est appliqué dans le cadre de simulation. Plus précisément, cette dérivation numérique est du premier ordre. Dans la suite, on rappelle la forme principale.

Considérons  $y(t)$  un signal supposé être bruité. L'estimation de la dérivée numérique du premier ordre de ce signal est calculée sur une fenêtre temporelle de longueur  $T$ . Il est à noter que son calcul introduit un délai de traitement  $\tau > 0$ . Dans ce qui suit, on note cette estimation par  $\hat{y}(\tau; \kappa, \mu)$ , où  $\kappa, \mu$  représentent des paramètres à ajuster.

Dans ce travail, et afin d'éviter des problèmes de causalité et de proposer une solution en vue d'application temps réel, l'estimation de la dérivée numérique du premier ordre est définie par :

$$\begin{aligned} \hat{y}(\tau; \kappa, \mu) = & ((\kappa + 3) - (\mu + \kappa + 5)\tau_1)\bar{y}(\tau, \kappa, \mu + 1) \\ & + (1 - ((\kappa + 3) - (\mu + \kappa + 5)\tau_1))\bar{y}(\tau, \kappa + 1, \mu) \end{aligned} \quad (\text{III.43})$$

où

$$\bar{y}(\tau; \kappa, \mu) = \frac{\mu + 2}{T} \frac{(\mu + \kappa + 3)!}{(\mu + 2)!(\kappa + 1)!} \int_0^1 p(\tau)\tau^\kappa(1 - \tau)^\mu y(T\tau) d\tau$$

avec

$$p(\tau) = (\mu + \kappa + 2)\tau - (\kappa + 1).$$

En outre, un choix optimal des paramètres  $\tau_1, \kappa, \mu$  peut être obtenu ([112]).

### III.4. Application à l'oscillateur électromécanique

---

#### III.4.5 Estimation des paramètres de la dynamique lente

Le modèle de comportement à dynamique lente est décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\hat{\phi}} = -\hat{\epsilon}\hat{\psi}(1 + \hat{\gamma}(\hat{\phi} - \hat{\eta})^2)$$

En développant, on obtient

$$\dot{\hat{\phi}} = a\hat{\psi}\hat{\phi}^2 + b\hat{\psi}\hat{\phi} + c\hat{\psi} \quad (\text{III.44})$$

avec

$$\begin{cases} a = -\hat{\epsilon}\hat{\gamma} \\ b = 2\hat{\epsilon}\hat{\eta}\hat{\gamma} \\ c = -\hat{\epsilon}(1 + \hat{\eta}^2\hat{\gamma}) \end{cases} \quad (\text{III.45})$$

où  $a, b, c$  sont trois coefficients inconnus à identifier.

Un algorithme des moindres carrés permet d'identifier les coefficients  $a, b, c$  en résolvant le problème de minimisation de l'erreur d'estimation définie par III.3.2.

En discrétisant et en considérant le temps à l'instant  $k$ , on définit la matrice suivante

$$M = \begin{pmatrix} \hat{\psi}(1)\hat{\phi}(1)^2 & \hat{\psi}(1)\hat{\phi}(1) & \hat{\psi}(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{\psi}(k)\hat{\phi}(k)^2 & \hat{\psi}(k)\hat{\phi}(k) & \hat{\psi}(k) \end{pmatrix} \quad (\text{III.46})$$

et en déduisant que

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (M^T M)^{-1} M^T \begin{pmatrix} \dot{\hat{\phi}}(1) \\ \vdots \\ \dot{\hat{\phi}}(k) \end{pmatrix} \quad (\text{III.47})$$

Puis, les paramètres  $\hat{\epsilon}, \hat{\gamma}, \hat{\eta}$  du modèle de comportement à dynamique lente sont déduits à partir des relations suivantes :

$$\begin{cases} \hat{\eta} = \frac{-b}{2a} \\ \hat{\epsilon} = a\hat{\eta}^2 - c \\ \hat{\gamma} = -\frac{c + \hat{\epsilon}}{\hat{\epsilon}\hat{\eta}^2} \end{cases} \quad (\text{III.48})$$

Étant donné que l'état de comportement à dynamique lente est estimé au travers des mesures de la dérive de l'état de comportement à dynamique rapide, il est nécessaire de procéder à un rééchantillonnage des estimés de  $\hat{x}, \hat{\phi}$  et  $\dot{\hat{\phi}}$ , afin d'identifier les paramètres du modèle de comportement à dynamique lente.

En supposant que le ratio des échelles dynamiques  $\epsilon$  ne soit pas connu, à priori, pour estimer le taux auquel il est nécessaire d'échantillonner de nouveau les estimés, une méthode statistique introduite dans [54] peut être appliquée pour résoudre ce problème. Basée sur l'analyse de série temporelle d'un signal, une mesure de corrélation statistique est calculée entre chaque donnée échantillonnée, pour calculer le degré de dépendance des échantillons entre eux. Ainsi, un nouveau taux d'échantillonnage peut ainsi être déterminé afin de ne conserver que des échantillons ayant un degré de dépendance inférieur à un seuil donné.

A présent, les résultats de l'identification des paramètres du système sont présentés pour les deux observateurs non linéaires, sans présence de bruit sur la sortie, pour un horizon de temps d'analyse  $I_p = [0, 15mn]^3$ . Les estimations des paramètres  $\epsilon$ ,  $\eta$ ,  $\gamma$  obtenues avec l'observateur à grand gain sont données dans le Tableau III.3.

Paramètre	Valeur
$\hat{\epsilon}$	$5.5946.10^{-4}$
$\hat{\eta}$	10.5523
$\hat{\gamma}$	0.9901

**Tableau III.3** – Identification des paramètres pour l'observateur à grand gain

Les estimations des paramètres, obtenues avec l'observateur à mode glissant, sont données dans le Tableau III.4. Pour conclure, les paramètres du modèle SNLETM sont estimés sur l'ho-

Paramètre	Valeur
$\hat{\epsilon}$	$5.0559.10^{-4}$
$\hat{\eta}$	10.4775
$\hat{\gamma}$	1.0462

**Tableau III.4** – Identification des paramètres pour l'observateur à mode glissant

rizon de temps d'analyse  $[T_0, T_p]$  qui sera utilisé pour réaliser une prédiction du temps de vie restant sur l'intervalle  $]T_p, +\infty[$ .

#### III.4.6 Prédictions du temps de vie restant

A partir des observations et des estimés obtenus sur l'horizon de temps d'analyse  $[T_0, T_p]$ , une prédiction du temps de vie restant est réalisée sur l'horizon de temps  $]T_p, +\infty[$ . Cette prédiction est réalisée sur la base de la connaissance, à priori, d'un modèle de conditions opérationnelles futures, sur ce dernier horizon. L'objectif est de déterminer le temps d'apparition d'une défaillance  $T_d$  sur le système. Ces prédictions ont été calculées en simulation à partir des estimés des trois types d'observateurs et sont représentées dans les Figures III.18, III.19, III.20.

3. mn désigne minutes

### III.4. Application à l'oscillateur électromécanique

Dans ces figures, différents horizons de temps d'analyse  $I_p$  et leurs influences sur les prédictions ont été représentés.

Dans le reste de ce sous-paragraphe, il est supposé que le seuil de tension critique soit défini à +5V. Lorsque la tension d'alimentation atteint +5V, le système entre dans un état de fonctionnement anormal et une défaillance survient à l'instant  $T_d$ . Le temps de vie restant est calculé sur l'horizon de temps de vie restant  $T_{RUL} = T_d - T_p$  où  $T_p$  est le temps auquel une prédiction est réalisée. Les résultats de pronostic sont présentés dans des tableaux et calculés à partir de cette définition. Les pronostics à base de l'observateur linéaire à entrée inconnue sont présentés dans la Figure III.11, pour différents horizons de temps d'analyse  $I_p$ . Un tableau de synthèse du pronostic obtenu est donné III.5, pour l'horizon de temps d'analyse  $I_p = [0, 25mn]$ . Les pronostics obtenus relativement lors de l'utilisation des autres observateurs sont présentés dans les Figures III.19 et III.20. Un tableau récapitulatif des résultats de prédiction est présenté respectivement dans les Tableaux III.6 et III.7 pour  $I_p = [0, 15mn]$ .

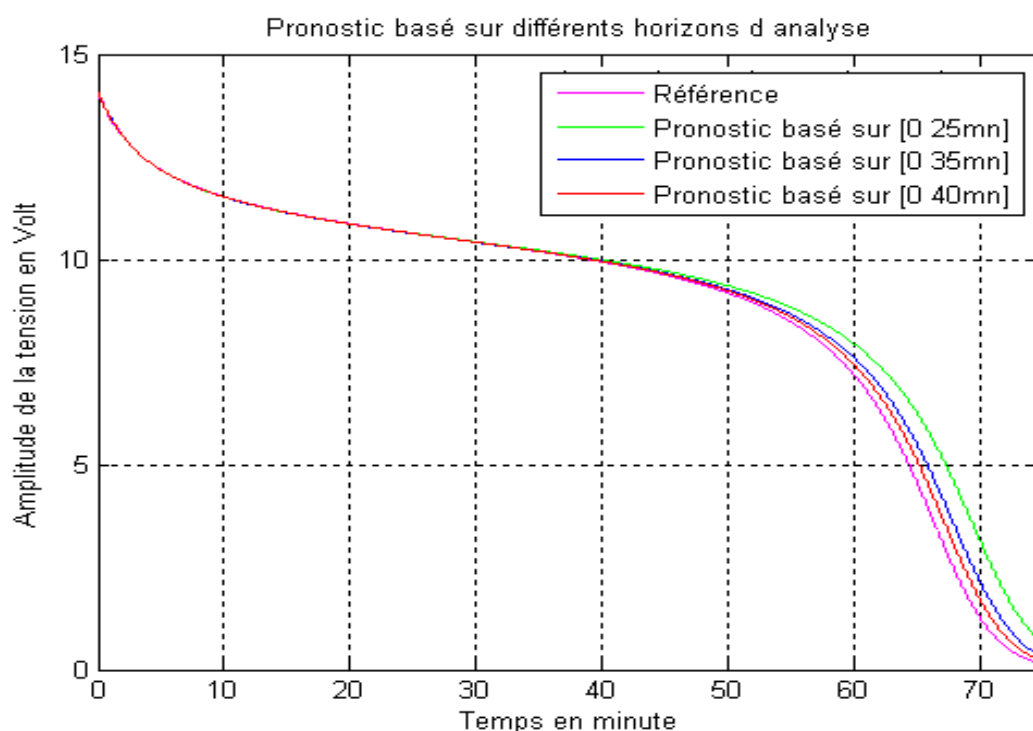


Figure III.18 – Pronostic à base de l'observateur linéaire à entrée inconnue

En règle générale, l'augmentation de l'étendue de l'horizon de temps d'analyse améliore l'identification des paramètres du modèle de comportement à dynamique lente, et la performance des pronostics obtenus. Les pronostics réalisés à partir de l'observateur linéaire à entrée inconnue sont moins performants que ceux fournis par les pronostics basés sur les observateurs

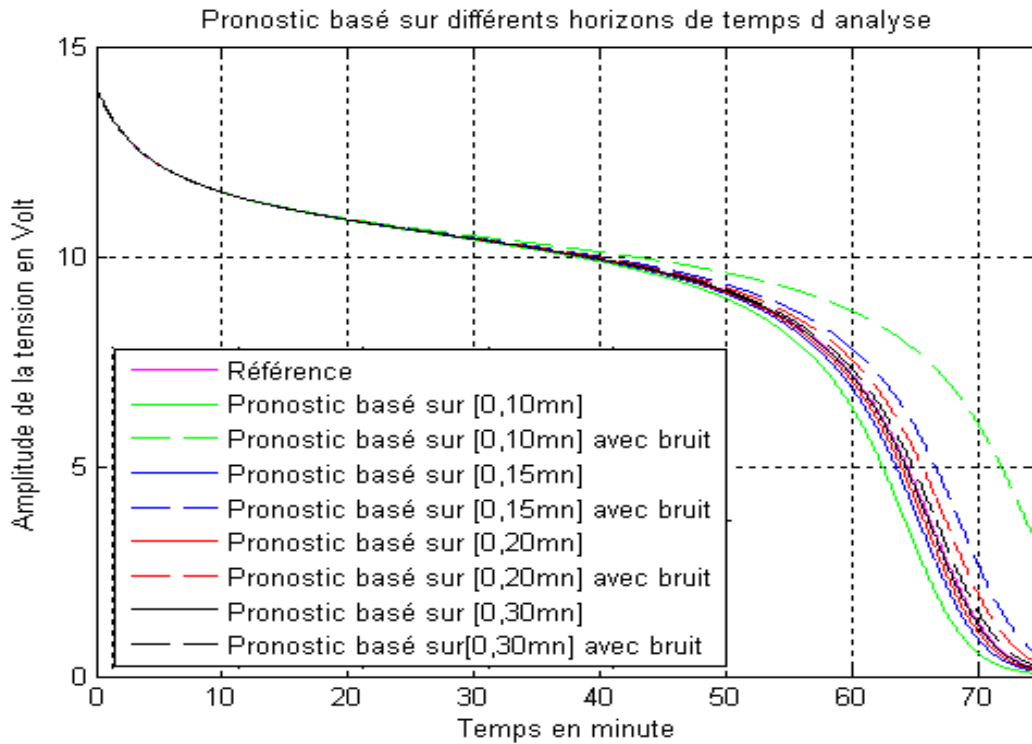


Figure III.19 – Pronostic à base de l'observateur à grand gain à entrée inconnue

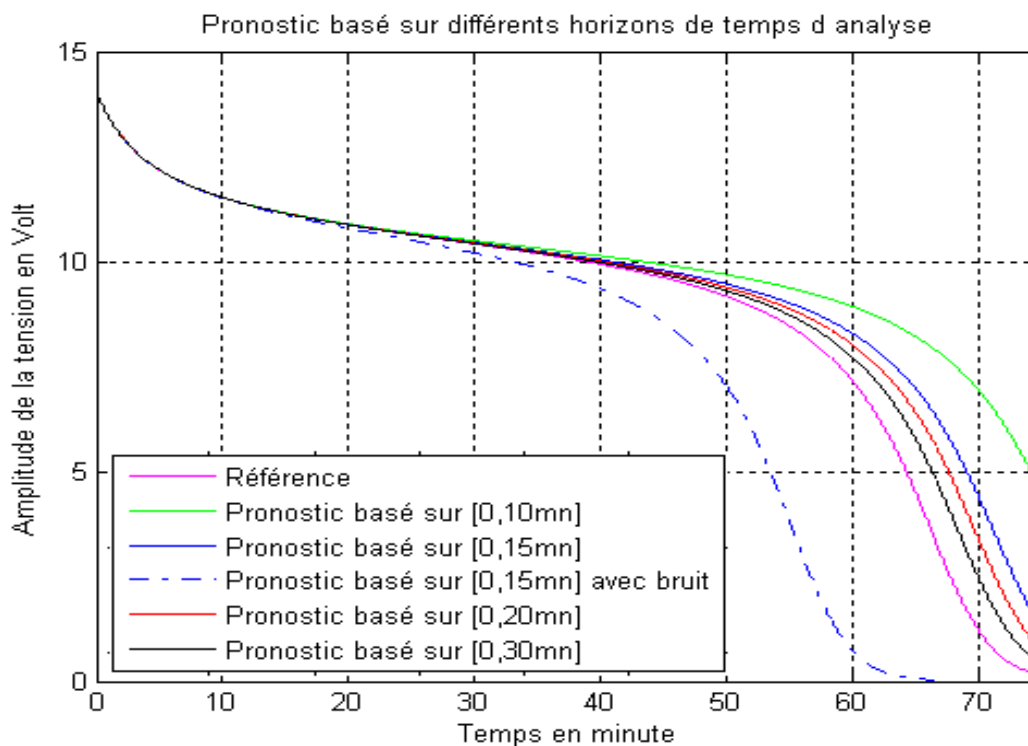


Figure III.20 – Pronostic à base de l'observateur à mode glissant à entrée inconnue

### III.4. Application à l'oscillateur électromécanique

Absence de bruit sur la sortie		
$T_{RUL}$ de référence	$T_{RUL}$ estimé	% Erreur relative
64.2-25=39.2	67.5-25=42.5	8.4

**Tableau III.5** – Résumé des prédictions du temps de vie restant  $I_p = [0, 25mn]$

Absence de bruit sur la sortie		
$T_{RUL}$ de référence	$T_{RUL}$ estimé	% Erreur relative
64.2-15=49.2	63.4-15=48.4	1.6
Présence de bruit sur la sortie		
$T_{RUL}$ de référence	$T_{RUL}$ estimé	% Erreur relative
64.2-15=49.2	66.5-15=51.5	4.7

**Tableau III.6** – Résumé des prédictions du temps de vie restant pour  $I_p = [0, 15mn]$

Absence de bruit sur la sortie		
$T_{RUL}$ de référence	$T_{RUL}$ estimé	% Erreur relative
64.2-15=49.2	69-15=54	10
Présence de bruit sur la sortie		
$T_{RUL}$ de référence	$T_{RUL}$ estimé	% Erreur relative
64.2-15=49.2	53.5-15=38.5	21

**Tableau III.7** – Résumé des prédictions du temps de vie restant pour  $I_p = [0, 15mn]$

non linéaires à entrée inconnue, au regard de la précision des prédictions réalisées.

Par rapport aux résultats présentés dans les Tableaux III.6 et III.7, pour chaque observateur, la meilleure performance du pronostic a été obtenue à horizon de temps d'analyse équivalent, au travers des estimés issus de l'observateur à grand gain à entrée inconnue. En effet, la précision des prédictions réalisées par rapport à l'horizon de temps d'analyse est plus élevée. La prédiction du temps de vie sur l'application considérée permet d'anticiper l'apparition d'une défaillance sur un horizon de temps de 48.2 minutes. Ces performances de pronostic sont liées au fait, que le calcul d'une dérivée numérique pour estimer la dynamique de l'état à comportement à dynamique lente  $\hat{\phi}$ , n'est pas requise avec l'utilisation de l'observateur à grand gain et à entrée inconnue, comme explicité dans III.3.1.2. Les pronostics réalisés à partir des estimés de l'observateur à mode glissant sont moins performants, car le phénomène de "chattering" décrit dans III.3.1.3, notamment en présence de bruit, diminue la qualité de l'estimation de la dynamique de la dégradation  $\hat{\phi}$ . Ce qui a pour conséquence, de diminuer ainsi la précision de l'identification des paramètres du modèle de dégradation.



### III.5 Vecteur de dégradation d'ordre supérieur

Le but de cette section est de discuter sur l'application de la méthodologie de pronostic, dans le cas où la dimension du vecteur de dégradation est supérieure à 1. Ici, l'exemple de l'oscillateur électromécanique alimenté par deux batteries est considéré :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\mu x_2 - (1 - \alpha_1)x_1 + u - \alpha_3 x_1^3 - \frac{K(x_1 - \lambda_1)}{(1 + K(x_1 - \lambda_1)^2)^2} \psi_1^2 \\ \quad - \frac{K(x_1 + \lambda_2)}{(1 + K(x_1 + \lambda_2)^2)^2} \psi_2^2 \\ \dot{\psi}_1 = (1 + K(x_1 - \lambda_1)^2) \left( \phi_1 - \left( \frac{2K(\lambda_1 - x_1)x_2}{(1 + K(x_1 - \lambda_1)^2)^2} + r \right) \psi_1 \right) \\ \dot{\psi}_2 = (1 + K(x_1 + \lambda_2)^2) \left( \phi_2 - \left( \frac{2K(-\lambda_2 - x_1)x_2}{(1 + K(x_1 + \lambda_2)^2)^2} + r \right) \psi_2 \right) \\ \dot{\phi}_1 = -\epsilon_1 \psi_1 (1 + \gamma_1 (\phi_1 - \eta_1)^2) \\ \dot{\phi}_2 = -\epsilon_2 \psi_2 (1 + \gamma_2 (\phi_2 - \eta_2)^2) \\ y = [x_1 \ \psi_1 \ \psi_2]^T \end{array} \right. \quad (\text{III.49})$$

L'application de la méthodologie ne sera réalisée qu'en synthétisant un observateur à grand gain à entrée inconnue, ayant fourni les meilleures performances (cf. III.4.6).

#### III.5.1 Synthèse de l'observateur

Sous (H7) à (H9), un observateur à grand gain à entrée inconnue est synthétisé sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 - 2\tilde{\theta}_2(\hat{x}_1 - y_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = (\alpha_1 - 1)\hat{x}_1 - \mu\hat{x}_2 + u - \frac{K(\hat{x}_1 - \lambda)\hat{\psi}_1^2}{(1 + K(\hat{x}_1 - \lambda)^2)^2} \\ \quad - \frac{K(\hat{x}_1 + \lambda)\hat{\psi}_2^2}{(1 + K(\hat{x}_1 + \lambda)^2)^2} - \alpha_3\hat{x}_1^3 - \tilde{\theta}_2^2(\hat{x}_1 - y_1) \\ \dot{\hat{\psi}}_1 = (1 + K(\hat{x}_1 - \lambda)^2) \left( \hat{\phi}_1 - \frac{(2K(\lambda - \hat{x}_1)\hat{x}_2)}{(1 + K(\hat{x}_1 - \lambda)^2)^2} + r \right) \hat{\psi}_1 - 2\tilde{\theta}_1(\hat{\psi}_1 - y_2) \\ \dot{\hat{\psi}}_2 = (1 + K(\hat{x}_1 + \lambda)^2) \left( \hat{\phi}_2 - \frac{(2K(-\lambda - \hat{x}_1)\hat{x}_2)}{(1 + K(\hat{x}_1 + \lambda)^2)^2} + r \right) \hat{\psi}_2 - 2\tilde{\theta}_1(\hat{\psi}_2 - y_3) \\ \dot{\hat{\phi}}_1 = \frac{-\tilde{\theta}_1^2(1 + K(y_1 - \lambda)^2)(\hat{\psi}_1 - y_2)}{(1 + Ky_1^2 - 2Ky_1\lambda + K\lambda^2)^2} \\ \dot{\hat{\phi}}_2 = \frac{-\tilde{\theta}_1^2(1 + K(y_1 + \lambda)^2)(\hat{\psi}_2 - y_3)}{(1 + Ky_1^2 + 2Ky_1\lambda + K\lambda^2)^2} \end{array} \right. \quad (\text{III.50})$$

### III.5. Vecteur de dégradation d'ordre supérieur

#### III.5.2 Prédictions obtenues du temps de vie restant

Par un raisonnement analogue à la méthodologie de pronostic présentée précédemment, l'observateur fournit des estimés nécessaires aux prédictions du temps de vie restant. Puis, ces dernières sont évaluées et sont représentées sur les Figures III.21 et III.22. A partir de ces

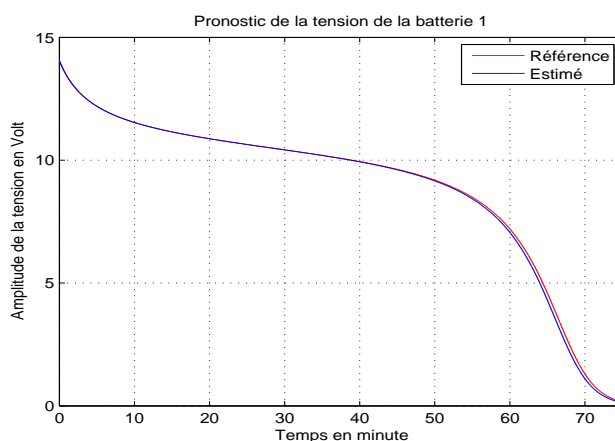


Figure III.21 – Estimation de la tension de la batterie 1

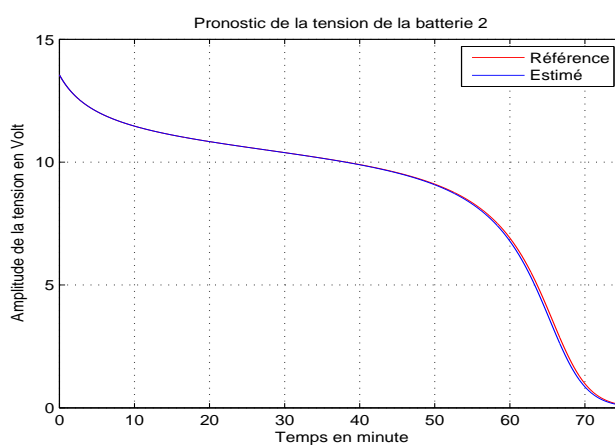


Figure III.22 – Estimation de la tension de la batterie 2

estimés, l'état  $\phi_2$  atteint en premier le niveau de tension d'alimentation critique. Le résultat du pronostic pour ce cas est donné dans le Tableau III.8. Finalement, la méthodologie de pronostic

$T_{RUL}$ de référence	$T_{RUL}$ estimé	% Erreur relative
63.6-15=48.6	63.3-15=48.3	0.6

Tableau III.8 – Résumé des prédictions du temps de vie restant pour  $I_p = [0, 15mn]$

proposée s'applique pour les cas où la dimension du vecteur de dégradation est supérieure à 1.

### III.5.3 Remarque

La prédiction du temps de vie restant d'un système est réalisée par des simulations numériques. Cela implique des masses de données à traiter et des temps de traitement élevés. La masse de données peut être réduite en utilisant des approches statiques d'analyse de série temporelle, comme par exemple [54]. Le pronostic nécessiterait le développement d'algorithmes d'analyse de séries temporelles, destiné à optimiser la capacité de stockage d'information et le temps de traitement nécessaire pour estimer le temps de vie restant.

## III.6 Conclusion

Ce chapitre a permis d'introduire une méthodologie de pronostic à base d'observateurs à entrée inconnue. Pour ce faire, trois types d'observateurs à entrée inconnue ont été synthétisés. Les estimés de ces observateurs ont été utilisés pour l'estimation des paramètres de la dynamique de dégradation. Puis, des prédictions du temps de vie restant ont été réalisées en comparaison des résultats obtenus sur la simulation d'un modèle d'oscillateur électromécanique. Les prédictions les plus performantes ont été obtenues au travers de l'observateur non linéaire à grand gain et à entrée inconnue. En effet, un calcul de dérivée numérique n'étant pas nécessaire pour l'estimation de l'entrée inconnue, a permis d'améliorer les prédictions du temps de vie restant.

## CHAPITRE IV

---

# Pronostic par utilisation de modèles incertains

---

*"La connaissance progresse en intégrant en elle l'incertitude, non en l'exorcisant."  
Edgar Morin*

<b>IV.1 Introduction</b> . . . . .	<b>104</b>
<b>IV.2 Description de la méthodologie</b> . . . . .	<b>105</b>
IV.2.1 Résumé de l'approche . . . . .	105
IV.2.2 Synthèse d'observateur . . . . .	107
IV.2.3 Encadrement de l'entrée inconnue . . . . .	115
IV.2.4 Estimation du temps de vie restant . . . . .	118
IV.2.5 Critères de performances de la méthodologie de pronostic . . . . .	120
<b>IV.3 Application à l'oscillateur électromécanique</b> . . . . .	<b>121</b>
IV.3.1 L'observateur par intervalle . . . . .	122
IV.3.2 Estimation des paramètres . . . . .	129
IV.3.3 Prédications du temps de vie restant . . . . .	130
<b>IV.4 Conclusion</b> . . . . .	<b>131</b>

## IV.1 Introduction

Ce chapitre est dédié au pronostic, à base de modèles, en tenant compte des incertitudes de modélisation et des perturbations inhérentes à la réalité. L'intérêt de la prise en compte des incertitudes et des perturbations concerne l'amélioration des performances du pronostic. Plus précisément, l'objectif de ce chapitre est de proposer une stratégie de pronostic, par utilisation de systèmes non linéaires incertains à échelle de temps multiple (SNLIETM) :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, \phi, u, p) \\ \dot{\phi} = \epsilon g(\phi, x, \theta) \\ y = Cx + \omega \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  désigne l'état du système, une variable supposée à dynamique rapide.  $\phi \in \mathbb{R}^q$  est une variable à dynamique lente caractérisant la dégradation.  $u \in \mathbb{R}^m$  désigne la commande et  $y \in \mathbb{R}^r$  décrit la sortie du système.  $p$  est le vecteur des paramètres incertains.  $\theta$  désigne les paramètres de  $g$ .  $\epsilon$  représente le ratio des échelles entre les dynamiques rapide et lente avec  $0 < \epsilon \ll 1$ .  $C$  désigne la matrice d'observation.  $\omega$  est une perturbation.  $f, g$  sont des fonctions régulières de bonne dimension.

Pour ce faire, l'analyse sera fondée sur la synthèse d'observateurs par intervalle (voir par exemple [70]). Pour illustrer la pertinence de cette méthodologie de pronostic, des résultats de simulation seront présentés.

Cette nouvelle stratégie de pronostic est établie sous l'hypothèse que les incertitudes et les perturbations sont bornées. Le but de ce travail est d'estimer des bornes supérieure et inférieure de la partie de l'état non mesurée et de l'entrée inconnue, représentant dans cette analyse la dégradation. Ainsi, deux modèles de la borne supérieure et inférieure de l'état de dégradation sont estimés par intervalle. Finalement, les prédictions du temps de vie restant sont calculées en exploitant le modèle SNLIETM identifié par intervalle et en utilisant une méthode de calculs d'espace atteignable.

Dans la littérature, des méthodologies de synthèse d'observateurs par intervalle ont été développées pour les systèmes incertains (voir par exemple [123] et [124]). Des observateurs par intervalle ont été conçus pour les systèmes possédant la propriété de monotonie et sont synthétisés pour les modèles de systèmes biologiques ([14] et [124]). Finalement, la synthèse d'observateurs par intervalle peut être fondée sur des estimations d'ensemble ellipsoïdal ([94]), sur des estimations d'ensemble parallélotopiques ([62] et [142]), sur l'analyse par intervalle ([82] et [83]), ou encore par construction de deux observateurs pour chacune des bornes supérieure et inférieure de l'état à estimer ([123] et [144]).

## IV.2. Description de la méthodologie

---

D'une façon générale, les observateurs par intervalle sont conçus avec les propriétés conjointes de stabilité et de coopérativité [152]. L'objectif est de fournir des enveloppes du comportement de l'état non mesuré. Ces enveloppes sont déterminées à partir de la connaissance à priori des bornes de la condition initiale, des incertitudes de modélisation et des perturbations du système. La principale limite de la synthèse d'observateurs par intervalle est l'obtention des propriétés conjointes de stabilité et de coopérativité. Des travaux récents (voir par exemple [110], [111]) proposent des résultats sur la détermination d'un changement de coordonnées dépendant du temps, pour assurer ces deux propriétés.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. Le premier paragraphe introduit la méthodologie de pronostic pour les SNLIETM. Dans un second paragraphe, l'estimation des paramètres de la dynamique de dégradation est réalisée. Puis, le temps de vie restant est estimé par intervalle. Pour cela, le calcul d'espace atteignable est utilisé. Enfin, un dernier paragraphe illustre la pertinence des résultats obtenus, à travers des simulations sur un modèle décrivant le comportement d'un oscillateur électromécanique.

## IV.2 Description de la méthodologie

### IV.2.1 Résumé de l'approche

La méthodologie de pronostic proposée se décline en trois étapes. Premièrement, un observateur à entrée inconnue par intervalle est conçu, afin de fournir des enveloppes du comportement de l'état et de l'entrée inconnue. La reconstruction de la partie inconnue par intervalle permet d'obtenir les bornes de la trajectoire de l'état de comportement à dynamique lente. Puis, à partir de ces estimés, deux modèles traduisant le comportement séparément des bornes supérieure et inférieure de l'état de comportement à dynamique lente sont construits. Il est à noter que les paramètres de ces modèles sont estimés par intervalle. Finalement, les prédictions du temps de vie restant sont estimées par intervalle et en utilisant une méthode de calculs d'espace atteignable. Les étapes de la méthodologie proposée sont résumées dans la figure IV.1.

La démarche consiste à combiner la synthèse d'observateur et l'estimation des espaces accessibles. L'estimation de l'espace accessible est réalisée en temps fini. Il s'agit de déterminer l'instant où la trajectoire atteint l'ensemble des états à fonctionnement normal. Il est à noter que cet ensemble est défini à partir du comportement de la variable de dynamique lente. Dans cette démarche, l'espace accessible est calculé uniquement pour la partie non estimée. Le but est d'optimiser l'estimation de l'espace accessible qui, de par les calculs effectués par

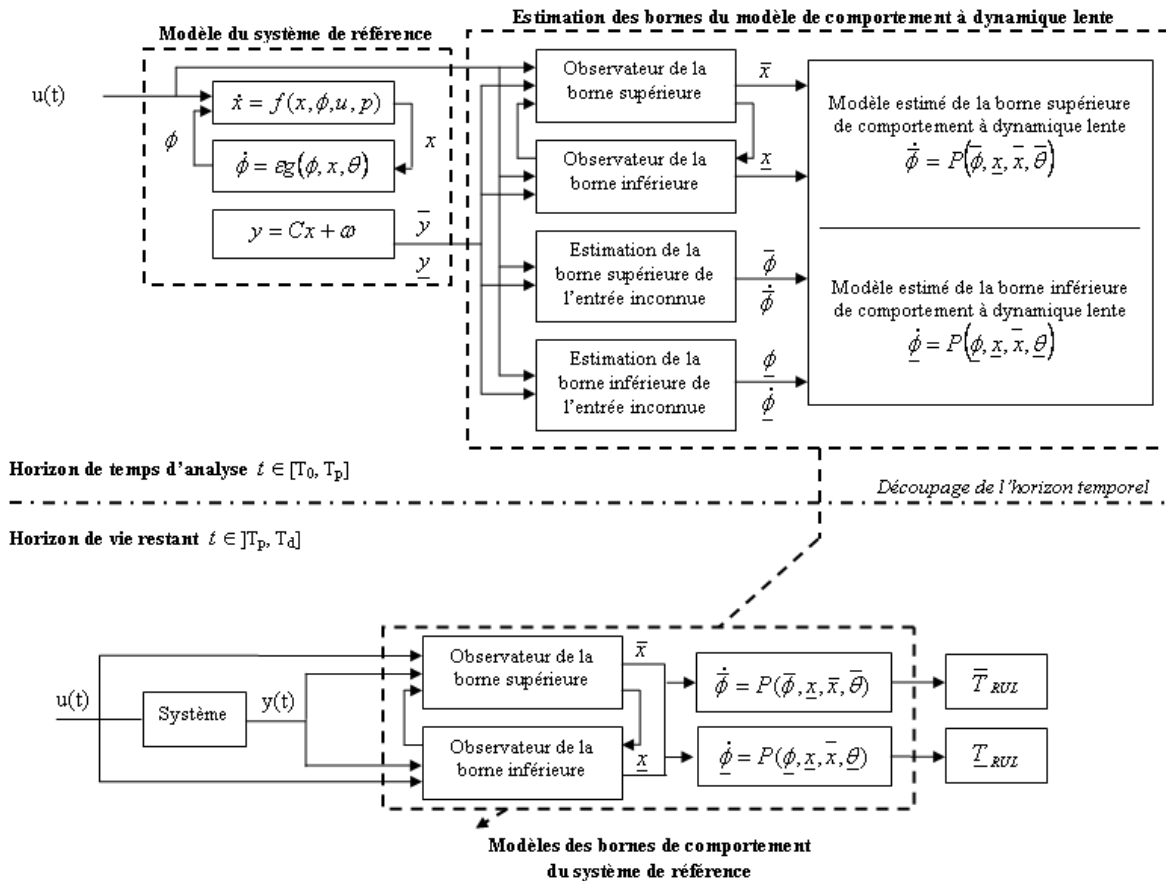


Figure IV.1 – Description de la stratégie de pronostic

des algorithmes d'accessibilité, peut rapidement saturer. Il convient de préciser, et à cause des algorithmes d'estimations numériques des espaces accessibles, que la démarche peut conduire à des prédictions pessimistes, dans le sens où l'estimation du RUL est forcément inférieure à sa valeur réelle.

L'objectif de la synthèse d'observateurs est de construire des enveloppes des bornes supérieure et inférieure du comportement de l'état et de l'entrée inconnue. Cette démarche est rendue possible par l'application du théorème de Müller (voir [110], [119]). En effet, ce théorème permet la synthèse d'un observateur par intervalle pour un système monotone de dimension  $n$ , en immergeant ce système dans un système de dimension  $2n$ , possédant la propriété de coopérativité (voir aussi [121]). Dans ce travail, deux modèles de comportement de l'état à dynamique lente sont estimés. L'objectif final est d'estimer les bornes de l'espace d'état atteignable de dégradation en temps fini, et de déduire ainsi l'intervalle du temps de vie restant.

## IV.2. Description de la méthodologie

---

### IV.2.2 Synthèse d'observateur

Cette sous-section a pour objectif de détailler la synthèse d'un observateur à entrée inconnue par intervalle.

#### IV.2.2.1 Lemme technique

Dans le reste de ce chapitre, le résultat suivant sera utilisé.

**Lemme 1** *Considérons le système non autonome défini sur  $\mathbb{R}^n$  par*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(t) \quad (\text{IV.2})$$

où  $A$  est coopérative<sup>1</sup> et  $B(t) > 0$ . Nous avons la propriété de coopérativité suivante : si  $x(0) \geq 0$  alors  $x(t) \geq 0, \forall t > 0$ .

#### IV.2.2.2 Positionnement du problème

Dans le sous-paragraphe précédent, la démarche en vue du pronostic est discutée et se compose de trois étapes. Dans la première étape, il s'agit de déduire un encadrement de l'état. Pour ce faire, on considère le système non linéaire suivant

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + \psi(x, u, p, v) \\ y &= Cx + \omega \end{cases} \quad (\text{IV.3})$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u \in \mathbb{R}^m$  désigne le vecteur d'entrée,  $y \in \mathbb{R}^r$  représente le vecteur de sortie,  $\omega$  est la perturbation supposée vérifiée, pour tout  $t$ ,  $\omega \in [-b_1, b_1]$ ,  $\dot{\omega} \in [-b_2, b_2]$  où  $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^r$  sont des vecteurs constants positifs connus.  $v \in \mathbb{R}^q$  désigne le vecteur des entrées inconnues,  $p \in [\underline{p}, \bar{p}]$  est le vecteur des paramètres incertains où  $\underline{p}$  et  $\bar{p}$  sont des vecteurs constants de  $\mathbb{R}^k$ .  $A \in \mathbb{M}_{n \times n}$  et  $C \in \mathbb{M}_{r \times n}^+$ .

Concernant l'application au pronostic, l'entrée inconnue  $v$  désigne directement la dégradation.

Il est à noter, de par la présence de perturbations et de paramètres incertains, qu'il paraît très difficile, voire impossible, de reconstituer l'état du système (IV.3). On cherche alors à définir un encadrement.

Un des objectifs principaux de ce travail est d'estimer les bornes inférieure et supérieure de

1. Une matrice carrée  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{n \times m}$  est dite être coopérative si  $a_{ij} \geq 0, \forall i \neq j$ .



l'état dans (IV.3). Plus précisément, étant donné  $\rho_x > 0$  et un compact  $\mathcal{K}$ , le but est de concevoir un encadrement défini par  $\underline{x}^*, \bar{x}^* : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  c'est-à-dire que  $x(t) \in [\underline{x}^*, \bar{x}^*]$  pour tout  $x(0) \in \mathcal{K}$  et d'assurer la propriété  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{x}^*(t) - \underline{x}^*(t)| \leq \rho_x$ . Notez que dans le cas où le modèle est sans perturbation et sans paramètres incertains,  $\rho_x$  est égale à 0.

Pour ce faire, un observateur par intervalle à entrée inconnue, similaire à celui dans [39], est synthétisé. En fait, dans ce travail, on propose une adaptation du résultat, établie originellement pour les systèmes linéaires [39], pour la classe de systèmes non linéaires décrit par (IV.3). En outre, et en se basant sur les résultats de [123], la synthèse d'observateur s'effectuera en présence d'une entrée inconnue. Il s'agit de déduire des bornes inférieure et supérieure pour l'entrée inconnue présente dans (IV.3). Plus précisément, le but est d'estimer  $\underline{v}, \bar{v} \in \mathbb{R}^q$  tel que  $v \in [\underline{v}, \bar{v}]$  et où  $|\bar{v} - \underline{v}|$  soit bornée. Il est à noter que, dans les modèles considérés en vue du pronostic, l'entrée inconnue représente l'état de dégradation. Ainsi, l'estimé de l'entrée inconnue par intervalle peut être exploité afin de prédire le temps de vie restant d'un système.

Dans ce qui suit, on utilisera les notations suivantes :

$$\begin{cases} \underline{y} &= y - b_1 \\ \bar{y} &= y + b_1 \\ \underline{\dot{y}} &= \dot{y} - b_2 \\ \bar{\dot{y}} &= \dot{y} + b_2 \end{cases} \quad (\text{IV.4})$$

et on pose

$$Y = \begin{bmatrix} \bar{y} \\ \underline{y} \end{bmatrix} \text{ et } \dot{Y} = \begin{bmatrix} \bar{\dot{y}} \\ \underline{\dot{y}} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.5})$$

Tout au long de ce chapitre, on considère les hypothèses suivantes :

**(H13)**<sup>2</sup>.

- $\psi(x, u, p, v) = \psi_1(x, u, p) + W\psi_2(x, u, p, v)$
  - $\text{Rang}(CW) = \text{Rang}(W)$
  - $\|C\psi\|$  est coercive par rapport à  $v$
- (IV.6)

où  $\psi_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times [\underline{p}, \bar{p}] \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $\psi_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times [\underline{p}, \bar{p}] \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^d$  sont deux champs de vecteurs réguliers et où  $\psi_1$  est connu explicitement et est lipschitzien en  $x$ .  $W \in \mathbb{M}_{n \times d}$  est supposée être de rang plein colonne.

**(H14)** Il existe une matrice  $D \in \mathbb{M}_{n \times r}$  telle que  $I_n + CD$  est non singulière et la paire

---

2. Une fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est dite coercive si  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

## IV.2. Description de la méthodologie

---

$(PA, C)$  vérifie la condition de Kalman<sup>3</sup> où  $P = (I_n - FC)$  avec

$$F = W(CW)^\dagger + D(I_r - CW(CW)^\dagger). \quad (\text{IV.7})$$

On définit  $\bar{\psi}_1$  et  $\underline{\psi}_1$  par :

$$\begin{cases} \bar{\psi}_1(x, u) = \text{Sup}_{p \in [\underline{p}, \bar{p}]} (\psi_1(x, u, p)) \\ \underline{\psi}_1(x, u) = \text{Inf}_{p \in [\underline{p}, \bar{p}]} (\psi_1(x, u, p)) \end{cases} \quad (\text{IV.8})$$

et on suppose que

$$\forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \bar{\psi}_1(x, u) - \underline{\psi}_1(x, u) \leq \eta \quad (\text{IV.9})$$

où  $\eta$  est un vecteur réel positif.

Il convient de préciser que dans [39] et [71], des hypothèses similaires sont assumées.

Sous **(H13)** et en vertu d'un résultat proposé dans [123], il existe  $\psi_1^*$  une fonction différentiable de Lipschitz globalement telle que :

$$\psi_1^*(x, x, u, p) = \psi_1(x, u, p) \quad (\text{IV.10})$$

où  $\psi_1^*$  vérifie la propriété suivante :

Étant donné  $\underline{x}, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$  vérifiant  $\underline{x} \leq \bar{x}$  alors

$$x \in [\underline{x}, \bar{x}] \Rightarrow \psi_1^*(\underline{x}, \bar{x}, u, p) \leq \psi_1(x, u, p) \leq \psi_1^*(\bar{x}, \underline{x}, u, p). \quad (\text{IV.11})$$

On en déduit que

$$\underline{\psi}_1^*(\underline{x}, \bar{x}, u) \leq \psi_1(x, u, p) \leq \bar{\psi}_1^*(\bar{x}, \underline{x}, u) \quad (\text{IV.12})$$

où  $\underline{\psi}_1^*, \bar{\psi}_1^*$  sont définies par

$$\begin{cases} \bar{\psi}_1^*(\bar{x}, \underline{x}, u) = \text{Sup}_{p \in [\underline{p}, \bar{p}]} (\psi_1^*(\bar{x}, \underline{x}, u, p)) \\ \underline{\psi}_1^*(\underline{x}, \bar{x}, u) = \text{Inf}_{p \in [\underline{p}, \bar{p}]} (\psi_1^*(\underline{x}, \bar{x}, u, p)) \end{cases} \quad (\text{IV.13})$$

On pose

$$\Psi(\underline{x}, \bar{x}, u) = \begin{bmatrix} \bar{\psi}_1^*(\bar{x}, \underline{x}, u) \\ \underline{\psi}_1^*(\underline{x}, \bar{x}, u) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.14})$$

---

3. On dit que la paire  $(A, B) \in \mathbb{M}_{n \times n} \times \mathbb{M}_{n \times m}$  vérifie la condition de Kalman si  $\text{Rang}(B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B) = n$

et

$$\tilde{\Psi}(\underline{x}, \bar{x}, x, u) = \begin{bmatrix} \bar{\psi}_1^*(\bar{x}, \underline{x}, u) - \psi_1^*(x, x, u, p) \\ \psi_1^*(x, x, u, p) - \underline{\psi}_1^*(\underline{x}, \bar{x}, u) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.15})$$

Puisque  $\psi_1^*$  est une fonction de Lipschitz et d'après (IV.15), on obtient

$$\tilde{\Psi}(\bar{x}, \underline{x}, x, u, p) \leq G \begin{pmatrix} \bar{x} - x \\ x - \underline{x} \end{pmatrix} + \bar{\eta} \quad (\text{IV.16})$$

où  $G \in \mathbb{M}_{2n \times 2n}^+$  et  $\eta$  est le vecteur réel positif défini dans (IV.9).

### IV.2.2.3 Synthèse de l'observateur

D'après (H14), il existe  $\tilde{K} \in \mathbb{M}_{n \times r}$  telle que la matrice  $N$  est définie par

$$N = PA - \tilde{K}C \quad (\text{IV.17})$$

est de Hurwitz. En outre, dans la suite, on suppose sans perte de généralité que les valeurs propres sont réelles et simples.

Soit  $T$  une matrice de passage telle que

$$H = T^{-1}NT \quad (\text{IV.18})$$

soit sous forme canonique de Jordan et soit coopérative et de Hurwitz (voir [110], [111] pour la construction explicite de  $H$ ).

Dans le reste de ce paragraphe, on suppose aussi que l'hypothèse suivante est vérifiée.

**(H15)** Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $G_\epsilon \in \mathbb{M}_{2n \times 2n}^+$  et  $\tilde{K}_\epsilon \in \mathbb{M}_{n \times r}$ , vérifiant (IV.16)-(IV.17) et une matrice de passage  $T_\epsilon$  telles que :

$$\tilde{N}_\epsilon = \bar{H} + ((T_\epsilon^{-1}P)^*)^{|\cdot|} G_\epsilon \quad (\text{IV.19})$$

est de Hurwitz et  $\frac{\|T_\epsilon^*\|}{\lambda_\epsilon} < \epsilon$  où  $\lambda_\epsilon$  désigne la plus petite valeur propre, en valeur absolue, de  $\tilde{N}_\epsilon$ .

A présent, on présente notre résultat sur la synthèse d'observateur par intervalle.

**Proposition 2.** Soient  $\rho_x > 0$  et  $\mathcal{K}$  un ensemble compact. Sous (H13) à (H15), il existe deux fonctions régulières  $\underline{x}^*, \bar{x}^* : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  telles que  $\underline{x}^*(t) \leq \bar{x}^*(t)$ ,  $\forall t \geq 0$  et qui vérifient pour

## IV.2. Description de la méthodologie

---

tout  $x(0) \in \mathcal{K}$

$$x(t) \in [\underline{x}^*(t), \bar{x}^*(t)], \forall t \geq 0 \quad (\text{IV.20})$$

et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{x}^*(t) - \underline{x}^*(t)| < \rho_x \quad (\text{IV.21})$$

*Démonstration.* La preuve est réalisée en deux étapes. Pour des raisons de clarté, la notation faisant référence à  $\epsilon$  sera omise.

### Étape 1

Soient  $\underline{x}_{\mathcal{K}}$  et  $\bar{x}_{\mathcal{K}}$  deux vecteurs tels que si  $x \in \mathcal{K}$  alors  $x \in [\underline{x}_{\mathcal{K}}, \bar{x}_{\mathcal{K}}]$ . On considère  $z$  la variable définie par le changement de coordonnées

$$z = T^{-1}x \quad (\text{IV.22})$$

où  $T$  est donnée par (IV.18) et on définit  $\underline{z}_0$  et  $\bar{z}_0$  par

$$\begin{bmatrix} \bar{z}_0 \\ \underline{z}_0 \end{bmatrix} = (T^{-1})^* \begin{bmatrix} \bar{x}_{\mathcal{K}} \\ \underline{x}_{\mathcal{K}} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.23})$$

Dans la suite,  $\mathcal{Z} = \begin{bmatrix} \bar{z} \\ z \end{bmatrix}$  désigne la solution du système définie sur  $\mathbb{R}^{2n}$  par

$$\dot{\mathcal{Z}} = \bar{H}\mathcal{Z} + T^* \begin{bmatrix} \tilde{K}^* & F^* & P^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ \dot{Y} \\ \Psi \end{bmatrix} \quad (\text{IV.24})$$

avec  $\mathcal{Z}(0) = \begin{bmatrix} \bar{z}_0 \\ \underline{z}_0 \end{bmatrix}$ .

Notez que, d'après (IV.23), si  $x(0) \in [\underline{x}_{\mathcal{K}}, \bar{x}_{\mathcal{K}}]$  alors  $z_0 = T^{-1}x(0) \in [\underline{z}_0, \bar{z}_0]$ .

Dans la suite de la démonstration, on pose

$$\begin{bmatrix} \bar{x}^* \\ \underline{x}^* \end{bmatrix} = T^* \begin{bmatrix} \bar{z} \\ z \end{bmatrix} \quad (\text{IV.25})$$

et on prouve que  $\underline{x}^*$  et  $\bar{x}^*$  définis par (IV.25) vérifient les propriétés (IV.20) et (IV.21) de la proposition.

Pour ce faire, on définit les erreurs d'observation supérieure et inférieure par

$$\begin{cases} \bar{e} = \bar{x}^* - x \\ \underline{e} = x - \underline{x}^* \end{cases} \quad (\text{IV.26})$$

et on pose

$$E = \begin{pmatrix} \bar{e} \\ \underline{e} \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.27})$$

D'une façon similaire, on définit

$$\begin{cases} \bar{e}_z = \bar{z} - z \\ \underline{e}_z = z - \underline{z} \end{cases} \quad (\text{IV.28})$$

et on pose

$$E_z = \begin{pmatrix} \bar{e}_z \\ \underline{e}_z \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.29})$$

Alors l'erreur d'observation dynamique est formulée en comparant (IV.24) et la dérivée de (IV.22) avec (IV.3) sous l'hypothèse **(H13)**.

$$\begin{aligned} \dot{E}_z &= \bar{H}E_z + ((T^{-1}P)^*)^{|.}| \tilde{\Psi}(\underline{z}, \bar{z}, z, u) + J_1 T^{-1}(-PA + \tilde{K}C + N)Tz \\ &\quad - J_1 T^{-1}PW\psi_2(z, u, p, v) + \bar{I}_n (T^{-1})^{|.}| (\tilde{K}^{|.}|(b_1 + \omega) + F^{|.}|(b_2 + \dot{\omega})) \end{aligned} \quad (\text{IV.30})$$

où la matrice  $J_1$  est définie par  $J_1 = \begin{bmatrix} I_n \\ -I_n \end{bmatrix}$ .

Supposons que les matrices  $N, \tilde{K}, E$  soient solutions des contraintes algébriques suivantes :

$$\begin{cases} -PA + \tilde{K}C + N &= N + \tilde{K}C + FCA - A = 0 \\ PW &= 0 \end{cases} \quad (\text{IV.31})$$

Un raisonnement simple montre que

$$\begin{bmatrix} N & \tilde{K} & F \end{bmatrix} \Sigma = \Theta \quad (\text{IV.32})$$

avec

$$\Sigma = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ C & 0 \\ CA & CW \end{bmatrix} \quad (\text{IV.33})$$

et

$$\Theta = \begin{bmatrix} A & W \end{bmatrix} \quad (\text{IV.34})$$

## IV.2. Description de la méthodologie

---

Sous **(H13)**, l'ensemble des solutions de (IV.32) est paramétré avec la matrice

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 & \tilde{K} & D \end{bmatrix}$$

de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} N & \tilde{K} & F \end{bmatrix} = \Theta(\Sigma)^\dagger + Z(I_{n+2r} - \Sigma(\Sigma)^\dagger) \quad (\text{IV.35})$$

où  $\Sigma$  et  $\Theta$  sont définies respectivement par (IV.33) et (IV.34).

Nous avons

$$(\Sigma)^\dagger = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ -(CW)^\dagger CA & 0 & (CW)^\dagger \end{bmatrix} \quad (\text{IV.36})$$

alors les solutions (IV.35) sont

$$\begin{cases} F = W(CW)^\dagger + D(I_r - CW(CW)^\dagger) \\ N = (I_n - FC)A - \tilde{K}C. \end{cases} \quad (\text{IV.37})$$

Sous les contraintes algébriques (IV.31), l'erreur d'observation dynamique (IV.30) peut s'écrire

$$\begin{aligned} \dot{E}_z &= \overline{H}E_z + ((T^{-1}P)^*)^{|\cdot|} \tilde{\Psi}(\underline{z}, \bar{z}, z, u) + \overline{I}_n(T^{-1})^{|\cdot|} (\tilde{K}^{|\cdot|} (b_1 + \omega) \\ &\quad + F^{|\cdot|} (b_2 + \dot{\omega})) \end{aligned} \quad (\text{IV.38})$$

ou encore

$$\dot{E}_z = \overline{H}E_z + \Phi(\underline{z}, \bar{z}, z, u) \quad (\text{IV.39})$$

avec

$$\begin{aligned} \Phi(\underline{z}, \bar{z}, z, u) &= ((T^{-1}P)^*)^{|\cdot|} \tilde{\Psi}(\underline{z}, \bar{z}, z, u) + \overline{I}_n(T^{-1})^{|\cdot|} (\tilde{K}^{|\cdot|} (b_1 + \omega) \\ &\quad + F^{|\cdot|} (b_2 + \dot{\omega})) \end{aligned} \quad (\text{IV.40})$$

D'après Lemme 1, si (IV.24) est initialisée comme décrit dans (IV.23), alors pour tout  $t \geq 0$ , nous avons  $E_z(t) \geq 0$  et donc

$$z(t) \in [\underline{z}(t), \bar{z}(t)] \text{ pour tout } t \geq 0. \quad (\text{IV.41})$$

Ainsi à partir de (IV.25) et (IV.26), l'égalité suivante est déduite

$$E(t) = (T^*)^{|\cdot|} E_z(t) \quad (\text{IV.42})$$

Finalement, d'après (IV.41) et (IV.42) on conclut que  $E(t) \geq 0$  et donc  $x(t) \in [\underline{x}^*(t), \bar{x}^*(t)]$

pour tout  $t \geq 0$ .

Ceci termine la preuve que la propriété (IV.20) est vérifiée.

**Étape 2**

Dans cette partie, on prouve la propriété (IV.21). Il s'agit de montrer la stabilité de l'observateur par intervalle et à entrée inconnue (IV.24).

A partir de (IV.16) et (IV.9), l'inégalité différentielle suivante est déduite de (IV.39) :

$$\dot{E}_z \leq \tilde{N}E_z + \tilde{\omega}$$

où  $\tilde{N}$  est défini par (IV.19) et  $\tilde{\omega} = \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_1 \\ \tilde{\omega}_2 \end{bmatrix}$  dont les composantes sont définies par :

$$\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_2 = (T^{-1})^{|\cdot|} \begin{bmatrix} \tilde{K}^{|\cdot|} & F^{|\cdot|} & P^{|\cdot|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2b_1 \\ 2b_2 \\ \eta \end{bmatrix} \quad (\text{IV.43})$$

Sous (H15), le comportement de  $\|E_z\|$  est décrit par l'inégalité suivante

$$\frac{d}{dt}\|E_z\| \leq -|\lambda|\|E_z\| + \|\tilde{\omega}\| \quad (\text{IV.44})$$

Donc l'erreur  $E_z$  converge dans la boule donnée par

$$\tilde{\mathcal{B}} = \left( 0, \frac{\|\tilde{\omega}\|}{|\lambda|} \right)$$

A partir de (IV.44), dans les coordonnées originelles, on déduit que  $E$  converge dans

$$\mathcal{B} = \left( 0, \|(T^*)^{|\cdot|}\| \frac{\|\tilde{\omega}\|}{|\lambda|} \right)$$

donc la propriété (IV.21) est vérifiée.

Ceci termine la démonstration de la proposition. □

**Remarque 10.** Lorsque  $\tilde{\omega}$  est un vecteur nul, alors le résultat classique [39] pour un observateur à entrée inconnue avec une convergence asymptotique, est obtenu.

## IV.2. Description de la méthodologie

---

### IV.2.3 Encadrement de l'entrée inconnue

L'objectif dans ce sous-paragraphe est de proposer un encadrement pour  $v$ . Plus précisément, il s'agit de construire deux fonctions  $\underline{v}, \bar{v} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^q$  qui vérifient

$$v(0) \in [\underline{v}(0), \bar{v}(0)] \Rightarrow v(t) \in [\underline{v}(t), \bar{v}(t)], \text{ pour tout } t \geq 0. \quad (\text{IV.45})$$

D'après (IV.3) et (IV.6), on a

$$\dot{y} = CAx + C\psi(x, v, u, p) + \dot{\omega}. \quad (\text{IV.46})$$

Soit  $y^{dn} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^r$  une fonction obtenue par dérivation numérique de  $y$ . On déduit alors, d'après (IV.46), que

$$\begin{aligned} F(x, u, p, v, y^{dn}, \dot{\omega}) &= CAx + C\psi(x, v, u, p) + \dot{\omega} - y^{dn} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.47})$$

Soit  $\mathcal{V}(t)$ , l'ensemble dépendant du temps défini par

$$\mathcal{V}(t) = \{v \in \mathbb{R}^q \mid \exists p \in [\underline{p}, \bar{p}], \theta \in [-b_2, b_2] \text{ et } x \in [\underline{x}(t), \bar{x}(t)] \text{ tels que } F(x, u(t), p, v, y^{dn}(t), \theta) = 0\} \quad (\text{IV.48})$$

On pose

$$M_i^{\mathcal{V}}(t) = \text{Sup}_{v \in \mathcal{V}(t)} v_i \quad (\text{IV.49})$$

et

$$m_i^{\mathcal{V}}(t) = \text{Inf}_{v \in \mathcal{V}(t)} v_i \quad (\text{IV.50})$$

Il est à noter qu'en vertu de l'hypothèse **(H13)**, c'est-à-dire que  $\|C\psi\|$  est coercive alors  $M_i^{\mathcal{V}}(t)$  et  $m_i^{\mathcal{V}}(t)$  sont bornées sur  $[0, \tau]$  pour tout réel positif  $\tau$  fixe.

Finalement, pour toutes fonctions régulières  $\bar{v}, \underline{v} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^q$  vérifiant, pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\bar{v}(t) \geq M_i^{\mathcal{V}}(t) \text{ et } \underline{v}(t) \leq m_i^{\mathcal{V}}(t) \quad (\text{IV.51})$$

la propriété (IV.45) est vérifiée.

En outre, les fonctions  $\underline{v}$  et  $\bar{v}$  peuvent être choisies dérivables. En effet, toute fonction bornée sur un compact peut être majorée (respectivement minorée) par une fonction dérivable (voir Figure IV.2).



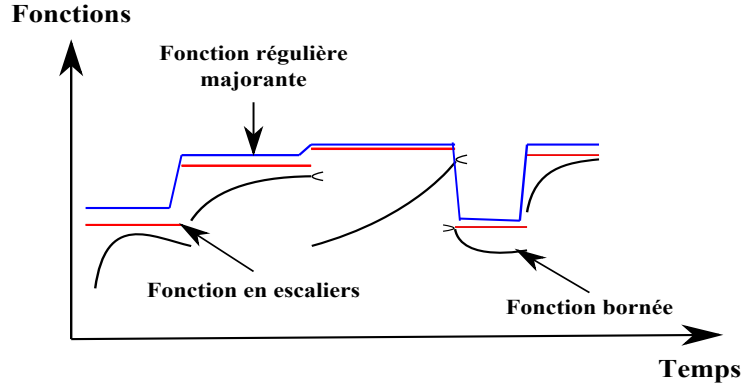


Figure IV.2 – Majoration par une fonction dérivable

Dans la suite, on utilisera  $\bar{\mathcal{C}}_\tau$  et  $\underline{\mathcal{C}}_\tau$  pour désigner les ensembles de fonctions dérivables qui majorent (respectivement mineurent)  $M_i^y(t)$  (respectivement  $m_i^y(t)$ )

$$\bar{\mathcal{C}}_\tau = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^q) \mid f(t) \geq M^y(t) \text{ pour } t \in [0, \tau]\} \quad (\text{IV.52})$$

et

$$\underline{\mathcal{C}}_\tau = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^q) \mid f(t) \leq m^y(t) \text{ pour } t \in [0, \tau]\} \quad (\text{IV.53})$$

Maintenant, considérons le système

$$\dot{\varphi} = P(\varphi, \underline{x}, \bar{x}, \theta) \quad (\text{IV.54})$$

où  $\varphi \in \mathbb{R}^q$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $\theta \in \mathbb{R}^N$ .  $P$  est un polynôme défini par  $P = (P_1, \dots, P_q)^T$  où  $P_j$ ,  $j = 1, \dots, q$  sont données par

$$P_j(\varphi, \underline{x}, \bar{x}, \theta) = \sum_{\substack{p_1, \dots, p_q, j \\ l_1, \dots, l_n, \bar{l}_1, \dots, \bar{l}_n}} b_{l_1, \dots, l_n, \bar{l}_1, \dots, \bar{l}_n}^{p_1, \dots, p_q, j} \underline{x}_1^{l_1}, \dots, \underline{x}_n^{l_n} \bar{x}_1^{\bar{l}_1}, \dots, \bar{x}_n^{\bar{l}_n} \varphi_1^{p_1}, \dots, \varphi_q^{p_q} \quad (\text{IV.55})$$

$$\sum_{j=1}^q p_j \leq M_\varphi$$

$$\sum_{i=1}^n \bar{l}_i \leq M_{\bar{x}}$$

$$\sum_{i=1}^n l_i \leq M_{\underline{x}}$$

où  $\theta = b_{l_1, \dots, l_n, \bar{l}_1, \dots, \bar{l}_n}^{p_1, \dots, p_q, j} \in \mathbb{R}^N$  et  $M_{\underline{x}}$ ,  $M_{\bar{x}}$ ,  $M_\varphi$  sont trois entiers représentant les puissances maximales du polynôme relativement à  $\underline{x}$ ,  $\bar{x}$  et  $\varphi$ .

Ici, le but est d'identifier deux dynamiques, sur l'intervalle  $[0, \tau]$ , afin d'encadrer l'évolution de la dégradation. Il est noté que, concernant l'application au pronostic, l'entrée inconnue  $v$  désigne directement l'état de dégradation. Pour ce faire, on cherche  $\underline{\theta}$ ,  $\bar{\theta}$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^N$  et

## IV.2. Description de la méthodologie

---

deux trajectoires qui vérifient  $[0, \tau]$ .

$$\begin{cases} \dot{\bar{\phi}}(t) = P(\bar{\phi}, \underline{x}, \bar{x}, \bar{\theta}) \\ \bar{\phi}(t) \geq M^V(t) \end{cases} \quad (\text{IV.56})$$

et

$$\begin{cases} \dot{\underline{\phi}}(t) = P(\underline{\phi}, \underline{x}, \bar{x}, \underline{\theta}) \\ \underline{\phi}(t) \leq m^V(t) \end{cases} \quad (\text{IV.57})$$

Un raisonnement simple, basé sur la bornitude de  $M^V(t)$  et  $m^V(t)$  et la compacité de  $[0, \tau]$  montre qu'il existe  $\underline{\theta}, \bar{\theta}$  pour lesquels (IV.56) et (IV.57) peuvent être vérifiées.

Cependant, pour aboutir à une estimation pertinente du temps restant, il convient d'utiliser des valeurs pour  $\underline{\phi}, \bar{\phi}$  optimales, dans le sens très proches de  $M^V(t)$  et  $m^V(t)$  réciproquement. Pour ce faire, on procède de la manière suivante. On définit  $\underline{f} \in \underline{\mathcal{C}}_\tau$  et  $\bar{f} \in \bar{\mathcal{C}}_\tau$  comme étant des fonctions qui soient solutions aux problèmes

$$\text{Min}_{f \in \bar{\mathcal{C}}_\tau} \int_0^\tau |f(t) - M^V(t)| dt \quad (\text{IV.58})$$

et

$$\text{Min}_{f \in \underline{\mathcal{C}}_\tau} \int_0^\tau |f(t) - m^V(t)| dt \quad (\text{IV.59})$$

On définit aussi

$$S_{\bar{f}, \tau} = \{ \phi \in \bar{\mathcal{C}}_\tau \mid \exists \theta_\phi \text{ pour lequel } \phi \text{ est solution de (IV.56) et } \phi(0) \geq \bar{f}(0) \} \quad (\text{IV.60})$$

et

$$S_{\underline{f}, \tau} = \{ \phi \in \underline{\mathcal{C}}_\tau \mid \exists \theta_\phi \text{ pour lequel } \phi \text{ est solution de (IV.57) et } \phi(0) \leq \underline{f}(0) \} \quad (\text{IV.61})$$

Pour obtenir un choix pertinent, il suffit de résoudre les deux problèmes suivants :

$$\text{Min}_{\phi \in S_{\bar{f}, \tau}} \int_0^\tau |\phi(t) - \bar{f}(t)| dt. \quad (\text{IV.62})$$

et

$$\text{Min}_{\phi \in S_{\underline{f}, \tau}} \int_0^\tau |\phi(t) - \underline{f}(t)| dt. \quad (\text{IV.63})$$

Dans la suite, on désignera  $\bar{\phi}$  et  $\underline{\phi}$  les solutions respectivement des deux critères (IV.62) et (IV.63) auxquelles on associe deux paramètres  $\theta_{\bar{\phi}}$  et  $\theta_{\underline{\phi}}$ . Ainsi, on pourra leur attribuer deux dynamiques de la forme (IV.54) qui pourront être exploitées en vue du pronostic (voir Figure IV.3).

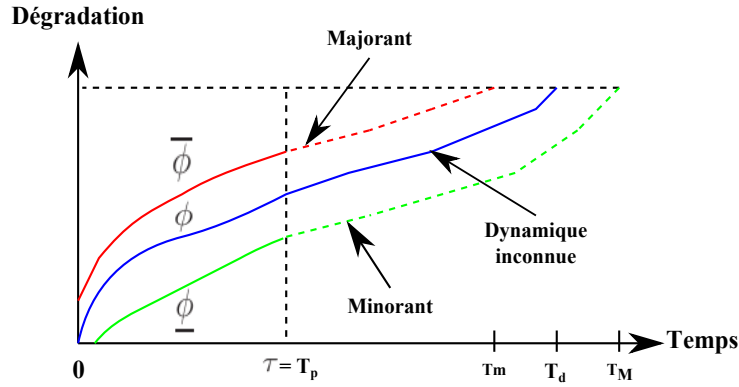


Figure IV.3 – Prédiction du temps de vie restant par utilisation de l’encadrement

## IV.2.4 Estimation du temps de vie restant

L’objectif de cette sous-section est d’estimer le temps de vie restant. Plus précisément, nous allons considérer deux situations. La première est celle où la loi de commande est assumée être connue tout au long de l’exploitation du système. La deuxième situation est celle où la commande est, après analyse, assumée être inconnue mais appartenant à un ensemble  $\mathcal{U}_a$  de commandes admissibles.

### IV.2.4.1 Système soumis à une commande connue

Dans ce qui suit, on suppose que la trajectoire de dégradation est solution du système

$$\dot{\phi} = P(\phi, x, \theta) \quad (\text{IV.64})$$

On désigne par  $\phi(t, \phi_0, x, \theta)$  la trajectoire de dégradation obtenue pour un comportement  $x$  de l’état et un paramètre  $\theta$  donnés et qui vérifie  $\phi(0, \phi_0, x, \theta) = \phi_0$ . Soit  $A \subset \mathbb{R}^q$ , on définit pour  $A \subset \mathbb{R}^q$ , l’ensemble des états accessibles à l’instant  $t \in \mathbb{R}_+$ , par

$$\mathcal{A}_t^\phi(A) = \{\varphi \in \mathbb{R}^q \mid \exists \phi_0 \in A \text{ telle que } \varphi = \phi(t, \phi_0, x, \theta)\} \quad (\text{IV.65})$$

Ici, le but est d’estimer le temps de vie restant. Cette prédiction sera liée à la notion d’atteignabilité des états défaillants.

Soit  $I_p = [0, T_p]$  un temps d’analyse tel que  $T_p < T_d$ . On rappelle que  $\mathcal{M}_n$  désigne des états en fonctionnement normal du système et  $\mathcal{M}_d$  est l’ensemble des états en fonctionnement dégradé. Dans ce travail, on considère que le fonctionnement normal (respectivement dégradé) se caractérise par l’appartenance à un ensemble  $\mathcal{D}_n$  (respectivement  $\mathcal{D}_p$ ). En outre, on suppose

## IV.2. Description de la méthodologie

---

que la dégradation initiale

$$\phi_0 \in \mathcal{D}_n^0 \subset \mathcal{D}_n \quad (\text{IV.66})$$

Dans la section précédente, un encadrement de la dégradation a été établi. Cet encadrement est réalisé à travers un couple  $\underline{\phi}, \bar{\phi}$  solution de (IV.57) et (IV.56), dépendant de  $\underline{x}, \bar{x}$ .

D'après (IV.64) et (IV.66), on peut définir le temps d'apparition de la défaillance comme étant

$$\text{Min}_{t \in [T_p, +\infty[} (\mathcal{A}_t(\mathcal{D}_n^0) \cap \mathcal{D}_p \neq \emptyset) \quad (\text{IV.67})$$

Cependant, la dynamique de (IV.64) n'est pas connue et donc (IV.67) n'est pas exploitable. Maintenant,

$$\mathcal{D}_n^0 \subset \mathcal{D}_n \subset [\underline{\phi}_0, \bar{\phi}_0] \quad (\text{IV.68})$$

et par construction

$$\mathcal{A}_t(\mathcal{D}_n) \subset [\underline{\phi}_t, \bar{\phi}_t], \text{ pour tout } t \quad (\text{IV.69})$$

Alors

$$\mathcal{A}_t(\mathcal{D}_n) \cap \mathcal{D}_p \Rightarrow [\underline{\phi}_t, \bar{\phi}_t] \cap \mathcal{D}_p \neq \emptyset \quad (\text{IV.70})$$

On pose

$$\bar{T}_{RUL} = \text{Min}_{t \in [T_p, +\infty[} \left( [\underline{\phi}_t, \bar{\phi}_t] \cap \mathcal{D}_p \neq \emptyset \right) - T_p \quad (\text{IV.71})$$

et

$$\underline{T}_{RUL} = \text{Min}_{t \in [T_p, +\infty[} \left( [\underline{\phi}_t, \bar{\phi}_t] \subset \mathcal{D}_p \right) - T_p \quad (\text{IV.72})$$

Notez que  $\bar{T}_{RUL}$  peut être interprété comme étant une estimation "pessimiste" et  $\underline{T}_{RUL}$  une estimation "optimiste". Le  $T_{RUL}$  réel est une valeur incluse dans l'intervalle  $[\underline{T}_{RUL}, \bar{T}_{RUL}]$ . Ainsi le temps restant peut s'exprimer comme

$$T_{RUL} = \alpha \bar{T}_{RUL} + \beta \underline{T}_{RUL}$$

où  $\alpha, \beta \in [0, 1]$  désigne des pondérations avec  $\alpha + \beta = 1$ . Leurs valeurs peuvent être choisies selon l'application. Par exemple, pour assurer un maximum de sécurité, on choisirait  $\alpha = 1$  et  $\beta = 0$ .

### IV.2.4.2 Système soumis à une commande admissible

#### A. Introduction

Le but de cette partie est d'estimer le temps de vie restant dans la situation où la seule information concernant la commande sur  $]T_p, +\infty[$  est un ensemble d'appartenance. Dans ce cas, on peut procéder différemment en adoptant la démarche proposée dans le paragraphe IV.2.3. En

effet, on peut considérer une dynamique pour la dégradation de la forme

$$\dot{\phi} = P(\varphi, u, \underline{x}, \bar{x}, \theta) \quad (\text{IV.73})$$

Puis d'identifier une dynamique pour les bornes  $\underline{\phi}$  et  $\bar{\phi}$  sur la période  $[0, T_p]$ . Maintenant, pour estimer le temps de vie restant, on effectue une projection sur le futur en calculant l'espace accessible de (IV.73) pour  $u \in \mathcal{U}_a$ . Ce calcul est réalisé d'une façon numérique.

### B. Description de l'espace accessible numériquement

Dans la théorie du contrôle, le problème d'accessibilité a suscité l'intérêt de plusieurs auteurs (voir par exemple [20]). Cependant, et au début du développement de la théorie d'accessibilité, les résultats, même s'ils sont pertinents, restaient théoriques. Plus récemment, des activités ont donné lieu à des résultats sur l'estimation des ensembles accessibles qui ont été proposées. Ces résultats se fondent sur des stratégies numériques (voir par exemple [7], [9], [33], [58]).

Dans la suite, la stratégie de calcul numérique d'espace accessible décrite dans [7] est considérée pour notre problématique. Elle est appliquée sur les modèles de la forme (IV.73), pour estimer le temps de vie restant. Cette stratégie est basée sur le principe de linéarisation conservative des systèmes non linéaires incertains. Son approche est résumée dans la Figure IV.4. A des fins de clarté, les principales étapes de l'estimation de l'espace accessible pour ces modèles sont présentées en annexe B.

## IV.2.5 Critères de performances de la méthodologie de pronostic

L'évaluation des performances de la méthodologie de pronostic est basée sur trois critères de précision. Ces critères concernent la précision

- de l'estimé des bornes supérieure  $\bar{x}^*$  et inférieure  $\underline{x}^*$  de l'état de comportement à dynamique rapide  $x$ .
- de l'estimé des bornes supérieure  $\bar{\phi}$  et inférieure  $\underline{\phi}$  de l'état de comportement à dynamique lente  $\phi$  au travers de l'entrée inconnue.
- des prédictions du temps de vie restant pour un horizon d'analyse considéré. Pour évaluer les performances du pronostic parmi les quatre premières métriques développées dans la sous-section I.4.4.5, la performance  $\alpha - \lambda$  est ici retenue.

**Remarque 11.** De la même manière qu'au chapitre III, la performance  $\alpha - \lambda$  est redéfinie par rapport à la notion de contrainte temporelle  $T_p$ .

### IV.3. Application à l'oscillateur électromécanique

---

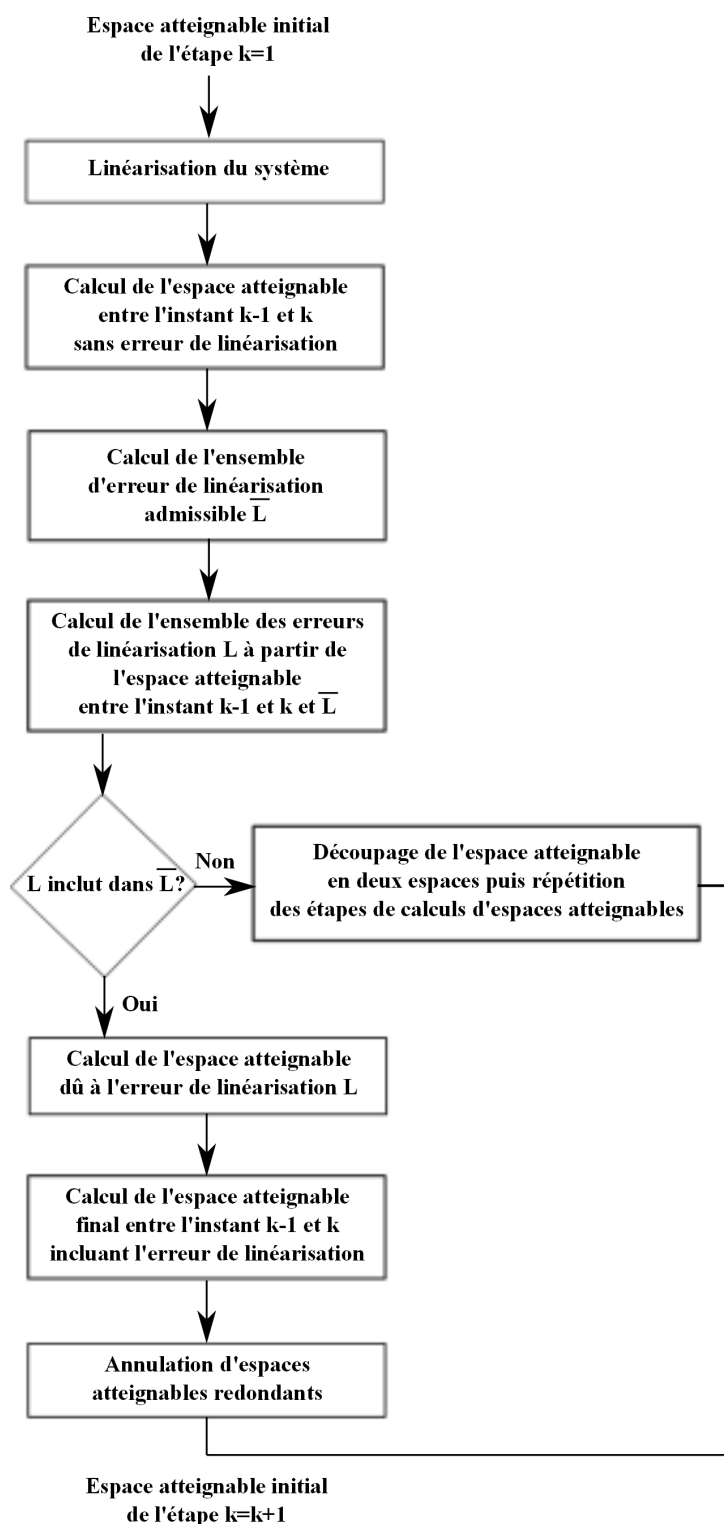


Figure IV.4 – Stratégie du calcul de l'espace atteignable

### IV.3 Application à l'oscillateur électromécanique

La méthodologie de pronostic décrite dans la section précédente est à présent appliquée sur l'oscillateur électromécanique considéré. Plus précisément, le problème est traité dans le cas

d'une connaissance parfaite de la commande.

### IV.3.1 L'observateur par intervalle

#### IV.3.1.1 Synthèse

Un observateur par intervalle et à entrée inconnue est à présent synthétisé comme celui décrit par (IV.24) pour le système (IV.3), les étapes de synthèse sont à présent détaillées plus précisément.

Le domaine d'espace d'état physique dans lequel le système évolue est défini sur l'ensemble

$$x \in [x_{min}, x_{max}] \text{ où } x_{min} = \begin{bmatrix} -1.95 \\ -1.67 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } x_{max} = \begin{bmatrix} 1.95 \\ 1.67 \\ 1.73 \end{bmatrix}.$$

Les conditions initiales sont définies par (IV.23) par :

$$\begin{cases} \bar{z}(0) = (T^{-1})^+ x_{max} + (T^{-1})^- x_{min}, \\ \underline{z}(0) = (T^{-1})^+ x_{min} + (T^{-1})^- x_{max}. \end{cases} \quad (\text{IV.74})$$

Les constantes de Lipschitz  $\Gamma_j$  de la fonction  $(\psi_1)_j(x, u, p)$ ,  $j = 1, \dots, 3$  sont données par

$$\begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.119 \cdot 10^{-1} \\ 1.105 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix}.$$

On donne la fonction  $\psi_1^*(x, x, u, p)$  associée à  $\psi_1(x, u, p)$ , définie par (IV.10) :

$$\psi_1^*(x_a, x_b, u, p) = f(x_a, u, p) - g(x_b, u, p) \quad (\text{IV.75})$$

où

$$f(x_a, u, p) = \Gamma_j \sum_{i=1}^n (x_a)_i$$

et

$$g(x_b, u, p) = \Gamma_j \sum_{i=1}^n (x_b)_i - (\psi_1)_j((x_b), u, p), \quad j = 1, \dots, 3$$

avec  $\Gamma_j$  est la constante de Lipschitz de la  $j^{eme}$  composante de la fonction  $(\psi_1)_j$ .

### IV.3. Application à l'oscillateur électromécanique

A partir de (IV.75), une borne inférieure  $\underline{\psi}_1^*(\underline{x}, \bar{x}, u)$  est déterminée pour  $x \in [\underline{x}, \bar{x}]$  au travers du raisonnement suivant.

$$(\underline{\psi}_1^*)_j(\underline{x}, \bar{x}, u) = \Gamma_j \sum_{i=1}^3 \underline{x}_i - \left( \Gamma_j \sum_{i=1}^3 \bar{x}_i - (\underline{\psi}_1)_j(\bar{x}, u) \right) \quad (\text{IV.76})$$

où les composantes  $(\underline{\psi}_1)_j, j = 1, \dots, 3$  sont déduites pour l'analyse des cas suivants :

- $(\underline{\psi}_1)_1(\bar{x}, u) = 0$
- si  $\bar{x}_1 \geq \lambda$  alors
 
$$(\underline{\psi}_1)_2 = -\alpha_3 \bar{x}_1^3 + u - \frac{\bar{K}(\bar{x}_1 - \lambda) \bar{x}_3^2}{(1 + \underline{K}(\bar{x}_1 - \lambda)^2)^2}$$
- si  $\bar{x}_1 < \lambda$  alors
 
$$(\underline{\psi}_1)_2(\bar{x}, u) = -\alpha_3 \bar{x}_1^3 + u - \frac{\underline{K}(\bar{x}_1 - \lambda) \bar{x}_3^2}{(1 + \bar{K}(\bar{x}_1 - \lambda)^2)^2}$$
- si  $(\bar{x}_3 \geq 0)$  et  $(\bar{x}_2(\lambda - \bar{x}_1) \geq 0)$  alors
 
$$(\underline{\psi}_1)_3(\bar{x}, u) = -\bar{K}(\bar{x}_1 - \lambda)^2 r \bar{x}_3 - (1 + \bar{K}(\bar{x}_1 - \lambda)^2) \left( \frac{2\bar{K}(\lambda - \bar{x}_1) \bar{x}_2}{(1 + \underline{K}(\bar{x}_1 - \lambda)^2)^2} \right) \bar{x}_3$$
- si  $(\bar{x}_3 \geq 0)$  et  $(\bar{x}_2(\lambda - \bar{x}_1) < 0)$  alors
 
$$(\underline{\psi}_1)_3(\bar{x}, u) = -\bar{K}(\bar{x}_1 - \lambda)^2 r \bar{x}_3 - (1 + \underline{K}(\bar{x}_1 - \lambda)^2) \left( \frac{2\underline{K}(\lambda - \bar{x}_1) \bar{x}_2}{(1 + \bar{K}(\bar{x}_1 - \lambda)^2)^2} \right) \bar{x}_3$$
- si  $(\bar{x}_3 < 0)$  et  $(\bar{x}_2(\lambda - \bar{x}_1) \geq 0)$  alors
 
$$(\underline{\psi}_1)_3(\bar{x}, u) = -\underline{K}(\bar{x}_1 - \lambda)^2 r \bar{x}_3 - (1 + \underline{K}(\bar{x}_1 - \lambda)^2) \left( \frac{2\underline{K}(\lambda - \bar{x}_1) \bar{x}_2}{(1 + \bar{K}(\bar{x}_1 - \lambda)^2)^2} \right) \bar{x}_3$$
- si  $(\bar{x}_3 < 0)$  et  $(\bar{x}_2(\lambda - \bar{x}_1) < 0)$  alors
 
$$(\underline{\psi}_1)_3(\bar{x}, u) = -\underline{K}(\bar{x}_1 - \lambda)^2 r \bar{x}_3 - (1 + \bar{K}(\bar{x}_1 - \lambda)^2) \left( \frac{2\bar{K}(\lambda - \bar{x}_1) \bar{x}_2}{(1 + \underline{K}(\bar{x}_1 - \lambda)^2)^2} \right) \bar{x}_3$$

A partir de (IV.75), une borne supérieure  $\bar{\psi}_1^*(\bar{x}, \underline{x}, u)$  est déterminée  $x \in [\underline{x}, \bar{x}]$  au travers du raisonnement suivant.

$$(\bar{\psi}_1^*)_j(\bar{x}, \underline{x}, u) = \Gamma_j \sum_{i=1}^3 \bar{x}_i - \left( \Gamma_j \sum_{i=1}^3 \underline{x}_i - (\bar{\psi}_1)_j(\underline{x}, u) \right) \quad (\text{IV.77})$$

où  $\bar{\psi}_{1,i}, i = 1, \dots, 3$  sont déduites pour l'analyse des cas suivants :

- $(\bar{\psi}_1)_1(\underline{x}, u) = 0$
- si  $\bar{x}_1 \geq \lambda$  alors
 
$$(\bar{\psi}_1)_2(\underline{x}, u) = -\alpha_3 \underline{x}_1^3 + u - \frac{\underline{K}(\underline{x}_1 - \lambda) \underline{x}_3^2}{(1 + \bar{K}(\underline{x}_1 - \lambda)^2)^2}$$



– si  $\bar{x}_1 < \lambda$  alors

$$(\bar{\psi}_1)_2(\underline{x}, u) = -\alpha_3 \underline{x}_1^3 + u - \frac{\bar{K}(\underline{x}_1 - \lambda) \underline{x}_3^2}{(1 + \underline{K}(\underline{x}_1 - \lambda)^2)^2}$$

– si  $(\bar{x}_3 \geq 0)$  et  $(\bar{x}_2(\lambda - \bar{x}_1) \geq 0)$  alors

$$(\bar{\psi}_1)_3(\underline{x}, u) = -\underline{K}(\underline{x}_1 - \lambda)^2 r \underline{x}_3 - (1 + \underline{K}(\underline{x}_1 - \lambda)^2) \left( \frac{2\underline{K}(\lambda - \underline{x}_1) \underline{x}_2}{(1 + \bar{K}(\underline{x}_1 - \lambda)^2)^2} \right) \underline{x}_3$$

– si  $(\bar{x}_3 \geq 0)$  et  $(\bar{x}_2(\lambda - \bar{x}_1) < 0)$  alors

$$(\bar{\psi}_1)_3(\underline{x}, u) = -\underline{K}(\underline{x}_1 - \lambda)^2 r \underline{x}_3 - (1 + \bar{K}(\underline{x}_1 - \lambda)^2) \left( \frac{2\bar{K}(\lambda - \underline{x}_1) \underline{x}_2}{(1 + \underline{K}(\underline{x}_1 - \lambda)^2)^2} \right) \underline{x}_3$$

– si  $(\bar{x}_3 < 0)$  et  $(\bar{x}_2(\lambda - \bar{x}_1) \geq 0)$  alors

$$(\bar{\psi}_1)_3(\underline{x}, u) = -\bar{K}(\underline{x}_1 - \lambda)^2 r \underline{x}_3 - (1 + \bar{K}(\underline{x}_1 - \lambda)^2) \left( \frac{2\bar{K}(\lambda - \underline{x}_1) \underline{x}_2}{(1 + \underline{K}(\underline{x}_1 - \lambda)^2)^2} \right) \underline{x}_3$$

– si  $(\bar{x}_3 < 0)$  et  $(\bar{x}_2(\lambda - \bar{x}_1) < 0)$  alors

$$(\bar{\psi}_1)_3(\underline{x}, u) = -\bar{K}(\underline{x}_1 - \lambda)^2 r \underline{x}_3 - (1 + \underline{K}(\underline{x}_1 - \lambda)^2) \left( \frac{2\underline{K}(\lambda - \underline{x}_1) \underline{x}_2}{(1 + \bar{K}(\underline{x}_1 - \lambda)^2)^2} \right) \underline{x}_3$$

Basé sur le changement de coordonnées (IV.23), on déduit l'expression des fonctions  $\underline{\psi}_1^*$  et  $\bar{\psi}_1^*$  dans les nouvelles coordonnées.

Puis, on cherche à déterminer la matrice  $G$  donnée par (IV.16). Pour ce faire, à partir de (IV.75) et (IV.77), on peut écrire que

$$\begin{aligned} |(\bar{\psi}_1^*)_j(\bar{x}, \underline{x}, u) - (\psi_1^*)_j(x, x, u, p)| &= \left| \Gamma_j \sum_{i=1}^3 (\bar{x}_i - x_i) - \Gamma_j \sum_{i=1}^3 (x_i - \underline{x}_i) \right. \\ &\quad \left. + (\bar{\psi}_1)_j(\underline{x}, u) - (\psi_1)_j(x, u) \right| \\ &\leq \Gamma_j \sum_{i=1}^3 (|\bar{x}_i - x_i|) + \eta \end{aligned} \quad (\text{IV.78})$$

Par un raisonnement analogue, on pourra montrer à partir de (IV.75) et (IV.76) que

$$|(\psi_1^*)_j(x, x, u) - (\underline{\psi}_1^*)_j(\underline{x}, \bar{x}, u, p)| \leq \Gamma_j \sum_{i=1}^3 (|x_i - \underline{x}_i|) + \eta \quad (\text{IV.79})$$

Ainsi, on en déduit que  $G = \bar{J}_2$  où

$$J_2 = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_3 \\ \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_3 \\ \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_3 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.80})$$

Par ailleurs,  $\text{Rang}(W) = \text{Rang}(CW)$  alors (H13) est vérifiée. Les matrices définies dans

### IV.3. Application à l'oscillateur électromécanique

---

(IV.24) sont définies par

$$\begin{aligned} F &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ P &= I_3 - FC \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{IV.81})$$

Le rang de la matrice d'observabilité de la paire  $(PA, C)$  est égale à 3 alors l'hypothèse (H14) est vérifiée.

On considère la forme de la matrice de gain  $\tilde{K}$  telle que  $\tilde{K} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_1 & 0 \\ \tilde{k}_2 & 0 \\ 0 & \tilde{k}_3 \end{bmatrix}$  et on en déduit que

$$N = \begin{bmatrix} -\tilde{k}_1 & 1 & 0 \\ -(1 - \alpha_1) - \tilde{k}_2 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & -\tilde{k}_3 \end{bmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique est donné

$$\det(\lambda I_3 - N) = (\lambda + \tilde{k}_3) \left( (\lambda + \mu)(\lambda + \tilde{k}_1 + ((1 - \alpha_1) + \tilde{k}_2)) \right)$$

La relation entre le placement de pôle et la matrice de gain  $\tilde{K}$  est donnée au travers des égalités suivantes :

$$\begin{cases} \tilde{k}_1 = -(\lambda_2 + \lambda_3) - \mu \\ \tilde{k}_2 = \lambda_2 \lambda_3 - \mu \tilde{k}_1 - (1 - \alpha_1) \\ \tilde{k}_3 = -\lambda_1 \end{cases} \quad (\text{IV.82})$$

**Remarque 12.** On peut définir  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  comme placement de pôles désirés afin d'obtenir  $n$  valeurs propres simples réelles négatives et ainsi déduire la matrice de gain  $\tilde{K}$  correspondante.

A partir de (IV.82) et en considérant que le placement de pôles désiré est

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-1.5, -2.5, -3.5)$$

alors

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} 5.92 & 0 \\ 9.93 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} -5.92 & 1 & 0 \\ -8.27 & -0.08 & 0 \\ 0 & 0 & -1.5 \end{bmatrix}$$

La propriété de coopérativité pour (IV.24) est obtenue au travers du changement de coordonnées

$$T = \begin{bmatrix} -0.38 & -0.28 & 0 \\ -0.92 & -0.96 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

telle que

$$H = T^{-1}NT = \begin{bmatrix} -3.5 & 0 & 0 \\ 0 & -2.5 & 0 \\ 0 & 0 & -1.5 \end{bmatrix}.$$

On déduit la matrice définie par  $\tilde{N}$  donnée dans (IV.19) et dont l'ensemble des valeurs propres associées est donné par

$$\{-0.366, -3.919, -3.111, -2.241, -1.5, -1.5\}$$

La stabilité de l'observateur est ainsi prouvée.

Ceci finit la synthèse de l'observateur par intervalle (IV.24). Les enveloppes supérieure  $\bar{x}^*$  et inférieure  $\underline{x}^*$  de l'état  $x$  de (IV.3) sont données par (IV.25). Les propriétés (IV.20) et (IV.21) sont ainsi vérifiées.

Par un raisonnement simple, on encadre l'entrée inconnue comme suit

$$\begin{cases} \underline{\phi} = (1 + \overline{K} \max((\underline{x}_1^* - \lambda)^2, (\bar{x}_1^* - \lambda)^2))^{-1} (y_2^{dn} + r \underline{x}_3^* - (\overline{\psi}_1^*)_3(\underline{x}^*, \bar{x}^*, u)) \\ \overline{\phi} = (1 + \underline{K} \min((\bar{x}_1^* - \lambda)^2, (\underline{x}_1^* - \lambda)^2))^{-1} (y_2^{dn} + r \bar{x}_3^* - (\underline{\psi}_1^*)_3(\underline{x}^*, \bar{x}^*, u)) \end{cases} \quad (\text{IV.83})$$

où  $y_2^{dn}$  désigne la dérivée numérique de  $y_2$ .

### IV.3.1.2 Résultats de simulation

Dans la suite, les résultats de simulation sont présentés afin d'illustrer la pertinence de la méthodologie proposée. Pour ce faire, la fréquence d'échantillonnage est fixée à 500Hz pour la simulation. L'intervalle d'appartenance du paramètre  $K$  est donné par

$$\begin{aligned} K &= [\underline{K}, \overline{K}] \\ &= [0.0630, 0.077]. \end{aligned}$$

### IV.3. Application à l'oscillateur électromécanique

Par ailleurs, on considère

$$b_1 = b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Après simulation, les enveloppes supérieure  $\bar{x}^*$  et inférieure  $\underline{x}^*$  de l'état  $x$  sont illustrées dans les figures IV.5, IV.6 et IV.7. On remarque que l'observateur synthétisé fournit des enveloppes précises pour l'encadrement de  $x$ . Puis, les enveloppes inférieure  $\underline{\phi}$  et supérieure  $\bar{\phi}$  de l'entrée inconnue  $\phi$  sont représentées dans la figure IV.8. Finalement, les dynamiques  $\dot{\bar{\phi}}$  et  $\dot{\underline{\phi}}$  sont calculées grâce à l'algorithme introduit dans le paragraphe III.4.4 et sont illustrées dans la Figure IV.9.

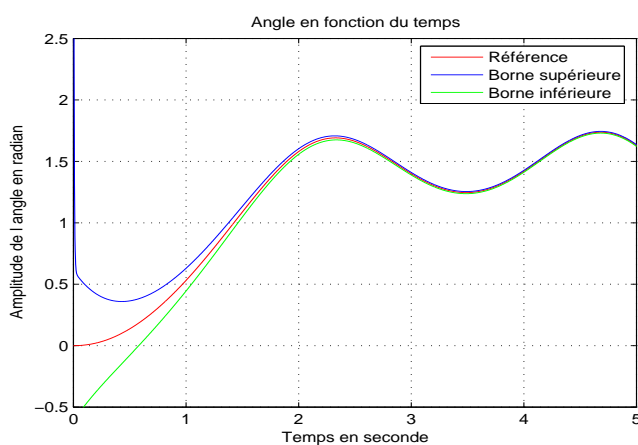


Figure IV.5 – Enveloppes inférieure et supérieure de l'état  $x_1$

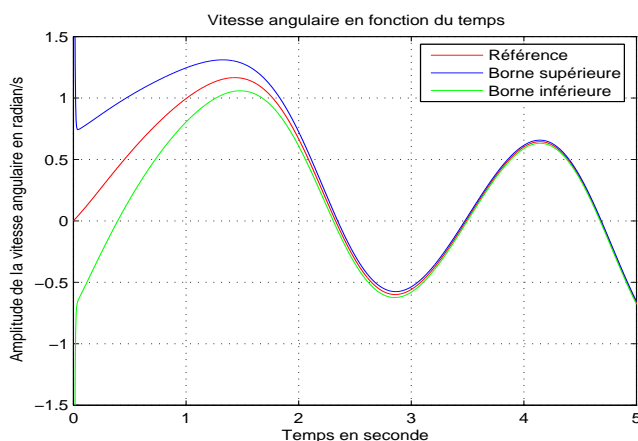


Figure IV.6 – Enveloppes inférieure et supérieure de l'état  $x_2$

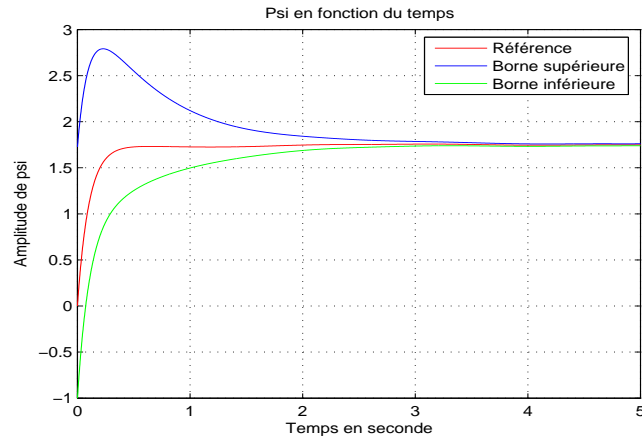


Figure IV.7 – Enveloppes inférieure et supérieure de l'état  $x_3$

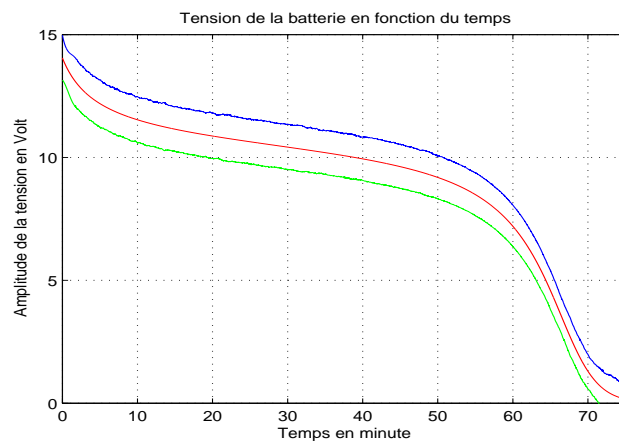


Figure IV.8 – Enveloppes inférieure et supérieure de l'entrée inconnue  $\phi$

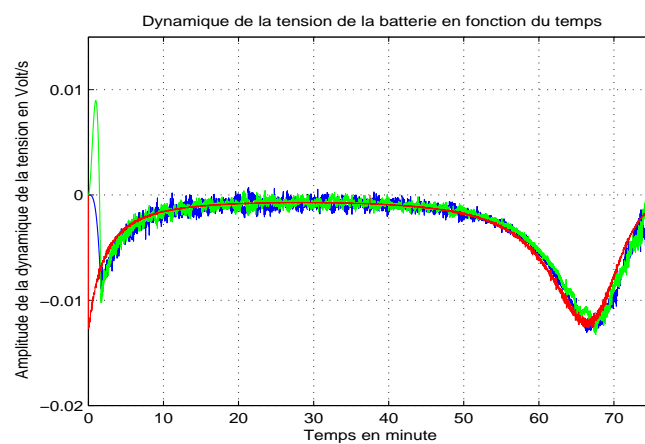


Figure IV.9 – Enveloppes inférieure et supérieure de la dynamique de l'entrée inconnue  $\dot{\phi}$

### IV.3. Application à l'oscillateur électromécanique

#### IV.3.2 Estimation des paramètres

Dans ce paragraphe, les paramètres des modèles de dégradation sont estimés. Pour des raisons de simplicité, on suppose que ces deux modèles peuvent être décrits par

$$\begin{cases} \dot{\bar{\phi}} = \bar{a}\bar{\psi}\bar{\phi}^2 + \bar{b}\bar{\psi}\bar{\phi} + \bar{c}\bar{\psi} \\ \dot{\underline{\phi}} = \underline{a}\underline{\psi}\underline{\phi}^2 + \underline{b}\underline{\psi}\underline{\phi} + \underline{c}\underline{\psi} \end{cases} \quad (\text{IV.84})$$

où  $\underline{a}$ ,  $\bar{a}$ ,  $\underline{b}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\underline{c}$  et  $\bar{c}$  sont les paramètres à estimer.

Pour ce faire, on utilise un algorithme des moindres carrés pondérés pour approximer les solutions des problèmes d'optimisation

$$\|\dot{\bar{\phi}} - \bar{a}\bar{\psi}\bar{\phi}^2 - \bar{b}\bar{\psi}\bar{\phi} - \bar{c}\bar{\psi}\|^2 \quad (\text{IV.85})$$

et

$$\|\dot{\underline{\phi}} - \underline{a}\underline{\psi}\underline{\phi}^2 - \underline{b}\underline{\psi}\underline{\phi} - \underline{c}\underline{\psi}\|^2 \quad (\text{IV.86})$$

où  $\dot{\bar{\phi}}$  et  $\dot{\underline{\phi}}$  sont les dérivées numériques calculées à partir de (IV.83). En discrétisant et en considérant le temps à l'instant  $k$ , on définit les matrices suivantes

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} \bar{\psi}(1)\bar{\phi}(1)^2 & \bar{\psi}(1)\bar{\phi}(1) & \bar{\psi}(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{\psi}(k)\bar{\phi}(k)^2 & \bar{\psi}(k)\bar{\phi}(k) & \bar{\psi}(k) \end{pmatrix} \quad (\text{IV.87})$$

et

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} \underline{\psi}(1)\underline{\phi}(1)^2 & \underline{\psi}(1)\underline{\phi}(1) & \underline{\psi}(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{\psi}(k)\underline{\phi}(k)^2 & \underline{\psi}(k)\underline{\phi}(k) & \underline{\psi}(k) \end{pmatrix} \quad (\text{IV.88})$$

Les paramètres  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  et  $\bar{c}$  sont estimés par

$$\begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \\ \bar{c} \end{pmatrix} = (\bar{M})^T V^{-1} (\bar{M})^{-1} \bar{M}^T V^{-1} \dot{\bar{\phi}} \quad (\text{IV.89})$$

et les paramètres  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$  et  $\underline{c}$  sont donnés par

$$\begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \\ \underline{c} \end{pmatrix} = (\underline{M})^T W^{-1} (\underline{M})^{-1} \underline{M}^T W^{-1} \dot{\underline{\phi}} \quad (\text{IV.90})$$

où  $W^{-1}$  est la matrice de covariance de  $\underline{M}$ .

En considérant un horizon de temps d'analyse  $I_p = [0, 30mn]$ , les paramètres  $\underline{a}$ ,  $\bar{a}$ ,  $\underline{b}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\underline{c}$  et  $\bar{c}$  sont donnés en synthèse dans le Tableau IV.1.

Paramètres estimés	
$\underline{a}$	$\bar{a}$
$-6.0909.10^{-4}$	$-5.7297.10^{-4}$
$\underline{b}$	$\bar{b}$
0.0117	0.0131
$\underline{c}$	$\bar{c}$
-0.0569	-0.0757

**Tableau IV.1** – Résultat de l'identification des paramètres par intervalle

Finalement, les paramètres des modèles des bornes inférieure et supérieure de l'état de dégradation ont été estimés à partir des observations obtenues sur l'horizon de temps d'analyse  $[0, T_p]$ .

### IV.3.3 Prédictions du temps de vie restant

Dans la suite, l'objectif est d'estimer le temps de vie restant par intervalle sur l'horizon de temps  $]T_p, +\infty[$  pour l'application considérée, à partir du modèle de dégradation estimé dans le paragraphe précédent.

Les résultats obtenus sont illustrés dans la Figure IV.10 et les prédictions du temps de vie restant sont présentées dans le Tableau IV.2<sup>4</sup>.

$T_{RUL}$ de référence	$\underline{T}_{RUL}$	$\bar{T}_{RUL}$
64.2-30=34.2	54.2-30=24.1	67.9-30=37.9

**Tableau IV.2** – Prédiction du temps de vie restant pour  $I_p = [0, 30mn]$

Finalement, la prédiction du temps de vie restant par intervalle obtenue a nécessité de considérer un horizon de temps d'analyse  $I_p$  plus étendu que pour le cas des SNLETM (considéré au chapitre III). Cette prédiction du temps de vie restant par intervalle est de bonne qualité et permet d'anticiper de 24 minutes l'apparition d'une défaillance sur l'application considérée, pour le cas le plus pessimiste.

4.  $T_{RUL}$  de référence est donné comme élément de comparaison pour un exemple de trajectoire du système incertain

## IV.4. Conclusion

---

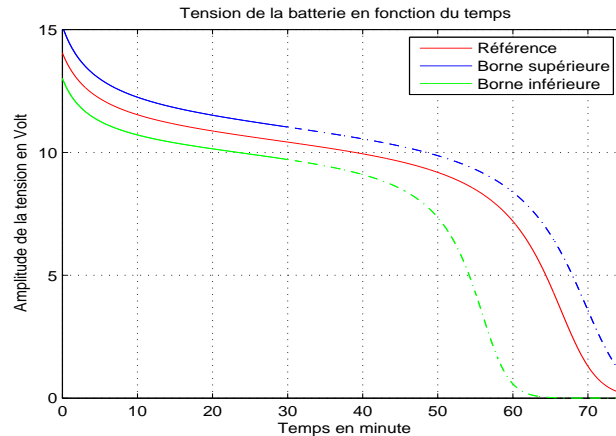


Figure IV.10 – Prédiction du temps de vie restant basée sur  $I_p = [0, 30mn]$

## IV.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit une méthodologie de pronostic pour les systèmes non linéaires incertains à échelle de temps multiple. Cette méthodologie est basée sur les observateurs non linéaires par intervalle et à entrée inconnue. Une extension des résultats de la littérature pour la synthèse de ces observateurs a été proposée. Les estimés obtenus sont utilisés afin d'identifier les paramètres des dynamiques de l'enveloppe de l'état de dégradation. A partir de ces modèles, une prédiction du temps de vie restant a été réalisée au travers d'une stratégie de calcul numérique d'espace accessible. Puis, la pertinence de cette méthodologie a été illustrée par des simulations réalisées sur un modèle d'oscillateur électromécanique. Il est à noter que l'obtention d'une prédiction performante du temps de vie restant nécessite néanmoins de considérer un horizon de temps d'analyse plus étendu que pour le cas des SNLETM. Ainsi, les résultats de prédiction du temps de vie restant par intervalle obtenus sont de bonne qualité. Ils permettent d'anticiper de 24 minutes, l'apparition d'une défaillance sur l'application considérée, pour le cas le plus pessimiste.





---

# Conclusion générale et perspectives

---

## Conclusion

Les travaux présentés dans cette thèse sont des contributions au problème du pronostic des systèmes complexes. Une première contribution a été dédiée aux définitions mathématiques des notions fondamentales utilisées pour le pronostic. Puis, le concept de pronostic a été défini en introduisant la notion de contrainte temporelle et a également été lié à la notion d'espace accessible en temps fini. Finalement, des définitions des concepts de diagnostic et de diagnostic prédictif ont été proposées.

Au cours de cette thèse, les travaux ont été dédiés à la problématique du pronostic à base de modèles. Pour ce faire, deux méthodologies du pronostic ont été proposées respectivement pour les SNLETM et les SNLIETM. Ainsi, dans la première méthodologie de pronostic, trois types d'observateurs à entrée inconnue ont été synthétisés. Les estimés obtenus par ces observateurs ont été utilisés afin d'identifier les paramètres de la dynamique de la dégradation. Puis, pour chacun des modèles obtenus, une prédiction du temps de vie restant a été estimée. La pertinence de la méthodologie de pronostic a été illustrée par des simulations sur un modèle d'oscillateur électromécanique. Parmi les trois observateurs synthétisés et les résultats obtenus, l'observateur à grand gain a fourni la meilleure performance de prédiction du temps de vie restant. Le résultat de prédiction a permis d'anticiper bien en amont l'apparition de la défaillance sur l'application considérée.

Par ailleurs, une deuxième méthodologie de pronostic pour les SNLIETM a été proposée. Cette méthodologie est basée sur la synthèse d'observateurs non linéaires par intervalle et à entrée inconnue. Une extension des résultats de la littérature pour la synthèse de ces observateurs

a été proposée. Les estimés obtenus sont utilisés afin d'identifier les paramètres des dynamiques de l'enveloppe de l'état de dégradation. A partir de ces modèles, une prédiction du temps de vie restant a été réalisée au travers d'une stratégie de calcul numérique d'espace accessible. Puis, la pertinence de cette méthodologie a été illustrée par des simulations sur un modèle d'oscillateur électromécanique. Ainsi, les résultats de prédiction du temps de vie restant par intervalle obtenus sont de bonne qualité. Ils permettent d'anticiper bien amont également l'apparition d'une défaillance sur l'application considérée, pour le cas le plus pessimiste.

## Perspectives

Les perspectives de travaux futurs pourraient se situer selon quatre orientations.

Dans la première méthodologie de pronostic proposée, le développement d'un observateur à grand gain adaptatif pourrait être envisagé, fournissant une estimation conjointe de l'état et de l'entrée inconnue, en temps fini. L'objectif serait de diminuer l'amplitude de l'erreur d'estimation, durant le phénomène transitoire de convergence. De plus, le développement de cet observateur pourrait être considéré dans un cas plus générique, que celui où l'entrée inconnue est affine par rapport à la fonction non linéaire de l'état du système, pour généraliser l'approche. Par ailleurs, l'identification des paramètres du modèle de comportement à dynamique lente pourrait être améliorée, en utilisant d'autres méthodes d'identification, fournissant une estimation non biaisée des paramètres à variance minimale (par exemple au travers de la méthode SRIVC<sup>5</sup>).

La seconde méthodologie de pronostic peut être également améliorée en optimisant les résultats obtenus à chaque étape. Ainsi, le développement d'un observateur non linéaire à grand gain par intervalle, dont la convergence est réalisée en temps fini, serait une amélioration intéressante. L'objectif pourrait être double. Premièrement, il s'agirait de généraliser l'application de la méthodologie de pronostic à d'autres classes de systèmes non linéaires incertains. Puis, la propriété de convergence en temps fini permettrait de connaître le temps à partir duquel les estimés sont précis et utilisables pour le pronostic. Par ailleurs, l'étape d'identification des paramètres par intervalle des bornes de comportement de la dégradation pourrait être améliorée, par l'utilisation de techniques d'identification à temps continu, basée sur l'erreur de sortie par optimisation non linéaire. L'intérêt pourrait être de s'affranchir du calcul des dérivées numériques des enveloppes de comportement de la dégradation. De plus, l'augmentation de la précision et de la finesse de l'estimation d'espace atteignable pourrait avoir un effet positif sur les performances du pronostic.

---

5. Simplified Refined Instrumental Variable method for Continuous-time models

#### IV.4. Conclusion

---

Par ailleurs, il pourrait être intéressant de relaxer l'hypothèse selon laquelle l'état de comportement à dynamique lente n'est pas mesuré. Puis de considérer que cet état est à présent partiellement mesuré. Le développement de nouvelles méthodologies de pronostic, intégrant cette nouvelle connaissance serait une contribution à la problématique du pronostic. L'utilisation d'autres types d'observateurs pourrait ainsi être explorée, afin d'estimer l'état non mesuré.

Finalement, le développement de nouvelles métriques d'évaluation des performances du pronostic pourrait être considéré. L'objectif serait de déterminer des métriques précises de convergence, et de précision des prédictions obtenues du temps de vie restant, au regard de l'horizon de temps d'observations disponible sur un système. Par ailleurs, un autre aspect serait de considérer la possibilité d'aborder le critère de la contrainte de l'implémentation en temps réel des algorithmes de pronostic dans un processus de surveillance de système.



---

## Liste des publications

---

[P1] D. Gucik-Derigny, R. Outbib, M. Ouladsine, "*A result on unknown input interval observer design with application to system prognosis*". 9<sup>th</sup> IEEE International Conference on Control and Automation, ICCA2011 , Chili, décembre 2011.

[P2] D. Gucik-Derigny, R. Outbib, M. Ouladsine, "*Prognosis applied to an electromechanical system, a nonlinear approach based on sliding mode observer*". Annual Conference on European Safety and Reliability Association, ESREL2011 , Troyes, France, septembre 2011.

[P3] D. Gucik-Derigny, R. Outbib, M. Ouladsine, "*Prognosis applied to an electromechanical system, a nonlinear approach based on high gain observer*". IEEE International Conference on Prognostics and Health Management, juin 2011, Denver, USA.

[P4] D. Gucik-Derigny, R. Outbib, M. Ouladsine, "*Diagnostic prédictif sous contrainte temporelle*". Conférence Internationale Francophone d'Automatique, CIFA 2010. Nancy, France. Juin 2010.

[P5] D. Gucik-Derigny, R. Outbib, M. Ouladsine, "*Estimation of Damage Behaviour for Model-Based-Prognosis*". 7th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes, SAFEPROCESS'09, IFAC. Barcelone, Espagne, juin 2009.

[P6] D. Gucik-Derigny, R. Outbib, M. Ouladsine, "*Predictive diagnosis under temporal constraint applied to an electromechanical system : a comparative approach based on observers*". IEEE Transactions on Reliability (en relecture).

[P7] D. Gucik-Derigny , R. Outbib, "*Prognosis of systems : concept, methodologies and application*" (soumis).

[P8] D. Gucik-Derigny, R. Outbib, M. Ouladsine, "*Pronostic des systèmes complexes à base d'observateurs non linéaires*". Journées Nationales-MACS, juin 2011.



---

## Références bibliographiques

---

- [1] A. Abdo, K. El-Tawil, S. Kadry, H. Noura, and M. Ouladsine. Analytic prognostic model for a dynamic system. *International Review of Automatic Control*, 3(6) :568–577, 2010.
- [2] E.A Adams and M. Nataraju. A nonlinear dynamical systems framework for structural diagnosis and prognosis. *International Journal of Engineering science*, 40 :1919–1941, 2002.
- [3] AFIS. *Découvrir et comprendre l'Ingénierie Système. Ouvrage collectif AFIS préparé par le Groupe de Travail Ingénierie Système*. 2009.
- [4] AFNOR. *Norme AFNOR NF EN 13306 "Terminologie de la maintenance"*. Ed. Afnor, Paris, 2001.
- [5] M. Althoff. *Reachability Analysis and its Application to the Safety Assessment of Autonomous Cars*. PhD thesis, Université de Munich, Allemagne, Février 2010.
- [6] M. Althoff, O. Stursberg, and M. Buss. Reachability analysis of linear systems with uncertain parameters and inputs. In *Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control, LNCS 2623*, pages 726–732, 2007.
- [7] M. Althoff, O. Stursberg, and M. Buss. Reachability analysis of nonlinear systems with uncertain parameters using conservative linearization. In *IEEE of the 47th Conference on Decision and Control*, pages 4042–4048, 2008.
- [8] M. Althoff, O. Stursberg, and M. Buss. Computing reachable sets of hybrid systems using a combination of zonotopes and polytopes. *Nonlinear Analysis : Hybrid Systems*, 4(2) :233–249, 2010.
- [9] A. Asarin, T. Dang, G. Frehse, A. Girard, C. Le Guernic, and O. Maler. Recent progress in continuous and hybrid reachability analysis. In *IEEE Conference on Computer Aided Control Systems Design*, pages 1582–1587, 2006.



- [10] Y. Asiedu and P. Gu. Product life cycle cost analysis : State of the art review. *International Journal of Production Research*, 1366-588X, 36(4) :883–908, 1998.
- [11] M. Azam, F. Tu, and K.G. Pattipati. Condition based predictive maintenance of industrial power systems. In *SPIE Conference on Fault Diagnosis, Prognosis and System Health Management, Orlando, 2002*.
- [12] W. Batko. *Prediction method in technical diagnostics*. Cracov Mining Academy, 1984.
- [13] M. Bengtsson. Standardization issues in condition based maintenance. In *Proceedings of the 16th International Congress on Condition Monitoring and Diagnostic Engineering Management*, pages 1–10, 2003.
- [14] O. Bernard and J.L. Gouze. Closed loop observers bundle for uncertain biotechnological models. *Journal of Process Control*, 14 :765–774, 2004.
- [15] S.P. Bhat and D.S. Bernstein. Geometric homogeneity with applications to finite-time stability. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 17 :101–127, 2000.
- [16] S.P. Bhat and D.S. Bernstein. Finite-time stability of continuous autonomous systems. *SIAM Journal of Control and Optomization*, 38(3) :751–766, 2005.
- [17] G.P. Box, G.M. Jenkins, and G.C. Reinsel. *Time series analysis forecasting and control*. Third Edition, Prentice Hall, San Francisco, USA, 1994.
- [18] C. Byington, M. Roemer, and T. Galie. Prognostic enhancements to diagnostic systems for improved condition-based maintenance. In *Proceedings of IEEE Aerospace Conference*, 2002.
- [19] C.S. Byington, M.J Roemer, and P.W. Kalgren. Verification and validation of diagnostic/prognostic algorithms. In *Machinery Failure Prevention Technology Conference (MFPT 59), Virginia Beach, VA, 2005*.
- [20] J.L. Casti. *Nonlinear system theory*. Academic Press Inc, Mathematics in Science and Engineering, 1985.
- [21] A. Chatterjee, J.P. Cusumano, and D. Chelidze. Optimal tracking of parameter drift in a chaotic system : Experiment and theory. *Journal of Sound and Vibration*, 250(5) :877–901, 2002.
- [22] D. Chelidze. *A nonlinear observer for damage evolution tracking*. PhD thesis, College School of Engineering Science and Mechanics, Pennsylvania State University, USA, May 2000.
- [23] D. Chelidze. Identifying multidimensional damage in a hierarchical dynamical system. *Nonlinear Dynamics*, 37(4) :307–322, 2004.
- [24] D. Chelidze and J.P. Cusumano. A dynamical systems approach to failure prognosis. *Journal of Vibration and Acoustics*, 126(1) :1–7, 2004.
-

## Références bibliographiques

---

- [25] D. Chelidze, J.P. Cusumano, and A. Chatterjee. Dynamical systems approach to damage evolution tracking, part 1 : Description and experimental application. *Journal of Vibration and Acoustics*, 124(2) :250–257, 2002.
- [26] D. Chelidze and M. Liu. Dynamical systems approach to fatigue damage identification. *Journal of Sound and Vibration*, 281(3-5) :887–904, 2005.
- [27] D. Chelidze and M. Liu. Multidimensional damage identification based on phase space warping : an experimental study. *Journal of Sound and Vibration*, 46(1-2) :61–72, 2006.
- [28] D. Chelidze and M. Liu. Reconstructing slow-time dynamics from fast-time measurements. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 366 :7429–7445, 2008.
- [29] D. Chelidze and W. Zhou. Phase space warping : Nonlinear time series analysis for slowly drifting systems. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 364 :2495–2513, 2006.
- [30] D. Chelidze and W. Zhou. Smooth orthogonal decomposition based modal analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 292(3-5) :461–473, 2006.
- [31] Z. Chen and D.H. Zhou. Particle filtering based fault prediction of nonlinear systems. In *IFAC Symposium Proceedings of Safeprocess*, 2003.
- [32] R.B. Chinnam and P. Baruah. Autonomous diagnostics and prognostics through competitive learning driven hmm-based clustering. In *Proceedings of the international Joint Conference on Neural Networks*, volume 1-4, pages 2466–2471, 2003.
- [33] A. Chutinan and B.H. Krogh. Computation techniques for hybrid system verification. *IEEE Transactions on Automatic and Control*, 48 :64–75, 2003.
- [34] C. Clarotti, A. Lannoy, S. Odin, and Procaccia H. Detection of equipment aging and determination of the efficiency of a corrective measure. *Reliability Engineering and System Safety*, 84(1) :57–64, 2004.
- [35] P. Cochetoux. *Contribution à la maintenance proactive par la formalisation du processus de pronostic des performances de systèmes industriels*. Thèse de doctorat, Université Henri Poincaré, Nancy I, France, novembre 2010.
- [36] D.W. Coit and J.R. English. System reliability modeling considering the dependence of component environmental influences. In *Annual Proceedings of Reliability and Maintainability Symposium*, pages 214–218, 1999.
- [37] J.P. Cusumano, D. Chelidze, and A. Chatterjee. Dynamical systems approach to damage evolution tracking, part 2 : Model-based validation and physical interpretation. *Journal of Vibration and Acoustics*, 124(2) :258–264, 2002.
- [38] M. Darouach, M. Zasadzinski, and L. Boutat-Baddas. Discussion on "a comparison of sliding mode and unknown observer for fault reconstruction". *European Journal of Control*, 12(3) :261–266, 2006.

- [39] M. Darouach, M. Zasadzinski, and S.J. Xu. Full-order observer for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic and Control*, 39(3) :606–609, 1994.
- [40] H.R. Depold and F.D. Gass. The application of expert systems and neural networks to gas turbine prognostics and diagnostics. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 121(4) :607–613, 1999.
- [41] M. Dievart. *Architecture de diagnostic et de pronostic distribuées de Systèmes Techniques Complexes de Grande Dimension*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, France, décembre 2010.
- [42] M. Dong and D. He. Hidden semi markov model-based methodology for multi-sensor equipment health diagnosis and prognosis. *European Journal of Operational Research*, 178(3) :858–878, 2007.
- [43] M. Dong and D. He. A segmental hidden semi-markov model (hsmm)-based diagnostics and prognostics framework and methodology. In *Mechanical Systems and Signal Processing*, volume 21, pages 2248–2266, 2007.
- [44] O.E. Dragomir, R. Gouriveau, F. Dragomir, E. Minca, and N. Zerhouni. Review of prognostic problem in condition-based maintenance. *European Control Conference, Budapest (Hungary)*, 2009.
- [45] H. El Aoufir and D. Bouami. Place des modèles d’optimisation dans le processus d’aide à la décision en maintenance. *Revue française de gestion industrielle*, 22(3) :61–76, 2003.
- [46] M. El Koujok. *Contribution au pronostic industriel : intégration de la confiance à un modèle prédictif neuro-flou*. Thèse de doctorat, Université de Franche Comté, France, septembre 2010.
- [47] E.H El Yaagoubi, A. El Assoudi, and H. Hammouri. High gain observer : Attenuation of the peak phenomena. *American Control Conference*, 5 :4393–4397, 2004.
- [48] R. Engel and G. Kreisselmeier. A continuous-time observer which convergences in finite time. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(7) :1202–1204, 2002.
- [49] S.J Engel, B.J Gilmartin, K. Bongort, and A. Hess. Prognostics, the real issues involved with predicting life remaining. In *IEEE Proceedings Conference on Aerospace, New York*, volume 6, pages 457–469, 2000.
- [50] M. Farza, M. M’Saad, M. Triki, and T. Maatoug. High gain observer for a class of non-triangular systems. *Systems and Control Letters*, 60 :27–35, 2011.
- [51] A. Fatemi and L. Yang. Cumulative fatigue damage and life prediction theories : a survey of the state of the art for homogeneous materials. *International Journal of Fatigue*, 20(1) :9–34, 1998.
- [52] M.S. Finkelstein. Wearing-out of components in a variable environment. *Reliability Engineering and System Safety*, 66(3) :235–242, 1999.

## Références bibliographiques

---

- [53] M. Fliess, C. Join, and H. Sira-Ramirez. Nonlinear estimation is easy. *International Journal of Modelling Identification and Control*, 4 :12–27, 2008.
- [54] A.M. Fraser and H.L. Swinney. Independent coordinates for strange attractors from mutual information. *Physical Review A*, 33 :1134–1140, 1986.
- [55] L. Fridman, Y. Shtessel, C. Edwards, and X. G. Yan. Higher order sliding-mode observer for state estimation and input reconstruction in nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, pages 339–412, 2007.
- [56] J.P. Gauthier, H. Hammouri, and S. Othman. A simple observer for nonlinear systems - application to bioreactors. *IEEE Transactions on Automatic and Control*, 37 :875–880, 1992.
- [57] A. Girard. Reachability of uncertain linear systems using zonotopes. *Hybrid Systems : Computation and Control*, 3414 :291–305, 2005.
- [58] A. Girard and C. Le Guernic. Efficient reachability analysis for linear systems using support functions. In *17th IFAC World Congress*, pages 8966–8971, 2008.
- [59] A. Girard, C. Le Guernic, and O. Maler. Efficient computation of reachable sets of linear time-invariant systems with inputs. *Hybrid Systems : Computation and Control*, LNCS 3927 :257–271, 2006.
- [60] K.M. Goh, B. Tjahjono, T. Baines, and S. Subramaniam. A review of research in manufacturing prognostics. In *IEEE International Conference on Industrial Informatics*, pages 417–422, 2006.
- [61] S. Goldman. *Vibration spectrum analysis : A practical approach*. Industrial Press, New York, 1999.
- [62] J.L. Gouzé, A. Rapaport, and Z. Hadj-Sadok. Intervals observers for uncertain biological systems. *Ecological Modelling*, 133 :45–56, 2000.
- [63] A. Grall, C. Bérenguer, and L. Dieulle. A condition-based maintenance policy for stochastically deteriorating systems. *Reliability Engineering and System Safety*, 76(2) :167–180, 2002.
- [64] F. Greitzer and A. Pawlowski. Embedded prognostics health monitoring. In *48th Annual Instrumentations, Systems, and Automation Society International Instrumentation Symposium, San Diego*, 2002.
- [65] Y. Guan and M. Saif. A novel approach to the design of unknown inputs observers. *IEEE Transactions on Automatic and Control*, 36(5) :632–635, 1991.
- [66] D. Gucik-Derigny, R. Outbib, and M. Ouladsine. Estimation of damage behaviour for model-based-prognosis. In *7th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes, SAFEPROCESS'09, IFAC*, 2009.

- [67] D. Gucik-Derigny, R. Outbib, and M. Ouladsine. Diagnostic prédictif sous contrainte temporelle. In *Conférence Internationale Francophone d'Automatique, CIFA, Nancy*, 2010.
- [68] D. Gucik-Derigny, R. Outbib, and M. Ouladsine. Prognosis applied to an electromechanical system, a nonlinear approach based on high gain observer. In *IEEE International Conference on Prognostics and Health Management, Denver, USA*, 2011.
- [69] D. Gucik-Derigny, R. Outbib, and M. Ouladsine. Prognosis applied to an electromechanical system, a nonlinear approach based on sliding mode observer. In *Annual Conference on European Safety and Reliability Association, ESREL2011, Troyes, France*, 2011.
- [70] D. Gucik-Derigny, R. Outbib, and M. Ouladsine. A result on unknown input interval observer design with application to system prognosis. In *9<sup>th</sup> IEEE International Conference on Control and Automation, ICCA2011, Chile*, 2011.
- [71] Q.P. Ha and H. Trinh. State and input simultaneous estimation for a class of nonlinear systems. *Automatica*, 40(10) :1779–1785, 2004.
- [72] Llinas J. Hall, L.D. *Handbook of sensor fusion*. West Palm Beach, FL. : CRC Press, 2000.
- [73] J. Han and M. Kamber. *Data Mining : Concepts and Techniques*. Elsevier, 2006.
- [74] A. Heng, S. Zhang, A. Tan, and J. Mathew. Rotating machinery prognostics : State of the art, challenges and opportunities. *Mechanical Systems and Signal Processing*, pages 724–739, 2009.
- [75] F. Hlawatsch and F. Auger. *Time frequency analysis : concepts and methods*. ISTE and Wiley, 2009.
- [76] K. Holmberg, A. Adgar, and A. Arnaiz. *E-maintenance*. Springer, 511 pages, 2010.
- [77] M. Hou and P.C. Müller. Design of observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic and Control*, 37 :871–875, 1992.
- [78] D.J. Inman. *Damage prognosis : for aerospace, civil and mechanical systems*. John Wiley and Sons, 2005.
- [79] M.R. James. Finite time observers and observability. *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*, 2 :770–771, 1990.
- [80] A. Jardine and D. Banjevic. Interpretation of inspection data emanating from equipment condition monitoring tools : Method and software. In *Fourth International Conference on Mathematical Methods in Reliability Methodology and Practice*, 2004.
- [81] A. Jardine, D. Lin, and D. Banjevic. A review on machinery diagnostics and prognostics implementing condition-based maintenance. *Transactions on Mechanical Systems and Signal Processing*, 20 :1483–1510, 2006.

## Références bibliographiques

---

- [82] L. Jaulin, I. Braems, M. Kieffer, and E. Walter. Guaranteed nonlinear estimation using constraint propagation on sets. *International Journal of Control*, 74(18) :1772–1782, 2001.
- [83] L. Jaulin, M. Kieffer, O. Didrit, and E. Walter. *Applied Interval Analysis*. Springer, London, 2001.
- [84] C.D. Johnson. On observers for linear systems with unknown and inaccessible inputs. *International Journal of Control*, 14 :825–831, 1975.
- [85] T. Johnson and T. Dasu. Data quality and data cleaning : an overview. In *Proceedings of the 2003 ACM SIGMOD international conference on Management of data*, 2003.
- [86] I.T. Jolliffe. *Principal component analysis*. Springer, 2002.
- [87] G.J. Kacprzynski, M.J. Roemer, A. Modgil, A. Palladino, and K. Maynard. Enhancement of physics-of-failure prognostic models with system level features. In *IEEE Aerospace Conference, Big Sky, USA*, 2002.
- [88] G.J. Kacprzynski, A. Sarlashkar, and M.J. Roemer. Predicting remaining useful life by fusing the physics of failure modeling with diagnostics. *Journal of Metal*, 56 :29–35, 2004.
- [89] R.E. Kalman, P.L. Falb, and A. Arbib. *Topics in mathematical system theory*. McGraw-Hill, 1969.
- [90] H. Kantz and T. Schreiber. *Nonlinear time series analysis*. Cambridge Press, 2004.
- [91] K. Kazmierczak. Application of regressive prognostic techniques in diagnostics. In *Proceedings of the Vehicle Diagnostics Conference, Tuczno, Poland*, 1983.
- [92] V.A. Kopnov. Optimal degradation processes control by two-level policies. *Reliability Engineering and System Safety*, 66(1) :1–11, 1999.
- [93] R. Kothamasu, S.H. Huang, and W.H. VerDuin. System health monitoring and prognostics : a review of current paradigms and practices. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 28 (9-10) :1012–1024, 2006.
- [94] A. Kurzhanski and I. Valyi. *Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control*. Birkhäuser, Boston, 1997.
- [95] A.B. Kurzhanskiy and P. Varaiya. Ellipsoidal techniques for reachability analysis. *Hybrid Systems : Computation and Control*, LNCS 1790 :202–214, 2000.
- [96] C. Kwan, X. Zhang, R. Xu, and L. Haynes. A novel approach to fault diagnostics and prognostics. In *Proceedings of the international Conference on Robotics and Automation*, volume 1-3, pages 604–609, 2003.
- [97] G. Lafferriere, G.J. Pappas, and S. Yovine. Symbolic reachability computation families of linear vector fields. *Symbolic Computation*, 32 :231–253, 2001.

- [98] M. Lebold and M. Thurston. Open standards for condition-based maintenance and prognostic systems. In *Proceedings of the 5th Annual Maintenance and Reliability Conference (MARCON 2001), Gatlinburg, USA*, 2001.
- [99] J. Lee. E-manufacturing - fundamental, tools, and transformation. *Robotics and Computer Integrated Manufacturing*, 19 :501–507, 2003.
- [100] J. Lee, J. Ni, D. Djurdjanovic, H. Qiu, and H. Liao. Intelligent prognostics tools and e-maintenance. *Computers in Industry*, 57 :476–489, 2006.
- [101] J. Lemaitre. *On Course on Damage Mechanics*. Springer, Berlin Heidelberg New York 1992-1996, 1992.
- [102] J. Lemaitre and R. Desmorat. *Engineering damage mechanics*. Springer, 2005.
- [103] G.A. Lesieutre, L. Fang, and U. Lee. Hierarchical failure simulation for machinery prognostics. *Critical Link : Diagnosis to Prognosis, Haymarket*, pages 103–110, 1997.
- [104] Y. Li, S. Billington, C. Zhang, T. Kurfess, and S. Danyluk. Adaptive prognostics for rolling element bearing condition. *Mechanical System and Signal Processing*, 20 :1483–1510, 1999.
- [105] Y. Li, T. Kurfess, and S.Y. Liang. Stochastic prognostics for rolling element bearings. *Mechanical System and Signal Processing*, 14 :747–762, 2000.
- [106] F.L. Liu, M. Farza, and M. M Saad. Nonlinear observers for state and unknown inputs estimation. *International Journal of Modelling, Identification and Control*, pages 24–32, 2007.
- [107] M. Liu and D. Chelidze. Identifying damage using local flow variation method. *Smart Materials and Structures*, 15(6) :1830–1836, 2006.
- [108] J. Luo, K.R. Pattipati, L. Qiao, and S. Chigusa. Model-based prognostic techniques applied to a suspension system. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, PART A : Systems and Humans*, 38(5) :1156–1168, 2008.
- [109] S. Mallat. *A wavelet tour of signal processing : the sparse way*. Elsevier, 2009.
- [110] F. Mazenc and O. Bernard. Asymptotically stable interval observers for planars systems with complex poles. *IEEE Transactions of Automatic and Control*, 55 :523–527, 2010.
- [111] F. Mazenc and O. Bernard. Interval observers for linear time-invariant systems with disturbances. *Automatica*, 47(1) :140–147, 2010.
- [112] M. Mboup, C. Join, and M. Fliess. Numerical differentiation with annihilators in noisy environment. *Numerical Algorithms*, 50 :439–467, 2009.
- [113] J.S. Meditch and G.H. Hostetter. Observers for systems with unknown and inaccessible inputs. *International Journal of Control*, 19 :473–480, 1974.
- [114] T. Menard, E. Moulay, and W. Perruquetti. A global high-gain finite-time observer. *IEEE Transactions on Automatic and Control*, 55(6) :1500–1506, 2010.
-

## Références bibliographiques

---

- [115] P.H. Menold. *Finite time and asymptotic time state estimation for linear and nonlinear systems*. PhD thesis, Institute for Systems and Automatic Control, University of Stuttgart, Allemagne, 2004.
- [116] P.H. Menold, R. Findeisen, and F. Allgöwer. Finite time convergent observers for linear time-varying systems. In *Proceedings of the Mediterranean Conference on Control and Automation*, 2003.
- [117] P.H. Menold, R. Findeisen, and F. Allgöwer. Finite time convergent observers for nonlinear systems. In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, 2003.
- [118] M.A. Miner. Cumulative damage in fatigue. *Journal of Applied Mechanics*, 12(3) :159–164, 1945.
- [119] M. Müller. Über das fundamentaltheorem in der theorie gewöhnlichen differentialgleichungen. *Maths Z.*, 26 :619–645, 1926.
- [120] S. Moaveni. *Finite element analysis : theory and application with ANSYS*. Pearson Prentice Hall, 2008.
- [121] M. Moisan and O. Bernard. Interval observers for non monotone systems. application to bioprocess models. In *16th IFAC world Conference. Prague, Czech Republic*, 2005.
- [122] M. Moisan and O. Bernard. Semi-global finite-time observers for nonlinear systems. *Automatica*, 44(12) :3152–3156, 2008.
- [123] M. Moisan and O. Bernard. Robust interval observers for global lipschitz uncertain chaotic systems. *Systems and control letters*, 59 :687–694, 2010.
- [124] M. Moisan, O. Bernard, and J.L. Gouzé. Near optimal interval observers bundle for uncertain bioreactors. *Automatica*, 45 :291–295, 2009.
- [125] E. Moulay and W. Perruquetti. Finite-time stability and stabilization of a class of continuous systems. *Journal of Mathematical Analysis and Application*, 323(2) :1430–1443, 2003.
- [126] E. Moulay and W. Perruquetti. Finite-time stability of nonlinear systems. In *IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3641–3646, 2003.
- [127] A. Muller. *Contribution à la maintenance prévisionnelle des systèmes de production par la formalisation d'un processus de pronostic*. Thèse de doctorat, Université Henri Poincaré Nancy I, France, juin 2005.
- [128] C.H. Oppenheimer and K.A Loparo. Physically based diagnosis and prognosis of cracked rotor shafts. *Component and Systems Diagnostics, Prognostics and Health Management II*, 4733 :122–132, 2002.
- [129] M. Orchard, B. Wu, and G. Vachtsevanos. A particle filtering framework for failure prognosis. In *WTC2005 World Tribology Congress III, Washington, D.C, USA*, 2005.



- [130] M.E. Orchard. *A particle Filtering-based Framework for On-line Fault Diagnosis and Failure Prognosis*. PhD thesis, School of Electrical and Computer Engineering, Georgia Institute of Technology, USA, august 2006.
- [131] R. Ouladsine and R. Outbib. A probabilistic approach for prognosis of complex systems. In *1<sup>st</sup> IEEE Australian Control Conference 2011, Australia*, 2011.
- [132] R. Ouladsine and R. Outbib. Prognosis of complex systems by analysis damage trajectory. In *9<sup>th</sup> IEEE International Conference on Control and Automation, ICCA2011, Chile*, 2011.
- [133] R. Outbib and D. Gucik-Derigny. Prognosis of systems : concept, methodologies and application. *Soumis*, 2011.
- [134] K. Passino and K. Burgess. *Stability analysis of discrete event systems*. Wiley, 1998.
- [135] R. Patrick-Adalco. *A Model Based Framework for Fault Diagnosis and Prognosis of Dynamical Systems with an application to Helicopter Transmissions*. PhD thesis, School of Electrical and Computer Engineering, Georgia Institute of Technology, USA, august 2007.
- [136] F. Peysson. *Contribution au pronostic des systèmes complexes*. Thèse de doctorat, Université Paul Cézanne, Aix-Marseille III, France, décembre 2009.
- [137] F. Peysson, M. Ouladsine, R. Outbib, J.B. Leger, O. Myx, and C. Allemand. A generic prognostic methodology using damage trajectory models. *IEEE Transactions on Reliability*, 58(2) :277–285, 2009.
- [138] A.G. Piersol, T.L. Paez, and C.M. Harris. *Harris's shock and vibration handbook*. Mc Graw-Hill, 2009.
- [139] J. Qiu, C. Zhang, B.B. Seth, and S.Y. Liang. Damage mechanics approach for bearing life time prognostics. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 16 :817–829, 2002.
- [140] T. Raff, F. Lachner, and F. Allgower. A finite time unknown input observer for linear systems. In *Mediterranean Conference on Control and Automation*, 2006.
- [141] S.S Rao. *Reliability based design*. McGraw-Hill, New-York, 1992.
- [142] A. Rapaport and J.L. Gouze. Parallelotopic and practical observers for nonlinear uncertain systems. *International Journal of Control*, 76 :237–251, 2003.
- [143] I. Rasovska, B. Chebel-Morello, and N. Zerhouni. Classification des différentes architectures en maintenance. *7e Congrès international de génie industriel, Trois-Rivières, Québec (CANADA)*, 23 :1–12, 2007.
- [144] T. Raïssi, D. Efimov, and A. Zolghadri. Asymptotically stable interval observers for planars systems with complex poles. *Automatica*, (A paraître), 2011.
- [145] A. Ray and S. Tangirala. Stochastic modeling of fatigue crack dynamics for on-line failure prognostics. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 4 :443–451, 1996.

## Références bibliographiques

---

- [146] E. Reynaud. Développement durable et entreprise : vers une solution symbiotique. In *Journée AIMS, Atelier Développement durable, Angers.*, pages 1–15, 2003.
- [147] P. Ribot. *Vers l'intégration diagnostic/pronostic pour la maintenance des systèmes complexes*. Thèse de doctorat, Université de Toulouse, France, décembre 2009.
- [148] M.J. Roemer, C.S Byington, G.J. Kacprzinski, and G. Vachtsevanos. An overview of selected technologies with reference to integrated phm architecture. In *First International Forum on Integrated System Health Engineering and Management in Aerospace, Napa Valley, California, USA*, 2005.
- [149] M.J. Roemer, E.O Nwadiogbu, , and G. Bloor. Development of diagnostic and prognostic technologies for aerospace health management applications. In *IEEE Proceedings on Aerospace Conference*, volume 6, pages 3139–3147, 2001.
- [150] A. Saxena, J. Celaya, E. Balaban, S. Saha, B. Saha, and M. Schwarbacher. Metrics for evaluating performance of prognostics techniques. *2008 International Conference on Prognostics and Health Management, Denver, CO, USA*, 2008.
- [151] A. Saxena, J. Celaya, B. Saha, S. Saha, and K. Goebel. On applying the prognostic performance metrics. *Proceedings of the 1th Annual Conference of the Prognostics and Health Management Society, San Diego, CA*, 2009.
- [152] H.L. Smith. *Monotone dynamical systems : an introduction to the theory of competitive and cooperative systems*. American Mathematical Society, 1995.
- [153] O. Sénéchal. *Pilotage des systèmes de production vers la performance globale, Habilitation à diriger des Recherches*. Thèse de doctorat, Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, 2004.
- [154] K. Sobczyk, B.F. Spencer, and S.R Winterstein. *Random fatigue : from data to theory*. Academic Press, 1993.
- [155] E. Sontag. *Mathematical control theory : deterministic finite dimensional systems*. Springer, 1998.
- [156] A.N. Steinberg and C.L. Bowman. Revisions to the jdl data fusion model. In *Proceedings of the third NATO/IRIS conference, Québec city, Canada*, 1998.
- [157] D.C. Swanson. A general prognostic tracking algorithm for predictive maintenance. In *IEEE Proceedings of Aerospace Conference*, volume 6, pages 2971–2977, 2001.
- [158] L. Swanson. Linking maintenance strategies to performance. *International Journal of Production Economics*, 70(3) :237–244, 2001.
- [159] K. Swearingen, W. Majkowski, B. Bruggeman, D. Gilbertson, J. Dunsdon, and B. Sykes. An open system architecture for condition based maintenance overview. *IEEE Conference on Aerospace*, pages 1–8, 2007.
- [160] M. Triki. *Synthèse d'observateurs pour des classes de systèmes non linéaires*. Thèse de doctorat, Université de Caen, France, août 2011.

- [161] G. Vachtsevanos. Performance metrics for fault prognosis of complex systems. In *IEEE Readiness Technology Conference*, pages 341–345, 2003.
- [162] G. Vachtsevanos, F. Lewis, M. Roemer, A. Hess, and B. Wu. *Intelligent Fault Diagnosis and Prognosis for Engineering Systems*. John Wiley and Sons, 2006.
- [163] O. Vasile. *Contribution au pronostic de défaillances par réseau neuro-flou : maîtrise de l'erreur de prédiction*. Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté, France, octobre 2008.
- [164] V. Venkatasubramanian, R. Raghunathan, and S.N. Kavuri. A review of process fault detection and diagnosis part ii : Qualitative models and search strategies. *Computers and Chemical Engineering*, 27 :313–326, 2003.
- [165] V. Venkatasubramanian, R. Raghunathan, S.N. Kavuri, and K. Yin. A review of process fault detection and diagnosis part iii : Process history based methods. *Computers and Chemical Engineering*, 27 :327–346, 2003.
- [166] V. Venkatasubramanian, R. Raghunathan, and K. Yin. A review of process fault detection and diagnosis part i : Quantitative model-based methods. *Computers and Chemical Engineering*, 27 :293–311, 2003.
- [167] N.M. Vichare and M.G. Pecht. Prognostics and health management of electronics. *IEEE Transactions on Components and Packaging Technologies*, 29(1) :222–229, 2006.
- [168] G.Z. Voyiadjis and P.I. Kattan. *Damage Mechanics*. Taylor and Francis, 2005.
- [169] W. Wang, F. Golnaraghi, and F. Ismail. A robust prognostic system for real-time industrial applications. In *4th International Conference on Industrial Automation, Montreal, Canada*, 2003.
- [170] X. Wang, Y. Gang, M. Koc, and J. Lee. Wavelet neural network for machining performance assessment and its implications to machinery prognostics. In *54th International Conference on Managing Innovations in Manufacturing*, 2002.
- [171] T. Wireman. *Developing performance indicators for managing maintenance*. Industrial press, 2005.
- [172] Y. Xiong and M. Saïf. Unknown disturbance inputs estimation based on a state functional observer design. *Automatica*, 39 :1389–1398, 2003.
- [173] T. Yan, T. Lee, and M. Koç. Predictive algorithm for machine degradation detection using logistic regression. In *Managing innovative manufacturing "e-Manufacturing and e-Business integration" (MIM2002)*, 2002.
- [174] F. Yang and R.W. Wilde. Observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic and Control*, 33 :677–681, 1988.
- [175] S.K. Yang. An experiment of state estimation for predictive maintenance using kalman filter on a dc motor. *Reliability Engineering and System Safety*, 75 :338–353, 2002.

## Références bibliographiques

---

- [176] A. Zemouri. *Contribution à la surveillance des systèmes de production à l'aide de réseaux de neurones dynamiques : Application à la e-maintenance*. Thèse de doctorat, Université de Franche Comté, France, 2003.
- [177] M. Zemouri, D. Racoceanu, and N. Zerhouni. Réseaux de neurones récurrents à fonctions à bases radiales : Rrfr, application au pronostic. *Revue d'intelligence artificielle, RSTI série RIA*, 16 :307–338, 2002.
- [178] X. Zhang, R. Xu, C. Kwan, S.Y. Liang, Q. Xie, and L. Haynes. An integrated approach to bearing fault diagnostics and prognostics. In *Proceedings of American Control Conference*, pages 2750–2755, 2005.
- [179] V. Zille. *Modélisation et évaluation des stratégies de maintenance complexes sur des systèmes multi-composants*. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Troyes, France, janvier 2009.



---

# Index des illustrations

---

I.1	L'architecture Prognostic and Health Management . . . . .	8
I.2	Retour d'information PHM sur les cinq étapes du cycle de vie du système . . .	9
I.3	Causalité et modes de fonctionnement d'un système . . . . .	14
I.4	Évolution de la dégradation . . . . .	14
I.5	Roulement à billes . . . . .	15
I.6	Classification des approches liées au pronostic [98] . . . . .	16
I.7	Analyse structurelle d'une boîte de transmission d'hélicoptère [135] . . . . .	24
I.8	Représentation de l'oscillateur électromécanique [22] . . . . .	26
I.9	Estimation de l'état de décharge de la batterie [22] . . . . .	26
I.10	Schéma d'une suspension d'un demi-véhicule [108] . . . . .	27
I.11	Évolution de l'indicateur de dégradation pour trois profils de routes [108] . . .	28
I.12	Évolution de la dégradation et dérive du paramètre de raideur du ressort [108] .	28
I.13	Horizon de pronostic . . . . .	30
I.14	Performance $\alpha - \lambda$ . . . . .	30
I.15	Système comme un ensemble de composants . . . . .	32
I.16	Les différentes stratégies de maintenance . . . . .	34
I.17	Coûts en fonction de la disponibilité du système . . . . .	36
I.18	Les challenges du pronostic [74] . . . . .	37
II.1	Notion de système . . . . .	43

II.2	Système à évènements discrets . . . . .	44
II.3	Représentation d'espace accessible . . . . .	47
II.4	Ensemble Système-Actionneurs-Capteurs . . . . .	48
II.5	Découpage temporel pour le pronostic . . . . .	50
II.6	Comportement de la propagation d'une fissure . . . . .	54
II.7	Bifurcation transcritique modélisant la naissance d'une fissure . . . . .	55
II.8	Bifurcation influençant la croissance d'une fissure avec arrêt de plasticité [2] . . . . .	56
II.9	Système électromécanique : cas d'une seule batterie . . . . .	61
II.10	Évolution du paramètre $L(\phi)$ . . . . .	63
II.11	Système électromécanique : cas de deux batteries . . . . .	64
III.1	Méthodologie de pronostic . . . . .	71
III.2	Estimé $\hat{x}_1$ de l'état $x_1$ . . . . .	85
III.3	Estimé $\hat{x}_2$ de l'état $x_2$ . . . . .	85
III.4	Estimé $\hat{v}$ de l'entrée inconnue $v$ . . . . .	85
III.5	Estimé $\hat{\psi}$ de l'état $\psi$ . . . . .	86
III.6	Estimé $\hat{\phi}$ de l'état $\phi$ . . . . .	86
III.7	Estimé $\hat{\dot{\phi}}$ de $\dot{\phi}$ . . . . .	86
III.8	Estimé $\hat{x}_1$ de l'état $x_1$ . . . . .	89
III.9	Estimé $\hat{x}_2$ de l'état $x_2$ . . . . .	89
III.10	Estimé $\hat{\psi}$ de l'état $\psi$ . . . . .	90
III.11	Estimé $\hat{\phi}$ de l'état $\phi$ . . . . .	90
III.12	Estimé $\hat{\dot{\phi}}$ de $\dot{\phi}$ . . . . .	90
III.13	Estimé $\hat{x}_1$ de l'état $x_1$ . . . . .	92
III.14	Estimé $\hat{x}_2$ de l'état $x_2$ . . . . .	92
III.15	Estimé $\hat{\psi}$ de l'état $\psi$ . . . . .	93
III.16	Estimé $\hat{\phi}$ de l'état $\phi$ après traitement numérique . . . . .	93
III.17	Estimé $\hat{\dot{\phi}}$ de l'état $\dot{\phi}$ après traitement numérique . . . . .	93
III.18	Pronostic à base de l'observateur linéaire à entrée inconnue . . . . .	97
III.19	Pronostic à base de l'observateur à grand gain à entrée inconnue . . . . .	98
III.20	Pronostic à base de l'observateur à mode glissant à entrée inconnue . . . . .	98

## Index des illustrations

---

III.21 Estimation de la tension de la batterie 1 . . . . .	101
III.22 Estimation de la tension de la batterie 2 . . . . .	101
IV.1 Description de la stratégie de pronostic . . . . .	106
IV.2 Majoration par une fonction dérivable . . . . .	116
IV.3 Prédiction du temps de vie restant par utilisation de l'encadrement . . . . .	118
IV.4 Stratégie du calcul de l'espace atteignable . . . . .	121
IV.5 Enveloppes inférieure et supérieure de l'état $x_1$ . . . . .	127
IV.6 Enveloppes inférieure et supérieure de l'état $x_2$ . . . . .	127
IV.7 Enveloppes inférieure et supérieure de l'état $x_3$ . . . . .	128
IV.8 Enveloppes inférieure et supérieure de l'entrée inconnue $\phi$ . . . . .	128
IV.9 Enveloppes inférieure et supérieure de la dynamique de l'entrée inconnue $\dot{\phi}$ . . . . .	128
IV.10 Prédiction du temps de vie restant basée sur $I_p = [0, 30mn]$ . . . . .	131
A.1 Sous-système électromagnétique [37] . . . . .	159





---

# Index des tableaux

---

I.1	Avantages et inconvénients des trois approches de pronostic . . . . .	29
II.1	Valeurs numériques des paramètres des modèles [24], [37] . . . . .	65
III.1	Valeurs numériques liées à l'observateur à grand gain . . . . .	88
III.2	Valeurs numériques liées à l'observateur à mode glissant . . . . .	92
III.3	Identification des paramètres pour l'observateur à grand gain . . . . .	96
III.4	Identification des paramètres pour l'observateur à mode glissant . . . . .	96
III.5	Résumé des prédictions du temps de vie restant $I_p = [0, 25mn]$ . . . . .	99
III.6	Résumé des prédictions du temps de vie restant pour $I_p = [0, 15mn]$ . . . . .	99
III.7	Résumé des prédictions du temps de vie restant pour $I_p = [0, 15mn]$ . . . . .	99
III.8	Résumé des prédictions du temps de vie restant pour $I_p = [0, 15mn]$ . . . . .	101
IV.1	Résultat de l'identification des paramètres par intervalle . . . . .	130
IV.2	Prédiction du temps de vie restant pour $I_p = [0, 30mn]$ . . . . .	130



## ANNEXE A

---

# Modélisation du système électromécanique

---

L'objectif de cette annexe est de présenter les étapes conduisant au modèle décrivant l'évolution du système électromécanique présenté dans la section II.4.

Le système est modélisé (voir [37]) sur la base d'un oscillateur de Duffing à un degré de liberté, à partir des équations de Lagrange. Deux hypothèses ont été émises pour l'élaboration de ce modèle. Les effets de la gravité et les pertes d'énergie par courants de Foucault dans le pendule avec sa masse, sont négligés à des fins de simplicité. En négligeant les effets de la gravité, ceci introduit un terme d'erreur non linéaire faible qui est intégré dans le coefficient de ressort de torsion  $k$ . Les pertes par courant de Foucault sont intégrées dans le coefficient d'amortissement de torsion  $c$ , et dans les résistances du circuit de la partie électromagnétique.

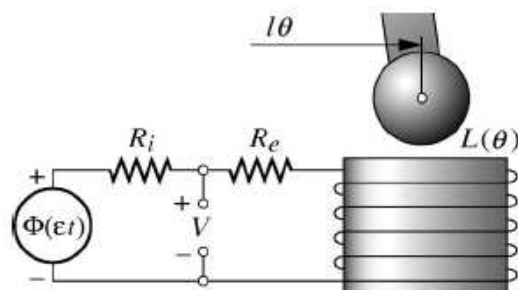


Figure A.1 – Sous-système électromagnétique [37]

La modélisation du système électromécanique est illustrée dans la Figure A.1 où  $\Phi(\epsilon t)$  dé-

---

---

## Annexe A. Modélisation du système électromécanique

---

signe la tension de la batterie se déchargeant lentement,  $R_i$  représente la résistance interne de la batterie,  $R_e$  indique la résistance externe du circuit et  $L$  désigne l'inductance de l'électroaimant. Cette inductance  $L$  est une fonction de la position du pendule et est décrite par

$$L(\theta) = \frac{L_0}{1 + K(\theta - \lambda)^2} \quad (\text{A.1})$$

où  $L_0$ ,  $K$  et  $\lambda$  sont des constantes positives.

Pour modéliser le sous-système électromagnétique, on considère le potentiel standard de Duffing donné par

$$P(\theta) = b_4\theta^4 + b_3\theta^3 + b_2\theta^2 + b_1\theta + b_0 \quad (\text{A.2})$$

et une formulation de la charge décrite dans [37]. Puis, on établit l'expression du Lagrangien pour le système complet qui est donné par

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{z} + l\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}L(\theta)\dot{q}^2 - \frac{1}{2}k\theta^2 - P(\theta) \quad (\text{A.3})$$

où  $m$  désigne la masse du pendule,  $z$  définit l'excitation du système et  $q$  est la charge qui s'écoule de la batterie dans le circuit électromagnétique.

Le travail virtuel associé aux forces généralisées non conservatives (amortissement mécanique, résistance électrique et tension de la batterie) est donné par

$$\delta\mathcal{W} = -c\dot{\theta}\delta\theta + (\Phi - R\dot{q})\delta q \quad (\text{A.4})$$

où  $R = R_i + R_e$  est la résistance totale du circuit.

A partir de (A.3)-(A.4), on déduit des équations de Lagrange la relation suivante

$$\begin{cases} ml^2\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + k\theta + \frac{\partial P}{\partial \theta} - \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial \theta}\dot{q}^2 = -ml\ddot{z}, \\ L\ddot{q} + \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\dot{\theta} + R\right)\dot{q} = \Phi. \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Dans la suite, et vu la nature du système considéré, on supposera que  $P$  est symétrique et donc  $b_1 = b_3 = 0$  dans (A.1). La force  $Q$  à l'extrémité du pendule est modélisée par une forme polynomiale cubique

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = -Q = -a_3\theta^3 - a_1\theta \quad (\text{A.6})$$

où  $a_1 = -2b_2$  et  $a_3 = 4b_4$  sont des constantes positives.

---

Dans (A.1), on pose  $\lambda = \sqrt{a_1/a_3}$  tel que  $L = L_0$  lorsque l'extrémité du pendule se situe directement au dessus d'un électroaimant, on a

$$ml\ddot{z} = F \cos \omega t \quad (\text{A.7})$$

avec les nouveaux paramètres associés définis par

$$\begin{cases} \omega_n^2 = \frac{k}{ml^2}, \mu = \frac{c}{ml^2\omega_n}, \alpha_i = \frac{a_i}{k} \quad (i = 1, 3), \\ f = \frac{F}{k}, \Omega = \frac{\omega}{\omega_n}, \text{ et } r = \frac{R}{L_0\omega_n}. \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Puis, à partir de (A.8) et en procédant à un changement de variable lié à l'échelle de temps, on a

$$\begin{cases} \bar{t} = \omega_n t \\ \phi = \sqrt{\frac{ml^2}{L_0}} \frac{\Phi}{k} \\ \psi = \sqrt{\frac{L_0}{ml^2}} \frac{dq}{d\bar{t}} \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

Finalement, à partir de (A.9), (A.5) s'écrit alors comme étant

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + \mu\dot{\theta} + (1 - \alpha_1)\theta + \alpha_3\theta^3 + \frac{K(\theta - \lambda)}{(1 + K(\theta - \lambda)^2)^2}\psi^2 = f \cos \Omega \bar{t} \\ \frac{1}{1 + K(\theta - \lambda)^2}\dot{\psi} + \left( \frac{2K(\lambda - \theta)\dot{\theta}}{(1 + K(\theta - \lambda)^2)^2} + r \right) \psi = \phi \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

Le modèle de comportement de la batterie est régi par un processus électrochimique complexe qui n'est pas modélisé ici à des fins de simplicité. Un modèle dynamique de comportement empirique de tension de décharge d'une batterie est considéré pour la modélisation du système électromécanique et est donné par

$$\dot{\phi} = -\epsilon\psi(1 + \gamma(\phi - \eta)^2) \quad (\text{A.11})$$

où  $\gamma$  et  $\eta$  sont des constantes positives et  $\epsilon$  désigne le ratio entre l'échelle à dynamique lente et rapide tel que  $0 < \epsilon \ll 1$ .



## ANNEXE B

---

# Stratégie de calcul d'espaces accessibles

---

L'objectif de cette annexe est de présenter les étapes de la stratégie [7] de calcul de l'espace accessible, introduite dans la section IV.4. Cette stratégie sera appliquée sur la fonction  $P$  définie par (IV.64).

### A1) Linéarisation du système

On introduit la notation de l'intervalle par  $\mathcal{I} = [a, b]$ , avec  $a < b$  et  $a, b \in \mathbb{R}$ . On définit également  $u = \begin{bmatrix} \underline{x}^T & \bar{x}^T \end{bmatrix}$  et le vecteur  $z = \begin{bmatrix} \phi^T & u^T \end{bmatrix}$ .  $z$  est restreint à un ensemble convexe. Pour  $z$  et  $z^*$  fixés, on note

$$\xi \in \{z^* + \alpha(z - z^*) \mid \alpha \in [0, 1]\} \quad (\text{B.1})$$

La linéarisation du système (IV.64) est réalisée au travers d'un développement de Taylor d'ordre 1 pour le vecteur de paramètre  $\theta \in \begin{bmatrix} \theta_{\underline{\phi}} & \theta_{\bar{\phi}} \end{bmatrix}$  comme suit

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &\in P(z^*, \theta) + \frac{\partial P(z, \theta)}{\partial z} \Big|_{z=z^*} (z - z^*) + L, \\ &= A(\phi - \phi^*) + B(u - u^*) + P(\phi^*, u^*, \theta) + L \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

où

$$\begin{cases} L = \frac{1}{2}(z - z^*)^T \frac{\partial^2 P(\xi, \theta)}{\partial z^2} (z - z^*), \\ A = \frac{\partial P(\phi, u, \theta)}{\partial \phi} \Big|_{\phi=\phi^*} \in \mathcal{I}^{q \times q}, \\ B = \frac{\partial P(\phi, u, \theta)}{\partial u} \Big|_{u=u^*} \in \mathcal{I}^{q \times 2n} \end{cases}$$



A2) Calcul de l'espace atteignable sans erreur de linéarisation

On définit l'ensemble des états exactement atteints  $R^e(kr)$  à l'instant  $t = kr$ ,  $k = 1, \dots, i$  tel que  $\sum_{k=1}^i (k-1)r = T_d$ , à partir de la condition initiale  $\phi(0)_{(k-1)r}$  pour l'entrée  $u$  avec le vecteur de paramètre  $\theta$

$$R^e(kr) = \{\phi \mid \phi(t) \text{ est solution de (IV.64), } t = kr\}$$

La majoration de l'ensemble atteignable pour l'intervalle de temps complet est définie par  $R([(k-1)r, kr]) = \bigcup_{t \in [(k-1)r, kr]} R(t)$  telle que  $R(t) \supseteq R^e(t)$ ,  $t \in [(k-1)r, kr]$ .

L'estimation majorée de l'espace atteignable de  $R^e(t)$  sur un intervalle de temps  $t \in [(k-1)r, kr]$  pour le système linéarisé (B.2) dans le cas où  $L = 0$  a été décrit dans [6]. Les trois étapes principales de cette étape sont :

- le calcul de l'ensemble atteignable  $\hat{R}(t)$ , sans tenir compte des entrées pour les temps  $t = (k-1)r$ ,  $t = kr$ .
- la génération d'un ensemble convexe<sup>1</sup> englobant les solutions aux instants  $t = (k-1)r$ ,  $t = kr$ .
- l'élargissement de l'ensemble convexe afin de contenir l'ensemble des trajectoires sur  $t \in [(k-1)r, kr]$  pour l'ensemble des entrées admissibles.

Une représentation de l'espace atteignable basée sur les zonotopes<sup>2</sup> est utilisée pour décrire l'évolution d'un espace atteignable.

A3) Calcul de l'ensemble des erreurs de linéarisation admissible

L'ensemble des erreurs de linéarisation admissible est défini par

$$\bar{L} = |(e^{Ar} - I)^{-1}A|\theta r \tag{B.3}$$

où  $\theta \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'expansion qui est défini par l'utilisateur. La valeur absolue est obtenue élément par élément.

1. Un ensemble  $A$  est dit convexe si pour tous éléments  $x$  et  $y$  de cet ensemble  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$  pour  $\lambda \in [0, 1]$
2. Un zonotope est défini par :

$$Z = \{x \in \mathbb{R}^n : x = c + \sum_{i=1}^p \beta^{(i)} g^{(i)}, -1 \leq \beta^{(i)} \leq 1\}$$

où  $c, g^{(1)}, \dots, g^{(p)} \in \mathbb{R}^n$ . Les vecteurs  $g^{(1)}, \dots, g^{(p)}$  sont appelés générateurs du zonotope et  $c$  est noté comme le centre de ce dernier. La notation suivante est adoptée pour un zonotope  $(c, g^{(1)}, \dots, g^{(p)})$ .

---

#### A4) Calcul de l'ensemble des erreurs de linéarisation L

La valeur absolue du reste du lagrangien peut être majorée pour  $\bar{z}(t)$ ,  $t \in [(k-1)r, kr]$  par

$$|L_i| \subseteq [0, \hat{L}_i] \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \hat{L}_i &= \frac{1}{2} \gamma^T \max \left( \left| \frac{\partial^2 P(\xi, \theta)}{\partial z^2} \right| \right) \gamma, \theta \in [\theta_{\underline{\phi}}, \theta_{\bar{\phi}}], \\ \text{et } \gamma &= |c - z^*| + \sum_{i=1}^p |g^{(i)}| \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

où  $\xi(\bar{z})$  est défini dans (B.1),  $c$  et  $g^{(i)}$  sont les générateurs du zonotope décrivant l'espace atteignable  $R([(k-1)r, kr])$ .

Le terme  $\max \left( \left| \frac{\partial^2 P(\xi, \theta)}{\partial z^2} \right| \right)$  est calculé via l'utilisation d'intervalles arithmétiques [83]. Pour cela, une majoration de  $z$  dans un intervalle convexe est réalisée comme décrit dans [7].

La borne estimée du reste de Lagrange  $\hat{L}_i$  peut être minimisée en choisissant  $z^* = c$  comme point de linéarisation. Néanmoins, le centre  $c$  du zonotope de  $R([(k-1)r, kr])$  n'est pas connu à priori, car il est normalement calculé après linéarisation. Toutefois, le point de linéarisation peut être approximé par

$$z^* = \hat{c} + \frac{r}{2} P(\hat{c}, \text{mid}(\theta)) \simeq c \quad (\text{B.6})$$

où  $\hat{c}$  est le centre de  $R((k-1)r)$  et  $\text{mid}(p)$  est le centre de l'intervalle du vecteur.

#### A5) Calcul de l'espace atteignable dû à l'erreur de linéarisation L

Dans le cas où  $L \subseteq \bar{L}$ , après avoir obtenu l'erreur de linéarisation  $L$ , l'ensemble atteignable du système linéarisé  $R_{err}(t)$ ,  $t \in [(k-1)r, kr]$  est calculé en suivant les mêmes étapes que pour B2 et en considérant  $L$  comme une entrée du système.

#### A6) Calcul de l'espace atteignable final

L'utilisation de la propriété de superposition d'un système linéaire permet de calculer une majoration de l'espace atteignable final  $R(t)$ , défini ici comme étant la somme de Minkowski des espaces

$$R(t) = R_{lin}(t) + R_{err}(t), \quad t \in [(k-1)r, kr]$$

#### A7) Découpage de l'espace atteignable en deux espaces

Dans le cas où  $L \not\subseteq \bar{L}$ , l'espace accessible  $R(kr)$  est découpé en deux espaces. Dans ce cas, un zonotope  $Z$  peut être divisé en deux zonotopes  $Z_1$  et  $Z_2$  en coupant le  $j^{ieme}$  générateur tel que

$Z_1 \cup Z_2 = Z$  et  $Z_1 \cap Z_2 = Z^*$  où

$$\begin{aligned} Z_1 &= (c - \frac{1}{2}g^{(j)}, g^{(1\dots j-1)}, \frac{1}{2}g^{(j)}, \frac{1}{2}g^{(j+1\dots p)}), \\ Z_2 &= (c + \frac{1}{2}g^{(j)}, g^{(1\dots j-1)}, \frac{1}{2}g^{(j)}, \frac{1}{2}g^{(j+1\dots p)}), \\ Z^* &= (c, g^{(1\dots j-1)}, g^{(j+1\dots p)}) \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Le choix optimal du  $j^{ieme}$  générateur est possible grâce à un indice de performance, basé sur le reste du Lagrangien. En considérant qu'un espace atteignable décrit par un zonotope sur l'intervalle de temps  $[(k-1)r, kr]$  est divisé selon le  $j^{ieme}$  générateur, on obtient deux espaces accessibles dont les bornes de linéarisation sont notées  $\hat{L}^{1,j}$  et  $\hat{L}^{2,j}$  respectivement. L'indice de performance associé est noté

$$\rho^j = \max \left( \hat{L}^{1,j} / \bar{L}^j \right) \max \left( \hat{L}^{2,j} / \bar{L}^j \right) \quad (\text{B.8})$$

où  $\hat{L}^{1,j} / \bar{L}^j$  et  $\hat{L}^{2,j} / \bar{L}^j$  sont divisés par élément et  $max(\cdot)$  fournit la valeur maximum du vecteur résultant.

La composante  $j$  de la plus petite valeur d'indice de performance de  $\rho$  sera le  $j^{ieme}$  générateur du zonotope à diviser. Si la plus petite valeur de l'indice de performance est supérieure à 1, alors la division du zonotope sera réalisée de manière récursive deux fois de suite.

Puis les étapes de calcul des espaces atteignables de A1 à A4 sont répétées de nouveau pour chacun des zonotopes.

#### A8) Annulation d'espaces atteignables redondants

Après avoir réalisé  $i$  divisions sur un  $[(k-1)r, kr]$ , les espaces atteignables nécessitent d'être calculés sur  $[(kr, (k+1)r]$  pour chacun des zonotopes considérés. Afin de réduire le volume de calculs, les ensembles atteignables sont regroupés en annulant les ensembles atteignables qui ont déjà été atteints. L'annulation d'ensemble atteignable conduit à une majoration de l'ensemble atteignable final. Pour plus de détails, se référer à [7].



## CONTRIBUTION AU PRONOSTIC DES SYSTÈMES NON LINÉAIRES À BASE DE MODÈLES : THÉORIE ET APPLICATION

Cette thèse est une contribution au problème du pronostic des systèmes complexes. Plus précisément, elle concerne l'approche basée modèles et est composée de trois contributions principales. Tout d'abord, dans une première contribution une définition du concept de pronostic est proposée et est positionnée par rapport aux concepts de diagnostic et de diagnostic prédictif. Pour cela, une notion de contrainte temporelle a été introduite afin de donner toute pertinence à la prédiction réalisée. Il a également été montré comment le pronostic est lié à la notion d'accessibilité en temps fini.

La deuxième contribution est dédiée à l'utilisation des observateurs à convergence en temps fini pour la problématique du pronostic. Une méthodologie de pronostic est présentée pour les systèmes non linéaires à échelle de temps multiple. Puis, une troisième contribution est introduite par l'utilisation des observateurs par intervalle pour le pronostic. Une méthodologie de pronostic est proposée pour les systèmes non linéaires incertains à échelle de temps multiple. Pour illustrer les différents résultats théoriques, des simulations ont été conduites sur un modèle de comportement d'un oscillateur électromécanique.

**Mots-clefs :** Concept et méthodologie de pronostic, pronostic basé sur les modèles, analyse et modèle de dégradation, observateurs non linéaires, convergence en temps fini, observateurs non linéaires par intervalle, atteignabilité en temps fini, système à échelle de temps multiple.

---

## CONTRIBUTION TO NONLINEAR SYSTEMS PROGNOSIS BASED ON MODELS : THEORY AND APPLICATION

This thesis is a contribution to the problem of a complex system prognosis. More precisely, it concerns the model-based prognosis approach and the thesis is divided into three main contributions. First of all, a definition of prognosis concept is proposed as a first contribution and is positioned in reference to the diagnosis and predictive diagnosis concepts. For that, a notion of temporal constraint is introduced to give all pertinence to the prediction achieved. It is also shown how prognosis is linked to the finite time reachability notion.

The second contribution is dedicated to the use of finite time convergence observer for the prognosis problem. A prognosis methodology is presented for nonlinear multiple time scale systems. Then, a last contribution is introduced through the use of interval observer for the prognosis problem. A prognosis methodology is proposed for nonlinear uncertain multiple time scale systems. To illustrate the theoretical results, simulations are achieved based on a model of an electromechanical oscillator system.

**Mots-clefs :** Concept and methodology of prognosis, model based prognosis, damage analysis and models, nonlinear observers, finite time convergence, interval nonlinear observers, reachability in finite time, multiple time scale system.