



**HAL**  
open science

# Revêtements finis d'une variété hyperbolique de dimension trois et fibres virtuelles.

Claire Renard

► **To cite this version:**

Claire Renard. Revêtements finis d'une variété hyperbolique de dimension trois et fibres virtuelles.. Topologie géométrique [math.GT]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2011. Français. NNT : . tel-00680760

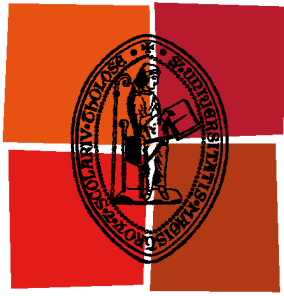
**HAL Id: tel-00680760**

**<https://theses.hal.science/tel-00680760>**

Submitted on 20 Mar 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université  
de Toulouse

# THÈSE

En vue de l'obtention du  
**DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE**

**Délivré par :**

Université Toulouse III Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)

**Discipline ou spécialité :**

Mathématiques

---

**Présentée et soutenue par :**

Claire RENARD

**le :** 2 Novembre 2011

**Titre :**

Revêtements finis d'une variété hyperbolique de dimension trois et fibres virtuelles.

---

**Ecole doctorale :**

Mathématiques Informatique Télécommunications (MITT)

**Unité de recherche :**

Institut de Mathématiques de Toulouse - Equipe Emile Picard

**Directeur(s) de Thèse :**

Michel BOILEAU

**Rapporteurs :**

Nicolas BERGERON

Juan SOUTO

**Membre(s) du jury :**

Nicolas BERGERON

Michel BOILEAU

Steven BOYER

David GABAI

Marc LACKENBY

Frédéric PAULIN



*La dernière démarche de la raison est de reconnaître qu'il y a une infinité de choses qui la surpassent.*

**Pascal**, *Pensées*, 267.



## Remerciements.

Je tiens tout d'abord à remercier très chaleureusement Michel Boileau, mon directeur de thèse, pour son infinie patience et sa grande gentillesse. Rien n'aurait été possible sans lui... Merci de tout coeur pour votre investissement, pour m'avoir accordé tant de temps sans jamais compter, et votre soutien en toutes circonstances.

Je remercie vivement Juan Souto et Nicolas Bergeron d'avoir accepté la lourde tâche de rapporteurs de cette thèse, et d'avoir lu jusqu'au bout et attentivement ce travail. Je veux aussi remercier de nouveau Nicolas Bergeron, ainsi que Steven Boyer, David Gabai, Marc Lackenby, Jean-Pierre Otal et Frédéric Paulin de m'avoir fait l'immense honneur de constituer le Jury de cette thèse.

Toute ma gratitude va à Jean-Pierre Otal, Juan Souto, Joan Porti, Dick Canary, Steven Boyer, Anne Berry, Geneviève Simonet, Jean-Marc Schlenker, Vincent Guirardel, Cyril Lecuire, Jean-François Barraud, Pascal Collin, Thomas Fiedler, Frédéric Haglund, Frédéric Paulin, Thomas Haettel, Guillaume Dufour, Emmanuel Ferrand, Paolo Ghiggini, Benoît Kloeckner, Andreas Venturelli, et bien d'autres pour leur aide, des invitations au voyage et des conversations très fructueuses. On ne cherche pas tout seul, et c'est une grande chance.

Un grand merci à tous les doctorants du labo, qui ont illuminé ces trois années par leur gentillesse et la chaleur de leur amitié. Merci en particulier à mes voisins de bureau successifs : Iman, Kuntal, Virginie, Dima, Valentina, et Arnaud, qui m'a fait l'amitié de relire ce mémoire, énorme travail si utile!!!! Merci pour toutes ces heures passées en votre compagnie et ces belles amitiés. Merci d'avoir été à mes côtés dans les moments heureux comme dans les moments difficiles, et pour votre patience. Un grand merci également à Anne, Tony, Cécile, Chloé, Guitta, Ghada, Thomas, à mon cher "grand frère" des Maths Alexandre, Cynthia, Jacques, Sébastien, Steven, Victoria, Alexandre, James, Frédéric, Brice, Boubacar, Minh, Jean-Christophe, Alice, Sandrine, Amic, Victor, Matthieu, Daniel... Merci aussi à tous les membres du labo, en particulier à Jocelyne, Yohann, Arnaud, Pascale, Thomas, Claire, Claude Hayat, Guillaume Constant, Gioia et Alain, et aux invités comme Yeonhee. Je n'oublierai jamais toutes ces amitiés, si riches et diverses.

Je remercie du fond du coeur tous les amis qui m'ont soutenue et entourée toutes ces années. En particulier mes deux grandes amies Marie-Charlotte et Elodie. Un grand merci à toute la famille Gissot pour le roast-beef dominical, et surtout d'avoir été pour moi une véritable famille d'accueil...

Merci aussi à ma grande famille d'adoption toulousaine qui m'a accueillie avec chaleur et simplicité et accompagnée un bon bout de chemin. Vous êtes trop nombreux pour vous citer tous, mais vous vous reconnaissez j'espère. Merci tout particulièrement à Laurentiu Unguru, Vincent Thomas, Daniel Tedeschi, et le souvenir affectueux de notre regretté Raymond Cayla (a.a.). Un grand merci à Augustin Laffay (o.p.) pour la grâce de son amitié, à Sandrine Kopel (o.c.d.) et sa fidélité, Miguel Masella (o.p.) avec qui nous avons partagé les meilleures crêpes de ma vie, Romina Pietrangelo (o.p.) et de belles discussions. Toutes mes pensées vont à "marraine" Marie-José pour son accueil et sa patiente disponibilité, Luc qui a répondu à quantité de questions embêtantes, Anne-Marie, Christiane, Anna Diane, Jean, Jean-Christophe, David et Astrid, Marc et Marie-Yang, Bénédicte et Tristan. Je veux

aussi remercier de tout mon coeur Maguy, Angèle, Anne-Marie, Marine, Marie-Sylvie, Marie-Claire et Francis-Marie (p.m.) pour leur accueil simple et fraternel, leur patiente gentillesse et leur bonne humeur. Je pense également bien affectueusement à Sophie, Emmanuelle, Maifa, Chantal, Myriam, et bien sûr P. Edouard. Sans oublier Nicole et Pauline, qui, peut-être à son insu, m'a tant appris...

Enfin, mes pensées vont à ma famille, en particulier mes parents et mon petit frère Nicolas, que je remercie de tout mon coeur pour leur soutien indéfectible. Merci d'être toujours à mes côtés en toutes circonstances et depuis tant d'années! Car même si je connaissais toute la science et les mystères, sans amour, je ne suis rien.

## Résumé.

Dans le cadre des variétés hyperboliques, Thurston a conjecturé que toute variété hyperbolique de dimension trois connexe, orientable, complète et de volume fini possède un revêtement fini qui est fibré sur le cercle  $\mathbb{S}^1$ .

En lien avec cette conjecture, il est naturel de chercher des conditions suffisantes pour qu'un revêtement fini d'une variété hyperbolique  $M$  de dimension trois fibre sur le cercle, ou du moins contienne une fibre virtuelle (i.e. une surface plongée qui se relève en une fibre dans un autre revêtement fini).

Le résultat principal de cette thèse établit le critère général suivant :

**Théorème A.** *Soit  $M$  une variété de dimension trois hyperbolique, connexe, orientée, compacte et sans bord. Notons  $\text{Inj}(M)$  le rayon d'injectivité de  $M$  et soit  $\epsilon \leq \frac{1}{2}\text{Inj}(M)$ . Soit  $M' \rightarrow M$  un revêtement fini de degré  $d$  et  $F$  une surface plongée dans  $M'$ , compacte, sans bord, orientable, pseudo-minimale, et qui scinde le revêtement  $M'$  en  $q$  corps en anses (éventuellement creux)  $C_1, \dots, C_q$ . Soit  $g \geq \max_{j=1, \dots, q} \{g(C_j)\}$ . Supposons de plus que tout lacet plongé dans  $C_j$  de longueur inférieure ou égale à  $\epsilon$  est homotopiquement trivial dans  $C_j$ .*

*Il existe une constante  $k = k(\epsilon, \text{Vol}(M)) > 0$ , ne dépendant que de  $\epsilon$  et du volume  $\text{Vol}(M)$  telle que si le degré du revêtement  $d$  est assez grand pour que*

$$k g \ln g < \ln \ln \frac{d}{q},$$

*alors le revêtement  $M'$  contient une surface plongée incompressible de genre au plus  $g$  qui est une fibre virtuelle. En particulier, la variété  $M$  est virtuellement fibrée sur le cercle  $\mathbb{S}^1$  et le revêtement  $M'$  est de Haken.*

Une surface  $S$  plongée dans une variété riemannienne de dimension trois est dite **pseudo-minimale** si elle est minimale ou le bord d'un petit voisinage régulier d'une surface minimale non orientable, avec éventuellement un petit tube attaché verticalement dans la structure de  $I$ -fibré.

En appliquant ce théorème à un scindement de Heegaard de genre minimal du revêtement  $M'$ , on obtient une version sous-logarithmique des conjectures de Lackenby sur le gradient de Heegaard et le gradient de Heegaard fort.

Le théorème principal s'applique également dans le cadre d'une décomposition circulaire associée à une classe d'homologie non triviale. Nous obtenons par exemple des conditions suffisantes pour qu'une classe d'homologie non triviale de  $M$  corresponde à une fibration sur le cercle. Des méthodes analogues permettent aussi de donner une condition suffisante pour qu'une surface incompressible plongée dans  $M$  soit une fibre virtuelle.

Enfin, nous donnons un critère pour que dans une tour de revêtements finis le premier nombre de Betti tende vers l'infini.



## Summary.

In the setting of hyperbolic 3-manifolds, Thurston conjectured that every connected, orientable, complete hyperbolic 3-manifold of finite volume has a finite cover fibered over the circle  $\mathbb{S}^1$ .

Having this conjecture in mind, it seems natural to look for sufficient conditions to ensure that a given finite cover of a hyperbolic 3-manifold  $M$  is fibered over the circle, or contains a virtual fiber (i.e. an embedded surface the preimage of which is a fiber in another finite cover).

The main result of this thesis establishes the following general criterion :

**Theorem A.** *Let  $M$  be a connected, oriented and closed hyperbolic 3-manifold. Denote by  $\text{Inj}(M)$  the injectivity radius of  $M$  and let  $\epsilon \leq \frac{1}{2}\text{Inj}(M)$ . Take  $M' \rightarrow M$  a covering of finite degree  $d$  and  $F$  an embedded pseudo-minimal surface in  $M'$  such that  $M'$  cut along  $F$  is the disjoint union of  $q$  handlebodies and compression bodies  $C_1, \dots, C_q$ . Let  $g \geq \max_{j=1, \dots, q} \{g(C_j)\}$ . Furthermore, suppose that every simple closed curve embedded in the interior of  $C_j$  of length at most  $\epsilon$  is null-homotopic in  $C_j$ .*

*There exists an explicit constant  $k = k(\epsilon, \text{Vol}(M)) > 0$ , depending only on  $\epsilon$  and the volume  $\text{Vol}(M)$  such that if the covering degree  $d$  is large enough to have*

$$k g \ln g < \ln \ln \frac{d}{q},$$

*then the covering  $M'$  contains an incompressible embedded surface of genus at most  $g$  which is a virtual fiber. In particular, the manifold  $M$  virtually fibers over the circle  $\mathbb{S}^1$  and the finite covering  $M'$  is Haken.*

An embedded surface  $S$  in a Riemannian 3-manifold is called **pseudo-minimal** if it is minimal or the boundary of a small regular neighborhood of a minimal non-orientable surface, possibly with a little tube attached vertically in the  $I$ -bundle structure.

Applying this theorem to a minimal genus Heegaard splitting of the finite cover  $M'$  leads to a sub-logarithmic version of Lackenby's conjectures of the Heegaard gradient and the strong Heegaard gradient.

The main theorem also applies to the setting of a circular decomposition associated to a non trivial homology class. For example, we obtain sufficient conditions for a non trivial homology class of  $M$  to correspond to a fibration over the circle. Similar methods lead also to a sufficient condition for an incompressible embedded surface in  $M$  to be a virtual fiber.

Eventually, we give a criterion to show that the first Betti number in a tower of finite covers tends to infinity.

# Introduction.

La compréhension des variétés de dimension trois, en particulier des variétés hyperboliques, a beaucoup progressé ces dernières années, notamment grâce à Perelman et la démonstration du théorème de géométrisation, mais aussi à l'étude des groupes kleinien. Dans le cadre des variétés hyperboliques complètes et de volume fini, Thurston a proposé une conjecture frappante qui est toujours ouverte.

**Conjecture 1** (Thurston). [*T, Question 17 du paragraphe 6*]

*Toute variété hyperbolique de dimension trois connexe, orientable, complète et de volume fini possède un revêtement fini qui est fibré sur le cercle  $\mathbb{S}^1$ .*

Si une variété  $M$  de dimension trois possède un revêtement fini fibré sur le cercle  $\mathbb{S}^1$ , on dit qu'elle est **virtuellement fibrée sur le cercle**. Dans le cas des variétés graphées de Waldhausen (qui ne sont pas hyperboliques), elles sont virtuellement fibrées si leur bord n'est pas vide, mais il existe des exemples de variétés graphées sans bord qui ne fibrent pas virtuellement sur le cercle.

La difficulté de la conjecture 1 de Thurston réside en partie dans le fait qu'il n'existe que des critères suffisants permettant de conclure qu'une variété de dimension trois est fibrée sur le cercle. De plus, ceux-ci sont peu nombreux et délicats à mettre en oeuvre en pratique. En particulier, il est difficile de savoir a priori quel type de revêtement considérer parmi tous les revêtements finis de la variété.

La classe d'homologie de la fibre d'une variété de dimension trois fibrée sur le cercle n'est pas triviale. Ainsi, une variété  $M$  fibrée sur le cercle a son premier nombre de Betti  $b_1(M)$  strictement positif. Une version homologique plus faible de la conjecture 1 de Thurston est la suivante.

**Conjecture 2** (du premier nombre de Betti virtuellement positif). *Toute variété hyperbolique de dimension trois connexe, orientable, complète et de volume fini possède un revêtement fini dont le premier nombre de Betti est strictement positif.*

Une **surface incompressible** est une surface  $F$  connexe, compacte, orientable, proprement plongée dans  $M$ , qui n'est pas une sphère de dimension deux et dont le groupe fondamental s'injecte dans celui de  $M$ . Si de plus elle n'est pas parallèle au bord de  $M$ , elle est dite **essentielle**. Une variété dont le premier nombre de Betti est strictement positif contient une surface plongée incompressible (voir par exemple [J, Lemme III.9] et [He, Lemme 6.5]). Plus généralement, une variété irréductible  $M$  est **de Haken** si elle contient une surface incompressible. Il existe des exemples de variétés hyperboliques qui ne sont pas de Haken. Une telle variété  $M$  admet beaucoup de revêtements finis. On peut espérer que l'un de ses revêtements finis soit de Haken : on dit alors que  $M$  est **virtuellement de Haken**. D'où la forme plus faible de la conjecture, due à Waldhausen.

**Conjecture 3** (Waldhausen [Wa1]). *Toute variété de dimension trois connexe, compacte, orientable, irréductible et de groupe fondamental infini est virtuellement de Haken.*

Dans le cas d'une variété hyperbolique à bord, la conjecture 2 est automatiquement vérifiée d'après les travaux de Cooper, Long et Reid [CLR]. Le théorème de géométrisation de Perelman implique que la conjecture 3 reste ouverte uniquement

dans le cas des variétés hyperboliques sans bord. Comme une variété virtuellement fibrée sur le cercle est virtuellement de Haken, la conjecture 1 de Thurston implique la conjecture 2, qui elle-même implique la conjecture 3 de Waldhausen.

Soit  $M$  une variété de dimension trois connexe, orientée, compacte et sans bord. On dit que le **premier nombre de Betti de  $M$  est virtuellement infini** s'il existe une famille  $(M_i \rightarrow M)_{i \in I}$  de revêtements finis de  $M$  telle que  $\sup_{i \in I} b_1(M_i) = +\infty$ . Dans le cadre hyperbolique, on a la conjecture suivante.

**Conjecture 4.** *Le premier nombre de Betti d'une variété hyperbolique de dimension trois connexe, orientée, compacte et sans bord est virtuellement infini.*

Cette conjecture est plus forte que la conjecture 2. Le cas à bord a été résolu par Cooper, Long et Reid [CLR]. Sinon, même dans le cas des variétés fibrées sur le cercle, on ne sait pas démontrer la conjecture 4.

Dans son article [A], Agol énonce une condition nécessaire pour qu'une variété  $M$  de dimension trois irréductible soit virtuellement fibrée sur le cercle. Cette condition repose sur une propriété du groupe fondamental de la variété  $M$ , appelée **RFRS** (résiduelle finitude  $\mathbb{Q}$ -résoluble), plus forte que la résiduelle finitude. Tout sous-groupe d'un groupe RFRS est lui-aussi RFRS. On dit qu'un groupe  $\Gamma$  est **virtuellement RFRS** s'il contient un sous-groupe d'indice fini qui est RFRS. En particulier, les groupes de surface, de réflexions, les groupes artiniens à angles droits, les groupes hyperboliques arithmétiques définis par une forme quadratique, les produits directs et les produits libres de groupes RFRS sont virtuellement RFRS.

**Théorème (Agol).** *Soit  $M$  une variété de dimension trois connexe, compacte, sans bord, orientable et irréductible. Supposons que le groupe fondamental de  $M$  est RFRS et que le premier nombre de Betti de  $M$  est non nul. Alors  $M$  est virtuellement fibrée sur le cercle.*

D'autre part, les récents travaux de Dani Wise ([Wi]) sur la structure de groupes munis d'une hiérarchie quasi-convexe impliqueraient qu'une variété de dimension trois hyperbolique est virtuellement de Haken si et seulement si elle est virtuellement fibrée sur le cercle.

Un autre point de vue concerne l'étude des scindements de Heegaard. Notons  $\chi_-^h(M) = 2g(M) - 2$  la **caractéristique de Heegaard de  $M$** , où  $g(M)$  est le genre de Heegaard de  $M$ . Un scindement de Heegaard est dit **fortement irréductible** s'il n'existe aucun couple de disques méridiens de part et d'autre de la surface de Heegaard et qui ne s'intersectent pas. La **caractéristique de Heegaard forte** de  $M$ , notée  $\chi_-^{sh}(M)$ , est la borne inférieure de  $2g(F) - 2$  pour toute surface  $F$  qui est une surface de Heegaard de  $M$  fortement irréductible, avec la convention que s'il n'existe aucun scindement de Heegaard de  $M$  fortement irréductible,  $\chi_-^{sh}(M) = +\infty$  (voir le paragraphe 0.1).

Lackenby [La3] a proposé un programme pour relier les conjectures précédentes au comportement de la caractéristique de Heegaard dans des revêtements finis d'une variété  $M$ . Pour ce faire, il a introduit deux nouveaux invariants qui contrôlent la croissance de la caractéristique de Heegaard dans des revêtements finis.

Il définit le **gradient de Heegaard** de  $M$ , noté  $\nabla^h(M)$ , comme la borne inférieure sur tous les revêtements finis  $M_i \rightarrow M$  du rapport  $\frac{\chi^h(M_i)}{d_i}$ , où  $d_i$  est le degré du revêtement  $M_i$ . De même, il définit le **gradient de Heegaard fort** de  $M$ , noté  $\nabla^{sh}(M)$ , comme la borne inférieure sur tous les revêtements finis  $M_i \rightarrow M$  du rapport  $\frac{\chi^{sh}(M_i)}{d_i}$ .

La croissance de la caractéristique de Heegaard dans une tour de revêtements finis de  $M$  est au plus linéaire en le degré du revêtement, et le gradient de Heegaard d'une variété compacte, connexe, orientable et virtuellement fibrée est nul. Dans le cas hyperbolique, Lackenby [La3, p. 320] conjecture que la réciproque est vraie :

**Conjecture 5** (du gradient de Heegaard). *Le gradient de Heegaard d'une variété hyperbolique  $M$  de dimension trois, compacte, connexe et orientable est nul si et seulement si la variété  $M$  est virtuellement fibrée sur le cercle.*

Si la conjecture 1 est vraie, le gradient de Heegaard d'une variété hyperbolique devrait toujours être nul. Par contre, Lackenby conjecture que ce n'est pas le cas pour le gradient de Heegaard fort.

**Conjecture 6** (du gradient de Heegaard fort). *Le gradient de Heegaard fort des variétés hyperboliques de dimension trois compactes, sans bord, connexes et orientables n'est jamais nul.*

Ces deux conjectures, en relation avec la propriété  $(\tau)$  (définie à la section 0.2), interviennent dans le programme de Lackenby pour résoudre la conjecture 3 de Waldhausen (voir le Théorème 1.7 de [La3]).

Un autre théorème de Lackenby constitue une avancée vers la résolution de la conjecture 1 de Thurston.

**Théorème .** [La1, Théorème 1 (3)]

*Soit  $M$  une variété hyperbolique de dimension trois, connexe, orientée, compacte et sans bord. Soit  $(M_i \rightarrow M)_{i \in I}$  une famille de revêtements finis de  $M$  galoisiens de degrés  $d_i$ .*

*Si  $\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{\chi^h(M_i)}{\sqrt[4]{d_i}} = 0$ , alors pour tout indice  $i$  assez grand, le revêtement  $M_i$  est fibré sur le cercle.*

Un des buts de cette thèse est de sortir du cadre des revêtements galoisiens et de s'intéresser au cas général. Dans ce contexte, Maher [Mah] montre qu'une variété hyperbolique et sans bord est virtuellement fibrée sur le cercle si et seulement si elle admet une famille infinie de revêtements finis, pas nécessairement galoisiens, mais dont le genre de Heegaard est uniformément borné. Ce résultat et sa méthode de démonstration ont constitué le point de départ de notre travail. Ce mémoire propose des résultats en lien avec les conjectures précédentes, en combinant des outils de topologie et de géométrie riemannienne avec des méthodes plus algébriques venant de la théorie des groupes et de la combinatoire des graphes.

Dans cette thèse, nous nous intéressons à des revêtements finis donnés de degré suffisamment grand. Une difficulté de la conjecture 1 de Thurston est de trouver explicitement un revêtement fini fibré sur le cercle, ou tout au moins contenant une fibre virtuelle. Un des résultats principaux de ce travail est un théorème qui donne un critère explicite permettant d'établir qu'un revêtement fini d'une variété hyperbolique de dimension trois, connexe, orientée, compacte et sans bord contient une surface plongée incompressible qui est une fibre virtuelle.

Rappelons que si  $S$  est une surface,  $\chi_-(S) = \max(-\chi(S), 0)$  est la partie négative de la caractéristique d'Euler de  $S$ . Si  $S$  est orientable, compacte, sans bord, et n'est pas une sphère, alors  $\chi_-(S) = -\chi(S) = |\chi(S)|$ .

**Définition 0.1.** *Une surface  $S$  plongée dans une variété riemannienne  $M$  de dimension trois est dite **pseudo-minimale** si elle vérifie les propriétés suivantes. La surface  $S$  est orientable, compacte, sans bord, et  $S$  est une surface minimale ou le bord d'un petit voisinage régulier d'une surface minimale non orientable, avec éventuellement un petit tube attaché verticalement dans la structure de  $I$ -fibré.*

**Théorème A.** *Soit  $M$  une variété de dimension trois hyperbolique, connexe, orientée, compacte et sans bord. Notons  $\text{Inj}(M)$  le rayon d'injectivité de  $M$  et soit  $\epsilon \leq \frac{1}{2}\text{Inj}(M)$ .*

*Il existe une constante explicite  $k = k(\epsilon, \text{Vol}(M)) > 0$ , ne dépendant que de  $\epsilon$  et du volume  $\text{Vol}(M)$  vérifiant les propriétés suivantes.*

*Soit  $M' \rightarrow M$  un revêtement fini de degré  $d$  contenant une surface plongée  $F$ , compacte, sans bord, orientable, pseudo-minimale, qui scinde le revêtement  $M'$  en  $q$  corps en anses (éventuellement creux)  $C_1, \dots, C_q$ , et ayant les propriétés suivantes.*

1. *Tout lacet plongé dans  $C_j$  de longueur inférieure ou égale à  $\epsilon$  est homotopiquement trivial dans  $C_j$ .*
2. *Supposons que  $k c \ln c < \ln \ln \frac{d}{q}$ , où  $c \geq \max_{j=1, \dots, q} \{\chi_-(C_j)\}$ .*

*Alors le revêtement  $M'$  est un fibré sur le cercle ou un  $I$ -fibré tordu, et on peut trouver dans  $M'$  une fibre de genre au plus  $g = \max_{j=1, \dots, q} \{g(C_j)\}$ . En particulier, la variété  $M$  est virtuellement fibrée sur le cercle  $\mathbb{S}^1$ .*

Ce théorème est démontré dans le premier chapitre. Cette démonstration repose sur la construction d'un produit "long et fin" dans un des  $q$  corps en anses de  $M'$  dont le volume est au moins  $\text{Vol}(M')/q$ . Cette construction fait l'objet de la proposition C des Surfaces Parallèles.

L'hypothèse (1) du théorème A est assez technique et difficile à vérifier en pratique. Elle n'est peut-être pas nécessaire.

**Conjecture (\*)**. *Le théorème A reste vrai sans l'hypothèse (1).*

**Remarque 0.2.** *Les hypothèses du théorème A donnent une condition nécessaire et suffisante pour qu'une variété hyperbolique  $M$  de dimension trois soit virtuellement fibrée sur le cercle. Les récents travaux de Dani Wise sur la structure de groupes munis d'une hiérarchie quasi-convexe (voir par exemple [Wi]) impliqueraient qu'une variété de dimension trois hyperbolique  $M$  est virtuellement de Haken si et seulement si elle satisfait les hypothèses du théorème A.*

Au chapitre deux, nous utilisons cette construction explicite pour établir un critère de fibration d'un revêtement fini régulier de degré suffisamment grand.

**Théorème 2.1.** *Soit  $M$  une variété de dimension 3 hyperbolique, connexe, orientée, compacte et sans bord. Notons  $\text{Inj}(M)$  le rayon d'injectivité de  $M$  et soit  $\epsilon \leq \frac{1}{2}\text{Inj}(M)$ . Soit  $M' \rightarrow M$  un revêtement **galoisien** fini de degré  $d$  et  $F$  une surface plongée dans  $M'$ , compacte, sans bord, orientable, pseudo-minimale, et qui scinde le revêtement  $M'$  en  $q$  corps en anses (éventuellement creux)  $C_1, \dots, C_q$ . Soit  $c \geq \max_{j=1, \dots, q} \{\chi_-(C_j)\}$ . Supposons de plus que tout lacet plongé dans  $C_j$  de longueur inférieure ou égale à  $\epsilon$  est homotopiquement trivial dans  $C_j$ .*

*Il existe une constante explicite  $\tilde{k} = \tilde{k}(\epsilon, \text{Vol}(M)) > 0$ , ne dépendant que de  $\epsilon$  et du volume  $\text{Vol}(M)$ , telle que si le degré  $d$  du revêtement galoisien vérifie*

$$\tilde{k} c^2 < \ln \ln \frac{d}{q},$$

*alors le revêtement  $M'$  est fibré sur le cercle  $\mathbb{S}^1$ , et une fibre peut être obtenue par chirurgie d'une composante connexe de  $F$ . En particulier, la variété  $M$  est virtuellement fibrée sur le cercle, et le revêtement  $M'$  est de Haken.*

Au chapitre trois, nous démontrons le théorème E, qui est une version du théorème A où l'hypothèse (1), difficile à vérifier, est remplacée par une hypothèse topologique d'incompressibilité, qui est vérifiée dans plusieurs situations.

**Théorème E.** *Soit  $M$  une variété de dimension trois hyperbolique, connexe, orientée, compacte et sans bord. Notons  $\text{Inj}(M)$  le rayon d'injectivité de  $M$  et soit  $\epsilon \leq \frac{1}{2}\text{Inj}(M)$ .*

*Il existe une constante explicite  $p = p(\epsilon, \text{Vol}(M)) > 0$ , ne dépendant que de  $\epsilon$  et du volume  $\text{Vol}(M)$  vérifiant les propriétés suivantes.*

*Soit  $M' \rightarrow M$  un revêtement fini de degré  $d$  contenant une surface plongée  $F$ , compacte, sans bord, orientable, pseudo-minimale, qui scinde le revêtement  $M'$  en  $q$  corps en anses (éventuellement creux)  $C_1, \dots, C_q$ , et ayant les propriétés suivantes.*

1. *Si  $F^-$  est la réunion des composantes de  $F$  qui correspondent à des bords négatifs des corps en anses  $C_j$ ,  $F^-$  est une union de surfaces incompressibles.*
2. *Supposons que  $p c \ln c < \ln \ln \frac{d}{q}$ , où  $c = \max_{j=1, \dots, q} \{\chi_-(C_j)\}$ .*

*Alors une des composantes connexe de  $F^-$  est la fibre d'une fibration en surfaces de  $M'$  (correspondant à un fibré sur le cercle ou un I-fibré tordu). En particulier, la variété  $M$  est virtuellement fibrée sur le cercle  $\mathbb{S}^1$ .*

Ce théorème peut s'appliquer dans le cadre des scindements de Heegaard. Dans la suite du chapitre trois est établi un critère de fibration en fonction du genre de Heegaard et du degré du revêtement fini considéré.

**Théorème 3.21.** *Il existe une constante explicite  $\bar{k} = \bar{k}(\epsilon, \text{Vol}(M))$  telle que pour tout revêtement fini  $M' \rightarrow M$  de degré  $d$  vérifiant  $\bar{k} \chi_-^h(M') \ln \chi_-^h(M') \leq \ln \ln d$ , le revêtement  $M'$  contient une surface de genre au plus  $g(M')$  qui est la fibre d'une fibration en surfaces. En particulier, la variété  $M$  est virtuellement fibrée sur le cercle  $\mathbb{S}^1$ .*

Nous démontrons également dans le troisième chapitre une version “sous-logarithmique” des conjectures 5 et 6 de Lackenby sur les gradients de Heegaard.

**Définition 0.3.** *Soit  $\eta \in ]0, 1[$ .*

*Le **gradient de Heegaard  $\eta$ -sous-logarithmique** de la variété  $M$  est défini par :*

$$\nabla_{\log, \eta}^h(M) = \inf \left\{ \frac{\chi_-^h(M_i)}{(\ln \ln d_i)^\eta} \right\},$$

*où la borne inférieure porte sur l'ensemble (dénombrable à isomorphisme de revêtement près) de tous les revêtements finis  $(M_i \rightarrow M)_{i \in I}$  de  $M$ , de degrés  $(d_i)_{i \in I}$ .*

*De même, on peut définir le **gradient de Heegaard fort  $\eta$ -sous-logarithmique** de la variété  $M$  par*

$$\nabla_{\log, \eta}^{sh}(M) = \inf \left\{ \frac{\chi_-^{sh}(M_i)}{(\ln \ln d_i)^\eta} \right\},$$

*où la caractéristique de Heegaard du revêtement fini  $M_i \rightarrow M$  est remplacée par sa caractéristique de Heegaard forte.*

**Théorème 3.6.** *Soient  $M$  une variété hyperbolique de dimension trois, connexe, orientée, compacte et sans bord, et  $\eta \in ]0, 1[$ .*

1. *Le gradient de Heegaard  $\eta$ -sous-logarithmique  $\nabla_{\log, \eta}^h(M)$  de  $M$  est nul si et seulement si  $M$  est virtuellement fibrée sur le cercle  $\mathbb{S}^1$ .*
2. *Le gradient de Heegaard fort  $\eta$ -sous-logarithmique de  $M$  est toujours strictement positif :  $\nabla_{\log, \eta}^{sh}(M) > 0$ .*

Dans le quatrième chapitre, on applique le théorème principal dans le cadre des décompositions circulaires associées à une classe d'homologie non triviale, pour déterminer si elle est fibrée.

**Définition 0.4.** *Soit  $M$  une variété hyperbolique de dimension trois, connexe, orientée, compacte et sans bord. Si  $\alpha \in H^1(M) = H^1(M, \mathbb{Z})$  est une classe de cohomologie non triviale, notons  $\|\alpha\|$  sa norme de Thurston. Par définition,*

$$\|\alpha\| = \min\{\chi_-(R), [R] = \mathcal{P}(\alpha)\},$$

*où  $R$  est une surface compacte, sans bord, orientable, plongée et  $\mathcal{P}(\alpha)$  la classe Poincaré-duale de  $\alpha$ . Nous appellerons une surface  $R$  réalisant la norme de Thurston de  $\alpha$  une **surface  $\|\alpha\|$ -minimisante**.*



Si  $R$  est une surface non séparante et  $\|\alpha\|$ -minimisante pour une certaine classe de cohomologie non triviale  $\alpha \in H^1(M)$ , soit  $\mathcal{N}(R) \cong R \times ]-1, 1[$  un voisinage régulier ouvert de  $R$  dans  $M$ , et  $M_R = M \setminus \mathcal{N}(R)$ . Notons

$$h(M, \alpha, R) = \min\{\chi(R) - \chi(S)\},$$

où  $S$  est une surface de Heegaard pour  $(M_R, R \times \{1\}, R \times \{-1\})$ . En d'autres termes,  $\frac{1}{2}h(M, \alpha, R)$  est le nombre minimal de 1-anses qu'il faut attacher à un voisinage régulier de  $R \times \{1\}$  dans  $M_R$  pour obtenir le premier corps en anses du scindement de Heegaard de  $(M_R, R \times \{1\}, R \times \{-1\})$ .

Posons

$$h(M, \alpha) = h(\alpha) = \min\{h(M, \alpha, R), [R] = \mathcal{P}(\alpha), \chi_-(R) = \|\alpha\|\}.$$

Pour toute classe  $\alpha \in H^1(M)$  non triviale, soit  $\chi_-^c(\alpha) = \|\alpha\| + h(\alpha)$ , la **caractéristique circulaire** de  $\alpha$ . C'est la partie négative de la caractéristique d'Euler d'une surface de Heegaard pour  $(M_R, R \times \{1\}, R \times \{-1\})$  de genre minimal, où  $R$  est une surface  $\|\alpha\|$ -minimisante et telle que la quantité  $h(M, \alpha, R)$  est minimale parmi toutes les surfaces  $\|\alpha\|$ -minimisantes.

Dans ce contexte, on peut obtenir le théorème suivant, qui est une adaptation du théorème 1 (3) de [La1] avec des constantes explicites.

**Théorème 4.16.** *Soit  $M$  une variété de dimension trois hyperbolique, connexe, orientée, compacte et sans bord, et  $\epsilon \leq \text{Inj}(M)/2$ . Il existe une constante explicite  $\ell = \ell(\epsilon, \text{Vol}(M))$ , ne dépendant que de  $\epsilon$  et du volume de  $M$ , et ayant les propriétés suivantes. Soit  $\alpha \in H^1(M)$  une classe de cohomologie non triviale et  $R$  une surface  $\|\alpha\|$ -minimisante. Soit  $M' \rightarrow M$  un revêtement **galoisien** fini de  $M$ , de degré  $d$ . Soit  $R'$  une composante connexe de l'image réciproque de  $R$  dans le revêtement  $M'$ , et  $\alpha'$  la classe de cohomologie dans  $H^1(M', \mathbb{Z})$  Poincaré-duale de  $[R']$ .*

*Si  $\ell \chi_-^c(\alpha') \leq \sqrt[4]{d}$ , alors la variété  $M$  est fibrée sur le cercle et la surface  $R$  est une fibre.*

Le théorème suivant est l'analogie pour les décompositions circulaires associées à une classe d'homologie non triviale du théorème 3.21.

**Théorème 4.21.** *Soit  $M$  une variété de dimension trois hyperbolique, connexe, orientée, compacte et sans bord. Soit  $\epsilon \leq \text{Inj}(M)/2$ . Il existe une constante explicite  $\ell' = \ell'(\epsilon, \text{Vol}(M))$  ne dépendant que de  $\epsilon$  et du volume de la variété  $M$  vérifiant les propriétés suivantes. Soient un revêtement fini  $M' \rightarrow M$  de  $M$  de degré  $d$ , et une classe de cohomologie non triviale  $\alpha' \in H^1(M')$ .*

*Si  $\ell' \chi_-^c(\alpha') \ln \chi_-^c(\alpha') \leq \ln \ln d$ , alors toute surface  $R'$  plongée dans  $M'$  et  $\|\alpha'\|$ -minimisante est une fibre. En particulier, la variété  $M$  est virtuellement fibrée sur le cercle  $\mathbb{S}^1$ .*

Par analogie avec le gradient de Heegaard sous-logarithmique défini précédemment, nous introduisons également un gradient circulaire sous-logarithmique et nous établissons le corollaire 4.24, qui correspond à la partie (1) du théorème 3.6.

Nous avons obtenu des critères pour qu'une classe d'homologie non triviale contienne un représentant qui est une fibre virtuelle. Si  $R$  est une surface plongée dans  $M$  et incompressible, sa classe d'homologie est triviale si et seulement si  $R$  est séparante. Nous avons obtenu aussi un critère suffisant pour qu'une surface incompressible  $R$  soit une fibre virtuelle.

**Définition 0.5.** Soit  $M$  une variété de dimension trois hyperbolique, connexe, orientée, compacte et sans bord. Supposons que  $R$  est une surface incompressible, orientable, connexe et plongée dans  $M$ . Dans le cas où la surface  $R$  est non séparante, la classe  $[R] \in H_2(M)$  n'est pas triviale. Nous appellerons la **caractéristique de Heegaard de la surface  $R$**  le minimum de  $|\chi(S)|$ , où  $S$  est une surface de Heegaard pour  $(M_R = M \setminus \mathcal{N}(R), R \times \{1\}, R \times \{-1\})$ .

Dans le cas où la surface  $R$  est séparante, la variété  $M_R = M \setminus \mathcal{N}(R)$  est constituée de deux composantes connexes  $M_g$  et  $M_d$ . Nous appellerons la **caractéristique de Heegaard de la surface  $R$**  le maximum de  $\{\chi_-^h(M_g), \chi_-^h(M_d)\}$ .

Dans tous les cas, nous noterons  $\chi_-^h(R)$  la caractéristique de Heegaard de la surface incompressible  $R$ .

Dans le théorème suivant, la surface  $R$  n'est pas supposée non séparante a priori.

**Théorème 4.26.** Soit  $M$  une variété de dimension trois hyperbolique, connexe, orientée, compacte et sans bord. Soit  $\epsilon \leq \text{Inj}(M)/2$ . Il existe une constante explicite  $\ell'' = \ell''(\epsilon, \text{Vol}(M))$  vérifiant les propriétés suivantes. Supposons qu'il existe une surface incompressible  $R$  connexe, compacte, sans bord, orientable et plongée dans  $M$ . Soit  $M' \rightarrow M$  un revêtement fini de  $M$  de degré  $d$ . Soit également  $R'$  une composante connexe de l'image réciproque de  $R$  dans  $M'$ .

Si  $\ell'' \chi_-^h(R') \ln \chi_-^h(R') \leq \ln \ln d$ , alors la surface  $R$  est une fibre virtuelle. De plus, si la surface  $R'$  n'est pas séparante,  $R'$  est une fibre.

**Remarque 0.6.** L'expression explicite des constantes  $k, \tilde{k}, \bar{k}, \ell, \ell'$  et  $\ell''$  apparaissant dans les divers théorèmes permet d'étudier leur comportement. Lorsque le volume  $\text{Vol}(M)$  est fixé et que  $\epsilon$  tend vers zéro, ou que  $\epsilon$  est fixé et que  $\text{Vol}(M)$  tend vers l'infini, toutes ces constantes tendent vers l'infini. Ainsi, les conditions suffisantes deviennent de plus en plus difficiles à vérifier à mesure que le rayon d'injectivité diminue ou que le volume augmente.

Dans le dernier chapitre, en adaptant des techniques de Lackenby [La3], nous établissons un critère permettant de faire croître le premier nombre de Betti d'une variété en passant à une tour de revêtements finis.

**Théorème 5.13.** Soit  $M$  une variété de dimension trois hyperbolique, connexe, orientée, compacte et sans bord. Supposons qu'il existe une tour infinie  $\dots \rightarrow M_{i+1} \rightarrow N_{i+1} \rightarrow M_i \rightarrow N_i \rightarrow \dots \rightarrow N_1 \rightarrow M$  de revêtements finis de  $M$  telle que pour tout  $i \geq 1$ ,  $M_i \rightarrow N_i$  est galoisien, de groupe  $H_i \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{r_i}$ .

Si  $\inf_{i \in \mathbb{N}} \chi_-^h(M_i) [\pi_1 M : \pi_1 N_i] / (\sqrt{2})^{r_i} = 0$ , alors  $\lim_{i \rightarrow +\infty} b_1(M_i) = +\infty$ . En particulier, le premier nombre de Betti de  $M$  est virtuellement infini.

Une application de ce résultat à la suite dérivée modulo 2 (voir le paragraphe 5.2) permet d'obtenir le critère suivant.

**Corollaire 5.15.** *Soient  $M$  une variété de dimension trois hyperbolique, connexe, orientée, compacte et sans bord, et  $\dots \rightarrow M_i \rightarrow M_{i-1} \rightarrow \dots \rightarrow M_1 \rightarrow M$  la tour de revêtements finis correspondant à la suite dérivée modulo 2. Pour tout  $i \geq 1$ , posons  $r_i = b_{1, \mathbb{F}_2}(M_{i-1})$ , avec  $M_0 = M$ , et  $R_i = r_1 + r_2 + \dots + r_i$ . Supposons que  $r_1 \geq 4$ .  
Si  $\inf_{i \in \mathbb{N}} \chi_-^h(M_i) 2^{R_{i-1}} / (\sqrt{2})^{r_i} = 0$ , alors  $\lim_{i \rightarrow +\infty} b_1(M_i) = +\infty$ .*

# Table des matières

<b>Introduction.</b>	<b>7</b>
<b>0 Rappels et définitions.</b>	<b>19</b>
0.1 Surfaces de Heegaard et scindements de Heegaard généralisés. . . . .	20
0.1.1 Scindements de Heegaard. . . . .	20
0.1.2 Simplifier un scindement de Heegaard : stabilisation, réducti- bilité et réductibilité faible. . . . .	24
0.1.3 Scindements de Heegaard généralisés, complexité et scinde- ments minces. . . . .	27
0.2 Combinatoire des groupes. . . . .	32
0.2.1 Graphes de Cayley et de Schreier, complexes de Cayley. . . . .	32
0.2.2 Constantes de Cheeger et propriété $(\tau)$ . . . . .	36
<b>1 Trouver une fibre virtuelle dans un revêtement fini.</b>	<b>39</b>
1.1 Théorème principal. . . . .	40
1.2 Trouver des surfaces emboîtées. . . . .	53
1.2.1 Quelques modifications du corps en anses. . . . .	53
1.2.2 Balayages. . . . .	59
1.2.3 Surfaces de balayage et surfaces emboîtées. . . . .	65
1.3 Des surfaces emboîtées aux surfaces parallèles. . . . .	70
1.4 Des motifs de domaines fondamentaux à une fibration virtuelle. . . . .	74
<b>2 Fibration de revêtements réguliers.</b>	<b>81</b>
2.1 Théorème de fibration des revêtements galoisiens finis. . . . .	82
2.2 Surfaces parallèles et homotopies proches. . . . .	84
2.3 Surfaces translattées et fibration sur le cercle. . . . .	90
<b>3 Gradients sous-logarithmiques.</b>	<b>95</b>
3.1 Gradients de Heegaard. . . . .	96
3.2 Démonstration du théorème E. . . . .	101
3.3 Démonstration des théorèmes 3.3 et 3.7 : gradients de Heegaard sous- logarithmiques. . . . .	105
3.4 Démonstration des théorèmes 3.9 et 3.6 (2) : gradients de Heegaard forts sous-logarithmiques. . . . .	108

<b>4</b>	<b>Décompositions circulaires et classes d'homologie fibrées.</b>	<b>115</b>
4.1	Décompositions circulaires et positions minces. . . . .	116
4.2	Constante de Cheeger et caractéristique circulaire. . . . .	122
4.3	Classes d'homologie et fibration de revêtements réguliers. . . . .	125
4.4	Gradient circulaire et classe d'homologie fibrée. . . . .	129
4.5	Surfaces incompressibles et fibrations virtuelles. . . . .	131
<b>5</b>	<b>Croissance du premier nombre de Betti dans des revêtements finis.</b>	<b>133</b>
5.1	Constante de Cheeger et saut du premier nombre de Betti. . . . .	134
5.2	Genre de Heegaard et premier nombre de Betti virtuellement infini. . . . .	141
5.3	Genre de Heegaard et groupe fondamental virtuellement grand. . . . .	144

# Chapitre 0

---

## Rappels et définitions.

## 0.1 Surfaces de Heegaard et scindements de Heegaard généralisés.

Nous renvoyons aux ouvrages [J], [He] et [BMP], ainsi qu'aux notes de Hatcher [Hat] pour des rappels de topologie de dimension trois, dont nous admettrons les résultats de base. Si non spécifié, toutes les variétés considérées seront supposées orientables.

Une variété  $M$  de dimension trois compacte, orientée, est dite **irréductible** si toute sphère  $S^2$  proprement plongée dans  $M$  borde une boule  $B^3$  dans la variété  $M$ . Sinon, on dit que  $M$  est **réductible**. On peut alors trouver une sphère  $S$  proprement plongée dans  $M$  et qui ne borde aucune boule : une telle sphère est dite **essentielle**.

On rappelle également qu'une surface  $F$  compacte, connexe, proprement plongée dans  $M$  et qui n'est pas une sphère est **incompressible** si l'application  $i_* : \pi_1(F, x_0) \rightarrow \pi_1(M, x_0)$  induite par l'inclusion  $i$  entre les groupes fondamentaux est injective (pour un point base  $x_0$  sur la surface  $F$ ). D'après le théorème du lacet (voir [He] ou [J]), cela revient à dire que le bord de tout disque  $D$  plongé dans  $M$  intersectant la surface  $F$  transversalement et tel que  $D \cap F = \partial D$  borde un disque dans la surface  $F$ . Une variété de dimension trois connexe, compacte, orientable, irréductible et contenant une surface incompressible est dite **de Haken**. Si une variété  $M$  de dimension trois connexe, compacte, orientable et irréductible possède un revêtement fini qui est de Haken, la variété  $M$  est dite **virtuellement de Haken**.

Dans toute la suite,  $M$  est une variété de dimension trois connexe, orientée, compacte, et avec bord éventuellement non vide.

### 0.1.1 Scindements de Heegaard.

Pour une introduction détaillée aux scindements de Heegaard, nous renvoyons à l'article de Scharlemann [Sc].

#### Décomposition en anses.

Soit  $M$  une variété de dimension 3 orientée. Soit un entier  $p$  entre 0 et 3. Notons  $I = [0, 1]$ .

Etant donné un entier  $p$  entre 0 et 3, une  **$p$ -anse sur  $M$**  est la donnée une **application d'attachement**  $f : \partial B^p \times B^{3-p} \rightarrow \partial M$  qui est un homéomorphisme sur son image. Si  $p = 0$ , l'application d'attachement est vide. Dans tous les cas, on dit alors que la variété  $M' = M \cup_f (B^p \times B^{3-p})$  de dimension 3 est obtenue à partir de la variété  $M$  par **attachement d'une  $p$ -anse**. Nous renvoyons à [RS] pour plus de détails sur les décompositions en anses.

Ainsi, une 0-anse est une boule  $B^3$  munie de l'application d'attachement vide. Une 1-anse est un tube plein  $I \times \mathbb{D}^2$  rattaché le long des deux disques  $\{0\} \times \mathbb{D}^2$  et  $\{1\} \times \mathbb{D}^2$ . Son **âme** est l'arc  $I \times \{0\}$  et sa **coâme** est le disque  $\{\frac{1}{2}\} \times \mathbb{D}^2$ . Une 2-anse est aussi un tube plein  $\mathbb{D}^2 \times I$ , cette fois-ci rattaché le long de l'anneau  $\partial \mathbb{D}^2 \times I$ . Son **âme** est le disque  $\mathbb{D}^2 \times \{\frac{1}{2}\}$  et sa **coâme** l'arc  $\{0\} \times I$ . Une 3-anse est une boule  $B^3$  rattachée le long de son bord, qui est la sphère  $S^2$ .

Par dualité, en inversant l'ordre des facteurs, une 1-anse  $I \times \mathbb{D}^2$  peut être vue comme une 2-anse et réciproquement. Il en est de même pour les 0- et 3-anses.

Un **cobordisme**  $(M, N_0, N_1)$  est la donnée d'une variété  $M$  de dimension 3 et de deux sous-variétés  $N_0$  et  $N_1$  de  $M$  disjointes de dimension 2, éventuellement vides, et vérifiant  $\partial M = N_0 \sqcup N_1$ .

Soit  $(M, N_0, N_1)$  un cobordisme. On dit que  $H$  est une  **$p$ -anse sur le cobordisme**  $(M, N_0, N_1)$  si  $H$  est une  $p$ -anse sur  $M$  et si l'application d'attachement de  $H$  est à valeurs dans  $N_1$ , i.e. si  $H \cap M \subseteq N_1$ .

Une **décomposition en anses du cobordisme**  $(M, N_0, N_1)$  est la donnée d'une décomposition de la forme  $M = C_0 \cup H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_k \cup C_1$  telle que :

1. La variété  $C_0$  (respectivement  $C_1$ ) est homéomorphe à  $N_0 \times I$  (respectivement  $N_1 \times I$ ), et
2. pour tout  $i$  entre 1 et  $k$ ,  $H_i$  est une anse du cobordisme  $(C_0 \cup H_1 \cup \dots \cup H_{i-1}, N_0, \partial(C_0 \cup H_1 \cup \dots \cup H_{i-1}) \setminus N_0)$ , où l'on a identifié  $N_0$  à l'image de  $N_0 \times \{0\}$  dans  $C_0 \cong N_0 \times I$ , et  $N_1$  à l'image de  $N_1 \times \{1\}$  dans  $C_1 \cong N_1 \times I$ .

Par dualité, une décomposition en anses du cobordisme  $(M, N_0, N_1)$  peut être vue comme une décomposition en anses du cobordisme  $(M, N_1, N_0)$  simplement en considérant les anses duales attachées "en sens contraire". Cette nouvelle décomposition est appelée **décomposition duale**.

On a le lemme important (voir par exemple [RS, "Reordering Lemma" 6.2 p. 76]) :

**Lemme 0.1.** *Soit  $M$  une variété de dimension 3 munie d'une décomposition en anses.*

*Après isotopie, on peut toujours attacher une anse d'indice plus petit avant une anse d'indice plus grand.*

*Par contre, si une 1-anse puis une 2-anse sont attachées à  $M$ , on peut intervertir l'ordre dans lequel ces anses sont attachées si et seulement si l'on peut disjointement le bord de l'âme de la 2-anse du bord de la coâme de la 1-anse (qui sont toutes les deux homéomorphes à un disque).*

□

D'après le lemme 0.1, on peut réarranger toute décomposition en anses du cobordisme  $(M, N_0, N_1)$  afin que les anses soient attachées par indice croissant : d'abord les 0-anses, puis les 1-anses, puis les 2-anses, et pour terminer les 3-anses. Ceci conduit à la notion de scindement de Heegaard, que nous allons décrire à présent.

### Corps en anses et scindements de Heegaard.

Un **corps en anses**, ou **bretzel**, est le voisinage régulier tri-dimensionnel d'un graphe de genre  $g$ . On peut le voir également comme une surface de genre  $g$  remplie, ou comme une boule de dimension trois à laquelle on a rattaché  $g$  1-anses. Par exemple, si  $g = 1$ , on obtient un tore solide  $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ .

Soit  $M$  une variété de dimension trois connexe, orientée, compacte et sans bord. Un **scindement de Heegaard** de  $M$  est une décomposition de la variété  $M$  en deux corps à  $g$  anses  $H_0$  et  $H_1$  recollés par un homéomorphisme de leur bord (qui



est une surface  $S$  compacte, sans bord et de genre  $g$ ). L'entier  $g$  est appelé le **genre** du scindement de Heegaard. La surface  $S$  est une **surface de Heegaard** de  $M$ . On note ce scindement  $M = H_0 \cup_S H_1$ .

Si  $M$  est une variété de dimension trois connexe, orientée, compacte et à bord non vide, on peut encore définir la notion de **scindement de Heegaard** de  $M$ , en utilisant des corps en anses creux.

**Définition 0.2** (Corps en anses creux). *Pour obtenir un **corps en anses creux**  $H$ , ou **bretzel creux**, on part d'une surface  $F$  compacte, sans bord, non nécessairement connexe. On construit le corps en anses creux  $H$  en rattachant des 1-anses à  $F \times I$  sur le bord  $F \times \{1\}$ . Les composantes du bord de  $H$  correspondant à  $F \times \{0\}$  sont notées  $\partial_- H$ , appelées le **bord négatif** de  $H$ . Les composantes de bord restantes,  $\partial H \setminus \partial_- H$ , sont notées  $\partial_+ H$  et appelées **bord positif** de  $H$ . Par convention, un corps en anses comme défini au paragraphe précédent (donc qui n'a qu'une seule composante de bord) est un corps en anses dont le bord négatif est vide.*

On remarque que, comme  $\partial_+ H$  est obtenu à partir de  $\partial_- H$  en attachant des anses à cette surface, la caractéristique d'Euler de  $\partial_+ H$  est nécessairement inférieure ou égale à celle de  $\partial_- H$ . En particulier, le genre de  $\partial_+ H$  est supérieur ou égal au genre de  $\partial_- H$ .

**Définition 0.3** (Scindement de Heegaard). *Soit  $(M, N_0, N_1)$  un cobordisme. Un **scindement de Heegaard de  $M$  associé au cobordisme**  $(M, N_0, N_1)$  est la donnée de deux corps en anses  $H_0$  et  $H_1$  vérifiant :*

1.  $\partial_- H_0 = N_0, \partial_- H_1 = N_1,$
2.  $\partial_+ H_0 \cong \partial_+ H_1 \cong S$  avec  $S$  une surface compacte sans bord, et
3.  $M = H_0 \cup_S H_1$  est obtenue en recollant  $H_0$  et  $H_1$  par un homéomorphisme de leur bord positif.

La surface  $S$  est encore appelée **surface de Heegaard** de  $M$  et son genre est appelé le **genre** du scindement de Heegaard  $M = H_0 \cup_S H_1$ . Remarquons que  $N_0$  ou  $N_1$  peuvent être vides.

Si la variété  $M$  n'est pas connexe, un scindement de Heegaard de  $M$  est un scindement de chacune des composantes connexes de  $M$ .

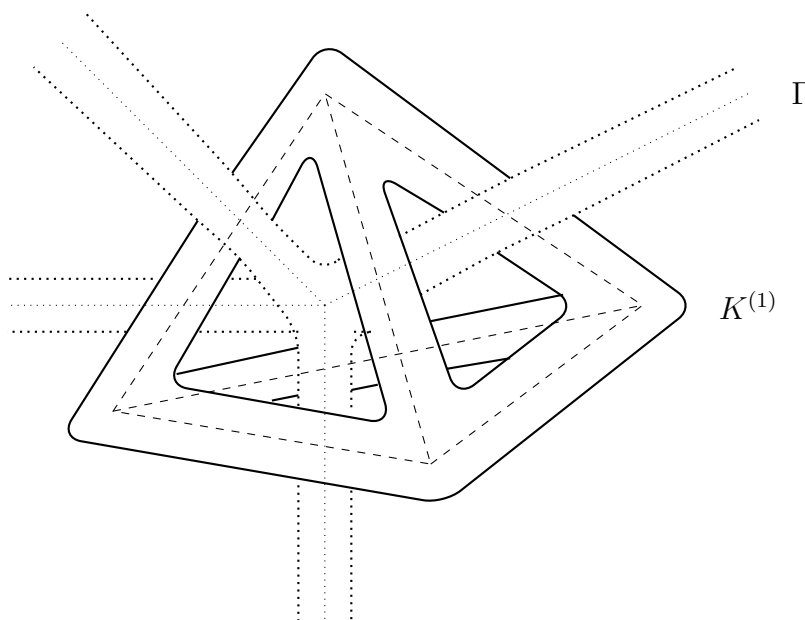
Deux scindements de Heegaard sont **isotopes** si les surfaces de Heegaard correspondantes sont isotopes dans la variété  $M$ . Ils sont **homéomorphes** s'il existe un homéomorphisme de  $M$  envoyant la première surface de Heegaard sur la seconde.

Soit  $H$  un corps en anses, éventuellement creux. Un **disque méridien** de  $H$  est un disque  $D$  proprement plongé dans  $H$  tel que  $\partial D$  est une courbe essentielle dans  $\partial_+ H$ . Un **système complet de disques méridiens pour  $H$**  est une famille  $\mathcal{D}$  de disques méridiens tels que si l'on coupe  $H$  le long des disques de  $\mathcal{D}$ , on obtient une union disjointe de boules et  $\partial_- H \times I$ .

**Théorème 0.4.** *Toute variété  $M$  de dimension trois, orientée et compacte admet un scindement de Heegaard.*

Démonstration du théorème 0.4.

Ce théorème découle immédiatement de l'existence d'une triangulation  $K$  de  $M$  (voir Moise [Mo]). Dans le cas où le bord de  $M$  est vide, un premier corps en anses s'obtient en prenant un petit voisinage régulier de  $K^{(1)}$ , le 1-squelette de la triangulation. Le complémentaire n'est autre qu'un voisinage régulier de  $\Gamma$ , le 1-squelette dual de  $K$ , et fournit le second corps en anses.  $\square$



**Définition 0.5** (Genre de Heegaard). Soit  $M$  une variété de dimension trois connexe, orientée et compacte. On définit le **genre de Heegaard** de  $M$  comme le minimum des genres des surfaces de Heegaard de  $M$ . C'est un entier positif ou nul, noté  $g(M)$ .

**Exemple :** Les seules variétés compactes, connexes, sans bord, orientables et de genre de Heegaard inférieur ou égal à 1 sont la sphère  $\mathbb{S}^3$ ,  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  et les espaces lenticulaires. En particulier, toute variété hyperbolique a un genre de Heegaard au moins égal à 2.

Un scindement de Heegaard de  $M$  associé au cobordisme  $(M, N_0, N_1)$  peut être vu comme une décomposition en anses particulière où les anses sont attachées par ordre croissant d'indice. En effet, les 0- et 1-anses constituent le premier corps en anses, de bord négatif  $N_0$ . Les 2- et 3-anses correspondent par dualité aux 1- et 0-anses du second corps en anses (de bord négatif  $N_1$ ). Considérer la décomposition duale associée au cobordisme  $(M, N_1, N_0)$  revient ainsi à intervertir l'ordre des corps en anses dans la décomposition de Heegaard correspondante.

Avec ce point de vue, les disques méridiens pour le premier corps en anses correspondent aux cônes des 1-anses et les disques méridiens du second corps en anses aux âmes des 2-anses.

**Le point de vue des fonctions de Morse.**

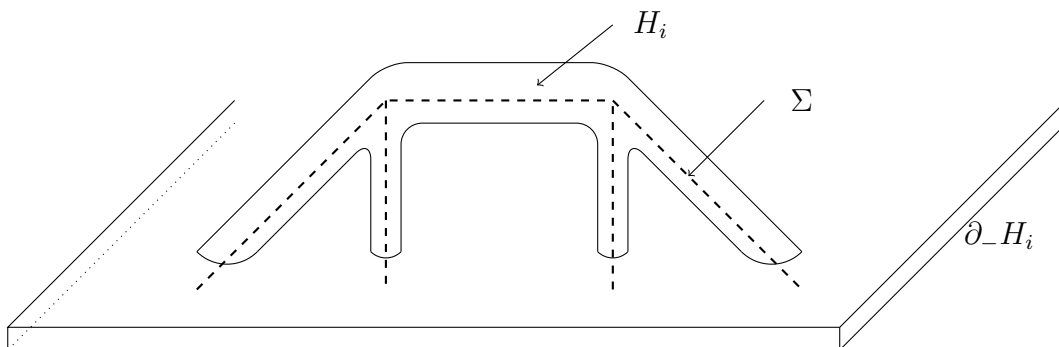
Voir les décompositions de Heegaard comme des décompositions en anses permet de faire le lien avec les fonctions de Morse. En effet, prenons une fonction de Morse

$f$  associée au cobordisme  $(M, N_0, N_1)$  telle qu'à deux points critiques distincts correspondent des valeurs critiques distinctes, et que les valeurs critiques apparaissent par indice croissant. Autrement dit,  $f$  est une fonction de Morse à valeurs dans  $[0, 1]$  par exemple, vérifiant :

- les valeurs critiques de  $f$  sont  $0 < a_1 < \dots < a_k < b_1 < \dots < b_\ell < 1$ ,
- $N_0 = f^{-1}(0)$  si  $N_0 \neq \emptyset$ , ou 0 est une valeur critique d'indice 0 si  $N_0 = \emptyset$ ,
- $N_1 = f^{-1}(1)$  si  $N_1 \neq \emptyset$ , ou 1 est une valeur critique d'indice 3 si  $N_1 = \emptyset$ ,
- pour tout  $i$  entre 1 et  $k$ ,  $a_i$  est une valeur critique associée à un point critique d'indice 1,
- pour tout  $j$  entre 1 et  $\ell$ ,  $b_j$  est une valeur critique associée à un point critique d'indice 2.

Alors pour tout  $t \in ]a_k, b_1[$ , la surface de niveau  $f^{-1}(t)$  est une surface de Heegaard de  $M$ , et si  $t' \in ]a_k, b_1[$ , les surfaces de niveau  $f^{-1}(t)$  et  $f^{-1}(t')$  sont isotopes. On a donc toute latitude pour placer la surface de Heegaard entre  $a_k$  et  $b_1$ . C'est ce qu'on appelle un **balayage**.

On peut visualiser ce qu'est un balayage en utilisant la notion d'**échine**. Soit  $M = H_0 \cup_S H_1$  un scindement de Heegaard de  $M$ . Pour  $i$  entre 0 et 1, si  $H_i$  est un corps en anses de bord négatif vide, une échine de  $H_i$  est un graphe  $\Sigma$  plongé dans  $H_i$  tel que  $H_i$  soit un voisinage régulier de  $\Sigma$ . Si  $H_i$  est un bretzel creux (i.e.  $\partial_- H_i \neq \emptyset$ ), une échine de  $H_i$  est un graphe  $\Sigma$  proprement plongé dans  $H_i$  (donc tel que  $\Sigma \cap \partial_- H_i$  n'est constitué que de sommets de valence 1), et tel que  $\Sigma \cup \partial_- H_i$  soit un rétracte par déformation de  $H_i$ . Une échine existe toujours. Par exemple, on peut en obtenir une à partir du 1-squelette d'une triangulation. Par définition,  $H_i \setminus \Sigma$  est diffeomorphe au produit  $\partial_+ H \times I$ .



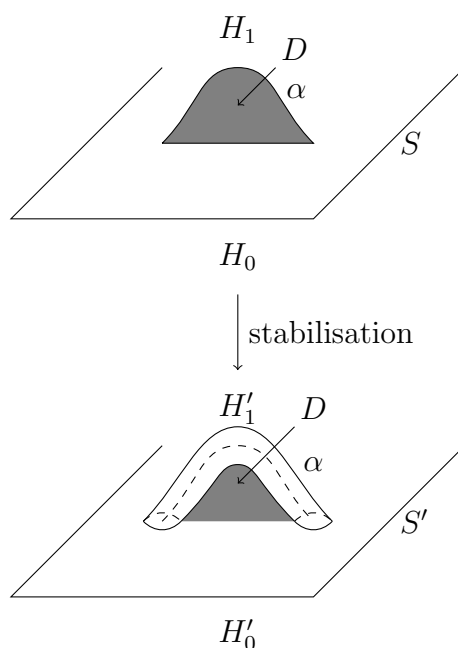
Si  $\Sigma_0$  et  $\Sigma_1$  sont deux échines de  $H_0$  et  $H_1$  respectivement pour le scindement de Heegaard considéré, alors  $M \setminus (\Sigma_0 \cup \Sigma_1)$  est diffeomorphe au produit  $S \times I$ . On a ainsi obtenu une famille paramétrée par  $t \in ]0, 1[$  de surfaces de Heegaard  $S \times \{t\}$  de  $M$ , deux à deux isotopes, formant un **balayage** de la variété  $M$ .

### 0.1.2 Simplifier un scindement de Heegaard : stabilisation, réductibilité et réductibilité faible.

Soit  $M$  une variété de dimension trois connexe, orientée et compacte, et  $H_0 \cup_S H_1$  un scindement de Heegaard de genre  $g$  de  $M$ . Il est assez facile de construire un scindement de Heegaard de  $M$  de genre  $g + 1$  à partir de  $H_0 \cup_S H_1$  comme suit.

Soit  $\alpha$  un arc proprement plongé dans  $H_1$ , avec ses deux extrémités dans  $\partial_+ H_1 \cong S$  et tel qu'il existe un disque  $D$  plongé dans  $H_1$  dont le bord est la réunion de  $\alpha$  et d'un arc de  $\partial_+ H_1$ .

On peut alors rajouter à  $H_0$  un voisinage régulier de  $\alpha$ , ce qui revient à rajouter une 1-anse d'âme  $\alpha$  à  $H_0$ , qu'on enlève à  $H_1$ . Par dualité, c'est comme si l'on avait rajouté la 1-anse de coâme  $D$  à  $H_1$ . On obtient ainsi un nouveau scindement de Heegaard de  $M$ , de genre  $g + 1$ , obtenu à partir du scindement  $H_0 \cup_S H_1$  par **stabilisation**. On remarque que deux scindements obtenus à partir de  $H_0 \cup_S H_1$  par stabilisation sont isotopes.



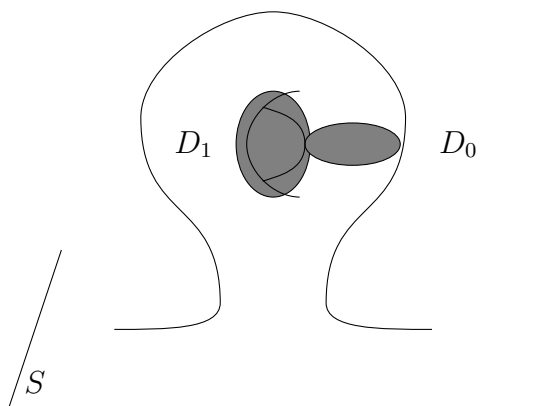
Par contre, le théorème de Reidemeister et Singer (voir par exemple [Si]) montre que deux scindements de Heegaard d'une variété donnée sont isotopes après un certain nombre de stabilisations.

On peut ainsi toujours stabiliser un scindement. La question plus difficile est de savoir dans quel cas un scindement de Heegaard provient d'une stabilisation d'un scindement plus simple, i.e. dans quel cas un scindement de Heegaard peut-il être **déstabilisé** ?

**Lemme 0.6.** *Soit  $M$  une variété de dimension trois connexe, compacte et orientable.*

*Un scindement de Heegaard  $H_0 \cup_S H_1$  de  $M$  peut être déstabilisé si et seulement s'il existe deux disques  $D_0$  et  $D_1$  proprement plongés respectivement dans  $H_0$  et  $H_1$  et s'intersectant en un unique point.*

Nous renvoyons au Lemme 3.1 de [Sc] pour une preuve de ce lemme. □



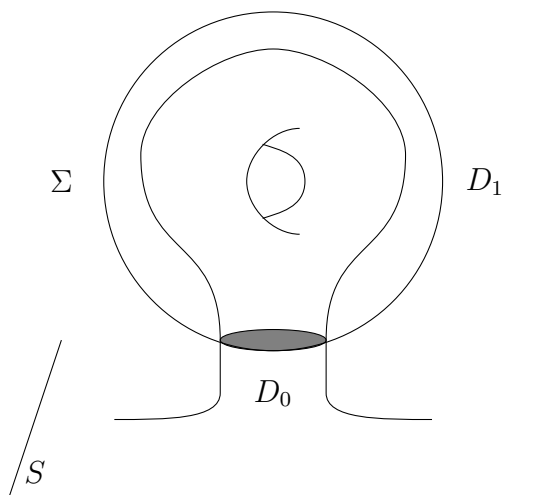
Scindement de Heegaard pouvant être déstabilisé.

On a la définition suivante :

**Définition 0.7.** Soit  $M$  une variété de dimension trois connexe, orientée et compacte, et un scindement de Heegaard  $H_0 \cup_S H_1$  de  $M$ . Ce scindement est dit **réductible** s'il existe deux disques méridiens  $D_0$  et  $D_1$  proprement plongés dans  $H_0$  et  $H_1$  respectivement et tels que leurs bords coïncident :  $\partial D_0 = \partial D_1 \subset S$ .

Un scindement de Heegaard qui n'est pas réductible est dit **irréductible**.

Cette définition revient à dire que si le scindement de Heegaard est réductible, alors il existe une sphère  $\Sigma$  (qui est l'union des deux disques précédents) intersectant  $S$  en un unique cercle essentiel.



Scindement de Heegaard réductible.

**Proposition 0.8.** Si  $M$  est une variété de dimension trois, connexe, compacte, orientée, irréductible qui n'est ni une sphère  $S^3$ , ni une sphère trouée, alors un scindement de Heegaard de  $M$  est réductible si et seulement s'il peut être déstabilisé.

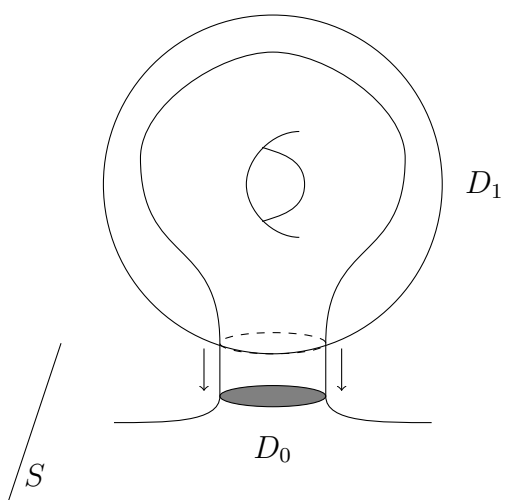
Cette proposition utilise le théorème de Waldhausen (voir [Wa1], ainsi que [ST1] et [O]) : tout scindement de Heegaard de genre  $g > 0$  de la sphère  $\mathbb{S}^3$  provient du scindement de genre 0 que l'on a stabilisé  $g$  fois.  $\square$

**Définition 0.9.** *Un scindement de Heegaard  $H_0 \cup_S H_1$  de  $M$  est dit **faiblement réductible** s'il existe deux disques méridiens  $D_0$  dans  $H_0$  et  $D_1$  dans  $H_1$  dont les bords sont disjoints :  $\partial D_0 \cap \partial D_1 = \emptyset$ .*

*Un scindement de Heegaard qui n'est pas faiblement réductible est dit **fortement irréductible**.*

**Remarque 0.10.** *Tout scindement de Heegaard réductible est faiblement réductible.*

En effet, soit un scindement de Heegaard réductible  $M = H_0 \cup_S H_1$  et deux disques méridiens  $D_0$  de  $H_0$ ,  $D_1$  de  $H_1$  dont les bords coïncident :  $\partial D_0 = \partial D_1$ . On peut toujours disjointre dans  $S$  le bord de  $D_0$  du bord de  $D_1$ .



Scindement de Heegaard réductible, donc faiblement réductible.

**Théorème 0.11 (Haken).** *Tout scindement de Heegaard d'une variété  $M$  de dimension trois, connexe, compacte, orientée et réductible, est réductible.*

*Tout scindement de Heegaard d'une variété  $M$  de dimension trois, connexe, compacte, orientée et dont le bord est compressible, est faiblement réductible.*

La preuve originelle de ce théorème est bien sûr due à Haken [Hak]. Jaco propose une preuve plus simple au chapitre 2 de son ouvrage [J, paragraphe II.7 p. 20]. La version à bord est démontrée dans [BO2] et [CG].  $\square$

### 0.1.3 Scindements de Heegaard généralisés, complexité et scindements minces.

Soit un scindement de Heegaard  $H_0 \cup_S H_1$  de  $M$  faiblement réductible. Il existe deux disques méridiens  $D_0$  dans  $H_0$  et  $D_1$  dans  $H_1$  ne se rencontrant pas. Soit une décomposition en anses associée au scindement de Heegaard  $M = H_0 \cup_S H_1$  telle

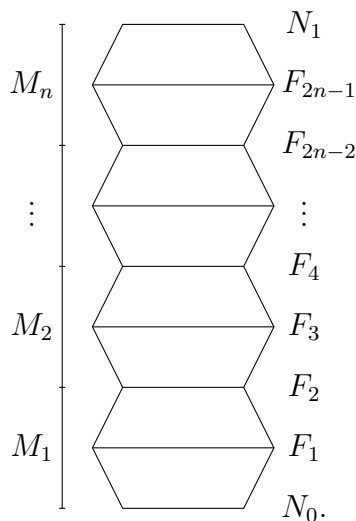
que  $D_0$  soit la coâme d'une 1-anse de  $M$  et  $D_1$  l'âme d'une 2-anse de  $M$ . Le premier corps en anses  $H_0$  de  $M$  correspond aux 0- et 1-anses, et le second corps à anses  $H_1$  aux 2- et 3-anses.

D'après le lemme 0.1, on peut réarranger l'ordre d'attachement des anses dans la décomposition en anses de  $M$  en recollant la 2-anse d'âme  $D_1$  avant la 1-anse de coâme  $D_0$ .

Plus généralement, prenons une décomposition en anses d'un cobordisme  $(M, N_0, N_1)$  constituée de 0-anses, puis d'une série de 1-anses et de 2-anses, puis d'une deuxième série de 1-anses et de 2-anses, etc, jusqu'à la  $n$ -ième série de 1-anses et de 2-anses, puis des 3-anses. Notons  $F_1$  le bord de la variété  $M_1$  obtenue lorsque l'on n'a rattaché que les 0-anses et la première série de 1-anses, privé de  $N_0$ ,  $F_2$  le bord de la variété  $M_2$  obtenue en rattachant la première série de 2-anses à  $M_1$  privé de  $N_0$ , et ainsi de suite jusqu'à  $F_{2n-1}$  obtenue après avoir rattaché la dernière série de 1-anses. Après une petite isotopie, on peut disjoindre les surfaces  $\{F_1, F_2, \dots, F_{2n-1}\}$ . Enlevons également aux surfaces  $F_k$  les composantes qui sont des sphères bordant les 0- ou 3-anses.

Alors les **surfaces paires**  $F_{2j}$  divisent  $M$  en  $n$  variétés  $M_1, \dots, M_n$ , et pour tout  $j$  entre 1 et  $n$ , la **surface impaire**  $F_{2j-1}$  est une surface de Heegaard pour la variété  $M_j$ . Une telle décomposition  $\mathcal{H} = (F_1, F_2, \dots, F_{2n-1})$  est appelée un **scindement de Heegaard généralisé de  $M$  associé au cobordisme  $(M, N_0, N_1)$** . L'entier  $n$  est appelé la **longueur du scindement**. Un scindement de Heegaard généralisé de longueur 1 est un scindement de Heegaard de  $M$  usuel.

On peut représenter ce scindement de Heegaard généralisé à l'aide du schéma suivant :



Étant donnée une variété  $M$  de dimension trois compacte, connexe et orientable, il y a beaucoup de latitude pour construire un scindement de Heegaard généralisé de  $M$ . Cependant, il est intéressant de trouver de tels scindements dont les surfaces paires et impaires sont les plus simples possibles. C'est cette idée que formalisent les notions de complexité et de décompositions minces.

**Définition 0.12** (Complexité d'une surface). *Soit une surface  $F$  connexe, compacte,*

orientable et sans bord. La **complexité de  $F$**  est définie par :

$$c(F) = \begin{cases} 0 & \text{si } F \cong \mathbb{S}^2, \\ 1 - \chi(F) = 2g(F) - 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si la surface  $F$  n'est pas connexe, la complexité de  $F$  est la somme des complexités de ses composantes connexes :

$$c(F) = \sum_{X \in \pi_0(F)} c(X).$$

On remarque que pour toute telle surface  $F$ ,  $-\chi(F) \leq c(F) - 1$ .

La complexité est une alternative à la caractéristique d'Euler. C'est un moyen de mesurer à quel point une surface est "compliquée", en tenant compte à la fois du genre et du nombre de composantes connexes, tout en imposant à la sphère d'avoir une complexité minimale et nulle.

Soit  $M$  une variété de dimension trois compacte, connexe et orientable, et  $\mathcal{H} = (F_1, F_2, \dots, F_{2n-1})$  un scindement de Heegaard généralisé de  $M$ . La **largeur du scindement  $\mathcal{H}$**  est le  $n$ -uplet  $(c(F_1), c(F_3), \dots, c(F_{2n-1}))$ , avec les répétitions éventuelles, ordonné par ordre décroissant. La **complexité du scindement  $\mathcal{H}$**  est  $c_+(\mathcal{H}) = \max\{c(F_{2j-1}), j = 1, \dots, n\} - 1$ .

L'ensemble des largeurs des scindements de Heegaard généralisés de  $M$  peut être muni de l'ordre lexicographique, qui est un bon ordre. En particulier, cet ensemble admet un minimum.

**Définition 0.13** (Décomposition mince et complexité de  $M$ ). *Un scindement de Heegaard généralisé dont la largeur réalise le minimum des largeurs des scindements de  $M$  est appelé une **décomposition mince de  $M$** .*

La **complexité de la variété  $M$**  est définie par :

$$c_+(M) = \max\{c(F_{2j-1}), j = 1, \dots, n\} - 1 = c_+(\mathcal{H}),$$

où  $\mathcal{H} = (F_1, F_2, \dots, F_{2n-1})$  une décomposition mince de  $M$ .

Les notions de complexité d'un scindement de Heegaard et de décomposition mince ont été utilisées par Scharlemann et Thompson dans leur article [ST2]. Le lemme suivant donne une méthode pour obtenir des décompositions minces.

**Lemme 0.14.** *Soit  $\mathcal{H} = (F_1, \dots, F_{2n-1})$  un scindement de Heegaard généralisé. Supposons qu'il existe un indice  $i$  pour lequel la surface  $F_{2i-1}$  est faiblement réductible.*

*Alors, il existe une opération nommée **chirurgie de scindements de Heegaard généralisés**, permettant d'obtenir, à partir du scindement  $\mathcal{H}$ , un nouveau scindement de Heegaard généralisé  $\mathcal{H}'$  dont la largeur est strictement plus petite que celle de  $\mathcal{H}$ .*

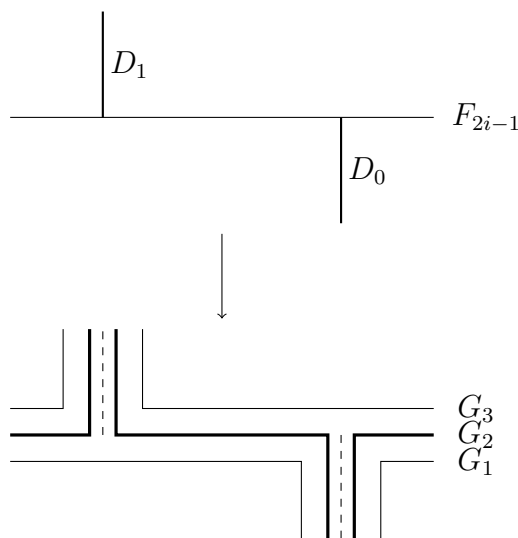
Démonstration du lemme 0.14.

Supposons qu'il existe une surface  $F_{2i-1}$  faiblement réductible. On peut trouver deux disques méridiens  $D_0$  et  $D_1$  de part et d'autre de la surface de Heegaard  $F_{2i-1}$  qui ne s'intersectent pas. Prenons une décomposition en anses de  $M_i$  associée au



cobordisme  $(M_i, F_{2i-2}, F_{2i})$  (avec les conventions  $F_0 = N_0$  et  $F_{2n} = N_1$ ) n'ayant que des 1- et 2-anses, telle que la surface impaire  $F_{2i-1}$  sépare les 1-anses des 2-anses, et que le disque méridien  $D_0$  corresponde à la coâme d'une 1-anse et le disque  $D_1$  à l'âme d'une 2-anse. D'après le lemme 0.1, on peut réarranger la décomposition en anses en rattachant la 2-anse d'âme  $D_1$  avant la 1-anse de coâme  $D_0$ .

En inversant l'ordre d'attachement de la 1-anse de coâme  $D_0$  et de la 2-anse d'âme  $D_1$ , on a créé un nouveau scindement de Heegaard généralisé de  $M$  : on attache sur les 0-anses la première série de 1- puis 2-anses, jusqu'à la  $i$ -ième série de 1-anses à l'exception de la 1-anse de coâme  $D_0$ . Puis on attache la 2-anse d'âme  $D_1$ , puis la 1-anse de coâme  $D_0$ , puis la  $i$ -ième série de 2-anses sauf celle d'âme  $D_1$  qui est déjà attachée. On termine la décomposition en attachant la  $(i+1)$ -ième série de 1- et 2-anses, jusqu'à la  $n$ -ième série de 1- et 2-anses, puis les 3-anses. On a donc introduit une série supplémentaire de 1- et 2-anses, correspondant à la 1-anse de coâme  $D_0$  et à la 2-anse d'âme  $D_1$ . Notons  $G_1$  la surface obtenue après avoir attaché les anses jusqu'à la  $i$ -ième série de 1-anses sauf la 1-anse de coâme  $D_0$ ,  $G_2$  la surface obtenue après avoir rattaché la 2-anse d'âme  $D_1$ , puis  $G_3$  la surface obtenue après avoir rattaché la 1-anse restante, de coâme  $D_0$ . Comme précédemment, on disjoint ces surfaces par une petite isotopie et on enlève les composantes qui sont des sphères bordant des 0- et 3-anses. Le nouveau scindement de Heegaard généralisé  $\mathcal{H}'$  de  $M$  correspond alors aux surfaces  $(F_1, \dots, F_{2i-2}, G_1, G_2, G_3, F_{2i}, F_{2i+1}, \dots, F_{2n-1})$ .



**Définition 0.15.** L'opération décrite ci-dessus permettant d'obtenir à partir du scindement  $\mathcal{H}$  un nouveau scindement de Heegaard généralisé  $\mathcal{H}' = (F_1, \dots, F_{2i-2}, G_1, G_2, G_3, F_{2i}, F_{2i+1}, \dots, F_{2n-1})$  est appelée une **chirurgie de scindements de Heegaard généralisés**.

La surface  $G_1$  est obtenue à partir de  $F_{2i-1}$  en effectuant une chirurgie de long de  $D_0$ . Ainsi,  $c(G_1) \leq c(F_{2i-1}) - 1$ .

La surface  $G_3$  est obtenue en effectuant une chirurgie de  $F_{2i-1}$  le long du disque  $D_1$ , donc on a aussi

$$c(G_3) \leq c(F_{2i-1}) - 1.$$

Comme la largeur du scindement de Heegaard généralisé  $\mathcal{H}' = (F_1, \dots, F_{2i-2}, G_1, G_2, G_3, F_{2i}, F_{2i+1}, \dots, F_{2n-1})$  est le  $(n+1)$ -uplet  $(c(F_1), \dots, c(F_{2i-3}), c(G_1), c(G_3), \dots, c(F_{2i+1}), \dots, c(F_{2n-1}))$  ordonné par ordre décroissant, elle est strictement plus petite que la largeur de la décomposition  $\mathcal{H} = (F_1, \dots, F_{2n-1})$ .  $\square$

**Définition 0.16.** Soit  $M$  une variété de dimension trois connexe, orientée et compacte, et  $\mathcal{H} = (F_1, \dots, F_{2n-1})$  un scindement de Heegaard généralisé de  $M$ .

Soit  $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$  l'ensemble des scindements de Heegaard généralisés obtenus à partir de  $\mathcal{H}$  par chirurgies de scindements de Heegaard généralisés. Un élément  $\mathcal{H}' \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$  minimisant la largeur est appelée un scindement de Heegaard généralisé  $\mathcal{H}$ -mince.

**Proposition 0.17.** Soit  $M$  une variété de dimension trois connexe, orientée et compacte, et  $\mathcal{H}$  un scindement de Heegaard généralisé de  $M$ .

Tout scindement de Heegaard généralisé  $\mathcal{H}$ -mince  $\mathcal{H}' = (F_1, \dots, F_{2n-1})$  vérifie les propriétés suivantes.

1. Les surfaces impaires  $F_{2i-1}$  correspondent à des surfaces de Heegaard fortement irréductibles.
2. Les surfaces paires  $F_{2i}$  sont des surfaces incompressibles de  $M$ .
3. De plus, si la variété  $M$  est irréductible, alors aucune composante des surfaces paires n'est une sphère.

$\square$

La preuve de cette proposition est une conséquence du lemme 0.14. Nous renvoyons à [CG] et [ST2], ainsi qu'à la démonstration de la proposition 4.6 qui lui est analogue.

Le corollaire suivant (voir par exemple [CG, Théorème 3.1 p. 280], ou [Sc, Théorème 3.11 p.932]) se déduit directement de la proposition 0.17.

**Corollaire 0.18.** Soit  $M$  une variété de dimension trois compacte, connexe et orientable, et un scindement de Heegaard  $H_0 \cup_S H_1$  de  $M$  faiblement réductible. Alors soit ce scindement est réductible, soit  $M$  contient une surface incompressible.

$\square$

Ce corollaire pourrait permettre d'étudier la conjecture sur les variétés irréductibles virtuellement de Haken : si on arrive à trouver un scindement de Heegaard de  $M$  irréductible mais faiblement réductible, alors  $M$  est de Haken.

## 0.2 Combinatoire des groupes.

### 0.2.1 Graphes de Cayley et de Schreier, complexes de Cayley.

Ce paragraphe donne les rappels utiles à la lecture du chapitre cinq.

Soit  $G$  un groupe de type fini et  $S$  une famille génératrice finie symétrique (i.e. stable par passage à l'inverse) de  $G$ .

**Définition 0.19** (Graphe de Cayley). *Le **graphe de Cayley (à droite) de  $G$  relativement à  $S$**  est le graphe  $X(G, S) = X(G) = (V, E)$  où l'ensemble des sommets  $V$  est en bijection avec  $G$ , et les arêtes sont les triplets  $e = (h, g, s) \in G \times G \times S$  vérifiant  $g = hs$ . L'arête opposée est  $\bar{e} = (g, h, s^{-1})$  puisque par symétrie de  $S$ ,  $s^{-1} \in S$ . Le **sommet initial** de  $e$  est  $o(e) = h$  et son **sommet terminal** est  $t(e) = g$ . Pour alléger les notations, nous écrirons souvent simplement  $e = (h, g)$ .*

Pour une introduction aux graphes de Cayley, nous renvoyons par exemple à [GdlH, Chapitre 1 §2 p. 4 et Appendice §3.1 p. 248].

Si l'élément neutre de  $G$  n'appartient pas à  $S$ ,  $e \mapsto \bar{e}$  est une involution sans point fixe et  $X(G, S) = (V, E, \bar{\cdot}) = (V, E)$  est bien un graphe suivant la définition de Serre [Se, paragraphe 2.1 p. 22].

La **réalisation géométrique** d'un graphe  $X = (V, E, \bar{\cdot})$  est l'espace topologique  $V \sqcup (E \times [0, 1]) / \mathcal{R}$  où  $V$  et  $E$  sont vus comme des ensembles munis de la topologie discrète et  $\mathcal{R}$  est la relation d'équivalence sur  $V \sqcup (E \times [0, 1])$  engendrée par les relations :

$$\begin{aligned} \forall (e, t) \in E \times [0, 1], \quad & (e, t) \sim (\bar{e}, 1 - t), \\ & (e, 0) \sim o(e), \text{ et} \\ & (e, 1) \sim t(e). \end{aligned}$$

C'est un CW-complexe de dimension 0 ou 1, que nous noterons aussi  $X$ . En particulier, les graphes de Cayley peuvent être réalisés géométriquement comme des CW-complexes de dimension 1. La projection d'une arête dans la réalisation géométrique d'un graphe est appelée une **arête géométrique** de  $X$ .

Puisque la famille  $S$  engendre le groupe  $G$ , le graphe de Cayley  $X(G, S)$  est connexe. On rappelle qu'un graphe est  **$k$ -régulier** si tous ses sommets ont valence  $k$ , c'est-à-dire pour un sommet donné, il y a exactement  $k$  arêtes de  $E$  ayant ce sommet pour sommet initial. Avec cette définition, le graphe  $X(G)$  est  $|S|$ -régulier. De plus, si l'élément neutre  $e$  de  $G$  n'appartient pas à la famille  $S$ , alors  $X(G, S)$  n'a pas de **boucle** (une arête ayant ses sommets initiaux et terminaux égaux).

Si  $H < G$  est un sous-groupe de  $G$  (non nécessairement distingué), alors le **graphe de Schreier de  $H \setminus G$  relativement à  $S$**  est le graphe  $X(H \setminus G, S) = X(H \setminus G) = (V, E)$  dont l'ensemble des sommets  $V$  est  $H \setminus G$  et les arêtes sont les triplets  $(Hh, Hg, s) \in H \setminus G \times H \setminus G \times S$  avec  $Hh = Hgs$ . L'arête opposée à  $e$  est  $\bar{e} = (Hg, Hh, s^{-1})$ . Le sommet initial de  $e$  est  $o(e) = Hh$  et son sommet terminal est  $t(e) = Hg$ . Pour alléger les notations, nous écrirons souvent simplement  $e = (Hh, Hg)$ .

Le groupe  $G$  agit par multiplication à gauche sur lui-même. Cette action induit une action sur les sommets du graphe de Cayley de  $G$  respectant les arêtes. Cette action peut donc s'étendre en une action du groupe  $G$  par automorphismes de graphe sur le graphe de Cayley  $X(G)$ . De plus, cette action est libre et propre.

De façon plus générale, soient deux sous-groupes  $H$  et  $L$  de  $G$ , avec  $H$  distingué dans  $L$  :  $H \triangleleft L$ . Le groupe  $H \setminus L = L/H$  agit sur les classes à droite de  $H \setminus G$  par multiplication à gauche : on a le morphisme

$$\begin{aligned} \phi : H \setminus L &\rightarrow \mathfrak{S}(H \setminus G) \\ H\ell &\mapsto \{Hg \mapsto H\ell.Hg = H\ell g\}. \end{aligned}$$

De plus, cette action est libre : si  $\ell \in L$  est tel qu'il existe  $g \in G$  vérifiant  $H\ell.Hg = Hg$ , alors  $H\ell g = Hg$ , ce qui implique que  $H\ell = H$  est l'élément neutre de  $L/H$ .

En outre, si  $g$  et  $g' \in G$  sont tels qu'il existe  $s \in S$  vérifiant  $Hg' = Hgs$ , alors pour tout  $\ell \in L$ , on a aussi  $H\ell g' = H\ell gs$ , donc l'action de  $L/H$  préserve les arêtes du graphe de Schreier  $X(H \setminus G)$ .

**Proposition 0.20.** *Le morphisme*

$$\begin{aligned} \phi : H \setminus L &\rightarrow \mathfrak{S}(H \setminus G) \\ H\ell &\mapsto \{Hg \mapsto H\ell.Hg = H\ell g\}. \end{aligned}$$

*se prolonge en une action libre de  $L/H$  sur  $X(H \setminus G)$  par automorphismes de graphes.*

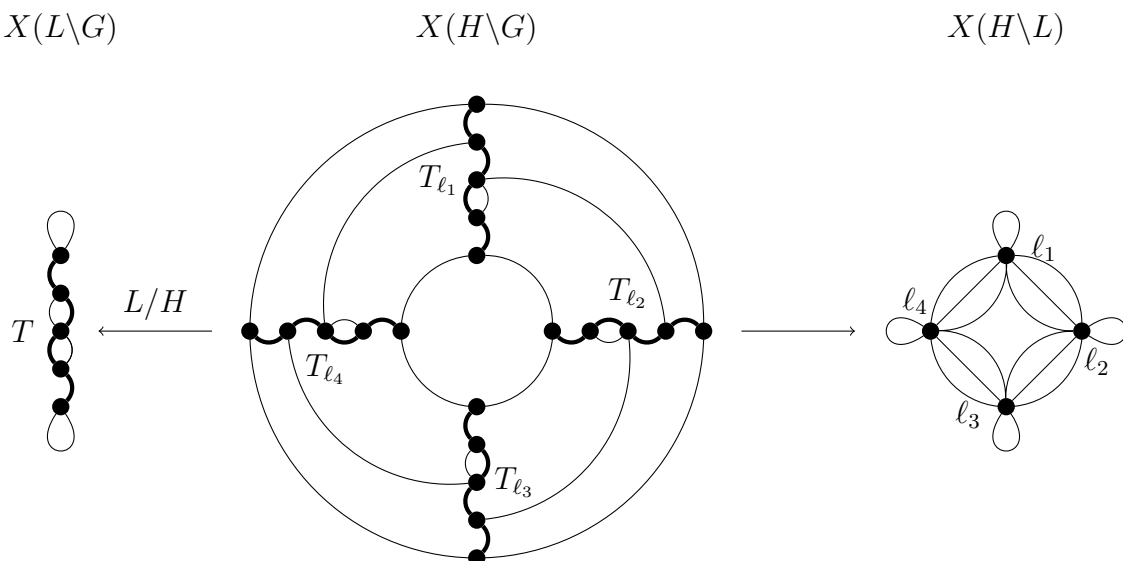
*Le quotient de  $X(H \setminus G)$  par cette action est  $X(L \setminus G)$  et la projection  $X(H \setminus G) \rightarrow X(L \setminus G)$  est un revêtement galoisien, de groupe  $L/H$ .*

□

En particulier, en prenant  $H = \{e\}$ , le graphe de Schreier de  $L \setminus G$  est le quotient du graphe de Cayley de  $G$  par l'action de  $L$ .

Si  $H$  est distingué dans  $G$ , le graphe de Schreier de  $H \setminus G$  est en fait le graphe de Cayley du groupe  $H \setminus G = G/H$  relativement à la famille génératrice  $\tilde{S} = \{Hs, s \in S\}$ . Ce graphe peut éventuellement avoir des arêtes doubles qui correspondent à deux générateurs dans  $S$  ayant la même image dans  $H \setminus G$ . Il peut aussi avoir des boucles, s'il existe un élément de  $S$  contenu dans  $H$ .

Ainsi, par l'action du groupe  $L/H$ , on peut obtenir le graphe de Schreier  $X(L \setminus G)$  à partir du graphe de Schreier  $X(H \setminus G)$ . Il est également possible d'obtenir le graphe de Cayley  $X(H \setminus L)$  du groupe  $L/H$  à partir des deux graphes de Schreier précédents, à l'aide de la construction décrite ci-dessous, exposée par Lackenby [La3].



Relier entre eux graphes de Schreier et de Cayley.

Prenons un arbre maximal  $T$  dans  $X(L\backslash G)$ . Il contient tous les sommets de  $X(L\backslash G)$ .

La préimage de  $T$  par le revêtement  $X(H\backslash G) \rightarrow X(L\backslash G)$  est une forêt  $F$  dans  $X(H\backslash G)$ , qui contient tous les sommets de  $X(H\backslash G)$ . Les composantes connexes de  $F$  sont en bijection avec les éléments de  $L/H$ . Notons  $F = \bigsqcup_{\ell \in L/H} T_\ell$ , où les  $T_\ell$  sont les composantes connexes de  $F$ . Par convention,  $T_e$  est la composante connexe de  $F$  contenant la classe  $H$  de  $H\backslash G$ , et pour tout  $\ell \in L/H$ ,  $T_\ell = \bar{\ell} \cdot T_e$ . Ce sont des arbres.

On peut alors construire un graphe de Cayley  $X(H\backslash L)$  à partir de  $X(H\backslash G)$  en rétractant chaque arbre  $T_\ell$  de  $F$  en un seul sommet  $\ell$ . Les arêtes des arbres  $T_\ell$  disparaissent, par contre toutes les autres arêtes de  $X(H\backslash G)$  subsistent dans  $X(H\backslash L)$ . L'ensemble des sommets de  $X(H\backslash L)$  est en bijection avec  $L/H$ .

Le lemme suivant sera utilisé de manière cruciale au chapitre cinq.

**Lemme 0.21.** *Supposons le groupe  $L$  d'indice fini dans  $G$ , et notons  $d = [G : L]$ . Il existe une famille génératrice finie symétrique  $\Sigma$  de  $L$  en bijection avec les arêtes de  $X(L\backslash G)$  qui n'appartiennent pas à l'arbre maximal  $T$  et telle que pour tout sous-groupe  $H$  distingué dans  $L$ , le graphe décrit par la construction précédente est isomorphe au graphe de Cayley  $X(H\backslash L, \Sigma)$  de  $L/H$  relativement à  $\Sigma$ . De plus,  $|\Sigma| - 1 = d(|S| - 1)$ .*

□

Cette méthode est une traduction en termes de graphes de Cayley de la méthode de Reidemeister-Schreier permettant d'obtenir une présentation finie de  $L$  à partir d'une présentation finie du groupe  $G$ . Pour plus de détails, nous renvoyons à [Ba, Chapitre III Théorème 4 p. 32 et paragraphe 6 p. 55].

On peut également construire un 2-complexe cellulaire  $K$  dont  $G$  est le groupe fondamental. Plus précisément, on a la définition suivante.

**Définition 0.22** (Complexe de Cayley). *Le 2-complexe de Cayley de  $G$  associé à la présentation finie  $\langle S, R \rangle$  est un 2-complexe  $K$  ayant un seul sommet  $v$ . Le 1-squelette  $K^{(1)}$  de  $K$  est l'espace topologique quotient  $\{v\} \sqcup (S \times [0, 1]) / \sim$ , où  $S$  est munie de la topologie discrète et  $\sim$  est la relation d'équivalence engendrée par :*

$$\begin{aligned} \forall s \in S, t \in [0, 1], \quad & (s, t) \sim (s^{-1}, 1 - t) \\ & (s, 0) \sim v \\ & (s, 1) \sim v. \end{aligned}$$

Les faces ou 2-cellules de  $K$  sont en bijection avec les relations de  $R$ . Plus précisément, notons la projection  $p : \{v\} \sqcup (S \times [0, 1]) \rightarrow K^{(1)}$ . Une face correspondant à la relation  $r = s_1 \dots s_m$  est un disque  $\mathbb{D}^2$  recollé par l'application d'attachement

$$\begin{aligned} f_r : \partial\mathbb{D}^2 \cong [0, 1] / 0 \sim 1 & \rightarrow K^{(1)} \\ t & \mapsto p \left( s_i, t - \frac{i-1}{m} \right) \text{ si } t \in \left[ \frac{i-1}{m}, \frac{i}{m} \right]. \end{aligned}$$

Soit  $K$  le 2-complexe de Cayley associé à un groupe  $G$  de présentation finie  $\langle S, R \rangle$ . On peut construire un revêtement universel  $\tilde{K}$  de  $K$  de la manière suivante :  $\tilde{K}$  est un 2-complexe dont le 1-squelette est le graphe de Cayley  $X = X(G, S)$ , et les 2-cellules sont des faces attachées le long de tous les chemins de  $X$  constitués par les relations de  $R$  : étant donné un sommet  $x$  de  $X$ , on considère tous les chemins fermés partant de  $x$  étiquetés par les mots des relations de  $R$ , et on rattache une 2-cellule pour chacun de ces chemins, avec une application d'attachement similaire à celle du 2-complexe de Cayley de  $G$  associé à la présentation finie  $\langle S, R \rangle$ . On vérifie que  $\tilde{K}$  est simplement connexe et que l'action naturelle de  $G$  sur  $\tilde{K}$  est une action par automorphismes de revêtements. De plus, le quotient de  $\tilde{K}$  par cette action est le 2-complexe de Cayley  $K$  du groupe  $G$ .

**Définition 0.23** (Complexe universel, et complexe de Cayley d'un sous-groupe d'indice fini de  $G$ ). *Le 2-complexe  $\tilde{K}$  obtenu précédemment est appelé le **complexe universel associé à la présentation finie  $\langle S, R \rangle$  de  $G$** .*

*Soit  $H$  un sous-groupe d'indice fini de  $G$  (non nécessairement distingué). Le sous-groupe  $H$  agit sur  $\tilde{K}$  par automorphismes de revêtement. On obtient par passage au quotient un 2-complexe  $K_H = H \backslash \tilde{K}$ . Ce 2-complexe est appelé le **complexe de Cayley associé à  $(H \backslash G, S)$** .*

Le groupe fondamental de  $K_H$  est isomorphe à  $H$ .

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\tilde{K}, *) = \{0\} & & \tilde{K} \\ & \swarrow H & \downarrow G \\ \pi_1(K_H, *) \cong H & K_H = H \backslash \tilde{K} & K \\ & \searrow & \\ \pi_1(K, *) \cong G & & \end{array}$$

Puisque le 1-squelette de  $\tilde{K}$  n'est autre que le graphe de Cayley  $X(G, S)$  de  $G$ , le 1-squelette de  $K_H$  est le graphe de Schreier  $X(H \backslash G, S)$ . En effet, l'action du groupe  $H$  sur  $\tilde{K}$  restreinte au 1-squelette de  $\tilde{K}$  est exactement la même que l'action du groupe  $H$  dans le revêtement galoisien de graphes  $X(G, S) \xrightarrow{H} X(H \backslash G, S)$ . On en déduit que le 1-squelette de  $K_H$  n'est autre que  $X(H \backslash G, S)$ . En particulier, les 0- et 1-cochaînes de  $K_H$  sont les 0- et 1-cochaînes de  $X(H \backslash G, S)$ .

## 0.2.2 Constantes de Cheeger et propriété $(\tau)$ .

### Constante de Cheeger combinatoire.

Dans la suite, les sous-groupes considérés seront toujours d'indice fini dans  $G$ , et donc les graphes de Schreier associés seront toujours des graphes finis connexes. C'est pourquoi nous ne nous intéresserons qu'aux graphes finis connexes.

Soit un graphe fini connexe  $X = (V, E)$ , où  $V$  est l'ensemble des sommets de  $X$  et  $E$  l'ensemble de ses arêtes.

Si  $A$  est un sous ensemble de  $V$ , on note  $\partial A$  (le "bord" de  $A$ ) le sous-ensemble de  $E$  des arêtes d'origine un sommet de  $A$  et d'extrémité un sommet de  $V \setminus A = A^c$ , le complémentaire de  $A$  dans  $V$ .

**Définition 0.24** (Constante de Cheeger). *Soit  $X = (V, E)$  un graphe fini connexe ayant au moins deux sommets. La **constante de Cheeger** de  $X$  est définie par :*

$$h(X) = \min \left\{ \frac{|\partial A|}{|A|}, A \subset V, A \neq \emptyset \text{ et } |A| \leq \frac{|V|}{2} \right\}.$$

En un certain sens, la constante de Cheeger mesure la "connectivité" du graphe : plus elle est grande, plus un nombre important de sommets sont reliés entre eux et plus l'information se propage vite dans le graphe (voir par exemple l'introduction de [DSV, An Overview p. 1]).

### Constante de Cheeger riemannienne.

Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne connexe, orientée, compacte et sans bord. On a une analogie entre la constante combinatoire  $h$  pour un graphe fini et une constante similaire pour  $M$ . Cette analogie est loin d'être fortuite, en réalité elle résulte d'une "analogie" plus profonde, qui est l'existence de quasi-isométries entre une variété riemannienne compacte et certains graphes que l'on peut plonger dans cette variété.

**Définition 0.25** (Constante isopérimétrique de Cheeger). *La **constante de Cheeger** d'une variété riemannienne  $(M, g)$  de volume fini est :*

$$h(M) = \inf_A \left\{ \frac{\text{Aire}_g(\partial A)}{\text{Vol}_g(A)} \right\},$$

où  $A$  parcourt les sous-variétés de  $M$  vérifiant  $0 < \text{Vol}_g(A) \leq \frac{\text{Vol}_g(M)}{2}$ .

Les constantes de Cheeger combinatoires et riemanniennes sont reliées par la proposition suivante.

**Proposition 0.26.** *Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte, connexe et sans bord et  $(M_i \rightarrow M)_{i \in I}$  une famille de revêtements riemanniens finis de  $M$ . Soit  $S$  une famille génératrice finie pour le groupe fondamental de  $M$ . Pour tout  $i \in I$ , notons  $X_i = X(\pi_1 M_i \backslash \pi_1 M, S)$  le graphe de Schreier associé à  $\pi_1(M_i) \backslash \pi_1(M)$ .*

*Il existe deux constantes strictement positives  $c$  et  $C$  ne dépendant que de  $S$  et de la classe d'isométrie de  $M$  telles que l'on ait pour tout  $i$  :*

$$c \leq \frac{h(M_i)}{h(X_i)} \leq C.$$

**Propriété  $(\tau)$ .**

La propriété  $(\tau)$  est une version plus faible de la propriété  $(T)$  de Kazhdan, introduite par Lubotzky dans les années 1990 [Lu] et dénommée  $(\tau)$  par analogie avec la propriété  $(T)$  dont elle est très proche. Pour une présentation détaillée de cette propriété, nous renvoyons à [Lu] et [LZ].

Soit  $\Gamma$  un groupe discret de type fini, et  $(\Gamma_i)_{i \in I}$  une famille de sous-groupes distingués et d'indice fini dans  $\Gamma$ . Soit  $S$  une famille génératrice finie de  $\Gamma$ . Pour tout  $i$ , soit  $X_i = X(\Gamma_i \backslash \Gamma, S)$  le graphe de Cayley (fini connexe) correspondant au groupe fini  $\Gamma_i \backslash \Gamma$ .

**Définition 0.27** (Propriété  $(\tau)$ ). *Le groupe  $\Gamma$  possède la propriété  $(\tau)$  relativement à la famille  $(\Gamma_i)_{i \in I}$  s'il existe  $\epsilon_1 > 0$  tel que tout indice  $i \in I$ ,  $h(X_i) \geq \epsilon_1$ .*

*On dit que  $\Gamma$  possède la propriété  $(\tau)$  s'il possède la propriété  $(\tau)$  relativement à la famille de ses sous-groupes distingués d'indice fini.*

**Remarque 0.28.** *La propriété  $(\tau)$  est indépendante de la famille génératrice finie  $S$  choisie.*

**Remarque 0.29.** *Supposons que  $\Gamma$  soit le groupe fondamental d'une variété riemannienne  $M$ . Pour tout  $i \in I$ , soit  $M_i$  le revêtement fini de  $M$  correspondant au sous-groupe  $\Gamma_i$  de  $\Gamma$ . La proposition 0.26 montre que  $\Gamma$  possède la propriété  $(\tau)$  relativement à la famille  $(\Gamma_i)_{i \in I}$  si et seulement s'il existe  $\epsilon_2 > 0$  tel que pour tout indice  $i \in I$ ,  $h(M_i) \geq \epsilon_2$ .*





# Chapitre 1

---

**Trouver une fibre virtuelle dans un revêtement fini.**

## 1.1 Théorème principal.

Soit  $F$  une surface connexe, compacte, sans bord et orientable. On note  $c_+(F) = \max(0, 2g(F) - 1)$  la **complexité** de  $F$ . Si  $F$  n'est pas connexe,  $c_+(F)$  est alors la somme des complexités  $c_+(F')$  des composantes connexes  $F'$  de  $F$ . On définit également  $\chi_-(F) = \max(0, -\chi(F))$  la partie négative de la caractéristique d'Euler de  $F$ . Remarquons que  $\chi_-(F) \leq c_+(F) - 1$ .

Pour un corps en anses  $C$  (éventuellement creux), notons  $\chi_-(C) = \chi_-(\partial_+ C)$ . Si  $S$  est une union de composantes connexes de  $\partial_- C$ , d'après cette définition,  $\chi_-(S) \leq \chi_-(C)$ .

Une surface  $S$  plongée dans une variété riemannienne  $M$  de dimension trois est dite **pseudo-minimale** si elle vérifie les propriétés suivantes. La surface  $S$  est orientable, compacte, sans bord, et  $S$  est une surface minimale ou le bord d'un petit voisinage régulier d'une surface minimale non orientable, avec éventuellement un petit tube attaché verticalement dans la structure de  $I$ -fibré.

Le théorème suivant est le théorème principal de ce chapitre.

**Théorème A.** *Soit  $M$  une variété de dimension trois hyperbolique, connexe, orientée, compacte et sans bord. Notons  $\text{Inj}(M)$  le rayon d'injectivité de  $M$  et soit  $\epsilon \leq \frac{1}{2}\text{Inj}(M)$ .*

*Il existe une constante explicite  $k = k(\epsilon, \text{Vol}(M)) > 0$ , ne dépendant que de  $\epsilon$  et du volume  $\text{Vol}(M)$  vérifiant les propriétés suivantes.*

*Soit  $M' \rightarrow M$  un revêtement fini de degré  $d$  contenant une surface plongée  $F$ , compacte, sans bord, orientable, pseudo-minimale, qui scinde le revêtement  $M'$  en  $q$  corps en anses (éventuellement creux)  $C_1, \dots, C_q$ , et ayant les propriétés suivantes.*

1. *Tout lacet plongé dans  $C_j$  de longueur inférieure ou égale à  $\epsilon$  est homotopiquement trivial dans  $C_j$ .*
2. *Supposons que  $k c \ln c < \ln \ln \frac{d}{q}$ , où  $c \geq \max_{j=1, \dots, q} \{\chi_-(C_j)\}$ .*

*Alors le revêtement  $M'$  est un fibré sur le cercle ou un  $I$ -fibré tordu, et on peut trouver dans  $M'$  une fibre de genre au plus  $g = \max_{j=1, \dots, q} \{g(C_j)\}$ . En particulier, la variété  $M$  est virtuellement fibrée sur le cercle  $\mathbb{S}^1$ .*

L'hypothèse (1) du théorème A est assez technique, et n'est peut-être pas nécessaire.

**Conjecture (\*)**. *Le théorème A reste vrai sans l'hypothèse (1).*

**Remarque 1.1.** *L'expression explicite de la constante  $k$  permet d'étudier son comportement : lorsque le volume  $\text{Vol}(M)$  est fixé et que  $\epsilon$  tend vers zéro, ou lorsque  $\epsilon$  est fixé et que le volume  $\text{Vol}(M)$  tend vers l'infini,  $k$  tend vers l'infini. Ainsi, à mesure que le rayon d'injectivité de  $M$  diminue ou que son volume augmente, l'inégalité du théorème A devient de plus en plus difficile à vérifier. C'est également le cas pour toutes les autres constantes explicites dans les résultats de cette thèse dont la formulation est analogue à celle du théorème A.*

**Remarque 1.2.** *Les hypothèses du théorème A donnent une condition nécessaire et suffisante pour qu'une variété hyperbolique  $M$  de dimension trois soit virtuellement*

fibrée sur le cercle. Les récents travaux de Dani Wise sur la structure de groupes munis d'une hiérarchie quasi-convexe (voir par exemple [Wi]) impliqueraient qu'une variété de dimension trois hyperbolique  $M$  est virtuellement de Haken si et seulement si elle satisfait les hypothèses du théorème A.

#### Démonstration du théorème A.

Supposons qu'il existe un revêtement fini  $M' \rightarrow M$  de  $M$  de degré  $d$  vérifiant les hypothèses du théorème A. La démonstration repose sur trois propositions clés, dont la preuve fera l'objet des paragraphes suivants. Notons  $g = \frac{c}{2} + 1$ . C'est une borne supérieure pour le genre des bords des corps en anses de  $M'$ .

**Lemme 1.3.** *Parmi les corps en anses  $C_1, \dots, C_q$  de  $M'$ , il en existe un, notons-le  $C$ , tel que*

$$\text{Vol}(C) \geq \text{Vol}(M) \frac{d}{q}.$$

#### Démonstration du lemme 1.3.

La preuve du lemme est immédiate, puisqu'il y a  $q$  corps à anses  $C_1, \dots, C_q$ , et que  $\text{Vol}(M') = d\text{Vol}(M)$ .  $\square$

Choisissons un corps en anses  $C$  comme dans le lemme 1.3.

**Lemme 1.4.** *Soit  $k_0 = \max \left\{ \frac{\ln(4(2ca'+1))}{2 \ln 2}, 1 + \frac{\ln(1+\ln(12V_3/\text{Vol}(M)))}{2 \ln 2} \right\}$ , où  $V_3$  est le volume maximal d'un tétraèdre hyperbolique idéal dans  $\mathbb{H}^3$  et  $a' = 6(21/4 + 3/4\pi + 3/4\epsilon + 2/\sinh^2(\epsilon/4))$ .*

*Si  $k_0 \chi_-(C) \ln \chi_-(C) \leq \ln \ln d/q$  et  $\text{Vol}(M) \geq \pi/2$ , alors on peut remplacer les surfaces du bord de  $C$  par des surfaces simpliciales, et le corps en anses  $C''$  obtenu après ces modifications vérifie :*

$$\text{Vol}(C'') \geq \frac{1}{4} \text{Vol}(C) \geq \frac{\text{Vol}(M)d}{4q}.$$

Ce lemme sera démontré au paragraphe 1.2.1. Pour alléger les notations, nous noterons encore  $C$  le nouveau corps en anses  $C''$  obtenu par ce lemme.

**Définition 1.5.** *Soit  $x$  un point de  $C$  et  $S$  une surface immergée dans  $C$ . On dit que  $S$  **sépare**  $x$  **de**  $\partial_+ C$  si tout chemin orienté d'origine  $x$  et dont l'extrémité appartient à  $\partial_+ C$  a son nombre algébrique d'intersection avec  $S$  égal à  $+1$ .*

*Si deux surfaces  $S$  et  $T$  plongées dans  $C$  sont telles que  $S$  sépare tout point de  $T$  de  $\partial_+ C$ , on dit que  $S$  **sépare**  $T$  **de**  $\partial_+ C$ . Dans ce cas, les surfaces  $S$  et  $T$  sont dites **emboîtées**.*

Rappelons que le genre d'un corps en anses (éventuellement creux) est noté  $g(C) = g(\partial_+ C)$ , et correspond au genre de son bord positif.

Pour tout réel  $x$ , notons  $\lceil x \rceil$  la partie entière supérieure de  $x$ , i.e. le plus petit entier supérieur ou égal à  $x$ . De même,  $\lfloor x \rfloor$  désigne la partie entière inférieure de  $x$ , qui correspond au plus grand entier inférieur ou égal à  $x$ . Par convention,  $\lceil x \rceil$  et  $\lfloor x \rfloor$  seront nuls si  $x$  est négatif.

Pour  $\epsilon > 0$ , le  $\epsilon$ -**diamètre** d'une surface riemannienne  $S$  est le nombre minimal de boules de rayon  $\epsilon$  pour la métrique de  $S$  nécessaires pour recouvrir la surface  $S$ . Si  $S$  est plongée dans une variété riemannienne de dimension trois  $M$ , le  $\epsilon$ -diamètre dans la variété ambiante  $M$  est le nombre minimal de boules de  $M$  de rayon  $\epsilon$  nécessaires pour recouvrir  $S$ .

La proposition suivante représente une étape décisive dans la construction d'un certain nombre de surfaces parallèles dans le corps en anses  $C$ . Il s'agit d'une adaptation du lemme 4.5 p. 2251 de [Mah]. Sa preuve fera l'objet du paragraphe 1.2.

**Proposition B (des Surfaces Emboîtées).**

Soit  $\delta$  le diamètre du corps en anses  $C$  inclus dans  $M'$ ,  $\epsilon \leq \text{Inj}(M)/2$ ,  $K = 4 \left( 3 + \frac{1}{\sinh \frac{\epsilon}{8}} \right) g(C) - 10$  et  $K' = 2a'\chi_-(C)$ . Supposons que  $k_0 \chi_-(C) \ln \chi_-(C) \leq \ln \ln \frac{d}{q}$ .

Avec ces hypothèses, il existe au moins  $n = \lceil \frac{\delta}{36\epsilon K} - \frac{2}{9} - \frac{K'}{9K} \rceil$  surfaces orientables, disjointes, emboîtées et immergées dans  $C$ . Toutes ces surfaces sont homotopes à des surfaces obtenues à partir de  $\partial_+ C$  par compressions. De plus, ces surfaces ont un  $\epsilon$ -diamètre dans  $M'$  majoré par  $K$  et deux surfaces sont toujours séparées l'une de l'autre par une distance d'au moins  $10\epsilon K$ .

Grâce à cette proposition, on peut obtenir au moins  $n = \lceil \frac{\delta}{36\epsilon K} - \frac{2}{9} - \frac{K'}{9K} \rceil$  surfaces emboîtées, immergées dans le corps en anses  $C$ . Ces surfaces sont disjointes deux à deux et homotopes à certaines composantes connexes de surfaces obtenues par chirurgie à partir de  $\partial_+ C$ . En particulier, le genre de ces surfaces est compris entre 0 et  $g(C)$ , le genre de  $C$  (qui est par hypothèse inférieur ou égal à  $g = c/2 + 1$ ). On peut ainsi trouver au moins  $\lfloor \frac{n}{g(C)+1} \rfloor$  telles surfaces qui ont le même genre. La prochaine étape consiste à remplacer ces surfaces immergées et emboîtées par des surfaces plongées et deux à deux parallèles.

**Proposition C (des Surfaces Parallèles).**

Soit  $\delta$  le diamètre du corps en anses  $C$  inclus dans  $M'$ ,  $\epsilon \leq \text{Inj}(M)/2$ ,  $K = 4 \left( 3 + \frac{1}{\sinh \frac{\epsilon}{8}} \right) g(C) - 10$  et  $K' = 2a'\chi_-(C)$ . Supposons que  $k_0 \chi_-(C) \ln \chi_-(C) \leq \ln \ln \frac{d}{q}$ .

Avec ces hypothèses, il existe au moins  $m = (\lfloor \frac{1}{g(C)+1} \lceil \frac{\delta}{36\epsilon K} - \frac{2}{9} - \frac{K'}{9K} \rceil \rfloor - 4)$  surfaces orientables, parallèles, connexes et plongées dans  $C$ , séparées les unes des autres par une distance supérieure ou égale à  $\epsilon K$ , et chaque surface peut être recouverte par au plus  $K$  boules plongées dans  $M'$  de rayon  $2\epsilon$  (donc en particulier, le diamètre dans la variété ambiante  $M'$  de chacune de ces surfaces est uniformément majoré par  $4\epsilon K$ ).

La démonstration de cette proposition fait l'objet du paragraphe 1.3.

Notons

$$\begin{aligned} a &= 2 \left( 3 + \frac{1}{\sinh^2(\frac{\epsilon}{8})} \right), \\ b &= 2 \left( 1 + \frac{2}{\sinh^2(\frac{\epsilon}{8})} \right) \text{ et} \\ a' &= 6 \left( \frac{21}{4} + \frac{3}{4\pi} + \frac{3}{4\epsilon} + \frac{2}{\sinh^2(\frac{\epsilon}{4})} \right). \end{aligned}$$

**Lemme 1.6.** *Sous les hypothèses du théorème A et avec ces notations, on peut trouver dans le corps en anses  $C$  de  $M'$  au moins  $m$  surfaces plongées, parallèles et disjointes vérifiant les conclusions de la proposition C, avec*

$$m \geq \frac{2}{\chi_-(C) + 4} \left( \frac{\ln\left(\frac{d}{q}\right) + \ln\left(\frac{\text{Vol}(M)}{2\pi}\right)}{72\epsilon(a\chi_-(C) + b)} - \frac{2}{9}\left(1 + \frac{a'}{a}\right) \right) - 5.$$

Démonstration du lemme 1.6.

Le nombre  $m$  de surfaces parallèles et plongées dans  $C$  obtenues par la proposition C est égal à :

$$m = \lfloor \frac{1}{g(C) + 1} \lceil \frac{\delta}{36\epsilon K} - \frac{2}{9} - \frac{K'}{9K} \rceil \rfloor - 4,$$

où

$$\begin{aligned} K &= 4 \left( 3 + \frac{1}{\sinh^2\frac{\epsilon}{8}} \right) g(C) - 10 \\ &= a\chi_-(C) + b, \end{aligned}$$

et

$$K' = 2a'\chi_-(C).$$

Il existe une relation entre le diamètre  $\delta$  du corps en anses  $C$  et le rapport  $d/q$ . D'une part,

$$\text{Vol}(C) \leq \text{Vol}(\mathbb{B}_{\mathbb{H}^3}(\delta)) = \pi(\sinh(2\delta) - 2\delta) \leq \frac{\pi}{2}e^{2\delta}.$$

**Remarque 1.7.** *Le second logarithme de l'expression  $\ln \ln \frac{d}{q}$  provient de l'estimation ci-dessus reliant le diamètre  $d$  d'une variété hyperbolique de dimension trois avec son volume.*

D'autre part, le lemme 1.4 fournit la borne inférieure

$$\text{Vol}(C) \geq \text{Vol}(M) \frac{d}{4q},$$

qui conduit à l'estimation

$$\delta \geq \frac{1}{2} \ln \left( \frac{d}{q} \right) + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\text{Vol}(M)}{2\pi} \right). \quad (1.1)$$

En particulier, si  $d/q$  tend vers l'infini,  $\delta$  tend aussi vers l'infini.

Dans l'expression de  $m$  apparaît le rapport  $\frac{K'}{9K}$ . Mais

$$\begin{aligned} \frac{K'}{9K} &= \frac{2a'\chi_-(C)}{9a\chi_-(C) + 9b} \\ &= \frac{2a'}{9a + 9b/\chi_-(C)} \\ &\leq \frac{2a'}{9a}. \end{aligned}$$

Ainsi, en remplaçant le rapport  $K'/9K$  par  $2a'/9a$  et en tenant compte de l'inégalité (1.1), on obtient la minoration suivante :

$$\begin{aligned} m &\geq \lfloor \frac{2}{\chi_-(C) + 4} \left[ \frac{\ln\left(\frac{d}{q}\right) + \ln\left(\frac{\text{Vol}(M)}{2\pi}\right)}{72\epsilon(a\chi_-(C) + b)} - \frac{2}{9} - \frac{2a'}{9a} \right] \rfloor - 4 \\ &\geq \frac{2}{\chi_-(C) + 4} \left( \frac{\ln\left(\frac{d}{q}\right) + \ln\left(\frac{\text{Vol}(M)}{2\pi}\right)}{72\epsilon(a\chi_-(C) + b)} - \frac{2}{9}\left(1 + \frac{a'}{a}\right) \right) - 5, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du lemme 1.6.  $\square$

Les  $m$  surfaces parallèles construites à la proposition C sont des candidates pour être des fibres virtuelles. Mais il faut encore en sélectionner certaines pour obtenir une fibration virtuelle de la variété de départ  $M$ .

Soit  $\mathcal{D}$  un polyèdre fondamental de Dirichlet pour  $M$  plongé dans le revêtement universel  $\widetilde{M} \simeq \mathbb{H}^3$ . Les translatsés de  $\mathcal{D}$  sous l'action des transformations de revêtement forment un pavage du revêtement universel  $\widetilde{M}$ . En projetant ce pavage par l'application de revêtement  $\mathbb{H}^3 \rightarrow M'$ , on obtient un pavage du revêtement fini  $M' \rightarrow M$  par  $d$  copies de  $\mathcal{D}$ . Chacune des  $m$  surfaces parallèles, connexes et plongées dans  $M'$  obtenues à la proposition C intersecte un nombre fini de copies de  $\mathcal{D}$  dont la réunion est connexe. Un tel ensemble est appelé un **motif de domaines fondamentaux**. Ainsi, un motif de domaines fondamentaux est une réunion connexe de copies de  $\mathcal{D}$  recollées le long de certaines de leurs faces de dimension 2. On peut supposer que les surfaces plongées intersectent le 2-squelette du pavage transversalement. Autrement dit, on peut supposer qu'aucune surface ne rencontre un sommet des polyèdres fondamentaux, que les surfaces intersectent les arêtes en des points isolés et qu'elles intersectent transversalement les faces de dimension 2 des polyèdres.

**Lemme 1.8.** *Soit  $\mathcal{D}$  un polyèdre fondamental de Dirichlet pour  $M$  dans  $\mathbb{H}^3$ . Notons  $\alpha$  le nombre de faces de  $\mathcal{D}$  de dimension 2.*

*Soit  $\ell \in \mathbb{N}$ . Le nombre de manières de recoller au plus  $\ell$  copies de  $\mathcal{D}$  pour former un motif de domaines fondamentaux est majoré par  $(\alpha\sqrt{2}\ell)^{\alpha\ell}$ .*

Démonstration du lemme 1.8.

Pour tout  $\ell \in \mathbb{N}$ , notons  $B(\ell)$  le nombre de manières possibles de recoller entre elles au plus  $\ell$  copies de  $\mathcal{D}$  afin de former un motif de domaines fondamentaux. Il

nous faut trouver un majorant du nombre de façons d'identifier deux à deux certaines faces d'au plus  $\ell$  polyèdres de Dirichlet.

On remarque tout d'abord que le nombre de faces d'un motif d'au plus  $\ell$  domaines fondamentaux est majoré par  $\alpha\ell$ . Par conséquent, il y a au plus  $(\alpha\ell)! \leq (\alpha\ell)^{\alpha\ell}$  façons d'identifier deux à deux ces faces.

Si  $(F_1, F_2)$  est une paire de faces de dimension 2, on peut choisir de les recoller l'une à l'autre par une isométrie renversant l'orientation  $h : F_1 \longrightarrow F_2$  (si une telle isométrie existe entre ces deux faces). Cette isométrie correspond à une réflexion de  $\mathbb{H}^3$  d'hyperplan contenant une des faces de  $\mathcal{D}$  (appelée en Anglais "pairing transformation", voir par exemple [Mar, Proposition 3.5.1 p. 117]). Ainsi, si une telle isométrie existe, elle est unique. On peut aussi décider de ne pas recoller ces deux faces entre elles : par convention, nous dirons que ces deux faces sont appariées par le recollement vide. Par suite, il y a au plus deux façons de recoller  $F_1$  à  $F_2$  : le recollement vide et le recollement associé à une réflexion de  $\mathbb{H}^3$  d'hyperplan contenant une des faces de  $\mathcal{D}$ .

Finalement, il y a au plus  $(\alpha\ell)! 2^{\frac{\alpha\ell}{2}} \leq (\alpha\sqrt{2}\ell)^{\alpha\ell}$  façons de recoller au plus  $\ell$  copies du polyèdre fondamental  $\mathcal{D}$  pour former un motif de domaines fondamentaux, ce qui conclut la preuve du lemme 1.8.  $\square$

Le lemme suivant permet de majorer le nombre  $\alpha$  de faces de dimension 2 d'un polyèdre fondamental  $\mathcal{D}$  et son diamètre dans  $\mathbb{H}^3$  en fonction du volume de la variété  $M$  et d'un minorant de son rayon d'injectivité.

**Lemme 1.9.** *Soit  $\mathcal{D}$  un polyèdre fondamental de Dirichlet pour la variété  $M$  plongé dans le revêtement universel  $\widetilde{M} \simeq \mathbb{H}^3$ . Soit  $\alpha$  le nombre des faces de  $\mathcal{D}$  de dimension 2 et  $\text{diam}(\mathcal{D})$  son diamètre dans  $\mathbb{H}^3$ . Ces deux quantités sont majorées comme suit :*

$$\text{diam}(\mathcal{D}) \leq \frac{8\epsilon \text{Vol}(M)}{\pi(\sinh(2\epsilon) - 2\epsilon)} =: D, \quad (1.2)$$

et

$$\alpha \leq \frac{\pi(\sinh(4D) - 4D)}{\text{Vol}(M)} - 1. \quad (1.3)$$

*Si  $S$  est une surface plongée dans le revêtement  $M'$  de  $M$  qui peut être recouverte par au plus  $K$  boules plongées dans  $M'$  de rayon  $\epsilon' \leq \text{Inj}(M)$ , alors  $S$  intersecte au plus  $L$  images de  $\mathcal{D}$  dans  $M'$ , avec*

$$L \leq \lfloor \frac{\pi(\sinh(2D + 2\epsilon') - 2D - 2\epsilon')}{\text{Vol}(M)} K \rfloor. \quad (1.4)$$

Démonstration du lemme 1.9 :

Pour prouver l'inégalité (1.2), remarquons tout d'abord que  $\text{diam}(\mathcal{D}) \leq 2 \text{diam}(M)$ . En effet, il existe  $w \in \mathbb{H}^3$  tel que  $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{H}^3, d(\gamma(w), x) \geq d(w, x) \forall \gamma \in \pi_1(M)\}$ . Si  $x$  et  $y \in \mathcal{D}$  vérifient  $d(x, y) = \text{diam}(\mathcal{D})$ , alors

$$\text{diam}(\mathcal{D}) = d(x, y) \leq d(x, w) + d(y, w) \leq 2 \text{diam}(M).$$



Prenons  $x$  et  $y \in M$  tels que  $d(x, y) = \text{diam}(M)$ , et soit  $\gamma$  une géodésique minimisante de  $x$  à  $y$ . Par définition,  $\text{lgr}(\gamma) = \text{diam}(M)$ . Soit  $\mathcal{B}$  une famille de points de  $\gamma$  de cardinal maximal parmi de telles familles vérifiant que deux boules de rayon  $\epsilon$  et dont les centres sont deux points distincts de  $\mathcal{B}$  sont d'intérieurs disjoints. Montrons que la réunion des boules de centres appartenant à  $\mathcal{B}$  et de rayon  $2\epsilon$  recouvre  $\gamma$ . Sinon, il existe un point  $z$  de  $\gamma$  qui n'appartient à aucune de ces boules, donc à distance strictement plus grande que  $2\epsilon$  de chacun des points de  $\mathcal{B}$ . Mais cela signifie que l'intérieur de la boule de centre  $z$  et rayon  $\epsilon$  ne rencontre aucune boule ouverte de centre un point de  $\mathcal{B}$  et de rayon  $\epsilon$ , ce qui contredit la maximalité du cardinal de  $\mathcal{B}$ .

Ainsi,  $|\mathcal{B}| \geq \frac{\text{lgr}(\gamma)}{4\epsilon}$ . Comme les boules de centres appartenant à  $\mathcal{B}$  et de rayon  $\epsilon$  sont d'intérieurs disjoints, on en déduit l'inégalité des volumes :

$$\begin{aligned} \text{Vol}(M) &\geq \sum_{u \in \mathcal{B}} \text{Vol}(B(u, \epsilon)) \\ &\geq \frac{\text{lgr}(\gamma)}{4\epsilon} \text{Vol}(B_{\mathbb{H}^3}(\epsilon)) \\ &\geq \frac{\text{diam}(M)}{4\epsilon} \pi(\sinh(2\epsilon) - 2\epsilon), \end{aligned}$$

ce qui démontre l'inégalité (1.2).

Démontrons l'inégalité (1.3). A toute face  $F$  de dimension 2 de  $\mathcal{D}$ , on peut associer un unique translaté  $g_F(\mathcal{D})$  de  $\mathcal{D}$  adjacent à  $\mathcal{D}$  le long de  $F$ . Comme le diamètre de  $g_F(\mathcal{D})$  est aussi égal à  $\text{diam}(\mathcal{D}) \leq D$ , tout point  $x \in g_F(\mathcal{D})$  est à distance au plus  $\text{dist}(x, F) + \text{diam}(\mathcal{D}) \leq 2D$  de  $w \in \mathcal{D}$ . Ainsi, la boule de centre  $w$  et de rayon  $2D$  contient à la fois le polyèdre  $\mathcal{D}$  et la réunion de tous les translatés  $g_F(\mathcal{D})$ , où  $F$  est une 2-face de  $\mathcal{D}$ . Comme ces polyèdres sont d'intérieurs disjoints, en passant aux volumes, on obtient :

$$(\alpha + 1)\text{Vol}(\mathcal{D}) \leq \text{Vol}(B_{\mathbb{H}^3}(w, 2D)),$$

et donc

$$\alpha \leq \frac{\pi(\sinh(4D) - 4D)}{\text{Vol}(M)} - 1.$$

L'inégalité (1.4) se prouve de manière analogue. Notons  $\mathcal{B}$  l'ensemble des centres d'une famille de  $K$  boules plongées dans  $M'$  de rayon  $\epsilon'$  et dont la réunion recouvre la surface  $S$ . Soit  $\mathcal{N} = \cup_{x \in \mathcal{B}} B(x, D + \epsilon')$ . Ces boules ne sont pas nécessairement isométriques à des boules hyperboliques plongées dans  $\mathbb{H}^3$  puisque  $D + \epsilon' > \text{Inj}(M)$ . Cependant,  $\mathcal{N}$  contient tout polyèdre fondamental de  $M'$  intersectant  $S$ .

En effet, soit  $x$  un point d'un polyèdre fondamental de  $M'$  qui rencontre  $S$ . Prenons  $y \in S$  tel que  $d(x, y) = \text{dist}(x, S) \leq D$ . Comme  $y$  est un point de  $S$ , il existe une boule  $B(x, \epsilon')$  avec  $x \in \mathcal{B}$  contenant  $y$ . Ainsi,  $d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) \leq D + \epsilon'$ , ce qui prouve que  $z \in B(x, \epsilon' + D) \subset \mathcal{N}$ .

Soit  $L$  le nombre d'images de  $\mathcal{D}$  que la surface  $S$  intersecte. En comparant les

volumes, on obtient :

$$\begin{aligned} L \operatorname{Vol}(\mathcal{D}) &\leq \operatorname{Vol}(\mathcal{N}) \\ L \operatorname{Vol}(M) &\leq |\mathcal{B}| \operatorname{Vol}(B_{\mathbb{H}^3}(\epsilon' + D)) \\ L &\leq \frac{\pi(\sinh(2\epsilon' + 2D) - 2\epsilon' - 2D)}{\operatorname{Vol}(M)} K, \end{aligned}$$

ce qui démontre l'inégalité (1.4), puisque  $L$  est un entier naturel.  $\square$

La proposition clé qui suit est une version quantitative du Lemme 4.12 p. 2258 de [Mah]. Sa démonstration fera l'objet du paragraphe 1.4.

**Proposition D (des Motifs).**

*Supposons l'existence de  $m$  surfaces disjointes deux à deux parallèles, connexes, orientables, plongées dans le revêtement  $M'$ , séparées les unes des autres par une distance d'au moins  $r > 0$ . Supposons de plus que chacune de ces surfaces peut être recouverte par au plus  $K$  boules plongées dans  $M'$  de rayon  $\epsilon' \leq \operatorname{Inj}(M)$ .*

*Soit  $\mathcal{D}$  un polyèdre fondamental de Dirichlet pour  $M$  plongé dans le revêtement universel  $\widetilde{M} \simeq \mathbb{H}^3$ . Notons  $D$  un majorant du diamètre de  $\mathcal{D}$  et  $\alpha$  un majorant du nombre de ses faces de dimension 2.*

*Pour tout  $\ell \in \mathbb{N}$ , soit  $B(\ell)$  un majorant du nombre de motifs possibles d'au plus  $\ell$  polyèdres fondamentaux. Soit  $L = \lfloor \frac{\pi(\sinh(2D+2\epsilon')-2D-2\epsilon')}{\operatorname{Vol}(M)} K \rfloor$ .*

*Si  $r/(2D+1) \geq 1$  et  $\frac{m}{\alpha^2 L^2 B(L)} \geq 4$ , ou si  $r/(2D+1) \leq 1$  et  $(\frac{r}{2D+1}m - 1) \frac{1}{\alpha^2 L^2 B(L)} \geq 4$ , alors la variété de départ  $M$  est virtuellement fibrée sur le cercle  $\mathbb{S}^1$ , et les  $m$  surfaces parallèles dans  $M'$  sont des fibres virtuelles.*

**Remarque 1.10.** *Le premier logarithme dans l'expression  $\ln \ln \frac{d}{q}$  et la fonction de la complexité  $c \ln(c)$  dans l'hypothèse  $k c \ln(c) < \ln \ln \frac{d}{q}$  proviennent de l'utilisation du lemme combinatoire 1.8 (fournissant une estimation de  $B(\ell)$ ) dans la preuve de cette proposition.*

Nous sommes à présent en mesure de terminer la démonstration du théorème A modulo les propositions B, C et D qui seront démontrées aux prochains paragraphes.

Rappelons que

$$\begin{aligned} a &= 2 \left( 3 + \frac{1}{\sinh^2(\frac{\epsilon}{8})} \right), \\ b &= 2 \left( 1 + \frac{2}{\sinh^2(\frac{\epsilon}{8})} \right) \text{ et} \\ a' &= 6 \left( \frac{21}{4} + \frac{3}{4\pi} + \frac{3}{4\epsilon} + \frac{2}{\sinh^2(\frac{\epsilon}{4})} \right). \end{aligned}$$

Le but à présent est d'appliquer la proposition D aux  $m$  surfaces parallèles obtenues à la proposition C, avec

$$\begin{aligned} r &= \epsilon K = \epsilon(a\chi_-(C) + b), \text{ et} \\ K &= a\chi_-(C) + b. \end{aligned}$$

Notons

$$\begin{aligned} D &= \frac{8\epsilon \text{Vol}(M)}{\pi(\sinh(2\epsilon) - 2\epsilon)}, \\ \alpha &= \frac{\pi(\sinh(4D) - 4D)}{\text{Vol}(M)} - 1, \text{ et} \\ \sigma &= \frac{\pi(\sinh(2D + 4\epsilon) - 2D - 4\epsilon)}{\text{Vol}(M)}. \end{aligned}$$

D'après le lemme 1.9,  $D$  est un majorant du diamètre du domaine fondamental  $\mathcal{D}$ , et le nombre de faces de dimension 2 de  $\mathcal{D}$  est au plus  $\alpha$ .

D'autre part,  $L = \lfloor \frac{\pi(\sinh(2D+4\epsilon)-2D-4\epsilon)}{\text{Vol}(M)} K \rfloor$ . En particulier,

$$L \leq \frac{\pi(\sinh(2D + 4\epsilon) - 2D - 4\epsilon)}{\text{Vol}(M)} (a\chi_-(C) + b) = \sigma(a\chi_-(C) + b).$$

**Affirmation 1.** *Il existe deux constantes  $c_1 \geq 2$  et  $k_1 > 0$ , ne dépendant que de  $\epsilon$  et du volume  $\text{Vol}(M)$ , telles que si  $\chi_-(C) \leq c_1$  et  $k_1 \chi_-(C) \ln \chi_-(C) \leq \ln \ln d/q$ , alors les hypothèses de la proposition D sont satisfaites. En particulier,  $M$  est virtuellement fibrée sur le cercle et les  $m$  surfaces parallèles plongées dans le revêtement  $M'$  de la proposition C sont des fibres virtuelles.*

De plus, on peut prendre  $c_1 = \frac{1}{a} \left( \frac{16\text{Vol}(M)}{\pi(\sinh(2\epsilon)-2\epsilon)} + \frac{1}{\epsilon} - b \right)$ , et

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{2 \ln 2} \ln (72(2D + 1)(c_1 + 4) \left( 3 + 2(\alpha\sigma)^2(ac_1 + b)^2(\sqrt{2}\alpha\sigma(ac_1 + b))^{\alpha\sigma(ac_1 + b)} \right) \\ &\quad + 16\epsilon(1 + \frac{a'}{a})(ac_1 + b) - \ln \left( \frac{\text{Vol}(M)}{2\pi} \right)). \end{aligned}$$

Démonstration de l'affirmation 1.

D'après ce qui précède,  $r = \epsilon(a\chi_-(C) + b)$  et  $2D + 1 = \frac{16\epsilon \text{Vol}(M)}{\pi(\sinh(2\epsilon) - 2\epsilon)} + 1$ . Ainsi, si  $\chi_-(C) \leq c_1 = \frac{1}{a} \left( \frac{16\text{Vol}(M)}{\pi(\sinh(2\epsilon) - 2\epsilon)} + \frac{1}{\epsilon} - b \right)$ , alors  $r \leq 2D + 1$ . Nous sommes donc dans le second cas de la proposition D, et ses hypothèses sont satisfaites si  $\left( \frac{r}{2D+1} m - 1 \right) \frac{1}{\alpha^2 L^2 B(L)} \geq 4$ .

Le lemme 1.6 et l'expression de  $r$  permettent d'obtenir la condition suffisante :

$$\left( \frac{2\epsilon(a\chi_-(C) + b)}{(2D + 1)(\chi_-(C) + 4)} \left( \frac{\ln \left( \frac{d}{q} \right) + \ln \left( \frac{\text{Vol}(M)}{2\pi} \right)}{72\epsilon(a\chi_-(C) + b)} - \frac{2}{9} \left( 1 + \frac{a'}{a} \right) \right) - 6 \right) \frac{1}{\alpha^2 L^2 B(L)} \geq 4.$$

Remplaçons  $L$  par sa majoration  $\sigma(a\chi_-(C) + b)$ . D'après le lemme 1.8, on peut prendre pour  $B(L)$  la fonction  $B(L) = (\sqrt{2}\alpha L)^{\alpha L} \leq (\sqrt{2}\alpha\sigma(a\chi_-(C) + b))^{\alpha\sigma(a\chi_-(C) + b)}$ .

On obtient ainsi la condition suffisante

$$\left( \frac{2\epsilon(a\chi_-(C) + b)}{(2D + 1)(\chi_-(C) + 4)} \left( \frac{\ln \left( \frac{d}{q} \right) + \ln \left( \frac{\text{Vol}(M)}{2\pi} \right)}{72\epsilon(a\chi_-(C) + b)} - \frac{2}{9} \left( 1 + \frac{a'}{a} \right) \right) - 6 \right) \geq 4(\alpha\sigma)^2(a\chi_-(C) + b)^2(\sqrt{2}\alpha\sigma(a\chi_-(C) + b))^{\alpha\sigma(a\chi_-(C) + b)},$$

soit encore

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{d}{q}\right) &\geq 72(2D+1)(\chi_-(C)+4)(3+2(\alpha\sigma)^2(a\chi_-(C)+b))^2 \\ &(\sqrt{2}\alpha\sigma(a\chi_-(C)+b))^{\alpha\sigma(a\chi_-(C)+b)} + 16\epsilon\left(1+\frac{a'}{a}\right)(a\chi_-(C)+b) - \ln\left(\frac{\text{Vol}(M)}{2\pi}\right). \end{aligned}$$

Comme  $2 \leq \chi_-(C) \leq c_1$ , un calcul montre que les hypothèses de la proposition D sont vérifiées si

$$\begin{aligned} \frac{\ln \ln\left(\frac{d}{q}\right)}{\chi_-(C) \ln \chi_-(C)} &\geq \frac{1}{2 \ln 2} \ln(72(2D+1)(c_1+4)(3+2(\alpha\sigma)^2(ac_1+b))^2 \\ &(\sqrt{2}\alpha\sigma(ac_1+b))^{\alpha\sigma(ac_1+b)} + 16\epsilon\left(1+\frac{a'}{a}\right)(ac_1+b) - \ln\left(\frac{\text{Vol}(M)}{2\pi}\right)) = k_1. \end{aligned}$$

Ceci démontre l'affirmation 1.  $\square$

**Affirmation 2.** *Il existe deux constantes  $c_2 \geq c_1$  et  $k_2 > 0$ , ne dépendant que de  $\epsilon$  et  $\text{Vol}(M)$ , telles que si  $\chi_-(C) \geq c_2$  et  $k_2 \chi_-(C) \ln \chi_-(C) \leq \ln \ln d/q$ , alors les hypothèses de la proposition D des Motif sont vérifiées. En particulier,  $M$  est virtuellement fibrée sur le cercle et les  $m$  surfaces plongées parallèles dans  $M'$  sont des fibres virtuelles.*

De plus, on peut prendre  $k_2 = 4\alpha\sigma a$ , et

$$\begin{aligned} c_2 = \max\left\{c_1, \frac{1}{a} \left( \frac{\ln 5 - \ln(4\alpha^2\sigma^2(2a+b)^2)}{\alpha\sigma \ln(2\sqrt{2}\alpha\sigma a)} - b \right), \right. \\ \left. \frac{1}{a} \left( \frac{\ln(1+\frac{a'}{a}) - \ln(108\alpha^2\sigma^2(2a+b)^2)}{\alpha\sigma \ln(\sqrt{2}\alpha\sigma(2a+b))} - b \right), b/a, 4, 2\sqrt{2}\alpha\sigma a, \right. \\ \left. \frac{b}{a} + \frac{4}{\alpha\sigma a}, \frac{\ln(18432\epsilon\alpha^2\sigma^2 a^3 (2\sqrt{2}\alpha\sigma a)^{\alpha\sigma b})}{\alpha\sigma a \ln 2}, \right. \\ \left. \frac{1}{a} \left( \frac{1}{\alpha\sigma \ln(\sqrt{2}\alpha\sigma(2a+b))} \ln \left( \frac{1}{4\alpha^2\sigma^2(2a+b)^2} \left( \frac{\left| -\ln \frac{\text{Vol}(M)}{2\pi} - \frac{2}{9}(1+\frac{a'}{a}) \right|}{216\epsilon(2a+b)} - 5 \right) \right) - b \right) \right\}. \end{aligned}$$

Démonstration de l'affirmation 2.

Comme  $\chi_-(C) \geq c_2 \geq c_1$ , le calcul du début de la démonstration de l'affirmation 1 montre que  $r \geq 2D+1$ . Ainsi, on est dans le premier cas de la proposition D. Ses hypothèses sont vérifiées dans ce cas si  $\frac{m}{\alpha^2 L^2 B(L)} \geq 4$ . Or, en tenant compte du lemme 1.6 et des inégalités  $L \leq \sigma(a\chi_-(C)+b)$  et  $B(L) \leq (\sqrt{2}\alpha\sigma(a\chi_-(C)+b))^{\alpha\sigma(a\chi_-(C)+b)}$ , on obtient la condition suffisante :

$$\begin{aligned} \frac{2}{\chi_-(C)+4} \left( \frac{\ln\left(\frac{d}{q}\right) + \ln\left(\frac{\text{Vol}(M)}{2\pi}\right)}{72\epsilon(a\chi_-(C)+b)} - \frac{2}{9}\left(1+\frac{a'}{a}\right) \right) - 5 \geq \\ 4\alpha^2\sigma^2(a\chi_-(C)+b)^2 (\sqrt{2}\alpha\sigma(a\chi_-(C)+b))^{\alpha\sigma(a\chi_-(C)+b)}, \end{aligned}$$

qui peut également s'écrire

$$\ln\left(\frac{d}{q}\right) \geq 72\epsilon(a\chi_-(C) + b)\left(\frac{\chi_-(C) + 4}{2}(4\alpha^2\sigma^2(a\chi_-(C) + b)^2\right. \\ \left. (\sqrt{2}\alpha\sigma(a\chi_-(C) + b))^{\alpha\sigma(a\chi_-(C)+b)} + 5) + \frac{2}{9}\left(1 + \frac{a'}{a}\right)\right) - \ln\frac{\text{Vol}(M)}{2\pi},$$

ou encore

$$\ln\ln\left(\frac{d}{q}\right) \geq \ln(72\epsilon(a\chi_-(C) + b)\left(\frac{\chi_-(C) + 4}{2}(4\alpha^2\sigma^2(a\chi_-(C) + b)^2\right. \\ \left. (\sqrt{2}\alpha\sigma(a\chi_-(C) + b))^{\alpha\sigma(a\chi_-(C)+b)} + 5) + \frac{2}{9}\left(1 + \frac{a'}{a}\right)\right) - \ln\frac{\text{Vol}(M)}{2\pi}).$$

Lorsque  $\chi_-(C)$  devient très grande, l'expression qui domine dans le membre de droite de cette dernière inégalité se comporte comme  $\alpha\sigma a\chi_-(C) \ln \chi_-(C)$ . C'est pourquoi un calcul explicite montre que si  $\chi_-(C) \geq c_2$ , alors

$$\ln(72\epsilon(a\chi_-(C) + b)\left(\frac{\chi_-(C) + 4}{2}(4\alpha^2\sigma^2(a\chi_-(C) + b)^2\right. \\ \left. (\sqrt{2}\alpha\sigma(a\chi_-(C) + b))^{\alpha\sigma(a\chi_-(C)+b)} + 5) + \frac{2}{9}\left(1 + \frac{a'}{a}\right)\right) - \ln\frac{\text{Vol}(M)}{2\pi}) \\ \leq 4\alpha\sigma a\chi_-(C) \ln \chi_-(C).$$

Ainsi, en notant  $k_2 = 4\alpha\sigma a$ , si  $\chi_-(C) \geq c_2$  et  $\text{Vol}(M) \geq 2\pi$ , supposer que  $k_2\chi_-(C) \ln \chi_-(C) \leq \ln \ln d/q$  implique que la condition suffisante ci-dessus est satisfaite, et donc que les conclusions de la proposition D sont vérifiées.

Détaillons à présent les calculs. Il reste à montrer que si  $\chi_-(C) \geq c_2$  et  $\frac{\text{Vol}(M)}{2\pi} \geq 1$ , alors

$$F(\chi_-(C)) \leq 4\alpha\sigma a\chi_-(C) \ln \chi_-(C), \quad (1.5)$$

où

$$F(\chi_-(C)) = \ln(72\epsilon(a\chi_-(C) + b)\left(\frac{\chi_-(C) + 4}{2}(4\alpha^2\sigma^2(a\chi_-(C) + b)^2\right. \\ \left. (\sqrt{2}\alpha\sigma(a\chi_-(C) + b))^{\alpha\sigma(a\chi_-(C)+b)} + 5) + \frac{2}{9}\left(1 + \frac{a'}{a}\right)\right) - \ln\frac{\text{Vol}(M)}{2\pi}).$$

Si  $\text{Vol}(M) \geq 2\pi$ ,  $\ln(\text{Vol}(M)/2\pi) \geq 0$ , et

$$F(\chi_-(C)) \leq \ln(72\epsilon(a\chi_-(C) + b)\left(\frac{\chi_-(C) + 4}{2}(4\alpha^2\sigma^2(a\chi_-(C) + b)^2\right. \\ \left. (\sqrt{2}\alpha\sigma(a\chi_-(C) + b))^{\alpha\sigma(a\chi_-(C)+b)} + 5) + \frac{2}{9}\left(1 + \frac{a'}{a}\right)\right)).$$

D'autre part, si  $\text{Vol}(M) < 2\pi$ , comme  $\chi_-(C) \geq c_2$  et que  $c_2$  est minorée par

$$\frac{1}{a} \left( \frac{1}{\alpha\sigma \ln(\sqrt{2}\alpha\sigma(2a + b))} \ln \left( \frac{1}{4\alpha^2\sigma^2(2a + b)^2} \left( \frac{\left| -\ln\frac{\text{Vol}(M)}{2\pi} - \frac{2}{9}\left(1 + \frac{a'}{a}\right) \right|}{216\epsilon(2a + b)} - 5 \right) - b \right) \right),$$

$$-\ln \frac{\text{Vol}(M)}{2\pi} \leq 72\epsilon(a\chi_-(C) + b) \left( \frac{\chi_-(C) + 4}{2} (4\alpha^2\sigma^2(a\chi_-(C) + b)^2 \right. \\ \left. (\sqrt{2}\alpha\sigma(a\chi_-(C) + b))^{\alpha\sigma(a\chi_-(C)+b)} + 5) + \frac{2}{9} \left(1 + \frac{a'}{a}\right) \right).$$

Donc dans tous les cas,

$$F(\chi_-(C)) \leq \ln(144\epsilon(a\chi_-(C) + b) \left( \frac{\chi_-(C) + 4}{2} (4\alpha^2\sigma^2(a\chi_-(C) + b)^2 \right. \\ \left. (\sqrt{2}\alpha\sigma(a\chi_-(C) + b))^{\alpha\sigma(a\chi_-(C)+b)} + 5) + \frac{2}{9} \left(1 + \frac{a'}{a}\right) \right)).$$

Comme

$$\chi_-(C) \geq c_2 \geq \frac{1}{a} \left( \frac{\ln 5 - \ln(4\alpha^2\sigma^2(2a + b)^2)}{\alpha\sigma \ln(2\sqrt{2}\alpha\sigma a)} - b \right),$$

$$5 \leq 4\alpha^2\sigma^2(2a + b)^2 (2\sqrt{2}\alpha\sigma a)^{\alpha\sigma(a\chi_-(C)+b)} \\ \leq 4\alpha^2\sigma^2(a\chi_-(C) + b)^2 (\sqrt{2}\alpha\sigma(a\chi_-(C) + b))^{\alpha\sigma(a\chi_-(C)+b)},$$

et donc

$$F(\chi_-(C)) \leq \ln(144\epsilon(a\chi_-(C) + b) (4\alpha^2\sigma^2(\chi_-(C) + 4)(a\chi_-(C) + b)^2 \\ (\sqrt{2}\alpha\sigma(a\chi_-(C) + b))^{\alpha\sigma(a\chi_-(C)+b)} + \frac{2}{9} \left(1 + \frac{a'}{a}\right))).$$

Comme

$$\chi_-(C) \geq c_2 \geq \frac{1}{a} \left( \frac{\ln(1 + \frac{a'}{a}) - \ln(108\alpha^2\sigma^2(2a + b)^2)}{\alpha\sigma \ln(\sqrt{2}\alpha\sigma(2a + b))} - b \right),$$

$$\frac{2}{9} \left(1 + \frac{a'}{a}\right) \leq 4\alpha^2\sigma^2(a\chi_-(C) + b)^2 (\chi_-(C) + 4) (\sqrt{2}\alpha\sigma(a\chi_-(C) + b))^{\alpha\sigma(a\chi_-(C)+b)}.$$

Ainsi,

$$F(\chi_-(C)) \leq \ln(1152\epsilon(a\chi_-(C) + b)\alpha^2\sigma^2(\chi_-(C) + 4)(a\chi_-(C) + b)^2 \\ (\sqrt{2}\alpha\sigma(a\chi_-(C) + b))^{\alpha\sigma(a\chi_-(C)+b)}) \\ \leq \ln(1152\epsilon\alpha^2\sigma^2) + 3\ln(a\chi_-(C) + b) + \ln(\chi_-(C) + 4) \\ + (\alpha\sigma(a\chi_-(C) + b)) \ln(\sqrt{2}\alpha\sigma(a\chi_-(C) + b)) \\ \leq \ln(1152\epsilon\alpha^2\sigma^2 a^3) + 3\ln(\chi_-(C) + b/a) + \ln(\chi_-(C) + 4) \\ + \alpha\sigma b \ln(\sqrt{2}\alpha\sigma a) + \alpha\sigma b \ln(\chi_-(C) + b/a) + \alpha\sigma a \ln(\sqrt{2}\alpha\sigma a)\chi_-(C) \\ + \alpha\sigma a\chi_-(C) \ln(\chi_-(C) + b/a) \\ \leq \ln(1152\epsilon\alpha^2\sigma^2 a^3 (\sqrt{2}\alpha\sigma a)^{\alpha\sigma b}) + (3 + \alpha\sigma b) \ln(\chi_-(C) + b/a) \\ + \ln(\chi_-(C) + 4) + \alpha\sigma a \ln(\sqrt{2}\alpha\sigma a)\chi_-(C) + \alpha\sigma a\chi_-(C) \ln(\chi_-(C) + b/a).$$

Puisque  $\chi_-(C) \geq c_2 \geq b/a$  et  $\chi_-(C) \geq c_2 \geq 4$ , il vient

$$\begin{aligned} F(\chi_-(C)) &\leq \ln(1152\epsilon\alpha^2\sigma^2a^3(\sqrt{2}\alpha\sigma a)^{\alpha\sigma b}) + (4 + \alpha\sigma b) \ln(2\chi_-(C)) \\ &\quad + \alpha\sigma a \ln(\sqrt{2}\alpha\sigma a)\chi_-(C) + \alpha\sigma a\chi_-(C) \ln(2\chi_-(C)) \\ &\leq \ln(1152\epsilon\alpha^2\sigma^2a^3(\sqrt{2}\alpha\sigma a)^{\alpha\sigma b}2^{4+\alpha\sigma b}) + (4 + \alpha\sigma b) \ln(\chi_-(C)) \\ &\quad + \alpha\sigma a \ln(2\sqrt{2}\alpha\sigma a)\chi_-(C) + \alpha\sigma a\chi_-(C) \ln(\chi_-(C)). \end{aligned}$$

– Comme  $\chi_-(C) \geq c_2 \geq 2\sqrt{2}\alpha\sigma a$ , on a

$$\alpha\sigma a \ln(2\sqrt{2}\alpha\sigma a)\chi_-(C) \leq \alpha\sigma a\chi_-(C) \ln \chi_-(C).$$

– D'autre part,  $\chi_-(C) \geq c_2 \geq \frac{b}{a} + \frac{4}{\alpha\sigma a}$ , ce qui entraîne que

$$(4 + \alpha\sigma b) \ln \chi_-(C) \leq \alpha\sigma a\chi_-(C) \ln \chi_-(C).$$

– Enfin,  $\chi_-(C) \geq c_2 \geq \frac{\ln(18432\epsilon\alpha^2\sigma^2a^3(2\sqrt{2}\alpha\sigma a)^{\alpha\sigma b})}{\alpha\sigma a \ln 2}$ , aussi

$$\ln(18432\epsilon\alpha^2\sigma^2a^3(2\sqrt{2}\alpha\sigma a)^{\alpha\sigma b}) \leq \alpha\sigma a\chi_-(C) \ln 2 \leq \alpha\sigma a\chi_-(C) \ln \chi_-(C).$$

Ainsi, lorsque  $\chi_-(C) \geq c_2$ , on a l'inégalité

$$F(\chi_-(C)) \leq 4\alpha\sigma a\chi_-(C) \ln \chi_-(C),$$

ce qui démontre l'affirmation 2 avec  $k_2 = 4\alpha\sigma a$ .  $\square$

**Affirmation 3.** Si  $c_1 \leq \chi_-(C) \leq c_2$ , les conclusions de la proposition D sont encore vérifiées si  $k_3 \chi_-(C) \ln \chi_-(C) \leq \ln \ln \frac{d}{q}$ , avec

$$\begin{aligned} k_3 &= \frac{1}{c_1 \ln c_1} \ln (36\epsilon(ac_2 + b)(c_2 + 4) \left( 4(\alpha\sigma)^2(ac_2 + b)^2(\sqrt{2}\alpha\sigma(ac_2 + b))^{\alpha\sigma(ac_2 + b)} + 5 \right) \\ &\quad + 16\epsilon(ac_2 + b)\left(1 + \frac{a'}{a}\right) - \ln \frac{\text{Vol}(M)}{2\pi}. \end{aligned}$$

### Démonstration de l'affirmation 3.

Comme  $\chi_-(C) \geq c_1$ , nous sommes dans le cas où  $r \geq 2D + 1$ , et le raisonnement est le même que pour la démonstration de l'affirmation 1, en tenant compte de l'encadrement de  $\chi_-(C)$ .  $\square$

### Fin de la démonstration du théorème A.

Posons  $k = \max\{k_0, k_1, k_2, k_3\}$ . On obtient ainsi une constante explicite  $k = k(\epsilon, \text{Vol}(M))$ , ne dépendant que de  $\epsilon \leq \text{Inj}(M)/2$  et du volume de  $M$  telle que si  $k c \ln c \leq \ln \ln \frac{d}{q}$ , alors on peut appliquer la proposition D : le revêtement  $M'$  contient  $m$  surfaces plongées et parallèles qui sont des fibres virtuelles.

De plus, ce sont en fait des fibres d'une fibration sur le cercle ou d'un  $I$ -fibré tordu. En effet, si  $T$  est une de ces surfaces, le complémentaire  $M'_T$  d'un voisinage ouvert de  $T$  dans  $M'$  admet un revêtement fini qui est le produit d'une surface  $T'$

par un intervalle. En particulier le groupe fondamental de la variété compacte  $M'_T$  contient un sous-groupe de surface d'indice fini. D'après [He, Théorème 10.6], c'est donc un  $I$ -fibré, éventuellement tordu.

En particulier, la variété  $M$  est virtuellement fibrée sur le cercle  $\mathbb{S}^1$ . Ceci achève la démonstration du théorème A.  $\square$

## 1.2 Trouver des surfaces emboîtées.

L'objet de ce paragraphe est de prouver la proposition B des Surfaces Emboîtées.

Soit  $C$  le corps en anses de  $M'$  obtenu au lemme 1.3. Le bord de  $C$  est pseudo-minimal, le genre de chacune des composantes connexes du bord de  $C$  est uniformément majoré par  $g$ , et  $\text{Vol}(C) \geq \text{Vol}(M) \frac{d}{q}$ .

### 1.2.1 Quelques modifications du corps en anses.

Pour faire cette construction, il est plus aisé de travailler dans une variété riemannienne complète et de courbure sectionnelle inférieure ou égale à  $-1$ . C'est le but du lemme suivant.

**Lemme 1.11.** *Quitte à modifier le corps en anses  $C$  sans changer son volume de manière significative, on peut rajouter des colliers aux composantes connexes du bord de  $C$  afin d'obtenir une variété riemannienne de dimension trois (non compacte) homéomorphe à l'intérieur de  $C$ , munie d'une métrique complète de courbure sectionnelle majorée par  $-1$ , et qui coïncide sur  $C$  avec celle induite par le plongement de  $C$  dans  $M'$ .*

Démonstration du lemme 1.11.

On part du corps en anses  $C$  muni de la métrique hyperbolique non complète induite par celle de  $M'$ . En modifiant légèrement si nécessaire le corps en anses  $C$ , on peut faire en sorte que la courbure sectionnelle intrinsèque de chacune des composantes connexes du bord de  $C$  soit inférieure ou égale à  $-1$ .

C'est déjà le cas pour les composantes du bord qui sont des surfaces minimales, puisque leur courbure sectionnelle intrinsèque est majorée par la courbure sectionnelle de la variété ambiante, soit par  $-1$ .

Si une composante du bord de  $C$  est le bord d'un petit voisinage régulier d'une surface minimale non orientable, on peut choisir ce voisinage suffisamment petit pour que la courbure sectionnelle intrinsèque de cette surface pseudo-minimale soit inférieure ou égale à  $-1/2$ . Il s'agit d'une conséquence de la continuité de la courbure sectionnelle intrinsèque dans le voisinage d'une surface minimale (car la courbure de Gauss est continue). En contractant la métrique de  $M$  et celle du revêtement  $M'$  par un facteur  $1/2$  (ce qui multiplie par 2 les courbures sectionnelles), on peut supposer que la courbure intrinsèque des composantes du bord de  $C$  dans  $M'$  qui constituent le bord d'un petit voisinage régulier d'une surface minimale non orientable est au plus  $-1$ .



Si  $\partial_+ C$  est le bord d'un voisinage régulier  $N(S)$  d'une surface minimale non orientable  $S$  avec un petit tube attaché verticalement dans la structure de  $I$ -fibré, il y a deux cas possibles. Premier cas, si le tube plein  $\mathbb{D}^2 \times I$  appartient au corps en anses  $C$ , on peut l'enlever. Plus précisément, après compression de  $C$  le long du disque  $\mathbb{D}^2 \times \{1/2\}$ , on obtient un nouveau corps en anses de genre plus petit. Après ce procédé, on a perdu le volume du tube plein  $\mathbb{D}^2 \times I$ , mais comme on peut rendre ce tube aussi petit que nécessaire, cette chirurgie ne change pas le volume du corps en anses de manière significative. Comme le bord positif de ce nouveau corps en anses  $C'$  est le bord d'un petit voisinage régulier de la surface minimale non orientable  $S$ , il suffit d'appliquer le procédé précédent pour obtenir un corps en anses  $C$  tel que la courbure sectionnelle intrinsèque de  $\partial_+ C'$  est au plus  $-1$ .

Sinon, on est dans le second cas : le tube plein  $\mathbb{D}^2 \times I$  est à l'extérieur de  $C$ , ce qui implique que le corps en anses  $C$  est contenu dans le voisinage  $N(S)$ . On peut alors rétracter le petit tube sur un arc géodésique  $\gamma$  arbitrairement petit dans le voisinage régulier  $N(S)$  de la surface minimale non orientable  $S$ . Après cette opération, le bord positif  $\partial_+ C$  est constitué de la réunion du bord du voisinage  $N(S)$  et de l'arc  $\gamma$ . Comme précédemment, on peut supposer que la courbure sectionnelle de la surface  $\partial N(S)$  est inférieure ou égale à  $-1$ .

A chaque composante connexe  $T$  du bord de  $C$ , on attache un produit infini  $T \times [0, +\infty[$  muni d'une métrique "produit tordu" (warped product metric). Le calcul de la courbure sectionnelle d'un produit tordu (voir par exemple Bishop et O'Neil [BO1, p. 26]) montre que si l'on part d'une surface  $T$  dont la courbure sectionnelle est inférieure ou égale à  $-1$ , il existe une métrique produit tordu sur  $T \times [0, +\infty[$  telle que la variété riemannienne ainsi obtenue est complète et de courbure sectionnelle inférieure ou égale à  $-1$ . Si l'on est dans le dernier cas où  $T$  est le bord d'un voisinage régulier  $N(S)$  d'une surface minimale non orientable  $S$  avec un petit tube attaché, et que le tube plein est à l'extérieur de  $C$ , on oublie alors l'arc géodésique  $\gamma$  pour cette construction et on recolle juste un produit infini  $\partial N(S) \times [0, +\infty[$  muni d'une métrique riemannienne de courbure au plus  $-1$ . Il reste à modifier légèrement la métrique riemannienne afin de la rendre lisse pour obtenir une métrique riemannienne complète sur l'intérieur de  $C$  (union  $\gamma$  si l'on est dans le dernier cas) dont la courbure sectionnelle est inférieure ou égale à  $-1$ .  $\square$

Les surfaces du bord de  $C$  sont des surfaces pseudo-minimales. Ce fait est crucial : on peut en effet homotoper une surface minimale de genre  $g$  en une surface simpliciale assez proche de la surface de départ dans  $C$ . C'est l'objet des lemmes suivants.

**Définition 1.12.** Soit  $\epsilon > 0$ . Le  $\epsilon$ -diamètre d'une surface riemannienne  $S$  est le nombre minimal de boules de rayon  $\epsilon$  pour la métrique de  $S$  nécessaires pour recouvrir la surface  $S$ .

**Lemme 1.13.** Soit  $S$  une surface minimale ou pseudo-minimale plongée dans  $N$ , une variété riemannienne de dimension trois, compacte, sans bord et dont la courbure sectionnelle est inférieure ou égale à  $-1$ . Soit  $\epsilon \leq \text{Inj}(N)/2$  et

$$a' = 6 \left( \frac{21}{4} + \frac{3}{4\pi} + \frac{3}{4\epsilon} + \frac{2}{\sinh^2(\frac{\epsilon}{4})} \right).$$

Alors le  $\epsilon$ -diamètre de la surface  $S$  est majoré par  $a' |\chi(S)|$ , et  $S$  admet une triangulation à un seul sommet pour laquelle toute arête a longueur au plus  $2\epsilon a' |\chi(S)|$ .

Démonstration du lemme 1.13.

Ce lemme est une conséquence immédiate de [Mah, Lemme 4.2 p. 2249] et [La3, Proposition 6.1] dans le cas où la surface  $S$  est minimale et orientable, et l'on peut prendre  $a'/6$  à la place de  $a'$ . Si  $S$  est minimale, mais pas orientable, la classe d'homologie de  $S$  dans  $H_2(N, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  est non triviale. Par la dualité de Poincaré, cette classe correspond à un élément non trivial  $\alpha \in H^1(N, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ . Comme la classe d'homologie du revêtement double de  $S$  a pour représentant le bord d'un petit voisinage régulier de la surface non orientable  $S$ , on a  $2[S] = 0$  dans  $H_2(N, \mathbb{Z})$ . En prenant le revêtement double  $N'$  de  $N$  correspondant au noyau de  $\alpha$ , la surface  $S$  se relève en une surface minimale orientable  $S'$ . Le lemme 1.13 dans le cas minimal et orientable peut alors s'appliquer : le  $\epsilon$ -diamètre de  $S'$  est majoré par  $a'/6 |\chi(S')| = a'/6 \times 2 |\chi(S)| = a'/3 |\chi(S)|$ , et la longueur des arêtes d'une triangulation à un seul sommet de  $S'$  par  $2\epsilon a'/3 |\chi(S)|$ . Comme ces quantités sont aussi des majorants pour le  $\epsilon$ -diamètre et la longueur des arêtes d'une triangulation à un seul sommet de  $S$ , cela démontre le lemme pour une surface minimale non orientable, avec  $a'/3$  à la place de  $a'$ .

Dans le cas où la surface  $S$  est pseudo-minimale, elle est le bord d'un voisinage régulier arbitrairement petit d'une surface minimale  $S'$ . Comme le diamètre et la longueur des arêtes d'une triangulation à un seul sommet est contrôlé par  $a'/3 |\chi(S')|$  et  $2\epsilon a'/3 |\chi(S')|$ , avec  $|\chi(S)| \leq 2 |\chi(S')|$ , on obtient bien la majoration voulue pour la surface pseudo-minimale  $S$ , ce qui achève la démonstration du lemme 1.13.  $\square$

Comme d'après le lemme 1.11, les surfaces constituant les composantes connexes du bord de  $C$  sont des surfaces pseudo minimales, le lemme 1.13 permet d'obtenir immédiatement un majorant du  $\epsilon$ -diamètre et de la longueur des arêtes d'une triangulation à un seul sommet de ces surfaces. De plus, s'il faut ajouter un petit arc géodésique, nous avons vu qu'il pouvait être choisi arbitrairement petit.

Rappelons quelques définitions et résultats de [Mah, Sections 2 et 3].

**Définition 1.14.** On définit par récurrence un  $n$ -simplexe conique dans une variété riemannienne compacte  $N$  de courbure sectionnelle inférieure ou égale à  $-1$  comme suit. Un **1-simplexe conique**  $\Delta^1 = (v_0, v_1)$  est une géodésique paramétrée à vitesse constante de  $v_0$  à  $v_1$ . La vitesse peut être nulle, auquel cas le 1-simplexe est dégénéré, réduit au point  $v_0$ . Un  $n$ -**simplexe conique** est une application  $\phi : \Delta^n \rightarrow N$  telle que  $\phi|_{\Delta^{n-1}}$  est un  $(n-1)$ -simplexe conique et pour tout  $x \in \Delta^{n-1}$ ,  $\phi|_{\{tx+(1-t)v_n \mid t \in [0,1]\}}$  est une géodésique paramétrée à vitesse constante. L'application  $\phi$  dépend de l'ordre dans lequel sont introduits les sommets  $(v_0, \dots, v_n)$  et il se peut que son image ne soit pas plongée dans  $N$ , mais juste immergée.

Une **surface simpliciale** est une application continue  $\phi : S \rightarrow N$  où  $S$  est une surface munie d'une triangulation de telle sorte que la restriction de l'application  $\phi$  à chaque triangle  $\Delta$  de  $S$  est un 2-simplexe conique.

**Lemme 1.15.** Soit  $N$  une variété de dimension trois munie d'une métrique riemannienne complète dont la courbure sectionnelle est plus petite ou égale à  $-1$ .

Supposons que  $T$  est une surface connexe, orientable, minimale ou pseudo-minimale dans  $N$  dont le diamètre dans  $N$  est majoré par  $\mathcal{N}$  et admettant une triangulation à un seul sommet dont la longueur des arêtes est au plus  $\mathcal{N}'$ . Alors  $T$  est homotope à une surface simpliciale  $T'$  dont le diamètre est au plus  $2\mathcal{N}'$  et telle que tous points  $x \in T$  et  $x' \in T'$  sont à distance au plus  $\mathcal{N} + \mathcal{N}'$ . De plus, tout point de  $T'$  est à distance au plus  $\mathcal{N}'$  du sommet de la triangulation à un seul sommet de  $T$ .

Démonstration du lemme 1.15.

Soit  $v$  le sommet de la triangulation à un seul sommet de  $T$ . Tout d'abord, on réalise une homotopie entre chaque arête  $e$  de la triangulation de  $T$  et  $e'$ , la géodésique fermée minimisant la longueur représentant la classe d'homotopie de  $e$  dans  $\pi_1(N, v)$ . Si la classe d'homotopie de  $e$  est nulle (ce qui signifie que la surface  $T$  est compressible dans la variété  $N$ ), on réalise une homotopie entre  $e$  et le 1-simplexe dégénéré  $\{v\}$ .

Soit  $\mathcal{T}$  un triangle de  $T$ . A chaque arête de  $\mathcal{T}$  correspond un 1-simplexe conique. On construit un triangle simplicial conique  $\mathcal{T}'$  correspondant à  $\mathcal{T}$  de la manière suivante. Si toutes les arêtes de  $\mathcal{T}$  sont nulles en homotopie,  $\mathcal{T}'$  est le triangle dégénéré réduit au point  $\{v\}$ . Sinon, le 1-squelette de  $\mathcal{T}'$  est constitué des géodésiques paramétrées à vitesse constante et passant par  $v$  correspondant aux arêtes non homotopiquement triviales de  $\mathcal{T}$ . Pour former le 2-squelette de  $\mathcal{T}'$ , on choisit une des arêtes de  $\mathcal{T}'$  correspondant à une courbe non nulle en homotopie, et on relie tout point de cette arête au sommet opposé par des 1-simplexes coniques correspondant à des géodésiques. Dans ce cas, tout point de  $e'$  est à distance au plus  $\mathcal{N}'/2$  du sommet  $v$  (car il appartient à une géodésique fermée de longueur au plus  $\mathcal{N}'$ ).

Si aucune des arêtes de  $\mathcal{T}$  n'est homotopiquement triviale dans  $\pi_1(N, v)$ , elles correspondent à trois géodésiques fermées minimisantes et non triviales  $c_1, c_2$  et  $c_3$ , passant par le point  $v$ . Dans le revêtement universel  $\tilde{N}$  de  $N$ , on peut choisir des relevés  $a_1, a_2$  et  $a_3$  de  $c_1, c_2$  et  $c_3$  qui bordent un triangle  $\mathbb{T}$  totalement géodésique. Par définition, l'application de revêtement envoie  $a_i$  sur  $c_i$  pour  $i = 1, 2, 3$ . Le triangle simplicial  $\mathcal{T}'$  correspondant à  $\mathcal{T}$  est l'image par l'application de revêtement du triangle totalement géodésique  $\mathbb{T}$  dans  $\tilde{N}$ . Comme l'application de revêtement restreinte à l'intérieur de  $\mathbb{T}$  est une isométrie dont l'image est l'intérieur de  $\mathcal{T}'$ , et que tout point dans l'intérieur de  $\mathbb{T}$  est à distance au plus  $\mathcal{N}'$  des sommets de  $\mathbb{T}$  (car  $\mathcal{N}'$  est un majorant du maximum des longueurs des côtés  $a_1, a_2$  et  $a_3$ ), tout point  $x'$  dans l'intérieur du triangle  $\mathcal{T}'$  est à distance au plus  $\mathcal{N}'$  du sommet  $v$ .

Ainsi, en partant de la surface triangulée  $T$ , on peut construire une surface simpliciale  $T'$  de telle sorte que  $v$  est l'unique sommet de la structure simpliciale de  $T'$  et tout point  $x'$  de  $T'$  est à distance au plus  $\mathcal{N}'$  du sommet  $v$ . En particulier, le diamètre de  $T'$  est au plus  $2\mathcal{N}'$ . Comme le diamètre de  $T$  est au plus  $\mathcal{N}$  et que  $v$  est aussi un point de  $T$ , pour tous points  $x' \in T'$  et  $x \in T$ ,

$$\begin{aligned} d(x, x') &\leq d(x, v) + d(x', v) \\ &\leq \text{diam}(T) + \mathcal{N}' \\ &\leq \mathcal{N} + \mathcal{N}', \end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme 1.15. □

Etant donnée une échine  $\Gamma$  pour le corps en anses  $C$ , qui est la réunion de surfaces simpliciales correspondant à  $\partial_- C$  reliées par des arcs géodésiques, il existe une homotopie entre cette échine et une surface simpliciale, et dont le volume balayé n'est pas trop important. Plus précisément, cela découle du lemme général suivant, prouvé dans [Mah, Lemme 4.3 p. 2250].

**Lemme 1.16.** [Mah, Lemme 4.3]

Soit  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  une famille de surfaces simpliciales, munies de triangulations simpliciales à un seul sommet  $v_i$  pour tout  $i$ , immergées dans  $N$ , une variété de dimension trois munie d'une métrique riemannienne complète de courbure sectionnelle inférieure ou égale à  $-1$ . Relions le point base  $v_1$  à chacun des autres points base  $v_2, \dots, v_n$  par au moins un arc géodésique, pour obtenir un 2-complexe totalement géodésique  $\Gamma$  homotope à une surface de genre  $g$ . Alors, il existe une homotopie entre  $\Gamma$  et une surface simpliciale  $\Sigma_0$  de genre  $g$ , et cette homotopie balaie un volume d'au plus  $3(2g+2)V_3$ , où  $V_3$  est le volume maximal d'un tétraèdre hyperbolique idéal.  $\square$

Rappelons que  $\epsilon \leq \text{Inj}(M)/2$ , et  $a' = 6 \left( \frac{21}{4} + \frac{3}{4\pi} + \frac{3}{4\epsilon} + \frac{2}{\sinh^2(\epsilon/4)} \right)$ . La constante  $2\epsilon$  minore uniformément le rayon d'injectivité de tout revêtement fini de  $M$ . En particulier,  $\text{Inj}(M') \geq 2\epsilon$ .

Nous pouvons à présent démontrer le lemme 1.4 énoncé au paragraphe 1.1.

**Lemme 1.4** Soit  $k_0 = \max \left\{ \frac{\ln(4(2\epsilon a'+1))}{2 \ln 2}, 1 + \frac{\ln(1+\ln(12V_3/\text{Vol}(M)))}{2 \ln 2} \right\}$ .

Si  $k_0 \chi_-(C) \ln \chi_-(C) \leq \ln \ln d/q$  et  $\text{Vol}(M) \geq \pi/2$ , alors en remplaçant les surfaces du bord de  $C$  par des surfaces simpliciales comme dans les lemmes 1.15 et 1.16, le corps en anses  $C''$  obtenu après ces modifications vérifie :

$$\text{Vol}(C'') \geq \frac{1}{4} \text{Vol}(C) \geq \frac{\text{Vol}(M)d}{4q}.$$

Démonstration du lemme 1.4.

Commençons par noter  $\partial_- C = T_1 \cup \dots \cup T_n$  les composantes connexes de  $\partial_- C$ , avec  $g(T_1) + \dots + g(T_n) \leq g(\partial_+ C)$ . Comme dans le lemme 1.15, remplaçons  $\partial_+ C =: S_0$  et  $\partial_- C = S_1 \cup \dots \cup S_n$  par des surfaces simpliciales  $S'_0$  et  $T'_1 \cup \dots \cup T'_n$  proches des surfaces de départ. Si  $v_j \in T_j$  est le sommet de la triangulation à un seul sommet de  $T_j$ , alors d'après les lemmes 1.13 et 1.15, tout point de  $T'_j$  est à distance au plus  $\mathcal{N}' = 2\epsilon a' |\chi(T_j)| \leq 2\epsilon a' \chi_-(C)$  de  $v_j$ . Ainsi, la nouvelle surface  $T'_j$  est contenue dans la boule de centre  $v_j$  et de rayon  $2\epsilon a' \chi_-(C)$ . Si  $C'$  est le nouveau corps en anses obtenu en remplaçant les surfaces  $T_j$  par les surfaces  $T'_j$ , le volume est donc modifié d'au plus

$$\begin{aligned} \text{Vol}(C') &\geq \text{Vol}(C) - \sum_{j=0}^n \text{Vol}(B(v_j, 2\epsilon a' \chi_-(C))) \\ &\geq \text{Vol}(C) - (g(C) + 1) \text{Vol}(B_{\mathbb{H}^3}(2\epsilon a' \chi_-(C))) \\ &\geq \text{Vol}(C) \left( 1 - \frac{\pi(\chi_-(C) + 4)(\sinh(4\epsilon a' \chi_-(C)) - 4\epsilon a' \chi_-(C))}{2\text{Vol}(M)d/q} \right) \end{aligned}$$

Montrons que  $\text{Vol}(C') \geq \text{Vol}(C)/2$ , soit encore que

$$\frac{\pi(\chi_-(C) + 4)(\sinh(4\epsilon a' \chi_-(C)) - 4\epsilon a' \chi_-(C))}{2\text{Vol}(M)d/q} \leq \frac{1}{2}.$$

Il suffit d'établir que  $\ln \frac{\pi(\chi_-(C)+4)(\sinh(4\epsilon a' \chi_-(C))-4\epsilon a' \chi_-(C))}{\text{Vol}(M)d/q} \leq 0$ . Mais

$$\begin{aligned} \ln \left( \frac{\pi}{\text{Vol}(M)d/q} (\chi_-(C) + 4)(\sinh(4\epsilon a' \chi_-(C)) - 4\epsilon a' \chi_-(C)) \right) &\leq \\ \ln \left( \frac{\pi}{2\text{Vol}(M)} \frac{(\chi_-(C) + 4) \exp(4\epsilon a' \chi_-(C))}{d/q} \right) &\leq \\ \ln \left( \frac{\pi}{2\text{Vol}(M)} \right) + \ln((\chi_-(C) + 4) \exp(4\epsilon a' \chi_-(C))) - \ln(d/q) &\leq \\ \ln(\chi_-(C) + 4) + 4\epsilon a' \chi_-(C) - \ln(d/q), & \end{aligned}$$

puisque par hypothèse,  $\text{Vol}(M) \geq \pi/2$ .

Comme pour tout  $x \geq 2$ ,  $\ln(x + 4) \leq 2x$ , il suffit de montrer que

$$(2 + 4\epsilon a')\chi_-(C) \leq \ln(d/q),$$

soit encore

$$\ln(2 + 4\epsilon a') + \ln \chi_-(C) \leq \ln \ln(d/q).$$

Mais par hypothèse,  $\frac{\ln \ln d/q}{\chi_-(C) \ln \chi_-(C)} \geq k_0 \geq \frac{\ln(4(2\epsilon a' + 1))}{2 \ln 2}$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \ln \ln d/q &\geq \frac{\ln(4(2\epsilon a' + 1))}{2 \ln 2} \chi_-(C) \ln \chi_-(C) \\ &\geq \frac{\ln 2 + \ln(2 + 4\epsilon a')}{2 \ln 2} \chi_-(C) \ln \chi_-(C) \\ &\geq \frac{\chi_-(C) \ln \chi_-(C)}{2} + \frac{\ln(2 + 4\epsilon a') \chi_-(C) \ln \chi_-(C)}{2 \ln 2} \\ &\geq \ln \chi_-(C) + \ln(2 + 4\epsilon a') \end{aligned}$$

puisque  $\chi_-(C) \geq 2$ , ce qui montre bien que  $\text{Vol}(C') \geq \text{Vol}(C)/2$ .

D'après le lemme 1.16, le volume balayé par l'homotopie entre  $\Gamma$  et  $\Sigma_0$  est majoré par  $3(\chi_-(C) + 4)V_3$ . Comme d'après le lemme 1.3, le volume de  $C$  est au moins  $\text{Vol}(M)d/q$ , le volume de ce qui reste après avoir coupé le complété métrique de  $C'$  le long de  $\Sigma_0$  et éliminé les composantes connexes contenant les produits infinis pour obtenir un nouveau corps en anses  $C''$  est au moins

$$\text{Vol}(C') - 3(\chi_-(C) + 4)V_3 \geq \text{Vol}(C)/2 \left( 1 - 3V_3(\chi_-(C) + 4) \frac{2q}{\text{Vol}(M)d} \right).$$

Il suffit donc de montrer que  $3V_3(\chi_-(C) + 4) \frac{2q}{\text{Vol}(M)d} \leq \frac{1}{2}$ , soit  $\ln \left( \frac{12V_3(\chi_-(C) + 4)}{\text{Vol}(M)d/q} \right) \leq 0$ , ou encore

$$\ln \left( \ln \frac{12V_3}{\text{Vol}(M)} + \ln(\chi_-(C) + 4) \right) \leq \ln \ln(d/q).$$

Comme  $\chi_-(C) \geq 2$ ,  $\ln(\chi_-(C) + 4) \geq \ln 6 > 1$ . Il vient

$$\begin{aligned} & \ln \left( \ln \frac{12V_3}{\text{Vol}(M)} + \ln(\chi_-(C) + 4) \right) = \\ & \ln \left( \ln(\chi_-(C) + 4) \left( 1 + \frac{\ln \frac{12V_3}{\text{Vol}(M)}}{\ln(\chi_-(C) + 4)} \right) \right) = \\ & \ln \ln(\chi_-(C) + 4) + \ln \left( 1 + \frac{\ln \frac{12V_3}{\text{Vol}(M)}}{\ln(\chi_-(C) + 4)} \right) \leq \ln \ln(\chi_-(C) + 4) + \ln \left( 1 + \ln \frac{12V_3}{\text{Vol}(M)} \right). \end{aligned}$$

Dès que  $c \geq 2$ ,  $\frac{\ln \ln(c+4)}{c \ln c} \leq 1$ . On a alors

$$\begin{aligned} \frac{\ln \left( \ln \frac{12V_3}{\text{Vol}(M)} + \ln(\chi_-(C) + 4) \right)}{\chi_-(C) \ln \chi_-(C)} & \leq \frac{\ln \ln(\chi_-(C) + 4)}{\chi_-(C) \ln \chi_-(C)} + \frac{\ln \left( 1 + \ln \frac{12V_3}{\text{Vol}(M)} \right)}{\chi_-(C) \ln \chi_-(C)} \\ & \leq 1 + \frac{\ln \left( 1 + \ln \frac{12V_3}{\text{Vol}(M)} \right)}{2 \ln 2}. \end{aligned}$$

Mais comme  $\frac{\ln \ln d/q}{\chi_-(C) \ln \chi_-(C)} \geq k_0 \geq 1 + \frac{\ln(1 + \ln(12V_3/\text{Vol}(M)))}{2 \ln 2}$ ,

$$\frac{\ln \ln d/q}{\chi_-(C) \ln \chi_-(C)} \geq \frac{\ln \left( \ln \frac{12V_3}{\text{Vol}(M)} + \ln(\chi_-(C) + 4) \right)}{\chi_-(C) \ln \chi_-(C)},$$

et donc  $\text{Vol}(C'') \geq \text{Vol}(C)/4 \geq \text{Vol}(M) \frac{d}{4q}$ , ce qui achève la démonstration du lemme 1.4.  $\square$

Par la suite, pour alléger les notations, nous notons encore  $C$  le nouveau corps en anses  $C''$  et nous nous plaçons dans l'adhérence de la région de  $C$  bordée par les deux surfaces simpliciales connexes  $\Sigma_0$  (qui correspond à l'union de  $\partial_- C$  et de quelques arcs, constituant une échine pour  $C$ ), et  $\Sigma_1$  correspondant à  $\partial_+ C$ .

## 1.2.2 Balayages.

**Définition 1.17.** *Soit  $C$  un corps en anses (éventuellement creux). Notons  $S = \partial_+ C$ . Un **balayage** du corps en anses  $C$  est une famille à un paramètre de surfaces  $\{S_t\}_{t \in [0,1]}$  telle que  $S_0$  est une échine de  $C$ ,  $S_1 = S = \partial_+ C$ , pour tout  $t \in ]0,1]$  la surface  $S_t$  est homéomorphe à  $S$ , et l'application  $\Phi : S \times I \rightarrow C$  est de degré homologique un.*

Il existe un balayage  $\{S_t\}_{t \in [0,1]}$  du corps en anses  $C$  tel que  $S_0 = \Sigma_0$  et  $S_1 = \Sigma_1$ . En vue de construire un produit long et fin dans le corps en anses  $C$ , les surfaces de balayage  $S_t$  pour  $t > 0$  sont très utiles. Cependant, si l'on peut majorer le diamètre d'une surface minimale en termes de son genre et du rayon d'injectivité de la variété ambiante, on ne peut pas avoir de majoration uniforme du diamètre des surfaces de balayage  $S_t$  pour tout  $t$  : il peut se former des tubes de Margulis longs et fins, contenant une géodésique fermée sur la surface de balayage de longueur plus petite que  $\epsilon$ .

Pour faire face à cette difficulté, rappelons la notion de  $\epsilon$ -diamètre pour laquelle des surfaces non connexes mais dont les composantes connexes ont un petit diamètre sont encore "petites".

**Définition 1.18.** Soit  $\epsilon > 0$ . Le  $\epsilon$ -**diamètre** d'une surface  $F$  (éventuellement non connexe) est le nombre minimal de boules de rayon  $\epsilon$  pour la métrique de  $F$  nécessaires pour recouvrir la surface  $F$ .

Nous rappelons à présent une technique de Maher qui, partant d'un balayage  $\{S_t\}_{t \in I}$  de  $C$ , permet de construire un "balayage généralisé"  $\{\widehat{S}_t\}_{t \in I}$  pour lequel le  $\epsilon$ -diamètre des surfaces de balayage est uniformément majoré (voir [Mah, Sections 2 et 3]).

La première étape consiste à transformer le balayage d'origine  $\{S_t\}_{t \in I}$  en un balayage simplicial, grâce à des résultats de Bachman, Cooper et White [BCW]. Rappelons quelques définitions et résultats de [Mah, Sections 2 et 3].

**Définition 1.19.** Un **balayage simplicial** est un balayage  $\Phi : S \times I \rightarrow N$  tel que chaque surface  $S_t$  a pour image une surface simpliciale constituée d'au plus  $4g(S)$  triangles, et ayant au plus un sommet dont la somme des angles est strictement plus petite que  $2\pi$ .

Le lemme suivant permet de réaliser une homotopie entre le balayage  $\{S_t\}_{t \in [0,1]}$  de  $\Sigma_0$  à  $\Sigma_1$  et un balayage simplicial. C'est une amélioration du théorème [BCW, Théorème 2.3], prouvée par Maher [Mah, Lemme 2.5 p. 2236].

**Lemme 1.20.** [Mah, Lemme 2.5]

Soit  $N$  une variété riemannienne compacte, sans bord, orientée et de courbure sectionnelle au plus  $-1$ . Si  $\Sigma_0$  et  $\Sigma_1$  sont des surfaces simpliciales munies d'une triangulation à un seul sommet, homotopes par une homotopie  $\Phi : S \times I \rightarrow N$ , alors il existe un balayage simplicial  $\Phi' : S \times I \rightarrow N$  homotope à  $\Phi$  relativement à  $S \times \partial I$ .  $\square$

Ainsi l'on peut supposer que le balayage dans le corps en anses  $C$  est simplicial entre les surfaces simpliciales  $\Sigma_0 = S_0$  et  $\Sigma_1 = S_1$ .

Une fois ce balayage simplicial obtenu dans le corps en anses  $C$ , l'étape suivante consiste à se débarrasser des tubes longs et fins susceptibles d'apparaître dans les surfaces de balayage pour obtenir un "balayage généralisé" dans lequel le  $\epsilon$ -diamètre de toutes les surfaces de balayage est uniformément majoré.

**Définition 1.21.** [Mah, Définition 3.2 p. 2237]

Soit  $N$  une variété de dimension trois, compacte, connexe et orientée. Un **balayage généralisé** de  $N$  est la donnée d'un triplet  $(\Sigma, f, h)$ , où  $\Sigma$  est une variété de dimension trois, compacte et orientable, l'application  $h : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de Morse, dont la restriction à chaque composante du bord de  $\Sigma$  est constante, et telle que, excepté pour au plus un nombre fini de valeurs  $t \in \mathbb{R}$ , l'ensemble  $h^{-1}(\{t\})$  est une surface immergée. De plus, l'application lisse  $f : (\Sigma, \partial\Sigma) \rightarrow (N, \partial N)$  doit être de degré homologique égal à un.

Bien sûr, un balayage usuel  $\Phi : S \times I \rightarrow N$  est un exemple de balayage généralisé : la fonction de Morse  $h : S \times I \rightarrow \mathbb{R}$  est donnée par la projection sur le second facteur  $I$ , et pour tout  $t \in ]0, 1[$ ,  $h^{-1}(\{t\}) = S_t$  est une surface immergée dans  $N$ . Par définition d'un balayage,  $\Phi : (S \times I, S \times \partial I) \rightarrow (N, \partial N)$  a degré homologique un.

Pour tout  $x \in \Sigma$ , on considère  $h(x) = t$  comme la coordonnée temporelle. On peut voir un balayage généralisé comme une famille à un paramètre de surfaces immergées  $S_t$  avec un nombre fini de temps singuliers  $t$  pour lesquels le genre ou le nombre de composantes connexes de ces surfaces changent.

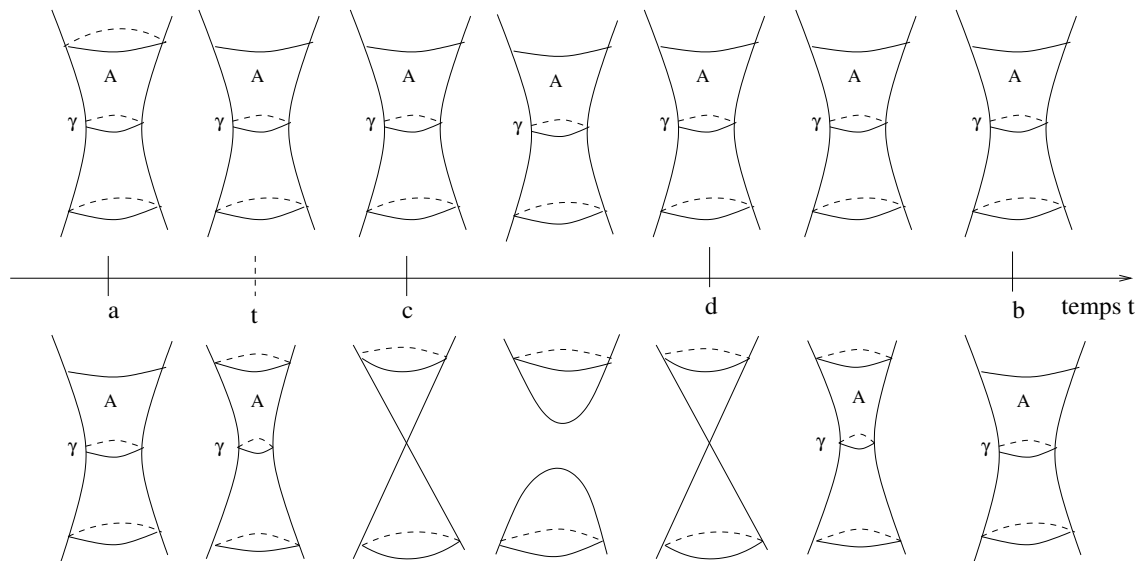
En partant d'un balayage simplicial  $\{S_t\}_{t \in I}$  de  $C$ , le but est d'obtenir un balayage généralisé dans lequel toutes les surfaces de balayage ont un  $\epsilon$ -diamètre uniformément majoré. En suivant Maher, nous introduisons la notion de chirurgie d'un balayage généralisé.

**Définition 1.22.** *On peut obtenir un nouveau balayage généralisé  $(\Sigma', f', h')$  à partir d'un balayage généralisé donné  $(\Sigma, f, h)$  en effectuant une **chirurgie de balayages généralisés**, par la construction décrite ci-après. (En fait, il s'agit d'un cas particulier d'une construction plus générale, appelée modification de balayages généralisés, décrite par Maher et Rubinstein dans [MR].)*

Soit  $(\Sigma, f, h)$  un balayage généralisé d'une variété de dimension trois  $N$ . Considérons dans  $\Sigma$  une sous-variété de la forme  $A \times [a, b]$ , où  $0 < a < b < 1$  et  $A$  a pour image un anneau sur les surfaces  $S_t$  pour  $t \in [a, b]$ . On réalise une chirurgie de type  $(0, 1)$  sur ce tore solide  $A \times [a, b]$  de la manière suivante : choisissons deux temps  $c$  et  $d$  avec  $a < c < d < b$ . Soit  $\gamma$  une géodésique sur la surface  $S_a$  qui est une âme de  $A$ . Elle appartient à l'intérieur de l'image de  $A$ , et l'image de  $A$  se rétracte par déformation forte sur  $\gamma$ . Rétractons cette géodésique : elle devient de plus en plus courte, jusqu'à s'écraser sur un point dans une nouvelle surface  $S'_c$  qui est une modification de la surface  $S_c$ . Pour tout  $t \in ]c, d[$ , remplaçons la surface  $S_t$  par la surface  $S'_t$  obtenue à partir de  $S_t$  par chirurgie le long de  $\gamma$ . Plus précisément, on coupe  $S_t$  le long de  $\gamma$  et on bouche les trous de la surface obtenue avec deux disques. On réalise cette opération de manière lisse, de telle sorte que les deux disques de  $S'_t$  se rapprochent de plus en plus, rapetissent et donnent naissance à un unique point à l'instant  $d$ . La nouvelle surface  $S'_d$  est alors singulière, avec un point singulier correspondant aux deux disques précédents. Ce point devient de nouveau la géodésique  $\gamma$  et la longueur de cette géodésique augmente avec le temps  $t \in ]d, b]$ . On réalise ces opérations de telle sorte que les surfaces  $S_a$  et  $S_b$  ne sont pas modifiées, pas plus que  $\partial A \times [a, b]$ . On obtient ainsi un nouveau balayage généralisé  $(\Sigma', f', h')$ , où  $\Sigma'$  est obtenue en remplaçant  $A \times [a, b] \subset \Sigma$  par la nouvelle variété où  $S_t$  est remplacée par  $S'_t$  pour tout  $t \in [a, b]$ . Notons  $T$  le petit tube de  $N$  bordé par  $A$ , où l'on réalise les chirurgies. Les nouvelles applications  $(f', h')$  coïncident avec  $(f, h)$  en dehors de  $T \times [a, b]$  et de  $\partial(T \times [a, b])$ . Comme la modification du balayage a lieu dans un sous-ensemble propre compact de  $N$ , il existe un point  $x$  dans l'intérieur de  $N \setminus (T \times [a, b])$ . Comme l'application  $f$  n'est pas modifiée dans un voisinage de  $f^{-1}(\{x\})$ , le degré homologique de  $f'$  est le même que le degré homologique de  $f$ , donc égal à un. Ainsi, le triplet  $(\Sigma', f', h')$  est encore un balayage généralisé.



balayage d'origine



balayage après chirurgie

**Proposition 1.23.** Soit  $\mu > 0$ . Il existe une constante  $\eta > 0$  aussi petite que voulue, dépendant seulement du balayage simplicial  $\{S_t\}_{t \in I}$  et de  $\mu$ , et une suite finie de chirurgies du balayage simplicial qui donne un balayage généralisé  $\{\widehat{S}_t\}_{t \in I}$  de  $C$  et vérifiant : pour tout temps régulier  $t \in [\eta, 1 - \eta]$ , le  $\epsilon$ -diamètre de  $\widehat{S}_t$  est inférieur ou égal à  $K = 4(3 + 1/\sinh^2(\epsilon/8))g(C) - 10$ , et pour tout  $t \geq 1 - \eta$ , tout point de la surface  $\widehat{S}_t$  est à distance au plus  $\epsilon K'$  de  $\Sigma_1$ , avec  $K' = 2a' |\chi(\partial_+ C)|$ . Pour  $t \leq \eta$ , tout point d'une des surfaces de balayage de départ  $S_t$  est à distance au plus  $\mu/2$  de  $\Sigma_0$ . De plus, pour tout temps régulier  $t$ , la surface  $\widehat{S}_t$  est homotope à une surface plongée obtenue à partir de  $\partial_+ C$  par chirurgie.

Démonstration de la proposition 1.23.

Pour démontrer cette proposition, l'idée générale est de couper les surfaces simpliciales  $S_t$  le long des courbes trop courtes, de longueur plus petite que  $\epsilon$ , et de les remplacer par des disques réglés, pour se débarrasser des tubes longs et fins. Ceci fait l'objet du troisième paragraphe de [Mah, p. 2238 à p. 2245]. Nous rappelons ici la preuve de Maher, et nous apportons les précisions nécessaires.

Soit  $t$  un instant régulier. La surface simpliciale  $S_t$  est composée de triangles réglés avec au plus un sommet dont la somme des angles est plus petite que  $2\pi$ , noté  $v_t$ . Soit  $\overline{S}_t$  le complété métrique du revêtement universel  $\widetilde{S}_t$  de  $S_t \setminus \{v_t\}$ . Comme il s'agit d'un 2-complexe métrique composé de triangles de courbure au plus  $-1$  et dont les angles coniques des sommets sont au moins égaux à  $2\pi$ ,  $\overline{S}_t$  est un espace métrique CAT( $-1$ ) géodésiquement complet. Ces espaces vérifient certaines propriétés très utiles, voir par exemple [BH] et [Mah, p. 2239].

Soit  $\alpha$  une classe d'homotopie dans  $S_t \setminus \{v_t\}$ . A  $\alpha$ , on peut associer une transformation de revêtement dans le revêtement universel de  $S_t \setminus \{v_t\}$ , que l'on peut étendre en une isométrie de  $\overline{S}_t$ . Comme le complété métrique d'un domaine fondamental pour  $S_t \setminus \{v_t\}$  est compact, cette isométrie ne peut pas être parabolique. Donc elle est soit hyperbolique, soit elliptique. Soit  $\overline{\gamma}_t$  l'ensemble des points de  $\overline{S}_t$  dont la

distance les séparant de leur image par l'isométrie est minimale. C'est une géodésique si l'isométrie est hyperbolique, ou des points isolés si l'isométrie est elliptique. Notons  $\gamma_t$  la projection de  $\bar{\gamma}_t$  par l'application du revêtement. Plus précisément, si  $\bar{\gamma}_t$  est une géodésique et ne rencontre pas  $\bar{S}_t \setminus \tilde{S}_t$ ,  $\gamma_t$  est une géodésique par morceaux fermée et homotope à  $\alpha$  dans  $S_t \setminus \{v_t\}$ . Si  $\bar{\gamma}_t$  est une géodésique rencontrant  $\bar{S}_t \setminus \tilde{S}_t$ , alors après une petite perturbation équivariante,  $\bar{\gamma}_t$  ne rencontrera plus  $\bar{S}_t \setminus \tilde{S}_t$  et sa projection  $\gamma_t$  dans  $S_t \setminus \{v_t\}$  est une courbe fermée plongée dans la classe d'homotopie de  $\alpha$ . Enfin, si  $\bar{\gamma}_t$  est un ensemble de points, son image est le lacet constant  $\gamma_t$  de longueur nulle et égal au point  $v_t$ . Par extension, dans tous les cas ci-dessus, nous dirons que  $\gamma_t$  est le **représentant géodésique de la classe**  $\alpha$ . Remarquons que  $\gamma_t$  est une courbe plongée ou un point de  $C$ .

Comme les triangles de courbure négative qui composent les surfaces  $S_t$  varient continûment avec le temps  $t$ , il semble naturel que les représentants géodésiques  $\gamma_t$  varient aussi continûment. Ce fait est prouvé par Maher [Mah, Lemme 3.4 p. 2240].

**Lemme 1.24.** [Mah, Lemme 3.4]

*Soit  $\gamma$  une courbe fermée simple dans  $S \setminus \{v\}$ , où  $v$  est un point de  $S$  dont l'image est le point  $v_t$  pour tout temps  $t$ . Alors, les représentants géodésiques  $\gamma_t$  de  $\gamma$  varient continûment avec  $t$ .  $\square$*

**Définition 1.25.** Un représentant géodésique  $\gamma_t$  est dit **court** si sa longueur est inférieure ou égale à  $\epsilon$ .

Pour tout  $t$ , soit  $\Gamma_t$  l'ensemble des représentants géodésiques courts de  $S_t$ . C'est un ensemble fini non vide, puisque le représentant géodésique du lacet autour de  $v_t$  a une longueur nulle.

Soit  $\gamma_t$  un représentant géodésique court. On choisit une composante connexe  $\tilde{\gamma}_t$  de la préimage  $\bar{\gamma}_t$  de  $\gamma_t$  dans  $\bar{S}_t$ . On oriente  $\tilde{\gamma}_t$  de telle sorte que la fonction distance à  $\tilde{\gamma}_t$  ait un signe bien défini. Dans le cas particulier où la longueur de  $\gamma_t$  est nulle, la distance à  $\tilde{\gamma}_t$  sera toujours positive ou nulle. Si  $[p, q]$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , soit  $\tilde{N}_{[p, q]}(\tilde{\gamma}_t)$  l'ensemble des points  $x \in \bar{S}_t$  tels que  $p \leq d(x, \tilde{\gamma}_t) \leq q$ . Soit  $N_{[p, q]}(\gamma_t)$  l'image dans  $S_t$  de  $\tilde{N}_{[p, q]}(\tilde{\gamma}_t)$  par l'application de revêtement  $\bar{S}_t \rightarrow S_t$ . Si cet intervalle est un singleton  $\{r\}$ , notons ce voisinage  $N_{[r]}(\gamma_t)$ .

**Définition 1.26.** Soit  $\mathcal{A}(\gamma_t)$  le voisinage maximal  $N_{[p, q]}(\gamma_t)$  tel que pour toute longueur  $r \in [p, q]$ ,  $N_{[r]}(\gamma_t)$  est une courbe fermée simple plongée de longueur au plus  $\epsilon$ . Nous appellerons  $\mathcal{A}(\gamma_t)$  le **voisinage annulaire** de  $\gamma_t$ .

Nous désignerons par  $\mathcal{E}(\gamma_t) = N_{[p+\epsilon/2, q-\epsilon/2]}(\gamma_t)$  le **voisinage de chirurgie** correspondant à  $\gamma_t$ , avec la convention que  $\mathcal{E}(\gamma_t)$  est l'ensemble vide si  $q - p < \epsilon$ . Ce voisinage est le sous-ensemble de  $\mathcal{A}(\gamma_t)$  correspondant à la réunion de toutes les courbes  $N_{[r]}(\gamma_t)$  situées à distance au plus  $\epsilon/2$  du bord de  $\mathcal{A}(\gamma_t)$ .

Comme le voisinage annulaire  $\mathcal{A}(\gamma_t)$  contient  $\gamma_t = N_{[0]}(\gamma_t)$ , il n'est pas vide. Le voisinage annulaire et le voisinage de chirurgie varient continûment avec  $t$ , mais le voisinage de chirurgie  $\mathcal{E}(\gamma_t)$  peut être vide, et il ne contient pas nécessairement le représentant géodésique  $\gamma_t$ .

Le lemme suivant est prouvé par Maher dans [Mah, Lemme 3.7 p. 2242].

**Lemme 1.27.** [Mah, Lemme 3.7]

Si  $\alpha_t$  et  $\beta_t$  sont des représentants géodésiques de deux classes d'homotopie distinctes dans  $S_t \setminus v_t$ , alors leurs voisinages de chirurgie  $\mathcal{E}(\alpha_t)$  et  $\mathcal{E}(\beta_t)$  sont disjoints.  $\square$

On remarque que ce lemme implique que pour tout temps  $t$ , il y a au plus  $2g - 1$  voisinages de chirurgie, où  $g$  est le genre de la surface de balayage  $S_t$ .

Le lemme 1.27 permet de réaliser des chirurgies sur les surfaces de balayage  $S_t$  pour obtenir un balayage généralisé dans lequel le diamètre des tubes longs et fins est contrôlé. Plus précisément, l'idée est de retirer les voisinages de chirurgie des surfaces de balayage pour obtenir un nouveau balayage généralisé  $(\widehat{S}_t)_{t \in I}$ . On décrit cette construction en détails.

Soit  $\mathcal{E}(\gamma_t)$  un voisinage de chirurgie, et  $[a, b]$  un intervalle de temps maximal pour lequel  $\mathcal{E}(\gamma_t)$  n'est pas vide. On a  $0 \leq a \leq b \leq 1$ . Dans un premier temps, supposons que  $0 < a \leq b < 1$ , i.e. que  $[a, b]$  est contenu dans l'intérieur de  $I$ . Alors  $\mathcal{E}(\gamma_a)$  et  $\mathcal{E}(\gamma_b)$  sont deux courbes fermées simples, égales à  $N_{[r_a]}(\gamma_a)$  et  $N_{[r_b]}(\gamma_b)$  pour des longueurs  $r_a$  et  $r_b$ , et la réunion des voisinages de chirurgie  $\mathcal{E}(\gamma_{[a,b]}) = \{\mathcal{E}(\gamma_t), t \in [a, b]\}$  est un tore solide dans  $\Sigma$ , sur lequel on désire effectuer une chirurgie de balayages généralisés. Reprenons la construction de Maher [Mah, p. 2242 et 2243].

Choisissons deux familles paramétrées de points bases dans le bord de  $\mathcal{E}(\gamma_t)$  variant continûment avec  $t$  et telles que les deux points bases coïncident aux temps  $a$  et  $b$ . On modifie le balayage en remplaçant les temps  $a$  et  $b$  par de courts intervalles  $I_a$  et  $I_b$  sur lesquels l'application est constante pour le moment.

Sur l'intervalle  $I_a$ , la courbe  $N_{[r_a]}(\gamma_a)$  est une courbe fermée simple plongée de longueur inférieure ou égale à  $\epsilon$ . Comme le rayon d'injectivité de la variété  $M'$  est supérieur ou égal à  $2\epsilon \geq \epsilon$ , d'après les hypothèses du théorème A, la classe d'homotopie de la courbe  $N_{[r_a]}(\gamma_a)$  est nulle dans le groupe fondamental de  $C$ . La courbe  $N_{[r_a]}(\gamma_a)$  borde donc un disque immergé dans  $C$ .

Nous pouvons à présent continuer la démonstration de la proposition 1.23. Sur l'intervalle  $I_a$ , on remplace de manière continue la courbe  $N_{[r_a]}(\gamma_a) = \mathcal{E}(\gamma_a)$  par une paire de disques réglés dans  $C$  dont les droites passent toutes par le point base  $x_a$ . Plus précisément, on relie chaque point de la courbe  $N_{[r_a]}$  au point base par une géodésique minimisante, ce qui est possible puisque la métrique de  $C$  est complète. L'ensemble de ces géodésiques forme un disque réglé immergé dans  $C$  et de courbure sectionnelle au plus  $-1$ . Sur l'intervalle  $]a, b[$ , on enlève le voisinage de chirurgie  $\mathcal{E}(\gamma_t)$  que l'on remplace par une paire de disques réglés dans  $C$  construits de la même façon, dont les géodésiques passent toutes par le point base appartenant au bord du voisinage de chirurgie auquel on rattache le disque. Enfin, sur l'intervalle  $I_b$  on recolle les deux disques ensemble pour revenir à la surface de départ. Ceci est bien une chirurgie d'un balayage généralisé, comme défini plus haut.

Le lemme suivant découle directement des Lemmes 3.8 à 3.10, prouvés dans [Mah, p. 2243 à 2246].

**Lemme 1.28.** Soit  $\widehat{S}_t$  la surface obtenue à partir de la surface de balayage simpliciale  $S_t$  en remplaçant tous les voisinages de chirurgie  $\mathcal{E}(\gamma_t)$  de  $S_t$  par des paires de disques réglés par le procédé décrit ci-dessus. Alors le  $\epsilon$ -diamètre de  $\widehat{S}_t$  est au plus  $K = 4(3 + 1/\sinh^2(\epsilon/8))g(C) - 10$ .  $\square$

La construction donnée par Maher ne prend pas en considération les bords de l'intervalle de temps  $I$ . Or, il se peut que  $a = 0$  ou  $b = 1$ , et dans ce cas, on peut être obligé de modifier les surfaces simpliciales de départ ou d'arrivée  $S_0 = \Sigma_0$  et  $S_1 = \Sigma_1$ , ce que l'on voudrait éviter. Donc, si ce cas a lieu, il nous faut raffiner un peu la construction pour modifier le balayage simplicial dans un petit voisinage régulier de  $S_0 \cup S_1$  de telle sorte que les surfaces  $S_0$  et  $S_1$  restent inchangées. Comme on perd alors le contrôle du  $\epsilon$ -diamètre des surfaces de balayage dans ce voisinage régulier, il nous faut le choisir suffisamment petit pour que les surfaces de balayage que nous sélectionnerons par la suite pour devenir des surfaces emboîtées ne soient pas dans ce voisinage. Ceci nous permettra de majorer leur  $\epsilon$ -diamètre grâce au lemme 1.28. C'est ce que nous permet de contrôler la constante  $\mu$  introduite dans l'énoncé de la proposition 1.23 et qui sera déterminée ultérieurement.

Pour finir de modifier le balayage simplicial de départ et obtenir le balayage généralisé voulu, il reste donc à prendre en compte le cas où  $a = 0$  ou  $b = 1$ . Si  $\mathcal{E}(\gamma_0)$  est une courbe fermée simple, on peut encore appliquer la construction précédente : on remplace le temps 0 par un intervalle  $I_0$  et réalise une chirurgie sur cet intervalle sans modifier la surface bord de départ  $S_0 = \Sigma_0$ . On procède de même si  $\mathcal{E}(\gamma_1)$  est une courbe fermée simple. Le problème subsiste cependant lorsque  $\mathcal{E}(\gamma_0)$  ou  $\mathcal{E}(\gamma_1)$  sont d'intérieur non vide. Comme ces deux cas sont semblables, supposons par exemple que l'intérieur de  $\mathcal{E}(\gamma_0)$  n'est pas vide. Par continuité, il existe alors un instant maximal  $b \in ]0, 1]$  tel que  $\mathcal{E}(\gamma_t)$  est un voisinage de chirurgie non vide pour tout  $t \in [0, b]$ .

Comme les surfaces de balayage  $(S_t)_{t \in I}$  varient continûment avec  $t$ , il existe une constante  $\eta > 0$  aussi petite que voulue, ne dépendant que de la constante  $\mu$  et du balayage simplicial de départ  $(S_t)_{t \in I}$ , telle que pour tout  $t \in [0, \eta]$ , tout point de  $S_t$  est à distance au plus  $\mu/2$  de  $\Sigma_0 = S_0$ , et telle que pour tout  $t \in [1 - \eta, 1]$ , tout point de  $S_t$  est à distance au plus  $\epsilon K'/2$  de  $\Sigma_1 = S_1$ . Si  $b \leq \eta$ , on ne modifie pas le balayage. Sinon, si  $\eta < b < 1$ , on applique la construction de chirurgie pour tout temps  $t \in [\eta, b]$  : on remplace les voisinages de chirurgie  $\mathcal{E}(\gamma_t)$  par une paire de disques réglés comme précédemment dont les géodésiques passent par les points base des bords de  $\mathcal{E}(\gamma_t)$ . Sur l'intervalle  $[0, \eta]$ , on remplace les voisinages de chirurgie par une paire de disques pour  $t$  proche de  $\eta$ , qui se rejoignent et redeviennent le voisinage de chirurgie initial  $\mathcal{E}(\gamma_t)$  lorsque le temps  $t$  est très proche de zéro, puis nul. On réalise ces opérations pas trop loin de la surface originale  $S_t$  et de manière continue, de telle sorte qu'il s'agit encore d'une modification de balayage généralisé. Si  $b = 1$ , on procède de même pour tout  $t \in [1 - \eta, 1]$ . Comme le diamètre des disques réglés est inférieur ou égal à  $\epsilon$  et que  $K'/2 \geq 1$ , on peut supposer que tout point de  $\widehat{S}_t$  est à distance au plus  $\epsilon K'$  de  $\Sigma_1$  pour tout  $t \in [1 - \eta, 1]$ .

Ceci achève la démonstration de la proposition 1.23.  $\square$

### 1.2.3 Surfaces de balayage et surfaces emboîtées.

Nous avons à présent besoin d'un lemme qui nous permette de déterminer précisément la constante  $\mu$ , correspondant à la taille du voisinage collier de  $S_0$  qu'il faut considérer. Notons  $K' = 2a'\chi_-(C)$ . D'après le lemme 1.13, la quantité  $2\epsilon K'$  est un

majorant pour le diamètre de la surface simpliciale  $\Sigma_1$ , identifiée à  $\partial_+ C$ . Notons  $\delta$  le diamètre du corps en anses  $C$ .

**Lemme 1.29.** *Il existe un point  $x_0$  à l'intérieur de  $C$  et à distance au moins  $(\frac{\delta}{2} - 2\epsilon K')$  de  $\partial_+ C$ .*

Démonstration du lemme 1.29.

On raisonne par l'absurde : supposons que pour tout point  $z$  à l'intérieur de  $C$ ,  $\text{dist}(z, \partial_+ C) < \frac{\delta}{2} - 2\epsilon K'$ . Pour tout point  $z$  de  $C$ , l'inégalité au sens large reste vraie :  $\text{dist}(z, \partial_+ C) \leq \frac{\delta}{2} - 2\epsilon K'$ . Prenons deux points  $x$  et  $y$  dans  $C$  tels que  $d(x, y) = \text{diam}(C) = \delta$ . Il vient :

$$\begin{aligned} d(x, y) = \delta &\leq \text{dist}(x, \partial_+ C) + \text{diam}(\partial_+ C) + \text{dist}(y, \partial_+ C) \\ &\leq \left(\frac{\delta}{2} - 2\epsilon K'\right) + 2\epsilon K' + \left(\frac{\delta}{2} - 2\epsilon K'\right) \\ &\leq \delta - 2\epsilon K' < \delta, \end{aligned}$$

ce qui est une contradiction. Ceci prouve le lemme 1.29.  $\square$

Soit  $c$  un arc géodésique minimisant la longueur entre  $x_0$  et  $\partial_+ C$ . Notons  $\mu$  la distance entre la géodésique  $c$  et  $\Sigma_0$ . Comme  $c$  est plongée à l'intérieur de  $C$  (excepté une extrémité appartenant à  $\partial_+ C = \Sigma_1$ ), la quantité  $\mu$  est strictement positive.

A présent, afin d'être complet dans la preuve de la proposition B des Surfaces Emboîtées, formulons et prouvons un certain nombre de lemmes qui sont implicites dans [Mah, preuve du Lemme 4.5 p. 2251].

D'après la définition 1.5, rappelons que si  $x$  est un point de  $C$  et  $S$  une surface immergée de  $C$ , on dit que  $S$  **sépare  $x$  de  $\partial_+ C$**  si tout chemin orienté de  $x$  à  $\partial_+ C$  intersecte  $S$  avec un nombre algébrique d'intersection égal à  $+1$ .

Si deux surfaces  $S$  et  $T$  immergées dans  $C$  sont telles que  $S$  sépare tout point de  $T$  de  $\partial_+ C$ , on dit que  $S$  **sépare  $T$  de  $\partial_+ C$** . Dans ce cas, les surfaces  $S$  et  $T$  sont dites **emboîtées**.

**Lemme 1.30.** *Un point  $x$  dans l'intérieur de  $C$  est séparé de  $\partial_+ C$  par  $\widehat{S}_t$  si et seulement s'il existe un chemin  $\gamma$  de  $x$  à  $\partial_+ C$  intersectant la surface  $\widehat{S}_t$  avec un nombre algébrique d'intersection égal à  $+1$ .*

Démonstration du lemme 1.30.

Il suffit de montrer que s'il existe un chemin  $\gamma$  de  $x$  à  $\partial_+ C$  dont le nombre algébrique d'intersection avec  $\widehat{S}_t$  est égal à  $+1$ , alors tout chemin  $\gamma'$  de  $x$  à  $\partial_+ C$  intersecte  $\widehat{S}_t$  avec nombre algébrique d'intersection égal à  $+1$ .

Soit  $\gamma'$  un autre chemin de  $x$  à  $\partial_+ C$  dans  $C$ . Comme la surface immergée  $\widehat{S}_t$  est homologuée à  $\partial_- C$ , la classe d'homologie de  $[\widehat{S}_t]$  est nulle dans  $H_2(C, \partial_- C)$ . La composée  $\alpha = \gamma^{-1} \cdot \gamma'$  est un 1-cycle dans  $H_1(C, \partial_+ C)$ .

Comme  $\partial C = \partial_- C \cup \partial_+ C$ , on a  $[\alpha] \cdot [\widehat{S}_t] = [\alpha] \cdot 0 = 0$ , et donc  $\gamma' \cdot \widehat{S}_t = \gamma \cdot \widehat{S}_t = +1$ , ce qui prouve le lemme 1.30.  $\square$

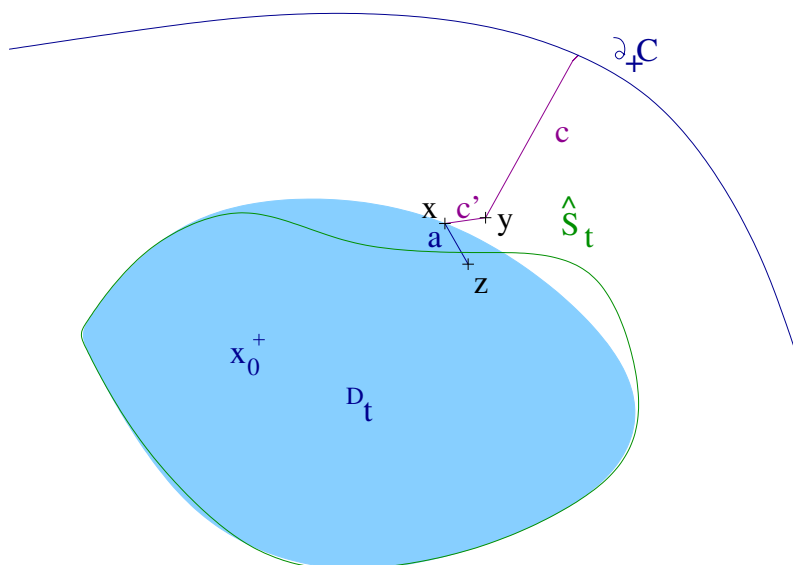
Pour tout  $t \in [0, 1]$ , soit  $D_t$  l'adhérence de l'ensemble des points  $x \in C$  séparés de  $\partial_+ C$  par  $\widehat{S}_t$ . Comme les surfaces immergées  $(\widehat{S}_t)_{t \in [0,1]}$  sont des surfaces de balayage généralisé pour le corps en anses  $C$ ,  $D_0$  est la surface de balayage initiale  $\widehat{S}_0$ , et  $D_1$  est égal au corps en anses  $C$  tout entier. Soit  $E_t$  la composante connexe de  $D_t$  contenant  $x_0$ . Comme précédemment,  $E_0$  est un complexe de dimension au plus 2, et  $E_1 = C$ .

**Lemme 1.31.** *Le bord de l'ensemble  $D_t$  est exactement la surface  $\widehat{S}_t$ .*

Démonstration du lemme 1.31.

Soit  $x$  un point de  $\widehat{S}_t$ . Comme  $\widehat{S}_t$  est une surface d'un balayage généralisé pour le corps en anses  $C$ , il existe un chemin  $c$  de  $x$  à  $\partial_+ C$  tel que pour tout point  $y$  de  $c$  distinct de  $x$ , le chemin  $c|_y$  obtenu à partir de  $c$  en retirant l'intervalle  $[x, y]$  n'intersecte pas la surface  $\widehat{S}_t$ . En particulier, pour tout point  $y$  de  $c$  distinct de  $x$ , le nombre algébrique d'intersection entre  $c|_y$  et  $\widehat{S}_t$  est nul, et  $y$  est dans le complémentaire de  $D_t$  dans  $C$ . Comme le point  $x$  est une limite de tels points  $y$ ,  $x$  appartient à l'adhérence du complémentaire de  $D_t$  dans  $C$ . Mais comme  $x$  appartient à la surface  $\widehat{S}_t$  et que cette surface est séparante dans le corps en anses  $C$ , tout point suffisamment proche de  $x$  et de l'autre côté de  $\widehat{S}_t$  par rapport à  $y$  est séparé de  $\partial_+ C$  par  $\widehat{S}_t$ . Comme l'ensemble  $D_t$  est fermé et que  $x$  est une limite de points de  $D_t$ , le point  $x$  appartient aussi à  $D_t$ . Ainsi,  $x$  est un point du bord de  $D_t$ , et la surface  $\widehat{S}_t$  est incluse dans le bord de  $D_t$ .

Pour établir l'inclusion réciproque, supposons par l'absurde qu'il existe un point  $x$  dans le bord de  $D_t$  n'appartenant pas à la surface  $\widehat{S}_t$ . La distance  $d = \text{dist}(x, \widehat{S}_t)$  est alors strictement positive. Comme le point  $x$  appartient au bord de  $D_t$ , il existe un point  $y$  dans le complémentaire de  $D_t$  dans  $C$  tel que  $d(x, y) \leq \frac{d}{2}$ . Comme  $y$  est dans le complémentaire de  $D_t$ , il existe un chemin  $c$  de  $y$  au bord  $\partial_+ C$  dont le nombre algébrique d'intersection avec  $\widehat{S}_t$  n'est pas égal à  $+1$ . Soit  $c'$  une géodésique minimisante de  $x$  à  $y$  : comme la longueur de  $c'$ , égale à la distance entre  $x$  et  $y$ , est strictement plus petite que la distance de  $x$  à  $\widehat{S}_t$ , la géodésique  $c'$  n'intersecte pas la surface  $\widehat{S}_t$ . Si  $c'' = c' \cup c$ ,  $c''$  est un chemin de  $x$  à  $\partial_+ C$  dont le nombre algébrique d'intersection avec  $\widehat{S}_t$  n'est pas égal à  $+1$ . Par conséquent, le point  $x$  n'est pas séparé de  $\partial_+ C$  par  $\widehat{S}_t$ .



Mais comme le point  $x$  appartient aussi à  $D_t$ , il existe un point  $z$  de  $C$  séparé de  $\partial_+C$  par  $\widehat{S}_t$  et tel que la distance entre  $z$  et  $x$  est au plus  $\frac{d}{2}$ . Prenons une géodésique minimisante  $a$  de  $z$  à  $x$ . Notons  $b = a \cup c''$ . Le chemin  $b$  relie  $z$  à  $\partial_+C$ , ce qui implique que le nombre d'intersection algébrique de  $b$  avec  $\widehat{S}_t$  est égal à  $+1$ . D'autre part, la distance entre  $z$  et  $x$  est au plus  $\frac{d}{2} < \text{dist}(x, \widehat{S}_t)$ , ce qui implique que la géodésique minimisante  $a$  n'intersecte pas la surface  $\widehat{S}_t$ . Mais alors, le nombre d'intersection algébrique entre le chemin  $b = a \cup c''$  et la surface  $\widehat{S}_t$  n'est pas égal à  $+1$ , ce qui contredit le fait que  $z$  est séparé de  $\partial_+C$  par  $\widehat{S}_t$ . Ainsi, le point  $x$  appartient nécessairement à la surface  $\widehat{S}_t$ , ce qui achève la preuve du lemme 1.31.  $\square$

**Lemme 1.32.** *Pour tout temps  $t$ , le bord de  $E_t$  est connexe.*

Démonstration du lemme 1.32.

Si le bord de  $E_t$  n'était pas connexe, il comporterait au moins deux composantes connexes  $S$  et  $T$  de  $\widehat{S}_t$ . Mais les surfaces  $S$  et  $T$  seraient disjointes et séparantes dans le corps en anses  $C$ . Si elles ne sont pas emboîtées, l'ensemble des points séparés de  $\partial_+C$  par  $S$  est disjoint de l'ensemble des points séparés de  $\partial_+C$  par  $T$ , ce qui contredit le fait que  $E_t$  est connexe. Ainsi, les surfaces  $S$  et  $T$  sont emboîtées. Mais comme la surface  $\widehat{S}_t$  est obtenue à partir de la surface de balayage  $S_t$  par chirurgie et que les chirurgies conservent le nombre algébrique d'intersection en homologie, il n'est pas possible que deux composantes de la même surface  $\widehat{S}_t$  soient emboîtées, ce qui achève la démonstration du lemme.  $\square$

Afin de prouver la proposition B, on sélectionne certaines des surfaces emboîtées parmi la famille de surfaces connexes  $(\partial E_t)_{t \in [0,1]}$ .

Fin de la démonstration de la proposition B.

Soit  $c$  l'arc géodésique minimisant la longueur du point  $x_0$  obtenu au lemme 1.29 au bord  $\partial_+C$ . Notons comme précédemment  $\mu > 0$  la distance séparant la géodésique  $c$  de  $\Sigma_0$ . Soit  $L$  la longueur de  $c$ . On a l'inégalité  $L \geq \frac{\delta}{2} - 2\epsilon K'$ . Soit  $\ell \mapsto c(\ell)$  un

paramétrage par longueur d'arc de la géodésique  $c$ , de telle sorte que  $c(0) = x_0$  et  $c(L) = y_0 \in \partial_+ C$ .

Montrons tout d'abord que  $E_t = \emptyset$  pour tout  $t \in [0, \eta]$ , où  $\eta$  est la constante fournie par la proposition 1.23. Comme chaque surface du balayage simplicial d'origine  $S_t$  est contenue dans un  $\mu/2$ -voisinage de  $S_0 = \widehat{S}_0$  pour tout  $t \leq \eta$ , et que la distance entre  $c$  et  $S_0$  est au moins  $\mu$ , la géodésique  $c$  ne rencontre aucune surface de balayage  $S_t$  pour  $t \leq \eta$ . Comme les nouvelles surfaces de balayage  $\widehat{S}_t$  sont obtenues à partir des surfaces  $S_t$  par chirurgie, le nombre algébrique d'intersection entre  $c$  et  $\widehat{S}_t$  est le même que celui entre  $c$  et  $S_t$ . Il est donc encore nul pour  $t \leq \eta$ . Par conséquent, la géodésique  $c$  est un arc reliant  $x_0$  à  $\partial_+ C$  dont le nombre d'intersection avec  $\widehat{S}_t$  est nul pour  $t \leq \eta$ . Par définition, les surfaces  $\widehat{S}_t$  ne séparent pas  $x_0$  de  $\partial_+ C$  pour  $t \leq \eta$ , ce qui montre qu'il n'y a pas de composante connexe de  $D_t$  contenant  $x_0$ . Ainsi,  $E_t = \emptyset$  pour tout  $t \in [0, \eta]$ .

Supposons que  $\frac{\delta}{2} - 2\epsilon K' \geq 5\epsilon K$ . Comme les ensembles  $E_t$  varient continûment avec le temps  $t$ , la fonction  $\mathcal{L}$  qui au temps  $t$  associe la longueur de  $c \cap E_t$  est une application continue. Comme  $\mathcal{L}(\eta) = 0$  et  $\mathcal{L}(1) = L$  (la longueur de l'arc  $c$ ), on en conclut qu'il existe un temps  $t_1 \in ]\eta, 1[$  tel que  $\mathcal{L}(t_1) = L - 2\epsilon K - \epsilon K'$ . Soit  $S_1$  le bord de  $E_{t_1}$ . D'après le lemme 1.32, la surface immergée  $S_1$  est une composante connexe de  $\widehat{S}_{t_1}$ . Comme  $c$  est une géodésique minimisante paramétrée par longueur d'arc, pour tous  $a$  et  $b \in [0, L]$ , on a  $d(c(a), c(b)) = |b - a|$ . Ainsi, le point d'intersection  $c(\mathcal{L}(t_1))$  entre  $S_1$  et  $c$  est à distance  $2\epsilon K + \epsilon K'$  de  $\partial_+ C$ . Puisque par construction, tout point de la surface  $\widehat{S}_t$  pour  $t \geq 1 - \eta$  est à distance au plus  $\epsilon K'$  de  $\partial_+ C$ , nécessairement,  $t_1 < 1 - \eta$ . Comme, pour  $t \leq \eta$ , les ensembles  $E_t$  sont vides, en fait  $\eta < t_1 < 1 - \eta$ . Par définition de  $E_{t_1}$ , la surface  $S_1$  sépare  $x_0$  de  $\partial_+ C$ . Comme par le lemme 1.32,  $S_1$  est connexe, d'après la proposition 1.23, son diamètre est au plus  $2\epsilon K$ . Par suite, la surface  $S_1$  ne peut pas intersecter  $\{c(\ell), 0 \leq \ell < L - 4\epsilon K - \epsilon K'\} \cup \{c(\ell), L - \epsilon K' < \ell \leq L\}$ . Soit  $\ell_1$  la plus petite valeur de  $\ell$  telle que  $c(\ell) \in S_1$ . Il vient  $L - 4\epsilon K - \epsilon K' \leq \ell_1 \leq L - \epsilon K'$ , avec  $L - 4\epsilon K - \epsilon K' \geq \frac{\delta}{2} - 4\epsilon K - 2\epsilon K' \geq \epsilon K > 0$ .

Soit  $c_1 = \{c(\ell), 0 \leq \ell \leq \ell_1 - 14\epsilon K\}$ . En remplaçant  $c$  par  $c_1$ , nous pouvons itérer le processus décrit précédemment. Si  $K$  est assez petit par rapport à  $\delta$ , il existe un instant  $t_2$  tel que la longueur de  $c_1 \cap E_{t_2}$  est égale à :  $\text{lgr}(c_1) - 2\epsilon K = \ell_1 - 16\epsilon K \geq L - 20\epsilon K - \epsilon K'$ . Pour les mêmes raisons que précédemment, le bord de  $E_{t_2}$  est une surface  $S_2$  qui est une composante connexe de  $\widehat{S}_{t_2}$  séparant  $x_0$  de  $\partial_+ C$ , et intersectant  $c_1$  seulement selon l'ensemble  $\{c_1(\ell), (\ell_1 - 14\epsilon K) - 4\epsilon K \leq \ell \leq \ell_1 - 14\epsilon K\}$ .

Montrons que la distance entre les surfaces  $S_1$  et  $S_2$  est inférieure ou égale à  $10\epsilon K$ . Soit  $\ell_2$  le plus petit réel  $\ell$  tel que  $c(\ell) \in S_2$ . D'après ce qui précède,  $\ell_2 \leq \ell_1 - 14\epsilon K$ . Comme  $c(\ell_1) \in S_1$  et  $c(\ell_2) \in S_2$ , il vient :

$$\begin{aligned} \text{dist}(S_1, S_2) &\geq \text{dist}(c(\ell_1), c(\ell_2)) - \text{diam}(S_1) - \text{diam}(S_2) \\ &\geq (\ell_1 - \ell_2) - 4\epsilon K \\ &\geq 14\epsilon K - 4\epsilon K = 10\epsilon K. \end{aligned}$$

On peut alors réitérer le procédé avec  $c_2 = \{c(\ell), 0 \leq \ell \leq \ell_2 - 14\epsilon K\}$ , à condition toutefois que  $\ell_2 - 14\epsilon K > 4\epsilon K$ , donc par exemple si  $L - 2 \times 18\epsilon K - \epsilon K' > 4\epsilon K$ .

On ne peut plus itérer lorsque  $L - 18\epsilon K(n - 1) - \epsilon K' > 4\epsilon K$  mais  $L - 18\epsilon K n - \epsilon K' \leq 4\epsilon K$ , donc pour  $n = \lceil \frac{L - \epsilon(4K + K')}{18\epsilon K} \rceil$ . Comme  $L \geq \frac{\delta}{2} - \epsilon K'$ ,  $n \geq \lceil \frac{\delta}{36\epsilon K} - \frac{2}{9} - \frac{K'}{9} \rceil$ , et la proposition B des Surfaces Emboîtées est démontrée.  $\square$



### 1.3 Des surfaces emboîtées aux surfaces parallèles.

L'objet de ce paragraphe est de démontrer la proposition C des Surfaces Parallèles.

D'après la proposition B, on sait que l'on peut trouver  $n = \lceil \frac{\delta}{36\epsilon K} - \frac{2}{9} - \frac{K'}{9K} \rceil$  surfaces connexes, immergées dans le corps en anses  $C$  du revêtement  $M'$ . Toutes ces surfaces sont emboîtées, leur  $\epsilon$ -diamètre est majoré par  $K$  et elles sont à distance au moins  $10\epsilon K$  les unes des autres, où  $K = 4(3 + 1/\sinh^2(\epsilon/8))g(C) - 10$ . De plus, toutes ces surfaces sont homotopes à des surfaces plongées obtenues à partir du bord  $\partial_+ C$  par chirurgie.

En particulier, le genre de ces surfaces immergées est compris entre 0 et  $g(C) = g(\partial_+ C)$ . Il y a par conséquent au moins  $n' = \lfloor n/(g(C) + 1) \rfloor$  surfaces  $S_1, \dots, S_{n'}$  qui ont le même genre, et ce genre est majoré par  $g(C)$ . Ordonnons les indices  $j$  de telle sorte que  $S_{j+1}$  sépare  $S_j$  de  $\partial_+ C$ .

Nous suivons à présent la preuve de Maher [Mah, p. 2252–2257]. Soit  $S = S_j$  l'une des surfaces immergées et emboîtées précédentes. Une **famille  $\Delta_S$  de disques de compression de  $\partial_+ C$  pour obtenir  $S$**  est un ensemble fini de disques, proprement plongés dans  $C$  et tels que le balayage fournit une homotopie entre  $S$  et un sous-ensemble de  $\partial_+ C \cup \Delta$ . La première étape consiste à montrer que pour deux surfaces emboîtées et connexes du balayage, il est possible de choisir deux familles de disques de compression telles que l'une est contenue dans l'autre. Ceci est l'objet du Lemme 4.6 [Mah, Lemme 4.6 p. 2252]. En particulier, si les deux surfaces ont le même genre, elles sont homotopes.

**Lemme 1.33.** [Mah, Lemme 4.6]

*Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux des surfaces immergées obtenues à la proposition B. Supposons par exemple que  $S_2$  sépare  $S_1$  de  $\partial_+ C$ . Il existe deux familles de disques de compression de  $\partial_+ C$ , notées  $\Delta_{S_1}$  pour obtenir  $S_1$  et  $\Delta_{S_2}$  pour obtenir  $S_2$ , telles que  $\Delta_{S_2}$  est un sous-ensemble de  $\Delta_{S_1}$ . En particulier, si les deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$  ont le même genre,  $\Delta_{S_1} = \Delta_{S_2}$ .  $\square$*

D'après ce lemme, les surfaces emboîtées  $S_1, \dots, S_{n'}$  sont homotopes, puisqu'elles ont le même genre.

Le lemme suivant est crucial : on voudrait remplacer les surfaces immergées par des surfaces plongées de même genre dans un voisinage régulier des surfaces immergées de départ arbitrairement petit. Ce lemme est démontré par Maher [Mah, Lemme 4.7 p. 2253].

**Lemme 1.34.** [Mah, Lemme 4.7]

*Soit  $S$  une des surfaces obtenues à la proposition B. Soit  $T$  une surface connexe, plongée, séparant  $S$  de  $\partial_+ C$  et de genre minimal pour cette propriété. Alors  $T$  est incompressible dans  $C \setminus S$  et le genre de  $T$  est supérieur ou égal au genre de  $S$ .*

Démonstration du lemme 1.34.

Nous rappelons ici la démonstration de Maher.

Si la surface  $T$  était compressible dans  $C \setminus S$ , il existerait une famille de disques de compression plongés dans  $C \setminus S$  tels qu'en effectuant les chirurgies le long de ces disques, on obtienne une nouvelle surface  $T'$  plongée dans  $C \setminus S$ . Mais une des

composantes de  $T'$  serait une surface plongée dans  $C$  séparant  $S$  de  $\partial_+ C$ , et de genre strictement plus petit que le genre de  $T$ , ce qui est une contradiction. Ainsi, la surface  $T$  est incompressible dans  $C \setminus S$ .

La surface  $S$  est homotope à une composante du bord  $\partial_+ C$  comprimé le long d'une famille  $\Delta_S$  de disques plongés. Ainsi,  $C'$  la composante connexe de  $C \setminus \Delta_S$  contenant  $S$  est un corps en anses et l'on peut trouver une échine  $\Gamma$  pour  $C'$  qui est homotope à la surface immergée  $S$ . L'application en homologie  $H_1(\Gamma) \rightarrow H_1(C)$  induite par l'inclusion de  $\Gamma$  dans  $C$  est injective.

La surface  $T$  étant une surface plongée dans le corps en anses  $C$ , elle est séparante, et il existe un ensemble  $D_T$  de disques de compression plongés pour  $T$  tels que si l'on comprime  $T$  le long des disques de  $D_T$ , la surface obtenue est parallèle à certaines composantes connexes de  $\partial_- C$  (cf [Bo, Lemme 2.3]). Comme  $T$  est incompressible dans  $C \setminus S$ , les disques de compression de  $D_T$  pour la surface  $T$  se situent tous d'un même côté de  $T$ . Ainsi, la surface  $T$  borde un corps en anses  $C''$  dans  $C$ . Comme la composée des applications induites par les inclusions  $H_1(\Gamma) \rightarrow H_1(C'') \rightarrow H_1(C)$  est injective, l'application  $H_1(\Gamma) \rightarrow H_1(C'')$  est injective. Ainsi, le rang de  $H_1(C'')$  est plus grand ou égal au rang de  $H_1(\Gamma)$ , et nécessairement, le genre de  $T$  est plus grand ou égal au genre de  $S$ .  $\square$

Comme conséquence du lemme 1.33, toutes les surfaces immergées et emboîtées  $S_1, \dots, S_{n'}$  sont deux à deux homotopes. Nous avons besoin d'une propriété plus forte : il faut trouver, pour tout  $j$  de 1 à  $(n' - 1)$ , une homotopie entre les surfaces  $S_j$  et  $S_{n'}$  qui est disjointe de  $S_k$  pour tout  $k < j$ . Nous suivons les arguments de la démonstration de [Mah, Lemme 4.8 p. 2254], mais en calculant les majorants précis.

**Lemme 1.35.** *A partir des surfaces  $S_1, \dots, S_{n'}$ , on peut construire une famille de surfaces immergées  $S'_1, \dots, S'_{n'-1}, S'_{n'}$  connexes, disjointes, emboîtées et homotopes, et telles que l'homotopie entre  $S'_{n'}$  et  $S'_j$  est disjointe de  $S'_k$  pour  $1 \leq k < j \leq n'$ . De plus, le diamètre des surfaces  $S'_j$  est au plus  $8\epsilon K$ , elles sont à distance au moins  $2\epsilon K$  les unes des autres, et le  $\epsilon$ -diamètre de  $S'_2, \dots, S'_{n'-1}$  est majoré par  $K$ .*

#### Démonstration du lemme 1.35

Chacune des surfaces  $S_j$  admet une triangulation à un seul sommet dont la longueur des arêtes est majorée par  $4\epsilon K$ , et son diamètre est au plus  $2\epsilon K$ . D'après le lemme 1.15, les surfaces  $S_1$  et  $S_{n'}$  sont homotopes à des surfaces simpliciales  $S'_1$  et  $S'_{n'}$  dont le diamètre est au plus  $4\epsilon K$  et telles que pour tous points  $x \in S_j$  et  $x' \in S'_j$  (où  $j = 1$  et  $n'$ ), la distance entre  $x$  et  $x'$  est au plus  $6\epsilon K$ . En fait, par construction de  $S'_j$ , tout point de  $S'_j$  est à distance au plus  $4\epsilon K$  de la surface de départ  $S_j$ .

On peut modifier l'homotopie entre les deux surfaces simpliciales  $S'_1$  et  $S'_{n'}$  en un balayage simplicial comme au paragraphe 1.2. D'après la proposition 1.23, il existe une suite finie de chirurgies de ce balayage simplicial où toutes les surfaces de balayage  $S'_t$  pour  $t \in [\eta, 1 - \eta]$  ont leur  $\epsilon$ -diamètre majoré par  $K$ . La constante  $K$  est bien la constante définie à la proposition 1.23 car le genre des surfaces  $S_j$  est aussi majoré par  $g(C)$ . De plus, les surfaces  $S'_t$  sont homotopes à la surface  $S'_n$  après d'éventuelles compressions. Pour tout  $j$  entre 2 et  $(n' - 1)$ , soit  $S'_j$  la première surface de balayage  $S'_t$  intersectant  $S_j$ . Comme c'est une surface du balayage généralisé, son  $\epsilon$ -diamètre est au plus  $K$ .

D'après la construction d'un balayage généralisé, le genre de la surface  $S'_j$  est majoré par le genre de la surface  $S_j$  pour tout  $j$ . Nous montrons qu'en fait, ces deux genres sont égaux.

**Affirmation .** *Pour tout  $j$  entre 1 et  $n' - 1$ , le genre de la surface  $S'_j$  est le même que le genre de la surface de départ  $S_j$ .*

Dans un premier temps, supposons que l'affirmation est vraie. Puisque les surfaces du balayage modifié  $S'_j$  ont le même genre que les surfaces de départ  $S_j$ , il n'y a en fait besoin d'aucune chirurgie pour obtenir les surfaces  $S'_j$ , et elles sont déjà des surfaces de balayage du balayage simplicial de départ entre  $S'_1$  et  $S'_{n'}$ . Ainsi, les surfaces  $S'_j$  sont homotopes à la surface  $S'_{n'}$ , et par définition d'un balayage, l'homotopie est disjointe des surfaces  $S'_k$  pour tout  $k < j$ .

#### Démonstration de l'affirmation.

Supposons qu'il existe un indice  $j$  tel que le genre de  $S'_j$  est strictement plus petit que le genre de  $S_j$ . D'après un résultat de Gabai ([G1]), on peut remplacer la surface simpliciale  $S'_j$  par une surface  $T'_j$  plongée dans un voisinage régulier de la surface immergée  $S'_j$  arbitrairement petit. Plus précisément, prenons un petit voisinage régulier  $N(S'_j)$  de la surface immergée  $S'_j$ . Ce voisinage contient des surfaces plongées dans la même classe d'homologie que  $S'_j$  dans  $H_2(N(S'_j), \partial N(S'_j))$ . Gabai a montré que la norme singulière en homologie est égale à la norme de Thurston (qui concerne des surfaces plongées) [G1]. Il existe donc une surface  $T'_j$  plongée dans  $N(S'_j)$ , dans la même classe d'homologie que  $S'_j$  et de genre inférieur ou égal au genre de  $S'_j$ . Si l'on choisit un voisinage  $N(S'_j)$  suffisamment petit, on peut faire en sorte que le diamètre de la surface plongée  $T'_j$  mesuré dans la variété  $M'$  soit inférieur ou égal à  $3\epsilon K$ . En particulier, comme les surfaces  $S'_1$  et  $S'_{n'}$  sont trop éloignées de  $S_j$ , la surface plongée  $T'_j$  n'intersecte ni  $S'_1$ , ni  $S'_{n'}$ , et elle sépare  $S'_1$  de  $S'_{n'}$ . En utilisant le lemme 1.34, le genre de  $T'_j$  doit être au moins égal au genre de  $S'_1$  :  $g(T'_j) \geq g(S'_1)$ . Mais comme le genre de  $S'_1$  est le même que le genre de  $S_j$ , et que le genre de  $T'_j$  est majoré par le genre de  $S'_j$ , que nous avons supposé strictement plus petit que le genre de  $S_j$ , on obtient  $g(T'_j) < g(S'_1)$ , ce qui est une contradiction.  $\square$

Comme les surfaces  $S_j$  étaient à distance au moins  $10\epsilon K$  les unes des autres et que tout point de  $S'_j$  est à distance au plus  $4\epsilon K$  de la surface de départ  $S_j$  pour tout  $j = 1, \dots, n'$ , les nouvelles surfaces  $S'_j$  sont à distance au moins  $2\epsilon K$  les unes des autres (ce qui montre au passage que les surfaces  $S'_j$  sont deux à deux disjointes). De plus, leur diamètre est majoré par  $8\epsilon K$  et le  $\epsilon$ -diamètre de  $S'_2, \dots, S'_{n'-1}$  est au plus  $K$ .

Il reste à montrer que les surfaces  $S'_1, \dots, S'_{n'}$  sont emboîtées. Dans l'esprit de la preuve de la proposition B, notons  $D_{n'}$  l'adhérence du sous-ensemble constitué des points de  $C$  séparés de  $\partial_+ C$  par  $S'_{n'}$ . Pour tout  $j < n'$ , la surface  $S'_j$  intersecte la surface  $S_j$ , qui se situe dans  $D_{n'}$ . Comme  $S'_j$  est à distance au moins  $2\epsilon K$  de  $S'_{n'} = \partial D_{n'}$ ,  $S'_j$  est contenue dans l'intérieur de  $D_{n'}$ . Elle est par conséquent séparée de  $\partial_+ C$  par  $S'_{n'}$ . Ainsi, si l'on note  $D_j$  l'adhérence de l'ensemble des points de  $C$  séparés de  $\partial_+ C$  par  $S'_j$ ,  $D_j \subset D_{n'}$ . Soit  $1 \leq k < j < n'$ . Si l'on prend un point  $x$  dans  $D_k$ , comme  $D_k \subset D_{n'}$ , tout chemin orienté  $\gamma$  de  $x$  à  $\partial_+ C$  intersecte  $\partial_+ C$  avec un

nombre algébrique d'intersection égal à  $+1$ . Comme la surface  $S'_j$  est homotope à  $S'_{n'}$ , et que l'homotopie est disjointe de  $S'_k$ , cette homotopie laisse le nombre d'intersection invariant. Ainsi, le nombre d'intersection de  $\gamma$  avec  $S'_j$  est encore égal à  $+1$ , et  $x$  appartient à  $D_j$ . Par suite,  $D_k \subset D_j$  pour  $1 \leq k < j \leq n'$ , ce qui montre que les surfaces  $S'_1, \dots, S'_{n'}$  sont emboîtées. Ceci achève la démonstration du lemme 1.35.  $\square$

Par la suite, on remplace la famille  $S_1, \dots, S_{n'}$  par la nouvelle famille  $S'_1, \dots, S'_{n'-1}, S'_{n'}$  de surfaces obtenue grâce au lemme 1.35. Pour plus de clarté, nous la noterons encore  $S_1, \dots, S_{n'}$ .

Le but à présent est de remplacer les surfaces immergées par des surfaces plongées dans un voisinage régulier des surfaces immergées arbitrairement petit. C'est l'objet du lemme suivant.

**Lemme 1.36.** *Pour tout  $j$  entre 1 et  $n'$ , il existe une surface  $T_j$  plongée dans un voisinage régulier de  $S_j$ , de même genre que  $S_j$  et qui peut être recouverte par au plus  $\text{diam}_\epsilon(S_j) \leq K$  boules de  $M'$  de rayon  $2\epsilon$ . De plus, deux surfaces  $T_j$  et  $T_k$  pour  $j \neq k$  sont séparées par une distance d'au moins  $\epsilon K$ .*

Démonstration du lemme 1.36.

Prenons un petit voisinage régulier  $N(S_j)$  d'une des surfaces immergées et emboîtées  $S_j$ . Comme dans la démonstration de l'affirmation, d'après Gabai [G1], ce voisinage contient une surface plongée  $T_j$  dans la même classe d'homologie que  $S_j$  dans  $H_2(N(S_j), \partial N(S_j))$  et de genre inférieur ou égal au genre de  $S_j$ . Si l'on choisit un voisinage  $N(S_j)$  suffisamment petit, le diamètre de la surface plongée  $T_j$  mesuré dans la variété  $M'$  est inférieur ou égal à  $9\epsilon K$ , et deux surfaces plongées  $T_j$  et  $T_k$  sont à distance au moins  $\epsilon K$ . De plus, si l'on prend un ensemble  $\mathcal{B}$  de boules de rayons  $\epsilon$  centrées sur la surface  $S_j$ , et de cardinal  $\text{diam}_\epsilon(S_j)$ , on peut choisir  $N(S_j)$  assez petit de telle sorte qu'il soit contenu dans la réunion des boules correspondantes de mêmes centres et de rayons  $2\epsilon$ . Ainsi, la surface  $T_j$  peut être recouverte par au plus  $\text{diam}_\epsilon(S_j)$  boules de  $M'$  de rayon  $2\epsilon$ .

Le genre de  $T_j$  est majoré par le genre de  $S_j$ . Montrons qu'en réalité, le genre de  $T_j$  est encore égal au genre de  $S_j$ .

D'après le lemme 1.34, le genre de la surface plongée  $T_j$  pour  $j = 2, \dots, n'$  est plus grand ou égal au genre de la surface immergée  $S_1$  qu'elle sépare de  $\partial_+ C$ . Mais comme le genre de  $T_j$  est au plus le genre de  $S_j$ , qui est égal au genre de  $S_1$ , le genre de  $T_j$  est en fait égal au genre de  $S_j$  : les surfaces  $T_2, \dots, T_{n'}$  ont le même genre que les surfaces immergées  $S_2, \dots, S_{n'}$ , ce qui achève la démonstration du lemme 1.36.  $\square$

La dernière étape de la démonstration de la proposition C consiste à montrer que certaines des surfaces plongées sont de plus parallèles.

**Lemme 1.37.** *Les surfaces plongées  $T_4, \dots, T_{n'-1}$  sont parallèles.*

Démonstration du lemme 1.37.

Ce lemme repose sur des arguments homologiques, voir par exemple [Mah, Lemmes 4.9 à 4.11]. Par souci d'exhaustivité, nous donnons ici une preuve plus courte, basée sur des résultats classiques de topologie des variétés de dimension trois.

Soit  $V$  le 3-complexe dans  $C$  bordé par les surfaces immergées  $S_1$  et  $S_{n'}$ . Il y existe un balayage  $\phi$  entre  $S_1$  et  $S_{n'}$  tel que pour tout  $1 \leq j \leq n'$ , la surface  $S_j$  est une surface de balayage. En d'autres termes, l'application induite en homologie par  $\phi : S \times I \rightarrow V$  est un isomorphisme  $\phi_* : H_3(S \times I, \partial(S \times I)) \rightarrow H_3(V, \partial V)$ , et pour tout  $j$ , il existe un temps  $t_j \in I$  tel que  $S_j = \phi(S \times \{t_j\})$ . De plus, on a  $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_{n'} = 1$ .

D'après une construction classique (voir par exemple [St, point 3. p. 96]), comme  $T_j$  est incompressible dans  $V$  (puisque'elle l'est dans  $C \setminus S_1$ ), on peut homotoper le balayage  $\phi$  en une application  $\phi'$  qui est encore de degré un, et telle que pour tout  $2 \leq j \leq n'$ ,  $\phi'^{-1}(T_j)$  est une surface incompressible (pas nécessairement connexe) plongée dans  $S \times I$ .

Soit  $3 < j < k \leq n' - 1$ . Comme la classe d'homologie des surfaces  $T_j$  et  $T_k$  est la même que la classe d'homologie de  $S_3$ , la classe d'homologie des images réciproques  $\phi'^{-1}(T_j)$  et  $\phi'^{-1}(T_k)$  dans  $H_2(S \times [t_3, 1], \partial(S \times [t_3, 1]))$  est la même que la classe d'homologie de la fibre  $S \times \{t\}$ . Comme ces images réciproques sont des surfaces plongées et incompressibles,  $\phi'^{-1}(T_j)$  et  $\phi'^{-1}(T_k)$  sont constitués d'un nombre impair de surfaces connexes, isotopes à la fibre  $S \times \{t\}$  et de nombre total algébrique d'intersection avec tout chemin de  $S \times \{t_3\}$  à  $S \times \{1\}$  égal à  $+1$ . Quitte à faire une isotopie, on peut supposer qu'il existe des temps  $t_3 < t_1^j < \dots < t_{2n_j+1}^j$  et  $t_3 < t_1^k < \dots < t_{2n_k+1}^k$  tels que  $\phi'^{-1}(T_j) = \bigcup_{\ell=1}^{2n_j+1} \epsilon_\ell^j(S \times \{t_\ell^j\})$  et  $\phi'^{-1}(T_k) = \bigcup_{\ell=1}^{2n_k+1} \epsilon_\ell^k(S \times \{t_\ell^k\})$ , avec  $\epsilon_\ell^j$  et  $\epsilon_\ell^k$  égaux à  $+1$  ou  $-1$ , selon l'orientation de la composante connexe de  $\phi'^{-1}(T_j)$  ou  $\phi'^{-1}(T_k)$  correspondant à la fibre  $S \times \{t_\ell^j\}$  ou  $S \times \{t_\ell^k\}$ . Comme  $\sum_{\ell=1}^{n_j+1} \epsilon_\ell^j = +1$  et  $\sum_{\ell=1}^{n_k+1} \epsilon_\ell^k = +1$ , il existe  $\ell$  et  $\ell'$  tels que  $\epsilon_\ell^j = +1 = \epsilon_{\ell'}^k$ . Supposons par exemple que  $t_\ell^j < t_{\ell'}^k$ . Alors  $\phi' : S \times [t_\ell^j, t_{\ell'}^k] \rightarrow V$  est une homotopie entre les surfaces plongées  $T_j$  et  $T_k$  contenue dans la région de  $V$  bordée par  $S_3$  et  $S_{n'}$ . Comme la surface plongée  $T_2$  n'appartient pas à cette région, si l'on note  $Y$  la sous-variété de  $C$  bordée par  $T_2$  et  $\partial_+ C$ , les deux surfaces plongées  $T_j$  et  $T_k$  sont homotopes à l'intérieur de  $Y$ .

D'après le lemme 1.34, les surfaces  $T_j$  et  $T_k$  sont incompressibles dans  $C \setminus S_1$ . Comme elles sont contenues dans l'intérieur de  $Y$  et que  $Y$  est inclus dans la composante connexe de  $C \setminus S_1$  contenant  $T_j$  et  $T_k$ , les surfaces  $T_j$  et  $T_k$  sont incompressibles dans  $Y$ . D'après un résultat de Waldhausen [Wa2, Corollaire 5.5 p. 76], elles sont en réalité isotopes dans  $Y$ . Par suite,  $T_j$  et  $T_k$  sont parallèles dans  $C$ , pour  $3 < j < k \leq n' - 1$ . On obtient ainsi  $m = n' - 4$  surfaces  $T_4, \dots, T_{n'-1}$ , plongées dans le corps en anses  $C$  et parallèles, ce qui achève la démonstration du lemme 1.37 ainsi que celle de la proposition C. En effet, le  $\epsilon$ -diamètre de  $S_2, \dots, S_{n'-1}$  est majoré par  $K$  et les surfaces  $T_4, \dots, T_{n'-1}$  peuvent être recouvertes par au plus  $K$  boules de  $M'$  de rayon  $2\epsilon$ . □

## 1.4 Des motifs de domaines fondamentaux à une fibration virtuelle.

L'objet de ce paragraphe est de démontrer la proposition D des Motifs, qui est une adaptation de [Mah, Lemme 4.12 p.2258]. Cette démonstration est plus élaborée

que celle du Lemme 4.12 de [Mah], puisque nous avons besoin de bornes explicites et de constantes précises.

Démonstration de la proposition D des Motifs.

Supposons qu'il existe  $m$  surfaces connexes, orientables, plongées dans la variété  $M'$ , deux à deux disjointes et parallèles. Supposons de plus que chacune de ces surfaces peut être recouverte par au plus  $\lambda$  boules plongées dans  $M'$  de rayon  $2\epsilon$  et que ces surfaces sont séparées par une distance d'au moins  $r > 0$  les unes des autres. En particulier, il existe un produit  $T \times [0, m - 1]$  plongé dans la variété  $M'$  et dans lequel la surface  $T_j$  coïncide avec la fibre  $T \times \{j\}$  pour tout  $j$  entre 0 et  $m - 1$ .

Soit  $\mathcal{D}$  un polyèdre fondamental de Dirichlet pour la variété  $M$ , plongé dans le revêtement universel  $\widetilde{M} \simeq \mathbb{H}^3$ . Les translatés de  $\mathcal{D}$  par les transformations de revêtement forment un pavage du revêtement universel  $\widetilde{M}$ . Ce pavage a pour image un pavage du revêtement  $M'$  par  $d$  copies de  $\mathcal{D}$ . Chacune des  $m$  surfaces plongées et parallèles  $T_1, \dots, T_m$  dans  $M'$  intersecte un certain nombre de copies de  $\mathcal{D}$ .

**Définition 1.38.** *La réunion dans  $M'$  des copies de  $\mathcal{D}$  que l'une des surfaces  $T_j$  intersecte est appelée un **motif (de domaines fondamentaux) pour  $T_j$** , noté  $P_j$ .*

Comme la surface est connexe, un motif est un 3-complexe connexe. On peut supposer que chacune des surfaces plongées intersecte le 2-squelette du pavage transversalement. Plus précisément, on peut supposer qu'aucune des surfaces ne rencontre un sommet des polyèdres fondamentaux, qu'elles intersectent les arêtes en des points isolés et que leurs intersections avec les faces de dimension 2 des polyèdres sont transverses. Ainsi, un motif est une réunion connexe d'un certain nombre de copies de  $\mathcal{D}$  recollées le long de leurs faces de dimension 2. Soit  $D$  un majorant du diamètre de  $\mathcal{D}$  et  $\alpha$  un majorant du nombre de faces de dimension 2.

Pour tout  $\ell \in \mathbb{N}$ , rappelons que  $B(\ell)$  est un majorant du nombre de motifs possibles obtenus en recollant au plus  $\ell$  domaines fondamentaux. Soit  $L = \lfloor \frac{\pi(\sinh(2D+4\epsilon) - 2D - 4\epsilon)}{\text{Vol}(M)} \lambda \rfloor$  comme au lemme 1.9. L'entier  $L$  est un majorant du nombre de domaines fondamentaux qu'une surface donnée peut intersecter. Ainsi, un motif est constitué par au plus  $L$  domaines fondamentaux.

Supposons que  $r/(2D+1) \geq 1$  et  $\frac{m}{\alpha^2 L^2 B(L)} \geq 4$  (ce que nous appellerons condition (a)), ou que  $r/(2D+1) < 1$  et  $(\frac{r}{2D+1}m - 1) \frac{1}{\alpha^2 L^2 B(L)} \geq 4$  (nommé condition (b)).

**Lemme 1.39.** *Si les conditions (a) ou (b) sont satisfaites, il y a au moins  $4\alpha^2 L^2 B(L)$  surfaces dont les motifs de domaines fondamentaux correspondants sont disjoints.*

Démonstration du lemme 1.39.

Si deux surfaces  $T_j$  et  $T_k$  sont à distance strictement supérieure à  $2D$ , les motifs de domaines fondamentaux associés à  $T_j$  et  $T_k$  ne peuvent pas s'intersecter, vu que le diamètre des domaines fondamentaux est au plus  $D$ .

Si  $r/(2D+1) \geq 1$  comme dans la condition (a), toutes surfaces distinctes  $T_j$  et  $T_k$  de départ sont à distance strictement supérieure à  $2D$ , et les  $m$  motifs associés aux surfaces parallèles sont deux à deux disjoints.

Sinon,  $r/2D < 1$ . Il y a alors au moins  $\lfloor \frac{r}{2D+1}m \rfloor \geq \frac{r}{2D+1}m - 1$  surfaces  $T_j$  qui sont séparées les unes des autres par une distance plus grande ou égale à  $2D + 1 > 2D$ . Ainsi, tous les motifs de domaines fondamentaux correspondants sont disjoints.

Comme dans la condition (a),  $m \geq 4\alpha^2 L^2 B(L)$ , ou dans la condition (b),  $\frac{r}{2D+1}m - 1 \geq 4\alpha^2 L^2 B(L)$ , il y a au moins  $4\alpha^2 L^2 B(L)$  surfaces dont les motifs correspondants sont disjoints.  $\square$

**Lemme 1.40.** *Il existe un motif de domaines fondamentaux "abstrait"  $P$ , et au moins  $4\alpha^2 L^2$  motifs de domaines fondamentaux  $P_j$ , deux à deux disjoints, et homéomorphes à  $P$ . Plus précisément, pour au moins  $4\alpha^2 L^2$  indices  $j$  précédents pour lesquels les motifs de domaines fondamentaux correspondants sont deux à deux disjoints, il existe un homéomorphisme  $\varphi_j : P_j \rightarrow P$  qui préserve la décomposition polyédrale et les isométries de recollements de faces des domaines fondamentaux.*

Démonstration du lemme 1.40.

La preuve est immédiate. En effet, comme un motif est composé d'au plus  $L$  domaines fondamentaux, il y a au plus  $B(L)$  motifs possibles. Parmi les  $4\alpha^2 L^2 B(L)$  motifs disjoints précédents, il en existe au moins  $4\alpha^2 L^2$  qui correspondent à un même motif abstrait  $P$ .  $\square$

Désormais, nous ne retenons que  $4\alpha^2 L^2$  indices  $j$  vérifiant les conclusions du lemme précédent.

**Lemme 1.41.** *Le nombre de composantes connexes du bord du motif  $P$  est compris entre 2 et  $\alpha L$ .*

Démonstration du lemme 1.41.

Chaque polyèdre composant le motif  $P$  a  $\alpha$  faces. Comme  $P$  est constitué d'au plus  $L$  polyèdres, il a au plus  $\alpha L$  faces. C'est un majorant du nombre de composantes connexes du bord de  $P$ .

Pour voir qu'il y a au moins deux composantes connexes dans le bord de  $P$ , il suffit de montrer par exemple que  $\partial P_1$  a au moins deux composantes connexes. Mais comme la surface  $T_1$  est contenue dans l'intérieur du motif  $P_1$ ,  $P_1 \cap (T \times [0, 1]) \neq \emptyset$  et  $P_1 \cap (T \times [1, 2]) \neq \emptyset$ . Comme le motif  $P_1$  est disjoint de  $T_0$  et  $T_2$ , les régions produits  $T \times [0, 1]$  et  $T \times [1, 2]$  ne sont pas contenues dans  $P_1$ . Par connexité de  $T \times [0, 1]$  et  $T \times [1, 2]$ , le bord du motif  $P_1$  a au moins deux composantes connexes, l'une qui est contenue dans  $T \times ]0, 1[$  et l'autre dans  $T \times ]1, 2[$ . Ceci montre le lemme 1.41.  $\square$

Notons  $\partial P = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_s$ , où les surfaces immergées  $E_j$  sont les composantes connexes du bord du motif  $P$ , avec  $2 \leq s \leq \alpha L$ .

**Définition 1.42.** *Pour tout indice  $j$  entre 1 et  $4\alpha^2 L^2 - 2$ , le motif  $P_j$  intersecte  $T \times ]j - 1, j[$  et  $T \times ]j, j + 1[$ . Au moins une composante connexe du bord de  $P_j$  est incluse dans le bord de la composante de  $(T \times [j - 1, j]) \setminus (T \times [j - 1, j]) \cap P_j$  contenant la fibre  $T \times \{j - 1\}$ , que nous appellerons une **composante "gauche" du bord du motif  $P_j$** . De même, au moins une composante du bord de  $P_j$  est dans le bord de la composante connexe de  $(T \times [j, j + 1]) \setminus (T \times [j, j + 1]) \cap P_j$  contenant la fibre  $T \times \{j + 1\}$ . Nous appellerons cette composante une **composante "droite" du bord de  $P_j$** .*

**Lemme 1.43.** *Pour tout indice  $j$  entre 1 et  $4\alpha^2L^2 - 2$ , choisissons une composante gauche et une composante droite (arbitrairement s'il en existe plusieurs du même type) pour le motif  $P_j$ . Ces deux composantes correspondent à des composantes connexes  $E_j^-$  et  $E_j^+$  du bord du motif abstrait  $P$ . Il y a au moins deux indices  $j$  et  $k$  pour lesquels les couples de composantes gauches et droites correspondant aux motifs  $P_j$  et  $P_k$  coïncident dans  $\partial P$ .*

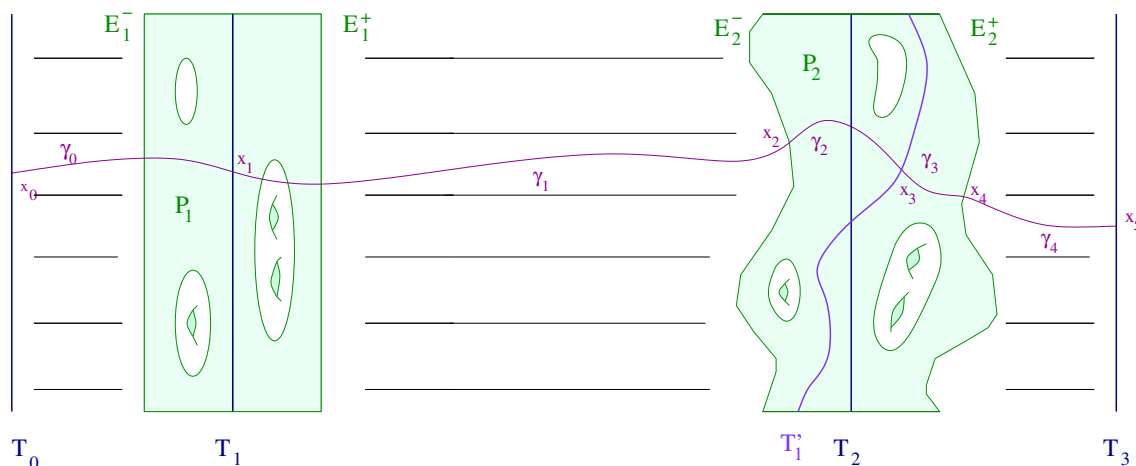
Démonstration du lemme 1.43.

Comme il y a au plus  $s(s - 1) \leq \alpha L(\alpha L - 1) < \alpha^2L^2$  couples de composantes gauches et droites du bord de  $P$ , il y a au moins  $(4\alpha^2L^2 - 2)/(\alpha^2L^2) \geq 2$  surfaces  $T_j$  et  $T_k$  avec  $1 \leq j < k \leq 4\alpha^2L^2 - 2$ , pour lesquelles les couples de composantes gauches et droites correspondant aux motifs  $P_j$  et  $P_k$  coïncident.  $\square$

Par la suite, afin d'alléger les notations, nous noterons  $T_1$  la surface  $T_j$ ,  $T_2$  la surface  $T_k$  et  $T_3$  la dernière surface  $T_{4\alpha^2L^2-1}$ . Les surfaces  $T_0$  et  $T_3$  bordent un produit  $T \times [0, 3]$  dans  $M'$ , tel que  $T_1 = T \times \{1\}$  et  $T_2 = T \times \{2\}$ . Les deux motifs  $P_1$  et  $P_2$  sont contenus dans l'intérieur du produit  $T \times [0, 3]$ . Notons  $\psi = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$  l'homéomorphisme composé entre les motifs  $P_1$  et  $P_2$ . Soit  $T'_1$  l'image de la surface  $T_1$  dans l'intérieur du motif  $P_2$  par  $\psi : T'_1 = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1(T_1) = \psi(T_1)$ . C'est une surface plongée dans le produit  $T \times [0, 3]$ . Il est clair que les surfaces  $T_1$  et  $T_2$  sont parallèles, mais il est possible qu'elles soient plongées dans leurs motifs de manière différente. Les surfaces  $T_1$  et  $T'_1$  sont en revanche plongées de manière identique dans les motifs  $P_1$  et  $P_2$ , mais rien ne permet d'affirmer a priori que ces deux surfaces sont parallèles. C'est l'objet du lemme suivant.

**Lemme 1.44.** *Les surfaces  $T_1$  et  $T'_1$  sont parallèles dans  $M'$ .*

Démonstration du lemme 1.44.



**Affirmation .** *La classe d'homologie de  $T'_1$  dans le produit  $T \times [0, 3]$  est égale à la classe d'homologie de la fibre  $[T] = [T_1] = [T_2]$ .*

Démonstration de l'affirmation.

Par choix des surfaces  $T_1$  et  $T_2$ , la composante gauche  $E_1^-$  du bord du motif  $P_1$  et la composante gauche  $E_2^-$  du bord du motif  $P_2$  ont la même image dans le motif



abstrait  $P : \varphi_1(E_1^-) = \varphi_2(E_2^-)$ , donc  $E_2^- = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1(E_1^-)$ . Par définition,  $E_2^-$  est un bord de la composante connexe de  $(T \times [1, 2]) \setminus (T \times [1, 2]) \cap P_2$  contenant la fibre  $T_1$ , et la composante  $E_1^-$  du bord du motif  $P_1$  est un bord de la composante de  $(T \times [0, 1]) \setminus (T \times [0, 1]) \cap P_1$  contenant la fibre  $T_0$ . Comme  $P_1 \cap (T \times [0, 1])$  est connexe, il existe un chemin  $\gamma'_2$ , proprement plongé dans  $P_1 \cap (T \times [0, 1])$  et reliant la composante  $E_1^-$  à la surface  $T_1$ . L'image par l'homéomorphisme  $\psi = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$  entre les motifs  $P_1$  et  $P_2$  du chemin  $\gamma'_2$  est un chemin  $\gamma_2 = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1(\gamma'_2)$  dans  $P_2$  reliant la composante du bord  $E_2^-$  à la surface  $T'_1$ . L'intérieur de ce chemin  $\gamma_2$  est contenu dans l'intérieur de la composante de  $P_2 \setminus T'_1$  contenant  $E_2^-$ . Soit  $x_2$  l'extrémité de  $\gamma_2$  appartenant à la composante de bord  $E_2^-$ , et  $x_3$  l'autre extrémité, située sur la surface  $T'_1$ .

De même, il existe un chemin  $\gamma_3$  reliant  $x_3$  à un point  $x_4$  appartenant à la composante droite  $E_2^+$  du bord de  $P_2$ , et dont l'intérieur est contenu dans l'intérieur de la composante connexe de  $P_2 \setminus T'_1$  contenant  $E_2^+$ .

Comme  $E_2^-$  appartient au bord de la composante connexe de  $(T \times [1, 2]) \setminus P_2 \cap (T \times [1, 2])$  contenant la fibre  $T_1$ , il existe un chemin  $\gamma_1$  dont l'intérieur est contenu dans l'intérieur de cette composante, et reliant un point  $x_1$  de la fibre  $T_1$  au point  $x_2$  de  $E_2^-$ . De même, par choix de  $E_2^+$ , il existe un chemin  $\gamma_4$  dont l'intérieur est contenu dans l'intérieur de la composante de  $(T \times [2, 3]) \setminus P_2 \cap (T \times [2, 3])$  contenant la fibre  $T_3$  et reliant le point  $x_4$  de  $E_2^+$  à un point  $x_5$  de  $T_3$ . Pour finir, puisque le produit  $T \times [0, 1]$  est connexe, il existe un chemin  $\gamma_0$  dont l'intérieur est contenu dans  $T \times ]0, 1[$  reliant le point  $x_1$  de  $T_1$  à un point  $x_0$  de  $T_0$ .

Soit  $\gamma$  le chemin obtenu en concaténant les chemins  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  et  $\gamma_4$ . Le chemin  $\gamma$  relie le point  $x_0$  de  $T_0$  au point  $x_5$  de  $T_3$  et intersecte la surface  $T'_1$  en un seul point  $x_3$ . Comme l'orientation des motifs  $P_1$  et  $P_2$  coïncide, le nombre algébrique d'intersection de  $\gamma$  avec la surface  $T'_1$  est égal à  $+1$ . C'est aussi le nombre algébrique d'intersection de  $\gamma$  avec la fibre  $T$ . Par dualité de Poincaré, comme le groupe d'homologie  $H_2(T \times [0, 3], \mathbb{Z})$  est de rang un, engendré par la classe de la fibre  $[T]$ , la classe d'homologie de la surface  $T'_1$  est égale à la classe de la fibre dans l'homologie du produit, ce qui prouve l'affirmation.  $\square$

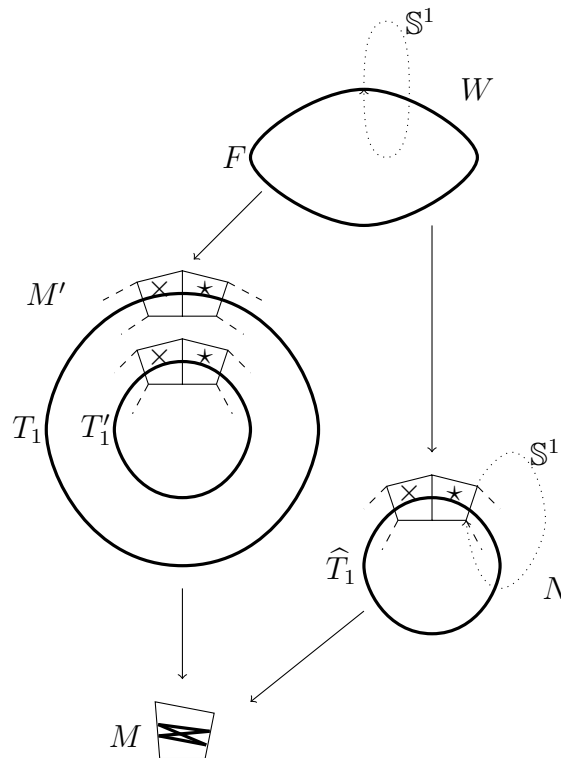
Comme la surface  $T'_1$  est plongée dans le produit  $T \times [0, 3]$ , d'après un résultat de Waldhausen [Wa2], la surface  $T'_1$  est parallèle à la fibre  $T_1$ , éventuellement après avoir réalisé un nombre fini de compressions de  $T'_1$ . Mais comme la surface  $T'_1$  est homéomorphe à  $T_1$ , elle est de même genre que la fibre  $T_1$ . Donc en fait, il n'y a pas de compression, et ces deux surfaces bordent un produit dans  $M'$ .  $\square$

**Lemme 1.45.** *La variété  $M$  possède un revêtement fini  $N$  de degré au plus  $d$  fibré sur le cercle, et la surface  $T_1$  plongée dans  $M'$  est une fibre virtuelle (incompressible).*

Démonstration du lemme 1.45.

On peut couper la variété  $M'$  le long des deux surfaces disjointes  $T_1$  et  $T'_1$ , et ne garder que la composante connexe correspondant à la région produit entre les deux surfaces parallèles. On identifie les deux surfaces via l'homéomorphisme  $\psi = (\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)|_{T_1}$  pour obtenir une variété  $N$  fibrée sur le cercle, de fibre  $\widehat{T}_1 = (T_1 \sim T'_1)$ . L'homéomorphisme  $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$  identifiant la partie "gauche" du motif  $P_2$  avec la partie "gauche" du motif  $P_1$ , après recollement, on obtient un motif  $\widehat{P}_1$  correspondant à  $\widehat{T}_1$  dans  $N$  homéomorphe au motif  $P$ . En effet, la partie "gauche" de ce motif correspond

à la partie gauche du motif  $P_2$  via l'homéomorphisme  $\varphi_2$ , et la partie "droite" du motif correspond à la partie droite de  $P_1$  via l'homéomorphisme  $\varphi_1$ . Comme ces homéomorphismes préservent les recollements entre les faces de dimension 2 des domaines fondamentaux, les recollements entre les domaines fondamentaux dans le motif  $\widehat{P}_1$  sont les mêmes que les recollements dans le motif modèle  $P$ . On obtient ainsi un pavage de  $N$  par au plus  $d$  copies de domaines fondamentaux homéomorphes à  $\mathcal{D}$  et dont les recollements correspondent. Par conséquent,  $N$  est un revêtement fini de la variété de départ  $M$ , de degré au plus  $d$ , et  $N$  est fibrée sur le cercle, de fibre  $\widehat{T}_1$ .



Les deux revêtements  $M'$  et  $N$  admettent un revêtement fini galoisien commun  $W$ , qui fibre sur le cercle puisque c'est un revêtement fini de  $N$ . Une composante de l'image réciproque de  $\widehat{T}_1$  par l'application de revêtement  $W \rightarrow N$  est une fibre  $F$  pour la fibration de  $W$  sur le cercle. Mais comme le diagramme commute,  $F$  est également une composante connexe de l'image réciproque de la surface  $T_1$  plongée dans  $M'$ , car  $T_1$  et  $\widehat{T}_1$  se projettent sur la même surface immergée dans  $M$ . Ainsi, la surface  $T_1$  est une fibre virtuelle. Comme  $F$  est incompressible dans  $W$ , la surface de départ  $T_1$  plongée dans  $M'$  est également incompressible. (Sinon, l'image réciproque d'un disque de compression  $D$  pour  $T_1$  constituerait une famille de disques de compression pour  $F$ , dont les bords bordent nécessairement des disques dans  $F$ . Comme le bord de ces disques est homotopiquement trivial dans  $\pi_1(F)$ , son image par l'application  $\pi_1(F) \rightarrow \pi_1(T_1)$  induite par l'application de revêtement est nulle. Ainsi, le disque  $D$  est homotopiquement trivial dans  $T_1$ , ce qui est une contradiction.) Par suite, la surface plongée  $T_1$  est une fibre virtuelle de  $M'$ , et est incompressible.  $\square$

Par conséquent, les  $m$  surfaces parallèles de départ sont des fibres virtuelles pour la variété  $M'$ , ce qui achève la démonstration de la proposition D des motifs.  $\square$

Les  $m$  surfaces plongées ne sont pas quasi-Fuchsiennes, puisqu'elles sont des fibres virtuelles.

## Chapitre 2

---

### Fibration de revêtements réguliers.

## 2.1 Théorème de fibration des revêtements galoisiens finis.

L'objet de ce chapitre est de démontrer dans le cadre des revêtements finis galoisiens une version un peu différente du théorème principal A : ce résultat donne des conditions suffisantes pour qu'un revêtement fini galoisien soit fibré sur le cercle  $\mathbb{S}^1$ .

**Théorème 2.1** (de fibration des revêtements galoisiens finis.). *Soit  $M$  une variété de dimension trois hyperbolique, connexe, orientée, compacte et sans bord. Notons  $\text{Inj}(M)$  le rayon d'injectivité de  $M$  et soit  $\epsilon \leq \frac{1}{2}\text{Inj}(M)$ . Soit  $M' \rightarrow M$  un revêtement galoisien fini de degré  $d$  et  $F$  une surface plongée dans  $M'$ , compacte, sans bord, orientable, pseudo-minimale, et qui scinde le revêtement  $M'$  en  $q$  corps en anses (éventuellement creux)  $C_1, \dots, C_q$ . Soit  $c \geq \max_{j=1, \dots, q} \{\chi_-(C_j)\}$ . Supposons de plus que tout lacet plongé dans  $C_j$  de longueur inférieure ou égale à  $\epsilon$  est homotopiquement trivial dans  $C_j$ .*

*Il existe une constante explicite  $\tilde{k} = \tilde{k}(\epsilon, \text{Vol}(M)) > 0$ , ne dépendant que de  $\epsilon$  et du volume  $\text{Vol}(M)$ , telle que si le degré du revêtement galoisien  $d$  vérifie*

$$\tilde{k} c^2 < \ln \ln \frac{d}{q},$$

*alors le revêtement  $M'$  est fibré sur le cercle  $\mathbb{S}^1$ , et une fibre peut être obtenue par chirurgie d'une composante connexe de  $F$ . En particulier, la variété  $M$  est virtuellement fibrée sur le cercle.*

**Remarque 2.2.** *A la différence du théorème A, le théorème 2.1 ne concerne que les revêtements galoisiens. Mais il permet d'établir une condition suffisante pour que le revêtement considéré soit lui-même fibré, et non pas juste virtuellement fibré.*

*Si  $N$  est une variété de dimension trois, notons  $\chi_-^h(N) = 2g(N) - 2$  la caractéristique de Heegaard de  $N$ . D'après la preuve du Théorème 1 de Lackenby [La1], il existe une constante  $C$  qui ne dépend que de la variété  $M$  telle que si  $\chi_-^h(M')/\sqrt[4]{d} \leq C$ , alors le revêtement galoisien  $M' \rightarrow M$  est fibré sur le cercle. Cependant, à la différence de  $\tilde{k}$ , la constante  $C$  n'est pas explicite et semble dépendre d'autres quantités que  $\epsilon \leq \text{Inj}(M)/2$  et du volume de  $M$ .*

### Démonstration du théorème 2.1.

Comme au chapitre 1, notons  $k_0 = \max \left\{ \frac{\ln(4(2\epsilon a' + 1))}{2 \ln 2}, 1 + \frac{\ln(1 + \ln(12V_3/\text{Vol}(M)))}{2 \ln 2} \right\}$ , où  $V_3$  est le volume maximal d'un tétraèdre hyperbolique idéal dans  $\mathbb{H}^3$  et  $a' = 6(21/4 + 3/4\pi + 3/4\epsilon + 2/\sinh^2(\epsilon/4))$ .

Soit  $C$  un corps en anses de  $M' \setminus F$  dont le volume est au moins  $\text{Vol}(M)d/q$ . Notons  $g(C) = g(\partial_+ C)$  son genre et  $\delta$  son diamètre. D'autre part, soit  $K = 4 \left( 3 + \frac{1}{\sinh \frac{\epsilon}{8}} \right) g(C) - 10$  et  $K' = 2a' \chi_-(C)$ , où  $\chi_-(C) = 2g(C) - 2$ . Supposons que  $k_0 \chi_-(C)^2 \leq \ln \ln \frac{d}{q}$ . Ceci entraîne que  $k_0 \chi_-(C) \ln \chi_-(C) \leq \ln \ln \frac{d}{q}$ .

D'après la proposition C, il existe au moins  $m = (\lfloor \frac{1}{g(C)+1} \lceil \frac{\delta}{36\epsilon K} - \frac{2}{9} - \frac{K'}{9K} \rceil \rfloor - 4)$  surfaces  $T_1, \dots, T_m$  parallèles, connexes et plongées dans  $C$ , dont le diamètre dans la

variété ambiante  $M'$  est uniformément majoré par  $9\epsilon K$ , séparées les unes des autres par une distance supérieure ou égale à  $\epsilon K$ , et chaque surface peut être recouverte avec au plus  $K$  boules plongées dans  $M'$  de rayon  $2\epsilon$ .

La preuve du théorème 2.1 repose sur deux propositions (les propositions 2.3 et 2.4) dont la démonstration utilise de manière cruciale la régularité du revêtement  $M' \rightarrow M$ .

**Proposition 2.3.** *Notons  $g(C)$  le genre du corps en anses  $C$ . Pour tout  $R > 0$ , soit  $\text{VolB}(R) = \pi(\sinh(2R) - 2R)$ , le volume d'une boule hyperbolique de dimension trois et de rayon  $R$ . Soit*

$$S(g) = \lfloor \frac{\text{Vol}(M)}{\text{VolB}(\epsilon/4)} \rfloor \lfloor \frac{\text{VolB}(\epsilon(4K + 21/4))}{\text{VolB}(\epsilon/4)} \rfloor^{4g}.$$

Si  $m > 20S(g(C))$ , il existe deux surfaces parallèles disjointes  $T_1$  et  $T'_1$ , et une isométrie  $h \in \pi_1(M)/\pi_1(M')$  préservant l'orientation telle que  $T'_1 = h(T_1)$ .

La démonstration de cette proposition fait l'objet du paragraphe 2.2. La proposition suivante permet alors d'achever la démonstration du théorème 2.1.

**Proposition 2.4.** *Soit  $N$  une variété de dimension trois hyperbolique, orientée, connexe, compacte, sans bord, admettant une surface  $T$  plongée, connexe, compacte, sans bord, orientable et un homéomorphisme d'ordre fini  $h$  tel que  $T$  et  $h(T)$  sont parallèles et d'orientations cohérentes. Alors  $N$  est fibrée sur le cercle  $\mathbb{S}^1$ , et l'on peut obtenir une fibre à partir de la surface  $T$  par compressions.*

Lorsque les surfaces  $T$  et  $h(T)$  sont incompressibles, cette proposition est le lemme 14 de Lackenby [La1]. Comme rien ne permet de dire a priori que les surfaces  $T_1$  et  $T'_1$  données par la proposition 2.4 sont incompressibles, cette proposition est démontrée au paragraphe 2.3.

Comme pour le nombre de motifs de domaines fondamentaux possibles intervenant dans la preuve du théorème principal A, c'est le comportement asymptotique de la fonction  $S(g)$  qui détermine la condition suffisante du théorème 2.1. Notons  $K = a_1g + b_1$ , avec  $a_1 = 4 \left( 3 + \frac{1}{\sinh \frac{1}{8}} \right)$  et  $b_1 = -10$ .

$$\begin{aligned} S(g) &= \lfloor \frac{\text{Vol}(M)}{\text{VolB}(\epsilon/4)} \rfloor \lfloor \frac{\text{VolB}(4\epsilon a_1g + \epsilon(4b_1 + 21/4))}{\text{VolB}(\epsilon/4)} \rfloor^{4g} \\ &= \lfloor \frac{\text{Vol}(M)}{\text{VolB}(\epsilon/4)} \rfloor \lfloor \frac{\pi}{\text{VolB}(\epsilon/4)} \left( \frac{e^{8\epsilon a_1g + \epsilon(8b_1 + 21/2)} - e^{-8\epsilon a_1g - \epsilon(8b_1 + 21/2)}}{2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (8\epsilon a_1g + \epsilon(8b_1 + 21/2)) \right) \right\rfloor^{4g}. \end{aligned}$$

L'expression dominante dans  $S(g)$  lorsque  $g \rightarrow +\infty$  est

$$\lfloor \frac{\text{Vol}(M)}{\text{VolB}(\epsilon/4)} \rfloor \frac{\pi}{2\text{VolB}(\epsilon/4)} e^{32\epsilon a_1g^2}.$$

Des calculs en tout point similaires à ceux de la démonstration du théorème A permettent d'obtenir une constante explicite  $\tilde{k}$  ne dépendant que de  $\epsilon \leq \text{Inj}(M)/2$

et du volume de  $M$  telle que si le degré du revêtement  $M' \rightarrow M$  vérifie  $\tilde{k}c^2 \leq \ln \ln(d/q)$ , alors  $m > 20g(C)$  et les hypothèses de la proposition 2.3 sont satisfaites. Il existe deux surfaces  $T_1$  et  $T'_1$  parallèles et disjointes, ainsi qu'une isométrie  $h \in \pi_1(M)/\pi_1(M')$  préservant l'orientation, telle que  $T'_1 = h(T_1)$ . Puisque le groupe  $\pi_1(M)/\pi_1(M')$  est un groupe fini d'ordre  $d$ , l'ordre de l'homéomorphisme  $h$  est fini (et divise  $d$ ). On peut alors appliquer la proposition 2.4 : le revêtement  $M'$  est fibré sur le cercle et l'on peut obtenir une fibre à partir de la surface  $T_1$  par compressions. Comme la surface  $T_1$  fait partie des  $m$  surfaces plongées et parallèles obtenues par la proposition C, elle est isotope à une surface obtenue à partir du bord du corps en anses  $C$  par compressions, donc à une composante connexe de la surface  $F$  après chirurgies, ce qui achève la démonstration du théorème 2.1.  $\square$

## 2.2 Surfaces parallèles et homotopies proches.

L'objet de ce paragraphe est de prouver la proposition 2.3, en s'appuyant sur des résultats de T. Soma sur les homotopies proches [Som].

Rappelons que pour tout  $R > 0$ ,  $\text{VolB}(R) = \pi(\sinh(2R) - 2R)$  est le volume d'une boule plongée dans  $\mathbb{H}^3$  de rayon  $R$ . Egalement,

$$S(g) = \lfloor \frac{\text{Vol}(M)}{\text{VolB}(\epsilon/4)} \rfloor \lfloor \frac{\text{VolB}(\epsilon(4K + 21/4))}{\text{VolB}(\epsilon/4)} \rfloor^{4g}.$$

Notons  $T_1, \dots, T_m$  les  $m$  surfaces parallèles plongées dans  $M'$  obtenues par la proposition C. Au lieu d'appliquer la proposition D, l'idée ici est de projeter les surfaces  $T_j$  dans  $M$  par l'application de revêtement  $p : M' \rightarrow M$ . Pour tout  $j$  entre 1 et  $m$ , notons  $\Sigma_j$  l'image de  $T_j$  par  $p$  : ce sont des surfaces immergées dans  $M$ , deux à deux homotopes. Lorsque  $m$  est suffisamment grand, montrons qu'il y a un nombre suffisant de ces surfaces pour lesquelles l'homotopie est assez petite, au sens suivant.

**Définition 2.5.** Soit  $T$  une surface connexe, compacte, sans bord et orientable, et  $s > 0$ . Une **homotopie**  $F$  entre deux immersions  $g_1$  et  $g_2 : T \rightarrow M$  est dite **partiellement  $s$ -proche** si l'homotopie  $F : T \times I \rightarrow M$  avec  $F|_{T \times \{0\}} = g_1$  et  $F|_{T \times \{1\}} = g_2$  est telle qu'il existe un point  $x \in T$  pour lequel l'image  $F(\{x\} \times I)$  est un arc rectifiable de longueur inférieure ou égale à  $s$ .

**Proposition 2.6.** Notons  $g$  le genre des surfaces  $T_j$ . D'après la proposition C,  $g \leq g(C)$ . Si  $m > 20S(g)$ , alors il y a au moins 21 surfaces parmi les  $m$  surfaces  $\Sigma_j$  immergées dans  $M$  pour lesquelles il existe entre chacune d'entre elles une homotopie partiellement  $\epsilon$ -proche.

Démonstration de la proposition 2.6.

Cette proposition est une adaptation à notre cas du théorème 0.1 de T. Soma [Som]. En effet, les surfaces  $\Sigma_j$  considérées ne sont pas des surfaces plissées et leur groupe fondamental ne s'injecte pas nécessairement. Cependant, les surfaces  $T_j$  plongées dans  $M'$  peuvent être recouvertes par au plus  $K$  boules de rayon  $2\epsilon$  plongées dans  $M'$ , et cette propriété suffit pour adapter la démonstration du théorème de T.

Soma et trouver des constantes appropriées. En particulier, le diamètre des surfaces plongées  $T_j$  mesuré dans la variété hyperbolique  $M'$  est majoré par  $4\epsilon K$ .

Soit  $T$  la surface connexe, orientée, compacte et sans bord de genre  $g$ . Pour tout  $j$  entre 1 et  $m$ , notons  $h_j : T \rightarrow T_j$  un homéomorphisme entre les surfaces  $T$  et  $T_j$ . Soit  $H$  un graphe à  $2g$  pétales de  $T$ , de telle sorte que  $T$  privée d'un petit voisinage régulier ouvert de  $H$  est un polygone à  $4g$  côtés et  $4g$  sommets. Pour tout  $j$ , soit  $H_j = h_j(H)$ . Le graphe  $H_j$  est un graphe de  $T_j$  à  $2g$  pétales, tel que si l'on enlève à  $T_j$  un petit voisinage régulier ouvert de  $H_j$ , on obtient un polygone à  $4g$  côtés et  $4g$  sommets. De plus, quitte à bien choisir l'homéomorphisme  $h_j$ , on peut s'assurer que pour tous  $j$  et  $k$ , les graphes  $H_j$  et  $H_k$  sont homotopes dans  $M'$ .

Soit  $x$  un point de l'intérieur de  $T \setminus H$  et pour tout  $j$ , notons  $x_j = h_j(x)$ . En choisissant de manière adéquate le point  $x$ , on peut faire en sorte que pour tout  $j$ ,  $p(x_j)$  appartienne à l'intérieur de  $\Sigma_j \setminus p(H_j)$ .

**Définition 2.7.** Soit  $\mathcal{B}$  une famille de boules plongées dans une variété  $N$  hyperbolique et de rayon  $s$ , et une constante  $a > 0$ . Si  $as \leq \text{Inj}(N)$ , nous noterons  $\mathcal{B}(a)$  la famille des boules plongées de même centre que les boules de  $\mathcal{B}$ , mais de rayon  $as$ .

Soit  $\mathcal{B}$  une famille de boules plongées dans  $M$  de rayon  $\epsilon/4$ , d'intérieur deux à deux disjoints, et maximale pour cette propriété. Par maximalité, les boules de  $\mathcal{B}(2)$  de rayon  $\epsilon/2 < \text{Inj}(M)$  recouvrent la variété  $M$ . En effet, par l'absurde, s'il existe un point  $x$  de  $M$  n'appartenant pas à une boule de  $\mathcal{B}(2)$ , l'intérieur de la boule plongée de centre  $x$  et de rayon  $\epsilon/4$  est disjoint de l'intérieur des boules de  $\mathcal{B}$ , ce qui contredit la maximalité de  $\mathcal{B}$ .

**Lemme 2.8.** Il existe au moins  $\lceil m / \lfloor \frac{\text{Vol}(M)}{\text{VolB}(\epsilon/4)} \rfloor \rceil > 20 \lfloor \frac{\text{VolB}(\epsilon(4K+21/4))}{\text{VolB}(\epsilon/4)} \rfloor^{4g}$  indices  $j$  pour lesquels  $p(x_j) \in M$  appartient à la même boule de  $\mathcal{B}(2)$ .

Démonstration du lemme 2.8.

Il existe au moins  $\lceil m / |\mathcal{B}(2)| \rceil$  indices  $j$  pour lesquels  $p(x_j) \in M$  appartient à la même boule de  $\mathcal{B}(2)$ . Reste à majorer  $|\mathcal{B}(2)|$ .

Comme les boules de  $\mathcal{B}$  sont plongées dans  $M$  et d'intérieurs deux à deux disjoints, on a

$$\begin{aligned} \text{Vol}(M) &\geq \sum_{B \in \mathcal{B}} \text{Vol}(B) \\ &\geq |\mathcal{B}| \text{VolB}(\epsilon/4). \end{aligned}$$

Comme  $\mathcal{B}(2)$  a le même cardinal que  $\mathcal{B}$ , on obtient la majoration

$$|\mathcal{B}(2)| \leq \lfloor \frac{\text{Vol}(M)}{\text{VolB}(\epsilon/4)} \rfloor.$$

□

Notons  $\Pi : \mathbb{H}^3 \simeq \widetilde{M}' \rightarrow M'$  le revêtement universel de  $M'$ . Soient  $\widetilde{\mathcal{B}} = \Pi^{-1}(\mathcal{B})$  et  $\widetilde{\mathcal{B}(2)} = \Pi^{-1}(\mathcal{B}(2))$ . Prenons les indices  $j$  qui satisfont les conclusions du lemme 2.8. Pour tout  $j$ , soit  $\widetilde{x}_j$  un relevé de  $x_j$  dans  $\mathbb{H}^3$ . On peut choisir ces relevés de telle sorte que pour tout indice  $j$ ,  $\widetilde{x}_j$  appartienne à la même boule  $\widetilde{B}$  de  $\widetilde{\mathcal{B}(2)}$ . Soit  $y_0$  le centre de la boule  $\widetilde{B} : \widetilde{B} = B_{\mathbb{H}^3}(y_0, \epsilon/2)$ .



Notons  $\Delta$  l'adhérence de  $T \setminus H$  : c'est un polygone à  $4g$  côtés et  $4g$  sommets, et le revêtement universel  $\tilde{T} \simeq \mathbb{R}^2$  de  $T$  est pavé par une infinité de copies de  $\Delta$ . De même, pour tout indice  $j$  donné par le lemme 2.8, soit  $D_j$  l'adhérence de  $T_j \setminus H_j$ . L'homéomorphisme  $h_j : T \rightarrow T_j$  donne naissance à un homéomorphisme entre  $\Delta$  et  $D_j$ , ainsi qu'entre  $\tilde{T}$  et le revêtement universel  $\tilde{T}_j$  de  $T_j$ , pavé par une infinité de copies de  $D_j$ . Soit  $U_j$  l'adhérence de la composante connexe de la préimage dans le revêtement universel  $\mathbb{H}^3$  de  $T_j \setminus H_j$  qui contient le point  $\tilde{x}_j$ , et  $E_j$  la composante connexe de l'image réciproque de  $T_j$  dans  $\mathbb{H}^3$  contenant  $\tilde{x}_j$  et  $U_j$ . Le point  $\tilde{x}_j$  est dans l'intérieur de  $U_j$ . Si les surfaces  $T_j$  sont incompressibles dans  $M'$ ,  $U_j$  est isométrique à  $D_j$  et  $E_j$  est un plan. Comme les surfaces  $T_j$  peuvent être a priori compressibles,  $U_j$  est homéomorphe au polygone  $D_j$  dont on a éventuellement identifié certaines arêtes, et on a un revêtement  $E_j \rightarrow T_j$  dont la restriction  $U_j \rightarrow T_j$  est surjective. De même, soit  $E$  un revêtement de  $T$  homéomorphe à  $E_j$  pour tout  $j$ , et  $U \subset E$  l'adhérence d'une composante connexe de la préimage de  $T \setminus H$ , tels que pour tout  $j$ , on ait un homéomorphisme  $\tilde{h}_j : U \rightarrow U_j$  faisant commuter le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{R}^2 \simeq \tilde{T} \supset \Delta & \longrightarrow & D_j \subset \tilde{T}_j \simeq \mathbb{R}^2 & & \\
\downarrow \quad \downarrow P & & \downarrow \quad \downarrow & & \\
E \supset U & \xrightarrow{\tilde{h}_j} & U_j \subset E_j & \xrightarrow{i} & \mathbb{H}^3 \\
\downarrow & & \downarrow \tilde{x}_j & & \downarrow \Pi \\
(T, H) & \xrightarrow{h_j} & (T_j, H_j) \subset M' & \xrightarrow{p} & \Sigma_j \subset M \\
x & & x_j & & 
\end{array}$$

L'application  $i$  est l'inclusion de  $E_j$  dans  $\mathbb{H}^3$ , le revêtement universel de  $M'$ . Comme les surfaces  $T_j$  sont parallèles dans  $M'$  et que les graphes  $H_j$  sont homotopes, les relevés  $U_j$  sont deux à deux homotopes dans  $\mathbb{H}^3$ . Les surfaces n'ont pas de propriétés de géométrie intrinsèque particulières et l'on ne peut pas appliquer des résultats sur les surfaces plissées comme dans [Som]. Néanmoins, le recouvrement des surfaces plongées  $T_j$  par au plus  $K$  boules plongées de rayons  $2\epsilon$  permet de contrôler le diamètre dans  $\mathbb{H}^3$  des surfaces  $U_j$ . C'est le but du lemme suivant.

**Lemme 2.9.** *Pour tout  $j$  et tout point  $y \in U_j$ , la distance dans  $\mathbb{H}^3$  entre  $y$  et  $y_0$ , le centre de  $\tilde{B}$ , est au plus  $\epsilon(4K + \frac{9}{2})$ .*

Démonstration du lemme 2.9.

Nous savons qu'il existe une famille  $\mathcal{B}'$  d'au plus  $K$  boules plongées dans  $M'$  de rayon  $2\epsilon$  recouvrant la surface  $T_j$  plongée dans  $M'$ . Soit  $\tilde{\mathcal{B}}'$  la famille des images réciproques des boules de  $\mathcal{B}'$ . C'est une famille de boules plongées de rayon  $2\epsilon$  dont la réunion recouvre l'image réciproque de  $T_j$ , donc en particulier la surface  $E_j$ .

**Affirmation .** *Il existe une sous-famille  $\tilde{\mathcal{B}}''$  d'au plus  $K$  boules de  $\tilde{\mathcal{B}}'$  dont la réunion recouvre la surface  $U_j'$  constituée des points de  $U_j$  à distance (mesurée dans  $\mathbb{H}^3$ ) au moins  $4\epsilon$  du bord de  $U_j$ .*

Démonstration de l'affirmation

Notons  $U'_j = \{y \in U_j \mid d_{\mathbb{H}^3}(y, \partial U_j) \geq 4\epsilon\}$ . C'est une sous-surface fermée de  $U_j$ , éventuellement vide.

Comme la famille de boules  $\mathcal{B}'$  plongées dans  $M$  recouvre la surface  $T_j$ , si  $\mathcal{C}'$  est la famille des boules de  $T_j$  induites par les traces des boules de  $\mathcal{B}'$  sur  $T_j$ , cette famille recouvre  $T_j$ . Autrement dit,  $\mathcal{C}' = \{B \cap T_j \mid B \in \mathcal{B}'\}$  et  $\cup_{C \in \mathcal{C}'} C = T_j$ .

Soit  $\tilde{\mathcal{C}}'$  l'image réciproque de  $\mathcal{C}'$  dans le revêtement  $E_j \rightarrow T_j$ . La réunion des boules de  $\tilde{\mathcal{C}}'$  recouvre  $E_j$ . De plus, toute boule  $\tilde{C}$  de  $\tilde{\mathcal{C}}'$  est la trace sur  $E_j$  d'une unique boule de  $\tilde{\mathcal{B}}'$  plongée dans  $\mathbb{H}^3$ . Notons  $\tilde{\mathcal{C}}''$  la sous-famille des boules de  $\tilde{\mathcal{C}}'$  qui sont contenues dans  $U_j$ . Comme la projection  $U_j \rightarrow T_j$  restreinte à l'intérieur de  $U_j$  est injective, à toute boule  $\tilde{C}$  de  $\tilde{\mathcal{C}}''$  correspond une et une seule boule de  $\mathcal{C}'$  qui est l'image de  $\tilde{C}$  par cette projection. Ainsi,  $|\tilde{\mathcal{C}}''| \leq |\mathcal{C}'| = |\mathcal{B}'| \leq K$ .

Montrons que la réunion des boules des  $\tilde{\mathcal{C}}''$  recouvre la surface  $U'_j$ . Soit  $y \in U'_j$ . Comme  $U'_j \subset E_j$ , il existe une boule  $\tilde{C}$  de  $\tilde{\mathcal{C}}'$  contenant  $y$ . Mais comme le diamètre de  $\tilde{C}$  mesuré dans  $\mathbb{H}^3$  est  $4\epsilon$  et que la distance dans  $\mathbb{H}^3$  de  $y$  à  $\partial U_j$  est au moins  $4\epsilon$ ,  $\tilde{C}$  est contenue dans  $U_j$ , et donc appartient à la sous-famille  $\tilde{\mathcal{C}}''$ . Par suite, on a bien  $U'_j \subset \cup_{\tilde{C} \in \tilde{\mathcal{C}}''} \tilde{C}$ .

Notons  $\tilde{\mathcal{B}}''$  la sous-famille des boules de  $\tilde{\mathcal{B}}'$  dont les traces correspondantes sur la surface  $E_j$  sont dans  $\tilde{\mathcal{C}}''$ . Par construction,  $\tilde{\mathcal{B}}''$  est une sous-famille d'au plus  $K$  boules de  $\tilde{\mathcal{B}}'$  dont la réunion recouvre la surface  $U'_j$ , ce qui démontre l'affirmation.  $\square$

D'après l'affirmation, l'ensemble des points de  $U_j$  situés à distance au moins  $4\epsilon$  du bord de  $U_j$  est contenu dans la réunion des boules de  $\tilde{\mathcal{B}}''$ . En particulier, le diamètre de  $U'_j$  est majoré par  $4\epsilon K$ . Ainsi, pour tout point  $y$  de  $U_j$ , on a

$$d_{\mathbb{H}^3}(y, \tilde{x}_j) \leq 4\epsilon + \text{diam}_{\mathbb{H}^3}(U'_j) \leq 4\epsilon + 4\epsilon K = 4\epsilon(K + 1).$$

Comme par choix, le point  $\tilde{x}_j$  appartient à la boule  $B(y_0, \epsilon/2)$ , au final, pour tout point  $y \in U_j$ ,

$$d_{\mathbb{H}^3}(y, y_0) \leq \epsilon/2 + 4\epsilon(K + 1) = \epsilon(4K + 9/2).$$

$\square$

Rappelons que  $\mathcal{B}$  est une famille de boules plongées dans  $M$ , de rayon  $\epsilon/4$ , d'intérieurs deux à deux disjoints, et maximale pour cette propriété, si bien que la réunion des boules de  $\mathcal{B}(2)$  recouvre  $M$ . La famille  $\tilde{\mathcal{B}}(2)$  est l'ensemble des images réciproques de boules de  $\mathcal{B}(2)$  dans  $\mathbb{H}^3$ . Ce sont donc des boules hyperboliques plongées et de rayon  $\epsilon/2$ . De plus, les intérieurs des boules de  $\tilde{\mathcal{B}}$  sont deux à deux disjoints, et la réunion des boules de  $\tilde{\mathcal{B}}(2)$  recouvre  $\mathbb{H}^3$ . Comme le diamètre de  $U_j$  est majoré par le lemme 2.9, on a le lemme suivant.

**Lemme 2.10.** *Notons  $\tilde{\mathcal{B}}(2)_*$  l'ensemble des boules de  $\tilde{\mathcal{B}}(2)$  qui intersectent la boule de centre  $y_0$  et de rayon  $\epsilon(4K + 9/2)$ . On a la majoration*

$$|\tilde{\mathcal{B}}(2)_*| \leq \lfloor \frac{\text{Vol}B(\epsilon(4K + \frac{9}{4}))}{\text{Vol}B(\frac{\epsilon}{4})} \rfloor.$$

Démonstration du lemme 2.10.

Si  $B \in \tilde{\mathcal{B}}$  est concentrique avec une boule de  $\tilde{\mathcal{B}}(2)_*$ , alors  $B$  est contenue dans la boule de centre  $y_0$  et de rayon  $\epsilon(4K + 9/2) + \epsilon/2 + \epsilon/4 = \epsilon(4K + 21/4)$ . Par suite,

$$\begin{aligned} \text{Vol } B_{\mathbb{H}^3}(y_0, \epsilon(4K + 21/4)) &\geq \left| \tilde{\mathcal{B}}(2)_* \right| \text{VolB}(\epsilon/4) \\ \text{VolB}(\epsilon(4K + 21/4)) &\geq \left| \tilde{\mathcal{B}}(2)_* \right| \text{VolB}(\epsilon/4), \end{aligned}$$

ce qui conduit à la majoration voulue.  $\square$

**Lemme 2.11.** *Notons  $V(\Delta)$  l'ensemble des  $4g$  sommets de  $\Delta$ . Soit  $v \in V(\Delta)$ . A tout  $j$ , il correspond un point  $\tilde{v}_j$  de  $U_j$  qui est l'image de  $v$  par la composée de la projection  $P : \Delta \rightarrow U$  et de l'homéomorphisme  $\tilde{h}_j : U \rightarrow U_j$ .*

*Parmi les indices  $j$  précédents, il en existe au moins 21 tels que pour tout sommet  $v$  de  $\Delta$ , les sommets  $\tilde{v}_j$  correspondants appartiennent tous à la même boule de  $\tilde{\mathcal{B}}(2)_*$ .*

Démonstration du lemme 2.11.

D'après le lemme 2.9, pour tout  $j$ , la surface  $U_j$  est contenue dans la boule fermée de centre  $y_0$  et de rayon  $\epsilon(4K + \frac{9}{2})$ . Nécessairement, les images des sommets de  $\Delta$  sont contenues dans les boules de  $\tilde{\mathcal{B}}(2)_*$ . Comme d'après le lemme 2.10,  $\left| \tilde{\mathcal{B}}(2)_* \right| \leq \left\lfloor \frac{\text{VolB}(\epsilon(4K + \frac{21}{4}))}{\text{VolB}(\frac{\epsilon}{4})} \right\rfloor$ , il y a au moins  $\lceil m / (\left\lfloor \frac{\text{Vol}(M)}{\text{VolB}(\epsilon/4)} \right\rfloor \left\lfloor \frac{\text{VolB}(\epsilon(4K + 21/4))}{\text{VolB}(\epsilon/4)} \right\rfloor^{4g}) \rceil = \lceil m/S(g) \rceil > 20$  indices  $j$  qui satisfont les conclusions du lemme 2.11.  $\square$

**Lemme 2.12.** *Soient  $j < k$  deux indices parmi les indices vérifiant les conclusions du lemme 2.11. Il existe une homotopie dans  $M$  partiellement  $\epsilon$ -proche entre les surfaces  $\Sigma_j$  et  $\Sigma_k$ .*

Démonstration du lemme 2.12.

Soit  $v$  un sommet de  $\Delta$ . Il existe un arc géodésique minimisant  $\alpha_v$  reliant  $\tilde{v}_j = \tilde{h}_j \circ P(v)$  à  $\tilde{v}_k = \tilde{h}_k \circ P(v)$ , les images de  $v$  dans  $\mathbb{H}^3$ . Comme les indices  $j$  et  $k$  sont donnés par le lemme 2.11,  $\tilde{v}_j$  et  $\tilde{v}_k$  appartiennent à l'intérieur de la même boule de  $\tilde{\mathcal{B}}(2)_*$  et que cette boule a pour rayon  $\epsilon/2$ , la longueur de la géodésique  $\alpha_v$  est strictement plus petite que  $\epsilon$ .

Soit  $\tilde{F} : \Delta \times I \rightarrow \mathbb{H}^3$  une homotopie entre  $U_j$  et  $U_k : \tilde{F}|_{\Delta \times \{0\}} = \tilde{h}_j \circ P$  et  $\tilde{F}|_{\Delta \times \{1\}} = \tilde{h}_k \circ P$ , et telle que pour tout sommet  $v$  de  $\Delta$ ,  $\tilde{F}(\{v\} \times I) = \alpha_v$ . Une telle homotopie existe car nous avons vu que  $U_j$  et  $U_k$  sont homotopes dans  $\mathbb{H}^3$ .

Prenons deux sommets  $v$  et  $v'$  de  $\Delta$ . Ils sont identifiés dans la surface  $T$ , donc leurs images  $\Pi(\tilde{v}_j)$  et  $\Pi(\tilde{v}'_j)$  sont identifiées dans  $\Sigma_j$ , tout comme  $\Pi(\tilde{v}_k)$  et  $\Pi(\tilde{v}'_k)$  dans  $\Sigma_k : \Pi(\tilde{v}_j) = \Pi(\tilde{v}'_j) = w_j$  et  $\Pi(\tilde{v}_k) = \Pi(\tilde{v}'_k) = w_k$  dans  $M$ . Le lacet fermé  $\Pi(\alpha_v \cup \alpha_{v'}^{-1})$  est la réunion de deux géodésiques de  $M$  reliant  $w_j$  à  $w_k$  et de longueur strictement plus petite que  $2\epsilon \leq \text{Inj}(M)$ . Donc ces deux géodésiques sont en fait confondues :  $\Pi(\alpha_v) = \Pi(\alpha_{v'})$ .

Ainsi, si deux arêtes  $e$  et  $e'$  du bord de  $\Delta$  sont identifiées dans  $T$ ,  $\Pi \circ \tilde{F}|_{\partial(e \times I)} = \Pi \circ \tilde{F}|_{\partial(e' \times I)}$ . Mais  $\Pi \circ \tilde{F}|_{e \times I} \cup \Pi \circ \tilde{F}|_{e' \times I}$  est une sphère de dimension 2 immergée dans  $M$  irréductible. Elle borde donc une boule immergée dans  $M$ . En modifiant

$\tilde{F}$  par une homotopie fixant  $\Delta \times \{0, 1\} \cup V(\Delta) \times I$ , on peut ainsi supposer que  $\Pi \circ \tilde{F}|_{e \times I} = \Pi \circ \tilde{F}|_{e' \times I}$ .

Par suite, l'homotopie  $\Pi \circ \tilde{F} : \Delta \times I \rightarrow M$  est bien définie et donne naissance à une homotopie  $F : T \times I \rightarrow M$  entre les surfaces  $\Sigma_j$  et  $\Sigma_k$ . Si  $w$  est l'image des sommets de  $\Delta$  identifiés dans la surface  $T$ , par construction,  $F(\{w\} \times I) = \Pi(\alpha_v)$  est un arc géodésique de longueur strictement plus petite que  $\epsilon$ . Donc l'homotopie  $F$  est partiellement  $\epsilon$ -proche, ce qui achève la démonstration du lemme 2.12, et aussi de la proposition 2.6. □

**Définition 2.13.** Notons  $T \times [1, m]$  le produit dans  $M'$  bordé par les surface  $T_1$  et  $T_m$ , de telle sorte que pour tout  $j$ ,  $T_j$  coïncide avec la fibre  $T \times \{j\}$ . Si l'on oriente la surface  $T$  et que l'on transporte cette orientation pour tout  $j$  par l'homéomorphisme  $h_j : T \rightarrow T_j$ , la surface  $T_j$  hérite d'une orientation naturelle. Soit  $q$  un point de la surface  $T$ . Nous dirons que deux surfaces  $T_j$  et  $T_k$  sont **orientées de façon cohérente** si le lacet  $\{q\} \times [1, m]$  intersecte la surface fibre orientée  $T_j$  avec le même nombre algébrique d'intersection qu'avec la surface fibre orientée  $T_k$  (et ce nombre est dans l'ensemble  $\{-1, +1\}$ ).

**Lemme 2.14.** Dans l'hypothèse où  $m > 20S(g(C))$ , il existe au moins deux indices  $j$  et  $k$  pour lesquels les surfaces  $T_j$  et  $T_k$  sont séparées par une distance d'au moins  $10\epsilon K$ , orientées de façon cohérente, et dont les images  $\Sigma_j$  et  $\Sigma_k$  dans  $M$  sont homotopes par une homotopie partiellement  $\epsilon$ -proche.

Démonstration du lemme 2.14.

Deux quelconques des  $m$  surfaces plongées  $T_j$  sont séparées par une distance d'au moins  $\epsilon K$ . Par conséquent, parmi les 21 surfaces au moins vérifiant les conclusions de la proposition 2.6, il y en a au moins trois qui sont séparées les unes des autres par une distance d'au moins  $10\epsilon K$ . Nécessairement, au moins deux de ces trois surfaces sont de plus orientées de façon cohérente dans le produit, ce qui démontre le lemme. □

Fin de la démonstration de la proposition 2.3.

Notons  $T_1$  et  $T_2$  les deux surfaces obtenues par le lemme 2.14. Relevons l'homotopie partiellement  $\epsilon$ -proche entre  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  en une homotopie partiellement  $\epsilon$ -proche entre  $T_2$  et une surface plongée  $T'_1$  relevant  $\Sigma_1$ . Comme le revêtement  $M' \rightarrow M$  est régulier, il existe une isométrie  $h \in \pi_1(M)/\pi_1(M')$  préservant l'orientation et telle que  $T'_1 = h(T_1)$ . En particulier, la surface  $T'_1$  est une copie isométrique de  $T_1$ , située à distance au plus  $\epsilon$  de  $T_2$ . Le diamètre de  $T_1$  dans la variété  $M'$  étant majoré par  $4\epsilon K$ , celui de  $T'_1$  est aussi majoré par  $4\epsilon K$ , ainsi d'ailleurs que celui de  $T_2$ . Mais comme les surfaces  $T_1$  et  $T_2$  sont séparées par une distance d'au moins  $10\epsilon K$ , en utilisant le fait que  $K \geq 1$ , les surfaces  $T_1$  et  $T'_1$  sont à distance au moins  $10\epsilon K - 4\epsilon K - 4\epsilon K - \epsilon \geq \epsilon K > 0$ , donc trop éloignées pour pouvoir s'intersecter. Comme la surface  $T'_1$  est homotope à  $T_2$ , elle est parallèle à  $T_1$  dans le produit, et  $T_1$  et  $T'_1$  sont orientées de façon cohérente. Les surfaces  $T_1$  et  $T'_1$  vérifient donc les conclusions de la proposition 2.3. □

## 2.3 Surfaces translatées et fibration sur le cercle.

L'objet de ce paragraphe est de prouver la proposition 2.4. Supposons donc que  $N$  est une variété de dimension trois hyperbolique, orientée, connexe, compacte, sans bord, admettant une surface  $T$  plongée, connexe, compacte, sans bord, orientable et un homéomorphisme non trivial d'ordre fini  $h$  tel que  $T$  et  $h(T)$  sont parallèles et d'orientations cohérentes. Le but est de montrer que  $N$  est fibrée sur le cercle  $\mathbb{S}^1$  et que l'on peut obtenir une fibre à partir de la surface  $T$  par compressions.

Dans le cas où la surface  $T$  est incompressible, c'est le Lemme 14 p. 148 de [La1]. Mais comme nous ne pouvons pas affirmer a priori que la surface  $T$  est incompressible, il faut généraliser la démonstration de ce lemme.

Notons  $n$  l'ordre de l'homéomorphisme  $h : h^n = id$ , et pour tout  $j$  entre 1 et  $n - 1$ ,  $h^j \neq id$ . Soit  $Y$  la région produit de  $M'$  bordée par  $T$  et  $h(T) : Y \simeq T \times I$  avec  $T \times \{0\} \simeq T$  et  $T \times \{1\} \simeq h(T)$ . L'homéomorphisme  $h$  restreint à  $T$  donne un homéomorphisme entre  $T \times \{0\}$  et  $T \times \{1\}$ . Soit  $\{Y_j, j \in \mathbb{Z}\}$  une famille dénombrable de copies de  $Y$ . Pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ , prenons  $g_j : Y \simeq T \times [j, j + 1] \rightarrow Y_j$  un homéomorphisme. On recolle  $T_{j+1}^0 = g_{j+1}(T \times \{j + 1\}) \subset Y_{j+1}$  avec  $T_j^1 = g_j(T \times \{j + 1\}) \subset Y_j$  via l'homéomorphisme  $h$  : on identifie le point  $x \in T_{j+1}^0$  avec le point  $g_j \circ h \circ g_{j+1}^{-1}(x) \in T_j^1$ . On obtient ainsi un produit infini  $Y_\infty \simeq T \times \mathbb{R}$  dans lequel  $Y_j$  est identifié à la tranche  $T \times [j, j + 1]$  pour tout  $j \in \mathbb{Z}$  via  $g_j^{-1}$ . Soit  $\Pi : Y_\infty \rightarrow N$  la projection définie par  $\Pi|_{Y_j} = h^j \circ g_j^{-1}$ . Ce produit est muni d'un homéomorphisme naturel  $\tilde{H}$  défini par  $\tilde{H}|_{Y_j} = g_{j+1} \circ g_j^{-1}$  agissant à la manière d'une translation ("shift"). De plus, par construction de  $\tilde{H}$  et  $\Pi$ , on a  $\Pi \circ \tilde{H} = h \circ \Pi$ .

Par suite,  $\Pi \circ \tilde{H}^n = h^n \circ \Pi$  et la projection  $\Pi$  se factorise par le groupe  $\langle \tilde{H}^n \rangle$  engendré par  $\tilde{H}^n$ . Soit  $X = Y_\infty / \langle \tilde{H}^n \rangle$  et  $\pi : Y_\infty \rightarrow X$  le revêtement, si bien que que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} Y_\infty & & \\ \Pi \downarrow & \searrow \pi & \\ & & X \\ & \swarrow \bar{\Pi} & \\ & & N \end{array}$$

La variété  $X$  est fibrée sur le cercle, de fibre homéomorphe à  $T$ .

**Lemme 2.15.** *La projection  $\bar{\Pi} : X \rightarrow N$  est un revêtement fini. En particulier, la variété  $N$  est virtuellement fibrée sur le cercle.*

**Remarque 2.16.** *Rien ne permet d'affirmer a priori que le revêtement  $\bar{\Pi} : X \rightarrow N$  est galoisien.*

Démonstration du lemme 2.15.

Comme la variété  $X$  est compacte, il suffit de montrer que l'application  $\bar{\Pi}$  est un homéomorphisme local. Comme  $\pi : Y_\infty \rightarrow X$  est un revêtement, donc un homéomorphisme local, cela revient à montrer que  $\Pi : Y_\infty \rightarrow N$  est un homéomorphisme local. Par construction, pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ , la restriction de  $\Pi$  à l'intérieur de  $Y_j$  est

un homéomorphisme sur l'intérieur de  $h^j(Y)$ . il reste à voir que  $\Pi$  est un homéomorphisme local au voisinage de tout point de  $Y_j \cap Y_{j+1}$  pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ . Mais par construction,  $\Pi(Y_j \cap Y_{j+1}) = h^{j+1}(T)$  et  $\Pi$  est un homéomorphisme local entre un voisinage de tout point de  $Y_j \cap Y_{j+1}$  et un voisinage de  $h^{j+1}(T)$  dans  $N$ .  $\square$

Montrons à présent que la variété  $N$  est elle-même fibrée et qu'une fibre de la fibration de  $N$  sur le cercle s'obtient par compressions de la surface  $T$ . Pour tout  $j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , notons  $T_j = \pi(Y_{j-1} \cap Y_j)$  et  $X_j = \pi(Y_j)$ , où nous identifions une classe  $j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  et un représentant  $j \in \mathbb{Z}$ . Soit  $H : X \rightarrow X$  le projeté de  $\tilde{H} : c$ 'est l'homéomorphisme de  $X$  tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} Y_\infty & \xrightarrow{\tilde{H}} & Y_\infty \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{H} & X \end{array}$$

Pour tout  $j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , la région  $X_j$  est homéomorphe au produit  $T \times I$  et la restriction  $\bar{\Pi}|_{X_j} : X_j \rightarrow h^j(Y)$  est un homéomorphisme. Les surfaces  $T_j$  sont deux à deux parallèles dans  $X$  et  $\bar{\Pi}(T_j) = h^j(T)$  pour tout  $j$ . L'image réciproque  $\bar{\Pi}^{-1}(T)$  contient la fibre  $T_0$ . La difficulté réside dans le fait que cette image réciproque peut comporter d'autres composantes connexes, disjointes de  $T_0$ . Il se peut que ces composantes soient isotopes à la fibre  $T_0$ , mais a priori on ne peut pas savoir si  $\bar{\Pi}^{-1}(T)$  est une fibre de la fibration de  $X$ . C'est pourquoi il faut regarder de plus près ce qui se passe. On a le lemme suivant.

**Lemme 2.17.** *La classe d'homologie de la surface plongée  $T$  est non nulle dans  $H_2(N, \mathbb{Z})$ .*

Fin de la démonstration de la proposition 2.4 en admettant le lemme 2.17.

En admettant le lemme 2.17, la classe d'homologie de  $\bar{\Pi}^{-1}(T)$  dans  $H_2(X, \mathbb{Z})$  est également non triviale. Mais une composante connexe de cette image réciproque n'est autre que la fibre  $T_0$  de la fibration. Il existe un réel  $t \in ]0, 1[$  assez petit de sorte que dans l'identification de  $X_0$  avec le produit  $T \times I$ , la surface fibre  $T \times \{t\}$  est disjointe de  $\bar{\Pi}^{-1}(T)$ . En coupant la variété  $X$  le long de cette surface  $T \times \{t\}$ , on obtient un produit  $T \times [0, n]$  dans lequel la classe d'homologie de la surface plongée  $\bar{\Pi}^{-1}(T)$  est encore non nulle. D'après un résultat de Waldhausen [Wa2], il existe une suite finie de chirurgies qui permettent d'obtenir à partir de la surface plongée  $\bar{\Pi}^{-1}(T)$  un certain nombre de surfaces isotopes à des copies de la fibre  $T$  dans le produit. Ainsi, la classe d'homologie de  $\bar{\Pi}^{-1}(T)$  est fibrée. D'après le Lemme 2.4 p. 151 de Gabai [G2], la classe d'homologie de la surface  $T$  dans  $H_2(N, \mathbb{Z})$  est également fibrée. Donc en particulier, la variété  $N$  est fibrée sur le cercle.

En comprimant la surface  $T$  dans  $N$ , on obtient une surface  $T'$  incompressible et dans la même classe d'homologie fibrée que  $T$ . Pour prouver la proposition 2.4, il reste à montrer que  $T'$  est la fibre d'une fibration de  $N$  sur le cercle. Mais dans le revêtement infini associé à la fibration donnée par la classe d'homologie  $[T] = [T']$ ,

les relevés de la surface  $T'$  sont compacts. En effet, d'après Stallings [St], le groupe fondamental de  $T'$  est contenu dans le noyau du morphisme  $\phi : N \rightarrow \mathbb{Z}$  dual de la classe d'homologie fibrée  $[T] = [T']$ . Comme  $T'$  est incompressible, les relevés de  $T'$  sont des surfaces incompressibles, donc isotopes à des copies de la fibre dans la structure de produit infini de ce revêtement. Par suite, la surface  $T'$  qui se relève en des copies de la fibre, est une fibre de la fibration de  $N$  sur le cercle associée à la classe d'homologie de  $T$ .  $\square$

#### Démonstration du lemme 2.17.

Les surfaces  $T$  et  $h(T)$  sont parallèles et disjointes, de telle sorte que  $\partial Y = T \sqcup h(T)$ . Lorsque l'on transporte le produit  $Y$  par les itérés de  $h$ , la surface  $T$  intersectera nécessairement un des itérés  $h^j(Y)$  (ne serait-ce que pour  $j = n - 1$  puisque  $h^{n-1}(Y) = h^{-1}(Y)$  et que  $T$  est une composante connexe du bord de  $h^{-1}(Y)$ ). Soit  $j$  le plus petit entier compris entre 1 et  $n - 1$  tel que  $T$  intersecte  $h^j(Y)$ . La surface  $h^j(T)$  appartient aussi au bord de  $h^{j-1}(Y)$  si  $j \geq 2$ , et  $h(T)$  est disjointe de  $T$  si  $j = 1$ . Par minimalité de  $j$ , la surface  $T$  ne peut pas intersecter  $h^j(T) \subset h^{j-1}(Y) \cap h^j(Y)$ . Donc si  $T$  rencontre le bord de  $h^j(Y)$ , c'est nécessairement selon la surface  $h^{j+1}(T)$ . Il y a alors plusieurs cas possibles.

#### Premier cas : $j = n - 1$ .

Dans ce cas, pour tout  $k$  entre 1 et  $n - 2$ , la surface  $T$  ne rencontre pas  $h^k(Y)$ . Comme  $T$  et  $h(T)$  sont parallèles et disjointes, en transportant cette configuration par l'homéomorphisme  $h^{-1} = h^{n-1}$ , les surfaces  $T$  et  $h^{n-1}(T)$  sont parallèles et disjointes. Comme  $\partial h^{n-1}(Y) = h^{n-1}(T) \cup T$ , il y a deux cas possibles.

Soit la surface  $T$  ne rencontre pas l'intérieur de  $h^{n-1}(Y)$  et si l'on coupe la variété  $N$  selon  $T$ , on obtient un produit  $Y \cup h(Y) \cup \dots \cup h^{n-1}(Y)$ . Par suite, la variété  $N$  est fibrée sur le cercle, de fibre  $T$ .

Sinon, la surface  $T$  est contenue dans l'intérieur de  $h^{n-1}(Y) = h^{-1}(Y)$ . En transportant  $h^{-1}(Y)$  par l'homéomorphisme  $h$ , cela implique que la surface  $h(T)$  est contenue à l'intérieur du produit  $Y$  bordé par les surfaces  $T$  et  $h(T)$ , ce qui est une contradiction.

Par suite, dans le premier cas, la variété  $N$  peut être munie d'une structure de fibré sur le cercle de fibre  $T$ .

#### Deuxième cas : $1 \leq j \leq n - 2$ et $T \subset h^{j+1}(T)$ .

Comme  $T$  est une surface fermée sans bord, nécessairement,  $T = h^{j+1}(T)$ . En coupant la variété  $N$  selon  $T$ , on obtient alors un produit  $Y \cup h(Y) \cup \dots \cup h^j(Y)$  de fibre  $T$ . Ainsi, dans ce deuxième cas,  $N$  peut être également munie d'une structure de fibré sur le cercle de fibre  $T$ .

#### Troisième cas : $1 \leq j \leq n - 2$ et $T$ n'intersecte pas la surface $h^{j+1}(T)$ .

Dans ce cas, la surface  $T$  est disjointe des images  $h^j(T)$  et  $h^{j+1}(T)$  et plongée dans l'intérieur de la région produit  $h^j(Y)$  bordée par  $h^j(T)$  et  $h^{j+1}(T)$ . La région  $Y \cup h(Y) \cup \dots \cup h^{j-1}(Y)$  est un produit plongé dans la variété  $N$  bordé par les surfaces  $T$  et  $h^j(T)$ . Comme dans le produit  $h^j(Y)$ , la surface  $h^{j+1}(T)$  est parallèle à  $h^j(T)$  qui est elle-même parallèle à  $T$ , les surfaces  $h^{j+1}(T)$  et  $T$  sont parallèles.

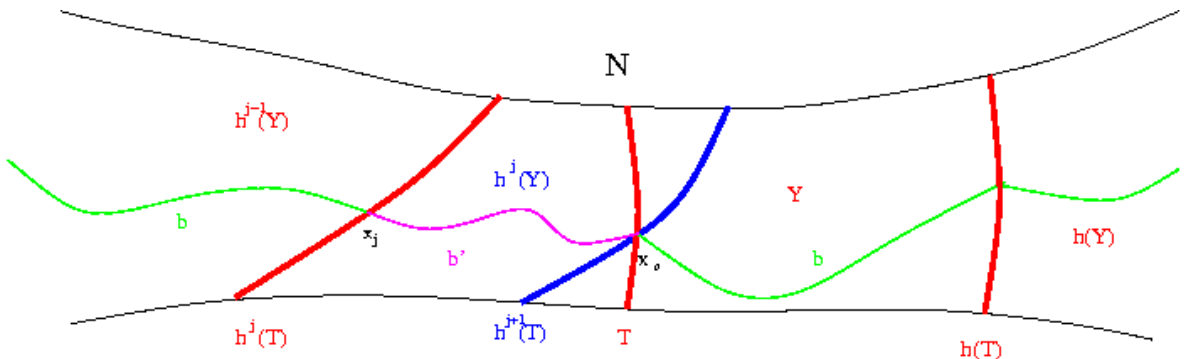
De plus, comme  $h$  préserve l'orientation, ces deux surfaces sont encore orientées de façon cohérente. Ainsi, dans le produit  $h^j(Y)$ , la surface  $T$  est isotope à une fibre et orientée de manière cohérente. En particulier, lorsque l'on coupe la variété  $N$  selon  $T$ , on obtient un produit de fibre  $T$ , et l'homéomorphisme de recollement pour obtenir  $N$  à partir de ce produit conserve l'orientation. Ainsi, dans ce cas aussi,  $N$  admet une structure de fibré sur le cercle de fibre  $T$ .

Dernier cas :  $1 \leq j \leq n - 2$  et  $T$  intersecte transversalement la surface  $h^{j+1}(T)$ .

C'est en réalité le seul cas où la surface  $T$  n'est pas automatiquement une fibre pour une fibration de  $N$  sur le cercle. Comme dans ce cas, la surface  $T$  intersecte nécessairement l'intérieur de  $h^j(Y)$  et qu'elle ne peut pas intersecter l'intérieur de  $Y$ , on a  $j \geq 2$ . La surface  $T$  rencontre à la fois l'intérieur de  $h^j(Y)$  et celui de  $h^{j+1}(Y)$ .

Puisque la surface  $T$  ne peut pas intersecter  $h^j(T)$ , par minimalité de  $j$ , la région  $Y \cup h(Y) \cup \dots \cup h^{j-1}(Y)$  est un produit plongé dans  $N$ , bordé par  $T$  et  $h^j(T)$ , deux surfaces parallèles et disjointes.

Le but est alors de construire un lacet fermé  $\gamma$  de  $N$  tel que le nombre d'intersection en homologie de  $\gamma$  avec la surface plongée  $T$  est égal à  $+1$ . Par minimalité de  $j$  et comme  $2 \leq j \leq n - 2$ , les surfaces  $T$ ,  $h^j(T)$  et  $h(T)$  sont deux à deux disjointes.



Soit  $a$  un arc orienté, proprement plongé dans  $Y$  reliant le point  $x_0 \in T \cap h^{j+1}(T)$  à  $x_1 = h(x_0) \in h(T) \cap h^{j+2}(T)$ . Notons  $b = a \cup h(a) \cup \dots \cup h^{j-1}(a)$ . Pour tout  $k$  entre 0 et  $j - 1$ ,  $h^k(a)$  est un arc orienté, proprement plongé dans le produit  $h^k(Y)$  reliant le point  $x_k = h^k(x_0)$  au point  $x_{k+1} = h^{k+1}(x_0)$ . Le chemin orienté  $b = a \cup h(a) \cup \dots \cup h^{j-1}(a)$  est proprement plongé dans le produit  $Y \cup h(Y) \cup \dots \cup h^{j-1}(Y)$  et relie le point  $x_0 \in T$  à  $x_j \in h^j(T)$ . Ainsi, il n'intersecte la surface  $T$  qu'au point  $x_0$  en reliant  $T$  à  $h^j(T)$ .

Comme la surface  $T$  sépare le produit  $h^j(Y)$ , il existe un chemin orienté  $b'$ , proprement plongé dans la composante bordée par  $h^j(T)$  et  $T$ , et reliant le point  $x_j \in h^j(T)$  à  $x_0 \in T \cap h^{j+1}(T)$ . De plus, comme  $T \cap h^{j-1}(Y) = \emptyset$ , la surface  $h(T)$  n'intersecte pas le produit  $h^j(Y)$ . Donc les points  $x_j$  et  $x_1$  sont situés localement de part et d'autre de la surface  $T$ . Ainsi, le lacet  $\gamma = b \cup b'$  est un lacet fermé, plongé dans  $N$  et qui n'intersecte la surface  $T$  qu'au point  $x_0$ , avec intersection  $+1$ . Cela implique que la classe d'homologie de  $T$  est non nulle dans  $H_2(N, \mathbb{Z})$ , ce qui achève la démonstration du lemme 2.17.  $\square$





## Chapitre 3

---

### Gradients sous-logarithmiques.

### 3.1 Gradients de Heegaard.

Thurston a conjecturé que toute variété hyperbolique de dimension trois, connexe, orientable, complète et de volume fini fibre virtuellement sur le cercle  $\mathbb{S}^1$ .

Lackenby [La3] a proposé un programme pour résoudre cette conjecture. Ce programme repose sur deux conjectures concernant deux invariants d'une variété de dimension trois, liés à la croissance du genre de Heegaard dans des revêtements finis.

Soit  $N$  une variété de dimension trois connexe, compacte et orientable. La caractéristique de Heegaard  $\chi_-^h(N)$  de  $N$  est le minimum sur toutes les surfaces de Heegaard  $F$  de la partie négative  $\chi_-(F) = \min\{-\chi(F), 0\}$  de la caractéristique d'Euler de  $F$ . En d'autres termes et d'après le paragraphe 0.1,  $\chi_-^h(N) = 2g(N) - 2$ , où  $g(N)$  est le genre de Heegaard de la variété  $N$ . De même, la caractéristique de Heegaard forte  $\chi_-^{sh}(N)$  est le minimum de  $\chi_-(F)$  pour toute surface  $F$  de Heegaard pour  $N$  fortement irréductible. Par convention, si la variété  $N$  n'admet aucune surface de Heegaard fortement irréductible,  $\chi_-^{sh}(N) = +\infty$ .

**Définition 3.1.** [La3, p. 319 et 320]

Soit  $M$  une variété de dimension trois, connexe, compacte et orientable. Soit  $(M_i \rightarrow M)_{i \in I}$  une famille de revêtements finis de  $M$  de degrés  $d_i$ . Le **gradient de Heegaard associé à la famille**  $(M_i \rightarrow M)_{i \in I}$  est défini par :

$$\nabla^h((M_i \rightarrow M)_{i \in I}) = \inf_{i \in I} \left\{ \frac{\chi_-^h(M_i)}{d_i} \right\}.$$

Lorsque la famille des revêtements finis de  $M$  n'est pas spécifiée, on considère la famille de tous les revêtements finis de  $M$ . Le gradient associé sera appelé le **gradient de Heegaard de  $M$** , noté  $\nabla^h(M)$ .

De même, le **gradient de Heegaard fort associé à la famille**  $(M_i \rightarrow M)_{i \in I}$  est :

$$\nabla^{sh}(M) = \inf_{i \in I} \left\{ \frac{\chi_-^{sh}(M_i)}{d_i} \right\}.$$

Lorsque la famille considérée est l'ensemble des revêtements finis de  $M$ , le gradient associé sera appelé le **gradient de Heegaard fort de  $M$** , noté  $\nabla^{sh}(M)$ .

Lackenby [La3] montre que ces deux gradients fournissent des informations sur l'existence de surfaces incompressibles dans des revêtements finis de degrés suffisamment grands d'une variété  $M$ . Ceci a conduit Lackenby à formuler les conjectures suivantes.

**Conjecture 7** (Conjecture du gradient de Heegaard). [La3, p. 320]

Le gradient de Heegaard d'une variété hyperbolique  $M$  de dimension trois, connexe, compacte et orientable, est nul si et seulement si  $M$  est virtuellement fibrée sur le cercle  $\mathbb{S}^1$ .

**Conjecture 8** (Conjecture du gradient fort de Heegaard). [La3, p. 320]

Le gradient fort de Heegaard d'une variété hyperbolique de dimension trois, connexe, orientée, compacte et sans bord est toujours strictement positif.

Maher [Mah] a établi le critère de fibration suivant (voir le Théorème 1.1 p. 2228 de [Mah]).

**Théorème** (Maher). *Une variété de dimension trois  $M$  hyperbolique, connexe, orientée, compacte et sans bord est virtuellement fibrée sur le cercle si et seulement si  $M$  admet une famille infinie de revêtements finis  $(M_i \rightarrow M)_{i \in I}$  dont le genre de Heegaard est uniformément majoré.*

La démonstration de ce théorème est à l'origine de la preuve du théorème A et du théorème E ci-dessous. L'objet de ce chapitre est d'établir un critère de fibration virtuelle plus faible que celui conjecturé par Lackenby, mais plus fort que le résultat de Maher. Maher lui-même avait suggéré la possibilité de fournir des constantes et bornes explicites à chaque étape de la preuve du Théorème 1.1 de [Mah], mais sans aucune formulation précise.

Pour donner un énoncé aussi synthétique que possible, nous définissons deux nouveaux gradients de Heegaard. Ces gradients sont inspirés des gradients de Lackenby, mais en remplaçant le dénominateur par une fonction sous-logarithmique du degré du revêtement  $d_i$ . Ils mesurent une croissance sous-logarithmique des caractéristiques de Heegaard et des caractéristiques de Heegaard fortes dans des revêtements finis. Avec ces gradients, nous obtenons une version sous-logarithmique des conjectures 7 et 8 de Lackenby.

Le théorème suivant permet de remplacer l'hypothèse technique (1) du théorème A par une hypothèse topologique, vérifiée en pratique dans le cadre des scindements de Heegaard.

**Théorème E.** *Soit  $M$  une variété de dimension trois hyperbolique, connexe, orientée, compacte et sans bord. Notons  $\text{Inj}(M)$  le rayon d'injectivité de  $M$  et soit  $\epsilon \leq \frac{1}{2}\text{Inj}(M)$ .*

*Il existe une constante explicite  $p = p(\epsilon, \text{Vol}(M)) > 0$ , ne dépendant que de  $\epsilon$  et du volume  $\text{Vol}(M)$  vérifiant les propriétés suivantes.*

*Soit  $M' \rightarrow M$  un revêtement fini de degré  $d$  contenant une surface plongée  $F$ , compacte, sans bord, orientable, pseudo-minimale, qui scinde le revêtement  $M'$  en  $q$  corps en anses (éventuellement creux)  $C_1, \dots, C_q$ , et ayant les propriétés suivantes.*

1. *Si  $F^-$  est la réunion des composantes de  $F$  qui correspondent à des bords négatifs des corps en anses  $C_j$ ,  $F^-$  est une union de surfaces incompressibles.*
2. *Supposons que  $p c \ln c < \ln \ln \frac{d}{q}$ , où  $c = \max_{j=1, \dots, q} \{\chi_-(C_j)\}$ .*

*Alors une des composantes connexe de  $F^-$  est la fibre d'une fibration en surfaces de  $M'$  (correspondant à un fibré sur le cercle ou un  $I$ -fibré tordu). En particulier, la variété  $M$  est virtuellement fibrée sur le cercle  $\mathbb{S}^1$ .*

**Remarque 3.2.** *Notons que le théorème E implique que l'on peut trouver dans  $M'$  une fibre de genre au plus  $g = \max_{j=1, \dots, q} \{g(C_j)\}$ , le maximum des genres des corps en anses.*

Ce théorème est démontré au paragraphe 3.2. Le théorème suivant est une conséquence du théorème E précédent.

**Théorème 3.3.** *Soit  $M$  une variété hyperbolique de dimension trois, connexe, orientée, compacte et sans bord. S'il existe une famille infinie de revêtements finis  $(M_i \rightarrow M)_{i \in I}$  de degrés  $d_i$  telle que*

$$\inf_{i \in I} \frac{\chi_-^h(M_i) \ln(\chi_-^h(M_i))}{\ln \ln d_i} = 0,$$

*alors pour une infinité d'indices  $i$ , la variété  $M_i$  contient une surface plongée qui est la fibre d'une fibration en surfaces de  $M_i$ . En particulier, la variété  $M$  est virtuellement fibrée sur le cercle  $\mathbb{S}^1$ .*

La démonstration de ce théorème fait l'objet du paragraphe 3.3.

Puisque nous ne supposons pas a priori que le genre de Heegaard de la famille des revêtements  $(M_i \rightarrow M)_{i \in I}$  est uniformément majoré, ce théorème est plus fort que le Théorème 1.1 de [Mah] qu'il implique.

Soit  $S$  une surface de Heegaard pour une variété  $N$ . Notons  $\mathcal{H}_S$  le scindement de Heegaard associé à  $S$ , et  $c_+(\mathcal{H}'_S)$  la complexité d'une décomposition  $\mathcal{H}'_S$  qui est  $\mathcal{H}_S$ -mince. Par définition d'une décomposition  $\mathcal{H}_S$ -mince, cette quantité est indépendante de la décomposition  $\mathcal{H}'_S$  choisie (voir [CG], [ST2] et les rappels 0).

**Remarque 3.4.** *Les conclusions du théorème 3.3 restent vraies si l'on suppose seulement que*

$$\inf_{i \in I} \frac{c_+(\mathcal{H}'_{S_i}) \ln(c_+(\mathcal{H}'_{S_i}))}{\ln \ln \frac{d_i}{\chi_-^h(M_i)}} = 0,$$

*où  $c_+(\mathcal{H}'_{S_i})$  est la complexité d'une décomposition  $\mathcal{H}'_{S_i}$  qui est  $\mathcal{H}_{S_i}$ -mince, obtenue à partir du scindement de Heegaard  $\mathcal{H}_{S_i}$  de surface de Heegaard  $S_i$  de genre minimal (i.e.  $g(S_i) = g(M_i)$ ). Par exemple, les conclusions du théorème 3.3 sont encore vérifiées s'il existe une constante  $\theta \in ]0, 1[$  telle que  $\inf_{i \in I} \frac{\chi_-^h(M_i)}{d_i^\theta} = 0$ , et  $\inf_{i \in I} \frac{c_+(\mathcal{H}'_{S_i}) \ln(c_+(\mathcal{H}'_{S_i}))}{\ln \ln d_i} = 0$ .*

La conjecture du gradient de Heegaard et des résultats de fibration virtuelle obtenus par Lackenby [La1] montrent que la première de ces deux hypothèses est assez raisonnable, tout particulièrement dans le cas d'une tour de revêtements finis galoisiens.

La complexité  $c_+(\mathcal{H}'_{S_i})$  est majorée par la caractéristique de Heegaard  $\chi_-^h(M_i)$  de  $M_i$ , et minorée par la complexité  $c_+(M_i)$  de la variété  $M_i$ . Voir le paragraphe 0.1 pour plus de précisions et les définitions. Cependant, nous ne savons pas si une décomposition mince de complexité égale à la complexité minimale  $c_+(M_i)$  (la complexité du revêtement  $M_i$ ) peut toujours s'obtenir à partir d'une surface de Heegaard de genre minimal, égal à  $g(M_i)$ . Il se pourrait que pour toute surface de Heegaard  $S_i$  pour  $M_i$  de genre minimal, on ait  $c_+(M_i) < c_+(\mathcal{H}'_{S_i})$ . Cela rend la quantité  $c_+(\mathcal{H}'_{S_i})$  relativement difficile à estimer. Ainsi, il semble plus naturel d'exprimer le critère de fibration uniquement en termes du comportement asymptotique de la caractéristique de Heegaard des revêtements finis de  $M$  considérés. Cela nous conduit à introduire la définition suivante.

**Définition 3.5.** Soit  $\eta \in ]0, 1[$ .

Le **gradient de Heegaard  $\eta$ -sous-logarithmique** de la variété  $M$  est défini par :

$$\nabla_{\log, \eta}^h(M) = \inf \left\{ \frac{\chi_-^h(M_i)}{(\ln \ln d_i)^\eta} \right\},$$

où la borne inférieure porte sur l'ensemble (dénombrable) de tous les revêtements finis  $(M_i \rightarrow M)_{i \in I}$  de  $M$ , de degrés  $d_i$ .

De même, on peut définir le **gradient de Heegaard fort  $\eta$ -sous-logarithmique** de la variété  $M$  par

$$\nabla_{\log, \eta}^{sh}(M) = \inf \left\{ \frac{\chi_-^{sh}(M_i)}{(\ln \ln d_i)^\eta} \right\},$$

où la caractéristique de Heegaard du revêtement fini  $M_i \rightarrow M$  est remplacée par sa caractéristique de Heegaard forte.

Si le gradient de Heegaard  $\eta$ -sous-logarithmique est nul, cela entraîne que  $\inf_{i \in I} \frac{\chi_-^h(M_i) \ln(\chi_-^h(M_i))}{\ln \ln d_i} = 0$ . Le théorème suivant est une version sous-logarithmique des conjectures 7 et 8 de Lackenby, dans le cas où la variété  $M$  est compacte et sans bord. Sa première partie est un corollaire presque immédiat du théorème 3.3.

**Théorème 3.6.** Soient  $M$  une variété hyperbolique de dimension trois, connexe, orientée, compacte et sans bord, et  $\eta \in ]0, 1[$ .

1. Le gradient de Heegaard  $\eta$ -sous-logarithmique  $\nabla_{\log, \eta}^h(M)$  de  $M$  est nul si et seulement si  $M$  est virtuellement fibrée sur le cercle  $\mathbb{S}^1$ .
2. On a  $\nabla_{\log, \eta}^{sh}(M) > 0$  : le gradient de Heegaard fort  $\eta$ -sous-logarithmique de  $M$  est toujours strictement positif.

Démonstration du théorème 3.6 première partie.

Le sens direct de la partie (1) du théorème ci-dessus est une conséquence immédiate du théorème 3.3. Le sens réciproque provient du fait que toute variété de dimension trois  $M$  virtuellement fibrée sur le cercle admet une tour infinie de revêtements finis de genre de Heegaard borné. En effet, si  $M$  est virtuellement fibrée, elle admet un revêtement fini  $M' \rightarrow M$  avec  $M'$  fibrée sur le cercle, de fibre  $F$ . Mais toute variété fibrée sur le cercle de fibre  $F$  a son genre de Heegaard majoré par  $2g(F) + 1$ , donc sa caractéristique de Heegaard est bornée par  $2|\chi(F)| + 4$ . Ainsi, en prenant la tour des revêtements finis  $(M_i \rightarrow M)_{i \in \mathbb{N}}$  duaux de la fibre  $F$ , pour tout  $i$ ,  $M_i$  est fibrée sur le cercle, de fibre homéomorphe à  $F$ . Par suite,  $\nabla_{\log, \eta}^h((M_i \rightarrow M)_{i \in \mathbb{N}}) = 0$  et le gradient de Heegaard  $\eta$ -sous-logarithmique de  $M$  est nul pour tout  $\eta \in ]0, 1[$ .  $\square$

Nous réservons la démonstration de la seconde partie du théorème 3.6 pour le paragraphe 3.4.

En comparaison de certains résultats obtenus par Lackenby (voir [La3] et [La1]), les théorèmes 3.3 et 3.6 sont valables sans se restreindre à des revêtements finis réguliers de  $M$ , ou à des revêtements finis d'irrégularité bornée. De plus, la famille de revêtements finis  $(M_i \rightarrow M)_{i \in I}$  considérée n'est pas forcément une tour ou un réseau de revêtements.

De même, le théorème 2.1 de fibration des revêtements galoisiens finis, adapté comme pour le théorème E, et appliqué au cas des scindements de Heegaard permet d'établir le théorème suivant.

**Théorème 3.7.** *Soit  $M$  une variété hyperbolique de dimension trois, connexe, orientée, compacte et sans bord. Soit  $\epsilon \leq \text{Inj}(M)/2$ . Il existe une constante explicite  $\tilde{k}' = \tilde{k}'(\epsilon, \text{Vol}(M))$  ne dépendant que de  $\epsilon$  et du volume de  $M$  telle que si  $M' \rightarrow M$  est un revêtement fini **galoisien** de  $M$  de degré  $d$  avec*

$$\tilde{k}' \chi_-^h(M')^2 < \ln \ln d,$$

*alors le revêtement  $M'$  est fibré sur le cercle. En particulier, la variété  $M$  est virtuellement fibrée sur le cercle  $\mathbb{S}^1$ .*

**Remarque 3.8.** *La démonstration du Théorème 1 p. 140 de [La1] implique que sous les hypothèses du théorème 3.7, il existe une constante  $c$  ne dépendant que de  $M$  telle que pour tout revêtement fini galoisien  $M' \rightarrow M$  de degré  $d$ , si  $c \chi_-^h(M') \leq \sqrt[4]{d}$ , alors  $M'$  est fibrée sur le cercle. L'intérêt du théorème 3.7 réside dans le fait que la constante  $\tilde{k}'$  ne dépend que de  $\epsilon \leq \text{Inj}(M)/2$  et du volume de  $M$ , par une formule explicite.*

Sous les hypothèses du théorème 3.3, lorsque l'indice  $i$  est suffisamment grand, la variété  $M_i$  contient un nombre assez important de fibres virtuelles qui sont des surfaces plongées incompressibles. Ces surfaces nous permettent alors d'estimer le comportement du gradient de Heegaard fort sous-logarithmique.

**Théorème 3.9.** *Soit  $M$  une variété hyperbolique de dimension trois, connexe, orientée, compacte et sans bord. S'il existe une famille infinie de revêtements finis  $(M_i \rightarrow M)_{i \in \mathbb{N}}$  de degrés  $d_i$  telle que*

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{\chi_-^h(M_i) \ln(\chi_-^h(M_i))}{\ln \ln d_i} = 0,$$

*alors pour tout  $\theta \in ]0, 1[$ ,*

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{\chi_-^{sh}(M_i)}{(\ln d_i)^\theta} = +\infty.$$

Toute variété  $N$  de dimension trois vérifiant  $\chi_-^h(N) \leq \chi_-^{sh}(N)$ , le gradient de Heegaard sous-logarithmique est toujours inférieur ou égal au gradient de Heegaard fort sous-logarithmique. Si le gradient sous-logarithmique est strictement positif, le gradient fort sous-logarithmique l'est aussi. Ainsi, le théorème 3.9 constitue une étape essentielle dans la démonstration de la partie (2) du théorème 3.6.

Nous réservons la démonstration du théorème 3.9 et de la deuxième partie du théorème 3.6 au paragraphe 3.4.

## 3.2 Démonstration du théorème E.

Remarquons que la différence entre le théorème E et le théorème A est l'hypothèse (1). Les premières étapes de la démonstration du théorème E sont identiques à celles de la démonstration du théorème A (voir paragraphe 1.2). On munit le corps en anses  $C$  d'une métrique complète (lemme 1.11), on remplace les surfaces  $\partial_+ C$  et  $\partial_- C$  par des surfaces simpliciales  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_0$  (lemmes 1.16 et 1.4) et on réalise un balayage simplicial entre ces deux surfaces (lemme 1.20). On a donc un balayage simplicial  $\Phi : S \times I \rightarrow C$  tel que  $S_0 = \Phi(S \times \{0\}) = \Sigma_0$  et  $S_1 = \Phi(S \times \{1\}) = \Sigma_1$ .

On veut ensuite réaliser des chirurgies de balayage généralisé comme décrit au paragraphe 1.2.2 pour tout voisinage de chirurgie  $\mathcal{E}(\gamma_t)$  donné par la définition 1.26. Si  $\mathcal{E}(\gamma_t) = N_{[p,q]}(\gamma_t)$ , pour tout  $r \in [p, q]$ , la courbe  $N_{[r]}(\gamma_t)$  est une courbe fermée simple sur la surface  $S_t$  de longueur au plus  $\epsilon$  et homotope à  $\gamma_t$ .

Notons  $\mathcal{N}_+ = \mathcal{N}(\partial_+ C) = \{x \in C, d(x, \Sigma_1) \leq \epsilon/2\}$ .

Soient  $K = 4(3 + 1/\sinh^2(\epsilon/8))g(C) - 10$  et  $K' = 2a'|\chi(\partial_+ C)|$ .

La proposition 1.23 se reformule avec l'hypothèse (1) du théorème E de la manière suivante.

**Proposition 3.10.** *Soit  $\mu > 0$ . Il existe une constante  $\eta > 0$  aussi petite que voulue, dépendant seulement du balayage simplicial  $\{S_t\}_{t \in I}$  et de  $\mu$ , et une suite finie de chirurgies du balayage simplicial qui donne un balayage généralisé  $\{\widehat{S}_t\}_{t \in I}$  de  $C$  et vérifiant les propriétés suivantes.*

*Pour tout temps régulier  $t \in [\eta, 1 - \eta]$ , le  $\epsilon$ -diamètre intrinsèque de toute composante de  $\widehat{S}_t$  ne rencontrant pas  $\mathcal{N}_+$  est inférieur ou égal à  $K$ . Dans tous les cas, le diamètre de toute composante connexe de  $\widehat{S}_t$  mesuré dans le corps en anses  $C$  est au plus  $\epsilon(1 + 2K' + 2K)$ . Pour tout  $t \geq 1 - \eta$ , tout point de la surface  $\widehat{S}_t$  est à distance au plus  $\epsilon K'$  de  $\Sigma_1$ . Pour  $t \leq \eta$ , tout point d'une des surfaces de balayage de départ  $S_t$  est à distance au plus  $\mu/2$  de  $\Sigma_0$ . De plus, pour tout temps régulier  $t$ , la surface  $\widehat{S}_t$  est homotope à une surface plongée obtenue à partir de  $\partial_+ C$  par chirurgies.*

**Définition 3.11.** *Nous appellerons **voisinage de chirurgie persistant** de  $S_t$  tout voisinage de chirurgie  $\mathcal{E}(\gamma_t)$  dont la géodésique correspondant  $\gamma_t$  n'est pas homotopiquement triviale dans  $C$ .*

**Lemme 3.12.** *Soit  $t \in ]0, 1[$  et  $\mathcal{E}(\gamma_t)$  un voisinage de chirurgie pour  $S_t$ .*

*Si la courbe de chirurgie correspondante  $\gamma_t$  est homotopiquement non triviale dans  $C$ , alors  $\mathcal{E}(\gamma_t)$  est tout entier contenu dans  $\mathcal{N}_+$ .*

*En particulier, pour tout couple de points  $x$  et  $y$  dans l'union des voisinages de chirurgie persistants de  $S_t$ , la distance dans  $C$  entre  $x$  et  $y$  est au plus  $\epsilon + \text{diam}(\Sigma_1) \leq \epsilon(1 + 2K')$ .*

Démonstration du lemme 3.12.

Pour tout  $r \in [p, q]$ , comme la courbe  $N_{[r]}(\gamma_t)$  est de longueur au plus  $\epsilon < \text{Inj}(M')$ , elle est homotopiquement triviale dans  $M'$  et est contenue dans une boule hyperbolique  $B$  isométriquement plongée dans  $M'$  et de diamètre  $\epsilon/2$ .



Puisque la courbe  $\gamma_t$  est homotopiquement non triviale dans  $C$  et que  $N_{[r]}(\gamma_t)$  lui est homotope,  $B \cap \partial C \neq \emptyset$ . Par l'hypothèse (1) du théorème E, le bord négatif  $\partial_- C$  est incompressible, donc nécessairement  $B \cap \partial_+ C \neq \emptyset$ , soit encore avec les surfaces simpliciales,  $B \cap \Sigma_1 \neq \emptyset$ . Ainsi, puisque la courbe  $N_{[r]}(\gamma_t)$  est contenue dans  $B$  est que  $B$  rencontre  $\Sigma_1$ , tout point de  $N_{[r]}(\gamma_t)$  est à distance au plus  $\epsilon/2$  de  $\Sigma_1$ . Par suite, le voisinage de chirurgie  $\mathcal{E}(\gamma_t)$  tout entier est contenu dans  $\mathcal{N}_+$ .

On conclut en remarquant que le diamètre de  $\mathcal{N}_+$  mesuré dans la variété  $C$  est au plus  $\epsilon + \text{diam}(\Sigma_1) \leq \epsilon(1 + 2K')$ .  $\square$

**Remarque 3.13.** Soit  $\mathcal{E}(\gamma_{t_0})$  un voisinage de chirurgie pour un certain temps  $t_0 \in ]0, 1[$  et  $[a, b]$  un intervalle de temps maximal pour lequel  $\mathcal{E}(\gamma_t)$  n'est pas vide. Si un des voisinages  $\mathcal{E}(\gamma_{t_1})$  est persistant, alors tous les voisinages  $\mathcal{E}(\gamma_t)$  le sont pour tout temps  $t$  dans le segment  $[a, b]$ .

En effet, pour  $t \in [a, b]$ , les courbes  $\gamma_t$  sont toutes homotopes, donc si l'une d'entre elles n'est homotopiquement pas triviale, aucune ne l'est.

Démonstration de la proposition 3.10;

D'après la remarque, le fait d'être persistant ou non ne dépend que de l'intervalle maximal  $[a, b]$  sur lequel le voisinage de chirurgie  $\mathcal{E}(\gamma_t)$  existe. Si le voisinage n'est pas persistant, on applique sur  $[a, b]$  la construction donnée lors de la démonstration de la proposition 1.23, en effectuant des chirurgie de balayage généralisé. Puisque les voisinages ne sont pas persistants, les courbes  $N_{[r]}(\gamma_t)$  sont toutes homotopiquement triviales dans  $C$ , et bordent des disques immergés dans  $C$ . L'opération de chirurgie décrite à la définition 1.22 est alors possible. En revanche, on ne touche pas aux voisinages de chirurgie persistants.

Soit  $t \in [\eta, 1 - \eta]$ . Si aucun des voisinages de chirurgie  $\mathcal{E}(\gamma_t)$  n'est persistant, ils ont pu être enlevés pour former la surface  $\widehat{S}_t$ , d'après le lemme 1.28, le  $\epsilon$ -diamètre intrinsèque de la surface  $\widehat{S}_t$  est au plus  $K$ .

Sinon, d'après le lemme 3.12, cela signifie que l'union des voisinages de chirurgie  $\mathcal{E}(\gamma_t)$  persistants est contenue dans  $\mathcal{N}_+$ . Comme le diamètre de  $\mathcal{N}_+$  mesuré dans  $C$  est au plus  $\epsilon(1 + 2K')$ , et que le  $\epsilon$ -diamètre intrinsèque des composantes de  $\widehat{S}_t$  privées des voisinages de chirurgie persistants est au plus  $K$  toujours par le lemme 1.28, le diamètre dans le corps en anses  $C$  de toute composante connexe de  $\widehat{S}_t$  est au plus  $\epsilon(1 + 2K' + 2K)$ .

De plus, si une composante de  $\widehat{S}_t$  ne rencontre pas  $\mathcal{N}_+$ , cela signifie qu'elle ne contient aucun voisinage de chirurgie persistant, et donc d'après ce qui précède, son  $\epsilon$ -diamètre intrinsèque est au plus  $K$ .  $\square$

La suite de la démonstration est semblable à celle du théorème A. On peut montrer un analogue de la proposition B.

**Proposition B' (des Surfaces Emboîtées).**

Supposons l'hypothèse (1) du théorème E. Soit  $\delta$  le diamètre du corps en anses  $C$  inclus dans  $M'$ ,  $\epsilon \leq \text{Inj}(M)/2$ ,  $K = 4 \left( 3 + \frac{1}{\sinh \frac{\epsilon}{8}} \right) g(C) - 10$  et  $K' = 2a' \chi_-(C)$ . Supposons que  $k_0 \chi_-(C) \ln \chi_-(C) \leq \ln \ln \frac{d}{q}$ .

Avec ces hypothèses, il existe au moins  $n = \lceil \frac{\delta}{36\epsilon K} - \frac{2}{9} - \frac{K'}{3K} \rceil$  surfaces orientables, disjointes, emboîtées et immergées dans  $C$ . Toutes ces surfaces sont homotopes à des surfaces obtenues à partir de  $\partial_+ C$  par compressions. De plus, ces surfaces ont un  $\epsilon$ -diamètre dans  $M'$  majoré par  $K$  et deux surfaces sont toujours séparées l'une de l'autre par une distance d'au moins  $10\epsilon K$ .

#### Démonstration de la proposition B'.

La démonstration des résultats du paragraphe 1.2.3 ne dépend pas de l'hypothèse (1) du théorème A, et reste donc valide sous l'hypothèse (1) du théorème E. Il reste à adapter la fin de la démonstration de la proposition B et de calculer les nouvelles constantes.

Soit  $c$  l'arc géodésique minimisant la longueur du point  $x_0$  obtenu au lemme 1.29 au bord  $\partial_+ C$ . Notons encore  $\mu > 0$  la distance séparant la géodésique  $c$  de  $\Sigma_0$ . Soit  $L$  la longueur de  $c$ . On a l'inégalité  $L \geq \frac{\delta}{2} - 2\epsilon K'$ . Soit  $\ell \mapsto c(\ell)$  un paramétrage par longueur d'arc de la géodésique  $c$ , de telle sorte que  $c(0) = x_0$  et  $c(L) = y_0 \in \partial_+ C$ .

Montrons tout d'abord que  $E_t = \emptyset$  pour tout  $t \in [0, \eta]$ , où  $\eta$  est la constante fournie par la proposition 3.10. Comme chaque surface du balayage simplicial d'origine  $S_t$  est contenue dans un  $\mu/2$ -voisinage de  $S_0 = \widehat{S}_0$  pour tout  $t \leq \eta$ , et que la distance entre  $c$  et  $S_0$  est au moins  $\mu$ , la géodésique  $c$  ne rencontre aucune surface de balayage  $S_t$  pour  $t \leq \eta$ . Comme les nouvelles surfaces de balayage  $\widehat{S}_t$  sont obtenues à partir des surfaces  $S_t$  par chirurgie, le nombre algébrique d'intersection entre  $c$  et  $\widehat{S}_t$  est le même que celui entre  $c$  et  $S_t$ . Il est donc encore nul pour  $t \leq \eta$ . Par conséquent, la géodésique  $c$  est un arc reliant  $x_0$  à  $\Sigma_1$  dont le nombre d'intersection avec  $\widehat{S}_t$  est nul pour  $t \leq \eta$ . Par définition, les surfaces  $\widehat{S}_t$  ne séparent pas  $x_0$  de  $\partial_+ C$  pour  $t \leq \eta$ , ce qui montre qu'il n'y a pas de composante connexe de  $D_t$  contenant  $x_0$ . Ainsi,  $E_t = \emptyset$  pour tout  $t \in [0, \eta]$ .

Supposons que  $\frac{\delta}{2} - 6\epsilon K' \geq 5\epsilon K$ . Comme les ensembles  $E_t$  varient continûment avec le temps  $t$ , la fonction  $\mathcal{L}$  qui au temps  $t$  associe la longueur de  $c \cap E_t$  est une application continue. Comme  $\mathcal{L}(\eta) = 0$  et  $\mathcal{L}(1) = L$  (la longueur de l'arc  $c$ ), on en conclut qu'il existe un temps  $t_1 \in ]\eta, 1[$  tel que  $\mathcal{L}(t_1) = L - 2\epsilon(1 + K + K')$ . Soit  $S_1$  le bord de  $E_{t_1}$ . D'après le lemme 1.32, la surface immergée  $S_1$  est une composante connexe de  $\widehat{S}_{t_1}$ . Comme  $c$  est une géodésique minimisante paramétrée par longueur d'arc, pour tous  $a$  et  $b \in [0, L]$ , on a  $d(c(a), c(b)) = |b - a|$ . Ainsi, le point d'intersection  $c(\mathcal{L}(t_1))$  entre  $S_1$  et  $c$  est à distance  $2\epsilon(1 + K + K')$  de  $\partial_+ C$ . Puisque par construction, tout point de la surface  $\widehat{S}_t$  pour  $t \geq 1 - \eta$  est à distance au plus  $\epsilon K'$  de  $\partial_+ C$ , nécessairement,  $t_1 < 1 - \eta$ . Comme, pour  $t \leq \eta$ , les ensembles  $E_t$  sont vides, en fait  $\eta < t_1 < 1 - \eta$ . Par définition de  $E_{t_1}$ , la surface  $S_1$  sépare  $x_0$  de  $\partial_+ C$ . Par le lemme 1.32,  $S_1$  est connexe. Montrons que le  $\epsilon$ -diamètre de  $S_1$  est au plus  $K$ . D'après la proposition 3.10, le diamètre dans  $C$  d'une composante connexe de  $\widehat{S}_t$  est au plus  $\epsilon(1 + 2K + 2K')$ . De plus, si  $S_1$  contient un voisinage de chirurgie persistant, cela signifie que  $S_1$  rencontre  $\mathcal{N}_+$ . Par suite, tout point de  $S_1$  serait à distance au plus  $\epsilon(1 + 2K + 2K') + \epsilon/2$  de  $\partial_+ C$ , ce qui contredit le fait que le point d'intersection entre  $S_1$  et  $c$  est à distance  $2\epsilon(1 + K + K') > \epsilon(1 + 2K + 2K') + \epsilon/2$  de  $\partial_+ C$ . Ainsi,  $S_1$  ne contient aucun voisinage de chirurgie persistant. D'après la proposition 3.10, son  $\epsilon$ -diamètre est au plus  $K$  et son diamètre dans  $C$  au plus  $2\epsilon K$ . Par suite, la surface  $S_1$  ne peut pas intersecter  $\{c(\ell), 0 \leq \ell < L - 2\epsilon(1 +$

$K + K') - 2\epsilon K\} \cup \{c(\ell), L - 2\epsilon(1 + K') < \ell \leq L\}$ . Soit  $\ell_1$  la plus petite valeur de  $\ell$  telle que  $c(\ell) \in S_1$ . Il vient  $L - 2\epsilon(1 + 2K + K') \leq \ell_1 \leq L - 2\epsilon(1 + K')$ . Comme  $K' > 1$ , on a  $L - 2\epsilon(1 + 2K + K') \geq L - 4\epsilon(K + K') \geq \frac{\delta}{2} - 4\epsilon K - 6\epsilon K' \geq \epsilon K > 0$ .

Soit  $c_1 = \{c(\ell), 0 \leq \ell \leq \ell_1 - 14\epsilon K\}$ . En remplaçant  $c$  par  $c_1$ , nous pouvons itérer le processus décrit précédemment. Si  $K$  est assez petit par rapport à  $\delta$ , il existe un instant  $t_2$  tel que la longueur de  $c_1 \cap E_{t_2}$  est égale à :  $\text{lgr}(c_1) - 2\epsilon K = \ell_1 - 16\epsilon K \geq L - 20\epsilon K - 2\epsilon(1 + K') \geq L - 20\epsilon K - 4\epsilon K'$ . Pour les mêmes raisons que précédemment, le bord de  $E_{t_2}$  est une surface  $S_2$  qui est une composante connexe de  $\widehat{S}_{t_2}$  séparant  $x_0$  de  $\partial_+ C$ , et intersectant  $c_1$  seulement selon l'ensemble  $\{c_1(\ell), (\ell_1 - 14\epsilon K) - 4\epsilon K \leq \ell \leq \ell_1 - 14\epsilon K\}$ . De plus, la surface  $S_2$  est de nouveau trop éloignée du bord  $\partial_+ C$  pour contenir un voisinage de chirurgie persistant, et son  $\epsilon$ -diamètre est au plus  $K$  par la proposition 3.10.

Montrons que la distance entre les surfaces  $S_1$  et  $S_2$  est inférieure ou égale à  $10\epsilon K$ . Soit  $\ell_2$  le plus petit réel  $\ell$  tel que  $c(\ell) \in S_2$ . D'après ce qui précède,  $\ell_2 \leq \ell_1 - 14\epsilon K$ . Comme  $c(\ell_1) \in S_1$  et  $c(\ell_2) \in S_2$ , il vient :

$$\begin{aligned} \text{dist}(S_1, S_2) &\geq \text{dist}(c(\ell_1), c(\ell_2)) - \text{diam}(S_1) - \text{diam}(S_2) \\ &\geq (\ell_1 - \ell_2) - 4\epsilon K \\ &\geq 14\epsilon K - 4\epsilon K = 10\epsilon K. \end{aligned}$$

On peut alors réitérer le procédé avec  $c_2 = \{c(\ell), 0 \leq \ell \leq \ell_2 - 14\epsilon K\}$ , à condition toutefois que  $\ell_2 - 14\epsilon K > 4\epsilon K$ , donc par exemple si  $L - 2 \times 18\epsilon K - 4\epsilon K' > 4\epsilon K$ .

On ne peut plus itérer lorsque  $L - 18\epsilon K(n - 1) - 4\epsilon K' > 4\epsilon K$  mais  $L - 18\epsilon Kn - 4\epsilon K' \leq 4\epsilon K$ , donc pour  $n = \lceil \frac{L - 4\epsilon(K + K')}{18\epsilon K} \rceil$ . Comme  $L \geq \frac{\delta}{2} - 2\epsilon K'$ ,  $n \geq \lceil \frac{\delta}{36\epsilon K} - \frac{2}{9} - \frac{K'}{3K} \rceil$ , et la proposition B' des Surfaces Emboîtées est démontrée.  $\square$

La fin de la démonstration du théorème E est en tout point similaire à celle du théorème A, en remplaçant  $9K$  par  $3K$  dans l'expression de  $n$ . On obtient ainsi une nouvelle constante explicite  $p$  se comportant comme  $k$ .

Plus précisément, le lemme 1.6 se reformule ainsi.

**Lemme 3.14.** *Sous les hypothèses du théorème E et avec ces notations, on peut trouver dans le corps en anses  $C$  de  $M'$  au moins  $m$  surfaces plongées, parallèles et disjointes vérifiant les conclusions de la proposition C, avec*

$$m \geq \frac{2}{\chi_-(C) + 4} \left( \frac{\ln\left(\frac{d}{q}\right) + \ln\left(\frac{\text{Vol}(M)}{2\pi}\right)}{72\epsilon(a\chi_-(C) + b)} - \frac{2}{9}\left(1 + \frac{3a'}{a}\right) \right) - 5.$$

Ainsi, en posant

$$\begin{aligned}
 p_0 &= \max \left\{ \frac{\ln(4(2\epsilon a' + 1))}{2 \ln 2}, 1 + \frac{\ln(1 + \ln(12V_3/\text{Vol}(M)))}{2 \ln 2} \right\}, \\
 c_1 &= \frac{1}{a} \left( \frac{16\text{Vol}(M)}{\pi(\sinh(2\epsilon) - 2\epsilon)} + \frac{1}{\epsilon} - b \right) \\
 p_1 &= \frac{1}{2 \ln 2} \ln(72(2D + 1)(c_1 + 4) \left( 3 + 2(\alpha\sigma)^2(ac_1 + b)^2(\sqrt{2}\alpha\sigma(ac_1 + b))^{\alpha\sigma(ac_1 + b)} \right) \\
 &\quad + 16\epsilon(1 + \frac{3a'}{a})(ac_1 + b) - \ln \left( \frac{\text{Vol}(M)}{2\pi} \right)), \\
 c'_2 &= \max \left\{ c_1, \frac{1}{a} \left( \frac{\ln 5 - \ln(4\alpha^2\sigma^2(2a + b)^2)}{\alpha\sigma \ln(2\sqrt{2}\alpha\sigma a)} - b \right), \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{a} \left( \frac{\ln(1 + \frac{3a'}{a}) - \ln(108\alpha^2\sigma^2(2a + b)^2)}{\alpha\sigma \ln(\sqrt{2}\alpha\sigma(2a + b))} - b \right), b/a, 4, 2\sqrt{2}\alpha\sigma a, \right. \\
 &\quad \left. \frac{b}{a} + \frac{4}{\alpha\sigma a}, \frac{\ln(18432\epsilon\alpha^2\sigma^2 a^3(2\sqrt{2}\alpha\sigma a)^{\alpha\sigma b})}{\alpha\sigma a \ln 2}, \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{a} \left( \frac{1}{\alpha\sigma \ln(\sqrt{2}\alpha\sigma(2a + b))} \ln \left( \frac{1}{4\alpha^2\sigma^2(2a + b)^2} \left( \frac{\left| -\ln \frac{\text{Vol}(M)}{2\pi} - \frac{2}{9}(1 + \frac{3a'}{a}) \right|}{216\epsilon(2a + b)} - 5 \right) \right) - b \right) \right\}, \\
 p_2 &= 4\alpha\sigma a, \text{ et} \\
 p_3 &= \frac{1}{c_1 \ln c_1} \ln(36\epsilon(ac'_2 + b)(c'_2 + 4) \left( 4(\alpha\sigma)^2(ac'_2 + b)^2(\sqrt{2}\alpha\sigma(ac'_2 + b))^{\alpha\sigma(ac'_2 + b)} + 5 \right) \\
 &\quad + 16\epsilon(ac'_2 + b)(1 + \frac{3a'}{a}) - \ln \frac{\text{Vol}(M)}{2\pi}),
 \end{aligned}$$

la constante  $p = \max\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$  convient pour l'hypothèse (2) du théorème E.  $\square$

### 3.3 Démonstration des théorèmes 3.3 et 3.7 : gradients de Heegaard sous-logarithmiques.

Nous commençons par prouver une version plus forte du théorème 3.3.

**Proposition 3.15.** *Soit  $M$  une variété de dimension trois hyperbolique, connexe, orientée, compacte et sans bord. Supposons qu'il existe une famille infinie de revêtements finis  $(M_i \rightarrow M)_{i \in I}$  de  $M$  de degrés  $d_i$  telle que*

$$\inf_{i \in I} \frac{c_+(\mathcal{H}'_{S_i}) \ln(c_+(\mathcal{H}'_{S_i}))}{\ln \ln \frac{d_i}{\chi_-^h(M_i)}} = 0,$$

où  $S_i$  est une surface de Heegaard pour  $M_i$  de genre minimal, et  $c_+(\mathcal{H}'_{S_i})$  est la complexité d'une décomposition  $\mathcal{H}_{S_i}$ -mince obtenue à partir de ce scindement.

Alors pour une infinité d'indices  $i \in \mathbb{N}$ , les hypothèses du théorème E sont satisfaites, et le revêtement  $M_i$  contient une surface plongée de genre au plus  $(c_+(\mathcal{H}'_{S_i})/2 + 1)$  qui est la fibre d'une fibration en surfaces.

Démonstration de la proposition 3.15.

Sans perdre de généralité et quitte à considérer une sous-suite, on peut supposer que  $I = \mathbb{N}$ , et  $\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{c_+(\mathcal{H}'_{S_i}) \ln(c_+(\mathcal{H}'_{S_i}))}{\ln \ln(d_i / \chi_-^h(M_i))} = 0$ .

Soit  $i \in \mathbb{N}$ . La surface  $S_i$  est une surface de Heegaard pour  $M_i$  de genre minimal :  $g(S_i) = g(M_i)$ . En partant de la surface  $S_i$ , on peut obtenir un scindement de Heegaard généralisé  $\mathcal{H}'_{S_i}$  qui est une décomposition  $\mathcal{H}_{S_i}$ -mince (voir [ST2], [La3] et les rappels 0). L'intérêt d'une décomposition  $\mathcal{H}_{S_i}$ -mince est qu'elle permet d'obtenir une surface pseudo-minimale, et que les composantes négatives des bords des corps en anses sont incompressibles, ce qui permettra d'appliquer le théorème E. C'est ce que rappelle le théorème suivant. Sa partie topologique (1) est une conséquence des travaux de Casson et Gordon, Scharlemann et Thompson ([CG] et [ST2]). La partie métrique (2) provient de résultats de Frohman, Freedman, Hass et Scott concernant les surfaces incompressibles ([FHS] et [FH]). La dernière partie (3) est un résultat de Pitts et Rubinstein ([PR], voir aussi [Sou], [CDL] et [P]).

**Théorème 3.16.** *Soient  $N$  une variété hyperbolique de dimension trois, connexe, orientée, compacte et sans bord, et  $\mathcal{H}'$  un scindement de Heegaard généralisé qui est une décomposition  $\mathcal{H}$ -mince pour un certain scindement de Heegaard généralisé  $\mathcal{H}$ . Alors  $\mathcal{H}'$  vérifie les propriétés suivantes.*

1. *Chacune des surfaces paires est incompressible dans  $N$  et les surfaces impaires forment des surfaces de Heegaard fortement irréductibles pour les composantes connexes de la variété  $N$  découpée le long des surfaces paires.*
2. *Chaque surface paire, en tant que surface incompressible, est isotope à une surface minimale ou au bord d'un petit voisinage régulier d'une surface minimale non orientable.*
3. *Chaque surface impaire, en tant que surface de Heegaard fortement irréductible, est isotope à une surface minimale ou au bord d'un petit voisinage régulier d'une surface minimale non orientable, avec un petit tube attaché verticalement dans la structure de  $I$ -fibré.*

**Lemme 3.17.** *Soit  $N$  une variété hyperbolique de dimension trois, connexe, orientée, compacte et sans bord. Soit  $S$  une surface de Heegaard pour  $N$  de genre minimal et  $F$  la surface correspondant à un scindement de Heegaard généralisé  $\mathcal{H}'_S$  qui est une décomposition  $\mathcal{H}_S$ -mince. Alors  $F$  est une surface pseudo-minimale, qui divise la variété  $N$  en  $q \leq \chi_-^h(N) + 2$  corps en anses  $C_1, \dots, C_q$  avec  $\chi_-(C_j) \leq c_+(\mathcal{H}'_S)$  pour tout  $j$  entre 1 et  $q$ . De plus, si  $F^-$  est la réunion des composantes négatives des bords des corps en anses,  $F^-$  est une union de surfaces incompressibles.*

Démonstration du lemme 3.17.

Sous ces hypothèses, la surface  $F$  est la réunion des surfaces paires et impaires d'une décomposition  $\mathcal{H}_S$ -mince associée à la surface de Heegaard  $S$  de  $N$ . D'après le théorème 3.16,  $F^-$  est la réunion des surfaces paires, donc une union de surfaces incompressibles, et quitte à isotoper  $F$ , on peut supposer que cette surface est pseudo-minimale, comme défini au chapitre 1.

Un scindement de Heegaard généralisé peut être vu comme une décomposition en anses de la variété  $N$ , où certaines 2-anses sont attachées avant d'autres 1-anses.

Partant d'une décomposition en anses associée au scindement de Heegaard de  $N$  de surface  $S$ , le scindement généralisé en position mince de surface  $F$  est obtenu en changeant l'ordre dans lequel les 1-anses et les 2-anses sont attachées. Comme au départ le scindement de Heegaard correspondait à une décomposition avec  $g(S) = g(N)$  1-anses et  $g(N)$  2-anses, le scindement généralisé en position mince comporte également  $g(N)$  1-anses et  $g(N)$  2-anses. Ainsi, la surface  $F$  découpe la variété  $N$  en au plus  $2g(N) = \chi_-^h(N) + 2$  corps en anses. En prenant les notations du théorème A, si  $N \setminus F$  est constitué de  $q$  corps en anses, alors  $q \leq \chi_-^h(N) + 2$ .

Par définition de la complexité d'un scindement de Heegaard généralisé et comme la surface  $F$  correspond à une décomposition  $\mathcal{H}_S$ -mince, la caractéristique  $\chi_-(C)$  de chacun des corps en anses  $C$  de  $N \setminus F$  est majorée par  $c_+(\mathcal{H}'_S)$ .  $\square$

Soit  $\epsilon \leq \text{Inj}(M)/2$  et  $p = p(\epsilon, \text{Vol}(M))$  la constante obtenue au théorème E.

**Lemme 3.18.** *Il existe  $i_0 \in \mathbb{N}$  tel que si  $i \geq i_0$ , alors  $p c_i \ln c_i < \ln \ln \frac{d_i}{q_i}$  et les hypothèses du théorème E sont satisfaites.*

Démonstration du lemme 3.18.

La surface  $S_i$  est une surface de Heegaard pour  $M_i$  de genre minimal. Soit  $F_i$  la surface correspondant à un scindement de Heegaard généralisé qui est une décomposition  $\mathcal{H}_{S_i}$ -mince. D'après le lemme 3.17, la surface  $F_i$  est une surface plongée dans  $M_i$ , compacte, sans bord, orientable, pseudo-minimale, et qui scinde le revêtement  $M_i$  en  $q_i \leq \chi_-^h(M_i) + 2$  corps en anses  $C$  avec  $\chi_-(C) \leq c_+(\mathcal{H}'_{S_i}) = c_i$ . De plus,  $F_i^-$  est une union de surfaces incompressibles.

Ainsi, afin de vérifier les hypothèses du théorème E, il reste à montrer que pour  $i$  suffisamment grand,  $p c_i \ln c_i \leq \ln \ln \frac{d_i}{q_i}$ .

Mais comme  $\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{c_+(\mathcal{H}'_{S_i}) \ln(c_+(\mathcal{H}'_{S_i}))}{\ln \ln(d_i/\chi_-^h(M_i))} = 0$ , il existe  $i_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour  $i \geq i_0$ ,  $\frac{c_+(\mathcal{H}'_{S_i}) \ln(c_+(\mathcal{H}'_{S_i}))}{\ln \ln(d_i/(\chi_-^h(M_i)+2))} < 1/p$ . Puisque  $q_i \leq \chi_-^h(M_i) + 2$ , cet entier  $i_0$  convient. Ceci achève la démonstration du lemme 3.18, ainsi que de la proposition 3.15.  $\square$

**Lemme 3.19.** *S'il existe une constante  $\theta \in ]0, 1[$  telle que  $\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{\chi_-^h(M_i)}{d_i^\theta} = 0$  et si  $\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{c_+(\mathcal{H}'_{S_i}) \ln c_+(\mathcal{H}'_{S_i})}{\ln \ln d_i} = 0$ , alors  $\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{c_+(\mathcal{H}'_{S_i}) \ln c_+(\mathcal{H}'_{S_i})}{\ln \ln \frac{d_i}{\chi_-^h(M_i)}} = 0$  et les conclusions de la proposition 3.15 sont encore vérifiées.*

Démonstration du lemme 3.19.

Si  $\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{\chi_-^h(M_i)}{d_i^\theta} = 0$ , il existe  $i_1 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $i \geq i_1$ ,  $\chi_-^h(M_i) \leq d_i^\theta$ . Ainsi, pour tout  $i \geq i_1$ ,  $\ln \ln \frac{d_i}{\chi_-^h(M_i)} \geq \ln \ln(d_i^{1-\theta}) = \ln((1-\theta) \ln(d_i)) = \ln \ln d_i + \ln(1-\theta)$ . Donc pour  $i \geq i_1$ , on a

$$\frac{c_+(\mathcal{H}'_{S_i}) \ln c_+(\mathcal{H}'_{S_i})}{\ln \ln \frac{d_i}{\chi_-^h(M_i)}} \leq \frac{c_+(\mathcal{H}'_{S_i}) \ln c_+(\mathcal{H}'_{S_i})}{\ln \ln d_i + \ln(1-\theta)}.$$

Comme le membre de droite de cette inégalité tend vers zéro lorsque  $i \rightarrow +\infty$ ,

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{c_+(\mathcal{H}'_{S_i}) \ln c_+(\mathcal{H}'_{S_i})}{\ln \ln \frac{d_i}{\chi_-^h(M_i)}} = 0.$$

**Lemme 3.20.** *Si  $\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{\chi_-^h(M_i) \ln \chi_-^h(M_i)}{\ln \ln d_i} = 0$ , avec les mêmes notations,  $\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{c_+(\mathcal{H}'_{S_i}) \ln c_+(\mathcal{H}'_{S_i})}{\ln \ln \frac{d_i}{\chi_-^h(M_i)}} = 0$  et les conclusions de la proposition 3.15 sont encore vérifiées.*

Démonstration du lemme 3.20.

En effet, si  $\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{\chi_-^h(M_i) \ln \chi_-^h(M_i)}{\ln \ln d_i} = 0$ , a fortiori  $\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{\chi_-^h(M_i)}{\sqrt{d_i}} = 0$ . Comme de plus  $\chi_-^h(M_i) \geq c_+(\mathcal{H}'_{S_i})$ ,  $\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{c_+(\mathcal{H}'_{S_i}) \ln c_+(\mathcal{H}'_{S_i})}{\ln \ln d_i} = 0$ . On applique alors le lemme 3.19. □

On obtient alors le théorème 3.3 en combinant le lemme 3.20 avec la proposition 3.15. □

La démonstration du théorème 3.3 implique immédiatement le théorème suivant.

**Théorème 3.21.** *Il existe une constante explicite  $\bar{k} = \bar{k}(\epsilon, \text{Vol}(M))$  telle que pour tout revêtement fini  $M' \rightarrow M$  de degré  $d$  vérifiant  $\bar{k} \chi_-^h(M') \ln \chi_-^h(M') \leq \ln \ln d$ , le revêtement  $M'$  contient une surface plongée incompressible de genre au plus  $g(M')$  qui est la fibre d'une fibration de  $M'$  en surfaces. En particulier, la variété  $M$  est virtuellement fibrée sur le cercle  $\mathbb{S}^1$ .* □

Démonstration du théorème 3.7.

Le théorème 3.7 se démontre de manière analogue. A partir d'une surface de Heegaard  $S$  pour  $M'$  de genre minimal, on construit un scindement de Heegaard généralisé qui est une décomposition  $\mathcal{H}_S$ -mince, et dont la surface  $F$  est pseudo-minimale d'après le lemme 3.17, avec  $F^-$  une union de surfaces incompressibles. De plus, le nombre de corps en anses obtenus dans cette décomposition est majoré par  $\chi_-^h(M') + 2$  et la caractéristique  $\chi_-(C)$  de tout corps en anses  $C$  de cette décomposition est majorée par  $\chi_-^h(M')$ . Ainsi, les hypothèses du théorème 2.1 modifié comme le théorème E à partir du théorème A sont satisfaites si  $\tilde{k} \chi_-^h(M') \ln \chi_-^h(M') < \ln \ln \frac{d}{\chi_-(M')+2}$ , où  $\tilde{k} = \tilde{k}(\epsilon, \text{Vol}(M))$  est la constante donnée par le théorème 2.1.

Mais  $\ln \ln \frac{d}{\chi_-(M')+2} = \ln(\ln d - \ln(\chi_-^h(M') + 2))$ . Si  $\chi_-^h(M') \ln \chi_-^h(M') < \ln \ln d$ , comme  $\chi_-^h(M') \geq 2$ ,  $\ln(\chi_-^h(M') + 2) < \ln(\ln d / \ln 2 + 2)$  et donc  $\ln \ln \frac{d}{\chi_-(M')+2} > \ln(\ln d - \ln(\ln d / \ln 2 + 2))$ . Il existe donc une constante  $\tilde{k}' = \tilde{k}'(\epsilon, \text{Vol}(M))$  telle que si  $\tilde{k}' \chi_-^h(M') \ln \chi_-^h(M') < \ln \ln d$ ,  $\tilde{k} \chi_-^h(M') \ln \chi_-^h(M') < \ln \ln \frac{d}{\chi_-(M')+2}$  et les hypothèses sont vérifiées. □

### 3.4 Démonstration des théorèmes 3.9 et 3.6 (2) : gradients de Heegaard forts sous-logarithmiques.

Démonstration du théorème 3.9.

Supposons qu'il existe une famille infinie  $(M_i \rightarrow M)_{i \in \mathbb{N}}$  de revêtements finis de

$M$  de degrés  $d_i$  telle que

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{\chi_-^h(M_i) \ln(\chi_-^h(M_i))}{\ln \ln d_i} = 0. \quad (3.1)$$

Notons  $\epsilon = \text{Inj}(M)/2$ ,  $a = 2 \left( 3 + \frac{1}{\sinh^2(\frac{\epsilon}{8})} \right)$ ,  $b = 2 \left( 1 + \frac{2}{\sinh^2(\frac{\epsilon}{8})} \right)$  et  $a' = 6(21/4 + 3/4\pi + 3/4\epsilon + 2/\sinh^2(\epsilon/4))$ .

**Lemme 3.22.** *Sous l'hypothèse (3.1) et avec ces notations, il existe un entier  $i_1 \in \mathbb{N}$  tel que pour  $i \geq i_1$ , il existe au moins  $m_i$  surfaces parallèles  $T_1, \dots, T_{m_i}$  plongées dans  $M_i$ , connexes, compactes, sans bord et orientables, qui sont des fibres. En particulier, ces surfaces sont incompressibles. Leur diamètre dans la variété ambiante  $M_i$  est uniformément majoré par  $9\epsilon(a\chi_-^h(M_i) + b)$  et elles sont séparées les unes des autres par une distance d'au moins  $\epsilon(2a + b)$ . De plus, on a la minoration*

$$m_i \geq \frac{2}{\chi_-^h(M_i) + 4} \left( \frac{\ln \left( \frac{d_i}{\chi_-^h(M_i) + 2} \right) + \ln \left( \frac{\text{Vol}(M)}{2\pi} \right)}{72\epsilon(a\chi_-^h(M_i) + b)} - \frac{2}{9} \left( 1 + \frac{3a'}{a} \right) \right) - 5.$$

Démonstration du lemme 3.22.

Soit  $S_i$  une surface de Heegaard de genre minimal pour  $M_i$  :  $g(S_i) = g(M_i)$ . Nous avons vu au paragraphe précédent que si  $F_i$  est la surface correspondant à un scindement de Heegaard généralisé qui est une décomposition  $\mathcal{H}_{S_i}$ -mince, on peut supposer que cette surface est pseudo-minimale et elle peut servir de surface de départ pour appliquer le théorème E.

Soit  $C_i$  l'un des au plus  $\chi_-^h(M_i) + 2$  corps en anses de  $M_i \setminus F_i$  tel que  $\text{Vol}(C_i) \geq \text{Vol}(M)d_i/(\chi_-^h(M_i) + 2)$ . Notons  $K_i = a\chi_-(C_i) + b$  et  $K'_i = 2a'\chi_-(C_i)$ . On rappelle que  $2 \leq \chi_-(C_i) \leq c_+(\mathcal{H}'_{S_i}) \leq \chi_-^h(M_i)$ .

Rappelons également que  $k_0 = \max \left\{ \frac{\ln(4(2\epsilon a' + 1))}{2 \ln 2}, 1 + \frac{\ln(1 + \ln(12V_3/\text{Vol}(M)))}{2 \ln 2} \right\}$ . Comme d'après l'hypothèse (3.1),  $\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{\chi_-^h(M_i) \ln(\chi_-^h(M_i))}{\ln \ln d_i} = 0$ , il existe un entier  $i_0 \in \mathbb{N}$  tel que si  $i \geq i_0$ ,  $k_0 \chi_-^h(M_i) \ln \chi_-^h(M_i) \leq \ln \ln \frac{d_i}{\chi_-^h(M_i) + 2}$ , et comme  $\chi_-(C_i) \leq \chi_-^h(M_i)$ ,  $k_0 \chi_-(C_i) \ln \chi_-(C_i) \leq \ln \ln \frac{d_i}{\chi_-^h(M_i) + 2}$ .

D'après la proposition C, il existe au moins  $m_i$  surfaces parallèles  $T_1, \dots, T_{m_i}$  plongées dans  $M_i$ , connexes, compactes, sans bord et orientables. Leur diamètre dans la variété ambiante  $M_i$  est uniformément majoré par  $9\epsilon K_i \leq 9\epsilon(a\chi_-^h(M_i) + b)$  et elles sont séparées les unes des autres par une distance d'au moins  $\epsilon K_i \geq \epsilon(2a + b)$ , avec

$$m_i = \lfloor \frac{1}{g(C_i) + 1} \lceil \frac{\delta_i}{36\epsilon K_i} - \frac{2}{9} - \frac{K'_i}{3K_i} \rceil \rfloor - 4,$$

où  $\delta_i$  est le diamètre du corps en anses  $C_i$ .

D'après le lemme 3.14, on a la minoration

$$m_i \geq \frac{2}{\chi_-^h(M_i) + 4} \left( \frac{\ln \left( \frac{d_i}{\chi_-^h(M_i) + 2} \right) + \ln \left( \frac{\text{Vol}(M)}{2\pi} \right)}{72\epsilon(a\chi_-^h(M_i) + b)} - \frac{2}{9} \left( 1 + \frac{3a'}{a} \right) \right) - 5.$$



De plus, toujours d'après l'hypothèse (3.1), nous avons vu au paragraphe précédent qu'il existe un entier  $i_1 \geq i_0$  tel que pour  $i \geq i_1$ ,  $p \chi_-^h(M_i) \ln \chi_-^h(M_i) \leq \ln \ln \frac{d_i}{\chi_-^h(M_i)+2}$ , où  $p = p(\epsilon, \text{Vol}(M))$  est la constante donnée par le théorème E. On peut alors appliquer le théorème E : les  $m_i$  surfaces parallèles et plongées  $T_1, \dots, T_{m_i}$  sont des fibres, ce qui achève la démonstration du lemme 3.22.  $\square$

**Lemme 3.23.** *Pour tout entier  $i \geq i_1$ , on peut contrôler la caractéristique forte de Heegaard de  $M_i$  en fonction du nombre  $m_i$  de surfaces incompressibles qui sont des fibres, grâce à l'inégalité*

$$\chi_-^{sh}(M_i) \geq \frac{2a+b}{2a'}(m_i - 1). \quad (3.2)$$

Démonstration du lemme 3.23.

Soit  $G$  une surface de Heegaard pour  $M_i$  fortement irréductible et de genre minimal :  $|\chi(G)| = \chi_-^{sh}(M_i)$ . D'après le résultat (3) du théorème 3.16, comme  $G$  est une surface de Heegaard fortement irréductible, quitte à isotoper  $G$ , nous pouvons supposer que cette surface est pseudo-minimale. Par le lemme 1.13, le  $\epsilon$ -diamètre de  $G$  est majoré par  $a'|\chi(G)| = a'\chi_-^{sh}(M_i)$ . Comme la surface  $G$  est connexe, son diamètre est alors au plus  $2\epsilon a'\chi_-^{sh}(M_i)$ . Ainsi, la surface  $G$  ne peut pas intersecter plus de  $\lceil \frac{\text{diam}(G)}{\epsilon(2a+b)} \rceil \leq \lceil \frac{2\epsilon a'\chi_-^{sh}(M_i)}{\epsilon(2a+b)} \rceil$  des  $m_i$  surfaces parallèles incompressibles. Si  $m_i > \lceil \frac{2\epsilon a'\chi_-^{sh}(M_i)}{\epsilon(2a+b)} \rceil$ , il y a au moins  $m_i - \lceil \frac{2\epsilon a'\chi_-^{sh}(M_i)}{\epsilon(2a+b)} \rceil$  surfaces incompressibles de  $M_i$  disjointes de la surface  $G$ . Si ce nombre est strictement positif, cela signifie qu'au moins une des  $m_i$  surfaces incompressibles  $T_1, \dots, T_{m_i}$  est plongée dans une des composantes connexes  $C$  de  $M_i \setminus G$ . Mais cette surface demeure incompressible dans  $C$ , qui est un corps en anses (de bord négatif vide). Ceci contredit le fait que  $C$  n'admet pas de surface incompressible. Donc on a toujours :

$$m_i - \lceil \frac{2a'\chi_-^{sh}(M_i)}{2a+b} \rceil \leq 0,$$

ce qui implique que

$$m_i - \frac{2a'\chi_-^{sh}(M_i)}{2a+b} - 1 \leq 0,$$

et donc  $\chi_-^{sh}(M_i) \geq \frac{2a+b}{2a'}(m_i - 1)$ .  $\square$

**Lemme 3.24.** *1. Il existe un entier naturel  $P$  tel que si  $i \geq i_1$  et  $\chi_-^h(M_i) \geq P$ , alors*

$$\chi_-^{sh}(M_i) \geq \frac{2a+b}{2a'} \left( \frac{\ln(d_i)}{144\epsilon a \chi_-^h(M_i)^2} - 1 \right).$$

*2. D'autre part, il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $i \geq i_1$  vérifiant  $\chi_-^h(M_i) \leq P$  et pour  $d_i$  suffisamment grand, alors*

$$\chi_-^{sh}(M_i) \geq C \ln(d_i).$$

Démonstration du lemme 3.24.

D'après le lemme 3.22,

$$m_i - 1 \geq \frac{2}{\chi_-^h(M_i) + 4} \left( \frac{\ln\left(\frac{d_i}{\chi_-^h(M_i)+2}\right) + \ln\left(\frac{\text{Vol}(M)}{2\pi}\right)}{72\epsilon(a\chi_-^h(M_i) + b)} - \frac{2}{9}\left(1 + \frac{3a'}{a}\right) \right) - 6.$$

Mais

$$\frac{2}{\chi_-^h(M_i) + 4} \left( \frac{\ln\left(\frac{d_i}{\chi_-^h(M_i)+2}\right) + \ln\left(\frac{\text{Vol}(M)}{2\pi}\right)}{72\epsilon(a\chi_-^h(M_i) + b)} - \frac{2}{9}\left(1 + \frac{3a'}{a}\right) \right) - 6 \sim_{\chi_-^h(M_i) \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{d_i}{\chi_-^h(M_i)}\right)}{72\epsilon a \chi_-^h(M_i)^2},$$

donc si  $\chi_-^h(M_i)$  est suffisamment grande,

$$m_i \geq \frac{\ln\left(\frac{d_i}{\chi_-^h(M_i)}\right)}{144\epsilon a \chi_-^h(M_i)^2} = \frac{\ln(d_i)}{144\epsilon a \chi_-^h(M_i)^2} - \frac{\ln(\chi_-^h(M_i))}{144\epsilon a \chi_-^h(M_i)^2}.$$

Comme  $\lim_{\chi_-^h(M_i) \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\chi_-^h(M_i))}{144\epsilon a \chi_-^h(M_i)^2} = 0$ , il existe un entier  $P \in \mathbb{N}$  tel que si  $\chi_-^h(M_i) \geq P$ ,  $\frac{\ln(\chi_-^h(M_i))}{144\epsilon a \chi_-^h(M_i)^2} \leq 1$ , et ainsi,

$$m_i - 1 \geq \frac{\ln(d_i)}{144\epsilon a \chi_-^h(M_i)^2} - 1.$$

En reportant cette minoration dans l'inégalité (3.2), on obtient que si  $\chi_-^h(M_i) \geq P$ ,

$$\chi_-^{sh}(M_i) \geq \frac{2a + b}{2a'} \left( \frac{\ln(d_i)}{144\epsilon a \chi_-^h(M_i)^2} - 1 \right),$$

ce qui démontre la partie (1) du lemme 3.24.

Afin de démontrer la partie (2) du lemme 3.24, réécrivons l'inégalité (3.2) du lemme 3.23 en détails :

$$\chi_-^{sh}(M_i) \geq \frac{2a + b}{2a'} \left( \frac{2}{\chi_-^h(M_i) + 4} \left( \frac{\ln\left(\frac{d_i}{\chi_-^h(M_i)+2}\right) + \ln\left(\frac{\text{Vol}(M)}{2\pi}\right)}{72\epsilon(a\chi_-^h(M_i) + b)} - \frac{2}{9}\left(1 + \frac{3a'}{a}\right) \right) - 6 \right).$$

Si  $\chi_-^h(M_i) \leq P$ , alors

$$\chi_-^{sh}(M_i) \geq \frac{2a + b}{2a'} \left( \frac{2}{P + 4} \left( \frac{\ln\left(\frac{d_i}{P+2}\right) + \ln\left(\frac{\text{Vol}(M)}{2\pi}\right)}{72\epsilon(aP + b)} - \frac{2}{9}\left(1 + \frac{3a'}{a}\right) \right) - 6 \right).$$

Ainsi, il existe une constante  $C > 0$  telle que si le degré  $d_i$  est suffisamment grand,  $\chi_-^{sh}(M_i) \geq C \ln d_i$ , ce qui achève la démonstration du lemme 3.24.  $\square$

En examinant chacun des deux cas du lemme 3.24 lorsque  $i \geq i_1$  tend vers l'infini, il vient

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{\chi_-^{sh}(M_i)}{(\ln d_i)^\theta} = +\infty$$

pour tout  $\theta \in ]0, 1[$ , ce qui démontre le théorème 3.9.  $\square$

**Remarque 3.25.** *En fait, nous avons démontré un résultat un peu plus fort que le théorème 3.9.*

Si  $\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{\chi_-^h(M_i) \ln(\chi_-^h(M_i))}{\ln \ln d_i} = 0$ , alors pour toute application  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $f(n) =_{n \rightarrow +\infty} o(\ln n)$ , on a  $\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{\chi_-^{sh}(M_i)}{f(d_i)} = +\infty$ .

Démonstration de la partie (2) du théorème 3.6.

Fixons  $\eta \in ]0, 1[$ . Soit  $M$  une variété hyperbolique de dimension trois, connexe, orientée, compacte et sans bord, et  $\{M_i \rightarrow M\}_{i \in \mathbb{N}}$  l'ensemble dénombrable des revêtements finis de  $M$ . Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , notons  $\alpha_i = \frac{\chi_-^h(M_i)}{(\ln \ln d_i)^\eta}$ .

Soit  $\bar{k}$  la constante fournie par le théorème 3.21 : si  $\bar{k} \chi_-^h(M_i) \ln(\chi_-^h(M_i)) \leq \ln \ln d_i$ , alors les  $m_i$  surfaces plongées et parallèles obtenues sont des fibres virtuelles, donc incompressibles dans  $M_i$ . Comme  $\lim_{\chi_-^h(M_i) \rightarrow +\infty} \frac{(\chi_-^h(M_i) \ln \chi_-^h(M_i))^\eta}{\chi_-^h(M_i)} = 0$ , il existe une constante  $\bar{k}'$  telle que si  $\alpha_i = \frac{\chi_-^h(M_i)}{(\ln \ln d_i)^\eta} \leq \bar{k}'$ , alors  $\bar{k} \chi_-^h(M_i) \ln(\chi_-^h(M_i)) \leq \ln \ln d_i$ .

Soit  $P \in \mathbb{N}$  donné par le lemme 3.24. Posons

$$\begin{aligned} I &= \{i \in \mathbb{N} \mid \alpha_i \geq \bar{k}'\}, \\ J &= \{j \in \mathbb{N} \mid \alpha_j < \bar{k}' \text{ et } \chi_-^h(M_j) \geq P\}, \text{ et} \\ L &= \{\ell \in \mathbb{N} \mid \alpha_\ell < \bar{k}' \text{ et } \chi_-^h(M_\ell) < P\}. \end{aligned}$$

Ces trois ensembles forment une partition de  $\mathbb{N}$ .

Pour tout  $i \in I$ ,

$$\frac{\chi_-^{sh}(M_i)}{(\ln \ln d_i)^\eta} \geq \frac{\chi_-^h(M_i)}{(\ln \ln d_i)^\eta} = \alpha_i \geq \bar{k}' > 0.$$

Pour tout  $j \in J$ , d'après le lemme 3.24,

$$\chi_-^{sh}(M_j) \geq \frac{2a+b}{2a'} \left( \frac{\ln(d_j)}{144\epsilon a \chi_-^h(M_j)^2} - 1 \right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{\chi_-^{sh}(M_j)}{(\ln \ln d_j)^\eta} &\geq \frac{2a+b}{2a' (\ln \ln d_j)^\eta} \left( \frac{\ln(d_j)}{144\epsilon a \chi_-^h(M_j)^2} - 1 \right) \\ &\geq \frac{2a+b}{2a'} \left( \frac{\ln(d_j)}{144\epsilon a \bar{k}'^2 (\ln \ln d_j)^{3\eta}} - \frac{1}{(\ln \ln d_j)^\eta} \right) \geq A_J > 0, \end{aligned}$$

où  $A_J$  est une constante strictement positive, indépendante de  $j \in J$  (ici, nous avons utilisé le fait que  $\alpha_j < \bar{k}'$ , i.e.  $\chi_-^h(M_j) < \bar{k}'(\ln \ln d_j)^\eta$ ).

Toujours d'après le lemme 3.24, il existe une constante  $C > 0$  et  $D \in \mathbb{N}$  telle que pour tout  $\ell \in L$  avec  $d_\ell \geq D$ ,

$$\frac{\chi_-^{sh}(M_\ell)}{(\ln \ln d_\ell)^\eta} \geq C \frac{\ln d_\ell}{(\ln \ln d_\ell)^\eta} \geq A_L > 0,$$

où la constante  $A_L$  ne dépend pas de  $\ell \in L$ . Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini d'indices  $\ell \in L$  pour lesquels  $d_\ell < D$ , on peut choisir  $A_L$  de telle sorte que pour tout  $\ell \in L$ , l'inégalité  $\frac{\chi_-^{sh}(M_\ell)}{(\ln \ln d_\ell)^\eta} \geq A_L > 0$  est vérifiée.

Notons  $A$  le minimum de  $\bar{k}'$ ,  $A_J$  et  $A_L$ . Puisque  $\mathbb{N} = I \cup J \cup L$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{\chi_-^{sh}(M_n)}{(\ln \ln d_n)^\eta} \geq A > 0,$$

et donc

$$\nabla_{\log, \eta}^{sh}(M) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{\chi_-^{sh}(M_n)}{(\ln \ln d_n)^\eta} \geq A > 0,$$

ce qui démontre la partie (2) du théorème 3.6. □



## Chapitre 4

---

### Décompositions circulaires et classes d'homologie fibrées.

## 4.1 Décompositions circulaires et positions minces.

Rappelons que si  $S$  est une surface,  $\chi_-(S) = \max(-\chi(S), 0)$  est la partie négative de la caractéristique d'Euler de  $S$ . Si  $S$  est orientable, compacte, sans bord, et n'est pas une sphère, alors  $\chi_-(S) = -\chi(S) = |\chi(S)|$ .

**Définition 4.1.** Soit  $M$  une variété hyperbolique de dimension trois, connexe, orientée, compacte et sans bord. Si  $\alpha \in H^1(M) = H^1(M, \mathbb{Z})$  est une classe de cohomologie non triviale, notons  $\|\alpha\|$  sa norme de Thurston. Par définition,

$$\|\alpha\| = \min\{\chi_-(R), [R] = \mathcal{P}(\alpha)\},$$

où  $R$  est une surface plongée et  $\mathcal{P}(\alpha)$  la classe Poincaré-duale de  $\alpha$ . Nous appellerons une surface  $R$  réalisant la norme de Thurston de  $\alpha$  une **surface  $\|\alpha\|$ -minimisante**.

**Lemme 4.2.** Soit  $\alpha \in H^1(M)$  une classe de cohomologie non triviale. Toute surface  $R$  plongée et  $\|\alpha\|$ -minimisante est incompressible.

De plus, si la classe  $\alpha$  minimise la norme de Thurston pour toutes les classes non triviales de  $H^1(M) : \|\alpha\| = \min\{\|\beta\|, \beta \in H^1(M), \beta \neq 0\}$ , alors toute surface plongée  $\|\alpha\|$ -minimisante est connexe.

Démonstration du lemme 4.2.

Soit  $R$  une surface plongée  $\|\alpha\|$ -minimisante pour une classe  $\alpha \in H^1(M)$  non triviale. Par l'absurde, si  $R$  était compressible, après chirurgies, on pourrait obtenir une surface  $R'$  dans la même classe d'homologie que  $R$  et telle que  $\chi_-(R') < \chi_-(R)$ . (Comme la variété  $M$  est hyperbolique, les surfaces  $R'$  et  $R$  ne sont ni des sphères, ni des tores, et donc  $\chi_-(R) > 0$  et  $\chi_-(R') > 0$ .) Ceci contredit la minimalité de  $\chi_-(R)$ .

Soit  $\alpha \in H^1(M)$  une classe non triviale minimisant le norme de Thurston, et  $R$  une surface  $\|\alpha\|$ -minimisante. Supposons par l'absurde que  $R$  n'est pas connexe. Dans ce cas, la classe d'homologie d'au moins une composante connexe  $R'$  de  $R$  est également non triviale. Ainsi,  $\chi_-(R') < \chi_-(R)$  et  $\alpha$  ne peut pas minimiser la norme de Thurston de  $H^1(M)$ .  $\square$

Une décomposition circulaire est l'équivalent d'une décomposition de Heegaard généralisée, mais associée à une fonction de Morse qui n'est plus à valeurs sur l'intervalle  $I = [0, 1]$ , mais sur le cercle  $\mathbb{S}^1$ . Plus précisément, nous avons les définitions suivantes.

**Définition 4.3.** Une **fonction de Morse circulaire** est une fonction de Morse  $f : M \rightarrow \mathbb{S}^1$ .

Etant donnée une fonction de Morse circulaire  $f : M \rightarrow \mathbb{S}^1$ , la décomposition en anses de  $M$  donnée par  $f$  est appelée la **décomposition circulaire associée à  $f$** .

Nous renvoyons à F. Manjarrez-Gutiérrez [MG] pour plus de précisions sur les fonctions de Morse circulaires, ainsi qu'à Matsumoto [Mat] et Milnor [Mi]. Soit  $f : M \rightarrow \mathbb{S}^1$  une fonction de Morse circulaire. Si l'on ôte un petit voisinage ouvert

d'un point régulier  $x$  du cercle  $\mathbb{S}^1$ , on obtient par restriction de  $f$  une fonction de Morse  $g$  de  $M_R = M \setminus \mathcal{N}(R)$ , la variété  $M$  privée d'un petit voisinage régulier ouvert de la surface  $R = f^{-1}(\{x\})$ , sur l'intervalle  $I$ . Ainsi l'on peut appliquer à  $g$  la théorie des scindements de Heegaard et des scindements de Heegaard généralisés rappelée au paragraphe 0.1.

**Définition 4.4.** *Si  $R$  est une surface non séparante et  $\|\alpha\|$ -minimisante pour une certaine classe de cohomologie non triviale  $\alpha \in H^1(M)$ , soit  $\mathcal{N}(R) \cong R \times ]-1, 1[$  un voisinage régulier ouvert de  $R$  dans  $M$ , et  $M_R = M \setminus \mathcal{N}(R)$ . Notons*

$$h(M, \alpha, R) = \min\{\chi(R) - \chi(S)\},$$

où  $S$  est une surface de Heegaard pour  $(M_R, R \times \{1\}, R \times \{-1\})$ . En d'autres termes,  $\frac{1}{2}h(M, \alpha, R)$  est le nombre minimal de 1-anses qu'il faut attacher à un voisinage régulier  $R \times \{1\}$  de  $M_R$  pour obtenir le premier corps en anses du scindement de Heegaard de  $(M_R, R \times \{1\}, R \times \{-1\})$ .

*Posons*

$$h(M, \alpha) = h(\alpha) = \min\{h(M, \alpha, R), [R] = \mathcal{P}(\alpha), \chi_-(R) = \|\alpha\|\}.$$

Pour toute classe  $\alpha \in H^1(M)$  non triviale, soit  $\chi_-^c(\alpha) = \|\alpha\| + h(\alpha)$ , la **caractéristique circulaire** de  $\alpha$ . C'est la partie négative de la caractéristique d'Euler d'une surface de Heegaard pour  $M_R$  de genre minimal, où  $R$  est une surface  $\|\alpha\|$ -minimisante et telle que la quantité  $h(M, \alpha, R)$  est minimale parmi toutes les surfaces  $\|\alpha\|$ -minimisantes.

On peut ainsi voir une décomposition circulaire comme une décomposition en anses du cobordisme  $(M \setminus \mathcal{N}(R), R \times \{1\}, R \times \{-1\})$ . En commençant avec un scindement de Heegaard de surface  $S$  pour  $M_R = M \setminus \mathcal{N}(R)$ , on peut changer l'ordre dans lequel les 1- et 2-anses sont attachées pour obtenir un nouveau scindement de Heegaard généralisé  $(F_1 = R \times \{1\}, S_1, F_2, \dots, S_n, F_{n+1} = R \times \{-1\})$  pour  $(M_R, R \times \{1\}, R \times \{-1\})$ . En recollant de nouveau  $R \times \{1\}$  à  $R \times \{-1\}$ , on obtient ainsi une décomposition circulaire pour la variété  $M$ . Notons-la  $\mathcal{H} = (F_1, S_1, F_2, \dots, S_n, F_{n+1})$ , avec  $F_1 = F_{n+1} = R$ . Les surfaces  $F_j$  divisent  $M$  en  $n$  variétés de dimension trois à bord  $W_1, \dots, W_n$ , et les surfaces  $S_j$  sont des surfaces de Heegaard pour ces variétés : pour  $1 \leq j \leq n$ ,  $S_j$  scinde la variété  $W_j$  en deux corps en anses  $A_j$  et  $B_j$ , tels que  $\partial_+ A_j = \partial_+ B_j = S_j$ ,  $\partial_- A_j = F_j$  et  $\partial_- B_j = F_{j+1}$ .

Soit  $S$  une surface fermée. Si  $S$  est connexe, rappelons que la **complexité** de  $S$  est  $c(S) = \max(0, 2g(S) - 1)$ . Si  $S$  est constituée de plusieurs composantes connexes, la complexité de  $S$  est égale à la somme des complexités des composantes connexes de  $S$ . On a un analogue de la complexité d'un scindement de Heegaard généralisé dans le cas des décompositions circulaires.

**Définition 4.5.** *La **largeur circulaire** d'une décomposition circulaire  $\mathcal{H} = (F_1, S_1, F_2, \dots, S_n, F_{n+1})$  est l'ensemble des  $n$  entiers  $(c(S_1), \dots, c(S_n))$ , avec répétitions et rangés dans l'ordre décroissant. On munit les largeurs circulaires de l'ordre lexicographique.*

*L'entier  $n \geq 1$  est appelé la **longueur** de la décomposition circulaire  $\mathcal{H} = (F_1, S_1, F_2, \dots, S_n, F_{n+1})$ .*



**Proposition 4.6.** *Soit  $M$  une variété de dimension trois hyperbolique, connexe, orientée, compacte et sans bord. Soit  $R$  une surface orientable, compacte, sans bord, non séparante et incompressible, plongée dans  $M$ . Notons  $S$  une surface de Heegaard pour  $M \setminus \mathcal{N}(R)$ . En partant de la décomposition circulaire  $\mathcal{H} = (R, S, R)$  de  $M$ , il existe un nombre fini de chirurgies permettant d'aboutir à une décomposition circulaire  $\mathcal{H}' = (F_1, S_1, F_2, \dots, S_n, F_{n+1})$  avec  $F_1 = F_{n+1} = R$ , telle que :*

1. *la largeur circulaire de  $\mathcal{H}'$  est minimale parmi les largeurs de telles décompositions circulaires obtenues par un nombre fini de chirurgies de  $\mathcal{H}$ ,*
2. *chaque surface  $S_j$  est une surface de Heegaard fortement irréductible pour la décomposition de Heegaard  $(A_j, B_j)$  de  $W_j$  et  $g(S_j) \leq g(S)$ ,*
3. *chaque surface  $F_j$  est incompressible, n'a aucune composante connexe qui soit une sphère, et  $g(F_j) \leq g(S)$ ,*
4.  $n \leq \frac{1}{2}(\chi(R) - \chi(S))$ ,
5.  $\chi(R) - \chi(S) = \sum_{j=1}^n (\chi(F_j) - \chi(S_j))$ .
6. *Si de plus cette décomposition  $\mathcal{H}'$  est de longueur au moins 2, quitte à éliminer certaines surfaces, on peut supposer que pour tout indice  $j$ , les surfaces  $F_j$  et  $F_{j+1}$  ne sont pas parallèles.*

**Définition 4.7.** *Soit  $\mathcal{H}$  une décomposition circulaire. Une décomposition circulaire  $\mathcal{H}' = (F_1, S_1, F_2, \dots, S_n, F_{n+1})$  minimisant la largeur circulaire parmi toutes les décompositions circulaires obtenues à partir de  $\mathcal{H}$  par un nombre fini de chirurgies est dite **en position mince**. Nous l'appellerons **une décomposition circulaire mince associée à  $\mathcal{H}$** .*

Démonstration de la proposition 4.6.

La démonstration de cette proposition est essentiellement la preuve de [MG, Théorème 3.2], qui est elle-même une adaptation des techniques de [ST2] au cas des décompositions circulaires (voir aussi [La3]).

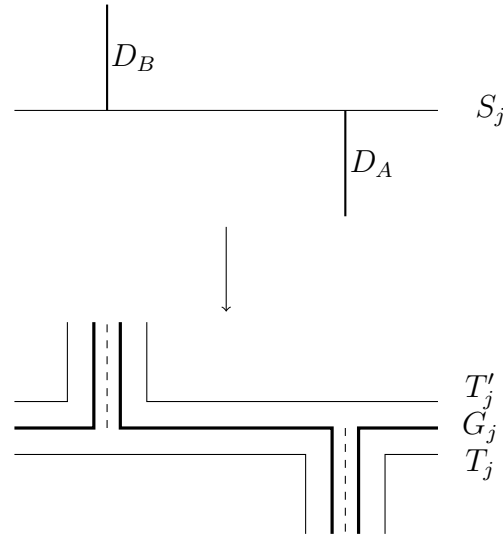
On commence avec la décomposition circulaire  $\mathcal{H} = (R, S, R)$ . Il s'agit d'effectuer un certain nombre de chirurgies pour obtenir une décomposition en position mince, i.e. de complexité minimale. Chaque chirurgie correspond à un changement de l'ordre dans lequel les 1- et 2-anses sont attachées, de telle sorte qu'une chirurgie diminue strictement la largeur circulaire de la décomposition. Ainsi, le nombre de chirurgies nécessaires pour obtenir une décomposition en position mince est fini.

**Lemme 4.8.** *Soit  $\mathcal{H} = (F_1, S_1, \dots, S_n, F_{n+1})$  une décomposition circulaire de  $M$ , et supposons que pour un certain indice  $j$ , la surface de Heegaard  $S_j$  pour  $(A_j, B_j)$  soit faiblement réductible. Alors il existe une opération dite de **chirurgie** permettant d'obtenir à partir de  $\mathcal{H}$  une nouvelle décomposition circulaire  $\mathcal{H}'$  dont la largeur circulaire est strictement plus petite que celle de  $\mathcal{H}$ .*

Démonstration du lemme 4.8.

Puisque la surface de Heegaard  $S_j$  est faiblement réductible, il existe deux disques de compression pour  $S_j$  disjoints,  $D_A$  plongé dans  $A_j$  et  $D_B$  dans  $B_j$ . En effectuant des chirurgies le long de ces deux disques, on obtient une nouvelle décomposition circulaire  $\mathcal{H}' = (F_1, \dots, F_j, T_j, G_j, T'_j, F_{j+1}, \dots, F_{n+1})$ , où la surface  $T_j$  est obtenue à

partir de  $S_j$  par chirurgie le long de  $D_A$ ,  $T'_j$  à partir de  $S_j$  par chirurgie le long de  $D_B$ , et  $G_j$  à partir de  $S_j$  par chirurgie le long de  $D_A$  et de  $D_B$ . Puisque  $|\chi(T_j)| = |\chi(T'_j)| = |\chi(S_j)| - 2$ , la largeur circulaire de cette nouvelle décomposition circulaire est strictement plus petite que celle de  $\mathcal{H}$ .



□

Comme  $\chi(T_j) = \chi(T'_j) = \chi(S_j) + 2$  et  $\chi(G_j) = \chi(S_j) + 4$ , on a  $-\chi(S_j) = -\chi(T_j) + \chi(G_j) - \chi(T'_j)$ . Ainsi, cette opération de chirurgie ne modifie pas la somme alternée  $\sum(\chi(F_j) - \chi(S_j))$ .

Puisque cette opération de chirurgie décroît strictement la largeur circulaire de la décomposition, il existe un nombre fini de telles étapes permettant d'aboutir à une décomposition circulaire  $\mathcal{H}' = (F_1, S_1, \dots, S_n, F_{n+1})$ , où  $F_1 = F_{n+1} = R$ , dont la largeur circulaire est minimale parmi toutes les décompositions obtenues à partir de la décomposition circulaire de départ  $\mathcal{H} = (R, S, R)$  par chirurgies.

Pour démontrer (2), on remarque que si l'une des surfaces de Heegaard  $S_j$  n'était pas fortement irréductible, d'après le lemme 4.8, on pourrait réaliser une nouvelle chirurgie pour obtenir une nouvelle décomposition circulaire de largeur circulaire strictement plus petite que celle de  $\mathcal{H}'$ , ce qui est une contradiction.

La démonstration du point (3) est la même que celle de [MG]. La surface  $R = F_1 = F_{n+1}$  est incompressible. Supposons par l'absurde que l'une des surfaces  $F_j$  soit compressible, pour un certain indice  $j$  entre 2 et  $n$ . Il existe alors un disque de compression  $D$  pour  $F_j$ . En prenant un disque le plus à l'intérieur, on peut supposer de plus que  $D \cap (\cup_{k=1}^n F_k) = D \cap F_j = \partial D$ . Ainsi, le disque  $D$  est situé entièrement dans la région  $W_{j-1}$  bordée par les surfaces  $F_{j-1}$  et  $F_j$ , ou est entièrement plongé dans la région  $W_j$  bordée par  $F_j$  et  $F_{j+1}$ . Supposons par exemple que  $D$  est tout entier plongé dans  $W_j$ . D'après la version à bord du lemme de Haken [Hak] (voir le théorème 0.11 deuxième partie), puisque  $W_j$  est  $\partial$ -réductible, tout scindement de Heegaard de  $W_j$  est réductible, et donc a fortiori faiblement réductible. Mais on a démontré en (2) que la surface de Heegaard  $S_j$  est fortement irréductible, ce qui est une contradiction, prouvant la première partie du point (3).

Si une des composantes d'une surface  $F_j$  est une sphère  $\mathbb{S}^2$ , par irréductibilité de  $M$ , cette sphère borde une boule plongée dans  $M$ . En choisissant une sphère la plus à l'intérieur, on obtient une sphère qui délimite un scindement de Heegaard d'une boule  $\mathbb{B}^3$ . Mais ce scindement, s'il n'est pas trivial, est réductible (voir [Wa1]), donc faiblement réductible, ce qui contredit le point (2) et achève la démonstration du point (3).

Pour démontrer le point (4), remarquons que l'opération de chirurgie décrite ci-dessus n'est autre qu'un changement dans l'ordre d'attachement des anses. En effet, avec les notations précédentes, si l'on prend une décomposition en anses associée à  $\mathcal{H}$  où les 1- et 2-anses correspondent à des disques méridiens pour les scindements de Heegaard, une chirurgie est un réarrangement d'anses. On attache la 2-anse correspondant au disque méridien  $D_B$  avant la 1-anse correspondant à  $D_A$ . Ainsi, cette opération ne change pas le nombre de 1- et 2-anses. Dans la décomposition circulaire  $\mathcal{H} = (R, S, R)$  dont nous sommes partis, le nombre de 1- et 2-anses est égal à  $\chi(R) - \chi(S)$ . Par suite, après chacune des chirurgies, il y a encore  $\frac{1}{2}(\chi(R) - \chi(S))$  1-anses et  $\frac{1}{2}(\chi(R) - \chi(S))$  2-anses. Comme le nombre de régions d'une décomposition circulaire  $\mathcal{H}'$  est majoré par le nombre de 1- et 2-anses constituant cette décomposition, il y a au plus  $\chi(R) - \chi(S)$  régions dans  $\mathcal{H}$ . Ainsi, le nombre de surfaces paires  $F_j$  est majoré par  $\frac{1}{2}(\chi(R) - \chi(S))$ . Autrement dit,  $n \leq \frac{1}{2}(\chi(R) - \chi(S))$ , ce qui démontre le point (4).

Enfin, pour ce qui est du point (5), si la longueur de la décomposition est égale à un, cela signifie qu'il n'y a qu'une seule surface incompressible  $F_1 = R = F_2$ . Si  $F_1$  est parallèle à  $F_2$  dans  $M_R$ , cela signifie qu'en fait, la variété  $M$  est fibrée sur le cercle, de fibre  $R$ .

Si la longueur du scindement  $\mathcal{H}'$  est au moins 2, supposons qu'il existe deux surfaces  $F_j$  et  $F_{j+1}$  parallèles pour un certain  $j$ . D'après le point (2) de la proposition, la surface  $S_j$  est une surface de Heegaard fortement irréductible pour le produit situé entre  $F_j$  et  $F_{j+1}$ . D'après la classification des scindements de Heegaard des produits (voir [ST1]), cela signifie que  $S_j$  est parallèle à  $F_j$  et donc on peut amalgamer les surfaces  $F_j$  et  $F_{j+1}$  en une seule surface, en oubliant la surface  $S_j$ , pour obtenir une nouvelle décomposition circulaire de complexité strictement plus petite que celle de  $\mathcal{H}'$  et vérifiant toujours les autres points de la proposition 4.6.  $\square$

**Remarque 4.9.** *Comme défini au Théorème 3.2 de [MG], nous dirons qu'une surface orientable  $S$  est **faiblement incompressible** s'il n'existe pas de couples de disques de compression  $(D_0, D_1)$  pour  $S$  situés de part et d'autre de  $S$  et tels que  $\partial D_0 \cap \partial D_1 = \emptyset$ . Avec cette définition, en fait, chacune des surfaces  $S_j$  est également faiblement incompressible.*

Démonstration de la remarque 4.9.

En effet, d'après le point (3) de la proposition 4.6, la réunion  $\cup_{j=1}^n F_j$  est incompressible. On peut alors prendre deux tels disques  $D_0$  et  $D_1$  dans  $M \setminus \cup_{j=1}^n F_j$ , et ils constituent des disques méridiens pour le scindement de Heegaard associé à  $S_j$ . Mais ceci contredirait le fait que  $S_j$  est une surface de Heegaard fortement irréductible.  $\square$

**Corollaire 4.10.** *Soient  $M$ ,  $R$  et  $S$  comme précédemment, et  $\mathcal{H}' = (F_1 = R, S_1, \dots, F_{n+1} = R)$  une décomposition circulaire mince associée à  $(R, S, R)$ . Soit  $\bar{F}$  la surface*

obtenue à partir de  $\bigcup_j F_j \cup \bigcup_j S_j$  en amalgamant les composantes connexes parallèles et bordant des produits dans  $M \setminus \left( \bigcup_j F_j \cup \bigcup_j S_j \right)$  en une seule composante. Alors

1.  $|\chi(\overline{F})| \leq \left| \chi\left(\bigcup_j F_j \cup \bigcup_j S_j\right) \right| \leq |\chi(S) - \chi(R)| |\chi(S)|$ , et
2. la surface  $\overline{F}$  a au plus  $\frac{3}{2} |\chi(S) - \chi(R)|$  composantes connexes.

Démonstration du corollaire 4.10.

Nous adaptons la démonstration de [La1, Corollaire 4]. Tout d'abord, remarquons qu'aucun des corps en anses dans le complémentaire de  $\bigcup_j F_j \cup \bigcup_j S_j$  n'est une boule de dimension 3 trouée, puisqu'aucune composante de  $\bigcup_j F_j \cup \bigcup_j S_j$  n'est une sphère de dimension 2.

Comme  $M$  est hyperbolique, aucun corps en anses de la décomposition en position mince ne peut être un tore solide.

**Remarque 4.11.** Une autre manière de prouver le point (4) de la proposition 4.6 à partir du point (5) est la suivante.

Rappelons que  $F_1 = R = F_{n+1}$ . Nous pouvons réécrire le point (5) de la proposition 4.6 :

$$\chi(R) - \chi(S) = \frac{\chi(F_1) - \chi(S_1)}{2} + \frac{\chi(F_2) - \chi(S_1)}{2} + \frac{\chi(F_2) - \chi(S_2)}{2} + \dots + \frac{\chi(F_{n+1}) - \chi(S_n)}{2}. \quad (4.1)$$

Si  $H$  est un corps en anses qui n'est ni une boule de dimension trois à trous, ni un tore solide, ni un produit, alors  $\chi(\partial_- H) - \chi(\partial_+ H) > 0$  et cet entier est pair. Comme les  $2n$  composantes connexes du complémentaire de  $\bigcup_j F_j \cup \bigcup_j S_j$  sont de tels corps en anses, le membre de droite de l'équation (4.1) est minoré par  $2n$ . Ainsi,  $2n \leq \chi(R) - \chi(S)$ . C'est bien le point (4) de la proposition 4.6.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \left| \chi\left(\bigcup_j F_j \cup \bigcup_j S_j\right) \right| &= \sum_{j=1}^n |\chi(F_j)| + \sum_{j=1}^n |\chi(S_j)| \\ &\leq 2n |\chi(S)| \\ &\leq |\chi(R) - \chi(S)| |\chi(S)|. \end{aligned}$$

Puisque l'on a oublié certaines composantes connexes de  $\bigcup_j F_j \cup \bigcup_j S_j$  pour former  $\overline{F}$ , il vient  $|\chi(\overline{F})| \leq \left| \chi\left(\bigcup_j F_j \cup \bigcup_j S_j\right) \right|$ , ce qui démontre le point (1) du corollaire 4.10.

Si  $H$  est un corps en anses qui n'est ni une boule de dimension trois trouée, ni un tore solide, ni un produit, on peut vérifier que  $|\partial H| \leq \frac{3}{2} (\chi(\partial_- H) - \chi(\partial_+ H))$ . La somme de  $\chi(\partial_- H) - \chi(\partial_+ H)$  sur tous les corps en anses  $H$  constituant le complémentaire de  $\bigcup_j F_j \cup \bigcup_j S_j$  est égale à

$$\sum_H (\chi(\partial_- H) - \chi(\partial_+ H)) = 2 \sum_{j=1}^n (\chi(F_j) - \chi(S_j)) = 2(\chi(R) - \chi(S)).$$

Or, le nombre de composantes connexes de  $\bar{F}$  est majoré par  $\frac{1}{2} \sum_H |\partial H|$ , où  $H$  parcourt les corps en anses qui constituent les composantes connexes de  $M \setminus \left( \bigcup_j F_j \cup \bigcup_j S_j \right)$  qui ne sont pas des produits. Mais

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_H |\partial H| &\leq \frac{1}{2} \sum_H \frac{3}{2} (\chi(\partial_- H) - \chi(\partial_+ H)) \\ &= \frac{3}{2} \sum_{j=1}^n (\chi(F_j) - \chi(S_j)) \\ &= \frac{3}{2} |\chi(R) - \chi(S)|. \end{aligned}$$

Par suite,  $|\bar{F}| \leq \frac{3}{2} |\chi(R) - \chi(S)|$ , ce qui achève la démonstration du corollaire 4.10.  $\square$

**Corollaire 4.12.** *Soit  $M$  une variété de dimension trois hyperbolique, connexe, orientée, compacte et sans bord. Soit  $\mathcal{H} = (F_1, S_1, F_2, \dots, S_n, F_{n+1})$  une décomposition circulaire de  $M$  en position mince. Alors, à isotopie près, on peut supposer que toutes les surfaces  $F_j$  et  $S_j$  sont pseudo-minimales.*

#### Démonstration du corollaire 4.12.

D'après la proposition 4.6 (2) et (3), les surfaces  $F_j$  sont incompressibles pour tout  $j$  et les surfaces  $S_j$  correspondent à des surfaces de Heegaard fortement irréductibles. Il suffit alors d'appliquer le théorème 3.16 (2) et (3) du chapitre trois. Détaillons.

Pour chaque surface  $F_j$ , avec  $j = 1, \dots, n$ , on peut réaliser une isotopie entre  $F_j$  et une surface minimale ou le bord d'un petit voisinage régulier d'une surface minimale non orientable (voir [FHS], [MSY, Théorème Principal p. 127] et [SY, Théorème 5.1 p. 610]). Autrement dit, nous pouvons supposer que les surfaces  $F_j$  sont toutes pseudo-minimales.

D'après un résultat de Pitts et Rubinstein [PR] (voir aussi [FH, Théorème 2.4 p. 533] et [Sou, Théorème 3.6 p. 18]), toute surface de Heegaard fortement irréductible est isotope à une surface minimale ou au bord d'un petit voisinage régulier d'une surface minimale non orientable, avec un petit tube attaché verticalement dans la structure de  $I$ -fibré. On peut donc également réaliser une isotopie entre les surfaces  $S_j$  pour tout  $j$  et des surfaces pseudo-minimales, en laissant invariantes les surfaces pseudo-minimales  $F_j$ .  $\square$

## 4.2 Constante de Cheeger et caractéristique circulaire.

Comme la théorie des décompositions circulaires a beaucoup d'analogie avec celle des scindements de Heegaard généralisés, certains résultats obtenus avec des décompositions de Heegaard sont encore valables pour les décompositions circulaires. C'est le cas du théorème suivant, qui est une adaptation du Théorème 4.1 p. 341 de [La3].

**Proposition 4.13.** *Soit  $M$  une variété de dimension trois hyperbolique, connexe, orientée, compacte et sans bord. Si  $\alpha \in H^1(M)$  est une classe de cohomologie non triviale, admettant une surface  $\|\alpha\|$ -minimisante et  $h(M, \alpha)$ -minimisante connexe, alors la constante de Cheeger  $h(M)$  vérifie :*

$$h(M) \leq \frac{8\pi\chi_-(\alpha)}{\text{Vol}(M)}.$$

Démonstration de la proposition 4.13.

Soit  $R$  une surface  $\|\alpha\|$ -minimisante et connexe, telle que  $h(M, \alpha, R) = h(M, \alpha)$ . Soit  $S$  une surface de Heegaard pour  $M_R$  de genre minimal. Prenons une décomposition circulaire mince  $\mathcal{H}' = (F_1 = R, S_1, F_2, \dots, F_{n+1} = R)$  associée à  $\mathcal{H} = (R, S, R)$ . Les surfaces  $F_1, \dots, F_n$  sont incompressibles dans  $M$  et n'ont aucune composante sphérique.

D'après le corollaire 4.12, nous pouvons supposer que les surfaces  $F_j$  pour  $j = 1, \dots, n$  sont toutes pseudo-minimales.

Pour  $j = 1, \dots, n$ , soit  $W_j$  la composante connexe de  $M \setminus \left(\bigcup_{j=1}^n F_j\right)$  située entre les surfaces  $F_j$  et  $F_{j+1}$ . Avec ces notations,

$$\text{Vol}(M) = \sum_{j=1}^n \text{Vol}(W_j).$$

Soit  $j \geq 1$  le plus grand entier naturel tel que  $\text{Vol}(W_1 \cup \dots \cup W_{j-1}) \leq \frac{\text{Vol}(M)}{2}$ . Si  $\text{Vol}(W_1) > \frac{\text{Vol}(M)}{2}$ , prenons  $j = 1$ . Ainsi,  $\text{Vol}(W_1 \cup \dots \cup W_j) > \frac{\text{Vol}(M)}{2}$ , et donc  $\text{Vol}(W_{j+1} \cup \dots \cup W_n) \leq \frac{\text{Vol}(M)}{2}$ .

La surface  $S_j$  est une surface de Heegaard pour  $W_j$ . Elle correspond à une surface de balayage entre deux échines pour les corps en anses qu'elle sépare. Or, dans chaque classe de surfaces de balayage pour  $W_j$ , il existe une surface dont l'aire est maximale. La borne inférieure de l'aire de toutes les surfaces de balayage d'aire maximale dans leur classe est appelée une valeur **minimax**. D'après un résultat de Pitts et Rubinstein [PR] (voir aussi [FH, Théorème 2.4 p. 533] et [Sou, Théorème 3.6 p. 18]), il existe une surface minimale  $\Sigma$  plongée dans  $W_j$  et dont l'aire est égale à cette valeur minimax. De plus, ces références montrent également que cette surface peut s'obtenir à partir de  $S_j$  par chirurgies, et en amalgamant certaines composantes parallèles de  $S_j$  en une seule composante. En particulier,  $|\chi(\Sigma)| \leq |\chi(S_j)|$ .

La surface minimale  $\Sigma$  peut être munie de la métrique intrinsèque induite par la métrique hyperbolique de  $M$ . Comme  $\Sigma$  est une surface minimale, sa courbure moyenne est identiquement nulle. Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont ses courbures principales, cela signifie que la somme  $\lambda_1 + \lambda_2$  est identiquement nulle. Par conséquent, la courbure intrinsèque  $\lambda_1\lambda_2$  de  $\Sigma$  est négative ou nulle. La courbure extrinsèque de  $\Sigma$  au point  $x \in \Sigma$  est donc :

$$K^\Sigma = K^M(T_x\Sigma) + \lambda_1\lambda_2 \leq -1,$$

où  $K^M(\sigma) \equiv -1$  est la courbure sectionnelle du 2-plan  $\sigma = T_x\Sigma$  dans la variété hyperbolique  $M$ .

La formule de Gauss-Bonnet peut alors s'écrire :

$$2\pi\chi(\Sigma) = \int_{\Sigma} K^{\Sigma}(x)dx \leq -\text{Aire}(\Sigma).$$

Ainsi,

$$\text{Aire}(\Sigma) \leq 2\pi |\chi(\Sigma)| \leq 2\pi |\chi(S_j)| \leq 2\pi\chi_-^c(\alpha).$$

Soit  $\nu > 0$ , avec  $\nu \leq \frac{1}{4} \left( \text{Vol}(W_1 \cup \dots \cup W_{j+1}) - \frac{\text{Vol}(M)}{2} \right)$ . Il existe un balayage de  $W_j$  pour lequel l'aire maximale des surfaces de balayage est au plus  $\text{Aire}(\Sigma) + \nu \leq 2\pi\chi_-^c(\alpha) + \nu$ .

Soit  $f$  une fonction de Morse associée à ce balayage. Les surfaces de niveau  $S_t = f^{-1}(\{t\})$  pour  $t \in ]0, 1[$  sont des surfaces de Heegaard pour  $W_j$ . Pour tout  $t \in ]0, 1[$ , ajoutons un tube très fin dans  $W_1 \cup \dots \cup W_j$  connectant  $S_t$  à la surface pseudo-minimale  $F_1 = R$  pour obtenir une surface séparante  $T_t$ . Comme  $R$  est une surface pseudo-minimale, son aire est majorée par  $2\pi |\chi(R)| + \nu$ . Si le tube est suffisamment fin de telle sorte que son aire soit au plus  $\nu$ , l'aire de la surface  $T_t$  est au plus égale à  $2\pi(|\chi(R)| + |\chi(S_j)|) + 2\nu \leq 4\pi\chi_-^c(\alpha) + 2\nu$ . De plus, on peut faire en sorte que le volume de la région bordée par le tube soit au plus  $\nu$ . Soit  $M(t)$  la composante connexe de  $M \setminus T_t$  contenant la surface  $F_j$  privée de certains disques enlevés par le tube. Comme  $\text{Vol}(W_1 \cup \dots \cup W_{j-1}) \leq \frac{\text{Vol}(M)}{2}$ , pour  $t$  suffisamment petit,  $\text{Vol}(M(t)) \leq \frac{\text{Vol}(M)}{2} + \nu$ . Mais si  $t$  est proche de 1,  $\text{Vol}(M(t)) > \frac{\text{Vol}(M)}{2} + \nu$ . Puisque la fonction  $t \mapsto \text{Vol}(M(t))$  est continue, il existe un temps  $t \in ]0, 1[$  tel que la surface  $T_t$  sépare la variété  $M$  en deux composantes de volumes égaux à  $\frac{\text{Vol}(M)}{2} - \nu$  et  $\frac{\text{Vol}(M)}{2} + \nu$ .

Ainsi,

$$h(M) \leq \frac{\text{Aire}(T_t)}{\frac{\text{Vol}(M)}{2} - \nu} \leq \frac{2(4\pi\chi_-^c(\alpha) + 2\nu)}{\text{Vol}(M) - \nu}.$$

Lorsque  $\nu$  tend vers zéro, il vient :

$$h(M) \leq \frac{8\pi\chi_-^c(\alpha)}{\text{Vol}(M)}.$$

On obtient ainsi la proposition 4.13. □

**Définition 4.14.** Si  $M$  est une variété hyperbolique de dimension trois, connexe, orientée, compacte, sans bord et dont le premier nombre de Betti est non nul, définissons la **caractéristique circulaire** de  $M$  par :

$$\chi_-^c(M) = \min \{ \chi_-^c(\alpha), \alpha \in H^1(M) \setminus \{0\}, \|\alpha\| = \min \{ \|\beta\|, \beta \in H^1(M) \setminus \{0\} \} \}.$$

Si le premier nombre de Betti de  $M$  est nul, par convention, posons  $\chi_-^c(M) = +\infty$ .

**Corollaire 4.15.** Soit  $M$  une variété hyperbolique de dimension trois, connexe, orientée, compacte et sans bord. Soit  $(M_i \rightarrow M)_{i \in I}$  une famille infinie de revêtements finis de  $M$  de degrés  $d_i$  telle que le groupe fondamental  $\pi_1(M)$  a la propriété  $(\tau)$  relativement à la famille  $\{\pi_1(M_i)\}_{i \in I}$ . Alors,  $\inf_{i \in I} \frac{\chi_-^c(M_i)}{d_i} > 0$ .

Démonstration du corollaire 4.15.

Si le groupe fondamental  $\pi_1(M)$  a la propriété  $(\tau)$  relativement à la famille  $\{\pi_1(M_i)\}_{i \in I}$ , d'après [Lu] (voir aussi [La3] p. 326), il existe une constante  $\rho > 0$  telle que pour tout  $i \in I$ ,  $h(M_i) \geq \rho$ . Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , soit  $\alpha_i$  une classe de cohomologie non triviale, minimisant la norme de Thurston pour toutes les classes de cohomologie non triviales de  $M_i$ , et telle que  $\chi_-^c(\alpha_i) = \chi_-^c(M_i)$ . D'après le lemme 4.2, toute surface  $\|\alpha_i\|$ -minimisante est connexe. Comme d'après la proposition 4.13,  $h(M_i) \leq \frac{8\pi\chi_-^c(M_i)}{d_i \text{Vol}(M)}$ , on en déduit que  $\inf_{i \in I} \frac{\chi_-^c(M_i)}{d_i} \geq \frac{\rho \text{Vol}(M)}{8\pi} > 0$ .  $\square$

### 4.3 Classes d'homologie et fibration de revêtements réguliers.

**Théorème 4.16.** *Soit  $M$  une variété de dimension trois hyperbolique, connexe, orientée, compacte et sans bord, et  $\epsilon \leq \text{Inj}(M)/2$ . Il existe une constante explicite  $\ell = \ell(\epsilon, \text{Vol}(M))$ , ne dépendant que de  $\epsilon$  et du volume de  $M$ , et ayant les propriétés suivantes. Soit  $\alpha \in H^1(M)$  une classe de cohomologie non triviale et  $R$  une surface  $\|\alpha\|$ -minimisante. Soit  $M' \rightarrow M$  un revêtement **galoisien** fini de  $M$ , de degré  $d$ . Soit  $R'$  une composante connexe de l'image réciproque de  $R$  dans le revêtement  $M'$ , et  $\alpha'$  la classe de cohomologie dans  $H^1(M', \mathbb{Z})$  Poincaré-duale de  $[R']$ .*

*Si  $\ell \chi_-^c(\alpha') \leq \sqrt[4]{d}$ , alors la variété  $M$  est fibrée sur le cercle et la surface  $R$  est une fibre.*

**Remarque 4.17.** *L'expression explicite de la constante  $\ell$  permet de montrer que si le volume  $\text{Vol}(M)$  est fixé et que  $\epsilon$  tend vers zéro, ou que si  $\epsilon$  est fixé et que le volume  $\text{Vol}(M)$  tend vers l'infini,  $\ell$  tend vers l'infini, ce qui rend la condition suffisante de plus en plus difficile à vérifier.*

Le corollaire suivant découle directement du théorème 4.16.

**Corollaire 4.18.** *Soit  $M$  une variété hyperbolique de dimension trois, connexe, orientée, compacte et sans bord. Soit  $\alpha \in H^1(M)$  une classe de cohomologie non triviale et  $R$  une surface  $\|\alpha\|$ -minimisante. Soit  $(M_i \rightarrow M)_{i \in \mathbb{N}}$  une famille de revêtements finis galoisiens de  $M$  de degrés  $d_i$ . Pour tout indice  $i \in \mathbb{N}$ , soit  $R_i$  une composante connexe de l'image réciproque de  $R$  dans  $M_i$ , et  $\alpha_i \in H^1(M_i)$  la classe Poincaré-duale de la classe de  $R_i$  dans  $H_2(M_i)$ . Si*

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{\chi_-^c(\alpha_i)}{\sqrt[4]{d_i}} = 0,$$

*alors la variété  $M$  est fibrée sur le cercle, et la surface  $R$  est une fibre.*

Démonstration du corollaire 4.18.

La preuve est immédiate en admettant le théorème 4.16. Si  $\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{\chi_-^c(\alpha_i)}{\sqrt[4]{d_i}} = 0$ , pour  $i$  suffisamment grand,  $\ell \chi_-^c(\alpha_i) \leq \sqrt[4]{d_i}$ , et on applique alors le théorème 4.16 au revêtement fini galoisien  $M_i \rightarrow M$ .  $\square$

Un cas particulier intéressant du corollaire 4.18 est le corollaire suivant.



**Corollaire 4.19.** *Soit  $M$  une variété de dimension trois hyperbolique, connexe, orientée, compacte et sans bord. Soit  $\alpha \in H^1(M)$  une classe de cohomologie non triviale et  $R$  une surface  $\|\alpha\|$ -minimisante. Soit  $(M_i \rightarrow M)_{i \in \mathbb{N}}$  la famille des revêtements finis cycliques de  $M$  associés à la classe  $\alpha$ , telle que pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , le revêtement  $p_i : M_i \rightarrow M$  est régulier de degré  $i$ . Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , soit  $\alpha_i = p_i^*(\alpha)$  la classe de cohomologie dans  $H^1(M_i, \mathbb{Z})$  correspondant à  $\alpha$ . Si*

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{h(M_i, \alpha_i)}{\sqrt[4]{i}} = 0,$$

*alors la variété  $M$  est fibrée sur le cercle et la surface  $R$  est une fibre.*

Démonstration du corollaire 4.19.

Comme le revêtement  $M_i \rightarrow M$  est le revêtement à  $i$  feuillets associé à  $\alpha$  et que  $\alpha_i = p_i^*(\alpha)$ ,  $\|\alpha_i\| = \|\alpha\|$ . Ainsi,  $\chi_-^c(\alpha_i) = \|\alpha_i\| + 2h(M_i, \alpha_i) = \|\alpha\| + 2h(M_i, \alpha_i)$ , et  $\lim_{i \rightarrow +\infty} \chi_-^c(\alpha_i)/\sqrt[4]{i} = 0$  si et seulement si  $\lim_{i \rightarrow +\infty} h(M_i, \alpha_i)/\sqrt[4]{i} = 0$ . Il suffit alors d'appliquer le corollaire 4.18.  $\square$

Démonstration du théorème 4.16.

La preuve est adaptée de la preuve de [La1, Théorème 1 (3)], en calculant des constantes explicites.

Comme dans les hypothèses du théorème 4.16, soit  $M$  une variété de dimension trois hyperbolique, connexe, orientée, compacte et sans bord, et  $\epsilon \leq \text{Inj}(M)/2$ . Soit  $\alpha \in H^1(M)$  une classe de cohomologie non triviale et  $R$  une surface  $\|\alpha\|$ -minimisante. Soit  $M' \rightarrow M$  un revêtement **galoisien** fini de  $M$ , de degré  $d$ . Soit  $R'$  une composante connexe de l'image réciproque de  $R$  dans le revêtement  $M'$ , et  $\alpha'$  la classe de cohomologie dans  $H^1(M', \mathbb{Z})$  Poincaré-duale de  $[R']$ . Dans un premier temps et pour les besoins de la démonstration, supposons de plus que  $R'$  est  $\|\alpha'\|$ -minimisante et réalise  $\chi_-^c(\alpha') : h(M', \alpha', R') = h(M', \alpha')$ .

Soit  $S'$  une surface de Heegaard de complexité minimale pour  $M'_{R'} = M' \setminus \mathcal{N}(R')$ . Par construction,  $|\chi(S')| = \chi_-^c(\alpha')$ . En appliquant la proposition 4.6 à la décomposition circulaire  $(R', S', R')$ , on obtient une décomposition circulaire en position mince  $\mathcal{H}' = (F_1, S_1, \dots, F_{n_i+1})$ , où  $F_1 = F_{n_i+1} = R'$ . De plus, les surfaces  $F_j$  et  $S_j$  sont isotopes à des surfaces pseudo-minimales. Si  $\overline{F}$  est la surface obtenue à partir de  $\bigcup F_j \cup \bigcup S_j$  comme au corollaire 4.10, alors  $\overline{F}$  est une surface pseudo-minimale, et d'après le corollaire 4.10,  $|\chi(\overline{F})| \leq |\chi(R') - \chi(S')| |\chi(S')| \leq \chi_-^c(\alpha')^2$ .

Soit  $\mathcal{D}$  un polyèdre de Dirichlet pour la variété  $M$  dans son revêtement universel  $\mathbb{H}^3$ . La réunion des translatés de  $\mathcal{D}$  sous l'action du groupe fondamental de  $M$  constitue un pavage de  $\mathbb{H}^3$ . Par le revêtement  $\mathbb{H}^3 \rightarrow M'$ , ce pavage se projette en un pavage de  $M'$  par  $d$  copies de  $\mathcal{D}$ . Soit  $\mathcal{D}'$  l'un de ces polyèdres. Puisque le revêtement  $M' \rightarrow M$  est galoisien, le pavage de  $M'$  s'obtient en translatant  $\mathcal{D}'$  par les éléments du groupe  $G = \pi_1(M)/\pi_1(M')$ .

Notons  $a' = 6 \left( \frac{21}{4} + \frac{3}{4\pi} + \frac{3}{4\epsilon} + \frac{2}{\sinh^2(\frac{\epsilon}{4})} \right)$ . D'après le lemme 1.13 du chapitre 1, si  $\Sigma$  est une surface pseudo-minimale, le  $\epsilon$ -diamètre de  $\Sigma$  est majoré par  $a' |\chi(\Sigma)|$ .

Posons  $D = \frac{8\epsilon \text{Vol}(M)}{\pi(\sinh(2\epsilon) - 2\epsilon)}$ . D'après le lemme 1.9 du chapitre 1, c'est un majorant du diamètre de  $\mathcal{D}$ , et donc aussi de  $\mathcal{D}'$ .

**Lemme 4.20.** Notons  $\kappa = a' \frac{\pi(\sinh(2D+2\epsilon)-2D-2\epsilon)}{\text{Vol}(M)}$ . Si  $\Sigma$  est une surface pseudo-minimale dans  $M'$ ,  $\Sigma$  intersecte au plus  $\kappa |\chi(\Sigma)|$  translatés de  $\mathcal{D}'$  sous l'action du groupe  $G = \pi_1(M)/\pi_1(M')$ . Vu sous un autre angle, pour un translaté donné de  $\mathcal{D}'$  dans  $M'$ , il existe au plus  $\kappa |\chi(\Sigma)|$  copies de  $\Sigma$  sous l'action du groupe  $G$  qui l'intersectent.

Démonstration du lemme 4.20.

Il suffit d'appliquer le lemme 1.9 du chapitre 1. La surface  $\Sigma$  plongée dans  $M'$  peut être recouverte par au plus  $a' |\chi(\Sigma)|$  boules plongées dans  $M'$  et de rayon  $\epsilon$ . Cette surface ne peut alors pas intersecter plus de  $\lfloor \frac{\pi(\sinh(2D+2\epsilon)-2D-2\epsilon)}{\text{Vol}(M)} a' |\chi(\Sigma)| \rfloor \leq \frac{\pi(\sinh(2D+2\epsilon)-2D-2\epsilon)}{\text{Vol}(M)} a' |\chi(\Sigma)|$  translatés de  $\mathcal{D}'$  dans  $M'$ .  $\square$

Appliquons le lemme 4.20 à la surface pseudo-minimale  $\overline{F}$ . Cette surface intersecte au plus  $\kappa |\chi(\overline{F})| \leq \kappa \chi_-^c(\alpha')^2$  translatés de  $\mathcal{D}'$  dans  $M'$ . Soit  $B$  le sous-ensemble des éléments de  $G$  correspondant.

Soit également  $C$  le sous-ensemble de  $G$  correspondant aux translatés de  $\mathcal{D}'$  qui intersectent  $R'$ . Toujours d'après le lemme 4.20,  $|C| \leq \kappa |\chi(R')| = \kappa \|\alpha'\|$ .

L'affirmation qui suit et sa démonstration sont adaptés de la démonstration de [La1, Lemme 13].

**Affirmation .** Posons  $\ell = \sqrt[4]{117\kappa^2/4}$ .

Si  $\ell \chi_-^c(\alpha') \leq \sqrt[4]{d}$ , il y a au moins  $m' = 9\chi_-^c(\alpha')/2$  translatées de  $R'$  sous l'action de  $G$  disjointes et qui ne rencontrent pas non plus  $\overline{F}$ .

Démonstration de l'affirmation.

Supposons par l'absurde que l'affirmation est fautive. Alors, pour tout  $m'$ -uplet  $(g_1 R', \dots, g_{m'} R')$  de translatées de  $R'$ , au moins deux d'entre elles s'intersectent, ou au moins l'une d'entre elles intersecte la surface  $\overline{F}$ . Il existe  $j$  et  $k$ , avec  $1 \leq j < k \leq m'$ ,  $c_1$  et  $c_2 \in C$  tels que  $g_j c_1 = g_k c_2$ , ou il existe  $b \in B$ ,  $c_1 \in C$  et  $s$  tels que  $g_s c_1 = b$ . Dans le premier cas,  $g_k^{-1} g_j \in CC^{-1}$ , et dans l'autre cas,  $g_s \in BC^{-1}$ . Cela signifie que  $G^{m'}$  est entièrement recouvert par les ensembles  $q_{jk}^{-1}(CC^{-1})$  et  $p_s^{-1}(BC^{-1})$ , où pour  $1 \leq j < k \leq m'$  et  $1 \leq s \leq m'$ ,  $q_{jk}$  et  $p_s$  sont les applications

$$\begin{aligned} q_{jk} : G^{m'} &\rightarrow G \\ (g_1, \dots, g_{m'}) &\mapsto g_k^{-1} g_j \\ p_s : G^{m'} &\rightarrow G \\ (g_1, \dots, g_{m'}) &\mapsto g_s. \end{aligned}$$

Le cardinal de  $q_{jk}^{-1}(CC^{-1})$  est  $|G|^{m'-1} |CC^{-1}|$ , et le cardinal de  $p_s^{-1}(BC^{-1})$  est  $|G|^{m'-1} |BC^{-1}|$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} |G|^{m'} &\leq \binom{m'}{2} |G|^{m'-1} |C|^2 + m' |G|^{m'-1} |C| |B| \\ d^{m'} &\leq \binom{m'}{2} d^{m'-1} (\kappa \|\alpha'\|)^2 + m' d^{m'-1} \kappa \|\alpha'\| \kappa \chi_-^c(\alpha')^2. \end{aligned}$$

Puisque  $\|\alpha'\| = |\chi(R')| \leq |\chi(S')| = \chi_-^c(\alpha')$ , il vient

$$d \leq \frac{\kappa^2}{2} m'(m' - 1) \chi_-^c(\alpha')^2 + \kappa^2 m' \chi_-^c(\alpha')^3. \quad (4.2)$$

Puisque  $m' = 9\chi_-^c(\alpha')/2$ , on a

$$\begin{aligned} d &\leq \frac{9\kappa^2}{4} \chi_-^c(\alpha') \left( \frac{9\chi_-^c(\alpha')}{2} - 1 \right) \chi_-^c(\alpha')^2 + \frac{9\kappa^2}{2} \chi_-^c(\alpha')^4 \\ &\leq \frac{117\kappa^2}{8} \chi_-^c(\alpha')^4 - \frac{9\kappa^2}{4} \chi_-^c(\alpha')^3 \\ &\leq \frac{117\kappa^2}{8} \chi_-^c(\alpha')^4. \end{aligned}$$

Mais comme  $\ell^4 = 117\kappa^2/4$  et que  $\ell^4 \chi_-^c(\alpha')^4 \leq d$ , on obtient  $d \leq d/2$ , ce qui est une contradiction. Ainsi, sous ces hypothèses, l'affirmation est vraie.  $\square$

D'après l'affirmation, il existe au moins  $9\chi_-^c(\alpha')/2$  translatées de  $R'$  deux à deux disjointes, et qui ne rencontrent pas non plus la surface  $\overline{F}$ . Comme chacune de ces  $9\chi_-^c(\alpha')/2$  surfaces incompressibles est dans le complémentaire de  $\overline{F}$ , qui est une union disjointe de corps en anses, elle est parallèle à une composante de  $\overline{F}$ . D'après le corollaire 4.10,  $\overline{F}$  est constituée d'au plus  $3\chi_-^c(\alpha')/2$  composantes connexes. Il y a donc au moins trois translatées de  $R'$  disjointes et parallèles à la même composante connexe de  $\overline{F}$ . Ainsi, ces trois translatées sont parallèles. Si l'on munit la surface  $R'$  d'une orientation, chacune des translatées de  $R'$  est orientée, d'orientation donnée par celle de  $R'$ . Avec ces conventions, il y a au moins deux de ces translatées parallèles et dont les orientations sont cohérentes dans le produit. Ainsi, il existe une surface  $R''$  incompressible dans  $M'$  et  $h \in G$  un homéomorphisme préservant l'orientation tel que  $R''$  et  $h(R'')$  sont parallèles et disjointes dans  $M'$ . Comme  $R''$  est incompressible, on peut appliquer directement le Lemme 14 de [La1] : la variété  $M'$  est fibrée sur le cercle, de fibre  $R''$ . Mais  $R''$  est une translatée de la surface  $R'$  sous l'action du groupe  $G$ . Par suite, si  $p : M' \rightarrow M$  est l'application de revêtement, la classe d'homologie de  $p^{-1}(R)$  est fibrée, et d'après un résultat de Gabai [G2, Lemme 2.4], la classe d'homologie de  $R$  est également fibrée dans  $M$ . Puisque  $R$  est une surface plongée minimisant la norme de Thurston, cela signifie que la variété  $M$  est fibrée sur le cercle, et que  $R$  est une fibre. Ceci achève la démonstration du théorème 4.16 dans le cas où  $R$  réalise  $\chi_-^c(\alpha)$ .

Il reste à montrer que si l'on ne suppose pas  $R'$   $\|\alpha'\|$ -minimisante, ni que  $h(M', \alpha', R') = h(M', \alpha')$ , les surfaces  $R'$  et  $R$  sont encore des fibres. Si  $R''$  est une surface plongée  $\|\alpha'\|$ -minimisante telle que  $h(M', \alpha', R'') = h(M', \alpha')$ , alors la démonstration ci-dessus assure que  $M'$  est fibrée sur le cercle et que  $R''$  est une fibre. Mais comme la surface  $R'$  est une composante connexe de l'image réciproque de  $R$ , elle est incompressible et appartient à la même classe d'homologie que  $R''$ . Elle est nécessairement aussi une fibre. L'argument ci-dessus montre alors que  $R$  est également une fibre, ce qui achève la démonstration du théorème 4.16.  $\square$

## 4.4 Gradient circulaire et classe d'homologie fibrée.

Le théorème suivant est l'analogie du théorème 3.21 du chapitre trois pour les décompositions circulaires associées à une classe d'homologie non triviale.

**Théorème 4.21.** *Soit  $M$  une variété de dimension trois hyperbolique, connexe, orientée, compacte et sans bord. Soit  $\epsilon \leq \text{Inj}(M)/2$ . Il existe une constante explicite  $\ell' = \ell'(\epsilon, \text{Vol}(M))$  ne dépendant que de  $\epsilon$  et du volume de la variété  $M$  vérifiant les propriétés suivantes. Soient un revêtement fini  $M' \rightarrow M$  de  $M$  de degré  $d$ , et une classe de cohomologie non triviale  $\alpha' \in H^1(M')$ .*

*Si  $\ell' \chi_-^c(\alpha') \ln \chi_-^c(\alpha') \leq \ln \ln d$ , alors toute surface  $R'$  plongée dans  $M'$  et  $\|\alpha'\|$ -minimisante est une fibre. En particulier, la variété  $M$  est virtuellement fibrée sur le cercle  $\mathbb{S}^1$ .*

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du théorème 4.21.

**Corollaire 4.22.** *Soit  $M$  une variété de dimension trois hyperbolique, connexe, orientée, compacte et sans bord. Supposons qu'il existe une famille infinie de revêtements finis  $(M_i \rightarrow M)_{i \in \mathbb{N}}$  de degrés  $d_i$ , et pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , une classe de cohomologie non triviale  $\alpha_i \in H^1(M_i)$  telle que :*

$$\inf_{i \in \mathbb{N}} \frac{\chi_-^c(\alpha_i) \ln \chi_-^c(\alpha_i)}{\ln \ln d_i} = 0.$$

*Alors, pour une infinité d'indices  $i \in \mathbb{N}$ , toute surface  $R_i$  plongée dans  $M_i$  et  $\|\alpha_i\|$ -minimisante est une fibre. En particulier, la variété  $M$  est virtuellement fibrée sur le cercle  $\mathbb{S}^1$ .*

**Définition 4.23.** *Si  $\eta \in ]0, 1[$  et  $(M_i \rightarrow M)_{i \in I}$  est une famille infinie de revêtements finis de  $M$  de degrés  $d_i$ , nous appellerons **gradient circulaire  $\eta$ -sous-logarithmique** associé à la famille  $(M_i \rightarrow M)_{i \in I}$  la quantité :*

$$\nabla_{\log, \eta}^c((M_i \rightarrow M)_{i \in I}) = \inf_{i \in I} \left\{ \frac{\chi_-^c(M_i)}{(\ln \ln d_i)^\eta} \right\}.$$

*Lorsque la famille n'est pas précisée, il s'agit de la famille de tous les revêtements finis de  $M$ . Notons ce nombre  $\nabla_{\log, \eta}^c(M)$ , appelé le **gradient circulaire  $\eta$ -sous-logarithmique** de  $M$ .*

Avec cette définition, nous pouvons formuler le corollaire suivant, qui découle du corollaire 4.22.

**Corollaire 4.24.** *Pour tout  $\eta \in ]0, 1[$ , le gradient circulaire  $\eta$ -sous-logarithmique de  $M$  est nul si et seulement si la variété  $M$  est virtuellement fibrée sur le cercle.*

Démonstration du corollaire 4.24.

Si le gradient circulaire  $\eta$ -sous-logarithmique de  $M$  est nul, il existe une famille  $(M_i \rightarrow M)_{i \in \mathbb{N}}$  de revêtements finis de  $M$  telle que  $\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{\chi_-^c(M_i)}{(\ln \ln d_i)^\eta} = 0$ . Ceci implique que  $\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{\chi_-^c(\alpha_i) \ln \chi_-^c(\alpha_i)}{\ln \ln d_i} = 0$ , où pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_i$  est une classe de cohomologie non triviale, minimisant la norme, et telle que  $\chi_-^c(\alpha_i) = \chi_-^c(M_i)$ . Il

suffit alors d'appliquer le théorème 4.22. De plus, puisque  $\alpha_i$  minimise la norme, d'après le lemme 4.2, on remarque que toute surface plongée  $\|\alpha_i\|$ -minimisante est connexe. Cela permet donc de trouver une fibre dans  $M_i$ .  $\square$

#### Démonstration du théorème 4.21.

Soient un revêtement fini  $M' \rightarrow M$  de  $M$  de degré  $d$ , et une classe de cohomologie non triviale  $\alpha' \in H^1(M')$ . Le but est de montrer que si le rapport  $\chi_-^c(\alpha') \ln \chi_-^c(\alpha') / \ln \ln d$  est suffisamment petit, alors les hypothèses du théorème E du troisième chapitre sont vérifiées.

Soit  $R'$  une surface plongée dans  $M'$ ,  $\|\alpha'\|$ -minimisante, et supposons dans un premier temps de plus que  $h(M', \alpha') = h(M', \alpha', R')$ . Notons  $S'$  une surface de Heegaard de genre minimal pour  $M'_{R'}$  : par construction,  $\chi_-^c(\alpha') = |\chi(S')|$ .

D'après la proposition 4.6, à partir de la décomposition circulaire  $(R', S', R')$  de  $M'$ , on peut construire une décomposition circulaire  $\mathcal{H} = (F_1, S_1, F_2, \dots, S_n, F_{n+1})$  en position mince. Notons  $F = \bigcup_j F_j \cup \bigcup_j S_j$ . D'après le corollaire 4.12, on peut supposer que  $F$  est une surface pseudo-minimale.

Toujours d'après la proposition 4.6, la surface  $F$  sépare la variété  $M'$  en  $q \leq \frac{1}{2}(\chi(R') - \chi(S')) \leq \chi_-^c(\alpha')/2$  corps en anses  $C_1, \dots, C_q$ , avec  $\chi_-(C_j) \leq |\chi(S')| = \chi_-^c(\alpha')$  pour tout  $j$ . De plus, la surface  $F^-$  est l'union des surfaces  $F_j$ , qui sont incompressibles.

Soit  $p = p(\epsilon, \text{Vol}(M))$  la constante donnée au théorème E. Afin de vérifier les hypothèses du théorème E, il reste à montrer que  $p \chi_-^c(\alpha') \ln \chi_-^c(\alpha') \leq \ln \ln \frac{2d}{\chi_-^c(\alpha')}$ . Mais comme vu précédemment au chapitre trois, on peut trouver une constante  $\ell' = \ell'(\epsilon, \text{Vol}(M))$  telle que si  $\ell' \chi_-^c(\alpha') \ln \chi_-^c(\alpha') \leq \ln \ln d$ , alors  $p \chi_-^c(\alpha') \ln \chi_-^c(\alpha') \leq \ln \ln \frac{2d}{\chi_-^c(\alpha')}$  et les hypothèses du théorème E sont satisfaites.

Si  $\ell' \chi_-^c(\alpha') \ln \chi_-^c(\alpha') \leq \ln \ln d$ , d'après le théorème E, la variété  $M'$  contient une surface plongée qui est la fibre d'une fibration en surfaces, donc en particulier une fibre virtuelle pour une fibration sur le cercle.

De plus, toutes les constructions ont lieu en fait dans  $M'_{R'} = M' \setminus \mathcal{N}(R')$ . Ainsi, on construit la fibre virtuelle  $T$  dans le complémentaire de  $R'$  dans  $M'$ . Cette fibre virtuelle se relève en une fibre connexe  $\overline{T}$  pour un revêtement fini  $\overline{M'} \rightarrow M'$  de  $M'$  fibré sur le cercle. Dans ce revêtement, la surface incompressible  $R'$  se relève en une surface  $\overline{R'}$  dans le complémentaire de la fibre. En coupant le long de  $\overline{T}$ , cela montre que les composantes connexes de  $\overline{R'}$ , qui sont toutes incompressibles, sont parallèles dans le produit à la fibre  $\overline{T}$  (voir [Wa2]). Ainsi, la classe d'homologie de  $\overline{R'}$  est une classe fibrée. Toujours d'après Gabai [G2, Lemme 2.4], cela implique que la classe d'homologie de  $R'$  est fibrée. Comme la surface  $R'$  minimise la norme de Thurston, elle est également une fibre.

On raisonne exactement comme pour la démonstration du théorème 4.16 pour montrer que même si l'on ne suppose pas que la surface  $R'$  vérifie  $h(M', \alpha') = h(M', \alpha', R')$ , elle est tout de même une fibre. Ceci achève la démonstration du théorème 4.21.  $\square$

## 4.5 Surfaces incompressibles et fibrations virtuelles.

Nous venons d'établir au paragraphe 4.4 des critères permettant de montrer qu'une classe de cohomologie non triviale d'une variété hyperbolique  $M$  se relève en des classes fibrées dans des revêtements finis. Mais si  $R$  est une surface plongée et non séparante dans  $M$ , il lui est associé une classe d'homologie. Dans certains cas, nous avons vu qu'alors  $R$  pouvait être une fibre virtuelle. Nous pouvons à présent nous poser la question pour une surface  $R$  plongée dans  $M$ , connexe, incompressible, mais éventuellement séparante.

**Définition 4.25.** Soit  $M$  une variété de dimension trois hyperbolique, connexe, orientée, compacte et sans bord. Supposons que  $R$  est une surface incompressible, orientable, connexe et plongée dans  $M$ . Dans le cas où la surface  $R$  est non séparante, la classe  $[R] \in H_2(M)$  n'est pas triviale. Nous appellerons la **caractéristique de Heegaard de la surface  $R$**  le minimum de  $|\chi(S)|$ , où  $S$  est une surface de Heegaard pour  $(M_R = M \setminus \mathcal{N}(R), R \times \{1\}, R \times \{-1\})$ .

Dans le cas où la surface  $R$  est séparante, la variété  $M_R = M \setminus \mathcal{N}(R)$  est constituée de deux composantes connexes  $M_g$  et  $M_d$ . Nous appellerons la **caractéristique de Heegaard de la surface  $R$**  le maximum de  $\{\chi_-^h(M_g), \chi_-^h(M_d)\}$ .

Dans tous les cas, nous noterons  $\chi_-^h(R)$  la caractéristique de Heegaard de la surface incompressible  $R$ .

A la différence du paragraphe précédent, dans le théorème suivant, la surface  $R$  n'est pas supposée non séparante a priori.

**Théorème 4.26.** Soit  $M$  une variété de dimension trois hyperbolique, connexe, orientée, compacte et sans bord. Soit  $\epsilon \leq \text{Inj}(M)/2$ . Il existe une constante explicite  $\ell'' = \ell''(\epsilon, \text{Vol}(M))$  vérifiant les propriétés suivantes. Supposons qu'il existe une surface incompressible  $R$  connexe, compacte, sans bord, orientable et plongée dans  $M$ . Soit  $M' \rightarrow M$  un revêtement fini de  $M$  de degré  $d$ . Soit également  $R'$  une composante connexe de l'image réciproque de  $R$  dans  $M'$ .

Si  $\ell'' \chi_-^h(R') \ln \chi_-^h(R') \leq \ln \ln d$ , alors la surface  $R$  est une fibre virtuelle. Si de plus  $R$  n'est pas séparante, c'est une fibre.

Démonstration du théorème 4.26.

Dans le cas où la surface  $R'$  n'est pas séparante, c'est une généralisation du théorème 4.21. En effet, si  $S'$  est une surface de Heegaard de genre minimal pour  $M'_{R'}$ ,  $\chi_-^h(R') = |\chi(S')|$  et  $(R', S', R')$  est une décomposition circulaire de  $M'$ . Comme la surface de départ  $R'$  est incompressible, on applique alors la proposition 4.6 pour trouver une décomposition circulaire en position mince. D'après la démonstration du théorème 4.21, les hypothèses du théorème E sont satisfaites si  $\ell'' \chi_-^h(R') \ln \chi_-^h(R') \leq \ln \ln d$ , et dans ce cas la surface  $R'$  est une fibre virtuelle. Mais comme  $R'$  appartient à l'image réciproque de  $R$ , la surface  $R$  est aussi une fibre virtuelle. De plus, si la surface  $R$  n'est pas séparante, sa classe d'homologie n'est pas nulle, et le même raisonnement montre que cette classe est fibrée. Comme la surface  $R$  est incompressible, elle est elle-même une fibre.

Dans le cas où la surface  $R'$  sépare la variété  $M'$  en deux composantes connexes  $M_g$  et  $M_d$ , soient  $S_g$  et  $S_d$  des surfaces de Heegaard pour  $M_g$  et  $M_d$  respectivement, de genre minimal. Ainsi,  $\chi_-^h(R') = \max\{|\chi(S_g)|, |\chi(S_d)|\}$ .

On peut alors, construire de chaque côté de  $R'$  une décomposition de Heegaard généralisée pour  $M_g$  et  $M_d$  en position mince à partir des surfaces  $S_g$  et  $S_d$ . On obtient ainsi une surface  $F$  dont une des composantes connexes est la surface incompressible  $R'$ , séparant la variété  $M'$  en  $q \leq 2g(S_g) + 2g(S_d) \leq 2\chi_-^h(R') + 4$  corps en anses  $C_1, \dots, C_q$  avec  $\chi_-(C_j) \leq \chi_-^h(R')$  pour tout  $j$ .

Comme  $F^-$  est constituée de surfaces incompressibles et que les composantes connexes de  $F \setminus F^-$  correspondent à des surfaces de Heegaard fortement irréductibles, on peut supposer que  $F$  est pseudo-minimale.

Ainsi, pour vérifier les hypothèses du théorème E, il suffit de voir que  $p \chi_-^h(R') \ln \chi_-^h(R') \leq \ln \ln \frac{d}{2\chi_-^h(R')+4}$ . Mais comme précédemment, on peut trouver une constante  $\ell'' \geq \ell'$  telle que si  $\ell'' \chi_-^h(R') \ln \chi_-^h(R') \leq \ln \ln d$ , alors  $p \chi_-^h(R') \ln \chi_-^h(R') \leq \ln \ln \frac{d}{2\chi_-^h(R')+4}$ . D'après le théorème E, dans ce cas, la variété  $M'$  contient une surface incompressible qui est une fibre virtuelle. Mais comme dans la démonstration du théorème 4.21, cette surface incompressible est construite dans le complémentaire de la surface  $R'$  incompressible. Ainsi, la surface  $R'$  est également une fibre virtuelle. Comme  $R'$  est un relevé de  $R$ , la surface  $R$  de départ est une fibre virtuelle, ce qui achève la démonstration du théorème 4.26.  $\square$

## Chapitre 5

---

**Croissance du premier nombre de Betti dans des revêtements finis.**



## 5.1 Constante de Cheeger et saut du premier nombre de Betti.

Soit  $M$  une variété de dimension trois hyperbolique, orientable, compacte et sans bord, de groupe fondamental  $\Gamma$ . Supposons qu'il existe une tour de revêtements finis  $M'' \rightarrow M' \rightarrow M$  telle que le revêtement  $M'' \rightarrow M'$  est galoisien, de groupe correspondant  $H$  isomorphe à  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$ , pour un certain  $r \in \mathbb{N}$ .

Notons  $\Gamma'$  (resp.  $\Gamma''$ ) le groupe fondamental de  $M'$  (resp.  $M''$ ). Soit  $d = [\Gamma : \Gamma']$  le degré du revêtement  $M' \rightarrow M$ . Avec ces notations,  $H = \Gamma'/\Gamma''$  est isomorphe à  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$  et  $[\Gamma : \Gamma''] = 2^r d$ .

**Lemme 5.1.** *Tout groupe  $\Gamma$  de présentation finie admet une présentation finie triangulaire (où toutes les relations sont de longueur 3).*

Démonstration du lemme 5.1.

Soit  $\langle S, R \rangle$  une présentation finie de  $\Gamma$ , où  $S$  est une famille génératrice finie symétrique et  $R$  un ensemble de relations, i.e. de mots non nécessairement réduits de  $S$ .

Si  $R$  contient un mot de longueur un ou deux, alors on ajoute à  $S$  un élément  $g$ , son inverse, et on rajoute à  $R$  le mot  $g^2g^{-1}$ . Ensuite, il suffit d'ajouter à toutes les relations de  $R$  de longueur un ou deux la lettre  $g$  autant de fois que nécessaire.

Si  $R$  possède un mot de longueur au moins quatre, alors on peut subdiviser ce mot en mots de longueur au plus trois. Plus précisément, si ce mot est  $a_1a_2 \dots a_\ell$  avec  $\ell > 3$ , posons  $b_1 = a_1a_2$ ,  $b_2 = a_1a_2a_3$ , etc, jusqu'à  $b_{\ell-3} = a_1a_2 \dots a_{\ell-2}$ . On rajoute à  $S$  les éléments  $b_i$  et leurs inverses. On remplace la relation  $a_1a_2 \dots a_\ell$  par les relations  $a_1a_2b_1^{-1}, \dots, b_i a_{i+2} b_{i+1}^{-1}, \dots, b_{\ell-3} a_{\ell-1} a_\ell$ , plus les relations  $b_i b_i^{-1} g$ .  $\square$

Avec les définitions du paragraphe 0.2.1, dire que le groupe  $\Gamma$  admet une présentation triangulaire revient exactement à dire que l'on peut trouver un 2-complexe de Cayley  $K$  pour  $\Gamma$  dont toutes les faces sont des triangles.

Soit  $S$  une famille finie symétrique de générateurs pour  $\Gamma$  associée à une présentation finie triangulaire de  $\Gamma$  et  $X'' = X(\Gamma'' \setminus \Gamma, S)$  le graphe de Schreier de  $\Gamma'' \setminus \Gamma$  relativement à la famille  $S$ . Remarquons que le revêtement  $M'' \rightarrow M$  n'est pas nécessairement galoisien, ni le revêtement  $M' \rightarrow M$ .

**Proposition 5.2.** *Avec les notations précédentes, si  $h(X'') < \min\{\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{2|S|(\sqrt{2})^r d^2}, \frac{1}{2d}\}$ , alors  $b_1(M'') \geq b_1(M') + 1$ .*

Démonstration de la proposition 5.2.

La démonstration reprend la preuve du Lemme 2.4 de M. Lackenby [La3].

Comme  $\Gamma'$  est un sous-groupe de  $\Gamma$ , on peut voir le groupe  $H = \Gamma'/\Gamma'' = \Gamma'' \setminus \Gamma'$  comme un sous-ensemble de l'ensemble des classes  $\Gamma'' \setminus \Gamma$ . Le groupe  $H = \Gamma'/\Gamma''$  agit librement à gauche sur  $\Gamma'' \setminus \Gamma$  comme suit :

$$\begin{aligned} \Gamma'' \setminus \Gamma' \times \Gamma'' \setminus \Gamma &\rightarrow \Gamma'' \setminus \Gamma \\ (\Gamma'' h, \Gamma'' x) &\mapsto \Gamma'' hx. \end{aligned}$$

Cette action s'étend en une action de  $H$  par automorphismes sur le graphe de Schreier  $X'' = X(\Gamma'' \setminus \Gamma, S)$ , qui coïncide sur les sommets avec l'action de  $H$  sur  $\Gamma'' \setminus \Gamma$ .

Soit  $Y = X(\Gamma'' \setminus \Gamma', \Sigma)$  le graphe de Cayley du groupe  $\Gamma'/\Gamma'' = H$  obtenu à partir des graphes de Schreier  $X'' = X(\Gamma'' \setminus \Gamma, S)$  et  $X' = X(\Gamma' \setminus \Gamma, S)$  par le procédé décrit au paragraphe 0.2.1. En particulier,  $|\Sigma| - 1 = d(|S| - 1)$ .

**Lemme 5.3.** [La3, Lemme 2.5]

Soit  $G$  un groupe de type fini,  $H$  et  $L$  deux sous-groupes d'indice fini de  $G$  avec  $H$  distingué dans  $L$ . Soit  $S$  une famille génératrice finie symétrique de  $G$  et  $\Sigma$  la famille génératrice finie de  $L$  obtenue par le procédé décrit au paragraphe 0.2.1.

Si  $h(X(H \setminus G, S)) \leq \frac{1}{2[G:L]}$ , alors

$$h(X(H \setminus L, \Sigma)) \leq 2|S|[G:L]^2 h(X(H \setminus G, S)).$$

Démonstration du lemme 5.3.

Prenons  $A$  un sous-ensemble de  $V(X(H \setminus G, S))$  non vide, avec  $|A| \leq \frac{|V(X(H \setminus G))|}{2}$  et réalisant la constante de Cheeger de  $X(H \setminus G)$ , i.e. tel que

$$h(X(H \setminus G)) = \frac{|\partial A|}{|A|}.$$

En reprenant la construction décrite au paragraphe 0.2.1 permettant d'obtenir le graphe de Cayley  $X(H \setminus L, \Sigma)$  à partir des graphes de Schreier  $X(H \setminus G, S)$  et  $X(L \setminus G, S)$ , on construit un sous-ensemble  $B$  de  $V(X(H \setminus L))$  de la façon suivante. Si un des arbres  $T_\ell$  de la forêt  $F$  a tous ses sommets dans  $A$ , respectivement dans  $A^c$ , alors on place le sommet  $v_\ell$  sur lequel  $T_\ell$  se rétracte dans  $B$ , respectivement dans  $B^c$ . On place les sommets restants de  $X(H \setminus L)$  dans  $B$  ou  $B^c$  de telle sorte que  $|B|$  soit la partie entière de  $\frac{|A|}{[G:L]}$ .

C'est toujours possible, car il y a au plus  $\left\lceil \frac{|A|}{[G:L]} \right\rceil$  arbres  $T_\ell$  qui ont tous leurs sommets dans  $A$  (rappelons que  $[G:L]$  est le nombre de sommets de chaque arbre  $T_\ell$  de la forêt  $F$ ). La partie entière inférieure du réel  $x$  est ici notée  $[x]$ .

De plus,

$$\begin{aligned} |B| &= \left\lceil \frac{|A|}{[G:L]} \right\rceil \leq \frac{|V(X(H \setminus G))|}{2[G:L]} = \frac{|H \setminus G|}{2[G:L]} = \frac{[G:H]|H \setminus L|}{2[G:H]} \\ &\leq \frac{|V(X(H \setminus L))|}{2}. \end{aligned}$$

Mais par le choix de  $B$ , on a aussi  $|B| \geq \frac{|A|}{[G:L]} - 1$ . Or, comme  $|A| = \frac{|\partial A|}{h(X(H \setminus G))} \geq \frac{1}{h(X(H \setminus G))}$ , on a

$$\frac{|A|}{2[G:L]} \geq \frac{1}{2h(X(H \setminus G))[G:L]} \geq 1$$

cette dernière inégalité résultant de l'inégalité  $h(X(H \setminus G, S)) \leq \frac{1}{2[G:L]}$ .

Finalement,

$$|B| \geq \frac{|A|}{[G:L]} - \frac{|A|}{2[G:L]} = \frac{|A|}{2[G:L]}.$$

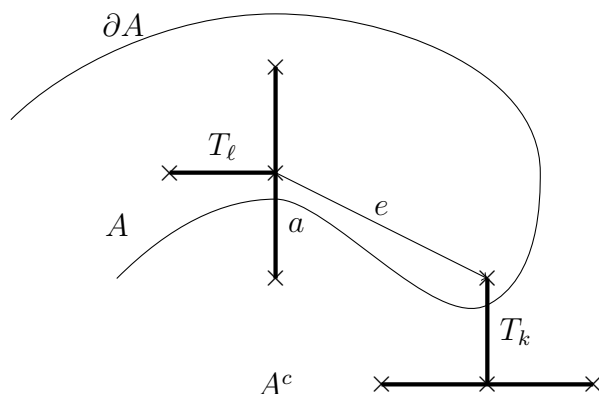
En particulier,  $B$  n'est pas vide.

Il reste à estimer le cardinal  $|\partial B|$  du bord de  $B$ .

Prenons  $e'$  une arête de  $\partial B$ . Cette arête  $e'$  relie deux sommets distincts de  $X(H \setminus L)$ , donc provient d'une unique arête  $e$  dans le graphe  $X(H \setminus G)$ , dont les extrémités sont dans deux composantes distinctes de la forêt  $F$ .

Si l'arête  $e$  est dans  $\partial A$ , alors à l'arête  $e'$  on peut associer une arête de  $\partial A$ .

Sinon, il existe au moins un arbre  $T_\ell$  de  $F$  contenant une extrémité de  $e$  et dont les sommets ne sont pas tous contenus entièrement dans  $A$  ou entièrement dans  $A^c$ . Nécessairement  $T_\ell$  contient au moins une arête  $a$  dans  $\partial A$ .



Il reste à estimer le nombre d'arêtes  $e'$  associées par cette construction à une telle arête  $a$ . C'est au plus le nombre d'arêtes d'origine dans un arbre  $T_\ell$  de  $F$ . Comme un tel arbre possède  $[G : L]$  sommets, il contient l'origine d'au plus  $|S| [G : L]$  arêtes. (Chaque sommet a valence  $|S|$ .)

D'où :

$$\begin{aligned} h(X(H \setminus L)) &\leq \frac{|\partial B|}{|B|} \leq \frac{|S| [G : L] |\partial A|}{\frac{|A|}{2^{[G:L]}}} \\ &= 2 |S| [G : L]^2 h(X(H \setminus G)). \end{aligned}$$

Ce qui démontre le lemme. □

Soit  $A$  un sous-ensemble non vide de  $V(Y) = V(X(\Gamma'' \setminus \Gamma, \Sigma))$  tel que  $|A| \leq |V(Y)|/2$  et  $|\partial A|/|A| = h(Y)$ . L'affirmation suivante reprend l'affirmation du Lemme 2.4 de [La3].

**Affirmation .** *Il existe au moins quatre éléments  $(h_1, h_2, h_3, h_4) \in H^4$  tels que  $h_j(\partial A) \cap h_k(\partial A) = \emptyset$  pour  $j \neq k$ .*

Démonstration de l'affirmation.

Supposons par l'absurde l'affirmation fautive. Choisissons une orientation arbitraire pour les arêtes de  $Y$ . Soit  $C$  l'ensemble des sommets initiaux de  $\partial A$ . Si l'affirmation est fautive, alors pour tout choix de quadruplet  $(h_1, \dots, h_4) \in H^4$ , il existe  $j$  et  $k$  avec  $1 \leq j < k \leq 4$  tels que  $h_j(\partial A) \cap h_k(\partial A) \neq \emptyset$ . Ainsi, il existe  $c$  et  $c' \in C$  tels que  $h_j \cdot c = h_k \cdot c'$ .

Pour  $1 \leq j < k \leq 4$ , notons

$$\begin{aligned} \phi_{j,k} : \quad H^4 &\rightarrow H \\ (h_1, \dots, h_4) &\mapsto h_k^{-1} h_j. \end{aligned}$$

Soit  $L = \{h \in H, \exists(c, c') \in C^2, c' = h \cdot c\} \subseteq H$ . Comme  $H$  est un groupe,  $L = CC^{-1}$ . Ainsi,  $|L| \leq |C|^2$ . D'autre part, remarquons que  $|\phi_{j,k}^{-1}(L)| = |H|^3 |L|$  pour  $1 \leq j < k \leq 4$ .

Si l'affirmation est fautive, alors  $H^4 \subseteq \bigcup_{1 \leq j < k \leq 4} \phi_{j,k}^{-1}(L)$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} |H|^4 &\leq \binom{4}{2} |H|^3 |L|, \\ 2^r &\leq 6 |C|^2 \leq 6 |\partial A|^2 = 6 h(Y)^2 |A|^2 \\ &\leq 6 h(Y)^2 \left(\frac{2^r}{2}\right)^2, \end{aligned}$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{(\sqrt{2})^r} \leq h(Y).$$

Mais d'après le lemme 5.3, puisque  $h(X'') \leq \frac{1}{2d}$ ,  $h(Y) \leq 2 |S| d^2 h(X'') < \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{(\sqrt{2})^r}$ . Cette dernière inégalité est en contradiction avec l'hypothèse de la proposition 5.2, et par conséquent l'affirmation est démontrée.  $\square$

Prenons  $(h_1, \dots, h_4) \in H^4$  tel que si  $j \neq k$ , alors  $h_j(\partial A) \cap h_k(\partial A) = \emptyset$ . Comme  $A$  est un sous-ensemble non vide de  $V(Y)$  réalisant la constante de Cheeger, i.e. tel que  $|A| \leq |V(Y)|/2$  et  $h(Y) = |\partial A|/|A|$ , des résultats de Lackenby permettent d'obtenir des informations sur  $A$ . Nous avons d'abord besoin d'une définition.

**Définition 5.4** (Sous-graphe induit). *Soit  $X$  un graphe et  $U$  un sous-ensemble des sommets  $V(X)$ . Le **sous-graphe induit par  $U$**  est le graphe dont les sommets sont les éléments de  $U$  et les arêtes sont les arêtes de  $X$  dont les deux sommets appartiennent à  $U$ .*

**Lemme 5.5.** [La3, Lemmes 2.1 et 2.2]

*Soit  $X$  le graphe de Cayley d'un groupe fini, et  $A$  un sous-ensemble de  $V(X)$  réalisant la constante de Cheeger de  $X$  :  $0 < |A| \leq |V(X)|/2$  et  $h(X) = |\partial A|/|A|$ .*

*Alors*

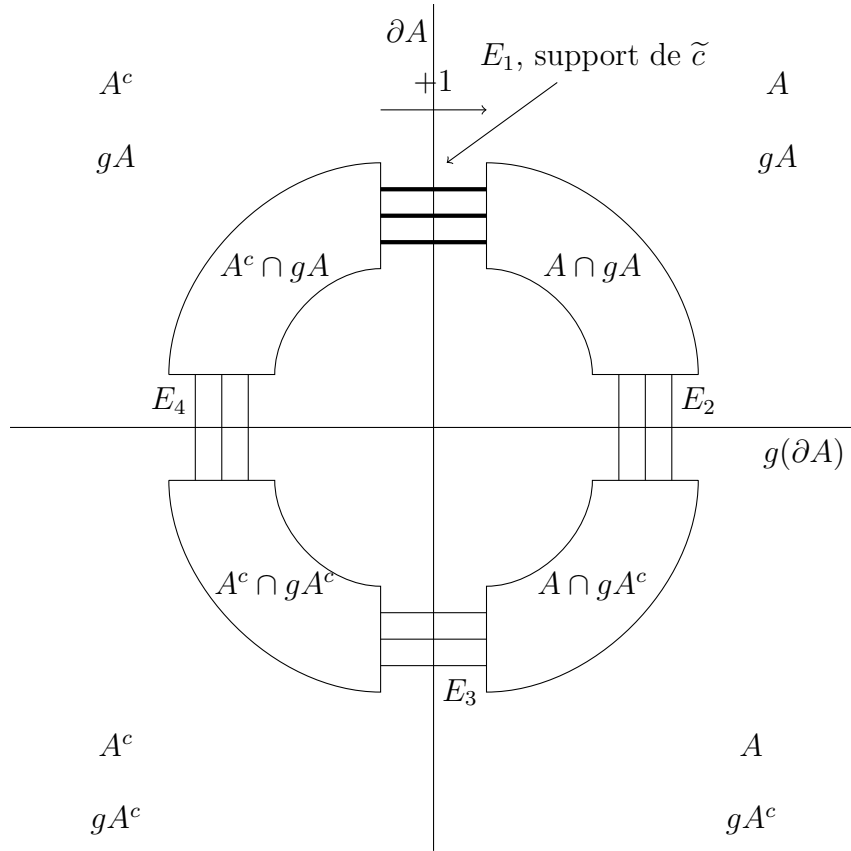
1. *l'ensemble  $A$  vérifie  $|A| > |V(X)|/4$ , et*
2. *les sous-graphes induits par  $A$  et  $A^c$  sont connexes par arcs.*

$\square$

Comme  $Y$  est le graphe de Cayley du groupe fini  $H$ , d'après ce lemme,  $|A| > |V(Y)|/4$ . Puisque  $|h_j(A)| = |A|$  pour  $j = 1, \dots, 4$ , il existe  $1 \leq j < k \leq 4$  tels que  $h_j(A) \cap h_k(A) \neq \emptyset$ . Notons  $g = h_k^{-1} h_j$ . Alors,  $A \cap g(A) \neq \emptyset$  et  $\partial A \cap g(\partial A) = \emptyset$ .

Comme défini à la section 0.2.1, soit  $K''$  le complexe de Cayley de  $(\Gamma'' \setminus \Gamma, S)$ , où  $S$  est la famille génératrice associée à une présentation triangulaire de  $\Gamma$ . Remarquons que toutes les faces de  $K''$  sont des triangles. Le but est d'utiliser  $A$  et  $g$  afin de construire un 1-cocycle  $c$  de  $K''$  qui n'est pas un cobord, en suivant la démonstration du Lemme 2.4 de [La3].

**Définition 5.6** (Métacycle). *Soit  $X$  un graphe. Un **métacycle** pour  $X$  est un cocycle dans  $X$  qui prend la valeur nulle sur tout cycle de longueur inférieure ou égale à trois.*



Un métacycle  $\tilde{c}$  de  $Y$ , le graphe de Cayley de  $H = \Gamma'' \backslash \Gamma'$ , qui n'est pas un cobord.

**Lemme 5.7.** 1. *Sous les hypothèses de la proposition 5.2, il existe dans  $Y = X(\Gamma'' \backslash \Gamma', \Sigma)$  un métacycle  $\tilde{c}$ .*

2. *Ce métacycle n'est pas un cobord, et*

3. *il n'est pas invariant sous l'action de  $H = \Gamma' / \Gamma''$ .*

Démonstration du lemme 5.7.

La démonstration des deux premiers points est celle de Lackenby. Le troisième point, quant à lui, est nouveau.

(1) Construisons le cocycle  $\tilde{c}$ . Comme  $|V(Y)|/4 < |A| \leq |V(Y)|/2$  et  $A \cap g(A) \neq \emptyset$ , aucun des ensembles  $A^c \cap g(A)$ ,  $A \cap g(A)^c$  ni  $A^c \cap g(A)^c$  n'est vide. Soit  $\chi_A$  la 0-cochaîne sur  $Y$  donnée par la fonction caractéristique de  $A$ . Définissons  $\tilde{c}$  comme la cochaîne qui coïncide avec  $\partial\chi_A$  sur les arêtes dont les extrémités sont dans  $gA$  (nous noterons  $E_1$  ce sous-ensemble d'arêtes de  $\partial A$ ), et qui est identiquement nulle ailleurs. Nous affirmons que  $\tilde{c}$  est un métacycle. En effet, si  $\ell$  est un cycle de longueur au plus 3, supposons qu'une des arêtes de  $\ell$  appartient à  $E_1$ , le support de  $\tilde{c}$  (sinon

$\tilde{c}(\ell) = 0$  automatiquement). Cela signifie que  $\ell$  possède au moins une arête  $a$  dont l'origine  $x$  est dans  $A^c \cap gA$  et l'extrémité  $y$  dans  $A \cap gA$ . Comme  $\ell$  est de longueur au plus trois et que c'est un cycle, il passe par au plus un autre sommet. S'il ne passe que par  $x$  et  $y$ ,  $\ell$  est formé de  $a$ ,  $\bar{a}$  et d'une boucle éventuelle, et dans tous les cas  $\tilde{c}(\ell) = \tilde{c}(a) + \tilde{c}(\bar{a}) = 0$ . Si  $\ell$  passe par un dernier sommet  $z$ , nécessairement  $z \in gA$ . En effet, si le point  $z$  était dans  $gA^c$ , il faudrait au moins trois arêtes pour le relier à la fois à  $x \in A^c \cap gA$  et à  $y \in A \cap gA$ , et donc le cycle  $\ell$  aurait au moins quatre arêtes. Ainsi,  $\ell$  est formé d'une arête  $a$  dont la valeur par  $\tilde{c}$  est  $+1$ , d'une arête en sens contraire dont la valeur par  $\tilde{c}$  est  $-1$ , et la dernière arête ne peut pas traverser  $\partial A$ . De nouveau,  $\tilde{c}(\ell) = 0$ , ce qui montre que  $\tilde{c}$  est bien un métacycle.

(2) Pour démontrer que  $\tilde{c}$  n'est pas un cobord, il suffit de trouver un 1-cycle  $\tilde{\gamma}$  dans  $K''$  tel que  $\tilde{c}(\tilde{\gamma}) = +1$ . Rappelons que  $E_1$  est l'ensemble des arêtes de  $\partial A$  dont les deux sommets appartiennent à  $gA$ , et notons de même  $E_3$  l'ensemble des arêtes de  $\partial A$  dont les deux sommets sont dans  $gA^c$ . Notons aussi  $E_2$  l'ensemble des arêtes de  $\partial gA$  dont les deux sommets appartiennent à  $A$  et  $E_4$  l'ensemble des arêtes de  $\partial gA$  dont les deux sommets appartiennent à  $A^c$ . La première chose est de vérifier que  $E_1$ , qui est le support de  $\tilde{c}$ , n'est pas vide. Comme  $\partial A \cap g(\partial A) = \emptyset$ ,  $\partial A = E_1 \sqcup E_3$ . D'après le Lemme 2.2 de [La3], les sous-graphes induits par  $A$  et  $A^c$  sont connexes par arcs. Puisque  $g$  est un automorphisme de graphes, il en est de même pour les sous-graphes induits par  $gA$  et  $gA^c$ . Comme  $A \cap gA$  et  $A^c \cap gA$  ne sont pas vides, il existe un chemin dans le sous-graphe induit par  $gA$  reliant un point de  $A^c \cap gA$  à un point de  $A \cap gA$ . Ce chemin contient nécessairement une arête de  $\partial A$  dont les deux extrémités appartiennent à  $gA$ , ce qui montre que  $E_1$  n'est pas vide. Le même argument permet de montrer aussi que l'ensemble  $E_j$  n'est pas vide pour  $j = 2, 3$  et  $4$ .

Notons  $E_1^+$  l'ensemble des arêtes de  $E_1$  dont le sommet initial appartient à  $A^c$  et le sommet terminal appartient à  $A$ . Posons  $E_1^- = E_1 \setminus E_1^+$ , autrement dit l'ensemble des arêtes correspondant aux arêtes de  $E_1^+$ , mais avec l'orientation opposée : de telles arêtes ont leur sommet initial dans  $A$  et terminal dans  $A^c$ . De même, soit  $E_2^+$  le sous-ensemble des arêtes de  $E_2$  d'origine dans  $gA$  et d'extrémité dans  $gA^c$ ,  $E_3^+$  les arêtes commençant dans  $A$  et finissant dans  $A^c$ , et  $E_4^+$  les arêtes de  $E_4$  d'origine dans  $gA^c$  et de sommet terminal dans  $gA$ . Pour  $j = 2, 3$  et  $4$ , définissons  $E_j^-$  comme l'ensemble des arêtes correspondant aux arêtes de  $E_j^+$  avec l'orientation opposée. On remarque que  $\tilde{c}^{-1}(\{+1\}) = E_1^+$ ,  $\tilde{c}^{-1}(\{-1\}) = E_1^-$  et  $E_2 \cup E_3 \cup E_4 \subseteq \tilde{c}^{-1}(\{0\})$ .

Choisissons  $e_1 \in E_1^+$  :  $e_1$  est une arête de  $E_1$  telle que  $\tilde{c}(e_1) = +1$ . Prenons également une arête  $e_3 \in E_3^+$ . Soit  $v_1^-$  le sommet initial de  $e_1$  et  $v_1^+$  son sommet terminal. Puisque  $e_1 \in E_1^+$ ,  $v_1^- \in A^c \cap gA$  et  $v_1^+ \in A \cap gA$ . De même, soient  $v_3^-$  et  $v_3^+$  les sommets de  $e_3$  avec  $v_3^- \in A \cap gA^c$  et  $v_3^+ \in A^c \cap gA^c$ .

Comme le sous-graphe induit par  $A$  est connexe par arcs, il existe un chemin orienté  $\ell$  dans ce sous-graphe reliant le sommet  $v_1^+$  au sommet  $v_3^-$ . De même, il existe un chemin orienté  $\ell'$  dans le sous-graphe connexe par arcs induit par  $A^c$  reliant  $v_3^+$  à  $v_1^-$ . Par construction de  $\ell$  et  $\ell'$ , aucune de leurs arêtes n'appartient à  $\partial A$ . Ainsi,  $\tilde{c}(\ell) = \tilde{c}(\ell') = 0$ . Prenons  $\tilde{\gamma} = e_1 \cup \ell \cup e_3 \cup \ell'$ . C'est un lacet orienté dans  $Y$  et  $\tilde{c}(\tilde{\gamma}) = \tilde{c}(e_1) = +1$ . Comme  $\tilde{\gamma}$  est un 1-cycle de  $Y$ , le métacycle  $\tilde{c}$  n'est pas un cobord sur  $Y$ , ce qui achève de prouver le point (2).

(3) Puisque l'ordre de tout élément non trivial de  $H$  est égal à 2,  $g^2 = id$ . Par conséquent,  $g(A \cap gA) = A \cap gA$ ,  $g(A^c \cap gA^c) = A^c \cap gA^c$ ,  $g(A^c \cap gA) = A \cap gA^c$  et  $g(A \cap gA^c) = A^c \cap gA$ . Ainsi,  $g(E_1^+) = E_2^-$ ,  $g(E_2^+) = E_1^-$ ,  $g(E_3^+) = E_4^-$  et  $g(E_4^+) = E_3^-$ .

Comme  $\ell$  est un chemin orienté dans le sous-graphe induit par  $A$ , reliant un sommet de  $A \cap gA$  à un sommet de  $A \cap gA^c$ , il contient nécessairement une arête orientée appartenant à  $E_2^+$ . Soit  $e_2$  la première de ces arêtes :  $\ell = \ell_1 \cup e_2 \cup \ell_2$ , où  $\ell_1$  et  $\ell_2$  sont deux chemins orientés tels que tout sommet de  $\ell_1$  appartient à  $A \cap gA$ . Comme l'origine et l'extrémité de  $\ell_2$  se situent dans  $A \cap gA^c$ , ce chemin traverse  $E_2$  un nombre pair de fois. Autrement dit, si  $\ell_2$  rencontre  $E_2$ , il possède autant d'arêtes orientées dans  $E_2^+$  que d'arêtes orientées dans  $E_2^-$ .

**Affirmation .** *Si  $\tilde{\gamma}$  est le 1-cycle construit précédemment,  $\tilde{c}(g\tilde{\gamma}) = -1 \neq +1 = \tilde{c}(\tilde{\gamma})$ .*

Démonstration de l'affirmation.

Nous avons vu que  $\tilde{c}(\tilde{\gamma}) = \tilde{c}(e_1) = +1$ . Il reste à montrer que  $\tilde{c}(g\tilde{\gamma}) = -1$ . Mais  $\tilde{c}(g\tilde{\gamma}) = \tilde{c}(ge_1) + \tilde{c}(g\ell) + \tilde{c}(ge_3) + \tilde{c}(g\ell')$ . L'arête  $ge_1$  appartient à présent à  $E_2^-$ , et donc  $\tilde{c}(ge_1) = 0$ . Comme  $e_3 \in E_3^+$ ,  $ge_3 \in E_4^-$  et  $\tilde{c}(ge_3) = 0$ . Le chemin  $\ell'$  étant contenu dans le sous-graphe induit par  $A^c$ , le chemin  $g\ell'$  est situé dans le sous-graphe induit par  $gA^c$ . Ainsi, aucune de ses arêtes ne peut appartenir à  $E_1$ , qui est le support de  $\tilde{c}$ , et donc  $\tilde{c}(g\ell') = 0$ . Calculons à présent  $\tilde{c}(g\ell) = \tilde{c}(g\ell_1) + \tilde{c}(ge_2) + \tilde{c}(g\ell_2)$ . Comme tout sommet de  $\ell_1$  appartient à  $A \cap gA$ , c'est aussi le cas de tous les sommets de  $g\ell_1$ . Par conséquent,  $g\ell_1$  ne peut pas traverser  $\partial A$  et  $\tilde{c}(g\ell_1) = 0$ . Puisque  $e_2 \in E_2^+$ ,  $ge_2 \in E_1^-$  et  $\tilde{c}(ge_2) = -1$ . Comme  $\ell_2$  a autant d'arêtes orientées dans  $E_2^+$  que dans  $E_2^-$  (s'il y en a),  $g\ell_2$  a autant d'arêtes orientées dans  $E_1^-$  que dans  $E_1^+$ , et donc  $\tilde{c}(g\ell_2) = 0$ . Au final,  $\tilde{c}(g\tilde{\gamma}) = \tilde{c}(ge_2) = -1 \neq +1 = \tilde{c}(\tilde{\gamma})$ .  $\square$

Ainsi, le métacycle  $\tilde{c}$  construit précédemment n'est pas invariant sous l'action de  $H$  sur  $Y$ , ce qui achève la démonstration du point (3).  $\square$

**Lemme 5.8.** *Comme défini à la section 0.2.1, soit  $K''$  le complexe de Cayley de  $(\Gamma'' \setminus \Gamma, S)$ , où  $S$  est une famille génératrice associée à une présentation triangulaire de  $\Gamma$ .*

*Le métacycle  $\tilde{c}$  construit au lemme 5.7 donne naissance à une 1-cochaîne  $c$  dans  $K''$ , de telle sorte que :*

1. *cette 1-cochaîne est un 1-cocycle,*
2. *ce n'est pas un cobord, et*
3. *elle n'est pas invariante sous l'action de  $H = \Gamma'/\Gamma''$ .*

Démonstration du lemme 5.8.

Rappelons que  $X'' = X(\Gamma'' \setminus \Gamma, S)$  et  $Y = X(\Gamma'' \setminus \Gamma', \Sigma)$  sont liés par la construction décrite au paragraphe 0.2.1. En particulier, il existe une rétraction  $r : X'' \rightarrow Y$  qui envoie tout arbre  $T_\ell$  de la forêt  $F$  sur le sommet  $v_\ell$  du graphe de Cayley  $Y$ .

Soit  $c$  la 1-cochaîne de  $X''$  définie par :  $c = \tilde{c} \circ r$ .

(1) Montrons que  $c$  est un cocycle. En effet, comme  $S$  est une famille génératrice associée à une présentation triangulaire pour  $\Gamma$ , toutes les 2-faces du 2-complexe de

Cayley  $K''$  associé à  $(\Gamma'' \setminus \Gamma, S)$  sont des triangles. Si  $b$  est le bord d'un tel triangle, comme  $r$  est une rétraction,  $r(b)$  a longueur au plus trois et  $c(b) = \tilde{c} \circ r(b) = 0$  puisque  $\tilde{c}$  est un métacycle.

(2) Si  $\tilde{\gamma}$  est le 1-cycle construit au lemme 5.7, on peut lui faire correspondre un 1-cycle  $\gamma$  de  $X''$  et donc de  $K''$  via  $r$  de la manière suivante. L'image réciproque par  $r$  des arêtes de  $\tilde{\gamma}$  sont des arêtes de  $E(X'') \setminus F$ . Autrement dit, ce sont des arêtes n'appartenant pas à la forêt  $F$  et reliant entre eux les arbres  $T_\ell$ . Si les images dans  $X''$  de deux arêtes adjacentes de  $\tilde{\gamma}$  ne sont plus adjacentes, cela signifie qu'elles ont toutes les deux un sommet dans un des arbres  $T_\ell$  de  $F$ , avec  $v_\ell$  le sommet d'adjacence de ces arêtes dans  $Y$ . Comme  $T_\ell$  est un arbre (connexe), il existe un unique chemin de longueur minimale dans  $T_\ell$  reliant ces deux sommets. Ainsi, on peut compléter de manière unique les arêtes correspondant à l'image réciproque de  $\tilde{\gamma}$  avec des chemins dans les arbres de  $F$  pour obtenir un 1-cycle  $\gamma$ . Par construction,  $c(\gamma) = \tilde{c}(r(\gamma)) = \tilde{c}(\tilde{\gamma}) = +1$ . Donc le cocycle construit  $c$  n'est pas un cobord. Cela démontre déjà que le premier nombre de Betti de  $M''$  est strictement positif.

(3) Par construction du graphe de Cayley  $Y = X(\Gamma'' \setminus \Gamma', \Sigma)$ , l'action de  $H$  sur les graphes  $X''$  et  $Y$  commute à la rétraction  $r$  : pour tout  $h \in H$ ,  $h \circ r = r \circ h$ . Ainsi, en prenant l'élément  $g$  choisi lors de la preuve du lemme 5.7,  $c(g\gamma) = \tilde{c}(r \circ g\gamma) = \tilde{c}(g \circ r(\gamma)) = \tilde{c}(g\tilde{\gamma}) = -1$ . Par suite,  $c(\gamma) = +1 \neq -1 = c(g\gamma)$  et le cocycle  $c$  n'est pas invariant par l'action de  $H$  sur  $X''$  et donc sur  $K''$ .  $\square$

Soit  $K'$  le complexe de Cayley associé à  $(\Gamma' \setminus \Gamma, \Sigma)$ . On a la tour de revêtements associés  $\tilde{K} \rightarrow K'' \rightarrow K' \rightarrow K$ , avec  $p : K'' \rightarrow K'$  galoisien de groupe  $H$ . La projection  $p$  induit une injection entre les premiers groupes de cohomologie à coefficients rationnels  $p^* : H^1(K', \mathbb{Q}) \hookrightarrow H^1(K'', \mathbb{Q})$ . Comme  $[c] \in H^1(K'', \mathbb{Q})$  n'est pas  $H$ -invariante, cela signifie que  $p^*$  ne peut pas être surjective, et ainsi  $b_1(M'') \geq b_1(M') + 1$ . Ceci achève la démonstration de la proposition 5.2.  $\square$

**Remarque 5.9.** *En fait, nous n'avons pas réellement besoin de supposer que tout élément non trivial de  $H$  est d'ordre 2 pour démontrer la proposition 5.2. Il suffit de trouver un élément  $g \in H$  tel que  $g(\partial A) \cap \partial A = \emptyset$  et  $gA \cap A \neq \emptyset$ . C'est en particulier le cas lorsque  $h(Y) < \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt{|H|}}$ , et cela suffit à montrer que  $b_1(M'') > 0$  (c'est d'ailleurs précisément le résultat de Lackenby). Pour montrer que  $b_1(M'') \geq b_1(M') + 1$ , il suffit de trouver un tel élément  $g \in H$  tel que de plus  $g^2(A) = A$ . C'est le cas si  $g$  est d'ordre 2.*

## 5.2 Genre de Heegaard et premier nombre de Betti virtuellement infini.

Rappelons que  $c_+(N)$  désigne la complexité de la variété  $N$ , et que  $c_+(N) \leq \chi_-^h(N)$ . L'idée à présent est d'utiliser la notion de complexité plutôt que les constantes de Cheeger. C'est ce que permet le résultat suivant de M. Lackenby [La3].



**Théorème 5.10.** [La3, Théorème 4.1]

Soit  $N$  une variété de dimension trois, hyperbolique, connexe, orientée, complète et de volume fini. Alors

$$h(N) \leq \frac{4\pi c_+(N)}{\text{Vol}(N)} \leq \frac{4\pi \chi_-^h(N)}{\text{Vol}(N)}.$$

□

La proposition 5.2 et ce théorème conduisent au corollaire suivant.

**Corollaire 5.11.** Soit  $M$  une variété de dimension trois hyperbolique, connexe, orientée, compacte et sans bord. Il existe une constante  $c$ , ne dépendant que de la variété  $M$  et du choix d'une famille finie de générateurs  $S$  associée à une présentation finie triangulaire de  $\pi_1 M$  telle que :

Pour toute tour de revêtements finis  $M'' \rightarrow M' \rightarrow M$ , où  $M'' \rightarrow M'$  est galoisien, de groupe associé  $H \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$ , si  $\chi_-^h(M'')[\pi_1 M : \pi_1 M'] / (\sqrt{2})^r \leq c$ , alors  $b_1(M'') \geq b_1(M') + 1$ .

Démonstration du corollaire 5.11.

Pour toute variété hyperbolique  $N$ , notons  $h(N)$  la constante de Cheeger riemannienne de  $N$ . D'après la proposition 0.26 du chapitre 0 de rappels, qui est un résultat bien connu de Brook [Br] (voir également [La3, Lemme 2.3]), il existe une constante  $C$ , ne dépendant que de la métrique hyperbolique de  $M$ , ainsi que du choix de la famille  $S$ , telle que pour tout revêtement hyperbolique fini  $N \rightarrow M$ ,

$$h(X(\pi_1 N \setminus \pi_1 M, S)) \leq C h(N).$$

Sous les hypothèses du corollaire 5.11, soit  $d = [\pi_1 M : \pi_1 M']$  le degré du revêtement  $M' \rightarrow M$ . Si

$$\frac{c_+(M'')d}{(\sqrt{2})^r} < \frac{\text{Vol}(M)}{4|S|\sqrt{6}\pi C},$$

alors d'après le théorème 5.10,

$$\begin{aligned} h(X(\pi_1 M'' \setminus \pi_1 M, S)) &\leq Ch(M'') \leq \frac{4\pi C c_+(M'')}{\text{Vol}(M'')} \\ &\leq \frac{4\pi C c_+(M'')}{d^{2r} \text{Vol}(M)} \\ &< \frac{4\pi C}{d^{2r} \text{Vol}(M)} \frac{(\sqrt{2})^r \text{Vol}(M)}{4|S|\sqrt{6}\pi C d} \\ &< \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{2|S|(\sqrt{2})^r d^2}. \end{aligned}$$

Le résultat découle alors directement de la proposition 5.2, en supposant  $r$  assez grand pour que  $\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{2|S|(\sqrt{2})^r d^2} \leq \frac{1}{2d}$ . □

**Définition 5.12.** Soit  $M$  une variété de dimension trois connexe, orientée, compacte et sans bord. On dit que **le premier nombre de Betti de  $M$  est virtuellement infini** s'il existe une famille  $(M_i \rightarrow M)_{i \in I}$  de revêtements finis de  $M$  telle que  $\sup_{i \in I} b_1(M_i) = +\infty$ .

Le théorème suivant est immédiat.

**Théorème 5.13.** Soit  $M$  une variété de dimension trois hyperbolique, connexe, orientée, compacte et sans bord. Supposons qu'il existe une tour infinie  $\dots \rightarrow M_{i+1} \rightarrow N_{i+1} \rightarrow M_i \rightarrow N_i \rightarrow \dots \rightarrow N_1 \rightarrow M$  de revêtement finis de  $M$  telle que pour tout  $i \geq 1$ ,  $M_i \rightarrow N_i$  est galoisien, de groupe  $H_i \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{r_i}$ .

Si  $\inf_{i \in \mathbb{N}} \chi_-^h(M_i)[\pi_1 M : \pi_1 N_i]/(\sqrt{2})^{r_i} = 0$ , alors  $\lim_{i \rightarrow +\infty} b_1(M_i) = +\infty$ . En particulier, le premier nombre de Betti de  $M$  est virtuellement infini.

**Remarque 5.14.** D'après la démonstration du corollaire 5.11, les conclusions du théorème 5.13 sont encore vraies si l'on suppose seulement que  $\inf_{i \in \mathbb{N}} h(M_i)[\pi_1 M : \pi_1 N_i]^2/(\sqrt{2})^{r_i} = 0$ , ou encore si  $\inf_{i \in \mathbb{N}} c_+(M_i)[\pi_1 M : \pi_1 N_i]/(\sqrt{2})^{r_i} = 0$ .

#### Démonstration du théorème 5.13.

Comme pour la démonstration du corollaire 5.11, il existe une constante  $C$  ne dépendant que de la variété base  $M$  telle que si  $S$  est une famille finie de générateurs correspondant à une présentation finie triangulaire de  $\pi_1 M$ , pour tout  $i \geq 1$ ,  $h(X(\pi_1 M_i \setminus \pi_1 M, S)) \leq Ch(M_i)$  (avec la convention que  $M_0 = M$ ).

Si  $\inf_{i \in \mathbb{N}} h(M_i)[\pi_1 M : \pi_1 N_i]^2/(\sqrt{2})^{r_i} = 0$ , ou si  $\inf_{i \in \mathbb{N}} c_+(M_i)[\pi_1 M : \pi_1 N_i]/(\sqrt{2})^{r_i} = 0$ , ou encore si  $\inf_{i \in \mathbb{N}} \chi_-^h(M_i)[\pi_1 M : \pi_1 N_i]/(\sqrt{2})^{r_i} = 0$ , alors pour une infinité d'indices  $i \geq 1$ ,  $h(X(\pi_1 M_i \setminus \pi_1 M, S)) < \sqrt{2/3} \times 1/(2|S|(\sqrt{2})^{r_i}[\pi_1 M : \pi_1 N_i]^2)$ . D'après la proposition 5.2, pour ces indices  $i$ ,  $b_1(M_i) \geq b_1(N_i) + 1 \geq b_1(M_{i-1}) + 1$ . Puisque la suite  $(b_1(M_i))_{i \in \mathbb{N}}$  est croissante,  $\lim_{i \rightarrow +\infty} b_1(M_i) = +\infty$ .  $\square$

Si  $G$  est un groupe et  $A$  un sous-groupe de  $G$ , définissons  $G\sharp A$  comme le sous-groupe de  $G$  engendré par les éléments de la forme  $gag^{-1}a^{-1}b^2$  avec  $g \in G$  et  $a, b \in A$ . Si  $A$  est un sous-groupe distingué de  $G$ , alors  $G\sharp A$  est un sous-groupe distingué de  $A$  (voir [SW]).

Soit  $M$  une variété de dimension trois hyperbolique, connexe, orientée, compacte et sans bord. Notons  $\Gamma = \pi_1 M$ . On définit la suite  $\{\Gamma_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  récursivement par  $\Gamma_0 = \Gamma$ , et pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i\sharp\Gamma_i$ . C'est une suite emboîtée de sous-groupes d'indices finis de  $\Gamma$ , telle que pour tout  $i \geq 1$ ,  $\Gamma_i$  est un sous-groupe distingué de  $\Gamma_{i-1}$  et  $H_i = \Gamma_{i-1}/\Gamma_i \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{r_i}$  avec  $r_i \in \mathbb{N}$ . De plus, pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i\sharp\Gamma_i$  est caractéristique dans  $\Gamma_i$ . Par récurrence, les groupes  $\Gamma_i$  sont des sous-groupes distingués dans  $\Gamma$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ .

Soit  $\dots \rightarrow M_i \rightarrow M_{i-1} \rightarrow \dots \rightarrow M_1 \rightarrow M$  la tour correspondante de revêtements finis de  $M$  : pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\Gamma_i = \pi_1 M_i$ . Avec ces notations,  $M_i \rightarrow M_{i-1}$  est un revêtement galoisien de groupe associé  $H_i = H_1(M_{i-1}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{r_i}$ . Ainsi,  $r_i = b_{1, \mathbb{F}_2}(M_{i-1})$  est le premier nombre de Betti modulo 2 de  $M_{i-1}$ .

Prenons  $i \geq 1$ . D'après le Lemme 1.3 de [SW],

$$\text{rang}(\Gamma_i/(\Gamma_{i-1}\sharp\Gamma_i)) \geq \frac{1}{2} \text{rang}(\Gamma_{i-1}/\Gamma_i)(\text{rang}(\Gamma_{i-1}/\Gamma_i) - 1).$$

Comme  $\Gamma_i \sharp \Gamma_i$  est un sous-groupe distingué dans  $\Gamma_{i-1} \sharp \Gamma_i$ ,  $\text{rang}(\Gamma_i / (\Gamma_i \sharp \Gamma_i)) \geq \text{rang}(\Gamma_i / (\Gamma_{i-1} \sharp \Gamma_i))$ . Puisque  $\Gamma_i \sharp \Gamma_i = \Gamma_{i+1}$ ,  $\text{rang}(\Gamma_i / \Gamma_{i+1}) \geq \frac{1}{2} \text{rang}(\Gamma_{i-1} / \Gamma_i)$  ( $\text{rang}(\Gamma_{i-1} / \Gamma_i) - 1$ ). Puisque  $r_i = \text{rang}(H_i) = \text{rang}(\Gamma_{i-1} / \Gamma_i)$ , on obtient finalement l'inégalité

$$r_{i+1} \geq \frac{1}{2} r_i (r_i - 1). \quad (5.1)$$

Supposons que  $r_1 = b_{1, \mathbb{F}_2}(M) \geq 4$  (ce qui est toujours vrai quitte à passer à un revêtement fini de  $M$ , voir [We, Corollaire 10.6 et Exemple 10.1 p. 139]). Alors, par récurrence, pour tout  $i \geq 1$ ,  $r_i \geq (\frac{r_1-1}{2})^{2^{i-1}} + 1 \geq (\frac{3}{2})^{2^{i-1}}$ . En particulier,  $\lim_{i \rightarrow +\infty} r_i = +\infty$ .

**Corollaire 5.15.** *Soient  $M$  une variété de dimension trois hyperbolique, connexe, orientée, compacte et sans bord, et  $\dots \rightarrow M_i \rightarrow M_{i-1} \rightarrow \dots \rightarrow M_1 \rightarrow M$  la tour de revêtements finis correspondant à la suite dérivée modulo 2 définie ci-dessus. Pour tout  $i \geq 1$ , posons  $r_i = b_{1, \mathbb{F}_2}(M_{i-1})$ , avec  $M_0 = M$ , et  $R_i = r_1 + r_2 + \dots + r_i$ . Supposons que  $r_1 \geq 4$ .*

*Si  $\inf_{i \in \mathbb{N}} \chi_-^h(M_i) 2^{R_{i-1}} / (\sqrt{2})^{r_i} = 0$ , alors  $\lim_{i \rightarrow +\infty} b_1(M_i) = +\infty$ .*

Démonstration du corollaire 5.15.

Elle découle directement du théorème 5.13 avec  $N_i = M_{i-1}$  pour  $i \geq 1$ . Il suffit de remarquer que dans ce cas,  $[\pi_1 M : \pi_1 M_{i-1}] = 2^{r_1 + \dots + r_{i-1}} = 2^{R_{i-1}}$ .  $\square$

### 5.3 Genre de Heegaard et groupe fondamental virtuellement grand.

Dans le cas particulier où  $M_i = N_{i+1}$  pour tout  $i$ , le Théorème 1.2 de [La4] (voir également [La2, Théorème 1.1]) conduit au théorème suivant. Rappelons qu'un groupe de présentation finie est dit **virtuellement grand** s'il possède un sous-groupe d'indice fini admettant un morphisme surjectif sur un groupe libre non abélien.

**Remarque 5.16.** *Si  $M$  est une variété de dimension trois, connexe, orientée, compacte, sans bord, et dont le groupe fondamental est virtuellement grand, alors le premier nombre de Betti de  $M$  est virtuellement infini (voir par exemple [La2, Paragraphe 2]).*

**Théorème 5.17** (Lackenby). *Soit  $M$  une variété hyperbolique de dimension trois, connexe, orientée, compacte et sans bord. Soit  $\dots \rightarrow M_i \rightarrow M_{i-1} \rightarrow \dots \rightarrow M_1 \rightarrow M$  une tour de revêtements finis de  $M$  telle que pour tout indice  $i \geq 1$ ,  $M_i \rightarrow M_{i-1}$  est galoisien, de groupe isomorphe à  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{r_i}$  (avec la convention que  $M_0 = M$ ). Notons  $R_i = r_1 + r_2 + \dots + r_i$ .*

*Supposons que l'une des hypothèses suivantes est satisfaite :*

(a)  $\pi_1 M$  n'a pas la propriété  $(\tau)$  relativement à la famille  $\{\pi_1 M_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  (par exemple si  $\lim_{i \rightarrow +\infty} h(M_i) = 0$ ) et  $\inf_{i \in \mathbb{N}} \frac{r_{i+1}}{2^{R_i}} > 0$ , ou

(b) chaque revêtement  $M_i \rightarrow M$  est régulier et  $\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{r_{i+1}}{2^{R_i}} = +\infty$ .

*Alors  $\pi_1 M$  est virtuellement grand. En particulier, le premier nombre de Betti de  $M$  est virtuellement infini.*

Démonstration du théorème 5.17.

Remarquons que pour tout indice  $i \in \mathbb{N}$ ,  $2^{R_i} = [\pi_1 M : \pi_1 M_i]$ . La condition (b) implique immédiatement que l'hypothèse (2) du Théorème 1.1 de [La2] est satisfaite, et ainsi  $\pi_1 M$  est virtuellement grand.

Pour montrer que la condition (a) implique l'hypothèse (ii) du Théorème 1.2 de [La4], il suffit de démontrer que la croissance du rang du premier groupe d'homologie modulo 2 de la tour de revêtements finis  $\dots \rightarrow M_i \rightarrow \dots \rightarrow M$  est linéaire. Remarquons que par hypothèse, le groupe fondamental de  $M_i$  se surjecte sur le groupe de Galois  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{r_{i+1}}$ , et donc  $r_{i+1} \leq \text{rang}(H_1(M_i, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) = b_{1, \mathbb{F}_2}(M_i)$ . Si  $\inf_{i \in \mathbb{N}} \frac{r_{i+1}}{2^{R_i}} > 0$ , alors  $\inf_{i \in \mathbb{N}} \frac{b_{1, \mathbb{F}_2}(M_i)}{2^{R_i}} > 0$  et la croissance du premier nombre de Betti modulo 2 dans la tour de revêtements finis est linéaire. Par conséquent,  $\pi_1 M$  est virtuellement grand.  $\square$

A la différence du théorème 5.13, le théorème 5.17 ne permet pas de conclure que la suite des premiers nombres de Betti  $\{b_1(M_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  de la tour de revêtements considérée tend vers l'infini.

Si  $i \geq 1$ ,  $r_{i+1} \leq b_{1, \mathbb{F}_2}(M_i) \leq \text{rang}(\pi_1 M_i) \leq g(M_i)$ . Si  $\inf_{i \in \mathbb{N}} \chi_-^h(M_i) 2^{R_{i-1}} / (\sqrt{2})^{r_i} = 0$ , a fortiori  $\inf_{i \in \mathbb{N}} \chi_-^h(M_i) / (\sqrt{2})^{r_i} = 0$ , et alors  $\inf_{i \in \mathbb{N}} r_{i+1} / (\sqrt{2})^{r_i} = 0$ . Ainsi, les hypothèses (a) ou (b) du théorème 5.17 sont en quelque sorte orthogonales à l'hypothèse du théorème 5.13. Les théorèmes 5.17 et 5.13 pris ensemble conduisent au corollaire suivant.

**Corollaire 5.18.** *Soit  $M$  une variété de dimension trois hyperbolique, connexe, orientée, compacte et sans bord, et  $\dots \rightarrow M_i \rightarrow M_{i-1} \rightarrow \dots \rightarrow M_1 \rightarrow M$  une tour infinie de revêtements finis de  $M$  telle que pour tout indice  $i \geq 1$ ,  $M_i \rightarrow M$  et  $M_i \rightarrow M_{i-1}$  sont galoisiens, et le groupe de Galois de  $M_i \rightarrow M_{i-1}$  est isomorphe à  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{r_i}$  (avec la convention que  $M_0 = M$ ). Notons  $R_i = r_1 + r_2 + \dots + r_i$ .*

*Alors le premier nombre de Betti de  $M$  est virtuellement infini, si aucune des deux propriétés suivantes n'est vérifiée :*

1.  $\inf_{i \in \mathbb{N}} h(M_i) > 0$  et la suite  $(\frac{r_{i+1}}{2^{R_i}})_{i \in \mathbb{N}}$  admet une sous-suite extraite bornée.
2.  $\inf_{i \in \mathbb{N}} h(M_{i+1}) 4^{R_i} (\sqrt{2})^{r_{i+1}} > 0$  et  $\inf_{i \in \mathbb{N}} \frac{r_{i+1}}{2^{R_i}} = 0$ .



# Bibliographie

- [A] Ian Agol. Criteria for virtual fibering. *J. Topol.*, 1(2) :269–284, 2008.
- [Ba] Gilbert Baumslag. *Topics in combinatorial group theory*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 1993.
- [Bo] Francis Bonahon. Cobordism of automorphisms of surfaces. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 16(2) :237–270, 1983.
- [Br] Robert Brooks. The spectral geometry of a tower of coverings. *J. Differential Geom.*, 23(1) :97–107, 1986.
- [BCW] David Bachman, Daryl Cooper, and Matthew E. White. Large embedded balls and Heegaard genus in negative curvature. *Algebr. Geom. Topol.*, 4 :31–47 (electronic), 2004.
- [BH] Martin R. Bridson and André Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [BMP] Michel Boileau, Sylvain Maillot, and Joan Porti. *Three-dimensional orbifolds and their geometric structures*, volume 15 of *Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses]*. Société Mathématique de France, Paris, 2003.
- [BO1] R. L. Bishop and B. O’Neill. Manifolds of negative curvature. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 145 :1–49, 1969.
- [BO2] Francis Bonahon and Jean-Pierre Otal. Scindements de Heegaard des espaces lenticulaires. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 16(3) :451–466 (1984), 1983.
- [CDL] Tobias H. Colding and Camillo De Lellis. The min-max construction of minimal surfaces. In *Surveys in differential geometry, Vol. VIII (Boston, MA, 2002)*, *Surv. Differ. Geom.*, VIII, pages 75–107. Int. Press, Somerville, MA, 2003.
- [CG] A. J. Casson and C. McA. Gordon. Reducing Heegaard splittings. *Topology Appl.*, 27(3) :275–283, 1987.
- [CLR] D. Cooper, D. D. Long, and A. W. Reid. Essential closed surfaces in bounded 3-manifolds. *J. Amer. Math. Soc.*, 10(3) :553–563, 1997.
- [DSV] Giuliana Davidoff, Peter Sarnak, and Alain Valette. *Elementary number theory, group theory, and Ramanujan graphs*, volume 55 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

- [FH] Charles Frohman and Joel Hass. Unstable minimal surfaces and Heegaard splittings. *Invent. Math.*, 95(3) :529–540, 1989.
- [FHS] Michael Freedman, Joel Hass, and Peter Scott. Least area incompressible surfaces in 3-manifolds. *Invent. Math.*, 71(3) :609–642, 1983.
- [G1] David Gabai. Foliations and the topology of 3-manifolds. *J. Differential Geom.*, 18(3) :445–503, 1983.
- [G2] David Gabai. On 3-manifolds finitely covered by surface bundles. In *Low-dimensional topology and Kleinian groups (Coventry/Durham, 1984)*, volume 112 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 145–155. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986.
- [GdlH] Étienne Ghys and Pierre de la Harpe. La propriété de Markov pour les groupes hyperboliques. In *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov (Bern, 1988)*, volume 83 of *Progr. Math.*, pages 165–187. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.
- [Hak] Wolfgang Haken. Some results on surfaces in 3-manifolds. In *Studies in Modern Topology*, pages 39–98. Math. Assoc. Amer. (distributed by Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.), 1968.
- [Hat] Allen Hatcher. *Notes on basic three-manifolds topology*. 2002. Livre en préparation, disponible à l'adresse <http://www.math.cornell.edu/hatcher/3M/3Mfds.pdf>.
- [He] John Hempel. *3-Manifolds*. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1976. Ann. of Math. Studies, No. 86.
- [J] William Jaco. *Lectures on three-manifold topology*, volume 43 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1980.
- [La1] Marc Lackenby. The asymptotic behaviour of Heegaard genus. *Math. Res. Lett.*, 11(2-3) :139–149, 2004.
- [La2] Marc Lackenby. A characterisation of large finitely presented groups. *J. Algebra*, 287(2) :458–473, 2005.
- [La3] Marc Lackenby. Heegaard splittings, the virtually Haken conjecture and property  $(\tau)$ . *Invent. Math.*, 164(2) :317–359, 2006.
- [La4] Marc Lackenby. Large groups, property  $(\tau)$  and the homology growth of subgroups. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 146(3) :625–648, 2009.
- [Lu] Alexander Lubotzky. *Discrete groups, expanding graphs and invariant measures*, volume 125 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1994. With an appendix by Jonathan D. Rogawski.
- [LZ] Alexander Lubotzky and Andrzej Zuk. *On property  $(\tau)$* . 2003. Livre en préparation, disponible à l'adresse <http://www.ma.huji.ac.il/~alexlub/>.
- [Mah] Joseph Maher. Heegaard gradient and virtual fibers. *Geom. Topol.*, 9 :2227–2259 (electronic), 2005.
- [Mar] A. Marden. *Outer circles*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007. An introduction to hyperbolic 3-manifolds.

- [Mat] Yukio Matsumoto. *An introduction to Morse theory*, volume 208 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. Translated from the 1997 Japanese original by Kiki Hudson and Masahico Saito, Iwanami Series in Modern Mathematics.
- [Mi] J. Milnor. *Morse theory*. Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells. Annals of Mathematics Studies, No. 51. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963.
- [Mo] Edwin E. Moise. Affine structures in 3-manifolds. V. The triangulation theorem and Hauptvermutung. *Ann. of Math. (2)*, 56 :96–114, 1952.
- [MG] Fabiola Manjarrez-Gutiérrez. Circular thin position for knots in  $S^3$ . *Algebr. Geom. Topol.*, 9(1) :429–454, 2009.
- [MR] Joseph Maher and J. Hyam Rubinstein. Period three actions on the three-sphere. *Geom. Topol.*, 7 :329–397 (electronic), 2003.
- [MSY] William Meeks, III, Leon Simon, and Shing Tung Yau. Embedded minimal surfaces, exotic spheres, and manifolds with positive Ricci curvature. *Ann. of Math. (2)*, 116(3) :621–659, 1982.
- [O] Jean-Pierre Otal. Sur les scindements de Heegaard de la sphère  $S^3$ . *Topology*, 30(2) :249–257, 1991.
- [P] Jon T. Pitts. *Existence and regularity of minimal surfaces on Riemannian manifolds*, volume 27 of *Mathematical Notes*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1981.
- [PR] Jon T. Pitts and J. H. Rubinstein. Existence of minimal surfaces of bounded topological type in three-manifolds. In *Miniconference on geometry and partial differential equations (Canberra, 1985)*, volume 10 of *Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ.*, pages 163–176. Austral. Nat. Univ., Canberra, 1986.
- [RS] Colin Patrick Rourke and Brian Joseph Sanderson. *Introduction to piecewise-linear topology*. Springer Study Edition. Springer-Verlag, Berlin, 1982. Reprint.
- [Sc] Martin Scharlemann. Heegaard splittings of compact 3-manifolds. In *Handbook of geometric topology*, pages 921–953. North-Holland, Amsterdam, 2002.
- [Se] Jean-Pierre Serre. *Arbres, amalgames,  $SL_2$* . Société Mathématique de France, Paris, 1977. Avec un sommaire anglais, Rédigé avec la collaboration de Hyman Bass, Astérisque, No. 46.
- [Si] L. C. Siebenmann. Les bisections expliquent le théorème de Reidemeister-Singer. *Prépublications d’Orsay*, 80(16), 1979.
- [Som] Teruhiko Soma. Virtual fibers in hyperbolic 3-manifolds. *Topology Appl.*, 41(3) :179–192, 1991.
- [Sou] Juan Souto. Geometry, Heegaard splittings and rank of the fundamental group of hyperbolic 3-manifolds. In *Workshop on Heegaard Splittings*, volume 12 of *Geom. Topol. Monogr.*, pages 351–399. Geom. Topol. Publ., Coventry, 2007.



- [St] John Stallings. On fibering certain 3-manifolds. In *Topology of 3-manifolds and related topics (Proc. The Univ. of Georgia Institute, 1961)*, pages 95–100. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962.
- [ST1] Martin Scharlemann and Abigail Thompson. Heegaard splittings of  $(\text{surface}) \times I$  are standard. *Math. Ann.*, 295(3) :549–564, 1993.
- [ST2] Martin Scharlemann and Abigail Thompson. Thin position for 3-manifolds. In *Geometric topology (Haifa, 1992)*, volume 164 of *Contemp. Math.*, pages 231–238. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [SW] Peter B. Shalen and Philip Wagreich. Growth rates,  $Z_p$ -homology, and volumes of hyperbolic 3-manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 331(2) :895–917, 1992.
- [SY] R. Schoen and Shing Tung Yau. Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three-dimensional manifolds with nonnegative scalar curvature. *Ann. of Math. (2)*, 110(1) :127–142, 1979.
- [T] William P. Thurston. Three dimensional manifolds, kleinian groups and hyperbolic geometry. The mathematical heritage of Henri Poincare, Proc. Symp. Pure Math. 39, Part 1, Bloomington/Indiana 1980, 87-111 (1983)., 1983.
- [Wa1] Friedhelm Waldhausen. Heegaard-Zerlegungen der 3-Sphäre. *Topology*, 7 :195–203, 1968.
- [Wa2] Friedhelm Waldhausen. On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large. *Ann. of Math. (2)*, 87 :56–88, 1968.
- [We] B. A. F. Wehrfritz. *Infinite linear groups. An account of the group-theoretic properties of infinite groups of matrices.* Springer-Verlag, New York, 1973. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 76.*
- [Wi] Daniel T. Wise. Research announcement : the structure of groups with a quasiconvex hierarchy. *Electron. Res. Announc. Math. Sci.*, 16 :44–55, 2009.

Claire RENARD,  
École Normale Supérieure de Cachan,  
Centre de Mathématiques et de Leurs Applications.  
61 avenue du président Wilson  
F-94235 CACHAN CEDEX.  
[claire.renard@normalesup.org](mailto:claire.renard@normalesup.org)