Continuité des représentations de groupes topologiques

Jean-Christophe Tomasi

▶ **To cite this version:**

Jean-Christophe Tomasi. Continuité des représentations de groupes topologiques. Analyse fonctionnelle [math.FA]. Université Pascal Paoli, 2011. Français. NNT : . tel-00681558

HAL Id: tel-00681558

https://theses.hal.science/tel-00681558

Submitted on 21 Mar 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ECOLE DOCTORALE ENVIRONNEMENT ET SOCIETE
UMR CNRS 6134 (SPE)

Thèse présentée pour l'obtention du grade de

DOCTEUR EN MATHEMATIQUES
Mention : mathématiques appliquées

Soutenue publiquement par

Jean-Christophe Tomasi

le 12 décembre 2011

Continuité des représentations de groupes topologiques

Directeur :
M Jean-Martin Paoli, MCF-HDR, Université de Corse

Rapporteurs :
M Jean Esterle, Professeur, Université de Bordeaux 1
M Gilles Godefroy, DR1 au CNRS, Université de Paris 6

Jury

M Catalin Badea, Professeur, Université de Lille 1
M Bernard Di Martino, MCF-HDR, Université de Corse
M Jean Esterle, Professeur, Université de Bordeaux 1
M Gilles Godefroy, DR1 au CNRS, Université de Paris 6
M Mostafa Mbekhta, Professeur, Université de Lille 1
M Jean-Martin Paoli, MCF-HDR, Université de Corse
M Pierre Simonnet, MCF-HDR, Université de Corse

Remerciements :

Je tiens à exprimer ma gratitude envers Jean-Martin Paoli car il a dirigé cette thèse d'une manière qui me convenait parfaitement ; il a su m'orienter dans une direction de recherche fructueuse tout en me laissant une entière liberté par la suite ; il a également pu m'apporter son aide lorsque certains blocages sont apparus, m'épargnant le découragement qui survient fréquemment pendant un travail de longue haleine.

Je remercie Jean Esterle et Gilles Godefroy d'avoir accepté d'évaluer cette thèse, leurs suggestions m'ont été bien utiles ; je témoigne aussi toute ma reconnaissance à Catalin Badea, Bernard Di Martino, Mostafa Mbekhta et Pierre Simonnet qui ont bien voulu faire partie du jury.

De manière plus anecdotique, les remarques judicieuses de Karl-Goswin Grosse-Erdmann et David Fremlin m'ont évité de persister dans une voie qui n'aurait pas abouti.
De la même façon, la monographie épuisée que Zoltán Sasvári m'a gracieusement envoyée a considérablement facilité mon travail en rendant plus accessibles quelques résultats utiles.

Je remercie également Mathieu Cianfarani avec qui j'ai pu collaborer de manière fructueuse ainsi que les membres du laboratoire qui m'a accueilli, notamment Catherine et Jean-Louis qui m'ont encouragé et ont manifesté leur intérêt lors des séminaires où j'ai pu exposer mes travaux.

Enfin je sais gré à ma famille, en particulier à ma femme, de m'avoir soutenu tout au long de ces trois années, exaltantes sans doute, mais pendant lesquelles j'étais certainement moins disponible.

Résumé :

Soit $\mathcal{L}(X)$ l'algèbre des opérateurs bornés sur un espace de Banach X et soit $\theta : G \to \mathcal{L}(X)$ une représentation fortement continue d'un groupe topologique G dans X.
Pour chaque élément g dans le groupe G, on considère la projection sur le cercle unité $\mathbb{T}$ du spectre $\sigma(\theta(g))$ de l'opérateur inversible $\theta(g)$, on note donc $\sigma^1(\theta(g)) := \{\lambda/|\lambda|, \lambda \in \sigma(\theta(g))\}$, et on considère l'ensemble de tous les éléments g du groupe G tels que $\sigma^1(\theta(g))$ ne contienne aucun polygone régulier, on note donc $\Sigma_\theta := \{g \in G \ / \ \nexists P \in \mathcal{P} \ / \ P \subseteq \sigma^1(\theta(g))\}$, où $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des polygones réguliers de $\mathbb{T}$ (nous appelons *polygone régulier* de $\mathbb{T}$ l'image par une rotation d'un sous-groupe fermé de $\mathbb{T}$ autre que $\{1\}$).
Dans la première partie, nous présentons les principaux résultats et notations utilisés par la suite.
Lorsque G est un groupe abélien localement compact, nous prouvons dans la deuxième partie que θ est uniformément continue si et seulement si θ est mesurable ($\mathcal{L}(X)$ est muni de la topologie de la norme) et si de plus G est à base de topologie dénombrable et θ fortement continue, nous montrons dans la troisième partie que θ est uniformément continue si et seulement si Σ_θ n'est pas maigre.
De même, nous montrons que θ est uniformément continue si et seulement si Σ_θ n'est pas négligeable pour la mesure de Haar sur G.
Lorsque G est un groupe localement compact et θ une représentation unitaire de G dans un espace de Hilbert H, nous montrons également dans la deuxième partie que θ est uniformément continue si et seulement si θ est mesurable, et si de plus G est métrisable et θ fortement continue, nous prouvons dans la troisième partie que θ est uniformément continue si et seulement si $\{g \in G \ / \ 0 \notin Conv(\sigma(\theta(g)))\}$ n'est pas maigre, où $Conv(S)$ désigne l'enveloppe convexe d'une partie quelconque S dans un espace vectoriel.

Mots-clefs : représentation de groupe, algèbre de Banach, espace de Hilbert, continuité, mesurabilité, spectre.

Abstract :

Let $\mathcal{L}(X)$ be the algebra of all bounded operators on a Banach space X, and let $\theta : G \to \mathcal{L}(X)$ be a representation of a topological group G in X.
For every element g in the group G, we consider the projection on the unit circle $\mathbb{T}$ of the spectrum $\sigma(\theta(g))$ of the invertible operator $\theta(g)$, so we set $\sigma^1(\theta(g)) := \{\lambda/|\lambda|, \lambda \in \sigma(\theta(g))\}$, and we consider the set of all elements g in the group G such that $\sigma^1(\theta(g))$ does not contain any regular polygon of $\mathbb{T}$, so we set $\Sigma_\theta := \{g \in G \ / \ \nexists P \in \mathcal{P} \ / \ P \subseteq \sigma^1(\theta(g))\}$, where $\mathcal{P}$ denotes the set of regular polygons of $\mathbb{T}$ (we call *regular polygon* in $\mathbb{T}$ the image by a rotation of a closed subgroup of $\mathbb{T}$ different from $\{1\}$).
In the first part, we set out the principal results and notations subsequently used.
When G is a locally compact abelian group, we prove in the second part that θ is uniformly continuous if and only if θ is measurable ($\mathcal{L}(X)$ is equipped with the norm topology) and if further G is second countable and θ strongly continuous, we show in the third part that θ is uniformly continuous if and only if Σ_θ is non meager.
In the same way, we show that θ is uniformly continuous if and only if Σ_θ is a non null set for the Haar measure on G.
When G is a locally compact group and θ a unitary representation of G in a Hilbert space H, we show also in the second part that θ is uniformly continuous if and only if θ is measurable, and if further G is metrizable and θ strongly continuous, we prove in the third part that θ is uniformly continuous if and only if $\{g \in G \ / \ 0 \notin Conv(\sigma(\theta(g)))\}$ is non meager, where $Conv(S)$ denotes the convex hull of a subset S in a vector space.

Keywords : representation of group, Banach algebra, Hilbert space, continuity, measurability, spectrum.

Sommaire

Introduction générale **vii**
Historique des problèmes étudiés vii

I Préliminaires **1**
0.1 Notions de topologie 3
0.1.1 Généralités 3
0.1.2 Espaces angéliques 5
0.1.3 Catégorie de Baire 6
0.1.4 Groupes topologiques 8
0.2 Théorie spectrale des opérateurs 16
0.2.1 Algèbres de Banach 16
0.2.2 C*-algèbres 20
0.3 Fonctions définies positives et représentations 23
0.3.1 Représentations de groupes 23
0.3.2 Fonctions définies positives 25
0.3.3 Décomposition de Glicksberg-de Leeuw 26

II Continuité et mesurabilité des représentations **29**

1 Morphismes localement bornés **31**
1.1 Premiers résultats 31
1.2 Morphismes et catégorie de Baire 33
1.3 Morphismes et mesure de Haar 36

2 Cas abélien **41**
2.1 Continuité des représentations 41
2.2 Mesurabilité des représentations 44
2.3 Compléments 45
2.3.1 Cas des algèbres séparables 45
2.3.2 Cas des représentations non localement bornées . . . 49

3 Cas non abélien **53**
3.1 Continuité des représentations unitaires 53
3.2 Mesurabilité des représentations unitaires 58
3.3 Cas des algèbres séparables 60

III Propriétés spectrales **63**

4 Cas abélien **65**
4.0.1 Introduction 65
4.1 Spectre et catégorie de Baire 66
4.1.1 Répartition spectrale et catégorie de Baire 66
4.1.2 Les lois du zéro-deux, zéro-$\sqrt{3}$ et zéro-$\sqrt{2}$ 70
4.2 Spectre et mesure 72
4.2.1 Répartition spectrale et mesure de Haar 72
4.2.2 Une loi du zéro-$\sqrt{2}$ 75

5 Cas non abélien **77**
5.1 Répartition spectrale et catégorie de Baire 77
5.2 Répartition spectrale et mesure 80

Introduction générale

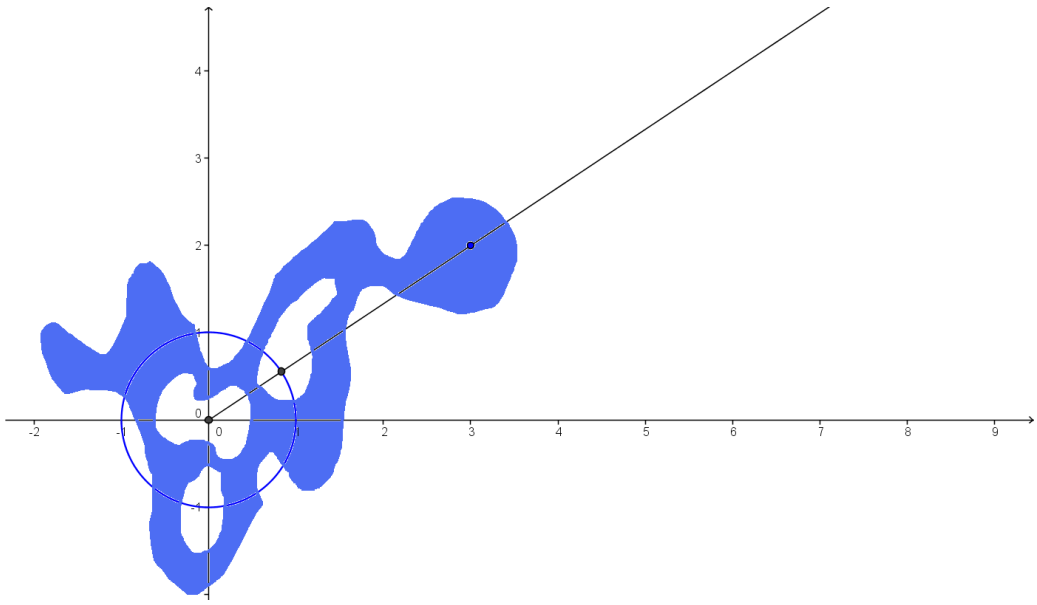
Historique des problèmes étudiés

Le travail qui suit nous a été suggéré par les articles de K. Latrach et J. M. Paoli (cf [38] et [40]) relatifs aux semi-groupes fortement continus $(T(t))_{t\geq 0}$. Les auteurs cherchaient des conditions portant sur le spectre $\sigma(T(t))$ des opérateurs $T(t)$ impliquant la continuité uniforme du semi-groupe ; ils s'inspiraient du théorème suivant de R. S. Phillips :

Théorème *(cf [46])*
Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe fortement continu dans un espace de Banach X, A une sous-algèbre de Banach commutative dans $\mathcal{L}(X)$ contenant l'ensemble $\{T(t), t \geq 0\}$ et $\hat{A}$ l'espace des caractères de A.
Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $(T(t))_{t\geq 0}$ est uniformément continu.
(ii) Pour tout $\chi \in \hat{A}$, il existe $\alpha_\chi \in \mathbb{C}$ tel que $\chi(T(t)) = exp(\alpha_\chi t)$ pour tout $t \geq 0$.
(iii) $\lim_{t\to 0^+} \rho(T(t) - I) = 0$, où ρ désigne le rayon spectral.
(iv) Il existe deux réels $0 \leq \alpha < \beta$ et un ouvert connexe non borné $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ contenant 0 tels que pour tout $t \in]\alpha, \beta[$, $\sigma(T(t)) \cap \Omega = \varnothing$.

Sa preuve se généralise à un semi-groupe à un paramètre localement borné à valeurs dans une algèbre de Banach quelconque (cf [40]).
Intuitivement le théorème montre que la continuité à droite en 0 de l'application $t \mapsto \sigma(T(t))$ entraîne la continuité uniforme du semi-groupe.
Au regard de ce résultat, on pouvait se demander si, en cas de non continuité uniforme, la réunion des spectres $\sigma(T(t))$ pour t dans un ouvert quelconque entourait l'origine. Or des exemples tels que la représentation de $\mathbb{R}$ par translations sur $L^2(\mathbb{R})$ ou sur $L^2(\mathbb{T})$ dans lesquels le spectre $\sigma(T(t))$ est le cercle

sauf pour $t = 0$ (respectivement pour $t \in \pi\mathbb{Q}$) conduisent naturellement à se demander si en fait, en dehors d'un « petit » ensemble de valeurs (en un sens à préciser), le spectre $\sigma(T(t))$, pour une valeur de t en dehors de cet ensemble, n'entoure pas l'origine à lui seul. Ce n'est pas le cas si, comme dans la généralisation du théorème de Phillips, on a un semi-groupe qui n'est que localement borné comme le montre l'exemple suivant :
On considère un morphisme $\psi : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{T}, \times)$ non continu et X un espace de Banach quelconque, on pose $T(t)x = \psi(t)x$ où $(t, x) \in \mathbb{R} \times X$.
On obtient un groupe à un paramètre localement borné avec pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sigma(T(t)) = \{\psi(t)\}$. Pourtant ce groupe n'est ni uniformément, ni fortement continu.
Il fallait donc vraiment utiliser la continuité forte et l'idée de départ des auteurs a été l'analogie avec la fonction exponentielle : si une application ψ vérifie l'équation fonctionnelle de l'exponentielle $\psi(t + t') = \psi(t)\psi(t')$, alors une régularité très faible (mesurabilité, propriété de Baire...) implique la continuité. Ils se sont donc posé les questions suivantes :
Bien qu'en général (par rapport à la topologie forte) l'application « spectre » qui à un opérateur associe son spectre (ou la projection du spectre sur le tore si l'opérateur est inversible) ne soit pas continue, ne possède-t-elle pas une certaine régularité ?
Pourrait-on alors en déduire, pour un groupe, des propriétés de continuité uniforme ?
Dans le cas où l'espace de représentation est séparable, ils obtiennent que ces applications « spectres » sont boréliennes (cf théorème 1.1 in [39] ou proposition 3.1.1 infra).
D'autre part les auteurs parviennent à caractériser la continuité en norme des groupes à un paramètre fortement continus dans [38], ils montrent en effet qu'un groupe fortement continu $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ dans un espace de Banach X est uniformément continu si et seulement si l'ensemble $\{t \in \mathbb{R} \ / \ \sigma^1(T(t)) \neq \mathbb{T}\}$ est non maigre, où $\mathbb{T}$ est le cercle unité dans $\mathbb{C}$ et $\sigma^1(T(t))$ est l'ensemble : $\{\lambda/|\lambda|, \lambda \in \sigma(T(t))\}$, bien défini puisque $T(t)$ est inversible.
Ainsi lorsque le groupe n'est pas continu en norme, le spectre entoure l'origine sauf pour un ensemble maigre, donc un ensemble « exceptionnel ».



Les outils sollicités dans [38], outre le caractère borélien de « l'application spectre » dans le cas d'un espace de Banach séparable, sont, comme dans l'article de Phillips, des résultats concernant les morphismes de groupes discontinus de $\mathbb{R}$ dans le tore, en particulier le fait que l'image réciproque par des morphismes discontinus d'un ouvert quelconque soit « fortement dense » au sens suivant :

Lemme *(cf lemme 2.3 in [38])*
Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ un morphisme de groupes discontinu.
Si U est ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et si V est un ouvert non vide de $\mathbb{T}$ alors $\varphi^{-1}(V) \cap U$ est non maigre.

Dans le cas où l'espace de représentation X est séparable, l'application $\omega : t \mapsto \sigma^1(T(t))$ est borélienne par composition et on vérifie que cette régularité « force » la continuité des morphismes $\chi \circ T^{(1)} : t \mapsto \chi(T(t))/|\chi(T(t))|$ (où χ est un caractère quelconque de l'algèbre image).
En effet étant borélienne d'un espace de Baire dans un espace séparable, l'application ω admet une restriction à un sous-ensemble comaigre qui est continue. Par conséquent si l'ensemble $\{t \in \mathbb{R} \ / \ \omega(t) \neq \mathbb{T}\}$ n'est pas maigre, il contient un point de continuité de cette restriction, c'est à dire un point au voisinage duquel la restriction de ω, et donc $\chi \circ T^{(1)}$ par hypothèse,

restent dans un ouvert V du tore. D'après le lemme précédent cela entraîne la continuité de $\chi \circ T^{(1)}$, donc de $\chi \circ T$ pour tous les caractères χ (cf remarque 2.1.1 infra), or cette « continuité au travers des caractères » équivaut à la continuité en norme d'après le résultat de Phillips (cf également théorème 16.5.1 in [31]).
Dans le cas général, les auteurs se ramènent à la situation précédente en construisant un sous-espace invariant séparable sur lequel le groupe n'est pas continu en norme s'il ne l'est pas sur l'espace entier.

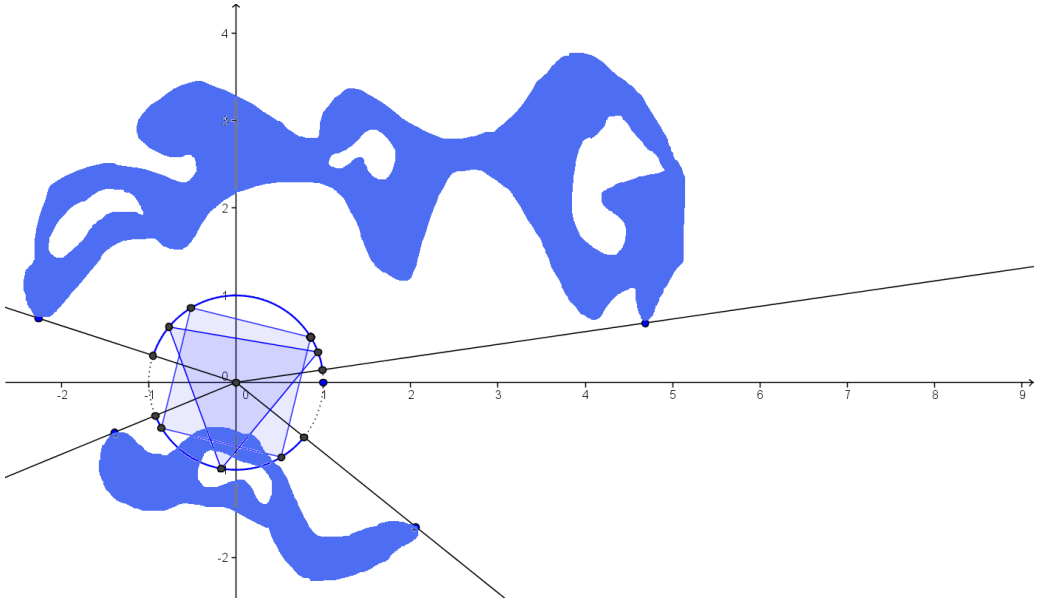
Catégorie de l'ensemble exceptionnel

Des exemples élémentaires montrent que la caractérisation spectrale précédente ne s'étend pas immédiatement aux représentations fortement continues de groupes abéliens localement compacts :

Exemple 0.0.1 *Soit l'espace de Hilbert $X = l^2(\mathbb{R})$ et Γ_m le groupe des racines $m^{ièmes}$ de l'unité, on considère $\theta : \Gamma_m^{\mathbb{N}} \to \mathcal{L}(X)$ la représentation définie par $\theta((\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}) : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (\epsilon_n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
On vérifie facilement que θ est une représentation fortement continue du groupe compact $\Gamma_m^{\mathbb{N}}$ dans l'espace X.
D'autre part pour tout $(\epsilon_n) \in \Gamma_m^{\mathbb{N}}$, $\sigma(\theta(\epsilon_n)) \subseteq \Gamma_m$ et pour tout $(\epsilon_n) \in \Gamma_m^{\mathbb{N}}$ tel que $\Gamma_m \subseteq \{\epsilon_n, n \in \mathbb{N}\}$, on a $\sigma(\theta(\epsilon_n)) = \Gamma_m$.

Toutefois, ils suggèrent un type de généralisation possible, soit en effet $\theta : G \to A \subseteq \mathcal{L}(X)$ une représentation fortement continue d'un groupe topologique abélien G sur une sous-algèbre commutative fermée A de l'algèbre $\mathcal{L}(X)$. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des polygones réguliers de $\mathbb{T}$, c'est à dire l'ensemble des images par rotation de sous-groupes fermés du tore autres que $\{1\}$, et $\sigma(\theta(g))$ le spectre de $\theta(g)$; puisque pour tout g dans G, $\theta(g)$ est inversible, on peut encore définir $\sigma^1(\theta(g)) = \{\lambda/|\lambda|, \lambda \in \sigma(\theta(g))\}$.
Nous montrons dans le chapitre 4.1 que si G est un groupe abélien localement compact à base de topologie dénombrable alors θ est continue en norme ou bien l'ensemble $\Sigma_\theta := \{g \in G \ / \ \nexists \Gamma \in \mathcal{P} \ / \ \Gamma \subseteq \sigma^1(\theta(g))\}$ est maigre, autrement dit une représentation est continue en norme ou bien les éléments du groupe qui possédent des images dont le spectre « entoure » l'origine constituent un ensemble comaigre.

Ainsi lorsque la représentation n'est pas uniformément continue, la répartition angulaire du spectre est assez éparpillée, excepté pour un ensemble maigre, donc un ensemble qu'on peut à nouveau dire « exceptionnel ».



Une telle généralisation suppose d'une part d'étendre les résultats mentionnés plus haut aux morphismes de tels groupes à valeurs dans le tore et d'autre part de pouvoir lire à nouveau la continuité « au travers » des caractères.

Concernant le second point, à savoir la caractérisation de la continuité par les caractères, la preuve de Phillips pour les groupes fortement continus à un paramètre $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ peut se décomposer en deux parties :
- La continuité pour chaque caractère entraîne la continuité spectrale. C'est à dire que si pour tout $\chi \in \hat{A}$, $\chi \circ T$ est continu alors $\lim_{t\to 0} \rho(T(t)-I) = 0$, où ρ désigne le rayon spectral et $\hat{A}$ l'espace de Gelfand constitué des homomorphismes complexes non nuls sur une quelconque sous-algèbre commutative fermée A contenant $T(\mathbb{R})$.
- La continuité spectrale entraîne la continuité en norme.
Les techniques utilisées par Phillips pour obtenir la seconde implication sont la construction par le calcul fonctionnel d'un logarithme de $T(t)$ pour t voisin de 0 puis l'application du théorème de Gelfand-Hille (cf [24] et [30] ou

théorème 0.2.3 infra) pour montrer que $log(T(1))$ est bien générateur de $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$.
Or cette construction, bien qu'elle puisse se généraliser au cas de $\mathbb{R}^n$, nécessite pour passer au cas des groupes abéliens localement compacts des idées nouvelles. Cela a été fait par Jean Esterle dans [19] en s'appuyant sur un théorème de structure classique (cf théorème 0.1.12 infra) et sur le théorème des idempotents de Shilov (cf théorème 5 in [8]), puis généralisé par S. Dubernet à certains groupes non abéliens (cf [18]).
De même la première implication utilise un lemme technique difficile à généraliser car sa preuve repose sur les propriétés de la fonction exponentielle complexe donnée par l'hypothèse de continuité des $\chi \circ T$. Par conséquent, plutôt que de chercher une généralisation globale de cette première implication aux représentations localement bornées de n'importe quel groupe abélien localement compact, il nous a semblé plus raisonnable de nous inspirer de la méthode employée dans [19] en travaillant avec des groupes compacts puis en utilisant le théorème de structure des groupes abéliens localement compacts déjà mentionné.
C'est donc essentiellement cette démarche que l'on trouve exposée dans [11], il a toutefois paru nécessaire de l'améliorer pour nous affranchir, d'une part des arguments de Phillips, subtils, mais spécifiques du cas réel, d'autre part de l'utilisation du théorème de structure qui ne permettait pas d'envisager un transfert des résultats à des représentations de groupes non abéliens.
Cette caractérisation de la continuité des représentations par les caractères permet en outre de montrer que les représentations Haar-mesurables ou Baire-mesurables sont automatiquement uniformément continues car les morphismes mesurables $\chi \circ T$ sont continus.

Concernant le premier point, c'est à dire les propriétés des morphismes de groupes, il a d'abord fallu trouver de « bons ouverts » qui soient d'images réciproques fortement denses.
On a donc été conduit à définir pour tout morphisme $\varphi : G \to \mathbb{T}$, l'ensemble

$$\Gamma_\varphi = \{\lambda \in \mathbb{T} \ / \ \exists (g_i) \text{ suite généralisée dans G tendant vers 1 et } (\varphi(g_i)) \to \lambda\}$$

$= \bigcap_{W\in\mathcal{V}(1)} \overline{\varphi(W)}$, où $\mathcal{V}(1)$ désigne un système fondamental de voisinages du neutre dans G.
Ces « polygones » Γ_φ, liés à la discontinuité des morphismes de G dans $\mathbb{T}$, joueront un rôle dans la caractérisation spectrale de la continuité de la

représentation.
Les ouverts d'image réciproque « fortement dense » sont alors les ouverts coupés par toutes les rotations de Γ_φ (cf lemme 3.3 in [11] et lemme 1.2.2 infra pour un résultat plus général).
En notant A_θ la sous-algèbre fermée de $\mathcal{L}(X)$ engendrée par $\theta(G)$ (A_θ est donc commutative), et $\chi \circ \theta^{(1)}$ les morphismes de G dans $\mathbb{T}$ définis par $\chi \circ \theta^{(1)}(g) = (\chi \circ \theta)(g)/|(\chi \circ \theta)(g)|$ où χ est un élément dans l'espace des caractères $\hat{A_\theta}$, ce lemme 1.2.2 permet, essentiellement comme dans le cas réel, d'établir (cf théorème 4.1.1 infra) que pour une représentation fortement continue θ d'un groupe abélien localement compact G à base de topologie dénombrable dans un espace de Banach X, l'ensemble $\bigcup_{\chi \in \hat{A_\theta}} \Omega_\chi$ est maigre dans G où on note

$$\Omega_\chi = \{g \in G \ / \ \forall \lambda \in \mathbb{T} \ \ \lambda\Gamma_{\chi\circ\theta^{(1)}} \not\subseteq \sigma^1(\theta(g))\}.$$

Evidemment ce résultat n'apporte rien dans le cas où la représentation est continue puisqu'alors pour tout $\chi \in \hat{A_\theta}$, $\chi \circ \theta$ est continu donc
$\Gamma_{\chi\circ\theta^{(1)}} = \{1\}$ (cf remarque 2.1.1 infra), et ainsi $\Omega_\chi = \varnothing$. En revanche si θ n'est pas continue, il existe $\chi \in \hat{A_\theta}$ tel que $\chi \circ \theta$ soit discontinu (cf corollaire 2.1.1 infra), c'est à dire tel que $\chi \circ \theta^{(1)}$ soit discontinu, ainsi $\Gamma_{\chi\circ\theta^{(1)}} \neq \{1\}$ et donc, en dehors de l'ensemble maigre Ω_χ, $\sigma^1(\theta(g))$ contient l'image de $\Gamma_{\chi\circ\theta^{(1)}}$ par une rotation.

Mesure de l'ensemble exceptionnel

Dans sa thèse d'habilitation à diriger des recherches, J.M. Paoli soulignait qu'une question naturelle était de savoir si le presque partout au sens de Lebesgue pouvait jouer le même rôle qu'au sens de Baire, c'est à dire si l'implication suivante était vraie :
Si $\{t \in \mathbb{R} \ / \ \sigma^1(T(t)) \neq \mathbb{T}\}$ est de mesure non nulle alors $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ est continu en norme ?
Il faisait d'ailleurs remarquer que la démonstration s'adapterait immédiatement si, pour tout morphisme discontinu φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{T}$, et pour tout ouvert non vide V de $\mathbb{T}$, $\varphi^{-1}(V)$ rencontrait tous les ensembles mesurables de $\mathbb{R}$ de mesure non nulle.
Un tel résultat est en fait la conséquence directe du fait suivant :

Lemme *Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un morphisme non continu.*
Si A est un ensemble mesurable de mesure positive alors $\varphi(A)$ est dense.

La preuve, qui lui a été par la suite communiquée par G. Godefroy, est basée sur la $\mathbb{Q}$-linéarité de φ et sur l'existence d'un point de Lebesgue de A, c'est à dire d'un réel x_0 tel que $\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{2\epsilon}\ m(A\cap]x_0-\epsilon, x_0+\epsilon[) = 1$.
Il s'agissait donc d'établir, dans le contexte des groupes localement compacts et de la mesure de Haar, que $\varphi(A)$ rencontre les ouverts du type déjà défini, à savoir les ouverts V tels que pour tout $\lambda \in \mathbb{T}$, $\lambda V \cap \Gamma_\varphi \neq \varnothing$ (cf lemme 1.3.2 infra). On montre alors que $\bigcup_{\chi\in\hat{A_\theta}} \Omega_\chi$ est négligeable dans G (cf théorème 4.2.1 infra), résultat qui là encore ne présente d'intérêt que dans le cas des représentations fortement continues non continues en norme, on retiendra donc que si θ n'est pas uniformément continue alors en dehors d'un ensemble négligeable, $\sigma^1(\theta(g))$ contient un polygone (cf corollaire 4.2.1 infra).
C'est ce travail que l'on a exposé dans [52], on voit ici que les énoncés sont trés proches de ceux du chapitre 4.1 ; ce sont en effet des propositions duales au sens où « maigre » est remplacé par « négligeable » ; en revanche les techniques sollicitées sont différentes (cela tient au fait que pour une application borélienne d'un espace polonais dans un espace métrique séparable, il existe une restriction à un comaigre qui est continue mais il n'existe pas nécessairement de restriction qui soit continue sur le complémentaire d'un ensemble négligeable).
Les résultats précédents permettent de préciser quelques éléments relatifs aux lois du « zéro-deux » ou du « zéro-$\sqrt{3}$ » :
Il est bien connu que pour les groupes fortement continus à un paramètre $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ sur un espace de Banach, on a $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ continu en norme ou bien $\limsup_{t\to 0} \|T(t)-I\| \geq 2$ (cf corollaire 4.13 in [45]).
Pour les représentations des groupes abéliens localement compacts, J. Esterle obtient une loi du « zéro-$\sqrt{3}$ » (cf [19], [20]) :
Si $\theta : G \to A$ est une représentation d'un tel groupe sur une algèbre de Banach alors θ est continue ou bien $\limsup_{g\to 1} ||\theta(g)-I|| \geq \sqrt{3}$.
De plus, si pour tout $n \geq 1$ le groupe admet localement une division continue (cf définition 1.1.1 infra) alors cette loi du « zéro-$\sqrt{3}$ » devient une loi du « zéro-deux ».
A cette fin, l'auteur définit l'outil suivant :

$$\Gamma_\theta = \{\lambda \in \mathbb{C} \ / \ \liminf_{u\to 1} dist(\lambda, \sigma(\theta(u))) = 0\}.$$

Dans le cas où θ est simplement un morphisme φ du groupe G dans le tore $\mathbb{T}$, on retrouve le polygone Γ_φ défini plus haut.

Il prouve notamment qu'une représentation θ localement spectralement bornée d'un groupe topologique sur une algèbre de Banach est spectralement continue si et seulement si $\Gamma_\theta = \{1\}$.
Dans sa thèse de doctorat, S. Dubernet étend certains des résultats obtenus par J. Esterle aux groupes topologiques quelconques. Il en déduit que pour une représentation d'un groupe topologique quelconque sur une algèbre de Banach, on a encore $\lim_{u\to 1} ||I - \theta(u)|| = 0$ ou bien $\limsup_{u\to 1} ||I - \theta(u)|| \geq \sqrt{3}$, et cette loi devient une loi du « zéro-deux » si le groupe admet localement une division continue à tout ordre.
Précisons que d'après le lemme 1.1.1 infra, on aura encore une telle loi du « zéro-deux » pour les groupes abéliens localement compacts possédant localement « une division compacte » à tout ordre (cf définition 1.1.2 infra), donc en particulier pour les groupes abéliens localement compacts qui sont connexes ou bien localement connexes (cf remarque 1.1.3 infra).
L'auteur pose la question de la continuité automatique des représentations spectralement continues et y répond favorablement dans le cas des représentations localement bornées de groupes compacts ; d'autre part il obtient un résultat de continuité (cf proposition 2.3.2 in [18]) pour toute représentation localement bornée et spectralement continue d'un groupe de Baire abélien dans une algèbre de Banach séparable.
Il était naturel de se demander si on pouvait obtenir un résultat analogue à cette proposition 2.3.2 en remplaçant la continuité spectrale par la continuité pour tous les caractères, c'est en fait une conséquence de « l'égalité des gammas » (cf proposition 2.3.1 infra).
Comme autre conséquence, nous obtenons, mais seulement dans le cas de représentations fortement continues de groupes abéliens localement compacts, des lois du « zéro-$\sqrt{2}$ » (cf corollaires 4.1.4 et 4.2.3 infra).

Cas non abélien

Il était tentant de se demander quelle généralisation des résultats précédents pouvait être obtenue dans le cas non abélien.
Bien sûr les valeurs du spectre d'un élément a ne sont alors plus les images $\chi(a)$ par les caractères χ de l'algèbre, en revanche pour les C*-algèbres, les états jouent un rôle analogue à celui des caractères puisque les images par les états d'un élément a sont les éléments de son image numérique, qui est

l'enveloppe convexe du spectre dans le cas où l'élément a est normal, et à plus forte raison unitaire.
On a donc considéré des représentations unitaires θ d'un groupe G localement compact sur une C*-algèbre A et on a cherché à établir des résultats voisins de ceux obtenus dans le cas commutatif, à savoir :
- Une caractérisation de la continuité uniforme « au travers » des états puis des états purs (qu'on peut considérer comme une généralisation naturelle des caractères, cf proposition 0.2.3).
- Des propriétés des fonctions du type $\omega \circ \theta$ où ω est un état pur, en particulier lorsque ces fonctions sont discontinues.
- Une caractérisation de la continuité uniforme par l'ensemble des points $g \in G$ tels que l'origine 0 appartienne à l'enveloppe convexe du spectre $\sigma(\theta(g))$.
En remarquant dans un premier temps que si ω est un état, $\omega \circ \theta$ est une fonction définie positive (cf lemme 3.1.2 infra), il n'a pas été difficile d'adapter la preuve donnée dans le cas commutatif pour obtenir que la représentation unitaire θ est uniformément continue si et seulement si $\omega \circ \theta$ est continue pour tout état ω (cf $(ii) \Rightarrow (iii)$ in théorème 3.1.2 infra).
C'est cette caractérisation qui nous a permis de montrer que les représentations unitaires mesurables (au sens de Haar) sont automatiquement continues en recourant à des arguments plus fins que dans le cas abélien puisqu'il n'y a pas de continuité automatique des fonctions définies positives mesurables.
D'autre part, en utilisant le théorème de représentation de Gelfand-Naimark-Segal (cf théorème 0.2.9 infra), un théorème de décomposition des représentations unitaires de Glicksberg-de Leeuw (cf théorème 0.3.3 infra) et le théorème de représentation de Choquet, généralisé par Bishop et de Leeuw au cas non métrisable (cf théorème 0.1.11 infra), on a pu restreindre la caractérisation aux seuls états purs et en déduire la caractérisation de l'uniforme continuité par les propriétés du spectre.

C'est ce cheminement que l'on trouve dans [44] ; cependant en utilisant que dans le cas de représentations unitaires fortement continues de groupes localement compacts G dans un espace de Hilbert H (séparable ou non), l'application $\Sigma : g \in G \mapsto \sigma(\theta(g)) \in \mathcal{K}(\mathbb{T})$ possède un ensemble comaigre de points de continuité (cf théorème 3.1.1 infra), on a pu simplifier la preuve du résultat principal et l'étendre aux groupes localement compacts métrisables, sans hypothèse de séparabilité.

La caractérisation spectrale obtenue est moins précise que dans le cas abélien, néanmoins pour les groupes de Lie, M. Cianfarani et J.M. Paoli ont pu en déduire la dichotomie suivante :

Théorème *(cf théorème 3.1 in [12])*
Soit G un groupe de Lie et $\theta : G \to \mathcal{L}(H)$ une représentation unitaire de G dans un espace de Hilbert H. Alors θ est uniformément continue ou bien il existe un voisinage U du neutre tel que sur un comaigre de U, $\sigma(\theta(g)) = \mathbb{T}$. Si l'image de l'application exponentielle est dense dans G, alors on peut prendre $U = G$.

Première partie

Préliminaires

Pour faciliter la lecture, nous regroupons dans cette première partie les notations et les résultats généraux les plus fréquemment utilisés par la suite.

0.1 Notions de topologie

0.1.1 Généralités

Définition 0.1.1 *Un espace topologique X est* séparé *ou* de Hausdorff *si pour tout couple de points distincts de X, il existe deux ouverts disjoints contenant chacun des points.*
Un espace topologique X est localement compact *si tout point possède au moins un voisinage compact, (on vérifie que dans un espace localement compact tout point possède un système fondamental de voisinages compacts).*
Un espace topologique est dénombrable à l'infini *ou K_σ ou* σ-compact *s'il est réunion dénombrable d'ensembles compacts.*

Théorème 0.1.1 *(cf théorème 2.8.21 in [51])*
Soit X un espace localement compact à base de topologie dénombrable et X_ω son compactifié d'Alexandroff. Alors :
(i) X est métrisable et dénombrable à l'infini.
(ii) X_ω est métrisable et séparable.

Dans un espace localement compact à base de topologie dénombrable, tout ouvert (respectivement fermé) est donc un K_σ (respectivement un G_δ).

Proposition 0.1.1 *Si X est un espace localement compact dénombrable à l'infini, il existe une suite (U_n) d'ensembles ouverts relativement compacts dans X, formant un recouvrement de X et tels que $\overline{U_n} \subseteq U_{n+1}$ pour tout n.*

Corollaire 0.1.1 *Avec les notations de la proposition précédente, pour toute partie compacte K de X, il existe un entier n tel que $K \subseteq U_n$.*

Définition 0.1.2 *Soit X un espace topologique séparable. On dit que X est un* espace polonais *s'il existe une métrique compatible avec sa topologie pour laquelle X est complet. Un espace polonais est donc un espace « complètement métrisable séparable ».*

Théorème 0.1.2 *(cf théorème 3.11 in [35])*
Un sous-espace d'un espace polonais est polonais si et seulement si c'est un G_δ.

Puisque tout espace topologique est ouvert dans son compactifié d'Alexandroff, on déduit des deux théorèmes précédents :

Corollaire 0.1.2 *(cf corollaire 2.10.18 in [51])*
Tout espace localement compact à base de topologie dénombrable est polonais.

Théorème 0.1.3 *(cf §3 in [10])*
Si X est un espace de Hausdorff localement compact et dénombrable à l'infini alors l'espace $C(X, \mathbb{C})$ des fonctions continues à valeurs complexes muni de la topologie de la convergence compacte est métrisable.

Espace des parties compactes

Soit X un espace topologique, on note $\mathcal{K}(X)$ l'ensemble des compacts de X muni de la topologie de Vietoris, c'est à dire la topologie engendrée par les ensembles de la forme $\{K \in \mathcal{K}(X) \ / \ K \subseteq U\}$ et $\{K \in \mathcal{K}(X) \ / \ K \cap U \neq \varnothing\}$ où U est ouvert dans X.
Si maintenant (X, d) est un espace métrique, on définit la distance de Hausdorff sur $\mathcal{K}(X)$, notée δ, par

$$\delta(K_1, K_2) = \begin{cases} = 0 \text{ si } K_1 = K_2 = \varnothing, \\ = 1 \text{ si } K_1 \text{ ou bien } K_2 \text{ est vide}, \\ = \sup(\delta_1(K_1, K_2); \delta_2(K_1, K_2)) \text{ si } K_1 \text{ et } K_2 \text{ sont non vides}, \end{cases}$$

où $\delta_1(K_1, K_2) = \sup_{z \in K_1} d(z, K_2)$ et $\delta_2(K_1, K_2) = \sup_{z \in K_2} d(z, K_1)$.
On vérifie que la métrique de Hausdorff est compatible avec la topologie de Vietoris et que si X est séparable (respectivement complètement métrisable, ou polonais, ou compact métrisable) alors $\mathcal{K}(X)$ possède la même propriété. De plus si $f : X \to Y$ est une application continue entre espaces métrisables alors l'application $f' : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(Y)$ définie par $f'(K) = f(K)$ est continue (cf chapitre 4 in [35]).

0.1.2 Espaces angéliques

Rappelons que dans un espace topologique, un élément a est *valeur d'adhérence* d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque pour tout voisinage V de a et tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que $a_n \in V$.

Définition 0.1.3 *Soit A une partie d'un espace topologique (séparé) X.*
(i) A est dénombrablement compact *si toute suite de A possède une valeur d'adhérence dans A.*
(ii) A est séquentiellement compact *si de toute suite de A on peut extraire une suite convergeant dans A.*
(iii) A est relativement dénombrablement compact *si toute suite de A possède une valeur d'adhérence dans X.*
(iv) A est relativement séquentiellement compact *si de toute suite de A on peut extraire une suite convergeant dans X.*

« A relativement dénombrablement compact » n'est pas en général équivalent à « $\overline{A}$ dénombrablement compact » (cf exemple 1.2.9 in [21]).
On vérifie facilement que tout ensemble (relativement) compact est (relativement) dénombrablement compact et que tout ensemble (relativement) séquentiellement compact est (relativement) dénombrablement compact.

Une notion utile pour le chapitre 3 est *l'angélicité* (cf [21]) :

Définition 0.1.4 *Un espace topologique séparé X est* angélique *si pour toute partie $A \subseteq X$ relativement dénombrablement compacte, il est vrai que :*
(i) A est relativement compacte.
(ii) Pour tout $x \in \overline{A}$, il existe une suite dans A convergeant vers x.

En effet, dans de tels espaces, il est équivalent de dire qu'une partie est (relativement) compacte, (relativement) dénombrablement compacte ou (relativement) séquentiellement compacte.
On peut montrer qu'une large classe d'espaces de fonctions continues sont angéliques pour la topologie de la convergence simple :

Théorème 0.1.4 *Si un espace topologique séparé X vérifie $X = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n}$ avec K_n relativement dénombrablement compact et si Z est un espace métrique alors l'espace $C(X, Z)$ des fonctions continues de X dans Z est angélique pour la topologie de la convergence simple.*

Ce théorème est en particulier vrai pour X séparable ou bien X localement compact dénombrable à l'infini.
C'est une généralisation du théorème d'Eberlein-Smulian (cf théorème 13.4.3 in [53]) qui affirme en particulier que lorsque X est un espace topologique compact et Y un espace métrique compact, une partie de $C(X,Y)$ (munie de la topologie de la convergence simple) est compacte si et seulement si elle est séquentiellement compacte. Comme les espaces normés sont angéliques pour leur topologie faible (cf [21]), $C(X,\mathbb{C})$ est angélique à la fois pour la topologie de la convergence simple et pour la topologie faible associée à la topologie de la convergence uniforme sur le compact X, on retrouve alors facilement le résultat suivant dû à A. Grothendieck (cf [27]) :

Théorème *Soit X est un espace topologique compact.*
Alors $A \subseteq (C(X,\mathbb{C}), ||.||_\infty)$ est faiblement compact si et seulement si A est uniformément borné et compact pour la topologie de la convergence simple.

0.1.3 Catégorie de Baire

Ensembles maigres

Soit X un espace topologique. Une partie $A \subseteq X$ est *rare* si sa fermeture $\overline{A}$ est d'intérieur vide, donc A est rare si et seulement si $\overline{A}$ est rare.
Une partie $A \subseteq X$ est *maigre* ou de *première catégorie* si $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ où chaque A_n est rare.
Un ensemble non maigre est également dit de *seconde catégorie*, le complémentaire d'un ensemble maigre est *comaigre* ou *résiduel*, donc un ensemble est comaigre si et seulement s'il contient l'intersection d'une famille dénombrable d'ouverts denses.
Un *idéal* sur un ensemble X est une collection de sous-ensembles de X contenant $\varnothing$ et stable par sous-ensemble et réunion finie. Si elle est également stable par réunion dénombrable, on parle de *σ-idéal*.
Les ensembles rares dans un espace topologique forment un idéal et les ensembles maigres un σ-idéal.
La notion de σ-idéal est caractéristique de différentes formes de « petitesse » d'ensembles comme la dénombrabilité, la négligeabilité, la maigreur, etc.

Espaces de Baire

On rappelle que pour un espace topologique X, les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) Tout ouvert non vide de X est non maigre.
(ii) Tout comaigre dans X est dense.
(iii) L'intersection d'une famille dénombrable d'ouverts denses dans X est dense.

Définition 0.1.5 *Un espace topologique est un* espace de Baire *s'il satisfait l'une des conditions précédentes.*

Exemple 0.1.1 *Un espace complet, un espace de Hausdorff localement compact sont des espaces de Baire.*

Ensembles possédant la propriété de Baire

Soit $\mathcal{I}$ un σ-idéal sur un ensemble X. Si A et B sont des parties de X, on dit que A et B sont *égaux modulo* $\mathcal{I}$ si leur différence symétrique $A\Delta B := (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$ est un élément de $\mathcal{I}$.
On a alors une relation d'équivalence compatible avec le passage au complémentaire et avec la réunion et l'intersection dénombrables.
Dans le cas particulier où $\mathcal{I}$ est le σ-idéal des ensembles maigres, on note $A \cong B$ lorsque A et B sont égaux modulo les ensembles maigres.

Définition 0.1.6 *Soit X un espace topologique. Un ensemble $A \subseteq X$ possède la* propriété de Baire *si $A \cong U$ où U est un ouvert de X.*

On a alors :

Proposition 0.1.2 *Soit X un espace topologique. La classe des ensembles possédant la propriété de Baire est une tribu. C'est la plus petite tribu contenant les ouverts et les maigres.*

En particulier, les ouverts, fermés, F_σ et G_δ ont la propriété de Baire.

Proposition 0.1.3 *Soit X un espace topologique et $A \subseteq X$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) A a la propriété de Baire.
(ii) $A = G \cup M$, où G est un G_δ et M un ensemble maigre.
(iii) $A = F\backslash M$, où F est un F_σ et M un ensemble maigre.

Fonctions mesurables au sens de Baire

Définition 0.1.7 *Soit X et Y des espaces topologiques.*
Une fonction $f : X \to Y$ est mesurable au sens de Baire *(ou* Baire-mesurable*) si l'image réciproque de tout ouvert dans Y a la propriété de Baire dans X.*
Lorsque X et Y sont métrisables, on dit que f est de première classe de Baire *si l'image réciproque de tout ouvert est un ensemble F_σ, on note $\mathcal{B}_1$ l'ensemble des fonctions de première classe de Baire.*

Toute fonction continue ou semi-continue (à valeurs réelles) est de première classe de Baire et toute fonction de première classe de Baire est Baire-mesurable.

On vérifie que la limite simple d'une suite de fonctions continues est de première classe de Baire.

Le théorème suivant montre que les fonctions de première classe de Baire ont de nombreux points de continuité :

Théorème 0.1.5 *(cf théorème 24.14 in [35])*
Soit X et Y des espaces métrisables, avec Y séparable et soit $f : X \to Y$ une fonction de première classe de Baire.
L'ensemble des points de continuité de f est un ensemble G_δ comaigre.

Rappelons le théorème suivant qui interviendra dans les preuves de nos principaux résultats :

Théorème 0.1.6 *(cf théorème 8.38 in [35])*
Soit X et Y des espaces topologiques et une fonction $f : X \to Y$ Baire-mesurable. Si Y est à base de topologie dénombrable, il existe un ensemble $G \subseteq X$ qui est une intersection dénombrable d'ouverts denses tel que la restriction de f à G soit continue. En particulier, si X est un espace de Baire, il existe une restriction de f à un comaigre qui est continue.

0.1.4 Groupes topologiques

Définition 0.1.8 *Un* groupe topologique *est un groupe G muni d'une topologie rendant continue l'application $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ définie de G^2 dans G.*

Remarque 0.1.1 *(cf lemme 1.1.5 in [15])*
Soit G un groupe topologique, pour tout voisinage du neutre V ouvert et symétrique, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V^n$ est un sous-groupe ouvert donc fermé de G.

On a le théorème de métrisabilité suivant (Birkhoff, Kakutani) :

Théorème 0.1.7 *(cf théorème 9.1 in [35])*
Un groupe topologique G est métrisable si et seulement si G est Hausdorff et à base dénombrable de voisinages. De plus si G est métrisable, G admet une métrique compatible invariante à gauche.

On peut en déduire que tout groupe topologique métrisable peut être plongé de façon dense dans un groupe complètement métrisable.

Définition 0.1.9 *Un* groupe polonais *est un groupe topologique dont la topologie est polonaise (i.e. complètement métrisable et séparable).*

Tout groupe métrisable séparable peut donc être plongé dans un groupe polonais.

Définition 0.1.10 *Un* groupe de Baire *est un groupe topologique qui est un espace de Baire en tant qu'espace topologique.*

On utilisera le résultat suivant :

Théorème 0.1.8 *(cf théorème 9.10 in [35])*
Soit G et H deux groupes topologiques et $\varphi : G \to H$ un homomorphisme. Si G est un groupe de Baire, H séparable et φ Baire-mesurable alors φ est continu.

Groupes localement compacts

Définition 0.1.11 *Un groupe G est un* groupe localement compact *si c'est un groupe topologique dont l'espace sous-jacent est localement compact et de Hausdorff.*

D'après le corollaire 0.1.2, tout groupe localement compact dont la topologie est à base dénombrable est un groupe polonais.
On déduit de la remarque 0.1.1, la proposition suivante :

Proposition 0.1.4 *(cf proposition 1.2.1 (b) in [15])*
Tout groupe localement compact possède un sous-groupe ouvert, fermé et dénombrable à l'infini.

Espaces mesurés

Définition 0.1.12 *Une mesure positive sur un espace mesuré X est* σ-finie *si X est réunion dénombrable d'ensembles mesurables de mesure finie, X est alors dit* σ-fini.
Une mesure positive définie sur une tribu contenant la tribu des boréliens est dite mesure de Borel.
Une mesure de Borel est localement finie *si pour tout point x il existe un voisinage ouvert de x de mesure finie.*
Une mesure de Borel m est régulière *si :*
(i) Pour tout compact K, $m(K) < \infty$.
(ii) Pour tout ensemble mesurable A, $m(A) = \inf\{m(U),\ \ A \subseteq U \ \text{ et } U \text{ ouvert}\}$.
(iii) Pour tout ensemble ouvert A, $m(A) = \sup\{m(K),\ \ K \subseteq A \ \text{ et } K \text{ compact}\}$.

Remarque 0.1.2 *Soit X un espace de Hausdorff localement compact à base de topologie dénombrable, X est donc dénombrable à l'infini et toute mesure de Borel finie sur les compacts est régulière (cf proposition 7.2.3 in [13]) donc σ-finie (cf proposition 7.2.5 in [13]) ; on vérifie en outre que la condition (iii) de régularité s'étend à tous les ensembles A mesurables (cf proposition 7.2.6 in [13]).*

Remarque 0.1.3 *Une mesure m est* complète *si tout ensemble négligeable (c'est à dire inclus dans un ensemble de mesure nulle) est mesurable, sinon il existe une seule façon d'étendre la mesure m à la tribu engendrée par la tribu initiale et par les ensembles négligeables.*

Définition 0.1.13 *Une mesure de Borel localement finie et régulière est dite* mesure de Radon.

Précisons quelques notions utiles dans le cas des mesures qui ne sont pas σ-finies :

Définition 0.1.14 *Soit m une mesure de Radon sur un espace de Hausdorff localement compact X,*
(i) $E \subseteq X$ est localement borélien *si pour tout borélien F de mesure finie, $E \cap F$ est borélien.*
(ii) $E \subseteq X$ localement borélien est localement nul *si pour tout borélien F de mesure finie, $m(E \cap F) = 0$.*
(iii) Une assertion concernant des points de X est vraie localement presque partout *si elle vraie excepté pour un ensemble de points localement nul.*
(iv) Une fonction complexe qui est nulle localement presque partout est localement nulle.

Définition 0.1.15 *Une mesure de Borel m sur un groupe G localement compact est* invariante *(à gauche) si pour tout ensemble mesurable $A \subseteq G$ et tout $x \in G$, xA est mesurable avec $m(xA) = m(A)$.*

Théorème 0.1.9 *Soit G un groupe localement compact. Il existe sur G une mesure de Radon invariante non nulle, unique (à un facteur strictement positif près).*
Une telle mesure est dite mesure de Haar *et l'intégrale correspondante est dite* intégrale de Haar.

Remarque 0.1.4 *Soit m une mesure de Haar sur le groupe localement compact G, tout ouvert non vide est de mesure strictement positive (éventuellement infinie).*

On a un résultat de continuité automatique des morphismes complexes mesurables :

Théorème 0.1.10 *(cf théorème 22.18 in [29])*
Soit G un groupe localement compact de mesure de Haar m et H un groupe topologique qui est σ-compact ou bien séparable. Si A est un sous-ensemble mesurable de G tel que $0 < m(A) < \infty$ et si τ est un morphisme de G dans H tel que $\tau^{-1}(U) \cap A$ soit mesurable pour tout ouvert U de H, alors τ est continu sur G.

On en déduit un résultat dû à A. Weil :

Corollaire 0.1.3 *(cf corollaire 22.19 in [29])*
Soit G un groupe localement compact de mesure de Haar m et $A \subseteq G$ mesurable tel que $0 < m(A) < \infty$.
Tout morphisme de G dans le groupe multiplicatif $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ mesurable sur A est continu.

Remarque 0.1.5 *Le corollaire précédent montre donc que tout morphisme complexe sur un groupe localement compact qui est mesurable sur un voisinage donné («* localement mesurable *») est mesurable.*

Remarque 0.1.6 *(cf (16.14) in [29])*
Tout groupe localement compact non discret qui n'est pas σ-compact contient un ensemble localement nul qui est de mesure infinie.

Rappelons le théorème suivant qui est une généralisation d'un théorème de Choquet (obtenue par Bishop et de Leeuw, cf théorème I.4.14 in [2]) et que l'on utilisera dans le cas non commutatif (cf chapitre 3) :

Théorème 0.1.11 *Soit K un sous-ensemble convexe et compact dans un espace localement convexe. On note $\mathcal{B}_0$ la tribu des sous-ensembles de Baire de K (c'est à dire la tribu engendrée par les sous-ensembles fermés de K qui sont des G_δ) et $Ext(K)$ l'ensemble des points extrémaux de K.*
Pour tout point x dans K, il existe une mesure μ sur la tribu $Ext(K) \cap \mathcal{B}_0$ telle que $a(x) = \int_{Ext(K)} a \ d\mu$ pour toute fonction affine continue a sur K et $\mu(Ext(K)) = 1$.
On dit alors que la mesure μ représente le point x sur $Ext(K)$.

Groupes abéliens localement compacts

Définition 0.1.16 *Un* caractère χ *d'un groupe abélien localement compact G est un homomorphisme continu $\chi : G \to \mathbb{T}$.*
On note $\hat{G}$ leur ensemble.

Proposition 0.1.5 *(cf théorème 3.2.1 in [15] ou théorème 3.31 in [22])*
Muni de la topologie de la convergence compacte sur G (ou de la topologie faible-étoile induite par $L^\infty(G)$ qui lui est équivalente), $\hat{G}$ est un groupe abélien localement compact appelé dual *de G.*

Proposition 0.1.6 *(cf proposition 3.1.5 in [15])*
Si G est un groupe abélien compact alors $\hat{G}$ est discret.

Citons maintenant quelques théorèmes de structure des groupes localement compacts :

- En premier lieu un théorème de structure général qui servira dans les compléments :

Théorème 0.1.12 *(cf théorème 4.2.1 in [15])*
Soit G un groupe abélien localement compact. Il existe $n \in \mathbb{N}$ et un groupe abélien localement compact H tels que :
(i) G est isomorphe à $\mathbb{R}^n \times H$.
(ii) H contient un sous-groupe K ouvert et compact.

Remarque 0.1.7 *Si dans le théorème précédent G est de plus connexe alors H est connexe donc H=K.*

- En second lieu des théorèmes de structure relatifs aux groupes compacts métrisables, puis des résultats concernant les groupes localement compacts qui sont connexes ou localement connexes :

Proposition 0.1.7 *(cf proposition 8.43 in [32])*
Pour un groupe compact (abélien ou non) G, les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) La topologie de G est à base dénombrable.
(ii) Le système des voisinages du neutre possède une base dénombrable.
(iii) La topologie de G est métrisable.

Un groupe compact vérifiant l'une des conditions précédentes est appelé *groupe métrique compact.*

Théorème 0.1.13 *(cf théorème 8.45 in [32])*
Soit G un groupe abélien compact.
Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) G est un groupe métrique compact.
(ii) $\hat{G}$ est dénombrable.
(iii) G est isomorphe à un sous-groupe du tore $\mathbb{T}^{\aleph_0}$.

Proposition 0.1.8 *(cf proposition 8.34 in [32])*
Soit G un groupe abélien localement compact.
Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) G est localement connexe.
(ii) G est isomorphe à un groupe $\mathbb{R}^n \times K \times D$ où K est groupe compact, connexe et localement connexe et D est discret.

Théorème 0.1.14 *(cf théorème 8.46 in [32])*
Soit G un groupe métrique compact abélien.
Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) G est un tore (i.e. $\mathbb{T}^X$ où X est un ensemble).
(ii) G est connexe par arcs.
(iii) G est connexe et localement connexe.

Remarque 0.1.8 *On connaît la structure des groupes abéliens (séparables) localement compacts et localement connexes, ce sont les groupes de la forme $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m \times D$ où $m \leq \aleph_0$ et D est discret (cf théorème 49 in [47]).*

Groupes moyennables

On renvoie par exemple le lecteur à l'appendice G de l'ouvrage [6] pour tout renseignement supplémentaire concernant les groupes moyennables, il s'agit simplement ici d'en rappeler la définition.
Soit X un ensemble. Un *anneau* $\mathcal{R}$ de sous-ensembles de X est une famille non vide de sous-ensembles de X qui est stable par réunions et différences d'ensembles : si A et B sont dans $\mathcal{R}$ alors $A \cup B \in \mathcal{R}$ et $A \backslash B \in \mathcal{R}$.

Définition 0.1.17 *Une* moyenne m *sur un anneau $\mathcal{R}$ de sous-ensembles de X contenant X est une fonction de $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :*
(i) $m(A) \geq 0$ pour tout $A \in \mathcal{R}$.
(ii) $m(X) = 1$.
(iii) $m(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = m(A_1) + \cdots + m(A_n)$ si $A_1, ..., A_n$ sont des éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{R}$.
Si G est un groupe qui agit sur X en laissant $\mathcal{R}$ invariant, alors m est une moyenne G-invariante *si*
(iv) $m(gA) = m(A)$ pour tous $g \in G$ et $A \in \mathcal{R}$.

Pour un anneau $\mathcal{R}$ de sous-ensembles de X, on note E l'espace vectoriel des fonctions sur X à valeurs complexes engendré par les fonctions caractéristiques χ_A des éléments $A \in \mathcal{R}$.
Il y a une correspondance bijective naturelle entre les moyennes m sur $\mathcal{R}$ et les formes linéaires M sur E telle que $m(A) = M(\chi_A)$ pour tout $A \in \mathcal{R}$.
Dans le cas où $\mathcal{R}$ est G-invariant sous une action du groupe G sur X, la moyenne m est G-invariante si et seulement si $M({}_g\varphi) = M(\varphi)$ pour tous $g \in G$ et $\varphi \in E$, où ${}_g\varphi$ est la translatée à gauche de φ, c'est à dire que ${}_g\varphi(x) = \varphi(gx)$ pour tout $x \in X$.
Supposons que $\mathcal{B}$ soit une tribu sur X et μ une mesure sur $(X, \mathcal{B})$. On va voir qu'il existe encore une correspondance bijective entre des formes linéaires sur $L^\infty(X, \mu)$ à préciser et des moyennes sur $\mathcal{B}$.

Définition 0.1.18 *Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré et E un sous-espace fermé de $L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ contenant les fonctions constantes et stable par conjugaison. Une* moyenne *sur E est une forme linéaire $M : E \to \mathbb{C}$ telle que :*
(i) $M(1_X) = 1$.
(ii) $M(\varphi) \geq 0$ pour tout $\varphi \in E$ positif.
Soit G un groupe agissant sur E. On dit que M est G-invariante si, de plus :
(iii) $M({}_g\varphi) = M(\varphi)$ pour tous $g \in G$ et $\varphi \in E$.

Remarque 0.1.9 *(i) Une moyenne M sur E est automatiquement continue.*
(ii) Une moyenne M sur $L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ définit une moyenne m sur la tribu $\mathcal{B}$ par $m(A) = M(\chi_A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}$. On peut noter que m est absolument continue par rapport à μ au sens où $m(A) = 0$ pour tout $A \in \mathcal{B}$ tel que $\mu(A) = 0$.
Inversement on vérifie que si m est une moyenne sur $\mathcal{B}$ absolument continue par rapport à μ, alors il existe une moyenne unique M sur $L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ telle que $m(A) = M(\chi_A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}$.

On peut donc désormais identifier une moyenne M sur un espace E au sens de la définition précédente et la moyenne correspondante m sur $\mathcal{B}$ (ou sur $\mathcal{R}$), on utilisera la même notation m.
Soit G un groupe topologique. On considère $\ell^\infty(G)$ l'espace de Banach des fonctions bornées sur G.
Le groupe G agit sur $\ell^\infty(G)$ par translation à gauche :
$\varphi \mapsto_{g^{-1}} \varphi$ pour tous $\varphi \in \ell^\infty(G)$ et $g \in G$.

Soit $UCB(G)$ le sous-espace fermé de $\ell^\infty(G)$ constitué des fonctions uniformément continues à gauche sur G. $UCB(G)$ est invariant par translation à gauche par les éléments de G.

Définition 0.1.19 *On considère que le groupe G agit sur lui-même par translations à gauche.*
Le groupe topologique G est moyennable *s'il existe une moyenne invariante sur UCB(G).*

Exemple 0.1.2 *Soit G un groupe compact. Alors UCB(G)=C(G), et une moyenne invariante sur C(G) est une mesure de Borel régulière invariante sur G avec $m(1_G) = 1$. Donc la mesure de Haar normalisée est la seule moyenne invariante sur C(G). En particulier, les groupes compacts sont moyennables.*

0.2 Théorie spectrale des opérateurs

0.2.1 Algèbres de Banach

Les algèbres considérées possèdent un élément unité, noté I.

Définition 0.2.1 *On appelle* caractère *d'une algèbre complexe A tout homomorphisme complexe sur A, c'est à dire toute forme linéaire χ non identiquement nulle telle que $\chi(xy) = \chi(x)\chi(y)$ pour tous x et y dans A, on note $\hat{A}$ l'ensemble (éventuellement vide) des caractères de l'algèbre A.*

Remarque 0.2.1 *Soit χ un homomorphisme complexe sur une algèbre A d'unité I, alors $\chi(I) = 1$ et pour tout élément x inversible dans A, $\chi(x) \neq 0$.*
Tout caractère est continu (cf théorème 10.7 (c) in [49]).
Si A est une algèbre de Banach commutative alors $\hat{A} \neq \varnothing$ (cf [42]).

Théorème 0.2.1 *(cf théorème 10.9 in [49])*
Si χ est une forme linéaire sur une algèbre de Banach A telle que $\chi(I) = 1$ et $\chi(a) \neq 0$ pour tout élément inversible $a \in A$ alors χ est un caractère.

Définition 0.2.2 *Soit A une algèbre de Banach. Si x est un élément de A, le* spectre $\sigma(x)$ *de x est l'ensemble de tous les nombres complexes λ tels que $\lambda I - x$ ne soit pas inversible. Le complémentaire de $\sigma(x)$ est* l'ensemble résolvant *de x.*
Le rayon spectral *de x est $\rho(x) := \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(x)\}$.*

On sait que le spectre est un compact non vide, donc le rayon spectral est un nombre réel positif ou nul.

Théorème 0.2.2 *(Théorème de l'application spectrale, cf théorème 32 in [42])*
Soit x un élément dans une algèbre de Banach A et p un polynôme. Alors $\sigma(p(x)) = p(\sigma(x))$.

Remarque 0.2.2 *Ce théorème se généralise avec le calcul fonctionnel aux fonctions holomorphes sur un voisinage du spectre de x (cf théorème 35 in [42]).*

Rappelons le théorème classique de Gelfand (cf [24]) amélioré par Hille (cf [30]), on pourra consulter le théorème 1.5.14 dans [41] pour une preuve plus accessible dans le cas de l'algèbre des opérateurs :

Théorème 0.2.3 *(Théorème de Gelfand-Hille)*
Si un élément inversible a dans une algèbre de Banach A vérifie $\sigma(a) = \{1\}$ et $\sup_{n\in\mathbb{Z}} ||a^n|| < \infty$ alors a est l'unité de A.

Soit X un espace de Banach complexe de dimension infinie et $\mathcal{L}(X)$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur X. Le sous-ensemble des opérateurs compacts de $\mathcal{L}(X)$ est noté $\mathcal{K}(X)$, on vérifie que $\mathcal{K}(X)$ est un idéal bilatère fermé de $\mathcal{L}(X)$, on peut donc définir l'algèbre quotient (*algèbre de Calkin*) $\mathcal{L}(X)/\mathcal{K}(X)$ et l'homomorphisme canonique correspondant est noté $T \mapsto \dot{T}$.
La *topologie forte des opérateurs* est la moins fine rendant continues les applications $\varphi_x : T \in \mathcal{L}(X) \mapsto Tx \in X$.
Pour tout $T \in \mathcal{L}(X)$, on note $Ker(T)$ le noyau et $Im(T)$ l'image de T.

Définition 0.2.3 *Un opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ est un* opérateur de Fredholm *si son noyau est de dimension finie et si son image est de codimension finie. On note $\Phi(X)$ l'ensemble des opérateurs de Fredholm.*
T est un opérateur semi-Fredholm supérieur *si son noyau est de dimension finie et son image est fermée. On note $\Phi_+(X)$ l'ensemble des opérateurs semi-Fredholm supérieurs.*
T est un opérateur semi-Fredholm inférieur *si son image est de codimension finie. On note $\Phi_-(X)$ l'ensemble des opérateurs semi-Fredholm inférieurs.*
On a donc $\Phi(X) = \Phi_+(X) \cap \Phi_-(X)$.
L'ensemble des opérateurs semi-Fredholm est $\Phi_\pm(X) := \Phi_+(X) \cup \Phi_-(X)$.

Définition 0.2.4 *Le* spectre essentiel *d'un opérateur T est l'ensemble* $\sigma_e(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ / \ \lambda - T \notin \Phi(X)\}$.
Le spectre essentiel de Kato *de T est l'ensemble* $\sigma_k(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ / \ \lambda - T \notin \Phi_{\pm}(X)\}$.
Le spectre approximatif *de T est l'ensemble des nombres complexes λ tels qu'il existe une suite de vecteurs unitaires (x_n) dans X vérifiant* $\lim_{n\to\infty} ||(\lambda - T)x_n|| = 0$. *On le note $\sigma_{ap}(T)$.*

Proposition 0.2.1 *(cf proposition 1.2.3 in [41])*
Pour tout opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $\lambda \notin \sigma_{ap}(T)$.
(ii) $Ker(\lambda - T) = \{0\}$ et $Im(\lambda - T)$ est fermé.
(iii) T est borné inférieurement au sens où il existe $c > 0$ tel que pour tout $x \in X$, $||(T - \lambda)x|| \geq c||x||$.
De plus le spectre approximatif de T est un sous-ensemble fermé du spectre $\sigma(T)$ et il en contient la frontière $\partial\sigma(T)$.

Signalons l'important théorème d'Atkinson :

Théorème 0.2.4 *(cf théorème 3.3.2 in [4])*
$T \in \mathcal{L}(X)$ est un opérateur de Fredholm si et seulement si $\dot{T}$ est inversible dans $\mathcal{L}(X)/\mathcal{K}(X)$.

Définition 0.2.5 *Un espace de Banach X est* décomposable *s'il contient une paire de sous-espaces fermés de dimension infinie M et N tels que* $X = M \oplus N$.
Sinon X est indécomposable.
Un espace est héréditairement indécomposable *(en abrégé : HI) si ses sous-espaces fermés sont indécomposables, c'est à dire qu'il n'existe pas de sous-espaces fermés M et N de dimension infinie tels que $M + N$ soit fermé et $M \cap N = \{0\}$.*

Définition 0.2.6 *Un opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ est* strictement singulier *si aucune restriction de T à un sous-espace fermé de dimension infinie de X n'est un isomorphisme, leur ensemble est noté $SS(X)$.*

On a $\mathcal{K}(X) \subseteq SS(X)$ (cf théorème 7.36 in [1]).

L'espace des opérateurs sur un espace HI est très particulier puisqu'on montre qu'étant donné un opérateur borné T, il existe un seul point λ_T dans le spectre $\sigma(T)$ de T tel que $T - \lambda_T I$ soit strictement singulier (cf [25]).

Algèbres de Banach commutatives

Le résultat suivant permet de ramener l'étude du spectre d'un élément dans une algèbre de Banach à celle des caractères de l'algèbre :

Théorème 0.2.5 *(cf théorème 11.5 (e) in [49])*
Soit A une algèbre de Banach commutative et $\hat{A}$ l'ensemble de tous les caractères de A. Soit a un élément de A,
$\lambda \in \sigma(a)$ si et seulement si $\lambda = \chi(a)$ pour un certain $\chi \in \hat{A}$.

Transformées de Gelfand

Définition 0.2.7 *Soit $\hat{A}$ l'ensemble de tous les caractères d'une algèbre de Banach commutative A (c'est à dire l'ensemble de tous les homomorphismes complexes sur A). La formule $\hat{a}(\chi) = \chi(a)$, $\chi \in \hat{A}$ associe à chaque élément a de A une fonction $\hat{a} : \hat{A} \to \mathbb{C}$, appelée la* transformée de Gelfand *de a.*
La topologie de Gelfand *de $\hat{A}$ est la topologie la plus faible rendant chaque $\hat{a}$ continue.*
Muni de la topologie de Gelfand, $\hat{A}$ est appelé espace de Gelfand *(ou* espace idéal maximal *de A).*
La transformée de Gelfand *est l'application $a \mapsto \hat{a}$.*

Théorème 0.2.6 *(cf théorème 11.9 (a) in [49])*
L'espace de Gelfand $\hat{A}$ d'une algèbre de Banach commutative (unitaire) A est compact.

Remarque 0.2.3 *L'ensemble $\hat{A}$ est inclus dans la boule unité fermée (pour la topologie de la norme) du dual de A et la topologie de Gelfand est donc la restriction de la topologie faible-étoile du dual (qui est métrisable lorsque A est séparable).*

0.2.2 C*-algèbres

Nous rappelons ici quelques notions de base relatives aux C*-algèbres comme les définitions des opérateurs unitaires, des formes linéaires hermitiennes ou positives, des états, des états purs ainsi que la construction de Gelfand-Naimark-Segal.

Définition 0.2.8 *Soit A une algèbre de Banach complexe, on dit que A est* involutive *ou que A est une* *-algèbre *si on a une application de A dans A : $u \mapsto u^*$ (u^* est dit* adjoint *de u) possédant les propriétés suivantes :*
(i) $(u^*)^* = u$ *(involution).*
(ii) $(u+v)^* = u^* + v^*$.
(iii) $(uv)^* = v^*u^*$.
(iv) $(\lambda u)^* = \overline{\lambda} u^*$.
(v) $||u^*|| = ||u||$.
Si en outre, on a : $||u^*u|| = ||uu^*|| = ||u||^2$, *on dit que A est une* C*-algèbre *ou une* algèbre stellaire.

Dans une C*-algèbre A, la relation (v) est redondante.
Si G est un groupe localement compact, $L^1(G)$ est une algèbre de Banach involutive.
Si H est un espace de Hilbert, $\mathcal{L}(H)$ est une C*-algèbre avec l'adjonction pour involution.
Un élément $a \in A$ est *auto-adjoint* si $a = a^*$, *normal* s'il commute avec son adjoint, *unitaire* si $aa^* = a^*a = I$; par exemple l'unité I est à la fois auto-adjointe et unitaire.

Proposition 0.2.2 *Soit a un élément d'une C*-algèbre A.*
(i) Si a est normal alors $\rho(a) = ||a||$.
(ii) Si a est auto-adjoint alors son spectre $\sigma(a)$ est un compact de $\mathbb{R}$.
(iii) Si a est unitaire alors $||a|| = 1$ et $\sigma(a)$ est un compact de $\mathbb{T}$.

Structure d'ordre

Un opérateur borné a sur un espace de Hilbert H (le produit scalaire sera toujours noté $< ., . >$) est *positif* si pour tout $h \in H$, $< a(h), h >$ est positif, ce qui équivaut à dire que a est auto-adjoint de spectre inclus dans $\mathbb{R}^+$ (cf théorème 12.32 in [49]).

De la même façon un élément a d'une C*-algèbre A est dit *positif* s'il est auto-adjoint et si $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}^+$, on note A^+ l'ensemble des éléments positifs de A, on vérifie que A^+ est un cône dans l'espace vectoriel des éléments auto-adjoints.
On a la caractérisation suivante :

Théorème 0.2.7 *(cf théorème 4.2.6 in [33])*
Soit A une C-algèbre et $a \in A$, les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) $a \in A^+$.
(ii) $a = b^2$, avec $b \in A^+$.
(iii) $a = b^*b$, avec $b \in A$.
Si H est un espace de Hilbert et A une C-sous-algèbre de $\mathcal{L}(H)$, les conditions précédentes sont équivalentes à :*
(iv) Pour tout $h \in H$, $< a(h), h >$ est positif.

Définition 0.2.9 *Une forme linéaire l sur une C*-algèbre A est* hermitienne *si pour tout $a \in A$, $l(a^*) = \overline{l(a)}$.*
Une forme linéaire l sur une C-algèbre A est* positive *si pour tout $a \in A^+$, $l(a) \geq 0$; si de plus $l(I) = 1$, l est un* état *de A.*

On vérifie qu'une forme linéaire positive est hermitienne, d'autre part on a le résultat suivant :

Théorème 0.2.8 *(cf théorème 4.3.2 in [33])*
Une forme linéaire l sur une C-algèbre est positive si et seulement si l est bornée et $||l|| = l(I)$.*

On déduit de ce théorème que chaque état l sur A est une forme linéaire bornée avec $||l|| = 1$, donc l'ensemble de tous les états sur A, que l'on note $\Sigma(A)$, est inclus dans la boule unité du dual A^* de A ; puisque $\Sigma(A) = \{l \in A^* \ / \ l(I) = 1, \forall a \in A^+, l(a) \geq 0\}$, cet ensemble est convexe et faible-étoile fermé, donc faible-étoile compact (et Hausdorff) d'après le théorème de Banach-Alaoglu, on l'appelle *l'espace des états* de A.
D'après le théorème de Krein-Milman (cf théorème 3.23 in [49]) l'espace des états $\Sigma(A)$ est l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble $Ext(\Sigma(A))$ de ses points extrémaux, on pose $P\Sigma(A) = Ext(\Sigma(A))$ et on appelle *états purs* les éléments de $P\Sigma(A)$.
En général $P\Sigma(A)$ n'est pas fermé dans A^*.

L'image numérique d'un élément $a \in A$ est l'ensemble des nombres complexes défini par $W_A(a) := \{\omega(a), \omega \in \Sigma(A)\}$.
Si B est une C*-sous-algèbre de A, le théorème de Hahn-Banach montre que $\Sigma(B)$ est l'ensemble des restrictions des éléments de $\Sigma(A)$ à B, donc pour tout $a \in B$, $W_A(a) = W_B(a)$.
Si a est normal alors $W_A(a) = Conv(\sigma(a))$ (cf théorème 14 du chapitre 2 dans [7]), où $Conv(C)$ désigne l'enveloppe convexe de tout sous-ensemble C dans un espace vectoriel.
Le *rayon numérique* d'un élément $a \in A$ est défini par
$\eta(a) := sup\{|z|, z \in W_A(a)\}$.
Sur une C*-algèbre, le rayon numérique détermine une norme équivalente à la norme initiale avec $||a||/e \leq \eta(a) \leq ||a||$ (cf [7]).
Rappelons qu'une *représentation* d'une C*-algèbre A dans un espace de Hilbert H est un homomorphisme d'algèbres Φ de A dans $\mathcal{L}(H)$ tel que pour tout $a \in A$, $\Phi(a^*) = \Phi(a)^*$.
On a alors pour tout $a \in A$, $||\Phi(a)|| \leq ||a||$ (cf théorème 4.1.8 in [33]), donc Φ est continue.
S'il existe un vecteur $h \in H$ tel que l'ensemble $\{\Phi(a)h, a \in A\}$ soit dense dans H alors la représentation Φ est *cyclique*, et h est un *vecteur cyclique* pour Φ.
Le théorème suivant montre que les états sont étroitement liés aux représentations cycliques :

Théorème 0.2.9 *(Gelfand-Naimark-Segal, cf théorème 4.5.2 in [33])*
Si ω est un état sur une C-algèbre A, il existe une représentation cyclique π_ω de A dans un espace de Hilbert H_ω et un vecteur unitaire cyclique v_ω pour π_ω tels que pour tout $a \in A$, $\omega(a) =< \pi_\omega(a)v_\omega, v_\omega >$.*

Remarque 0.2.4 *La construction de Gelfand-Naimark-Segal montre que si la C*-algèbre A est séparable alors l'espace de Hilbert H_ω est séparable.*

On a également l'irréductibilité de la représentation dans le cas des états purs :

Théorème 0.2.10 *(cf théorème 10.2.3 in [34])*
Si ω est un état sur une C-algèbre A, la représentation π_ω obtenue dans la construction de Gelfand-Naimark-Segal est irréductible si et seulement si ω est pur.*

Enfin, rappelons que dans le cas abélien, les états purs sont exactement les caractères de l'algèbre :

Proposition 0.2.3 *(cf proposition 4.4.1 in [33])*
Une forme linéaire non nulle l sur une C-algèbre abélienne A est un état pur si et seulement si l(ab)=l(a)l(b) pour tous a et b dans A.*

0.3 Fonctions définies positives et représentations

Le but de ce paragraphe est de rappeler au lecteur quelques résultats utiles concernant les fonctions définies positives et leurs liens avec les représentations unitaires étudiées plus loin, on pourra consulter le chapitre 3 de [22] pour plus de précisions.

0.3.1 Représentations de groupes

On appelle « représentation d'un groupe topologique G sur une algèbre de Banach A » toute application $\theta : G \to A$ telle que pour tous $(u, v) \in G^2$, $\theta(uv) = \theta(u)\theta(v)$ et $\theta(1) = I$ (où 1 et I sont les éléments neutres), autrement dit θ est un morphisme de G dans le groupe $\mathcal{G}_A$ des inversibles de A.

Exemple 0.3.1 *Toute représentation d'un groupe dans un espace de Banach X est donc une représentation au sens précédent sur $\mathcal{L}(X)$.*

Rappelons que deux représentations θ_1 et θ_2 du groupe G dans les espaces de Banach (respectivement Hilbert) X_1 et X_2 sont *équivalentes* (respectivement *unitairement équivalentes*) s'il existe un isomorphisme d'espaces de Banach (respectivement un isomorphisme d'espaces de Hilbert) $\mathcal{I} : X_1 \to X_2$ tel que pour tout $g \in G$, $\mathcal{I} \circ \theta_1(g) = \theta_2(g) \circ \mathcal{I}$.
Une représentation θ est *cyclique* s'il existe un vecteur $x \in X$ tel que le sous-espace vectoriel engendré par $\{\theta(g)x, g \in G\}$ soit dense dans X, x est alors un *vecteur cyclique*.
Un sous-espace X_0 de X est θ-*invariant* si pour tout $g \in G$, $\theta(g)X_0 \subseteq X_0$.
S'il n'existe aucun sous-espace fermé θ-invariant non trivial alors θ est *irréductible*, on vérifie facilement que θ est irréductible si et seulement si tout vecteur non nul de X est cyclique.

Si X est un espace de Hilbert et si pour tout $g \in G$, $\theta(g)$ est unitaire alors θ est une *représentation unitaire* de G, l'ensemble noté $U(H)$ des opérateurs unitaires sur un espace de Hilbert H est un groupe appelé *groupe unitaire.* Un groupe G est *unitarisable* si pour toute représentation π bornée de G dans un espace de Hilbert, il existe un opérateur inversible T tel que $T \circ \pi(.) \circ T^{-1}$ soit unitaire.

Définition 0.3.1 *Une représentation $\theta : G \to A$ est* localement bornée *s'il existe un voisinage V de l'élément neutre et un réel positif M tels que pour tout $g \in V$, $||\theta(g)|| \leq M$.*
Une représentation $\theta : G \to A$ est localement spectralement bornée *s'il existe un voisinage V de l'élément neutre et un réel positif M tels que pour tout $g \in V$, $\rho(\theta(g)) \leq M$.*

Toute représentation localement bornée est donc localement spectralement bornée.

Définition 0.3.2 *Soit $\theta : G \to A$ une représentation.*
(i) θ est spectralement continue *si $\lim_{g \to 1} \rho(\theta(g) - I) = 0$ où ρ est le rayon spectral.*
*(ii) θ est continue (*en norme *ou* uniformément*) si $\lim_{g \to 1} ||\theta(g) - I|| = 0$.*

Définition 0.3.3 *Soit θ une représentation d'un groupe topologique G dans un espace de Banach X.*
θ est faiblement continue *si la fonction $g \mapsto < \theta(g)x, y >$ est continue sur G pour tout (x, y) dans $X \times X^*$.*
θ est fortement continue *si θ est continue de G dans $\mathcal{L}(X)$ muni de la topologie forte des opérateurs, c'est à dire si pour tout $x \in X$,*
$\lim_{g \to 1} \theta(g)x = x$.
Lorsque G est localement compact, θ est faiblement mesurable *si la fonction $g \mapsto < \theta(g)x, y >$ est mesurable sur G pour tout (x, y) dans $X \times X^*$.*

Remarque 0.3.1 *Si θ est une représentation unitaire dans un espace de Hilbert, la continuité faible entraîne la continuité forte et la plupart des auteurs parlent simplement de continuité.*

0.3.2 Fonctions définies positives

Définition 0.3.4 *Soit G un groupe, une fonction complexe φ sur G est dite* définie positive *si pour tous $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $(g_1, ..., g_n) \in G^n$ et $(\mu_1, ..., \mu_n) \in \mathbb{C}^n$, on a $\sum_{i,j=1}^{n} \mu_i \overline{\mu_j} \varphi(g_j^{-1} g_i) \geq 0$.*

Rappelons un résultat qui nous permettra d'obtenir une convergence uniforme à partir d'une convergence simple :

Lemme 0.3.1 *(cf [5])*
Soit G un groupe de Baire et $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies positives continues sur G convergeant simplement vers une fonction continue et vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\chi_n(1) = 1$. Alors la suite $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue.

Théorème 0.3.1 *Soit $\varphi : G \to \mathbb{C}$ une fonction définie positive sur un groupe G.*
(i) On peut construire une représentation unitaire cyclique $\theta_\varphi : G \to \mathcal{L}(H_\varphi)$ (où H_φ est un espace de Hilbert et $\mathcal{L}(H_\varphi)$ est l'algèbre des applications linéaires continues sur cet espace) de vecteur cyclique x_φ telle que pour tout $g \in G$, $\varphi(g) =< \theta_\varphi(g)x_\varphi, x_\varphi >$.
(ii) Si $\theta : G \to \mathcal{L}(H)$ est une autre représentation cyclique dans un espace de Hilbert H de vecteur cyclique x telle que pour tout $g \in G$,
$\varphi(g) =< \theta(g)x, x >$, alors les représentations θ et θ_φ sont unitairement équivalentes.
(iii) Si G est localement compact et si φ est mesurable, alors la représentation associée est faiblement mesurable.

Nous appelons la représentation donnée dans (i) (unique à équivalence près) la *représentation cyclique associée à φ.*

Remarque 0.3.2 *En utilisant (i) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on montre que toute fonction définie positive φ est bornée sur G avec*
$sup\{|\varphi(x)|, x \in G\} = \varphi(1)$.

Définition 0.3.5 *Soit G un groupe localement compact.*
Une fonction $\varphi \in L^\infty(G)$ est dite de type positif *si pour tout $f \in L^1(G)$, $\iint \varphi(y^{-1}x) f(x) \overline{f(y)} dxdy \geq 0$.*
On note $\mathcal{P}(G)$ l'ensemble des fonctions continues de type positif et on pose $\mathcal{P}_1(G) := \{\varphi \in \mathcal{P}(G) \ / \ ||\varphi||_\infty = 1\}$.

Proposition 0.3.1 *(i) Sur un groupe localement compact, toute fonction définie positive continue est de type positif et toute fonction de type positif coïncide localement presque partout avec une fonction continue définie positive (pour les fonctions continues de type positif, $||\varphi||_\infty = \varphi(1)$).*
(ii) $\mathcal{P}_1(G)$ est un ensemble convexe dans $L^\infty(G)$ (en général non fermé pour la topologie faible-étoile) et sur $\mathcal{P}_1(G)$ les topologies induites par la topologie faible-étoile $\sigma(L^\infty, L^1)$ et par la convergence compacte sur G coïncident.

Remarque 0.3.3 *Un caractère d'un groupe topologique G est une fonction définie positive sur G, donc $\hat{G} \subseteq \mathcal{P}_1(G)$.*

Rappelons que pour les fonctions définies positives sur un groupe localement compact, la mesurabilité *locale* (c'est à dire sur un voisinage donné) au neutre 1 équivaut à la mesurabilité :

Théorème 0.3.2 *(cf théorème 3.4.4 in [50])*
Soit G un groupe localement compact et φ une fonction définie positive sur G. Si φ est mesurable sur un voisinage du neutre 1 alors φ est mesurable sur G.

0.3.3 Décomposition de Glicksberg-de Leeuw et conséquences pour les fonctions définies positives

Pour les représentations unitaires d'un groupe topologique (sans aucune autre hypothèse), on a la décomposition suivante (cf [16]) :

Théorème 0.3.3 *Soit G un groupe topologique et $\theta : G \to \mathcal{L}(H)$ une représentation de G dans un espace de Hilbert H. Il existe une décomposition orthogonale : $H = H_c \oplus H_0$ où H_c, H_0 sont des sous-espaces fermés $\theta(G)$-invariants et :*
(i) Pour tout $x \in H_c$, $g \mapsto \theta(g)x$ est une application continue de G dans H.
(ii) Pour tout $x \in H_0$, pour tout $V \in \mathcal{V}(1)$, $0 \in \overline{Conv\{\theta(g)x, g \in V\}}$ où $\mathcal{V}(1)$ désigne l'ensemble des voisinages de 1.

Définition 0.3.6 *Soit φ une fonction complexe sur un groupe G. On dit que φ moyenne vers zéro si pour tout voisinage V de 1 et tout réel $\epsilon > 0$ il existe des éléments $g_1, ..., g_n$ dans V et des réels positifs $\alpha_1, ..., \alpha_n$ de somme égale à 1 tels que $|\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(g g_i)| < \epsilon$ pour tout $g \in G$.*

Remarque 0.3.4 *(i) Soit $\theta : G \to \mathcal{L}(H)$ une représentation unitaire d'un groupe G, s'il existe $x \in H$ tel que pour tout $V \in \mathcal{V}(1)$, $0 \in \overline{Conv\{\theta(g)x, g \in V\}}$ alors le* coefficient diagonal *$\varphi(g) =< \theta(g)x, x >$ moyenne vers 0.*
En effet, pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout $V \in \mathcal{V}(1)$, il existe des éléments $g_1, ..., g_n$ dans V et des réels positifs $\alpha_1, ..., \alpha_n$ de somme égale à 1 tels que $|| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \theta(g_i)x|| < \epsilon/||x||$ pour $x \neq 0$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors le résultat.
(ii) Si $\theta : G \to \mathcal{L}(H)$ est une représentation cyclique de vecteur cyclique x, si $H = H_1 \oplus H_2$ est une décomposition orthogonale où H_1, H_2 sont des sous-espaces $\theta(G)$-invariants alors les projections x_1, x_2 de x sont cycliques pour les représentations induites par θ sur H_1, H_2 et on a :
$< \theta(g)x, x >=< \theta(g)x_1, x_1 > + < \theta(g)x_2, x_2 >$.

En appliquant ces remarques à la décomposition de Glicksberg-de Leeuw de la représentation cyclique associée à une fonction définie positive quelconque, on obtient :

Corollaire 0.3.1 *Soit $\varphi : G \to \mathbb{C}$ une fonction définie positive sur un groupe topologique G.*
(i) On a $\varphi = \varphi_c + \varphi_0$ où φ_c et φ_0 sont definies positives, φ_c est continue et φ_0 moyenne vers zéro.
(ii) Si la représentation cyclique associée à φ est irréductible alors φ est continue ou moyenne vers zéro (car dans ce cas l'une des composantes dans la décomposition de Glicksberg-de Leeuw est triviale).

Remarque 0.3.5 *(i) En fait le théorème de décomposition de Glicksberg-de Leeuw reste valide dans un contexte plus général mais tel qu'il est établi ici, il est suffisant pour la suite de notre propos.*
(ii) Dans le cas où de plus G est localement compact et φ mesurable, on obtient dans la décomposition que φ_0 est mesurable et localement nulle.
(iii) Dans sa monographie ([50]), Z. Sasvári utilise une construction concrète de la représentation cyclique associée à une fonction définie positive pour obtenir directement la décomposition donnée dans le corollaire 0.3.1, simplifiant considérablement la preuve du théorème général de Glicksberg et de Leeuw.

Signalons qu'on déduit des résultats précédents (cf théorème 3.1.4 in [50]) un résultat de continuité automatique :

Théorème 0.3.4 *Soit G un groupe localement compact et φ une fonction définie positive mesurable.*
Si l'espace de Hilbert H_φ associé est séparable alors φ est continue.

Deuxième partie

Continuité et mesurabilité des représentations

Chapitre 1

Propriétés des morphismes localement bornés d'un groupe topologique

1.1 Premiers résultats

Soit G un groupe topologique et θ une représentation localement bornée (ou seulement localement spectralement bornée) de G sur une algèbre de Banach A, on définit : $\Gamma_\theta = \{\lambda \in \mathbb{C} \ / \ \liminf_{u\to 1} dist(\lambda, \sigma(\theta(u))) = 0\}$.
Donc $\Gamma_\theta = \{\lambda \in \mathbb{C} \ / \ \exists(\lambda_i, g_i) \to (\lambda, 1) \in \mathbb{C} \times G, \lambda_i \in \sigma(\theta(g_i))\}$.
On vérifie encore que $\Gamma_\theta = \bigcap_{W\in\mathcal{V}(1)} \overline{\bigcup_{v\in W} \sigma(\theta(v))}$, où $\mathcal{V}(1)$ est un système fondamental de voisinages du neutre dans G.
Des observations élémentaires montrent que $\Gamma_\theta = \mathbb{T}$ ou bien il existe une famille finie $p_1, ..., p_k$ d'entiers positifs tels que $\Gamma_\theta = \bigcup_{1\le j\le k} \Gamma_{p_j}$, avec $\Gamma_{p_j} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ z^{p_j} = 1\}$ (cf proposition 2.2 in [19]).
Si φ est un morphisme localement borné de G dans le groupe multiplicatif de $\mathbb{C}$, on a plus simplement :

$$\Gamma_\varphi = \{\lambda \in \mathbb{C} \ / \ \exists(g_i)_i \to 1, (\varphi(g_i))_i \to \lambda\}.$$

- Γ_φ est un sous-groupe fermé de $\mathbb{T}$ (donc $\Gamma_\varphi = \Gamma_k$ groupe des racines $k^{\text{ièmes}}$ de l'unité pour $k \ge 1$ ou $\Gamma_\varphi = \mathbb{T}$).
- φ est continu si et seulement si $\Gamma_\varphi = \{1\}$.

Remarque 1.1.1 *Soit φ un morphisme localement borné d'un groupe topologique G dans le groupe multiplicatif de $\mathbb{C}$, l'application $g \mapsto |\varphi(g)|$ est un morphisme continu de G dans $(\mathbb{R}^{+*}, \times)$.*
En effet, φ est localement borné donc il existe $M > 1$ et $V \in \mathcal{V}(1)$ symétrique tels que pour tout $g \in V$, $|\varphi(g)| \leq M$, et donc pour tout $g \in V$, $|\varphi(g^{-1})| \leq M$, soit encore pour tout $g \in V$, $1/M \leq |\varphi(g)| \leq M$.
On a donc $\Gamma_{|\varphi|} \subseteq \mathbb{R}^{+*}$ avec $\Gamma_{|\varphi|}$ sous-groupe multiplicatif borné, par conséquent $\Gamma_{|\varphi|} = \{1\}$, ce qui montre bien que $|\varphi|$ est continu. En particulier on obtient que φ est continu si et seulement si $\varphi/|\varphi|$ l'est.
On en déduit que $\Gamma_\varphi = \Gamma_{\frac{\varphi}{|\varphi|}}$.

Dans le cas des groupes à un paramètre, c'est la dichotomie $\Gamma_\varphi = \{1\}$ ou bien $\Gamma_\varphi = \mathbb{T}$ qui permettait de montrer que lorsque la représentation n'est pas continue, le spectre entoure complètement l'origine sauf pour un ensemble maigre de réels (cf introduction supra).
Or cette dichotomie tient à l'existence à tout ordre d'une division locale continue au sens de la définition suivante :

Définition 1.1.1 *Le groupe G admet* localement une division continue en 1 à l'ordre $n \geq 1$ *s'il existe $V \in \mathcal{V}(1)$ et une application $\psi : V \to G$ continue en 1 tels que $\psi(1) = 1$ et pour tout $u \in V$, $(\psi(u))^n = u$.*

On a donc cherché des conditions moins restrictives portant sur les groupes localement compacts qui redonnent cette dichotomie.
On vérifie ainsi que dans le cas où le groupe admet « localement une division compacte par tout $n \geq 1$ » au sens de la définition 1.1.2 ci-après, le groupe Γ_φ est encore divisible, donc $\Gamma_\varphi = \mathbb{T}$ ou bien $\Gamma_\varphi = \{1\}$.
Par exemple les groupes abéliens localement compacts qui sont localement connexes ou bien connexes admettent ce type de division sans nécessairement admettre localement de division continue.

Définition 1.1.2 *Le groupe G admet* localement une division compacte en 1 à l'ordre $n \geq 1$ *s'il existe $V \in \mathcal{V}(1)$, un compact W dans G contenant 1 et une application $\psi : V \to W$ tels que $\psi(1) = 1$ et pour tout $u \in V$, $(\psi(u))^n = u$.*

Remarque 1.1.2 *Si un groupe G localement compact admet localement une division continue en 1 alors G admet localement une division compacte.*

La réciproque n'est pas vraie car $\mathbb{T}^{\aleph_0}$ admet localement une division compacte mais n'admet pas localement de division continue.

Remarque 1.1.3 *Puisque tout groupe abélien compact et connexe est divisible (cf corollaire 8.5 in [32]), les théorèmes de structure 0.1.7 et 0.1.8 montrent que si un groupe abélien localement compact est connexe ou bien localement connexe alors il admet localement une division compacte en 1 à tout ordre.*

Lemme 1.1.1 *« Lemme de dichotomie »*
Soit G un groupe topologique possédant localement une division compacte en 1 à tout ordre.
Si $\varphi : G \to \mathbb{T}$ est un morphisme alors $\Gamma_\varphi = \{1\}$ ou bien $\Gamma_\varphi = \mathbb{T}$.

Preuve.
Supposons que $\Gamma_\varphi = \Gamma_k$ où Γ_k est le groupe des racines $k^{\text{ièmes}}$ de l'unité avec $k \geq 2$.
Soit $\lambda_0 \in \Gamma_k$, il existe donc une suite généralisée $(g_i)_{i\in I} \to 1$ telle que $(\varphi(g_i))_i \to \lambda_0$.
Considérons $\psi : V \to W$ une division à l'ordre k ; à partir d'un certain i_0, $g_i \in V$, on peut donc poser pour tout $i \geq i_0$, $v_i = \psi(g_i)$ avec $(v_i)_{i\geq i_0} \subseteq W$.
Par compacité de $\mathbb{T}$ et W, on peut considérer que les suites $(\varphi(v_i))_{i\geq i_0}$ et $(v_i)_{i\geq i_0}$ convergent respectivement vers des limites notées μ_0 et v.
On a donc par continuité du produit de groupe et par unicité de la limite, $\mu_0^k = \lambda_0$ et $v^k = 1$, ainsi $\mu_0\varphi(v^{-1}) = \lim_i \varphi(v_i v^{-1}) \in \Gamma_\varphi$ avec $(\mu_0\varphi(v^{-1}))^k = \lambda_0\varphi(1) = \lambda_0$ et l'équation $z^k = \lambda_0$ possède toujours une racine dans Γ_k ce qui est impossible □

On déduit immédiatement de la remarque 1.1.1, le lemme suivant :

Lemme 1.1.2 *Soit θ une représentation localement bornée d'un groupe topologique G sur une algèbre de Banach A.*
Pour tout homomorphisme complexe χ sur A on a $\Gamma_{\chi\circ\theta} = \Gamma_{\frac{\chi\circ\theta}{|\chi\circ\theta|}}$.

1.2 Morphismes et catégorie de Baire

Proposition 1.2.1 *(cf théorème 2.B1 in [26])*
Soit G un groupe topologique et B un sous-ensemble non maigre possédant

la propriété de Baire. Il existe $W \in \mathcal{V}(1)$ tel que pour toute suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans W, l'ensemble $B \cap (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} z_n B)$ soit non maigre.

Preuve.
Par hypothèse B est de la forme $O\Delta P$ où O est ouvert et P est maigre. Comme B est non maigre, O n'est pas vide. Soit y_0 un point de O, par continuité du produit de groupe, il existe $W \in \mathcal{V}(1)$ symétrique et un voisinage V de y_0 tels que $WV \subseteq O$. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans W, l'ensemble $Q := P \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} z_n P)$ est maigre et comme pour tout $y \in V\backslash Q$, on a $y \in O\backslash P$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n^{-1} y \in O\backslash P$, on obtient que $V\backslash Q \subseteq B \cap (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} z_n B)$ qui est donc non maigre □

Remarque 1.2.1 *Il suffit d'adapter la preuve pour obtenir qu'il existe $W \in \mathcal{V}(1)$ tel que pout toute suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans W, l'ensemble $B \cap (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B z_n)$ soit non maigre.*

Lemme 1.2.1 *Soit Γ un sous-ensemble de $\mathbb{T}$ et V un ouvert de $\mathbb{T}$ tels que pour tout $\lambda \in \mathbb{T}$, $\lambda V \cap \Gamma \neq \varnothing$. Alors il existe un compact $K \subseteq V$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{T}$, $\lambda K \cap \Gamma \neq \varnothing$.*

Preuve.
V est ouvert dans $\mathbb{T}$ donc il existe une suite $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ouverts relativement compacts dans V tels que $\overline{O_n} \subseteq O_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n$ (cf lemme 0.1.1). La suite $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et il suffit de montrer qu'un de ses éléments est coupé par tout $\lambda\Gamma$. Si ce n'est pas le cas alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\lambda_n \in \mathbb{T}$ tel que $\lambda_n\Gamma \cap \overline{O_n} = \varnothing$.
Donc $\lambda_n\Gamma \subseteq \mathbb{T}\backslash\overline{O_n} \subset \mathbb{T}\backslash O_n$; posons $F_n = \mathbb{T}\backslash O_n$.
La suite $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés tels que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{T}\backslash O_n = \mathbb{T}\backslash\bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n = \mathbb{T}\backslash V$.
D'autre part, puisque $\mathbb{T}$ est compact, on peut supposer que $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Notons λ sa limite, soit $\mu \in \Gamma$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \geq n$, on a $\lambda_k\mu \in \lambda_k\Gamma \subseteq F_k \subseteq F_n$ et donc $\lambda\mu \in \overline{F_n} = F_n$.
Finalement $\lambda\Gamma \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \mathbb{T}\backslash V$, ce qui est une contradiction □

Lemme 1.2.2 *Soit $\varphi : G \to \mathbb{T}$ un morphisme sur un groupe de Baire G. Si A est un sous-ensemble possédant la propriété de Baire, non maigre dans G et si V est un ouvert de $\mathbb{T}$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{T}$, $\lambda V \cap \Gamma_\varphi \neq \varnothing$ alors $\varphi^{-1}(V) \cap A$ est non maigre.*

Preuve.
Prouvons qu'il existe dans $\mathbb{T}$ un ouvert $V_0 \in \mathcal{V}(1)$ symétrique et un ouvert V_1 tels que pour tout $\lambda \in \mathbb{T}$, $\lambda V_1 \cap \Gamma_\varphi \neq \varnothing$ et $V_0 V_1 \subseteq V$.
D'après le lemme précédent il existe un compact $K \subseteq V$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{T}$, $\lambda K \cap \Gamma_\varphi \neq \varnothing$; donc si $\pi : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ désigne le produit sur $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$, le compact $\{1\} \times K$ est inclus dans l'ouvert $\pi^{-1}(V)$ et il existe ainsi $V_0 \in \mathcal{V}(1)$ ouvert, symétrique et V_1 ouvert contenant K tels que
$V_0 \times V_1 \subseteq \pi^{-1}(V)$, donc $V_0 V_1 \subseteq V$.
Puisque pour tout $\lambda \in \mathbb{T}$, $\lambda V_1 \cap \Gamma_\varphi \neq \varnothing$, on obtient facilement que
$\mathbb{T} = \bigcup_{\lambda \in \Gamma_\varphi} \lambda V_1$, et par compacité il existe $N \geq 1$ tel que $\mathbb{T} = \bigcup_{i=1}^N \lambda_i V_1$ avec $\lambda_i \in \Gamma_\varphi$.
D'après la proposition 1.2.1, il existe $U_1 \in \mathcal{V}(1)$ tel que pour tout
$(g_1, ..., g_N) \in U_1^N$, $A \cap (\bigcap_{i=1}^N g_i A)$ soit non maigre.
Soit $i \in \{1, ..., N\}$, $\lambda_i \in \Gamma_\varphi$, or $\Gamma_\varphi \subseteq \overline{\varphi(U_1)}$ donc il existe $g_i \in U_1$ tel que $\lambda_i \varphi(g_i)^{-1} \in V_0$, c'est à dire $\lambda_i \in \varphi(g_i) V_0$, ainsi
$\mathbb{T} = \bigcup_{i=1}^N \lambda_i V_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^N \varphi(g_i) V_0 V_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^N \varphi(g_i) V$.
Par conséquent $\mathbb{T} = \bigcup_{i=1}^N \varphi(g_i) V$, et $G = \varphi^{-1}(\mathbb{T}) = \bigcup_{i=1}^N g_i \varphi^{-1}(V)$.
Soit $g \in A \cap (\bigcap_{i=1}^N g_i A) \subseteq G$, il existe $i_0 \in \{1, ..., N\}$ tel que $g \in g_{i_0} \varphi^{-1}(V)$, donc $g_{i_0}^{-1} g \in \varphi^{-1}(V)$; puisque $g \in g_{i_0} A$, on obtient que $g_{i_0}^{-1} g \in A \cap \varphi^{-1}(V)$.
On a montré que $A \cap (\bigcap_{i=1}^N g_i A) \subseteq \bigcup_{i=1}^N g_i (A \cap \varphi^{-1}(V))$, qui est donc non maigre, et $\varphi^{-1}(V) \cap A$ l'est également □

Proposition 1.2.2 *Soit G un groupe de Baire, $\mathcal{K}(\mathbb{T})$ l'espace des compacts de $\mathbb{T}$ muni de la topologie de Hausdorff et $\omega : G \to \mathcal{K}(\mathbb{T})$ une application borélienne.*
Soit $(\varphi_i)_{i \in I}$ une famille de morphismes tels que $\varphi_i : G \to \mathbb{T}$ et pour tous $i \in I$ et $g \in G$, $\varphi_i(g) \in \omega(g)$. On pose

$$\Omega_{\varphi_i} := \{g \in G \ / \ \forall \lambda \in \mathbb{T} \ \ \lambda \Gamma_\varphi \not\subseteq \omega(g)\}.$$

Alors l'ensemble $\bigcup_{i \in I} \Omega_{\varphi_i}$ est maigre.

Preuve.
Supposons $\bigcup_{i \in I} \Omega_{\varphi_i}$ non maigre. ω est Baire-mesurable de G groupe de Baire dans $\mathcal{K}(\mathbb{T})$ à base de topologie dénombrable donc (cf théorème 0.1.6) il existe un ensemble maigre M tel que la restriction de ω à $G \backslash M$ soit continue. Par hypothèse il existe $g_0 \in (\bigcup_{i \in I} \Omega_{\varphi_i}) \backslash M$, donc il existe $i_0 \in I$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{T}$, $\lambda \Gamma_{\varphi_{i_0}} \cap (\mathbb{T} \backslash \omega(g_0)) \neq \varnothing$, ainsi il existe un compact K_0 de $\mathbb{T}$,

$K_0 \subseteq (\mathbb{T}\backslash\omega(g_0))$ vérifiant pour tout $\lambda \in \mathbb{T}$, $\lambda K_0 \cap \Gamma_{\varphi_{i_0}} \neq \varnothing$ (cf lemme 1.2.1). Considérons un ouvert V de $\mathbb{T}$ tel que $K_0 \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq (\mathbb{T}\backslash\omega(g_0))$ et posons $U = \mathbb{T}\backslash\overline{V}$, on a donc : $\omega(g_0) \subseteq U$, $U \cap V = \varnothing$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{T}$, $\lambda\Gamma_{\varphi_{i_0}} \not\subseteq U$. Comme $\{K \in K(\mathbb{T}) \ / \ K \subseteq U\}$ est ouvert dans $K(\mathbb{T})$, il existe un voisinage V_0 de g_0 tel que pour tout $g \in V_0\backslash M$, $\omega(g) \subseteq U$ et donc $\varphi_{i_0}(g) \in U$, soit encore $g \notin \varphi_{i_0}^{-1}(V)$, finalement $V_0 \cap \varphi_{i_0}^{-1}(V) \subseteq M$, ce qui contredit le lemme précédent □

1.3 Morphismes et mesure de Haar

Lemme 1.3.1 *Soit G un groupe localement compact à base de topologie dénombrable et m la mesure de Haar (à gauche) sur G.*
Si $A \subseteq G$ est mesurable avec $m(A) > 0$ alors pour tout $N \geq 1$ il existe un ouvert $U_1 \in \mathcal{V}(1)$ dans G tel que pour tout $(g_1, ..., g_N) \in U_1^N$,
$m(A \cap (\bigcap_{i=1}^{N} g_i A)) > 0$.

Preuve.
Puisque la mesure m est σ-finie, on peut supposer que $m(A) < \infty$ (cf remarque 0.1.2).
Soit $\beta \in]0, 1[$ et $\alpha = \beta/(N+1)$, la mesure m étant régulière, nous savons qu'il existe $K \subseteq A \subseteq U$ où K et U sont respectivement des sous-ensembles compact et ouvert tels que $m(K) \geq (1-\alpha)m(U)$; puisque K est compact, il existe un ouvert $U_1 \in \mathcal{V}(1)$ tel que $U_1 K \subseteq U$.
Montrons par récurrence finie sur k que pour tout $k \in \{1, ..., N\}$ et tout $(g_1, ..., g_k) \in U_1^k$, $m(K \cap (\bigcap_{i=1}^{k} g_i K)) \geq (1-(k+1)\alpha)m(U)$.
On a $m(K \cap g_1 K) \geq m(K) + m(g_1 K) - m(U)$ car $K \cup g_1 K \subseteq U$, et puisque m est invariante par translation à gauche, on obtient que $m(K \cap g_1 K) \geq (1-2\alpha)m(U)$.
Supposons que pour $1 \leq k < N$, $m(K \cap (\bigcap_{i=1}^{k} g_i K)) \geq (1-(k+1)\alpha)m(U)$; on a :

$$m(K \cap (\bigcap_{i=1}^{k+1} g_i K)) = m(g_1 K \cap (K \cap (\bigcap_{i=2}^{k+1} g_i K))$$
$$\geq m(g_1 K) + m((K \cap (\bigcap_{i=2}^{k+1} g_i K))) - m(U).$$

Alors, d'après l'hypothèse de récurrence et l'invariance de m,

$$m(g_1K) + m((K \cap (\bigcap_{i=2}^{k+1} g_iK))) - m(U) \geq m(K) + (1-(k+1)\alpha)m(U) - m(U)$$
$$\geq (1-(k+2)\alpha)m(U),$$

ce qui est le résultat attendu.
On en déduit en particulier que pour tout $(g_1, ..., g_N) \in U_1^N$,

$$m(A \cap (\bigcap_{i=1}^{N} g_iA)) \geq (1-(N+1)\alpha)m(U)$$
$$= (1-\beta)m(U) \geq (1-\beta)m(A) > 0.$$

□

Lemme 1.3.2 *Soit $\varphi : G \to \mathbb{T}$ un morphisme d'un groupe localement compact G à base de topologie dénombrable.*
Si V est un ouvert de $\mathbb{T}$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{T}$, $\lambda V \cap \Gamma_\varphi \neq \varnothing$ et si $A \subseteq G$ est mesurable avec $m(A) > 0$, où m désigne la mesure de Haar (à gauche) sur G, alors $\varphi^{-1}(V) \cap A$ n'est pas négligeable.

Preuve.
Vérifions d'abord qu'il existe un ouvert $V_0 \in \mathcal{V}(1)$ symétrique et un ouvert V_1 dans $\mathbb{T}$ tels que pour tout $\lambda \in \mathbb{T}$, $\lambda V_1 \cap \Gamma_\varphi \neq \varnothing$ avec $V_0V_1 \subseteq V$.
En effet d'après le lemme 1.2.1, il existe un compact $K \subseteq V$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{T}$, $\lambda K \cap \Gamma_\varphi \neq \varnothing$; donc si $\pi : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ désigne le produit sur $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$, l'ensemble compact $\{1\} \times K$ est un sous-ensemble de l'ouvert $\pi^{-1}(V)$ et il existe par conséquent un ouvert symétrique $V_0 \in \mathcal{V}(1)$ et un ouvert V_1 contenant K tels que $V_0 \times V_1 \subseteq \pi^{-1}(V)$, soit $V_0V_1 \subseteq V$.
Puisque pour tout $\lambda \in \mathbb{T}$, $\lambda V_1 \cap \Gamma_\varphi \neq \varnothing$, on vérifie immédiatement que $\mathbb{T} = \bigcup_{\lambda \in \Gamma_\varphi} \lambda V_1$, et par compacité il existe $N \geq 1$ tel que $\mathbb{T} = \bigcup_{i=1}^{N} \lambda_i V_1$ avec $\lambda_i \in \Gamma_\varphi$.
D'après le lemme précédent, il existe $U_1 \in \mathcal{V}(1)$ tel que pour tout $(g_1, ..., g_N) \in U_1^N$, $m(A \cap (\bigcap_{i=1}^{N} g_iA)) > 0$.
Soit $i \in \{1, ..., N\}$, $\lambda_i \in \Gamma_\varphi$ mais $\Gamma_\varphi \subseteq \overline{\varphi(U_1)}$ donc il existe $g_i \in U_1$ tel que

$\lambda_i\varphi(g_i)^{-1} \in V_0$, c'est à dire $\lambda_i \in \varphi(g_i)V_0$, et donc
$\mathbb{T} = \bigcup_{i=1}^N \lambda_i V_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^N \varphi(g_i)V_0V_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^N \varphi(g_i)V$.
Ainsi $\mathbb{T} = \bigcup_{i=1}^N \varphi(g_i)V$, et $G = \varphi^{-1}(\mathbb{T}) = \bigcup_{i=1}^N g_i\varphi^{-1}(V)$.
Soit $g \in A \cap (\bigcap_{i=1}^N g_iA) \subseteq G$, il existe $i_0 \in \{1, ..., N\}$ tel que $g \in g_{i_0}\varphi^{-1}(V)$; puisque $g \in g_{i_0}A$, on obtient que $A \cap (\bigcap_{i=1}^N g_iA) \subseteq \bigcup_{i=1}^N g_i(A \cap \varphi^{-1}(V))$, cette réunion finie de translatés n'est donc pas négligeable et $\varphi^{-1}(V) \cap A$ non plus □

Proposition 1.3.1 *Soit G un groupe abélien localement compact à base de topologie dénombrable, m une mesure de Haar, $\mathcal{K}(\mathbb{T})$ l'espace de tous les compacts de $\mathbb{T}$ muni de la métrique de Hausdorff et $\omega : G \to \mathcal{K}(\mathbb{T})$ une application borélienne.*
Soit $(\varphi_i)_{i\in I}$ une famille de morphismes tels que $\varphi_i : G \to \mathbb{T}$ et pour tout $i \in I$, pour tout $g \in G, \varphi_i(g) \in \omega(g)$. On pose

$$\Omega_{\varphi_i} := \{g \in G \ / \ \forall\lambda \in \mathbb{T} \ \ \lambda\Gamma_{\varphi_i} \not\subseteq \omega(g)\}.$$

Alors l'ensemble mesurable $\bigcup_{i\in I} \Omega_{\varphi_i}$ est de mesure nulle.

Preuve.
Première étape.
Supposons que $\bigcup_{i\in I} \Gamma_{\varphi_i}$ contienne une infinité d'éléments. La réunion des groupes Γ_{φ_i} contient alors des éléments d'ordre arbitrairement grand et donc pour chaque ouvert $U \neq \varnothing$ de $\mathbb{T}$, il existe $i \in I$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{T}$, $\lambda\Gamma_{\varphi_i} \cap U \neq \varnothing$.
Soit $g \in G$ tel que $\omega(g) \neq \mathbb{T}$. Alors l'ouvert $\mathbb{T}\backslash\omega(g)$ est non vide et il existe $i \in I$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{T}$, $\lambda\Gamma_{\varphi_i} \not\subseteq \omega(g)$, donc $g \in \Omega_{\varphi_i}$.
Puisque l'autre inclusion est évidente, on obtient que
$\bigcup_{i\in I} \Omega_{\varphi_i} = \{g \in G \ / \ \omega(g) \neq \mathbb{T}\}$, qui est mesurable comme image réciproque d'un ouvert dans $\mathcal{K}(\mathbb{T})$.
Soit $\mathcal{V} = \{V_n, n \in \mathbb{N}\}$ une base d'ouverts non vides de la topologie de $\mathbb{T}$, posons $A_n = \{g \in G \ / \ \omega(g) \cap V_n = \varnothing\}$, A_n est un sous-ensemble borélien et $\{g \in G \ / \ \omega(g) \neq \mathbb{T}\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
Si $m(\{g \in G \ / \ \omega(g) \neq \mathbb{T}\}) > 0$ alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $m(A_{n_0}) > 0$; puisque $\bigcup_{i\in I} \Gamma_{\varphi_i}$ est infini, il existe $i_0 \in I$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{T}$,
$\lambda V_{n_0} \cap \Gamma_{\varphi_{i_0}} \neq \varnothing$, or pour tout $g \in G$, $\varphi_{i_0}(g) \in \omega(g)$, donc
$\varphi_{i_0}^{-1}(V_{n_0}) \bigcap A_{n_0} = \varnothing$, ce qui contredit le lemme précédent, et $\bigcup_{i\in I} \Omega_{\varphi_i}$ est de mesure nulle.

Seconde étape.
Supposons que $\bigcup_{i\in I}\Gamma_{\varphi_i}$ soit un ensemble fini, alors $\{\Gamma_{\varphi_i}, i\in I\} = \{\Gamma_{p_j}\}_{j=1}^{m}$.
Pour tout $j \in \{1,...,m\}$, posons $\Omega_j = \{g \in G \ / \ \forall\lambda \in \mathbb{T} \ \lambda\Gamma_{p_j} \not\subseteq \omega(g)\}$ et vérifions que Ω_j est de mesure nulle.
Soit $\mathcal{W} = \{W_n, n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble (dénombrable) des W_n réunions finies d'éléments de $\mathcal{V}$ tels que pour tout $\lambda \in \mathbb{T}$, $\lambda\Gamma_{p_j} \cap W_n \neq \varnothing$.
Soit $g \in \Omega_j$, on a pour tout $\lambda \in \mathbb{T}$, $\lambda\Gamma_{p_j} \not\subseteq \omega(g)$ donc $\lambda\Gamma_{p_j} \cap \mathbb{T}\backslash\omega(g) \neq \varnothing$ et d'après le lemme 1.2.1 il existe un compact $K \subseteq \mathbb{T}\backslash\omega(g)$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{T}$, $\lambda K \cap \Gamma_{p_j} \neq \varnothing$.
Puisque K est compact et $\mathbb{T}\backslash\omega(g)$ est ouvert, il existe $W_n \in \mathcal{W}$ tel que $K \subseteq W_n \subseteq \mathbb{T}\backslash\omega(g)$, donc $g \in B_n$ où $B_n := \{g \in G \ / \ W_n \cap \omega(g) = \varnothing\}$.
Ainsi $\Omega_j = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ (l'autre inclusion étant évidente).
Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n est mesurable car ω est borélienne et car $\{C \in \mathcal{K}(\mathbb{T}) \ / \ C \cap W_n = \varnothing\}$ est un borélien de $\mathcal{K}(\mathbb{T})$, donc Ω_j est également mesurable.
Si $m(\Omega_j) > 0$ alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $m(B_{n_0}) > 0$, or il existe un morphisme φ dans la famille $(\varphi_i)_{i\in I}$ tel que $\Gamma_\varphi = \Gamma_{p_j}$ et puisque pour tout $g \in G$, $\varphi(g) \in \omega(g)$, on obtient que $\varphi^{-1}(W_{n_0}) \bigcap B_{n_0} = \varnothing$, avec pour tout $\lambda \in \mathbb{T}$, $\lambda\Gamma_\varphi \cap W_{n_0} \neq \varnothing$, ce qui contredit le lemme précédent.
Finalement $\bigcup_{i\in I}\Omega_{\varphi_i} = \bigcup_{j=1}^{m}\Omega_j$ est de mesure nulle $\square$

Chapitre 2

Cas abélien

2.1 Continuité des représentations

Comme nous l'avons signalé dans l'introduction générale, un des résultats utilisés dans [38] (dû à Phillips, cf [31]) est que la continuité pour un groupe à un paramètre peut « se lire au travers des caractères », plus précisément, soit un groupe à un paramètre localement borné $T : \mathbb{R} \to A$ où A est une algèbre de Banach commutative alors sa continuité en norme est équivalente à celle de $t \in \mathbb{R} \mapsto \chi(T(t))$ pour tout $\chi \in \hat{A}$, où $\hat{A}$ désigne l'espace des caractères de A.
Pour une représentation localement bornée, on trouve des arguments basés sur le théorème de Gelfand-Hille (cf [19]) qui permettent de passer de la continuité spectrale (c'est à dire $\lim_{g\to 0} \rho(\theta(g)-1) = 0$, où ρ désigne le rayon spectral) à la continuité en norme. Mais déjà dans le cas de $\mathbb{R}$ le passage de la continuité à travers chaque caractère (i.e. pour tout $\chi \in \hat{A}$, $\chi \circ T$ continue) à la condition uniforme sur $\hat{A}$: $\lim_{t\to 0} \rho(\theta(t)-1) = 0$, nécessite un argument analytique difficile à généraliser (cf [31]).
C'est pourquoi dans [38] on raisonnait d'abord avec des groupes compacts puis on utilisait un théorème de structure des groupes abéliens localement compacts (cf théorème 0.1.12).
Ici nous présentons une preuve directe de l'équivalence entre la continuité spectrale et la continuité au travers des caractères.

Lemme 2.1.1 *« Lemme de la couronne »*
Soit θ une représentation localement bornée d'un groupe topologique G sur

une algèbre de Banach A. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $V_\epsilon \in \mathcal{V}(1)$ tel que pour tout $g \in V_\epsilon$, $\sigma(\theta(g)) \subseteq \{z \in \mathbb{C} \ / \ 1-\epsilon \leq |z| \leq 1+\epsilon\}$.

Preuve.
Puisque θ est localement bornée, il existe $M > 1$ et $V \in \mathcal{V}(1)$ tels que pour tout $g \in V$, $||\theta(g)|| \leq M$.
En utilisant la continuité du produit de groupe, on obtient que pour tout $n \geq 1$, il existe $V_n \in \mathcal{V}(1)$ tel que pour tout $g \in V_n$, $||\theta(g^n)|| \leq M$ et $||\theta(g^{-n})|| \leq M$.
Comme $\sigma(\theta(g^{-n})) = \{1/\lambda, \lambda \in \sigma(\theta(g^n))\}$ (cf remarque 0.2.2), on obtient $\sigma(\theta(g^n)) \subseteq \{z \in \mathbb{C} \ / \ 1/M \leq |z| \leq M\}$ et puisque $\sigma(\theta(g^n)) = (\sigma(\theta(g)))^n$, on a pour tous $g \in V_n$ et $z \in \sigma(\theta(g))$, $(1/M)^{1/n} \leq |z| \leq M^{1/n}$.
Finalement on peut bien conclure que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $V_\epsilon \in \mathcal{V}(1)$ tel que pour tout $g \in V_\epsilon$, $\sigma(\theta(g)) \subseteq \{z \in \mathbb{C} \ / \ 1-\epsilon \leq |z| \leq 1+\epsilon\}$ □

Remarque 2.1.1 *Soit θ une représentation localement bornée d'un groupe abélien topologique G sur une algèbre de Banach commutative A, et soit $\chi \in \hat{A}$ un caractère.*
On définit $\chi \circ \theta^{(1)}$ comme le morphisme $g \in G \mapsto \chi \circ \theta(g)/|\chi \circ \theta(g)| \in \mathbb{T}$.
D'après la remarque 1.1.1, $\chi \circ \theta$ est continu si et seulement si $\chi \circ \theta^{(1)}$ l'est.

Théorème 2.1.1 *Soit θ une représentation localement bornée d'un groupe abélien localement compact G sur une algèbre de Banach commutative A.*
Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) Pour tout $\chi \in \hat{A}$, $\chi \circ \theta$ est continu.
(ii) θ est spectralement continue.

Preuve.
(ii) ⇒ (i) : par composition.
(i) ⇒ (ii) :
On a par hypothèse $\{\chi \circ \theta, \chi \in \hat{A}\} \subseteq C(G, \mathbb{C})$.
Soit $V \in \mathcal{V}(1)$ ouvert, symétrique et relativement compact alors $H := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V^n$ est un sous-groupe de G localement compact et σ-compact (cf proposition 0.1.4), de plus $H \in \mathcal{V}(1)$, donc si on note θ_H la restriction à H du morphisme θ, il suffit de montrer que θ_H est spectralement continue en 1.
Nous montrons d'abord que $\{\chi \circ \theta_H^{(1)}, \chi \in \hat{A}\}$ est compact dans $C(H, \mathbb{T})$ muni de la topologie de convergence sur les compacts.

Cette topologie est métrisable car H est σ-compact (cf théorème 0.1.3), donc il suffit de vérifier que $\{\chi \circ \theta_H^{(1)}, \chi \in \hat{A}\}$ est séquentiellement compact, soit $(\chi_n \circ \theta_H^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\{\chi \circ \theta_H^{(1)}, \chi \in \hat{A}\}$.
$\hat{A}$ est compact donc $\{\chi \circ \theta_H^{(1)}, \chi \in \hat{A}\} \subseteq C(H, \mathbb{T})$ est compact pour la topologie de la convergence simple, et puisque $C(H, \mathbb{T})$ est angélique (cf théorème 0.1.4), on obtient que $\{\chi \circ \theta_H^{(1)}, \chi \in \hat{A}\}$ est séquentiellement compact.
Par conséquent on peut extraire une suite $(\chi_{n_k} \circ \theta_H^{(1)})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un élément $\chi \circ \theta_H^{(1)}$, c'est à dire que pour tout $h \in H$, $\chi_{n_k} \circ \theta_H^{(1)}(h) \to \chi \circ \theta_H^{(1)}(h)$.
En appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient que pour tout $f \in L^1(H)$, $\hat{f}(\chi_{n_k} \circ \theta_H^{(1)}) \to \hat{f}(\chi \circ \theta_H^{(1)})$ (où $L^1(H)$ désigne l'espace des fonctions intégrables par rapport à la mesure de Haar et $\hat{f}$ la transformation de Fourier de f).
Puisque la topologie de la convergence compacte sur H coïncide avec la topologie faible-étoile du groupe dual $\hat{H}$ considéré comme un sous-ensemble de $L^\infty(H)$ (cf proposition 0.3.1 et remarque 0.3.3), on a :
$(\chi_{n_k} \circ \theta_H^{(1)}) \to \chi \circ \theta_H^{(1)}$, ce qui prouve la compacité.
L'ensemble $\{\chi \circ \theta_H^{(1)}, \chi \in \hat{A}\}$ est équicontinu d'après le théorème d'Ascoli, donc pour tout $\epsilon > 0$, il existe $W_\epsilon \in \mathcal{V}(1)$ dans H tel que pour tout $h \in W_\epsilon$, $\mathrm{Sup}_{\chi\in\hat{A}}|(\chi \circ \theta_H^{(1)})(h) - (\chi \circ \theta_H^{(1)})(1)| < \epsilon$.
En appliquant le « lemme de la couronne » (lemme 2.1.1), on obtient qu'il existe $V_\epsilon \in \mathcal{V}(1)$ tel que pour tout $h \in V_\epsilon$ et pour tout $\chi \in \hat{A}$,
$(\chi \circ \theta_H)(h) \in \{z \in \mathbb{C} \ / \ 1 - \epsilon \leq |z| \leq 1 + \epsilon\}$, donc pour tout $h \in W_\epsilon \cap V_\epsilon$ et pour tout $\chi \in \hat{A}$,
$|(\chi \circ \theta_H)(h) - 1| \leq |(\chi \circ \theta_H)(h) - (\chi \circ \theta_H^{(1)})(h)| + |(\chi \circ \theta_H^{(1)})(h) - 1| \leq 2\epsilon$.
Or $\mathrm{Sup}_{\chi\in\hat{A}}|(\chi \circ \theta_H)(h) - (\chi \circ \theta_H)(1)| = \rho(\theta_H(h) - 1)$ et θ_H est spectralement continue □

On en déduit, en utilisant le résultat de continuité de J. Esterle cité dans l'introduction (cf théorème 3.3 in [19]) :

Corollaire 2.1.1 *Soit θ une représentation localement bornée d'un groupe abélien localement compact G sur une algèbre de Banach commutative A.*
Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) θ est uniformément continue.
(ii) Pour tout $\chi \in \hat{A}$, $\chi \circ \theta$ est continu.

2.2 Mesurabilité des représentations

Il est bien connu qu'un morphisme Baire-mesurable d'un groupe de Baire dans un groupe séparable est continu (cf théorème 0.1.8 de Pettis) et qu'un morphisme mesurable d'un groupe localement compact dans un groupe séparable ou bien σ-compact est continu (cf théorème 0.1.10 de Steinhauss-Weil), et ce dernier résultat reste vrai lorsque le groupe d'arrivée est localement compact (cf [36]). Dans tous les cas une hypothèse relative au groupe image est requise, ici on déduit de la caractérisation de la continuité par les caractères (et des résultats de continuité automatique des morphismes complexes) que tout morphisme localement borné (par exemple une représentation isométrique) Baire-mesurable ou Haar-mesurable d'un groupe abélien localement compact dans le groupe des inversibles d'une algèbre de Banach (par exemple dans le groupe linéaire d'un espace de Banach) est uniformément continu :

Théorème 2.2.1 *Soit θ une représentation localement bornée d'un groupe abélien localement compact G sur une algèbre de Banach commutative A.*
Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) θ est Baire-mesurable.
(ii) Pour tout $\chi \in \hat{A}$, $\chi \circ \theta$ est Baire-mesurable.
(iii) Pour tout $\chi \in \hat{A}$, $\chi \circ \theta$ est continue.
(iv) θ est uniformément continue.

Théorème 2.2.2 *Soit θ une représentation localement bornée d'un groupe abélien localement compact G sur une algèbre de Banach commutative A.*
Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) θ est mesurable.
(ii) Pour tout $\chi \in \hat{A}$, $\chi \circ \theta$ est mesurable.
(iii) Pour tout $\chi \in \hat{A}$, $\chi \circ \theta$ est continue.
(iv) θ est uniformément continue.

Remarque 2.2.1 *En fait le théorème précédent reste vrai en supposant seulement la mesurabilité sur un voisinage donné (cf théorème 0.1.3).*

2.3 Compléments

2.3.1 Cas des algèbres séparables

Soit θ une représentation d'un groupe abélien topologique G sur une algèbre de Banach commutative A et soit χ un caractère de l'algèbre A, pour tout $g \in G$, le nombre complexe $(\chi \circ \theta)(g)$ est un élément du spectre $\sigma(\theta(g))$, on en déduit que $\Gamma_{\chi\circ\theta}$ est inclus dans Γ_θ. On s'intéresse donc dans ce paragraphe à l'étude des relations entre les polygones $\Gamma_{\chi\circ\theta}$ associés aux caractères et l'ensemble Γ_θ associé à la représentation de façon à obtenir des résultats de continuité dans le cas où G n'est plus supposé localement compact mais seulement de Baire. On perd alors les outils qui nous permettaient d'obtenir une convergence uniforme à partir d'une convergence simple (intégrale de Haar, théorème de convergence dominée, théorèmes d'Ascoli, de Raïkov...) et donc de lire la continuité de la représentation au travers des caractères. En revanche on retrouvera ce résultat en supposant que l'algèbre est séparable.

Lemme 2.3.1 *Soit θ une représentation localement bornée d'un groupe topologique G sur une algèbre de Banach A.*
Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $(\Gamma_\theta)^N = \Gamma_{\theta^N}$ où on note θ^N le morphisme
$g \in G \mapsto (\theta(g))^N = \theta(g^N)$.

Preuve.
Si $\alpha \in (\Gamma_\theta)^N$ alors il existe $\lambda \in \Gamma_\theta$ tel que $\alpha = \lambda^N$ et il existe une suite généralisée $(g_i)_{i\in I}$ dans G telle que $\lim_i g_i = 1$ et $\lim_i \lambda_i = \lambda$ pour une suite généralisée $(\lambda_i)_{i\in I}$ de nombres complexes vérifiant $\lambda_i \in \sigma(\theta(g_i))$ pour tout $i \in I$. Par conséquent $\lim_i(g_i) = 1$ et $\lim_i \lambda_i^N = \lambda^N$ avec $\lambda_i^N \in \sigma(\theta^N(g_i))$ d'après le théorème de l'application spectrale, donc $\alpha \in \Gamma_{\theta^N}$.
Réciproquement, si $\alpha \in \Gamma_{\theta^N}$ alors il existe une suite généralisée $(g_i)_{i\in I}$ dans G telle que $\lim_i g_i = 1$ et une suite généralisée $(\lambda_i)_{i\in I}$ de nombres complexes telle que $\lim_i \lambda_i = \alpha$ avec $\lambda_i \in \sigma(\theta^N(g_i))$ pour tout $i \in I$.
D'après le théorème de l'application spectrale, $\lambda_i = {\mu_i}^N$ avec pour tout $i \in I$, $\mu_i \in \sigma(\theta(g_i))$, or θ est localement bornée et $\lim_i g_i = 1$, donc $(\mu_i)_{i\in I}$ peut être supposée bornée, on peut ainsi extraire une suite généralisée $(\mu_j)_{j\in J}$ qui converge vers un élément $\mu \in \mathbb{C}$. Cela montre que $\mu \in \Gamma_\theta$ et puisque $\lim_j {\mu_j}^N = \mu^N$, on obtient $\alpha = \lim_j \lambda_j = \mu^N$, soit $\alpha \in (\Gamma_\theta)^N$ □

Lemme 2.3.2 *Soit θ une représentation localement bornée d'un groupe abélien localement compact G sur une algèbre de Banach commutative A.*
$\bigcup_{\chi\in\hat{A}}\Gamma_{\chi\circ\theta}$ est infini si et seulement si $\Gamma_\theta = \mathbb{T}$.

Preuve.
On a signalé que $\bigcup_{\chi\in\hat{A}}\Gamma_{\chi\circ\theta}\subseteq\Gamma_\theta$, d'autre part, $\Gamma_{\chi\circ\theta}$ est un sous-groupe de $\mathbb{T}$ car pour tout $g\in G$, $\sigma((\chi\circ\theta)(g)) = \{\chi(\theta(g))\}$.
Si $\bigcup_{\chi\in\hat{A}}\Gamma_{\chi\circ\theta}$ est infini alors $\overline{\bigcup_{\chi\in\hat{A}}\Gamma_{\chi\circ\theta}} = \mathbb{T}$ or $\bigcup_{\chi\in\hat{A}}\Gamma_{\chi\circ\theta}\subseteq\Gamma_\theta$ qui est compact donc $\Gamma_\theta = \mathbb{T}$.
Si $\bigcup_{\chi\in\hat{A}}\Gamma_{\chi\circ\theta}$ est fini, alors il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $\chi\in\hat{A}$, $(\Gamma_{\chi\circ\theta})^N = \{1\}$. Or d'après le lemme précédent $(\Gamma_{\chi\circ\theta})^N = \Gamma_{(\chi\circ\theta)^N}$ et puisque $(\chi\circ\theta)^N = \chi\circ\theta^N$ on obtient que pour tout $\chi\in\hat{A}$, $\Gamma_{\chi\circ\theta^N} = \{1\}$.
Ainsi pour tout $\chi\in\hat{A}$, $\chi\circ\theta^N$ est continu et θ^N l'est également d'après le corollaire 2.1.1.
Finalement $\Gamma_{\theta^N} = \{1\}$, donc d'après le lemme précédent $(\Gamma_\theta)^N = \{1\}$; ce qui montre que $\Gamma_\theta\neq\mathbb{T}$ □

Remarque 2.3.1 *La preuve de la condition suffisante reste vraie pour un groupe topologique quelconque.*

Remarque 2.3.2 *Soit θ une représentation localement bornée d'un groupe abélien localement compact G sur une algèbre de Banach commutative A.*
Si G admet localement une division compacte à tout ordre alors $\Gamma_\theta = \{1\}$ ou bien $\Gamma_\theta = \mathbb{T}$. En effet si $\Gamma_\theta\neq\{1\}$ alors θ n'est pas spectralement continue, donc il existe un caractère $\chi\in\hat{A}$ tel que $\chi\circ\theta$ soit discontinu (cf théorème 2.1.1), ainsi $\Gamma_{\chi\circ\theta}\neq\{1\}$, soit encore $\Gamma_{\chi\circ\theta} = \mathbb{T}$ (d'après le lemme 1.1.1 de dichotomie) et $\Gamma_\theta = \mathbb{T}$.
On obtient en particulier pour les représentations de groupes abéliens localement compacts qui sont connexes ou bien localement connexes la dichotomie suivante : $\Gamma_\theta = \{1\}$ ou bien $\Gamma_\theta = \mathbb{T}$.

Proposition 2.3.1 *« Egalité des gammas »*
Soit θ une représentation localement bornée d'un groupe de Baire métrisable et abélien G sur une algèbre de Banach commutative séparable A.
Alors $\Gamma_\theta = \overline{\bigcup_{\chi\in\hat{A}}\Gamma_{\chi\circ\theta}}$.

Preuve.
On a vu que $\overline{\bigcup_{\chi\in\hat{A}}\Gamma_{\chi\circ\theta}}\subseteq\Gamma_\theta$ et que l'inclusion réciproque est vraie si

$\bigcup_{\chi\in\hat{A}}\Gamma_{\chi\circ\theta}$ contient une infinité d'éléments (cf lemme 2.3.2 et remarque 2.3.1), il reste donc seulement à vérifier que $\Gamma_\theta \subseteq \overline{\bigcup_{\chi\in\hat{A}}\Gamma_{\chi\circ\theta}}$ lorsque $\bigcup_{\chi\in\hat{A}}\Gamma_{\chi\circ\theta}$ est fini.
Supposons donc que $\bigcup_{\chi\in\hat{A}}\Gamma_{\chi\circ\theta} = \bigcup_{i=1}^{m}\Gamma_{p_i}$; d'après le lemme 1.1.2, on peut considérer que les morphismes $\chi\circ\theta$ sont à valeurs dans le tore.
Remarquons que A est séparable donc $\hat{A}$ est séquentiellement compact (cf remarque 0.2.3). Soit alors $\lambda\in\Gamma_\theta$, il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans G telle que $\lim_{n\to\infty} g_n = 1$ et $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = \lambda$ pour une suite de nombres complexes $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant $\lambda_n\in\sigma(\theta(g_n))$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe $\chi_n\in\hat{A}$ tel que $\lambda_n = \chi_n(\theta(g_n))$.
Après extraction il existe $p\in\{p_1,...,p_m\}$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}, \Gamma_{\chi_n\circ\theta} = \Gamma_p$ donc $\Gamma_{(\chi_n\circ\theta)^p} = (\Gamma_{\chi_n\circ\theta})^p = \{1\}$, ainsi $(\chi_n\circ\theta)^p$ est continu, avec $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers un élément $\chi\in\hat{A}$, c'est à dire que pour tout $g\in G$, $((\chi_n\circ\theta)^p(g))_{n\in\mathbb{N}}\to(\chi\circ\theta)^p(g)$, donc $(\chi\circ\theta)^p$ est continu comme morphisme Baire-mesurable d'un groupe de Baire G dans un groupe séparable (cf théorème 0.1.8), d'autre part d'après le lemme 0.3.1 on obtient que la suite est équicontinue.
Soit $\epsilon>0$, il existe $K\in\mathcal{V}(1)$ et $n_0\in\mathbb{N}$ tels que pour tout $n>n_0$ et pour tout $g\in K$, $|(\chi_n\circ\theta)^p(g)-1|<\epsilon/2$ et $|\lambda^p-(\chi_n\circ\theta)^p(g_n)|<\epsilon/2$ avec $(g_n)_{n\geq n_0}\subseteq K$.
Donc $|\lambda^p-1|\leq|\lambda^p-(\chi_n\circ\theta)^p(g_n)|+|(\chi_n\circ\theta)^p(g_n)-1|$
$<\epsilon/2+\epsilon/2=\epsilon$. Ainsi $\lambda^p=1$ et donc $\lambda\in\Gamma_p$ □

Remarque 2.3.3 *L'argument principal de la preuve précédente est que $\hat{A}$ est séquentiellement compact, donc le résultat reste vrai si l'espace des fonctions continues à valeurs complexes $C(A,\mathbb{C})$ est angélique pour la topologie de la convergence simple (cf [43] pour des conditions suffisantes) ou bien si la boule unité du dual de A est séquentiellement compacte.*

Remarque 2.3.4 *Dans le cas d'une représentation fortement continue dans un espace de Banach, le résultat est sans intérêt car la continuité est automatique :*

Proposition 2.3.2 *Soit $\theta: G\to\mathcal{L}(X)$ une représentation fortement continue d'un groupe de Baire métrisable dans un espace de Banach.*
Si $\theta(G)$ est séparable en norme alors θ est uniformément continue.

Preuve.
Vérifions que θ est de première classe de Baire ; puisque $\theta(G)$ est séparable en norme, il suffit de montrer que l'image réciproque de toute boule fermée est fermée.
Or $\overline{B(T_0,\epsilon)}= \{T \in \mathcal{L}(X) \ / \ ||T - T_0|| \leq \epsilon\}$
$= \bigcap_{||x||=1}\{T \ / \ ||(T - T_0)(x)|| \leq \epsilon\}$.
Donc $\theta^{-1}(\overline{B(T_0,\epsilon)}) = \bigcap_{||x||=1} \theta^{-1}(\{T \ / \ ||(T - T_0)(x)|| \leq \epsilon\})$ qui est fermé comme intersection d'images réciproques de fermés (pour la topologie forte des opérateurs) par θ fortement continue.
En particulier l'ensemble des points de continuité de θ est comaigre dans le groupe de Baire G (cf théorème 0.1.5), donc θ possède des points de continuité, et comme θ est un morphisme, θ est continu □

On peut également dans le cas abélien déduire d'un théorème du graphe fermé un résultat analogue au précédent :

Proposition 2.3.3 *(cf proposition 2.3.2 in [18])*
Soit θ une représentation localement bornée d'un groupe abélien topologique sur une algèbre de Banach A.
Si θ est spectralement continue alors le graphe de θ est fermé.
Donc, si G est un groupe de Baire abélien et si A est séparable alors θ est continue.

On déduit donc de ce qui précède :

Proposition 2.3.4 *Soit θ une représentation localement bornée d'un groupe de Baire abélien métrisable sur une algèbre de Banach séparable A.*
Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) Pour tout $\chi \in \hat{A}$, $\chi \circ \theta$ est continu.
(ii) θ est spectralement continue.
(iii) θ est uniformément continue.

Preuve.
D'après la proposition précédente, il ne reste plus qu'à montrer que (i) entraîne (ii), si pour tout $\chi \in \hat{A}$, $\chi \circ \theta$ est continu alors $\Gamma_{\chi\circ\theta} = \{1\}$ donc, d'après la proposition 2.3.1, $\Gamma_\theta = \{1\}$, et θ est donc spectralement continue (cf loi du « zéro-$\sqrt{3}$ » rappelée dans l'introduction) □

Remarque 2.3.5 *Dans sa thèse de doctorat, S. Dubernet a montré que l'implication (ii) ⇒ (iii) reste vraie pour toute représentation de groupe topologique sur une algèbre de Banach quelconque à condition que la représentation soit bornée.*

2.3.2 Cas des représentations non localement bornées

On peut prouver que le théorème de caractérisation 2.1.1 reste vrai sans l'hypothèse « θ localement bornée » en procédant ainsi :

Lemme 2.3.3 *Soit $T : \mathbb{R} \to A$ une représentation sur une algèbre de Banach commutative A.*
Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) Pour tout $\chi \in \hat{A}$, $\chi \circ T$ continu.
(ii) T est spectralement continue.

Preuve.
(ii) ⇒ (i) évident.
(i) ⇒ (ii)
- Vérifions d'abord que $\{\chi \circ T/|\chi \circ T|, \chi \in \hat{A}\}$ est compact pour la topologie de la convergence compacte.
Par hypothèse $\{\chi \circ T/|\chi \circ T|, \chi \in \hat{A}\} \subseteq \hat{\mathbb{R}} \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{T})$ qui est métrisable ; donc $\{\chi \circ T/|\chi \circ T|, \chi \in \hat{A}\}$ est compact si et seulement s'il est séquentiellement compact.
Soit donc une suite $(\chi_n \circ T/|\chi_n \circ T|)_{n\in\mathbb{N}}$ dans cet ensemble, on sait que $\{\chi \circ T/|\chi \circ T|, \chi \in \hat{A}\}$ est compact pour la topologie de la convergence simple par compacité de $\hat{A}$ et continuité de $\chi \in \hat{A} \mapsto \chi(T(t)) \in \mathbb{C}$ pour tout réel t.
L'ensemble des restrictions $\{\chi \circ T_{/[-1,1]}/|\chi \circ T_{/[-1,1]}|, \chi \in \hat{A}\} \subseteq C([-1, 1], \mathbb{T})$ est donc compact, et on peut appliquer le théorème d'Eberlein-Smulian (cf théorème 0.1.4) : il existe une suite extraite $(\chi_{n_k} \circ T/|\chi_{n_k} \circ T|)_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant simplement vers un élément $\chi \circ \theta/|\chi \circ T|$ sur $[-1, 1]$.
Or $\mathbb{R} = \bigcup_p [-p, p]$ et les $\chi_{n_k} \circ T/|\chi_{n_k} \circ T|$ sont des morphismes donc la convergence simple a lieu sur $\mathbb{R}$.
Le théorème de convergence dominée entraîne alors que pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}(\chi_{n_k} \circ T/|\chi_{n_k} \circ T|) \to \hat{f}(\chi \circ T/\chi \circ T)$ (où $\hat{f}$ désigne la transformée de Fourier de f). Comme dans $\hat{\mathbb{R}}$ la topologie de la convergence compacte sur $\mathbb{R}$ coïncide

avec la topologie faible-étoile dont $\hat{\mathbb{R}}$ hérite en tant que partie de $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})$, nous avons bien que $(\chi_{n_k} \circ T/|\chi_{n_k} \circ T|)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\chi \circ T/|\chi \circ T|$ dans $\hat{\mathbb{R}}$.
-D'autre part, pour tout $\chi \in \hat{A}$, il existe un unique élément $\gamma_\chi \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(\chi \circ T)(t) = exp(\gamma_\chi t)$. Notons $\gamma_\chi = \alpha_\chi + i\beta_\chi$ avec α_χ et β_χ réels, donc $(\chi \circ T)(t)/|(\chi \circ T)(t)| = exp(i\beta_\chi t)$, or $\hat{\mathbb{R}} \approx \mathbb{R}$, donc le premier point entraîne que $\{\beta_\chi, \chi \in \hat{A}\}$ est compact donc borné.
Puisque la fonction $\chi \mapsto |\hat{T(1)}(\chi)|$ est continue sur le compact $\hat{A}$, elle est bornée et atteint ses bornes donc il existe 0<a<b tels que $|\hat{T(1)}(\hat{A})| \subseteq [a, b]$ soit $\{exp\alpha_\chi, \chi \in \hat{A}\} \subseteq [a, b] \subseteq \mathbb{R}^{+*}$ ce qui prouve que $\{\alpha_\chi, \chi \in \hat{A}\}$ est également borné, donc $\{\gamma_\chi, \chi \in \hat{A}\}$ l'est aussi et ainsi
$\lim_{t\to 0} \mathrm{Sup}_{\chi\in\hat{A}}|(\chi \circ T)(t) - 1| = 0$ □

Lemme 2.3.4 *Soit θ une représentation d'un groupe abélien compact G sur une algèbre de Banach commutative A.*
Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) θ est spectralement continue.
(ii) Pour tout $\chi \in \hat{A}$, $\chi \circ \theta$ est continu.

Preuve.
Remarquons d'abord que si χ est un caractère sur A et si $\chi \circ \theta$ est continu alors $(\chi \circ \theta)(G)$ est un sous-groupe compact du groupe multiplicatif $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, donc $(\chi \circ \theta)(G) \subseteq \mathbb{T}$.
(i)⇒ (ii) est évident.
(ii)⇒ (i)
Il suffit de montrer que $\{\chi \circ \theta, \chi \in \hat{A}\}$ est un ensemble fini, on aura alors l'équicontinuité en 1, c'est à dire la continuité spectrale.
G est compact donc $\hat{G}$ est discret (cf proposition 0.1.6), il suffit donc de vérifier que $\{\chi \circ \theta, \chi \in \hat{A}\}$ est séquentiellement compact.
Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans cet ensemble, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $\chi_n \in \hat{A}$ tel que $\chi_n \circ \theta = \varphi_n$; or $\hat{A}$ est compact donc $\{\chi \circ \theta, \chi \in \hat{A}\}$ est compact pour la topologie de la convergence simple et puisque $\{\chi \circ \theta, \chi \in \hat{A}\} \subseteq C(G, \mathbb{T})$, le théorème d'Eberlein-Smulian implique que $\{\chi \circ \theta, \chi \in \hat{A}\}$ est séquentiellement compact, on peut donc extraire une suite $(\varphi_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement vers un élément de l'ensemble $\{\chi \circ \theta, \chi \in \hat{A}\}$, soit pour tout $g \in G$, $\chi_{n_k}(\theta(g)) \to \chi(\theta(g))$ donc, par convergence dominée, on obtient

pour tout $f \in L^1(G)$, $\hat{f}(\chi_{n_k} \circ \theta) \to \hat{f}(\chi \circ \theta)$ (où $\hat{f}$ désigne la transformée de Fourier de f), soit $(\varphi_{n_k})_k \to \chi \circ \theta$ $\square$

Lemme 2.3.5 *Soit G_1 et G_2 deux groupes abéliens localement compacts tels que pour tout $i \in \{1,2\}$ la continuité de $\chi \circ \theta_i$ pour tout $\chi \in \hat{A}$ entraîne la continuité spectrale de θ_i (où θ_i est une représentation de G_i sur une algèbre de Banach commutative A quelconque) alors le groupe produit $G_1 \times G_2$ possède la même propriété.*

Preuve.
Soit $\theta : G_1 \times G_2 \to A$ une représentation, on définit les représentations partielles associées, c'est à dire $\theta_1(g_1) := \theta(g_1, 1)$ et $\theta_2(g_2) := \theta(1, g_2)$. Si pour tout $\chi \in \hat{A}$, $\chi \circ \theta$ est continu alors pour tout $\chi \in \hat{A}$, $\chi \circ \theta_i$ est continu pour $i \in \{1,2\}$, par conséquent θ_1 et θ_2 sont spectralement continues par hypothèse.
Comme pour tout $g = (g_1, g_2)$ dans $G_1 \times G_2$, on peut écrire que
$\theta(g) = \theta(g_1, g_2) = \theta((g_1, 1)(1, g_2)) = \theta(g_1, 1)\theta(1, g_2) = \theta_1(g_1)\theta_2(g_2)$, il suffit de remarquer qu'on a la majoration $|\chi(\theta(g)) - 1| = |\chi(\theta_1(g_1))\chi(\theta_2(g_2)) - 1| \leq \rho(\theta_1(g_1) - I)\rho(\theta_2(g_2) - I) + \rho(\theta_1(g_1) - I) + \rho(\theta_2(g_2) - I)$ $\square$

Proposition 2.3.5 *Soit θ une représentation d'un groupe abélien localement compact G sur une algèbre de Banach commutative A.*
Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) θ est spectralement continue.
(ii) Pour tout $\chi \in \hat{A}$, $\chi \circ \theta$ est continu.

Preuve.
On utilise que $G \approx \mathbb{R}^n \times H$ où H est un groupe localement compact qui contient un sous-groupe ouvert compact K (cf thèorème 0.1.12) et on applique les lemmes précédents $\square$

Chapitre 3

Cas non abélien

3.1 Continuité des représentations unitaires

Dans cette section nous prouvons une condition nécessaire et suffisante de continuité pour les représentations unitaires.

Points de continuité du spectre

On rappelle ici un résultat exposé dans [12] :

Théorème 3.1.1 *Soit G un groupe topologique métrisable, $\theta : G \to U(H)$ une représentation unitaire fortement continue de G dans un espace de Hilbert H et $\Sigma : g \in G \mapsto \sigma(\theta(g)) \in \mathcal{K}(\mathbb{T})$.*
Alors Σ admet un ensemble de points de continuité comaigre dans G.

Rappelons également une proposition qui donne une condition de régularité des applications « spectres » (cf [39]) :

Proposition 3.1.1 *Si X est un espace de Banach séparable alors l'application de $\mathcal{L}(X)$ dans $\mathcal{K}(\mathbb{C})$ (respectivement du groupe des inversibles $\mathcal{G}(X)$ dans $\mathcal{K}(\mathbb{T})$) : $T \mapsto \sigma(T)$ (respectivement : $T \mapsto \sigma^1(T)$) est borélienne (où $\mathcal{K}(\mathbb{C})$ et $\mathcal{K}(\mathbb{T})$ sont munis de la topologie de Hausdorff, $\mathcal{L}(X)$ et $\mathcal{G}(X)$ de la topologie forte des opérateurs).*

Remarque 3.1.1 *Les deux résultats précédents sont indépendants l'un de l'autre puisque dans $\mathbb{R}$ la fonction caractéristique des rationnels est borélienne mais n'admet aucun point de continuité tandis que la fonction caractéristique d'une partie non mesurable incluse dans un compact rare de mesure positive admet un ensemble comaigre de points de continuité mais n'est pas borélienne.*

On déduit de la proposition précédente le fait suivant :

Proposition 3.1.2 *Soit G un groupe topologique et $\theta : G \to \mathcal{L}(H)$ une représentation fortement continue de G dans un espace de Hilbert séparable H. Alors l'application $g \in G \mapsto Conv(\sigma(\theta(g)))$ est borélienne.*

Preuve.
$g \in G \mapsto \theta(g) \in \mathcal{L}(H)$ est continu lorsque $\mathcal{L}(H)$ est muni de la topologie forte des opérateurs, $T \mapsto \sigma(T)$ est borélienne d'après la proposition 3.1.1 et $K \in \mathcal{K}(\mathbb{C}) \mapsto Conv(K) \in \mathcal{K}(\mathbb{C})$ est continu car c'est une contraction pour la métrique de Hausdorff, par conséquent $g \in G \mapsto Conv(\theta(g))$ est borélienne
□

Définition 3.1.1 *Soit G un groupe, A une C*-algèbre, on appelle* représentation unitaire de G sur A *tout morphisme de G dans le groupe unitaire de A.*

Poursuivons par quelques résultats élémentaires :

Lemme 3.1.1 *Soit θ une représentation unitaire d'un groupe topologique G sur la C*-algèbre A engendrée par $\theta(G)$, soit $\omega \in P\Sigma(A)$.*
Si $\pi_\omega : A \to \mathcal{L}(H_\omega)$ désigne la représentation d'algèbre cyclique (unique à équivalence près) donnée par la construction de Gelfand-Naimark-Segal alors la représentation $\pi_\omega \circ \theta$ est irréductible.

Preuve.
Soit v_ω un vecteur cyclique pour π_ω, pour tout $a \in A$, on a
$\omega(a) =< (\pi_\omega(a)v_\omega, v_\omega) >$ (cf théorème 0.2.9).
Donc pour tout $g \in G$, $(\omega \circ \theta)(g) =< (\pi_\omega \circ \theta)(g)v_\omega, v_\omega >$.
Comme A est engendrée par $\theta(G)$ et que θ est unitaire, on a $\overline{Vect(\theta(G))} = A$, donc par continuité de l'application $a \mapsto \pi_\omega(a)v_\omega$, le vecteur v_ω est cyclique

pour la représentation $\pi_\omega \circ \theta : G \to \mathcal{L}(H_\omega)$.
Si $\omega \in P\Sigma(A)$ alors π_ω est irréductible (cf théorème 0.2.10), donc tout vecteur $v \in H_\omega \backslash \{0\}$ est cyclique. L'argument utilisé ci-dessus pour v_ω montre que v est également cyclique pour $\pi_\omega \circ \theta$ et donc $\pi_\omega \circ \theta$ est irréductible □

Lemme 3.1.2 *Soit θ une représentation unitaire d'un groupe topologique G sur une C*-algèbre A.*
(i) Pour toute forme linéaire positive ω, $\omega \circ \theta$ est définie positive .
(ii) Si A est la C-algèbre engendrée par $\theta(G)$ et si $\omega \in P\Sigma(A)$ alors $\omega \circ \theta$ est continue ou moyenne vers zéro.*

Preuve.
(i) Soit $(g_1, ..., g_n)$ dans G^n et $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ dans $\mathbb{C}^n$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \overline{\lambda_j} (\omega \circ \theta)(g_j^{-1} g_i) &= \omega(\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \overline{\lambda_j} \theta(g_j^{-1} g_i)) \\
&= \omega(\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \overline{\lambda_j} \theta(g_j)^* \theta(g_i)) \\
&= \omega((\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \theta(g_j))^* (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \theta(g_i))) \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

donc $\omega \circ \theta$ est définie positive.
(ii) Soit $\omega \in \Sigma(A)$, notons $\pi_\omega : A \to \mathcal{L}(H_\omega)$ la représentation de Gelfand-Naimark-Segal associée de vecteur cyclique v_ω, on a pour tout $a \in A$,
$\omega(a) = < \pi_\omega(a) v_\omega, v_\omega >$.
Ainsi pour tout $g \in G$, $(\omega \circ \theta)(g) = < (\pi_\omega \circ \theta)(g) v_\omega, v_\omega >$, donc $\pi_\omega \circ \theta$ est, à équivalence près, la représentation cyclique associée à $\omega \circ \theta$.
D'après le lemme 3.1.1, cette représentation est irréductible. L'espace H_c ou bien l'espace H_0 figurant dans la décomposition de Glicksberg-de Leeuw est donc trivial comme l'est aussi le terme continu ou bien le terme moyennant vers zéro dans la décomposition de $\omega \circ \theta$ donnée par corollaire 0.3.1 □

Remarque 3.1.2 *On a vu que lorsque A est séparable (cf remarque 0.2.4) l'espace de Hilbert H_ω associé à ω est séparable donc l'espace $H_{\omega \circ \theta}$ associé*

à la fonction définie positive $\omega \circ \theta$ l'est également par unicité de la représentation obtenue dans la preuve du point (ii).
On peut donc dire dans le cas séparable que la mesurabilité de $\omega \circ \theta$ entraîne sa continuité (cf théorème 0.3.4).

Nous pouvons maintenant établir le principal résultat de ce chapitre :

Théorème 3.1.2 *Soit θ une représentation unitaire d'un groupe localement compact G métrisable sur une C^*-algèbre A.*
Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) Pour tout $\omega \in P\Sigma(A)$, $\omega \circ \theta$ est continue.
(ii) Pour tout $\omega \in \Sigma(A)$, $\omega \circ \theta$ est continue.
(iii) θ est uniformément continue.

Preuve.
(iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i) est évident.
(i) $\Rightarrow$ (ii)
Soit $\omega \in \Sigma(A)$, $\Sigma(A)$ est un ensemble faible-étoile compact et convexe dans le dual A^*, on peut donc utiliser le théorème de représentation intégrale de Choquet (cf théorème 0.1.11) pour dire qu'il existe une mesure μ_ω qui représente ω sur $Ext(\Sigma(A)) = P\Sigma(A)$.
Pour tout $g \in G$, considérons la forme linéaire continue $\hat{\theta(g)}$ définie de $\Sigma(A)$ dans $\mathbb{C}$ par $\hat{\theta(g)}(\tau) := \tau(\theta(g))$, on obtient que pour tout $g \in G$,
$(\omega \circ \theta)(g) = \hat{\theta(g)}(\omega) = \int_{P\Sigma(A)} \hat{\theta(g)} \ d\mu_\omega$.
Montrons que $\omega \circ \theta$ est continue, soit (g_n) une suite dans G qui converge vers un élément $g \in G$; pour tout $\tau \in P\Sigma(A)$ on a d'après l'hypothèse de continuité : $\hat{\theta(g_n)}(\tau) = (\tau \circ \theta)(g_n) \to (\tau \circ \theta)(g) = \hat{\theta(g)}(\tau)$.
Or pour tout $\tau \in P\Sigma(A)$ et pour tout $h \in G$, $|\hat{\theta(h)}(\tau)| \leq 1$, par conséquent le théorème de convergence dominée entraîne que
$(\omega \circ \theta)(g_n) = \int_{P\Sigma(A)} \hat{\theta(g_n)} \ d\mu_\omega \to \int_{P\Sigma(A)} \hat{\theta(g)} \ d\mu_\omega = (\omega \circ \theta)(g)$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii)
Remarquons que pour tout $\omega \in \Sigma(A)$, $\omega \circ \theta$ est définie positive d'après le lemme 3.1.2 (i), continue par hypothèse, et donc de type positif d'après la proposition 0.3.1.
Puisque $\omega(\theta(1)) = 1$, on a $\{\omega \circ \theta, \omega \in \Sigma(A)\} \subseteq \mathcal{P}_1(G)$.
Soit $V \in \mathcal{V}(1)$ symétrique et compact alors $H = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V^n$ est un sous-groupe localement compact et σ-compact de G (cf proposition 0.1.4), $H \in \mathcal{V}(1)$ donc

si on note θ_H la restriction du morphisme θ à H, il suffit de montrer que θ_H est continue en 1.
Montrons d'abord que l'ensemble $\{\omega \circ \theta_H, \omega \in \Sigma(A)\}$ est compact dans $C(H, \mathbb{C})$ muni de la topologie de la convergence compacte.
Cette topologie est métrisable car H est σ-compact (cf théorème 0.1.3), par conséquent il suffit de vérifier que $\{\omega \circ \theta_H, \omega \in \Sigma(A)\}$ est séquentiellement compact ; soit donc $(\omega_n \circ \theta_H)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\{\omega \circ \theta_H,\ \omega \in \Sigma(A)\}$.
$\Sigma(A)$ est compact donc $\{\omega \circ \theta_H, \omega \in \Sigma(A)\} \subseteq C(H, \mathbb{C})$ est compact pour la topologie de la convergence simple et puisque $C(H, \mathbb{C})$ est angélique (cf théorème 0.1.4), on obtient que $\{\omega \circ \theta_H, \omega \in \Sigma(A)\}$ est séquentiellement compact.
On peut ainsi extraire une suite $(\omega_{n_k} \circ \theta_H)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un élément $\omega \circ \theta_H$, c'est à dire que pour tout $h \in H$, $\omega_{n_k}(\theta_H(h)) \to \omega(\theta_H(h))$ donc, en appliquant le théorème de convergence dominée, on obtient que pour tout $f \in L^1(H)$, $\hat{f}(\omega_{n_k} \circ \theta_H) \to \hat{f}(\omega \circ \theta_H)$ (où $L^1(H)$ désigne l'espace des fonctions intégrables sur H relativement à la mesure de Haar donnée et $\hat{f}$ la transformée de Fourier de f).
Puisque la topologie de la convergence compacte sur H coïncide avec la topologie faible-étoile dont $\mathcal{P}_1(H)$ hérite comme sous-ensemble de $L^\infty(H)$ (cf proposition 0.3.1), on a $(\omega_{n_k} \circ \theta_H) \to \omega \circ \theta_H$, ce qui prouve la compacité.
L'ensemble $\{\omega \circ \theta_H, \omega \in \Sigma(A)\}$ est équicontinu d'après le théorème d'Ascoli, on peut donc écrire que pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe $W \in \mathcal{V}(1)$ dans H tel que pour tout $h \in W$, $\mathrm{Sup}_{\omega\in\Sigma(A)}|(\omega \circ \theta_H)(h) - (\omega \circ \theta_H)(1)| < \epsilon$.
Comme $\mathrm{Sup}_{\omega\in\Sigma(A)}|(\omega \circ \theta_H)(h) - (\omega \circ \theta_H)(1)| = \eta(\theta_H(h) - 1)$, θ_H est continue
□

Remarque 3.1.3 *Dans la preuve de (i) ⇒ (ii) l'hypothèse de compacité locale est inutile.*
Dans la preuve de (ii) ⇒ (iii) l'hypothèse de métrisabilité est inutile.

Remarque 3.1.4 *Lorsque A est séparable, l'hypothèse de métrisabilité de G devient inutile car la boule unité du dual de A et l'ensemble des états $\Sigma(A)$ sont des compacts métrisables donc l'ensemble des points extrémaux $P\Sigma(A)$ est polonais et compact, et on peut reprendre la preuve de (ii) ⇒ (iii) en substituant $P\Sigma(A)$ à $\Sigma(A)$ puisque pour tout opérateur normal a, il existe un état pur ω tel que $|\omega(a)| = ||a||$ (cf théorème 4.3.8 (iv) in [33]).*

En utilisant le théorème 3.1.2 et le lemme 3.1.2 (ii), on obtient :

Corollaire 3.1.1 *Soit θ une représentation unitaire d'un groupe G localement compact métrisable sur la C*-algèbre A engendrée par $\theta(G)$.*
Si θ n'est pas uniformément continue alors il existe $\omega \in P\Sigma(A)$ tel que $\omega \circ \theta$ moyenne vers zéro.

3.2 Mesurabilité des représentations unitaires

Introduction

Toute représentation unitaire faiblement mesurable est fortement continue si l'espace de représentation est séparable (cf théorème V.7.3 in [23]), en général ce type de mesurabilité n'implique pas la continuité forte.
Dans [37], J. Kuznetsova prouve que l'hypothèse de séparabilité peut être remplacée par une notion plus forte de mesurabilité : on dit que θ est *mesurable pour la topologie faible des opérateurs* si θ est mesurable quand $\mathcal{L}(X)$ est muni de la topologie engendrée par les fonctions $T \in \mathcal{L}(X) \mapsto < T(x), y >$ pour tout (x, y) dans X^2, l'auteur obtient que toute représentation de groupe localement compact mesurable dans ce sens est (fortement) continue (cf théorème 5 in [37]).
Nous utilisons ce résultat pour prouver que toute représentation unitaire mesurable (pour la topologie de la norme) est uniformément continue en appliquant la caractérisation de la continuité par les états (cf théorème 3.1.2). On a en effet remarqué que l'équivalence entre (ii) et (iii) dans le théorème 3.1.2 reste vraie pour tout groupe G localement compact, ainsi pour établir une continuité automatique des représentations unitaires mesurables, il suffit de montrer la continuité de $\omega \circ \theta$ pour tout $\omega \in \Sigma(A)$.
Nous vérifions ici que si θ est mesurable alors $\omega \circ \theta$ est bien continue.

Lemme 3.2.1 *Soit θ une représentation unitaire d'un groupe topologique G sur une C*-algèbre A et soit $\omega \in \Sigma(A)$.*
Si θ est mesurable alors $\omega \circ \theta$ est continue.

Preuve.
Soit $\omega \in \Sigma(A)$, on note $\pi_\omega : A \to \mathcal{L}(H_\omega)$ la représentation cyclique donnée par la construction de Gelfand-Naimark-Segal de vecteur cyclique v_ω, on a pour tout $a \in A$, $\omega(a) =< \pi_\omega(a)v_\omega, v_\omega >$.
Comme π_ω est continue (pour la topologie de la norme), $\pi_\omega \circ \theta$ est mesurable

(pour la topologie de la norme) donc mesurable pour la topologie faible des opérateurs.
Or toute représentation unitaire d'un groupe localement compact qui est mesurable pour la topologie faible des opérateurs est fortement continue (cf [37]), donc $\pi_\omega \circ \theta$ est fortement continue, et puisque pour tout $g \in G$, $(\omega \circ \theta)(g) =< (\pi_\omega \circ \theta)(g)v_\omega, v_\omega >$, $\omega \circ \theta$ est bien continue □

On en déduit le résultat annoncé :

Théorème 3.2.1 *Soit θ une représentation unitaire d'un groupe localement compact G sur une C*-algèbre A.*
Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) θ est mesurable.
(ii) θ est uniformément continue.

Preuve.
Il suffit d'appliquer le lemme 3.2.1 et l'équivalence entre (ii) et (iii) dans le théorème de caractérisation de la continuité par les états (théorème 3.1.2) □

Puisque tout groupe moyennable est unitarisable (cf [17]), nous obtenons le corollaire suivant :

Corollaire 3.2.1 *Soit θ une représentation bornée d'un groupe G localement compact et moyennable dans un espace de Hilbert H.*
Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) θ est mesurable.
(ii) θ est uniformément continue.

Et puisque tout groupe compact est moyennable (cf [6]), on a aussi :

Corollaire 3.2.2 *Soit θ une représentation localement bornée d'un groupe compact G dans un espace de Hilbert H.*
Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) θ est mesurable.
(ii) θ est uniformément continue.

Preuve.
θ est localement bornée sur le compact G donc bornée et il suffit d'appliquer le corollaire précédent □

3.3 Cas des algèbres séparables

On cherche maintenant une caractérisation de la continuité au travers des états dans le cas des représentations de groupes qui ne sont pas nécessairement localement compacts mais seulement de Baire, on perd donc la plupart des outils qui nous ont servi dans le paragraphe 3.1. On se restreint ici au cas des représentations à valeurs dans une algèbre séparable de façon à pouvoir utiliser d'autres arguments.
On peut noter que le résultat de continuité automatique des représentations unitaires mesurables est alors immédiat, si en effet θ est mesurable alors pour tout état $\omega \in \Sigma(A)$, $\omega \circ \theta$ est mesurable, donc continue d'après la remarque 3.1.2 ; il suffit alors d'appliquer le théorème 3.1.2 de caractérisation de la continuité (et la remarque 3.1.4) pour conclure.
Soit θ une représentation d'un groupe topologique sur une C*-algèbre A.
On pose $W_\theta = \bigcap_{V \in \mathcal{V}(1)} \overline{\bigcup_{g \in V} W(\theta(g))}$, où $W(a)$ désigne l'image numérique de $a \in A$ (cf § 0.2.2).
On vérifie que $W_\theta = \{\lambda \in \mathbb{C} \ / \ \liminf_{g \to 1} dist(\lambda, W(\theta(g))) = 0\}$.
D'autre part W_θ est fermé, donc si θ est localement bornée, W_θ est compact.

Lemme 3.3.1 *Soit θ une représentation localement bornée d'un groupe métrisable sur une C*-algèbre.*
θ est uniformément continue si et seulement si $W_\theta = \{1\}$.

Preuve.
θ est uniformément continue si et seulement si $\limsup_{g \to 1} \eta(\theta(g) - I) = 0$.
Or $\lambda \in W_\theta$ si et seulement s'il existe une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans G telle que $\lim_{n \to \infty} g_n = 1$ et $\lim_{n \to \infty} \lambda_n = \lambda$ pour une suite de nombres complexes $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaisant $\lambda_n \in W(\theta(g_n))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $|\lambda_n - 1| \leq \eta(\theta(g_n) - I)$, et puisque θ est localement bornée, on peut supposer après extraction que la suite $(\eta(\theta(g_n) - I))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
Ce qui montre que l'uniforme continuité de θ entraîne que $W_\theta = \{1\}$.
Réciproquement, supposons que θ ne soit pas uniformément continue donc que $\limsup_{g \to 1} \eta(\theta(g) - I) > 0$. Comme θ est localement bornée, il existe une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans G telle que $\lim_{n \to \infty} g_n = 1$ avec $\lim_{n \to \infty} \eta(\theta(g_n) - I) = \alpha > 0$.
On peut donc construire une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (qu'on peut supposer converger vers un élément λ après extraction) telle que $\lambda_n \in W(\theta(g_n))$ et

$\lim_{n\to\infty} |\lambda_n - 1| = \alpha/2 > 0$, or $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n - 1| = |\lambda - 1|$ et ainsi $\lambda \in W_\theta \backslash \{1\}$ □

On peut alors prouver un résultat de continuité analogue à celui de la proposition 2.3.4 (cas commutatif) pour les groupes de Baire métrisables :

Proposition 3.3.1 *Soit θ est une représentation unitaire d'un groupe de Baire métrisable G sur une C*-algèbre séparable A.*
Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) Pour tout $\omega \in P\Sigma(A)$, $\omega \circ \theta$ est continue.
(ii) Pour tout $\omega \in \Sigma(A)$, $\omega \circ \theta$ est continue.
(iii) θ est uniformément continue.

Preuve.
$(i) \Rightarrow (ii)$ cf remarque 3.1.3.
$(ii) \Rightarrow (iii)$
A est séparable donc $\Sigma(A)$ est séquentiellement compact.
Soit alors $\lambda \in W_\theta$; il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans G telle que $\lim_{n\to\infty} g_n = 1$ et $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$ pour une suite de nombres complexes $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant $\lambda_n \in W(\theta(g_n))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\omega_n \in \Sigma(A)$ tel que $\lambda_n = \omega_n(\theta(g_n))$.
Après extraction, la suite de fonctions continues $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément $\omega \in \Sigma(A)$, c'est à dire que la suite de fonctions définies positives continues $(\omega_n \circ \theta)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\omega \circ \theta$, qui est ainsi mesurable donc continue d'après la remarque 3.1.2. D'autre part d'après le lemme 0.3.1 on obtient que la suite est équicontinue.
Soit $\epsilon > 0$, il existe $K \in \mathcal{V}(1)$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n > n_0$ et pour tout $g \in K$, $|(\omega_n \circ \theta)(g) - 1| < \epsilon/2$ et $|\lambda - (\omega_n \circ \theta)(g_n)| < \epsilon/2$ avec $(g_n)_{n\geq n_0} \subseteq K$.
Donc $|\lambda - 1| \leq |\lambda - (\omega_n \circ \theta)(g_n)| + |(\omega_n \circ \theta)(g_n) - 1| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$.
Ainsi $\lambda = 1$, et donc $W_\theta = \{1\}$, ce qui prouve que θ est uniformément continue d'après le lemme précédent □

Troisième partie

Propriétés spectrales

Chapitre 4

Cas abélien

4.0.1 Introduction

Rappelons un lemme élémentaire (cf [38]) utile dans la suite puisqu'il permettra de travailler avec des spectres d'opérateurs restreints à des sous-espaces invariants :

Lemme 4.0.2 *(cf [38])*
Soit X un espace de Banach, $T \in \mathcal{L}(X)$ et Y un sous-espace fermé de X invariant pour T. Alors $\rho_\infty(T) \subseteq \rho_\infty(T_{/Y})$ où ρ_∞ désigne la composante connexe non bornée de l'ensemble résolvant et $T_{/Y}$ la restriction de T à Y. Si $0 \in \rho_\infty(T)$, alors $\sigma^1(T_{/Y}) \subseteq \sigma^1(T)$.

Soit G un groupe abélien localement compact, X un espace de Banach et $\theta : G \to \mathcal{L}(X)$ une représentation fortement continue de G dans X.
On s'intéresse à la répartition des arguments des éléments du spectre $\sigma(\theta(g))$ lorsque θ n'est pas continue en norme.
Rappelons qu'on note :
- A_θ la sous-algèbre fermée de $\mathcal{L}(X)$ engendrée par $\theta(G)$ (A_θ est donc commutative).
- $\sigma_{A_\theta}(\theta(g))$ le spectre de $\theta(g)$ dans A_θ.
- $K^1 = \{\lambda/|\lambda|, \lambda \in K\}$, pour $K \subseteq \mathbb{C}\backslash\{0\}$.
- $\chi \circ \theta^{(1)}$ le morphisme de G dans $\mathbb{T}$ défini par
$\chi \circ \theta^{(1)}(g) = (\chi \circ \theta)(g)/|(\chi \circ \theta)(g)|$, pour $\chi \in \hat{A}_\theta$.
- $\mathcal{P}$ l'ensemble des polygones réguliers de $\mathbb{T}$ où on appelle polygone de $\mathbb{T}$ l'image par une rotation d'un sous-groupe fermé de $\mathbb{T}$ autre que $\{1\}$.

On pose :

$$\Sigma_\theta := \{g \in G \ / \ \nexists P \in \mathcal{P} \ / \ P \subseteq \sigma^1(\theta(g))\}.$$

On vérifie que le spectre ne dépend pas de l'algèbre considérée, en effet :

Lemme 4.0.3 *Avec les notations précédentes, on a pour tout $g \in G$, $\sigma^1(\theta(g)) = \sigma^1_{A_\theta}(\theta(g))$.*

Preuve.
$\sigma(\theta(g)) \subseteq \sigma_{A_\theta}(\theta(g))$ donc $\sigma^1(\theta(g)) \subseteq \sigma^1_{A_\theta}(\theta(g))$.
D'autre part $\partial\sigma_{A_\theta}(\theta(g)) \subseteq \sigma(\theta(g))$ (cf proposition 0.2.1) et puisque $0 \notin \sigma_{A_\theta}(\theta(g))$ il est clair que $\partial\sigma^1_{A_\theta}(\theta(g)) = \sigma^1_{A_\theta}(\theta(g))$ (toute demi-droite issue de l'origine qui rencontre $\sigma_{A_\theta}(\theta(g))$ rencontre sa frontière par connexité) donc $\partial\sigma^1_{A_\theta}(\theta(g)) \subseteq \sigma^1(\theta(g))$ □

4.1 Caractérisation spectrale de la continuité et catégorie de Baire

4.1.1 Répartition spectrale et catégorie de Baire

Théorème 4.1.1 *Soit $\theta : G \to \mathcal{L}(X)$ une représentation fortement continue d'un groupe abélien localement compact G à base de topologie dénombrable dans un espace de Banach X. On pose*

$$\Omega_\chi = \{g \in G \ / \ \forall \lambda \in \mathbb{T} \ \ \lambda\Gamma_{\chi\circ\theta^{(1)}} \not\subseteq \sigma^1(\theta(g))\}.$$

Alors $\bigcup_{\chi\in\hat{A_\theta}} \Omega_\chi$ est maigre dans G.

Preuve.
Notons que pour tout $\chi \in \hat{A}_\theta$, $\chi \circ \theta^{(1)}(g) \in \sigma^1(\theta(g))$.
Première étape. Supposons X séparable.
D'après la proposition 3.1.1 et la continuité forte de θ, l'application $g \mapsto \sigma^1(\theta(g))$ de G groupe de Baire dans $\mathcal{K}(\mathbb{T})$ est borélienne, le résultat est alors une conséquence de la proposition 1.2.2.
Seconde étape. Supposons X quelconque.
Si θ est uniformément continue alors, pour tout $\chi \in \hat{A}_\theta$, $\chi \circ \theta$ est continu donc $\Gamma_{\chi\circ\theta^{(1)}} = \{1\}$, et pour tout $\chi \in \hat{A}_\theta$, $\Omega_\chi = \varnothing$.

Si θ n'est pas uniformément continue, il existe alors $\delta > 0$ et une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans G tels que $\lim_{n\to\infty} g_n = 1$ et $||\theta(g_n) - I|| > \delta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs unitaires de X tels que $||\theta(g_n)x_n - x_n|| > \delta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Posons alors $Y := \overline{\mathrm{Vect}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\theta(g)x_n,\ g \in G\})}$; puisque G est séparable et θ fortement continue, $\{\theta(g)x_n,\ g \in G\}$ est séparable donc Y est séparable, et évidemment Y est $(\theta(g))_{g\in G}$-invariant. En utilisant la première étape, on peut en conclure que $\bigcup_{\chi\in\hat{A}_\theta} \Omega_{\chi,Y}$ est maigre où

$$\Omega_{\chi,Y} := \{g \in G \ / \ \forall\lambda \in \mathbb{T} \ \ \lambda\Gamma_{\chi\circ\theta^{(1)}} \not\subseteq \sigma^1(\theta(g)_{/Y})\}.$$

Soit $g \in \Omega_\chi$ alors $\sigma^1(\theta(g)) \neq \mathbb{T}$ donc $0 \in \rho_\infty(\theta(g))$ et d'après le lemme 4.0.2 : $\sigma^1(\theta(g)_{/Y}) \subseteq \sigma^1(\theta(g))$, ainsi $g \in \Omega_{\chi,Y}$, c'est à dire $\Omega_\chi \subseteq \Omega_{\chi,Y}$, donc $\bigcup_{\chi\in\hat{A}_\theta} \Omega_\chi$ est maigre □

Remarque 4.1.1 *Dans le cas où θ est uniformément continue, le théorème n'apporte rien puisque Ω_χ est vide pour tout $\chi \in \hat{A}_\theta$, le cas intéressant est celui des représentations fortement continues, non uniformément continues.*

Corollaire 4.1.1 *Soit $\theta : G \to \mathcal{L}(X)$ une représentation fortement continue d'un groupe abélien localement compact G à base de topologie dénombrable dans un espace de Banach X. Alors :*
θ est uniformément continue si et seulement si Σ_θ est non maigre.

Preuve.
Si θ est uniformément continue alors il existe un ouvert $U \in \mathcal{V}(1)$ dans G tel que pour tout $g \in U$, $\sigma^1(\theta(g)) \subseteq B(1, 1/2)$ (la boule de centre 1 et de rayon 1/2), et donc $U \subseteq \Sigma_\theta$ qui n'est pas maigre.
Si θ n'est pas uniformément continue, d'après le corollaire 2.1.1, il existe $\chi \in \hat{A}_\theta$ tel que $\chi \circ \theta$ soit discontinu c'est à dire, d'après la remarque 2.1.1, tel que $\chi \circ \theta^{(1)}$ soit discontinu, ainsi $\Gamma_{\chi\circ\theta^{(1)}} \neq \{1\}$ et donc, en dehors de l'ensemble maigre Ω_χ, $\sigma^1(\theta(g))$ contient l'image de $\Gamma_{\chi\circ\theta^{(1)}}$ par une rotation □

Remarque 4.1.2 *Soit $\theta : G \to \mathcal{L}(X)$ une représentation fortement continue d'un groupe abélien localement compact G à base de topologie dénombrable dans un espace de Banach X, on retiendra donc que si θ n'est pas uniformément continue alors $\sigma^1(\theta(g))$ contient un polygone régulier excepté pour g dans un ensemble maigre de G.*

Remarque 4.1.3 *Vérifions que Card($\bigcup_{\chi\in\hat{A_\theta}}\Gamma_{\chi\circ\theta^{(1)}}$) est infini si et seulement si $\{g\in G\ /\ \sigma^1(\theta(g))\neq\mathbb{T}\}$ est maigre :*
- Si $\bigcup_{\chi\in\hat{A_\theta}}\Gamma_{\chi\circ\theta^{(1)}}$ contient un nombre fini d'éléments, alors d'après les lemmes 2.3.2 et 2.3.1, il existe $N\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$ tel que $\Gamma_{\theta^N}=\Gamma_\theta^N=\{1\}$, donc θ^N est continue. En particulier il existe un ouvert $U\in\mathcal{V}(1)$ dans G tel que pour tout $g\in U$, $(\sigma(\theta(g)))^N=\sigma(\theta^N(g))\subseteq B(1,1/N)$ (la boule de centre 1 et de rayon 1/N), donc $\sigma(\theta(g))\neq\mathbb{T}$ et ainsi $U\subseteq\{g\in G\ /\ \sigma^1(\theta(g))\neq\mathbb{T}\}$ qui bien est non maigre.
- Réciproquement, si $\bigcup_{\chi\in\hat{A_\theta}}\Gamma_{\chi\circ\theta^{(1)}}$ contient un nombre infini d'éléments, alors cette réunion de groupes de racines de l'unité contient des éléments arbitrairement proches et donc si $g\in G$ est tel que $\sigma^1(\theta(g))\neq\mathbb{T}$, il existe $\chi\in\hat{A_\theta}$ tel que pour tout $\lambda\in\mathbb{T}$, $\lambda\Gamma_{\chi\circ\theta^{(1)}}\not\subseteq\sigma^1(\theta(g))$.
Soit donc $\{g\in G\ /\ \sigma^1(\theta(g))\neq\mathbb{T}\}\subseteq\bigcup_{\chi\in\hat{A_\theta}}\Omega_\chi$, qui est maigre d'après le théorème.
L'équivalence est bien démontrée.
On en déduit en particulier que s'il existe $\chi\in\hat{A_\theta}$ tel que $\Gamma_{\chi\circ\theta^{(1)}}=\mathbb{T}$ alors $\{g\in G\ /\ \sigma^1(\theta(g))\neq\mathbb{T}\}$ est maigre.
Par conséquent, soit $\theta:G\to\mathcal{L}(X)$ une représentation fortement continue mais non uniformément continue d'un groupe abélien localement compact à base de topologie dénombrable G dans un espace de Banach X, si G est localement connexe ou bien connexe, la structure de ces groupes (cf remarques 1.1.3 et 0.1.8) et le lemme de dichotomie des gammas (cf lemme 1.1.1) montrent que le spectre $\sigma(\theta(g))$ entoure l'origine excepté pour g dans un ensemble maigre dans G.

Remarque 4.1.4 *Puisque le corollaire précédent montre que pour g en dehors d'un ensemble maigre, $\sigma^1(\theta(g))$ contient un ou plusieurs polygones réguliers, c'est à dire des images par des rotations de groupes de racines de l'unité, on peut se demander s'il s'agit de la même rotation pour tous les groupes de racines concernés. L'exemple suivant montre qu'en général ce n'est pas le cas.*

Exemple 4.1.1 *Soit la représentation $\theta:\mathbb{R}\times\Gamma_2^{\mathbb{N}}\times\Gamma_3^{\mathbb{N}}\to\mathcal{L}(l^2(\mathbb{R})\times l^2(\mathbb{R}))$ définie par*

$$\theta(t,(\epsilon_n)_n,(\mu_n)_n):((u_n)_n,(v_n)_n)\mapsto(e^{it}(\epsilon_n u_n)_n,e^{2it}(\mu_n v_n)_n).$$

Il est clair que pour les éléments $(t,(\epsilon_n)_n,(\mu_n)_n)$ tels que $\Gamma_2=\{\epsilon_n,n\in\mathbb{N}\}$

et $\Gamma_3 = \{\mu_n, n \in \mathbb{N}\}$ *(qui forment un ensemble comaigre de* $\mathbb{R} \times \Gamma_2^{\mathbb{N}} \times \Gamma_3^{\mathbb{N}}$*), on a* $\sigma(\theta(t, (\epsilon_n)_n, (\mu_n)_n)) = e^{it}\Gamma_2 \cup e^{2it}\Gamma_3$.

Rappelons le lemme suivant [38] :

Lemme 4.1.1 *Soit* X *un espace de Banach et* $B \in \mathcal{L}(X)$ *tel que* $0 \notin \sigma(B)$. *Alors :*
$\sigma^1(B) \neq \mathbb{T}$ *si et seulement si* $\sigma_k^1(B) \neq \mathbb{T}$, *où* $\sigma_k(.)$ *désigne le spectre essentiel de Kato (le spectre correspondant à l'ensemble des opérateurs semi-Fredholm, cf définition 0.2.4).*

Corollaire 4.1.2 *Soit* G *un groupe abélien localement compact à base de topologie dénombrable admettant localement une division compacte à tout ordre et soit* θ *une représentation fortement continue de* G *dans un espace de Banach* X. *Alors :*
θ *est uniformément continue si et seulement si* $\{g \in G \ / \ \sigma_k^1(\theta(g)) \neq \mathbb{T}\}$ *est non maigre.*

Preuve.
Si θ est uniformément continue, il suffit de noter que $\sigma_k^1(\theta(g)) \subseteq \sigma^1(\theta(g))$.
Pour la réciproque, supposons que le groupe admette localement une division compacte (cf définition 1.1.2). Si θ n'est pas uniformément continue, alors il existe (d'après le corollaire 2.1.1) $\chi \in \hat{A}_\theta$ tel que $\chi \circ \theta$ ne soit pas continu, c'est à dire tel que $\Gamma_{\chi\circ\theta^{(1)}} = \mathbb{T}$ et il suffit alors d'utiliser la fin de la remarque 4.1.3 et le lemme précédent □

Corollaire 4.1.3 *Soit* G *un groupe abélien localement compact à base de topologie dénombrable admettant localement une division compacte à tout ordre.*
Si X *est un espace de Banach héréditairement indécomposable alors toute représentation fortement continue de* G *dans* X *est uniformément continue.*

Preuve.
Il suffit de rappeler (cf [25]) que pour tout $g \in G$, $\theta(g) = \lambda_g I + S_g$ où
$\lambda_g \in \sigma(\theta(g))$ et S_g est un opérateur strictement singulier (cf définition 0.2.6), donc $\lambda_g \neq 0$ et il est facile de vérifier que $\sigma_e^1(\theta(g)) = \{\lambda_g/|\lambda_g|\}$, on peut donc utiliser le corollaire précédent □

Remarque 4.1.5 *Les corollaires précédents s'appliquent en particulier dans le cas des groupes abéliens localement compacts à base de topologie dénombrable qui sont connexes ou bien localement connexes (cf remarques 0.1.7 et 0.1.8 et proposition 0.1.7).*

Remarque 4.1.6 *Si X est séparable, le théorème et ses corollaires restent vrais sans supposer G à base de topologie dénombrable.*

4.1.2 Les lois du zéro-deux, zéro-$\sqrt{3}$ et zéro-$\sqrt{2}$

J. Esterle a montré que si G est un groupe abélien localement compact et θ une représentation sur une algèbre de Banach, alors $\limsup_{g\to 1} ||\theta(g)-I|| \geq \sqrt{3}$ ou bien $\limsup_{g\to 1} ||\theta(g) - I|| = 0$ (cf introduction générale).
Si de plus le groupe admet localement, à tout ordre, une division continue, cette loi du « zéro-$\sqrt{3}$ » devient une loi du « zéro-deux ».
Il définit pour cela l'outil suivant :

$$\Gamma_\theta = \{\lambda \in \mathbb{C} \ / \ \liminf_{u\to 1} dist(\lambda, \sigma(\theta(u))) = 0\}.$$

Dans le cas où θ est simplement un morphisme φ du groupe G dans le tore $\mathbb{T}$, on retrouve $\Gamma_\theta = \Gamma_\varphi$ défini plus haut (cf § 1.1).
L'auteur montre que pour une représentation θ localement spectralement bornée d'un groupe topologique sur une algèbre de Banach,
$\limsup_{u\to 1} \rho(P(\theta(u))) = \max_{z\in\Gamma_\theta} |P(z)|$ pour toute fonction polynomiale P.
En appliquant ce résultat à la fonction $P(z) = z - 1$, il en déduit que :
- Ou bien $\lim_{u\to 1} \rho(I - \theta(u)) = 0$.
- Ou bien $\limsup_{u\to 1} \rho(I - \theta(u)) = 2\sin(\frac{n\pi}{2n+1}) \geq \sqrt{3}$, pour un entier $n \geq 1$.
- Ou bien $\limsup_{u\to 1} \rho(I - \theta(u)) = 2$.

Si de plus le groupe admet localement une division continue pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\Gamma_\theta = \{1\}$ ou bien $\Gamma_\theta = \mathbb{T}$, donc $\lim_{u\to 1} \rho(I - \theta(u)) = 0$ ou bien $\limsup_{u\to 1} \rho(I - \theta(u)) = 2$.
D'autre part J. Esterle montre que pour un groupe abélien localement compact, si $\lim_{u\to 1} \rho(I - \theta(u)) = 0$ alors $\lim_{u\to 1} ||I - \theta(u)|| = 0$ ou bien
$\limsup_{u\to 1} ||I - \theta(u)|| = +\infty$, ce qui d'aprés le résultat précédent montre que sans hypothèse de continuité spectrale, $\lim_{u\to 1} ||I - \theta(u)|| = 0$ ou bien $\limsup_{u\to 1} ||I - \theta(u)|| \geq \sqrt{3}$.
En particulier, ces résultats entraînent que si θ est une représentation localement bornée d'un groupe abélien localement compact G sur une algèbre

de Banach A, les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $lim_{u\to 1}\rho(I-\theta(u))=0$.
(ii) $\Gamma_\theta=\{1\}$.
(iii) θ uniformément continue.
En remarquant que pour tout $\chi\in\hat{A}$, $\Gamma_{\chi\circ\theta}\subseteq\Gamma_\theta$ et en utilisant que $\limsup_{g\to 1}\rho(\theta(g)-I)=sup_{z\in\Gamma_\theta}|z-1|$, on déduit du corollaire 2.1.1 de caractérisation de la continuité et du lemme 1.1.1 de dichotomie, une loi du « zéro-deux » pour les représentations localement bornées de groupes abéliens localement compacts admettant localement une division compacte à tout ordre. Cette loi sera notamment vérifiée pour les groupes abéliens localement compacts qui sont connexes ou bien localement connexes (cf remarque 1.1.3).
On peut également déduire du corollaire 4.1.1 une loi du « zéro-$\sqrt{2}$ » pour la limite inférieure :

Corollaire 4.1.4 *Soit θ une représentation fortement continue d'un groupe abélien localement compact G à base de topologie dénombrable dans un espace de Banach X.*
Alors θ est uniformément continue ou bien il existe un ensemble M maigre dans G tel que $\liminf_{g\to 1,g\in G\backslash M}\rho(\theta(g)-1)\geq\sqrt{2}$.

Preuve.
D'après le lemme 2.1.1 de la couronne, pour tout $\epsilon>0$, il existe $V_\epsilon\in\mathcal{V}(1)$ tel que pour tout $g\in V_\epsilon$, $\sigma(\theta(g))\subseteq\{z\in\mathbb{C}\ /\ 1-\epsilon\leq|z|\leq 1+\epsilon\}$.
Supposons alors que θ ne soit pas uniformément continue, il existe un ensemble M maigre dans G tel que pour tout $g\in G\backslash M$, $\sigma^1(\theta(g))$ contienne un polygone régulier $\lambda\Gamma$.
Par conséquent si $g\in V_\epsilon\backslash M$, il existe $z_1\in\sigma^1(\theta(g))$ tel que $|z_1-1|\geq\sqrt{2}$ et il existe donc $z\in\sigma(\theta(g))$ tel que $|z-1|\geq\sqrt{2}-\epsilon$, soit pour tout $g\in V_\epsilon\backslash M$, $\rho(\theta(g)-I)\geq\sqrt{2}-\epsilon$ □

4.2 Caractérisation spectrale de la continuité et mesure de Haar

4.2.1 Répartition spectrale et mesure de Haar

Nous avons obtenu au paragraphe 4.1 que si G est un groupe abélien localement compact à base de topologie dénombrable et si θ est une représentation de G dans un espace de Banach X, θ est uniformément continue ou bien l'ensemble $\Sigma_\theta := \{g \in G \ / \ \nexists P \in \mathcal{P} \ / \ P \subseteq \sigma^1(\theta(g))\}$ est maigre, où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des polygones réguliers de $\mathbb{T}$.
Ainsi, lorsque la représentation n'est pas uniformément continue, les éléments du spectre de $\theta(g)$ sont assez bien répartis autour de l'origine excepté pour g dans un ensemble maigre de G.
Nous nous intéressons maintenant à la proposition « duale », c'est à dire celle qu'on obtient en remplaçant « maigre » par « négligeable ».

Exemple 4.2.1 *Soit $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ le groupe de translations sur l'espace $L^2(\mathbb{R})$ défini par $(T(t)f)(x) = f(x+t)$.*
Ce groupe à un paramètre est fortement continu, non uniformément continu et pour tout $t \neq 0$, $\sigma(T(t)) = \mathbb{T}$ donc $\Sigma_\theta = \{0\}$, qui est bien négligeable.

Nous avons également rappelé que dans [19], J. Esterle avait établi pour les représentations de groupes abéliens localement compacts une loi du « zéro-$\sqrt{3}$ » : si $\theta : G \to A$ est une représentation localement bornée d'un tel groupe sur une algèbre de Banach alors θ est uniformément continue ou bien $\limsup_{g\to 1} \rho(\theta(g) - I) \geq \sqrt{3}$, où ρ désigne le rayon spectral.
Comme conséquence de nos résultats, nous obtenons, mais seulement dans le cas des représentations fortement continues de groupes abéliens localement compacts à base de topologie dénombrable que θ est uniformément continue ou bien $\liminf_{g\to 1, g\in G\setminus M} \rho(\theta(g) - I) \geq \sqrt{2}$, où M est négligeable dans G.
Soit G un groupe abélien localement compact, X un espace de Banach et $\theta : G \to \mathcal{L}(X)$ une représentation fortement continue de G dans X, on s'intéresse donc maintenant à la mesure de Haar de l'ensemble des points $g \in G$ tels que les éléments du spectre $\sigma(\theta(g))$ entourent l'origine lorsque θ n'est pas uniformément continue.

Théorème 4.2.1 *Soit G un groupe abélien localement compact à base de topologie dénombrable, X un espace de Banach et $\theta : G \to \mathcal{L}(X)$ une représentation fortement continue de G dans X. On pose*

$$\Omega_\chi := \{g \in G \ / \ \forall \lambda \in \mathbb{T} \ \ \lambda\Gamma_{\chi\circ\theta^{(1)}} \not\subseteq \sigma^1(\theta(g))\}.$$

Alors $\bigcup_{\chi\in\hat{A_\theta}} \Omega_\chi$ est négligeable pour la mesure de Haar dans G.

Preuve.
Notons que pour tout $\chi \in \hat{A_\theta}$, $\chi \circ \theta^{(1)}(g) \in \sigma^1(\theta(g))$.
Première étape. Supposons X séparable.
D'après la proposition 3.1.1 et la continuité forte de θ, l'application $g \mapsto \sigma^1(\theta(g))$ du groupe abélien localement compact G dans $\mathcal{K}(\mathbb{T})$ est borélienne, le résultat est donc une conséquence de la proposition 1.3.1.
Seconde étape. Supposons X non séparable.
Si θ est uniformément continue alors pour tout $\chi \in \hat{A}$, $\chi\circ\theta$ est continu, donc $\chi \circ \theta^{(1)}$ est continu d'après la remarque 2.1.1, soit $\Gamma_{\chi\circ\theta^{(1)}} = \{1\}$ et $\Omega_\chi = \varnothing$.
Si θ n'est pas uniformément continue, il existe un réel $\delta > 0$ et une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans G tels que $\lim_{n\to\infty} g_n = 1$ et $||\theta(g_n) - I|| > \delta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Donc il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs unitaires de X tels que $||\theta(g_n)x_n - x_n|| > \delta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Posons alors $Y := \overline{\mathrm{Vect}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\theta(g)x_n, \ \ g \in G\})}$; puisque G est séparable et θ fortement continue, $\{\theta(g)x_n, \ \ g \in G\}$ est séparable, donc Y est également séparable, de plus Y est $(\theta(g))_{g\in G}$-invariant. En utilisant la première étape, on peut en conclure que $\bigcup_{\chi\in\hat{A_\theta}} \Omega_{\chi,Y}$ est de mesure nulle, où

$$\Omega_{\chi,Y} := \{g \in G \ / \ \forall \lambda \in \mathbb{T} \ \ \lambda\Gamma_{\chi\circ\theta^{(1)}} \not\subseteq \sigma^1(\theta(g)_{/Y})\}.$$

Si $g \in \Omega_\chi$, alors $\sigma^1(\theta(g)) \neq \mathbb{T}$, donc $0 \in \rho_\infty(\theta(g))$ et d'après le lemme 4.0.2, $\sigma^1(\theta(g)_{/Y}) \subseteq \sigma^1(\theta(g))$, donc $g \in \Omega_{\chi,Y}$, soit encore $\Omega_\chi \subseteq \Omega_{\chi,Y}$.
Par conséquent $\bigcup_{\chi\in\hat{A_\theta}} \Omega_\chi$ est négligeable □

Remarque 4.2.1 *Si θ est uniformément continue, le théorème est sans intérêt car Ω_χ est alors vide pour tout $\chi \in \hat{A_\theta}$; le cas intéressant est de nouveau celui des représentations fortement continues qui ne sont pas uniformément continues.*

Corollaire 4.2.1 *Soit G un groupe abélien localement compact à base de topologie dénombrable, X un espace de Banach et $\theta : G \to \mathcal{L}(X)$ une représentation fortement continue. Alors :*
θ est uniformément continue si et seulement si Σ_θ est non négligeable pour la mesure de Haar sur G.

Preuve.
Si θ est uniformément continue alors il existe un ouvert $U \in \mathcal{V}(1)$ dans G tel que pour tout $g \in U$, $\sigma^1(\theta(g)) \subseteq B(1, 1/2)$ (la boule de centre 1 et de rayon $1/2$), et donc $U \subseteq \Sigma_\theta$ qui n'est pas négligeable.
Si θ n'est pas uniformément continue, alors il existe, d'après le corollaire 2.1.1, $\chi \in \hat{A}_\theta$ tel que $\chi \circ \theta$ ne soit pas continu c'est à dire, d'après la remarque 2.1.1, tel que $\chi \circ \theta^{(1)}$ ne soit pas continu, donc $\Gamma_{\chi\circ\theta^{(1)}} \neq \{1\}$ et ainsi, excepté pour l'ensemble négligeable Ω_χ, $\sigma^1(\theta(g))$ contient l'image de $\Gamma_{\chi\circ\theta^{(1)}}$ par une rotation □

Remarque 4.2.2 *Soit $\theta : G \to \mathcal{L}(X)$ une représentation fortement continue d'un groupe abélien localement compact G à base de topologie dénombrable dans un espace de Banach X, là encore on retiendra que si θ n'est pas uniformément continue alors $\sigma^1(\theta(g))$ contient un polygone régulier excepté pour g dans un ensemble négligeable de G.*

Remarque 4.2.3 *S'il existe $\chi \in \hat{A}_\theta$ tel que $\Gamma_{\chi\circ\theta^{(1)}} = \mathbb{T}$ alors*
$\{g \in G \ / \ \sigma^1(\theta(g)) \neq \mathbb{T}\} \subseteq \Omega_\chi$ et donc $\{g \in G \ / \ \sigma^1(\theta(g)) \neq \mathbb{T}\}$ est négligeable (on peut même être plus général d'après la remarque 4.1.3).

Corollaire 4.2.2 *Soit G un groupe abélien à base de topologie dénombrable admettant localement une division compacte à tout ordre. Soit θ une représentation fortement continue de G dans un espace de Banach X. Alors :*
θ est uniformément continue si et seulement si $\{g \in G \ / \ \sigma_k^1(\theta(g)) \neq \mathbb{T}\}$ n'est pas négligeable.

Preuve.
Si θ est uniformément continue, il suffit à nouveau de remarquer que
$\sigma_k^1(\theta(g)) \subseteq \sigma^1(\theta(g))$.
Pour la réciproque, si θ n'est pas uniformément continue, il existe (d'après le corollaire 2.1.1) $\chi \in \hat{A}_\theta$ tel que $\chi \circ \theta$ ne soit pas continu, c'est à dire tel que $\Gamma_{\chi\circ\theta^{(1)}} = \mathbb{T}$ d'après le lemme de dichotomie (lemme 1.1.1) et il suffit alors d'utiliser la remarque précédente et le lemme 4.1.1 □

Remarque 4.2.4 *Le corollaire précédent s'applique en particulier dans le cas des groupes abéliens localement compacts à base de topologie dénombrable qui sont connexes ou bien localement connexes (cf remarques 1.1.3, 0.1.8 et proposition 0.1.7).*

4.2.2 Une loi du zéro-$\sqrt{2}$

Finalement, on termine par le résultat dual du corollaire 4.1.4 :

Corollaire 4.2.3 *Soit θ une représentation fortement continue d'un groupe abélien localement compact G à base de topologie dénombrable dans un espace de Banach X. Alors θ est uniformément continue ou bien il existe un ensemble M négligeable dans G tel que* $\liminf_{g\to 1, g\in G\backslash M} \rho(\theta(g)-1) \geq \sqrt{2}$.

Preuve.
Puisque θ est localement bornée, on peut appliquer le « lemme de la couronne » (lemme 2.1.1) : pour tout $\epsilon > 0$, il existe $V_\epsilon \in \mathcal{V}(1)$ tel que pour tout $g \in V_\epsilon$, $\sigma(\theta(g)) \subseteq \{z \in \mathbb{C} \ / \ 1-\epsilon \leq |z| \leq 1+\epsilon\}$.
Supposons alors que θ ne soit pas uniformément continue, il existe un ensemble M négligeable dans G tel que pour tout $g \in G\backslash M$, $\sigma^1(\theta(g))$ contienne un polygone régulier $\lambda\Gamma$. Si $g \in V_\epsilon\backslash M$, il existe $z_1 \in \sigma^1(\theta(g))$ tel que $|z_1 - 1| \geq \sqrt{2}$, et donc il existe $z \in \sigma(\theta(g))$ tel que $|z-1| \geq \sqrt{2} - \epsilon$, soit pour tout $g \in V_\epsilon\backslash M$, $\rho(\theta(g) - I) \geq \sqrt{2} - \epsilon$ $\square$

Chapitre 5

Cas non abélien

5.1 Répartition spectrale et catégorie de Baire

Pour une représentation unitaire fortement continue $\theta : G \to \mathcal{L}(H)$ d'un groupe localement compact métrisable G dans un espace de Hilbert H, nous pouvons prouver un résultat en rapport avec la répartition sur le tore du spectre des éléments $\theta(g)$ lorsque la représentation θ n'est pas uniformément continue.
Il s'agit donc d'un résultat analogue à celui du paragraphe 4.1.

Lemme 5.1.1 *Soit φ une fonction définie positive sur un goupe de Baire G moyennant vers zéro.*
Si B est un sous-ensemble non maigre dans G possédant la propriété de Baire et si P_0 est un demi-plan ouvert dans $\mathbb{C}$ contenant 0 alors $\varphi^{-1}(P_0) \cap B$ est non maigre.

Preuve.
Soit $\epsilon_0 = dist(0, \mathbb{C}\backslash P_0) > 0$.
D'après la proposition 1.2.1 et la remarque 1.2.1, il existe $W \in \mathcal{V}(1)$ qu'on peut supposer symétrique tel que pout toute suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans W, l'ensemble $B \cap (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Bz_n)$ soit non maigre.
Puisque φ moyenne vers zéro, il existe des éléments $g_1, ..., g_n$ dans W et des réels positifs $\alpha_1, ..., \alpha_n$ de somme égale à 1 tels que $|\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(gg_i)| < \epsilon_0$ pour tout $g \in G$.
Pour la suite finie $(g_i)_{1\leq i\leq n}$, on a en particulier $B \cap (\bigcap_{i=1}^n Bg_i^{-1})$ non maigre.

Soit $g \in G$, si pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $gg_i \notin \varphi^{-1}(P_0)$ alors $\varphi(gg_i) \in \mathbb{C}\backslash P_0$. Or $\mathbb{C}\backslash P_0$ est convexe, donc le barycentre $\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(gg_i)$ appartient à $\mathbb{C}\backslash P_0$ et ainsi $|\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(gg_i)| \geq dist(0, \mathbb{C}\backslash P_0) = \epsilon_0$, ce qui est faux.
Par conséquent on obtient que pour tout $g \in G$, il existe $i_g \in \{1, ..., n\}$ tel que $gg_{i_g} \in \varphi^{-1}(P_0)$; d'autre part si $g \in B \cap (\bigcap_{i=1}^n Bg_i^{-1})$, on a $gg_{i_g} \in B$.
Finalement $B \cap (\bigcap_{i=1}^n Bg_i^{-1}) \subseteq \bigcup_{i=1}^n (\varphi^{-1}(P_0) \cap B)g_i^{-1}$, qui est donc non maigre, et $\varphi^{-1}(P_0) \cap B$ l'est également $\square$

Remarque 5.1.1 *On peut se demander si l'énoncé « dual » du lemme précédent est vrai, c'est à dire si dans un groupe localement compact de mesure de Haar m, $\varphi^{-1}(P_0) \cap B$ n'est pas négligeable lorsque B est mesurable de mesure non nulle, ou si $\varphi^{-1}(P_0) \cap B$ est au moins non vide.*
Nous ne connaissons pas de réponse à cette question, toutefois on peut remarquer que l'analogue de la proposition 1.2.1 n'est pas vrai pour la mesure, en effet, on a le contre-exemple suivant :

Exemple 5.1.1 *Soit $G = \mathbb{R}$ et M un compact rare de mesure strictement positive (par exemple un ensemble de Cantor généralisé), soit W un voisinage de 0 et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans W. On a alors :*
$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(z_n + M) = \{x \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, x - z_n \in M\} = \{x \ / \ \forall z \in W, x - z \in M\}$ *par densité et $\{x \ / \ \forall z \in W, x - z \in M\} \subseteq \mathring{M}$. Or $\mathring{M}$ est vide puisque M est un compact rare.*
Finalement on a bien trouvé un ensemble M de mesure strictement positive tel que pour tout voisinage W de 0, il existe une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans W telle que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(z_n + M) = \varnothing$.

Remarque 5.1.2 *On n'obtiendra pas non plus l'analogue de la proposition 1.2.1 en se restreignant aux suites finies ; en effet supposons que dans un groupe localement compact métrisable, il existe pour tout ensemble M de mesure strictement positive (qu'on peut supposer compact par régularité de la mesure), un voisinage du neutre W tel que pour toute suite finie $(z_i)_{i=1}^N$ dans W, $M \cap (\bigcap_{i=1}^N z_i M)$ soit non vide ; soit alors (z_n) une suite dans W, par hypothèse, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $y_n \in M \cap (\bigcap_{i=1}^N z_i M)$, donc il existe une suite extraite $(y_{n_k})_k$ qui converge vers un élément y de M. Comme pour tout $i \leq n_k$, $y_{n_k} \in z_i M$, on obtient que $y \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} z_i M$ qui est donc non vide.*

Etablissons maintenant le principal résultat de ce chapitre :

Théorème 5.1.1 *Soit θ une représentation unitaire fortement continue d'un groupe localement compact métrisable G dans un espace de Hilbert H.*
Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) θ est uniformément continue.
(ii) $\Omega_\theta := \{g \in G \ / \ 0 \notin Conv(\sigma(\theta(g)))\}$ est non maigre.

Preuve.
(i)⇒ (ii)
Par hypothèse il existe un ouvert $U \in \mathcal{V}(1)$ tel que pour tout $g \in U$, $\sigma(\theta(g)) \subseteq B(1, 1/2)$ (la boule de centre 1 et de rayon 1/2), donc $U \subseteq \Omega_\theta$ et Ω_θ est bien non maigre.
(ii)⇒ (i)
Supposons que θ ne soit pas uniformément continue et notons $B = \mathcal{L}(H)$ et A la sous-C*-algèbre engendrée par $\theta(G)$.
D'après le théorème 3.1.1, l'application $\Sigma : g \in G \mapsto \sigma(\theta(g)) \in \mathcal{K}(\mathbb{T})$ admet un ensemble de points de continuité comaigre dans G ; si Ω_θ est non maigre, il existe donc un point de continuité g_0 pour Σ appartenant à Ω_θ, donc $0 \notin Conv(\sigma(\theta(g_0)))$, or $\theta(g_0)$ est normal donc $Conv(\sigma(\theta(g_0)) = W_B(\theta(g_0))$.
D'après la version géométrique du théorème de Hahn-Banach, il existe une droite séparant strictement $\{0\}$ et $Conv(\sigma(\theta(g_0))$, soit P_0 et P_{g_0} les demi-plans ouverts correspondants qui contiennent respectivement $\{0\}$ et $Conv(\sigma(\theta(g_0))$.
Par continuité, il existe un voisinage ouvert U_0 de g_0 tel que pour tout $g \in U_0$, $\sigma(\theta(g)) \subseteq P_{g_0}$ et donc $Conv(\sigma(\theta(g))) \subseteq P_{g_0}$.
Puisque $Conv(\sigma(\theta(g))) = W_B(\theta(g)) = W_A(\theta(g))$, on obtient que pour tout $\omega \in \Sigma(A)$, $(\omega \circ \theta)(U_0) \subseteq P_{g_0}$, donc $U_0 \cap (\omega \circ \theta)^{-1}(P_0) = \varnothing$.
Or θ n'est pas uniformément continue donc, d'après le corollaire 5.1.1, il existe $\omega_0 \in P\Sigma(A)$ tel que $\omega_0 \circ \theta$ moyenne vers zéro.
Ainsi en appliquant le lemme 5.1.1, $U_0 \cap (\omega_0 \circ \theta)^{-1}(P_0)$ est non maigre, ce qui est une contradiction □

Corollaire 5.1.1 *Soit θ une représentation fortement continue et bornée d'un groupe localement compact G métrisable et moyennable dans un espace de Hilbert H.*
Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) θ est uniformément continue.
(ii) $\Omega_\theta := \{g \in G \ / \ 0 \notin Conv(\sigma(\theta(g)))\}$ est non maigre.

Preuve.
Il suffit de remarquer que tout groupe G moyennable est unitarisable (cf [17]) $\square$

Corollaire 5.1.2 *Soit θ une représentation fortement continue d'un groupe G compact métrisable dans un espace de Hilbert H.*
Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) θ est uniformément continue.
(ii) $\Omega_\theta := \{g \in G \ / \ 0 \notin Conv(\sigma(\theta(g)))\}$ est non maigre.

Preuve.
L'application θ est fortement continue sur le compact G, donc d'après le théorème de Banach-Steinhaus, θ est bornée sur G, et il suffit d'appliquer le corollaire précédent $\square$

On peut également déduire du théorème une loi du zéro-$\sqrt{2}$:

Corollaire 5.1.3 *Soit θ une représentation unitaire fortement continue d'un groupe localement compact métrisable G dans un espace de Hilbert H.*
Alors θ est uniformément continue ou bien il existe un ensemble M maigre dans G tel que $\liminf_{g\to 1, g\in G\setminus M} \rho(\theta(g)-1) \geq \sqrt{2}$.

Preuve.
Supposons que θ ne soit pas uniformément continue, il existe un ensemble M maigre dans G tel que pour tout $g \in G\setminus M$, $\sigma(\theta(g))$ ne soit contenu dans aucun arc de longueur inférieure à π. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $z \in \sigma(\theta(g))$ tel que $|z-1| \geq \sqrt{2} - \epsilon$, donc $\rho(\theta(g) - I) \geq \sqrt{2} - \epsilon$ $\square$

5.2 Répartition spectrale et mesure

On ne sait pas si $\{g \in G \ / \ 0 \notin Conv(\sigma(\theta(g)))\}$ est de mesure nulle lorsque la représentation n'est pas uniformément continue, ni même si son complémentaire contient un ensemble de mesure positive ; toutefois on va préciser dans ce paragraphe quelques éléments relatifs à la répartition du spectre en termes de mesure.

Définition 5.2.1 *Un sous-ensemble B d'un groupe G est* large *ou* discrètement syndétique *s'il existe des élément $g_1, ..., g_n$ dans G tels que*
$\bigcup_{i=1}^n Bg_i = G$.

On peut remarquer que dans un groupe localement compact, un ensemble comaigre peut être de mesure nulle (cf l'ensemble des nombres de Liouville dans $\mathbb{R}$ ou le théorème 3.4 in [3]).
Un sous-ensemble B est large si et seulement si son symétrique B^{-1} l'est.

Définition 5.2.2 *Un sous-ensemble B d'un groupe topologique G est* fortement large *si pour tout $V \in \mathcal{V}(1)$, il existe des éléments $g_1, ..., g_n$ dans V tels que $\bigcup_{i=1}^{n} Bg_i = G$.*

Exemple 5.2.1 *$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est fortement large dans $\mathbb{R}$.*

Remarque 5.2.1 *(i) Dans un groupe compact, tout ouvert est large mais pas nécessairement fortement large.*
(ii) Un ensemble de mesure nulle dans un groupe localement compact n'est pas large et donc n'est pas fortement large.

Lemme 5.2.1 *Soit φ une fonction définie positive sur un groupe topologique G moyennant vers zéro.*
Si P_0 est un demi-plan ouvert de $\mathbb{C}$ contenant 0 alors $\varphi^{-1}(P_0)$ est fortement large.

Preuve.
Soit $\epsilon_0 := dist(0, \mathbb{C}\backslash P_0) > 0$. φ moyenne vers zéro donc pour tout $V \in \mathcal{V}(1)$ symétrique, il existe $g_1, ..., g_n$ dans V et des nombres réels positifs $\alpha_1, ..., \alpha_n$ de somme 1 tels que $|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(gg_i)| < \epsilon_0$ pour tout $g \in G$.
Soit $g \in G$, si pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $gg_i \notin \varphi^{-1}(P_0)$ alors $\varphi(gg_i) \in \mathbb{C}\backslash P_0$. Or $\mathbb{C}\backslash P_0$ est convexe, donc le barycentre $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(gg_i)$ appartient à $\mathbb{C}\backslash P_0$ et ainsi $|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(gg_i)| \geq dist(0, \mathbb{C}\backslash P_0) = \epsilon_0$, ce qui est faux.
Par conséquent on obtient que pour tout $g \in G$, il existe $i_g \in \{1, ..., n\}$ tel que $gg_{i_g} \in \varphi^{-1}(P_0)$, ainsi $G = \bigcup_{i=1}^{n} \varphi^{-1}(P_0) g_i^{-1}$ □

Théorème 5.2.1 *Soit θ une représentation unitaire d'un groupe localement compact métrisable G dans un espace de Hilbert H et soit P un demi-plan fermé ne contenant pas 0.*
Si θ n'est pas uniformément continue alors l'ensemble
$B := \{g \in G \ / \ Conv(\sigma(\theta(g))) \not\subseteq P\}$ est fortement large.

Preuve.
Supposons que θ ne soit pas uniformément continue, soit A la C*-algèbre engendrée par $\theta(G)$, alors il existe un état pur ω tel que $\omega \circ \theta$ moyenne vers zéro (cf corollaire 3.1.1).
On a $G\backslash B = \{g \in G \ / \ Conv(\sigma(\theta(g))) \subseteq P\} \subseteq (\omega \circ \theta)^{-1}(P)$.
Ainsi $(\omega \circ \theta)^{-1}(\mathbb{C}\backslash P) \subseteq B$ donc B est fortement large d'après le lemme précédent □

Corollaire 5.2.1 *Soit θ une représentation unitaire fortement continue d'un groupe localement compact à base de topologie dénombrable G dans un espace de Hilbert H, et soit P un demi-plan fermé ne contenant pas 0.*
Si θ n'est pas uniformément continue alors l'ensemble
$B := \{g \in G \ / \ Conv(\sigma(\theta(g))) \not\subseteq P\}$ contient un ensemble de mesure positive.

Preuve.
Si H est séparable alors $g \in G \mapsto Conv(\sigma(\theta(g)))$ est borélienne (cf proposition 3.1.2), donc B est borélien, et fortement large d'après le théorème précédent, ainsi B est de mesure positive.
Si H n'est pas séparable, θ n'est pas uniformément continue donc il existe $\delta > 0$ et une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans G tels que $\lim_{n\to\infty} g_n = 1$ et $||\theta(g_n) - I|| > \delta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi il existe une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs unitaires dans H tels que $||\theta(g_n)h_n - h_n|| > \delta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Posons $Y := \overline{\text{Vect}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\theta(g)h_n, \ g \in G\})}$; puisque G est séparable et θ fortement continue, $\{\theta(g)h_n, \ g \in G\}$ est séparable, donc Y est séparable ; Y est de plus $(\theta(g))_{g\in G}$-invariant. En utilisant le cas séparable, on obtient que B_Y est de mesure positive avec $B_Y = \{g \in G \ / \ Conv(\sigma(\theta(g)_{/Y}) \not\subseteq P\}$.
Puisque $\theta(g)$ est unitaire et que Y est bi-invariant, $\theta(g)_{/Y}$ est aussi unitaire.
Ainsi $\sigma(\theta(g)_{/Y}) = \sigma_{ap}(\theta(g)_{/Y}) \subset \sigma_{ap}(\theta(g)) = \sigma(\theta(g))$ (où σ_{ap} est le spectre approximatif).
Donc $Conv(\sigma(\theta(g)_{/Y})) \subseteq Conv(\sigma(\theta(g)))$. On obtient que $B_Y \subseteq B$ et B contient bien un ensemble de mesure positive □

Bibliographie

[1] PIETRO AIENA, *Fredholm and local spectral theory, with applications to multipliers*, Kluwer Academic Publishers, 2004.

[2] E. M. ALFSEN, *Compact convex sets and boundary integrals*, Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, 1971.

[3] G. ARTICO, V. I. MALYKHIN, AND U. MARCONI, *Some large and small sets in topological groups*, Mathematica Pannonica 12/2 (2001), 157-165.

[4] W. ARVESON, *A short course on spectral theory*, Springer-Verlag, 2002.

[5] W. BANASZCZYK, *The Lévy continuity theorem for nuclear groups*, Studia Mathematica, 136 (2) (1999).

[6] B. BEKKA, P. DE LA HARPE, A. VALETTE, *Kazdhan's property (T)*, Cambridge university press, 2008.

[7] F. BONSALL, J. DUNCAN, *Numerical ranges of operators on normed spaces and of elements of normed algebras*, Cambridge university press, 1971.

[8] F. BONSALL, J. DUNCAN, *Complete normed algebras*, Springer-Verlag, 1973.

[9] N. BOURBAKI, *Eléments de mathématiques, topologie générale, chapitre I*, Springer-Verlag, 2007.

[10] N. BOURBAKI, *Eléments de mathématiques, topologie générale, chapitre X*, Springer-Verlag, 2007.

[11] M. CIANFARANI, J. M. PAOLI, AND J. C. TOMASI, *Spectral properties of strongly continuous representations of groups*, Arch. Math. 96 (2011), 253-262.

[12] M. Cianfarani, J. M. paoli, *Spectra of elements in the range of a Lie group strongly continuous unitary representation*, Arch. Math., submitted.

[13] Donald L. Cohn, *Measure theory*, Birkhäuser, 1997.

[14] A. Deitmar, *A first course in harmonic analysis*, Springer-Verlag, 2000.

[15] a. deitmar, s. echterhoff, *Principles of harmonic analysis*, Springer-Verlag, 2009.

[16] K. de Leeuw, I. Glicksberg, *The decomposition of certain group representations*, J. Analyse Math. 15 (1965), 135-192.

[17] j. dixmier, *Les moyennes invariantes dans les semi-groupes et leurs applications*, Acta Sci. Math. Szeged, vol. 12, Part. A, (1950), 213-227.

[18] S. Dubernet, *Thèse de doctorat de mathématiques*, université de Bordeaux.

[19] j. esterle, *The zero-$\sqrt{3}$ and zero-two laws for representations of locally abelian groups*, Izv. Nats. Akad. Nauk. Armenii Mat. 38 (2003), n°5, 11-22 ; translation in J. Contemp. Math. Anal. 38 (2003), n°5, 9-19 (2004).

[20] J. Esterle and J. M. Paoli *Corrections and complements to the zero-$\sqrt{3}$ and zero-two laws for representations of locally abelian groups*, preprint.

[21] Klaus Floret, *Weakly compact sets*, Springer-Verlag, 1978.

[22] Gerald Folland, *A course in abstract harmonic analysis*, CRC Press, 1995.

[23] Steven A. Gaal, *Linear analysis and representation theory*, Dover Publications, 2010.

[24] I. M. Gelfand, *Zur theorie der charaktere der Abelschen topologischen grupen*, (German) Rec. Math. [Mat. Sbornik], N. S. 9 (51), 1941, 49-50.

[25] w. t. gowers and b. maurey, *The unconditional basic sequence problem*, J. Amer. Math. Soc., 6, 851-874 (1993).

[26] K. G. Grosse-Erdmann, *Regularity properties of functional equations and inequalities*, Aequationes Mathematicae, 37, 233-251 (1989).

[27] A. Grothendieck, *Critères de compacité dans les espaces fonctionnels généraux*, Amer. J. Math., 74, 168-186 (1952).

[28] Paul Halmos, *A Hilbert space problem book*, Springer-Verlag, 1991.

[29] Edwin Hewitt, Kenneth A. Ross, *Abstract harmonic analysis I*, Springer-Verlag, 1979.

[30] e. hille, *On the theory of characters of groups and semi-groups in normed vector rings*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A 30 (1944), 58-60.

[31] e. hille and r. s. phillips, *Functional analysis and semi-groups*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 31, Providence, RI, 1957.

[32] K.H. Hofmann, S.A. Morris, *The structure of compact groups*, de Gruyter, 1998.

[33] Richard Kadison, John Ringrose, *Fundamentals of the theory of operators algebras, volume I : elementary theory*, American Mathematical Society, 1983.

[34] Richard Kadison, John Ringrose, *Fundamentals of the theory of operators algebras, volume II : advanced theory*, American Mathematical Society, 1986.

[35] A. S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Springer-Verlag, 1994.

[36] A. Kleppner, *Measurable homomorphisms of locally compact groups*, Proc. American Mathematical Society, 106, n°2 (1989), 391-395.

[37] J. Kuznetsova, *On continuity of measurable group representations and homomorphisms*, arXiv :1010.0999v2 [math.FA] 15 Nov 2010.

[38] K. Latrach, J. M. paoli, and P. Simonnet, *A spectral characterization of the uniform continuity of strongly continuous groups*, Arch. Math. 90 (2008), 420-428.

[39] K. Latrach, J. M. paoli, and P. Simonnet, *Some facts from descriptive set theory concerning essential spectra and applications*, Studia Math. 171 (2005), 207-225.

[40] K. Latrach, J. M. paoli, *An extension of a Phillips' theorem to Banach algebras and application to the uniform continuity of strongly continuous semigroups*, J. Math. Analysis and Application, (2007).

[41] Kield B. Laursen, Michael M. Neumann, *An introduction to local spectral theory*, Oxford science publications, 2000.

[42] vladimir müller, *Spectral theory of linear operators*, Birkhaüser, 2003.

[43] J. ORIHUELA, *Pointwise compactness in spaces of continuous functions*, J. London. Math. Soc. (2) 36 (1987), 143-152.

[44] J. M. PAOLI, J. C. TOMASI, *Unitary representations of groups, continuity and spectrum*, Arch. Math. 97 (2011), 157-165.

[45] A. PAZY, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer-Verlag, 1983.

[46] R. S. PHILLIPS, *Spectral theory of semigroups of linear operators*, Trans A.M.S. 71 (1951), 393-415.

[47] L. S. PONTRYAGIN, *Topological groups*, Gordon and Breach Science Publishers, 1986.

[48] F. RÄBIGER, W.J. RICKER, C_0 *groups and* C_0 *semigroups of linear operators on hereditarily indecomposable Banach spaces*, Arch. Math. 66 (1996), 60-70.

[49] WALTER RUDIN, *Analyse fonctionnelle*, Ediscience international, 1995.

[50] ZOLTAN SASVARI, *Positive definite and definitizable functions*, Akademie Verlag, 1994.

[51] L. SCHWARTZ, *Analyse I, théorie des ensembles et topologie*, Hermann, 1991.

[52] J. C. TOMASI, *Haar measure and continuous representations of locally compact abelian groups*, Stud. Math. 206 (1) (2011), 25-35.

[53] ALBERT WILANSKY, *Topology for analysis*, Dover Publications, 2008.