



HAL
open science

Analyse structurelle de réseaux de capteurs pour la commande et l'observation

Trong-Hieu Do

► **To cite this version:**

Trong-Hieu Do. Analyse structurelle de réseaux de capteurs pour la commande et l'observation. Autre. Université de Grenoble, 2011. Français. NNT : 2011GRENT061 . tel-00681802

HAL Id: tel-00681802

<https://theses.hal.science/tel-00681802>

Submitted on 22 Mar 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Automatique-Productique**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

Trong Hieu DO

Thèse dirigée par **Christian COMMAULT** et
co-dirigée par **Jean-Michel DION**

préparée au sein du **Laboratoire Gipsa-lab**
dans **l'École Doctorale Electronique, Electrotechnique,
Automatique et Traitement du Signal**

Analyse structurelle des réseaux de capteurs pour la commande et l'observation

Thèse soutenue publiquement le **23 Septembre 2011**,
devant le jury composé de :

Monsieur Jean-Marc THIRIET

Professeur à l'Université Joseph Fourier, Grenoble, Président

Monsieur Taha BOUKHOBZA

Professeur à l'Université Henri Poincaré, Nancy, Rapporteur

Monsieur Jean-François LAFAY

Professeur à l'École Centrale de Nantes, Rapporteur

Monsieur Janan ZAYTOON

Professeur à l'Université de Reims Champagne-Ardenne, Examineur

Monsieur Christian COMMAULT

Professeur à Grenoble-INP, Directeur de thèse

Monsieur Jean-Michel DION

Directeur de Recherche au CNRS, Co-directeur de thèse



Remerciements

Le travail dans ce mémoire a été réalisé au Gipsa-lab au sein du Département Automatique. Je tiens d'abord à exprimer mes remerciements et ma gratitude à Monsieur Christian COMMAULT, Professeur à l'Institut Polytechnique de Grenoble et Monsieur Jean-Michel DION, Directeur de recherches au CNRS, qui m'ont permis, grâce à leur confiance et leur soutien, de mener à terme ce travail. Je les remercie aussi pour leur extrême gentillesse et leur bonne humeur communicative.

Je tiens à exprimer ma sincère reconnaissance à mes deux rapporteurs Monsieur Taha BOUKHOBZA, Professeur à l'Université Henri Poincaré de Nancy et Monsieur Jean-François LAFAY, Professeur à l'École Centrale de Nantes, pour avoir accepté d'être rapporteurs de mes travaux de thèse ainsi que pour leur lecture minutieuse du manuscrit. Je les remercie chaleureusement pour le temps précieux qu'ils ont consacré à cette tâche malgré leurs agendas chargés, également pour leurs remarques qui m'ont permis d'améliorer la forme définitive du rapport. Merci également à Monsieur Jean-Marc THIRIET, Professeur à l'Université Joseph Fourier de Grenoble, de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse. Un très grand merci à Monsieur Janan ZAYTOON, Professeur à l'Université de Reims Champagne-Ardenne, pour avoir accepté d'examiner ce travail de thèse.

J'adresse mes remerciements à tous les membres de l'équipe administratives et technique du Gipsa-Lab, et plus particulièrement à Marie-Thérèse, Patricia, Daniel, Virginie... pour leur amabilité et leur travail remarquable.

J'ai été heureux de travailler en compagnie des doctorants du laboratoires Gipsa-Lab département automatique. Je pense particulièrement à mes collègues de bureau Amine MECHRAOUI et Zeashan Hameed KHAN, à mes amis Anh Lam DO, Van Thang PHAM, Irfan AHMAD, Cédric BERBRA, Marouane ALMA, Hoang Van NGUYEN, Antoine LEMARCHAND, Haiyang DING, Gabriel RODRIGUES DE CAMPOS, Andra Ioana VASILIU, Oumayma OMAR, Flor Lizeth TORRES ORTIZ, Joumana HERMASSI, Adriana Simona MIHAITA, Emilie ROCHE et Valentina CIARLA.

Enfin, je tiens à remercier ma famille, mes amis et particulièrement Phuong Thao DONG pour leur soutien. Ils ont toujours été derrière moi à me transmettre de l'énergie. Sans eux, beaucoup de choses n'auraient pas été possibles.

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Introduction générale | 10 |
| 1 Les problèmes de localisation et classification des capteurs | 17 |
| 1.1 Introduction | 18 |
| 1.2 Motivation | 18 |
| 1.3 Localisation des capteurs pour obtenir des propriétés spécifiques | 19 |
| 1.4 Classification des capteurs pour préserver des propriétés spécifiques | 21 |
| 1.5 Les travaux dans la littérature | 26 |
| 1.6 Les problèmes étudiés | 28 |
| 1.6.1 Rejet de perturbation par retour de mesure | 28 |
| 1.6.2 Détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs | 29 |
| 1.7 Conclusion | 30 |
| 2 Systèmes linéaires structurés | 33 |
| 2.1 Introduction | 34 |
| 2.2 Système linéaire structuré | 34 |
| 2.2.1 Motivation | 34 |
| 2.2.2 Définition | 36 |
| 2.3 Propriétés génériques | 38 |
| 2.4 Graphe associé | 40 |
| 2.4.1 Graphe orienté | 41 |
| 2.4.2 Graphe orienté associé à un système linéaire structuré | 43 |
| 2.5 Illustration sur quelques propriétés | 45 |
| 2.5.1 Rang générique d'une matrice de transfert | 45 |
| 2.5.2 L'observabilité générique | 46 |
| 2.5.3 Le problème du découplage par retour d'état | 47 |
| 2.6 Conclusion | 49 |
| 3 Localisation et classification des capteurs pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure | 51 |
| 3.1 Introduction | 52 |
| 3.2 Problème du rejet de perturbation | 52 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 3.3 | Rejet de perturbation dans le cas des systèmes linéaires classiques | 54 |
| 3.3.1 | Rejet de Perturbation par Retour d'Etat (RPRE) | 54 |
| 3.3.2 | Rejet de Perturbation par Retour de Mesure (RPRM) | 55 |
| 3.4 | Rejet de perturbation dans le cas des systèmes linéaires structurés | 56 |
| 3.4.1 | Rejet de Perturbation par Retour d'Etat (RPRE) | 56 |
| 3.4.2 | Rejet de Perturbation par Retour de Mesure (RPRM) | 65 |
| 3.5 | Définitions préliminaires | 70 |
| 3.6 | Localisation et classification des capteurs pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure | 72 |
| 3.6.1 | Cas de la perturbation unique | 72 |
| 3.6.2 | Cas général | 74 |
| 3.7 | Exemple illustratif | 90 |
| 3.7.1 | Etude du problème du rejet de perturbation par retour d'état | 93 |
| 3.7.2 | Etude du problème du rejet de perturbation par retour de mesure | 94 |
| 3.8 | Conclusion | 99 |
| 4 | Classification des capteurs pour la détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs | 103 |
| 4.1 | Introduction | 104 |
| 4.2 | Détection et localisation de défauts (FDI - Fault Detection and Isolation) avec une banque d'observateurs | 104 |
| 4.2.1 | Introduction | 104 |
| 4.2.2 | Définition | 105 |
| 4.2.3 | Solubilité générique du problème FDI | 107 |
| 4.3 | Classification des capteurs pour l'observabilité | 112 |
| 4.3.1 | Classification des capteurs pour la connexion à la sortie | 112 |
| 4.3.2 | Classification des capteurs pour l'absence de contraction | 115 |
| 4.4 | Classification des capteurs pour la condition de rang du problème FDI | 119 |
| 4.5 | Classification des capteurs pour le problème FDI avec la condition d'observabilité | 131 |
| 4.6 | Classification quantitative des capteurs | 134 |
| 4.6.1 | Le degré de criticité | 134 |
| 4.6.2 | Réseau des ensembles admissibles de capteurs | 136 |
| 4.7 | Exemple illustratif | 138 |
| 4.7.1 | Classification des capteurs pour la connexion à la sortie | 139 |
| 4.7.2 | Classification des capteurs pour l'absence de contraction | 140 |
| 4.7.3 | Classification des capteurs pour la condition de rang du problème FDI | 141 |
| 4.7.4 | Classification des capteurs pour la solubilité du problème de détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs | 142 |
| 4.7.5 | Classification quantitative des capteurs | 142 |

| | | |
|-------|---|------------|
| 4.7.6 | Classification des capteurs quand il n'existe pas de perturbation . | 143 |
| 4.8 | Conclusion | 145 |
| | Conclusions et perspectives | 148 |
| | Bibliographie | 151 |
| | Annexe | 159 |

Introduction générale

Le monde de l'industrie dispose de systèmes automatisés de plus en plus performants et complexes pour répondre aux besoins de la société moderne : systèmes plus économiques, plus écologiques, plus sûrs, ayant de meilleures performances, une meilleure qualité des produits.... La complexité et la demande d'atteindre de meilleures performances des systèmes automatisés exige l'utilisation de capteurs de plus en plus nombreux.

Un capteur est un dispositif qui a pour fonction de transformer une grandeur physique mesurée en une autre grandeur physique utilisable. Il existe de nombreux types de capteurs pour différentes grandeurs physiques : distance, vitesse, force, pression, débit, température.... Les capteurs jouent un rôle très important dans la commande d'un système automatisé. Ils sont d'abord utilisés pour donner une image de l'état du système et ensuite pour la synthèse de lois de commande garantissant des performances souhaitées. Les capteurs sont souvent indispensables pour garantir des propriétés du système telles que l'observabilité, le rejet de perturbation ou la détection de défauts.

Dans la pratique, pour des raisons de fiabilité, on se trouve en présence de capteurs redondants. Vu le coût, les difficultés d'implantation sur un système et la difficulté de maintenance des capteurs,... il est donc important de savoir utiliser de manière optimale les capteurs d'un système. De plus, pour des raisons de fiabilité et de sûreté, il est nécessaire d'étudier l'influence de la panne de certains capteurs sur le fonctionnement du système. Ces analyses nous conduisent à deux problèmes concernant les capteurs :

- Le problème de localisation de capteurs : quand une propriété considérée n'est pas satisfaite avec les capteurs initiaux du système, combien de nouveaux capteurs ajouter et où les placer pour vérifier cette propriété.
- Le problème de classification de capteurs : quand une propriété considérée est satisfaite avec l'ensemble de capteurs du système, quelle est l'importance de chaque capteur pour préserver cette propriété ou bien est-ce que la propriété considérée est influencée par la défaillance de certains capteurs? Dans ce but, nous classons les capteurs d'un système en trois catégories en fonction de leur importance pour une propriété considérée : des capteur inutiles, des capteurs utiles et des capteurs essentiels. Un capteur inutile est un capteur tel que sa défaillance n'influence en aucun cas la propriété considérée. Au contraire un capteur utile contribue à la préservation de cette propriété dans certaines situations. Un capteur essentiel est un cas particulier de capteur utile. Si un capteur essentiel tombe un panne, le système perd la propriété considérée.

Dans certains cas, une propriété considérée est la combinaison de sous-propriétés qui sont en général plus faciles à vérifier. Alors, la localisation et classification des capteurs pour la propriété considérée peut être effectuée grâce à la localisation et la classification des capteurs pour chaque sous-propriété. Par exemple, dans [Commault et al., 2005], les auteurs ont étudié la localisation des capteurs pour l'observabilité générique d'un système en étudiant la localisation des capteurs pour deux sous-propriétés : la connexion à la sortie et l'absence de contraction. Concernant l'aspect classification des capteurs,

nous montrons dans cette thèse qu'un capteur essentiel pour une sous-propriété est un capteur qui est essentiel pour la propriété globale. Cependant, le problème est plus complexe dans le cas des capteurs inutiles car un capteur qui est utile pour (au moins) une sous-propriété peut être un capteur inutile pour le problème global.

Le travail que nous présentons dans ce document propose d'appliquer l'approche des systèmes linéaires structurés à l'étude des problèmes de localisation et de classification de capteurs. Les systèmes linéaires structurés sont une classe générale de systèmes linéaires multi-variables dépendant de paramètres. Dans un système linéaire structuré on ne prend en compte que l'existence ou l'absence de relations entre les différentes variables sans s'intéresser à la valeur précise des paramètres [Dion et al., 2003]. Ces systèmes sont décrits par des équations d'état dont les paramètres sont soit fixés à zéro, soit libres. L'existence de paramètres libres correspond aux relations non nulles entre les variables. L'intérêt de cette approche est qu'elle prend en compte la structure du système et donc permet d'étudier des propriétés du système qui ne dépendent que de sa structure. De plus, grâce à la simplicité et à la clarté pédagogique des résultats graphiques, cette approche est un outil approprié pour traiter des problèmes de grande dimension. Pour les systèmes linéaires structurés on étudie des propriétés dites "génériques" (ou "structurelles"). Ces propriétés sont vraies pour presque toutes les valeurs des paramètres libres. Un graphe orienté peut être associé à un système linéaire structuré : chaque variable du système est représentée par un sommet et chaque relation non nulle entre deux variables est représentée par un arc reliant les sommets correspondants. Ce graphe associé est un outil très efficace pour analyser les propriétés génériques des systèmes considérés. De nombreux résultats concernant l'approche des systèmes linéaires structurés sont disponibles dans la littérature [Dion et al., 2003]. Cette approche a été étendue pour les systèmes singuliers et les systèmes bilinéaires [Boukhobza et al., 2006; Boukhobza & Hamelin, 2007a; Boukhobza et al., 2008]. Dans le contexte structurel, il existe aussi d'autres approches telles que l'approche structurelle utilisant des graphes bipartis pour les problèmes de diagnostic [Staroswiecki et al., 2000] ou l'approche Bond-graph [Sueur & Dauphin-Tanguy, 1991; Dauphin-Tanguy, 2000]. Tous les problèmes étudiés dans ce travail sont centrés sur l'approche structurelle avec la notion de systèmes linéaires structurés et de graphe orienté associé.

Le premier problème que nous considérons dans cette thèse est le problème du rejet de perturbations par retour de mesure. Les systèmes dynamiques sont souvent affectés par des perturbations. Pour assurer certaines performances du système, il faut donc éliminer ou réduire si possible l'effet des perturbations. Certaines approches permettent de minimiser la norme de la matrice de transfert entre les perturbations et les sorties à réguler [Vidyasagar, 1987]. Dans notre travail, nous nous intéressons au problème du rejet de perturbation exact par retour de mesure. Ce problème consiste à commander un système, à l'aide d'un retour dynamique de sortie mesurée, pour que la matrice de transfert entre les perturbations et les sorties à réguler soit nulle. Le retour dynamique est

construit grâce aux informations sur l'effet des perturbations fournies par les capteurs. Dans [van der Woude, 1993; Commault et al., 1997], on présente une condition nécessaire et suffisante pour que le problème du rejet de perturbations par retour de mesure soit génériquement soluble. A partir de ces études génériques, nous nous intéressons aux deux aspects :

- Le premier problème se pose quand la solubilité générique du problème du rejet de perturbations par retour de mesure n'est pas satisfaite. La question ici est : quelles sont les variables qui doivent être mesurées par les nouveaux capteurs et combien de nouveaux capteurs sont nécessaires. Notre contribution est de donner des nouvelles conditions nécessaires et suffisantes pour que le problème du rejet de perturbations par retour de mesure soit génériquement soluble. Ces conditions nous donnent une nouvelle compréhension du problème et des résultats concernant la localisation de capteurs.
- Le deuxième problème considéré se présente quand le problème du rejet de perturbations par retour de mesure est génériquement soluble. Notre contribution dans ce cas est de classer les capteurs en fonction de leur importance pour cette solubilité, en trois types : des capteurs essentiels, des capteurs inutiles et des capteurs utiles. Une classification complète des capteurs de ces trois types est donnée dans le cas il n'existe qu'une seule perturbation. Dans le cas général, nous déterminons des régions de l'espace d'état où il est inutile de mesurer et proposons une méthode pour calculer les capteurs essentiels. La classification complète par un critère de test simple des capteurs inutiles reste cependant un problème ouvert.

Le travail de [Trinh, 2008] a abordé le problème du rejet de perturbation dans la cas d'une perturbation unique. Dans ce travail, notre contribution est d'étudier la localisation et la classification des capteurs pour le rejet de perturbation par retour de mesure dans le cas général, c'est-à-dire quand le système est affecté par plusieurs perturbations.

Le deuxième problème considéré dans cette thèse est le problème de détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs. Ce problème a reçu une attention considérable durant les dernières années [Frank, 1996; Chen & Patton, 1999]. Ce problème consiste à construire des variables indicatrices de défauts, nommés résidus, à partir des données réelles disponibles. Leur valeur est nulle quand le système fonctionne normalement et différent de zéro en cas de défaillance. [Commault, Dion, Sename & Motyeian, 2002] présente une condition nécessaire et suffisante pour que le problème de détection et localisation de défauts soit génériquement soluble. Ensuite, dans [Commault & Dion, 2007], quand le problème de détection et localisation de défauts n'est pas génériquement soluble, les auteurs cherchent à ajouter des capteurs additionnels pour rendre ce problème soluble. A partir de ces études, nous nous intéressons à la classification des capteurs en fonction de leur importance pour cette solubilité. Notre contribution est de classer les capteur en trois types : capteurs essentiels, capteurs utiles et capteurs inutiles comme pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure. Par rapport au

travail de [Commault et al., 2007], nous considérons aussi l'existence de perturbations et l'exigence de l'observabilité. Notre classification des capteurs pour le problème de détection et localisation avec une banque d'observateurs est basé sur les classifications des capteurs pour des sous-propriétés.

Ce mémoire est organisé en chapitres structurés de manière suivante :

Dans le premier chapitre, deux problèmes de capteurs sont formalisés : le problème de localisation de capteurs et le problème de classification de capteurs. Nous illustrons ensuite ces deux problèmes sur quelques exemples concernant l'observabilité d'un système. Après avoir rappelé quelques travaux existants, nous présentons le problème du rejet de perturbation par retour de mesure et le problème de détection et localisation de défauts. La localisation et la classification de capteurs pour ces problèmes sont étudiées plus loin dans ce mémoire.

Le deuxième chapitre présente la notion de système linéaire structuré et les propriétés génériques. Ensuite, nous montrons comment associer un graphe orienté à un système linéaire structuré. A la fin de ce chapitre, nous présentons quelques résultats concernant l'étude des propriétés génériques des systèmes structurés en utilisant les graphes associés.

Dans le troisième chapitre, nous présentons la première contribution de notre travail. Il s'agit d'une application des systèmes linéaires structurés à la localisation et à la classification de capteurs pour le problème du rejet de perturbation par retour dynamique de mesure. Ce chapitre est constitué essentiellement de deux parties. Dans la première partie, nous rappelons le problème du rejet de perturbation et quelques résultats connus sur la solubilité de ce problème dans le contexte des systèmes linéaires classiques et aussi dans le contexte des systèmes structurés. Dans la deuxième partie, nous présentons notre contribution principale sur les aspects de localisation et classification de capteurs pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure. Nous donnons des nouvelles conditions nécessaires et suffisantes en termes graphiques pour la solubilité du problème. Pour des raisons pédagogiques, nous commençons d'abord par le cas où la perturbation est unique. Une condition pour la solubilité du problème est présentée qui nous permet de déduire la localisation et classification complète de capteurs pour le rejet de perturbation par retour de mesure. Ensuite, nous considérons le cas où il existe plusieurs perturbations. Le problème dans ce cas devient plus complexe. Nous proposons une nouvelle condition pour que le problème soit soluble. Cette condition nous apporte un nouveau point de vue sur le problème du rejet de perturbation par retour de mesure. A partir de cette condition, nous présentons certains résultats sur la localisation et classification de capteurs. A la fin de ce chapitre, nous donnons un exemple d'un système thermo-hydraulique pour illustrer nos résultats. De plus, un compensateur dynamique qui permet de rejeter la perturbation est calculé et puis validé en simulation.

Dans le quatrième chapitre, nous abordons de manière structurée la classification de capteurs pour le problème de détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs. Dans le cas où les conditions de solubilité générique de ce problème de détection et localisation de défauts sont vérifiées avec les capteurs existants du système, la contribution de notre travail est la classification, avec seulement une connaissance de la structure du système, de ces capteurs en fonction de leur importance relativement à la préservation de cette solubilité. Au début du chapitre, nous présentons le problème de détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs. Ensuite, la solubilité générique en termes graphiques de ce problème est donnée. Cette solubilité exige la satisfaction de deux sous-propriétés, l'observabilité et la condition de rang. Alors la classification de capteurs pour le problème de détection et localisation de défauts est effectuée en combinant les analyses de la classification de capteurs pour l'observabilité [Commault, Dion & Trinh, 2008] et pour la condition de rang. Ensuite, nous proposons une quantification de l'importance relative des capteurs. Dans ce but, la notion de degré de criticité est donnée. À la fin du chapitre, nous illustrons notre résultat par un exemple de procédé thermique.

Enfin, quelques conclusions et perspectives terminent ce mémoire.

Ce travail de thèse a donné lieu aux publications suivantes :

1. *Sensor classification for observability preservation under sensor failure*, C. Commault, J. M. Dion, T.H. Do et D. H. Trinh, 7th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes, SafeProcess09, Barcelona, Espagne (2009)
2. *Sensor classification for observability of structured systems*, T.H. Do, C. Commault et J. M. Dion, 7th Workshop on Advanced Control and Diagnosis, Zielona Gora, Pologne (2009)
3. *The disturbance rejection by measurement feedback problem revisited*, C. Commault, J. M. Dion et T.H. Do, American Control Conference, Baltimore, États-Unis d'Amérique (2010)
4. *Sensor location for the disturbance rejection by measurement feedback problem*, C. Commault, J. M. Dion et T.H. Do, IFAC Symposium System Structure and Control, Ancona, Italie (2010)
5. *Sensor classification for the fault detection and isolation, a structural approach*, C. Commault, J. M. Dion, D. H. Trinh et T.H. Do, International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, vol 25, page 1-17, (2011)
6. *Sensor location and classification for disturbance rejection by measurement feedback*, C. Commault, J. M. Dion et T.H. Do, Automatica (à paraître)

Chapitre 1

Les problèmes de localisation et classification des capteurs

1.1 Introduction

Les procédés industriels sont souvent équipés de réseaux de capteurs pour leur permettre d'atteindre certaines performances. Dans ce chapitre, nous nous intéressons à deux problèmes concernant l'ensemble des capteurs d'un système relativement à une propriété \mathcal{P} donnée :

- Le problème de la localisation des capteurs : si la propriété \mathcal{P} n'est pas satisfaite avec l'ensemble de capteurs initial du système, on cherche les réponses à des questions telles que combien de nouveaux capteurs ajouter et quelles variables du système mesurer pour que la propriété \mathcal{P} soit vérifiée ?
- Le problème de la classification des capteurs : si la propriété \mathcal{P} est satisfaite avec l'ensemble de capteurs initial du système, quelle est l'importance de chacun des capteurs pour la conservation de la propriété \mathcal{P} lorsque certains d'entre eux sont défaillants ? Pour répondre à ce problème, nous définissons trois catégories de capteurs : essentiel, utile et inutile. Un capteur essentiel est un capteur qui est obligatoire pour la préservation de la propriété \mathcal{P} . Un capteur utile peut contribuer à cette préservation dans certaines situations. Au contraire, un capteur inutile est un capteur qui n'a pas d'impact sur la propriété \mathcal{P} .

Le problème de localisation des capteurs et le problème de classification des capteurs sont illustrés par des exemples concernant l'observabilité du système. Ensuite, nous rappelons quelques travaux connus dans la littérature sur les aspects de localisation et classification de capteurs. Pour finir ce chapitre, nous présentons deux problèmes qu'on va étudier dans ce mémoire : le problème du rejet de perturbation par retour de mesure et le problème de détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs.

1.2 Motivation

Le contrôle dans le domaine industriel regroupe un ensemble d'activités techniques et technologiques destinées à l'automatisation des procédés et des systèmes de fabrication industrielle. Avec la progression des nouvelles technologies, les systèmes industriels sont de plus en plus complexes et la conception du système de contrôle est devenue indispensable. Cette dernière couvre plusieurs étapes telles que la définition de l'objectif de contrôle, la sélection de la structure de contrôle, le choix de la méthode, l'évaluation via la simulation ou l'expérimentation, etc. Dans l'étape de sélection de la structure de contrôle, le placement des capteurs/actionneurs est l'un des aspects qui doivent être considérés. Dans certains cas, ce travail joue un rôle fondamental dans la conception du système. Les actionneurs permettent au système d'évoluer dans le sens souhaité et les capteurs donnent une image sur l'état du système et permettent au contrôleur de mettre à jour la commande.

Plusieurs propriétés du système dépendent des capteurs/actionneurs telles que l'observabilité et la commandabilité. Au sens large, le mot "propriété" signifie la capacité à assurer une performance désirée du système telle que la capacité de détecter et localiser de défauts, la capacité de rejet de perturbation externe, etc. Alors, un placement ou une localisation adéquate des capteurs/actionneurs non seulement améliore de manière significative la performance du système mais aussi réduit la complexité et le coût de ce système. Ce problème de placement ou sélection des capteurs/actionneurs consiste à choisir un nombre approprié, le lieu et peut être aussi le type de capteurs/actionneurs.

D'autre part, on se trouve en pratique en présence de capteurs/actionneurs redondants. Ce fait est venu de la nécessité de fiabilité. Une autre explication de cette redondance est que parfois, pour atteindre une propriété souhaitée, on ajoute des nouveaux capteurs/actionneurs au système qui en est déjà équipé. La demande de réduire la complexité du système de contrôle ou bien les coûts de fonctionnement et d'entretien nous conduisent à minimiser le nombre de capteurs/actionneurs utilisés et à caractériser leur importance en cas de défaut.

1.3 Localisation des capteurs pour obtenir des propriétés spécifiques

Dans le cadre de ce travail, on s'intéresse à des propriétés du système qui sont dépendantes de l'ensemble des capteurs du système, c'est-à-dire du nombre de capteurs ainsi que de leur placement (autrement dit des variables mesurées).

Définition 1.3.1. *Soit un système Σ équipé d'un ensemble de capteurs Y et une propriété \mathcal{P} qui n'est pas vérifiée. Le **problème de localisation des capteurs** consiste à déterminer combien de nouveaux capteurs ajouter et quelles variables mesurer pour que cette propriété soit vérifiée.*

En fait, l'augmentation seule du nombre de capteurs ne garantit pas que le système atteigne la propriété \mathcal{P} , donc la pertinence de l'information apportée par un capteur supplémentaire doit également être prise en compte.

On va considérer un exemple de propriété : l'observabilité du système.

Exemple 1.3.1.

Considérons un système linéaire décrit par la représentation d'état sous la forme :

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.3.1)$$

où :

Chapitre 1. Les problèmes de localisation et classification des capteurs

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état,
- $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie. Notons que chaque variable de sortie est fournie par un capteur spécifique. Pour la simplicité, on note y_i à la fois pour le $i^{\text{ème}}$ capteur et pour la variable de sortie correspondante.
- A et C sont des matrices réelles de dimensions appropriées.

L'observabilité n'est pas concernée par les entrées du système et peut être vérifiée par la matrice d'observabilité :

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

et le système est observable si et seulement si $\text{rang}(\mathcal{O}) = n$, le nombre d'états.

Supposons maintenant que :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le système a deux variables d'état x_1 et x_2 . On obtient donc la matrice d'observabilité et son rang :

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{rang}(\mathcal{O}) = 1$$

Ce système n'est pas observable. Ce résultat est naturel car on n'a aucun capteur qui donne l'estimation de l'état x_2 . On se pose donc la question : comment rendre ce système observable ?

Pour que le système soit observable, il suffit d'ajouter un capteur supplémentaire qui mesure l'état x_2 . Par exemple, on ajoute $y_2 = x_2$ et le système a alors pour sortie :

$$y(t) = C_1 x(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(t)$$

On peut vérifier qu'avec ce capteur supplémentaire, le système est observable car :

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_1 A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{rang}(\mathcal{O}) = 2$$

Une autre possibilité est d'ajouter un capteur qui mesure la somme de x_1 et x_2 , c'est à dire que :

$$y(t) = C_2 x(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x(t)$$

Le système aussi devient observable car :

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C_2 \\ C_2 A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{rang}(\mathcal{O}) = 2$$

1.4 Classification des capteurs pour préserver des propriétés spécifiques

Reprenons le système du type (1.3.1) où les matrices d'état sont :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le système a deux états x_1, x_2 et deux sorties qui sont données par les deux capteurs y_1 et y_2 . Comme montré dans la section précédente, ce système est observable.

Supposons que pour une raison quelconque, on perde le capteur y_1 , c'est-à-dire que la matrice de sortie devient $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors on obtient la nouvelle matrice d'observabilité

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $\text{rang}(\mathcal{O}) = 2$. Le système est encore observable.

Au contraire, si on perd le capteur y_2 , la matrice de sortie devient $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dans ce cas on obtient la nouvelle matrice d'observabilité

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $\text{rang}(\mathcal{O}) = 1$. Le système n'est plus observable.

Cette analyse implique que le capteur y_2 est plus important que le capteur y_1 pour l'observabilité de notre système. Autrement dit, l'impact de chaque capteur pour l'observabilité est différent.

L'exemple précédent est une des observations qui nous conduisent au problème suivant. Considérons un système équipé d'un ensemble des capteurs Y et une propriété \mathcal{P} de ce système qui est vérifiée avec l'ensemble de capteurs Y initial. Il est intéressant de se demander si la propriété reste vérifiée lorsque certains capteurs sont défaillants et d'essayer de préciser l'importance de chacun des capteurs pour le maintien de \mathcal{P} . Est-ce qu'il existe des capteurs tels que leur défaillance n'influencera pas la propriété \mathcal{P} et des capteurs qui sont critiques pour \mathcal{P} , dont la défaillance fera perdre cette propriété? En répondant à ces questions, on résout *le problème de classification des capteurs*. L'intérêt de ce problème ne se limite pas aux raisons économiques mais aussi à la sûreté de fonctionnement du système.

Pour aborder ce problème, nous introduisons quelques définitions.

Définition 1.4.1. *Soit un système Σ équipé d'un ensemble de capteurs Y . Un capteur $y_i \in Y$ est dit **défaillant** s'il ne donne plus la mesure y_i*

Définition 1.4.2. *Soit un système Σ équipé d'un ensemble de capteurs Y et une propriété \mathcal{P} . Un sous-ensemble de capteurs V_Y inclus dans Y est dit un **ensemble admissible de capteurs** pour la propriété \mathcal{P} si cette propriété reste vraie avec le sous-ensemble de capteurs V_Y .*

Pour un système Σ équipé d'un ensemble de capteurs Y et une propriété \mathcal{P} qui est vérifiée, nous pouvons classer les capteurs en trois types, en fonction de leur importance pour la propriété \mathcal{P} :

- Capteurs inutiles.
- Capteurs utiles.
- Capteurs essentiels.

Définition 1.4.3. *Soit un système Σ équipé d'un ensemble de capteurs Y et une propriété \mathcal{P} qui est vérifiée avec cet ensemble de capteurs. Le capteur $y_i \in Y$ est un **capteur inutile** pour la propriété \mathcal{P} si pour tout ensemble admissible de capteurs V_Y contenant y_i , $V_Y \setminus \{y_i\}$ (l'ensemble V_Y duquel le capteur y_i a été enlevé) reste un ensemble admissible de capteurs. Le capteur qui n'est pas inutile est dit un **capteur utile**.*

Il résulte de cette définition qu'un capteur inutile ne contribue en aucun cas à faire que la propriété soit vérifiée, ce qui signifie que sa perte n'influence pas la propriété \mathcal{P} .

Définition 1.4.4. *Soit un système Σ équipé d'un ensemble des capteurs Y et une propriété \mathcal{P} qui est vérifiée avec cet ensemble de capteurs. Le capteur $y_i \in Y$ est un **capteur essentiel** pour la propriété \mathcal{P} s'il appartient à tout ensemble admissible de capteurs V_Y .*

Un capteur essentiel est un cas particulier de capteur utile. D'après sa définition, lors de la défaillance d'un capteur essentiel, la propriété \mathcal{P} n'est plus vérifiée, quel que soit l'état des autres capteurs.

La Figure 1.1 illustre les trois types de capteurs selon leur importance pour la propriété \mathcal{P} désirée du système.

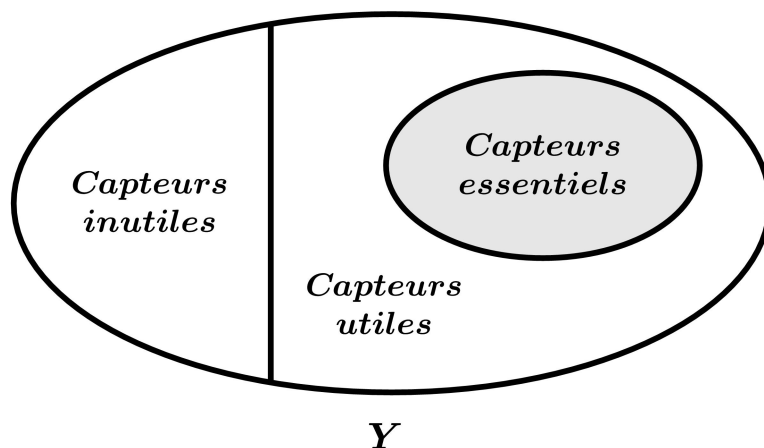


FIG. 1.1 – Les trois types de capteurs

Une autre classification des capteurs a été présentée par [Staroswiecki et al., 2004] en se basant sur la notion d'ensemble minimal de capteurs :

Définition 1.4.5. *Soit un système Σ équipé de l'ensemble des capteurs Y et une propriété \mathcal{P} qui est vérifiée. Un sous-ensemble de capteurs V_Y inclus dans Y est dit **ensemble minimal de capteurs** si la propriété \mathcal{P} est vérifiée avec V_Y mais pas avec un sous-ensemble propre de V_Y .*

Autrement dit, si V_Y est un ensemble minimal de capteurs, la propriété \mathcal{P} est vérifiée avec V_Y mais la défaillance de n'importe quel capteur $y_i \in V_Y$ va rendre la propriété \mathcal{P} non vérifiée.

La notion d'ensemble minimal de capteurs est liée avec les capteurs essentiels et inutiles comme suit [Commault et al., 2009] :

Proposition 1.4.1. *Soit un système Σ équipé de l'ensemble des capteurs Y et une propriété \mathcal{P} qui est vérifiée.*

- *Un capteur essentiel pour la propriété \mathcal{P} est un capteur qui appartient à tout ensemble minimal de capteurs.*
- *Un capteur inutile pour la propriété \mathcal{P} est un capteur qui n'appartient à aucun ensemble minimal de capteurs.*

Les notions précédentes sont illustrées par l'exemple suivant :

Exemple 1.4.1.

Considérons un système linéaire décrit par la représentation d'état sous forme (1.3.1).

Supposons que le système a deux états x_1, x_2 et que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On va envisager l'observabilité du système dans plusieurs cas différents concernant le choix de la matrice de sortie C (c'est-à-dire le choix des capteurs). L'observabilité est étudiée en utilisant la matrice d'observabilité.

- *1^{er} cas* : $C = C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, le système a deux sorties y_1 et y_2 et ce système est observable.

Il existe un seul ensemble admissible de capteurs pour assurer l'observabilité du système :

$$V_1 = \{y_1, y_2\}$$

D'après la Définition 1.4.4, y_1 et y_2 sont des capteurs essentiels. Il n'y a pas de capteur inutile. En fait, l'information de l'état x_i ($i = 1, 2$) n'est fournie que par le capteur y_i . La perte d'un des deux capteurs va donc rendre le système inobservable.

D'après la Définition 1.4.5, la solution $V = \{y_1, y_2\}$ est un ensemble minimal de capteurs qui préserve l'observabilité du système.

- *2^{ème} cas* : $C = C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, le système a deux sorties y_1 et y_2 où y_2 mesure la somme des états x_1 et x_2 . Ce système est observable.

On peut vérifier que l'observabilité du système est satisfaite par les ensembles de capteurs :

$$V_1 = \{y_1, y_2\}$$

$$V_2 = \{y_2\}$$

D'après la Définition 1.4.4, y_2 est un capteur essentiel parce qu'il appartient à tous les ensembles admissibles de capteurs. En fait, comme le capteur y_1 ne mesure

que l'état x_1 , si on perd le capteur y_2 , on n'a plus information sur l'état x_2 et le système n'est donc plus observable.

L'ensemble de capteurs $V_1 = \{y_1, y_2\}$ est le seul ensemble admissible de capteurs pour l'observabilité qui contient y_1 . Cependant $V_1 \setminus \{y_1\} = V_2$ est encore un ensemble admissible de capteurs pour l'observabilité. Cela implique que y_1 est un capteur inutile d'après la Définition 1.4.3. Remarquons que comparé au premier cas, dans ce cas le capteur y_1 devient un capteur inutile pour l'observabilité.

L'ensemble de capteurs $V_1 = \{y_1, y_2\}$ n'est pas un ensemble minimal de capteurs car il contient un autre ensemble minimal de capteurs $V_2 = \{y_2\}$.

– 3^{ème} cas : $C = C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, le système a trois sorties y_1, y_2 et y_3 qui rendent ce système observable.

L'observabilité du système est satisfaite par les ensembles de capteurs :

$$V_1 = \{y_1, y_2, y_3\}$$

$$V_2 = \{y_1, y_2\}$$

$$V_3 = \{y_1, y_3\}$$

$$V_4 = \{y_2, y_3\}$$

$$V_5 = \{y_3\}$$

D'après les Définitions 1.4.3 et 1.4.4, il n'existe ni capteur inutile ni capteur essentiel. Par exemple, y_1 n'est pas un capteur essentiel car il n'appartient pas à tous les ensembles admissibles de capteurs. Par contre y_1 n'est pas inutile car si on enlève ce capteur dans l'ensemble admissible de capteurs $V_2 = \{y_1, y_2\}$, on n'a plus la solution pour préserver l'observabilité du système. Dans ce cas les trois capteurs y_1, y_2 et y_3 sont les capteurs utiles non essentiels pour l'observabilité.

D'après la Définition 1.4.5, les ensembles minimaux de capteurs sont $\{y_1, y_2\}$ et $\{y_3\}$. Chacun de ces ensembles préserve l'observabilité du système mais la défaillance de n'importe quel capteur dans chaque ensemble va faire perdre l'observabilité.

1.5 Les travaux dans la littérature

La localisation des capteurs a été largement étudiée dans la littérature au cours des vingt dernières années. Le principal objectif était d'ajouter des capteurs soit pour donner au système des propriétés spécifiques soit pour mieux estimer les variables internes du système. Ce problème a été étudié pour diverses classes de modèles et un certain nombre de problèmes spécifiques. Les premières études ont concerné le domaine chimique par exemple la localisation des capteurs pour observabilité [Václavek & Loucka, 1976]. [Kretsovalis & Mah, 1987] propose la conception des réseaux de capteurs basée sur l'exactitude de l'estimation quand [Madron & Veverka, 1993] résout le problème de l'obtention d'un réseau des capteurs de coût minimum tel que le système soit observable. Un modèle statique basé sur des équations d'équilibre de masse est utilisé dans [Meyer et al., 1994] pour atteindre l'observabilité partielle ou totale en ajoutant des capteurs. Le choix optimal des capteurs est obtenu par un algorithme du type branch et bound. Dans [Raghuraj et al., 1999; Bhushan & Rengaswamy, 2000] les auteurs s'intéressent au placement des capteurs en utilisant des modèles qualitatifs et graphiques associés. Cependant dans les articles cités précédemment, les modèles qualitatifs ne prennent pas en compte la dynamique du système. Pour une vision complète de ces approches, le lecteur peut consulter par exemple [Bagajewicz, 1997; Chmielewski et al., 2002].

En prenant en compte la dynamique du système, [Commault et al., 2005] a utilisé l'analyse structurelle pour étudier la localisation des capteurs pour l'observabilité du système. Ce travail a été étendu aux systèmes avec entrée inconnue [Boukhobza & Hamelin, 2009]. Dans [Chen & Zheng, 1995; Liu et al., 2003], en utilisant l'approche algébrique, on fait le choix de la matrice de sortie afin d'obtenir des propriétés spécifiques telles que la structure des zéros finis et à l'infini. De nombreuses études sur la sélection des capteurs ont été rapportées dans [van de Wal & de Jager, 2001]. La plupart d'entre elles utilisent un critère d'optimisation. Pour appliquer ces méthodes, qui sont basées sur des outils algébriques et géométriques, l'exacte connaissance des matrices d'état caractérisant le système est nécessaire.

Le problème de détection et localisation de défaut (**FDI** - **F**ault **D**etection and **I**solation) a reçu une attention considérable dans les dernières années. La localisation des capteurs en est un enjeu important. L'efficacité d'un système de diagnostic repose sur la pertinence des informations qu'on peut obtenir à partir des capteurs utilisés. Suivant les méthodes et les types de performances désirées, plusieurs résultats sont disponibles. Des exemples de travaux antérieurs sont [Basseville et al., 1987] où la localisation des capteurs pour la performance optimale de détection est étudié et [Debouk et al., 2002], [Yoo & Lafortune, 2002] où un problème d'optimisation de la sélection des capteurs est étudié. Dans [Travé-Massuyès et al., 2001; Travé-Massuyès et al., 2003; Travé-Massuyès et al., 2006], on propose une méthode basée sur l'addition successive de capteurs en prenant en compte les critères de diagnosticabilité. Le principe de cette méthode est

d'analyser le modèle physique du système d'un point de vue structurel par des relations de redondance analytique [Cassar & Staroswiecki, 1997]. Suite à ces travaux, en utilisant un algorithme génétique, [Spanache et al., 2004] donne une méthode d'optimisation du coût du système de capteurs pour un certain degré de diagnosticabilité. Dans [Krysander & Frisk, 2008], les capteurs sont placés de telle sorte que le maximum d'isolabilité est possible, c'est-à-dire, les défauts dans les différentes composantes doivent, le plus possible, être isolés les uns aux autres. Dans [Commault, Dion & Yacoub-Agha, 2008], le problème de placement de capteurs pour la détection et la localisation de défauts dans le contexte des systèmes linéaires structurés est étudié. Ce travail se base sur des séparateurs d'entrée-sortie dans une représentation graphique du système. Les auteurs visent à ajouter des capteurs tels que, dans le cas linéaire, il est possible d'obtenir un transfert diagonal des défauts vers les résidus. Le même problème est étudié dans [Commault & Dion, 2007] lorsque les systèmes sont affectés par des perturbations externes. Une autre méthode est présentée dans [Chamseddine, Noura, Raharijaona & Ouladsine, 2007] pour résoudre la localisation de capteurs dans le problème de FDI en l'exprimant comme un problème d'optimisation. L'inconvénient de cette méthode est que la complexité et la dimension du problème d'optimisation deviennent grandes pour un système structuré de grande dimension.

En classant les capteurs en trois types essentiels, inutiles et utiles, [Commault et al., 2007] a classé les capteurs pour le problème de la détection et la localisation de défauts dans le cas où le système n'est pas affecté par des perturbations externes. Dans le même esprit, la classification des capteurs pour observabilité des systèmes linéaires structurés a été étudiée par [Commault, Dion & Trinh, 2008]. Les auteurs proposent une méthode pour classer les capteurs en trois catégories sans lister toutes les solutions pour l'observabilité. Pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure, quelques résultats préliminaires ont été abordés dans [Dion et al., 2008]. [Staroswiecki et al., 2004] donne une classification pour l'observabilité en utilisant la notion d'ensemble minimal des capteurs qui a été étendue dans [Chamseddine, Noura & Raharijaona, 2007] pour la tolérance aux défauts de capteurs et dans [Frisk & Krysander, 2007] pour le problème de diagnostic.

La classification des capteurs a des conséquences en exploitation où un soin tout particulier doit être apporté aux capteurs essentiels, en particulier en termes de maintenance. Du plus, les résultats de cette classification peuvent être utilisés dans l'étape de conception. Par exemple, les capteurs essentiels doivent être choisis de très bonne qualité, avec une fiabilité maximale et leur mise en redondance doit être envisagée.

1.6 Les problèmes étudiés

Dans cette section, nous présentons deux problèmes dont la localisation et classification de capteurs sont étudiées dans ce mémoire.

1.6.1 Rejet de perturbation par retour de mesure

Le rejet de perturbation par retour d'état est un problème bien connu et a été une des applications emblématiques de la théorie géométrique [Wonham, 1974; Basile & Marro, 1992]. Lorsque tous les états ne sont pas disponibles pour la mesure, le rejet de perturbations doit se baser sur le retour de mesures.

Considérons un système linéaire avec la représentation d'état suivante :

$$\Sigma^{dz} : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ed(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ z(t) = Hx(t) \end{cases}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée, $d(t) \in \mathbb{R}^q$ est le vecteur de perturbation, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie à réguler et $z(t) \in \mathbb{R}^r$ est le vecteur de sortie mesurée. A, B, E, C et H sont des matrices réelles de dimensions appropriées.

Le rejet exact de perturbation par retour de mesure consiste à trouver un compensateur dynamique (voir la Figure 1.2) défini par

$$\Sigma^{zu} : \begin{cases} \dot{w}(t) = Lw(t) + Rz(t) \\ u(t) = Sw(t) + Pz(t) \end{cases}$$

où $w(t) \in \mathbb{R}^\mu$, tel que, en boucle fermée, le transfert entre la perturbation et la sortie à réguler soit nul c'est-à-dire que la perturbation n'a aucun effet sur la sortie à réguler.

Il s'agit d'un problème complexe qui a néanmoins été résolu d'une manière élégante en termes géométriques ([Schumacher, 1980; Willems & Commault, 1981]. Dans le contexte des systèmes structurés, ce problème a été résolu par l'approche graphique [van der Woude, 1993; Commault et al., 1997]. L'idée intuitive de cette approche est que le rejet de perturbation par retour de mesure est potentiellement soluble si le temps nécessaire pour que la perturbation arrive à la sortie est plus long que le temps pour obtenir l'information sur la perturbation (par mesure de quelques états du système) plus le temps pour l'éliminer. Il est évident que la solution de ce problème dépend de l'ensemble de capteurs du système.

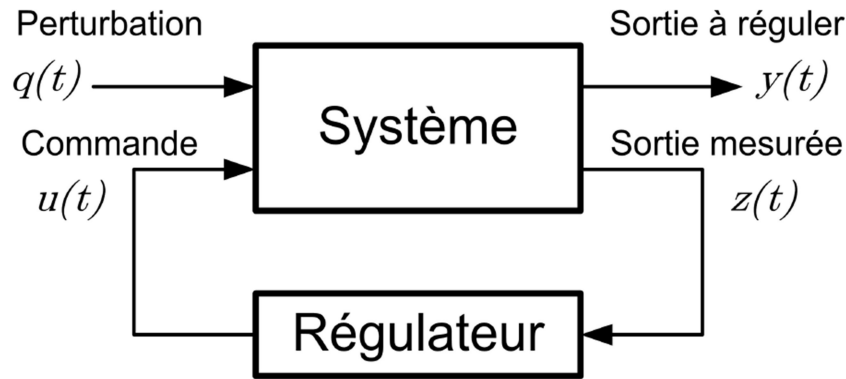


FIG. 1.2 – Rejet de perturbation par un retour dynamique de mesure

Les travaux précédents ne donnent que des conditions pour vérifier si le rejet de perturbation par retour de mesure est soluble et ne répondent pas au problème de localisation des capteurs. [de Olivera & Geromel, 2000] a étudié la localisation des capteurs pour le rejet de perturbation mais dans un contexte d’optimisation. Le problème est formulé comme un programme mixte booléen semidéfini pour minimiser la norme H_2 de la matrice de transfert entre la perturbation et la sortie à réguler.

Nous donnerons plus tard de nouvelles conditions de solubilité du rejet exact de perturbation par retour de mesure. Ces conditions nous permettent d’étudier les deux aspects localisation/classification des capteurs pour ce problème. Notons que le classement des capteurs n’a jamais été étudié en relation avec le problème du rejet de perturbation par retour de mesure bien que la solubilité de ce problème soit très dépendante de l’ensemble de capteurs.

1.6.2 Détection et localisation de défauts avec une banque d’observateurs

Considérons un système linéaire avec des défauts. Ce système est représenté par des équations d’état de la forme suivante :

$$\Sigma^{fd} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Lf(t) + Ed(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Mf(t) + Hd(t) \end{cases}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d’état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d’entrée, $f(t) \in \mathbb{R}^r$ est le vecteur de défaut additif, $d(t) \in \mathbb{R}^q$ est le vecteur de perturbation et $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie mesurée. Chaque variable de sortie est fournie par un capteur spécifique. A, B, C, L, M, E et H sont des matrices réelles de dimensions appropriées.

Le problème de détection et localisation de défauts consiste à mesurer des variables au cours du fonctionnement réel du système afin de déterminer si le fonctionnement

du système est normal ou défaillant. Pour cela, on calcule des signaux indicateurs de défauts nommés *résidus* dans le sens où leur valeur est nulle lorsque le système est en fonctionnement normal et différente de zéro en cas de défaillance. Dans notre étude, nous considérons l'approche de type estimation d'état où les résidus sont générés en utilisant une banque d'observateurs afin d'avoir un transfert défauts-résidus diagonal. Le principe général de cette approche est illustré Figure 1.3.

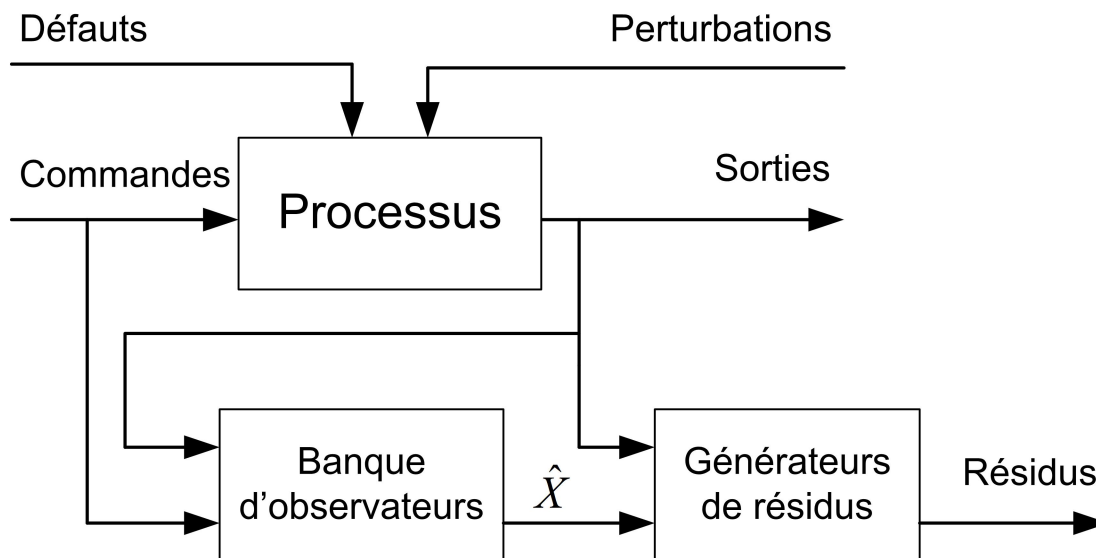


FIG. 1.3 – Un principe pour générer les résidus

Le problème de détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs dépend évidemment des capteurs disponibles. Quand le problème n'a pas de solution avec les sorties (capteurs) actuelles du système, nous avons besoin d'ajouter de nouveaux capteurs qui mesurent d'autres variables pour que le problème ait une solution. Ce problème de localisation de capteurs a été étudié par une analyse structurelle dans [Commault & Dion, 2007; Commault, Dion & Yacoub-Agha, 2008]. Dans le cas où le système n'est pas affecté par des perturbations, les auteurs ont aussi étudié la classification des capteurs en trois types : essentiels, utiles et inutiles [Commault et al., 2007]. Dans le Chapitre 5, nous allons étendre cette classification pour un système affecté par des perturbations et avec la contrainte d'observabilité.

1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé deux problèmes liés à l'ensemble des capteurs disponibles :

- Localisation des capteurs : quand une propriété (ou une performance) n'est pas satisfaite avec l'ensemble des capteurs donnés, combien de nouveaux capteurs sont

Chapitre 1. Les problèmes de localisation et classification des capteurs

nécessaires et où devraient-ils être situés pour vérifier la propriété ?

- Classification des capteurs : quand une propriété (ou une performance) est vérifiée avec l'ensemble des capteurs donnés, quel est l'impact de la défaillance de chaque capteur sur cette propriété ?

Ces deux problèmes qui sont d'une grande importance pratique, ont fait l'objet de très nombreux travaux (en particulier la localisation). Ils peuvent souvent être abordés de manière structurée. Remarquons que de manière duale, on a les problèmes de la localisation et classification des actionneurs.

Nous allons utiliser les notions présentées dans ce chapitre pour étudier deux problèmes de commande et d'observation du système :

- Le rejet de perturbation par retour de mesure dans le Chapitre 3.
- La détection et la localisation de défauts avec une banque d'observateurs dans le Chapitre 4.

Dans ce but, nous allons d'abord présenter dans le chapitre suivant la notion de système linéaire structuré. L'approche structurée est une approche intéressante pour l'étude des systèmes dynamiques linéaires.

Chapitre 2

Systemes linéaires structurés

2.1 Introduction

Les systèmes physiques sont souvent représentés par des modèles d'état. Des études sur ces systèmes requièrent des approches de modélisation. L'objectif principal de ce chapitre est de présenter la notion de système linéaire structuré, qui est une classe assez générale de systèmes linéaires multi-variables. Ces systèmes sont décrits par des matrices d'état dont les paramètres sont soit fixés à zéro soit libres, mais les positions des paramètres nuls et non nuls dans les matrices sont connues. Les paramètres non nuls représentent l'existence de relations entre variables. Avec ces systèmes, on étudie des propriétés génériques (ou structurelles) c'est-à-dire des propriétés qui sont vraies pour presque toutes les valeurs des paramètres libres. Des graphes orientés peuvent être associés aux systèmes structurés, où les sommets du graphe correspondent aux différentes variables du système et les arcs représentent les paramètres libres. L'approche graphique est un outil très efficace pour étudier et vérifier des propriétés génériques d'un système structuré.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. Dans la deuxième section, nous rappelons le concept de système linéaire structuré. La notion de propriété générique est définie dans la section suivante. Ensuite, on présente une manière d'associer un graphe orienté à un système structuré et quelques notions de base sur les graphes. Les propriétés génériques du système peuvent alors souvent être caractérisées très simplement en termes de propriétés du graphe associé. Alors les exemples de l'illustration sur quelques propriétés d'un système linéaire structuré sont donnés dans la cinquième section. Enfin, une conclusion termine ce chapitre.

2.2 Système linéaire structuré

2.2.1 Motivation

Considérons un exemple du moteur à courant continu dont le principe de fonctionnement est schématisé ci après (voir Figure 2.1).

- L'entrée du système est la tension $u(t)$ aux bornes du circuit électrique.
- La sortie est la position $\theta(t)$ de l'arbre moteur.
- R, L sont respectivement la résistance et l'inductance du circuit électrique.
- $E(t)$ est la force contre-électromotrice.
- f est le coefficient de frottements visqueux.
- J est l'inertie de l'arbre moteur.

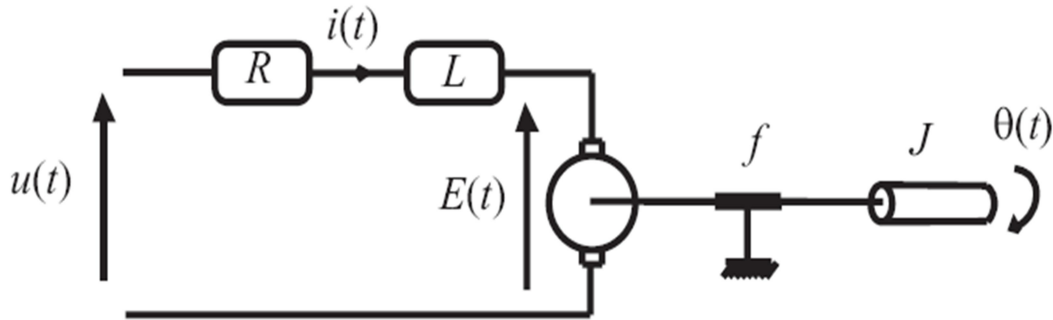


FIG. 2.1 – Moteur à courant continu

L'application des principes fondamentaux conduit aux équations suivantes, où $\Gamma(t)$ est le couple moteur et k_e, k_c sont des coefficients constants.

$$\begin{aligned} u(t) &= Ri(t) + Ldi/dt + E(t) \\ E(t) &= k_e\dot{\theta}(t) \\ \Gamma(t) &= J\ddot{\theta}(t) + f\dot{\theta}(t) = k_c i(t) \end{aligned}$$

En proposant $x = (x_1 \ x_2 \ x_3)^T = (\theta \ \omega \ i)^T$ où ω est la vitesse de rotation de l'arbre, on obtient la représentation d'état du système comme suit :

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -f/J & k_c/J \\ 0 & -k_e/L & -R/L \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le modèle physique ci-dessus a une certaine structure :

- Certains coefficients sont égaux à zéros, ceux qui correspondent à l'absence de relation physique entre certaines variables du système.
- Certains coefficients sont constants, ceux qui impliquent que certaines variables d'état sont les dérivées d'autres variables.
- Certains coefficients dépendent de la valeur des paramètres physiques du système.

Une autre situation est celle de la linéarisation des modèles dynamiques autour d'un point de fonctionnement. Dans ce cas, la valeur des coefficients des matrices d'état du

système linéaire varie avec le point de fonctionnement mais la structure zéro/non zéro de ces coefficients reste inchangée.

Les analyses précédentes montrent que la plupart des systèmes que nous sommes amenés à étudier présentent une certaine forme de structure. Pour étudier les propriétés et la possibilité de contrôle des systèmes dynamiques linéaires, on peut utiliser plusieurs approches. La première approche vise à obtenir les paramètres du système. Ces paramètres peuvent être donnés par le constructeur ou être identifiés par des expériences. Une fois la représentation numérique du système connue, les résultats de la théorie de la commande peuvent être appliqués. Cependant, cette approche ne prend pas en compte l'information structurelle du système. De plus les erreurs sur les paramètres, qui viennent des erreurs d'identification, de mesure ou d'approximation, peuvent engendrer des résultats inexacts. Il existe des approches telles que les modèles stochastiques ou les études de robustesse qui permettent de prendre en compte l'aspect incertain du système. Ces approches permettent d'obtenir de lois de commande stabilisantes mais ne permettent pas d'analyser la structure interne du système et ne conduisent en général qu'à des conditions suffisantes pour satisfaire des performances souhaitées.

Une notion intéressante qui satisfait certaines observations précédentes est la notion de système structuré dans une représentation d'état avec coefficients paramétrés [Lin, 1974; Dion et al., 2003]. L'idée principale est qu'on s'intéresse seulement à des informations du type coefficients nuls/non-nuls dans les matrices d'état. Notons qu'il y a dans ce modèle un compromis entre la précision de la modélisation et la simplicité des techniques d'analyse. Cette modélisation a les caractéristiques suivantes :

1. Elle permet de prendre en compte une partie importante de l'information structurelle provenant des lois physiques et de la décomposition du système en sous-systèmes.
2. Elle permet d'étudier des propriétés du système qui dépendent de sa structure mais (presque) pas des valeurs des paramètres inconnus ou mal connus.
3. Elle donne à travers un graphe une représentation visuelle de la structure du système
4. Elle donne la possibilité de traiter des problèmes de grande dimension avec un temps de calcul raisonnable.

2.2.2 Définition

Suite au concept introduit initialement par Lin [Lin, 1974], la définition des systèmes structurés en termes de "matrice structurée", où apparaissent des paramètres soit nuls soit algébriquement indépendants, a été proposée dans [Linnemann, 1981; Murota, 1987]. Schématiquement, un système linéaire structuré est un système linéaire pour lequel la seule information connue est l'existence ou l'absence de relation entre variables.

Définition 2.2.1. Soit Σ_Λ un système linéaire décrit par la représentation d'état :

$$\Sigma_\Lambda : \begin{cases} \dot{x}(t) = A_\Lambda x(t) + B_\Lambda u(t) \\ y(t) = C_\Lambda x(t) \end{cases} \quad (2.2.1)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée et $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie. A_Λ, B_Λ et C_Λ sont des matrices de dimensions appropriées. Le système Σ_Λ est appelé système linéaire structuré si la matrice

$$J = \begin{pmatrix} A_\Lambda & B_\Lambda \\ C_\Lambda & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice structurée, c'est-à-dire que les éléments de cette matrice sont soit fixés à zéro soit des paramètres libres.

La structure du système est donnée par les positions des paramètres nuls fixes et des paramètres indépendants. Les éléments nuls indiquent une absence de relation entre les variables alors que des paramètres libres représentent les différentes relations entre les variables. $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\} \in \mathbb{R}^k$ contient l'ensemble des paramètres indépendants de la matrice J. Pour chaque valeur de Λ , le système est complètement défini.

Exemple 2.2.1.

Considérons deux systèmes linéaires avec les matrices d'état ci-dessous :

$$(I) : A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_1 = [1.5 \quad 0 \quad 0],$$

$$(II) : A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = [2.5 \quad 0 \quad 0]$$

Dans chaque système, il y a trois états x_1, x_2 et x_3 , deux commande u_1 et u_2 . Les deux systèmes ci-dessus ont la même répartition des termes nuls/non-nuls dans les matrices d'état. On dit que ces deux systèmes ont la même structure. Ces systèmes peuvent donc être représentés par le modèle structuré Σ_Λ suivant :

$$A_\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_3 & 0 \\ 0 & \lambda_4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_\Lambda = [\lambda_5 \quad 0 \quad 0] \quad (2.2.2)$$

Dans la matrice composite $J = \begin{pmatrix} A_\Lambda & B_\Lambda \\ C_\Lambda & 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, les zéros sont

fixés et $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_5\} \in R^5$ est le vecteur des paramètres libres. Ce modèle représente donc une classe de systèmes linéaires qui ont la même structure que les systèmes (I) et (II). Ici, les paramètres λ_1 et λ_2 indiquent que la dynamique de l'état x_3 dépend des états x_1 et x_2 . Le paramètre λ_3 indique que la dynamique de l'état x_1 dépend de la commande u_1 , etc.

2.3 Propriétés génériques

Dans la littérature sur les systèmes linéaires, la commandabilité est une des propriétés fondamentales. Pour vérifier la commandabilité d'un système linéaire, on utilise le plus souvent le critère de Kalman [Kailath, 1980] :

Théorème 2.3.1. *Soit Σ un système linéaire avec sa représentation d'état*

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.3.1)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée et $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie. A, B et C sont des matrices réelles constantes de dimensions appropriées. Ce système est commandable si et seulement si le rang de la matrice de commandabilité $\mathcal{C} = [B \ AB \ \dots \ A^{(n-1)}B]$ est égal à n .

Reconsidérons le système structuré Σ_Λ de l'Exemple 2.2.1. La matrice de commandabilité de ce système est :

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1\lambda_3 & \lambda_2\lambda_4 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Donc, la matrice de commandabilité \mathcal{C} est de rang plein si et seulement si une des deux

sous-matrices $\begin{bmatrix} \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1\lambda_3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2\lambda_4 \end{bmatrix}$ est de rang plein. C'est le cas quand

$\lambda_1\lambda_3\lambda_4 \neq 0$ ou $\lambda_2\lambda_3\lambda_4 \neq 0$. C'est-à-dire que le système Σ_Λ est commandable pour presque toute valeur de $\Lambda \in R^5$.

L'exemple précédent nous montre que, dans l'étude des systèmes linéaires structurés, il y a des propriétés qui sont vraies pour presque toutes les valeurs des paramètres libres. Ce concept a été présenté de manière théorique, sous le nom "propriété générique" ou "propriété structurelle", en particulier par [Wonham, 1974], [Murota, 1987] et [Reinschke, 1988].

Une variété algébrique $\mathbf{V} \subset \mathbb{R}^\tau$ est définie comme l'hypersurface caractérisée par les racines communes d'un nombre fini de polynômes p_1, p_2, \dots, p_k :

$$\mathbf{V} = \{\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\tau\} | p_i(\Lambda) = 0, i = 1, \dots, k\}$$

\mathbf{V} est propre si $\mathbf{V} \neq \mathbb{R}^\tau$. La notion de généricité peut être définie dans le contexte des systèmes structurés comme suit :

Définition 2.3.1. Soit Σ_Λ un système linéaire structuré avec l'ensemble des paramètres indépendants $\Lambda \in \mathbb{R}^\tau$. Une propriété \mathcal{P} est dite générique si \mathcal{P} est vraie pour toute valeur de Λ qui n'appartient pas à une variété algébrique propre de \mathbb{R}^τ .

En schématisant, on peut dire qu'une propriété est générique si elle est vraie pour presque toutes les valeurs des paramètres libres.

Dans l'exemple ci-dessus, la propriété "*le système structuré Σ_Λ est commandable*" est vraie pour toute valeur des paramètres $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_5\} \in \mathbb{R}^5$ excepté celles appartenant à la variété algébrique \mathbf{V} :

$$\mathbf{V} = \{\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_5\} | \lambda_1 \lambda_3 \lambda_4 = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 = 0\}$$

De nombreuses propriétés génériques dans le cadre des systèmes linéaires structurés ont été étudiées. La première propriété est la commandabilité structurelle des systèmes linéaires mono-entrée [Lin, 1974]. L'auteur a représenté un système linéaire par un graphe orienté et les conditions de commandabilité ont été traduites graphiquement en termes de chemins et de cycles du graphe. Cette étude a été généralisée aux systèmes linéaires multi-entrées dans [Shields & Pearson, 1976; Glover & Silverman, 1976] et après dans [Mayeda, 1981; Linnemann, 1986] avec des démonstrations simplifiées. L'observabilité, la propriété duale de la commandabilité, a aussi été étudiée pour les systèmes linéaires singuliers structurés [Boukhobza et al., 2006] et pour les systèmes linéaires structurés avec entrée inconnue [Boukhobza & Hamelin, 2007b].

Des recherches portant sur d'autres propriétés génériques ont également été effectuées. Le rang générique de la matrice de transfert d'un système structuré a été étudié par [Ohta & Kodama, 1985] et par [van der Woude, 1991a]. L'étude de la structure à l'infini [van der Woude, 1991b; Commault et al., 1991] a permis de donner des conditions génériques de solubilité à différents problèmes de commande tels que le découplage statique [Dion & Commault, 1993] qui simplifient un premier résultat donné par [Linnemann, 1981] ou

le rejet de perturbation par retour d'état [Commault et al., 1991]. Le problème de rejet de perturbation par retour de sortie a été étudié par [van der Woude, 1994; Commault et al., 1993; Commault et al., 1997; Bahar et al., 1996]. Le problème de détection et localisation de défauts, qui a reçu beaucoup d'attention dans les années récentes [Frank, 1996; Chen & Patton, 1999], a été étudié aussi dans le cadre des systèmes linéaires structurés [Commault, Dion, Sename & Motyeian, 2002]. Beaucoup d'autres références peuvent être consultées dans [Murota, 2000; Dion et al., 2003]. Quelques propriétés seront illustrées et étudiées plus tard dans ce mémoire.

2.4 Graphe associé

L'étude des systèmes linéaires structurés à l'aide d'un graphe orienté associé fait partie des atouts majeurs de cette approche. La théorie des graphes est un outil efficace tant au niveau du calcul que de la pédagogie. En effet, un système linéaire structuré sera modélisé par un graphe approprié qui contient toute l'information du modèle structuré. L'étude des propriétés génériques revient alors à vérifier certaines conditions graphiques. Celles-ci nous donnent de meilleures intuitions sur la nature structurelle des propriétés considérées. Si la propriété désirée est vérifiée, des paramètres indépendants peuvent être considérés comme degrés de liberté dans des étapes suivantes (conception, optimisation,...). De plus, grâce à la caractérisation graphique, on peut suggérer des modifications sur le système pour avoir la propriété désirée. D'autre part, avec des algorithmes classiques de la théorie des graphes, l'approche graphique est adaptée pour l'étude des systèmes de grandes dimensions.

Le graphe associé utilisé dans ce travail est un graphe orienté. Il existe d'autres types de graphes dans le cadre de l'analyse structurelle d'un système. Par exemple, [Staroswiecki & Cassar, 1996; Staroswiecki et al., 2000; Staroswiecki, 2007; Assad, 2002] ont utilisé des graphes bipartis pour étudier les problèmes de diagnostic et de tolérance aux défauts. Ce type de graphe est exploité pour représenter des relations existantes entre contraintes et variables. Par conséquent, il permet de traiter les systèmes constitués d'un ensemble de composants reliés par un ensemble de contraintes.

Un autre type de graphe utilisé est le Bond-graph [Sueur & Dauphin-Tanguy, 1991; Bouamama et al., 2000; Rahmani & Dauphin-Tanguy, 2006]. L'approche Bond-graph est basée essentiellement sur la caractérisation des phénomènes d'échange d'énergie au sein du système. Cette approche a été utilisée pour analyser des propriétés génériques telles que la commandabilité, l'observabilité [Sueur & Dauphin-Tanguy, 1989] ou pour le problème de diagnostic [Bouamama et al., 2000; Rahmani & Dauphin-Tanguy, 2006]. L'intérêt du bond-graph est de décrire de manière graphique tous les échanges énergétiques. Les modèles développés permettent de conserver un lien avec les phénomènes physiques. La difficulté est que la représentation par bond-graph n'est pas toujours simple à aborder

pour des non spécialistes. Plus d'informations sur les bond-graphs peuvent être trouvées dans le livre [Dauphin-Tanguy, 2000].

2.4.1 Graphe orienté

Nous rappelons dans cette partie quelques notions de théorie des graphes [Berge, 1973; Murota, 1987].

Définition 2.4.1. *Un graphe orienté $G = (V, W)$ est un couple d'ensembles :*

- un ensemble $V = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ dont les éléments sont appelés sommets,
- un ensemble $W = \{w_1, w_2, \dots, w_l\}$ dont les éléments sont appelés arcs. Un arc $w_h \in E$ est défini par $w_h = (v_i, v_j)$ où $v_i \in V$ est appelé sommet initial, $v_j \in V$ est appelé sommet terminal de l'arc w_h .

Pour un graphe orienté $G = (V, W)$, on a les définitions et notations suivantes :

- S'il existe un arc (v_i, v_j) , le sommet v_j est dit un **successeur** du sommet v_i et le sommet v_i est dit un **prédécesseur** du sommet v_j .
- Un **chemin** du sommet v_{μ_0} au sommet v_{μ_q} est une séquence d'arcs $(v_{\mu_0}, v_{\mu_1}), (v_{\mu_1}, v_{\mu_2}), \dots, (v_{\mu_{q-1}}, v_{\mu_q})$ telle que $v_{\mu_i} \in V$ pour $i = 0, \dots, q$ et $(v_{\mu_{i-1}}, v_{\mu_i}) \in W$ pour $i = 1, \dots, q$. Pour simplifier, on note ce chemin $R = (v_{\mu_0}, v_{\mu_1}, \dots, v_{\mu_q})$. v_{μ_0} est appelé le **sommet initial** et v_{μ_q} est appelé le **sommet terminal** de R .
- Le chemin est dit **simple** si chacun de ses sommet n'apparaît qu'une seule fois.
- La **longueur** d'un chemin est le nombre de ses arcs. Un **plus court chemin** du sommet v_{μ_0} au sommet v_{μ_q} est un chemin simple entre ces deux sommets ayant la longueur minimum.
- Un chemin R tel que $v_{\mu_0} \equiv v_{\mu_q}$ est appelé un **circuit**. Si de plus il ne rencontre qu'une fois le même sommet (excepté v_{μ_0} et v_{μ_q}), le circuit est dit un **cycle**.
- Considérons V_1, V_2 deux sous-ensemble non vides de V . Un chemin R est appelé un **chemin** $V_1 - V_2$ si son sommet initial appartient à V_1 et son sommet terminal appartient à V_2 . De plus, si seulement les sommets initial et terminal de R appartiennent à $V_1 \cup V_2$, il est dit chemin **direct** $V_1 - V_2$.
- Des chemins $V_1 - V_2$ sont dit **disjoints** s'il n'ont pas de sommet en commun.
- Un **couplage** de taille k entre V_1 et V_2 est un ensemble de k chemins $V_1 - V_2$ simples et disjoints.
- Un **couplage maximal** entre V_1 et V_2 est un ensemble maximal de chemins $V_1 - V_2$ simples et disjoints. Sa taille est notée $\rho(V_1, V_2)$.
- La **longueur d'un couplage** entre V_1 et V_2 est la somme des longueurs de tous ses chemins. On note $l(V_1, V_2)$ la longueur minimale d'un couplage maximal entre V_1 et V_2 .
- Un sous ensemble S de V est appelé un $V_1 - V_2$ **séparateur** si tous les chemins $V_1 - V_2$ contiennent un sommet dans S . La **taille** d'un séparateur est le nombre

de ses sommets.

- Un *séparateur minimal* est un séparateur de taille minimale. Un résultat classique (Théorème de Menger) est que la taille minimale d'un $V_1 - V_2$ séparateur est $\rho(V_1, V_2)$ [Murota, 1987].
- L'ensemble des sommets qui appartiennent à tous les couplages maximaux entre V_1 et V_2 est appelé $V_1 - V_2$ *sommets essentiels* et noté $V_{ess}(V_1, V_2)$.
- Le *séparateur minimal d'entrée*, $S^*(V_1, V_2)$, est l'ensemble de tous les sommets terminaux de tous les chemins directs $V_1 - V_{ess}(V_1, V_2)$.

Exemple 2.4.1.

La Figure 2.2 illustre un graphe orienté où l'ensemble des sommets $V = \{v_1, v_2, \dots, v_7\}$. Sur ce graphe, on a les arcs qui relient quelques sommets, par exemple l'arc (v_1, v_4) ou l'arc (v_5, v_7) .

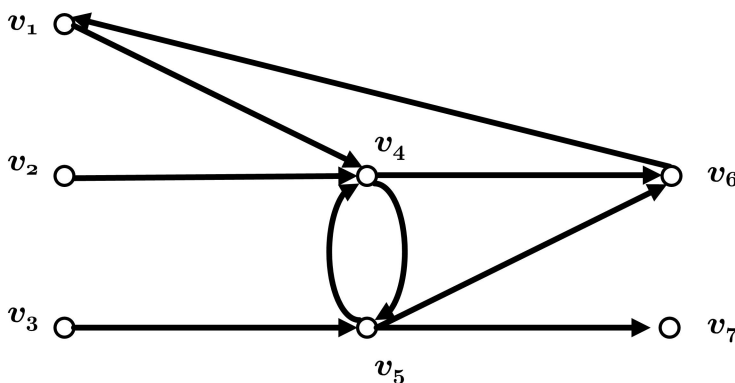


FIG. 2.2 – L'exemple d'un graphe orienté

Dans cet exemple, (v_1, v_4, v_6) et $(v_1, v_4, v_5, v_4, v_6)$ sont deux chemins du sommet v_1 au sommet v_6 . Cependant le chemin $(v_1, v_4, v_5, v_4, v_6)$ n'est pas un chemin simple car il contient deux fois le sommet v_4 . Le chemin (v_1, v_4, v_6) est le plus court chemin du sommet v_1 au sommet v_6 dont la longueur est égale à deux. (v_4, v_5, v_4) et (v_1, v_4, v_6, v_1) sont deux cycles.

Considérons maintenant deux sous-ensembles de V : $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ et $V_2 = \{v_6, v_7\}$.

- Le chemin (v_3, v_5, v_7) est un chemin $V_1 - V_2$ car son sommet initial v_3 appartient à V_1 et son sommet terminal v_7 est appartient à V_2 . Par contre, le chemin $(v_6, v_1, v_4, v_5, v_7)$ n'est pas un chemin $V_1 - V_2$. Son sommet initial v_6 n'appartient pas à V_1 .
- Deux chemins (v_1, v_4, v_6) et (v_3, v_5, v_7) sont deux chemins $V_1 - V_2$ disjoints car ils n'ont pas de sommet en commun. L'ensemble de ces deux chemins constitue un couplage de taille deux entre V_1 et V_2 . Il est aussi un couplage maximal entre V_1 et V_2 . Ce couplage est de longueur 4.

- Deux l'ensembles $\{v_4, v_5, v_6\}$ et $\{v_6, v_7\}$ sont deux $V_1 - V_2$ séparateurs car tous les chemins $V_1 - V_2$ contiennent au moins un sommet dans chacun de ces ensembles. D'après le Théorème de Menger, un $V_1 - V_2$ séparateur minimal est de taille 2, donc $\{v_6, v_7\}$ est un $V_1 - V_2$ séparateur minimal.
- L'ensemble des sommets qui appartiennent à tous les couplages maximaux entre V_1 et V_2 est $\{v_4, v_5, v_6, v_7\}$. Le séparateur minimal d'entrée entre V_1 et V_2 est $S^*(V_1, V_2) = \{v_4, v_5\}$.

2.4.2 Graphe orienté associé à un système linéaire structuré

Soit un système linéaire structuré Σ_Λ du type (2.2.1). Un graphe orienté $G(\Sigma_\Lambda) = (V, W)$ peut être associé à Σ_Λ de la manière suivante :

- ensemble des sommets : $V = U \cup X \cup Y$ où :
 - $U = \{u_1, \dots, u_m\}$ est l'ensemble de sommets d'entrée et correspond aux m entrées du système.
 - $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ est l'ensemble de sommets d'état et correspond aux n états du système.
 - $Y = \{y_1, \dots, y_p\}$ est l'ensemble de sommets de sortie et correspond aux p sorties du système.
- ensemble des arcs : $W = W_{UX} \cup W_{XX} \cup W_{XY}$ où :
 - $W_{UX} = \{(u_j, x_i) \mid b_{ij} \neq 0\}$ correspond aux relations non nulles entrées-états.
 - $W_{XX} = \{(x_j, x_i) \mid a_{ij} \neq 0\}$ correspond aux relations non nulles états-états.
 - $W_{XY} = \{(x_j, y_i) \mid c_{ij} \neq 0\}$ correspond aux relations non nulles états-sorties.
 où a_{ij} (resp. b_{ij}, c_{ij}) est l'élément (i, j) de la matrice A_Λ (resp. B_Λ, C_Λ).

Cette représentation est naturelle pour un système linéaire. Un sommet représente une variable du système et un arc correspond à une relation de dépendance (directe) entre deux variables. En effet, un arc du sommet u_j (resp. x_j) vers le sommet x_i signifie que l'évolution de la dérivée de $x_i(t)$ dépend de l'évolution de $u_j(t)$ (resp. $x_j(t)$). De la même manière, un arc du sommet x_j vers le sommet y_i signifie que l'évolution de la sortie $y_i(t)$ dépend de l'évolution de la variable d'état $x_j(t)$.

Avec le graphe $G(\Sigma_\Lambda)$ associé au système Σ_Λ , nous avons les définitions suivantes :

Définition 2.4.2. *Soit un système linéaire structuré Σ_Λ du type (2.2.1) avec son graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$*

- Un sommet d'état $x_i \in X$ est dit **connecté à la sortie** s'il existe un chemin de ce sommet vers un sommet de sortie. Ce type de chemin est appelé un **chemin état-sortie**.
- Un sommet d'état $x_i \in X$ est dit **connecté à l'entrée** s'il existe un chemin d'un sommet d'entrée vers ce sommet. Ce type de chemin est appelé un **chemin entrée-état**.

- un chemin d'un sommet d'entrée vers un sommet de sortie est appelé un **chemin entrée-sortie** ou un chemin $U - Y$.

Exemple 2.4.2.

Considérons le système structuré Σ_Λ du type (2.2.1) avec les matrices d'état suivantes :

$$A_\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_5 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_9 \end{pmatrix}$$

Ce système a 3 entrées, 4 états et 3 sorties. Son graphe $G(\Sigma_\Lambda)$ a donc l'ensemble de sommets $V = \{u_1, u_2, u_3, x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3\}$. Les arcs du graphe correspondent aux paramètres non-nuls λ_i dans les matrices d'état. Par exemple, l'arc (u_1, x_1) (resp. (x_1, x_2)) correspond au paramètre λ_4 (resp. λ_1). Le graphe $G(\Sigma_\Lambda)$ est présenté Figure 2.3.

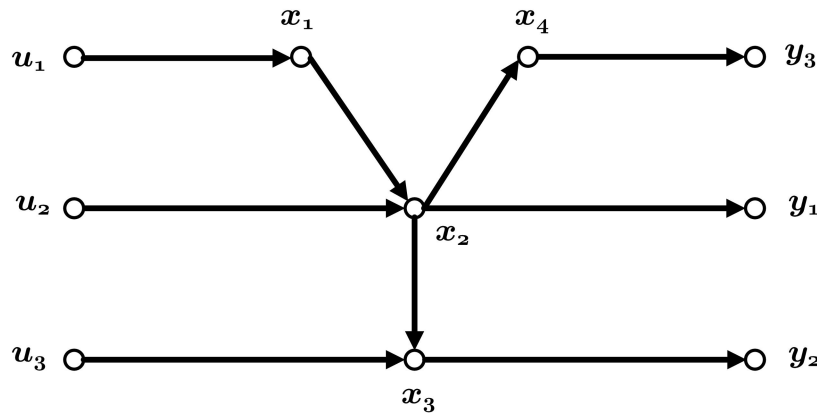


FIG. 2.3 – Graphe orienté $G(\Sigma_\Lambda)$ de l'Exemple 2.4.2

Dans cet exemple, tous les sommets d'état sont connectés à l'entrée et à la sortie. Il existe des chemins entrée-sortie tels que (u_1, x_1, x_2, y_1) , (u_2, x_2, y_1) ou (u_3, x_3, y_2) . L'ensemble $S = \{x_2, x_3\}$ est un $U - Y$ séparateur qui s'avère être minimal. Sur le graphe, on peut voir que tous les chemins entrée-sortie passent par le sommet x_2 ou le sommet x_3 . De plus, dans ce cas, cet ensemble est aussi le séparateur minimal d'entrée $S^*(U, Y)$. Par conséquent, le nombre maximal de chemins disjoints entrée-sortie est égal à 2, c'est-à-dire que la taille d'un couplage maximal entre U et Y est $\rho(U, Y) = 2$.

2.5 Illustration sur quelques propriétés

L'étude des propriétés génériques d'un système linéaire structuré peut souvent être effectuée sur le graphe associé. Une illustration sur le rang générique de la matrice de transfert et des problèmes d'observation et de commande est donnée dans cette section.

2.5.1 Rang générique d'une matrice de transfert

Conformément à la définition de la généricité, nous pouvons définir le rang générique d'une matrice de transfert :

Définition 2.5.1. *Soit Σ_Λ un système linéaire structuré ayant la matrice de transfert $T_\Lambda(s)$, avec $\Lambda \in \mathbb{R}^r$. Le rang générique de $T_\Lambda(s)$, noté $g - \text{rang}[T_\Lambda(s)]$ est défini comme le rang de $T_\Lambda(s)$ pour presque toutes les valeurs de Λ .*

Sur le graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$, le rang générique d'une matrice de transfert peut être calculé de la manière suivante :

Théorème 2.5.1. *[van der Woude, 1991a] Soit Σ_Λ un système linéaire structuré du type (2.2.1) avec le graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$ et la matrice de transfert $T_\Lambda(s)$.*

$$g - \text{rang}[T_\Lambda(s)] = \rho(U, Y)$$

où $\rho(U, Y)$ est la taille d'un couplage maximum entre U et Y dans $G(\Sigma_\Lambda)$.

Exemple 2.5.1.

Considérons le système structuré Σ_Λ de type (2.2.1) décrit par le triplet $(A_\Lambda, B_\Lambda, C_\Lambda)$ suivant :

$$A_\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_5 \end{pmatrix}, \quad C_\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_6 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_7 \end{pmatrix}$$

Le graphe orienté $G(\Sigma_\Lambda)$ associé à ce système est présenté Figure 2.4 Sur le graphe $G(\Sigma_\Lambda)$, il existe deux chemins $U - Y$ disjoints, par exemple (u_2, x_2, y_1) et (u_3, x_3, y_2) . Comme le système n'a que 2 sorties, un couplage maximal entre U et Y est donc de taille 2, c'est-à-dire que $g - \text{rang}[T_\Lambda(s)] = 2$. En effet, on peut vérifier que la matrice transfert du système

$$T(s) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \lambda_3 \lambda_6 s^{-2} & \lambda_4 \lambda_6 s^{-1} & 0 \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_7 s^{-3} & \lambda_2 \lambda_4 \lambda_7 s^{-2} & \lambda_5 \lambda_7 s^{-1} \end{pmatrix}$$

est génériquement de rang 2.

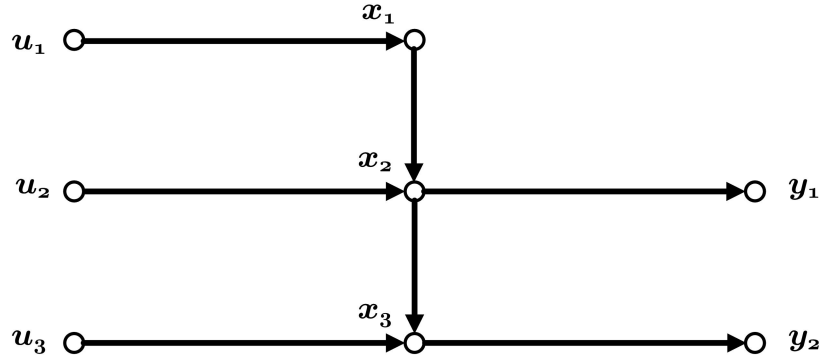


FIG. 2.4 – Graphe orienté $G(\Sigma_\Lambda)$ de l'Exemple 2.5.1

2.5.2 L'observabilité générique

Soit Σ_Λ un système linéaire structuré. On dit que ce système est *génériquement observable* s'il est observable pour presque toutes les valeurs des paramètres libres de Λ . L'observabilité générique peut être étudiée comme une propriété duale de la commandabilité générique, qui est bien connue dans la littérature [Lin, 1974; Shields & Pearson, 1976; Reinschke, 1988]. Une caractérisation graphique de l'observabilité générique est présentée comme suit :

Théorème 2.5.2. *Soit Σ_Λ un système linéaire structuré du type (2.2.1) et le graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$. Ce système est génériquement observable si et seulement si sur le graphe $G(\Sigma_\Lambda)$:*

- tous les sommets d'état sont connectés à la sortie,
- il existe un ensemble de chemins état-sortie et cycles disjoints qui couvrent tous les sommets d'état.

Exemple 2.5.2.

Considérons un modèle linéarisé simplifié à quatre états de la dynamique latérale d'un avion à voilure fixe [Zhang et al., 2009; Izadi-Zamanabadi, 2002]. Ce modèle est représenté par un système structuré Σ_Λ de type (2.2.1) avec les matrices d'état $(A_\Lambda, B_\Lambda, C_\Lambda)$ suivantes :

$$A_\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 & 0 \\ \lambda_7 & 0 & \lambda_8 & 0 \\ 0 & \lambda_9 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{10} & 0 \\ 0 & \lambda_{11} \\ \lambda_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{14} \end{pmatrix}$$

La variable d'état est $x = \begin{pmatrix} v & p & r & \phi \end{pmatrix}^T$ où v est la glissade, p est la vitesse angulaire de roulis, r est l'amplitude du mouvement de lacet et ϕ est l'angle d'inclinaison latérale.

La commande $u = \begin{pmatrix} \delta_r & \delta_a \end{pmatrix}^T$ où δ_r est la commande d'angle de gouvernail et δ_a est la commande d'angle des ailerons.

Le graphe orienté $G(\Sigma_\lambda)$ associé à ce système est présenté Figure 2.5

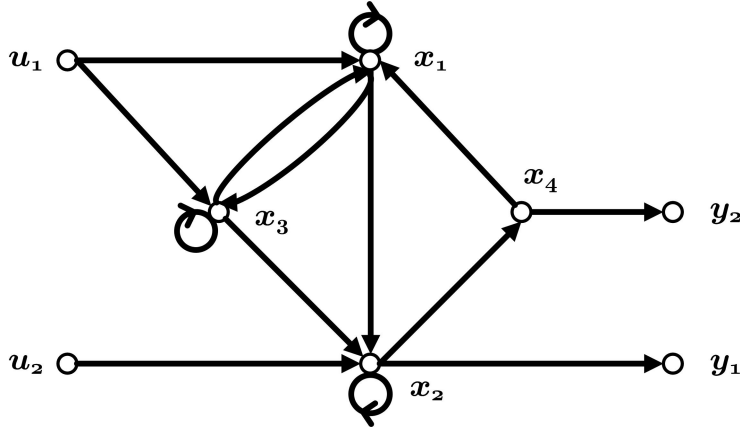


FIG. 2.5 – Graphe orienté $G(\Sigma_\Lambda)$ de l'Exemple 2.5.2

Sur le graphe $G(\Sigma_\Lambda)$, tous les états x_1, x_2, x_3 et x_4 sont reliés aux sorties y_1 ou y_2 . De plus, il y a le chemin $(x_4, x_1, x_3, x_2, y_1)$ qui couvre tous les états. Donc les deux conditions du Théorème 2.5.2 sont satisfaites et le système Σ_Λ est génériquement observable.

2.5.3 Le problème du découplage par retour d'état

Soit Σ un système linéaire du type (2.3.1) tel que le nombre de sorties soit égal au nombre d'entrée ($m = p$). Le problème du découplage par retour d'état consiste à déterminer une commande $u(t) = Fx(t) + Gv(t)$, G inversible, de telle sorte que le transfert $C(sI - A - BF)^{-1}BG$ soit diagonal et non singulier, c'est-à-dire que chaque sortie peut être pilotée indépendamment des autres.

Dans le contexte des systèmes structurés, on a le résultat suivant [Dion & Commault, 1993] :

Théorème 2.5.3. *Soit Σ_Λ un système linéaire structuré du type (2.2.1) tel que $m = p$ et son graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$. Le problème du découplage est génériquement soluble si et seulement si sur le graphe $G(\Sigma_\Lambda)$:*

$$\rho(U, Y) = m \quad \text{et} \quad l(U, Y) = \sum_{i=1}^m l(U, \{y_i\})$$

où :

- $\rho(U, Y)$ est la taille d'un couplage maximal entre U et Y ,

- $l(U, Y)$ est la longueur minimale d'un couplage maximal entre U et Y .
- $l(U, \{y_i\})$ est la longueur minimale d'un chemin $U - \{y_i\}$

Exemple 2.5.3.

Considérons une machine synchrone fournissant un réseau infini par un transformateur et une ligne de transmission [Carnimeo et al., 1992]. Le modèle linéarisé de ce système peut être représenté par un système linéaire structuré Σ_Λ de type (2.2.1) décrit par le triplet $(A_\Lambda, B_\Lambda, C_\Lambda)$ suivant :

$$A_\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_5 & \lambda_6 & \lambda_7 \end{pmatrix}, \quad B_\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_8 \\ \lambda_9 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_{10} \\ \lambda_{11} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La variable d'état est $x = \begin{pmatrix} \Delta\delta & \Delta\omega & \Delta V_t \end{pmatrix}^T$ où $\Delta\delta$ est l'angle de rotor par rapport au réseau infini, $\Delta\omega$ est la vitesse du rotor et ΔV_t est la tension aux bornes du générateur. La commande est $u = \begin{pmatrix} \Delta E_{fd} & \Delta P_m \end{pmatrix}^T$ où ΔE_{fd} est la tension de champ du générateur et ΔP_m est le puissance mécanique.

Le graphe orienté $G(\Sigma_\Lambda)$ associé à ce système est présenté Figure 2.6 Dans cet

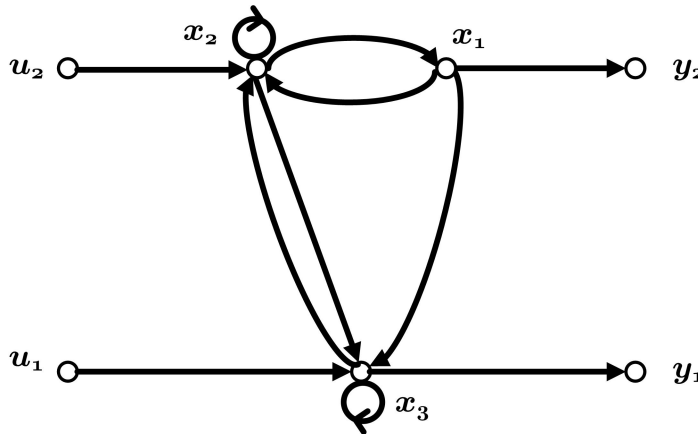


FIG. 2.6 – Graphe orienté $G(\Sigma_\Lambda)$ de l'Exemple 2.5.3

exemple, on n'a que deux chemins entrée-sortie disjoints : (u_1, x_3, y_1) et (u_2, x_2, x_1, y_2) . Le couplage maximal entre U et Y est de taille 2 et égal au nombre de sorties.

La longueur minimale de ce couplage est $l(U, Y) = 5$. La longueur minimale d'un chemin d'une entrée à y_1 est $l(U, \{y_1\}) = 2$. La longueur minimale d'un chemin d'une entrée à y_2 est $l(U, \{y_2\}) = 3$. Alors, la condition $l(U, Y) = \sum_{i=1}^m l(U, \{y_i\})$ est vérifiée. Le problème du découplage par retour d'état du système Σ_Λ est donc génériquement soluble.

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, les systèmes linéaires structurés ont été présentés. Ils représentent un classe particulière de systèmes linéaires. La notion de généricité a été abordée puisqu'elle joue un rôle important dans l'étude de tels systèmes. Comme l'approche graphique est un outil intéressant pour l'étude des propriétés génériques des systèmes structurés, nous avons montré comment associer un graphe orienté à ces systèmes. Des illustrations sur le rang générique d'une matrice de transfert, l'observabilité générique et le problème du découplage par retour d'état ont été présentées.

Chapitre 3

Localisation et classification des capteurs pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure

3.1 Introduction

Les systèmes dynamiques sont souvent affectés par des perturbations. Il est important que certaines performances du système soient encore assurées en présence des perturbations. La commande des systèmes physiques doit donc tenir compte de l'existence de perturbations et annuler si possible leur effet.

Dans ce chapitre, nous considérons un problème classique de la théorie de la commande des systèmes linéaires, appelé le problème du rejet de perturbation exact. Ce problème consiste à commander un système, à l'aide d'un retour d'état ou d'un retour dynamique de sortie mesurée, pour que la perturbation n'ait aucun effet sur la sortie à réguler. Pour le cas du retour d'état, on a le problème du rejet de perturbation par retour d'état statique. Dans le cas du retour de sortie mesurée, il s'agit du problème du rejet de perturbation par retour dynamique de mesure. Remarquons que la solubilité du rejet de perturbation par retour de mesure dépend évidemment de l'ensemble de capteurs du système. Ceci entraîne le problème de localisation de capteurs présenté dans le premier chapitre : quand le problème du rejet de perturbation par retour de mesure n'est pas soluble avec les capteurs existants, combien de nouveaux capteurs utiliser et où les implanter pour que ce problème ait une solution ?

Dans ce qui suit, nous allons d'abord rappeler le problème du rejet de perturbation dans le contexte des systèmes linéaires classiques puis des systèmes linéaires structurés. Des conditions nécessaires et suffisantes pour que le problème ait une solution sont présentées. Ensuite, nous nous concentrons sur l'objectif principal de ce chapitre : localisation et classification des capteurs pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure. Pour ce but, nous donnons des nouvelles conditions nécessaires et suffisantes de solubilité de ce problème. Ces conditions nous donnent une nouvelle compréhension du rejet de perturbation par retour dynamique de mesure. Grâce à ces conditions, des résultats concernant la localisation des capteurs vont être donnés. De plus, dans le cas de perturbation unique, une classification complète des capteurs en trois catégories définies dans le premier chapitre est donnée. Dans le cas général, nous allons voir par quelques observations que la classification complète devient plus difficile. Cependant, nous allons caractériser un type de capteurs essentiels et montrer qu'on peut déterminer les capteurs essentiels en temps polynomial. Un exemple illustratif termine ce chapitre.

3.2 Problème du rejet de perturbation

Les perturbations ont plusieurs origines. Par exemple, dans la commande d'un avion, le changement de direction ou de vitesse du vent peut être considéré comme une perturbation. Pour maintenir la température d'une habitation, le changement de la

Chapitre 3. Localisation et classification des capteurs pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure

température à l'extérieur de l'habitation peut être considéré aussi comme une perturbation. Un autre exemple de perturbation est l'irrégularité de la route pour le problème de la commande des suspensions actives d'un châssis de véhicule. Ces perturbations sont appelées perturbations externes et peuvent être modélisées comme des entrées inconnues du système. En fonction de leur origine, certaines perturbations sont mesurables.

Pour éliminer l'influence des perturbations sur la sortie à réguler du système, il est nécessaire d'avoir des informations sur les perturbations et leur effet sur les états du système. Normalement, ces informations sont obtenues à partir des mesures (en utilisant des capteurs). Dans le cas où tous les états sont mesurables, on a le problème du rejet de perturbation par retour d'état. Dans le cas contraire, on a le problème du rejet de perturbation par retour de sorties mesurées. À côté de ces deux problèmes, il existe d'autres approches qui permettent de minimiser certaines normes de la matrice de transfert entre les perturbations et les sorties à réguler [Vidyasagar, 1987].

Le problème du rejet de perturbation par retour d'état a été traité par beaucoup d'auteurs. On peut citer par exemple l'approche géométrique de [Wonham, 1974] et l'approche algébrique de [Verghese, 1978; Bhattacharyya et al., 1983]. Ces résultats ont été interprétés en termes graphiques pour les systèmes linéaires structurés [Commault et al., 1991; van der Woude, 1991*b*]. Pour résoudre le problème du rejet de perturbation par retour de mesure, on a les résultats de l'approche géométrique [Schumacher, 1980; Willems & Commault, 1981] ou de l'approche algébrique [Bhattacharyya, 1982; Commault et al., 1984]. Pour les systèmes linéaires structurés, ce problème a été étudié en termes graphiques par [Commault et al., 1993; Commault et al., 1997; van der Woude, 1993; van der Woude, 1994; Bahar et al., 1996]. Un autre aspect de ces deux problèmes est la caractérisation des pôles fixes en boucle fermée [Malabre et al., 1997; Del-Muro-Cuéllar & Malabre, 2001]. Ces pôles ne dépendent pas du choix des lois de commande mais précisément du fait que ces problèmes sont résolus.

Dans les sections suivantes, nous rappelons le problème du rejet de perturbation et quelques résultats connus sur la solubilité de ce problème dans le contexte des systèmes linéaires et puis des systèmes linéaires structurés. Quand les perturbations sont mesurables, leur influence sur les états est calculable grâce aux équations d'états. Ceci implique qu'on peut modifier la commande pour compenser l'effet des perturbations sur la sortie à réguler. Alors, dans le cadre de ce mémoire, on considère le cas où les perturbations sont non mesurables c'est-à-dire qu'elles ne sont pas accessibles directement à la mesure.

3.3 Rejet de perturbation dans le cas des systèmes linéaires classiques

3.3.1 Rejet de Perturbation par Retour d'Etat (RPRE)

Définition 3.3.1. Soit Σ^d un système linéaire décrit par la représentation d'état :

$$\Sigma^d : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ed(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.3.1)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie à réguler et $d(t) \in \mathbb{R}^q$ est le vecteur de perturbation. A, B, E et C sont des matrices de dimensions appropriées. Le problème du Rejet de Perturbation par Retour d'État (RPRE) consiste à chercher un retour d'état de la forme

$$u(t) = Fx(t)$$

tel que en boucle fermée, le transfert entre la perturbation et la sortie à réguler soit nul :

$$C(sI - A - BF)^{-1}E = 0 \quad (3.3.2)$$

Le problème de l'existence de la matrice F est bien connu et a été résolu par exemple par l'approche géométrique [Wonham, 1974]. Une introduction simple à la théorie géométrique peut être trouvée dans [Commault & Dion, 1992]. Rappelons d'abord une définition classique :

Définition 3.3.2. Un sous-espace d'état \mathcal{V} est dit (A, B) -invariant si

$$A\mathcal{V} \subset \mathcal{V} + \text{Im}B$$

En fait, un sous-espace d'état \mathcal{V} est (A, B) -invariant si et seulement si il existe un retour d'état F tel que $(A + BF)\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$. D'un point de vue trajectoire, toute trajectoire d'état initialisée dans un sous-espace (A, B) -invariant peut être maintenue dans ce sous-espace par une commande adaptée. D'autre part, si on peut assurer que $\text{Im}E$ est toujours maintenue dans $\text{Ker}C$, l'effet de la perturbation sur la sortie à réguler est nul. La condition nécessaire et suffisante d'existence d'une matrice F satisfaisant la condition (3.3.2) est donc :

Théorème 3.3.1. [Wonham, 1974] Le problème du rejet de perturbation par un retour d'état $u(t) = Fx(t)$ est soluble pour un système linéaire du type (3.3.1) si et seulement si

$$\text{Im}E \subset \mathcal{V}^*$$

Chapitre 3. Localisation et classification des capteurs pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure

où \mathcal{V}^* est le plus grand sous-espace (A,B) -invariant contenu dans $\text{Ker}C$.

Le sous-espace \mathcal{V}^* peut être calculé de manière itérative par l'algorithme suivant [Wonham, 1974; Basile & Marro, 1992], comme limite de la séquence de sous-espaces :

$$\begin{cases} \mathcal{V}_0 = \text{Ker}C \\ \mathcal{V}_k = \text{Ker}C \cap A^{-1}(\mathcal{V}_{k-1} + \text{Im}B) \text{ avec } k \geq 1 \end{cases} \quad (3.3.3)$$

Il faut remarquer que le terme A^{-1} ne correspond pas à une matrice inverse, mais qu'il agit comme une inverse fonctionnelle opérant sur des sous-espaces linéaires.

3.3.2 Rejet de Perturbation par Retour de Mesure (RPRM)

Le problème du rejet de perturbation par retour d'état a été abordé précédemment. Quand tout l'état ne peut être utilisé, on s'intéresse au problème du rejet de perturbation par retour de mesure. Comme expliqué à la fin de la Section 3.2, on suppose toujours que les perturbations ne sont pas directement mesurables.

A partir du système linéaire (3.3.1), comme on ne peut pas mesurer tout l'état, un vecteur de sorties mesurées $z(t) = Hx(t)$ est donc introduit. Le système linéaire étudié est défini par :

$$\Sigma^{dz} : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ed(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ z(t) = Hx(t) \end{cases} \quad (3.3.4)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée, $d(t) \in \mathbb{R}^q$ est le vecteur de perturbation, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie à réguler et $z(t) \in \mathbb{R}^r$ est le vecteur de sortie mesurée. A, B, E, C et H sont des matrices de dimensions appropriées.

Définition 3.3.3. Soit Σ^{dz} un système linéaire du type (3.3.4). Le problème du Rejet de Perturbation par Retour de Mesure (RPRM) consiste à chercher un retour dynamique de mesure

$$\Sigma^{zu} : \begin{cases} \dot{w}(t) = Lw(t) + Rz(t) \\ u(t) = Sw(t) + Pz(t) \end{cases} \quad (3.3.5)$$

où $w(t) \in \mathbb{R}^\mu$, tel que, en boucle fermée, le transfert entre la perturbation et la sortie à réguler soit nul.

En termes de matrices de transfert, le problème du rejet de perturbation par retour de mesure consiste à déterminer, si possible, un compensateur propre $F(s)$ (voir Figure 1.2) où $u(s) = F(s)z(s)$ tel que :

$$G(s)F(s)(I - M(s)F(s))^{-1}N(s) + K(s) = 0.$$

Chapitre 3. Localisation et classification des capteurs pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure

$G(s)$, $K(s)$, $M(s)$ et $N(s)$ sont les matrices de transfert d'un système linéaire de la forme (3.3.4) :

$$\begin{bmatrix} y(s) \\ z(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G(s) & K(s) \\ M(s) & N(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(s) \\ d(s) \end{bmatrix} \quad (3.3.6)$$

Pour un système linéaire et en termes géométriques, on a le théorème suivant [Schumacher, 1980; Willems & Commault, 1981] :

Théorème 3.3.2. *Le problème du rejet de perturbation par retour de mesure est soluble pour un système du type (3.3.4) si et seulement si*

$$\mathcal{N}^* \subset \mathcal{V}^*$$

où :

- \mathcal{V}^* est le plus grand sous-espace (A,B) -invariant contenu dans $\text{Ker}C$.
- \mathcal{N}^* est le plus petit sous-espace (H,A) -invariant contenant $\text{Im}E$.

Le sous-espace \mathcal{N}^* peut être calculé de manière itérative par l'algorithme suivant [Wonham, 1974; Basile & Marro, 1992], comme limite de la séquence de sous-espaces :

$$\begin{cases} \mathcal{N}_0 = \text{Im}E \\ \mathcal{N}_k = A(\mathcal{N}_{k-1} \cap \text{Ker}H) + \text{Im}E \text{ avec } k \geq 1 \end{cases} \quad (3.3.7)$$

Pour l' (H, A) -invariance, il n'y a pas une interprétation en termes de trajectoire aussi simple que pour l' (A, B) -invariance. Cette notion est liée à des problèmes de type estimation d'état ou observateurs en présence de perturbation.

3.4 Rejet de perturbation dans le cas des systèmes linéaires structurés

Dans cette partie nous rappelons quelques résultats concernant le problème du rejet de perturbation dans le contexte des systèmes linéaires structurés.

3.4.1 Rejet de Perturbation par Retour d'Etat (RPRE)

Un système linéaire structuré avec perturbation est décrit de la même manière qu'un système structuré de la forme (2.2.1) :

Chapitre 3. Localisation et classification des capteurs pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure

Définition 3.4.1. Soit Σ_Λ^d un système linéaire décrit par la représentation d'état :

$$\Sigma_\Lambda^d : \begin{cases} \dot{x}(t) = A_\Lambda x(t) + B_\Lambda u(t) + E_\Lambda d(t) \\ y(t) = C_\Lambda x(t) \end{cases} \quad (3.4.1)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie à réguler et $d(t) \in \mathbb{R}^q$ est le vecteur de perturbation. $A_\Lambda, B_\Lambda, E_\Lambda$ et C_Λ sont des matrices de dimensions appropriées. Le système Σ_Λ^d est appelé système linéaire structuré si la matrice

$$J_\Lambda^d = \begin{pmatrix} A_\Lambda & B_\Lambda & E_\Lambda \\ C_\Lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice structurée, c'est-à-dire que les éléments de cette matrice sont soit fixés à zéro soit des paramètres libres. $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\} \in \mathbb{R}^k$ contient l'ensemble des paramètres indépendants de la matrice J_Λ^d .

On peut reprendre les Définitions 3.3.1 et 3.3.2 dans le contexte des systèmes structurés. La solubilité du problème du rejet de perturbation par retour d'état présenté précédemment peut être donc étendue génériquement pour le cas structuré.

Définition 3.4.2. Le problème du Rejet de Perturbation par Retour d'État (RPRE) pour un système linéaire structuré du type (3.4.1) consiste à chercher un retour d'état de la forme

$$u(t) = F_\Lambda x(t)$$

tel que en boucle fermée, le transfert entre la perturbation et la sortie à réguler soit nul :

$$C_\Lambda (sI - A_\Lambda - B_\Lambda F_\Lambda)^{-1} E_\Lambda = 0 \quad (3.4.2)$$

Définition 3.4.3. Un sous-espace d'état \mathcal{V}_Λ est dit (A_Λ, B_Λ) -invariant si

$$A_\Lambda \mathcal{V}_\Lambda \subset \mathcal{V}_\Lambda + \text{Im} B_\Lambda$$

Dans le contexte des systèmes structurés, \mathcal{V}_Λ^* , le plus grand sous-espace (A_Λ, B_Λ) -invariant contenu dans $\text{Ker} C_\Lambda$, dépend des paramètres $\Lambda \in \mathbb{R}^k$ mais sa dimension reste génériquement constante. On note \mathcal{V}_F^* le plus grand sous-espace fixe contenu dans \mathcal{V}_Λ^* pour presque toute valeur de $\Lambda \in \mathbb{R}^k$. Il est à noter que [van der Woude, 1996] a proposé une méthode graphique et matricielle pour calculer \mathcal{V}_Λ^* .

De la même manière, $\text{Im} E_\Lambda$ varie quand Λ varie dans \mathbb{R}^k , mais il existe le plus petit sous-espace fixe, noté $(\text{Im} E)_F$, qui contient $\text{Im} E_\Lambda$ pour presque tout $\Lambda \in \mathbb{R}^k$.

On a le résultat étendu du Théorème 3.3.1 :

Chapitre 3. Localisation et classification des capteurs pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure

Théorème 3.4.1. [Commault et al., 1997] *Considérons le système structuré Σ_Λ^d du type (3.4.1). Le problème du rejet de perturbation par retour d'état est génériquement soluble si et seulement si*

$$(ImE)_F \subset \mathcal{V}_F^* \tag{3.4.3}$$

L'idée de ce théorème est illustrée sur la Figure 3.1. En fait, on peut voir que la condition du théorème précédent implique que :

$$ImE_\Lambda \subset (ImE)_F \subset \mathcal{V}_F^* \subset \mathcal{V}_\Lambda^* \subset KerC_\Lambda.$$

Alors, évidemment cette condition est la condition du Théorème 3.3.1 étendue dans le cas structuré.

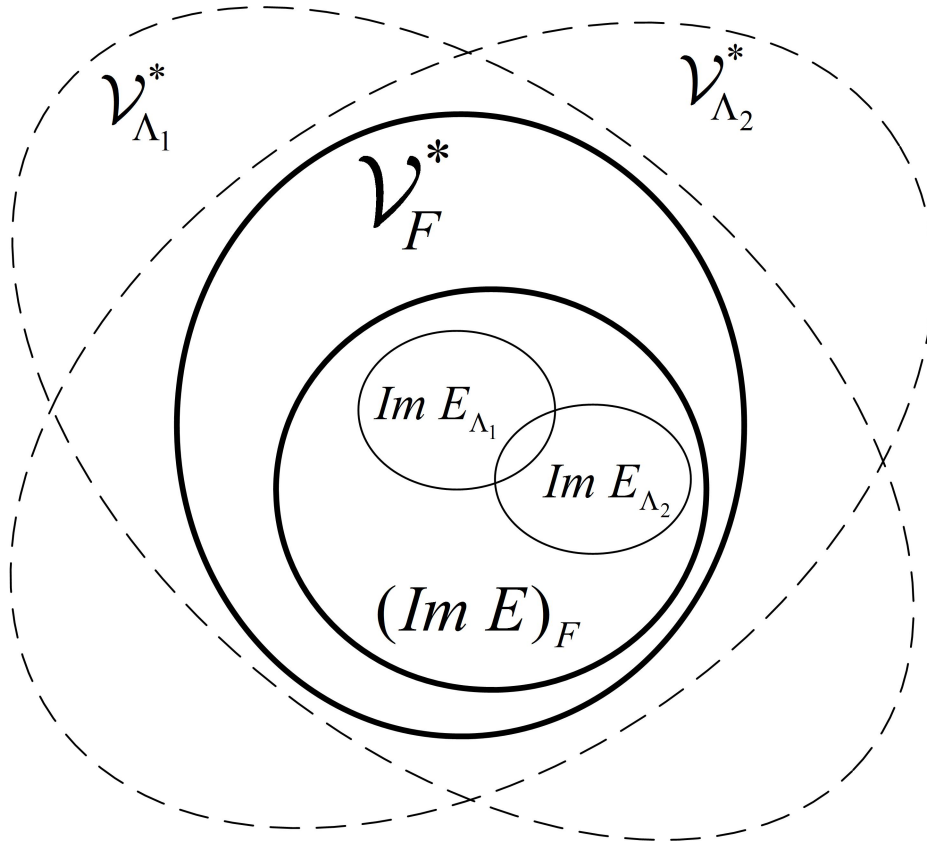


FIG. 3.1 – Rejet de perturbation par retour d'état

Le sous-espace fixe \mathcal{V}_F^* est en relation directe avec un ensemble de sommets particuliers du graphe orienté $G(\Sigma_\Lambda^d)$ associé au système structuré Σ_Λ^d . Cet ensemble, dénommé \mathcal{I}^* , a été introduit par [van der Woude, 1993] dans le but de donner une condition suffisante au problème du rejet de perturbation générique par retour dynamique de sortie.

Chapitre 3. Localisation et classification des capteurs pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure

Le graphe associé $G(\Sigma_\Lambda^d)$ du système $G(\Sigma_\Lambda^d) = (V, W)$ est construit de la même façon que dans la Section 2.4.2, c'est-à-dire :

- ensemble des sommets : $V = U \cup X \cup Y \cup D$ où :
 - $U = \{u_1, \dots, u_m\}$ est l'ensemble de sommets d'entrée correspondant aux m entrées.
 - $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ est l'ensemble de sommets d'état correspondant aux n états.
 - $Y = \{y_1, \dots, y_p\}$ est l'ensemble de sommets de sortie correspondant aux p sorties.
 - $D = \{d_1, \dots, d_q\}$ est l'ensemble de sommets de perturbation correspondant aux q perturbations.
- ensemble des arcs : $W = W_{UX} \cup W_{XX} \cup W_{XY} \cup W_{DX}$ où :
 - $W_{UX} = \{(u_j, x_i) \mid b_{ij} \neq 0\}$.
 - $W_{XX} = \{(x_j, x_i) \mid a_{ij} \neq 0\}$.
 - $W_{XY} = \{(x_j, y_i) \mid c_{ij} \neq 0\}$.
 - $W_{DX} = \{(d_j, x_i) \mid d_{ij} \neq 0\}$.
 où d_{ij} (resp. a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) est l'élément (i, j) de la matrice E_Λ (resp. $A_\Lambda, B_\Lambda, C_\Lambda$).

Le sous-espace fixe \mathcal{V}_F^* est caractérisé simplement sur le graphe de la manière suivante :

$$\mathcal{V}_F^* = \text{span}\{e_i \text{ pour } i \text{ tel que } x_i \in \mathcal{I}^*\}$$

où e_i est le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^n et \mathcal{I}^* est défini comme suit :

Définition 3.4.4. Soit Σ_Λ^d un système linéaire structuré du type (3.4.1) et le graphe associé $G(\Sigma_\Lambda^d)$. L'ensemble \mathcal{I}^* est donné par :

$$\mathcal{I}^* = \{x_i \in X \mid \text{dans } G(\Sigma_\Lambda), \rho(U \cup \{x_i\}, Y) = \rho(U, Y) \text{ et } l(U \cup \{x_i\}, Y) = l(U, Y)\}$$

où :

- $\rho(U, Y)$ et $l(U, Y)$ sont respectivement la taille et la longueur minimale d'un couplage maximal entre U et Y ,
- $\rho(U \cup \{x_i\}, Y)$ et $l(U \cup \{x_i\}, Y)$ sont respectivement la taille et la longueur minimale d'un couplage maximal entre $U \cup \{x_i\}$ et Y .

A partir du Théorème 3.4.1 et de la définition de \mathcal{I}^* , [Commault et al., 1997] ont caractérisé graphiquement la solubilité du problème du rejet de perturbation par retour d'état :

Théorème 3.4.2. [Commault et al., 1997] Considérons le système structuré Σ_Λ^d du type (3.4.1) et son graphe associé $G(\Sigma_\Lambda^d)$. Le problème du rejet de perturbation par retour d'état est génériquement soluble si et seulement si les perturbations arrivent uniquement sur des sommets d'état $x_i \in \mathcal{I}^*$, c'est-à-dire pour tout $(d_i, x_j) \in W$, x_j appartient à \mathcal{I}^* .

Une autre caractérisation graphique de la solubilité générique du problème du rejet de perturbation par retour d'état a été donnée dans [Commault et al., 1991]. Celle-ci est obtenue grâce aux résultats sur la structure à l'infini [Verghese, 1978].

Chapitre 3. Localisation et classification des capteurs pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure

Théorème 3.4.3. [Commault et al., 1991] *Considérons le système structuré Σ_Λ^d du type (3.4.1) et son graphe associé $G(\Sigma_\Lambda^d)$. Le problème du rejet de perturbation par retour d'état est génériquement soluble si et seulement si dans $G(\Sigma_\Lambda^d)$:*

1. $\rho(U, Y) = \rho(U \cup D, Y)$,
2. $l_{X,U}(U, Y) = l_{X,U}(U \cup D, Y)$,

où :

- $\rho(U, Y)$ et $l_{X,U}(U, Y)$ sont respectivement la taille et le nombre minimal de sommets de $X \cup U$ d'un couplage maximal entre U et Y ,
- $\rho(U \cup D, Y)$ et $l_{X,U}(U \cup D, Y)$ sont respectivement la taille et le nombre minimal de sommets de $X \cup U$ d'un couplage maximal entre $U \cup D$ et Y .

Le Théorème 3.4.3 montre que pour éliminer l'influence de la perturbation avant qu'elle n'atteigne la sortie, les commandes doivent être :

- suffisamment nombreuses, ce qui s'exprime en termes de taille du couplage entrée-sortie et du couplage entrée/perturbation-sortie,
- suffisamment rapides, ce qui s'exprime en termes du nombre des sommets de $X \cup U$ dans ces couplages.

En remarquant que dans la définition de \mathcal{I}^* , la longueur minimale d'un couplage maximal entre U et Y (ou entre $U \cup \{x_i\}$ et Y) est égale au nombre minimal de sommets de $X \cup U$ dans ce couplage, les deux conditions dans le Théorème 3.4.3 sont cohérentes par rapport à la définition de \mathcal{I}^* . Donc, si la perturbation arrive uniquement sur des sommets d'état $x_i \in \mathcal{I}^*$, alors le rejet de perturbation par retour d'état est génériquement soluble. C'est le résultat indiqué par le Théorème 3.4.2.

Exemple 3.4.1.

Considérons le système structuré Σ_Λ^d de type (3.4.1) décrit par les matrices d'état suivantes :

$$A_\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_5 & 0 & 0 \\ \lambda_6 & \lambda_7 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_\Lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_8 \end{pmatrix}$$

- Vérification de la condition géométrique du problème RPRE ($\lambda_i \neq 0$)

$$\text{On a } \text{Ker}C_\Lambda = \{x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = 0\} = \text{span} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En utilisant l'algorithme (3.3.3) on peut déterminer le sous-espace (A_Λ, B_Λ) invariant maximum contenu dans $\text{Ker}C_\Lambda$, \mathcal{V}_Λ^* , et son plus grand sous-espace fixe \mathcal{V}_F^* :

$$\mathcal{V}_\Lambda^* = \mathcal{V}_F^* = \text{span} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas \mathcal{V}_Λ^* ne dépend pas de Λ . D'autre part, le plus petit sous-espace fixe contenant $\text{Im}E_\Lambda$ est :

$$(\text{Im}E)_F = \text{span} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$(\text{Im}E)_F \subset \mathcal{V}_F^*.$$

La condition du Théorème 3.4.1 est satisfaite et le problème du rejet de perturbation par retour d'état est donc génériquement soluble.

- Vérification des conditions graphiques du problème RPRE

Le graphe orienté $G(\Sigma_\Lambda^d)$ associé à ce système est présenté Figure 3.2. Sur le

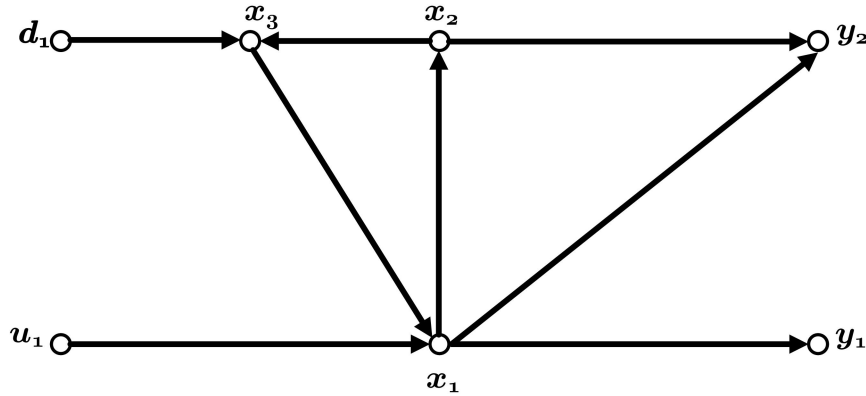


FIG. 3.2 – Graphe orienté $G(\Sigma_\Lambda^d)$ de l'Exemple 3.4.1.

graphe $G(\Sigma_\Lambda^d)$, un couplage maximal entre U et Y est de taille $\rho(U, Y) = 1$ car on a une seule entrée. La longueur minimale d'un couplage maximal entre U et Y est $l(U, Y) = 2$, par exemple avec le chemin (couplage de taille 1) (u_1, x_1, y_1) .

L'ensemble \mathcal{I}^* est calculé grâce à la Définition 3.4.4 :

- Un couplage maximal entre $U \cup \{x_1\}$ et Y est de taille

$$\rho(U \cup \{x_1\}, Y) = \rho(U, Y) = 1,$$

mais la longueur minimale d'un tel couplage est

$$l(U \cup \{x_1\}, Y) = 1 < l(U, Y) = 2,$$

Chapitre 3. Localisation et classification des capteurs pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure

par exemple avec le couplage (x_1, y_1) . Donc $x_1 \notin \mathcal{I}^*$.

- Comme on n'a que deux sorties et qu'il existe deux chemins disjoints (u_1, x_1, y_1) et (x_2, y_2) , un couplage maximal entre $U \cup \{x_2\}$ et Y est donc de taille

$$\rho(U \cup \{x_2\}, Y) = 2 > \rho(U, Y) = 1.$$

Alors $x_2 \notin \mathcal{I}^*$.

- On a $x_3 \in \mathcal{I}^*$ car un couplage maximal entre $U \cup \{x_3\}$ et Y est de taille

$$\rho(U \cup \{x_3\}, Y) = \rho(U, Y) = 1$$

et la longueur minimale d'un tel couplage est

$$l(U \cup \{x_3\}, Y) = l(U, Y) = 2.$$

On obtient $\mathcal{I}^* = \{x_3\}$. La perturbation d_1 arrive uniquement sur \mathcal{I}^* donc d'après le Théorème 3.4.2, le problème du rejet de perturbation par retour d'état est génériquement soluble.

On peut aussi vérifier que les deux conditions du Théorème 3.4.3 sont satisfaites. En effet, tous les chemins $D - Y$ doivent passer le sommet x_1 donc un couplage maximal entre $U \cup D$ et Y est de taille

$$\rho(U \cup D, Y) = \rho(U, Y) = 1.$$

Le nombre minimal de sommets de $X \cup U$ dans un tel couplage est

$$l_{X,U}(U \cup D, Y) = l_{X,U}(U, Y) = 2.$$

Alors le problème du rejet de perturbation par retour d'état est génériquement soluble.

Exemple 3.4.2.

Considérons un système structuré Σ_Λ^d qui a les mêmes matrices $A_\Lambda, B_\Lambda, C_\Lambda$ que le système dans l'Exemple 3.4.1 mais on suppose que la perturbation arrive sur l'état x_1 , c'est-à-dire

$$E_\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_8 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T.$$

- Vérification de la condition géométrique du problème RPRE

Comme vu dans l'algorithme (3.3.3), \mathcal{V}_Λ^* ne dépend que de A_Λ, B_Λ et C_Λ . \mathcal{V}_Λ^* et son plus grand sous-espace fixe \mathcal{V}_F^* sont donc les mêmes que dans l'Exemple 3.4.1 :

$$\mathcal{V}_\Lambda^* = \mathcal{V}_F^* = \text{span} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Chapitre 3. Localisation et classification des capteurs pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure

On a le plus petit sous-espace fixe contenant ImE_Λ :

$$(ImE)_F = span \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $(ImE)_F \not\subset \mathcal{V}_F^*$. La condition du Théorème 3.4.1 n'est pas satisfaite et le problème du rejet de perturbation par retour d'état n'est donc génériquement pas soluble.

- Vérification des conditions graphiques du problème RPRE

Le graphe orienté associé à ce système est présenté Figure 3.3.

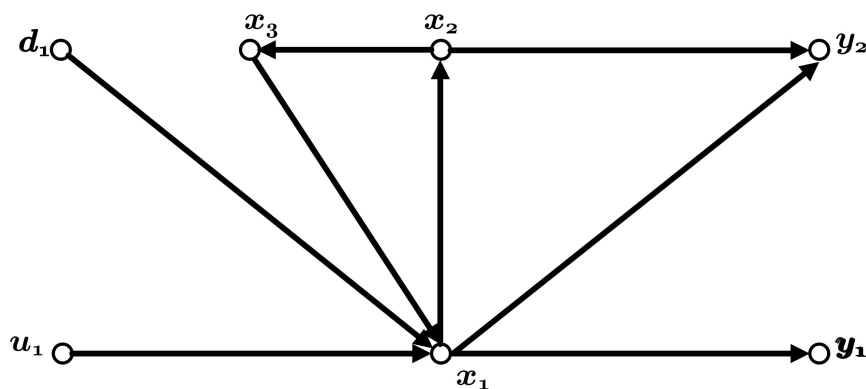


FIG. 3.3 – Graphe orienté $G(\Sigma_\Lambda^d)$ de l'Exemple 3.4.2

Comme dans l'exemple précédent, un couplage maximal entre U et Y est de taille

$$\rho(U, Y) = 1$$

et le nombre minimal de sommets dans $X \cup U$ dans un tel couplage est

$$l_{X,U}(U, Y) = 2.$$

Un couplage maximal entre $U \cup D$ et Y est de taille

$$\rho(U \cup D, Y) = 1$$

Cependant, le nombre minimal de sommets de $X \cup U$ dans un couplage maximal entre $U \cup D$ et Y est

$$l_{X,U}(U \cup D, Y) = 1$$

(avec le couplage (d_1, x_1, y_1)). Alors la deuxième condition du Théorème 3.4.3 n'est pas satisfaite. Le problème du rejet de perturbation par retour d'état n'est

Chapitre 3. Localisation et classification des capteurs pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure

donc génériquement pas soluble.

En fait, la perturbation d_1 arrive directement sur un sommet qui n'appartient pas à $\mathcal{I}^* = \{x_3\}$. Cette perturbation atteint des sorties sans que la commande u_1 ait le temps pour réagir. Ce résultat peut être perçu en examinant le graphe $G(\Sigma_\Lambda^d)$.

Exemple 3.4.3.

Considérons un système structuré Σ_Λ^d avec les mêmes matrices $A_\Lambda, B_\Lambda, C_\Lambda$ que le système dans l'Exemple 3.4.1 mais on suppose que la perturbation arrive sur l'état x_2 , c'est-à-dire $E_\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_8 & 0 \end{pmatrix}^T$. Le graphe orienté associé à ce système est présenté Figure 3.4

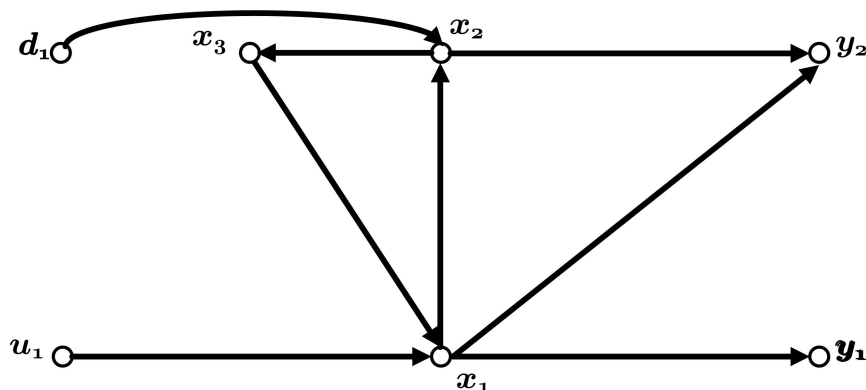


FIG. 3.4 – Graphe orienté $G(\Sigma_\Lambda^d)$ de l'Exemple 3.4.3

- Vérification de condition géométrique du problème RPRE

On obtient toujours :

$$\mathcal{V}_\Lambda^* = \mathcal{V}_F^* = \text{span} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le plus petit sous-espace fixe contenant $\text{Im}E_\Lambda$:

$$(\text{Im}E)_F = \text{span} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alors $(\text{Im}E)_F \not\subset \mathcal{V}_F^*$. La condition du Théorème 3.4.1 n'est pas satisfaite et le problème du rejet de perturbation par retour d'état n'est donc génériquement pas soluble.

Chapitre 3. Localisation et classification des capteurs pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure

- Vérification des conditions graphiques du problème RPRE

Dans cet exemple, comme on n'a que deux sorties et qu'il existe deux chemins disjoints (d_1, x_2, y_2) et (u_1, x_1, y_1) , un couplage maximal entre $U \cup D$ et Y est de taille

$$\rho(U \cup D, Y) = 2$$

qui est plus grand que la taille d'un couplage maximal entre U et Y :

$$\rho(U, Y) = 1$$

Alors la première condition du Théorème 3.4.3 n'est pas satisfaite. Le problème du rejet de perturbation par retour d'état n'est donc génériquement pas soluble. En fait, la perturbation introduit un degré de liberté supplémentaire dans le pilotage des sorties. En essayant d'éliminer l'effet de la perturbation d_1 sur y_2 , la commande u_1 perturbe inévitablement la sortie y_1 .

Analyse de la complexité :

A partir de la définition de \mathcal{I}^* , la vérification de la condition des Théorèmes 3.4.2 et 3.4.3 revient au calcul des couplages maximaux ayant la longueur minimale sur le graphe $G(\Sigma_\Lambda^d)$. Ce problème peut être résolu en utilisant des algorithmes standard de l'optimisation combinatoire tels que [Ford & Fulkerson, 1962; Hovelaque et al., 1996]. La solubilité du problème du rejet de perturbation par retour d'état peut donc être vérifiée en temps polynomial.

3.4.2 Rejet de Perturbation par Retour de Mesure (RPRM)

Le système linéaire de la forme (3.3.4) peut être redéfini dans contexte structuré.

Définition 3.4.5. Soit Σ_Λ^{dz} un système linéaire décrit par la représentation d'état :

$$\Sigma_\Lambda^{dz} : \begin{cases} \dot{x}(t) = A_\Lambda x(t) + B_\Lambda u(t) + E_\Lambda d(t) \\ y(t) = C_\Lambda x(t) \\ z(t) = H_\Lambda x(t) \end{cases} \quad (3.4.4)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée, $d(t) \in \mathbb{R}^q$ est le vecteur de perturbation, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie à réguler et $z(t) \in \mathbb{R}^r$ est le vecteur de sortie mesurée. $A_\Lambda, B_\Lambda, E_\Lambda, C_\Lambda$ et H_Λ sont des matrices de dimensions appropriées. Le système Σ_Λ^{dz} est appelé système linéaire structuré si la matrice

$$J_\Lambda^{dz} = \begin{pmatrix} A_\Lambda & B_\Lambda & E_\Lambda \\ C_\Lambda & 0 & 0 \\ H_\Lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Chapitre 3. Localisation et classification des capteurs pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure

est une matrice structurée, c'est-à-dire que les éléments de cette matrice sont soit fixés à zéro soit des paramètres libres. $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\} \in \mathbb{R}^k$ contient l'ensemble des paramètres indépendants de la matrice J_Λ^{dz} .

Le problème du Rejet de Perturbation par Retour de Mesure (RPRM) pour un système linéaire structuré du type (3.4.4) consiste à chercher un retour dynamique de mesure

$$\Sigma_\Lambda^{zu} : \begin{cases} \dot{w}(t) = L_\Lambda w(t) + R_\Lambda z(t) \\ u(t) = S_\Lambda w(t) + P_\Lambda z(t) \end{cases} \quad (3.4.5)$$

où $w(t) \in \mathbb{R}^\mu$, tel que, en boucle fermée, le transfert entre la perturbation et la sortie à réguler soit nul. Remarquons que dans le cas structuré, la lois de commande dépend des paramètres indépendants $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ du système structuré.

A ce système, nous pouvons associer un graphe orienté $G(\Sigma_\Lambda^{dz}) = (V', W')$ de la même manière que le graphe $G(\Sigma_\Lambda^d) = (V, W)$ montré précédemment, c'est-à-dire :

- ensemble des sommets : $V' = V \cup Z$ où $Z = \{z_1, \dots, z_\nu\}$ est l'ensemble de sommets de mesure et correspond aux ν sorties mesurées,
- ensemble des arcs : $W' = W \cup W_{XZ}$ où $W_{XZ} = \{(x_j, z_i) \mid h_{ij} \neq 0\}$, h_{ij} est l'élément (i, j) de la matrice H_Λ .

Dans le même esprit que pour le problème du rejet de perturbation par retour d'état, la condition nécessaire et suffisante du Théorème 3.3.2 peut être interprétée pour un système structuré :

Théorème 3.4.4. [Commault et al., 1997] *Le problème du rejet de perturbation par retour de mesure est génériquement soluble pour un système structuré du type (3.4.4) si et seulement si*

$$\mathcal{N}_F^* \subset \mathcal{V}_F^*$$

où

- \mathcal{V}_F^* est le plus grand sous-espace fixe contenu dans \mathcal{V}_Λ^* quand Λ varie dans \mathbb{R}^k ,
- \mathcal{V}_Λ^* est le plus grand sous-espace (A_Λ, B_Λ) -invariant contenu dans $\text{Ker}(C_\Lambda)$.
- \mathcal{N}_F^* est le plus petit sous-espace fixe contenant \mathcal{N}_Λ^* quand Λ varie dans \mathbb{R}^k .
- \mathcal{N}_Λ^* est le plus petit sous-espace (H_Λ, A_Λ) -invariant contenant $\text{Im}(E_\Lambda)$.

L'idée de ce théorème est illustrée sur la Figure 3.5. Quand la condition du Théorème 3.4.4 est satisfaite, on a la série d'inclusions d'espaces suivante :

$$\text{Im}E_\Lambda \subset \mathcal{N}_\Lambda^* \subset \mathcal{N}_F^* \subset \mathcal{V}_F^* \subset \mathcal{V}_\Lambda^* \subset \text{Ker}C_\Lambda$$

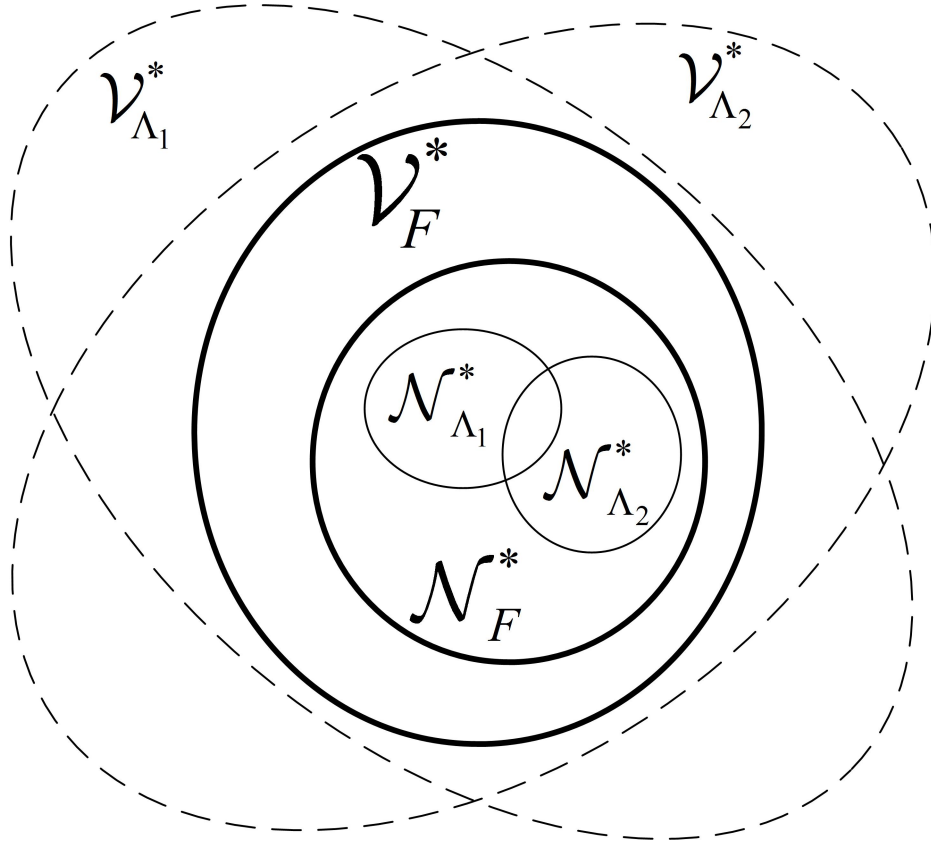


FIG. 3.5 – Rejet de perturbation par retour de mesure

La caractérisation graphique du sous-espace fixe \mathcal{N}_F^* est obtenue dualement de celle de \mathcal{V}_F^* [van der Woude, 1993] :

$$\mathcal{N}_F^* = \{e_j \text{ pour } j \text{ tel que } x_j \in X \setminus \mathcal{J}^*\}$$

où e_j est le $j^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^n et \mathcal{J}^* est défini comme suit :

Définition 3.4.6. Soit Σ_Λ^{dz} un système linéaire structuré du type (3.4.4) et le graphe associé $G(\Sigma_\Lambda^{dz})$. L'ensemble \mathcal{J}^* est donné par :

$$\mathcal{J}^* = \{x_j \in X \mid \text{dans } G(\Sigma_\Lambda^{dz}), \rho(D, Z \cup \{x_j\}) = \rho(D, Z) \text{ et } l(D, Z \cup \{x_j\}) = l(D, Z)\}$$

où :

- $\rho(D, Z)$ et $l(D, Z)$ sont respectivement la taille et la longueur minimale d'un couplage maximal entre D et Z ,
- $\rho(D, Z \cup \{x_j\})$ et $l(D, Z \cup \{x_j\})$ sont respectivement la taille et la longueur minimale d'un couplage maximal entre D et $Z \cup \{x_j\}$.

L'ensemble \mathcal{J}^* caractérise les états pour lesquels les effets des perturbations peuvent être estimés à partir des mesures par un observateur. Le complémentaire de \mathcal{J}^* contient

Chapitre 3. Localisation et classification des capteurs pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure

toute l'information concernant les perturbations. \mathcal{J}^* dépend des capteurs car son calcul nécessite la matrice H_Λ dans (3.4.4). Remarquons que la détermination de \mathcal{I}^* à partir de la Définition 3.4.4 ne dépend que des matrices A_Λ, B_Λ et C_Λ . Donc l'ensemble \mathcal{I}^* dans le graphe $G(\Sigma_\Lambda^{dz})$ est le même que dans le graphe $G(\Sigma_\Lambda^d)$. Rappelons que \mathcal{I}^* caractérise les états tels qu'une perturbation arrivant uniquement sur ces états peut être rejetée par retour d'état.

Nous avons vu que l'ensemble \mathcal{I}^* correspond au sous-espace fixe \mathcal{V}_F^* et le complémentaire dans X de l'ensemble \mathcal{J}^* (c'est-à-dire $X \setminus \mathcal{J}^*$) correspond au sous-espace fixe \mathcal{N}_F^* . Alors, l'interprétation graphique du Théorème 3.4.4, dont la suffisance a été démontrée par [van der Woude, 1993], est la suivante :

Théorème 3.4.5. [Commault et al., 1997] *Le problème du rejet de perturbation par retour de mesure est génériquement soluble pour un système structuré Σ_Λ^{dz} du type (3.4.4) si et seulement si sur le graphe associé $G(\Sigma_\Lambda^{dz})$:*

$$\mathcal{I}^* \cup \mathcal{J}^* = X$$

Analyse de la complexité

Comme dans le problème du rejet de perturbation par retour d'état, la détermination de \mathcal{I}^* , \mathcal{J}^* et la vérification des conditions du Théorème 3.4.5 peuvent être effectuées en utilisant des algorithmes standard de l'optimisation combinatoire [Ford & Fulker-son, 1962; Hovelaque et al., 1996]. La solubilité du problème du rejet de perturbation par retour de mesure peut donc être vérifiée en temps polynomial.

Exemple 3.4.4.

Considérons le systèmes structuré Σ_Λ^{dz} de type (3.4.4) décrit par les matrices d'état suivantes :

$$A_\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & 0 & \lambda_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_\Lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda_4 \end{bmatrix}, \quad E_\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_5 \\ \lambda_6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda_7 \end{bmatrix}, \quad H_\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_8 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Vérification de la condition géométrique du problème RPRM

Le noyau de la sortie et l'image de la perturbation sont :

$$Ker C_\Lambda = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_4 = 0\} = span \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Im E_\Lambda = span \begin{pmatrix} \lambda_5 \\ \lambda_6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Chapitre 3. Localisation et classification des capteurs pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure

En utilisant les deux algorithmes (3.3.3) et (3.3.7) donnés dans ce chapitre, on obtient :

$$\mathcal{V}_\Lambda^* = \text{span} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{N}_\Lambda^* = \text{span} \begin{pmatrix} \lambda_5 \\ \lambda_6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le plus grand sous-espace fixe contenu dans \mathcal{V}_Λ^* et le plus petit sous-espace fixe contenant \mathcal{N}_Λ^* sont donnés par :

$$\mathcal{V}_F^* = \text{span} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{N}_F^* = \text{span} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La condition du Théorème 3.4.4 est vérifiée :

$$\mathcal{N}_F^* \subset \mathcal{V}_F^*$$

Il existe donc génériquement en compensateur dynamique tel que la perturbation soit rejetée par retour de mesure.

- Vérification des conditions graphiques du problème RPRM

Le graphe orienté $G(\Sigma_\lambda^{dz})$ associé à ce système est présenté Figure 3.6.

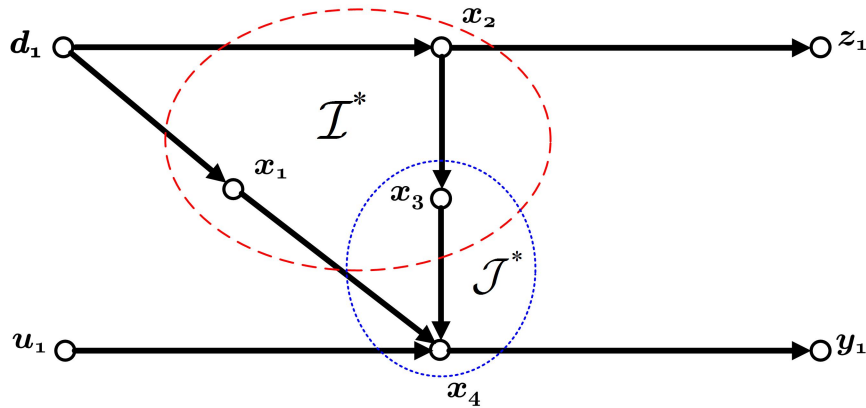


FIG. 3.6 – Graphe orienté $G(\Sigma_\Lambda^{dz})$ de l'Exemple 3.4.4

Un couplage maximal entre U et Y sur le graphe $G(\Sigma_\Lambda^{dz})$ est de taille $\rho(U, Y) = 1$ et correspond à un chemin unique $\{u_1, x_4, y_1\}$ dont la longueur (minimale) est $l(U, Y) = 2$. D'après la Définition 3.4.4, nous avons :

$$\mathcal{I}^* = \{x_1, x_2, x_3\}$$

Chapitre 3. Localisation et classification des capteurs pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure

Le sommet x_4 n'appartient pas à \mathcal{I}^* car (x_4, y_1) est un couplage maximal entre $U \cup \{x_4\}$ et Y dont la longueur (minimale) est égale à 1.

De la même manière, nous pouvons déterminer l'ensemble \mathcal{J}^* à partir de la Définition 3.4.6. Sachant que l'unique couplage maximal entre D et Z est (d_1, x_2, z_1) dont la taille est $\rho(D, Z) = 1$ et la longueur est $l(D, Z) = 2$.

$$\mathcal{J}^* = \{x_3, x_4\}$$

Le Théorème 3.4.5 est vérifié et le problème du rejet de perturbation par retour de mesure est génériquement soluble car :

$$\mathcal{I}^* \cup \mathcal{J}^* = X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

- Calcul du compensateur

Dans cet exemple, les matrices de transfert dans (3.3.6) sont :

$$\begin{aligned} G(s) &= \lambda_4 \lambda_7 s^{-1} & K(s) &= \lambda_2 \lambda_5 \lambda_7 s^{-2} + \lambda_1 \lambda_3 \lambda_6 \lambda_7 s^{-3} \\ M(s) &= 0 & N(s) &= \lambda_6 \lambda_8 s^{-1} \end{aligned}$$

Donc le compensateur propre $F(s)$ tel que :

$$G(s)F(s)(I - M(s)F(s))^{-1}N(s) + K(s) = 0$$

est donné par :

$$F(s) = -G(s)^{-1}K(s)N(s)^{-1} = \frac{\lambda_2 \lambda_5}{\lambda_4 \lambda_6 \lambda_8} + \frac{\lambda_1 \lambda_3}{\lambda_4 \lambda_8} s^{-1}$$

Nous avons vu que la solubilité du rejet de perturbation par retour de mesure peut être vérifiée graphiquement en temps polynomial. Cependant, les résultats précédents ne nous donnent pas la réponse au problème de localisation des capteurs. C'est-à-dire, quand le problème du rejet de perturbation par retour de mesure n'est pas soluble, où et combien de capteurs ajouter pour que ce problème devienne soluble. Pour répondre à cette question, des nouvelles conditions nécessaires et suffisantes pour la solubilité du problème du rejet de perturbation par retour de mesure vont être données. Ces conditions nous donnent un nouveau point de vue sur le problème du rejet de perturbation par retour de mesure et des résultats concernant les deux aspects localisation et classification des capteurs. Ceci est l'objectif des sections suivantes.

3.5 Définitions préliminaires

Avant d'étude de la localisation et de la classification des capteurs pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure, nous introduisons la définition de *la frontière de \mathcal{I}^** et une nouvelle notion appelée *le disque associé à une perturbation*.

Chapitre 3. Localisation et classification des capteurs pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure

Définition 3.5.1. Soit Σ_{Λ}^{dz} un système linéaire structuré du type (3.4.4) et le graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda}^{dz})$. La frontière de \mathcal{I}^* , noté $F_{\mathcal{I}^*}$, est l'ensemble de sommets donné par :

$$F_{\mathcal{I}^*} = \{x_i \in \mathcal{I}^* \mid \exists (x_i, x_j) \in W', x_j \notin \mathcal{I}^*\}$$

L'ensemble $F_{\mathcal{I}^*}$ contient les sommets de \mathcal{I}^* qui ont au moins un successeur en dehors de \mathcal{I}^* . Pratiquement, la frontière $F_{\mathcal{I}^*}$ relie les sommets de \mathcal{I}^* avec ceux qui sont en dehors de \mathcal{I}^* . Si une perturbation arrive à un sommet de \mathcal{I}^* , l'effet de la perturbation se propage d'abord dans \mathcal{I}^* avant de sortir de \mathcal{I}^* , cet effet doit passer par $F_{\mathcal{I}^*}$.

Définition 3.5.2. Considérons Σ_{Λ}^{dz} un système structuré du type (3.4.4) et son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda}^{dz})$. Pour une perturbation $d_i (i = 1, \dots, q)$ qui affecte au moins un sommet de \mathcal{I}^* , le disque associé à la perturbation d_i , noté \mathcal{D}_i , est l'ensemble de sommets :

$$\mathcal{D}_i = \{x_i \in \mathcal{I}^* \mid 0 < l(\{d_i\}, \{x_i\}) \leq r_i\}$$

où :

- $l(\{d_i\}, \{x_i\})$ est la longueur d'un plus court chemin du sommet d_i au sommet x_i ,
- r_i est la longueur d'un plus court chemin du sommet d_i à $F_{\mathcal{I}^*}$.

En fait, quand une perturbation d_i affecte un sommet de \mathcal{I}^* , son effet va se propager en dehors de \mathcal{I}^* . L'ensemble \mathcal{D}_i défini précédemment contient les états qui ont été affectés par la perturbation d_i au moment où l'effet de cette perturbation arrive à la frontière $F_{\mathcal{I}^*}$. Notons qu'il y a des cas où $\mathcal{D}_i = \emptyset$, par exemple quand $F_{\mathcal{I}^*} = \emptyset$.

Les deux définitions précédentes sont illustrées sur l'exemple suivant :

Exemple 3.5.1.

Considérons le système structuré Σ_{Λ}^{dz} de type (3.4.4) dont le graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda}^{dz})$ est présenté Figure 3.6.

Grâce à la Définition 3.4.4 on peut déterminer l'ensemble :

$$\mathcal{I}^* = \{x_1, x_2, x_3\}$$

Comme $x_4 \notin \mathcal{I}^*$ et qu'il existe les arcs (x_1, x_4) et (x_3, x_4) donc :

$$F_{\mathcal{I}^*} = \{x_1, x_3\}$$

Le plus court chemin du sommet d_1 à $F_{\mathcal{I}^*}$ est le chemin (d_1, x_1) dont la longueur est $r_1 = 1$. A partir de la Définition 3.5.2, on obtient :

$$\mathcal{D}_1 = \{x_1, x_2\}$$

Le sommet $x_3 \in \mathcal{I}^*$ n'appartient pas à \mathcal{D}_1 car le plus court chemin du sommet d_1 au sommet x_3 est le chemin (d_1, x_2, x_3) qui est de longueur 2. Visuellement, la perturbation se propage à la frontière $F_{\mathcal{I}^*} = \{x_1, x_3\}$ par deux chemins différents (d_1, x_1) et (d_1, x_2, x_3) mais au moment où elle affecte le sommet x_1 , son effet ne se propage qu'au sommet x_2 .

3.6 Localisation et classification des capteurs pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure

3.6.1 Cas de la perturbation unique

Nous commençons d'abord par le cas où la perturbation est unique. Avec la Définition 3.5.2, dans le cas particulier où il existe une perturbation unique d_1 , on a des conditions nécessaires et suffisantes pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure suivantes :

Théorème 3.6.1. *Considérons Σ_{Λ}^{dz} un système structuré du type (3.4.4) et son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda}^{dz})$. Supposons que ce système soit affecté par une seule perturbation d_1 . Soit \mathcal{D}_1 le disque associé à d_1 . Le problème du rejet de perturbation par retour de mesure est génériquement soluble si et seulement si :*

1. Pour tout $(d_1, x_i) \in W'$, $x_i \in \mathcal{I}^*$,
2. Quand $\mathcal{D}_1 \neq \{\emptyset\}$, il existe $x_j \in \mathcal{D}_1$ et $z_k \in Z$ tel que $(x_j, z_k) \in W'$.

Les conditions précédentes impliquent que la perturbation d_1 doit n'affecter directement que des sommets de l'ensemble \mathcal{I}^* et qu'il faut la mesure d'au moins un sommets d'état dans le disque \mathcal{D}_1 .

Quand le problème du rejet de perturbation par retour de mesure est génériquement soluble pour le système affecté par une perturbation unique d_1 , nous pouvons caractériser les capteurs essentiels et inutiles pour cette solubilité comme suit :

Théorème 3.6.2. *Considérons Σ_{Λ}^{dz} un système structuré du type (3.4.4) et son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda}^{dz})$. Supposons que ce système est affecté par une seule perturbation d_1 et que le problème du rejet de perturbation par retour de mesure est génériquement soluble. Soit \mathcal{D}_1 le disque associé à d_1 .*

1. $z_j \in Z$ est un capteur inutile si et seulement si pour tout sommet d'état x_i tel que $(x_i, z_j) \in W'$, alors $x_i \notin \mathcal{D}_1$.

Chapitre 3. Localisation et classification des capteurs pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure

2. $z_j \in Z$ est un capteur essentiel si et seulement si z_j est le seul capteur utile.

Ce théorème dit qu'un capteur est inutile s'il ne mesure que des états en dehors de \mathcal{D}_1 et qu'un capteur qui mesure des états de \mathcal{D}_1 est utile pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure. Évidemment s'il existe un seul capteur qui mesure dans \mathcal{D}_1 , il est essentiel.

La démonstration des théorèmes précédents est donnée dans [Commault et al., 2011] (voir Annexe).

Exemple 3.6.1.

Considérons le système structuré Σ_{Λ}^{dz} de type (3.4.4) dont le graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda}^{dz})$ est présenté Figure 3.7.

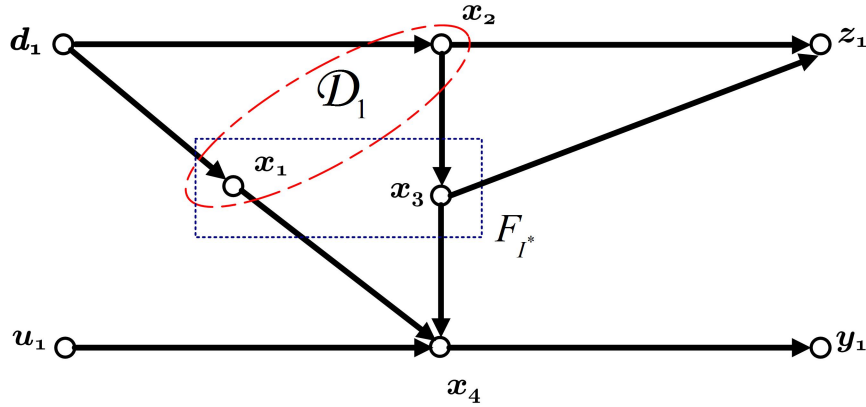


FIG. 3.7 – Graphe orienté $G(\Sigma_{\Lambda}^{dz})$ de l'Exemple 3.6.1

Grâce aux Définitions 3.4.4, 3.5.1 et 3.5.2 on peut déterminer :

$$\mathcal{I}^* = \{x_1, x_2, x_3\}$$

$$F_{\mathcal{I}^*} = \{x_1, x_3\}$$

$$\mathcal{D}_1 = \{x_1, x_2\}$$

D'après le Théorème 3.6.1, le problème du rejet de perturbation par retour de mesure est génériquement soluble car on a le capteur z_1 qui mesure un état dans le disque \mathcal{D}_1 . D'après le Théorème 3.6.2, le capteur z_1 , qui est l'unique capteur qui mesure un état de \mathcal{D}_1 , est un capteur essentiel pour la solubilité du problème du rejet de perturbation par retour de mesure.

Supposons maintenant qu'on a deux capteurs z_1 et z_2 comme présenté Figure 3.8. Dans ce cas les capteurs z_1 et z_2 sont des capteurs utiles, non essentiels pour la solubilité du problème du rejet de perturbation par retour de mesure.

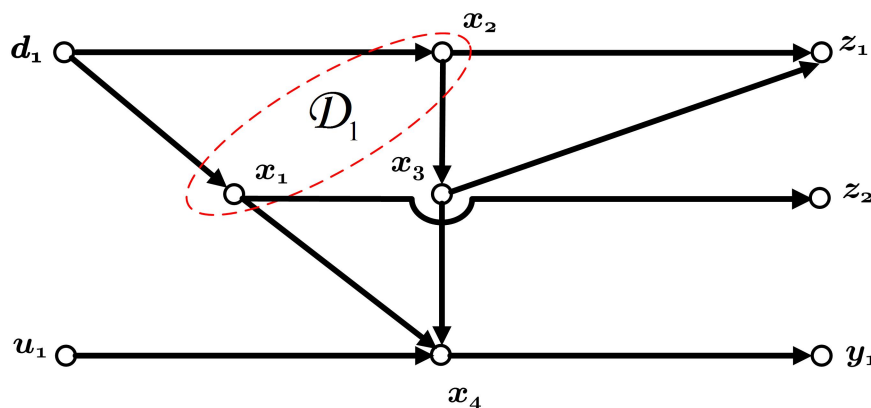


FIG. 3.8 – Graphe orienté du système avec deux mesures

Dans le cas du système avec le graphe associé présenté Figure 3.9, d'après le Théorème 3.6.2, le capteur z_3 est un capteur inutile pour la solubilité du problème du rejet de perturbation par retour de mesure car ce capteur ne mesure qu'un état en dehors du disque \mathcal{D}_1 . En fait, ce capteur nous donne tardivement les informations sur la perturbation.

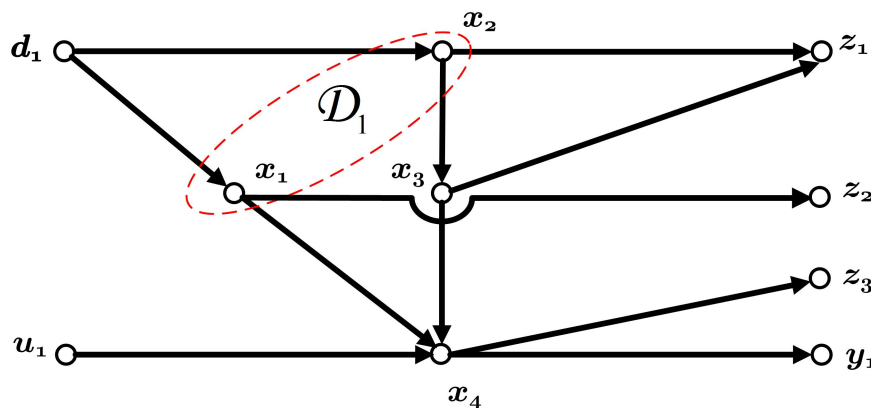


FIG. 3.9 – Graphe orienté du système avec trois mesures

3.6.2 Cas général

Dans cette partie, nous étudions la localisation et la classification des capteurs pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure quand le système est affecté par plusieurs perturbations. Le problème dans ce cas est plus complexe.

Chapitre 3. Localisation et classification des capteurs pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure

Nouvelle condition

Donnons maintenant une nouvelle condition pour que le problème du rejet de perturbation par retour de mesure soit génériquement soluble. Nous allons voir qu'il suffit d'étudier le problème du rejet de perturbation sur une partie de l'espace d'état :

Théorème 3.6.3. *Considérons le système structuré Σ_{Λ}^{dz} du type (3.4.4) et son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda}^{dz})$. Ce système est affecté par l'ensemble de perturbations $D = \{d_1, \dots, d_q\}$. Le problème du rejet de perturbation par retour de mesure est génériquement soluble si et seulement si :*

1. d_1, \dots, d_q arrivent uniquement sur des sommets d'état x_i appartenant à \mathcal{I}^* , c'est-à-dire pour tout $(d_i, x_j) \in W'$, x_j appartient à \mathcal{I}^* ,
2. $\rho(D, Z) = \rho(D, Z \cup F_{\mathcal{I}^*})$ et $l_X(D, Z) = l_X(D, Z \cup F_{\mathcal{I}^*})$

où :

- $\rho(D, Z)$ et $l_X(D, Z)$ sont respectivement la taille et le nombre minimal de sommets de X d'un couplage maximal entre D et Z ,
- $\rho(D, Z \cup F_{\mathcal{I}^*})$ et $l_X(D, Z \cup F_{\mathcal{I}^*})$ sont respectivement la taille et le nombre minimal de sommets de X d'un couplage maximal entre D et $Z \cup F_{\mathcal{I}^*}$.

Interprétation

- Comme on l'a vu dans la Section 3.3, la première condition est la condition nécessaire et suffisante pour la solubilité du rejet de perturbation par retour d'état. Cette condition est donc évidemment nécessaire pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure.
- La deuxième condition correspond au problème d'observateurs à entrées inconnues [Basile & Marro, 1969; Chu, 2000]. Cette condition exprime le fait qu'il est possible d'estimer l'effet des perturbations à la frontière $F_{\mathcal{I}^*}$ à partir des mesures. En fait, si on ne peut pas estimer l'effet des perturbations à la frontière $F_{\mathcal{I}^*}$ à partir des mesures, l'effet inconnu des perturbations va se propager en dehors de \mathcal{I}^* et ne peut être rejeté par retour d'état et par conséquent par retour de mesure. Il est donc nécessaire de pouvoir estimer l'effet des perturbations sur $F_{\mathcal{I}^*}$, la frontière de \mathcal{I}^* . Ceci correspond au problème de la poursuite du modèle : trouver un système dynamique \mathcal{O} (où les entrées sont des mesures Z et les sorties sont des estimés des états de la frontière $\hat{F}_{\mathcal{I}^*}$) tel que $\hat{F}_{\mathcal{I}^*} = F_{\mathcal{I}^*}$ pour des conditions initiales nulles (voir Figure 3.10). Σ_1 et Σ_2 sont des sous-systèmes du système Σ . Ce problème a une solution si et seulement si la structure à l'infini (le nombre de zéros à l'infini et leurs multiplicités) de Σ_2 est le même que celui de $[\Sigma_1, \Sigma_2]$. Ce résultat a été démontré en termes géométriques [Malabre & Kucera, 1984] ou par l'approche matrice de transfert [Morse, 1975]. Pour prouver cette égalité, il suffit de prouver l'égalité du nombre de zéros à l'infini et de la somme des ordres des zéros à l'infini [Dion et al., 1994].

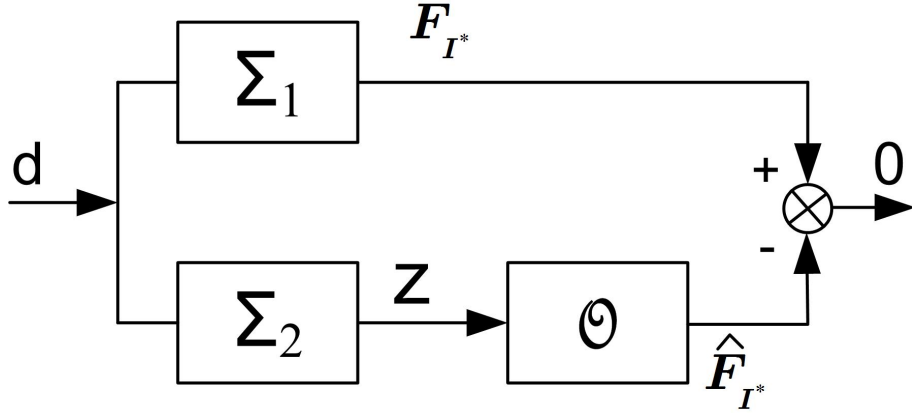


FIG. 3.10 – Problème de la poursuite du modèle

Dans le cadre des systèmes structurés, le nombre de zéros à l’infini est égal à la taille d’un couplage maximal entre les sommets d’entrée et les sommets de sortie dans le graphe associé au système et la somme des ordres des zéros à l’infini est égale au nombre minimal de sommets d’état d’un tel couplage [Commault et al., 1991]. L’égalité des structures à l’infini de Σ_2 et $[\Sigma_1, \Sigma_2]$ coïncide donc avec la deuxième condition du Théorème 3.6.3. La première partie de cette condition est la condition de rang. Le fait qu’elle ne soit pas satisfaite implique que l’on n’a pas assez de mesures (capteurs). La deuxième partie de la condition, lorsqu’elle n’est pas satisfaite, implique que des mesures nous donnent des informations trop tardives pour rejeter l’effet des perturbations sur les sorties.

Une démonstration sommaire de ce théorème a été donnée d’abord dans [Commault et al., 2010]. Le lecteur peut trouver une démonstration complète en termes graphiques dans [Commault et al., 2011] (voir Annexe). L’idée principale est que si une des deux conditions du Théorème 3.6.3 n’est pas vérifiée, il existe un état qui n’appartient ni à \mathcal{I}^* ni à \mathcal{J}^* . Le problème du rejet de perturbation par retour de mesure n’est donc pas soluble d’après le Théorème 3.4.5.

Remarque : A partir de ce théorème, on peut démontrer aussi le Théorème 3.6.1 du cas de perturbation unique

Nécessité :

- La première condition est une condition nécessaire pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure (voir le Théorème 3.6.3).
- Notons que s’il n’y a pas de chemin du sommet d_1 à une mesure quelconque, le rejet de perturbation par retour de mesure n’est évidemment pas soluble sauf si $\mathcal{D}_1 = \{\emptyset\}$.

Sinon, le couplage maximal entre $\{d_1\}$ et Z (respectivement entre $\{d_1\}$ et $Z \cup F_{\mathcal{I}^*}$)

Chapitre 3. Localisation et classification des capteurs pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure

est de taille 1. Supposons maintenant que $\mathcal{D}_1 \neq \{\emptyset\}$ et qu'il n'existe pas de mesure des sommets de \mathcal{D}_1 . Avec la Définition 3.5.2, il est évident que la deuxième partie de la condition 2 du Théorème 3.6.3 n'est pas vérifiée. Le problème du rejet de perturbation par retour de mesure n'est génériquement pas soluble.

Suffisance :

- Lorsque d_1 n'affecte directement que des sommets de \mathcal{I}^* et $\mathcal{D}_1 = \{\emptyset\}$, il n'y a pas de chemin de la perturbation à la sortie contrôlée. La fonction de transfert entre la perturbation et la sortie contrôlée est zéro [van der Woude, 1991a] et le problème du rejet de perturbation est résolu avec le contrôle $u(t) = 0$.
- Si les deux conditions sont remplies, la taille d'un couplage maximal entre $\{d_1\}$ et Z (respectivement entre $\{d_1\}$ et $Z \cup F_{\mathcal{I}^*}$) est égale à 1. De plus à partir de la définition du disque associé à une perturbation, le nombre minimal de sommets de X est le même pour les deux couplages. Suite au Théorème 3.6.3, le problème du rejet de perturbation par retour de mesure est donc génériquement soluble. \square

Nous considérons maintenant quelques exemples.

Exemple 3.6.2.

Considérons le système structuré Σ_{Λ}^{dz} de type (3.4.4) dont le graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda}^{dz})$ est présenté Figure 3.11. L'ensemble \mathcal{I}^* et l'ensemble \mathcal{J}^* sont obtenus à partir des Définitions

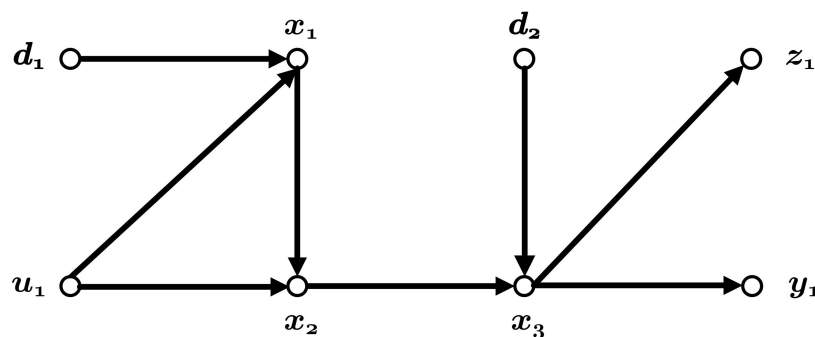


FIG. 3.11 – Graphe orienté $G(\Sigma_{\Lambda}^{dz})$ de l'Exemple 3.6.2

3.4.4 et 3.4.6 :

$$\mathcal{I}^* = \{x_1\} \quad \text{et} \quad \mathcal{J}^* = \{\emptyset\}$$

La perturbation d_2 arrive directement sur le sommet d'état x_3 qui n'appartient pas à \mathcal{I}^* . D'après le Théorème 3.6.3, le rejet de perturbation par retour de mesure n'est pas génériquement soluble. On peut vérifier aussi que la condition du Théorème 3.4.5 n'est pas satisfaite :

$$\mathcal{I}^* \cup \mathcal{J}^* = \{x_1\} \neq X$$

Exemple 3.6.3.

Chapitre 3. Localisation et classification des capteurs pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure

Considérons le système structuré Σ_{Λ}^{dz} de type (3.4.4) dont le graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda}^{dz})$ est présenté Figure 3.12.

On obtient à partir de la Définition 3.4.4 :

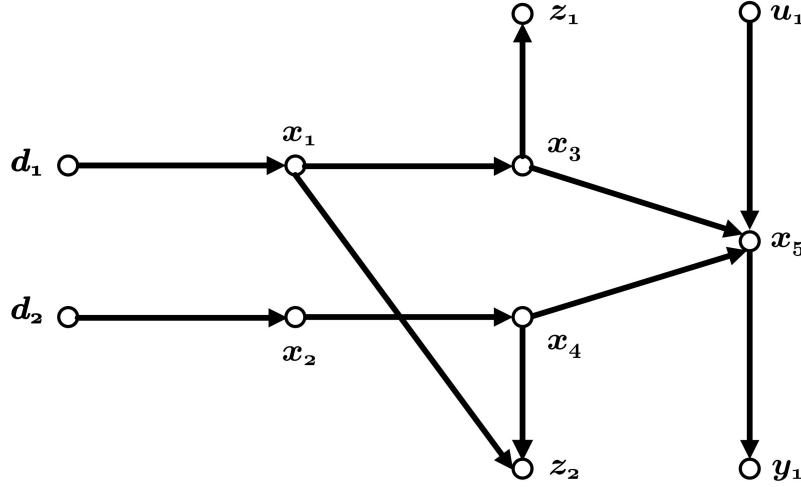


FIG. 3.12 – Graphe orienté $G(\Sigma_{\Lambda}^{dz})$ de l'Exemple 3.6.3

$$\mathcal{I}^* = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

Dans cet exemple, les perturbations arrivent uniquement sur des sommets de \mathcal{I}^* . La frontière de \mathcal{I}^* est donnée par :

$$F_{\mathcal{I}^*} = \{x_3, x_4\}$$

Le couplage maximal entre D et Z est de taille $\rho(D, Z) = 2$ et correspond uniquement à l'ensemble de deux chemins disjoints :

$$\{(d_1, x_1, x_3, z_1), (d_2, x_2, x_4, z_2)\}$$

dont le nombre total (minimal) de sommets de X est $l_X(D, Z) = 4$.

L'ensemble de deux chemins disjoints :

$$\{(d_1, x_1, z_2), (d_2, x_2, x_4)\}$$

est un couplage maximal entre D et $Z \cup F_{\mathcal{I}^*}$ qui ne contient que 3 sommets de X . La deuxième condition du Théorème 3.6.3 n'est pas satisfaite et le problème du rejet de perturbation par retour de mesure n'est pas génériquement soluble. Ce résultat peut être vérifié en déterminant les ensembles \mathcal{I}^* , \mathcal{J}^* et en utilisant le Théorème 3.4.5 :

$$\mathcal{J}^* = \{\emptyset\} \quad \text{et} \quad \mathcal{I}^* \cup \mathcal{J}^* \neq X$$

Chapitre 3. Localisation et classification des capteurs pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure

Localisation des capteurs

Nous nous intéressons maintenant à la localisation des capteurs pour résoudre le problème du rejet de perturbation par retour de mesure. Les résultats donnés sont des conséquences du Théorème 3.6.3.

Le premier résultat concerne le nombre minimal de capteurs nécessaires pour que le rejet de perturbation par retour de mesure soit soluble. Remarquons qu'une solution avec ce nombre minimal de capteurs est proposée plus tard.

Proposition 3.6.4. *Soit Σ_{Λ}^{dz} un système structuré du type (3.4.4) et son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda}^{dz})$. Pour résoudre le problème du rejet de perturbation par retour de mesure, le nombre de capteurs nécessaire est génériquement supérieur ou égal à $\rho(D, F_{\mathcal{I}^*})$, la taille maximale d'un couplage entre D et $F_{\mathcal{I}^*}$ dans $G(\Sigma_{\Lambda}^{dz})$.*

Démonstration :

D'après la deuxième condition du Théorème 3.6.3, il est nécessaire que la taille d'un couplage maximal entre D et Z soit égale à celle d'un couplage maximal entre D et $Z \cup F_{\mathcal{I}^*}$:

$$\rho(D, Z) = \rho(D, Z \cup F_{\mathcal{I}^*})$$

D'autre part, la taille d'un couplage maximal entre D et $Z \cup F_{\mathcal{I}^*}$ est toujours supérieure ou égale à celle d'un couplage entre D et $F_{\mathcal{I}^*}$:

$$\rho(D, Z \cup F_{\mathcal{I}^*}) \geq \rho(D, F_{\mathcal{I}^*})$$

On a donc :

$$\rho(D, Z) \geq \rho(D, F_{\mathcal{I}^*})$$

c'est-à-dire que la taille d'un couplage maximal entre D et Z est nécessairement supérieure ou égale à celle d'un couplage maximal entre D et $F_{\mathcal{I}^*}$. Ceci implique que pour rejeter des perturbation par retour de mesure, le nombre de capteurs utilisés doit être supérieur ou égal à $\rho(D, F_{\mathcal{I}^*})$. \square

Le résultat précédent est une condition nécessaire. La taille d'un couplage maximal entre D et $F_{\mathcal{I}^*}$ représente le rang générique de la matrice de transfert entre D et $F_{\mathcal{I}^*}$. Plus concrètement, elle représente le nombre de chemins de propagation indépendants des perturbations à la frontière de \mathcal{I}^* . Alors la nécessité d'avoir toute l'information sur les perturbations avant qu'elles se propagent en dehors de \mathcal{I}^* nous conduit au résultat du Théorème 3.6.4. Cette interprétation est illustrée par l'exemple suivant :

Chapitre 3. Localisation et classification des capteurs pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure

Exemple 3.6.4.

Considérons le système structuré Σ_{Λ}^{dz} du type (3.4.4) dont le graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda}^{dz})$ est présenté Figure 3.13. On obtient à partir des Définitions 3.4.4 et 3.5.1 l'ensemble \mathcal{I}^* et

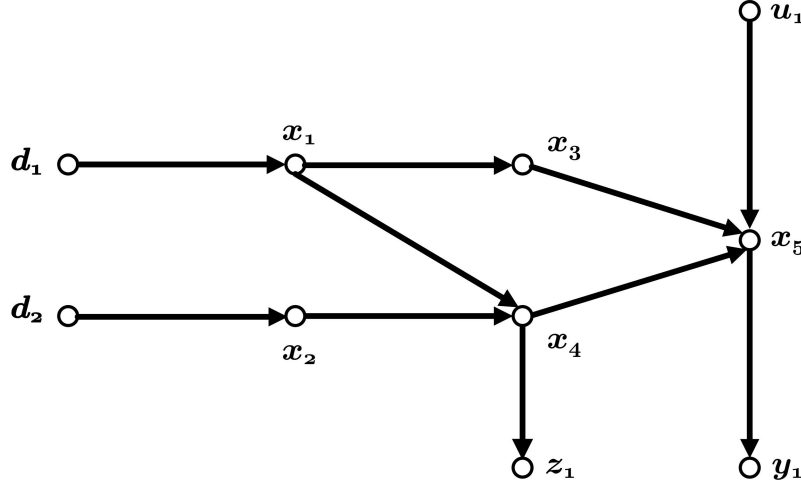


FIG. 3.13 – Graphe orienté $G(\Sigma_{\Lambda}^{dz})$ de l'Exemple 3.6.4

sa frontière $F_{\mathcal{I}^*}$:

$$\mathcal{I}^* = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \quad \text{et} \quad F_{\mathcal{I}^*} = \{x_3, x_4\}$$

Des perturbations arrivent uniquement sur des sommets de \mathcal{I}^* . Le couplage maximal entre D et $F_{\mathcal{I}^*}$ correspond à l'ensemble de deux chemins disjoints :

$$\{(d_1, x_1, x_3), (d_2, x_2, x_4)\}$$

et est de taille :

$$\rho(D, F_{\mathcal{I}^*}) = 2$$

Le rejet de perturbation par retour de mesure n'est pas soluble car d'après la Proposition 3.6.4, au moins deux capteurs sont nécessaires. En fait, l'effet de la perturbation d_1 peut se propager à la sortie à réguler y_1 indépendamment de l'effet de la perturbation d_2 par le chemin $(d_1, x_1, x_3, x_5, y_1)$. Avec une seule mesure z_1 nous n'avons que les informations sur l'effet combiné de d_1 et d_2 . Nous ne pouvons pas compenser l'effet de d_1 sur la sortie y_1 et le rejet de perturbation n'est pas soluble.

D'une manière constructive, nous allons voir que lorsque nous avons q perturbations et quand le rejet de perturbation par retour de mesure est résolu, q capteurs ou moins sont suffisants pour la solubilité du problème.

Proposition 3.6.5. *Soit Σ_{Λ}^{dz} un système structuré du type (3.4.4) et son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda}^{dz})$. Supposons que ce système soit affecté par q perturbations et que le rejet de*

Chapitre 3. Localisation et classification des capteurs pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure

perturbation par retour de mesure soit génériquement soluble avec l'ensemble de capteurs Z . Alors il existe V_Z , un sous-ensemble de Z , tel que le rejet de perturbation par retour de mesure est génériquement soluble par V_Z et sa taille est $|V_Z| \leq q$.

Cette proposition implique que si le rejet de perturbation est soluble, à partir de l'ensemble des capteurs donné, on peut trouver une solution contenant au plus q capteurs.

Démonstration :

Supposons que le problème du rejet de perturbation soit soluble avec l'ensemble de capteurs Z c'est-à-dire que le Théorème 3.6.3 est vérifié. Alors, un couplage maximal entre D et Z et un couplage maximal entre D et $Z \cup F_{\mathcal{T}^*}$ ont la même taille. De plus, le nombre minimal de sommets de X de tels couplages est le même. Considérons un couplage maximal entre D et Z ayant un nombre minimal de sommets de X et on note V_Z le sous-ensemble de Z contenu dans ce couplage. Il est clair que :

$$\rho(D, V_Z) = \rho(D, V_Z \cup F_{\mathcal{T}^*}) \text{ et } l_X(D, V_Z) = l_X(D, V_Z \cup F_{\mathcal{T}^*})$$

Cela implique que le problème de rejet de perturbation par retour de mesure est génériquement soluble avec le sous-ensemble de capteurs V_Z . Notez que la démonstration fournit une solution dont la cardinalité est la taille maximale d'un couplage maximal entre D et Z qui est toujours inférieure ou égale à q . \square

Exemple 3.6.5.

Considérons un système structuré du type (3.4.4) dont le graphe associé $G(\Sigma_{\lambda}^{dz})$ est présenté Figure 3.14. Nous avons 3 perturbations et 4 sorties mesurées. L'ensemble \mathcal{I}^*

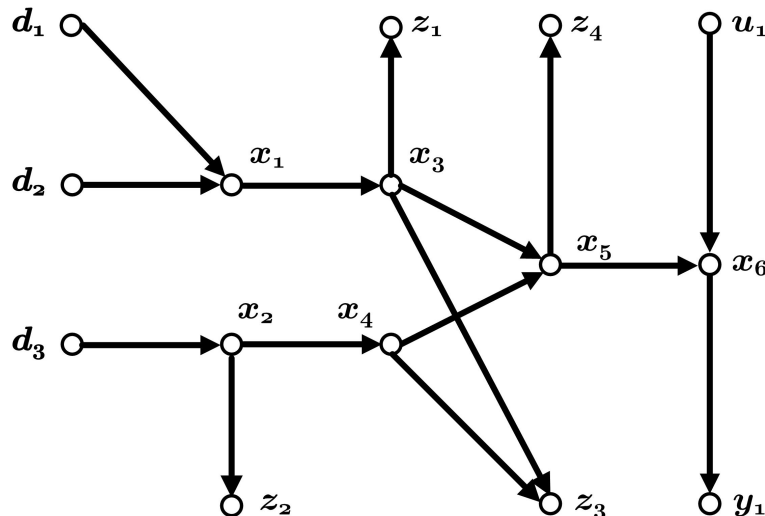


FIG. 3.14 – Graphe orienté $G(\Sigma_{\lambda}^{dz})$ de l'Exemple 3.6.5

Chapitre 3. Localisation et classification des capteurs pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure

et sa frontière $F_{\mathcal{I}^*}$ peuvent être obtenus à partir des Définitions 3.4.4 et 3.5.1 :

$$\mathcal{I}^* = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \quad \text{et} \quad F_{\mathcal{I}^*} = \{x_5\}$$

Un couplage maximal entre D et Z qui contient le nombre minimal de sommets de X correspond par exemple à l'ensemble de deux chemins disjoints :

$$\{(d_1, x_1, x_3, z_1), (d_3, x_2, z_2)\}$$

Ce couplage est aussi un couplage maximal entre D et $Z \cup F_{\mathcal{I}^*}$ ayant le nombre minimal de sommets de X . Dans cet exemple, les conditions du Théorème 3.6.3 sont vérifiées. Le problème du rejet de perturbation par retour de mesure est donc génériquement soluble. Suite à la Proposition 3.6.5, on peut résoudre ce problème avec 3 mesures ou moins. Avec la démonstration précédente, tout couplage maximal entre D et Z ayant le nombre minimal de sommets de X nous donne une solution. Par exemple, nous pouvons vérifier qu'avec les sous-ensembles de sorties mesurées (z_1, z_2) ou (z_2, z_3) on peut résoudre le rejet de perturbation. Il faut noter que ce problème peut être résolu en utilisant une seule sortie mesurée z_4 .

Les résultats précédents nous donnent le nombre nécessaire et le nombre suffisant de capteurs pour résoudre le problème du rejet de perturbation par retour de mesure. Montrons maintenant qu'il est inutile de mesurer les variables en dehors de \mathcal{I}^* . Ces mesures nous donnent trop tardivement des informations sur les perturbations. Ce résultat a été présenté en premier et prouvé d'une autre manière dans [Dion et al., 2008].

Théorème 3.6.6. *Considérons Σ_{Λ}^{dz} un système structuré du type (3.4.4) et son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda}^{dz})$. Un capteur $z_j \in Z$ qui ne mesure que des états en dehors de \mathcal{I}^* , c'est-à-dire pour tout $(x_i, z_j) \in W'$, $x_i \in X \setminus \mathcal{I}^*$, est inutile pour résoudre le problème du rejet de perturbation par retour de mesure.*

Démonstration :

Soit $z_j \in Z$ tel que pour tout $(x_i, z_j) \in W'$, $x_i \in X \setminus \mathcal{I}^*$. Alors, s'il existe un chemin $D - \{z_j\}$, ce chemin doit passer par $F_{\mathcal{I}^*}$ en un certain sommet x_k .

- Supposons que z_j appartienne à un couplage maximal entre D et Z (de taille notée $\rho(D, Z)$) ayant le nombre minimal de sommets de X . Alors dans ce couplage on peut remplacer le chemin du sommet d_l au sommet z_j par le chemin du sommet d_l au sommet x_k pour avoir un couplage entre D et $Z \cup F_{\mathcal{I}^*}$ de taille $\rho(D, Z)$ ayant moins de sommets de X . Suite à la deuxième condition du Théorème 3.6.3, le problème du rejet de perturbation par retour de mesure n'est génériquement pas soluble.
- Supposons que z_j appartienne à un couplage maximal entre D et $Z \cup F_{\mathcal{I}^*}$ ayant le nombre minimal de sommets de X . De la même façon, en remplaçant dans ce

Chapitre 3. Localisation et classification des capteurs pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure

couplage le chemin du sommet d_l au sommet z_j par le chemin du sommet d_l au sommet x_k , on va avoir un autre couplage maximal entre D et $Z \cup F_{\mathcal{I}^*}$ ayant moins de sommets de X . Ce fait est une contradiction.

L'interprétation précédente montre que z_j ne joue aucun rôle dans la deuxième condition du Théorème 3.6.3. Quand cette condition est satisfaite, la suppression de z_j n'influence pas cette satisfaction. Par conséquent, z_j est inutile pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure. \square

Le résultat suivant montre qu'il est nécessaire d'avoir une mesure dans chaque disque \mathcal{D}_i associé à la perturbation d_i . Remarquons qu'une mesure peut être dans l'intersection de plusieurs disques.

Proposition 3.6.7. *Le problème du rejet de perturbation par retour de mesure est génériquement soluble pour un système structuré du type (3.4.4) seulement si pour tout \mathcal{D}_i , $i = 1, \dots, q$, il existe $x^* \in \mathcal{D}_i$ et $z^* \in Z$ tel que $(x^*, z^*) \in W'$.*

Démonstration :

Ce résultat est une conséquence du Théorème 3.6.1 en considérant qu'une seule perturbation est active. \square

Quand on étudie le problème du rejet de perturbation par retour de mesure, la première étape consiste à vérifier si les perturbations n'affectent directement que des sommets de l'ensemble \mathcal{I}^* . Si ce n'est pas le cas, le rejet de perturbation n'est pas soluble. Lorsque cette condition est vérifiée, à partir du Théorème 3.6.6, les capteurs doivent mesurer des états à l'intérieur de \mathcal{I}^* . Le problème se réduit à trouver un ensemble de capteurs satisfaisant cette condition et tel que la deuxième condition du Théorème 3.6.3 est remplie. Dans la suite, nous nous concentrons sur des solutions particulières pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure y compris des solutions avec un nombre minimal de capteurs.

Le théorème suivant montre que mesurer des états de \mathcal{I}^* suffisamment proches de la perturbation et d'une manière découplée est suffisant pour résoudre le problème.

Proposition 3.6.8. *Soit Σ_{Λ}^{dz} un système structuré du type (3.4.4) et son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda}^{dz})$. Supposons que l'ensemble de perturbation $D = \{d_1, \dots, d_q\}$ n'affecte directement que des sommets de \mathcal{I}^* . Le problème du rejet de perturbation par retour de mesure est génériquement soluble si dans $G(\Sigma_{\Lambda}^{dz})$, il existe un couplage de taille q de D à Z , noté $(d_1, \dots, z_{i1}), \dots, (d_q, \dots, z_{iq})$, tel que :*

- chaque chemin (d_j, \dots, z_{ij}) est le plus court chemin du sommet d_j à l'ensemble Z ,
- le nombre de sommets de X dans le chemin (d_j, \dots, z_{ij}) est inférieur ou égal au nombre de sommets de X dans le plus court chemin de d_j à $F_{\mathcal{I}^*}$.

Chapitre 3. Localisation et classification des capteurs pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure

La condition ci-dessus justifie que les mesures sont prises dans les disques \mathcal{D}_i et que le sous-système avec entrée D et sortie Z satisfait à la condition de restructibilité [Basile & Marro, 1992]. Cette condition est la condition de découplage par injection de sortie et est le dual de la condition de découplage par retour d'état.

Démonstration :

Soit L le couplage maximal entre D et Z satisfaisant les conditions de la Proposition 3.6.8 et soit \bar{L} un couplage maximal quelconque entre D et $Z \cup F_{\mathcal{I}^*}$. La taille de ces deux couplages est égale au nombre de perturbations q . Suite aux conditions de cette proposition, le chemin initié par le sommet d_i dans le couplage L contient autant ou moins de sommets de X que celui dans le couplage \bar{L} . Ce fait implique que le nombre total de sommets de X dans le couplage L est inférieur ou égal à celui du couplage \bar{L} . Le couplage L est donc non seulement un couplage maximal contenant le nombre de minimal de sommets de X entre D et Z mais aussi entre D et $Z \cup F_{\mathcal{I}^*}$. La deuxième condition du Théorème 3.6.3 est vérifiée. Avec l'hypothèse de la Proposition 3.6.8 que les perturbations n'affectent directement que des sommets de l'ensemble \mathcal{I}^* , le problème du rejet de perturbation par retour de mesure est génériquement soluble.

Exemple 3.6.6.

Considérons un système structuré du type (3.4.4) dont le graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda}^{dz})$ est présenté Figure 3.15.

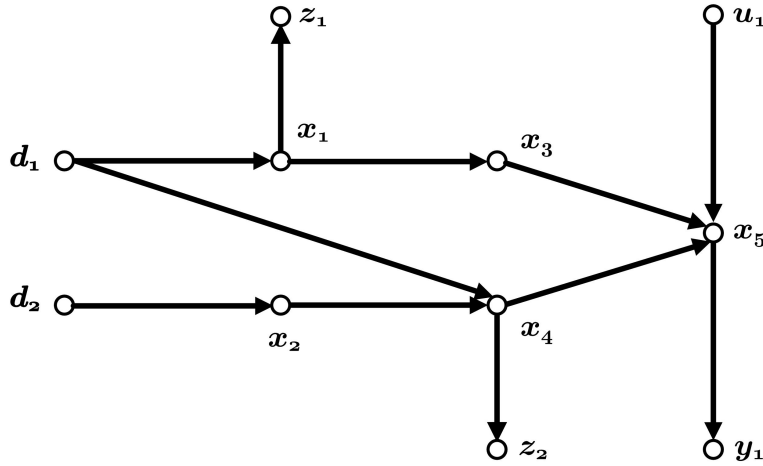


FIG. 3.15 – Graphe orienté $G(\Sigma_{\Lambda}^{dz})$ de l'Exemple 3.6.6

A partir des Définitions 3.4.4 et 3.5.1, on obtient :

$$\mathcal{I}^* = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \quad \text{et} \quad F_{\mathcal{I}^*} = \{x_3, x_4\}$$

Dans cet exemple, les perturbations n'affectent directement que des sommets de l'ensemble \mathcal{I}^* . Le plus court chemin du sommet d_1 à $F_{\mathcal{I}^*}$ est le chemin (d_1, x_4) dont la

Chapitre 3. Localisation et classification des capteurs pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure

longueur est $r_1 = 1$. Le plus court chemin du sommet d_2 à $F_{\mathcal{I}^*}$ est le chemin (d_1, x_2, x_4) dont la longueur est $r_2 = 2$. A partir de la Définition 3.5.2, on a :

$$\mathcal{D}_1 = \{x_1, x_4\} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_2 = \{x_2, x_4\}$$

Considérons un couplage maximal entre D et Z correspondant à l'ensemble de deux chemins disjoints :

$$\{(d_1, x_1, z_1), (d_2, x_2, x_4, z_2)\}$$

Le chemin (d_1, x_1, z_1) est un plus court chemin $\{d_1\} - Z$ et le chemin (d_2, x_2, x_4, z_2) est le plus court chemin $\{d_2\} - Z$. De plus, le nombre de sommets de X dans chaque chemin au-dessus est respectivement égal à r_1 et r_2 . D'après la Proposition 3.6.8, le problème du rejet de perturbation par retour de mesure est donc génériquement soluble.

Le résultat suivant montre que nous avons des solutions pour le rejet de perturbation en mesurant des $D - F_{\mathcal{I}^*}$ séparateurs.

Théorème 3.6.9. *Soit Σ_{Λ}^{dz} un système structuré du type (3.4.4) et son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda}^{dz})$. Supposons que les perturbations n'affectent directement que des sommets de \mathcal{I}^* . Notons S un $D - F_{\mathcal{I}^*}$ séparateur qui ne contient que des sommets de X . Le problème du rejet de perturbation par retour de mesure est génériquement soluble si pour chaque sommet $s_j \in S$, il existe une mesure z_{ij} qui ne mesure que s_j .*

Ce résultat vient du fait que le problème du rejet de perturbation par retour de mesure est génériquement soluble si on peut avoir des l'information sur la perturbation avant que son effet ne sorte de \mathcal{I}^* . Suite à la définition d'un $D - F_{\mathcal{I}^*}$ séparateur, tout chemin $D - F_{\mathcal{I}^*}$ doit contenir un sommet de ce séparateur. Donc si on mesure ce séparateur, on a toute l'information sur la perturbation.

Démonstration :

Supposons que la condition du Théorème 3.6.9 soit satisfaite. Considérons un couplage maximal entre D et $Z \cup F_{\mathcal{I}^*}$ ayant un nombre minimal de sommets de X . Si ce couplage contient des chemins terminés par des sommets de $F_{\mathcal{I}^*}$, chacun de ces chemins doit contenir un sommet s_j du séparateur S . Donc, pour chaque chemin, en remplaçant le chemin du sommet s_j à $F_{\mathcal{I}^*}$ par l'arc (s_j, z_{ij}) , on a un couplage maximal entre D et Z tel que $\rho(D, Z) = \rho(D, Z \cup F_{\mathcal{I}^*})$ et $l_X(D, Z) \leq l_X(D, Z \cup F_{\mathcal{I}^*})$. Le problème du rejet de perturbation par retour de mesure est donc génériquement soluble d'après le Théorème 3.6.3.

Remarque :

Chapitre 3. Localisation et classification des capteurs pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure

- Comme cas particulier du Théorème 3.6.9, mesurer tous les sommets d'état de $F_{\mathcal{I}^*}$ est suffisant pour résoudre le problème du rejet de perturbation par retour de mesure.
- A partir de la Proposition 3.6.4 et du Théorème 3.6.9, mesurer tous les sommets d'état d'un séparateur minimal $D - F_{\mathcal{I}^*}$ nous donne un ensemble minimal de capteurs pour la solubilité du problème du rejet de perturbation.

Classification des capteurs

Dans la partie précédente, on a étudié la localisation des capteurs pour résoudre le problème du rejet de perturbation par retour de mesure. Dans cette section, nous supposons que ce problème est résolu et nous allons donner des résultats et observations sur la classification des capteurs en fonction de leur importance pour la solubilité du problème.

Grâce au Théorème 3.6.6, nous pouvons caractériser un ensemble de capteurs inutiles pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure. C'est ensemble des capteurs qui ne mesurent que des états en dehors de \mathcal{I}^* .

Un ensemble de capteurs essentiels pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure est caractérisé par le résultat suivant :

Proposition 3.6.10. *Considérons Σ_{Λ}^{dz} un système structuré du type (3.4.4) avec son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda}^{dz})$. Supposons que le problème du rejet de perturbation par retour de mesure soit génériquement soluble. Un ensemble de capteurs essentiels pour cette condition est donné par :*

$$Z_{ess}(D, Z) \setminus Z_{ess}(D, Z \cup F_{\mathcal{I}^*})$$

où

- $Z_{ess}(D, Z)$ est l'ensemble des sommets de mesure qui appartiennent à tous les couplages maximaux entre D et Z .
- $Z_{ess}(D, Z \cup F_{\mathcal{I}^*})$ est l'ensemble des sommets de mesure qui appartiennent à tous les couplages maximaux entre D et $Z \cup F_{\mathcal{I}^*}$.

Démonstration :

Considérons un capteur $z_i \in Z_{ess}(D, Z) \setminus Z_{ess}(D, Z \cup F_{\mathcal{I}^*})$. Ceci implique que la taille d'un couplage maximal entre D et $Z \setminus \{z_i\}$ est :

$$\rho(D, Z \setminus \{z_i\}) = \rho(D, Z) - 1$$

Chapitre 3. Localisation et classification des capteurs pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure

mais la taille d'un couplage maximal entre D et $(Z \setminus \{z_i\}) \cup F_{\mathcal{I}^*}$ est inchangée :

$$\rho(D, (Z \setminus \{z_i\}) \cup F_{\mathcal{I}^*}) = \rho(D, Z \cup F_{\mathcal{I}^*})$$

Alors $\rho(D, Z \setminus \{z_i\}) < \rho(D, (Z \setminus \{z_i\}) \cup F_{\mathcal{I}^*})$. La deuxième condition du Théorème 3.6.3 n'est plus satisfaite avec l'ensemble de capteurs $Z \setminus \{z_i\}$. Le capteur z_i est donc un capteur essentiel pour la solubilité générique du problème du rejet de perturbation par retour de mesure.

Exemple 3.6.7.

Considérons un système structuré du type (3.4.4) dont le graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda}^{dz})$ est présenté Figure 3.16.

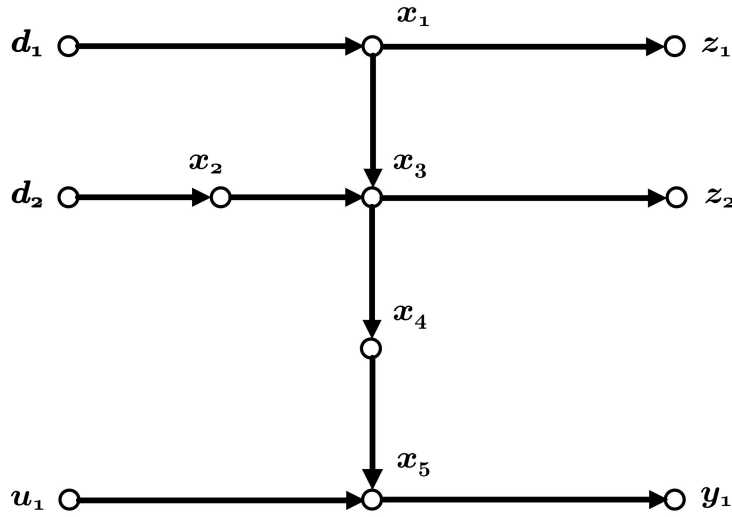


FIG. 3.16 – Graphe orienté $G(\Sigma_{\Lambda}^{dz})$ de l'Exemple 3.6.7

D'après les Définitions 3.4.4 et 3.5.1, on obtient :

$$\mathcal{I}^* = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \quad \text{et} \quad F_{\mathcal{I}^*} = \{x_4\}$$

Le problème du rejet de perturbation par retour de mesure est génériquement soluble car les conditions du Théorème 3.6.3 sont satisfaites.

Dans cette exemple, on peut vérifier que

$$Z_{ess}(D, Z) = \{z_1, z_2\} \quad \text{et} \quad Z_{ess}(D, Z \cup F_{\mathcal{I}^*}) = \{z_1\}$$

Alors d'après la Proposition 3.6.10, z_2 est un capteur essentiel pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure. En fait, on a $\rho(D, Z \setminus \{z_2\}) = 1 < \rho(D, (Z \setminus \{z_2\}) \cup F_{\mathcal{I}^*}) = 2$ et la deuxième condition du

Chapitre 3. Localisation et classification des capteurs pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure

Théorème 3.6.3 n'est plus satisfaite par l'ensemble $Z \setminus \{z_2\}$.

Pour le reste, nous avons quelques observations. Comme nous l'avons montré, pour n'importe quel ensemble admissible de capteurs pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure, un capteur qui ne mesure que des sommets d'état en dehors de \mathcal{I}^* est un capteur inutile. Avec les exemples suivants, nous allons voir qu'un capteur qui mesure un sommet d'état de \mathcal{I}^* peut être un capteur inutile ou utile, cela dépend de la structure du système et de l'ensemble des capteurs disponibles.

Exemple 3.6.8.

Considérons un système structuré du type (3.4.4) dont le graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda}^{dz})$ est présenté Figure 3.17.

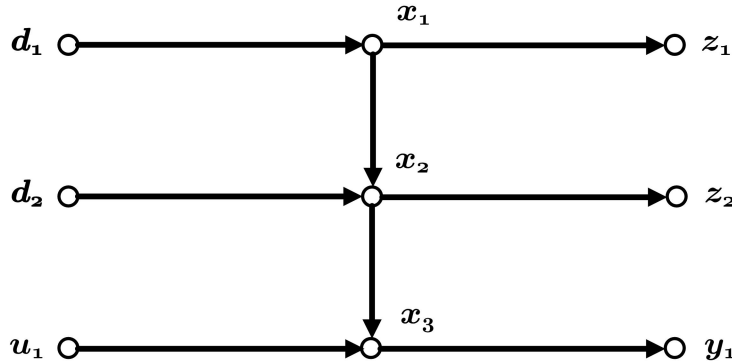


FIG. 3.17 – Graphe orienté $G(\Sigma_{\Lambda}^{dz})$ de l'Exemple 3.6.8

D'après les Définitions 3.4.4 et 3.5.1, on obtient :

$$\mathcal{I}^* = \{x_1, x_2\} \quad \text{et} \quad F_{\mathcal{I}^*} = \{x_2\}$$

On peut vérifier que les conditions du Théorème 3.6.3 sont satisfaites et le problème du rejet de perturbation par retour de mesure est génériquement soluble.

Les disques associés à chaque perturbation sont :

$$\mathcal{D}_1 = \{x_1, x_2\} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_2 = \{x_2\}$$

Comme nous l'avons montré, pour que le problème du rejet de perturbation par retour de mesure soit soluble, il est nécessaire d'avoir au moins un capteur qui mesure des états dans chaque disque \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 . Dans ce cas, le capteur z_2 est un capteur essentiel car il est le seul capteur qui mesure dans le disque \mathcal{D}_2 . On peut vérifier que si le capteur z_1 tombe en panne, le problème du rejet de perturbation est encore génériquement soluble avec le capteur z_2 . En fait, avec le capteur z_2 , on a assez d'information sur les perturbations. Dans ce cas, le capteur z_1 est un capteur inutile pour

Chapitre 3. Localisation et classification des capteurs pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure

le problème du rejet de perturbation par retour de mesure bien que ce capteur mesure un sommet d'état dans le disque associé à la perturbation d_1 ou bien un sommet dans \mathcal{I}^* .

Exemple 3.6.9.

Considérons un système structuré du type (3.4.4) dont le graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda}^{dz})$ est présenté Figure 3.18.

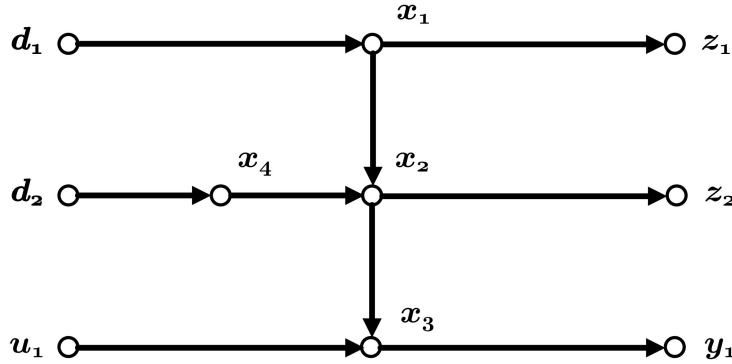


FIG. 3.18 – Graphe orienté $G(\Sigma_{\Lambda}^{dz})$ de l'Exemple 3.6.9

Dans cet exemple, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^* &= \{x_1, x_2, x_4\} \quad \text{et} \quad F_{\mathcal{I}^*} = \{x_2\} \\ \mathcal{D}_1 &= \{x_1, x_2\} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_2 = \{x_2, x_4\} \end{aligned}$$

Le capteur z_2 est le seul capteur qui nous donne l'information sur la perturbation d_2 et si le capteur z_1 tombe en panne, le problème du rejet de perturbation est encore génériquement soluble avec le capteur z_2 . Dans ce cas, le capteur z_1 est aussi un capteur inutile pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure.

Le phénomène observé dans l'Exemple 3.6.9 n'existe plus après une modification apportée sur le système comme montré dans l'Exemple 3.6.10.

Exemple 3.6.10.

Considérons un système structuré du type (3.4.4) dont le graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda}^{dz})$ est présenté Figure 3.19.

Dans cet exemple, on a trois capteurs. Quand il y a une défaillance sur le capteur z_2 , on peut vérifier que le problème du rejet de perturbation par retour de mesure est encore soluble avec l'ensemble des capteurs $\{z_1, z_3\}$. Si le capteur z_1 tombe aussi en panne, le problème n'est plus soluble car on n'a plus l'information de la perturbation d_1 . Donc dans cet exemple, le capteur z_1 est un capteur utile pour le

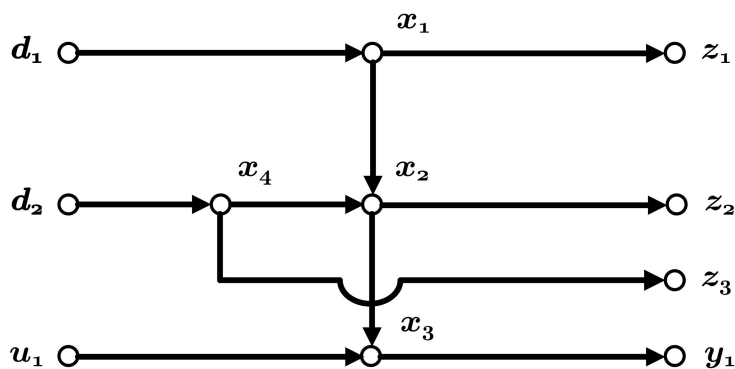


FIG. 3.19 – Graphe orienté $G(\Sigma_{\Lambda}^{dz})$ de l'Exemple 3.6.10

problème du rejet de perturbation par retour de mesure.

Dans le cas général, une caractérisation complète des capteurs inutiles et essentiels pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure reste un problème ouvert. Cependant, les capteurs essentiels peuvent être déterminés de manière polynomiale.

Proposition 3.6.11. *Soit Σ_{Λ}^{dz} un système structuré du type (3.4.4) et son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda}^{dz})$. Supposons que le problème du rejet de perturbation par retour de mesure est génériquement soluble. L'ensemble des capteurs essentiels peut être obtenu par un algorithme en temps polynomial.*

Démonstration :

Pour chaque capteur z_j du système, $j = 1, \dots, \nu$, nous supprimons le sommet de mesure correspondant sur le graphe associé du système et ensuite, nous vérifions si la condition du Théorème 3.4.5 est satisfaite. Si cette condition n'est pas satisfaite, ceci implique que le capteur z_j est un capteur essentiel pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure. Comme mentionné précédemment, cette vérification peut être effectuée en temps polynomial.

3.7 Exemple illustratif

Considérons le procédé thermique qui est décrit Figure 3.20. Ce procédé se compose de cinq bacs de telle sorte que chaque bac est alimenté par un débit d'eau fixe : $(F_1 + F_2)$ pour le premier et troisième bac, F_2 pour le deuxième et quatrième bac, $(F_1 + 2F_2)$ pour le cinquième bac. L'entrée de commande du système est la puissance de chauffage W . La sortie à réguler est T_5 , la température du cinquième bac. Les perturbations sont des variations des températures de l'alimentation T_{F_1} et T_{F_2} . L'objectif du problème de rejet

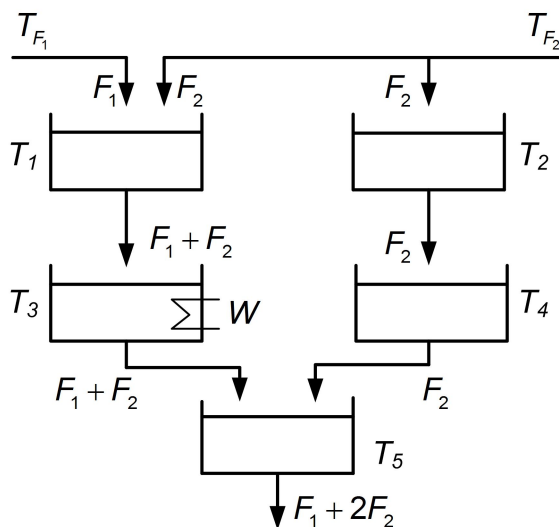


FIG. 3.20 – Le procédé thermique de 5 bacs

de perturbation est de trouver un compensateur dynamique à partir des mesures tel que T_5 n'est pas sensible aux variations de T_{F_1} et T_{F_2} .

Ce procédé peut être linéarisé autour d'un point de fonctionnement comme un système du type (3.3.1) où

$$x = \begin{bmatrix} \Delta T_1 & \Delta T_2 & \Delta T_3 & \Delta T_4 & \Delta T_5 \end{bmatrix}^T, u = \Delta w, d = \begin{bmatrix} \Delta T_{F_1} & \Delta T_{F_2} \end{bmatrix}^T, y = \Delta T_5.$$

et on a les matrices d'état suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-(F_1+F_2)}{C_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-F_2}{C_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(F_1+F_2)}{C_3} & 0 & \frac{-(F_1+F_2)}{C_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{F_2}{C_4} & 0 & \frac{-F_2}{C_4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(F_1+F_2)}{C_5} & \frac{F_2}{C_5} & \frac{-(F_1+2.F_2)}{C_5} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/C_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} F_1/C_1 & F_2/C_1 \\ 0 & F_2/C_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T,$$

où C_i est la capacité calorifique du i^{me} bac.

Chapitre 3. Localisation et classification des capteurs pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure

Ce modèle présente clairement la structure physique du procédé. Notez que ce modèle n'est pas exactement structuré comme dans la définition dans le Chapitre 2 car certaines dépendances existent entre les éléments des matrices d'état. Néanmoins, afin d'illustrer l'approche, nous considérons un système structuré de forme (3.4.1) qui a la même structure zéro/non-zéro que le système physique avec les matrices suivantes :

$$A_\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_3 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_5 & 0 & \lambda_6 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_7 & \lambda_8 & \lambda_9 \end{bmatrix}, E_\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ 0 & \lambda_{13} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda_{10} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, C_\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{14} \end{bmatrix}$$

Le graphe associé à ce système est représenté Figure 3.21. Remarquons que le système n'est pas génériquement commandable car les sommets d'état x_1, x_2 et x_4 ne sont pas connectés au sommet u .

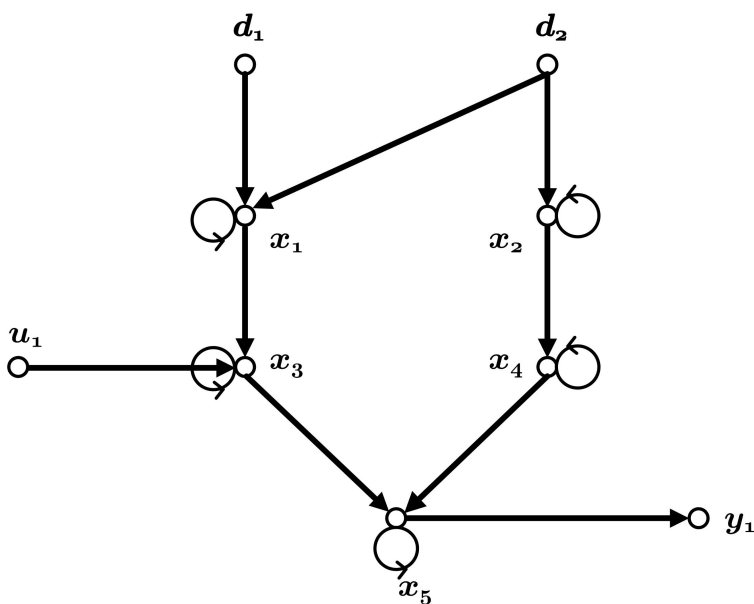


FIG. 3.21 – Le graphe du système de 5 bacs

3.7.1 Etude du problème du rejet de perturbation par retour d'état

A. Analyse géométrique :

Le noyau de la sortie et l'image de la perturbation sont :

$$KerC_{\Lambda} = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid x_5 = 0\} = span \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$ImE_{\Lambda} = span \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ 0 & \lambda_{13} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En utilisant l'Algorithme (3.3.3), on peut calculer le plus grand sous-espace $(A_{\Lambda}, B_{\Lambda})$ -invariant contenu dans $KerC_{\Lambda}$:

$$\mathcal{V}_{\Lambda}^* = span \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-\lambda_7}{\lambda_8} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le plus grand sous-espace fixe contenu dans \mathcal{V}_{Λ}^* est :

$$\mathcal{V}_F^* = span \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le plus petit sous-espace fixe contenant ImE_{Λ} est :

$$(ImE)_F = span \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La condition du Théorème 3.4.1 est vérifiée :

$$(ImE)_F \subset \mathcal{V}_F^*$$

Le problème du rejet de perturbation par retour d'état est donc génériquement soluble.

B. Analyse graphique :

A partir de la Définition 3.4.4 on obtient l'ensemble \mathcal{I}^* :

$$\mathcal{I}^* = \{x_1, x_2\}$$

Sur le graphe associé, on peut vérifier que les perturbation arrivent uniquement sur \mathcal{I}^* donc d'après le Théorème 3.4.2, le problème du rejet de perturbation par retour d'état est donc génériquement soluble.

3.7.2 Etude du problème du rejet de perturbation par retour de mesure

A. Localisation des capteurs :

A partir de la Définition 3.5.1, la frontière $F_{\mathcal{I}^*}$ de l'ensemble \mathcal{I}^* est :

$$F_{\mathcal{I}^*} = \{x_1, x_2\}$$

Dans cet exemple, les perturbations n'affectent directement que des sommets de l'ensemble \mathcal{I}^* . Le plus court chemin du sommet d_1 à $F_{\mathcal{I}^*}$ et le plus court chemin du sommet d_2 à $F_{\mathcal{I}^*}$ sont de longueur 1. A partir de la Définition 3.5.2, on a :

$$\mathcal{D}_1 = \{x_1\} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_2 = \{x_1, x_2\}$$

D'après le Théorème 3.6.6, les capteurs qui ne mesurent que les sommets x_3, x_4 et x_5 , c'est-à-dire qui ne mesurent qu'en dehors de \mathcal{I}^* , sont inutiles pour la solubilité du rejet de perturbation par retour de mesure.

Un couplage maximal entre D et $F_{\mathcal{I}^*}$ correspond à l'ensemble de chemins disjoints :

Chapitre 3. Localisation et classification des capteurs pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure

$$\{(d_1, x_1), (d_2, x_2)\}$$

qui est de taille 2. D'après la Proposition 3.6.4, on a besoin d'au moins deux capteurs pour rejeter la perturbation par retour de mesure. De plus, d'après la Proposition 3.6.7 il faut avoir au moins une mesure dans chaque disque $\mathcal{D}_1 = \{x_1\}$ et $\mathcal{D}_2 = \{x_1, x_2\}$.

Avec deux mesures z_1 et z_2 comme dans Figure 3.22, nous satisfaisons les conditions de la Proposition 3.6.8 et le problème du rejet de perturbation par retour de mesure est donc génériquement soluble. Avec ces mesures, notre système devient du type (3.4.4) où :

$$H_\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{16} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

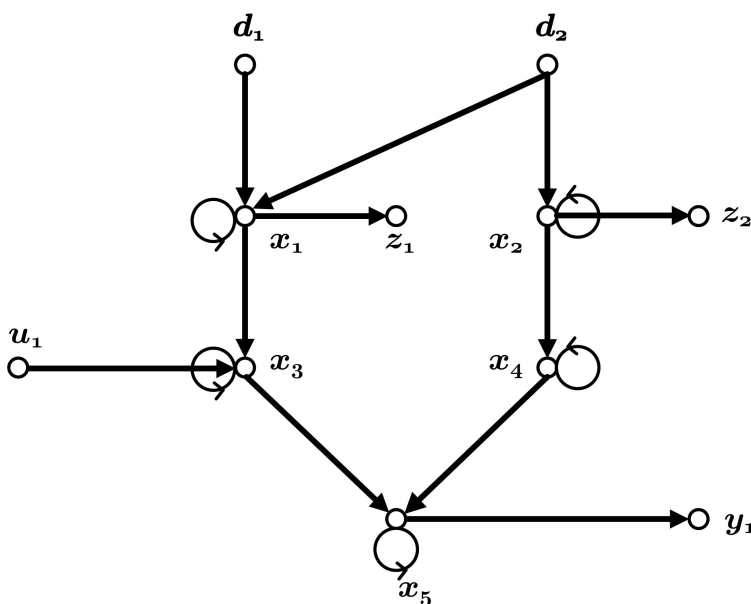


FIG. 3.22 – Le graphe du système de 5 bacs avec deux mesures

La classification dans cet exemple est assez simple. Comme nous avons besoin d'au moins deux capteurs pour rejeter la perturbation par retour de mesure, les deux capteurs z_1 et z_2 sont évidemment essentiels.

B. Analyse géométrique :

Comme analysé dans l'étude du problème du rejet de perturbation par retour d'état, le plus grand sous-espace fixe contenu dans \mathcal{V}_Λ^* est :

$$\mathcal{V}_F^* = \text{span} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De façon duale, le plus petit sous-espace (H_Λ, A_Λ) -invariant contenant $\text{Im}E_\Lambda$ est obtenu par l'Algorithme (3.3.7) :

$$\mathcal{N}_\Lambda^* = \text{span} \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ 0 & \lambda_{13} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et sa plus petite enveloppe fixe est :

$$\mathcal{N}_F^* = \text{span} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La condition du Théorème 3.4.4 est vérifiée :

$$\mathcal{N}_F^* \subset \mathcal{V}_F^*$$

Il existe donc génériquement un compensateur dynamique tel que la perturbation soit rejetée par retour de mesure.

C. Analyse graphique :

Avec deux mesures z_1 et z_2 , on peut déterminer l'ensemble \mathcal{J}^* à partir de la Définition 3.4.6 :

$$\mathcal{J}^* = \{x_3, x_4, x_5\}$$

Chapitre 3. Localisation et classification des capteurs pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure

On a $\mathcal{I}^* \cup \mathcal{J}^* = X$ et le rejet de perturbation par retour de mesure est soluble d'après le Théorème 3.4.5. On peut vérifier aussi que les conditions du Théorème 3.6.3 sont satisfaites :

- Les perturbations arrivent uniquement sur des sommets de \mathcal{I}^* .
- Un couplage maximal entre D et Z et celui entre D et $Z \cup F_{\mathcal{I}^*}$ ont la même taille de 2.
- Le nombre minimal de sommets de X dans ces deux couplages est égal à 2.

En effet, sur ce modèle, deux capteurs qui mesurent les état x_1 et x_2 nous donnent des informations préliminaires sur les perturbations qui nous permettent de compenser à temps avec la commande u l'effet des perturbations sur la sortie régulée y .

D. Calcul d'un compensateur dynamique pour le rejet de perturbation :

Pour cet exemple, les matrices de transfert de la forme (3.3.6) sont :

$$G_{\Lambda}(s) = \frac{\lambda_7 \lambda_{10} \lambda_{14}}{(s-\lambda_4)(s-\lambda_9)} \quad K_{\Lambda}(s) = \left[\frac{\lambda_3 \lambda_7 \lambda_{11} \lambda_{14}}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_4)(s-\lambda_9)} \quad \frac{\lambda_{14}}{(s-\lambda_9)} \left(\frac{\lambda_3 \lambda_7 \lambda_{12}}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_4)} + \frac{\lambda_5 \lambda_8 \lambda_{13}}{(s-\lambda_2)(s-\lambda_6)} \right) \right]$$

$$M_{\Lambda}(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad N_{\Lambda}(s) = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_{11} \lambda_{15}}{(s-\lambda_1)} & \frac{\lambda_{12} \lambda_{15}}{(s-\lambda_1)} \\ 0 & \frac{\lambda_{13} \lambda_{16}}{(s-\lambda_2)} \end{bmatrix}$$

Il faut trouver un compensateur propre $F_{\Lambda}(s)$ tel que, en boucle fermée, le transfert entre la perturbation et la sortie à réguler soit nul :

$$G(s)F(s)(I - M(s)F(s))^{-1}N(s) + K(s) = 0$$

Comme $M_{\Lambda}(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T$, la condition précédente se réduit à :

$$G_{\Lambda}(s)F_{\Lambda}(s)N_{\Lambda}(s) + K_{\Lambda}(s) = 0$$

On obtient alors :

$$F_{\Lambda}(s) = \left[\frac{-\lambda_3}{\lambda_{10} \lambda_{15}} \quad \frac{-\lambda_5 \lambda_8}{\lambda_7 \lambda_{10} \lambda_{16}} \left(\frac{s-\lambda_4}{s-\lambda_6} \right) \right]$$

Soit $g_1 = \frac{-\lambda_3}{\lambda_{10} \lambda_{15}}$, $g_2 = \frac{-\lambda_5 \lambda_8}{\lambda_7 \lambda_{10} \lambda_{16}}$, $g_3 = \frac{-\lambda_5 \lambda_8 (\lambda_6 - \lambda_4)}{\lambda_7 \lambda_{10} \lambda_{16}}$ alors nous avons la réalisation du compensateur dynamique comme suit :

$$\Sigma^{zu} : \begin{cases} \dot{\omega}(t) = \lambda_6 \omega(t) + \begin{bmatrix} 0 & g_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} \\ u(t) = \omega(t) + \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

Le résultat sur la solubilité du problème DRMF garantit que le transfert de la perturbation à la sortie régulée est nul, mais ne prend pas en compte les problèmes de stabilité. C'est pourquoi cette approche nécessite une analyse plus approfondie pour être appliquée dans la pratique. Avec le compensateur ci-dessus, nous avons la matrice dynamique du système en boucle fermée avec d'état étendu $x_e(t) = [x(t)^T, \omega(t)]^T$:

$$A_{\Lambda}^{CL} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (\lambda_3 + \lambda_{10}g_1) & \lambda_{10}g_2 & \lambda_4 & 0 & 0 & \lambda_{10} \\ 0 & \lambda_5 & 0 & \lambda_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_7 & \lambda_8 & \lambda_9 & 0 \\ 0 & g_3 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 \end{bmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique du système en boucle fermée est :

$$\det(sI - A_{\Lambda}^{CL}) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2)(s - \lambda_4)(s - \lambda_9)(s - \lambda_6)^2$$

Pour toute valeur positive des paramètres physiques, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4, \lambda_6, \lambda_9$ sont naturellement négatifs. Le système en boucle fermée est donc stable.

E. Résultats de simulation :

Dans cette partie, nous présentons les résultats de simulation pour le système à cinq bacs, en utilisant les valeurs physiques suivantes :

- Tous les volumes des bacs sont $V_{ci} = 5$ litres, ce qui conduit à une capacité calorifique de $C_i = V_{ci} \cdot c_e = 20,93(J.K^{-1})$
où $c_e = 4,186kJ.kg^{-1}.K^{-1}$ est la capacité thermique massive de l'eau.
- Les débits d'eau sont : $F_1 = F_2 = 0,1$ litre/seconde.
- Les températures de l'alimentation sont : $T_{F_1} = 20 \pm 5$ °C et $T_{F_2} = 60 \pm 5$ °C
- Le point de fonctionnement correspond au cas où $T_5 = 50$ °C avec $T_{F_1} = 20$ °C et $T_{F_2} = 60$ °C. Ceci implique la puissance de chauffage $u = 4.186kW$.

Chapitre 3. Localisation et classification des capteurs pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure

L'objectif est de maintenir la température T_5 à 50°C et qu'elle ne soit pas sensible aux variations de T_{F_1} et T_{F_2} .

Sans rejet de perturbation

Sur la Figure 3.23, on peut voir que quand le rejet de perturbation n'est pas appliqué, la sortie à réguler T_5 varie s'il y a une variation de température d'alimentation T_{F_1} ou de T_{F_2} . La Figure 3.24 montre la variation de température de chaque bac dans ce cas.

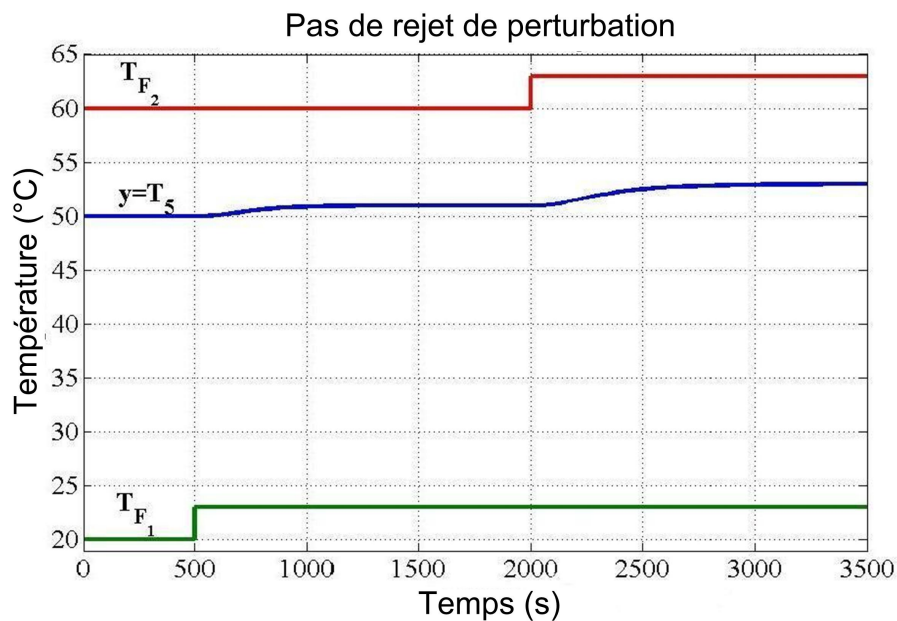


FIG. 3.23 – Les températures d'alimentation et de la sortie

Rejet de perturbation par retour de mesure

Nous appliquons le compensateur dynamique calculé précédemment au système de 5 bacs. La Figure 3.25 montre que l'effet des perturbations sur la sortie à réguler T_5 a été éliminé. La température du cinquième bac est maintenue constante à 50°C . La Figure 3.26 montre la température de chaque bac et la Figure 3.27 montre la puissance de chauffage du système en boucle fermée avec le compensateur.

3.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons revisité le problème du rejet de perturbation par retour d'état et par retour de mesure dans le contexte des systèmes linéaires classiques et des systèmes linéaires structurés. Des conditions géométriques et graphiques pour résoudre ces problèmes sont rappelées. Notre contribution principale réside dans une nouvelle condition nécessaire et suffisante graphique pour résoudre le problème du rejet de per-

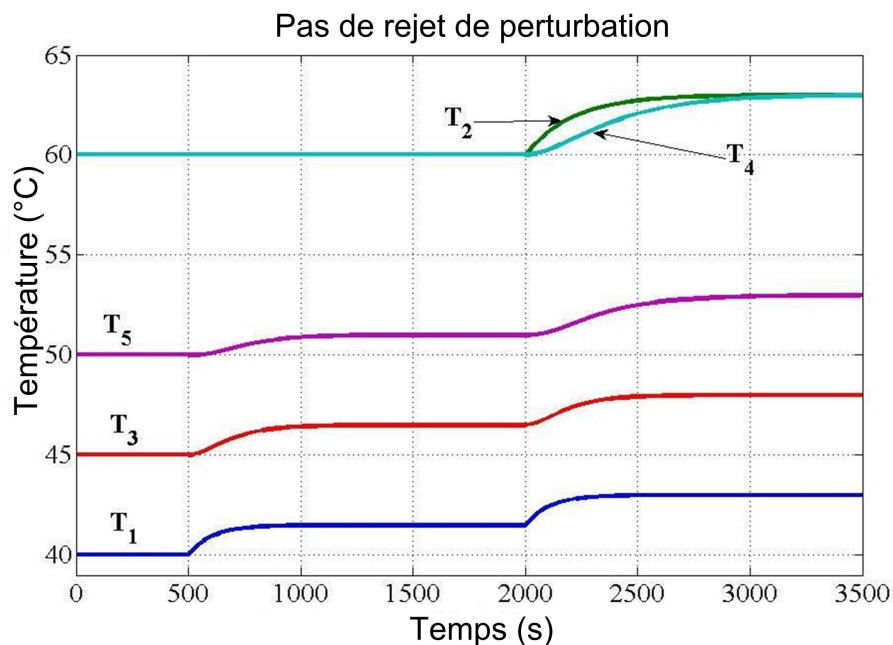


FIG. 3.24 – Les températures des bacs

turbation par retour de mesure. Cette condition nous permet d'étudier le problème de la localisation et de la classification des capteurs. Nous avons montré que les perturbations doivent n'affecter directement que l'ensemble \mathcal{I}^* . Ensuite, des capteurs qui ne mesurent que des états en dehors de \mathcal{I}^* sont inutiles pour résoudre le problème du rejet de perturbation par retour de mesure. Nous avons justifié que si on mesure un séparateur $D - F_{\mathcal{I}^*}$ de manière convenable, on peut estimer l'effet de la perturbation avant qu'elle ne se propage en dehors de \mathcal{I}^* . De plus, la taille minimale d'un tel séparateur nous donne le nombre minimal de capteurs à utiliser pour rejeter les perturbations par retour de mesure. Dans le cas d'une perturbation unique, une autre condition nécessaire et suffisante et une classification complète des capteurs en fonction de leur importance pour la solubilité du problème ont été données. Dans le cas général, une telle caractérisation des capteurs inutiles et essentiels reste un problème ouvert mais les capteurs essentiels peuvent être déterminés de manière polynomiale. Un exemple illustratif est présenté à la fin du chapitre. L'approche graphique proposée est bien adaptée pour l'analyse structurelle des systèmes structurés de grand taille. La solubilité du problème de rejet de perturbation peut être vérifiée par des algorithmes standard de l'optimisation combinatoire.

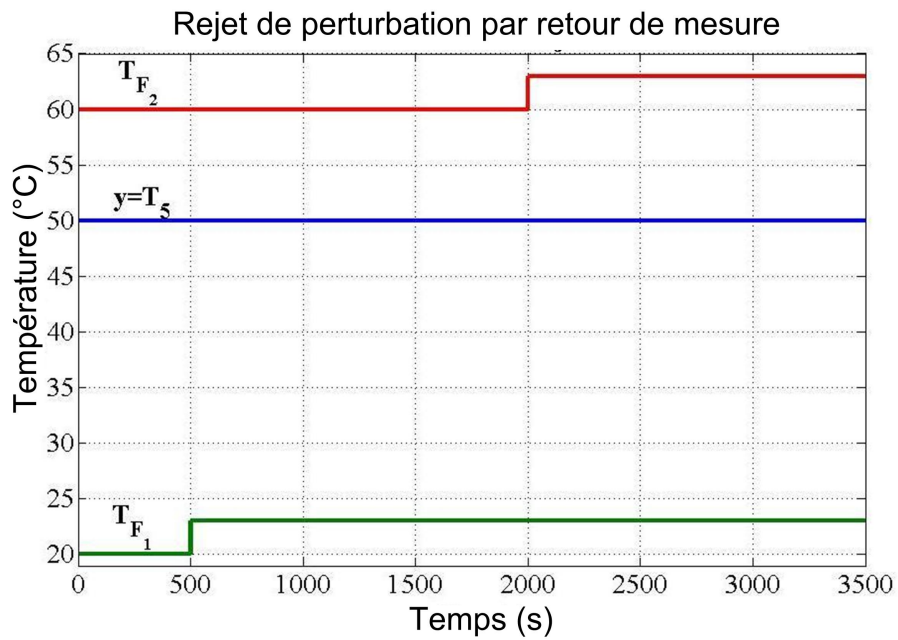


FIG. 3.25 – Les températures d'alimentation et de la sortie

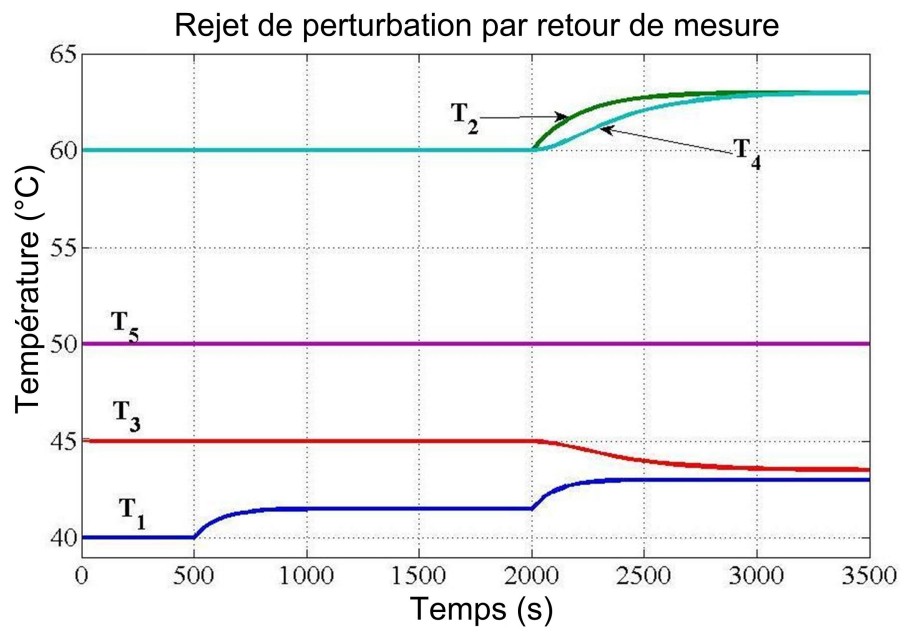


FIG. 3.26 – Les températures des bacs

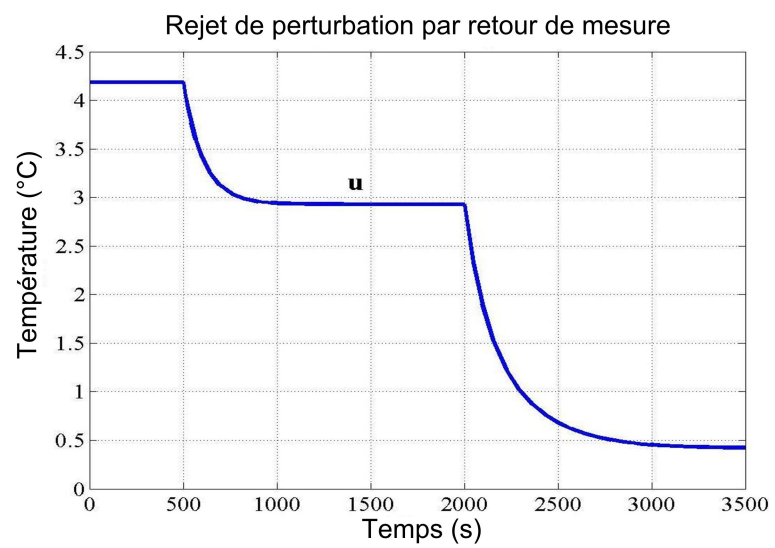


FIG. 3.27 – La commande de puissance de chauffage

Chapitre 4

Classification des capteurs pour la détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons un système linéaire sujet à des défauts additifs et affecté par des perturbations et nous abordons le problème de détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs. Dans un premier temps, nous rappelons les conditions de solubilité générique de ce problème qui ne dépendent que de la structure interne du système et pas de valeurs spécifiques des paramètres. Dans notre étude, le problème de détection et localisation de défauts est envisagé d'un point de vue structurel. L'avantage de cette approche structurelle est que les conditions de solubilité peuvent être représentées de manière assez simple sur le graphe et donc peuvent être vérifiées en utilisant des algorithmes standard de l'optimisation combinatoire. Cette approche est utile principalement à un niveau d'analyse. Si les conditions de solubilité sont satisfaites, il est nécessaire d'utiliser des méthodes existantes afin d'obtenir une solution pratique [Chen & Patton, 1999].

Ensuite, nous présentons notre contribution à l'aspect classification de capteurs pour le problème de détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs. Plus précisément, quand les conditions de solubilité générique de ce problème sont vérifiées avec les capteurs existants du système, nous classons (avec seulement une connaissance de la structure du système) ces capteurs en fonction de leur importance relativement à la préservation de cette solubilité. Nous caractérisons les capteurs qui sont essentiels, dont la défaillance conduit à la perte de la solubilité du problème et ceux qui sont inutiles pour cette solubilité. Ensuite, nous introduisons la notion de degré de criticité. Cette notion est utilisée pour une quantification de l'importance relative des capteurs pour la solubilité du problème de détection et localisation de défauts. Elle représente une mesure du degré de redondance d'un capteur pour cette solubilité. A la fin du chapitre, nous illustrons notre résultat par un exemple de procédé thermique

4.2 Détection et localisation de défauts (FDI - Fault Detection and Isolation) avec une banque d'observateurs

4.2.1 Introduction

Les systèmes conçus et fabriqués par l'homme (avions, véhicules, systèmes de production...) sont de plus en plus complexes à cause du grand nombre de composantes constituant ces systèmes. Malgré la progression rapide des nouvelles technologies, ces systèmes ne sont pas à l'abri de défaillances. L'exigence de sécurité et de maîtrise de la disponibilité des équipements rend le diagnostic (détection et localisation de défauts...)

Chapitre 4. Classification des capteurs pour la détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs

très important. Bénéficiant des outils existants en automatique, plusieurs approches de diagnostic ont été développées par différentes communautés de recherche, donnant des solutions au problème de détection et localisation de défauts. En fonction du type de connaissances dont nous disposons, ces approches peuvent être des méthodes à base des modèles quantitatifs, modèles qualitatifs ou des méthodes à base de l'historique du procédé [V. Venkatasubramanian & Kavuri, 2003b; V. Venkatasubramanian & Kavuri, 2003a; V. Venkatasubramanian & Yin, 2003].

Le problème de détection et localisation de défauts (**FDI** - **F**ault **D**etection and **I**solation) a reçu une attention considérable dans les dernières années [Frank, 1996; Chen & Patton, 1999; Blanke et al., 2003; Armeni et al., 2009]. Ce problème consiste à mesurer des données au cours du fonctionnement réel du système afin de déterminer si le fonctionnement du système est normal ou défaillant. Dans ce but, des signaux indicateurs de défauts nommés résidus sont construits à partir des données disponibles et ensuite utilisés pour localiser les défauts dès que possible. Le principe est que la valeur des résidus est nulle lorsque le système est en fonctionnement normal et différente de zéro en cas de défaillance. Dans la suite de cette section, nous rappelons le problème de détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs et les conditions pour sa solubilité générique. Les résidus sont générés en utilisant cette banque d'observateurs afin d'avoir un transfert défauts-résidus diagonal indépendamment des perturbations.

4.2.2 Définition

Considérons un système linéaire représenté par des équations d'état de la forme suivante :

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Lf(t) + Ed(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Mf(t) + Hd(t) \end{cases} \quad (4.2.1)$$

où :

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état,
- $f(t) \in \mathbb{R}^r$ est le vecteur de défaut,
- $d(t) \in \mathbb{R}^q$ est le vecteur de perturbation,
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de commande,
- $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie mesurée.

Chaque variable de sortie est fournie par un capteur spécifique. Pour simplifier, on note y_i à la fois pour le $i^{\text{ème}}$ capteur et pour la variable de sortie correspondante. Les matrices A, B, C, L, M, E and H sont des matrices de dimensions appropriées.

Un ensemble de résidus dédiés est généré en utilisant une banque de r observateurs pour le système (4.2.1), selon le schéma [Chen & Patton, 1999], voir Figure 4.1. Chaque résidu est conçu pour être sensible à un seul défaut et reste insensible aux autres défauts et aux perturbations.

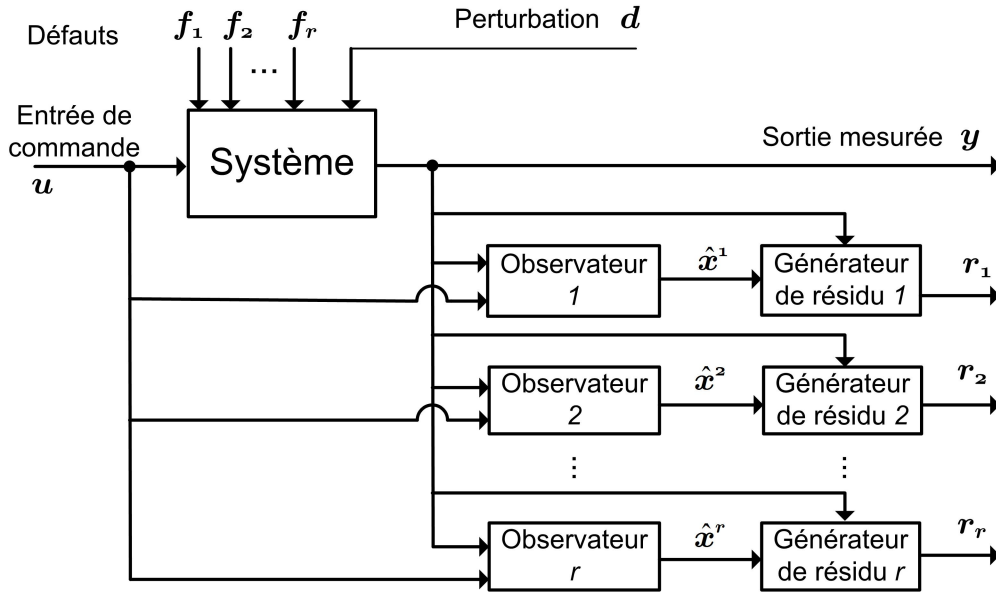


FIG. 4.1 – Le schéma de la banque d'observateurs

Le $i^{\text{ème}}$ observateur de cette banque de r observateurs est construit comme suit :

$$\dot{\hat{x}}^i(t) = A\hat{x}^i(t) + K^i(y(t) - C\hat{x}^i(t)) + Bu(t),$$

où $\hat{x}^i(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'état de $i^{\text{ème}}$ observateur et K^i , le gain de l'observateur, est conçu tel que $\hat{x}^i(t)$ converge asymptotiquement vers $x(t)$ quand il n'existe pas de défaut ni de perturbation.

Avec cette banque d'observateurs, les résidus sont définis comme :

$$r_i(t) = Q^i(y(t) - C\hat{x}^i(t)), \text{ pour } i = 1, \dots, r,$$

où Q^i est une matrice de dimension $1 \times p$.

Définition 4.2.1. *Le problème de détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs pour le système du type (4.2.1) consiste à trouver, si possible, les matrices K^i et Q^i telles que pour $i = 1, 2, \dots, r$, $A - K^i C$ est stable, la matrice de transfert entre les perturbations et les résidus est nulle et la matrice de transfert entre les défauts et les résidus est non singulière, propre et diagonale, c'est-à-dire que le transfert des perturbations et des défauts aux résidus a la forme :*

$$r(s) = T(s) \begin{pmatrix} d(s) \\ f(s) \end{pmatrix}$$

$$T(s) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & t_{11}(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & t_{22}(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & t_{rr}(s) \end{pmatrix}$$

Chapitre 4. Classification des capteurs pour la détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs

où $t_{ii}(s) \neq 0$ pour $i = 1, 2, \dots, r$.

Plus de détails peuvent être trouvés dans [Commault, Dion, Sename & Motyeian, 2002].

4.2.3 Solubilité générique du problème FDI

Comme présenté dans le Chapitre 2, la notion de système structuré est un outil intéressant pour étudier certaines propriétés du système qui en général ne dépendent que la structure interne du système et pas de la valeur des paramètres. Dans [Commault, Dion, Sename & Motyeian, 2002; Commault & Dion, 2007], les auteurs ont utilisé les systèmes structurés pour l'étude du problème de détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs. Ces modèles prennent en compte les relations entre les variables internes sans fixer la valeur exacte des paramètres.

Considérons maintenant un système linéaire comme décrit dans (4.2.1), mais avec des coefficients paramétrés, noté Σ_{Λ}^{fd} :

$$\Sigma_{\Lambda}^{fd} \begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\Lambda}x(t) + L_{\Lambda}f(t) + E_{\Lambda}d(t) + B_{\Lambda}u(t) \\ y(t) = C_{\Lambda}x(t) + M_{\Lambda}f(t) + H_{\Lambda}d(t) \end{cases} \quad (4.2.2)$$

Ce système est appelé système linéaire structuré si la matrice

$$J_{\Lambda}^{fd} = \begin{pmatrix} A_{\Lambda} & L_{\Lambda} & E_{\Lambda} & B_{\Lambda} \\ C_{\Lambda} & M_{\Lambda} & H_{\Lambda} & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice structurée, c'est-à-dire que les éléments de cette matrice sont soit fixés à zéro soit des paramètres libres.

Le graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda}^{fd}) = (V, W)$ du système Σ_{Λ}^{fd} est construit de la même façon que dans la Section 2.4.2, c'est-à-dire :

- ensemble des sommets : $V = U \cup X \cup Y \cup D \cup F$ où :
 - $U = \{u_1, \dots, u_m\}$ est l'ensemble de sommets d'entrée correspondant aux m entrées,
 - $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ est l'ensemble de sommets d'état correspondant aux n états,
 - $Y = \{y_1, \dots, y_p\}$ est l'ensemble de sommets de sortie correspondant aux p sorties,
 - $D = \{d_1, \dots, d_q\}$ est l'ensemble de sommets de perturbation correspondant aux q perturbations,
 - $F = \{f_1, \dots, f_r\}$ est l'ensemble de sommets de défaut correspondant aux r défauts.
- ensemble des arcs : $W = W_{XX} \cup W_{UX} \cup W_{DX} \cup W_{FX} \cup W_{XY} \cup W_{FY} \cup W_{DY}$ où :
 - $W_{XX} = \{(x_j, x_i) \mid a_{ij} \neq 0\}$,
 - $W_{UX} = \{(u_j, x_i) \mid b_{ij} \neq 0\}$,
 - $W_{DX} = \{(d_j, x_i) \mid e_{ij} \neq 0\}$,

Chapitre 4. Classification des capteurs pour la détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs

- $W_{FX} = \{(f_j, x_i) \mid l_{ij} \neq 0\}$,
 - $W_{XY} = \{(x_j, y_i) \mid c_{ij} \neq 0\}$,
 - $W_{FY} = \{(f_j, y_i) \mid m_{ij} \neq 0\}$,
 - $W_{DY} = \{(d_j, y_i) \mid h_{ij} \neq 0\}$,
- a_{ij} (resp. $b_{ij}, e_{ij}, l_{ij}, c_{ij}, m_{ij}, h_{ij}$) est l'élément (i, j) de la matrice A_Λ (resp. $B_\Lambda, E_\Lambda, L_\Lambda, C_\Lambda, M_\Lambda, H_\Lambda$).

Nous présentons maintenant la condition nécessaire et suffisante pour que le problème de détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs soit génériquement soluble [Commault, Dion, Sename & Motyeian, 2002].

Théorème 4.2.1. *Soit Σ_Λ^{fd} un système linéaire structuré du type (4.2.2) et son graphe associé $G(\Sigma_\Lambda^{fd})$. Le problème de détection et localisation de défauts (FDI) avec un banque d'observateurs de la Définition 4.2.1 est génériquement soluble si et seulement si :*

1. Σ_Λ^{fd} est génériquement observable,
2. $\rho(F \cup D, Y) = \rho(D, Y) + r$
où :
 - $\rho(F \cup D, Y)$ et $\rho(D, Y)$ sont respectivement la taille d'un couplage maximal entre $F \cup D$ et Y , et la taille d'un couplage maximal entre D et Y ,
 - r est le nombre de défauts.

La première condition nous permet d'avoir des observateurs stables pour le problème FDI. La deuxième condition exprime en particulier qu'il faut d'avoir un nombre suffisant de sorties mesurées pour être capable de détecter et d'isoler des défauts en restant insensible aux perturbations. Cette condition est appelée la condition de rang du problème FDI dans la suite.

Remarque : Dans notre modèle, les défauts ou les perturbations peuvent affecter tout l'état. Par simplicité, nous imposons que tout l'état soit observable. Si une partie de l'état n'est pas nécessaire pour générer des résidus, il est suffisant d'utiliser une l'observation partielle.

Dans le contexte des systèmes structurés, il existe des conditions nécessaires et suffisantes pour vérifier l'observabilité générique sur un graphe associé [Dion et al., 2003]. Une des conditions est présentée dans le Chapitre 2 concernant un ensemble de chemins état-sorties et cycles disjoints. Cependant, cette condition n'est pas facile à vérifier sur le graphe associé d'un système de grande dimension. Pour cette raison et pour résoudre le problème de classification, une autre condition va être donnée. Avant de présenter cette condition, introduisons maintenant la notion de *contraction*, qui est la notion duale de *dilatation* définie par [Lin, 1974] pour l'étude de la commandabilité.

Définition 4.2.2. *Soit Σ_Λ^{fd} un système linéaire structuré de type (4.2.2) et $G(\Sigma_\Lambda^{fd}) = (V, W)$ son graphe associé. On considère un ensemble de sommets d'état $S \subseteq X$. Notons*

Chapitre 4. Classification des capteurs pour la détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs

$E(S) \subseteq X \cup Y$ l'ensemble des successeurs des sommets de S . S est une contraction si :

$$\text{card}(S) > \text{card}(E(S))$$

où $\text{card}(\cdot)$ représente la cardinalité d'un ensemble.

La Figure 4.2 illustre la notion de contraction. On a S un sous-ensemble de sommets d'état du graphe $G(\Sigma_{\Lambda}^{fd})$ et $E(S)$ est l'ensemble qui contient tous les sommets successeurs des sommets d'état de S . Si la cardinalité de S est supérieure à la cardinalité de $E(S)$ alors on dit que le graphe $G(\Sigma_{\Lambda}^{fd})$ contient une contraction.

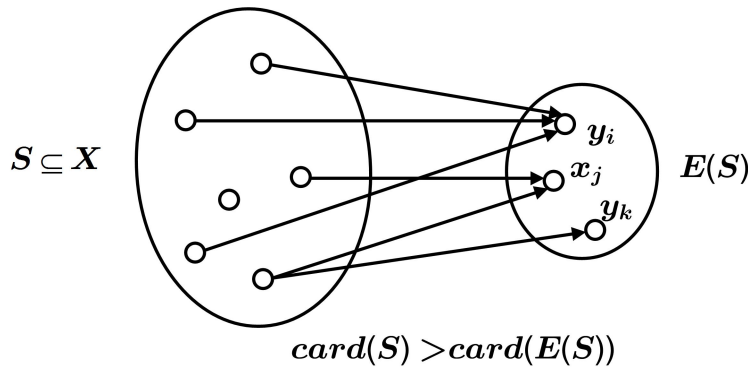


FIG. 4.2 – Une contraction dans un graphe

Les conditions d'observabilité générique peuvent s'exprimer comme suit [Commault, Dion & Trinh, 2008] :

Théorème 4.2.2. Soit Σ_{Λ}^{fd} un système linéaire structuré de type (4.2.2) et $G(\Sigma_{\Lambda}^{fd})$ son graphe associé. Ce système est génériquement observable si et seulement si :

1. Tout les sommets d'état sont connectés à la sortie,
2. Il n'existe pas de contraction dans $G(\Sigma_{\Lambda}^{fd})$.

Rappelons qu'un sommet d'état est dit connecté à la sortie si il existe un chemin de ce sommet à un sommet de sortie (voir la Définition 2.4.2). La première condition est appelée la condition de connexion à la sortie. Cette condition est très naturelle car elle signifie que chaque état doit agir au moins sur une sortie si on veut le reconstruire à partir des sorties. La deuxième condition représente l'inexistence d'un ensemble de sommets d'état qui est relié directement à un autre ensemble de sommets plus petit en nombre d'éléments. Sinon il existe certains états qui ne sont pas observables.

Prenons un exemple pour illustrer ce théorème.

Exemple 4.2.1.

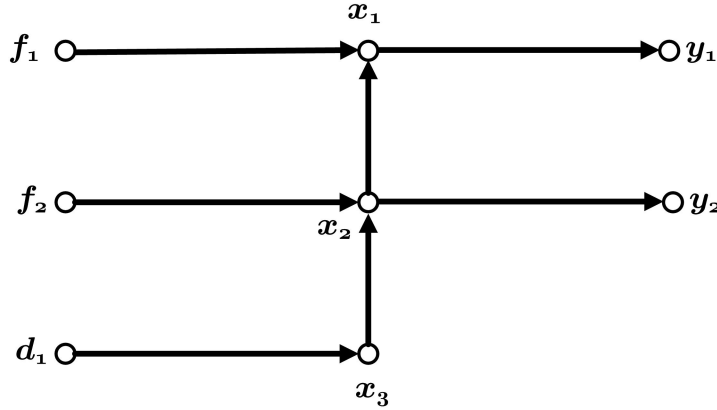


FIG. 4.3 – Le graphe $G(\Sigma_{\Lambda}^{fd})$ de l'Exemple 4.2.1

Soit Σ_{Λ}^{fd} un système linéaire structuré du type (4.2.2) dont le graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda}^{fd})$ est présenté Figure 4.3.

Pour chaque sommet d'état x_i , il existe un chemin $\{x_i\} - \{y_j\}$. Tous les sommets d'état sont donc connectés à la sortie.

Considérons maintenant un sous-ensemble de sommets d'état S du graphe $G(\Sigma_{\Lambda}^{fd})$. Notons $E(S)$ l'ensemble des successeurs des sommets de S .

- Si $S = \{x_1\}$, $E(S) = \{y_1\}$.
- Si $S = \{x_2\}$, $E(S) = \{x_1, y_2\}$.
- Si $S = \{x_3\}$, $E(S) = \{x_2\}$.
- Si $S = \{x_1, x_2\}$, $E(S) = \{y_1, x_1, y_2\}$.
- Si $S = \{x_1, x_3\}$, $E(S) = \{y_1, x_2\}$.
- Si $S = \{x_2, x_3\}$, $E(S) = \{x_1, y_2, x_2\}$.
- Si $S = \{x_1, x_2, x_3\}$, $E(S) = \{y_1, x_1, y_2, x_2\}$.

Alors nous avons que $card(S)$ est toujours inférieur ou égal à $card(E(S))$. Il n'existe donc pas de contraction dans le graphe $G(\Sigma_{\Lambda}^{fd})$.

Le système Σ_{Λ}^{fd} est donc génériquement observable d'après le Théorème 4.2.2. La première condition du Théorème 4.2.1 est satisfaite.

Maintenant, on va vérifier la condition de rang :

- La taille d'un couplage maximal entre $F \cup D$ et Y est $\rho(F \cup D, Y) = 2$ (par exemple les deux chemins disjoints (f_1, x_1, y_1) et (d_1, x_3, x_2, y_2)).
- La taille d'un couplage maximal entre D et Y est $\rho(D, Y) = 1$
- Le nombre de défauts est $r = 2$.

Alors la deuxième condition du Théorème 4.2.1 n'est pas satisfaite car $\rho(F \cup D, Y) < \rho(D, Y) + r$. Le problème de détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs pour notre système n'est pas génériquement soluble. En fait dans cet exemple, on n'a pas assez de capteurs pour être capable de détecter et d'isoler des défauts en restant insensible à la perturbation.

Exemple 4.2.2.

Soit Σ_{Λ}^{fd} un système linéaire structuré du type (4.2.2) dont son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda}^{fd})$ est présenté Figure 4.4.

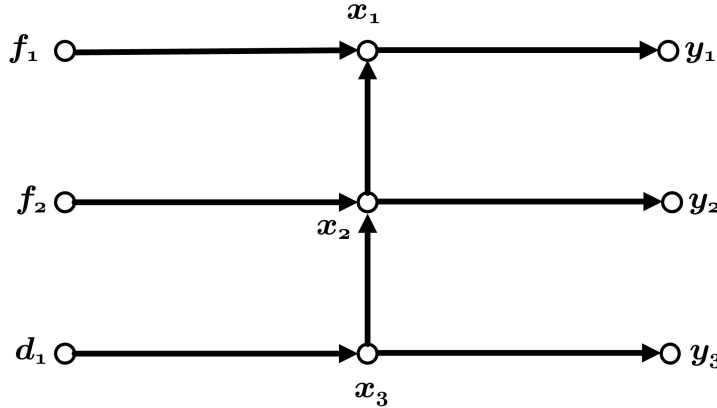


FIG. 4.4 – Le graphe $G(\Sigma_{\Lambda}^{fd})$ de l'Exemple 4.2.2

Comme pour l'exemple précédent, tout les sommets d'état sont connectés à la sortie et on peut vérifier qu'il n'existe pas de contraction dans le graphe $G(\Sigma_{\Lambda}^{fd})$. Ce système Σ_{Λ}^{fd} est génériquement observable. La première condition du Théorème 4.2.1 est donc satisfaite.

Dans cet exemple :

- La taille d'un couplage maximal entre $F \cup D$ et Y est $\rho(F \cup D, Y) = 3$ (avec trois chemins disjoints (f_1, x_1, y_1) , (f_2, x_2, y_2) et (d_1, x_3, y_3)).
- La taille d'un couplage maximal entre D et Y est $\rho(D, Y) = 1$
- Le nombre de défauts est $r = 2$.

Alors la deuxième condition du Théorème 4.2.1 est satisfaite.

Le problème de détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs pour le système de cet exemple est génériquement soluble.

La détection et la localisation des défauts via une banque d'observateurs nécessite de satisfaire des conditions d'observabilité et une condition de rang qui représente la nécessité d'un nombre suffisant de sorties mesurées pour être capable de détecter et d'isoler des défauts en restant insensible aux perturbations. Elles dépendent des capteurs disponibles du système. Quand ces conditions ne sont pas vérifiées en utilisant les capteurs existants du système, on cherche de nouveaux capteurs qui pourraient être ajoutés au système. Ce problème de localisation des capteurs a été étudié dans le contexte des système linéaires structurés [Commault et al., 2005; Commault & Dion, 2007].

Chapitre 4. Classification des capteurs pour la détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs

Dans ce chapitre, nous supposons que le problème FDI considéré est soluble avec l'ensemble de capteurs initial du système. Lorsque certains capteurs tombent en panne, ceci peut affecter l'observabilité du système qui est une exigence naturelle pour construire des observateurs stables et peut également affecter la capacité de détection et localisation de défauts du système. En cas de panne de capteur, le problème reste soluble si les conditions du Théorème 4.2.1 restent satisfaites. Dans la suite, nous abordons alors le deuxième aspect concernant l'ensemble de capteurs du système : la classification des capteurs en fonction de leur importance pour résoudre le problème. Comme la solubilité du problème dépend de l'observabilité et de la condition de rang, notre approche de classification de capteurs pour le problème de détection et localisation de défauts est basé sur la classification de capteurs pour ces deux conditions. En fait, dans ce chapitre on fait face au problème de classification des capteurs pour une propriété qui est composée de plusieurs sous-propriétés. Donc, la classification des capteurs pour la propriété globale peut être basée sur la classification des capteurs pour ses sous-propriétés. Cette méthode est intéressante quand on sait vérifier et classer des capteurs pour chaque sous-propriété de manière assez simple. Alors l'ensemble des capteurs essentiels pour la propriété globale est l'union des capteurs essentiels pour chaque sous-propriété. Cependant le problème devient plus difficile dans le cas des capteur inutiles. Nous allons voir qu'un capteur utile pour certaines sous-propriétés peut devenir inutile pour la propriété globale. Une méthode est donc proposée pour trouver tous les capteurs inutiles pour la propriété globale en utilisant la notion d'ensemble minimal de la Définition 1.4.5. L'approche proposée se base seulement sur une connaissance structurelle du système.

4.3 Classification des capteurs pour l'observabilité

Dans cette section, on résume quelques résultats principaux donnés dans [Commault, Dion & Trinh, 2008; Trinh, 2008], concernant l'ensemble des capteurs inutiles et l'ensemble des capteurs essentiels pour l'observabilité. Plus précisément, on classe les capteurs en fonction de leur importance pour les deux propriétés : la connexion à la sortie et l'absence de contraction.

4.3.1 Classification des capteurs pour la connexion à la sortie

Dans cette sous-section, nous classons les capteurs pour la propriété de connexion à la sortie. Nous commençons avec un système structuré observable et nous nous demandons si la connexion à la sortie est préservée en présence de défaut de capteur. Dans ce but, on utilise la notion de *sous-ensemble critique de capteurs*.

Définition 4.3.1. Soit Σ_{Λ}^{fd} un système linéaire structuré de type (4.2.2) et $G(\Sigma_{\Lambda}^{fd})$ son graphe associé. Soit $S \subseteq Y$ un ensemble de capteurs.

Chapitre 4. Classification des capteurs pour la détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs

- S est appelé un sous-ensemble critique de capteurs pour la connexion à la sortie si sa perte va déconnecter au moins un sommet d'état de la sortie sur le graphe $G(\Sigma_{\Lambda}^{fd})$.
- S est appelé un sous-ensemble critique irréductible de capteurs pour la connexion à la sortie s'il n'existe pas de sous-ensemble propre de S qui soit un sous-ensemble critique de capteurs.

Ces sous-ensembles critiques irréductibles de capteurs peuvent être obtenus de manière polynomiale [Commault, Dion & Trinh, 2008].

Exemple 4.3.1.

Considérons Σ_{Λ}^{fd} un système linéaire structuré du type (4.2.2) dont le graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda}^{fd})$ est présenté Figure 4.5. Sur le graphe, on peut vérifier que tous les sommets

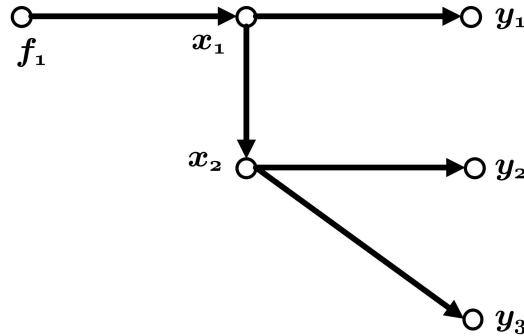


FIG. 4.5 – Le graphe $G(\Sigma_{\Lambda}^{fd})$ de l'Exemple 4.3.1

d'état sont connectés à au moins un sommet de sortie.

- L'ensemble $\{y_1, y_2\}$ n'est pas un sous-ensemble critique de capteurs pour la connexion à la sortie car quand on le perd, la connexion à la sortie de tous les sommets d'état est encore préservée par y_3 .
- L'ensemble $\{y_2, y_3\}$ est un sous-ensemble critique de capteurs pour la connexion à la sortie car sa perte va déconnecter x_2 de la sortie. De plus, cet ensemble est un sous-ensemble critique irréductible de capteurs pour la connexion à la sortie car $\{y_2\}$ ou $\{y_3\}$ ne sont pas des sous-ensembles critiques de capteurs.
- Il est évident que l'ensemble $\{y_1, y_2, y_3\}$ est un sous-ensemble critique de capteurs pour la connexion à la sortie car sa perte va déconnecter tous les sommets d'état de la sortie mais cet ensemble n'est pas un sous-ensemble critique irréductible de capteurs.

En utilisant la Définition 4.3.1, nous pouvons classer les capteurs en trois catégories pour la préservation de la connexion à la sortie comme suit [Commault, Dion & Trinh, 2008] :

Chapitre 4. Classification des capteurs pour la détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs

Théorème 4.3.1. *Considérons Σ_{Λ}^{fd} un système linéaire structuré de type (4.2.2) avec son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda}^{fd})$. Supposons que la propriété de connexion à la sortie soit vraie pour $G(\Sigma_{\Lambda}^{fd})$.*

1. *Les capteurs essentiels pour la propriété de connexion à la sortie sont les sous-ensembles critiques irréductibles de capteurs de cardinalité 1.*
2. *Les capteurs inutiles pour la propriété de connexion à la sortie sont ceux qui n'appartiennent à aucun sous-ensemble critique irréductible de capteurs.*

Exemple 4.3.2.

Considérons Σ_{Λ}^{fd} un système linéaire structuré du type (4.2.2) dont le graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda}^{fd})$ est présenté Figure 4.6.

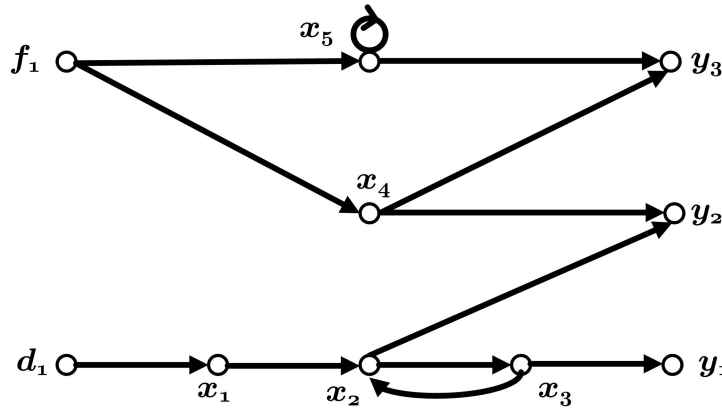


FIG. 4.6 – Le graphe $G(\Sigma_{\Lambda}^{fd})$ de l'Exemple 4.3.2

- Sur le graphe, on peut vérifier que tous les sommets d'état sont connectés à la sortie.
- Le capteur y_3 est un sous-ensemble critique irréductible de capteurs de cardinalité 1 pour la connexion à la sortie car quand on l'enlève, le sommet x_5 n'est plus connecté à la sortie. D'après le Théorème 4.3.1, y_3 est un capteur essentiel pour la connexion à la sortie.
- Le sommet x_2 est connecté avec deux sommets de sortie : y_1 et y_2 . Donc, si seulement un des deux capteurs tombe en panne, x_2 est encore connecté à la sortie. Mais quand ces deux capteurs tombent en panne à la fois, le sommet x_2 n'est plus connecté à la sortie. Alors, l'ensemble $\{y_1, y_2\}$ est un sous-ensemble critique irréductible de capteurs pour la connexion à la sortie. D'après le Théorème 4.3.1, il y a pas de capteur inutile pour la connexion à la sortie dans cet exemple.

4.3.2 Classification des capteurs pour l'absence de contraction

Pour caractériser la contraction puis classer les capteurs en fonction de leur importance pour l'absence de contraction, on utilise le graphe biparti. Ce graphe consiste en deux ensembles disjoints de sommets et il n'existe pas d'arc entre deux sommets qui appartiennent au même ensemble [Berge, 1973; Murota, 1987]. Un graphe biparti est un outil bien adapté aux calculs de rang générique des matrices.

Considérons Σ_{Λ}^{fd} un système linéaire structuré de type (4.2.2) et $G(\Sigma_{\Lambda}^{fd})$ son graphe associé. Pour étudier l'absence de contraction, nous supprimons les entrées, les perturbations et défauts du système et nous concentrons notre attention sur un sous-graphe de $G(\Sigma_{\Lambda}^{fd})$ qui ne contient que les sommets d'état, les sommets de sortie et les arcs incidents. Un graphe biparti $B(\Sigma_{\Lambda}^{fd}) = (B^+, B^-; W')$ peut être associé à ce sous-graphe de manière suivante (voir [Commault, Dion & Trinh, 2008]) :

- Nous dédoublons chaque sommet d'état x_i en deux sommets x_i^+ et x_i^- et nous avons donc :
 - $X^+ = \{x_1^+, \dots, x_n^+\}$ est le premier ensemble de sommets d'état
 - $X^- = \{x_1^-, \dots, x_n^-\}$ est le deuxième ensemble de sommets d'état
 - $Y = \{y_1, \dots, y_p\}$ est l'ensemble de sommets de sortie.
- L'ensemble de sommets B^+, B^- est donné par
 - $B^+ = X^+$
 - $B^- = X^- \cup Y$
- L'ensemble d'arcs W' est défini par $W_A \cup W_C$ où
 - $W_A = \{(x_j^+, x_i^-) | a_{ij} \neq 0\}$ correspond aux relations non nulles états-états.
 - $W_C = \{(x_j^+, y_i) | c_{ij} \neq 0\}$ correspond aux relations non nulles états-sorties.

Notons qu'un élément de la matrice $a_{ij} \neq 0$ (*resp.* $c_{ij} \neq 0$) signifie que l'élément (i, j) de la matrice A_{Λ} (*resp.* C_{Λ}) est un paramètre libre. Par convention, on appelle B^+ l'ensemble de sommets à "gauche" et B^- l'ensemble de sommets à "droite" par leur position sur le graphe biparti $B(\Sigma_{\Lambda}^{fd})$.

Le graphe biparti $B(\Sigma_{\Lambda}^{fd}) = (B^+, B^-; W')$ du système linéaire structuré Σ_{Λ}^{fd} dans l'Exemple 4.3.2 est présenté Figure 4.7. On a $B^+ = \{x_1^+, x_2^+, x_3^+, x_4^+, x_5^+\}$ et $B^- = \{x_1^-, x_2^-, x_3^-, x_4^-, x_5^-, y_1, y_2, y_3\}$.

Dans un graphe biparti, nous avons une structure particulière qui s'appelle un "couplage"

Définition 4.3.2. (Couplage) Dans un graphe biparti $B = (B^+, B^-; W')$, un ensemble d'arcs $M \subseteq W'$ tels que les arcs dans M n'ont aucun sommet en commun est appelé un

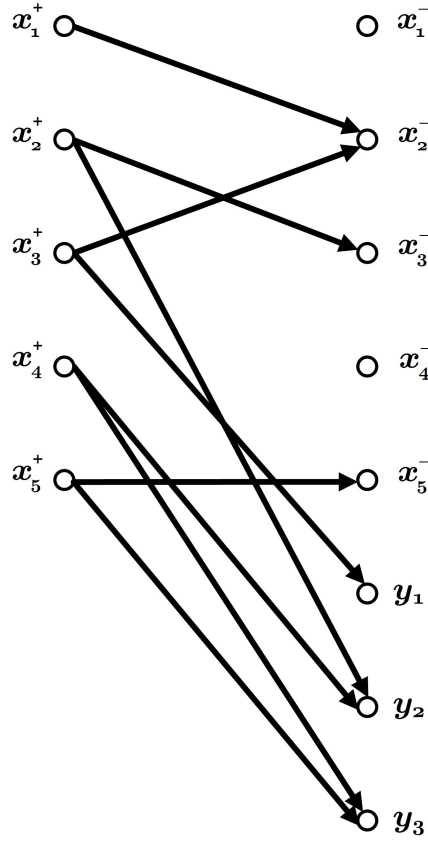


FIG. 4.7 – Le graphe biparti $B(\Sigma_{\Lambda}^{fd})$ de l'Exemple 4.3.2

couplage.

Le *cardinalité* d'un couplage, c'est-à-dire le nombre de ses arcs, s'appelle également sa taille. Un couplage M est dit *maximum* s'il a une cardinalité maximale. Le problème du couplage maximum est de trouver un couplage de cardinalité maximale. Ce problème peut être résolu en utilisant des algorithmes très efficaces basés sur les chaînes alternées augmentantes ou les idées de la théorie du flot maximal [Hopcroft & Karp, 1973].

Il est connu ([Lin, 1974]) que l'absence de contraction est équivalente au fait que la matrice $\begin{bmatrix} A_{\Lambda} \\ C_{\Lambda} \end{bmatrix}$ est génériquement de rang plein.

La notion de couplage permet une caractérisation simple de l'absence de contraction en termes de graphe biparti du système, ce qui dans notre cas peut être énoncé comme suit.

Proposition 4.3.2. ([Commault, Dion & van der Woude, 2002]) *Considérons Σ_{Λ}^{fd} un système linéaire structuré défini par (4.2.2) avec son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda}^{fd})$ et son graphe biparti associé $B(\Sigma_{\Lambda}^{fd})$. Il n'existe pas de contraction dans $G(\Sigma_{\Lambda}^{fd})$ si et seulement s'il existe un couplage de taille n dans $B(\Sigma_{\Lambda}^{fd})$, où n est le nombre de sommets d'état.*

DM décomposition

La décomposition de Dulmage-Mendelsohn (DM-Décomposition) ([Murota, 1987]) permet de décomposer de façon unique un graphe biparti B en sous-graphes bipartis irréductibles partiellement ordonnés $B_i = (B_i^+, B_i^-; W_i')$ ($i = 0, 1, \dots, r, \infty$) dits DM-composantes de la DM-Décomposition.

- La partie B_0 , qui a plus de sommets dans B^+ que dans B^- ($|B_0^+| > |B_0^-|$), est appelée partie minimale inconsistante. Cette partie a un couplage maximal de taille $|B_0^-|$.
- Les parties B_i ($i = 1, 2, \dots, r$) sont les parties qui ont autant de sommets dans B^+ que dans B^- , elles sont appelées parties consistantes. Ces parties admettent un couplage maximal de taille $|B_i^+| = |B_i^-|$.
- La partie B_∞ , qui a moins de sommets dans B^+ que dans B^- , est appelée partie maximale inconsistante avec un couplage maximal de taille $|B_\infty^+|$.

L'algorithme pour obtenir la DM-Décomposition et les propriétés des DM-composantes sont présentés dans [Murota, 1987]. Cette décomposition permet de caractériser l'ensemble des couplages maximum du graphe biparti $B(\Sigma_\Lambda^{fd})$ et nous pouvons caractériser l'absence de contraction comme suit :

Proposition 4.3.3. *Considérons Σ_Λ^{fd} un système linéaire structuré défini par (4.2.2) avec son graphe associé $G(\Sigma_\Lambda^{fd})$ et son graphe biparti associé $B(\Sigma_\Lambda^{fd})$. $G(\Sigma_\Lambda^{fd})$ ne contient pas de contraction si et seulement si la DM-Décomposition de $B(\Sigma_\Lambda^{fd})$ n'a pas de partie minimale inconsistante B_0 .*

Nous pouvons maintenant caractériser l'ensemble des capteurs essentiels et l'ensemble des capteurs inutiles pour l'absence de contraction dans le graphe $G(\Sigma_\Lambda^{fd})$ [Commault, Dion & Trinh, 2008] :

Théorème 4.3.4. *Considérons Σ_Λ^{fd} un système linéaire structuré défini par (4.2.2) avec son graphe associé $G(\Sigma_\Lambda^{fd})$ et son graphe biparti associé $B(\Sigma_\Lambda^{fd})$. Supposons que la propriété de l'absence de contraction dans le graphe $G(\Sigma_\Lambda^{fd})$ soit vraie.*

L'ensemble des capteurs essentiels pour l'absence de contraction correspond à l'ensemble des sommets de sortie qui appartiennent aux composantes B_i , ($i = 1, \dots, r$) dans la DM-Décomposition de $B(\Sigma_\Lambda^{fd})$.

Théorème 4.3.5. *Considérons Σ_Λ^{fd} un système linéaire structuré de type (4.2.2) avec son graphe associé $G(\Sigma_\Lambda^{fd})$ et son graphe biparti associé $B(\Sigma_\Lambda^{fd})$. Supposons que la propriété de l'absence de contraction dans le graphe $G(\Sigma_\Lambda^{fd})$ soit vraie. Considérons la partie B_∞ de la DM-Décomposition de $B(\Sigma_\Lambda^{fd})$.*

L'ensemble des capteurs inutiles pour l'absence de contraction correspond à l'ensemble des sommets de sortie qui n'appartiennent à aucun couplage maximum sur B_∞ contenant un nombre minimal de sommets de sortie.

Exemple 4.3.3.

Reconsidérons le système linéaire structuré Σ_{Λ}^{fd} dans L'Exemple 4.3.2. La DM-Décomposition de son graphe biparti $B(\Sigma_{\Lambda}^{fd})$ est présentée Figure 4.8

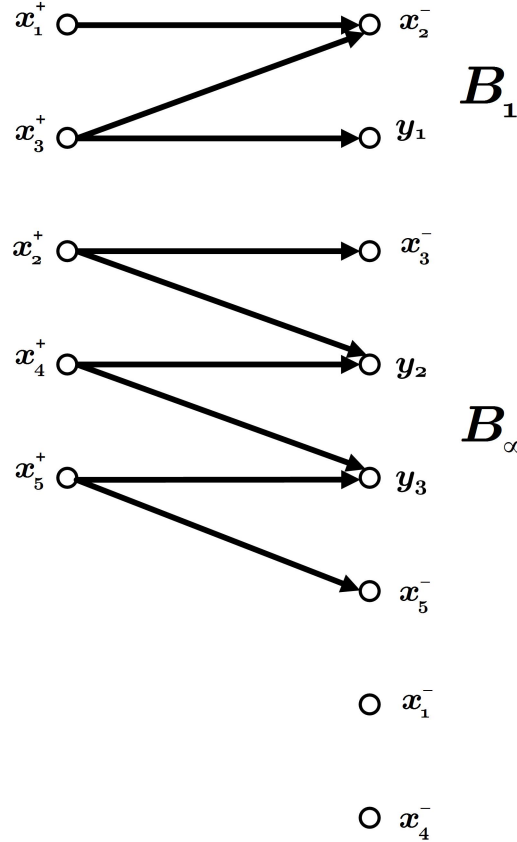


FIG. 4.8 – La DM-Décomposition de graphe biparti $B(\Sigma_{\Lambda}^{fd})$ de l'Exemple 4.3.2

Comme on le voit sur la Figure 4.8, le couplage maximum a la cardinalité 5, par exemple avec le couplage $\{(x_1^+, x_2^-), (x_3^+, y_1), (x_2^+, x_3^-), (x_4^+, y_2), (x_5^+, x_5^-)\}$. Il n'existe pas de partie minimale inconsistante B_0 . D'après la Proposition 4.3.3, $G(\Sigma_{\Lambda}^{fd})$ ne contient pas de contraction.

Regardons la partie consistante $B_1 = \{x_1^+, x_3^+, x_2^-, y_1\}$ de la DM-Décomposition. Si le capteur y_1 tombe en panne, l'ensemble $\{x_1^+, x_3^+, x_2^-\}$ représente une contraction. En fait, d'après le Théorème 4.3.4, le capteur y_1 est un capteur essentiel pour l'absence de contraction.

Maintenant on s'intéresse à la partie maximale inconsistante B_∞ de la DM-Décomposition. Pour caractériser les capteurs inutiles pour l'absence de contraction, on cherche des sommets de sortie qui n'appartiennent pas à un couplage maximum contenant le nombre minimal de sommet de sortie. Dans cet exemple, on a dans

B_∞ deux couplages maximaux contenant le nombre minimal de sommets de sortie : $\{(x_2^+, x_3^-), (x_4^+, y_2), (x_5^+, x_5^-)\}$ et $\{(x_2^+, x_3^-), (x_4^+, y_3), (x_5^+, x_5^-)\}$. Donc dans cet exemple, il n'y pas de capteur inutile pour l'absence de contraction.

4.4 Classification des capteurs pour la condition de rang du problème FDI

Dans cette section, nous considérons un système linéaire structuré du type (4.2.2) avec l'ensemble de capteurs Y et nous supposons que la condition de rang du Théorème 4.2.1 pour le problème de FDI est satisfaite. Nous allons classer les capteurs en trois catégories (essentiels, utiles, inutiles) pour cette condition de rang. En présence de perturbations, le problème de classification de capteurs est plus complexe que dans [Commault et al., 2007].

Soit $G(\Sigma_\Lambda^{fd})$ le graphe associé à un système linéaire structuré Σ_Λ^{fd} du type (4.2.2). Conformément à la notion de *sommets essentiels* présentée dans la Section 2.4.1, on a :

- L'ensemble des sommets qui appartiennent à tous les couplages maximaux entre $F \cup D$ et Y est :

$$V_{ess}(F \cup D, Y)$$

- L'ensemble des sommets qui appartiennent à tous les couplages maximaux entre D et Y est :

$$V_{ess}(D, Y)$$

Notons alors :

- L'ensemble des sommets de sortie qui appartiennent à tous les couplages maximaux entre $(F \cup D)$ et Y :

$$Y_{ess}(F \cup D, Y) = Y \cap V_{ess}(F \cup D, Y)$$

- L'ensemble des sommets de sortie qui appartiennent à tous les couplages maximaux entre D et Y

$$Y_{ess}(D, Y) = Y \cap V_{ess}(D, Y)$$

Le résultat suivant présente une relation entre ces deux ensemble de sorties :

Lemme 4.4.1. *Considérons Σ_Λ^{fd} un système linéaire structuré défini par (4.2.2) avec son graphe associé $G(\Sigma_\Lambda^{fd})$. On obtient alors :*

$$Y_{ess}(D, Y) \subseteq Y_{ess}(F \cup D, Y) \subseteq Y$$

Ce résultat est le dual de la Proposition 4 dans [Commault & Dion, 2007] : pour un système donné, un sommet de sortie reste un sommet essentiel quand on ajoute d'autres sommets d'entrée.

Chapitre 4. Classification des capteurs pour la détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs

Remarque :

En général on a $Y_{ess}(D, Y) \subseteq Y_{ess}(F \cup D, Y)$ et une démonstration basée sur la matrice de transfert est donnée dans [Commault & Dion, 2007]. Cependant, comme dans tout ce chapitre on suppose que la condition de rang du Théorème 4.2.1 ($\rho(F \cup D, Y) = \rho(D, Y) + r$) est vérifiée, ce résultat est obtenu facilement. En effet, quand la condition de rang est vérifiée, c'est-à-dire que la taille d'un couplage maximal entre $F \cup D$ et Y est égale à la taille d'un couplage maximal entre D et Y plus le nombre de défauts, tout couplage maximal entre $(F \cup D)$ et Y doit contenir un couplage maximal entre D et Y . Par conséquent, si un sommet de sortie appartient à tout couplage maximal entre D et Y , il appartient à tout couplage maximal entre $F \cup D$ et Y . Alors $Y_{ess}(D, Y) \subseteq Y_{ess}(F \cup D, Y)$.

Avec les notions $Y_{ess}(D, Y)$ et $Y_{ess}(F \cup D, Y)$, on a les résultats suivants qui caractérisent un sous-ensemble des capteurs inutiles et l'ensemble des capteurs essentiels pour la condition de rang du problème FDI :

Proposition 4.4.2. *Considérons Σ_{Λ}^{fd} un système linéaire structuré défini par (4.2.2) avec son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda}^{fd})$. Supposons que la condition de rang du problème FDI soit satisfaite. Alors $Y_{ess}(D, Y)$ est un sous-ensemble de capteurs inutiles pour la condition de rang du problème FDI.*

Démonstration :

Considérons un capteur $y_i \in Y_{ess}(D, Y) = Y \cap V_{ess}(D, Y)$. D'après le Lemme 4.4.1, $y_i \in Y_{ess}(F \cup D, Y) = Y \cap V_{ess}(F \cup D, Y)$.

Soit $V_Y \subseteq Y$ un ensemble admissible de capteurs pour la condition de rang du problème FDI qui contient y_i . Rappelons qu'un sous-ensemble de capteurs V_Y est dit un ensemble admissible de capteurs pour la condition de rang du problème FDI si cette condition reste vraie avec V_Y (voir la Définition 1.4.2). Ceci implique que la taille d'un couplage maximal entre $F \cup D$ et V_Y est égale à la taille d'un couplage maximal entre D et V_Y plus le nombre de défauts r :

$$\rho(F \cup D, V_Y) = \rho(D, V_Y) + r.$$

D'après le dual du résultat donné dans [Commault & Dion, 2007], si un sommet de sortie est un sommet essentiel, il reste un sommet essentiel lors de la suppression d'autres sorties. C'est-à-dire $y_i \in V_{ess}(D, V_Y)$ et $y_i \in V_{ess}(F \cup D, V_Y)$. Alors la taille d'un couplage maximal entre D et $V_Y \setminus \{y_i\}$ est $\rho(D, V_Y) - 1$ et la taille d'un couplage maximal entre $F \cup D$ et $V_Y \setminus \{y_i\}$ est $\rho(F \cup D, V_Y) - 1$. La deuxième condition du Théorème 4.2.1 est encore satisfaite car :

$$\rho(F \cup D, V_Y \setminus \{y_i\}) = \rho(D, V_Y \setminus \{y_i\}) + r.$$

Le sous-ensemble des capteurs $V_Y \setminus \{y_i\}$ reste un ensemble admissible de capteurs pour la condition de rang du problème FDI. D'après la Définition 1.4.3, $y_i \in Y_{ess}(D, Y)$ est

Chapitre 4. Classification des capteurs pour la détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs

donc un capteur inutile pour la condition de rang du problème FDI.

Proposition 4.4.3. *Considérons Σ_{Λ}^{fd} un système linéaire structuré défini par (4.2.2) avec son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda}^{fd})$. Supposons que la condition de rang du problème FDI soit satisfaite. L'ensemble des capteurs essentiels pour cette condition est donné par :*

$$Y_e = Y_{ess}(F \cup D, Y) \setminus Y_{ess}(D, Y)$$

Démonstration :

Nécessité :

Considérons un capteur $y_i \notin Y_e = Y_{ess}(F \cup D, Y) \setminus Y_{ess}(D, Y)$. Remarquons que $Y_{ess}(D, Y) \subseteq Y_{ess}(F \cup D, Y)$. Cela signifie que soit $y_i \in Y_{ess}(D, Y)$ soit $y_i \notin Y_{ess}(F \cup D, Y)$.

- Si $y_i \in Y_{ess}(D, Y)$ alors y_i est un capteur inutile d'après la Proposition 4.4.2.
- Si $y_i \notin Y_{ess}(F \cup D, Y)$ alors la taille d'un couplage maximal entre $F \cup D$ et $Y \setminus \{y_i\}$ et entre D et $Y \setminus \{y_i\}$ sont :

$$\rho(F \cup D, Y \setminus \{y_i\}) = \rho(F \cup D, Y)$$

$$\rho(D, Y \setminus \{y_i\}) = \rho(D, Y)$$

Cela signifie que la condition de rang est encore satisfaite et que $Y \setminus \{y_i\}$ est encore un ensemble admissible de capteurs pour la condition de rang. D'après la Définition 1.4.4, le capteur y_i n'est pas essentiel pour la condition de rang.

Suffisance :

Considérons un capteur $y_i \in Y_e = Y_{ess}(F \cup D, Y) \setminus Y_{ess}(D, Y)$. Ceci implique que la taille d'un couplage maximal entre $F \cup D$ et $Y \setminus \{y_i\}$ est :

$$\rho(F \cup D, Y \setminus \{y_i\}) = \rho(F \cup D, Y) - 1$$

mais la taille d'un couplage maximal entre D et $Y \setminus \{y_i\}$ est inchangée :

$$\rho(D, Y \setminus \{y_i\}) = \rho(D, Y)$$

La condition de rang du problème FDI n'est plus satisfaite avec l'ensemble de capteurs $Y \setminus \{y_i\}$. Le capteur y_i est donc un capteur essentiel pour la condition de rang.

Avec les deux propositions précédentes, on a classé les capteurs qui appartiennent à l'ensemble $Y_{ess}(F \cup D, Y)$. Considérons maintenant un capteur y_i tel que $y_i \notin Y_{ess}(F \cup D, Y)$. On va envisager si c'est un capteur inutile ou utile pour la condition de rang du problème FDI. Le premier résultat concerne un capteur y_i tel que sur le graphe $G(\Sigma_{\Lambda}^{fd})$, il n'existe ni chemin initié par un sommet de perturbation ni chemin initié par un sommet de défaut à ce sommet y_i .

Chapitre 4. Classification des capteurs pour la détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs

Proposition 4.4.4. *Considérons Σ_{Λ}^{fd} un système linéaire structuré défini par (4.2.2) avec son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda}^{fd})$. Supposons que la condition de rang du problème FDI soit satisfaite. Un capteur y_i tel que sur le graphe $G(\Sigma_{\Lambda}^{fd})$ il n'existe ni chemin $D - \{y_i\}$ ni chemin $F - \{y_i\}$ est un capteur inutile pour la condition de rang du problème FDI.*

Démonstration :

Soit un capteur y_i tel que dans $G(\Sigma_{\Lambda}^{fd})$ il n'existe ni chemin $D - \{y_i\}$ ni chemin $F - \{y_i\}$. y_i n'appartient alors ni à un couplage maximal entre $(F \cup D)$ et Y ni à un couplage maximal entre D et Y . C'est-à-dire ce capteur ne joue aucun rôle dans la condition de rang du problème FDI. Lorsque la condition de rang est satisfaite, la suppression de y_i n'influence pas cette satisfaction. Par conséquent, y_i est un capteur inutile pour la condition de rang du problème FDI.

Caractérisons maintenant un type de capteur utile pour la condition de rang.

Proposition 4.4.5. *Considérons Σ_{Λ}^{fd} un système linéaire structuré défini par (4.2.2) avec son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda}^{fd})$. Supposons que la condition de rang du problème FDI soit satisfaite. Un capteur y_i tel que sur le graphe $G(\Sigma_{\Lambda}^{fd})$ il existe un chemin $F - \{y_i\}$ mais pas de chemin $D - \{y_i\}$ est un capteur utile pour la condition de rang du problème FDI.*

Démonstration :

Considérons un capteur y_i qui est relié avec les défauts mais pas avec une perturbation. Comme nous avons supposé que la condition de rang du problème FDI est satisfaite, on a : $\rho(F \cup D, Y) = \rho(D, Y) + r$. Soit L un couplage maximal entre $F \cup D$ et Y de taille $\rho(F \cup D, Y)$. Notons par V_Y le sous-ensemble de Y qui appartient au couplage L . V_Y est donc évidemment un ensemble admissible de capteurs pour la condition de rang du Théorème 4.2.1 tel que :

$$\begin{aligned} \text{card}(V_Y) &= \rho(F \cup D, V_Y) = \rho(F \cup D, Y) \\ \rho(D, V_Y) &= \rho(D, Y) \\ \rho(F \cup D, V_Y) &= \rho(D, V_Y) + r \end{aligned}$$

- Si $y_i \in V_Y$:
 - Car $\text{card}(V_Y) = \rho(F \cup D, V_Y) = \rho(F \cup D, Y)$, la taille d'un couplage maximal entre $F \cup D$ et $V_Y \setminus \{y_i\}$ est :

$$\rho(F \cup D, V_Y \setminus \{y_i\}) = \rho(F \cup D, V_Y) - 1$$

- Car il n'existe pas de chemin $D - \{y_i\}$, la taille d'un couplage maximal entre D et $V_Y \setminus \{y_i\}$ est :

$$\rho(D, V_Y \setminus \{y_i\}) = \rho(D, V_Y)$$

Chapitre 4. Classification des capteurs pour la détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs

L'ensemble $V \setminus \{y_i\}$ n'est plus un ensemble admissible de capteurs pour la condition de rang car

$$\rho(F \cup D, V_Y \setminus \{y_i\}) < \rho(D, V_Y \setminus \{y_i\}) + r$$

D'après la Définition 1.4.3, y_i est un capteur utile pour la condition de rang.

- Si $y_i \notin V_Y$:

Notons P un chemin $F - \{y_i\}$. Car L est un couplage maximal entre $F \cup D$ et Y et il n'existe pas de chemin $D - \{y_i\}$, le chemin P n'intersecte que les chemins $F - V_Y$ du couplage maximal L . Soit L_j le chemin $F - V_Y$ qui appartient à L et qui contient le dernier sommet commun z entre le couplage L et le chemin P . (voir Figure 4.9). En prenant la partie de F à z du chemin L_j et la partie de z à y_i du chemin P , nous obtenons un nouveau chemin P' qui contient y_i et qui n'a pas de sommet commun avec $L \setminus L_j$, donc nous obtenons un nouveau couplage $L' = (L \setminus L_j) \cup P'$ de taille $\rho(F \cup D, Y)$ qui contient y_i (voir Figure 4.10). Comme montré précédemment, y_i appartient à un ensemble admissible de capteurs V'_Y tel que $V'_Y \setminus \{y_i\}$ n'est pas un ensemble admissible de capteurs et donc y_i est un capteur utile pour la condition de rang.

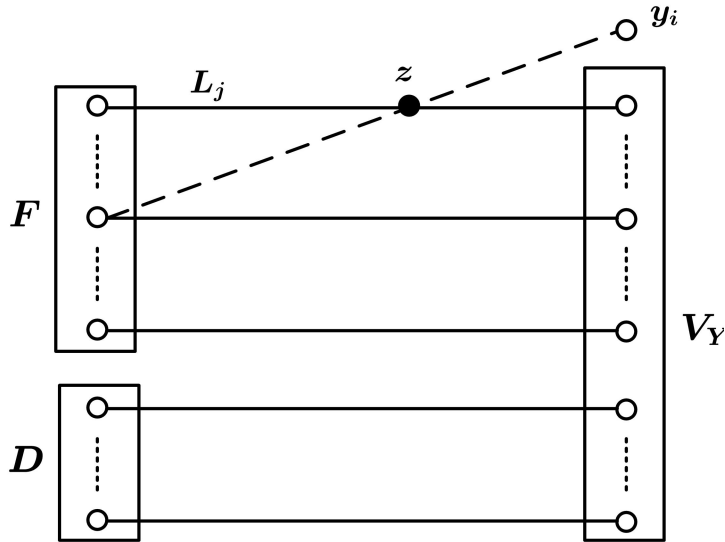


FIG. 4.9 – Le couplage L et le chemin P

A partir des analyses précédentes, on peut résumer comme suit :

1. Un capteur qui appartient à $Y_{ess}(D, Y)$ est un capteur inutile pour la condition de rang.
2. $Y_{ess}(F \cup D, Y) \setminus Y_{ess}(D, Y)$ est l'ensemble des capteurs essentiels pour la condition de rang.
3. Pour un capteur qui appartient à $Y \setminus Y_{ess}(F \cup D, Y)$:

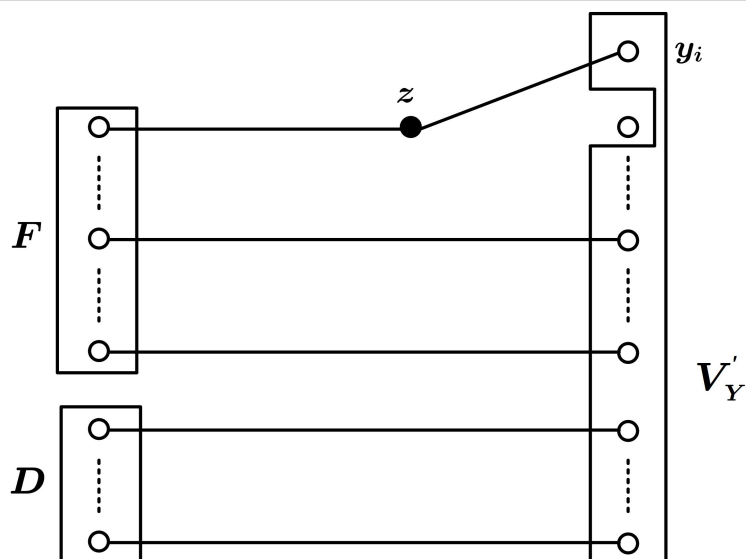


FIG. 4.10 – Le nouveau couplage L'

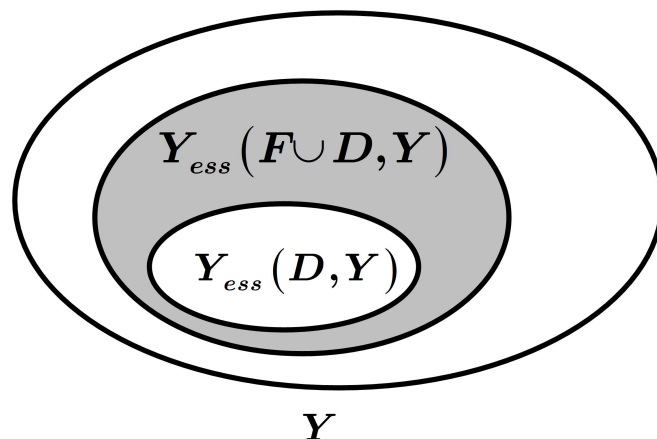


FIG. 4.11 – L'ensemble des capteurs d'un système

- Un capteur qui n'est relié ni à une perturbation ni à un défaut est un capteur inutile pour la condition de rang.
- Un capteur qui n'est relié qu'à un défaut est un capteur utile pour la condition de rang.

Il reste à classer les capteurs qui sont reliés aux perturbations et n'appartiennent pas à $Y_{ess}(F \cup D, Y)$. Ce cas est plus compliqué. On va considérer quelques exemples. Le premier exemple concerne un capteur qui est relié à une perturbation mais pas à un défaut. Le deuxième concerne un capteur qui est relié à la fois à une perturbation et à un défaut. Pour chaque exemple on va analyser l'importance de ce type de capteur pour la condition de rang.

Exemple 4.4.1.

Considérons $\Sigma_{\Lambda_1}^{fd}$ un système linéaire structuré défini par (4.2.2) avec son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda_1}^{fd})$ présenté Figure 4.12. On peut vérifier que la condition de rang du Théorème

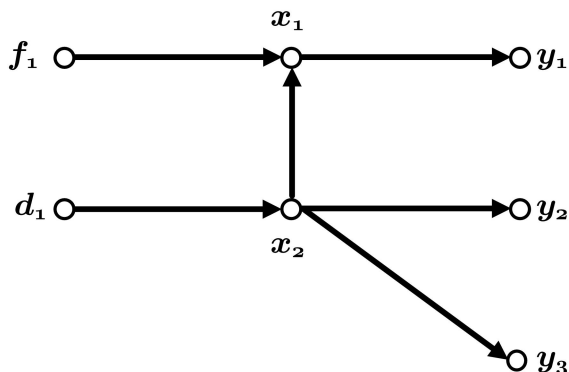


FIG. 4.12 – Le graphe $G(\Sigma_{\Lambda_1}^{fd})$

4.2.1 est satisfaite par exemple avec l'ensemble des capteurs $\{y_1, y_3\}$. Dans ce cas si le capteur y_3 tombe en panne, la condition de rang n'est plus satisfaite. En effet, le capteur y_1 est perturbé par la perturbation d_1 donc le problème de détection et localisation de défaut de la Définition 4.2.1 ne peut pas être soluble si on n'a que le capteur y_1 . Alors le capteur y_3 est un capteur utile pour cette condition. Remarquons que sur le graphe $G(\Sigma_{\Lambda_1}^{fd})$, il existe un chemin $D - \{y_3\}$ mais pas de chemin $F - \{y_3\}$.

Considérons maintenant $\Sigma_{\Lambda_2}^{fd}$ un système linéaire structuré défini par (4.2.2) avec son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda_2}^{fd})$ présenté Figure 4.13. On peut voir ici qu'il existe un chemin

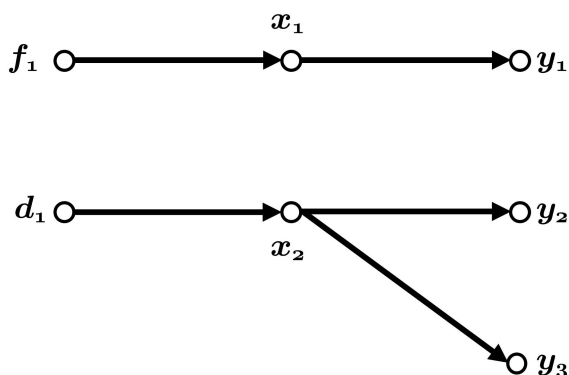


FIG. 4.13 – Le graphe $G(\Sigma_{\Lambda_2}^{fd})$

$D - \{y_3\}$ mais pas de chemin $F - \{y_3\}$. Cependant, il est évident que pour le système $\Sigma_{\Lambda_2}^{fd}$, le capteur y_1 est nécessaire et suffisant pour la condition de rang. Ce capteur est le seul capteur qui nous donne l'information sur le défaut f_1 et ce capteur n'est pas

Chapitre 4. Classification des capteurs pour la détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs

perturbé par la perturbation. Alors dans ce cas, le capteur y_3 est un capteur inutile pour la condition de rang du problème FDI.

Exemple 4.4.2.

Considérons $\Sigma_{\Lambda_3}^{fd}$ un système linéaire structuré défini par (4.2.2) avec son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda_3}^{fd})$ présenté Figure 4.14. Sur le graphe $G(\Sigma_{\Lambda_3}^{fd})$, il existe un chemin $D - \{y_3\}$

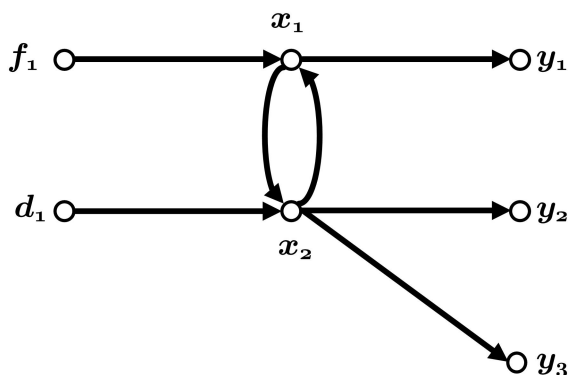


FIG. 4.14 – Le graphe $G(\Sigma_{\Lambda_1}^{fd})$

et un chemin $F - \{y_3\}$. On peut vérifier que la condition de rang du Théorème 4.2.1 est satisfaite par exemple avec l'ensemble des capteurs $\{y_1, y_3\}$. Dans ce cas si le capteur y_3 tombe en panne, la condition de rang n'est plus satisfaite. Alors le capteur y_3 est un capteur utile pour cette condition.

Considérons maintenant $\Sigma_{\Lambda_4}^{fd}$ un système linéaire structuré défini par (4.2.2) avec son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda_4}^{fd})$ présenté Figure 4.15. Il existe un chemin $D - \{y_3\}$ et un chemin

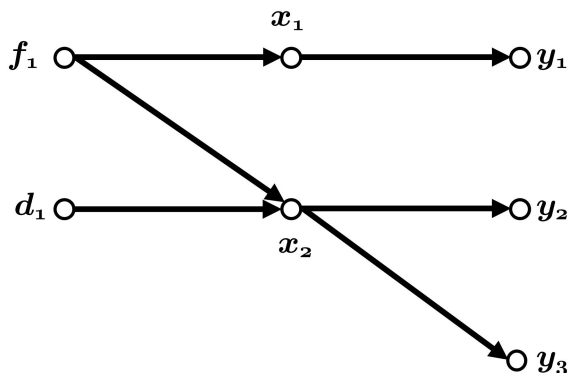


FIG. 4.15 – Le graphe $G(\Sigma_{\Lambda_2}^{fd})$

$F - \{y_3\}$. La condition de rang du Théorème 4.2.1 est satisfaite par un des ensembles :

Chapitre 4. Classification des capteurs pour la détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs

$\{y_1, y_2, y_3\}, \{y_1, y_2\}, \{y_1, y_3\}, \{y_1\}$. D'après la Définition 1.4.3, le capteur y_3 est un capteur inutile pour la condition de rang.

Avec les deux exemples précédents, on a illustré qu'un capteur qui est relié à une perturbation peut être utile ou inutile pour la condition de rang, peu importe s'il est relié à un défaut ou pas. Nous allons maintenant classer ces capteurs en utilisant une méthode itérative. Dans la suite, un ensemble admissible de capteurs V_Y pour la condition de rang du problème FDI est dit de taille $\rho(F \cup D, Y)$ si $\text{card}(V_Y) = \rho(F \cup D, Y) = \rho(D, Y) + r$, où :

- $\rho(F \cup D, Y)$ est la taille maximale d'un couplage entre $F \cup D$ et Y ,
- $\rho(D, Y)$ est la taille maximale d'un couplage entre D et Y .

Proposition 4.4.6. *Considérons Σ_Λ^{fd} un système linéaire structuré défini par (4.2.2) avec son graphe associé $G(\Sigma_\Lambda^{fd})$. Supposons que la condition de rang du problème FDI soit satisfaite. Soit y_i un capteur qui est relié à une perturbation et qui n'appartient pas à $Y_{ess}(F \cup D, Y)$.*

- *S'il existe un ensemble admissible de capteurs V_Y contenant y_i de taille $\rho(F \cup D, Y)$ pour la condition de rang tel que $y_i \notin V_{ess}(D, V_Y)$, alors y_i est un capteur utile pour cette condition.*
- *Si pour tout ensemble admissible de capteurs V_Y contenant y_i de taille $\rho(F \cup D, Y)$ pour la condition de rang, $y_i \in V_{ess}(D, V_Y)$, alors y_i est un capteur inutile pour cette condition.*

Démonstration :

Comme nous avons supposé que la condition de rang du problème FDI est satisfaite, on a : $\rho(F \cup D, Y) = \rho(D, Y) + r$.

1. Nous montrons d'abord que pour un capteur y_i qui est relié à une perturbation, il existe au moins un ensemble admissible de capteurs de taille $\rho(F \cup D, Y)$ contenant y_i . Soit L un couplage maximal entre $F \cup D$ et Y . Un tel couplage de taille $\rho(F \cup D, Y)$ peut être trouvé en utilisant des techniques d'optimisation combinatoire comme l'algorithme de Ford-Fulkerson [Ford & Fulkerson, 1962]. Car y_i est connecté à D , il existe un chemin $D - \{y_i\}$ noté P . Le chemin P doit intersecter le couplage L . Notons par V_Y le sous-ensemble de Y qui appartient au couplage L . V_Y est évidemment un ensemble admissible de capteurs pour la condition de rang du problème FDI.

Soit L_j le chemin $F \cup D - V_Y$ qui appartient à L et qui contient le dernier sommet commun z entre le couplage L et le chemin P . En prenant la partie de $F \cup D$ à z du chemin L_j et la partie de z à y_i de P , nous obtenons un nouveau chemin P' qui contient y_i et qui n'a pas de sommet commun avec $L \setminus L_j$, donc nous obtenons un nouveau couplage $L' = (L \setminus L_j) \cup P'$ de taille $\rho(F \cup D, V_Y)$ qui contient y_i . Notons par V'_Y le sous-ensemble

Chapitre 4. Classification des capteurs pour la détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs

de Y qui appartient au couplage L' . Il est évident que :

$$\begin{aligned}\rho(F \cup D, V'_Y) &= \rho(F \cup D, V_Y) = \rho(F \cup D, Y) \\ \rho(D, V'_Y) &= \rho(D, V_Y) = \rho(D, Y)\end{aligned}$$

et V'_Y est donc un ensemble admissible de capteurs de taille $\rho(F \cup D, Y)$ contenant y_i .

2. Supposons maintenant qu'il existe un ensemble admissible de capteurs V_Y contenant y_i tel que $\text{card}(V_Y) = \rho(F \cup D, V_Y) = \rho(F \cup D, Y)$ et $y_i \notin V_{\text{ess}}(D, V_Y)$. On a donc :

$$\begin{aligned}\rho(F \cup D, V_Y \setminus \{y_i\}) &= \rho(F \cup D, V_Y) - 1 \\ \rho(D, V_Y \setminus \{y_i\}) &= \rho(D, V_Y)\end{aligned}$$

Ceci implique que :

$$\rho(F \cup D, V_Y \setminus \{y_i\}) < \rho(D, V_Y \setminus \{y_i\}) + r$$

et $V_Y \setminus \{y_i\}$ n'est plus un ensemble admissible de capteurs. D'après la Définition 1.4.3, y_i est un capteur utile pour la condition de rang.

3. Montrons maintenant que, pour tout ensemble admissible de capteurs V_Y contenant y_i tel que $\text{card}(V_Y) = \rho(F \cup D, V_Y) = \rho(F \cup D, Y)$, si $y_i \in V_{\text{ess}}(D, V_Y)$, alors y_i est un capteur inutile pour la condition de rang.

Soit \bar{Y} un ensemble minimal de capteurs pour la condition de rang contenant y_i (voir la Définition 1.4.5 pour la notion d'ensemble minimal de capteurs pour une propriété). $\text{card}(\bar{Y}) = \rho(F \cup D, \bar{Y}) \leq \rho(F \cup D, Y)$. Notons $T_{F \cup D, \bar{Y}}(s)$ et $T_{F \cup D, Y}(s)$ respectivement la matrice de transfert entre $F \cup D$ et \bar{Y} et la matrice de transfert entre $F \cup D$ et Y . Rappelons que le rang générique de $T_{F \cup D, \bar{Y}}(s)$ (*resp.* $T_{F \cup D, Y}(s)$) est égal à la taille d'un couplage maximal entre $F \cup D$ et \bar{Y} (*resp.* entre $F \cup D$ et Y) [Dion et al., 2003].

On a : $T_{F \cup D, Y}(s) = \begin{bmatrix} T_{F \cup D, \bar{Y}}(s) \\ T_{F \cup D, Y \setminus \bar{Y}}(s) \end{bmatrix}$ où le rang générique de $T_{F \cup D, \bar{Y}}(s)$ (égal à $\rho(F \cup D, \bar{Y})$) est inférieur au rang générique de $T_{F \cup D, Y}(s)$ (égal à $\rho(F \cup D, Y)$). Il existe donc $[\rho(F \cup D, Y) - \rho(F \cup D, \bar{Y})]$ lignes $r_{i1}(s), \dots, r_{i(\rho(F \cup D, Y) - \rho(F \cup D, \bar{Y}))}(s)$ de $T_{F \cup D, Y \setminus \bar{Y}}(s)$

qui ne sont pas dans l'image de $T_{F \cup D, \bar{Y}}(s)$ telles que $\begin{bmatrix} T_{F \cup D, \bar{Y}}(s) \\ r_{i1}(s) \\ \vdots \\ r_{i(\rho(F \cup D, Y) - \rho(F \cup D, \bar{Y}))}(s) \end{bmatrix}$ a le

rang générique égal à $\rho(F \cup D, Y)$. Ceci implique que n'importe quel ensemble minimal de capteurs \bar{Y} pour la condition de rang contenant y_i est contenu dans un ensemble admissible de capteurs V_Y de taille $\rho(F \cup D, Y)$

Chapitre 4. Classification des capteurs pour la détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs

Nous avons supposé, $y_i \in V_{ess}(D, V_Y)$ et il est connu qu'un sommet de sortie reste un 'sommet essentiel' par la suppression d'autres sommets de sortie [Commault & Dion, 2007]. Alors $y_i \in V_{ess}(D, \bar{Y})$. Il s'ensuit que lorsque nous retirons y_i de \bar{Y} , la taille d'un couplage maximal entre $F \cup D$ et $\bar{Y} \setminus \{y_i\}$ et celle d'un couplage maximal entre D et $\bar{Y} \setminus \{y_i\}$ sont réduits d'une unité. On obtient alors :

$$\rho(F \cup D, V_Y \setminus \{y_i\}) = \rho(D, V_Y \setminus \{y_i\}) + r$$

c'est-à-dire $\bar{Y} \setminus \{y_i\}$ est encore un ensemble admissible de capteurs. Ceci contredit le fait que \bar{Y} soit un ensemble minimal de capteurs. Par conséquent, si $y_i \in V_{ess}(D, V_Y)$ pour tout ensemble admissible de capteurs V_Y de taille $\rho(F \cup D, Y)$ contenant y_i , alors y_i ne peut pas appartenir à un ensemble minimal de capteurs et d'après la Proposition 1.4.1 y_i est un capteur inutile.

Pour classer chaque capteur y_i qui est connecté à des perturbations et qui n'appartient pas à $Y_{ess}(F \cup D, Y)$, nous utilisons l'algorithme suivant :

Algorithme 1. $\mathcal{V} = \{\emptyset\}$; index := 0;

REPEAT

- Trouver un ensemble admissible de capteurs $V_i \notin \mathcal{V}$ de taille $\rho(F \cup D, Y)$ qui contient y_i .
- Déterminer $V_{ess}(D, V_i)$. Si $y_i \notin V_{ess}(D, V_i)$ alors index := 1, sinon $\mathcal{V} = \mathcal{V} \cup \{V_i\}$.

UNTIL index = 1

où

\mathcal{V} contient tous les ensembles admissibles de capteurs V_i de taille $\rho(F \cup D, Y)$ qui contiennent y_i .

IF index = 1 THEN y_i est un capteur utile ELSE y_i est un capteur inutile.

Il s'avère que, dans le pire cas, nous devons trouver tous les ensembles admissibles de capteurs V_i de taille $\rho(F \cup D, Y)$ pour la condition de rang qui contiennent y_i . Cependant, le nombre de capteurs y_i à classer peut être réduit par les Propositions 4.4.2, 4.4.3, 4.4.4 et 4.4.5.

Exemple 4.4.3.

Reconsidérons le système linéaire structuré Σ_{Λ}^{fd} dans L'Exemple 4.3.2 avec son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda}^{fd})$ présenté Figure 4.6.

Le couplage maximal entre $F \cup D$ et Y est de taille $\rho(F \cup D, Y) = 2$. Le couplage maximal entre D et Y est de taille $\rho(D, Y) = 1$. On a ici un seul défaut : $r = 1$. Alors la condition de rang est vérifiée.

Dans cet exemple, $Y_{ess}(F \cup D, Y) = \{\emptyset\}$. Il n'existe donc pas de capteur essentiel pour

Chapitre 4. Classification des capteurs pour la détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs

la condition de rang.

Comme le sommet y_3 est relié à un sommet de défaut et pas à un sommet de perturbation, y_3 est un capteur utile pour la condition de rang d'après la Proposition 4.4.5.

Considérons maintenant un ensemble admissible de capteurs pour la condition de rang $V_Y = \{y_1, y_2\}$. On a $V_{ess}(D, V_Y) = \{x_1, x_2\}$ et y_1, y_2 n'appartiennent pas à $V_{ess}(D, V_Y)$. Alors d'après la Proposition 4.4.6, y_1 et y_2 sont les capteurs utiles pour la condition de rang.

Remarque : Dans cette section, nous généralisons les résultats donnés dans [Commault et al., 2007] où la condition de rang a été considérée quand il n'existe pas de perturbation. Nous allons montrer que ces résultats sont déduits facilement à partir de nos propositions.

Dans le cas où il n'y a pas de perturbation, la condition de rang du problème FDI dans le Théorème 4.2.1 devient :

$$\rho(F, Y) = r$$

où $\rho(F, Y)$ est la taille d'un couplage maximal entre F et Y et r est le nombre de défauts. En utilisant les Propositions 4.4.2 et 4.4.3, on peut caractériser les capteurs inutiles et les capteurs essentiels pour la condition de rang du problème FDI quand il n'existe pas de perturbation [Commault et al., 2007] :

Proposition 4.4.7. *Considérons Σ_{Λ}^{fd} un système linéaire structuré défini par (4.2.2) avec son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda}^{fd})$. Supposons qu'il n'y a pas de perturbation et que la condition de rang du problème FDI est satisfaite.*

- Un capteur y_i est un capteur inutile pour la condition de rang si et seulement si il n'existe pas de chemin $F - \{y_i\}$.
- L'ensemble des capteurs essentiels pour la condition de rang est :

$$Y_{ess}(F, Y) = Y \cap V_{ess}(F, Y).$$

Démonstration :

1. Quand il n'y a pas de perturbation, il n'existe pas de chemin $D - Y$. S'il existe un chemin $F - \{y_i\}$, le capteur y_i est un capteur utile pour la condition de rang d'après la Proposition 4.4.5. Sinon d'après la Proposition 4.4.2, y_i est un capteur inutile.

2. Dans le cas $D = \{\emptyset\}$, $Y_{ess}(D, Y) = \{\emptyset\}$ et d'après la Proposition 4.4.3, $Y_{ess}(F, Y) = Y \cap V_{ess}(F, Y)$ est l'ensemble de capteurs essentiels pour la condition de rang.

4.5 Classification des capteurs pour le problème FDI avec la condition d'observabilité

Dans cette section, nous envisageons la classification de capteurs pour la solubilité générique du problème de détection et localisation de défauts (FDI) avec une banque d'observateurs. Notre problème de détection et localisation de défauts exige la condition d'observabilité du système. En cas de défaut du capteur, nous allons chercher des solutions satisfaisant à la fois la connexion à la sortie, l'absence de contraction et la condition de rang. Nous sommes face au problème de classification de capteurs pour une propriété globale à partir des ensembles de capteurs essentiels et de capteurs inutiles pour des sous-propriétés. Il est clair qu'un capteur qui est essentiel pour au moins une sous-propriété est un capteur essentiel pour la propriété globale. De la même façon, un capteur qui est inutile pour toute sous-propriété est inutile pour la propriété globale. Cependant, nous allons voir plus tard qu'un capteur qui est utile pour une sous-propriété peut être inutile pour la propriété globale. Considérons l'exemple suivant.

Exemple 4.5.1.

Considérons le système structuré dont le graphe associé est présenté Figure 4.6. On veut classer les capteurs en fonction de leur importance pour la solubilité générique du problème de détection et localisation de défauts avec la condition d'observabilité. La solubilité générique de notre problème est préservée quand la connexion à la sortie, l'absence de contraction et la condition de rang sont satisfaites. Donc l'union des capteurs essentiels pour la connexion à la sortie, pour l'absence de contraction et pour la condition de rang est un ensemble de capteurs essentiels pour la solubilité de notre problème. Comme analysé dans les Exemples 4.3.2, 4.3.3 et 4.4.3, y_3 est un capteur essentiel pour la connexion à la sortie, y_1 est un capteur essentiel pour l'absence de contraction et il n'y a pas de capteur essentiel pour la condition de rang. On obtient alors que $\{y_1, y_3\}$ est un ensemble de capteurs essentiels pour la solubilité du problème *FDI*. Remarquons que avec cet ensemble, la connexion à la sortie est assurée. De plus, avec ces deux capteurs, on peut construire un couplage maximal qui contient le nombre minimal de sommets de sortie dans le graphe biparti $B(\Sigma_{\Lambda}^{fd})$ qui assure l'absence de contraction dans G . Cet ensemble de deux capteurs satisfait aussi la condition de rang. Ceci implique que l'ensemble de capteurs $\{y_1, y_3\}$ est un ensemble minimal de capteurs pour le problème FDI. Comme l'ensemble de capteurs $\{y_1, y_3\}$ est à la fois l'ensemble de capteurs essentiels et un ensemble minimal de capteurs pour le problème FDI, y_2 est un capteur inutile pour ce problème bien que y_2 soit un capteur utile pour les trois sous-propriétés : la connexion à la sortie, l'absence de contraction et la condition de rang. Alors on voit que l'ensemble des capteurs inutiles pour une propriété globale ne peut pas être obtenu simplement par l'analyse des capteurs inutiles pour les sous-propriétés.

Chapitre 4. Classification des capteurs pour la détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs

Avec les définitions présentées dans le Chapitre 1, on a le résultat suivant concernant la classification des capteurs pour le problème de détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs :

Proposition 4.5.1. *Considérons Σ_{Λ}^{fd} un système linéaire structuré défini par (4.2.2) avec son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda}^{fd})$. Supposons que le problème de détection et localisation de défauts dans Définition 4.2.1 est génériquement soluble.*

1. *L'ensemble de capteurs essentiels pour le problème est l'union des capteurs essentiels pour la connexion à la sortie, l'absence de contraction et la condition de rang.*
2. *Un capteur qui est inutile à la fois pour la connexion à la sortie, l'absence de contraction et la condition de rang est un capteur inutile pour le problème de détection et localisation de défauts.*
3. *L'ensemble des capteurs inutiles pour le problème de détection et localisation de défauts est l'ensemble des capteurs qui n'appartiennent pas à l'union des ensembles minimaux de capteurs pour ce problème.*

Démonstration :

1. Un capteur qui est essentiel pour l'une des sous-propriétés est évidemment essentiel pour la propriété globale. Inversement, si un capteur est essentiel pour la propriété globale, sa panne implique la perte de la propriété globale, donc au moins la perte d'une sous-propriété.

2. Soit y^* un capteur qui est inutile pour les trois sous-propriétés. Alors pour toute sous-propriété et pour tout ensemble admissible de capteurs V contenant y^* , $V \setminus \{y^*\}$ est encore un ensemble admissible de capteur. Ensuite, pour la propriété globale et pour tout ensemble admissible de capteurs V' contenant y^* , $V' \setminus \{y^*\}$ est encore un ensemble admissible de capteurs. Cela est dû au fait que V' est aussi un ensemble admissible de capteurs pour chaque sous-propriété.

3. Si y^* appartient à l'union des ensembles minimaux de capteurs pour le problème FDI, il existe donc un ensemble minimal de capteurs qui contient y^* . Alors ce capteur ne peut pas être inutile d'après les définitions de capteur inutile et de l'ensemble minimal de capteurs.

Inversement, si y^* est un capteur inutile pour le problème FDI, d'après les définitions de capteur inutile et de l'ensemble minimal de capteurs, ce capteur n'appartient à aucun ensemble minimal de capteurs, donc il n'appartient pas à l'union des ensembles minimaux de capteurs pour le problème FDI.

Pour les systèmes de grande taille, il est intéressant de trouver les algorithmes efficaces pour éviter l'explosion combinatoire. Il est connu que la détermination des ensembles de capteurs essentiels pour la connexion à la sortie, l'absence de contraction

Chapitre 4. Classification des capteurs pour la détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs

et la condition de rang est polynômial [Commault, Dion & Trinh, 2008; Commault et al., 2007]. Donc, la détermination des capteurs essentiels pour le problème FDI considéré est polynômial. Seule une partie des capteurs inutiles pour le problème FDI est obtenu de manière polynômiale, c'est-à-dire ceux qui sont inutiles à la fois pour les trois sous-propriétés et donné par les Théorèmes 4.3.1, 4.3.5 et les Propositions 4.4.2, 4.4.4. Néanmoins, la détermination complète des capteurs inutiles pour le problème FDI grâce aux ensembles minimaux de capteurs peut être effectuée sur un réseau réduit et est en général faisable.

Soit S un ensemble donné. Considérons un ensemble de sous-ensemble de S : $\widehat{S} = \{\widehat{S}_1, \dots, \widehat{S}_t\}$. Un sous-ensemble $\widehat{S}_i \in \widehat{S}$ ($i = 1, \dots, t$) est dit un *élément irréductible* de \widehat{S} si $\nexists \widehat{S}_j \in \widehat{S}$ ($j \neq i$) tel que $\widehat{S}_j \subset \widehat{S}_i$.

La proposition suivante nous permet d'obtenir les ensembles minimaux pour le problème FDI avec une banque d'observateurs à partir des ensembles minimaux pour chaque sous-propriété : la connexion à la sortie, l'absence de contraction et la condition de rang.

Proposition 4.5.2. *Soient $\{S_{1,n_1}\}$ ($n_1 = 1, \dots, \mu_1$), $\{S_{2,n_2}\}$ ($n_2 = 1, \dots, \mu_2$) et $\{S_{3,n_3}\}$ ($n_3 = 1, \dots, \mu_3$) respectivement les ensembles d'ensembles minimaux pour la connexion à la sortie, l'absence de contraction et la condition de rang. L'ensemble des ensembles minimaux pour la solubilité générique du problème FDI avec une banque d'observateurs est \mathcal{T} l'ensemble des éléments irréductibles de :*

$$\widehat{S} = \{S_{1,n_1} \cup S_{2,n_2} \cup S_{3,n_3} \mid n_1 = 1, \dots, \mu_1; n_2 = 1, \dots, \mu_2; n_3 = 1, \dots, \mu_3\}.$$

Démonstration :

- On démontre d'abord que $T_i \in \mathcal{T}$ est un ensemble minimal de capteurs pour le problème FDI dans la Définition 4.2.1. D'après la construction, T_i est un ensemble admissible de capteurs pour ce problème. Si T_i n'est pas un ensemble minimal de capteurs, alors il existe $y_i \in T_i$ tel que l'ensemble $(T_i \setminus \{y_i\})$ est encore un ensemble admissible de capteurs pour le problème FDI et donc pour les trois sous-propriétés. D'après la relation entre un ensemble admissible de capteurs et un ensemble minimal de capteurs, il existe $S_{1,n_1}, S_{2,n_2}, S_{3,n_3}$ tels que $(S_{1,n_1} \cup S_{2,n_2} \cup S_{3,n_3}) \subseteq (T_i \setminus \{y_i\}) \subset T_i$. Ceci est en contradiction avec la définition d'élément irréductible T_i .
- On démontre maintenant qu'un ensemble minimal de capteurs pour le problème FDI avec une banque d'observateurs est un élément irréductible de \widehat{S} . Soit V_i un ensemble minimal de capteurs pour ce problème FDI. V_i est donc un ensemble admissible de capteurs pour les trois sous-propriétés. Alors il existe T_j un élément irréductible de \widehat{S} et $S_{1,n_1}, S_{2,n_2}, S_{3,n_3}$ respectivement les ensembles minimaux de capteurs pour chaque sous-propriété tel que $T_j \subseteq (S_{1,n_1} \cup S_{2,n_2} \cup S_{3,n_3}) \subseteq V_i$. Car

V_i est supposé être un ensemble minimal de capteurs pour le problème FDI global, on doit obtenir $V_i \equiv T_j$, c'est-à-dire que V_i est un élément irréductible de $\widehat{\mathcal{S}}$.

4.6 Classification quantitative des capteurs

Dans cette section, nous quantifions, en utilisant des informations structurelles, l'importance relative des capteurs par rapport à une propriété \mathcal{P} . Dans ce travail, nous ne considérons pas les probabilités que certains capteurs tombent en panne pendant le fonctionnement du système. Introduisons d'abord la notion du degré de criticité.

4.6.1 Le degré de criticité

En utilisant la notion d'ensemble admissible de capteurs de la Définition 1.4.2, on a la définition suivante :

Définition 4.6.1. Soit \mathcal{P} une propriété. Notons K l'ensemble des ensembles admissibles de capteurs pour la propriété \mathcal{P} qui ne contiennent pas de capteur inutile. Pour un capteur y_i , notons $K_{y_i} \subseteq K$ l'ensemble des ensembles admissibles de capteurs contenant y_i . Le degré de criticité du capteur y_i pour la propriété \mathcal{P} est défini par :

$$\mathcal{D}(y_i) = \frac{\text{card}(K_{y_i})}{\text{card}(K)}$$

Par convention, le degré de criticité d'un capteur inutile est zéro.

Ici, on ne considère que des ensembles admissibles de capteurs pour la propriété \mathcal{P} qui ne contiennent pas de capteur inutile car d'après la définition d'un capteur inutile, la suppression de ce capteur du système n'influence pas la propriété \mathcal{P} considérée.

Proposition 4.6.1. Considérons un système avec l'ensemble de capteurs Y . Soit \mathcal{P} une propriété satisfaite par cet ensemble.

- Le degré de criticité d'un capteur inutile pour la propriété \mathcal{P} est zéro.
- Le degré de criticité d'un capteur essentiel pour la propriété \mathcal{P} est un.
- Si y_i est un capteur utile pour la propriété \mathcal{P} , alors $0 < \mathcal{D}(y_i) \leq 1$.
- Quand $\mathcal{D}(y_i) > \mathcal{D}(y_j)$, le nombre d'ensembles admissibles de capteurs restants quand y_i tombe en panne est inférieur au nombre d'ensembles admissibles de capteurs restants quand y_j tombe en panne.

Démonstration :

Chapitre 4. Classification des capteurs pour la détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs

D'après la Définition 4.6.1, pour un capteur y_i on a $0 \leq \mathcal{D}(y_i) = \frac{\text{card}(K_{y_i})}{\text{card}(K)} \leq 1$. Remarquons que la notion de degré de criticité ne concerne que des ensembles admissibles de capteurs qui ne contiennent pas de capteurs inutiles pour la propriété \mathcal{P} .

- Quand y_i est un capteur inutile, $\mathcal{D}(y_i) = 0$ car $\text{card}(K_{y_i}) = 0$.
- D'après la Définition 1.4.4, y_i appartient à tout ensemble admissible de capteurs si il est un capteur essentiel. Donc on obtient $K_{y_i} = K$ et le degré de criticité de ce capteur est égal à un.
- Un capteur utile appartient à au moins un ensemble admissible de capteurs qui ne contient pas de capteur inutile. Son degré de criticité est donc supérieur à zéro

Pour deux capteurs $y_i \neq y_j$, $\mathcal{D}(y_i) > \mathcal{D}(y_j)$ implique que le capteur y_i est plus critique pour la propriété \mathcal{P} que le capteur y_j car le nombre d'ensembles admissibles de capteurs restants quand y_i tombe en panne est inférieur à celui du cas où y_j tombe en panne. En effet, on a :

$$1 - \mathcal{D}(y_i) = 1 - \frac{\text{card}(K_{y_i})}{\text{card}(K)} < 1 - \mathcal{D}(y_j) = 1 - \frac{\text{card}(K_{y_j})}{\text{card}(K)},$$

c'est-à-dire

$$\text{card}(K) - \text{card}(K_{y_i}) < \text{card}(K) - \text{card}(K_{y_j})$$

Remarquons que $\text{card}(K) - \text{card}(K_{y_i})$ (*resp.* $\text{card}(K) - \text{card}(K_{y_j})$) est le nombre d'ensembles admissibles de capteurs pour la propriété \mathcal{P} restants quand y_i (*resp.* y_j) tombe en panne.

Exemple 4.6.1.

Considérons un système linéaire structuré défini par (4.2.2) avec son graphe associé présenté Figure 4.16. On étudie la propriété de connexion à la sortie de ce système.

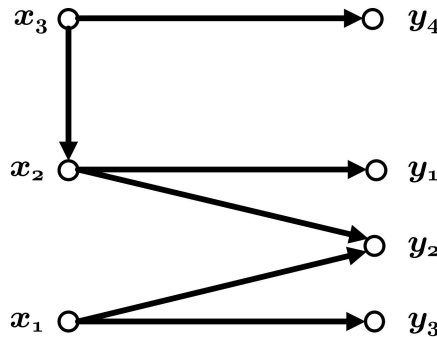


FIG. 4.16 – Le graphe associé de l'Exemple 4.6.1

Sur le graphe associé, on peut voir que tous les sommets d'état sont connectés à au moins un sommet de sortie.

Chapitre 4. Classification des capteurs pour la détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs

L'exigence de la connexion du sommet x_2 assure que le sommet x_3 est connecté à la sortie. Donc dans ce cas le capteur y_4 est inutile pour la propriété de connexion à la sortie car y_4 n'est relié qu'à x_3 .

Pour que tous les états soient connectés à la sortie, il faut d'avoir au moins soit le capteur y_2 soit l'ensemble $\{y_1, y_3\}$. Ces capteurs sont les capteurs utiles pour la connexion à la sortie. Dans cet exemple, il est facile de vérifier qu'on a les ensembles admissibles de capteurs pour la connexion à la sortie qui ne contiennent pas de capteur inutile comme suit :

$$V_1 = \{y_1, y_2, y_3\}$$

$$V_2 = \{y_1, y_3\}$$

$$V_3 = \{y_1, y_2\}$$

$$V_4 = \{y_2, y_3\}$$

$$V_5 = \{y_2\}$$

On peut maintenant calculer le degré de criticité de chaque capteur pour la connexion à la sortie :

$$\mathcal{D}(y_1) = 3/5$$

$$\mathcal{D}(y_2) = 4/5$$

$$\mathcal{D}(y_3) = 3/5$$

Remarquons que $\mathcal{D}(y_2) > \mathcal{D}(y_1) = \mathcal{D}(y_3)$. En fait, avec l'ensemble initial de capteurs $\{y_1, y_2, y_3\}$, quand il y a un défaut sur le capteur y_2 , il nous reste deux capteurs y_1 et y_3 . Si un des ces deux capteurs tombe en panne aussi, la connexion à la sortie n'est plus préservée. Cependant, avec l'ensemble initial de capteurs $\{y_1, y_2, y_3\}$, quand le capteur y_1 tombe en panne, il nous reste deux capteurs y_2 et y_3 . Dans ce cas, la connexion à la sortie est encore assurée si le capteur y_3 tombe en panne. Alors, on peut dire que le capteur utile y_2 est plus important que le capteur utile y_1 pour la préservation de la connexion à la sortie. On obtient la même conclusion pour la comparaison entre y_2 et y_3 .

4.6.2 Réseau des ensembles admissibles de capteurs

Dans cette sous-section, nous utilisons un réseau qui est composé des noeuds et d'arcs pour représenter toutes les situations possibles en cas de défaut de capteur. Les noeuds sont tous les ensembles de capteurs possibles et un arc correspond à la défaillance d'un capteur particulier. Le noeud supérieur du réseau est l'ensemble des capteurs, le noeud du bas est un ensemble vide de capteurs. Le réseau est décomposée en $(p + 1)$ niveaux où p est le nombre de capteurs. Les noeuds d'un niveau donné ont la même cardinalité. Un arc qui part d'un noeud a du niveau l et se termine à un noeud b du niveau $l - 1$ représente la perte d'un seul capteur. Dans ce cas, le noeud b est appelé *successeur* du

Chapitre 4. Classification des capteurs pour la détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs

noeud a et le noeud b est appelé *prédécesseur* du noeud b . La perte de plusieurs capteurs est représentée par un chemin dans ce réseau de capteurs.

Pour chaque noeud du réseau, nous pouvons vérifier si la combinaison de capteurs associés est un ensemble admissible de capteurs ou non. Notons que si un noeud n'est pas un ensemble admissible de capteurs, alors aucun de ses successeurs n'est un ensemble admissible de capteurs. Cette remarque nous aide à réduire l'explosion combinatoire du réseau.

Nous allons maintenant définir un réseau réduit de capteurs comme suit : nous commençons avec le réseau de capteurs précédent et nous enlevons les noeuds correspondant aux ensembles non admissibles de capteurs et aux ensembles admissibles de capteurs contenant des capteurs inutiles. Ce réseau réduit de capteurs contient toutes les informations pour calculer le degré de criticité de chaque capteur utile. Dans ce réseau réduit, on peut obtenir des informations supplémentaires comme dans [Staroswiecki et al., 2004]. La profondeur du réseau réduit, qui est la longueur maximale d'un chemin dans ce réseau, représente le nombre maximal de capteurs qui peuvent tomber en panne en conservant la propriété. La largeur du réseau réduit, qui est le nombre maximal de capteurs qui peuvent tomber en panne indépendamment à titre individuel, représente le nombre maximal de noeuds dans un niveau du réseau réduit.

Reconsidérons l'Exemple 4.6.1. Le réseaux de toutes les configurations possibles de capteurs va contenir 16 noeuds. Nous nous concentrons sur le réseau réduit de capteurs qui ne contient que les noeuds correspondant aux ensembles admissibles de capteurs pour la propriété de connexion à la sortie et ne contenant pas de capteur inutile. Ce réseau contient 5 noeuds (voir Figure 4.17)

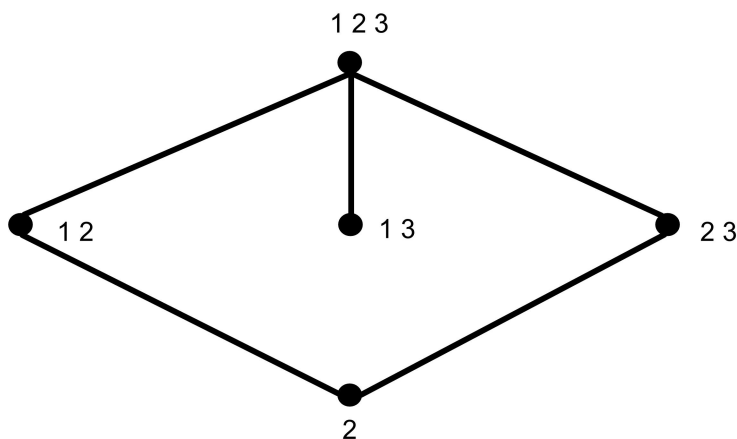


FIG. 4.17 – Le réseau réduit de capteur de l'Exemple 4.6.1

4.7 Exemple illustratif

Considérons le procédé thermique qui est illustré Figure 4.18. Ce processus se compose de sept bacs alimentés par les débits fixes F_j ($j = 1, \dots, 4$) avec les températures respectives T_{F_j} . La température T_i ($i = 1, \dots, 7$) de chaque bac est mesurée par un capteur y_i . Comme le montre la Figure 4.18, F_1 est divisé en deux débits : F_{11} alimente le premier bac et F_{12} alimente avec F_2 le troisième bac. Les débits de sortie du troisième bac et septième bac sont respectivement $F_{12} + F_2$ et $F_1 + F_2 + F_3 + F_4$. Le deuxième bac est affecté par une perturbation inconnue W_d qui représente l'échange de chaleur avec l'extérieur. L'objectif du diagnostic est de détecter avec l'aide des capteurs les défauts, ici des changements de température du débit d'alimentation T_{F_j} ($j = 1, \dots, 4$), indépendamment de W_d . Nous allons également classer les capteurs en fonction de leur criticité en cas de défaillance pour ce problème de diagnostic. Dans la suite nous

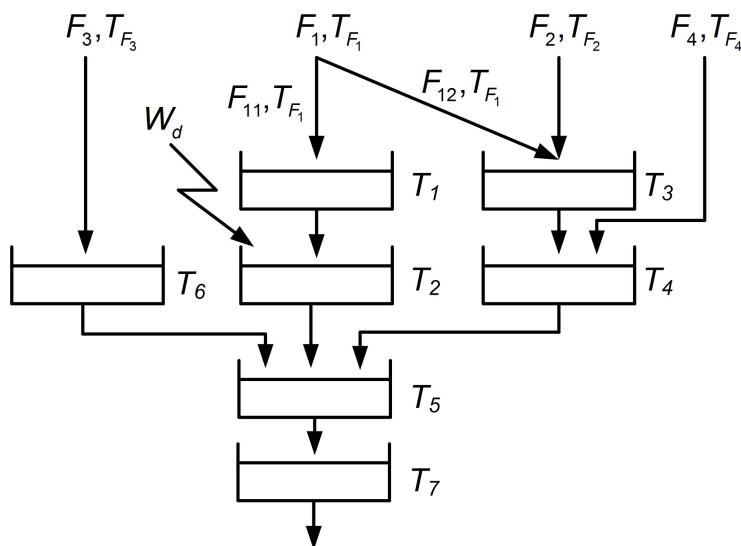


FIG. 4.18 – Le système de sept bacs

considérons un modèle structuré linéaire de type (4.2.2) qui a la même structure physique que ce procédé thermique avec : $X(t) = [T_1, \dots, T_7]^T$, $f(t) = [T_{F_1}, \dots, T_{F_4}]^T$, $y(t) = [y_1, \dots, y_7]^T$, $d(t) = W_d$. Il n'y a pas de commande pour le système considéré.

Chapitre 4. Classification des capteurs pour la détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_5 & \lambda_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_7 & 0 & \lambda_8 & \lambda_9 & \lambda_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{12} & 0 & \lambda_{13} \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} \lambda_{14} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{15} & \lambda_{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{18} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_{26} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_{19} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{25} \end{bmatrix}.$$

Le graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$ est représenté Figure 4.19.

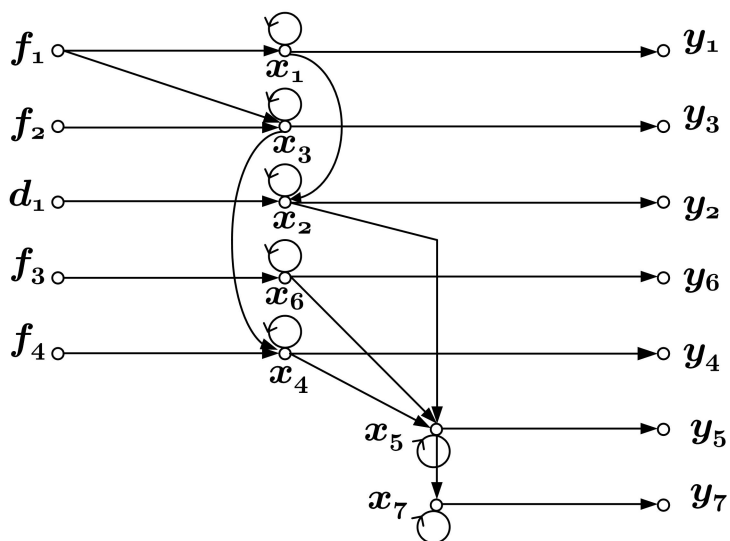


FIG. 4.19 – Graphe associé au système de sept bacs

4.7.1 Classification des capteurs pour la connexion à la sortie

Il s'avère que dans $G(\Sigma_\Lambda^{fd})$ tout sommet d'état est connecté à un sommet de sortie par un chemin.

Chapitre 4. Classification des capteurs pour la détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs

On peut voir que le sommet d'état x_7 est connecté à un seul sommet de sortie y_7 . La perte du capteur y_7 va déconnecter le sommet x_7 de la sortie. Alors $\{y_7\}$ est un sous-ensemble critique irréductible de capteurs de cardinalité 1 pour la propriété de connexion à la sortie. D'après le Théorème 4.3.1, y_7 est un capteur essentiel pour la connexion à la sortie.

D'autre part, tout sommet d'état est connecté au sommet de sortie y_7 , c'est-à-dire que le capteur y_7 est suffisant pour assurer la connexion à la sortie et $\{y_7\}$ est le seul séparateur irréductible. En conséquence les capteurs y_i ($i = 1, \dots, 6$) sont des capteurs inutiles pour la propriété de connexion à la sortie.

4.7.2 Classification des capteurs pour l'absence de contraction

Le DM-décomposition du graphe biparti $B(\Sigma_\Lambda^{fd})$ associée au système Σ_Λ^{fd} de cet exemple est donnée Figure 4.20. Dans cet exemple, nous avons seulement la partie maxi-

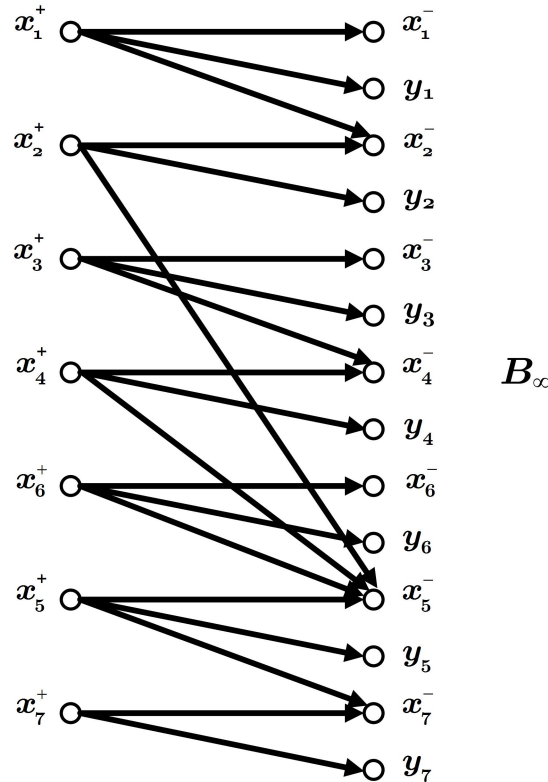


FIG. 4.20 – La DM-decomposition du graphe biparti $B(\Sigma_\Lambda^{fd})$ de l'exemple

male inconsistante B_∞ . D'après la Proposition 4.3.3, $G(\Sigma_\Lambda^{fd})$ ne contient pas de contraction. Il est clair que le couplage maximal correspondant à $(x_1^+, x_1^-), \dots, (x_7^+, x_7^-)$ (tous les arcs horizontaux) ne couvre aucun sommet de sortie. Alors, $G(\Sigma_\Lambda^{fd})$ ne contient pas de contraction même dans le cas où tous les capteurs tombent en panne. Ceci peut être

Chapitre 4. Classification des capteurs pour la détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs

vu directement sur $G(\Sigma_{\Lambda}^{fd})$ parce que chaque sommet d'état possède un cycle. Donc, les capteurs y_1, \dots, y_7 sont des capteurs inutiles pour la propriété d'absence de contraction.

4.7.3 Classification des capteurs pour la condition de rang du problème FDI

Dans $G(\Sigma_{\Lambda}^{fd})$, un couplage maximal entre $F \cup D$ et Y est de taille 5, par exemple avec le couplage :

$$\{(f_1, x_1, y_1), (f_2, x_3, y_3), (f_3, x_6, y_6), (f_4, x_4, y_4), (d_1, x_2, y_2)\}.$$

En utilisant des algorithmes standard de flot maximum tels que celui de *Ford et Fulkerson* [Ford & Fulkerson, 1962; Murota, 2000; Yacoub-Agha, 2007], on obtient :

- L'ensemble des sommets de sortie qui appartiennent à tous les couplage maximaux entre $F \cup D$ et Y est :

$$Y_{ess}(F \cup D, Y) = \{y_1, y_3\}.$$

- L'ensemble des sommets de sortie qui appartiennent à tous les couplage maximaux entre D et Y est :

$$Y_{ess}(D, Y) = \{\emptyset\}.$$

D'après la Proposition 4.4.3, l'ensemble des capteurs essentiels pour la condition de rang du problème FDI est donné par :

$$Y_e = Y_{ess}(F \cup D, Y) \setminus Y_{ess}(D, Y) = \{y_1, y_3\}.$$

Ce résultat est cohérent avec l'analyse physique intuitive. Nous avons besoin d'au moins quatre mesures indépendantes pour détecter éventuellement les changements simultanés de température des quatre alimentations. Lorsque y_1 tombe en panne, il n'est pas possible de détecter des changements simultanés sur T_{F_1} et T_{F_2} . De la même manière, quand y_3 tombe en panne, il n'est pas possible de détecter des changements simultanés sur T_{F_2} et T_{F_4} .

On peut vérifier qu'il existe un ensemble admissible de capteurs de taille 4 pour la condition de rang : $\{y_1, y_3, y_4, y_6\}$, parce que cet ensemble de capteurs n'est pas affecté par la perturbation et donc permet de détecter et isoler les défauts. D'après la Proposition 4.4.5 ces capteurs sont des capteurs utiles pour la condition de rang. En effet, la condition de rang est satisfaite avec l'ensemble de capteurs $\{y_1, y_3, y_4, y_6\}$ mais la perte de n'importe quel capteur va rendre cette condition insatisfaite.

Considérons maintenant un ensemble admissible de capteurs pour la condition de rang : $V = \{y_1, y_3, y_2, y_6, y_5\}$. On a $V_{ess}(D, V) = \{x_2\}$. D'après la Proposition 4.4.6, y_2 et y_5 sont des capteurs utiles pour la condition de rang. En fait, par exemple quand y_2 tombe en panne, la taille d'un couplage maximal entre $F \cup D$ et $V \setminus \{y_2\}$ est $\rho(F \cup D, V \setminus \{y_2\}) = 4$

Chapitre 4. Classification des capteurs pour la détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs

mais le couplage maximal entre D et $V \setminus \{y_2\}$ est toujours de taille $\rho(D, V \setminus \{y_2\}) = 1$. La condition de rang du Théorème 4.2.1 n'est plus satisfaite. De la même manière, on obtient aussi que y_7 est un capteur utile pour la condition de rang.

4.7.4 Classification des capteurs pour la solubilité du problème de détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs

Donc, on peut résumer notre résultat de classification de capteurs :

Pour la connexion à la sortie :

- Le capteur essentiel est y_7 .
- L'ensemble des capteurs inutiles est $\{y_1, y_2, \dots, y_6\}$.

Pour l'absence de contraction :

- L'ensemble des capteurs essentiels est $\{\emptyset\}$.
- L'ensemble des capteurs inutiles est $\{y_1, y_2, \dots, y_7\}$.

Pour la condition de rang :

- L'ensemble des capteurs essentiels est $\{y_1, y_3\}$.
- L'ensemble des capteurs inutiles est $\{\emptyset\}$.

Alors, pour la solubilité du problème de détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs dans la Définition 4.2.1 :

- L'ensemble des capteurs essentiels est l'union des capteurs essentiels pour les trois sous-propriétés, donc est $\{y_1, y_3, y_7\}$.
- Pour la connexion à la sortie, il existe un seul ensemble minimal de capteurs : $\{y_7\}$.

Il n'existe pas d'ensemble minimal de capteurs pour l'absence de contraction.

Pour la condition de rang, il y a 5 ensembles minimaux de capteurs : $\{y_1, y_3, y_2, y_4, y_5\}$, $\{y_1, y_3, y_2, y_5, y_6\}$, $\{y_1, y_3, y_2, y_4, y_7\}$, $\{y_1, y_3, y_2, y_6, y_7\}$ et $\{y_1, y_3, y_4, y_6\}$.

D'après la Proposition 4.5.2, on a 3 ensembles minimaux de capteurs pour le problème global : $\{y_1, y_3, y_2, y_6, y_7\}$, $\{y_1, y_3, y_2, y_4, y_7\}$, $\{y_1, y_3, y_4, y_6, y_7\}$. On obtient donc que y_i ($i \neq 5$) sont des capteurs utiles et y_5 est un capteur inutile pour la solubilité du problème de détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs. Remarquons que y_5 est un capteur utile pour la condition de rang mais il est un capteur inutile pour le problème global.

4.7.5 Classification quantitative des capteurs

Dans cet exemple et pour la solubilité du problème de détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs, le réseau des configurations des capteurs a 128 noeuds. Le réseau réduit de capteurs contient 4 noeuds et est donné à la Figure 4.21.

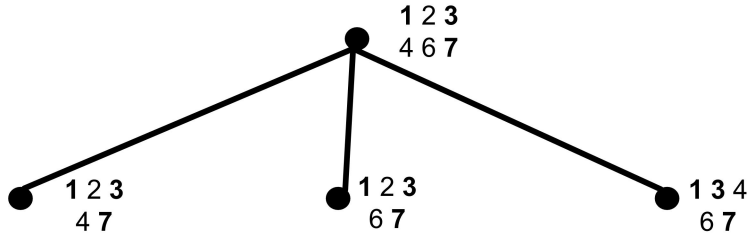


FIG. 4.21 – Le réseau réduit de capteurs

Remarquons que les trois noeuds sur la couche inférieure du réseau correspondent aux ensemble minimaux de capteurs pour la solubilité du problème de détection et localisation de défauts. En utilisant la Définition 4.6.1, le degré de criticité de chaque capteur est :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(y_1) &= \mathcal{D}(y_3) = \mathcal{D}(y_7) = 1 \\ \mathcal{D}(y_2) &= \mathcal{D}(y_4) = \mathcal{D}(y_6) = 3/4 \\ \mathcal{D}(y_5) &= 0 \end{aligned}$$

Ceci illustre le fait que y_1 , y_3 et y_7 sont les capteurs essentiels, que y_5 est inutile pour la solubilité du problème de détection et localisation de défauts. Dans notre exemple y_2 , y_4 et y_6 ont le même degré de criticité.

4.7.6 Classification des capteurs quand il n'existe pas de perturbation

Supposons maintenant que le système dans notre exemple n'est pas affecté par la perturbation et on va étudier la classification des capteurs pour la solubilité générique du problème de détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs.

L'analyse de la classification des capteurs pour la connexion à la sortie et pour l'absence de contraction est la même que le cas avec perturbation.

Pour la condition de rang, la classification des capteurs change par rapport au cas où il existe une perturbation.

- Le couplage maximal entre F et Y est de taille 4. Un exemple de tel couplage est : (f_1, x_1, y_1) , (f_2, x_3, y_3) , (f_3, x_6, y_6) , (f_4, x_4, y_4) . Dans ce cas on a : $V_{ess}(F, Y) = \{f_1, f_2, f_3, f_4, x_1, x_3, x_4, x_6, y_3\}$. D'après la Proposition 4.4.7, y_3 est le seul capteur essentiel pour la condition de rang. Sans perturbation, le capteur y_1 n'est plus un capteur essentiel pour la condition de rang.
- Pour chaque capteur y_i , il existe un chemin $F - \{y_i\}$ dans le graphe $G(\Sigma_{\Lambda}^{fd})$. Alors, d'après la Proposition 4.4.7, tous les capteurs sont utiles pour la condition de rang.

Chapitre 4. Classification des capteurs pour la détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs

Pour la solubilité générique du problème de détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs, l'ensemble des capteurs essentiels est $\{y_3, y_7\}$. On a dans ce cas 5 ensembles minimaux de capteurs : $\{y_1, y_3, y_4, y_7\}$, $\{y_2, y_3, y_4, y_7\}$, $\{y_1, y_3, y_6, y_7\}$, $\{y_2, y_3, y_6, y_7\}$, $\{y_3, y_4, y_6, y_7\}$. Alors d'après la Proposition 4.5.1, y_i ($i \neq 5$) sont des capteurs utiles et y_5 est un capteur inutile pour cette solubilité.

Le réseau réduit des configurations des capteurs contient 10 noeuds et est donné à la Figure 4.22. Les cinq noeuds sur la couche inférieure du réseau correspondent avec les

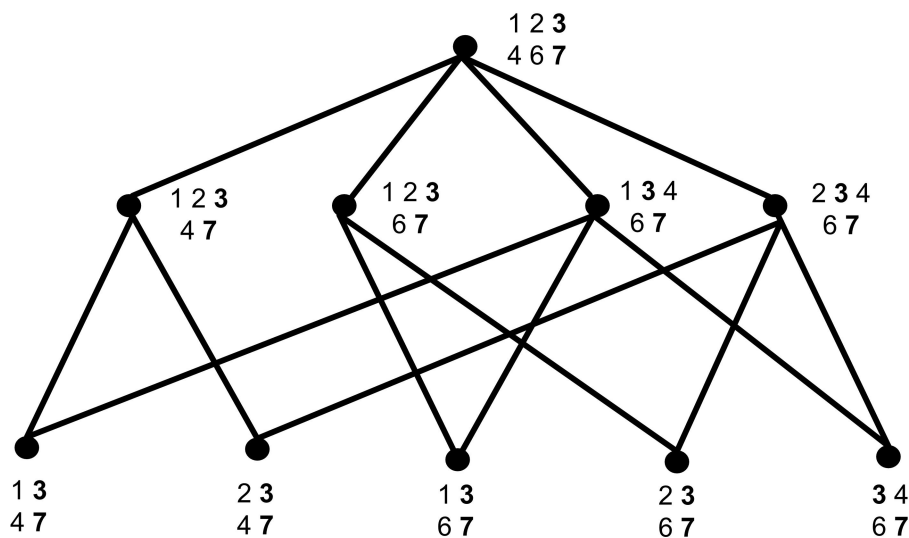


FIG. 4.22 – Le réseau réduit de capteurs

ensembles minimaux de capteurs pour le problème global. On obtient le degré de criticité de chaque capteur :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(y_3) &= \mathcal{D}(y_7) = 1 \\ \mathcal{D}(y_4) &= \mathcal{D}(y_6) = 7/10 \\ \mathcal{D}(y_1) &= \mathcal{D}(y_2) = 6/10 \\ \mathcal{D}(y_5) &= 0 \end{aligned}$$

A partir du noeud supérieur $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_6, y_7)$, si y_1 tombe en panne, nous passons à un ensemble admissible de capteurs qui se compose de $(y_2, y_3, y_4, y_6, y_7)$. De ce point, y_2 , y_4 ou y_6 peuvent tomber en panne un à la fois. Ceci entraîne trois autres ensembles admissibles de capteurs (y_3, y_4, y_6, y_7) , (y_2, y_3, y_6, y_7) et (y_2, y_3, y_4, y_6) . Par cette analyse, nous concluons que, lorsque il y a un défaut de y_1 , il reste quatre ensembles admissibles de capteurs pour notre problème de détection et localisation de défauts.

Cependant, lorsque il y a un défaut de y_4 , il ne nous reste que trois ensembles admissibles de capteurs pour la solubilité générique de notre problème de détection et

Chapitre 4. Classification des capteurs pour la détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs

localisation de défauts. Par conséquent, dans ce cas, y_4 est plus critique que y_1 pour le problème *FDI* en cas de défaillance du capteur.

4.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons revisité le problème de détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs. En utilisant l'approche graphique, nous avons concentré notre attention sur la solubilité du problème qui dépend de l'observabilité et d'une condition de rang.

D'abord, nous avons classé les capteurs par importance pour la solubilité du problème de détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs : les capteurs essentiels dont une défaillance mène à la perte de la solubilité et les capteurs qui sont inutiles pour la préservation de cette solubilité. Cette classification de capteurs est basée sur la classification des capteurs pour des sous-propriétés : la connexion à la sortie, l'absence de contraction et la condition de rang. La classification des capteurs pour la connexion à la sortie et pour l'absence de contraction a été étudiée dans [Trinh, 2008]. Dans notre travail, nous avons étudié la classification pour la condition de rang en prenant en compte des perturbations. Ensuite, à partir de ces résultats, nous avons classé les capteurs pour le problème de détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs. Nous avons démontré que l'ensemble des capteurs essentiels pour la propriété globale est l'union des capteurs essentiels pour chaque sous-propriété. De plus, un capteur utile pour certaines sous-propriétés peut devenir inutile pour la propriété globale.

Ensuite, nous avons proposé une méthode pour quantifier l'importance de chaque capteur pour la solubilité du problème de détection et localisation de défauts en utilisant la notion de degré de criticité. L'analyse du degré de criticité des capteurs peut être utilisée dans la conception d'une détection et localisation de défauts robuste en cas de défaillance de capteur.

L'analyse proposée dans ce chapitre est basée sur la structure physique du système. Cette analyse permet de déterminer à partir des connaissances préalables sur le procédé, les capteurs essentiels et inutiles. Notre approche graphique utilise principalement des algorithmes standard et peut être adaptée pour les systèmes de grande dimension.

Conclusion et perspectives

Ce travail a été consacré à l'analyse structurelle du réseau de capteurs d'un système dynamique pour certains problèmes de commande et d'observation. Cette analyse mène à deux aspects relatifs à l'ensemble de capteurs : la localisation de capteurs pour vérifier les propriétés considérées et la classification des capteurs par rapport à leur importance pour ces propriétés. Dans cette thèse, ces deux aspects ont été étudiés pour deux problèmes : le problème du rejet de perturbation par retour de mesure et le problème de détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs. Dans ce but, nous avons utilisé l'approche structurelle et la théorie des graphes.

Le problème de localisation de capteurs consiste à déterminer combien de nouveaux capteurs ajouter et quelles variables mesurer pour que la propriété considérée soit satisfaite. Le problème de classification des capteurs vise à répondre à des questions telles que : quelle est l'importance de chacun des capteurs pour la préservation de la propriété considérée lorsque certains d'entre eux sont défectueux. Pour une propriété qui dépend de l'ensemble des capteurs du système, nous avons proposé de classer des capteurs en trois catégories : capteurs essentiels, capteurs utiles et capteurs inutiles. Le défaut d'un capteur essentiel fait perdre la propriété considérée alors que le défaut d'un capteur inutile n'a aucun effet sur cette propriété. Ensuite, la notion de système linéaire structuré et son graphe associé ont été présentés. Cette classe de systèmes linéaires possède l'avantage de prendre en compte la structure interne du système sans connaître la valeur exacte de ses paramètres.

Dans un deuxième temps, nous nous sommes intéressés au problème de rejet de perturbation par retour de mesure. L'objectif principal est d'étudier la localisation et la classification des capteurs pour la solubilité générique de ce problème. Notre première contribution a été de donner de nouvelles conditions nécessaires et suffisantes en termes graphiques pour la solubilité du problème. Ces conditions nous donnent une nouvelle compréhension du problème de rejet de perturbation par retour de mesure. Nous montrons qu'au lieu d'étudier le système entier, il est suffisant d'analyser le système réduit qui se trouve entre les perturbations, les mesures et la frontière d'un sous-ensemble de sommets d'état \mathcal{I}^* .

- Concernant la localisation de capteurs pour le problème de rejet de perturbation par retour de mesure, le premier résultat que nous avons obtenu est le nombre minimal de capteurs nécessaire pour résoudre le problème. Ensuite, nous avons montré que les mesures des états situés en dehors de \mathcal{I}^* sont inutiles pour résoudre ce problème. De plus, nous avons montré que mesurer des variables d'état qui sont suffisamment proches des perturbations dans le graphe associé du système est suffisant pour résoudre le problème de rejet de perturbation. Une autre proposition est de mesurer les états d'un séparateur entre les perturbations et la frontière de \mathcal{I}^* car un tel séparateur contient toutes les informations sur les perturbations.
- Concernant l'aspect classification de capteurs, dans le cas d'une perturbation unique, nous avons donné une classification complète de capteurs en trois catégo-

ries : essentiels, utiles et inutiles. Dans le cas de plusieurs perturbations, la caractérisation d'une partie de capteurs essentiels a été donnée et nous avons démontré que les capteurs essentiels peuvent être déterminés de manière polynomiale. Quelques observations sur les capteurs utiles et inutiles ont été aussi présentées. Cependant, une caractérisation complète et simple à tester pour des capteurs inutiles reste un problème ouvert.

Nos résultats ont été illustrés sur un système thermo-hydraulique de cinq bacs affecté par des perturbations. Nous avons calculé un retour dynamique de mesure qui permet de rejeter les perturbations et ensuite nous l'avons validé en simulation.

Enfin, nous avons abordé la deuxième problématique de ce travail : le problème de détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs. Notre contribution a été de classer des capteurs en fonction de leur importance pour la solubilité générique de ce problème de détection et localisation de défauts. Cette solubilité générique requiert l'observabilité du système et une condition de rang. Alors, notre classification de capteurs est la combinaison des analyses de ces sous-propriétés. Nous avons d'abord classé les capteurs en trois types : essentiels, utiles et inutiles pour chacune de ces sous-propriétés. Ensuite, la classification des capteurs pour notre problème de détection et localisation de défauts est donnée. Nous avons montré que l'ensemble des capteurs essentiels pour le problème global est l'union des capteurs essentiels pour ses sous-propriétés. Par contre, un capteur utile non essentiel pour au moins une sous-propriété peut devenir un capteur inutile pour la propriété globale. Une méthode pour déterminer l'ensemble des capteurs inutiles pour le problème global a été donnée. Ensuite, nous avons introduit la notion de degré de criticité. Cette notion représente une mesure du degré de redondance d'un capteur pour la solubilité du problème de détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs. Un exemple de procédé thermique a été utilisé pour illustrer notre résultat.

Perspectives

A l'issue de ce travail, certaines voies restent à explorer.

La première d'entre elles est de trouver une caractérisation complète et simple à tester des capteurs essentiels et des capteurs inutiles pour le problème de rejet de perturbation par retour de mesure dans le cas général.

La deuxième piste à poursuivre est liée à la classification des capteurs pour la solubilité du problème de détection et localisation de capteurs. Comme nous l'avons vu, la détermination des capteurs inutiles pour la condition de rang et pour le problème global est non polynomiale. Il est donc intéressant, pour des systèmes de grande dimension, de chercher des algorithmes approximatifs afin de diminuer le temps de calcul pour ce type de problème.

La troisième piste de recherche est la prise en compte du coût des capteurs car certains capteurs coûtent plus cher que d'autres. Donc l'intégration du coût de chaque capteur au problème de localisation de capteurs pour trouver une solution à coût minimal peut être une perspective intéressante. Une autre idée est de prendre en compte aussi la probabilité de tomber en panne de chaque capteur dans le problème de classification de capteurs.

Une autre idée est de continuer à explorer des nouveaux degrés de criticité pour évaluer l'importance de chaque capteur pour une propriété considérée et étudier ces degrés de criticité dans le lien avec des sous-propriétés.

Les résultats de ce travail ouvrent des perspectives pour l'étude d'autres propriétés des systèmes, et également pour des propriétés qui ne dépendent pas des capteurs mais des actionneurs. Nous pensons aussi possible de transposer les idées dans ce travail à d'autres modèles graphiques tels que le bond-graph ou à d'autres types de systèmes tels que le système multi-agents [Zamani & Lin, 2009].

Bibliographie

- Armeni, S., Casavola, A. & Mosca, E. [2009], ‘Robust fault detection and isolation for LPV systems under a sensitivity constraint’, *Int. J. Adapt. Control Signal Processing* **23**, 55–72.
- Assad, M. [2002], Analyse de la tolérance aux fautes : approches fonctionnelle et structurelle, PhD thesis, Université des Sciences et Technologies de Lille.
- Bagajewicz, M. J. [1997], ‘Design and retrofit of sensor network in process plants’, *AIChE Journal* **43**(9), 2300–2306.
- Bahar, M., Jantzen, J., Commault, C., Dion, J. M. & Hovelaque, V. [1996], Structural decoupling and disturbance rejection in a distillation column, *in* ‘World Congress IFAC’96’, Vol. M, San Francisco, USA.
- Basile, G. & Marro, G. [1969], ‘On observability of linear time-invariant systems with unknown inputs’, *Journ. Optimiz. Th. Appl.* **3**, 410–415.
- Basile, G. & Marro, G. [1992], *Controlled and Conditioned Invariants in Linear System Theory*, Prentice Hall.
- Basseville, M., Benveniste, A., Moustakides, G. & Rougée, A. [1987], ‘Optimal sensor location for detecting changes in dynamical behaviour’, *IEEE Trans. on Autom. Control* **32**(12), 1067–1075.
- Berge, C. [1973], *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris.
- Bhattacharyya, S. [1982], ‘Transfer function conditions for output feedback disturbance rejection’, *IEEE Trans. Automat. Control* **27**, 974–977.
- Bhattacharyya, S., Gomes, A. D. N. & Howze, J. W. [1983], ‘The structure of robust disturbance rejection control’, *IEEE Trans. Automat. Control* **28**, 874–881.
- Bhushan, M. & Rengaswamy, R. [2000], ‘Design of sensor location based on various fault diagnostic observability and reliability criteria’, *Computer Chemical Engineering* **24**(2-7), 735–741.
- Blanke, M., Kinnaert, M., Lunze, J. & Staroswiecki, M. [2003], *Diagnosis and fault-tolerant control*, Springer-Verlag.
- Bouamama, B. O., Dauphin-Tanguy, G., Staroswiecki, M. & Amo-Bravo, D. [2000], Bond graph analysis of structural FDI properties in mechatronic systems, *in* ‘1st IFAC conference on mechatronic systems’, Darmsdadt, Germany, pp. 1057–1062.

- Boukhobza, T. & Hamelin, F. [2007a], ‘Observability analysis for structured bilinear systems : A graph-theoretic approach’, *Automatica* **43**(11), 1968–1974.
- Boukhobza, T. & Hamelin, F. [2007b], ‘State and input observability for structured linear systems : A graph-theoretic approach’, *Automatica* **43**(7), 1204–1210.
- Boukhobza, T. & Hamelin, F. [2009], ‘State and input observability recovering by additional sensor implementation : A graph-theoretic approach’, *Automatica* **45**(7), 1737–1742.
- Boukhobza, T., Hamelin, F. & Canitrot, S. [2008], ‘A graph-theoretic approach to fault detection and isolation for structured bilinear systems’, *International Journal of Control* **81**(4), 661–678.
- Boukhobza, T., Hamelin, F. & Sauter, D. [2006], ‘Observability of structured linear systems in descriptor form : A graph-theoretic approach’, *Automatica* **42**(4), 629–635.
- Carnimeo, L., Fanti, M., Trovato, M. & Turchiano, B. [1992], ‘Graph-theoretic decoupling technique for the design of synchronous generator controllers’, *IEE Proceedings D, Control Theory and Applications* **139**(3), 337–345.
- Cassar, J. & Staroswiecki, M. [1997], A structural approach for the design of failure detection and identification systems, in ‘IFAC, IFIP,IMACS Conference on Control of Industrial Systems’, Belfort, France, pp. 329–334.
- Chamseddine, A., Noura, H. & Raharijaona, T. [2007], Optimal sensor network design for observability of complex systems, in ‘American Control Conf.’, New York, USA, pp. 1705–1710.
- Chamseddine, A., Noura, H., Raharijaona, T. & Ouladsine, M. [2007], Structural analysis-based sensor location for diagnosis as optimization problem, in ‘Proceeding of the 46th IEEE CDC Conf.’, New Orleans, LA, USA, pp. 6154–6159.
- Chen, B. M. & Zheng, D.-Z. [1995], ‘Simultaneous finite and infinite zero assignments of linear systems’, *Automatica* **31**(4), 643–648.
- Chen, J. & Patton, R. [1999], *Robust model-based fault diagnosis for dynamic systems*, Kluwer academic publishers.
- Chmielewski, D. J., Palmer, T. & Manousiouthakis, V. [2002], ‘On the theory of optimal sensor placement’, *AIChE Journal* **48**(5), 1001–1012.
- Chu, D. [2000], ‘Disturbance decoupled observer design for linear time invariant systems a matrix pencil approach’, *IEEE Trans. Automat. Contr.* **45**(8), 1569–1575.
- Commault, C. & Dion, J. M. [1992], ‘A comprehensive introduction to the geometric theory of linear multivariable systems’, *IEEE Trans. on Educ.* **1**, 92–97.
- Commault, C. & Dion, J. M. [2007], ‘Sensor location for diagnosis in linear systems : A structural analysis’, *IEEE Trans. on Automat. Control* **52**(2), 155–169.

Bibliographie

- Commault, C., Dion, J. M. & Benahcène, M. [1993], ‘Output feedback disturbance decoupling : Graph interpretation for structured systems’, *Automatica* **29**, 1463–1472.
- Commault, C., Dion, J. M. & Do, T. H. [2010], The disturbance rejection by measurement feedback problem revisited, *in* ‘ACC’, Baltimore, USA.
- Commault, C., Dion, J. M. & Do, T. H. [2011], ‘Sensor location and classification for the disturbance rejection by measurement feedback problem’, *Automatica (à paraître)*.
- Commault, C., Dion, J. M., Do, T. H. & Trinh, D. H. [2009], Sensor classification for observability preservation under sensor failure, *in* ‘IFAC SafeProcess. 09’, Barcelone, Spain.
- Commault, C., Dion, J. M. & Hovelaque, V. [1997], ‘A geometric approach for structured systems : Application to the disturbance decoupling problem’, *Automatica* **33**, 403–409.
- Commault, C., Dion, J. M. & Perez, A. [1991], ‘Disturbance rejection for structured systems’, *IEEE Trans. Automat. Control* **36**, 884–887.
- Commault, C., Dion, J. M. & Perez, S. [1984], Transfer matrix approach to the disturbance decoupling problem, *in* ‘World Congress IFAC’84’, Vol. 8, Budapest, Hungary, pp. 130–133.
- Commault, C., Dion, J. M., Sename, O. & Motyeian, R. [2002], ‘Observer-based fault detection and isolation for structured systems’, *IEEE Trans. Automat. Control* **47**(12), 2074–2079.
- Commault, C., Dion, J. M. & Trinh, D. H. [2005], Observability recovering by additional sensor implementation in linear structured systems, *in* ‘IEEE CDC Conf.’, Séville, Spain, pp. 7193–7197.
- Commault, C., Dion, J. M. & Trinh, D. H. [2008], ‘Observability preservation under sensor failure’, *IEEE Trans. Automat. Control* **6**(8).
- Commault, C., Dion, J. M. & van der Woude, J. [2002], ‘Characterization of generic properties of linear structured systems for efficient computations’, *Kybernetika* **38**(5), 503–520.
- Commault, C., Dion, J. M. & Yacoub-Agha, S. [2007], Sensor classification for the fault detection and isolation problem, *in* ‘IFAC Symp. SSC 07’, Iguazu Falls, Brazil.
- Commault, C., Dion, J. M. & Yacoub-Agha, S. [2008], ‘Structural analysis for the sensor location problem in fault detection and isolation’, *Automatica* **44**(8), 2074–2080.
- Dauphin-Tanguy, G. [2000], *Les Bond Graphs*, Systèmes automatisés, Hermès, Paris.
- de Olivera, M. C. & Geromel, J. C. [2000], ‘Linear output feedback controller design with joint selection of sensors and actuators’, *IEEE Trans. Automat. Control* **45**(12), 2412–2419.
- Debouk, R., Lafortune, S. & Teneketzis, D. [2002], ‘On an optimization problem in sensor selection’, *Discrete Event. Dyn. Syst.* **12**(4), 417–445.

Bibliographie

- Del-Muro-Cuéllar, B. & Malabre, M. [2001], ‘Fixed poles of disturbance rejection by dynamic measurement feedback : a geometric approach’, *Automatica* **37**, 231–238.
- Dion, J. M. & Commault, C. [1993], ‘Feedback decoupling of structured systems’, *IEEE Trans. Automat. Control* **38**, 1132–1135.
- Dion, J. M., Commault, C. & Montoya, J. [1994], ‘Simultaneous decoupling and disturbance rejection, a structural approach’, *International Journal of Control* **59**(5), 1325 – 1344.
- Dion, J. M., Commault, C. & Trinh, D. H. [2008], Sensor classification for the disturbance rejection by measurement feedback problem, in ‘IFAC WC 2008’, Seoul, Korea.
- Dion, J. M., Commault, C. & van der Woude, J. [2003], ‘Generic properties and control of linear structured systems a survey’, *Automatica* **39**(7), 1125–1144.
- Ford, L. & Fulkerson, D. [1962], *Flows in networks*, Princeton University Press.
- Frank, P. [1996], ‘Analytical and qualitative model-based fault diagnosis - a survey and some new results’, *European Journal of Control* **2**, 6–28.
- Frisk, E. & Krysander, M. [2007], Sensor placement for maximum fault isolability, in ‘18th International Workshop on Principles of Diagnosis (DX-07)’, Nashville, USA.
- Glover, K. & Silverman, L. [1976], ‘Characterization of structural controllability’, *IEEE Trans. Automat. Contr.* **21**, 534–537.
- Hopcroft, J. & Karp, R. [1973], ‘An $n^{5/2}$ algorithm for maximum matchings in bipartite graphs’, *SIAM J. on Comp.* **2**, 225–231.
- Hovelaque, V., Commault, C. & Dion, J. M. [1996], ‘Analysis of linear structured systems using a primal-dual algorithm’, *Systems and Control Letters* **27**, 73–85.
- Izadi-Zamanabadi, R. [2002], Structural analysis approach to fault diagnosis with application to fixed-wing aircraft motion, in ‘Proceeding of the American Control Conference’, Vol. 5.
- Kailath, T. [1980], *Linear Systems*, Prentice Hall.
- Kretsovalis, A. & Mah, R. S. H. [1987], ‘Effect of redundancy on estimation accuracy in process data reconciliation’, *Chemical Engineering Science* **42**(9), 2115–2121.
- Krysander, M. & Frisk, E. [2008], ‘Sensor placement for fault diagnosis’, *IEEE Trans. on Systems Man and Cybernetics, Part A* **38**(6), 1398–1410.
- Lin, C. [1974], ‘Structural controllability’, *IEEE Trans. Automat. Control* **19**(3), 201–208.
- Linnemann, A. [1981], ‘Decoupling of structured systems’, *Systems and Control Letters* **2**, 71–86.
- Linnemann, A. [1986], ‘A further simplification in the proof of the structural controllability theorem’, *IEEE Trans. Automat. Control* **31**(7), 638–639.

Bibliographie

- Liu, X., Chen, B. M. & Lin, Z. [2003], ‘On the problem of general structural assignments of linear systems through sensor/actuator selection’, *Automatica* **39**, 233–241.
- Madron, F. & Veverka, V. [1993], ‘Optimal selection of measuring points in complex plant by linear methods’, *AIChE Journal* **38**, 227–236.
- Malabre, M. & Kucera, V. [1984], ‘Infinite structure and exact model matching problem : a geometric approach’, *IEEE Trans. on Autom. Control* **29**, 266–268.
- Malabre, M., Martínez-García, J. C. & Del-Muro-Cuellar, B. [1997], ‘On the fixed poles for disturbance rejection’, *Automatica* **33**, 1209–1211.
- Mayeda, H. [1981], ‘On structural controllability theorem’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **26**(3), 795–798.
- Meyer, M., Le-Lann, J. M., Koehret, B. & Enjalbert, M. [1994], ‘Optimal selection of sensor location on a complex plant, using a graph oriented approach’, *Computer & Chemical Engineering* **18**, S535–S540.
- Morse, A. [1975], System invariants under feedback and cascade control, in ‘Int. Symp. on Mathematical System Theory’, Springer Verlag, Udine.
- Murota, K. [1987], *Systems Analysis by Graphs and Matroids*, Vol. 3 of *Algorithms and Combinatorics*, Springer-Verlag New-York, Inc.
- Murota, K. [2000], *Matrices and Matroids for Systems Analysis*, Algorithms and Combinatorics 20, Springer.
- Ohta, Y. & Kodama, S. [1985], ‘Structural invertibility of transfer functions’, *IEEE Trans. Automat. Control* **30**, 818–819.
- Raghuraj, R., Bhushan, M. & Rengaswamy, R. [1999], ‘Locating sensors in complex chemical plants based on fault diagnostic observability criteria’, *AIChE Journal* **45**(2), 310–322.
- Rahmani, A. & Dauphin-Tanguy, G. [2006], ‘Structural analysis of switching systems modelled by bond-graphs’, *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems* **12**(2-3), 235–247.
- Reinschke, K. [1988], *Multivariable control A graph-theoretic approach*, Vol. 108 of *Lect. Notes in Control and Information Sciences*, Springer-Verlag.
- Schumacher, J. [1980], ‘Compensator design methods using (C,A,B)-pairs’, *IEEE Trans. Automat. Control* **25**, 1133–1138.
- Shields, R. & Pearson, J. [1976], ‘Structural controllability of multi-input linear systems’, *IEEE Trans. Automat. Contr.* **21**, 203–212.
- Spanache, S., Escobet, T. & Travé-Massuyès, L. [2004], Sensor placement optimisation using genetic algorithms, in ‘15th International Workshop on Principles of Diagnosis’, Carcassonne, pp. 179–183.

- Staroswiecki, M. [2007], *Advances in Control Theory and Applications*, Vol. 353 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer Berlin / Heidelberg, chapter Observability and the Design of Fault Tolerant Estimation Using Structural Analysis, pp. 257–278.
- Staroswiecki, M. & Cassar, J. [1996], Approche structurelle pour la conception des systèmes de surveillance, in ‘Ecole d’Eté d’Automatique’, Grenoble, France.
- Staroswiecki, M., Cassar, J. P. & Declerck, P. [2000], *Issues of fault diagnosis for dynamic systems*, Springer Verlag, chapter A structural framework for the design of FDI system in large scale industrial plants, pp. 245–283.
- Staroswiecki, M., Hoblos, G. & Aitouche, A. [2004], ‘Sensor network design for fault tolerant estimation’, *Int. J. Adapt. Control Signal Processing* **18**, 55–72.
- Sueur, C. & Dauphin-Tanguy, G. [1989], ‘Structural controllability/observability of linear systems represented by bond-graphs’, *Journal of the Franklin Institute* **326**(6), 869–883.
- Sueur, C. & Dauphin-Tanguy, G. [1991], ‘Bond-graph approach for structural analysis of MIMO linear systems’, *Journal of the Franklin Institute* **328**(1), 55–70.
- Travé-Massuyès, L., Escobet, T. & Milne, R. [2001], Model-based diagnosability and sensor placement application to a frame 6 gas turbine subsystem, in ‘12th Int. Workshop on principles of diagnosis’, Sansicario, Via Lattea, Italie, pp. 205–212.
- Travé-Massuyès, L., Escobet, T. & Olive, X. [2006], ‘Diagnosability analysis based on component-supported analytical redundancy relations’, *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. A, Syst., Humans* **36**(6), 1146–1160.
- Travé-Massuyès, L., Escobet, T. & Spanache, S. [2003], Diagnosability analysis based on component supported analytical redundancy relations, in ‘Proc. of the IFAC Workshop Safeprocess’, Washington D.C., U.S.A.
- Trinh, D. H. [2008], Analyse Structurelle de la Localisation et de la Classification de capteurs, PhD thesis, Institut Polytechnique de Grenoble, Grenoble, France.
- V. Venkatasubramanian, R. R. & Kavuri, S. N. [2003a], ‘A review of process fault detection and diagnosis part II : Qualitative models and search strategies’, *Computers and Chemical Engineering* **27**(3), 313–326.
- V. Venkatasubramanian, R. Rengaswamy, K. Y. & Kavuri, S. N. [2003b], ‘A review of process fault detection and diagnosis part I : Quantitative model-based methods’, *Computers and Chemical Engineering* **27**(3), 297–311.
- V. Venkatasubramanian, R. Rengaswamy, S. N. K. & Yin, K. [2003], ‘A review of process fault detection and diagnosis part III : Process history based methods’, *Computers and Chemical Engineering* **27**(3), 327–346.
- van de Wal, M. & de Jager, B. [2001], ‘A review of methods for input/output selection’, *Automatica* **37**, 487–510.

Bibliographie

- van der Woude, J. [1991a], ‘A graph theoretic characterization for the rank of the transfer matrix of a structured system’, *Math. Control Signals Systems* **4**, 33–40.
- van der Woude, J. [1991b], ‘On the structure at infinity of a structured system’, *Linear Algebra and its Applications* **148**, 145–169.
- van der Woude, J. [1993], Disturbance decoupling by measurement feedback for structured systems a graph theoretic approach, in ‘Proc. 2nd Europ. Cont. Conf. ECC’93’, Groningen, Holland, pp. 1132–1137.
- van der Woude, J. [1994], ‘Graph theoretic methods for the computation of disturbance decoupling feedback matrices for structured system’, *Linear Algebra and its Applications* **196**, 119–162.
- van der Woude, J. [1996], ‘Disturbance decoupling by measurement feedback for structured transfer matrix systems’, *Automatica* **32**, 357–364.
- Václavek, V. & Loucka, M. [1976], ‘Selection of measurements necessary to achieve multicomponent mass balances in chemical plant’, *Chemical Engineering Science* **31**(12), 1199–1205.
- Verghese, G. [1978], Infinite frequency behavior in generalized dynamical systems, PhD thesis, Dept. Elect. Eng., Stanford Univ., Stanford, Calif.
- Vidyasagar, M. [1987], *Control system synthesis a factorization approach*, Cambridge The MIT Press.
- Willems, J. & Commault, C. [1981], ‘Disturbance decoupling by measurement feedback with stability or pole placement’, *SIAM Journ. Control Opt.* **19**, 490–504.
- Wonham, W. [1974], *Linear multivariable control a geometric approach*, Springer-Verlag, New-York, (3rd ed., 1985).
- Yacoub-Agha, S. [2007], Application des systèmes structurés à l’étude du diagnostic : Localisation de capteurs, PhD thesis, INP Grenoble, Grenoble, France.
- Yoo, T. & Lafortune, S. [2002], ‘NP-completeness of sensor selection problems arising in partially observed discrete-event systems’, *IEEE Trans. Automat. Control* **47**(9), 1495–1499.
- Zamani, M. & Lin, H. [2009], Structural controllability of multi-agent systems, in ‘American Control Conference’, Vol. 5.
- Zhang, F., Liu, G. & Fang, L. [2009], Actuator fault estimation based on adaptive H_∞ observer technique, in ‘International Conference on Mechatronics and Automation’, Changchun, China.

Annexe

Sensor location and classification for disturbance rejection by measurement feedback [★]

Christian Commault ^a, Jean-Michel Dion ^a, Trong Hieu Do ^a

^a*GIPSA-Lab, Grenoble University - Dept of Automatic Control, Grenoble-INP, CNRS, BP 46, 38402 Saint Martin d'Hères, France.*

Abstract

In this paper a new necessary and sufficient condition is proposed for the solvability of the Disturbance Rejection by Measurement Feedback (DRMF) problem involving linear structured systems. The associated system graph can be used to easily check whether or not the condition holds. In relation to the DRMF problem, two issues related to the available sensor set have been investigated:

- Sensor number and location: when the DRMF problem is not solvable with the given sensor set, how many sensors are needed and where should they be located to make the DRMF problem solvable?
- Sensor classification: when the DRMF problem is solvable with the given sensor set, what is the impact of the failure of a sensor on the solvability?

Based on the new condition, a lower bound can be determined for the number of sensors required. Moreover, measuring state variables outside a given subset is found to be of no use. To solve the DRMF problem, it is sufficient to measure state variables sufficiently close to the disturbances in the associated system graph. Sensor classification is used to distinguish between essential sensors, *i.e.* sensors for which failure leads to unsolvability, and useless sensors that have no impact on solvability. Partial classification results are provided for the general case and a complete characterization of essential and useless sensors is provided for the single disturbance case.

Key words: Linear systems, Disturbance rejection, Sensor location, Sensor classification, Structural properties

1 Introduction

Linear systems are often affected by unmeasurable disturbances. In recent years, a great deal of research has been devoted to finding ways to reject such disturbances, *i.e.* reduce or eliminate their effect on the system output. Disturbance rejection by state feedback is a very well known problem and was one of the emblematic applications of geometric theory [31,2]. However, when all the states are not available for measurement, disturbance rejection can be based on measurement feedback. This is a more complex problem that has nevertheless been solved in an elegant way in geometric terms (see [22,30]). Other approaches minimize some norm of the disturbance-controlled output transfer matrix, see for example [28].

We consider here linear structured systems, representing a large class of parameter-dependent linear systems. Generic properties for such systems can be obtained easily from a graph logically associated with the system. This approach was pioneered by Lin [20]. In this framework, the problem of Disturbance Rejection by Measurement Feedback (DRMF) has been solved using a graphic approach in [27,9]. The solvability of this problem highly depends on various characteristics of the sensor set.

In this paper, we will focus on the location and classification of sensors in relation to solving the DRMF problem. The sensor location issue has been widely studied in engineering literature and can be resumed by the following question: "How many sensors do we need and where should they be located so that certain desired system properties will hold?" The problem has been tackled for various classes of models and a number of specific problems. The sensor location problem is especially important for distributed systems and has been studied by many authors, see for example [29] in the field of chemical engineering and [19] for a survey. For finite dimensional systems, the sensor/actuator location prob-

^{*} This paper was not presented at any IFAC meeting. Corresponding author C. Commault. Tel. +33 (0)4 76 82 64 16. Fax +33 (0)4 76 82 63 88.

^{**}Email:{christian.commault,jean-michel.dion,trong-hieu.do}@gipsa-lab.grenoble-inp.fr

lem, also known as the input/output selection problem, has been studied for classical properties such as controllability, observability, zero location and robust stability, see [24]. Qualitative models have also often been used to determine sensor locations, see [4]. Sensor classification classes sensors according to the importance of their failure with regard to a given property. In reliability theory, there exist commonly used deterministic or probabilistic measures of this importance, see [3]. Sensors can also be classified in a qualitative way as in [10]. In this paper, we will focus on two interesting classes of sensors: essential sensors, *i.e.* sensors for which failure leads to loss of a given property (e.g. controllability or observability), and useless sensors which have no impact on the conservation of the property considered.

We consider parameter-dependent finite dimensional models that represent a large set of linear systems. A structured system often makes it possible to represent all the linearized models for a non-linear system. The results obtained are valid for a given structure and almost any parameter values. These models are well suited to sensor location and classification and have already been used in a number of problems concerning for example observability [10,5] and fault detection and isolation [17,11]. Other potential applications of this sensor classification approach include fault tolerant control [16]. The sensor location problem for DRMF has been studied previously by [12] in the context of robust design. The problem is formulated as a mixed Boolean semidefinite program to minimize the H_2 norm of the disturbance-regulated output transfer matrix. Note that sensor classification has never been studied in relation to the DRMF problem, despite the fact that the solvability of this problem is highly dependent on the sensor set.

In this paper, we propose a new necessary and sufficient structural condition for the solvability of the DRMF problem. This condition provides new insight that is useful when designing sensor sets for the DRMF problem. It will provide an idea of the number of sensors required and their locations. When the problem is solvable for a given set of sensors and when there is only one disturbance, we can use the graph associated with the system to easily distinguish between sensors that are essential, *i.e.* those for which failure leads to unsolvability and those which are useless, *i.e.* those which have no impact on solvability. We will use this approach to determine the minimum number of sensors required for the general case. Then we will prove that measuring state variables outside a given subset is of no use and that the essential sensors can be determined by a polynomial time algorithm. Furthermore, we will show that measuring state variables sufficiently close to the disturbances in the associated system graph is sufficient to solve the DRMF problem.

This paper is structured as follows. We formulate the problem of sensor location and classification in section

2. Linear structured systems as well as known results on disturbance rejection by measurement feedback are presented in section 3. In section 4, we solve the DRMF problem and characterize useless and essential sensors for the single disturbance case. A new necessary and sufficient structural condition for the solvability of the general case of DRMF problems is given in section 5. From this condition, we derive some sensor location and classification results in section 6. An illustrative example is given in section 7, followed by some concluding remarks.

2 Problem formulation

2.1 The Disturbance Rejection by Measurement Feedback problem

Let us consider the linear system Σ given by:

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ed(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ z(t) = Hx(t) \end{cases}, \quad (1)$$

where $u(t) \in \mathbb{R}^m$ is the control input, $d(t) \in \mathbb{R}^q$ the unmeasurable disturbance, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ the state, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ the regulated output and $z(t) \in \mathbb{R}^\nu$ the measured output provided by a sensor set. For the sake of simplicity, z_i denotes the sensor that delivers the measured output $z_i(t)$. For such a system, we can define the transfer matrix:

$$\begin{bmatrix} y(s) \\ z(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G(s) & K(s) \\ M(s) & N(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(s) \\ d(s) \end{bmatrix} \quad (2)$$

Definition 1 Let Σ be the system defined by equations (1) above with sensor set $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_\nu\}$. The Disturbance Rejection by Measurement Feedback (DRMF) problem amounts to finding a dynamic measured output feedback compensator

$$\Sigma_{zu} \begin{cases} \dot{w}(t) = Lw(t) + Rz(t) \\ u(t) = Sw(t) + Pz(t) \end{cases}, \quad (3)$$

such that the closed loop system transfer matrix from disturbance d to controlled output y is identically zero.

In transfer matrix terms, we are looking for a dynamic compensator (see Figure 1) $u(s) = F(s)z(s)$, where $F(s)$ is a proper rational matrix, such that the closed loop system transfer matrix from disturbance d to controlled output y is identically zero:

$$G(s)F(s)(I - M(s)F(s))^{-1}N(s) + K(s) = 0 \quad (4)$$

This problem has been solved geometrically in a very elegant manner [1,22]. The solution highlights the fact

that the DRMF problem combines a state feedback decoupling problem and an unknown input observer problem [2].

In this paper, we reconsider the DRMF problem from a

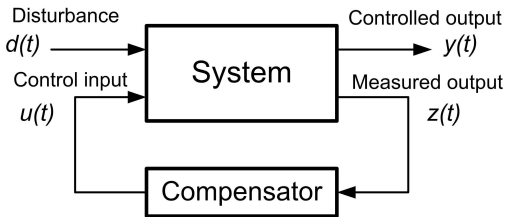


Fig. 1. Control by dynamic feedback compensation

structural point of view. We show in particular that this problem is equivalent to an observation problem on a subsystem of the original system. This provides us with useful information on the minimum number of sensors required and on their possible locations.

2.2 Sensor location and classification for the DRMF problem

In this paper, we will try to answer the following questions:

- When a DRMF problem is not solvable with a given sensor set, where should we install new sensors and how many are required to make the problem solvable?
- When the DRMF problem is solvable, how can sensors be classified regarding their importance in conserving solvability in case of sensor failure?

To answer the second question, we introduce two important classes of sensors.

Definition 2 Let Σ be the system defined in (1) with sensor set $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_\nu\}$. A subset $V_Z \subseteq Z$ is called an **admissible sensor set** for the DRMF problem of Definition 1 if the DRMF problem is solvable with sensor subset V_Z .

- (1) z_i is called a **useless sensor** for the DRMF problem if, for every admissible sensor subset V_Z containing z_i , $V_Z \setminus \{z_i\}$ is still an admissible sensor set for the DRMF problem. A sensor which is not useless is called a **useful sensor**.
- (2) z_i is called an **essential sensor** for the DRMF problem if z_i belongs to every admissible sensor subset V_Z . The set of essential sensors is a subset of the set of useful sensors.

In other words :

- useless sensors never contribute to the solvability of the problem

- useful sensors can contribute to the solvability of the problem in some situations
- some useful sensors may be essential, i.e. are compulsory to conserve the DRMF solvability. Indeed non essential sensors are not necessarily useless.

In [23], the authors introduced the notion of a *minimal sensor set (MSS)*. A minimal sensor set is a set of sensors $M_Z \subseteq Z$ such that a given property holds with this sensor set but not with any proper subset of M_Z . It turns out that a useless sensor is a sensor which does not belong to any minimal sensor set while an essential sensor belongs to all minimal sensor sets.

3 Linear structured systems

3.1 Definitions

In this subsection, we will review some definitions and known results concerning linear structured systems. More details can be found in [14]. We consider a linear system of the type defined by equations (1) above with parameterized entries and denoted by Σ_Λ as follows:

$$\Sigma_\Lambda \begin{cases} \dot{x}(t) = A_\Lambda x(t) + B_\Lambda u(t) + E_\Lambda d(t) \\ y(t) = C_\Lambda x(t) \\ z(t) = H_\Lambda x(t) \end{cases} \quad (5)$$

This system is called a linear structured system if the

$$\text{entries of the composite matrix } J_\Lambda = \begin{bmatrix} A_\Lambda & B_\Lambda & E_\Lambda \\ C_\Lambda & 0 & 0 \\ H_\Lambda & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

are either fixed zeros or independent parameters (not related by algebraic equations). $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ denotes the set of independent parameters of the composite matrix J_Λ .

For such systems, one can study generic properties, i.e. properties which are true for almost all values of the parameters collected in Λ [21]. More precisely, a property is said to be generic (or structural) if it is true for all values of the parameters outside a proper algebraic variety of the parameter space.

A directed graph $G(\Sigma_\Lambda) = (V, W)$ can be associated with the structured system Σ_Λ of the type defined by equations (5) above:

- the vertex set is $V = U \cup D \cup X \cup Y \cup Z$ where U , D , X , Y and Z are the input, disturbance, state, regulated output and measured output sets given by $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, $\{d_1, d_2, \dots, d_q\}$, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $\{y_1, y_2, \dots, y_p\}$ and $\{z_1, z_2, \dots, z_\nu\}$, respectively,

- the arc set is $W = \{(u_i, x_j) | B_{\Lambda,ji} \neq 0\} \cup \{(d_i, x_j) | E_{\Lambda,ji} \neq 0\} \cup \{(x_i, x_j) | A_{\Lambda,ji} \neq 0\} \cup \{(x_i, y_j) | C_{\Lambda,ji} \neq 0\} \cup \{(x_i, z_j) | H_{\Lambda,ji} \neq 0\}$, where $A_{\Lambda,ji}$ (resp. $B_{\Lambda,ji}$, $E_{\Lambda,ji}$, $C_{\Lambda,ji}$, $H_{\Lambda,ji}$) denotes the entry (j, i) of the matrix A_{Λ} (resp. B_{Λ} , E_{Λ} , C_{Λ} , H_{Λ}).

A *path* from a vertex i_0 to a vertex i_{μ} is a sequence of arcs $(i_t, i_{t+1}) \in W$ for $t = 0, \dots, \mu - 1$ where $i_t \in V$ for $t = 0, \dots, \mu$. We denote this path by $P = (i_0, i_1, \dots, i_{\mu})$. i_0 is called the start vertex of the path and i_{μ} is called the end vertex of the path. The path is called *simple* if every vertex on the path occurs only once. The *length* of a path is the number of arcs it possesses. A *shortest path* from i_0 to i_{μ} is a simple path between these two vertices with a minimum length.

Let V_1, V_2 be two nonempty subsets of the vertex set V . A simple path P is called a $V_1 - V_2$ *path* if its start vertex belongs to V_1 and its end vertex belongs to V_2 . Moreover, if only its start vertex belongs to V_1 and only its end vertex belongs to V_2 , P is called a *direct* $V_1 - V_2$ path. $V_1 - V_2$ paths are said to be disjoint if they have no common vertex.

Definition 3 Consider Σ_{Λ} , a structured system of the type defined by equations (5) above, with the associated graph $G(\Sigma_{\Lambda})$.

- A set of r disjoint and simple $V_1 - V_2$ paths is called a *linking* from V_1 to V_2 ($V_1 - V_2$ *linking*) of size r .
- $\rho(V_1, V_2)$ denotes the maximal number of disjoint $V_1 - V_2$ paths. A set of $\rho(V_1, V_2)$ disjoint $V_1 - V_2$ paths is called a *maximal* $V_1 - V_2$ *linking*.
- The length of a $V_1 - V_2$ linking is the sum of the lengths of all its paths. $l(V_1, V_2)$ denotes the minimum length of a maximal $V_1 - V_2$ linking.
- $l_X(V_1, V_2)$ denotes the minimum number of state vertices in a maximal $V_1 - V_2$ linking.

A subset $S \subseteq V$ is called a $V_1 - V_2$ *separator* if every $V_1 - V_2$ path contains at least one vertex in S . The *size* of a separator is the number of vertices it contains. Separators with a minimum size are called *minimal separators*. A classical result (Menger's Theorem) is that the minimal size of a $V_1 - V_2$ separator is $\rho(V_1, V_2)$ [21].

The set of $V_1 - V_2$ *essential vertices*, $V_{ess}(V_1, V_2)$, is the set of vertices that belong to all maximal $V_1 - V_2$ linkings. The *minimal* $V_1 - V_2$ *input separator*, $S^*(V_1, V_2)$, is the set of end vertices of all direct $V_1 - V_{ess}(V_1, V_2)$ paths.

The previous notions are illustrated in the following example.

Example 4 Consider the following structured system for which the matrices of Equation (5) are:

$$A_{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & 0 & \lambda_3 & 0 \end{bmatrix}, B_{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda_4 \end{bmatrix}, E_{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_5 \\ \lambda_6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda_7 \end{bmatrix}, H_{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_8 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

The associated graph $G(\Sigma_{\Lambda})$ is depicted in Figure 2. In this example, (d_1, x_1, x_4, y) and (d_1, x_2, x_3, x_4, y) are $D - Y$ paths but $\rho(D, Y) = 1$ since there exists only one regulated output and only one disturbance. The minimum length and the minimum number of state vertices of a maximal $D - Y$ linking are respectively $l(D, Y) = 3$ and $l_X(D, Y) = 2$. $V_{ess}(D, Y) = \{d_1, x_4, y\}$. The sets $\{d_1\}, \{x_4\}$ and $\{y\}$ are minimal $D - Y$ separators and $S^*(D, Y) = \{d_1\}$. In this particular case, d_1 is a path of length 0 from D to $V_{ess}(D, Y)$.

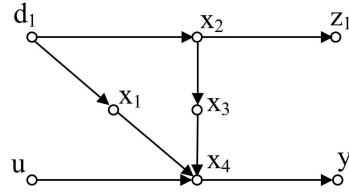


Fig. 2. Graph $G(\Sigma_{\Lambda})$ of example 4

3.2 DRMF problem for structured systems

In order to solve the DRMF problem in the context of structured systems, we must first define two important sets of vertices of the graph $G(\Sigma_{\Lambda})$ [27].

Definition 5 Consider Σ_{Λ} , a structured system of the type defined by equations (5) above, with the associated graph $G(\Sigma_{\Lambda})$. Define the vertex set \mathcal{I}^* as follows: $\mathcal{I}^* = \{x_i \in X \mid \text{in } G(\Sigma_{\Lambda}), \rho(U \cup \{x_i\}, Y) = \rho(U, Y) \text{ and } l(U \cup \{x_i\}, Y) = l(U, Y)\}$.

Note that \mathcal{I}^* can be computed independently of the given sensor set since its computation involves only the matrices A_{Λ}, B_{Λ} and C_{Λ} in equations (5). The set \mathcal{I}^* corresponds to the states for which an unmeasurable disturbance affecting these states directly can be rejected by state feedback [9]. In a dual way, we can define the set of vertices \mathcal{J}^* :

Definition 6 Consider Σ_{Λ} , a structured system of the type defined by equations (5) above, with the associated graph $G(\Sigma_{\Lambda})$. Define the vertex set \mathcal{J}^* as follows: $\mathcal{J}^* = \{x_j \in X \mid \text{in } G(\Sigma_{\Lambda}), \rho(D, Z \cup \{x_j\}) = \rho(D, Z) \text{ and } l(D, Z \cup \{x_j\}) = l(D, Z)\}$.

The set \mathcal{J}^* corresponds to the states such that the effect of disturbances at these states can be estimated from the measured outputs by an observer. Note that

\mathcal{J}^* depends on the given sensor set. Its computation involves only the matrices A_Λ, E_Λ and H_Λ in equations (5). From the definitions of \mathcal{I}^* and \mathcal{J}^* , the condition for the DRMF problem can be derived for linear structured system as follows: [27,9]

Theorem 7 Consider Σ_Λ , a structured system of the type defined by equations (5) above, with the associated graph $G(\Sigma_\Lambda)$. The problem of DRMF is generically solvable if and only if:

$$\mathcal{I}^* \cup \mathcal{J}^* = X \quad (6)$$

Example 8 Consider once again the structured system with the associated graph in Example 4. Since only one regulated output vertex exists, $\rho(U, Y) = \rho(U \cup \{x_i\}, Y) = 1$. We have $l(U, Y) = 2$, for example with the maximal $U - Y$ linking (u, x_4, y) . Therefore $\mathcal{I}^* = \{x_1, x_2, x_3\}$. $x_4 \notin \mathcal{I}^*$ since $l(U \cup \{x_4\}, Y) = 1$ with linking (x_4, y) . In the same way, we obtain $\mathcal{J}^* = \{x_3, x_4\}$. Since $\mathcal{I}^* \cup \mathcal{J}^* = X$, the DRMF problem is generically solvable for this example.

From the definitions of \mathcal{I}^* and \mathcal{J}^* , checking condition (6) amounts to computing some maximal linkings with minimum length in $G(\Sigma_\Lambda)$. This can be done using standard combinatorial optimization algorithms such as those of max-flow min-cost techniques [15]. This means that for a given sensor set, the solvability of the DRMF problem can be checked in polynomial time. However, condition (6) does not provide much information on the solvability of the DRMF problem with respect to the possible location of sensors. This will be the purpose of the next sections. First we must state two definitions.

Definition 9 Consider Σ_Λ , a structured system of the type defined by equations (5) above, with the associated graph $G(\Sigma_\Lambda)$. Define $F_{\mathcal{I}^*}$, the frontier of \mathcal{I}^* , as the set of vertices $F_{\mathcal{I}^*} = \{x_i \in \mathcal{I}^* \mid \text{there exists } (x_i, x_j) \in W, x_j \notin \mathcal{I}^*\}$.

Definition 10 Consider Σ_Λ , a structured system of the type defined by equations (5) above, with the associated graph $G(\Sigma_\Lambda)$. For a disturbance $d_i (i = 1, \dots, q)$ such that there exists $x_j \in \mathcal{I}^*$ and $(d_i, x_j) \in W$, denote by r_i the length of a shortest $\{d_i\} - F_{\mathcal{I}^*}$ path. Define \mathcal{D}_i , the set of vertices $\mathcal{D}_i = \{x_i \in \mathcal{I}^* \mid 0 < l(\{d_i\}, \{x_i\}) \leq r_i\}$. We call this vertex set the disc associated with the disturbance d_i and r_i is called the radius of the disc \mathcal{D}_i .

For the previous example, we can check that $F_{\mathcal{I}^*} = \{x_1, x_3\}$, $r_1 = 1$ and $\mathcal{D}_1 = \{x_1, x_2\}$. Note that in some cases, we can get $\mathcal{D}_i = \emptyset$, for example when $F_{\mathcal{I}^*} = \emptyset$.

4 The single disturbance case

For pedagogic reasons, we will first look at the DRMF problem involving only one disturbance d_1 , i.e. $q = 1$. We

say that this disturbance *affects* the system if there exists x_i such that $(d_1, x_i) \in W$. For this case, we give other solvability conditions for the DRMF problem and derive a complete sensor classification. Based on Definitions 5 and 10, we can state:

Theorem 11 Consider Σ_Λ , a structured system of the type defined by equations (5) above, with the associated graph $G(\Sigma_\Lambda)$ affected by only one disturbance d_1 . Let \mathcal{D}_1 be the disc associated with d_1 . The DRMF problem is generically solvable if and only if:

- (1) For all $(d_1, x_i) \in W$, $x_i \in \mathcal{I}^*$.
- (2) When $\mathcal{D}_1 \neq \emptyset$, there exists $x_k \in \mathcal{D}_1$ and there exists $z_i \in Z$ such that the arc $(x_k, z_i) \in W$.

These conditions mean that d_1 must directly affect only state vertices in \mathcal{I}^* and there must exist at least a measurement of a state vertex in the disc \mathcal{D}_1 .

Proof: Note that in the one disturbance case we have, $\rho(\{d_1\}, Z) \leq 1$ and $\rho(\{d_1\}, Z \cup \{x_i\}) \leq 1$.

Necessity:

- Assume that there exists $(d_1, x_j) \in W$ such that $x_j \notin \mathcal{I}^*$, then $\rho(\{d_1\}, Z \cup \{x_j\}) = 1$ and $l(\{d_1\}, Z \cup \{x_j\}) = 1$. If $\rho(\{d_1\}, Z) = 0$ (i.e. there is no $\{d_1\} - Z$ path), we have $\rho(\{d_1\}, Z) = 0 < \rho(\{d_1\}, Z \cup \{x_i\}) = 1$, and according to Definition 6, $x_j \notin \mathcal{J}^*$. If $\rho(\{d_1\}, Z) = 1$, as d_1 is not directly available for measurement (see (1)), $l(\{d_1\}, Z) \geq 2$ and $l(\{d_1\}, Z \cup \{x_j\}) < l(\{d_1\}, Z)$. From Definition 6, $x_j \notin \mathcal{J}^*$. Therefore in both cases, $x_j \notin \mathcal{I}^* \cup \mathcal{J}^*$ i.e. $\mathcal{I}^* \cup \mathcal{J}^* \neq X$ and according to Theorem 7, the DRMF problem is not solvable.

- Suppose now that $\mathcal{D}_1 \neq \emptyset$ and that there is no measurement in \mathcal{D}_1 . Consider a state vertex $x_l \in F_{\mathcal{I}^*}$ such that $l(\{d_1\}, \{x_l\}) = r_1$. Since $x_l \in F_{\mathcal{I}^*}$, there exists $x_j \notin \mathcal{I}^*$ such that $(x_l, x_j) \in W$. As previously, if $\rho(\{d_1\}, Z) = 0$, according to Definition 10 there is a $\{d_1\} - \{x_l\}$ path and then a $\{d_1\} - Z \cup \{x_j\}$ path. Then $\rho(\{d_1\}, Z \cup \{x_j\}) = 1$, $x_j \notin \mathcal{J}^*$ and the problem has no solution. If $\rho(\{d_1\}, Z) = 1$, then $l(\{d_1\}, Z) \geq r_1 + 2$. Therefore $l(\{d_1\}, \{x_j\}) = r_1 + 1 < l(\{d_1\}, Z)$ and from Definition 6, $x_j \notin \mathcal{J}^*$. It follows that $x_j \notin \mathcal{I}^* \cup \mathcal{J}^*$ i.e. $\mathcal{I}^* \cup \mathcal{J}^* \neq X$ and the DRMF problem is not solvable.

Sufficiency:

When d_1 directly affects only state vertices in \mathcal{I}^* and $\mathcal{D}_1 = \emptyset$, there is no disturbance-controlled output path. The disturbance-controlled output transfer is therefore zero [25] and the DRMF is solved with the control $u(t) = 0$.

When these two conditions hold, there exists $z_i \in Z$ such that $l(\{d_1\}, Z) = l(\{d_1\}, \{z_i\}) \leq r_1 + 1$. Consider any $x_j \notin \mathcal{I}^*$ (i.e. $x_j \notin \mathcal{D}_1$). If there exists a $\{d_1\} - \{x_j\}$ path, then $l(\{d_1\}, \{x_j\}) \geq r_1 + 1$. This implies that $x_j \in \mathcal{J}^*$ (from Definition 6). If there is no $\{d_1\} - \{x_j\}$ path, then $x_j \in \mathcal{J}^*$ too. Therefore $\mathcal{I}^* \cup \mathcal{J}^* = X$ and the DRMF problem is solvable. ■

When the DRMF problem is solvable for the system affected by only one disturbance d_1 , with Definitions 2 and 10, one can characterize the sets of essential and useless sensors for the this problem as follows:

Theorem 12 Consider Σ_Λ , a structured system of the type defined by equations (5) above, with the associated graph $G(\Sigma_\Lambda)$ affected by only one disturbance d_1 . Let \mathcal{D}_1 be the disc associated with d_1 . Assume that the DRMF problem is solvable.

- (1) z_j is a useless sensor if and only if for every x_i such that $(x_i, z_j) \in W, x_i \notin \mathcal{D}_1$.
- (2) z_j is an essential sensor if and only if z_j is the unique useful sensor.

In other words, a sensor is useless if it measures only variables outside \mathcal{D}_1 and any sensor measuring at least one variable inside this disc is useful. Clearly, if there is only one measurement inside \mathcal{D}_1 , it is essential.

Proof:

- Assume that z_j is a sensor that measures no state vertex in \mathcal{D}_1 . Let $V_Z \subseteq Z$ be any admissible sensor set for the DRMF problem that contains z_j . According to Theorem 11, V_Z must contain $z_k \neq z_j$ such that z_k is a measurement of a state vertex in \mathcal{D}_1 . Then $V_Z \setminus \{z_j\}$ is still an admissible sensor set for the DRMF problem. According to Definition 2, z_j is useless.

If z_j is now a sensor that measures at least one state vertex in \mathcal{D}_1 , then according to Theorem 11, $V_Z = \{z_j\}$ is an admissible sensor set for the DRMF problem. Clearly, this problem is not solvable with the set $V_Z \setminus \{z_j\} = \emptyset$. Therefore, z_j is useful according to Definition 2.

- Assume that z_j is the unique measurement inside \mathcal{D}_1 . Discarding z_j makes the DRMF problem no more solvable because there is no measurement in \mathcal{D}_1 . Then every any admissible sensor set for the DRMF problem contains z_j and z_j is essential according to Definition 2.

Conversely, if two useful sensor z_k and z_j exist, then $V_Z = \{z_j, z_k\}$ is an admissible sensor set for the DRMF problem. In this case, $V_Z \setminus \{z_j\} = \{z_k\}$ is still an admissible sensor set for the DRMF problem. Therefore z_j is not essential. ■

Example 13 Consider once again Σ_Λ , the structured system of the type defined by equations (5) above for which the associated graph $G(\Sigma_\Lambda)$ is given in Figure 2. As already stated, $\mathcal{I}^* = \{x_1, x_2, x_3\}$, $F_{\mathcal{I}^*} = \{x_1, x_3\}$ and the disturbance d_1 directly affects $\{x_1, x_2\} \in \mathcal{I}^*$. The disc associated with d_1 is $\mathcal{D}_1 = \{x_1, x_2\}$. Without the determination of \mathcal{J}^* , from Theorem 11, we know that the measurement of x_1 or x_2 is sufficient to solve the DRMF problem. From Theorem 12, the sensor z_1 , which is the unique sensor measuring variables in \mathcal{D}_1 , is therefore essential.

Suppose now that both x_1 and x_2 are available for measurement as in Figure 3. Sensors z_1 and z_2 are now both useful but not essential according to Theorem 12.

For the case where all the variables x_1, \dots, x_4 are available

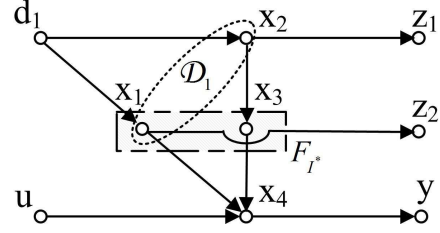


Fig. 3. $G(\Sigma_\Lambda)$ of Example 13

for measurement, according to Theorem 12, the sensors that measure only in $\{x_3, x_4\}$ are useless for solving the DRMF problem.

5 The general case

When there are several disturbances, the problem becomes much more complex. In this section, we state a new necessary and sufficient condition for the DRMF problem to be solvable. This theorem provides new insight regarding the DRMF problem.

5.1 Main result and interpretation

Based on Definitions 3,5 and 9, we can state:

Theorem 14 Consider Σ_Λ , a structured system of the type defined by equations (5) above, with the associated graph $G(\Sigma_\Lambda)$ affected by the disturbances d_1, \dots, d_q . The DRMF problem is generically solvable if and only if :

- (1) d_1, \dots, d_q directly affect only state vertices of \mathcal{I}^* , i.e. for any $(d_i, x_j) \in W, x_j \in \mathcal{I}^*$.
- (2) In $G(\Sigma_\Lambda)$, $\rho(D, Z) = \rho(D, Z \cup F_{\mathcal{I}^*})$ and $l_X(D, Z) = l_X(D, Z \cup F_{\mathcal{I}^*})$.

Interpretation:

Since the first condition is a necessary and sufficient condition for the solvability of the disturbance rejection by state feedback [9], it is necessary also for DRMF.

The second condition corresponds, in graphic terms and within our framework, to an Unknown Input Observer problem [2,6]. The condition expresses the fact that it is possible to estimate the effect of disturbance at $F_{\mathcal{I}^*}$ from the measurements. It is a natural condition since when the effect of disturbance at $F_{\mathcal{I}^*}$ cannot be estimated from the available measurements, the unknown effect of a disturbance on $F_{\mathcal{I}^*}$ will propagate out of \mathcal{I}^* and cannot be rejected by state feedback and consequently by measurement feedback. The first part of the condition is a rank condition. When it is not satisfied, we therefore need more sensors to solve the problem. The second part of the condition, when not satisfied, means that the sensors give information on the disturbance too late.

Example 15 Let Σ_Λ be a structured system for which the associated graph is depicted in Figure 4. In this

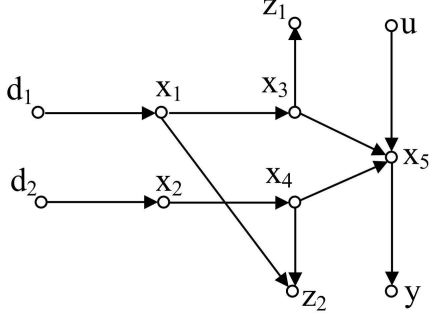


Fig. 4. $G(\Sigma_\Lambda)$ of example 15

example, $\mathcal{I}^* = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. The disturbances directly affect state vertices that are in \mathcal{I}^* . The frontier is $F_{\mathcal{I}^*}^* = \{x_3, x_4\}$. $\rho(D, Z) = 2$ and $l_X(D, Z) = 4$, for example with linking $\{(d_1, x_1, x_3, z_1), (d_2, x_2, x_4, z_2)\}$. With $\{(d_1, x_1, z_2), (d_2, x_2, x_4)\}$, we obtain $\rho(D, Z \cup F_{\mathcal{I}^*}^*) = 2$ and $l_X(D, Z \cup F_{\mathcal{I}^*}^*) = 3$. Since these two linkings do not have the same number of vertices in X , the DRMF problem is not solvable. Note that $\mathcal{J}^* = \emptyset$, so condition (6) of Theorem 7 is not satisfied.

5.2 Proof of the main theorem

We will now present a complete proof of Theorem 14, which was first stated with only a partial proof in [8]. Skipping this proof will have no impact on the understanding of the paper.

Proof of Theorem 14: The proof in the case where $\mathcal{D}_i = \emptyset$ for $i = 1, \dots, q$ is direct and not given here. From now on we assume that there exists $\mathcal{D}_i \neq \emptyset$. Let $L_{D,Z}$ be a maximal $D - Z$ linking in $G(\Sigma_\Lambda)$ having maximal size $\rho(D, Z)$ and a minimum number of state vertices $l_X(D, Z)$. This linking also has a minimum length: $l(D, Z) = l_X(D, Z) + \rho(D, Z)$.

Necessity:

We will prove that if one of two conditions is not satisfied, there exists a state vertex that belongs neither to \mathcal{I}^* nor to \mathcal{J}^* i.e. $\mathcal{I}^* \cup \mathcal{J}^* \neq X$. The DRMF problem is then not solvable.

1) We must first prove that Condition 1 is necessary. Assume that there exists $(d_i, x_j) \in W$ such that $x_j \notin \mathcal{I}^*$. We can prove that $x_j \notin \mathcal{J}^*$. Indeed, if $\rho(D, Z \cup \{x_j\}) > \rho(D, Z)$, then $x_j \notin \mathcal{J}^*$. If not, (d_i, x_j) must intersect $L_{D,Z}$ i.e. $x_j \in L_{D,Z}$ or/and $d_i \in L_{D,Z}$.

- If $x_j \in L_{D,Z}$ by a $D - Z$ path, by ending this path at x_j , we get a $D - Z \cup \{x_j\}$ linking of size $\rho(D, Z \cup \{x_j\}) = \rho(D, Z)$ but $l(D, Z \cup \{x_j\}) < l(D, Z)$. Then $x_j \notin \mathcal{J}^*$.
- If $d_i \in L_{D,Z}$ and $x_j \notin L_{D,Z}$, by replacing the path with initial vertex d_i in $L_{D,Z}$ by the arc $(d_i, x_j) \in W$ of length 1, we also get a $D - Z \cup \{x_j\}$ linking of size $\rho(D, Z \cup \{x_j\}) = \rho(D, Z)$ but $l(D, Z \cup \{x_j\}) < l(D, Z)$. Then $x_j \notin \mathcal{J}^*$.

Therefore, for all cases $x_j \notin \mathcal{J}^*$ and according to Theorem 7, the DRMF problem is not solvable.

2) We must now prove that Condition 2 is necessary. Suppose that this condition is not satisfied. Then we have two cases:

Case 1: $\rho(D, Z \cup F_{\mathcal{I}^*}^*) > \rho(D, Z)$.

From Lemma 25 in the Appendix, there exists $x_j \in F_{\mathcal{I}^*}^*$ such that $\rho(D, Z \cup \{x_j\}) > \rho(D, Z)$. A maximal $D - Z \cup \{x_j\}$ linking contains a path P with initial vertex d_i and terminal vertex x_j . Since $x_j \in F_{\mathcal{I}^*}^*$, there exists $x_k \notin \mathcal{I}^*$ such that $(x_j, x_k) \in W$. If $\rho(D, Z \cup \{x_k\}) > \rho(D, Z)$, then $x_k \notin \mathcal{J}^*$. If not, by extending the path P with the arc (x_j, x_k) , we get a new path denoted by P' . From Lemma 24 in the Appendix, P' must contain a vertex of the minimal $D - Z$ input separator $S^*(D, Z)$. Note that P does not contain any vertex of $S^*(D, Z)$. Therefore $x_k \in S^*(D, Z)$ i.e. $x_k \in L_{D,Z}$ and as in the proof of condition 1, $x_k \notin \mathcal{J}^*$.

Case 2: $\rho(D, Z \cup F_{\mathcal{I}^*}^*) = \rho(D, Z)$ but $l_X(D, Z \cup F_{\mathcal{I}^*}^*) < l_X(D, Z)$.

From Lemma 26 in the Appendix, there exists $x_j \in F_{\mathcal{I}^*}^*$ and a maximal $D - Z \cup \{x_j\}$ linking, denoted by $L_{D,Z \cup \{x_j\}}$, such that $\rho(D, Z \cup \{x_j\}) = \rho(D, Z)$ and $l_X(D, Z \cup \{x_j\}) < l_X(D, Z)$. Therefore $L_{D,Z \cup \{x_j\}}$ must contain a path P with initial vertex d_i and terminal vertex x_j . Since $x_j \in F_{\mathcal{I}^*}^*$, there exists $x_k \notin \mathcal{I}^*$ such that $(x_j, x_k) \in W$. According to condition 1, every $D - \{x_k\}$ path must intersect $F_{\mathcal{I}^*}^*$ i.e. contain a $D - F_{\mathcal{I}^*}^*$ path. Therefore $\rho(D, Z \cup \{x_k\}) = \rho(D, Z \cup F_{\mathcal{I}^*}^*) = \rho(D, Z)$. We consider the following cases:

- If $x_k \notin L_{D,Z \cup \{x_j\}}$, then by extending the path P with the arc (x_j, x_k) , we get a $D - Z \cup \{x_k\}$ linking of size $\rho(D, Z \cup \{x_k\}) = \rho(D, Z)$ and $l_X(D, Z \cup \{x_k\}) = l_X(D, Z \cup \{x_j\}) + 1 \leq X_{D,Z}$. Note that $l(D, Z \cup \{x_k\}) = l_X(D, Z \cup \{x_k\}) + (\rho(D, Z) - 1)$ because we replaced a path ended by a measurement by another one ended at x_k . Then $l(D, Z \cup \{x_k\}) < l(D, Z)$ and therefore $x_k \notin \mathcal{J}^*$.
- If $x_k \in L_{D,Z \cup \{x_j\}}$, then by considering x_k as an output vertex we can construct a maximal $D - Z \cup \{x_j\} \cup \{x_k\}$ linking such that $\rho(D, Z \cup \{x_j\} \cup \{x_k\}) = \rho(D, Z \cup \{x_j\})$ but

$$l(D, Z \cup \{x_j\} \cup \{x_k\}) < l(D, Z \cup \{x_j\}) \quad (7)$$

Now consider $\bar{\Sigma}_\Lambda$, the structured system of the type defined by equations (5) above and for which the associated graph $G(\bar{\Sigma}_\Lambda)$ can be obtained from $G(\Sigma_\Lambda)$ as follows: replace vertex z_i ($i = 1, \dots, \nu$) by a new vertex x_{n+i} , then add a new measured output vertex \bar{z}_i and the arc (x_{n+i}, \bar{z}_i) . Add two measured output vertices z_j^* , z_k^* and the arcs (x_j, z_j^*) , (x_k, z_k^*) . The set of state vertices in $G(\bar{\Sigma}_\Lambda)$ is $\bar{X} = X \cup X'$ where $X' = \{x_{n+1}, \dots, x_{n+\nu}\}$. An example of this construction is given in Figure 5 and Figure 6.

From the construction of $G(\bar{\Sigma}_\Lambda)$, it is clear that a

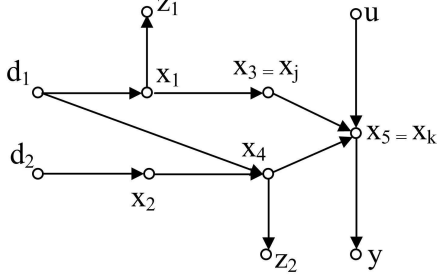


Fig. 5. Graph $G(\Sigma_\Lambda)$

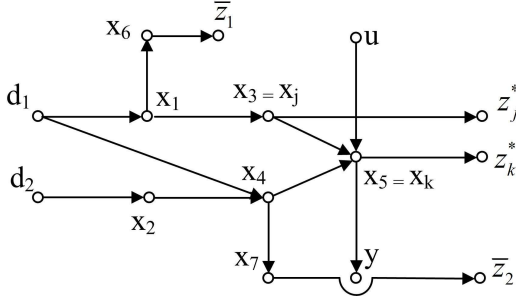


Fig. 6. Graph $G(\bar{\Sigma}_\Lambda)$

maximal $D - Z$ (resp. $D - Z \cup \{x_j\}$ or $D - Z \cup \{x_k\}$) linking having a minimum length in $G(\Sigma_\Lambda)$ corresponds to a maximal $D - X'$ (resp. $D - X' \cup \{x_j\}$ or $D - X' \cup \{x_k\}$) linking having a minimum number of state vertices in $G(\bar{\Sigma}_\Lambda)$.

Suppose now that in $G(\Sigma_\Lambda)$, $\rho(D, Z \cup \{x_k\}) = \rho(D, Z)$ and $l(D, Z \cup \{x_k\}) = l(D, Z)$. We will prove that this hypothesis contradicts condition (7). Indeed, in $G(\bar{\Sigma}_\Lambda)$ we have $\rho(D, X' \cup \{x_k\}) = \rho(D, X')$ and $l_X(D, X' \cup \{x_k\}) = l_X(D, X')$. Since in $G(\bar{\Sigma}_\Lambda)$, each \bar{z}_i is connected only with x_{n+i} and z_k^* (resp. z_j^*) is connected only with x_k (resp. x_j^*), then in $G(\bar{\Sigma}_\Lambda)$ we have $\rho(D, \bar{Z} \cup \{z_k^*\}) = \rho(D, \bar{Z})$ and $l_X(D, \bar{Z} \cup \{z_k^*\}) = l_X(D, \bar{Z})$. Remember that the size of a maximal $D - \bar{Z}$ (resp. $D - \bar{Z} \cup \{z_k^*\}$) linking in $G(\bar{\Sigma}_\Lambda)$ is equal to the rank (i.e. the number of infinite zeros) of the transfer matrix $T_{D, \bar{Z}}(s)$ (resp. $T_{D, \bar{Z} \cup \{z_k^*\}}(s)$) and the minimum number of state vertices in such a maximal linking represents the sum of all generic orders of the zeros at infinity of $T_{D, \bar{Z}}(s)$ (resp. $T_{D, \bar{Z} \cup \{z_k^*\}}(s)$), see [26].

This implies that with the system $\bar{\Sigma}_\Lambda$, the infinite structure of $T_{D, \bar{Z} \cup \{z_k^*\}}(s) = \begin{bmatrix} T_{D, \bar{Z}}(s) \\ T_{D, \{z_k^*\}}(s) \end{bmatrix}$ is equal to that of $T_{D, \bar{Z}}(s)$ and therefore $T_{D, \{z_k^*\}}(s) = l(s)T_{D, \bar{Z}}(s)$ where $l(s)$ is a proper rational function.

Therefore $T_{D, \bar{Z} \cup \{z_j^*\} \cup \{z_k^*\}}(s) = \begin{bmatrix} T_{D, \bar{Z}}(s) \\ T_{D, \{z_j^*\}}(s) \\ T_{D, \{z_k^*\}}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ l(s) & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{D, \bar{Z}}(s) \\ T_{D, \{z_j^*\}}(s) \\ 0 \end{bmatrix}$. Since $\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ l(s) & 0 & 1 \end{bmatrix}$ is a bi-causal matrix, the infinite structures of $T_{D, \bar{Z} \cup \{z_j^*\} \cup \{z_k^*\}}(s)$ and $T_{D, \bar{Z} \cup \{z_j^*\}}(s)$ are identical. Therefore in $G(\bar{\Sigma}_\Lambda)$, $l_X(D, \bar{Z} \cup \{z_j^*\} \cup \{z_k^*\}) = l_X(D, \bar{Z} \cup \{z_j^*\})$. It follows that in $G(\Sigma_\Lambda)$, $l(D, Z \cup \{x_j\} \cup \{x_k\}) = l(D, Z \cup \{x_j\})$ which contradicts condition (7). Therefore in $G(\Sigma_\Lambda)$ we have $l(D, Z \cup \{x_k\}) < l(D, Z)$ i.e. $x_k \notin \mathcal{J}^*$.

It follows that when condition 2 is not satisfied, there exists $x_k \notin \mathcal{I}^* \cup \mathcal{J}^*$ and the DRMF problem is not solvable.

Sufficiency:

Assume now that the two conditions hold. Consider $x_j \notin \mathcal{I}^*$. If $x_j \notin \mathcal{J}^*$, according to Definition 6 we have two cases:

- If $\rho(D, Z \cup \{x_j\}) > \rho(D, Z)$, then a maximal $D - Z \cup \{x_j\}$ linking contains a $\{d_j\} - \{x_j\}$ path. According to the first condition, this path must intersect $F_{\mathcal{I}^*}$, i.e. there exists $x_k \in F_{\mathcal{I}^*}$ such that $\rho(D, Z \cup \{x_k\}) > \rho(D, Z)$ and this contradicts the second condition.
- If $\rho(D, Z \cup \{x_j\}) = \rho(D, Z)$ but $l(D, Z \cup \{x_j\}) < l(D, Z)$, then there exists a $\{d_j\} - \{x_j\}$ path in a maximal $D - Z \cup \{x_j\}$ linking and $l_X(D, Z \cup \{x_j\}) \leq l_X(D, Z)$. From Condition 1, this path must contain $x_k \in F_{\mathcal{I}^*}$ and either $\rho(D, Z \cup \{x_k\}) > \rho(D, Z)$ or $\rho(D, Z \cup \{x_k\}) = \rho(D, Z \cup \{x_j\}) = \rho(D, Z)$ but $l_X(D, Z \cup \{x_k\}) < l_X(D, Z \cup \{x_j\}) \leq l_X(D, Z)$. This contradicts the second condition.

It follows that when two conditions hold, if $x_j \notin \mathcal{I}^*$, then $x_j \in \mathcal{J}^*$, so that $\mathcal{I}^* \cup \mathcal{J}^* = X$ and the DRMF problem is generically solvable. ■

6 Sensor location and classification for DRMF

In this section we present some important consequences of Theorem 14 regarding sensor sets used for DRMF. The first consequence sets a lower bound on the number of sensors to be implemented.

Proposition 16 Consider Σ_Λ , a structured system of the type defined by equations (5) above, with the associated graph $G(\Sigma_\Lambda)$. A lower bound on the number of sensors for solving the DRMF problem generically is $\rho(D, F_{\mathcal{I}^*})$, the maximal size of a $D - F_{\mathcal{I}^*}$ linking in $G(\Sigma_\Lambda)$.

Proof: From condition 2, $\rho(D, Z) = \rho(D, Z \cup F_{\mathcal{I}^*}) \geq \rho(D, F_{\mathcal{I}^*})$. This implies that the number of sensors must be greater than or equal to $\rho(D, F_{\mathcal{I}^*})$. ■

We must now show in a constructive way that when we have q disturbances and when the problem is solvable with a given sensor set, the problem is also solvable with at most q sensors of the previous sensor set.

Proposition 17 Consider Σ_Λ , a structured system of the type defined by equations (5) above, with the associated graph $G(\Sigma_\Lambda)$. Assume that the DRMF problem is generically solvable with a sensor set Z . Then there exists $V_Z \subseteq Z$ such that $|V_Z| \leq q$ and the DRMF problem is generically solvable with V_Z where $|V_Z|$ is the cardinality of V_Z and q is the number of disturbances.

Proof: Suppose that the DRMF problem is solvable with the set of sensors Z , i.e. Condition 2 of Theorem 14 is satisfied. Consider a maximal $D - Z$ linking having a minimum number of vertices in X and denote by V_Z the subset of Z that is contained in this linking. Clearly $|V_Z| \leq q$ and this linking is also a maximal $D - V_Z$ linking having a minimum number of vertices in X . Therefore $\rho(D, V_Z) = \rho(D, V_Z \cup F_{\mathcal{I}^*})$ and $l_X(D, V_Z) = l_X(D, V_Z \cup F_{\mathcal{I}^*})$. This implies that the DRMF is generically solvable with V_Z . Note that the proof provides a solution for which the cardinality is the size of a maximal $D - Z$ linking which is always less than or equal to q . ■

We will now prove that it is useless to measure variables outside \mathcal{I}^* . This was first stated and proved in a different way in [13]. Based on Definition 5, we can state:

Theorem 18 Consider Σ_Λ , a structured system of the type defined by equations (5) above, with the associated graph $G(\Sigma_\Lambda)$. Assume that the DRMF problem is generically solvable. A sensor $z_j \in Z$ such that for any $(x_i, z_j) \in W$, $x_i \in X \setminus \mathcal{I}^*$ (i.e. z_j measures only states outside \mathcal{I}^*) is useless for solving the DRMF problem.

Proof: Let $z_j \in Z$ be such that for any $(x_i, z_j) \in W$, $x_i \in X \setminus \mathcal{I}^*$. Then, if there exists a path from D to z_j , this path will intersect $F_{\mathcal{I}^*}$ for some x_k .

- If z_j belongs to a maximal $D - Z$ linking having a minimum number of vertices in X , we can replace the path from D to z_j in this linking with the path from D to x_k having a maximal $D - Z \cup F_{\mathcal{I}^*}$ linking with a smaller number of vertices in X . Then by Theorem 14, the DRMF is not solvable.
- For the same reason, z_j cannot be contained in a maximal $D - Z \cup F_{\mathcal{I}^*}$ linking having a minimum number of vertices in X .

Therefore z_j does not play any role in Condition 2 of Theorem 14. When Condition 2 is satisfied, removing

z_j will leave this condition satisfied. Consequently, z_j is useless for DRMF. ■

The necessity of having a measurement in each disc D_i associated with disturbance d_i is given in the next proposition. We remark that a measurement may be in the intersection of several discs.

Proposition 19 Consider Σ_Λ , a structured system of the type defined by equations (5) above, with the associated graph $G(\Sigma_\Lambda)$. The DRMF problem is generically solvable only if for every \mathcal{D}_i , $i = 1, \dots, q$, there exists $x_j \in \mathcal{D}_i$ and $z_l \in Z$ such that the arc $(x_j, z_l) \in W$.

Proof: This result is a consequence of Theorem 11 assuming that only one disturbance is active. ■

When condition 1 of Theorem 14 is satisfied, according to Theorem 18, the sensors must measure states inside \mathcal{I}^* . The problem is reduced to finding a sensor set satisfying the above requirements and condition 2 of Theorem 14. This is not easy in general. We focus hereafter on particular solutions for the DRMF problem including minimal ones. The following theorem proves that measuring states of \mathcal{I}^* sufficiently close to the disturbances and in a decoupled manner is sufficient to solve the DRMF problem.

Proposition 20 Consider Σ_Λ , a structured system of the type defined by equations (5) above, with the associated graph $G(\Sigma_\Lambda)$ and affected by the disturbances d_1, \dots, d_q . Assume that the two following conditions are satisfied:

- (1) d_1, \dots, d_q directly affect only state vertices of \mathcal{I}^* , i.e. for any $(d_i, x_j) \in W$ ($i = 1, \dots, q$), $x_j \in \mathcal{I}^*$.
- (2) In $G(\Sigma_\Lambda)$, there exists a linking of size q from D to q vertices of Z i.e. $(d_1, \dots, z_{i1}), \dots, (d_q, \dots, z_{iq})$ such that (d_j, \dots, z_{ij}) is a shortest path from d_j ($j = 1, \dots, q$) to Z and such that the number of state vertices in the path (d_j, \dots, z_{ij}) for $j = 1, \dots, q$ is lower than or equal to r_j , the number of state vertices in a shortest path from d_j to $F_{\mathcal{I}^*}$.

Then the DRMF problem is solvable.

Proof: Note first that Condition 1 is a necessary condition for the DRMF problem to be solvable (see Theorem 14). Condition 2 tells us that the measurements are taken within the discs \mathcal{D}_i and that the sub-system with input D and output Z satisfies a reconstructibility condition [2]. This condition is an output injection decoupling condition and is the dual of a state feedback decoupling condition.

Let L be the $D - Z$ linking satisfying condition 2 and \bar{L} be any maximal $D - Z \cup F_{\mathcal{I}^*}$ linking. Clearly, the size of these two linking equals q , the number of disturbances. From condition 2, for $j = 1, \dots, q$, the path beginning

with d_j in L has a smaller number of state vertices than that of the path beginning with d_j in \bar{L} . This implies that the total number of state vertices in L is smaller than a \bar{L} . Therefore L is a maximal linking having a minimum number of state vertices from D to Z and from D to $Z \cup F_{\mathcal{T}^*}$. Condition 2 of Theorem 14 is then satisfied and with Condition 1 of this Proposition, the DRMF problem is solvable. ■

Example 21 Consider the following example of a structured system for which the associated graph is depicted in Figure 7. $\mathcal{I}^* = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $F_{\mathcal{T}^*} = \{x_3, x_4\}$,

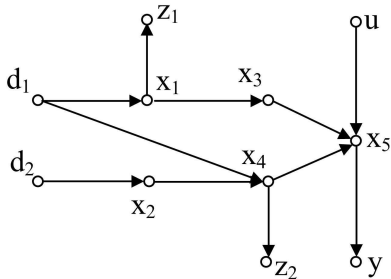


Fig. 7. Graph of example 21

$r_1 = 1$, $\mathcal{D}_1 = \{x_1, x_4\}$, $r_2 = 2$, $\mathcal{D}_2 = \{x_2, x_4\}$. Condition 1 of Proposition 20 is obviously satisfied. Since $\{(d_1, x_1, z_1), (d_2, x_2, x_4, z_2)\}$ is a maximal size linking such that each path is a shortest path from d_j to Z and contains a number of state vertices less than or equal to r_j , $j = 1, 2$, condition 2 of Proposition 20 is also satisfied. The DRMF problem is then solvable.

The following results show that measuring $D - F_{\mathcal{T}^*}$ separators provides us with important solutions.

Theorem 22 Consider Σ_Λ , a structured system of the type defined by equations (5) above, with the associated graph $G(\Sigma_\Lambda)$. Assume that the disturbances d_1, \dots, d_q directly affect only state vertices of \mathcal{I}^* . Denote by S a $D - F_{\mathcal{T}^*}$ separator such that $S \cap D = \emptyset$. Then the DRMF problem is solvable if for each vertex $s_j \in S$ there exists a measured output z_{ij} that measures only s_j , i.e. $(s_j, z_{ij}) \in W$ and for $x_k \in X$, $x_k \neq s_j$, $\nexists (x_k, z_{ij}) \in W$.

Proof: Suppose that the condition of Theorem 22 is satisfied. Consider a maximal $D - Z \cup F_{\mathcal{T}^*}$ linking having a minimum number of state vertices. If this linking has some paths that end in $F_{\mathcal{T}^*}$, these paths must contain at least one vertex s_j in separator S . Then for each of these paths, by replacing the path from s_j to $F_{\mathcal{T}^*}$ by the arc (s_j, z_{ij}) , we can obtain a $D - Z$ linking with $\rho(D, Z) = \rho(D, Z \cup F_{\mathcal{T}^*})$ and $l_X(D, Z) \leq l_X(D, Z \cup F_{\mathcal{T}^*})$. This means that condition 2 of Theorem 14 is always satisfied. The DRMF problem is then solvable.

Remark:

- As a special case, measuring all states of $F_{\mathcal{T}^*}$ is sufficient

for the solvability of the DRMF problem.

- In the same way, measuring all states of S_m , a minimal $D - F_{\mathcal{T}^*}$ separator, provides us with a minimal sensor set for the solvability of the DRMF problem.

A complete structural characterization of useless and essential sensors for the DRMF problem in the general case remains an open problem. However, essential sensors can be determined in a polynomial manner.

Proposition 23 Consider Σ_Λ , a structured system of the type defined by equations (5) above, with the associated graph $G(\Sigma_\Lambda)$. Assume that the DRMF problem is generically solvable. The set of essential sensors can be obtained by a polynomial time algorithm.

Proof: For each sensor z_j , $j = 1, \dots, \nu$, we can check on the graph of the system from which measurement z_j has been removed if the DRMF condition (6) is satisfied. As mentioned before, this can be performed in polynomial time. If the condition is not satisfied the sensor z_j is essential. ■

Before presenting an illustrative example, we will summarize here some basic results represented in Figure 8. First of all, D must directly affect only \mathcal{I}^* . Then the sensors that measure only states outside \mathcal{I}^* are useless for solving the DRMF problem. From the definition of a separator S between D and $F_{\mathcal{T}^*}$, it is clear that if we measure S in a suitable manner as shown above, we can estimate the effect of the disturbances before it is propagated out of \mathcal{I}^* . Moreover, the dimension of a minimal separator between D and $F_{\mathcal{T}^*}$ gives us the minimum number of sensors to be implemented in order to solve the DRMF problem.

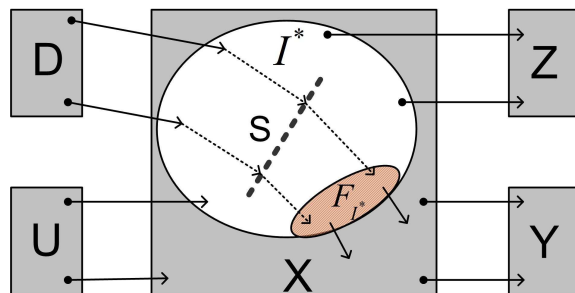


Fig. 8. General scheme

7 Illustrative example

7.1 The system and the solvability of the DRMF problem

Consider the thermal process described in Figure 9. This process consists of five tanks such that each tank

is fed by a fixed water flow: $(F_1 + F_2)$ for tank 1 and 3, F_2 for tanks 2 and 4, $(F_1 + 2F_2)$ for tank 5. The system control input is the heating power w . The regulated output is T_5 , the temperature of the fifth tank. The disturbances are the variations of feed flow temperatures T_{F_1} and T_{F_2} . The objective of DRMF is to determine a dynamic measured output feedback such that T_5 is not sensitive to the variations of T_{F_1} and T_{F_2} . This pro-

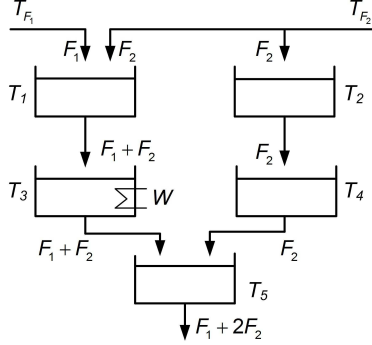


Fig. 9. The system made up of 5 tanks

cess can be linearized around a given operating point as a system of the type defined by equations (1) with $x = [\Delta T_1 \ \Delta T_2 \ \Delta T_3 \ \Delta T_4 \ \Delta T_5]^T$, $u = \Delta w$, $y = \Delta T_5$ and $d = [\Delta T_{F_1} \ \Delta T_{F_2}]^T$. We have the following state space matrices:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-(F_1+F_2)}{C_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-F_2}{C_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(F_1+F_2)}{C_3} & 0 & \frac{-(F_1+F_2)}{C_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{F_2}{C_4} & 0 & \frac{-F_2}{C_4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(F_1+F_2)}{C_5} & \frac{F_2}{C_5} & \frac{-(F_1+2F_2)}{C_5} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/C_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} F_1/C_1 & F_2/C_1 \\ 0 & F_2/C_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T,$$

where C_i is the heat capacity of the i^{th} tank. This model clearly exhibits the physical structure of the process. Note that this model is not exactly structured as in Section 3 since some dependencies exist between the matrix entries. Nevertheless, in order to illustrate the approach, we will consider a structured system of the form defined by equations (5) that has the same zero/nonzero structure as the physical system with the following matrices:

$$A_\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_3 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_5 & 0 & \lambda_6 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_7 & \lambda_8 & \lambda_9 \end{bmatrix}, \quad E_\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ 0 & \lambda_{13} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda_{10} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad C_\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{14} \end{bmatrix}$$

The associated graph is depicted in Figure 10. Note

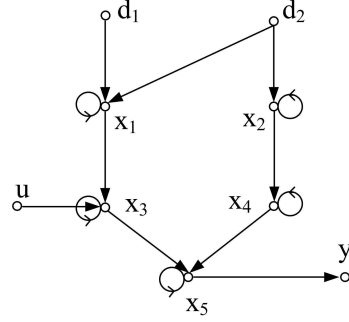


Fig. 10. Graph of the five tank system

that this system is not controllable. From Definitions 5, 9 and 10, we obtain $\mathcal{I}^* = \{x_1, x_2\}$. Then $F_{\mathcal{I}^*} = \{x_1, x_2\}$, $\mathcal{D}_1 = \{x_1\}$ and $\mathcal{D}_2 = \{x_1, x_2\}$. A maximal linking from \mathcal{D} to $F_{\mathcal{I}^*}$ has a size of 2. Therefore, according to Proposition 16, we need at least 2 measurements for the DRMF problem to be solvable. With z_1 and z_2 as shown in Figure 11, we satisfy the conditions of Proposition 20 and the DRMF problem is solvable. With

these measurements, we obtain $H_\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{16} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. We can check that in this case $\mathcal{J}^* = \{x_3, x_4, x_5\}$ and $\mathcal{I}^* \cup \mathcal{J}^* = X$ and the condition of theorem 7 is therefore satisfied. Indeed, it turns out that on this model, the

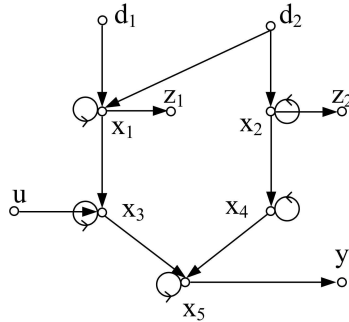


Fig. 11. Graph of the five-tank system with measurements

measurement of x_1 and x_2 provides early information on the disturbances that allows us to compensate in time with u the effect of these disturbances on the regulated output y .

7.2 Calculation of the dynamic measured output feedback compensator

Here, the matrices in (2) are:

$$G_\Lambda(s) = \frac{\lambda_7 \lambda_{10} \lambda_{14}}{(s-\lambda_4)(s-\lambda_9)} \quad K_\Lambda(s) = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$M_\Lambda(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad N_\Lambda(s) = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_{11} \lambda_{15}}{(s-\lambda_1)} & \frac{\lambda_{12} \lambda_{15}}{(s-\lambda_1)} \\ 0 & \frac{\lambda_{13} \lambda_{16}}{(s-\lambda_2)} \end{bmatrix}$$

$$\text{where } \begin{cases} k_1 = \frac{\lambda_3 \lambda_7 \lambda_{11} \lambda_{14}}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_4)(s-\lambda_9)} \\ k_2 = \frac{\lambda_{14}}{(s-\lambda_9)} \left(\frac{\lambda_3 \lambda_7 \lambda_{12}}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_4)} + \frac{\lambda_5 \lambda_8 \lambda_{13}}{(s-\lambda_2)(s-\lambda_6)} \right) \end{cases}$$

Therefore in this example, equation (4) can be reduced to:

$$G_\Lambda(s)F_\Lambda(s)N_\Lambda(s) + K_\Lambda(s) = 0$$

$$\text{We then obtain } F_\Lambda(s) = \begin{bmatrix} \frac{-\lambda_3}{\lambda_{10} \lambda_{15}} & \frac{-\lambda_5 \lambda_8}{\lambda_7 \lambda_{10} \lambda_{16}} \left(\frac{s-\lambda_4}{s-\lambda_6} \right) \end{bmatrix}$$

Let $g_1 = \frac{-\lambda_3}{\lambda_{10} \lambda_{15}}$, $g_2 = \frac{-\lambda_5 \lambda_8}{\lambda_7 \lambda_{10} \lambda_{16}}$, $g_3 = \frac{-\lambda_5 \lambda_8 (\lambda_6 - \lambda_4)}{\lambda_7 \lambda_{10} \lambda_{16}}$ then we can get the following realization for the dynamic measured output feedback compensator:

$$\begin{cases} \dot{\omega}(t) = \lambda_6 \omega(t) + \begin{bmatrix} 0 & g_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} \\ u(t) = \omega(t) + \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

The results regarding solvability of the DRMF problem only guarantee that the transfer from the disturbance to the regulated output is null but do not take into consideration the stability issues. That is why this approach needs further analysis to be applied in practice. With the above compensator, we have the dynamic matrix of the closed loop system with extended state $x_e(t) = [x(t)^T, \omega(t)^T]^T$:

$$A_\Lambda^{CL} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (\lambda_3 + \lambda_{10} g_1) & \lambda_{10} g_2 & \lambda_4 & 0 & 0 & \lambda_{10} \\ 0 & \lambda_5 & 0 & \lambda_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_7 & \lambda_8 & \lambda_9 & 0 \\ 0 & g_3 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 \end{bmatrix}.$$

The characteristic polynomial of the closed loop system is:

$\det(sI - A_\Lambda^{CL}) = (s-\lambda_1)(s-\lambda_2)(s-\lambda_4)(s-\lambda_9)(s-\lambda_6)^2$
 Since $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4, \lambda_6, \lambda_9$ are negative by nature, *i.e.* for any positive value of the physical parameters, the closed loop system is stable.

7.3 Simulation results

We will now test the system using the following physical values:

- All the tank volumes are $5l$ which leads to a heat capacity of $20.93JK^{-1}$,

- The flow rates are $F_1 = F_2 = 0.1l/s$,
- The feed flow temperatures are $T_{F_1} = 20 \pm 5^\circ C$ and $T_{F_2} = 60 \pm 5^\circ C$,
- Our set point corresponds to a temperature of $T_5 = 50^\circ C$ with two feed flows at $T_{F_1} = 20^\circ C$ $T_{F_2} = 60^\circ C$, which implies a heating power of $u = 4.186kW$.

Our aim is to maintain the output temperature at $T_5 = 50^\circ C$ for any variation of the feed flow temperatures T_{F_1} and T_{F_2} . Figure 12 shows step disturbances on the temperature feed flows and the open-loop effect on the regulated output. Figure 13 shows the behaviour of the closed loop system with the DRMF controller. Figure 14 shows the control input (heating power) in the closed loop.

8 Concluding remarks

In this paper, we have taken a new look at the Disturbance Rejection by Measurement Feedback (DRMF) problem for structured systems. Using a graph approach, we have focused our attention on sensor set design. From our results, we are able to determine the number and location of sensors required to solve the DRMF problem. We have characterized essential sensors as well as an interesting set of useless sensors. A complete and easy to check classification of the useless sensors remains an open problem for the general case. The proposed approach is well suited for structural analysis prior to computation of the dynamic output feedback controller. Its numerical implementation is simple and the algorithms are polynomial in time. Note that we could similarly study the actuator location and classification problem for DRMF, *i.e.* how many actuators are needed, where should they be located and what are the essential and the useless actuators for the DRMF problem? The main ideas of this paper could also be extended to other types of models, such as differential-algebraic systems [18].

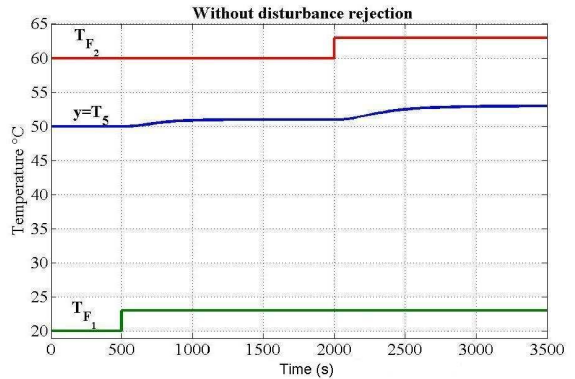


Fig. 12. Temperature of feed flows and regulated output without measurement feedback

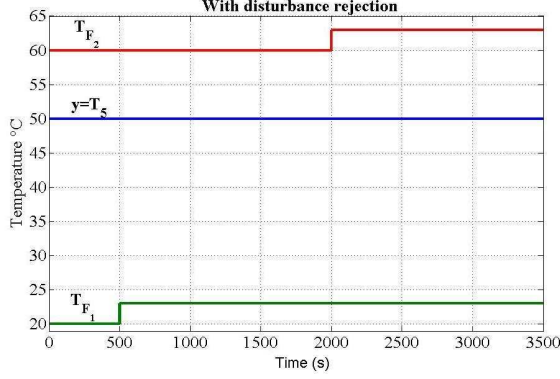


Fig. 13. Temperature of feed flows and regulated output with measurement feedback

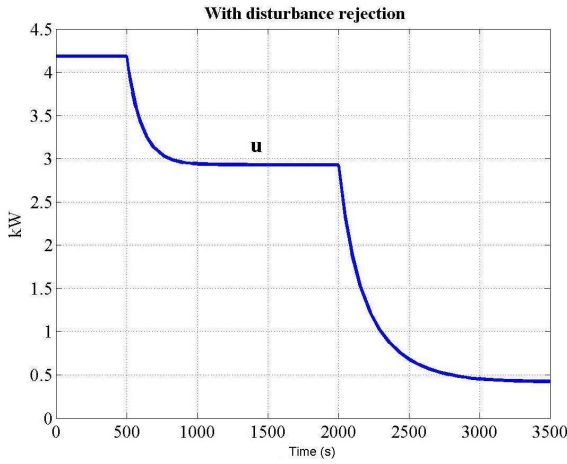


Fig. 14. Heating power control input

Appendix

Lemma 24 Consider Σ_Λ , a structured system of the type defined by equations (5) above, with the associated graph $G(\Sigma_\Lambda)$. Suppose that the minimal $D - Z$ input separator $S^*(D, Z)$ has size k . Then $\rho(D, Z \cup \{x_i\}) = k + 1$ if and only if there exists a $D - \{x_i\}$ path that does not contain any vertex of $S^*(D, Z)$.

Proof:

Necessity: If there does not exist any $D - \{x_i\}$ path, the lemma is clearly not satisfied. If every $D - \{x_i\}$ path contains a vertex of $S^*(D, Z)$, then $S^*(D, Z)$ is also a $D - Z \cup \{x_i\}$ separator. This implies that $\rho(D, Z \cup \{x_i\}) = k$.

Sufficiency: Suppose now that there exists a path P from $\{d_j\}$ to $\{x_i\}$ that does not contain any vertex of $S^*(D, Z)$. Let V' be the set of vertices $v_i \in V$ such that v_i belongs to at least one maximal $D - Z$ linking.

- If $P \cap V' = \emptyset$, then $\rho(D, Z \cup \{x_i\}) = k + 1$.

- If not, let v^* be the last common vertex between P and V' i.e. the $\{v^*\} - \{x_i\}$ path in P does not intersect any maximal $D - Z$ linking. Define $D_1 = D \setminus S^*(D, Z)$

and let X_1 be the set of state vertices in any direct $D_1 - S^*(D, Z)$ except $S^*(D, Z)$. Since $v^* \in V'$ and the $\{d_j\} - \{v^*\}$ path in P does not contain any vertex of $S^*(D, Z)$, $v^* \in D_1 \cup X_1$. From Theorem 3 in [7], if we add a vertex z^* and the arc (v^*, z^*) , then $\rho(D, Z \cup \{z^*\}) = k + 1$. Therefore, noting that the $\{v^*\} - \{x_i\}$ path in P does not intersect any maximal $D - Z$ linking, $\rho(D, Z \cup \{x_i\}) = k + 1$.

Lemma 25 Let Σ_Λ be a structured system of the type defined by equations (5) above, with the associated graph $G(\Sigma_\Lambda)$. If $\rho(D, Z \cup F_{T^*}) > \rho(D, Z)$, then there exists $x_j \in F_{T^*}$ such that $\rho(D, Z \cup \{x_j\}) > \rho(D, Z)$.

Proof:

Suppose that for every $x_j \in F_{T^*}$, $\rho(D, Z \cup \{x_j\}) = \rho(D, Z)$. From Lemma 24, either x_j is not connected with D or all $D - \{x_j\}$ paths contain a vertex of $S^*(D, Z)$. This implies that $S^*(D, Z)$ is also a $D - F_{T^*}$ separator and $\rho(D, Z \cup F_{T^*}) = \rho(D, Z)$.

Lemma 26 Let Σ_Λ be a structured system of the type defined by equations (5) above, with the associated graph $G(\Sigma_\Lambda)$. If $\rho(D, Z \cup F_{T^*}) = \rho(D, Z)$ and $l_X(D, Z \cup F_{T^*}) < l_X(D, Z)$, then there exists $x_j \in F_{T^*}$ such that $\rho(D, Z \cup \{x_j\}) = \rho(D, Z)$ and $l_X(D, Z \cup \{x_j\}) < l_X(D, Z)$.

Proof:

Let $T_{D,Z}(s)$ be the transfer matrix from D to Z . Recall that the generic rank of $T_{D,Z}(s)$ is equal to the size of a maximal $D - Z$ linking and the minimum number of state vertices in such linking represents the sum of all generic orders of the zeros at infinity of $T_{D,Z}(s)$ (see [14], [26]). We will now prove the lemma by contradiction using a transfer matrix approach.

Suppose that for every x_{ij} $j = 1, \dots, \mu$ of F_{T^*} , $l_X(D, Z \cup \{x_{ij}\}) = l_X(D, Z)$. This implies that the sum of the generic orders of the zeros at infinity of the cor-

responding transfer matrix $T_{D,Z \cup \{x_{ij}\}}(s) = \begin{bmatrix} T_{D,Z}(s) \\ l_{ij}(s) \end{bmatrix}$

is equal to the sum of the generic orders of the zeros at infinity of $T_{D,Z}(s)$ for $j = 1, \dots, \mu$. For a scalar proper rational function $t(s) = n(s)/d(s)$, the infinite zero order is given by $\deg(d(s)) - \deg(n(s))$. For a proper rational matrix $T(s)$, the infinite zero orders are given by the Smith-McMillan form at infinity of $T(s)$ and can be computed as follows. Denote by m_k the smallest infinite zero order of the order k minors of $T(s)$. $T(s)$ possesses r infinite zero orders n_1, \dots, n_r , where r is the rank of $T(s)$.

$n_1 =$ the minimal infinite zero order of the entries of $T(s)$

$n_k = m_k - \sum_{j=1}^{k-1} n_j$, $k = 2, \dots, r$.

From this it follows that the generic infinite zero orders of $\begin{bmatrix} T_{D,Z}(s) \\ l_{ij}(s) \end{bmatrix}$ are lower than or equal to those of

$T_{D,Z}(s)$. It follows that the generic infinite zero orders of $\begin{bmatrix} T_{D,Z}(s) \\ l_{ij}(s) \end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix} T_{D,Z}(s) \end{bmatrix}$ are identical for any j

(corresponding to $x_{ij} \in F_{T^*}$).

A standard result of linear algebra over principal rings tells us that the matrix equality $XA = B$ has a solution X on the ring of proper rational functions if and only

if $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}$ have the same Smith form over the ring *i.e.* have the same orders of the zeros at infinity.

It turns out that there exists proper rational row matrices $\bar{l}_{ij}(s)$ such that $l_{ij}(s) = \bar{l}_{ij}(s)T_{D,Z}(s)$ for $j = 1, \dots, \mu$.

$$\text{Therefore } T_{D,Z \cup F_{T^*}}(s) = \begin{bmatrix} T_{D,Z}(s) \\ \bar{l}_{i1}(s)T_{D,Z}(s) \\ \vdots \\ \bar{l}_{i\mu}(s)T_{D,Z}(s) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I & | & 0 \\ \text{---} & | & \text{---} \\ \bar{l}_{i1}(s) & | & \\ \vdots & | & I \\ \bar{l}_{i\mu}(s) & | & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{D,Z}(s) \\ \text{---} \\ 0 \end{bmatrix}. \text{ Note that } \begin{bmatrix} I & | & 0 \\ \text{---} & | & \text{---} \\ \bar{l}_{i1}(s) & | & \\ \vdots & | & I \\ \bar{l}_{i\mu}(s) & | & \end{bmatrix}$$

is a bicausal matrix (proper and having a proper inverse) since its determinant is equal to 1. A bicausal matrix possesses neither poles nor zeros at infinity. Therefore the generic infinite zero orders of $T_{D,Z \cup F_{T^*}}(s)$ and $T_{D,Z}$ are the same. This implies that $\lambda_X(D, Z \cup F_{T^*}) = \lambda_X(D, Z)$, contradicting the assumption.

References

- [1] H. Akashi and H. Imai. Disturbance localization and output deadbeat control through an observer in discrete-time linear multivariable systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 24:621–627, 1979.
- [2] G. Basile and G. Marro. *Controlled and Conditioned Invariants in Linear System Theory*. Prentice Hall, 1992.
- [3] S. Beeson and J.D. Andrews. Importance measures for non-coherent-system analysis. *IEEE Trans. Reliability*, 52(3):301–310, 2003.
- [4] M. Blanke, M. Kinnaert, J. Lunze, and M. Staroswiecki. *Diagnosis and fault-tolerant control*. Springer-Verlag, 2003.
- [5] T. Boukhobza and F. Hamelin. State and input observability recovering by additional sensor implementation: A graph-theoretic approach. *Automatica*, 45(7):1737–1742, 2009.
- [6] D. Chu. Disturbance decoupled observer design for linear time invariant systems: A matrix pencil approach. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 45(8):1569–1575, 2000.
- [7] C. Commault and J. M. Dion. Sensor location for diagnosis in linear systems: A structural analysis. *IEEE Trans. on Autom. Control*, 52(2):155–169, 2007.
- [8] C. Commault, J. M. Dion, and T. H. Do. The disturbance rejection by measurement feedback problem revisited. In *ACC*, Baltimore, USA, June 2010.

- [9] C. Commault, J. M. Dion, and V. Hovelaque. A geometric approach for structured systems : Application to the disturbance decoupling problem. *Automatica*, 33:403–409, 1997.
- [10] C. Commault, J. M. Dion, and D. H. Trinh. Observability preservation under sensor failure. *IEEE Trans. Automat. Control*, 53(6):1554–1559, 2008.
- [11] C. Commault, J. M. Dion, D. H. Trinh, and T. H. Do. Sensor classification for the fault detection and isolation, a structural approach. *Int. J. Adapt. Control Signal Processing*, 25(1):1–17, 2011.
- [12] M. C. de Olivera and J. C. Geromel. Linear output feedback controller design with joint selection of sensors and actuators. *IEEE Trans. Automat. Control*, 45(12):2412–2419, 2000.
- [13] J. M. Dion, C. Commault, and D. H. Trinh. Sensor classification for the disturbance rejection by measurement feedback problem. In *IFAC WC 2008*, Seoul, Korea, July 2008.
- [14] J. M. Dion, C. Commault, and J. van der Woude. Generic properties and control of linear structured systems: a survey. *Automatica*, 39(7):1125–1144, 2003.
- [15] L.R. Ford and D.R. Fulkerson. *Flows in networks*. Princeton University Press, 1962.
- [16] Boskovic J.D. and Mehra R.K. A decentralized fault-tolerant control system for accommodation of failures in higher-order flight control actuators. *IEEE Trans. on Cont. Syst. Technology*, 18(5):1103–1115, 2010.
- [17] M. Krysander and E. Frisk. Sensor placement for fault diagnosis. *IEEE Trans. on Systems Man and Cybernetics, Part A*, 38(6):1398–1410, 2008.
- [18] M. Krysander and E. Frisk. Sensor placement for fault isolation in linear differential-algebraic systems. *Automatica*, 45(2):364–371, 2009.
- [19] C.S. Kubrulusky and H. Mallebranche. Sensors and controllers location in distributed systems-a survey. *Automatica*, 21(2):117–128, 1985.
- [20] C.T. Lin. Structural controllability. *IEEE Trans. Automat. Control*, 19(3):201–208, June 1974.
- [21] K. Murota. *Systems Analysis by Graphs and Matroids*, volume 3 of *Algorithms and Combinatorics*. Springer-Verlag New-York, Inc., 1987.
- [22] J.M. Schumacher. Compensator design methods using (C,A,B)-pairs. *IEEE Trans. Automat. Control*, 25:1133–1138, 1980.
- [23] M. Staroswiecki, G. Hoblos, and A. Aitouche. Sensor network design for fault tolerant estimation. *Int. J. Adapt. Control Signal Processing*, 18:55–72, 2004.
- [24] M. van de Wal and B. de Jager. A review of methods for input/output selection. *Automatica*, 37:487–510, 2001.
- [25] J.W. van der Woude. A graph theoretic characterization for the rank of a structured system. *Math. Control Signal Systems*, 4:33–40, 1991.
- [26] J.W. van der Woude. On the structure at infinity of a structured system. *Linear Algebra and its Applications*, 148:145–169, 1991.
- [27] J.W. van der Woude. Disturbance decoupling by measurement feedback for structured systems : a graph theoretic approach. In *Proc. 2nd Europ. Cont. Conf. ECC'93*, pages 1132–1137, Groningen, Holland, 1993.
- [28] M. Vidyasagar. *Control system synthesis: a factorization approach*. Cambridge: The MIT Press, 1987.

- [29] W. Waldraff, D. Dochain, S. Bourrel, and A. Magnus. On the use of observability measures for sensor location in tubular reactors. *J. of Process Control*, 8(5-6):497–505, 1998.
- [30] J.C. Willems and C. Commault. Disturbance decoupling by measurement feedback with stability or pole placement. *SIAM Journ. Control Opt.*, 19:490–504, 1981.
- [31] W.M. Wonham. *Linear multivariable control : a geometric approach*. Springer-Verlag, New-york, 1985.

Analyse structurelle des réseaux de capteurs pour la commande et l'observation

Résumé : Dans ce travail, on s'intéresse aux problèmes de localisation et de classification des capteurs pour des propriétés de commande et d'observation de systèmes dynamiques. Lorsqu'une propriété considérée du système n'est pas vérifiée avec l'ensemble des capteurs initiaux, on cherche à implanter de nouveaux capteurs pour rendre cette propriété vraie. Lorsqu'une propriété du système est vérifiée avec l'ensemble des capteurs existants, on classe ces capteurs en différentes catégories en fonction de leur importance pour la préservation de cette propriété. On détermine les capteurs essentiels dont la défaillance fait perdre la propriété considérée et les capteurs inutiles qui peuvent tomber en panne sans aucun impact sur la propriété. Pour étudier ces deux problèmes, on utilise l'approche des systèmes linéaires structurés avec les graphes orientés associés. Les systèmes linéaires structurés sont une classe particulière de systèmes linéaires où les éléments des matrices d'état sont soit fixés à zéro soit des paramètres libres. Avec cette approche structurée, on étudie les problèmes de localisation et de classification des capteurs pour le rejet de perturbation par retour de mesure et la détection et localisation de défauts. Les résultats sont représentés en termes graphiques.

Mots-Clés : Systèmes linéaires structurés ; Analyse structurelle ; Localisation de capteurs ; Classification de capteurs ; Rejet de perturbation ; Détection et localisation de défaut.

Structural analysis of sensor networks for control and observation problems

Abstract : In this work, we are interested in sensor location and classification problems for control and observation of dynamical systems. When a considered property of the system is not satisfied with the initial set of sensors, we seek to implement additional sensors to make this property true. When a property is satisfied with the existing sensors, these sensors are classified into different categories according to their importance for the preservation of this property. We determine the critical sensors whose failure implies the property loss and the useless sensors which can fail without impact on the property. To study these two problems, we use the structured system approach with the associated directed graphs. Structured linear systems are a particular class of linear systems where the elements of state matrices are either zero or free parameters. With this approach, we study the problems of location and classification of sensors for disturbance rejection by measurement feedback and fault detection and isolation. The results are given in graphic terms.

Keywords : Structured linear systems ; Structural analysis ; Sensor location ; Sensor classification ; Disturbance rejection ; Fault detection and isolation.