



**HAL**  
open science

# Détermination et modélisation du couplage en champ proche magnétique entre systèmes complexes

Sanaa Zangui

► **To cite this version:**

Sanaa Zangui. Détermination et modélisation du couplage en champ proche magnétique entre systèmes complexes. Autre. Ecole Centrale de Lyon, 2011. Français. NNT : 2011ECDL0029 . tel-00681821

**HAL Id: tel-00681821**

**<https://theses.hal.science/tel-00681821>**

Submitted on 22 Mar 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Thèse de l'Université de Lyon

Délivrée par l'Ecole Centrale de Lyon

Spécialité : Génie Electrique

Soutenue publiquement le 14 Octobre 2011

par

Sanâa ZANGUI

# DETERMINATION ET MODELISATION DU COUPLAGE EN CHAMP PROCHE MAGNETIQUE ENTRE SYSTEMES COMPLEXES

Ecole Doctorale d'Electronique, Electrotechnique, Automatique

---

Composition du jury :

Monsieur François COSTA	Examineur
Madame Françoise PALADIAN	Rapporteur
Monsieur Jean-Louis COULOMB	Rapporteur
Monsieur Christian VOLLAIRE	Directeur de thèse
Madame Edith CLAVEL	Directeur de thèse
Monsieur François DE DARAN	Examineur
Monsieur Ronan PERRUSSEL	Examineur
Monsieur Carlos SARTORI	Examineur



---

---

# Sommaire

<b>Sommaire</b> .....	<b>4</b>
<b>Abstract</b> .....	<b>8</b>
<b>Résumé</b> .....	<b>12</b>
<b>Chapitre I</b> .....	<b>18</b>
<b>Etat de l'art</b> .....	<b>19</b>
<b>1. Introduction</b> .....	<b>20</b>
1.1. La source .....	21
1.1.1 Les sources naturelles .....	21
1.1.2 Les sources artificielles .....	21
1.2. Le couplage .....	22
1.2.1 Mode commun .....	22
1.2.2 Mode différentiel .....	23
1.3. La CEM dans la conception d'un produit.....	23
<b>2. CEM en électronique de puissance</b> .....	<b>25</b>
<b>3. Exemple des Filtres CEM</b> .....	<b>26</b>
3.1. Description .....	26
3.2. Les éléments parasites .....	27
3.2.1 Éléments parasites intrinsèques.....	28
3.2.2 Capacités parasites .....	29
3.2.3 Mutuelles inductances parasites.....	30
3.3. Méthode d'identification existante.....	31
3.4. Approche proposée .....	32
3.4.1 Introduction.....	32
3.4.2 Le développement multipolaire .....	33
3.5. Conclusion .....	33
<b>Chapitre II</b> .....	<b>36</b>
<b>Méthode numérique</b> .....	<b>37</b>
<b>1. Introduction</b> .....	<b>38</b>

<b>2. Rappel sur les équations de Maxwell .....</b>	<b>38</b>
<b>3. La représentation multipolaire .....</b>	<b>39</b>
3.1. Equation d'onde .....	40
3.2. Comportement en régime harmonique .....	41
3.3. Solutions de l'équation de Helmholtz .....	42
3.4. Potentiels vecteurs magnétique $\mathbf{A}$ et électrique $\mathbf{F}$ .....	46
<b>4. Ecriture du champ électrique <math>\mathbf{E}</math> et magnétique <math>\mathbf{H}</math> .....</b>	<b>50</b>
4.1. A partir des potentiels vecteurs magnétique et électrique .....	50
4.1.1 Champ électrique .....	50
4.1.2 Champ magnétique .....	52
4.2. A partir des vecteurs d'ondes sphériques .....	53
4.3. En champ lointain .....	57
4.4. En champ proche .....	58
4.4.1 Source magnétique .....	59
4.4.2 Source électrique .....	60
<b>5. Coefficients du développement multipolaire .....</b>	<b>61</b>
5.1. Identification des coefficients .....	61
5.2. Rotation du repère .....	62
5.3. Translation du repère .....	62
<b>6. Application pour une source magnétique en champ proche .....</b>	<b>66</b>
6.1. Pour une boucle magnétique .....	66
6.2. Calcul du champ $\mathbf{H}$ sous Flux3D® .....	68
<b>7. Mutuelle inductance .....</b>	<b>69</b>
7.1. Introduction .....	69
7.2. Mutuelle inductance en fonction des coefficients $Q_{snm}$ .....	69
7.2.1 Impédance de couplage .....	69
7.2.2 Mutuelle inductance .....	70
7.2.3 Etape de calcul .....	71
7.3. Résultats .....	72
7.3.1 Introduction .....	72
7.3.2 Deux spires coaxiales .....	72
7.3.2.1 Calcul analytique de la mutuelle inductance .....	73
7.3.2.2 Utilisation des coefficients $Q_{snm}$ pour déterminer la mutuelle inductance entre deux spires	77
7.3.3 Spire2 orientée à 45° par rapport à la spire1 .....	78

7.3.4	Deux spires coplanaires .....	80
<b>8.</b>	<b>Conclusion .....</b>	<b>82</b>
<b>Chapitre III.....</b>		<b>84</b>
<b>Approche expérimentale.....</b>		<b>85</b>
<b>1.</b>	<b>Introduction.....</b>	<b>86</b>
1.1.	Mesures ponctuelles .....	86
1.2.	Mesures intégrales.....	87
<b>2.</b>	<b>Banc de mesure.....</b>	<b>89</b>
2.1.	Description du banc de mesure .....	89
2.2.	Description du montage mis en oeuvre .....	90
2.1.	Calibration .....	92
2.1.1	Les sources de rayonnement.....	93
2.1.2	Symétrie des antennes boucles.....	94
2.1.3	Calibration du dipôle .....	96
2.1.3.1	Boucle centrale seule.....	96
2.1.3.2	Antenne boucle $C_{10-1}$ seule.....	98
2.1.3.3	Antenne boucle $C_{20-1}$ seule.....	100
2.1.3.4	Comparaison et validation .....	101
2.1.4	Calibration du quadripôle.....	103
2.2.	Méthode de correction .....	105
2.2.1	Description de la méthode .....	105
2.2.2	Cas du dipôle .....	109
2.3.	Validation .....	110
2.3.1	Détermination des coefficients multipolaires .....	111
2.3.2	Mutuelle inductance .....	114
2.3.2.1	Par la mesure .....	114
2.3.2.2	Par la méthode multipolaire .....	117
<b>3.</b>	<b>Conclusion .....</b>	<b>119</b>
<b>Conclusion générale.....</b>		<b>120</b>
<b>Perspectives.....</b>		<b>124</b>
<b>Publications .....</b>		<b>128</b>
<b>Références.....</b>		<b>132</b>



---

---

# **Abstract**





---

---

To design a system in power electronics, for instance a converter or an EMC filter, the problems of electromagnetic compatibility are taken into account during the final phase of testing, verification and certification of the system.

The aim of our research is to consider the problems of EMC early in the design flow of a product.

The objective of this work is to develop models to predict the near-field coupling between systems or subsystems, such as between elements of a converter. To do this, it is important to re-create the electromagnetic field radiated by each system, which will be represented as an equivalent source.

These equivalent sources are used to compute the coupling between the different elements depending on the distance and their respective position. The determination of these couplings can allow optimizing the position of the components in the structure to minimize the electromagnetic interferences and increase the performance of the system.

The method used for the implementation of this approach is the multipolar expansion, it can model the influence of generic structures (coils, capacitors, ...) in a spherical reference ( $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ ).

This representation allows the construction of equivalent field sources for each element. For information or to validate some of our equivalent models, we used the software Flux3D® which is a calculation tool based on the finite element method, developed by CEDRAT and G2Elab.

Furthermore, it was important to use a measurement protocol that allows us to inform or validate our models if we do not know all the electrical and geometrical parameters of the system or when the system have a too complex geometry to be modeled numerically in 3D. A measurement bench that can directly measure the components of the decomposition in spherical harmonics is used.

The constructed model which represents the near-field radiation of the different elements will allow providing libraries that will be integrated later in a circuit software.



---

---

# Résumé



---

---

Dans la conception d'un système en électronique de puissance par exemple dans le cas d'un convertisseur ou d'un filtre CEM, les problèmes de la compatibilité électromagnétique ne sont pris en compte que lors de la phase finale durant des tests de vérification et de certification du système. Ainsi un prototype non-conforme à ces tests va engendrer des surcoûts importants ou l'adoption de solutions de « secours » non nécessairement reproductibles et surtout non satisfaisantes car elles impliquent dans la majorité des cas l'ajout d'éléments initialement non prévus (filtres, blindages, ...). Aussi, il s'avère important et utile d'étudier les problèmes de la CEM dès la phase de conception.

L'objectif de ce travail est d'établir des modèles permettant de prédire le couplage en champ proche entre les systèmes ou les sous systèmes, comme par exemple entre les éléments constituant un convertisseur. Cette « brique élémentaire » de modélisation est un élément actuellement manquant pour contribuer à la modélisation globale des systèmes d'électronique de puissance d'un point de vue CEM. Pour ce faire, il suffit de recréer le champ électromagnétique rayonné par chacun des systèmes, qui sera représenté comme une source équivalente.

Ces sources équivalentes seront utilisées pour calculer le couplage entre les différents éléments en fonction de la distance et de leur placement respectif. La détermination de ces différents couplages nous aidera à mieux optimiser la position des différents composants au sein de la structure pour minimiser les perturbations et augmenter son efficacité.

L'outil utilisé pour la mise en œuvre de cette approche est la décomposition en harmoniques sphériques, c'est à dire la représentation du rayonnement de structures génériques (bobinages, capacités, ...) dans un repère sphérique  $(r, \theta, \varphi)$ . Cette représentation permet de construire des sources de champ équivalentes pour chacun des éléments.

Pour renseigner ou valider certains de nos modèles équivalents, nous avons utilisé le logiciel Flux3D®, c'est un outil de calcul basé sur la méthode des éléments finis, développé par CEDRAT et le G2Elab.

Par ailleurs, il était important d'utiliser un protocole de mesures qui nous permette aussi de renseigner ou valider nos modèles dans le cas où on ne connaît pas tous les paramètres électriques ou géométriques du dispositif ou pour des « composants » trop complexes à

---

---

modéliser numériquement en 3D. Un banc de mesures qui permet de mesurer directement les composantes de la décomposition en harmoniques sphériques sera utilisé.

Le modèle construit qui représente le rayonnement en champ proche des différents éléments nous permettra de fournir des bibliothèques qui seront intégrées par la suite dans un logiciel de type circuit, pour une modélisation « globale » du système.

Le premier chapitre résume l'étude bibliographique, qui contient un rappel des bases de la compatibilité électromagnétique et les modes de propagation des perturbations électromagnétiques. Comme le domaine d'application de ces recherches est l'électronique de puissance, les enjeux de la CEM en électronique de puissance seront exposés. A travers un exemple de filtre CEM nous présentons l'intérêt de l'approche développée. Utilisant cet exemple de filtre CEM, une méthode basée sur les résultats de mesure pour l'extraction des paramètres du modèle est décrite et ainsi permet de déterminer le couplage entre les composants du filtre.

Le deuxième chapitre décrit la méthode utilisée qui est basée sur le développement multipolaire. Cette méthode nous permet la représentation de la source équivalente du rayonnement d'un système. Pour déterminer le couplage entre systèmes, il a suffi d'utiliser les sources équivalentes et de déterminer, dans la même base, l'expression qui permet de calculer le couplage, c'est-à-dire la mutuelle inductance vu la gamme de fréquences étudiée et le type de composants. La méthode est validée dans un premier temps dans le cas de deux spires sur le même axe  $oz$ , par rapport à des résultats analytiques et des simulations sous Flux3D. Ensuite la méthode a été validée pour d'autres cas de calcul.

Dans le troisième chapitre, on aborde l'aspect expérimental. Pour renseigner les modèles de sources équivalentes, on a besoin par exemple du champ proche qui peut être déterminé à partir de simulation 3D. Mais dans le cas où le système est représenté comme une boîte dont on ne connaît pas les paramètres ou pour un système trop complexe à modéliser numériquement en 3D, seule la mesure nous permet de renseigner nos modèles. Pour cela on a utilisé un banc de mesure similaire à celui présenté dans [1] qui permet de mesurer directement les composantes de la décomposition en harmoniques sphériques, en mesurant le flux d'induction dans des bobines placées autour du système. Cette méthode de mesure du flux induit dans de grandes bobines placées autour du dispositif permet, par une « intégration spatiale » du champ, de réduire l'effet des erreurs de positionnement du capteur,

---

---

contrairement à une méthode de mesure ponctuelle, où le capteur de champ magnétique se déplace autour de l'objet étudié afin de mesurer le champ en de nombreux points. Le banc de mesure est tout d'abord calibré. Un prototype de mesure est ensuite présenté, et le même cas d'étude que celui utilisé comme support pour la partie modélisation fait l'objet de mesures afin de valider le protocole proposé.





---

---

# Chapitre I

---

---

# **Etat de l'art**

---

---

## 1. Introduction

La Compatibilité ÉlectroMagnétique (CEM) est définie comme étant l'aptitude d'un dispositif, d'un appareil ou d'un système à fonctionner dans son environnement électromagnétique de façon satisfaisante et sans produire lui-même des perturbations électromagnétiques intolérables pour tout ce qui se trouve dans cet environnement [2]. Tout système électrique est susceptible d'émettre et de subir des perturbations. La cohabitation de récepteurs alimentés par des courants forts et impulsionnels, avec des dispositifs sensibles rend obligatoire l'étude de la CEM.

Pour traiter un problème de CEM, il est important d'étudier les trois points ci-après :

- L'émission : représente la production de perturbations par l'appareil. Aucun appareil ne doit produire lui-même de perturbations électromagnétiques intolérables pour ce qui se trouve dans son environnement. Son niveau d'émission de perturbations doit être suffisamment bas pour que tout ce qui figure dans cet environnement soit insensible à ces perturbations.
- La susceptibilité : désigne le comportement d'un appareil, en réponse à une contrainte électromagnétique externe (volontaire ou non, naturelle ou artificielle), jugée incompatible avec une utilisation normale.
- Le couplage : c'est le phénomène de propagation des perturbations qui se produit entre la source et la victime.

La Figure.1 représente le schéma d'un problème CEM :

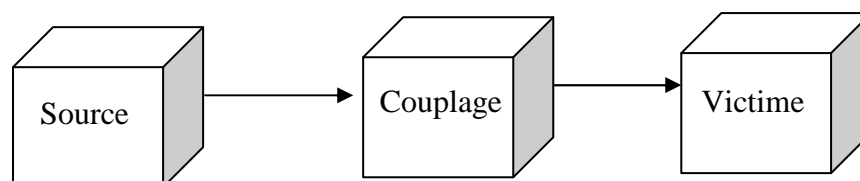


Figure.1 – Schématisation d'un problème CEM

---

---

## 1.1. La source

La source de perturbations n'est pas seulement celle créée par l'appareil, mais peut provenir de l'extérieur. On peut classer les sources sous deux formes, les sources artificielles et les sources naturelles.

### 1.1.1 *Les sources naturelles*

Les sources naturelles comprennent les champs électromagnétiques ionisants comme les rayons X naturels et les rayons cosmiques, les champs électromagnétiques non ionisants constitués :

- des champs électromagnétiques terrestres. Ils se composent du champ géomagnétique de la terre dont l'intensité se situe aux alentours de 0.5 Gauss, et de champs électromagnétiques d'extra-basse fréquence qui se situent entre 0 et 30 Hertz (les ondes les plus nombreuses se situent entre 7 et 10 Hz).
- des éclairs. Ceux-ci produisent des champs électromagnétiques de quelques milliers de Hertz dont l'intensité peut s'avérer très importante.

### 1.1.2 *Les sources artificielles*

Les sources artificielles sont celles qui sont fabriquées par l'homme. Elles comprennent les champs électromagnétiques ionisants comme les rayons X et les isotopes radioactifs, utilisés à des fins thérapeutiques et de diagnostics, et les champs électromagnétiques non ionisants qui se répartissent selon leur fréquence en quatre catégories :

- les champs électromagnétiques d'extra-basse fréquence qui se situent entre 0 et 1000Hz, on retrouve dans cette bande le courant électrique à 50Hz et 60Hz.
- Les champs électromagnétiques de très basse fréquence qui sont compris entre 1kHz et 500kHz (ex : conversion statique d'énergie, ...).
- les champs électromagnétiques de très haute fréquence qui se situent entre 500kHz et 500MHz, ils incluent les ondes radio (AM, à ondes courtes, FM) et les fréquences utilisées pour la télévision.
- les champs électromagnétiques d'ultra-haute fréquence dont les micro-ondes qui se situent entre 500MHz et la lumière (téléphonie mobile, radars...).

---

---

## 1.2. Le couplage

Le couplage représente le transfert de perturbations entre la source et la victime. Ce transfert peut se faire par conduction ou par rayonnement. Le couplage par conduction se traduit par la transmission des perturbations par un conducteur électrique, un plan de masse métallique... Le couplage par rayonnement se caractérise par un transfert de perturbations sans support conducteur. Le couplage se fait donc grâce aux champs électromagnétiques. La Figure.2 représente le schéma du couplage par rayonnement et par conduction.

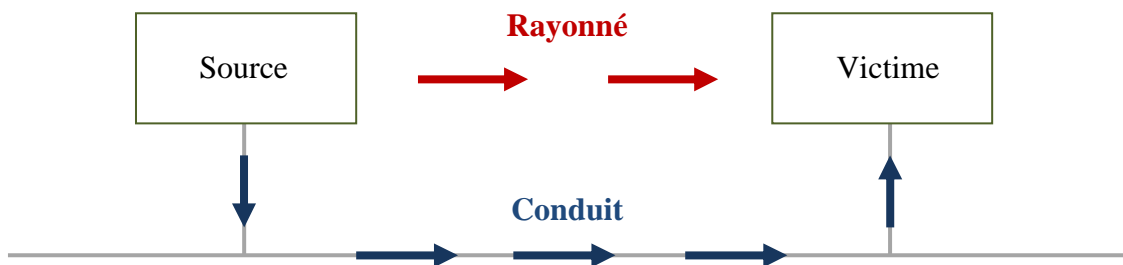


Figure.2 – Couplage par conduction et par rayonnement

Dans le cas du couplage par conduction, il existe deux modes de propagation du signal parasite, le mode différentiel et le mode commun.

### 1.2.1 Mode commun

Le Mode Commun (MC) est le plus présent en CEM, ce mode de transmission d'un signal n'est utilisé que par les parasites (le signal utile est toujours en MD). On considère deux boîtes, représentant respectivement l'impédance de sortie et l'impédance d'entrée d'un système, reliées par des fils, le tout associé à un potentiel de référence, comme représenté sur la Figure.3. Tous les fils entrant dans un appareil sont touchés car le retour ne se fait plus par l'un d'entre eux mais par la masse ou la terre. Dans la Figure.3  $i_p$  représente le courant parasite de MC.

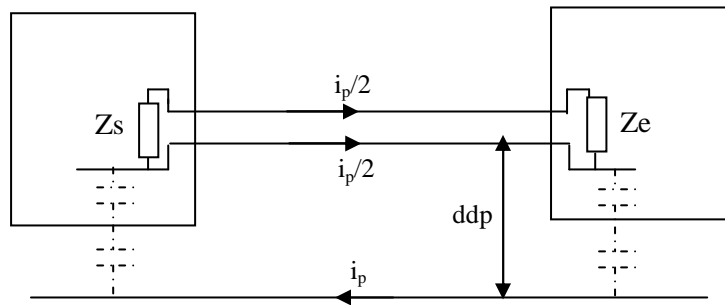


Figure.3 – Propagation par mode commun

### 1.2.2 Mode différentiel

Contrairement au mode commun, pour une propagation en Mode Différentiel (MD) le plan de masse ne joue aucun rôle dans le couplage. Les signaux sont transmis en mode différentiel sur deux fils entre deux équipements, c'est-à-dire que le retour du courant se fait au niveau du second fil, et que le courant dans le premier fil « aller » et le deuxième fil « retour » est identique mais de signe opposé. La Figure.4 schématise la propagation en mode différentiel entre deux équipements. Le courant de MD se superpose au courant « utile » mais se différencie au niveau fréquentiel.

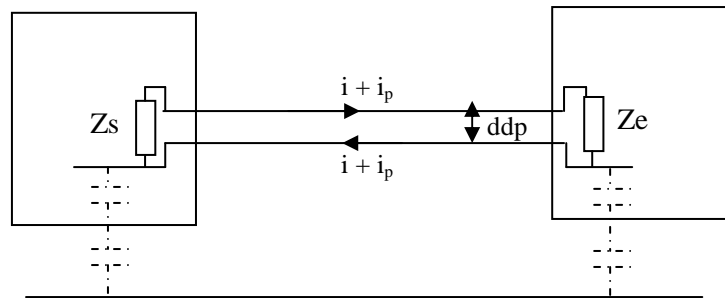


Figure.4 – Propagation par mode différentiel

## 1.3. La CEM dans la conception d'un produit

Pour le bon fonctionnement d'un système, il est important de limiter les différentes sources de perturbation. Pour cela l'étude de l'environnement électromagnétique d'un système est un point essentiel à prendre en compte dans tout projet industriel faisant intervenir de

l'électronique de signal ou de puissance, au même titre que la gestion de la thermique ou la gestion des contraintes mécaniques. Les contraintes CEM ne sont souvent prises en considération que lors de la seconde phase où un prototype sur lequel les investigations CEM vont pouvoir s'appliquer existe. Cette prise en compte doit avoir lieu lors de la conception et en tenant compte de l'insertion finale du produit.

La Figure.5 représente le processus de conception d'un produit intégrant la contrainte CEM dès le début de la conception. Les recherches que nous menons visent à développer des outils de modélisation « a priori » du comportement CEM des systèmes de puissance pour une prise en compte de la CEM telle que présentée sur la Figure.5.

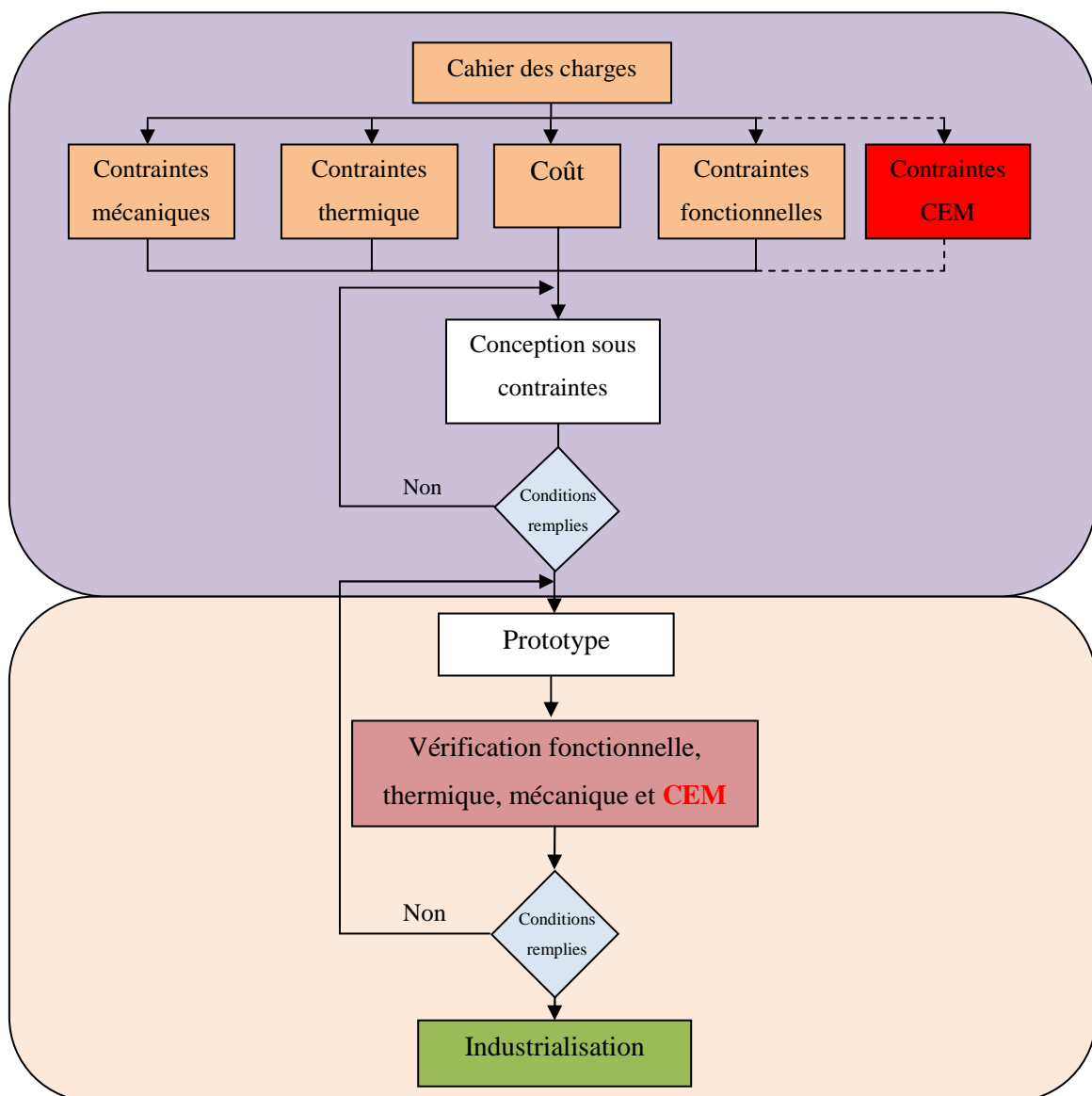


Figure.5 – Processus de conception d'un produit



---

---

## 2. CEM en électronique de puissance

L'électronique de puissance a pour objet l'étude de la conversion statique d'énergie électrique. Pour le bon fonctionnement des systèmes en électronique de puissance, il est devenu important d'étudier les contraintes CEM. En effet, les problèmes de compatibilité électromagnétique se sont de plus en plus intensifiés en électronique de puissance et cela à cause des éléments suivants :

- Augmentation des fréquences en électronique de puissance.
- Diminution des tensions d'alimentation des systèmes de commande.
- Intégration des systèmes.
- Pollution de l'environnement (téléphonie, radar,...).
- Semi-conducteurs à commutation de plus en plus rapide.
- ...

Sur une chaîne de conversion d'électronique de puissance, l'étude de la compatibilité électromagnétique peut intervenir à plusieurs niveaux :

- Les lignes de transmissions.
- Le convertisseur.
- Le filtre.
- ...

La Figure.6 représente un exemple d'une chaîne de conversion.

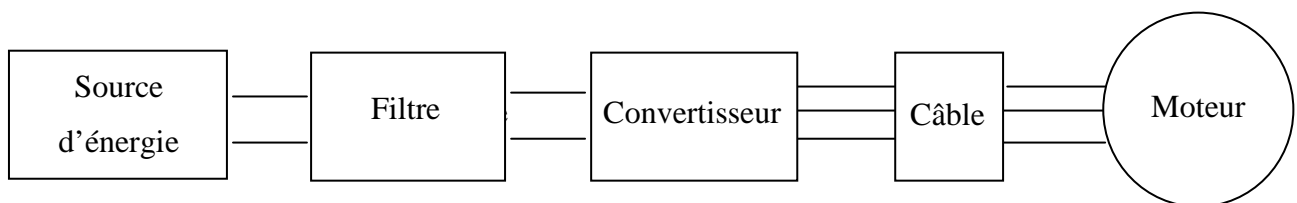


Figure.6 – Exemple d'une chaîne de conversion

Plusieurs travaux de recherche ont attaqué à différents niveaux le problème de la CEM dans une chaîne de conversion. Par exemple sur le modèle de la chaîne de conversion de la Figure.6, au niveau du convertisseur une étude a été développée pour modéliser les courants

---

de mode commun MC dans les associations convertisseurs machine par une approche quadripolaire [3]. Une autre thèse concerne la modélisation du convertisseur en terme de sources de perturbations de MC et de MD et des câbles pour générer des modèles a priori qui prennent en compte les impédances et les bruits de MC et MD [4].

Concernant la détermination des éléments parasites RLC des modèles des éléments de liaison électrique, plusieurs logiciels basés sur la méthode des éléments partiels localisés (notée PEEC pour Partiel Element Equivalent Circuit), permettent de calculer directement ces éléments parasites. Le logiciel InCa3D® développé par Cedrat en collaboration avec le laboratoire G2elab est sur le point de proposer des modèles complets de la connectique que l'on peut trouver au sein d'un convertisseur.

Le travail de recherche présenté ici s'attelle au calcul des éléments de couplage (mutuelle inductance principalement) entre composants ou sous systèmes d'une chaîne de conversion statique d'énergie électrique. En effet, cette brique s'avère manquante dans le panel des outils nécessaires à la modélisation a priori des systèmes de conversion statique d'énergie électrique et est complémentaire à des outils tels que InCa3D® qui ne permettent pas la détermination du couplage entre éléments trop complexes à modéliser par les méthodes numériques classiques.

### **3. Exemple des Filtres CEM**

#### **3.1. Description**

Les filtres sont utilisés en CEM pour réduire les perturbations électromagnétiques conduites en MC et MD, c'est-à-dire celles qui se propagent par les câbles entre les systèmes électriques. Les filtres peuvent être distingués par exemple par leur domaine de fréquence de fonctionnement qui permet de séparer le domaine des fréquences utiles de celui des fréquences bruitées. A titre d'exemple un filtre passe-bas utilisé pour réduire les perturbations en haute fréquence, permet de conserver uniquement les basses fréquences et atténue les hautes fréquences c'est-à-dire les fréquences supérieures à sa fréquence de coupure. La Figure.7 représente le comportement réel et idéal d'un filtre passe-bas en fonction de la fréquence.

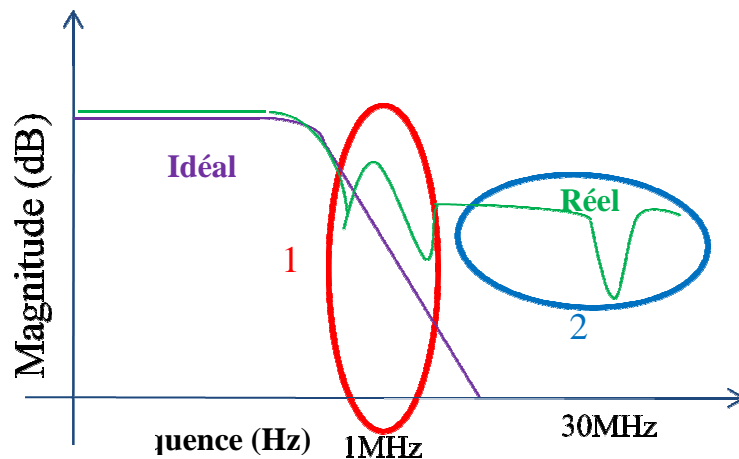


Figure.7 – Comportement réel et idéal d’un filtre passe-bas

De la Figure.7 qui représente la différence entre le comportement réel et le comportement idéal d’un filtre passe-bas, on remarque une différence en haute fréquence entre les deux courbes. Sur celle qui représente un comportement réel du filtre, il y a présence de deux résonances (entourées sur la figure 7), la première vers 1MHz et la deuxième vers les 30MHz [5]. Ces résonances sont dues aux éléments parasites du filtre, pour cela il est important de représenter le schéma électrique du filtre passe-bas réel pour identifier les différents éléments parasites.

### 3.2. Les éléments parasites

Les éléments parasites dans un filtre influencent ses performances. Pour un bon fonctionnement du filtre, il s’agit de réduire l’influence des éléments parasites, pour cela il faut identifier et déterminer ces différents éléments parasites. Il existe deux types d’éléments parasites, ceux dus aux couplages inductif et capacitif et les éléments parasites intrinsèques de chaque composant du filtre. On considère le filtre de MD constitué d’une inductance  $L_{DM}$  et de deux capacités  $C_{y1}$  et  $C_{y2}$  et qui est implanté dans un variateur de vitesse comme le montre la Figure.8.

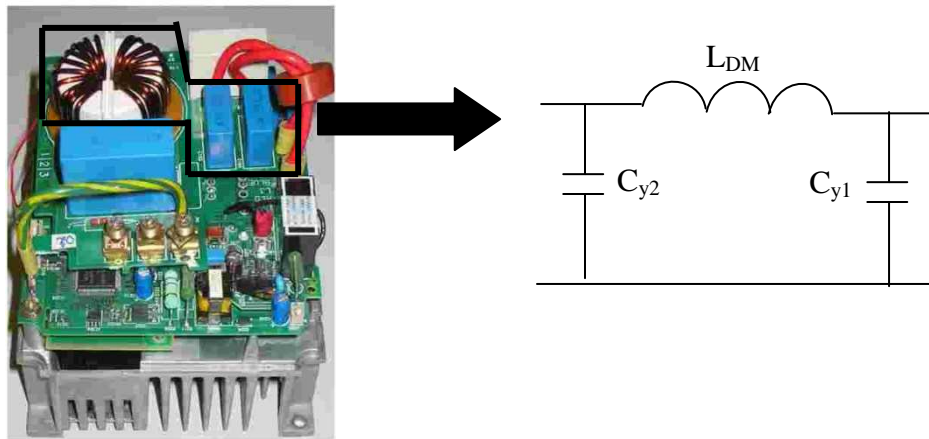


Figure.8 – Schéma électrique d'un filtre CEM

Le schéma de droite de la Figure.8 représente le schéma électrique du filtre « en  $\pi$  » idéal, dénué de tout élément parasite. Ce dernier sera détaillé par la suite en ajoutant les différents éléments de couplage entre les composants du filtre et les éléments parasites intrinsèques de chaque composant.

### 3.2.1 *Éléments parasites intrinsèques*

Chaque composant du filtre est constitué d'éléments parasites intrinsèques, ces éléments peuvent influencer le fonctionnement du filtre. La Figure.9 représente le schéma électrique du précédent filtre avec les éléments parasites intrinsèques de chacun des composants. Ces derniers sont constitués de résistances intrinsèques, d'inductances intrinsèques et de capacités intrinsèques.

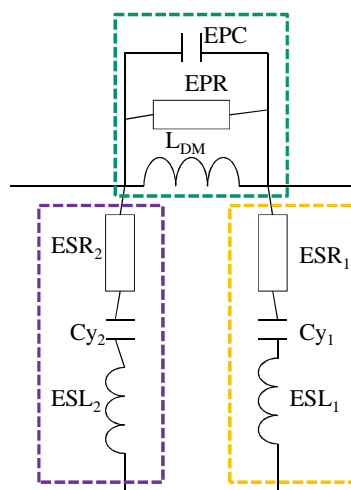


Figure.9 – Les éléments parasites intrinsèques d'un filtre CEM

---

Avec :  $ESL, ESR, C$  : paramètres du modèle RLC des condensateurs.  
 $L_{DM}, EPC, EPR$  : paramètres de l'inductance de mode différentiel.

L'article [5] montre que ces éléments parasites influencent le comportement du filtre en très haute fréquence. En effet la deuxième résonance (la plus haute fréquence) représentée sur la Figure.7 est due aux éléments parasites intrinsèques des composants du filtre.

### 3.2.2 Capacités parasites

Entre deux conducteurs voisins, il existe toujours une capacité parasite. Lorsque les signaux qui traversent chacun des conducteurs ne sont pas identiques, une différence de potentiel apparaît et conduit à la création d'un courant perturbateur, qui circule à travers la capacité parasite et les deux conducteurs.

La Figure.10, représente le schéma électrique équivalent du filtre passe-bas avec les capacités parasites  $C_p$  entre l'entrée/sortie du filtre et le plan de masse.

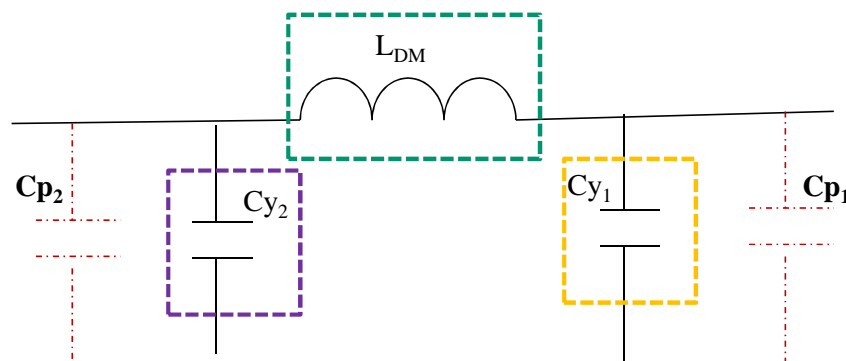


Figure.10 – Les capacités parasites dans un filtre CEM

Avec :  $C_{p1}$  : capacité parasite entre la sortie et le plan de masse.  
 $C_{p2}$  : capacité parasite entre l'entrée et le plan de masse.

Dans [5], il a été démontré que ces couplages capacitifs n'ont pas d'effet notable sur le comportement du filtre.

---

---

### 3.2.3 Mutuelles inductances parasites

Le couplage inductif se produit lorsqu'un courant dans un conducteur génère un champ magnétique variable, ce dernier crée une force électromotrice dite d'induction sur le conducteur voisin d'où l'apparition d'un courant parasite dans le deuxième conducteur.

Ce couplage est représenté par un paramètre appelé mutuelle inductance. Dans le cas du filtre de la Figure.7, on peut représenter les différentes mutuelles qui sont créées entre les composants du filtre comme le montre la Figure.11.

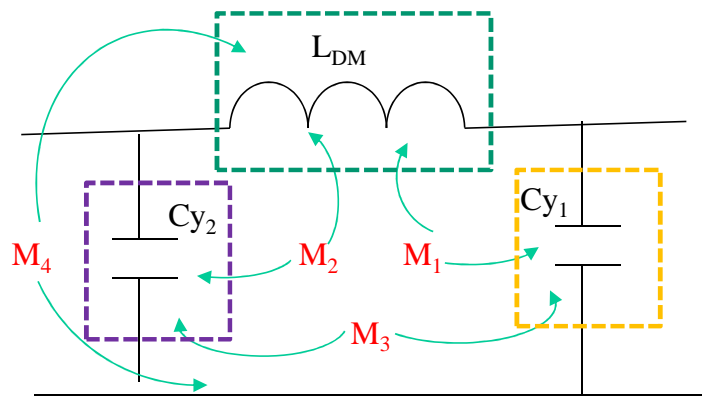


Figure.11 – Les mutuelles inductances entre composants d'un filtre CEM

Avec :

- $M_1$  et  $M_2$  : mutuelle inductance entre  $L_{DM}$  et les condensateurs.
- $M_3$  : mutuelle inductance entre les deux condensateurs.
- $M_4$  : mutuelle inductance entre l'inductance et la piste.

Ces couplages ont un impact significatif sur les performances du filtre, car les conducteurs et les composants sont parcourus par de forts courants qui présentent de fortes variations. Si on revient sur la courbe de la Figure.7 qui représente la différence entre le comportement réel et idéal du filtre passe-bas, la première résonance au niveau de la courbe qui représente le comportement réel est due aux couplages inductifs entre les composants du filtre d'après l'article [5]. L'optimisation du positionnement des composants a permis une amélioration au niveau du fonctionnement du filtre vers 1MHz. Ces résultats ont été obtenus dans le cas où le couplage capacitif est négligé devant le couplage inductif puisque les tensions sont faibles par rapport aux courants mis en jeu [5].

L'impact des différents éléments parasites diffère d'un point de vue fréquentiel. En effet, ce sont les éléments de couplage inductif qui impactent à plus basses fréquences. C'est la raison pour laquelle, dans une application de filtrage, il est important de déterminer a priori les couplages inductifs entre les composants, en les représentant par une mutuelle inductance dépendant de la distance entre composants, ceci pour déterminer le comportement réel du filtre.

On peut facilement imaginer l'intérêt de la prédiction de tels couplages sur les éléments constitutifs d'un convertisseur, une telle méthode peut aussi servir dans le calcul d'interaction « proche » entre sous systèmes complexes.

### 3.3. Méthode d'identification existante

La méthode utilisée dans [6] pour déterminer les mutuelles inductances entre les composants est basée sur des résultats de mesure. Il suffit de considérer un quadripôle et de mesurer à l'entrée et à la sortie, les coefficients de réflexion  $S_{11}$ ,  $S_{22}$  et les coefficients de transmission  $S_{21}$ ,  $S_{12}$  comme représenté sur la Figure.12. Ceci permet de calculer le couplage entre l'inductance du filtre et l'inductance de la boucle  $L_{P1}$ , ainsi que celui entre l'inductance du filtre et l'inductance intrinsèque de la capacité du filtre. Ces deux couplages sont représentés respectivement par les mutuelles inductances  $M_2$  et  $M_5$  [6].

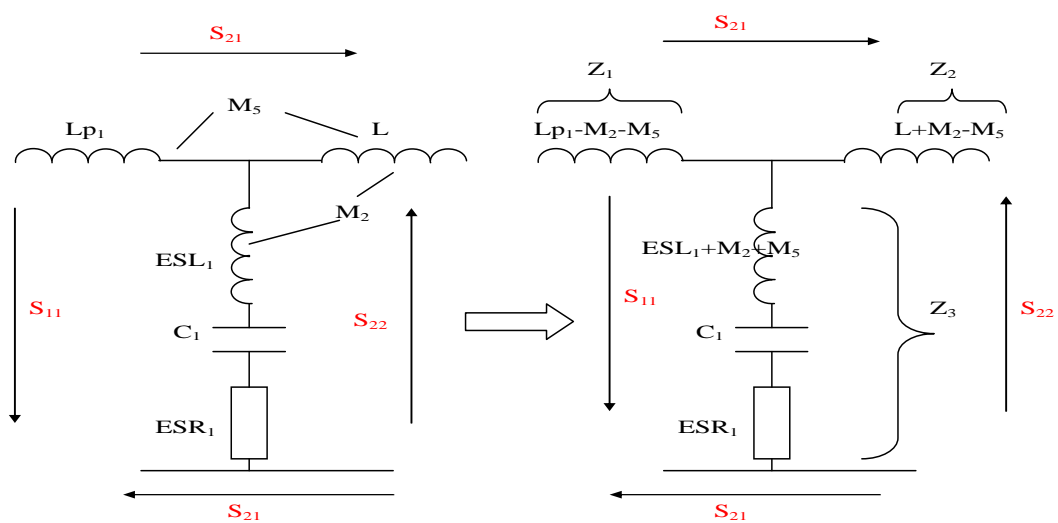


Figure.12 – Exemple de calcul des mutuelles inductances  $M_2$  et  $M_5$

D'après le schéma de la Figure.12, on en déduit les relations entre les impédances équivalentes  $Z_1$ ,  $Z_2$  et  $Z_3$ , et les mutuelles inductances qui représentent le couplage inductif entre les composants du quadripôle défini précédemment.

$$Z_1 = j. (L_{P1} - M_2 - M_5). \omega \quad \text{eq. 1}$$

$$Z_2 = j. (L + M_2 - M_5). \omega \quad \text{eq. 2}$$

$$Z_3 = j. (ESL_1 + M_2 + M_5). \omega + ESR_1 + \frac{1}{j. C_1. \omega} \quad \text{eq. 3}$$

Il reste à déterminer les relations entre les impédances et les paramètres  $S$ , pour en déduire la valeur des mutuelles inductances  $M_2$  et  $M_5$  d'après les résultats de mesure des paramètres  $S$ . Les relations sont les suivantes avec  $Z_0$  l'impédance de référence égale à  $50\Omega$  [6]:

$$Z_1 = \frac{Z_0(1 - S_{22} - S_{22}.S_{11} + S_{11} - 2.S_{21} + S_{21}^2)}{(1 - S_{22} + S_{22}.S_{11} - S_{11} - S_{21}^2)} \quad \text{eq. 4}$$

$$Z_2 = \frac{Z_0(1 + S_{22} - S_{22}.S_{11} + S_{11} - 2.S_{21} + S_{21}^2)}{(1 - S_{22} + S_{22}.S_{11} - S_{11} - S_{21}^2)} \quad \text{eq. 5}$$

$$Z_3 = \frac{2.Z_0.S_{21}}{(1 - S_{22} + S_{22}.S_{11} - S_{11} - S_{21}^2)} \quad \text{eq. 6}$$

Une fois que les relations entre les impédances équivalentes et les paramètres  $S$  mesurés sont établies, il reste à remplacer ces relations dans les équations 1, 2 et 3 pour calculer les mutuelles inductances  $M_2$  et  $M_5$ , sachant que l'inductance de la boucle  $L_{P1}$ , l'inductance propre du filtre et les éléments intrinsèques de la capacité  $C_1$  sont connus, puisqu'on peut les mesurer directement.

### 3.4. Approche proposée

#### 3.4.1 Introduction

Il n'existe pas actuellement de moyen de connaître a priori (lors de l'étape de maquetage numérique) le fonctionnement réel d'un système en électronique de puissance en intégrant le couplage avec son environnement ou le couplage entre ses sous systèmes comme dans le cas d'un filtre CEM. Plus généralement, la modélisation du couplage entre systèmes ou sous



---

systèmes reste un problème primordial si on envisage d'intégrer la CEM lors de l'étape de conception ou de modélisation.

L'objectif est d'établir des modèles représentant le rayonnement des systèmes dans une large bande de fréquences. Ces modèles doivent prendre en compte les paramètres tels que l'environnement électromagnétique proche et doivent permettre de déterminer rapidement le couplage entre deux systèmes ou les éléments d'un sous système en le représentant par une mutuelle inductance dépendant de paramètres tels que la distance entre composants et la fréquence.

### 3.4.2 *Le développement multipolaire*

Le calcul d'éléments de couplage de type mutuelle inductance peut se faire à l'aide d'outils numériques tels que la méthode des Eléments Finis (EF). Ces méthodes ne sont pas adaptées lorsque les éléments couplés ont une géométrie complexe (bobinage, capacité,...). Une technique telle que la méthode PEEC (logiciel InCa3D®) est très adaptée au calcul d'éléments de couplage au sein d'un circuit imprimé. L'approche proposée dans ce travail de recherche est complémentaire et propose une solution dans le cas d'objets/systèmes difficiles à modéliser par des techniques numériques classiques (PEEC, EF,...).

La méthode du développement multipolaire consiste à déterminer une source mathématique équivalente à une source réelle, en faisant la somme d'éléments appelés les multipôles. Cette technique peut s'avérer utile pour la caractérisation d'environnements électromagnétiques [7], elle permet de représenter le rayonnement d'un système ou d'un constituant (bobinages, capacités...) dans un repère sphérique  $(r, \theta, \varphi)$ . Cette représentation permet de construire des sources de champ équivalentes pour des systèmes.

Cette méthode est la mieux adaptée pour déterminer le couplage entre systèmes ou sous systèmes. En effet, à partir d'une représentation multipolaire de différentes sources, il est aisé de calculer le couplage mutuel entre ces sources. La méthode sera détaillée au chapitre 2.

## 3.5. Conclusion

Les paragraphes précédents montrent bien que les techniques existantes pour traiter la CEM sont basées principalement sur des résultats de mesure et qu'il n'existe pas de moyen de connaître a priori (au niveau de l'étape de maquettage numérique) le fonctionnement réel d'un

---

---

ystème. Plus généralement, la modélisation des effets parasites reste un problème ouvert et primordial si on envisage d'intégrer la CEM dans le «design flow» (lors de l'étape de modélisation) des systèmes d'électronique de puissance.

La modélisation d'un système passe par la création de sources équivalentes de certains de ses constituants. Ces sources équivalentes permettent de déterminer par la suite le couplage entre ces constituants.

La méthode qu'on utilisera pour la construction des sources équivalentes, est la méthode basée sur le développement multipolaire. Cette méthode nous permettra de représenter le champ équivalent rayonné d'un système ou d'un constituant dans un repère sphérique  $(r, \theta, \varphi)$ . Le chapitre suivant sera consacré à la description de la méthode du développement multipolaire ainsi qu'à l'utilisation des sources équivalentes pour le calcul du couplage entre constituants d'un système.



---

---

# Chapitre II

---

---

# **Méthode numérique**

---

---

## 1. Introduction

Dans ce chapitre est présentée la méthode pour construire les sources équivalentes du rayonnement des systèmes à modéliser. Celle-ci est basée sur le développement multipolaire, qui est un outil intéressant puisqu'il permet de prendre en compte les interactions à distance. Les sources équivalentes seront utilisées pour déterminer le couplage entre les systèmes, représenté par une mutuelle inductance.

Avant de détailler la méthode utilisée, il est important de s'intéresser à la théorie en partant des équations de Maxwell, qui représentent une base fondamentale en électromagnétisme.

## 2. Rappel sur les équations de Maxwell

Les équations de Maxwell nous permettent de décrire les phénomènes électromagnétiques [8]. Les équations de Maxwell de base sont les suivantes :

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} = \mathbf{J} \quad ; \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \text{eq. 7}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = 0 \quad ; \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{eq. 8}$$

avec :

$\mathbf{H}$  : le champ magnétique.

$\mathbf{B}$  : l'induction magnétique.

$\mathbf{J}$  : la densité de courant.

$\mathbf{E}$  : le champ électrique.

$\mathbf{D}$  : le vecteur déplacement.

$\rho$  : la densité de charge électrique.

Pour compléter les équations de Maxwell, on ajoute les lois constitutives des matériaux définies comme suit :

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad \text{eq. 9}$$

---

---

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \quad \text{eq. 10}$$

où  $\varepsilon$  est la permittivité diélectrique du milieu et  $\mu$  la perméabilité magnétique. Si on combine les équations eq. 7 et eq. 8 avec les lois constitutives des matériaux eq. 9 et eq. 10, on obtient :

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \varepsilon \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad \text{eq. 11}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mu \mathbf{H}}{\partial t} \quad \text{eq. 12}$$

En général pour résoudre les équations de Maxwell eq. 7 et eq. 8, et déterminer les champs électromagnétiques, il est équivalent de connaître les potentiels vecteurs électrique  $\mathbf{F}$  et magnétique  $\mathbf{A}$ . Les potentiels vecteur électrique et magnétique sont reliés au champ électrique et au champ magnétique par les relations :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \text{eq. 13}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon} (\nabla \times \mathbf{F}) \quad \text{eq. 14}$$

### 3. La représentation multipolaire

Nous utilisons la représentation multipolaire réelle pour construire les sources équivalentes de champs électromagnétiques des systèmes ou sous systèmes. Cette représentation possède de nombreux avantages pour notre problématique. Elle permet la prise en compte des interactions à distance tout en limitant le nombre de paramètres représentatifs. Ce dernier est lié plutôt à la complexité du système à modéliser et la précision requise et non pas à la taille du système.

---

La représentation multipolaire des champs électromagnétiques se déduit du développement multipolaire en coordonnées sphériques des potentiels vecteurs magnétique  $\mathbf{A}$  et électrique  $\mathbf{F}$  en résolvant les équations d'ondes scalaire et vectorielle de Helmholtz.

En général :

$$\text{équation d'onde :} \quad \Delta \mathbf{u} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{X} \quad \text{eq. 15}$$

$$\text{équation de Helmholtz :} \quad \Delta \mathbf{u} + k^2 \mathbf{u} = \mathbf{X} \quad \text{eq. 16}$$

### 3.1. Equation d'onde

Pour retrouver l'équation d'onde on suppose que les propriétés du milieu ne dépendent pas du temps et on exprime le rotationnel des équations eq. 11 et eq. 12 , on obtient les expressions suivantes :

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) + \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \nabla \times \mathbf{J} = 0 \quad \text{eq. 17}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = 0 \quad \text{eq. 18}$$

En posant  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_S$  où  $\mathbf{J}_S$  représente la source et  $\sigma$  la conductivité du milieu, on retrouve les expressions suivantes :

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) + \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{J}_S = 0 \quad \text{eq. 19}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \frac{\partial \mathbf{J}_S}{\partial t} = 0 \quad \text{eq. 20}$$



Si on considère une région libre de sources, linéaire, homogène et isotrope, dans ce cas la densité de courant est nulle ( $\mathbf{J}_S=0$ ). Les expressions précédentes eq. 19 et eq. 20 deviennent :

$$\Delta(\mathbf{U}) - \varepsilon\mu \frac{\partial^2(\mathbf{U})}{\partial t^2} - \sigma\mu \frac{\partial(\mathbf{U})}{\partial t} = 0 \quad \text{eq. 21}$$

où  $\mathbf{U}$ , un vecteur représentant soit le champ électrique  $\mathbf{E}$  soit le champ magnétique  $\mathbf{H}$ .

### 3.2. Comportement en régime harmonique

Pour exprimer les équations de Maxwell en régime harmonique, on suppose une dépendance temporelle en  $e^{j\omega t}$ . Dans ce cas les équations de Maxwell sont directement tirées du régime temporel en remplaçant  $\frac{\partial}{\partial t}$  par  $j\omega$ .

Les équations eq. 21 peuvent alors s'écrire sous la forme suivante :

$$\Delta \mathbf{U} - \gamma^2 \mathbf{U} = 0 \quad \text{eq. 22}$$

Avec  $\gamma^2$  la constante de propagation qui peut prendre différentes valeurs suivant le milieu considéré, comme le montre le Tableau 1:

$\mu = 0$ (hypothèse mathématique) ou $\omega = 0$	$\sigma = 0$	$\varepsilon = 0$ (hypothèse mathématique)	$\mu \neq 0, \sigma \neq 0, \varepsilon \neq 0$
$\gamma^2 = 0$	$\gamma^2 = -\omega^2\mu\varepsilon$	$\gamma^2 = j\omega\mu\sigma$	$\gamma^2 = j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\varepsilon$

**Tableau 1 : Différentes expressions de la constante de propagation en fonction du milieu considéré**

---

Les propriétés des matériaux varient en fonction de la pulsation  $\omega$  et peuvent prendre des valeurs complexes, dans ce cas la constante de propagation  $\gamma^2$  est également un nombre complexe puisqu'elle dépend de  $\omega$ .

La constante de propagation, appelée aussi le nombre d'onde du milieu peut s'écrire sous la forme suivante :

eq. 23

La partie réelle  $\alpha$  représente la constante d'atténuation en (neper/m) et  $\beta$  représente la constante de phase en (rad/m) [9]. Dans un milieu dit « sans perte » comme le vide,  $\alpha$  devient nulle et égale à  $-\beta$ . Par contre pour un milieu « avec perte », la constante d'atténuation  $\alpha$  sera non nulle.

### 3.3. Solutions de l'équation de Helmholtz

Dans cette partie nous allons présenter la solution de l'équation de Helmholtz dans un système de coordonnées sphériques. Ce dernier permet de représenter le rayonnement de la source équivalente à des systèmes de différentes géométries. Pour la résolution de l'équation pour des systèmes de coordonnées rectangulaires ou cylindriques, il est intéressant de se reporter à [10].

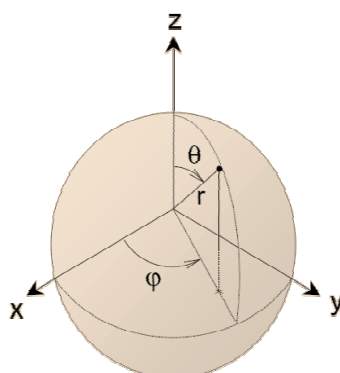


Figure.13 – Système de coordonnées sphériques

Pour un milieu « sans perte », l'équation eq. 22 se réduit à 3 équations au dérivées partielles scalaires découplées du 2<sup>ème</sup> degré de la forme :

$$\Delta\psi + \beta^2\psi = 0 \quad \text{eq. 24}$$

En coordonnées sphériques, l'expression eq. 24 devient :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \beta^2 \psi = 0 \quad \text{eq. 25}$$

On cherche  $\psi$  sous la forme :

$$\psi(r, \theta, \varphi) = f(r)g(\theta)h(\varphi) \quad \text{eq. 26}$$

En utilisant (26), (25) se réduit à 3 équations scalaires différentielles :

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{df}{dr} \right) + [(\beta r)^2 - n(n+1)]f = 0 \quad \text{eq. 27}$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{dg}{d\theta} \right) + \left[ n(n+1) - \left( \frac{m}{\sin\theta} \right)^2 \right] g = 0 \quad \text{eq. 28}$$

$$\frac{d^2 h}{d\varphi^2} = -m^2 \cdot h \quad \text{eq. 29}$$

où  $n$  et  $m$  sont des entiers appelés respectivement le degré et l'ordre azimutal du développement multipolaire.

On aura  $n = 1, 2, 3, \dots$  et  $m = -n, -n+1, \dots, 0, 1, \dots, n$

La solution de l'expression eq. 27 peut s'écrire sous deux formes :

$$f_1(r) = A_1 j_n(\beta r) + B_1 y_n(\beta r) \quad \text{eq. 30}$$

---

---

ou

$$f_2(r) = C_1 h_n^{(1)}(\beta r) + D_1 h_n^{(2)}(\beta r) \quad \text{eq. 31}$$

Les fonctions  $j_n$  et  $y_n$  sont connues sous le nom de fonctions de Bessel sphériques de première et de second espèce. Elles sont utilisées pour représenter les ondes stationnaires radiales et s'écrivent à l'aide des fonctions régulières de Bessel  $J_{n+\frac{1}{2}}$  et  $Y_{n+\frac{1}{2}}$ , comme suit :

$$j_n(\beta r) = \sqrt{\frac{\pi}{2\beta r}} J_{n+\frac{1}{2}}(\beta r) \quad \text{eq. 32}$$

$$y_n(\beta r) = \sqrt{\frac{\pi}{2\beta r}} Y_{n+\frac{1}{2}}(\beta r) \quad \text{eq. 33}$$

Les fonctions dans eq. 31,  $h_n^{(1)}$  et  $h_n^{(2)}$  sont connues sous le nom de fonctions de Hankel sphériques de première et de second espèces. Elles sont utilisées pour représenter les ondes progressives radiales et s'écrivent à l'aide des fonctions régulières de Hankel  $H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}$  et  $H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}$  :

$$h_n^{(1)}(\beta r) = \sqrt{\frac{\pi}{2\beta r}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(\beta r) \quad \text{eq. 34}$$

$$h_n^{(2)}(\beta r) = \sqrt{\frac{\pi}{2\beta r}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(\beta r) \quad \text{eq. 35}$$

La solution de l'eq. 28 s'écrit :

$$g_1(r) = A_2 P_n^m(\cos\theta) + B_2 P_n^m(-\cos\theta) \text{ pour } n \neq \text{entier} \quad \text{eq. 36}$$

ou

$$g_2(r) = C_2 P_n^m(\cos\theta) + D_2 Q_{nm}(\cos\theta) \text{ pour } n = \text{entier} \quad \text{eq. 37}$$

Les fonctions  $P_n^m$  et  $Q_{nm}$  sont respectivement les fonctions de Legendre associées de première et second espèces [10].

$$P_n^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{1/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x), \quad \forall |x| \leq 1, 0 \leq m \leq n \quad \text{eq. 38}$$

avec 
$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^n \quad \text{eq. 39}$$

soit 
$$\begin{cases} P_n^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^n n!} (x^2-1)^n \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} (1-x^2)^{m/2} \\ P_n^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x) \end{cases} \quad \forall |x| \leq 1, 0 \leq m \leq n \quad \text{eq. 40}$$

Les fonctions de Legendre associées  $P_n^m(\cos\theta)$  pour  $0 \leq n, m \leq 3$  sont résumés dans le tableau suivant [11] :

n	m			
	0	1	2	3
0	1	0	0	0
1	cosθ	-sinθ	0	0
2	$\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}$	-3sinθ cosθ	3sin <sup>2</sup> θ	0
3	$\frac{5\cos^3\theta - 3\cos\theta}{2}$	$-3\frac{5\cos^2\theta - 1}{2} \sin\theta$	15cosθsin <sup>2</sup> θ	-15sin <sup>3</sup> θ

**Tableau 2 : Les fonctions de Legendre associées pour  $0 \leq n, m \leq 3$**

La solution  $h$  de l'équation différentielle scalaire eq. 29 s'écrit :

$$h_1(r) = A_3 e^{-jm\varphi} + B_3 e^{jm\varphi} \quad \text{eq. 41}$$

ou

$$h_2(r) = C_3 \cos(m\varphi) + D_3 \sin(m\varphi) \quad \text{eq. 42}$$

De ce qui précède, on peut en déduire les solutions de l'équation (24) dans un système de coordonnées sphériques, dans le cas d'un milieu « sans pertes » par les fonctions résumées dans le Tableau 3 .

Type d'onde	Fonctions de l'onde	Zéros de la fonction	Infinités de la fonction
Ondes progressives	$h_n^{(1)}(\beta r) = j_n(\beta r) + jy_n(\beta r)$ suivant (-r)	$\beta r \rightarrow +j\infty$	$\beta r = 0$ $\beta r \rightarrow -j\infty$
	$h_n^{(2)}(\beta r) = j_n(\beta r) - jy_n(\beta r)$ suivant (+r)	$\beta r \rightarrow -j\infty$	$\beta r = 0$ $\beta r \rightarrow +j\infty$
Ondes stationnaires	$j_n(\beta r)$ pour $\pm r$	Infinité de nombres	$\beta r = 0$
	$y_n(\beta r)$ pour $\pm r$	Infinité de nombres	$\beta r \rightarrow \pm j\infty$

**Tableau 3 : Fonctions d'ondes, zéros et infinités des fonctions d'ondes radiales en coordonnées sphériques**

### 3.4. Potentiels vecteurs magnétique $A$ et électrique $F$

La résolution des équations d'ondes scalaire et vectorielle de Helmholtz, nous permet d'explicitier le développement multipolaire en coordonnées sphériques des potentiels vecteurs magnétique et électrique. Par la suite on peut en déduire l'expression du développement multipolaire des champs électromagnétiques à partir des potentiels vecteurs.

Pour déterminer le développement multipolaire des potentiels vecteurs magnétique et électrique, on part des équations eq. 13 et eq. 14 . Dans un régime libre de sources, si on introduit le rotationnel, les deux expressions deviennent :

---

---

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad \text{eq. 43}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon} (\nabla \times \mathbf{F}) \right) = 0 \quad \text{eq. 44}$$

Les potentiels vecteurs magnétique et électrique doivent satisfaire l'équation d'onde vectorielle d'où :

$$\Delta \mathbf{A} + \beta^2 \mathbf{A} = 0 \quad \text{eq. 45}$$

$$\Delta \mathbf{F} + \beta^2 \mathbf{F} = 0 \quad \text{eq. 46}$$

avec  $\beta^2 = \omega^2 \varepsilon \mu$  (milieu sans pertes)

Il existe plusieurs modes de propagation qui vérifient les équations de Maxwell, on retrouve le mode transverse électrique (TE) et le mode transverse magnétique (TM). Le mode de propagation TE correspond au cas où le champ électrique est orthogonal à la direction de propagation, et pour le mode TM, c'est le champ magnétique qui est orthogonal à la direction de propagation.

En coordonnées sphériques, les potentiels vecteurs magnétique et électrique sont des vecteurs orientés suivant le vecteur unité  $\hat{a}_r$ , leurs expressions peuvent donc s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{A} = \hat{a}_r A_r(r, \theta, \varphi) \quad \text{eq. 47}$$

$$\mathbf{F} = \hat{a}_r F_r(r, \theta, \varphi) \quad \text{eq. 48}$$

Si on remplace les expressions des potentiels vecteurs eq. 47 et eq. 48 dans eq. 45 et eq. 46, on obtient :

$$(\Delta + \beta^2) \frac{A_r}{r} = 0 \quad \text{eq. 49}$$

$$(\Delta + \beta^2) \frac{F_r}{r} = 0 \quad \text{eq. 50}$$

Les solutions des potentiels vecteurs magnétique  $A_r$  et électrique  $F_r$  de eq. 49 et eq. 50 peuvent s'écrire comme dans le cas de eq. 24 sous la forme de fonctions à variables séparées :

$$\left. \begin{array}{l} A_r(r, \theta, \varphi) \\ F_r(r, \theta, \varphi) \end{array} \right\} = f(r)g(\theta)h(\varphi) \quad \text{eq. 51}$$

Comme dans le cas précédent, les solutions de  $\psi$  données par eq. 26 multipliées par  $r$  nous permet d'obtenir les solutions  $A_r$  et  $F_r$  de eq. 50 et eq. 51. Les fonctions  $g$  et  $h$  sont les mêmes que dans le cas de  $\psi$ , seule la représentation des fonctions  $f$  sera différente. Il est plus facile de représenter les fonctions  $f$  par des fonctions de Bessel et Hankel sphériques modifiées notées  $\hat{B}_n$  qui désigne  $(\hat{J}_n, \hat{Y}_n, \hat{H}_n^{(1)}, \hat{H}_n^{(2)})$ . Elles sont reliées aux fonctions de Bessel sphériques régulières notées  $b_n$  pour  $(j_n, y_n, h_n^{(1)}, h_n^{(2)})$  par la relation suivante :

$$\hat{B}_n(\beta r) = \beta r b_n(\beta r) = \beta r \sqrt{\frac{\pi}{2\beta r}} B_{n+\frac{1}{2}}(\beta r) = \sqrt{\frac{\pi\beta r}{2}} B_{n+\frac{1}{2}}(\beta r) \quad \text{eq. 52}$$

avec  $B_{n+\frac{1}{2}}$  les fonctions de Bessel et Hankel cylindriques régulières.

Ces nouvelles fonctions sphériques de Bessel et Hankel ont été introduites par Schelkunoff [12] et vérifient l'équation différentielle suivante :

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \beta^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] \hat{B}_n = 0 \quad \text{eq. 53}$$



Les solutions de la fonction  $f$  prennent alors la forme suivante :

$$f_1(r) = A_1 \hat{J}_n(\beta r) + B_1 \hat{Y}_n(\beta r) \quad \text{eq. 54}$$

ou

$$f_2(r) = C_1 \hat{H}_n^{(1)}(\beta r) + D_1 \hat{H}_n^{(2)}(\beta r) \quad \text{eq. 55}$$

Il faut noter que les fonctions  $\hat{J}_n(\beta r)$  et  $\hat{Y}_n(\beta r)$  correspondent à des ondes stationnaires et les fonctions  $\hat{H}_n^{(1)}$  et  $\hat{H}_n^{(2)}$  à des ondes progressives.

Les solutions de eq. 50 et eq. 51 s'écrivent comme le produit des fonctions d'ondes sphériques appropriées  $f$ ,  $g$  et  $h$ . De ces solutions, on en déduit les expressions du développement multipolaire des potentiels vecteurs magnétique  $A_r$  et électrique  $F_r$  :

$$F_r(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n Q_{1nm} \hat{B}_n(\beta r) P_n^m(\cos\theta) e^{jm\varphi} \quad \text{eq. 56}$$

$$A_r(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n Q_{2nm} \hat{B}_n(\beta r) P_n^m(\cos\theta) e^{jm\varphi} \quad \text{eq. 57}$$

$Q_{1nm}$  et  $Q_{2nm}$  sont les coefficients associés respectivement aux modes TE et TM. Ce sont les coefficients à identifier pour construire la source équivalente d'un système.

Ce développement n'est valable que lorsque le champ est calculé à l'extérieur d'une sphère de validité de rayon  $r \geq r_2$  comme le montre Figure.14 .

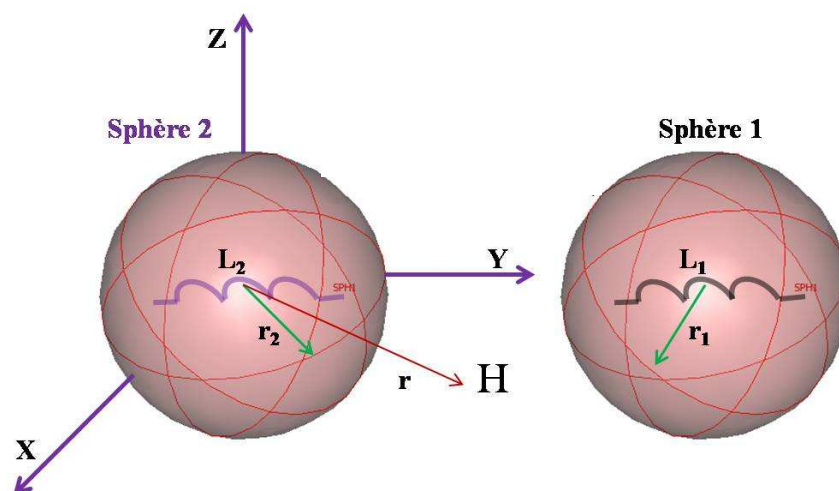


Figure.14 – Représentations de deux sources rayonnantes

#### 4. Expression des composantes des champs électrique $E$ et magnétique

##### $H$

Le développement multipolaire des champs électrique  $E$  et magnétique  $H$  peut être déterminé de deux façons : à partir des potentiels vecteurs magnétique  $A_r$  et électrique  $F_r$ , d'après les relations eq. 13 et eq. 14, sinon directement des vecteurs d'onde sphériques.

##### 4.1. Ecriture à partir des potentiels vecteurs magnétique et électrique

A partir du développement multipolaire en coordonnées sphériques des potentiels vecteurs magnétique  $A_r$  (eq. 57) et électrique  $F_r$  (eq. 56), on obtient les expressions des champs magnétique et électrique d'un système rayonnant quelconque, dans le cas où on combine les modes TE et TM.

##### 4.1.1 Champ électrique

L'expression du champ électrique en coordonnées sphériques d'un système quelconque est la suivante :

$$\mathbf{E}(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} \frac{1}{j\omega\mu\epsilon} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \beta^2 \right) A_r \hat{a}_r \\ \left( -\frac{1}{\epsilon r \sin\theta} \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} + \frac{1}{j\omega\mu\epsilon r} \frac{\partial^2 A_r}{\partial r \partial \theta} \right) \hat{a}_\theta \\ \left( \frac{1}{\epsilon r} \frac{\partial F_r}{\partial \theta} + \frac{1}{j\omega\mu\epsilon r \sin\theta} \frac{\partial^2 A_r}{\partial r \partial \varphi} \right) \hat{a}_\varphi \end{cases} \quad \text{eq. 58}$$

On remplace les expressions des potentiels vecteurs magnétique  $A_r$  (eq. 57) et électrique  $F_r$  (eq. 56), dans l'expression précédente du champ électrique eq. 58, pour obtenir l'expression du champ électrique en fonction des coefficients associés  $Q_{1nm}$  et  $Q_{2nm}$  qui représentent les paramètres à déterminer pour construire les sources équivalentes.

L'expression du champ électrique devient :

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{1}{j\omega\mu\epsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \beta^2 \right) Q_{2nm} \hat{B}_n(\beta r) P_n^m(\cos\theta) e^{jm\varphi} \\ &= \frac{1}{j\omega\mu\epsilon r^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n n(n+1) Q_{2nm} \hat{B}_n(\beta r) P_n^m(\cos\theta) e^{jm\varphi} \end{aligned} \quad \text{eq. 59}$$

$$\begin{aligned} E_\theta &= -\frac{1}{\epsilon r \sin\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n jm Q_{1nm} \hat{B}_n(\beta r) P_n^m(\cos\theta) e^{jm\varphi} \\ &\quad + \frac{1}{j\omega\mu\epsilon r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n Q_{2nm} \frac{d\hat{B}_n(\beta r)}{dr} \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} e^{jm\varphi} \end{aligned} \quad \text{eq. 60}$$

$$\begin{aligned} E_\varphi &= \frac{1}{\epsilon r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n Q_{1nm} \hat{B}_n(\beta r) \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} e^{jm\varphi} \\ &\quad + \frac{1}{j\omega\mu\epsilon r \sin\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n jm Q_{2nm} \frac{d\hat{B}_n(\beta r)}{dr} P_n^m(\cos\theta) e^{jm\varphi} \end{aligned} \quad \text{eq. 61}$$

### 4.1.2 Champ magnétique

De même que dans le cas du champ électrique, à partir des potentiels vecteurs magnétique et électrique, l'expression du champ magnétique en coordonnées sphériques est la suivante :

$$\mathbf{H}(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{j\omega\mu\epsilon} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \beta^2 \right) F_r \hat{a}_r \\ \left( -\frac{1}{\mu r \sin\theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \frac{1}{j\omega\mu\epsilon r} \frac{\partial^2 F_r}{\partial r \partial \theta} \right) \hat{a}_\theta \\ \left( -\frac{1}{\mu r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} + \frac{1}{j\omega\mu\epsilon r \sin\theta} \frac{\partial^2 F_r}{\partial r \partial \varphi} \right) \hat{a}_\varphi \end{pmatrix} \quad \text{eq. 62}$$

L'expression du champ magnétique en fonction des coefficients associés  $Q_{1nm}$  et  $Q_{2nm}$  est :

$$\begin{aligned} H_r &= \frac{1}{j\omega\mu\epsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \beta^2 \right) Q_{1nm} \hat{B}_n(\beta r) P_n^m(\cos\theta) e^{jm\varphi} \\ &= \frac{1}{j\omega\mu\epsilon r^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n n(n+1) Q_{1nm} \hat{B}_n(\beta r) P_n^m(\cos\theta) e^{jm\varphi} \end{aligned} \quad \text{eq. 63}$$

$$\begin{aligned} H_\theta &= \frac{1}{\mu r \sin\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n jm Q_{2nm} \hat{B}_n(\beta r) P_n^m(\cos\theta) e^{jm\varphi} \\ &\quad + \frac{1}{j\omega\mu\epsilon r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n Q_{1nm} \frac{d\hat{B}_n(\beta r)}{dr} \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} e^{jm\varphi} \end{aligned} \quad \text{eq. 64}$$

$$\begin{aligned} H_\varphi &= -\frac{1}{\mu r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n Q_{2nm} \hat{B}_n(\beta r) \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} e^{jm\varphi} \\ &\quad + \frac{1}{j\omega\mu\epsilon r \sin\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n jm Q_{1nm} \frac{d\hat{B}_n(\beta r)}{dr} P_n^m(\cos\theta) e^{jm\varphi} \end{aligned} \quad \text{eq. 65}$$

---

## 4.2. Ecriture à partir des vecteurs d'ondes sphériques

D'autres écritures plus compactes sont utilisées dans la communauté antenniste, elles sont tirées de [13] ou de [14] et reprise dans [15]. A partir de la solution génératrice de l'équation d'Helmholtz scalaire eq. 24 :

$$\psi_{nm}(r, \theta, \varphi) = \frac{j}{\sqrt{n(n+1)}} Q_{nm} b_n(\beta r) Y_n^m(\theta, \varphi) \quad \text{eq. 66}$$

avec  $b_n$  les fonctions sphériques régulières de Bessel et Hankel, et  $Y_n^m$  les harmoniques sphériques complexes considérées dans [16], elles sont définies comme suivant :

$$Y_n^m(\theta, \varphi) = \theta_n^m(\theta) \Phi_n^m(\varphi) \quad \text{eq. 67}$$

où

$$\theta_n^m(\theta) = \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{2(n+m)!}} P_n^m(\cos\theta) \quad \text{eq. 68}$$

et

$$\Phi_n^m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{jm\varphi} \quad \text{eq. 69}$$

On introduit parfois un facteur  $(-1)^m$  dans eq. 68 qui correspond à la convention de phase de Condon-Shortley. Cette convention est très utilisée en mécanique quantique mais elle n'est pas obligatoire.

La Figure.15 [17] représente les fonctions harmoniques sphériques de degré et d'ordre variables, en rouge les zones positives, en bleu les zones négatives, et en blanc les passages par zéro. Les cas  $n=1$  et  $n=2$  correspondent respectivement à la représentation du rayonnement du dipôle et du quadripôle.

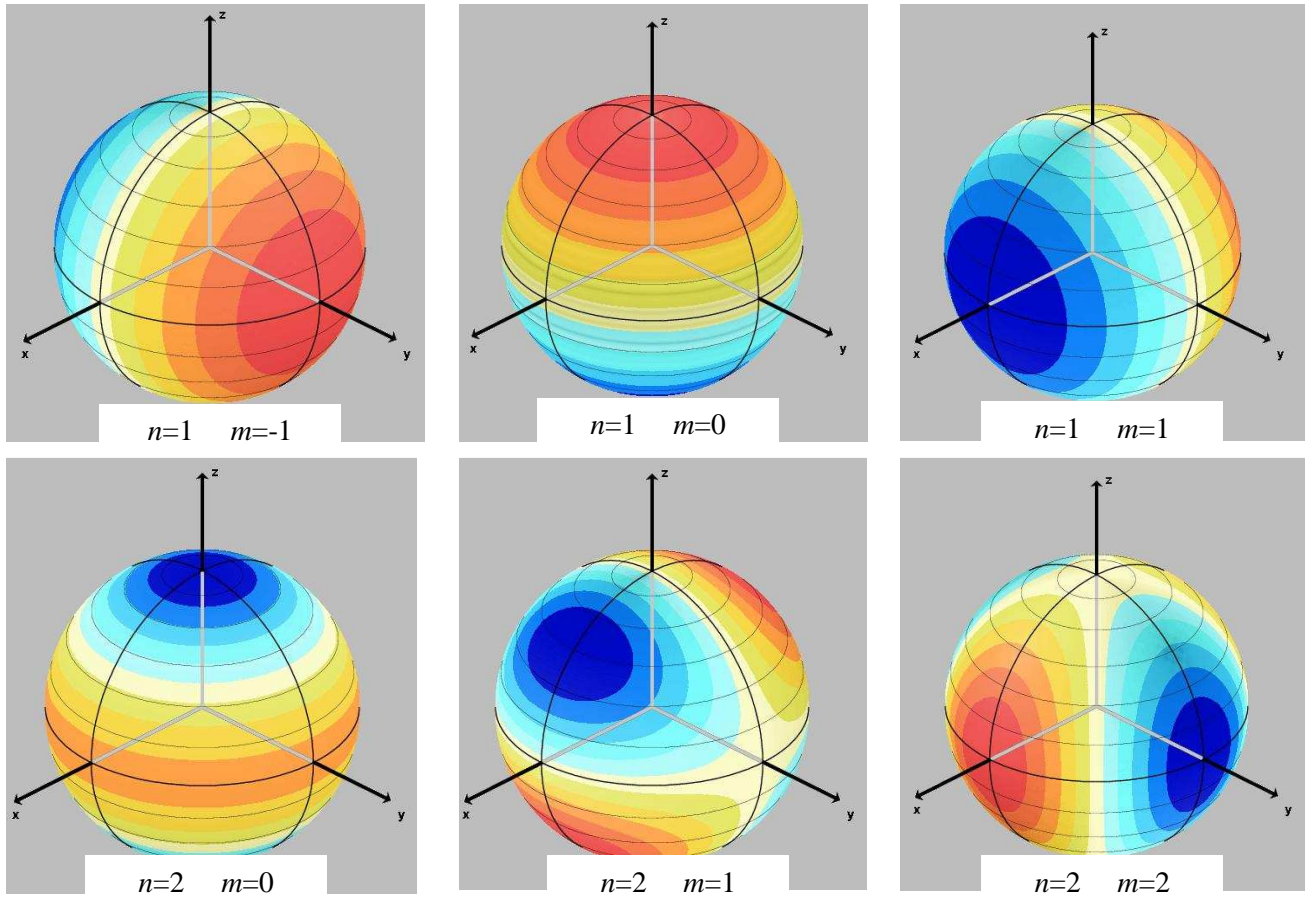


Figure.15 – Les harmoniques sphériques de degré et d'ordre variables.

Les vecteurs d'ondes qui nous permettent de représenter le développement multipolaire en coordonnées sphériques du champ électrique et du champ magnétique sont définis en fonction de la solution de l'équation d'Helmholtz scalaire eq. 66 comme suivant :

$$\mathbf{L}_{nm} = \vec{\nabla} \psi \quad \text{eq. 70}$$

$$\mathbf{F}_{1nm} = \vec{\nabla} \times (\hat{\mathbf{r}} \psi) = \vec{\nabla} \psi \times \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{L}_{nm} \hat{\mathbf{r}} \quad \text{eq. 71}$$

$$\mathbf{F}_{2nm} = \frac{1}{\beta} \vec{\nabla} \times \mathbf{F}_{1nm} = \frac{1}{\beta} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (\hat{\mathbf{r}} \psi) \quad \text{eq. 72}$$

On peut remarquer que les vecteurs  $\mathbf{L}_{nm}$  et  $\mathbf{F}_{1nm}$  sont orthogonaux, il en est de même pour  $\mathbf{F}_{1nm}$  et  $\mathbf{F}_{2nm}$  en plus du fait qu'ils sont à divergence nulle et à rotationnel non nul,

contrairement au vecteur  $\mathbf{L}_{nm}$  qui est à rotationnel nul et à divergence non nulle. De plus, une simple vérification montre que ces trois vecteurs vérifient l'équation vectorielle de Helmholtz.

Finalement, les trois vecteurs d'ondes  $\mathbf{L}_{nm}$ ,  $\mathbf{F}_{1nm}$  et  $\mathbf{F}_{2nm}$  forment une famille libre de solutions de l'équation vectorielle d'Helmholtz. Ils représentent les vecteurs modaux sphériques, toute combinaison linéaire de ces trois familles de fonctions est également solution de l'équation vectorielle d'Helmholtz. On parle alors de l'expansion modale du champ électromagnétique. L'unicité de cette expansion dépend alors des conditions aux limites imposées par le problème.

Les vecteurs  $\mathbf{F}_{1nm}$  et  $\mathbf{F}_{2nm}$  étant à divergence nulle, ils vérifient la condition d'un espace libre de source. Ce n'est pas le cas de  $\mathbf{L}_{nm}$  qui caractérise les charges, pour cela on ne s'intéressera pas à ce vecteur dans notre étude.

Les vecteurs d'ondes sphériques  $\mathbf{F}_{1nm}$  et  $\mathbf{F}_{2nm}$  sont solutions des équations de Maxwell dans un espace libre de source à l'extérieur de la sphère minimum qui englobe toutes les sources. Par contre l'expansion du champ électromagnétique en fonction de ces deux vecteurs n'est valide qu'à l'extérieur de la sphère minimum comme indiqué sur Figure.14 .

Si on remplace eq. 66 dans les deux expressions eq. 71 et eq. 72 , les vecteurs d'ondes sphériques deviennent :

$$\mathbf{F}_{1nm}(r, \theta, \varphi) = N_n^m \begin{cases} 0\hat{a}_r \\ +b_n(kr) \frac{jnP_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} e^{jm\varphi} \hat{a}_\theta \\ -b_n(kr) \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} e^{jm\varphi} \hat{a}_\varphi \end{cases} \quad \text{eq. 73}$$

$$\mathbf{F}_{2nm}(r, \theta, \varphi) = N_n^m \begin{cases} n(n+1) \frac{b_n(kr)}{kr} P_n^m(\cos\theta) e^{jm\varphi} \hat{a}_r \\ + \frac{1}{kr} \frac{d}{d(kr)} \{kr b_n(kr)\} \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} e^{jm\varphi} \hat{a}_\theta \\ + \frac{1}{kr} \frac{d}{d(kr)} \{kr b_n(kr)\} \frac{jnP_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} e^{jm\varphi} \hat{a}_\varphi \end{cases} \quad \text{eq. 74}$$

avec  $N_n^m = j \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi\sqrt{n(n+1)}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}}$  le facteur de normalisation.  $k$  est la constante de phase, si

l'on souhaite étudier un milieu avec perte, il faudra prendre  $k = -j\gamma = \beta - j\alpha$ .

Les champs électrique  $\mathbf{E}$  et magnétique  $\mathbf{H}$  peuvent s'écrire en fonction des vecteurs d'ondes sous la forme suivante :

$$\mathbf{E}(r, \theta, \varphi) = \sum_{s=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n Q_{snm} \mathbf{F}_{snm}(r, \theta, \varphi) \quad \text{eq. 75}$$

$$\mathbf{H}(r, \theta, \varphi) = \frac{j}{\eta} \sum_{s=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n Q_{snm} \mathbf{F}_{3-snm}(r, \theta, \varphi) \quad \text{eq. 76}$$

avec  $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$  l'impédance intrinsèque du milieu considéré. Pour un milieu avec perte  $\eta$  est remplacée par l'impédance d'onde  $Z_w$ , voir Tableau 4, et  $s$  correspond à 1 ou 2 pour définir respectivement les coefficients associés aux modes TE et TM.

	Valeur exacte	Bon diélectrique $\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2 \ll 1$	Bon conducteur $\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2 \gg 1$
Constante d'atténuation $\alpha$	$= \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1 \right] \right\}^{1/2}$	$\approx \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$	$\approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$
Constante de phase $\beta$	$= \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} + 1 \right] \right\}^{1/2}$	$\approx \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$	$\approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$
Impédance d'onde $Z_w$	$= \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}$	$\approx \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$	$\approx \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}(1 + j)$
Longueur d'onde $\lambda$	$= \frac{2\pi}{\beta}$	$\approx \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}$	$\approx 2\pi \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$



Vitesse de propagation $\nu$	$= \frac{\omega}{\beta}$	$\simeq \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$	$\simeq \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}$
Epaisseur de peau $\delta$	$= \frac{1}{\alpha}$	$\simeq \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}$	$\simeq \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$

**Tableau 4 : Constante de propagation, impédance d'onde, longueur d'onde, vitesse et épaisseur de peau dans un milieu avec pertes.**

### 4.3. En champ lointain

Les vecteurs d'ondes sphériques  $\mathbf{K}_{snm}$ , correspondent à un point d'observation qui se situe en zone de champ lointain. Ces vecteurs n'ont pas de dépendance radiale et servent à décrire la distribution angulaire du champ lointain. Ils sont appelés diagrammes de rayonnement en champ lointain [15] et s'expriment sous la forme suivante :

$$\mathbf{K}_{snm}(\theta, \varphi) = \lim_{kr \rightarrow \infty} \sqrt{4\pi} \frac{kr}{e^{-jkr}} \mathbf{F}_{snm}(r, \theta, \varphi) \quad \text{eq. 77}$$

d'où

$$\mathbf{K}_{1nm}(\theta, \varphi) = \sqrt{4\pi} e^{jm\varphi} (-j)^{n+1} N_n^m \left| \begin{array}{l} + \frac{jmP_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \hat{a}_\theta \\ - \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \hat{a}_\varphi \end{array} \right. \quad \text{eq. 78}$$

$$\mathbf{K}_{2nm}(\theta, \varphi) = \sqrt{4\pi} e^{jm\varphi} (-j)^n N_n^m \left| \begin{array}{l} + \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \hat{a}_\theta \\ + \frac{jmP_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \hat{a}_\varphi \end{array} \right. \quad \text{eq. 79}$$

#### 4.4. En champ proche

En partant de l'expression générale des champs électromagnétiques rayonnés eq. 75 et eq. 76 pour une onde progressive suivant  $r$ , on montre qu'il existe une certaine continuité entre les expressions des champs électromagnétiques en champ proche et en champ lointain.

Dans ce cas, les équations en dehors de la sphère de validité sont :

$$\mathbf{E} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n N_n^m e^{jm\varphi} \left| \begin{array}{l} Q_{2nm} n(n+1) \frac{h_n(kr)}{kr} P_n^m(\cos\theta) \hat{a}_r \\ + Q_{1nm} h_n(kr) \frac{jm P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \hat{a}_\theta + Q_{2nm} \frac{1}{kr} \frac{d}{d(kr)} \{kr h_n(kr)\} \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \hat{a}_\theta \\ - Q_{1nm} h_n(kr) \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \hat{a}_\varphi + Q_{2nm} \frac{1}{kr} \frac{d}{d(kr)} \{kr h_n(kr)\} \frac{jm P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \hat{a}_\varphi \end{array} \right. \quad \text{eq. 80}$$

$$\mathbf{H} = \frac{j}{\eta} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n N_n^m e^{jm\varphi} \left| \begin{array}{l} Q_{1nm} n(n+1) \frac{h_n(kr)}{kr} P_n^m(\cos\theta) \hat{a}_r \\ + Q_{2nm} h_n(kr) \frac{jm P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \hat{a}_\theta + Q_{1nm} \frac{1}{kr} \frac{d}{d(kr)} \{kr h_n(kr)\} \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \hat{a}_\theta \\ - Q_{2nm} h_n(kr) \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \hat{a}_\varphi + Q_{1nm} \frac{1}{kr} \frac{d}{d(kr)} \{kr h_n(kr)\} \frac{jm P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \hat{a}_\varphi \end{array} \right. \quad \text{eq. 81}$$

Pour simplifier les deux expressions et retrouver le développement multipolaire des champs électrique et magnétique dans le cas d'une source électrique et d'une source magnétique, on utilise les expressions qui suivent et qui nous permettent de déterminer la limite des fonctions de Bessel sphériques lorsque  $kr \ll 1$ .

$$\lim_{z \rightarrow 0} h_n(z) \rightarrow \frac{z^n}{(2n+1)!!} \pm j \frac{(2n)!}{n! 2^n} \frac{1}{z^{n+1}} \rightarrow \begin{cases} \pm j \frac{1}{z} \text{ si } n = 0 \\ \pm j \frac{(2n-1)!}{z^{n+1}} \text{ si } n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad \text{eq. 82}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} \frac{d}{dz} \{zh_n(z)\} \rightarrow \begin{cases} \pm j 0 \text{ si } n = 0 \\ \pm j n \frac{(2n-1)!!}{z^{n+2}} \text{ si } n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad \text{eq. 83}$$

#### 4.4.1 Source magnétique

Dans le cas d'une source magnétique en champ proche basse impédance, les coefficients associés au mode transverse magnétique sont négligeables puisque le champ électrique est considéré négligeable devant le champ magnétique. Dans ce cas les champs électrique et magnétique dépendent seulement des coefficients associés au mode transverse électrique, d'où les relations suivantes :

$$\mathbf{E} = kr \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{(2n-1)!!}{(kr)^{n+2}} N_n^m e^{jm\varphi} Q_{1nm} \begin{vmatrix} 0 \hat{a}_r \\ \frac{jmP_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \hat{a}_\theta \\ -\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \hat{a}_\varphi \end{vmatrix} \quad \text{eq. 84}$$

$$\mathbf{H} = \frac{j}{\eta} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{(2n-1)!!}{(kr)^{n+2}} N_n^m e^{jm\varphi} Q_{1nm} \begin{vmatrix} n(n+1)P_n^m(\cos\theta) \hat{a}_r \\ -n \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \hat{a}_\theta \\ -n \frac{jmP_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \hat{a}_\varphi \end{vmatrix} \quad \text{eq. 85}$$

En faisant le rapport ( $E_\varphi/H_\theta$ ) pour  $\cos\theta = 1$ , on retrouve l'impédance d'onde d'une source magnétique :

$$Z_w = \frac{2\pi r}{\lambda} \eta \quad \text{eq. 86}$$

Ce développement est hiérarchique, les composantes d'ordre  $n$  du champ décroissent comme  $\frac{1}{r^{n+2}}$ , plus on s'éloigne de la source et moins l'ordre de la décomposition a besoin d'être élevé pour exprimer le champ. Ainsi une décomposition limitée à l'ordre 2 est généralement jugée suffisante au-delà de la distance de mesure [18].

---



---

#### 4.4.2 Source électrique

Contrairement au cas d'une source magnétique, pour une source électrique c'est plutôt les coefficients associés au mode transverse électrique qui sont négligeables. Dans ce cas les champs électrique et magnétique dépendent uniquement des coefficients associés au mode transverse magnétique d'où les expressions suivantes :

$$\mathbf{E} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{(2n-1)!!}{(kr)^{n+2}} N_n^m e^{jm\varphi} Q_{2nm} \begin{vmatrix} n(n+1)P_n^m(\cos\theta)\hat{a}_r \\ -n \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \hat{a}_\theta \\ -n \frac{jmP_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \hat{a}_\varphi \end{vmatrix} \quad \text{eq. 87}$$

$$\mathbf{H} = j \frac{kr}{\eta} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{(2n-1)!!}{(kr)^{n+2}} N_n^m e^{jm\varphi} Q_{2nm} \begin{vmatrix} + \frac{jmP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \hat{a}_\theta \\ - \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \hat{a}_\varphi \end{vmatrix} \quad \text{eq. 88}$$

En faisant le rapport  $(E_\theta/H_\varphi)$  pour  $\cos\theta = 1$ , on retrouve l'impédance d'onde d'une source électrique :

$$Z_w = \frac{\lambda}{2\pi r} \eta \quad \text{eq. 89}$$

Par conséquent, il suffit de mesurer par exemple en champ proche les composantes radiales des champs électrique et magnétique pour déterminer les coefficients associés  $Q_{1nm}$  et  $Q_{2nm}$  du développement multipolaire, qui permettent de représenter la source équivalente des champs électrique et magnétique rayonnés partout dans l'espace, en champ proche comme en champ lointain.

## 5. Coefficients du développement multipolaire

Les coefficients du développement multipolaire  $Q_{snm}$  sont les paramètres à identifier pour représenter la source équivalente du rayonnement d'un système. Ces coefficients sont fonction des champs électrique et magnétique d'après eq. 80 et eq. 81, donc il suffit de déterminer les champs électrique et magnétique par la mesure ou la simulation pour en déduire la valeur des coefficients du développement multipolaire.

### 5.1. Identification des coefficients

Pour identifier les coefficients du développement multipolaire, il suffit d'utiliser les expressions des champs électrique et magnétique d'après eq. 80 et eq. 81 pour en déduire par la suite les relations suivantes :

$$Q_{1nm} = -j\eta \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi H_r(r_0, \theta, \varphi) (N_n^m n(n+1) \frac{b_n(kr_0)}{kr_0} P_n^m(\cos\theta) e^{jm\varphi}) \sin\theta d\theta d\varphi}{\left(\frac{|b_n(kr_0)|}{kr_0}\right)^2 n(n+1)} \quad \text{eq. 90}$$

$$Q_{2nm} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi E_r(r_0, \theta, \varphi) (N_n^m n(n+1) \frac{b_n(kr_0)}{kr_0} P_n^m(\cos\theta) e^{jm\varphi}) \sin\theta d\theta d\varphi}{\left(\frac{|b_n(kr_0)|}{kr_0}\right)^2 n(n+1)} \quad \text{eq. 91}$$

Les expressions des coefficients du développement multipolaire peuvent être simplifiées, et deviennent :

$$Q_{1nm} = -j\eta N_n^m \frac{kr_0}{b_n(kr_0)} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi H_r(r_0, \theta, \varphi) e^{-jm\varphi} P_n^m(\cos\theta) \sin\theta d\theta d\varphi \quad \text{eq. 92}$$

$$Q_{2nm} = N_n^m \frac{kr_0}{b_n(kr_0)} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi E_r(r_0, \theta, \varphi) e^{-jm\varphi} P_n^m(\cos\theta) \sin\theta d\theta d\varphi \quad \text{eq. 93}$$

---

Comme on peut le remarquer, les coefficients du développement multipolaire sont en fonction de  $H_r(r_0, \theta, \varphi)$  et  $E_r(r_0, \theta, \varphi)$  qui correspondent aux mesures des composantes radiales des champs sur une sphère de rayon  $r_0$ .

Les composantes radiales des champs électrique et magnétique sont toujours découplées. Ce n'est pas le cas des composantes transverses, qui sont simplement découplées en champ proche. Si on n'est plus en champ proche, dans ce cas il faut obligatoirement mesurer les deux composantes transverses de chacun des champs électrique et magnétique.

Pour l'identification du coefficient  $Q_{1nm}$  associé au champ magnétique, il est possible d'utiliser un capteur sous la forme d'une association de spires mesurant le flux généré par la source et ainsi réaliser l'équivalent de l'intégrale figurant dans eq. 92. Cette méthode de mesure sera détaillée dans le chapitre III.

Par la suite dans le paragraphe qui concerne le calcul du couplage, on remarquera qu'il est important de représenter les sources de chacun des systèmes dans le même repère pour pouvoir déterminer le couplage entre elles, pour cela il est nécessaire de faire un changement de repère.

## 5.2. Rotation du repère

Dans [19], est décrite la démarche permettant d'obtenir les matrices de rotation des coefficients complexes ou réels. Le lien [20] propose également une série de scripts sous Matlab autour des harmoniques sphériques. Par exemple, le fichier « plm2rot.m » permet de faire tourner une source en réarrangeant les coefficients de transmission. Deux algorithmes sont disponibles, celui de « Blanco » et un autre nommé « dlmb ».

## 5.3. Translation du repère

La translation est basée sur le théorème « Addition Theorem for Vector Spherical Harmonics » qui est détaillé dans [11].

Le théorème d'addition pour les vecteurs d'ondes sphériques relie les harmoniques évalués en  $\vec{r}$  à ceux évalués en  $\vec{r}'$ , où  $\vec{r}'$  est mesuré à partir de l'origine du second repère, dont les axes sont parallèles à ceux du repère initial. L'origine du second repère est localisé dans le

premier par  $\vec{\mathbf{r}}''$ . La Figure.16 représente le schéma de la translation d'un repère par les vecteurs d'ondes sphériques.

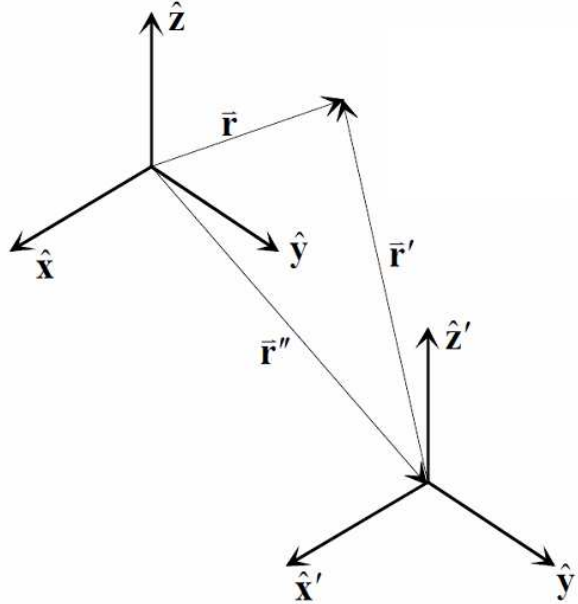


Figure.16 – Translation d'un repère pour les vecteurs d'ondes sphériques.

Ces trois vecteurs sont reliés par l'addition  $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}' + \vec{\mathbf{r}}''$ , c'est pourquoi le théorème est appelé ainsi. Pour localiser l'origine du second repère par rapport au premier, on utilise la relation suivante :

$$\vec{\mathbf{r}}'' = r'' [\sin\theta'' \cos\varphi'' \hat{\mathbf{x}}_1 + \sin\theta'' \sin\varphi'' \hat{\mathbf{x}}_2 + \cos\theta'' \hat{\mathbf{x}}_3] \quad \text{eq. 94}$$

Les fonctions d'ondes sphériques  $\mathbf{F}_{1nm}$  et  $\mathbf{F}_{2nm}$  peuvent s'écrire dans un repère translaté sous la forme suivante [11]:

$$\mathbf{F}_{1nm}(\mathbf{r}) = \sum_{n',m'} A_{n',m';n,m} \mathbf{F}_{1n'm'}(\mathbf{r}') + B_{n',m';n,m} \mathbf{F}_{2n'm'}(\mathbf{r}') \quad \text{eq. 95}$$

$$\mathbf{F}_{2nm}(\mathbf{r}) = \sum_{n',m'} A_{n',m';n,m} \mathbf{F}_{2n'm'}(\mathbf{r}') + B_{n',m';n,m} \mathbf{F}_{1n'm'}(\mathbf{r}') \quad \text{eq. 96}$$

D'où l'expression des coefficients du développement multipolaire dans le repère translaté:

$$Q_{1n'm'} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{n',m';n,m} Q_{1nm} + B_{n',m';n,m} Q_{2nm} \quad \text{eq. 97}$$

$$Q_{2n'm'} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{n',m';n,m} Q_{2nm} + B_{n',m';n,m} Q_{1nm} \quad \text{eq. 98}$$

avec :

$$A_{n',m';n,m} = \frac{2\pi j^{n'-n}}{\sqrt{n(n+1)n'(n'+1)}} \sum_{\substack{n''=|n-n'|, \\ 2+|n-n'|, \dots}}^{n+n'} \left[ j^{n''} [n(n+1) + n'(n'+1) - n(n+1)] A(m, n, -m', n', n'') b_{n''}(kr'') Y_{n'', m-m'}(\theta'', \varphi'') \right] \quad \text{eq. 99}$$

$$B_{n',m';n,m} = \frac{2\pi j^{n'-n}}{\sqrt{n(n+1)n'(n'+1)}} \sum_{\substack{n''=1+|n-n'|, \\ 3+|n-n'|, \dots}}^{n+n'} \left[ j^{n''} B(m, n, -m', n', n'') b_{n''}(kr'') Y_{n'', m-m'}(\theta'', \varphi'') \right] \quad \text{eq. 100}$$

Le choix des fonctions de Bessel sphériques  $b_{n''}(kr'')$  à utiliser dans les deux expressions précédentes eq. 99 et eq. 100 dépend des grandeurs relatives de  $r'$  et  $r''$ .

Dans  $\mathbf{F}_{1n'm'}(\mathbf{r}')$  et  $\mathbf{F}_{2n'm'}(\mathbf{r}')$ , on a :

$$b_{n'}(kr') = \begin{cases} j_{n'}(kr') , & r' < r'' \\ h_{n'}(kr') , & r' > r'' \end{cases} \quad \text{eq. 101}$$

Dans  $A_{n',m';n,m}$  et  $B_{n',m';n,m}$ , on a :



---



---


$$b_{n''}(kr'') = \begin{cases} h_{n''}(kr'') , & r' < r'' \\ j_{n''}(kr'') , & r' > r'' \end{cases} \quad \text{eq. 102}$$

Les fonctions  $A(m, n, -m', n', n'')$  et  $B(m, n, -m', n', n'')$  dans les expressions eq. 99 et eq. 100 , sont définies comme suit :

$$A(m, n, -m', n', n'') = (-1)^m \sqrt{\frac{(2n+1)(2n'+1)(2n''+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} n & n' & n'' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & n' & n'' \\ -m & -m' & m+m' \end{pmatrix} \quad \text{eq. 103}$$

$$B(m, n, -m', n', n'') = \sqrt{\frac{2n''+1}{2n''-1}} \left\{ \begin{array}{l} -\sqrt{(n'+m')(n'-m'+1)(n''+m+m'')(n''+m+m'-1)}. A(m, n, m'-1, n', n''-1) \\ +\sqrt{(n'-m')(n'+m'+1)(n''-m-m'')(n''-m-m'-1)}. A(m, n, m'-1, n', n''-1) \\ -2m'\sqrt{(n''-m-m')(n''+m+m')}. A(m, n, m'-1, n', n''-1) \end{array} \right\} \quad \text{eq. 104}$$

avec  $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$  le symbole de Wigner 3j.

Le symbole de Wiger 3j est une grandeur issue de la mécanique quantique. Il existe plusieurs formules pour le calculer, mais certaines ne sont pas stables numériquement. En effet, la formule de Racah [21] contient des produits factoriels qui peuvent entraîner un « débordement » numérique lorsque l'argument est trop important.

L'algorithme que nous avons utilisé pour calculer le symbole de Wigner 3j est identique à celui développé dans [11]. Il s'agit d'un algorithme récursif donné par Luscombe et Luban [22] et amélioré pour tenir compte de trois cas particuliers pour lesquels l'algorithme de départ n'est pas adapté.

---

## 6. Application pour une source magnétique en champ proche

Pour définir une source équivalente à l'aide d'une expansion multipolaire d'une source magnétique en champ proche, il faut calculer en premier son champ rayonné  $\mathbf{H}$ . Cela nous permet ensuite de déterminer les coefficients  $Q_{1nm}$  qui sont fonction de  $\mathbf{H}$  d'après eq. 88.

### 6.1. Pour une boucle magnétique

On choisit le cas d'une boucle de rayon égal à 10cm comme étant la source. Connaissant l'expression analytique du champ rayonné par une boucle, on peut en déduire la valeur des coefficients  $Q_{1nm}$  par identification de cette expression avec celle du champ magnétique  $\mathbf{H}$  eq. 88, avec  $n=1$  puisque la boucle rayonne comme un dipôle. La boucle considérée sera dans le plan  $Oxy$  ce qui correspond à  $m=0$ , comme le montre la Figure.17.

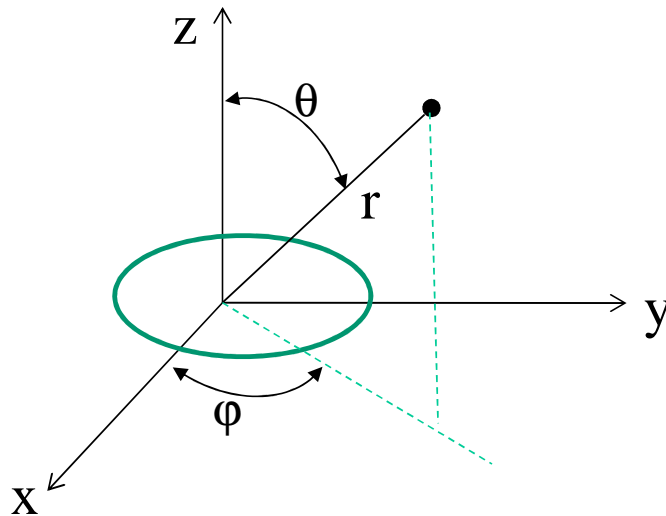


Figure.17 – Modèle d'une boucle magnétique dans le plan  $Oxy$ .

La formule analytique du champ magnétique  $\mathbf{H}$  créé par une boucle, de dimensions petites devant la longueur d'onde et devant la distance d'observation, est donnée par la relation suivante [23] :

$$H(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} \frac{I.S.k^3}{2\pi} \cos\theta. \left( -\frac{1}{j(kr)^2} + \frac{1}{(kr)^3} \right) e^{-jkr} \\ \frac{I.S.k^3}{4\pi} \sin\theta. \left( -\frac{1}{kr} - \frac{1}{j(kr)^2} + \frac{1}{(kr)^3} \right) e^{-jkr} \\ 0 \end{cases} \quad \text{eq. 105}$$

avec :  
 $r$  : la distance d'observation.  
 $I$  : le courant uniforme dans la spire.  
 $S$  : la surface de la boucle.

En identifiant les deux expressions eq. 88 et eq. 105 pour  $n=1, m=0$  et  $Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$  on trouve l'expression du coefficient  $Q_{10}$  suivante :

$$Q_{10} = \frac{I.S}{2\sqrt{3}\pi} \quad \text{eq. 106}$$

La détermination du coefficient  $Q_{10}$  nous permettra de représenter le champ rayonné d'une boucle de rayon 10cm pour un courant injecté de 1A, en harmoniques sphériques comme le montre la Figure.18 :

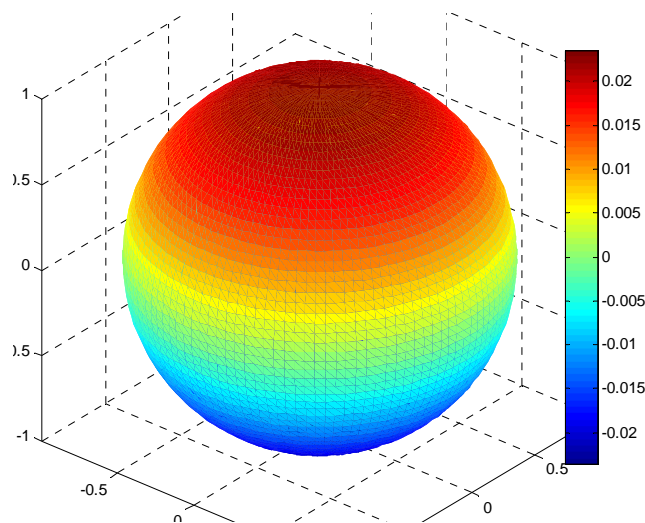


Figure.18 – Champ rayonné d'une boucle magnétique reconstruit à l'aide d'un développement multipolaire à l'ordre 1.

---

---

Cette approche analytique ne permet pas de modéliser tout type de sources. Il faut donc utiliser une méthode de calcul plus générale des coefficients  $Q_{nm}$  en utilisant le champ  $\mathbf{H}$  mesuré ou calculé sous flux3D®. La partie mesure sera traitée dans le chapitre III.

## 6.2. Calcul du champ $\mathbf{H}$ sous Flux3D®

Flux3D® est un outil de calcul basé sur la méthode des éléments finis et qui a été développé par la société Cedrat et le laboratoire G2Elab.

D'après l'expression eq. 88, il suffit de calculer la composante radiale du champ magnétique  $H_r$  pour déterminer le coefficient  $Q_{1nm}$  du développement multipolaire dans le cas d'une source magnétique. Pour calculer le champ magnétique radial sous Flux3D®, on considère dans un premier temps une sphère de mesure qui englobe la source magnétique, ensuite on calcule le champ  $H_r$  au niveau de la sphère. La même méthode est utilisée pour n'importe quelle source, il suffit de calculer l'intégrale du champ magnétique sur la sphère de mesure.

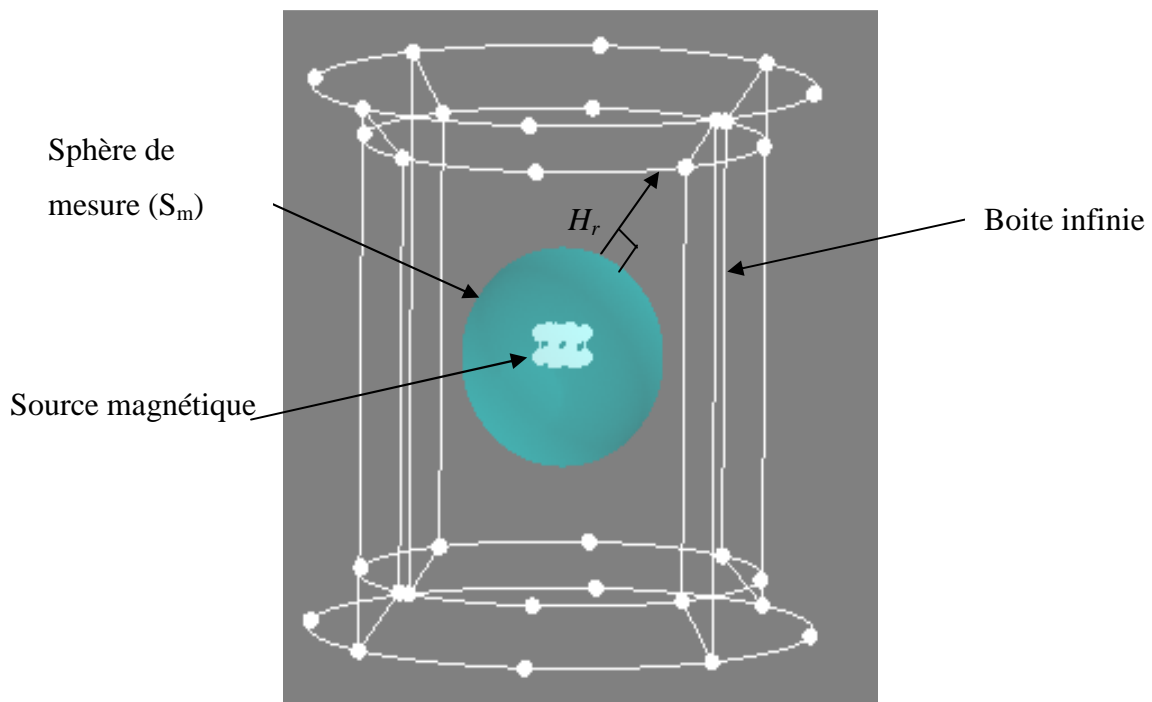


Figure.19 – Modélisation d'un objet sous Flux3D®

---

---

## 7. Mutuelle inductance

### 7.1. Introduction

L'objectif principal de ce travail de thèse comme évoqué dans le premier chapitre, est de déterminer le couplage entre systèmes ou sous systèmes en fonction de leurs positionnements. Ce couplage est représenté par une mutuelle inductance étant donné les caractéristiques de la source (champ proche magnétique basse impédance). Elle sera calculée dans le même repère sphérique, en utilisant les sources équivalentes du rayonnement de chacun des systèmes s'appuyant sur un développement multipolaire.

### 7.2. Mutuelle inductance en fonction des coefficients $Q_{snm}$

Le calcul du couplage entre deux systèmes en utilisant leurs sources équivalentes de rayonnement revient à déterminer l'expression de la mutuelle inductance en fonction des coefficients du développement multipolaire  $Q_{snm}$ . Pour cela on détermine dans un premier temps l'impédance de couplage et ensuite on en déduit l'expression de la mutuelle inductance.

#### 7.2.1 Impédance de couplage

A partir de [11], [24] et [25], on peut montrer que la tension  $v_{ld}$  induite aux bornes d'une source  $l$  en présence des champs,  $(\mathbf{E}_d, \mathbf{H}_d)$ , due au courant  $i_d$  d'une source  $d$  peut s'écrire en fonction de la densité de courant électrique  $\mathbf{J}_l$  et magnétique  $\mathbf{M}_l$  comme suit :

$$v_{ld} = -\frac{1}{i_l} \iiint_{V_l} (\mathbf{E}_d \cdot \mathbf{J}_l - \mathbf{H}_d \cdot \mathbf{M}_l) dV \quad \text{eq. 107}$$

On peut montrer qu'à partir du théorème de réciprocité de Lorentz, l'intégrale volumique se transforme en intégrale surfacique de la manière suivante :

$$\iiint_{V_l} (\mathbf{E}_d \cdot \mathbf{J}_l - \mathbf{H}_d \cdot \mathbf{M}_l) dV = \oiint_{\Sigma_l} (\mathbf{E}_l \cdot \mathbf{H}_d - \mathbf{E}_d \cdot \mathbf{H}_l) ds \quad \text{eq. 108}$$

Par conséquent, l'impédance de couplage entre deux sources  $l$  et  $d$  s'écrit :

$$z_{ld} = \frac{v_{ld}}{i_d} = -\frac{1}{i_l i_d} \oiint_{\Sigma_l} (\mathbf{E}_l \cdot \mathbf{H}_d - \mathbf{E}_d \cdot \mathbf{H}_l) ds \quad \text{eq. 109}$$

La surface d'intégration ne doit contenir qu'une seule source car sinon l'intégrale s'annule. Il est également nécessaire que les champs soient exprimés dans un même repère. C'est pourquoi les coefficients, comme on l'a mentionné précédemment, d'une des deux sources doivent être translatés dans le repère de l'autre.

En utilisant les développements multipolaires eq. 75 et eq. 76 pour écrire les champs électriques et magnétiques  $\mathbf{E}_l, \mathbf{E}_d, \mathbf{H}_l, \mathbf{H}_d$  des deux sources  $l$  et  $d$ , puis en calculant l'intégrale eq. 109 sur une sphère autour d'une des deux sources, l'impédance de couplage se simplifie :

$$z_{ld} = z_{dl} = \frac{1}{i_l i_d} \frac{1}{k^2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (-1)^m ({}_l Q_{1n,-m} * {}_d Q_{1nm} + {}_d Q_{2nm} * {}_l Q_{2n,-m}) \quad \text{eq. 110}$$

avec  ${}_x Q_{1nm}$  et  ${}_x Q_{2nm}$  les coefficients associés aux modes transverses électrique et magnétique de la source  $x$  respectivement.

### 7.2.2 Mutuelle inductance

Une fois qu'on a déterminé l'impédance de couplage en fonction des coefficients du développement multipolaire, la mutuelle inductance peut s'écrire sous la forme suivante :

$$M_{ld} = \frac{1}{j\omega l_d} \frac{1}{k^2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (-1)^m ({}_l Q_{1n,-m} * {}_d Q_{1nm} + {}_d Q_{2nm} * {}_l Q_{2n,-m}) \quad \text{eq. 111}$$

Dans le cas d'une source magnétique seuls les termes liés au mode transverse électrique sont pris en compte, l'expression de la mutuelle inductance devient :

$$M_{ld} = \frac{1}{j\omega l_d} \frac{1}{k^2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (-1)^m ({}_l Q_{1n,-m} * {}_d Q_{1nm}) \quad \text{eq. 112}$$

### 7.2.3 Etapes de calcul

Dans le cas de deux composants 1 et 2 la méthode permettant de déterminer la mutuelle inductance caractérisant le couplage entre deux systèmes est résumée sur la Figure.20.

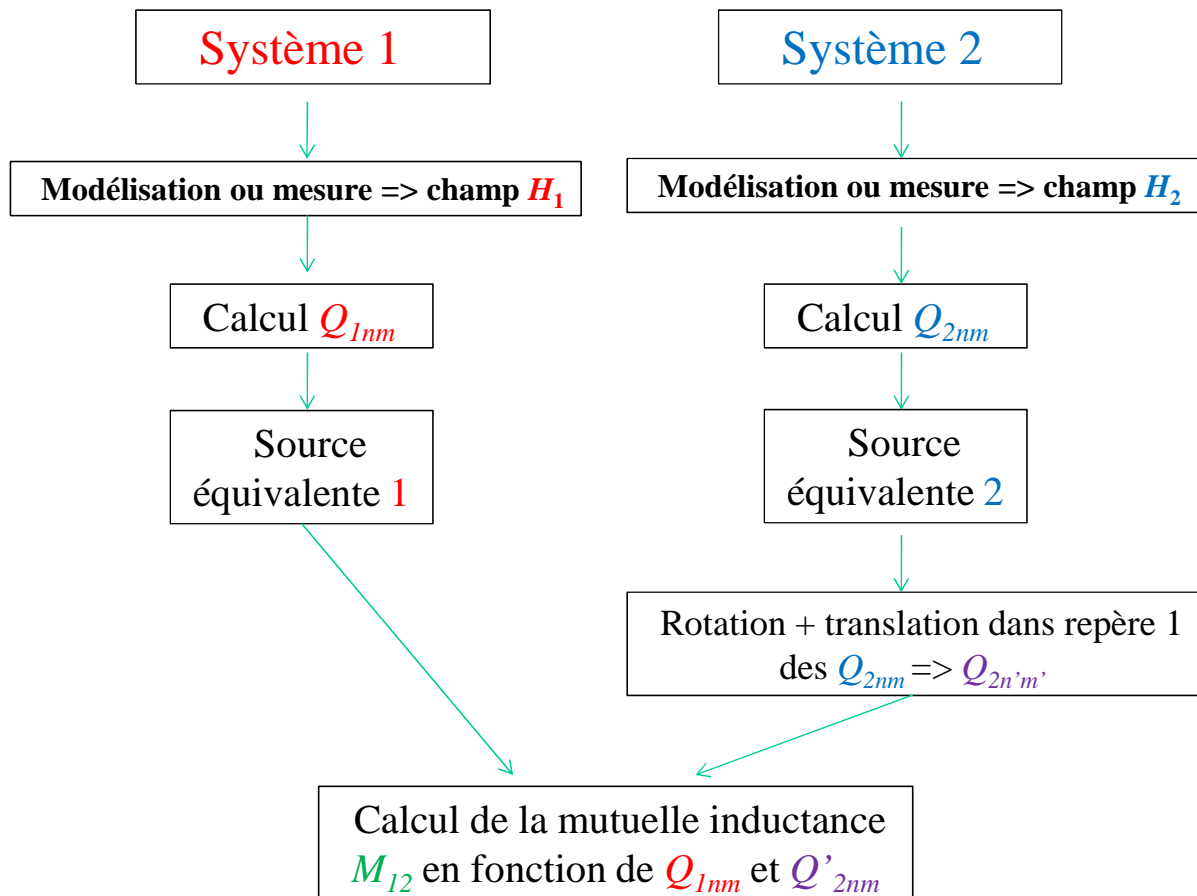


Figure.20 – Méthode de calcul de la mutuelle inductance entre deux systèmes

---

---

## 7.3. Résultats

### 7.3.1 Introduction

Le calcul de la mutuelle inductance en fonction de la distance entre deux systèmes en utilisant la méthode du développement multipolaire, c'est-à-dire en utilisant les sources équivalentes du rayonnement de chacun des systèmes, est validé pour différents cas.

Dans cette partie les résultats de calcul par la méthode multipolaire sont comparés aux résultats du calcul numérique sous flux3D®. On choisit dans un premier temps un cas simple pour lequel on connaît le résultat analytique du calcul de la mutuelle inductance en fonction de la distance entre les deux systèmes pour valider les résultats obtenus sous flux3D® et les résultats de calcul avec la méthode du développement multipolaire, c'est le cas de deux spires qui se situent sur le même axe.

Pour le même cas de figure, on choisit une configuration qui permet de valider les calculs de translation du repère ainsi que ceux pour la rotation.

### 7.3.2 Deux spires coaxiales

On considère deux boucles  $C_1$  et  $C_2$  de mêmes dimensions, de rayons respectivement  $a_1$  et  $a_2$  égale de 10 cm avec un rayon du fil de 0,1 mm.  $C_1$  est alimentée par un courant  $I$  de 1A, (Figure.21). On cherche à calculer l'inductance mutuelle suivant l'axe  $Oz$  en fonction de la distance  $r$  entre les deux boucles.



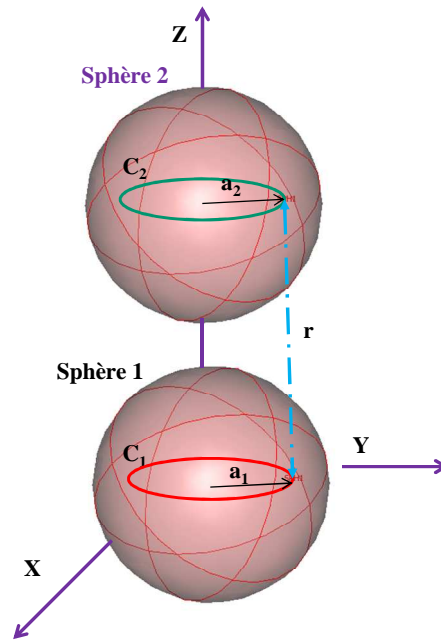


Figure.21 – Deux spires de mêmes dimensions placées sur l’axe  $Oz$

### 7.3.2.1 Calcul analytique de la mutuelle inductance

Pour valider le calcul en harmoniques sphériques dans le cas de la mutuelle inductance, on utilise la formule analytique de la mutuelle inductance qui est fonction du potentiel vecteur  $A_\varphi$ , et qui s’exprime comme suit [26] :

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{1}{I_1} \int_{C_2} (\vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2) = \frac{A_\varphi}{I_1} \int_{C_2} dl_2 = \frac{2\pi a_2 A_\varphi}{I_1} \quad \text{eq. 113}$$

Il faut donc calculer la composante suivant  $\varphi$  du potentiel-vecteur  $\vec{A}_1$  pour en déduire par la suite la valeur de la mutuelle inductance en fonction de la distance entre les deux boucles. Dans un premier temps, on calcule  $A_\varphi$  dans le cas d’une seule boucle située dans le plan  $xOy$ . Le vecteur  $\vec{A}$  est le potentiel vecteur magnétique au point P du courant  $I$  circulant le long de la boucle C, comme le montre la Figure.22 :

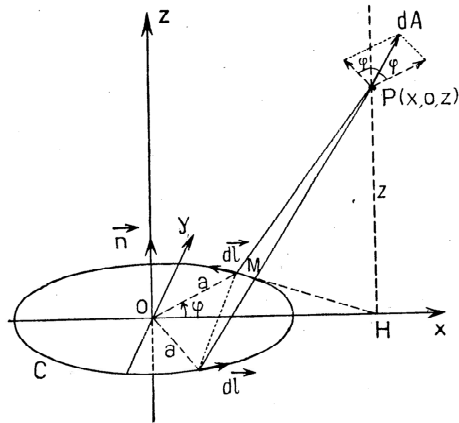


Figure.22 – Spire située dans le plan  $xOy$  [26]

L'expression du potentiel vecteur  $\vec{A}$  est :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{\vec{dl}}{r} \quad \text{eq. 114}$$

avec :  $r = MP$ , la distance entre la boucle C et le point de calcul du potentiel-vecteur.

Sur la boucle C, si on associe l'élément  $\vec{dl}$  avec l'élément symétrique par rapport à  $Ox$ , on voit que le potentiel élémentaire résultant sera parallèle à  $Oy$ , il en sera de même pour le potentiel total  $\vec{A}$ . Comme le système possède une symétrie de révolution, on voit que le potentiel-vecteur sera tangent à la boucle de centre O et de rayon  $\rho = OH$ .

Si on désigne par  $A_\varphi$  la grandeur du potentiel, on a :

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{dl}{r} = \frac{2\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\pi \frac{a \cdot \cos\varphi d\varphi}{\sqrt{z^2 + MH^2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^\pi \frac{a \cdot \cos\varphi d\varphi}{\sqrt{a^2 + \rho^2 + z^2 - 2a\rho \cdot \cos\varphi}} \quad \text{eq. 115}$$

Posons :

$$k = \sqrt{\frac{4a\rho}{(a+\rho)^2 + z^2}} \quad \text{avec} \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{eq. 116}$$

$$\text{et} \quad \varphi = \pi - 2\Psi \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} d\varphi = -2d\Psi \\ \cos\varphi = 2\sin^2\Psi \end{cases}$$

L'expression du potentiel-vecteur devient

$$\begin{aligned} A_\varphi &= \frac{\mu_0 I k}{2\pi} \sqrt{\frac{a}{\rho}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2\Psi - 1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\Psi}} d\Psi \\ &= \frac{\mu_0 I}{k\pi} \sqrt{\frac{a}{\rho}} \left[ (1 - k^2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\Psi}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2\sin^2\Psi} d\Psi \right] \end{aligned} \quad \text{eq. 117}$$

avec

$$\begin{cases} J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\Psi}} \\ J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2\sin^2\Psi} d\Psi \end{cases} \quad \text{eq. 118}$$

Où

$$\frac{dJ_2(k)}{dk} = \frac{1}{k} [J_2(k) - J_1(k)]$$

$J_2, J_1$  sont les intégrales elliptiques de Legendre. Ces fonctions jouent un rôle important dans toutes les distributions de courant possédant une symétrie de révolution. Ces fonctions de  $k$  sont définies pour  $0 \leq k \leq 1$ . Sachant que pour  $k = 0$  et  $k = 1$  [26] on a :

---



---


$$J_1(0) = J_2(0) = \pi/2 \quad J_1(1) = \infty \quad \text{et} \quad J_2(1) = 1$$

d'où

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 I}{k\pi} \sqrt{\frac{a}{\rho}} [(1 - k^2) \cdot J_1 - J_2] \quad \text{eq. 119}$$

Dans le cas des deux boucles, il suffit de remplacer  $\rho$  par  $a_2$  et  $a$  par  $a_1$  pour retrouver l'expression du potentiel-vecteur  $A_\varphi$  :

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 I}{k\pi} \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} [(1 - k^2) \cdot J_1 - J_2] \quad \text{eq. 120}$$

avec

$$k = \sqrt{\frac{4a_1 a_2}{(a_1 + a_2)^2 + r^2}} \quad \text{eq. 121}$$

où  $r$  : la distance entre les deux spires

L'expression de la mutuelle inductance entre la boucle  $C_1$  et  $C_2$  est donc :

$$M_{12} = \frac{2}{k} \sqrt{a_2 a_1} [(1 - k^2) \cdot J_1 - J_2] \quad \text{eq. 122}$$

---

---

### 7.3.2.2 Utilisation des coefficients $Q_{snm}$ pour déterminer la mutuelle inductance entre deux spires

Les deux spires sont considérées comme deux sources magnétiques, on calcule la mutuelle inductance en fonction de la distance  $r$  entre les deux spires avec la méthode des harmoniques sphériques à l'ordre  $n=3$  et  $n=5$ . Le résultat obtenu est comparé au résultat analytique et au résultat calculé sous flux3D®, ce dernier est basé sur le calcul du flux induit sur une des spires lorsque l'autre boucle est alimentée par un courant  $I$ .

Le résultat de comparaison est représenté sur la Figure.23 .

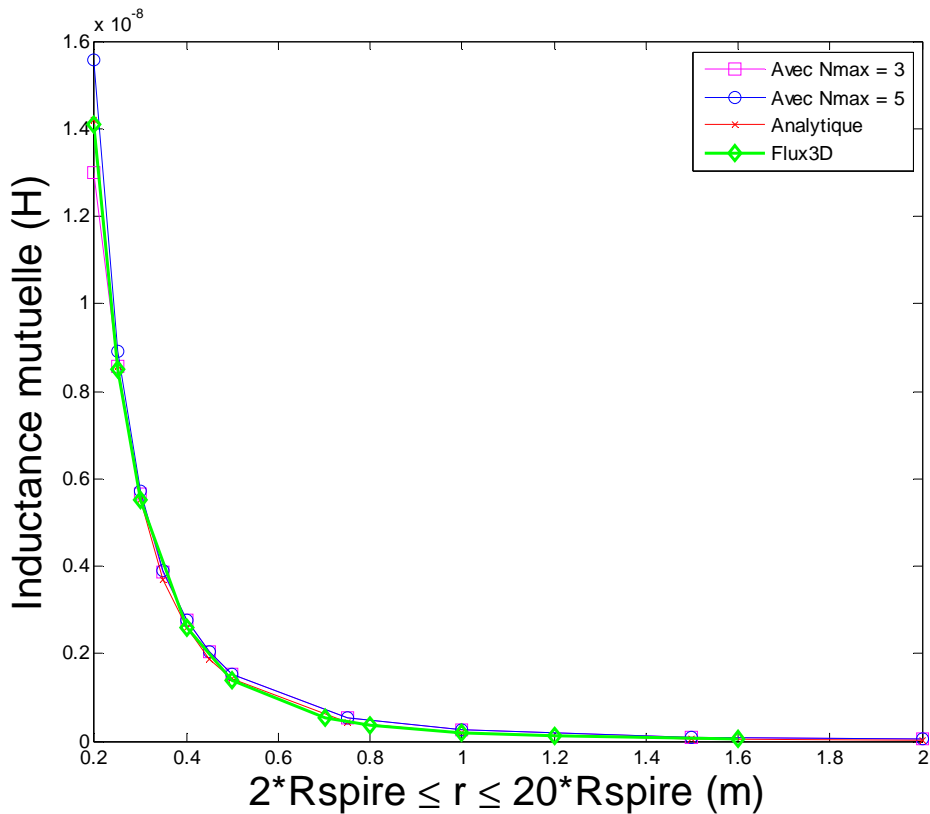


Figure.23 – Mutuelle inductance entre deux spires en fonction de la distance  $r$  inter spires

La distance minimale pour calculer la mutuelle en harmoniques sphériques est égale à la somme des rayons des sphères les plus petites pouvant englober les sources. Dans notre cas c'est  $2 \cdot R_{\text{spire}}$  soit 0,2m. On remarque bien que les résultats de calcul de la mutuelle en

harmoniques sphériques sont identiques à ceux obtenus numériquement sous Flux3D® et à ceux calculés analytiquement eq. 122. Plus on se rapproche de la boucle plus le nombre de termes requis pour décrire la complexité de la source augmente, c'est la raison pour laquelle l'erreur en  $r = 0.2m$  est plus importante pour  $n=3$  que pour  $n=5$  comme le montre la Figure.24, qui représente l'erreur relative comparée au calcul sous flux3D® (les résultats sous flux3D® sont identiques à ceux calculés analytiquement).

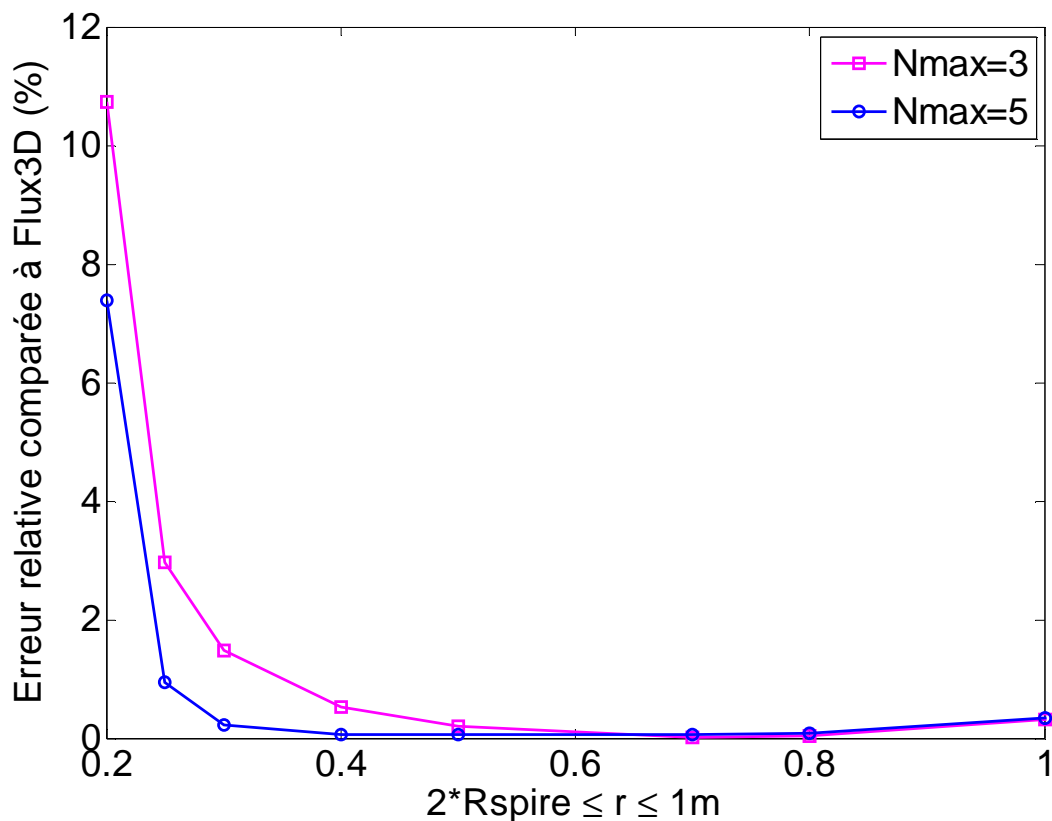


Figure.24 – Erreur relative comparée aux résultats sous flux3D®

### 7.3.3 Deuxième spire orientée à $45^\circ$ par rapport à la spire1

Dans le cas précédent le théorème de translation du repère a été validé, il reste à valider les calculs suite à une rotation du repère. Pour cela on choisit une configuration toujours pour des deux spires identiques de 10cm de rayon, où la deuxième (spire2) est orientée à  $45^\circ$  autour de l'axe  $y$ , ce qui correspond au 2ème angle d'Euler, par rapport à la première (spire1), comme présenté sur la Figure.25.

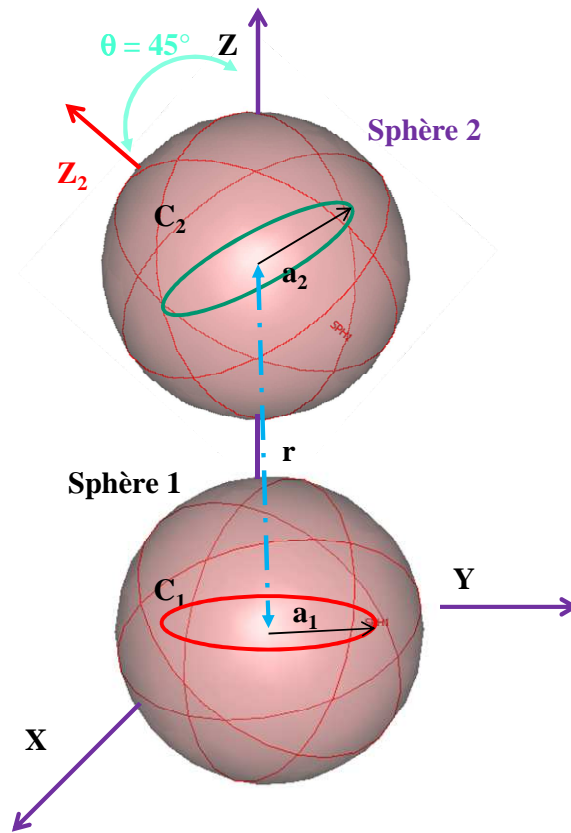


Figure.25 – Deux spires identiques placées sur l’axe z où  $C_2$  est orientée à  $45^\circ$  par rapport au repère  $(x,y,z)$

Si on cherche à calculer la mutuelle inductance entre les deux spires  $C_1$  et  $C_2$  dans le repère  $(x,y,z)$  de la spire  $C_1$ , il faudra, après le calcul des coefficients  $Q_{2nm}$  de la spire  $C_2$ , faire une rotation de  $45^\circ$  et les translater dans le repère de la spire  $C_1$ .

Les résultats de calcul de la mutuelle inductance en fonction de la distance  $r$  entre les deux spires en utilisant la méthode des harmoniques sphériques sont comparés aux résultats de calcul sous Flux3D® ( Figure.26).

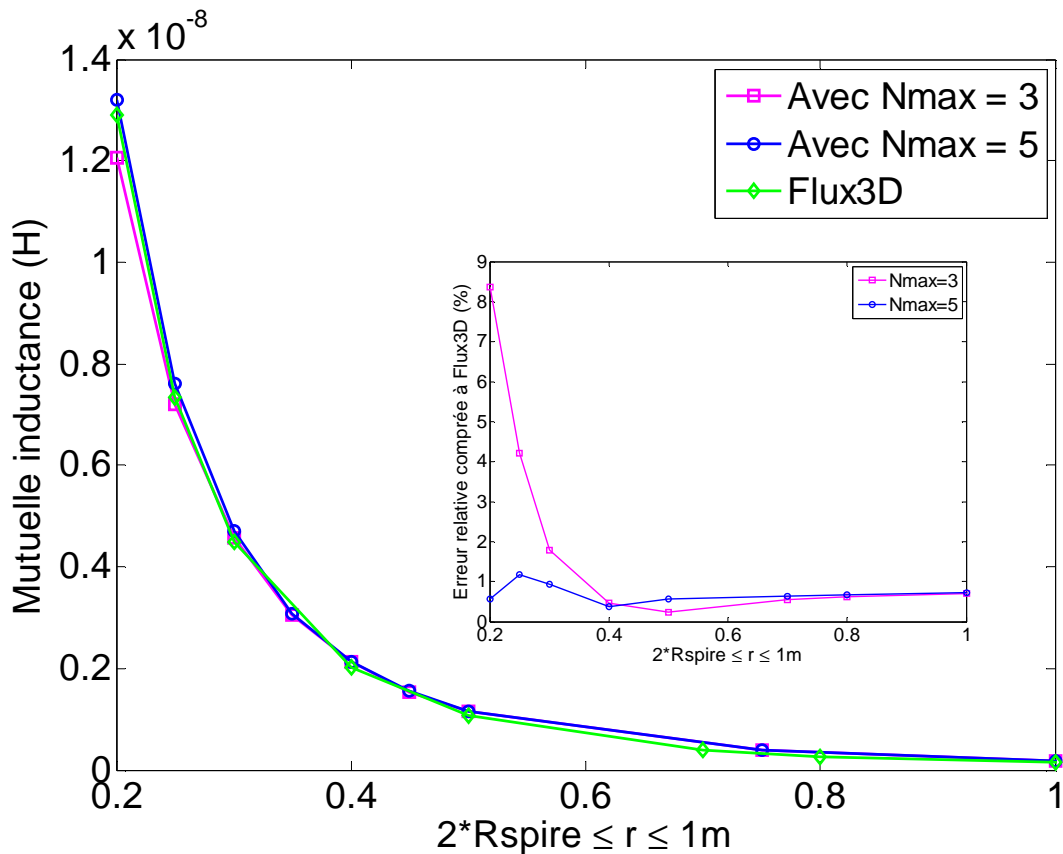


Figure.26 – Mutuelle inductance entre deux spires en fonction de la distance

Sur la Figure.26, en plus du graphe qui représente la différence entre les résultats de calcul de la mutuelle inductance entre la méthode harmonique et ceux sous flux3D®, se trouve un graphe qui représente l'erreur relative. On remarque bien que les résultats de calcul de la mutuelle inductance entre les deux boucles sont identiques. De même que précédemment, en  $r = 0.2\text{m}$ , l'erreur est plus importante pour  $n=3$  que pour  $n=5$ .

### 7.3.4 Deux spires coplanaires

Toujours pour les mêmes spires, on considère une configuration coplanaire, pour translater les coefficients du développement multipolaire suivant deux axes et non seulement un seul. La configuration est présentée sur la Figure.27.



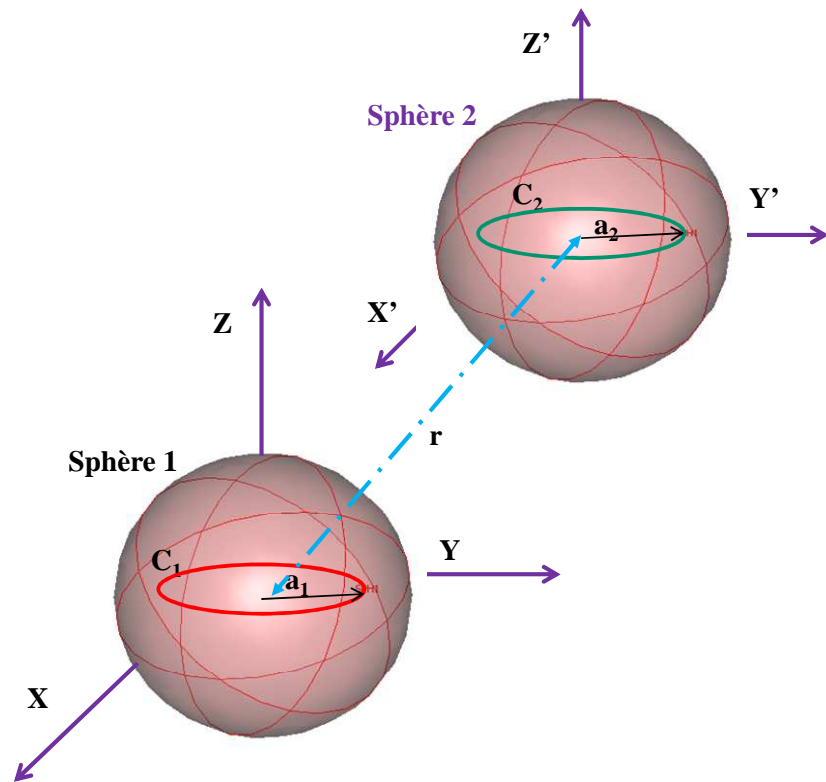


Figure.27 – Deux spires coplanaires

Comme dans les cas précédents, les résultats présentés sur la Figure.28 montrent bien que notre méthode de calcul coïncide avec le calcul réalisé sous Flux3D®, et que l'erreur relative est moins importante lorsque l'ordre  $n$  augmente.

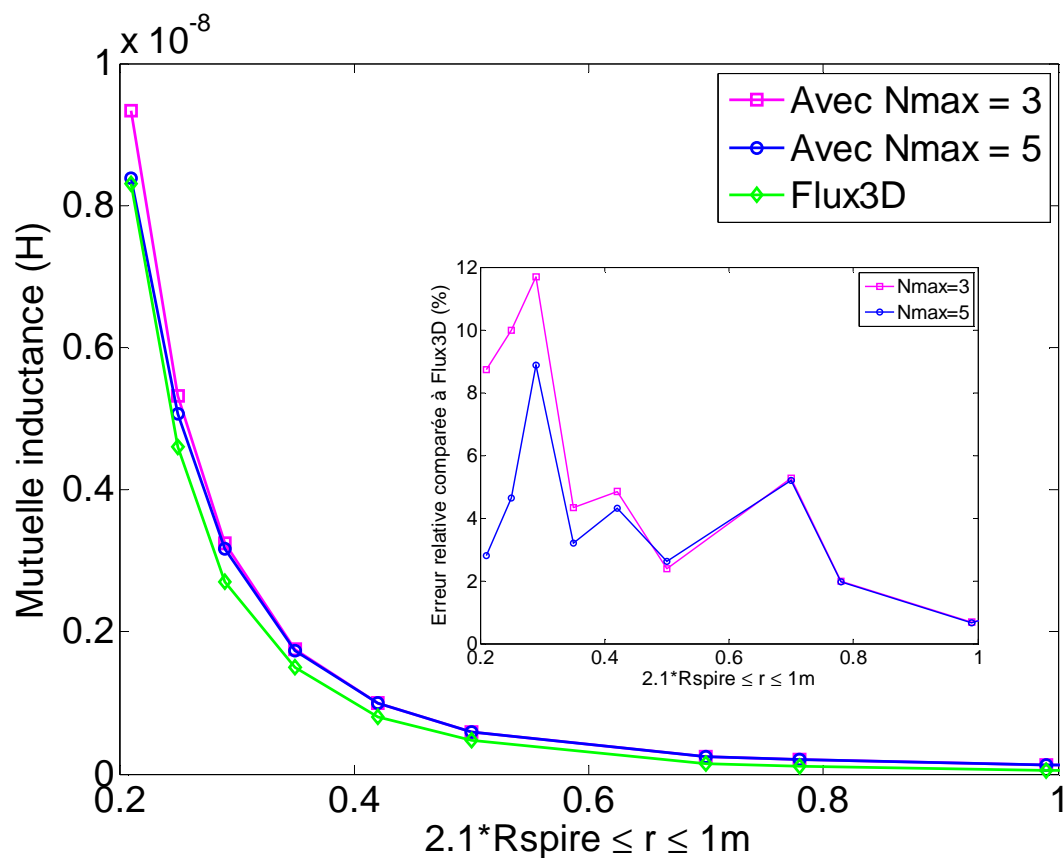


Figure.28 – Mutuelle inductance pour deux spires coplanaires en fonction de la distance

## 8. Conclusion

Notre méthode de calcul basée sur le développement multipolaire nous a permis de créer des sources équivalentes qui représentent le champ rayonné par un système. Pour créer ces sources il est important de calculer les coefficients  $Q_{snm}$  du développement multipolaire qui sont fonction des champs électrique et magnétique, ces derniers sont calculés numériquement sous Flux3D® ou mesurés (chapitre III).

Ces sources équivalentes, nous ont permis par la suite de calculer le couplage entre deux spires afin de déterminer la mutuelle inductance en fonction de la distance qui les sépare.



---

---

# Chapitre III

---

---

# **Approche expérimentale**

---

---

## 1. Introduction

Les mesures sont indispensables en CEM pour tester le bon fonctionnement du système. Dans cette étude, la partie mesure nous permet dans un premier temps de valider notre méthode de calcul des couplages entre systèmes, qui correspond au calcul de la mutuelle inductance. En plus de cela, cette partie est nécessaire pour renseigner notre modèle de source équivalente qui représente le champ rayonné d'un système. En effet, il n'est pas toujours évident d'utiliser la modélisation pour renseigner notre modèle de source équivalente car il est nécessaire de connaître ses paramètres électriques et géométriques ce qui n'est pas toujours le cas ou bien si le système à modéliser est trop complexe pour des simulations électromagnétiques 3D.

Comme vu précédemment, pour construire le modèle de source équivalente, il est important de connaître le champ rayonné par le système en question. Dans ce cas il suffit de mesurer le champ rayonné du système soit en utilisant la méthode basée sur des mesures ponctuelles ou la méthode intégrale qui nous permet d'identifier directement les coefficients multipolaires  $Q_{snm}$ , cette dernière s'avère la plus adaptée dans notre cas. Les deux méthodes sont détaillées dans la partie qui suit pour comprendre notre choix.

### 1.1. Mesures ponctuelles

La méthode basée sur des mesures ponctuelles est une méthode qui permet d'obtenir une cartographie 2D ou 3D des champs magnétique et électrique autour de l'objet. C'est une méthode qui permet d'échantillonner le champ électromagnétique en des endroits autour de l'objet sous test [27].

Une sonde de mesure est déplacée grâce à un dispositif de positionnement, qui peut être piloté automatiquement suivant les trois axes  $(x,y,z)$ . Des sondes de formes différentes sont utilisées pour capter les composantes des champs magnétique et électrique.

Dans le cas d'une mesure champ proche, la sonde utilisée est de type boucle circulaire de champ magnétique, elle est souvent connectée à un analyseur de réseau ou à un analyseur de spectre pour la mesure [28], comme le montre la Figure.29.

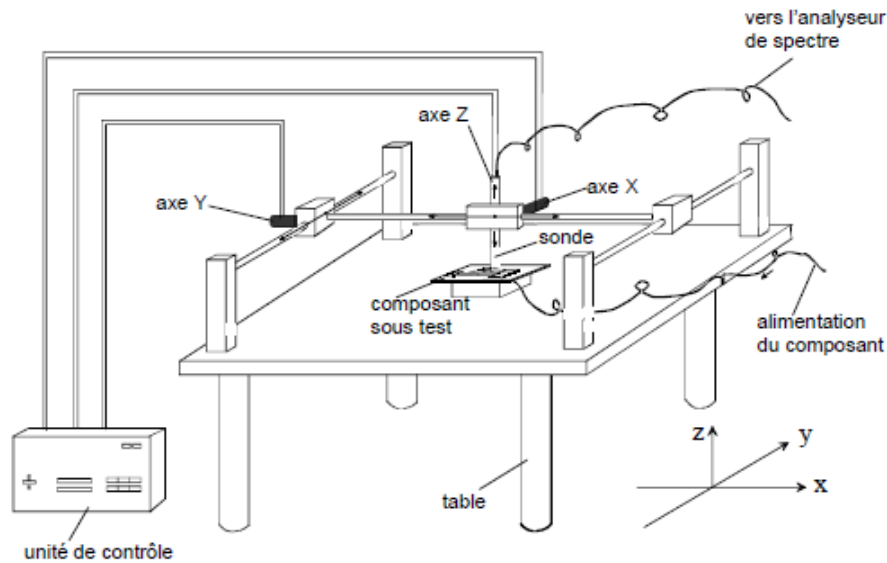


Figure.29 – Banc de mesure champ proche [28]

Sur d'autres bancs de mesure, il est possible de trouver une configuration où la sonde de mesure est fixe et c'est l'objet sous test qui est positionné sur une table mobile.

Dans ce genre de méthode, il est important d'avoir plusieurs points de mesure, par exemple jusqu'à 200 points suivant la fréquence maximale considérée et la taille de l'objet [27]. Cela revient à déplacer la sonde de mesure plusieurs fois, ce qui rend la méthode très longue sans oublier les incertitudes dues au positionnement de la sonde.

## 1.2. Mesures intégrales

La méthode que nous qualifions « d'intégrale » est basée sur la mesure du flux d'induction à travers des bobines qui entourent l'objet à tester, cette méthode permet de déterminer directement les coefficients multipolaires  $Q_{snm}$  à partir du flux mesuré en appliquant un filtrage spatial.

Le système de mesure peut être parfois mobile [29] ou statique [18]. Ce dernier correspond au système de la norme CISPR 16-1, qui est valable dans une bande de fréquence qui varie entre 9kHz et 30MHz. Le système est composé de trois grandes bobines comme le montre la Figure.30.

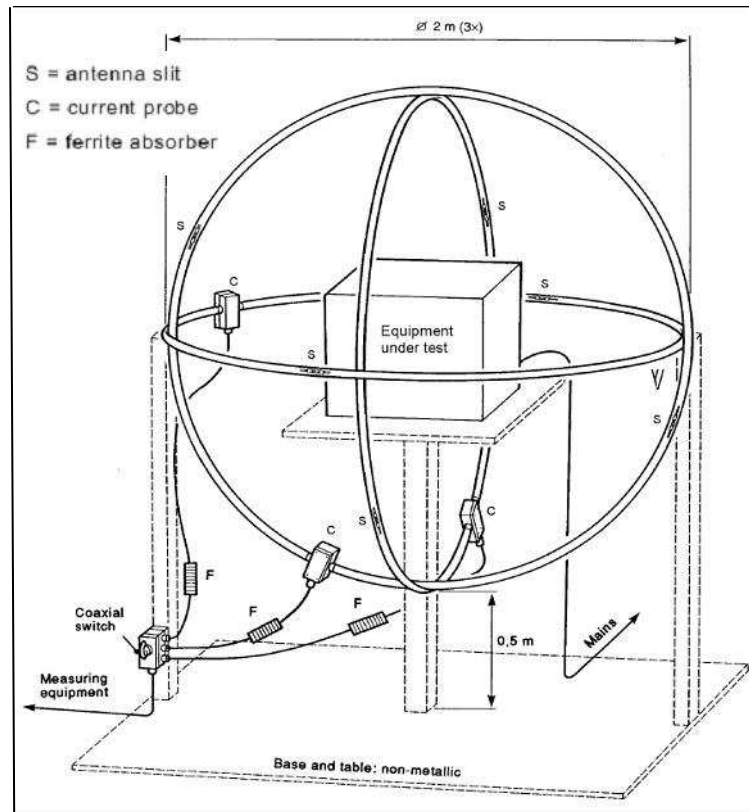


Figure.30 – Système de mesure de la norme CISPR 16-1 [18]

Cette méthode de mesure basée sur l'intégration spatiale permet en effet de réduire les erreurs de positionnement du capteur [18], d'où des résultats plus précis par rapport à des mesures ponctuelles. De plus dans notre cas les antennes de type « bobines » sont de plus grand diamètre et donc plus sensibles puisque le flux est proportionnel à la surface de la boucle, donc au carré de son rayon [27].

Comme on peut le constater dans la Figure.30, la taille du système (bobine de 2m de diamètre) n'est pas adaptée à la mesure sur des composants d'un filtre CEM par exemple. On a donc utilisé le système [27] développé au laboratoire G2Elab de Grenoble. Ce système de mesure est de dimensions plus petites, et il est composé de nouveaux capteurs d'induction magnétique en champ proche. La forme de ces nouveaux capteurs de type « bobines » permet de n'être sensibles qu'à certaines composantes multipolaires du champ. Le banc de mesure est détaillé dans la partie qui suit.



---

---

## 2. Banc de mesure

### 2.1. Description du banc de mesure

Le banc de mesure basé sur la méthode intégrale [27] utilisé pour nos mesures est constitué de capteurs qui permettent l'identification des coefficients multipolaires  $Q_{10}$  et  $Q_{20}$ . Le banc de mesure prend la forme d'une sphère de mesure  $S_m$  de 225mm de rayon comme représenté sur la Figure.31. Il est composé de cinq bobines, la bobine centrale de diamètre égale à 45cm inspirée de la norme, deux paires de bobines qui correspondent aux fonctions capteurs  $C_{10}$  et  $C_{20}$  (l'indice « 1 » désigne les bobines du haut et « 2 » celles du bas) qui permettent de déterminer respectivement les coefficients  $Q_{10}$  et  $Q_{20}$ . Les capteurs  $C_{10}$  sont de 40cm de diamètre et les capteurs  $C_{20}$  de 34cm de diamètre.

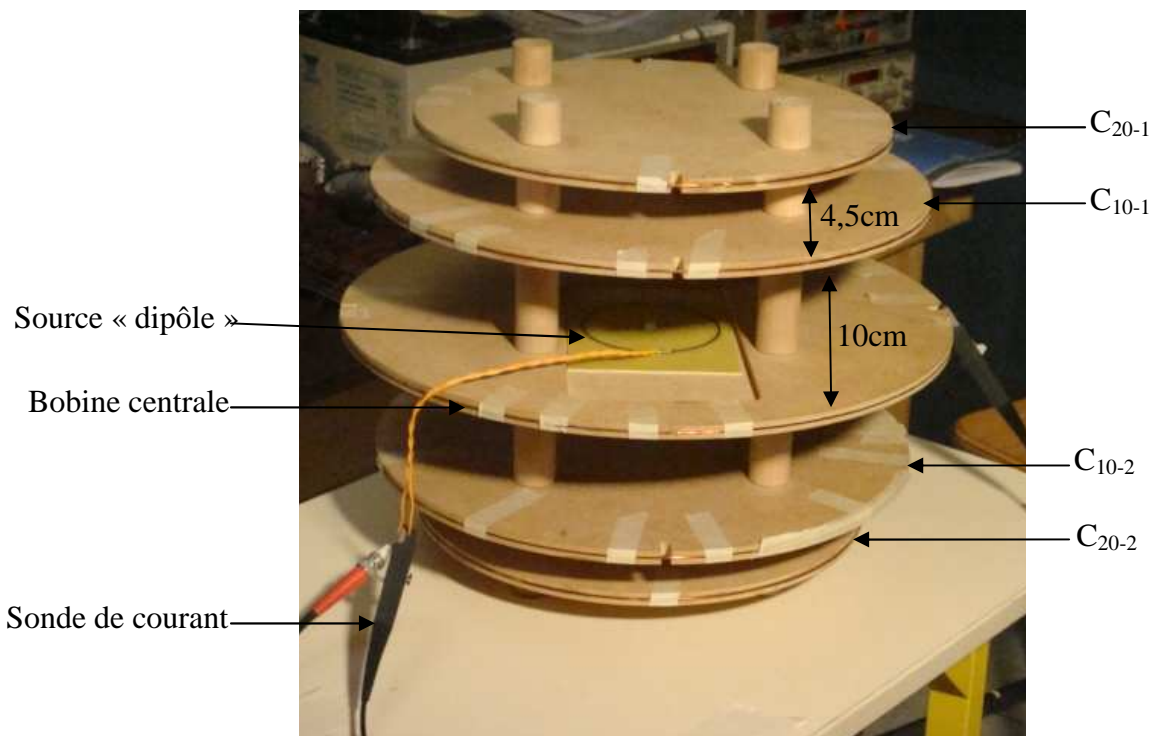


Figure.31 – Banc de mesure avec ses capteurs et une source « dipôle »

Le principe de l'utilisation de ce banc est de mesurer le flux sur la sphère de mesure  $S_m$  (rayon  $r_0$ ) qui englobe la source et cela grâce aux différentes bobines. Le flux à travers la surface délimitée par l'ensemble des bobines peut s'écrire sous la forme suivante [24] :

$$\begin{aligned}
Flux_{nm} &= \iint_{\text{surface bobine}} (\mu_0 \cdot \mathbf{H}(r_0, \theta, \varphi) \cdot \mathbf{n}) ds \\
&= \frac{\mu_0 (n+1)}{4\pi r_0^{n+2}} Q_{nm} \iint_{\text{surface bobine}} Y_{nm}(\theta, \varphi) ds
\end{aligned}
\tag{eq. 123}$$

De l'expression eq. 123, on peut déduire la relation entre les flux à travers les bobines et les coefficients multipolaires  $Q_{10}$  et  $Q_{20}$  qu'on cherche à identifier [27] :

$$Q_{10} = \frac{10^8 r_0}{32\pi} (flux_{10-1} + flux_{10-2}) = 2,24 \cdot 10^5 (flux_{10-1} + flux_{10-2})
\tag{eq. 124}$$

$$Q_{20} = \frac{6125 \cdot 10^4 r_0^2}{3\pi\sqrt{21}} (flux_{20-1} - flux_{20-2}) = 7,18 \cdot 10^4 (flux_{20-1} - flux_{20-2})
\tag{eq. 125}$$

où les flux dans les expressions eq. 124 et eq. 125 sont respectivement les flux au niveau des bobines des fonctions capteurs  $C_{10}$  et  $C_{20}$ . Pour identifier ces flux, il suffit de mesurer les courants dans les antennes boucles qui sont en court-circuit puisque ces derniers sont proportionnels aux flux.

Le choix d'utilisation des antennes boucles en court-circuit (donc un courant induit maximal et une sensibilité maximale du capteur) est dicté par l'utilisation aisée de sonde de courant « large bande » mais entraîne des interactions entre les boucles de mesures. Une méthode spécifique permettant de contourner ce problème sera exposée par la suite.

## 2.2. Description du montage mis en oeuvre

Le schéma qui contient les différents éléments de mesure est représenté sur la Figure.32. Il est composé d'un générateur basse fréquence (GBF) de tension qui couvre une bande de fréquence de 9kHz-30MHz, un amplificateur de puissance, deux sondes de courant de sensibilité 1mV/mA, la première mesure le courant dans la source et la deuxième le courant dans une des antennes boucles. L'acquisition des signaux se fait à l'aide d'un oscilloscope.

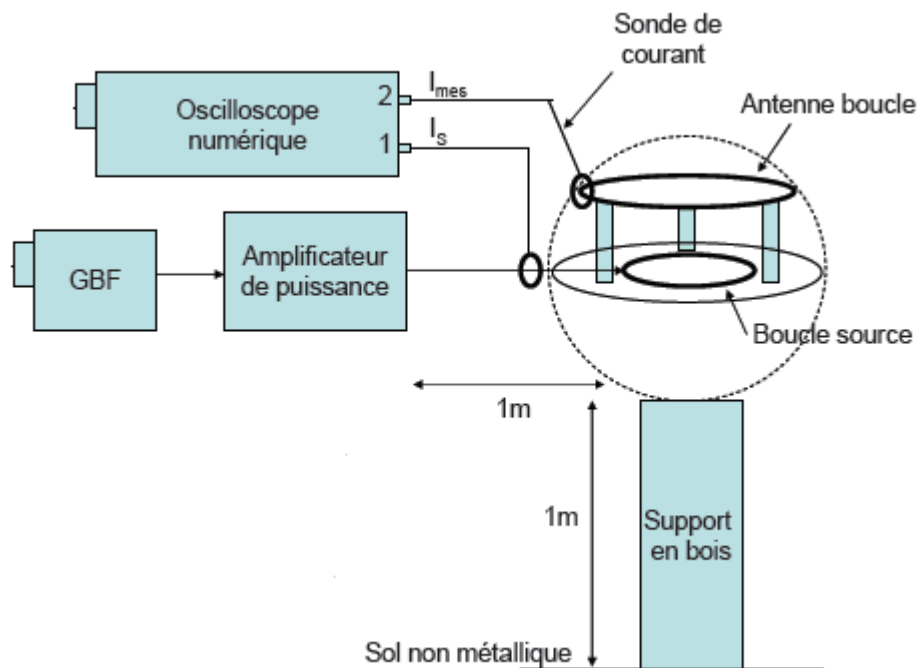


Figure.32 – Schéma de principe du banc de mesure [27]

En premier lieu, cette méthode a été utilisée pour mesurer le courant au niveau des antennes boucles. Il s'est avéré qu'avec un oscilloscope les mesures ne sont pas précises (8bits pour coder l'amplitude). En plus de cela cette méthode est trop longue puisqu'il faut faire des mesures fréquence par fréquence.

Il était important d'utiliser une autre procédure de mesure qui permet d'avoir des résultats plus précis. L'oscilloscope a été remplacé par un analyseur de réseau vectoriel (VNA) de marque ROHDE&SCHWARZ. Une photographie est proposée sur la Figure.33. Ce genre d'analyseur se caractérise par l'existence de ports qui permettent de mesurer le rapport entre les signaux sur deux ports en dB et en mode « Tracking en fréquence » avec un port émetteur. Le port émetteur  $a_1$  « injection » sera connecté à la source,  $b_1$  connecté de même à la source à travers une sonde de courant pour mesurer le courant injecté au niveau de la source et  $b_2$  relié à l'antenne boucle pour mesurer le courant sur le capteur. Le rapport  $b_2/b_1$  nous permet d'obtenir le rapport des courants en dB sur une bande de fréquence qui varie entre 20kHz et 30MHz, la borne fréquentielle inférieure est imposée par le VNA et la borne supérieure par les dimensions des antennes boucles. On travaille en dessous de la fréquence de résonance des antennes.



Figure.33 – Analyseur de réseau vectoriel (VNA)

## 2.1. Calibration du banc de caractérisation

La mesure du courant au niveau des antennes boucles  $C_{10}$  et  $C_{20}$  pour déterminer par la suite les coefficients multipolaires est basée sur la mesure du courant sur chaque antenne boucle dans le cas où on ne garde que l'antenne boucle de mesure pour ne pas prendre en compte l'interaction avec les autres antennes boucles. On cherche à simplifier la procédure de mesure pour ne pas perdre du temps chaque fois à démonter le banc de mesure pour utiliser les antennes boucles une par une.

La calibration se fera en deux étapes, dans un premier temps on mesure le courant de chacune des antennes boucles en absence des autres antennes boucles ainsi que le courant dans la boucle centrale émettrice. On refait ensuite les mêmes mesures mais cette fois-ci en gardant tout le dispositif de mesure c'est-à-dire les cinq boucles. Une méthode de correction a été développée pour calculer la différence entre les résultats de mesure dans les deux cas, cela nous permet par la suite d'utiliser le dispositif de mesure complet en éliminant les interactions entre les boucles. Les résultats de mesure des courants sont comparés aux résultats

---

---

analytiques et calculés sous Flux3D. Les antennes boucles sont représentées par des boucles en court-circuit (comme dans le montage expérimental) sur lesquelles on calcule le courant en fonction de la fréquence dans chacun des cas.

### 2.1.1 Les sources de rayonnement

Pour la calibration du banc de mesure, deux sources ont été utilisées de taille adaptée aux dimensions du banc de mesure. La première source représente un dipôle constitué d'une boucle de 5cm de rayon et la deuxième un quadripôle composé de deux boucles identiques de même rayon que le dipôle, les deux boucles sont montées en série et positionnées l'une au dessus de l'autre à une distance de 46,6mm comme présenté sur la Figure.34.

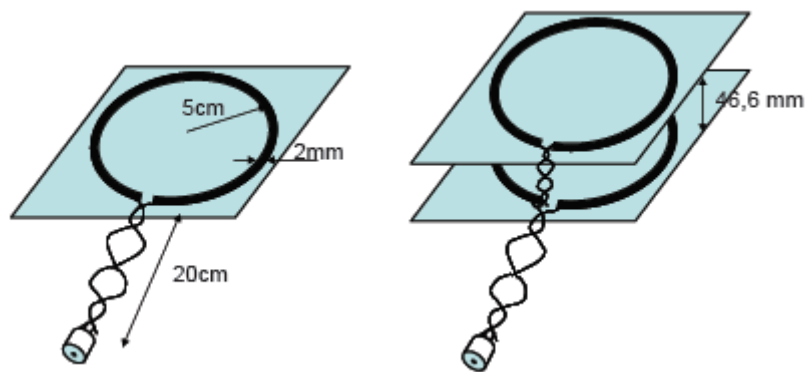


Figure.34 – Sources dipolaire, à gauche le dipôle et à droite le quadripôle [27]

Un soin particulier est apporté à la connectique afin de limiter le rayonnement « parasite » des fils amenant le signal sur l'antenne. En conséquence, nous utilisons soit une ligne bifilaire torsadée soit un câble coaxial

Pour simplifier la procédure de calibration, on vérifie dans un premier temps la symétrie entre les deux antennes boucles de la fonction capteur  $C_{10}$  qui permettent de mesurer les coefficients multipolaires  $Q_{10}$ , et celles de la fonction capteur  $C_{20}$  pour mesurer les coefficients  $Q_{20}$ .

---

---

### 2.1.2 Symétrie des antennes boucles

Pour déterminer la symétrie entre les antennes boucles de la fonction capteur  $C_{10}$  et  $C_{20}$ , on calcule le rapport des courants mesurés sur chacune des antennes boucles de la même fonction capteur, dans le cas où le banc de mesure n'est constitué que des antennes boucles et de la source de rayonnement comme le montre la Figure.35 où on cherche à déterminer la symétrie entre l'antenne boucle  $C_{10-1}$  et  $C_{10-2}$  (le rayonnement de l'antenne source est évidemment symétrique).



Figure.35 – Banc de mesure composé seulement de  $C_{10-1}$  et  $C_{10-2}$ .

Sur le VNA, on relève la courbe qui représente la différence en dB entre les antennes boucles de la fonction  $C_{10}$ , dans une bande de fréquence fixée entre 20kHz et 30MHz. Les résultats de la comparaison sont présentés sur la Figure.36.

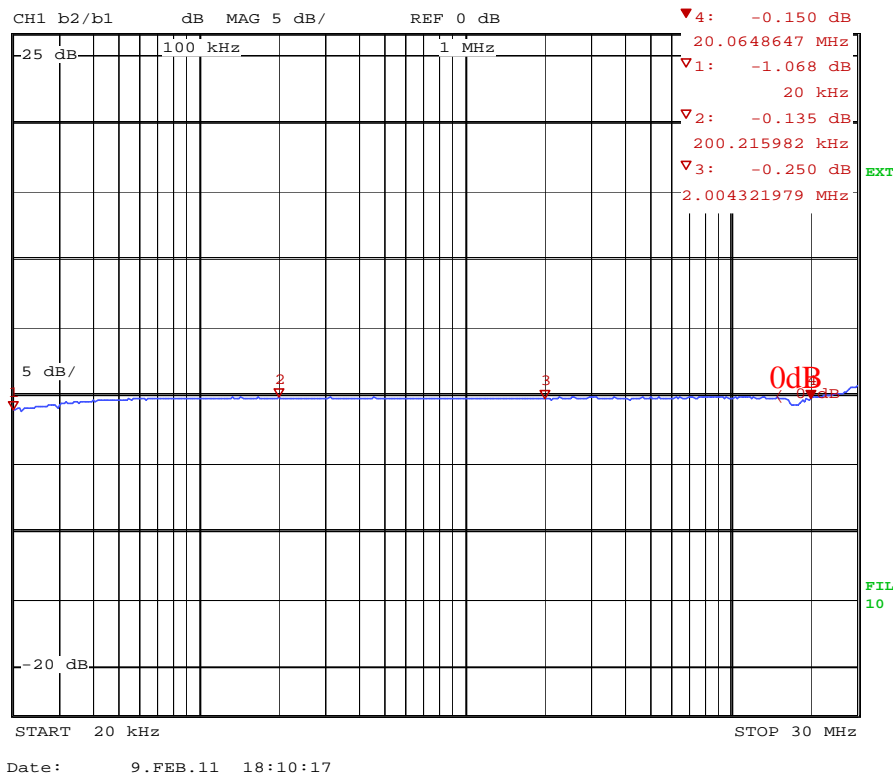


Figure.36 – Différence en dB entre les deux antennes boucles C<sub>10</sub>

Les résultats de mesure confirment le fait que les deux antennes boucles sont symétriques puisque le rapport des courants mesurés sur chacune des antennes boucles est égal à 0dB.

Le même résultat est obtenu dans le cas des deux antennes boucles de la fonction capteur C<sub>20</sub> où la symétrie entre les deux antennes boucles est confirmée comme montré sur la Figure.37.

Désormais, pour la suite il suffit d'utiliser seulement les antennes boucles de la partie supérieure du banc de mesure pour la calibration avec une source symétrique. Le même facteur de correction sera appliqué sur les antennes boucles inférieures de chacune des fonctions capteurs pour ne pas prendre en compte les interactions entre les boucles.

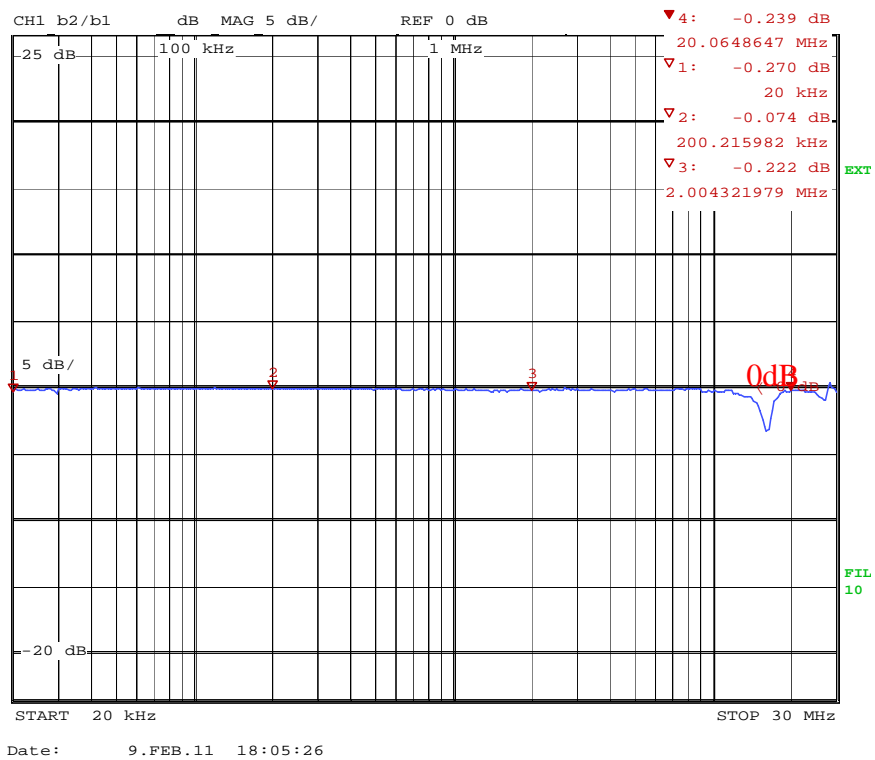


Figure.37 – Différence en dB entre les deux antennes boucles C<sub>20</sub>

### 2.1.3 Calibration du dipôle

#### 2.1.3.1 Boucle centrale seule

Les premières mesures sont effectuées dans le cas où l'on ne garde que la boucle centrale pour mesurer le courant induit par le dipôle sans prendre en compte l'effet des autres antennes. La Figure.38 représente la configuration où seule la boucle centrale est présente sur le banc.



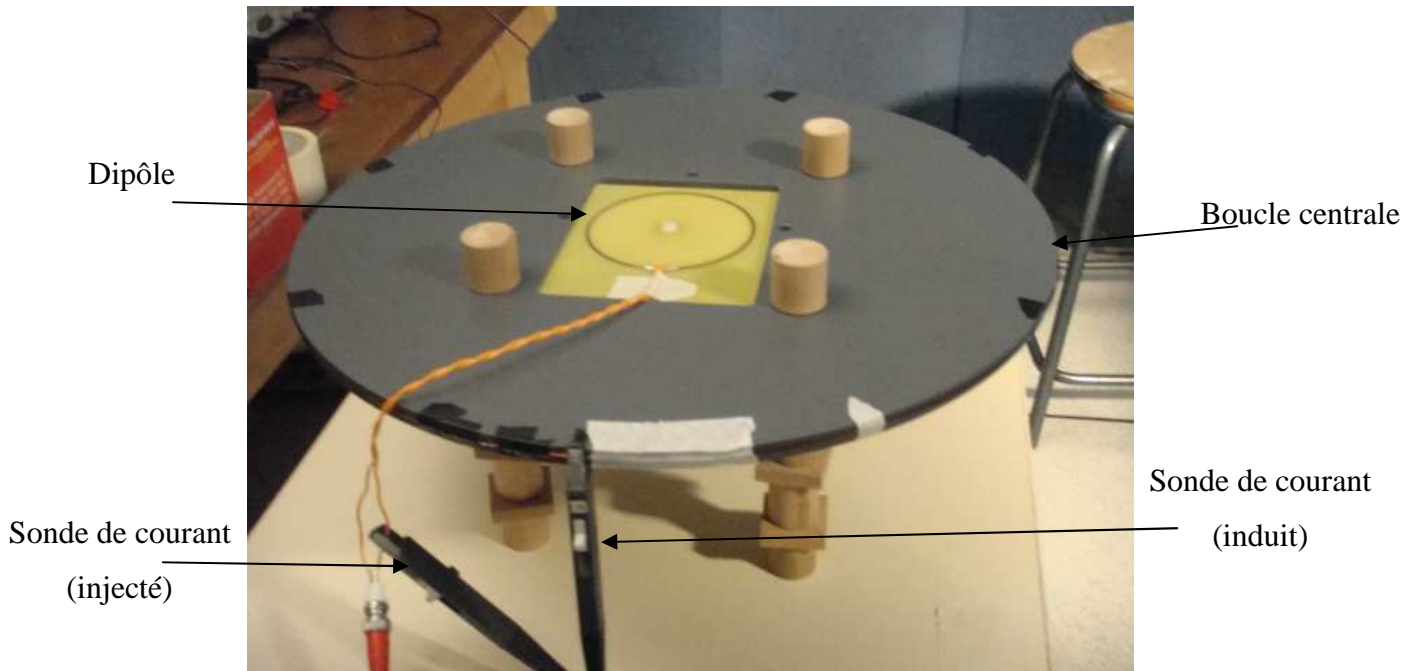


Figure.38 – Antenne centrale seule dans le cas du dipôle

Les résultats de mesure du rapport du courant au niveau de la boucle de mesure centrale sur le courant injecté sont représentés sur la Figure.39. On remarque que le rapport des courants est -38dB sur presque toute la bande de fréquence (20kHz-20MHz) au-delà on remarque une divergence vers 30MHz (certainement à cause de la taille de l'antenne).

Pour déterminer la valeur du courant au niveau de la boucle centrale, il suffit de mesurer à l'aide d'un oscilloscope la valeur du courant injecté et ensuite en déduire des résultats du rapport courant boucle/courant injecté la valeur du courant au niveau de la boucle centrale.

Sachant que le courant injecté mesuré est de 42mA et que le rapport des courants mesuré est de -38dB, on a :

$$20 \cdot \log\left(\frac{i_s}{i_e}\right) = -38dB \quad \text{eq. 126}$$

Avec :  $i_e$  : courant injecté.  
 $i_s$  : courant induit à la sortie (boucle centrale).

Dans ce cas le courant au niveau de la boucle centrale  $i_s$  est égal à 0.53mA.

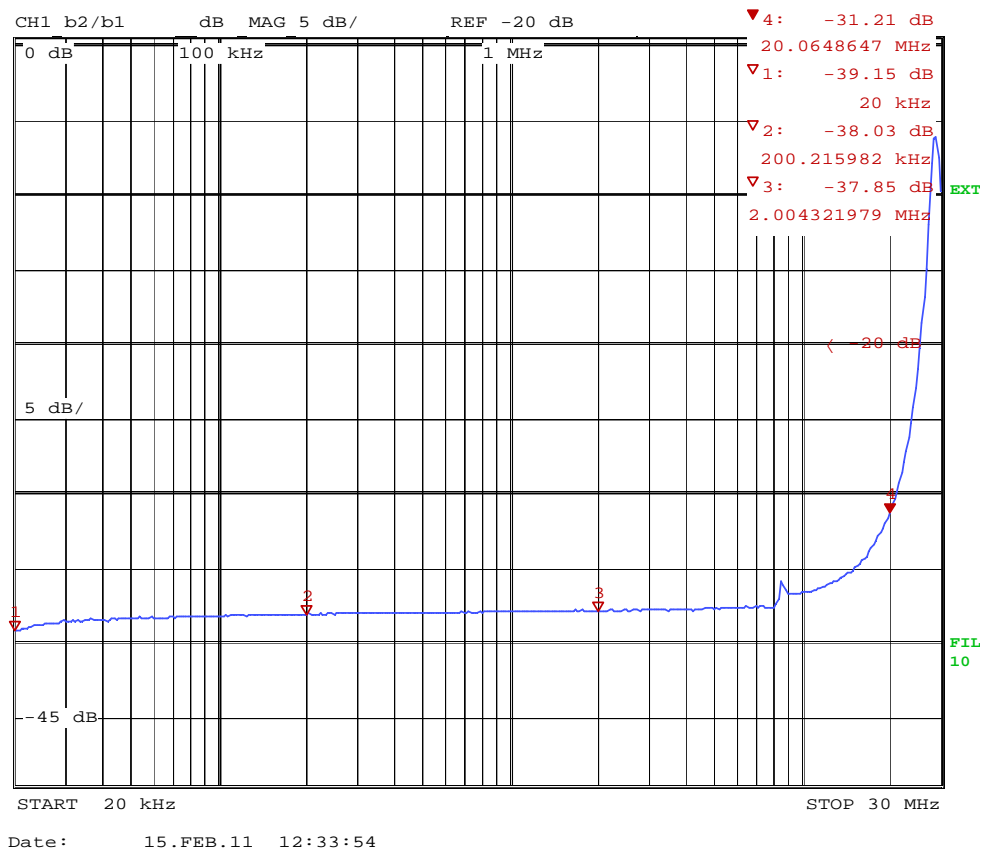


Figure.39 – Rapport des courants dans l’antenne source et le capteur « boucle centrale »

### 2.1.3.2 Antenne boucle $C_{10-1}$ seule

La mesure du courant au niveau de la boucle centrale est importante pour la calibration du banc de mesure, par contre la mesure des courants au niveau des antennes boucles, nous permet, en plus de la calibration, la détermination des coefficients multipolaires.

Pour la calibration dans le cas où l’on ne garde que l’antenne boucle  $C_{10-1}$ , il est important de garder la même forme du banc de mesure c'est-à-dire tout simplement la distance entre l’antenne boucle et le dipôle comme le montre la Figure.40.

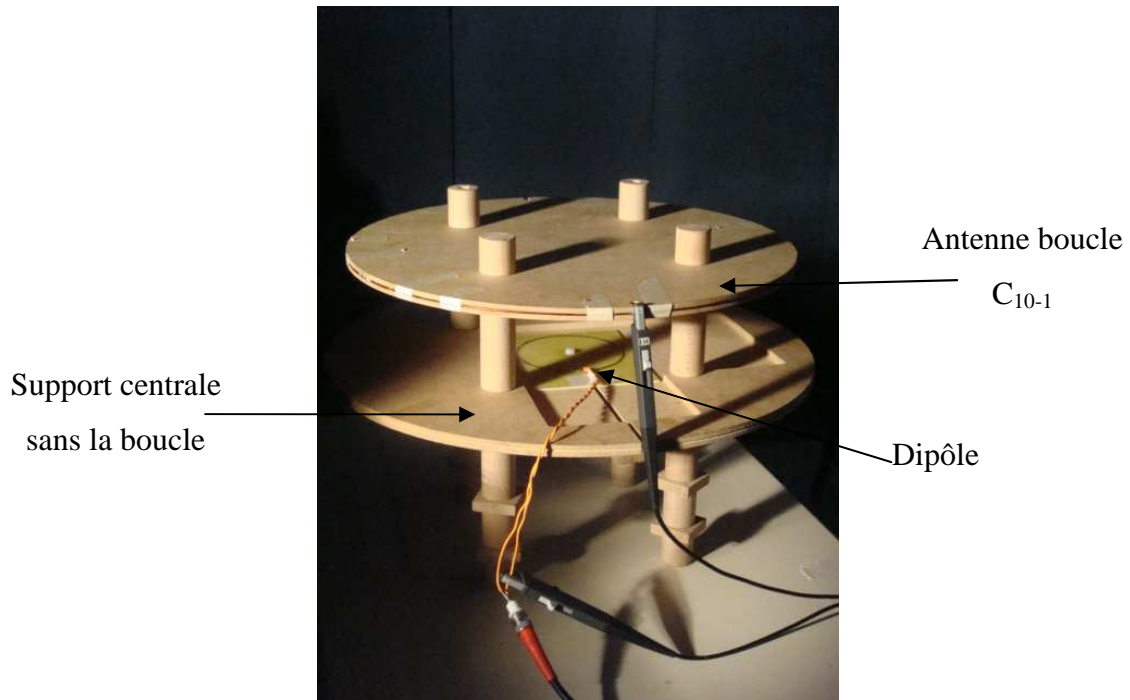


Figure.40 – Antenne boucle  $C_{10-1}$  seule dans le cas du dipôle

Les résultats de mesure du rapport courant de sortie sur l'antenne boucle  $C_{10-1}$  sur courant injecté sont présentés sur la Figure.41. Comme dans le cas de la boucle centrale, on remarque que le courant au niveau de l'antenne boucle  $C_{10-1}$  est à peu près constant jusqu'à 20MHz. Le rapport des courants dans cette bande de fréquence est égal à -38,8dB, dans ce cas le courant mesuré au niveau de l'antenne boucle  $C_{10-1}$  est de 0,48mA si on applique la relation eq. 126.

Une fois que l'on a mesuré le courant au niveau de l'antenne boucle  $C_{10-1}$ , on peut déterminer les coefficients multipolaires  $Q_{10}$  et cela en appliquant la relation eq. 124 sachant qu'il faut prendre en compte la symétrie entre l'antenne boucle  $C_{10-1}$  et  $C_{10-2}$ .

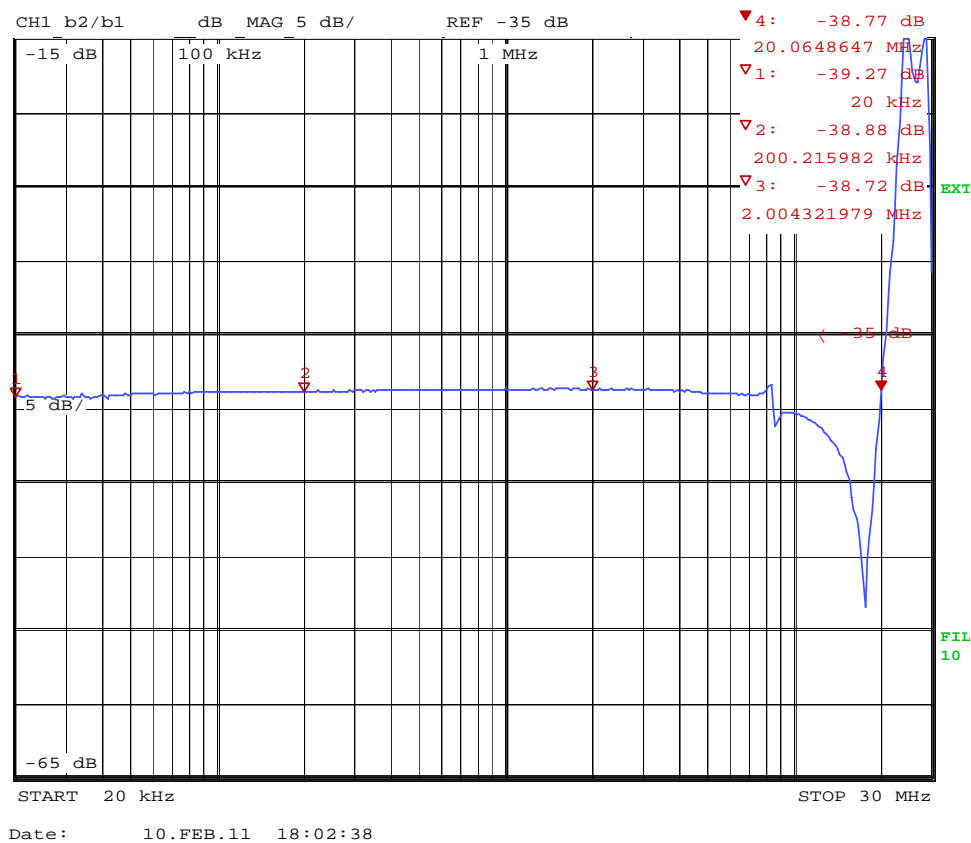


Figure.41 – Rapport en dB des courants au niveau de l’antenne  $C_{10-1}$  et de l’antenne source

### 2.1.3.3 Antenne boucle $C_{20-1}$ seule

De même que dans le cas de l’antenne boucle  $C_{10-1}$ , la mesure du courant au niveau de l’antenne boucle  $C_{20-1}$  en l’absence des autres boucles doit respecter la distance entre la source et l’antenne boucle  $C_{20-1}$ .

Les résultats de mesure du courant au niveau de l’antenne boucle  $C_{20-1}$  sur le courant injecté sont représentés sur la Figure.42. Dans ce cas le rapport des courants est de -40dB comme dans les autres cas jusqu’à 20MHz d’où un courant de 0,42mA au niveau de l’antenne boucle  $C_{20-1}$ .

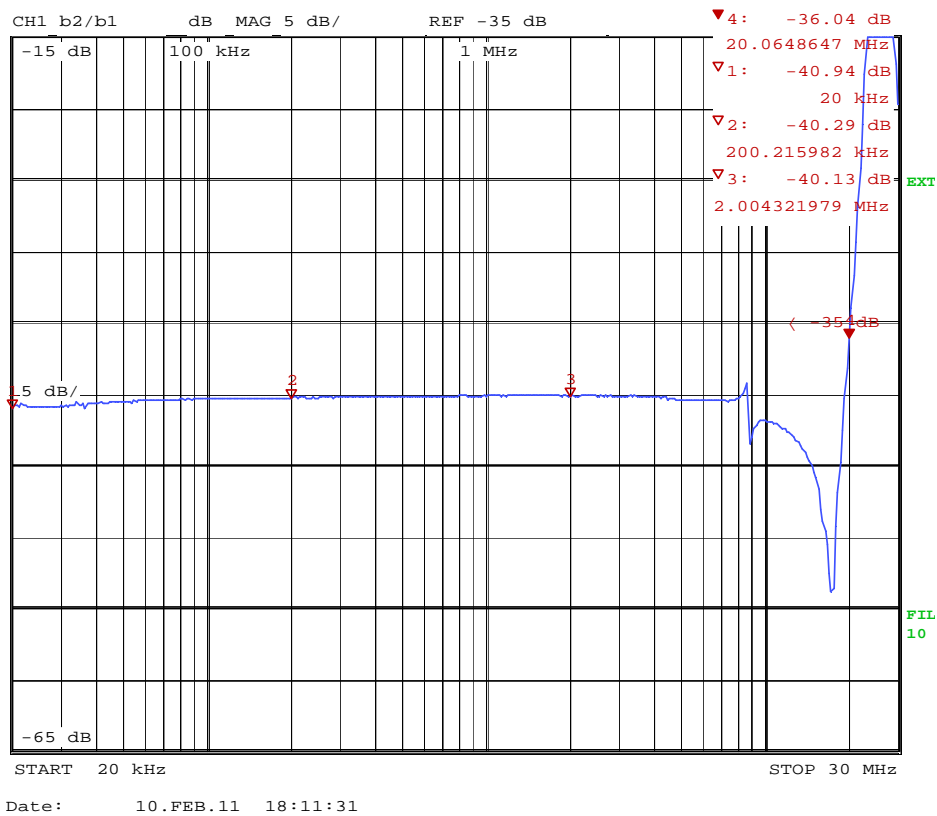


Figure.42 – Rapport en dB du courant dans l’antenne boucle  $C_{20-1}$  / courant injecté

#### 2.1.3.4 Comparaison et validation

Les mêmes mesures du courant au niveau de chaque boucle sont refaites mais cette fois-ci dans le cas où l’on garde le dispositif de mesure complet. Cette configuration permet de prendre en compte les interactions entre les boucles. Les résultats de mesure dans le cas des antennes boucles  $C_{10-1}$  et  $C_{20-1}$  qui nous permettent de déterminer les coefficients multipolaires sont comparés aux résultats analytiques et à ceux calculés sous Flux3D. Les résultats sont représentés sur la Figure.43 pour l’antenne boucle  $C_{10-1}$  et sur la Figure.44 pour l’antenne boucle  $C_{20-1}$ .

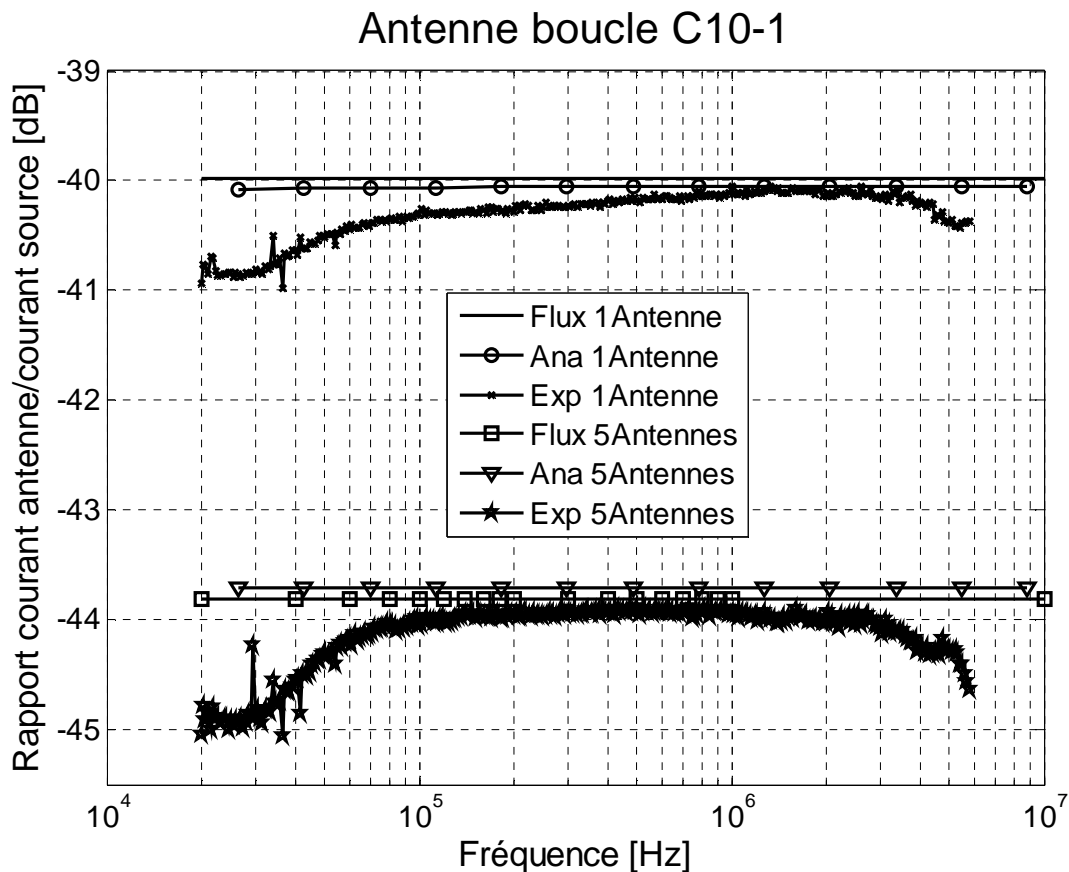


Figure.43 – Comparaison des mesures du courant de l’antenne  $C_{10-1}$  avec les résultats analytiques et numériques pour l’antenne seule et avec toutes les boucles de mesure (antenne émettrice=dipôle)

Sur le graphe, que ça soit celui qui concerne l’antenne boucle  $C_{10-1}$  ou  $C_{20-1}$ , on retrouve les mêmes résultats. Les résultats de mesure concordent avec les résultats analytiques et numériques sous Flux3D®, dans le cas où on place chaque boucle seule ou lorsqu’on garde le dispositif complet avec ses 5 boucles.

Si on cherche à comparer les résultats de mesure entre le cas où l’on considère le dispositif de mesure complet avec le cas où l’on ne garde seulement l’antenne boucle  $C_{10-1}$  ou  $C_{20-2}$ , on remarque une différence d’à peu près 4dB due normalement aux interactions entre les boucles.

Il est donc impératif de développer une méthode qui permet de corriger les mesures dans le cas du dispositif complet pour ne pas prendre en compte ces interactions et en déduire juste le courant induit (et donc le flux) par le dipôle sur chacune des antennes boucles.

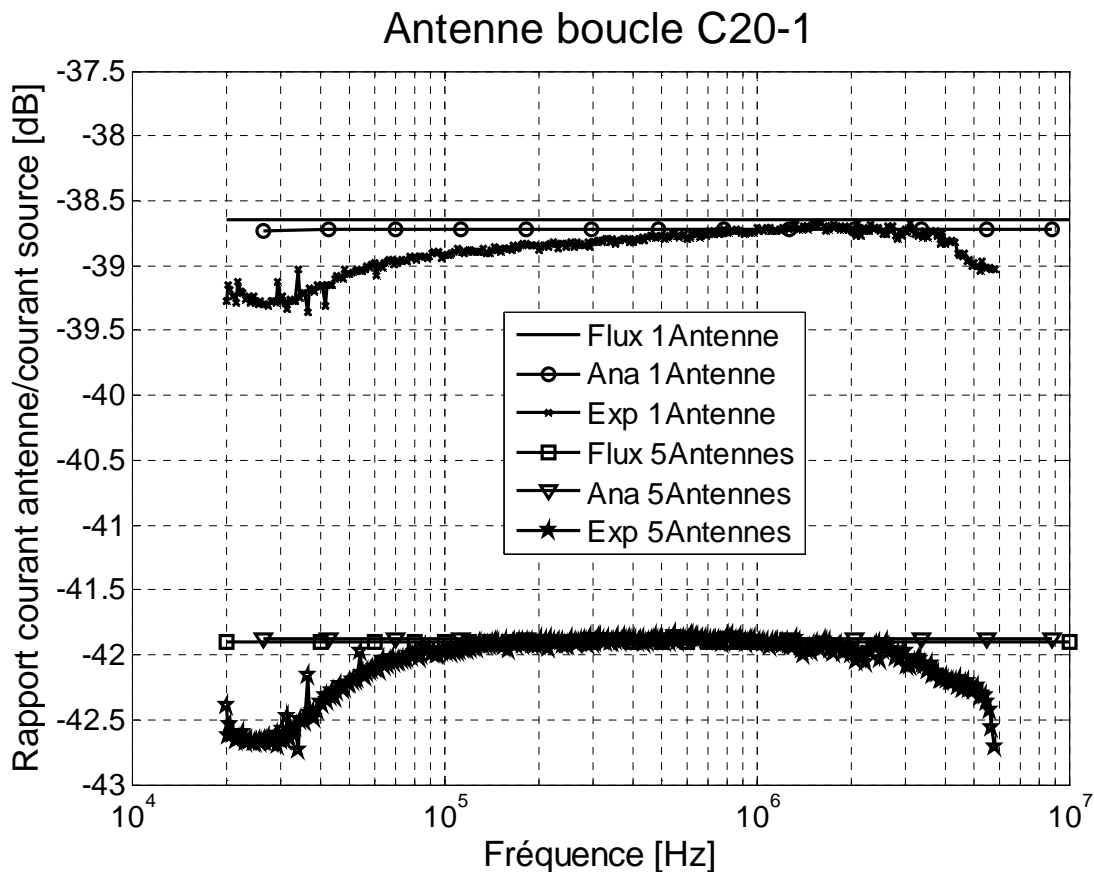


Figure.44 – Comparaison des mesures du courant de l’antenne C<sub>20-1</sub> avec les résultats analytiques et numériques pour l’antenne seule et avec toutes les antennes de mesure (antenne émettrice=dipôle)

### 2.1.4 Calibration du quadripôle

La même procédure de calibration appliquée pour le dipôle est utilisée pour une source de rayonnement de type quadripôle. Du fait de la symétrie entre les antennes boucles supérieures et inférieures du banc de mesure, comme précédemment, seules les antennes boucles C<sub>10-1</sub> et C<sub>20-1</sub> seront utilisées pour la calibration.

Les résultats de mesure des courants au niveau des antennes boucles C<sub>10-1</sub> et C<sub>20-1</sub> dans le cas où l’on considère chacune séparément, et lorsqu’on prend en compte aussi les interactions entre les 5 boucles (dispositif complet) sont représentées sur la Figure.45 et la Figure.46, qui correspondent respectivement au cas de l’antenne boucle C<sub>10-1</sub> et C<sub>20-1</sub>. Les résultats de mesure sont comparés aux résultats analytiques et numériques calculés sous flux3D®.

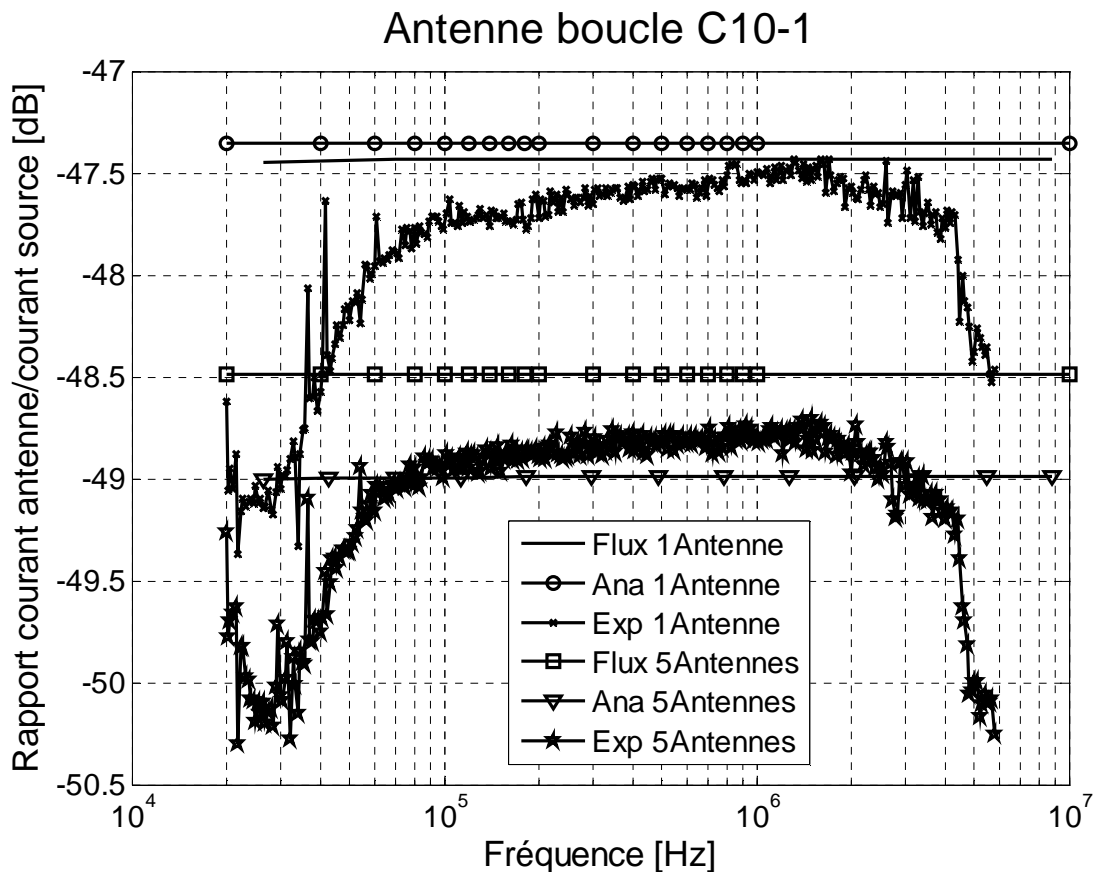


Figure.45 – Comparaison des mesures du courant dans l’antenne  $C_{10-1}$  avec les résultats analytiques et numériques pour l’antenne seule et avec toutes les antennes de mesure (antenne émettrice=quadripôle)

Pour valider les résultats de mesure dans chaque cas on a utilisé les résultats analytique et numérique. Dans le cas où on utilise chaque boucle seule, les résultats de mesure convergent avec les résultats analytique et numérique que ça soit dans le cas de l’antenne boucle  $C_{10-1}$  ou  $C_{20-1}$ , la seule différence est en très basse fréquence du fait des approximations au niveau des formules analytiques et du maillage au niveau de flux3D®.

Concernant la différence entre les mesures dans le cas où on considère chacune des boucles et dans le cas où on utilise le dispositif de mesure complet, comme dans le cas du dipôle, cette différence est due aux interactions entre les boucles du banc de mesure. Une méthode de correction appliquée sur les résultats de mesure dans le cas du dispositif complet nous permettra de réduire ces interactions pour en déduire seulement le courant propre c'est-à-



dire le courant induit seulement par le quadripôle. La méthode de correction est développée plus en détail dans la partie qui suit.

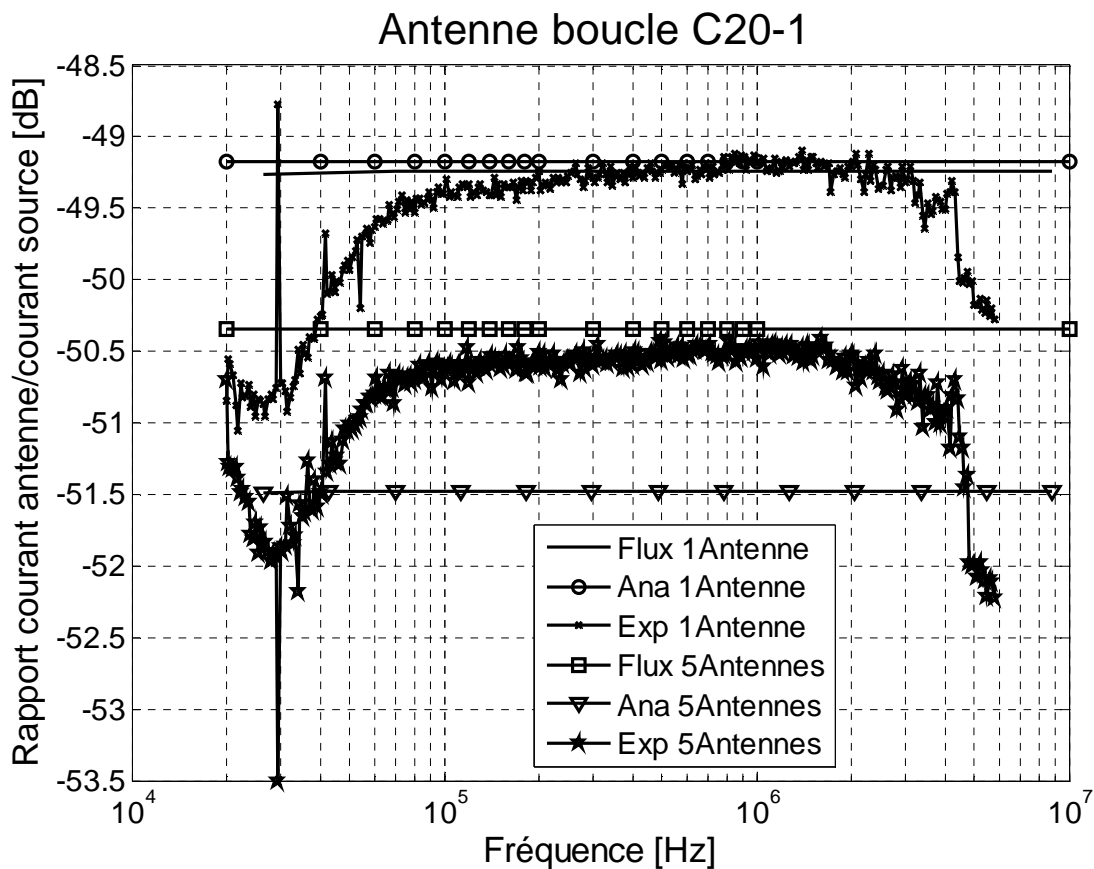


Figure.46 – Comparaison des mesures du courant de l'antenne C<sub>20-1</sub> avec les résultats analytiques et numériques pour l'antenne seule et avec toutes les antennes de mesure (antenne émettrice=quadripôle)

## 2.2. Méthode de correction

### 2.2.1 Description de la méthode

Pour pouvoir utiliser le banc de mesure complet sans prendre en compte les interactions entre les antennes, il est important d'utiliser une méthode qui permette de compenser ces interactions et cela en utilisant les résultats de mesure lorsqu'on a utilisé chaque antenne boucle seule. A partir de la Figure.47 qui représente le schéma électrique de chacune des antennes on développe la méthode de calcul qui permet de déterminer le coefficient de

correction pour chacune des antennes où DUT (Dispositif Under Test) est la source de rayonnement.

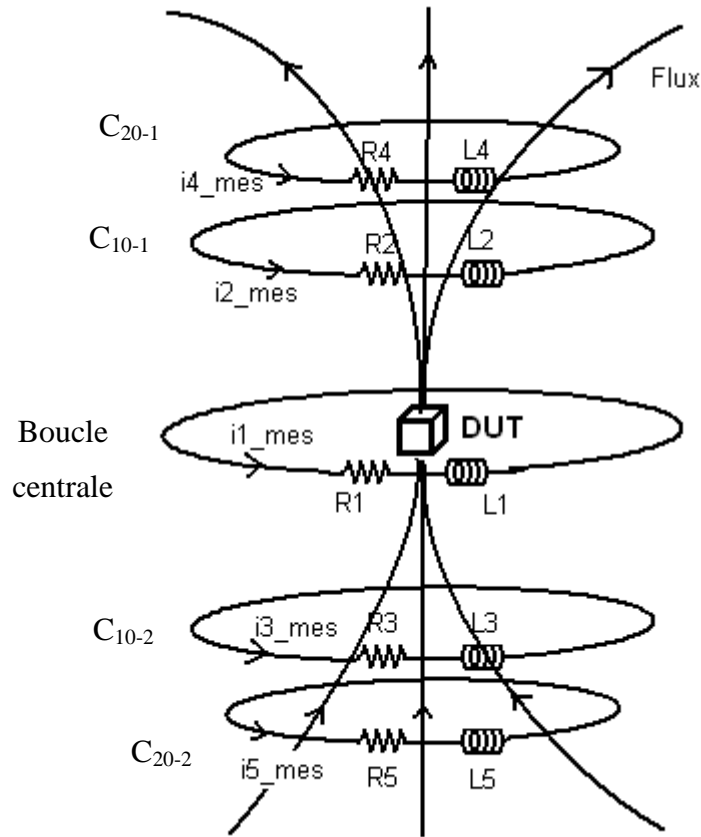


Figure.47 – Schéma du banc de mesure avec caractéristiques électriques de chaque antenne

Si on applique la loi de Faraday au niveau de l'antenne boucle  $C_{10-1}$ , la force électromotrice de cette dernière s'écrit comme suit :

$$e_2 = -j\omega\phi_2 \quad \text{eq. 127}$$

Avec  $\phi_2$  le flux magnétique qui traverse l'antenne boucle  $C_{10-1}$

Pour calculer le courant qui circule au niveau de l'antenne boucle  $C_{10-1}$ , on utilise la loi d'Ohm pour déterminer la relation entre le courant, la force électromotrice  $e_2$  et les

---



---

paramètres électriques de la boucle  $r_2$  et  $L_2$ . Ensuite on remplace  $e_2$  par son expression (eq. 127). L'expression du courant est :

$$i_{2\_mes} = \frac{e_2}{r_2 + j\omega L_2} = -\frac{j\omega\Phi_2}{r_2 + j\omega L_2} \quad \text{eq. 128}$$

$r_2$ : résistance de l'antenne boucle  $C_{10-1}$

$L_2$ : inductance de l'antenne boucle  $C_{10-1}$

Dans le cas où l'on considère le dispositif de mesure complet, on doit prendre en compte les interactions entre les antennes boucles. Dans ce cas le flux  $\Phi_2$  qui traverse l'antenne boucle  $C_{10-1}$  est la somme des flux créés par la source de rayonnement DUT et les autres antennes. L'expression du flux  $\Phi_2$  peut s'écrire sous la forme :

$$\Phi_2 = \Phi_{DUT} + \Phi_{21} + \Phi_{23} + \Phi_{24} + \Phi_{25} \quad \text{eq. 129}$$

Si on remplace l'expression du flux  $\Phi_2$  eq. 129 dans eq. 128 le courant calculé  $i_{2\_mes}$  devient :

$$i_{2\_mes} = -\frac{j\omega}{r_2 + j\omega L_2} (\Phi_{DUT} + \Phi_{21} + \Phi_{23} + \Phi_{24} + \Phi_{25}) \quad \text{eq. 130}$$

avec:

$$\begin{aligned} \Phi_{21} &= M_{21} * i_{1\_mes} \\ \Phi_{23} &= M_{23} * i_{3\_mes} \\ \Phi_{24} &= M_{24} * i_{4\_mes} \\ \Phi_{25} &= M_{25} * i_{5\_mes} \end{aligned} \quad \text{eq. 131}$$

Où  $M_{kp}$  est la mutuelle inductance entre l'antenne  $k$  et l'antenne  $p$ .

On suppose que le flux induit par la source de rayonnement  $\Phi_{DUT}$  crée un courant  $i_{2\_DUT}$  au niveau de l'antenne  $C_{10-1}$ , c'est le courant qu'on cherche à mesurer si on ne prend pas en compte l'interaction de l'antenne  $C_{10-1}$  avec les autres antennes. Dans ce cas le flux  $\Phi_{DUT}$  s'écrit sous la forme :

$$\Phi_{DUT} = \frac{i_{2\_DUT} * (r_2 + j\omega L_2)}{-j\omega} \quad \text{eq. 132}$$

Pour exprimer le courant mesuré sur l'antenne boucle  $C_{10-1}$  dans le cas où on garde le dispositif de mesure complet, en fonction du courant propre  $i_{2\_DUT}$  et des interactions avec les autres antennes qui sont représentées par une mutuelle inductance, on remplace eq. 130 et eq. 131 dans eq. 132. L'expression du courant devient :

$$i_{2\_mes} = i_{2\_DUT} - \frac{j\omega M_{21} i_{1\_mes}}{r_2 + j\omega L_2} - \frac{j\omega M_{23} i_{3\_mes}}{r_2 + j\omega L_2} - \frac{j\omega M_{24} i_{4\_mes}}{r_2 + j\omega L_2} - \frac{j\omega M_{25} i_{5\_mes}}{r_2 + j\omega L_2} \quad \text{eq. 133}$$

De cette expression eq. 133, on arrive à calculer le courant  $i_{2\_DUT}$  induit seulement par la source de rayonnement qui nous permet de déterminer ensuite directement les coefficients multipolaires en gardant le dispositif de mesure complet.

La même méthode peut être appliquée sur les autres antennes boucles pour déterminer seulement le courant induit par la source de rayonnement sur chacune des antennes boucles. Dans ce cas l'expression des courants induits peut être écrite sous une forme matricielle en fonction des mutuelles inductances entre les antennes boucles, des courants mesurés sur chacune des antennes boucles lorsqu'on utilise le dispositif complet et des paramètres électriques de chaque boucle :

$$\begin{bmatrix} i_{1DUT} \\ i_{2DUT} \\ i_{3DUT} \\ i_{4DUT} \\ i_{5DUT} \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} 1 & \frac{M_{12}}{Z_1} & \frac{M_{13}}{Z_1} & \frac{M_{14}}{Z_1} & \frac{M_{15}}{Z_1} \\ \frac{M_{21}}{Z_2} & 1 & \frac{M_{23}}{Z_2} & \frac{M_{24}}{Z_2} & \frac{M_{25}}{Z_2} \\ \frac{M_{31}}{Z_3} & \frac{M_{32}}{Z_3} & 1 & \frac{M_{34}}{Z_3} & \frac{M_{35}}{Z_3} \\ \frac{M_{41}}{Z_4} & \frac{M_{42}}{Z_4} & \frac{M_{43}}{Z_4} & 1 & \frac{M_{45}}{Z_4} \\ \frac{M_{51}}{Z_5} & \frac{M_{52}}{Z_5} & \frac{M_{53}}{Z_5} & \frac{M_{54}}{Z_5} & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} i_{1mes} \\ i_{2mes} \\ i_{3mes} \\ i_{4mes} \\ i_{5mes} \end{bmatrix} \quad \text{eq. 134}$$

On applique cette méthode de correction dans le cas du dipôle, sur les résultats de mesure obtenus précédemment dans le cas où l'on a mesuré le courant sur chacune des antennes boucles pour un dispositif complet et cela pour calculer seulement le courant induit par la source de rayonnement qui nous permet de déterminer les coefficients multipolaires. Les paramètres électriques ( $r, L$ ) de chacune des antennes boucles ainsi que les mutuelles inductances  $M_{kp}$  sont calculés analytiquement en utilisant les formules de [26].

### 2.2.2 Cas du dipôle

Pour valider la méthode de correction développée, on l'applique dans le cas du dipôle sur les résultats de mesures du courant au niveau de l'antenne boucle  $C_{10-1}$ . Cela nous permet de calculer le courant réel induit par le dipôle sur l'antenne boucle en éliminant les interactions avec les autres antennes boucles.

Les courbes de mesures du rapport du courant induit sur l'antenne boucle  $C_{10-1}$  sur le courant de l'antenne source dans le cas du dispositif complet « 5 antennes » et dans le cas de l'antenne boucle seule sont présentés sur la Figure.48, en plus de la courbe obtenue lorsqu'on a appliqué la méthode de correction sur les résultats de mesures dans le cas du dispositif complet.

On remarque que la courbe corrigée coïncide bien avec les résultats de mesures dans le cas de l'antenne boucle seule, ce qui permet de valider notre méthode de correction puisque dans le cas d'une mesure avec les 5 antennes boucles, on a pu éliminer les interactions entre les antennes et ne garder que le courant induit par le dipôle sur l'antenne boucle  $C_{10-1}$ .

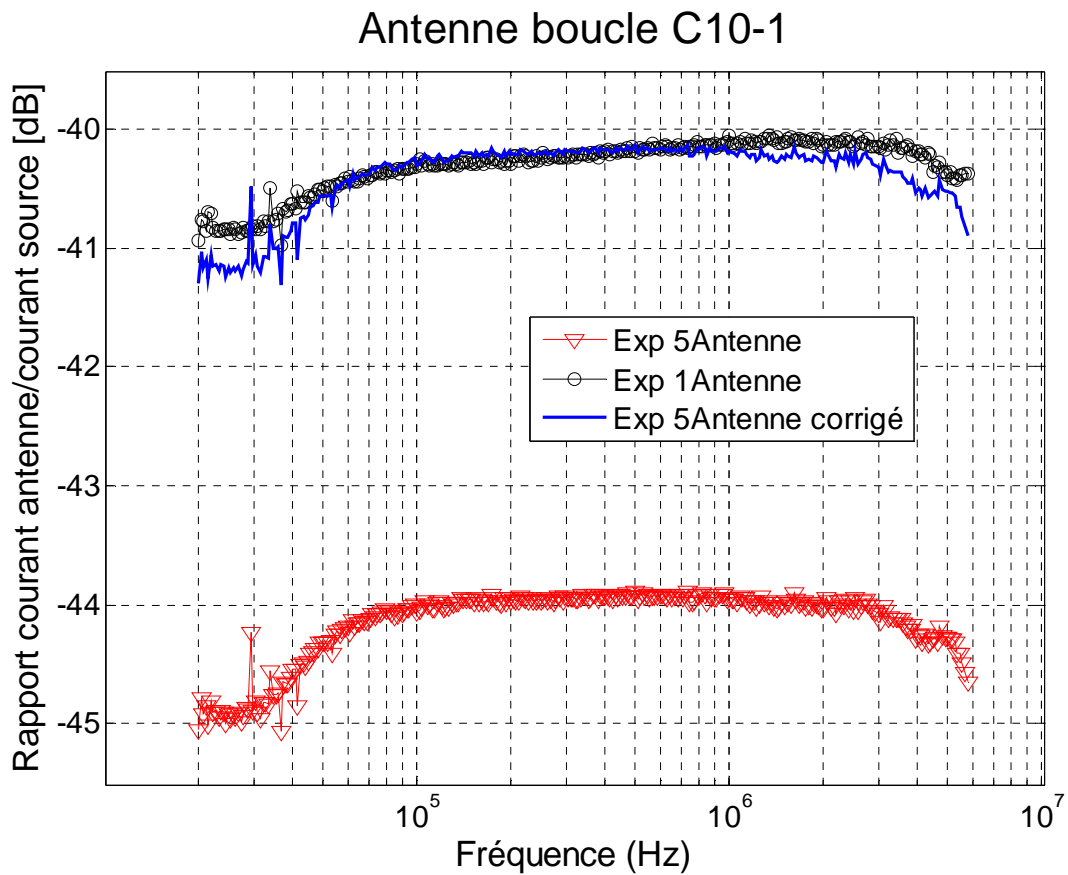


Figure.48 – Correction des résultats de mesures du courant sur l’antenne boucle C<sub>10-1</sub> dans le cas du banc complet et comparaison avec les résultats de mesures dans le cas de l’antenne seule

### 2.3. Validation

Pour valider la méthode intégrale de mesure utilisée pour déterminer les coefficients multipolaires, on a choisi un système plus complexe, un transformateur de dimensions adaptées à notre banc de mesure (7cm de diamètre). Une photographie est présentée sur la Figure.49.

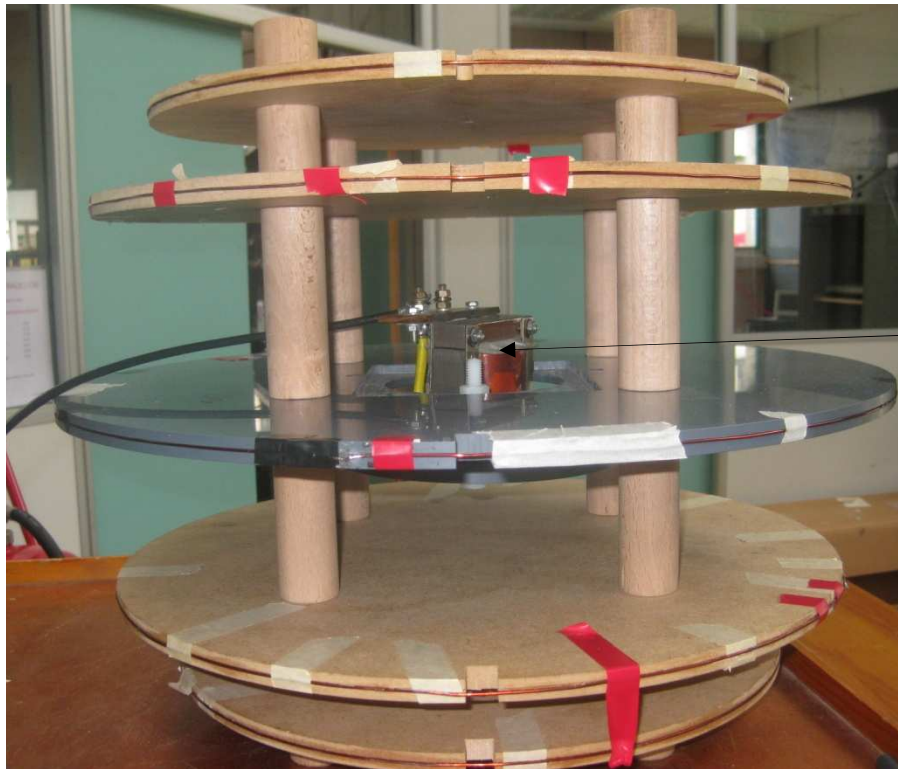


Figure.49 – Transformateur

Par la mesure, on détermine les coefficients multipolaires que l'on introduit par la suite dans le code de calcul pour représenter la source équivalente du rayonnement du transformateur, dans ce cas on se limite à la détermination de la composante  $z$  seulement du champ rayonné. La source équivalente est utilisée pour calculer la mutuelle inductance entre le transformateur et une simple boucle de 5cm de rayon. Les résultats de calcul de la mutuelle inductance sont validés par la mesure.

### *2.3.1 Détermination des coefficients multipolaires*

Le banc de mesure basé sur la méthode intégrale est utilisé pour déterminer les coefficients multipolaires permettant de construire la source équivalente du rayonnement du transformateur suivant l'axe  $oz$ . Le transformateur est placé au centre du banc de mesure constitué de ses 5 antennes boucles comme présenté sur la Figure.50.



Source de rayonnement  
transformateur

Figure.50 – Banc de mesure avec ses 5 antennes boucles et le transformateur représentant la source de rayonnement

Pour déterminer les coefficients multipolaires  $Q_{10}$  et  $Q_{20}$  du transformateur, on mesure au niveau de l'analyseur de réseau le rapport en dB du courant au niveau de chaque antenne boucle sur le courant au niveau de la source c'est-à-dire le transformateur. Le résultat de mesures pour l'antenne boucle  $C_{10-1}$  est représenté sur la Figure.51.

Le transformateur est aussi alimenté en « petits signaux », l'influence de la « polarisation » du transformateur par un courant à 50Hz n'est pas prise en compte dans cette expérience.

De la Figure.51 on constate que le rapport des courants reste presque stable jusqu'à environ 2MHz ensuite il chute, cela est certainement dû au comportement du transformateur. On choisit la fréquence de 200kHz à laquelle on calcule les courants sur les antennes boucles pour en déduire par la suite les coefficients multipolaires.



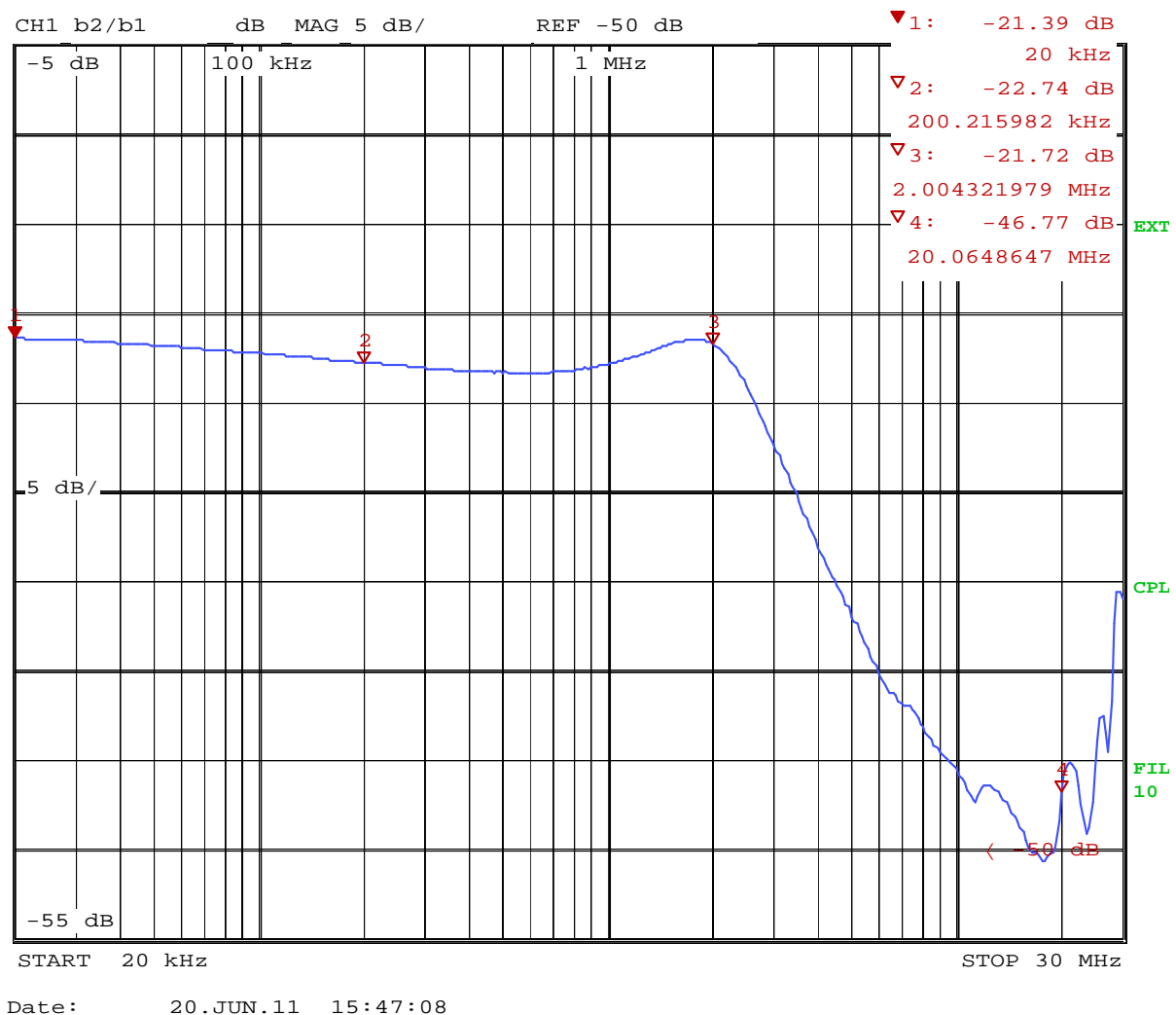


Figure.51 – Rapport en dB des courants dans l’antenne boucle  $C_{10-1}$  et la source  
« transformateur »

Si on se place à 200kHz, le rapport des courants dans l’antenne boucle  $C_{10-1}$  et le transformateur est de -22,74dB, supposons que le courant dans la source est de 1A, dans ce cas le courant mesuré sur l’antenne boucle  $C_{10-1}$  est de 60,7mA d’après la relation eq. 126. Le même procédé de mesure est appliqué sur les autres antennes boucles pour mesurer le courant sur chacune d’elles.

Ces courants calculés au niveau de chaque antenne boucle prennent aussi en compte les interactions entre les antennes boucles, pour cela on applique la méthode de correction sur ces courants mesurés pour en déduire les courants induits par le transformateur sur chaque antenne boucle en utilisant la formule eq. 134.

Le Tableau 5 résume les résultats de mesures et de calcul des courants sur les 5 antennes boucles du banc de mesure.

Antenne boucle	Rapport des courants (dB)	Courant mesuré (mA)	Courant corrigé (mA)
C <sub>20-1</sub>	-24,33	60,7	91,3
C <sub>10-1</sub>	-22,74	72,9	102,7
Antenne centrale	-21,83	81	108,1
C <sub>10-2</sub>	-23,59	66,1	94,8
C <sub>20-2</sub>	-25,61	52,4	82,9

**Tableau 5 : Mesures des courants sur les antennes boucles ainsi que le calcul des courants corrigés après application de la méthode de correction sur les courants mesurés.**

Pour déterminer les coefficients multipolaire  $Q_{10}$  et  $Q_{20}$  du transformateur, on applique les formules eq. 124 et eq. 125 en utilisant les courants réels calculés pour chacune des antennes boucles, on obtient :

$$Q_{10} = 0,0665 \text{ A. m}^2 \quad \text{eq. 135}$$

$$Q_{20} = 7,442.10^{-4} \text{ A. m}^3$$

Ces coefficients sont utilisés pour déterminer la source équivalente du rayonnement du transformateur, cela nous permet de calculer le couplage entre le transformateur et une simple boucle avec la méthode numérique basée sur le développement multipolaire.

### 2.3.2 *Mutuelle inductance*

#### 2.3.2.1 *Par la mesure*

On cherche à déterminer le couplage, représenté par une mutuelle inductance, entre le transformateur et une boucle de rayon 5cm suivant l'axe  $oz$ . La configuration de mesure composée du transformateur et la boucle est présentée sur la Figure.52.

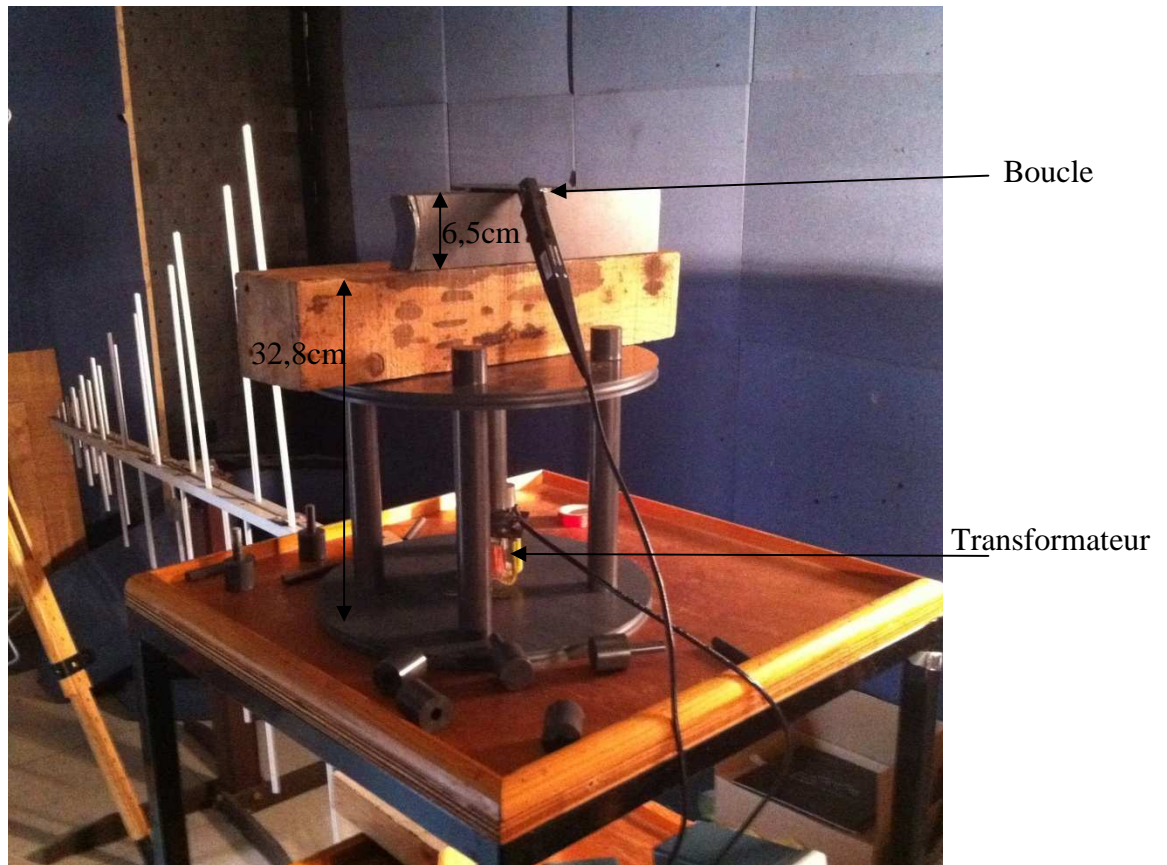


Figure.52 – Configuration de mesure de la mutuelle entre le transformateur et une boucle

Pour la mesure de la mutuelle inductance, on utilise la même méthode que précédemment. Le transformateur est la source de rayonnement et la boucle est l'antenne. La mesure du rapport des courants sur la boucle et le transformateur nous permet de calculer la mutuelle inductance.

On choisit deux distances entre le transformateur et la boucle pour lesquelles on détermine la mutuelle inductance, la première  $d_1=29,3\text{cm}$  et la deuxième  $d_2=35,8\text{cm}$ . Les résultats de mesures du rapport des courants pour la première distance sont présentés sur la Figure.53.

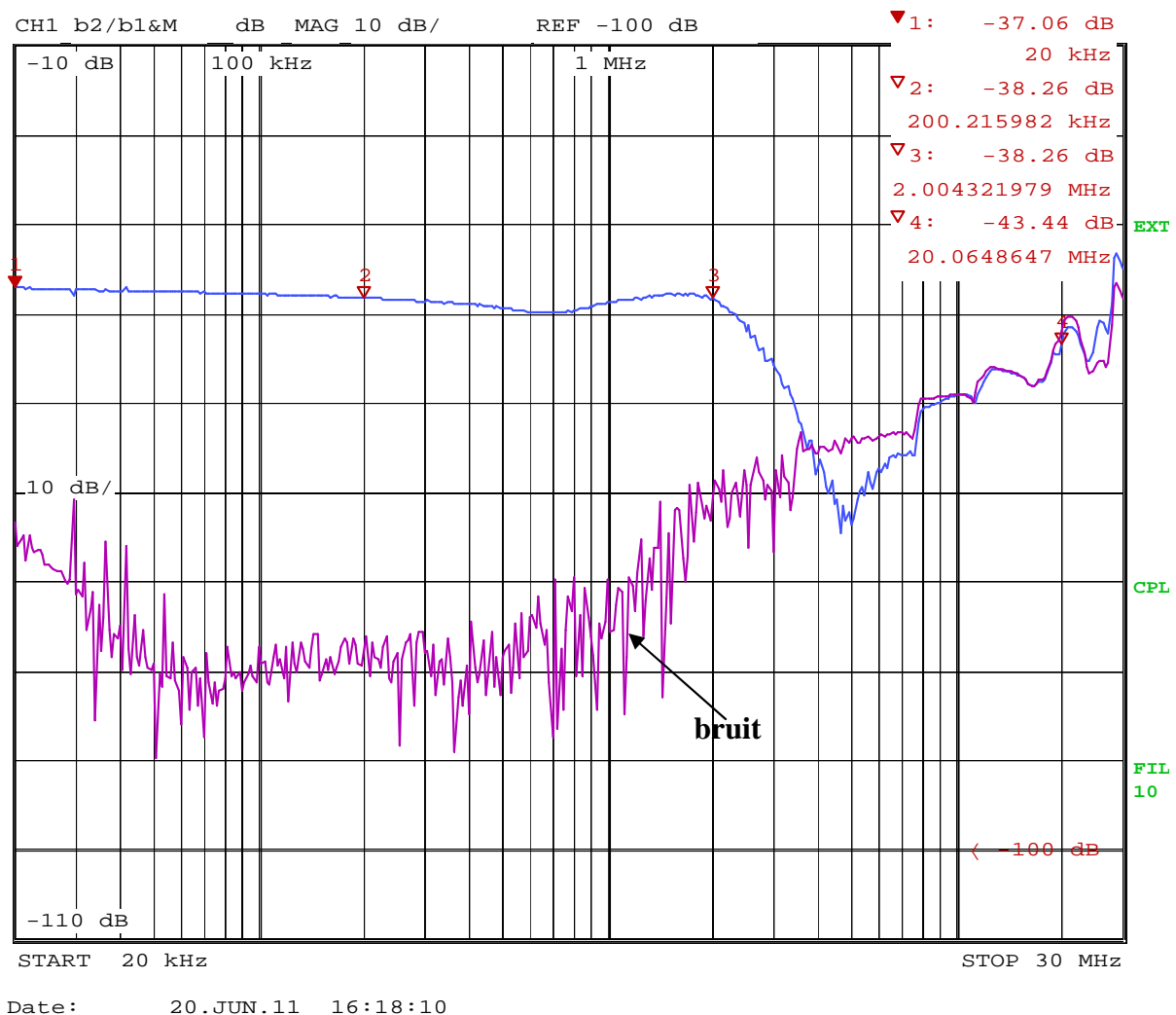


Figure.53 – Rapport des courants sur la boucle et le transformateur et bruit de mesure

Sur la Figure.53, le bruit est mesuré comme le rapport des courants quand le transformateur n'est pas alimenté. Ceci permet de s'assurer qu'à la distance choisie ce qu'on mesure au niveau de la boucle n'est pas seulement du bruit. La courbe supérieure correspond au rapport des courants mesurés, on remarque qu'il reste presque stable jusqu'à 2MHz. Comme précédemment pour le calcul des coefficients multipolaires, on choisit la fréquence de 200kHz à laquelle on détermine la mutuelle inductance entre le transformateur et la boucle.

Sachant que le flux induit par le transformateur sur la boucle est :

$$\Phi_2 = M_{12} \cdot i_1 \quad \text{eq. 136}$$

Où  $M_{12}$  est la mutuelle inductance et  $i_1$  et le courant du transformateur, l'expression de la mutuelle inductance est :

$$M_{12} = L_2 \cdot \frac{i_2}{i_1} \quad \text{eq. 137}$$

avec  $i_2$  le courant sur la boucle et  $L_2$  l'inductance propre de la boucle, sachant que la boucle est de 5cm de rayon, dans ce cas l'inductance propre de la boucle est  $2,986 \cdot 10^{-7} \text{H}$ .

Il suffit de déterminer le rapport des courants sur la boucle et le transformateur pour en déduire la mutuelle inductance pour les deux distances choisies entre le transformateur et la boucle.

Les résultats de mesure et de calcul sont présentés sur le tableau suivant :

Distance entre le transformateur et la boucle	Rapport des courants (dB)	Mutuelle inductance (nH)
$d_1$	-38,26	3,64
$d_2$	-43,57	1,97

**Tableau 6 : résultats de mesure des rapports des courants sur la boucle et sur le transformateur avec le calcul des mutuelles inductances pour deux distances entre le transformateur et la boucle**

Il reste à calculer avec la méthode multipolaire la mutuelle inductance entre le transformateur et la boucle en utilisant les coefficients multipolaires du transformateur déterminés précédemment par la mesure. Les résultats de calcul de la mutuelle inductance seront comparés aux résultats de mesures présentés sur le Tableau 6.

### 2.3.2.2 Par la méthode multipolaire

Pour déterminer la mutuelle inductance entre le transformateur et la boucle, on utilise les coefficients multipolaires du transformateur (eq. 135) calculés en utilisant les résultats de

---

---

mesures, ces derniers nous permettent de construire la source équivalente du rayonnement du transformateur suivant l'axe  $oz$ .

Les coefficients du développement multipolaire de la boucle de réception sont connus analytiquement. Les résultats de calcul de la mutuelle inductance avec la méthode multipolaire sont illustrés sur la Figure.54 (fréquence de 200 kHz).

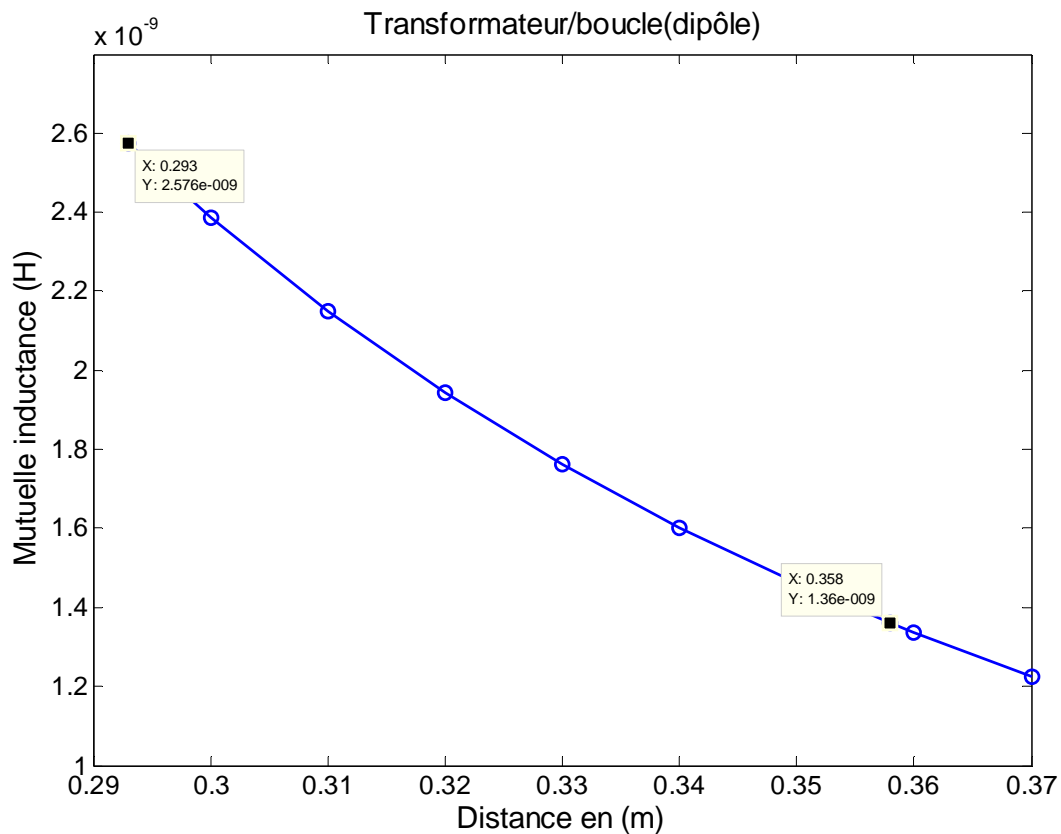


Figure.54 – Mutuelle inductance entre le transformateur et la boucle en fonction de la distance

On remarque que les résultats de calcul convergent avec ceux de la mesure puisqu'on obtient les mêmes ordres de grandeur. Si on se positionne aux distances choisies précédemment  $d_1$  et  $d_2$ , les résultats de comparaison entre la mesure et le calcul sont résumés dans le tableau suivant :

Distance (cm)	Mutuelle inductance mesurée (nH)	Mutuelle inductance calculée (nH)
$d_1 = 29,3$	3,64	2,6
$d_2 = 35,8$	1,97	1,36

**Tableau 7 : résultats de calcul et de mesure de la mutuelle inductance entre le transformateur et la boucle**

### 3. Conclusion

Dans ce chapitre a été présenté le banc de mesure utilisé qui est basé sur la méthode intégrale, ce qui nous permet de déterminer les coefficients multipolaires directement d'un système dont on ne connaît pas les paramètres électriques et géométriques ou complexe à modéliser.

Comme pour chaque système de mesure, la calibration est une étape essentielle, dans notre cas le banc de mesure a été calibré pour deux sources de rayonnement, un dipôle et un quadripôle.

Pour pouvoir utiliser le banc de mesure avec ses antennes boucles sans prendre en compte les interactions entre elles, une méthode de correction qui permet de déterminer des mesures des courants induit seulement par la source sur les antennes boucles a été mise au point, cette méthode est validée dans le cas du dipôle.

L'intérêt était d'utiliser les coefficients multipolaires déterminés par la mesure pour construire la source équivalente du rayonnement d'un ou de plusieurs systèmes et calculer par la suite le couplage entre deux systèmes.

Cette théorie est validée dans le cas du calcul de la mutuelle inductance entre un transformateur dont les coefficients multipolaires ont été déterminés par la mesure et une boucle.

---

---

# **Conclusion générale**





---

---

Durant ces travaux de thèse, une méthode permettant de déterminer le couplage entre systèmes ou sous systèmes, pour prendre en compte la CEM dès la phase de conception d'un dispositif a été développée.

La méthode basée sur le développement multipolaire, nous a permis de construire une source équivalente du rayonnement d'un système, pour cela il était important de déterminer le champ rayonné par le système, soit par la mesure soit par la simulation, dans notre cas en utilisant le logiciel Flux3D®.

En utilisant les sources équivalentes ainsi déterminées, il a été possible de calculer le couplage entre deux systèmes qui a été représenté par une mutuelle inductance. Deux conditions sont nécessaires à l'utilisation de la formule qui permet de calculer la mutuelle inductance. Il ne doit pas y avoir d'intersection entre les sphères qui englobent chacun des systèmes et leurs sources équivalentes doivent être représentées dans le même repère.

Cette méthode de calcul de la mutuelle inductance entre deux systèmes a été validée dans plusieurs cas en fonction de la distance entre les systèmes. Pour la validation, les résultats de calculs ont été comparés aux résultats analytique, numérique en utilisant Flux3D® et expérimentaux.

Un banc de mesure basé sur la méthode intégrale a été utilisé pour déterminer directement les coefficients du développement multipolaire, qui permettent de construire la source équivalente d'un système. Après la calibration du banc de mesure dans le cas des deux sources, le dipôle et le quadripôle, une méthode de correction a été validée. Celle-ci permet de supprimer les interactions entre les antennes du banc de mesure et de ne garder que le courant induit par la source sur chacune des antennes boucles.

Il était important de valider notre méthode dans le cas d'un système complexe, nous avons choisi un transformateur couplé à une boucle en court-circuit. Ce cas nous a permis de valider notre méthode de calcul de la mutuelle inductance ainsi que la méthode de mesure en utilisant le banc de mesure intégrale.



---

---

# Perspectives



---

---

Une perspective intéressante serait de définir d'autres développements harmoniques qui se prêtent mieux à la modélisation de composants tels que les condensateurs. Par exemple, dans le cas du couplage entre condensateurs, la représentation en harmoniques sphériques de la source équivalente n'est pas adaptée à la forme de ce type d'objet. Des travaux pourraient s'orienter vers la description en harmoniques cylindriques du champ rayonné par des composants de géométries spécifiques. Ce qui facilitera la modélisation de l'interaction des couplages entre composants différents. On peut imaginer utiliser les deux représentations, dans le cas où on cherche à déterminer le couplage entre un condensateur et une bobine ou respectivement leurs sources équivalentes sont représentées en harmoniques cylindriques et en harmoniques sphériques.

Notre méthode de calcul pourrait être couplée à la méthode PEEC [30] qui permet d'extraire un circuit électrique équivalent (R-L-M-C) de la partie connectique d'un circuit électrique. En effet la méthode PEEC permettra la représentation des connections électriques et notre méthode le calcul des interactions entre composants. Il reste donc l'interaction entre les « pistes » et les « composants ». Ceci fait l'objet d'une perspective à ces travaux de recherche.

Une autre perspective pour ce travail est l'amélioration du banc de mesures qui permet de déterminer directement les composantes de la décomposition en harmoniques sphériques, cela en utilisant des antennes boucles avec une charge et non pas en court-circuit pour éviter les interactions entre elles et ne mesurer que le courant induit par la source rayonnée sur chacune d'elles. Dans ce cas, on devra s'intéresser à la mesure de la tension sur chaque antenne boucle. Plusieurs questions peuvent se poser, sur le choix des sondes de tension, leurs sensibilités, sur la valeur de la charge au niveau de l'antenne boucle qui permet de négliger l'interaction avec les autres antennes, ne serait-il pas préférable de choisir plutôt des antennes boucles en circuit-ouvert ? Comment évoluera la sensibilité du banc ?

L'objectif final est de fournir des bibliothèques de composants intégrant des modèles de couplage pour des simulations de type « circuit ». Ces modèles pourront être renseignés par des modélisations locales complexes (3D,...) ou par des mesures. Dans le cas par exemple d'un filtre CEM, il sera plus facile de calculer le couplage entre ses composants pour plusieurs positions lorsqu'on change leur emplacement au sein d'un routage.



---

---

# Publications





---

---

→ S.Zangui, K.Berger, R.Perrussel, E.Clavel, C.Sartori et C.Vollaire, « Using equivalent emission sources to evaluate the coupling between components », **Compumag2011**, 12-15 Juillet, Sydney, Australie.

→ C.Sartori, S.Zangui, M.Ferber, B.Vincent, R.Perrussel, C.Vollaire et L.Krähenbühl, « A hybrid approach for evaluating the multipole component measurement and calibration methods », **Compumag2011**, 12-15 Juillet, Sydney, Australie.

→ S.Zangui, B.Vincent, R.Perrussel, K.Berger, E.Clavel, C.Vollaire et C.Sartori, « Modélisation et mesure des couplages en champ proche des composants de filtre CEM », **2emc** « Workshop 2emc 2010 », 18-19 Novembre, Rouen, France.

→ S.Zangui, K.Berger, C.Vollaire, E.Clavel, R.Perrussel, et B.Vincent « Equivalent source corresponding to radiated field of EMC filter components », **EMC Europe2010**, 13-17 Septembre, Wrocław, Pologne.

→ S.Zangui, K.Berger, B.Vincent, R.Perrussel, E.Clavel, C.Vollaire, C.Sartori et L.Krähenbühl, « Evaluation of coupling parameters of EMC filter components by using equivalent emission sources », **MOMAG2011**, 29 Août au 1 Septembre, Vila Velha, Brésil .

→ S.Zangui, K.Berger, C.Vollaire, E.Clavel, R.Perrussel et B.Vincent, « Modeling the near-field coupling of the EMC filter components », **EMC2010** « IEEE International Symposium on EMC », 25-30 Juillet, Fort Lauderdale, Floride, USA.

---

---

→ S.Zangui, K.Berger, B.Vicent, E.Clavel, R.Perrussel et C.Vollaire, « Modélisation des couplages en champ proche des composants de filtre CEM en utilisant des sources équivalentes de rayonnement », **EPF2010**, 30 Juin au 2 Juillet, Saint Lazaire, France.

→ S.Zangui, B.Vincent, K.Berger, R.Perrussel, E.Clavel, et C.Vollaire, « Near-field coupling between EMC filter components », **CEFC2010**, 9-12 Mai, Chicago, USA.

→ S.Zangui, K.Berger, B.Vincent, E.Clavel R.Perrussel et C.Vollaire, « Modélisation des couplages en champ proche des composants de filtre CEM », **CEM2010** « 15ème colloque international et exposition sur la CEM », 7-9 Avril, Limoges, France.

→ S.Zangui « Une approche pour la modélisation CEM en mode rayonné d'un filtre », **JCGE2009**, 23 Septembre, Compiègne, France.

---

---

# Références



- 
- 
- [1] B. Vincent, O. Chadebec, J.-L. Schanen, K. Berger, « Loop antennas for Near Field Multipolar Expansion Identification: First experimental Validations », to be published in ICONIC 2009 – Special Issue of IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement.
- [2] F. Costa « Compatibilité électromagnétique CEM, présentation générale », [www.techniques-ingenieur.fr](http://www.techniques-ingenieur.fr), référence D1300, 10 février 2010.
- [3] C. Jettanasen « Modélisation par approche quadripolaire des courants de mode commun dans les associations convertisseurs-machines en aéronautique, optimisation du filtre », thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, décembre 2008.
- [4] D. Labrousse « Amélioration des techniques d'estimation des perturbations conduites, application à une chaîne de traction de véhicule électrique », thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, décembre 2010.
- [5] Shuo Wang, F.C.Lee and W.G.Odendaal, « Controlling the parasitic parameters to improve EMI filter performance », 2004 IEEE, National science foundation under Award Number EEC-9731677.
- [6] Shuo Wang, F.C.Lee et W.G.Odendaal, « Characterization and parasitic extraction of EMI filters using scattering parameters », 2005 IEEE, pp.0885-8993.
- [7] M. Legris, Identification de l'état magnétique d'un système ferromagnétique à partir de mesures du champ proche, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, Novembre 1996.
- [8] V. Ardon « Méthodes numériques et outils logiciels pour la prise en compte des effets capacitifs dans la modélisation CEM de dispositifs d'électronique de puissance », thèse de doctorat de l'université de Grenoble délivré par l'institut Polytechnique de Grenoble, juin 2010.
- [9] Roger, F. Harrington, « Time-Harmonic Electromagnetic Fields », McGraw-Hill, Inc. 1961.
- [10] Constantine, A.Balanis « Advanced engineering electromagnetics », J.Wiley and sons, 1989.

- 
- [11] Billy C.Brock, « Using vector spherical harmonics to compute antenna mutual impedance from measured or computed fields », SANDIA Report, April 2001.
- [12] S.A.Schelkunoff, Van Nostrand, « Electromagnetic Waves », Princeton, N.J.1943, pp.51-52.
- [13] F.Jensen, « Electromagnetic Near-field Far-field correlation », Ph.D.dissertation, Technical university of Denmark, Lyngby, July 1970.
- [14] J.D.Jackson, John Wiley and sons, « Classical Electromagnetics », Inc, New York 1962.
- [15] J.E.Hansen, « Spherical Near-field Antenna Measurement », London UK, Peter Peregrinus, 1988, 387 pages.
- [16] Jean-Claude Nédélec, « Acoustic and electromagnetic equations. Integral representations for harmonics problems», Applied Mathematical Sciences, Vol.144, Springer-Verlag New York, Inc, 2001.
- [17] Cours de magistère 1<sup>ère</sup> année « Harmoniques sphériques », <http://www.geologie.ens.fr/~vigny/cours/chp-gphy-2.html>
- [18] Norme CISPR 16-1, annexe P, 2002, pp. 230-237 et 396-409.
- [19] Miguel A. Blanco, M. Florez and M. Bermejo, « Evaluation of the rotation matrices in the basis of real spherical harmonics », Journal of Molecular Structure : Theochem, vol. 419, Issues 1-3, 8 December 1997, pp. 19-27.
- [20] Frederik Simons, Princeton University, <http://geoweb.princeton.edu/people/simons/software.html>
- [21] Clebsch-Gordan (C-G.), « Coefficients and '3j' Symbols », A. Messiah, Appendix C.I in Quantum Mechanics, vol.2. Amsterdam, Netherlands : North-Holland, pp.1054-1060, 1962.
- [22] James H. Luscombe and Marshall Luban, « Simplified recursive algorithm for Wigner 3j and 6j symbols », Physical Review E, vol.57, No.6, June 1998, pp.7274-7277.
- [23] Yvon Mori « Electromagnétisme, applications à l'étude des lignes », Volume VII, lavoisier.

- 
- 
- [24] V.H. Rumsey, « Reaction Concept in Electromagnetic Theory », *Physical Review*, vol.94, No.6, pp.1483-1491, June 15, 1954.
- [25] J.H. Richmond, « A reaction theorem and its application to antenna impedance calculations », *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol.AP-9, No.6, pp.515-520, November 1961.
- [26] E. DURAND « Magnétostatique », Masson and C<sup>ie</sup> Editeurs, 1968.
- [27] B. Vincent « Identification de sources électromagnétiques multipolaires équivalentes par filtrage spatial : Application à la CEM rayonnée pour les convertisseurs d'électronique de puissance », thèse de doctorat de l'université de Grenoble, Institut Polytechnique de Grenoble, décembre 2009.
- [28] C. Labusssiere-Dorgan « Le rayonnement électromagnétique des circuits intégrés : Technique de caractérisation et méthodes de modélisation », thèse de doctorat de l'université de Toulouse, Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, décembre 2007.
- [29] A.V Kildishev, S.A Volokhov, J.D Saltykov, « Measurement of the spacecraft main magnetic parameters », *IEEE Autotescon, Proceeding*, 1997, pp.669-675.
- [30] V.Ardon, O.Chadebec, E. Clavel, J-M. Guichon, E. Vialardi V. "EMC Modeling of an Industrial Variable Speed Drive with an Adapted PEEC Method", *COMPUMAG*, Florianopolis, Brazil, 22-26 Nov 2009.