



**HAL**  
open science

# Effets collectifs et particules en interaction : Des systèmes à longue portée aux atomes froids

Alain Olivetti

► **To cite this version:**

Alain Olivetti. Effets collectifs et particules en interaction : Des systèmes à longue portée aux atomes froids. Mécanique statistique [cond-mat.stat-mech]. Université Nice Sophia Antipolis, 2011. Français. NNT : . tel-00682012

**HAL Id: tel-00682012**

**<https://theses.hal.science/tel-00682012v1>**

Submitted on 23 Mar 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS - UFR SCIENCES

ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES FONDAMENTALES ET APPLIQUÉES

# THÈSE

pour obtenir le titre de

**Docteur en Sciences**

de l'UNIVERSITÉ de Nice - Sophia Antipolis

**Spécialité : PHYSIQUE**

présentée et soutenue par

M. Alain OLIVETTI

---

## EFFETS COLLECTIFS ET PARTICULES EN INTERACTION

### Des systèmes à longue portée aux atomes froids

---

Thèse dirigée par Julien BARRÉ

soutenue le 6 Décembre 2011

**Jury :**

---

<i>Rapporteurs</i>	M. Michael JOYCE
<i>Rapporteurs</i>	M <sup>me</sup> Laurence PRUVOST
<i>Directeur</i>	M. Julien BARRÉ
<i>Examineurs</i>	M. Robin KAISER
<i>Examineurs</i>	M. Tito MENDONÇA
<i>Examineurs</i>	M. Alain PUMIR
<i>Examineurs</i>	M. Stefano RUFFO

---



*À mon ange et démon...*



---

# REMERCIEMENTS

---

N'étant pas très doué pour les remerciements, voici la liste des personnes qui m'ont aidé, soutenu, apporté que ce soit au niveau scientifique ou humain :

Mederic ARGENTINA, Pascal BALDI, Julien BARRÉ, Cristina BERTONE, Freddy BOUCHET, Damien BROIZAT, Xavier CALCAS, Clara CASTELLANOS, Bruno CESSAC, Franck CELESTINI, Maryvonne CHALONY, Paul-Eric CHAUDRU DE RAYNAL, David CHIRON, Marianne CORVELLEC, Pierre COULLET, Thierry DAUXOIS, Brice EICHWALD, Salima EL KOLEI, François GALLAIRE, Marie-France GALLORINI, Camilo GARCIA, Grégory GENTA-JOUE, Amine ILMANE, Sonia IVALDI, Thierry JEANNE, Michael JOYCE, Robin KAISER, Jean-Marc LACROIX, Olivier LEGRAND, Thierry LIMOGES, Gian-Luca LIPPI, Bruno MARCOS, Anthony MARTIN, Marie MARTIN, Julien MAURIN, Tito MENDONÇA, Thibault MERLE, Anaëlle MERMIN, Kamel MESLOUG, Alain MEUNIER, Thomas MIGLIORE, Fabrice MORTESSAGNE, Delphine OLIVETTI, Rémy OUDOMPHENG, Benjamin PERGOLIZZI, François PETERS, Camille POIGNARD, Hélène POLITANO, Jean-Paul PRADÈRE, Laurence PRUVOST, Alain PUMIR, Michel RAIBAUT, Jean-Pierre ROMAGNAN, Stefano RUFFO, Giovanni RUGGIERO, Afeintou SANGAM, Gael SELIG, Lionel SONETTE, Jérôme VETOIS, David WILKOWSKI, Yoshiyuki YAMAGUCHI.

Merci à toutes et à tous !

*J'espère n'avoir oublié personne mais rappelez-vous que l'erreur est humaine<sup>1</sup>...*

---

1. Et vu sous cet angle, j'en suis un véritable exemple ;-)



---

# TABLE DES MATIÈRES

---

PRÉAMBULE .....	11
<b>CHAPITRE I RELAXATION AUTOUR D'UN ÉTAT INHOMOGÈNE</b>	
<hr/> <hr/>	
1 INTRODUCTION .....	13
1.1 Équation de Vlasov .....	13
1.1.a <i>Systèmes à interaction longue portée</i> .....	13
1.1.b <i>Propriétés de l'équation de Vlasov</i> .....	15
1.2 Le modèle HMF (" <i>Hamiltonian Mean Field</i> ") .....	16
1.3 Amortissement Landau .....	19
2 RELAXATION EN "TEMPS COURT" AUTOUR D'UN ÉTAT INHOMOGÈNE .....	21
2.1 Aspects théoriques .....	21
2.1.a <i>Cas simple : distribution homogène</i> .....	21
2.1.b <i>Cas inhomogène</i> .....	24
2.2 Calcul numérique des pôles de Landau .....	28
2.2.a <i>Méthodes utilisées et difficultés rencontrées</i> .....	29
2.2.b <i>Quelques résultats et discussions</i> .....	32
3 RELAXATION EN "TEMPS LONG" AUTOUR D'UN ÉTAT INHOMOGÈNE .....	35
3.1 Rapide aperçu des résultats théoriques .....	36
3.2 Méthodes numériques utilisées .....	37
3.2.a <i>Méthode Semi-Lagrangienne</i> .....	37
3.2.b <i>Simulations à N corps : vraies particules</i> .....	39
3.2.c <i>Simulations à N corps : particules pondérées</i> .....	39
3.3 Calcul parallèle .....	40
3.3.a <i>Pourquoi paralléliser le code ?</i> .....	40
3.3.b <i>Un algorithme hautement parallélisable</i> .....	41
3.3.c <i>Simulation sur architecture à mémoire partagée</i> .....	41

3.3.d	<i>Simulation sur architecture à mémoire distribuée</i> .....	42
3.4	Simulations et résultats .....	43
3.4.a	<i>Perturbation “en cosinus”</i> .....	44
3.4.b	<i>Perturbation “en sinus”</i> .....	45
	i) <i>S’affranchir de la rotation</i> .....	45
	ii) <i>Décroissance de l’enveloppe en loi de puissance</i> .....	46
	iii) <i>Spectre de puissance</i> .....	47
4	CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES .....	48
5	ARTICLES PUBLIÉS .....	50
5.1	“Dynamics of perturbations around inhomogeneous backgrounds in the HMF model” [BOY10] .....	50
5.2	“Algebraic damping in the one-dimensional Vlasov equation” [BOY11] .....	79
	RÉFÉRENCES DU CHAPITRE I .....	104

## CHAPITRE II PREMIERS MODES D’OSCILLATION D’UN SYSTÈME DE PARTICULES

1	INTRODUCTION .....	109
2	OSCILLATIONS DE RESPIRATION .....	112
2.1	Équation d’évolution du mode de respiration .....	113
2.1.a	<i>Dynamique étudiée</i> .....	113
2.1.b	<i>Obtention de l’équation de contrainte</i> .....	116
2.1.c	<i>Analyse de l’équation de contrainte</i> .....	118
	i) <i>Paramètre adimensionné</i> .....	118
	ii) <i>Oscillateur anharmonique</i> .....	119
	iii) <i>Approche linéaire</i> .....	120
	iv) <i>Fréquences du mode de respiration</i> .....	121
	v) <i>Comparaison avec la littérature</i> .....	122
2.1.d	<i>Cas particulier : la limite <math>p \rightarrow 0</math></i> .....	123
2.2	Simulations et résultats .....	124
2.2.a	<i>Comment les simulations sont-elles réalisées ?</i> .....	124
2.2.b	<i>Comparaison avec les prédictions de l’équation de contrainte</i> .....	125
	i) <i>Simulations dans l’ensemble microcanonique</i> .....	126
	ii) <i>Simulations dans l’ensemble canonique</i> .....	129
	iii) <i>Test de la prédiction d’un état métastable</i> .....	131
2.3	Friction et/ou diffusion variable .....	133
2.3.a	<i>Nouvelle équation de contrainte</i> .....	134
2.3.b	<i>Simulations et résultats</i> .....	135
	i) <i>Friction affine</i> .....	136
	ii) <i>Friction sinusoïdale</i> .....	136
3	OSCILLATIONS DU CENTRE DE MASSE .....	138
3.1	Équation d’évolution du centre de masse .....	139
3.1.a	<i>Méthode des moments</i> .....	139
3.1.b	<i>Dynamique étudiée</i> .....	140
3.1.c	<i>Équation de contrainte</i> .....	142

3.2	Simulations et résultats	143
3.2.a	<i>Le système de particules considéré</i>	144
	i) <i>Calcul des forces d'interaction</i>	144
	ii) <i>Expression approchée de la densité en espace</i>	144
3.2.b	<i>Friction dépendant de la position des particules</i>	145
3.2.c	<i>Friction dépendant de la vitesse des particules</i>	147
	i) <i>Dépendance linéaire</i>	147
	ii) <i>Dépendance quadratique avec zone de friction négative</i>	148
3.2.d	<i>Piège anharmonique</i>	149
4	CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES	151
5	ARTICLES PUBLIÉS	153
5.1	<i>“Breathing Mode for Systems of Interacting Particles” [OBM<sup>+</sup>09]</i>	153
5.2	<i>“Breathing Dynamics for Systems of Interacting Particles in the Microcanonical and Canonical Descriptions” [OBM<sup>+</sup>11]</i>	158
	RÉFÉRENCES DU CHAPITRE II	187

---

## CHAPITRE III MODÉLISATION DE SYSTÈMES À ATOMES FROIDS

---

1	GRANDS PIÈGES MAGNÉTO-OPTIQUES	192
1.1	Pré-requis : le modèle Doppler pour de petits P.M.O.	193
	1.1.a <i>Effet Doppler</i>	193
	1.1.b <i>Effet Zeeman</i>	193
	1.1.c <i>Pression de radiation</i>	194
	1.1.d <i>Équation de Vlasov-Fokker-Planck</i>	196
1.2	Correction du modèle Doppler pour les grands P.M.O.	197
	1.2.a <i>Atténuation de la pression de radiation</i>	197
	1.2.b <i>Diffusion multiple</i>	199
1.3	Équation de Vlasov-Fokker-Planck pour les grands P.M.O.	200
1.4	Oscillations de respiration	203
	1.4.a <i>Bifurcation de Hopf</i>	204
	1.4.b <i>Application aux grands P.M.O.</i>	205
	i) <i>Profil de friction</i>	205
	ii) <i>Cas limites</i>	206
	iii) <i>Discussions</i>	208
	1.4.c <i>Tests sur un modèle qualitatif</i>	213
1.5	Oscillations du centre de masse	215
	1.5.a <i>Profil de friction et piège extérieur</i>	215
	1.5.b <i>État stationnaire</i>	216
	1.5.c <i>Prédictions du modèle</i>	216
2	SYSTÈME AUTO-GRAVITANT UNIDIMENSIONNEL ?	218
2.1	Pré-requis	219
	2.1.a <i>Piège dipolaire</i>	219
	2.1.b <i>Effet d'ombre</i>	221

2.2	Modélisation .....	223
2.2.a	<i>Pression de radiation</i> .....	223
2.2.b	<i>État stationnaire</i> .....	224
	i) <i>Hypothèse de faible vitesse</i> .....	224
	ii) <i>Hypothèse de faible épaisseur optique</i> .....	225
	iii) <i>Dernières approximations</i> .....	225
	iv) <i>Système de particules Browniennes attractives piégées</i> .....	226
	v) <i>Particules Browniennes auto-gravitantes</i> .....	228
2.2.c	<i>Dynamique de respiration</i> .....	229
2.3	Confrontation avec l'expérience .....	232
2.3.a	<i>Discussion sur le passage "théorie/expérience"</i> .....	232
	i) <i>Difficultés expérimentales</i> .....	232
	ii) <i>Hypothèses faites durant la modélisation</i> .....	234
2.3.b	<i>État stationnaire</i> .....	235
2.3.c	<i>Dynamique de respiration</i> .....	237
	i) <i>Résultat qualitatif</i> .....	238
	ii) <i>Comparaison entre expérience et théorie</i> .....	238
	iii) <i>Comparaison entre expérience et simulations numériques</i> .....	241
2.4	Conclusion .....	242
3	CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES .....	243
	RÉFÉRENCES DU CHAPITRE III .....	243
	ÉPILOGUE .....	249

---

# PRÉAMBULE

---

Si je devais résumer ma thèse, je pense... que la figure 1 serait parfaitement adaptée. En effet, au cours des trois dernières années, j'ai voyagé scientifiquement entre plusieurs domaines, passant des uns aux autres en emportant avec moi différentes notions, techniques et idées. J'en suis arrivé à penser que la physique et la science en général ne sont pas par nature cloisonnées et qu'elles ne gagnent rien à être présentées comme telles<sup>2</sup>. J'ai

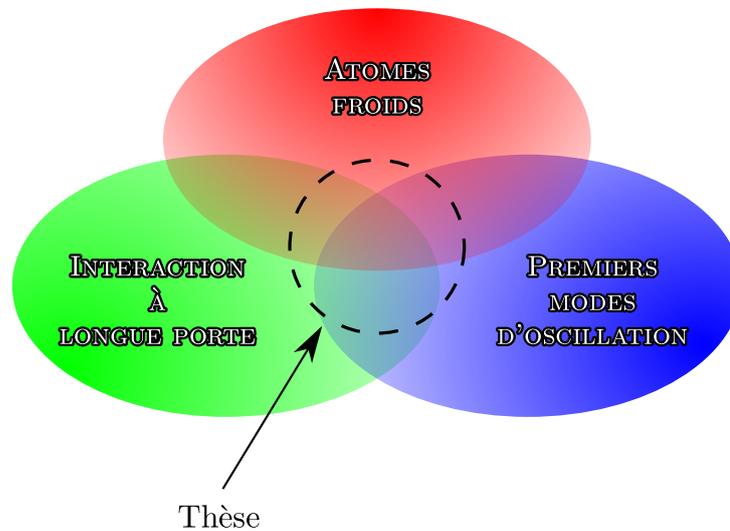


FIGURE 1 – Représentation schématique du contexte de ma thèse.

ainsi navigué entre atomes froids, systèmes à longue portée et modes d'oscillation tout en baignant dans une atmosphère de calcul scientifique. Riche de la culture de chaque domaine, j'ai essayé de me trouver une place dans ce vaste monde qu'est la recherche. Ce fût une tâche plutôt difficile mais chemin faisant, les choses se sont mieux passées au fil du temps, grâce aux différents projets auxquels j'ai pu participer, mais aussi et surtout grâce aux collaborateurs que j'ai rencontrés.

À l'origine, ma thèse devait s'intéresser aux systèmes à interaction longue portée et plus

---

2. Comme cela peut l'être dans certains cours...

précisément aux atomes froids et à d'autres systèmes ondes-particules. Mais pour être honnête, au début de ma thèse je n'ai eu qu'un seul et unique point de mire : comprendre pourquoi une assemblée de particules peut se mettre à osciller de façon cohérente et auto-entretenu dans un piège à atomes froids ? Content de l'objectif que je m'étais fixé, j'ai passé une bonne partie de ma première année de thèse à réfléchir sur la question tout en m'intéressant à d'autres propriétés des pièges à atomes froids. Malheureusement, partir *bille en tête* ne suffit pas pour produire quelque chose d'intéressant. . . Heureusement, mon directeur m'a un jour demandé de regarder un article à propos des effets du champ moyen sur certain mode d'oscillation d'un gaz de Bose au dessus de la température critique, et de voir s'il était possible d'en tirer quelque chose dans notre cas. C'est de cette manière qu'a commencé mon travail sur les premiers modes d'oscillation des systèmes de particules (voir chapitre II). Travail qui, par la suite, a conduit à retrouver/prédire d'une autre façon l'apparition des oscillations de respiration d'un grand piège magnéto-optique (voir chapitre III). De ce point de vue là, on peut dire que ces oscillations de respiration ont constitué le fil rouge de ma thèse, déclenchant travail et passion.

Parallèlement à cela, je me suis intéressé à d'autres pièges d'atomes froids et en particulier au piège dipolaire. Tout comme pour les pièges magnéto-optiques, j'ai eu le plaisir de travailler directement au contact d'expérimentateurs et d'appréhender la différence en théorie et mise en pratique. D'un certain point de vue, il peut sembler simple d'écrire des équations pour décrire le comportement d'un système. Cependant, quand on s'intéresse vraiment à une expérience, il n'est pas toujours simple de satisfaire les contraintes imposées. Cependant, grâce à l'expérience de chacun, nous avons progressé et réussi à atteindre un résultat prometteur. Prometteur, car même s'il reste encore beaucoup de travail, nous disposerons peut-être bientôt d'un système expérimental modélisant une assemblée unidimensionnelle de particules auto-gravitantes (voir chapitre III).

Enfin, le dernier sujet auquel je me suis intéressé m'a ramené dans la direction initiale de ma thèse, c'est-à-dire aux systèmes à interaction longue portée en général et plus particulièrement au modèle HMF (voir chapitre I). Je me suis intéressé au devenir d'une petite perturbation autour d'un état stationnaire, que ce soit théoriquement ou numériquement. Bien que le dernier thème de recherche sur lequel j'ai travaillé puisse sembler indépendant des autres autres, ils ont un point commun majeur. L'équation cinétique qui permet de décrire l'évolution de ces différents problèmes : l'équation de Vlasov. Ainsi, même si à première vue les problèmes semblent indépendants, ils font appel aux mêmes notions et résultats issus des propriétés de l'équation de Vlasov.

Ayant travaillé sur plusieurs projets simultanément, il m'est difficile de suivre dans ce manuscrit la même évolution que celle de ma thèse. C'est pourquoi j'ai décidé de parler dès le premier chapitre du travail que j'ai réalisé dans le cadre du modèle HMF pour ainsi introduire la notion d'interaction à longue portée et surtout l'équation de Vlasov qui sera un des fils rouges de ce manuscrit. Ensuite, je parlerai des modes d'oscillation pour finir sur les systèmes d'atomes froids.

---

# RELAXATION AUTOUR D'UN ÉTAT INHOMOGENÈNE

---

## 1 INTRODUCTION

---

---

L'équation de Vlasov est l'équation cinétique que l'on obtient en partant du Hamiltonien d'un système de particules interagissant *via* des forces à longue portée et en faisant tendre leur nombre vers l'infini. L'équation de Vlasov est l'équation fondamentale dans l'étude de systèmes à interaction à longue portée. Rien que cela justifie l'intérêt de comprendre ses propriétés, d'autant plus que les systèmes à longue portée sont très présents dans la nature et dans de nombreux domaines de la physique : physique des plasmas, systèmes astrophysiques, interactions onde-particule dans les lasers, ... L'équation de Vlasov se retrouve aussi dans l'étude des fluides bidimensionnels car l'équation d'Euler 2d partage de nombreuses propriétés avec elle.

Parmi toutes les questions non résolues qui existent, j'ai abordé pendant ma thèse celle de la relaxation d'une perturbation autour d'un état stationnaire non homogène de l'équation de Vlasov en utilisant une approche *à la Landau*.

### 1.1 Équation de Vlasov

---

#### 1.1.a *Systèmes à interaction longue portée*

Dans ce paragraphe nous allons essayer de donner une définition aussi simple que possible d'un système à interaction à longue portée, même si pour cela nous sommes obligés de prendre quelques raccourcis. Le lecteur voulant plus de détails ou tout simplement dé-

sireux d'une approche plus rigoureuse pourra se référer à l'excellent article d'Alessandro Campa *et al.* [CDR09].

Un système à interaction longue portée peut être vu comme un système où la portée du potentiel d'interaction entre particules  $V(x_i, x_j)$  est de l'ordre de grandeur de la taille du système. Les potentiels qui décroissent en  $1/|x_i - x_j|^k$  à grande distance, avec  $k \leq d$  et  $d$  la dimension de l'espace, en sont des exemples pour des systèmes qui peuvent s'étendre jusqu'à l'infini<sup>1</sup>. Autrement dit, on parle de système à interaction longue portée lorsque l'interaction entre les particules décroît *lentement* quand la distance entre les particules augmente. Il faut toujours prendre en compte le système dans sa globalité pour comprendre son évolution et ses propriétés. À l'inverse, pour un système à courte portée, les interactions entre les plus proches voisins dominent la dynamique du système. Nous pouvons approcher le potentiel d'interaction par

$$V(x_i, x_j) = \begin{cases} V(x_i, x_j) & \text{si } |x_i - x_j| \leq L, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

avec  $L$  une longueur caractéristique très inférieure à la taille du système. Cette approximation ne modifie que très faiblement le comportement d'un système à courte portée mais aurait de graves conséquences pour un système à longue portée<sup>2</sup>.

En fin de compte, c'est un peu comme si une particule d'un système à longue portée interagissait avec toutes les autres sans jamais sentir la présence d'une particule en particulier, comme si deux particules interagissaient sans être corrélées.

Cette propriété, que nous venons d'introduire phénoménologiquement, va nous permettre d'obtenir l'équation de Vlasov mais avant cela, introduisons la notion d'équation cinétique.

La première idée qui vient à l'esprit lorsque l'on souhaite étudier un système de particules est d'utiliser les équations de Newton. Cela nous amène, pour un système de  $N$  particules, à travailler avec  $2N$  équations différentielles ordinaires. Lorsque  $N$  devient de plus en plus grand, il est très rapidement impossible de continuer avec cette approche. Afin de surpasser cette difficulté, on utilise une description continue qui approxime le système discret, les deux approches devant donner exactement les mêmes résultats lorsque  $N \rightarrow \infty$ .

Une façon de passer à la limite continue est d'utiliser la hiérarchie BBGKY (Bogolyubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon), qui est un système d'équations aux dérivées partielles couplées équivalent aux  $2N$  équations de Newton<sup>3</sup>. La première équation de la hiérarchie donne l'évolution de la distribution à un point que l'on notera  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  en fonction de la distribution à deux points notée  $g(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{r}', \mathbf{v}', t)$  :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{v}f) + C[g] = 0, \quad (\text{I.2})$$

avec  $C[g]$  le terme d'interaction entre particules donné par

$$C[g](\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \int \mathbf{F}_{bin}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{v}} g(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{r}', \mathbf{v}', t) d\mathbf{r}' d\mathbf{v}' \quad (\text{I.3})$$

---

1. Le fait que le potentiel ait une portée de l'ordre de grandeur d'un système de taille infinie se traduit ici par la non-intégrabilité de celui-ci.

2. En faisant l'approximation (I.1) nous transformons implicitement le système à longue portée en un système à courte portée. . .

3. On pourra consulter [DB94, Fra05] pour la dérivation de la hiérarchie BBGKY.

et  $\mathbf{F}_{bin}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  la force d'interaction exercée par une particule en  $\mathbf{r}'$  sur une particule en  $\mathbf{r}$ . On remarquera que pour connaître l'équation d'évolution de  $f$ , il faut connaître la fonction  $g$ . Or l'équation d'évolution de  $g$  dépend de la fonction de distribution à trois points, elle-même dépendant de la fonction à quatre-points, . . . d'où le terme de hiérarchie. Pour décrire un système de  $N$  particules, la hiérarchie est composée de  $N$  équations aux dérivées partielles couplées. *A priori*, utiliser la hiérarchie ne semble pas plus aisé que d'utiliser les équations de Newton. Cependant, il est possible de simplifier tout cela en faisant des hypothèses dites *de fermeture* dépendant en général des caractéristiques du problème. Après ces hypothèses, l'équation obtenue n'est plus équivalente aux équations de Newton mais si le choix de fermeture est pertinent, les informations que l'on perd ne sont pas ou peu importantes pour décrire le système à l'échelle macroscopique. Pour obtenir l'équation de Vlasov il suffit de supposer que les particules ne sont pas corrélées, ce qui se traduit par la relation :

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{r}', \mathbf{v}', t) = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)f(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t). \quad (\text{I.4})$$

En réalité, il ne s'agit pas d'une égalité car les particules sont toujours corrélées en pratique. Cependant, l'importance relative de la contribution manquante diminue lorsque le nombre de particules augmente, de sorte qu'à la limite lorsque  $N \rightarrow \infty$  il y ait égalité. L'équation (I.4) est appelée équation de fermeture et c'est grâce à elle que nous pouvons fermer la hiérarchie BBGKY (I.2) et ainsi obtenir l'équation de Vlasov :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{v}f) + \mathbf{F}_{int}[f] \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0, \quad (\text{I.5})$$

avec  $\mathbf{F}_{int}[f]$  le terme d'interaction entre particules :

$$\mathbf{F}_{int}[f](\mathbf{r}) = \int \mathbf{F}_{bin}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')f(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t)d\mathbf{r}'d\mathbf{v}', \quad (\text{I.6})$$

qui dérive du potentiel auto-consistant  $\Phi[f]$  donné par  $\mathbf{F}_{int}[f] = -\nabla_{\mathbf{r}}\Phi[f]$ .

Notons qu'il existe plusieurs façons de dériver l'équation de Vlasov. Ici, nous avons présenté celle partant de la hiérarchie BBGKY mais il en existe d'autres. Certains préféreront l'approche partant de l'équation de Klimontovich (voir par exemple [CDR09]).

### 1.1.b Propriétés de l'équation de Vlasov

Maintenant que nous avons dérivé l'équation de Vlasov (I.5) qui décrit l'évolution des systèmes à longue portée nous allons discuter de quelques unes de ses propriétés.

Premièrement, il faut rappeler que l'équation de Vlasov ne décrit parfaitement le système qu'à la limite  $N \rightarrow \infty$ . Pour un système fini, les corrélations que nous avons négligées ne nous permettent d'utiliser l'équation de Vlasov que sur un intervalle de temps dont la taille croît avec le nombre de particules  $N$ . Au-delà de cet intervalle, les corrélations entre particules deviennent non négligeables et conduisent à la relaxation du système; ce type de relaxation, appelé *relaxation collisionnelle*, n'étant pas pris en compte dans l'équation de Vlasov. La figure I.1 représente schématiquement les différentes étapes dans l'évolution d'un système à interaction longue portée. Partant d'une condition initiale hors équilibre, le système rejoint *rapidement* un état stationnaire de l'équation de Vlasov. Ces états stationnaires de l'équation de Vlasov sont appelés états quasi-stationnaires ou QSS

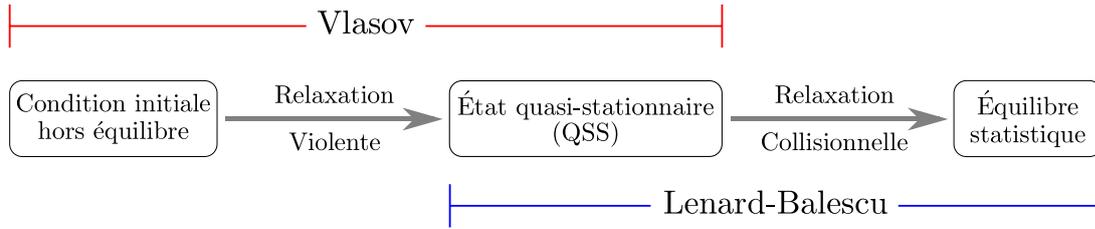


FIGURE I.1 – Illustration du scénario typique lors de la relaxation à l’équilibre d’un système à interaction longue portée.

(“quasi-stationary states”) car ils ne constituent pas de vrais états stationnaires du système discret. Il s’agit d’états avec des durées de vie qui tendent vers l’infini avec le nombre de particules. Au-delà, les QSS relaxent vers l’équilibre statistique. Par exemple, en physique des plasmas, la relaxation s’opère en suivant l’équation de Lenard-Balescu [Bal97] qui traduit le fait qu’à ce stade, ce sont les effets discrets non pris en compte par l’équation de Vlasov qui permettent la relaxation. La phase *rapide* qui permet d’atteindre un QSS est connue depuis les années soixante en astrophysique [Hé64, Lyn67] et elle est appelée *relaxation violente*. Cette appellation provient du fait que l’échelle de temps, sur laquelle la relaxation violente opère, ne dépend pas du nombre de particules qui composent le système et par conséquent, elle est beaucoup plus rapide que la relaxation collisionnelle, qui elle en dépend. De plus, cette appellation permet de marquer la différence avec la relaxation collisionnelle qui, elle, amène le système vers l’équilibre thermodynamique.

Nous venons de voir que l’équation de Vlasov amène en général le système dans un état quasi-stationnaire mais ces états sont loin d’être uniques. En effet, l’équation de Vlasov admet une infinité d’états stationnaires et le système discret admet donc autant d’états quasi-stationnaires. Nous en verrons un exemple dans le prochain paragraphe en étudiant le modèle HMF.

## 1.2 Le modèle HMF (“*Hamiltonian Mean Field*”)

---

Le modèle HMF ou “*Hamiltonian Mean Field*” [IK93, AR95, CDR09] est un modèle simplifié conservant certaines propriétés<sup>4</sup> importantes des systèmes à interaction longue portée tout en restant “suffisamment simple” pour pouvoir mener les calculs théoriques le plus loin possible. Le modèle consiste en un ensemble de  $N$  particules réparties sur le cercle unité, interagissant *via* un potentiel longue portée dépendant de la position des particules. Le Hamiltonien de ce système est donné par

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} - \frac{C}{2N} \sum_{i \neq j} \cos(\theta_i - \theta_j), \quad (\text{I.7})$$

où la position et la quantité de mouvement de la  $i^{\text{ème}}$  particule sont données respectivement par  $\theta_i \in ]-\pi, \pi]$  et  $p_i \in ]-\infty, \infty[$ . La constante  $C$  permet de choisir entre des interactions attractives ( $C > 0$ ) et répulsives ( $C < 0$ ). Remarquons que comme dans la suite nous ne traiterons que le cas attractif, pour simplifier notre discussion et sans perte de généralité

---

4. Limite continue décrite par l’équation de Vlasov, existence d’états quasi-stationnaires, ...

nous posons à partir de maintenant  $C = 1$ . Enfin, le facteur  $1/N$  dans l'énergie potentielle apparaît pour assurer que la limite thermodynamique soit bien définie.

Le modèle HMF exhibe les principales propriétés des systèmes à longue portée car il peut être, dans sa version attractive, vu comme un système autogravitant unidimensionnel et périodique interagissant *via* le potentiel  $V(x_i, x_j) = |x_i - x_j|$ , où l'on ne conserve que la première harmonique de l'interaction.

Au-delà de la simplification évidente apportée par le caractère unidimensionnel du modèle HMF, il faut remarquer que l'interaction entre les particules est régulière : il n'y a pas divergence du potentiel lorsque deux particules s'approchent infiniment l'une de l'autre. Cette propriété a un avantage de taille : on évite tous les problèmes de convergence qui peuvent survenir que ce soit du point de vue mathématique ou bien numérique : intégrales divergentes, mauvaise intégration des trajectoires, . . . Enfin, le potentiel créé par la distribution des particules peut s'écrire à l'aide d'une seule quantité complexe : la magnétisation. L'introduction de cette quantité simplifie tout autant les calculs théoriques que les calculs numériques.

Il est possible d'écrire l'équation de Vlasov associée au Hamiltonien du modèle HMF (I.7) :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(\theta, p, t) + p \frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta, p, t) - \frac{\partial \Phi[f]}{\partial \theta}(\theta, t) \frac{\partial f}{\partial p}(\theta, p, t) = 0, \quad (\text{I.8})$$

où  $f(\theta, p, t)$  est la densité dans l'espace des phases et  $\Phi[f](\theta, t)$  est le potentiel auto-consistant provenant de l'approximation à champ moyen, donné par

$$\Phi[f](\theta, t) = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\theta - \theta') f(\theta', p', t) d\theta' dp'. \quad (\text{I.9})$$

Le Hamiltonien du système, analogue à celui du système à  $N$  corps (I.7), s'écrit

$$H[f](\theta, p, t) = \frac{p^2}{2} + \Phi[f](\theta, t). \quad (\text{I.10})$$

L'équation (I.8), qui traduit la limite continue du système donné par (I.7), permet de décrire l'évolution de la densité de probabilité de présence des particules avec une position  $\theta$ , une quantité de mouvement  $p$ , le tout au temps  $t$  :  $f(\theta, p, t)$ . À ce stade, il est intéressant de remarquer que l'on peut introduire la notion de magnétisation (voir figure I.2) en définissant le vecteur magnétisation par <sup>5</sup>

$$\mathbf{M} = M e^{i\varphi} = M_x + i M_y = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta, p, t) e^{i\theta} d\theta dp, \quad (\text{I.11})$$

de sorte que

$$\Phi[f](\theta, t) = -M \cos(\theta - \varphi). \quad (\text{I.12})$$

L'équation (I.12) permet de remarquer que lorsque la distribution de particules est homogène, le potentiel  $\Phi$  est nul. En effet, les particules sont réparties uniformément sur le

---

5. Nous pouvons aussi définir la magnétisation à partir du système discret. La magnétisation s'écrit alors sous la forme d'une somme finie sur les particules. Nous y reviendrons lors des simulations numériques du paragraphe 3.2.

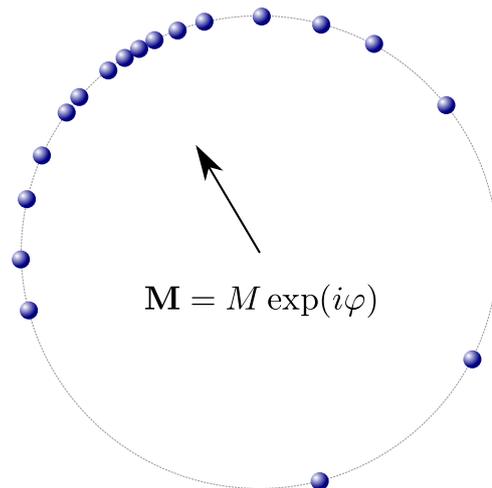


FIGURE I.2 – Ensemble de particules réparties sur le cercle unité modélisé par le modèle HMF. Dans le cas présent, les particules interagissent en suivant le Hamiltonien donné par (I.7) dans le cas attractif :  $C > 0$ . L'énergie cinétique des particules ne permet pas d'assurer l'homogénéité du système : la répartition homogène est instable. Les particules créent des zones de plus grande densité, ce qui se traduit par l'apparition d'un vecteur magnétisation  $\mathbf{M}$  non nul (défini par l'équation (I.11)).

cercle unité et la magnétisation est nulle.

Le Hamiltonien du système (I.10) se réduit simplement à :

$$H[f](\theta, p, t) = \frac{p^2}{2}, \quad (\text{I.13})$$

et nous pouvons immédiatement vérifier que toute fonction de  $H[f]$  est une solution (stationnaire) de l'équation de Vlasov (I.8). Nous retrouvons bien le fait que l'équation de Vlasov admet une infinité d'états stationnaires. Pour une distribution inhomogène, nous retrouvons le même genre de résultat mais avec cette fois une équation auto-consistante sur  $\Phi$  à satisfaire.

Grâce à la magnétisation nous pouvons, comme dans le cas d'un réseau de spins, distinguer différentes configurations du système selon la valeur de la magnétisation. En effet, lorsque  $f$  est homogène en espace, *i.e.* les particules sont équidistribuées sur le cercle unité, la magnétisation est nulle. Dans le cas contraire, si les particules se retrouvent localisées dans une zone arbitraire du cercle unité, la magnétisation est non nulle. Remarquons que l'on appelle souvent “modèle HMF ferromagnétique” le modèle avec des interactions attractives et “modèle HMF antiferromagnétique” le modèle avec des interactions répulsives. Cette distinction provient du fait que dans le cas attractif, une répartition homogène de particules peut être instable tandis que dans le cas répulsif, le système se répartit de manière uniforme sur le cercle unité.

Dans notre cas, l'introduction de la magnétisation va permettre d'une part de simplifier les calculs théoriques et d'autre part d'étudier “simplement” certaines propriétés de relaxation du système, car elle joue le rôle d'un potentiel effectif qui n'est rien d'autre qu'un nombre complexe<sup>6</sup>.

---

6. Pour une situation plus générale que le modèle HMF, le nombre complexe qui joue le rôle du potentiel effectif sera remplacé par une fonction (voir [BOY10, BOY11]).

### 1.3 Amortissement Landau

Il est possible pour un système à interaction longue portée que les particules qui le composent interagissent avec les ondes qui s’y propagent : on parle d’interaction ondes-particules. L’amortissement Landau est un exemple classique de ce type de phénomène. Il s’agit d’ailleurs d’un concept de base en physique des plasmas [Lan46]. L’amortissement Landau est un phénomène de relaxation étudié pour la première fois par Lev Davidovich Landau qui explique pourquoi, dans un plasma, les oscillations longitudinales du champ électrique s’amortissent. Pour cela, il a besoin de faire plusieurs hypothèses comme un domaine borné, des perturbations analytiques, . . . il linéarise les équations de Vlasov-Poisson au voisinage d’un état stationnaire stable et homogène, et montre que de petites perturbations sont alors exponentiellement amorties. De manière générale, on peut voir l’amortissement comme un échange d’énergie entre une onde qui parcourt le système et les particules qui le composent. Les particules tendent à se synchroniser avec la vitesse de

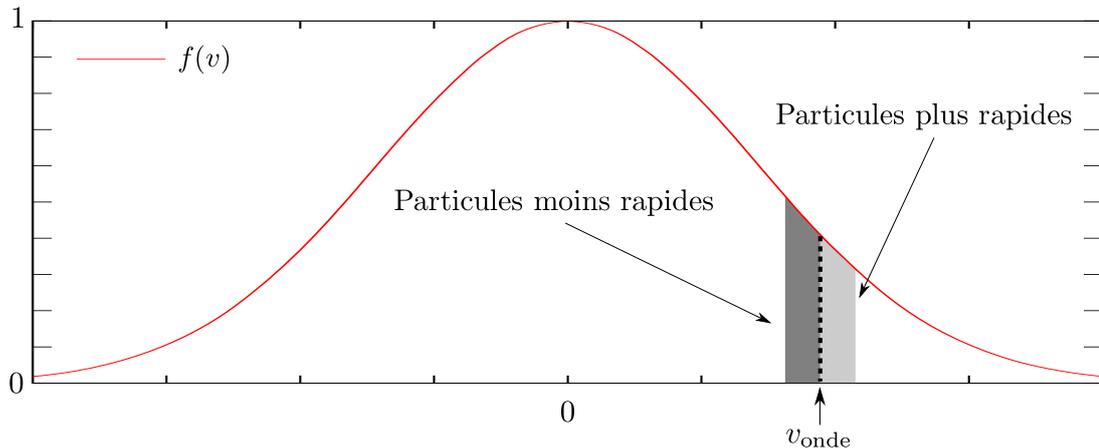


FIGURE I.3 – Exemple de distribution de vitesse  $f(v)$  d’un système de particules en interaction longue portée. Les particules interagissent avec une onde qui parcourt le système à la vitesse  $v_{\text{onde}}$ . Les particules légèrement plus rapides que l’onde lui cèdent de l’énergie tandis que les particules légèrement plus lentes lui en prennent. Dans le cas présenté, l’amplitude de l’onde décroît car il y a plus de particules lentes que de rapides.

l’onde et, bien que l’énergie globale du système reste la même, l’amplitude de l’onde décroît (voir figure I.3). D’une façon encore plus simple<sup>7</sup>, lorsqu’un bateau se déplace moins vite (resp. plus vite) que les vagues à la surface de la mer, il est poussé (resp. freiné) par celles-ci : il prend (resp. donne) de l’énergie aux vagues.

Dans le célèbre article [Lan46], Lev Davidovich Landau considère un plasma dans un état stationnaire homogène en espace et analyse le comportement asymptotique du système lorsqu’il est soumis à de petites perturbations à l’aide d’une transformée de Laplace et de l’équation de Vlasov linéarisée. Cette article fut le premier d’une longue série en physique des plasmas, généralement autour d’un état stationnaire homogène, sur ce que l’on

7. Dans le cas présent, le bateau et les vagues ne constituent pas le même système. On ne peut pas réellement parler d’amortissement Landau. Cependant, cela permet de comprendre facilement le principe de l’interaction ondes-particules.

nomme aujourd'hui l'amortissement Landau en physique. Du point de vue mathématique, assez peu de résultats existent mais tous s'obtiennent pour des états stationnaires homogènes. Par exemple, il existe dans [Deg86, MF86] une analyse rigoureuse de l'équation de Vlasov linéarisée en utilisant une approche *à la Landau* mais qui nécessite de très fortes hypothèses sur l'état stationnaire et la perturbation. Ils prouvent que la décroissance de la perturbation est exponentielle pour un domaine borné, comme Landau l'avait obtenu. Cependant, tout est possible lorsque ces hypothèses ne sont pas satisfaites, comme par exemple des décroissances plus lentes. Enfin, dans un travail très récent [MV10], Mouhot et Villani<sup>8</sup> ont réussi à résoudre le problème complet, en considérant l'équation de Vlasov non-linéaire, et ont montré que de petites perturbations relaxaient de façon exponentielle pour un domaine borné. Bien entendu, il leur faut faire un certain nombre d'hypothèses, comme par exemple supposer que l'état stationnaire homogène est, comme la perturbation, analytique.

Quand on y regarde bien, un point commun à tous ces travaux est le caractère homogène de l'état stationnaire considéré. Dès lors que l'on se rappelle que les systèmes astrophysiques font partie des systèmes à longue portée et que ces systèmes sont inhomogènes en espace (galaxies, amas globulaires, . . .), une question naturelle apparaît : que devient l'amortissement Landau pour ces cas ? Le concept d'amortissement Landau existe toujours mais l'inhomogénéité apporte son lot de difficultés. Il est d'ailleurs souvent mis en avant en astrophysique pour expliquer la stabilité d'un "gaz d'étoiles" [Lyn62]. À cause de l'inhomogénéité, il n'existe que peu de résultats comparables au calcul de l'amortissement Landau fait pour les plasmas. La plupart permettent de déterminer la stabilité/instabilité de l'état stationnaire inhomogène, que ce soit dans le contexte astrophysique [PP87, BPRV94], ou tout simplement pour des modèles jouets [JBM07, CC10, BSD<sup>+</sup>11], mais la question de la relaxation d'une perturbation autour d'un état stationnaire stable inhomogène n'est abordée que dans très peu d'entre eux. La principale raison réside sûrement dans le fait que les calculs sont plus ardues et requièrent par exemple de prolonger analytiquement des fonctions complexes. Cependant, dans [VW00, Wei94], les auteurs ont effectué ce prolongement grâce à des interpolations en utilisant des fractions rationnelles pour différents cas particuliers. Ils calculent ainsi l'analogie de l'amortissement Landau, qui dans le cas inhomogène ne contrôle pas la dynamique asymptotique du système mais seulement la relaxation pour des temps intermédiaires.

D'un autre côté, il nous est aussi possible de nous inspirer des résultats obtenus pour l'équation d'Euler 2d, qui partage de nombreuses propriétés avec l'équation de Vlasov. En effet, il existe de nombreux travaux sur l'équation linéarisée autour d'écoulements stationnaires contenant des vortex, ou autour d'écoulements de cisaillement (par exemple [Ray78, Cha98]), ce qui permet de nous faire une idée de ce qui devrait arriver pour l'équation de Vlasov. Si nous nous autorisons à appliquer les résultats obtenus pour l'équation d'Euler 2d à l'équation de Vlasov, nous pouvons nous attendre à ce que la fonction de dispersion possède des singularités sur l'axe réel qui compliquent le prolongement analytique de celle-ci. D'autre part, le comportement asymptotique du système devrait être dominé par ses singularités et donner lieu à des décroissances algébriques, tandis que le comportement *classique* attendu d'un amortissement exponentiel ne serait limité que sur une courte période avant que les singularités ne dominent la dynamique du système. D'ailleurs, cela amène à se demander si la décroissance exponentielle observée par Weinberg pour un système gravitationnel dans [Wei94] n'était pas seulement un effet

---

8. Cédric Villani a reçu la médaille Fields en 2010 en récompense de ses travaux en mathématiques.

transitoire qui serait par la suite remplacé par un autre type de décroissance.

Bien que le principe soit le même, il existe une différence fondamentale entre l’amortissement Landau qui apparaît en physique des plasmas et celui en astrophysique. Dans le premier cas, l’état autour duquel on linéarise l’équation de Vlasov est homogène en espace alors que dans le second il est inhomogène. Pour ce dernier cas, les calculs sont beaucoup plus techniques, ce qui justifie l’utilisation d’un modèle simplifié tel que l’est le modèle HMF.

Comme nous l’avons vu dans la partie 1.1.b, la relaxation d’une condition hors équilibre dans un système à longue portée comporte différentes échelles de temps et nous nous intéresserons ici à ce qui se passe après la relaxation violente mais avant la relaxation collisionnelle. Au sein même de cette intervalle de temps, pendant lequel l’amortissement Landau intervient, nous pouvons nous intéresser à différentes échelles de temps, que ce soit au comportement en temps court ou par opposition au comportement asymptotique de la relaxation, autrement dit en temps long. Le but de ce chapitre est de traiter ces deux échelles de temps, que ce soit du point de vue théorique ou numérique.

Bien que nos résultats soient plus généraux, nous les illustrerons à l’aide du modèle HMF ou “*Hamiltonian Mean Field*”, qui permettra de bien prendre la mesure de ce qui se passe de par sa relative simplicité. Nous verrons tout de même, en fin de chapitre, dans quel type de situations plus générales il est possible d’utiliser nos résultats, et surtout les modifications qu’il faudrait apporter dans le traitement théorique.

## 2 RELAXATION EN “TEMPS COURT” AUTOUR D’UN ÉTAT INHOMOGÈNE DANS LE MODÈLE HMF

---

---

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à l’évolution d’un système de particules réparties de manière inhomogène en espace, décrite par le modèle HMF, lorsque celui-ci est soumis à une petite perturbation. Concrètement, nous allons essayer de décrire le mieux possible l’évolution du système perturbé pour des temps relativement courts, *i.e.* juste après avoir perturbé le système.

Afin de ne pas alourdir plus que nécessaire les paragraphes ci-dessous, nous ne donnerons que les principales étapes du calcul de l’amortissement Landau autour d’un état stationnaire stable et inhomogène dans le modèle HMF. De plus, nous nous concentrerons essentiellement sur la mise en avant des différences entre les cas homogène et inhomogène. Pour plus de détails, on pourra se référer à l’article [BOY10] publié pendant ma thèse (article joint dans la partie 5.1).

### 2.1 Aspects théoriques

---

#### 2.1.a Cas simple : distribution homogène

Le calcul classique de l’amortissement Landau s’effectue en passant par la transformée de Fourier-Laplace. Pour un état stationnaire homogène  $f_{hom}$ , les grandes étapes sont les suivantes :

1. On commence par linéariser l'équation de Vlasov au voisinage de la distribution stationnaire homogène en posant :  $f(\theta, p, t) = f_{hom} + \delta f(\theta, p, t)$ . Nous obtenons ainsi une équation d'évolution pour la perturbation  $\delta f$ .
2. La seconde étape consiste à utiliser la transformée de Fourier en espace ( $\theta \rightarrow m$ ) et la transformée de Laplace en temps ( $t \rightarrow \omega$ ). Cette transformation nous permet d'écrire la fonction de dispersion<sup>9</sup>  $\epsilon(\omega)$  dans le demi-plan complexe  $\Im(\omega) > 0$ . On a donc accès uniquement à la relation de dispersion  $\epsilon(\omega) = 0$  dans le demi-plan supérieur.
3. Enfin, pour obtenir l'évolution de la perturbation il est nécessaire de calculer la transformée de Fourier-Laplace inverse. Pour cela, il est alors nécessaire de prolonger analytiquement la fonction  $\epsilon(\omega)$  afin de pouvoir déformer le contour d'intégration dans le demi-plan inférieur. On commence donc par définir  $\epsilon(\omega)$  dans le demi-plan complexe  $\Im(\omega) \leq 0$ . C'est ici qu'il faut utiliser la prescription de Landau : on prend en compte la contribution de singularités dans le demi-plan complexe  $\Im(\omega) \leq 0$ ; singularités d'une certaine fonction qui, après intégration, donne  $\epsilon(\omega)$ .

À ce stade, nous avons complètement résolu le problème : nous sommes capables de prédire l'évolution de la perturbation. En général, il n'est pas nécessaire de calculer la transformée de Fourier-Laplace inverse. En effet, le système relaxe exponentiellement et on est seulement intéressé par l'amortissement Landau. Pour le déterminer, il suffit de considérer le prolongement de la fonction de dispersion. Les zéros de celle-ci sont reliés à la stabilité ou l'instabilité du système. Une zéro  $\omega_s$  de  $\epsilon(\omega)$  dans le demi-plan complexe  $\Im(\omega) > 0$  correspondra à un mode instable dans le système, tandis qu'à l'inverse, un zéro dans le demi-plan complexe inférieur correspondra à un mode stable qui s'amortit exponentiellement, avec un temps caractéristique de l'ordre de  $1/\Im(\omega_s)$ .

À titre d'exemple, détaillons le calcul pour un état stationnaire homogène [IK93]. Considérons une distribution  $f$  obtenue à partir d'un état stationnaire  $f_{hom}$  faiblement perturbé, tel que  $f(\theta, p, t) = f_{hom} + \delta f(\theta, p, t)$ . Si nous introduisons cette expression dans l'équation de Vlasov (I.7), nous obtenons l'équation d'évolution de la perturbation  $\delta f$  :

$$\frac{\partial \delta f(\theta, p, t)}{\partial t} + p \frac{\partial \delta f(\theta, p, t)}{\partial \theta} - \frac{\partial \Phi[\delta f]}{\partial \theta}(\theta, t) \frac{\partial f_{hom}}{\partial p}(p) = 0. \quad (\text{I.14})$$

Définissons maintenant la transformée de Fourier-Laplace d'une fonction  $u$  par

$$\hat{u}(m, p, \omega) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} e^{-im\theta} e^{i\omega t} u(\theta, p, t) dt d\theta. \quad (\text{I.15})$$

La transformée de Fourier-Laplace inverse est alors donnée par :

$$u(\theta, p, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{\Gamma} \hat{u}(m, p, \omega) e^{-i\omega t} e^{im\theta} d\omega, \quad (\text{I.16})$$

où  $\Gamma$  est un contour de Bromwich partant de  $-\infty + i\sigma$  jusqu'à  $+\infty + i\sigma$  tel que  $\sigma$  soit plus grande que les parties imaginaires de toutes les singularités de  $\hat{u}(m, p, \omega)$  dans le plan complexe de  $\omega$ .

---

9. Il s'agit de la fonction qui relie pulsation et vecteur d'onde.

En faisant la transformée de Fourier-Laplace de l’équation (I.14), nous obtenons :

$$\begin{aligned} i\omega\hat{\delta}f(m, p, \omega) + \int_{-\pi}^{\pi} e^{im\theta}\delta f(\theta, p, t=0)d\theta - imp\hat{\delta}f(m, p, \omega) \\ + imC(\delta_{m,1} - \delta_{m,-1}) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\delta}f(m, p', \omega)dp' \times f'_{hom}(p) = 0, \end{aligned} \quad (\text{I.17})$$

où  $C$  est une constante,  $f'_{hom}$  est la dérivée de la solution homogène  $f_{hom}$  par rapport à  $p$  et où le deuxième terme est la contribution de la transformée de Fourier de la perturbation initiale par rapport à  $\theta$ . Cette équation peut se réécrire

$$\hat{\delta}f(m, p, \omega) = -C(\delta_{m,1} - \delta_{m,-1}) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\delta}f(m, p', \omega)dp' \frac{f'_{hom}(p)}{p - \frac{\omega}{m}} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{im\theta}\delta f(\theta, p, t=0)}{i(mp - \omega)}d\theta, \quad (\text{I.18})$$

qui en intégrant par rapport à  $p$  et en regroupant les termes identiques, nous donne

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\delta}f(m, p, \omega)dp \underbrace{\left[ 1 + C(\delta_{m,1} - \delta_{m,-1}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'_{hom}(p)}{p - \frac{\omega}{m}}dp \right]}_{\epsilon(m, \omega)} \\ = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{im\theta}\delta f(\theta, p, t=0)}{i(mp - \omega)}dpd\theta \end{aligned} \quad (\text{I.19})$$

La fonction de dispersion pour le mode  $m = 1$  d’un état stationnaire homogène dans le modèle HMF antiferromagnétique, ou dans le cas d’un plasma homogène, prend la forme

$$\epsilon(m = 1, \omega) = 1 + C \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'_{hom}(p)}{p - \frac{\omega}{m}}dp. \quad (\text{I.20})$$

Comme nous l’avons vu, la fonction de dispersion dépend de  $\omega$  mais aussi du nombre d’onde  $m$ . En effet, en reprenant les calculs ci-dessus, il est possible de démontrer que pour l’équation de Vlasov, un potentiel  $\Phi$  arbitraire donne toujours une relation de dispersion où les différents modes de Fourier sont découplés pour un état stationnaire homogène. L’avantage de l’expression (I.20) est qu’il sera facile de prolonger  $\epsilon$  dans le demi-plan  $\Im(\omega) < 0$ . En effet, les singularités  $\omega_s$  de l’intégrande apparaissant dans la fonction de dispersion sont évidentes. Pour un nombre d’onde  $m$  fixé, on a  $\omega_s = mp$ . Dès lors que nous connaissons la position de la singularité, il ne reste plus qu’à déformer le contour d’intégration dans le calcul de l’équation (I.20) de sorte à prendre en compte sa contribution (voir figure I.4). Remarquons que l’on peut de manière équivalente conserver un contour uniquement dans le plan supérieur, mais en prenant garde à ajouter la contribution du pôle dans le demi-plan inférieur à l’aide du théorème des résidus. Cela revient à définir le prolongement analytique de  $\epsilon$  par

$$\epsilon(m, \omega) = \begin{cases} 1 + C \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'_{hom}(p)}{p - \frac{\omega}{m}}dp & \text{si } \Im(\omega) > 0 \\ 1 + C \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'_{hom}(p)}{p - \frac{\omega}{m}}dp - 2i\pi \text{Res} \left( \frac{f'_{hom}(p)}{p - \frac{\omega}{m}}, p = \frac{\omega}{m} \right) & \text{si } \Im(\omega) < 0 \end{cases}, \quad (\text{I.21})$$

et c’est d’ailleurs cette approche qui est utilisée dans les calculs numériques.

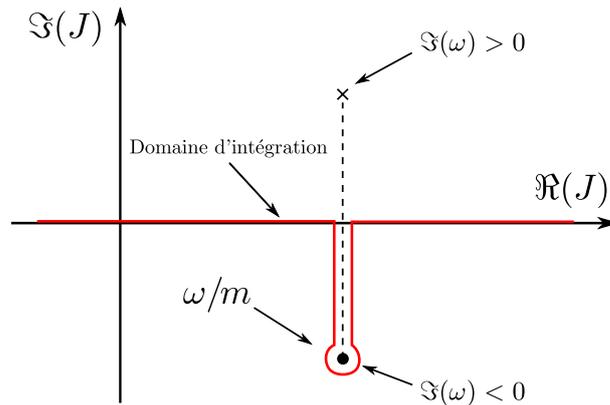


FIGURE I.4 – Exemple de déformation du contour d’intégration en utilisant la prescription de Landau dans le calcul de  $\epsilon(\omega)$ . La déformation du contour permet de prendre en compte la contribution de la singularité et d’obtenir le prolongement de  $\epsilon$  dans le demi-plan  $\Im(\omega) < 0$ . Ici, il n’y a ni branche de coupure ni singularité sur l’axe  $\Re(J)$ , comme dans le cas d’un plasma homogène. Dans le cas présenté, la coordonnée action est proportionnelle à la quantité de mouvement  $p$ .

### 2.1.b Cas inhomogène

Dans le cas du modèle HMF ferromagnétique ou HMF attractif, la distribution stationnaire n’est plus nécessairement homogène, et dans ce cas, les calculs faits dans la section précédente ne sont plus valables. En revanche, les principes restent les mêmes. Il faut linéariser l’équation de Vlasov autour de ce nouvel état, exprimer la transformée de Fourier-Laplace, déterminer les singularités de l’intégrande apparaissant dans la fonction de dispersion, et prolonger cette dernière dans le demi-plan complexe inférieur pour enfin calculer la transformée de Fourier-Laplace inverse.

Afin de réaliser les calculs théoriques qui viennent d’être décrits, il est d’usage d’utiliser les coordonnées angle-action  $(\xi, J)$  à la place des coordonnées position-impulsion  $(\theta, p)$ . Elles sont utilisées pour écrire le potentiel auto-consistant  $\Phi$  de façon plus simple dans le cas d’une distribution  $f$  homogène. Dans le cas inhomogène, les expressions ne sont pas aussi agréables mais elles nous aident tout de même. Les coordonnées angle-action sont définies à l’aide des intégrales elliptiques de Legendre. On trouvera leurs définitions et les changements de variables associés pour le modèle HMF dans les annexes A et B de l’article [BOY10] (article joint dans la partie 5.1).

En effet, bien que dans le cas d’une distribution stationnaire homogène  $f_{hom}$ , le potentiel auto-consistant disparaisse et que les coordonnées angle-action  $(\xi, J)$  soient simplement proportionnelles aux coordonnées standard  $(\theta, p)$ , ce n’est plus le cas pour une distribution stationnaire inhomogène  $f_0$ . En effet, la magnétisation est non nulle et l’espace des phases est exactement celui d’un pendule, *i.e.* présentant une séparatrice (voir figure I.5). Une conséquence est que le changement de variable  $(\theta, p) \rightarrow (\xi, J)$  n’est plus bijectif. Nous avons donc besoin de scinder l’espace des phases en différents domaines et définir autant de changements de variables que de domaines. Cependant, pour simplifier la discussion

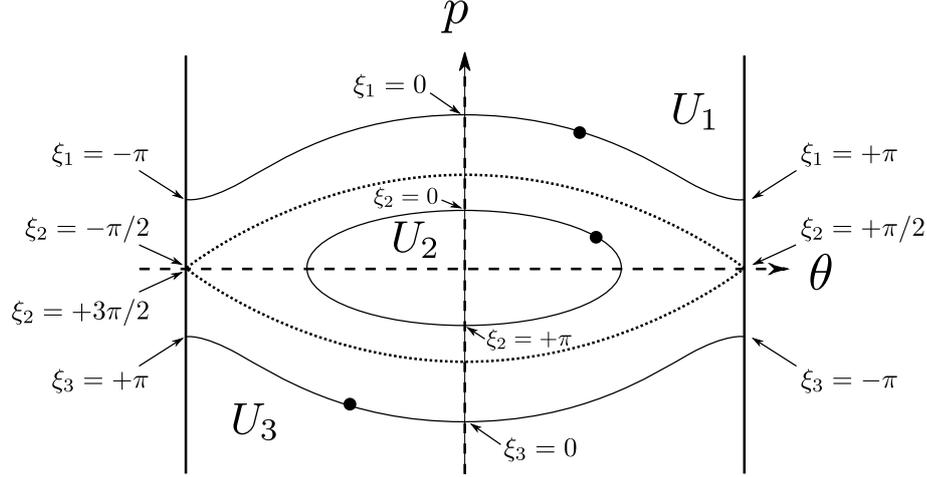


FIGURE I.5 – Représentation de l’espace des phases du modèle HMF pour un état stationnaire inhomogène. L’espace des phases est composé de plusieurs domaines  $U_i$  avec  $i \in \{1, 2, 3\}$ . La séparatrice est représentée en pointillés. Le domaine  $U_2$  est à l’intérieur de la séparatrice en pointillés tandis que les domaines  $U_1$  et  $U_3$  sont à l’extérieur. Pour chaque domaine, il faut définir des coordonnées angle-action différentes. Les valeurs de la variable angulaire  $\xi_i$  sont représentées pour trois orbites différentes.

et les notations<sup>10</sup>, nous considérerons dans la suite qu’il n’existe qu’un seul domaine : le domaine  $U_2$  à l’intérieur de la séparatrice, où les particules oscillent dans le système. En plus de ces problèmes, le fait que le potentiel auto-consistant ne disparaisse plus empêche de découpler les modes de Fourier. Désormais nous devons directement travailler avec une fonction de dispersion qui contient l’information de tous les modes simultanément.

Après la linérisation de l’équation de Vlasov et la transformation de Fourier-Laplace, la fonction de dispersion obtenue s’écrit (voir 5.1) :

$$\epsilon(\omega) = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2\pi} \sum_m \int \frac{mf'_0(J)}{m\Omega(J) - \omega} |c_m(J)|^2 dJ\right)}_{\epsilon_c(\omega)} \times \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2\pi} \sum_m \int \frac{mf'_0(J)}{m\Omega(J) - \omega} |s_m(J)|^2 dJ\right)}_{\epsilon_s(\omega)}, \quad (\text{I.22})$$

avec  $\Omega(J) = dH[f_0]/dJ$  la fréquence angulaire associée à la coordonnée action  $J$  (voir figure I.6) et

$$c_m(J) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\theta) e^{im\xi} d\xi \quad s_m(J) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\theta) e^{im\xi} d\xi. \quad (\text{I.23})$$

*A priori*, en comparant les expressions (I.20) et (I.22), il ne semble pas y avoir plus de difficulté si ce n’est la somme variant de  $-\infty$  à  $\infty$ . Cependant, il n’en est rien ! Jusqu’à présent, la continuation de la fonction de dispersion dans le demi-plan  $\Im(\omega) < 0$  était univoque en vertu du fait que l’intégrale dans l’équation (I.20) portait sur  $] -\infty, \infty[$ . Or,

10. Sans cette simplification, il faudrait remplacer toutes les intégrales  $\int \dots dJ$  par  $\sum_{i=1}^3 \int \dots dJ_i$ .

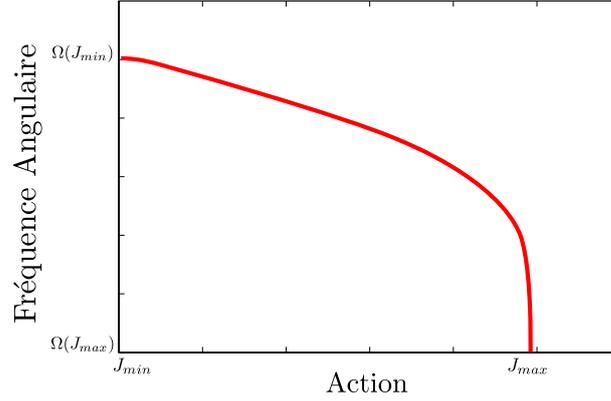


FIGURE I.6 – Représentation de la fréquence angulaire  $\Omega$  en fonction de l'action  $J$ . Notons que la valeur maximale de  $\Omega(J)$  est obtenue en  $J = J_{min}$ . La borne supérieure  $\Omega(J_{min})$  est à l'origine des branches de coupure de la fonction de dispersion  $\epsilon(\omega)$  définie par (I.22) (rappelons que pour simplifier, nous ne considérons que le domaine  $U_2$ ).

à cause du fait que la fréquence angulaire est bornée, cela n'est plus le cas (voir figure I.6).

Pour bien comprendre cette différence, considérons un cas simplifié en nous limitant à un  $m$  fixé et en raisonnant sur le prolongement analytique de l'intégrale

$$\epsilon_{m,c}(\omega) = \int_{J_{min}}^{J_{max}} \frac{m f'_0(J)}{m \Omega(J) - \omega} |c_m(J)|^2 dJ, \quad (\text{I.24})$$

dans le demi-plan complexe inférieur  $\Im(\omega) < 0$ , où  $[J_{min}, J_{max}]$  est le domaine de définition de  $\Omega$ . Nous avons représenté sur la figure I.7 un exemple de domaine d'intégration  $[J_{min}, J_{max}]$  ainsi que l'ensemble  $I_m$  défini par

$$I_m = \left\{ \omega \in \mathbb{C} \mid \Omega^{-1} \left( \frac{\omega}{m} \right) \in [J_{min}, J_{max}] \right\} = [\Omega(J_{max}), \Omega(J_{min})]. \quad (\text{I.25})$$

Pour bien comprendre en quoi la finitude de  $I_m$  influence le prolongement, considérons un point  $\omega_1$  tel que  $\Im(\omega_1) > 0$  et  $\omega_2$  tel que  $\Im(\omega_2) < 0$ . Pour calculer la transformée de Fourier-Laplace inverse, nous avons besoin de calculer la fonction de dispersion  $\epsilon$  pour des  $\omega$  tel que  $\Im(\omega) < 0$ . Nous devons donc prolonger continûment la fonction de dispersion de  $\omega_1$  à  $\omega_2$ . Pour cela, considérons deux chemins  $\Gamma_a$  et  $\Gamma_b$  reliant les points  $\omega_1$  et  $\omega_2$ . Pour finir, on définit le chemin  $\gamma_a = \{J \in \mathbb{C} \mid m \Omega(J) \in \Gamma_a\}$  et  $\gamma_b$  pareillement. Nous obtenons ainsi deux prolongements analytiques possibles de  $\epsilon_{m,c}$ , selon que l'on ait besoin ou non de suivre la prescription de Landau, *i.e.* que les chemins  $\gamma_a$  et  $\gamma_b$  croisent ou non le domaine d'intégration (voir figure I.7). En utilisant  $\Gamma_a$ , nous obtenons

$$\epsilon_{m,c}(\omega) = \int \frac{m f'_0(J)}{m \Omega(J) - \omega} |c_m(J)|^2 dJ, \quad (\text{I.26})$$

que la partie imaginaire de  $\omega$  soit négative ou positive, alors qu'en utilisant  $\Gamma_b$  on doit tenir compte de la contribution des pôles dans le demi-plan  $(\Re(J), \Im(J))$  inférieur<sup>11</sup>, qui

11. Dans l'exemple de la figure I.7, il ne faudrait donc pas prendre en compte le pôle  $\Omega^{-1}(\omega_2/m)$ .

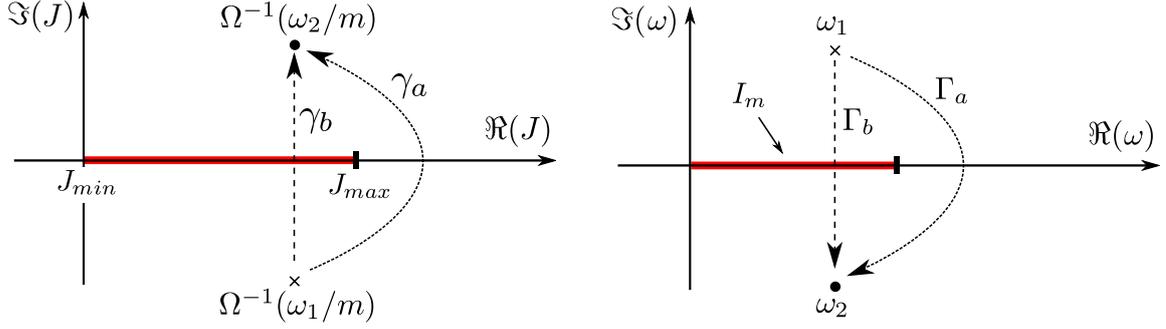


FIGURE I.7 – Représentation de chemins qualitativement différents pour le calcul de la fonction de dispersion simplifiée (I.24). L’existence de bornes finies dans le calcul des intégrales de la fonction de dispersion donne lieu à l’apparition de branches de coupure passant par certains points de la droite  $\Im(J) = 0$ , contrairement au cas homogène. La figure de gauche représente le plan complexe des actions  $J$  tandis que la figure de droite représente le plan complexe des  $\omega$ .

conduit à

$$\epsilon_{m,c}(\omega) = \begin{cases} \int \frac{mf'_0(J)}{m\Omega(J) - \omega} |c_m(J)|^2 dJ & \text{si } \Im(\omega) > 0 \\ \int \frac{mf'_0(J)}{m\Omega(J) - \omega} |c_m(J)|^2 dJ & \text{si } \Im(\omega) < 0 \\ -2i\pi \text{Res} \left( \frac{mf'_0(J)}{m\Omega(J) - \omega} |c_m(J)|^2, J = \Omega^{-1} \left( \frac{\omega}{m} \right) \right) & \end{cases} \quad (\text{I.27})$$

En vertu du fait qu’il n’y a pas de raison que les équations (I.26) et (I.27) coïncident en  $\omega_2$ , nous nous retrouvons avec plusieurs prolongements analytiques incompatibles. Choisir un prolongement en particulier revient à fixer une ou deux branches de coupure dans le plan des  $\omega$  passant par les points extrémaux de  $I_m$ . Cela permet d’expliquer pourquoi la fonction est continue selon certains chemins et pas selon d’autres. Nous comprenons ainsi pourquoi le caractère borné de  $\Omega$  conduit aux différentes branches de coupure de la fonction de dispersion.

En revenant sur l’expression complète de la fonction de dispersion il faut tenir compte de la somme sur  $m$ . Pour chaque valeur de  $m$ , il existe une ou deux branches de coupure passant par les *extrema* de  $I_m$ . Nous obtenons ainsi une fonction de dispersion qui admet une infinité de prolongements analytiques possibles. À titre d’exemple, la figure I.8 représente différents domaines  $I_m$  dont les *extrema* déterminent les branches de coupure et la figure I.9 représente trois choix possibles de prolongements de  $\epsilon(\omega)$ .

Avant de conclure, remarquons que malgré le choix arbitraire du positionnement des branches de coupure, la transformée de Fourier-Laplace inverse se doit d’être toujours la même. Cela ne peut s’expliquer que par une contribution différente des branches de coupure dans le calcul explicite de la transformée inverse.

Bien que pour résoudre complètement le problème il faille calculer la transformée de Fourier-Laplace, nous nous limiterons, comme c’est souvent le cas, aux calculs des pôles de Landau car ils contiennent l’essentiel de la dynamique (temps caractéristique de relaxation, fréquence propre, ...). C’est pourquoi nous allons tout de suite nous intéresser à l’étape suivante : la confirmation numérique de la théorie développée. En effet, une fois

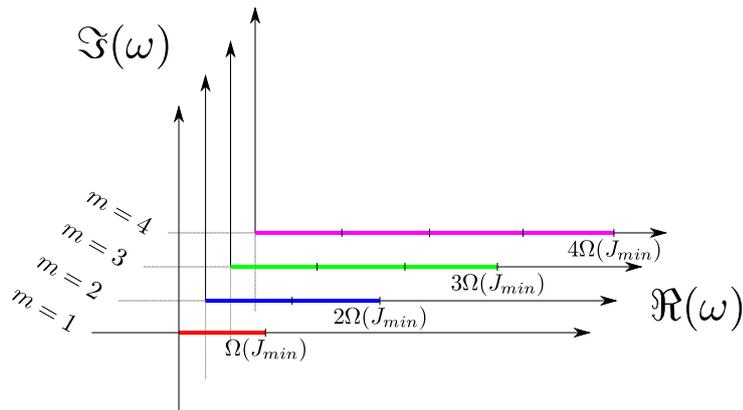


FIGURE I.8 – Représentation des feuillets de Riemann pour  $m = 1$  à  $m = 4$  dans le plan complexe  $\omega$  de  $\epsilon$ . À cause de la borne inférieure  $J_{min}$ , nous rencontrons la même indétermination pour chaque valeur de  $m$  que sur la figure I.7. La somme sur  $m$  dans l’expression intégrale (I.22) revient à superposer les différents plans. Il existe alors une infinité de prolongements continus de la fonction de dispersion  $\epsilon$ , selon que l’on décide ou non de passer continuellement au travers des différents domaines  $I_m$  (segments colorés).

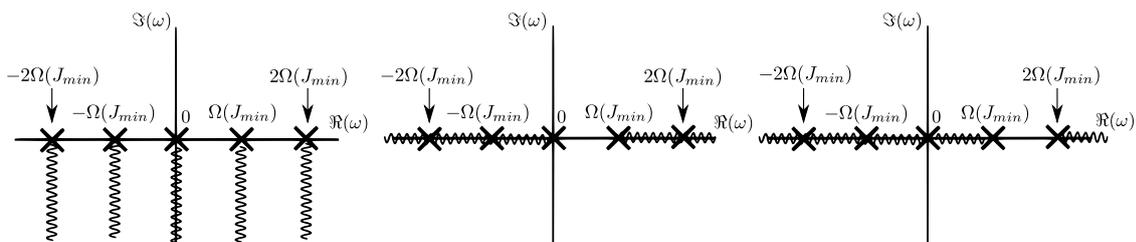


FIGURE I.9 – Représentation de trois positionnements différents des branches de coupure de la fonction de dispersion. À chaque couleur est associé un feuillet de Riemann. Nous pouvons remarquer qu’au moins une branche de coupure passe par chaque multiple de  $\Omega(J_{min})$ .

la fonction de dispersion obtenue (I.22), il n’y a que peu d’espoir de pouvoir calculer ses zéros de façon analytique pour un état stationnaire  $f_0$  inhomogène.

## 2.2 Calcul numérique des pôles de Landau

Dans ce paragraphe, nous traiterons dans un premier temps certaines difficultés techniques rencontrées dans le calcul explicite de la fonction de dispersion. Dans un second temps, nous comparerons les simulations numériques avec la prédiction théorique.

### 2.2.a Méthodes utilisées et difficultés rencontrées

Pour calculer la fonction de dispersion (I.22) et ses zéros, nous avons besoin en premier lieu d’évaluer les expressions intégrales suivantes<sup>12</sup> :

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \int \frac{m f'_0(J)}{m \Omega(J) - \omega} |c_m(J)|^2 dJ \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int \frac{m f'_0(J)}{m \Omega(J) - \omega} |s_m(J)|^2 dJ, \quad (\text{I.28})$$

où

$$c_m(J) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\theta(\xi, J)) e^{im\xi} d\xi, \quad s_m(J) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\theta(\xi, J)) e^{im\xi} d\xi, \quad (\text{I.29})$$

et

$$\xi = \begin{cases} \frac{\pi F(\Theta, k)}{2 K(1/k)} & \text{si } p \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} \left( 2 - \frac{F(\Theta, k)}{K(1/k)} \right) & \text{si } p < 0 \end{cases}, \quad \text{où } \Theta \text{ satisfait } k \sin \Theta = \sin(\theta/2), \quad (\text{I.30})$$

avec  $F$  l’intégrale elliptique de première espèce de Legendre,  $K$  l’intégrale elliptique complète de première espèce de Legendre et  $k$  le module associé, qui dépend dans notre cas de l’énergie du système et de la magnétisation de l’état stationnaire initial.

La principale difficulté dans le calcul de ces différentes intégrales réside dans les problèmes de convergence qui apparaissent aux bords des domaines d’intégration, ces problèmes étant généralement hérités des points singuliers des différentes fonctions elliptiques. Considérons par exemple les fonctions  $c_m$ . Lorsque l’on utilise (I.29) et (I.30), nous pouvons montrer que les coefficients  $c_m$  s’écrivent d’une façon plus explicite en fonction du module  $k$  :

$$c_m(J) = \int_{-\pi}^{\pi} \left[ 1 - 2k^2 \text{sn}^2 \left( \frac{2}{\pi} K(k) \xi, k \right) \right] e^{im\xi} d\xi, \quad (\text{I.31})$$

avec  $\text{sn}$  la fonction elliptique de Jacobi définie par

$$\text{sn}(F(\phi, k), k) = \sin \phi. \quad (\text{I.32})$$

Dans l’évaluation des intégrales (I.28), une des premières étapes est le calcul des fonctions  $c_m(J)$ . Or, bien que nous sachions que ces fonctions convergent lorsque  $J$  tend vers  $J_{max}$  car

$$\left. \begin{array}{l} \text{sn}(z, 1) = \tanh(z) \\ K(z) \xrightarrow{z \rightarrow 1^-} = \infty, \end{array} \right\} \Rightarrow c_m(J) \xrightarrow{J \rightarrow J_{max}^-} 0 \text{ si } m \neq 0 \quad (\text{I.33})$$

cela semble de moins en moins évident lorsque la valeur de  $m$  devient élevée (voir figure I.10). Par exemple pour  $m = 8$ , il faut regarder le comportement de  $c_8(J)$  sur  $[0,999\,999\,9 \times J_{max}, J_{max}]$  pour observer sa décroissance vers zéro.

À cause de ces difficultés, nous avons été obligés d’abandonner notre première approche dans le calcul de la relation de dispersion. En effet, pour être le plus efficace possible,

12. Rappelons ici qu’en réalité la fonction de dispersion (I.22) n’est pas la vraie fonction de dispersion qui apparaît dans le modèle HMF. En réalité, à cause de l’inhomogénéité de l’état stationnaire  $f_0$ , il faut considérer plusieurs domaines distincts lors du changement de variables  $(\theta, p) \rightarrow (\xi, J)$  (voir figure I.5). Pour simplifier ici, nous nous limitons à un domaine : le domaine intérieur à la séparatrice où les particules oscillent dans le système, *i.e* avec un angle toujours compris dans  $[0, 2\pi[$ . Le lecteur pourra se référer à l’article [BOY10] (article joint dans la partie 5.1) pour plus de détails.

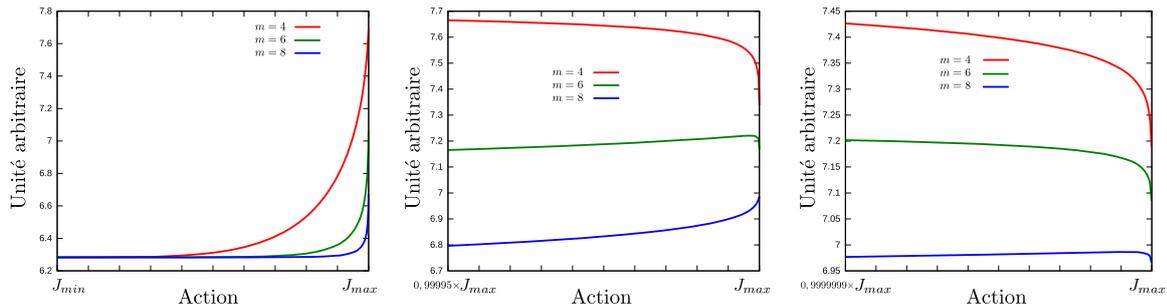


FIGURE I.10 – Représentation des coefficients  $c_m$  pour  $m = 4, 6$  et  $8$  en fonction de la valeur de l’action  $J$ . La figure de gauche représente les coefficients  $c_m$  sur l’intervalle  $[J_{min}, J_{max}]$ . La figure du centre et celle de droite représentent différents zoom au voisinage de  $J = J_{max}$  de la première figure. Nous observons que plus la valeur de  $m$  augmente et plus la convergence vers zéro de  $c_m$  est lente.

l’utilisation de logiciels de calcul formel ou numérique pour réaliser les calculs semblait judicieuse. Cela permettait d’utiliser un ensemble de méthodes déjà implémentées et testées. Malheureusement, au vu des comportements asymptotiques rencontrés, la plupart des algorithmes étaient inefficaces. Soit ceux-ci prenaient un temps rédhibitoire, soit ils arrivaient à la conclusion que les fonctions n’étaient pas intégrables.

D’un autre côté, renoncer à ces logiciels impliquait de renoncer aux méthodes de calcul hautement efficaces déjà implémentées. Pour pallier à ce problème, nous avons utilisé une approche à mi-chemin. Nous avons effectué l’ensemble des calculs avec le langage de programmation C, tout en utilisant une bibliothèque de calcul scientifique longuement éprouvée : la bibliothèque libre “*GNU Scientific Library*” (GSL). Dès lors, nous avons utilisé deux algorithmes d’intégration à pas adaptatif, nommés QAG et QAGIU, basés sur la règle de Gauss-Kronrod disponible dans la bibliothèque. Bien sûr, nous avons rencontré les mêmes difficultés que celles survenues lors de l’utilisation de logiciels de calcul numérique, mais cette fois nous avons pu contourner les problèmes de divergence apparente. Un autre avantage de cette approche est qu’il nous a été très facile de jongler avec la précision des résultats et le temps de calcul nécessaire. Après de nombreux tests, nous avons montré qu’il suffisait :

- de calculer les expressions (I.28) pour  $m$  allant de  $-5$  à  $5$  pour obtenir des résultats suffisamment précis,
- d’intégrer les équations sur  $[J_{min}, J_{max} - 10^{-8}]$  pour avoir des erreurs relatives d’ordre  $10^{-4}$  sur les valeurs calculées.

Une fois les intégrales calculées qui nous donnent directement la fonction de dispersion  $\epsilon(\omega)$  dans le demi-plan supérieur  $\Im(\omega) > 0$ , il nous faut la prolonger dans le demi-plan inférieur. Pour cela, nous avons choisi de calculer les résidus associés pour satisfaire la prescription de Landau si besoin est. Remarquons qu’à notre connaissance il n’existe dans la littérature qu’un seul calcul similaire [Wei94, VW00]. L’auteur utilise des fractions rationnelles pour interpoler la fonction de dispersion dans le demi-plan inférieur. L’information obtenue est limitée au voisinage de l’axe  $\Im(\omega) = 0$ , ce qui ne sera pas le cas dans notre travail.

Pour calculer les résidus nous avons commencé par chercher les zéros  $J^* \in \mathbb{C}$  de  $m\Omega(J) - \omega$  pour tous les couples  $(m, \omega) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ . À ce titre, nous avons eu besoin de calculer les différentes intégrales elliptiques et fonctions elliptiques de Jacobi, ainsi que leur conti-

nuation analytique dans tout le plan complexe. Pour cela, nous avons utilisé les fonctions thêta de Jacobi qui permettent de calculer plus simplement, dans le plan complexe, toutes les fonctions elliptiques déjà mentionnées. Nous ne détaillerons pas ici les expressions en termes de fonction thêta de Jacobi mais le lecteur intéressé pourra consulter les références [Bul65, HR63, MH72, Mor78].

Avant toute chose, nous avons montré que pour tout couple  $(m, \omega) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ , il existait un ou plusieurs zéros  $J^*$ , avec la contrainte que tous les  $J^*$  soient dans le même quadrant de  $\mathbb{C}$ . Cela nous a permis d’une part d’alléger grandement les calculs numériques, mais aussi de déterminer le signe de la contribution à ajouter lorsque  $\omega$  croise l’axe réel.

Nous avons ensuite cherché les *minima* nuls de  $|m\Omega(J) - \omega|$  à la place des zéros de  $m\Omega(J) - \omega$ . Cette reformulation du problème nous a permis d’utiliser l’algorithme symplectique d’optimisation non-linéaire de Nelder-Mead, implémenté dans la bibliothèque GSL, en partant d’un ensemble de conditions initiales réparties dans le “bon” quadrant. Pour terminer, nous avons calculé les résidus associés aux  $J^*$  et multiplié les résultats par  $\pm 2i\pi$  selon la façon dont  $\omega$  croise l’axe réel (de haut en bas ou de bas en haut).

Tout ce que nous venons de faire jusqu’à présent nous permet seulement de calculer la fonction de dispersion  $\epsilon(\omega)$  pour tout  $\omega \in \mathbb{C}$ . Cependant, afin de déterminer les pôles de Landau  $\omega_L$ , il nous reste une dernière étape à franchir : nous devons résoudre l’équation  $\epsilon(\omega_L) = 0$ .

A cause de la structure compliquée de la fonction de dispersion  $\epsilon(\omega)$ , nous n’avons pas utilisé de méthode générique de minimisation ou de recherche de racines, qui nous aurait amenés à travailler dans un espace à quatre dimensions. En effet, plus la dimension de l’espace est élevée et plus il y a de chances de rater des solutions. Les bassins d’attraction de chaque solution étant de tailles différentes et l’efficacité de ces méthodes résidant dans un *bon* choix de candidat initial, il est possible de rater une solution dont le bassin d’attraction serait *petit* par rapport à ceux de ses voisins. À la place, nous avons calculé  $|\epsilon(\omega)|$  sur une grille et identifié les zones susceptibles d’abriter des racines (voir figure I.11 pour un exemple). Après cette étape préliminaire, nous traçons les lignes de niveau

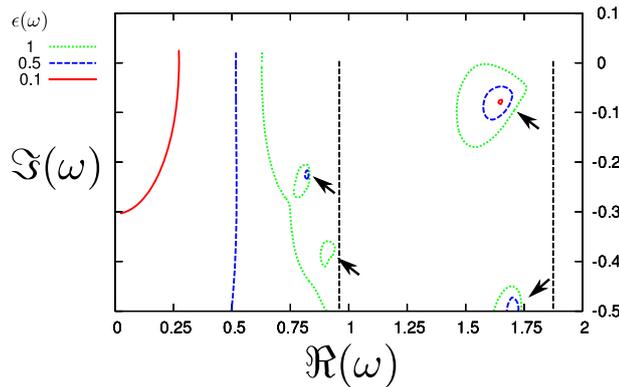


FIGURE I.11 – Représentation de  $|\epsilon(\omega)|$  en lignes de niveau en prenant comme état stationnaire  $f_0$  l’équilibre statistique avec  $T = 0,2$  (voir l’équation (I.34)). Les lignes verticales en pointillés noirs représentent des branches de coupure tandis que les flèches représentent les zones probables pouvant abriter des zéros de la fonction de dispersion.

d’altitude nulle de  $\Re(\epsilon(\omega))$  et  $\Im(\epsilon(\omega))$ . Les zéros de  $\epsilon(\omega)$  sont simplement obtenus aux points d’intersection de ces courbes (voir figure (I.12) pour un exemple). Notons que la prudence est de rigueur dans l’analyse des résultats, à cause de la présence éventuelle

de branches de coupure. Nous verrons d'ailleurs dans la prochaine partie un exemple de résultat pour différents choix de branches de coupure.

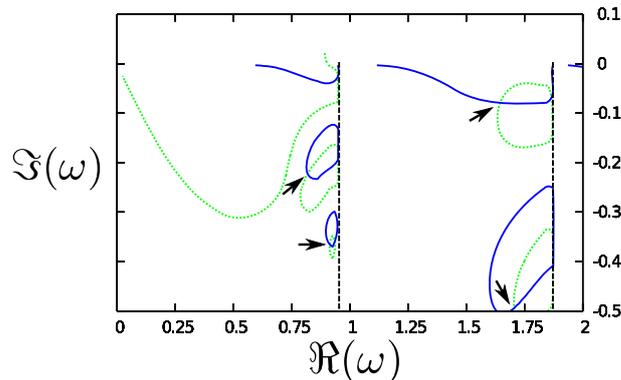


FIGURE I.12 – Représentation des lignes de niveau  $\Re(\epsilon(\omega)) = 0$  et  $\Im(\epsilon(\omega)) = 0$  en prenant comme état stationnaire  $f_0$  l'équilibre statistique avec  $T = 0,2$  (voir l'équation (I.34)). Les lignes verticales en pointillés noirs représentent des branches de coupure. Les intersections des lignes de niveau, marquées par les flèches noires, représentent les zéros de la fonction de dispersion. Il faut prendre garde de ne pas tenir compte des fausses racines créées au voisinage des branches de coupure.

### 2.2.b Quelques résultats et discussions

Nous venons de voir dans la partie précédente comment calculer numériquement la fonction de dispersion donnée par (I.22) ainsi que les pôles de Landau associés, *i.e.* les  $\omega_L \in \mathbb{C}$  tels que  $\epsilon(\omega_L) = 0$ . Cependant, pour cela, il faut considérer un état stationnaire  $f_0$  spécifique et c'est ce que nous allons faire ici, en comparant les prédictions théoriques aux simulations numériques dans différents cas particuliers. Précisons que par “prédictions théoriques” nous entendons : calcul de la fonction de dispersion prédite par (I.22) et de ses zéros (ce qui n'est pas, comme nous venons de le voir, chose facile).

Considérons pour commencer l'équilibre statistique comme état stationnaire. Dans le cas du modèle HMF attractif, lorsque la température est inférieure à 0,5 [Ina93], l'équilibre statistique est inhomogène et s'écrit :

$$f_0(\theta, p) = C(\beta) e^{-\beta(p^2/2 - M(\beta) \cos(\theta))}, \quad (\text{I.34})$$

avec  $C(\beta)$  une constante de normalisation et  $M(\beta)$  la magnétisation, tous deux dépendant de la température du système.

Ayant un état stationnaire de référence, il nous est désormais facile de prévoir, grâce à l'équation (I.22), comment vont relaxer de petites perturbations *via* l'amortissement Landau. Par exemple, la figure I.13 représente les pôles de Landau pour l'équilibre statistique donné par (I.34) avec une température de  $T = 0,2$ . Deux différents positionnements possibles des branches de coupure sont représentés.

Au regard de la figure I.13, il semble que selon le choix des branches de coupure, il existe plus ou moins de pôles de Landau. Plusieurs questions naturelles apparaissent naturellement. Par exemple, ces différents pôles influencent-ils tous la dynamique de relaxation ?

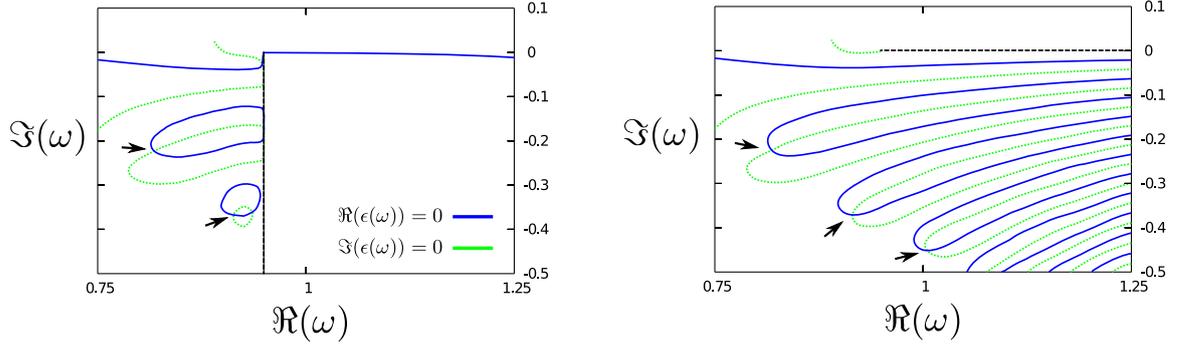


FIGURE I.13 – Représentation des lignes de niveau  $\Re(\epsilon(\omega)) = 0$  et  $\Im(\epsilon(\omega)) = 0$ , pour différents choix de branches de coupure, en prenant comme état stationnaire  $f_0$  l’équilibre statistique avec  $T = 0,2$  (voir l’équation (I.34)). Les lignes en pointillés noirs représentent des branches de coupure. Les intersections des lignes de niveau, marquées par les flèches noires, représentent les zéros de la fonction de dispersion. Le nombre et la position des racines de la fonction de dispersion dépendent du positionnement des branches de coupure.

Quelle est la relation entre les branches de coupure et les zéros de la fonction de dispersion ? Malheureusement, nous n’avons pas de réponse claire à toutes ces questions et nous nous limiterons dans la suite à l’étude du pôle de Landau avec la plus grande partie imaginaire : le mode qui relaxe le plus lentement, que l’on notera simplement dans la suite  $\omega_L$ .

Afin de déterminer la valeur de  $\omega_L$ , nous avons testé différents choix de branches de coupure (voir figure I.9) pour voir s’il en dépendait ou non. Il en est ressorti que la position de  $\omega_L$  est très robuste. Hormis les cas où une branche de coupure passe entre  $\omega_L$  et son projeté orthogonal sur la droite  $\Im(\omega) = 0$ , celle-ci reste toujours un zéro de la fonction de dispersion. Cela montre une certaine robustesse du pôle de Landau  $\omega_L$  par rapport à l’infinité de choix possibles de positionnement des branches de coupure, du moins pour les cas que nous avons explorés.

Pour finir, nous n’avons plus qu’à comparer les prédictions à des simulations numériques où l’état stationnaire  $f_0$  est soumis à de petites perturbations. Les simulations à  $N$  corps ont été réalisées par Yoshiyuki Y. Yamaguchi à l’aide d’un algorithme de dynamique moléculaire. Dans le cas de l’équilibre statistique, nous avons pris la distribution initiale :

$$f(\theta, p, t = 0) = C_a(\beta) e^{-\beta(p^2/2 - M(\beta) \cos(\theta))} (1 + a \cos(\theta)), \quad (\text{I.35})$$

où  $\beta = 1/T$  est la valeur fixée pour la distribution  $f_0$ ,  $a$  est l’amplitude de la perturbation et la  $C_a(\beta)$  est la constante de normalisation qui dépend maintenant de  $a$  et de la température.

Comme nous l’avons vu, il serait présomptueux de vouloir décrire parfaitement la relaxation du système uniquement à partir du pôle  $\omega_L$ , sans tenir compte de la contribution des autres racines de  $\epsilon(\omega)$  ni des branches de coupure. Cependant, comme cela se voit sur les figures I.14 et I.15, nous arrivons tout de même à capter une grande partie de la dynamique. Les fréquences et taux d’amortissement des simulations à  $N$  corps sont obtenus en supposant que la relaxation de la magnétisation suit la relation

$$M(t) = A + B e^{-\lambda t} \cos(\nu t), \quad (\text{I.36})$$

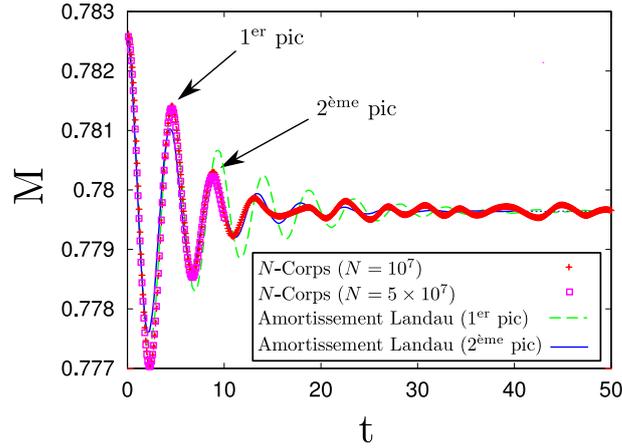


FIGURE I.14 – Évolution en temps  $t$  de la magnétisation  $M(t)$  pour un état stationnaire stable  $f_0$  donné par l'équilibre statistique (I.34). Les paramètres sont :  $T = 0,3$ ,  $a = 0,1$ ,  $N = 10^7$  et  $5 \times 10^7$ .

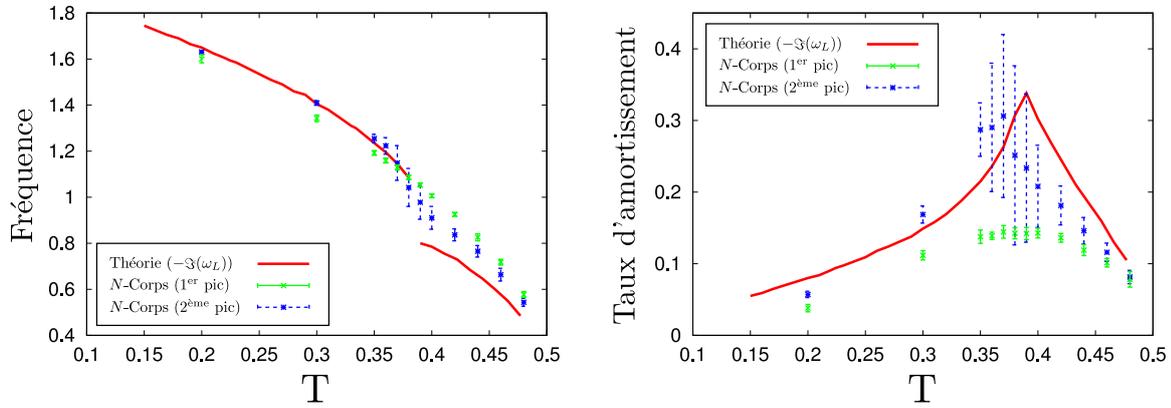


FIGURE I.15 – Estimation des fréquences et des taux d'amortissement pour la condition initiale donnée par (I.35). Les courbes rouges représentent les estimations théoriques issues du pôle de Landau  $\omega_L$ . Les points et leur barres d'erreurs représentent les résultats obtenus à partir de simulations à  $N$  corps avec  $N = 10^7$ , moyennées sur vingt réalisations. Nous avons utilisé deux symboles différents selon l'utilisation du premier ou deuxième pic de  $M(t)$  dans l'estimation des paramètres  $\lambda$  et  $\nu$  (voir équation (I.36)).

avec  $A$ ,  $B$ ,  $\lambda$  et  $\nu$  des constantes, qui caractérise un amortissement Landau. Pour calculer  $\lambda$  et  $\nu$  nous avons imposé d'une part que la simulation et la courbe donnée par (I.36) passent par le même point en  $t = 0$  et d'autre part qu'elles coïncident au niveau du premier ou second pic. Cette dernière distinction permet de voir que lorsque le temps augmente, les autres contributions ont de moins en moins d'influence sur la relaxation. En effet, les résultats sont sensiblement meilleurs en utilisant le deuxième pic, ce qui est en accord avec le fait que c'est le mode associé à  $\omega_L$  qui relaxe le plus lentement.

Remarquons que sur la figure I.15, la théorie prévoit un changement brutal de la dynamique entre  $T = 0,3$  et  $0,4$  qui est *relativement* bien observé sur les simulations à  $N$  corps. Ce comportement s'explique par le croisement de deux zéros de la fonction de dispersion. En effet, lorsque la température augmente, la première racine avec la plus grande partie imaginaire est rattrapée et dépassée par la seconde. Cette dernière devient alors la

nouvelle valeur de  $\omega_L$  avec la partie imaginaire la plus élevée (voir figure I.16). Enfin, la multiplicité des zéros, avec des valeurs imaginaires proches pour les températures entre 0,3 et 0,4, explique pourquoi la prise en compte de seulement  $\omega_L$  ne donne qu’une information qualitative, qui n’est pas suffisante pour décrire complètement le système.

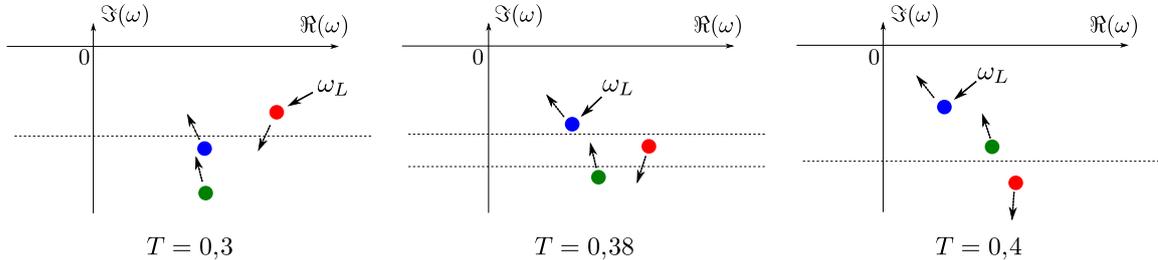


FIGURE I.16 – Représentation schématique du croisement de deux racines (cercles de couleurs) pour la condition initiale donnée par (I.34) pour  $T$  entre 0,3 et 0,4. Les flèches en pointillés représentent l’évolution de la position des zéros lorsque la température augmente. Les lignes horizontales sont là pour aider le lecteur à visualiser les différents croisements de racines.

En conclusion, le caractère inhomogène de la distribution stationnaire ne change pas drastiquement les choses par rapport au cas homogène lorsque nous nous limitons à la dynamique en “temps court”. Cependant il faut noter que les calculs théoriques deviennent plus complexes, les différents modes de Fourier sont tous couplés les uns aux autres et l’apparition de branches de coupure dans la fonction de dispersion rend la prescription de Landau plus difficile à réaliser.

Maintenant que nous avons compris la structure de la fonction de dispersion et que nous avons décrit la relaxation en “temps court” du système, nous sommes en droit de nous demander s’il est possible de décrire le comportement de la perturbation pour des temps plus grands en tenant compte cette fois de tous les ingrédients dans la transformée de Fourier-Laplace inverse, à l’instar de [BM10].

### 3 RELAXATION EN “TEMPS LONG” AUTOUR D’UN ÉTAT INHOMOGÈNE DANS LE MODÈLE HMF

---

Contrairement à la partie 2, nous nous intéresserons désormais à la dynamique asymptotique du système, *i.e.* longtemps après la perturbation. Ceci est une spécificité du cas inhomogène, où la dynamique d’une perturbation n’est pas la même, que ce soit en “temps court” ou en “temps long”. En effet, dans le cas homogène, on peut montrer à partir de l’équation de Vlasov non-linéaire que les perturbations décroissent de manière exponentielle pour tout temps, sous réserve d’hypothèses fortes à satisfaire, vers un état stationnaire proche de l’état non perturbé [MV10]. *A contrario*, pour un système Hamiltonien particulier et un état inhomogène, il a aussi été montré que certaines perturbations décroissent algébriquement [Sme98]. Une fois de plus, le modèle HMF montre son utilité de par sa simplicité. Afin de comprendre pourquoi la décroissance exponentielle est remplacée par une décroissance algébrique, il est crucial de pouvoir mener aussi loin que possible

les calculs explicites et c'est pourquoi le modèle HMF prend toute son importance.

### 3.1 Rapide aperçu des résultats théoriques

---

Nous avons vu comment calculer l'amortissement Landau dans la partie 2, mais aussi que pour obtenir l'évolution complète d'une perturbation, il fallait calculer une transformée de Fourier-Laplace inverse. Par conséquent, pour obtenir l'évolution des perturbations en "temps long", il suffit de se focaliser sur celle-ci.

Pour comprendre le travail numérique réalisé dans la prochaine section, nous donnerons dans la suite du paragraphe quelques résultats théoriques obtenus dans l'article [BOY11], publié pendant ma thèse sur la nature des singularités de la fonction de dispersion (I.22) (article joint dans la partie 5.2).

Notons  $\Sigma_c(\omega)$  et  $\Sigma_s(\omega)$  respectivement les transformées de Laplace des composantes de la magnétisation  $\mathbf{M}$ ,  $M_x(t)$  et  $M_y(t)$  (voir équation (I.11)) :

$$M_x(t) = \int_{\Gamma} e^{-i\omega t} \Sigma_c(\omega) d\omega, \quad (\text{I.37})$$

$$M_y(t) = \int_{\Gamma} e^{-i\omega t} \Sigma_s(\omega) d\omega, \quad (\text{I.38})$$

avec  $\Gamma$  un contour d'intégration au-dessus de toutes les singularités des intégrandes. Il est possible de montrer que ([BOY11]) :

$$\Sigma_c(\omega) = \frac{G_c(\omega)}{\epsilon_c(\omega)}, \quad (\text{I.39})$$

$$\Sigma_s(\omega) = \frac{G_s(\omega)}{\epsilon_s(\omega)}, \quad (\text{I.40})$$

avec  $G_c$  et  $G_s$  deux fonctions de  $\omega$  qui contiennent les caractéristiques de la condition initiale, tandis que  $\epsilon_c$  et  $\epsilon_s$  sont les fonctions de dispersion définies à l'équation (I.22) :

$$\epsilon_c(\omega) = 1 + \frac{1}{2\pi} \sum_m \int \frac{m f'_0(J)}{m\Omega(J) - \omega} |c_m(J)|^2 dJ, \quad (\text{I.41})$$

$$\epsilon_s(\omega) = 1 + \frac{1}{2\pi} \sum_m \int \frac{m f'_0(J)}{m\Omega(J) - \omega} |s_m(J)|^2 dJ. \quad (\text{I.42})$$

Pour obtenir l'évolution de  $M_x(t)$  et  $M_y(t)$ , nous devons effectuer la transformée de Laplace inverse de (I.39) et (I.40), qui requiert la connaissance des singularités dans le demi-plan complexe inférieur  $\Im(\omega) \leq 0$ . À ce stade, nous nous retrouvons au même point que dans le calcul de l'amortissement Landau (voir 2), si ce n'est que nous avons besoin de connaître la nature des singularités aux bornes des branches de coupure : les  $m\Omega(J_{min})$  avec  $m \in \mathbb{Z}$ . Nous pouvons comprendre que seuls ces points sont importants si on se rappelle que la seule contrainte sur le choix de positionnement des branches de coupure était leur passage par les points  $(m\Omega(J_{min}), 0)$  du plan complexe  $\omega$ . En fin de compte, il

est possible de montrer que les singularités des fonctions  $\epsilon_c$  et  $\epsilon_s$ , noté  $\epsilon_c^{sing}$  et  $\epsilon_s^{sing}$ , sont du type :

$$\begin{cases} \epsilon_c^{sing}(\omega) \sim C \times (\omega - m\Omega(J_{min}))^m \ln(\omega - m\Omega(J_{min})) & \text{pour les } m \text{ pairs de la somme} \\ \epsilon_s^{sing}(\omega) \sim C \times (\omega - m\Omega(J_{min}))^m \ln(\omega - m\Omega(J_{min})) & \text{pour les } m \text{ impairs de la somme} \end{cases}, \quad (\text{I.43})$$

avec  $C$  une constante numérique (pouvant être différente pour  $\epsilon_c^{sing}$  et  $\epsilon_s^{sing}$ ) et qu’elles donnent lieu à des décroissances asymptotiques du type  $\exp(-im\Omega(J_{min})t)/t^{m+1}$ .

Les plus fortes singularités de  $\epsilon_c^{sing}$  et  $\epsilon_s^{sing}$  sont obtenues respectivement pour  $m = 2$  et  $m = 1$ , par conséquent nous obtenons :

$$M_x(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} C \frac{e^{-2i\Omega(J_{min})t}}{t^3} \quad (\text{I.44})$$

$$M_y(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} C \frac{e^{-i\Omega(J_{min})t}}{t^2}, \quad (\text{I.45})$$

avec  $C$  une constante numérique pouvant être différente pour  $M_x$  et  $M_y$ . En réalité, il ne s’agit pas exactement de  $M_x(t)$  et  $M_y(t)$  mais plutôt des perturbations de ceux-ci. Pour passer de l’un à l’autre, il suffit d’ajouter ou de soustraire la valeur moyenne asymptotique de  $M_x(t)$  (resp.  $M_y(t)$ ), elle-même différente de  $M_x(0)$  (resp.  $M_y(0)$ ), la magnétisation avant perturbation. En effet, tout comme dans [MV10], l’état final relaxé est proche mais différent de l’état initial. Dans la suite, nous ne ferons pas la différence puisqu’il s’agit d’une simple translation.

Ici nous pouvons voir un des avantages de l’utilisation du modèle HMF. Les résultats (I.44) et (I.45) sont “relativement” simples à caractériser d’autant plus que nous obtenons un comportement asymptotique différent pour chacune des deux composantes de la magnétisation  $\mathbf{M}$ .

## 3.2 Méthodes numériques utilisées

---

Simuler l’équation de Vlasov de sorte à obtenir et caractériser la dynamique asymptotique n’est pas une chose facile. Il faut d’une part atteindre des temps extrêmement longs et d’autre part, il faut le faire avec une précision suffisante. Ces problèmes expliquent pourquoi nous avons eu recours à différentes approches. En effet, notre objectif étant seulement de vérifier la théorie développée précédemment, nous avons fait en sorte de choisir la méthode la plus simple et rapide à mettre en œuvre. Cependant, il nous a fallu plusieurs itérations avant d’atteindre le résultat escompté.

Dans la suite, nous allons introduire les différentes méthodes que nous avons testées et discuter des problèmes rencontrés.

### 3.2.a Méthode Semi-Lagrangienne

La première méthode envisagée est de simuler l’équation de Vlasov directement à l’aide de la méthode semi-Lagrangienne [CK76, SRBG99]. En effet, cette méthode a été récemment testée dans le cadre du modèle HMF [dB10] en observant la relaxation autour d’un état homogène. C’est donc tout naturellement que nous avons commencé par là.

L’algorithme utilise la méthode des caractéristiques pour résoudre les équations aux dérivées partielles : on cherche l’origine des caractéristiques qui passent par les points du

maillage à l'instant  $t + \Delta t$ .

Considérons une grille fixée pour tout temps de l'espace des phases. La densité de particules  $f$  en un point  $(\theta_i, p_j)$  du maillage évolue en fonction du temps. Pour évaluer  $f(\theta_i, p_j, t + \Delta t)$ , nous utilisons les caractéristiques, car le long de celle-ci  $f$  est conservé. Nous remontons dans le temps la caractéristique de sorte à savoir quel point de l'espace des phases  $(\theta, p)$  à l'instant  $t$  est envoyé en  $(\theta_i, p_j)$  à l'instant  $t + \Delta t$ . Étant donné qu'il y a très peu de chances que ce point soit lui aussi sur la grille, il faut utiliser une interpolation sur la grille à l'instant  $t$ , pour déterminer la valeur de  $f(\theta, p, t) = f(\theta_i, p_j, t + \Delta t)$ . Pour cela, il existe de nombreuses méthodes : Lagrange, Hermite, spline, ... et celle qui est communément utilisée est la méthode d'interpolation par spline cubique car elle semble être un bon compromis entre précision et coût numérique.

La dernière chose à voir est comment nous nous déplaçons le long des caractéristiques. Pour cela, nous utilisons une méthode de "splitting" en temps d'ordre deux [CK76], qui consiste à faire évoluer en plusieurs fois, et avec des pas des temps différents, la partie en impulsion et en espace séparément. L'avantage de cette méthode est que dans le cas du modèle HMF, les interpolations à effectuer sont unidimensionnelles, que ce soit en espace ou en impulsion. Cela permet ainsi de faciliter grandement la mise en œuvre de l'algorithme mais aussi d'augmenter son efficacité.

Finalement, les étapes de l'algorithme pour le modèle HMF sont [dB10] :

1. Advection en espace sur un demi-pas de temps.
2. Calcul du champ de force.
3. Advection en impulsion sur un pas de temps.
4. Advection en espace sur un demi-pas de temps.

À l'instar de ce que nous avons fait pour les simulations numériques de l'amortissement Landau, nous avons implémenté la méthode en langage C en ayant recours à une bibliothèque de calcul scientifique éprouvée, la bibliothèque libre "GNU Scientific Library" (GSL), pour les interpolations. Cette approche nous a permis de tester différents algorithmes d'interpolation, mais aussi et surtout de ne pas perdre trop de temps dans le développement du code.

Bien que la méthode semi-Lagrangienne soit très efficace pour mesurer l'amortissement Landau, car on peut se limiter à de petites grilles (par exemple :  $64 \times 64$ ) tout en obtenant de bons résultats, cela n'est plus vrai pour le régime asymptotique. Il y a deux raisons principales à cela. La première est une condition sur la résolution temporelle  $\Delta t$  [SRBG99] tandis que la deuxième provient du coût important dans le calcul de l'interpolation. En effet, il est nécessaire d'utiliser tous les points de la grille dans une direction donnée pour reconstruire un seul et unique point. Donc, plus nous augmentons la précision de la grille et plus les interpolations sont coûteuses en ressources et en temps de calcul. Une solution serait de n'utiliser que des interpolations locales mais alors nous perdrons peut être la précision gagnée en raffinant le maillage.

Bien qu'il existe de nombreuses variantes de la méthode semi-Lagrangienne pouvant pallier à ces problèmes<sup>13</sup>, nous avons choisi de revenir à une méthode plus *intuitive* et immédiate dans sa mise en œuvre.

---

13. En utilisant les résultats récents décrits dans l'article [CMS10], N. Crouseilles et M. Mehrenberger ont obtenu le comportement asymptotique du système beaucoup plus rapidement que dans les simulations que nous décrirons par la suite.

### 3.2.b *Simulations à $N$ corps : vraies particules*

Dans ce paragraphe, nous discuterons de la méthode la plus naturelle qui consiste à faire directement évoluer le système à  $N$  corps avec  $N$  suffisamment grand. Concrètement, pour déterminer l’évolution du système, il suffit de simuler le mouvement des particules directement à partir des équations de Newton. Contrairement à la partie précédente, où nous simulions l’équation de Vlasov associée au modèle HMF, ici nous travaillons avec le système à  $N$  corps. Un avantage est donc la simplicité de sa mise en application : *a priori* une simple méthode de Runge-Kutta suffit. Malheureusement, il s’avère que les fluctuations de taille finie sont trop importantes pour tester le régime asymptotique. Cela ne veut pas dire que nous n’avons pu atteindre le régime asymptotique mais seulement que nous n’avons pas accès à une gamme de temps suffisamment grande dans cette zone pour conclure correctement sur ce qui s’y passe. En effet, pour vérifier les expressions (I.44) et (I.45) qui font apparaître des lois de puissance, nous avons au moins besoin d’avoir accès à une décade de temps.

### 3.2.c *Simulations à $N$ corps : particules pondérées*

La dernière méthode testée, mais aussi celle que nous avons utilisée pour vérifier la théorie, se base sur la simulation de particules pondérées. Contrairement à la simulation de  $N$  particules suivant les lois de Newton, où les particules sont positionnées aléatoirement selon une certaine distribution initiale, ici on répartit  $N$  particules sur une grille rectangulaire, de façon régulière. La grille est choisie de sorte que  $\theta \in [0, 2\pi[$  et  $p \in [-p_{max}, p_{max}]$ , avec  $p_{max}$  choisi tel que  $f(\theta, p)$  soit négligeable pour  $|p| > p_{max}$ . Pour finir, nous attribuons à chaque particule une *masse*, ou poids, proportionnel à la distribution initiale que l’on veut utiliser. Il a été observé dans le cas répulsif de Vlasov-Poisson périodique que l’utilisation de particules pondérées, réparties uniformément, donnait de meilleurs résultats que l’utilisation de particules de même masse réparties aléatoirement [WO96]. C’est pourquoi nous avons essayé de l’appliquer dans un cas inhomogène.

Considérons les  $N$  points du réseau référencés par  $i = 1, \dots, N$ , de coordonnées  $(\theta_i, p_i)$ . Nous fixons à l’instant  $t = 0$  une particule à chaque point du réseau telle que le poids de la particule  $i$  soit donné par  $w_i = Cf(\theta_i, p_i)$ , avec  $C$  une constante de normalisation fixée par la relation

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1. \quad (\text{I.46})$$

Pour alléger les notations, nous notons  $(\theta_i(t), p_i(t))$  les coordonnées de la  $i^{\text{ème}}$  particule, qui coïncide avec le  $i^{\text{ème}}$  point du réseau à  $t = 0$ , *i.e.*  $(\theta_i(0), p_i(0)) = (\theta_i, p_i)$ . Contrairement à la méthode semi-Lagrangienne où l’on se ramène toujours au réseau, les positions des particules n’ont plus rien à voir avec celui-ci dès que l’évolution commence. Les particules ne restent pas sur le réseau bien qu’elles conservent leurs poids  $w_i$ . Enfin, en utilisant la magnétisation définie par (I.11), les équations du mouvement peuvent alors être réécrites en

$$\dot{\theta}_i(t) = p_i(t), \quad \dot{p}_i(t) = -\bar{M}_x(t) \sin(\theta_i(t)) + \bar{M}_y(t) \cos(\theta_i(t)), \quad (\text{I.47})$$

avec

$$\bar{M}_x(t) = \sum_{i=1}^N w_i \cos(\theta_i(t)) \quad \text{et} \quad \bar{M}_y(t) = \sum_{i=1}^N w_i \sin(\theta_i(t)). \quad (\text{I.48})$$

Les simulations réalisées nous ont montré que l'utilisation de particules pondérées était effectivement plus efficace pour atteindre le régime asymptotique que l'utilisation de particules de même poids (*c.f.* paragraphe précédent), du moins pour notre problème : de petites perturbations autour d'un état d'équilibre stable.

Ce code présente aussi plusieurs avantages par rapport au code semi-Lagrangien :

- Nous ne sommes pas limités par la résolution temporelle  $\Delta t$ .
- Nous n'avons pas besoin d'utiliser d'interpolation.
- L'équation de Vlasov possède une infinité de moments  $\int (f(\theta, p))^n d\theta dp$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), qui sont conservés. Or il est connu que l'algorithme semi-Lagrangien ne conserve que les moments d'ordre  $n = 0$  et  $n = 1$ . En revanche, dans le cas des particules pondérées, les moments approchés donnés par  $\sum_i (w_i)^n$  sont exactement conservés puisque les poids ne changent pas au cours du temps.

Tous ces avantages font que l'utilisation de particules pondérées s'est révélée, pour nous, être la façon la plus efficace de tester les prédictions théoriques (I.44) et (I.45). Malgré tout, il faut noter que cela n'était pas suffisant pour obtenir, en temps raisonnable, les résultats escomptés sur un simple ordinateur personnel. La puissance de calcul nécessaire pour obtenir des résultats suffisamment précis sur une échelle de temps aussi grande étant colossale, le seul moyen fut d'utiliser des méthodes de calcul intensif.

### 3.3 Calcul parallèle

---

La vérification des équations prédictives (I.44) et (I.45) demande d'une part d'atteindre le régime asymptotique (implicitement des temps très longs), et d'autre part, de le faire avec une précision suffisante. Au vu de ces contraintes, la seule solution est d'utiliser des méthodes de calcul intensif. Dans notre cas, nous avons profité du caractère hautement parallélisable de l'algorithme des particules *pondérées* pour travailler à la fois sur des architectures à mémoire distribuée et à mémoire partagée.

Remarquons que nous aurions pu également paralléliser la méthode semi-Lagrangienne, en utilisant une méthode de décomposition de domaine et d'interpolation par spline locale. Cela permet de paralléliser le code efficacement tout rendant le coût de l'interpolation linéaire [CLS09]. Cependant, nous avons opté pour l'algorithme des particules pondérées, beaucoup plus simple à implémenter.

#### 3.3.a Pourquoi paralléliser le code ?

À titre d'exemple, voici quelques caractéristiques pour une simulation, réalisée sur un des cœurs d'un bi-processeur Quad Core Opteron cadencé à 2,3 GHz, qui illustre la nécessité de paralléliser le code. Les paramètres de la simulation sont les suivants :

- nombre de particules :  $N = 4 \times 10^6$  (soit une grille initiale  $2000 \times 2000$ ),
- intervalle de temps simulé : 2 unités de temps,
- pas de temps utilisé : 0,1 unité de temps.

La durée totale de la simulation est de 49 s pour 370 Mo de mémoire vive allouée. En extrapolant ces données pour une simulation avec le même nombre de particules, mais pour un intervalle de 10000 unités de temps, la simulation durerait grossièrement deux

jours et demi. Bien que cela reste raisonnable, il ne faut pas oublier que nous avons besoin d’une grande précision. Précision qui n’est pas suffisante pour cette échelle de temps avec une grille  $2000 \times 2000$ . Pour atteindre la précision nécessaire, il nous faut environ  $10^9$  particules (soit grille initiale de  $32000 \times 32000$ ) mais la mémoire à allouer atteindrait 94 Go, bien au-delà de ce qui est possible sur une seule machine. D’autant plus que la quantité de données ayant augmenté, les temps de simulation aussi. . . La simulation parallèle est donc la seule façon d’atteindre nos objectifs.

Avant de passer à la suite, remarquons que l’utilisation de cartes graphiques pour réaliser les simulations (calcul vectoriel) n’est pas envisageable à cause de la trop grande quantité de mémoire vive nécessaire.

### 3.3.b *Un algorithme hautement parallélisable*

Comme nous l’avons mentionné plus haut, l’algorithme des particules *pondérées* est hautement parallélisable car les communications entre les différents noeuds qui exécutent le code sont très limitées. En effet, si on se rappelle des équations du mouvement (I.47) et (I.48) qui gèrent l’évolution des particules :

$$\dot{\theta}_i(t) = p_i(t), \quad \dot{p}_i(t) = -\bar{M}_x(t) \sin(\theta_i(t)) + \bar{M}_y(t) \cos(\theta_i(t)), \quad (\text{I.49})$$

avec

$$\bar{M}_x(t) = \sum_{i=1}^N w_i \cos(\theta_i(t)) \quad \text{et} \quad \bar{M}_y(t) = \sum_{i=1}^N w_i \sin(\theta_i(t)), \quad (\text{I.50})$$

nous nous apercevons que les interactions entre particules n’interviennent qu’au travers des quantités  $\bar{M}_x(t)$  et  $\bar{M}_y(t)$ . Or, celles-ci peuvent être calculées localement, *i.e.* sur chaque noeud du calculateur, sans nécessiter aucune information provenant des autres noeuds.

Notons également que le calcul des interactions est seulement d’ordre  $O(N)$ . Une nouvelle fois, le modèle HMF montre son intérêt. En effet, pour un autre système à interaction longue portée, tel qu’un plasma tridimensionnel, le calcul exact des interactions est d’ordre  $O(N^2)$ .

### 3.3.c *Simulation sur architecture à mémoire partagée*

La première approche que nous avons utilisée est de paralléliser le code en utilisant l’API OpenMP (“*Application Programming Interface OpenMP*”) qui est une interface de programmation de calcul parallèle pour les architectures à mémoires partagées. Plus simplement, il s’agit d’une bibliothèque standard, pour les langages C, C++ et Fortran 90, gérant les communications entre les différents noeuds du cluster utilisé pour réaliser les simulations. Ces différents noeuds partagent le même espace mémoire.

L’intérêt de cette approche est sa grande simplicité. En effet, comme toute les données sont accessibles par tous les processus en cours d’exécution, il est possible d’utiliser OpenMP pour qu’il s’occupe des communications entre les différentes unités du cluster de façon implicite. L’utilisateur n’a pas besoin de gérer lui-même les communications, il se contente seulement de spécifier quelles tâches peuvent être parallélisées<sup>14</sup>.

---

14. En réalité, c’est un peu plus compliqué que cela. Il faut aussi préciser le rôle des différentes variables (visibilité locale, globale), spécifier la façon de répartir les tâches, . . .

L'avantage pour le programmeur est que dans la majorité des cas, dont le nôtre, le code parallélisé est très similaire au code séquentiel. Dans le cas de notre algorithme hautement parallélisable, cela s'est ramené à ajouter trois lignes de code au programme séquentiel. Une pour le calcul des quantités  $\bar{M}_x(t)$  et  $\bar{M}_y(t)$  (voir les équations (I.50)), une pour le calcul de l'advection en espace et enfin, une pour le calcul de l'advection en quantité de mouvement.

Malheureusement, cette grande simplicité cache aussi des problèmes. Ce type d'architecture coûte cher et nous sommes rapidement limités par le nombre de processeurs disponibles. À titre d'exemple, le Mésocentre de calcul intensif SIGAMM de l'Observatoire de la Côte d'Azur fait tourner les codes OpenMP sur des quadri-processeurs Dual Core Opteron cadencés à 2,4 GHz, qui donnent accès à seulement huit cœurs pour chaque simulation. Pour pallier à cela, nous avons eu la chance de pouvoir travailler sur l'architecture vSMP ("*Versatile Symmetric Multi-processeur*") mis en place par les ingénieurs informatique du Laboratoire Dieudonné courant 2010. Cette architecture permet de travailler sur des systèmes matériels à mémoire distribuée qui, du point de vue logiciel, sont à mémoire partagée; le tout fonctionnant sur le même système d'exploitation, facilitant ainsi la gestion du cluster. Concrètement, cela nous a permis d'exécuter des simulations sur 60 processeurs, gagnant ainsi plus d'un facteur 50 dans les temps d'exécution.

Bien qu'importantes, les ressources du Laboratoire Dieudonné n'ont pas été à elles seules suffisantes pour caractériser la décroissance en loi de puissance des quantités (I.44) et (I.45). En effet, même s'il est clair désormais que nous aurions atteint le régime asymptotique sur les simulations réalisées au Laboratoire Dieudonné, ces simulations auraient demandé trop de temps pour confirmer de manière indiscutable les exposants des lois de puissance. Cela dit, nous avons tout de même utilisé le cluster de manière intensive pour réaliser tous les calibrages nécessaires aux simulations plus coûteuses réalisées au Mésocentre de calcul intensif SIGAMM de l'Observatoire de la Côte d'Azur. Les simulations avec  $10^8$  particules ou moins ont été réalisées au Laboratoire Dieudonné tandis que celles avec  $10^9$  particules ont été exécutées au mésocentre.

### 3.3.d Simulation sur architecture à mémoire distribuée

Contrairement à l'approche précédente, nous allons ici gérer nous-mêmes les communications entre les différents processeurs qui exécutent le code. Il s'agit de communication explicite. Pour cela, nous allons désormais utiliser la bibliothèque MPI ("*Message Passing Interface*"), compatible avec les langages<sup>15</sup> C, C++ et Fortran. Le code va être exécuté sur une architecture à mémoire distribuée qui n'a, *a priori*, aucune limitation en nombre de tâches possibles, la seule limitation étant le temps perdu dans les communications entre les différents noeuds. La difficulté est alors de gérer ces communications pour optimiser l'exécution du code, ce qui conduit inéluctablement à la réécriture quasi-complète du code. Dans le cas de la programmation en OpenMP, la somme  $\sum_{i=1}^N w_i \cos(\theta_i)$  sur les particules est décomposée en

$$\sum_{i=1}^N w_i \cos(\theta_i) = \sum_{i=1}^{N/2} w_i \cos(\theta_i) + \sum_{i=N/2+1}^N w_i \cos(\theta_i), \quad (\text{I.51})$$

---

15. Il existe aussi des versions pour Python, Java,...

chaque somme étant ensuite calculée sur les processeurs disponibles. Les résultats sont directement stockés à des adresses mémoire accessibles par tous, et la dernière somme ne nécessite aucun transfert d’information.

Dans le cas de la programmation MPI, chaque processeur n’a accès qu’à une partie des particules, fixée au début de la simulation. Le calcul effectif devient

$$\sum_{i=1}^N w_i \cos(\theta_i) = \sum_{i=1}^N w_i \cos(\theta_{\sigma(i)}) = \sum_{i=1}^{N/2} w_{\sigma(i)} \cos(\theta_{\sigma(i)}) + \sum_{i=N/2+1}^N w_{\sigma(i)} \cos(\theta_{\sigma(i)}), \quad (\text{I.52})$$

avec  $\sigma$  une permutation de l’ensemble  $\{1, \dots, N\}$ . Le résultat d’une sous-somme n’est accessible que par le noeud l’ayant effectué. Pour terminer le calcul il faut regrouper tous les résultats partiels, faire la somme et transmettre le résultat<sup>16</sup> à tous les noeuds. Nous augmentons *a priori* le temps de simulation à cause des transferts de données. Cependant, un des travaux du développeur est d’optimiser le recouvrement calcul/communication qui permet de “cacher” ces temps de transfert par ceux des calculs du code. Certains processus transfèrent leur données pendant que d’autres effectuent des calculs.

Pour valider les équations (I.44) et (I.45) nous avons donc réécrit l’ensemble du code de façon à utiliser le standard MPI. Les simulations ont alors été réalisées au Mésocentre de calcul intensif SIGAMM de l’Observatoire de la Côte d’Azur (<http://crimson.oca.eu/>). Il nous a permis de simuler l’évolution de  $N = 10^9$  particules pondérées sur 10000 unités de temps. À titre indicatif, les simulations ont été réalisées sur des bi-processeurs Quad Core Opteron cadencés à 2,3 GHz, connectés par Infiniband 20 Gb/s. Nous avons utilisé simultanément jusqu’à 256 cœurs pour un temps total de  $6,7 \times 10^5$  s par simulation, soit environ huit jours.

### 3.4 Simulations et résultats

---

Toutes les simulations dans la suite ont été faites à partir du code aux particules pondérées mais nous insistons sur le fait que nous avons utilisé les deux autres méthodes présentées précédemment pour vérifier la validité de nos résultats pour des systèmes de plus petite taille. Nous avons choisi de prendre l’équilibre thermodynamique comme état stationnaire stable, *i.e.*  $T < 0,5$  [Ina93] :

$$f_0(\theta, p) = C(\beta) e^{-\beta(p^2/2 - M(\beta) \cos(\theta))}, \quad (\text{I.53})$$

avec  $C(\beta)$  une constante de normalisation et  $M(\beta)$  la magnétisation, toutes deux dépendant de la température du système  $T$ , égale à l’inverse de  $\beta$ . Pour être plus précis, dans la suite nous n’utiliserons que  $T = 0,1$ . Des valeurs plus grandes de la température conduisent à de plus importantes fluctuations nous empêchant d’atteindre le comportement asymptotique du système. Bien que nous n’ayons pas de preuve concrète de cela, il y a de fortes chances que cela soit relié à la structure complexe de la fonction de dispersion  $\epsilon$  (voir l’équation (I.22)). En effet, nous obtenions déjà de moins bons résultats pour l’amortissement Landau autour de l’équilibre statistique lorsque la température  $T$  était plus élevée, *cf.* figure I.15. D’un autre côté, il n’est pas encore parfaitement clair que la

---

16. Il est aussi possible de transmettre le résultat de chaque noeud aux autres et calculer à chaque noeud la somme complète.

théorie prédite ici en considérant l'équation de Vlasov linéarisée reste correcte en *temps long* pour l'équation de Vlasov complète.

### 3.4.a Perturbation “en cosinus”

Commençons par considérer une perturbation de type “cosinus” autour de l'équilibre statistique (I.53) :

$$f(\theta, p, t = 0) = C_a(\beta) e^{-\beta(p^2/2 - M(\beta) \cos(\theta))} (1 + a \cos(\theta)), \quad (\text{I.54})$$

où  $\beta = 1/T$  est la valeur fixée pour la distribution  $f_0$ ,  $a$  est l'amplitude de la perturbation et  $C_a(\beta)$  est la constante de normalisation qui dépend maintenant de  $a$  et de la température. Ce type de perturbation est compatible avec la symétrie  $(\theta, p) \rightarrow (-\theta, -p)$  que satisfait le système et la composante  $M_y$  de la magnétisation est identiquement nulle. Grâce à cette symétrie, nous n'avons pas à calculer  $M_y$  et il suffit de partir d'une condition initiale répartie dans le demi-plan supérieur  $p_i > 0$  pour reconstruire toute l'évolution du système.

La figure I.17 représente l'évolution typique de  $M_x(t)$  pour différents nombres de particules  $N$ . Les effets de taille finie apparaissent clairement en comparant les cas  $N = 10^7$  et  $N = 10^8$ . Bien que le premier cas semble suffisant pour commencer à observer le comportement asymptotique, l'intervalle de temps accessible est trop limité pour pouvoir comparer avec la prédiction (I.44). Il est donc nécessaire d'utiliser un plus grand nombre de particules.

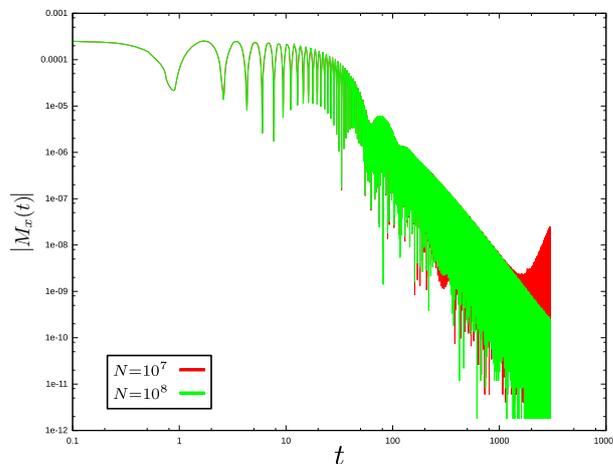


FIGURE I.17 – évolution de  $|M_x(t)|$  en échelle *log-log* pour la condition initiale (I.54) avec  $T = 0,1$  et  $a = 0,1$ . L'algorithme utilisé est détaillé dans la partie 3.2.c. Le nombre de particules pondérées utilisées est respectivement de  $N = 10^7$  et  $N = 10^8$  pour la courbe rouge et la courbe verte. Elles sont initialement équidistribuées sur  $]-\pi, \pi] \times [-3, 3]$ , où l'on a utilisé la symétrie  $(\theta, p) \rightarrow (-\theta, -p)$ .

La figure I.18 représente l'enveloppe supérieure de  $M_x(t)$  ainsi que le résultat d'une régression non-linéaire en loi de puissance. Nous obtenons un exposant autour de  $-2,95$ , qui est très proche de la valeur attendue :  $-3$  (voir équation (I.44)).

Bien que ce résultat soit encourageant, nous n'avons pas encore testé la prédiction concernant  $M_y(t)$ , et c'est ce que nous allons faire maintenant.

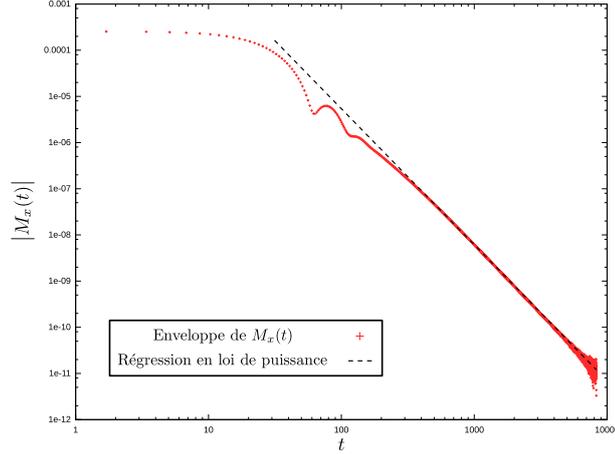


FIGURE I.18 – évolution de l’enveloppe de  $M_x(t)$  en échelle *log-log* pour la condition initiale (I.54) avec  $T = 0,1$  et  $a = 0,1$ . L’algorithme utilisé est détaillé dans la partie 3.2.c. Nous avons utilisé  $N = 10^9$  particules pondérées pour réaliser la courbe rouge. Elles sont initialement équidistribuées sur  $] -\pi, \pi] \times [-3, 3]$ , où l’on a utilisé la symétrie  $(\theta, p) \rightarrow (-\theta, -p)$ . La droite en pointillés noirs est obtenue par régression non-linéaire à partir d’une loi de puissance pour  $t$  allant de 600 à 6000 ( $\propto t^{-2.95}$ ).

### 3.4.b Perturbation “en sinus”

Considérons maintenant une perturbation de type “*sinus*” autour de l’équilibre statistique (I.53) :

$$f(\theta, p, t = 0) = C_a(\beta) e^{-\beta(p^2/2 - M(\beta) \cos(\theta))} (1 + a \sin(\theta)), \quad (\text{I.55})$$

où  $\beta = 1/T$  est la valeur fixée pour la distribution  $f_0$ ,  $a$  est l’amplitude de la perturbation et  $C_a(\beta)$  est la constante de normalisation qui dépend maintenant de  $a$  et de la température. Désormais, la symétrie  $(\theta, p) \rightarrow (-\theta, -p)$  n’est plus satisfaite et  $M_y(t)$  n’est plus identiquement nulle. Une faible rotation du système apparaît, ce qui a pour conséquence de rendre plus difficile la vérification des expressions asymptotiques de  $M_x(t)$  et  $M_y(t)$ . Dans un premier temps, nous allons extraire la lente rotation de la magnétisation. Nous verrons ensuite comment évoluent les enveloppes de  $M_x(t)$  et  $M_y(t)$ . Pour finir, nous analyserons le spectre de puissance de  $M_x(t)$  et  $M_y(t)$  en fonction de deux échelles de temps : en temps *court* et en temps *long*.

#### i) S’affranchir de la rotation

À cause de la lente rotation du système (voir figure (I.19)), qui est induite par la perturbation ne satisfaisant plus la symétrie  $(\theta, p) \rightarrow (-\theta, -p)$ , il n’est plus possible de définir  $M_x(t)$  et  $M_y(t)$  comme dans (I.44) et (I.45). La méthode que nous avons employée pour remédier à cela est d’utiliser des moyennes glissantes. Pour cela, nous introduisons  $M_x^*(t)$  et  $M_y^*(t)$  tel que

$$M_x^*(t) = M_x(t) - \frac{1}{2\Delta t} \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} M_x(t') dt', \quad (\text{I.56})$$

et

$$M_y^*(t) = M_y(t) - \frac{1}{2\Delta t} \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} M_y(t') dt'. \quad (\text{I.57})$$

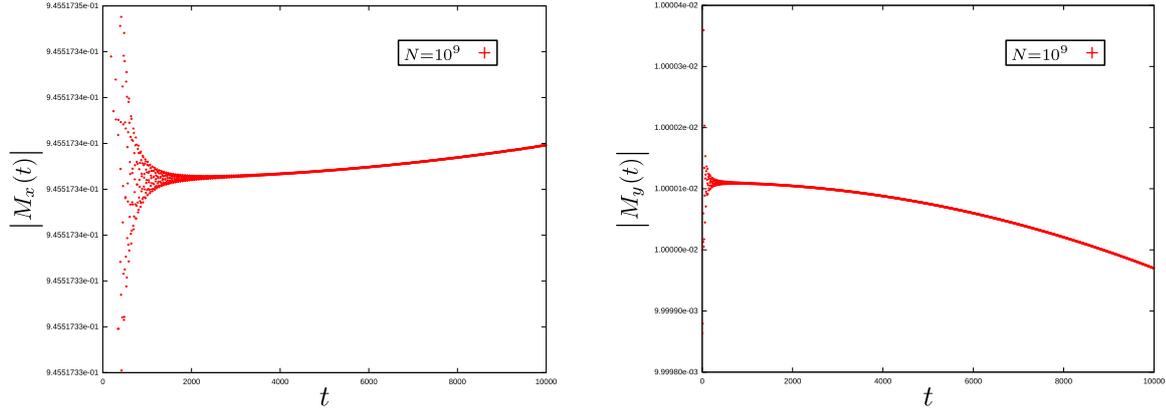


FIGURE I.19 – évolution de  $|M_x(t)|$  et  $|M_y(t)|$  en échelle *semi-log* pour la condition initiale (I.55) avec  $T = 0,1$ ,  $a = 0,1$  et  $N = 10^9$ . L'algorithme utilisé est détaillé dans la partie 3.2.c. Les particules sont initialement équidistribuées sur une portion de l'espace des phases donnée par  $] -\pi, \pi] \times [-3, 3]$ .

Maintenant que nous avons introduit un nouveau paramètre  $\Delta t$ , nous sommes obligés de vérifier qu'il n'influence pas notre lecture des résultats. Pour cela, nous avons effectué différents tests représentés sur la figure (I.20), en faisant varier  $\Delta t$ , qui ont montré que l'exposant n'était pas sensiblement modifié par le choix de  $\Delta t$ . Dans la suite nous avons pris  $\Delta t = 5$ , ce qui correspond grossièrement au temps nécessaire à une oscillation de  $M_y(t)$  et deux oscillations de  $M_x(t)$ .

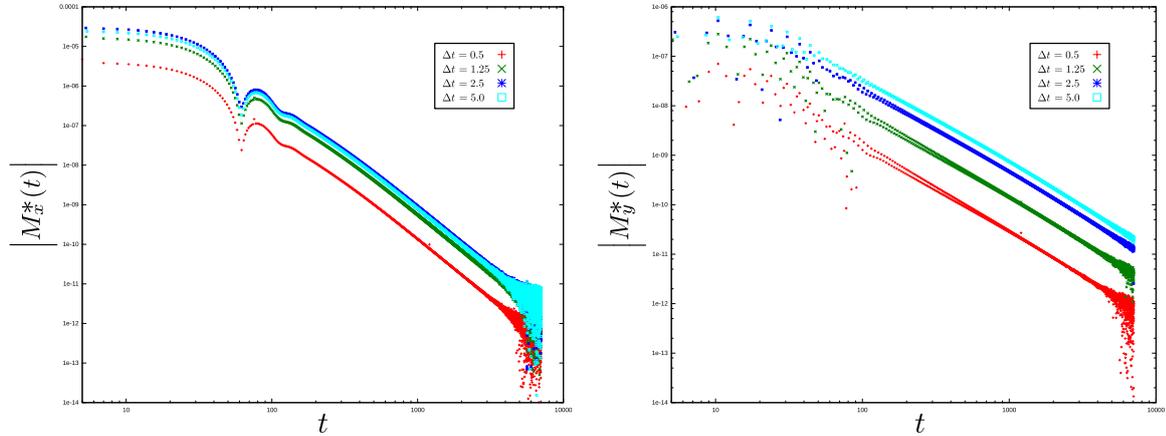


FIGURE I.20 – évolution des enveloppes de  $|M_x(t)|$  et  $|M_y(t)|$  en échelle *log-log* pour la condition initiale (I.55) avec  $T = 0,1$ ,  $a = 0,1$  et  $N = 10^9$ . L'algorithme utilisé est détaillé dans la partie 3.2.c. Les particules sont initialement équidistribuées sur une portion de l'espace des phases donnée par  $] -\pi, \pi] \times [-3, 3]$ .

### ii) Décroissance de l'enveloppe en loi de puissance

Maintenant que nous avons ôté la lente rotation de la magnétisation, nous sommes en mesure de comparer les simulations numériques aux prédictions (I.44) et (I.45), qui prédisent respectivement des valeurs de  $-3$  et  $-2$ . Les exposants des lois de puissance,

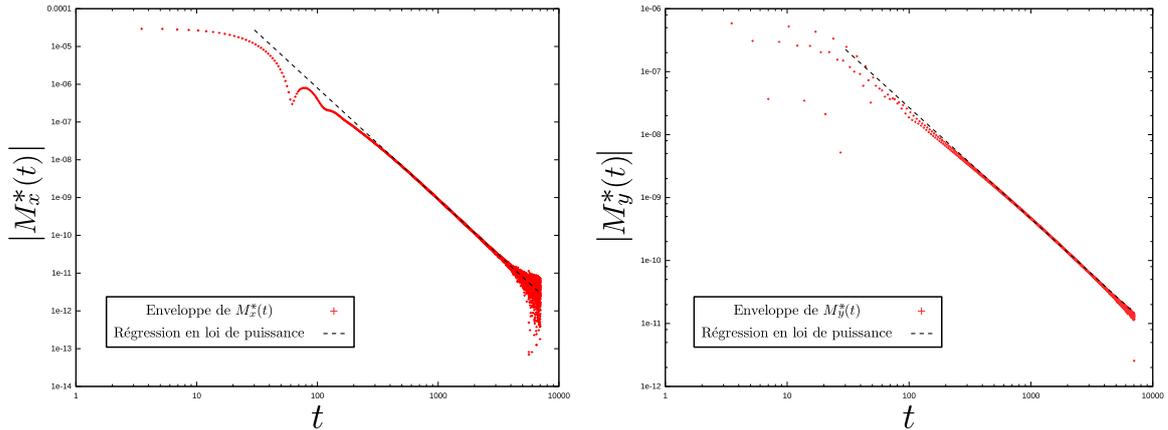


FIGURE I.21 – évolution de l’enveloppe de  $M_x^*(t)$  et  $M_y^*(t)$  en échelle  $\log\text{-}\log$  pour la condition initiale (I.55) avec  $T = 0,1$  et  $a = 0,1$ . L’algorithme utilisé est détaillé dans la partie 3.2.c. Nous avons utilisé  $N = 10^9$  particules pondérées pour réaliser les tracés rouges. Les particules sont initialement équidistribuées sur  $] -\pi, \pi] \times [-3, 3]$ . Les lignes en pointillés noirs sont obtenues par régression non-linéaire à partir de loi de puissance pour  $t$  allant de 600 à 6000. Nous obtenons  $-2,94$  pour  $M_x^*(t)$  et  $-1,77$  pour  $M_y^*(t)$ .

obtenus par régression non-linéaire, sont  $-2,94$  et  $-1,77$  (voir figure I.21). Comme pour la perturbation de type “cosinus”, l’accord est très bon pour  $M_x(t)$ . En revanche, pour  $M_y(t)$ , l’erreur relative est de l’ordre de 10%. Différentes raisons peuvent expliquer cela : une partie de l’intervalle dans lequel est réalisée la régression n’est pas dans le régime asymptotique et/ou les erreurs numériques sont trop importantes. Pour lever l’incertitude qui reste sur la validité de la théorie, nous allons regarder de plus près les spectres de puissance de  $M_x(t)$  et  $M_y(t)$ .

### iii) Spectre de puissance

Jusqu’à présent, nous n’avons utilisé que l’exposant de la loi de puissance prédit par la théorie pour réaliser nos tests. Cependant, les équations (I.44) et (I.45) offrent bien plus que cela. En effet, elles nous donnent également les fréquences auxquelles vont osciller les composantes de la magnétisation. Celle de la composante  $M_x(t)$  (resp.  $M_y$ ) est donnée par  $\omega = 2\Omega(J_{min})$  (resp.  $\omega = \Omega(J_{min})$ ). La figure I.22 confirme bien cette prédiction : pour  $t$  suffisamment grand, il n’y a qu’une seule fréquence sélectionnée par le système, pour une composante donnée de la magnétisation. Les valeurs numériques obtenues pour  $M_x(t)$  et  $M_y(t)$  sont respectivement 1,944 et 0,973 alors que les équations (I.44) et (I.45) prédisent respectivement 1,945 et 0,972.

Avant de finir, notons que la figure I.22 nous donne accès à beaucoup d’autres informations. Elle nous permet de voir la transition entre deux dynamiques suivies par le système. Pour des temps relativement courts, la dynamique est gérée par le pôle de Landau  $\omega_L$  introduit dans la partie 2. À l’inverse, le comportement asymptotique est donné par les équations (I.44) et (I.45). En effet, d’après l’encart pour  $M_x(t)$  de la figure I.22, il est possible d’estimer la valeur du pôle de Landau dominant. Nous obtenons une valeur de  $\omega = 1,85$  qui est à comparer avec le résultat obtenu à la figure I.15 :  $\Re(\omega_L) \simeq 1,8$ . Le très bon accord que nous obtenons confirme bien notre remarque.

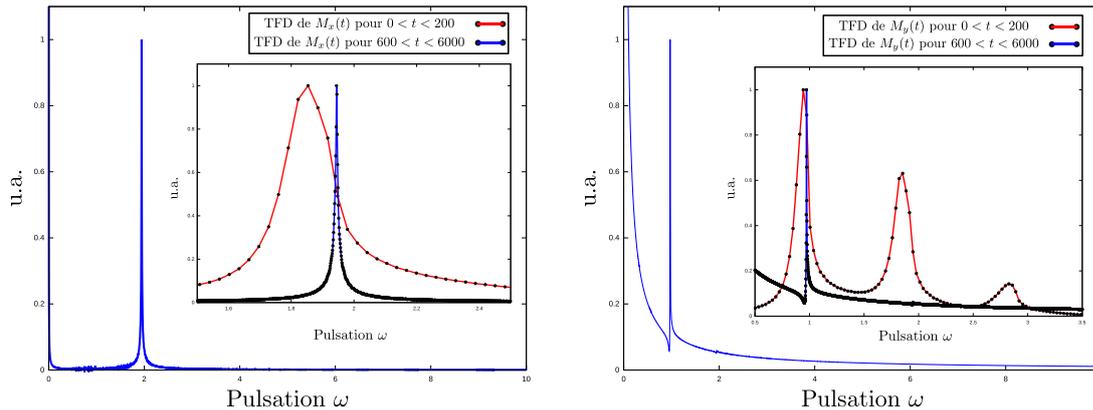


FIGURE I.22 – Transformée de Fourier discrète (TFD), ou spectre de fréquence, de  $M_x(t)$  et  $M_y(t)$  lorsque le régime asymptotique est atteint. L’algorithme utilisé est détaillé dans la partie 3.2.c. Les particules sont initialement équidistribuées sur  $] -\pi, \pi] \times [-3, 3]$ . Les *maxima* des spectres de  $M_x(t)$  et  $M_y(t)$  sont respectivement atteints pour  $\omega = 1.944$  et  $\omega = 0.973$ . Les encarts représentent un zoom au voisinage des *maxima* ainsi que les TFD en temps “court”.

La figure I.22 nous montre également un maximum, dans l’encart pour  $M_y(t)$ , qui devrait être une signature de la dynamique asymptotique en vertu du fait que sa valeur est proche de  $\Omega(J_{min})$ . Cependant, il est aussi possible que ce maximum soit relié à un autre pôle de Landau dont la partie imaginaire est plus petite que  $\omega_L$ .

Enfin, le fait que les spectres de puissance divergent pour  $\omega \rightarrow 0$  est seulement du au fait que la rotation du système n’a pas été soustraite dans la figure I.22.

## 4 CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Au cours de ce chapitre, nous avons étudié la relaxation d’une perturbation autour d’un état inhomogène dans le modèle HMF. En particulier, nous avons montré que le type de décroissance des perturbations était lié à la structure même de la fonction de dispersion  $\epsilon(\omega)$ . Ses zéros conduisent à une décroissance exponentielle : il s’agit de l’amortissement Landau, tandis que ses singularités sur l’axe  $\Re(\omega) = 0$  conduisent à une décroissance algébrique.

Au-delà de la fonction de dispersion, c’est la nature même de l’état d’équilibre perturbé qui entre en jeu. En effet, dans le cas homogène, il n’y a aucune singularité avec une partie imaginaire non nulle et il existe une relation simple entre le mode considéré et l’amortissement Landau associé. Ici, ce n’est plus le cas. L’inhomogénéité conduit à borner la fréquence angulaire  $\Omega(\omega)$ , ce qui a pour conséquence de créer une infinité de singularités sur l’axe  $\Re(\omega) = 0$ . Celles-ci entraînent un nombre infini de définitions possibles pour  $\epsilon(\omega)$  dans le plan complexe et donc une indétermination dans le calcul des zéros de  $\epsilon(\omega)$ .

Bien que ces travaux ne parlent que du modèle HMF, il s’avère que les techniques présentées ici peuvent être directement généralisées pour une plus large utilisation. En effet, elles sont applicables à tous les systèmes à longue portée unidimensionnels, du moment que la force d’interaction dérive d’un potentiel  $V$  qui ne dépend pas du temps [BOY10,

**BOY11**]. Cela inclut donc les potentiels définis sur tout  $\mathbb{R}$ , comme dans le cas de systèmes autogravitants unidimensionnels, ou les potentiels aux conditions périodiques, comme le modèle HMF que nous avons traité en détail.

Dans tous les cas, la méthode à suivre est toujours la même. On commence par considérer une petite perturbation  $\delta f$  autour d'un état stationnaire  $f_0$  qui conduit à une correction du Hamiltonien du système  $H[f_0 + \delta f] = H[f_0] + \Phi[\delta f]$ , avec

$$\Phi[\delta f] = \int_{\substack{\text{Domaine de} \\ \text{définition de } V}} \int_{\mathbb{R}} V(\theta - \theta') \delta f(\theta', p, t) dp d\theta', \quad (\text{I.58})$$

où  $\Phi$  est relié à  $\delta f$  en fonction des variables  $(\theta, p)$ . Ensuite, nous considérons l'équation de Vlasov linéarisée en fonction des coordonnées angle/action

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t}(\xi, J, t) + \Omega(J) \frac{\partial \delta f}{\partial \xi}(\xi, J, t) - f'_0(J) \frac{\partial \Phi[\delta f]}{\partial \xi}(\xi, t) = 0, \quad (\text{I.59})$$

que nous simplifions en utilisant la transformée de Fourier-Laplace, pour obtenir

$$\delta f = \frac{m f'_0(J)}{m \Omega(J) - \omega} \widehat{\Phi[\delta f]}(m, J, \xi) - \frac{i}{m \Omega(J) - \omega} \int e^{im\xi} \delta f(\xi, J, t = 0) d\xi, \quad (\text{I.60})$$

qui relie les transformées de Fourier-Laplace de  $\Phi$  et  $\delta f$  en fonction des variables  $(\xi, J)$ . Afin de pouvoir utiliser simultanément les équations (I.58) et (I.60), qui sont écrites dans des systèmes de coordonnées différents, il est possible d'introduire deux familles de fonctions biorthogonales [Clu72, Kal77]. En décomposant toutes les quantités sur ces deux familles et en manipulant les expressions obtenues, nous arrivons à écrire l'équation de dispersion du système<sup>17</sup>. Cette équation est, en toute généralité, le déterminant d'une matrice infinie.

En suivant ainsi les étapes décrites ci-dessus, il est donc possible de généraliser à tous les systèmes unidimensionnels les résultats que nous avons obtenus. Une question naturelle qui se pose lorsque l'on pense aux systèmes auto-gravitants est de savoir si les résultats présentés ici peuvent également être étendus à des systèmes tridimensionnels. *A priori*, tant que la distribution stationnaire  $f_0$  qui subit la perturbation est intégrable, il est possible de définir les coordonnées angle-action et donc d'appliquer les méthodes présentées ici.

Le travail réalisé ici nous permet de mieux comprendre le comportement d'une perturbation autour d'un état inhomogène et il amène naturellement de nouvelles questions. Par exemple, est-il possible de retrouver comme pour un écoulement parallèle décrit par l'équation d'Euler 2d le phénomène de *déplétion de la vorticité* qui survient au voisinage des *extrema* de la fréquence angulaire  $\Omega$  [BM10]? Cette question est tout à fait raisonnable quand nous gardons en tête que les équations de Vlasov et d'Euler sont intimement reliées [CDR09].

De la même manière, nous pouvons nous demander si lorsque l'amortissement est faible il existe un phénomène analogue aux "quasimodes" que l'on retrouve en hydrodynamique [Bri70]? Ou bien si pour un état inhomogène nous pouvons retrouver des "quasi asymptotic periodic state" observés dans le cas d'états stationnaires homogènes [BY09]?

---

17. On pourra consulter [Wei89] pour un exemple détaillé réalisé pour un système auto-gravitant à symétrie sphérique.

En partant de différents profils inhomogènes stationnaires choisis de façon plus ou moins arbitraire, nous n'avons pas pu confirmer ou non cela. Une approche plus générale, à l'instar de ce qui est fait dans [BY09] pour un état stationnaire homogène, permettrait de conclure ou du moins d'orienter les recherches vers un type particulier d'états stationnaires.

## 5 ARTICLES PUBLIÉS

---

---

### 5.1 “*Dynamics of perturbations around inhomogeneous backgrounds in the HMF model*” [BOY10]

---

# Dynamics of perturbations around inhomogeneous backgrounds in the HMF model

Julien Barré<sup>1</sup>, Alain Olivetti<sup>1</sup> and Yoshiyuki Y Yamaguchi<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire J.A. Dieudonné, Université de Nice Sophia-Antipolis, UMR CNRS 6621, Parc Valrose, F-06108 Nice Cedex 02, France

<sup>2</sup> Department of Applied Mathematics and Physics, Graduate School of Informatics, Kyoto University, Kyoto 606-8501, Japan

E-mail: [jbarre@unice.fr](mailto:jbarre@unice.fr), [alain.olivetti@unice.fr](mailto:alain.olivetti@unice.fr) and [yyama@amp.i.kyoto-u.ac.jp](mailto:yyama@amp.i.kyoto-u.ac.jp)

Received 15 March 2010

Accepted 30 June 2010

Published 3 August 2010

Online at [stacks.iop.org/JSTAT/2010/P08002](http://stacks.iop.org/JSTAT/2010/P08002)

doi:10.1088/1742-5468/2010/08/P08002

**Abstract.** We investigate the dynamics of perturbations around inhomogeneous stationary states of the Vlasov equation corresponding to the Hamiltonian mean-field model. The inhomogeneous background induces a separatrix in the one-particle Hamiltonian system, and branch cuts generically appear in the analytic continuation of the dispersion relation in the complex frequency plane. We test the theory by direct comparisons with  $N$ -body simulations, using two families of distributions: inhomogeneous water-bags, and inhomogeneous thermal equilibria. In the water-bag case, which is not generic, no branch cut appears in the dispersion relation, whereas in the thermal equilibrium case, when looking for the root of the dispersion relation closest to the real axis, we have to consider several Riemann sheets. In both cases, we show that the roots of the continued dispersion relation give information that is useful for understanding the dynamics of a perturbation, although it is not complete.

**Keywords:** kinetic theory of gases and liquids

**Contents**

<b>1. Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2. Derivation of the ‘dispersion relation’ for a 1D Vlasov equation</b>	<b>4</b>
<b>3. Analytic continuation</b>	<b>10</b>
<b>4. Examples; comparison with <math>N</math>-body simulations</b>	<b>13</b>
4.1. The water-bag stationary state . . . . .	13
4.2. Thermal equilibrium . . . . .	16
<b>5. Discussion and conclusion</b>	<b>18</b>
<b>Acknowledgments</b>	<b>20</b>
<b>Appendix A. Elliptic integrals and elliptic functions</b>	<b>20</b>
<b>Appendix B. Angle–action variables for the pendulum</b>	<b>20</b>
<b>Appendix C. General potentials</b>	<b>22</b>
<b>Appendix D. Singularity of <math>F_{cc}</math> and <math>F_{ss}</math> around <math>\omega = m\omega_0</math></b>	<b>23</b>
<b>Appendix E. Finding roots of <math>\epsilon(\omega)</math></b>	<b>25</b>
E.1. Pole contributions . . . . .	25
E.2. Integral parts of $F_{cc}$ and $F_{ss}$ . . . . .	25
E.3. Roots of $\epsilon(\omega)$ . . . . .	27
<b>References</b>	<b>27</b>

**1. Introduction**

The dynamical behavior and the relaxation to equilibrium of long-range interacting systems of particles still offer several open problems. It is possible to sketch the general theory as follows. The short time behavior, on the order of the dynamical timescale, is described by the Vlasov, or a Vlasov-like equation [1, 2]. The system then settles into a quasi-stationary state (hereafter called QSS), which is a stationary solution of the Vlasov equation. On timescales diverging with the number of particles, the system evolves towards the thermodynamic equilibrium, following the analog of a Lenard–Balescu equation (for a recent review, see [3]). The open questions include for instance the selection of the QSS among the stationary states of the Vlasov equation; the possible selection of periodic solutions of the Vlasov equation instead of a QSS; the complete understanding of the timescales for relaxation to equilibrium, especially around inhomogeneous QSS and close to dynamical transitions. We may mention also the rigorous derivation of the Lenard–Balescu equation, which, in contrast to the Vlasov equation, does not have a mathematical foundation.

The stationary solutions of the Vlasov equation are homogeneous or inhomogeneous in space. The former case is often studied in plasma physics, and the latter is the rule in self-gravitating systems. In general, there is less understanding of the inhomogeneous

cases, even at the level of linear perturbations of the Vlasov stationary state, because of the much greater technical difficulties; see [4] for a recent preprint on the kinetic theory of the inhomogeneous systems. This linear understanding is an essential ingredient for deriving a Lenard–Balescu-like equation, (see [5] for a textbook reference in the plasma physics context; see [6] for computations around inhomogeneous stationary states) and also for characterizing possible undamped periodic solutions [7, 8].

The linearization around a homogeneous stationary state corresponds to the usual theory of Landau damping in plasma physics [9]. Technically, the equations are solved by using a Fourier transform in space and a Laplace transform in time. The equations for different Fourier modes decouple, and the computation results in the complex dielectric function  $\epsilon(k, \omega)$  for the  $k$ th Fourier mode. Because  $\epsilon(k, \omega)$  is defined in the upper half of the  $\omega$ -plane due to the convergence condition of the Laplace transform, one needs to analytically continue  $\epsilon(k, \omega)$  in the lower half of the  $\omega$ -plane to obtain the Landau frequency and damping rate.

Linearization around an inhomogeneous stationary state brings about additional technical difficulties. First, one needs to use angle–action variables, to simplify the particle dynamics; but now the equations for different Fourier modes in the angle variables do not decouple any longer; the analog of the dielectric function is now the determinant of an infinite matrix. We will from now on call this determinant a ‘dispersion function’; its roots yield the eigenmodes and Landau poles of the linearized equation under study. Linearization around inhomogeneous stationary states has been studied in the context of self-gravitating systems, and, despite the technical difficulties, the above procedure has been carried out entirely to study the instability of some galactic models [10]–[15] (this list is far from being exhaustive). We also mention here some studies devoted to the investigation of purely oscillatory modes in a one-dimensional self-gravitating system [16]–[18], since this system is closer to the toy model that we will use in this article.

However, studying the analog of Landau damping requires the analytic continuation part, and this is, in the words of Weinberg [14], a ‘daunting task’. This difficulty was bypassed in [14, 19] by fitting  $\epsilon(\omega)$  in the upper half of the  $\omega$ -plane with rational functions. These are the only articles that we are aware of where there is a quantitative study of gravitational Landau damping, with an explicit derivation of damping rates and frequencies; see however [20] for a discussion of Landau damping in the gravitational context. This may seem surprising, but the explanation probably lies in the dissuasive complexity of such computations.

There has been much more work on the linearization of the 2D Euler equation (or similar equations) around vortices or shear flows, in the context of 2D fluid dynamics or of magnetically confined non-neutral plasmas. The 2D Euler equation is a close parent of the Vlasov equation, but it has no kinetic variable. These works were in particular motivated by the understanding of the so-called diocotron instability of vortices, by the study of weakly damped ‘quasimodes’, and the asymptotic algebraic decay of perturbations; see for instance [21]–[30]; this list is definitely not exhaustive. Technically, in this case, different angular Fourier modes decouple, but the resulting radial equations are not exactly solvable, except in exceptional cases [22]. It has been recognized in this context that the dispersion function presents branch points, to which are attached branch cuts; these branch points are associated with the local maxima and minima of the rotation frequency  $\Omega(r)$  (which plays the same role as the frequency as a function of the action

$\Omega(J)$  in the Vlasov case), including the boundary points. These branch points make the analytical continuation procedure tricky (see for instance [27]), and are related to an algebraic asymptotic behavior of perturbations. We note that these branch points and branch cuts have, to our knowledge, not been seen in the self-gravitating case. It is possible that the studies of [14, 19] stayed far enough from the branch points that their influence was negligible.

In this paper, we study the linearization around inhomogeneous stationary states of a Vlasov equation, and study the analytical continuation of the dispersion function. We are interested in a case where  $\Omega(J)$  is not monotonic, and presents a singularity due to a separatrix. Since we will use the 1D HMF model [31]–[33], which is a much simpler setting than a 3D self-gravitating system, we will be able to perform the analysis in more detail than in [14]; in particular, we will analytically continue the frequency  $\Omega(J)$ , and show the branch points and branch cuts of the dispersion function  $\epsilon(\omega)$ . Our findings are confronted with direct  $N$ -body numerical simulations.

## 2. Derivation of the ‘dispersion relation’ for a 1D Vlasov equation

For the sake of simplicity, we will use the attractive HMF model. It describes the motion of  $N$  particles on a ring, interacting through a cosine potential. The position of particle  $i$  is given by  $\theta_i \in (-\pi, \pi]$ ; its conjugate momentum is  $p_i$ . The Hamiltonian is

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N p_i^2 - \frac{1}{2N} \sum_{i \neq j} \cos(\theta_i - \theta_j). \quad (1)$$

It can be seen as a model retaining only the first harmonic of the 1D gravitational interaction. Despite the simplicity of the model, which is due to its 1D character and the smoothness of the interaction, this model retains many qualitative properties of more realistic long-range interacting systems. Because of this feature, it has been widely used in the last decade as a toy model to investigate various statistical and dynamical properties of long-range interactions [3].

The corresponding Vlasov equation for the one-particle distribution  $f(\theta, p, t)$  is

$$\frac{\partial f}{\partial t} + p \frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{\partial \phi[f]}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial p} = 0, \quad (2)$$

where  $\phi[f](\theta, t)$  is the self-consistent potential

$$\phi[f](\theta, t) = - \int_{-\infty}^{\infty} dp' \int_{-\pi}^{\pi} d\theta' \cos(\theta - \theta') f(\theta', p', t). \quad (3)$$

It is useful in the following to consider the magnetization

$$\mathbf{M} = M e^{i\psi} = M_x + iM_y = \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\pi}^{\pi} d\theta f(\theta, p, t) e^{i\theta}, \quad (4)$$

and the potential is written as

$$\phi[f](\theta, t) = -M \cos(\theta - \psi). \quad (5)$$

If  $f$  is homogeneous in space, that is  $f$  only depends on the  $p$  variable, then the self-consistent potential vanishes:  $M = 0$ . Without loss of generality, we will choose in the

following  $\psi = 0$ , so that the minimum of the self-consistent potential in the stationary state will be located in  $\theta = 0$ .

The Vlasov equation is rewritten as

$$\partial_t f + [f, h] = 0, \quad (6)$$

where  $[u, v]$  is the Poisson bracket between  $u$  and  $v$ , defined as

$$[u, v] = \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial u}{\partial p} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad (7)$$

and

$$h[f](\theta, p, t) = \frac{p^2}{2} + \phi[f](\theta, t) = \frac{p^2}{2} - M \cos \theta. \quad (8)$$

Let  $f_0$  depend on  $(\theta, p)$  only through  $h[f_0]$ ; then  $f_0(h[f_0](\theta, p))$  is a stationary solution of the Vlasov equation (6). In the homogeneous case, any function of the energy  $p^2/2$  is a stationary solution; in the inhomogeneous case, a self-consistent equation for  $\phi[f_0]$ , or equivalently for the magnetization  $M_0$ , needs to be satisfied, where  $M_0$  denotes the modulus of the magnetization of  $f_0$ .

We study a perturbation  $f_1$  around such a stationary solution  $f_0$ . The function  $f$  is hence expanded as

$$f = f_0 + f_1.$$

Substituting this expansion into the Vlasov equation (6) and neglecting higher order terms,  $f_1$  satisfies the linearized Vlasov equation

$$\partial_t f + [f_1, h_0] + [f_0, h_1] = 0, \quad (9)$$

where

$$h_0(\theta, p) = \frac{p^2}{2} + \phi[f_0](\theta) = \frac{p^2}{2} - M_0 \cos \theta \quad (10)$$

and

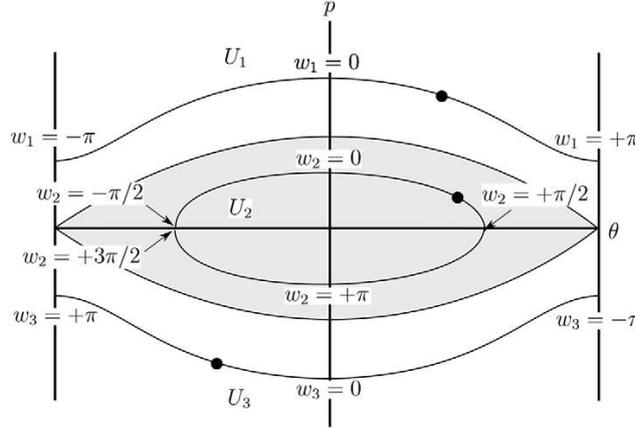
$$h_1(\theta, p, t) = \phi[f_1](\theta, t).$$

We define  $\phi_1(\theta, t) = \phi[f_1](\theta, t)$ . Note that  $f_0$  is stationary and hence we omitted the argument  $t$  of  $h_0$  and of  $\phi[f_0]$ .

We derive the dispersion relation from the linearized Vlasov equation (9). The first step is to use angle–action variables  $(w, J)$  instead of  $(\theta, p)$  for the dynamics defined by the one-particle Hamiltonian (10). The angle–action variables are defined by using Legendre elliptic integrals. The elliptic integrals and the angle–action variables are introduced in appendices A and B respectively.

The action variable is defined by the area surrounded by a closed orbit; see (B.2). If the energy  $h_0$  of the closed orbit is slightly smaller than the separatrix energy, which is  $M_0$ , then the orbit surrounds the shaded region of figure 1. On the other hand, if the energy is slightly larger than that of the separatrix, then the orbit only surrounds the upper (or lower) half of the shaded region. The area, and the value of action, is then divided by two. Because of this gap and of the symmetry between the upper and lower sides of the separatrix, the angle–action variables take the same values at three points shown in figure 1. The transformation  $(\theta, p) \mapsto (w, J)$  is hence not injective.

Dynamics of perturbations around inhomogeneous backgrounds in the HMF model



**Figure 1.**  $\mu$  space for the one-particle Hamiltonian system  $h_0(\theta, p)$  (10). The three black points have the same values of angle–action variables, and hence we divide  $\mu$  space into three parts:  $U_1, U_2$  and  $U_3$ . The shaded region is  $U_2$ . Values of the angle variable  $w_\alpha$  are reported for three orbits in the three domains.

To construct bijective transformations, we divide  $\mu$  space into the following three parts, where we name as  $\mu$  space the  $(\theta, p)$  domain  $\mu = (-\pi, \pi] \times \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(\theta, p) | h_0(\theta, p) > M_0, p > 0\}, \\ U_2 &= \{(\theta, p) | -M_0 < h_0(\theta, p) < M_0\}, \\ U_3 &= \{(\theta, p) | h_0(\theta, p) > M_0, p < 0\}. \end{aligned} \quad (11)$$

The domains  $U_1$  and  $U_3$  are outside of the separatrix and  $U_2$  is inside. Thanks to the division of  $\mu$  space, we can construct a bijective transformation on each of the  $U_\alpha$  as

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha; \quad (\theta, p) \mapsto (w_\alpha, J_\alpha),$$

and there exist inverse transformations  $\varphi_\alpha^{-1} : V_\alpha \rightarrow U_\alpha$ . For explicit expressions for  $V_\alpha$ ,  $w_\alpha$  and  $J_\alpha$  as functions of  $M_0$  and of the old variables  $\theta$  and  $p$ , see appendix B. Notice that the change of variables depends on the potential in the stationary state  $\phi[f_0]$ .

To obtain the dispersion relation, we need to compute integrals over  $\mu$  space. Such an integral is written in the angle–action variables as follows: for a function  $f$  on  $\mu$  space, the integral is divided into the three parts according to the division of  $\mu$  space as

$$\int \int_\mu f(\theta, p) d\theta dp = \sum_{\alpha=1}^3 \int \int_{U_\alpha} f(\theta, p) d\theta dp. \quad (12)$$

In the domain  $U_\alpha$ , we can define the pull-back  $f_\alpha$  of  $f$  with respect to the inverse transformation  $\varphi_\alpha^{-1}$  by

$$f_\alpha(w_\alpha, J_\alpha) = f(\varphi_\alpha^{-1}(w_\alpha, J_\alpha)), \quad (w_\alpha, J_\alpha) \in V_\alpha. \quad (13)$$

We remark that we can define the function  $f_\alpha$  thanks to the existence of  $\varphi_\alpha^{-1}$ , and to the division of  $\mu$  space accordingly. The integral over  $\mu$  space is then written in the

angle–action variables as

$$\int \int_{\mu} f(\theta, p) \, d\theta \, dp = \sum_{\alpha=1}^3 \int \int_{V_{\alpha}} f_{\alpha}(w_{\alpha}, J_{\alpha}) \, dw_{\alpha} \, dJ_{\alpha}, \quad (14)$$

since the transformations  $\varphi_{\alpha}$  are canonical and  $d\theta \wedge dp = dw_{\alpha} \wedge dJ_{\alpha}$  holds.

We remark that the three domains  $U_{\alpha}$  do not cover the whole  $\mu$ -space, since

$$\mu = \bigcup_{\alpha=1}^3 U_{\alpha} \cup \{(0, 0)\} \cup \{\text{separatrix}\}. \quad (15)$$

However, this will not create any difficulty in the derivation of the dispersion relation, because what we need are integrals over  $\mu$ , and the difference between  $\mu$  and  $\bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$  is of zero measure.

The Vlasov equation (6), and the linearized Vlasov equation (9), are invariant under the canonical transformations  $\varphi_{\alpha}$ , and the latter is written in  $V_{\alpha}$  as

$$\partial_t f_{1,\alpha} + [f_{1,\alpha}, h_{0,\alpha}]_{\alpha} + [f_{0,\alpha}, h_{1,\alpha}]_{\alpha} = 0, \quad (16)$$

where the Poisson bracket is now written in terms of the new variables

$$[u_{\alpha}, v_{\alpha}]_{\alpha} = \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial w_{\alpha}} \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial J_{\alpha}} - \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial J_{\alpha}} \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial w_{\alpha}}. \quad (17)$$

Using the facts that  $h_{0,\alpha}$  and  $f_{0,\alpha}$  depend only on  $J_{\alpha}$ , and defining the rotation frequency

$$\Omega_{\alpha}(J_{\alpha}) = \frac{dh_{0,\alpha}}{dJ_{\alpha}}(J_{\alpha}), \quad (18)$$

the linearized Vlasov equation (16) becomes

$$\frac{\partial f_{1,\alpha}}{\partial t} + \Omega_{\alpha} \frac{\partial f_{1,\alpha}}{\partial w_{\alpha}} - \frac{df_{0,\alpha}}{dJ_{\alpha}} \frac{\partial \phi_{1,\alpha}}{\partial w_{\alpha}} = 0. \quad (19)$$

The rotation frequencies  $\Omega_{\alpha}$  are plotted in figure 2.  $\Omega_2$  takes its maximum value at the bottom of the potential well  $J_2 = 0$ , and decreases to 0 with a singularity at the separatrix (see equation (B.9)).  $\Omega_1 = \Omega_3$ , and they increase from 0 at the separatrix, where they are also singular, to  $+\infty$  (see equation (B.9)). In the large  $J$  limit, the potential well is negligible and the  $\Omega_{\alpha}(J_{\alpha})$  relation is almost linear.

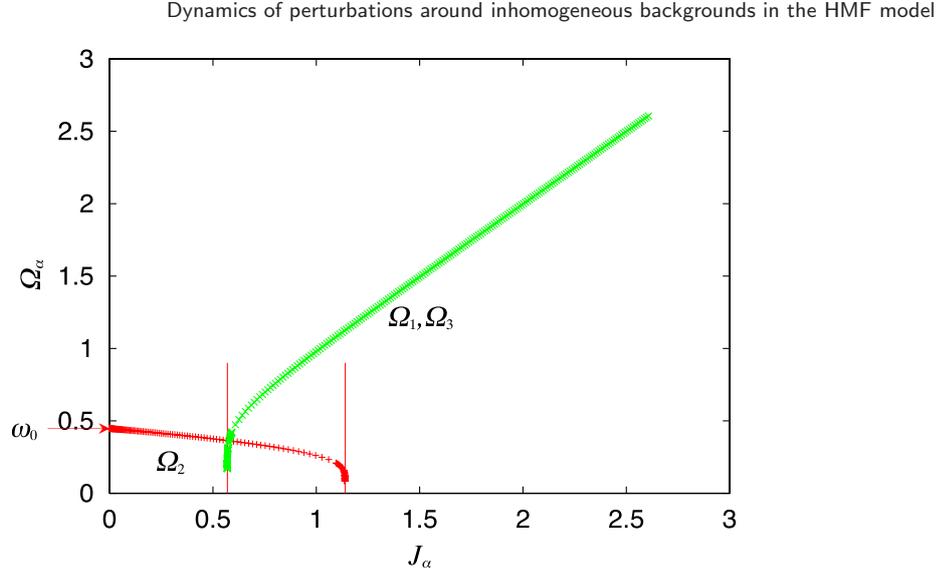
To derive the dispersion relation from (19), we define the Fourier–Laplace transform  $\hat{u}(m, J, \omega)$  of a function  $u(w, J, t)$  as

$$\hat{u}(m, J, \omega) = \int_{-\pi}^{\pi} dw e^{-imw} \int_0^{+\infty} dt e^{i\omega t} u(w, J, t) \quad (20)$$

where  $m$  is an integer and  $\text{Im}(\omega)$  large enough to ensure convergence. The integration interval with respect to  $w$  must be shifted to  $(-\pi/2, 3\pi/2]$  in  $V_2$ . The inverse transform is then

$$u(w, J, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{\Gamma} d\omega \hat{u}(m, J, \omega) e^{-i\omega t} e^{imw} \quad (21)$$

where  $\Gamma$  is a Bromwich contour running from  $-\infty + i\sigma$  to  $+\infty + i\sigma$ , and the real value  $\sigma$  is larger than the imaginary part of any singularity of  $\hat{u}(m, J, \omega)$  in the complex  $\omega$ -plane.



**Figure 2.** Frequencies  $\Omega_\alpha$  as functions of  $J_\alpha$  for  $M_0 = 0.2$ , and  $\omega_0 = \lim_{J_2 \rightarrow 0} \Omega_2(J_2) = \sqrt{M_0} = 0.447\dots$  accordingly. The two vertical lines mark the values of actions corresponding to the separatrix, which are  $J_1 = J_3 = 4\omega_0/\pi$  and  $J_2 = 8\omega_0/\pi$ .

We perform a Fourier–Laplace transform on equation (19). This yields, after simple algebraic manipulations,

$$\hat{f}_{1,\alpha}(m, J_\alpha, \omega) = \frac{mf'_{0,\alpha}(J_\alpha)}{m\Omega_\alpha(J_\alpha) - \omega} \hat{\phi}_{1,\alpha}(m, J_\alpha, \omega) + \frac{g_\alpha(m, J_\alpha)}{m\Omega_\alpha(J_\alpha) - \omega} \quad (22)$$

where  $g_\alpha(m, J_\alpha) = -if_{1,\alpha}^F(m, J_\alpha, 0)$  and  $f_{1,\alpha}^F(m, J_\alpha, 0)$  is the Fourier transform with respect to  $w_\alpha$  of  $f_{1,\alpha}(w_\alpha, J_\alpha, 0)$ , the initial value of the perturbation.

We need to introduce this last equation (22) into the definition of the perturbation potential  $\phi_{1,\alpha}$  for self-consistency. This task is complicated by the fact that  $f_{1,\alpha}$  is naturally expanded in a Fourier series in the angle variable  $w_\alpha$ , whereas  $\phi_{1,\alpha}$  is naturally expanded in a Fourier series in the original spatial variable  $\theta$ . As a consequence, the equations for different Fourier modes do not decouple, at variance with what happens in the usual homogeneous case. Then, for the perturbation potential, we have

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{1,\alpha}(m, J_\alpha, \omega) &= \int_{-\pi}^{\pi} dw_\alpha e^{-imw_\alpha} \int_0^{+\infty} dt e^{i\omega t} \phi_{1,\alpha}(\theta_\alpha, t) = - \int_{-\pi}^{\pi} dw_\alpha \cos \theta_\alpha e^{-imw_\alpha} \\ &\times \frac{1}{2\pi} \sum_{m'} \sum_{\alpha'} \int \int_{V_{\alpha'}} \cos \theta'_{\alpha'} e^{im'w'_{\alpha'}} \hat{f}_{1,\alpha'}(m', J'_{\alpha'}, \omega) dw'_{\alpha'} dJ'_{\alpha'} \\ &- \int_{-\pi}^{\pi} dw_\alpha \sin \theta_\alpha e^{-imw_\alpha} \frac{1}{2\pi} \sum_{m'} \sum_{\alpha'} \int \int_{V_{\alpha'}} \sin \theta'_{\alpha'} e^{im'w'_{\alpha'}} \hat{f}_{1,\alpha'}(m', J'_{\alpha'}, \omega) \\ &\times dw'_{\alpha'} dJ'_{\alpha'}, \end{aligned} \quad (23)$$

where  $\theta_\alpha$  is the first element of the mapping  $\varphi_\alpha^{-1}(w_\alpha, J_\alpha) = (\theta_\alpha(w_\alpha, J_\alpha), J_\alpha(w_\alpha, J_\alpha))$ . In the course of computations we have used the equality (14).

We define

$$c_{m,\alpha}(J_\alpha) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos \theta_\alpha e^{imw_\alpha} dw_\alpha \quad s_{m,\alpha}(J_\alpha) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin \theta_\alpha e^{imw_\alpha} dw_\alpha \quad (24)$$

and

$$\begin{aligned} \Sigma_C(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \sum_m \sum_\alpha \int \int_{V_\alpha} \cos \theta_\alpha e^{imw_\alpha} \hat{f}_{1,\alpha}(m, J_\alpha, \omega) dw_\alpha dJ_\alpha \\ \Sigma_S(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \sum_m \sum_\alpha \int \int_{V_\alpha} \sin \theta_\alpha e^{imw_\alpha} \hat{f}_{1,\alpha}(m, J_\alpha, \omega) dw_\alpha dJ_\alpha. \end{aligned} \quad (25)$$

If we call  $\mathbf{M}_1(t) = M_{1,x}(t) + iM_{1,y}(t)$  the perturbation in magnetization, then  $\Sigma_C(\omega)$  and  $\Sigma_S(\omega)$  are nothing but the Laplace transforms of  $M_{1,x}(t)$  and  $M_{1,y}(t)$  respectively. The Fourier–Laplace component  $\hat{\phi}_{1,\alpha}(m, J_\alpha, \omega)$  is written as

$$\hat{\phi}_{1,\alpha}(m, J_\alpha, \omega) = -[\bar{c}_{m,\alpha}(J_\alpha)\Sigma_C(\omega) + \bar{s}_{m,\alpha}(J_\alpha)\Sigma_S(\omega)] \quad (26)$$

where  $\bar{c}_{m,\alpha}$  and  $\bar{s}_{m,\alpha}$  are the complex conjugates of  $c_{m,\alpha}$  and  $s_{m,\alpha}$  respectively. Substituting  $\hat{\phi}_{1,\alpha}(m, J_\alpha, \omega)$  into equation (22),  $\hat{f}_{1,\alpha}(m, J_\alpha, \omega)$  is

$$\hat{f}_{1,\alpha}(m, J_\alpha, \omega) = \frac{-mf'_{0,\alpha}(J_\alpha)}{m\Omega_\alpha(J_\alpha) - \omega} [\bar{c}_{m,\alpha}(J_\alpha)\Sigma_C(\omega) + \bar{s}_{m,\alpha}(J_\alpha)\Sigma_S(\omega)] + \frac{g_\alpha(m, J_\alpha)}{m\Omega_\alpha(J_\alpha) - \omega}. \quad (27)$$

We now multiply equation (27) by  $\cos \theta_\alpha e^{imw_\alpha}$  or  $\sin \theta_\alpha e^{imw_\alpha}$ , integrate over  $V_\alpha$ , sum over  $\alpha$  and  $m$ , and divide by  $2\pi$ . This yields two equations:

$$\begin{aligned} \Sigma_C(\omega) &= -\frac{1}{2\pi} \sum_m \sum_\alpha \int \int_{V_\alpha} \frac{mf'_{0,\alpha}(J_\alpha)}{m\Omega_\alpha(J_\alpha) - \omega} \bar{c}_{m,\alpha}(J_\alpha) \cos \theta_\alpha e^{imw_\alpha} dw_\alpha dJ_\alpha \Sigma_C(\omega) \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \sum_m \sum_\alpha \int \int_{V_\alpha} \frac{mf'_{0,\alpha}(J_\alpha)}{m\Omega_\alpha(J_\alpha) - \omega} \bar{s}_{m,\alpha}(J_\alpha) \cos \theta_\alpha e^{imw_\alpha} dw_\alpha dJ_\alpha \Sigma_S(\omega) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \sum_m \sum_\alpha \int \int_{V_\alpha} \frac{g_\alpha(m, J_\alpha)}{m\Omega_\alpha(J_\alpha) - \omega} \cos \theta_\alpha e^{imw_\alpha} dw_\alpha dJ_\alpha \\ \Sigma_S(\omega) &= -\frac{1}{2\pi} \sum_m \sum_\alpha \int \int_{V_\alpha} \frac{mf'_{0,\alpha}(J_\alpha)}{m\Omega_\alpha(J_\alpha) - \omega} \bar{c}_{m,\alpha}(J_\alpha) \sin \theta_\alpha e^{imw_\alpha} dw_\alpha dJ_\alpha \Sigma_C(\omega) \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \sum_m \sum_\alpha \int \int_{V_\alpha} \frac{mf'_{0,\alpha}(J_\alpha)}{m\Omega_\alpha(J_\alpha) - \omega} \bar{s}_{m,\alpha}(J_\alpha) \sin \theta_\alpha e^{imw_\alpha} dw_\alpha dJ_\alpha \Sigma_S(\omega) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \sum_m \sum_\alpha \int \int_{V_\alpha} \frac{g_\alpha(m, J_\alpha)}{m\Omega_\alpha(J_\alpha) - \omega} \sin \theta_\alpha e^{imw_\alpha} dw_\alpha dJ_\alpha. \end{aligned} \quad (28)$$

To express the dispersion relation in a compact form, we introduce one more time some notation:

$$\begin{aligned}
 F_{\bar{c}c}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \sum_m \sum_\alpha \int \int_{V_\alpha} \frac{m f'_{0,\alpha}(J_\alpha)}{m\Omega_\alpha(J_\alpha) - \omega} \bar{c}_{m,\alpha}(J_\alpha) \cos \theta_\alpha e^{imw_\alpha} dw_\alpha dJ_\alpha, \\
 F_{\bar{s}c}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \sum_m \sum_\alpha \int \int_{V_\alpha} \frac{m f'_{0,\alpha}(J_\alpha)}{m\Omega_\alpha(J_\alpha) - \omega} \bar{s}_{m,\alpha}(J_\alpha) \cos \theta_\alpha e^{imw_\alpha} dw_\alpha dJ_\alpha, \\
 F_{\bar{c}s}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \sum_m \sum_\alpha \int \int_{V_\alpha} \frac{m f'_{0,\alpha}(J_\alpha)}{m\Omega_\alpha(J_\alpha) - \omega} \bar{c}_{m,\alpha}(J_\alpha) \sin \theta_\alpha e^{imw_\alpha} dw_\alpha dJ_\alpha, \\
 F_{\bar{s}s}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \sum_m \sum_\alpha \int \int_{V_\alpha} \frac{m f'_{0,\alpha}(J_\alpha)}{m\Omega_\alpha(J_\alpha) - \omega} \bar{s}_{m,\alpha}(J_\alpha) \sin \theta_\alpha e^{imw_\alpha} dw_\alpha dJ_\alpha,
 \end{aligned} \tag{29}$$

and

$$\begin{aligned}
 G_c(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \sum_m \sum_\alpha \int \int_{V_\alpha} \frac{g_\alpha(m, J_\alpha)}{m\Omega_\alpha(J_\alpha) - \omega} \cos \theta_\alpha e^{imw_\alpha} dw_\alpha dJ_\alpha, \\
 G_s(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \sum_m \sum_\alpha \int \int_{V_\alpha} \frac{g_\alpha(m, J_\alpha)}{m\Omega_\alpha(J_\alpha) - \omega} \sin \theta_\alpha e^{imw_\alpha} dw_\alpha dJ_\alpha.
 \end{aligned}$$

Using this notation, the two equations (28) are expressed in the following matrix form:

$$\begin{pmatrix} 1 + F_{\bar{c}c}(\omega) & F_{\bar{s}c}(\omega) \\ F_{\bar{c}s}(\omega) & 1 + F_{\bar{s}s}(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_C(\omega) \\ \Sigma_S(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_c(\omega) \\ G_s(\omega) \end{pmatrix}. \tag{30}$$

This matrix equation is actually diagonal, as can be shown using the relations for the  $c_m$  and  $s_m$  functions (B.10) and (B.11); see appendix B. Indeed, in region  $V_2$ , the products  $\bar{c}_m s_m$  and  $\bar{s}_m c_m$  vanish thanks to (B.11); and the contributions to  $F_{\bar{c}s}$  and  $F_{\bar{s}c}$  coming from regions  $V_1$  and  $V_3$  cancel one another thanks to (B.10). Thus  $F_{\bar{c}s}(\omega) = F_{\bar{s}c}(\omega) = 0$ .

The dispersion relation is given by  $\epsilon(\omega) = 0$ , with the dispersion function

$$\epsilon(\omega) = [1 + F_{\bar{c}c}(\omega)][1 + F_{\bar{s}s}(\omega)]. \tag{31}$$

Hence the perturbation's potential is

$$\hat{\phi}_{1,\alpha}(m, J_\alpha, \omega) = -\frac{G_c(\omega)}{1 + F_{\bar{c}c}(\omega)} \bar{c}_{m,\alpha}(J_\alpha) - \frac{G_s(\omega)}{1 + F_{\bar{s}s}(\omega)} \bar{s}_{m,\alpha}(J_\alpha). \tag{32}$$

The time evolution of  $\phi_1$  is given by the inverse Fourier–Laplace transform of equation (32).

We have concentrated in this section on the HMF case for the sake of simplicity; see appendix C for some comments on the case of general potentials.

### 3. Analytic continuation

To solve the initial value problem for the perturbation  $f_1$ , or the perturbation potential  $\phi_1$ , we need to perform the inverse Laplace transform (21) on  $\hat{f}_1$ , or  $\Sigma_C$  and  $\Sigma_S$ . For this purpose, it is useful to deform the Bromwich contour  $\Gamma$ , and to study the singularities of the integrand, or rather of its analytic continuation, in the complex  $\omega$ -plane. From equation (32), we see that these singularities may come from singularities in the  $F_{\bar{c}c}$ ,  $F_{\bar{s}s}$ ,  $G_c$  or  $G_s$ , or from roots of  $\epsilon(\omega)$ . From the analogy with Landau damping around

homogeneous stationary states, one would expect these roots of  $\epsilon(\omega)$  to give damped and oscillating contributions to the time evolution of perturbations, when the reference state is stable. However, other singularities of  $\epsilon(\omega)$  may contribute to this time evolution; thus in the following, we will also investigate the singularities of  $\epsilon(\omega)$ .

The Fourier–Laplace transformation  $\hat{f}_{1,\alpha}(m, J_\alpha, \omega)$ , and hence the dispersion function  $\epsilon(\omega)$ , are defined for positive and large enough  $\text{Im}(\omega)$ . The continuation of  $\epsilon(\omega)$  to the lower half-plane requires the continuation of functions such as

$$F_{\bar{c}c}^{(m)}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\alpha} \int \int_{V_{\alpha}} \frac{m f'_{0,\alpha}(J_{\alpha})}{m \Omega_{\alpha}(J_{\alpha}) - \omega} \bar{c}_{m,\alpha}(J_{\alpha}) \cos \theta_{\alpha} e^{imw_{\alpha}} dw_{\alpha} dJ_{\alpha}. \quad (33)$$

The other integrals entering in  $\epsilon(\omega)$  are similar, and hence we concentrate now on  $F_{\bar{c}c}^{(m)}(\omega)$ . We separately consider the integrals for different regions  $V_{\alpha}$ , and introduce

$$\begin{aligned} F_{\bar{c}c,\alpha}^{(m)}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int \int_{V_{\alpha}} \frac{m f'_{0,\alpha}(J_{\alpha})}{m \Omega_{\alpha}(J_{\alpha}) - \omega} \bar{c}_{m,\alpha}(J_{\alpha}) \cos \theta_{\alpha} e^{imw_{\alpha}} dw_{\alpha} dJ_{\alpha} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{J_{\alpha}^{(0)}}^{J_{\alpha}^{(1)}} \frac{m f'_{0,\alpha}(J_{\alpha})}{m \Omega_{\alpha}(J_{\alpha}) - \omega} |c_{m,\alpha}(J_{\alpha})|^2 dJ_{\alpha}, \end{aligned} \quad (34)$$

where

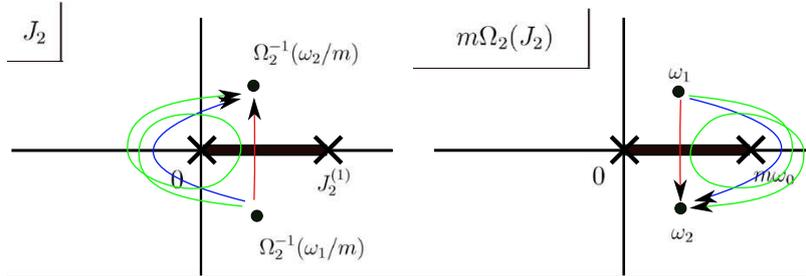
$$J_1^{(0)} = J_3^{(0)} = 4\sqrt{M_0}/\pi, \quad J_1^{(1)} = J_3^{(1)} = +\infty, \quad J_2^{(0)} = 0, \quad J_2^{(1)} = 8\sqrt{M_0}/\pi.$$

The  $F_{\bar{c}c,\alpha}^{(m)}(\omega)$  are naturally defined by formula (34) for  $\text{Im}(\omega) > 0$ . We need to define  $F_{\bar{c}c,\alpha}^{(m)}(\omega)$  for  $\text{Im}(\omega) \leq 0$ . When  $\omega$  crosses the real axis, real roots of the equations  $m\Omega_{\alpha}(J_{\alpha}) - \omega = 0$  create singularities. These singularities have to be dealt with using the usual Landau prescription: when the root  $J_{\alpha,r}$  of the equation  $\Omega_{\alpha}(J_{\alpha,r}) = \omega/m$  crosses the integration path, one takes the corresponding residue contribution. This procedure allows the analytic continuation of  $F_{\bar{c}c,\alpha}^{(m)}(\omega)$  in the lower half-plane.

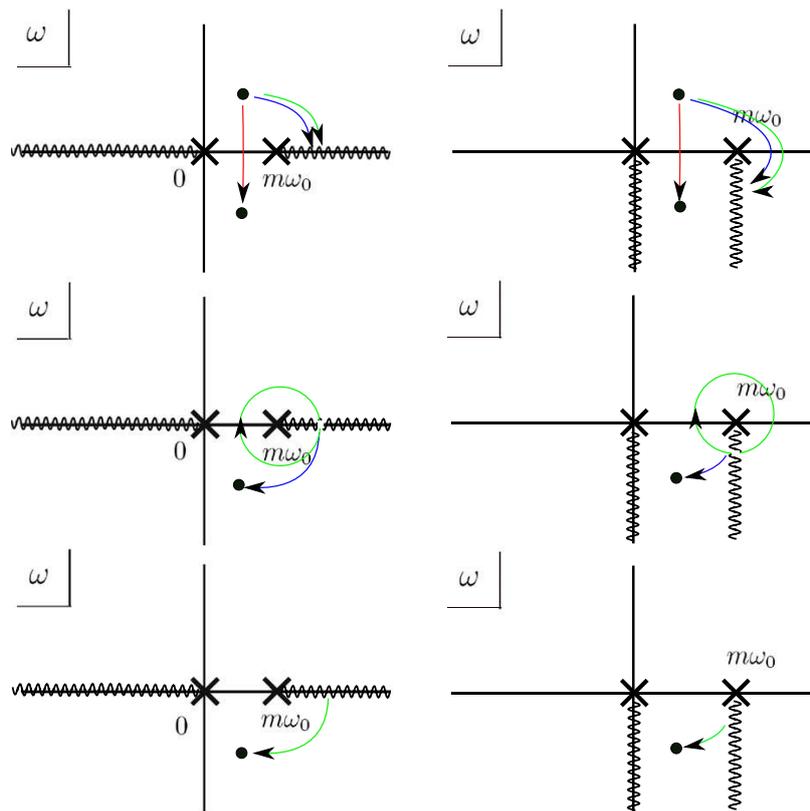
However, the continued dispersion function  $\epsilon(\omega)$  has an infinite number of branch point singularities in the  $\omega$ -plane. To see this, consider  $\omega_1$  in the upper half-plane,  $\omega_2$  in the lower half-plane, and a path in the  $\omega$ -plane going from  $\omega_1$  to  $\omega_2$ . Some examples of paths are shown in figure 3 for  $\alpha = 2$  with corresponding paths on the  $J_2$ -plane. The number of times that the corresponding path crosses the integration path on the  $J_2$ -plane, and the orientation with which it crosses (from upper to lower half-plane, or from lower to upper half-plane) depends on the path which is chosen between  $\omega_1$  and  $\omega_2$ . Consequently, the value of  $F_{\bar{c}c,2}^{(m)}(\omega)$  depends on the choice of a continuation path, and each  $\omega = m\omega_0$ , where  $\omega_0 = \lim_{J_2 \rightarrow +0} \Omega_2(J_2)$  and  $m \in \mathbb{Z}$ , is a branch point of logarithmic type. See appendix D for more detailed explanations of the type of singularity. Because of these logarithmic branch points, we need an infinite number of Riemann sheets in  $\omega$  to completely describe the dispersion function  $\epsilon(\omega)$ . The singularity structure of  $F_{\bar{c}c,2}^{(m)}(\omega)$  is illustrated in figure 4, where two choices for the branch cuts are given.

The previous reasoning shows that  $F_{\bar{c}c,\alpha}^{(m)}(\omega)$  has branch point singularities at the lower and upper boundaries of the range of the function  $m\Omega_{\alpha}(J_{\alpha})$ . The ranges of  $\Omega_1$  and of  $\Omega_3$  are  $(0, +\infty)$ , and the only branch point is hence at  $\omega = 0$  for  $F_{\bar{c}c,1}^{(m)}(\omega)$  and  $F_{\bar{c}c,3}^{(m)}(\omega)$ . The range of  $\Omega_2$  is  $(0, \omega_0)$ , and there are two branch points at  $\omega = 0$  and  $m\omega_0$  for  $F_{\bar{c}c,2}^{(m)}(\omega)$ . With similar arguments, one may show that there are branch points also at

Dynamics of perturbations around inhomogeneous backgrounds in the HMF model



**Figure 3.** Examples of continuation paths from  $\omega_1$  to  $\omega_2$  on the  $m\Omega_2(J_2)$ -plane (right panel), and corresponding paths on the  $J_2$ -plane (left panel). The thick lines represent the interval of integration and its image under  $m\Omega_2$ .  $J = 0$  and  $J_2^{(1)}$  go to  $m\Omega_2(0) = m\omega_0$  and  $0$  respectively under the mapping  $m\Omega_2(J_2)$ . This picture is for  $m > 0$ .



**Figure 4.** Two choices of branch cuts on the  $\omega$ -plane for obtaining the analytic continuation of  $F_{cc,2}^{(m)}(\omega)$  for the lower half of the  $\omega$ -plane. Each column represents a part of the Riemann surface of  $\omega$ , for the logarithmic branch point  $m\omega_0$ . The three paths shown in figure 3 bring a point on the upper half-plane to three points on different Riemann sheets. The value of  $F_{cc,2}^{(m)}(\omega)$  at each of the three points is independent of the choice of the branch cuts.

the  $\omega$  corresponding to stationary points of the frequency, that is points  $\omega_c = m\Omega_\alpha(J_{\alpha,c})$ , such that  $(d\Omega_\alpha/dJ_\alpha)(J_{\alpha,c}) = 0$ . We will not have to deal with this case in the following, since no such real stationary points exist in the HMF model, as shown on figure 2.

#### 4. Examples; comparison with $N$ -body simulations

In this section, we compare the analytical results with dynamical simulations of  $N$  particles governed by the canonical equations of motion derived from Hamiltonian (1) for two families of stationary states. The dynamics of a perturbation  $f_{1,\alpha}$  is theoretically obtained by the inverse Laplace transformation of  $\hat{f}_{1,\alpha}$ . For instance, each root of  $\epsilon(\omega)$  gives an exponential contribution, and one may expect branch cuts to give algebraic contributions [30]. For simplicity, we focus on the contribution from the root of  $\epsilon(\omega)$  whose imaginary part is the largest. The resulting exponential behavior cannot explain the dynamics of  $f_{1,\alpha}$  perfectly, since it neglects the contributions from other roots and from branch cuts. However, in spite of this simplification, the root with the largest imaginary part captures some features of the growing or damping rates and frequency.

As explained in the introduction, the Vlasov dynamics approximates the  $N$ -particle dynamics; more precisely, they stay close to one other over a timescale  $t_v(N)$  which diverges with  $N$  [1, 2] (the ‘closeness’ of these two dynamics may be defined in a rigorous manner). On the basis of [35] and the discussion in [36], we expect the timescale  $t_v$  to grow logarithmically with  $N$  when the initial conditions are close to an unstable stationary state of the Vlasov equation, and to grow at least algebraically with  $N$  when the initial conditions are close to a stable stationary state of the Vlasov equation. The Vlasov dynamics does not depend on  $N$ , and hence we can check that  $N$  is large enough for the Vlasov approximation to be valid by observing that the  $N$ -particle dynamics is independent of  $N$  over the timescale considered.

##### 4.1. The water-bag stationary state

We consider first water-bag stationary states, which have a constant density in phase space up to a certain action, or energy, and a zero density beyond. The precise definition is as follows:

$$f_0(\theta, p) = \begin{cases} \eta_0 & \text{if } h_0(\theta, p) \leq E^*, \\ 0 & \text{if } h_0(\theta, p) > E^*, \end{cases} \quad (35)$$

where  $\eta_0$  is determined by the normalization condition

$$\int \int_{\mu} f_0(\theta, p) d\theta dp = 1. \quad (36)$$

Note that  $f_0$  determines the magnetization  $M_0$ , and that the energy  $E^*$  depends on  $M_0$ . Thus  $M_0$  must obey a consistency equation. As a result, there exists a unique water-bag distribution such as (35) for each  $M_0 \in [0, 1]$ . It is important to note that  $E^*$  may be larger or smaller than the separatrix energy; this means the water-bag may be included inside the separatrix or not. We find that for  $M_0 > M_0^{(s)} \simeq 0.33$ , the water-bag is included inside the separatrix; for  $M_0 < M_0^{(s)}$ , it is not. We study in this section this one parameter family of distributions, computing the dispersion relation (31) and looking for

roots. Note that inhomogeneous water-bag solutions for an HMF model with anisotropy have been considered in [36]. In this reference, their stability is investigated, using a different method. The stability of water-bag distributions has also been investigated in the context of beam physics, where they are called Kapchinsky–Vladimirsky distributions; see for instance [37] and [38], where the stability is studied computing the evolution of moments of the distribution function.

Contrary to what happens with more general  $f_0$ , the integration over  $J$  does not create any singularity for  $\omega \in \mathbb{R}$ , thanks to the  $\delta$  function included in  $f'_0$ . It results in a function  $\epsilon(\omega)$  which only has poles for  $\omega \in \mathbb{Z}\Omega_\alpha(J_\alpha^*)$ , where  $J_\alpha^*$  is the action corresponding to  $E^*$  with a suitable choice of  $\alpha$ . Thus, the analytic continuation of the dispersion relation to the lower half of the  $\omega$ -plane does not contain any branch cut singularity.

Solving  $\epsilon(\omega) = 0$ , varying the magnetization  $M_0$  of the water-bag, we find that there exists a critical magnetization  $M_0^{(c)} \simeq 0.37$  such that:

- for  $M_0 < M_0^{(c)}$ , the initial distribution is exponentially unstable: in this case, there exists at least one purely imaginary root of  $\epsilon(\omega) = 0$ , with positive imaginary part, that we call  $\gamma(M_0)$ ;
- for  $M_0 > M_0^{(c)}$ , it is marginally stable: there exists in this case a discrete countable infinite number of real roots of  $\epsilon(\omega) = 0$ ,  $\omega_n = \omega_{n,r} + i\omega_{n,i}$ , with  $\omega_{n,i} = 0$ ; we name as  $\omega_{1,r}(M_0)$  the smallest of these frequencies.

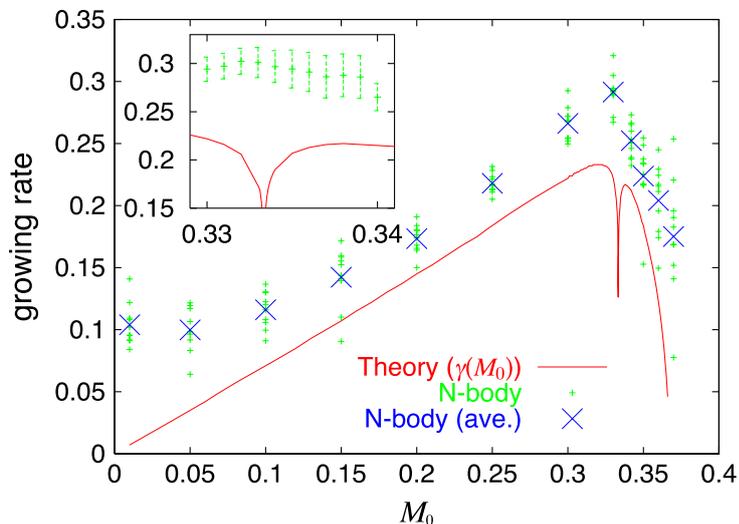
These features are not unexpected: it is known that homogeneous stationary states of the Vlasov equation with compact support in velocity may sustain undamped oscillating discrete modes (see [39] for examples with the HMF model). The same type of phenomenon occurs for 1D self-gravitating systems [16]–[18], and vortices (see for instance [21]). We have shown that such undamped modes exist in the case of inhomogeneous water-bag stationary states of the Vlasov equation. More surprising is the behavior of the growing rate  $\gamma(M_0)$ : it has a complicated behavior around  $M_0 = M_0^{(s)}$ ; see figure 5.

We have performed direct  $N$ -body numerical simulations, adding a small perturbation to the initial phase space distribution (35):

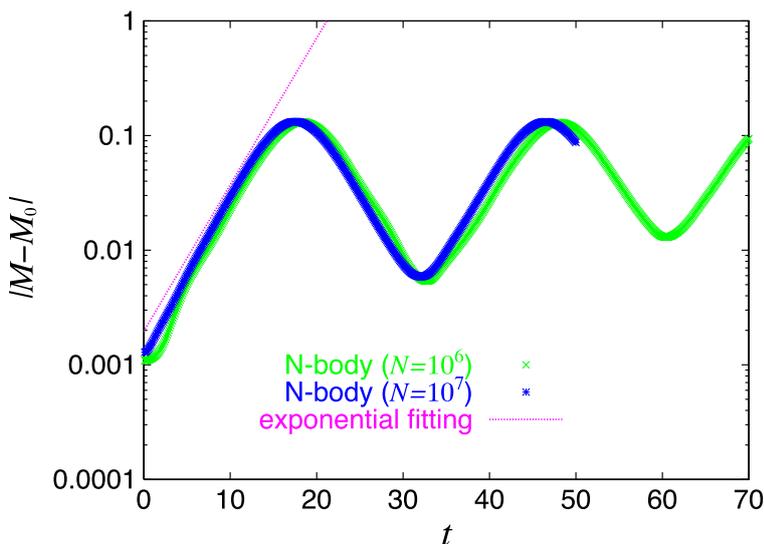
$$f(\theta, p, t = 0) = \begin{cases} \eta'_0 & \text{if } h_0(\theta, p) \leq E^*(1 + a \cos \theta), \\ 0 & \text{if } h_0(\theta, p) > E^*(1 + a \cos \theta), \end{cases} \quad (37)$$

where  $\eta'_0$  is determined by the normalization condition (36). In the unstable case,  $M(t)$  rapidly grows as shown in figure 6. There is no dependence on  $N$ , and hence the Vlasov approximation is valid in this short time region, although the agreement between  $N = 10^6$  and  $10^7$  becomes worse as  $M_0$  decreases. We fit the evolution of  $M(t)$  with a pure exponential, and extract a growing rate; it is in qualitative agreement with the analytically computed growing rate  $\gamma(M_0)$ , except around  $M_0^{(s)}$ . We remark that  $M(t)$  is not simply exponential. The quantitative agreement is hence not very good, as shown in figure 5. In the stable case, the numerically computed  $M(t)$  is oscillating and shows no sign of damping, in agreement with the theory; the fitted frequency is very close to the analytically computed  $\omega_1(M_0)$  as reported in figure 7. In this stable case also, the temporal evolutions of  $M(t)$  for  $N = 10^6$  and  $10^7$  coincide up to  $t = 50$ , except when  $M_0$  is close to the critical value  $M_0^{(c)}$ ; the frequency has no dependence on  $N$ .

Dynamics of perturbations around inhomogeneous backgrounds in the HMF model

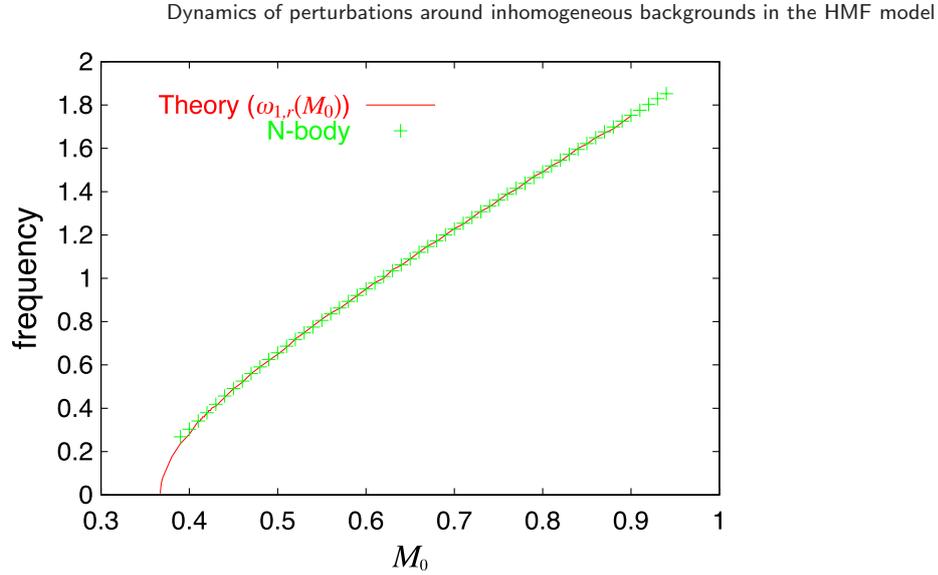


**Figure 5.** Growing rates for an unstable inhomogeneous water-bag background. The red line represents  $\gamma(M_0)$ , labeled as theory. Green points are estimations of the growing rates by  $N$ -body simulations for 10 realizations at each value of  $M_0$ , and the big blue crosses are the averages over the 10 realizations. The perturbation amplitude  $a$  (see (37)) is chosen as  $a = 0.01$  for  $M_0 < 0.15$  and  $a = 0.001$  otherwise. The inset is a magnification around  $M_0^{(s)}$ . Green points are averages over 40 realizations, and error bars represent the standard deviations. There is no signature of the dip at  $M_0^{(s)}$  which is predicted by the theory.



**Figure 6.** Temporal evolution of  $M(t)$  for an unstable water-bag, and estimation of the growing rate.  $M_0 = 0.33$ .  $a = 0.001$ .  $N = 10^6$  and  $10^7$ .

J. Stat. Mech. (2010) P08002



**Figure 7.** Oscillation frequencies for a perturbation around a stable inhomogeneous water-bag background. The red line represents  $\omega_{1,r}(M_0)$ , labeled as theory. Green points are the frequencies extracted from a single realization of the dynamics by  $N$ -body simulations with  $N = 10^6$  particles. The latter correspond to a peak in the power spectrum of  $M(t)$ , which is computed from the interval  $0 \leq t \leq 1638.4$ .

#### 4.2. Thermal equilibrium

We turn now to stationary states corresponding to thermal equilibria, parameterized by the temperature  $T = 1/\beta$ :

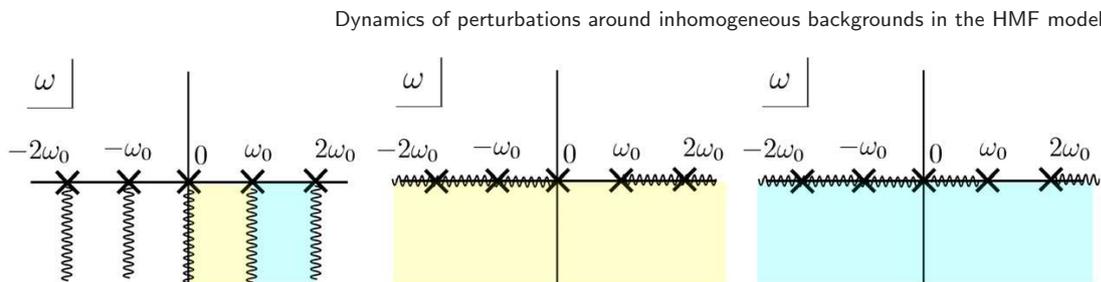
$$f_0(\theta, p) = \mathcal{N} e^{-\beta(p^2/2 - M_0 \cos \theta)} \quad (38)$$

where  $\mathcal{N}$  is the normalization and the magnetization  $M_0(T)$  is solution to the consistency equation. The thermodynamical equilibrium state of the HMF is inhomogeneous (that is  $M_0 \neq 0$ ) as soon as  $T < 0.5$  [34].

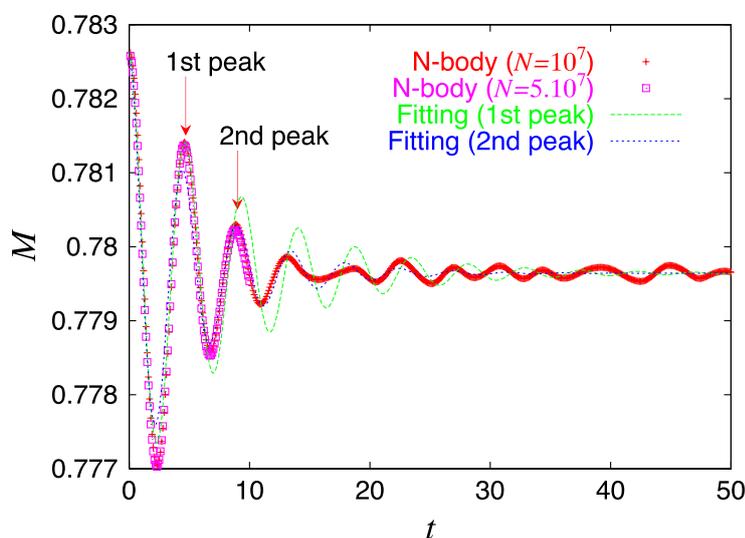
For such an initial distribution, the general results of section 3 concerning the analytical continuation of  $\epsilon(\omega)$  apply. To fully describe the behavior of the magnetization  $M(t)$  one would in principle need to compute the inverse Laplace transform of  $\Sigma_C$  and  $\Sigma_S$  computed from (30). This usually requires the deformation of the Bromwich contour in the complex  $\omega$ -plane. One may expect a contribution to the function  $M(t)$  from the generalization of the ‘Landau poles’, that is the roots of  $\epsilon(\omega)$ . However, because of the complicated analytic structure of the integrand, a careful analysis of the inverse Laplace transform is needed, which is beyond the scope of the present paper. In the following, we will identify the roots of  $\epsilon(\omega)$ , pick out  $\omega_L(T)$ , the root with the largest imaginary part, and see whether this root gives hints for understanding the  $N$ -body numerical simulations. The initial distribution  $f_0$  is stable for  $T < 0.5$ , and hence all such roots are in the lower half of the  $\omega$ -plane. We stress that in principle, we cannot expect a perfect agreement between the numerical  $M(t)$  and the contribution of  $\omega_L(T)$ . To look for roots of  $\epsilon(\omega)$ , we

[doi:10.1088/1742-5468/2010/08/P08002](https://doi.org/10.1088/1742-5468/2010/08/P08002)

16



**Figure 8.** Three choices of branch cuts, which are represented by wavy lines. In the three panels, one color identifies one Riemann sheet.



**Figure 9.** Temporal evolution of  $M(t)$  for stable thermal equilibrium.  $T = 0.3$ .  $a = 0.1$ .  $N = 10^7$  and  $5 \times 10^7$ .

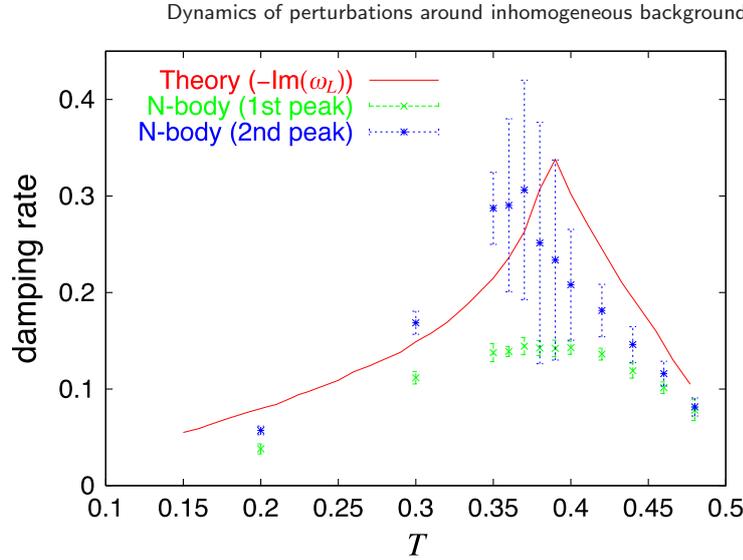
have explored several choices of analytic continuation, or equivalently several Riemann sheets.

Three choices of branch cuts are sketched in figure 8. The numerical procedure for computing the dispersion relation, performing its analytical continuation and finding its roots is detailed in appendix E with an example of level curves for  $|\epsilon(\omega)|$ . It turns out that two different roots of  $\epsilon(\omega)$  have the same imaginary part for  $T \simeq 0.4$  and switching of  $\omega_L(T)$  occurs. This is the origin of the non-monotonic and non-differentiable behavior of  $-\text{Im}(\omega_L)$ , and the jump in  $\text{Re}(\omega_L)$  visible in figures 10 and 11.

We have performed the  $N$ -body simulations using the following perturbed thermal equilibrium initial distribution:

$$f(\theta, p, t = 0) = \mathcal{N}_a e^{-\beta(p^2/2 - M_0 \cos \theta)} (1 + a \cos \theta). \quad (39)$$

A typical temporal evolution of  $M(t)$  is shown in figure 9;  $M(t)$  has no dependence on  $N$ , although the agreement between  $N = 10^7$  and  $5 \times 10^7$  deteriorates as  $T$  increases.  $M(t)$



**Figure 10.** Estimated damping rate as a function of  $T$ . The red line represents  $-\text{Im}(\omega_L)$ , labeled as theory. In  $N$ -body simulations, for each value of  $T$ , the damping rates are estimated for 20 realizations, and their average and standard deviation are reported by a point and the error bar around it respectively. The symbols for first and second peaks represent the rate estimated by using the first and second peaks of  $M(t)$  respectively.  $N = 10^7$ .

shows a damped oscillation, which is assumed as to be in the form of

$$M(t) = A + Be^{-\lambda t} \cos \nu t. \quad (40)$$

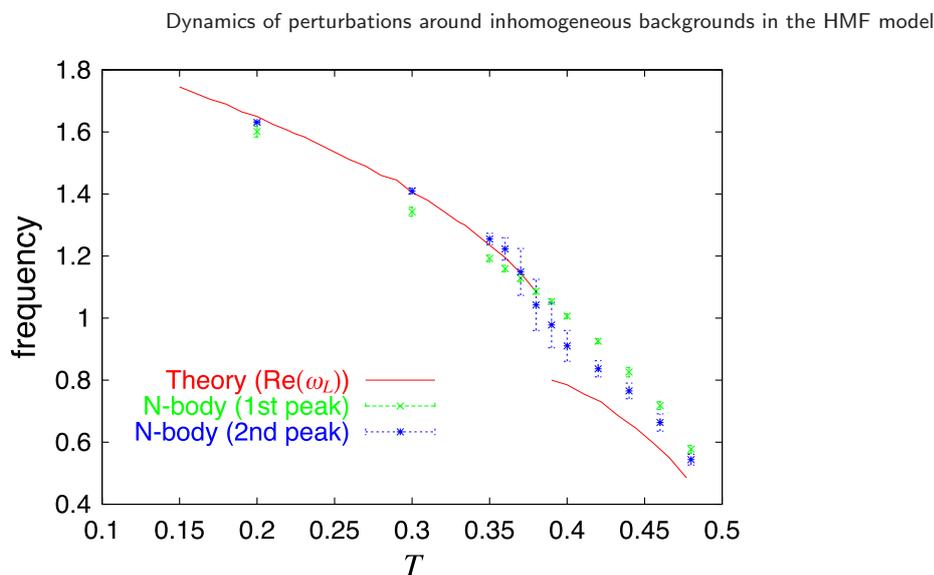
We assumed that  $M(t)$  has a maximum at  $t = 0$  from the given perturbation.

We perform the following procedure to estimate the values of  $A$ ,  $B$ ,  $\lambda$  and  $\nu$  for each orbit.  $M(t)$  relaxes to the equilibrium value, and  $A$  is computed by time averaging in the interval  $20 < t \leq 50$ . The initial amplitude of oscillation  $B$  is computed as  $M(0) - A$ . To estimate  $\lambda$  and  $\nu$ , we pick out the peaks  $M(t_j)$ , where  $t_j$  is the time at which  $M(t)$  has its  $j$ th peak, with the zeroth peak defined as the peak at  $t = 0$ . For the  $j$ th peak, we can estimate  $\nu = 2\pi/t_j$  and  $\lambda = \ln((M(0) - A)/(M(t_j) - A))/t_j$ . The values of  $\lambda$  and  $\nu$  which should be compared to  $-\text{Im}(\omega_L)$  and  $\text{Re}(\omega_L)$  are reported in figures 10 and 11 respectively; each figure shows the values estimated from the first and second peaks.

To be precise, the assumption (40) is not valid since the values of  $\lambda$  and  $\mu$  change if we change the choice of the peak. This means that the damping is indeed not simply exponential, and that the Landau pole  $\omega_L$  does not provide a complete description of the damped oscillation. However, the Landau pole  $\omega_L$  seems to capture the tendencies of the dependence on  $T$ , including around  $T = 0.4$ .

## 5. Discussion and conclusion

We have studied the linearized Vlasov equation around an inhomogeneous stationary state, and computed the associated dispersion function  $\epsilon(\omega)$ . We have shown that  $\epsilon(\omega)$  generically has an infinite number of branch points associated with logarithmic



**Figure 11.** The same as figure 10, but where the estimated value is the frequency. The red discontinuous line represents  $\text{Re}(\omega_L)$ , labeled as theory. Note the jump around  $T = 0.4$ .

singularities, and thus an infinite number of possible analytic continuations in the lower half-plane. Although we have studied here the HMF model, it is safe to conjecture that the singularity structure that we have found for the dispersion function  $\epsilon(\omega)$  does not depend on the precise model, at least in 1D. Indeed, the branch points come from the existence of lower or upper bounds for the range of the frequency  $\Omega$ . These singularities make the situation much more complicated in the inhomogeneous case than in the usual homogeneous one. We note however that, to our knowledge, these branch cuts have not been exploited or pointed out in the literature on stellar systems (see for instance [14, 41]); their existence is likely, and the question of their possible relevance is open.

We have studied in detail two special classes of inhomogeneous stationary states: the water-bags and the thermal equilibria. The comparison between direct  $N$ -body numerical simulations and the roots of the dispersion relation  $\epsilon(\omega) = 0$  is satisfactory for water-bags, but we note that water-bags are very special distributions, for which  $\epsilon$  does not present branch cuts. For thermal equilibria, although the analysis of the roots of  $\epsilon(\omega) = 0$  gives useful hints for understanding the dynamics of the system, we find qualitative discrepancies with a simple ‘Landau-like’ damping. This feature was to be expected, given the complicated analytical structure of  $\epsilon(\omega)$ .

This study leaves open several questions: Is it possible to understand better the long time behavior of the linearized Vlasov equation by taking into account all contributions in the inverse Laplace transform, in the spirit of [30]? When the damping is very weak, is there a phenomenon analogous to the ‘quasimodes’ in hydrodynamics [21]? This question necessitates a study of the eigenfunctions of the problem, for stationary states other than water-bags and thermal equilibria. When the damping is weak enough and the perturbation strong enough, is there a phenomenon similar to nonlinear Landau damping [7]?

Finally, we stress the following technical point: we have shown that the linearized Vlasov equation is particularly simple for the HMF model, since the final matrix equation is diagonal. This may make the HMF model particularly well suited for developing, and testing in numerical experiments, a kinetic theory including all collective effects, thus going beyond that of [4].

### Acknowledgments

This work was supported by the Ministry of Education, Science, Sports and Culture, Grant-in-Aid for Young Scientists (B), 19760052, and by the ANR-09-JCJC-009401 INTERLOP project. YYY acknowledges an invited professorship at Nice Sophia-Antipolis University in August–September 2009. Computations were partially performed on the ‘Mésocentre SIGAMM’ machine, hosted by the Observatoire de la Côte d’Azur. We acknowledge discussions with F Bouchet and H Morita, and thank a referee for many useful suggestions.

### Appendix A. Elliptic integrals and elliptic functions

We review the definitions and features of the Legendre elliptic integrals and the Jacobian elliptic functions, which are used to introduce angle–action variables in the pendulum system.

The Legendre elliptic integrals of the first and second kinds are defined by

$$F(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad E(\phi, k) = \int_0^\phi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta \quad (\text{A.1})$$

respectively. Both the first kind and the second kind are odd with respect to  $\phi$ . The complete elliptic integrals of the first and second kinds are defined by setting  $\phi = \pi/2$  as

$$K(k) = F(\pi/2, k), \quad E(k) = E(\pi/2, k) \quad (\text{A.2})$$

respectively. We remark that  $K(0) = E(0) = \pi/2$ ,  $E(1) = 1$  and  $K(1)$  diverges.

The Jacobian elliptic function  $\text{sn}$  is defined as the function such that

$$\text{sn}(F(\phi, k), k) = \sin \phi. \quad (\text{A.3})$$

Other Jacobian elliptic functions  $\text{cn}$  and  $\text{dn}$  are defined from  $\text{sn}$  as

$$\text{cn}(z, k) = \sqrt{1 - \text{sn}^2(z, k)}, \quad \text{dn}(z, k) = \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2(z, k)}, \quad (\text{A.4})$$

where the branches of the square root are chosen such that  $\text{cn}(0, k) = 1$  and  $\text{dn}(0, k) = 1$ .

### Appendix B. Angle–action variables for the pendulum

With the choice of the potential phase  $\psi = 0$  the potential  $\phi[f_0](\theta, t)$  (5) is rewritten as

$$\phi[f_0](\theta, t) = -M_0 \cos \theta,$$

where  $M_0$  is the magnetization of the stationary state  $f_0$ , which depends only on the one-particle energy (8). The one-particle Hamiltonian (8) is hence the same as that of the

pendulum expressed by the Hamiltonian

$$H(\theta, p) = \frac{1}{2}p^2 - M_0 \cos \theta. \quad (\text{B.1})$$

We introduce angle–action variables  $(w, J)$  in the pendulum system.

The action  $J$  is generally defined by

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint p \, d\theta, \quad (\text{B.2})$$

where the momentum  $p$  is a function of  $\theta$  and energy  $h$ :

$$p = \pm \sqrt{2(h + M_0 \cos \theta)}.$$

Performing the integration of (B.2), the action variable  $J_\alpha$  defined in  $U_\alpha$  is expressed as

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{4\sqrt{M_0 k}}{\pi} E(1/k), & (\theta, p) \in U_1 \\ J_2 &= \frac{8\sqrt{M_0}}{\pi} [E(k) - (1 - k^2)K(k)], & (\theta, p) \in U_2 \\ J_3 &= \frac{4\sqrt{M_0 k}}{\pi} E(1/k), & (\theta, p) \in U_3 \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

where  $K(k)$  and  $E(k)$  are the complete elliptic integrals of the first and second kinds respectively, and

$$k = \sqrt{\frac{h + M_0}{2M_0}}.$$

The angle variable  $w$  is obtained through a generator  $W(\theta, J)$  of the canonical transformation  $(\theta, p) \mapsto (w, J)$  as

$$w = \frac{\partial W}{\partial J}(\theta, J). \quad (\text{B.4})$$

We define the generator as

$$W(\theta, J) = \int p(q, J) \, dq; \quad (\text{B.5})$$

then the angle variable  $w_\alpha$  defined in  $U_\alpha$  is written as

$$\begin{aligned} w_1 &= \pi \frac{F(\theta/2, 1/k)}{K(1/k)} & (\theta, p) \in U_1 \\ w_2 &= \begin{cases} \frac{\pi}{2} \frac{F(\Theta, k)}{K(k)} & (\theta, p) \in U_2, \quad p \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} \left( 2 - \frac{F(\Theta, k)}{K(k)} \right) & (\theta, p) \in U_2, \quad p < 0 \end{cases} & (\text{B.6}) \\ w_3 &= -\pi \frac{F(\theta/2, 1/k)}{K(1/k)} & (\theta, p) \in U_3, \end{aligned}$$

where  $\Theta$  satisfies  $k \sin \Theta = \sin(\theta/2)$ . We defined  $w_2$  to be continuous at the turning point  $w_2 = \pi/2$ . Accordingly the range of the angle variable is  $-\pi < w_\alpha \leq \pi$  for  $\alpha = 1, 3$  and  $-\pi/2 < w_2 \leq 3\pi/2$ .

Summarizing, we have introduced bijective transformations  $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$  where

$$\begin{aligned} V_1 &= (-\pi, \pi] \times (4\sqrt{M_0}/\pi, \infty), \\ V_2 &= (-\pi/2, 3\pi/2] \times (0, 8\sqrt{M_0}/\pi), \\ V_3 &= (-\pi, \pi] \times (4\sqrt{M_0}/\pi, \infty). \end{aligned} \tag{B.7}$$

These bijective transformations  $\varphi_\alpha$  are canonical transformations from  $(\theta, p)$  to  $(w_\alpha, J_\alpha)$ , and hence  $d\theta \wedge dp = dw_\alpha \wedge dJ_\alpha$  holds.

The pendulum is integrable and hence the Hamiltonian  $H(\theta, p)$  is a function of the action only, written as  $H_\alpha(J_\alpha)$ . The pendulum oscillates in  $U_2$  and rotates in  $U_1$  and  $U_3$ , and its frequency  $\Omega_\alpha(J_\alpha)$  is obtained by

$$\Omega_\alpha(J_\alpha) = \frac{dH_\alpha}{dJ_\alpha}(J_\alpha). \tag{B.8}$$

The frequency  $\Omega_\alpha(J_\alpha)$  defined in  $U_\alpha$  is computed as

$$\begin{aligned} \Omega_1(J_1) &= \frac{\pi\sqrt{M_0}k}{K(1/k)} & (\theta, p) \in U_1, \\ \Omega_2(J_2) &= \frac{\pi\sqrt{M_0}}{2K(k)} & (\theta, p) \in U_2, \\ \Omega_3(J_3) &= \frac{\pi\sqrt{M_0}k}{K(1/k)} & (\theta, p) \in U_3. \end{aligned} \tag{B.9}$$

Using the symmetries in the definition of the action–angle variables, it is easy to prove the following relations for the  $c_{m,\alpha}$  and  $s_{m,\alpha}$  functions defined in (24):

$$c_{m,3}(J) = c_{m,1}(J); \quad s_{m,3}(J) = -s_{m,1}(J), \tag{B.10}$$

$$c_{m,2}(J) = 0 \quad \text{if } m \text{ odd}; \quad s_{m,2}(J) = 0 \quad \text{if } m \text{ even}. \tag{B.11}$$

The final remark concerns the continuity of the angle–action variables. For instance, the limits of  $J_\alpha$  at the separatrix do not coincide:

$$\lim_{h \rightarrow h^{(s)} - 0} J_2 = 2 \quad \lim_{h \rightarrow h^{(s)} + 0} J_1 = 2 \quad \lim_{h \rightarrow h^{(s)} + 0} J_3,$$

with  $h^{(s)}$  the separatrix energy; the limit  $h \rightarrow h^{(s)} \pm 0$  is the same as the limit  $k \rightarrow 1 \pm 0$ . The difference of the factor 2 comes from the definition of the action, which represents the area surrounded by a closed orbit. The closed orbit goes to both upper *and* lower half-planes of  $p$  for  $h < h^{(s)}$ , but it goes to upper *or* lower half-planes for  $h > h^{(s)}$ . Similarly the limits of  $w_\alpha$  at the separatrix do not coincide.

### Appendix C. General potentials

The computations in section 2 are made easier by the special form of the HMF potential: the two-body interaction contains only one (complex) Fourier mode. As a consequence, the matrix equation (30) yielding the perturbation's potential is of size 2.

As a generic interaction potential with periodic boundary condition contains an infinite number of Fourier modes, the dispersion relation will appear as the determinant of an infinite-size matrix, and the perturbation's potential will be solution of an infinite-size matrix equation. In the HMF case, this matrix is actually diagonal. It is important to know whether this is a generic property or not.

The coefficients of the infinite matrix will contain the generalizations of the  $c_m$  and  $s_m$  functions:

$$c_{m,n}(J) = \int \cos(n\theta(w, J))e^{imw} dw; \quad s_{m,n}(J) = \int \sin(n\theta(w, J))e^{imw} dw, \quad (\text{C.1})$$

where  $w$  and  $J$  are the angle and action variables in the potential defined by the stationary state. Provided that this stationary state is symmetric under the reflexion  $\theta \rightarrow -\theta$ , it is easy to show that the  $c_{m,n}$ s and  $s_{m,n}$ s enjoy properties similar to (B.10) and (B.11). However, there is no reason that the non-diagonal terms of the matrix expression of the following type:

$$F_{\bar{c}c,nn'} = \sum_m \int \frac{mf'_0(J)}{m\Omega(J) - \omega} \bar{c}_{m,n}(J)c_{m,n'}(J) dJ \quad (\text{C.2})$$

should vanish. The case of HMF is thus particularly simple.

We have considered until now only periodic potentials. For non-periodic potentials, one can no longer use the Fourier basis to expand the functions of the spatial variable. The trick is to use a doubly orthogonal family of functions to expand  $\phi_1$  and  $\rho_1 = \int f_1 dp$ . The dispersion relation is then obtained in a very similar way; see for instance [13].

#### Appendix D. Singularity of $F_{\bar{c}c}$ and $F_{\bar{s}s}$ around $\omega = m\omega_0$

To describe the singularity of  $F_{\bar{c}c,2}^{(m)}(\omega)$  and  $F_{\bar{s}s,2}^{(m)}(\omega)$  at  $\omega = m\omega_0$ , we consider the following integral:

$$\varphi(\omega) = \int_a^b \frac{g(J)}{h(J) - \omega} dJ \quad (\text{D.1})$$

and suppose that the function  $h(J)$  has no stationary point, and that its range is  $[\alpha, \beta]$  where  $\alpha = h(b)$  and  $\beta = h(a)$ . This setting covers the situation that we are interested in, with  $g(J) = f'_0(J)|c_{m,2}(J)|^2$ , and  $h(J) = m\Omega_2(J)$ . A change of variable  $p = h(J)$  yields

$$\varphi(\omega) = - \int_\alpha^\beta \frac{g(h^{-1}(p))(h^{-1})'(p)}{p - \omega} dp = - \int_\alpha^\beta \frac{\tilde{g}(p)}{p - \omega} dp \quad (\text{D.2})$$

where  $\tilde{g}(p) = g(h^{-1}(p))(h^{-1})'(p)$ . We are interested in the singularity of  $\varphi(\omega)$  near  $\omega = \beta$ .

Suppose that  $\varphi(\omega)$  is defined for  $\text{Im}(\omega) > 0$ , and we want to perform the analytic continuation of  $\varphi(\omega)$  to the whole  $\omega$ -plane. Let  $r, \theta_1$  and  $\theta_2$  be real, with  $0 < r < \beta - \alpha$ . We move from  $\omega_1 = \beta - re^{-i\theta_1}$  with  $\theta_1 > 0$  (so that  $\omega_1$  is in the upper half-plane) to  $\omega_2 = \beta - re^{-i\theta_2}$  with  $\theta_2 < 0$  (in the lower half-plane), using one of the paths represented in figure 3. These paths are parameterized by  $s \in [0, 1]$ :

$$\begin{aligned} L_0 : \theta(s) &= (1-s)\theta_1 + s\theta_2 & L_1 : \theta(s) &= (1-s)\theta_1 + s(\theta_2 + 2\pi) \\ L_2 : \theta(s) &= (1-s)\theta_1 + s(\theta_2 + 4\pi). \end{aligned}$$

The path  $L_1$  does not cross the integration interval, so no residue contribution appears. The path  $L_0$  crosses the integration interval once from the upper to the lower side, and hence the residue of the singular point,  $\omega = \beta - re^{-i\theta_2}$ , positively contributes to  $\varphi(\omega)$ . The path  $L_2$  crosses the integration interval once from the lower to the upper side, so the residue negatively contributes to  $\varphi(\omega)$ .

One may of course consider similarly other paths, and hence the analytic continuation gives

$$\varphi(\omega; n) = -P \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\tilde{g}(p)}{p - \omega} dp + 2\pi i(1 - n)\tilde{g}(\omega) \tag{D.3}$$

where  $P$  represents the principal value, and  $n$  the path chosen:

$$L_n : \theta(s) = (1 - s)\theta_1 + s(\theta_2 + 2\pi n).$$

Consequently, the branch point  $\omega = \beta$  has a logarithmic type singularity. We remark that the singularity comes from the existence of the upper boundary of the range of  $h(J)$ .

Now, to describe more precisely the singularity, we expand  $\tilde{g}$  around  $p = \beta$  as  $\tilde{g}(p) = c(p - \beta)^n$ , with  $n$  an integer. Then it is easy to check by direct integration that  $\varphi(\omega)$  has a branch point for  $\omega = \beta$ , and that the singularity is of the type  $\varphi(\omega) = (\omega - \beta)^n \ln(\omega - \beta)$ .

To apply the previous result to  $F_{cc,2}^{(m)}(\omega)$  and  $F_{ss,2}^{(m)}(\omega)$ , we need to expand  $c_{m,2}(J_2)$  and  $s_{m,2}(J_2)$  in powers of  $J_2$ . For this purpose, we will use the variable  $k = \sqrt{(h + M_0)/2M_0}$  rather than  $J_2$ ; close to  $k = 0$ , we have  $J_2 = O(k^2)$ . In an abuse of notation, we will keep the same name for the functions  $c_{m,2}(k)$  and  $s_{m,2}(k)$ . We use now the following expressions, obtained from (B.6):

$$c_{m,2}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} \left[ 1 - 2k^2 \operatorname{sn}^2 \left( \frac{2}{\pi} K(k)w, k \right) \right] e^{imw} dw \tag{D.4}$$

$$s_{m,2}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} k \operatorname{sn} \left( \frac{2}{\pi} K(k)w, k \right) \operatorname{dn} \left( \frac{2}{\pi} K(k)w, k \right) e^{imw} dw. \tag{D.5}$$

We essentially need to know the Fourier coefficients of the  $\operatorname{sn}$  and  $\operatorname{dn}$  functions appearing in the above expressions, which are  $2\pi$  periodic functions of  $w_2$ . These Fourier coefficients are given by the series expansions [40]

$$\operatorname{sn}(u, k) = \frac{2\pi}{kK(k)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{q^{n+1/2}}{1 - q^{2n+1}} \sin \left[ (2n + 1) \frac{\pi u}{2K(k)} \right] \tag{D.6}$$

$$\operatorname{dn}(u, k) = \frac{\pi}{2K(k)} + \frac{2\pi}{K(k)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{q^n}{1 + q^{2n}} \cos \left[ 2n \frac{\pi u}{2K(k)} \right] \tag{D.7}$$

where  $q(k) = k^2/16 + O(k^4)$ . Collecting the various contributions, one finally finds that close to  $k = 0$ ,

$$c_{m,2}(k) = O(k^m) \quad \text{if } m \text{ even}; \quad s_{m,2}(k) = O(k^m) \quad \text{if } m \text{ odd.} \tag{D.8}$$

Recall that  $c_{m,2} = 0$  for odd  $m$ , and  $s_{m,2} = 0$  for even  $m$ . Now  $\lim_{J_2 \rightarrow +0} \Omega'_2(J_2) = -c$ , with  $c > 0$ , and generically  $f'_0(J = 0) \neq 0$ . Then putting together the previous expressions, we

conclude that

$$F_{\bar{c}c,2}^{(m)}(\omega) \sim \text{const.} \times (\omega - m\omega_0)^m \ln(\omega - m\omega_0) \quad \text{if } m \text{ even,} \quad (\text{D.9})$$

$$F_{\bar{s}s,2}^{(m)}(\omega) \sim \text{const.} \times (\omega - m\omega_0)^m \ln(\omega - m\omega_0) \quad \text{if } m \text{ odd.} \quad (\text{D.10})$$

In particular the singularity becomes weaker and weaker for increasing  $m$ . The singularity at  $\omega = 0$  is more complicated to analyze. We do not study it in this paper.

### Appendix E. Finding roots of $\epsilon(\omega)$

In order to evaluate  $F_{\bar{c}c}$  and  $F_{\bar{s}s}$  in (31), we have to compute the integrals in expressions (29) and add the residue contributions. For this latter part, we need to compute complete elliptic integrals and Jacobian elliptic functions in the whole complex plane (these functions appear in the expressions for  $\Omega_\alpha$ ,  $c_{m,\alpha}$  and  $s_{m,\alpha}$ ). For this purpose, we use their expressions in terms of theta functions, and refer the reader to [42]–[45].

#### E.1. Pole contributions

We need to find the roots  $J_\alpha^*$  of  $m\Omega_\alpha(J_\alpha) - \omega$  for all  $m \in \mathbb{Z}$  and  $\omega = \omega_r + i\omega_i \in \mathbb{C}$ .

First, for each  $\alpha, m$  and  $\omega$ , we are able to show that there is only one quadrant of the  $J$ -plane where one or several roots may exist. This helps with the numerical root finding procedure, and is also important for understanding the sign of the residue contribution to  $F_{\bar{c}c,\alpha}^{(m)}$  when  $\omega$  crosses the real axis.

Then, we look for the minima of  $|m\Omega_\alpha(J_\alpha) - \omega|$  which are equal to zero. Numerically, we use the Simplex algorithm of Nelder and Mead, included in the GNU Scientific Library (GSL), with a grid of initial conditions distributed in the candidate quadrant. In all cases and for each  $\alpha$ , we find exactly one zero, and all initial conditions of the minimization procedure yield the same result.

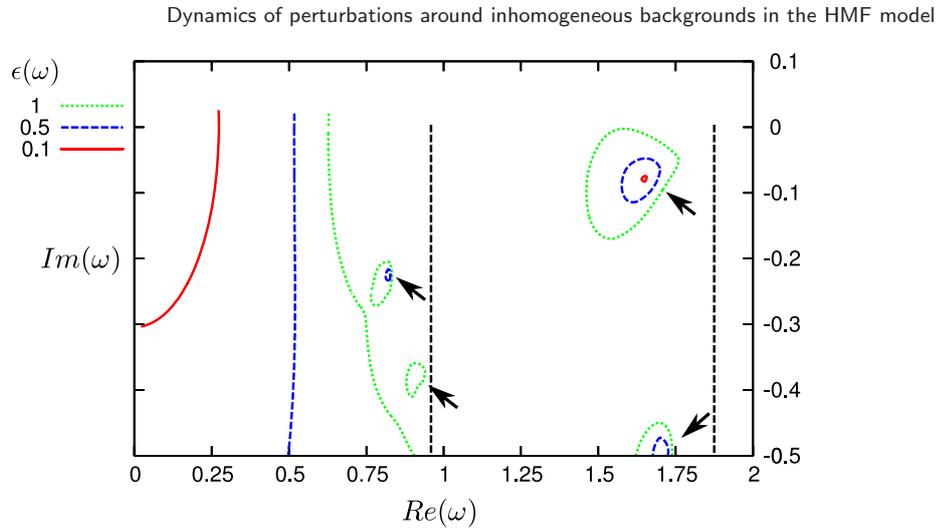
The last step is to compute the residue associated with  $J_\alpha^*$ , multiplied by  $\pm 2i\pi$ , depending on how  $J_\alpha^*$  crosses the real axis when  $\omega$  crosses the real axis (from the upper half-plane to the lower one, or from the lower to the upper one).

Finally, we truncate the sum over  $m \in \mathbb{Z}$  at  $\pm 5$ . Going further did not change the results, up to our numerical precision.

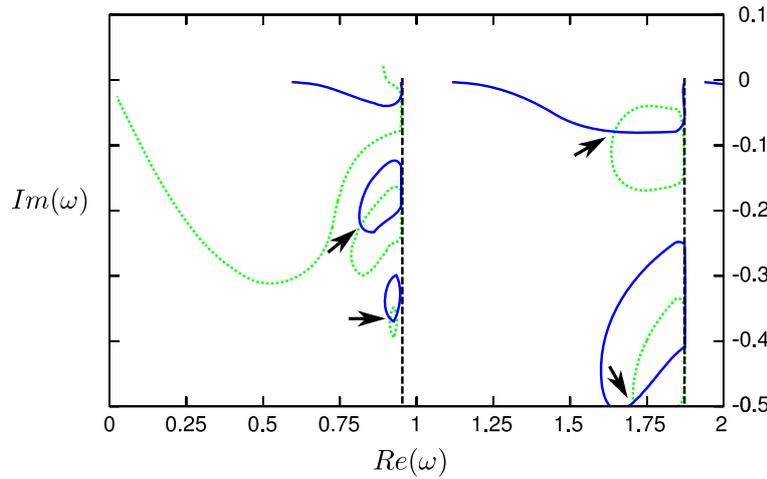
#### E.2. Integral parts of $F_{\bar{c}c}$ and $F_{\bar{s}s}$

Apart from finding the residue contributions, the computation of  $F_{\bar{c}c}$  and  $F_{\bar{s}s}$  is based mainly on several unidimensional integrations. To perform them we typically used the adaptive integration QAG and QAGIU routines based on Gauss–Kronrod rules included in the GSL library. The first one considers a bounded domain (it is the case in the  $U_2$  region) whereas the second one integrates over a semi-infinite interval (it is the case in the  $U_1$  and  $U_3$  regions).

To avoid any integration problem due to the singularity at the separatrix  $J_s$ , we cut the integration domain at a distance  $\epsilon$  from  $J_s$ . We choose  $\epsilon$  so that it does not modify the results up to our numerical precision, set to  $10^{-5}$  for the absolute error and  $10^{-4}$  for the



**Figure E.1.** Level curves of  $|\epsilon(\omega)|$  for thermal equilibrium with  $T = 0.2$ . Vertical dashed black lines represent branch cuts. Regions where roots may exist are indicated by arrows.



**Figure E.2.** Level curves of  $\text{Re}(\epsilon(\omega)) = 0$  (straight blue line) and  $\text{Im}(\epsilon(\omega)) = 0$  (dotted green line) for thermal equilibrium with  $T = 0.2$ . Vertical dashed black lines represent branch cuts. Intersections are roots of  $\epsilon$  (marked by arrows). There are spurious intersections close to the branch cuts.

relative error. Furthermore, the integrals over  $J$  in the  $U_1$  and  $U_3$  regions are divided into two parts for treating separately the difficulties around  $J = 4\sqrt{M_0}/\pi$  and  $J = \infty$ . For convenience, we also use the variable  $k = \sqrt{(E(J) + M_0)/2M_0}$  instead of  $J$  to perform the integrations, where  $E(J)$  is the energy associated with the action  $J$ .

Finally, we truncate the sum over  $m \in \mathbb{Z}$  at  $\pm 5$ . Going further did not change the results, up to our numerical precision.

[doi:10.1088/1742-5468/2010/08/P08002](https://doi.org/10.1088/1742-5468/2010/08/P08002)

### E.3. Roots of $\epsilon(\omega)$

Due to the complicated structure of the dispersion function  $\epsilon(\omega)$ , we do not use any multidimensional root finding or minimization method. Rather, we chose to compute  $|\epsilon(\omega)|$  on a large two-dimensional grid, to identify the regions where a root may exist; see figure E.1. After this preliminary computation, we plot the zero-level curves of  $\text{Re}(\epsilon(\omega))$  and  $\text{Im}(\epsilon(\omega))$ . The roots of  $\epsilon(\omega)$  are localized at the intersection points of these curves (see figure E.2). Let us stress that a careful analysis close to branch cuts is often needed.

*Note added in proof.* While we were in the final stage of preparation of this article, reference [46] was published, which provides criteria for the stability of inhomogeneous stationary states of the Vlasov equation, with the example of the HMF model. The method used in [46] yields simpler stability criteria than computing the roots of the dispersion relation. However, it provides less dynamical information than the method used in the present article.

### References

- [1] Neunzert H and Wick J, *Theoretische und numerische Ergebnisse zur nicht linearen Vlasov Gleichung*, 1972 *Numerische Lösung Nichtlinearer Partieller Differential und Integrodifferentialgleichungen (Lecture Notes in Math.* vol 267) (Berlin: Springer) pp 159–85 (Tagung, Math. Forschungsinst., Oberwolfach, 1971)
- [2] Braun W and Hepp K, *The Vlasov dynamics and its fluctuations in the  $1/N$  limit of interacting particles*, 1977 *Commun. Math. Phys.* **56** 101
- [3] Campa A, Dauxois T and Ruffo S, *Statistical mechanics and dynamics of solvable models with long-range interactions*, 2009 *Phys. Rep.* **480** 57
- [4] Chavanis P H, *Kinetic equations for systems with long-range interactions: a unified description*, 2010 *J. Stat. Mech.* P05019
- [5] Balescu R, 1997 *Statistical Dynamics; Matter out of Equilibrium* (London: Imperial College Press) (Singapore: World Scientific)
- [6] Chavanis P H, *Kinetic theory with angle–action variables*, 2006 *Physica A* **377** 469
- [7] Manfredi G, *Long-time behavior of nonlinear Landau damping*, 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 2815
- [8] Barré J and Yamaguchi Y Y, *Small traveling clusters in attractive and repulsive Hamiltonian mean-field models*, 2009 *Phys. Rev. E* **79** 036208
- [9] Landau L, *On the vibrations of the electronic plasma*, 1946 *J. Phys.—USSR* **10** 25
- [10] Kalnajs A J, *Dynamics of flat galaxies. IV—the integral equation for normal modes in matrix form*, 1977 *Astrophys. J.* **212** 637
- [11] Polyachenko V L and Shukhman I G, *General models of collisionless spherically symmetric stellar systems—a stability analysis*, 1981 *Sov. Astron. (Tr. Astron. Zh.)* **25** 533
- [12] Palmer P L and Papaloizou J, *Instability in spherical stellar systems*, 1987 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **224** 1043
- [13] Weinberg M D, *Self-gravitating response of a spherical galaxy to sinking satellites*, 1989 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **239** 549
- [14] Weinberg M D, *Weakly damped modes in star clusters and galaxies*, 1994 *Astrophys. J.* **421** 481
- [15] Bertin G, Pegoraro F, Rubini F and Vesperini E, *Linear stability of spherical collisionless stellar systems*, 1994 *Astrophys. J.* **434** 94
- [16] Mathur S D, *Existence of oscillation modes in collisionless gravitating systems*, 1990 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **243** 529
- [17] Weinberg M D, *Vertical oscillation of the Galactic disk*, 1991 *Astrophys. J.* **373** 391
- [18] Louis P D, *Discrete oscillation modes and damped stationary density waves in one-dimensional collisionless systems*, 1992 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **258** 552
- [19] Vesperini E and Weinberg M D, *Perturbations of spherical stellar systems during flyby encounters*, 2000 *Astrophys. J.* **534** 598
- [20] Habib S, Kandrup H E and Yip P F, *Gravitational Landau damping for an isotropic cluster of stars*, 1986 *Astrophys. J.* **309** 176
- [21] Briggs R J, Daugherty J D and Levy R H, *Role of Landau damping in crossed-field electron beams and inviscid shear flow*, 1970 *Phys. Fluids* **13** 421
- [22] Corngold N R, *Linear response of the two-dimensional pure electron plasma: quasimodes for some model profiles*, 1995 *Phys. Plasmas* **2** 620

Dynamics of perturbations around inhomogeneous backgrounds in the HMF model

- [23] Spencer R L and Rasband S N, *Damped diocotron quasi-modes of non-neutral plasmas and inviscid fluids*, 1997 *Phys. Plasmas* **4** 53
- [24] Finn J M, del-Castillo-Negrete D and Barnes D C, *Compressional effects in nonneutral plasmas, a shallow water analogy and  $m = 1$  instability*, 1999 *Phys. Plasmas* **6** 3744
- [25] Schecter D A *et al*, *Inviscid damping of asymmetries on a two-dimensional vortex*, 2000 *Phys. Fluids* **12** 2397
- [26] Pariev V I *et al*, *Stability analysis of hollow electron columns including compressional and thermal effects: integrability condition and numerical simulations*, 2002 *Phys. Plasmas* **9** 4863
- [27] Pariev V I and Delzanno G L, *Stability analysis of hollow electron columns including compressional and thermal effects: initial value treatment*, 2003 *Phys. Plasmas* **10** 1262
- [28] Kotelnikov I A, Pozzoli R and Romé M, *Diocotron instability in non-neutral plasmas with a stationary point in the rotation frequency profile*, 2005 *Phys. Plasmas* **12** 092105
- [29] Volponi F and Okolicsanyi M, *Landau pole induced vorticity growth in a class of non-monotonic shear flows*, 2008 *J. Phys. A: Math. Theor.* **41** 145501
- [30] Bouchet F and Morita H, *Large time behavior and asymptotic stability of the 2D Euler and linearized Euler equations*, 2010 *Physica D* **239** 948
- [31] Inagaki S and Konishi T, *Dynamical stability of a simple model similar to self-gravitating systems*, 1993 *Publ. Astron. Soc. Japan* **45** 733
- [32] Antoni M and Ruffo S, *Clustering and relaxation in Hamiltonian long-range dynamics*, 1995 *Phys. Rev. E* **52** 2361
- [33] Inagaki S, *Kinetic equation for the modified Konishi–Kaneko system*, 1996 *Prog. Theor. Phys.* **96** 1307
- [34] Inagaki S, *Thermodynamic stability of modified Konishi–Kaneko system*, 1993 *Prog. Theor. Phys.* **90** 577
- [35] Caglioti E and Rousset F, *Long time estimates in the mean field limit*, 2008 *Arch. Ration. Mech. Anal.* **190** 517
- [36] Jain K, Bouchet F and Mukamel D, *Relaxation times of unstable states in systems with long range interactions*, 2007 *J. Stat. Mech.* P11008
- [37] Gluckstern R, *Analytic model for halo formation in high current ion linacs*, 1994 *Phys. Rev. Lett.* **73** 1247
- [38] Benedetti C and Turchetti G, *Collective instabilities and collisional effects for space charge dominated beams*, 2007 *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A* **577** 133
- [39] Yamaguchi Y Y *et al*, *Stability criteria of the Vlasov equation and quasi stationary states of the HMF model*, 2004 *Physica A* **337** 36
- [40] Abramowitz M and Stegun I A, 1964 *Handbook of Mathematical Functions* (New York: Dover)
- [41] Weinberg M D, *Fluctuations in finite- $N$  equilibrium stellar systems*, 1998 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **297** 101
- [42] Bulirsch R, *Handbook series special functions, numerical calculations of elliptic integrals and elliptic functions*, 1965 *Numer. Math.* **7** 78
- [43] Hofsommer D J and van de Riet R P, *On the numerical calculation of elliptic integrals of the first and second kind and the elliptic function of Jacobi*, 1963 *Numer. Math.* **5** 291
- [44] Morita T and Horiguchi T, *Convergence of the arithmetic–geometric mean procedure for the complex variables and the calculation of the complete elliptic with complex modulus*, 1973 *Numer. Math.* **20** 425
- [45] Morita T, *Calculation of the complete elliptic with complex modulus*, 1978 *Numer. Math.* **29** 233
- [46] Campa A and Chavanis P H, *A dynamical stability criterion for inhomogeneous quasi-stationary states in long-range systems*, 2010 *J. Stat. Mech.* P06001

J. Stat. Mech. (2010) P08002

**5.2** “*Algebraic damping in the one-dimensional Vlasov equation*” [BOY11]

## Algebraic damping in the one-dimensional Vlasov equation

Julien Barré<sup>1</sup>, Alain Olivetti<sup>1</sup> and Yoshiyuki Y Yamaguchi<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire J.A. Dieudonné, Université de Nice Sophia-Antipolis, UMR CNRS 6621, Parc Valrose, F-06108 Nice Cedex 02, France

<sup>2</sup> Department of Applied Mathematics and Physics, Graduate School of Informatics, Kyoto University, Kyoto 606-8501, Japan

E-mail: [jbarre@unice.fr](mailto:jbarre@unice.fr)

Received 7 April 2011, in final form 8 July 2011

Published 16 September 2011

Online at [stacks.iop.org/JPhysA/44/405502](http://stacks.iop.org/JPhysA/44/405502)

### Abstract

We investigate the asymptotic behaviour of a perturbation around a spatially non-homogeneous stable stationary state of a one-dimensional Vlasov equation. Under general hypotheses, after transient exponential Landau damping, a perturbation evolving according to the linearized Vlasov equation decays algebraically with the exponent  $-2$  and a well-defined frequency. The theoretical results are successfully tested against numerical  $N$ -body simulations, corresponding to the full Vlasov dynamics in the large  $N$  limit, in the case of the Hamiltonian mean-field model. For this purpose, we use a weighted particles code, which allows us to reduce finite size fluctuations and to observe the asymptotic decay in the  $N$ -body simulations.

PACS numbers: 05.20.Dd, 45.50.-j, 52.25.Dg, 98.10.+z

(Some figures in this article are in colour only in the electronic version)

### 1. Introduction

Systems of particles interacting through long-range forces are usually described over a certain time scale by Vlasov equations. This situation is encountered in various fields of physics: plasma physics, self-gravitating systems, wave-particle interactions for instance. One may add here two-dimensional fluid dynamics, since the 2D Euler equation shares many properties with the Vlasov equation.

A Vlasov equation usually admits a continuous infinity of stationary states. Investigating the stability of these states is a natural question. In a celebrated paper [1], Landau considered stationary states of a plasma which are homogeneous in space, and addressed the issue of the asymptotic behavior of a small perturbation through a Laplace transform analysis of the Vlasov equation linearized around the stationary state. This was the starting point of an extremely

abundant research on Landau damping in plasma physics, and more generally on the fate of perturbations around stationary states of the Vlasov equation, usually homogeneous in space. Now we focus on the known mathematically rigorous results, all of them obtained in the context of homogeneous stationary solutions of the Vlasov equation. A rigorous linear treatment ‘in the manner of Landau’ is provided for instance in [2, 3]: under very strong regularity hypotheses for the stationary state and the perturbation (both should be analytic functions of the velocity), it proves the exponential asymptotic decay of a solution of the linearized Vlasov equation in a bounded spatial domain, as predicted by Landau. However, it is known that such a linear solution may decay at a much slower rate, and even not decay at all, when the analyticity hypothesis for the perturbation (see [4, 5] for references in the physics literature) or the bounded spatial domain hypothesis [6] is not satisfied. Mouhot and Villani proved recently the asymptotic exponential decay of a perturbation evolving according to the full nonlinear equation in a bounded domain, using analytic norms (which implies the analyticity of the stationary state and its perturbation) [7, 8]. However, it is shown in [9] (see also [10] for a previous non-rigorous treatment) that such a nonlinear damping may fail if weaker norms are used.

In many cases, one would like to ask the same question in the case of non-homogeneous stationary solutions. In particular, this is the case in the astrophysical context, where the concept of Landau damping is often used [11]. Reference [2] contains a discussion of the linearized Vlasov equation around a non-homogeneous stationary solution. However, the analysis of this situation faces some technical difficulties. At a formal level, these difficulties may be partially overcome using the ‘matrix’ formulation introduced in the works of Kalnajs [12] and Polyachenko and Schukhman [13]. Since then, many papers have computed linear instability rates in an astrophysical context using this method (see [14, 15], to mention just a few). Recently, some new methods to investigate the stability and compute such growing rates for unstable non-homogeneous stationary states have been introduced and tested on toy models [16–19]. Beyond these unstable states, stable oscillating modes in the context of 1D self-gravitating models have also been investigated in some detail [20, 21]. However, there seem to be very few analytical studies of what would be the strict analog of Landau damping: the decay of a perturbation close to a stable non-homogeneous solution of the Vlasov equation. The reason is probably that such a study is technically more difficult, since it requires the further step of an analytical continuation. Weinberg has performed this step using a numerical approximation and computed the analog of a Landau damping rate in some cases [22] (see also [23]). However, at variance with the homogeneous case, we will see in this paper that this Landau damping rate never controls the asymptotic decay of the perturbation.

It is well known that the 2D Euler equation, as well as other related conservative 2D fluid equations, share a lot of similarities with the Vlasov equation. There have been many linear investigations of perturbations around stationary base flows such as a vortex or a shear flow, starting with Rayleigh [24]. Transposing these studies in the context of the Vlasov equation, linearized around a non-homogeneous stationary state, one would expect the following generic picture: the dispersion relation has branch point singularities on the real axis, which make the analytical continuation procedure used in Landau’s work trickier; if the stationary state is stable, the asymptotic decay of the perturbation is controlled by these branch point singularities, and is in general algebraic. An exponential decay of the perturbation ‘in the manner of Landau’ may be visible, but it is restricted to an intermediate time window, before the algebraic decay kicks in. In particular, it seems reasonable to expect that the exponential damping studied by Weinberg in the gravitational case [22] is actually a transient effect (this statement does not preclude of course its potential physical relevance). We remark that such an exponential

decay followed by an algebraic decay has also been studied in a dissipative system of coupled oscillators [25]; the decay mechanism in this case is similar to the one in Vlasov systems.

Smereka [26] investigated the asymptotic behavior of a linearized 1D Vlasov equation around non-homogeneous stationary states, and reached the conclusions outlined above; his analysis is however limited to a particular class of interactions, and does not contain direct numerical simulations. Moreover, his conclusion is affected by a non-generic choice of the perturbations, as we will discuss later on. Besides [26], we are not aware of other studies tackling this problem.

To be more specific, our goals in this paper are as follows.

- (i) Study as generally as possible the linear asymptotic decay of perturbations around non-homogeneous stationary states of a 1D Vlasov equation.
- (ii) Perform explicitly the computations in the simple case of the Hamiltonian mean-field (HMF) model.
- (iii) Compare the analytical results with detailed numerical computations; this is made possible by the use of a simple toy model such as HMF.

This paper is organized as follows. All theoretical results are described in section 2. From the linearized Vlasov equation, we derive two equations for the Fourier–Laplace components of perturbation and of potential in section 2.1. In section 2.2, these two equations are formally solved in the Laplace space with the help of biorthogonal functions; an example of such functions is given in section 2.3 for spatially periodic systems. The asymptotic dynamics of a perturbation is determined by its singularities in the Laplace space; we classify the singularities in section 2.4. Focusing on one type of singularities, which is in many cases the relevant one, we show that the perturbation asymptotically decays algebraically with the exponent  $-2$  in section 2.5. These general results are applied to the HMF model in section 2.6; in this case, we show that the two components of the magnetization vector decay with exponents  $-3$  and  $-2$ , respectively. We note that the exponent  $-3$  comes from a symmetry of the HMF model. The theoretical results for the HMF model are numerically examined in section 3. In order to test the two exponents separately, we introduce two types of perturbation in sections 3.1 and 3.2, respectively. Section 4 is devoted to our conclusions.

## 2. Theory

We consider the Vlasov equation in one dimension for the one-particle distribution function  $f(x, p, t)$ :

$$\partial_t f + \partial_p H \partial_x f - \partial_x H \partial_p f = 0, \tag{1}$$

where  $x \in D \subset \mathbb{R}$  is the position variable,  $p \in \mathbb{R}$  is the conjugate momentum variable and  $H$  is the one-particle Hamiltonian defined by

$$H[f](x, p, t) = \frac{p^2}{2} + \phi[f](x, t) + \phi_{\text{ext}}(x). \tag{2}$$

The potential  $\phi[f](x, t)$  is defined from the two-body interaction potential  $v$  and the distribution  $f$  as

$$\phi[f](x, t) = \int_D \int_{\mathbb{R}} v(x-y) f(y, p, t) \, dp \, dy, \tag{3}$$

and  $\phi_{\text{ext}}(x)$  is associated with an external force  $F_{\text{ext}}(x)$  as

$$F_{\text{ext}}(x) = -\partial_x \phi_{\text{ext}}(x). \tag{4}$$

Although it would be interesting to consider a time-dependent and/or non-potential external force, in this paper we focus on a static and potential force such as (4). The domain  $D$  is typically  $\mathbb{R}$  or  $[0, 2\pi]$ .

- (i) *Case 1*,  $D = \mathbb{R}$ . The model is defined on the whole real line. A typical example is a 1D self-gravitating system, a very much studied caricature of the more realistic 3D self-gravitating systems.
- (ii) *Case 2*,  $D = [0, 2\pi]$ . The system has periodic boundary conditions. Such boundary conditions are sometimes used in plasma physics; it is also the setting of the HMF model, a paradigmatic toy model for long-range interacting systems (see section 2.6).

In the following subsections we give a general analysis of the linearized Vlasov equation, which applies to both cases.

### 2.1. Two equations to be solved

Let us call  $f_0$  a stationary solution of the Vlasov equation (1). The one-particle Hamiltonian  $H[f_0](x, p)$  is integrable, and its trajectories are level curves of  $H[f_0]$ . If  $D = \mathbb{R}$ , one could imagine trajectories that are unbounded and not periodic. However, the stationarity of  $f_0$  imposes that  $f_0(x, p)$  is constant along the trajectories; this imposes that such unbounded non-periodic trajectories either do not exist, or are not populated by the density  $f_0$ . As a consequence, we can always define the angle  $\theta$  and the action  $J$  from the original coordinate  $(x, p)$ . Strictly speaking, this change of variables is not always one-to-one: whenever there exists a separatrix in the one-particle Hamiltonian  $H[f_0](x, p)$ , there are distinct trajectories with the same value of the action. Thus, although we will formally use this change of variables, a careful treatment may be needed for specific potentials (see for instance [27]).

We add a perturbation  $f_1$  to the stationary solution, and start from an initial condition  $f_0 + f_1(t = 0)$ . The Hamiltonian  $H$  is linear with respect to  $f$ , and we have  $H[f_0 + f_1] = H[f_0] + \phi[f_1]$ , where

$$\phi[f_1](x, t) = \phi_1(x, t) = \int_D \int_{\mathbb{R}} v(x - y) f_1(y, p, t) dp dy. \quad (5)$$

The stationary solution  $f_0$  must be constant along trajectories of the Hamiltonian  $H[f_0]$ ; a sufficient condition for this is to take  $f_0$  as a function of the action alone. It is not a necessary condition if there is a separatrix, since two disjoint trajectories correspond to the same action. Thus, with a slight loss of generality, we will assume in the following that  $f_0$  may be written as  $f_0(J)$ . The unperturbed part of one-particle Hamiltonian is also a function of the action alone, and written as  $H[f_0](J)$ . Using the angle-action variables  $(\theta, J)$ , we have the linearized Vlasov equation

$$\partial_t f_1 + \Omega(J) \partial_\theta f_1 - f_0'(J) \partial_\theta \phi_1 = 0, \quad (6)$$

where we have defined the frequency  $\Omega(J) = dH[f_0]/dJ$ . Note that the external potential does not enter in this linear equation; it appears implicitly of course through the definition of the angle-action variables.

To analyze the linearized Vlasov equation (6), we introduce the Fourier–Laplace transform  $\hat{u}(m, J, \omega)$  of a function  $u(\theta, J, t)$  as

$$\hat{u}(m, J, \omega) = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{-im\theta} \int_0^{+\infty} dt e^{i\omega t} u(\theta, J, t), \quad (7)$$

where  $m$  is an integer and  $\text{Im}(\omega)$  large enough to ensure convergence. The inverse transform is then

$$u(\theta, J, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{\Gamma} d\omega \hat{u}(m, J, \omega) e^{-i\omega t} e^{im\theta}, \quad (8)$$

where  $\Gamma$  is a Bromwich contour running from  $-\infty + i\sigma$  to  $+\infty + i\sigma$ , and the real value  $\sigma$  is larger than the imaginary part of any singularity of  $\hat{u}(m, J, \omega)$  in the complex  $\omega$ -plane.

Performing a Fourier transform with respect to  $\theta$  and a Laplace transform with respect to time on (6), we obtain, after simple algebraic manipulations,

$$\hat{f}_1(m, J, \omega) = A(m, J, \omega)\hat{\phi}_1(m, J, \omega) + B(m, J, \omega), \quad (9)$$

where

$$A(m, J, \omega) = \frac{mf'_0(J)}{m\Omega(J) - \omega}, \quad (10)$$

$$B(m, J, \omega) = \frac{g(m, J)}{m\Omega(J) - \omega}, \quad (11)$$

and  $ig(m, J)$  is the Fourier transform of the initial perturbation  $f_1(\theta, J, t=0)$  with respect to  $\theta$ .

The two equations (5) and (9) relate  $f_1$  to  $\phi_1$ . The strategy is now to combine these two equations to compute  $f_1$  and  $\phi_1$ . One sees however that  $f_1$  is easily obtained in angle-action variables, whereas  $\phi_1$  is more easily expressed in the original  $(x, p)$  variables. To overcome the difficulty of the two natural coordinate bases  $(x, p)$  and  $(\theta, J)$ , we follow the standard procedure and introduce two families of biorthogonal functions [28, 12, 13].

## 2.2. Biorthogonal functions

We introduce the linear mapping  $L_v$  by

$$L_v : d \mapsto u, \quad (12)$$

where  $u = L_v \cdot d$  is defined by

$$u(x) = \int_D v(x-y)d(y) dy. \quad (13)$$

We assume that there exist two index sets  $I$  and  $I'$  which satisfy  $I' \subset I \subset \mathbb{Z}$ , and two families  $\{d_j(x)\}_{j \in I}$  and  $\{u_k(x)\}_{k \in I'}$  which satisfy the following conditions.

(i)  $\{d_j(x)\}_{j \in I}$  is linearly independent and any density function  $\rho(x)$  may be expanded as

$$\rho(x) = \sum_{j \in I} a_j d_j(x), \quad (14)$$

(ii)  $\{u_k(x)\}_{k \in I'}$  is linearly independent and spans  $\text{Im}(L_v)$ ; any function  $g(x) \in \text{Im}(L_v)$  may be expanded as

$$g(x) = \sum_{k \in I'} b_k u_k(x), \quad (15)$$

(iii) the two families are orthogonal to each other:

$$(d_j, u_k) = \int_D d_j(x)\bar{u}_k(x) dx = \lambda_k \delta_{jk}, \quad (j \in I, k \in I') \quad (16)$$

with  $\lambda_k \neq 0$ , and where  $\delta_{jk}$  is the Kronecker  $\delta$ .

(iv) For all  $k \in I'$ ,  $d_k$  and  $u_k$  satisfy the property  $u_k = L_v \cdot d_k$ . For all  $k \in I \setminus I'$ ,  $L_v \cdot d_k = 0$ .

Let us start from the definition of the potential  $\phi_1(x, t)$  (5). This definition may be rewritten as

$$\phi_1(x, t) = \int_D v(x-y)\rho_1(y, t) dy \quad (17)$$

by using the perturbation density

$$\rho_1(x, t) = \int_{\mathbb{R}} f_1(x, p, t) dp. \quad (18)$$

From the assumption (i), the perturbation density is expanded in the form

$$\rho_1(x, t) = \sum_{j \in I} a_j(t) d_j(x). \quad (19)$$

Substituting (19) into (17) and using (iv), we obtain an expansion for  $\phi_1$  in the form

$$\phi_1(x, t) = \sum_{k \in I'} a_k(t) u_k(x). \quad (20)$$

The Fourier–Laplace transform of (20) is expressed by

$$\hat{\phi}_1(m, J, \omega) = \sum_{k \in I'} \tilde{a}_k(\omega) c_{km}(J), \quad (21)$$

where  $\tilde{a}_k(\omega)$  is the Laplace transform of  $a_k(t)$ :

$$\tilde{a}_k(\omega) = \int_0^{\infty} a_k(t) e^{i\omega t} dt, \quad (22)$$

and  $c_{km}(J)$  is the Fourier transform of  $u_k(x)$ :

$$c_{km}(J) = \int_{-\pi}^{\pi} u_k(x) e^{-im\theta} d\theta. \quad (23)$$

Substituting (21) into (9), we obtain

$$\hat{f}_1(m, J, \omega) = A(m, J, \omega) \sum_{k \in I'} \tilde{a}_k(\omega) c_{km}(J) + B(m, J, \omega). \quad (24)$$

The inverse Fourier transform of (24) gives  $\tilde{f}_1(\theta, J, \omega)$ , the Laplace transform of  $f_1(\theta, J, t)$ :

$$\tilde{f}_1(\theta, J, \omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}_1(m, J, \omega) e^{im\theta} \quad (25)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left[ A(m, J, \omega) \sum_{k \in I'} \tilde{a}_k(\omega) c_{km}(J) + B(m, J, \omega) \right] e^{im\theta}. \quad (26)$$

We observe that  $\tilde{f}_1(\theta, J, \omega)$ , and hence  $f_1(\theta, J, t)$ , are determined by the  $\{\tilde{a}_k(\omega)\}_{k \in I'}$ , so that the subset  $\{\tilde{a}_j(\omega)\}_{j \in I \setminus I'}$  is not necessary. We therefore seek a solution for the subfamily  $\{\tilde{a}_k(\omega)\}_{k \in I'}$  instead of the whole family  $\{\tilde{a}_j(\omega)\}_{j \in I}$ . For this purpose, we multiply (25) by  $\bar{u}_l(x)$  ( $l \in I'$ ) and integrate it over  $\theta$  and  $J$ . Using the biorthogonality relation (16) and noting that the change of variable  $(x, p) \mapsto (\theta, J)$  is symplectic  $dx \wedge dp = d\theta \wedge dJ$ , the left-hand side of (25) becomes

$$\int \int \tilde{f}_1(\theta, J, \omega) \bar{u}_l(x) d\theta dJ = \int_{\mathbb{R}} \int_D \tilde{f}_1(x, p, \omega) \bar{u}_l(x) dx dp \quad (27)$$

$$= \int_D \tilde{\rho}_1(x, \omega) \bar{u}_l(x) dx = \tilde{a}_l(\omega) \lambda_l. \quad (28)$$

To derive the last equality, we have used the fact that the Laplace transform of  $\rho_1(x, t)$  (19) is

$$\tilde{\rho}_1(x, \omega) = \sum_{j \in I} \tilde{a}_j(\omega) d_j(x). \quad (29)$$

On the other hand, the right-hand side of (25), submitted to the same operations, becomes

$$\begin{aligned} & \iint \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left[ A(m, J, \omega) \sum_{k \in I'} \tilde{a}_k(\omega) c_{km}(J) + B(m, J, \omega) \right] \tilde{u}_l(x) e^{im\theta} d\theta dJ \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in I'} \tilde{a}_k(\omega) \int A(m, J, \omega) c_{km}(J) \bar{c}_{lm}(J) dJ \\ &+ \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int B(m, J, \omega) \bar{c}_{lm}(J) dJ. \end{aligned} \quad (30)$$

Remembering the definitions of  $A(m, J, \omega)$  and  $B(m, J, \omega)$ , we introduce the functions

$$F_{lk}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int \frac{m f'_0(J)}{m\Omega(J) - \omega} c_{km}(J) \bar{c}_{lm}(J) dJ, \quad l, k \in I' \quad (31)$$

$$G_l(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int \frac{g(m, J)}{m\Omega(J) - \omega} \bar{c}_{lm}(J) dJ, \quad l \in I', \quad (32)$$

where contributions from  $m = 0$  vanish not only for  $F_{lk}$  but also for  $G_l$ , thanks to assumption (12). We further define the  $(\sharp I') \times (\sharp I')$  matrices  $\Lambda$  and  $F(\omega) = (F_{lk}(\omega))_{l, k \in I'}$ , where  $\Lambda$  is diagonal with elements  $\{\lambda_k\}_{k \in I'}$ , and the  $(\sharp I')$ -dimensional vectors  $G(\omega) = (G_l(\omega))_{l \in I'}$  and  $\tilde{a}(\omega) = (\tilde{a}_k(\omega))_{k \in I'}$ . Using the above matrices and vectors, the equation for  $\tilde{a}(\omega)$  reads in matrix form:

$$[\Lambda - F(\omega)] \tilde{a}(\omega) = G(\omega). \quad (33)$$

Equation (33) is formally solved as

$$\tilde{a}(\omega) = [\Lambda - F(\omega)]^{-1} G(\omega), \quad (34)$$

and the temporal evolution of  $\{a_k(t)\}_{k \in I'}$ , and of  $f_1$ , is obtained from the inverse Laplace transform of  $\tilde{a}(\omega)$ . The inverse matrix  $[\Lambda - F(\omega)]^{-1}$  does not always exist since the determinant  $\det(\Lambda - F(\omega))$  is not always non-zero. This determinant is sometimes called the dispersion function, and its roots are poles of  $\tilde{a}(\omega)$ . We will discuss the singularities of  $\tilde{a}(\omega)$  in section 2.4 after giving an example of the two families  $\{d_j\}_{j \in I}$  and  $\{u_k\}_{k \in I'}$  in the domain  $D = [0, 2\pi]$ .

### 2.3. Example: $D = [0, 2\pi]$

If we consider the domain  $D = [0, 2\pi]$  with periodic boundary condition, the interaction potential  $v(x)$  must be also  $2\pi$ -periodic and is expanded in Fourier series as

$$v(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} v_m e^{imx}, \quad (35)$$

where the coefficients  $v_m$  are determined by

$$v_m = \int_{-\pi}^{\pi} v(x) e^{-imx} dx. \quad (36)$$

We can choose the two families  $\{d_j(x)\}_{j \in I}$  and  $\{u_k(x)\}_{k \in I'}$  as

$$d_j(x) = \frac{1}{2\pi} e^{ijx}, \quad j \in I = \mathbb{Z}, \quad (37)$$

and

$$u_k(x) = \int_{-\pi}^{\pi} v(x-y) d_k(y) dy = \frac{1}{2\pi} v_k e^{ikx}, \quad k \in I', \quad (38)$$

where the index set  $I'$  is defined by

$$I' = \{k \in \mathbb{Z} | v_k \neq 0\}. \quad (39)$$

From the definition of  $u_k(x)$  and  $I'$  assumption (iv) is satisfied. Expansions on the two families  $\{d_j(x)\}_{j \in \mathbb{Z}}$  and  $\{u_k(x)\}_{k \in I'}$  are essentially Fourier expansions, and hence assumptions (i)–(iii) are also satisfied. The factors  $\lambda_k$  are  $\lambda_k = v_k/2\pi$  for  $k \in I'$ . Generically, all  $v_k$  are non-zero, and  $I = I' = \mathbb{Z}$ . However, for the HMF model, which we will introduce in section 2.6,  $v(x) = -\cos x$  and  $\text{Im}(L_v)$  is two dimensional. Accordingly, the index set  $I'$  is  $I' = \{1, -1\}$  and the matrix  $\Lambda - F(\omega)$  in (33) is a  $2 \times 2$  matrix.

#### 2.4. Singularities of $\tilde{a}(\omega)$

From the knowledge of the functions  $\tilde{a}(\omega)$ , one may easily compute the time evolution of the potential and density perturbations, through an inverse Laplace transform. The asymptotic in time behavior of this inverse Laplace transform will be determined by the singularities of the functions  $\tilde{a}_k(\omega)$  ( $k \in I'$ ) in the complex plane. Now we turn to the study of these singularities.

The matrix coefficients  $F_{lk}(\omega)$  and the vector coefficients  $G_l(\omega)$  are defined through integrals over the real variable  $J$ , see (31) and (32). These integrals are naturally defined in the whole half-plane  $\text{Im}(\omega) > 0$ . Note, however, that expressions (31) and (32) are in general not properly defined for  $\omega \in \mathbb{R}$ , as in this case  $m\Omega(J) - \omega$  may vanish. For  $\text{Im}(\omega) \leq 0$ , we will actually have to consider rather the analytical continuations of expressions (31) and (32). We may have two kinds of singularities, described in the following.

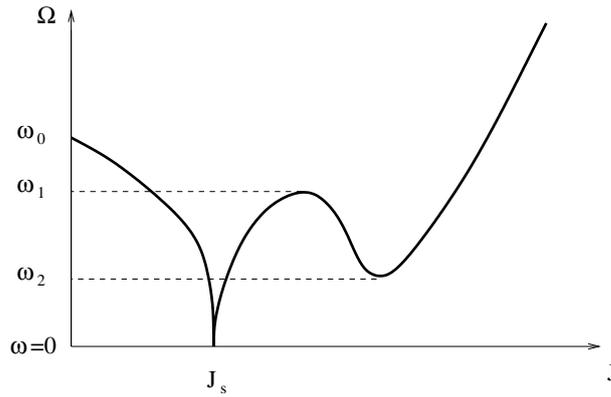
The first kind of singularities is poles, coming from roots of the dispersion function  $\det(\Lambda - F(\omega))$ . If such a root exists in the half-plane  $\text{Im}(\omega) > 0$ , it corresponds to an eigenvalue of the linearized Vlasov operator, and it yields an exponential growth of the perturbation. In the upper half-plane  $\text{Im}(\omega) > 0$ , the only possible singularities for  $\tilde{a}(\omega)$  are the poles. We assume in the following that the reference stationary state  $f_0$  is linearly stable, so that the determinant of  $\Lambda - F(\omega)$  does not have any roots with  $\text{Im}(\omega) > 0$ . If  $\det(\Lambda - F(\omega))$  has a root on the real axis  $\text{Im}(\omega) = 0$ , it corresponds to a purely oscillating mode. This is compatible with a linearly stable  $f_0$ , but corresponds to a non-decaying perturbation; we also assume in the following that this does not happen. The analytical continuation of  $\det(\Lambda - F(\omega))$  in the lower half-plane  $\text{Im}(\omega) < 0$  may also have roots. They correspond to ‘Landau poles’ for  $\tilde{a}(\omega)$ , and give rise to an exponential damping of the perturbation. This damping behavior is known as Landau damping, and has been studied in the gravitational case in [22, 23], and in the HMF case in [27]. As anticipated in the introduction, we will see that this exponential damping, if it exists, is subdominant in the large time region.

The second kind of singularities comes from the integral in (31) and (32), and appears on the real axis of  $\text{Im}(\omega) = 0$ . We have to study the singularities of functions

$$\varphi(z) = \int_a^b \frac{\psi(J)}{m\Omega(J) - z} dJ \quad (40)$$

properly defined for  $\text{Im}(z) > 0$ , where  $\psi$  and  $\Omega$  are real functions, and  $[a, b] \subset \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ .  $J$  has to be thought of as the action coordinate, and  $\Omega$  as the associated frequency. We assume that  $\psi$  is analytic. We may set  $m \neq 0$  since the  $m = 0$  term in (31) vanishes, and the  $m = 0$  term in (32) yields a pole in  $z = 0$ ; this corresponds to a non-decaying contribution to the perturbation, which we are not interested in. We now show that  $\varphi(z)$  is regular for  $z \in \mathbb{R}$  except for special points, and will classify the special points into three types. Note that both functions  $F_{kl}$  and  $G_k$  fit in this framework.

If the equation  $m\Omega(J) = z$  has no solutions in  $[a, b]$  for any  $z$  in a neighborhood of real  $z_0$ , then  $\varphi$  is analytic in a neighborhood of  $z_0$ . Now assume that the equation  $m\Omega(J) = z$



**Figure 1.** An example of the function  $\Omega(J)$ , with the special points at the origin of singularities for the associated function  $\varphi$  defined as in equation (40).

has one or several branches of solutions  $J_i^*(z) \in [a, b]$  in a neighborhood of  $z_0$ , where all  $J_i^*(z) \in [a, b]$  are regular as functions of  $z$ . In this case,  $\varphi$  can be analytically continued from the open half-plane  $\text{Im}(z) > 0$  to the neighborhood of  $z_0$  by taking into account the possible residue contributions of the roots  $J_i^*(z)$ , in a straightforward generalization of the ‘Landau prescription’. Thus, generically, no singularity of  $\varphi$  appears at  $z = z_0$ .

The singularities of  $\varphi$  are hence associated with special points  $z_0$ , such that the branches of solutions  $J_i^*(z) \in [a, b]$  of the equation  $m\Omega(J) = z$  undergo a bifurcation or are singular. This may happen in the following three types, illustrated in figure 1.

- (i)  $z_0 = m\Omega(a)$  or  $z_0 = m\Omega(b)$ , when one or both are finite. This is a common situation, generically encountered in 1D self-gravitating systems [20] as well as in the HMF model [27]. For instance, this mechanism creates a singularity around the frequency  $m\omega_0 = m\Omega(J = 0)$ , where  $J = 0$  corresponds to the minimum of the effective potential  $\phi[f_0] + \phi_{\text{ext}}$ , see figure 1. In section 2.5 we will show that this singularity is logarithmic.
- (ii)  $z_0$  corresponds to a  $J$  such that  $\Omega(J)$  is singular: this may be an action  $J_s$  corresponding to a separatrix; an illustration is given in figure 1, for  $J = J_s$ ,  $\omega = 0$ . This is not a common situation for the 1D self-gravitating models we have in mind. This generically happens however for periodic systems, where the trajectories in the one-particle Hamiltonian  $H[f_0]$  may be oscillating or librating, and the two regions are delimited by a separatrix. We will see such a situation in the HMF case.
- (iii)  $z_0$  corresponds to a  $J$  such that  $\Omega'(J) = 0$ : this corresponds generically to a local maximum or minimum of the frequency (see frequencies  $\omega_1$  and  $\omega_2$  in figure 1). We are not aware of any model studied in the literature where this phenomenon occurs. This is certainly an interesting case to study, especially in view of the results obtained in an analogous situation for the diocotron instability of a magnetically confined electron column [29], and recently for the 2D Euler equation [30]. We will not be concerned with this type of singularities in the following.

In the next subsection, we estimate the asymptotic relaxation of  $a_k(t)$  by considering contributions from singularities of the first type, since they should be in many cases the relevant singularities. We will confirm whether the estimation is valid by performing direct  $N$ -body simulations in section 3.

### 2.5. Contribution from singularities of the first type

Now we concentrate on the singularities of the first type at  $z = m\Omega(a) = m\omega_a$ . Note that if  $b = +\infty$ , and  $\omega_\infty = \Omega(+\infty)$  is finite,  $z = m\omega_\infty$  is a singular point; indeed, the number of solutions of the equation  $m\Omega(J) = z$  changes from  $z > m\omega_\infty$  to  $z < m\omega_\infty$ . We expect this singularity to be irrelevant if  $f_0(J)$  decreases rapidly enough as  $J \rightarrow \infty$ , and we neglect it in the following.

To analyze the function  $\varphi(z)$  (40) around  $z = m\omega_a$ , we expand  $\Omega(J)$  and  $\psi(J)$  in power series around  $J = a$  as

$$\Omega(J) = \omega_a + c(J - a) + O((J - a)^2) \quad (41)$$

and

$$\psi(J) = d(J - a)^\nu + o((J - a)^\nu) \quad (42)$$

for some  $\nu \in \mathbb{N}$ . The exponent  $\nu$  will be determined for a given  $m$  later. Substituting these assumptions into  $\varphi$  and changing  $J - a$  to  $J$ , this yields the following singular part for  $\varphi$ :

$$\varphi(z) = C \int_0^{b-a} \frac{J^\nu}{J - \zeta} dJ + (\text{regular part}) \quad (43)$$

with the constant  $C = d/mc$  and  $\zeta = (z - m\omega_a)/mc$ . Using the equality

$$\frac{J^\nu}{J - \zeta} = J^{\nu-1} + \zeta \frac{J^{\nu-1}}{J - \zeta} \quad (44)$$

recursively, the singular part of  $\varphi(z)$ , which comes from the lower bound of the integral (43), behaves as a logarithm times a power around  $\zeta = 0$ :

$$\varphi(z) = \text{cste} \times (z - m\omega_a)^\nu \ln(z - m\omega_a) + (\text{regular part}). \quad (45)$$

Thus, at  $\omega = m\omega_a$ , the matrix elements  $F_{kl}(\omega)$  and the vector elements  $G_k(\omega)$  have singularities of the type  $(\omega - m\omega_a)^\nu \ln(\omega - m\omega_a)$ . From (34),  $\tilde{a}_k(\omega)$  is expressed as a sum, product and ratio of  $F_{kl}(\omega)$  and  $G_k(\omega)$  functions. Thus, the leading singularity of  $\tilde{a}_k(\omega)$  at  $\omega = m\omega_0$  is also of the type  $(\omega - m\omega_a)^\nu \ln(\omega - m\omega_a)$  for some  $\nu$ .  $a_k(t)$  is the inverse Laplace transform of  $\tilde{a}_k(\omega)$ . Since  $\tilde{a}_k$  has only logarithmic singularities on the real axis, we may deform the contour  $\Gamma$  of the inverse Laplace transform down to the real axis. The inverse Laplace transform then becomes an inverse Fourier transform.

The asymptotic decay of  $a_k(t)$  is then determined by the strongest singularity of  $\tilde{a}_k(\omega)$  on the real axis (see [31], page 52). A singularity such as (45) yields an asymptotic decay as (see [31], page 42)

$$a_k(t) \sim \text{cst} \frac{e^{-im\omega_a t}}{t^{\nu+1}}. \quad (46)$$

See appendix A for a heuristic explanation on how to obtain estimates such as (46).

To obtain  $\nu$  for a given  $m$ , we need to introduce some assumptions about the system we consider. We assume that the potential created by the stationary state (interaction potential + external potential  $\phi[f_0](x) + \phi_{\text{ext}}(x)$ ) has a single minimum at  $J = a = 0$ , and is quadratic with respect to  $x$  around its minimum at leading order, except for an irrelevant constant term. This is the case in many situations of interests, such as stationary states for a 1D self-gravitating system. We also assume that  $f_0(J)$  is analytic, and decays fast enough at infinity (for instance exponentially). This assumption excludes for instance truncated  $f_0$ , or compactly supported stationary states. As an example, the thermal equilibria of a 1D self-gravitating system or of the HMF model satisfy all assumptions. Finally, we assume that the perturbation is also analytic.

Under the above assumptions, we now estimate the exponent  $\nu$ . From (31) and (32), we see that the function  $\psi(J)$  reads

$$\psi(J) = f'_0(J)c_{km}(J)\bar{c}_{lm}(J)$$

for  $F_{lk}(\omega)$  functions and

$$\psi(J) = g(m, J)\bar{c}_{lm}(J)$$

for  $G_l(\omega)$  functions; we now expand these functions with respect to  $J$ . Let us start from the function  $c_{km}(J)$ . In the limit of  $J \rightarrow 0$ , motion is harmonic with the frequency  $\omega_0$ , and the position  $x$  is written in polar coordinates using angle-action variables as  $x \propto J^{1/2} \sin \theta$ . Expanding  $u_k(x)$  with respect to  $x$ , and substituting the above expression of  $x$  into the expansion, the function  $c_{km}(J)$  reads

$$c_{km}(J) \sim \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_k^{(n)}(0)}{n!} J^{n/2} \sin^n \theta e^{-im\theta} d\theta,$$

where  $u_k^{(n)}$  is the  $n$ th derivative of  $u_k$ . The first non-vanishing term corresponds to  $n = |m|$ , and hence the leading order for  $c_{km}(J)$  in a small  $J$  expansion is

$$c_{km}(J) \sim J^{|m|/2}. \quad (47)$$

$c_{km}(J)$  is the Fourier transform of  $u_k(x)$ ; in a similar way, the leading order in a small  $J$  expansion for  $g(m, J)$ , the Fourier transform of the initial perturbation, is

$$g(m, J) \sim J^{|m|/2}, \quad (48)$$

since the perturbation is regular. The function  $f'_0(J)$  is regular and hence the leading order is constant. Consequently, the function  $\psi(J)$  is, at leading order,

$$\psi(J) \sim J^{|m|} \quad (49)$$

both for  $F$  and  $G$  functions. Hence, for each term in the infinite series defining the coefficient  $F_{lk}(\omega)$  (31) and  $G_l(\omega)$  (32), we have  $\nu = |m|$ .

Going back to (31), (32) and making use of section 2.4, we see that the strongest singularities for  $F_{lk}(\omega)$  and  $G_l(\omega)$  come from the  $m = \pm 1$  terms in the sum over  $m$ , so that the exponent is  $\nu = 1$ . We conclude using (46) that the functions  $a_k(t)$ , under the hypothesis of this section, decay as  $e^{-i\omega_0 t}/t^2$ .

This result has to be compared with [26], which finds a decay exponent  $3/2$ . Since we have performed the same kind of analysis as Smereka does in [26], this discrepancy is surprising even if the class of Hamiltonians studied is different. It may be traced back to the fact that this author uses the following hypothesis for the perturbation:  $\lim_{J \rightarrow 0} g(m, J) \neq 0$  even for  $m \neq 0$ ; this would correspond to a singular perturbation, since the initial perturbation  $f_1$  is not well defined in the limit  $J \rightarrow 0$ , because  $\lim_{J \rightarrow 0} e^{im\theta} g(m, J) \neq \lim_{J \rightarrow 0} e^{im\theta'} g(m, J)$  as soon as  $e^{im(\theta-\theta')} \neq 1$ . This singular perturbation implies that  $g(m, J) \sim J^0$  in the limit  $J \rightarrow 0$  instead of (48), and hence  $\psi(J) = g(m, J)\bar{c}_{lm}(J) \sim J^{|m|/2}$ . Accordingly, the strongest singularities for  $G_l(\omega)$  (32), coming from the  $m = \pm 1$  terms, correspond to  $\nu = 1/2$ . Using considerations similar to the ones described in appendix A. Smereka showed that this gives a decay exponent  $3/2$ . Considering in Smereka's setting a regular perturbation, as is more natural (and as actually assumed in equation (20) of [26]), would yield the  $-2$  exponent also for the class of Hamiltonians studied in [26].

We may also compare this result to the asymptotic decay of perturbations around a stationary 2D shear flow or a vortex. In these cases, the longitudinal (respectively transverse) velocity perturbation asymptotically decays as  $1/t$  (respectively as  $1/t^2$ ), without temporal oscillations.

### 2.6. Example of the HMF model

In this section, we analyze in more detail a specific example, the HMF model whose Hamiltonian is

$$H(x, p) = \sum_{j=1}^N \frac{p_j^2}{2} + \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N [1 - \cos(x_j - x_k)]. \quad (50)$$

The canonical equation of motion of the HMF model is described through the magnetization  $\mathbf{M} = (M_x, M_y)$  defined by

$$M_x = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \cos x_j, \quad M_y = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin x_j, \quad (51)$$

and hence the computational cost is  $O(N)$  for each time step, although the number of interactions between the  $N$  particles is  $O(N^2)$ . This advantage allows precise numerical tests of the predictions. The associated Vlasov equation reads

$$\frac{\partial f}{\partial t} + p \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial \phi[f]}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p} = 0, \quad (52)$$

with

$$\phi[f](x, t) = -M_x[f] \cos x - M_y[f] \sin x \quad (53)$$

and

$$M_x[f](t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \cos x f(x, p, t) dx dp, \quad (54)$$

$$M_y[f](t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \sin x f(x, p, t) dx dp. \quad (55)$$

Note that this is a pendulum potential, so that the dynamics admits a separatrix. The angle-action variables are explicitly written in terms of elliptic integrals [27]. Without loss of generality, we consider a stationary solution with  $M_y = 0$ , and write  $M_x^{(1)}(t)$  and  $M_y^{(1)}(t)$  as the magnetization perturbations.

For convenience, we choose real functions for the family  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ :  $u_c(x) = \cos x$  and  $u_s(x) = \sin x$  and  $I' = \{c, s\}$ . The coefficients  $a_c(t)$  and  $a_s(t)$  of the potential  $\phi_1(x, t)$ ,

$$\phi_1(x, t) = -a_c(t) \cos x - a_s(t) \sin x,$$

correspond to  $M_x^{(1)}(t)$  and  $M_y^{(1)}(t)$ , respectively.

The expansions of  $u_c$  and  $u_s$  in the Fourier series of the angle variable  $\theta$  define the coefficients  $\{c_{cm}(J)\}_{m \in \mathbb{Z}}$  and  $\{c_{sm}(J)\}_{m \in \mathbb{Z}}$  as in (23); to simplify the notations, we rename the coefficients  $c_m(J)$  and  $s_m(J)$ , respectively.

This choice for the family  $\{u_k\}$  makes the matrix  $\Lambda - F(\omega)$  diagonal [27], with

$$F_{cc}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int \frac{m f'_0(J)}{m\Omega(J) - \omega} |c_m(J)|^2 dJ, \quad (56)$$

$$F_{ss}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int \frac{m f'_0(J)}{m\Omega(J) - \omega} |s_m(J)|^2 dJ, \quad (57)$$

$$F_{cs}(\omega) = F_{sc}(\omega) = 0. \quad (58)$$

We also have the following expressions for  $G$ :

$$G_c(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int \frac{g(m, J)}{m\Omega(J) - \omega} \bar{c}_m(J) dJ, \quad (59)$$

$$G_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int \frac{g(m, J)}{m\Omega(J) - \omega} \bar{s}_m(J) dJ. \quad (60)$$

*A priori*, according to the general discussion in the previous section, the leading singularity of  $F_{cc}$  and  $F_{ss}$  is located at  $\omega = \omega_0 = \sqrt{M_0}$ , and has an index  $\nu = 1$ , since  $\omega_0$  here plays the role of  $\omega_a$  in the previous section. However, due to the  $x \rightarrow -x$  symmetry of  $\cos x$ , a further cancellation occurs: the function  $c_m(J)$  identically vanishes for all  $m$  odd and all  $J < J_s$ , with  $J_s$  the action at the separatrix. Thus, the strongest singularity for  $F_{cc}$  and  $G_c$  actually comes from the  $m = 2$  term in (56) and (59), and is located at  $\omega = 2\omega_0$ ; its index is  $\nu = 2$ . This has an interesting consequence on the asymptotic behavior of  $M_x^{(1)}(t)$ : since it is now governed by a singularity with index  $\nu = 2$ , we expect

$$M_x^{(1)}(t) \sim \frac{e^{-2i\omega_0 t}}{t^3} \quad \text{for } t \rightarrow \infty \quad (61)$$

at variance with  $M_y^{(1)}(t)$ , which is still governed by a  $\nu = 1$  singularity

$$M_y^{(1)}(t) \sim \frac{e^{-i\omega_0 t}}{t^2} \quad \text{for } t \rightarrow \infty. \quad (62)$$

This feature makes the HMF model particularly suitable for a numerical test of the theory developed in this section, as we should be able to probe two different asymptotic behaviors for  $M_x^{(1)}(t)$  and  $M_y^{(1)}(t)$ .

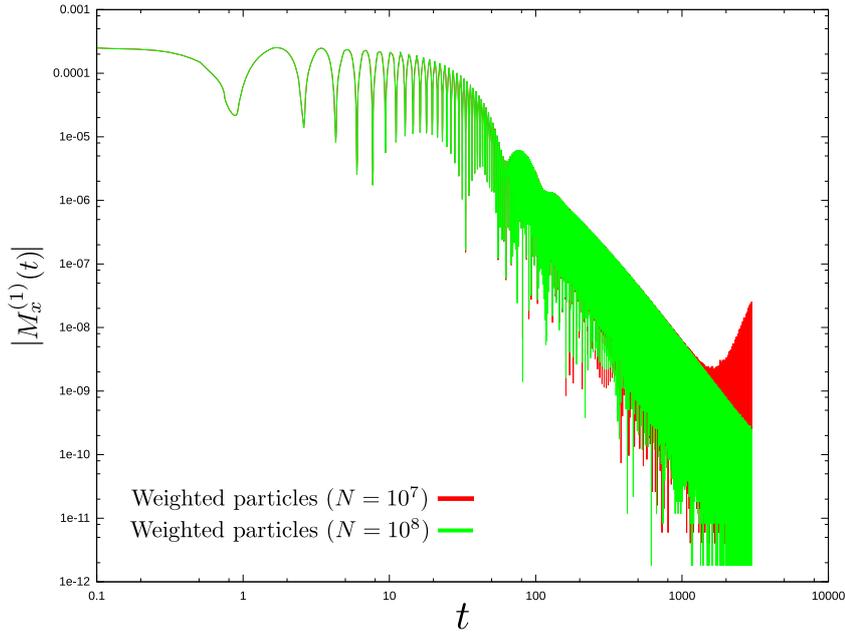
### 3. Numerical simulations

In this section, we test numerically the linear predictions of the previous section, on the example of the HMF model, by solving the whole (nonlinear) Vlasov equation. Solving the Vlasov equation over long times may be a very heavy numerical task, or even impossible with current computers. In this case, several features help: the model is one dimensional, it is particularly simple and we only need to solve the Vlasov equation close to a stationary state.

A natural strategy could be to solve directly the Hamiltonian  $N$ -body dynamics, with  $N$  large enough; we know that this provides an approximation to the continuous Vlasov evolution. We have found that the finite- $N$  fluctuations were too big to allow a test of the asymptotic in time regime. Another strategy would be to use a standard Vlasov solver; for instance, a semi-Lagrangian method has already been used for HMF [32]. This resulted in very heavy computations. Finally, we have chosen to introduce an algorithm relying on a Hamiltonian simulation of appropriately weighted particles [33], it provides a very convenient tool to test the theoretical predictions. The algorithm is described and discussed in appendix B. We have tested the weighted particles algorithm against (i) a semi-Lagrangian code and (ii) a simple unweighted  $N$ -body code (results not reported). The temporal evolution of the magnetization from the three codes is in good agreement up to a certain time. The unweighted  $N$ -body simulation becomes dominated by finite size fluctuations much earlier than the weighted particles one.

All simulations discussed in the following were performed using the weighted particles algorithm, close to a thermal equilibrium stationary state, parametrized by the temperature  $T = 1/\beta$ :

$$f_0(x, p) = \mathcal{N} e^{-\beta(p^2/2 - M_0 \cos x)}, \quad (63)$$



**Figure 2.** Temporal evolution of  $M_x^{(1)}(t)$  for an initial condition as in (64). We used the weighted particles code with  $T = 0.1$ ,  $a = 0.1$ ,  $N = 10^7$  (black curve) and  $N = 10^8$  (gray curve). The initial weighted points are equally distributed in  $]-\pi, \pi] \times [-3, 3]$ , and we used the  $(x, p) \rightarrow (-x, -p)$  symmetry in order to reduce the computations.

where  $\mathcal{N}$  is the normalization and the magnetization  $M_0(T)$  is solution of a consistency equation [34]. The thermodynamical equilibrium state of the HMF is non-homogeneous (that is  $M_0 \neq 0$ ) as soon as  $T < 0.5$ . In the following we only use  $T = 0.1$ ; larger temperatures resulted in increased fluctuations and made it more difficult to reach the asymptotic in the time regime. The magnetization is  $M_0 = 0.946$  and the harmonic frequency is  $\omega_0 = \sqrt{M_0} = 0.972$  for  $T = 0.1$ .

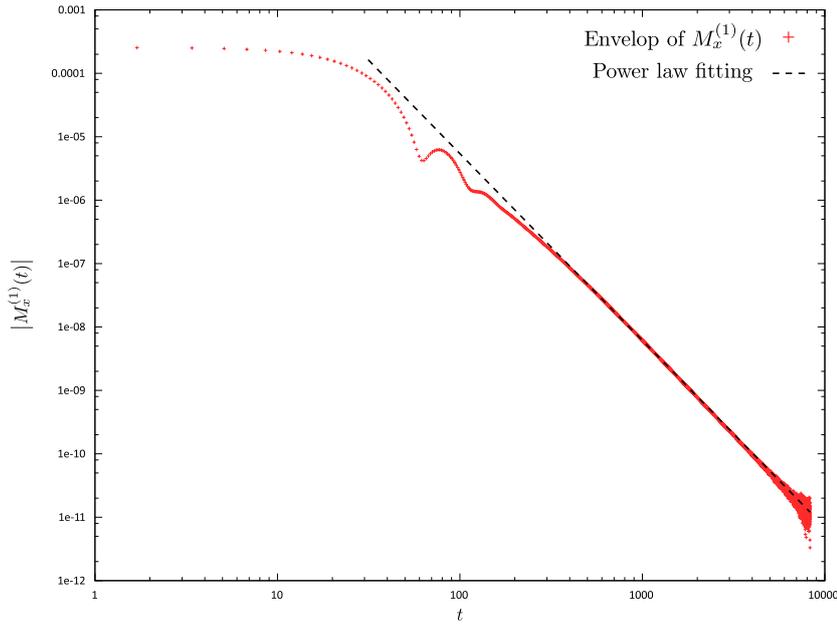
### 3.1. Cosine perturbation

We consider first a cosine perturbation of the thermal equilibrium:

$$f_0(x, p) + f_1(x, p) = \mathcal{N}_a e^{-\beta(p^2/2 - M_0 \cos x)} (1 + a \cos x), \quad (64)$$

where  $|a|$  is small enough. This perturbation is compatible with the  $(x, p) \rightarrow (-x, -p)$  symmetry of the canonical equation of motion, and  $M_y^{(1)}(t)$  is then identically equal to zero. We may restrict the initial points such that  $p_i(0) > 0$ , and obtain the temporal evolutions of particles which are initially in the lower half of the  $\mu$  space without direct computations, using this symmetry.

To estimate the decaying perturbed magnetization  $M_x^{(1)}(t)$ , we subtract from  $M_x(t)$  its long time average. A typical temporal evolution of  $M_x^{(1)}(t)$  is shown in figure 2. Finite size effects, which are visible on the curve for  $N = 10^7$  points, may prevent the study of the asymptotic behaviour, so that it is usually necessary to use a very large number of points (see the curve for  $N = 10^8$  points). We fit the envelop of the decaying  $M_x^{(1)}(t)$  curve by a power law, using the least-squares method (see figure 3). We find an exponent  $-2.95$ , which is in very good agreement with the prediction (61).



**Figure 3.** Temporal evolution of the  $M_x^{(1)}(t)$  envelop for an initial condition perturbed by a cosine, as in (64). Red points: numerical simulation using the weighted particles code with  $T = 0.1$ ,  $a = 0.1$  and  $N = 10^9$ . The initial weighted points are equally distributed in  $]-\pi, \pi] \times [-3, 3]$ . Black dashed line: power law fitting from  $t = 600$  to  $6000$  ( $\propto t^{-2.95}$ ).

### 3.2. Sine perturbation

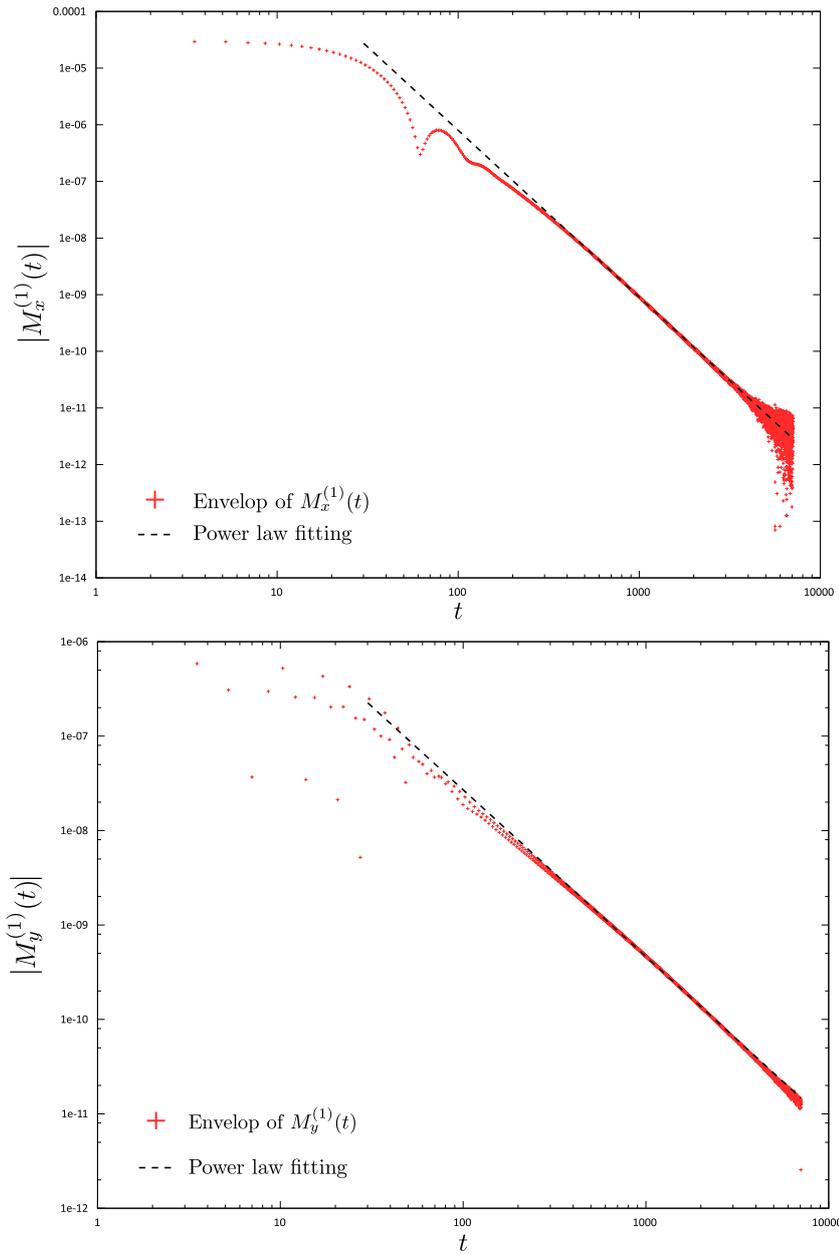
Now we consider a sine perturbation of the thermal equilibrium:

$$f_0(x, p) + f_1(x, p) = \mathcal{N}_a e^{-\beta(p^2/2 - M_0 \cos x)} (1 + a \sin x). \quad (65)$$

In this case, the  $(x, p) \rightarrow (-x, -p)$  symmetry is broken, and we have to compute the evolution of the whole  $\mu$  space. A slow rotating motion of the magnetization appears, which makes it difficult to define an asymptotic average value of  $M_x^{(1)}(t)$  and  $M_y^{(1)}(t)$ . Rather, we used a running average to eliminate the rotation effect (see appendix C). Finally, we obtain curves similar to the case of a cosine perturbation to confirm predictions (61) and (62), see figure 4.

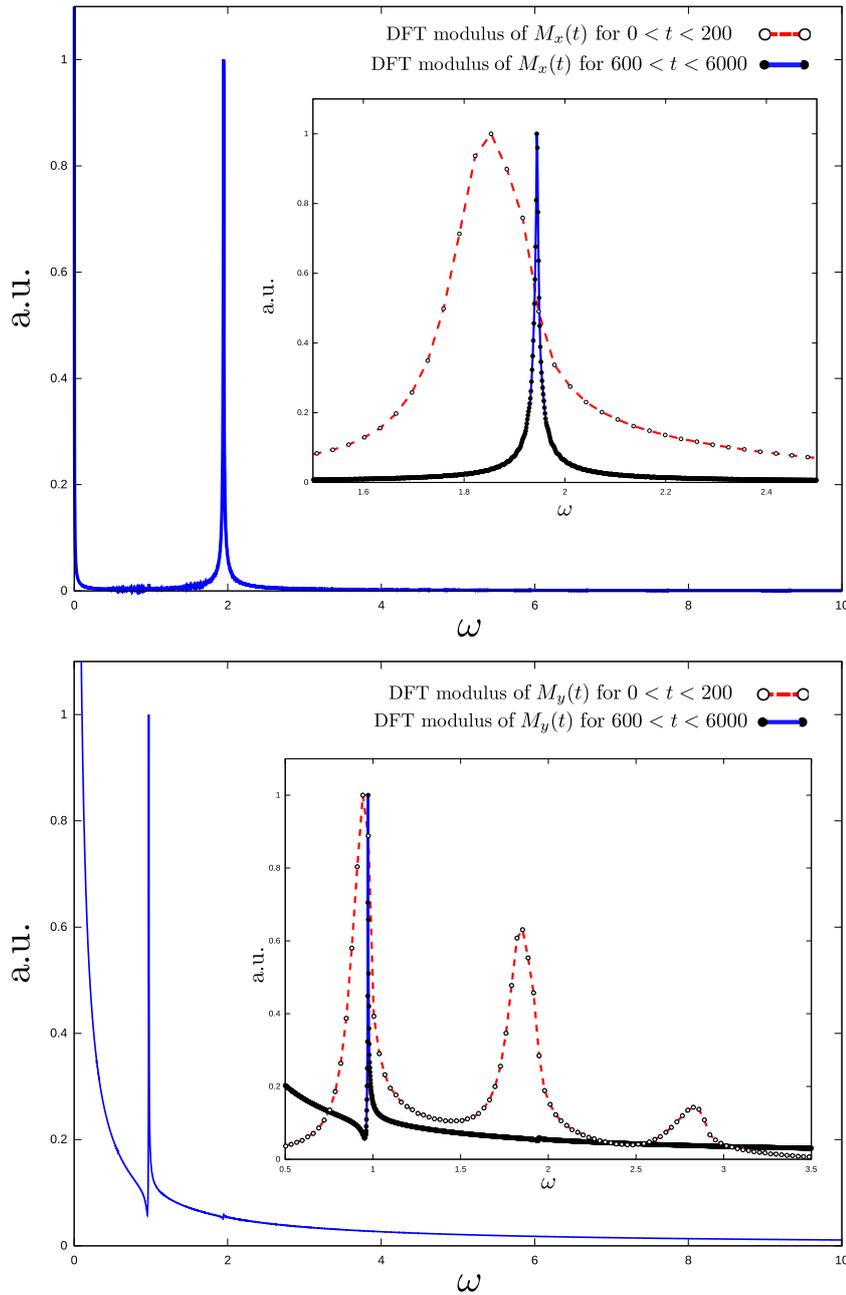
We then fit the envelops of  $M_x^{(1)}(t)$  and  $M_y^{(1)}(t)$  with power laws. The exponents are  $-2.94$  and  $-1.77$ , to be compared with the predicted  $-3$  and  $-2$ , see (61) and (62). The relative error for  $M_y^{(1)}(t)$  exponent is close to 10%. Different explanations are possible: the fit range does not completely lie in the asymptotic regime and/or there are numerical errors. Equations (61) and (62) predict an oscillating decay of the perturbations  $M_x^{(1)}(t)$  and  $M_y^{(1)}(t)$ , with frequency, respectively,  $\omega_0$  and  $2\omega_0$ . In figure 5, we plot the moduli of the Fourier transforms of  $M_x^{(1)}(t)$  and  $M_y^{(1)}(t)$ . We observe that indeed in both cases a single frequency is selected in the long time regime, with numerical values, respectively, 1.944 and 0.973. This is in almost perfect agreement with the theoretical prediction  $2\omega_0 = 1.945$  and  $\omega_0 = 0.972$ .

Figure 5 also allows us to observe the cross-over between two different dynamics explored by the system: the short time evolution is driven by the Landau pole contribution, and the asymptotic behaviour by (61) and (62). Indeed, as shown in [27], it is possible to compute the dominant Landau pole for the parameters of figure 5; one finds a frequency  $\text{Re}(\omega_L) \simeq 1.8$ . This is in good agreement with the short time Fourier transform of  $M_x(t)$ , which is maximal around  $\omega = 1.85$ . We therefore conclude that Landau damping occurs in the short time regime,



**Figure 4.** Temporal evolutions of the  $M_x^{(1)}(t)$  (upper panel) and  $M_y^{(1)}(t)$  (lower panel) envelopes for an initial condition perturbed by a sine, as in (65). Red points: numerical simulation using the weighted particles code with  $T = 0.1$ ,  $a = 0.1$  and  $N = 10^9$ . The initial weighted points are equally distributed in  $]-\pi, \pi] \times [-3, 3]$ . Black dashed line: power law fit from  $t = 600$  to  $6000$ . We obtain exponents equal to  $-2.94$  for  $M_x^{(1)}(t)$  and  $-1.77$  for  $M_y^{(1)}(t)$ .

before the algebraic decay dominates. The peak position at short time in the  $M_y$ 's spectrum may be a signature of the growing  $\omega_0$  peak in a long time regime, since it is close to  $\omega_0$ . It might also be related to a Landau pole associated with  $M_y$ : since the matrix  $\Lambda - F(\omega)$  is diagonal,



**Figure 5.** Moduli of the Fourier transforms of  $M_x^{(1)}(t)$  (upper panel) and  $M_y^{(1)}(t)$  (lower panel) for an initial condition perturbed by a sine, as in (65). The numerical simulation was performed using the weighted particles code with  $T = 0.1$ ,  $a = 0.1$  and  $N = 10^9$ . The initial weighted points are equally distributed in  $]-\pi, \pi] \times [-3, 3]$ . Each inset includes a magnification around the maxima and the short time Fourier transform. The maxima of the long time Fourier transforms of  $M_x^{(1)}(t)$  and  $M_y^{(1)}(t)$  are, respectively, 1.944 and 0.973. DFT stands for Discrete Fourier Transform.

Landau poles for  $M_x$  and  $M_y$  may be different. Finally, note that the sharp maximum of the Fourier transform modulus close to  $\omega = 0$  comes from the slow rotation of the magnetization.

#### 4. Conclusion

We have investigated the asymptotic dynamics of perturbations around stable non-homogeneous backgrounds in spatially one-dimensional Vlasov equations. The dispersion relation of the linearized Vlasov equation has poles in the lower half of the complex plane and logarithmic branch points on the real axis. The poles yield exponentially decaying contributions: this is a form of Landau damping. The branch points yield algebraically decaying contributions. If the dominant branch point is related to a minimum of the potential created by the stationary state, the leading order of the potential is quadratic with respect to position around the minimum, and unless some special cancellation occurs, the perturbation potential behaves asymptotically as  $e^{i\omega_0 t}/t^2$ , where  $\omega_0$  is the harmonic frequency of the potential well. We expect this situation to occur in many cases of interest.

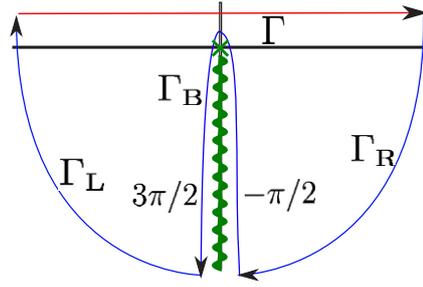
We have tested the theory on the HMF model by performing  $N$ -body simulations which correspond to the full Vlasov equation in the large  $N$  limit; these simulations used the weighted particles code. The exponent and frequency of the decay have been confirmed by these simulations, including in one case where a special symmetry imposes a decay as  $e^{i2\omega_0 t}/t^3$ .

This is summarized in the following scenario for decaying perturbations around stable non-homogeneous background in one-dimensional systems.

- (i) The perturbation potential first roughly behaves as an oscillating decaying exponential, with the frequency and decay rate related to the poles of the dispersion relation, as usual Landau damping on homogeneous backgrounds.
- (ii) After this transient, the algebraic decay sets in, and the frequency changes; the decay exponent and the new frequency are now governed by the dominant branch point singularity on the real axis of the dispersion relation.

These results prompt several questions, which this work does not answer. First, when the stationary distribution has a compact support in action variable, the edge of the support may create a singularity stronger than the bottom of the potential well. In some cases, one would then expect a  $1/t$  asymptotic decay, with a frequency corresponding to the action at the edge of the support. However, a stationary distribution with compact support may also sustain purely oscillatory modes [20], which do not decay at all. We have not been able to find a stationary state with compact support and no oscillatory mode to test the possibility of a  $1/t$  decay. Second, the local extrema of the function  $\Omega(J)$  may also create a different type of singularity, and thus modify the asymptotic behavior of a perturbation. Recently, Bouchet and Morita have studied a similar situation in the context of the 2D Euler equation, unveiling the phenomenon of ‘vorticity depletion’ close to these local extrema [30]. The possibility of a similar behavior for the Vlasov equation is an open question. Third, we picked up the slowest decaying contribution among Fourier modes with respect to the angle variable, and we have not investigated if the sum over the infinite number of Fourier modes affects the asymptotic decay.

It is also of primary interest to understand the asymptotic behavior of a perturbation in a three-dimensional setting. When the potential created by the stationary state is integrable, angle-action variables can be defined, and the method used in this paper is viable: one would have to study the singularities of the dispersion relation in this case. In a situation where the potential created by the stationary state is not integrable, the strategy would fail.



**Figure A1.** Modification of the Bromwich contour  $\Gamma$  to the closed path  $\Gamma + \Gamma_R + \Gamma_B + \Gamma_L$  in the complex  $z$  plane. The wavy line represents a branch cut associated with the logarithmic singularity at  $z = 0$ , which is assumed as the unique singularity. The numbers  $3\pi/2$  and  $-\pi/2$  are  $\arg(z)$  on the present Riemann sheet.

Finally, our numerical study required to compute a Vlasov evolution with good precision for a long time, which raises difficulties. To overcome them, we have introduced a particle method, the weighted particles approach. It proved particularly well suited for our purpose, and it would be interesting to investigate the reasons for this.

### Acknowledgments

The authors thank Freddy Bouchet and Bruno Marcos for helpful discussions. This work is supported by the Ministry of Educations, Science, Sports and Culture, Grant-in-Aid for Young Scientists (B), 19760052 and by the ANR-09-JCJC-009401 INTERLOP project. Computations have been partially performed on the ‘Mésocentre SIGAMM’ machine, hosted by the Observatoire de la Côte d’Azur.

### Appendix A. Estimate of $a_k(t)$

Each function  $\tilde{a}_k(\omega)$  has singularities of  $z^\nu \ln z$  type at  $\omega = m\omega_a$  for all  $m$ . It may be written as

$$\tilde{a}_k(\omega) = \sum_m A_m(\omega - m\omega_a)(\omega - m\omega_a)^{\nu_m} \ln(\omega - m\omega_a) + B(\omega), \quad (\text{A.1})$$

where the  $A_m(z)$  are supposed to be analytic, and the possible singularities of  $B$  at  $\omega = m\omega_a$  are weaker than  $z^\nu \ln z$ . Isolating one term in the sum over  $m$ , we have to compute the following inverse Laplace transform, dropping the index  $m$  for simplicity:

$$\int_{\Gamma} A(z - m\omega_a)(z - m\omega_a)^\nu \ln(z - m\omega_a) e^{-izt} dz = e^{-im\omega_a t} \int_{\Gamma} A(z)z^\nu \ln(z) e^{-izt} dz. \quad (\text{A.2})$$

We assume that  $A(z)$  rapidly decreases for  $|z| \rightarrow \infty$ . We take a branch cut in the lower half of the imaginary axis as shown in figure A1.

To compute the integral over the Bromwich contour  $\Gamma$ , we add the paths  $\Gamma_R$ ,  $\Gamma_B$  and  $\Gamma_L$  to the Bromwich contour  $\Gamma$ , and make a closed path. From the assumption no singularity is enclosed by the closed path, and hence

$$\int_{\Gamma + \Gamma_R + \Gamma_B + \Gamma_L} A(z)z^\nu \ln(z) e^{-izt} dz = 0. \quad (\text{A.3})$$

Thanks to the factor  $e^{-izt}$  of the integrand, contributions from  $\Gamma_R$  and  $\Gamma_L$  vanish, and hence

$$\int_{\Gamma} A(z) z^{\nu} \ln z e^{-izt} dz = \int_{-\Gamma_B} A(z) z^{\nu} \ln(z) e^{-izt} dz \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\infty}^0 A(r e^{i3\pi/2}) (r e^{i3\pi/2})^{\nu} \ln(r e^{i3\pi/2}) e^{-ir e^{i3\pi/2} t} e^{i3\pi/2} dr \\ &+ \int_0^{\infty} A(r e^{-i\pi/2}) (r e^{-i\pi/2})^{\nu} \ln(r e^{-i\pi/2}) e^{-ir e^{-i\pi/2} t} e^{-i\pi/2} dr. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Due to the branch cut, we have to distinguish  $A(r e^{i3\pi/2})$  from  $A(r e^{-i\pi/2})$ , and we denote them by  $A_L(r)$  and  $A_R(r)$ , respectively. The integral is hence written as

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} A(z) z^{\nu} \ln z e^{-izt} dz &= i(-i)^{\nu} \int_0^{\infty} [A_L(r) - A_R(r)] r^{\nu} \ln(r) e^{-rt} dr \\ &- (-i)^{\nu} \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} [3A_L(r) + A_R(r)] r^{\nu} e^{-rt} dr. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

The two functions  $A_L(r)$  and  $A_R(r)$  coincide in the limit  $r \rightarrow 0$ . Around the singularity  $r = 0$ , we can therefore estimate

$$A_L(r) - A_R(r) \propto r, \quad (\text{A.7})$$

$$3A_L(r) + A_R(r) \propto r^0. \quad (\text{A.8})$$

Using a scaling of the variable as  $y = rt$ , the integral is expressed by

$$\int_{\Gamma} A(z) z^{\nu} \ln z e^{-izt} dz = \frac{C_0}{t^{\nu+2}} \int_0^{\infty} y^{\nu+1} (\ln y - \ln t) e^{-y} dy + \frac{C_1}{t^{\nu+1}} \int_0^{\infty} y^{\nu} e^{-y} dy. \quad (\text{A.9})$$

The first term on the right-hand side yields  $t^{-\nu-2}$  decay and  $t^{-\nu-2} \ln t$  decay, and the second term  $t^{-\nu-1}$  decay. Returning to (A.2), we obtain  $e^{-im\omega t}/t^{\nu+1}$  as the slowest decay. From (A.1), we now see that the asymptotic decay of  $a_k(t)$  is governed by the smallest  $\nu_m$ .

## Appendix B. Weighted particles code

The  $N$ -body simulations are performed by the weighted particles code. In a standard  $N$ -body simulation, we would prepare  $N$  initial positions and momenta by drawing random numbers according to a given initial distribution. An initial condition prepared in this way has fluctuations of order  $O(1/\sqrt{N})$ . In the weighted particles code, we prepare  $N$  initial positions and momenta as lattice points of a square lattice, and give to each lattice point a weight proportional to the initial distribution we want to sample. The concrete algorithm is as follows.

We span the  $\mu$  space with a regular lattice, having  $N$  points. The upper and lower boundaries  $\pm p_{\max}$  for the lattice in the  $p$ -direction must be set such that the initial distribution  $f(x, p)$  for  $|p| > p_{\max}$  is negligible. Let  $i = 1, \dots, N$  denote the lattice points, and  $(x_i, p_i)$  their coordinates. We assign the weight  $w_i = C f(x_i, p_i)$  to each lattice point, where the constant  $C$  is defined by the normalization

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1.$$

We put one particle on each lattice point, and the particles move on the  $\mu$  space following by the canonical equations of motion for the HMF model

$$\dot{x}_i(t) = p_i(t), \quad \dot{p}_i(t) = -\bar{M}_x(t) \sin x_i(t) + \bar{M}_y(t) \cos x_i(t),$$

where the suffix  $i$  runs from 1 to  $N$ , and  $\bar{M}_x(t)$  and  $\bar{M}_y(t)$  are defined by

$$\bar{M}_x(t) = \sum_{i=1}^N w_i \cos x_i(t), \quad \bar{M}_y(t) = \sum_{i=1}^N w_i \sin x_i(t). \quad (\text{B.1})$$

We note that the lattice is used only to define the weight  $w_i$ , and to set the initial condition for the  $i$ th particle as  $(x_i(0), p_i(0)) = (x_i, p_i)$ . It is worth stressing that particles are not fixed at lattice points, but move in the whole  $\mu$  space, keeping their initially assigned weights  $w_i$ . The magnetization  $(M_x, M_y)$  is computed using the evolving positions and the initially fixed weight as (B.1).

In a semi-Lagrangian code [32], the distribution is defined at fixed lattice points. To evolve the distribution over a time step  $\Delta t$ , one computes the inverse temporal evolution of a particle during  $\Delta t$  with initial condition given by the lattice  $(x_i(0), p_i(0)) = (x_i, p_i)$ . Integrating the Vlasov equation, one obtains  $f(x_i, p_i, \Delta t) = f(x_i(-\Delta t), p_i(-\Delta t), 0)$ . The point  $(x_i(-\Delta t), p_i(-\Delta t))$  does not coincide with a lattice point generally, so that the value of the distribution at this point is obtained by interpolation. The semi-Lagrangian code thus requires three discretization parameters: the time step  $\Delta t$ , and two spatial and velocity discretization parameters  $\Delta x, \Delta p$ . In order to ensure numerical stability, the time step must become small as spatial and velocity discretizations become small. As a result, we need a small time step for computations with high spatial resolution, which results in heavy computations to reach the long time regime.

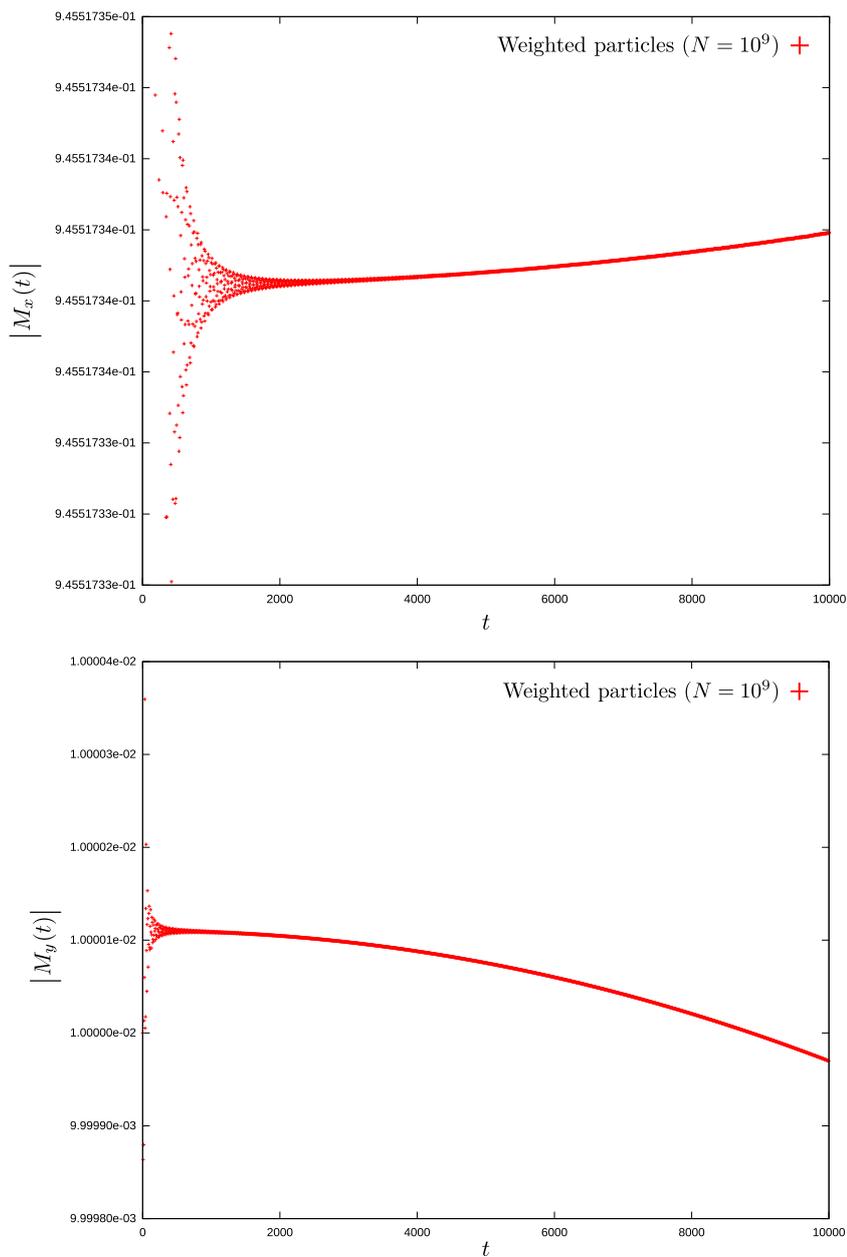
In the weighted particles code, we may set the  $\Delta x$  and  $\Delta p$  discretizations independently of the time step  $\Delta t$ , and hence the computational burden may be reduced by taking a rather large  $\Delta t$ , still giving a good enough accuracy.

The weighted particles code has further advantages against the semi-Lagrangian code:

(1) The Vlasov equation has an infinite number of conserved quantities which are  $\int (f(x, p))^l dx dp$  for  $l \in \mathbb{N}$ , but it is known that the semi-Lagrangian code cannot preserve them for  $l \geq 2$ . In the weighted particles code, the weight  $w_i$  is a fixed value and hence all such quantities, approximated by  $\sum_i (w_i)^l$ , are preserved exactly. (2) The semi-Lagrangian code uses interpolation. It is a delicate step to obtain the temporal evolution of the distribution function, and the accuracy of the code depends on the algorithm of interpolation. The weighted particles code does not require any interpolation.

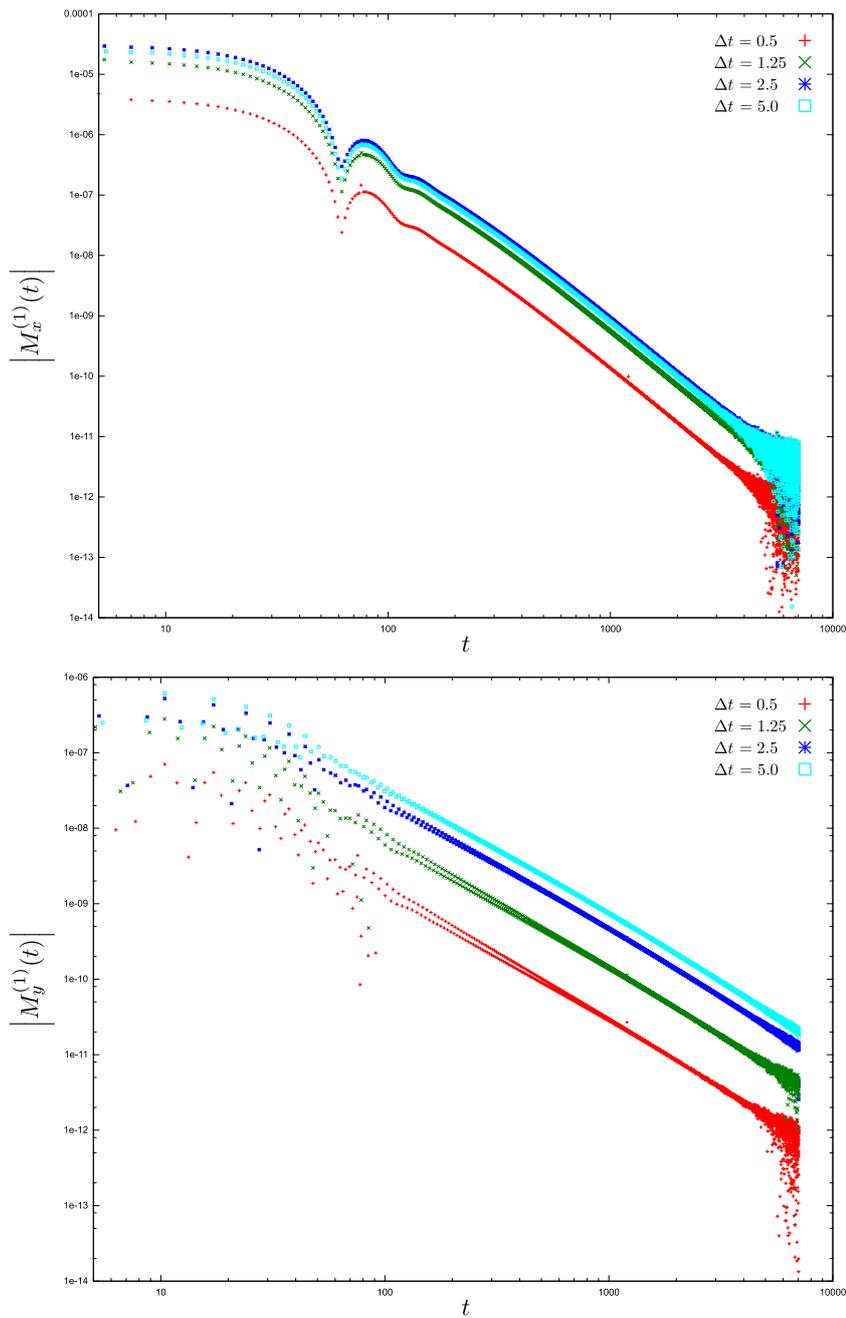
Let us remark that the weighted particles algorithm is highly parallelizable and its convenient structure makes it possible to use a lot of parallelization methods. In particular, it allows us to take advantage of the available computer architecture, be it a cluster with distributed memory or shared memory. In the case of a distributed memory, the mean field property allows us to restrict the communication between node to the magnetization, which can be computed piece by piece on each node. It is thus possible to compute the long time evolution of the system for a very large number of weighted particles.

One of the disadvantages of the weighted particles code is that it cannot compute the temporal evolution of the distribution directly. We can obtain a coarse-grained distribution, but its resolution is lower than the initially given lattice. Another disadvantage may be the limitation of objects for which the weighted particles code works well. The weight  $w_i$  on a lattice point corresponds to set several particles with the same initial condition. If these particles were given slightly different initial conditions, they would eventually separate as time goes by. In the weighted particles code, they remain together. Consequently, weighted particles code might have to be improved if it is to be used in order to observe more drastic changes of the distribution function, such as violent relaxation from a waterbag initial state to a Lynden–Bell quasi-stationary state. Further investigations are needed to understand why the



**Figure C1.** Slow rotation of  $M_x^{(1)}(t)$  (upper panel) and  $M_y^{(1)}(t)$  (lower panel) for an initial condition perturbed by a sine, as in (65). The numerical simulation was performed using the weighted particles code with  $T = 0.1$ ,  $a = 0.1$  and  $N = 10^9$ . The initial weighted points  $w_i$  are equally distributed in  $[-\pi, \pi] \times [-3, 3]$ .

weighted particles code seems to work so well in our case. The numerical tests and theoretical arguments given in [33] may be a first step in this direction.



**Figure C2.** Temporal evolution of the  $M_x^{(1)}(t)$  and  $M_y^{(1)}(t)$  envelop for an initial condition perturbed by a sine, as in (65), using different window sizes for the running average. The numerical simulation was performed using the weighted particles code with  $T = 0.1$ ,  $\alpha = 0.1$  and  $N = 10^9$ . The initial weighted points are equally distributed in  $] -\pi, \pi] \times [-3, 3]$ .

### Appendix C. Extraction of a rotating part

When we use an asymmetric perturbation such as the one given in (65), we observe a small rotation of the  $x$  and  $y$  magnetizations  $M_x(t)$  and  $M_y(t)$  (see figure C1). In this case, it is not possible to directly define  $M_x^{(1)}(t)$  and  $M_y^{(1)}(t)$  by subtracting the long time average. Our method is then to use a running average. We define  $M_x^{(1)}(t)$  and  $M_y^{(1)}(t)$  such that

$$M_x^{(1)}(t) = M_x(t) - \frac{1}{2\Delta t} \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} M_x(t') dt', \quad (\text{C.1})$$

and

$$M_y^{(1)}(t) = M_y(t) - \frac{1}{2\Delta t} \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} M_y(t') dt'. \quad (\text{C.2})$$

In order to compute the right exponent of a power law fit, we have to choose the parameter  $\Delta t$ . However, our different tests (see figure C2) show that modifying  $\Delta t$  does not change much the result. We have taken  $\Delta t = 5$  for figure 4. This is roughly the time needed to observe one oscillation of  $M_y(t)$ , and two oscillations of  $M_x(t)$ .

### References

- [1] Landau L 1946 *J. Phys. USSR* **10** 25
- [2] Maslov V P and Fedoryuk M V 1985 *Mat. Sb. (N. S.)* **127** 445
- [3] Degond P 1986 *Trans. Am. Math. Soc.* **294** 435
- [4] Weitzner H 1967 *Magneto-Fluid and Plasma Dynamics* ed H Grad (Providence, RI: American Mathematical Society) and references therein
- [5] Crownfield F R 1977 *Phys. Fluids* **20** 1483
- [6] Glassey R and Schaeffer J 1995 *Commun. Partial Differ. Equ.* **20** 647
- [7] Mouhot C and Villani C 2009 arXiv:0904.2760
- [8] Mouhot C and Villani C 2010 *J. Math. Phys.* **51** 015204
- [9] Lin S and Zeng C 2010 arXiv:1003.3005
- [10] Holloway J P and Dornig J J 1991 *Phys. Rev. A* **44** 3856
- [11] Habib S, Kandrup H E and Yip P F 1986 *Astrophys. J.* **309** 176
- [12] Kalnajs A J 1977 *Astrophys. J.* **212** 637
- [13] Polyachenko V L and Shukhman I G 1981 *Soviet Astronomy (Tr. Astr. Zhurn.)* **25** 533
- [14] Palmer P L and Papaloizou J 1987 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **224** 1043
- [15] Bertin G, Pegoraro F, Rubini F and Vesperini E 1994 *Astrophys. J.* **434** 94
- [16] Jain K, Bouchet F and Mukamel D 2007 *J. Stat. Mech.* **P11008**
- [17] Campa A and Chavanis P H 2010 *J. Stat. Mech.* **P06001**
- [18] Chavanis P H 2010 arXiv:1007.4916
- [19] Bachelard R *et al* 2011 *J. Stat. Mech.* **P03022**
- [20] Mathur S 1990 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **243** 529
- [21] Weinberg M D 1991 *Astrophys. J.* **373** 391
- [22] Weinberg M D 1994 *Astrophys. J.* **421** 481
- [23] Vesperini E and Weinberg M D 2000 *Astrophys. J.* **534** 598
- [24] Rayleigh L 1879 *Proc. London Math. Soc.* **10** 4
- [25] Strogatz S H, Mirollo R E and Matthews P C 1992 *Phys. Rev. Lett.* **68** 2730
- [26] Smereka P 1998 *Physica D* **124** 104
- [27] Barré J, Olivetti A and Yamaguchi Y Y 2010 *J. Stat. Mech.* **P08002**
- [28] Clutton-Brock M 1972 *Astrophys. Space Sci.* **16** 101
- [29] Smith R A and Rosenbluth M N 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 649
- [30] Bouchet F and Morita H 2010 *Physica D* **239** 948
- [31] Lighthill M J 1958 *Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [32] De Buyl P 2010 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **15** 2133
- [33] Wollman S and Ozizmir E 1996 *SIAM J. Numer. Anal.* **33** 1377
- [34] Inagaki S 1993 *Prog. Theor. Phys.* **90** 577



---

# RÉFÉRENCES DU CHAPITRE I

---

- [AR95] Mickael Antoni and Stefano Ruffo. Clustering and relaxation in hamiltonian long-range dynamics. *Physical Review E*, 52(3) :2361, 1995. - Cité 1 fois : page 16 -
- [Bal97] Radu Balescu. *Statistical dynamics : matter out of equilibrium*. 1997. - Cité 1 fois : page 16 -
- [BM10] Freddy Bouchet and Hidetoshi Morita. Large time behavior and asymptotic stability of the 2D euler and linearized euler equations. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 239(12) :948–966, June 2010. - Cité 2 fois : pages 35 et 49 -
- [BOY10] Julien Barré, Alain Olivetti, and Yoshiyuki Y Yamaguchi. Dynamics of perturbations around inhomogeneous backgrounds in the HMF model. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2010(08) :P08002, August 2010. - Cité 7 fois : pages viii, 18, 21, 24, 29, 49 et 50 -
- [BOY11] Julien Barré, Alain Olivetti, and Yoshiyuki Y Yamaguchi. Algebraic damping in the one-dimensional Vlasov equation. *1104.1890*, April 2011. - Cité 5 fois : pages viii, 18, 36, 49 et 79 -
- [BPRV94] G. Bertin, F. Pegoraro, F. Rubini, and E. Vesperini. Linear stability of spherical collisionless stellar systems. *The Astrophysical Journal*, 434 :94–109, October 1994. - Cité 1 fois : page 20 -
- [Bri70] R. J Briggs. Role of landau damping in Crossed-Field electron beams and inviscid shear flow. *Physics of Fluids*, 13(2) :421, 1970. - Cité 1 fois : page 49 -
- [BSD<sup>+</sup>11] R Bachelard, F Staniscia, T Dauxois, G De Ninno, and S Ruffo. Stability of inhomogeneous states in mean-field models with an external potential. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2011(03) :P03022, March 2011. - Cité 1 fois : page 20 -
- [Bul65] Roland Bulirsch. Numerical calculation of elliptic integrals and elliptic functions. *Numerische Mathematik*, 7(1) :78–90, February 1965. - Cité 1 fois : page 31 -

- [BY09] Julien Barré and Yoshiyuki Y. Yamaguchi. Small traveling clusters in attractive and repulsive hamiltonian mean-field models. *Physical Review E*, 79(3) :036208, March 2009. - Cité 2 fois : pages 49 et 50 -
- [CC10] Alessandro Campa and Pierre-Henri Chavanis. A dynamical stability criterion for inhomogeneous quasi-stationary states in long-range systems. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2010(06) :P06001, June 2010. - Cité 1 fois : page 20 -
- [CDR09] Alessandro Campa, Thierry Dauxois, and Stefano Ruffo. Statistical mechanics and dynamics of solvable models with long-range interactions. *Physics Reports*, 480(3-6) :57–159, September 2009. - Cité 6 fois : pages 14, 15, 16, 49, 125 et 219 -
- [Cha98] Pierre-Henri Chavanis. From jupiter’s great red spot to the structure of galaxies : Statistical mechanics of Two-Dimensional vortices and stellar systems. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 867(1) :120–140, December 1998. - Cité 1 fois : page 20 -
- [CK76] C.Z Cheng and Georg Knorr. The integration of the Vlasov equation in configuration space. *Journal of Computational Physics*, 22(3) :330–351, November 1976. - Cité 2 fois : pages 37 et 38 -
- [CLS09] Nicolas Crouseilles, Guillaume Latu, and Eric Sonnendrücker. A parallel Vlasov solver based on local cubic spline interpolation on patches. *Journal of Computational Physics*, 228(5) :1429–1446, March 2009. - Cité 1 fois : page 40 -
- [Clu72] M. Clutton-Brock. The gravitational field of flat galaxies. *Astrophysics and Space Science*, 16(1) :101–119, April 1972. - Cité 1 fois : page 49 -
- [CMS10] Nicolas Crouseilles, Michel Mehrenberger, and Eric Sonnendrücker. Conservative semi-Lagrangian schemes for Vlasov equations. *Journal of Computational Physics*, 229(6) :1927–1953, March 2010. - Cité 1 fois : page 38 -
- [DB94] J.-L. Delcroix and A. Bers. *Physique des plasmas, volume 2*. EDP Sciences, 1994. - Cité 1 fois : page 14 -
- [dB10] Pierre de Buyl. Numerical resolution of the Vlasov equation for the hamiltonian Mean-Field model. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15(8) :2133–2139, August 2010. - Cité 2 fois : pages 37 et 38 -
- [Deg86] Pierre Degond. Spectral theory of the linearized Vlasov-Poisson equation. *Transactions of the American Mathematical Society*, 294 :435–453, 1986. - Cité 1 fois : page 20 -
- [Fra05] Till Daniel Frank. *Nonlinear Fokker-Planck equations : fundamentals and applications*. Springer, 2005. - Cité 3 fois : pages 14, 111 et 112 -
- [HR63] D. J. Hofsommer and R. P. Riet. On the numerical calculation of elliptic integrals of the first and second kind and the elliptic functions of jacobi. *Numerische Mathematik*, 5(1) :291–302, December 1963. - Cité 1 fois : page 31 -

- [Hé64] M. Hénon. L'évolution initiale d'un amas sphérique. *Annales d'Astrophysique*, 27 :83, February 1964. - Cité 1 fois : page 16 -
- [IK93] Shogo Inagaki and Tetsuro Konishi. Dynamical stability of a simple model similar to self-gravitating systems. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 45 :733, 1993. - Cité 2 fois : pages 16 et 22 -
- [Ina93] Shogo Inagaki. Thermodynamic stability of modified Konishi-Kaneko system : Astrophysics and relativity. *Progress of theoretical physics*, 90(3) :577–584, September 1993. - Cité 2 fois : pages 32 et 43 -
- [JBM07] Kavita Jain, Freddy Bouchet, and David Mukamel. Relaxation times of unstable states in systems with long range interactions. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2007(11) :P11008–P11008, November 2007. - Cité 1 fois : page 20 -
- [Kal77] A. J. Kalnajs. Dynamics of flat galaxies. IV - the integral equation for normal modes in matrix form. *The Astrophysical Journal*, 212 :637–644, March 1977. - Cité 1 fois : page 49 -
- [Lan46] L. Landau. On the vibrations of the electronic plasma. *J. Phys. USSR*, 10 :25, 1946. - Cité 1 fois : page 19 -
- [Lyn62] D. Lynden-Bell. The stability and vibrations of a gas of stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 124 :279, 1962. - Cité 1 fois : page 20 -
- [Lyn67] D. Lynden-Bell. Statistical mechanics of violent relaxation in stellar systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 136 :101, 1967. - Cité 2 fois : pages 16 et 128 -
- [MF86] V P Maslov and M V Fedoryuk. The linear theory of landau damping. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 55(2) :437–465, February 1986. - Cité 1 fois : page 20 -
- [MH72] Tohru Morita and Tsuyoshi Horiguchi. Convergence of the arithmetic-geometric mean procedure for the complex variables and the calculation of the complete elliptic integrals with complex modulus. *Numerische Mathematik*, 20(5) :425–430, October 1972. - Cité 1 fois : page 31 -
- [Mor78] Tohru Morita. Calculation of the complete elliptic integrals with complex modulus. *Numerische Mathematik*, 29(2) :233–236, January 1978. - Cité 1 fois : page 31 -
- [MV10] C. Mouhot and C. Villani. Landau damping. *Journal of Mathematical Physics*, 51(1) :015204, 2010. - Cité 3 fois : pages 20, 35 et 37 -
- [PP87] P. L. Palmer and J. Papaloizou. Instability in spherical stellar systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 224 :1043–1053, February 1987. - Cité 1 fois : page 20 -
- [Ray78] L. Rayleigh. On the instability of jets. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s1-10(1) :4–13, November 1878. - Cité 1 fois : page 20 -

- [Sme98] Peter Smereka. Synchronization and relaxation for a class of globally coupled hamiltonian systems. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 124(1-3) :104–125, December 1998. - Cité 1 fois : page 35 -
- [SRBG99] Eric Sonnendrücker, Jean Roche, Pierre Bertrand, and Alain Ghizzo. The Semi-Lagrangian method for the numerical resolution of the Vlasov equation. *Journal of Computational Physics*, 149(2) :201–220, March 1999. - Cité 2 fois : pages 37 et 38 -
- [VW00] E. Vesperini and Martin D. Weinberg. Perturbations of spherical stellar systems during flyby encounters. *The Astrophysical Journal*, 534(2) :598–623, May 2000. - Cité 2 fois : pages 20 et 30 -
- [Wei89] Martin D. Weinberg. Self-gravitating response of a spherical galaxy to sinking satellites. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 239 :549–569, August 1989. - Cité 1 fois : page 49 -
- [Wei94] Martin D. Weinberg. Weakly damped modes in star clusters and galaxies. *The Astrophysical Journal*, 421 :481, February 1994. - Cité 2 fois : pages 20 et 30 -
- [WO96] Stephen Wollman and Ercument Ozizmir. Numerical approximation of the One-Dimensional Vlasov-Poisson system with periodic boundary conditions. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 33(4) :1377–1409, 1996. ArticleType : research-article / Full publication date : Aug., 1996 / Copyright © 1996 Society for Industrial and Applied Mathematics. - Cité 1 fois : page 39 -

---

# PREMIERS MODES D'OSCILLATION D'UN SYSTÈME DE PARTICULES

---

---

## 1 INTRODUCTION

---

Les systèmes de particules piégées sont étudiés dans de nombreux domaines de la physique : plasmas confinés, atomes froids piégés, condensats de Bose-Einstein, colloïdes, ions piégés, systèmes astrophysiques, ... qui contiennent souvent de grands nombres de particules. Une question récurrente, dans l'étude de ces systèmes, est de savoir comment extraire les informations utiles parmi toutes celles disponibles ? Pour cela, il existe une méthode très appréciée qui consiste à s'intéresser aux oscillations du système étudié. Cette méthode a le gros avantage de ne pas être invasive : il est possible d'obtenir des informations sur le système sans le dénaturer, sans le détruire.

Ici nous allons nous intéresser à deux modes d'oscillation en particulier : celui de ballonnement et celui de respiration. Le premier n'est rien d'autre que le mouvement du centre de masse du système tandis que le second traduit les mouvements alternés de contraction et dilatation du système, comme pour les poumons pendant la respiration (voir figure II.1).

Il va sans dire que ces modes d'oscillation font partie des plus simples à étudier. D'ailleurs, de nombreux travaux sur leurs propriétés, ainsi que les informations qu'ils peuvent nous apporter, existent déjà dans la littérature. Par exemple, nous savons que les oscillations du centre de masse sont, en général, indépendantes du nombre de particules dans le système et de leurs interactions [Koh61, BBvL07]. De la même manière, les oscillations de respiration à température nulle ne dépendent pas du nombre de particules mais dépendent cette fois du type d'interaction entre particules, faisant ainsi du mode de respiration un outil de diagnostic des effets collectifs dans ces systèmes [HFL<sup>+</sup>08].

Au-delà de la compréhension théorique, ces modes ont également des utilisations concrètes.

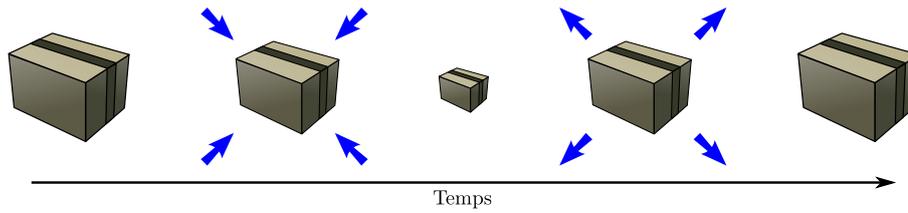


FIGURE II.1 – Principe du mode de respiration : alternance de contractions et dilatations de l'ensemble du système.

Dans le cas des “dusty plasma” aussi appelés “complex plasma”<sup>1</sup>, il est possible d’obtenir la longueur de Debye et la charge des particules grâce à la mesure des fréquences d’oscillation de ces deux modes [MKP01, She05]. De la même manière, ils permettent également de caractériser un gaz de Bose unidimensionnel piégé [MSKE03].

Pour bien comprendre pourquoi, malgré la pléthore de résultats existant déjà, nous nous sommes penchés sur ces deux modes d’oscillation. Il est important de faire un bilan des différents travaux et résultats existants pour chacun d’entre eux.

En ce qui concerne le mode de respiration, il est étudié dans de nombreux domaines de la physique, mais souvent au cas par cas. Selon le problème étudié, les régimes considérés, les méthodes employées changent complètement :

- un ansatz d’échelle est utilisé pour approcher la dynamique non-linéaire de l’équation de Boltzmann-Vlasov pour un gaz classique de particules [GO02]; l’idée ayant été précédemment introduite dans le contexte de l’équation de Gross-Pitaevskii [CD96, KSS97],
- dans le contexte des plasmas piégés, les problèmes sont souvent étudiés en utilisant une équation hydrodynamique obtenue grâce à l’approximation *fluide froid* (“cold fluid”) [Dub91] qui consiste à négliger les effets de température et de pression,
- suivant l’idée introduite dans [Dub93], les auteurs de [AYS03] obtiennent une équation approchée décrivant le mode de respiration dans le cas d’un plasma unidimensionnel au-delà de l’approximation *fluide froid* (“cold fluid”), en utilisant une fermeture *ad hoc* des équations hydrodynamiques,
- la linéarisation des équations de Newton autour de l’équilibre a été utilisée pour étudier des systèmes d’ions ou de colloïdes piégés soumis à un potentiel d’interaction Coulombien ou de Yukawa en dimension un [Jam98, TCD02], deux [SP95, PP97] et trois [APP07]; ces résultats ayant été récemment généralisés pour toute une classe de potentiels [HFL<sup>+</sup>08]. Malheureusement, cette approche est *a priori* limitée au cas d’une température nulle et pour de petites perturbations,
- le cas de “dusty plasma” interagissant par le potentiel de Yukawa a été étudié en utilisant une méthode de type champ moyen [SBC<sup>+</sup>04, She04],
- dans le contexte astrophysique, les systèmes de particules attractives ont été étudiés en utilisant le théorème du Viriel [CE72].

Chaque méthode s’applique à une situation particulière. Par exemple, la linéarisation des équations de Newton est adaptée pour les systèmes cristallisés, où les effets thermiques peuvent être négligés et où les perturbations restent faibles, alors que l’équation de Vlasov

1. Il s’agit de plasmas contenant des particules allant de quelques nanomètres à quelques micromètres. Le lecteur pourra consulter [BHB10] pour plus de détails sur les “dusty plasma” et leur récent développement.

est adaptée pour des systèmes faiblement corrélés. Malgré le besoin apparent d'utiliser les spécificités de chaque problème pour étudier le mode de respiration, les résultats obtenus sont toujours similaires. Cette constatation et le fait qu'il n'existe que peu ou pas de résultats à friction non nulle, nous ont amenés à chercher une explication.

Pour le mode du centre de masse, la situation est différente car les auteurs de [Koh61, BBvL07] ont montré que celui-ci n'est que très peu dépendant des spécificités du problème étudié, tant que les particules sont dans un piège harmonique. Cependant, il existe encore de nombreux cas où cela ne suffit pas. En effet, différents domaines de la physique essaient de comprendre et prédire le comportement de systèmes où les particules sont confinées dans des pièges anharmoniques, avec parfois une friction non constante ; celle-ci pouvant dépendre de la position et de la vitesse des atomes. Il est facile de comprendre l'intérêt d'étudier les pièges anharmoniques : les pièges expérimentaux ne sont jamais parfaitement harmoniques et cela peut influencer la dynamique du système, comme c'est le cas pour un condensat de Bose-Einstein [OFK<sup>+</sup>03]. À l'inverse, il pourrait sembler étrange de considérer des frictions non constantes. Cependant, il existe de nombreux domaines où il est possible de rencontrer ce type de situation en introduisant une friction effective qui dépend de la position et de la vitesse des particules. Dans le contexte des "dusty plasma", il a été montré que des zones de friction négative peuvent apparaître à cause de l'absorption d'ions par des grains du système et ainsi créer des particules actives [TEIT03, TZ03]. Il est possible de retrouver le même genre de comportement lorsque l'on cherche à décrire des particules actives qui peuvent échanger de l'énergie avec leur environnement et ainsi se mouvoir. En physique des plasmas, le lecteur pourra consulter par exemple [DET04] ou pour des exemples en biophysique [ES08, EEM05, MZ99]. Enfin, citons les expériences à atomes froids où l'absorption de photons par les atomes peut conduire, dans de grands pièges magnéto-optiques, à une friction dépendant de la position des atomes et ayant des conséquences importantes sur la dynamique du système [LMK06, PLK06].

À l'instar du mode de respiration, les études sont faites au cas par cas, en utilisant à chaque fois des méthodes différentes adaptées aux problèmes.

Compte tenu de ces problèmes divers et variés où l'on étudie et/ou utilise ces deux modes d'oscillation, il nous a semblé pertinent de chercher une façon d'unifier et de généraliser ces résultats. Pour cela, il faut commencer par choisir la description *la plus adaptée*. En général, le choix du modèle est assez naturel compte tenu des propriétés du système et de ce que l'on cherche à étudier. Malheureusement, dans notre cas, la situation est plus complexe. En effet, lorsque l'on étudie un système cristallisé, il semble naturel d'utiliser les équations de Newton. Cependant, dans l'étude d'un plasma, une approche cinétique est souvent préférable. Dans ce contexte, quelle est la *bonne* façon d'aborder notre problème ? Quelle est l'approche qui nous permettra de traiter simultanément un système cristallisé ou bien un plasma ? Pour cela, nous avons choisi une approche cinétique basée sur la première équation de la hiérarchie de Bogolyubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon (BBGKY) [Fra05] car celle-ci est, avant toute hypothèse simplificatrice, strictement équivalente aux équations de Newton. Elle permet de décrire le système à l'aide de densités de présence, simplifiant ainsi notre étude lorsque le nombre de constituants devient grand. La première équation de la hiérarchie donne l'évolution de la distribution à un point, que l'on notera  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ , en fonction de la distribution à deux points, notée  $g(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{r}', \mathbf{v}', t)$  :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{v}f) - \nabla_{\mathbf{r}} \Phi \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f + C[g] = 0, \quad (\text{II.1})$$

avec  $\Phi$  le potentiel de piégeage et  $C[g]$  le terme d'interaction entre particules, donné par

$$C[g](\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \int \mathbf{F}_{bin}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{v}} g(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{r}', \mathbf{v}', t) d\mathbf{r}' d\mathbf{v}' \quad (\text{II.2})$$

et  $\mathbf{F}_{bin}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  la force d'interaction exercée par une particule en  $\mathbf{r}'$  sur une particule en  $\mathbf{r}$ . On remarquera que pour connaître l'équation d'évolution de  $f$ , il faut connaître la fonction  $g$ . Or l'équation d'évolution de  $g$  dépend de la fonction de distribution à trois points, elle-même dépendant de la fonction à quatre points,  $\dots$ , d'où le terme "hiérarchie". Pour décrire un système de  $N$  particules, la hiérarchie est composée de  $N$  équations aux dérivées partielles couplées. *A priori*, utiliser la hiérarchie ne semble pas plus aisé que d'utiliser les équations de Newton. Cependant, il est possible de simplifier tout cela en faisant des hypothèses dites de *fermeture*, dépendant en général des caractéristiques du problème. Après ces hypothèses, l'équation obtenue n'est plus équivalente aux équations de Newton, mais si le choix de fermeture est pertinent, les informations que l'on perd ne sont pas ou peu importantes pour décrire le système à l'échelle macroscopique. Dans notre cas, nous n'utiliserons pas les fermetures *standard* de la hiérarchie car elles dépendent fortement du système considéré. Nous utiliserons à la place des fermetures basées sur la dynamique étudiée. Cela permet d'obtenir des résultats valables pour un grand nombre de situations pouvant être radicalement différentes.

Pour finir, afin de prendre en compte les effets thermiques, ou dit autrement, les effets de friction et de diffusion, nous ajoutons de manière *ad hoc* un opérateur de Fokker-Planck [Fra05] au niveau de la première équation de la hiérarchie, qui devient

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{v}f) - \nabla_{\mathbf{r}} \Phi \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f + C[g] = \Delta_{\mathbf{v}}(Df) + \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (\kappa \mathbf{v}f), \quad (\text{II.3})$$

avec  $\kappa$  la constante de friction et  $D$  la constante de diffusion de l'opérateur de Fokker-Planck.

Cette hiérarchie d'équations, avant fermeture, permet de décrire de manière unique une très grande variété de problèmes, que ce soit par exemple des systèmes à longue portée ou bien à courte portée, dans l'ensemble canonique<sup>2</sup> (à température constante) ou microcanonique<sup>3</sup> (à énergie constante).

Dans les deux parties qui vont suivre, nous verrons comment à partir de la hiérarchie complète il est possible de se ramener à l'évolution du mode de respiration et du centre de masse. Nous en profiterons également pour tester dans chacun des deux cas l'accord entre nos prédictions et des simulations numériques à  $N$  corps. Enfin, dans une troisième et dernière partie, nous discuterons des extensions possibles de la méthode présentée.

## 2 OSCILLATIONS DE RESPIRATION

Dans cette section, nous allons étudier spécifiquement le mode de respiration d'un système de particules en interaction dans un piège harmonique :  $\Phi(\mathbf{r}) = (\omega_0^2/2)|\mathbf{r}|^2$ . Nous

---

2. Dans la suite nous parlerons d'ensemble canonique pour désigner un système soumis à une friction et une diffusion non nulles. Cela permet de simuler la présence d'un thermostat qui fixe la température du système.

3. Dans la suite nous parlerons d'ensemble microcanonique pour désigner un système sans friction ni diffusion, *i.e.* sans échange d'énergie avec l'extérieur.

traiterons le cas de l'ensemble canonique, *i.e.* à température constante, et celui de l'ensemble microcanonique, *i.e.* à énergie totale constante. Nous verrons également dans la dernière partie ce qu'il se passe lorsque la friction et/ou la diffusion peuvent varier selon la position et la vitesse des particules.

Toute l'étude du mode de respiration repose sur une équation de contrainte, qui est la pièce maîtresse de notre travail, et que nous allons tout de suite introduire.

Pour plus de détails, on pourra se référer aux articles [OBM<sup>+</sup>09] et [OBM<sup>+</sup>11] publiés pendant ma thèse (article joint dans les parties 5.1 et 5.2).

## 2.1 Équation d'évolution du mode de respiration

---

Afin de décrire l'évolution du système lorsque le mode de respiration est excité, nous allons introduire une équation d'évolution que nous appellerons équation de contrainte et dont la terminologie sera expliquée plus loin. Afin d'obtenir cette équation, nous allons cibler la dynamique à étudier et ne considérer que les contributions dominantes. Cela se traduira par l'utilisation de moments qui nous permettront de *fermer* la hiérarchie BBGKY.

### 2.1.a Dynamique étudiée

Nous sommes intéressés par le mode de respiration du système, autrement dit par les mouvements de contraction et de dilatation globales du système. C'est pourquoi nous avons supposé que la dynamique spatiale du système peut-être décrite par la simple relation (ou *ansatz*)

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_0(\varphi_t(\mathbf{r}, \mathbf{v})), \quad (\text{II.4})$$

avec

$$\varphi_t(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \left( \mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}}{\lambda(t)}, \mathbf{V} = \lambda(t)\mathbf{v} - \dot{\lambda}(t)\mathbf{r} \right). \quad (\text{II.5})$$

Avant d'aller plus loin, justifions la forme des équations (II.4) et (II.5). La partie spatiale se comprend simplement en supposant que l'ensemble du système se contracte/dilate de la même quantité  $\lambda(t)$  quelle que soit sa position :

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}}{\lambda(t)}, \quad (\text{II.6})$$

où  $\mathbf{r}$  représente un point de l'espace.

Pour le reste, c'est plus complexe car nous voulons utiliser des équations cinétiques. Or, qui dit équation cinétique dit vitesse. Pour décrire le comportement de la variable vitesse  $\mathbf{v}$ , nous allons ajouter une contrainte supplémentaire. Celle de conserver le volume de l'espace des phases, *i.e.*  $d\mathbf{r}d\mathbf{v} = d\mathbf{R}d\mathbf{V}$ . Cela implique tout naturellement, d'après (II.6), que

$$\mathbf{V} = \lambda(t)\mathbf{v} + \mathbf{h}(\mathbf{r}, t), \quad (\text{II.7})$$

avec  $\mathbf{h}$  une fonction arbitraire qui ne dépend pas de la vitesse.

Il est important de remarquer une chose qui aura de très fortes conséquences dans la suite. Conserver le volume de l'espace des phases revient à considérer que le système satisfait le théorème de Liouville, autrement dit que le système est Hamiltonien. Nous nous restreignons donc aux systèmes *a priori* sans échange d'énergie avec l'extérieur. Par conséquent,

nous savons dès maintenant que les résultats obtenus pour l'ensemble canonique ne seront pas exacts mais constitueront seulement une approximation de la dynamique. Cette approximation sera d'autant meilleure que le temps caractéristique lié à l'échange d'énergie avec l'extérieur ( $\sim \kappa$ ) sera faible comparé à l'échelle de temps typique d'évolution du système ( $\sim \omega_0$ ).

Bien que l'équation (II.7) nous donne une idée de la forme de l'ansatz pour la coordonnée en vitesse, cela n'est pas suffisant car nous n'avons aucune information sur la fonction  $\mathbf{h}$ . Pour cela, nous allons à nouveau imposer une propriété au système. Nous allons naturellement supposer la conservation du nombre de particules, autrement dit la conservation de la masse totale du système :

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \frac{\partial (\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\rho(\mathbf{r}, t))}{\partial \mathbf{r}} = 0, \quad (\text{II.8})$$

avec  $\rho$  la densité en espace et  $\mathbf{u}$  le champ de vitesse local, définis par

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{r}, t) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}, \\ \rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

Telle quelle, l'équation (II.9) ne nous est pas d'une grande utilité car nous ne connaissons pas l'expression de  $\rho$  et de  $\mathbf{u}$ , autrement dit de  $f$ . Pour pallier à cela, nous allons faire une hypothèse très forte : l'existence d'un état stationnaire, noté  $f_0$ . Cette hypothèse est tout à fait naturelle quand on se rappelle notre objectif : nous cherchons à étudier la dynamique du mode de respiration en partant du fait qu'il s'agit d'une contraction/dilatation et que nous pouvons supposer  $\mathbf{R} = \mathbf{r}/\lambda(t)$ . Or pour pouvoir déterminer l'évolution de  $\mathbf{R}$ , il nous faut une condition initiale, un état initial de référence qui va subir des oscillations de respiration. Il s'agira pour nous de l'état stationnaire  $f_0$ , de sorte que l'évolution en temps de  $f$  satisfasse :

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_0 \left( \frac{\mathbf{r}}{\lambda(t)}, \lambda(t)\mathbf{v} + \mathbf{h}(\mathbf{r}, t) \right), \quad (\text{II.10})$$

En utilisant l'équation de conservation de la masse et l'état stationnaire  $f_0$  autour duquel auront lieu les oscillations, nous obtenons l'équation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{\lambda} \rho_0 \left( \frac{\mathbf{r}}{\lambda} \right) \right] + \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left[ \rho_0 \left( \frac{\mathbf{r}}{\lambda} \right) \right] \mathbf{u} \left( \frac{\mathbf{r}}{\lambda}, t \right) - \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left[ \mathbf{h}(\mathbf{r}, t) \rho_0 \left( \frac{\mathbf{r}}{\lambda} \right) \right] = 0 \quad (\text{II.11})$$

Si maintenant nous admettons que  $f_0$  est paire par rapport à ses coordonnées de vitesse, ce qui est par exemple le cas de l'équilibre thermodynamique, alors le deuxième terme de l'équation précédente disparaît. Enfin, en cherchant une solution qui satisfait séparément les contributions en  $\rho_0$  et  $\partial_{\mathbf{r}} \rho_0$ , nous obtenons

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}, t) = -\dot{\lambda}(t)\mathbf{r}. \quad (\text{II.12})$$

En résumé, nous avons imposé :

- la conservation du volume de l'espace des phases,
- la conservation de la masse,
- l'existence d'un état stationnaire autour duquel auront lieu les oscillations,

pour obtenir l'évolution de  $f$  à l'aide de  $f_0$  par la transformation :

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_0(\varphi_t(\mathbf{r}, \mathbf{v})), \quad (\text{II.13})$$

avec

$$\varphi_t(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \left( \mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}}{\lambda(t)}, \mathbf{V} = \lambda(t)\mathbf{v} - \dot{\lambda}(t)\mathbf{r} \right). \quad (\text{II.14})$$

Nous allons donc étudier la dynamique décrite par les équations (II.13) et (II.14) qui doit nous donner le comportement du mode de respiration du système. Bien sûr, pour arriver à ce résultat, nous avons fait un certain nombre d'hypothèses qui ne sont pas parfaitement contrôlées. Par exemple, nous supposons que  $f_0$  est symétrique par rapport à  $\mathbf{v}$  et que  $f$  est donnée par  $f_0$ . Cependant, nous cherchons à être le plus général possible sans pour autant nous astreindre à considérer tous les cas possibles, plus exotiques les uns que les autres. *A priori*, pour un système qui ne satisfait pas les hypothèses précédentes, il devrait être suffisant de reprendre la même démarche pour obtenir la forme appropriée de l'ansatz.

Dans le même esprit nous allons étendre les propriétés (II.13) et (II.14) à la fonction de distribution à deux points  $g$ , en supposant l'existence d'un état stationnaire  $g_0$  dont dérive  $f_0$  :

$$f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \propto \iint g_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{r}', \mathbf{v}') d\mathbf{r}' d\mathbf{v}' \quad (\text{II.15})$$

Nous admettrons que

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{r}', \mathbf{v}', t) = g_0(\psi_t(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{r}', \mathbf{v}')), \quad (\text{II.16})$$

avec

$$\psi_t(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{r}', \mathbf{v}') = \left( \mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}}{\lambda(t)}, \mathbf{V} = \lambda(t)\mathbf{v} - \dot{\lambda}(t)\mathbf{r}, \mathbf{R}' = \frac{\mathbf{r}'}{\lambda(t)}, \mathbf{V}' = \lambda(t)\mathbf{v}' - \dot{\lambda}(t)\mathbf{r}' \right). \quad (\text{II.17})$$

Une nouvelle fois, cette hypothèse n'est pas parfaitement contrôlée mais elle semble cohérente dans le sens où elle nous permet de retrouver les équations (II.13) et (II.14) à partir des équations (II.16) et (II.17).

Nous avons bien avancé ici en ramenant toute la dépendance en temps dans la quantité  $\lambda(t)$ , mais nous ne savons toujours pas à quoi elle correspond physiquement. Avant toute chose, rappelons que ce qui nous intéresse ici est l'évolution du mode de respiration. Plus simplement, il s'agit de l'évolution de la taille typique du système car nous supposons que la contraction/dilatation est identique pour tout le système : un seul et unique paramètre  $\lambda$  qui dépend du temps. Nous allons prendre comme taille typique la valeur quadratique moyenne, donnée par  $\sqrt{\langle \mathbf{r}^2 \rangle_f}$ , où nous avons posé, pour toute fonction  $\chi$  de  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{v}$ ,

$$\langle \chi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \rangle_f = \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \chi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v}, \quad (\text{II.18})$$

avec  $N$  le nombre de particules qui composent le système.

En utilisant les propriétés de la dynamique que nous cherchons à étudier *via* les équations (II.13) et (II.14), nous obtenons

$$\langle \mathbf{r}^2 \rangle_f = \lambda^2 \langle \mathbf{r}^2 \rangle_{f_0}. \quad (\text{II.19})$$

Le paramètre  $\lambda(t)$  est, à une constante près, la taille quadratique moyenne du système; la constante étant simplement la taille typique du système dans son état au repos.

Maintenant que nous avons bien saisi l'intérêt d'introduire le paramètre  $\lambda(t)$ , nous allons dans le prochain paragraphe obtenir l'équation d'évolution de celui-ci. Cette équation sera appelée dans la suite *équation de contrainte*.

### 2.1.b Obtention de l'équation de contrainte

Afin d'obtenir l'équation d'évolution de  $\lambda(t)$  qui n'est autre que la taille typique du système à l'instant  $t$ , nous allons utiliser les équations (II.16) et (II.17), qui sélectionnent la dynamique qui nous intéresse ainsi que la première équation de la hiérarchie BBGKY, complétée par l'opérateur de Fokker-Planck (voir équation (II.3)). Nous obtenons l'équation

$$\sum_{i=1}^d \left\{ \frac{v_i}{\lambda^2} \frac{\partial f_0}{\partial r_i} - r_i \lambda \frac{\partial f_0}{\partial v_i} (\ddot{\lambda} + \kappa \dot{\lambda} + \omega_0^2 \lambda) - \kappa \frac{\partial(v_i f_0)}{\partial v_i} - D \lambda^2 \frac{\partial^2 f_0}{\partial v_i^2} + C[g_0 \circ \psi] \right\} = 0. \quad (\text{II.20})$$

Comme nous pouvions nous y attendre, l'équation (II.20) n'est pas exploitable car nous n'avons pas fermé la hiérarchie BBGKY avant d'utiliser les équations (II.16) et (II.17) : il existe toujours un terme dépendant des interactions entre particules qui couple les distributions à un et deux points.

Pour s'en sortir, nous allons faire une hypothèse sur les forces d'interaction entre particules. Nous allons uniquement considérer des forces homogènes, au sens mathématique :

$$\mathbf{F}_{bin}(\lambda \mathbf{r}, \lambda \mathbf{r}') = \frac{1}{\lambda^k} \mathbf{F}_{bin}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (\text{II.21})$$

avec  $-k$  le degré d'homogénéité de la force d'interaction.

Dès lors, le terme d'interaction  $C[g_0 \circ \psi]$  se simplifie pour donner

$$\begin{aligned} C[g_0 \circ \psi](\mathbf{r}, \mathbf{v}) &= \int \mathbf{F}_{bin}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \left[ g_0 \left( \frac{\mathbf{r}}{\lambda}, \lambda \mathbf{v} - \dot{\lambda} \mathbf{r}, \frac{\mathbf{r}'}{\lambda}, \lambda \mathbf{v}' - \dot{\lambda} \mathbf{r}' \right) \right] d\mathbf{r}' d\mathbf{v}' \\ &= \lambda \int \mathbf{F}_{bin}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot (\nabla_{\mathbf{v}} g_0) \left( \frac{\mathbf{r}}{\lambda}, \lambda \mathbf{v} - \dot{\lambda} \mathbf{r}, \frac{\mathbf{r}'}{\lambda}, \lambda \mathbf{v}' - \dot{\lambda} \mathbf{r}' \right) d\mathbf{r}' d\mathbf{v}' \\ &= \lambda^{1-k} \int \mathbf{F}_{bin} \left( \frac{\mathbf{r}}{\lambda}, \frac{\mathbf{r}'}{\lambda} \right) \cdot (\nabla_{\mathbf{v}} g_0) \left( \frac{\mathbf{r}}{\lambda}, \lambda \mathbf{v} - \dot{\lambda} \mathbf{r}, \frac{\mathbf{r}'}{\lambda}, \lambda \mathbf{v}' - \dot{\lambda} \mathbf{r}' \right) d\mathbf{r}' d\mathbf{v}' \\ &= \lambda^{1-k} \int \mathbf{F}_{bin} \left( \frac{\mathbf{r}}{\lambda}, \mathbf{r}' \right) \cdot (\nabla_{\mathbf{v}} g_0) \left( \frac{\mathbf{r}}{\lambda}, \lambda \mathbf{v} - \dot{\lambda} \mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{v}' \right) d\mathbf{r}' d\mathbf{v}' \\ &= \lambda^{1-k} C[g_0] \left( \frac{\mathbf{r}}{\lambda}, \lambda \mathbf{v} - \dot{\lambda} \mathbf{r} \right), \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

que nous pouvons substituer<sup>4</sup> dans l'équation (II.20) en utilisant la première équation de

---

4. Pour en être convaincu, il suffit de poser :  $\mathbf{R} = \mathbf{r}/\lambda$  et  $\mathbf{V} = \lambda \mathbf{v} - \dot{\lambda} \mathbf{r}$ . En écrivant la première équation de la hiérarchie BBGKY pour  $f_0$  en  $(\mathbf{R}, \mathbf{V})$ , nous faisons apparaître le terme  $C[g_0](\mathbf{R}, \mathbf{V})$ .

la hiérarchie BBGKY pour l'état stationnaire<sup>5</sup>  $f_0$  :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d v_i \frac{\partial f_0}{\partial r_i} \left( \frac{1}{\lambda^2} - \lambda^{1-k} \right) + D \frac{\partial^2 f_0}{\partial v_i^2} (\lambda^{1-k} - \lambda^2) \\ - r_i \frac{\partial f_0}{\partial v_i} \left[ \lambda \left( \ddot{\lambda} + \kappa \dot{\lambda} + \omega_0^2 \lambda \right) - \lambda^{1-k} \omega_0^2 \right] + \kappa \frac{\partial (v_i f_0)}{\partial v_i} (\lambda^{1-k} - 1) = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

La dernière étape du calcul consiste à s'affranchir de la connaissance exacte de l'état stationnaire  $f_0$  en ne cherchant qu'à décrire l'équation d'évolution de  $\lambda$ . Pour cela, nous allons uniquement considérer les premiers moments de l'équation précédente et plus précisément, les premiers nous donnant une information non triviale sur le système. En effet, vu les différentes approximations et hypothèses que nous avons faites, il serait prétentieux d'espérer plus que le comportement à l'ordre dominant du système. D'ailleurs, il est possible de montrer, en regardant les moments d'ordre pair et impair de l'équation (II.23), que dans le cas à friction non nulle, seule la fonction  $\lambda(t) = 1$  est exactement solution. De la même manière, le coefficient de diffusion n'est pas présent dans l'équation finale. La raison provenant de la troncature aux moments d'ordres deux qui permet de n'obtenir que le comportement dominant du système. En effet, la diffusion apparaît dans les équations d'ordres supérieurs ce qui peut expliquer, par exemple, les désaccords entre prédictions et simulations que nous pourrions observer plus loin.

Reprenons le calcul en multipliant l'équation (II.23) par  $r_j v_j / N$  et intégrant sur  $d\mathbf{r}d\mathbf{v}$ . Nous obtenons ainsi une équation de contrainte que le mode de respiration  $\lambda(t)$  doit satisfaire :

$$\ddot{\lambda} + \kappa \dot{\lambda} + \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^k} \right) \omega_0^2 - \left( \frac{1}{\lambda^3} - \frac{1}{\lambda^k} \right) \frac{\langle v_j^2 \rangle_{f_0}}{\langle r_j^2 \rangle_{f_0}} = 0. \quad (\text{II.24})$$

Grâce à cette équation, nous pouvons très simplement décrire l'évolution du mode de respiration d'un système de particules, et ce même si nous n'avons pas directement accès à la densité de l'espace des phases  $f_0$ . Il nous suffit de deux données statistiques :  $\langle r_j^2 \rangle_{f_0}$  et  $\langle v_j^2 \rangle_{f_0}$ , qui sont en général plus simples à obtenir expérimentalement que la densité  $f_0$ .

Dans certains cas il est possible d'obtenir l'équation (II.24) d'une autre manière à l'aide du théorème du Viriel, de la conservation de l'énergie et de la forme spécifique de l'ansatz utilisé. C'est par exemple le cas lorsque le système n'est pas en contact avec un thermostat ( $\kappa = D = 0$ ) et que la force d'interaction entre particules est homogène et dérive d'un potentiel, noté  $V_{bin}$ . Pour cela commençons par écrire les expressions en fonction du temps des différentes énergies présentes dans le système pendant une oscillation de respiration :

$$\mathcal{E}_{\text{piege}}(t) = \frac{1}{2} \omega_0^2 \int \mathbf{r}^2 f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r}d\mathbf{v} = \frac{1}{2} \omega_0^2 \int \mathbf{r}^2 f_0 \left( \frac{\mathbf{r}}{\lambda}, \lambda \mathbf{r} - \dot{\lambda} \mathbf{v} \right) d\mathbf{r}d\mathbf{v} = \frac{1}{2} \omega_0^2 \lambda^2 \langle \mathbf{r}^2 \rangle_{f_0},$$

$$\mathcal{E}_c(t) = \frac{1}{2} \int \mathbf{v}^2 f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r}d\mathbf{v} = \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda^2} \langle \mathbf{v}^2 \rangle_{f_0} + \frac{1}{2} \dot{\lambda}^2 \langle \mathbf{r}^2 \rangle_{f_0},$$

$$\mathcal{E}_{int}(t) = \int V_{bin}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') g(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{r}', \mathbf{v}', t) d\mathbf{r}d\mathbf{v}d\mathbf{r}'d\mathbf{v}' = \frac{1}{\lambda^{k-1}} \mathcal{E}_{int}^0,$$

(II.25)

avec  $\mathcal{E}_{\text{piege}}(t)$  l'énergie due au piège à l'instant  $t$ ,  $\mathcal{E}_c(t)$  son l'énergie cinétique mais aussi  $\mathcal{E}_{int}(t)$  et  $\mathcal{E}_{int}^0$  les énergies dues aux interactions entre particules respectivement à l'instant

5. Lorsque  $D$  et  $\kappa$  sont des constantes non nulles, il s'agit simplement de l'équilibre thermodynamique.

$t$  et dans l'état stationnaire  $f_0$ . L'énergie totale du système, notée  $\mathcal{E}_{Totale}$ , vaut donc :

$$\mathcal{E}_{Totale} = \frac{1}{2}\omega_0^2\lambda^2 \langle \mathbf{r}^2 \rangle_{f_0} + \frac{1}{2}\frac{1}{\lambda^2} \langle \mathbf{v}^2 \rangle_{f_0} + \frac{1}{2}\dot{\lambda}^2 \langle \mathbf{r}^2 \rangle_{f_0} + \frac{1}{\lambda^{k-1}}\mathcal{E}_{int}^0. \quad (\text{II.26})$$

En utilisant le théorème du Viriel, lorsque le système est dans l'état stationnaire  $f_0$ , nous pouvons écrire la relation suivante :

$$\langle \mathbf{v}^2 \rangle_{f_0} - \omega_0^2 \langle \mathbf{r}^2 \rangle_{f_0} + (k-1)\mathcal{E}_{int}^0 = 0, \quad (\text{II.27})$$

qui une fois injectée dans l'équation (II.26) nous donne :

$$\frac{1}{2}\dot{\lambda}^2 + \left( \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{p}{2\lambda^2} + \frac{1-p}{(k-1)\lambda^{k-1}} \right) \omega_0^2 = \frac{\mathcal{E}_{Totale}}{\langle \mathbf{r}^2 \rangle_{f_0}} \quad (\text{II.28})$$

Pour finir et faire apparaître l'équation (II.24) lorsque  $\kappa = 0$ , il suffit tout naturellement de dériver l'équation (II.28) par rapport au temps.

### 2.1.c Analyse de l'équation de contrainte

#### i) Paramètre adimensionné

L'équation (II.24) décrit l'évolution du mode de respiration en utilisant certaines propriétés de l'état stationnaire de référence  $f_0$ . En effet, la méthode que nous avons utilisée nécessite la connaissance de  $\langle r_j^2 \rangle_{f_0}$  et  $\langle v_j^2 \rangle_{f_0}$ , qui peuvent être vues comme les largeurs typiques de la distribution  $f_0$  dans les directions  $r_j$  et  $v_j$  de l'espace des phases. Par conséquent, nous avons  $d$  équations à satisfaire simultanément par  $\lambda$  et cela n'est possible que si  $\langle r_j^2 \rangle_{f_0} \langle v_j^2 \rangle_{f_0}$  ne dépendent pas explicitement de la direction observée  $j$  : il faut que  $f_0$  soit isotrope par rapport à  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{v}$ .

En regardant de plus près l'équation (II.24), un paramètre adimensionné apparaît naturellement :

$$p = \frac{1}{\omega_0^2} \frac{\langle v_j^2 \rangle_{f_0}}{\langle r_j^2 \rangle_{f_0}}, \quad (\text{II.29})$$

qui permet de réécrire l'équation de contrainte comme

$$\ddot{\lambda} + \kappa\dot{\lambda} + \left( \lambda - \frac{p}{\lambda^3} + \frac{p-1}{\lambda^k} \right) \omega_0^2 = 0. \quad (\text{II.30})$$

Il est possible dans certains cas d'avoir une interprétation physique explicite du paramètre  $p$ . Pour cela, remarquons que lorsque  $f_0$  est l'état d'équilibre thermodynamique, l'énergie potentielle typique du piège est donnée par  $(1/2)\omega_0^2 \langle r_j^2 \rangle_{f_0}$ , tandis que l'énergie thermique est proportionnelle à la vitesse quadratique moyenne des particules qui donne  $(1/2) \langle v_j^2 \rangle_{f_0}$ . Dès lors, nous avons

$$p = \frac{\text{énergie thermique}}{\text{énergie potentielle du piègeage}}. \quad (\text{II.31})$$

Une autre façon de comprendre le rôle du paramètre  $p$  est d'utiliser le théorème du Viriel (voir équation (II.27)) qui permet de faire apparaître l'énergie d'interaction entre particules :

$$p = 1 - (k-1) \frac{\mathcal{E}_{int}^0}{\mathcal{E}_{piege}^0}. \quad (\text{II.32})$$

En utilisant cette expression pour le paramètre  $p$ , nous pouvons immédiatement remarquer que la limite  $p \rightarrow 1$  correspond au cas où le rôle des interactions est négligeable devant le rôle du piège.

Personnellement, je préfère utiliser une troisième interprétation de ce paramètre. Si nous considérons un système de particules sans interaction ( $\mathbf{F}_{bin}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbf{0}$ ) à l'équilibre thermodynamique et à la même température que précédemment, nous avons

$$\langle v_j^2 \rangle_{f_0, \mathbf{F}_{bin}=\mathbf{0}} = \omega_0^2 \langle r_j^2 \rangle_{f_0, \mathbf{F}_{bin}=\mathbf{0}}, \quad (\text{II.33})$$

et donc

$$p = \frac{\langle r_j^2 \rangle_{f_0, \mathbf{F}_{bin}=\mathbf{0}}}{\langle r_j^2 \rangle_{f_0}} = \frac{\text{“Taille du système sans interaction”}}{\text{“Taille du système avec interaction”}}. \quad (\text{II.34})$$

En plus de pouvoir être vu comme le *ratio* entre énergie thermique et énergie potentielle de piégeage, le paramètre  $p$  peut s'interpréter comme un indicateur de la force des interactions entre particules. En effet, lorsque les interactions entre particules sont attractives (*resp.* répulsives)  $\langle r_j^2 \rangle_{f_0, \mathbf{F}_{bin}=\mathbf{0}}$  est plus grand (*resp.* petit) que  $\langle r_j^2 \rangle_{f_0}$  et donc  $p > 1$  (*resp.*  $< 1$ ). Selon la gamme de valeurs de  $p$  nous pouvons différencier les régimes suivants :

- $0 < p < 1$  : les interactions sont répulsives. Plus  $p$  est proche de zéro et plus elles sont fortes.
- $p \sim 1$  : les interactions entre particules sont faibles. Le système est essentiellement dominé par le piège et les effets thermiques. Nous retrouvons bien le même résultat qu'en utilisant l'équation (II.32).
- $p > 1$  : les interactions sont attractives. Elles sont d'autant plus fortes que  $p$  est grand.

## ii) Oscillateur anharmonique

Afin de mettre en avant les propriétés de l'équation de contrainte (II.30), il est plus simple de l'interpréter comme l'équation d'évolution d'un oscillateur anharmonique soumis au potentiel extérieur  $\phi$ <sup>6</sup> :

$$\ddot{\lambda} + \kappa \dot{\lambda} + \phi'(\lambda) = 0, \quad (\text{II.35})$$

avec

$$\phi(\lambda) = \begin{cases} \omega_0^2 \left( \frac{1}{2} \lambda^2 + \frac{1}{2} \frac{p}{\lambda^2} + \frac{p-1}{1-k} \lambda^{1-k} \right), & \text{si } k \neq 1, \\ \omega_0^2 \left( \frac{1}{2} \lambda^2 + \frac{1}{2} \frac{p}{\lambda^2} + (p-1) \log \lambda \right), & \text{si } k = 1, \end{cases} \quad (\text{II.36})$$

Le premier terme de l'équation (II.36) provient du potentiel de confinement  $\Phi = (\omega_0^2/2)|\mathbf{r}|^2$ , le dernier terme prend naissance dans les interactions entre particules, enfin le deuxième correspond à un terme de pression cinétique<sup>7</sup>, qui ne dépend pas de la dimension de l'espace  $d$ .

6. Attention à ne pas confondre  $\Phi$  et  $\phi$ . Le premier est le potentiel extérieur qui confine les particules tandis que le second est un potentiel extérieur effectif pour décrire l'évolution du mode de respiration.

7. Nous retrouvons ce terme en utilisant l'ansatz donnée par (II.13) et (II.14) pour déterminer l'expression de la  $i^{\text{ième}}$  composante du tenseur de pression cinétique  $\Psi = \int (\mathbf{w} - \mathbf{v})(\mathbf{w} - \mathbf{v}) f(\mathbf{r}, \mathbf{w}, t) d\mathbf{w}$  moyenné sur l'espace et normalisé par  $\omega_0^2 \langle r_i^2 \rangle_{f_0}$ . Remarquons que de manière moins précise mais plus intuitive, on peut se convaincre du rôle de ce terme en notant qu'il apparaît directement dans l'expression de l'énergie cinétique du système (voir l'équation (II.25)).

La forme du potentiel  $\phi$  est directement reliée à la nature des oscillations. Dans le cas répulsif ( $p < 1$ ), le potentiel est convexe et ce quelle que soit la valeur du degré d'homogénéité  $k$  des interactions. Il diverge en  $\phi \sim \lambda^{-2}$  lorsque  $\lambda$  tend vers zéro et  $\phi \sim \lambda^2$  lorsque  $\lambda$  tend vers l'infini. Les deux comportements limites assurent que le système va osciller autour de l'unique minimum  $\lambda = 1$ . Ce résultat peut être compris de façon intuitive en remarquant que dans le cas répulsif, il y a compétition entre les interactions qui veulent dilater le système et le piège harmonique qui tend à contracter le système. C'est le même genre de compétition entre effets attractifs et effets répulsifs qui assure la stabilité d'une étoile, où les forces thermonucléaires tendent à dilater le système tandis que la gravité tend à le contracter. Dans le cas attractif ( $p > 1$ ), il faut distinguer plusieurs cas. Si  $0 \leq k \leq 3$ , alors le potentiel conserve les mêmes propriétés que dans le cas répulsif. Dans ce cas, ce n'est plus le potentiel extérieur qui assure la stabilité du système mais plutôt la pression cinétique qui empêche le système de s'effondrer sur lui-même. Enfin, pour des interactions attractives telles que  $k > 3$ , le potentiel diverge comme  $\lambda^{1-k}$  lorsque  $\lambda$  tend vers zéro. Si  $p < 1 - 4/(3 - k)$ , alors  $\lambda = 1$  est un état stationnaire métastable et il en existe un autre instable, noté  $\lambda^*$ , tel que  $\lambda^* < 1$  (voir figure II.2). D'autre part, si  $p > 1 - 4/(3 - k)$ , alors c'est  $\lambda = 1$  qui est instable tandis qu'il existe un état métastable pour  $\lambda^* > 1$ .

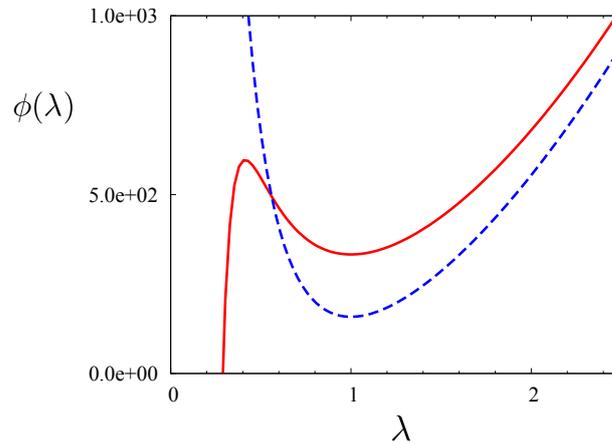


FIGURE II.2 – Représentation du potentiel anharmonique effectif  $\phi$  défini par (II.36). En pointillés nous avons un cas où les interactions entre particules sont répulsives, et en ligne continue un cas attractif avec  $k > 3$ .

### iii) Approche linéaire

Au-delà de l'approche qualitative que nous a permis l'introduction d'un potentiel effectif anharmonique que ce soit au niveau linéaire ou non linéaire, il est possible d'avoir des informations plus précises lorsque nous nous limitons explicitement aux faibles perturbations. Pour cela nous allons linéariser l'équation (II.30) au voisinage de  $\lambda = 1$  en posant  $\lambda(t) = 1 + \varepsilon(t)$ . Nous obtenons ainsi :

$$\ddot{\varepsilon}(t) + \kappa\dot{\varepsilon}(t) + \omega_0^2 \left( p(3-k) + 1 + k \right) (\varepsilon(t) - 1) = 0, \quad (\text{II.37})$$

où les solutions sont données par

$$\varepsilon(t) = C_+ e^{\left( -\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 4\omega_0^2(p(3-k) + 1 + k)} \right) \frac{t}{2}} + C_- e^{\left( -\kappa - \sqrt{\kappa^2 - 4\omega_0^2(p(3-k) + 1 + k)} \right) \frac{t}{2}}, \quad (\text{II.38})$$

avec  $C_-$  et  $C_+$  des constantes qui dépendent des conditions initiales.

Au regard de la solution (II.38), nous pouvons distinguer, selon les valeurs des différents paramètres, des régions où les oscillations de respiration relaxent de façon sous-amortie ou sur-amortie. Les figures II.3(a) et II.3(b) représentent ces différentes régions, en introduisant l'équation de la frontière les séparant  $\omega_0/\kappa = \zeta(p, k)$  avec :

$$\zeta(p, k) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{p(3-k) + 1 + k}}. \quad (\text{II.39})$$

Nous pouvons constater deux choses :

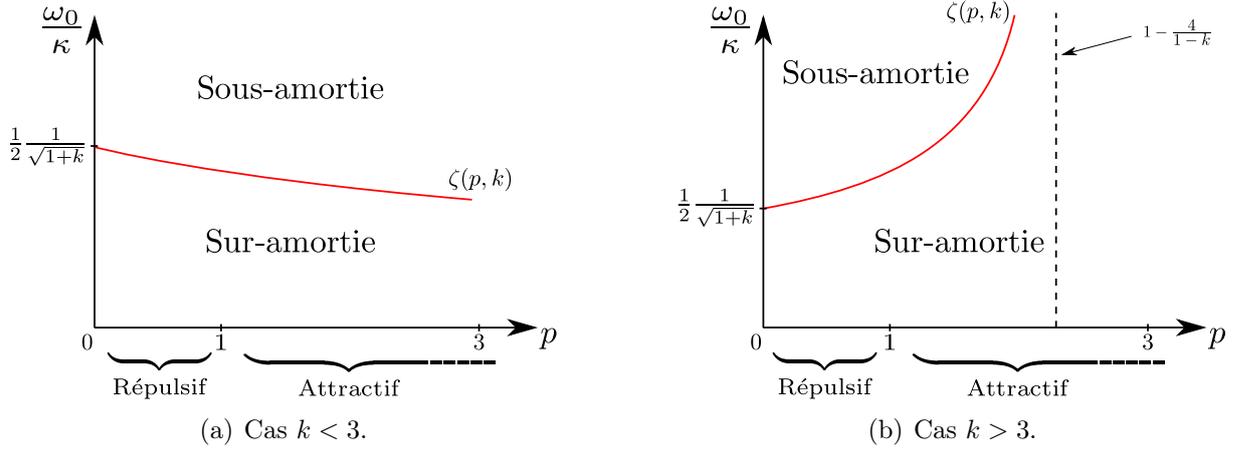


FIGURE II.3 – Représentation des régions de relaxation sur-amortie et sous-amortie des oscillations de respiration en régime linéaire. La figure II.3(a) est réalisée pour  $k = 2$ , tandis que la figure II.3(b) pour  $k = 6$ .

- Lorsque  $k$  est inférieur (*resp.* supérieur) à 3, la frontière entre sur-amortie et sous-amortie décroît (*resp.* croît) quand  $p$  augmente.
- Dans le cas  $k > 3$ , dès que  $p$  devient supérieur à  $1 - 4/(1 - k)$ , les oscillations de respiration relaxent toujours de façon sur-amortie et ce quelle que soit la valeur de la friction  $\kappa$ .

Ces deux prédictions de l'équation de contrainte ne seront pas testées dans la suite. Notons que la deuxième prédiction s'applique principalement aux systèmes à interaction courte portée (sauf si  $d > 3$ ). Nous verrons au paragraphe 2.2.b que la simulation de ces systèmes est assez difficile. C'est pourquoi nous n'avons pas poursuivi dans cette voie.

#### iv) Fréquences du mode de respiration

Un des intérêts de l'approche utilisée ici est de nous donner accès aux fréquences du mode de respiration  $\omega$  quelle que soit la valeur de  $k$  ou de  $p$ , mais aussi à leur évolution lorsque ces paramètres évoluent quelle que soit la dimension de l'espace  $d$ . En effet, si nous considérons la limite  $\kappa \rightarrow 0$ , nous obtenons :

$$\omega(k, p) = \omega_0 \sqrt{(3-k)(p-1) + 4}. \quad (\text{II.40})$$

Cette expression redonne les deux cas limites bien connus [DO99] d'un gaz sans interaction  $\omega = 2\omega_0$  ( $p = 1$ ) et d'un plasma fortement corrélé  $\omega = \sqrt{3}\omega_0$  ( $p = 0, k = 2$ ). Nous

pouvons également noter que l'évolution de la fréquence de respiration dépend du type d'interaction entre particules (voir figure II.4). En effet, lorsque  $k < 3$  (*resp.*  $k > 3$ ), la fréquence augmente pour des valeurs de  $p$  croissantes (*resp.* décroissantes).

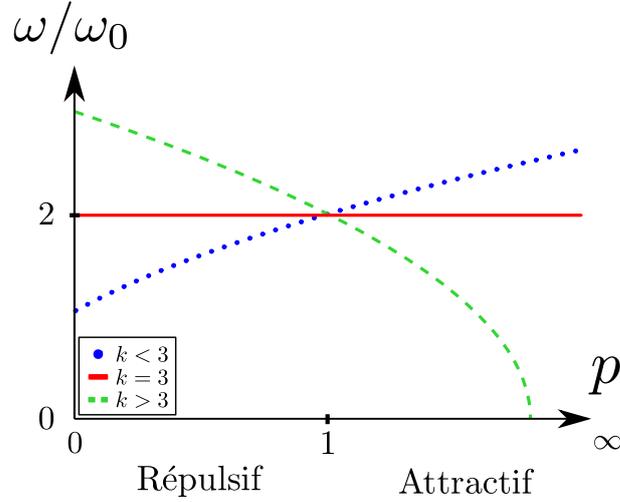


FIGURE II.4 – Évolution de la fréquence du mode de respiration linéarisé en fonction de la valeur de  $p$  pour différentes valeurs du degré d'homogénéité de l'interaction  $k$ .

#### v) Comparaison avec la littérature

Au-delà des deux cas limites d'un gaz sans interaction et d'un plasma froid ou fortement corrélé que l'équation (II.40) englobe bien (voir [DO99]), nous pouvons comparer notre prédiction avec beaucoup d'autres travaux disponibles.

Dans la limite  $p = 0$  d'un système cristallisé où les effets de températures peuvent être négligés *i.e.* sans le terme  $\lambda^{-3}$ , l'équation (II.40) est exactement celle obtenue par [Jam98, TCD02, PP97, HFL<sup>+</sup>08]. Dans [AYS03], les auteurs considèrent le cas  $d = 1$  d'un plasma ( $k = 0$ ) avec des valeurs de  $p$  non nulles mais relativement faibles. Ils introduisent ainsi le terme  $\lambda^{-3}$  qui donne exactement l'équation (II.40) que nous avons obtenue.

Il est important de rappeler que l'hypothèse de force d'interaction homogène ne nous limite pas à des forces en loi de puissance. L'équation (II.40) dépasse bien ce cadre. Par exemple, l'auteur de [GO02] considère un gaz de particules classiques avec des interactions du type champ moyen qui fait apparaître un potentiel de Dirac  $\delta$ . Ce cas correspond à un degré d'homogénéité  $k = d + 1$ , qui est bien inclus dans l'équation (II.40), et nous retrouvons bien la même fréquence de respiration. *A contrario*, le potentiel de Yukawa ne peut pas être décrit par notre approche car il n'est pas, ni la force qu'il crée, homogène :

$$V(\mathbf{r}) \propto \frac{\exp(-|\mathbf{r}|/L)}{|\mathbf{r}|}. \quad (\text{II.41})$$

Cependant, nous pouvons tout de même retrouver les deux cas limites où la longueur d'écrantage  $L$  tend vers zéro et vers l'infini. Dans le premier cas, le potentiel de Yukawa tend vers un potentiel de Dirac  $\delta$  tandis que dans l'autre limite, il tend vers le potentiel Coulombien. Ces deux cas étant bien inclus dans l'équation (II.40), nous retrouvons les résultats obtenus dans [She04, SBC<sup>+</sup>04] qui utilisent d'autres méthodes.

Pour terminer, mentionnons le fait que nous retrouvons également le comportement prédit pour un système auto-gravitant tridimensionnel ( $k = 2$  et  $d = 3$ ) avec ou sans pression [SSK86]. Pour cela il suffit de reprendre la méthode que nous avons présentée sans considérer le piège ni le thermostat. Dans ce cas, l'équation (II.24) devient simplement :

$$\ddot{\lambda} - \left( \frac{1}{\lambda^3} - \frac{1}{\lambda^2} \right) \frac{\langle v_j^2 \rangle_{f_0}}{\langle r_j^2 \rangle_{f_0}} = 0, \quad (\text{II.42})$$

où la limite sans pression, qui conduit irrémédiablement au collapse du système, s'obtient en négligeant le terme de pression cinétique  $1/\lambda^3$ .

#### 2.1.d Cas particulier : la limite $p \rightarrow 0$

Avant de passer à la comparaison entre la prédiction théorique donnée par l'équation de contrainte et les simulations numériques, considérons un cas particulier de l'équation de contrainte :  $p \rightarrow 0$ . Nous allons montrer que ce cas peut être obtenu directement à partir des équations de Newton.

Commençons par considérer un état stationnaire du système, *i.e.* une répartition des  $N$  particules du système invariante dans le temps. Notons toutes les quantités relatives à cet état par l'exposant 0 et  $\mathbf{F}_i$  la force totale ressentie par la particule  $i$ . Puisque nous sommes à l'équilibre, nous pouvons écrire que

$$\mathbf{F}_i^0 = -\nabla\Phi(\mathbf{r}_i^0) + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{bin}(\mathbf{r}_j^0 - \mathbf{r}_i^0) = \mathbf{0}. \quad (\text{II.43})$$

Si maintenant nous regardons uniquement l'évolution du mode de respiration, nous sommes amenés à poser  $\mathbf{r}_i(t) = \lambda(t)\mathbf{r}_i^0$  dans les équations d'évolution de Newton de chacune des particules :

$$\ddot{\lambda}\mathbf{r}_i^0 = -\nabla\Phi(\lambda\mathbf{r}_i^0) - \kappa\dot{\lambda}\mathbf{r}_i^0 + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{bin}(\lambda\mathbf{r}_j - \lambda\mathbf{r}_i). \quad (\text{II.44})$$

En utilisant le fait que le potentiel extérieur est harmonique et que les forces d'interaction entre particules sont homogènes de degré  $-k$ , nous obtenons

$$\ddot{\lambda}\mathbf{r}_i^0 = -\omega_0^2\lambda\mathbf{r}_i^0 - \kappa\dot{\lambda}\mathbf{r}_i^0 + \frac{1}{\lambda^k} \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{bin}(\mathbf{r}_j^0 - \mathbf{r}_i^0). \quad (\text{II.45})$$

Enfin nous substituons la somme faisant intervenir les interactions à l'aide de l'équation obtenue pour l'état stationnaire (II.43) :

$$\ddot{\lambda}\mathbf{r}_i^0 = -\omega_0^2\lambda\mathbf{r}_i^0 - \kappa\dot{\lambda}\mathbf{r}_i^0 + \omega_0^2 \frac{1}{\lambda^k} \mathbf{r}_i^0, \quad (\text{II.46})$$

qui conduit tout naturellement à l'équation de contrainte (II.30) dans le cas  $p = 0$  :

$$\ddot{\lambda} + \kappa\dot{\lambda} + \omega_0^2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^k} \right) = 0. \quad (\text{II.47})$$

Remarquons que le calcul que nous venons d'écrire est très proche de celui effectué dans [HFL+08], à la différence près que le résultat que nous venons d'obtenir n'est pas limité aux petites perturbations. La raison provient tout simplement du fait que dans leur approche, les auteurs linéarisent les équations d'évolution de Newton autour de l'état stationnaire alors que de notre côté, nous ciblons directement la dynamique de respiration.

## 2.2 Simulations et résultats

Bien que la description du mode de respiration donnée par l'équation (II.30) que nous avons obtenue dans la partie 2.1 permet de retrouver tous les résultats de la littérature que nous avons rencontrés, elle n'est pas limitée à ceux-ci. En effet, nous pouvons *a priori* décrire les oscillations de respiration de n'importe quel système de particules confinées dans un piège harmonique interagissant deux à deux par des forces homogènes et ce quelle que soit la température. Cependant nous savons déjà que dans certains cas, comme par exemple celui où le temps caractéristique de dissipation d'énergie est plus petit que celui du piège harmonique, les hypothèses que nous avons faites peuvent être mal contrôlées. Nous avons donc besoin d'explorer un peu plus la validité de l'équation pour un plus grand nombre de situations. C'est pourquoi nous nous sommes reposés sur des simulations numériques permettant de tester quasiment n'importe quel système.

### 2.2.a Comment les simulations sont-elles réalisées ?

Avant de comparer nos prédictions théoriques aux simulations numériques, parlons rapidement de la réalisation des simulations.

Toutes les simulations, effectuées dans l'étude des oscillations du mode de respiration, sont basées sur des méthodes de dynamique moléculaire. Nous nous sommes servis de l'algorithme de Verlet-Leapfrog pour les simulations dans l'ensemble microcanonique, *i.e.* sans friction ni diffusion, et d'un algorithme de type Langevin-Verlet pour les simulations dans l'ensemble canonique, *i.e.* avec une friction et une diffusion non nulles. On pourra retrouver dans [AT99, PF98] le descriptif complet de ces différents schémas. L'avantage d'utiliser l'algorithme de Verlet-Leapfrog est de pouvoir conserver l'énergie totale du système aux erreurs d'arrondi près<sup>8</sup> et donc de pouvoir observer sur de grands temps les oscillations du mode de respiration. D'autre part, il faut noter que le calcul des forces se fait sans approximation, hormis la discrétisation en temps. À chaque pas de temps nous calculons exactement les forces d'interaction entre particules, ce qui limite très rapidement le nombre de particules du système car le calcul des forces est d'ordre  $N^2$  (avec  $N$  le nombre de particules qui composent le système). À cause de cette restriction, nous n'avons jamais simulé de système composé de plus de 5000 particules en utilisant les algorithmes de Verlet-Leapfrog et Langevin-Verlet.

En regardant de près l'équation (II.30) ou son autre écriture (II.24), nous nous rappelons que le paramètre adimensionné n'est pas quelconque et dépend explicitement des caractéristiques de l'état stationnaire de référence  $f_0$ . C'est pourquoi la première étape consiste à faire atteindre au système un état stationnaire stable  $f_0$  et à mesurer les valeurs de  $\langle r_j^2 \rangle_{f_0}$  et  $\langle v_j^2 \rangle_{f_0}$ .

Comment choisir cet état  $f_0$  ? La réponse à cette question est d'autant plus complexe que nous devons tester des systèmes aux propriétés complètement différentes sur lesquels nous n'avons que peu ou pas de connaissances théoriques. Prenons par exemple un système de particules interagissant par  $\mathbf{F}_{bin}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-\pi}$ , quels sont les états stationnaires du système<sup>9</sup> ? Sont-ils stables ? Au travers de cet exemple atypique, nous voyons bien que la

8. En ce qui concerne les résultats présentés ici, l'énergie totale n'a jamais varié de plus de 1% pendant les simulations.

9. Dans l'ensemble microcanonique, il peut exister beaucoup d'états stationnaires, comme nous l'avons

connaissance d'un état stationnaire stable n'est pas toujours aisée. C'est pourquoi nous avons décidé de constamment prendre comme état de référence celui obtenu à partir des simulations numériques réalisées dans l'ensemble canonique. Du point de vue des simulations, nous commençons par réaliser une première étape de *thermalisation* du système dans l'ensemble canonique, *i.e.* avec une friction et une diffusion non nulles. Une fois le système à l'équilibre thermodynamique, nous mesurons la valeur du paramètre  $p$  à l'aide de  $\langle r_j^2 \rangle_{f_0}$  et  $\langle v_j^2 \rangle_{f_0}$  puis nous commençons la simulation en posant  $t = 0$  en restant ou non dans l'ensemble canonique.

Afin de bien comparer les simulations numériques aux prédictions théoriques, il faut nous assurer que le mode de respiration sera le seul excité. Pour cela, nous modifions à  $t = 0$  les positions et les vitesses des particules en accord avec les équations (II.13) et (II.14). Nous laissons ensuite le système évoluer sans autre intervention de notre part. Nous reprenons ici le même type de simulations que celles faites dans [AYS03] pour un plasma unidimensionnel, qui correspondent aux cas  $k/d = 0$  et  $p < 1$ .

Enfin, pour calculer l'évolution du mode de respiration prédite par l'équation (II.30) nous avons simplement utilisé les méthodes de Runge-Kutta d'ordre 4 ou de Runge-Kutta-Fehlberg (RK45) implémentées dans la bibliothèque libre de calcul scientifique "GNU Scientific Library" (GSL). Ces deux méthodes étant très courantes dans la résolution d'équations différentielles ordinaires, nous n'en parlerons plus dans la suite.

### 2.2.b Comparaison avec les prédictions de l'équation de contrainte

Afin de confirmer la validité de l'équation (II.30) nous avons réalisé de nombreuses simulations en testant la plupart des combinaisons suivantes :

- interactions entre particules répulsives ou attractives,
- interactions à courte ou longue portée<sup>10</sup>,
- régimes à faibles ou fortes interactions,
- petites ou grandes perturbations,
- ensemble canonique ou microcanonique,
- faible ou forte friction (pour les simulations dans l'ensemble canonique).

Notons que nous n'avons pas réussi à simuler de systèmes à interaction attractive de type courte portée à cause de problèmes numériques. Pour faire simple, disons que le caractère courte portée des interactions fait que lorsque deux particules s'approchent l'une de l'autre, il est possible de négliger toutes les autres. Dès lors, ces particules tendent à se rapprocher de plus en plus sans ressentir l'effet *stabilisant*<sup>11</sup> que le reste du système peut

---

vu dans le paragraphe 1.1 du chapitre I pour l'équation de Vlasov. À l'inverse, dans l'ensemble canonique, il y a souvent unicité de l'état stationnaire, celui-ci étant généralement l'équilibre thermodynamique lorsqu'il existe.

10. La limite entre forces à courtes ou longues portées est à l'équilibre donnée par  $(k - 1)/d = 1$ , qui correspond à la valeur limite du degré d'homogénéité du potentiel d'interaction pour lequel il reste intégrable à grande distance [CDR09]. Comme subodoré dans l'article [OBM<sup>+</sup>09] (voir également 5.1) et ensuite confirmé par [GJM10] et [GJMS10], il semble que, d'un point de vue dynamique, la distinction entre courte et longue portée doivent être faite du point de vue de la force d'interaction et non du potentiel; la valeur limite étant alors  $k/d = 1$ .

11. Une particule dans un système à interaction longue portée ressent la présence de toutes les particules. La force d'interaction entre deux particules voisines est généralement faible devant la force totale créée

apporter. D'autre part, il n'est pas certain *a priori* qu'il existe un état stable pour ce type de système. Rajoutons que les simulations de systèmes attractifs peuvent devenir difficiles car les particules peuvent atteindre de très grandes vitesses avant qu'un quelconque effet n'entre en jeu pour stabiliser le système. Les pas de temps sont alors trop grands pour bien intégrer l'évolution du système. Une solution est de diminuer le pas de temps mais ce sont alors les temps de calcul qui explosent. Une solution valable serait de prendre comme condition initiale, s'il en existe, un état stationnaire ou quasi-stationnaire  $f_0$  sans passer par la phase de thermalisation. Mais dans ce cas il faut connaître explicitement  $f_0$  et ce n'est pas toujours une chose facile. La contribution en vitesse est très simple puisqu'il s'agit d'une gaussienne mais la contribution en espace est *a priori* inconnue. Il est généralement possible, à partir d'une équation de Vlasov-Fokker-Planck, d'écrire une équation auto-consistante reliant  $f_0$  au potentiel d'interaction  $V_{int}[f_0]$ , dépendant de  $f_0$ , puis d'essayer de la résoudre numériquement. Nous n'avons pas poursuivi dans ces différentes voies car elles auraient demandé un travail supplémentaire non négligeable pour chaque système étudié et, bien que cela ne soit pas une raison suffisante, nous avons déjà beaucoup de situations/combinaisons à tester. Cependant, le lecteur intéressé par ce type de simulation pourra consulter par exemple [GJM10] qui illustre certaines des difficultés que l'on peut rencontrer.

*i) Simulations dans l'ensemble microcanonique*

Commençons par considérer ici le cas de systèmes isolés, sans échange d'énergie avec l'extérieur, *i.e.* dans l'ensemble microcanonique.

$\alpha$  : Interaction répulsive

Le cas d'interaction répulsive est celui qui nous a donné les meilleurs résultats car dans la limite  $p \rightarrow 0$ , l'équation de contrainte (II.30) devient l'équation exacte de l'évolution du mode de respiration (voir le paragraphe 2.1.d). Le cas  $p \rightarrow 0$  correspond aux systèmes où les interactions sont très fortes mais il peut aussi être vu comme la limite à température nulle. Dans ce cas, nous pouvons directement utiliser les équations de Newton et obtenir l'équation de contrainte II.30 en ne regardant que l'évolution du mode de respiration. Par conséquent, l'accord entre prédictions et simulations pour les systèmes avec  $p \ll 1$  est très bon. Les figures II.5(a) et II.5(b) donnent un très bon aperçu des résultats obtenus dans ce cas-là. La figure II.5(a) est obtenue pour  $d = 3$ ,  $k = 4$  et  $p = 1,2 \times 10^{-3}$  tandis que la figure II.5(b) est réalisée pour  $d = 2$ ,  $k = 4$  et  $p = 0,166$ . Les cas à interaction longue portée et/ou pour des perturbations de très grande amplitude donnent exactement le même genre de résultats.

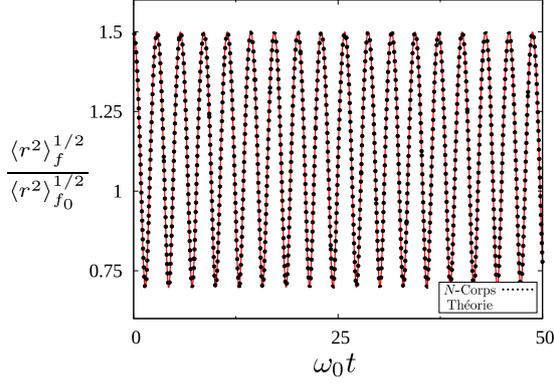
Lorsque les valeurs de  $p$  sont proches de 1, nous obtenons de moins bons résultats, essentiellement du point de vue des amplitudes des oscillations. En effet, nous sommes tout de même capables de prédire de manière correcte la fréquence du mode de respiration sur plusieurs oscillations.

Pour comprendre ce désaccord entre la théorie et les simulations numériques, il faut se rappeler que nous avons sélectionné uniquement la dynamique de respiration contenue dans l'équation BBGKY. Si d'autres phénomènes existent, l'équation de contrainte

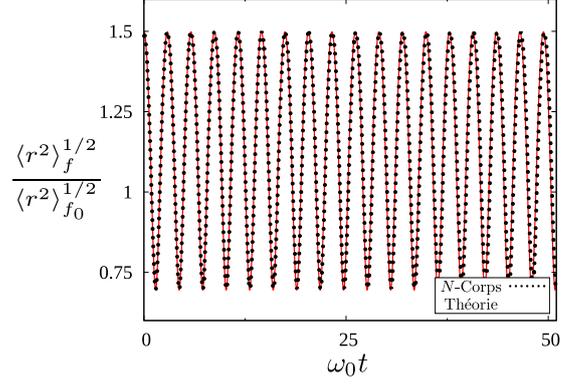
---

par toutes les autres. Les deux particules voisines n'ont pas tendance à se diriger l'une vers l'autre, ou du moins très lentement comparé à ce qu'il se passerait dans un système à interaction courte portée.

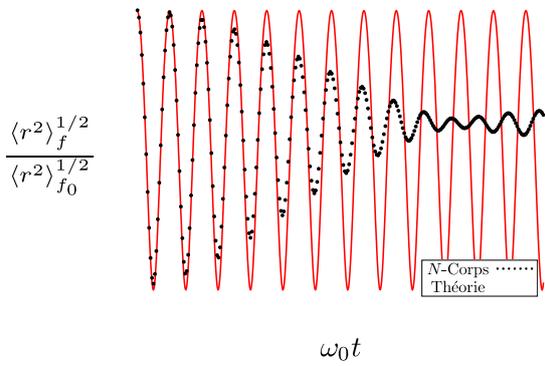
## 2. OSCILLATIONS DE RESPIRATION



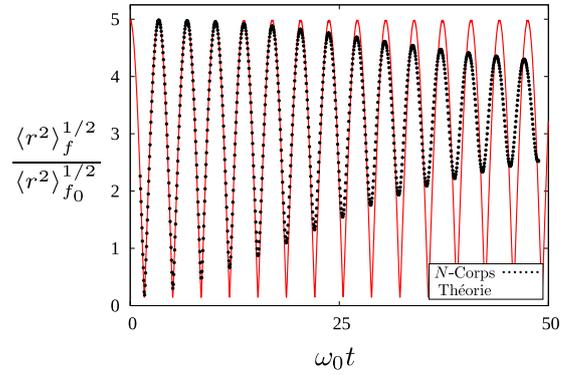
(a) La dimension de l'espace vaut  $d = 3$  et les interactions sont répulsives. Le degré d'homogénéité est  $k = 4$  (interaction courte portée),  $p = 1,2 \times 10^{-3}$  et  $(\lambda; \dot{\lambda})|_{t=0} = (1,5; 0,0)$ .



(b) La dimension de l'espace vaut  $d = 2$  et les interactions sont répulsives. Le degré d'homogénéité est  $k = 4$  (interaction courte portée),  $p = 1,66 \times 10^{-1}$  et  $(\lambda; \dot{\lambda})|_{t=0} = (1,5; 0,0)$ .



(c) La dimension de l'espace vaut  $d = 3$  et les interactions sont répulsives. Le degré d'homogénéité est  $k = 0$  (interaction longue portée),  $p = 4,5 \times 10^{-1}$  et  $(\lambda; \dot{\lambda})|_{t=0} = (1,5; 0,0)$ .



(d) La dimension de l'espace vaut  $d = 3$  et les interactions sont répulsives. Le degré d'homogénéité est  $k = 0$  (interaction longue portée),  $p = 4,4 \times 10^{-1}$  et  $(\lambda; \dot{\lambda})|_{t=0} = (5,0; 0,0)$ .

FIGURE II.5 – Évolution de la taille d'un système de particules décrit dans l'ensemble microcanonique ( $N = 4000$ ,  $\omega_0 = 17.8$ ). Rappelons que  $\lambda^2$  est égal au rapport  $\langle r^2 \rangle_f / \langle r^2 \rangle_{f_0}$  (voir équation (II.19)).

ne les prend pas en compte. Par exemple, nous avons supposé que le nombre de particules d'une couronne sphérique située entre les sphères de rayon  $\mathbf{r}(\lambda)$  et  $\mathbf{r}(\lambda) + d\mathbf{r}(\lambda)$  ne changeait pas. En effet, puisque l'évolution de toutes les particules suit la même quantité  $\lambda$ , deux particules initialement sur une même couronne sphérique resteront pour tout temps réunies sur une même couronne, *i.e.* si on note  $r_i(t)$  la distance qui sépare la  $i^{\text{ème}}$  particule du centre du système à l'instant  $t$  alors, si  $r_1(0) = r_2(0)$  nous aurons pour tout  $t$ ,  $r_1(t) = r_2(t)$ .<sup>12</sup> Si maintenant des particules sont transportées de couronne en couronne, elles violent cette hypothèse. L'équation de contrainte ne peut pas en tenir compte. Une autre façon de voir cela est de considérer non plus l'évolution des particules mais l'évolution des différentes couronnes. L'équation de contrainte ne sera pas capable

12. Du point de vue statistique apporté par l'équation BBGKY, c'est le nombre total de particules d'une couronne sphérique qui restera le même pendant que celle-ci se dilate ou se contracte. Nous faisons cette simplification afin d'illustrer simplement le concept du "shell crossing".

de décrire le croisement de différentes couronnes, appelé “shell crossing” en mécanique des fluides [Buc92]. La figure II.6 donne une représentation simpliste du phénomène, mais qui permet de comprendre très simplement le genre de comportement qu’est le “shell crossing”. Il existe beaucoup d’autres phénomènes qui peuvent survenir et qui ne sont pas pris en

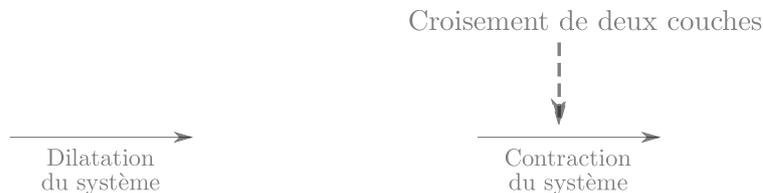


FIGURE II.6 – Illustration schématique du “shell crossing” qui n’est pas pris en compte dans l’équation de contrainte (II.30). Pour simplifier, nous avons considéré un seul croisement qui s’effectue pendant la contraction du système. Cependant, il s’agit d’un phénomène continu qui se déroule tout au long de l’évolution du système.

compte dans l’équation de contrainte (II.30) : relaxation violente, amortissement Landau, collisions entre particules, . . . mais le plus important reste leurs temps caractéristiques qui peuvent être suffisamment grands selon les cas pour que l’équation de contrainte apporte des informations pertinentes. Les figures II.5(c) et II.5(d) représentent un système à interaction longue portée avec  $d = 3$ ,  $k = 0$  et  $p \simeq 0,45$  pour différentes perturbations initiales. Comme nous pouvons le voir, bien que l’accord ne soit pas parfait, l’équation de contrainte donne de bonnes informations sur le système sur des temps de l’ordre de quelques  $\omega_0 t$ . Nous sommes en plus capables de très bien suivre la forme particulière des oscillations dans le cas d’une perturbation initiale de très grande amplitude, cette forme typique provenant du terme de pression cinétique  $p/\lambda^2$  du potentiel effectif (II.36).

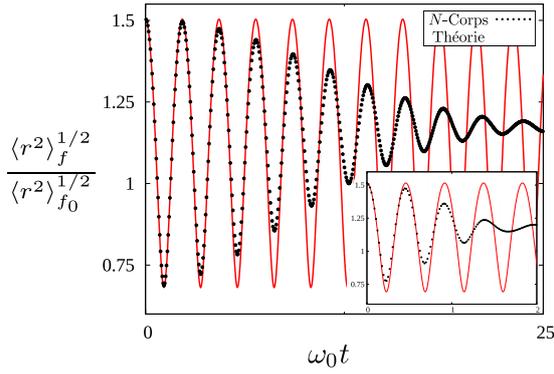
$\beta$  : Interaction attractive

Les figures II.7(a) et II.7(b) représentent quelques résultats que nous avons obtenus lors de la simulation de systèmes à interaction attractive. Il s’agit de simulations de systèmes à interaction longue portée  $k = 0$  en trois dimensions. Comme nous pouvons le constater, les résultats sont bien moins bons par rapport au cas répulsif. Notons que la *relaxation violente* pourrait être une des raisons qui explique ce désaccord car il s’agit d’un phénomène de relaxation très efficace, pour les systèmes attractifs à longue portée, qui conduit à un état quasi-stationnaire [Lyn67]. Or cet effet n’est pas inclus dans l’équation de contrainte (II.30).

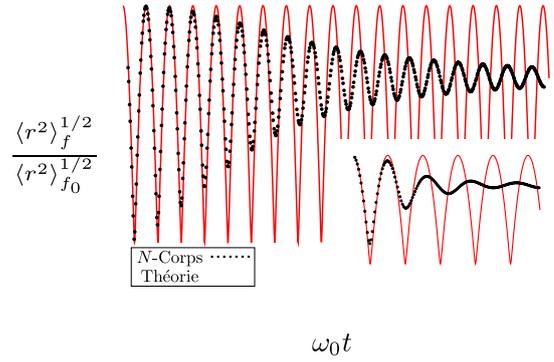
Lorsque les interactions deviennent de plus en plus importantes par rapport aux effets de la température ( $p \rightarrow \infty$ ), l’équation de contrainte décrit correctement la dynamique sur des temps de plus en plus courts. De plus, on trouve que plus la perturbation est importante et plus le désaccord entre théorie et simulations est important. Rappelons que c’était exactement le contraire pour les cas répulsifs : les résultats étaient meilleurs pour de fortes perturbations.

$\gamma$  : Remarques

- En regardant attentivement les figures II.5(c), II.5(d), II.7(a) et II.7(b), on constate que le système ne semble pas relaxer vers le même état stationnaire qu’au début



(a) La dimension de l'espace vaut  $d = 3$  et les interactions sont attractives. Le degré d'homogénéité est  $k = 0$  (interaction longue portée),  $p = 2.2$  et  $(\lambda; \dot{\lambda})|_{t=0} = (1,5; 0,0)$ . L'encart est réalisé avec les mêmes valeurs de paramètres mis à part  $p = 70$ .



(b) La dimension de l'espace vaut  $d = 3$  et les interactions sont attractives. Le degré d'homogénéité est  $k = 0$  (interaction longue portée),  $p = 2.2$  et  $(\lambda; \dot{\lambda})|_{t=0} = (5,0; 0,0)$ . L'encart est réalisé avec les mêmes valeurs de paramètres mis à part  $p = 70$ .

FIGURE II.7 – Évolution de la taille d'un système de particules décrit dans l'ensemble microcanonique ( $N = 4000$ ,  $\omega_0 = 17.8$ ). Rappelons que  $\lambda^2$  est égal au rapport  $\langle r^2 \rangle_f / \langle r^2 \rangle_{f_0}$  (voir équation (II.19)).

de la simulation : le paramètre  $\lambda$  (taille normalisée du système) ne tend pas vers 1. L'explication est toute simple. Lorsque nous perturbons le système, nous changeons l'énergie totale de celui-ci. Par conséquent, même si le système relaxe, il conserve la même énergie qui se trouve être différente de l'énergie totale avant la perturbation. Nous verrons dans le paragraphe suivant que dans l'ensemble canonique le système retourne dans le même état puisque le thermostat impose une température au système et donc un état stationnaire (équilibre thermodynamique) fixé.

- Pour dériver l'équation de contrainte, nous avons utilisé une approche cinétique qui décrit le système par une distribution continue. D'un autre côté, nous avons réalisé des simulations de dynamique moléculaire, où la distribution de particules est discrète. Dans ce cas, est-ce que nos simulations numériques sont influencées par le nombre de particules simulées alors que l'équation de contrainte ne l'est pas ? Pour vérifier cela, nous avons réalisé une simulation en considérant un plasma tridimensionnel contenant 1000, puis 10000 particules pour une même valeur du paramètre  $p$ . Après une dizaine d'oscillations, nous observons une différence d'environ 1% au niveau de l'amplitude des oscillations et aucune différence notable en ce qui concerne la fréquence. Il n'y a donc pas de souci pour comparer les simulations numériques à la prédiction théorique. Cependant, il faut garder en tête que pour d'autres paramètres, les effets discrets pourraient être importants.

### ii) Simulations dans l'ensemble canonique

Considérons maintenant le cas de l'ensemble canonique, avec une friction et une diffusion non nulles. L'ajout d'une friction est à la fois un avantage et un inconvénient. L'équation de contrainte n'est par essence qu'une approximation du mode de respiration et l'ajout d'une friction non nulle n'aide pas. En effet, cela ajoute encore une autre approxi-

mation que nous savons déjà incompatible avec la dérivation de l'équation de contrainte. À l'inverse, elle permet de faire tendre le système, pour  $t \rightarrow \infty$ , vers le même état stationnaire qu'à  $t = 0$ . De plus, elle permet généralement ce retour à l'équilibre avant que d'autres phénomènes de relaxation ne puissent prendre place ; ces effets n'étant pas pris en compte dans l'équation de contrainte (II.30).

$\alpha$  : Rôle de la friction dans la précision des résultats

Comme nous en avons discuté dans le paragraphe 2.1.a, le fait de considérer une friction non nulle n'est pas parfaitement compatible avec la transformation reliant  $f$  et  $f_0$ . Nous avons imposé la conservation du volume de l'espace des phases, or ce n'est plus vrai lorsque  $\kappa \neq 0$ . Cependant, tant que le temps caractéristique associé à la friction reste grand devant celui du piège harmonique, cette approximation est raisonnable. Afin de s'assurer de cette affirmation, commençons par étudier l'erreur entre prédiction et simulations en fonction du paramètre adimensionné  $\kappa/\omega_0$ . Comme nous l'avons vu dans les simulations réalisées dans l'ensemble microcanonique, les systèmes attractifs sortent rapidement du cadre de l'équation de contrainte et nous allons nous limiter ici au cas répulsif. D'autre part, puisque la fréquence est généralement plus utile que l'amplitude des oscillations, et compte tenu des meilleurs résultats que nous avons obtenus pour celle-ci, nous nous sommes limités à l'estimation de l'erreur commise sur la fréquence des oscillations. La figure II.8 représente les résultats obtenus pour 35 simulations réparties dans le plan  $(p, \kappa/\omega_0)$  avec  $p \leq 1$  et  $\kappa/\omega_0 < 3$ . Les pourcentages donnés correspondent aux erreurs relatives entre l'équation de contrainte et les simulations à  $N$  corps pour 5000 particules<sup>13</sup>. Les erreurs sont calculées de la façon suivante :

- Dans les régimes sous-amortis, nous considérons l'écart de temps qui sépare le  $n^{\text{ème}}$  maximum des oscillations entre la théorie et les simulations :  $|t_{\text{théorie}}^n - t_{N\text{-corps}}^n|/t_{\text{théorie}}^n$  ; la valeur de  $n$  étant fixée de sorte qu'il s'agisse du dernier maximum où le bruit est négligeable.
- Dans les régimes sur-amortis, nous considérons l'écart de temps qui sépare les demi-vies de la prédiction théorique et des simulations :  $|t_{\text{théorie}}^{1/2} - t_{N\text{-corps}}^{1/2}|/t_{\text{théorie}}^{1/2}$ .

La figure II.8 confirme tout de suite que lorsque  $p = 0$  et/ou  $\kappa/\omega_0 = 0$ , l'équation de contrainte permet de bien décrire l'évolution du mode de respiration. En effet, lorsque  $p = 0$ , nous avons vu que l'on peut directement partir des équations de Newton pour obtenir l'équation de contrainte, tandis que pour  $\kappa = 0$ , nous retrouvons les résultats très satisfaisants obtenus pour l'ensemble microcanonique. *A contrario*, les erreurs deviennent rapidement importantes lorsque l'on considère les situations sur-amorties. Quoiqu'il en soit, il faut bien remarquer<sup>14</sup> que si  $\kappa/\omega_0 \leq 1/2$ , l'erreur relative est inférieure à 5%. Même si l'information obtenue à l'aide de l'équation de contrainte (II.30) n'est pas exacte, elle a l'avantage d'être simple et rapide à utiliser. D'autant plus que pour un système réel, l'erreur relative commise ici est à comparer aux erreurs expérimentales.

$\beta$  : Quelques exemples de résultats

À l'instar du paragraphe sur l'ensemble microcanonique, la figure II.9 donne quelques exemples de courbes obtenues pour une friction non nulle mais restant très petite devant

13. Nous avons effectué les mêmes simulations en prenant  $N = 1000$  sans pour autant que cela change les résultats de la figure II.8.

14. Au moins pour le système de particules utilisé pour réaliser la figure II.8.

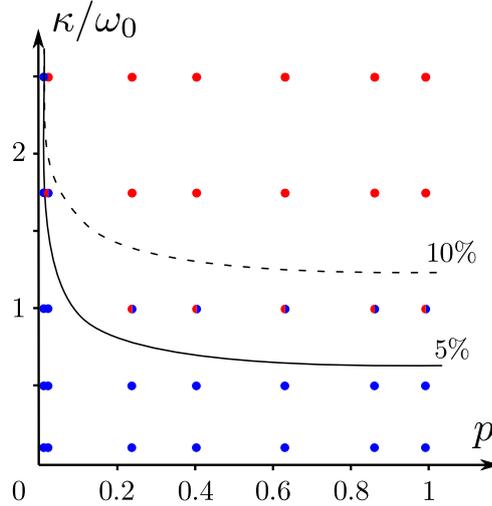


FIGURE II.8 – Validité de l'équation de contrainte dans le plan  $(\kappa/\omega_0; p)$ . Les simulations sont réalisées avec  $N = 5000$  particules pour  $d = 1$  et avec une force d'interaction Coulombienne unidimensionnelle ( $k = 0$ ). Nous avons également fixé  $\omega_0 = 17,8$  et  $(\lambda; \dot{\lambda})|_{t=0} = (0,3; 0,0)$ . Notons que la figure ne change pas de façon notable lorsque l'on utilise les résultats de simulation avec  $N = 1000$  ou bien lorsque l'on change la dimension de l'espace par  $d = 2$  ou  $d = 3$ . Cercle bleu : erreur sur la fréquence  $\leq 5\%$ ; cercle bleu/rouge :  $5\% < \text{erreur} \leq 10\%$ ; cercle rouge : erreur  $> 10\%$ ; les lignes en trait plein et en pointillés représentent qualitativement les frontières entre des erreurs de  $5\%$  et  $10\%$  sur la fréquence. La définition de l'erreur en fréquence est donnée dans le texte.

la fréquence du piège. Comme nous venons de le voir, nous obtenons une très bonne évaluation de la fréquence des oscillations bien que les écarts en amplitude ne soient pas toujours petits.

### iii) Test de la prédiction d'un état métastable

Nous avons vu d'une part<sup>15</sup> que lorsque le degré d'homogénéité  $k$  est supérieur à 3, l'état stationnaire  $f_0$  est censé être un état métastable (voir figure II.2). Or, nous avons également discuté de la grande difficulté que nous avons rencontrée pour simuler l'évolution d'un système à interaction courte portée attractive<sup>16</sup>. Par conséquent, pour tester le caractère métastable de  $f_0$ , nous avons eu recours à l'astuce numérique de considérer un système tel que  $d = 10$  et  $k = 4$ . Les interactions entre particules sont alors à longue portée. Bien que cette situation n'ait pas de réalité physique, elle nous permet de tester une des prédictions non triviales données par (II.30).

Nous nous plaçons dans l'ensemble microcanonique et les simulations sont réalisées de la même manière que précédemment, en thermalisant le système dans l'ensemble canonique. Grâce au fait que les interactions sont à longue portée, nous avons pu atteindre un état stationnaire sans rencontrer de problèmes numériques<sup>17</sup>. Une fois  $f_0$  atteint et donc avec

15. Voir le paragraphe 2.1.c.ii.

16. Voir le paragraphe 2.2.b.

17. En réalité, il nous a fallu plusieurs itérations pour atteindre  $f_0$  à cause de son caractère métastable. Pour cela, nous sommes partis d'un état spatialement étendu et nous avons régulièrement ralenti les particules pour éviter de franchir la barrière de potentiel et atteindre le minimum local.

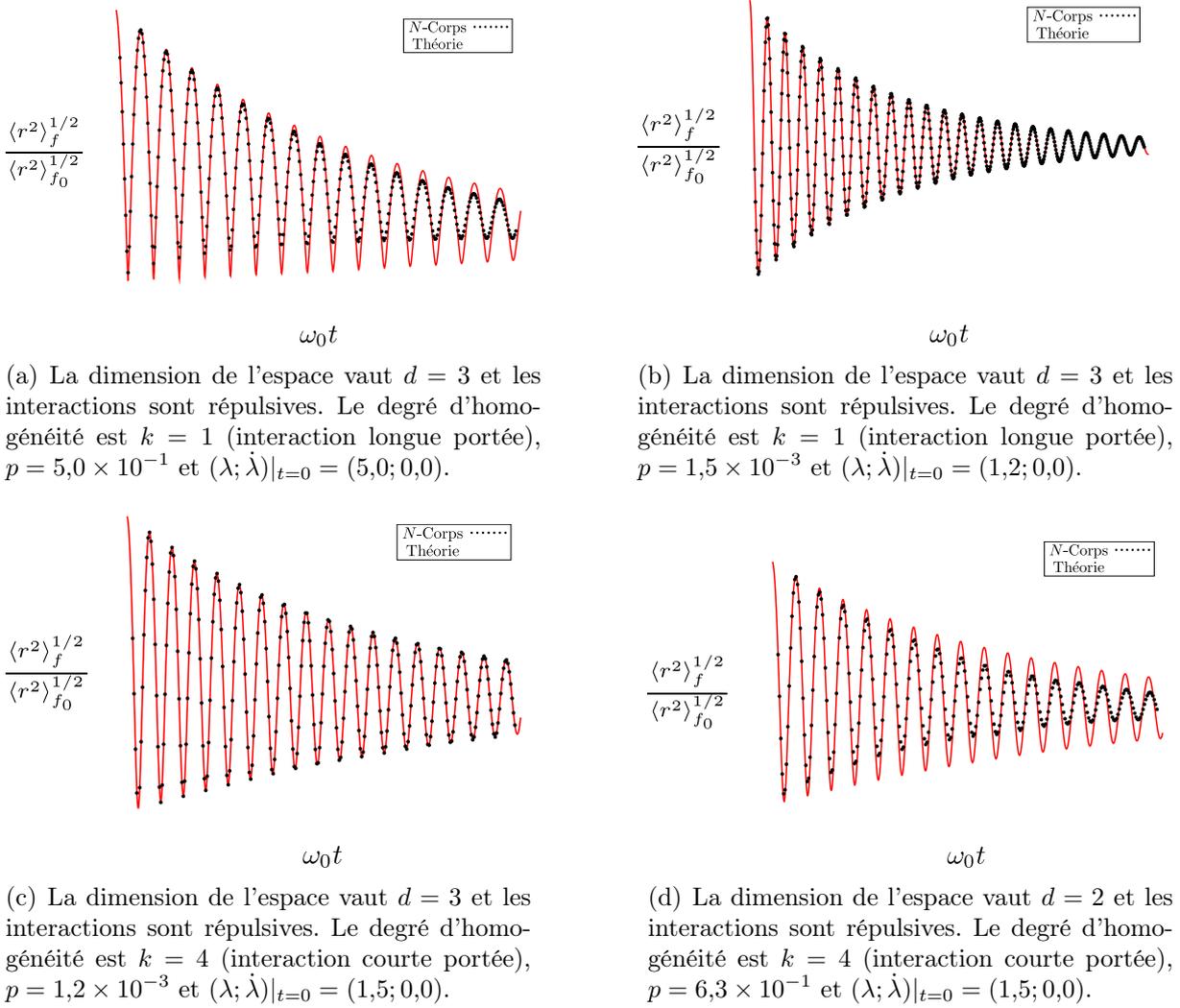


FIGURE II.9 – Évolution sous-amortie de la taille d'un système de particules décrit dans l'ensemble canonique ( $N = 4000$ ,  $\kappa/\omega_0 = 5,6 \times 10^{-2}$ ).

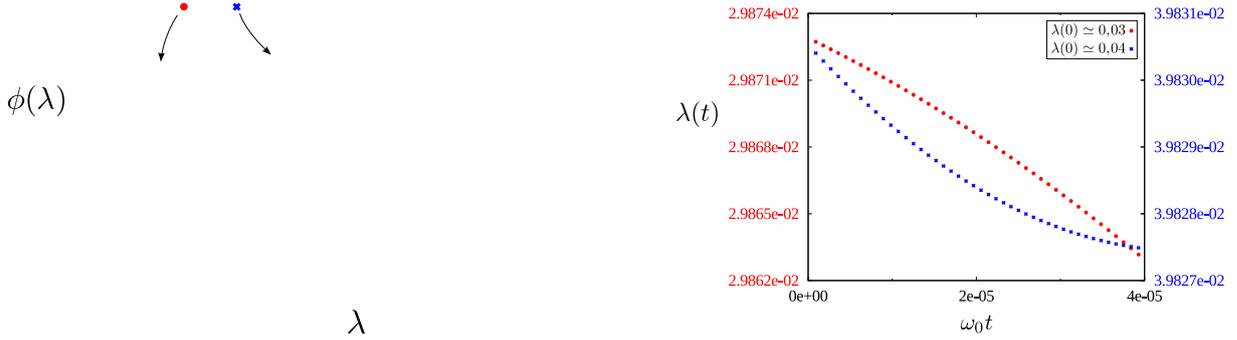
$\lambda = 1$ , nous avons contracté le système afin de modifier sa valeur de façon à se placer de part et d'autre de l'état instable  $\lambda^*$  (voir figure II.10(a)).

Puisque nous sommes dans l'ensemble microcanonique, l'équation d'évolution du mode de respiration est donnée par

$$\ddot{\lambda} = -\phi'(\lambda). \quad (\text{II.48})$$

La concavité de la courbe  $\lambda(t)$  est directement liée à la pente du potentiel  $\phi(\lambda)$ . Lorsque  $\lambda(t)$  est concave (*resp.* convexe), nous sommes sur la partie croissante (*resp.* décroissante) du potentiel. En partant de deux conditions proches au voisinage de  $\lambda^*$ , nous pouvons ainsi vérifier qu'il s'agit bien d'un maximum local et que par conséquent  $\lambda = 1$  est un état métastable (voir figure II.10(b)).

Il est important de remarquer cependant que les résultats de la figure II.10(b) sont obtenus sur des temps très courts par rapport à l'échelle de temps caractéristique du système  $\omega_0$ . Dans le cas où le système collapse, nous sommes très rapidement confrontés à des problèmes numériques qui nous empêchent de correctement intégrer l'évolution du système, ce qui explique pourquoi les temps simulés soient si courts.



(a) évolution de  $\phi(\lambda)$  définie par (II.36). Les points représentent les différentes conditions initiales  $\lambda(t = 0)$  des courbes de la figure (b). Il existe un équilibre instable tel que  $\lambda^* \simeq 0,034$ .

(b) évolution de  $\lambda(t)$  en temps court pour deux conditions initiales différentes :  $\lambda(0) \simeq 0,03$  et  $0,04$ .

FIGURE II.10 – Résultats obtenus pour un système à longue portée attractif en 10 dimensions. Les autres paramètres sont :  $p \simeq 1,035$ ,  $\omega_0 = 17,8$  et  $k = 4$ .

Nos résultats semblent être compatibles avec la théorie mais ils faut les considérer avec précaution. Il s’agit là d’une ébauche et nous n’avons pas poursuivi dans cette direction car :

- utiliser un espace à  $d = 10$  dimensions n’est en général pas très convaincant ou du moins pas très intéressant expérimentalement,
- résoudre les difficultés numériques dues au collapse demanderait beaucoup d’efforts,
- nous avons obtenu d’autres résultats plus convaincants pour valider la théorie.

### 2.3 Friction et/ou diffusion variable

Lorsque l’on considère un système de particules, on envisage généralement l’existence ou non d’une friction constante agissant sur les particules. Cependant, la situation peut être plus compliquée. Il peut arriver que la friction et la diffusion ne soient pas constantes et dépendent de la position des particules. Même si cela n’arrive généralement que pour des modèles effectifs ou construits de toutes pièces, il n’en reste pas moins que cette situation existe et qu’elle conduit à de grands changements qualitatifs. Par exemple, l’apparition d’oscillations auto-entretenues du mode de respiration pour un grand piège magnéto-optique devrait être expliquée par l’existence d’une friction variable [LMK06]. C’est en gardant cela à l’esprit<sup>18</sup> que nous avons essayé d’adapter l’équation de contrainte pour les cas où la friction et/ou la diffusion sont non constantes.

Nous savons déjà que l’équation que nous pourrions obtenir ne sera pas exacte, mais d’une part, il n’existe à notre connaissance aucun résultat ou prédiction généraux dans ce type de situation et d’autre part, nous avons vu au paragraphe 2.2.b.ii que même pour des valeurs assez grandes de  $\kappa/\omega_0$ , l’équation permet de plus ou moins bien prédire l’évolution du système. Enfin, contrairement au cas où  $\kappa$  était constant et  $p$  nulle, il n’est plus possible d’utiliser les équations de Newton pour obtenir l’équation de contrainte. Il faut

18. Nous en discuterons au chapitre III où nous essayerons d’appliquer l’équation de contrainte à différents systèmes expérimentaux d’atomes froids.

passer par la méthode que nous avons présentée.

### 2.3.a Nouvelle équation de contrainte

Afin d'obtenir une nouvelle équation de contrainte qui prenne en compte les variations de la friction et de la diffusion, nous allons reprendre les étapes décrites en 2.1. Ainsi, en partant de l'équation de BBGKY plus un opérateur de Fokker-Planck où  $\kappa$  et  $D$  dépendent de la position  $\mathbf{r}$  :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{v}f) - \nabla_{\mathbf{r}} \Phi \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f + C[g] = D(\mathbf{r}) \Delta_{\mathbf{v}} f + \kappa(\mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (\mathbf{v}f), \quad (\text{II.49})$$

nous obtenons la *nouvelle* formulation de l'équation (II.23) :

$$\sum_{i=1}^d \left\{ v_i \frac{\partial f_0}{\partial r_i} \left( \frac{1}{\lambda^2} - \lambda^{1-k} \right) + \frac{\partial^2 f_0}{\partial v_i^2} [\lambda^{1-k} D(\mathbf{r}) - \lambda^2 D(\lambda \mathbf{r})] - r_i \frac{\partial f_0}{\partial v_i} \left[ \lambda (\ddot{\lambda} + \omega_0^2 \lambda) - \lambda^{1-k} \omega_0^2 + \kappa(\lambda \mathbf{r}) \lambda \dot{\lambda} \right] + \frac{\partial (v_i) f_0}{\partial v_i} [\lambda^{1-k} \kappa(\mathbf{r}) - \kappa(\lambda \mathbf{r})] \right\} = 0. \quad (\text{II.50})$$

En multipliant cette équation par  $r_j v_j / N$  et en intégrant sur  $d\mathbf{r} d\mathbf{v}$ , nous obtenons l'équation de contrainte

$$\ddot{\lambda} + \lambda \omega_0^2 - \frac{p}{\lambda^3} \omega_0^2 + (p-1) \frac{1}{\lambda^k} \omega_0^2 + \dot{\lambda} \frac{\langle \kappa(\lambda \mathbf{r}) r_i^2 \rangle_{f_0}}{\langle r_i^2 \rangle_{f_0}} - \frac{\langle [\lambda^{1-k} \kappa(\mathbf{r}) - \kappa(\lambda \mathbf{r})] r_i v_i \rangle_{f_0}}{\lambda \langle r_i^2 \rangle_{f_0}} = 0. \quad (\text{II.51})$$

Bien qu'il s'agisse de l'équation de contrainte générale obtenue pour une friction non constante, elle n'est pas la plus utile. En effet, dans la plupart des cas, les systèmes étudiés possèdent certaines symétries qui permettent de simplifier un peu plus l'équation II.51. Par exemple, si  $f_0$  est à symétrie radiale et que  $\kappa(\mathbf{r})$  ne dépend que de  $|\mathbf{r}|$ , alors le dernier terme de l'équation II.51 s'annule. Dans la suite nous ne considérons pour simplifier que des problèmes à symétrie sphérique et l'équation de contrainte se réduit à

$$\ddot{\lambda} + \lambda \omega_0^2 - \frac{p}{\lambda^3} \omega_0^2 + (p-1) \frac{1}{\lambda^k} \omega_0^2 + \dot{\lambda} \frac{\langle \kappa(\lambda \mathbf{r}) r_i^2 \rangle_{f_0}}{\langle r_i^2 \rangle_{f_0}} = 0. \quad (\text{II.52})$$

Malgré l'apparente simplicité de l'équation (II.52) qui ressemble fortement à celle obtenue pour une friction constante, cette nouvelle équation contient une difficulté majeure : il faut connaître l'état stationnaire  $f_0$  pour calculer

$$\langle \kappa(\lambda \mathbf{r}) r_i^2 \rangle_{f_0} = \frac{1}{N} \int \kappa(\lambda \mathbf{r}) r_i^2 f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{r} d\mathbf{v}. \quad (\text{II.53})$$

Nous ne pouvons plus nous contenter de mesurer la taille et la température du système pour obtenir l'évolution du mode de respiration. Cependant, lorsque la connaissance exacte de  $f_0$  n'est pas possible, une expression approchée suffit souvent pour obtenir des résultats satisfaisants.

### 2.3.b Simulations et résultats

Pour réaliser les simulations numériques à friction variable nous avons utilisé les mêmes algorithmes que ceux introduits à la partie 2.2.a. Lorsque la friction ne dépend pas de la vitesse des particules, nous pouvons utiliser sans problème l’algorithme de Verlet-Leapfrog<sup>19</sup>. Dans le cas où la diffusion n’est pas constante ce n’est plus possible. C’est pourquoi nous avons choisi de travailler à diffusion constante, d’autant plus que la diffusion n’apparaît pas *explicitement*<sup>20</sup> dans l’équation de contrainte (II.52).

En ce qui concerne le protocole des simulations, nous avons conservé exactement le même que dans la partie 2.2.a. Nous attendons que le système se stabilise dans un état stationnaire  $f_0$ , qui n’est plus l’équilibre thermodynamique, puis nous le dilatons à  $t = 0$  de sorte à n’exciter que le mode de respiration.

Notons qu’au vu des résultats des parties précédentes, nous avons uniquement testé un système en particulier : un plasma unidimensionnel piégé ( $p \ll 1$ ,  $d = 1$ ,  $k = 1$ ). Nous sommes partis du principe que si la nouvelle équation de contrainte donnait des résultats satisfaisants, elle devrait pouvoir être utilisée *a priori* pour les autres gammes de paramètres ; bien sûr, dans les limites déjà énoncées dans les précédents tests de la partie 2.2, comme les phénomènes de relaxation non pris en compte par l’équation de contrainte (amortissement Landau, “shell crossing”,...). L’intérêt de regarder en particulier ce système est que d’une part le modèle peut aussi être interprété comme celui d’un système d’atomes froids unidimensionnel dans un piège magnéto-optique<sup>21</sup> (P.M.O.), et d’autre part nous connaissons son état d’équilibre lorsque la friction est constante : la densité en espace  $\rho_0$  est une fonction constante par morceaux. Après plusieurs vérifications numériques, nous avons conclu que le caractère variable des profils de friction testés n’influait pas significativement ce profil de densité qui reste un plateau. La connaissance du profil  $f_0$  étant désormais une donnée nécessaire pour utiliser l’équation de contrainte (II.52), ce choix de système nous permet de résoudre ce problème car toute la contribution en vitesse de  $f_0$  disparaît lors du calcul de  $\langle \kappa(\lambda \mathbf{r}) r_i^2 \rangle_{f_0}$ , grâce au fait que  $\kappa$  ne dépend pas de la vitesse des particules. La densité en espace stationnaire  $\rho_0$  utilisée par la suite sera donc :

$$\rho_0(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{N}{2L_{int}} & \text{si } |\mathbf{r}| \leq L_{int} \\ 0 & \text{si } |\mathbf{r}| > L_{int}, \end{cases} \quad (\text{II.54})$$

où  $L_{int}$  est la demi-taille du système dans l’état  $f_0$ , obtenue par analyse dimensionnelle en comparant l’importance des forces de piégeage et d’interaction. En effet, la température<sup>22</sup> ne joue quasiment aucun rôle car nous sommes dans la limite  $p \ll 1$ . À cause de la friction variable, nous pouvons nous attendre à une température inhomogène qui varie localement. Notons que même pour les *maxima* de la température, la limite  $p \ll 1$  restera raisonnable. Comme nous n’aurons pas besoin de son expression dans les tests présentés plus bas, nous

19. On peut refaire exactement les mêmes calculs que dans [AT99] (partie 9.3) lorsque la friction ne dépend que de la position  $\mathbf{r}$  et non de la vitesse.

20. La diffusion joue un rôle dans l’expression de l’état stationnaire  $f_0$ . Elle apparaît donc dans l’équation de contrainte de façon implicite.

21. Voir le paragraphe 1 du chapitre III.

22. La température est définie à partir de la variance des vitesses des particules.

ne la donnerons pas ici<sup>23</sup>.

*i) Friction affine*

Commençons par considérer le cas le plus simple de friction variable, celui d'une fonction affine :

$$\kappa(\mathbf{r}) = \begin{cases} \kappa_0 \left(1 - \frac{|\mathbf{r}|}{L_\kappa}\right) & \text{si } |\mathbf{r}| \leq L_\kappa, \\ 0 & \text{si } |\mathbf{r}| > L_\kappa, \end{cases} \quad (\text{II.55})$$

avec  $L_\kappa$  la taille caractéristique associée à la variation spatiale de la friction. Plus précisément, il s'agit de la taille à partir de laquelle la friction devient nulle. Nous tronquons ainsi la friction à partir de  $|\mathbf{r}| > L_\kappa$ , de sorte à ne pas considérer de friction négative<sup>24</sup>. D'autre part, lorsque  $|\mathbf{r}|$  est supérieur à  $L_\kappa$ , les particules dans cette région ressentent une diffusion non nulle mais plus de friction. La température locale est alors infinie ( $T \sim D/\kappa$ ). Afin d'éviter cette situation qui n'a pas de sens physique, nous allons imposer aux particules de rester dans une zone de friction non nulle pendant toute l'évolution du système. Pour cela nous vérifierons que pour tout  $t$ ,  $\lambda(t)L_{int} < L_\kappa$ . L'équation de contrainte (II.52) se réécrit

$$\ddot{\lambda} + \lambda\omega_0^2 - \frac{p}{\lambda^3}\omega_0^2 + (p-1)\frac{1}{\lambda^k}\omega_0^2 + \dot{\lambda}\kappa_0 \left(1 - \frac{3}{4}\lambda\frac{L_i}{L_\kappa}\right) = 0. \quad (\text{II.56})$$

Comme nous l'avons supposé pour obtenir l'expression de  $\rho_0$ , nous avons  $p \ll 1$ . D'autre part, pour éviter les problèmes liés aux trop fortes frictions (voir le paragraphe 2.2.b.ii.α), nous allons uniquement considérer les cas  $\max_{|\mathbf{r}| \in \mathbb{R}}(\kappa(\mathbf{r})) = \kappa_0 \ll \omega_0$ . Puisque lorsque la friction est constante, ces deux conditions permettent d'obtenir un très bon accord entre théorie et simulations, nous nous attendons à ce qu'il en soit de même ici.

Les figures II.11(a) et II.11(b) donnent deux exemples de résultats obtenus pour différents rapports  $L_\kappa/L_{int}$  et différentes perturbations initiales. Comme nous pouvons le constater, les résultats sont très similaires à ceux obtenus pour une friction constante. L'équation de contrainte capte assez précisément la fréquence d'oscillation du mode de respiration mais pas toujours l'amplitude. On pourra remarquer sur la figure II.11(b) que la taille du système ne semble pas retourner vers sa valeur d'origine. En réalité, c'est bien le cas mais pour des temps plus grands. Cela permet de comprendre qualitativement pourquoi l'équation de contrainte est mise en défaut si rapidement. Le mode de respiration ne peut plus être décrit comme une perturbation autour de l'état  $f_0$ , car le système tend à rejoindre un autre état stationnaire avant que la friction ne le ramène vers  $f_0$  pour des temps plus grands.

*ii) Friction sinusoïdale*

Considérons maintenant un cas plus compliqué où la friction est donnée par la relation suivante :

$$\kappa(\mathbf{r}) = \kappa_0 \left[1 + \cos\left(\pi\frac{|\mathbf{r}|}{L_\kappa}\right)\right], \quad (\text{II.57})$$

23. Nous utiliserons le même modèle lors des tests réalisés pour les oscillations du centre de masse. L'expression de  $L_{int}$  sera précisée à ce moment-là.

24. Le cas particulier d'une friction variable pouvant changer de signe sera discuté lorsque nous essaierons d'appliquer l'équation de contrainte pour de grands pièges magnéto-optiques (chapitre III partie 1).

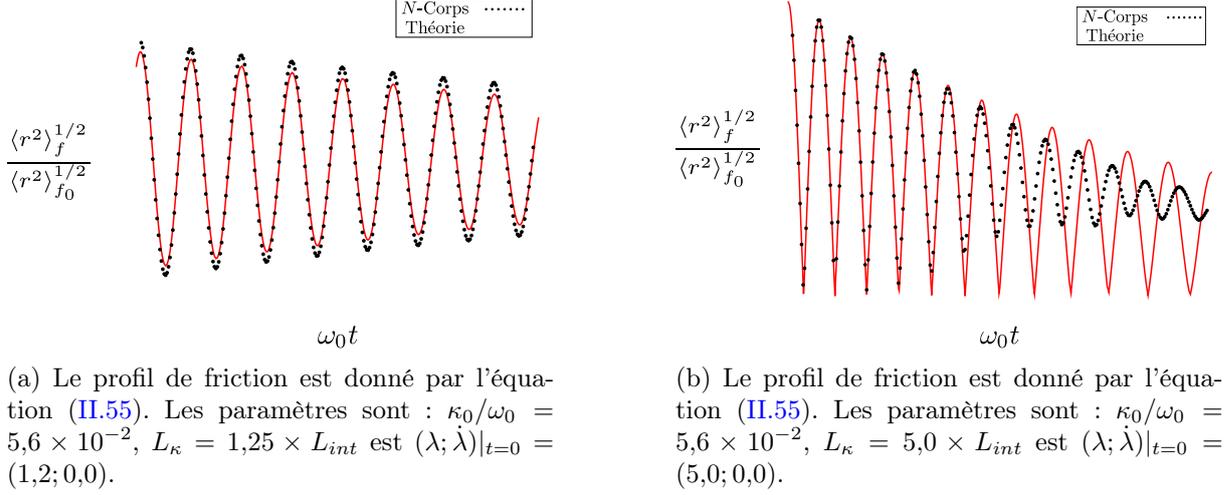


FIGURE II.11 – Évolution de la taille d'un plasma de Coulomb unidimensionnel soumis à une friction dépendant de la position des particules. Le profil est donné par l'équation (II.55). Les paramètres sont  $N = 4000$ ,  $d = 1$ ,  $k = 0$ ,  $L_{int} = 12,5$  et  $p = 6 \times 10^{-5}$ .

avec  $L_\kappa$  qui est désormais la position du premier minimum de  $\kappa(\mathbf{r})$ . Avec cette nouvelle expression, l'équation (II.52) devient

$$\ddot{\lambda} + \kappa_0 \dot{\lambda} + \lambda \omega_0^2 - \frac{p}{\lambda^3} \omega_0^2 + (p-1) \frac{1}{\lambda^k} \omega_0^2 + \frac{3}{2} \frac{\dot{\lambda} \kappa_0}{L_i^3} \int_0^{L_i} \cos\left(\frac{\pi \lambda r}{L_\kappa}\right) r^2 dr = 0. \quad (\text{II.58})$$

Comme les figures II.12(a), II.12(b) et II.12(c) le montrent, nous obtenons le même type de résultat que pour la friction affine utilisée au précédent paragraphe, en restant toujours dans les régimes  $p \ll 1$ ,  $\kappa_0/\omega_0 \ll 1$ .

Par curiosité, nous avons voulu tester la réaction de l'équation de contrainte lorsque nous relâchions sensiblement la condition  $\kappa_0 \ll \omega_0$ . Dans le cas d'une friction constante, nous avons vu (voir le paragraphe 2.2.b.ii.α) que nous obtenions des résultats plutôt satisfaisants (erreur inférieure à 5%) dans l'estimation de la fréquence d'oscillation lorsque  $\kappa \sim 0,5 \times \omega_0$ . Qu'en est-il ici ? La figure II.12(d) nous donne un exemple de résultat pour  $\kappa_0 = 0,56 \times \omega_0$ . Comme nous pouvons le constater, nous obtenons un bon accord entre théorie et simulations.

Avant de clôturer notre discussion sur le comportement du mode de respiration sous l'effet d'une friction variable, regardons ce qu'il se passe lorsque l'on utilise directement une friction effective *ad hoc* ne dépendant pas de  $\lambda(t)$  dans l'équation de contrainte (II.52) au lieu du terme  $\langle \kappa(\lambda \mathbf{r}) r_i^2 \rangle_{f_0}$ . Le plus naturel consiste à prendre une friction effective moyennée sur le système, soit

$$\kappa_{eff}^{(1)} = \langle \kappa(\mathbf{r}) \rangle_{f_0}. \quad (\text{II.59})$$

Une seconde possibilité est de retirer arbitrairement le paramètre  $\lambda$  du terme de friction effective de l'équation de contrainte

$$\kappa_{eff}^{(2)} = \frac{\langle \kappa(\mathbf{r}) r_i^2 \rangle_{f_0}}{\langle r_i^2 \rangle_{f_0}}. \quad (\text{II.60})$$

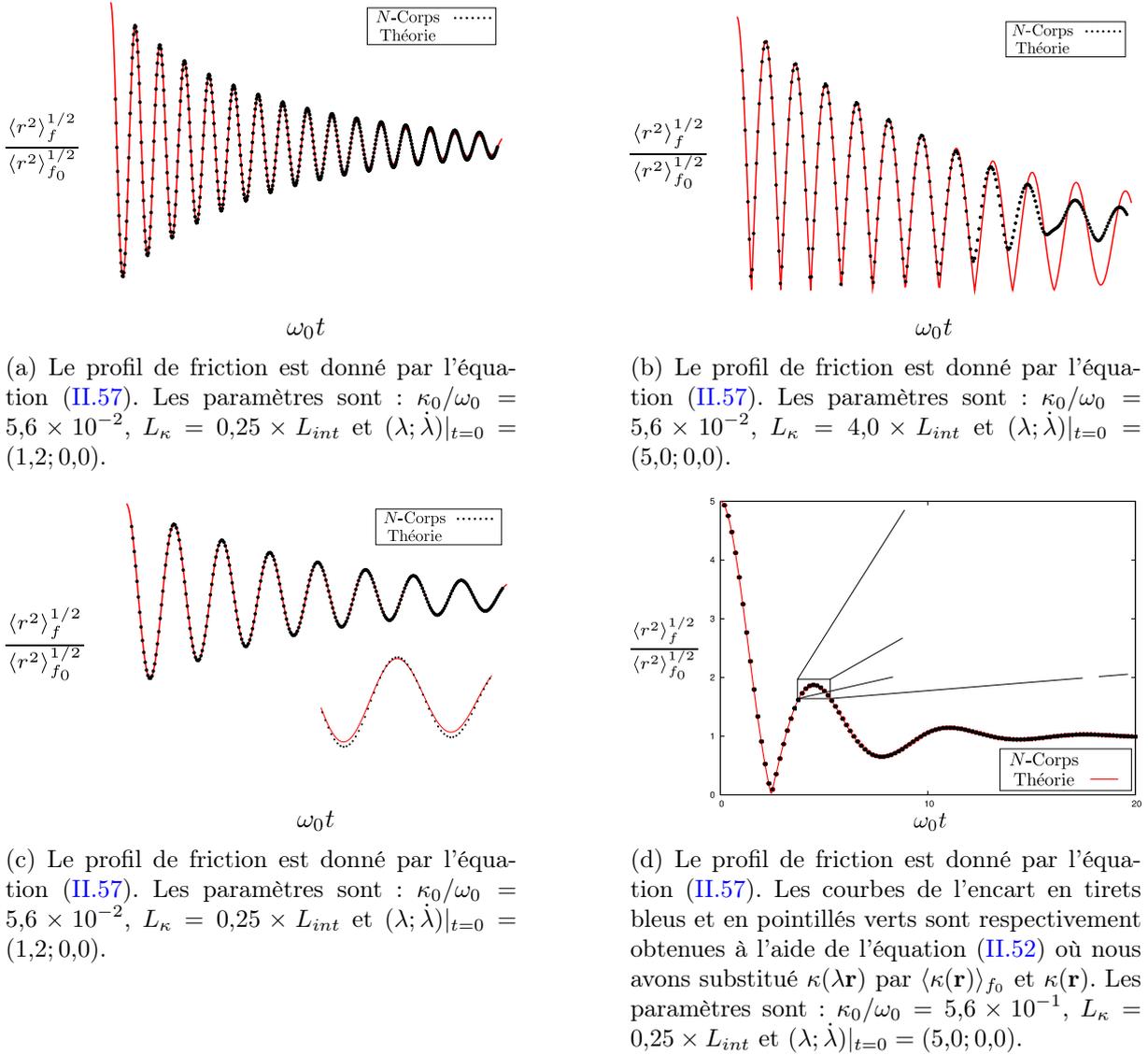


FIGURE II.12 – Évolution de la taille d'un plasma de Coulomb unidimensionnel soumis à une friction dépendant de la vitesse des particules. Les paramètres sont  $N = 4000$ ,  $d = 1$ ,  $k = 0$ ,  $L_{int} = 12,5$  et  $p = 6 \times 10^{-5}$ .

L'écart de la figure II.12(d) compare justement ces différents résultats. Bien que les écarts ne soient pas très importants, l'avantage est donné à l'équation de contrainte qui a le mérite de ne pas introduire une friction effective de manière arbitraire.

### 3 OSCILLATIONS DU CENTRE DE MASSE

Dans cette partie, nous allons nous intéresser au comportement du centre de masse d'un système de particules piégées. Contrairement au mode de respiration sans approche générale, le comportement du centre de masse est très bien connu. Cependant, ce n'est plus le cas dès qu'une friction non constante existe ou bien que le piège de confinement n'est

plus harmonique. C'est dans ce cadre que nous allons introduire une nouvelle équation de contrainte pour le mouvement du centre de masse et essayer d'apporter un début de réponse.

### 3.1 Équation d'évolution du centre de masse

---

Comme nous l'avons introduit dans la partie 1, nous considérons ici un système de  $N$  particules piégées par un potentiel extérieur  $\Phi$  et interagissant entre elles, deux à deux, *via* une force notée  $\mathbf{F}_{bin}$ . Il est ainsi possible de décrire le système en utilisant la hiérarchie BBGKY (voir équations (II.1) et (II.2)). Étant donné que nous sommes intéressés par les systèmes à friction variable, il faut que cela apparaisse dans l'équation d'évolution du système. C'est pourquoi nous allons ajouter un opérateur de Fokker-Planck. L'équation complète qui décrira notre système de particules est

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{v}f) - \nabla_{\mathbf{r}} \Phi \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f + C[g] = \Delta_{\mathbf{v}}(Df) + \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (\kappa(\mathbf{r}, \mathbf{v})\mathbf{v}f), \quad (\text{II.61})$$

avec le terme d'interaction, dépendant de la distribution à deux points  $g(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{r}', \mathbf{v}', t)$ , donnée par

$$C[g](\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \int \mathbf{F}_{bin}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{v}} g(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{r}', \mathbf{v}', t) d\mathbf{r}' d\mathbf{v}'. \quad (\text{II.62})$$

#### 3.1.a Méthode des moments

À partir des équations (II.61) et (3.1), nous allons devoir faire quelques approximations. La première consiste à nous focaliser sur les caractéristiques les plus importantes du mouvement du centre de masse, autrement dit sa position  $\langle \mathbf{r} \rangle_f$  et sa vitesse  $\langle \mathbf{v} \rangle_f$ . Rappelons que la notation  $\langle \chi \rangle_f$  décrit la valeur moyenne de la quantité  $\chi$  pondérée par la distribution de probabilité  $f$ , *i.e.* :

$$\langle \chi \rangle_f = \int \chi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{r} d\mathbf{v}. \quad (\text{II.63})$$

Pour cela, nous allons utiliser la méthode de moments qui consiste, tout simplement, à les faire apparaître à partir de l'équation (II.61). Nous allons ainsi considérer les premiers moments de l'équation (II.61) en la multipliant par  $r_j/N$  (*resp.*  $v_j/N$ ), puis en intégrant sur  $d\mathbf{r} d\mathbf{v}$ . Nous obtenons ainsi les deux équations

$$\begin{cases} \frac{\partial \langle r_j \rangle_f}{\partial t} = v_j, \\ \frac{\partial \langle v_j \rangle_f}{\partial t} = - \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial r_j}(\mathbf{r}) \right\rangle_f - \langle \kappa(\mathbf{r}, \mathbf{v}) v_j \rangle_f + \frac{1}{N} \int F_{bin}^j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') g(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{r}', \mathbf{v}', t) d\mathbf{r}' d\mathbf{v}', \end{cases} \quad (\text{II.64})$$

avec  $F_{bin}^j$  la  $j^{\text{ème}}$  coordonnée de  $\mathbf{F}_{bin}$ . Ces deux équations permettent d'écrire plus simplement

$$\frac{\partial^2 \langle r_j \rangle_f}{\partial t^2} = - \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial r_j}(\mathbf{r}) \right\rangle_f - \langle \kappa(\mathbf{r}, \mathbf{v}) v_j \rangle_f + \frac{1}{N} \int F_{bin}^j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') g(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{r}', \mathbf{v}', t) d\mathbf{r}' d\mathbf{v}'. \quad (\text{II.65})$$

À ce stade, nous avons considérablement simplifié le problème mais ce n'est toujours pas assez. En effet, l'expression de la distribution à deux points  $g$  apparaît dans l'équation (II.65). Or, pour connaître la quantité  $g$  et son évolution, il faut utiliser la hiérarchie BBGKY qui la relie à la distribution à trois points et ainsi de suite. . . C'est ainsi qu'apparaissent les moments d'ordres supérieurs dans l'équation (II.65). Pour remédier à cela, il nous suffit de faire appel au principe d'action/réaction qui permet de voir que le dernier terme de l'équation est nul, du fait de l'indiscernabilité des particules. En effet, dans ce cas, la distribution  $g$  est invariante par permutation de deux particules :

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{r}', \mathbf{v}', t) = g(\mathbf{r}', \mathbf{v}', \mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \quad (\text{II.66})$$

L'équation (II.65) s'écrit très simplement

$$\frac{\partial^2 \langle r_j \rangle_f}{\partial t^2} = - \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial r_j}(\mathbf{r}) \right\rangle_f - \langle \kappa(\mathbf{r}, \mathbf{v}) v_j \rangle_f, \quad (\text{II.67})$$

où nous retrouvons le résultat classique disant que le centre de masse ne dépend pas explicitement des interactions entre particules. Cependant, il est important de remarquer que si le potentiel extérieur est anharmonique et si la friction n'est pas constante, les interactions apparaissent implicitement dans l'évolution du centre de masse  $\langle r_j \rangle_f$  *via* la distribution  $f$  qui n'est pas connue explicitement<sup>25</sup>. Malgré l'apparente simplicité de l'équation (II.67), elle n'est toujours pas utilisable.

### 3.1.b Dynamique étudiée

Pour pouvoir s'affranchir de la connaissance de distribution  $f$ , nous allons suivre la même méthode que pour le mode de respiration (voir 2.1.a) : nous allons sélectionner la dynamique à étudier en supposant que la distribution  $f$  évoluera *autour* d'un état stationnaire  $f_0$ , dont nous admettrons l'existence.

Nous nous intéressons à l'évolution du centre de masse et plus précisément au mode de ballotement du système (aussi appelé mode dipolaire). Cela signifie que nous allons considérer le mouvement du centre de masse en admettant que c'est l'ensemble du système qui se déplace. Bien que cette hypothèse soit très restrictive, elle semble assez raisonnable lorsque l'on pense à une expérience concrète. En effet pour observer/mesurer le comportement du centre de masse, une méthode consiste à maintenir le centre de masse hors de son état de repos puis de lever cette contrainte. Pour faire cela en excitant le moins de modes possibles, il suffit de maintenir puis de relâcher l'ensemble des particules simultanément. Cela revient donc à considérer qu'à  $t = 0$ , c'est tout le système qui est translaté par rapport à une position de référence<sup>26</sup>. Partant de cette hypothèse, il est tout naturel de poser

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \boldsymbol{\eta}(t) + \langle \mathbf{r} \rangle_{f_0}, \quad (\text{II.68})$$

25. Dans la cas où le potentiel est anharmonique mais que la friction est constante, le profil d'équilibre est connu. Cependant, les interactions apparaissent toujours implicitement dans  $\langle r_j \rangle_f$  pour la même raison.

26. Au-delà de  $t = 0$ , cette façon de justifier la translation du système entier ne tient plus. La méthode développée ici donnera des résultats d'autant meilleurs que la dynamique du centre de masse sera en accord avec cette hypothèse. Malheureusement, il n'est pas possible *a priori* de quantifier cela et c'est entre autres pourquoi nous aurons recours aux simulations numériques pour tester la robustesse des résultats.

où  $\langle \mathbf{r} \rangle_{f_0}$  est un vecteur constant dépendant de l'état stationnaire  $f_0$ . Nous verrons qu'il n'a pas d'autre intérêt que de permettre une interprétation physique plus simple du vecteur  $\boldsymbol{\eta}(t)$ .

Maintenant que nous avons imposé un comportement à la partie en espace, il faut faire de même pour la partie en vitesse, de sorte que les deux hypothèses soient compatibles. Pour cela, nous allons considérer la conservation de l'espace des phases, *i.e.*  $d\mathbf{r}d\mathbf{v} = d\mathbf{R}d\mathbf{V}$ . Nous devons poser

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{h}(\mathbf{r}, t), \quad (\text{II.69})$$

avec  $\mathbf{h}$  une fonction arbitraire qui ne dépend que de  $\mathbf{r}$  et de  $t$ .

Notons que tout comme pour le mode de respiration, la conservation de l'espace des phases ne peut-être vraie que si la friction est nulle. Cependant, nous avons vu que malgré cette incompatibilité, les résultats obtenus par l'équation de contrainte du mode de respiration sont très satisfaisants et nous pouvons espérer qu'il en soit de même ici.

La deuxième condition que nous allons imposer est la conservation de masse au travers de l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{r}, t) + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (\rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{u}(\mathbf{r})) = 0, \quad (\text{II.70})$$

obtenue en intégrant l'équation (II.61) sur  $d\mathbf{v}$  et en posant  $\rho$  la densité en espace et  $\mathbf{u}$  le champ de vitesse local, donnés par

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{r}, t) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r}d\mathbf{v}, \\ \rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \int \mathbf{v}f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r}d\mathbf{v}. \end{cases} \quad (\text{II.71})$$

Comme pour le mode de respiration qui a conduit à l'équation (II.10), il nous faut une condition initiale (un état initial de référence) qui sera perturbée. Il s'agira bien sûr de l'état stationnaire  $f_0$ , de sorte que l'évolution en temps de  $f$  satisfasse

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_0(\mathbf{r} - \boldsymbol{\eta}(t) + \langle \mathbf{r} \rangle_{f_0}, \mathbf{v} + \mathbf{h}(\mathbf{r}, t)). \quad (\text{II.72})$$

Une fois cet état de référence choisi, nous pouvons l'injecter dans l'équation de conservation de la masse (II.70). En notant  $\rho_0$  et  $\mathbf{u}_0$  les quantités associées à  $f_0$ , nous avons

$$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \left\{ \left[ \mathbf{u}_0(\mathbf{r} - \boldsymbol{\eta} + \langle \mathbf{r} \rangle_{f_0}) - \dot{\boldsymbol{\eta}} - \mathbf{h}(\mathbf{r}, t) \right] \times \rho_0(\mathbf{r} - \boldsymbol{\eta} + \langle \mathbf{r} \rangle_{f_0}) \right\} = 0, \quad (\text{II.73})$$

avec

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{r}) = \frac{\int \mathbf{v}f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v})d\mathbf{v}}{\int f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v})d\mathbf{v}}. \quad (\text{II.74})$$

*A priori*, cette équation couple toutes les dimensions du système et il est difficile d'en tirer une condition sur la forme de la fonction  $\mathbf{h}$ . Pour remédier à cela, nous allons chercher une condition sur  $\mathbf{h}$  qui annule séparément tous les termes de l'équation (II.73).

Il vient

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r} - \boldsymbol{\eta} + \langle \mathbf{r} \rangle_{f_0}) - \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \frac{\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}, t)}{\rho_0(\mathbf{r} - \boldsymbol{\eta} + \langle \mathbf{r} \rangle_{f_0})}, \quad (\text{II.75})$$

avec  $\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\alpha} = 0$ .

Malgré le fait que nous avons avancé dans la connaissance de la fonction  $\mathbf{h}$ , une nouvelle fonction  $\boldsymbol{\alpha}$  apparaît. Celle-ci dépend toujours de la position  $\mathbf{r}$  et du temps  $t$ . À quoi bon continuer dans cette voie ? En effet, en utilisant d'autres contraintes sur la dynamique, nous serons peut-être capable de trouver une expression plus explicite de  $\boldsymbol{\alpha}$ . Cependant, peut-être que de nouvelles fonctions apparaîtront et ainsi de suite... D'autant plus qu'à chaque fois nous ajoutons des hypothèses que le système doit satisfaire.

Afin de poursuivre, nous allons faire l'hypothèse forte que  $\boldsymbol{\alpha}$  est identiquement nulle. Nous nous autorisons cette hypothèse car lorsque  $\rho_0$  tend vers zéro, le dernier terme de (II.75) disparaît. Une nouvelle fois, nous savons que cette hypothèse n'est pas bien contrôlée mais les tests numériques viendront justifier ou non notre méthode *a posteriori*.

Finalement, nous allons étudier la dynamique d'évolution du centre de masse *via* la transformation reliant  $f$  et  $f_0$  :

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_0(\varphi_t(\mathbf{r}, \mathbf{v})), \quad (\text{II.76})$$

avec

$$\varphi_t(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \left( \mathbf{r} - \boldsymbol{\eta}(t) + \langle \mathbf{r} \rangle_{f_0}, \mathbf{u}_0 \left( \mathbf{r} - \boldsymbol{\eta}(t) + \langle \mathbf{r} \rangle_{f_0} \right) + \mathbf{v} - \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) \right), \quad (\text{II.77})$$

### 3.1.c Équation de contrainte

En utilisant les équations (II.76) et (II.77) avec l'équation (II.67), nous obtenons une équation de contrainte que doit satisfaire l'évolution du centre de masse :

$$\begin{aligned} & \ddot{\eta}_j(t) + \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial r_j} \left( \mathbf{r} + \boldsymbol{\eta}(t) - \langle \mathbf{r} \rangle_{f_0} \right) \right\rangle_{f_0} \\ & + \left\langle \kappa \left( \mathbf{r} + \boldsymbol{\eta}(t) - \langle \mathbf{r} \rangle_{f_0}, \mathbf{v} - \mathbf{u}_0(\mathbf{r}) + \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) \right) (v_j - u_0^j(\mathbf{r}) + \dot{\eta}_j(t)) \right\rangle_{f_0} = 0, \end{aligned} \quad (\text{II.78})$$

avec  $\eta_j$  (*resp.*  $u_0^j$ ) la  $j^{\text{ème}}$  composante de  $\boldsymbol{\eta}$  (*resp.*  $\mathbf{u}_0$ ).

L'équation (II.78) est une généralisation du théorème de Kohn, qui décrit l'évolution du centre de masse d'un système de particules [Koh61, BBvL07], lorsque : la friction est variable et le piège anharmonique. Insistons sur le fait que contrairement au cas à friction constante, même si les interactions ne semblent pas intervenir ici, elles sont incluses dans la forme de  $f_0$  qui joue un rôle dans l'évolution de  $\boldsymbol{\eta}$ .

Avant de comparer les prédictions de l'équation (II.78) aux simulations numériques, notons qu'il est également possible d'obtenir l'équation (II.78) à partir des  $N$  équations de Newton qui gèrent la dynamique du système. Pour cela, il faut d'une part passer à la limite continue en faisant tendre  $N$  vers l'infini dans l'expression du centre de masse :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{r}^i \longrightarrow \langle \mathbf{r} \rangle_{f_0}, \quad (\text{II.79})$$

avec  $f_0$  l'approximation continue de la distribution ponctuelle de particules. D'autre part, il faut utiliser la transformation donnée par (II.76) et (II.77). Dans ce cas, la forme de la transformation à effectuer n'apparaît pas naturellement mais est faite de manière *arbitraire*.

### 3.2 Simulations et résultats

---

Dans cette section, nous allons réaliser plusieurs simulations numériques afin de tester les prédictions faites par la relation (II.78) pour les cas à friction variable et pour un piège anharmonique. À cet effet, nous allons supposer dans la suite que l'état stationnaire  $f_0$  est pair par rapport aux coordonnées de vitesse et que le système est centré. Ces propriétés permettent d'écrire que  $\mathbf{u}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$  et  $\langle \mathbf{r} \rangle_{f_0} = \mathbf{0}$ . Bien qu'assez restrictive, nous avons fixé la première condition de sorte à simplifier les tests numériques. En effet, trouver un état stationnaire avec un champ de vitesse local non nul n'est pas une chose aisée et dépend fortement du système étudié<sup>27</sup>. D'autant plus que pour nos tests, il faut que cet état soit stationnaire et stable afin que, si possible, le système retourne dans cet état après avoir été perturbé.

Contrairement à la méthode que nous avons utilisée pour réaliser les tests sur le mode de respiration (voir le paragraphe 2.2.a), nous allons utiliser la méthode d'Euler-Maruyama, qui est suffisamment précise lorsque l'on s'intéresse à des quantités moyennées et non aux trajectoires exactes de toutes les particules [Tal90]. La méthode d'Euler-Maruyama est simplement une généralisation de la méthode d'Euler utilisée pour un système d'équations différentielles ordinaires : elle permet de résoudre numériquement des systèmes d'équations différentielles stochastiques.

Notons qu'il serait encore possible d'utiliser l'algorithme de Langevin-Verlet, comme nous l'avons fait pour simuler les oscillations de respiration (voir paragraphe 2.2.a). Cependant il faut adapter l'algorithme au cas par cas quand le profil de friction dépend de la vitesse. L'avantage pour nous d'utiliser une méthode d'Euler est de calculer un minimum de fois les forces d'interaction entre particules. En effet, il suffit d'une seule évaluation par pas de temps. Le calcul des forces d'interaction étant la partie la plus coûteuse du code en temps de calcul, il devient rapidement nécessaire de l'optimiser quand le nombre de particules augmente. Pour chaque particule, il faut calculer la force totale qu'elle ressent. Il faut ensuite faire de même pour chaque particule du système. Le calcul des forces d'interaction est ainsi d'ordre  $O(N^2)$ .

Afin de calculer l'évolution du centre de masse, nous procédons comme suit :

1. nous attendons que le système se stabilise dans un état stationnaire stable grâce à la friction,
2. à  $t = 0$  nous translatons l'ensemble du système,
3. nous laissons le système évoluer et nous mesurons la position du centre de masse pour tout  $t$ .

Pour les simulations concernant les différentes formes de l'équation de contrainte, nous avons utilisé les mêmes méthodes que pour le mode de respiration : Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) et Runge-Kutta-Fehlberg (RK45), implémentées dans la bibliothèque libre de calcul scientifique "GNU Scientific Library" (GSL). Ces méthodes étant standard dans la résolution d'équations différentielles ordinaires, nous ne les détaillerons pas.

---

27. Une piste serait de considérer un système bidimensionnel soumis à une force extérieure rotationnelle. Pour cela, il faudrait généraliser l'approche présentée dans cette section mais cela semble tout à fait envisageable.

### 3.2.a *Le système de particules considéré*

La système que nous avons sélectionné pour réaliser nos tests est constitué de  $N$  particules réparties sur  $\mathbb{R}$ , de coordonnée  $x$  et soumises à un potentiel harmonique  $\Phi(x) = (1/2)\omega_0^2 x^2$ , sauf dans la partie 3.2.d où le potentiel sera anharmonique. Les particules interagissent entre elles par la force  $\mathbf{F}_{bin}(x, x') = C \times \text{sgn}(x - x')$  où  $C$  est une constante numérique. Il s'agit d'une force Coulombienne unidimensionnelle. Le système complet peut ainsi être vu comme un plasma unidimensionnel piégé<sup>28</sup>. Ce système a plusieurs avantages dont deux très utiles pour nous.

#### *i) Calcul des forces d'interaction*

La forme spéciale de la force d'interaction permet de considérer un grand nombre de particules sans utiliser d'approximation. En effet, en codant astucieusement l'algorithme, nous pouvons ramener le calcul des forces d'interaction à l'ordre  $O(N \log(N))$  sans faire aucune approximation. La force résultante exercée sur la  $i^{\text{ème}}$  particule étant simplement proportionnelle à la différence entre le nombre de particules à sa gauche et celui à sa droite, il suffit d'ordonner les particules pour calculer les forces. Le nombre d'opérations à réaliser est directement donné par celui nécessaire au tri. L'algorithme de calcul des forces est ainsi en  $O(N \log(N))$ .

#### *ii) Expression approchée de la densité en espace*

Lorsqu'il n'existe aucune expression analytique de  $\rho_0$  ou plus généralement de  $f_0$ , il est possible d'utiliser un profil approché pour obtenir des informations qualitatives. Il est même possible d'utiliser un profil issu de simulations numériques puisqu'il nous faut seulement des informations sur un état stationnaire. Dans les prédictions théoriques présentées plus loin, nous allons justement utiliser une expression approchée de la répartition des particules.

Lorsque la friction  $\kappa$  est constante et que nous sommes dans la limite de forte interaction entre particules,<sup>29</sup> nous connaissons exactement un état stationnaire du système. La densité en espace  $\rho_0$  de ce plasma unidimensionnel piégé est simplement une fonction marche :

$$\rho_0(x) = \begin{cases} \frac{N}{2L_{int}}, & \text{si } |x| \leq L_{int}, \\ 0, & \text{si } |x| > L_{int}, \end{cases} \quad (\text{II.80})$$

où  $L_{int}$  est la taille typique du système, obtenue en comparant l'effet des interactions avec celui du piège :

$$L_{int} = \frac{NC}{\omega_0^2}. \quad (\text{II.81})$$

Remarquons que  $L_{int}$  dépend linéairement du nombre de particules qui composent le système.

---

28. Nous avons déjà vu ce modèle lors des tests réalisés pour le mode de respiration à friction variable (voir le paragraphe 2.3.b).

29. Dans cette limite, les interactions entre particules dominent la dynamique du système. Il n'y a alors pas de contribution significative de la température. On parle de système à température nulle.

De la même manière, nous pouvons définir une taille caractéristique associée à la température :  $L_{temp} = (D/\kappa\omega_0^2)^{1/2}$ . Dès lors, en dehors de la limite formelle à température nulle, l'expression de  $\rho_0$  de l'équation (II.80) est une bonne approximation de l'état stationnaire réel tant que

$$L_{int} \gg L_{temp}. \quad (\text{II.82})$$

L'expression de  $\rho_0$  (II.80) combinée avec l'équation de contrainte (II.78) va nous permettre d'obtenir des informations qualitatives sur l'évolution du centre de masse.

### 3.2.b Friction dépendant de la position des particules

Commençons par considérer le cas de la friction suivante

$$\kappa(x, v) = \kappa(x) = \kappa_0 \left( 1 + \frac{|x|}{L_\kappa} \right), \quad (\text{II.83})$$

avec  $L_\kappa$  une taille typique et  $\kappa_0$  la friction à  $x = 0$ .

*A priori*, il n'y a aucune raison pour que la densité  $\rho_0$  soit une marche, *i.e.* soit donnée par l'équation (II.80). Cependant, nos simulations nous ont montré qu'il s'agissait d'une bonne approximation tant que :

$$L_{int} \gg \frac{1}{\omega_0} \left( \frac{D}{\min_{|x| \leq L_{int}} \kappa(x)} \right)^{1/2}. \quad (\text{II.84})$$

Nous retrouvons ici une contrainte similaire à (II.82), obtenue pour une friction constante, où nous avons en quelque sorte une longueur caractéristique associée à une température dans le système, donnée par

$$L_{temp} = \frac{1}{\omega_0} \left( \frac{D}{\min_{|x| \leq L_{int}} \kappa(x)} \right)^{1/2}. \quad (\text{II.85})$$

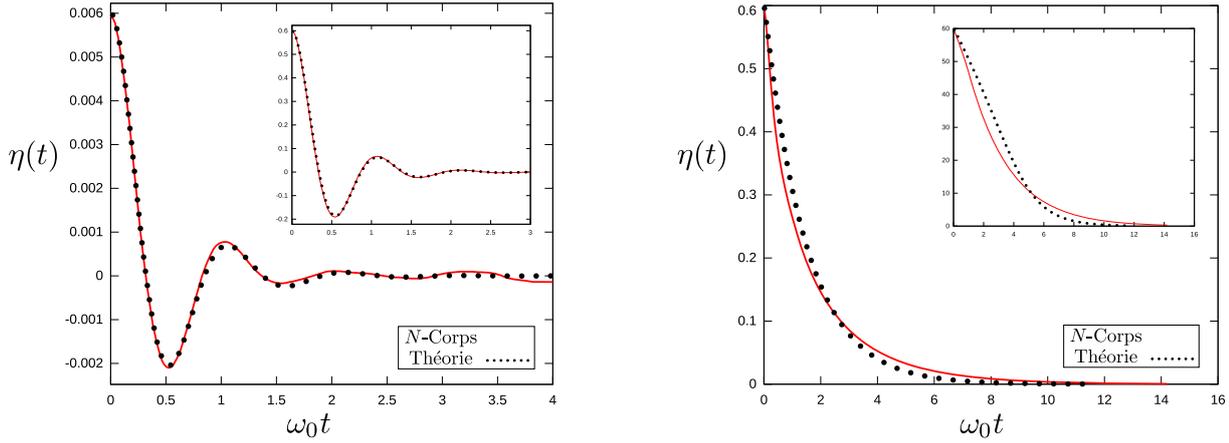
En supposant que toutes les conditions soient satisfaites, l'équation de contrainte (II.78) devient simplement

$$\ddot{\eta}(t) + \omega_0^2 \eta(t) + \kappa_0 \dot{\eta}(t) \left( 1 + \frac{1}{2L_{int}} \int_{-L_{int}}^{L_{int}} \frac{|x + \eta(t)|}{L_\kappa} dx \right) = 0, \quad (\text{II.86})$$

et dans le cas où  $|\eta(t)|$  reste borné pour tout temps  $t$  par  $L_{int}$ , *i.e.* pour des perturbations de faible amplitude qui ne dépassent pas la demi-taille du système, nous obtenons :

$$\ddot{\eta}(t) + \omega_0^2 \eta(t) + \kappa_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{L_{int}}{L_\kappa} \right) \dot{\eta}(t) + \frac{\kappa_0}{2L_{int}L_\kappa} \dot{\eta}(t) \eta^2(t) = 0. \quad (\text{II.87})$$

Les figures II.13(a) et II.13(b) comparent l'équation (II.86) à plusieurs simulations à  $N$  corps pour différentes amplitudes de perturbation. Nous obtenons un bon accord, même dans les cas fortement non linéaires où la perturbation initiale atteint la taille du système. Notons que la valeur minimale du rapport  $\kappa/\omega_0$  est environ égale à 0,56, relativement loin de la limite  $\kappa/\omega_0 \ll 1$ . Bien que nous ne soyons pas dans la zone la plus favorable, les



(a) Les paramètres sont :  $\Delta t = 0,001$ ;  $N = 10^5$ ;  $C = 10^{-2}$ ;  $l = 1,0$ ;  $\omega_0 = 17,8$ ;  $\kappa_0 = 10,0$ ;  $D = 1,0$  et  $\eta(0) \simeq 0,02 \times L_{int}$ . Nous utilisons les mêmes paramètres pour l'encart mis à part  $\eta(0) \simeq 2 \times L_{int}$ .

(b) Les paramètres sont :  $\Delta t = 0,001$ ;  $N = 10^5$ ;  $C = 1$ ;  $l = 1,0$ ;  $\omega_0 = 17,8$ ;  $\kappa_0 = 10,0$ ;  $D = 1,0$  et  $\eta(0) \simeq 0,02 \times L_{int}$ . Nous utilisons les mêmes paramètres pour l'encart mis à part  $\eta(0) \simeq 2 \times L_{int}$ .

FIGURE II.13 – Comparaison entre la prédiction de l'équation de contrainte (II.86) et les simulations à  $N$  corps. Les grandes figures sont obtenues pour des perturbations initiales de faible amplitude tandis que les encarts sont obtenus pour des perturbations de forte amplitude.

résultats sont très encourageants. D'autant plus que les résultats s'améliorent encore au fur et à mesure que le rapport  $\kappa/\omega_0$  décroît.

Ce comportement est directement relié aux hypothèses faites pour obtenir l'équation de contrainte. À cause du caractère variable de la friction, nous accentuons des phénomènes qui ne sont pas pris en compte dans l'équation de contrainte (II.78) ou (II.86) dans le cas testé ici. Pour bien comprendre cette dernière, considérons deux particules du système avec la même vitesse mais avec des positions différentes, de sorte qu'une d'entre elle soit dans une zone de forte friction et l'autre dans une zone de faible friction. Pendant le même intervalle de temps, ces deux particules ne parcourent pas la même distance. Il en résulte des compressions/dilatations locales du système qui ne sont pas prises en compte dans l'équation de contrainte (II.78).

En résumé, si la friction varie énormément et/ou que celle-ci est très importante par rapport au piège, les hypothèses pour dériver l'équation de contrainte sont de moins en moins bien vérifiées et les écarts entre prédictions et simulations deviennent non négligeables. Pour que les résultats soient convenables, il faut que  $\max_{|x| \leq L_{int}} (\kappa(x)) \ll \omega_0$  et que les variations de la friction soient faibles le long du système.

Au-delà de la comparaison directe de l'évolution du centre de masse entre prédictions et simulations, nous pouvons utiliser l'équation de contrainte (II.78) pour prévoir un changement qualitatif important de la dynamique de relaxation du centre de masse. En effet, à cause du caractère variable de la friction, nous pouvons voir sur les figures II.13(a) et II.13(b) que lorsque la taille du système augmente, le centre de masse passe d'un comportement sous-amorti à sur-amorti. Au vu de l'expression de (II.81), nous constatons que cela revient à dire que le système va changer de comportement lorsque le nombre d'atomes le constituant augmente. Cela peut se comprendre facilement quand on remarque

que le profil de friction (II.83) est croissant. Plus les particules sont loin du centre et plus la friction ressentie est importante. Par conséquent, lorsque le nombre de particules (la taille du système) augmente, la friction moyenne ressentie par l'ensemble du système augmente également. Partant d'une situation sous-amortie, nous comprenons ainsi pourquoi le mouvement du centre de masse devient sur-amorti. Nous retrouvons bien évidemment ce changement de dynamique à l'aide de l'équation de contrainte. Pour cela, il suffit de considérer l'expression linéarisée de celle-ci, qui traduit l'évolution du centre de masse pour de faibles perturbations (II.87). De manière plus générale, nous pouvons réaliser le même calcul en partant directement de l'équation de contrainte (II.78), *i.e.* avant d'avoir spécifié le problème. Nous obtenons un critère très simple à vérifier pour savoir dans quel régime nous nous trouvons pour un axe étiqueté par  $j$  :

$$\left\langle \frac{\partial \kappa(\mathbf{r}, \mathbf{v}) v_j}{\partial v_j} \right\rangle_{f_0}^2 - 4 \left\langle \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r_j^2}(\mathbf{r}) \right\rangle_{f_0} \begin{cases} < 0 & \Rightarrow \text{sous-amorti} \\ > 0 & \Rightarrow \text{sur-amorti.} \end{cases} \quad (\text{II.88})$$

En appliquant cette relation au cas présent, nous pouvons introduire un nombre de particules critique  $N_c$  qui traduira la limite entre les régimes sur/sous-amortis :

$$N_c = 2 \frac{L_\kappa \omega_0^2}{C} \left( 2 \frac{\omega_0}{\kappa} - 1 \right). \quad (\text{II.89})$$

### 3.2.c *Friction dépendant de la vitesse des particules*

Dans cette partie, nous allons considérer le cas de frictions qui dépendent uniquement de la vitesse des particules.

#### *i) Dépendance linéaire*

À l'instar du paragraphe précédent, commençons par une dépendance linéaire en vitesse :

$$\kappa(x, v) = \kappa(v) = \kappa_0 \frac{|v|}{v_0}, \quad (\text{II.90})$$

avec  $v_0$  une vitesse typique et  $\kappa_0$  une friction typique.

Contrairement au paragraphe 3.2.b où nous avons illustré qu'un profil de friction approché permettait de relativement bien prédire l'évolution du centre de masse (voir les figures (II.13(a)) et (II.13(b))), ici nous allons voir que nous arrivons à d'assez bons résultats en partant d'une distribution discrète de particules notée  $f_0^N$ , qui constitue un échantillonnage de la distribution continue  $f_0$  :

$$f_0^N(x, v) = \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i) \delta(v - v_i) \simeq f_0(x, v). \quad (\text{II.91})$$

C'est justement ce à quoi nous avons accès lors des simulations numériques à  $N$  corps. En utilisant la distribution discrète (II.91) avec l'équation de contrainte (II.78), nous obtenons :

$$\ddot{\eta}(t) + \omega_0^2 \eta(t) + \frac{\kappa_0}{N} \sum_{i=1}^N |v_i + \dot{\eta}(t)| (v_i + \dot{\eta}(t)) = 0. \quad (\text{II.92})$$

Pour simuler cette équation, nous avons utilisé les résultats obtenus des simulations à  $N$  corps pour déterminer la distribution  $f_0^N$ . Nous avons ainsi utilisé les vitesses  $v_i$  des  $N$  particules pour connaître l'évolution du centre de masse  $\eta(t)$ .

Notons bien que nous utilisons uniquement les simulations à  $N$ -corps pour caractériser l'état stationnaire  $f_0$  via  $f_0^N$ . En aucun cas nous utilisons, au cours du temps, les données issues des simulations à  $N$  corps pour ajuster l'évolution de  $\eta(t)$ . D'ailleurs, afin d'éviter des corrélations entre les deux approches, nous avons utilisé des conditions initiales différentes pour initialiser l'équation de contrainte et la simulation à  $N$  corps. Concrètement, nous avons laissé un temps de latence<sup>30</sup> entre l'initialisation de l'équation de contrainte et le départ de la simulation.

La figure II.14 représente quelques résultats obtenus à partir du profil de friction (II.90) pour différentes amplitudes de perturbation et différents coefficients de diffusion. L'accord entre prédiction théorique et simulation numérique n'est pas parfait mais nous obtenons d'assez bons résultats dans les cas à forte perturbation. Cela montre une nouvelle fois que la méthode employée ici n'est pas basée sur la linéarisation du système, *i.e.* pour de petites perturbations.

De la même manière que pour le cas à friction variable dépendant de la position des particules, nous pouvons observer sur la figure II.14 un comportement intéressant, où la valeur du coefficient de diffusion  $D$  peut changer la dynamique du centre de masse. On peut comprendre qualitativement ce phénomène de la manière suivante : quand  $D$  augmente, les particules explorent une plus grande zone de l'espace des phases ce qui inclut des zones à plus grande vitesse. Dans ce cas, d'après le profil de friction (II.90), les particules sont plus amorties et l'évolution globale du système passe de sous-amortie à sur-amortie. Cette permutation entre deux dynamiques différentes lorsque le coefficient de diffusion change a déjà été étudiée pour différents modèles où la friction dépend également de la vitesse des particules [MZ99, EEM05, ES08]. Dans ces travaux, les auteurs ne considèrent pas l'évolution du centre de masse mais ils constatent que le coefficient de diffusion marque une transition entre translation et rotation du système.

### ii) Dépendance quadratique avec zone de friction négative

Attachons-nous désormais à un cas moins favorable où les variations de la friction le long du système sont importantes. De plus, nous allons considérer un profil de friction qui contient une partie négative et une partie positive, de sorte à accentuer les effets non pris en compte dans l'équation de contrainte. Prenons le profil de friction suivant :

$$\kappa(x, v) = \kappa(v) = -\kappa_0 \left[ 1 - \left( \frac{v}{v_0} \right)^2 \right], \quad (\text{II.93})$$

avec  $v_0$  une vitesse typique et  $\kappa_0$  la friction à  $v = 0$ . La friction est négative tant que  $|v| < v_0$  et les particules prennent donc de l'énergie à leur environnement. La figure (II.15) représente les résultats d'une simulation pour différentes perturbations initiales en utilisant une nouvelle fois la distribution discrète de particules  $f_0^N$  obtenue à partir des simulations à  $N$  corps.

Il est clair que l'équation de contrainte (II.78) n'arrive plus à prédire convenablement

---

30. Pendant ce temps de latence, les particules se déplacent suffisamment dans le système pour que les distributions  $f_0^N$  avant et après soient différentes et non corrélées

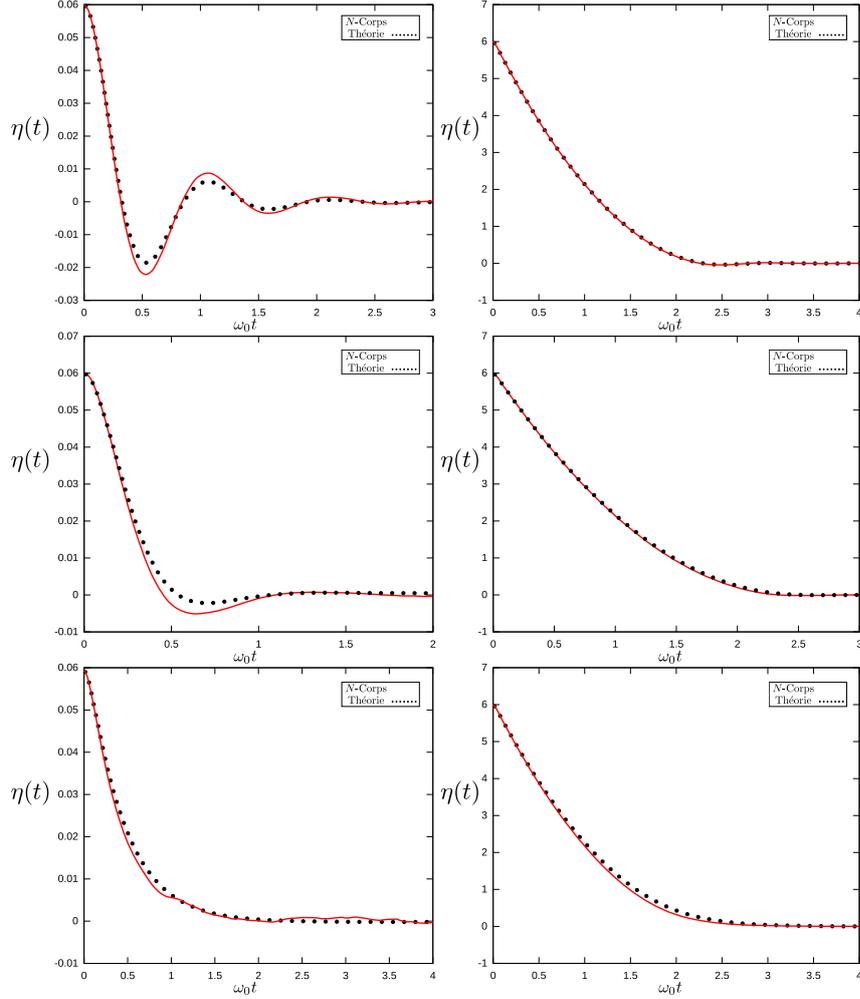


FIGURE II.14 – Comparaison entre les simulations à  $N$  corps (ligne rouge continue) et les prédictions théoriques (ligne pointillée) données par l'équation (II.92). La première (*resp.* seconde) colonne est obtenue pour de petites (*resp.* grandes) perturbations :  $\eta(0) \simeq 0,02 \times L_{int}$  (*resp.*  $\eta(0) \simeq 2 \times L_{int}$ ). Le coefficient de diffusion  $D$  augmente de haut en bas tel que  $D \in \{5, 50, 500\}$ . Les autres paramètres sont :  $\Delta t = 0,001$  ;  $N = 10^5$  ;  $C = 10^{-2}$  ;  $v_0 = 1,0$  ;  $\omega_0 = 17,8$  and  $\kappa_0 = 10,0$ . Nous utilisons la grandeur  $L_{int}$  car pour ces gammes de paramètres, la densité en espace  $\rho_0$  donnée par l'équation (II.80) est une bonne approximation de la densité réelle.

l'évolution du centre de masse. Ce n'est pas surprenant car comme nous l'avons dit, la zone de friction négative crée des contractions/dilatations locales du système qui ne sont pas prises en compte. Pour de très fortes perturbations, les résultats sont bien meilleurs car la majorité du système gît dans une zone de friction positive et les effets de contractions/dilatations locales deviennent moins importants. Cependant, dès que le centre de masse du système retourne au voisinage de zéro, l'équation de contrainte n'est plus en mesure de prédire son comportement.

### 3.2.d Piège anharmonique

Dans cette partie, nous allons réaliser notre dernier test en considérant que le potentiel extérieur  $\Phi$  qui piège les particules n'est plus harmonique, tout en considérant des frictions

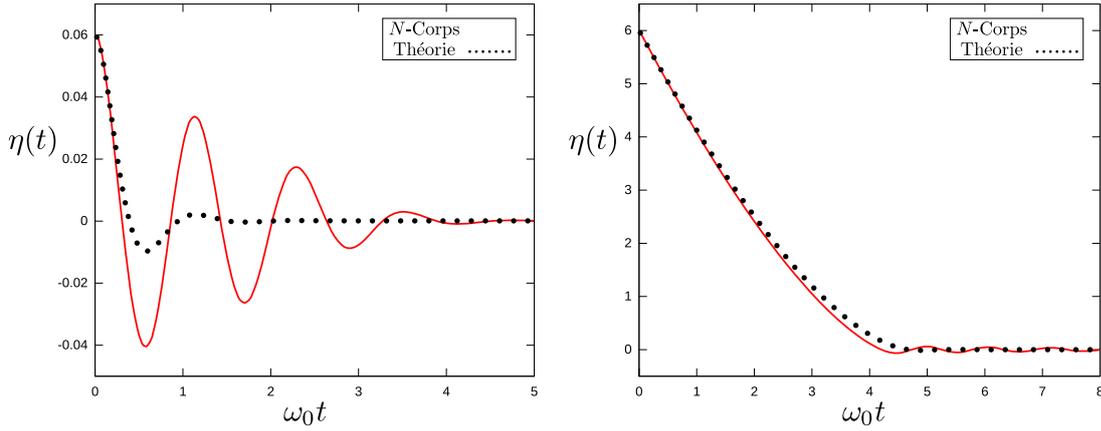


FIGURE II.15 – Comparaisons entre les simulations à  $N$ -corps (ligne rouge continue) et les prédictions théoriques (ligne pointillé) données par l'équation (II.93). Figure de gauche :  $\eta(0) \simeq 0,02 \times L_{int}$ . Figure de droite  $\eta(0) \simeq 2 \times L_{int}$ . Les autres paramètres sont :  $\Delta t = 0,001$ ;  $N = 10^5$ ;  $C = 10^{-2}$ ;  $v_0 = 1,0$ ;  $\omega_0 = 17,8$ ;  $\kappa_0 = 10,0$  et  $D = 1,0$ . Nous utilisons la grandeur  $L_{int}$  car pour ces gammes de paramètres, la densité en espace  $\rho_0$  donnée par l'équation (II.80) est une bonne approximation de la densité réelle.

$\kappa$  constantes. Dans la suite nous utiliserons la force de piégeage suivante :

$$\mathbf{F}_{ext}(x) = \frac{\omega_0^2}{1 + 4(\delta - \mu x)^2} - \frac{\omega_0^2}{1 + 4(\delta + \mu x)^2}, \quad (\text{II.94})$$

tel que  $\nabla_x \Phi(x) = -\mathbf{F}_{ext}(x)$ ,  $\delta < 0$  et  $\mu > 0$ .

C'est typiquement la forme de la force de confinement exercée sur des atomes dans un piège magnéto-optique. Nous y reviendrons dans le chapitre III lorsque nous utiliserons les équations de contraintes pour prédire le comportement des premiers modes d'oscillations de grand piège magnéto-optique.

La figure II.16 représente les résultats obtenus lorsque nous augmentons progressivement le nombre d'atomes dans les zones fortement anharmoniques. Afin de faciliter la lecture de la figure, nous avons représenté la valeur absolue de la force de piégeage  $|\mathbf{F}_{ext}(x)|$  ainsi que la valeur absolue de sa partie linéaire au voisinage de  $x = 0$ , *i.e.* la contribution harmonique au centre du piège.

Il est incontestable que l'équation de contrainte ne réussit pas à décrire l'évolution du centre de masse lorsque le nombre de particules dans les régions fortement anharmoniques est trop important. Le problème vient du fait que les particules ne sont plus synchrones, comme c'est le cas pour un piège harmonique : les particules qui se déplacent dans le piège n'ont pas de fréquence commune. Il en résulte des phénomènes non pris en compte par l'équation de contrainte. Notons que pour un condensat de Bose-Einstein, les auteurs de [OFK<sup>+</sup>03] ont montré que l'anharmonicité du piège peut amener de nouveaux effets, tels que le mélange de différents modes d'oscillation.

En conclusion, l'équation de contrainte doit être utilisée avec précaution lorsque le piège n'est pas harmonique. Il convient de s'assurer que le nombre de particules dans ces régions n'est pas trop important. À l'inverse, l'équation de contrainte donne un semblant de justification au fait de considérer qu'une faible anharmonicité ne donne pas lieu à un changement radical de la dynamique du système, tout au moins en ce qui concerne l'évolution du centre de masse.

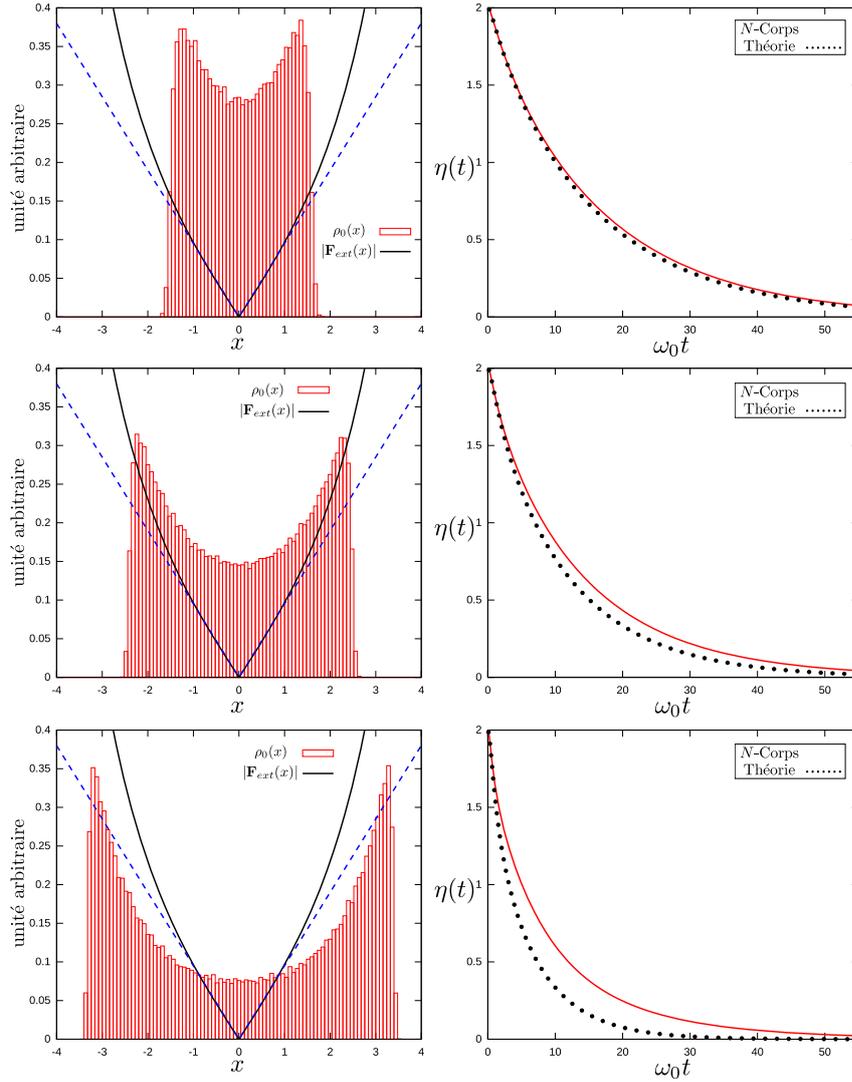


FIGURE II.16 – Colonne de gauche : nous avons représenté la densité stationnaire en espace obtenue à partir des simulations à  $N$  corps, la valeur absolue de la force de piégeage  $|F_{trap}(x)|$  (ligne continue) et son approximation linéaire au voisinage de  $x = 0$  (ligne pointillée bleue) pour aider à la lecture.

Colonne de droite : Comparaison entre les simulations à  $N$  corps (ligne rouge continue) et les prédictions théoriques (ligne pointillée) données pour un piège anharmonique (voir équation (II.94)).

La constante d'interaction  $C$  augmente de haut en bas tel que  $C \in \{2,5; 5; 10\}(\times 10^{-5})$ . Les autres paramètres sont :  $\Delta t = 0,001$ ;  $N = 10^5$ ;  $\eta(0) = 2,0$ ;  $\delta = -6,0$ ;  $\mu = 1,0$ ;  $\omega_0 = 17,8$ ;  $\kappa = 10,0$  et  $D = 0,1$ .

## 4 CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Au cours ce chapitre nous avons développé une méthode consistant à cibler la dynamique qui nous intéresse pour obtenir une équation de contrainte contenant toute l'information utile. Dans le cas du mode de respiration, nous avons considéré que le système subissait des mouvements alternés de contraction et de dilatation. Pour le mode du centre

de masse, nous avons supposé que l'ensemble du système était translaté de la même manière.

Dans les deux cas, notre méthode permet de retrouver les résultats classiques de la littérature mais aussi et surtout de les étendre. Ainsi, nous sommes par exemple capable de prédire la fréquence du mode de respiration quel que soit la température, la dimension du problème, le type d'interaction (à condition qu'elle reste homogène),... Nous sommes *a priori* capables de décrire le mode de respiration de tous les systèmes prenant place dans la figure II.17 où les différents axes représentent :

- Le type d'interaction *via* le rapport  $k/d$  : courte ou longue portée.
- Les régimes où la friction domine ou non l'évolution du système par rapport au piège, caractérisé par le rapport  $\kappa/\omega_0$ .
- Le rôle de la température par rapport à celui des interactions qu'elles soient attractives ou répulsives, et ce à travers le paramètre adimensionné  $p$ .

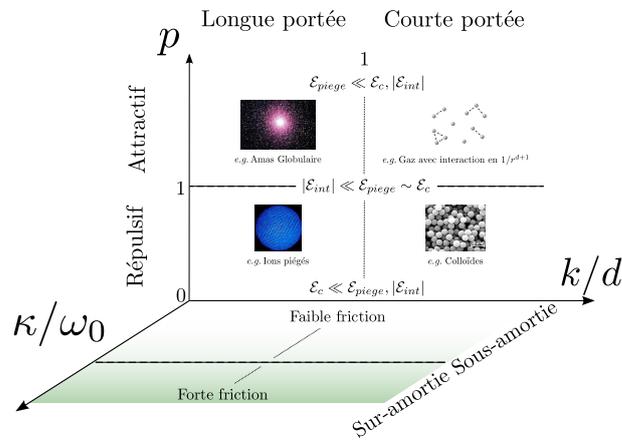


FIGURE II.17 – Représentation schématisée des différents types de systèmes englobés par la théorie présentée pour le mode de respiration ; avec  $\mathcal{E}_{\text{piège}}$  et  $\mathcal{E}_{\text{int}}$  respectivement les énergies potentielles due au piège et due aux interactions entre particules et enfin  $\mathcal{E}_c$  l'énergie cinétique du système. Pour plus détails voir les explications dans le texte.

Au-delà de ce diagramme, nous avons étendu notre méthode aux systèmes à friction variable. Dans le cas du mode de respiration, nous nous sommes limités aux cas où la friction ne dépend que de la position des particules. Pour le centre de masse, nous avons ajouté une possible dépendance en vitesse de la friction, ainsi que la possibilité d'être en présence d'un piège anharmonique.

Bien entendu, au vu du niveau de généralisation que nous avons cherché à atteindre, nous avons également rencontré pas mal de problèmes et de situations pour lesquelles notre méthode ne fonctionne pas ou peu. C'est par exemple le cas dès que l'on s'intéresse au mode de respiration de systèmes attractifs, où les écarts entre prédictions et simulations numériques augmentent rapidement lorsque le paramètre  $p$  devient de plus en plus grand. Pour l'évolution du centre de masse, ce sont les cas de friction négative et de pièges anharmoniques qui se sont révélés les moins fructueux.

Dans tous ces cas, c'est la nature même de la méthode qui la limite. En effet, tous les phénomènes physiques qui peuvent survenir dans un système de particules ne sont pas inclus dans l'équation de contrainte : par nature, nous ciblons très précisément une dynamique en particulier. Ainsi, l'amortissement Landau n'est pas inclus, les transferts d'énergie entre différents modes ne sont pas pris en compte, ... Malgré tout, la simplicité des équations

de contraintes et les prédictions qualitatives qu’elles permettent de faire en font des outils puissants dans l’étude des premiers modes d’oscillation.

Le travail présenté ici n’est que le début d’une multitude de pistes à explorer, que ce soit d’un point de vue expérimental et/ou théorique. En effet, nous pourrions nous intéresser aux autres modes d’oscillation de systèmes de particules. Est-il possible par exemple d’obtenir une équation de contrainte pour le mode quadrupolaire ? Peut-on écrire une ou plusieurs équations de contrainte décrivant simultanément différents modes, comme par exemple en couplant le mode de respiration et celui de ballotement ? Est-ce que de telles équations nous permettraient d’étudier les transferts d’énergie en modes ?

Nous pourrions également essayer de mieux décrire les systèmes qui échangent de l’énergie avec l’extérieur, *i.e.* pour lesquels la friction est non nulle. Peut-être qu’en partant d’une autre équation d’évolution, comme l’équation de Smoluchowski [Cha43], nous pourrions obtenir de meilleurs résultats ? Une fois cela fait, serait-il possible de bien décrire les systèmes à friction variable ? Même si ces types de systèmes semblent exotiques, il n’en reste pas moins qu’ils apparaissent dans de nombreux domaines, que ce soit en physique des plasma ou pour des assemblées de particules actives en biologie.

D’un point de vue expérimental, les prédictions faites par les équations de contraintes peuvent aiguiller les recherches à condition d’accepter leurs avantages : simplicité, . . . mais aussi leurs défauts : informations qualitatives, . . . C’est à ce titre que nous essayerons d’utiliser les équations de contrainte au chapitre III pour des systèmes d’atomes froids piégés. Nous verrons qu’elles peuvent apporter à la fois des justifications à certains phénomènes observés mais aussi en prédire d’autres.

En conclusion, la grande simplicité conceptuelle des premiers modes d’oscillation et le fait d’avoir généralisé plusieurs résultats de la littérature pourrait nous faire croire que tout ou presque est dit. Cependant, il reste encore beaucoup de questions en suspens qui sont d’autant plus intéressantes qu’elles touchent de nombreux domaines scientifiques, que ce soit en physique ou bien en biologie.

## 5 ARTICLES PUBLIÉS

---

### 5.1 “Breathing Mode for Systems of Interacting Particles” [OBM<sup>+</sup>09]

---

Breathing Mode for Systems of Interacting Particles

Alain Olivetti,<sup>1,\*</sup> Julien Barré,<sup>1</sup> Bruno Marcos,<sup>1</sup> Freddy Bouchet,<sup>2</sup> and Robin Kaiser<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire J. A. Dieudonné, UMR CNRS 6621, Université de Nice-Sophia Antipolis, Parc Valrose, F-06108 Nice Cedex 02, France

<sup>2</sup>Institut Non-Linéaire de Nice, UMR CNRS 6618, Université de Nice-Sophia Antipolis, France

(Received 25 July 2009; published 24 November 2009)

We study the breathing mode in systems of trapped interacting particles. Our approach, based on a dynamical ansatz in the first equation of the Bogoliubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon hierarchy allows us to tackle at once a wide range of power-law interactions and interaction strengths, at linear and nonlinear levels. This both puts in a common framework various results scattered in the literature, and by widely generalizing these, emphasizes universal characters of this breathing mode. Our findings are supported by direct numerical simulations.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.103.224301

PACS numbers: 45.50.-j, 05.20.Jj

Systems of trapped interacting particles are studied in many areas of physics: confined plasmas, trapped cold atoms, Bose-Einstein condensates, colloidal particles, trapped ions, astrophysical systems, the latter ones being self-confined by the interactions. The low-lying oscillatory modes of these systems are a natural object of study, as they are an important nondestructive tool to characterize the system and gain insight into the collective effects at work. As a consequence, there is abundant literature on the subject, corresponding to very diverse physical situations: (i) systems with short-range interactions, such as classical gases or shielded Coulomb interaction and (ii) systems with long-range interactions, such as non-neutral plasmas, Coulomb crystals, or astrophysical systems, in which the interactions may be weak (gases) or strong (liquids or crystals).

Diverse approaches and techniques are naturally used to investigate these phenomena. A trapped classical gas of interacting particles is studied using a Boltzmann-Vlasov equation in [1], where the nonlinear dynamics is approximated with a scaling ansatz, which captures the collective effects. Such an ansatz was used earlier for the Gross-Pitaevskii equation in [2,3]. In the confined plasma context, the problem is often studied through hydrodynamical equations, in the so-called “cold fluid approximation” [4], where the dispersion relation for fluid modes in a cold spheroidal plasma is derived. Following an idea of [5], Ref. [6] gives an approximate solution to the breathing mode of a 1D confined plasma beyond the cold fluid approximation, using an *ad hoc* closure of the hydrodynamical equations. Monopole modes of dusty plasmas interacting with a Yukawa potential are investigated in [7,8]. The breathing mode of trapped ions or colloids interacting via Coulomb or Yukawa interactions has been studied in 1D [9,10], 2D [11,12], and 3D [13] for crystallized systems, by a direct diagonalization of the linearized Newtonian equations of motion. Finally, breathing oscillations with attractive interactions have been studied in an astrophysical context using the virial theorem [14].

Each method applies to a specific situation: Newton equations are adapted to a crystallized state with negligible thermal fluctuations, linearization assumes a small amplitude, the Vlasov equation is limited to long-range interactions and weak correlations. Yet in all cases a similar equation for the breathing mode is obtained. In particular, it is intriguing that kinetic descriptions assuming small correlations between particles, fluid descriptions, and perturbative expansions around a crystallized state all yield similar predictions for the breathing mode, at linear and nonlinear levels. This stunning situation calls for a unified theory. In the limit of zero temperature, or equivalently infinitely strong interactions, such an endeavor has recently been undertaken in the linear regime [15]. A more general situation summarizing the different possible regimes for a binary isotropic power-law interparticle force  $F(r) \sim 1/r^k$  in  $d$  space dimensions is shown in a diagram Fig. 1. We have organized the different cases along two axes. On the

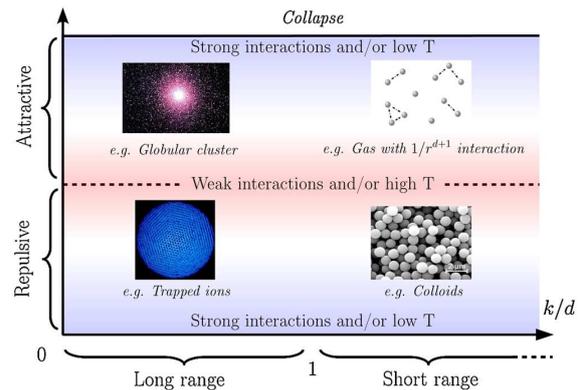


FIG. 1 (color online). Diagram of the different regimes for the breathing mode. On the horizontal axis, the interaction range, measured by  $k/d$ . The interaction strength is changing along the vertical axis. Pictures of some physical examples are inserted for illustration.

horizontal axis we represent the interaction range, which we will call long range if  $k/d \leq 1$  and short range otherwise. The case  $k/d \leq 1$  corresponds to nonintegrable forces at large distances [16]. The vertical axis represents the interaction strength with respect to the thermal energy.

In this Letter, we present a theory of the breathing mode of systems of classical trapped interacting particles which classifies many cases studied in the references cited above in a common framework. The theory is valid both for short-range and long-range interactions, for any dimension, and for various interaction strengths. However, for short-range attractive interactions strong instabilities due to the unregularized short-range singularity are expected, and for strongly attractive long-range interacting systems, a gravitational-like collapse sets in. We did not verify to what extent our model may capture relevant features in these situations. Our theory describes both linear as well as nonlinear oscillations, and isolated systems as well as systems in contact with a thermal bath.

We consider a system of particles confined by a harmonic spherical trapping force  $\mathbf{F}_{\text{trap}}(\mathbf{r}) = -\omega_0^2 \mathbf{r}$ , with binary interaction forces  $\mathbf{F}_{\text{int}}$ . In the canonical setting, particles are subjected to a positive constant friction  $k$  and diffusion  $D$ . In the microcanonical setting,  $k = 0$ ,  $D = 0$ , and the dynamics is Hamiltonian. To overcome the limitations in the validity of the Vlasov equation, we describe the cloud of particles by its one-particle and two-particles distribution functions  $f(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, t)$  and  $g(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2, t)$ . We start from the first equation of the Bogolyubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon (BBGKY) hierarchy, which we complement by a Fokker-Planck operator [18] to include the temperature in the canonical case:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{v}f) + \mathbf{F}_{\text{trap}} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f + C[g] = D\Delta_{\mathbf{v}} f + k\nabla_{\mathbf{v}} \cdot (\mathbf{v}f), \quad (1)$$

where  $C[g]$  is the interaction term given by

$$C[g](\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, t) = \int \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}_1} g(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r}d\mathbf{v}. \quad (2)$$

We stress that Eq. (1), in contrast with the Vlasov equation, can also describe strongly correlated systems. We assume in the following the existence of a stationary state  $f_0$  and  $g_0$ , not necessarily the thermodynamic equilibrium [17]. We now drastically simplify the dynamics by using a scaling ansatz [1–3], which we extend here to the two-particles function  $g$ :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, t) &= f_0(\varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1)) \\ g(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2, t) &= g_0(\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2)), \end{aligned} \quad (3)$$

with  $\varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1) = (\mathbf{R}_1 = \mathbf{r}_1/\lambda, \mathbf{V}_1 = \lambda\mathbf{v}_1 - \dot{\lambda}\mathbf{r}_1)$  and  $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2) = (\varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1), \varphi(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2))$ .  $\lambda$  represents the dilatation of the cloud; the choice  $\mathbf{R}_1 = \mathbf{r}_1/\lambda$  imposes

the ansatz on velocities for consistency. All time dependence in the dynamics is now included in the positive parameter  $\lambda$ . Introducing Eq. (3) into Eq. (1) leads to

$$\sum_{i=1}^d \left\{ \frac{V_i}{\lambda^2} \frac{\partial f_0}{\partial R_i} - R_i \lambda \frac{\partial f_0}{\partial V_i} (\ddot{\lambda} + \omega_0^2 \lambda) - \kappa \frac{\partial(V_i f_0)}{\partial V_i} - \kappa \lambda \dot{\lambda} R_i \frac{\partial f_0}{\partial V_i} - D \lambda^2 \frac{\partial^2 f_0}{\partial V_i^2} \right\} + C[g_0 \circ \psi](\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, t) = 0, \quad (4)$$

where the difficulty is to deal with the interaction term. We now assume that the two-body interaction satisfies

$$\mathbf{F}_{\text{int}}(\lambda \mathbf{r}_1, \lambda \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\lambda^k} \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \quad (5)$$

as, for example, a pure power law. The important step is to replace the interaction term  $C[g_0 \circ \psi](\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, t)$  by a linear combination of  $f_0$  and its derivatives. This is achieved using the condition (5) and the fact that  $f_0$  and  $g_0$  are stationary solutions of Eq. (1). Equation (4) becomes

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d \left\{ V_i \frac{\partial f_0}{\partial R_i} \left( \frac{1}{\lambda^2} - \lambda^{1-k} \right) + D \frac{\partial^2 f_0}{\partial V_i^2} (\lambda^{1-k} - \lambda^2) \right. \\ \left. - R_i \frac{\partial f_0}{\partial V_i} [\lambda(\ddot{\lambda} + \omega_0^2 \lambda) - \lambda^{1-k} \omega_0^2 + \kappa \lambda \dot{\lambda}] \right. \\ \left. + \kappa \frac{\partial V_i f_0}{\partial V_i} (\lambda^{1-k} - 1) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Multiplying the previous equation by  $R_j V_j / N$ , and integrating over  $d\mathbf{R}d\mathbf{V}$ , we obtain a constraint on the parameter  $\lambda$ :

$$\ddot{\lambda} + \kappa \dot{\lambda} + \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^k} \right) \omega_0^2 - \left( \frac{1}{\lambda^3} - \frac{1}{\lambda^k} \right) \frac{\langle V_j^2 \rangle_{f_0}}{\langle R_j^2 \rangle_{f_0}} = 0, \quad (7)$$

where  $j$  is a coordinate label, and we have set  $\langle \mathcal{X} \rangle_f = \frac{1}{N} \times \int \mathcal{X}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r}d\mathbf{v}$ . In the dynamical equation for  $\lambda$  [Eq. (7)], all parameters are computed as averages over the stationary distribution  $f_0$ . For Eq. (7) to be a unique equation, it is necessary that the ratio  $\langle V_j^2 \rangle_{f_0} / \langle R_j^2 \rangle_{f_0}$  does not depend on  $j$ , which is true if the trap and interactions are isotropic.

We introduce the dimensionless parameter  $p = \langle V_j^2 \rangle_{f_0} / (\omega_0^2 \langle R_j^2 \rangle_{f_0}) \sim k_B T / E_{\text{trap}}$ , where  $k_B T$  is the thermal energy and  $E_{\text{trap}}$  the typical potential energy due to the trap. At the canonical equilibrium,  $\langle V_j^2 \rangle_{f_0} = \omega_0^2 L^2$ , where  $L$  is the typical size of the system without interaction. The parameter  $p = L^2 / \langle R_j^2 \rangle_{f_0}$  thus describes change of the square of the size of the trap due to the interactions. The range  $p < 1$  ( $p > 1$ ) corresponds to a repulsive (attractive) interaction. A value of the parameter  $p \sim 1$  means high temperature or negligible interactions. The limits  $p \rightarrow 0$  and  $p \rightarrow +\infty$  correspond to zero temperature or strong repulsive and attractive interaction. We can now rewrite Eq. (7) as  $\ddot{\lambda} + \kappa \dot{\lambda} + \phi'(\lambda) = 0$ , which corresponds to the

equation of a damped anharmonic oscillator in the potential  $\phi$ :

$$\phi(\lambda) = \begin{cases} \omega_0^2 \left( \frac{1}{2} \lambda^2 + \frac{1}{2} \frac{p}{\lambda^2} + \frac{p-1}{1-k} \lambda^{1-k} \right) & \text{if } k \neq 1 \\ \omega_0^2 \left( \frac{1}{2} \lambda^2 + \frac{1}{2} \frac{p}{\lambda^2} + (p-1) \log \lambda \right) & \text{if } k = 1. \end{cases} \quad (8)$$

The first term in Eq. (8) is the quadratic confining potential, the second one corresponds to a pressure term, and the last one is introduced by the two-body interaction. We stress that Eq. (8) does not explicitly depend on  $d$ . For repulsive interactions ( $p < 1$ ),  $\phi$  is strictly convex for all  $k \geq 0$ . It diverges as  $\lambda^{-2}$  when  $\lambda \rightarrow 0$  and as  $\omega_0^2 \lambda^2 / 2$  when  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Its unique minimum is  $\lambda = 1$ . The  $\lambda^{-2}$  divergence at small  $\lambda$  is due to pressure effects for very compressed clouds, and thus does not depend on the interaction. It yields a generic shape for the breathing oscillations in the nonlinear regime. For attractive interactions ( $p > 1$ ), if  $0 \leq k \leq 3$ ,  $\phi$  has exactly the same qualitative properties as in the repulsive case. For  $k > 3$ ,  $\phi$  tends to  $-\infty$  when  $\lambda$  goes to zero, indicating a possible collapse of the cloud. However, due to numerical difficulties, we have not tested this prediction.

From Eq. (8), we obtain the general expression of the breathing oscillation frequency in the small friction limit, as a function of the interaction range  $k$  and the interaction strength  $p$ :

$$\omega(k, p) = \omega_0 [(3-k)(p-1) + 4]^{1/2}. \quad (9)$$

This expression recovers the well-known limits  $\omega = 2\omega_0$  for a noninteracting gas ( $p = 1$ ) and  $\omega = \sqrt{3}\omega_0$  for a strongly interacting Coulomb plasma ( $p = 0, k = 2$ ) [19]. It provides a generalization to the whole  $(k, p)$  plane shown in Fig. 2 and is independent of the dimension. We note that in 3D, the breathing frequency is a decreasing (increasing) function of the interaction strength for repulsive long- (short-)range interactions.

We can now compare the general Eq. (7) to the results found in the literature for various specific situations. Oscillations of crystallized systems [9,10,12,15] correspond to negligible pressure effects; i.e.,  $p = 0$  and the

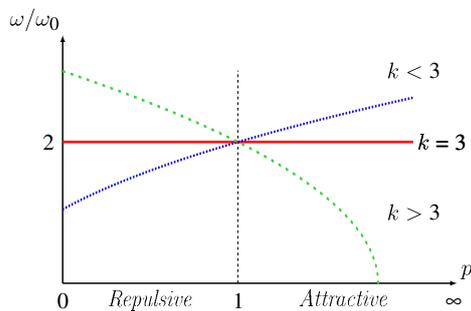


FIG. 2 (color online). Frequency of the linearized breathing mode as a function of the interaction strength  $p$ , for different values of interaction range  $k$ .

$\lambda^{-3}$  term is absent. In [6], the authors consider a 1D plasma ( $k = 0$ ) with  $p$  not too small, and introduce a pressure yielding the  $\lambda^{-3}$  term, which leads to the exact equivalent of Eq. (7). Note that Eq. (7) also contains the case of a classical gas with “mean field” interactions [1]. This work considers a Dirac  $\delta$  potential, which corresponds to an interaction index  $k = d + 1$ . This result emphasizes that the present theory is not only valid for power-law forces.

In order to test the domain of validity of the ansatz solution, we have performed numerical simulations varying the force index  $k$ , parameter  $p$ , and amplitude of initial perturbation, in two and three dimensions, with (canonical ensemble) or without (microcanonical ensemble) a thermostat. We simulate the system using a molecular dynamics approach with  $N = 4000$  particles. The integrator scheme is a Verlet-leapfrog algorithm [20]. The forces are exactly computed at each time step. As strong short-range singularities for parameters in the upper right corner of Fig. 1 create numerical difficulties, we have not tested the theory in this region. The computer simulations are performed as follows: we first equilibrate the system in a stationary state  $f_0$ . Then, at  $t = 0$ , we introduce a perturbation by rescaling the positions and velocities according to Eq. (3) and we let the system evolve. A similar simulation of a 1D Coulomb system in the microcanonical ensemble has been performed in [6]. The results of our extensive simulations may be summarized as follows. (i) Eq. (7) always picks up quite precisely the oscillation frequency, but not always the amplitude decay. (ii) For strongly repulsive interaction ( $p \rightarrow 0$ ), Eq. (7) describes very precisely the whole dynamics. (iii) For a repulsive long-range or short-range interaction and intermediate  $p$  (i.e.,  $p \sim 0.5$ ) the agreement for the oscillation amplitude is not perfect (see Fig. 3). (iv) For attractive long-range interactions, the accuracy of the ansatz degrades as  $p$  increases (Fig. 4).

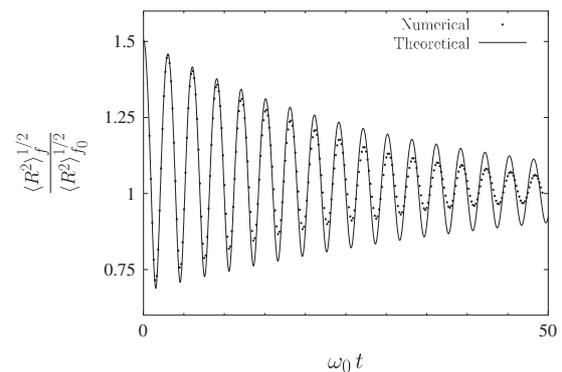


FIG. 3. Evolution of the typical size of the cloud. The space dimension is  $d = 2$ , and the interactions are repulsive. The parameters are  $k = 4$  (short-range interaction),  $\omega_0/\kappa = 17.8$  and  $p = 0.63$ .

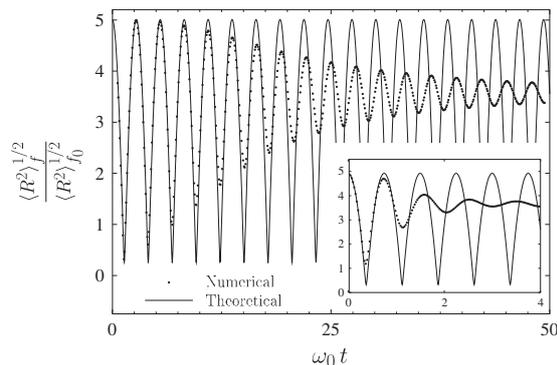


FIG. 4. Evolution of the typical size of the cloud in one of the few negative cases. The space dimension is  $d = 3$ , and the interactions are attractive. The parameters are  $k = 0$  (long-range interaction),  $\omega_0 = 17.8$ ,  $\kappa = 0$  (microcanonical ensemble), and  $p = 2.2$ . Inset: Same parameters, except  $p = 70$ .

To explain these results, we first stress that in the limit  $p \rightarrow 0$ , Eq. (7) is *exact*. In this case, it may indeed be derived directly from Newton equations, as done in [15] in the linear approximation. The correct generalization for an arbitrary perturbation amplitude is given by Eq. (7). For intermediate  $p$ , we attribute the discrepancy between the predicted and simulated oscillation amplitudes to effects that are not taken into account in the simple dynamical ansatz (3), and thus limit the validity of Eq. (7). Indeed, for long-range interactions, one would expect collective effects (Landau damping, phase mixing, etc.) to play a role in the oscillation decay (beyond the friction  $\kappa$ ), which are neglected in the ansatz. Similarly, for short-range interactions, two-body collisions should be important. This explanation is supported by the frictionless microcanonical simulations: when there is no amplitude decay in the microcanonical ensemble, which means that phase mixing and two-body collisions are negligible, Eq. (7) correctly predicts the breathing frequency and amplitude, with or without friction. Conversely, amplitude decay or modulation in the microcanonical ensemble is associated with discrepancies between theory and simulations.

In summary, starting from the first equation of the BBGKY hierarchy and a scaling ansatz for the dynamics, we have derived a nonlinear equation describing the breathing oscillations of trapped particles interacting via forces satisfying (5). The derivation and equation are valid independently of the temperature, interaction strength, interaction range, and dimensionality of the physical space, and it is successfully compared to direct numerical simulations. The main limitation is due to phase mixing phenomena for long-range interacting systems and two-body collisions in short-range interacting ones, especially for weak repulsive and attractive interactions, where they introduce damping and loss of coherence, unaccounted for in the scaling ansatz. We have concentrated on power-law

interactions, but condition (5) for the force is more general. It includes, for instance, Dirac and dipolar potentials, and some nonpotential forces such as the attenuation force in magneto-optical traps [21]; the ansatz should be useful in such cases. Beyond the breathing mode, a generic study of quadrupolar modes would be very desirable, as harmonic traps are often anisotropic in experimental situations. This is not possible with the scaling ansatz, except in special cases. Even though no real breathing mode [15] exists when interactions are not power law, a generalization of this mode may exist. Following the lines of this Letter, and applying methods used in [8], a more general approach should be possible.

\*olivetti@unice.fr

- [1] D. Guéry-Odelin, Phys. Rev. A **66**, 033613 (2002).
- [2] Y. Castin and R. Dum, Phys. Rev. Lett. **77**, 5315 (1996).
- [3] Yu. Kagan, E. L. Surkov, and G. V. Shlyapnikov, Phys. Rev. A **55**, R18 (1997).
- [4] D. H. E. Dubin, Phys. Rev. Lett. **66**, 2076 (1991).
- [5] D. H. E. Dubin, Phys. Fluids B **5**, 295 (1993).
- [6] Sh. Amiranashvili, M. Y. Yu, and L. Stenflo, Phys. Rev. E **67**, 016408 (2003).
- [7] T. E. Sheridan, C. R. Buckley, D. J. Cox, R. J. Merrill, and W. L. Theisen, Phys. Lett. A **329**, 88 (2004).
- [8] T. E. Sheridan, Phys. Plasmas **11**, 5520 (2004).
- [9] D. F. V. James, Appl. Phys. B **66**, 181 (1998).
- [10] S. A. Tatarikova, A. E. Carruthers, and K. Dholakia, Phys. Rev. Lett. **89**, 283901 (2002).
- [11] V. A. Schweigert and F. M. Peeters, Phys. Rev. B **51**, 7700 (1995).
- [12] B. Partoens and F. M. Peeters, Condens. Matter Phys. **9**, 5383 (1997).
- [13] S. W. S. Apolinario, B. Partoens, and F. M. Peeters, New J. Phys. **9**, 283 (2007).
- [14] S. Chandrasekhar and D. D. Elbert, Mon. Not. R. Astron. Soc. **155**, 435 (1972).
- [15] C. Henning, K. Fujioka, P. Ludwig, A. Piel, A. Melzer, and M. Bonitz, Phys. Rev. Lett. **101**, 045002 (2008).
- [16] The boundary between long and short range for equilibrium statistical properties is  $(k - 1)/d = 1$ , which corresponds to the integrability limit of the interaction potential [17]. For dynamical properties, it seems preferable to use the present definition.
- [17] *Dynamics and Thermodynamics of Systems with Long Range Interactions*, edited by T. Dauxois, S. Ruffo, E. Arimondo, and M. Wilkens, Lecture Notes in Physics Vol. 602 (Springer, Berlin, 2002).
- [18] T. D. Frank, *Nonlinear Fokker-Planck Equations: Fundamentals and Applications* (Springer-Verlag, Berlin, 2005).
- [19] D. H. E. Dubin and T. M. O'Neil, Rev. Mod. Phys. **71**, 87 (1999).
- [20] M. P. Allen and D. J. Tildesley, *Computer Simulation of Liquids* (Clarendon, Oxford, 1987).
- [21] T. Walker, D. Sesko, and C. Wieman, Phys. Rev. Lett. **64**, 408 (1990).

5.2 “*Breathing Dynamics for Systems of Interacting Particles in the Microcanonical and Canonical Descriptions*” [OBM<sup>+</sup>11]

---

Transport Theory and Statistical Physics, 39:524–551, 2010  
 Copyright © Taylor & Francis Group, LLC  
 ISSN: 0041-1450 print / 1532-2424 online  
 DOI: 10.1080/00411450.2011.567857



## BREATHING DYNAMICS FOR SYSTEMS OF INTERACTING PARTICLES IN THE MICROCANONICAL AND CANONICAL DESCRIPTIONS

ALAIN OLIVETTI,<sup>1</sup> JULIEN BARRÉ,<sup>1</sup> BRUNO MARCOS,<sup>1</sup>  
 FREDDY BOUCHET,<sup>2</sup> and ROBIN KAISER<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire J.A. Dieudonné, UMR CNRS 6621, Université de Nice-Sophia  
 Antipolis, Parc Valrose, F-06108 Nice Cedex 02, France

<sup>2</sup>Laboratoire de Physique, ENS de Lyon, CNRS, Université de Lyon, 46 allée  
 d'Italie, 69364 Lyon cedex 07, France

<sup>3</sup>Institut Non-Linéaire de Nice, UMR CNRS 6618, Université de Nice-Sophia  
 Antipolis, France

*By means of a dynamical ansatz, we study the breathing dynamics in systems of trapped interacting particles in a unified context, including a wide range of power law interactions and interaction strengths, at linear and nonlinear levels. We present detailed numerical tests of the general theory, and, motivated by Magneto-Optical Traps modeling, we extend it to the case of space-dependent friction and diffusion.*

### 1. Introduction

Low-lying oscillatory modes are a natural object of study for systems of trapped interacting particles; they are an important tool to understand and characterize the collective effects. As such, they have been studied in many different areas of physics: confined plasmas, trapped cold atoms, Bose-Einstein condensates, colloidal particles, trapped ions, and astrophysical systems—the latter ones being self-confined by the interactions. These systems feature a wide variety of interactions: weak or strong, long or short range.

---

This work is supported by the ANR-09-JCJC-009401 INTERLOP project.

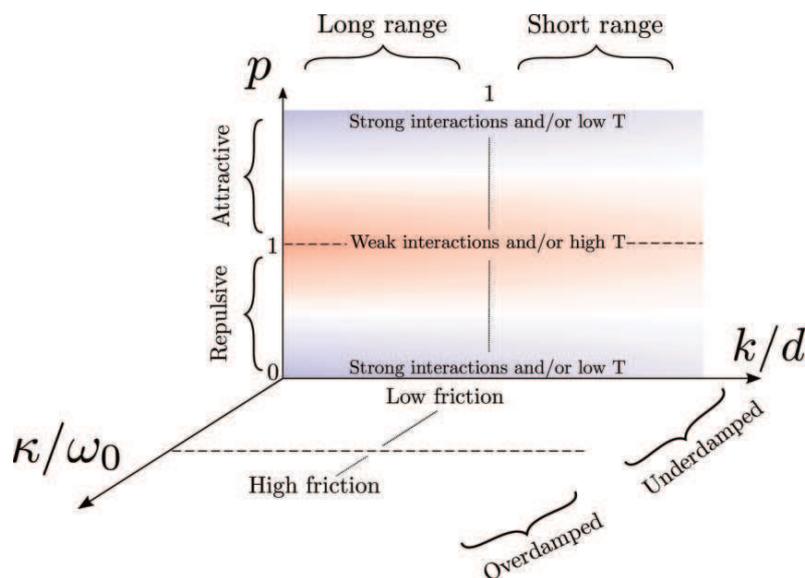
Address correspondence to Alain Olivetti, Laboratoire J. A. Dieudonné, UMR CNRS 6621, Université de Nice-Sophia Antipolis, Parc Valrose, F-06108 Nice Cedex 02, France.  
 E-mail: alain.olivetti@unice.fr

524

In this article we will be concerned with the simplest nontrivial oscillatory mode for systems of trapped interacting particles in  $d$  dimensions: the breathing mode (Olivetti et al., 2009). It has been tackled in the literature using many different techniques, which we try to partially summarize here:

- A scaling ansatz to approximate the nonlinear dynamics of the Boltzmann-Vlasov equation for a classical gas is used in Guéry-Odelin (2002); this idea was introduced earlier in the context of the Gross-Pitaevskii equation (Castin and Dum, 1996; Kagan et al., 1997).
- In the confined plasma context, the problem is often studied through hydrodynamical equations, in the so-called cold fluid approximation (Dubin, 1991), where the dispersion relation for fluid modes in a cold spheroidal plasma is derived.
- Following an idea of Dubin (1993), Amiranashvili et al. (2003) give an approximate solution to the breathing mode of a  $d = 1$  confined plasma beyond the cold fluid approximation, using an *ad hoc* closure of the hydrodynamical equations.
- Linearization of the Newtonian equations of motion around an equilibrium configuration and direct diagonalization have been used to study trapped ions or colloids interacting a Coulomb or Yukawa potential in  $d = 1$  (James, 1998; Tatarkova et al., 2002),  $d = 2$  (Schweigert and Peeters, 1995; Partoens and Peeters, 1997), and  $d = 3$  (Apolinario and Peeters, 2007). It has been generalized recently in (Henning et al., 2008) to a whole class of potentials. However, this technique is a priori restricted to the zero temperature limit and small perturbations.
- Monopole modes of dusty plasmas interacting with a Yukawa potential are investigated in Sheridan and colleagues (Sheridan, 2004; Sheridan et al., 2004), using a kind of mean-field approximation.
- Breathing oscillations with attractive interactions have been studied in an astrophysical context using the Virial theorem (Chandrasekhar and Elbert, 1972).

Each method applies to a specific situation: Newton equations are adapted to a crystallized state with negligible thermal fluctuations, linearization assumes a small amplitude of oscillations, and the Vlasov equation is limited to weak correlations. Yet in all cases a



**FIGURE 1** (color online). Diagram of the different regimes for the breathing dynamics. On the horizontal axis, the interaction range, measured by  $k/d$ . The interaction strength is changing along the vertical axis. The third axis represents the friction normalized by the trap frequency  $\kappa/\omega_0$ .

similar equation for the breathing mode is obtained. In Olivetti and colleagues (2009), we introduced a theory based on an extension of the scaling ansatz technique, which classifies many of the previous examples in a common framework. In compensation this theory is mainly (but not entirely) limited to power law interactions and does not give access to more complicated modes beyond the monopole one. Figure 1 summarizes the different regimes we will study in this article, assuming a binary isotropic power-law interparticle force  $F(r) \sim 1/r^k$  in  $d$  space dimensions. On the horizontal axis is the interaction range, which we will call long-range if  $k/d \leq 1$  and short range otherwise. The case  $k/d \leq 1$  corresponds to nonintegrable forces at large distances.<sup>1</sup> The vertical axis represents the interaction strength with respect to the thermal energy. The third axis represents the friction, normalized by the trap frequency.

In this article our goals are: (i) to present extensive numerical tests of the theory developed in Olivetti and coauthors (2009),

<sup>1</sup>The boundary between long and short range for equilibrium statistical properties is  $(k-1)/d = 1$ , which corresponds to the integrability limit of the interaction potential (Dauxois et al., 2002). For dynamical properties, it seems preferable to use the present definition.

investigating in particular its limits when the friction is increased; (ii) motivated by magneto-optical traps modeling (Labeyrie et al., 2006), to extend it to the case of space-dependent friction and diffusion; and (iii) to test this extension of the theory using direct molecular dynamics simulations.

In Section 2, we first review in detail the theory already presented in Olivetti and colleagues (2009), in a frictionless context, and provide comparisons with direct numerical simulations. In Section 3, we introduce some friction and diffusion and show that the equation for the breathing dynamics obtained with the ansatz method is exactly valid in the zero temperature limit, for all friction strength, for repulsive interactions. We then extensively test this equation against direct molecular dynamics simulations, to investigate its domain of validity. In Section 4, we extend the equation for the breathing dynamics to space-dependent friction and diffusion and test our results.

## 2. Breathing Oscillations Without Friction and Diffusion

### 2.1. Vlasov Equation

We consider a system of particles confined by an harmonic spherical trapping force  $\mathbf{F}_{trap}(\mathbf{r}) = -\omega_0^2 \mathbf{r}$ , interacting with binary long range interaction forces  $\mathbf{F}_{bin}$ . Let us first assume that correlations between particles are weak; we can then use the Vlasov equation to model the system in the continuum limit. In this section, we assume that the system is Hamiltonian.

Using the one-particle distribution  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ , the Vlasov equation reads:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{v} f) + \mathbf{F}_{trap} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f + \mathbf{F}_{int}[f] \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0, \quad (1)$$

where  $\mathbf{F}_{int}[f]$  is the interaction term given by:

$$\mathbf{F}_{int}[f](\mathbf{r}) = \int \mathbf{F}_{bin}(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}}) f(\tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{v}, t) d\tilde{\mathbf{r}} d\mathbf{v}. \quad (2)$$

We consider  $f_0$ , a stationary state solution of Eq. (1). If  $\mathbf{F}_{bin} = -\nabla_{\mathbf{r}} V_{bin}$  is a potential force, then  $\mathbf{F}_{int}[f] = -\nabla_{\mathbf{r}} V_{int}[f]$  is also

potential, and a natural choice for  $f_0$  is the statistical equilibrium, parametrized by the inverse temperature  $\beta$ . This statistical equilibrium is implicitly defined by the equation

$$f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \propto e^{-\beta \mathbf{v}^2/2} e^{-\beta V_{int}[f_0](\mathbf{r})} e^{-\beta \omega_0^2 \mathbf{r}^2/2}. \quad (3)$$

Such an equilibrium does not always exist when the interaction is attractive. We will consider this statistical equilibrium for  $f_0$  in this subsection, unless explicitly stated. We also assume that  $f_0$  is isotropic in positions.

We now drastically simplify the dynamics by using a scaling ansatz (Guéry-Odelin, 2002; Castin and Dum, 1996; Kagan et al., 1997):

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_0(\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v})), \quad (4)$$

with

$$\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = (\mathbf{R} = \mathbf{r}/\lambda, \mathbf{V} = \lambda \mathbf{v} - \dot{\lambda} \mathbf{r}). \quad (5)$$

With this hypothesis all the time dependence in the dynamics is now included in the positive parameter  $\lambda$ . This ansatz is tailored to capture the radial dynamics; thus, we will not be able to look at higher order modes of the system, like quadrupole modes.

We justify the ansatz as follows. We assume that the spatial dynamics can be described with the simple scaling ansatz

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}}{\lambda(t)}. \quad (6)$$

In the Hamiltonian description, we require the conservation of the phase space volume, *i.e.*,  $d\mathbf{r}d\mathbf{v} = d\mathbf{R}d\mathbf{V}$ . This implies that

$$\mathbf{V} = \lambda(t)\mathbf{v} + \mathbf{h}(\mathbf{r}, t), \quad (7)$$

where  $\mathbf{h}$  is an arbitrary function of  $\mathbf{r}$  and  $t$ . Integrating the Vlasov equation over the velocity variable, we obtain the continuity

equation

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \frac{\partial (\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rho(\mathbf{r}, t))}{\partial \mathbf{r}} = 0, \quad (8)$$

where the space density  $\rho$  and the velocity  $\mathbf{u}$  are defined by

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{r}, t) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}, \\ \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \end{cases} \quad (9)$$

Calling  $\rho_0(\mathbf{r})$  the stationary solution for the density  $\rho(\mathbf{r}, t)$ , and injecting the scaling ansatz inside Eq. (8), we have:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{\lambda^d} \rho_0 \left( \frac{\mathbf{r}}{\lambda} \right) \right] + \frac{1}{\lambda^{d+1}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left[ \rho_0 \left( \frac{\mathbf{r}}{\lambda} \right) \mathbf{u} \left( \frac{\mathbf{r}}{\lambda}, t \right) \right] \\ - \frac{1}{\lambda^{d+1}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left[ \mathbf{h}(\mathbf{r}, t) \rho_0 \left( \frac{\mathbf{r}}{\lambda} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Assuming that  $f_0$  is even with respect to its velocity variables (which is the case for (3)), the second term of Eq. (10) vanishes. Looking for a condition over  $\mathbf{h}$ , which separately cancels the terms containing  $\rho_0$  and  $\partial_{\mathbf{r}} \rho_0$ , we finally obtain

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}, t) = -\dot{\lambda}(t) \mathbf{r}. \quad (11)$$

Combining Eq. (6), (7), and (11) leads to the scaling ansatz (4).

After given this justification of the scaling ansatz (4), let us now insert it into Eq. (1). This leads to:

$$\sum_{i=1}^d \left\{ \frac{V_i}{\lambda^2} \frac{\partial f_0}{\partial R_i} - R_i \lambda \frac{\partial f_0}{\partial V_i} (\ddot{\lambda} + \omega_0^2 \lambda) + \lambda \mathbf{F}_{int}[f_0 \circ \varphi](\mathbf{r}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_0 \right\} = 0. \quad (12)$$

We now assume that the binary interaction is homogeneous with degree  $-k$  (we use here and in the following the word

“homogeneous” in its mathematical sense):

$$\mathbf{F}_{bin}(\lambda \mathbf{r}, \lambda \tilde{\mathbf{r}}) = \frac{1}{\lambda^k} \mathbf{F}_{bin}(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}}). \quad (13)$$

The previous relation eliminates the function  $\varphi$  in the interaction term:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{int}[f_0 \circ \varphi](\mathbf{r}) &= \int \mathbf{F}_{bin}(\mathbf{r}, \lambda \tilde{\mathbf{r}}) f_0(\tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{v}) d\tilde{\mathbf{r}} d\mathbf{v} \\ &= \frac{1}{\lambda^k} \int \mathbf{F}_{bin}(\mathbf{R}, \tilde{\mathbf{r}}) f_0(\tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{v}) d\tilde{\mathbf{r}} d\mathbf{v} \\ &= \frac{1}{\lambda^k} \mathbf{F}_{int}[f_0](\mathbf{R}). \end{aligned} \quad (14)$$

Finally, using Eq. (14) and the fact that  $f_0$  is a stationary solution of Eq. (1), one can substitute the interaction term by a linear combination of  $f_0$  and its derivatives. Equation (12) becomes

$$\sum_{i=1}^d V_i \frac{\partial f_0}{\partial R_i} \left( \frac{1}{\lambda^2} - \lambda^{1-k} \right) - R_i \frac{\partial f_0}{\partial V_i} \left[ \lambda (\ddot{\lambda} + \omega_0^2 \lambda) - \lambda^{1-k} \omega_0^2 \right] = 0. \quad (15)$$

Multiplying it by  $R_j V_j / N$  and integrating over  $d\mathbf{R} d\mathbf{V}$  leads to a constraint on the parameter  $\lambda$ :

$$\ddot{\lambda} + \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^k} \right) \omega_0^2 - \left( \frac{1}{\lambda^3} - \frac{1}{\lambda^k} \right) \frac{\langle V_j^2 \rangle_{f_0}}{\langle R_j^2 \rangle_{f_0}} = 0, \quad (16)$$

where  $j$  is a coordinate label, and we have set

$$\langle \chi \rangle_f = \frac{1}{N} \int \chi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v}. \quad (17)$$

In the dynamical equation for  $\lambda$  (16), all parameters are computed as averages over the stationary distribution  $f_0$ . Since  $f_0$  is isotropic in positions and velocities,  $\langle V_j^2 \rangle_{f_0}$  and  $\langle R_j^2 \rangle_{f_0}$  do not depend on  $j$ : Eq. (16) is the same for the  $d$  coordinates.

Taking higher order moments of Eq. (15) would produce different equations for  $\lambda$ , implying that the only solution is the trivial one  $\lambda = 1$ . This is a consequence of the fact that the ansatz does

not contain any nontrivial exact solution of the Vlasov equation. One may hope however that Eq. (16) satisfactorily describes the breathing dynamics over short times: this will be tested in numerical simulations.

A dimensionless parameter appears naturally in Eq. (16), which we define as

$$p = \frac{\langle V_j^2 \rangle_{f_0}}{\omega_0^2 \langle R_j^2 \rangle_{f_0}}. \quad (18)$$

When  $f_0$  is given by (3), it can be interpreted as the ratio between the thermal energy  $k_B T$  and the typical potential energy due to the trap  $E_{trap} \sim \omega_0^2 \langle R^2 \rangle_{f_0}$ :

$$p \sim \frac{k_B T}{E_{trap}}. \quad (19)$$

Using (3) for a system with and without interactions ( $V_{int} = 0$ ), at the same temperature, we have

$$\langle V_j^2 \rangle_{f_0, V_{int}=0} = \langle V_j^2 \rangle_{f_0} = \omega_0^2 \langle R_j^2 \rangle_{f_0, V_{int}=0},$$

which implies

$$p = \frac{\langle R_j^2 \rangle_{f_0, V_{int}=0}}{\langle R_j^2 \rangle_{f_0}}.$$

We can summarize this:

- $0 < p < 1$  corresponds to repulsive interactions, with  $p \ll 1$  the strong interaction regime.
- If  $p \sim 1$ , the system is weakly interacting.
- For  $p > 1$ , the interaction is attractive, and  $p \gg 1$  corresponds to the strong interaction regime.

We now write (16) as

$$\ddot{\lambda} + \left( \lambda - \frac{p}{\lambda^3} + \frac{p-1}{\lambda^k} \right) \omega_0^2 = 0. \quad (20)$$

## 2.2. Extension of the Ansatz

In the previous subsection, we started from the Vlasov equation. In order to take into account correlations between particles (and thus describe also short-range interacting systems) we start now from the first equation of the Bogolyubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon (BBGKY) hierarchy:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{v} f) + \mathbf{F}_{trap} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f + C[g] = 0, \quad (21)$$

where  $C[g]$  is the interaction term which is given now by:

$$C[g](\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, t) = \int \mathbf{F}_{bin}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}_1} g(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v} \quad (22)$$

and  $g(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  the two-particles distribution. We stress that Eq. (21), in contrast with the Vlasov equation, can also describe the dynamics of strongly correlated systems and also short-range interacting systems. Note that Eq. (21) is strictly equivalent to the Hamiltonian equation because we have not yet done any hypothesis on the unknown function  $g$ . We assume the existence of a stationary state  $f_0$  and  $g_0$ , for instance the statistical equilibrium, and perform the closure using the previous scaling ansatz (4), extended to the two-particles function  $g$ , as done in Olivetti and colleagues (2009):

$$\begin{cases} f(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, t) = f_0(\varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1)) \\ g(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2, t) = g_0(\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2)) \end{cases} \quad (23)$$

with

$$\begin{cases} \varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1) = (\mathbf{R}_1 = \mathbf{r}_1/\lambda, \mathbf{V}_1 = \lambda\mathbf{v}_1 - \dot{\lambda}\mathbf{r}_1) \\ \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2) = (\varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1), \varphi(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2)). \end{cases} \quad (24)$$

Once again, the positive parameter  $\lambda$  contains all the time dependence of the dynamics. The computations are similar to those in Subsection 2.1. Introducing the ansatz in Eq. (21) yields:

$$\sum_{i=1}^d \left\{ \frac{V_i}{\lambda^2} \frac{\partial f_0}{\partial R_i} - R_i \lambda \frac{\partial f_0}{\partial V_i} (\ddot{\lambda} + \omega_0^2 \lambda) + C[g_0 \circ \psi](\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, t) \right\} = 0. \quad (25)$$

The homogeneity of the binary forces (see Eq.(13)) allows us to simplify the interaction term:

$$\begin{aligned} C[g_0 \circ \psi](\mathbf{r}, \mathbf{v}) &= \int \mathbf{F}_{bin}(\lambda\mathbf{R}, \lambda\mathbf{S}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} [g_0(\mathbf{R}, \mathbf{V}, \mathbf{S}, \mathbf{W})] d\mathbf{S}d\mathbf{W} \\ &= \lambda \int \mathbf{F}_{bin}(\lambda\mathbf{R}, \lambda\mathbf{S}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} g_0(\mathbf{R}, \mathbf{V}, \mathbf{S}, \mathbf{W}) d\mathbf{S}d\mathbf{W} \\ &= \lambda^{1-k} C[g_0](\mathbf{R}, \mathbf{V}). \end{aligned} \quad (26)$$

We now multiply by  $R_j V_j / N$  and integrate over  $d\mathbf{R}d\mathbf{V}$ . Introducing, as before, the dimensionless parameter  $p$  defined in Eq. (18), we obtain the equation:

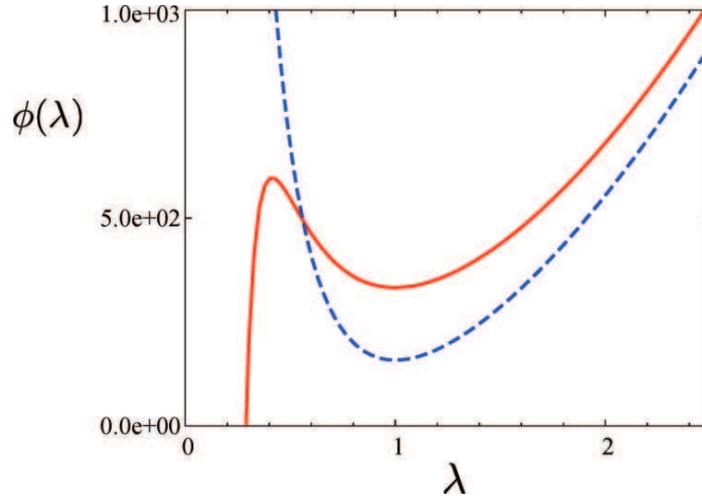
$$\ddot{\lambda} + \left( \lambda - \frac{p}{\lambda^3} + \frac{p-1}{\lambda^k} \right) \omega_0^2 = 0, \quad (27)$$

which is exactly the same as Eq. (20).

### 2.3. Analysis of the Breathing Dynamics

We can rewrite Eq. (20) as an equation of an anharmonic oscillator in the external potential  $\phi$ :

$$\ddot{\lambda} + \phi'(\lambda) = 0 \quad (28)$$



**FIGURE 2** (color online). Shape of the potential for two different cases: repulsive (dotted line) and attractive with  $k > 3$  (solid line).

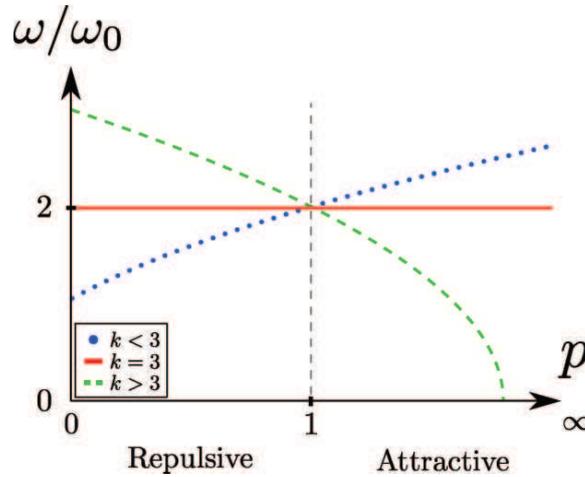
with

$$\phi(\lambda) = \begin{cases} \omega_0^2 \left( \frac{1}{2} \lambda^2 + \frac{1}{2} \frac{p}{\lambda^2} + \frac{p-1}{1-k} \lambda^{1-k} \right), & \text{if } k \neq 1, \\ \omega_0^2 \left( \frac{1}{2} \lambda^2 + \frac{1}{2} \frac{p}{\lambda^2} + (p-1) \log \lambda \right), & \text{if } k = 1. \end{cases} \quad (29)$$

The first term in Eq. (29) is the quadratic confining potential, the second one corresponds to a kinetic pressure term (which does not depend on the dimension  $d$  considered), and the last one is introduced by the two-body interaction.

The shape of the potential determines the form of the oscillations. For repulsive interactions ( $p < 1$ ), the potential is convex for all  $k$ . It diverges as  $\phi \sim \lambda^{-2}$  as  $\lambda \rightarrow 0$  and behaves as  $\phi \sim \lambda^2$  as  $\lambda \rightarrow \infty$ , which ensures that the system oscillates around its unique minimum  $\lambda = 1$ . For attractive ( $p > 1$ ) interactions and  $0 \leq k \leq 3$ , the potential presents the same properties. For attractive interactions and  $k > 3$ , the potential diverges to  $-\infty$  as  $\lambda^{1-k}$  for small  $\lambda$ . If  $p < 1 - 4/(3-k)$ ,  $\lambda = 1$  is a metastable stationary state, and there exists an unstable stationary state for  $\lambda^* < 1$ , see Figure 2. For  $p > 1 - 4/(3-k)$ ,  $\lambda = 1$  is an unstable stationary state and there is a metastable state for  $\lambda > 1$ .

From Eq. (16), we obtain the general expression of the linearized breathing oscillation frequency as a function of the



**FIGURE 3** (color online). Frequency of the linearized breathing mode as a function of the interaction strength  $p$ , for different values of interaction range  $k$ .

interaction range  $k$  and the interaction strength  $p$ :

$$\omega(k, p) = \omega_0 [(3 - k)(p - 1) + 4]^{1/2}. \quad (30)$$

This expression recovers the well-known limits  $\omega = 2\omega_0$  for a non-interacting gas ( $p = 1$ ) and  $\omega = \sqrt{3}\omega_0$  for a strongly interacting Coulomb plasma ( $p = 0, k = 2$ ) (Dubin and O’Neil, 1999). It provides a generalization to the whole  $(k, p)$  plane shown in Figure 1 and is independent of the dimension. We note that for  $k > 3$  and repulsive interactions ( $p < 1$ ), the breathing frequency is an increasing function of the interaction strength (decreasing function of  $p$ ); this corresponds in 3 dimensions to short-range interactions ( $k > d$ ). On the other hand, for  $k < 3$  it is a decreasing function of the interaction strength (increasing function of  $p$ ); this corresponds in 3 dimensions to long-range interactions ( $k < d$ ). See Figure 3 for details.

#### 2.4. Comparison with the Literature

We can now compare Eqs. (16) and (27) to the results found in the literature for various specific situations. Oscillations of crystallized systems (James, 1998; Tatarikova et al., 2002; Partoens and Peeters, 1997; Henning et al., 2008) correspond to negligible

pressure effects, *i.e.*  $p = 0$  and the  $\lambda^{-3}$  term of is absent. In Amiranashvili and colleagues (2003), the authors consider a  $d = 1$  plasma ( $k = 0$ ) with  $p$  not too small, and introduce a pressure yielding the  $\lambda^{-3}$  term, which leads to the exact equivalent of Eq. (16).

In Guéry-Odelin (2002) considered a classical gas with “mean field” interactions, given by a Dirac  $\delta$  potential. This corresponds to a homogeneity degree for the force  $-k = -d - 1$ . Equation (16) contains this case, and this emphasizes that the present theory is not only valid for power-law forces.

The Yukawa potential

$$V(\mathbf{r}) \propto \frac{\exp(-|\mathbf{r}|/L_s)}{|\mathbf{r}|}, \quad (31)$$

is not homogeneous, so our method does not work. However, both in the Coulombian limit, where the shielding length  $L_s$  is much larger than the system size, and the opposite one, where  $L_s$  is much smaller than the system size, the Yukawa potential may be approximated by a homogeneous potential, respectively a Coulomb and a Dirac  $\delta$  potential. Equation (16) then reproduces the results of Sheridan et al. (2004) and Sheridan (2004), obtained by other means.

### 2.5. Comparison with Numerical Simulations

In order to test the domain of validity of Eq. (27), we have performed several numerical simulations. We have considered different force index  $k$ , parameter  $p$ , and amplitude of initial perturbation, in one, two, and three dimensions.

We simulate the system using a molecular dynamics approach with  $N = 4000$  particles unless otherwise stated. The integrator scheme is a Verlet-leapfrog algorithm (Allen and Tildesley, 1987) in the micro-canonical ensemble. The forces are exactly computed at each time-step.

The computer simulations are performed as follows: we first equilibrate the system in a stationary state using a Langevin thermostat (see Section 3.3). Then, at  $t = 0$ , we introduce a perturbation by rescaling the positions and velocities according to Eqs. (4) and (5), and we let the system evolve. A similar simulation of

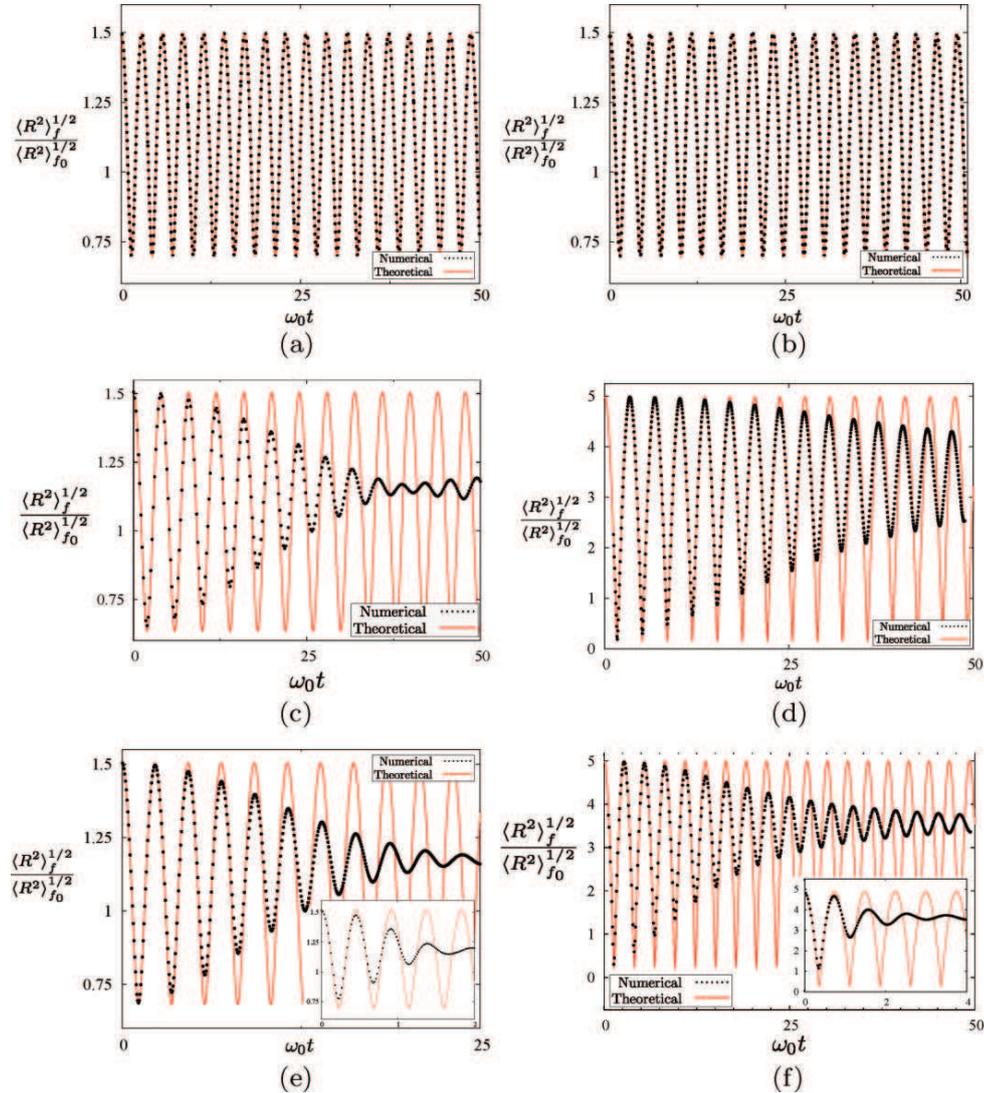
a  $d = 1$  Coulomb system has been performed in Amiranashvili and colleagues (2003), corresponding to cases with  $k/d = 0$  and  $p < 1$ . In the following we present the results of the simulations and a comparison with the theory developed here. We have studied most of the possible combinations between (i) repulsive or attractive interactions, (ii) short or long range interactions, (iii) weak or strong interactions, and (iv) small or large amplitudes oscillations. Figure 4 shows some of our numerical tests, which we describe in the following:

- We have extensively studied the case in which the interaction is repulsive. The results are the following, classified according to the interaction strength: for *strong interactions* ( $p \ll 1$ ) the ansatz describes very well both the amplitude and frequency of oscillation, for all the cases considered, and that for many oscillations. This is because the ansatz is *exact* in the limit  $p \rightarrow 0$ , as we will show in Subsection 3.1. We include two examples (Figures 4(a) with a very small  $p$  and 4(d) for  $p = 0.166$ ), respectively with  $d = 3$  and  $d = 2$ , both of them for small amplitude oscillations and short-range interaction. Long-range and/or large amplitude oscillations lead to the same conclusions.

When  $p$  is of order 1, the ansatz gives a less accurate description of the simulations. It is in general able to predict the frequency of several oscillations, but gives less good results for the amplitudes. The ansatz (4) predicts a self-similar evolution of the density:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \lambda^{-d} \rho_0 \left( \frac{\mathbf{r}}{\lambda} \right). \quad (32)$$

It is therefore not able to describe, *e.g.*, the evolution of the density if particles that are in a given shell of the initial (spherical) distribution are transported during the evolution to another shell (which is called “shell crossing” in fluid mechanics, see *e.g.*, Buchert, 1992). For long-range interactions, such phenomena occurs during the so-called violent relaxation, which is a well-known process of relaxation to a quasi-stationary state (Lynden-Bell, 1967). Figures 4(c) and 4(d) illustrate this situation for long-range interaction and different initial perturbations. The ansatz predicts no decay of the oscillation amplitude,



**FIGURE 4** (color online). Microcanonical evolution of the typical size of the cloud ( $N = 4000$ ,  $\omega_0 = 17.8$ ). (a) The space dimension is  $d = 3$ , and the interactions are repulsive. The parameters are  $k = 4$  (short range interaction),  $p = 1.2 \times 10^{-3}$  and  $(\lambda, \dot{\lambda})|_{t=0} = (1.5, 0.0)$ . (b) The space dimension is  $d = 2$ , and the interactions are repulsive. The parameters are  $k = 4$  (short range interaction),  $p = 1.66 \times 10^{-1}$  and  $(\lambda, \dot{\lambda})|_{t=0} = (1.5, 0.0)$ . (c) The space dimension is  $d = 3$ , and the interactions are repulsive. The parameters are  $k = 0$  (long range interaction),  $p = 4.5 \times 10^{-1}$  and  $(\lambda, \dot{\lambda})|_{t=0} = (1.5, 0.0)$ . (d) The space dimension is  $d = 3$ , and the interactions are repulsive. The parameters are  $k = 0$  (long range interaction),  $p = 4.4 \times 10^{-1}$  and  $(\lambda, \dot{\lambda})|_{t=0} = (5.0, 0.0)$ . (e) The space dimension is  $d = 3$ , and the interactions are attractive. The parameters are  $k = 0$  (long range interaction),  $p = 2.2$  and  $(\lambda, \dot{\lambda})|_{t=0} = (1.5, 0.0)$ . Same parameters for the inset except  $p = 70$ . (f) The space dimension is  $d = 3$ , and the interactions are attractive. The parameters are  $k = 0$  (long range interaction),  $p = 2.2$  and  $(\lambda, \dot{\lambda})|_{t=0} = (5.0, 0.0)$ . Same parameters for the inset except  $p = 70$ .

whereas the simulations show such decay: we may then attribute this to the “violent relaxation” phenomenon. In the case of short-range interactions, a similar approximate description by the ansatz of the simulations is observed. In this case, a mechanism candidate for the loss of coherence in the oscillations (and hence their decay) is two-body collisions, which is an efficient relaxation process in such short-range interacting systems.

- For numerical reasons, we only simulated in the attractive case long-range interacting systems. We show such a numerical experiment in Figure 4(e) and 4(f), for  $k = 0$  and  $p = 2.2$  ( $p = 70$  for inset) in  $d = 3$ . In these cases the “violent relaxation” is always important, which explains the decay in the oscillation amplitude observed in the simulations and not predicted by the ansatz. Finally remark that a large amplitude oscillation leads to a worse prediction than in the repulsive case.

On Figures 4(c)–4(f), we see that the asymptotic value of  $\langle R^2 \rangle_f / \langle R^2 \rangle_{f_0}$  seems to be different from 1, indicating a relaxation to a stationary state different from the initial one. This was to be expected, as the initial perturbation changes the energy of the system with respect to the reference state  $f_0$ , and there is no dissipation. Since the ansatz is built on the reference stationary state  $f_0$ , one cannot hope that it will be relevant to describe the asymptotic stationary state.

On a 3D system with Coulomb interactions, we have checked that our numerical results do not change significantly performing simulations with  $N = 1000$  and  $N = 10,000$  particles. After 10 oscillations, we observe a difference around 1% in the amplitude and no sizable difference for the frequencies.

### 3. Breathing Oscillations with Friction and Diffusion

In many cases, it is reasonable to assume that particles, rather than following a Hamiltonian evolution, are subjected to small random uncorrelated forces, and a friction: this situation is conveniently modeled by adding to the Vlasov equation a Fokker-Planck operator with a positive constant friction  $\kappa$  and diffusion  $D$ , which amounts to define a temperature.

### 3.1. Small $T$ Limit for Repulsive Interactions

In this subsection we consider the zero temperature limit of the model for a repulsive interaction, *i.e.*, the limit in which  $p \rightarrow 0$ .<sup>2</sup> This is also the limit where the random force is negligible, so that the dynamics is described by Newton equations.

In this case, the reference stationary state will be a stationary configuration of the particles. Let us consider such a stationary configuration  $\{\mathbf{r}_i^0\}_{i=1}^N$  for the  $N$  particles. The force  $\mathbf{F}_i^0$  on each particle therefore vanishes:

$$\mathbf{F}_i^0 = \mathbf{F}_{trap}(\mathbf{r}_i^0) + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{bin}(\mathbf{r}_j^0 - \mathbf{r}_i^0) = \mathbf{0}. \quad (33)$$

We consider now a breathing dynamics  $\mathbf{r}_i(t) = \lambda(t)\mathbf{r}_i^0$ . Newton equations read

$$\ddot{\lambda}\mathbf{r}_i^0 = \mathbf{F}_{trap}(\lambda(t)\mathbf{r}_i^0) - \kappa\dot{\lambda}\mathbf{r}_i^0 + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{bin}(\lambda\mathbf{r}_j^0 - \lambda\mathbf{r}_i^0) \quad (34)$$

$$= -\omega_0^2\lambda\mathbf{r}_i^0 - \kappa\dot{\lambda}\mathbf{r}_i^0 + \lambda^{-k} \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{bin}(\mathbf{r}_j^0 - \mathbf{r}_i^0) \quad (35)$$

$$= -\omega_0^2\lambda\mathbf{r}_i^0 - \kappa\dot{\lambda}\mathbf{r}_i^0 + \omega_0^2\lambda^{-k}\mathbf{r}_i^0. \quad (36)$$

From the first equation to the second one, we have used the homogeneity of the binary force; from the second one to the third, we have used Eq. (33) to express the interaction term as a function of the trap force. This yields an equation for  $\lambda$

$$\ddot{\lambda} = -\kappa\dot{\lambda} + \omega_0^2(\lambda^{-k} - \lambda), \quad (37)$$

Putting  $\kappa = 0$  in Eq. (37) and  $p = 0$  in Eq. (20), one finds the same equation. This calculation is very similar to the one done in Henning and colleagues (2008); in this reference, the authors linearize the particles motion, thus limiting themselves to small deviations from the reference state. We have shown here that this restriction is unnecessary.

<sup>2</sup>This limit for an attractive interaction,  $p \rightarrow \infty$ , is trivial: all the particles collapse on a point in the center of the trap.

3.2. *Vlasov-Fokker-Planck Equation*

When the random force is not negligible, our new starting point is now the Vlasov-Fokker-Planck equation:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{v} f) + \mathbf{F}_{trap} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f + \mathbf{F}_{int}[f] \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = D \Delta_{\mathbf{v}} f + \kappa \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (\mathbf{v} f). \quad (38)$$

Once again, we assume the existence of a stationary state  $f_0$  solution of Eq. (38). If the binary interaction is potential and repulsive, there is indeed a unique stationary state of (38), given by the canonical statistical equilibrium (3) (see for instance Bouchet and Corvellec, 2010), appendix E.

As done in Section 2.2, the Vlasov part on the left hand side of Eq. (38) may be replaced by the first equation of the BBGKY hierarchy. We will not repeat these computations here.

Inserting into (38) the same scaling ansatz as in Section 2.1, and performing the same computation, one obtains the following equation:

$$\sum_{i=1}^d \left\{ V_i \frac{\partial f_0}{\partial R_i} \left( \frac{1}{\lambda^2} - \lambda^{1-k} \right) + D \frac{\partial^2 f_0}{\partial V_i^2} (\lambda^{1-k} - \lambda^2) - R_i \frac{\partial f_0}{\partial V_i} \right. \\ \left. \times \left[ \lambda (\ddot{\lambda} + \omega_0^2 \lambda) - \lambda^{1-k} \omega_0^2 + \kappa \lambda \dot{\lambda} \right] + \kappa \frac{\partial (V_i f_0)}{\partial V_i} (\lambda^{1-k} - 1) \right\} = 0. \quad (39)$$

Taking the moment  $R_j V_j$  of this equation yields the equation for  $\lambda$ :

$$\ddot{\lambda} + \kappa \dot{\lambda} + \left( \lambda - \frac{p}{\lambda^3} + \frac{p-1}{\lambda^k} \right) \omega_0^2 = 0, \quad (40)$$

where we have used for  $p$  the same definition as (18). As in the case without friction, taking higher order moments of Eq. (39) yields different equations for  $\lambda$ , implying  $\lambda = 1$ . However, at variance with the case without friction, already the second order moment  $V_j^2$  implies that the only exact solution compatible with the ansatz is  $\lambda = 1$ . We also note that Eq. (40) is compatible with Eqs. (20) and (37) respectively in the limits  $\kappa \rightarrow 0$  and  $p \rightarrow 0$ .

As a consequence, one may expect Eq. (40) to give useful information on the breathing dynamics at small friction or small  $p$ , but its precise domain of validity has to be investigated numerically.

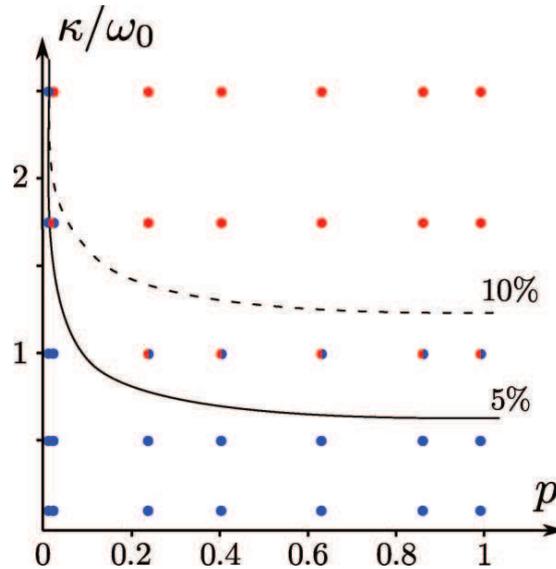
### 3.3. Comparison with Numerical Simulations

We have performed the numerical simulations in the same setting as in Section 2.5, adding a thermostat. We use a Langevin – Verlet numerical scheme in which the force during each time-step is assumed to vary linearly with time, as the one described in Allen and Tildesley (1987). Our goal is to investigate in which regions of the  $(p, k/d, \kappa/\omega_0)$  space the scaling ansatz can be useful, see Figure 1. We have used  $N = 1000$  and  $N = 5000$  particles considering successively one, two or three space dimension, with  $k = 0$ . In each case we have performed the simulations varying  $p$  and  $\kappa$  following a grid in the plane  $(\kappa/\omega_0, p)$ , restricting ourselves to repulsive interactions.

In Section 2.5, we have seen that the constant energy simulations showed a very good agreement with the reduced dynamics as far as the oscillation frequency is concerned, and some disagreement concerning the oscillation amplitude. Since we would like to assert here the effect of friction and diffusion, we concentrate on the oscillation frequencies, and use the following criterion to estimate the agreement or disagreement between the simulation and the reduced dynamics Eq. (40):

- In the underdamped regime we consider the relative difference between the theoretical and numerical times for the  $n^{\text{th}}$  maximum of the oscillation:  $|t_{\text{theo}}^n - t_{\text{num}}^n|/t_{\text{theo}}^n$ . We choose  $n$  to be the last maximum above the noise level.
- In the overdamped regime we consider the half-life time of the initial perturbation:  $|t_{\text{theo}}^{1/2} - t_{\text{num}}^{1/2}|/t_{\text{theo}}^{1/2}$ .

Figure 5 confirms that for  $k = 0$  close to axes  $p = 0$  and/or  $\kappa/\omega_0 = 0$  the scaling ansatz method leads to reasonable predictions. On the contrary when we approach an overdamped dynamics, the scaling ansatz rapidly fails. We expect a similar picture for different values of  $k$ . Figure 6 represents some examples in the underdamped regime for different systems. Frequencies are quite precisely predicted by the ansatz, even if the amplitude's decay is

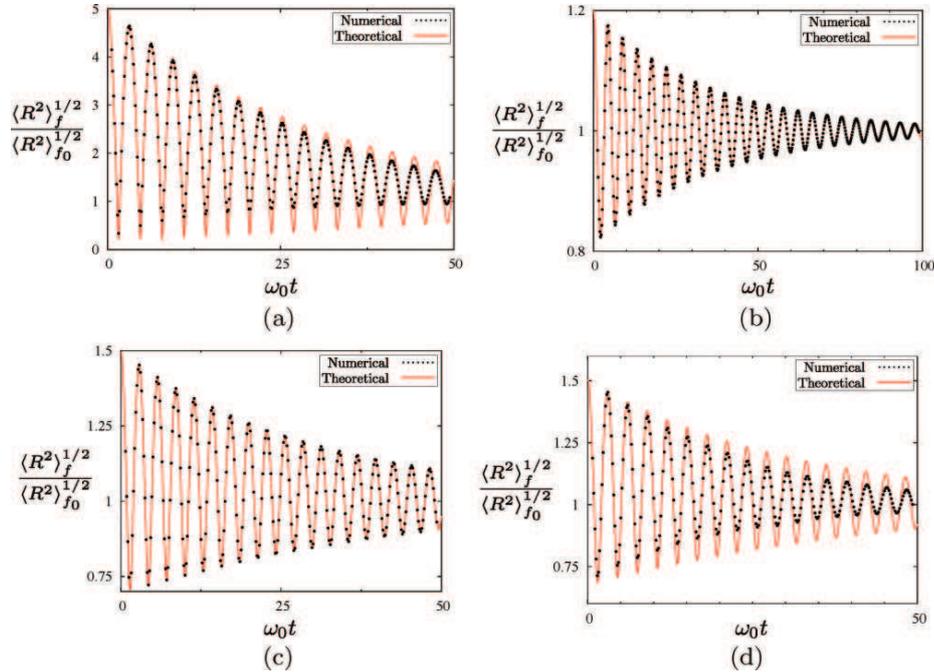


**FIGURE 5** (color online). Validity of the scaling ansatz in the plane  $(\kappa/\omega_0, p)$  plane. The simulations are done with  $N = 5000$  particles and a one-dimensional Coulombian interaction ( $k = 0$ ) with  $\omega_0 = 17.8$  and  $(\lambda, \dot{\lambda})|_{t=0} = (0.3, 0.0)$ . Note that the picture does not appreciably change if we consider instead  $N = 1000$  or  $d = 2, 3$ . Blue circle: frequency error  $\leq 5\%$ ; half-blue/red circle:  $5\% < \text{error} \leq 10\%$ ; red circle: error  $> 10\%$ ; solid and dashed line represent respectively the qualitative boundaries for 5% and 10% frequency error. For a definition of the frequency error, see text.

not negligible. Note that contrary to simulations done in Section 2.5, the initial state  $f_0$  is also the final one, since the system has a unique stationary state.

#### 4. Space Dependent Friction

We extend in this section the study of the breathing dynamics with the ansatz method to the case where the friction coefficient  $\kappa$  as well as the diffusion constant  $D$  are space-dependent. One physical motivation for this extension is the physics of Magneto-Optical Traps (MOTs). In an atomic cloud confined in a MOT, the interaction of atoms with lasers induces a friction and a diffusion; however, it is known that the intensity of these friction and diffusion depends on the atom position and that it may have important dynamical consequences (Labeyrie et al., 2006). Although we will concentrate here on the effect of a space-dependent friction, a precise modeling of a MOT would clearly need to take into account other effects.



**FIGURE 6** (color online). Evolution of the typical size of the cloud in the underdamped case ( $N = 4000$ ,  $\kappa/\omega_0 = 5.6 \times 10^{-2}$ ). (a) The space dimension is  $d = 3$ , and the interactions are repulsive. The parameters are  $k = 1$  (long range interaction),  $p = 5.0 \times 10^{-1}$  and  $(\lambda, \dot{\lambda})|_{t=0} = (5.0, 0.0)$ . (b) The space dimension is  $d = 3$ , and the interactions are repulsive. The parameters are  $k = 1$  (long range interaction),  $p = 1.5 \times 10^{-3}$  and  $(\lambda, \dot{\lambda})|_{t=0} = (1.2, 0.0)$ . (c) The space dimension is  $d = 3$ , and the interactions are repulsive. The parameters are  $k = 4$  (short range interaction),  $p = 1.2 \times 10^{-3}$  and  $(\lambda, \dot{\lambda})|_{t=0} = (1.5, 0.0)$ . (d) The space dimension is  $d = 2$ , and the interactions are repulsive. The parameters are  $k = 4$  (short range interaction),  $p = 6.3 \times 10^{-1}$  and  $(\lambda, \dot{\lambda})|_{t=0} = (1.5, 0.0)$ .

#### 4.1. Dynamical Equation

Our goal is to obtain an effective dynamical equation for the breathing dynamics similar to Eq. (40), which would also be valid in both the small friction and strong repulsive interaction limits.

Eq. (40) was obtained taking the  $R_i V_i$  moment of Eq. (39), which in turn came from the use of the dynamical ansatz. When the friction was homogeneous, it was then possible to check that Eq. (40) was compatible with the exact solution at  $p = 0$  (or  $T = 0$ ) Eq. (37). When friction and diffusion are not homogeneous, taking the  $R_i V_i$  moment after introducing the dynamical ansatz yields an effective equation analogous to Eq. (40) but we do not have an exact solution at  $p = 0$  any more to test its consistency.

We will thus rely again on numerical simulations to investigate its domain of validity.

We first introduce the dynamical ansatz into the equation with inhomogeneous friction and diffusion.

We start from the Vlasov Fokker-Planck equation including the space dependence  $\kappa(\mathbf{r})$  and  $D(\mathbf{r})$  (once again it is straightforward to do the same thing considering the first equation of the BBGKY hierarchy):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{v} f) + \mathbf{F}_{trap} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f + \mathbf{F}_{int}[f] \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = D(\mathbf{r}) \Delta_{\mathbf{v}} f + \kappa(\mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (\mathbf{v} f). \quad (41)$$

We assume again the existence of a stationary state  $f_0$ . When friction and diffusion are not homogeneous, we have no simple implicit equation for  $f_0$  such as (3).

Using the scaling ansatz method with stationary state  $f_0$  leads to the equivalent equation of Eq. (39):

$$\sum_{i=1}^d \left\{ V_i \frac{\partial f_0}{\partial R_i} \left( \frac{1}{\lambda^2} - \lambda^{1-k} \right) + \frac{\partial^2 f_0}{\partial V_i^2} [\lambda^{1-k} D(\mathbf{R}) - \lambda^2 D(\lambda \mathbf{R})] \right. \\ \left. - R_i \frac{\partial f_0}{\partial V_i} [\lambda (\ddot{\lambda} + \omega_0^2 \lambda) - \lambda^{1-k} \omega_0^2 + \kappa(\lambda \mathbf{R}) \lambda \dot{\lambda}] \right. \\ \left. + \frac{\partial (V_i f_0)}{\partial V_i} [\lambda^{1-k} \kappa(\mathbf{R}) - \kappa(\lambda \mathbf{R})] \right\} = 0. \quad (42)$$

We now multiply Eq. (42) by  $R_j V_j / N$ , and integrate over  $d\mathbf{R} d\mathbf{V}$ . Hence:

$$\lambda \frac{\langle \kappa(\lambda \mathbf{R}) R_i^2 \rangle_{f_0}}{\langle R_i^2 \rangle_{f_0}} - \frac{\langle [\lambda^{1-k} \kappa(\mathbf{R}) - \kappa(\lambda \mathbf{R})] R_i V_i \rangle_{f_0}}{\lambda \langle R_i^2 \rangle_{f_0}} \\ + \ddot{\lambda} + \lambda \omega_0^2 - \frac{p}{\lambda^3} \omega_0^2 + (p-1) \frac{1}{\lambda^k} \omega_0^2 = 0, \quad (43)$$

where we have already introduced the parameter  $p$ ; thus, we assume here that  $\langle V_i^2 \rangle_{f_0} / \langle R_i^2 \rangle_{f_0}$  does not depend on  $i$ . To deal with the new terms we assume that  $f_0$  presents a symmetry of the type  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^d$  for velocity variables. In a two-dimensional problem this

corresponds to  $f_0(r_x, v_x, r_y, v_y) = f_0(r_x, |v_x|, r_y, |v_y|)$ . Under this hypothesis the second term in Eq. (43) vanishes. The same cancellation also happens for instance if  $f_0$  has a spherical symmetry for space variables and the friction  $\kappa(\mathbf{r})$  depends only on  $|\mathbf{r}|$ . These conditions are satisfied for problems with spherical symmetry. The constraint equation then reduces to:

$$\ddot{\lambda} + \lambda \omega_0^2 - \frac{p}{\lambda^3} \omega_0^2 + (p-1) \frac{1}{\lambda^k} \omega_0^2 + \dot{\lambda} \frac{\langle \kappa(\lambda \mathbf{R}) R_i^2 \rangle_{f_0}}{\langle R_i^2 \rangle_{f_0}} = 0. \quad (44)$$

Note that any explicit dependence on the diffusion disappears, as its effects are averaged out. The diffusion plays a role of course in determining the stationary solution  $f_0$ , which in turn appears in the equation. The new qualitative property of Eq. (44) is an effective  $\lambda$ -dependent friction.

A nice feature of Eq. (40) is that the stationary solution  $f_0$  enters in the equation only through the parameter  $p$ . The situation is somewhat less favorable for a space-dependent friction, since  $f_0$  also enters into the average  $\langle \kappa(\lambda \mathbf{R}) R_i^2 \rangle_{f_0}$ . However a numerical knowledge of  $f_0$  is sufficient to use Eq. (44) in a given problem.

Equation (44) must now be tested against direct numerical simulations.

#### 4.2. Numerical Tests

We now test the validity of Eq. (44) on academic examples of variable frictions.

One problem is the determination of the stationary profile  $f_0$ ; this is a relatively easy task when friction and diffusion are constant, as  $f_0$  is given by (3). In the present case, we have no analytical expression for  $f_0$ , and some numerical help is needed. In the following we will postulate a given density profile and check that it is consistent with the numerics.

We choose to study a one-dimensional plasma with  $p \ll 1$ , with a constant diffusion and a space-dependent friction. For a constant friction and diffusion, the density profile is then a step function; this is also a one-dimensional analog of an atomic cloud in a Magneto-Optical Trap (Walker et al., 1990). We have checked numerically that a variable friction does not change the

step profile, to our numerical precision. We will then use this step profile, with cut-off length  $L_i$  to estimate the averages in Eq. (44).

As a first test let us use the following expression for the friction:

$$\kappa(\mathbf{r}) = \begin{cases} \kappa_0 \left(1 - \frac{|\mathbf{r}|}{L_\kappa}\right) & \text{if } |\mathbf{r}| \leq L_\kappa, \\ 0 & \text{if } |\mathbf{r}| > L_\kappa, \end{cases} \quad (45)$$

where  $L_\kappa$  is the cut off for the friction; we do not consider negative friction here. In addition, for  $|\mathbf{r}|$  larger than  $L_\kappa$ , the particles feel a diffusion without friction so that the local temperature of the system becomes infinite ( $T \sim D/\kappa$ ). To avoid this nonphysical situation we make sure that particles stay where the friction is nonzero for all time. This condition can be written as  $\lambda(t)L_i < L_\kappa$ . The constraint equation becomes

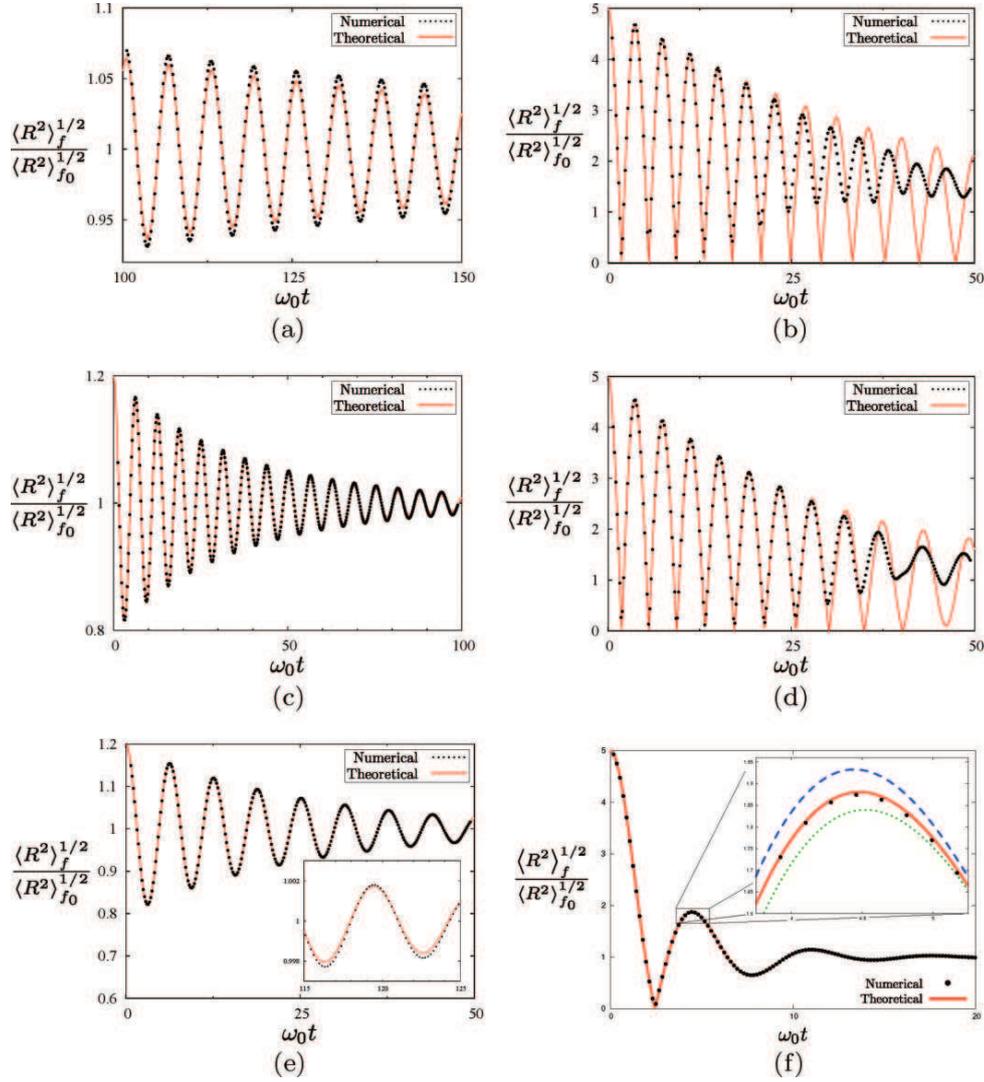
$$\ddot{\lambda} + \lambda\omega_0^2 - \frac{p}{\lambda^3}\omega_0^2 + (p-1)\frac{1}{\lambda^k}\omega_0^2 + \dot{\lambda}\kappa_0 \left(1 - \frac{3\lambda L_i}{4L_\kappa}\right) = 0. \quad (46)$$

Let us stress that  $p \ll 1$  and we limit the discussion to systems with  $\max_{|\mathbf{r}| \in \mathbb{R}}(\kappa(\mathbf{r})) = \kappa_0 \ll \omega_0$ . Because satisfying these two conditions with constant friction yields pretty good prediction, it is reasonable to expect that it will be the same in this case.

Figures 7(a) and 7(b) compare numerical simulations with Eq. (46). In these two examples, we are in the *a priori* favorable situation where both  $p \ll 1$  and  $\max_{|\mathbf{r}| \in \mathbb{R}}(\kappa(\mathbf{r})) = \kappa_0 \ll \omega_0$ . We see in Figure 7(a) that the oscillation amplitude and frequency are quite well predicted; for a large amplitude oscillation, the agreement degrades after a few oscillations (see Figure 7(b)). On this figure, the asymptotic value of  $\langle R^2 \rangle_f / \langle R^2 \rangle_{f_0}$  seems to be different from 1, indicating a relaxation to a stationary state different from the initial one. However, after a sufficiently long time, the system actually relaxes to  $f_0$ .

We consider now another example of variable friction:

$$\kappa(\mathbf{r}) = \kappa_0 \left[ 1 + \cos\left(\pi \frac{|\mathbf{r}|}{L_\kappa}\right) \right], \quad (47)$$



**FIGURE 7** (color online). Evolution of the typical size of the cloud with non homogeneous friction in a one dimensional Coulombian system ( $N = 4000$ ,  $d = 1$ ,  $k = 0$ ,  $L_i = 12.5$  and  $p = 6 \times 10^{-5}$ ). (a) The friction profile is given by (45). Parameters are  $\kappa_0/\omega_0 = 5.6 \times 10^{-2}$ ,  $L_\kappa = 1.25 \times L_i$  and  $(\lambda, \dot{\lambda})|_{t=0} = (1.2, 0.0)$ . (b) The friction profile is given by (45). Parameters are  $\kappa_0/\omega_0 = 5.6 \times 10^{-2}$ ,  $L_\kappa = 5.0 \times L_i$  and  $(\lambda, \dot{\lambda})|_{t=0} = (5.0, 0.0)$ . (c) The friction profile is given by (47). Parameters are  $\kappa_0/\omega_0 = 5.6 \times 10^{-2}$ ,  $L_\kappa = 0.25 \times L_i$  and  $(\lambda, \dot{\lambda})|_{t=0} = (1.2, 0.0)$ . (d) The friction profile is given by (47). Parameters are  $\kappa_0/\omega_0 = 5.6 \times 10^{-2}$ ,  $L_\kappa = 4.0 \times L_i$  and  $(\lambda, \dot{\lambda})|_{t=0} = (5.0, 0.0)$ . (e) The friction profile is given by (47). Parameters are  $\kappa_0/\omega_0 = 5.6 \times 10^{-2}$ ,  $L_\kappa = 0.25 \times L_i$  and  $(\lambda, \dot{\lambda})|_{t=0} = (1.2, 0.0)$ . (f) The friction profile is given by (47). The dashed blue curve and dotted green curve in the inset are respectively obtained from (44) substituting  $\kappa(\lambda \mathbf{R})$  by  $\langle \kappa(\mathbf{R}) \rangle_{f_0}$  and  $\kappa(\mathbf{R})$ . Parameters are  $\kappa_0/\omega_0 = 5.6 \times 10^{-1}$ ,  $L_\kappa = 0.25 \times L_i$  and  $(\lambda, \dot{\lambda})|_{t=0} = (5.0, 0.0)$ .

where  $L_\kappa$  represents now the first minimum of  $\kappa(\mathbf{r})$ . Equation (44) becomes:

$$\ddot{\lambda} + \kappa_0 \dot{\lambda} + \lambda \omega_0^2 - \frac{p}{\lambda^3} \omega_0^2 + (p-1) \frac{1}{\lambda^k} \omega_0^2 + \frac{3}{2} \frac{\dot{\lambda} \kappa_0}{L_i^3} \int_0^{L_i} \cos\left(\frac{\pi \lambda R}{L_\kappa}\right) R^2 dR = 0. \quad (48)$$

The comparison between (48) and simulations yields similar qualitative results: the frequency is always obtained with very good precision (see Figures 7(c), 7(d), and 7(e)) at least for several oscillations. In Figure 7(f), the condition  $\kappa_0 \ll \omega_0$  is relaxed, and the agreement remains almost perfect.

The main novelty of Eq. (44) with respect to Eq. (40) is the appearance of an effective nonlinear friction, which depends on  $\lambda$ . We have compared the numerical results (for  $d = 1, k = 0$ ) with both Eq. (44) and Eq. (40), using two *ad hoc* effective frictions, independent of  $\lambda$ :  $\kappa_{eff}^{(1)} = \langle \kappa(\mathbf{r}) \rangle_{f_0}$  and  $\kappa_{eff}^{(2)} = \langle \kappa(\mathbf{r}) r_1^2 \rangle_{f_0} / \langle r_1^2 \rangle_{f_0}$ . The difference induced by the nonlinear friction is small, but the prediction of Eq. (44) is better (see the inset of Figure 7(f)).

### 5. Conclusion

Starting from the first equation of the BBGKY hierarchy and a scaling ansatz for the dynamics, a nonlinear equation describing the breathing oscillations of trapped particles interacting *via* homogeneous forces was derived in Olivetti and colleagues (2009). The derivation and equation should be valid independently of the temperature, interaction strength, interaction range and dimensionality of the physical space in the underdamped limit.

In this article, we show that this equation also exactly describes the breathing dynamics of particles interacting through repulsive interactions in the zero temperature limit, for all values of the friction. We then have compared the predictions of this equation with direct numerical simulations, testing a wide range of parameters, to investigate its domain of validity. It appears that in the underdamped regime the main limitation is due to violent relaxation phenomena (sometimes called phase mixing) for long-range interacting systems and two-body collisions in short

interacting ones, especially for weak repulsive and attractive interactions, where they introduce damping and loss of coherence, unaccounted for in the scaling ansatz. In the overdamped regime, the equation is valid only at very small temperature, for repulsive interactions.

Motivated by the physics of Magneto-Optical Traps, we have extended the breathing mode theory to the case of space-dependent friction and diffusion. The predictions are again in good agreement with molecular dynamics simulations in the underdamped and small temperature (in the repulsive case) limits.

### References

- Allen, M. P., Tildesley, D. J. (1987). *Computer simulation of liquids*, Oxford: Clarendon Press.
- Amiranashvili, S., Yu, M. Y., Stenflo, L. (2003). Nonuniform non-neutral plasma in a trap. *Phys. Rev. E* 67:016408.
- Apolinario, S. W. S., Partoens, B., Peeters, F. M. (2007). Structural and dynamical aspects of small three-dimensional spherical Coulomb clusters. *New J. Phys.* 9:283.
- Buchert, T. (1992). Lagrangian theory of gravitational instability of Friedman–Lemaître cosmologies and the ‘Zel’dovich approximation’ *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 254:729.
- Bouchet, F., Corvellec, M. (2010). Invariant measures of the 2D Euler and Vlasov equations. *J. Stat. Mech.* P08021.
- Castin, Y., Dum, R. (1996). Bose–Einstein Condensates in Time Dependent Traps. *Phys. Rev. Lett.* 77:5315.
- Chandrasekhar, S., Elbert, D. D. (1972). Some elementary applications of the virial theorem to stellar dynamics. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 155:435.
- Dauxois, T., Ruffo, S., Arimondo, E., Wilkens, M. (Eds). (2002). *Dynamics and Thermodynamics of Systems with Long Range Interactions. Lecture Notes in Physics* 602. Berlin: Springer.
- Dubin, D. H. E. (1991). Theory of electrostatic fluid modes in a cold spheroidal non-neutral plasma. *Phys. Rev. Lett.* 66:2076.
- Dubin, D. H. E. (1993). Equilibrium and dynamics of uniform density ellipsoidal non-neutral plasmas. *Phys. Fluids B* 5:295.
- Dubin, D. H. E., O’Neil, T. M. (1999). Trapped non-neutral plasmas, liquids, and crystals (the thermal equilibrium states). *Rev. Mod. Phys.* 71:87.
- Guéry-Odelin, D. (2002). Mean-field effects in a trapped gas. *Phys. Rev. A* 66:033613.
- Henning, C., Fujioka, K., Ludwig, P., Piel, A., Melzer, A., Bonitz, M. (2008). Existence and vanishing of the breathing mode in strongly correlated finite systems. *Phys. Rev. Lett.* 101:045002.

- James, D. F. V. (1998). Quantum dynamics of cold trapped ions with application to quantum computation. *Appl. Phys. B* 66:181.
- Kagan, Y., Surkov, E. L., Shlyapnikov, G. V. (1997). Evolution of a Bose gas in anisotropic time-dependent traps. *Phys. Rev. A* 55:R18.
- Labeyrie, G., Michaud, F., Kaiser, R. (2006). Self-sustained oscillations in a large magneto-optical trap. *Phys. Rev. Lett.* 96:023003.
- Lynden-Bell, D., (1967). Statistical mechanics of violent relaxation in stellar systems. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 136:101.
- Olivetti, A., Barré, J., Marcos, B., Bouchet, F., Kaiser, R. (2009). Breathing mode for systems of interacting particles. *Phys. Rev. Lett.* 103:224301.
- Partoens, B., Peeters, F. M. (1997). Classical artificial two-dimensional atoms: the Thomson model. *Condens. Matter* 9:5383.
- Schweigert, V. A., Peeters, F. M. (1995). Spectral properties of classical two-dimensional clusters. *Phys. Rev. B* 51:7700.
- Sheridan, T. E. (2004). Theory for the breathing mode of a complex plasma disk. *Phys. Plasmas* 11:5520.
- Sheridan, T. E., Buckley, C. R., Cox, D. J., Merrill, R. J., Theisen, W. L. (2004). Breathing-mode resonance of a complex plasma disk. *Phys. Lett. A* 329:88.
- Tatarkova, S. A., Carruthers, A. E., Dholakia, K. (2002). One-dimensional optically bound arrays of microscopic particles. *Phys. Rev. Lett.* 89:283901.
- Walker, T., Sesko, D., Wieman, C. (1990). Collective behavior of optically trapped neutral atoms. *Phys. Rev. Lett.* 64:408.

---

## RÉFÉRENCES DU CHAPITRE II

---

- [APP07] S W S Apolinario, B Partoens, and F M Peeters. Structural and dynamical aspects of small three-dimensional spherical coulomb clusters. *New Journal of Physics*, 9(8) :283–283, August 2007. - Cité 1 fois : page 110 -
- [AT99] M. P. Allen and Dominic J. Tildesley. *Computer simulation of liquids*. Oxford University Press, 1999. - Cité 3 fois : pages 124, 135 et 212 -
- [AYS03] Sh. Amiranashvili, M. Y. Yu, and L. Stenflo. Nonuniform non-neutral plasma in a trap. *Physical Review E*, 67(1) :016408, January 2003. - Cité 5 fois : pages 110, 122, 125, 202 et 207 -
- [BBvL07] M. Bonitz, K. Balzer, and R. van Leeuwen. Invariance of the kohn center-of-mass mode in a conserving theory. *Physical Review B*, 76(4) :045341, July 2007. - Cité 3 fois : pages 109, 111 et 142 -
- [BHB10] M Bonitz, C Henning, and D Block. Complex plasmas : a laboratory for strong correlations. *Reports on Progress in Physics*, 73(6) :066501, June 2010. - Cité 1 fois : page 110 -
- [Buc92] Thomas Buchert. Lagrangian theory of gravitational instability of Friedman-Lemaitre cosmologies and the 'Zel'dovich approximation'. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 254 :729–737, February 1992. - Cité 1 fois : page 128 -
- [CD96] Y. Castin and R. Dum. Bose-Einstein condensates in time dependent traps. *Physical Review Letters*, 77(27) :5315, December 1996. - Cité 1 fois : page 110 -
- [CDR09] Alessandro Campa, Thierry Dauxois, and Stefano Ruffo. Statistical mechanics and dynamics of solvable models with long-range interactions. *Physics Reports*, 480(3-6) :57–159, September 2009. - Cité 6 fois : pages 14, 15, 16, 49, 125 et 219 -
- [CE72] S. Chandrasekhar and Donna D. Elbert. Some elementary applications of the virial theorem to stellar dynamics. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 155 :435, 1972. - Cité 1 fois : page 110 -

- [Cha43] S. Chandrasekhar. Stochastic problems in physics and astronomy. *Reviews of Modern Physics*, 15(1) :1, January 1943. - Cité 1 fois : page 153 -
- [DET04] Jörn Dunkel, Werner Ebeling, and Sergey A. Trigger. Active and passive brownian motion of charged particles in two-dimensional plasma models. *Physical Review E*, 70(4) :046406, October 2004. - Cité 1 fois : page 111 -
- [DO99] Daniel H. E. Dubin and T. M. O’Neil. Trapped nonneutral plasmas, liquids, and crystals (the thermal equilibrium states). *Reviews of Modern Physics*, 71(1) :87, January 1999. - Cité 4 fois : pages 121, 122, 202 et 207 -
- [Dub91] Daniel H. E. Dubin. Theory of electrostatic fluid modes in a cold spheroidal non-neutral plasma. *Physical Review Letters*, 66(16) :2076, April 1991. - Cité 1 fois : page 110 -
- [Dub93] D. H. E. Dubin. Equilibrium and dynamics of uniform density ellipsoidal non-neutral plasmas. *Physics of Fluids B : Plasma Physics*, 5(2) :295, 1993. - Cité 1 fois : page 110 -
- [EEM05] Udo Erdmann, Werner Ebeling, and Alexander S. Mikhailov. Noise-induced transition from translational to rotational motion of swarms. *Physical Review E*, 71(5) :051904, May 2005. - Cité 2 fois : pages 111 et 148 -
- [ES08] W. Ebeling and L. Schimansky-Geier. Swarm dynamics, attractors and bifurcations of active brownian motion. *The European Physical Journal Special Topics*, 157(1) :17–31, April 2008. - Cité 2 fois : pages 111 et 148 -
- [Fra05] Till Daniel Frank. *Nonlinear Fokker-Planck equations : fundamentals and applications*. Springer, 2005. - Cité 3 fois : pages 14, 111 et 112 -
- [GJM10] A. Gabrielli, M. Joyce, and B. Marcos. Quasistationary states and the range of pair interactions. *Physical Review Letters*, 105(21) :210602, November 2010. - Cité 2 fois : pages 125 et 126 -
- [GJMS10] A. Gabrielli, M. Joyce, B. Marcos, and F. Sicard. A dynamical classification of the range of pair interactions. *Journal of Statistical Physics*, 141(6) :970–989, November 2010. - Cité 1 fois : page 125 -
- [GO02] David Guéry Odelin. Mean-field effects in a trapped gas. *Physical Review A*, 66(3) :033613, 2002. - Cité 2 fois : pages 110 et 122 -
- [HFL<sup>+</sup>08] C. Henning, K. Fujioka, P. Ludwig, A. Piel, A. Melzer, and M. Bonitz. Existence and vanishing of the breathing mode in strongly correlated finite systems. *Physical Review Letters*, 101(4) :045002, July 2008. - Cité 4 fois : pages 109, 110, 122 et 123 -
- [Jam98] D.F.V. James. Quantum dynamics of cold trapped ions with application to quantum computation. *Applied Physics B : Lasers and Optics*, 66(2) :181–190, February 1998. - Cité 2 fois : pages 110 et 122 -
- [Koh61] Walter Kohn. Cyclotron resonance and de haas-van alphen oscillations of an interacting electron gas. *Physical Review*, 123(4) :1242, 1961. - Cité 3 fois : pages 109, 111 et 142 -

- [KSS97] Yu. Kagan, E. L. Surkov, and G. V. Shlyapnikov. Evolution of a bose gas in anisotropic time-dependent traps. *Physical Review A*, 55(1) :R18, January 1997. - Cité 1 fois : page 110 -
- [LMK06] G. Labeyrie, F. Michaud, and R. Kaiser. Self-Sustained oscillations in a large Magneto-Optical trap. *Physical Review Letters*, 96(2) :023003, January 2006. - Cité 9 fois : pages 111, 133, 192, 193, 202, 203, 204, 209 et 210 -
- [Lyn67] D. Lynden-Bell. Statistical mechanics of violent relaxation in stellar systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 136 :101, 1967. - Cité 2 fois : pages 16 et 128 -
- [MKP01] A. Melzer, M. Klindworth, and A. Piel. Normal modes of 2D finite clusters in complex plasmas. *Physical Review Letters*, 87(11) :115002, 2001. - Cité 1 fois : page 110 -
- [MSKE03] Henning Moritz, Thilo Stöferle, Michael Köhl, and Tilman Esslinger. Exciting collective oscillations in a trapped 1D gas. *Physical Review Letters*, 91(25) :250402, December 2003. - Cité 1 fois : page 110 -
- [MZ99] Alexander S. Mikhailov and Damián H. Zanette. Noise-induced breakdown of coherent collective motion in swarms. *Physical Review E*, 60(4) :4571, October 1999. - Cité 2 fois : pages 111 et 148 -
- [OBM<sup>+</sup>09] Alain Olivetti, Julien Barré, Bruno Marcos, Freddy Bouchet, and Robin Kaiser. Breathing mode for systems of interacting particles. *Physical Review Letters*, 103(22) :224301, November 2009. - Cité 4 fois : pages ix, 113, 125 et 153 -
- [OBM<sup>+</sup>11] Alain Olivetti, Julien Barré, Bruno Marcos, Freddy Bouchet, and Robin Kaiser. Breathing dynamics for systems of interacting particles in the microcanonical and canonical descriptions. *Transport Theory and Statistical Physics*, 39(5-7) :524–551, March 2011. - Cité 3 fois : pages ix, 113 et 158 -
- [OFK<sup>+</sup>03] H. Ott, J. Fortágh, S. Kraft, A. Günther, D. Komma, and C. Zimmermann. Nonlinear dynamics of a Bose-Einstein condensate in a magnetic waveguide. *Physical Review Letters*, 91(4) :040402, July 2003. - Cité 2 fois : pages 111 et 150 -
- [PF98] M. Germana Paterlini and David M Ferguson. Constant temperature simulations using the langevin equation with velocity verlet integration. *Chemical Physics*, 236(1-3) :243–252, September 1998. - Cité 2 fois : pages 124 et 212 -
- [PLK06] T. Pohl, G. Labeyrie, and R. Kaiser. Self-driven nonlinear dynamics in magneto-optical traps. *Physical Review A*, 74(2) :023409, 2006. - Cité 3 fois : pages 111, 192 et 202 -
- [PP97] B Partoens and F M Peeters. Classical artificial two-dimensional atoms : the thomson model. *Journal of Physics : Condensed Matter*, 9(25) :5383–5393, June 1997. - Cité 2 fois : pages 110 et 122 -
- [SBC<sup>+</sup>04] T.E. Sheridan, C.R. Buckley, D.J. Cox, R.J. Merrill, and W.L. Theisen. Breathing-mode resonance of a complex plasma disk. *Physics Letters A*, 329(1-2) :88–93, August 2004. - Cité 2 fois : pages 110 et 122 -

- [She04] T. E. Sheridan. Theory for the breathing mode of a complex plasma disk. *Physics of Plasmas*, 11(12) :5520, 2004. - Cité 2 fois : pages 110 et 122 -
- [She05] T. E. Sheridan. Center-of-mass and breathing oscillations in small complex plasma disks. *Physical Review E*, 72(2) :026405, 2005. - Cité 1 fois : page 110 -
- [SP95] Vitaly A. Schweigert and François M. Peeters. Spectral properties of classical two-dimensional clusters. *Physical Review B*, 51(12) :7700, March 1995. - Cité 1 fois : page 110 -
- [SSK86] G. Som Sunder and R. K. Kochhar. On the dynamical evolution of a spheroidal cluster. II - anisotropic velocity distribution. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 221 :553–569, August 1986. - Cité 1 fois : page 123 -
- [Tal90] Denis Talay. Simulation and numerical analysis of stochastic differential systems : a review. Rapport de recherche RR-1313, INRIA, 1990. Projet ME-FISTO. - Cité 1 fois : page 143 -
- [TCD02] S. A. Tatarkova, A. E. Carruthers, and K. Dholakia. One-Dimensional optically bound arrays of microscopic particles. *Physical Review Letters*, 89(28) :283901, December 2002. - Cité 2 fois : pages 110 et 122 -
- [TEIT03] S. A Trigger, W. Ebeling, A. M Ignatov, and I. M Tkachenko. Fokker-Planck equation with velocity-dependent coefficients : Application to dusty plasmas and active particles. *Contributions to Plasma Physics*, 43(5-6) :377–380, October 2003. - Cité 1 fois : page 111 -
- [TZ03] S. A Trigger and A. G Zagorodny. Negative friction in dusty plasmas. *Contributions to Plasma Physics*, 43(5-6) :381–383, October 2003. - Cité 1 fois : page 111 -

---

## MODÉLISATION DE SYSTÈMES À ATOMES FROIDS

---

Dans ce chapitre, nous allons aborder la modélisation de pièges à atomes froids et voir, entre autres, comment ils peuvent nous aider à tester les différentes théories et prédictions réalisées dans le contexte des systèmes à longue portée. L'intérêt de ces systèmes expérimentaux est réel car ils permettent d'accéder à des situations physiques très variées grâce à plusieurs types de montages différents et nombreux paramètres ajustables dans chaque cas. Ceci étant d'autant plus important qu'il n'y a que très peu de systèmes à longue portée qui peuvent être directement confrontés aux expériences. La plupart du temps, nous devons nous contenter de simulations numériques comme nous l'avons fait au chapitre I.

Concrètement, les pièges à atomes froids sont des systèmes expérimentaux où l'on utilise des faisceaux lasers pour piéger spatialement des atomes tout en diminuant leur vitesse. La vitesse quadratique des atomes pouvant être reliée à la température *via* le principe d'équipartition, nous obtenons des systèmes avec de très basses températures d'où le nom de *systèmes à atomes froids*. Dans la suite nous nous intéresserons à deux montages en particuliers : celui d'un piège magnéto-optique et celui d'un piège dipolaire, qui sont tout deux couramment utilisés à l'Institut Non-Linéaire de Nice (INLN). En effet, nous avons eu l'avantage de travailler directement au contact d'expérimentateurs, ce qui nous a permis de profiter de leurs connaissances concrètes de ces systèmes mais aussi de tester dans la mesure du possible nos prédictions. Remarquons pour finir que nous nous limitons exclusivement à une description Newtonienne de ses systèmes. La densité d'atomes n'étant pas suffisamment élevée pour conduire à un recouvrement des fonctions d'ondes, nous n'avons pas besoin d'utiliser une description quantique.

# 1 GRANDS PIÈGES MAGNÉTO-OPTIQUES

---

---

Le piège magnéto-optique (P.M.O.) est un montage expérimental très répandu dans la communauté des atomes froids. Il est composé généralement de trois paires de lasers, qui ont deux à deux des directions opposées<sup>1</sup> selon chaque direction de l'espace, et d'une paire de bobines en configuration anti-Helmholtz<sup>2</sup>. En laboratoire, on peut le retrouver dans des montages expérimentaux qui étudient ses propriétés mais aussi dans d'autres montages où il joue le rôle de simple *composant*. En effet, il est commun d'utiliser un P.M.O. comme base dans le refroidissement d'atomes, puis d'utiliser d'autres types de confinements<sup>3</sup> pour atteindre les températures voulues. En dehors des laboratoires de recherches, citons juste l'exemple des horloges atomiques qui utilisent des pièges magnéto-optiques ; elles-mêmes étant utilisées dans divers systèmes de navigation comme par exemple le système GPS ("Global Positioning System").

Un des avantages du P.M.O. réside dans sa *relative simplicité* de réalisation. De fait, lorsque ce ne sont pas ses propriétés que l'on cherche à étudier, on peut réaliser un montage sans chercher à optimiser chacune de ses parties et surtout sans chercher à comprendre tout ce qui pourrait s'y dérouler. Car même s'il s'agit d'un piège de *base* il n'en reste pas moins que tout n'est pas encore parfaitement compris sur les comportements qu'il affiche. L'exemple le plus marquant est celui du comportement d'un piège magnéto-optique lorsque le nombre d'atomes qui le composent devient très élevé. Au-delà d'un certain nombre d'atomes dans le piège, celui-ci commence à pulser sans aucune intervention extérieure alors qu'il était jusque là au repos. La taille du nuage oscille ainsi de manière auto-entretenue [LMK06].

À l'heure actuelle, il existe seulement deux modélisations qui permettent de retrouver le comportement oscillant du système :

- un modèle simplifié qui ne considère que les atomes aux bords du nuage [LMK06],
- un modèle cinétique qui essaye d'être le plus proche possible de l'expérience en prenant en compte le maximum d'effets physiques [PLK06] : pression de radiation, atténuation des lasers, diffusion multiple. . .

Ces méthodes ont le mérite de reproduire ce qu'il se passe expérimentalement et de le comprendre qualitativement.

Les travaux que nous avons réalisés s'articulent en deux parties.

La première partie consiste à mieux comprendre les oscillations auto-entretenues des grands P.M.O. en cherchant les ingrédients essentiels à l'apparition de celles-ci. Nous nous focaliserons sur la friction que les particules ressentent dans le système et surtout sur le fait que la friction puisse devenir négative. Contrairement à [PLK06] qui obtient le profil de friction et les forces appliquées à partir de simulations numériques contenant un maximum de la physique du système, nous partirons d'un modèle plus simple qui nous permettra d'obtenir un profil approché de la friction. Nous en déduirons un critère très simple permettant de prévoir l'apparition des oscillations auto-entretenues et nous retrou-

---

1. Deux lasers ayant des directions opposées seront aussi appelés lasers contra-propageants.

2. Les courants parcourent les bobines en sens contraire conduisant ainsi à la création d'un gradient de champ magnétique constant.

3. Afin de remplir le piège dipolaire présenté dans la partie 2, on commence en réalité par une première étape qui consiste à refroidir les atomes à l'aide d'un piège magnéto-optique.

verons ainsi les résultats de [LMK06]. De plus, nous prédirons deux autres transitions qui devraient se produire lorsque le nombre d'atomes augmente dans le système.

La seconde partie se concentrera sur le mode de ballonnement (ou mode dipolaire) d'un piège magnéto-optique. En appliquant les résultats obtenus au chapitre II au modèle développé dans la première partie, nous prédirons l'existence d'une transition entre une relaxation sous-amortie et sur-amortie du mode dipolaire. Nous prédirons également des régimes de paramètres pour lesquels celui-ci devrait être instable.

Il est important de noter qu'au moment de la rédaction de ce manuscrit, des simulations numériques sont en cours de réalisation afin de tester les différentes prédictions.

## 1.1 Pré-requis : le modèle Doppler pour de petits P.M.O.

---

L'idée d'obtenir des *atomes froids* à partir de lasers peut sembler contre-intuitive. En effet, lorsque nous pensons à un laser, nous visualisons un objet qui permet de couper du métal, de brûler une cible, ... bref un dispositif qui fait tout sauf refroidir. Cependant, si les propriétés des lasers sont utilisées astucieusement<sup>4</sup> il est possible de diminuer les vitesses des atomes de sorte que leur vitesse quadratique moyenne soit faible, autrement dit que la température du système soit basse d'après le théorème d'équipartition. Nous allons présenter très succinctement ici les mécanismes à l'origine de ce refroidissement dans un piège magnéto-optique : l'effet Doppler et l'effet Zeeman [Bel07].

*N.B. : Dans toute la suite nous considèrerons le cas d'atomes à deux niveaux.*

### 1.1.a Effet Doppler

La probabilité qu'un atome de vitesse nulle absorbe un photon dépend du désaccord en fréquence  $\delta$  entre la fréquence du photon  $\omega$  et la fréquence de la transition à résonance  $\omega_{at}$  de l'atome :  $\delta = \omega - \omega_{at}$ . Plus  $\delta$  est proche de zéro et plus la probabilité que l'atome absorbe le photon est importante.

Dès que l'atome a une vitesse non nulle, il voit le photon avec une fréquence différente due à l'effet Doppler :  $\omega \pm k_L v$  avec  $k_L$  le nombre d'onde du faisceau laser et  $v$  la vitesse de l'atome (voir figure III.1). Nous pouvons jouer sur cela pour favoriser l'absorption de photons provenant d'une direction en particulier. Si comme sur la figure III.1(b), l'atome et le photon se déplacent dans deux directions opposées, alors la fréquence du photon vue par l'atome est plus grande que  $\omega$ . Enfin, si on fixe la fréquence  $\omega$  de sorte que  $\delta < 0$ , alors l'atome absorbera plus de photons ayant une direction opposée que de photons ayant la même direction.

### 1.1.b Effet Zeeman

Dans le modèle Doppler d'un P.M.O. nous considérons que les atomes sont à deux niveaux d'énergie  $E_a$  et  $E_b$ . Cependant, le niveau excité d'énergie  $E_b$  est en réalité dégénéré

---

4. Le prix Nobel de physique a justement été décerné en 1997 à Claude Cohen-Tannoudji ainsi qu'à Steven Chu et William D. Phillips, pour leurs recherches sur le refroidissement et la capture d'atomes par lasers.

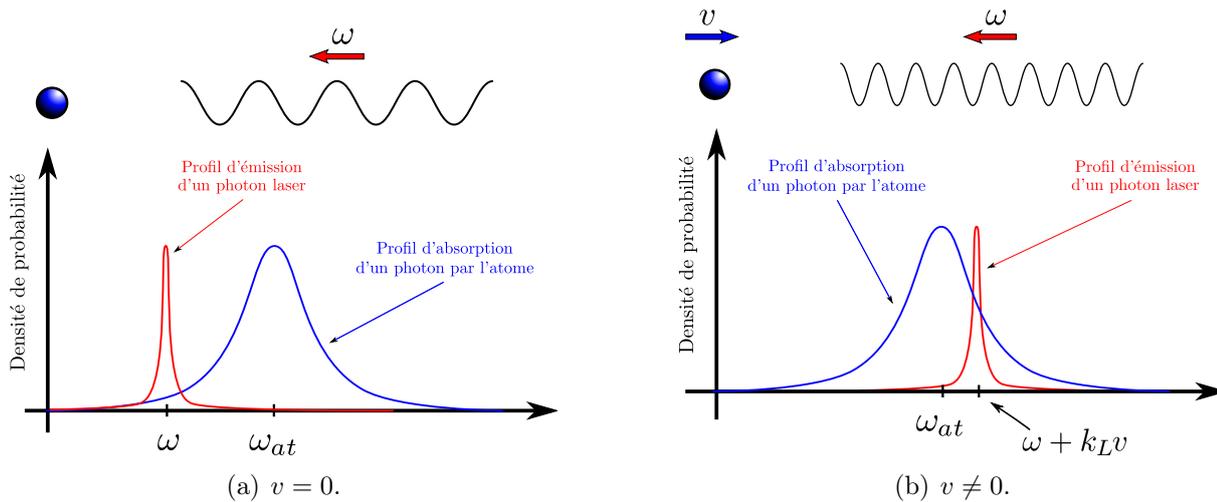


FIGURE III.1 – Illustration de l'effet Doppler. Lorsque l'atome se dirige vers (*resp.* s'éloigne de) la source de photons, la fréquence effective du photon que voit l'atome augmente (*resp.* diminue). Si  $\delta = \omega - \omega_{at} < 0$  alors la probabilité d'absorber un photon avec une direction opposée est plus élevée. En effet, la probabilité d'absorber un photon par l'atome est d'autant plus grande que la fréquence effective du photon laser est proche de  $\omega_{at}$ . L'atome a plus de chances d'absorber un photon dans le cas de la figure (b) que de la figure (a);  $k_L$  étant le nombre d'onde du faisceau laser.

et le champ magnétique créé par les deux bobines permet de lever cette dégénérescence (voir figure III.2(a)). Le niveau excité se décompose en trois sous-niveaux. Pour atteindre un sous-niveau en particulier, il faut que le photon ait la bonne polarisation.

Enfin, il faut noter que les bobines en configuration anti-Helmholtz permettent de créer un gradient de champ magnétique de sorte que le décalage des niveaux d'énergie dépende de la position de l'atome (voir figure III.2(b)).

Tous cela combiné nous permet, comme pour l'effet Doppler, de favoriser l'absorption de photons provenant d'un laser en particulier selon la position de l'atome. Pour cela, on joue sur le désaccord effectif qui prend en compte l'effet Zeeman :  $\delta_{eff} = \delta \pm \mu x$ , avec  $\mu$  le décalage Zeeman proportionnel au gradient de champ magnétique et qui dépend de la transition atomique considérée.

### 1.1.c Pression de radiation

Jusqu'à maintenant nous avons parlé d'effet Doppler et d'effet Zeeman mais nous n'avons jamais parlé de piégeage d'atome. Alors comment les concepts que nous venons d'aborder vont nous permettre de confiner des atomes ?

Pour cela nous allons utiliser l'émission spontanée des photons par les atomes (voir figure III.3). En effet, lorsqu'un atome absorbe un photon, il peut le réémettre de deux façons différentes. Soit il est réémis de façon stimulée, et l'atome se retrouve exactement dans le même état qu'avant l'absorption, soit il est réémis de façon spontanée. Dans ce dernier cas, le photon est émis dans une direction quelconque de l'espace. L'atome voit donc son impulsion changer légèrement car l'impulsion qu'il a gagnée par l'absorption du photon est différente de celle perdue pendant l'émission. Lors d'un cycle absorption/émission

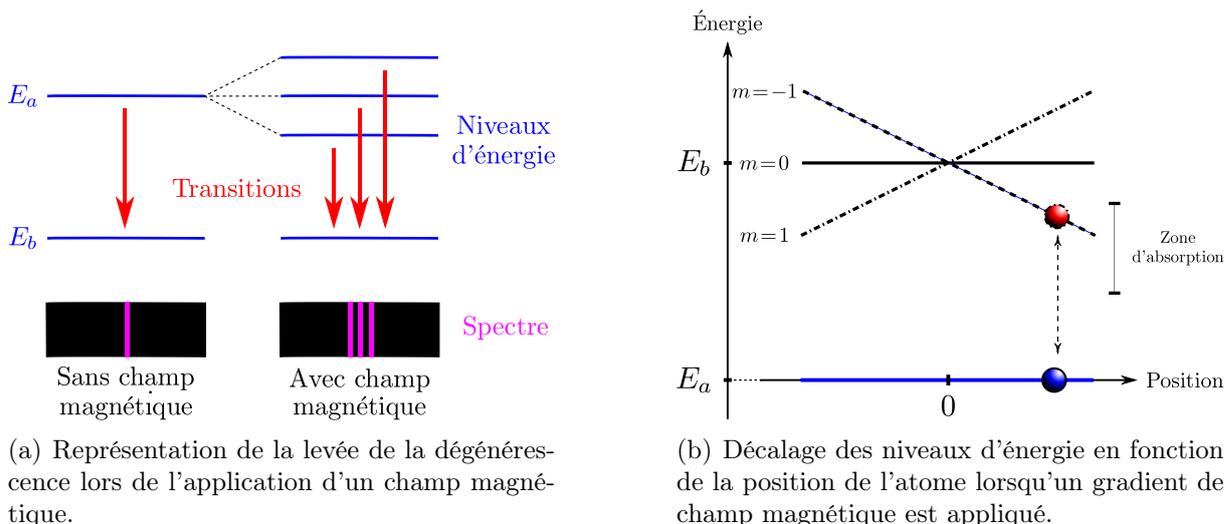


FIGURE III.2 – Effet Zeeman.

spontanée il y a une modification de l'impulsion de l'atome et c'est grâce à cela que nous allons piéger les particules.

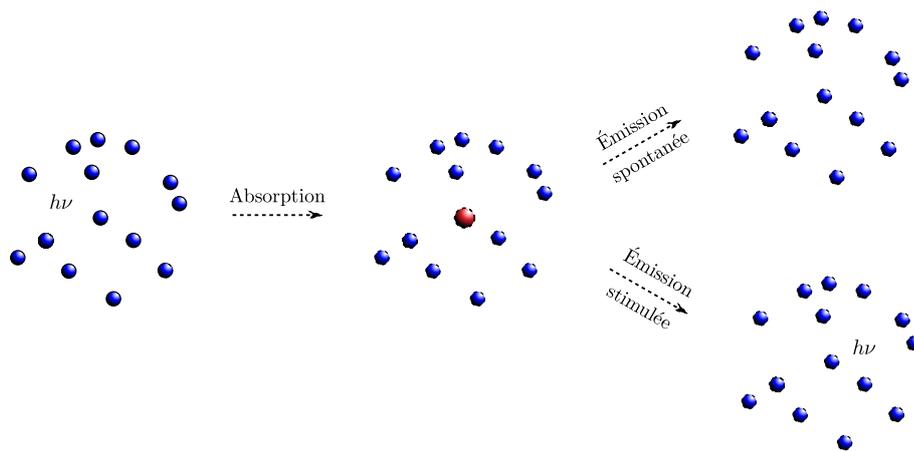


FIGURE III.3 – Illustration des phénomènes d'émission spontanée et stimulée ; le premier étant à l'origine du confinement des atomes dans le piège. Il est aussi responsable de l'atténuation de l'intensité laser qui se propage dans le système et d'une interaction répulsive entre atomes (voir paragraphe 1.2).

En ce qui concerne la vitesse des atomes, cela se fait en jouant sur le signe du désaccord  $\delta$ . Nous avons vu que l'effet Doppler permet de sélectionner les photons absorbés par l'atome :

- Si  $\delta < 0$  alors l'atome absorbera plus de photons avec une direction opposée à la sienne,
- Si  $\delta > 0$  alors l'atome absorbera plus de photons avec une direction identique à la sienne.

De plus, comme à chaque cycle absorption/émission spontanée l'atome conserve une partie de la quantité de mouvement du photon incident, nous pouvons de cette manière modifier la vitesse des atomes. Pour diminuer la vitesse d'un atome, il suffit de fixer  $\delta < 0$ . Si

l'atome a par exemple une vitesse positive, il absorbera plus de photons provenant du laser à sa droite. Comme les photons du laser de droite ont des vitesses négatives, celle de l'atome va diminuer à chaque cycle absorption/émission spontanée. Nous venons de confiner dans l'espace des vitesses les atomes car c'est seulement lorsque la vitesse d'un atome est nulle<sup>5</sup> qu'il absorbe autant de photons provenant de deux directions opposées. Pour confiner les atomes en espace il faut utiliser cette fois l'effet Zeeman en favorisant l'absorption de photons avec la bonne polarisation. En reprenant la figure III.2(b) nous voyons que pour ramener un atome avec  $x > 0$  vers zéro, il faut que les photons arrivant de  $x > 0$  soient polarisés de sorte que l'atome arrive sur le sous-niveau  $m = 1$  et ceux provenant de  $x < 0$  arrivent sur le sous-niveau  $m = -1$ . Dans ce cas, l'atome absorbera plus de photons provenant de  $x > 0$  que de  $x < 0$ . Il sera ramené vers  $x = 0$ .

En combinant l'effet Doppler et l'effet Zeeman (voir les paragraphes 1.1.a et 1.1.b) pour une paire de lasers contra-propageants selon la direction  $\mathbf{e}_x$ , nous obtenons l'expression de la force exercée par un laser sur un atome, appelée communément pression de radiation [MS99] :

$$\mathbf{F}_{rad}(x, v_x) = \frac{\hbar k_L \Gamma I_0}{2m I_s} \left\{ \frac{1}{1 + 4 \left( \frac{\delta - k_L v_x - \mu x}{\Gamma} \right)^2} - \frac{1}{1 + 4 \left( \frac{\delta + k_L v_x + \mu x}{\Gamma} \right)^2} \right\} \mathbf{e}_x, \quad (\text{III.1})$$

avec

- $I_0$  l'intensité des lasers avant atténuation,
- $I_s$  l'intensité de saturation des lasers<sup>6</sup>,
- $\Gamma$  la largeur naturelle de raie de la transition atomique à résonance pour  $\omega_{at}$ ,
- $k_L$  le nombre d'onde des lasers.

#### 1.1.d Équation de Vlasov-Fokker-Planck

Grâce à l'équation (III.1) nous obtenons une première modélisation d'un P.M.O. via l'équation de Vlasov-Fokker-Planck :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}}(\mathbf{v}f) + \nabla_{\mathbf{v}}(\mathbf{F}_{rad}f) = D\Delta_{\mathbf{v}}f, \quad (\text{III.2})$$

avec  $D$  un coefficient de diffusion en vitesse qui apparaît à cause des cycles absorption/émission de photons (voir par exemple [Bel07] chapitre 14). Plusieurs effets contribuent à ce coefficient de diffusion. Par exemple, le fait que le nombre de photons absorbé n'est pas le même pour tous les atomes ou bien que lors d'une émission spontanée un photon est émis dans une direction arbitraire ; cela conduisant à de petites forces de recul aléatoires. Tous ces effets se traduisent par un *bruit* en vitesse qui est modélisé par le coefficient de diffusion. *A priori* le coefficient  $D$  dépend de la position et de la vitesse des

5. En réalité, la vitesse des atomes n'est jamais vraiment nulle car les cycles d'absorption/émission spontanées sont à l'origine d'un *bruit* en vitesse qui limite l'efficacité du piège. Nous introduirons dans la suite un coefficient de diffusion  $D$  pour justement prendre cela en compte [AR97, Bel07].

6. L'intensité de saturation est celle pour laquelle le nombre d'absorptions et d'émissions stimulées est égale au nombre d'émissions spontanées [CF02].

atomes. Cependant, lorsque la distribution en vitesse des atomes est relativement étroite<sup>7</sup> ( $k_L|\mathbf{v}| \leq \Gamma$ ), le coefficient de diffusion à  $|\mathbf{v}| = 0$  constitue une très bonne approximation [AR97]. De la même manière, il est possible, au premier ordre, de se ramener à un coefficient de diffusion qui ne dépend pas de la position [DLN<sup>+</sup>94].

L'équation (III.2) devrait permettre d'étudier l'évolution du P.M.O. mais l'expression de la force de radiation  $\mathbf{F}_{rad}$ , donnée par (III.1), est difficile à utiliser. Une façon de simplifier les choses est de considérer que la vitesse et la position des atomes sont suffisamment petites<sup>8</sup> pour considérer l'approximation linéaire de l'équation (III.1).

Au final, la force de radiation est interprétée comme un piège harmonique et une friction :

$$\mathbf{F}_{rad}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = -\omega_0^2 \mathbf{r} - \kappa_0 \mathbf{v} + \text{ordre supérieur}, \quad (\text{III.3})$$

avec

$$\begin{cases} \omega_0^2 &= -\frac{16\delta\mu}{\Gamma^2} \frac{\hbar k_L \Gamma}{2m} \frac{I_0}{I_s} \frac{1}{(1 + 4\frac{\delta^2}{\Gamma^2})^2}, \\ \kappa_0 &= -\frac{16\delta k_L}{\Gamma^2} \frac{\hbar k_L \Gamma}{2m} \frac{I_0}{I_s} \frac{1}{(1 + 4\frac{\delta^2}{\Gamma^2})^2} = \frac{k_L}{\mu} \omega_0^2. \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

L'équation de Vlasov-Fokker-Planck (III.2) devient :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}}(\mathbf{v}f) - \omega_0^2 \mathbf{r} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = \kappa_0 \nabla_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}f) + D \Delta_{\mathbf{v}} f. \quad (\text{III.5})$$

Tant que le piège magnéto-optique ne contient pas énormément d'atomes, l'équation (III.5) décrit assez bien le système. Cependant, il faut très rapidement prendre en compte d'autres effets quand le nombre d'atomes augmente pour continuer à avoir un modèle correct.

Nous pouvons facilement montrer que lorsque le système est décrit par l'équation (III.5), il converge vers une distribution stationnaire gaussienne en espace et vitesse

$$f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{N}{(\sqrt{2\pi} L_{gauss})^3} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{|\mathbf{r}|^2}{L_{gauss}^2}\right) \times \left(\frac{\kappa_0}{2\pi D}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\kappa_0}{D} \frac{|\mathbf{v}|^2}{2}\right), \quad (\text{III.6})$$

dont la taille caractéristique  $L_{gauss} = \omega_0 \sqrt{D/\kappa_0}$  ne dépend pas du nombre d'atomes  $N$  (seule la densité en dépend).

## 1.2 Correction du modèle Doppler pour les grands P.M.O.

---

### 1.2.a Atténuation de la pression de radiation

Il est important de remarquer que l'expression de la pression de radiation (III.1) est obtenue en considérant que chaque atome interagit indépendamment des autres atomes avec la paire de lasers [MS99]. Or dans les grands pièges magnéto-optiques nous pouvons

---

7. Dans le cas que nous étudierons dans la suite, *i.e.* pour des atomes de Rubidium en considérant la transition  $F = 3 \rightarrow F' = 4$ , nous avons  $k_L \simeq 8 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$  et  $\Gamma \simeq 2\pi \times 6 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$ . Quand enfin on garde en tête que la vitesse des atomes est de l'ordre de la dizaine de centimètres par seconde, nous pouvons affirmer sans problème que la distribution en vitesse des atomes est relativement étroite.

8. Plus précisément, on se place dans les limites :  $k_L v_i / \delta \ll 1$  et  $\mu r_i / \delta \ll 1$ , avec  $r_i$  et  $v_i$  les composantes de  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{v}$ .

avoir plus de  $10^9$  atomes. À cause de la présence des autres atomes, il faut prendre en compte l'atténuation des faisceaux lasers lorsqu'ils parcourent le système ; celle-ci provenant de l'émission spontanée des atomes qui renvoie les photons absorbés dans toutes les directions de l'espace.

Dans la suite, nous utiliserons l'expression de la force de radiation corrigée :

$$\mathbf{F}_{rad}[f](x, v) = \frac{\hbar k_L \Gamma}{2m} \left\{ \frac{1}{1 + 4 \left( \frac{\delta - k_L v - \mu x}{\Gamma} \right)^2} \frac{I_+[f](x)}{I_s} - \frac{1}{1 + 4 \left( \frac{\delta + k_L v + \mu x}{\Gamma} \right)^2} \frac{I_-[f](x)}{I_s} \right\} \mathbf{e}_x, \quad (\text{III.7})$$

avec

$$\frac{dI_{\pm}}{dx}[f](x) = - \int_{\mathbb{R}} \sigma_{\pm}(x', v') I_{\pm}[f](x) f(x', v', t) dv', \quad (\text{III.8})$$

où  $\sigma_{\pm}(x, v)$  sont les sections efficaces d'absorptions des photons lasers par les atomes. Elles sont données par

$$\sigma_{\pm}(x, v) = \frac{\sigma_{res}}{1 + 4 \left( \frac{\delta \mp k_L v \mp \mu x}{\Gamma} \right)^2}, \quad (\text{III.9})$$

avec  $\sigma_{res} = 3\lambda^2/2\pi$  la section efficace d'absorption à résonance.

Les expressions des intensités le long du système peuvent être données explicitement<sup>9</sup> :

$$\begin{cases} I_+[f](x) = I_0 \exp \left[ - \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^x \sigma_+(x', v') f(x', v', t) dx' dv' \right], \\ I_-[f](x) = I_0 \exp \left[ - \int_{\mathbb{R}} \int_x^{\infty} \sigma_-(x', v') f(x', v', t) dx' dv' \right], \end{cases} \quad (\text{III.10})$$

avec  $I_0$  l'intensité des lasers avant atténuation, *i.e.*  $I_0 = I_+[f](-\infty) = I_-[f](+\infty)$ .

Dans la suite, nous allons faire une hypothèse simplificatrice et remplacer les sections efficaces d'absorptions  $\sigma_{\pm}$  par la section efficace d'absorption :

$$\sigma = \sigma_{\pm}(0, 0) = \sigma_{res} \times \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + 4\delta^2}. \quad (\text{III.11})$$

L'expression de la pression de radiation (III.7) prend en compte l'atténuation de l'intensité laser *via* l'intégrale de la densité de particules sur la distance que le laser doit parcourir avant d'atteindre l'atome considéré.

Pour finir, nous devons considérer la force de radiation globale créée par la somme des trois paires de lasers qui composent le piège magnéto-optique. Il s'agit simplement d'ajouter la contribution de chaque direction donnée par l'équation (III.10) :

9. En réalité elles dépendent toujours de la distribution  $f$  qui, elle, n'est pas connu explicitement.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_{rad}[f](\mathbf{r}, \mathbf{v}) = & \frac{\hbar k_L \Gamma I_0}{2m I_s} \left\{ \frac{\exp\left(-\sigma \int_{-\infty}^x \rho(x', y, z, t) dx'\right)}{1 + 4 \left(\frac{\delta - k_L v_x - \mu x}{\Gamma}\right)^2} - \frac{\exp\left(-\sigma \int_x^{\infty} \rho(x', y, z, t) dx'\right)}{1 + 4 \left(\frac{\delta + k_L v_x + \mu x}{\Gamma}\right)^2} \right\} \mathbf{e}_x \\
 + & \frac{\hbar k_L \Gamma I_0}{2m I_s} \left\{ \frac{\exp\left(-\sigma \int_{-\infty}^y \rho(x, y', z, t) dy'\right)}{1 + 4 \left(\frac{\delta - k_L v_y - \mu y}{\Gamma}\right)^2} - \frac{\exp\left(-\sigma \int_y^{\infty} \rho(x, y', z, t) dy'\right)}{1 + 4 \left(\frac{\delta + k_L v_y + \mu y}{\Gamma}\right)^2} \right\} \mathbf{e}_y \\
 + & \frac{\hbar k_L \Gamma I_0}{2m I_s} \left\{ \frac{\exp\left(-\sigma \int_{-\infty}^z \rho(x, y, z', t) dz'\right)}{1 + 4 \left(\frac{\delta - k_L v_z - \mu z}{\Gamma}\right)^2} - \frac{\exp\left(-\sigma \int_z^{\infty} \rho(x, y, z', t) dz'\right)}{1 + 4 \left(\frac{\delta + k_L v_z + \mu z}{\Gamma}\right)^2} \right\} \mathbf{e}_z,
 \end{aligned} \tag{III.12}$$

avec  $\rho(\mathbf{r}, t) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}$ .

À ce stade nous devons préciser que pour écrire l'équation (III.12) nous avons supposé que les bobines en configuration anti-Helmholtz jouaient le même rôle dans toutes les directions, *via* le même paramètre  $\mu$ . Pour être tout à fait exact ce n'est pas le cas. Cependant il devient difficile, voir impossible, de proposer un modèle utilisable analytiquement sans faire cette hypothèse. Nous irons d'ailleurs plus loin dans le paragraphe 1.4.b.i où nous supposerons que le système est à symétrie sphérique.

*N.B. : Nous reviendrons plus en détails au paragraphe 2.1.b sur l'atténuation des lasers qui est à l'origine d'un nouvel effet : l'effet d'ombre, qui peut-être vu dans certaines limites comme une interaction effective à deux corps.*

### 1.2.b Diffusion multiple

Nous venons de voir que l'intensité laser diminue le long du nuage car les atomes absorbent les photons lasers et les réémettent de manière isotrope lors d'une émission spontanée (voir figure III.3). Donc d'une certaine manière les atomes redistribuent, dans toutes les directions, une partie de l'intensité laser<sup>10</sup>. Par conséquent il est tout à fait envisageable que des atomes du système absorbent les photons réémis par leur camarades : on parle alors de diffusion multiple. Ce processus se reproduit en chaîne de sorte qu'il est possible d'avoir des diffusions doubles, triples ... au sein du nuage (voir figure III.4). Cependant comme la probabilité de ces phénomènes diminue lorsque le nombre de diffusions augmente, les modèles standards [SWW91] se limitent aux diffusions doubles. C'est ce que nous ferons également<sup>11</sup>.

Lors d'une diffusion double, le premier atome joue le rôle d'une source de photons. En

10. Les photons réémis par les lasers n'ont pas exactement la même fréquence, ce n'est donc pas vraiment l'intensité laser qui est redistribuée.

11. Dans le cas d'une très forte absorption par le nuage des faisceaux lasers, négliger les ordres plus élevés de la diffusion multiple pourrait ne plus être raisonnable. Cependant, nous n'avons pas trouvé de références qui remettent en doute le modèle simplifié du moins pour les régimes de paramètres que nous considérerons dans la suite.

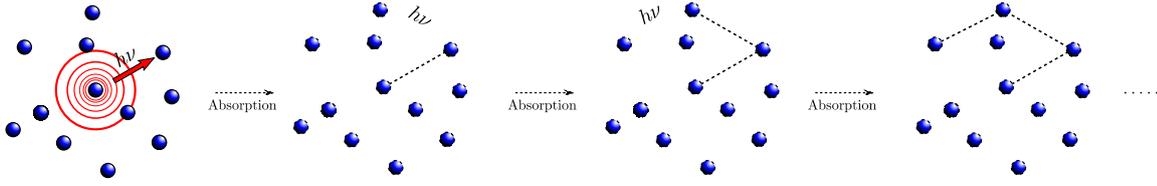


FIGURE III.4 – Illustration du phénomène de diffusion multiple. Le gradient de couleur utilisé pour représenter les réémissions spontanées traduit le fait que les diffusions multiples d'ordre élevé deviennent de plus en plus rares.

moyennant sur le temps, *i.e.* sur un grand nombre de diffusions multiples<sup>12</sup>, nous pouvons voir cet atome comme un laser de faible intensité qui émet dans toutes les directions. Le second atome qui réabsorbe le photon peut à son tour le réémettre de façon stimulée ou spontanée. Si c'est le second cas qui se produit alors le premier atome à exercé l'équivalent d'une force répulsive sur le deuxième atome. Nous retrouvons exactement le même phénomène à l'origine du confinement des atomes par la pression de radiation que nous avons vu au paragraphe 1.1.c où les lasers poussent les atomes.

D'autre part, l'émission spontanée est isotrope et par conséquent l'intensité réémise diminue comme<sup>13</sup>  $1/r^2$ . Au final nous sommes confrontés à une interaction répulsive entre deux atomes qui décroît en  $1/r^2$ . Autrement dit, il s'agit d'une interaction de type Coulombien entre atomes. De ce point de vue là, le nuage se rapproche d'un plasma non neutre piégé et nous pouvons écrire que les atomes interagissent par la force à deux corps [WSW90, SWW91, SCF92] :

$$\mathbf{F}_{bin}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\hbar k_L \Gamma}{2} \frac{I_0}{I_s} \frac{\sigma_{dm}}{4\pi} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (\text{III.13})$$

avec  $\sigma_{dm}$  la section efficace d'absorption d'un photon réémis par un atome, *i.e.* la section efficace d'absorption associée à la diffusion multiple. Notons que nous pouvons également faire apparaître la section efficace d'absorption  $\sigma_L$  d'un photon laser par un atome, car nous avons (voir par exemple [PSDJ00]) :

$$\frac{\hbar k_L \Gamma}{2 I_s} = \frac{\sigma_L}{c}, \quad (\text{III.14})$$

avec  $c$  la vitesse de la lumière.

### 1.3 Équation de Vlasov-Fokker-Planck pour les grands P.M.O.

À partir des nouveaux effets que nous avons décrits au paragraphe 1.2, nous pouvons écrire une nouvelle équation de Vlasov-Fokker-Planck identique à l'équation (III.2) à la

12. Le nombre de photons réémis de façon spontanée par un atome est donné par [SCF92] :  $\frac{\Gamma}{2} \frac{I_0}{I_s} \frac{1}{1 + \frac{I_0}{I_s}}$ .

Soit pour une saturation  $I_0/I_s = 0,02$  et pour la transition  $F = 3 \rightarrow F' = 4$  de l'atome de Rubidium ( $\Gamma = 2\pi \times 6 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$ ), environ  $3,5 \times 10^5$  photons sont émis par seconde. Sachant que la précision des mesures expérimentales est souvent de l'ordre d'une dizaine de millisecondes, il n'y a pas de souci à moyenner les cycles absorption/émission stimulée.

13. Les photons réémis se répartissent en moyenne sur une sphère, donc sur une surface proportionnelle à  $r^2$ .

différence que la force  $\mathbf{F}_{rad}$  est donnée par l'équation (III.12) et qu'il faut ajouter la contribution de la diffusion multiple :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) + \nabla_{\mathbf{r}}(\mathbf{v}f(\mathbf{r}, \mathbf{v})) + \nabla_{\mathbf{v}} \cdot \left\{ \left( \mathbf{F}_{rad}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) + \mathbf{F}_{int}[f](\mathbf{r}) \right) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \right\} = D\Delta_{\mathbf{v}}f(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \quad (\text{III.15})$$

avec

$$\mathbf{F}_{int}[f] = \iint \mathbf{F}_{bin}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t) d\mathbf{r}' d\mathbf{v}', \quad (\text{III.16})$$

et  $\mathbf{F}_{bin}$  donnée par l'équation (III.13).

Bien que nous ayons écrit une équation qui doit modéliser le système, il n'en reste pas moins que nous sommes incapables de nous en servir telle quelle. En effet, rien que pour l'équation (III.2) nous avons eu recours à la linéarisation de la force de radiation. Il ne faut donc pas espérer grand chose de l'équation (III.15) sans simplification.

La première simplification qui vient à l'esprit consiste tout simplement à linéariser une nouvelle fois en vitesse et en position (voir paragraphe 1.1.d). De plus, en se limitant aux effets dominants, il est possible de voir l'absorption comme une force effective de type gravité<sup>14</sup> entre particules [Dal88]. Dès lors il est possible d'en tenir compte en modifiant la constante d'interaction de la force issue de la diffusion multiple [WSW90, SCF92]. Concrètement, cela se fait en redéfinissant le terme  $\mathbf{F}_{bin}$  par :

$$\mathbf{F}_{bin}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left( \underbrace{\frac{\hbar k_L \Gamma I_0 \sigma_{dm}}{2 I_s 4\pi}}_{\text{diffusion multiple}} - \underbrace{C_{te}}_{\text{absorption}} \right) \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (\text{III.17})$$

L'équation de Vlasov-Fokker-Planck que nous obtenons est

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}}(\mathbf{v}f) - \omega_0^2 \mathbf{r} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f + \mathbf{F}_{int}[f] \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = \kappa_0 \nabla_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}f) + D\Delta_{\mathbf{v}}f. \quad (\text{III.18})$$

Nous remarquons que, mis à part la contribution de la diffusion multiple<sup>15</sup>, l'équation (III.18) est identique à l'équation (III.5). Cependant, cela change beaucoup de chose ! En étudiant l'équation (III.5), nous avons vu que l'équilibre thermodynamique est donné par une distribution gaussienne en espace et vitesse (voir la partie 1.1.d et en particulier l'équation (III.6)). Par contre, à cause des effets collectifs induits par la diffusion multiple, ce n'est plus le cas de l'équation (III.18). Malgré tout, il nous est toujours possible de déterminer analytiquement l'équilibre thermodynamique dans deux cas limites [LGPK08] :

14. En ne considérant que l'ordre dominant en absorption, nous pouvons développer les intégrales de l'équation (III.12) :

$$\exp\left(-\sigma \int_{-\infty}^x \rho(x', y, z, t) dx'\right) \simeq 1 - \sigma \int_{-\infty}^x \rho(x', y, z, t) dx'.$$

Comme nous avons également linéarisé en vitesse et espace, le premier terme va participer aux termes de piégeage harmonique et de friction. En ce qui concerne le second terme, nous pouvons remarquer que la divergence de cette contribution est proportionnelle à la densité  $\rho$ . Ce résultat est typiquement celui obtenu lorsque l'on calcule la divergence d'une force d'interaction entre particules de type Coulombien ou de type gravité. En vertu de ce résultat, il est commun de considérer l'effet de l'absorption comme une interaction effective attractive de type gravitationnel entre particules. Remarquons que pour cela nous devons négliger la contribution rotationnelle qui s'annule lors du calcul de la divergence.

15. Rappelons que les effets d'absorptions sont pris en compte de manière implicite en modifiant la constante d'interaction associée à la diffusion multiple.

- Si la température domine les effets associés à la diffusion multiple, l'équilibre thermodynamique sera donné par une gaussienne.
- Si ce sont les effets dus à la diffusion multiple ou autrement dit les interactions Coulombiennes entre particules qui dominent, l'équilibre thermodynamique  $f_0$  sera une fonction constante par morceaux en espace et gaussienne en vitesse [DO99, AYS03] :

$$\rho_0(\mathbf{r}) = \int f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} = \begin{cases} \frac{N}{\frac{4}{3}\pi L_{int}^3} & \text{si } |\mathbf{r}| \leq L_{int} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (\text{III.19})$$

$$\text{avec } L_{int} = \left( \frac{N}{4\pi\omega_0^2} \underbrace{\frac{\hbar k_L \Gamma}{2} \frac{I_0}{I_s} \frac{\sigma_{dm}}{4\pi}}_{\text{Voir (III.13)}} \right)^{1/3} \text{ la taille du système.}$$

En prenant en compte le rôle de la diffusion multiple, nous sommes capable de schématiser le changement de comportement du système lorsque le nombre d'atomes augmente. Un petit système suit une distribution gaussienne car le rôle de la diffusion multiple est faible. Lorsque le nombre d'atomes augmente, la taille du système ne change quasiment pas ( $L_{gauss}$  ne dépend pas de  $N$ ) ; seule la densité évolue en augmentant avec  $N$ . Passé un seuil, la diffusion multiple devient importante et le système devient proche d'une distribution en plateau. La valeur maximale de la densité ne change plus. Par contre, la taille du système croît en  $L_{int} \propto N^{1/3}$  [WSW90].

Bien que ce nouveau modèle permet d'aller plus loin dans la compréhension des P.M.O. avec beaucoup d'atomes, lui aussi a ses limites. En effet, si nous augmentons encore le nombre d'atomes, d'autres effets non pris en compte par le modèle apparaissent. Un exemple impressionnant est l'apparition d'oscillations auto-entretenues de la taille du système [LMK06]. Pour expliquer cela, les auteurs de [LMK06] ont développé un modèle très simple en se basant uniquement sur les atomes situés aux bords du système. En faisant cela, ils n'ont plus besoin de linéariser en vitesse et position. Ils peuvent même prendre en compte l'atténuation des lasers. Au final, il arrive à prédire de façon relativement précise le seuil à partir duquel les oscillations auto-entretenues apparaissent. Leur résultats semblent confirmer que l'équation (III.15) permet de bien décrire le système mais que ce sont les hypothèses faites ensuite qui posent problème.

D'autre part, les auteurs de [PLK06] ont observé, grâce à des simulations numériques pour un modèle cinétique *assez proche* de l'équation (III.15), que la friction ressentie par les atomes dépendait de leur position et de leur vitesse. Celle-ci pouvant même être négative dans certaines régions. D'après leur conclusion c'est justement ces zones négatives qui permettent au système d'osciller de manière auto-entretenu.

En partant de ces constats, nous avons voulu d'une part aller plus loin que la linéarisation aux premiers ordres et, d'autre part, étudier le rôle de la friction sur la dynamique du système. Cependant, lorsque l'on souhaite aller au delà de l'approximation linéaire on se retrouve rapidement bloqué sans pouvoir faire grand chose . . . si ce n'est des simulations numériques.

Afin de remédier à cela, nous avons choisi de nous focaliser sur les modes d'oscillations de respiration et du centre de masse que nous avons déjà étudiés en détails au chapitre II. Nous y avons vu qu'il est possible d'obtenir des informations pertinentes sur ces deux modes à partir de peu d'informations sur le système et c'est pourquoi nous avons pour-

suivi dans cette voie.

## 1.4 Oscillations de respiration

---

Dans la suite nous allons nous intéresser au mode de respiration d'un grand P.M.O. afin de retrouver dans un premier temps les résultats de [LMK06, LGPK08] mais aussi de trouver de nouveaux régimes non explorés.

Pour cela nous allons considérer que, puisque nous travaillons avec de grands pièges magnéto-optiques, la linéarisation en espace est beaucoup moins raisonnable que celle en vitesse. Avant toute chose nous allons comparer la validité de ces deux linéarisations pour les régimes expérimentaux qui nous intéressent. Pour cela il faut utiliser l'expression de la force de radiation (III.12). Pour simplifier, nous allons considérer une seule direction de l'espace et négliger le rôle de l'absorption. Nous avons alors :

$$\mathbf{F}_{rad}[f](\mathbf{r}, \mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_x \propto \frac{1}{\Gamma^2 + 4(\delta - k_L v_x - \mu x)^2}. \quad (\text{III.20})$$

La linéarisation en espace et vitesse est raisonnable dès lors que :

$$|k_L v_x + \mu x| \ll \sqrt{\delta^2 + \Gamma^2/4}. \quad (\text{III.21})$$

Pour que la linéarisation en vitesse soit raisonnable quelque soit la position des atomes et en particulier pour ceux proches de l'origine, il suffit que

$$|\mathbf{v}| \ll \frac{\sqrt{\delta^2 + \Gamma^2/4}}{k_L} \stackrel{\text{déf.}}{=} V_{lin}. \quad (\text{III.22})$$

En utilisant la valeur  $k_L \simeq 8 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$ , nous obtenons pour un désaccord  $\delta$  compris entre  $-\Gamma$  et  $-\Gamma$  :

$$5 \text{ m/s} < V_{lin} < 28 \text{ m/s}. \quad (\text{III.23})$$

Enfin, il faut savoir que les atomes piégés ont des vitesses de l'ordre de quelques dizaines de centimètres par seconde pour conclure que l'hypothèse de linéarisation en vitesse devrait être acceptable.

En ce qui concerne la linéarisation en espace, les choses sont différentes à cause du fait que la taille du système devient importante. De la même manière que pour l'équation (III.22) nous devons satisfaire la relation suivante pour la linéarisation en espace :

$$|\mathbf{r}| \ll \frac{\sqrt{\delta^2 + \Gamma^2/4}}{\mu} \stackrel{\text{déf.}}{=} L_{lin}. \quad (\text{III.24})$$

Pour  $\mu \simeq 10^{10} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$  et un désaccord  $\delta$  compris une nouvelle fois entre  $-\Gamma$  et  $-\Gamma$ , nous obtenons<sup>16</sup> :

$$4 \text{ mm} < L_{lin} < 20 \text{ mm}. \quad (\text{III.25})$$

Enfin, comme la taille d'un grand piège magnéto-optique peut atteindre 1 cm de diamètre, l'hypothèse de linéarisation en espace est clairement moins bien vérifiée que celle en vitesse.

---

16. La valeur de  $\mu$  correspond à un gradient de champ magnétique  $\nabla B \simeq 10 \text{ G/cm}$ ; le gradient de champ magnétique  $\nabla B$  étant donné par  $\mu = 2\pi\mu_0 g \nabla B$  avec  $\mu_0 = 2,1 \times 10^6 \text{ G}^{-1}$  et  $g = 1,0$  une valeur effective du facteur de Landé pour la transition  $F = 3 \rightarrow F' = 4$  de l'atome Rb<sup>85</sup>.

Nous allons ainsi pousser plus loin le développement limité qui nous avait permis d'obtenir l'équation (III.3). Nous allons ainsi faire apparaître un terme de friction qui dépend de la position des particules.

Avant toute chose nous allons discuter des propriétés de l'équation de contrainte qui prédit le comportement du mode de respiration.

### 1.4.a Bifurcation de Hopf

Au vu du comportement observé dans [LMK06], les auteurs ont conclu que les oscillations auto-entretenues apparaissaient à cause d'une bifurcation de Hopf. Nous allons donc voir si nous sommes capables de retrouver cette bifurcation à partir de l'équation de contrainte (II.52) obtenue au chapitre II. Cette équation décrit l'évolution de la taille du système par la quantité  $\lambda(t)$  :

$$\ddot{\lambda} + \lambda\omega_0^2 - \frac{p}{\lambda^3}\omega_0^2 + (p-1)\frac{1}{\lambda^k}\omega_0^2 + \dot{\lambda}\frac{\langle\kappa(\lambda\mathbf{r})r_i^2\rangle_{f_0}}{\langle r_i^2\rangle_{f_0}} = 0, \quad (\text{III.26})$$

où pour toute fonction  $\chi$  de  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{v}$  nous avons :

$$\langle\chi(\mathbf{r}, \mathbf{v})\rangle_f = \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^6} \chi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v}. \quad (\text{III.27})$$

Le paramètre  $p$  est défini dans le paragraphe 2.1.c par :

$$p = \frac{1}{\omega_0^2} \frac{\langle v_j^2 \rangle_{f_0}}{\langle r_j^2 \rangle_{f_0}}, \quad (\text{III.28})$$

Cette équation s'applique si le système vérifie les hypothèses suivantes :

- les interactions entre atomes sont de degré d'homogénéité  $-k$  (voir la définition donnée par l'équation (II.21)),
- les atomes sont confinés dans un piège harmonique de fréquence typique  $\omega_0$ ,
- le système admet un état stationnaire  $f_0$  à symétrie sphérique.

Dans un premier temps, nous allons étudier la stabilité de l'état d'équilibre  $(\lambda, \dot{\lambda}) = (1, 0)$ , *i.e.* lorsque la taille du nuage ne varie pas dans le temps. En effet, pour espérer avoir une bifurcation de Hopf il faut que  $(\lambda, \dot{\lambda}) = (1, 0)$  passe d'un état d'équilibre stable à un état d'équilibre instable [HW99, HI11]. Pour cela, il suffit de linéariser l'équation (III.26) au voisinage de  $\lambda = 1$ . Nous obtenons la condition :

$$\begin{cases} \text{si } \langle\kappa(\mathbf{r})\mathbf{r}^2\rangle_{f_0} < 0, & \text{alors } (\lambda, \dot{\lambda}) = (1, 0) \text{ est instable,} \\ \text{si } \langle\kappa(\mathbf{r})\mathbf{r}^2\rangle_{f_0} > 0, & \text{alors } (\lambda, \dot{\lambda}) = (1, 0) \text{ est stable.} \end{cases} \quad (\text{III.29})$$

Le terme  $\langle\kappa(\mathbf{r})\mathbf{r}^2\rangle_{f_0}$  est la valeur moyenne de la friction ressentie par la distribution  $f_0$  d'atomes pondérée par  $\mathbf{r}^2$ <sup>17</sup>. La condition (III.29) permet tout de suite de conclure que

---

17. À cause du  $\mathbf{r}^2$  dans le terme  $\langle\kappa(\mathbf{r})\mathbf{r}^2\rangle_{f_0}$ , nous n'avons pas d'interprétation physique de ce dernier. Remarquez que ce n'est pas lié à la dimension de l'espace. Il apparaît même pour un système unidimensionnel.

même si la friction varie dans l'espace, nous ne pourrions observer des oscillations auto-entretenues que si elle peut devenir négative. Autrement,  $\langle \kappa(\mathbf{r})\mathbf{r}^2 \rangle_{f_0}$  reste toujours positif. Prenons l'exemple suivant en considérant que la friction  $\kappa(\mathbf{r})$  soit positive aux petites distances puis négative aux grandes distances. Nous pouvons imaginer que pour un petit nombre d'atomes le système soit stable car la friction  $\langle \kappa(\mathbf{r})\mathbf{r}^2 \rangle_{f_0}$  est positive. Par contre lorsque le nombre d'atomes augmente, certains explorent des régions de friction négatives. Au bout d'un moment la friction  $\langle \kappa(\mathbf{r})\mathbf{r}^2 \rangle_{f_0}$  devient négative et l'état de repos du système devient instable.

Bien que l'exemple ci-dessus semble consistant avec ce que nous recherchons, pour avoir une bifurcation de Hopf et des oscillations auto-entretenues, il faut que le système soit attiré par un cycle limite stable. Pour cela il faut satisfaire une seconde hypothèse qui, après quelques calculs [HI11], dépend du signe de<sup>18</sup> :

$$30 \left[ 1 - \frac{1+p}{3+p} \right] \langle \kappa(\mathbf{r})\mathbf{r}^2 \rangle_{f_0} + \left[ 14 - \frac{6(1+p)}{3+p} \right] \langle \kappa(\mathbf{r})\mathbf{r}^3 \rangle_{\nabla_{\mathbf{r}}f_0} + \langle \kappa(\mathbf{r})\mathbf{r}^4 \rangle_{\Delta_{\mathbf{r}}f_0}. \quad (\text{III.30})$$

- Si ce terme est négatif alors le cycle limite est instable,
- Si ce terme est positif alors le cycle limite est stable.

Notons que, comme pour le terme apparaissant dans la première condition (voir équation (III.29)), nous n'avons pas d'interprétation physique des deux contributions :  $\langle \kappa(\mathbf{r})\mathbf{r}^3 \rangle_{\nabla_{\mathbf{r}}f_0}$  et  $\langle \kappa(\mathbf{r})\mathbf{r}^4 \rangle_{\Delta_{\mathbf{r}}f_0}$ .

#### 1.4.b Application aux grands P.M.O.

Afin d'étudier le rôle du nombre d'atomes dans l'existence d'une bifurcation de Hopf nous allons utiliser les résultats du paragraphe précédent. Avant cela, il nous faut être capables de modéliser le système à l'aide d'une équation de Vlasov-Fokker-Planck<sup>19</sup>. Pour cela, nous allons repartir de l'équation (III.15) et faire de nouvelles hypothèses.

##### i) Profil de friction

Comme nous l'avons vu, puisque nous considérons de grands P.M.O. il semble *a priori* raisonnable de penser que la linéarisation en espace est plus douteuse que celle en vitesse. Nous allons donc utiliser l'expression de la force de radiation suivante :

$$\mathbf{F}_{rad}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \simeq -\omega_0^2 \mathbf{r} - \kappa(\mathbf{r})\mathbf{v}. \quad (\text{III.31})$$

---

18. Pour un système avec  $d$  dimension d'espace, il faut étudier le signe de :

$$(2+d) \left[ 3+d - \frac{6(1+p)}{3+p} \right] \langle \kappa(\mathbf{r})\mathbf{r}^2 \rangle_{f_0} + \left[ 5+3d - \frac{6(1+p)}{3+p} \right] \langle \kappa(\mathbf{r})\mathbf{r}^2 \rangle_{\nabla_{\mathbf{r}}f_0} + \langle \kappa(\mathbf{r})\mathbf{r}^2 \rangle_{\Delta_{\mathbf{r}}f_0}.$$

19. Rappelons que pour écrire l'équation de contrainte (III.26), précédemment obtenue au chapitre II, nous sommes partis de la première équation de la hiérarchie BBGKY ; l'équation de Vlasov étant obtenue à partir de celle-ci lorsqu'on suppose que les corrélations entre atomes sont faibles.

Avec l'expression suivante pour  $\kappa(\mathbf{r})$  :

$$\kappa(\mathbf{r}) = -\frac{4\hbar k_L^2 I_0}{\Gamma m I_s} \left\{ \frac{(\delta - \mu r) e^{-\sigma(\int_0^r \rho(\mathbf{r}',t) dr' + \int_0^\infty \rho(\mathbf{r}',t) dr')}}{\left[1 + 4\left(\frac{\delta - \mu r}{\Gamma}\right)^2\right]^2} + \frac{(\delta + \mu r) e^{-\sigma(\int_r^\infty \rho(\mathbf{r}',t) dr')}}{\left[1 + 4\left(\frac{\delta + \mu r}{\Gamma}\right)^2\right]^2} \right\}, \quad (\text{III.32})$$

avec  $r = |\mathbf{r}|$ .

Comme nous pouvons le voir, nous considérons toujours que les atomes sont confinés dans un piège harmonique de fréquence  $\omega_0$  ce qui nous permettra d'utiliser l'équation de contrainte. En ce qui concerne la friction, nous avons dû faire un certain nombre d'hypothèses/approximations pour l'obtenir. En écrivant la force de radiation obtenue dans l'approximation linéaire selon la direction  $\mathbf{e}_x$  :

$$\mathbf{F}_{rad}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_x \simeq -\omega_0^2 x - \kappa_0 v_x, \quad (\text{III.33})$$

nous remarquons que

$$\kappa_0 = -\frac{\partial (\mathbf{F}_{rad}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_x)}{\partial v_x}. \quad (\text{III.34})$$

C'est dans cet esprit que nous avons défini la nouvelle friction le long de l'axe des  $x$  par

$$\kappa(\mathbf{r} = (x, 0, 0)) = -\left. \frac{\partial (\mathbf{F}_{rad}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_x)}{\partial v_x} \right|_{(\mathbf{r}=(x,0,0), \mathbf{0})}. \quad (\text{III.35})$$

La friction donnée par l'équation (III.35) est obtenue en évaluant l'expression en  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ . Il existe à cela deux raisons complètement différentes. La première provient de la linéarisation en vitesse à l'ordre un que l'on considère encore comme acceptable contrairement à celle en espace. La seconde est une raison *technique* qui n'a pas de justification hormis le fait que sans elle nous ne pouvons rien faire : l'équation de contrainte tolère seulement des profils de friction qui dépendent de la position.

En utilisant les relations (III.12) et (III.35), nous obtenons :

$$\kappa(x, 0, 0) = -\frac{4\hbar k_L^2 I_0}{\Gamma m I_s} \left\{ \frac{(\delta - \mu x) e^{-\sigma \int_{-\infty}^x \rho(x', 0, 0, t) dx'}}{\left[1 + 4\left(\frac{\delta - \mu x}{\Gamma}\right)^2\right]^2} + \frac{(\delta + \mu x) e^{-\sigma \int_x^\infty \rho(x', 0, 0, t) dx'}}{\left[1 + 4\left(\frac{\delta + \mu x}{\Gamma}\right)^2\right]^2} \right\}, \quad (\text{III.36})$$

Enfin, l'équation de contrainte ne peut-être utilisée que quand la distribution d'atome  $f$  est à symétrie sphérique. C'est pourquoi nous allons symétriser le profil de friction. Concrètement, cela revient à supposer que les atomes sont confinés par une infinité de lasers centrés sur le système et orientés dans toutes les directions de l'espace. Une nouvelle fois, il s'agit d'une hypothèse *technique* qui n'a pas, ou peu, de justification physique mais qui reste indispensable pour notre approche analytique. En faisant cette hypothèse, l'équation (III.36) se généralise à toutes les directions de l'espace et nous obtenons l'expression (III.32).

### ii) Cas limites

Comme nous l'avons vu à la partie 2.3 du chapitre II, dès que la friction n'est plus constante il faut connaître l'état stationnaire  $f_0$  du système pour utiliser l'équation de contrainte. Cependant, nous avons également vu qu'une connaissance approximative de  $f_0$  permet tout de même d'extraire des informations pertinentes sur l'évolution du système. C'est pourquoi nous allons considérer pour  $f_0$  les deux cas limites décrits au paragraphe 1.3.

$\alpha$  : Limite homogène

Lorsque ce sont les interactions Coulombiennes entre atomes qui dominent la dynamique du système, l'équilibre thermodynamique  $f_0$  est une fonction homogène en espace<sup>20</sup> et gaussienne en vitesse [DO99, AYS03] :

$$\rho_0(\mathbf{r}) = \int f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} = \begin{cases} \frac{N}{\frac{4}{3}\pi L_{int}^3} & \text{si } |\mathbf{r}| \leq L_{int} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (\text{III.37})$$

avec  $L_{int}$  la taille du nuage d'atomes.

Avant cela, afin d'obtenir une expression pour la friction subie par les atomes concrètement qui soit utilisable, nous allons devoir faire un certain nombre d'approximations supplémentaires. Nous allons introduire une nouvelle quantité qui est communément employée dans la communauté des atomes froids : l'épaisseur optique, que nous noterons  $b$  et qui est définie par :

$$\exp\left(-\sigma \int_0^\infty \rho(\mathbf{r}, t) dr\right) = \exp\left(-\frac{b}{2}\right). \quad (\text{III.38})$$

L'épaisseur optique va nous permettre d'une part de nous affranchir de la connaissance de  $\sigma$  et d'autre part de ne pas utiliser le nombre d'atome  $N$  en utilisant  $L_{int}$  à la place. Ce choix s'explique pour deux raisons. La première est que le nombre d'atomes dans le système n'est pas une quantité facile à mesurer et qu'en plus elle peut varier au cours d'une expérience. Il nous semble donc plus adapté d'utiliser la taille du système  $L_{int}$  qui est très simple à mesurer. D'autre part, l'épaisseur optique est une grandeur beaucoup plus parlante dans la communauté des atomes froids que  $\sigma$  qui a l'avantage d'être sans dimension.

Désormais nous pouvons introduire les autres approximations qui nous permettront d'utiliser le profil de friction (III.32). En effet, même si nous avons une expression analytique de celui-ci, nous sommes incapables de l'utiliser car  $\rho(\mathbf{r}, t)$  y apparaît. Pour remédier à cela :

1. nous allons utiliser le profil (III.37) dans l'équation (III.32). En effet, cette équation demande de connaître la densité  $\rho$  pour tout temps ce qui est impossible. Dans le cas contraire, ce que nous sommes en train de faire n'aurait aucun intérêt puisque nous aurions accès à toute l'information...
2. nous allons écrire des expressions approchées des intégrales de l'équation (III.32) en supposant que le gradient d'absorption le long du nuage est constant car  $\rho_0$  est constant. Nous aurons :

$$\exp\left(-\sigma \int_0^r \rho(\mathbf{r}', t) dr'\right) \simeq \begin{cases} \exp\left(-\frac{b}{2} \frac{r}{L_{int}}\right) & \text{si } r \leq L_{int} \\ \exp\left(-\frac{b}{2}\right) & \text{si } r > L_{int} \end{cases}. \quad (\text{III.39})$$

---

<sup>20</sup>. Nous admettons ici que le caractère variable de la friction ne modifie pas de manière significative cette propriété.

Il faut remarquer qu'il nous aurait été possible d'utiliser l'hypothèse sur la dynamique de respiration donné par les équations (II.13) et (II.14). En effet, nous aurions pu nous affranchir de  $\rho$  car :

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0 \left( \frac{\mathbf{r}}{\lambda(t)} \right), \quad (\text{III.40})$$

et ainsi faire apparaître une dépendance en  $\lambda$  dans les exponentielles. Nous n'avons envisagé cette possibilité que très récemment et il serait intéressant de reprendre les résultats de cette partie.

$\beta$  : Limite gaussienne

Le deuxième cas limite est obtenu lorsque c'est la température qui domine les autres effets. Dans ce cas, l'équilibre thermodynamique est donné par une gaussienne en espace et en vitesse. En notant  $L_{gauss}$  la taille typique du nuage dans cette limite, nous avons :

$$\rho_0(\mathbf{r}) = \frac{N}{(\sqrt{2\pi}L_{gauss})^3} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{r^2}{L_{gauss}^2}\right), \quad (\text{III.41})$$

avec  $r = |\mathbf{r}|$ .

De la même manière que pour la limite homogène, nous allons utiliser l'épaisseur optique  $b$  et la taille du système  $L_{gauss}$  à la place du nombre d'atomes  $N$  et de  $\sigma$ . Pour cela nous allons utiliser la relation suivante :

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{b}{2}\right) &= \exp\left(-\sigma \int_0^\infty \rho(\mathbf{r}, t) dr\right) \\ &= \exp\left(-\frac{\sigma}{2} \frac{N}{(\sqrt{2\pi}L_{gauss})^2}\right). \end{aligned} \quad (\text{III.42})$$

Enfin, nous allons faire la même approximation que pour la limite homogène en remplaçant dans les intégrales de l'équation (III.32) la densité à l'instant  $t$  :  $\rho(\mathbf{r}, t)$ , par la densité à l'équilibre :  $\rho_0(\mathbf{r})$ . Ainsi nous aurons :

$$\exp\left(-\sigma \int_0^r \rho(\mathbf{r}, t) dr\right) \simeq \exp\left\{-\frac{b}{\sqrt{2\pi}L_{gauss}} \int_0^r \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{r'}{L_{gauss}}\right)^2\right] dr'\right\}. \quad (\text{III.43})$$

Tout comme pour la limite homogène, nous aurions pu utiliser les équations (II.13) et (II.14) pour simplifier les termes issus de l'effet d'absorption. N'ayant envisagé cette possibilité que très récemment, il serait intéressant de reprendre les résultats de cette partie.

Grâce aux expressions approchées (III.39) et (III.43), nous sommes en mesure d'utiliser le profil de friction (III.32) pour étudier l'existence d'une bifurcation de Hopf.

### iii) Discussions

Dans cette section, nous allons appliquer l'équation de contrainte (III.26) pour déterminer si oui ou non notre modèle permet de retrouver le régime d'oscillations auto-entretenues *via* une bifurcation de Hopf. Pour cela nous estimerons numériquement les deux paramètres qui caractérisent la possible bifurcation de Hopf (voir équations (III.29)

et (III.30)) en utilisant des valeurs expérimentales typiques. Plus précisément, nous utiliserons les valeurs données dans les articles [LMK06] pour un piège magnéto-optique qui utilise la transition  $F = 3 \rightarrow F' = 4$  de l'atome de Rubidium 85. Nous considérerons, entre autres, que l'épaisseur optique  $b$  est toujours au voisinage de l'unité comme cela semble être le cas pour une grande gamme de paramètre [LSW92, GPLK10].

$\alpha$  : Comparaison avec la littérature

Dans un premier temps, nous allons comparer notre théorie aux résultats des articles [LMK06, LGPK08]. Les auteurs y présentent le seuil entre l'état stable et l'état instable, où le système oscille de façon auto-entretenu, en fonction du désaccord et du gradient de champ magnétique. Pour cela ils introduisent un modèle simplifié, basé sur la force ressentie par un atome au bord du nuage, qu'ils appellent "1-zone model" [LMK06]. La figure III.5 représentent leur résultats ainsi que nos prédictions en utilisant les deux cas limites homogène et gaussien. Comme nous pouvons le constater, l'équation de contrainte

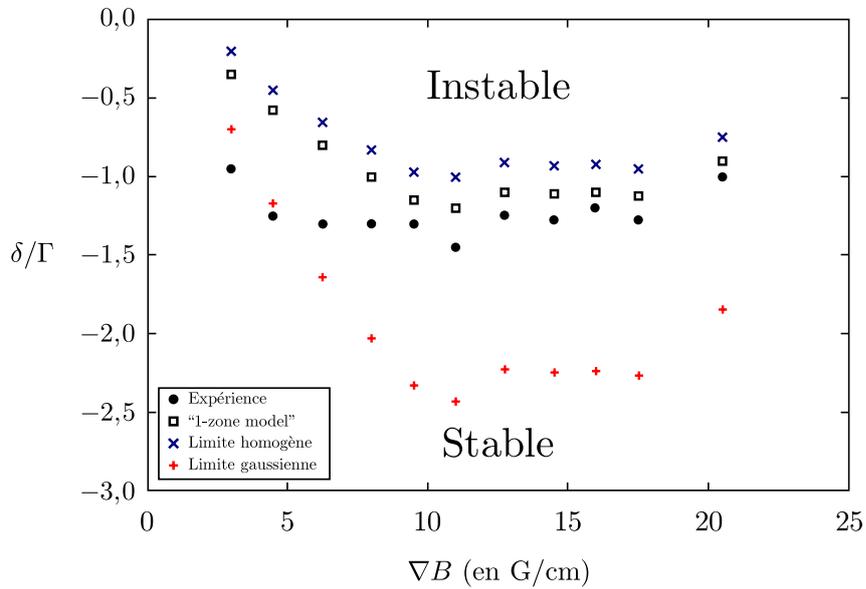


FIGURE III.5 – Seuil d’instabilité du mode de respiration d’un piège magnéto-optique. La zone *instable* correspond à l’apparition d’oscillations auto-entretenu. Les données expérimentales et celles du “1-zone model” [LMK06] proviennent de la figure 7 de [LGPK08]. Les limites homogène et gaussienne sont obtenues par le calcul du paramètre  $\langle \kappa(\mathbf{r})\mathbf{r}^2 \rangle_{f_0}$  (voir équation (III.29)) en utilisant respectivement les expressions (III.39) et (III.43).

Le gradient de champ magnétique  $\nabla B$  est donné par  $\mu = 2\pi\mu_0 g \nabla B$  avec  $\mu_0 = 2,1 \times 10^6 \text{ G}^{-1}$  et  $g = 1,0$  une valeur effective du facteur de Landé pour la transition  $F = 3 \rightarrow F' = 4$  de l’atome  $\text{Rb}^{85}$ ; la largeur naturelle de raie est donnée par  $\Gamma = 2\pi \times 6 \text{ MHz}$ .

prédit bien l’existence d’une bifurcation de Hopf dans la même gamme de paramètre que celle prévue. De plus, nous retrouvons qualitativement les mêmes tendances que pour le “1-zone model” de [LMK06] pour la limite homogène. Cela n’est pas très surprenant puisque dans leur modèle approché, les auteurs supposent également que le profil du nuage est homogène. Malheureusement nous ne faisons pas mieux que le “1-zone model” dans l’estimation du seuil, mais cela doit être dû aux nombreuses approximations que nous

avons faites. D'un autre côté, il faut pointer du doigt que le profil du nuage n'est jamais exactement homogène et c'est ce que semble retrouver notre prédiction. En effet, le seuil observé expérimentalement se trouve plus ou moins entre ceux obtenus dans les limites homogène et gaussienne (avec une préférence pour le cas homogène).

En conclusion, nous retrouvons bien la présence d'une bifurcation de Hopf pour les mêmes gammes de paramètres.

Il faut remarquer que la méthode employée ici est plus complexe que celle utilisée dans [LMK06] mais nous obtenons aussi plus d'informations. D'une part nous mettons clairement en avant que la friction est l'ingrédient essentiel à l'existence de la bifurcation de Hopf et d'autre part il nous est possible de calculer la fréquence et l'amplitude des oscillations au voisinage de la bifurcation.

$\beta$  : Prédiction du modèle

En plus de confirmer la présence de la bifurcation de Hopf et d'avoir mis en avant que la friction est l'ingrédient essentiel, nous sommes capables d'utiliser notre méthode pour prédire l'existence d'une nouvelle transition : celle où le cycle limite devient instable.

Dans la suite, nous ne considérerons que la limite homogène pour simplifier mais nous pourrions également faire les mêmes calculs dans la limite gaussienne<sup>21</sup>.

La figure III.6 représente les différents comportements possibles du mode de respiration en fonction des paramètres expérimentaux. Pour réaliser ces diagrammes, nous avons considéré un nuage d'atomes dont la taille au repos est  $L_{int} = 4$  mm. Rappelons que nous utilisons la taille du système plutôt que le nombre d'atomes  $N$  car c'est une quantité facile à mesurer expérimentalement. Nous obtenons ainsi trois régimes possibles :

- *Stable* : la taille du système reste constante.
- *Cycle limite stable* : la taille du système oscille de manière auto-entretenu mais reste bornée. Ce régime correspond au régime instable de la figure III.5.
- *Cycle limite instable* : la taille du système oscille avec une amplitude de plus en plus grande.

Une nouvelle fois, nous retrouvons qualitativement le résultat de [LMK06] où le *seuil stable/cycle limite stable* est donné par la relation :

$$\delta + \mu L_{int} \approx 0. \quad (\text{III.44})$$

Par contre nous obtenons un second seuil entre *cycle limite stable* et *cycle limite instable*. Il faut tout de même noter que nous sommes face à plusieurs problèmes pour confirmer son existence :

1. Ce second seuil est calculé à partir du second paramètre de la bifurcation de Hopf. Il n'y a pas de raison *a priori* que le premier paramètre  $\langle \kappa(\mathbf{r})\mathbf{r}^2 \rangle_{f_0}$  reste petit dans ces régions. Or le calcul de la bifurcation est une étude locale qui n'est vraie que si ce paramètre est proche de zéro.
2. Il faut que ce seuil soit observable expérimentalement. Cependant, en admettant que le régime *cycle limite instable* existe, nous pouvons facilement envisager que lorsque la taille du système augmente trop, des particules sortent du piège. Dès lors le nombre d'atomes dans les zones de frictions négatives diminue et le système quitte

---

21. En réalité, nous avons aussi étudié ce deuxième cas, mais il n'apporte rien de plus. En effet, nous avons observé qualitativement les mêmes résultats.

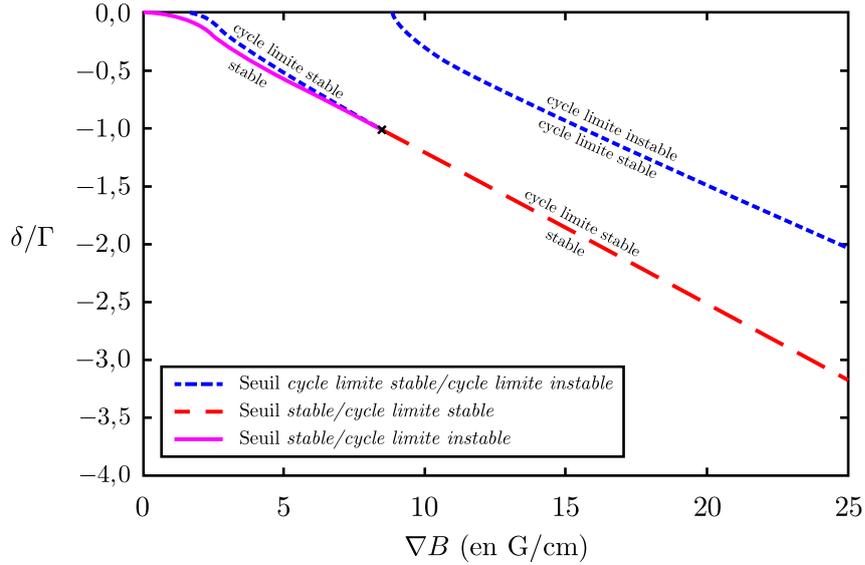


FIGURE III.6 – Différents régimes possibles du mode de respiration d’un P.M.O. prédit par l’équation de contrainte (III.26) pour un système de taille  $L_{int} = 4$  mm. Nous pouvons distinguer trois régimes possibles : stable, cycle limite stable et cycle limite instable (voir texte). Le gradient de champ magnétique  $\nabla B$  est donné par  $\mu = 2\pi\mu_0 g \nabla B$  avec  $\mu_0 = 2,1 \times 10^6 \text{ G}^{-1}$  et  $g = 1,0$  une valeur effective du facteur de Landé pour la transition  $F = 3 \rightarrow F' = 4$  de l’atome Rb<sup>85</sup> ; la largeur naturelle de raie est donnée par  $\Gamma = 2\pi \times 6$  MHz

le régime instable.

Comme nous venons de le voir, nous retrouvons bien les résultats de la littérature en ce qui concerne l’apparition des oscillations auto-entretenues mais il reste des doutes quant à la validité du modèle. Si nous pensons aux résultats du paragraphe 3.2.c chapitre II, la méthode n’est pas forcément adaptée lorsque la friction peut devenir négative. En effet, une friction négative peut déformer le profil de friction  $f$  de sorte qu’il n’est plus possible de décrire l’évolution du système comme une contraction/dilatation du profil d’équilibre  $f_0$ . Nous avons donc cherché à vérifier cela à l’aide de simulations numériques.

$\gamma$  : Simulations numériques

Afin de tester les prédictions faites dans le paragraphe précédent, nous avons tenté de réaliser des simulations numériques d’un grand piège magnéto-optique. À l’instar de [dORV04], nous avons opté pour un algorithme de regroupement hiérarchique pour simuler le nuage d’atome. Ce type d’algorithme est communément utilisé pour simuler l’évolution de systèmes à longue portée<sup>22</sup> car il est d’ordre  $N \log N$ , là où un calcul exacte serait d’ordre  $N^2$ . En effet, pour chaque particules il faudrait calculer la force totale exercée par les  $N - 1$  autres particules et faire de même pour chaque particules du système. Le calcul exact des forces d’interactions est ainsi d’ordre  $O(N^2)$ . Pour faire simple, dans l’algorithme utilisé ici, il s’agit de regrouper les particules par paquets et ensuite de remplacer l’interaction créée par chaque particules par l’interaction globale créée par le paquet. Au lieu d’implémenter la méthode à partir de zéro, nous avons choisi d’utiliser le code

22. Citons par exemple l’algorithme de Barnes et Hut [BH86] très connu dans le milieu des astrophysiciens qui est d’ailleurs l’algorithme utilisé dans [dORV04].

GADGET-2 [Spr05] à l'origine prévu pour étudier les systèmes astrophysiques. Bruno Marcos, ayant déjà travaillé sur ce code, il s'est occupé d'adapter le code original (prise en compte du piège harmonique, du thermostat, . . .) pour l'appliquer aux pièges magnéto-optiques. Notons que la façon de prendre en compte le thermostat par l'algorithme Langevin-Verlet [PF98, AT99], comme nous l'avons fait au paragraphe 2.2.a du chapitre II, n'est pas consistante avec l'algorithme implémenté dans le code GADGET-2. Nous avons donc considéré une autre approche, légèrement différente, qui a consisté à utiliser l'algorithme de Langevin-Leapfrog [ISP10]. Une fois ces modifications apportées, nous y avons intégré le profil de friction (III.32) obtenu dans la limite homogène. Nous aurions pu nous contenter d'utiliser le profil (III.32) mais alors à chaque pas de temps nous aurions dû évaluer les intégrales des numérateurs. Le calcul de ces intégrales est fastidieux car il faut :

- D'une part inclure au code les sections efficaces d'absorptions des atomes. En effet, dans les simulations numériques tout comme dans le système réel, la probabilité que deux atomes soient exactement alignés dans la direction d'intégration est quasiment nulle. Ce qui compte c'est la *taille effective* des atomes qui se traduit par leur section efficace d'absorption.
- D'autre part, pour chaque pas de temps et pour chaque particules calculer la friction ressentit, l'algorithme redevient d'ordre  $N^2$  et nous perdons tout l'avantage du code GADGET-2.

Une fois toutes ces modifications apportées au code GADGET-2, nous avons effectué un certain nombre de tests pour confirmer sa validité. Malheureusement, nous sommes tombés sur un problème que nous n'avions pas anticipé. L'équation (III.32) prévoit des variations très brutales de la friction passant d'une valeur positive élevée à une valeur négative et ce sur des distances très courtes. La figure III.7 représente un exemple de profil de friction dans la limite homogène pour un nuage de rayon  $L_{int} = 5$  mm (les paramètres expérimentaux sont donnés dans le descriptif de la figure). Afin de comprendre en quoi

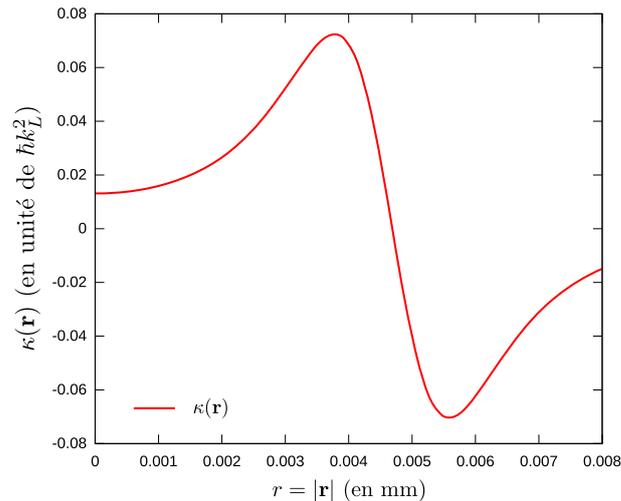


FIGURE III.7 – Exemple de profil de friction donné par (III.32) dans la limite homogène avec  $L_{int} = 5$  mm. Les paramètres sont :  $I_0/I_s = 0,61$  ;  $\nabla B = 9$  G/cm ;  $\delta/\Gamma = -1,5$ .

cela pose problème prenons un exemple. Considérons une particule en train de se diriger vers le centre du système qui initialement est dans une zone de friction négative (profil

donné par la figure III.7). À chaque pas de temps, cette particule accélère. La distance qu'elle parcourt devient de plus en plus grande. Si maintenant notre pas de temps est mal choisi, la particule peut *passer à travers* la zone de friction élevée qui doit la ralentir fortement. Pour être plus clair, c'est comme si à l'instant  $t = 0$  la particule était à une distance  $r = 6$  mm du centre du piège et qu'au pas de temps suivant elle est déjà en  $r = 0$  mm. Elle n'a pas ressentie la friction au voisinage de  $r = 4$  mm qui est censé la ralentir fortement. Bien entendu, il suffit de diminuer le pas de temps de la simulation. Cependant le gradient de friction est si important que nous n'avons pas été capables de trouver un compromis entre pas de temps/temps de simulation qui soit acceptable.

Au vu de ces difficultés, nous nous sommes demandés si l'effort nécessaire à surmonter ces difficultés en valait la peine pour l'instant<sup>23</sup>... C'est pourquoi nous nous sommes tourné vers un modèle jouet afin de tester dans de meilleures conditions l'existence d'une bifurcation de Hopf lorsque la friction ressentie par les particules peut devenir localement négative.

### 1.4.c Tests sur un modèle qualitatif

Afin de pouvoir tester facilement les prédictions de l'équation de contrainte, nous allons étudier un système de particules comparables à celles dans un P.M.O. et dans les mêmes limites<sup>24</sup> mais où la friction ressentie par les particules est donnée par :

$$\kappa(\mathbf{r}) = a_1 \left\{ 1 - 2 \exp \left[ - \left( \frac{r - a_2}{a_3} \right)^2 \right] \right\}, \quad (\text{III.45})$$

avec  $r = |\mathbf{r}|$  et  $a_1, a_2, a_3$  trois constantes qui permettent d'ajuster le profil de friction sachant que :

- $\max \kappa(\mathbf{r}) = - \min \kappa(\mathbf{r}) = a_1$ ,
- les zéros de la friction sont obtenus pour  $r = a_2 \pm a_3 \sqrt{\ln(2)}$ ,
- le minimum de la friction est en  $r = a_2$ .

Notons que le paramètre  $a_1$  ne joue aucun rôle dans le calcul de la bifurcation de Hopf et d'autre part que le profil redevient positif à grande distance contrairement à l'équation (III.32).

La figure III.8 représente les différents régimes possibles pour le mode de respiration du système de particules en fonction des paramètres  $a_2$  et  $a_3$  prédits par l'équation de contrainte (III.26) pour une distribution de particules homogène de taille  $L_{int} = 4.0$  unité de longueur. Cette figure est donc l'exact analogue de la figure III.6 mais pour un profil de friction donné par (III.45).

Tous les profils de frictions ne sont pas analogues à ceux observés pour un P.M.O. mais, par exemple, celui pour  $(a_2; a_3) = (4; 1)$  en garde la principale caractéristique : la friction est positive pour  $r$  suffisamment petit et devient ensuite négative. D'autre part comme  $L_{int} < a_2 + a_3 \sqrt{\ln(2)}$ , les particules aux bords du système sont dans une région de friction négative. Nous sommes donc qualitativement dans les mêmes conditions que pour un P.M.O. de grande taille et le calcul de la bifurcation prévoit que ce système présente des

---

23. Réaliser un code efficace pour simuler un grand P.M.O. serait d'une grande aide pour tester les prédictions théoriques et en réaliser de nouvelles. Nous avons toujours en tête de régler ces problèmes mais ce n'est pas la priorité pour l'instant.

24. Symétrie sphérique, limite homogène, piège harmonique et interaction entre particules Coulombienne.

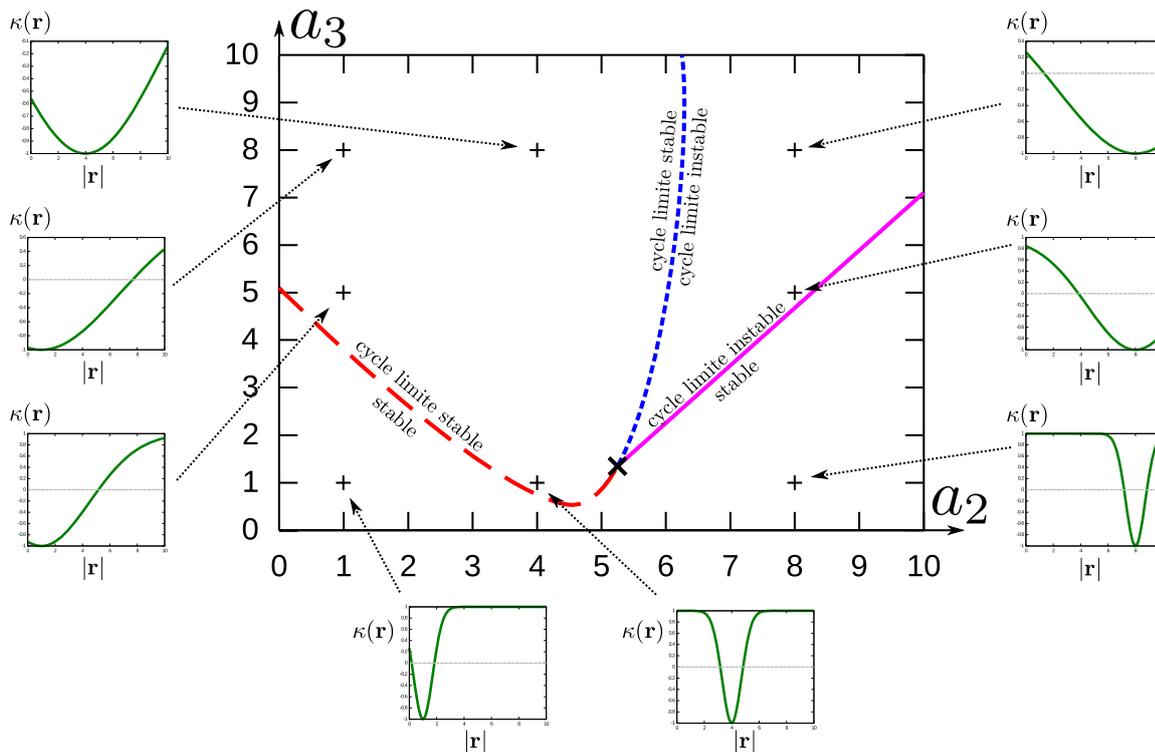


FIGURE III.8 – Différents régimes possibles du mode de respiration d’après l’équation de contrainte (III.26) pour le profil de friction donnée par (III.45) et dans la limite d’une distribution de particules homogène de taille  $L_{int} = 4$  unité de longueur. Nous avons également représenté les profils de frictions  $\kappa(\mathbf{r})$  pour certains couples  $(a_2; a_3)$ .

oscillations auto-entretenues.

En conclusion, le nouveau profil de friction (III.45) est adéquat pour tester l’éventuelle bifurcation de Hopf prévue par l’équation de contrainte. Malheureusement, nous n’avons pas eu le temps de réaliser les simulations nécessaires pour confirmer ou non les prédictions. Quelques simulations ont été effectuées et bien que nous ayons retrouvé des comportements qualitativement en accord avec la figure (III.8), il nous est difficile pour l’instant de bien distinguer les différents cas possibles. En effet, même dans les cas stables, la présence d’une zone de friction négative aux bords du système fait fluctuer la taille moyenne du système. Dans ce cas il faut arriver à certifier que le système est stable et ne présente pas en réalité d’oscillation cohérente. Un autre problème réside dans la façon de réaliser les simulations. *A priori* dans une zone où le système oscille de manière auto-entretenue, l’état stationnaire de référence  $f_0$  n’est pas stable et nous ne le connaissons pas. Or pour tester la prédiction, la meilleure méthode serait de partir de l’état  $f_0$  puis d’observer l’apparition des oscillations sans aide extérieure. Cela n’étant pas possible, nous essayons de partir d’un état stable proche d’un seuil pour ensuite modifier légèrement les paramètres  $a_2$  et  $a_3$ . Au passage du seuil nous devrions observer un changement qualitatif de la dynamique du système. Cependant, il faut garder en tête que les approximations que nous avons dues faire ne nous permettent d’espérer qu’un accord qualitatif entre les seuils réels, s’ils existent, et ceux présentés sur la figure III.8. Par conséquent, trouver un état stable proche d’un seuil et passer dans une région instable n’est pas forcément une tâche aisée. . .

## 1.5 Oscillations du centre de masse

Dans cette partie nous allons nous intéresser aux oscillations du centre de masse d'un grand piège magnéto-optique *i.e.* avec beaucoup d'atomes ( $> 10^8$ ). Pour cela nous utiliserons les résultats détaillés de la section 3 du chapitre II.

Nous avons pu constater dans la section 1.4 que la prise en compte de l'absorption ne changeait pas qualitativement le comportement du système. C'est pourquoi ici nous ne prendrons pas en compte l'absorption de manière explicite. En effet, l'ordre dominant est inclus implicitement dans le modèle car il peut-être mis au même rang que la diffusion multiple<sup>25</sup> : elles sont vues comme une interaction effective entre particules.

Contrairement à la simplification faite en négligeant l'absorption, nous allons compliquer les choses en conservant le caractère anharmonique du piège. Pour l'étude du mode de respiration (voir 1.4), ce ramener à un piège harmonique était nécessaire pour appliquer la théorie. Ce n'est plus le cas ici (voir le paragraphe 3 du chapitre II) et nous nous garderons de faire cette hypothèse. Concrètement, cela se traduira par l'abandon de l'hypothèse de linéarisation en espace de la force de radiation. Il faut remarquer que cela ne changera pas qualitativement les résultats.

### 1.5.a Profil de friction et piège extérieur

Le profil de friction que nous allons utiliser par la suite est obtenu en reprenant la méthode du paragraphe 1.4.b pour dériver l'équation (III.32). Par contre, nous négligerons ici les effets d'absorptions<sup>26</sup> car, comme nous l'avons vu au paragraphe 1.4.b.iii, ils ne changent pas de manière qualitative les résultats. Nous obtenons simplement :

$$\kappa(\mathbf{r}) = -\frac{4\hbar k_L^2 I_0}{\Gamma m I_s} \left\{ \frac{\delta - \mu r}{\left[1 + 4 \left(\frac{\delta - \mu r}{\Gamma}\right)^2\right]^2} + \frac{\delta + \mu r}{\left[1 + 4 \left(\frac{\delta + \mu r}{\Gamma}\right)^2\right]^2} \right\}, \quad (\text{III.46})$$

avec  $r = |\mathbf{r}|$ .

En ce qui concerne le confinement des atomes, après le développement à l'ordre dominant en vitesse, nous obtenons l'expression suivante pour la  $i^{\text{ème}}$  composante du piège :

$$\mathbf{F}_{\text{piege}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_i = \frac{\hbar k_L \Gamma I_0}{2m I_s} \left[ \frac{1}{1 + 4 \left(\frac{\delta - \mu r_i}{\Gamma}\right)^2} - \frac{1}{1 + 4 \left(\frac{\delta + \mu r_i}{\Gamma}\right)^2} \right], \quad (\text{III.47})$$

avec  $r_i$  la  $i^{\text{ème}}$  composante du vecteur  $\mathbf{r}$ .

Contrairement au mode de respiration, nous n'avons pas besoin que le système soit à symétrie sphérique par conséquent nous pouvons conserver cette expression du piège telle quelle.

25. Pour cela il faut tout de même négliger la contribution rotationnelle de l'effet d'absorption.

26. En réalité, l'ordre dominant de l'absorption est pris en compte, *via* son approximation gravitationnelle, dans la force à deux corps issue de la diffusion multiple par une modification de la constante d'interaction (voir le paragraphe 1.3 ou [WSW90, SCF92]).

### 1.5.b État stationnaire

Dans la suite, nous allons considérer que le profil en forme de plateau (voir le début de la section 1.3) est une bonne approximation de l'état stationnaire  $\rho_0$  :

$$\rho_0(\mathbf{r}) = \int f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} = \begin{cases} \frac{N}{\frac{4}{3}\pi L_{int}^3} & \text{si } |\mathbf{r}| \leq L_{int} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (\text{III.48})$$

avec  $L_{int}$  la taille du système. Cette approximation est d'autant plus raisonnable que le système est à basse température et que l'anharmonicité du piège est faible.

### 1.5.c Prédiction du modèle

En linéarisant l'équation de contrainte (II.78), nous pouvons *a priori* distinguer deux régimes qualitativement différents du centre de masse lorsqu'il subit une petite perturbation. En regardant le comportement selon la  $i^{\text{ème}}$  direction, nous obtenons :

- Si  $\langle \kappa(\mathbf{r}) \rangle_{f_0}^2 - 4 \left\langle \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r_i^2}(\mathbf{r}) \right\rangle_{f_0} < 0$ , alors le centre de masse retourne à l'équilibre de façon sous-amortie.
- Si  $\langle \kappa(\mathbf{r}) \rangle_{f_0}^2 - 4 \left\langle \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r_i^2}(\mathbf{r}) \right\rangle_{f_0} > 0$ , alors le centre de masse retourne à l'équilibre de façon sur-amortie.

La figure III.9 représente le comportement attendu du centre de masse en fonction du désaccord  $\delta$  et du gradient de champ magnétique  $\nabla B$  lorsque la taille du système  $L_{int}$  augmente *i.e.* lorsque le nombre d'atomes augmente.

En réalité, l'équation de contrainte prédit trois comportements. Le troisième est observé lorsque  $\langle \kappa(\mathbf{r}) \rangle_{f_0} < 0$ . Dans ce cas la friction moyenne ressentie par le nuage d'atomes est négative et le centre de masse est instable : il ne retourne pas au centre du piège. Nous ne parlerons plus de ce dernier cas, car comme nous l'avons vu au paragraphe 3.2.c du chapitre II, la méthode donne généralement de mauvais résultats lorsque le nombre de particules dans une zone de friction négative est trop élevé.

Une prédiction importante que l'on retrouve sur la figure III.9 est que pour une même valeur du désaccord  $\delta$  et du gradient de champ magnétique  $\nabla B$ , il est possible d'observer deux dynamiques de relaxations différentes en modifiant le nombre d'atomes dans le nuage. Par exemple, en augmentant  $L_{int}$  de 0,5 à 4,0 mm avec  $\delta/\Gamma = -2,5$  et  $\nabla B = 15$  G/cm, le centre de masse passe d'un régime sur-amorti à un régime sous-amorti. Ce comportement peut-être retrouvé, d'un point de vue qualitatif, très rapidement en considérant le profil de friction obtenu pour ces valeurs de paramètres. La figure III.10 illustre très bien cela. En effet, nous pouvons définir une friction critique qui sépare les régimes sur-amorti et sous-amorti grâce à la valeur de  $\langle \partial^2 \Phi / \partial r_i^2(\mathbf{r}) \rangle_{f_0}$ . Si la friction moyenne  $\langle \kappa(\mathbf{r}) \rangle_{f_0}$  ressentie par l'ensemble du système est plus importante, nous serons dans un régime sur-amorti et inversement. Pour simplifier la discussion, le seuil représenté dans la figure III.10 est obtenu à partir de l'approximation harmonique du piège. Lorsque que la taille du système est grossièrement au voisinage de 2,5/3,0 mm, la friction ressentie par les atomes aux bords du nuage est plus élevée que la friction critique. Néanmoins la friction moyenne reste inférieure à celle-ci et le centre de masse relaxe de façon sous-amortie. Pour  $|\mathbf{r}| \leq 3,0$  mm, le retour à l'équilibre se fait de manière sur-amortie.

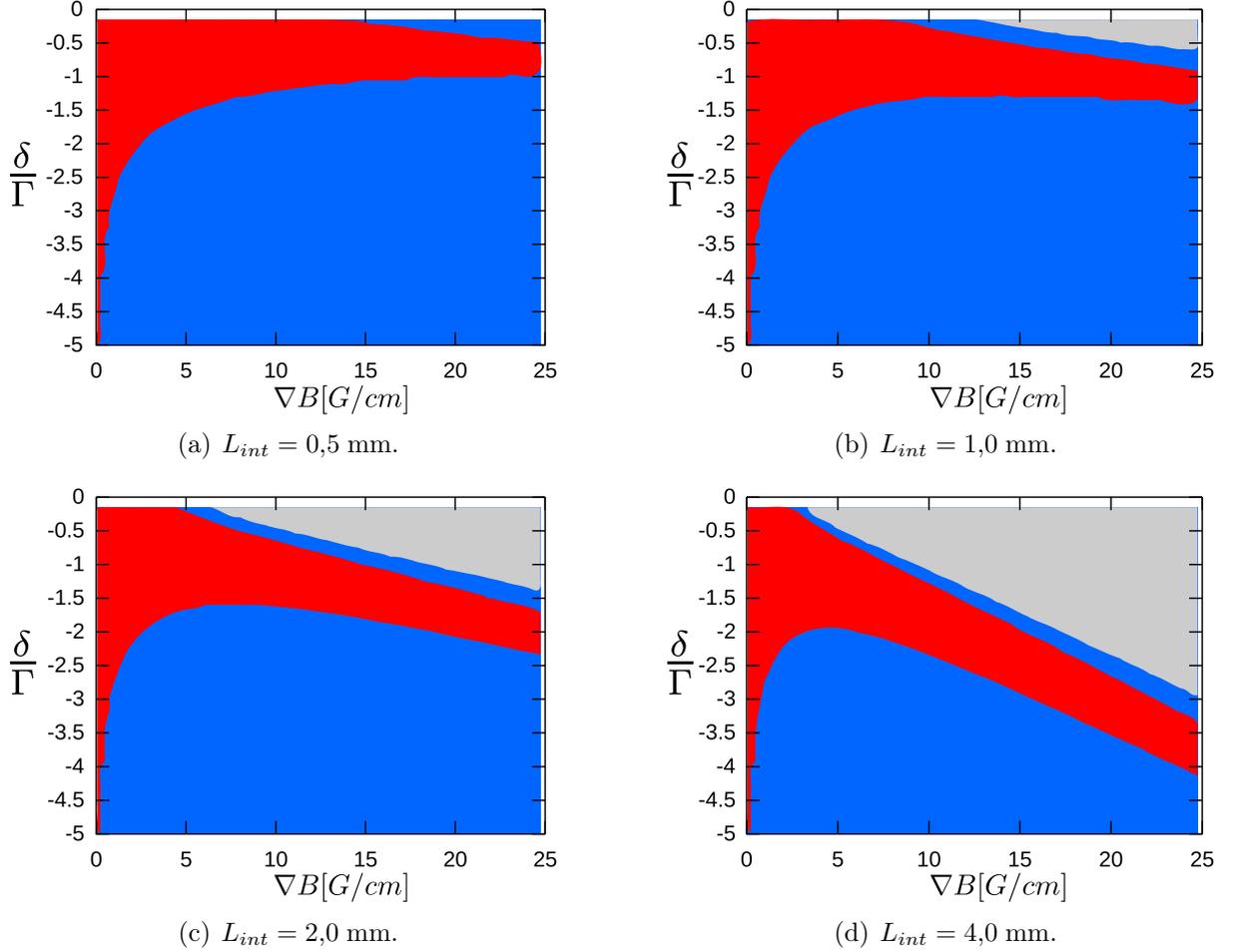


FIGURE III.9 – Prédiction théorique de la relaxation du centre de masse d’un piège magnéto-optique dans la plan  $(\delta/\Gamma; \nabla B)$  pour des nuages de différentes tailles. Bleu : relaxation du centre de masse sous-amorti; rouge : relaxation du centre de masse sur-amorti; gris : centre de masse instable. Les paramètres sont :  $k_L = 2\pi/\lambda$  avec  $\lambda = 780 \times 10^9$  m et  $\mu = 2\pi\mu_0 g \nabla B$  avec  $\mu_0 = 2,1 \times 10^6$  G $^{-1}$  et  $g$  un facteur de Landé effectif pour la transition  $F = 3 \rightarrow F' = 4$  de l’atome Rb<sup>85</sup>.

Avant de finir, insistons sur le fait que tous les résultats présentés ici sont basés seulement sur le modèle Doppler et que par conséquent de nombreux phénomènes ne sont pas inclus. Nous ne nous attendons pas à ce que la transition entre régimes sur-amorti et sous-amorti du centre de masse soit prédite précisément. Nous espérons seulement que lorsque le modèle Doppler est suffisant pour décrire le nuage d’atomes, l’approche développée puisse aider à comprendre les résultats expérimentaux. Ici par exemple, nous n’avons pris en compte l’effet d’absorption que *via* son approximation gravitationnelle et par conséquent le profil de friction ne dépend pas du nombre d’atomes qui compose le nuage. À l’inverse, il existe des régimes où l’absorption joue réellement un rôle sur le profil de friction. Dans ce cas les résultats présentés ne seraient plus valables. D’un autre côté, nous n’avons pas tenu compte de l’effet sub-Doppler qui peut jouer un rôle plus important que l’effet Doppler sur la relaxation du centre de masse. Par exemple, les auteurs de [XLS<sup>+</sup>02] ont montré que pour des métaux alcalino-terreux, par exemple des atomes de Strontium, il est possible d’observer des oscillations sous-amorties du centre de masse. À l’inverse pour les mêmes régimes de paramètres un système composé d’atomes de type

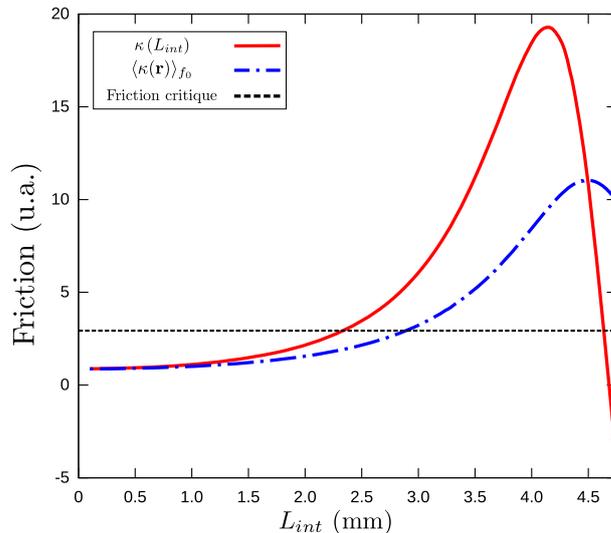


FIGURE III.10 – Représentation des différentes frictions qui influence la dynamique de relaxation du centre de masse selon la taille du nuage pour  $\delta/\Gamma = -2,5$  et  $\nabla B = 15$  G/cm. La friction critique en ligne pointillé noir est obtenue à partir de l’approximation harmonique du piège.

métaux alcalins, par exemple de Rubidium, est fortement sur-amorti [SF91].

## 2 SYSTÈME AUTO-GRAVITANT UNIDIMENSIONNEL ?

Comme nous l’avons vu dans l’étude des grands pièges magnéto-optiques, les systèmes à atomes froids peuvent exhiber des interactions de type longue portée. Il est par exemple possible d’avoir des systèmes où les particules interagissent *via* une force Coulombienne répulsive et ainsi créer un pont entre la physique des plasmas et la physique des atomes froids. De la même manière, nous pouvons nous demander s’il est possible de mettre au point un système expérimental permettant de simuler des systèmes auto-gravitants<sup>27</sup>. Cette question est loin d’être nouvelle et fait rêver beaucoup de chercheurs. À l’heure actuelle, seuls les systèmes astrophysiques sont observables et il est impossible d’ajuster les paramètres du système pour y tester toutes les théories existantes. Plusieurs travaux ont été proposés pour remédier à cela mais pour l’instant aucun d’entre eux n’a donné lieu à une expérimentation. Par exemple, les auteurs de [OGKA00] ont suggéré d’utiliser des faisceaux lasers intenses et hors résonance pour modéliser un potentiel attractif en  $1/r$  dans un condensat de Bose-Einstein. Dans un tout autre domaine, les auteurs de [DOD10] proposent d’utiliser les interactions capillaires entre colloïdes pour obtenir l’analogie d’un système auto-gravitant bidimensionnel. Il faut bien insister sur le fait que pour l’instant il n’existe pas de montage expérimental modélisant un système auto-gravitant et ce quelle que soit la dimension (unidimensionnel, bidimensionnel, . . .). Bien qu’un système expérimental auto-gravitant tridimensionnel serait évidemment très intéressant pour ces appli-

<sup>27</sup>. Tous les systèmes étudiés dans cette thèse sont traités de manière classique, *i.e.* d’après la dynamique Newtonienne. Nous ne discuterons pas des modèles auto-gravitants relativistes pouvant donner lieu à des expériences.

cations en astrophysique, il n'en reste pas moins que de nombreux travaux sur le comportement de systèmes à longue portée unidimensionnel ou bidimensionnel demandent aussi à être confrontés avec l'expérience [Cam50, Ryb71, IC01, Cha06a, Cha06b, CDR09, JW10]. Par exemple, dans [IC01] les auteurs traitent, entre autre, de l'existence de transition de phase pour des systèmes attractifs en  $1/r^k$ . Ils montrent par exemple que pour les systèmes auto-gravitants en deux et trois dimensions il existe une transition de phase entre un état effondré et un état spatialement étendu alors que dans le cas unidimensionnel le système reste spatialement étendu quelle que soit la température.

L'objectif du présent travail est d'introduire un montage expérimental pour réaliser un système auto-gravitant unidimensionnel à partir d'atomes froids de strontium confinés dans un piège dipolaire. Les systèmes d'atomes froids exhibent des forces d'interactions à longue portée à cause de l'absorption de photons, issus de lasers contre-propageant [Dal88] : un écrantage ou effet d'ombre apparaît dans le système (voir paragraphe 2.1.b). Cependant la force de répulsion de type Coulombienne liée à la diffusion multiple [SWW91] est la plupart du temps dominante<sup>28</sup>. L'effet attractif est masqué par la diffusion multiple ce qui empêche d'utiliser cet effet pour comprimer le système. Notons que seules des compressions en régimes transitoires ont été effectuées en utilisant cet effet d'ombre [KD99]. Pour palier à ce problème nous avons choisi de travailler dans une géométrie particulière : nuage d'atomes froids en géométrie cigare, *étiré dans une direction de l'espace*. L'émission des photons par diffusion multiple est isotrope et dans une configuration cigare les photons sortent du nuage beaucoup plus "facilement", *i.e.* ils interagissent beaucoup moins avec les atomes du nuage. La diffusion multiple devient alors négligeable devant l'effet d'ombre qui lui reste inchangé, ce qui nous place dans un cas favorable pour observer les interactions attractives dues à l'effet d'ombre.

Dans la section 2.1, nous introduirons rapidement la notion de piège dipolaire et les autres notions utiles dans la suite. La section 2.2 sera consacrée à la modélisation du système expérimental tandis que la section 2.3 relatara les résultats expérimentaux obtenus à l'Institut Non Linéaire de Nice par Maryvonne Chalony et David Wilkowski.

## 2.1 Pré-requis

---

### 2.1.a Piège dipolaire

Avant d'entrer dans les détails du modèle et de l'expérience réalisée, nous allons très rapidement introduire la notion de piège dipolaire pour des systèmes d'atomes froids. Pour une présentation plus détaillée que celle-ci, nous invitons le lecteur à consulter la partie 1.3 de la thèse de Maryvonne Chalony [Cha10] qui a réalisé le montage expérimental avec David Wilkowski.

Nous avons déjà discuté pour les pièges magnéto-optiques de la possibilité de confiner des atomes à l'aide de lasers, et le piège dipolaire constitue une autre de ces méthodes. À

---

28. L'importance relative de ces effets dépend fortement des paramètres du système. Par exemple cela dépend du désaccord  $\delta$  et du type d'atome. Cependant, c'est presque toujours la diffusion multiple qui domine. On pourra consulter [PSDJ00] qui donne un exemple de l'évolution du rapport entre diffusion multiple et effet d'absorption pour la transition  $F = 3 \rightarrow F' = 4$  d'un nuage d'atomes de Rubidium.

l'aide d'un faisceau fortement focalisé, il est possible de créer une zone de forte intensité laser où les atomes seront attirés et piégés [Ash78]. Pour simplifier, considérons un seul atome. Le champ électromagnétique induit par le laser modifie le moment dipolaire de l'atome  $d$  de sorte que :

$$\mathbf{d} \propto \mathbf{E}, \quad (\text{III.49})$$

avec  $\mathbf{E}$  le champ électrique. Le potentiel d'interaction est alors :

$$U_{dip}(\mathbf{r}) \propto \langle \mathbf{d} \cdot \mathbf{E} \rangle \propto I(\mathbf{r}), \quad (\text{III.50})$$

où  $I(\mathbf{r})$  est l'intensité laser en  $\mathbf{r}$ .

Dans le cas de l'expérience réalisé l'intensité laser est donnée par<sup>29</sup> :

$$I(\mathbf{r} = (x, y, z)) = I_0 \times \left( \frac{w_0}{w(x)} \right)^2 \exp \left( -2 \frac{y^2 + z^2}{w(x)^2} \right), \quad (\text{III.51})$$

avec  $I_0$  l'intensité en  $\mathbf{r} = (0, 0, 0)$  et

$$w(x) = w_0 \sqrt{1 + \left( \frac{x}{x_R} \right)^2} \quad (\text{III.52})$$

où  $w(x)$  est la largeur du faisceau laser qui a pour valeur minimale  $w_0$ , et  $x_R$  la longueur de Rayleigh  $x_R = \pi w_0^2 / \lambda$  avec  $\lambda$  la longueur d'onde du laser.

La figure III.11 représente le piège dipolaire utilisé dans les expériences dont l'expression analytique est donnée par les équations (III.50) et (III.51). En considérant que les atomes

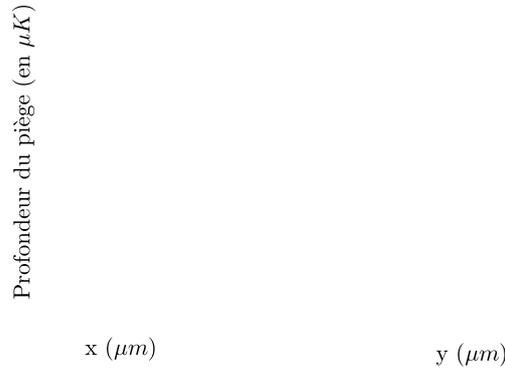


FIGURE III.11 – Coupe dans le plan  $(O, x, y)$  du piège dipolaire en  $\mu\text{K}$  utilisé dans les expériences. La largeur minimale est  $w_0 = 17 \mu\text{m}$  et la longueur typique est de  $x_R = 1164 \mu\text{m}$ ; la longueur d'onde  $\lambda$  étant de  $780 \text{ nm}$ .

restent confinés au fond du piège, nous pouvons utiliser une approximation harmonique du potentiel  $U_{dip}(\mathbf{r})$ . Nous fixons deux fréquences typiques d'oscillation dans le piège associées aux directions transversales et longitudinale.

Dans la suite, nous travaillerons par unité de masse  $m$  et pour simplifier nous discuterons

<sup>29</sup>. L'expérience est réalisée avec un type particulier de piège dipolaire appelé FORT ("Far-Off-Resonance Trap") à  $780 \text{ nm}$  (voir [Cha10] pour plus détails).

du modèle réduit à une dimension<sup>30</sup> avec comme fréquence caractéristique  $\omega_0$ . La force dipolaire sera donc donnée par :

$$\mathbf{F}_{dip}(x) = -\omega_0^2 x \mathbf{e}_x. \quad (\text{III.53})$$

Notons qu'après avoir effectué les expériences, nous nous sommes aperçus que l'approximation harmonique est loin d'être toujours satisfaisante. Cependant nous verrons que cela ne gêne pas réellement pour les régimes que nous souhaitons étudier (voir le paragraphe 2.3.b).

### 2.1.b Effet d'ombre

En plus du piège dipolaire, l'expérience est composée de deux lasers contra-propageants qui vont permettre de créer l'équivalent d'une force attractive au sein du système ; cela se faisant par l'intermédiaire d'un effet d'écrantage aussi appelé effet d'ombre. Nous avons rapidement introduit cet effet dans la partie 1.2.a et nous nous proposons de revenir dessus plus en détails car ce sera l'ingrédient physique le plus important dans toute la suite de cette partie.

Rappelons pour commencer que lorsqu'un faisceau laser parcourt un nuage d'atomes son intensité diminue tout au long du trajet. Un atome du nuage qui a absorbé un photon peut le réémettre de deux façon différentes (voir figure III.12).

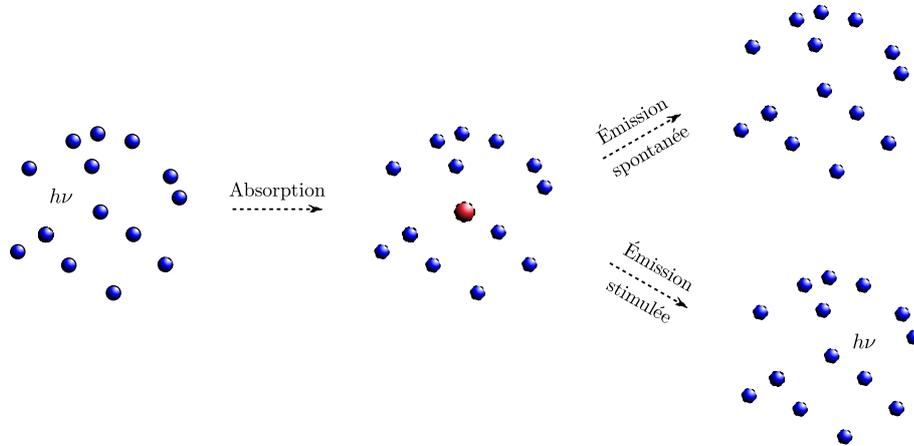


FIGURE III.12 – Illustration des phénomènes d'émission spontanée et stimulée. Le premier cas étant à l'origine de l'effet d'ombre.

Si l'émission se fait de manière stimulée, tout se passe comme si le photon n'avait pas été absorbé et un atome situé juste derrière le premier pourra l'absorber à son tour. Par contre, s'il s'agit d'une émission spontanée, le photon est émis de façon équiprobable dans toutes les directions de l'espace. L'atome situé derrière le premier a moins de chance de pouvoir absorber un photon. À cause du premier atome, l'intensité laser vue par le second est un peu plus faible. Il s'agit de ce que l'on appelle l'effet d'ombre. Lorsque nous

30. La figure III.11 qui représente le piège dipolaire montre qu'il y a environ un facteur cent entre les directions transverses et longitudinales du système. Ce rapport justifie, au moins dans un premier temps, l'utilisation d'une approche 1d pour modéliser le piège dipolaire.

considérons cet effet à l'échelle du système, l'intensité  $I_0$  du laser avant atténuation peut-être fortement diminuée à cause de la présence du nuage (voir figure III.13). La variation de l'intensité laser suit la relation

$$dI_{\pm}(x) = - \int_{\mathbb{R}^2} \sigma_{\pm}(x, v') I_{\pm}(x) f(x, v') dv' dx, \quad (\text{III.54})$$

où les  $\sigma_{\pm}(x, v)$  sont les sections efficaces d'absorptions des photons par les atomes (voir la partie 1.2.a) et  $f(x, v)$  la distribution des atomes.



FIGURE III.13 – Atténuation de l'intensité laser due à la superposition de l'effet d'ombre créé par chacun des atomes du nuage.

Lorsque l'on combine deux faisceaux contra-propageants nous obtenons une force attractive qui tend à comprimer le système. Pour bien le comprendre, notons  $I_+$  (*resp.*  $I_-$ ) le faisceau laser se propageant dans la direction des  $x$  croissants (*resp.* décroissants) et considérons un atome sur le bord du nuage tel que  $x < 0$ . À cause de l'effet d'ombre, il absorbera plus de photon du laser  $I_+$  que du laser  $I_-$ . Après un grand nombre d'émissions spontanées, l'atome subit en moyenne une force dirigée vers le centre du nuage (voir figure III.14).

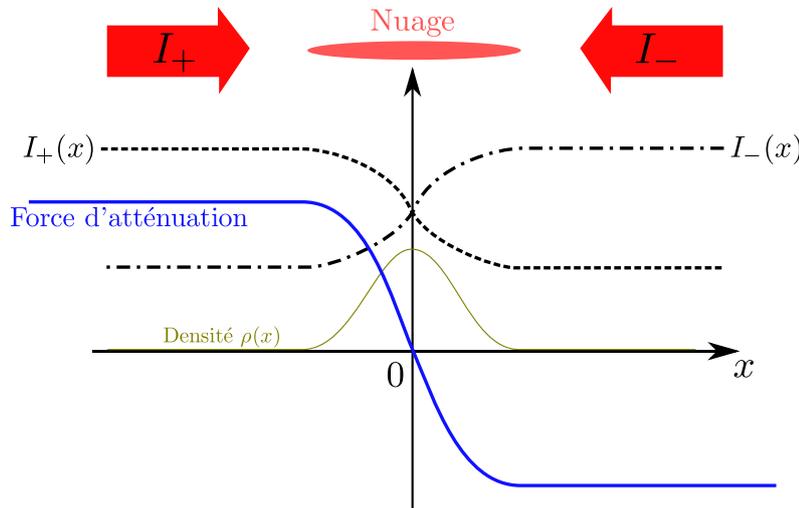


FIGURE III.14 – Représentation de la force attractive obtenue par effet d'ombre. Cet effet est créé par l'atténuation de l'intensité des lasers  $I_+$  et  $I_-$  pendant leur parcours au sein du nuage de densité  $\rho(x) = \int f(x, v) dv$ .

## 2.2 Modélisation

Tout au long de cette partie nous allons utiliser les notions introduites dans 2.1 afin de modéliser le mieux possible un piège dipolaire avec un fort rapport d'aspect, plus précisément avec une dimension très grande devant les deux autres. Nous essayerons de montrer que dans certains cas limites du modèle, le nuage d'atomes devrait pouvoir être considéré comme un système de particules Browniennes auto-gravitantes.

Nous commencerons par expliciter la pression de radiation exercée par les lasers sur le nuage. Ensuite nous chercherons un état stationnaire du système sous réserve d'hypothèses dont la validité sera discutée lors de la comparaison avec les expériences de la partie 2.3. Enfin nous décrirons un peu les propriétés dynamiques du système en considérant spécifiquement les oscillations de respiration du nuage.

### 2.2.a Pression de radiation

Nous avons déjà vu, au paragraphe 2.1.a, comment modéliser le piège dipolaire. Il nous reste donc à prendre en compte l'effet de la paire de lasers. Pour cela, il nous suffit de reprendre les expressions obtenues dans le paragraphe 1.1.c à la différence près qu'il n'y a plus d'effet Zeeman. Il ne faut prendre en compte que l'effet Doppler et l'atténuation des lasers. Les forces de radiations par unité de masse induites par les lasers sont donc

$$\mathbf{F}_{\pm}[f](x, v) = \pm \frac{\hbar k_L \Gamma}{2m} \frac{1}{1 + 4 \left( \frac{\delta \mp k_L v}{\Gamma} \right)^2} \frac{I_{\pm}[f](x)}{I_s} \mathbf{e}_x, \quad (\text{III.55})$$

avec

$$\frac{dI_{\pm}}{dx}[f](x) = - \int_{\mathbb{R}} \sigma_{\pm}(v') I_{\pm}[f](x) f(x, v') dv', \quad (\text{III.56})$$

où  $\sigma_{\pm}(v')$  sont les sections efficaces d'absorptions des photons lasers par les atomes du système. Elles ont été introduites au paragraphe 1.2.a et sont données par

$$\sigma_{\pm}(x, v) = \frac{\sigma_{res}}{1 + 4 \left( \frac{\delta \mp k_L v}{\Gamma} \right)^2}, \quad (\text{III.57})$$

avec  $\sigma_{res} = 3\lambda^2/2\pi$  la section efficace d'absorption à résonance.

Nous pouvons remarquer que, contrairement au modèle introduit pour le piège magnéto-optique (voir la paragraphe 1.2.a), les sections efficaces d'absorptions ne dépendent pas de la position des atomes. Cela s'explique par le fait que l'effet Zeeman n'entre plus en compte dans le piégeage des atomes.

L'expression de l'intensité le long du système peut-être donnée plus explicitement par

$$\begin{cases} I_+[f](x) = I_0 \exp \left[ - \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^x \sigma_+(v') f(x', v') dx' dv' \right], \\ I_-[f](x) = I_0 \exp \left[ - \int_{\mathbb{R}} \int_x^{\infty} \sigma_-(v') f(x', v') dx' dv' \right], \end{cases} \quad (\text{III.58})$$

avec  $I_0$  l'intensité des lasers avant atténuation, *i.e.*  $I_0 = I_+[f](-\infty) = I_-[f](+\infty)$ .

La force de radiation globale créée par la paire de lasers est simplement donnée par la somme des contributions des deux lasers :

$$\mathbf{F}_{rad}[f](x, v) = \mathbf{F}_+[f](x, v) + \mathbf{F}_-[f](x, v). \quad (\text{III.59})$$

Remarquons qu'à ce stade la force  $\mathbf{F}_{rad}[f](x, v)$  contient toute la physique reliée à la paire de lasers *via* la distribution des atomes  $f(x, v, t)$  : effet d'ombre, confinement, ...

### 2.2.b État stationnaire

En utilisant l'équation de Vlasov-Fokker-Planck, il est possible d'écrire une équation d'évolution pour le système grâce aux expressions de la force de radiation (III.59) et de la force dipolaire (III.53) :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, v, t) + v \frac{\partial f}{\partial x}(x, v, t) + \frac{\partial}{\partial v} \left\{ [\mathbf{F}_{rad}[f](x, v) + \mathbf{F}_{dip}(x)] f(x, v, t) \right\} = D \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(x, v, t), \quad (\text{III.60})$$

avec  $D$  le coefficient de diffusion déjà introduit dans le paragraphe<sup>31</sup> 1.1.d. Malheureusement elle ne nous est pas d'une grande utilité.

Comme toujours, il s'agit d'une équation auto-consistante pour  $f(x, v)$  et il est difficile d'y trouver une solution. Pour palier à cela, nous allons nous limiter dans un premier temps à chercher un état stationnaire du nuage d'atomes. Pour cela, nous ferons les hypothèses simplificatrices suivantes :

- nous allons considérer que les vitesses des atomes dans l'état stationnaire sont suffisamment faibles pour linéariser en vitesse la force de radiation  $\mathbf{F}_{rad}[f](x, v)$ ,
- nous allons considérer que l'absorption des photons par les atomes est faibles.

Les conditions à remplir pour satisfaire ces hypothèses seront explicitées dans les deux prochains sous-paragraphes. En ce qui concerne la validité de ces hypothèses, elle sera étudiée lorsque nous discuterons des résultats expérimentaux, *i.e.* au paragraphe 2.3.a. Enfin, au vue de la symétrie du problème, nous chercherons un état stationnaire  $f_0$  symétrique par rapport à ses variables d'espace et de vitesse.

#### i) Hypothèse de faible vitesse

Nous nous intéressons à un système d'atomes froids qui a pour principale caractéristique d'être un système à basse température. Les atomes ont donc des vitesses généralement très basses et nous allons supposer qu'elles le sont suffisamment pour que les relations suivantes soient vérifiées :

$$k_L v \ll 2|\delta| \quad \text{et} \quad 8|\delta|k_L v \ll \Gamma^2 + 4\delta^2. \quad (\text{III.61})$$

Grâce à ces approximations, nous pouvons utiliser l'approximation linéaire des forces créées par les lasers (III.55). Nous obtenons

$$\begin{cases} \mathbf{F}_+[f_0](x, v) \simeq + \frac{\hbar k_L \Gamma I_0}{2m I_s} \left( \alpha + \frac{8k_L \delta \alpha^2}{\Gamma^2} \times v \right) \exp \left[ - \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^x \sigma_+(v') f_0(x', v') dx' dv' \right] \mathbf{e}_x, \\ \mathbf{F}_-[f_0](x, v) \simeq - \frac{\hbar k_L \Gamma I_0}{2m I_s} \left( \alpha - \frac{8k_L \delta \alpha^2}{\Gamma^2} \times v \right) \exp \left[ - \int_{\mathbb{R}} \int_x^{\infty} \sigma_-(v') f_0(x', v') dx' dv' \right] \mathbf{e}_x, \end{cases} \quad (\text{III.62})$$

31. Contrairement au paragraphe 1.1.d, ici nous n'avons pas  $k_L v \leq \Gamma$ . Avec  $\lambda = 689$  nm,  $T \simeq 1$   $\mu$ K et  $\Gamma = 2\pi \times 7,61 \times 10^3$  s<sup>-1</sup> nous obtenons :  $k_L v \simeq 1.7 \times 10^5 \not\leq 5 \times 10^4 \simeq \Gamma$ . Malgré cela, nous ferons tout de même l'hypothèse d'un coefficient de diffusion  $D$  constant.

avec  $\alpha = \frac{1}{1 + 4(\delta/\Gamma)^2}$ .

Malgré les simplifications apportées par l'hypothèse de faible vitesse, l'expression de la force de radiation issue de l'équation (III.62) dépend toujours de la distribution  $f_0$ . Le problème reste auto-consistent et difficile à traiter. Malgré tout, les prochaines hypothèses vont nous permettre de faire apparaître une friction et de faciliter ainsi la recherche d'un état stationnaire.

ii) *Hypothèse de faible épaisseur optique*

Dans la communauté des atomes froids il est classique d'introduire une quantité, notée  $b$ , qui traduit l'absorption des faisceaux lasers lorsqu'ils parcourent l'ensemble du système. Cette quantité est appelée épaisseur optique et elle est définie par :

$$b = \iint_{\mathbb{R}^2} \sigma(v) f_0(x, v) dx dv \geq 0. \quad (\text{III.63})$$

La définition (III.63) suppose que  $f_0(x, v)$  est paire par rapport à  $v$  de sorte que

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \sigma_+(v) f_0(x, v) dx dv = \iint_{\mathbb{R}^2} \sigma_-(v) f_0(x, v) dx dv, \quad (\text{III.64})$$

car  $\sigma_{\pm}(-v) = \sigma_{\mp}(v)$ , et qu'enfin nous utilisons l'égalité (III.64) pour expliquer la notation<sup>32</sup> de l'équation (III.63).

Dans la suite nous allons faire l'hypothèse de faible épaisseur optique :  $b \ll 1$ . Une conséquence immédiate est la simplification des expressions données par (III.58) lorsqu'elles sont évaluées pour  $f = f_0$ . Étant donné que nous avons déjà simplifié le problème avec l'hypothèse de faible vitesse et l'hypothèse de symétrie de  $f_0$ , nous allons directement utiliser l'équation (III.62). Nous obtenons :

$$\begin{cases} \mathbf{F}_+[f_0](x, v) \simeq +\frac{\hbar k_L \Gamma}{2m} \frac{I_0}{I_s} \left( \alpha + \frac{8k_L \delta \alpha^2}{\Gamma^2} \times v \right) \times \left( 1 - \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^x \sigma(v') f_0(x', v') dx' dv' \right) \mathbf{e}_x \\ \mathbf{F}_-[f_0](x, v) \simeq -\frac{\hbar k_L \Gamma}{2m} \frac{I_0}{I_s} \left( \alpha - \frac{8k_L \delta \alpha^2}{\Gamma^2} \times v \right) \times \left( 1 - \int_{\mathbb{R}} \int_x^{\infty} \sigma(v') f_0(x', v') dx' dv' \right) \mathbf{e}_x \end{cases} \quad (\text{III.65})$$

iii) *Dernières approximations*

Les expressions dans (III.65) ne sont toujours pas simple à utiliser à cause de la dépendance en vitesse de la section efficace d'absorption  $\sigma$  dans les intégrales. Comme nous ne connaissons pas explicitement  $f_0$  nous ne pouvons pas simplifier ces expressions. Deux solutions s'offrent à nous.

---

32. Il faut remarquer que la définition de l'absorption est indépendante du laser considéré car nous avons  $\sigma(v)$  et non  $\sigma_+(v)$  ou  $\sigma_-(v)$ . Il faut bien comprendre que  $b$  est définie pour un état stationnaire. Il est bien sûr possible de définir une épaisseur optique dépendant du temps mais alors il faut introduire une épaisseur optique par laser.

La première consiste à réutiliser l'hypothèse de linéarisation en vitesse. En effet, si  $k_L v \ll 2\delta$  alors la distribution des vitesses des particules est assez étroite et seules les faibles vitesses contribuent dans l'intégrale sur  $\mathbb{R}$ . Nous pouvons alors utiliser l'approximation linéaire de  $\sigma$  en vitesse. Les expressions dans (III.65) deviennent :

$$\begin{cases} \mathbf{F}_+[f_0](x, v) \simeq +\frac{\hbar k_L \Gamma I_0}{2m I_s} \left( \alpha + \frac{8k_L \delta \alpha^2}{\Gamma^2} \times v \right) \times \left( 1 - \int_{-\infty}^x \alpha \sigma_{res} \rho_0(x') dx' \right) \mathbf{e}_x, \\ \mathbf{F}_-[f_0](x, v) \simeq -\frac{\hbar k_L \Gamma I_0}{2m I_s} \left( \alpha - \frac{8k_L \delta \alpha^2}{\Gamma^2} \times v \right) \times \left( 1 - \int_x^{\infty} \alpha \sigma_{res} \rho_0(x') dx' \right) \mathbf{e}_x, \end{cases} \quad (\text{III.66})$$

avec  $\rho_0(x) = \int_{\mathbb{R}} f_0(x, v') dv'$ .

La seconde méthode consiste à chercher un état stationnaire à variables séparables :

$$f_0(x, v) = g_0(v) \rho_0(x). \quad (\text{III.67})$$

Dans ce cas les expressions données par (III.65) deviennent :

$$\begin{cases} \mathbf{F}_+[f_0](x, v) \simeq +\frac{\hbar k_L \Gamma I_0}{2m I_s} \left( \alpha + \frac{8k_L \delta \alpha^2}{\Gamma^2} \times v \right) \times \left( 1 - \int_{-\infty}^x \alpha_{eff} \sigma_{res} \rho_0(x') dx' \right) \mathbf{e}_x \\ \mathbf{F}_-[f_0](x, v) \simeq -\frac{\hbar k_L \Gamma I_0}{2m I_s} \left( \alpha - \frac{8k_L \delta \alpha^2}{\Gamma^2} \times v \right) \times \left( 1 - \int_x^{\infty} \alpha_{eff} \sigma_{res} \rho_0(x') dx' \right) \mathbf{e}_x \end{cases} \quad (\text{III.68})$$

avec

$$\sigma_{eff} = \int_{\mathbb{R}} \sigma(v) g_0(v) dv = \alpha_{eff} \sigma_{res}. \quad (\text{III.69})$$

#### iv) *Système de particules Browniennes attractives piégées*

Que ce soit avec l'équation (III.66) ou (III.68), si nous utilisons l'équation (III.59) nous obtenons une expression simplifiée de la force de radiation<sup>33</sup> très similaire :

$$\mathbf{F}_{rad}[f_0](x, v) \cdot \mathbf{e}_x = \frac{\hbar k_L \Gamma I_0}{2m I_s} \frac{16\delta k_L \alpha^2}{\Gamma^2} v + \frac{\hbar k_L \Gamma I_0}{2m I_s} \alpha \alpha_{eff} \sigma_{res} \left( \int_x^{\infty} \rho_0(x') dx' - \int_{-\infty}^x \rho_0(x') dx' \right), \quad (\text{III.70})$$

où l'on passe de l'une à l'autre en posant  $\alpha_{eff} = \alpha$ . Dans la suite nous utiliserons l'expression (III.68).

La force de radiation se réécrit enfin

$$\mathbf{F}_{rad}[f_0](x, v) = \mathbf{F}_{int}[f_0](x) - \kappa v \mathbf{e}_x, \quad (\text{III.71})$$

33. Pour simplifier les notations, nous remplacerons à partir de maintenant les  $\simeq$  par des égalités.

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}_{int}[f_0](x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}_{bin}(x, x') \rho_0(x') dx', \\ \mathbf{F}_{bin}(x, x') = -\frac{\hbar k_L \Gamma I_0}{2m I_s} \alpha \alpha_{eff} \sigma_{res} \text{sgn}(x - x') \mathbf{e}_x, \\ \kappa = -\frac{\hbar k_L \Gamma I_0}{2m I_s} \frac{16 \delta k_L \alpha^2}{\Gamma^2} > 0. \end{array} \right. \quad (\text{III.72})$$

Le premier terme de l'équation (III.71) est la force d'interaction résultante  $\mathbf{F}_{int}[f](x)$  créée par une distribution unidimensionnelle de particules interagissant *via* la force de gravité  $\mathbf{F}_{bin}$ ; cette force ne dépendant que de la position relative des particules pour un système à une dimension<sup>34</sup>.

En tenant compte de toutes les hypothèses que nous venons de faire, l'équation de Vlasov-Fokker-Planck (III.60) devient pour l'état stationnaire  $f_0$

$$v \frac{\partial f_0}{\partial x}(x, v) + \left( \mathbf{F}_{int}[f_0](x) + \mathbf{F}_{dip}(x) \right) \frac{\partial f_0}{\partial v}(x, v) = D \frac{\partial^2 f_0}{\partial v^2}(x, v) + \kappa \frac{\partial(v f_0)}{\partial v}(x, v). \quad (\text{III.73})$$

En regardant de plus près l'équation (III.73) nous pouvons remarquer que les forces à gauche du signe égal ne dépendent pas de  $v$  et que les termes de l'opérateur de Fokker-Planck ont une forme standard. Cette structure particulière admet un état stationnaire où les parties en vitesse et en espace sont découplées. La partie en vitesse est simplement donnée par une gaussienne et nous pouvons donc chercher  $f_0$  tel que :

$$f_0(x, v) = \sqrt{\frac{\kappa/D}{2\pi}} e^{-\frac{\kappa}{D} \frac{v^2}{2}} \times \rho_0(x). \quad (\text{III.74})$$

Remarquons que cette expression pour  $f_0$  est cohérente avec la recherche d'une solution à variables séparables que nous avons faite plus haut.

L'équation (III.73) se réduit simplement à sa partie en espace où toute la dépendance en vitesse a disparue. L'équation obtenue étant très simple à résoudre numériquement :

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial x}(x) + \left( \mathbf{F}_{int}[f_0](x) + \mathbf{F}_{dip}(x) \right) \rho_0(x) = 0. \quad (\text{III.75})$$

Pour aller plus loin qu'un traitement numérique, il faut regarder l'équation (III.75) et remarquer que nous avons réduit le problème à la connaissance de l'état stationnaire d'un système de particules où deux effets entrent en compétition : les interactions entre particules de type gravité et le piège dipolaire. Nous pouvons donc naturellement envisager deux cas limites :

- Le piège domine la dynamique du système : elle se réduit à un système de particules sans interaction.
- Les interactions dominant : le système peut-être vu comme un système purement auto-gravitant unidimensionnel.

---

34. C'est exactement le même type d'expression qui apparaît pour la force de Coulomb unidimensionnelle que nous avons déjà vue au chapitre II paragraphe 3.2.a.

Pour distinguer ces deux cas limites, nous allons introduire deux tailles typiques liées à chacun de ces cas. Pour la limite dipolaire nous notons

$$L_{dip} = \sqrt{\frac{(D/\kappa)}{m\omega_0}}. \quad (\text{III.76})$$

Pour faciliter l'interprétation de cette longueur, il est plus simple d'introduire la température  $T$  du système qui est donnée, d'après (III.74), par :

$$k_B T = \frac{D}{\kappa}, \quad (\text{III.77})$$

avec  $k_B$  la constante de Boltzmann. La taille  $L_{dip}$  est celle du système lorsque l'effet attractif du piège dipolaire est en équilibre avec celui *répulsif* de la température.

De la même manière, nous pouvons introduire une longueur caractéristique associée aux interactions entre particules :

$$L_{int} = \frac{k_B T}{N} \frac{1}{\frac{\hbar k_L \Gamma}{2m} \frac{I_0}{I_s} \alpha \alpha_{eff} \sigma_{res}}. \quad (\text{III.78})$$

Cette fois,  $L_{int}$  est la taille du système lorsque ce sont les effets attractifs dus aux interactions entre particules qui sont contre-balançés par la température.

Notons que l'on pourrait essayer de créer une dernière longueur caractéristique à partir du piège et des interactions. Cependant, ce n'est pas possible car les deux effets jouent des rôles attractifs et le système ne connaîtrait aucun autre état stable que celui qui se réduit à un point.

#### v) *Particules Browniennes auto-gravitantes*

Notre système de particules Browniennes attractives dans le piège dipolaire admet deux comportements limites :

- $L_{int} \ll L_{dip}$  : le régime auto-gravitant est une bonne approximation du système.
- $L_{int} \gg L_{dip}$  : c'est le régime de particules piégées sans interaction qui décrit convenablement le système.

Bien entendu, le second cas n'a pas de réel intérêt et nous allons nous focaliser sur le premier. Dans ce cas, l'équation (III.75) se réduit à

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial x}(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}_{bin}(x, x') \rho_0(x') \rho_0(x) dx' = 0. \quad (\text{III.79})$$

Le nuage d'atome peut ainsi être vu comme un système de particules Browniennes auto-gravitantes unidimensionnel. En effet, l'équation (III.79) est exactement celle de ce type de système [Cha06a, Cha06b] dont la solution est bien connue [Cam50, Ryb71] :

$$\rho_0(x) = \frac{N}{8L_{int}} \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{x}{4L_{int}}\right)}. \quad (\text{III.80})$$

La figure III.15 compare le profil donné par l'équation (III.80) et un profil gaussien obtenu, par exemple, pour un système sans interaction entre particules.

Nous venons donc de montrer que dans les limites :

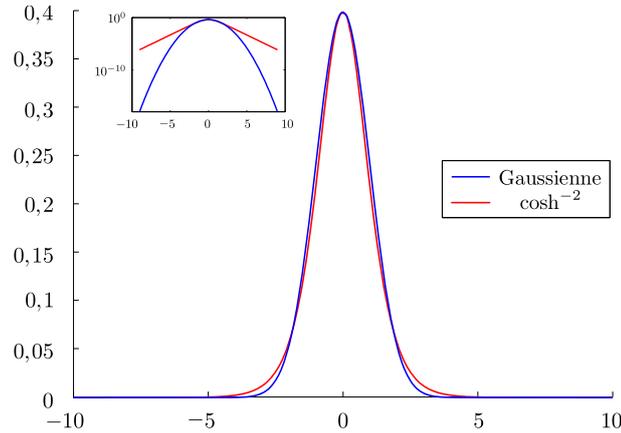


FIGURE III.15 – Comparaison entre un profil en  $\cosh^{-2}$  donné par l'équation (III.80) et un profil gaussien ayant le même écart type. L'encart représente les mêmes profils en échelle semi-log.

- faible vitesse,
- faible épaisseur optique,
- $L_{int} \ll L_{dip}$ ,
- quelques hypothèses techniques sur l'état stationnaire  $f_0$  (pair en vitesse, ...).

Le système d'atomes froids peut-être vu comme un système de particules Browniennes auto-gravitantes grâce à la force de radiation de deux lasers contra-propageant. L'effet d'ombre, induit par l'absorption des photons, crée une force attractive qui comprime le système ; celle-ci pouvant se voir comme une interaction de type gravité entre les particules.

Malgré le fait que dans certaines limites l'état stationnaire soit le même que celui d'un système auto-gravitant, nous sommes en droit de nous demander s'il s'agit juste d'un heureux hasard ou bien si les deux systèmes sont vraiment analogues. En effet, *a priori* les deux systèmes ne satisfont la même équation que pour l'état stationnaire<sup>35</sup>  $f_0$ . Pour tenter de répondre à cela, nous allons dans la suite essayer d'aller plus loin en regardant quelques propriétés dynamiques du système.

### 2.2.c Dynamique de respiration

Contrairement au paragraphe 2.2.b, nous allons ici nous intéresser à la dynamique des atomes froids dans le piège dipolaire et plus particulièrement du mode de respiration du système. Plusieurs raisons expliquent ce choix :

1. La théorie développée dans le paragraphe 2 du chapitre II montre que l'étude du mode de respiration a les avantages d'être : simple à mettre en œuvre, rapide et de n'avoir besoin que de peu d'information sur le système.
2. La fréquence du mode de respiration est directement reliée à la force d'interaction entre particules et c'est justement ce qui nous intéresse le plus : est-ce qu'il s'agit d'un système auto-gravitant unidimensionnel ?

35. Nous nous attendons, pour  $f$  proche de l'état stationnaire  $f_0$ , à décrire le système par la même équation de Vlasov-Fokker-Planck. Cependant, il n'y a pas de raison que cela soit toujours vrai.

Nous allons tout de suite illustrer l'avantage du mode de respiration car nous n'allons pas faire les hypothèses qui étaient nécessaires pour l'étude de l'état stationnaire. Nous repartons donc des équations (III.53), (III.55)-(III.60), où la force de radiation des deux lasers peut s'écrire de façon compactée par

$$\mathbf{F}_{rad}[f](x, v) = \frac{\hbar k_L \Gamma}{2mI_s} \left\{ \alpha_-(v) I_+[f](x) - \alpha_+(v) I_-[f](x) \right\} \mathbf{e}_x, \quad (\text{III.81})$$

avec

$$\alpha_{\pm}(v) = \frac{1}{1 + 4 \left( \frac{\delta \pm k_L v}{\Gamma} \right)^2}. \quad (\text{III.82})$$

Notons que nous avons les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} I_{\pm}[f_0](-x) &= I_{\mp}[f_0](x), \\ \alpha_{\pm}(-v) &= \alpha_{\mp}(v), \end{cases} \quad (\text{III.83})$$

avec  $f_0$  un état stationnaire à symétrie sphérique.

Si nous nous rappelons de l'étude faite en II.2, la méthode utilisée pour dériver l'équation de contrainte du mode de respiration nécessite que les interactions entre particules soient homogènes. Or ici il n'y a pas d'interaction à deux corps entre les particules. Elles interagissent entre elles *via* les intensités lasers qui parcourent le nuage, plus précisément par l'effet d'ombre qu'elles créent. Au delà de l'équation de contrainte (II.24) du chapitre II, c'est une méthode pour étudier le mode de respiration que nous avons développée. Il nous suffit donc de suivre cette méthode et voir jusqu'où elle va nous mener<sup>36</sup>.

La première étape consiste à supposer que la dynamique du mode de respiration est donnée par la relation suivante :

$$f(x, v, t) = f_0(\varphi_t(r, v)), \quad (\text{III.84})$$

avec

$$\varphi_t(r, v) = \left( \frac{x}{\lambda(t)}, \lambda(t)v - \dot{\lambda}(t)x \right), \quad (\text{III.85})$$

où  $\lambda(t)$  est la taille caractéristique du système et  $f_0$  un état stationnaire. Nous injectons l'équation (III.84) dans l'équation de Vlasov (III.60) que nous intégrons sur  $dx dv$  après l'avoir multiplié par  $xv/N$ . Nous obtenons :

$$\ddot{\lambda}(t) \langle x^2 \rangle_{f_0} + \lambda(t) \omega_0^2 \langle x^2 \rangle_{f_0} - \langle x \mathbf{F}_{rad}[f_0 \circ \varphi_t](x, v) \rangle_{f_0} - \frac{1}{\lambda^3(t)} \langle v^2 \rangle_{f_0} = 0, \quad (\text{III.86})$$

où  $\mathbf{F}_{rad}[f](x, v) = F_{rad}[f](x, v) \mathbf{e}_x$ .

Comme nous pouvions nous y attendre, c'est la force de radiation qui nous pose le plus de problème. Pour y remédier, nous allons uniquement considérer les oscillations de respiration de faibles amplitudes en supposant que, pour tout  $t$  :  $|\lambda(t) - 1| \ll 1$  et  $\dot{\lambda}(t) \ll 1$ . Quand

---

36. Les calculs présentés dans II.2 partent de la hiérarchie BBGKY dont dérive l'équation de Vlasov. En effet, nous l'obtenons en fermant la hiérarchie de sorte qu'il n'existe pas de corrélation entre particules, *i.e.* en supposant que  $g(x, v, x', v') \propto f(x, v)f(x', v')$ . Cela ne pose donc aucun problème d'utiliser la méthode présentée au chapitre II.

on garde en tête que ce qui nous intéresse ici c'est la fréquence du mode de respiration, l'approximation de faible amplitude prend tout son sens car pour de fortes perturbations nous avons vu que l'évolution de  $\lambda$  est très loin d'être décrite par une seule fréquence. Après le développement limité et en utilisant les relations de symétries (III.83), nous arrivons à l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
 \langle xF_{rad}[f_0 \circ \varphi_t](x, v) \rangle_{f_0} &= \langle xF_{rad}[f_0](x, v) \rangle_{f_0} \\
 &- \frac{16k_L \hbar k_L \Gamma}{\Gamma^2 2mI_s} \langle xv(\delta - k_L v) \alpha_-^2(v) I_+[f_0](x) \rangle_{f_0} \times (\lambda(t) - 1) \\
 &+ \frac{16k_L \hbar k_L \Gamma}{\Gamma^2 2mI_s} \langle xx(\delta - k_L v) \alpha_-^2(v) I_+[f_0](x) \rangle_{f_0} \times \dot{\lambda}(t) \\
 &+ \text{ordre supérieur.}
 \end{aligned} \tag{III.87}$$

Pour finir, nous allons utiliser l'équation de Vlasov pour l'état stationnaire  $f_0$  afin d'exprimer le terme  $\langle xF_{rad}[f_0](x, v) \rangle_{f_0}$  sous une forme plus agréable. En faisant le même calcul que pour dériver l'équation (III.86), mais en utilisant  $f_0$  et non  $f_0 \circ \varphi_t$ , nous avons

$$\langle xF_{rad}[f_0](x, v) \rangle_{f_0} = \omega_0^2 \langle x^2 \rangle_{f_0} - \langle v^2 \rangle_{f_0}, \tag{III.88}$$

qui permet d'écrire l'équation de contrainte du mode de respiration :

$$\begin{aligned}
 &\ddot{\lambda}(t) + (\lambda(t) - 1)\omega_0^2 + 3(\lambda(t) - 1) \frac{\langle v^2 \rangle_{f_0}}{\langle x^2 \rangle_{f_0}} \\
 &+ \frac{16k_L \hbar k_L \Gamma}{\Gamma^2 2mI_s} \frac{\langle xv(\delta - k_L v) \alpha_-^2(v) I_+[f_0](x) \rangle_{f_0}}{\langle x^2 \rangle_{f_0}} \times (\lambda(t) - 1) \\
 &- \frac{16k_L \hbar k_L \Gamma}{\Gamma^2 2mI_s} \frac{\langle xx(\delta - k_L v) \alpha_-^2(v) I_+[f_0](x) \rangle_{f_0}}{\langle x^2 \rangle_{f_0}} \times \dot{\lambda}(t) \\
 &+ o(\lambda - 1, \dot{\lambda}) = 0
 \end{aligned} \tag{III.89}$$

En raisonnant par analogie, nous nous apercevons que la première ligne de l'équation (III.89) est exactement l'équation de contrainte du mode de respiration d'un système de particules auto-gravitantes unidimensionnel dans la limite de faibles perturbations<sup>37</sup> et que la troisième ligne est un terme de friction qui traduit l'équilibre des particules avec un thermostat.

Seule la seconde ligne nous empêche de conclure que le mode de respiration du système d'atome froids est exactement celui d'un système auto-gravitant. Cependant, il faut rappeler que pour l'instant, contrairement à l'étude faite pour l'état stationnaire, nous n'avons fait aucune des trois hypothèses : faible vitesse, faible épaisseur optique, et  $L_{int} \ll L_{dip}$ . Dans le cas où nous les admettons, la deuxième ligne devient négligeable et nous obtenons

---

37. Voir l'équation (II.24) avec un degré d'homogénéité  $k = 0$  obtenu pour une interaction entre particules de type gravité  $1d$ .

le résultat escompté. Le terme de friction prenant la forme  $\kappa\dot{\lambda}$ , avec  $\kappa$  définie à l'équation (III.72). Le résultat obtenu pour le mode de respiration est bien compatible avec celui de l'état stationnaire, *i.e.* le même paramètre de friction  $\kappa$  apparaît.

Avant de passer aux résultats expérimentaux, il faut noter que la deuxième ligne peut-être négligeable même lorsque les trois hypothèses ne sont pas satisfaites. Cela expliquera d'ailleurs pourquoi, même relativement loin du régime auto-gravitant, les mesures expérimentales de la fréquence du mode de respiration seront proches de celles d'un système de particules auto-gravitantes<sup>38</sup>.

En conclusion, que ce soit du point de vue statique ou dynamique (au moins pour le mode de respiration), il semble possible, d'un point de vue uniquement théorique, d'atteindre un régime où un système d'atomes froids dans un piège dipolaire soumis à deux faisceaux lasers de directions opposées soit équivalent à un système de particules Browniennes auto-gravitantes unidimensionnel. Cependant nous verrons dans le prochain paragraphe que les paramètres expérimentaux ne permettent pas d'atteindre le régime auto-gravitant de façon certaine.

## 2.3 Confrontation avec l'expérience

---

### 2.3.a Discussion sur le passage "théorie/expérience"

Dans le paragraphe 2.2.b nous avons obtenu un modèle pour décrire le comportement des atomes dans le piège dipolaire soumis à une paire de lasers contra-propageant. Celui-ci prévoit dans certaines limites que le nuage se comporte comme un système auto-gravitant unidimensionnel. Cependant nous n'avons pas encore discuté de la validité de ces limites. Sont-elles atteignables expérimentalement ? Il est assez difficile de répondre de prime abord à cette question car cela dépend de beaucoup de paramètres liés directement à l'expérience ; eux-mêmes étant liés les uns aux autres.

Dans la suite nous allons discuter de plusieurs difficultés et problèmes qui peuvent nous empêcher d'atteindre le régime auto-gravitant. Nous n'entrerons pas spécialement dans les détails mais il est important de connaître les limites de notre approche.

#### i) Difficultés expérimentales

$\alpha$  : Piège dipolaire

Une première approximation concerne le piège dipolaire. Nous avons utilisé l'approximation harmonique du potentiel (voir 2.1.a) mais cela suppose que la taille du système est suffisamment faible pour ne pas être influencée par les zones anharmoniques. Cette hypothèse ne sera pas toujours vérifiée expérimentalement. À titre d'exemple, pour que l'hypothèse d'harmonicité soit vérifiée, il faut que le rapport entre la taille du nuage et la taille du piège dipolaire soit petite devant un. Or, avant de mettre en route la paire de lasers à l'origine de l'effet d'ombre, la taille du nuage est typiquement de l'ordre de 400 – 500  $\mu\text{m}$  pour un piège dipolaire de taille typique :  $x_R = 1200 \mu\text{m}$ . Heureusement,

---

38. Nous avons un véritable problème pour estimer quantitativement ce terme car il nécessite la connaissance du profil stationnaire  $f_0$ . Cependant, en utilisant des profils approchés (comme un profil gaussien ou celui donné par (III.80)) nous sommes capables d'estimer son ordre de grandeur.

grâce à l'effet d'ombre qui génère des interactions attractives entre les particules, la taille du système diminue. Du point de vue du modèle, l'hypothèse harmonique reste raisonnable dans ces cas ; la taille du nuage atteignant environ  $100 - 200 \mu\text{m}$  quand les lasers sont branchés. Il faudra tout de même garder en tête que lorsque les interactions ne sont pas assez fortes, l'anharmonicité peut entrer en jeu et modifier les résultats.

En effet, quand on se rappelle qu'un profil gaussien est très proche d'un profil  $\cosh^{-2}$ , on comprend que les différences se verront essentiellement dans les ailes des distributions, là où justement l'anharmonicité peut entrer en jeu.

$\beta$  : Nombre d'atomes dans le nuage

La théorie développée conserve implicitement le nombre de particules mais du point de vue expérimental ce n'est pas vrai. Nous nous sommes aperçus en traitant les données que cela influençait l'évolution transitoire du nuage. Dans le paragraphe qui traitera du mode de respiration (voir 2.3.c) nous ne prendrons en compte que les résultats où la variation relative du nombre d'atomes n'excède pas 40% afin de limiter cet effet. Il ne s'agit donc pas d'une limite à proprement parler de notre modélisation cependant cela reste un aspect qu'il faut surveiller pour appliquer correctement les résultats de la partie 2.2.c.

$\gamma$  : Comportement en temps grand

“Une fois le régime auto-gravitant atteint, le système est dans un état stationnaire et n'évolue plus”. Voilà typiquement ce que le modèle prévoit. Cependant dans les expériences c'est plus compliqué que cela. En réalité d'autres effets peuvent survenir comme par exemple un chauffage du système à grand temps. Un exemple est montré sur la figure III.16. Après une période durant laquelle le nuage subit une compression rapide, la taille du système se met à augmenter. La théorie n'est alors plus valable et le profil n'est plus en  $\cosh^{-2}$ .

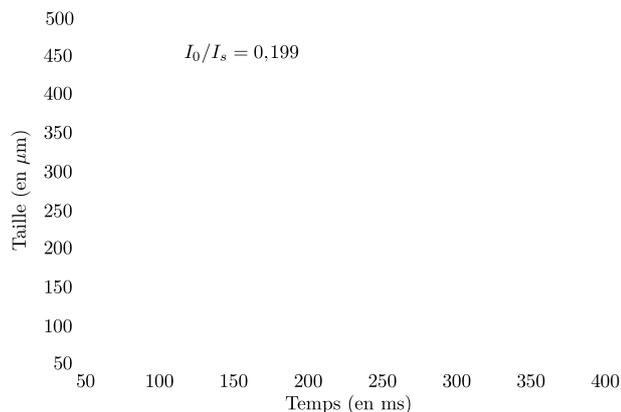


FIGURE III.16 – Illustration du chauffage du système en temps grand *via* l'augmentation de la taille après avoir atteint un état stationnaire. Le paramètre de saturation vaut 0,199 et le désaccord est de  $-4\Gamma$ .

ii) *Hypothèses faites durant la modélisation*

$\alpha$  : Système unidimensionnel

Dans le modèle présenté nous n'avons pas discuté du passage  $3d \rightarrow 1d$  du nuage d'atomes. Cependant, cette étape n'est pas toujours parfaitement contrôlée. La forme en cigare implique l'existence de variations transverse de la densité d'atomes dans le nuage. L'effet d'ombre n'est donc pas le même sur toutes les droites parallèles à l'axe  $x$ . Il est néanmoins possible de définir une intensité effective en intégrant sur les dimensions transverses. À faible épaisseur optique ( $b \ll 1$ ), nous retrouvons exactement les intensités données par (III.58). À l'inverse, lorsque ce n'est pas le cas, la situation est plus complexe. Nous n'entrerons pas dans les détails mais il faut garder en tête qu'il reste quelques points à régler dans la modélisation du système.

$\beta$  : Faible vitesse

Nous avons rapidement mentionné dans la note de bas de page numéro 31 que l'hypothèse :

$$k_L v \leq \Gamma, \quad (\text{III.90})$$

n'est pas vérifiée par le nuage d'atome de Strontium de notre piège dipolaire. Par conséquent le coefficient de diffusion  $D$  ne devrait pas être indépendant de la position et de la vitesse des particules. Nous ne reviendrons pas sur cette hypothèse ici mais plutôt sur celles faites dans le paragraphe 2.2.b :

$$k_L v \ll 2|\delta| \quad \text{et} \quad 8|\delta|k_L v \ll \Gamma^2 + 4\delta^2. \quad (\text{III.91})$$

Bien que l'hypothèse (III.90) ne soit pas satisfaite, cela ne signifie par pour autant que les deux autres ne le soient pas.

Avant toute chose, précisons les valeurs typiques de l'expérience. Nous avons :

- La longueur d'onde  $\lambda$  des lasers comprimant est :  $\lambda = 689 \text{ nm}$ , soit  $k_L \simeq 10^7 \text{ m}^{-1}$ .
- La température typique des atomes dans le système est :  $T \sim 1 \text{ } \mu\text{K}$ . La masse  $m$  d'un atome de Strontium 88 étant de  $1,45 \times 10^{-25} \text{ kg}$ , nous obtenons d'après le théorème d'équipartition une vitesse typique de  $v \simeq 1,7 \text{ cm/s}$ .
- La largeur naturelle de raie de la transition atomique utilisée :

$$\Gamma = 2\pi \times 7,61 \times 10^3 \text{ s}^{-1} \simeq 5 \times 10^4 \text{ s}^{-1}. \quad (\text{III.92})$$

Nous en déduisons que  $k_L v \simeq 1,7 \times 10^5 \text{ s}^{-1}$  et par conséquent que l'hypothèse  $k_L v \ll 2|\delta|$  n'est pas facilement satisfaite. En effet, pour  $|\delta| = \Gamma$  nous avons  $k_L v \not\ll 2|\delta| = 10^5 \text{ s}^{-1}$ . Pour des désaccords plus élevés les résultats sont bien meilleurs. Par exemple, pour  $|\delta| = 5\Gamma$  nous avons  $k_L v \leq 2|\delta| = 5 \times 10^5 \text{ s}^{-1}$ . Cependant, nous sommes loin de la condition :  $k_L v \ll 2|\delta|$ .

En ce qui concerne la seconde hypothèse, les résultats sont encore pires. Pour bien voir cela réécrivons la seconde condition :

$$8k_L v \ll \frac{1 + 4(\delta/\Gamma)^2}{|\delta|/\Gamma} \Gamma, \quad (\text{III.93})$$

avec  $8k_L v \simeq 1,3 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$ . Pour  $\delta$  compris entre  $-\Gamma$  et  $-7\Gamma$  nous obtenons une valeur de  $(1 + 4(\delta/\Gamma)^2)/(|\delta|/\Gamma)$  comprise entre 5 et 30. Soit donc

$$\forall \delta \in [-\Gamma; -7\Gamma], \quad 8k_L v > \frac{1 + 4(\delta/\Gamma)^2}{|\delta|/\Gamma} \Gamma. \quad (\text{III.94})$$

Au final, les expériences que nous avons réalisées ne satisfont pas l'hypothèse de faible vitesse et par conséquent nous ne sommes pas dans le cas limite d'un système auto-gravitant. Cependant nous verrons au paragraphe 2.3.b que les résultats expérimentaux sont tout de même très encourageants.

$\gamma$  : Faible épaisseur optique

La dernière hypothèse qu'il nous reste à discuter est celle concernant l'épaisseur optique  $b$  :  $b \ll 1$ .

À cause du passage  $3d \rightarrow 1d$ , il n'est pas évident d'évaluer théoriquement  $b$ . De plus, cette valeur dépend du nombre d'atomes piégés, ce qui n'est pas simple à contrôler expérimentalement<sup>39</sup>. Ces raisons nous ont fait opter pour une approche *a posteriori*, *i.e.* évaluer  $b$  à partir des résultats expérimentaux. Une nouvelle fois les résultats n'ont pas été à la hauteur de nos espérances. En effet, l'épaisseur optique mesurée est presque toujours de l'ordre de l'unité. Elle prend ainsi, selon le nombre d'atomes piégés et la valeur du désaccord, des valeurs entre  $b = 0,1$  et  $b = 3$ . Encore une fois, les résultats sont meilleurs à fort désaccord ( $|\delta| \simeq 7 - 8\Gamma$ ) où  $b$  est de l'ordre de 0,1.

Tout comme la première condition dans l'hypothèse de faible vitesse, il existe des gammes de paramètres où l'hypothèse de faible épaisseur optique est presque satisfaite. Le fait que nous soyons toujours *proche* du régime auto-gravitant, mais sans y être réellement, explique les résultats encourageants que nous avons obtenus et qui seront décrit dès le prochain paragraphe.

### 2.3.b État stationnaire

D'un point de vue général, on a accès au système grâce à des photons qui interagissent avec celui-ci. Afin d'obtenir des informations sur le système, on utilise expérimentalement un autre faisceau laser sur une transition atomique qui ne l'influencera pas. Ce laser est disposé de façon perpendiculaire au grand axe du nuage. Une camera placée derrière le système permet de mesurer la densité d'atomes par effet d'ombre : moins la caméra reçoit de photons et plus la densité d'atome dans une zone est élevée. La figure III.17 représente les données brutes obtenues expérimentalement. À partir de ces données, il est possible de remonter à beaucoup d'autres informations (taille du système, densité le long de l'axe  $x$ , température<sup>40</sup>, ...) et tester la théorie prédite dans le paragraphe 2.2.

La figure III.18 représente la densité en espace à l'équilibre du nuage d'atomes  $\rho_0(x)$  lorsque les faisceaux contra-propageants ne sont pas allumés. Comme nous pouvons le constater, la régression par un profil  $\cosh^{-2}$  ne donne pas de bon résultats. Cependant, il en est de même pour la régression à partir d'une distribution gaussienne. Les résultats sont d'ailleurs encore moins bons. Ce désaccord prend son origine dans l'approximation harmonique du piège qui n'est pas valable. En effet, lorsque que l'on corrige la densité pour prendre en compte l'anharmonicité, les résultats sont bien meilleurs. Pour cela, il

39. Nous avons vu, quelques paragraphes plus haut, que le nombre d'atomes dans le piège varie au cours de l'expérience et qu'il peut aussi varier d'une réalisation à une autre.

40. *Via* la relation  $\langle v^2 \rangle = \omega_0^2 \langle r^2 \rangle$ .

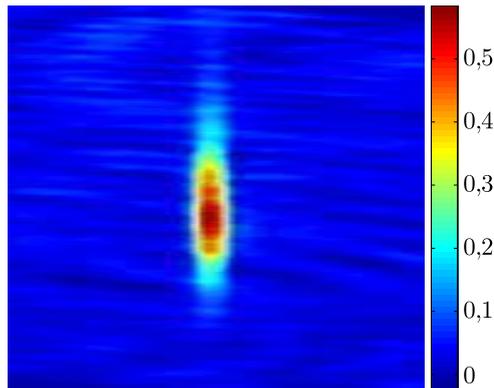


FIGURE III.17 – Imagerie d’ombre du nuage d’atomes dans le piège dipolaire. La grille est constituée de  $80 \times 450$  pixels et les nuages s’étendent typiquement sur  $4 \times 100$  pixels (un pixel correspond à  $7 \mu\text{m}$ ).

nous suffit d’écrire l’équilibre du système en considérant la forme du potentiel  $U_{dip}$  avant l’approximation. Les équations (III.50) et (III.51) nous conduisent, après quelques calculs à :

$$\rho_0(x) = \exp\left(\frac{C}{1 + (x/x_R)^2}\right), \quad (\text{III.95})$$

avec  $C$  la constante qui convient. Elle dépend entre autre de la température, du désaccord, ...

À choisir entre les profils gaussien et auto-gravitant, c’est ce dernier qui gagnerait alors

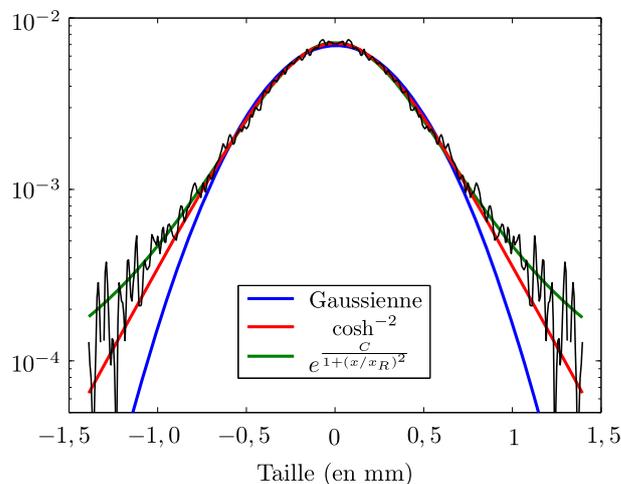


FIGURE III.18 – Représentation de la densité  $\rho_0(x)$  lorsque les lasers contra-propageants ne sont pas présent, *i.e* lorsque les atomes se déplacent dans le piège dipolaire sans interaction entre eux. Notons que les régressions sont faites avec un paramètre libre.

qu’il n’y pas pour l’instant d’interaction entre les atomes. Il faudra donc bien faire attention dans l’interprétation des résultats et ne pas se laisser abuser par un artefact.

Dans la suite l’anharmonicité du piège ne sera plus vraiment un problème. En effet, dès que les interactions entre atomes sont *branchées* la taille du système diminue et l’hypothèse d’un piège harmonique est de mieux en mieux vérifiée. La figure III.19 montre un exemple de résultat obtenu dans un régime favorable ( $\delta \simeq -8\Gamma$  et  $T \simeq 2 \mu\text{K}$ ), *i.e.* les

interactions attractives sont importantes et nous sommes plus ou moins proche de la validité des hypothèses du modèle. Comme nous pouvons le constater sur la figure III.19(a) la densité obtenue pour un piège anharmonique sans interaction pêche complètement au voisinage du centre du nuage. Par contre les profils gaussien et  $\cosh^{-2}$  donnent d'assez bons résultats. Pour distinguer ces derniers, nous les avons tracés sur la même figure en échelle semi-log. Le résultat obtenu est donné par la figure III.19(b). Au vu des résultats, la meilleure description est bien donné par le profil  $\cosh^{-2}$ .

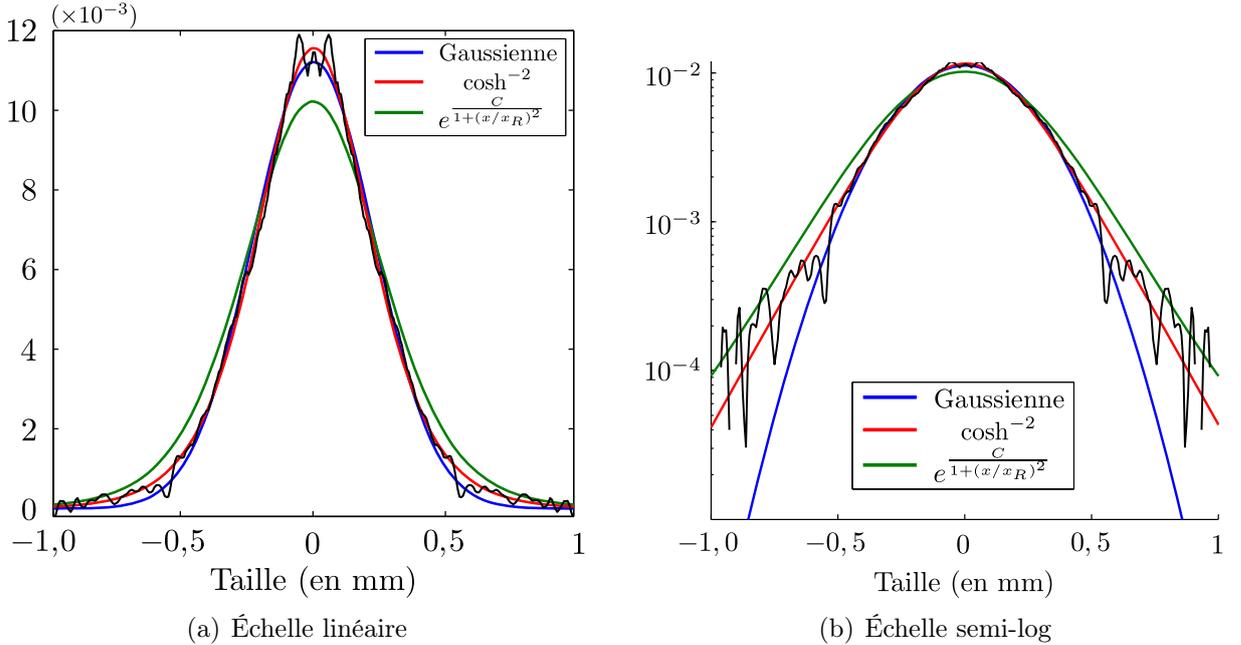


FIGURE III.19 – Profil de densité à l'équilibre en présence d'une force attractive entre atomes due à l'effet d'ombre. L'écart type de la distribution du nuage dans la direction  $x$  est de  $140 \mu\text{m}$ . Il est calculé à partir des données brutes du même type que ceux de la figure III.17. Les paramètres expérimentaux sont  $\delta \simeq -8\Gamma$ ,  $T \simeq 2 \mu\text{K}$ ,  $N \simeq 10^5$  atomes et  $b = 0,4 \pm 0,1$ .

Malgré les résultats très encourageants que nous avons obtenus, il est difficile d'affirmer que le régime obtenu expérimentalement est bien un régime auto-gravitant effectif. Il nous faut trouver d'autres indicateurs pour confirmer ou non ces premiers résultats.

### 2.3.c Dynamique de respiration

Après l'étude du comportement à l'équilibre du nuage d'atome, nous avons décidé d'utiliser son comportement transitoire. L'avantage est qu'il s'agit d'une approche complètement différente qui donnera ou non des arguments en faveur du régime auto-gravitant. Comme le lecteur peut s'en douter, nous allons une nouvelle fois utiliser les résultats obtenus au chapitre II sur le mode de respiration d'un système de particules.

i) *Résultat qualitatif*

Grâce à une prise de données à intervalle régulier, nous sommes capables de mesurer la taille typique du nuage en fonction du temps à partir des données brutes expérimentales. Les figures III.20(a) et III.20(b) en donnent des exemples pour différentes valeurs du rapport  $I_0/I_s$ . Nous retrouvons expérimentalement que lorsque le rapport  $I_0/I_s$  augmente, le système passe d'un régime sous-amorti à un régime sur-amorti. En effet, l'expression de la friction effective  $\kappa$ , obtenue par le modèle présenté en 2.2, est proportionnelle à ce rapport (voir équation (III.72)). Bien que qualitativement, ces résultats soient en accord avec le modèle développé, cela ne constitue pas une preuve irréfutable de sa validité. D'autant plus que nous retrouvons ici le phénomène décrit au paragraphe 2.3.a : le chauffage du système dans la direction longitudinale. Cet effet non désiré qui n'est pas pris en compte dans le modèle peut mettre en doute l'interprétation des résultats qu'il faut traiter avec soin.

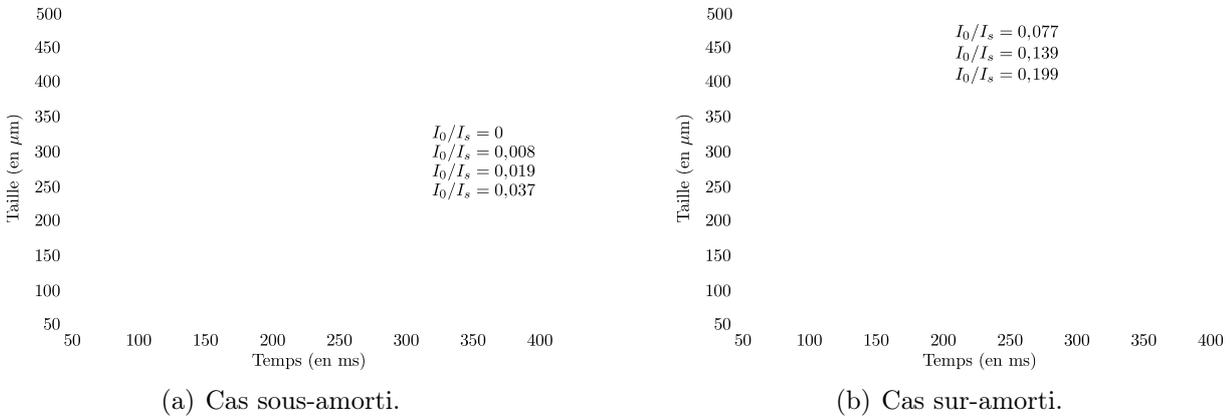


FIGURE III.20 – Évolution en temps de la taille typique du nuage pour différentes valeurs du rapport  $I_0/I_s$ . Deux régimes sont possibles selon la valeur de ce rapport. La courbe  $I_0/I_s = 0$  représente l'évolution de la taille du nuage lorsque les deux lasers contra-propageants ne sont pas allumés, *i.e.* lorsque les atomes se déplacent sans interaction dans le piège dipolaire.

 ii) *Comparaison entre expérience et théorie*

Afin d'utiliser au mieux le mode de respiration comme signature des interactions de type gravité unidimensionnelle nous allons uniquement utiliser les résultats obtenus dans le régime sous-amorti<sup>41</sup>. Nous allons comparer les fréquences d'oscillations obtenues expérimentalement à celles prédites par l'équation (II.40) pour un système auto-gravitant unidimensionnel, *i.e.* où la force d'interaction entre les particules est de degré d'homogénéité  $k = 0$ .

L'équation (II.40) stipule que la fréquence du mode de respiration du système doit être

41. Nous avons vu au paragraphe II.2.2.b.ii.α que les prédictions faites sur le mode de respiration ne sont acceptables que lorsque que la friction n'est pas trop importante par rapport au piègeage. Par conséquent, nous nous limiterons au régime sous-amorti.

dans la limite de faible friction<sup>42</sup> :

$$\omega_{br}(k, p) = \omega_0 \sqrt{(3 - k)(p - 1) + 4}, \quad (\text{III.96})$$

avec  $k$  le degré d'homogénéité de la force d'interaction entre atomes et  $p$  le rapport entre la vitesse typique des atomes et la taille typique du nuage (voir la définition (II.34)) :

$$p = \frac{\langle x^2 \rangle_{f_0, \mathbf{F}_{bin}=\mathbf{0}}}{\langle x^2 \rangle_{f_0}}, \quad (\text{III.97})$$

où  $f_0$  est un état stationnaire du système.

Bien que l'équation (III.96) ait besoin d'informations sur l'état stationnaire du système, cela ne remet pas en cause son indépendance vis à vis de la comparaison des profils gaussien ou  $\cosh^{-2}$ . En effet, la vitesse typique des atomes et la taille typique du système sont des quantités statistiques calculées à partir des données brutes expérimentales sans faire d'hypothèse sur le profil  $\rho_0(x)$ .

Étant donné que la fréquence du piège harmonique  $\omega_0$  dépend aussi des paramètres expérimentaux, il est plus avisé d'étudier le rapport  $\omega_{br}/\omega_0$  plutôt que  $\omega_{br}$  directement. La figure III.21 représente les résultats obtenus pour différentes valeurs du rapport  $\omega_{br}/\omega_0$  mesurés expérimentalement et leurs homologues théoriques. À une valeur expérimentale donnée, nous avons tracé la valeur théorique associée pour différents types d'interactions, *i.e.* différentes valeurs du degré d'homogénéité  $k$ . Il est à noter que pendant une réalisation le nombre d'atomes dans le système varie ce qui perturbe l'évaluation des fréquences d'oscillations et donc la qualité des résultats. Pour palier à ce problème, nous n'avons pris en compte que les réalisations expérimentales où la variation totale du nombre d'atomes dans le nuage n'excède pas 40%. Notons que sur la figure III.21 le résultat expérimental sans interaction entre atomes n'est pas sur la droite  $y = x$ . Cela peut sembler étonnant car sans interaction il devrait y avoir un accord parfait entre théorie et expérience. En réalité, c'est dû au fait que dans ce cas la taille du système est tellement élevée qu'elle explore les parties anharmoniques du pièges ; cet effet n'étant pas pris en compte par l'équation (III.96).

Comme nous pouvons le constater sur la figure III.21, c'est bien le cas  $k = 0$  qui semble le mieux correspondre, bien que  $k = 1$  ne donne pas des résultats très différents. D'autant plus que nous n'avons pas pris en compte les erreurs expérimentales. En les prenant en compte, il n'est plus possible de réfuter catégoriquement le cas  $k = 1$ . La figure III.22 reprend les données de la figure III.21 en indiquant les barres d'erreurs. Remarquons que les barres d'erreurs théoriques proviennent de l'évaluation du paramètre  $p$  à partir des données expérimentales. En considérant l'écart moyen à la courbe  $y = x$  et l'écart type associé, nous retrouvons que le cas  $k = 0$  donne de meilleurs résultats que  $k = 1$  mais les barres d'erreurs ne permettent pas de trancher. Cependant il faut noter qu'il n'y a pas de raison que le degré d'homogénéité soit donné par  $k = 0$  ou  $k = 1$ . En effet, notre modèle prévoit une valeur de  $k = 0$  mais le comportement effectif du nuage peut très bien correspondre à une valeur non entière. Dans ce cas, nous serons toujours capables de trouver une valeur non entière qui donne de meilleurs résultats. Nous sommes donc juste capables de dire si oui ou non les résultats sont compatibles avec ceux attendus. L'approche utilisée donne seulement des conditions nécessaires de validité.

Au delà de cette restriction, il faut remarquer que nous ne sommes pas complètement dans

---

42. Il nous est possible de corriger l'expression de la fréquence du mode de respiration en introduisant la valeur de la friction (III.72) mais cela ne modifie pas de façon significative les résultats présentés ici.

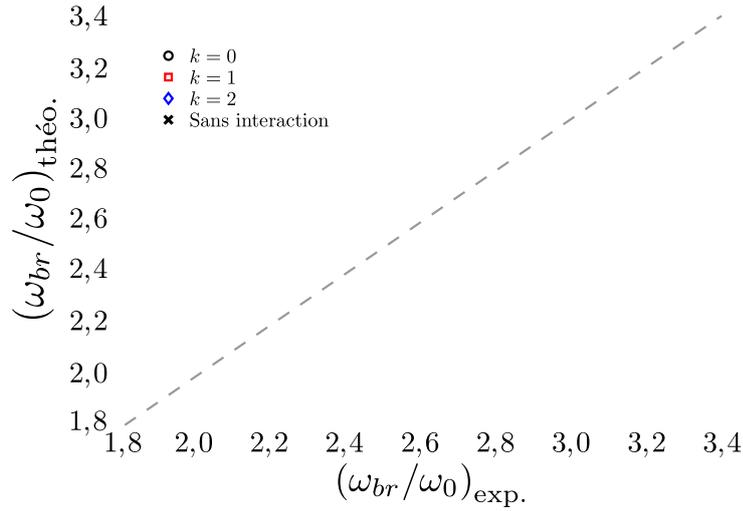


FIGURE III.21 – Comparaison entre expérience et théorie du mode de respiration. Afin de s’affranchir des modifications de la fréquence du piège  $\omega_0$  nous travaillons directement avec le rapport  $\omega_{br}/\omega_0$ . Les fréquences expérimentales sont obtenues par régression non-linéaire à partir des résultats du même type que ceux de la figure III.20(a). Les fréquences théoriques proviennent de l’équation (III.96) où le paramètre  $p$  est mesuré expérimentalement à l’état stationnaire. L’égalité attendue est représentée par la droite en pointillé :  $y = x$ .

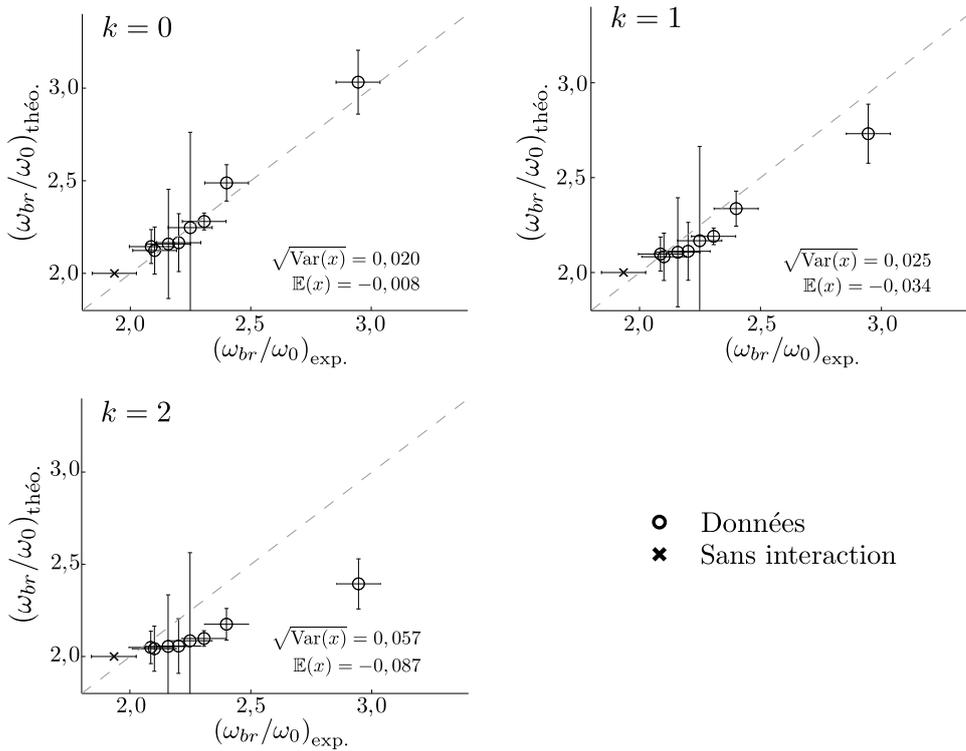


FIGURE III.22 – Représentation des mêmes résultats qu’à la figure III.21 pour différentes valeurs de  $k$  avec cette fois les barres d’erreurs associées. À titre d’indication, les écarts moyens aux courbes  $y = x$  sont donnés par  $\mathbb{E}(x)$  et les écarts types associés sont donnés par  $\sqrt{\text{Var}(x)}$ .

les conditions adéquates pour appliquer l'équation (III.96). En effet, l'équation (III.96) s'obtient en faisant une hypothèse sur la dynamique de respiration du système : qu'elle soit toujours donnée par le même état stationnaire  $f_0$  et par un changement de variable approprié. Or dans les expériences ce n'est pas vrai. Avant  $t = 0$ , il n'y a pas d'interaction entre particules et c'est seulement après  $t = 0$  qu'elles apparaissent. L'état initial et l'état final ne sont pas les mêmes. Typiquement, l'état initial est plus ou moins donné par l'équation (III.95) tandis que l'état final devrait être un  $\cosh^{-2}$  dans le régime auto-gravitant. Cette hypothèse, mal contrôlée, peut nous conduire à de mauvaises conclusions et nous allons essayer dans le prochain paragraphe de tester qualitativement son influence sur les résultats.

Avant cela, il est important de noter que les résultats expérimentaux donnés sur les figures III.21 et III.22 ne sont pas toujours strictement dans les limites d'un régime auto-gravitant. Cela confirme notre étude préliminaire faite au paragraphe 2.2.c : le mode de respiration du nuage dans le piège dipolaire donne à peu près la même fréquence que celle d'un système auto-gravitant unidimensionnel pour une grande gamme de paramètres expérimentaux. D'un autre côté, cela veut également dire que l'étude du mode de respiration permet d'avoir une condition nécessaire mais non suffisante, pour conclure quand à la validité du modèle auto-gravitant.

*iii) Comparaison entre expérience et simulations numériques*

Nous avons vu au paragraphe précédent que le régime transitoire, *via* le mode respiration, semble confirmer que la limite auto-gravitante existe ou du moins que les expériences en étaient relativement proches. Cependant pour en arriver à cette conclusion, nous avons utilisé la relation (III.96) qui demande que l'état stationnaire initial soit le même que l'état stationnaire final, or ce n'est pas le cas ici. Avant le branchement des lasers, les atomes n'interagissent pas entre eux et la densité stationnaire est par conséquent différente de celle avec interactions. Nous avons donc supposé implicitement que cela ne changeait pas les résultats obtenus qui, comme nous l'avons expliqué, ne sont que qualitatifs.

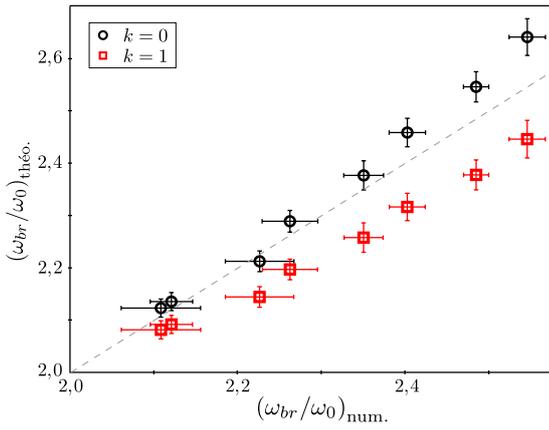
Afin de vérifier cette hypothèse, nous avons réalisé des simulations de dynamique moléculaire à partir de  $N = 3000$  particules réparties sur une droite et interagissant *via* la force de gravité unidimensionnelle. Nous avons ainsi : testé la prédiction théorique de la fréquence d'oscillation du mode de respiration et testé l'influence de la condition initiale sur celui-ci. Les simulations ont été réalisées en suivant le même protocole et le même algorithme que dans l'étude du mode de ballotement, voir la section 3.2.a du chapitre II<sup>43</sup>, et nous ne les détaillerons pas ici.

La figure III.23 représente les résultats obtenus pour deux états stationnaires différents, l'un gaussien et l'autre en  $\cosh^{-2}$ . Seul le deuxième cas est vraiment compatible avec l'équation (III.96) mais comme nous pouvons le constater, les différences ne sont pas importantes tout du moins tant que nous nous limitons à une approche qualitative.

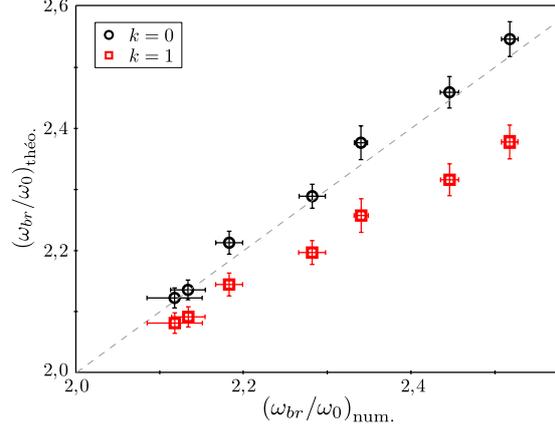
Il est à noter que dans le cas d'une condition initiale gaussienne, nous nous retrouvons avec le même problème que pour les résultats expérimentaux. Bien que nous sachions ici que l'interaction entre particules est de type gravité, nous ne pouvons pas à partir de la figure III.23(a) départager les cas  $k = 0$  et  $k = 1$ . Enfin il faut préciser que les simulations numériques de la figure III.23 sont réalisées à friction constante. Cependant,

---

43. Les seules différences sont qu'ici la friction est constante et que le potentiel extérieur est harmonique.



(a) La distribution initiale est une gaussienne tandis que la distribution finale est en  $\cosh^{-2}$ .



(b) Les distributions initiale et finale sont en  $\cosh^{-2}$ .

FIGURE III.23 – Comparaison entre simulation numérique et théorie du mode de respiration. Les simulations numériques sont réalisées pour un système de particules  $1d$  interagissant par la force de gravité  $1d$  :  $\mathbf{F}(x, x') = C \times \text{sgn}(x - x')\mathbf{e}_x$ , avec  $C < 0$  ( $k = 0$ ). Les résultats sont moyennés sur 10 réalisations et les barres d'erreurs sont données par les écarts types obtenus. Les valeurs théoriques sont calculées pour  $k = 0$  et  $k = 1$  en utilisant la valeur du paramètre  $p$  de l'état final des simulations numériques. Les paramètres des simulations sont :  $\kappa = 5$ ,  $\omega_0 = 10$ ,  $N = 3000$  et  $D = 1$ . La constante  $C$  est ajustée de sorte à faire varier la valeur du paramètre adimensionné  $p$  et ainsi changer les valeurs du rapport  $\omega_{br}/\omega_0$ .

dans les expériences celle-ci dépend également des autres paramètres tel que le désaccord. Cela modifie la valeur de la fréquence mais de façon négligeable devant les incertitudes de mesure et c'est pourquoi nous n'en n'avons pas tenu compte ici.

*A priori*, en utilisant le mode de respiration il devrait être possible de vérifier si les interactions entre atomes sont de type gravité  $1d$ , *i.e.*  $k = 0$ . En effet, sur la figure III.23(b) il n'y a pas de doute entre les cas  $k = 0$  et  $k = 1$ . Cependant, comme il est possible de mesurer une fréquence *auto-gravitante* en dehors de la zone de validité du modèle auto-gravitants, le mode de respiration ne peut pas nous permettre de conclure.

## 2.4 Conclusion

En partant d'un système d'atomes froids dans un piège dipolaire nous avons dérivé un modèle effectif unidimensionnel qui dans certaines limites devrait se comporter comme un système auto-gravitant. Les résultats expérimentaux ne nous ont pas permis de confirmer parfaitement la validité du modèle. Malgré cela, que ce soit du point de vue stationnaire ou dynamique, les résultats obtenus sont très encourageants et les expériences semblent bien aller dans le sens du modèle auto-gravitant.

### 3 CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

---

---

Que ce soit *via* la diffusion multiple ou bien *via* l'effet d'absorption, les nuages d'atomes froids constituent des exemples de systèmes à longue portée très variés où il reste encore de nombreuses choses à comprendre et à découvrir. En effet, tout comme il est parfois possible d'utiliser un modèle de plasma non-neutre pour modéliser un nuage d'atomes froids dans un piège magnéto-optique, l'*opposé* est aussi possible et nous sommes parfois enclin à penser aux nuages d'atomes comme un système de particules auto-gravitantes, comme ce fut le cas pour le piège dipolaire d'atomes de Strontium. Ainsi même si le concept principal reste identique, *i.e.* piéger des atomes à l'aide de lasers, la physique qui en résulte peut-être radicalement différente. Par exemple, il est possible de passer d'un cas où les atomes se repoussent à un cas où ils ont tendance à s'attirer. Quand enfin, on se rappelle du nombre de paramètres sur lesquels les expérimentateurs peuvent jouer, il y a fort à parier que les systèmes à atomes froids vont constituer dans les prochaines années un terrain de jeux privilégié des physiciens de la communauté des interactions à longue portée. De nombreux régimes restent à explorer et le travail présenté ici n'est qu'un maigre aperçu de ce qu'il semble possible de faire.

Dans le cas des grands pièges magnéto-optiques il reste dans l'immédiat à vérifier les prédictions que nous avons réalisées quant à la présence de différents régimes possibles pour le mode de respiration et celui du centre de masse. Au delà de cela, il est peut-être possible d'améliorer la modélisation du système en prenant en compte un maximum d'effets physiques (comme l'effet sub-Doppler) tout en utilisant la méthode de l'équation de contrainte pour réussir à extraire des informations pertinentes. En effet, même si le modèle devient complexe, cette méthode permettrait d'écrire une équation de contrainte pour prédire qualitativement l'évolution du centre de masse ou du mode de respiration du système.

Dans le cas du piège dipolaire dont nous avons parlé, il reste bien évidemment à améliorer la modélisation du nuage afin d'aller au delà des limites et approximations que nous avons faites. D'autre part, du point de vue des expériences il reste à savoir si oui ou non il existe des régimes de paramètres accessibles en accord avec ces hypothèses. Cela permettrait pour la première fois de disposer d'un système auto-gravitant sur lequel il serait possible de tester les prédictions théoriques issues du *monde* des interactions à longue portée.

Au delà du cas unidimensionnel que nous avons traité, une question que nous nous sommes posée est celle de la réalisation d'un système analogue en deux dimensions. *A priori* l'effet d'absorption devrait continuer de dominer la diffusion multiple et ainsi les particules interagiraient encore de manière attractive. Pour obtenir l'équivalent d'un système auto-gravitant bidimensionnel il faudrait utiliser une infinité de lasers dirigés vers le centre du nuage et dans ce cas, contrairement au cas unidimensionnel dans lequel il n'existe pas de transition de phase, nous pourrions observer une transition entre un état stable et un effondrement du nuage sur lui-même. Bien sûr il est impossible de disposer une infinité de lasers autour du nuage, mais peut-être que d'une part dans certaines limites cette approximation est raisonnable et d'autre part que même si le système n'est pas exactement auto-gravitant, il en soit suffisamment proche pour exhiber tout de même une transition de phase analogue.



---

## RÉFÉRENCES DU CHAPITRE III

---

- [AR97] C. S. Adams and E. Riis. Laser cooling and trapping of neutral atoms. *Progress in Quantum Electronics*, 21(1) :1–79, 1997. - Cité 2 fois : pages 196 et 197 -
- [Ash78] A. Ashkin. Trapping of atoms by resonance radiation pressure. *Physical Review Letters*, 40(12) :729, March 1978. - Cité 1 fois : page 220 -
- [AT99] M. P. Allen and Dominic J. Tildesley. *Computer simulation of liquids*. Oxford University Press, 1999. - Cité 3 fois : pages 124, 135 et 212 -
- [AYS03] Sh. Amiranashvili, M. Y. Yu, and L. Stenflo. Nonuniform non-neutral plasma in a trap. *Physical Review E*, 67(1) :016408, January 2003. - Cité 5 fois : pages 110, 122, 125, 202 et 207 -
- [Bel07] Michel Le Bellac. *Physique quantique*. L'Editeur : EDP Sciences, 2007. - Cité 2 fois : pages 193 et 196 -
- [BH86] Josh Barnes and Piet Hut. A hierarchical  $O(N \log n)$  force-calculation algorithm. *Nature*, 324(6096) :446–449, December 1986. - Cité 1 fois : page 211 -
- [Cam50] G. L. Camm. Self-gravitating star systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 110 :305, 1950. - Cité 2 fois : pages 219 et 228 -
- [CDR09] Alessandro Campa, Thierry Dauxois, and Stefano Ruffo. Statistical mechanics and dynamics of solvable models with long-range interactions. *Physics Reports*, 480(3-6) :57–159, September 2009. - Cité 6 fois : pages 14, 15, 16, 49, 125 et 219 -
- [CF02] Bernard Cagnac and Jean-Pierre Faroux. *Lasers : interaction lumière-atomes*. EDP Sciences, 2002. - Cité 1 fois : page 196 -
- [Cha06a] Pierre-Henri Chavanis. Hamiltonian and brownian systems with long-range interactions : I statistical equilibrium states and correlation functions. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 361(1) :55–80, February 2006. - Cité 2 fois : pages 219 et 228 -

- [Cha06b] Pierre-Henri Chavanis. Hamiltonian and brownian systems with long-range interactions : II. kinetic equations and stability analysis. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 361(1) :81–123, February 2006.  
- Cité 2 fois : pages 219 et 228 -
- [Cha10] Maryvonne Chalony. *Transmission cohérente et interaction de type gravitationnel dans un nuage froid de Strontium*. THESE, Université de Nice Sophia-Antipolis, December 2010.  
- Cité 2 fois : pages 219 et 220 -
- [Dal88] J. Dalibard. Laser cooling of an optically thick gas : The simplest radiation pressure trap? *Optics Communications*, 68(3) :203–208, October 1988.  
- Cité 2 fois : pages 201 et 219 -
- [DLN<sup>+</sup>94] M. Drewsen, Ph. Laurent, A. Nadir, G. Santarelli, A. Clairon, Y. Castin, D. Grison, and C. Salomon. Investigation of sub-Doppler cooling effects in a cesium magneto-optical trap. *Applied Physics B Lasers and Optics*, 59(3) :283–298, September 1994.  
- Cité 1 fois : page 197 -
- [DO99] Daniel H. E. Dubin and T. M. O’Neil. Trapped nonneutral plasmas, liquids, and crystals (the thermal equilibrium states). *Reviews of Modern Physics*, 71(1) :87, January 1999.  
- Cité 4 fois : pages 121, 122, 202 et 207 -
- [DOD10] Alvaro Domínguez, Martin Oettel, and S. Dietrich. Dynamics of colloidal particles with capillary interactions. *Physical Review E*, 82(1) :011402, July 2010.  
- Cité 1 fois : page 218 -
- [dORV04] R. S. de Oliveira, E. P. Raposo, and S. S. Vianna. Numerical study of magneto-optical traps through a hierarchical tree method. *Physical Review A*, 70(2) :023402, 2004.  
- Cité 1 fois : page 211 -
- [GPLK10] G L Gattobigio, T Pohl, G Labeyrie, and R Kaiser. Scaling laws for large magneto-optical traps. *Physica Scripta*, 81(2) :025301, February 2010.  
- Cité 1 fois : page 209 -
- [HI11] Mariana Haragus and Gérard Iooss. *Local bifurcations, center manifolds, and normal forms in Infinite dimensional dynamical systems*. Universitext (Berlin. Print), ISSN 0172-5939. 2011.  
- Cité 2 fois : pages 204 et 205 -
- [HW99] John Hamal Hubbard and Beverly Henderson West. *Équations différentielles et systèmes dynamiques*. Cassini, 1999.  
- Cité 1 fois : page 204 -
- [IC01] I. Ispolatov and E. G. D. Cohen. Phase transitions in systems with  $1/r^\alpha$  attractive interactions. *Physical Review E*, 64(5) :056103, October 2001.  
- Cité 1 fois : page 219 -
- [ISP10] J A Izaguirre, C R Sweet, and V S Pande. Multiscale dynamics of macromolecules using normal mode langevin. *Pacific Symposium on Biocomputing.*, pages 240–251, 2010. PMID : 19908376.  
- Cité 1 fois : page 212 -
- [JW10] M Joyce and T Worrakitpoonpon. Relaxation to thermal equilibrium in the self-gravitating sheet model. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2010(10) :P10012, October 2010.  
- Cité 1 fois : page 219 -

- [KD99] Lev Khaykovich and Nir Davidson. Compression of a cold atomic cloud by on-resonance laser light. *Journal of the Optical Society of America B*, 16(5) :702–709, May 1999. - Cité 1 fois : page 219 -
- [LGPK08] G. Labeyrie, G. L. Gattobigio, T. Pohl, and R. Kaiser. Long range interactions in Magneto-Optical traps. *AIP Conference Proceedings*, 970(1) :303–318, January 2008. - Cité 3 fois : pages 201, 203 et 209 -
- [LMK06] G. Labeyrie, F. Michaud, and R. Kaiser. Self-Sustained oscillations in a large Magneto-Optical trap. *Physical Review Letters*, 96(2) :023003, January 2006. - Cité 9 fois : pages 111, 133, 192, 193, 202, 203, 204, 209 et 210 -
- [LSW92] K. Lindquist, M. Stephens, and C. Wieman. Experimental and theoretical study of the vapor-cell zeeman optical trap. *Physical Review A*, 46(7) :4082, October 1992. - Cité 1 fois : page 209 -
- [MS99] Harold J. Metcalf and Peter Van der Straten. *Laser cooling and trapping*. Springer, 1999. - Cité 2 fois : pages 196 et 197 -
- [OGKA00] D. O’Dell, S. Giovanazzi, G. Kurizki, and V. M. Akulin. Bose-Einstein condensates with  $1/r$  interatomic attraction : Electromagnetically induced "Gravity". *Physical Review Letters*, 84(25) :5687, June 2000. - Cité 1 fois : page 218 -
- [PF98] M. Germana Paterlini and David M Ferguson. Constant temperature simulations using the langevin equation with velocity verlet integration. *Chemical Physics*, 236(1-3) :243–252, September 1998. - Cité 2 fois : pages 124 et 212 -
- [PLK06] T. Pohl, G. Labeyrie, and R. Kaiser. Self-driven nonlinear dynamics in magneto-optical traps. *Physical Review A*, 74(2) :023409, 2006. - Cité 3 fois : pages 111, 192 et 202 -
- [PSDJ00] Laurence Pruvost, Isabelle Serre, Hong Tuan Duong, and Joshua Jortner. Expansion and cooling of a bright rubidium three-dimensional optical molasses. *Physical Review A*, 61(5) :053408, April 2000. - Cité 2 fois : pages 200 et 219 -
- [Ryb71] George B. Rybicki. Exact statistical mechanics of a one-dimensional self-gravitating system. *Astrophysics and Space Science*, 14(1) :56–72, November 1971. - Cité 2 fois : pages 219 et 228 -
- [SCF92] A. M. Steane, M. Chowdhury, and C. J. Foot. Radiation force in the magneto-optical trap. *Journal of the Optical Society of America B*, 9(12) :2142–2158, December 1992. - Cité 3 fois : pages 200, 201 et 215 -
- [SF91] A. M Steane and C. J Foot. Laser cooling below the doppler limit in a Magneto-Optical trap. *Europhysics Letters (EPL)*, 14(3) :231–236, February 1991. - Cité 1 fois : page 218 -
- [Spr05] Volker Springel. The cosmological simulation code gadget-2. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 364(4) :1105–1134, December 2005. - Cité 1 fois : page 212 -

- [SWW91] D. W. Sesko, T. G. Walker, and C. E. Wieman. Behavior of neutral atoms in a spontaneous force trap. *Journal of the Optical Society of America B*, 8(5) :946–958, May 1991. - Cité 3 fois : pages 199, 200 et 219 -
- [WSW90] Thad Walker, David Sesko, and Carl Wieman. Collective behavior of optically trapped neutral atoms. *Physical Review Letters*, 64(4) :408, January 1990. - Cité 4 fois : pages 200, 201, 202 et 215 -
- [XLS<sup>+</sup>02] Xinye Xu, Thomas H. Loftus, Matthew J. Smith, John L. Hall, Alan Gallagher, and Jun Ye. Dynamics in a two-level atom magneto-optical trap. *Physical Review A*, 66(1) :011401, July 2002. - Cité 1 fois : page 217 -

---

# ÉPILOGUE

---

Au-delà des effets collectifs et des interactions entre particules, dont nous avons parlé pendant trois chapitres, le liant essentiel du manuscrit réside dans le caractère hors équilibre des systèmes que nous avons étudiés.

Dans le premier chapitre, nous avons cherché à comprendre et à prédire l'évolution d'un système décrit par l'équation de Vlasov autour d'un état stationnaire inhomogène lorsque celui-ci est soumis à une perturbation. En utilisant les mêmes principes que ceux utilisés par Landau, nous avons mis en avant le fait que la relaxation de ce type de système peut s'avérer très complexe. En effet, nous avons mis en avant que selon l'échelle de temps considérée, la perturbation peut décroître de façons différentes. En temps court, nous retrouvons une sorte d'équivalent à l'amortissement Landau avec une décroissance exponentielle, alors qu'à l'inverse, la perturbation peut décroître asymptotiquement en loi de puissance (dont l'exposant peut dépendre du problème considéré).

Au cours du chapitre deux, nous avons développé une approche très générale pour décrire les oscillations de respiration et du centre de masse d'un système de particules. Notre approche, basée sur une approximation de la dynamique du système, peut s'appliquer à une grande gamme de problèmes, en allant des plasmas confinés aux amas d'étoiles, tout en passant par des systèmes à atomes froids.

Enfin, dans le troisième et dernier chapitre, nous avons modélisé différents systèmes expérimentaux constitués d'atomes froids. Ces systèmes, loin d'être à l'équilibre, nous ont permis de mettre en application les théories développées au chapitre deux. D'autre part, nous en avons également profité pour proposer et tester pour la première fois l'analogie d'un système de particules soumises à une gravité unidimensionnelle.

Comme pour toutes les thèses, les recherches ne s'arrêtent pas avec la soutenance du doctorant. Il reste encore de nombreuses questions à résoudre, sans parler de toutes les nouvelles que notre travail a soulevé. Je me limiterai ici à seulement quelques unes des perspectives du présent travail, mais le lecteur pourra consulter les conclusions relatives à chaque chapitre pour plus de détails. Pour l'instant, nous n'avons testé numériquement la théorie développée au chapitre premier que sur le modèle HMF attractif, mais il serait très intéressant de considérer un système auto-gravitant. Le plus naturel serait de commencer par considérer le cas d'un amas d'étoiles, mais nous pourrions envisager d'essayer de relier ce travail avec l'expérience d'un piège allongé d'atomes de Strontium décrite dans

le chapitre trois. En parlant de cette expérience, la suite logique serait de réaliser le même type de montage en deux dimensions. Il serait alors possible de pousser l’analogie gravité et pourquoi pas voir la transition de phase entre un état dilué et un état condensé, obtenu après collapse du système. Un autre axe de recherche possible serait de continuer à travailler sur les instabilités des grands pièges magnéto-optiques et sur le possible rôle d’une friction négative. Parallèlement à cela, il faudrait aussi pousser plus le loin le travail réalisé sur le mode de respiration afin d’étendre la portée de nos résultats. Il s’agit d’un outil très simple pour mesurer quelques propriétés d’un système de particules, qui peut encore être amélioré en essayant de l’étendre à des forces qui par exemple ne sont pas homogènes.

Pour clore définitivement ce manuscrit, j’aimerais revenir sur le déroulement de ces trois années de recherche et faire écho avec la figure 1 du préambule. Au contraire de ce que pourrait faire ressentir le manuscrit, mon travail n’a été en aucun cas linéaire. En effet, j’ai eu la chance de travailler sur plusieurs projets, tous plus intéressants les uns que les autres, mais surtout j’ai pu naviguer entre eux au fil des mois (voir figure III.24). Chaque projet s’est nourri de l’avancée des autres pour donner au final les résultats que vous avez pu lire... et ceux que vous lirez dans les prochains mois.

Pour résumer ma vision générale de la recherche, j’utiliserai simplement le mot *interaction*.

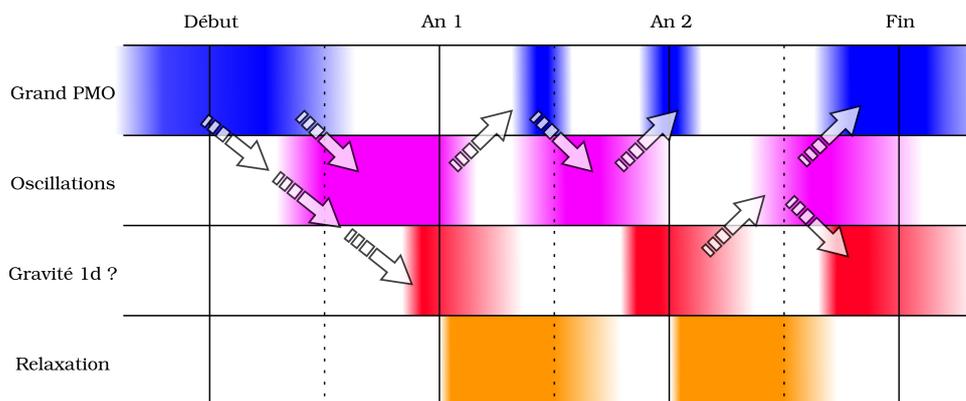


FIGURE III.24 – Représentation schématique du temps passé entre les différents projets. Les interactions *théoriques* entre eux sont représentées par les flèches blanches. À l’inverse, les interactions *numériques* ne sont pas mentionnées car trop nombreuses.

Cette aspect de la recherche dont je n’avais aucune idée avant de commencer se révèle pour moi être la chose la plus importante de ces trois années passées dans un laboratoire. Que ce soit des interactions entre particules dans cette thèse, des interactions entre chercheurs ou tout simplement des interactions entre différents projets sur lesquels on travaille, il n’en reste pas moins que c’est l’élément essentiel.

Enfin, même si en général ce n’est pas ici qu’on les retrouve, j’aimerais une dernière fois remercier toutes les personnes qui m’ont aidé pendant toutes ces années et une en particulier qui se reconnaîtra...

# RÉSUMÉ

---

---

Un grand nombre de systèmes physiques sont le siège d'interactions à longue portée : systèmes auto gravitants, plasmas, interactions entre vortex. . . et partagent de ce fait certaines propriétés. Dans cette thèse, un autre type de système expérimental est envisagé : des atomes froids ; dans ce cas, ce sont les échanges de photons qui peuvent induire des interactions effectives à longue portée. La dynamique de ces systèmes à longue portée est décrite sur une certaine échelle de temps par une équation de type Vlasov, ou Vlasov-Fokker-Planck. Le but de cette thèse est d'étudier le comportement hors équilibre de plusieurs systèmes de particules comportant en général des interactions à longue portée, d'un point de vue théorique, numérique et expérimental. Dans une première partie, nous étudions dans le cadre de l'équation de Vlasov la dynamique d'un système de particules au voisinage d'un état stationnaire inhomogène. Nous montrons que si un amortissement de type Landau apparaît aux temps courts, une relaxation vers un état stationnaire en loi de puissance domine toujours aux temps longs. Nous testons et validons ensuite nos prédictions par des simulations numériques du modèle HMF (archétype des systèmes à longue portée). Nous nous intéressons ensuite aux oscillations de respiration et du centre de masse d'un système de particules en interaction. En supposant une invariance de la forme de la distribution des particules, nous obtenons deux équations qui décrivent approximativement l'évolution de ces modes pour une grande gamme de systèmes (longue/courte portée, avec/sans thermostat, . . .). Pour finir, nous présentons l'utilisation des résultats précédemment obtenus pour explorer un régime d'instabilité dans un piège magnéto-optique, et la possible existence de l'analogie d'un régime auto-gravitant 1d.

**Mots-clés :** *Interaction longue portée, équation de Vlasov, Amortissement Landau, Modèle HMF, Atomes froids, Oscillation du centre de masse, Oscillation de respiration, Piège magnéto-optique.*

## ABSTRACT

---

---

A large number of physical systems present long range interactions : self-gravitating systems, plasmas, vortex interactions. . . and thus share some properties. In this thesis, we have another experimental system in view : cold atoms ; in that case, absorption/emission of photons create effective long range interactions. During a specific time scale, the out-of-equilibrium dynamics of a long range system is described by the Vlasov, or Vlasov-Fokker-Planck, equation. The goal here is to study the out-of-equilibrium behavior for several particles systems with long range interaction, theoretically, experimentally, and numerically. Firstly, we study the dynamics of a system of particles close to an inhomogeneous stationary state using the Vlasov equation. We show that, while Landau damping is present for short time scales, the long time behavior is governed by a power law relaxation. We check and valid our predictions using numerical simulations for the HMF model (a prototype of long range system). Next, we consider the center-of-mass and breathing oscillations of interacting particles system. Assuming an invariant shape for the particles distribution, we obtain two equations which approximatively describe the evolution of these two modes for a large number of systems (long/short range, with/without thermal bath, . . .). Finally we use the previous result to explore an instability of a cloud of cold atoms in a magneto-optical trap and analyze a regime possibly analogous to a 1d self-gravitating system.

**Key-words :** *Long range interactions, Vlasov equation, HMF model, Landau damping, cold atoms, center-of-mass oscillation, breathing oscillation, Magneto-optical trap.*