



**HAL**  
open science

# Etude théorique et expérimentale de la génération et des corrélations quantiques de photons triplets générés par interaction non linéaire d'ordre trois

Audrey Dot

## ► To cite this version:

Audrey Dot. Etude théorique et expérimentale de la génération et des corrélations quantiques de photons triplets générés par interaction non linéaire d'ordre trois. Physique [physics]. Université de Grenoble, 2011. Français. NNT: 2011GRENY071 . tel-00682019

**HAL Id: tel-00682019**

**<https://theses.hal.science/tel-00682019>**

Submitted on 23 Mar 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

### **DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE**

Spécialité : **Physique de la matière condensée et du rayonnement**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

**Audrey DOT**

Thèse dirigée par **Benoît Boulanger** et  
codirigée par **Kamel Bencheikh**

préparée au sein de l'**Institut Néel**  
dans l'**École Doctorale de Physique de Grenoble**

## **Etude théorique et expérimentale de la génération et des corrélations quantiques de photons triplets générés par interaction non linéaire d'ordre trois**

Thèse soutenue publiquement le **15 Décembre 2011**,  
devant le jury composé de :

**M. Claude Fabre**

Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie - Paris 6, Rapporteur

**M. Joseph Zyss**

Professeur à l'ENS Cachan, Rapporteur

**M. Jean Michel Gérard**

Professeur au CEA – Grenoble, Examineur

**M. Hugo Zbinden**

Maître d'enseignement et de recherche à l'Université de Genève, Examineur

**M. Kamel Bencheikh**

Chargé de recherche au CNRS, Co-directeur de thèse

**M. Benoît Boulanger**

Professeur à l'Université Joseph Fourier - Grenoble 1, Directeur de thèse





---

## Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein de l'Institut Néel à Grenoble, dans l'équipe Matériaux, Optique non linéaire et Plasmonique, sous la direction de Benoît Boulanger, et en codirection avec Kamel Bencheikh, du laboratoire de Photonique et de Nanostructures de Marcoussis.

Je tiens avant tout à remercier Benoît pour m'avoir initiée et donné goût à l'optique non linéaire qu'il chérit tant, pour avoir partagé ses connaissances avec pédagogie et gentillesse, et pour sa disponibilité, sa confiance motivante et son implication immense tout au long de cette thèse, malgré un emploi du temps chargé. Je suis aussi très reconnaissante envers Kamel qui m'a ouvert la voie et éclairée sur le raisonnement et les calculs parfois complexes en formalisme quantique. Je veux également remercier grandement Patricia Segonds et Corinne Félix pour l'aide indispensable qu'elles m'ont apportée sur les manip, en m'apprenant les bases et en étant toujours disponibles pour manipuler avec moi, et pour leur gentillesse et tous leurs bons conseils. Merci aussi à David Jegouso et Jérôme Debray pour l'aide sur le laser et le polissage des cristaux.

J'ai eu la chance de pouvoir échanger avec les autres thésards et stagiaires du groupe beaucoup de très bons moments, que ce soit à discuter d'optique ou plutôt de complètement autre chose. Merci à Simon, Pierre, Vincent, Antoine et Romain, et tout particulièrement merci à Adrien, qui reprend ce beau sujet de thèse que sont les triplets de photons, pour son avis pertinent et son aide précieuse à ce moment difficile qu'est la fin de thèse. Mes nombreux autres voisins de bureau me manquent également déjà, merci à vous Julien, Sandra, Oana, Marcio, Issam, Houmed, Anne, Medhi, pour la bonne ambiance inégalable de la F401.

Je tiens également à remercier sincèrement les membres du jury, qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'évaluer ce travail.

Je voudrais enfin remercier les enseignants qui, au cours de mon parcours d'études, m'ont donné goût à la science, soutenue et guidée peu à peu dans mon orientation. Merci également à mes proches, tout d'abord à ma famille, en particulier mes parents, pour leur soutien et leurs conseils. Merci aussi à mes amis des Mines, pour être toujours là quand il faut, pour votre bonne humeur inébranlable, pour tous les bons moments partagés et tous ceux à venir. Enfin merci à Christina et Fatou, pour les épreuves joyeusement traversées ensemble, qui nous permettent aujourd'hui de si bien se comprendre.

Je voudrais dédier cette thèse à Alexandre, les mots manqueraient à décrire tout ce que tu m'as apporté, alors merci simplement d'être là pour moi.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>I Bases nécessaires en optique non linéaire classique et quantique</b>	<b>9</b>
I.1 Optique non linéaire en régime classique . . . . .	9
I.1.1 Propagation de champs électromagnétiques dans un milieu diélectrique linéaire . . . . .	9
I.1.2 Propagation de champs électromagnétiques dans un milieu diélectrique non linéaire . . . . .	13
I.2 Optique non linéaire en régime quantique . . . . .	18
I.2.1 Représentations schématiques des processus non linéaires à trois et quatre photons . . . . .	18
I.2.2 Quantification du champ électromagnétique . . . . .	20
I.2.3 Corrélations classiques, quantiques, cohérence ? . . . . .	28
<b>II État de l'art</b>	<b>30</b>
II.1 Génération de triplets de photons . . . . .	30
II.1.1 Introduction . . . . .	30
II.1.2 Première génération de photons triplets . . . . .	32
II.1.3 Développement de la théorie classique . . . . .	32
II.2 Étude des corrélations par un protocole de recombinaison . . . . .	33
II.3 Conclusion . . . . .	34
<b>III Génération des champs triplets</b>	<b>36</b>
III.1 Introduction . . . . .	36
III.2 Fluorescence paramétrique . . . . .	38
III.2.1 Cas général . . . . .	38
III.2.2 Exemple de champs générés dans un cristal de KTP . . . . .	40
III.3 Scission stimulée . . . . .	43
III.3.1 Cadre général . . . . .	43
III.3.2 Scission mono-injectée . . . . .	45
III.3.3 Scission bi-injectée . . . . .	50
III.4 Conclusion . . . . .	54

<b>IV</b>	<b>Recombinaison des champs triplets</b>	<b>55</b>
IV.1	Introduction . . . . .	55
IV.2	Recombinaisons par somme de fréquences à trois photons . . . . .	55
IV.2.1	TOSFG de champs générés par fluorescence paramétrique . . . . .	57
IV.2.2	TOSFG de champs générés par scission mono-stimulée . . . . .	61
IV.2.3	TOSFG de champs générés par scission bi-stimulée . . . . .	69
IV.2.4	Récapitulatif sur les recombinaisons par sommes de fréquences à trois photons . . . . .	74
IV.3	Recombinaisons par sommes de fréquences à deux photons . . . . .	75
IV.3.1	SOSFG de champs générés par fluorescence paramétrique . . . . .	76
IV.3.2	SOSFG de champs générés par scission mono-stimulée . . . . .	83
IV.3.3	SOSFG de champs générés par scission bi-stimulée . . . . .	93
IV.3.4	Récapitulatif sur les recombinaisons par sommes de fréquences à deux photons . . . . .	97
IV.4	Analyse des résultats . . . . .	98
IV.5	Conclusion . . . . .	99
<b>V</b>	<b>Expériences de génération et de recombinaison des champs triplets</b>	<b>101</b>
V.1	Introduction . . . . .	101
V.2	Étude de la génération . . . . .	101
V.2.1	Dispositif et conditions expérimentales . . . . .	101
V.2.2	Énergies et spectres mesurés et comparés à la théorie . . . . .	104
V.3	Expériences de recombinaison en régime bi-injecté . . . . .	115
V.3.1	Dispositif et conditions expérimentales . . . . .	115
V.3.2	Champs recombines par sommes de fréquences des champs triplets .	116
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>121</b>
	<b>Annexes</b>	<b>121</b>
<b>A</b>	<b>Cas où deux des opérateurs modes sont identiques</b>	<b>123</b>
A.1	Expression des opérateurs création, annihilation et des densités spectrales .	123
A.2	Comparaison avec le cas traité dans la thèse où tous les opérateurs sont distincts . . . . .	130
<b>B</b>	<b>Calcul du champ recombines par somme de fréquences des trois champs générés par mono-injection</b>	<b>137</b>
B.1	Champ somme à trois photons issus d'une génération mono-stimulée par le champ 2 . . . . .	137
B.2	Champ somme à trois photons issus d'une génération mono-stimulée par le champ 3 . . . . .	141

<b>C</b>	<b>Calcul du champ recombinaison par somme de fréquences à deux champs</b>	<b>146</b>
C.1	Recombinaison en régime de génération bi-stimulée . . . . .	147
C.2	Recombinaison en régime de génération mono-stimulée . . . . .	152
C.3	Recombinaison des photons émis par fluorescence paramétrique . . . . .	155
<b>D</b>	<b>Résolution des équations couplées de génération</b>	<b>156</b>
<b>E</b>	<b>Vision interférentielle du phénomène de cohérence</b>	<b>160</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>164</b>
	<b>Production scientifique</b>	<b>167</b>



# Introduction

Cette thèse propose un protocole d'étude théorique et expérimentale de la cohérence entre photons triplets générés directement par un processus non linéaire d'ordre trois. Cette étude de cohérence est un prérequis nécessaire à l'utilisation ultérieure de ces photons en information quantique. Quelques études sont actuellement en cours dans divers groupes pour essayer d'obtenir une source fiable de triplets de photons cohérents, qui pourrait signer un tournant dans l'information quantique actuelle [1–11]. Notre groupe étudie depuis 2004 la génération directe de tels photons, où les photons triplets naissent par annihilation d'un photon pompe dont l'énergie est la somme de celle de chacun des trois photons [8–10].

Le caractère hautement non linéaire de ce processus de génération prédit des propriétés quantiques inédites pour de tels états triplets [4, 9, 12]. Ainsi, outre l'intérêt potentiel des photons triplets pour le développement de protocoles nouveaux d'information quantique, par exemple de type “paires annoncées” où l'état quantique de deux des photons serait “annonçable” par une mesure sur le troisième auquel ils seraient intriqués, l'étude en elle-même est très enrichissante d'un point de vue purement fondamental.

La fluorescence paramétrique d'ordre trois étant très peu efficace, et la conservation de l'énergie et du moment ne permettant pas de fixer précisément les énergies des photons générés, nous sommes contraints pour les expériences de stimuler cette génération en injectant à l'entrée du cristal des faisceaux aux fréquences d'un ou deux des trois photons que l'on souhaite produire. Bien que nous travaillions avec de fortes intensités, de l'ordre de la centaine de  $GW/cm^2$ , il est en effet impossible dans les conditions qui sont les nôtres actuellement, où la génération se fait dans un cristal massif, d'observer la fluorescence paramétrique. L'étude menée au cours de cette thèse permet d'évaluer si des photons triplets générés par stimulation comportent toujours les propriétés de cohérence temporelle et spectrale qui seraient les leurs dans le cas d'une génération par fluorescence paramétrique.

La stimulation sous de fortes intensités à laquelle nous sommes contraints actuellement pour compenser la faiblesse de l'efficacité de génération des champs, ne nous permet pas d'étudier les propriétés quantiques des photons par la mesure directe ou homodyne des fluctuations quantiques des quadratures des champs. En effet, de telles mesures nécessiteraient l'atténuation des intensités des champs triplets pour être dans le domaine de linéarité des photo-détecteurs mesurant les champs. Cette atténuation

détruirait la plupart des propriétés quantiques des triplets par effet de décohérence. Nous nous bornons dans cette thèse à étudier des liens de corrélation équivalents à des cohérences temporelles et énergétiques des photons, qui peuvent être vérifiés par un protocole plus aisé à mettre en œuvre compte tenu de nos conditions expérimentales. Notre expérience se rapproche d'une mesure de coïncidences temporelles ou spectrales en régime de photons uniques ; elle est un peu plus riche en ce sens qu'elle nécessite l'interaction des photons entre eux pour vérifier ce lien de corrélation. Elle est aisée à mettre en œuvre dans la mesure où ces corrélations sont peu sensibles aux pertes linéaires, alors que rechercher l'ensemble des cohérences quantiques donnant lieu à des interférences ou des signatures de corrélations dans l'espace des phases nécessiterait de s'affranchir de toutes les causes de décohérence possibles au cours de la mesure [13]. Par ailleurs, elle est compatible avec nos conditions expérimentales actuelles où de fortes intensités sont mises en jeu.

Le protocole est basé sur l'étude des corrélations temporelles et spectrales entre les photons triplets à travers leur somme de fréquences en accord de phase dans un cristal non linéaire. Une telle méthode a été employée pour des études sur photons jumeaux, historiquement proposées par Abram et al en 1986 [14]. Elle repose sur le principe que lorsque des champs quantiquement cohérents générés par fluorescence paramétrique interagissent dans un cristal non linéaire, ils donnent un champ somme ayant les caractéristiques spectrales du champ parent qui leur a donné naissance, mais à la condition que leur déphasage temporel soit inférieur au temps de cohérence du système de photons. Lorsque le champ pompe est spectralement plus fin que les champs jumeaux ou triplets générés, le champ recombinaison est donc également fin, son temps de cohérence étant celui du système de photons jumeaux ou triplets. Une modélisation de ces interactions par somme de fréquences est développée dans la thèse, ce qui permet d'évaluer précisément l'effet de l'injection sur les corrélations entre photons triplets. Il en ressort que l'injection ne "casse" pas les corrélations mais plutôt qu'elle les masque : les photons générés non linéairement grâce à l'injection en régime mono-injecté sont moins corrélés que ceux générés par fluorescence paramétrique ; et quant à ceux générés en régime bi-injecté, ils ne le sont pas du tout.

Des expériences de génération et de recombinaison validant les prédictions de notre modèle ont été menées, uniquement en régime bi-injecté, les énergies générées en régime mono-injecté étant trop peu efficaces pour envisager des mesures sur champ recombinaison.

Les bases théoriques nécessaires à la compréhension du travail réalisé sont introduites dans le chapitre I. L'étude des interactions non linéaires en régime polychromatique en électromagnétisme classique est mise en regard de cette même étude en régime quantique, et des notions d'optique cristalline sont abordées de manière synthétique.

Le chapitre II évoque les différentes expériences existantes permettant l'obtention de triplets de photons, et détaille celle retenue dans le groupe depuis 2004. Il traite également de la nature des corrélations à attendre sur les photons triplets et des différentes manières

de les étudier, avant de se focaliser sur le protocole retenu par somme de fréquences des champs.

Le chapitre III constitue la première partie du modèle théorique décrivant nos expériences. Il traite, dans le formalisme quantique, de la génération des champs triplets en régime polychromatique dans le cas le plus général, c'est-à-dire lorsque les champs triplets sont non dégénérés donc différentiables. Les équations d'évolution des opérateurs de création et d'annihilation des champs sont résolues dans l'approximation du gain faible et de la pompe non dépeuplée, dévoilant un lien d'évolution non linéaire entre les opérateurs des trois champs. Les densités spectrales moyennes des photons générés dans chacun des régimes, où la génération de triplets est faite par fluorescence paramétrique, par mono-stimulation et par bi-stimulation, sont ensuite calculées et illustrées par des exemples numériques correspondants à des cas expérimentaux existants ou envisagés. Il apparaît qu'en régime injecté, l'identité quantique du nombre de photons générés sur chaque champ n'est plus vérifiée : en effet, aux photons générés par fluorescence s'ajoutent des photons générés dus à l'injection, ce qui brise la symétrie sur les champs.

Les calculs relatifs à la génération ayant été menés, le chapitre IV poursuit le modèle en développant quantiquement le processus non linéaire de somme de fréquences, en considérant un protocole où le déphasage temporel entre les champs est nul. Étant donné qu'il y a trois champs triplets, il est possible de considérer les recombinaisons à trois champs mais aussi à deux champs, et ce pour chacun des régimes de génération : spontanée, simplement et doublement stimulée introduits au chapitre III. Du fait de son exhaustivité, le chapitre IV peut paraître un peu lourd, mais nous voulions vérifier tous les cas de figure afin d'enrichir nos conclusions et nos expériences à venir. Les cohérences entre les champs triplets sont parfaitement mises en évidence par notre modèle en régime de génération par fluorescence paramétrique, que les recombinaisons se fassent à trois champs ou à deux champs. Les corrélations apparaissent par contre entièrement masquées en régime bi-injecté, où le champ recombinaison est équivalent à une somme de champs incohérents, et partiellement masquées en régime mono-injecté, le champ généré étant différent du champ somme de champs incohérents.

Le chapitre V traite des expériences que nous avons menées pour valider le modèle. Elles n'ont pu être menées qu'en régime bi-injecté faute de rendement suffisant pour observer des champs générés en régime mono-injecté. Les expériences de génération viennent corroborer les expressions des énergies pour les champs générés établies au chapitre III, et les expériences de recombinaison, bien que très délicates et très bruitées, confirment également l'absence de signature de corrélation entre champs recombinaison en régime bi-injecté comme annoncé au chapitre IV. Le champ est en effet équivalent, aux imprécisions de mesure près, à celui annoncé par le modèle, traduisant bien une recombinaison incohérente des champs triplets.

La généralité du modèle quantique que nous avons proposé pourra être mis à profit dans le cadre de nouvelles expériences utilisant des fibres optiques, comme cela est expliqué

en conclusion [5–7].

En fin de manuscrit, l'annexe A envisage la différence qu'il y aurait à considérer deux des champs triplets dégénérés, donc décrits par les mêmes opérateurs de création et d'annihilation. Les annexes B et C donnent les détails de certains calculs complexes de somme de fréquences des champs non portés dans le chapitre IV.

# Chapitre I

## Bases nécessaires en optique non linéaire classique et quantique

### I.1 Optique non linéaire en régime classique

#### I.1.1 Propagation de champs électromagnétiques dans un milieu diélectrique linéaire

Le champ électromagnétique émis par le laser est décrit ici dans le régime classique par l'approximation de l'onde plane polychromatique progressive unidirectionnelle et polarisée rectilignement, se propageant dans un milieu diélectrique sans perte et non magnétique selon une direction fixe.

En supposant une périodicité temporelle sur une durée  $\tau$  très grande devant la période  $T = \lambda/c$  de l'onde, le champ électrique  $\vec{E}(z, t)$  de la lumière se propageant dans la direction ( $Oz$ ) du repère cartésien du laboratoire noté  $(O, x, y, z)$ , peut s'écrire comme transformée de Fourier temporelle de son amplitude complexe  $\vec{E}(\omega, z)$ , soit [15] :

$$\begin{aligned}\vec{E}(z, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \vec{E}(\omega, z) e^{-i\omega t} + c.c. \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \vec{E}(\omega, z, t) + c.c.\end{aligned}\tag{I.1}$$

Les bornes d'intégration en fréquence vont de 0 à  $+\infty$ . A noter que l'expression est équivalente à une intégration entre  $-\infty$  et  $+\infty$  sans l'addition du complexe conjugué de  $\vec{E}(\omega, z) e^{-i\omega t}$ .

Les équations de Maxwell donnent l'évolution de l'amplitude du champ. Elles admettent une infinité de solutions dont l'onde plane progressive, qui dans le cas d'une

onde polarisée rectilignement, s'écrit :

$$\vec{E}(\omega, z) = E(\omega, z)\vec{e}(\omega) = \mathcal{E}(\omega, z)e^{ik(\omega)z}\vec{e}(\omega) \quad (\text{I.2})$$

où  $\mathcal{E}(\omega, z) = |\mathcal{E}(\omega, z)| \cdot e^{i\phi}$  est l'amplitude complexe scalaire du champ électrique au point  $z$  à la fréquence  $\omega$ ,  $\phi$  étant la phase initiale,  $\vec{e}(\omega)$  est le vecteur unitaire indiquant la direction de la polarisation, et  $k(\omega)$  représente le module du vecteur d'onde de vecteur directeur unitaire  $\vec{u}_z(\omega)$  dans la direction  $(Oz)$ ; il est défini par  $k(\omega) = \frac{n(\omega)\omega}{c}$  où  $c$  est la célérité de la lumière et  $n(\omega)$  l'indice de réfraction du milieu, qui dépend de la susceptibilité électrique de premier ordre  $\chi^{(1)}$  selon :

$$n(\omega) = \sqrt{1 + \chi^{(1)}(\omega)} \quad (\text{I.3})$$

La susceptibilité électrique de premier ordre est un tenseur polaire de rang 2 dont les éléments sont réels dans le cas d'un milieu sans perte, ce qui est le cas ici. Elle couple la polarisation électronique  $\vec{P}(z, t)$  au champ électrique de la lumière  $\vec{E}(z, t)$  par la relation constitutive suivante [15] :

$$\vec{P}(z, t) = \int d\omega \varepsilon_0 \chi^{(1)}(\omega) \cdot \vec{E}(\omega, z, t) \quad (\text{I.4})$$

Il est à noter que l'équation (I.4) est une relation linéaire entre  $\vec{P}$  et  $\vec{E}$ , d'où l'appellation de "linéaire" pour la propagation dans un tel régime. Cette polarisation électronique est relative aux électrons de valence lorsque les ondes considérées sont dans le domaine du visible ou du proche infra-rouge, ce qui est le cas de notre étude.

Le vecteur de Poynting, qui permet de décrire les propriétés énergétiques des ondes, donne la direction de propagation de l'énergie transportée par l'onde optique; il s'écrit [15] :

$$\vec{\pi}(z, t) = \frac{\vec{E}(z, t) \wedge \vec{B}(z, t)}{\mu_0} \quad (\text{I.5})$$

On a considéré ici que le vecteur de Poynting est colinéaire au vecteur d'onde, ce qui sera le cas dans les situations réelles que nous avons considérées.  $\mu_0$  est la perméabilité magnétique du vide et  $\vec{B}$  l'induction magnétique définie par :

$$\begin{aligned} \vec{B}(z, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \frac{n(\omega)}{c} \vec{u}_z \wedge \vec{E}(\omega, z) e^{-i\omega t} + c.c. \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \frac{n(\omega)}{c} \vec{u}_z \wedge \vec{E}(\omega, z, t) + c.c. \end{aligned} \quad (\text{I.6})$$

où  $\vec{u}_z$  est le vecteur unitaire du vecteur d'onde.

Le flux du vecteur de Poynting donne l'énergie rayonnée par l'onde par unité de

temps à travers une surface  $S$  donnée, soit :

$$I(t) = \int_S d\vec{s} \vec{\pi}(z, t) \quad (\text{I.7})$$

Cette quantité a la périodicité temporelle  $\tau$  de l'onde.

Il sera également utile pour la suite de l'étude de travailler avec la moyenne du vecteur de Poynting sur la période temporelle  $\tau$ , ce qui définit l'éclairement  $I(z)$ , encore appelé abusivement "intensité", et qui donne la puissance rayonnée par l'onde par unité de surface à la cote  $z$  :

$$I(z) = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} dt \vec{\pi}(z, t) \cdot \vec{u}_z = \frac{1}{\tau} n(\omega) \varepsilon_0 c \int d\omega |\mathcal{E}(\omega, z)|^2 \quad (\text{I.8})$$

Beaucoup de calculs seront menés dans le repère diélectrique, appelé aussi "repère optique", qui est le repère diagonalisant la partie réelle du tenseur de susceptibilité électrique de premier ordre  $\chi^{(1)}$ . Il sera noté  $(O, X, Y, Z)$ . D'un point de vue pratique, il est utile de repérer la direction du vecteur d'onde  $\vec{k}$  de l'onde optique dans le repère diélectrique par ses angles de coordonnées sphériques  $(\theta, \varphi)$ , comme représenté sur la figure I.1.

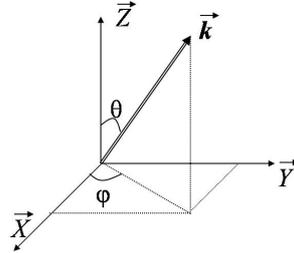


FIGURE I.1: Convention de repérage du vecteur d'onde  $\vec{k}$  dans le repère optique. Les angles de coordonnées sphériques  $(\theta, \varphi)$  sont repérés par rapport aux axes du repère diélectrique  $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ .

A partir des équations de Maxwell et de l'équation constitutive, il est possible d'établir la relation de Fresnel [16] :

$$\frac{\sin^2(\theta) \cos^2(\varphi)}{n^{-2} - n_X^{-2}} + \frac{\sin^2(\theta) \sin^2(\varphi)}{n^{-2} - n_Y^{-2}} + \frac{\cos^2(\theta)}{n^{-2} - n_Z^{-2}} = 0 \quad (\text{I.9})$$

$n_X, n_Y$  et  $n_Z$  sont appelés "indices de réfraction principaux"

L'équation (I.9) permet de calculer la valeur de l'indice de réfraction associée à chaque direction de propagation. Dans le cas général, elle admet deux solutions, d'où le nom de "biréfringent" donné au milieu considéré dans ce cas. Ces deux solutions, notées

$n^{(+)}(\theta, \varphi)$  et  $n^{(-)}(\theta, \varphi)$  avec  $n^{(+)}(\theta, \varphi) \geq n^{(-)}(\theta, \varphi)$ , sont données par [17] :

$$n^{(\pm)}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2}{\alpha \mp \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}} \quad (\text{I.10})$$

avec  $\alpha = \sin^2(\theta)\cos^2(\varphi)(n_Y^{-2} + n_Z^{-2}) + \sin^2(\theta)\sin^2(\varphi)(n_X^{-2} + n_Z^{-2}) + \cos^2(\theta)(n_X^{-2} + n_Y^{-2})$   
et  $\beta = \sin^2(\theta)\cos^2(\varphi)n_Y^{-2}n_Z^{-2} + \sin^2(\theta)\sin^2(\varphi)n_X^{-2}n_Z^{-2} + \cos^2(\theta)n_X^{-2}n_Y^{-2}$ .

$n^{(+)}$  et  $n^{(-)}$  forment deux surfaces tridimensionnelles constituant la “surface des indices”. Si les indices principaux de réfraction  $n_X$ ,  $n_Y$  et  $n_Z$  ne sont pas tous égaux, le milieu est dit “anisotrope” car la valeur de l’indice de réfraction dépend de la direction de propagation de l’onde.

L’axe optique d’un matériau biréfringent est défini comme la direction dans laquelle il existe une solution double à l’équation de Fresnel. Dans le cas où les trois indices de réfraction principaux sont différents, il existe deux axes optiques, de sorte que le milieu correspondant est dit “biaxe”. Le milieu est dit “uniaxe” lorsqu’il n’y a qu’un seul axe optique, ce qui correspond au cas où deux des trois indices de réfraction sont égaux. Quant aux milieux isotropes, ils se définissent par l’égalité des trois indices.

Dans une direction de propagation quelconque  $(\theta, \varphi)$  d’un milieu anisotrope, le champ électrique de l’onde optique ne peut prendre que deux directions qui sont associées respectivement aux deux solutions  $n^{(+)}(\theta, \varphi)$  et  $n^{(-)}(\theta, \varphi)$  de l’équation de Fresnel. Ces deux ondes sont polarisées rectilignement et sont orthogonales entre elles lorsque la propagation se fait dans les plans principaux  $(XOY)$ ,  $(XOZ)$  et  $(YOZ)$  du repère diélectrique. Il est à noter que dans un milieu isotrope, toute direction de polarisation est autorisée pour le champ électrique.

La dépendance en longueur d’onde des indices de réfraction principaux est souvent bien décrite par l’équation de Sellmeier obtenue dans le cadre du modèle classique de Lorentz décrivant l’oscillateur harmonique [18] :

$$n_i^2(\lambda) = a_i + \frac{b_i}{\lambda^2 - c_i} - d_i\lambda^2 \quad (\text{I.11})$$

où  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ , et  $d_i$ , avec  $i = \{X, Y, Z\}$  sont des paramètres qui dépendent du milieu considéré.

Les cristaux considérés dans la thèse sont tous des cristaux de  $KTiOPO_4$ , dit  $KTP$ , cristal biaxe cristallisant dans la classe de symétrie d’orientation orthorhombique mm2. La figure I.2 schématise les sections de la surface des indices d’un cristal biaxe dans les plans  $(XOY)$  et  $(XOZ)$  du repère diélectrique. Il est à noter que les vecteurs de Poynting  $\vec{\Pi}^+(\theta, \varphi)$  et  $\vec{\Pi}^-(\theta, \varphi)$  sont tous deux colinéaires au vecteur d’onde dans le cas d’une propagation selon les axes du repère diélectrique  $(OX)$ ,  $(OY)$  ou  $(OZ)$  d’un cristal biaxe, ce qui sera le cas des situations considérées dans la thèse.

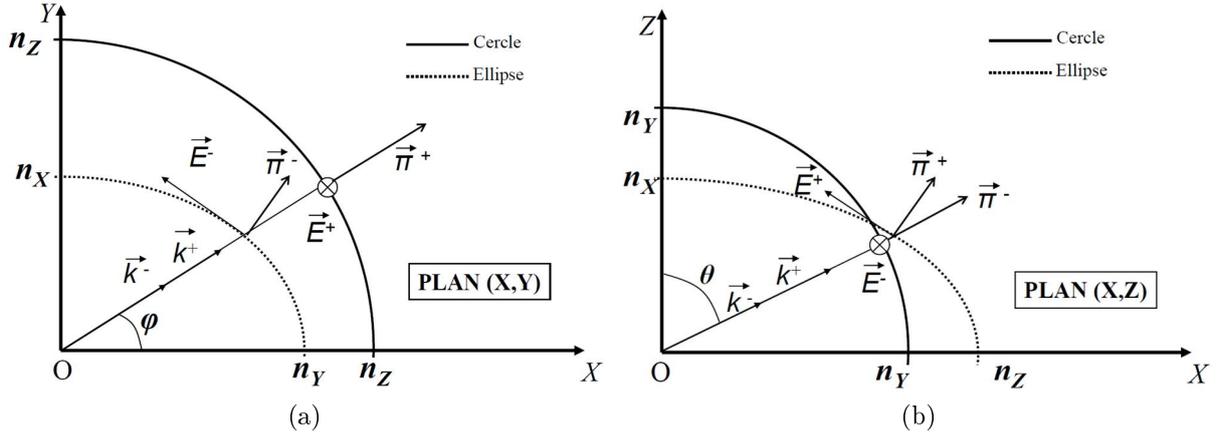


FIGURE I.2: Coupe de la surface des indices et configuration des vecteurs associés aux deux modes (+) et (-) susceptibles de se propager dans les plans (XOY) (a), et (XOZ) (b) d'un cristal biaxe. ( $\vec{E}^+, \vec{E}^-$ ) et ( $\vec{\pi}^+, \vec{\pi}^-$ ) sont respectivement les champs électriques et les vecteurs de Poynting de l'onde se propageant dans chacun de ces deux plans suivant la direction indiquée par les vecteurs d'onde colinéaires  $\vec{k}^+$  et  $\vec{k}^-$ .

Les coefficients de Sellmeier (I.11) retenus pour *KTP* sont [19] :

$$\begin{aligned} a_X &= 3,0065, & b_X &= 0,03901 \mu\text{m}^2, & c_X &= 0,04251 \mu\text{m}^2, & d_X &= 0,01327 \mu\text{m}^{-2} \\ a_Y &= 3,0333, & b_Y &= 0,04159 \mu\text{m}^2, & c_Y &= 0,04547 \mu\text{m}^2, & d_Y &= 0,01408 \mu\text{m}^{-2} \\ a_Z &= 3,3134, & b_Z &= 0,05694 \mu\text{m}^2, & c_Z &= 0,05658 \mu\text{m}^2, & d_Z &= 0,01682 \mu\text{m}^{-2} \end{aligned} \quad (\text{I.12})$$

## I.1.2 Propagation de champs électromagnétiques dans un milieu diélectrique non linéaire

### I.1.2.1 Polarisation non linéaire

Lorsque l'éclairement de l'onde optique est supérieur au  $MW/cm^2$ , l'équation constitutive (I.4) ne donne plus une description satisfaisante de l'interaction lumière-matière. Il faut alors faire appel à la théorie des perturbations, qui introduit des ordres supérieurs dans l'expression de la polarisation électronique, soit [20] :

$$\vec{P}(z, t) = \vec{P}^{(1)}(z, t) + \vec{P}^{(2)}(z, t) + \vec{P}^{(3)}(z, t) + \dots \quad (\text{I.13})$$

Le terme  $\vec{P}^{(1)}(z, t)$  est la polarisation électronique linéaire donnée par la relation (I.4). Le terme de polarisation de second ordre est quant à lui donné par :

$$\begin{aligned} \vec{P}^{(2)}(z, t) &= \iint d\omega d\omega' \varepsilon_0 \chi^{(2)}(\omega, \omega') : \left\{ \vec{E}(\omega', z, t) \otimes \vec{E}(\omega - \omega', z, t) \right\} \\ &= \int d\omega \vec{P}^{(2)}(\omega, z, t) \end{aligned} \quad (\text{I.14})$$

où les intégrales sur  $\omega$  et  $\omega'$  permettent la propagation relative à toutes les pulsations possibles vérifiant la conservation de l'énergie  $\omega = \omega' + (\omega - \omega')$ .  $\otimes$  représente le produit tensoriel et  $(:)$  est un produit contracté.  $\chi^{(2)}$  est le tenseur de susceptibilité électrique de deuxième ordre ; c'est un tenseur de rang trois qui possède, dans le cas général, 27 coefficients indépendants notés  $\chi_{ijk}^{(2)}$  où les indices  $i, j$ , et  $k$  se réfèrent aux indices cartésiens  $X, Y$ , et  $Z$  du repère diélectrique.

L'équation (I.14) montre qu'en régime non linéaire du second ordre, deux champs électriques de composantes spectrales  $\vec{E}(\omega', z, t)$  et  $\vec{E}(\omega - \omega', z, t)$  peuvent induire une composante de polarisation électronique  $\vec{P}^{(2)}(\omega, z, t)$ . L'équation constitutive (I.14) est donc quadratique vis-à-vis du champ électrique, de sorte que l'on parle "d'optique non linéaire quadratique". La polarisation  $\vec{P}^{(2)}(\omega, z, t)$  ainsi créée à la pulsation  $\omega$  va elle-même rayonner un champ électrique à la pulsation  $\omega$  :  $\vec{E}(\omega, z, t)$ . Il s'agit donc d'un processus permettant de coupler trois composantes spectrales,  $\omega', \omega - \omega'$  et  $\omega$ , du champ électrique de la lumière.

De même, la polarisation de troisième ordre est donnée par :

$$\begin{aligned} \vec{P}^{(3)}(z, t) &= \iiint d\omega d\omega' d\omega'' \varepsilon_0 \chi^{(3)}(\omega, \omega', \omega'') : \left\{ \vec{E}(\omega', z, t) \otimes \vec{E}(\omega'', z, t) \otimes \vec{E}(\omega - \omega' - \omega'', z, t) \right\} \\ &= \int d\omega \vec{P}^{(3)}(\omega, z, t) \end{aligned} \quad (\text{I.15})$$

où les intégrales sur  $\omega, \omega'$  et  $\omega''$  permettent la propagation relative à toutes les pulsations possibles vérifiant la conservation de l'énergie. Par analogie aux commentaires faits ci-avant pour le deuxième ordre, le processus décrit par la relation (I.15) correspond à de l'optique non linéaire dite "cubique", interaction au cours de laquelle vont interagir quatre composantes spectrales du champ électrique, aux pulsations  $\omega', \omega'', \omega - \omega' - \omega''$  et  $\omega$ .  $(:)$  est un produit contracté.  $\chi^{(3)}$  est le tenseur de susceptibilité électrique de troisième ordre ; c'est un tenseur polaire de rang quatre qui possède, dans le cas général, 81 coefficients indépendants notés  $\chi_{ijkl}^{(3)}$  où les indices  $i, j, k$  et  $l$  se réfèrent aux indices cartésiens  $X, Y$ , et  $Z$  du repère diélectrique.

Il va de soi que les termes de deuxième et troisième ordres de la polarisation se développent en série de Fourier tout comme les autres champs, soit :

$$\begin{aligned} P^{(n)}(z, t) &= \int d\omega P^{(n)}(\omega, z) e^{-i\omega t} + c.c. \\ &= \int d\omega P^{(n)}(\omega, z, t) \end{aligned} \quad (\text{I.16})$$

avec  $n = 2, 3$ .

### I.1.2.2 Propagation des ondes électromagnétiques en régime non linéaire

L'équation de propagation en régime non linéaire dans une direction quelconque ( $Oz$ ) s'obtient à partir des équations de Maxwell prenant en compte les équations constitutives (I.14), (I.15) et (I.16) ; elle s'écrit, en ne prenant en compte que les deux premiers ordres

de la polarisation non linéaire :

$$\frac{\partial^2 \left( \vec{E}(\omega, z, t) \right)}{\partial z^2} + \frac{n^2(\omega)}{c^2} \omega^2 \vec{E}(\omega, z, t) = -\mu_0 \omega^2 \left( \vec{P}^{(2)}(\omega, z, t) + \vec{P}^{(3)}(\omega, z, t) \right) \quad (\text{I.17})$$

On retrouve bien l'équation de propagation en régime linéaire lorsque  $\vec{P}^{(2)}(\omega, z, t) = \vec{P}^{(3)}(\omega, z, t) = 0$ . L'onde plane décrite par l'éq. (I.2) est toujours solution de l'équation de propagation (I.17), le terme " $e^{ikz}$ " décrivant l'évolution linéaire de l'onde, mais à laquelle s'ajoute une évolution non linéaire qui va agir au niveau de l'amplitude  $\mathcal{E}(\omega, z)$ . En effet, en développant l'expression de  $\vec{E}(\omega, z)$  dans l'approximation de l'enveloppe lentement variable, la dérivée seconde de l'amplitude scalaire complexe peut être négligée, soit  $\frac{\partial^2 \mathcal{E}(\omega, z)}{\partial z^2} \ll k \frac{\partial \mathcal{E}(\omega, z)}{\partial z}$ , ce qui donne :

$$k(\omega) \frac{\partial \mathcal{E}(\omega, z)}{\partial z} = i \frac{\mu_0 \omega^2}{2} \left( \vec{P}^{(2)}(\omega, z) + \vec{P}^{(3)}(\omega, z) \right) e^{-ik(\omega)z} \quad (\text{I.18})$$

Considérons tout d'abord le cas où seul le terme source en  $\vec{P}^{(2)}(\omega, z)$ , décrit par (I.14), est pris en compte. L'enveloppe  $\mathcal{E}(\omega, z)$  du champ électromagnétique en sortie du milieu non linéaire aura une amplitude non nulle à toutes les fréquences  $\omega$  susceptibles de se propager dans le milieu. Cependant en général, compte tenu du spectre de transmission du milieu non linéaire, des conditions initiales via les amplitudes des ondes incidentes, ainsi que des conditions sur le désaccord de phase  $\Delta k$ , il va y avoir restriction du spectre à trois paquets d'onde, centrés chacun autour d'une fréquence particulière et que nous noterons  $\mathcal{E}_0$ ,  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$ . L'équation (I.18) conduit alors au système de trois équations couplées suivantes qui décrivent l'évolution de l'amplitude complexe scalaire des champs des trois ondes en interaction [20] :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{E}_0(\omega, z)}{\partial z} = i \int d\omega' \frac{\omega}{2n(\omega)c} \chi_{eff}^{(2)}(\omega, \omega') \mathcal{E}_1(\omega', z) \mathcal{E}_2(\omega - \omega', z) e^{-i\Delta k(\omega, \omega')z} \\ \frac{\partial \mathcal{E}_1(\omega, z)}{\partial z} = i \int d\omega' \frac{\omega}{2n(\omega)c} \chi_{eff}^{(2)}(\omega, \omega') \mathcal{E}_0(\omega', z, t) \mathcal{E}_2^*(\omega' - \omega, z) e^{+i\Delta k(\omega', \omega)z} \\ \frac{\partial \mathcal{E}_2(\omega, z)}{\partial z} = i \int d\omega' \frac{\omega}{2n(\omega)c} \chi_{eff}^{(2)}(\omega, \omega') \mathcal{E}_0(\omega', z, t) \mathcal{E}_1^*(\omega' - \omega, z) e^{+i\Delta k(\omega', \omega)z} \end{cases} \quad (\text{I.19})$$

$\Delta k(\omega, \omega')$  est le désaccord de phase entre la polarisation non linéaire et le champ qu'elle rayonne, et  $\chi_{eff}^{(2)}(\omega, \omega')$  est le coefficient effectif de susceptibilité non linéaire de deuxième ordre. Ces deux paramètres seront explicités et commentés à la fin de cette section.

Il est à noter que les équations relatives à  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$  sont interchangeables par intervention des indices 1 et 2.

Avec une démarche analogue, si seul le terme source en  $\vec{P}^{(3)}(\omega, z)$  est considéré, en spécifiant les amplitudes complexes de quatre ondes polychromatiques en interaction aux amplitudes  $\mathcal{E}_0$ ,  $\mathcal{E}_1$ ,  $\mathcal{E}_2$  et  $\mathcal{E}_3$ , l'équation de propagation (I.18) donne le système d'équations différentielles couplées suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{E}_0(\omega, z)}{\partial z} = i \iint d\omega' d\omega'' \frac{\omega}{2n(\omega)c} \chi_{eff}^{(3)}(\omega, \omega', \omega'') \mathcal{E}_1(\omega', z) \mathcal{E}_2(\omega'', z) \mathcal{E}_3(\omega - \omega' - \omega'', z) e^{-i\Delta k(\omega, \omega', \omega'')z} \\ \frac{\partial \mathcal{E}_1(\omega, z)}{\partial z} = i \iint d\omega' d\omega'' \frac{\omega}{2n(\omega)c} \chi_{eff}^{(3)}(\omega, \omega', \omega'') \mathcal{E}_0(\omega', z) \mathcal{E}_2^*(\omega'', z) \mathcal{E}_3^*(\omega - \omega' - \omega'', z) e^{+i\Delta k(\omega, \omega', \omega'')z} \\ \frac{\partial \mathcal{E}_2(\omega, z)}{\partial z} = i \iint d\omega' d\omega'' \frac{\omega}{2n(\omega)c} \chi_{eff}^{(3)}(\omega, \omega', \omega'') \mathcal{E}_0(\omega', z) \mathcal{E}_1^*(\omega'', z) \mathcal{E}_3^*(\omega - \omega' - \omega'', z) e^{+i\Delta k(\omega, \omega', \omega'')z} \\ \frac{\partial \mathcal{E}_3(\omega, z)}{\partial z} = i \iint d\omega' d\omega'' \frac{\omega}{2n(\omega)c} \chi_{eff}^{(3)}(\omega, \omega', \omega'') \mathcal{E}_0(\omega', z) \mathcal{E}_1^*(\omega'', z) \mathcal{E}_2^*(\omega - \omega' - \omega'', z) e^{+i\Delta k(\omega, \omega', \omega'')z} \end{cases} \quad (\text{I.20})$$

où  $\Delta k(\omega, \omega', \omega'')$  et  $\chi_{eff}^{(3)}(\omega, \omega', \omega'')$  sont respectivement le désaccord de phase et le coefficient effectif de susceptibilité non linéaire de troisième ordre.

Ces équations sont le pendant des équations couplées (I.19), mais pour une interaction cubique.

Qu'il s'agisse d'un couplage à trois ondes ou à quatre ondes, les équations de propagation font apparaître deux grandeurs clefs : d'une part le désaccord de phase entre la polarisation non linéaire et le champ qu'elle rayonne,  $\Delta k(\omega, \omega')$  et  $\Delta k(\omega, \omega', \omega'')$ , et d'autre part les coefficients effectifs,  $\chi_{eff}^{(2)}$  et  $\chi_{eff}^{(3)}$ .

Les expressions des désaccords de phase sont données par [17] :

$$\Delta k(\omega, \omega', \theta, \varphi) = k(\omega, \theta, \varphi) - k(\omega', \theta, \varphi) - k(\omega - \omega', \theta, \varphi) \quad (\text{I.21})$$

et

$$\Delta k(\omega, \omega', \omega'', \theta, \varphi) = k(\omega, \theta, \varphi) - k(\omega', \theta, \varphi) - k(\omega'', \theta, \varphi) - k(\omega - \omega' - \omega'', \theta, \varphi) \quad (\text{I.22})$$

où les  $k$  sont les modules des vecteurs d'onde des champs en interaction se propageant toutes dans la même direction  $(\theta, \varphi)$ . Dans un milieu dispersif, les différentes composantes fréquentielles des champs se propageant à des vitesses de phase différentes, il en résulte a priori un déphasage entre la polarisation non linéaire et le champ qu'elle rayonne, engendrant alors des interférences successivement constructives et destructives tout au long de la propagation dans le cristal. Le processus est alors dit "hors accord de phase". Cela correspond à un transfert d'énergie périodique entre champs incidents et rayonnés. La périodicité spatiale associée est appelée "longueur de cohérence" de l'interaction non linéaire. Elle est donnée par :

$$L_c(\omega, \omega', \theta, \varphi) = \frac{\pi}{\Delta k(\omega, \omega', \theta, \varphi)} \quad (\text{I.23})$$

Les seules composantes fréquentielles qui vont se propager efficacement dans le milieu sont celles pour lesquelles le désaccord de phase est proche de zéro ( $\Delta k \simeq 0$ ), conduisant ainsi à une longueur de cohérence infinie, ce qui signifie que l'interaction sera constructive sur toute la traversée du milieu non linéaire. La solution la plus courante pour réaliser l'accord de phase consiste à utiliser des milieux anisotropes tels que leur biréfringence puisse compenser la dispersion en longueur d'onde de l'indice de réfraction : les nappes

$n^{(+)}(\theta, \varphi)$  et  $n^{(-)}(\theta, \varphi)$  de la surface des indices seront alors potentiellement sollicitées pour chaque onde. Dans le cas d'un milieu dont la dispersion est normale, soit  $\Delta n/\Delta\lambda < 0$ , il y a, si les fréquences sont ordonnées selon  $\omega_3 \leq \omega_2 \leq \omega_1 \leq \omega_0$ , trois combinaisons possibles d'indices de réfraction permettant l'accord de phase d'ordre deux, ce qui définit conventionnellement les trois types d'accord de phase [21] :

$$\begin{cases} I & n^{(-)}(\omega_0)\omega_0 - n^{(+)}(\omega_1)\omega_1 - n^{(+)}(\omega_2)\omega_2 = 0 \\ II a & n^{(-)}(\omega_0)\omega_0 - n^{(+)}(\omega_1)\omega_1 - n^{(-)}(\omega_2)\omega_2 = 0 \\ II b & n^{(-)}(\omega_0)\omega_0 - n^{(-)}(\omega_1)\omega_1 - n^{(+)}(\omega_2)\omega_2 = 0 \end{cases} \quad (I.24)$$

De même, pour les interactions non linéaires de troisième ordre, le nombre de combinaisons possibles s'étend à sept [17] :

$$\begin{cases} I & n^{(-)}(\omega_0)\omega_0 - n^{(+)}(\omega_1)\omega_1 - n^{(+)}(\omega_2)\omega_2 - n^{(+)}(\omega_3)\omega_3 = 0 \\ II a & n^{(-)}(\omega_0)\omega_0 - n^{(+)}(\omega_1)\omega_1 - n^{(+)}(\omega_2)\omega_2 - n^{(-)}(\omega_3)\omega_3 = 0 \\ II b & n^{(-)}(\omega_0)\omega_0 - n^{(+)}(\omega_1)\omega_1 - n^{(-)}(\omega_2)\omega_2 - n^{(+)}(\omega_3)\omega_3 = 0 \\ II c & n^{(-)}(\omega_0)\omega_0 - n^{(-)}(\omega_1)\omega_1 - n^{(+)}(\omega_2)\omega_2 - n^{(+)}(\omega_3)\omega_3 = 0 \\ III a & n^{(-)}(\omega_0)\omega_0 - n^{(+)}(\omega_1)\omega_1 - n^{(-)}(\omega_2)\omega_2 - n^{(-)}(\omega_3)\omega_3 = 0 \\ III b & n^{(-)}(\omega_0)\omega_0 - n^{(-)}(\omega_1)\omega_1 - n^{(+)}(\omega_2)\omega_2 - n^{(-)}(\omega_3)\omega_3 = 0 \\ III c & n^{(-)}(\omega_0)\omega_0 - n^{(-)}(\omega_1)\omega_1 - n^{(-)}(\omega_2)\omega_2 - n^{(+)}(\omega_3)\omega_3 = 0 \end{cases} \quad (I.25)$$

Il faut remarquer que les équations relatives aux types II d'une part et celles relatives aux types III d'autre part sont équivalentes entre elles par interversion des indices repérant les pulsations.

La condition d'accord de phase ne peut être réalisée que pour les configurations de polarisation des ondes, en terme de  $\vec{E}^+(\theta, \varphi)$  ou  $\vec{E}^-(\theta, \varphi)$ , permettant de solliciter les combinaisons d'indices de réfraction  $n^+(\theta, \varphi)$  ou  $n^-(\theta, \varphi)$  aux pulsations considérées comme listées équations (I.24) et (I.25). Les indices de réfraction étant fonction de la direction de propagation dans le milieu anisotrope, la condition d'accord de phase sera vérifiée dans des directions particulières, appelées "directions d'accord de phase".

La configuration de polarisation ayant été choisie pour réaliser l'accord de phase, il est alors important de calculer le coefficient effectif correspondant. Celui-ci tient compte de la compatibilité de symétrie d'orientation entre le milieu non linéaire, via le tenseur de susceptibilité électrique concerné, et la configuration de polarisation, via le produit tensoriel des vecteurs unitaires des champs électriques des ondes couplées.

Les expressions des coefficients effectifs sont les suivantes [17] :

$$\chi_{eff}^{(2)}(\omega, \omega', \theta, \varphi) = \chi^{(2)}(\omega, \omega') : \vec{e}(\omega, \theta, \varphi) \otimes \vec{e}(\omega', \theta, \varphi) \otimes \vec{e}(\omega - \omega', \theta, \varphi) \quad (I.26)$$

$$\chi_{eff}^{(3)}(\omega, \omega', \omega'', \theta, \varphi) = \chi^{(3)}(\omega, \omega', \omega'') :: \vec{e}(\omega, \theta, \varphi) \otimes \vec{e}(\omega', \theta, \varphi) \otimes \vec{e}(\omega'', \theta, \varphi) \otimes \vec{e}(\omega - \omega' - \omega'', \theta, \varphi) \quad (I.27)$$

Comme indiqué dans les équations (I.26) - (I.27), le coefficient effectif dépend de la direction de propagation  $(\theta, \varphi)$  considérée dans le milieu anisotrope. Il est important de faire remarquer que les composantes spectrales qui seront couplées par un coefficient effectif nul ne donneront lieu à aucune conversion de fréquence non linéaire, et ce même si l'accord de phase est réalisé.

Le principe de Neumann permet de réduire le nombre d'éléments indépendants des tenseurs  $\chi^{(2)}$  et  $\chi^{(3)}$  en fonction de la symétrie d'orientation du milieu non linéaire [16]. Des considérations thermodynamiques permettent également de réduire ce nombre, en particulier si le milieu est considéré sans perte et si la dispersion en longueur d'onde est négligeable, ce qui correspond à l'approximation de Kleinman. Dans ce cas, les éléments indépendants des tenseurs  $\chi^{(2)}$  et  $\chi^{(3)}$  dans la classe de symétrie d'orientation mm2 qui est celle de KTP sont les suivants [17] :

$$\begin{cases} \chi_{xzx}^{(2)} = \chi_{xxz}^{(2)} = \chi_{zxx}^{(2)} \\ \chi_{yyz}^{(2)} = \chi_{yzy}^{(2)} = \chi_{zyy}^{(2)} \\ \chi_{zzz}^{(2)} \end{cases} \quad (I.28)$$

$$\begin{cases} \chi_{xxxx}^{(3)} \\ \chi_{xxzz}^{(3)} = \chi_{xzxz}^{(3)} = \chi_{xzzx}^{(3)} = \chi_{zxxz}^{(3)} = \chi_{zxzx}^{(3)} = \chi_{zzxx}^{(3)} \\ \chi_{xxyy}^{(3)} = \chi_{xyxy}^{(3)} = \chi_{xyyx}^{(3)} = \chi_{yxyx}^{(3)} = \chi_{yxyx}^{(3)} = \chi_{yyxx}^{(3)} \\ \chi_{yyyy}^{(3)} \\ \chi_{yyzz}^{(3)} = \chi_{yzyz}^{(3)} = \chi_{yzzz}^{(3)} = \chi_{zyyz}^{(3)} = \chi_{zyzy}^{(3)} = \chi_{zzyy}^{(3)} \\ \chi_{zzzz}^{(3)} \end{cases} \quad (I.29)$$

## I.2 Optique non linéaire en régime quantique

### I.2.1 Représentations schématiques des processus non linéaires à trois et quatre photons

Dans le cas d'une interaction non linéaire du deuxième ordre, les énergies des trois photons en interaction avec le milieu non linéaire vérifient la relation de conservation suivante :

$$\hbar\omega_0 = \hbar\omega_1 + \hbar\omega_2 \quad (I.30)$$

Cette vision corpusculaire permet de définir de façon qualitative les différents processus élémentaires correspondant aux interactions d'ordre deux : la fluorescence

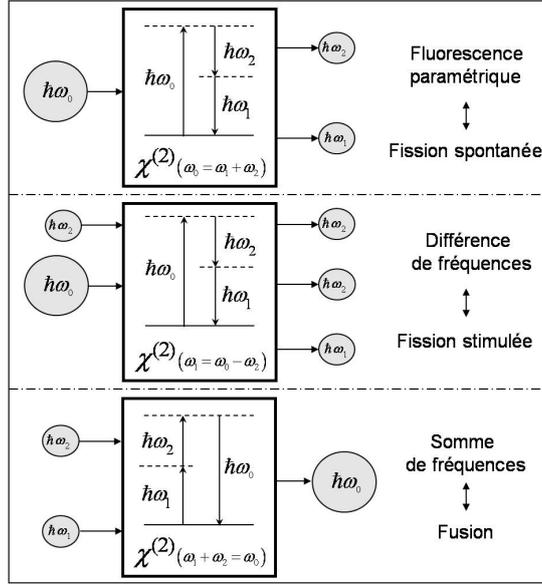


FIGURE I.3: *Diagrammes photoniques des différentes interactions non linéaires d'ordre deux; les traits en pointillés correspondent à des niveaux d'énergie virtuels.*

paramétrique, qui peut être “vue” comme la scission spontanée d’un photon en deux photons d’énergie moindre ; la scission stimulée d’un photon en deux photons d’énergie moindre, qui correspond à la différence de fréquences d’un point de vue classique ; et la fusion de deux photons, donnant alors naissance à un photon d’énergie supérieure, qui est le pendant de la somme de fréquences. La figure I.3 schématise ces différentes interactions d’ordre deux.

D’un point de vue quantique, la condition d’accord de phase du régime classique ( $\Delta k = 0$ ) correspond à la conservation de l’impulsion des photons en interaction, soit pour un processus de second ordre lorsque les vecteurs d’onde associés sont colinéaires :

$$\hbar k_0 = \hbar k_1 + \hbar k_2 \quad (\text{I.31})$$

Dans le cas des interactions à quatre photons, il existe deux schémas possibles de couplage, notés A et B, correspondant à deux conditions distinctes de conservation de l’énergie.

Pour le schéma A, les relations de conservation de l’énergie et de l’impulsion s’écrivent :

$$\begin{cases} \hbar\omega_0 = \hbar\omega_1 + \hbar\omega_2 + \hbar\omega_3 \\ \text{et} \\ \hbar k_0 = \hbar k_1 + \hbar k_2 + \hbar k_3 \end{cases} \quad (\text{I.32})$$

Il leur correspond quatre processus élémentaires possibles, du même type que ceux correspondant à un couplage à trois photons : la fluorescence paramétrique, qui correspond à la scission spontanée d’un photon en trois photons d’énergie moindre, la différence de fréquences simplement injectée, qui peut être vue comme la scission d’un photon stimulée par un photon d’injection, la différence de fréquence doublement injectée, où cette fois

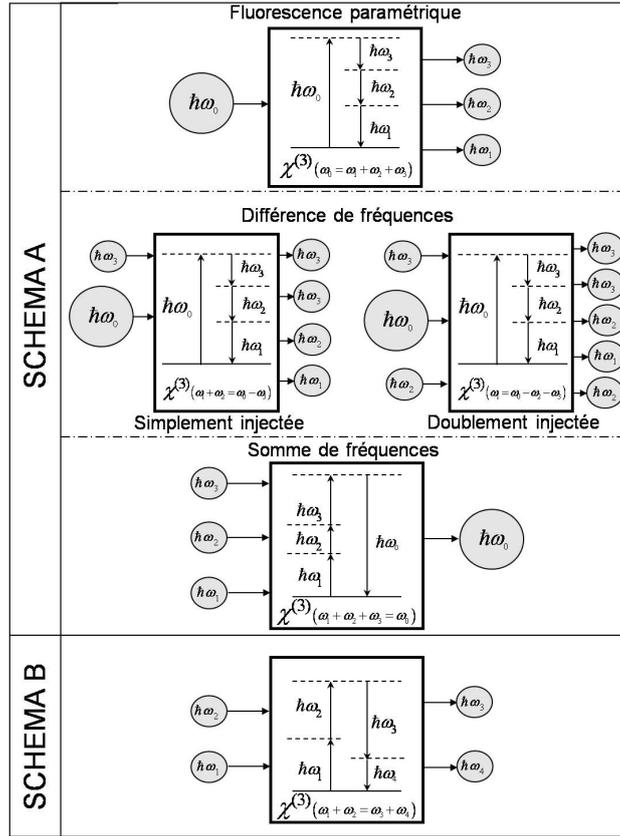


FIGURE I.4: Diagrammes photoniques des différentes interactions non linéaires d'ordre trois; les traits en pointillés correspondent à des niveaux d'énergie virtuels

deux photons viennent stimuler la scission, et la somme de fréquences correspondant à la fusion de trois photons en un photon d'énergie supérieure.

Les relations relatives au schéma B sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hbar\omega_0 + \hbar\omega_1 = \hbar\omega_2 + \hbar\omega_3 \\ \text{et} \\ \hbar k_0 + \hbar k_1 = \hbar k_2 + \hbar k_3 \end{array} \right. \quad (\text{I.33})$$

Il peut être interprété comme une fusion des deux photons d'énergie  $\hbar\omega_0$  et  $\hbar\omega_1$  suivie d'une scission produisant les photons à  $\hbar\omega_2$  et  $\hbar\omega_3$ . Ce schéma est celui correspondant à l'absorption à deux photons, à l'effet Kerr optique ou à la diffusion Raman stimulée par exemple. La figure I.4 schématise les différentes interactions d'ordre 3 décrites ci dessus.

C'est le processus de scission du schéma A qui nous intéresse dans le cadre de cette thèse, les trois photons générés constituant l'état triplet de la lumière.

## I.2.2 Quantification du champ électromagnétique

Pour obtenir les équations quantifiées de propagation d'une onde électromagnétique, il est possible de procéder de manière canonique en associant aux champ obtenus dans le régime classique (sections I.1.1 et I.1.2) des opérateurs de champs quantiques qui

évoluent dans une base formée d'opérateurs création-annihilation vérifiant les relations de commutation bosoniques [22]. Mais étant donné que c'est leur évolution dans un milieu diélectrique et non linéaire qui est cherchée ici (situation plus complexe qu'une simple évolution isotrope et linéaire), le mieux est de rétablir les équations de propagation quantiques en définissant un propagateur permettant d'obtenir l'évolution de tous les opérateurs des champs, décrivant ainsi complètement l'évolution spatiale des ondes [23]. Le propagateur qui décrit l'évolution spatiale est l'opérateur moment, celui décrivant l'évolution temporelle étant l'opérateur Hamiltonien [24]. Nous allons récapituler dans cette partie les grandes étapes menant à l'obtention des équations de propagation des champs.

Il faut tout d'abord noter que nous nous placerons pour la suite en représentation de Heisenberg, de sorte que toutes les évolutions des champs dans le milieu seront contenues dans les opérateurs. Comme décrit en régime classique ci-avant en partie I.1.1, il est plus pertinent de raisonner en variables d'espace plutôt qu'en variables temporelles. Nous allons donc de nouveau décomposer le champ électromagnétique en série de Fourier temporelle, ses opérateurs dépendant alors des variables spatiales. Supposons, comme dans le cas classique, une évolution unidirectionnelle des champs, donnée par la direction de leur vecteur d'onde  $\vec{k}$ . Il est possible d'écrire le champ directement en variables continues en faisant tendre la période temporelle  $\tau$  des champs vers l'infini, ce qui correspond au cadre de notre étude avec des laser pulsés à 15 ps où  $\tau$ , assimilable à la durée d'une impulsion, est très grande devant la période  $T$  des ondes dans le visible et l'infrarouge proche, qui est de l'ordre de quelques fs.

### I.2.2.1 Quantification du champ électromagnétique dans un milieu diélectrique linéaire

L'opérateur champ électrique s'écrit :

$$\hat{\vec{E}}(z, t) = \int d\omega \sum_{\sigma=1,2} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{4\pi\epsilon_0 c S n(\omega)}} [\hat{a}^+(\omega, \sigma, z) e^{-i\omega t} \vec{e}_\sigma + c.c.] \quad (\text{I.34})$$

$\sigma$  représente la polarisation du champ,  $\hat{a}(z, \omega, \sigma)$  et son conjugué forment la base des opérateurs création et annihilation,  $S$  est la section efficace du champ supposée constante, et  $n(\omega)$  est l'indice de réfraction. La périodicité temporelle  $\tau$  étant supposée tendre vers l'infini, les bornes d'intégration sur  $\omega$  vont ainsi de 0 à  $+\infty$ , cependant dans la pratique il est évident qu'elles vont se restreindre au domaine de définition des indices de réfraction, c'est-à-dire au domaine de transparence du milieu. Cette équation est le pendant de l'équation de propagation classique du champ électrique donnée par l'expression (I.1), l'opérateur de création  $\hat{a}^+(\omega, \sigma, z)$  multiplié par le facteur  $\sqrt{\frac{\hbar\omega}{4\pi\epsilon_0 c S n(\omega)}}$  correspondant à la composante spectrale  $\frac{E(\omega, z)}{\sqrt{2\pi}}$  du champ polarisé, défini par l'équation (I.2).

Les relations de commutations des opérateurs d'évolution sont les suivantes :

$$[\hat{a}(\omega, \sigma, z), \hat{a}^+(\omega', \sigma', z')] = \delta_{\sigma, \sigma'} \delta(\omega - \omega') \delta(z - z') \quad (\text{I.35})$$

En gardant en tête l'existence de deux polarisations différentes,  $\sigma$  et  $\sigma'$ , nous allons pour l'instant ne considérer qu'une seule polarisation pour simplifier et alléger les notations. Le champ est alors scalaire, et l'équation (I.34) devient :

$$\hat{E}(z, t) = \int d\omega \sqrt{\frac{\hbar\omega}{4\pi\varepsilon_0 c S n(\omega)}} [\hat{a}^+(\omega, z) e^{-i\omega t} + c.c.] \quad (\text{I.36})$$

Tout comme en régime classique, l'évolution de l'onde électromagnétique dans le milieu diélectrique est décrite par trois opérateurs : l'opérateur champ électrique donné ci-avant, l'opérateur induction magnétique, et l'opérateur polarisation électronique.

L'induction magnétique, qui est perpendiculaire au champ électrique, se propage selon :

$$\hat{B}(z, t) = \int d\omega \sqrt{\frac{\hbar\omega n(\omega)}{4\pi\varepsilon_0 c^3 S}} [\hat{a}^+(\omega, z) e^{-i\omega t} + c.c.] \quad (\text{I.37})$$

La polarisation électronique linéaire est donnée par :

$$\begin{aligned} \hat{P}(z, t) &= \varepsilon_0 \int d\omega \chi^{(1)}(\omega) \cdot \hat{E}(\omega, z, t) \\ &= \int d\omega \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \hbar\omega}{4\pi c S n(\omega)}} (n(\omega)^2 - 1) [\hat{a}^+(\omega, z) e^{-i\omega t} + c.c.] \end{aligned} \quad (\text{I.38})$$

d'après la relation (I.3) liant le tenseur de susceptibilité électrique de premier ordre  $\chi^{(1)}$  aux indices de réfraction.

Il est alors possible de calculer l'opérateur champ du déplacement électrique, soit :

$$\begin{aligned} \hat{D}(z, t) &= \varepsilon_0 \hat{E}(z, t) + \hat{P}(z, t) \\ &= \int d\omega \sqrt{\frac{\hbar\omega \varepsilon_0 n(\omega)^3}{4\pi c S}} [\hat{a}^+(\omega, z) e^{-i\omega t} + c.c.] \end{aligned} \quad (\text{I.39})$$

Chacun de ces opérateurs peut être séparé en somme de ses opérateurs création et annihilation, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \hat{E}(z, t) &= \hat{E}^{(+)}(z, t) + \hat{E}^{(-)}(z, t) \\ \hat{B}(z, t) &= \hat{B}^{(+)}(z, t) + \hat{B}^{(-)}(z, t) \\ \hat{D}(z, t) &= \hat{D}^{(+)}(z, t) + \hat{D}^{(-)}(z, t). \end{aligned} \quad (\text{I.40})$$

Les champs (+) et (-) correspondants sont :

$$\hat{E}^{(+)}(z, t) = \int d\omega \frac{n(\omega)}{c} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{4\pi\varepsilon_0 c S n(\omega)}} \hat{a}^+(\omega, z) e^{-i\omega t}, \quad \hat{E}^{(-)}(z, t) = \left( \hat{E}^{(+)}(z, t) \right)^* \quad (\text{I.41})$$

$$\hat{B}^{(+)}(z, t) = \int d\omega \sqrt{\frac{\hbar\omega n(\omega)}{4\pi\varepsilon_0 c^3 S}} \hat{a}^+(\omega, z) e^{-i\omega t}, \quad \hat{B}^{(-)}(z, t) = \left( \hat{B}^{(+)}(z, t) \right)^* \quad (\text{I.42})$$

$$\hat{D}^{(+)}(z, t) = \int d\omega \sqrt{\frac{\hbar\omega\varepsilon_0 n(\omega)^3}{4\pi c S}} \hat{a}^+(\omega, z) e^{-i\omega t}, \quad \hat{D}^{(-)}(z, t) = \left( \hat{D}^{(+)}(z, t) \right)^* \quad (\text{I.43})$$

L'opérateur flux d'énergie associé à l'onde électromagnétique, qui correspond au vecteur de Poynting, est donné par [22] :

$$\hat{h}(z, t) = \frac{1}{\mu_0} \left[ \hat{E}^{(-)}(z, t) \hat{B}^{(+)}(z, t) + c.c. \right] \quad (\text{I.44})$$

soit

$$\hat{h}(z, t) = \iint d\omega d\omega' \frac{\hbar}{4\pi S} \sqrt{\frac{n(\omega')}{n(\omega)}} \omega\omega' \left[ \hat{a}^+(\omega, z) \hat{a}(\omega', z) e^{-i(\omega-\omega')t} + c.c. \right] \quad (\text{I.45})$$

On définit également l'opérateur flux de moment, qui s'écrit :

$$\hat{g}(z, t) = \hat{D}^{(-)}(z, t) \hat{E}^{(+)}(z, t) + c.c. \quad (\text{I.46})$$

soit compte tenu de (I.41) et (I.43) :

$$\hat{g}(z, t) = \iint d\omega d\omega' \frac{\hbar}{4\pi c S} \sqrt{\frac{\omega\omega'}{n(\omega)n(\omega')}} n(\omega)^2 \left[ \hat{a}^+(\omega, z) \hat{a}(\omega', z) e^{-i(\omega-\omega')t} + c.c. \right] \quad (\text{I.47})$$

L'intégration des opérateurs  $\hat{h}$  et  $\hat{g}$  sur la période temporelle  $\tau$  donnent les opérateurs  $\hat{H}$  et  $\hat{G}$  représentant respectivement l'énergie et le moment transportés par l'onde électromagnétique en un point  $z$ , soit :

$$\begin{aligned} \hat{H}(z) &= S \times \int_{t_o}^{t_o+\tau} \hat{h}(z, t) dt \\ &= \int d\omega \hbar\omega \hat{a}^+(\omega, z) \hat{a}(\omega, z) \end{aligned} \quad (\text{I.48})$$

En effet, l'intégration de l'exponentielle complexe sur la période  $\tau$  qui tend vers l'infini, est égale à  $2\pi$  lorsque  $\omega = \omega'$ ; et elle est égale 0 pour  $\omega \neq \omega'$  car le décalage des vitesses de phase des deux composantes fréquentielles devient trop grand pour qu'elles

puissent interagir sur l'intervalle  $\tau \left( \int_{t_0}^{t_0+\tau} dt e^{i(\omega-\omega')t} =_{\tau \rightarrow +\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega') \right)$ ,  $\hat{a}(\omega, z)$  variant peu en  $\omega$ . L'hamiltonien par unité de surface et de temps  $\hat{H}(z)/\tau S$  est l'équivalent de l'éclairement classique  $I(z)$  donné par l'équation (I.8).

De même pour le moment électromagnétique, il vient :

$$\begin{aligned} \hat{G}(z) &= S \times \int_{t_0}^{t_0+\tau} \hat{g}(z, t) dt \\ &= \int d\omega \frac{n(\omega)\hbar\omega}{c} \hat{a}^+(\omega, z) \hat{a}(\omega, z) \\ &= \int d\omega \hbar k(\omega) \hat{a}^+(\omega, z) \hat{a}(\omega, z) \end{aligned} \quad (\text{I.49})$$

L'évolution spatiale des opérateurs mode création et annihilation est donnée par le propagateur  $\hat{G}$  selon :

$$\frac{\partial \hat{a}(\omega, z)}{\partial z} = -\frac{i}{\hbar} \left[ \hat{a}(\omega, z), \hat{G}(z) \right] \quad (\text{I.50})$$

Ce qui donne :

$$\frac{\partial \hat{a}(\omega, z)}{\partial z} = -ik(\omega) \hat{a}(\omega, z) \quad (\text{I.51})$$

Une des solutions de (I.51) est :

$$\hat{a}(\omega, z) = \hat{a}_0(\omega, z) e^{-ik(\omega)z} \quad (\text{I.52})$$

Comme stipulé dans l'approche classique, nous nous placerons dans l'approximation de l'enveloppe lentement variable, de sorte que  $\frac{\partial \hat{a}_0(\omega, z)}{\partial z}$  peut être négligé devant  $k \cdot \hat{a}_0(z, \omega)$ .

### I.2.2.2 Quantification du champ électromagnétique dans un milieu diélectrique non linéaire

La non-linéarité du milieu va induire des termes d'évolution non linéaire qui vont moduler l'enveloppe. Nous gardons le développement des opérateurs en série de Fourier temporelle comme exprimé équations (I.36), (I.37), (I.39), écriture tout à fait appropriée ici étant donné que l'évolution temporelle des opérateurs dépend de l'hamiltonien qui reste inchangé malgré la non-linéarité. L'évolution linéaire des opérateurs création et annihilation est donc décrite par le terme en  $e^{\pm ik(\omega)z}$  de l'équation (I.52). Par contre, l'évolution non linéaire modifiera  $\hat{a}_0(\omega, z)$ .

Dans le cas simplifié où une seule composante de polarisation est considérée, l'opérateur de polarisation non linéaire est donné par :

$$\hat{P}_{nl}(z, t) = \int d\omega [\hat{P}^{(2)}(z, \omega, t) + \hat{P}^{(3)}(z, \omega, t)] \quad (\text{I.53})$$

$\hat{P}^{(2)}(z, t)$  et  $\hat{P}^{(3)}(z, t)$  sont les opérateurs de polarisation de second ordre et troisième

ordre respectivement ; ils sont donnés par :

$$\hat{P}^{(2)}(z, \omega, t) = \varepsilon_0 \int d\omega' \chi_{eff}^{(2)}(\omega, \omega') : \left\{ \hat{E}(\omega', z, t) \otimes \hat{E}(\omega - \omega', z, t) \right\} \quad (I.54)$$

et

$$\hat{P}^{(3)}(z, \omega, t) = \varepsilon_0 \iiint d\omega' d\omega'' \chi_{eff}^{(3)}(\omega, \omega', \omega'') : \left\{ \hat{E}(\omega', z, t) \otimes \hat{E}(\omega'', z, t) \otimes \hat{E}(\omega - \omega' - \omega'', z, t) \right\} \quad (I.55)$$

L'opérateur flux de moment est toujours donné par l'expression (I.46), avec  $\hat{D}(z, t) = \varepsilon_0 \hat{E}(z, t) + \hat{P}(z, t) = \hat{D}_l(z, t) + \hat{P}_{nl}(z, \omega)$ , où  $\hat{D}_l(z, t)$  est mis pour la partie linéaire de l'opérateur de déplacement électrique donné par la relation (I.39). La partie non linéaire de l'opérateur flux de moment est alors donnée par :

$$\hat{g}_{nl}(z, t) = \hat{P}_{nl}^{(-)}(z, t) \hat{E}^{(+)}(z, t) + c.c. \quad (I.56)$$

L'évolution des modes étant toujours donnée par l'équation (I.52), il vient :

$$\begin{aligned} \hat{g}_{nl}(z, t) = & \iiint d\omega d\omega' d\omega'' \varepsilon_0 \chi_{eff}^{(2)}(\omega, \omega') \left( \frac{\hbar}{4\pi\varepsilon_0 cS} \right)^{3/2} \sqrt{\frac{\omega(\omega - \omega')\omega'}{n(\omega)n(\omega')n(\omega - \omega')}} \quad (I.57) \\ & \left[ \hat{a}_0(\omega', z) \hat{a}_0(\omega - \omega', z) \hat{a}_0^+(\omega, z) e^{+i\Delta k(\omega, \omega')z} e^{i(\omega - \omega'')t} + c.c. \right] + \\ & \iiint d\omega d\omega' d\omega'' d\omega''' \varepsilon_0 \chi_{eff}^{(3)}(\omega, \omega', \omega'') \left( \frac{\hbar}{4\pi\varepsilon_0 cS} \right)^2 \sqrt{\frac{\omega\omega'\omega''(\omega - \omega' - \omega'')}{n(\omega)n(\omega')n(\omega'')n(\omega - \omega' - \omega'')}} \\ & \left[ \hat{a}_0(\omega', z) \hat{a}_0(\omega'', z) \hat{a}_0(\omega - \omega' - \omega'', z) \hat{a}_0^+(\omega, z) e^{+i\Delta k(\omega, \omega', \omega'')z} e^{i(\omega - \omega'')t} + c.c. \right] \end{aligned}$$

avec

$$\Delta k(\omega, \omega') = k(\omega) - k(\omega') - k(\omega - \omega')$$

et

$$\Delta k(\omega, \omega', \omega'') = k(\omega) - k(\omega') - k(\omega'') - k(\omega - \omega' - \omega'').$$

L'intégration sur la période temporelle  $\tau$  et la surface utile de l'onde donne la partie non linéaire du moment électromagnétique, soit :

$$\begin{aligned} \hat{G}_{nl}(z) &= S \times \int_{t_0}^{t_0+\tau} \hat{g}_{nl}(z, t) dt \\ &= \iint d\omega d\omega' \hbar \beta(\omega, \omega') \left[ \hat{a}_0(\omega', z) \hat{a}_0(\omega - \omega', z) \hat{a}_0^+(\omega, z) e^{+i\Delta k(\omega, \omega')z} + c.c. \right] \\ &+ \iiint d\omega d\omega' d\omega'' \hbar \Gamma(\omega, \omega', \omega'') \times \quad (I.58) \\ &\left[ \hat{a}_0(\omega', z) \hat{a}_0(\omega'', z) \hat{a}_0(\omega - \omega' - \omega'', z) \hat{a}_0^+(\omega, z) e^{+i\Delta k(\omega, \omega', \omega'')z} + c.c. \right] \end{aligned}$$

avec

$$\beta(\omega, \omega') = \sqrt{\frac{\hbar}{16\pi\varepsilon_0 c^3 S} \frac{\omega(\omega - \omega')\omega'}{n(\omega)n(\omega')n(\omega - \omega')}}}$$

et

$$\Gamma(\omega, \omega', \omega'') = \frac{\hbar\chi_{eff}^{(3)}}{8\pi c^2 S\varepsilon_0} \sqrt{\frac{\omega\omega'\omega''(\omega - \omega' - \omega'')}{n(\omega)n(\omega')n(\omega'')n(\omega - \omega' - \omega'')}}}$$

L'intégrale double est relative à l'action de la polarisation non linéaire d'ordre deux, alors que la triple est le terme non linéaire d'ordre trois. Nous nous intéressons ici à la scission spontanée ou stimulée d'un photon pompe. Dans l'approximation de la pompe intense et non dépeuplée, le champ pompe va pouvoir être considéré comme classique. Ainsi dans l'expression (I.58) appliquée à la pompe les opérateurs de création et d'annihilation à la fréquence  $\omega$  vont être considérés comme classiques selon la notation de correspondance :

$$\hat{a}_0(\omega, z) \rightarrow A_p(\omega, z) \quad (\text{I.59})$$

Ainsi compte tenu de l'équation (I.36), l'opérateur décrivant le champ électrique pompe s'écrit classiquement selon :

$$\hat{E}_p(z, t) \rightarrow \frac{E_p(z, t)}{\sqrt{2\pi}} = \int d\omega A_p(\omega, z) \sqrt{\frac{\hbar\omega}{4\pi\varepsilon_0 c S n(\omega)}} e^{+i\omega t} \quad (\text{I.60})$$

Dans les calculs qui seront menés ultérieurement, le champ pompe sera en outre considéré comme très fin spectralement par rapport aux champs générés, et centré autour d'une fréquence appelée fréquence pompe et notée  $\omega_p$ . On a alors :

$$\int d\omega A_p(\omega, z) = A_p(\omega_p, z) \quad (\text{I.61})$$

où  $|A_p(z, \omega_p)|^2$  est le flux de photons pompe à la côte  $z$  par unité de temps (ayant donc la dimension inverse d'un temps).

L'équation d'évolution des composantes spectrales est toujours donnée par l'équation (I.50), ce qui donne pour l'évolution des amplitudes  $\hat{a}_0$  des composantes spectrales définies par (I.52) :

$$\frac{\partial \hat{a}_0(\omega, z)}{\partial z} e^{-ikz} - ik\hat{a}_0(\omega, z) e^{-ikz} = -\frac{i}{\hbar} \left[ \hat{a}(\omega, z), \hat{G}_l(z) + \hat{G}_{nl}(z) \right] \quad (\text{I.62})$$

Puis :

$$\frac{\partial \hat{a}_0(\omega, z)}{\partial z} e^{-ikz} = -\frac{i}{\hbar} \left[ \hat{a}_0(\omega, z) e^{-ikz}, \hat{G}_{nl}(z) \right] \quad (\text{I.63})$$

Et donc finalement :

$$\frac{\partial \hat{a}_0(\omega, z)}{\partial z} = -\frac{i}{\hbar} \left[ \hat{a}_0(\omega, z), \hat{G}_{nl}(z) \right] \quad (\text{I.64})$$

Ainsi, en considérant tout d'abord le cas de la scission de second ordre, il vient pour

les composantes spectrales des champs correspondants aux photons générés :

$$\frac{\partial \hat{a}_0(\omega, z)}{\partial z} = -i\beta(\omega_p, \omega)A_p(\omega_p, 0)\hat{a}_0^+(\omega_p - \omega, z)e^{-i\Delta k(\omega_p, \omega)z} \quad (\text{I.65})$$

avec  $A_p(\omega_p, 0) = A_p(\omega_p, z)$  correspondant à l'approximation de la pompe non dépeuplée.

Cette équation décrit l'évolution des photons générés par la scission des photons pompe, ainsi que des photons éventuellement injectés pour stimuler cette scission. Il faut mentionner que dans le cas où les polarisations des photons jumeaux sont différentes, il faudra alors considérer deux équations du type (I.65) écrites chacune avec l'opérateur adéquat. Il est à noter que l'équation (I.65) est le pendant quantique des deux dernières équations du système classique d'équations couplées (I.19) et (I.20). En effet, en associant un opérateur distinct à chacun des photons jumeaux générés, nous nous ramenons à la notation par paquet d'onde de l'approche classique.

Une démarche analogue conduit à l'équation différentielle décrivant l'évolution des photons triplets générés par une scission du troisième ordre, ce qui donne :

$$\frac{\partial \hat{a}_0(\omega, z)}{\partial z} = -i \int d\omega' \Gamma(\omega_p, \omega', \omega) A_p(\omega_p, 0) \hat{a}_0^+(\omega', z) \hat{a}_0^+(\omega_p - \omega' - \omega, z) e^{-i\Delta k(\omega_p, \omega', \omega)z} \quad (\text{I.66})$$

Lorsque les photons du triplets sont discernables, du fait de directions de polarisation distinctes ou de directions de propagation différentes, il faudra alors écrire trois équations du type (I.66) qui seront les équivalents quantiques des trois dernières équations classiques du système (I.20). Cette notation sera adoptée dans l'étude développée aux chapitres III et IV.

L'intégration de l'équation (I.65) dans l'approximation de la pompe intense et non dépeuplée donne [13, 23, 25] :

$$\hat{a}_0(\omega, z)e^{i\frac{\Delta k(\omega_p, \omega)z}{2}} = \left( \cosh[\kappa(\omega)z] + i\frac{\Delta k(\omega_p, \omega)}{2\kappa(\omega)} \sinh[\kappa(\omega)z] \right) \hat{a}_0(\omega, 0) \quad (\text{I.67})$$

$$-i\frac{\beta(\omega_p, \omega)}{\kappa(\omega)} \sinh[\kappa(\omega)z] A_p(\omega_p, 0) \hat{a}_0^+(\omega_p - \omega, z)$$

avec

$$\kappa(\omega) = \sqrt{|A_p(\omega_p, 0)|^2 |\beta(\omega_p, \omega)|^2 - \frac{|\Delta k(\omega_p, \omega)|^2}{4}} \quad (\text{I.68})$$

L'intégration de l'équation (I.66) n'a à notre connaissance jamais été faite avant le travail présenté ici. Étant donné que cette équation couple non linéairement l'évolution d'une composante au produit de deux autres composantes, la résolution analytique est complexe. Nous avons choisi une approche de type développement limité pour les opérateurs quantiques (développement de Baker-Hausdorff) dans l'approximation de gain faible ( $|\Gamma A_p| \ll 1$ ). L'évolution d'un mode est développée en un nombre infini de termes,

mais en regroupant les termes en puissance de  $|\Gamma A_p|$ , il ressort un grand nombre de séries de termes, chaque série proportionnelle à une puissance de  $|\Gamma A_p|$ . Le terme en puissance d'ordre 1 suit une évolution en série entière de  $e^{-i\Delta k(\omega_p, \omega', \omega)z}$  par le produit d'opérateurs modes complémentaires. Comme détaillé en annexe D, dans l'approximation de la pompe intense et non dépeuplée et dans l'approximation de gain faible ( $|\Gamma A_p| \ll 1$ ), l'équation d'évolution de chacun des photons du triplet est donnée au premier ordre par :

$$\begin{aligned} \hat{a}_0(\omega, z) = & \hat{a}_0(\omega, 0) + i \int d\omega' \Gamma(\omega_p, \omega', \omega) A_p(\omega_p, 0) z \times \\ & \text{sinc} \left( \frac{\Delta k(\omega_p, \omega', \omega)z}{2} \right) e^{-i\frac{\Delta k(\omega_p, \omega', \omega)z}{2}} \hat{a}_0^+(\omega', z) \hat{a}_0^+(\omega_p - \omega' - \omega, z) \end{aligned} \quad (\text{I.69})$$

Le premier terme,  $\hat{a}_0(\omega, 0)$ , décrit l'évolution linéaire du champ, alors que le second terme donne son évolution non linéaire par couplage des différents modes générés à partir de la scission des photons pompe à la fréquence  $\omega_p$ . Il faut noter que cette solution est cohérente avec une résolution typique dans l'approximation de couplage faible, donc de faible évolution spatiale des composantes fréquentielles où toute la dépendance spatiale est portée par l'exponentielle  $e^{-i\Delta k(\omega_p, \omega, \omega')z}$ , d'où une évolution en  $\text{sinc} \left( \frac{\Delta k(\omega_p, \omega', \omega)z}{2} \right) e^{-i\frac{\Delta k(\omega_p, \omega', \omega)z}{2}}$ . Cependant, la légitimité de cette résolution classique dans le cas où les champs sont générés par scission spontanée est controversable : en effet, étant donné que les champs générés sont inexistant à l'entrée du cristal, l'approximation de "faible évolution spatiale" peut alors sembler abusive. Notre résolution par développement de Baker-Hausdorff donne, quant à elle, très proprement l'évolution des opérateurs création et annihilation des champs.

### I.2.3 Corrélations classiques, quantiques, cohérence ?

Les équations d'évolution (I.69) des opérateurs modes de création ou d'annihilation des photons triplets montrent qu'ils sont non linéairement interdépendants, l'évolution d'un opérateur mode dépendant de l'évolution du produit des opérateurs modes complémentaires. Les triplets de photons ainsi générés sont donc susceptibles de posséder des propriétés quantiques particulières et fortes, différentes par exemple de celles des photons jumeaux dont les opérateurs d'évolution se propagent linéairement en fonction de l'opérateur mode complémentaire (équation (I.67)).

Une des grandes questions de la thèse a été de mettre un nom sur la nature des corrélations que l'on est susceptible de mettre en évidence entre les photons des champs triplets de par nos expériences, qui, compte tenu de nos limitations expérimentales sont basées sur un protocole de recombinaison des champs par somme de fréquences dans un cristal non linéaire. Les corrélations seront mises en évidence théoriquement par la différence entre le champ issu d'une somme de fréquences des champs triplets et le champ qui résulterait de cette somme de fréquences des mêmes champs triplets dits "considérés classiquement". Le fait de considérer ces champs classiquement revient à les décrire par leur opérateur de champ  $\hat{E}(z, t)$  dont l'expression est donnée en (I.36), mais en retirant à

celui-ci ses propriétés quantiques de non commutation des opérateurs d'évolution  $\hat{a}(\omega, z)$  et  $\hat{a}^+(\omega, z)$ , ceux ci devenant alors les équivalents des amplitudes classiques des modes  $E(\omega, z)$  et conjugué, et l'opérateur  $\hat{E}(z, t)$  l'équivalent du champ classique  $E(z, t)$  défini par l'équation (I.1). Enlever cette amplification des termes induite par la non commutation d'opérateurs identiques revient à annuler la relation de phase fixée entre photons issus d'un même parent, relation de phase qui permet cette non commutation. La somme de fréquences entre les champs "considérés classiquement" revient alors à sommer des champs identiques aux champs triplets mais dont le lien de phase dû à la nature quantique de la génération des photons à partir d'un même parent serait brisé, ces champs ne se "reconnaissant" ainsi pas entre eux, c'est-à-dire étant incohérents quantiquement. Une différence entre les deux mesures, provenant alors des fluctuations quantiques des champs tripletset signant la différence entre les termes cohérents et incohérents quantiquement mettrait alors en évidence la nature quantique des corrélations entre les photons triplets, qui se traduisent par une cohérence des impulsions associées. Il va de soi que ces propriétés de cohérence des champs triplets sont nécessaires à un éventuel futur protocole d'intrication basé sur ces photons.

Cette façon de mettre en évidence des corrélations par somme de fréquences est bien adaptée aux expériences que nous sommes en moyen de mener à l'heure actuelle. D'autres protocoles, tels que des études directes de fluctuations quantiques des champs triplets, ou l'étude de la distribution de Wigner caractérisant l'état quantique des triplets de photons dans l'espace des phases, auraient pu apporter plus de renseignements sur la nature de l'état triplet. De même, la manipulation d'états triplets à quelques photons, dans un but de vérification des inégalités de Bell, aurait pu sembler plus pertinent et donner plus de renseignements sur la nature des corrélations, mais toutes ces mesures seraient peu adaptables à nos expériences actuelles. La propriété aisément vérifiable est pour nous la mesure de la cohérence des champs à travers un protocole de somme de fréquences, permettant de vérifier les cohérences temporelles et énergétiques des champs.



# Chapitre II

## État de l’art

### II.1 Génération de triplets de photons

#### II.1.1 Introduction

Depuis les débuts de l’optique quantique, de nombreuses équipes se sont employées, avec plus ou moins de succès, à produire et analyser des états à plus de deux particules intriquées, en particuliers à trois.

Un des aspects fascinants de la mécanique quantique est l’intrication. Elle correspond à la propriété qu’ont les particules d’être décrites par la même fonction d’onde bien que séparées spatialement les unes des autres. Ainsi, une mesure sur l’une des particules influence toute la fonction d’onde et donc les autres particules, et ce même si elle se trouvent loin. La première mesure d’intrication quantique, réalisée par Alain Aspect en 1982 [26], a été observée suite à l’émission en cascade d’une paire de photons par un atome de calcium. Depuis cet avènement, la génération efficace de photons jumeaux par processus d’interaction non linéaire a permis de reproduire ce type d’intrication à deux particules sur des photons. L’intrication des photons jumeaux a permis dès lors de nombreuses applications dans le domaine de l’information quantique, la cryptographie ou encore la téléportation [27].

Une extension naturelle de l’intrication quantique de deux particules est l’intrication à trois particules. Si des protocoles de superposition d’atomes en cavité mènent à la production d’états intriqués à plus de deux particules [28–30], ils sont basés sur des interactions entre les particules difficiles à mettre en œuvre expérimentalement.

Au niveau optique, un protocole non interactif, basé sur un processus de “gomme quantique” intriquant des paires de photons jumeaux, fut proposé par Zeilinger [1]. Des corrélations de types GHZ [31], propres aux états intriqués à plus de deux particules et jouant un rôle notoire dans la compréhension des rouages de la mécanique quantique, ont été étudiées sur de tels états [2, 3]. Le désavantage majeur de ce type de protocole est cependant qu’il conditionne l’existence de l’état intriqué à la mesure, destructive par

principe, ce qui empêche toute manipulation a posteriori des photons.

Un protocole faisant interagir deux paires de photons, non conditionné par la mesure, a été développé par le groupe de Jennewein. Il consiste à produire une première paire de photons jumeaux puis une seconde à partir de l'un de ces deux photons, obtenant alors un triplet de photons [32]. La seule limite de ce protocole pour la fabrication d'états intriqués à trois particules réside dans la potentielle décohérence au moment de la génération de la seconde paire.

Le protocole de génération le plus simple et le plus "naturel" pour la fabrication de tels états consiste en la génération simultanée de photons triplets par fluorescence paramétrique d'ordre trois, correspondant au schéma  $\lambda_0 \rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$  décrit au chapitre I figure I.4. Tout comme la fluorescence paramétrique d'ordre deux confère aux photons jumeaux des propriétés de corrélations quantiques et une cohérence temporelle et spectrale [33–35], il y a toutes les raisons de penser que des photons triplets générés par fluorescence paramétrique d'ordre trois possèdent également des propriétés quantiques inédites. En effet, l'expression (I.69) montre que l'évolution des opérateurs création et annihilation des trois photons est liée, tout comme pour les photons jumeaux (éq. (I.67)); mais ce lien est non linéaire ici alors qu'il est linéaire dans le cas des photons jumeaux. Les corrélations entre les opérateurs de création et d'annihilation, qui sont responsables de la covariance étroite des fluctuations des photons jumeaux, liant leurs quadratures de phase plus étroitement que la limite quantique du bruit blanc et ainsi responsables de la compression de ces quadratures dans le cas dégénéré, semblent plus fortes pour les photons triplets. En effet, la fonction de distribution de Wigner caractérisant l'état quantique d'un tel triplet de photons dégénérés formés à partir d'un état cohérent présente des franges d'interférences, négatives par endroits [4], signant le caractère non classique de l'état, et ce de façon plus "spectaculaire" que par la compression en quadrature (sans interférence) observée pour un état similaire composé de photons jumeaux [4, 9, 36]. Dans le cas général non dégénéré, il est également permis de s'attendre à des corrélations plus fortes entre les opérateurs décrivant les photons triplets qu'entre ceux décrivant les photons jumeaux étant donné l'expression de ces opérateurs. Ainsi, outre l'intérêt potentiel des photons triplets ainsi générés pour des protocoles d'intrication, l'étude de leurs fluctuations quantiques présente un intérêt fondamental important en soi.

Cependant, la fluorescence paramétrique d'ordre trois est très peu efficace, ce qui explique qu'elle n'ait jamais été reportée jusqu'à aujourd'hui. La voie alternative choisie dans notre équipe consiste alors à stimuler le processus de génération de photons triplets, sachant que le fait de stimuler la scission pourrait rendre difficile l'étude des propriétés quantiques des triplets, en l'occurrence de leurs corrélations. Néanmoins, il est connu que du squeezing est préservé et mesurable sur des paires de photons générés par scission stimulée [37].

## II.1.2 Première génération de photons triplets

La première génération stimulée de triplets de photons a été réalisée en régime classique, c'est-à-dire sous de fortes intensités, dans un cristal de KTP en 2004 à Grenoble, par Benoit Boulanger et Julien Douady [8,38]. Ce cristal a été choisi pour son haut seuil de dommage optique, de l'ordre de  $100 \text{ GW/cm}^2$  en régime picoseconde [39], et ses propriétés d'accord de phase qui autorisent la génération de triplets dans le domaine telecom, autour de 1500 nm, à partir d'un faisceau pompe standard à 532 nm. Par contre, le cristal de KTP étant non centrosymétrique, l'interaction du troisième ordre recherchée est susceptible d'être "polluée" par des interactions du second ordre en cascade. Ces dernières ont été minimisées par un choix judicieux de la direction d'accord de phase [40]. Le faisceau de pompe, à  $\lambda_0 = 532 \text{ nm}$ , est le deuxième harmonique d'un laser pulsé Nd :YAG émettant à 1064 nm. La source présente une durée d'impulsion de 22 ps avec une fréquence de répétition de 5 Hz, permettant l'obtention d'éclairements d'une centaine de  $\text{GW/cm}^2$ . La situation choisie est partiellement dégénérée, les deux longueurs d'onde de stimulation étant identiques,  $\lambda_2 = \lambda_3 = 1665 \text{ nm}$ , mais les polarisations associées orthogonales. Le faisceau d'injection est émis par un générateur paramétrique optique accordable.

La scission stimulée du photon pompe à  $\lambda_0$  conduit ainsi à un état mélangé contenant non seulement des triplets aux longueurs d'onde  $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ , avec  $\lambda_1 = \left[ \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_3} \right]^{-1} = 1474 \text{ nm}$ , mais également des photons d'injection à  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$ . Une énergie de  $4,5 \mu\text{J}$  par impulsion à  $\lambda_1$  a été obtenue, ce qui correspond à  $3,3 \times 10^{13}$  photons par impulsion [8, 38]. Cela signifie que  $3,3 \times 10^{13}$  triplets de photons  $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$  sont créés, la génération d'un photon à  $\lambda_1$  étant symptomatique de la création d'un triplet. Les photons à  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  qui appartiennent aux triplets sont mélangés avec les photons d'injection qui sont au nombre de  $4,2 \times 10^{14}$  à  $\lambda_2$  et  $4,2 \times 10^{14}$  à  $\lambda_3$ . Le nombre de photons pompe à  $\lambda_0$  est de  $2,0 \times 10^{15}$ .

La première génération ayant été effectuée avec succès, d'autres matériaux tels le dioxyde de titane  $TiO_2$  en phase rutile furent explorés par la suite. Le grand intérêt de  $TiO_2$  rutile par rapport au  $KTP$  est qu'il est centro-symétrique, de sorte qu'il n'y a pas le problème des possibles cascades parasites du second ordre ; de plus sa figure de mérite est 7,5 fois celle de  $KTP$ , de par une mesure comparative en situation de génération de tierce harmonique [41]. Cependant, le calcul montre que l'accord de phase de la génération de triplets est autorisé pour des longueurs d'onde décalées vers l'infra-rouge plus moyen autour de  $2,5 \mu\text{m}$  [41], ce qui constitue un niveau de difficulté important vis-à-vis de la mesure et de la manipulations des photons.

## II.1.3 Développement de la théorie classique

L'équipe de Grenoble a également mené l'étude théorique classique de la génération de triplets, en intégrant dans le cas général le système d'équations couplées (I.20) donné au chapitre I, dans le cas où les quatre champs couplés sont considérés comme

monochromatiques et où l'interaction est en accord de phase. Les solutions analytiques de ce système ont été trouvées sur la base des fonctions elliptiques de Jacobi [42]. Ce modèle classique a été validé par une série d'expériences systématiques de génération de triplets de photons doublement stimulée dans le *KTP*, l'énergie générée à la longueur d'onde non injectée  $\lambda_1$  ayant été mesurée en fonction de l'énergie pompe, de l'énergie d'injection ainsi que de la longueur du cristal [10, 43].

## II.2 Étude des corrélations par un protocole de recombinaison

Afin de pouvoir à long terme utiliser les photons triplets ainsi générés en information quantique, le premier point à vérifier est la cohérence temporelle et énergétique des champs générés. C'est aussi le point le plus accessible expérimentalement. La cohérence peut se mesurer par des expériences de temps de parcours et de comptage de photons ou bien se vérifier indirectement en évaluant les corrélations entre les fluctuations quantiques des champs associés aux photons, qui prouvent entre autres cette cohérence. Mais dans notre cas, les fortes intensités d'injection, nécessaires pour palier à la faible efficacité de la génération de triplets, sont largement supérieures au seuil de saturation des détecteurs et rendent donc impossible au stade actuel l'étude des fluctuations quantiques des triplets. C'est pourquoi nous avons dû employer une autre méthode pour vérifier cette cohérence, qui est basée sur l'interaction des champs par somme de fréquences dans un milieu non linéaire, et qui avait été proposée au début de l'histoire des photons jumeaux.

Ce type de protocole a été utilisé pour la première fois par Izo Abram et al. pour l'étude de la cohérence entre les champs jumeaux générés par fluorescence paramétrique de second ordre [14]. C'est un protocole équivalent à une mesure de coïncidences temporelles [44], mais avec un apport supplémentaire de par les renseignements à tirer de l'interaction entre photons dans le milieu non linéaire.

Il a en effet été montré que des champs jumeaux cohérents générés par fluorescence paramétrique puis recombinaison dans un cristal non linéaire à l'accord de phase interagissent pour donner un champ somme identique spectralement au champ qui leur a donné naissance [45]. A basse intensité, cette propriété, qui est inhérente aux conditions d'accord de phase, traduit les corrélations quantiques énergétiques et temporelles [46] entre les photons jumeaux, corrélations permettant la génération de paires de photons intriqués. A haute intensité, ces corrélations subsistent et sont plus "robustes" que celles des quadratures de phase, car elles subsistent même en présence de pertes linéaires.

Ainsi, lorsque les champs générés par fluorescence paramétrique sont spectralement plus larges que le champ pompe qui leur a donné naissance, leur somme de fréquences dans un second cristal non linéaire donne un champ somme ayant la même largeur spectrale fine que le champ pompe [47]. Ce qui est intéressant, c'est que ce champ somme est également très résolu temporellement, ne pouvant être généré que lorsque le

déphasage temporel des champs sommés est inférieur au temps de cohérence des photons jumeaux, par définition ultra court [46, 48]. Ainsi, ce type d'expérience constitue à la fois une mesure de cohérence temporelle et spectrale. Le lien de corrélation alors mis en évidence, qui "pousse" les photons d'une même paire à se recombiner préférentiellement entre eux plutôt qu'aléatoirement, auquel cas le champ obtenu serait la convolution de champs jumeaux incohérents, sera donc utilisé dans la présente thèse pour l'étude des triplets de photons.

Il y a deux expériences possibles complémentaires dans le cadre de ce protocole de recombinaison par somme de fréquences : d'une part les expériences à déphasage temporel nul entre les photons à recombiner, qui permettent la vérification de la cohérence spectrale à délai nul du fait que le champ somme généré a le même spectre que le champ pompe ; d'autre part les expériences à déphasage temporel variable entre les photons, le déclin de l'intensité du champ somme généré en fonction du délai donnant ainsi accès au temps de cohérence des corrélations [14, 45]. En effet, lorsque les champs sommés sont temporellement cohérents, ils donnent un champ final de spectre équivalent à celui du champ pompe, tandis que lorsqu'ils sont déphasés de plus que leur temps de cohérence, ils donnent un champ final de spectre équivalent à la convolution des trois champs incohérents sommés, comme schématisé figure II.1.

L'étalement du spectre du champ obtenu par la convolution classique des champs incidents étant plus grand que celui du champ pompe, et le nombre total de photons sommés, gouverné par l'efficacité du processus non linéaire, étant identique quelque soit le déphasage des champs, il s'en suit que l'intensité du champ recombiné est alors plus grande lorsque celui-ci est équivalent au spectre du champ pompe que lorsqu'il correspond à une recombinaison non cohérente. Ainsi, la largeur temporelle du "pic" observé, pic plus ou moins haut selon que les champs sommés sont plus ou moins larges par rapport au champ pompe, donne le temps de cohérence des champs sommés.

Des calculs décrivant parfaitement les expériences existantes pour les photons jumeaux ont été développés par l'équipe de Dayan [13]. Ils ont été menés en quantifiant les champs jumeaux générés par fluorescence paramétrique d'ordre deux comme décrit dans la partie I.2.2.2 au chapitre I, et en décrivant quantiquement le processus non linéaire de somme de fréquences.

## II.3 Conclusion

La présente thèse se situe dans le cadre général décrit ci-avant, tant pour la génération que pour les protocoles de recombinaison des triplets. Notre but premier étant de vérifier l'intérêt de l'expérience de génération de triplets existante ainsi que les modifications éventuelles à lui apporter, nous testerons par le calcul les cohérences à attendre entre les champs triplets générés par scission bi-stimulée, mono-stimulée et

spontanée. Nous nous attendons à des résultats similaires à ceux obtenus sur photons jumeaux pour le champ somme dans le cas d'une génération par scission spontanée. Par contre, la possibilité de pouvoir recombinaison seulement deux des trois champs devrait enrichir nos conclusions. Les recombinaisons des champs générés par scission stimulée nous permettront d'évaluer si la stimulation masque les corrélations entre photons, donnant alors un champ somme de champs incohérents, ou si certaines corrélations subsistent néanmoins. Ces calculs seront vérifiés expérimentalement pour le protocole qui correspond à notre génération actuelle, c'est-à-dire la scission bi-stimulée. Étant donné que nous en sommes au stade où nous cherchons à vérifier s'il y a ou non cohérence entre les champs, nous allons nous placer à délai temporel nul, ceci étant le cas le plus simple et le plus favorable d'un point de vue expérimental, et nous allons chercher à savoir si le champ sommé est équivalent à la somme de fréquences de champs triplets cohérents ou incohérents.

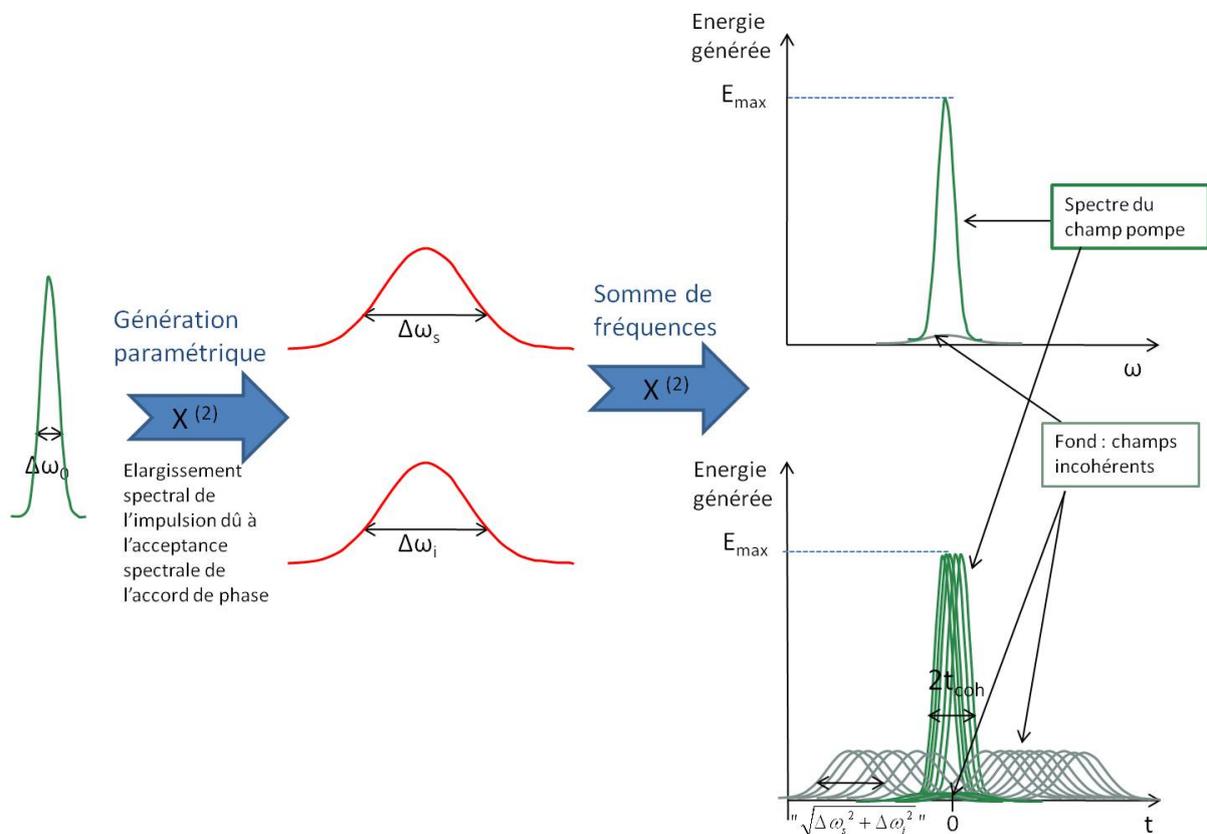


FIGURE II.1: Allure typique du spectre d'un champ recombinaison par somme de fréquences à partir de deux champs générés par fluorescence paramétrique de second ordre. Le spectre du haut représente l'énergie du champ généré en fonction de la fréquence, à déphasage nul. Son allure est la même que celle du champ pompe; quelques photons ayant perdu leur cohérence se retrouvent dans le fond très plat. La courbe du bas représente l'énergie du champ généré en fonction du déphasage temporel  $t$  entre les deux champs jumeaux. La hauteur est la même que celle du champ sommé à délai nul pour un délai inférieur au temps de cohérence des champs jumeaux, et égale à la hauteur du champ obtenu par somme de fréquences de deux champs incohérents pour un délai supérieur au temps de cohérence.

# Chapitre III

## Génération des champs triplets

### III.1 Introduction

Nous traitons ici des calculs relatifs aux différents schémas conduisant à la génération directe de triplets de photons : la scission spontanée ainsi que la scission simplement et doublement stimulée. Ces calculs seront illustrés par des exemples concrets basés sur des cristaux de *KTP* avec lesquels nous avons mené un certain nombre de mesures. Comme annoncé au chapitre II, seules les caractéristiques spectrales des champs seront étudiées, les aspects temporels pouvant constituer un prolongement de la thèse. Comme introduit au chapitre I, nous raisonnons avec des champs continus. Les interactions non linéaires qui sont considérées dans ce chapitre sont uniquement celles d'ordre trois selon le schéma A de la figure I.4. La quantification des champs électromagnétiques se fait comme décrit en seconde partie du chapitre I. Nous avons ainsi la relation d'évolution suivante pour les opérateurs annihilation associés aux champs triplets d'après l'expression (I.65) :

$$\frac{\partial \hat{a}_0(\omega, \sigma, z)}{\partial z} = -i \sum_{\sigma=1,2} \int d\omega' \Gamma(\omega_p, \omega', \omega, \sigma) A_p(\omega_p) \hat{a}_0^+(z, \omega', \sigma) \hat{a}_0^+(z, \omega_p - \omega' - \omega, \sigma) e^{-i\Delta k(\omega_p, \omega', \omega)z} \quad (\text{III.1})$$

Nous considérerons dans toute la suite l'évolution des champs dans un cas complètement non dégénéré ; ainsi dans l'expression (III.1), les opérateurs d'évolution aux fréquences  $\omega$ ,  $\omega'$  et  $\omega_p - \omega' - \omega$  seront nommés dans la suite des calculs  $\hat{a}_1$ ,  $\hat{a}_2$  et  $\hat{a}_3$  et non plus  $\hat{a}_0$ , et nous nommerons respectivement 1, 2 et 3 les opérateurs champs issus de la propagation de ces trois modes. L'opérateur mode total du champ généré à chaque fréquence  $\omega$  sera donc donné par la somme  $\hat{a} = \hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3$ .

Ce choix de notation correspond expérimentalement à un cas de figure très général, où nous estimons que les trois champs triplets générés par scission spontanée ou stimulée du champ pompe sont distinguables. Cette différenciation peut se faire par exemple selon leur polarisation, ou selon leur direction de propagation si l'interaction n'est pas parfaitement colinéaire. Ainsi pour la suite, étant donné qu'il n'existe que deux directions de polarisation possibles dans un milieu anisotrope, la non-colinéarité sera forcément supposée lorsque les trois champs seront considérés comme discernables. Nous traitons en

annexe A le cas où deux des modes des triplets sont considérés comme identiques, et le troisième distinct. Ce cas correspond par exemple à des champs générés colinéairement selon deux polarisations. Les opérateurs champs obtenus dans ce cas semi-dégénéré ne sont pas fondamentalement différents de ceux qui sont obtenus en considérant les trois champs comme discernables. De par la non commutation de certains des opérateurs création et annihilation qui commutent lorsque les champs sont discernables, des facteurs multiplicatifs sont ajoutés, mais la structure des opérateurs modes est exactement la même.

Dans la suite du texte, le mot “mode” sera associé à une composante spectrale et à un champ triplet (1, 2 ou 3) donnés : ainsi par exemple,  $\hat{a}_1(\omega, z)$  et  $\hat{a}_2(\omega, z)$  désigneront deux modes différents, tout comme  $\hat{a}_1(\omega, z)$  et  $\hat{a}_1(\omega', z)$ .

Compte tenu de l'équation (I.66), et avec les conventions de notation données ci-avant, l'évolution de l'amplitude des opérateurs modes associés à chacun des trois photons du triplet est donnée par :

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{a}_1(\omega, z)}{\partial z} = -i \int d\omega' \Gamma(\omega_p, \omega, \omega') A_p(\omega_p) \hat{a}_2^+(\omega', z) \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega - \omega', z) e^{-i\Delta k(\omega_p, \omega, \omega')z} \\ \frac{\partial \hat{a}_2(\omega, z)}{\partial z} = -i \int d\omega' \Gamma(\omega_p, \omega', \omega) A_p(\omega_p) \hat{a}_1^+(\omega', z) \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega - \omega', z) e^{-i\Delta k(\omega_p, \omega', \omega)z} \\ \frac{\partial \hat{a}_3(\omega, z)}{\partial z} = -i \int d\omega' \Gamma(\omega_p, \omega', \omega_p - \omega - \omega') A_p(\omega_p) \hat{a}_1^+(\omega', z) \hat{a}_2^+(\omega_p - \omega - \omega', z) e^{-i\Delta k(\omega_p, \omega', \omega_p - \omega - \omega')z} \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

avec  $\Delta k$  et  $\Gamma$  qui s'écrivent :

$$\Delta k(\omega_p, \omega, \omega') = k_p(\omega_p) - k_1(\omega) - k_2(\omega') - k_3(\omega_p - \omega - \omega') \quad (\text{III.3})$$

et

$$\Gamma(\omega_p, \omega, \omega') = \frac{\hbar \chi_{eff}^{(3)}}{8\pi c^2 S \epsilon_0} \sqrt{\frac{\omega_p \omega \omega' (\omega_p - \omega - \omega')}{n_p(\omega_p) n_1(\omega) n_2(\omega') n_3(\omega_p - \omega - \omega')}} \quad (\text{III.4})$$

$(k_1, k_2, k_3)$  et  $(n_1, n_2, n_3)$  sont les vecteurs d'onde et les indices de réfraction associés respectivement aux modes 1, 2 et 3 ; la valeur de l'indice de réfraction est fixée par la direction de polarisation considérée compte tenu de la surface des indices comme expliqué au chapitre I. Nous pouvons noter que les équations d'évolution de chacun des modes sont identiques par rotation circulaire des indices 1, 2 et 3 ; ainsi l'évolution des trois modes peut s'obtenir à partir de l'évolution d'un seul des trois par interversion des indices. Pour passer d'un mode à un autre, il suffit en effet d'échanger les indices des deux modes complémentaires dans les opérateurs et les vecteurs d'onde, cette deuxième opération revenant à changer l'ordre des fréquences dans le  $\Delta k$  ordonné comme ci-dessus afin qu'elles correspondent au mode qui leur est associé.

Il est à noter que les trois équations du système (III.2) sont les équivalents quantiques des trois dernières équations du système (I.20) donné au chapitre I. L'intégration se fait toujours de 0 à  $+\infty$ , les fréquences extrêmes étant limitées dans la pratique au domaine de transparence du milieu non linéaire. Comme expliqué au paragraphe I.2.2.2, la résolution

du système (III.2) est effectuée dans l'approximation d'un faible couplage non linéaire ( $|\Gamma A_p| \ll 1$ ), ce qui est cohérent avec l'approximation de la pompe non dépeuplée. En utilisant le développement de Baker-Hausdorff au premier ordre du couplage  $|\Gamma A_p|$ , on obtient, d'après l'équation (I.69) du chapitre I et comme détaillé en annexe D, les opérateurs d'évolution suivants :

$$\begin{cases} \hat{a}_1(\omega, z) = \hat{a}_1(\omega, 0) - i \int d\omega' \Phi(z, \omega_p, \omega, \omega') \hat{a}_2^+(\omega', 0) \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega - \omega', 0) \\ \hat{a}_2(\omega, z) = \hat{a}_2(\omega, 0) - i \int d\omega' \Phi(z, \omega_p, \omega', \omega) \hat{a}_1^+(\omega', 0) \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega - \omega', 0) \\ \hat{a}_3(\omega, z) = \hat{a}_3(\omega, 0) - i \int d\omega' \Phi(z, \omega_p, \omega', \omega_p - \omega - \omega') \hat{a}_1^+(\omega', 0) \hat{a}_2^+(\omega_p - \omega - \omega', 0) \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

où

$$\Phi(z, \omega_p, \omega, \omega') = \Gamma(\omega_p, \omega, \omega') A_p(\omega_p) z \operatorname{sinc} \left( \frac{\Delta k(\omega_p, \omega, \omega') z}{2} \right) e^{-\frac{i \Delta k(\omega_p, \omega, \omega') z}{2}} \quad (\text{III.6})$$

A partir des équations (III.5) est obtenue l'expression de la densité spectrale moyenne des nombres de photons générés, donnée ici par unité de fréquence donc en seconde, sur chaque mode, soit :

$$n_j(\omega, z) = \langle \psi | \hat{a}_j^+(\omega, z) \hat{a}_j(\omega, z) | \psi \rangle, \quad j = \{1, 2, 3\} \quad (\text{III.7})$$

$|\psi\rangle$  est l'état quantique du système, représentant l'ensemble des photons présents hormis les photons pompe qui sont décrits classiquement par l'amplitude de leur champ. Étant donné que l'on est en représentation de Heisenberg, toute l'évolution est contenue dans les opérateurs, de sorte que  $|\psi\rangle$  est identique à l'état quantique en entrée du système tout au long de l'évolution. En fonction de la nature spontanée ou stimulée de la génération,  $|\psi\rangle$  va s'écrire différemment, et donc les spectres des photons triplets générés vont être différents.

## III.2 Fluorescence paramétrique

### III.2.1 Cas général

Comme indiqué par la figure III.1 ci-après, la fluorescence paramétrique d'ordre trois correspond à un processus non linéaire au cours duquel un photon pompe d'énergie  $\hbar\omega_p$  est annihilé, donnant naissance à un triplet de photons d'énergies respectives  $\hbar\omega_1$ ,  $\hbar\omega_2$  et  $\hbar\omega_3$ .

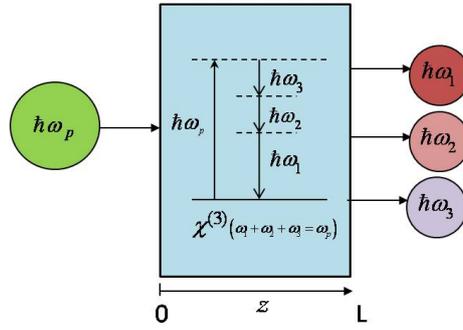


FIGURE III.1: *Diagramme photonique représentant la fluorescence paramétrique d'ordre 3 dans un cristal non linéaire : des photons triplets aux fréquences  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  et  $\omega_3$  sont générés à partir de la scission d'un photons pompe à la fréquence  $\omega_p$ .*

Pour ce schéma de génération spontanée, aucun photon n'est injecté en entrée du milieu non linéaire, de sorte que l'état quantique  $|\psi\rangle$  du système est un produit tensoriel des états cohérents quasi-classiques du vide sur chacun des modes 1, 2 et 3. Nous l'écrivons :

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes |\psi_3\rangle = |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 \otimes |0\rangle_3 \quad (\text{III.8})$$

et nous simplifierons la notation en :

$$|\psi\rangle = |0_1, 0_2, 0_3\rangle \quad (\text{III.9})$$

Par définition des états cohérents du vide, la projection d'un opérateur annihilation sur l'état quantique du système est nulle quelque soit sa fréquence, soit :  $\hat{a}_j(\omega, 0) |\alpha_j\rangle = 0$ ,  $j = \{1, 2, 3\}$ . Les densités spectrales de nombre de photons générés s'obtiennent alors immédiatement à partir de l'expression (III.7) :

$$\begin{cases} n_1(\omega, z) = \int d\omega' |\Phi(z, \omega_p, \omega, \omega')|^2 \\ n_2(\omega, z) = \int d\omega' |\Phi(z, \omega_p, \omega', \omega)|^2 \\ n_3(\omega, z) = \int d\omega' |\Phi(z, \omega_p, \omega', \omega_p - \omega - \omega')|^2 \end{cases} \quad (\text{III.10})$$

Nous pouvons noter que, dans le cas où les polarisations des trois photons sont identiques, ces trois équations sont les mêmes. En effet, les indices sont alors égaux, donc  $\Delta k(\omega_p, \omega, \omega') = \Delta k(\omega_p, \omega', \omega)$  et, en intégrant sur toutes les fréquences sachant que  $\omega$  est fixé,  $\omega_p - \omega - \omega'$  décrit alors tout le spectre de la même façon que  $\omega'$ . Cela reflète le fait que dans ce cas, bien qu'ayant pris des notations distinctes, les modes associés aux trois champs sont identiques.

NB : Il faut en réalité noter que les expressions (III.10) sont simplifiées, les

expressions exactes étant :

$$\begin{cases} n_1(\omega, z) = \int d\omega' |\Phi(z, \omega_p, \omega, \omega')|^2 \delta(\omega' - \omega) \\ n_2(\omega, z) = \int d\omega' |\Phi(z, \omega_p, \omega', \omega)|^2 \delta(\omega' - \omega) \\ n_3(\omega, z) = \int d\omega' |\Phi(z, \omega_p, \omega', \omega_p - \omega - \omega')|^2 \delta(\omega' - \omega) \end{cases} \quad (\text{III.11})$$

soit encore :

$$\begin{cases} n_1(\omega, z) = \int d\omega' |\Phi(z, \omega_p, \omega, \omega')|^2 \delta(0) \\ n_2(\omega, z) = \int d\omega' |\Phi(z, \omega_p, \omega', \omega)|^2 \delta(0) \\ n_3(\omega, z) = \int d\omega' |\Phi(z, \omega_p, \omega', \omega_p - \omega - \omega')|^2 \delta(0) \end{cases} \quad (\text{III.12})$$

Les  $\delta(0)$  n'ont pas de rôle restrictif ici. Ils sont cependant définis par :  $\int d\omega' \delta(0) = 1$ , et ont la dimension d'un temps. Nous ne leur avons pas appliqué de coefficient correctif. Il pourrait paraître judicieux de remplacer ces diracs par  $\tau$ , le temps caractéristique du champ électromagnétique, équivalent à  $L/c$ ,  $L$  étant la longueur de la cavité. Cette grandeur caractéristique apparaît dans l'expression des champs générés lorsque les calculs sont menés dans le formalisme discret. Cependant, une confrontation des résultats numériques (un exemple de densité de photons générés étant donné au paragraphe suivant) avec ceux prédits par la règle d'or de Fermi [9], et la définition différente de la densité spectrale de champs étendus spectralement générés par fluorescence, donnée par B. Dayan [13] selon :  $n(\omega, z) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega' \langle \psi | \hat{a}_1^+(\omega, z) \hat{a}_1(\omega', z) | \psi \rangle$ , nous pousse à ne pas attribuer le facteur correctif.

### III.2.2 Exemple de champs générés dans un cristal de KTP

Illustrons les expressions des champs obtenues en (III.10) en traçant les densités spectrales des champs générés par scission spontanée dans des conditions proches des expériences que nous avons menées et qui s'appuient sur les travaux pionniers de génération de triplets dans notre groupe évoqués au chapitre II.

Le champ pompe est un faisceau vert à 532 nm, considéré comme monochromatique. La génération se fait dans un cristal de *KTP*, taillé selon l'axe OX du repère diélectrique afin de permettre la génération de triplets dans l'infrarouge proche, au voisinage de 1500 nm. La densité spectrale de chacun des trois champs générés donnée par l'équation (III.10) a été calculée pour un cristal de 10 mm de long. Le spectre des champs générés dépend de la longueur du cristal du fait de l'acceptance spectrale dans la direction de propagation considérée, acceptance qui est d'autant plus grande que le cristal est court. Les polarisations des champs envisagées ici correspondent à un accord de phase de type II, soit compte tenu de (I.25) :

$$\lambda_p^{(-)} \rightarrow \lambda_1^{(+)} + \lambda_2^{(-)} + \lambda_3^{(+)} \quad (\text{III.13})$$

où les  $\lambda_i^{(+,-)}$ ,  $i = 1, 2, 3$  représentent les longueurs d'onde des champs en interaction ainsi

que la configuration de polarisation (+) ou (-) associée : (-) correspond à une direction de polarisation colinéaire à l'axe OY et (+) à l'axe OZ de KTP. Nous avons choisi de nommer 1 et 3 les deux champs polarisés (+) et 2 le champ polarisé (-).

Les indices de réfraction ont été calculés par l'équation de Sellmeier (I.11) avec les coefficients donnés par les expressions (I.12). La courbe d'accord de phase correspondante calculée à partir de l'équation (II.b) dans (I.25) est donnée figure III.2.

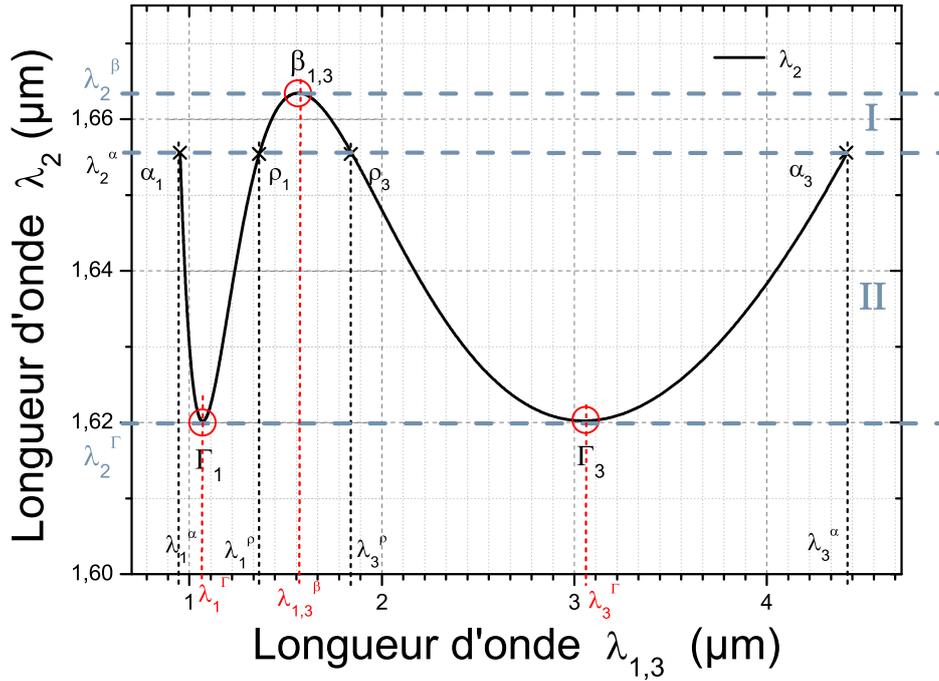


FIGURE III.2: Courbe d'accord de phase de l'interaction de fluorescence paramétrique d'ordre trois  $\lambda_p^{(-)} \rightarrow \lambda_1^{(+)} + \lambda_2^{(-)} + \lambda_3^{(+)}$  dans un cristal de KTP pompé par un faisceau à  $\lambda_p = 532\text{nm}$  se propageant selon l'axe OX du repère diélectrique (O, X, Y, Z). (-) correspond à une direction de polarisation selon l'axe OY et (+) selon l'axe OZ. Les points  $\{\Gamma_1, \Gamma_3\}$ ,  $\{\alpha_1, \alpha_3\}$ ,  $\{\rho_1, \rho_3\}$  et  $\beta_{1,3}$  correspondent respectivement aux triplets de photons générés aux longueurs d'onde  $\{\lambda_1^\Gamma, \lambda_2^\Gamma, \lambda_3^\Gamma\}$ ,  $\{\lambda_1^\alpha, \lambda_2^\alpha, \lambda_3^\alpha\}$ ,  $\{\lambda_1^\rho, \lambda_2^\rho, \lambda_3^\rho\}$  et  $\{\lambda_1^\beta, \lambda_2^\beta, \lambda_3^\beta\}$  avec  $\lambda_1^\beta = \lambda_3^\beta$  noté  $\lambda_{1,3}^\beta$ . La ligne horizontale joignant les points  $\alpha_1, \rho_1, \rho_3$  et  $\alpha_3$  délimite la zone nommée I, où il existe un unique couple de fréquences  $\{\lambda_1, \lambda_3\}$  associé à une longueur d'onde  $\lambda_2$  fixée, et la zone nommée II où deux couples de fréquences  $\{\lambda_1, \lambda_3\}$  peuvent être associés à une longueur d'onde  $\lambda_2$ .

Les deux longueurs d'onde  $\lambda_2^\Gamma$  et  $\lambda_2^\beta$  correspondent à une acceptation spectrale non critique en  $\lambda_1$  et  $\lambda_3$ , puisque les points correspondants  $\Gamma_1, \Gamma_3$  et  $\beta_{1,3}$  sur la courbe d'accord de phase admettent une tangente horizontale. Physiquement cela signifie qu'il existe de nombreux triplets de photons, à des valeurs légèrement distinctes de  $\lambda_1$  et  $\lambda_3$ , qui sont associés à des photons à  $\lambda_2^\Gamma$  et  $\lambda_2^\beta$  (ou extrêmement proches de  $\lambda_2^\Gamma$  et  $\lambda_2^\beta$ ). Il est à noter que les points  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_3$  correspondent au même triplet  $\{\lambda_1^\Gamma, \lambda_2^\Gamma, \lambda_3^\Gamma\}$ , et que le point  $\beta_{1,3}$  est dégénéré en  $\lambda_1$  et  $\lambda_3$ , associé au triplet  $\{\lambda_{1,3}^\beta, \lambda_2^\beta, \lambda_{1,3}^\beta\}$ .

Les spectres des champs générés correspondant à la courbe d'accord de phase de la figure III.2 ont été calculés à partir de l'équation (III.10) avec les paramètres suivants : le faisceau pompe est Gaussien avec un rayon au waist à  $1/e^2$  de  $60 \mu\text{m}$ , son énergie est de  $14,6 \mu\text{J}$  par impulsion d'une durée de  $15 \text{ps}$ , ce qui correspond à une intensité de  $27 \text{GW.cm}^{-2}$  et à  $4 \times 10^{13}$  photons ; le coefficient effectif  $\chi_{eff}^{(3)}$  vaut  $14,6 \times 10^{-22} \text{m}^2.\text{V}^{-2}$ , ce qui donne un coefficient  $\Gamma$  de  $2,6 \times 10^{-25} \text{s.m}^{-1}$  et un gain  $|\Gamma A_p|$  de  $8,3 \times 10^{-13} \text{s}^{1/2}.\text{m}^{-1}$ .

Les spectres des champs triplets générés ainsi calculés sont donnés figure III.3.

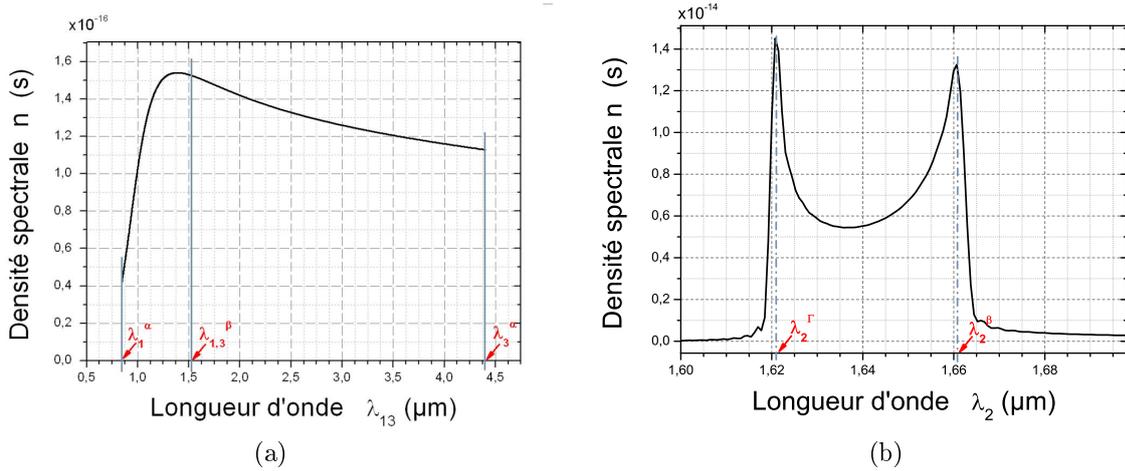


FIGURE III.3: Spectres des champs 1 et 3 (a) et du champ 2 (b) générés par fluorescence paramétrique d'ordre 3 selon le schéma d'interaction  $\lambda_0^{(-)} \rightarrow \lambda_1^{(+)} + \lambda_2^{(-)} + \lambda_3^{(+)}$  dans un cristal de KTP de  $10 \text{mm}$  taillé selon la direction  $OX$  et pompé à  $\lambda_p = 532 \text{nm}$ . Les différentes fréquences remarquables  $\lambda_1^\alpha$ ,  $\lambda_{1,3}^\beta$ ,  $\lambda_3^\alpha$ ,  $\lambda_2^\Gamma$  et  $\lambda_2^\beta$  font référence à des points particuliers de la courbe d'accord de phase donnée figure III.2.

Les densités spectrales sont en " $\text{Hz}^{-1}$ ", correspondant à des " $\text{s.rad}^{-1}$ ", que nous avons nommées " $s$ " par abus de langage.

Il apparaît que les champs 1 et 3 sont identiques, ce qui est logique puisqu'ils ont la même polarisation et qu'ils sollicitent donc les mêmes indices de réfraction. Ils sont très larges spectralement, dû au fait que les deux équations de conservation de l'énergie et du moment ne suffisent pas pour fixer les fréquences des trois champs générés par fluorescence. Ainsi l'accord de phase se fait sur un très vaste domaine spectral, limité principalement par la bande de transmission du cristal qui s'étend de  $0,35 \mu\text{m}$  à  $4,4 \mu\text{m}$  pour le KTP [49]. Les champs 1 et 3 sont ainsi coupés dans l'infra-rouge à  $4,4 \mu\text{m}$ , et leur limite inférieure dans le visible est vers  $0,9 \mu\text{m}$ , qui est la longueur d'onde complémentaire correspondant à  $4,4 \mu\text{m}$ . Ces deux limites spectrales sont indiquées par les points  $\alpha_1$  et  $\alpha_3$  de la courbe d'accord de phase de la figure III.2.

Le champ 2 s'étend de  $1,62$  à  $1,6625 \mu\text{m}$ , valeurs extrêmes qui se retrouvent également sur la courbe d'accord de phase figure III.2. Il a une allure très différente des champs 1 et 3, avec deux piques en  $\lambda_2^\Gamma$  et  $\lambda_2^\beta$  qui s'expliquent très bien par la courbe d'accord de phase, ces deux longueurs d'onde étant situées au niveau de tangentes horizontales donc

vérifiant l'accord de phase avec un grand nombre de photons sur les champs 1 et 3.

Le nombre de photons générés par impulsion peut s'obtenir facilement par intégration des densités spectrales précédemment calculées : il est évidemment identique pour les trois champs, et vaut 0,255.

Les champs donnés figure (III.3) sont légèrement plus larges spectralement que les limites données par  $\lambda_{\alpha_1}$  et  $\lambda_{\alpha_3}$  pour les champs 1 et 3, et par  $\lambda_2^\Gamma$  et  $\lambda_2^\beta$  pour le champ 2. Cela est dû au fait que le cristal considéré n'est pas infiniment long mais mesure 10 mm, donc l'interaction admet une certaine tolérance autour de l'accord de phase parfait. En prenant un cristal plus petit, les champs générés sont encore un peu plus larges, et les deux pics présents sur le spectre du champ 2 tendent à se rapprocher jusqu'à se fondre en un seul pic pour des cristaux inférieurs à 1 mm, du fait de l'élargissement du domaine des longueurs d'ondes en accord de phase. Ainsi, la figure III.4 donne  $\text{sinc}^2(\Delta kL/2)$  pour un cristal de 1 mm. La courbe est très élargie par rapport à celle de la figure III.2, représentant l'accord de phase parfait.

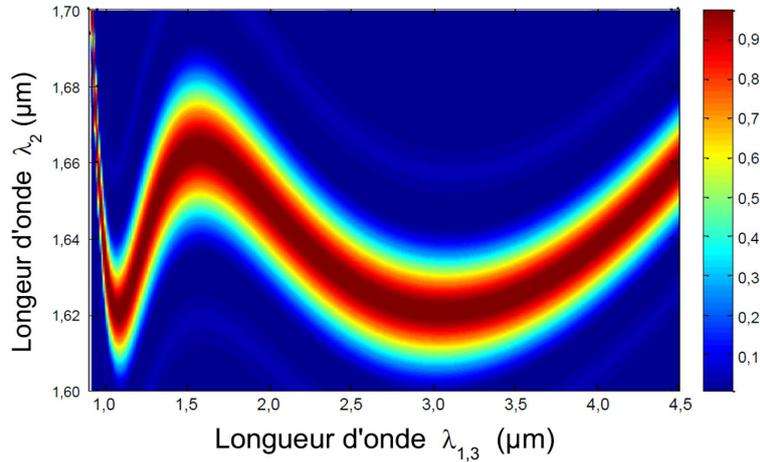


FIGURE III.4: *Fonction d'interférence  $\text{sinc}^2(\Delta kL/2)$  correspondant à l'interaction  $\lambda_0^{(-)} \rightarrow \lambda_1^{(+)} + \lambda_2^{(-)} + \lambda_3^{(+)}$  dans un cristal de KTP de 1 mm taillé selon la direction OX et pompé à  $\lambda_p = 532\text{nm}$ .*

### III.3 Scission stimulée

#### III.3.1 Cadre général

Les champs injectés seront modélisés par des faisceaux cohérents, spectralement gaussiens, dont la densité spectrale s'écrit :

$$n_j(\omega) = n_j(\omega_{j0}) e^{-\left(\frac{\omega - \omega_{j0}}{\Delta\omega_{j0}}\right)^2}, \quad j = \{1, 2, 3\} \quad (\text{III.14})$$

où  $\omega_{j0}$  est la fréquence centrale, et  $\Delta\omega_{j0}$  la largeur spectrale à  $1/e^2$ . Le nombre de photons maximum  $n_j(\omega_{j0})$  sera noté  $n_j^0$  par la suite.

D'un point de vue quantique, les champs électromagnétique sinusoïdaux émis par

des lasers sont bien représentés par des états cohérents quasi classiques [50], un tel champ saturant en tout temps l'inégalité de Heisenberg. Les états décrivant le mieux les champs injectés dans notre cas sont des états cohérents polychromatiques. Ce sont donc en fait des produits tensoriels des états cohérents à toutes les composantes fréquentielles présentes dans les champs injectés, tout comme les états cohérents vides du système non stimulé au paragraphe précédent sont en fait des produits tensoriels des états cohérents vides à toutes fréquences possibles. Par exemple, si la génération est stimulée par un champ nommé  $j$ , l'état quantique de ce champ sera noté :

$$|\psi_j\rangle = |\alpha_j\rangle = \prod_{\omega}^{\otimes} |\alpha_j(\omega)\rangle, \quad (\text{III.15})$$

$\prod_{\omega}^{\otimes}$  représente le produit tensoriel des états cohérents à toutes les fréquences  $\omega$  de 0 à  $+\infty$ . L'état cohérent associé à chaque mode est état propre de l'opérateur annihilation au même mode. Ainsi, le produit tensoriel d'états cohérents vérifie la relation:  $\hat{a}(\omega, 0) |\alpha_j\rangle = \alpha_j(\omega) |\alpha_j\rangle, \forall \omega \in [0, +\infty[$  où  $\alpha_j(\omega) = \sqrt{n_j^0} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\omega - \omega_{j0}}{\Delta\omega_{j0}} \right)^2 + i\theta}$ ,  $j = \{1, 2, 3\}$ ,  $\theta$  étant un facteur de phase. En effet, la densité spectrale moyenne s'exprime pour chaque mode fréquentiel par :  $\langle n_j(\omega) \rangle = \alpha_j(\omega) \alpha_j^*(\omega) = |\alpha_j(\omega)|^2$ . Ainsi la projection des opérateurs d'annihilation sur les états s'annule pour des fréquences loin des fréquences d'injection de par la décroissance de la gaussienne.

Compte tenu de la façon dont ont été définis les trois champs triplets, si l'injection porte sur un ou deux des trois champs, les états quantiques des champs injectés seront bien entendu des produits tensoriels d'états cohérents non nuls comme définis par (III.15), alors que les états des champs non injectés seront toujours les états cohérents du vide. Ainsi par exemple, si nous considérons une injection portant seulement sur le champ 3, l'état total du système s'écrira comme le produit tensoriel suivant :

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes |\psi_3\rangle = |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 \otimes |\alpha_3\rangle_3, \quad (\text{III.16})$$

$|\alpha_3\rangle$  représentant le produit tensoriel d'états cohérents décrit par (III.15), et  $|0\rangle_{1,2}$  les produits tensoriels sur toutes les fréquences possibles des quantiques du vide. La projection des opérateurs annihilation sur l'état quantique du système donne alors :

$$\hat{a}_{1,2}(\omega, 0) |\psi\rangle = 0, \quad \hat{a}_3(\omega, 0) |\psi\rangle = \alpha_3(\omega) |\alpha_3\rangle \quad (\text{III.17})$$

pour toute fréquence  $\omega$  comprise entre 0 et  $+\infty$ .

Si l'injection se fait sur deux des champs, les états quantiques de ces deux champs seront des états cohérents non nuls.

## III.3.2 Scission mono-injectée

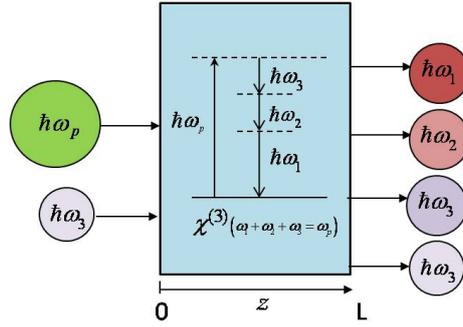


FIGURE III.5: Schéma fonctionnel représentant la génération de triplets de photons stimulée par injection de photons à la fréquence  $\omega_3$  : des photons triplets aux fréquences  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  et  $\omega_3$  sont générés à partir de la scission d'un photon pompe à la fréquence  $\omega_p$  stimulée par un photon à la fréquence  $\omega_3$ .

Choisissons par exemple de stimuler la génération avec le champ nommé 3, la densité spectrale de photons d'injection en entrée étant notée  $n_3(\omega, 0)$ . Le cas correspondant à une stimulation par le champ 1 ou le champ 2 s'obtiendra par simple permutation des indices 1 et 3 ou 2 et 3 respectivement, et ce dans tous les termes obtenus ainsi qu'au niveau des indices de réfraction.

La fonction d'onde du système qui englobe tous les photons présents excepté les photons pompe s'écrit en entrée du milieu non linéaire comme produit tensoriel des états cohérents du vide pour les champs 1 et 2, et du produit tensoriel d'états cohérents autour de la fréquence centrale  $\omega_{30}$  pour le champ 3, soit :

$$|\psi\rangle = |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 \otimes |\alpha_3\rangle = |0_1, 0_2, \alpha_3\rangle \quad (\text{III.18})$$

$|\alpha_3\rangle$  est défini par (III.15). L'équation (III.7) donne les densités spectrales moyennes suivantes :

$$n_1(\omega, z) = \int d\omega_t |\Phi(z, \omega_p, \omega, \omega_t)|^2 [1 + n_3(\omega_p - \omega_t - \omega, 0)] , \quad (\text{III.19})$$

$$n_2(\omega, z) = \int d\omega_t |\Phi(z, \omega_p, \omega_t, \omega)|^2 [1 + n_3(\omega_p - \omega_t - \omega, 0)] \quad (\text{III.20})$$

et

$$n_3(\omega, z) = n_3(\omega, 0) + \int d\omega_t |\Phi(z, \omega_p, \omega_t, \omega_p - \omega_t - \omega)|^2 \quad (\text{III.21})$$

Les expressions sont cette fois dissymétriques du fait de l'injection avec un seul champ. Les deux premières expressions, donnant les densités spectrales des champs non injectés, sont la somme du terme de génération par fluorescence (III.10) et de ce même

terme pondéré par la densité spectrale  $n_3$  des photons injectés aux fréquences nommées  $\omega_3$  à valeurs autour de  $\omega_{30}$ . Ce second terme est étroit en fréquence puisque le fait d'imposer  $\omega_3$  va fixer les valeurs des fréquences des champs 1 et 2, nommées  $\omega_1$  et  $\omega_2$ . Le terme va être maximal à la fréquence  $\omega$  telle que l'accord de phase avec la fréquence centrale  $\omega_{30}$  du champ injecté soit vérifié, ce qui correspond aussi à la fréquence pour laquelle  $n_3$  sera maximal car  $\omega_p - \omega_t - \omega$  sera alors centré en  $\omega_{30}$ . Pour des fréquences s'éloignant de celles correspondant à l'accord de phase avec  $\omega_{30}$ , le terme va diminuer jusqu'à zéro pour les fréquences qui ne satisferont pas l'accord de phase avec une des fréquences présentes dans le spectre du champ injecté. A injection forte, ce terme sera prépondérant sur le terme de fluorescence fixant ainsi les fréquences générées dans les trois champs en imposant une des trois fréquences dans les conditions d'accord de phase. A injection faible en revanche, les champs générés sont équivalents aux champs générés par fluorescence. Le terme représentant les photons générés en plus de la fluorescence spontanée représente la partie amplifiée par l'injection des champs générés, à valeur non nulle aux fréquences vérifiant l'accord de phase avec les fréquences injectées.

La densité spectrale du champ 3, éq. (III.21), est, elle, donnée par la somme du champ injecté en entrée et du champ généré par fluorescence.

Il apparait ici que les photons triplets ne vont pas être générés en nombre égal selon qu'ils appartiennent au champ injecté ou non. En effet, les photons générés sur le champ injecté sont uniquement dus à la fluorescence, alors que ceux générés sur les champs non injectés sont plus nombreux, comprenant à la fois les photons générés par fluorescence et ceux amplifiés par la stimulation. La dissymétrie entre les deux nombres de photons générés est d'autant plus grande que le nombre de photons d'injection est fort, et les termes redeviennent symétriques lorsque l'injection est suffisamment faible pour n'avoir qu'un effet négligeable sur la génération, qui redevient donc équivalente à la fluorescence. Les expressions (III.19), (III.20) et (III.21) montrent que cette dernière situation est réalisée pour  $n_2(\omega)$  et  $n_3(\omega)$  inférieurs à 1 à toute fréquence, mais dans ce cas de figure il est un peu abusif de parler d'un régime stimulé.

Cette situation dissymétrique non intuitive vient du caractère non linéaire de l'amplification paramétrique. Elle est contraire à la logique quantique où les triplets de photons sont émis trois par trois à partir de la scission d'un photon pompe, donc en nombre égal. Intuitivement il va sembler difficile d'observer des signatures quantiques dans un régime où le nombre de photons générés n'est pas le même sur chacun des champs, ce qui arrive dès que le nombre de photons d'injection est grand. Cependant, même lorsque les photons générés grâce à l'injection sont beaucoup plus nombreux que les photons générés par fluorescence, ces derniers restent présents. Nous étudierons les signatures de corrélations non classiques entre les champs triplets attendues en fonction du nombre de photons d'injection au chapitre suivant.

Les applications numériques sont toujours faites dans le cas d'un cristal de KTP

en accord de phase de type II, selon un schéma du type  $\lambda_0^{(-)} \rightarrow \lambda_1^{(+)} + \lambda_2^{(-)} + \lambda_3^{(+)}$ . Les champs 1 et 3 jouant un rôle identique puisqu'ayant la même polarisation, les deux cas de figures que nous allons analyser sont ceux correspondant à une stimulation par le champ 2 ou le champ 3, les schémas équivalents respectifs étant :  $\lambda_0^{(-)} - \lambda_2^{(-)} \rightarrow \lambda_1^{(+)} + \lambda_3^{(+)}$  et  $\lambda_0^{(-)} - \lambda_3^{(+)} \rightarrow \lambda_1^{(+)} + \lambda_2^{(-)}$ .

Traisons d'abord l'injection par le champ 3. Avec les caractéristiques des faisceaux et le gain considérés au paragraphe III.2.2, et pour une stimulation avec le champ 3 gaussien centré autour de 1662 nm et d'une largeur à mi-hauteur de 10 nm, le nombre de photons générés en plus de la fluorescence, c'est-à-dire le gain paramétrique en nombre de photons, vaut 0,0011 photon par impulsion sur les champs 1 et 2 pour une densité spectrale de photons d'injections  $n_3^0$  de 1. Cela correspond à une injection totale de  $7,26 \times 10^{12}$  photons par impulsion. Le spectre de cette contribution est tracé figure III.6. Le spectre du champ total généré s'obtient en sommant la densité spectrale générée par fluorescence (qui est tracée figures III.3a et III.3b) à la contribution de l'amplification figure III.6.

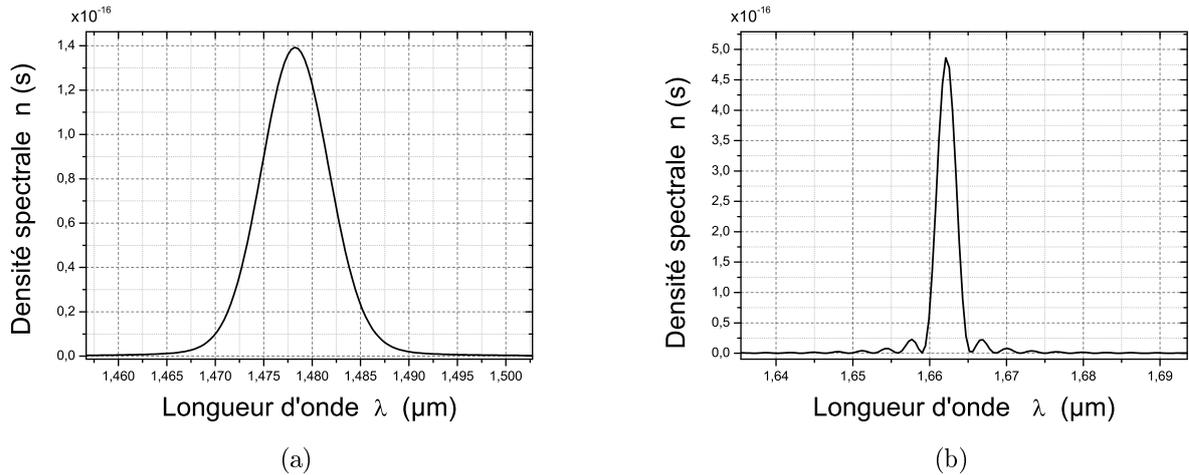


FIGURE III.6: Spectres de la partie amplifiée des champs 1 (a) et 2 (b) dans un cristal de KTP lors d'une scission mono-injectée sur le champ 3 considéré comme gaussien de largeur à mi-hauteur 10 nm et comportant un nombre de photons de  $7,26 \times 10^{12}$  par impulsion. Les spectres complets des champs 1 et 2 s'obtiennent en ajoutant les spectres obtenus par fluorescence (figures III.3a et III.3b respectivement) aux spectres (a) et (b).

L'autre schéma de mono-injection est celui d'une injection par le champ 2. Les champs générés s'obtiennent alors en remplaçant le champ d'injection 3 par le champ 2 dans les expressions (III.19), (III.20) et (III.21), ainsi qu'au niveau des indices de réfraction correspondants. Le nombre de photons générés en plus de la fluorescence est plus grand que dans le cas d'une stimulation par le champ 3, atteignant une valeur de 0,0453 photon par impulsion pour une densité spectrale d'injection  $n_2^0$  valant 1, ce qui correspond à  $7,26 \times 10^{12}$  photons stimulants. La partie amplifiée des densités spectrales des champs 1 et 3 est tracée figure III.7.

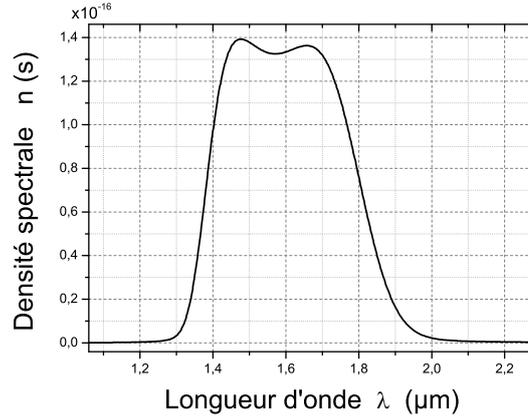


FIGURE III.7: Spectre de la partie amplifiée des champs 1 et 3 générés dans un cristal de KTP lors d'une scission par mono-injection sur le champ 2 considéré comme gaussien de largeur à mi-hauteur 10 nm et comportant un nombre de photons de  $7,26 \times 10^{12}$  par impulsion. Les spectres complets des champs s'obtiennent en ajoutant les spectres obtenus par fluorescence (figure III.3a) aux spectres de cette figure III.7 .

La dissymétrie entre les allures des champs générés suivant que l'injection se fait par le champ 2 ou le champ 3, s'explique très bien grâce à la courbe d'accord de phase (fig. III.2). Lorsqu'il s'agit du champ 3, la longueur d'onde d'accord de phase  $\lambda_3$  est fixée autour de 1662 nm avec une certaine marge de  $\pm 5$  nm compte tenu des 10 nm de largeur à mi-hauteur du faisceau gaussien d'injection. La projection sur la courbe d'accord de phase correspond à un petit segment de 10 nm de large légèrement à droite de  $\beta_{1,3}$ . Les deux longueurs d'onde triplet correspondantes pour les champs 1 et 2 sont également fixées par un petit segment centré autour de 1478 nm et 1662 nm respectivement. Les longueurs d'onde extrêmes des deux spectres des champs 1 et 2 sont obtenues par projection de ce segment sur les axes des abscisses et des ordonnées respectivement. Il apparaît alors que le spectre des longueurs d'ondes possibles vérifiant l'accord de phase pour le champ 2 va être plus fin que pour le champ 1, étant donné l'échelle plus dilatée des  $\lambda_2$  par rapport aux  $\lambda_1$ , ce qui correspond bien aux figures III.6a et III.6b. Lorsqu'il s'agit d'une injection sur le champ 2, toujours avec une gaussienne de 10 nm de largeur à mi-hauteur, la projection de cet intervalle sur la courbe d'accord de phase donne un large segment de part et d'autre de  $\beta_{1,3}$ , doublement centré autour des longueurs d'onde correspondant à 1478 nm et 1662 nm. Ces deux fréquences centrales sont les sommets des champs 1 et 3 générés correspondants (figure III.7).

Analysons maintenant l'injection limite pour laquelle la "symétrie quantique" correspondant à l'égalité du nombre de photons générés sur les trois modes 1, 2 et 3 est conservée, c'est-à-dire le régime où la fluorescence paramétrique est prépondérante sur l'amplification due à l'injection.

Avec les caractéristiques données ci-dessus pour les deux types d'injection, la limite où les nombres de photons générés par fluorescence et par amplification sont égaux, c'est-à-dire 0,255 photon par impulsion dans chacun des trois modes, est de  $1,68 \times 10^{15}$

photons d'injection sur le champ 3 et de  $4,1 \times 10^{13}$  photons d'injection sur le champ 2. Il est à noter au passage que la mono-injection est peu efficace, le nombre de photons d'injection nécessaires pour que l'injection ait un effet sur l'amplification des champs étant supérieur au nombre de photons pompe injectés. Cependant, même en régime d'injection forte, lorsque les photons dus à l'injection sont en nombre très supérieur aux photons dus à la fluorescence, ces derniers restent distinguables spectralement puisque leur domaine de fréquence est beaucoup plus large que celui des champs générés par l'injection (figure III.3). Si le détecteur est capable de mesurer ces champs générés par fluorescence, on ne peut pas dire qu'ils soient masqués par l'injection, puisque spectralement différenciables sur presque tout leur spectre. En dessous du régime où les nombres de photons dus à l'injection et à l'amplification sont égaux, nous estimons que parler de régime injecté est un abus de langage, étant donné que l'injection a moins d'effet que la fluorescence paramétrique.

Il apparaît également que la limite entre le régime où la génération est majoritairement due à la fluorescence et celui où elle est majoritairement due à la génération amplifiée est différente suivant que le raisonnement est mené en considérant le nombre de photons générés ou la signature spectrale. En effet, le spectre de la fluorescence étant beaucoup plus large que celui de la génération amplifiée, pour un même nombre de photons générés par fluorescence et par génération amplifiée, la signature spectrale de la fluorescence ne sera plus visible sur le graphe des spectres des champs générés car complètement "écrasée" par le spectre de la génération amplifiée. Ainsi, la limite où les amplitudes des densités spectrales dues à la fluorescence et à la génération amplifiée sont équivalentes est de l'ordre de  $7 \times 10^{12}$  photons, ce qui correspond à une densité spectrale maximale des photons d'injection  $n_{2,3}^0 = 1$ , valeur beaucoup plus basse que le seuil d'injection efficace.

Cela révèle le fait que les densités de photons données ici sont calculées dans le cadre d'une modélisation continue des faisceaux, mais le nombre de photons total après intégration est indépendant de la modélisation, et c'est lui qu'il faut regarder pour avoir une notion physique de ce qui se passe.

Dans le chapitre IV, nous allons comparer ces limites de régimes d'injection efficace aux limites d'injection jusqu'auxquelles une signature de corrélations est observable, afin d'en déduire si une signature est observable en régime injecté, ou s'il y a masquage des corrélations.

## III.3.3 Scission bi-injectée

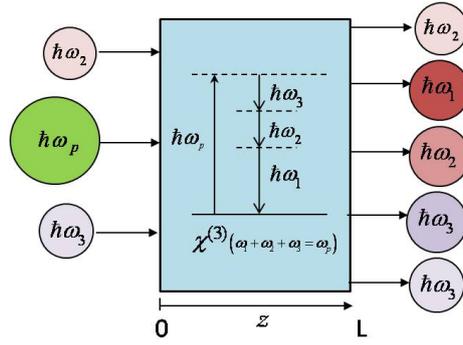


FIGURE III.8: Schéma fonctionnel représentant la génération de triplets de photons stimulée par bi-injection avec des photons aux fréquences  $\omega_2$  et  $\omega_3$  : des photons triplets aux fréquences  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  et  $\omega_3$  sont générés à partir de la scission stimulée d'un photon pompe à la fréquence  $\omega_p$ .

Les champs avec lesquels sera faite la stimulation sont nommés 2 et 3 ; la densité spectrale injectée en entrée du milieu non linéaire étant donc  $n_2(\omega, 0) + n_3(\omega, 0)$ . La fonction d'onde du système en entrée du milieu non linéaire s'écrit alors comme produit tensoriel de l'état cohérent du vide pour le champ 1, et des produits tensoriels d'états cohérents autour de la fréquence centrale  $\omega_{20}$  pour le champ 2 et  $\omega_{30}$  pour le champ 3 :

$$|\psi\rangle = |0\rangle_1 \otimes |\alpha\rangle_2 \otimes |\alpha_3\rangle = |0_1, \alpha_2, \alpha_3\rangle \quad (\text{III.22})$$

où  $|\alpha_2\rangle$  et  $|\alpha_3\rangle$  sont définis par (III.15).

L'équation (III.7) donne alors les évolutions des densités spectrales moyennes :

$$n_1(\omega, z) = \left| \int d\omega_t \Phi(z, \omega_p, \omega, \omega_t) \sqrt{n_2(\omega_t, 0)} \sqrt{n_3(\omega_p - \omega_t - \omega, 0)} \right|^2 \quad (\text{III.23})$$

$$+ \int d\omega_t |\Phi(z, \omega_p, \omega, \omega_t)|^2 [1 + n_2(\omega_t, 0) + n_3(\omega_p - \omega - \omega_t, 0)]$$

$$n_2(\omega, z) = n_2(\omega, 0) + \int d\omega_t |\Phi(z, \omega_p, \omega_t, \omega)|^2 [1 + n_3(\omega_p - \omega_t - \omega, 0)] \quad (\text{III.24})$$

$$n_3(\omega, z) = n_3(\omega, 0) + \int d\omega_t |\Phi(z, \omega_p, \omega_t, \omega_p - \omega_t - \omega)|^2 [1 + n_2(\omega_p - \omega_t - \omega, 0)] \quad (\text{III.25})$$

Les expressions (III.24) et (III.25) des densités spectrales des champs injectés montrent que les champs générés en plus de la stimulation sont identiques à ceux générés par mono-injection par le champ 2 seul pour  $n_3$  et par le champ 3 seul pour  $n_2$ . Tout comme dans le cas mono-injecté, tout se passe comme si les champs injectés ne voient pas leur propre injection, évoluant comme la somme des termes de mono-injection forte et de fluorescence paramétrique, sommés évidemment au champ injecté en entrée qui n'est pas

dépeuplé dans l'approximation de gain faible.

Pour le champ non injecté en revanche (éq. (III.23)), deux termes apparaissent : le premier est équivalent au champ généré en résolvant le système d'équations couplées (III.2) en régime bi-injecté dans l'approximation des champs injectés intenses, non dépeuplés et considérés classiquement. Le second terme, non classique, se divise en une somme de trois termes qui sont le terme de fluorescence paramétrique et les deux termes correspondant à la génération amplifiée par mono-injection au champ 2 et au champ 3 (cf. équation (III.19)). Ce champ 1 non injecté peut ainsi être vu comme la somme des champs générés par bi-injection forte, par mono-injection forte et par fluorescence paramétrique.

Deux régimes de fonctionnement se présentent de nouveau : le premier régime est celui où l'injection est tellement faible que l'évolution des champs est due aux composantes générées par fluorescence. Pour les deux champs injectés, ce régime est établi au moins lorsque  $n_2^0$  et  $n_3^0$  sont inférieurs à 1. Il faut cependant noter que les champs injectés en entrée sont toujours prépondérants (sauf injection extrêmement faible) devant leur composante générée par fluorescence ; ainsi les champs injectés sont équivalents en sortie aux champs injectés en entrée, leur évolution étant négligeable conformément à l'hypothèse de gain faible. Pour le champ non injecté, le régime où l'évolution est due uniquement à la fluorescence s'établit pour une stimulation bien plus faible. En effet, le premier terme de la somme de l'expression (III.23) de  $n_1$  est largement prépondérant devant les autres même pour  $n_2^0$  et  $n_3^0$  inférieurs à 1, étant donné qu'il comprend une intégrale au carré donc une double somme, alors que les autres termes n'ont qu'une intégrale simple.

Le second régime de fonctionnement est celui où les champs générés sont amplifiés du fait de l'injection. Ce régime s'établit pour différentes valeurs de densités de photons d'injection en fonction du gain et de la longueur d'interaction dans le milieu non linéaire. Il est à noter là encore que l'on parle bien des composantes générées des champs, les champs injectés en sortie de cristal étant toujours équivalents aux champs injectés en entrée même dans ce régime, l'injection devant en effet être suffisamment faible pour que nos hypothèses de gain faible et de pompe non dépeuplée, menant aux expressions (III.23)-(III.25), soient valides. De même que le régime de fluorescence paramétrique disparaît plus vite avec l'injection pour le champ non injecté, le régime de génération amplifiée apparaît plus vite pour ce champ, son premier terme généré par bi-injection forte étant rapidement prépondérant sur les autres termes dès que le niveau d'injection augmente, du fait de sa double intégrale. Il faut remarquer que les termes équivalents à la mono-injection forte ne sont jamais prépondérants dans l'expression du champ 1. Ainsi, dès que le régime de fluorescence paramétrique n'est plus majoritaire, les nombres de photons générés sur le champ non injecté et sur les deux champs injectés vont nécessairement être différents. Il apparaît alors de nouveau le problème que cette situation ne peut s'expliquer en régime quantique. Pour rester en régime quantique, il va

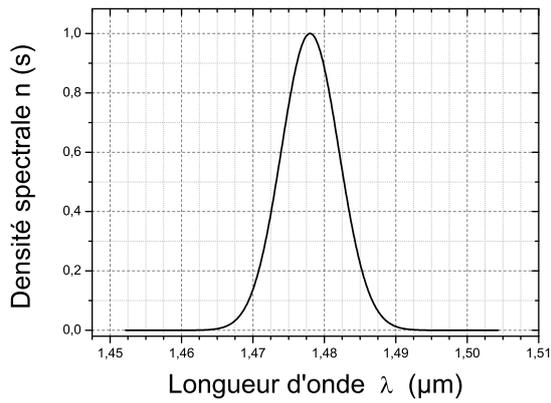
donc falloir, comme dans le cas de la génération par mono-injection, se ramener à une injection tellement faible que les champs générés par fluorescence seront prépondérants.

Pour illustrer la bi-injection, nous traiterons le cas que nous avons mis en œuvre expérimentalement au cours de cette thèse, où la stimulation est réalisée à l'aide de deux champs à 1662 nm polarisés orthogonalement dans un cristal de KTP. Le schéma équivalent à l'interaction est donc la différence de fréquence suivante :  $\lambda_0^{(-)} - \lambda_2^{(-)} - \lambda_3^{(+)} \rightarrow \lambda_1^{(+)}$ . Les spectres des champs générés vont être tracés dans les différents régimes de stimulation décrits ci-dessus.

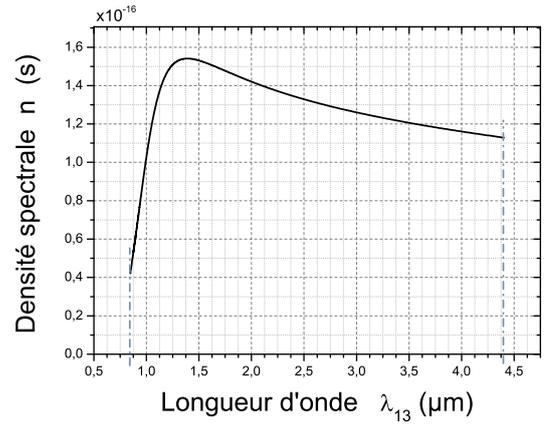
Dans le cas du champ 1 (non injecté), la densité spectrale du champ généré sera donnée par la somme des termes équivalents à une bi-injection forte classique et du terme équivalent à la fluorescence paramétrique. Dans le cas des champs injectés, la densité spectrale des champs générés sera donnée par la somme des termes de fluorescence et des termes dus à l'amplification par l'injection, mais les champs en sortie seront les champs injectés en entrée pour les champs 2 et 3, leur amplification étant négligeable devant l'injection dans l'approximation de gain faible.

Les figures III.9 et III.10 donnent les spectres en sortie de cristal pour les trois champs, en fonction du nombre de photons d'injection. Pour le champ 1, les densités spectrales des deux termes dus à l'injection forte et à la fluorescence sont égaux pour un nombre de photons d'injection de  $9,7 \times 10^6$  photons par impulsion sur chaque champ. Les nombres totaux de photons générés par fluorescence et par amplification sont eux égaux pour une injection de  $1,34 \times 10^8$  photons par champ, seuil à partir duquel le régime de bi-injection efficace peut être considéré comme établi. Remarquons une nouvelle fois la différence entre la limite des signatures spectrales de l'injection et la limite en nombre de photons générés grâce à l'injection par rapport à ceux dus à la fluorescence. En effet, le spectre du champ généré par fluorescence étant très large, sa signature spectrale disparaît avant que le nombre de photons générés dus à l'injection soit égal aux 0,255 photons générés par fluorescence. Ainsi, lorsque les deux nombres de photons générés sont égaux, la densité spectrale du champ classique est 180 fois plus haute que celle du fond gaussien. Cependant, la même remarque que dans le cas de la génération mono-injectée s'applique, à savoir que même en régime d'injection forte, les photons générés par fluorescence restent distinguables spectralement des photons générés grâce à la stimulation. Ainsi parler d'un masquage est quelque peu inapproprié.

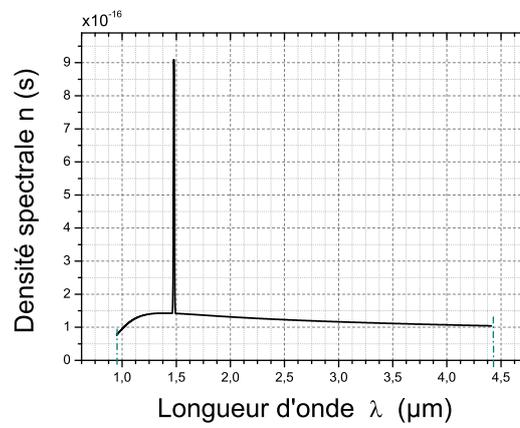
Nous comparerons au prochain chapitre ces données avec le nombre limite de photons d'injection permettant d'observer une signature de corrélations entre des champs générés par bi-injection, afin de déterminer si cette signature est observable en régime bi-injecté à proprement parler.



(a)



(b)



(c)

FIGURE III.9: *Spectre total du champ 1 généré par scission bi-injectée selon le schéma d'interaction  $\lambda_0^{(-)} - \lambda_2^{(-)} - \lambda_3^{(+)} \rightarrow \lambda_1^{(+)}$  dans un cristal de KTP de 10 mm taillé selon X, pour des injections de  $7,26 \times 10^{12}$  (a),  $10^6$  (b) et  $2,3 \times 10^7$  (c) photons par impulsion sur chacun des champs 2 et 3.*

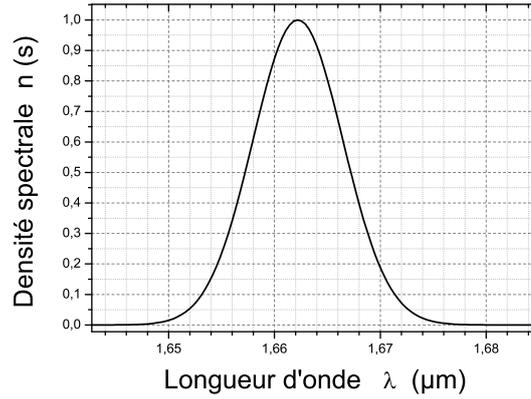


FIGURE III.10: *Spectre total des champs 2 et 3 générés par scission bi-injectée selon le schéma d'interaction  $\lambda_0^{(-)} - \lambda_2^{(-)} - \lambda_3^{(+)} \rightarrow \lambda_1^{(+)}$  dans un cristal de KTP de 10 mm taillé selon X, pour une injection de  $7,26 \times 10^{12}$  photons par impulsion. Quelque soit le niveau d'injection, l'allure des champs d'injection reste identique car les champs sont égaux à ceux injectés en entrée de cristal, l'évolution des champs dans le cristal pouvant être négligée.*

### III.4 Conclusion

A partir des opérateurs d'évolution des champs soumis à une interaction non linéaire de troisième ordre, nous avons obtenu les expressions des densités moyennes des champs triplets en projetant les opérateurs nombre de photons générés dans chacun des trois régimes potentiels, à savoir la génération spontanée (ou fluorescence paramétrique), mono-stimulée et bi-stimulée. Les expressions font ressortir que les termes d'évolution des champs issus de la fluorescence paramétrique et de la génération mono-stimulée sont également contenus dans l'expression des champs générés en régime bi-stimulé. Ainsi, le degré de stimulation de la génération augmentant, de nouveaux photons viennent s'ajouter aux photons triplets générés trois par trois par fluorescence paramétrique ; l'évolution de ces nouveaux photons ne suit plus la logique quantique d'un photon s'annihilant en trois photons, mais est liée aux photons stimulants, s'exprimant ainsi en régime bi-stimulé comme l'évolution classique de champs générés par différence de fréquences.

Des exemples numériques de champs générés dans un cristal de KTP montrent que c'est le nombre de photons d'injection qui gouverne la transition entre les différents régimes ; il faut alors garder en tête le nombre minimal de photons à injecter pour pouvoir à proprement parler se situer dans un régime d'injection, nombre en dessous duquel l'injection a un effet moins fort que la fluorescence paramétrique sur les champs générés.

Dans le chapitre suivant, nous rechercherons des signatures de cohérence entre les champs triplets générés dans chacun des trois régimes de génération, et comparerons en régime stimulé le nombre limite de photons d'injection pour lequel des corrélations entre les champs peuvent être mises en évidence par rapport à la limite du régime où l'injection est effectivement efficace sur les champs générés.



# Chapitre IV

## Recombinaison des champs triplets

### IV.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons nous pencher sur la mise en évidence des corrélations entre les photons triplets par un protocole de somme de fréquences à deux ou trois champs dans un milieu non linéaire. Comme nous l'avons annoncé aux chapitres I et II, des corrélations des fluctuations quantiques dues à la cohérence des champs triplets peuvent être révélées par ces sommes de fréquences et mises en évidence théoriquement par le fait que les résultats de calculs quantiques diffèrent des résultats attendus classiquement, à l'instar de ce qui avait été fait dans le cas des photons jumeaux [13, 14]. Les calculs dits classiques sont obtenus en traitant les opérateurs d'évolution  $\hat{a}(\omega, z)$  comme des amplitudes de champs  $E(\omega, z)$ . Ces calculs reviennent donc à considérer la somme de fréquence de champs qui seraient indépendants.

Nous allons considérer des sommes de fréquences à deux et trois champs pour chacun des cas de génération, spontanée et stimulée, envisagés au chapitre précédent. L'étude est systématique et peut paraître fastidieuse, mais elle permet d'avoir un aperçu global de la cohérence entre les champs triplets, afin de chercher les expériences les plus pertinentes à mettre en œuvre. Le champ somme sera aussi appelé champ recombinaison. Les opérateurs d'évolution et donc la densité spectrale de ce champ seront obtenus en considérant l'opérateur moment décrivant le processus non linéaire de somme de fréquences.

### IV.2 Recombinaisons par somme de fréquences à trois photons

Nous utiliserons parfois l'abréviation TOSFG (Third-Order Sum Frequency Generation) pour désigner la Génération par Somme de Fréquences du Troisième Ordre. Le processus non linéaire décrivant la somme de fréquences à trois photons correspond à une fusion des trois photons, ce qui représente donc l'inverse de la scission spontanée

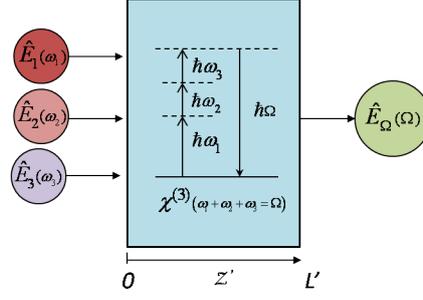


FIGURE IV.1: Schéma fonctionnel général de la recombinaison à trois champs. Les opérateurs champs  $\hat{E}_1$ ,  $\hat{E}_2$  et  $\hat{E}_3$  sont les opérateurs en sortie du cristal générant les triplets de photons.

en trois photons. Ainsi, l'opérateur moment décrivant l'interaction est le même que celui décrivant la scission d'ordre trois, défini par le second terme de l'expression (I.58). Considérons la recombinaison des champs en sortie de leur cristal générateur de longueur  $L$ , leur évolution dans l'air, entre la sortie de ce premier cristal et l'entrée du cristal recombinant, étant donc négligée. Afin d'obtenir facilement l'opérateur annihilation correspondant au champ somme des trois champs triplets, noté  $\hat{a}_\Omega$ , nous négligeons également l'évolution des champs incidents dans le cristal recombinant, dans l'approximation de la pompe non dépeuplée. Ainsi les opérateurs d'évolution des champs triplets à la fréquence  $\omega$ , à la côte  $z'$  dans le cristal de recombinaison sont données par :  $\hat{a}_j(\omega, z') = \hat{a}_j(\omega, z' = 0) = \hat{a}_j(\omega, L)$ ,  $j = \{1, 2, 3\}$  où  $L$  est la longueur du cristal générant les champs triplets. Nous les noterons par la suite  $\hat{a}_j(\omega)$ . L'opérateur d'évolution du champ somme à la cote  $z'$  est alors donné par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{a}_\Omega(\Omega, z')}{\partial z} &= -\frac{i}{\hbar} \left[ \hat{a}_\Omega(\Omega, z'), \hat{G}_{nl}^{(3)}(z') \right] \\ &= -i \iint d\omega_t d\omega'_t \Gamma(\Omega, \omega_t, \omega'_t) \hat{a}_1(\omega_t) \hat{a}_2(\omega'_t) \hat{a}_3(\Omega - \omega_t - \omega'_t) e^{+i\Delta k(\Omega, \omega_t, \omega'_t)z'} \end{aligned} \quad (\text{IV.1})$$

L'intégration de (IV.1) donne :

$$\hat{a}_\Omega(\Omega, z') = \hat{a}_\Omega(\Omega, 0) - i \iint d\omega_t d\omega'_t \Psi(z', \Omega, \omega_t, \omega'_t) \hat{a}_1(\omega_t) \hat{a}_2(\omega'_t) \hat{a}_3(\Omega - \omega_t - \omega'_t) \quad (\text{IV.2})$$

avec

$$\Psi(z', \Omega, \omega_t, \omega'_t) = \Gamma(\Omega, \omega_t, \omega'_t) z' \text{sinc} \left( \frac{\Delta k(\Omega, \omega_t, \omega'_t) z'}{2} \right) e^{+i\frac{\Delta k(\Omega, \omega_t, \omega'_t) z'}{2}}. \quad (\text{IV.3})$$

$\Delta k(\Omega, \omega_t, \omega'_t)$  et  $\Gamma(\Omega, \omega_t, \omega'_t)$  sont définis par (III.3) et (III.4).

Seule la seconde partie de l'expression (IV.2) de  $\hat{a}_\Omega(\Omega, z')$  décrit l'évolution non linéaire ; sa première partie ne sera pas considérée, le champ oscillant à la fréquence  $\Omega$  étant supposé nul en entrée de cristal recombinant.

Il faut remarquer que  $\Phi$ , défini au chapitre III précédent, et  $\Psi$  décrivent deux

processus non linéaires inverses, de sorte qu'ils sont complexes conjugués à l'amplitude de la pompe  $A_p$  près, amplitude qui est incluse dans  $\Phi$  pour alléger les notations.

L'expression de l'opérateur d'évolution  $\hat{a}_\Omega(\Omega, z')$  donne accès à la densité spectrale du champ somme en sortie du cristal recombinant, toujours à partir de l'expression (III.7). En fonction du type de scission considéré pour générer les triplets de photons, l'état quantique  $|\psi\rangle$  du système de photons va être différent, comme défini aux paragraphes III.2.1 et III.3, conduisant alors à des différences au niveau de la densité spectrale de nombre de photons moyen du champ somme. Nous allons traiter les trois cas de scission spontanée, simplement stimulée, et doublement stimulée, correspondant au chapitre précédent.

### IV.2.1 TOSFG de champs générés par fluorescence paramétrique

L'état quantique du système est ici le produit tensoriel d'états cohérents vides, comme défini au paragraphe III.2.1 (expression (III.8)). Afin de pouvoir projeter l'opérateur d'évolution du champ somme à trois photons  $\hat{a}_\Omega$  sur cet état quantique, il est nécessaire d'exprimer cet opérateur en fonction des opérateurs d'évolution des champs triplets  $\hat{a}_1$ ,  $\hat{a}_2$  et  $\hat{a}_3$  en entrée du premier cristal. A partir des expressions (IV.2) et (III.5), on obtient :

$$\begin{aligned} \hat{a}_\Omega(\Omega, z') = & \hspace{15em} \text{(IV.4)} \\ & -i \iint d\omega_t d\omega'_t \Psi(z', \Omega, \omega_t, \omega'_t) \times \\ & \left( \hat{a}_1(\omega_t) - i \int d\omega' \Phi(L, \omega_p, \omega_t, \omega') \hat{a}_2^+(\omega') \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega_t - \omega') \right) \times \\ & \left( \hat{a}_2(\omega'_t) - i \int d\omega' \Phi(L, \omega_p, \omega', \omega'_t) \hat{a}_1^+(\omega') \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega'_t - \omega') \right) \times \\ & \left( \hat{a}_3(\Omega - \omega'_t - \omega_t) - i \int d\omega' \Phi(L, \omega_p, \omega', \omega_p + \omega_t + \omega'_t - \omega' - \Omega) \hat{a}_1^+(\omega') \hat{a}_2^+(\omega_p + \omega_t + \omega'_t - \omega' - \Omega) \right) \end{aligned}$$

En développant et en projetant à droite sur l'état cohérent vide, cette expression donne une somme de six termes non nuls, chacun s'exprimant comme une intégrale double, triple ou quintuple, selon les conditions d'égalité sur certaines fréquences obtenues par

projection. Cette expression est :

$$\begin{aligned}
 \hat{a}_\Omega(\Omega, z') |0_1, 0_2, 0_3\rangle = & \tag{IV.5} \\
 -i \iint d\omega_t d\omega'_t \Psi(z', \Omega, \omega_t, \omega'_t) \times & \\
 [i\Phi(L, \omega_p, \omega_t, \omega'_t) \delta(\omega_p - \Omega) |0_1, 0_2, 0_3\rangle + & \\
 - \int d\omega''_s \Phi(L, \omega_t, \omega'_t, \omega_p) \Phi(L, \omega_p, \omega''_s, \omega_p - \omega''_s + \omega_t + \omega'_t - \Omega) \times & \\
 \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega_t - \omega'_t) \hat{a}_1^+(\omega''_s) \hat{a}_2^+(\omega_p - \omega''_s + \omega_t + \omega'_t - \Omega) |0_1, 0_2, 0_3\rangle - & \\
 \int d\omega'_s \Phi(L, \omega'_s, \omega'_t, \omega_p) \Phi(L, \omega_p, \omega_t, \omega_p + \omega'_t - \Omega) \times & \\
 \hat{a}_1^+(\omega'_s) \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega'_s - \omega'_t) \hat{a}_2^+(\omega_p + \omega'_t - \Omega) |0_1, 0_2, 0_3\rangle - & \\
 \int d\omega_s \Phi(L, \omega_1, \omega_s, \omega_p) \Phi(L, \omega_p, \omega_p + \omega_t + \omega'_t - \Omega, \omega'_t) \times & \\
 \hat{a}_2^+(\omega_s) \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega_t - \omega_s) \hat{a}_1^+(\omega_p + \omega_t + \omega'_t - \Omega, \omega'_t) |0_1, 0_2, 0_3\rangle - & \\
 \int d\omega''_s \Phi(L, \omega_t, \omega'_t, \omega_p) \Phi(L, \omega_p, \omega''_s, \omega'_t) \times & \\
 \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega_t - \omega'_t) \hat{a}_1^+(\omega''_s) \hat{a}_2^+(\omega_p - \omega''_s + \omega_t + \omega'_t - \Omega) |0_1, 0_2, 0_3\rangle - & \\
 i \iiint d\omega_s d\omega'_s d\omega''_s \Phi(L, \omega_p, \omega_1, \omega'_2) \Phi(L, \omega_p, \omega'_1, \omega_2) \Phi(L, \omega_p, \omega''_1, \omega_p - \omega''_1 + \omega_1 + \omega_2 - \Omega) \hat{a}_2^+(\omega'_2) \times & \\
 \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega_1 - \omega'_2) \hat{a}_1^+(\omega'_1) \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega'_1 - \omega_2) \hat{a}_1^+(\omega''_1) \hat{a}_2^+(\omega_p - \omega''_1 + \omega_1 + \omega_2 - \Omega) |0_1, 0_2, 0_3\rangle] &
 \end{aligned}$$

Le complexe conjugué de cette expression (IV.5) est la projection à gauche sur l'état quantique de l'opérateur création du champ somme à la fréquence  $\Omega$ , c'est-à-dire  $\langle 0_1, 0_2, 0_3 | \hat{a}_\Omega^+(\Omega, z')$ . Le produit de (IV.5) par son conjugué donne donc le nombre de photons moyen du champ somme à la fréquence  $\Omega$  à la cote  $z'$  du cristal recombinant :  $n_\Omega(\Omega, z') = \langle 0_1, 0_2, 0_3 | \hat{a}_\Omega^+(\Omega, z') \hat{a}_\Omega(\Omega, z') |0_1, 0_2, 0_3\rangle$ . L'expression de  $n_\Omega(\Omega, z')$  est donc constituée d'une somme de  $6 \times 6$  soit 36 termes, dont 18 s'annulent par projection car sommes impaires d'opérateurs modes création et annihilation.

Sur les termes restants, 16 ont la même allure, de la forme :

$$\begin{aligned}
 \iiint d\omega_\alpha d\omega_\beta d\omega_\gamma d\omega_\delta \Psi(z', \Omega, \omega_\alpha, \omega_\beta) \Psi^*(z', \Omega, \omega_\gamma, \omega_\delta) \times & \tag{IV.6} \\
 \Phi^*(L, \omega_p, \Sigma_\omega, \Sigma_\omega) \Phi^*(L, \omega_p, \Sigma_\omega, \Sigma_\omega) \Phi(L, \omega_p, \Sigma_\omega, \Sigma_\omega) \Phi(L, \omega_p, \Sigma_\omega, \Sigma_\omega) &
 \end{aligned}$$

avec  $\Sigma_\omega$  représentant une combinaison linéaire des fréquences  $\omega_\alpha, \omega_\beta, \omega_\gamma, \omega_\delta, \omega_p$  et  $\Omega$  du type  $\Sigma_\omega = \sum_{\delta_i=\{-1,0,1\}} \delta_i \omega_{\alpha_i} + \delta_p \omega_p + \delta_\Omega \Omega$  avec les facteurs somme  $\delta_i, i = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, p, \Omega\}$  pouvant valoir -1, 0 ou 1.

Un autre terme est du type :

$$\begin{aligned}
 \iiint \iint d\omega_\alpha d\omega_\beta d\omega_\gamma d\omega_\delta d\omega_\varepsilon \times & \tag{IV.7} \\
 \left( |\Psi(z', \Omega, \omega_\alpha, \omega_\beta)|^2 |\Phi(L, \omega_p, \Sigma'_\omega, \Sigma'_\omega) \Phi(L, \omega_p, \Sigma'_\omega, \Sigma'_\omega) \Phi(L, \omega_p, \Sigma'_\omega, \Sigma'_\omega)|^2 + \right. & \\
 \Psi(z', \Omega, \omega_\alpha, \omega_\beta) \Psi^*(z', \Omega, \omega_\gamma, \omega_\delta) \Phi^*(L, \omega_p, \Sigma'_\omega, \Sigma'_\omega) \Phi^*(L, \omega_p, \Sigma'_\omega, \Sigma'_\omega) \times & \\
 \left. \Phi^*(L, \omega_p, \Sigma'_\omega, \Sigma'_\omega) \Phi(L, \omega_p, \Sigma'_\omega, \Sigma'_\omega) \Phi(L, \omega_p, \Sigma'_\omega, \Sigma'_\omega) \Phi(L, \omega_p, \Sigma'_\omega, \Sigma'_\omega) \right) &
 \end{aligned}$$

avec  $\Sigma'_\omega = \Sigma_{\delta_i=\{-1,0,1\}} \delta_\alpha \omega_\alpha + \delta_\beta \omega_\beta + \delta_\gamma \omega_\gamma + \delta_\delta \omega_\delta + \delta_\varepsilon \omega_\varepsilon + \delta_p \omega_p + \delta_\Omega \Omega$  représentant une combinaison linéaire des fréquences  $\omega_\alpha, \omega_\beta, \omega_\gamma, \omega_\delta, \omega_p, \omega_\varepsilon$  et  $\Omega$  du type  $\Sigma_\omega = \Sigma_{\delta_i=\{-1,0,1\}} \delta_\alpha \omega_\alpha + \delta_\beta \omega_\beta + \delta_\gamma \omega_\gamma + \delta_\delta \omega_\delta + \delta_p \omega_p + \delta_\varepsilon \omega_\varepsilon + \delta_\Omega \Omega$  avec les facteurs somme  $\delta_i, i = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, p, \Omega\}$  pouvant valoir -1, 0 ou 1.

Ce terme (IV.7) est équivalent à la densité spectrale que l'on obtiendrait dans le cas classique, c'est à dire lorsque tous les opérateurs commutent comme s'ils étaient considérés classiquement. En effet, ce terme ne fait pas intervenir l'anticommutation quantique entre grandeurs conjuguées.

Son premier terme représente le terme dit "incohérent", c'est à dire issu de la somme des trois champs triplets incohérents au sens où ils n'interfèrent pas entre eux, l'intensité somme étant alors proportionnelle aux intensités des trois champs, comme développé dans l'annexe E. Ce terme incohérent est le seul terme obtenu lorsque la relation de phase entre les trois champs n'est pas fixée, les interférences constructives entre les différentes composantes spectrales des champs ne pouvant alors pas se produire, ce qui est le cas lorsque l'on considère la somme de fréquence "classique" des trois champs triplets générés par fluorescence paramétrique. Ces champs n'ont en effet aucune raison d'être cohérents classiquement, la génération par fluorescence paramétrique ne permettant notamment pas de fixer la phase à l'origine des trois champs indépendamment.

Le dernier terme est donné par :

$$\left| \iint d\omega_\alpha d\omega_\beta \Psi(z', \Omega, \omega_\alpha, \omega_\beta) \Phi(L, \omega_p, \omega_\alpha, \omega_\beta) \delta(\omega_p - \Omega) \right|^2 \quad (\text{IV.8})$$

Ce terme (IV.8), tout comme le terme (IV.6), font intervenir des relations de non commutation entre opérateurs croisés. Comme détaillé dans l'annexe E, ces non commutations traduisent des interférences constructives entre les composantes recombinés, rendues possibles par la cohérence de phases entre photons issus d'un même parent, c'est à dire dans ce modèle à la complémentarité en énergie. Ainsi, nous nous attendons à ce que ces termes soient prépondérants sur le terme (IV.7) qui ne traduit pas cette cohérence.

Ceci se vérifie aisément étant donné qu'après notre hypothèse de gain paramétrique faible, qui nous a conduit pour le calcul relatif à la génération de triplets à l'expression (III.5) des opérateurs d'évolution des champs, l'amplitude de  $\Psi$  et  $\Phi$  est faible devant 1. Ainsi, le terme (IV.8), qui est en puissance 4 de  $\Psi$  et  $\Phi$ , est très prépondérant par rapport aux autres termes définis par (IV.6) et (IV.7), en puissances 6 et 8 de  $\Psi$  et  $\Phi$ . Ce terme (IV.8) est monochromatique à  $\Omega = \omega_p$ .

Ainsi, la densité spectrale du champ sommé est constituée de manière très prépondérante par un pic très intense centré à fréquence pompe, et s'écrit :

$$n_\Omega(\Omega, z') \simeq \left| \iint d\omega_\alpha d\omega_\beta \Psi(z', \Omega, \omega_\alpha, \omega_\beta) \Phi(L, \omega_p, \omega_\alpha, \omega_\beta) \delta(\omega_p - \Omega) \right|^2 \quad (\text{IV.9})$$

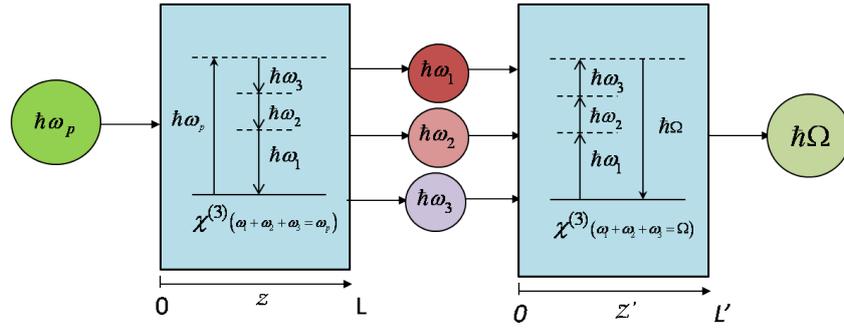


FIGURE IV.2: Schéma fonctionnel représentant la recombinaison des trois champs générés par fluorescence paramétrique.

Ce premier résultat signe donc les corrélations entre les champs triplets : il met en évidence le lien qui unit trois photons triplets générés à partir d'un même photon parent, et qui les pousse à se "reconnaître" au moment de la recombinaison pour se sommer très préférentiellement entre eux plutôt que trois par trois issus de triplets différents.

En effet, tous les photons d'un même triplet qui se recombinent entre eux donnent forcément un photon somme à la fréquence du champ pompe, alors que les recombinaisons "croisées" peuvent donner un photon à n'importe quelle fréquence somme de trois fréquences des champs triplets, l'ensemble des recombinaisons croisées constituant une convolution des trois champs triplets modulée par le facteur  $\Psi$  lié à l'acceptance spectrale du cristal si celle-ci est faible. Le fait que le pic à la fréquence pompe soit extrêmement intense par rapport à ce fond de recombinaisons croisées, constitué par les termes de l'équation (IV.6) et (IV.7), prouve la très forte probabilité pour un photon de se sommer avec les deux autres photons complémentaires de son triplet.

Il faut noter que l'hypothèse de la pompe monochromatique n'est pas nécessaire pour aboutir à ce résultat ; il suffit qu'elle soit suffisamment fine et intense devant les champs triplets. Dans ce cas, il faut alors remplacer l'amplitude spectrale de la pompe que nous avons nommée  $A_p$  par  $\int d\omega A_p(\omega)$ , avec l'amplitude  $A_p(\omega)$  non nulle sur un intervalle de fréquences  $\Delta\omega_p$ , correspondant à la largeur spectrale de la pompe (de l'ordre de  $2\pi/\tau$  où  $\tau$  est le temps de cohérence du laser pompe) petit devant la largeur spectrale  $\Delta\omega_{1,2,3}$  des champs triplets, et toujours en conservant l'approximation de la pompe non dépeuplée.

Les calculs de recombinaison des champs générés par fluorescence ont été appliqués aux champs donnés figure III.3, les conditions expérimentales de la scission étant détaillées paragraphe III.2.2. Le schéma fonctionnel représentant la recombinaison est donné figure IV.2. Le cristal de recombinaison est orienté comme le cristal de génération, la conservation de la quantité de mouvement s'écrivant de la même façon, qu'il s'agisse de la fusion ou de la scission à trois photons. La longueur du cristal recombinant est fixée à 0,1 mm : le cristal est choisi court afin de maximiser les acceptances spectrales, permettant alors de ne pas limiter les propriétés des champs triplets.

Pour les valeurs expérimentales d'intensité et de rendement données au paragraphe

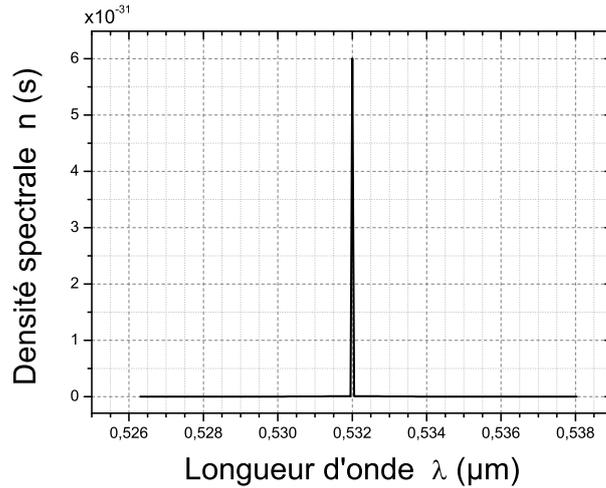


FIGURE IV.3: *Spectre du champ somme des trois champs triplets générés par fluorescence paramétrique.*

III.2.2, le spectre du champ recombinaison consiste en un pic centré à la longueur d'onde de la pompe (532nm dans notre cas) reproduisant le spectre du faisceau pompe comme discuté au paragraphe précédent, et comportant  $6 \times 10^{-31}$  photons, ce qui correspond également à la valeur de son intensité spectrale étant donné qu'il est monochromatique. L'allure du spectre du champ somme est exactement équivalente à celle du champ somme de deux champs jumeaux générés par scission spontanée [13, 14]. La partie basse intensité du spectre, composée par les termes (IV.6) et (IV.7), est négligeable devant le pic, conformément au calcul qui prédit un facteur  $10^{-25}$ . L'intégrale de la densité spectrale de ce fond donne la probabilité que la recombinaison des photons se fasse par somme de fréquences entre trois photons issus de triplets différents ; elle est calculée  $10^{-22}$  fois moindre que la hauteur du pic, la hauteur de ce dernier donnant la probabilité que la somme se fasse entre trois photons issus d'un même triplet. Ainsi, comme discuté au paragraphe précédent, les photons se somment presque exclusivement trois par trois d'un même triplet, ce qui implique une espèce de "reconnaissance" au moment de la recombinaison, qui est à attribuer au lien qui unit entre eux trois photons générés à partir d'un même photon parent.

## IV.2.2 TOSFG de champs générés par scission mono-stimulée

L'état quantique du système est cette fois-ci défini comme au paragraphe III.3 (expressions (III.15) et (III.18)), le champ injecté étant toujours considéré gaussien, comme défini par l'expression (III.14). Les calculs du champ recombinaison sont détaillés dans l'annexe B. Dans le cas d'une injection sur le champ 3 par exemple, et en négligeant les termes de puissance supérieures à 2 du gain  $\Phi \times \Psi$ , le terme prépondérant du champ

recombiné est donné par :

$$\begin{aligned}
 n(\Omega, z') &= \langle \psi | \hat{a}_{\Omega}^+ (\Omega, L_2) \hat{a}_{\Omega} (\Omega, L_2) | \psi \rangle = & (IV.10) \\
 & \left| \iint d\omega_t d\omega'_t \Psi(z', \Omega, \omega_t, \Omega - \omega_t - \omega'_t) \Phi(L, \omega_p, \omega_t, \Omega - \omega_t - \omega'_t) \times \right. \\
 & \left. \left[ \sqrt{n_3(\omega_p - \Omega + \omega'_t, 0)} \sqrt{n_3(\omega'_t, 0) + \delta(\omega_p - \Omega)} \right] \right|^2 + \\
 & \left. \int d\omega'_t \left| \int d\omega_t \Psi(z', \Omega, \omega_t, \omega_p - \omega_t - \omega'_t) \Phi(L, \omega_p, \omega_t, \omega_p - \omega_t - \omega'_t) n_3(\omega'_t, 0) \right|^2 \right.
 \end{aligned}$$

Le champ somme issu d'une mono-injection par le champ 2 pourra s'obtenir facilement à partir de (IV.10) en renommant les densités spectrales  $n_3$  en  $n_2$  et en permutant les indices de réfraction des champs 2 et 3. Étant donné que  $\Delta k$  est ordonné (cf. paragraphe III.1), il suffit pour ce faire d'invertir les fréquences associées aux champs 2 et 3 dans chaque terme lié à  $\Delta k$  pour attribuer le vecteur d'onde et donc les indices de réfraction du champ 2 au champ 3 et réciproquement. Ainsi, l'inversion des indices de réfraction peut se faire directement dans les facteurs  $\Psi$  et  $\Phi$  en intervertissant les fréquences en remplaçant  $\Psi(z', \omega, \omega_1, \omega_2)$  et  $\Phi(L, \omega, \omega_1, \omega_2)$  par  $\Psi(z', \omega, \omega_1, \omega - \omega_1 - \omega_2)$  et  $\Phi(L, \omega, \omega_1, \omega - \omega_1 - \omega_2)$ .

L'expression du champ recombiné (IV.10) présente un premier terme qui est a priori prépondérant sur le second car comportant plus d'intégrales. Ce premier terme est la somme d'un terme fonction de la densité de photons injectés et du terme de recombinaison des champs issus de la scission spontanée (IV.9) : on le reconnaît en faisant le changement de variables  $\omega_\beta = \Omega - \omega_t - \omega'_t$ .

Comme annoncé au chapitre précédent, nous souhaitons évaluer si le spectre du champ recombiné comporte des signatures de corrélations entre les photons triplets. A priori, ces signatures pourront se traduire, comme dans le cas où les triplets proviennent d'une scission spontanée, par l'existence d'un pic reconstituant le spectre du champ pompe, traduisant la cohérence des champs sommés, ou simplement par une différence entre le champ somme des champs triplets et le champ somme "classique" de champs non cohérents quantiquement, c'est à dire somme de trois champs indépendants entre eux mais aux fréquences identiques aux champs triplets. Rappelons, comme décrit dans l'annexe E, que cette somme de champs indépendants s'obtient en "brisant les liens" entre les opérateurs modes des trois champs après génération, autrement dit en les considérant comme indépendants une fois qu'ils ont été générés. Cela revient dans les calculs à laisser commuter les opérateurs d'évolution des trois modes dans l'expression (IV.2), ces opérateurs devenant donc équivalents à leurs homologues classiques d'amplitude spectrale. Le terme ainsi obtenu a été négligé dans l'expression (IV.10) de la densité spectrale du champ somme, dont l'obtention est détaillée annexe B, car en puissance supérieure du gain. La densité spectrale  $n_{cl}$  de ce champ somme ainsi obtenu s'écrit en effet :

$$n_{cl}(\Omega, z') = n_{cl}(\Omega, 0) - i \iint d\omega_t d\omega'_t |\Psi(z', \Omega, \omega_t, \omega'_t)|^2 n_1(\omega_t) n_2(\omega'_t) n_3(\Omega - \omega_t - \omega'_t) \quad (IV.11)$$

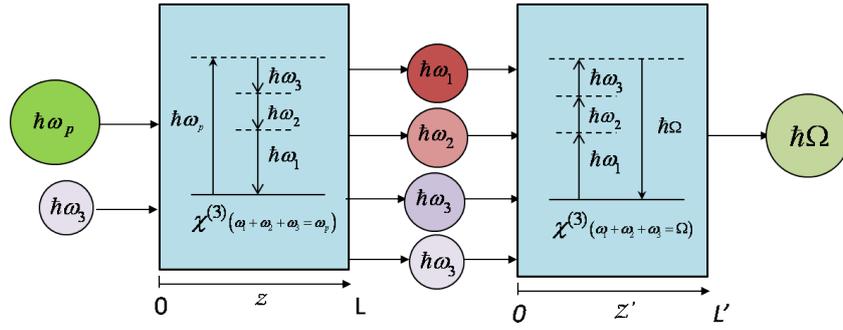


FIGURE IV.4: Schéma fonctionnel représentant la recombinaison des trois champs générés par mono-injection sur le champ 3

D'après les expressions des densités spectrales (III.19), (III.20) et (III.21), il vient pour un champ somme d'amplitude nulle en entrée et en négligeant l'amplification du champ 3 dans le cristal générateur :

$$\begin{aligned}
 n_{cl}(\Omega, z') = & \iint d\omega_t d\omega'_t |\Psi(z', \Omega, \omega_t, \omega'_t)|^2 n_3(\Omega - \omega_t - \omega'_t, 0) \times \\
 & \iint d\omega_s d\omega'_s |\Phi(L, \omega_p, \omega_s, \omega_t)|^2 |\Phi(L, \omega_p, \omega'_s, \omega'_t)|^2 \times \\
 & [1 + n_3(\omega_p - \omega_s - \omega_t, 0)] [1 + n_3(\omega_p - \omega'_s - \omega'_t, 0)]
 \end{aligned} \quad (\text{IV.12})$$

Cette expression est différente de l'expression quantique (IV.10) de recombinaison des trois champs, et l'intensité de ce terme incohérent quantiquement est moindre par rapport à celle du terme cohérent (IV.10) puisqu'en puissance supérieure du gain. Ainsi, les corrélations quantiques sont bien mises en évidence au niveau de ces expressions dans ce cas de figure de somme des trois champs en régime mono-injecté.

Nous allons maintenant donner des applications numériques correspondants aux cas expérimentaux envisageables. Comme dans le chapitre précédent, les champs stimulants sont toujours considérés ayant des distributions spectrales gaussiennes de largeur à mi-hauteur 10 nm. Le cristal recombinant est toujours de 0,1 mm. Afin de pouvoir juger de l'effet réel de l'injection sur les corrélations, nous tracerons les spectres d'une part en régime fortement injecté, c'est-à-dire dans le régime pour lequel l'effet de l'injection est responsable de la génération de beaucoup plus de photons que la fluorescence paramétrique, et d'autre part en régime faiblement injecté, c'est-à-dire en dessous du seuil où la stimulation génère plus de photons que la fluorescence, ces deux régimes ayant été discutés au paragraphe III.3.2. Nous discuterons de l'observation de corrélations dans chacun de ces deux régimes. Étant donné la "dissymétrie" des champs générés dans chacun des deux schémas possibles d'injection par le champ polarisé (+) (champ 1 ou 3) ou polarisé (-) (champ 2) (paragraphe III.3.2), nous discuterons ces deux schémas.

Dans le cas où les triplets sont générés par une scission stimulée sur le champ 3, correspondant donc à la configuration  $\lambda_0^{(-)} - \lambda_3^{(+)} \rightarrow \lambda_1^{(+)} + \lambda_2^{(-)}$  schématisée figure IV.4 le champ recombiné donné par l'expression (IV.10) est tracé totalement figure IV.5. Les calculs montrent que le second terme de l'éq. (IV.10) est, comme attendu, négligeable

devant le premier terme pour nos caractéristiques d'interaction. Le premier terme, seul visible sur le spectre, fait apparaître le pic équivalent à la recombinaison dans le cas où les photons incidents sont émis par fluorescence paramétrique, en dessous d'une densité de photons d'injection maximale.

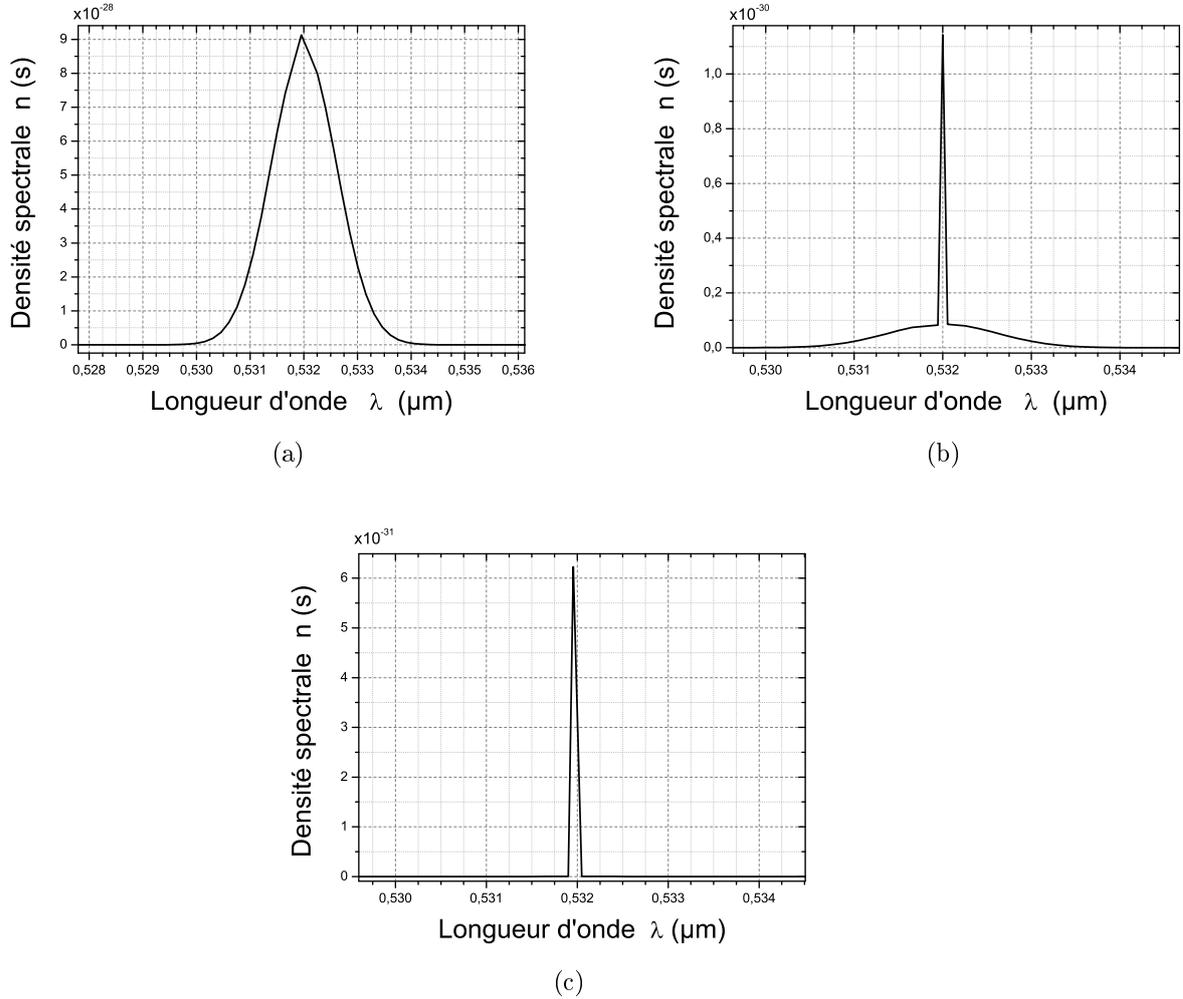


FIGURE IV.5: Densité spectrale du champ recombinaison par somme de fréquences des trois champs triplets dans un cristal de KTP de 0,1 mm taillé selon X. Les champs triplets sont issus d'une génération stimulée par le champ 3 considéré comme gaussien avec respectivement :  $10^{17}$  (a),  $10^{15}$  (b) et  $7,26 \times 10^{12}$  (c) photons par impulsion selon le schéma  $\lambda_0^{(-)} - \lambda_3^{(+)} \rightarrow \lambda_1^{(+)} + \lambda_2^{(-)}$ . Ces nombres de photons d'injection correspondent respectivement : au régime de génération mono-injectée ; au seuil du régime de génération mono-injectée ; et en dessous de ce seuil, ce qui est équivalent à un régime de génération par fluorescence paramétrique. Le spectre des champs triplets 1 et 2 dans les régimes de génération mono-injecté et par "fluorescence" sont donnés respectivement par les figures III.6 et III.3, le spectre du régime intermédiaire étant donné par la somme des spectres de chacun des régimes pondérés du coefficient correspondant au nombre de photons d'injection. Le spectre du champ 3 considéré est le spectre gaussien injecté, de largeur à mi-hauteur 10 nm.

Lorsque le régime est faiblement injecté (figure IV.5c) le champ recombinaison est, comme dans le cas de la recombinaison de la fluorescence paramétrique, constitué du

spectre du champ pompe, monochromatique à 532 nm dans notre cas, et de même intensité. Plus le nombre de photons d'injection augmente, et plus le fond constitué par les recombinaisons des champs générés par l'injection, augmente, ceci étant dû à l'amplification de ces termes. (fig. IV.5b). Le calcul à partir de l'expression (IV.10) totale du champ donne le pic du spectre pompe de même intensité que le fond gaussien pour un nombre d'injection de  $6 \times 10^{15}$  photons par impulsion sur le champ 3. Le pic disparaît totalement du spectre pour une injection de  $7 \times 10^{16}$  photons, ce qui est bien au dessus du seuil du régime mono-injecté à proprement parler, seuil qui est à  $2 \times 10^{15}$  photons d'injection sur le champ 3, comme mentionné au paragraphe III.3.2.

Il est certain que l'observation du pic à 532 nm correspondant au spectre de la pompe signe la cohérence des trois champs, du fait des corrélations entre photons triplets qui les poussent à se recombinaisonner entre eux, qui sont donc observables jusqu'à une injection de  $7 \times 10^{16}$  photons par impulsion. Cette valeur limite correspond à 10 photons générés sur le champ 1 dus à l'injection, contre 0,255 dus à la fluorescence. Il est donc d'ores et déjà possible d'observer une signature de corrélations en régime mono-injecté à proprement parler, sous réserve que l'injection ne soit pas trop forte. Mais il est aussi important de savoir ce qu'il en est lorsque le taux d'injection est trop fort pour observer le pic. Dans ce régime, c'est-à-dire à partir de  $7 \times 10^{16}$  photons d'injection sur le champ 3, il s'agit de comparer le spectre du champ recombinaisonné à celui du champ recombinaisonné classiquement pour voir s'ils sont équivalents ou si des signatures non classiques subsistent. Le spectre du champ recombinaisonné est de type gaussien, avec une largeur à mi-hauteur de 1,4 nm. Celui du champ qui serait issu d'une recombinaison classique dans ce régime est donné figure IV.6 pour une injection de  $10^{17}$  photons par impulsion. Son spectre est également de type gaussien, avec une largeur à mi-hauteur de 1,9 nm. Comme prédit dans l'approximation de gain faible, à niveau d'injection égal, l'intensité du champ incohérent attendue est bien moindre par rapport à celle du champ cohérent figure IV.5a. Ainsi, même si la différence d'allure entre les deux spectres est trop faible pour pouvoir signer des corrélations non classiques dans ce régime, une mesure de rendement devrait permettre de signer les corrélations non classiques, qui subsistent donc même dans ce domaine de forte injection.

La figure IV.8 donne la densité spectrale du champ recombinaisonné en génération mono-injectée par le champ 2, densité obtenue à partir de l'équation (IV.10) en intervertissant les champs et les nappes d'indices 2 et 3. Le schéma correspondant est cette fois-ci le suivant :  $\lambda_0^{(-)} - \lambda_2^{(-)} \rightarrow \lambda_1^{(+)} + \lambda_3^{(+)}$ , comme rappelé figure IV.7.

Comme dans le cas de la mono-injection par le champ 3 lorsque le régime est faiblement injecté (figure IV.8c), le champ recombinaisonné est constitué du spectre du champ pompe monochromatique à 532 nm, et plus le nombre de photons d'injection augmente, plus le fond constitué des recombinaisons des termes dus à l'amplification des champs générés par l'injection augmente lui aussi (fig. IV.8b et IV.8a). Le calcul donne le pic correspondant au spectre de la pompe de même intensité que le fond, pour un nombre d'injection totale de  $10^{15}$  photons, comme cela se voit sur la figure IV.8b. Le pic disparaît

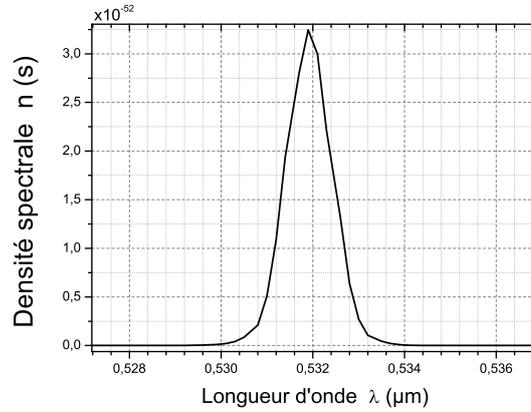


FIGURE IV.6: *Densité spectrale du champ recombinaison "classiquement" par somme de fréquences des trois champs triplets dans un cristal de KTP de 0,1 mm taillé selon X. Les champs triplets sont issus d'une génération stimulée par le champ 3 considéré comme gaussien avec  $10^{17}$  photons par impulsion selon le schéma  $\lambda_0^{(-)} - \lambda_3^{(+)} \rightarrow \lambda_1^{(+)} + \lambda_2^{(-)}$ . Ce nombre de photons d'injection correspond au régime de génération mono-injectée. L'allure des spectres des champs triplets 1 et 2 générés dans ce régime sont donnés figure III.6. Le spectre du champ 3 considéré est le spectre gaussien injecté, d'une largeur à mi-hauteur de 10 nm.*

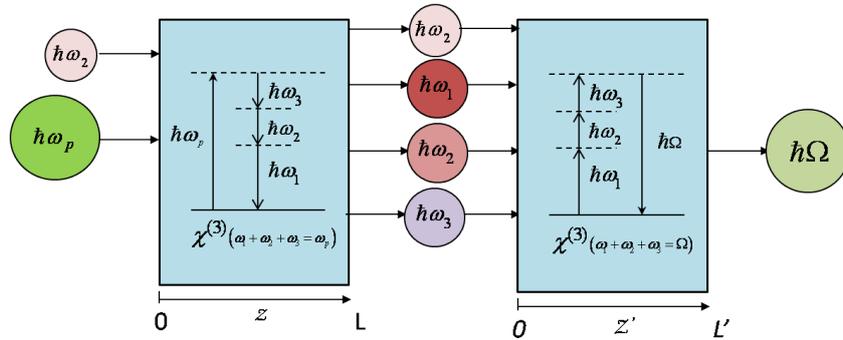


FIGURE IV.7: *Schéma fonctionnel représentant la recombinaison des trois champs générés par mono-injection sur le champ 2*

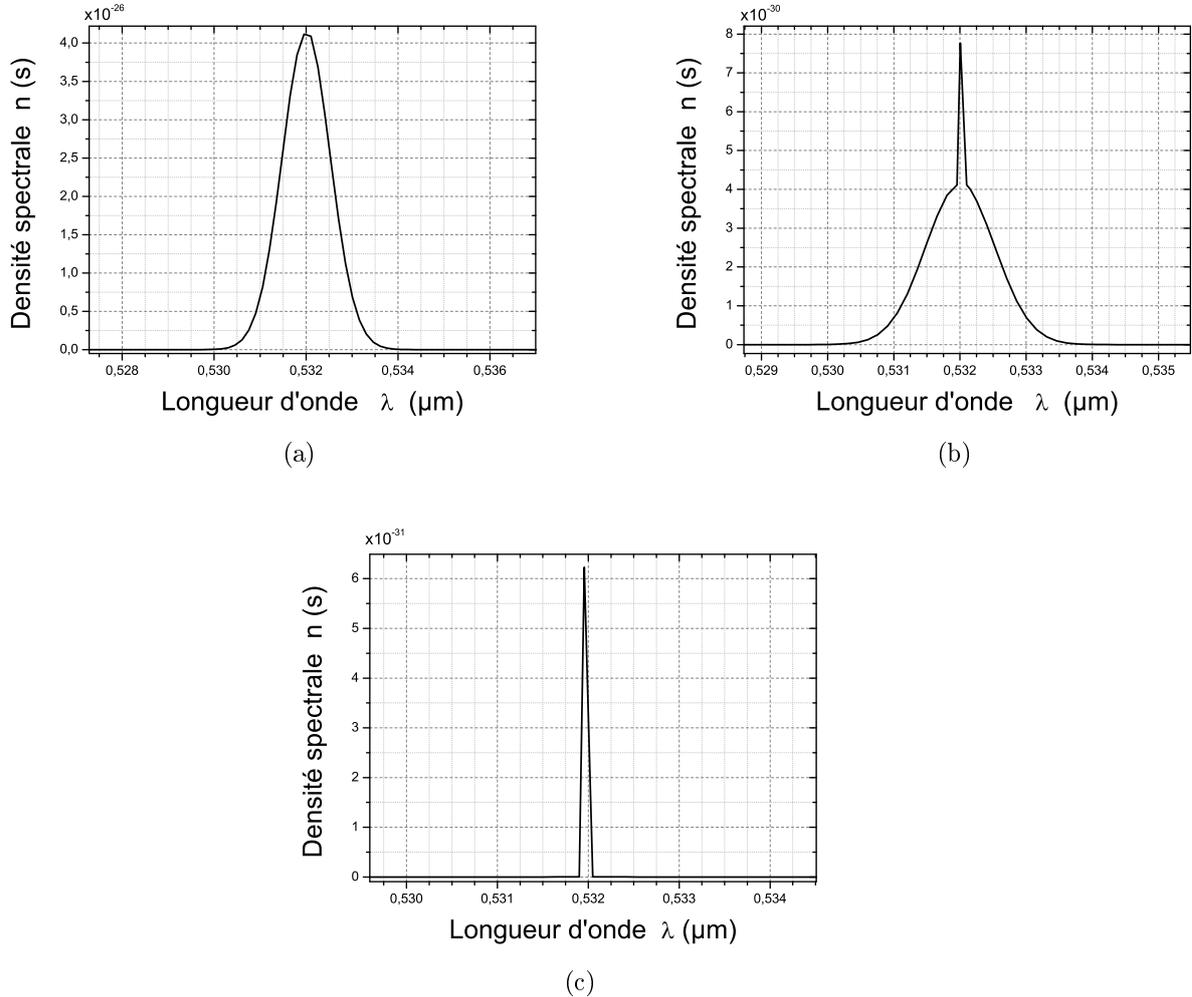


FIGURE IV.8: *Densité spectrale du champ recombéné par somme de fréquences des trois champs triplets dans un cristal de KTP de 0,1 mm.*

*Les champs triplets sont issus d'une génération stimulée par le champ 2 considéré comme gaussien avec respectivement  $10^{17}$  (a),  $10^{15}$  (b) et  $7,26 \times 10^{12}$  (c) photons par impulsion selon le schéma  $\lambda_0^{(-)} - \lambda_2^{(-)} \rightarrow \lambda_1^{(+)} + \lambda_3^{(+)}$ . Ces nombres de photons d'injection correspondent respectivement au régime de génération mono-injectée, au seuil du régime de génération mono-injectée et au régime de fluorescence paramétrique. Le spectre des champs triplets dégénérés 1 et 3 dans les régimes de génération mono-injecté et par fluorescence sont donnés respectivement par les figures III.7 et III.3a, le spectre du régime intermédiaire étant donné par la somme des spectres de chacun des régimes pondérés par le coefficient correspondant au nombre de photons d'injection. Le spectre du champ 2 considéré est le spectre gaussien injecté, de 10 nm de largeur à mi-hauteur.*

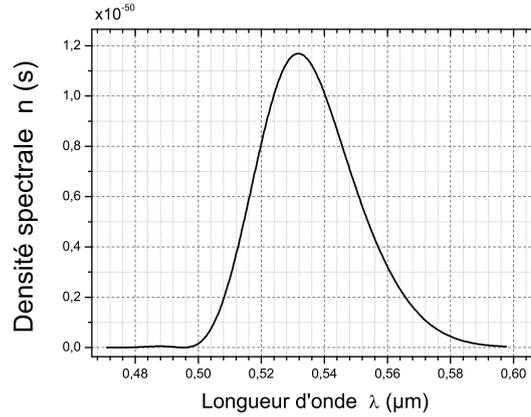


FIGURE IV.9: Densité spectrale du champ recombéné “classiquement” par somme de fréquences des trois champs triplets dans un cristal de KTP de 0,1 mm taillé selon X. Les champs triplets sont issus d’une génération stimulée par le champ 2 selon le schéma  $\lambda_0^{(-)} - \lambda_2^{(-)} \rightarrow \lambda_1^{(+)} + \lambda_3^{(+)}$ . Le champ 2 est considéré gaussien de 10 nm de largeur à mi-hauteur et contenant  $10^{17}$  photons par impulsion. Ce nombre de photons d’injection correspond au régime de génération mono-injectée établi. L’allure des spectres des champs triplets 1 et 3 générés dans ce régime sont donnés figure III.7. Le spectre du champ 3 considéré est le spectre gaussien injecté, de 10 nm de largeur à mi-hauteur. .

totalément du spectre pour une injection de  $6 \times 10^{15}$  photons, laissant un spectre de type gaussien comme celui de la figure IV.8a. Tout comme pour la mono-injection par le champ 3, ce seuil est bien au dessus du seuil du régime mono-injecté à proprement parlé, (qui est à  $4 \times 10^{13}$  photons d’injection sur le champ 2 comme mentionné au paragraphe III.3.2), puisqu’il correspond à 35 photons générés dus à l’injection sur les champs 1 et 3 contre 0,255 photons générés dus à la fluorescence paramétrique. Comme dans le cas de la mono-injection par le champ 3, les signatures des corrélations sont donc flagrantes, même dans le régime mono-injecté à proprement parler où l’injection est efficace, et ce jusqu’à une injection de  $6 \times 10^{15}$  photons par impulsion sur le champ 2. Au delà de ce nombre de photons d’injection, le pic du champ pompe disparaît, et il faut comparer le spectre obtenu à celui du champ recombéné classiquement comme dans le cas de la mono-injection par le champ 3 paragraphe précédent. Ce champ classique est donné figure IV.9 pour une injection de  $10^{17}$  photons. Il a une largeur à mi-hauteur de 42 nm. Cette largeur est très différente de celle attendue pour le champ recombéné en conservant les liens quantiques pour ce même niveau d’injection, données par le spectre IV.8a qui est d’allure gaussienne avec une largeur à mi-hauteur de 1,2 nm. Par ailleurs, l’intensité du champ incohérent est de nouveau très faible par rapport à celle du champ cohérent, à même niveau injection. Tout comme pour la mono-injection par le champ 3, la signature des corrélations quantiques subsiste, et ce même dans le régime de très haute injection. Par ailleurs, dans le cas du paragraphe précédent en mono-injection par le champ 3, la ressemblance entre les courbes classiques et quantiques à haute injection serait peut-être fortuite.

En conclusion de ces calculs, où les champs triplets sont générés par mono-injection sur l'un des champs, il apparaît qu'il y a conservation des corrélations et possibilité de leur mise en évidence à travers une recombinaison par somme de fréquences d'ordre trois, et ce quelque soit le niveau d'injection.

A basse et moyenne densités de photons stimulants, ces corrélations se révèlent spectralement de la même façon que dans le cas où la génération se fait par fluorescence paramétrique, c'est-à-dire à travers l'existence d'un pic spectral semblable à celui du champ pompe, de même intensité que lors de la recombinaison des champs générés uniquement par fluorescence, et signant donc la recombinaison des photons majoritairement trois par trois du même triplet dû aux fluctuations quantiques ; en effet, ce pic n'apparaît pas dans la recombinaison classique, c'est-à-dire lorsque les trois champs sont indépendants.

A haute injection, ce pic est masqué, mais l'intensité du champ incohérent est très inférieure à celle du champ cohérent attendu, ce qui prouve que les corrélations de nature quantiques, bien que ne se traduisant plus par une recombinaison majoritaire des photons d'un même triplet entre eux, sont toujours bien présentes. De plus, l'allure spectrale du champ recombiné est différente du spectre qui serait attendu classiquement, dans le cas de trois champs indépendants, ce qui est particulièrement visible dans le cas de la mono-injection par le champ 2. Ainsi, la densité de probabilité de recombinaison des photons est modifiée par rapport au cas où serait brisé le lien quantique qui lie les trois champs. Cela signe des corrélations non classiques également dans ce régime hautement injecté, où le nombre de photons générés dus à l'injection est très largement supérieur au nombre de photons générés par la fluorescence paramétrique.

### IV.2.3 TOSFG de champs générés par scission bi-stimulée

L'état quantique du système de photons est cette fois-ci défini comme au paragraphe III.3, expression (III.22), les champs injectés étant toujours considérés comme ayant une distribution spectrale gaussienne comme défini par l'expression (III.14). Comme au paragraphe III.3, les champs stimulants seront nommés 2 et 3, une permutation des indices pouvant ramener, si désiré, au cas d'une stimulation par les champs 1 et 2 ou 1 et 3. Les calculs menant à la densité spectrale du champ somme sont beaucoup plus lourds que dans le cas où les triplets sont obtenus par fluorescence paramétrique ou par génération stimulée à un seul champ, détaillés annexe B. En effet, la plupart des termes qui s'annulaient par la projection des opérateurs sur des états quantiques vides ne s'annulent plus ici. Ainsi, l'expression générale de la projection de l'opérateur d'annihilation  $\hat{a}_\Omega$  du champ somme sur l'état quantique est toujours donnée par l'équation (B.2) de cette annexe B, mais les quatre premiers termes, qui s'annulaient en cas de mono-injection par le champ 2 par projection de  $\hat{a}_3(\omega)$  sur  $|\psi\rangle$  ne s'annulent plus. La projection de  $\hat{a}_\Omega$  à droite sur l'état quantique  $|\psi\rangle$  du système donne donc une somme de 7 termes non nuls, les 7 derniers termes de l'équation (B.2). La densité spectrale du champ somme  $n_\Omega(\Omega, z')$  à la cote  $z'$  du second

cristal s'exprime alors comme un produit de 7 par 7 termes. Les calculs ont été menés, mais ils ne seront pas détaillés ici, où, pour plus de simplicité, nous avons divisé le champ recombinaison en deux : individualisant d'une part le terme équivalent à la recombinaison des champs générés par fluorescence, dit "terme équivalent à la fluorescence", prépondérant à très basse injection ; et d'autre part les termes dépendants de la stimulation, qui sont très nombreux et dont nous n'avons extrait que le terme prépondérant à très haute injection. Nous avons ensuite comparé les deux termes extraits. L'étude du champ recombinaison a été restreinte de la sorte étant donné l'incapacité que nous avons à traiter et à tracer tous ses termes.

A très basse injection, le champ recombinaison est équivalent au terme reproduisant le pic spectral du champ pompe, donné en équation (IV.9), la somme de fréquences étant alors équivalente à celle des champs générés par scission spontanée.

A très haute injection, le champ recombinaison est équivalent au terme classique, c'est-à-dire au champ recombinaison en brisant les propriétés quantiques des champs triplets, eux mêmes équivalents à leur expression à très haute injection. Ce terme est donné par :

$$n_{\Omega}(\Omega, z') = \left| \iiint d\omega_t d\omega'_t d\omega_s \Psi(z', \Omega, \omega_t, \omega'_t) \Phi(L, \omega_p, \omega_t, \omega_s) \sqrt{n_2(\omega_s, 0)} \sqrt{n_3(\omega_p - \omega_t - \omega_s, 0)} \sqrt{n_2(\omega'_t, 0)} \sqrt{n_3(\Omega - \omega_t - \omega'_t, 0)} \right|^2 \quad (\text{IV.13})$$

Deux remarques se dégagent immédiatement de ces expressions limites : à très basse injection, le champ recombinaison comporte la signature spectrale du pic du champ pompe, mettant ainsi en évidence les corrélations entre photons triplets qui se recombinaison préférentiellement entre eux, tout comme s'ils avaient été générés uniquement par fluorescence paramétrique. Il faut noter que ce terme "équivalent à la fluorescence" ne dépend pas du nombre de photons d'injection, ce qui signifie que la probabilité de recombinaison des photons trois par trois du même triplet est fixée quelque soit le niveau d'injection.

A très haute injection, l'expression du champ recombinaison (IV.13) est équivalente à celle du champ classique obtenue lorsque les champs triplets sont générés en régime de haute injection, c'est-à-dire lorsque les champs 2 et 3 sont équivalents aux champs injectés, et le champ 1 équivalent au premier terme de l'expression (III.23), chacun des champs étant alors équivalent à son expression classique. Ce terme est en outre cohérent, ce qui est révélé par le fait que la densité spectrale, donc la probabilité de recombinaison à chaque fréquence, est fonction de l'amplitude spectrale à chaque fréquence, au carré, et non pas la somme des composantes spectrales elles mêmes au carré. En effet, comme discuté en annexe E, dans ce régime de bi-injection forte, la phase de tous les champs étant fixée, toutes les composantes spectrales du champ recombinaison sont cohérentes et amplifiées par interférences constructives quelques soient les photons sommés, qu'ils proviennent du même triplet ou non. La cohérence entre photons d'un même triplet, issue du caractère

quantique de leur génération, est donc masquée par le fait que tous les photons sont cohérents entre eux classiquement, la bi-injection fixant tout. Il semble évident qu'aucune signature de cohérence quantique ne pourra donc être observée dans ce régime, celle-ci étant indiscernable de la cohérence classique dans notre protocole.

Nous allons déterminer la limite entre les régimes dits de “très basse” et “très haute” injection pour vérifier qu'en régime bi-stimulé à proprement parler, aucune signature des corrélations de type “pic du champ pompe” n'est observable. Il faut évidemment noter que les nombreux termes “intermédiaires”, dépendant de l'injection, ne sont pas pris en compte ici, et qu'une signature des corrélations pourrait émaner de ces termes à des régimes de stimulation où ils seraient prépondérants et différents du terme de recombinaison classique. Cependant, ces régimes seraient forcément des régimes d'injection intermédiaire, étant donné que, plus l'injection est forte et plus le terme classique est prépondérant devant les autres, puisqu'il est en puissance 4 des champs d'injection alors que les autres termes sont en puissances inférieures à 3. Nous ne traitons pas ces termes ici, mais nous verrons au paragraphe IV.3.3 que lors de la recombinaison de deux des trois champs triplets dans des conditions de bi-injection comme celles-ci, les termes “intermédiaires” ne sont jamais prépondérants devant les termes extrêmes, et ce quelque soit le niveau d'injection.

Donnons maintenant quelques applications numériques. Comme précédemment, les champs stimulants sont toujours considérés gaussiens spectralement d'une largeur à mi-hauteur de 10 nm. Le cristal recombinant de KTP a également une longueur de 0,1 mm. Nous tracerons les deux termes (IV.9) et (IV.13) donnant les densités spectrales des champs recombinaison par somme de fréquences des champs triplets, respectivement en régimes faiblement et fortement injectés, et nous discuterons de la limite de la prépondérance de chacun des deux régimes. Nous traiterons ici uniquement le cas de la bi-injection par les champs 2 et 3 (schématisé figure IV.10), qui correspond aux expériences menées.

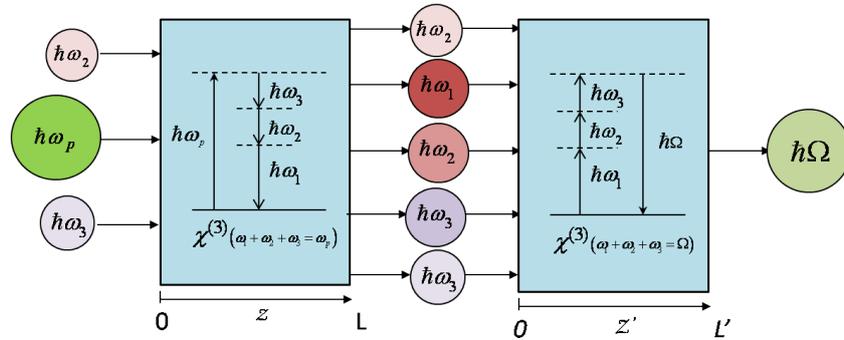


FIGURE IV.10: Schéma fonctionnel représentant la recombinaison des trois champs générés par bi-injection sur les champs 2 et 3

Le terme (IV.9) équivalent au champ recombinaison en régime de faible injection, qui peut aussi être vu comme issu de la partie générée par fluorescence, est comme mentionné

ci-dessus indépendant de l'intensité de la stimulation, et pour nos valeurs expérimentales il vaut toujours  $6 \times 10^{-31}$ , tout comme dans le cas de la recombinaison après génération par fluorescence paramétrique ou mono-injectée (figures IV.3, IV.5c et IV.8c).

Comme annoncé ci dessus, les termes dus à l'injection dans le champ recombinaison sont nombreux, mais nous ne tracerons ici que le terme (IV.13), qui est prépondérant à injection forte. Ce terme est équivalent au terme de recombinaison en régime classique, c'est-à-dire lorsque la densité spectrale de photons générés dus à l'injection est très supérieure à celle des photons générés par fluorescence à chaque fréquence ; c'est-à-dire pour une injection supérieure à  $10^8$  photons par champ avec les paramètres d'interaction choisis, comme discuté au paragraphe III.3.3.

Il apparait que l'intensité du terme classique (IV.13) est égale à celle du pic représentant le spectre du champ pompe pour une injection de  $5,3 \times 10^7$  photons sur chacun des champs stimulants. La comparaison des deux termes en fonction du niveau d'injection est donnée figure IV.11.

Le nombre maximum de photons d'injection pour lequel le pic du champ pompe disparaît totalement se trouve autour de la limite de définition du régime bi-injecté efficace, qui est de  $10^8$  photons par champ. Cela signifie que les corrélations entre photons, qui les "poussent" à se recombiner trois par trois du même triplet, ne sont pas visibles en régime bi-injecté a proprement parler, l'amplitude du fond classique masquant toujours celle du pic "quantique". Seuls les termes non tracés dépendant de l'injection pourraient signer des corrélations s'ils étaient spectralement distinguables du terme équivalent au classique (IV.13). Ces termes tendant à être négligeables devant le terme équivalent au classique dès que l'injection est forte, puisqu'ils dépendent de puissances inférieures de la densité de photons d'injection, il faut donc qu'ils soient suffisamment intenses pour être distingués. Pour donner une idée, les termes intermédiaires de la somme de fréquences des champs deux à deux en régime bi-injecté seront tracés paragraphe IV.3.3.

Nous pouvons conclure que dans ce régime bi-injecté, les observations sur le spectre du champ somme montrent que le pic spectral du champ pompe, dû aux recombinaisons des photons de mêmes triplets, disparaît dès lors que la partie générée par fluorescence n'est plus prépondérante devant la partie générée grâce à l'injection dans l'expression de la densité spectrale des champs triplets. Le pic est en effet masqué par la recombinaison des photons générés grâce à la stimulation, recombinaison équivalente, à haute intensité, à la recombinaison classique de trois champs incohérents (éq. IV.13), comme visible figure IV.11.

A titre de comparaison, en régime de génération mono-injectée, le pic signant la recombinaison des photons entre triplets disparaissait à plus haute injection, subsistant même lorsque les champs triplets générés n'étaient plus équivalents aux champs générés par fluorescence.

Il faut aussi remarquer que bien que les corrélations soient masquées en régime

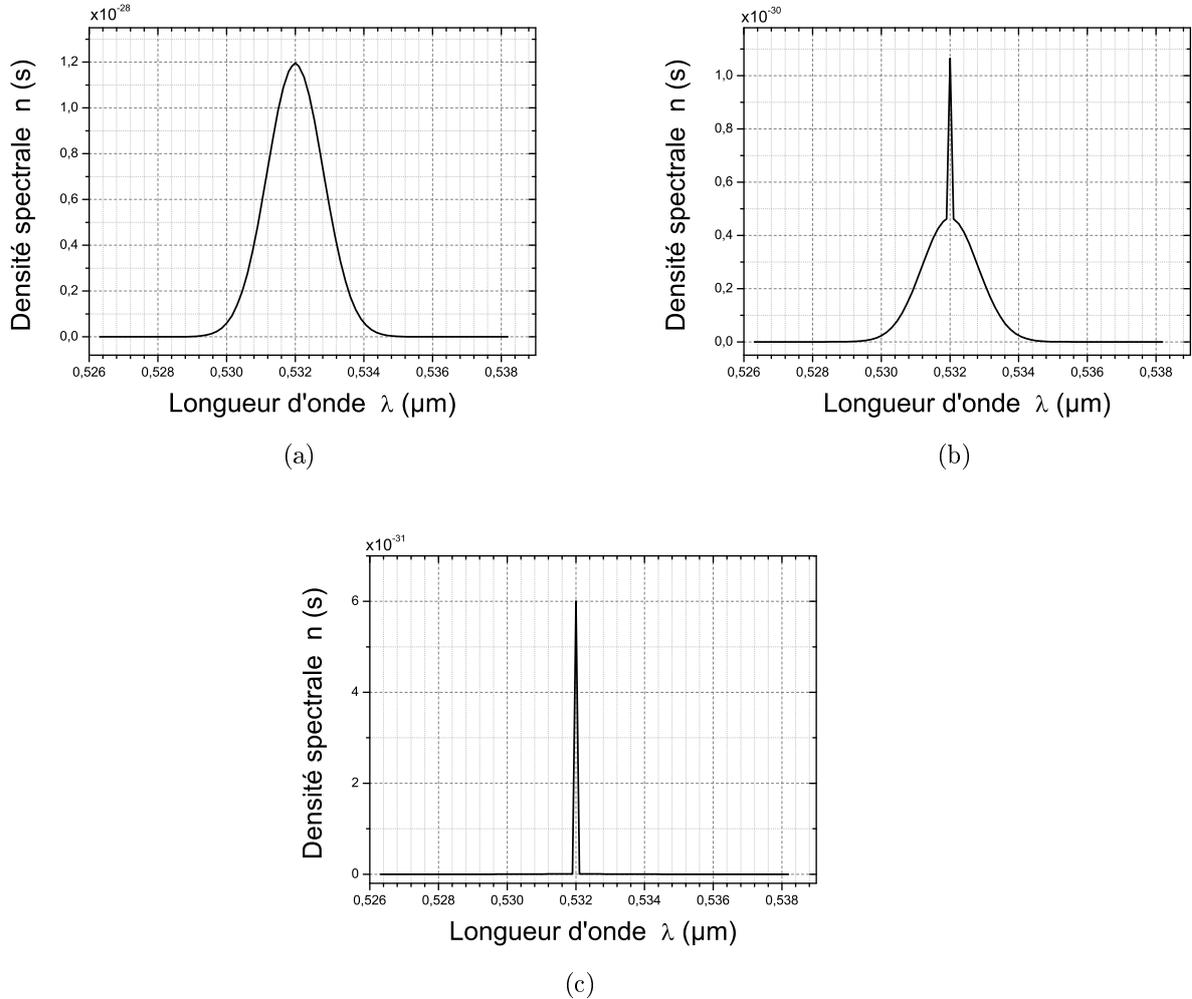


FIGURE IV.11: Somme des densités spectrales des termes équivalents à la fluorescence et à la bi-injection du champ recombinaison par somme de fréquences des trois champs triplets dans un cristal de KTP de 0,1 mm taillé selon X. Ces termes sont respectivement prépondérants dans la densité spectrale du champ recombinaison en régime de très faible et de très forte injection. Les champs triplets sont issus d'une génération bi-stimulée par les champs 2 et 3 considérés comme gaussiens avec chacun respectivement  $2 \times 10^8$  (a),  $5 \times 10^7$  (b) et  $10^7$  (c) photons par impulsion, selon le schéma  $\lambda_0^{(-)} - \lambda_2^{(-)} - \lambda_3^{(+)} \rightarrow \lambda_1^{(+)}$ . Le spectre des champs triplets dans les régimes de génération bi-stimulée sont donnés par les figures III.9 pour le champ 1 non injecté et III.10 pour les champs injectés.

bi-injecté, elles sont malgré tout suffisamment fortes pour subsister tant que la partie générée par fluorescence du champ 1 est prépondérante sur la partie due à l'injection, alors que les champs 2 et 3 injectés sont eux toujours classiquement équivalents aux gaussiennes injectées en entrée. Cela signifie que tous les photons générés par fluorescence du champ 1 se recombinent avec des photons générés par fluorescence des champs 2 et 3, et précisément avec leurs complémentaires de triplet. Par contre, lorsque dans ce champ 1, la partie due à l'injection, c'est à dire équivalente au champ généré classiquement, devient plus forte que la partie générée par fluorescence, il paraît normal que les photons majoritaires, qui n'ont pas spécialement de triplets associés puisqu'ils ne sont plus générés dans un régime quantique trois par trois, se recombinent avec les autres photons injectés des champs 2 et 3, qui eux n'ont pas non plus de triplet associé. Ainsi, dès que l'injection devient suffisamment forte pour avoir un effet sur le champ non injecté, les corrélations sont masquées dans notre protocole par toutes les recombinaisons classiques entre photons plus nombreux que les photons triplets. Il est intéressant ici d'établir un parallèle avec le cas mono-injecté : en régime mono-injecté à proprement parler, c'est-à-dire lorsque l'injection devient trop forte pour que les photons puissent être générés en régime quantique, les photons des deux champs non injectés sont générés en faible nombre par rapport au nombre de photons injectés, et lorsqu'ils se recombinent entre eux avec un troisième photon du champ injecté, le terme n'est pas aussi intense qu'en génération bi-injectée.

#### IV.2.4 Récapitulatif sur les recombinaisons par sommes de fréquences à trois photons

La cohérence quantique entre les champs triplets générés par fluorescence paramétrique est mise en évidence, à travers la somme de fréquences des trois champs, par un champ somme généré spectralement équivalent au champ pompe, signant la recombinaison des photons très préférentiellement trois par trois d'un même triplet, phénomène nécessitant la cohérence temporelle des champs et mettant en évidence les corrélations entre leurs fluctuations quantiques.

En régime bi-injecté efficace, les fluctuations quantiques sont masquées dans l'expression des champs triplets générés (éqs. (III.23)-(III.25)) puisque les termes prépondérants des trois champs sont exactement équivalents aux champs classiques générés par différence de fréquences. Il est alors effectivement constaté l'absence de signatures de corrélations sur le champ sommé, qui est équivalent à la somme de fréquences classique de ces termes prépondérants, cette recombinaison étant cohérente classiquement.

En régime mono-injecté efficace, les expressions des champs triplets (éqs. (III.19)-(III.21)) ne sont pas équivalentes à celles de champs classiques générés par scission mono-stimulée, cette génération ne pouvant pas être décrite classiquement. Le champ injecté est cependant équivalent au champ classique injecté en entrée, étant donné que le gain est faible. Le champ issu de la somme de fréquences des trois champs est constaté différent spectralement et plus intense que le champ qui serait issu de la somme de

fréquences de trois champs indépendants, signant donc une cohérence quantique entre les champs triplets ainsi générés. Le lien qui “poussait” les photons d’un même triplet à se recombiner entre eux, mis en évidence sur les photons triplets générés par fluorescence paramétrique, est masqué ici tout comme dans le cas de génération bi-stimulée, les termes d’évolution issus de la stimulation étant prépondérants dans l’expression des champs. Cependant, contrairement au cas bi-stimulé, ces termes mettent ici en évidence une cohérence et certaines corrélations.

### IV.3 Recombinaisons par sommes de fréquences à deux photons

Nous utiliserons parfois l’abréviation SOSFG (Second-Order Sum Frequency Generation) pour désigner la Génération par Somme de Fréquences du Second Ordre. La recombinaison se fait alors dans un cristal vérifiant les conditions d’accord de phase pour la somme des deux champs concernés, comme le montre le schéma de la figure IV.12.

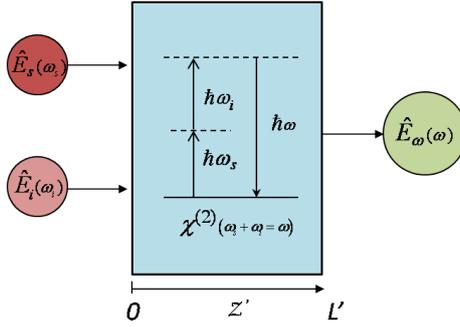


FIGURE IV.12: Schéma fonctionnel général de recombinaison par somme de fréquences à deux champs, arbitrairement choisis comme les champs 1 et 2 pour le schéma. Les opérateurs champs  $\hat{E}_s$  et  $\hat{E}_i$  sont les opérateurs de deux des champs triplets en sortie du cristal générant les triplets de photons.

L’opérateur moment non linéaire décrivant l’évolution du champ somme est fonction de la polarisation non linéaire d’ordre deux et s’écrit comme suit selon l’expression (I.58) :

$$\hat{G}_{nl}^{(2)}(z) = \iint d\omega d\omega' \hbar \beta(\omega, \omega') \left[ \hat{a}_s(\omega', z) \hat{a}_i(\omega - \omega', z) \hat{a}_\omega^+(\omega, z) e^{+i\Delta k(\omega, \omega')z} + c.c. \right] \quad (\text{IV.14})$$

avec

$$\beta(\omega, \omega') = \sqrt{\frac{\hbar}{16\pi\epsilon_0 c^3 S} \frac{\omega\omega'(\omega - \omega')}{n_\omega(\omega)n_s(\omega')n_i(\omega - \omega')}}}, \text{ et } \Delta k(\omega, \omega') = k_\omega(\omega) - k_s(\omega') - k_i(\omega - \omega')$$

Les indices  $s$  et  $i$  dénotent les champs sommés, c’est-à-dire deux des trois champs triplets 1, 2 ou 3 ; l’indice de réfraction  $n_\omega$  est relatif au champ somme.

L'évolution de l'opérateur mode noté  $\hat{a}_\omega$  du champ somme généré est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{a}_\omega(\omega, z')}{\partial z} &= -\frac{i}{\hbar} \left[ \hat{a}_\omega(\omega, z'), \hat{G}_{nl}^{(2)}(z') \right] \\ &= -i \int d\omega' \beta(\omega, \omega') \hat{a}_s(\omega', z') \hat{a}_i(\omega - \omega', z') e^{+i\Delta k(\omega, \omega')z'} \end{aligned} \quad (\text{IV.15})$$

Nous résolvons l'équation d'évolution du mode  $\hat{a}_\omega$  en négligeant la déplétion des champs triplets dans le cristal recombinant, c'est-à-dire en considérant que leurs opérateurs d'évolution sont semblables à ceux en sortie du cristal générant les triplets (de longueur  $L$ ) :  $\hat{a}_{s,i}(\omega, z') = \hat{a}_{s,i}(\omega, 0) = \hat{a}_{s,i}(\omega, L)$  en tout point  $z'$  du cristal recombinant, noté par la suite  $\hat{a}_{s,i}(\omega)$ , avec toujours  $\{s, i\} = \{1, 2, 3\}$ . Cette même approximation avait été faite dans le cas de la recombinaison des trois champs, partie IV.2. L'intégration de l'équation (IV.15) donne :

$$\hat{a}_\omega(\omega, z') = \hat{a}_\omega(\omega, 0) - i \int d\omega' \xi(z', \omega, \omega') \hat{a}_s(\omega') \hat{a}_i(\omega - \omega') \quad (\text{IV.16})$$

avec

$$\xi(z', \omega, \omega') = z' \beta(\omega, \omega') e^{+i\frac{\Delta k(\omega, \omega')z'}{2}} \text{sinc}\left(\frac{\Delta k(\omega, \omega')z'}{2}\right) \quad (\text{IV.17})$$

Seul le deuxième terme de l'expression IV.16 est à prendre en compte dans l'évolution non linéaire du champ recombiné, supposé nul en entrée. La densité spectrale  $n_\omega(\omega, z')$  des photons générés par somme de fréquences dans le cristal est toujours donnée par l'expression (III.7), en remplaçant  $\hat{a}_j(\omega, z)$  par  $\hat{a}_\omega(\omega, z')$ . Comme pour la recombinaison à trois photons, il est nécessaire de développer les opérateurs des champs triplets  $\hat{a}_{s,i}(\omega)$ ,  $s, i = \{1, 2, 3\}$ , en fonction de leurs expressions (III.5) en sortie de cristal générateur. Nous allons de nouveau traiter dans cette partie les situations relatives aux trois cas possibles de génération de triplets : par fluorescence paramétrique, c'est-à-dire par scission spontanée, ainsi que par simple et double stimulation.

### IV.3.1 SOSFG de champs générés par fluorescence paramétrique

Considérons tout d'abord, pour le cas général, la recombinaison par somme des champs 1 et 2. Il est facile de se ramener à la recombinaison des champs 1 et 3 ou 3 et 2 en interchangeant les indices de réfraction 2 et 3 ou 1 et 3 respectivement, au niveau de la génération et de la recombinaison. La permutation des indices de réfraction peut se faire dans la fonction  $\Phi$  par l'intermédiaire du  $\Delta k$  étant donné qu'il est ordonné selon  $\Delta k(\omega_p, \omega, \omega') = k_p(\omega_p) - k_1(\omega) - k_2(\omega') - k_3(\omega_p - \omega - \omega')$ , les changements d'indices revenant ainsi à remplacer  $\Delta k(\omega_p, \omega, \omega')$  par  $\Delta k(\omega_p, \omega, \omega_p - \omega - \omega')$  et  $\Delta k(\omega_p, \omega_p - \omega - \omega', \omega')$  respectivement au moment de la génération. Concernant la recombinaison, l'interversion se fait en attribuant les indices  $\{k_s \text{ et } k_i\}$  à  $\{k_1 \text{ et } k_3\}$  ou à  $\{k_3 \text{ et } k_2\}$  respectivement au lieu de  $\{k_1 \text{ et } k_2\}$ , mais cela n'a pas de répercussion sur la notation de  $\xi(z', \omega, \omega')$ .

Dans le cas de champs générés par fluorescence paramétrique, l'état quantique du système est l'état cohérent vide. La projection sur l'état quantique du système de l'opérateur mode annihilation du champ recombinaison à la côte  $z'$  s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \hat{a}_\omega(\omega, z') |0_1, 0_2, 0_3\rangle = & \quad (IV.18) \\ -i \int d\omega' \xi(z', \omega, \omega') \left( \hat{a}_1(\omega') - i \int d\omega_t \Phi(L, \omega_p, \omega', \omega_t) \hat{a}_2^+(\omega_t) \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega' - \omega_t) \right) \times \\ \left( \hat{a}_2(\omega - \omega') - i \int d\omega'_t \Phi(L, \omega_p, \omega'_t, \omega - \omega') \hat{a}_1^+(\omega'_t) \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega'_t - \omega + \omega') \right) |0_1, 0_2, 0_3\rangle \end{aligned}$$

En développant et en projetant, il vient alors :

$$\begin{aligned} \hat{a}_\omega(\omega, z') |0_1, 0_2, 0_3\rangle = & \\ -i \int d\omega' \xi(z', \omega, \omega') \times [ -i \Phi(L, \omega_p, \omega', \omega - \omega') \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega) |0_1, 0_2, 0_3\rangle \\ - \iint d\omega_t d\omega'_t \Phi(L, \omega_p, \omega', \omega_t) \Phi(L, \omega_p, \omega'_t, \omega - \omega') \times \\ \hat{a}_2^+(\omega_t) \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega' - \omega_t) \hat{a}_1^+(\omega'_t) \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega'_t - \omega + \omega') |0_1, 0_2, 0_3\rangle ] \end{aligned} \quad (IV.19)$$

L'expression de la densité spectrale totale du champ somme s'obtient en multipliant (IV.19) par son complexe conjugué, soit :

$$\begin{aligned} n_\omega(\omega, z') = & \langle 0_1, 0_2, 0_3 | \hat{a}_\omega^+(\omega, z') \hat{a}_\omega(\omega, z') |0_1, 0_2, 0_3\rangle \quad (IV.20) \\ = & \left| \int d\omega' \xi(z', \omega, \omega') \Phi(L, \omega_p, \omega', \omega - \omega') \right|^2 + \\ & \iiint d\omega' d\omega_t d\omega'_t |\xi(z', \omega, \omega')|^2 |\Phi(L, \omega_p, \omega', \omega_t)|^2 |\Phi(L, \omega_p, \omega'_t, \omega - \omega')|^2 + \\ & \iiint d\omega' d\omega_t d\omega'_t \xi^*(z', \omega, \omega'_t) \xi(z', \omega, \omega') \times \\ & \Phi^*(L, \omega_p, \omega'_t, \omega_t + \omega - \omega' - \omega'_t) \Phi^*(L, \omega_p, \omega_t, \omega - \omega'_t) \times \\ & \Phi(L, \omega_p, \omega', \omega_t + \omega - \omega' - \omega'_t) \Phi(L, \omega_p, \omega_t, \omega - \omega') \end{aligned}$$

Comme précédemment, il est possible de négliger les termes d'ordres élevés en  $\xi$  et  $\Phi$ , dans l'approximation de gain faible au niveau de la génération et de la recombinaison. Ainsi, le premier terme de l'expression (IV.20) est prépondérant devant les deux termes suivants. L'expression retenue pour la densité spectrale du champ somme est donc :

$$n_\omega(\omega, z') = \left| \int d\omega' \xi(z', \omega, \omega') \Phi(L, \omega_p, \omega', \omega - \omega') \right|^2 \quad (IV.21)$$

L'expression (IV.21) montre que la densité spectrale du champ somme est différente de l'expression classique de la somme de fréquences à deux champs obtenue en laissant commuter les opérateurs modes dans les expressions IV.16 et (III.5). L'expression classique

de la densité spectrale du champ somme est en effet la suivante :

$$\begin{aligned}
 n_{cl}(\omega, z') &= \int d\omega' |\xi(z', \omega, \omega')|^2 n_1(\omega') n_2(\omega - \omega') \\
 &= \int d\omega' |\xi(z', \omega, \omega')|^2 \iint d\omega_t d\omega'_t |\Phi(z, \omega_p, \omega', \omega_t)|^2 |\Phi(z, \omega_p, \omega'_t, \omega - \omega')|^2
 \end{aligned}
 \tag{IV.22}$$

Comme attendu, le terme classique (IV.22) se retrouve dans l'expression totale (IV.20) de la densité spectrale, négligeable devant le premier terme. Ce second terme est effectivement obtenu sans aucune non-commutation quantique nécessaire, c'est donc un terme incohérent quantiquement. Ce terme étant négligeable dans l'expression du champ recombinaison, cela prouve l'existence de corrélations non classiques fortes entre les champs triplets. Nous allons tracer ce champ recombinaison dans quelques cas particuliers qui nous permettront de mieux comprendre l'effet de ces corrélations.

Nous allons maintenant envisager des exemples expérimentaux. Les paramètres relatifs à la génération de triplets pour le calcul des recombinaisons à deux photons sont les mêmes que ceux définis paragraphe III.2.2. Les champs triplets générés sont donnés figure III.3. Les champs 1 et 3 étant dégénérés en polarisation, il y a deux scénarios possibles pour la recombinaison, rappelés respectivement sur les schémas fonctionnels IV.13 et IV.16 :  $\lambda_1^{(+)} + \lambda_3^{(+)} \rightarrow \lambda_A^{(-)}$  et  $\lambda_1^{(+)} + \lambda_2^{(-)} \rightarrow \lambda_B^{(-)}$ , ce dernier schéma étant équivalent à  $\lambda_3^{(+)} + \lambda_2^{(-)} \rightarrow \lambda_B^{(-)}$ . Les champs sommes issus de ces deux scénarios ont été tracés respectivement figures IV.14 et IV.15 pour le premier, et figures IV.17 et IV.18 pour le second.

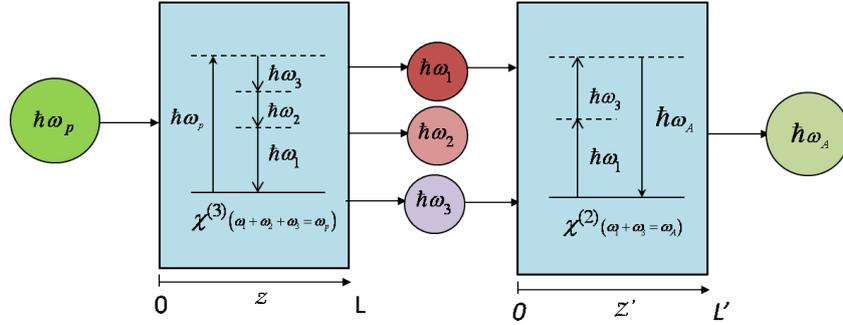


FIGURE IV.13: Schéma fonctionnel représentant la recombinaison des champs 1 et 3 générés par fluorescence paramétrique.

Pour la recombinaison des champs 1 et 3, le cristal choisi est un cristal de *KTP* taillé selon la direction ( $\theta = 34^\circ$ ,  $\varphi = 30^\circ$ ) afin de permettre l'accord de phase pour les fréquences considérées. Sa longueur est prise égale à 0,1 mm. Le champ généré, tracé figure IV.14, présente une allure étroitement liée à celle du champ 2 (figure III.3b), de même que sa largeur spectrale en fréquence, toutes deux étant de  $3,25 \times 10^{13} \text{ rad.s}^{-1}$  pic à pic.

Le double pic très prononcé du champ somme reproduit celui du champ 2. Pour s'en convaincre, il est possible d'envisager la génération des photons triplets dans un cristal

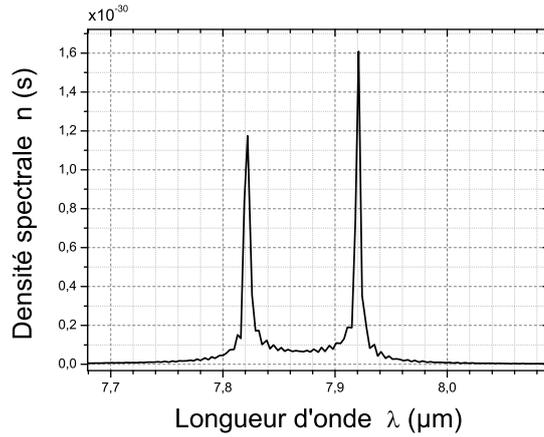


FIGURE IV.14: Spectre du champ obtenu par SOSFG dans un cristal de *KTP* de 0,1 mm taillé selon la direction ( $\theta = 34^\circ$ ,  $\varphi = 30^\circ$ ) pour la recombinaison des champs triplets 1 et 3 générés dans les conditions données au paragraphe III.2.2 et dont le spectre est donné figure III.3.

plus court, de 0,1 mm par exemple, au lieu du cristal de 10 mm. Alors, comme annoncé au paragraphe III.2.2, le cristal de génération rétrécissant, la tolérance de l'accord de phase présenté courbe III.2 augmente et donc les spectre des champs générés s'élargissent, ce qui est particulièrement visible sur le spectre du champ 2. Ce spectre est donné figure IV.15a avec en figure IV.15b le spectre du champ somme des champs 1 et 3 correspondant aux mêmes conditions de génération des champs. Sur le champ 2, les deux pics sont désormais confondus en un seul, les tangentes horizontales des points  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_3$  et  $\beta_{1,3}$  de la courbe d'accord de phase III.2 ayant disparu du fait de l'augmentation de l'acceptance spectrale grande, comme le montre la courbe d'accord de phase élargie III.4. Dans ces conditions de génération, le spectre du champ somme des champs 1 et 3 figure IV.15b suit exactement l'allure du champ 2, et leurs largeurs spectrales sont toujours identiques entre elles, égales à  $1,8 \times 10^{14} \text{ rad.s}^{-1}$ .

De même que la somme des champs 1 et 3, la somme des champs 1 (ou 3 identiquement) et 2 suit également exactement l'allure du champ complémentaire non sommé, c'est-à-dire le champ 3 (ou 1 respectivement). Pour cette recombinaison, le cristal choisi vérifiant l'accord de phase est un cristal de *KTP* taillé selon la direction ( $\theta = 52^\circ$ ,  $\varphi = 0^\circ$ ). Le cristal est toujours de 0,1 mm de long afin d'éviter autant que possible les limitations dues à l'acceptance spectrale. Cependant, contrairement à la somme des champs 1 et 3 où il a été vérifié, en prenant une longueur de cristal plus petite, que celui-ci ne limitait pas la largeur spectrale du champ somme, ici le champ somme est tellement étalé spectralement que même un cristal de 0,1 mm limite son spectre. Les calculs ont donc également été effectués pour la somme des champs dans un cristal pris idéalement infiniment fin à  $10^{-9} \text{ m}$  afin d'être sûr que ses propriétés d'accord de phase ne limiteraient pas l'interaction.

Figures IV.17a et IV.17b sont tracés les champs correspondant aux deux longueurs d'interactions  $10^{-4} \text{ m}$  et  $10^{-9} \text{ m}$  respectivement. Nous observons que les champs sont

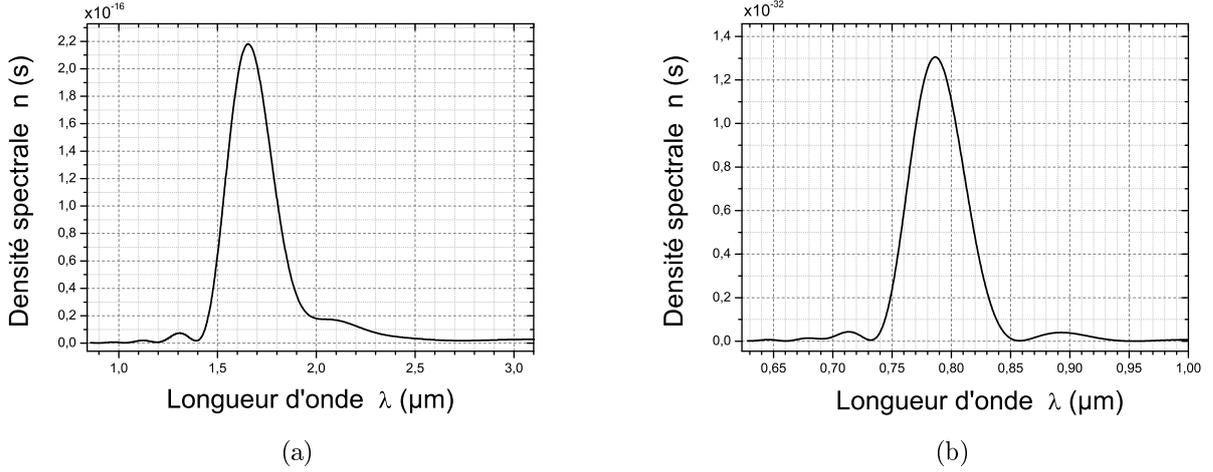


FIGURE IV.15: (a) Spectre du champ 2 généré par fluorescence paramétrique selon le schéma  $\lambda_0^{(-)} \rightarrow \lambda_1^{(+)} + \lambda_2^{(-)} + \lambda_3^{(+)}$  dans un cristal de KTP de 0,1 mm taillé selon X. (b) Spectre du champ obtenu par SOSFG dans un cristal de KTP de 0,1 mm taillé selon  $(\theta = 34^\circ, \varphi = 30^\circ)$  par recombinaison des champs triplets 1 et 3 générés dans les conditions décrites au paragraphe III.2.2 dans un cristal de 0,1 mm et dont le spectre est donné figure III.3 à un très léger élargissement près.

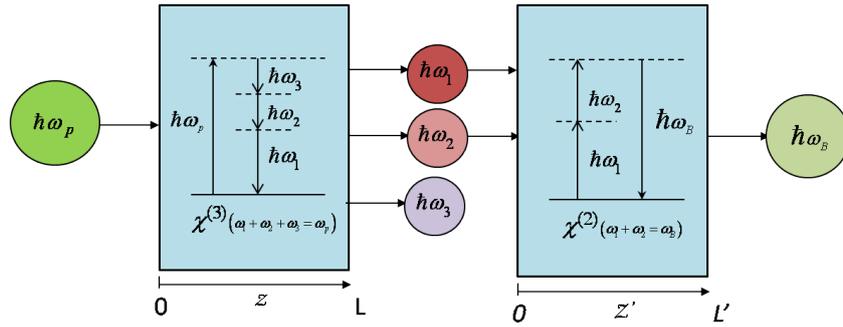


FIGURE IV.16: Schéma fonctionnel représentant la recombinaison des champs 1 et 2 générés par fluorescence paramétrique.

effectivement différents entre eux, le premier étant limité par le cristal. Nous nous intéressons donc plus particulièrement au second champ, celui qui n'est pas limité par le cristal, dont la largeur spectrale est de  $1,6 \times 10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$ , tout comme celle du champ 3 non recombinaison, tracé figure III.3a. A première vue, l'allure du champ sommé et du champ 3 ne paraît pas spécialement similaire, mais lorsque leurs spectres en fréquence donnés figure IV.18 sont comparés, leur similitude apparaît bel et bien. De nouveau, le spectre du champ somme est donc étroitement lié en allure et en largeur spectrale à celui du champ complémentaire non sommé.

Pour s'assurer que ces sommes de fréquences à deux champs signifient bien des corrélations non classiques entre les champs, il est possible de les comparer rapidement aux champs recombinaison classiques dans les mêmes conditions, regroupés figure IV.19. Ils sont comme attendu beaucoup moins intenses car incohérents, et ont une allure spectrale

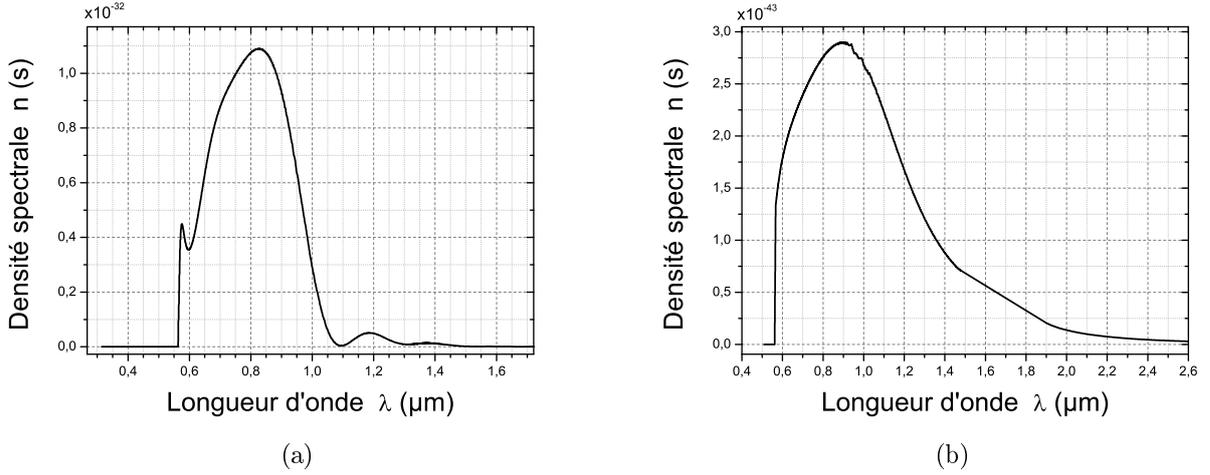


FIGURE IV.17: Spectre du champ obtenu par SOSFG des champs triplets 1 et 2 dans un cristal de KTP de 0,1 mm de longueur (a) et  $10^{-9}$  m (b).

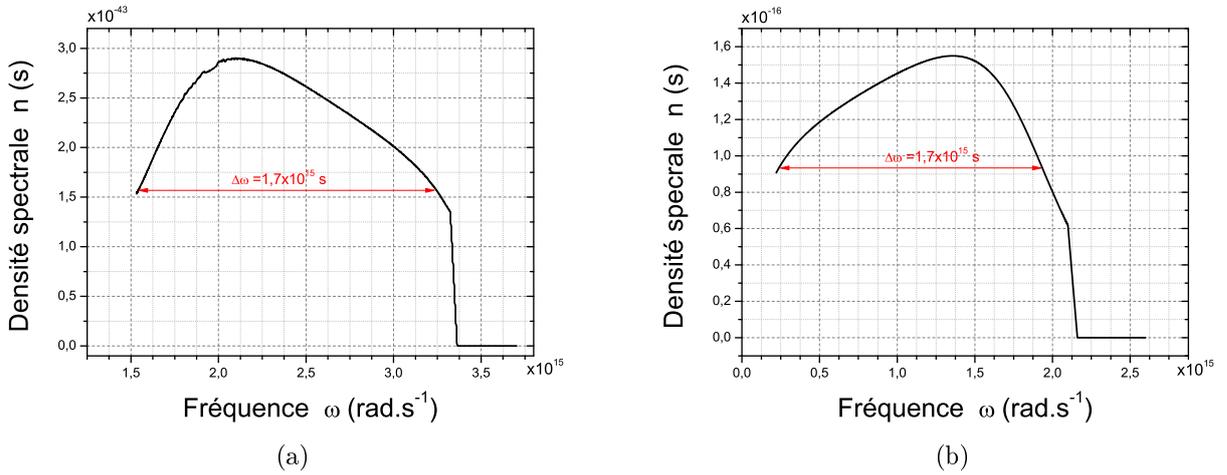


FIGURE IV.18: Spectres en fréquences des champs somme des champs 1 et 2 dans un cristal de  $10^{-9}$  m (a) après génération dans un cristal de KTP de 10 mm, le spectre du champ généré étant donné en (b).

bien différente, excepté bien entendu la somme des champs 1 et 2 dans un cristal de 0,1 mm, qui est limitée spectralement par la tolérance d'accord de phase du cristal, et donc identique à la courbe quantique qui est limitée elle aussi. Compte tenu de cette limitation, nous prendrons pour toute la suite un cristal de  $10^{-9}$  m pour nos applications numériques relatives à la somme des champs 1 et 2. Bien que ce cas n'ait pas de sens expérimentalement, nous voulons pouvoir vérifier des signatures non classiques sans être limité par l'acceptance spectrale.

Les allures des champs recombinaison donnent les indices nécessaires qui permettent de bien comprendre que les corrélations entre champs triplets pris deux à deux jouent exactement le même rôle ici que lors des recombinaisons à trois champs, c'est-à-dire qu'elles "poussent" les photons à se recombinaison très préférentiellement, deux à deux ici, entre photons d'un même triplet. Cette recombinaison à deux photons est très belle au

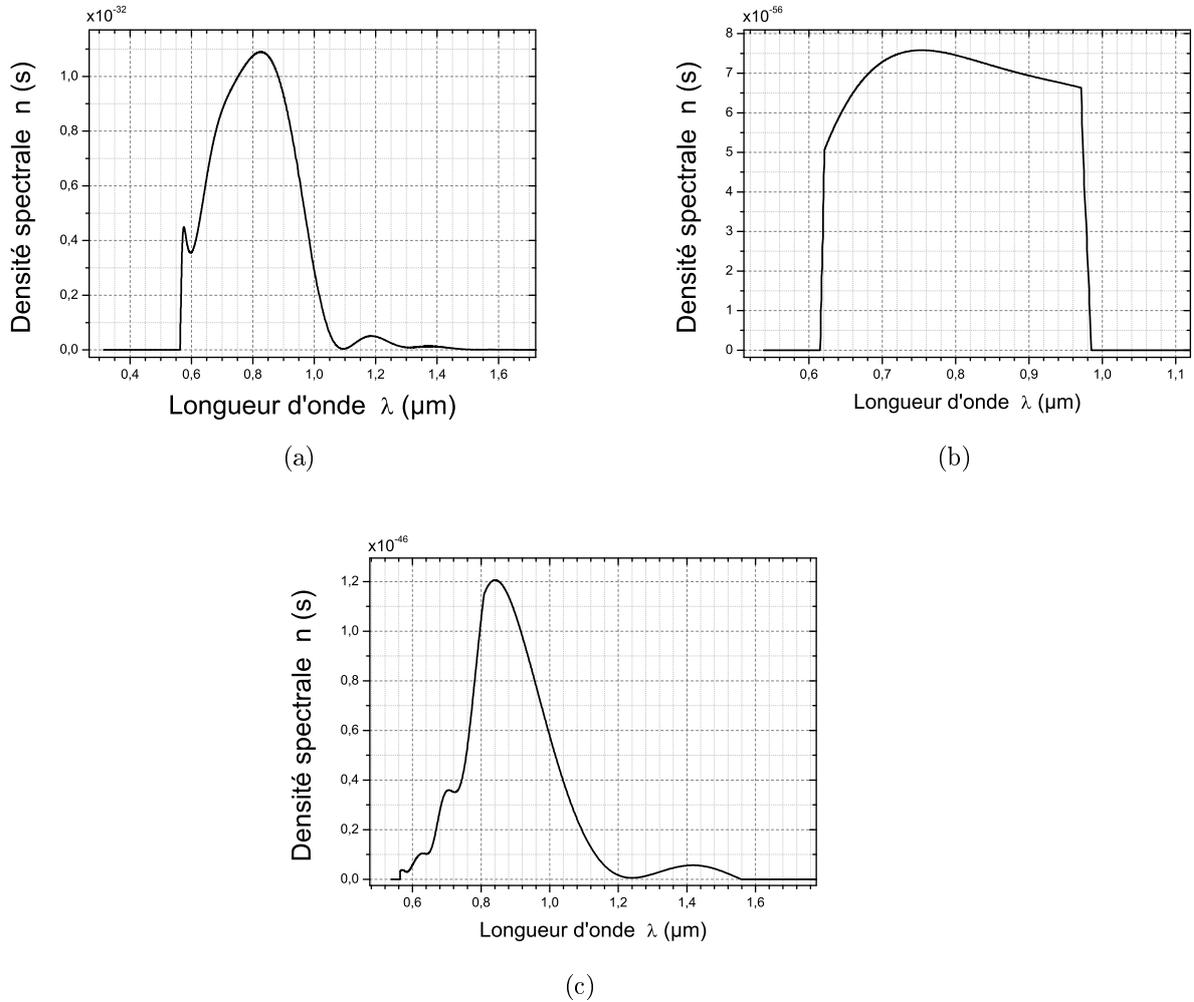


FIGURE IV.19: Spectre des champs obtenus par recombinaison classique (selon l'expression (IV.22)) des champs triplets générés par fluorescence paramétrique donnés figure III.3. Les figures (a) et (b) présentent le spectre de la somme des champs 1 et 2 recombinaison classique dans un cristal de KTP taillé selon  $(\theta = 52^\circ, \varphi = 0^\circ)$  respectivement de  $0,1 \text{ mm}$  et  $10^{-9} \text{ m}$ , en comparaison des spectres de recombinaison quantiques figures IV.17a et IV.17b. La figure (c) présente le spectre de la somme des champs 1 et 3 dans un cristal de KTP de  $0,1 \text{ mm}$  taillé selon  $(\theta = 34^\circ, \varphi = 30^\circ)$ , les champs triplets étant générés dans un cristal de  $10 \text{ mm}$ . Cette figure est à comparer au spectre du même champ recombinaison quantique figure IV.14.

sens où elle met en évidence à la fois le lien que les photons recombinaison possèdent entre eux mais révèle également le lien entretenu avec le photon de leur triplet appartenant au champ mis à l'écart. En effet, la conservation de l'énergie des photons au moment de la génération impose  $\delta\omega_p = \delta\omega_1 + \delta\omega_2 + \delta\omega_3$ ,  $\delta\omega_{1,2,3}$  désignant l'écart de la fréquence générée par rapport aux fréquences centrales  $\omega_{1,2,3}^0$ , vérifiant l'accord de phase et telles que  $\omega_1^0 + \omega_2^0 + \omega_3^0 = \omega_p$ . L'interaction considérée suit donc la division de fréquence suivante :  $\omega_p + \delta\omega_p = \omega_1^0 + \delta\omega_1 + \omega_2^0 + \delta\omega_2 + \omega_3^0 + \delta\omega_3$ . L'extension spectrale  $\delta\omega_p$  du champ pompe étant nulle puisqu'il est considéré comme monochromatique, la relation sur les fréquences de trois photons triplets devient :  $\delta\omega_1 + \delta\omega_2 + \delta\omega_3 = 0$ . Ainsi, au moment de la somme de fréquences des champs, tous les photons se recombinaison exclusivement entre photons d'un même triplet, cette relation donne un champ somme à trois champs constitué d'un dirac d'extension spectrale nulle comme le champ pompe, et donne un champ somme à deux champs d'extension spectrale égale à celle du troisième champ non sommé, i.e.  $\delta\omega_s = \delta\omega_1 + \delta\omega_2 = -\delta\omega_3$ , ce qui est exactement ce que nous obtenons.

En conclusion, la somme de deux des champs triplets donne un champ possédant l'allure spectrale du champ complémentaire, alors que le spectre du champ somme de fréquence de deux champs indépendants aurait été la convolution des spectres de ces deux champs. Cela prouve qu'après une génération par fluorescence paramétrique, que les trois champs triplets soient considérés ensemble ou par deux, leurs corrélations sont identiquement révélées par interaction par somme de fréquences au travers de la recombinaison très préférentielle de photons issus d'un même triplet, signant la cohérence des champs triplets ainsi générés.

### IV.3.2 SOSFG de champs générés par scission mono-stimulée

Il est nécessaire ici de distinguer deux cas : le cas où la somme de fréquences se fait entre deux champs qui n'ont pas été injectés, et le cas où elle se fait entre le champ injecté et un autre champ. Dans les deux cas, l'opérateur mode du champ somme est toujours donné par l'expression IV.16. La projection sur l'état quantique va être différente suivant que les deux champs recombinaison sont injectés ou non. Choisissons de nommer 1 et 2 les champs sommés.

Dans le cas de la recombinaison entre les deux champs non injectés, le champ injecté étant donc le champ 3, la densité spectrale du champ somme des champs 1 et 2 s'exprime à la côte  $z'$  du cristal recombinaison par :

$$n_\omega(\omega, z') = \left| \int d\omega' \xi(z', \omega, \omega') \Phi(L, \omega_p, \omega', \omega - \omega') \sqrt{n_3(\omega_p - \omega) + 1} \right|^2 \quad (\text{IV.23})$$

Les calculs sont détaillés annexe C.

Dans le cas de la recombinaison entre le champ injecté et un champ non injecté, en considérant par exemple que le champ 2 est le champ d'injection, l'expression de la densité

spectrale du champ somme des champs 1 et 2 devient (voir annexe C), en négligeant les termes en puissances supérieures du gain :

$$\begin{aligned}
 n_\omega(\omega, z') = & \\
 & \iiint d\omega_1 d\varpi' d\omega' \xi^*(z', \omega, \varpi') \xi(z', \omega, \omega') \Phi(L, \omega_p, \omega', \omega_1) \Phi^*(L, \omega_p, \varpi', \omega' + \omega_1 - \varpi') \times \\
 & \sqrt{n_2(\omega - \varpi')} \sqrt{n_2(\omega - \omega')} \sqrt{n_2(\omega' + \omega_1 - \varpi')} \sqrt{n_2(\omega_1)} + \\
 & \iint d\omega' d\omega_1 |\xi(z', \omega, \omega')|^2 |\Phi(L, \omega_p, \omega', \omega_1)|^2 n_2(\omega - \omega') + \\
 & 2\text{Re} \left( \iint d\varpi' d\omega' \xi^*(z', \omega, \varpi') \xi(z', \omega, \omega') \Phi^*(L, \omega_p, \varpi', \omega - \varpi') \Phi(L, \omega_p, \omega', \omega - \omega') n_2(\omega - \omega') \right) + \\
 & \left| \int d\omega' \xi(z', \omega, \omega') \Phi(L, \omega_p, \omega', \omega - \omega') \right|^2
 \end{aligned} \tag{IV.24}$$

Remarquons que dans les deux cas, qu'il s'agisse de la recombinaison des deux champs non injectés ou bien d'un champ injecté avec un champ non injecté, à injection faible le champ somme se retrouve équivalent au champ sommé après génération par fluorescence paramétrique, dont l'expression est donnée éq. (IV.21).

Comme indiqué en annexe C, dans le cas où une recombinaison correspondant à une combinaison différente des champs est envisagée, ou s'il s'agit de faire porter l'injection sur un champ différent (le champ 1 par exemple), il suffit alors d'effectuer le changement d'indices, tant au niveau des indices de réfraction que des densités spectrales.

Pour comparer à la somme de fréquences classique de ces champs, rappelons que la densité spectrale du champ sommé classiquement à partir des champs 1 et 2 vaut :

$$n_{cl}(\omega, z') = \left| \int d\omega' \xi(z', \omega, \omega') \sqrt{n_1(\omega', L)} \sqrt{n_2(\omega - \omega', L)} \right|^2 \tag{IV.25}$$

La densité spectrale du champ 1 est donnée en équation (III.19) ; celle du champ 2 est donnée par l'équation (III.20) si l'injection se fait par le champ 3, ou par la densité spectrale injectée dans le cas d'une mono-injection par ce champ. La densité spectrale du champ somme classique est donc, dans le cas d'une recombinaison des deux champs non injectés (donc en faisant porter l'injection sur le champ 3) :

$$\begin{aligned}
 n_{cl}(\omega, z') = & \int d\omega' |\xi(z', \omega, \omega')|^2 \iint d\omega_t d\omega'_t |\Phi(L_1, \omega_p, \omega', \omega_t)|^2 |\Phi(z, \omega_p, \omega_t, \omega - \omega')|^2 \times \\
 & [1 + n_3(\omega_p - \omega_t - \omega + \omega')] [1 + n_3(\omega_p - \omega_t - \omega')]
 \end{aligned} \tag{IV.26}$$

Pour la recombinaison d'un champ injecté avec un champ non injecté (donc en faisant porter l'injection sur le champ 2), il vient :

$$n_{cl}(\omega, z') = \int d\omega' |\xi(z', \omega, \omega')|^2 \int d\omega_t |\Phi(L_1, \omega_p, \omega', \omega_t)|^2 [1 + n_2(\omega_p - \omega_t - \omega')] n_2(\omega - \omega') \tag{IV.27}$$

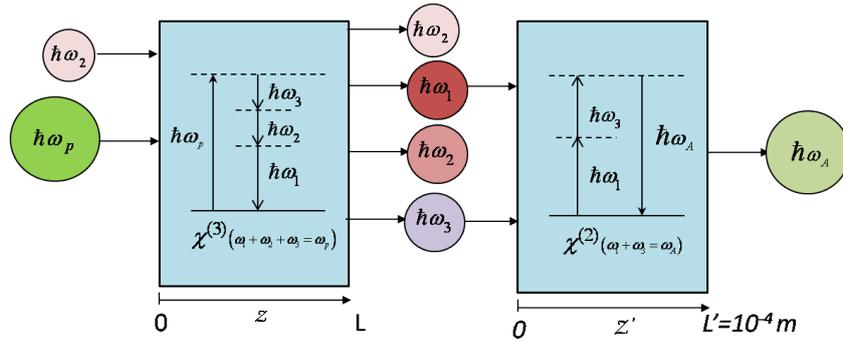


FIGURE IV.20: Schéma fonctionnel du scénario A représentant la recombinaison des champs 1 et 3 issus d'une génération mono-injectée sur le champ 2.

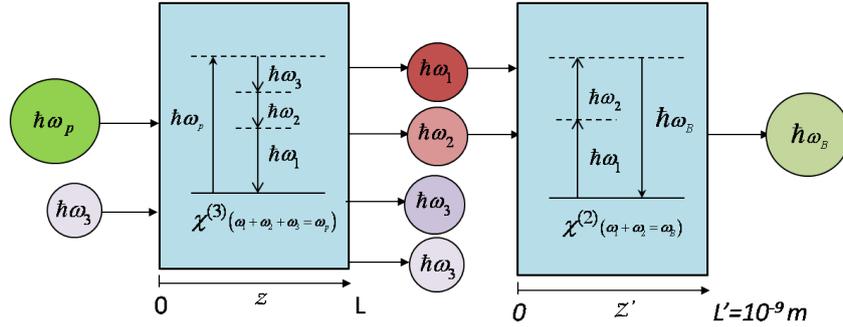


FIGURE IV.21: Schéma fonctionnel du scénario B représentant la recombinaison des champs 1 et 2 issus d'une génération mono-injectée sur le champ 3.

Ces termes se retrouvent dans les expressions quantiques totales des champs lorsque tous les opérateurs commutent (expression IV.24), mais ils ont été négligés dans l'approximation du gain faible. Leur faible intensité annonce donc a priori une signature de corrélations quelque soit le niveau d'injection et dans les deux cas d'injection envisagés.

Nous allons maintenant considérer l'application numérique dans les cas de la somme des deux champs non injectés puis ceux de la somme d'un champ injecté avec un champ non injecté, ces recombinaisons étant réalisées dans un cristal de KTP. Dans chacun de ces deux cas, une mono-injection par le champ 2 ou bien par le champ 3 seront envisagées. Comme précédemment, les champ stimulants sont toujours considérés comme spectralement gaussiens avec une largeur à mi-hauteur de 10 nm.

Commençons tout d'abord par la recombinaison des deux champs qui ne sont pas injectés. Comme indiqué sur les schémas IV.20 et IV.21, il y a deux scénarios, A et B, d'interaction possibles étant donné la polarisation de nos champs :  $\lambda_1^{(+)} + \lambda_3^{(+)} \rightarrow \lambda_A^{(-)}$  avec injection par le champ 2, et  $\lambda_1^{(+)} + \lambda_2^{(-)} \rightarrow \lambda_B^{(-)}$  avec injection par le champ 3.

La densité spectrale du champ somme est donnée par l'équation (IV.23) dans le cas du scénario B ; un changement de l'indice 2 en 3 au niveau des indices de réfraction et de la densité spectrale d'injection permet de passer au schéma A à partir de cette même équation. Les densités spectrales des champs somme générés sont données figures IV.22 et IV.23 pour différents niveaux d'injection dans chacun des deux schémas d'interaction.

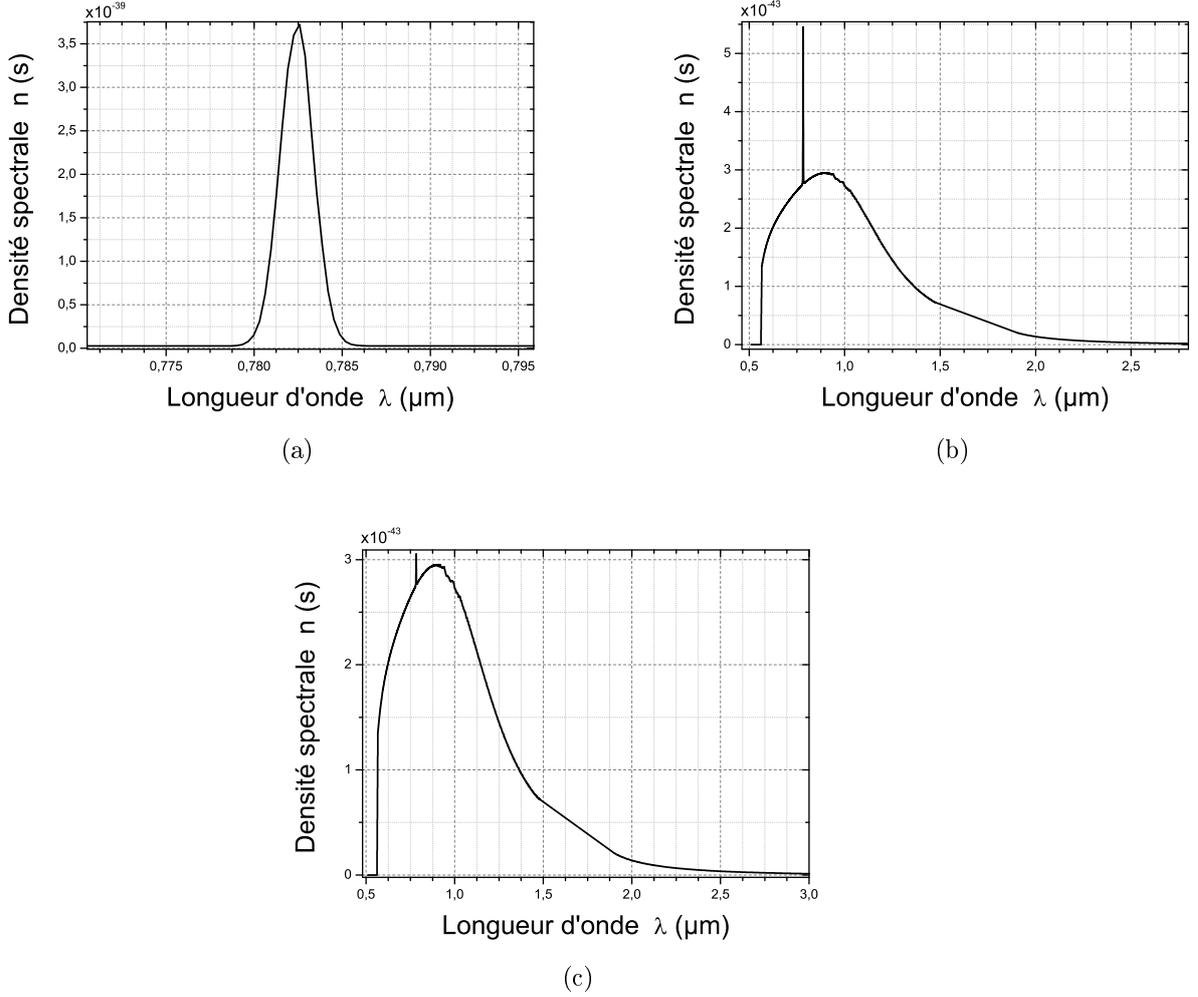


FIGURE IV.22: Spectre du champ obtenu par SOSFG des champs triplets 1 et 2 dans un cristal de *KTP* taillé selon ( $\theta = 52^\circ$ ,  $\varphi = 0^\circ$ ) d'une longueur "théorique" de  $10^{-9}$  m (b). Les champs triplets sont générés par scission stimulée sur le champ 3 considéré gaussien avec respectivement  $10^{15}$  (a),  $7,26 \times 10^{12}$  (b) et  $7,26 \times 10^{11}$  (c) photons par impulsion. Les spectres des champs triplets correspondants sont donnés par la somme des spectres des figures III.6 et III.3.

Pour le schéma A, le cristal choisi est le même que dans le cas de la recombinaison des triplets générés par fluorescence paramétrique, à savoir un cristal de *KTP* de 0,1 mm taillé selon ( $\theta = 34^\circ$ ,  $\varphi = 30^\circ$ ). Pour le schéma B, le cristal choisi est un cristal de *KTP* de 1 nm taillé dans la direction ( $\theta = 52^\circ$ ,  $\varphi = 0^\circ$ ).

Dans les deux schémas, nous retrouvons, à injection faible (figures IV.22c et IV.23c), un champ somme identique à celui généré par recombinaison dans le cas de la fluorescence paramétrique (figures IV.14 et IV.17b), comme lisible sur l'expression (IV.23).

À injection plus forte, le champ généré se différencie de celui qui serait obtenu par fluorescence paramétrique et devient une gaussienne centrée à la fréquence correspondant à l'accord de phase de la somme des champs générés par mono-injection forte. Afin de vérifier que, bien que non équivalent au cas de la fluorescence paramétrique, le champ

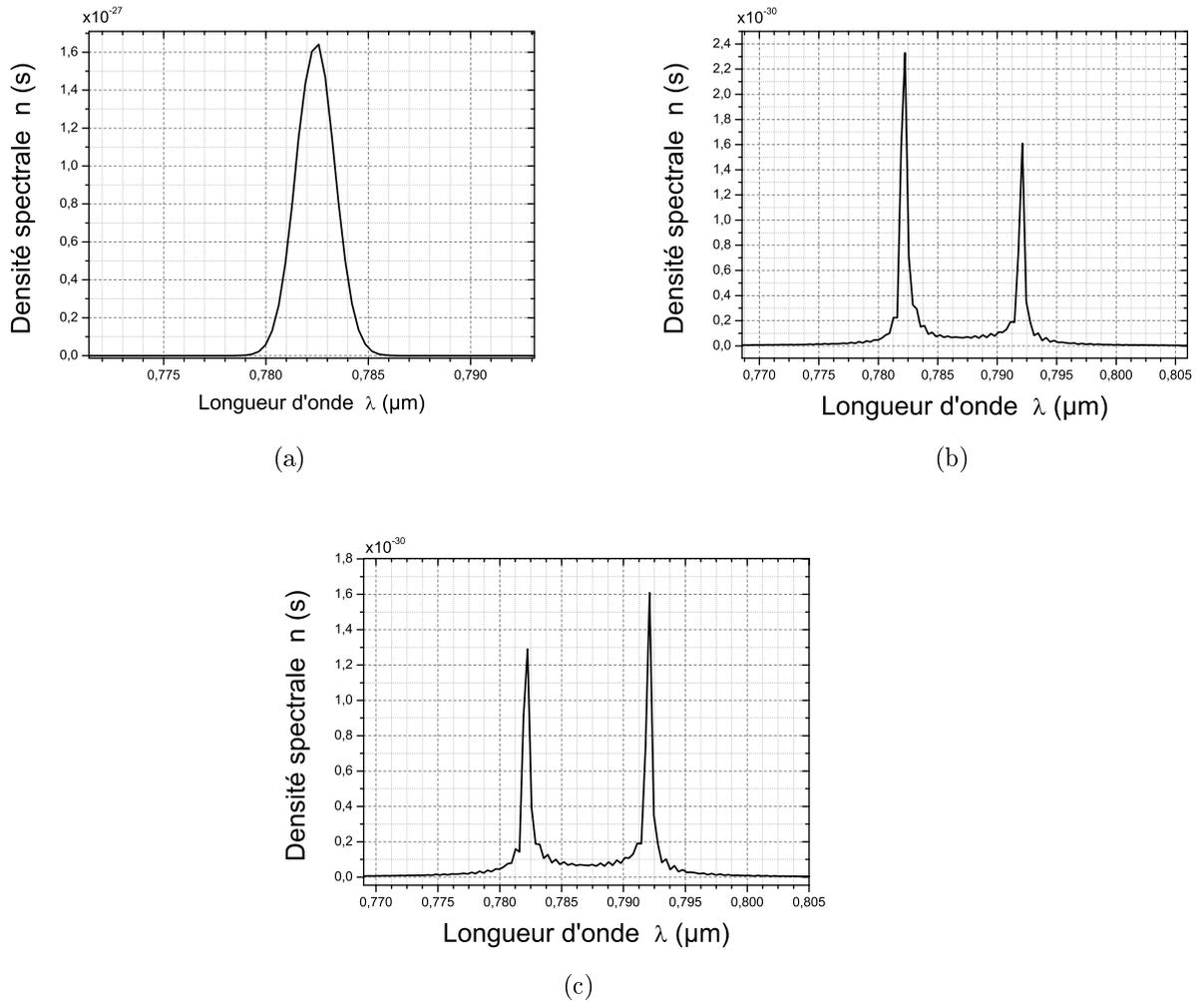


FIGURE IV.23: Spectre du champ obtenu par SOSFG des champs triplets 1 et 3 dans un cristal de KTP de 0,1 mm taillé selon ( $\theta = 34^\circ$ ,  $\varphi = 30^\circ$ ). Les champs triplets sont générés par scission stimulée sur le champ 2 considéré gaussien avec respectivement  $10^{15}$  (a),  $7,26 \times 10^{12}$  (b) et  $7,26 \times 10^{11}$  (c) photons par impulsion. Les spectres des champs triplets correspondants sont donnés par la somme des spectres des figures III.7 et III.3.

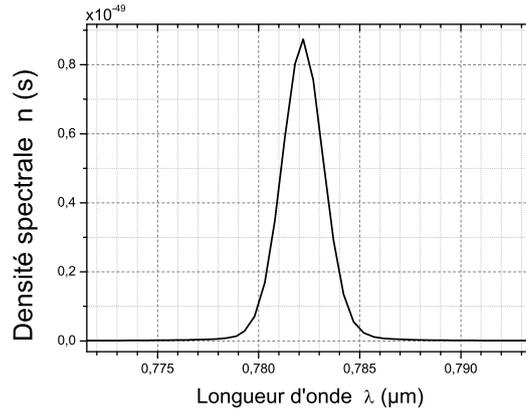


FIGURE IV.24: Spectre du champ obtenu par SOSFG classique des champs triplets 1 et 2 dans un cristal de KTP de  $10^{-9}$  m taillé selon ( $\theta = 52^\circ$ ,  $\varphi = 0$ ). Les champs triplets sont générés par scission fortement stimulée sur le champ 3 considéré gaussien avec  $10^{17}$  photons. Les spectres des champs triplets correspondants sont donnés figure III.6.

recombiné comporte une signature de corrélations, nous allons le comparer à la courbe de convolution classique recombinaison, selon les mêmes schémas, les champs indépendants entre eux. Ces spectres de recombinaisons classiques sont donnés figures IV.25 et IV.24. Dans le cas de la recombinaison des champs 1 et 2, le champ sommé classiquement à injection forte (figure IV.24) a une largeur à mi-hauteur de 2 nm, contre 2,5 nm pour le champ somme recombinaison “quantiquement” (figure IV.22a). Dans le cas de la recombinaison des champs 1 et 3 en revanche, la différence est beaucoup plus prononcée puisque le champ recombinaison classiquement à injection forte (fig. IV.25) a une largeur d’environ 90 nm contre 2,2 nm pour le champ recombinaison “quantiquement” sous le même niveau d’injection (fig. IV.23a). Comme attendu, ces termes classiques, sommes incohérentes des champs, sont beaucoup moins intenses que les termes traduisant la cohérence quantique des champs triplets.

Il est intéressant de noter que la différenciation avec la recombinaison des champs issus de la fluorescence paramétrique apparaît plus vite en terme d’injection ici que dans le cas de la TOSFG comme le montre la figure IV.8 où seul le pic équivalent à la fluorescence était visible pour une injection de  $7,26 \times 10^{12}$  photons par impulsion, et où ce pic subsistait même en régime de mono-injection efficace, ce qui n’est pas le cas ici.

En conclusion, la recombinaison des champs non injectés, générés en régime de mono-injection forte, signe des corrélations entre les photons triplets recombinaison, quelque soit le niveau d’injection, que ce soit par similitude du champ recombinaison avec le champ recombinaison en régime de fluorescence paramétrique (ce qui est le cas à mono-injection faible ou moyenne) ou par différence d’amplitude et d’allure spectrale par rapport au cas classique de recombinaison. D’autre part, étant donné que c’est le terme dû à l’injection qui est plus restreint spectralement, le terme équivalent à la recombinaison des photons émis par fluorescence sera toujours distinguable, et ce même en mono-injection forte, à

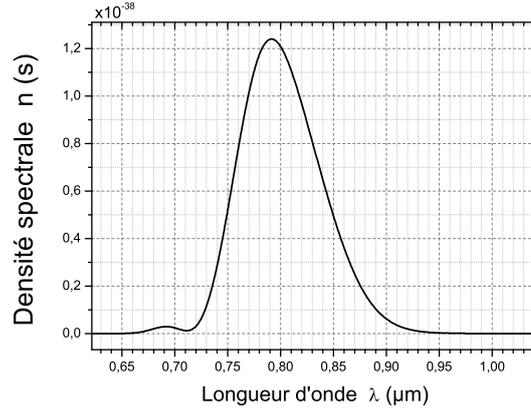


FIGURE IV.25: *Spectre du champ obtenu par SOSFG classique des champs triplets 1 et 3 dans un cristal de KTP de 0,1 mm taillé selon ( $\theta = 34^\circ$ ,  $\varphi = 30^\circ$ ). Les champs triplets sont générés par scission fortement stimulée sur le champ 2 considéré comme gaussien avec  $10^{17}$  photons par impulsion. Les spectres des champs triplets correspondants sont figure III.7.*

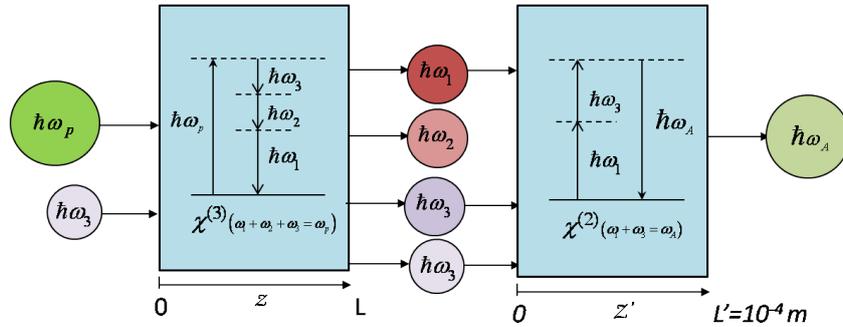


FIGURE IV.26: *Schéma fonctionnel du scénario A représentant la recombinaison des champs 1 et 3 issus d'une génération mono-injectée sur le champ 3.*

condition que le détecteur soit capable de le détecter à des fréquences différentes de celles du champ classique. Cependant, ce cas présente assez peu d'intérêt puisque si une telle mesure est possible, mieux vaut alors la réaliser sans stimulation.

Nous passons maintenant à la recombinaison du champ qui a été injecté avec un champ non injecté.

Là encore, les deux scénarios de recombinaison A et B sont à envisager, avec cette fois-ci une injection par le champ 3 pour le scénario A :  $\lambda_1^{(+)} + \lambda_3^{(+)} \rightarrow \lambda_A^{(-)}$ , et par le champ 2 pour le scénario B :  $\lambda_1^{(+)} + \lambda_2^{(-)} \rightarrow \lambda_B^{(-)}$ . Ces deux schémas sont récapitulés figures IV.26 et IV.27. La densité spectrale du champ somme est donnée par l'expression (IV.24) dans le cas du scénario B, et par la même équation avec la permutation des indices 2 et 3 pour le scénario A.

Là encore, nous retrouvons à injection faible un champ somme identique à celui généré lors de la recombinaison de triplets obtenus par fluorescence paramétrique (figures IV.14 et IV.17b), comme cela se voit dans l'expression (IV.24). A injection

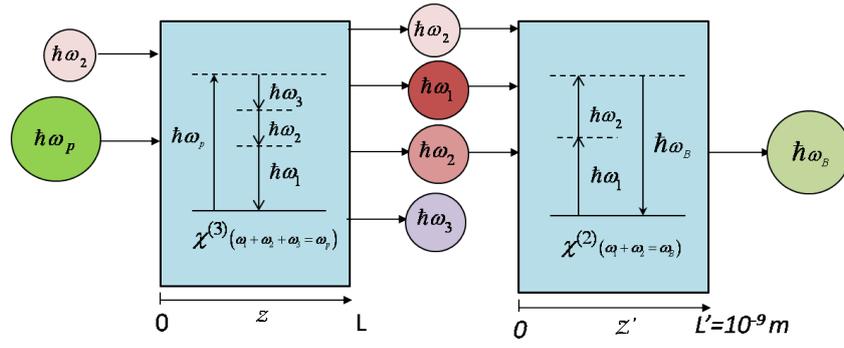


FIGURE IV.27: Schéma fonctionnel du scénario B représentant la recombinaison des champs 1 et 2 issus d'une génération mono-injectée sur le champ 2.

plus forte, il est possible de mener une estimation rapide du poids des différents termes de l'expression du champ somme (IV.24). En effet, en estimant d'après la valeur des paramètres de génération et de recombinaison envisagés, que  $\int d\omega' \xi \Phi \simeq 10^{-16}$ , soit  $\iint d\omega d\omega' \xi^2 \Phi^2 \simeq 10^{-32}$  et pour une intégrale seule  $\int d\omega \simeq 10^{+12}$ , le premier terme et le dernier terme de l'expression (IV.24) vont être en concurrence, le premier étant autour de  $10^{-20}$  au maximum pour  $n_2^0 = 1$ , et augmentant en  $n_2^2$  (respectivement  $n_3^2$  si c'est le scénario B qui est considéré). Les deux termes du milieu sont de l'ordre de  $10^{-32}$ , tout comme le dernier équivalent à la recombinaison dans le cas de la fluorescence paramétrique, mais qui, lui, est invariant. Ainsi, lorsque la densité de photons diminue, le premier et le dernier terme devraient s'égaliser, les deux autres termes allant toujours être inférieurs au premier ou au dernier. Cependant, bien que ces deux termes soient toujours inférieurs aux termes extrêmes, rien ne nous dit qu'ils sont spectralement équivalents. Ainsi, tout comme ci-dessus, si ces champs sont distinguables du terme prépondérant bien que d'intensité moindre, c'est-à-dire si leur extension spectrale est supérieure à celle du terme prépondérant, ils pourront alors amener leur propre signature non classique. Cette différentiation spectrale s'applique également bien entendu aux champs recombinaisonnés issus de la génération par fluorescence paramétrique.

Les différents termes évoqués précédemment ont été tracés. Dans le cas du scénario A, la somme des champs 1 et 3 se fait dans le cristal de KTP de  $10^{-4}$ m. Le premier terme, prépondérant à injection forte, vaut  $4 \times 10^{-22}$  au maximum dans les conditions du paragraphe précédent, avec  $n_2^0 = 1$ ; il a par ailleurs une allure gaussienne de largeur 2,1 nm. Le terme équivalent à la fluorescence paramétrique ayant une amplitude maximale de  $1,6 \times 10^{-30}$  pour la somme du champ 1 et 3 dans ce même cristal (voir figure IV.14), il est prépondérant pour un niveau d'injection inférieur à  $10^9$  photons par champ et par impulsion, (correspondant à un champ injecté maximal de  $n_2^0 = 10^{-4}$ ). Le spectre du champ équivalent au champ recombinaisonné pour une injection supérieure à  $10^9$  photons par champ est donné figure IV.28 dans le cas d'une injection totale de  $7,26 \times 10^{12}$  photons.

Pour la somme des champs 1 et 2 selon le scénario B, le cristal choisi a une longueur de  $10^{-9}$ m. Le terme de recombinaison à injection forte a une amplitude de

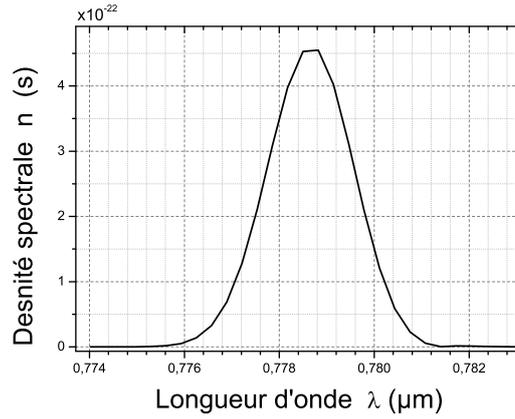


FIGURE IV.28: *Spectre du champ équivalent au champ recombiné par somme des champs 1 et 3 générés par mono-injection de  $7,26 \times 10^{12}$  photons d'injection sur le champ 3. La recombinaison se fait dans un cristal de KTP de 0,1 mm taillé selon la direction ( $\theta = 34^\circ$ ,  $\varphi = 30^\circ$ ).*

$4 \times 10^{-31}$  à  $n_3^0 = 1$ , son allure étant gaussienne avec une largeur à mi-hauteur de 2,1 nm. L'amplitude du terme équivalent à la recombinaison des champs émis par fluorescence étant de  $3 \times 10^{-43}$  pour ce même cristal, les deux termes considérés sont équivalents pour un niveau d'injection de  $10^7$  photons. Le spectre du champ équivalent au champ recombiné pour une injection supérieure à  $10^7$  photons par champ est donné figure IV.29, dans le cas d'une injection totale de  $7,26 \times 10^{12}$  photons.

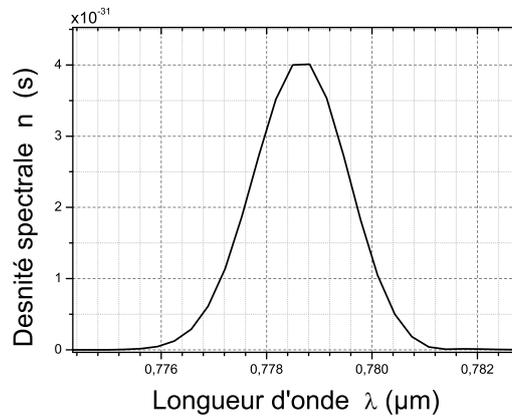


FIGURE IV.29: *Spectre du champ équivalent au champ recombiné par somme des champs 1 et 2 générés par mono-injection de  $7,26 \times 10^{12}$  photons d'injection sur le champ 2. La recombinaison se fait dans un cristal de KTP de  $10^{-9}$  m taillé selon la direction ( $\theta = 52^\circ$ ,  $\varphi = 0^\circ$ ).*

Au niveau des termes intermédiaires, ils ont dans les scénarios A et B une allure de type gaussienne avec une largeur à mi-hauteur de 6 nm, supérieure donc à celle du terme prépondérant à injection forte. Ils pourraient donc être différenciés spectralement. Cependant, comme annoncé précédemment, ils sont d'intensité moindre, comparable à celle obtenue dans le cas des seules recombinaisons de champs émis par fluorescence, et ce pour une injection minimale très forte, de  $10^{17}$  photons par champ environ.

Nous allons maintenant comparer les termes prépondérants aux champs classiques pour vérifier qu'ils signent des corrélations, comme attendu puisque le terme classique, incohérent, est normalement négligeable dans l'expression totale des champs recombinaison dans l'approximation de gain faible. Les champs obtenus par recombinaison classique des champs 1 et 3 pour le scénario A, et des champs 1 et 2 pour le scénario B sont donnés figure IV.30. La figure IV.30a montre que la somme des champs 1 et 3 donne un champ classique de type gaussien, de largeur à mi-hauteur d'environ 3,5 nm. La figure IV.30b montre que la somme des champs 1 et 2 donne un champ très large, ce qui est cohérent avec le processus classique de somme de fréquences, qui correspond à la convolution du champ 1, large et donné figure III.7, avec le champ 2 qui est la gaussienne injectée. Ces champs sont par ailleurs tous deux beaucoup moins intenses que les champs considérés quantiquement recombinaison à même niveau d'injection, dont le spectre est tracé figures IV.28 et IV.29, conformément à nos prédictions.

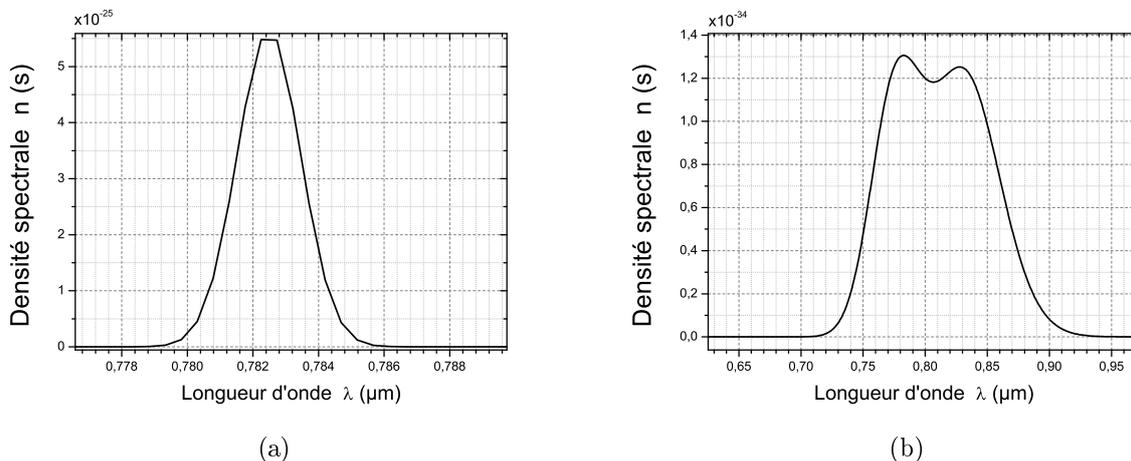


FIGURE IV.30: *Spectres des champs obtenus par SOSFG classique : des champs triplets 1 et 3 dans un cristal de KTP de 0,1 mm (a) et des champs triplets 1 et 2 dans un cristal de KTP de  $10^{-9}$  m (b). Les champs triplets sont générés par scission stimulée sur le champ 3 (a) et 2 (b) considérés gaussiens avec  $10^{17}$  photons. Les spectres des champs triplets correspondants sont donnés par la somme des spectres des figures III.7 et III.3.*

Ces champs étant différents des champs recombinaison sous injection forte (figures IV.28 et IV.29), nous pouvons bien conclure que même en régime de mono-injection forte, la recombinaison d'un champ injecté avec un champ non injecté signe des corrélations et une cohérence de ces champs, bien que l'effet équivalent à la recombinaison de photons générés par fluorescence paramétrique ne soit pas observé. Certaines corrélations pouvant ainsi être signées sur les champs générés par mono-injection, il est par ailleurs également possible de retrouver les corrélations équivalentes à la fluorescence, qui poussent les photons d'un même triplet à se recombinaison ensemble et qui subsistent entre les parties des champs générés par fluorescence. En effet, la somme de fréquences des parties dues aux triplets émis par fluorescence (données figures IV.14 et IV.17) étant spectralement différente des champs obtenus par somme de fréquences en régime injecté (surtout pour

la somme des champs 1 et 2, très larges spectralement), il est toujours possible, si on est capable de les mesurer, de détecter ces champs. Ainsi, la stimulation ne masque pas vraiment les corrélations équivalentes à la fluorescence ; cependant elle ne les met pas en évidence ni ne les renforce.

### IV.3.3 SOSFG de champs générés par scission bi-stimulée

Considérons toujours pour champs d'injection les champs nommés 2 et 3. Les calculs sont lourds et sont détaillés en annexe C. Comme dans le cas de la génération mono-injectée, deux cas sont à considérer ici : la somme de fréquences des deux champs injectés (schématisé figure IV.31) et la somme de fréquences d'un champ injecté avec un champ non injecté (schématisé figures IV.32 et IV.33).

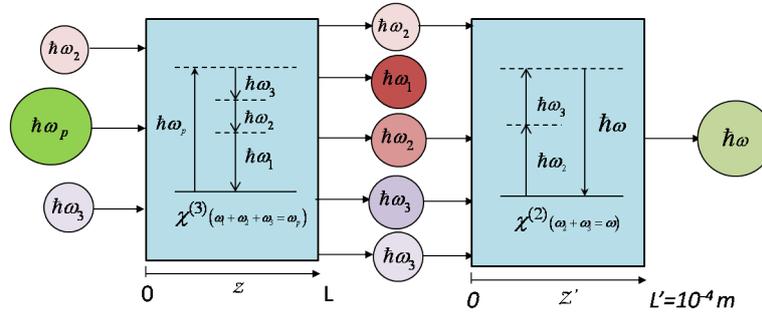


FIGURE IV.31: Schéma fonctionnel du scénario représentant la recombinaison des champs 2 et 3 issus d'une génération lors de laquelle ils sont injectés en entrée.

Dans le cas de la somme de fréquences des deux champs injectés (figure IV.31), comme calculé en annexe C, la densité spectrale du champ somme des champs 2 et 3 est équivalente à :

$$n_\omega(\omega, z') = \left| \int d\omega' \xi(z', \omega, \omega') \sqrt{n_3(\omega')} \sqrt{n_2(\omega - \omega')} \right|^2 \quad (\text{IV.28})$$

C'est exactement l'expression de la densité spectrale obtenue par somme de fréquences classique, c'est-à-dire en brisant le lien entre les champs sommés, ce qui est cohérent avec le fait que la densité spectrale des champs injectés en sortie de cristal est équivalente à l'injection. Ce terme ne sera pas tracé car il est équivalent en tout point au terme classique.

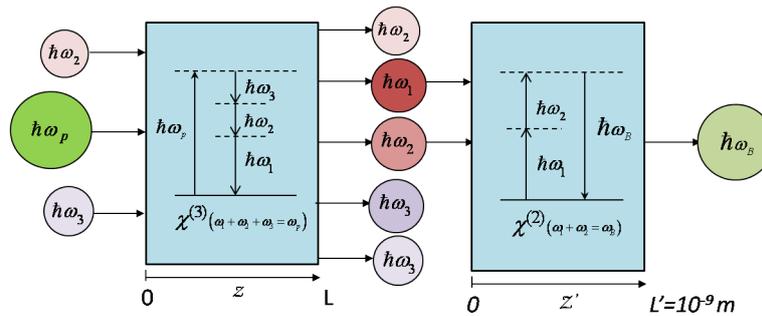


FIGURE IV.32: Schéma fonctionnel du scénario représentant la recombinaison des champs 1 et 2 issus d'une génération bi-injectée sur les champs 2 et 3.



eux, cohérent puisque la bi-injection fixe les phases de tous les champs, donc donné par :

$$n_{cl}(\omega, z') = \left| \int d\omega' \xi(z', \omega, \omega') \sqrt{n_1(\omega', L_1) n_2(\omega - \omega', L_1)} \right|^2 \quad (\text{IV.31})$$

avec les densités spectrales des champs 1 et 2 donnés équations (III.23) et (III.24).

En se plaçant directement dans le régime de gain paramétrique faible, la densité spectrale du champ injecté  $n_2(\omega, L_1)$  est équivalente en sortie de cristal à l'injection  $n_2(\omega, 0)$ , et il vient ainsi :

$$n_{cl}(\omega, z') = \left| \int d\omega' \xi(z', \omega, \omega') \sqrt{n_2(\omega - \omega')} \times \right. \quad (\text{IV.32})$$

$$\left. \sqrt{\int d\omega_t \Phi(L_1, \omega_p, \omega', \omega_t) \sqrt{n_2(\omega_t)} \sqrt{n_3(\omega_p - \omega_t - \omega')} \right|^2 + \int d\omega_t |\Phi(L_1, \omega_p, \omega', \omega_t)|^2 [1 + n_2(\omega_t) + n_3(\omega_p - \omega' - \omega_t)]} \right|^2$$

Il est toutefois possible de simplifier l'expression du champ  $n_1$  dans l'équation (IV.31) en se rappelant les deux régimes de fonctionnement discutés au paragraphe III.3.3 : en dessous du seuil de bi-injection, le champ 1 est équivalent au champ généré par fluorescence ; au-delà de ce régime, le champ 1 est équivalent au champ généré classiquement. Ainsi, en dessous du seuil de bi-injection, (IV.32) peut se ramener à :

$$n_{cl}(\omega, z') = \left| \int d\omega' \xi(z', \omega, \omega') \sqrt{n_2(\omega - \omega')} \sqrt{\int d\omega_t |\Phi(L_1, \omega_p, \omega', \omega_t)|^2} \right|^2 \quad (\text{IV.33})$$

Et au dessus de ce seuil, en régime de bi-injection efficace, il vient :

$$n_{cl}(\omega, z') = \left| \int d\omega' \xi(z', \omega, \omega') \sqrt{n_2(\omega - \omega')} \right. \quad (\text{IV.34})$$

$$\left. \sqrt{\int d\omega_t \Phi(L_1, \omega_p, \omega', \omega_t) \sqrt{n_2(\omega_t)} \sqrt{n_3(\omega_p - \omega_t - \omega')} \right|^2} \right|^2$$

soit

$$n_{cl}(\omega, z') = \left| \iint d\omega_t d\omega' \xi(z', \omega, \omega') \Phi(L_1, \omega_p, \omega', \omega_t) \sqrt{n_2(\omega - \omega')} \sqrt{n_2(\omega_t)} \sqrt{n_3(\omega_p - \omega_t - \omega')} \right|^2 \quad (\text{IV.35})$$

Ce terme (IV.35) de recombinaison classique en régime de bi-injection forte est exactement le terme (IV.30), prépondérant en régime de très forte injection. Ainsi, en régime bi-injecté, si seul ce terme (IV.30) est mesurable dans l'expression (IV.29) de la densité spectrale, aucune signature de corrélation ne pourra être mise en évidence.

Ce résultat n'est pas étonnant, étant donné qu'en régime de bi-injection, comme discuté au paragraphe IV.2.3 et en annexe E, les phases des trois champs sont fixées, donc les champs générés sont forcément tous en phase et leur somme cohérente, cette

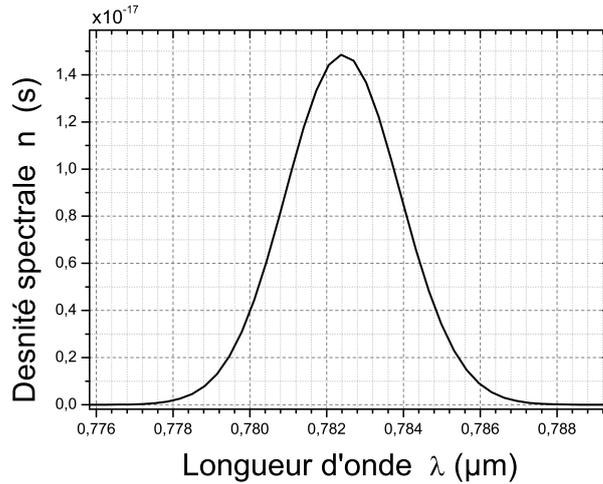


Figure IV.34: *Spectre du champ obtenu par SOSFG dans un cristal de KTP de  $10^{-9}$  m taillé selon la direction ( $\theta = 52^\circ$ ,  $\varphi = 0^\circ$ ) pour la recombinaison des champs triplets 1 et 2 générés dans les conditions de bi-injection données au paragraphe III.3.3, avec une injection de  $7,26 \times 10^{12}$  photons par champ.*

cohérence classique masquant la cohérence quantique entre photons d'un même triplet. Il est éventuellement possible de rechercher si un autre terme de (IV.29) peut être spectralement différentiable de (IV.30) dans ce régime de bi-injection efficace, et, le cas échéant, à évaluer s'il est facilement mesurable, mais les cohérences quantiques sont a priori bien masquées par les cohérences classiques dans ce régime. Des calculs numériques seront donnés au paragraphe suivant.

La somme des champs 1 et 2, schématisée figure IV.32, est effectuée dans un cristal de *KTP* de  $10^{-9}$  m taillé dans la direction ( $\theta = 52^\circ$ ,  $\varphi = 0^\circ$ ) comme défini au paragraphe IV.3.1 dans le cas de la recombinaison de la fluorescence paramétrique. Les différents termes de l'équation (IV.29) ont été tracés et comparés. Ainsi, le terme (IV.30), équivalent au terme classique de somme de fréquences des deux champs, est prépondérant sur tous les autres termes pour une injection supérieure à  $3 \times 10^4$  photons par champ sur les deux champs. Son spectre est donné figure IV.34 pour une injection de  $7,26 \times 10^{12}$  photons, correspondant à la densité spectrale maximale d'injection  $n_2^0 = 1$ . Il a une allure gaussienne de largeur à mi-hauteur 3,5 nm. Les termes intermédiaires sont soit spectralement plus fins que ce terme d'injection forte, soit ont une amplitude spectrale inférieure à celle de terme issu de la recombinaison des parties générées par fluorescence jusqu'à des niveaux d'injection très forts, supérieurs à  $10^{18}$  photons par champ. Il est donc possible de les ignorer.

L'autre schéma à envisager est la somme des champs 1 et 3, selon le schéma  $\lambda_1^{(+)} + \lambda_3^{(+)} \rightarrow \lambda_A^{(-)}$  rappelé figure IV.33. Elle est effectuée dans un cristal de *KTP* de 0,1 mm dans la direction ( $\theta = 34^\circ$ ,  $\varphi = 30^\circ$ ) comme défini au paragraphe IV.3.1. Les différents termes correspondants à ceux de l'équation (IV.29) pour la somme des champs 1 et 3 ont été de nouveau tracés et comparés. Ainsi, le terme équivalent au terme classique

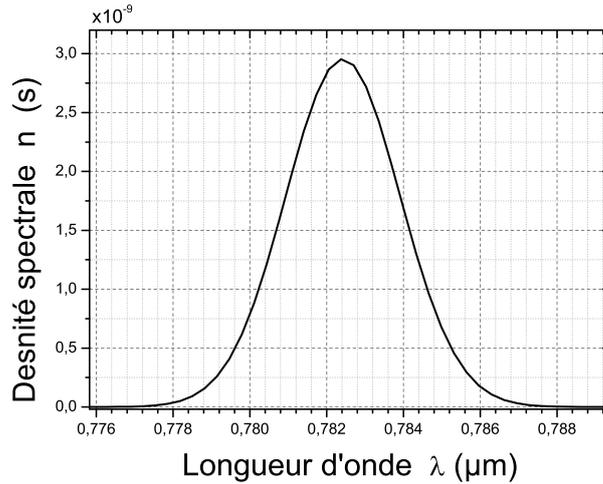


Figure IV.35: *Spectre du champ obtenu par SOSFG dans un cristal de KTP de 0,1 mm taillé selon la direction ( $\theta = 34^\circ$ ,  $\varphi = 30^\circ$ ) pour la recombinaison des champs triplets 1 et 3 générés dans les conditions de bi-injection données au paragraphe III.3.3, avec une injection de  $7,26 \times 10^{12}$  photons par champ.*

de somme de fréquence est ici prépondérant sur tous les autres termes pour une injection supérieure à  $10^5$  photons par champ sur chacun des deux champs. Son spectre est donné figure IV.35 pour la densité spectrale maximale d'injection  $n_3^0 = 1$ . Ce niveau est très inférieur au seuil du régime bi-injecté à proprement parler, à savoir environ  $10^7$  photons par champ, comme défini paragraphe III.3.3. Les termes intermédiaires, toujours peu différents spectralement de ce terme prépondérant, ne sont jamais prépondérants non plus.

Nous sommes donc en mesure de conclure, qu'avec nos caractéristiques expérimentales de champs et de gain, aucune signature de corrélations entre champs triplets générés par bi-injection n'est possible. Comme précédemment, il reste cependant toujours possible de différencier spectralement les sommes des parties générées par fluorescence des sommes des parties dues à l'injection, en particulier pour la somme des champs 1 et 2 générés par fluorescence, qui est très large spectralement.

#### IV.3.4 Récapitulatif sur les recombinaisons par sommes de fréquences à deux photons

Les sommes de fréquences à deux champs donnent les mêmes conclusions que les sommes à trois champs sur les signatures de corrélations entre les champs triplets.

Les recombinaisons à deux champs générés par fluorescence paramétrique mettent en évidence, tout comme pour les recombinaison à trois champs, le lien qui pousse les photons d'un même triplet à se recombinaison ensemble, signant les corrélations de leurs fluctuations quantiques. Cette recombinaison conduit ici à un champ somme d'allure

spectrale complémentaire de celles des champs sommés, c'est-à-dire équivalente à celle du champ non sommé, la largeur spectrale du champ pompe étant considérée comme nulle par hypothèse de pompe monochromatique.

Les recombinaisons de champs générés en régime de bi-injection efficace correspondent à une somme de fréquences classique de la partie prépondérante de ces champs, cette partie étant équivalente à l'expression des champs classiques obtenus par différence de fréquences à trois champs. Les corrélations étroites des fluctuations quantiques des champs triplets sont ici masquées, les parties prépondérantes des champs étant incohérentes entre elles.

En régime de génération mono-stimulée efficace, le champ obtenu par somme de fréquences à deux champs s'exprime différemment du champ qui serait obtenu par somme de fréquences de ces mêmes champs incohérents entre eux, signant leur cohérence sans pour autant mettre en évidence les mêmes corrélations que celles qui lient les photons triplets générés par fluorescence paramétrique.

Dans les applications numériques, les spectres larges des champs recombinaison par somme de fréquences de deux champs générés par fluorescence paramétrique par rapport à ceux plus étroits des champs recombinaison par somme de champs générés par mono ou bi-stimulation mettent en évidence que le lien de corrélation fort dû à la cohérence entre les photons triplets générés par fluorescence n'est pas détruit par l'injection : il est simplement masqué, et des détecteurs capables de mesurer sa faible amplitude aux fréquences pertinentes pourraient le mettre en évidence. Les expressions de champs recombinaison en régime injecté contiennent en effet ce terme, qui est issu de la somme des photons générés par fluorescence en plus des autres.

## IV.4 Analyse des résultats

Nos expériences permettent de vérifier la cohérence des trois champs triplets en fonction de la façon dont ils sont générés. Il faut noter que cette identification de cohérence se fait à délai nul entre les champs 1, 2 et 3 associés aux triplets et ne permet donc pas d'accéder au temps de cohérence. La somme de fréquences de champs cohérents conserve la relation originelle entre les fréquences spectrales de photons générés à partir d'un même photon parent [13, 14, 45, 48, 51]. On a ainsi la relation élémentaire suivante sur les extensions spectrales de trois photons générés dans un même triplet :  $\delta\omega_0 = \delta\omega_1 + \delta\omega_2 + \delta\omega_3$ .

Dans le cas de champs triplets générés par fluorescence paramétrique, la recombinaison des trois champs donne un champ final de spectre équivalent à celui du champ pompe, prouvant ainsi leur cohérence [13]. De même, la recombinaison de deux des trois champs donne un champ d'extension spectrale liée à celle de la pompe et du troisième champ ; l'extension spectrale de la pompe étant nulle dans notre modèle, le champ somme possède alors l'extension spectrale du troisième champ.

Dans le cas de champs triplets générés par scission bi-stimulée, les champs générés

mettent en compétition le terme équivalent à la fluorescence paramétrique avec le terme dû à l'injection (cf. partie III.3.3). En régime d'injection efficace, ce second terme est prépondérant, et le champ recombinaison à deux ou trois champs est équivalent au champ classique obtenu par somme de fréquences de champs sans lien entre eux, cohérent classiquement mais non quantiquement. En revanche, en régime de bi-injection peu efficace, le terme dû à la fluorescence paramétrique va coexister avec le terme dû à l'injection, qui peut être plus intense que celui-ci. Dans ce régime, le spectre du champ pompe réapparaît sur le champ somme, "cohabitant" avec le spectre de recombinaison classique du régime de bi-injection efficace. Il est donc possible d'en conclure que la bi-injection masque la cohérence entre les photons issus d'un même triplet : sans qu'elle la fasse disparaître, seuls les photons générés par fluorescence vont être cohérents quantiquement entre eux, comme en atteste l'intensité du terme équivalent au spectre du champ pompe, constante quel que soit le régime de génération, injecté ou non. L'intérêt de cette injection consistant à augmenter le nombre de photons générés afin que les faisceaux soient plus facilement détectables, elle n'est pas compatible avec une conservation de la cohérence quantique de ces faisceaux.

Dans le cas d'une génération mono-stimulée des photons triplets, la situation est plus complexe. En effet, l'équivalence du régime de mono-injection très faible avec le régime de fluorescence paramétrique montre que les photons générés par fluorescence dans ce régime de mono-injection conservent, tout comme dans le régime bi-injecté, toute leur cohérence. En revanche, contrairement à la génération bi-injectée, même en régime d'injection forte, le champ recombinaison par somme de fréquences n'est pas équivalent au champ classique recombinaison par somme de deux ou trois champs quelconques n'ayant pas de lien entre eux. Ces champs conservent donc une cohérence quantique. Le fait que la somme de fréquences des deux champs non injectés ne soit pas équivalente à la partie générée par fluorescence du champ complémentaire (cf. paragraphe IV.3.2) écarte l'idée d'une cohérence de seuls deux des trois champs. Nous pouvons en conclure que la mono-stimulation masque les corrélations des fluctuations quantiques étroites des champs triplets, mais que les photons triplets conservent un lien de corrélation suffisant pour perturber la distribution de probabilité de recombinaison par rapport à la recombinaison de deux ou trois champs indépendants, et que la cohérence quantique entre photons issus d'un même triplets est conservée.

Le tableau IV.1 très synthétique regroupe ces résultats.

## IV.5 Conclusion

Les études sur le spectre du champ somme par TOSFG et SOSFG font ressortir que les champs triplets sont cohérents pour la part générée par fluorescence paramétrique, contribution qui existe avec la même intensité que la génération soit spontanée ou stimulée. Cependant, lors d'une génération stimulée, cette contribution est masquée

	TOSFG/SOSFG
Génération par fluorescence paramétrique	champ somme équivalent au champ pompe ou au champ triplet complémentaire : corrélations des fluctuations quantiques fortes, champs cohérents quantiquement
Génération mono injectée	champ somme différent de la somme de champs incohérents, certaines corrélations, champs cohérents quantiquement
Génération bi-injectée	champ somme équivalent à la somme de champs incohérents quantiquement, corrélations masquées, pas de cohérence quantique entre les champs mais cohérence classique

TABLE IV.1: *Tableau récapitulatif très schématique des principales conclusions à tirer des sommes de fréquences.*

par tous les photons dont la génération est induite par l'injection. Dans le cas d'une bi-injection, ces photons sont cohérents classiquement mais pas quantiquement, et les champs triplets totaux apparaissent équivalents à des champs non corrélés. Dans le cas d'une mono-injection, les champs triplets apparaissent, à travers leur interaction par somme de fréquences, comme différents de champs non cohérents, ce qui signe une cohérence et un certain degré de corrélation des photons triplets générés dus à la mono-injection.

Le schéma de génération le plus utile pour lesquels les champs triplets sont fortement corrélés, et qui de plus permettrait leur utilisation dans des protocoles d'intrication quantique, est donc sans surprise le cas de la fluorescence paramétrique. Cependant, cette génération étant expérimentalement très difficile à mettre en œuvre dû au faible rendement du processus paramétrique  $\chi^{(3)}$  et surtout à l'étalement spectral des photons générés, une alternative pourrait venir de la génération mono-injectée, à la faveur d'une recherche plus approfondie sur les liens entre les champs alors générés.

# Chapitre V

## Expériences de génération et de recombinaison des champs triplets

### V.1 Introduction

Ce chapitre présente les expériences de génération et de recombinaison des triplets de photons réalisées au cours de la thèse. Les résultats expérimentaux seront comparés avec les modèles établis et présentés dans les chapitres précédents.

L'expérience adopte la même stratégie au niveau de la génération de triplets de photons que celles effectuées précédemment dans le groupe [8, 10], qui correspondent aux exemples numériques traités au chapitre III. Le processus paramétrique est pompé à  $\lambda_0^{(-)} = 532 \text{ nm}$ , doublement injecté à  $\lambda_2^{(-)} = \lambda_3^{(+)} = 1662 \text{ nm}$ , correspondant à un champ complémentaire à  $\lambda_1^{(+)} = 1478,6 \text{ nm}$ , comme indiqué sur le schéma ???. Le cristal utilisé pour la génération est un cristal de KTP taillé selon l'axe (OX) permettant d'atteindre l'accord de phase dans le plan (XOY).

Les longueurs d'onde d'accord de phase constatées expérimentalement peuvent être légèrement différentes des valeurs théoriques suite à l'optimisation du rendement de génération, qui peut être opéré par une légère rotation du cristal autour de l'axe (OZ) ou par une petite variation de la longueur d'onde de stimulation. Le coefficient effectif  $\chi_{eff}^{(3)}$  de l'interaction dans le plan (XOY) vaut environ  $14,6 \times 10^{-22} \text{ m}^2 \cdot \text{V}^{-2}$  [52], valeur utilisée dans notre modèle introduit au chapitre III.

### V.2 Étude de la génération

#### V.2.1 Dispositif et conditions expérimentales

Le dispositif expérimental utilisé est donné figure V.1. La source est un laser Nd :YAG de chez CONTINUUM émettant des impulsions de 15 ps à  $1064 \text{ nm}$  avec une fréquence de répétition de 10 Hz.

Une partie du faisceau est doublée en fréquence afin de générer le faisceau à

$\lambda_0 = 532 \text{ nm}$  qui va servir de pompe pour la génération de triplets. Le cristal utilisé pour cette génération de second harmonique est un cristal de KTP de 1,6 mm de longueur en accord de phase dans le plan (XOY) selon la direction ( $\theta = 90^\circ$ ,  $\varphi = 23^\circ$ ). L'accord de phase est de type II, vérifiant la relation (I.24); il est réalisé en polarisant le faisceau à  $1064 \text{ nm}$  à  $45^\circ$  de l'axe (OZ) du cristal de KTP. Pour optimiser le rendement sans modifier la divergence du faisceau, deux lentilles  $L_0$  et  $L'_0$  sont placées en amont et en aval du cristal, respectivement pour assurer la convergence au centre du cristal et la reprise du faisceau. Un rendement de génération de second harmonique de 45% a pu être mesuré pour l'énergie maximale générée dans le cristal, qui est de l'ordre de 500  $\mu\text{J}$ .

L'autre partie du faisceau à  $1064 \text{ nm}$  vient pomper un Générateur Paramétrique Optique (OPG) de chez LIGHT CONVERSION accordable en longueur d'onde et permettant de générer les faisceaux d'injection à la longueur d'onde souhaitée, c'est-à-dire au voisinage de 1660 nm. Une lame demi-onde permet d'ajuster la polarisation du faisceau d'injection par rapport à l'axe (OY) du cristal de KTP dans lequel est réalisé la génération de triplets, permettant ainsi de faire varier l'énergie relative de chacun des deux faisceaux d'injection à  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$ . Des prismes de Glan-Taylor associés à des lames demi-ondes, l'ensemble constituant un modulateur d'intensité noté "MI" sur la figure V.1, permettent de régler le niveau global des énergies de pompe et d'injection.

La mise en coïncidence temporelle des faisceaux de pompe et d'injection est assurée par une ligne à retard constituée d'un prisme P monté sur une translation T; l'alignement spatial est réalisé par les miroirs M et M'. Les faisceaux d'injection et de pompe ayant des géométries et des rayons différents, un télescope de grossissement  $\times 3$  constitué des lentilles  $L_i$  et  $L'_i$  permet d'ajuster la taille du faisceau d'injection à celle du faisceau pompe. Les faisceaux sont mis en coïncidence au niveau du miroir dichroïque M'.

La lentille  $L$  de distance focale 700 mm, focalise les faisceaux dans le cristal de KTP générant les triplets. L'axe de propagation des faisceaux est confondu avec l'axe (OX) de ce cristal. Deux cristaux ont été utilisés pour les expériences de génération, avec des longueurs de 13 mm et 28 mm. Leur support est solidaire d'une rotation fine et de trois translations (longitudinale, latérale et verticale) pour le contrôle des alignements. L'efficacité maximale de la génération de triplets sera obtenue lorsque les faisceaux de pompe et d'injection seront focalisés au même endroit dans le cristal. Ces faisceaux étant de longueur d'onde différente, il est nécessaire d'ajuster le positionnement relatif de leurs plans focaux, ce que nous faisons en "jouant" sur le télescope du faisceau d'injection.

Les rayons aux points de focalisation dans le cristal ont été mesurés avec une caméra "Spiricon" munie d'un détecteur en silicium. Le faisceau infrarouge d'injection est également observable grâce à un phénomène d'absorption à deux photons. Ainsi lors de la mesure du rayon du faisceau d'injection, un facteur correctif  $\sqrt{2}$  doit être appliqué sur le waist observé de façon à tenir compte de la dépendance quadratique en intensité de l'absorption à deux photons. In fine, les rayons de la pompe et de l'injection sont obtenus par ajustement numérique gaussien des observations en différents points de l'axe

GENERATION

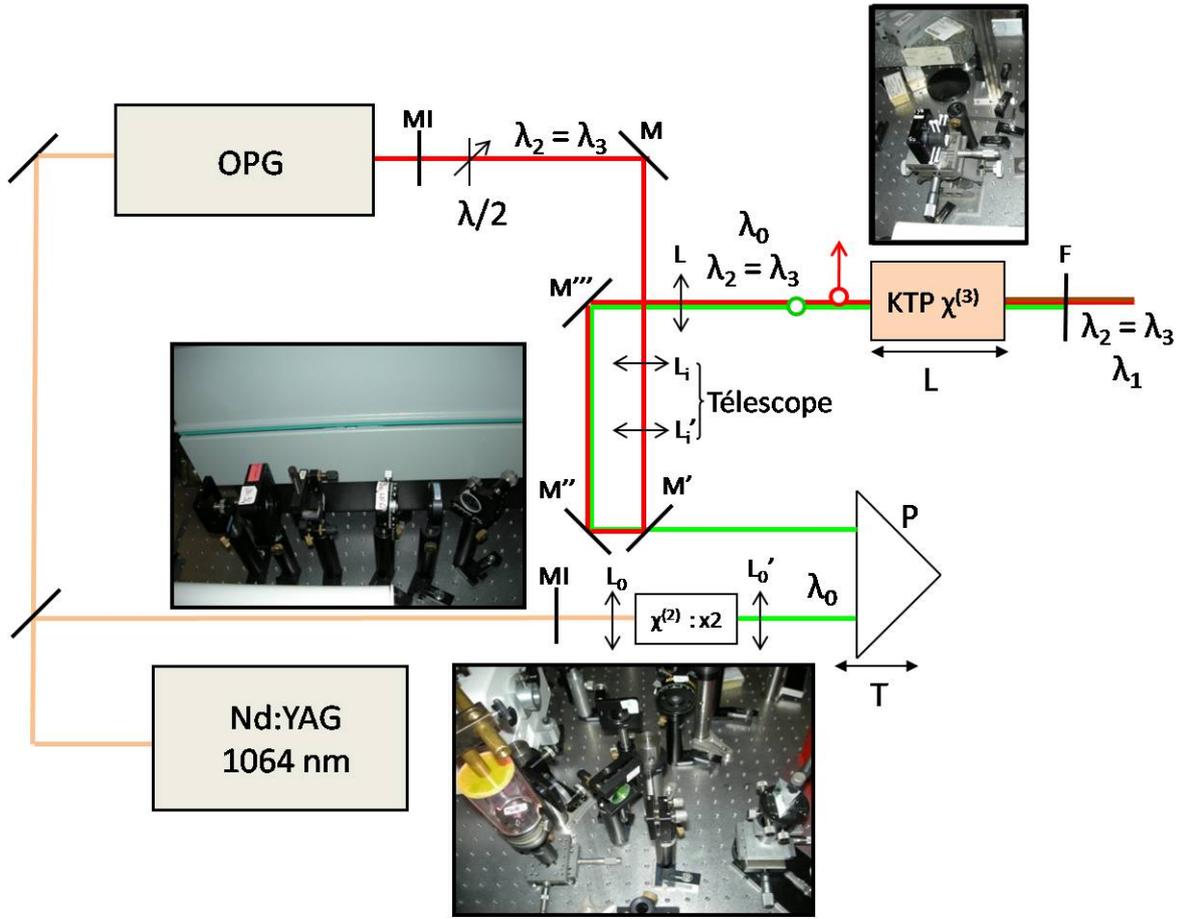


FIGURE V.1: *Dispositif expérimental utilisé pour la génération des faisceaux triplets.*

de propagation, de part et d'autre des points de focalisation.

Le faisceau pompe est légèrement astigmatique, avec une extension transverse différente selon les directions horizontale et verticale, qui correspondent aux axes  $(OY)$  et  $(OZ)$  du cristal de KTP. Les rayons correspondants, définis à  $1/e^2$ , sont notés  $W_{0y}$  et  $W_{0z}$  ; ils sont les suivants :

$$\begin{cases} W_{0y} = 46 \mu m \\ W_{0z} = 56 \mu m \end{cases} \quad (V.1)$$

Les caractéristiques du faisceau d'injection sont les suivantes :

$$\begin{cases} W_{iy} = 90 \mu m \\ W_{iz} = 90 \mu m \end{cases} \quad (V.2)$$

Si ces valeurs ne révèlent pas d'astigmatisme sur le faisceau d'injection, il peut apparaître dans le temps, dû au fait que l'OPG amplifie toutes les variations de pointé du laser Nd :YAG.

Les tailles des rayons des faisceaux de pompe et d'injection sont volontairement prises à des valeurs différentes afin d'assurer un bon recouvrement sur une surface effective

bien connue pour l'injecter dans le modèle, surface effective donnée par la plus petite des surfaces, c'est-à-dire celle du champ pompe. Ce choix de tailles permet aussi d'assurer une longueur de Rayleigh,  $z_R = \pi \frac{W_y W_z}{\lambda}$ , équivalente sur les deux faisceaux, valant ainsi 15,2 mm pour le faisceau pompe et 15,3 mm pour le faisceau d'injection. Ces longueurs de Rayleigh seront à comparer aux longueurs des cristaux de KTP lors de la confrontation des résultats et du modèle expérimental, l'approximation de l'onde plane n'étant valide que sur une longueur de l'ordre de deux fois la longueur de Rayleigh des faisceaux en interaction. Les profils temporels des faisceaux n'ont pas été mesurés ; ils sont pris égaux à la longueur des impulsions en sortie de laser, c'est-à-dire 15 ps. Une série de filtres F, éventuellement combinés à des miroirs ou des lames réfléchissantes, sont placés derrière le cristal générant les triplets de photons, ce qui permet de "couper" les faisceaux parasites ou non désirés en fonction de l'étude à mener. Elle permet par exemple de filtrer tous les champs à l'exception du champ 1, champ signant la génération de photons triplets.

## V.2.2 Énergies et spectres mesurés et comparés à la théorie

Toutes les mesures que nous allons présenter ici ont été menées en régime bi-injecté, avec la polarisation du champ d'injection orientée parfaitement à 45° des axes (OY) et (OZ) de KTP. Les énergies des deux champs d'injection sont donc égales.

Nous allons tout d'abord donner les spectres des différents champs, à savoir le champ pompe, les champs d'injection (2 et 3) ainsi que le champ 1 ; ce dernier n'étant pas présent à l'entrée du cristal, il est donc symptomatique de la présence des triplets. Les spectres des champs d'injection et du champ pompe ont été mesurés équivalents en sortie de cristal et en entrée. Il n'a en effet pas été possible de mesurer l'amplification paramétrique des champs 2 et 3, qui correspond à la contribution des photons générés, car le gain était trop faible au regard des fluctuations d'intensité de nos sources ; de même aucune déplétion de la pompe n'a été détectée même en régime de fort pompage (quelques centaines de  $GW/cm^2$ ), ce qui confirme nos approximations de pompe non dépeuplée et de gain faible.

Après la caractérisation spectrale des champs, les courbes expérimentales de l'énergie générée sur le champ 1 seront ensuite présentées en fonction des énergies de pompe et d'injection, puis interpolées par notre modèle théorique développé au chapitre III.

### V.2.2.1 Mesures spectrales

Un léger décalage de la direction d'incidence dans le cristal peut amener à faire varier la longueur d'onde du faisceau d'injection, typiquement entre 1660 nm et 1666 nm.

Une série de spectres expérimentaux typiques, tous mesurés dans les mêmes conditions, est donnée figures V.2 à V.4. Les mesures sont faites en sortie d'un monochromateur CHROMEX OPTILAS, et les énergies sont détectées par des photodiodes Thorlabs Si et InGas, respectivement pour le champ pompe et les champs triplets (1, 2 et 3). Au niveau du monochromateur, deux réseaux de dispersion différents sont accessibles suivant que la détection est à réaliser dans le visible ou l'infrarouge.

Les fentes d'entrée et de sortie de monochromateur sont ouvertes à 25  $\mu\text{m}$ . Les mesures de la fonction d'appareillage du monochromateur pour chacun des deux réseaux ont été effectuées à l'aide d'un laser HeNe émettant à 632,8 nm pour le réseau blasé dans le visible et du laser à 1064 nm pour le réseau blasé dans l'infrarouge. Elles donnent la précision de nos spectres pour des fentes de même largeur que celles employées pour les mesures : ces valeurs sont de 0,3 nm pour le réseau blasé dans le visible et de 0,4 nm pour l'infrarouge.

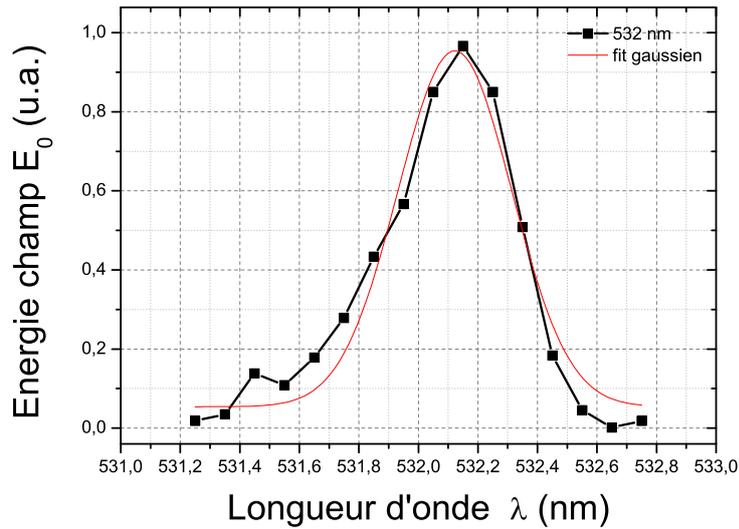


FIGURE V.2: Spectre du faisceau pompe à 532 nm.

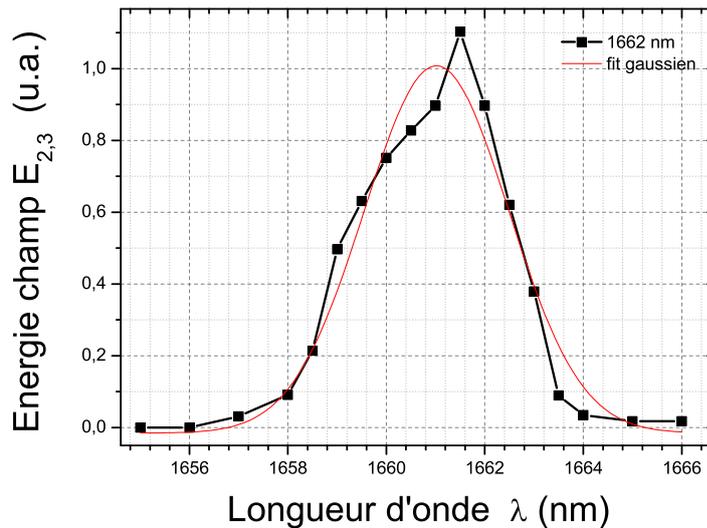


FIGURE V.3: Spectre du faisceau d'injection à 1662 nm.

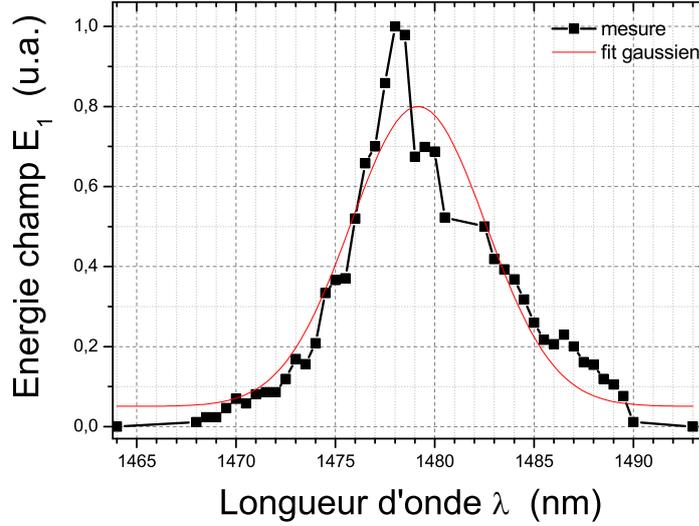


FIGURE V.4: *Spectre du champ 1 généré par interaction non linéaire  $\lambda_0^{(-)} - \lambda_2^{(-)} - \lambda_3^{(+)} = \lambda_1^{(+)}$  dans un cristal de KTP de 13 mm taillé selon la direction (OX).*

Les largeurs à mi-hauteur des ajustements gaussiens des champs de cette série de mesures sont les suivantes : 0,5 nm pour le champ pompe ; 3,2 nm pour le champ d'injection ; et de l'ordre de 7 nm pour le champ 1 généré figure V.4.

Comparons maintenant le spectre du champ 1 à celui qui est attendu dans le modèle développé au chapitre III qui donne l'expression des densités spectrales en nombre de photons. Il faut pour ce faire calculer les énergies  $\xi_j(\omega, z)$  à partir des densités spectrales  $n_j(\omega, z)$ , où  $j = \{1, 2, 3\}$  et  $z$  est la cote dans le cristal générateur de triplets. En régime de forte bi-injection, l'énergie  $\xi_1(\omega, z)$  générée pour le champ 1 à chaque fréquence est, compte tenu de (III.23) :

$$\xi_1(\omega, z) = \frac{\omega}{\hbar} \left| \int d\omega_t \Phi(z, \omega_p, \omega, \omega_t) \sqrt{\frac{\xi_2(\omega_t, 0)}{\omega_t}} \sqrt{\frac{\xi_3(\omega_p - \omega_t - \omega, 0)}{\omega_p - \omega_t - \omega}} \right|^2 \quad (\text{V.3})$$

$\xi_1(\omega, z)$  étant l'énergie générée sur le champ 1 à la fréquence  $\omega$  à la cote  $z$  du cristal, et  $\xi_2(\omega, 0)$  et  $\xi_3(\omega, 0)$  les densités spectrales d'énergie injectées en entrée. Rappelons que pour des champs d'injection décrits par une distribution fréquentielle gaussienne de leurs densités spectrales données par l'équation (III.14), l'énergie totale correspondante est donnée par :

$$\begin{aligned} \xi_j(z) &= \int d\omega \xi_j(\omega, z) \\ &= \int d\omega \hbar \omega n_j^0 e^{-\left(\frac{\omega - \omega_{j0}}{\Delta\omega_{j0}}\right)^2}, \quad j = \{2, 3\} \end{aligned} \quad (\text{V.4})$$

Pour plus de clarté, explicitons l'énergie pompe dans l'expression (V.3) du champ 1. Elle est contenue au niveau du facteur  $\Phi$ , dont la définition est rappelée ci-après :

$$\Phi(z, \omega_p, \omega, \omega_t) = \Gamma(\omega_p, \omega, \omega_t) A_p(\omega_p) z \operatorname{sinc} \left( \frac{\Delta k(\omega_p, \omega, \omega_t) z}{2} \right) e^{-\frac{i\Delta k(\omega_p, \omega, \omega') z}{2}} \quad (\text{V.5})$$

avec

$$\Gamma(\omega_p, \omega, \omega_t) = \frac{\hbar \chi_{eff}^{(3)}}{8\pi c^2 S \varepsilon_0} \sqrt{\frac{\omega_p \omega \omega_t (\omega_p - \omega - \omega_t)}{n_p(\omega_p) n_1(\omega) n_2(\omega_t) n_3(\omega_p - \omega - \omega_t)}}, \quad (\text{V.6})$$

$S$  la surface effective du faisceau pompe et  $A_p(\omega_p)$  l'amplitude du champ pompe à l'entrée du cristal, défini par (I.60) et (I.61).

Étant donné que dans l'approximation de la pompe non dépeuplée, le champ pompe, son intensité et son énergie sont équivalents en tout point du cristal à leurs valeurs initiales, la dépendance en  $z$  n'est plus indiquée sur ces grandeurs. Le carré du champ pompe est lié à l'éclairement  $I_p$  selon la relation (I.8) ; ainsi, en considérant le champ comme monochromatique, c'est-à-dire  $E_p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega E_p(\omega) \times \frac{2\pi}{\tau} \delta(\omega - \omega_p) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\tau} E_p(\omega_p)$ , il vient :

$$I_p = n(\omega_p) \varepsilon_0 c |E_p|^2 \quad (\text{V.7})$$

ce qui donne :

$$|A_p(\omega_p)|^2 = I_p \times \frac{4\pi S}{\hbar \omega_p} \quad (\text{V.8})$$

soit encore, en appelant  $\xi_p$  l'énergie de pompe au cours d'une impulsion de durée  $\tau$  :

$$|A_p(\omega_p)|^2 = \xi_p \times \frac{4\pi}{\hbar \omega_p \tau} \quad (\text{V.9})$$

avec  $\xi_p = \tau S I_p$

Ainsi, l'expression (V.3) peut se réécrire :

$$\xi_1(\omega, z) = \frac{\omega}{\hbar} \left| \int d\omega_t \tilde{\Phi}(z, \omega_p, \omega, \omega_t) \sqrt{\frac{\xi_p \xi_2(\omega_t, 0) \xi_3(\omega_p - \omega_t - \omega, 0)}{\omega_p \omega_t (\omega_p - \omega_t - \omega)}} \right|^2 \quad (\text{V.10})$$

avec

$$\tilde{\Phi}(z, \omega_p, \omega, \omega_t) = \Gamma(\omega_p, \omega, \omega_t) \sqrt{\frac{4\pi}{\hbar \tau}} z \operatorname{sinc} \left( \frac{\Delta k(\omega_p, \omega, \omega_t) z}{2} \right) e^{-\frac{i\Delta k(\omega_p, \omega, \omega') z}{2}} \quad (\text{V.11})$$

L'expression (V.10), qui correspond à un régime d'injection forte, montre que la valeur de l'énergie des champs incidents n'influe pas sur l'allure spectrale du champ 1.

La figure V.5 modélise la densité d'énergie spectrale du champ 1 en prenant des champs d'injection gaussiens de largeur à mi-hauteur 3,2 nm, comme celle des interpolations des champs d'injection donnés figure V.3, tous les autres paramètres expérimentaux (longueur et orientation du cristal, taille des rayons, énergies incidentes)

étant identiques à ceux de la mesure. L'allure est gaussienne, avec une largeur à mi-hauteur de 3,1 nm, très inférieure aux 7 nm que nous observons expérimentalement sur la mesure donnée figure V.4.

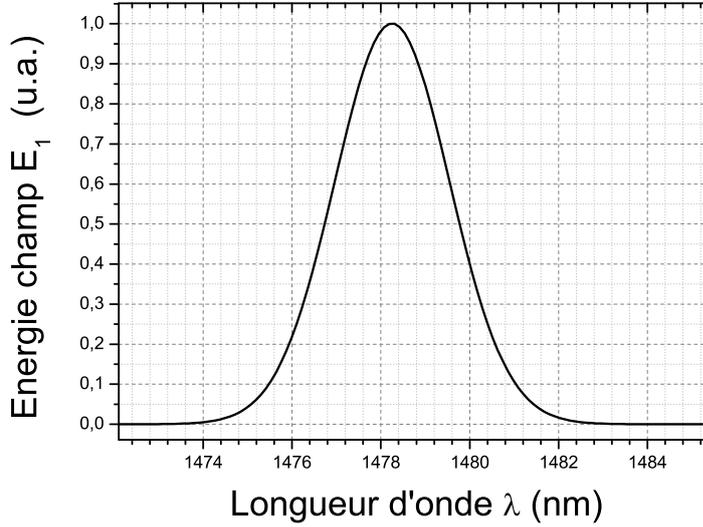


FIGURE V.5: *Spectre théorique du champ 1 généré à partir d'un champ pompe considéré comme monochromatique et des champs d'injection à spectres gaussiens donnés figures V.3.*

La cause principale de l'élargissement observé sur la courbe expérimentale (figure V.4) par rapport à la courbe théorique (figure V.5) provient de notre approximation de pompe monochromatique. En effet, la pompe, bien que de largeur spectrale faible devant celle des champs générés, a une extension de l'ordre de 0,5 nm à mi-hauteur (figure V.2), ce qui se traduit par la génération d'un champ 1 plus large que le champ obtenu en considérant la pompe monochromatique. Ceci peut être interprété en considérant le champ 1 généré comme la convolution des champs générés pour des fréquences pompes légèrement décalées de la fréquence centrale, la distribution de ces fréquences suivant celle du champ pompe, l'intensité relative de ces différents champs générés étant donnée par l'intensité de la composante spectrale pompe considérée. De façon plus précise, comme indiqué dans l'annexe D, dans le cas où la largeur spectrale de la pompe est considérée, la relation (V.10) devient, avec la densité spectrale d'énergie pompe  $\xi_p(\omega_p) = \hbar\omega_p |A_p(\omega_p)|^2$  :

$$\xi_1(\omega, z) = \frac{\omega}{\hbar^3/2} \left| \iint d\omega_p d\omega_t \bar{\Phi}(z, \omega_p, \omega, \omega_t) \sqrt{\frac{\xi_p(\omega_p)\xi_2(\omega_t, 0)\xi_3(\omega_p - \omega_t - \omega, 0)}{\omega_p\omega_t(\omega_p - \omega_t - \omega)}} \right|^2 \quad (\text{V.12})$$

avec

$$\bar{\Phi}(z, \omega_p, \omega, \omega_t) = \Gamma(\omega_p, \omega, \omega_t) z \operatorname{sinc} \left( \frac{\Delta k(\omega_p, \omega, \omega_t) z}{2} \right) e^{-\frac{i\Delta k(\omega_p, \omega, \omega_t) z}{2}} \quad (\text{V.13})$$

et les calculs numériques prédisent la courbe donnée figure V.6 pour le champ 1 généré

à partir d'un champ pompe de largeur à mi-hauteur 0,5 nm et d'un champ stimulant de largeur à mi-hauteur 3,2 nm.

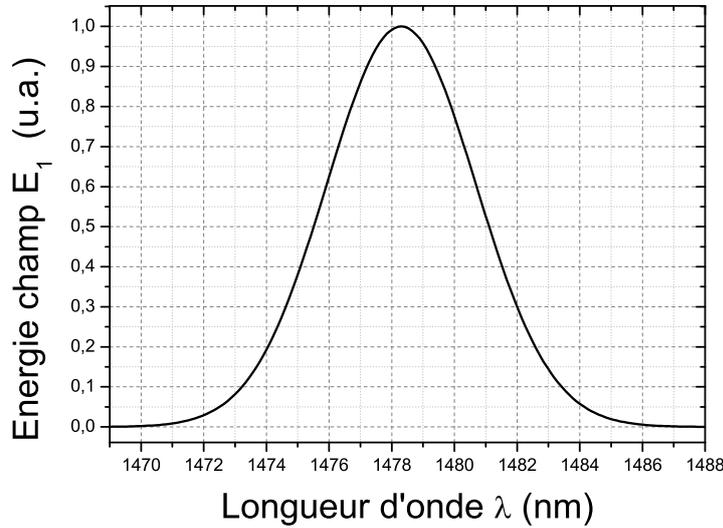


FIGURE V.6: *Spectre théorique du champ 1 généré à partir d'un champ pompe et des champs d'injection à spectres gaussiens donnés respectivement figures V.2 et V.3.*

Sa largeur à mi-hauteur est de 5,6 nm, plus proche de celle du champ mesuré figure V.4. La différence entre les deux largeurs peut provenir en premier lieu de l'allure fort peu gaussienne du champ mesuré, probablement due à une amplification des spectres non gaussiens de tous les champs en présence, doublée de l'incertitude de mesure. L'élargissement du champ généré pourrait dans un second temps être imputé à de l'effet Kerr dans le cristal. Les mesures de l'énergie générée sur le champ 1 qui seront présentées ci-après viendront en effet confirmer l'existence d'un effet Kerr. Comme la génération paramétrique de triplets, l'effet Kerr est un processus optique non linéaire du troisième ordre à quatre ondes, mais il correspond au schéma B décrit au chapitre I figure I.4 dans le cas particulier où les pulsations des ondes en interaction sont égales, comme indiqué sur la figure V.7 [53].

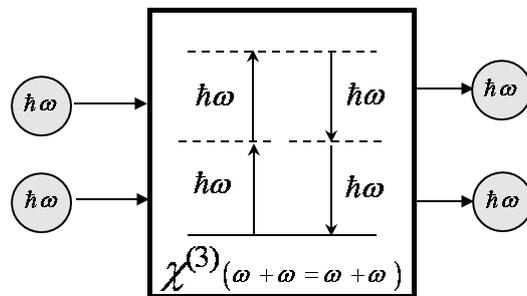


FIGURE V.7: *Diagramme photonique schématisant l'effet Kerr.*

Ce couplage Kerr est gouverné par la partie réelle du tenseur  $\chi^{(3)}$  et se traduit par une variation de l'indice de réfraction avec l'intensité de la lumière selon la relation

suivante :

$$n_{eff}(\omega, z) = n(\omega, z) + n_{Kerr}(\omega, z) \quad (V.14)$$

où  $n(\omega, z)$  est l'indice de réfraction habituel, et  $n_{Kerr}(\omega, z)$  est défini par [54] :

$$n_{Kerr}(\omega, z) = \frac{\chi_{eff}^{(3)}}{\epsilon_0 c n(\omega, z)^2} I(\omega, z) \quad (V.15)$$

où  $I(\omega, z)$  est l'intensité totale.

Pour prendre en compte l'effet Kerr dans notre modèle théorique donnant l'expression (V.10) pour l'énergie du champ 1, nous avons remplacé chaque indice de réfraction, y compris au niveau du paramètre  $\Delta k$ , par un indice de réfraction effectif comme défini par les équations (V.14) et (V.15). Le calcul montre un léger élargissement du spectre, de l'ordre de 0,1 à 1 nm sur la gamme typique d'énergie de pompe et d'injection que nous avons considérée pour nos expériences. Les énergies de pompe et d'injection correspondant aux différentes largeurs spectrales mesurées sur le champ 1 n'ayant pas été relevées au moment des mesures spectrales, le modèle de l'effet Kerr sera affiné au paragraphe suivant traitant des énergies générées.

### V.2.2.2 Mesure de l'énergie générée sur le champ 1

L'énergie générée sur le champ 1 est mesurée par une photodiode Thorlabs InGas calibrée et placée derrière une série de filtres et de miroirs qui coupent toutes les longueurs d'onde parasites, c'est-à-dire celles du champ pompe et des champs d'injection, mais aussi celles générées par cascade d'effets non linéaires d'ordre deux à 1024 et 1073 nm ainsi que par doublement de fréquence hors accord de phase du champ d'injection, autour de 831 nm. En aval de la série de filtres, la focalisation du faisceau dans des spectromètres fibrés OCEAN OPTICS, à capteurs visible et infrarouge, montre que seul un rayonnement autour de 1478 nm est visible, donc que le champ 1 sera bien détecté en quasi exclusivité.

Des mesures du champ 1 en fonction de l'énergie pompe et de l'énergie d'injection sont présentées figures V.8 à V.12, la génération se faisant dans le cristal de 13 mm. Les mesures présentées ici sont un échantillon des nombreuses expériences qui ont été menées, à des périodes variables et en utilisant deux cristaux de KTP de 13 mm et 28 mm, ceci afin d'essayer de s'affranchir d'éventuels artefacts de mesure.

Les courbes vertes des figures V.8 - V.12 montrent que pour de faibles énergies de pompe ou d'injection, il y a un très bon accord entre les énergies mesurées et notre modèle, décrit par les équations (V.10) et (V.11) : il s'agit bien d'une variation linéaire en fonction de l'énergie de pompe, et d'une variation quadratique vis-à-vis de l'énergie d'injection.

Pour des énergies plus fortes, il y a un effet de "saturation" de l'énergie générée en fonction de l'énergie des faisceaux incidents. Une première hypothèse serait d'envisager un endommagement progressif du cristal, comme le "gray-tracking", qui est un dommage photochromique de KTP produit par le 532 nm et qui se traduit par une augmentation

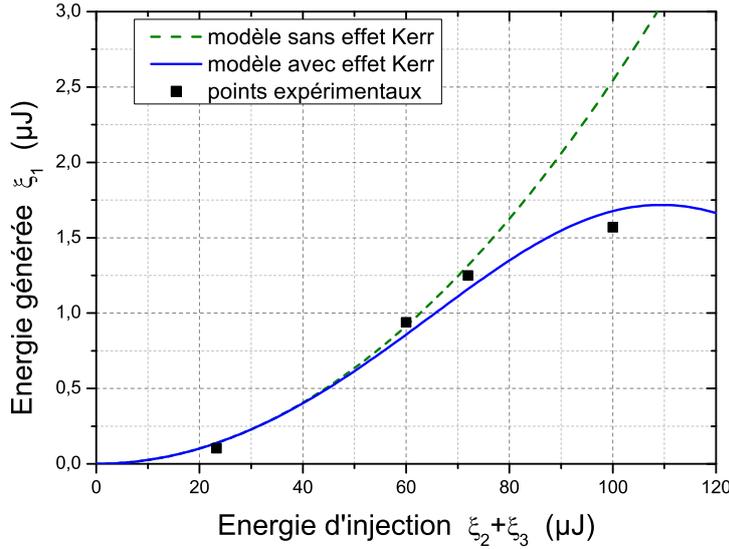


Figure V.8: Variation de l'énergie générée sur le champ 1 en fonction de l'énergie d'injection, l'énergie pompe étant fixée à  $\mathcal{E}_p = 14,5\mu J$ . Les courbes bleue et verte modélisent l'énergie attendue respectivement sans et avec effet Kerr, pour un facteur de recouvrement des champs de 0,41 entre les faisceaux de pompe et d'injection, et une pondération de l'intensité Kerr de  $P_K = 0,23$ .

progressive sur quelques minutes de l'absorption du cristal dans le visible et l'infra-rouge [55]. Si tel était le cas, la translation du cristal par rapport aux faisceaux incidents devrait permettre de recouvrir un niveau d'énergie plus important et identique à ce qu'il était initialement du fait de considérer un volume nouveau de matière, et donc encore "blanc" de tout dommage. Or expérimentalement il n'en est rien : l'énergie est aussi basse que celle obtenue dans le volume considéré précédemment. Ceci plaide donc de nouveau en faveur d'un effet Kerr qui agirait directement sur le paramètre  $\Delta k$  dans l'équation (V.11), comme nous en avons fait l'hypothèse précédemment pour expliquer l'élargissement du spectre.

Nous avons calculé le spectre théorique donnant l'énergie totale générée sur le champ 1 en prenant en compte l'effet Kerr. L'énergie totale générée en sortie de cristal de longueur  $L$  est obtenue par intégration de sa densité spectrale sur le spectre du champ 1, c'est à dire :

$$\xi_1(L) = \int d\omega \xi_1(\omega, L) , \quad (\text{V.16})$$

où  $\xi_1(\omega, L)$  est donné par (V.10), et où l'effet Kerr est pris en compte via les équations (V.14) et (V.15). Les différents paramètres apparaissant dans le facteur  $\tilde{\Phi}$  de (V.10) sont : la surface efficace de l'interaction,  $S$ , qui sera prise comme le plus petit rayon au carré (donc  $S \sim W_{0y}W_{0z}$ ) ; les indices de réfractions relatifs aux différents champs ; et le produit des énergies des champs d'injection et du champ pompe efficaces lors de l'interaction. En effet, le champ d'injection ayant un rayon plus grand que le champ pompe, une partie de son énergie n'est pas utilisée. Ainsi, en supposant que les axes des faisceaux

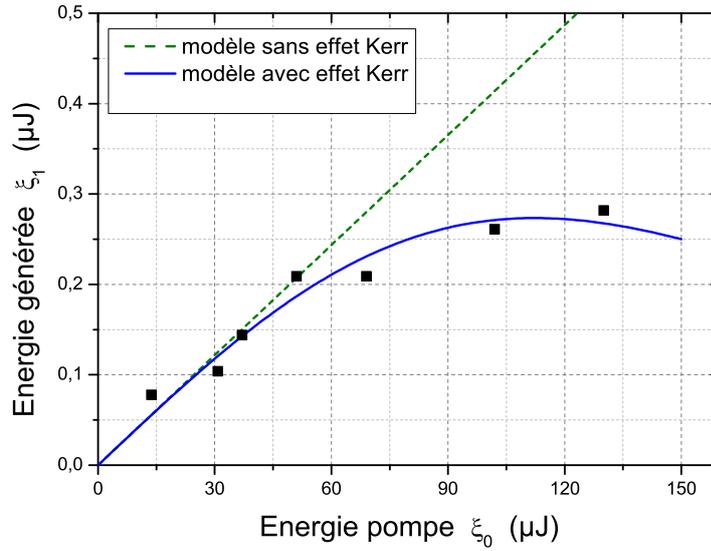


Figure V.9: Variation de l'énergie générée sur le champ 1 en fonction de l'énergie pompe, l'énergie d'injection étant fixée à  $\mathcal{E}_{2,3} = 7,75\mu\text{J}$  par champ. Les courbes bleue et verte modélisent l'énergie attendue respectivement sans et avec effet Kerr, pour un facteur de recouvrement des champs de  $G = 0,405$  entre les faisceaux de pompe et d'injection, et une pondération de l'intensité Kerr de  $P_K = 0,47$ .

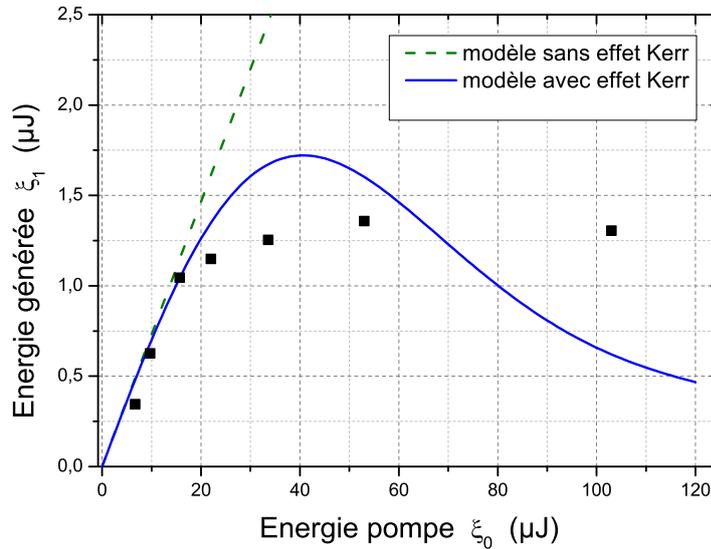


Figure V.10: Variation de l'énergie générée sur le champ 1 en fonction de l'énergie pompe, l'énergie d'injection étant fixée à  $\mathcal{E}_{2,3} = 24\mu\text{J}$  par champ. Les courbes bleue et verte modélisent l'énergie attendue respectivement sans et avec effet Kerr, pour un facteur de recouvrement des champs de  $G = 0,5$  entre les faisceaux de pompe et d'injection, et une pondération de l'intensité Kerr de  $P_K = 0,23$ .

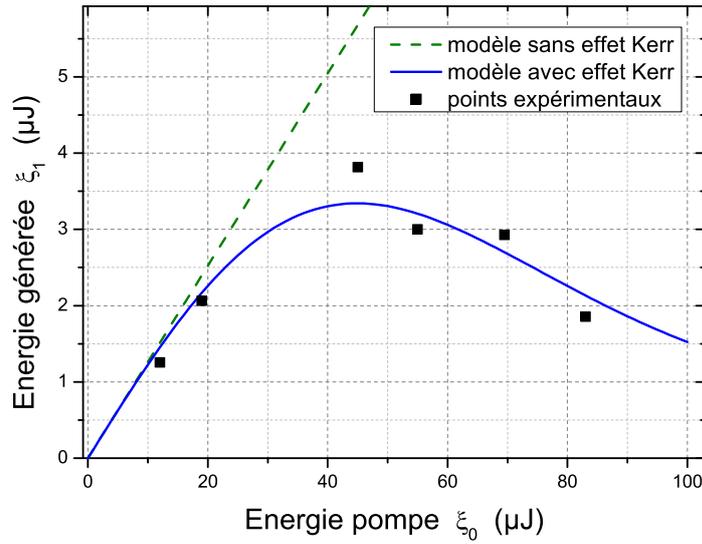


Figure V.11: Variation de l'énergie générée sur le champ 1 en fonction de l'énergie pompe, l'énergie d'injection étant fixée à  $\mathcal{E}_{2,3} = 31,5\mu\text{J}$  par champ. Les courbes bleue et verte modélisent l'énergie attendue respectivement sans et avec effet Kerr, pour un facteur de recouvrement des champs de  $G = 0,5$  entre les faisceaux de pompe et d'injection, et une pondération de l'intensité Kerr de  $P_K = 0,132$ .

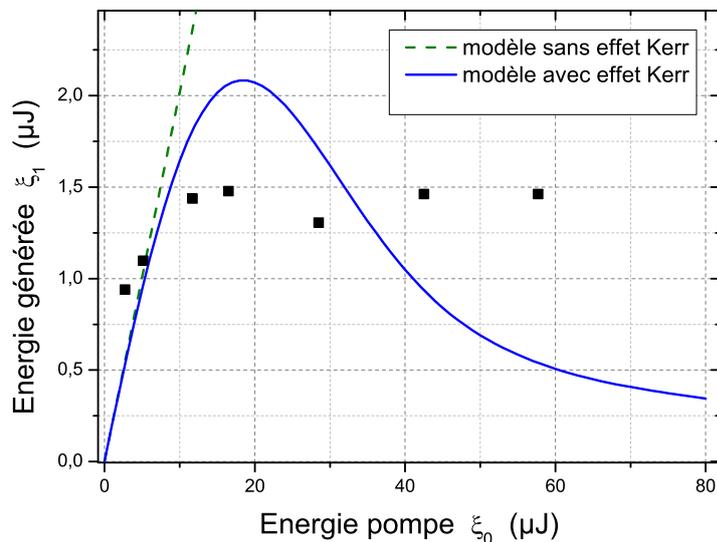


Figure V.12: Variation de l'énergie générée sur le champ 1 en fonction de l'énergie pompe, l'énergie d'injection étant fixée à  $\mathcal{E}_{2,3} = 36,5\mu\text{J}$  par champ. Les courbes bleue et verte modélisent l'énergie attendue respectivement sans et avec effet Kerr, pour un facteur de recouvrement des champs de  $G = 0,53$  entre les faisceaux de pompe et d'injection, et une pondération de l'intensité Kerr de  $P_K = 0,20$ .

de pompe et d'injection sont confondus, l'énergie qui intervient effectivement dans le processus paramétrique correspond à l'énergie contenue dans le volume d'intersection des deux gaussiennes décrivant le profil transverse de l'énergie, comme schématisé figure V.13. L'énergie du champ d'injection est donc renormalisée en tronquant les bords de sa gaussienne. Le facteur tronquant calculé avec les rayons mesurés est de 0,72.

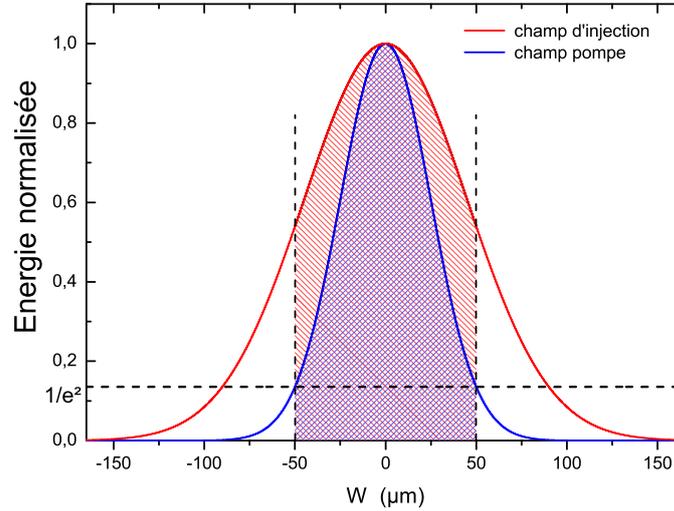


FIGURE V.13: *Schéma indiquant l'énergie effectivement active pour l'interaction par rapport à l'énergie incidente des champs d'injection. La gaussienne rouge représente la répartition transverse de l'énergie des champs d'injection, de rayon  $90 \mu\text{m}$  à  $1/e^2$  du maximum. La gaussienne bleue représente la répartition transverse de l'énergie du champ pompe, de rayon  $50 \mu\text{m}$  à  $1/e^2$ . Le champ pompe ne recouvrant pas entièrement les champs d'injection, seule la partie centrale hachurée en rouge va être effective pour l'interaction.*

Enfin, deux variables d'ajustement ont été introduites dans notre modèle pour l'interpolation des courbes expérimentales. La première, notée  $G$ , concerne la prise en compte des défauts de recouvrement potentiels, tant spatiaux que temporels, des champs de pompe et d'injection :  $G$  varie de 0,4 à 0,5 suivant les gammes d'énergie considérées, et elle intervient comme paramètre de renormalisation des énergies pompe et injection simultanément. La seconde variable, notée  $P_K$ , vient pondérer l'intensité effectivement opérante pour l'effet Kerr ; la relation (V.15) est alors écrite :

$$n_{Kerr}(\omega, z) = P_K \frac{\chi_{eff}^{(3)}}{\epsilon_0 c n(\omega, z)^2} I(\omega, z) \quad (\text{V.17})$$

Le paramètre  $P_K$  varie de 0,1 à 0,5 suivant les expériences réalisées, indiquant ainsi que toute l'intensité ne contribue pas à l'effet Kerr.

L'ensemble des interpolations est représenté par les courbes bleues sur les figures V.8 à V.12, les courbes vertes correspondant à l'énergie donnée par le modèle sans effet Kerr.

L'accord entre théorie et expérience est très satisfaisant, excepté dans le cas de

l'expérience décrite figure V.12 aux hautes énergies. Cet écart pourrait s'expliquer par le fait de ne pas avoir considéré la variation de géométrie des faisceaux par effet de lentille Kerr, effet augmentant leur intensité et éventuellement aussi leur recouvrement par refocalisation juste après cette lentille Kerr. Ainsi dans cette hypothèse, et concernant la partie haute énergie de pompe de la courbe V.12, la lentille Kerr viendrait compenser la décroissance de l'énergie générée qui est induite par l'augmentation de l'amplitude du paramètre  $\Delta k$ , augmentation elle-même produite par l'effet Kerr. L'absence de prise en compte de ce même phénomène d'autofocalisation pourrait également expliquer la faible amplitude du paramètre  $P_K$  dans notre modélisation, puisque tout l'effet Kerr est imputé à la seule variation de  $\Delta k$ . La prise en compte de la lentille Kerr dans les calculs est en cours.

## V.3 Expériences de recombinaison en régime bi-injecté

### V.3.1 Dispositif et conditions expérimentales

Les champs triplets générés en régime bi-injecté ont été recombinaisonnés par somme de fréquences à deux et trois champs, selon les schémas d'interaction décrits au chapitre IV :  $\lambda_1^{(+)} + \lambda_2^{(-)} + \lambda_3^{(+)} \rightarrow \lambda_{\Omega}^{(-)}$  pour la somme de fréquences à trois photons, et  $\lambda_1^{(+)} + \lambda_2^{(-)} \rightarrow \lambda_A^{(-)}$  ainsi que  $\lambda_2^{(+)} + \lambda_3^{(-)} \rightarrow \lambda_B^{(-)}$  pour la somme de fréquences à deux photons.

Des filtres coupant toutes les longueurs d'onde autres que celles des champs triplets ont été disposés en sortie de cristal générant les triplets, et une lentille convergente de courte distance focale permet de faire converger les faisceaux triplets et d'assurer ainsi un recouvrement spatial suffisamment bon au niveau du cristal recombinaisonnant. Cette partie a été assez délicate car les faisceaux ne convergeaient pas exactement au même endroit. Cependant, notre but n'était pas d'assurer un rendement optimal à l'interaction, mais il s'agissait d'obtenir une énergie générée suffisante pour être capable de la détecter et de la caractériser. Pour la somme de fréquences à trois champs, deux cristaux de KTP de 5 mm et 3 mm de longueur ont été utilisés. Ils sont taillés comme le cristal générateur, l'accord de phase nécessaire à la somme de fréquences étant le même que celui nécessaire à la génération, qui est le processus inverse. Pour la recombinaison à deux champs, un cristal de KTP de 1,8 mm a été utilisé. Il est orienté selon ( $\varphi = 0^\circ$ ,  $\theta = 52^\circ$ ). Ce cristal permettra, suite à une légère rotation, de trouver l'accord de phase recherché.

Nous avons choisi des cristaux suffisamment fins pour restreindre au minimum la limitation spectrale des champs sommés du fait de l'acceptance spectrale, mais néanmoins suffisamment longs pour assurer un rendement permettant de mesurer les énergies générées. Les champs ont été caractérisés spectralement en sortie du monochromateur Chromex, une photodiode Si ou Ingas Thorlabs étant utilisée pour la détection. Étant

donné la variabilité spectrale des champs pompe et des champs d'injection, et par conséquent la variabilité spectrale du champ 1 généré dans le premier cristal, l'énergie et le spectre de tous les champs ont été remesurés lors de chaque série de mesure des champs recombinaison. Au sein de ces séries, toutes conditions expérimentales étant supposées stables, une instabilité a été observée, surtout pour le champ somme à trois photons ; elle s'explique par l'instabilité de la source et le très faible rendement de conversion, bien que nous ayons corrigé l'amplitude en énergie du champ recombinaison par rapport à celle du champ 1 en sortie de cristal. Ainsi, les barres d'erreur, qui n'ont pas été portées, sont très élevées. Cependant, la répétition et le moyennage des mesures sur les champs recombinaison nous ont permis de vérifier que l'allure et la largeur spectrale sont globalement reproductibles et fiables.

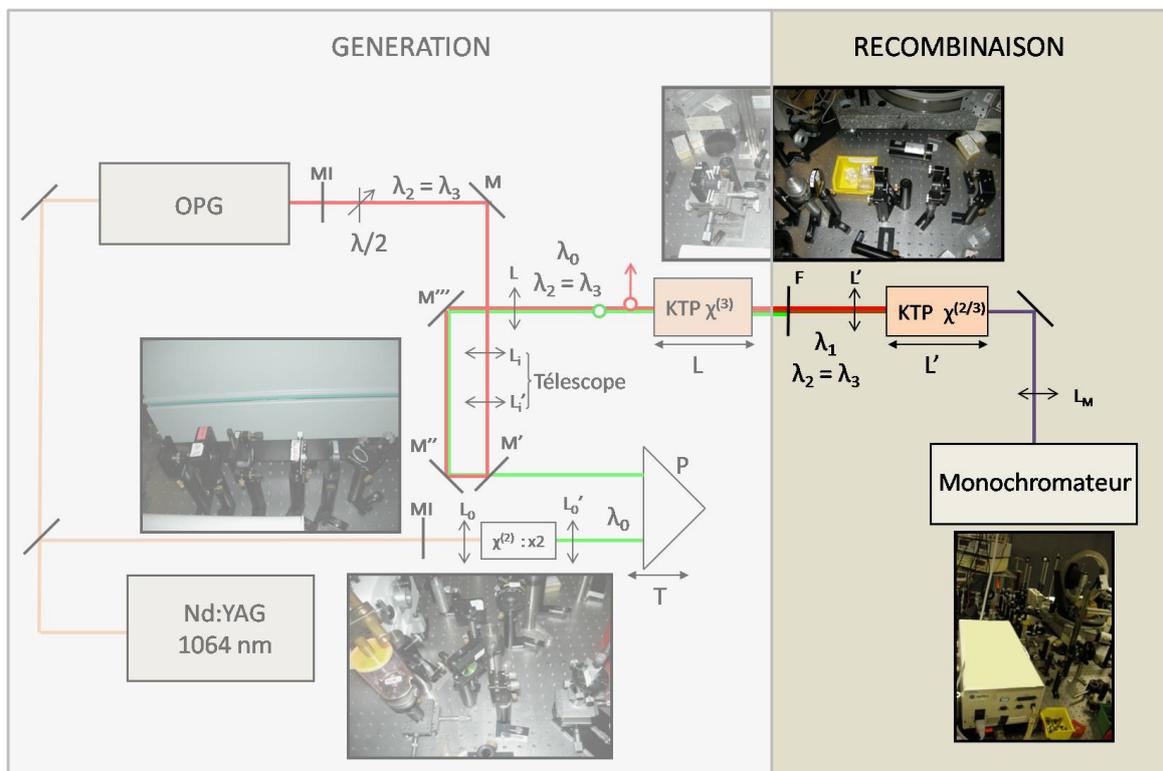


FIGURE V.14: *Dispositif expérimental utilisé pour la recombinaison des faisceaux triplets.*

### V.3.2 Champs recombinaison par sommes de fréquences des champs triplets

Compte tenu des calculs réalisés au chapitre IV, nous ne nous attendons pas à être en mesure de signer de corrélations sur les champs triplets étant donné qu'ils sont générés en régime bi-injecté. En effet, que ce soit pour la somme de fréquences des trois champs triplets (paragraphe IV.2.3), ou pour la somme de fréquences de deux des champs triplets (paragraphe IV.3.3), il faut s'attendre à ce que les corrélations soient masquées par l'injection, de sorte que le champ généré devrait être équivalent au champ généré par recombinaison de champs triplets incohérents.

Le cristal utilisé pour la somme de fréquences à deux champs est un cristal de KTP de 1,8 mm de longueur orienté selon ( $\varphi = 0^\circ$ ,  $\theta = 52^\circ$ ). Il permettra d'accéder, par rotation autour de l'axe OY, aux deux directions d'accord de phase utilisées pour réaliser les deux recombinaisons possibles :  $\theta_A = 51,6^\circ$  pour la somme de fréquences du champ 1 généré et du champ injecté polarisé (-) suivant  $\lambda_1^{(+)} + \lambda_2^{(-)} \rightarrow \lambda_A^{(-)}$ , et  $\theta_B = 52,3^\circ$  pour la recombinaison des deux champs injectés suivant  $\lambda_2^{(+)} + \lambda_3^{(-)} \rightarrow \lambda_B^{(-)}$ .

Deux spectres correspondant à la recombinaison du schéma A sont donnés figure V.15 à titre purement exemplaire.

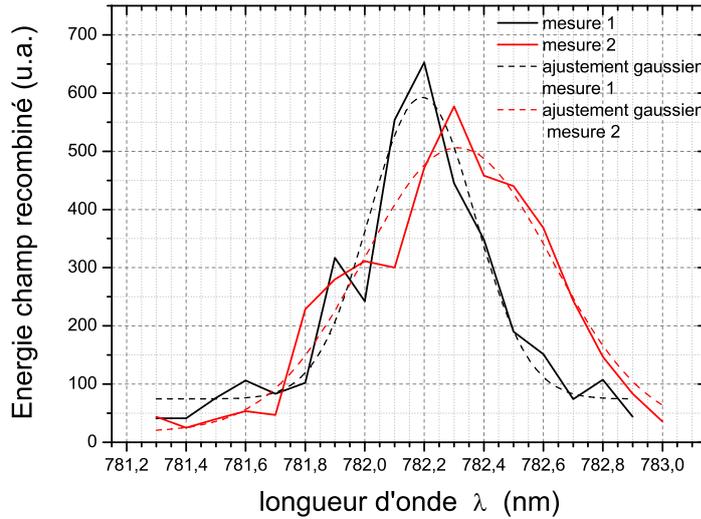


FIGURE V.15: *Exemple de champ recombiné par somme de fréquences à deux photons selon le schéma A :  $\lambda_1^{(+)} + \lambda_2^{(-)} \rightarrow \lambda_A^{(-)}$ .*

Des largeurs spectrales de champs recombinés, notées  $\Delta\lambda_A$  et  $\Delta\lambda_B$  relatives à des spectres générés selon les schémas A et B respectivement, et correspondant à deux séries de mesures pour lesquelles l'allure et la largeur des champs recombinés ont été moyennées, sont regroupées tableau V.1. Les  $\Delta\lambda_j$ , avec  $j = \{0, 1, 2, 3\}$ , représentent respectivement les largeurs spectrales du champ pompe 0 et des champs 1, 2 et 3 mesurées après l'interaction dans le cristal générant les triplets de photons.

largeurs moyennes à mi-hauteur (nm)	$L = 28 \text{ mm}$	$L = 13 \text{ mm}$
$\Delta\lambda_0$	0,75	0,45
$\Delta\lambda_1$	7	4
$\Delta\lambda_{2,3}$	4	3
$\Delta\lambda_A$	1,6	0,8
$\Delta\lambda_{A \text{ modélisé}}$	2,1	1,3
$\Delta\lambda_B$	1,5	1,1
$\Delta\lambda_{B \text{ modélisé}}$	1,3	1,0

TABLE V.1: Largeurs spectrales moyennes des champs 0, 1, 2 et 3 et des champs recombinés par somme de fréquences dans un cristal de KTP de 1,8 mm de longueur selon les schémas A ( $\lambda_1^{(+)} + \lambda_2^{(-)} \rightarrow \lambda_A^{(-)}$ ) et B ( $\lambda_2^{(+)} + \lambda_3^{(-)} \rightarrow \lambda_B^{(-)}$ ), et largeurs attendues selon la modélisation donnée au chapitre IV pour ces deux champs somme;  $L$  est la longueur du cristal générateur de triplets.

Selon les expressions calculées au chapitre IV, le champ somme en régime de bi-injection est décrit par la relation (IV.30) pour le schéma A et (IV.28) pour le schéma B. Bien que les champs générés ne soient pas vraiment gaussiens, nous avons interpolé chacun de ces champs par une gaussienne et calculé la largeur spectrale attendue pour le champ somme selon les expressions (IV.30) et (IV.28). Les largeurs données par le calcul sont également reportées dans le tableau V.1. Il apparait que les valeurs mesurées sont un peu différentes des valeurs théoriques. Pour la recombinaison des deux champs injectés, c'est-à-dire selon le schéma B, le léger élargissement pourrait être dû à l'effet Kerr, que nous n'avons pas pris en compte ici. Pour le champ généré selon le schéma A, l'écart entre les largeurs spectrales des champs mesurés et celles des champs modélisés varie d'environ 40%. Cet écart, supérieur à nos incertitudes de mesures n'est pas encore expliqué.

Concernant la recombinaison des trois champs triplets selon le schéma  $\lambda_1^{(+)} + \lambda_2^{(-)} + \lambda_3^{(+)} \rightarrow \lambda_\Omega^{(-)}$ , les cristaux de KTP utilisés sont taillés selon X, comme le cristal de génération. Deux cristaux ont été utilisés, de longueurs 3 mm et 5 mm. Ils sont pris relativement longs afin que la somme de fréquences soit suffisamment efficace pour observer le champ somme généré. Nous avons considéré deux longueurs différentes afin d'évaluer si le cristal recombinant limite ou non le champ sommé de par sa tolérance spectrale. Comme pour les recombinaison à deux photons, les recombinaisons sont testées après génération des champs triplets dans les cristaux de 13 mm et de 28 mm.

Deux exemples de spectres du champ recombiné sont présentés figure V.16.

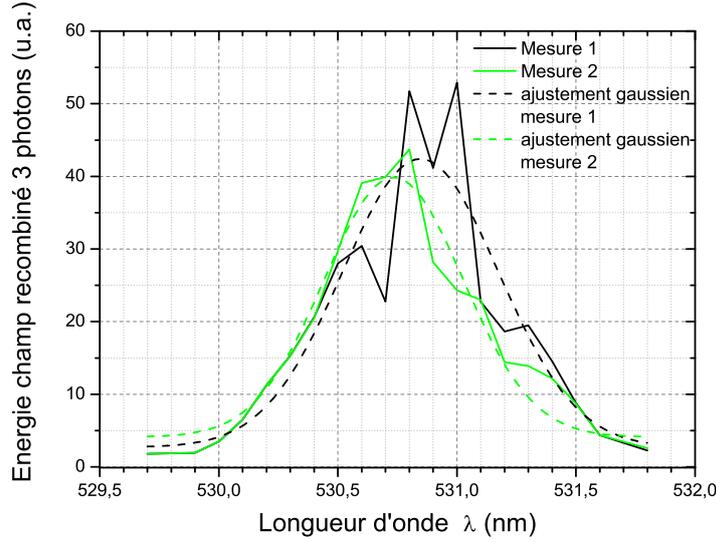


FIGURE V.16: Exemple de champ recombiné par somme de fréquences à trois photons.

Les valeurs moyennées des largeurs à mi hauteur, notées  $\Delta\lambda_\Omega$ , du champ somme sont rassemblées dans le tableau V.2, pour différentes séries correspondant chacune à des conditions expérimentales fixées.

largeurs moyennes à mi-hauteur (nm)	$L = 28 \text{ mm}$	$L = 13 \text{ mm}$
$\Delta\lambda_0$	0,5	0,45
$\Delta\lambda_1$	15	4
$\Delta\lambda_{2,3}$	3,5	3
$\Delta\lambda_\Omega, L'=5\text{mm}$	1	0,8
$\Delta\lambda_\Omega, L'=5\text{mm modélisé}$	0,9	0,55
$\Delta\lambda_\Omega, L'=3\text{mm}$		0,7
$\Delta\lambda_\Omega, L'=3\text{mm modélisé}$		0,6

TABLE V.2: Largeurs spectrales moyennes mesurées pour deux séries de mesures des champs 1, 2 et 3 et des champs recombinés par somme de fréquences à trois champs dans des cristaux de KTP orientés selon X, de longueurs  $L'$  de 3 mm et 5 mm;  $L$  correspond à la longueur du cristal dans lequel ont été générés les champs triplets.

Les champs recombinés après génération dans le cristal de 28 mm sont proches du champ prévu par notre modèle décrit paragraphe IV.2.3. Ces mesures ont été faites dans de bonnes conditions compte tenu d'un rendement de conversion suffisant du fait de la grande longueur du cristal. Pour les champs recombinés après génération dans le cristal

de 13 mm, les champs mesurés sont 30% plus larges que les champs attendus, incertitude probablement imputable en partie à la mesure.

Au final, nous pouvons retenir que le champ de recombinaison suit l'allure du champ attendu par la modélisation, c'est-à-dire que sa largeur spectrale augmente quand la largeur des champs sommés augmente, et inversement.

Des effets non linéaires et des imprécisions de mesure font fluctuer les champs générés autour des valeurs attendues, mais il est néanmoins quasiment certain que le champ recombiné à deux ou à trois photons est le même que celui qui serait généré par somme de fréquences de champs indépendants. Pour les sommes de fréquences à trois champs, il est en outre clair que le champ recombiné observé est différent du champ pompe, et ceci d'autant plus qu'un léger décalage en longueur d'onde est observé.

En conclusion et comme prédit théoriquement, ces expériences de recombinaison en régime de bi-injection forte ne permettent pas de signer de corrélations entre les photons triplets. Elles viennent donc valider les conclusions établies au chapitre IV à propos du masquage des corrélations.

Nous avons essayé des expériences de génération des champs triplets par mono-injection, en tournant progressivement la polarisation du champ d'injection, jusqu'à tendre vers une seule composante, mais l'énergie générée sur le champ 1 était trop faible pour qu'une recombinaison détectable des champs triplets soit envisageable.

# Conclusion et perspectives

Ce travail de thèse porte sur l'étude de la cohérence entre champs triplets générés par interaction optique non linéaire d'ordre trois. Il se situe dans la continuité des travaux réalisés depuis 2004 dans le groupe de Benoit Boulanger, en collaboration avec Kamel Bencheikh et Ariel Levenson, où des champs triplets sont obtenus par génération paramétrique bi-stimulée sous de fortes intensités laser.

Un protocole d'étude des corrélations entre les champs a été proposé en continuité de ces expériences, protocole basé sur l'étude indirecte des cohérences entre photons par le biais de l'étude du champ issu de la somme de fréquences dans un cristal non linéaire à partir des champs triplets.

Un modèle théorique a été développé pour décrire dans le formalisme quantique l'évolution des champs. Il traite de la génération des champs triplets polychromatiques en régime de gain faible et de pompe non dépeuplée, et atteste de la possibilité de mettre en évidence ou non les corrélations entre les champs par le protocole de recombinaison en fonction du niveau d'injection. En régime de génération par fluorescence paramétrique, le modèle traduit bien la cohérence des champs triplets en faisant ressortir un lien, résidant dans les fluctuations quantiques des champs triplets, qui pousse les photons d'un même triplet à se reconnaître mutuellement et à se recombinaison entre eux au moment de la somme de fréquences. Dans ce régime, une recombinaison à trois champs fait ainsi apparaître le champ somme comme équivalent au champ pompe, et une recombinaison à deux champs triplets fait apparaître un champ somme complémentaire, c'est-à-dire lié au champ triplet non sommé. Par contre, ces corrélations apparaissent entièrement masquées en régime bi-injecté où le champ recombinaison est équivalent à une somme de champs incohérents ; elles sont partiellement masquées en régime mono-injecté, le champ généré étant différent du champ qui serait donné par la somme de champs incohérents, mais la signature des corrélations n'est pas aussi forte que dans le cas de génération par fluorescence paramétrique.

Les expériences que nous avons menées étaient en régime de génération bi-injecté. Nous espérons que les cohérences entre champs ne seraient pas forcément masquées dans ce régime, mais les calculs théoriques et les mesures expérimentales menées sur le champ recombinaison nous ont démontré le contraire : nous obtenons effectivement un champ recombinaison équivalent à la somme incohérente des champs triplets, ces champs triplets générés étant par ailleurs bien décrits par notre modèle théorique en sortie du cristal

générateur.

Cette thèse a donc permis de compléter la “boîte à outils” nécessaire à la modélisation de la génération et de la mise en évidence des corrélations de triplets de photons selon le protocole de recombinaison non linéaire, en apportant un modèle en formalisme quantique inexistant jusqu’alors. La prochaine étape s’appuiera sur ces outils pour concevoir de nouvelles expériences où la génération des champs sera possible par scission mono-stimulée, ou mieux encore non stimulée, c’est-à-dire par fluorescence paramétrique.

Les champs générés par scission mono-stimulée devraient conserver des propriétés de cohérence selon nos calculs, qui pourraient être mises en évidence par l’expérience de recombinaison actuelle. Nous avons essayé de tendre vers ce régime mais les énergies générées sont trop faibles pour détecter les champs générés avec les détecteurs dont nous disposons actuellement. Nous pourrions expérimentalement tenter une génération mono-injectée par une mise en cavité du cristal générateur avec pompage synchrone. Cependant, le calcul du nombre de photons générés sous mono-injection montrent que celle-ci est peu efficace, les intensités seuil pour que l’effet de la mono-injection soit observable se situant au dessus du seuil de dommage optique du cristal de KTP.

Le mieux reste donc à tous points de vue la génération par fluorescence paramétrique. Une génération dans des fibres optiques semble être le moyen le plus prometteur pour atteindre cet objectif, comme l’ont montré plusieurs propositions théoriques publiées récemment, dont une dans le groupe [5–7]. L’avantage d’une fibre optique est double : d’une part elle apporte la possibilité de travailler à très forte intensité grâce au confinement géométrique, et d’autre part elle procure de grandes longueurs d’interaction, tout cela devant permettre d’atteindre le rendement désiré. De plus, en jouant sur les différents modes transverses pouvant se propager, il est possible de réaliser un filtrage spatial efficace en considérant deux modes différents pour le champ pompe et celui du champ triplet. Ainsi la dispersion en fréquence de la condition de co-existence de ces deux modes vient imposer la condition complétant la conservation de l’énergie et de l’impulsion. Il en résulte alors un meilleur rendement de conversion et des champs générés plus fins spectralement. Une collaboration est en cours avec la Draka à Marcoussis [7] ainsi qu’avec deux équipes de Southampton et Auckland, ces différents groupes étant capables de tirer des microfibres adaptées à notre problématique.

Une fois les photons générés dans la fibre, notre protocole de somme de fréquences pourra permettre de vérifier leur cohérence, mais il sera également possible d’effectuer des mesures directes des quadratures dans l’espace des phases, et d’évoluer vers des manipulations de triplets de photons uniques en se plaçant au seuil désiré, ce que ne permettrait jamais une expérience de génération stimulée, en vue de la mise en œuvre de protocoles du type paires annoncées pour l’information quantique.

# Annexe A

## Cas où deux des opérateurs modes sont identiques

### A.1 Expression des opérateurs création, annihilation et des densités spectrales

En considérant le cas où les opérateurs modes sont différenciés uniquement par la polarisation, c'est-à-dire qu'ils sont dégénérés en direction, il n'y a alors a priori pas de raison de considérer trois opérateurs modes différents pour chacun des photons triplets générés. En effet, au moins deux d'entre eux auront forcément la même polarisation. Envisageons le cas, correspondant à notre schéma expérimental, où deux des champs triplets ont la même polarisation, notée (+), donc sont dégénérés, et où le troisième champ est de polarisation différente, notée (-), donc discernable. Un même opérateur mode, nommé  $\hat{a}_p$  pour l'opérateur d'annihilation, décrit les composantes spectrales ayant la polarisation (+) (il y en a donc deux par triplet, décrits par ce même opérateur), et un second opérateur, noté  $\hat{a}_m$  pour l'opérateur d'annihilation, décrit les composantes de polarisation (-). Choisissons, comme dans notre schéma expérimental, de nommer 1 et 3 les champs polarisés (+), et 2 le champ polarisé (-).  $\hat{a}_p$  est donc mis pour nos anciens opérateurs  $\hat{a}_1$  et  $\hat{a}_3$ , et  $\hat{a}_m$  est mis pour  $\hat{a}_2$ . Pour obtenir l'évolution des opérateurs modes  $\hat{a}_p$  et  $\hat{a}_m$  dans ce schéma, reprenons l'opérateur d'évolution non linéaire d'ordre 3 :  $\hat{G}_{nl}$ , donné par l'expression (I.58), en considérant les photons pompe comme monochromatiques à la fréquence  $\omega_p$ . La pompe ayant nécessairement la polarisation (-) (d'après (I.25)), l'opérateur du champ pompe est également  $\hat{a}_m$ . L'opérateur moment non linéaire s'écrit alors :

$$\hat{G}_{nl}(z) = \iint d\omega' d\omega'' \hbar \Gamma(\omega_p, \omega', \omega'') \times \left[ \hat{a}_p(\omega', z) \hat{a}_p(\omega'', z) \hat{a}_m(\omega_p - \omega' - \omega'', z) \hat{a}_m^+(\omega_p, z) e^{+i\Delta k(\omega_p, \omega', \omega'')z} + c.c. \right] \quad (\text{A.1})$$

L'évolution de l'opérateur mode annihilation  $\hat{a}_p(\omega, z)$  est alors donnée par :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \hat{a}_p(\omega, z)}{\partial z} &= -\frac{i}{\hbar} \left[ \hat{a}_p(\omega, z), \hat{G}_{nl}(z) \right] \\
 &= -i \int d\omega'' \Gamma(\omega_p, \omega', \omega'') \hat{a}_p^+(\omega'', z) \hat{a}_m^+(\omega_p - \omega - \omega'', z) \hat{a}_m(\omega_p, z) e^{-i\Delta k(\omega_p, \omega, \omega'')z} \\
 &\quad -i \int d\omega' \Gamma(\omega_p, \omega', \omega) \hat{a}_p^+(\omega', z) \hat{a}_m^+(\omega_p - \omega' - \omega, z) \hat{a}_m(\omega_p, z) e^{-i\Delta k(\omega_p, \omega', \omega)z}
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

avec

$$\Gamma(\omega_p, \omega', \omega'') = \frac{\hbar \chi_{eff}^{(3)}}{8\pi c^2 S \varepsilon_0} \sqrt{\frac{\omega_p \omega' \omega'' (\omega_p - \omega' - \omega'')}{n_m(\omega_p) n_p(\omega') n_p(\omega'') n_m(\omega_p - \omega' - \omega'')}} = \Gamma(\omega_p, \omega'', \omega') \tag{A.3}$$

et

$$\Delta k(\omega_p, \omega', \omega'') = \Delta k(\omega_p, \omega'', \omega') , \tag{A.4}$$

La symétrie vient du fait que les deux fréquences  $\omega'$  et  $\omega''$  se rapportent à l'opérateur  $\hat{a}_p$  donc à la nappe de polarisation (+). L'évolution de  $\hat{a}_p$  s'écrit donc encore :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \hat{a}_p(\omega, z)}{\partial z} &= -\frac{i}{\hbar} \left[ \hat{a}_p(\omega, z), \hat{G}_{nl}(z) \right] \\
 &= -i \int d\omega'' \Gamma(\omega_p, \omega, \omega'') \hat{a}_p^+(\omega'', z) \hat{a}_m^+(\omega_p - \omega - \omega'', z) \hat{a}_m(\omega_p, z) e^{-i\Delta k(\omega_p, \omega, \omega'')z} \\
 &\quad -i \int d\omega' \Gamma(\omega_p, \omega', \omega) \hat{a}_p^+(\omega', z) \hat{a}_m^+(\omega_p - \omega' - \omega, z) \hat{a}_m(\omega_p, z) e^{-i\Delta k(\omega_p, \omega', \omega)z} \\
 &= -2i \int d\omega' \Gamma(\omega_p, \omega, \omega') \hat{a}_p^+(\omega', z) \hat{a}_m^+(\omega_p - \omega - \omega', z) \hat{a}_m(\omega_p, z) e^{-i\Delta k(\omega_p, \omega, \omega')z}
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

soit en en résolvant :

$$\hat{a}_p(\omega, z) = \hat{a}_p(\omega, 0) - 2i \int d\omega' \Phi(z, \omega_p, \omega, \omega') \hat{a}_p^+(\omega', 0) \hat{a}_m^+(\omega_p - \omega - \omega', 0) \tag{A.6}$$

avec  $\Phi(z, \omega_p, \omega, \omega') = \Phi(z, \omega_p, \omega', \omega)$ , donné par :

$$\Phi(z, \omega_p, \omega, \omega') = \Gamma(\omega_p, \omega, \omega') A_p(\omega_p) z \operatorname{sinc} \left( \frac{\Delta k(\omega_p, \omega, \omega')z}{2} \right) e^{-\frac{i\Delta k(\omega_p, \omega, \omega')z}{2}} \tag{A.7}$$

Maintenant, examinons l'évolution de l'opérateur mode annihilation  $\hat{a}_m(\omega, z)$  :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \hat{a}_m(\omega, z)}{\partial z} &= -\frac{i}{\hbar} \left[ \hat{a}_m(\omega, z), \hat{G}_{nl}(z) \right] \\
 &= -i \int d\omega' \Gamma(\omega_p, \omega', \omega_p - \omega' - \omega) \hat{a}_p^+(\omega_p - \omega' - \omega, z) \hat{a}_p^+(\omega', z) \hat{a}_m(\omega_p, z) \times \\
 &\quad e^{+i\Delta k(\omega_p, \omega', \omega_p - \omega' - \omega)z}
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

ce qui donne :

$$\hat{a}_m(\omega, z) = \hat{a}_m(\omega, 0) - i \int d\omega' \Phi(z, \omega_p, \omega', \omega_p - \omega' - \omega) \hat{a}_p^+(\omega', 0) \hat{a}_p^+(\omega_p - \omega - \omega', 0) \tag{A.9}$$

L'expression de ces opérateurs permettent d'obtenir les densités spectrales moyennes des champs dans les deux polarisations, données par :

$$\begin{aligned}
 n_p(\omega, z) &= \langle \psi | \hat{a}_p^+(\omega, z) \hat{a}_p(\omega, z) | \psi \rangle & (A.10) \\
 &= \langle \psi | \left( \hat{a}_p^+(\omega, 0) + 2i \int d\omega' \Phi^*(z, \omega_p, \omega, \omega') \hat{a}_p(\omega', 0) \hat{a}_m(\omega_p - \omega - \omega', 0) \right) \times \\
 &\quad \left( \hat{a}_p(\omega, 0) - 2i \int d\omega'' \Phi(z, \omega_p, \omega, \omega'') \hat{a}_p^+(\omega'', 0) \hat{a}_m^+(\omega_p - \omega - \omega'', 0) \right) | \psi \rangle
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 n_m(\omega, z) &= \langle \psi | \hat{a}_m^+(\omega, z) \hat{a}_m(\omega, z) | \psi \rangle & (A.11) \\
 &= \langle \psi | \left( \hat{a}_m^+(\omega, 0) - i \int d\omega' \Phi^*(z, \omega_p, \omega', \omega_p - \omega' - \omega) \hat{a}_p(\omega', 0) \hat{a}_p(\omega_p - \omega - \omega', 0) \right) \times \\
 &\quad \left( \hat{a}_m(\omega, 0) - i \int d\omega' \Phi(z, \omega_p, \omega', \omega_p - \omega' - \omega) \hat{a}_p^+(\omega', 0) \hat{a}_p^+(\omega_p - \omega - \omega', 0) \right) | \psi \rangle
 \end{aligned}$$

Développons ces densités spectrales dans le cas le plus général où certaines fréquences sont injectées dans les deux champs de polarisation (+) et (-).

Développons tout d'abord  $n_p$  :

$$\begin{aligned}
 n_p(\omega, z) &= \langle \psi | \hat{a}_p^+(\omega, 0) \hat{a}_p(\omega, 0) & (A.12) \\
 &\quad - 2Re \left( 2i \int d\omega'' \Phi(z, \omega_p, \omega, \omega'') \hat{a}_p^+(\omega, 0) \hat{a}_p^+(\omega'', 0) \hat{a}_m^+(\omega_p - \omega - \omega'', 0) \right) \\
 &\quad + 4 \iint d\omega' d\omega'' \Phi(z, \omega_p, \omega, \omega'') \Phi^*(z, \omega_p, \omega, \omega') \times \\
 &\quad \hat{a}_p(\omega', 0) \hat{a}_m(\omega_p - \omega - \omega', 0) \hat{a}_p^+(\omega'', 0) \hat{a}_m^+(\omega_p - \omega - \omega'', 0) | \psi \rangle \\
 &= n_p(\omega, 0) + 4 \iint d\omega' d\omega'' \Phi(z, \omega_p, \omega, \omega'') \Phi^*(z, \omega_p, \omega, \omega') \times \\
 &\quad \langle \psi | \hat{a}_p(\omega', 0) \hat{a}_m(\omega_p - \omega - \omega', 0) \hat{a}_p^+(\omega'', 0) \hat{a}_m^+(\omega_p - \omega - \omega'', 0) | \psi \rangle
 \end{aligned}$$

Développons uniquement la partie des opérateurs :

$$\begin{aligned}
& \langle \psi | \hat{a}_p(\omega', 0) \hat{a}_m(\omega_p - \omega - \omega', 0) \hat{a}_p^+(\omega'', 0) \hat{a}_m^+(\omega_p - \omega - \omega'', 0) | \psi \rangle = \\
& \langle \psi | \hat{a}_p(\omega', 0) \hat{a}_p^+(\omega'', 0) \hat{a}_m(\omega_p - \omega - \omega', 0) \hat{a}_m^+(\omega_p - \omega - \omega'', 0) | \psi \rangle = \\
& \langle \psi | (\hat{a}_p^+(\omega'', 0) \hat{a}_p(\omega', 0) + \delta(\omega' - \omega'')) \hat{a}_m(\omega_p - \omega - \omega', 0) \hat{a}_m^+(\omega_p - \omega - \omega'', 0) | \psi \rangle = \\
& \langle \psi | \hat{a}_p^+(\omega'', 0) \hat{a}_p(\omega', 0) \hat{a}_m(\omega_p - \omega - \omega', 0) \hat{a}_m^+(\omega_p - \omega - \omega'', 0) | \psi \rangle + \\
& \delta(\omega' - \omega'') \langle \psi | \hat{a}_m(\omega_p - \omega - \omega', 0) \hat{a}_m^+(\omega_p - \omega - \omega'', 0) | \psi \rangle = \\
& \langle \psi | \hat{a}_p^+(\omega'', 0) \hat{a}_m(\omega_p - \omega - \omega', 0) \hat{a}_m^+(\omega_p - \omega - \omega'', 0) \hat{a}_p(\omega', 0) | \psi \rangle + \\
& \delta(\omega' - \omega'') (\langle \psi | \hat{a}_m^+(\omega_p - \omega - \omega'', 0) \hat{a}_m(\omega_p - \omega - \omega', 0) | \psi \rangle + 1) = \\
& \sqrt{n_p(\omega'', 0)} \sqrt{n_p(\omega', 0)} \langle \psi | \hat{a}_m^+(\omega_p - \omega - \omega'', 0) \hat{a}_m(\omega_p - \omega - \omega', 0) + \delta(\omega' - \omega'') | \psi \rangle + \\
& \delta(\omega' - \omega'') (n_m(\omega_p - \omega - \omega', 0) + 1) = \\
& \sqrt{n_p(\omega'', 0)} \sqrt{n_p(\omega', 0)} \sqrt{n_m(\omega_p - \omega - \omega'', 0)} \sqrt{n_m(\omega_p - \omega - \omega', 0)} + \\
& \delta(\omega' - \omega'') (n_m(\omega_p - \omega - \omega', 0) + n_p(\omega', 0) + 1) \tag{A.13}
\end{aligned}$$

soit pour  $n_p$  totale :

$$\begin{aligned}
n_p(\omega, z) &= \langle \psi | \hat{a}_p^+(\omega, 0) \hat{a}_p(\omega, 0) | \psi \rangle - \\
& 2Re \left( 2i \int d\omega'' \Phi(z, \omega_p, \omega, \omega'') \langle \psi | \hat{a}_p^+(\omega, 0) \hat{a}_p^+(\omega'', 0) \hat{a}_m^+(\omega_p - \omega - \omega'', 0) | \psi \rangle \right) + \\
& 4 \iint d\omega' d\omega'' \Phi(z, \omega_p, \omega, \omega'') \Phi^*(z, \omega_p, \omega, \omega') \times \\
& \langle \psi | \hat{a}_p(\omega', 0) \hat{a}_m(\omega_p - \omega - \omega', 0) \hat{a}_p^+(\omega'', 0) \hat{a}_m^+(\omega_p - \omega - \omega'', 0) | \psi \rangle \\
&= n_p(\omega, 0) + 4 \iint d\omega' d\omega'' \Phi(z, \omega_p, \omega, \omega'') \Phi^*(z, \omega_p, \omega, \omega') \times \\
& \sqrt{n_p(\omega'', 0)} \sqrt{n_p(\omega', 0)} \sqrt{n_m(\omega_p - \omega - \omega'', 0)} \sqrt{n_m(\omega_p - \omega - \omega', 0)} + \\
& 4 \int d\omega' |\Phi(z, \omega_p, \omega, \omega')|^2 (n_m(\omega_p - \omega - \omega', 0) + n_p(\omega', 0) + 1) \tag{A.14}
\end{aligned}$$

soit encore :

$$\begin{aligned}
n_p(\omega, z) &= n_p(\omega, 0) + 4 \left| \int d\omega' \Phi(z, \omega_p, \omega, \omega') \sqrt{n_p(\omega', 0)} \sqrt{n_m(\omega_p - \omega - \omega', 0)} \right|^2 + \\
& 4 \int d\omega' |\Phi(z, \omega_p, \omega, \omega')|^2 (n_m(\omega_p - \omega - \omega', 0) + n_p(\omega', 0) + 1) \tag{A.15}
\end{aligned}$$

Développons maintenant  $n_m$ , dont l'expression (A.11) est rappelée ci dessous :

$$\begin{aligned}
 n_m(\omega, z) &= \langle \psi | \hat{a}_m^+(\omega, z) \hat{a}_m(\omega, z) | \psi \rangle & (A.16) \\
 &= \langle \psi | \left( \hat{a}_m^+(\omega, 0) - i \int d\omega' \Phi^*(z, \omega_p, \omega', \omega_p - \omega' - \omega) \hat{a}_p(\omega', 0) \hat{a}_p(\omega_p - \omega - \omega', 0) \right) \times \\
 &\quad \left( \hat{a}_m(\omega, 0) - i \int d\omega'' \Phi(z, \omega_p, \omega'', \omega_p - \omega'' - \omega) \hat{a}_p^+(\omega'', 0) \hat{a}_p^+(\omega_p - \omega - \omega'', 0) \right) | \psi \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n_m(\omega, z) &= \langle \psi | \hat{a}_m^+(\omega, 0) \hat{a}_m(\omega, 0) | \psi \rangle \\
 &= -2Re \left( \int d\omega'' \Phi(z, \omega_p, \omega'', \omega_p - \omega'' - \omega) \langle \psi | \hat{a}_m^+(\omega, 0) \hat{a}_p^+(\omega'', 0) \hat{a}_p^+(\omega_p - \omega - \omega'', 0) | \psi \rangle \right) \\
 &\quad + \iint d\omega' d\omega'' \Phi(z, \omega_p, \omega'', \omega_p - \omega'' - \omega) \Phi^*(z, \omega_p, \omega', \omega_p - \omega' - \omega) \times \\
 &\quad \langle \psi | \hat{a}_p(\omega', 0) \hat{a}_p(\omega_p - \omega - \omega', 0) \hat{a}_p^+(\omega'', 0) \hat{a}_p^+(\omega_p - \omega - \omega'', 0) | \psi \rangle & (A.17)
 \end{aligned}$$

ce qui donne, en développant toujours dans le cas le plus général où certaines fréquences sont injectées au niveau des deux champs de polarisation (+) et (-) :

$$\begin{aligned}
 n_m(\omega, z) &= n_m(\omega, 0) + \iint d\omega' d\omega'' \Phi(z, \omega_p, \omega'', \omega_p - \omega'' - \omega) \Phi^*(z, \omega_p, \omega', \omega_p - \omega' - \omega) \times \\
 &\quad \langle \psi | \hat{a}_p(\omega', 0) \hat{a}_p(\omega_p - \omega - \omega', 0) \hat{a}_p^+(\omega'', 0) \hat{a}_p^+(\omega_p - \omega - \omega'', 0) | \psi \rangle & (A.18)
 \end{aligned}$$

Développons la partie des opérateurs :

$$\begin{aligned}
& \langle \psi | \hat{a}_p(\omega', 0) \hat{a}_p(\omega_p - \omega - \omega', 0) \hat{a}_p^+(\omega'', 0) \hat{a}_p^+(\omega_p - \omega - \omega'', 0) | \psi \rangle \\
&= \langle \psi | \hat{a}_p(\omega', 0) (\hat{a}_p^+(\omega'', 0) \hat{a}_p(\omega_p - \omega - \omega', 0) + \delta(\omega_p - \omega - \omega' - \omega'')) \hat{a}_p^+(\omega_p - \omega - \omega'', 0) | \psi \rangle \\
&= \langle \psi | \hat{a}_p(\omega', 0) \hat{a}_p^+(\omega'', 0) \hat{a}_p(\omega_p - \omega - \omega', 0) \hat{a}_p^+(\omega_p - \omega - \omega'', 0) | \psi \rangle \\
&\quad + \delta(\omega_p - \omega - \omega' - \omega'') \langle \psi | \hat{a}_p(\omega', 0) \hat{a}_p^+(\omega_p - \omega - \omega'', 0) | \psi \rangle \\
&= \langle \psi | (\hat{a}_p^+(\omega'', 0) \hat{a}_p(\omega', 0) + \delta(\omega' - \omega'')) \hat{a}_p(\omega_p - \omega - \omega', 0) \hat{a}_p^+(\omega_p - \omega - \omega'', 0) | \psi \rangle + \\
&\quad + \delta(\omega_p - \omega - \omega' - \omega'') \langle \psi | \hat{a}_p(\omega', 0) \hat{a}_p^+(\omega_p - \omega - \omega'', 0) | \psi \rangle \\
&= \langle \psi | \hat{a}_p^+(\omega'', 0) \hat{a}_p(\omega', 0) \hat{a}_p(\omega_p - \omega - \omega', 0) \hat{a}_p^+(\omega_p - \omega - \omega'', 0) | \psi \rangle \\
&\quad + \delta(\omega' - \omega'') \langle \psi | \hat{a}_p(\omega_p - \omega - \omega', 0) \hat{a}_p^+(\omega_p - \omega - \omega'', 0) | \psi \rangle + \\
&\quad + \delta(\omega_p - \omega - \omega' - \omega'') \langle \psi | \hat{a}_p(\omega', 0) \hat{a}_p^+(\omega_p - \omega - \omega'', 0) | \psi \rangle \\
&= \langle \psi | \hat{a}_p^+(\omega'', 0) \hat{a}_p(\omega', 0) \hat{a}_p(\omega_p - \omega - \omega', 0) \hat{a}_p^+(\omega_p - \omega - \omega'', 0) | \psi \rangle + \\
&\quad \delta(\omega' - \omega'') (\langle \psi | \hat{a}_p^+(\omega_p - \omega - \omega', 0) \hat{a}_p(\omega_p - \omega - \omega', 0) | \psi \rangle + 1) + \\
&\quad \delta(\omega_p - \omega - \omega' - \omega'') (\langle \psi | \hat{a}_p^+(\omega', 0) \hat{a}_p(\omega', 0) | \psi \rangle + 1) \\
&= \langle \psi | \hat{a}_p^+(\omega'', 0) \hat{a}_p(\omega', 0) \hat{a}_p(\omega_p - \omega - \omega', 0) \hat{a}_p^+(\omega_p - \omega - \omega'', 0) | \psi \rangle + \\
&\quad \delta(\omega' - \omega'') (n_p(\omega_p - \omega - \omega', 0) + 1) + \\
&\quad \delta(\omega_p - \omega - \omega' - \omega'') (n_p(\omega', 0) + 1)
\end{aligned} \tag{A.19}$$

Développons maintenant le terme  $\langle \psi | \hat{a}_p^+(\omega'', 0) \hat{a}_p(\omega', 0) \hat{a}_p(\omega_p - \omega - \omega', 0) \hat{a}_p^+(\omega_p - \omega - \omega'', 0) | \psi \rangle$  :

$$\begin{aligned}
& \langle \psi | \hat{a}_p^+(\omega'', 0) \hat{a}_p(\omega', 0) \hat{a}_p(\omega_p - \omega - \omega', 0) \hat{a}_p^+(\omega_p - \omega - \omega'', 0) | \psi \rangle \\
&= \langle \psi | \hat{a}_p^+(\omega'', 0) \hat{a}_p(\omega', 0) (\hat{a}_p^+(\omega_p - \omega - \omega'', 0) \hat{a}_p(\omega_p - \omega - \omega', 0) + \delta(\omega' - \omega'')) | \psi \rangle \\
&= \langle \psi | \hat{a}_p^+(\omega'', 0) \hat{a}_p(\omega', 0) \hat{a}_p^+(\omega_p - \omega - \omega'', 0) \hat{a}_p(\omega_p - \omega - \omega', 0) | \psi \rangle + \\
& \quad \delta(\omega' - \omega'') \langle \psi | \hat{a}_p^+(\omega'', 0) \hat{a}_p(\omega', 0) | \psi \rangle \\
&= \langle \psi | \hat{a}_p^+(\omega'', 0) (\hat{a}_p^+(\omega_p - \omega - \omega'', 0) \hat{a}_p(\omega', 0) + \delta(\omega_p - \omega - \omega' - \omega'')) \hat{a}_p(\omega_p - \omega - \omega', 0) | \psi \rangle + \\
& \quad \delta(\omega' - \omega'') \langle \psi | \hat{a}_p^+(\omega'', 0) \hat{a}_p(\omega', 0) | \psi \rangle \\
&= \langle \psi | \hat{a}_p^+(\omega'', 0) \hat{a}_p^+(\omega_p - \omega - \omega'', 0) \hat{a}_p(\omega', 0) \hat{a}_p(\omega_p - \omega - \omega', 0) | \psi \rangle + \\
& \quad \delta(\omega_p - \omega - \omega' - \omega'') \langle \psi | \hat{a}_p^+(\omega'', 0) \hat{a}_p(\omega_p - \omega - \omega', 0) | \psi \rangle + \\
& \quad \delta(\omega' - \omega'') \langle \psi | \hat{a}_p^+(\omega'', 0) \hat{a}_p(\omega', 0) | \psi \rangle \\
&= \sqrt{n_p(\omega'', 0)} \sqrt{n_p(\omega_p - \omega - \omega'', 0)} \sqrt{n_p(\omega', 0)} \sqrt{n_p(\omega_p - \omega - \omega', 0)} + \\
& \quad \delta(\omega_p - \omega - \omega' - \omega'') n_p(\omega_p - \omega - \omega', 0) + \\
& \quad \delta(\omega' - \omega'') n_p(\omega', 0)
\end{aligned} \tag{A.20}$$

donc au final

$$\begin{aligned}
& \langle \psi | \hat{a}_p(\omega', 0) \hat{a}_p(\omega_p - \omega - \omega', 0) \hat{a}_p^+(\omega'', 0) \hat{a}_p^+(\omega_p - \omega - \omega'', 0) | \psi \rangle = \\
& \quad \sqrt{n_p(\omega'', 0)} \sqrt{n_p(\omega_p - \omega - \omega'', 0)} \sqrt{n_p(\omega', 0)} \sqrt{n_p(\omega_p - \omega - \omega', 0)} + \\
& \quad \delta(\omega' - \omega'') (n_p(\omega_p - \omega - \omega', 0) + n_p(\omega', 0) + 1) + \\
& \quad \delta(\omega_p - \omega - \omega' - \omega'') (n_p(\omega_p - \omega - \omega', 0) + n_p(\omega', 0) + 1)
\end{aligned} \tag{A.21}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}
n_m(\omega, z) &= n_m(\omega, 0) + \\
& \quad \left| \int d\omega' \Phi(z, \omega_p, \omega', \omega_p - \omega' - \omega) \sqrt{n_p(\omega', 0)} \sqrt{n_p(\omega_p - \omega - \omega', 0)} \right|^2 + \\
& \quad \int d\omega' |\Phi(z, \omega_p, \omega'', \omega_p - \omega'' - \omega)|^2 (n_p(\omega_p - \omega - \omega', 0) + n_p(\omega', 0) + 1) + \\
& \quad \int d\omega' \Phi(z, \omega_p, \omega_p - \omega - \omega', \omega') \Phi^*(z, \omega_p, \omega', \omega_p - \omega' - \omega) (n_p(\omega_p - \omega - \omega', 0) + n_p(\omega', 0) + 1)
\end{aligned} \tag{A.22}$$

En rappelant la relation  $\Phi(z, \omega_p, \omega, \omega') = \Phi(z, \omega_p, \omega', \omega)$ , d'après (A.3) et (A.4),  $n_m(\omega, z)$

s'écrit finalement :

$$\begin{aligned}
 n_m(\omega, z) &= n_m(\omega, 0) + & (A.23) \\
 &\left| \int d\omega' \Phi(z, \omega_p, \omega', \omega_p - \omega' - \omega) \sqrt{n_p(\omega', 0)} \sqrt{n_p(\omega_p - \omega - \omega', 0)} \right|^2 + \\
 &2 \int d\omega' |\Phi(z, \omega_p, \omega', \omega_p - \omega' - \omega)|^2 (n_p(\omega_p - \omega - \omega', 0) + n_p(\omega', 0) + 1)
 \end{aligned}$$

## A.2 Comparaison avec le cas traité dans la thèse où tous les opérateurs sont distincts

Nous allons maintenant comparer les expressions des champs générés dans cette annexe en considérant que deux d'entre eux sont indiscernables (l'expression des densités spectrales des champs, notées  $n_p$  et  $n_m$ , étant données ci-dessus par les équations (A.15) et (A.23)), avec les expressions des champs utilisées dans la thèse, correspondant au schéma où les trois champs, et donc les opérateurs décrivant chacun des photons triplets sont considérés différentiables.

Reprenons les expressions des champs que nous avons calculées au chapitre III, dans le cas symétrique de celui du paragraphe A.1, c'est-à-dire en envisageant une bi-injection sur les champs 2 et 3 (orthogonaux en polarisation), par deux gaussiennes étendues spectralement. Les opérateurs création et annihilation des trois champs étant donnés par les expressions (III.5), les densités spectrales des champs générés en régime bi-injecté sont donnés par les expressions (III.23) - (III.25) rappelées ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 n_1(\omega, z) &= \left| \int d\omega_t \Phi(z, \omega_p, \omega, \omega_p - \omega - \omega_t) \sqrt{n_2(\omega_t, 0)} \sqrt{n_3(\omega_p - \omega_t - \omega, 0)} \right|^2 + \\
 &\int d\omega_t |\Phi(z, \omega_p, \omega, \omega_p - \omega - \omega_t)|^2 [1 + n_2(\omega_t, 0) + n_3(\omega_p - \omega - \omega_t, 0)] & (A.24)
 \end{aligned}$$

$$n_2(\omega, z) = n_2(\omega, 0) + \int d\omega_t |\Phi(z, \omega_p, \omega_t, \omega_p - \omega - \omega_t)|^2 [1 + n_3(\omega_p - \omega_t - \omega, 0)] & (A.25)$$

$$n_3(\omega, z) = n_3(\omega, 0) + \int d\omega_t |\Phi(z, \omega_p, \omega_t, \omega)|^2 [1 + n_2(\omega_p - \omega_t - \omega, 0)] & (A.26)$$

où l'on a remplacé la fonction  $\Phi(z, \omega_p, \omega, \omega')$  définie au chapitre III ordonnée selon (III.3) par celle définie éq. (A.7). En effet, dans nos calculs sur les opérateurs  $\hat{a}_m$  et  $\hat{a}_p$ , nous avons défini  $\Phi(z, \omega_p, \omega, \omega')$  selon  $\Phi(z, \omega_p, \omega, \omega') = \Phi(z, \omega_p, \omega', \omega)$ , puisque les fréquences ont été ordonnées dans cette annexe selon (A.3) et (A.4).

Nous cherchons à comparer ces expressions (A.24)-(A.26) aux expressions (A.15)

et (A.23) afin d'estimer la différence entre les champs générés dans chacun des deux schémas : celui où les triplets sont considérés différentiables et celui où deux d'entre eux sont dégénérés.

Pour simplifier les comparaisons entre les deux schémas, nous allons considérer le cas où la stimulation est monochromatique. La différence entre ce cas d'injection monochromatique et le cas habituel où les champs d'injection sont gaussiens à spectres polychromatiques, se fait juste dans le fait que les champs stimulants et la partie des champs amplifiée par l'injection sont ici modélisés par des diracs aux fréquences injectées et aux fréquences générés complémentaires (ces fréquences étant déterminées par la relation de conservation de l'énergie et de l'impulsion), nommées  $\omega_{10}$ ,  $\omega_{20}$  et  $\omega_{30}$ , au lieu de champs polychromatiques centrés autour de ces mêmes fréquences.

Ainsi, les relations (A.24)-(A.26) deviennent, en générant les champs par bi-stimulation aux fréquences  $\omega_{20}$  et  $\omega_{30}$  :

$$n_1(\omega, z) = \int d\omega_t |\Phi(z, \omega_p, \omega, \omega_p - \omega - \omega_t)|^2 + \left| \Phi(z, \omega_p, \omega, \omega_{20}) \sqrt{n_2(\omega_{20}, 0)} \sqrt{n_3(\omega_p - \omega_{20} - \omega, 0)} \right|^2 + |\Phi(z, \omega_p, \omega, \omega_{20})|^2 [n_2(\omega_{20}, 0) + n_3(\omega_p - \omega - \omega_{20}, 0)] \quad (\text{A.27})$$

où les termes en rose correspondent aux parties des champs amplifiés par injection, qui ne sont différents de zéro qu'à la fréquence  $\omega = \omega_{10}$ , avec  $\omega_{10} = \omega_p - \omega_{20} - \omega_{30}$  ;

$$n_2(\omega, z) = n_2(\omega, 0) + \int d\omega_t |\Phi(z, \omega_p, \omega_t, \omega)|^2 + |\Phi(z, \omega_p, \omega_p - \omega_{30} - \omega, \omega)|^2 n_3(\omega_{30}, 0) \quad (\text{A.28})$$

où le terme injecté et le terme généré en plus par injection (noir et rose respectivement) ne sont différents de zéro qu'à la fréquence  $\omega = \omega_{20}$ , et

$$n_3(\omega, z) = n_3(\omega, 0) + \int d\omega_t |\Phi(z, \omega_p, \omega_t, \omega_p - \omega_t - \omega)|^2 + |\Phi(z, \omega_p, \omega_p - \omega_{20} - \omega, \omega_{20})|^2 n_2(\omega_{20}, 0) \quad (\text{A.29})$$

où le terme injecté et le terme généré en plus par injection (noir et rose respectivement) ne sont différents de zéro qu'à la fréquence  $\omega = \omega_{30}$ . On retrouve dans les trois expressions les termes en bleu qui représentent les champs générés par fluorescence.

Nous allons maintenant comparer, sous cette hypothèse de stimulation monochromatique, les expressions des champs générés polarisés (+) et (-) obtenus dans le cas où les deux photons ayant la polarisation (+) sont considérés comme indiscernables et décrits par le même opérateur, et dans le cas, comme dérivé dans le reste de la thèse, où ils sont décrits par des opérateurs distincts et considérés comme des champs différents. Nous recherchons ainsi à savoir si la modélisation en trois champs distincts adoptée dans la thèse est capable de décrire le cas où ces champs sont dégénérés.

## Comparaison des deux modèles en régime de génération par fluorescence paramétrique

Selon les conditions expérimentales du chapitre III, il a été calculé que :

$$\int d\omega_t |\Phi(z, \omega_p, \omega, \omega_t)|^2 = \int d\omega_t |\Phi(z, \omega_p, \omega_t, \omega)|^2 = \int d\omega_t |\Phi(z, \omega_p, \omega_t, \omega_p - \omega_t - \omega)|^2 = 0,25 \quad (\text{A.30})$$

Lorsque les trois champs sont considérés comme distinguables, c'est la valeur du nombre de photons générés sur chacun des trois champs. Il se génère 0,25 triplets de photons par impulsion par fluorescence paramétrique.

Considérons maintenant le cas où les champs 1 et 3 ne sont pas distinguables : ils sont tous deux décrits par le seul opérateur  $\hat{a}_p$  (éq. (A.6)), qui donne la densité spectrale pour toutes les composantes du champ polarisé (+). Le nombre de photons générés par fluorescence ayant une polarisation (+) vaut selon l'expression (A.15) de cette densité spectrale :  $4 \int d\omega' |\Phi(z, \omega_p, \omega, \omega')|^2$  soit  $4 \times 0,25$ . Dans ce même schéma, le nombre de photons générés par fluorescence ayant la polarisation (-), donné par l'expression (A.23) est :  $2 \int d\omega' |\Phi(z, \omega_p, \omega'', \omega_p - \omega'' - \omega)|^2$  soit  $2 \times 0,25$ .

Le fait de considérer deux des champs comme dégénérés a donc fait augmenter par deux le nombre de photons générés par fluorescence, l'ensemble restant cohérent au niveau du nombre de photons triplets générés puisqu'il y a deux fois plus de photons générés ayant la polarisation (+) que la polarisation (-).

## Comparaison des deux modèles en régime de génération mono-injectée

Considérons tout d'abord dans le modèle où deux des champs sont dégénérés. Dans le cas où seule une composante fréquentielle est injectée en entrée de cristal, le second terme des expressions des densités spectrales (A.15) et (A.23) sera toujours nul. En effet, il ne peut être non nul que quand au minimum deux composantes spectrales sont injectées. Imaginons qu'une seule composante soit injectée, nommée  $\omega_{inj}$ , et qu'elle soit par exemple de polarisation (+). Alors l'équation (A.15) devient :

$$n_p(\omega, z) = n_p(\omega, 0) + 4 \int d\omega' |\Phi(z, \omega_p, \omega, \omega')|^2 + 4 |\Phi(z, \omega_p, \omega, \omega_{inj})|^2 n_p(\omega_{inj}, 0) \quad (\text{A.31})$$

et l'équation (A.23) :

$$n_m(\omega, z) = n_m(\omega, 0) + 2 \int d\omega' |\Phi(z, \omega_p, \omega', \omega_p - \omega' - \omega)|^2 + 2 |\Phi(z, \omega_p, \omega_{inj}, \omega_p - \omega_{inj} - \omega)|^2 n_p(\omega_{inj}, 0) + 2 |\Phi(z, \omega_p, \omega_p - \omega_{inj} - \omega, \omega_{inj})|^2 n_p(\omega_{inj}, 0) \quad (\text{A.32})$$

soit par symétrie de  $\Phi$  :

$$\begin{aligned} n_m(\omega, z) &= 2 \int d\omega' |\Phi(z, \omega_p, \omega', \omega_p - \omega' - \omega)|^2 + \\ &4 |\Phi(z, \omega_p, \omega_{inj}, \omega_p - \omega_{inj} - \omega)|^2 n_p(\omega_{inj}, 0) \end{aligned} \quad (A.33)$$

sachant que  $n_m(\omega, 0) = 0 \forall \omega$  et  $n_p(\omega, 0) = \delta(\omega - \omega_{inj})n_p(\omega_{inj}, 0)$ .

Comparons maintenant ces expressions des densités spectrales des composantes (+) et (-) des champs dans ce cas partiellement dégénéré avec celles qui auraient été obtenues si nous avions considéré les expressions des trois champs non dégénérés. Dans ce cas, il faut considérer les densités spectrales données par (A.27) - (A.29) et regrouper les composantes (+) et (-) selon :  $n_p(\omega, z) = n_1(\omega, z) + n_3(\omega, z)$  et  $n_m(\omega, z) = n_2(\omega, z)$ .

Considérons le cas où une composante spectrale polarisée (+), nommée  $\omega_{30}$  est injectée. Elle peut donc appartenir aux champs qui ont été nommés 1 ou 3. Le champ  $n_p$ , correspondant alors au champ  $n_1 + n_3$ , va prendre des valeurs non nulles sur tout le spectre décrit par son terme de fluorescence, plus à la fréquence correspondante à l'accord de phase fixée par  $\omega_{30}$ , nommée  $\omega_{10}$  (sa valeur est à lire sur le courbe d'accord de phase III.2), et bien entendu à  $\omega_{30}$ . La densité spectrale va donc valoir :

$$\begin{aligned} n_p(\omega, z) &= \\ &= n_1(\omega, z) + n_3(\omega, z) \\ &= n_p(\omega, z)_{FLUO} + n_p(\omega_{30}, 0)_{inj} + n_p(\omega_{10}, z)_{génééré\ par\ inj} + n_p(\omega_{30}, z)_{génééré\ par\ inj} \\ &= 2 \int d\omega' |\Phi(z, \omega_p, \omega', \omega_p - \omega' - \omega)|^2 + n_3(\omega_{30}, 0) + n_1(\omega_{10}, z)_{génééré\ par\ inj} + n_3(\omega_{30}, z)_{génééré\ par\ inj} \\ &= 2 \int d\omega' |\Phi(z, \omega_p, \omega', \omega_p - \omega' - \omega)|^2 + |\Phi(z, \omega_p, \omega_{10}, \omega_p - \omega_{10} - \omega_{30})|^2 n_3(\omega_{30}, 0) \\ &+ n_3(\omega_{30}, 0) + |\Phi(z, \omega_p, \omega_{10}, \omega_p - \omega_{10} - \omega_{30})|^2 n_1(\omega_{30}, 0) + n_1(\omega_{30}, 0) \\ &= n_p(\omega_{30}, 0) + 2 \int d\omega' |\Phi(z, \omega_p, \omega', \omega_p - \omega' - \omega)|^2 \\ &+ |\Phi(z, \omega_p, \omega_{10}, \omega_p - \omega_{10} - \omega_{30})|^2 n_p(\omega_{30}, 0) \end{aligned} \quad (A.34)$$

d'après (A.27) - (A.29).

Le champ  $n_m$ , correspondant au champ  $n_2$ , va prendre les mêmes valeurs que dans le cas de fluorescence, et être amplifié par la stimulation à la fréquence nommée  $\omega_{20}$ , fixée par les conditions d'accord de phase. Sa densité spectrale va donc valoir :

$$\begin{aligned} n_m(\omega, z) &= n_m(\omega, z)_{FLUO} + n_m(\omega_{20}, z)_{génééré} \\ &= \int d\omega' |\Phi(z, \omega_p, \omega, \omega')|^2 + |\Phi(z, \omega_p, \omega_{10}, \omega_{20})|^2 n_3(\omega_{30}, 0) \\ &+ |\Phi(z, \omega_p, \omega_{10}, \omega_{20})|^2 n_1(\omega_{30}, 0) \\ &= \int d\omega' |\Phi(z, \omega_p, \omega, \omega')|^2 + |\Phi(z, \omega_p, \omega_{10}, \omega_{20})|^2 n_p(\omega_{30}, 0) \end{aligned} \quad (A.35)$$

sachant que  $n_m(\omega, 0) = 0$ .

Ces équations (A.34) et (A.35) sont bien équivalentes aux équations (A.31)-(A.33) en considérant que  $n_p$  décrit  $n_1 + n_3$  et  $n_m$  décrit  $n_2$ , à un facteur 2 près sur le champ généré par fluorescence et 4 près sur le champ généré dû à l'injection.

Notre vision en champs séparés est donc équivalente à celle-ci en champs dégénérés à ceci près que en considérant les champs comme distinguables, le nombre de photons générés par fluorescence est sous estimé d'un facteur 2 et le nombre de photons générés dû à la stimulation sous estimé d'un facteur 4. Le nombre de photons générés par stimulation a été sous estimé dans notre modèle de trois champs indépendants car ce modèle limite à un seul des champs une stimulation qui peut porter sur deux s'ils sont indiscernables. De même dans le cas de la génération par fluorescence, le modèle en opérateurs distincts tient compte de la non commutation de  $\hat{a}_1$  et  $\hat{a}_3$  à fréquence identique, le nombre de photons générés est donc deux fois plus faible que si ces opérateurs commutent, dans le cas du modèle où ils sont identiques.

## Comparaison des deux modèles en régime de génération bi-injectée

Recherchons tout d'abord les expressions des champs obtenus par génération bi-injectée dans le modèle partiellement dégénéré. Considérons une injection à deux fréquences polarisées (+) et (-), bien choisies pour qu'elles vérifient les conditions d'accord de phase, nommées respectivement  $\omega_{i1}$  et  $\omega_{i2}$ . Les expressions (A.15) et (A.23) deviennent alors :

$$n_p(\omega, z) = n_p(\omega, 0) + 4 \left| \Phi(z, \omega_p, \omega, \omega_{i1}) \sqrt{n_p(\omega_{i1}, 0)} \sqrt{n_m(\omega_p - \omega - \omega_{i1}, 0)} \right|^2 + \quad (A.36)$$

$$4 |\Phi(z, \omega_p, \omega, \omega_{i1})|^2 (n_m(\omega_p - \omega - \omega_{i1}, 0) + n_p(\omega_{i1}, 0)) + 4 \int d\omega' |\Phi(z, \omega_p, \omega, \omega')|^2$$

Le second terme est non nul uniquement pour  $\omega = \omega_p - \omega_{2i} - \omega_{i1}$ , mais de toute façon, les trois fréquences étant fixées par l'accord de phase,  $\omega$  ne peut valoir que  $\omega_{i1}$  et  $\omega_p - \omega_{2i} - \omega_{i1}$ .  $n_p$  généré en plus par injection ne va donc être non nul qu'aux fréquences  $\omega_p - \omega_{2i} - \omega_{i1}$  et  $\omega_{1i}$ . Ainsi,

$$n_p(\omega_p - \omega_{2i} - \omega_{i1}, z) = 4 \left| \Phi(z, \omega_p, \omega, \omega_{i1}) \sqrt{n_p(\omega_{i1}, 0)} \sqrt{n_m(\omega_{i2}, 0)} \right|^2 + \quad (A.37)$$

$$4 |\Phi(z, \omega_p, \omega, \omega_{i1})|^2 (n_m(\omega_{i2}, 0) + n_p(\omega_{i1}, 0)) + 4 \int d\omega' |\Phi(z, \omega_p, \omega, \omega')|^2$$

et

$$n_p(\omega_{1i}, z) = n_p(\omega_{1i}, 0) + 4 |\Phi(z, \omega_p, \omega, \omega_{i1})|^2 (n_m(\omega_{2i}, 0)) + 4 \int d\omega' |\Phi(z, \omega_p, \omega, \omega')|^2 \quad (A.38)$$

La densité spectrale  $n_m$  du champ polarisé (-) devient quant à elle :

$$n_m(\omega, z) = n_m(\omega, 0) + 2 \int d\omega' |\Phi(z, \omega_p, \omega_{i1}, \omega_p - \omega' - \omega)|^2 + \quad (\text{A.39})$$

$$2 |\Phi(z, \omega_p, \omega_{i1}, \omega_p - \omega_{i1} - \omega)| n_p(\omega_{i1}, 0) + 2 |\Phi(z, \omega_p, \omega_p - \omega_{i1} - \omega, \omega_{i1})| n_p(\omega_{i1}, 0)$$

soit

$$n_m(\omega, z) = n_m(\omega, 0) + 2 \int d\omega' |\Phi(z, \omega_p, \omega_{i1}, \omega_{i2})|^2 + \quad (\text{A.40})$$

$$4 |\Phi(z, \omega_p, \omega_{i1}, \omega_{i2})| n_p(\omega_{i1}, 0)$$

Comparons maintenant avec le cas que nous avons traité dans la thèse où les trois champs sont différenciés, leurs expressions étant données par les équations (A.27), (A.28) et (A.29).

Les fréquences d'injection (nommées plus haut  $\omega_{i1}$  et  $\omega_{i2}$ ) sont appelées  $\omega_{20}$  et  $\omega_{30}$  (évidemment choisies pour qu'elles vérifient la condition d'accord de phase), et sont polarisées respectivement (-) et (+). Le champ  $n_p = n_1 + n_3$  va prendre des valeurs non nulles sur tout le spectre de fréquences décrites par son terme de fluorescence, plus à certaines fréquences générées en accord de phase fixé par l'injection, c'est-à-dire à  $\omega_{10} = \omega_p - \omega_{20} - \omega_{30}$  et bien entendu à  $\omega_{30}$ . La densité spectrale va donc valoir :  $n_p(\omega, z) = n_p(\omega, z)_{FLUO} + n_p(\omega, 0)_{inj} + n_p(\omega_{10}, z)_{généralé} + n_p(\omega_{30}, z)_{généralé}$ . Elle va s'écrire :

$$n_p(\omega, z) = n_p(\omega_{30}, 0) + 4 \int d\omega' |\Phi(z, \omega_p, \omega, \omega')|^2 + \quad (\text{A.41})$$

$$4 |\Phi(z, \omega_p, \omega, \omega_p - \omega - \omega_{20})|^2 n_m(\omega_{20}, 0) +$$

$$4 \left| \Phi(z, \omega_p, \omega, \omega_{30}) \sqrt{n_p(\omega_{30}, 0)} \sqrt{n_m(\omega_{20}, 0)} \right|^2 +$$

$$4 |\Phi(z, \omega_p, \omega, \omega_{30})|^2 (n_m(\omega_{20}, 0) + n_p(\omega_{30}, 0))$$

Les termes en rose et en vert sont les termes générés dans le cristal dus à l'amplification, à valeurs limitées par l'accord de phase du cristal et les fréquences injectées respectivement uniquement à  $\omega = \omega_{30}$  et  $\omega = \omega_{10}$ . Comme pour le cas mono-injecté, on constate que  $n_p$  couvre donc tout le spectre décrit par les champs 1 et 3 que nous avons traités séparément, à un facteur 4 près.

Le champ polarisé (-), va quant à lui être non nul uniquement autours de  $\omega_{20}$  pour les champs amplifiés par la stimulation, l'accord de phase fixant  $\omega_{20}$  comme seule fréquence générée possible si  $\omega_{10}$  ou  $\omega_{30}$  est fixée :  $n_m(\omega, z) = n_m(\omega, z)_{FLUO} + n_m(\omega, 0) - inj + n_m(\omega_{20}, z)_{généralé par inj}$ , soit :

$$n_m(\omega, z) = n_m(\omega_{20}, 0) + 2 \int d\omega' |\Phi(z, \omega_p, \omega, \omega_p - \omega' - \omega)|^2 +$$

$$2 |\Phi(z, \omega_p, \omega_{30}, \omega_{10})|^2 n_p(\omega_{30}, 0) + 2 |\Phi(z, \omega_p, \omega_{10}, \omega_{30})|^2 n_p(\omega_{30}, 0) \quad (\text{A.42})$$

$$n_m(\omega, z) = n_m(\omega_{20}, 0) + 2 \int d\omega' |\Phi(z, \omega_p, \omega, \omega_p - \omega' - \omega)|^2 + \quad (\text{A.43})$$

$$4 |\Phi(z, \omega_p, \omega_{30}, \omega_{10})|^2 n_p(\omega_{30}, 0)$$

Là encore, le nombre de photons générés par fluorescence est multiplié par 2, alors que le nombre de photons générés dus à l'amplification est multiplié par 4 par rapport à notre modèle.

Comme dans le cas où la génération était mono-stimulée, la modélisation adoptée dans la thèse en considérant les champs distincts est donc valable lorsque deux des champs sont indiscernables, à ceci près que le nombre de photons générés par fluorescence est à multiplier par 2 et le nombre de photons générés dus à l'injection est à multiplier par 4. Dans le cas de génération bi-stimulée tout comme mono-stimulée, les termes générés grâce à la stimulation ont été sous estimés dans le modèle de trois champs indépendants, car ce modèle limite à un seul des champs une stimulation qui peut porter sur deux. Dans le cas de la génération par fluorescence, rien n'est limité mais l'expression des opérateurs création et annihilation des champs est double dû à la non commutation de certains opérateurs. Les ordres de grandeur entre les différents termes sont cependant conservés, et la recombinaison par somme de fréquences de champs dégénérés ne devrait a priori introduire que des facteurs multiplicatifs correctifs entre les différents termes des champs recombinaison, l'allure de ces termes et leurs ordres de grandeur respectifs étant conservée.

# Annexe B

## Calcul détaillé du champ généré par somme de fréquences à trois champs issus d'une génération mono-injectée

Dans cette annexe, nous détaillons les calculs de l'expression de la densité spectrale moyenne du champ recombinaison par somme de fréquences à trois champs générés par génération mono-injectée. Nous allons calculer tout d'abord le champ somme des trois champs générés par mono-stimulation par le champ 2; puis nous calculerons ce même champ obtenu par la somme de champs triplets générés par mono-stimulation sur le champ 3, et montrerons qu'il est aisé de passer d'une expression à l'autre par une interversion de fréquences correspondant à l'interversion des indices de réfraction des champs 2 et 3, comme annoncé paragraphe IV.2.2.

### B.1 Champ somme à trois photons issus d'une génération mono-stimulée par le champ 2

L'expression de l'opérateur d'évolution du champ somme est donné par l'équation (IV.4):

$$\begin{aligned} \hat{a}_\Omega(\Omega, z') = & \hspace{15em} \text{(B.1)} \\ & -i \iint d\omega_t d\omega'_t \Psi(z', \Omega, \omega_t, \omega'_t) \times \\ & \left( \hat{a}_1(\omega_t) - i \int d\omega' \Phi(L, \omega_p, \omega_t, \omega') \hat{a}_2^+(\omega') \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega_t - \omega') \right) \times \\ & \left( \hat{a}_2(\omega'_t) - i \int d\omega' \Phi(L, \omega_p, \omega', \omega'_t) \hat{a}_1^+(\omega') \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega'_t - \omega') \right) \times \\ & \left( \hat{a}_3(\Omega - \omega_t - \omega') - i \int d\omega' \Phi(L, \omega_p, \omega', \omega_p + \omega_t + \omega'_t - \omega' - \Omega) \hat{a}_1^+(\omega') \hat{a}_2^+(\omega_p + \omega_t + \omega'_t - \omega' - \Omega) \right) \end{aligned}$$

Pour plus de simplicité dans les calculs, nommons ici  $\Theta = -i\Phi$  et renommons également les fréquences pour qu'elles soient toutes différentes entre elles. (Toutes les intégrations se faisant toujours entre 0 et  $+\infty$ ).

En développant et en projetant sur  $|\psi\rangle$ , (B.1) donne, en associant des couleurs aux différents termes pour une plus grande maniabilité :

$$\begin{aligned}
 \hat{a}_\Omega(\Omega, z') |\psi\rangle = & \\
 -i \iint d\omega_1 d\omega_2 \Psi(z', \Omega, \omega_1, \omega_2) \iiint d\omega'_2 d\omega'_1 d\omega''_1 & \\
 (\delta(\omega_1 - \omega'_2) \delta(\omega'_1 - \omega_2) \delta(\omega''_1 - \omega_1 + \omega_2 - \Omega) \hat{a}_1(\omega_1) \hat{a}_2(\omega_2) \hat{a}_3(\Omega - \omega_1 - \omega_2) |\psi\rangle + & \\
 \delta(\omega_1 - \omega'_2) \Theta(L, \omega_p, \omega', \omega_2) \delta(\omega''_1 - \omega_1 + \omega_2 - \Omega) \hat{a}_1(\omega_1) \hat{a}_1^+(\omega'_1) \hat{a}_3^+(\omega - \omega'_1 - \omega_2) \hat{a}_3(\Omega - \omega_1 - \omega_2) |\psi\rangle + & \\
 \Theta(L, \omega_p, \omega_1, \omega'_2) \delta(\omega'_1 - \omega_2) \delta(\omega''_1 - \omega_1 + \omega_2 - \Omega) \hat{a}_2^+(\omega'_2) \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega_1 - \omega'_2) \hat{a}_2(\omega_2) \hat{a}_3(\Omega - \omega_1 - \omega_2) |\psi\rangle + & \\
 \Theta(L, \omega_p, \omega_1, \omega'_2) \Theta(L, \omega_p, \omega'_1, \omega_2) \delta(\omega''_1 - \omega_1 + \omega_2 - \Omega) \times & \\
 \hat{a}_2^+(\omega'_2) \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega_1 - \omega'_2) \hat{a}_1^+(\omega'_1) \hat{a}_3^+(\omega - \omega'_1 - \omega_2) \hat{a}_3(\Omega - \omega_1 - \omega_2) |\psi\rangle + & \\
 \delta(\omega_1 - \omega'_2) \delta(\omega'_1 - \omega_2) \Theta(L, \omega_p, \omega''_1, \omega_p - \omega''_1 + \omega_1 + \omega_2 - \Omega) \times & \\
 \hat{a}_1(\omega_1) \hat{a}_2(\omega_2) \hat{a}_1^+(\omega''_1) \hat{a}_2^+(\omega_p - \omega''_1 + \omega_1 + \omega_2 - \Omega) |\psi\rangle + & \\
 \delta(\omega_1 - \omega'_2) \Theta(L, \omega_p, \omega'_1, \omega_2) \Theta(L, \omega_p, \omega''_1, \omega_p - \omega''_1 + \omega_1 + \omega_2 - \Omega) \times & \tag{B.2} \\
 \hat{a}_1(\omega_1) \hat{a}_1^+(\omega'_1) \hat{a}_3^+(\omega - \omega'_1 - \omega_2) \hat{a}_1^+(\omega''_1) \hat{a}_2^+(\omega_p - \omega''_1 + \omega_1 + \omega_2 - \Omega) |\psi\rangle + & \\
 \Theta(L, \omega_p, \omega_1, \omega'_2) \delta(\omega'_1 - \omega_2) \Theta(L, \omega_p, \omega''_1, \omega_p - \omega''_1 + \omega_1 + \omega_2 - \Omega) \times & \\
 \hat{a}_2^+(\omega'_2) \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega_1 - \omega'_2) \hat{a}_2(\omega_2) \hat{a}_1^+(\omega''_1) \hat{a}_2^+(\omega_p - \omega''_1 + \omega_1 + \omega_2 - \Omega) |\psi\rangle + & \\
 \Theta(L, \omega_p, \omega_1, \omega'_2) \Theta(L, \omega_p, \omega'_1, \omega_2) \Theta(L, \omega_p, \omega''_1, \omega_p - \omega''_1 + \omega_1 + \omega_2 - \Omega) \times & \\
 \hat{a}_2^+(\omega'_2) \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega_1 - \omega'_2) \hat{a}_1^+(\omega'_1) \hat{a}_3^+(\omega - \omega'_1 - \omega_2) \hat{a}_1^+(\omega''_1) \hat{a}_2^+(\omega_p - \omega''_1 + \omega_1 + \omega_2 - \Omega) |\psi\rangle) &
 \end{aligned}$$

$|\psi\rangle$  étant le produit tensoriel des état cohérents  $:|0, \alpha_2, 0\rangle$ , les quatres premiers termes s'annulent directement, ce qui laisse :

$$\begin{aligned}
 \hat{a}_\Omega(\Omega, z') |\psi\rangle = & \\
 -i \iint d\omega_1 d\omega_2 \Psi(z', \Omega, \omega_1, \omega_2) \iiint d\omega'_2 d\omega'_1 d\omega''_1 & \tag{B.3} \\
 (0+ & \\
 0+ & \\
 0+ & \\
 0+ & \\
 \delta(\omega_1 - \omega'_2) \delta(\omega'_1 - \omega_2) \delta(\omega_1 - \omega''_1) \Theta(L, \omega_p, \omega''_1, \omega_p - \omega''_1 + \omega_1 + \omega_2 - \Omega) \hat{a}_2(\omega_2) \hat{a}_2^+(\omega_p - \omega''_1 + \omega_1 + \omega_2 - \Omega) |\psi\rangle + & \\
 \delta(\omega_1 - \omega'_2) \Theta(L, \omega_p, \omega'_1, \omega_2) \Theta(L, \omega_p, \omega''_1, \omega_p - \omega''_1 + \omega_1 + \omega_2 - \Omega) \times & \\
 (\delta(\omega_1 - \omega'_1) \hat{a}_1^+(\omega''_1) + \delta(\omega_1 - \omega''_1) \hat{a}_1^+(\omega'_1)) \hat{a}_3^+(\omega - \omega'_1 - \omega_2) \hat{a}_2^+(\omega_p - \omega''_1 + \omega_1 + \omega_2 - \Omega) |\psi\rangle + & \\
 \Theta(L, \omega_p, \omega_1, \omega'_2) \delta(\omega'_1 - \omega_2) \Theta(L, \omega_p, \omega''_1, \omega_p - \omega''_1 + \omega_1 + \omega_2 - \Omega) \times & \\
 \hat{a}_1^+(\omega''_1) \hat{a}_2^+(\omega'_2) \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega_1 - \omega'_2) \hat{a}_2(\omega_2) \hat{a}_2^+(\omega_p - \omega''_1 + \omega_1 + \omega_2 - \Omega) |\psi\rangle + & \\
 \Theta(L, \omega_p, \omega_1, \omega'_2) \Theta(L, \omega_p, \omega'_1, \omega_2) \Theta(L, \omega_p, \omega''_1, \omega_p - \omega''_1 + \omega_1 + \omega_2 - \Omega) \times & \\
 \hat{a}_2^+(\omega'_2) \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega_1 - \omega'_2) \hat{a}_1^+(\omega'_1) \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega'_1 - \omega_2) \hat{a}_1^+(\omega''_1) \hat{a}_2^+(\omega_p - \omega''_1 + \omega_1 + \omega_2 - \Omega) |\psi\rangle) &
 \end{aligned}$$

soit en simplifiant les intégrales :

$$\begin{aligned}
& \hat{a}_\Omega(\Omega, z') |\psi\rangle = \\
& -i \iint d\omega_1 d\omega_2 \Psi(z', \Omega, \omega_1, \omega_2) \\
& \Theta(L, \omega_p, \omega_1, \omega_p + \omega_2 - \Omega) \hat{a}_2(\omega_2) \hat{a}_2^\dagger(\omega_p + \omega_2 - \Omega) |\psi\rangle + \\
& \iint d\omega'_1 d\omega''_1 \Theta(L, \omega_p, \omega'_1, \omega_2) \Theta(L, \omega_p, \omega''_1, \omega_p - \omega''_1 + \omega_1 + \omega_2 - \Omega) \times \\
& (\delta(\omega_1 - \omega'_1) \hat{a}_1^\dagger(\omega'_1) + \delta(\omega_1 - \omega''_1) \hat{a}_1^\dagger(\omega''_1)) \hat{a}_3^\dagger(\omega - \omega'_1 - \omega_2) \hat{a}_2^\dagger(\omega_p - \omega''_1 + \omega_1 + \omega_2 - \Omega) |\psi\rangle + \\
& \int \int d\omega'_2 d\omega''_1 \Theta(L, \omega_p, \omega_1, \omega'_2) \Theta(L, \omega_p, \omega''_1, \omega_p - \omega''_1 + \omega_1 + \omega_2 - \Omega) \times \\
& \hat{a}_1^\dagger(\omega''_1) \hat{a}_2^\dagger(\omega'_2) \hat{a}_3^\dagger(\omega_p - \omega_1 - \omega'_2) \hat{a}_2(\omega_2) \hat{a}_2^\dagger(\omega_p - \omega''_1 + \omega_1 + \omega_2 - \Omega) |\psi\rangle + \\
& \iiint d\omega'_2 d\omega'_1 d\omega''_1 \Theta(L, \omega_p, \omega_1, \omega'_2) \Theta(L, \omega_p, \omega'_1, \omega_2) \Theta(L, \omega_p, \omega''_1, \omega_p - \omega''_1 + \omega_1 + \omega_2 - \Omega) \times \\
& \hat{a}_2^\dagger(\omega'_2) \hat{a}_3^\dagger(\omega_p - \omega_1 - \omega'_2) \hat{a}_1^\dagger(\omega'_1) \hat{a}_3^\dagger(\omega_p - \omega'_1 - \omega_2) \hat{a}_1^\dagger(\omega''_1) \hat{a}_2^\dagger(\omega_p - \omega''_1 + \omega_1 + \omega_2 - \Omega) |\psi\rangle
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Prenons maintenant le complexe conjugué :

$$\begin{aligned}
& \langle \psi | \hat{a}_\Omega^\dagger(\Omega, z') = \\
& \langle \psi | i \iint d\varpi_1 d\varpi_2 \Psi^*(z', \Omega, \varpi_1, \varpi_2) \\
& B^*(\varpi_1, \omega_p + \varpi_2 - \Omega) \hat{a}_2(\omega_p + \varpi_2 - \Omega) \hat{a}_2^\dagger(\varpi_2) + \\
& \iint d\varpi'_1 d\varpi''_1 \Theta^*(L, \omega_p, \varpi'_1, \varpi_2) \Theta^*(L, \omega_p, \varpi''_1, \omega_p - \varpi''_1 + \varpi_1 + \varpi_2 - \Omega) \times \\
& (\delta(\varpi_1 - \varpi'_1) \hat{a}_1(\varpi'_1) + \delta(\varpi_1 - \varpi''_1) \hat{a}_1(\varpi''_1)) \hat{a}_3(\omega_p - \varpi'_1 - \varpi_2) \hat{a}_2(\omega_p - \varpi''_1 + \varpi_1 + \varpi_2 - \Omega) + \\
& \int \int d\varpi'_2 d\varpi''_1 \Theta^*(L, \omega_p, \varpi_1, \varpi'_2) \Theta^*(L, \omega_p, \varpi''_1, \omega_p - \varpi''_1 + \varpi_1 + \varpi_2 - \Omega) \times \\
& \hat{a}_2(\omega_p - \varpi''_1 + \varpi_1 + \varpi_2 - \Omega) \hat{a}_2^\dagger(\varpi_2) \hat{a}_3(\varpi_p - \varpi_1 - \varpi'_2) \hat{a}_1(\varpi''_1) \hat{a}_2(\varpi'_2) + \\
& \iiint d\varpi'_2 d\varpi'_1 d\varpi''_1 \Theta^*(L, \omega_p, \varpi_1, \varpi'_2) \Theta^*(L, \omega_p, \varpi'_1, \varpi_2) \Theta^*(L, \omega_p, \varpi''_1, \omega_p - \varpi''_1 + \varpi_1 + \varpi_2 - \Omega) \times \\
& \hat{a}_2(\varpi'_2) \hat{a}_3(\omega_p - \varpi_1 - \varpi'_2) \hat{a}_1(\varpi'_1) \hat{a}_3(\omega_p - \varpi'_1 - \varpi_2) \hat{a}_1(\varpi''_1) \hat{a}_2(\omega_p - \varpi''_1 + \varpi_1 + \varpi_2 - \Omega)
\end{aligned} \tag{B.5}$$

La densité de photons du champ somme s'obtient donc ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 n(\Omega, z') &= \langle \psi | \hat{a}_\Omega^+(\Omega, z') \hat{a}_\Omega(\Omega, z') | \psi \rangle = & (B.6) \\
 & \langle \psi | \iiint d\varpi_1 d\varpi_2 d\omega_1 d\omega_2 \Psi(z', \Omega, \omega_1, \omega_2) \Psi^*(z', \Omega, \varpi_1, \varpi_2) \times \\
 & [\Theta^*(L, \omega_p, \varpi_1, \omega_p + \varpi_2 - \Omega) \hat{a}_2(\omega_p + \varpi_2 - \Omega) \hat{a}_2^+(\varpi_2) + \\
 & \iint d\varpi'_1 d\varpi''_1 \Theta^*(L, \omega_p, \varpi'_1, \varpi_2) \Theta^*(L, \omega_p, \varpi''_1, \omega_p - \varpi'_1 + \varpi_1 + \varpi_2 - \Omega) \times \\
 & (\delta(\varpi_1 - \varpi'_1) \hat{a}_1(\varpi''_1) + \delta(\varpi_1 - \varpi''_1) \hat{a}_1(\varpi'_1)) \hat{a}_3(\omega_p - \varpi'_1 - \varpi_2) \hat{a}_2(\omega_p - \varpi''_1 + \varpi_1 + \varpi_2 - \Omega) + \\
 & \int \int d\varpi'_2 d\varpi''_2 \Theta^*(L, \omega_p, \varpi_1, \varpi'_2) \Theta^*(L, \omega_p, \varpi''_2, \omega_p - \varpi''_1 + \varpi_1 + \varpi_2 - \Omega) \times \\
 & \hat{a}_2(\omega_p - \varpi''_1 + \varpi_1 + \varpi_2 - \Omega) \hat{a}_2^+(\varpi_2) \hat{a}_3(\varpi_p - \varpi_1 - \varpi'_2) \hat{a}_1(\varpi''_1) \hat{a}_2(\varpi'_2) + \\
 & \iiint d\varpi'_2 d\varpi''_2 d\varpi'_1 \Theta^*(L, \omega_p, \varpi_1, \varpi'_2) \Theta^*(L, \omega_p, \varpi'_1, \varpi_2) \Theta^*(L, \omega_p, \varpi''_1, \varpi_p - \varpi''_1 + \varpi_1 + \varpi_2 - \Omega) \times \\
 & \hat{a}_2(\varpi'_2) \hat{a}_3(\omega_p - \varpi_1 - \varpi'_2) \hat{a}_1(\varpi'_1) \hat{a}_3(\omega_p - \varpi'_1 - \varpi_2) \hat{a}_1(\varpi''_1) \hat{a}_2(\omega_p - \varpi''_1 + \varpi_1 + \varpi_2 - \Omega)] \times \\
 & [\Theta(L, \omega_p, \omega_1, \omega_p + \omega_2 - \Omega) \hat{a}_2(\omega_2) \hat{a}_2^+(\omega_p + \omega_2 - \Omega) + \\
 & \iint d\omega'_1 d\omega''_1 \delta(\omega_1 - \omega'_2) \Theta(L, \omega_p, \omega'_1, \omega_2) \Theta(L, \omega_p, \omega''_1, \omega_p - \omega''_1 + \omega_1 + \omega_2 - \Omega) \times \\
 & (\delta(\omega_1 - \omega'_1) \hat{a}_1^+(\omega''_1) + \delta(\omega_1 - \omega''_1) \hat{a}_1^+(\omega'_1)) \hat{a}_3^+(\omega - \omega'_1 - \omega_2) \hat{a}_2^+(\omega_p - \omega''_1 + \omega_1 + \omega_2 - \Omega) + \\
 & \int \int d\omega'_2 d\omega''_2 \Theta(L, \omega_p, \omega_1, \omega'_2) \delta(\omega'_1 - \omega_2) \Theta(L, \omega_p, \omega''_1, \omega_p - \omega''_1 + \omega_1 + \omega_2 - \Omega) \times \\
 & \hat{a}_1^+(\omega'_1) \hat{a}_2^+(\omega'_2) \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega_1 - \omega'_2) \hat{a}_2(\omega_2) \hat{a}_2^+(\omega_p - \omega''_1 + \omega_1 + \omega_2 - \Omega) + \\
 & + \iiint d\omega'_2 d\omega'_1 d\omega''_1 \Theta(L, \omega_p, \omega_1, \omega'_2) \Theta(L, \omega_p, \omega'_1, \omega_2) \Theta(L, \omega_p, \omega''_1, \omega_p - \omega''_1 + \omega_1 + \omega_2 - \Omega) \times \\
 & \hat{a}_2^+(\omega'_2) \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega_1 - \omega'_2) \hat{a}_1^+(\omega'_1) \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega'_1 - \omega_2) \hat{a}_1^+(\omega''_1) \hat{a}_2^+(\omega_p - \omega''_1 + \omega_1 + \omega_2 - \Omega)] | \psi \rangle
 \end{aligned}$$

Le terme prépondérant dans l'approximation de gain faible est le produit des termes vert/vert, c'est le seul terme qui est en  $\Theta^2$ , tous les autres étant au moins en  $\Theta^4$ . On peut noter que ce terme comporte aussi le terme du pic. La densité spectrale et donc équivalente à ce terme et vaut :

$$\begin{aligned}
 n(\Omega, z') &\simeq \langle \psi | \hat{a}_\Omega^+(\Omega, z') \hat{a}_\Omega(\Omega, z') | \psi \rangle = \\
 & \iiint d\varpi_1 d\varpi_2 d\omega_1 d\omega_2 \Psi(z', \Omega, \omega_1, \omega_2) \Psi^*(z', \Omega, \varpi_1, \varpi_2) \Theta(L, \omega_p, \varpi_1, \omega_p + \varpi_2 - \Omega) \Theta(L, \omega_p, \omega_1, \omega_p + \omega_2 - \Omega) \times \\
 & \langle \psi | \hat{a}_2(\omega_p + \varpi_2 - \Omega) \hat{a}_2^+(\varpi_2) \hat{a}_2(\omega_2) \hat{a}_2^+(\omega_p + \omega_2 - \Omega) | \psi \rangle
 \end{aligned}$$

Développons juste la partie des opérateurs :

$$\begin{aligned}
 & \langle \psi | \hat{a}_2(\omega_p + \varpi_2 - \Omega) \hat{a}_2^+(\varpi_2) \hat{a}_2(\omega_2) \hat{a}_2^+(\omega_p + \omega_2 - \Omega) | \psi \rangle = \\
 & \langle \psi | \hat{a}_2(\omega_p + \varpi_2 - \Omega) \hat{a}_2^+(\varpi_2) (\hat{a}_2^+(\omega_p + \omega_2 - \Omega) \hat{a}_2(\omega_2) + \delta(\omega_p - \Omega)) | \psi \rangle = \\
 & \langle \psi | (\hat{a}_2^+(\varpi_2) \hat{a}_2(\omega_p + \varpi_2 - \Omega) + \delta(\omega_p - \Omega)) (\hat{a}_2^+(\omega_p + \omega_2 - \Omega) \hat{a}_2(\omega_2) + \delta(\omega_p - \Omega)) | \psi \rangle = \\
 & \langle \psi | \hat{a}_2^+(\varpi_2) \hat{a}_2(\omega_p + \varpi_2 - \Omega) \hat{a}_2^+(\omega_p + \omega_2 - \Omega) \hat{a}_2(\omega_2) | \psi \rangle + \\
 & \hat{a}_2^+(\varpi_2) \hat{a}_2(\omega_p + \varpi_2 - \Omega) \delta(\omega_p - \Omega) + \delta(\omega_p - \Omega) \hat{a}_2^+(\omega_p + \omega_2 - \Omega) \hat{a}_2(\omega_2) + \delta(\omega_p - \Omega)
 \end{aligned}$$

soit en projetant :

$$\begin{aligned}
 & \langle \psi | \hat{a}_2(\omega_p + \varpi_2 - \Omega) \hat{a}_2^+(\varpi_2) \hat{a}_2(\omega_2) \hat{a}_2^+(\omega_p + \omega_2 - \Omega) | \psi \rangle = \\
 & \sqrt{n(\varpi_2)n(\omega_2)} \langle \psi | \hat{a}_2(\omega_p + \varpi_2 - \Omega) \hat{a}_2^+(\omega_p + \omega_2 - \Omega) | \psi \rangle + \\
 & \delta(\omega_p - \Omega) \left[ 1 + \sqrt{n(\varpi_2)} \sqrt{n(\omega_p + \varpi_2 - \Omega)} + \sqrt{n(\omega_2)} \sqrt{n(\omega_p + \omega_2 - \Omega)} \right] = \\
 & \sqrt{n(\varpi_2)n(\omega_2)} \left[ \sqrt{n(\omega_p + \varpi_2 - \Omega)} \sqrt{n(\omega_p + \omega_2 - \Omega)} + \delta(\varpi_2 - \omega_2) \right] + \\
 & \delta(\omega_p - \Omega) \left[ 1 + \sqrt{n(\varpi_2)} \sqrt{n(\omega_p + \varpi_2 - \Omega)} + \sqrt{n(\omega_2)} \sqrt{n(\omega_p + \omega_2 - \Omega)} \right]
 \end{aligned}$$

donc pour la densité spectrale totale ça donne :

$$\begin{aligned}
 n(\Omega, z') &= \langle \psi | \hat{a}_\Omega^+(\Omega, z') \hat{a}_\Omega(\Omega, z') | \psi \rangle = \tag{B.7} \\
 & \iiint d\varpi_1 d\varpi_2 d\omega_1 d\omega_2 \Psi(z', \Omega, \omega_1, \omega_2) \Psi^*(z', \Omega, \varpi_1, \varpi_2) \Theta^*(L, \omega_p, \varpi_1, \omega_p + \varpi_2 - \Omega) \Theta(L, \omega_p, \omega_1, \omega_p + \omega_2 - \Omega) \times \\
 & \sqrt{n(\varpi_2)} \sqrt{n(\omega_2)} \sqrt{n(\omega_p + \varpi_2 - \Omega)} \sqrt{n(\omega_p + \omega_2 - \Omega)} + \delta(\omega_p - \Omega) [1 + n(\varpi_2) + n(\omega_2)] + \\
 & \iiint d\varpi_1 d\omega_1 d\omega_2 \Psi(z', \Omega, \omega_1, \omega_2) \Psi^*(z', \Omega, \varpi_1, \varpi_2) \Theta^*(L, \omega_p, \varpi_1, \omega_p + \varpi_2 - \Omega) \Theta(L, \omega_p, \omega_1, \omega_p + \omega_2 - \Omega) n(\omega_2)
 \end{aligned}$$

soit encore finalement :

$$\begin{aligned}
 n(\Omega, z') &= \tag{B.8} \\
 & \left| \iint d\omega_1 d\omega_2 \Psi(z', \Omega, \omega_1, \omega_2) \Theta(L, \omega_p, \omega_1, \omega_p + \omega_2 - \Omega) \left[ \sqrt{n(\omega_p + \omega_2 - \Omega)} \sqrt{n(\omega_2)} + \delta(\omega_p - \Omega) \right] \right|^2 + \\
 & \int d\omega_2 \left| \int d\omega_1 \Psi(z', \Omega, \omega_1, \omega_2) \Theta(L, \omega_p, \omega_1, \omega_p + \omega_2 - \Omega) \right|^2 n(\omega_2)
 \end{aligned}$$

## B.2 Champ somme à trois photons issus d'une génération mono-stimulée par le champ 3

Comme annoncé chapitre IV, il suffit d'invertir les nappes d'indices vues par les champs 2 et 3 pour que la mono-injection se fasse par le champ que nommé 3. Il est possible de procéder à cette inversion directement dans la définition des nappes d'indices, ou bien indirectement en intervertissant les fréquences associées aux champs 2 et 3 dans chaque terme lié à  $\Delta k$ , afin d'attribuer le vecteur d'onde et donc les indices du champ 2 au champ 3 et réciproquement. Dans la pratique, cela revient à inverser ces fréquences dans  $\Phi$  (c'est-à-dire  $\Theta$  avec nos notations) et dans  $\Psi$ . Ainsi le champ somme des trois champs générés par mono-stimulation sur le champ 3 peut s'exprimer comme :

$$\begin{aligned}
 n(\Omega, z') &= \langle \psi | \hat{a}_\Omega^+(\Omega, L_2) \hat{a}_\Omega(\Omega, L_2) | \psi \rangle = \tag{B.9} \\
 & \left| \iint d\omega_1 d\omega_2 \Psi(z', \Omega, \omega_1, \Omega - \omega_1 - \omega_2) \Theta(L, \omega_p, \omega_1, \Omega - \omega_1 - \omega_2) \left[ \sqrt{n(\omega_p + \omega_2 - \Omega)} \sqrt{n(\omega_2)} + \delta(\omega_p - \Omega) \right] \right|^2 \\
 & + \int d\omega_2 \left| \int d\omega_1 \Psi(z', \Omega, \omega_1, \Omega - \omega_1 - \omega_2) \Theta(L, \omega_p, \omega_1, \Omega - \omega_1 - \omega_2) \right|^2 n(\omega_2)
 \end{aligned}$$

Afin de convaincre de ce raisonnement, vérifions le en reprenant les calculs depuis le début (équation (B.2)) en considérant une injection par le champ 3, l'état quantique  $|\psi\rangle$  étant alors  $|0, 0, \alpha_3\rangle$  :

$$\begin{aligned}
& \hat{a}_\Omega(\Omega, z') |\psi\rangle = \\
& -i \iint d\omega_1 d\omega_2 \Psi(z', \Omega, \omega_1, \omega_2) \iiint d\omega'_2 d\omega'_1 d\omega''_1 \\
& (\delta(\omega_1 - \omega'_2) \delta(\omega'_1 - \omega_2) \delta(\omega''_1 - \omega_1 + \omega_2 - \Omega) \hat{a}_1(\omega_1) \hat{a}_2(\omega_2) \hat{a}_3(\Omega - \omega_1 - \omega_2) |\psi\rangle + \\
& \delta(\omega_1 - \omega'_2) \Theta(L, \omega_p, \omega', \omega_2) \delta(\omega''_1 - \omega_1 + \omega_2 - \Omega) \hat{a}_1(\omega_1) \hat{a}_1^+(\omega'_1) \hat{a}_3^+(\omega - \omega'_1 - \omega_2) \hat{a}_3(\Omega - \omega_1 - \omega_2) |\psi\rangle + \\
& \Theta(L, \omega_p, \omega_1, \omega'_2) \delta(\omega'_1 - \omega_2) \delta(\omega''_1 - \omega_1 + \omega_2 - \Omega) \hat{a}_2^+(\omega'_2) \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega_1 - \omega'_2) \hat{a}_2(\omega_2) \hat{a}_3(\Omega - \omega_1 - \omega_2) |\psi\rangle + \\
& \Theta(L, \omega_p, \omega_1, \omega'_2) \Theta(L, \omega_p, \omega'_1, \omega_2) \delta(\omega''_1 - \omega_1 + \omega_2 - \Omega) \times \\
& \hat{a}_2^+(\omega'_2) \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega_1 - \omega'_2) \hat{a}_1^+(\omega'_1) \hat{a}_3^+(\omega - \omega'_1 - \omega_2) \hat{a}_3(\Omega - \omega_1 - \omega_2) |\psi\rangle + \\
& \delta(\omega_1 - \omega'_2) \delta(\omega'_1 - \omega_2) \Theta(L, \omega_p, \omega''_1, \omega_p - \omega''_1 + \omega_1 + \omega_2 - \Omega) \times \\
& \hat{a}_1(\omega_1) \hat{a}_2(\omega_2) \hat{a}_1^+(\omega''_1) \hat{a}_2^+(\omega_p - \omega''_1 + \omega_1 + \omega_2 - \Omega) |\psi\rangle + \\
& \delta(\omega_1 - \omega'_2) \Theta(L, \omega_p, \omega'_1, \omega_2) \Theta(L, \omega_p, \omega''_1, \omega_p - \omega''_1 + \omega_1 + \omega_2 - \Omega) \times \\
& \hat{a}_1(\omega_1) \hat{a}_1^+(\omega'_1) \hat{a}_3^+(\omega - \omega'_1 - \omega_2) \hat{a}_1^+(\omega''_1) \hat{a}_2^+(\omega_p - \omega''_1 + \omega_1 + \omega_2 - \Omega) |\psi\rangle + \\
& \Theta(L, \omega_p, \omega_1, \omega'_2) \delta(\omega'_1 - \omega_2) \Theta(L, \omega_p, \omega''_1, \omega_p - \omega''_1 + \omega_1 + \omega_2 - \Omega) \times \\
& \hat{a}_2^+(\omega'_2) \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega_1 - \omega'_2) \hat{a}_2(\omega_2) \hat{a}_1^+(\omega''_1) \hat{a}_2^+(\omega_p - \omega''_1 + \omega_1 + \omega_2 - \Omega) |\psi\rangle + \\
& \Theta(L, \omega_p, \omega_1, \omega'_2) \Theta(L, \omega_p, \omega'_1, \omega_2) \Theta(L, \omega_p, \omega''_1, \omega_p - \omega''_1 + \omega_1 + \omega_2 - \Omega) \times \\
& \hat{a}_2^+(\omega'_2) \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega_1 - \omega'_2) \hat{a}_1^+(\omega'_1) \hat{a}_3^+(\omega - \omega'_1 - \omega_2) \hat{a}_1^+(\omega''_1) \hat{a}_2^+(\omega_p - \omega''_1 + \omega_1 + \omega_2 - \Omega) |\psi\rangle)
\end{aligned} \tag{B.10}$$

ce qui donne par projection :

$$\begin{aligned}
& \hat{a}_\Omega(\Omega, z') |\psi\rangle = \\
& -i \iint d\omega_1 d\omega_2 \Psi(z', \Omega, \omega_1, \omega_2) \iiint d\omega'_2 d\omega'_1 d\omega''_1 \\
& (0 + \\
& \delta(\omega_1 - \omega'_2) \delta(\omega_1 - \omega'_1) \Theta(L, \omega_p, \omega'_1, \omega_2) \delta(\omega''_1 - \omega_1 + \omega_2 - \Omega) \hat{a}_3^+(\omega - \omega'_1 - \omega_2) \hat{a}_3(\Omega - \omega_1 - \omega_2) |\psi\rangle + \\
& 0 + \\
& \Theta(L, \omega_p, \omega_1, \omega'_2) \Theta(L, \omega_p, \omega'_1, \omega_2) \delta(\omega''_1 - \omega_1 + \omega_2 - \Omega) \times \\
& \hat{a}_2^+(\omega'_2) \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega_1 - \omega'_2) \hat{a}_1^+(\omega'_1) \hat{a}_3^+(\omega - \omega'_1 - \omega_2) \hat{a}_3(\Omega - \omega_1 - \omega_2) |\psi\rangle + \\
& \delta(\omega_1 - \omega'_2) \delta(\omega'_1 - \omega_2) \delta(\omega''_1 - \omega_1) \delta(\omega_p - \omega''_1 + \omega_1 - \Omega) \Theta(L, \omega_p, \omega''_1, \omega_p - \omega''_1 + \omega_1 + \omega_2 - \Omega) |\psi\rangle + \\
& \delta(\omega_1 - \omega'_2) \Theta(L, \omega_p, \omega'_1, \omega_2) \Theta(L, \omega_p, \omega''_1, \omega_p - \omega''_1 + \omega_1 + \omega_2 - \Omega) \times \\
& (\delta(\omega_1 - \omega'_1) \hat{a}_1^+(\omega''_1) + \delta(\omega_1 - \omega''_1) \hat{a}_1^+(\omega'_1)) \hat{a}_3^+(\omega - \omega'_1 - \omega_2) \hat{a}_2^+(\omega_p - \omega''_1 + \omega_1 + \omega_2 - \Omega) |\psi\rangle + \\
& \Theta(L, \omega_p, \omega_1, \omega'_2) \delta(\omega'_1 - \omega_2) \delta(\omega_p - \omega''_1 + \omega_1 - \Omega) \Theta(L, \omega_p, \omega''_1, \omega_p - \omega''_1 + \omega_1 + \omega_2 - \Omega) \times \\
& \hat{a}_2^+(\omega'_2) \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega_1 - \omega'_2) \hat{a}_1^+(\omega''_1) |\psi\rangle + \\
& \Theta(L, \omega_p, \omega_1, \omega'_2) \Theta(L, \omega_p, \omega'_1, \omega_2) \Theta(L, \omega_p, \omega''_1, \omega_p - \omega''_1 + \omega_1 + \omega_2 - \Omega) \times \\
& \hat{a}_2^+(\omega'_2) \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega_1 - \omega'_2) \hat{a}_1^+(\omega'_1) \hat{a}_3^+(\omega - \omega'_1 - \omega_2) \hat{a}_1^+(\omega''_1) \hat{a}_2^+(\omega_p - \omega''_1 + \omega_1 + \omega_2 - \Omega) |\psi\rangle)
\end{aligned} \tag{B.11}$$

Cette fois ci, ce sont les termes issus de produits des termes en rouge et en vert qui vont être en  $\Theta^2$ , les autres seront tous au moins en  $\Theta^4$ . On ne réécrit donc que ces 2 termes,

dans l'approximation de gain faible :

$$\begin{aligned}
 \hat{a}_\Omega(\Omega, z') |\psi\rangle &\simeq & (B.12) \\
 -i \iint d\omega_1 d\omega_2 \Psi(z', \Omega, \omega_1, \omega_2) &\iiint d\omega'_2 d\omega'_1 d\omega''_1 \\
 \delta(\omega_1 - \omega'_2) \delta(\omega_1 - \omega'_1) \Theta(L, \omega_p, \omega'_1, \omega_2) &\delta(\omega''_1 - \omega_1 + \omega_2 - \Omega) \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega'_1 - \omega_2) \hat{a}_3(\Omega - \omega_1 - \omega_2) |\psi\rangle + \\
 \delta(\omega_1 - \omega'_2) \delta(\omega'_1 - \omega_2) \delta(\omega''_1 - \omega_1) &\delta(\omega_p - \omega''_1 + \omega_1 - \Omega) \Theta(L, \omega_p, \omega''_1, \omega_p - \omega''_1 + \omega_1 + \omega_2 - \Omega) |\psi\rangle
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
 \hat{a}_\Omega(\Omega, z') |\psi\rangle &\simeq \\
 -i \iint d\omega_1 d\omega_2 \Psi(z', \Omega, \omega_1, \omega_2) \Theta(L, \omega_p, \omega_1, \omega_2) &(\hat{a}_3^+(\omega_p - \omega_1 - \omega_2) \hat{a}_3(\Omega - \omega_1 - \omega_2) + \delta(\omega_p - \Omega)) |\psi\rangle
 \end{aligned} \tag{B.13}$$

Son conjugué est donné par :

$$\begin{aligned}
 \langle \psi | \hat{a}_\Omega^+(\Omega, z') &\simeq \\
 i \iint d\varpi_1 d\varpi_2 \Psi^*(z', \Omega, \varpi_1, \varpi_2) \Theta^*(L, \omega_p, \varpi_1, \varpi_2) &(\hat{a}_3^+(\Omega - \varpi_1 - \varpi_2) \hat{a}_3(\omega_p - \varpi_1 - \varpi_2) + \delta(\omega_p - \Omega)) |\psi\rangle
 \end{aligned} \tag{B.14}$$

La densité spectrale du champ somme s'écrit donc dans l'approximation de gain faible :

$$\begin{aligned}
 n(\Omega, z') = \langle \psi | \hat{a}_\Omega^+(\Omega, z') \hat{a}_\Omega(\Omega, z') | \psi \rangle &= & (B.15) \\
 \iint d\omega_1 d\omega_2 \Psi(z', \Omega, \omega_1, \omega_2) \Theta(L, \omega_p, \omega_1, \omega_2) &\iint d\varpi_1 d\varpi_2 \Psi^*(z', \Omega, \varpi_1, \varpi_2) \Theta^*(L, \omega_p, \varpi_1, \varpi_2) \times \\
 \langle \psi | (\hat{a}_3^+(\omega_p - \omega_1 - \omega_2) \hat{a}_3(\Omega - \omega_1 - \omega_2) + \delta(\omega_p - \Omega)) &(\hat{a}_3^+(\Omega - \varpi_1 - \varpi_2) \hat{a}_3(\omega_p - \varpi_1 - \varpi_2) + \delta(\omega_p - \Omega)) | \psi \rangle
 \end{aligned}$$

soit en développant la partie des opérateurs :

$$\begin{aligned}
 \langle \psi | (\hat{a}_3^+(\omega_p - \omega_1 - \omega_2) \hat{a}_3(\Omega - \omega_1 - \omega_2) + \delta(\omega_p - \Omega)) &(\hat{a}_3^+(\Omega - \varpi_1 - \varpi_2) \hat{a}_3(\omega_p - \varpi_1 - \varpi_2) + \delta(\omega_p - \Omega)) | \psi \rangle \\
 = \langle \psi | \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega_1 - \omega_2) \hat{a}_3(\Omega - \omega_1 - \omega_2) \hat{a}_3^+(\Omega - \varpi_1 - \varpi_2) &\hat{a}_3(\omega_p - \varpi_1 - \varpi_2) | \psi \rangle + & (B.16) \\
 \delta(\omega_p - \Omega) [1 + \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega_1 - \omega_2) \hat{a}_3(\Omega - \omega_1 - \omega_2) + \hat{a}_3^+(\Omega - \varpi_1 - \varpi_2) &\hat{a}_3(\omega_p - \varpi_1 - \varpi_2)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle \psi | (\hat{a}_3^+(\omega_p - \omega_1 - \omega_2) \hat{a}_3(\Omega - \omega_1 - \omega_2) + \delta(\omega_p - \Omega)) &(\hat{a}_3^+(\Omega - \varpi_1 - \varpi_2) \hat{a}_3(\omega_p - \varpi_1 - \varpi_2) + \delta(\omega_p - \Omega)) | \psi \rangle \\
 = \langle \psi | \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega_1 - \omega_2) \hat{a}_3(\Omega - \omega_1 - \omega_2) \hat{a}_3^+(\Omega - \varpi_1 - \varpi_2) &\hat{a}_3(\omega_p - \varpi_1 - \varpi_2) | \psi \rangle + & (B.17) \\
 \delta(\omega_p - \Omega) [1 + \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega_1 - \omega_2) \hat{a}_3(\Omega - \omega_1 - \omega_2) + \hat{a}_3^+(\Omega - \varpi_1 - \varpi_2) &\hat{a}_3(\omega_p - \varpi_1 - \varpi_2)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle \psi | (\hat{a}_3^+(\omega_p - \omega_1 - \omega_2) \hat{a}_3(\Omega - \omega_1 - \omega_2) + \delta(\omega_p - \Omega)) &(\hat{a}_3^+(\Omega - \varpi_1 - \varpi_2) \hat{a}_3(\omega_p - \varpi_1 - \varpi_2) + \delta(\omega_p - \Omega)) | \psi \rangle \\
 = \sqrt{n(\omega_p - \omega_1 - \omega_2)} \sqrt{n(\omega_p - \varpi_1 - \varpi_2)} \left( \sqrt{n(\Omega - \omega_1 - \omega_2)} \sqrt{n(\Omega - \varpi_1 - \varpi_2)} + \delta(\omega_1 + \omega_2 - \varpi_1 - \varpi_2) \right) &+ \\
 \delta(\omega_p - \Omega) [1 + n(\Omega - \omega_1 - \omega_2) + n(\Omega - \varpi_1 - \varpi_2)] & & (B.18)
 \end{aligned}$$

ce qui donne finalement pour la densité spectrale :

$$\begin{aligned}
 n(\Omega, z') &= \langle \psi | a_{\hat{\Omega}}^+(\Omega, z') a_{\hat{\Omega}}(\Omega, z') | \psi \rangle = \\
 &\iint d\omega_1 d\omega_2 \Psi(z', \Omega, \omega_1, \omega_2) \Theta(L, \omega_p, \omega_1, \omega_2) \iint d\varpi_1 d\varpi_2 \Psi^*(z', \Omega, \varpi_1, \varpi_2) \Theta^*(L, \omega_p, \varpi_1, \varpi_2) \times \\
 &\sqrt{n(\omega_p - \omega_1 - \omega_2)} \sqrt{n(\omega_p - \varpi_1 - \varpi_2)} \left( \sqrt{n(\Omega - \omega_1 - \omega_2)} \sqrt{n(\Omega - \varpi_1 - \varpi_2)} + \delta(\omega_1 + \omega_2 - \varpi_1 - \varpi_2) \right) + \\
 &\delta(\omega_p - \Omega) [1 + n(\Omega - \omega_1 - \omega_2) + n(\Omega - \varpi_1 - \varpi_2)]
 \end{aligned} \tag{B.19}$$

soit :

$$\begin{aligned}
 n(\Omega, z') &= \\
 &\left| \iint d\omega_1 d\omega_2 \Psi(z', \Omega, \omega_1, \omega_2) \Theta(L, \omega_p, \omega_1, \omega_2) \sqrt{n(\omega_p - \omega_1 - \omega_2)} \sqrt{n(\Omega - \omega_1 - \omega_2)} \right|^2 + \\
 &\iint d\omega_1 d\omega_2 \Psi(z', \Omega, \omega_1, \omega_2) \Theta(L, \omega_p, \omega_1, \omega_2) \int d\varpi_1 \Psi^*(z', \Omega, \varpi_1, \omega_1 + \omega_2 - \varpi_1) \Theta^*(L, \omega_p, \varpi_1, \omega_1 + \omega_2 - \varpi_1) \times \\
 &n(\omega_p - \omega_1 - \omega_2) + \\
 &\delta(\omega_p - \Omega) \iint d\omega_1 d\omega_2 \Psi(z', \Omega, \omega_1, \omega_2) \Theta(L, \omega_p, \omega_1, \omega_2) \iint d\varpi_1 d\varpi_2 \Psi^*(z', \Omega, \varpi_1, \varpi_2) \Theta^*(L, \omega_p, \varpi_1, \varpi_2) \times \\
 &[1 + n(\omega_p - \omega_1 - \omega_2) + n(\omega_p - \varpi_1 - \varpi_2)]
 \end{aligned} \tag{B.20}$$

soit encore, en séparant les fréquences finales selon qu'elles sont différentes ou pas de  $\omega_p$  :

$$\begin{aligned}
 n(\Omega, L_2) &= \\
 &\left| \iint d\omega_1 d\omega_2 \Psi(z', \Omega \neq \omega_p, \omega_1, \omega_2) \Theta(L, \omega_p, \omega_1, \omega_2) \sqrt{n_3(\omega_p - \omega_1 - \omega_2)} \sqrt{n_3(\Omega - \omega_1 - \omega_2)} \right|^2 + \\
 &\left| \iint d\omega_1 d\omega_2 \Psi(z', \Omega = \omega_p, \omega_1, \omega_2) \Theta(L, \omega_p, \omega_1, \omega_2) (n_3(\omega_p - \omega_1 - \omega_2) + 1) \right|^2 + \\
 &\iiint d\omega_1 d\omega_2 d\varpi_1 \Psi(z', \Omega, \omega_1, \omega_2) \Psi^*(z', \Omega, \varpi_1, \omega_1 + \omega_2 - \varpi_1) \times \\
 &\Theta(L, \omega_p, \omega_1, \omega_2) \Theta^*(L, \omega_p, \varpi_1, \omega_1 + \omega_2 - \varpi_1) n_3(\omega_p - \omega_1 - \omega_2)
 \end{aligned} \tag{B.21}$$

Nous pouvons maintenant vérifier que cette expression est similaire à celle obtenue équation (B.9) en changeant directement les indices à partir du champ 2. Procédons à des changements de variables : nous faisons changement de variables différents dans chaque intégrale, (rien ne s'y oppose, les variables d'intégration étant muettes). Dans la première intégrale posons  $\omega'_2 = \Omega - \omega_1 - \omega_2$ , dans la deuxième et la troisième posons :  $\omega'_2 = \omega_p - \omega_1 - \omega_2$ .

L'expression (B.21) devient alors :

$$\begin{aligned}
 n(\Omega, z') &= \\
 &\left| \iint d\omega_1 d\omega'_2 \Psi(z', \Omega \neq \omega_p, \omega_1, \Omega - \omega_1 - \omega'_2) \Theta(L, \omega_p, \omega_1, \Omega - \omega_1 - \omega'_2) \sqrt{n(\omega_p - \Omega + \omega'_2)} \sqrt{n(\omega'_2)} \right|^2 + \\
 &\left| \iint d\omega_1 d\omega'_2 \Psi(z', \Omega = \omega_p, \omega_1, \omega_p - \omega_1 - \omega'_2) \Theta(L, \omega_p, \omega_1, \omega_p - \omega_1 - \omega'_2) (n(\omega'_2) + 1) \right|^2 + \\
 &\iiint d\omega_1 d\omega'_2 d\varpi_1 \Psi(z', \Omega, \omega_1, \omega_p - \omega_1 - \omega'_2) \Psi^*(z', \Omega, \varpi_1, \omega_p - \omega'_2 - \varpi_1) \times \\
 &\Theta(L, \omega_p, \omega_1, \omega_p - \omega_1 - \omega'_2) \Theta^*(\varpi_1, \omega_p - \omega'_2 - \varpi_1) n(\omega'_2)
 \end{aligned} \tag{B.22}$$

soit

$$\begin{aligned}
 n(\Omega, z') = & \\
 & \left| \iint d\omega_1 d\omega'_2 \Psi(z', \Omega \neq \omega_p, \omega_1, \Omega - \omega_1 - \omega'_2) \Theta(L, \omega_p, \omega_1, \Omega - \omega_1 - \omega'_2) \sqrt{n(\omega_p - \Omega + \omega'_2)} \sqrt{n(\omega'_2)} \right|^2 + \\
 & \left| \iint d\omega_1 d\omega'_2 \Psi(z', \Omega = \omega_p, \omega_1, \omega_p - \omega_1 - \omega'_2) \Theta(L, \omega_p, \omega_1, \omega_p - \omega_1 - \omega'_2) (n(\omega'_2) + 1) \right|^2 + \\
 & \int d\omega'_2 \left| \int d\omega_1 \Psi(z', \Omega, \omega_1, \omega_p - \omega_1 - \omega'_2) \Theta(L, \omega_p, \omega_1, \omega_p - \omega_1 - \omega'_2) n(\omega'_2) \right|^2
 \end{aligned} \tag{B.23}$$

ce qui donne aussi :

$$\begin{aligned}
 n(\Omega, z') = & \\
 & \left| \iint d\omega_1 d\omega'_2 \Psi(z', \Omega, \omega_1, \Omega - \omega_1 - \omega'_2) \Theta(L, \omega_p, \omega_1, \Omega - \omega_1 - \omega'_2) \left[ \sqrt{n(\omega_p - \Omega + \omega'_2)} \sqrt{n(\omega'_2)} + \delta(\omega_p - \Omega) \right] \right|^2 + \\
 & \int d\omega'_2 \left| \int d\omega_1 \Psi(z', \Omega, \omega_1, \omega_p - \omega_1 - \omega'_2) \Theta(L, \omega_p, \omega_1, \omega_p - \omega_1 - \omega'_2) n(\omega'_2) \right|^2
 \end{aligned} \tag{B.24}$$

Ce qui est exactement l'expression (B.21).



## Annexe C

# Calcul détaillé du champ généré par somme de fréquences à deux champs issus d'une génération bi-injectée, mono-injectée ou spontanée

Cette annexe détaille l'obtention des expressions des densités spectrales moyennes des champs recombinaison par somme de fréquence à deux photons. Nous allons calculer l'expression du champ recombinaison dans le cas général où les champs triplets sont générés par bi-injection, puis nous en déduisons les cas particuliers où l'un des deux ou les deux champs d'injection sont nuls pour avoir les cas où les champs sont générés par génération mono-injectée et spontanée. Dans les deux cas de génération injectée, nous traiterons les différents schémas de recombinaison des champs injectés et non injectés entre eux. Nous nommerons 2 et 3 les champs d'injection; nous aurions aussi bien pu prendre 1 et 3, le résultat étant bien sûr indépendant des indices 1, 2 et 3 muets, ne prenant de valeur que par le vecteur d'onde et donc la nappe d'indice de réfraction qu'on leur associe.

L'opérateur mode du champ somme est le suivant, en nommant 's' et 'i' les deux champs sommés :

$$\hat{a}_\omega(\omega, z') = \hat{a}_\omega(\omega, 0) - i \int d\omega' \xi(z', \omega, \omega') \hat{a}_s(\omega') \hat{a}_i(\omega - \omega') \quad (\text{C.1})$$

Envisageons la somme des champs nommés 1 et 2 :

$$\hat{a}_\omega(\omega, z') = -i \int d\omega' \xi(z', \omega, \omega') \hat{a}_1(\omega') \hat{a}_2(\omega - \omega') \quad (\text{C.2})$$

En développant grâce aux équations (III.5), on obtient, en notant  $\hat{a}_{1,2}(\omega, 0) = \hat{a}_{1,2}(\omega)$  pour

alléger les écritures :

$$\begin{aligned} \hat{a}_\omega(\omega, z') = & -i \int d\omega' \xi(z', \omega, \omega') \left[ \hat{a}_1(\omega') - i \int d\omega_1 \Phi(L_1, \omega_p, \omega', \omega_1) \hat{a}_2^+(\omega_1) \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega' - \omega_1) \right] \times \\ & \left[ \hat{a}_2(\omega - \omega') - i \int d\omega_2 \Phi(L_1, \omega_p, \omega_2, \omega - \omega') \hat{a}_1^+(\omega_2) \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega + \omega' - \omega_2) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

soit en développant :

$$\begin{aligned} \hat{a}_\omega(\omega, z') = & -i \int d\omega' \xi(z', \omega, \omega') \times \quad (\text{C.4}) \\ & \left[ \hat{a}_1(\omega') \hat{a}_2(\omega - \omega') - i \int d\omega_1 \Phi(L_1, \omega_p, \omega', \omega_1) \hat{a}_2^+(\omega_1) \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega' - \omega_1) \hat{a}_2(\omega - \omega') + \right. \\ & -i \int d\omega_2 \Phi(L_1, \omega_p, \omega_2, \omega - \omega') \hat{a}_1(\omega') \hat{a}_1^+(\omega_2) \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega + \omega' - \omega_2) + \\ & \left. - \iint d\omega_1 d\omega_2 \Phi(L_1, \omega_p, \omega', \omega_1) \Phi(L_1, \omega_p, \omega_2, \omega - \omega') \hat{a}_2^+(\omega_1) \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega' - \omega_1) \hat{a}_1^+(\omega_2) \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega + \omega' - \omega_2) \right] \end{aligned}$$

## C.1 Recombinaison en régime de génération bi-stimulée

### Recombinaison d'un champ injecté avec un champ non injecté

Envisageons le cas où l'injection se fait sur les champs 2 et 3 ; l'état quantique du système est alors  $|0, \alpha_2, \alpha_3\rangle$  et la projection de l'opérateur densité du champ somme des champs 1 et 2 donné par (C.4) sur cet état quantique s'exprime comme :

$$\begin{aligned} \hat{a}_\omega(\omega, z') |0, \alpha_2, \alpha_3\rangle = & i \int d\omega' \xi(z', \omega, \omega') \times \quad (\text{C.5}) \\ & \left[ i \int d\omega_1 \Phi(L_1, \omega_p, \omega', \omega_1) \hat{a}_2^+(\omega_1) \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega' - \omega_1) \hat{a}_2(\omega - \omega') |0, \alpha_2, \alpha_3\rangle + \right. \\ & i \Phi(L_1, \omega_p, \omega', \omega - \omega') \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega) |0, \alpha_2, \alpha_3\rangle + \\ & \iint d\omega_1 d\omega_2 \Phi(L_1, \omega_p, \omega', \omega_1) \Phi(L_1, \omega_p, \omega_2, \omega - \omega') \times \\ & \left. \hat{a}_2^+(\omega_1) \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega' - \omega_1) \hat{a}_1^+(\omega_2) \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega + \omega' - \omega_2) |0, \alpha_2, \alpha_3\rangle \right] \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

en annulant les termes nuls. Il est d'ores et déjà possible de négliger le dernier terme, en  $\Phi$  au carré, devant les autres termes qui sont en  $\Phi$ , dans l'approximation du gain de génération faible. Le complexe conjugué de (C.5) nous donne alors la densité spectrale

suivante :

$$\begin{aligned}
 n_\omega(\omega, z') &= \langle 0, \alpha_2, \alpha_3 | \hat{a}_\omega^+(\omega, z') \hat{a}_\omega(\omega, z') | 0, \alpha_2, \alpha_3 \rangle = & (C.7) \\
 & \iint d\varpi' d\omega' \xi^*(z', \omega, \varpi') \xi(z', \omega, \omega') \times \\
 & \left[ -i \int d\varpi_1 \Phi^*(L_1, \omega_p, \varpi', \varpi_1) \langle 0, \alpha_2, \alpha_3 | \hat{a}_2^+(\omega - \varpi') \hat{a}_3(\omega_p - \varpi' - \varpi_1) \hat{a}_2(\varpi_1) + \right. \\
 & -i \Phi^*(L_1, \omega_p, \varpi', \omega - \varpi') \langle 0, \alpha_2, \alpha_3 | \hat{a}_3(\omega_p - \omega) \rangle \times \\
 & \left. \left[ i \int d\omega_1 \Phi(L_1, \omega_p, \omega', \omega_1) \hat{a}_2^+(\omega_1) \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega' - \omega_1) \hat{a}_2(\omega - \omega') | 0, \alpha_2, \alpha_3 \rangle + \right. \right. \\
 & \left. \left. i \Phi(L_1, \omega_p, \omega', \omega - \omega') \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega) | 0, \alpha_2, \alpha_3 \rangle \right] \right]
 \end{aligned}$$

en développant on obtient :

$$\begin{aligned}
 n_\omega(\omega, z') &= \langle 0, \alpha_2, \alpha_3 | \hat{a}_\omega^+(\omega, z') \hat{a}_\omega(\omega, z') | 0, \alpha_2, \alpha_3 \rangle = & (C.8) \\
 & \iint d\varpi' d\omega' \xi^*(z', \omega, \varpi') \xi(z', \omega, \omega') \times \\
 & \left[ \iint d\varpi_1 d\omega_1 \Phi(L_1, \omega_p, \omega', \omega_1) \Phi^*(L_1, \omega_p, \varpi', \varpi_1) \times \right. \\
 & \langle 0, \alpha_2, \alpha_3 | \hat{a}_2^+(\omega - \varpi') \hat{a}_3(\omega_p - \varpi' - \varpi_1) \hat{a}_2(\varpi_1) \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega' - \omega_1) \hat{a}_2(\omega - \omega') | 0, \alpha_2, \alpha_3 \rangle + \\
 & \int d\varpi_1 \Phi^*(L_1, \omega_p, \varpi', \varpi_1) \Phi(L_1, \omega_p, \omega', \omega - \omega') \times \\
 & \langle 0, \alpha_2, \alpha_3 | \hat{a}_2^+(\omega - \varpi') \hat{a}_3(\omega_p - \varpi' - \varpi_1) \hat{a}_2(\varpi_1) \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega) | 0, \alpha_2, \alpha_3 \rangle + \\
 & \int d\omega_1 \Phi^*(L_1, \omega_p, \varpi', \omega - \varpi') \Phi(L_1, \omega_p, \omega', \omega_1) \times \\
 & \langle 0, \alpha_2, \alpha_3 | \hat{a}_3(\omega_p - \varpi) \hat{a}_2^+(\omega_1) \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega' - \omega_1) \hat{a}_2(\omega - \omega') | 0, \alpha_2, \alpha_3 \rangle + \\
 & \left. \Phi^*(L_1, \omega_p, \varpi', \omega - \varpi') \Phi(L_1, \omega_p, \omega', \omega - \omega') \langle 0, \alpha_2, \alpha_3 | \hat{a}_3(\omega_p - \omega) \hat{a}_3^+(\omega_p - \omega) | 0, \alpha_2, \alpha_3 \rangle \right]
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en introduisant les densités spectrales des champs stimulants :

$$\begin{aligned}
 n_\omega(\omega, z') &= & (C.9) \\
 & \iint d\varpi' d\omega' \xi^*(z', \omega, \varpi') \xi(z', \omega, \omega') \iint d\varpi_1 d\omega_1 \Phi(L_1, \omega_p, \omega', \omega_1) \Phi^*(L_1, \omega_p, \varpi', \varpi_1) \sqrt{n_2(\omega - \varpi')} \sqrt{n_2(\omega - \omega')} \times \\
 & \left[ \sqrt{n_3(\omega_p - \varpi' - \varpi_1) n_2(\varpi_1) n_2(\omega_1) n_3(\omega_p - \omega' - \omega_1)} + \delta(\varpi_1 - \omega_1) \sqrt{n_3(\omega_p - \varpi' - \omega_1) n_3(\omega_p - \omega' - \omega_1)} + \right. \\
 & \left. + \delta(\varpi' + \varpi_1 - \omega' - \omega_1) \sqrt{n_2(\omega' + \omega_1 - \varpi') n_2(\omega_1)} + \delta(\varpi_1 - \omega_1) \delta(\varpi' - \omega') \right] + \\
 & 2\text{Re} \left( \iint d\varpi' d\omega' \xi^*(z', \omega, \varpi') \xi(z', \omega, \omega') \int d\omega_1 \Phi^*(L_1, \omega_p, \varpi', \omega - \varpi') \Phi(L_1, \omega_p, \omega', \omega_1) \sqrt{n_2(\omega - \omega')} \sqrt{n_2(\omega_1)} \times \right. \\
 & \left. \left[ \sqrt{n_3(\omega_p - \omega)} \sqrt{n_3(\omega_p - \omega' - \omega_1)} + \delta(\omega' + \omega_1 - \omega) \right] + \right. \\
 & \left. \iint d\varpi' d\omega' \xi^*(z', \omega, \varpi') \xi(z', \omega, \omega') \Phi^*(L_1, \omega_p, \varpi', \omega - \varpi') \Phi(L_1, \omega_p, \omega', \omega - \omega') (n_3(\omega_p - \omega) + 1) \right)
 \end{aligned}$$

soit encore :

$$\begin{aligned}
 n_\omega(\omega, z') = & \tag{C.10} \\
 & \left| \iint d\omega' d\omega_1 \xi(z', \omega, \omega') \Phi(L_1, \omega_p, \omega', \omega_1) \sqrt{n_2(\omega - \omega')} \sqrt{n_2(\omega_1)} \sqrt{n_3(\omega_p - \omega' - \omega_1)} \right|^2 + \\
 & \int d\omega_1 \left| \int d\omega' \xi^*(z', \omega, \omega') \xi(z', \omega, \omega') \Phi(L_1, \omega_p, \omega', \omega_1) \sqrt{n_2(\omega - \omega')} \sqrt{n_3(\omega_p - \omega' - \omega_1)} \right|^2 + \\
 & \iint \int d\omega_1 d\omega' d\omega'' \xi^*(z', \omega, \omega'') \xi(z', \omega, \omega') \Phi(L_1, \omega_p, \omega', \omega_1) \Phi^*(L_1, \omega_p, \omega'', \omega' + \omega_1 - \omega') \times \\
 & \sqrt{n_2(\omega - \omega'')} \sqrt{n_2(\omega - \omega')} \sqrt{n_2(\omega' + \omega_1 - \omega'')} n_2(\omega_1) + \\
 & \iint d\omega' d\omega_1 |\xi(z', \omega, \omega')|^2 |\Phi(L_1, \omega_p, \omega', \omega_1)|^2 n_2(\omega - \omega') + \\
 & 2\text{Re} \left( \iint d\omega' d\omega'' \xi^*(z', \omega, \omega'') \xi(z', \omega, \omega') \int d\omega_1 \Phi^*(L_1, \omega_p, \omega'', \omega - \omega') \Phi(L_1, \omega_p, \omega', \omega_1) \sqrt{n_2(\omega - \omega')} \sqrt{n_2(\omega_1)} \times \right. \\
 & \left. \left[ \sqrt{n_3(\omega_p - \omega)} \sqrt{n_3(\omega_p - \omega' - \omega_1)} + \delta(\omega' + \omega_1 - \omega) \right] + \right. \\
 & \left. \left| \int d\omega' \xi(z', \omega, \omega') \Phi(L_1, \omega_p, \omega', \omega - \omega') \sqrt{n_3(\omega_p - \omega) + 1} \right|^2 \right)
 \end{aligned}$$

soit encore :

$$\begin{aligned}
 n_\omega(\omega, z') = & \tag{C.11} \\
 & \left| \iint d\omega' d\omega_1 \xi(z', \omega, \omega') \Phi(L_1, \omega_p, \omega', \omega_1) \sqrt{n_2(\omega - \omega')} \sqrt{n_2(\omega_1)} \sqrt{n_3(\omega_p - \omega' - \omega_1)} \right|^2 + \\
 & \int d\omega_1 \left| \int d\omega' \xi(z', \omega, \omega') \Phi(L_1, \omega_p, \omega', \omega_1) \sqrt{n_2(\omega - \omega')} \sqrt{n_3(\omega_p - \omega' - \omega_1)} \right|^2 + \\
 & \iint \int d\omega_1 d\omega' d\omega'' \xi^*(z', \omega, \omega'') \xi(z', \omega, \omega') \Phi(L_1, \omega_p, \omega', \omega_1) \Phi^*(L_1, \omega_p, \omega'', \omega' + \omega_1 - \omega') \times \\
 & \sqrt{n_2(\omega - \omega'')} \sqrt{n_2(\omega - \omega')} \sqrt{n_2(\omega' + \omega_1 - \omega'')} \sqrt{n_2(\omega_1)} + \\
 & \iint d\omega' d\omega_1 |\xi(z', \omega, \omega')|^2 |\Phi(L_1, \omega_p, \omega', \omega_1)|^2 n_2(\omega - \omega') + \\
 & 2\text{Re} \left( \iint d\omega' d\omega'' \xi^*(z', \omega, \omega'') \xi(z', \omega, \omega') \int d\omega_1 \Phi^*(L_1, \omega_p, \omega'', \omega - \omega') \Phi(L_1, \omega_p, \omega', \omega_1) \sqrt{n_2(\omega - \omega')} \sqrt{n_2(\omega_1)} \times \right. \\
 & \left. \left[ \sqrt{n_3(\omega_p - \omega)} \sqrt{n_3(\omega_p - \omega' - \omega_1)} + \delta(\omega' + \omega_1 - \omega) \right] + \right. \\
 & \left. \left| \int d\omega' \xi(z', \omega, \omega') \Phi(L_1, \omega_p, \omega', \omega - \omega') \sqrt{n_3(\omega_p - \omega) + 1} \right|^2 \right)
 \end{aligned}$$

L'écriture avec le terme rouge non développé (éq (C.9)) est peut être plus lisible pour la suite, ainsi on peut également écrire en reprenant l'expression du terme rouge de

l'équation (C.9) :

$$\begin{aligned}
 n_\omega(\omega, z') = & \hspace{15em} (C.12) \\
 & \iint d\varpi' d\omega' \xi^*(z', \omega, \varpi') \xi(z', \omega, \omega') \iint d\varpi_1 d\omega_1 \Phi(L_1, \omega_p, \omega', \omega_1) \Phi^*(L_1, \omega_p, \varpi', \varpi_1) \sqrt{n_2(\omega - \varpi')} \sqrt{n_2(\omega - \omega')} \times \\
 & \left[ \sqrt{n_3(\omega_p - \varpi' - \varpi_1) n_2(\varpi_1) n_2(\omega_1) n_3(\omega_p - \omega' - \omega_1)} + \delta(\varpi_1 - \omega_1) \sqrt{n_3(\omega_p - \varpi' - \omega_1) n_3(\omega_p - \omega' - \omega_1)} + \right. \\
 & \left. + \delta(\varpi' + \varpi_1 - \omega' - \omega_1) \sqrt{n_2(\omega' + \omega_1 - \varpi') n_2(\omega_1)} + \delta(\varpi_1 - \omega_1) \delta(\varpi' - \omega') \right] + \\
 & 2\text{Re} \left( \iint d\varpi' d\omega' \xi^*(z', \omega, \varpi') \xi(z', \omega, \omega') \int d\omega_1 \Phi^*(L_1, \omega_p, \varpi', \omega - \varpi') \Phi(L_1, \omega_p, \omega', \omega_1) \sqrt{n_2(\omega - \omega')} \sqrt{n_2(\omega_1)} \times \right. \\
 & \left. \left[ \sqrt{n_3(\omega_p - \omega)} \sqrt{n_3(\omega_p - \omega' - \omega_1)} + \delta(\omega' + \omega_1 - \omega) \right] + \right. \\
 & \left. \left| \int d\omega' \xi(z', \omega, \omega') \Phi(L_1, \omega_p, \omega', \omega - \omega') \sqrt{n_3(\omega_p - \omega) + 1} \right|^2 \right)
 \end{aligned}$$

### Recombinaison des deux champs injectés

Si maintenant veut envisager de recombinaison les champ 2 et 3 au lieu de 2 et 1, c'est-à-dire les deux champs injectés, on choisit d'invertir les champs 1 et 3 : on va évidemment renommer leurs opérateurs d'évolution en interchangeant les indices 1 et 3, et on va également interchanger leurs nappes d'indices : à la génération on le fait par l'intermédiaire du  $\Delta k$  en échangeant les fréquences lues par les nappes 1 et 3, à la recombinaison on le fait dans  $\xi(z', \omega, \omega')$  en attribuant à la fréquence signal  $\omega'$  l'indice de la nappe 3 et non plus 1. Cela donne l'expression suivante pour l'opérateur mode du champ somme, au lieu de (C.4) :

$$\begin{aligned}
 \hat{a}_\omega(\omega, z') = & -i \int d\omega' \xi(z', \omega, \omega') \times \hspace{10em} (C.13) \\
 & \left[ \hat{a}_3(\omega') \hat{a}_2(\omega - \omega') - i \int d\omega_1 \Phi(L_1, \omega_p, \omega_p - \omega' - \omega_1, \omega_1) \hat{a}_2^+(\omega_1) \hat{a}_1^+(\omega_p - \omega' - \omega_1) \hat{a}_2(\omega - \omega') + \right. \\
 & -i \int d\omega_2 \Phi(L_1, \omega_p, \omega_p - \omega_2 - \omega + \omega', \omega - \omega') \hat{a}_3(\omega') \hat{a}_3^+(\omega_2) \hat{a}_1^+(\omega_p - \omega + \omega' - \omega_2) + \\
 & \left. - \iint d\omega_1 d\omega_2 \Phi(L_1, \omega_p, \omega_p - \omega' - \omega_1, \omega_1) \Phi(L_1, \omega_p, \omega_p - \omega_2 - \omega + \omega', \omega - \omega') \times \right. \\
 & \left. \hat{a}_2^+(\omega_1) \hat{a}_1^+(\omega_p - \omega' - \omega_1) \hat{a}_3^+(\omega_2) \hat{a}_1^+(\omega_p - \omega + \omega' - \omega_2) \right]
 \end{aligned}$$

Comme précédemment , on néglige le dernier terme dans l'approximation de gain faible, ainsi en projetant, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \hat{a}_\omega(\omega, z') |0, \alpha_2, \alpha_3\rangle = & -i \int d\omega' \xi(z', \omega, \omega') \times \hspace{10em} (C.14) \\
 & \left[ \sqrt{n_3(\omega')} \sqrt{n_2(\omega - \omega')} |0, \alpha_2, \alpha_3\rangle + \right. \\
 & -i \int d\omega_1 \Phi(L_1, \omega_p, \omega_p - \omega' - \omega_1, \omega_1) \sqrt{n_2(\omega - \omega')} \hat{a}_2^+(\omega_1) \hat{a}_1^+(\omega_p - \omega' - \omega_1) |0, \alpha_2, \alpha_3\rangle + \\
 & \left. -i \int d\omega_2 \Phi(L_1, \omega_p, \omega_p - \omega_2 - \omega + \omega', \omega - \omega') \hat{a}_3(\omega') \hat{a}_3^+(\omega_2) \hat{a}_1^+(\omega_p - \omega + \omega' - \omega_2) |0, \alpha_2, \alpha_3\rangle \right]
 \end{aligned}$$

et on a pour la densité spectrale :

$$\begin{aligned}
n_\omega(\omega, z') &= \langle 0, \alpha_2, \alpha_3 | \hat{a}_\omega^+(\omega, z') \hat{a}_\omega(\omega, z') | 0, \alpha_2, \alpha_3 \rangle = \\
&\iint d\varpi' d\omega' \xi^*(z', \omega, \varpi') \xi(z', \omega, \omega') \times \\
&\left[ \langle 0, \alpha_2, \alpha_3 | \sqrt{n_3(\varpi')} \sqrt{n_2(\omega - \varpi')} + \right. \\
&i \int d\varpi_1 \Phi^*(L_1, \omega_p, \omega_p - \varpi' - \varpi_1, \varpi_1) \sqrt{n_2(\omega - \varpi')} \langle 0, \alpha_2, \alpha_3 | \hat{a}_2(\varpi_1) \hat{a}_1(\omega_p - \varpi' - \varpi_1) + \quad (C.15) \\
&+ i \int d\varpi_2 \Phi^*(L_1, \omega_p, \omega_p - \varpi_2 - \omega + \varpi', \omega - \varpi') \langle 0, \alpha_2, \alpha_3 | \hat{a}_3(\varpi_2) \hat{a}_3^+(\varpi') \hat{a}_1(\omega_p - \omega + \varpi' - \varpi_2) \left. \right] \times \\
&\left[ \sqrt{n_3(\omega')} \sqrt{n_2(\omega - \omega')} | 0, \alpha_2, \alpha_3 \rangle + \right. \\
&-i \int d\omega_1 \Phi(L_1, \omega_p, \omega_p - \omega' - \omega_1, \omega_1) \sqrt{n_2(\omega - \omega')} \hat{a}_2^+(\omega_1) \hat{a}_1^+(\omega_p - \omega' - \omega_1) | 0, \alpha_2, \alpha_3 \rangle + \\
&-i \int d\omega_2 \Phi(L_1, \omega_p, \omega_p - \omega_2 - \omega + \omega', \omega - \omega') \hat{a}_3(\omega_2) \hat{a}_3^+(\omega_2) \hat{a}_1^+(\omega_p - \omega + \omega' - \omega_2) | 0, \alpha_2, \alpha_3 \rangle \left. \right]
\end{aligned}$$

Ce qui donne en développant et en annulant les termes nuls :

$$\begin{aligned}
n_\omega(\omega, z') &= \quad (C.16) \\
&\iint d\varpi' d\omega' \xi^*(z', \omega, \varpi') \xi(z', \omega, \omega') \\
&\left[ \sqrt{n_3(\varpi')} \sqrt{n_2(\omega - \varpi')} \sqrt{n_3(\omega')} \sqrt{n_2(\omega - \omega')} + \right. \\
&0 + \\
&0 + \\
&0 + \\
&\iint d\varpi_1 d\omega_1 \Phi(L_1, \omega_p, \omega_p - \omega' - \omega_1, \omega_1) \Phi^*(L_1, \omega_p, \omega_p - \varpi' - \varpi_1, \varpi_1) \sqrt{n_2(\omega - \varpi')} \sqrt{n_2(\omega - \omega')} \times \\
&\langle 0, \alpha_2, \alpha_3 | \hat{a}_2(\varpi_1) \hat{a}_1(\omega_p - \varpi' - \varpi_1) \hat{a}_2^+(\omega_1) \hat{a}_1^+(\omega_p - \omega' - \omega_1) | 0, \alpha_2, \alpha_3 \rangle + \\
&2Re \left( \int d\varpi_1 \int d\omega_2 \Phi(L_1, \omega_p, \omega_p - \omega_2 - \omega + \omega', \omega - \omega') \times \right. \\
&\Phi(L_1, \omega_p, \omega_p - \omega_2 - \omega + \omega', \omega - \omega') \Phi^*(L_1, \omega_p, \omega_p - \varpi' - \varpi_1, \varpi_1) \sqrt{n_2(\omega - \varpi')} \times \\
&\langle 0, \alpha_2, \alpha_3 | \hat{a}_2(\varpi_1) \hat{a}_1(\omega_p - \varpi' - \varpi_1) \hat{a}_3(\omega_2) \hat{a}_3^+(\omega_2) \hat{a}_1^+(\omega_p - \omega + \omega' - \omega_2) | 0, \alpha_2, \alpha_3 \rangle \left. \right) + \\
&\int \int d\omega_2 d\varpi_2 \Phi(L_1, \omega_p, \omega_p - \omega_2 - \omega + \omega', \omega - \omega') \Phi^*(L_1, \omega_p, \omega_p - \varpi_2 - \omega + \varpi', \omega - \varpi') \times \\
&\langle 0, \alpha_2, \alpha_3 | \hat{a}_3(\varpi_2) \hat{a}_3^+(\varpi') \hat{a}_1(\omega_p - \omega + \varpi' - \varpi_2) \hat{a}_3(\omega_2) \hat{a}_3^+(\omega_2) \hat{a}_1^+(\omega_p - \omega + \omega' - \omega_2) | 0, \alpha_2, \alpha_3 \rangle \left. \right]
\end{aligned}$$

Dans l'approximation de gain faible, tous les termes sont négligeables devant le premier. Ainsi, la densité spectrale du champ somme des deux champs injectés est équivalente à :

$$n_\omega(\omega, z') = \iint d\varpi' d\omega' \xi^*(z', \omega, \varpi') \xi(z', \omega, \omega') \sqrt{n_3(\varpi')} \sqrt{n_2(\omega - \varpi')} \sqrt{n_3(\omega')} \sqrt{n_2(\omega - \omega')} \quad (C.17)$$

soit

$$n_\omega(\omega, z') = \left| \int d\omega' \xi(z', \omega, \omega') \sqrt{n_3(\omega')} \sqrt{n_2(\omega - \omega')} \right|^2, \quad (C.18)$$

ce qui est exactement l'expression classique, obtenue en considérant que les opérateurs des champs 2 et 3 commutent au moment de leur recombinaison par somme de fréquence.

Il faut noter que le terme équivalent à la recombinaison des champs générés par fluorescence apparait bien entendu aussi dans l'expression du champ somme, mais il est négligeable dans l'approximation de gain faible.

## C.2 Recombinaison en régime de génération mono-stimulée

### Recombinaison des deux champs non injectés

Plaçons nous par exemple dans le cas où l'on considère toujours la recombinaison des champs 1 et 2, mais où cette fois la génération est mono-injectée par le champ 3 : tous les termes en  $n_2$  s'annulent dans l'expression (C.12) de la densité spectrale du champ somme, qui devient simplement :

$$n_\omega(\omega, z') = \left| \int d\omega' \xi(z', \omega, \omega') \Phi(L_1, \omega_p, \omega', \omega - \omega') \sqrt{n_3(\omega_p - \omega) + 1} \right| \quad (\text{C.19})$$

### Recombinaison d'un champ injecté avec un champ non injecté

Pour obtenir l'expression type du champ somme sous de telles conditions, on peut reprendre la somme des champs 2 et 3 en envisageant la mono-injection sur l'un des deux champs, choisissons le champ 3 par exemple, ou bien de manière équivalent la somme des champ 1 et 2 en envisageant l'injection sur le champ 2.

Dans le premier cas, la somme des champs 2 et 3 avec mono-injection sur le champ 3 s'obtient à partir de (C.16) et vaut :

$$\begin{aligned} n_\omega(\omega, z') = & \quad (\text{C.20}) \\ & \iint d\varpi' d\omega' \xi^*(z', \omega, \varpi') \xi(z', \omega, \omega') \times \\ & \int d\omega_2 \Phi(L_1, \omega_p, \omega_p - \omega_2 - \omega + \omega', \omega - \omega') \Phi^*(L_1, \omega_p, \omega_p + \omega' - \omega_2 - \omega, \omega - \varpi') \times \\ & \left[ \sqrt{n_3(\omega')} \sqrt{n_3(\varpi')} \sqrt{n_3(\omega_2)} \sqrt{n_3(\omega_2)} + \sqrt{n_3(\omega')} \sqrt{n_3(\varpi')} \delta(-\omega' + \varpi') + \right. \\ & \left. + \sqrt{n_3(\omega')} \sqrt{n_3(\omega_2)} \delta(\omega' - \omega_2) + \sqrt{n_3(\varpi')} \sqrt{n_3(\omega_2)} \delta(\omega' - \omega_2) + \delta(\omega' - \omega_2) \delta(\omega' - \omega_2) \right] \end{aligned}$$

ce qui donne aussi :

$$\begin{aligned} n_\omega(\omega, z') = & \quad (\text{C.21}) \\ & \iiint d\omega_2 d\varpi' d\omega' \xi^*(z', \omega, \varpi') \xi(z', \omega, \omega') \Phi(L_1, \omega_p, \omega_p - \omega_2 - \omega + \omega', \omega - \omega') \times \\ & \Phi^*(L_1, \omega_p, \omega_p + \omega' - \omega_2 - \omega, \omega - \varpi') \sqrt{n_3(\omega')} \sqrt{n_3(\varpi')} \sqrt{n_3(\omega_2 + \varpi' - \omega')} \sqrt{n_3(\omega_2)} + \\ & \iint d\varpi' d\omega' \xi^*(z', \omega, \varpi') \xi(z', \omega, \omega') \Phi(L_1, \omega_p, \omega_p - \omega, \omega - \omega') \Phi^*(L_1, \omega_p, \omega_p - \omega, \omega - \varpi') \times \\ & \left[ \sqrt{n_3(\omega')} \sqrt{n_3(\omega')} + \sqrt{n_3(\varpi')} \sqrt{n_3(\varpi')} + 1 \right] + \\ & \iint d\omega_2 d\omega' |\xi(z', \omega, \omega')|^2 |\Phi(L_1, \omega_p, \omega_p - \omega_2 - \omega + \omega', \omega - \omega')|^2 n_3(\omega') \end{aligned}$$

ce qui vaut encore :

$$\begin{aligned}
 n_\omega(\omega, z') = & \hspace{15em} (C.22) \\
 & \iint \int d\omega_2 d\varpi' d\omega' \xi^*(z', \omega, \varpi') \xi(z', \omega, \omega') \Phi(L_1, \omega_p, \omega_p - \omega_2 - \omega + \omega', \omega - \omega') \times \\
 & \Phi^*(L_1, \omega_p, \omega_p + \omega' - \omega_2 - \omega, \omega - \varpi') \sqrt{n_3(\omega')} \sqrt{n_3(\varpi')} \sqrt{n_3(\omega_2 + \varpi' - \omega')} \sqrt{n_3(\omega_2)} + \\
 & \int \int d\omega_2 d\omega' |\xi(z', \omega, \omega')|^2 |\Phi(L_1, \omega_p, \omega_p - \omega_2 - \omega + \omega', \omega - \omega')|^2 n_3(\omega') + \\
 & 2Re \left( \iint d\varpi' d\omega' \xi^*(z', \omega, \varpi') \xi(z', \omega, \omega') \Phi(L_1, \omega_p, \omega_p - \omega, \omega - \omega') \Phi^*(L_1, \omega_p, \omega_p - \omega, \omega - \varpi') n_3(\omega') \right) + \\
 & \left| \int d\omega' \xi(z', \omega, \omega') \Phi(L_1, \omega_p, \omega_p - \omega, \omega - \omega') \right|^2
 \end{aligned}$$

Dans le second cas, la somme des champs 1 et 2 avec mono-injection sur le champ 2 s'obtient à partir de l'expression (C.12) :

$$\begin{aligned}
 n_\omega(\omega, z') = & \hspace{15em} (C.23) \\
 & \iint d\varpi' d\omega' \xi^*(z', \omega, \varpi') \xi(z', \omega, \omega') \iint d\varpi_1 d\omega_1 \Phi(L_1, \omega_p, \omega', \omega_1) \Phi^*(L_1, \omega_p, \varpi', \varpi_1) \sqrt{n_2(\omega - \varpi')} \sqrt{n_2(\omega - \omega')} \times \\
 & \left[ \delta(\varpi' + \varpi_1 - \omega' - \omega_1) \sqrt{n_2(\omega' + \omega_1 - \varpi')} n_2(\omega_1) + \delta(\varpi_1 - \omega_1) \delta(\varpi' - \omega') \right] + \\
 & 2Re \left( \iint d\varpi' d\omega' \xi^*(z', \omega, \varpi') \xi(z', \omega, \omega') \Phi^*(L_1, \omega_p, \varpi', \omega - \varpi') \Phi(L_1, \omega_p, \omega', \omega - \omega') n_2(\omega - \omega') \right) + \\
 & \left| \int d\omega' \xi(z', \omega, \omega') \Phi(L_1, \omega_p, \omega', \omega - \omega') \right|^2
 \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}
 n_\omega(\omega, z') = & \\
 & \iiint d\omega_1 d\varpi' d\omega' \xi^*(z', \omega, \varpi') \xi(z', \omega, \omega') \Phi(L_1, \omega_p, \omega', \omega_1) \Phi^*(L_1, \omega_p, \varpi', \omega' + \omega_1 - \varpi') \times \\
 & \sqrt{n_2(\omega - \varpi')} \sqrt{n_2(\omega - \omega')} \sqrt{n_2(\omega' + \omega_1 - \varpi')} \sqrt{n_2(\omega_1)} + \hspace{5em} (C.24) \\
 & \iint d\omega' d\omega_1 |\xi(z', \omega, \omega')|^2 |\Phi(L_1, \omega_p, \omega', \omega_1)|^2 n_2(\omega - \omega') + \\
 & 2Re \left( \iint d\varpi' d\omega' \xi^*(z', \omega, \varpi') \xi(z', \omega, \omega') \Phi^*(L_1, \omega_p, \varpi', \omega - \varpi') \Phi(L_1, \omega_p, \omega', \omega - \omega') n_2(\omega - \omega') \right) + \\
 & \left| \int d\omega' \xi(z', \omega, \omega') \Phi(L_1, \omega_p, \omega', \omega - \omega') \right|^2
 \end{aligned}$$

soit encore

$$\begin{aligned}
 n_\omega(\omega, z') = & \\
 & \iiint d\omega_2 d\varpi' d\omega' \xi^*(z', \omega, \varpi') \xi(z', \omega, \omega') \Phi(L_1, \omega_p, \omega_p - \omega_2 - \omega + \omega', \omega - \omega') \Phi^*(L_1, \omega_p, \omega_p + \omega' - \omega_2 - \omega, \omega - \varpi') \times \\
 & \sqrt{n_3(\omega')} \sqrt{n_3(\varpi')} \sqrt{n_3(\omega_2 + \varpi' - \omega')} \sqrt{n_3(\omega_2)} + \hspace{5em} (C.25) \\
 & \int \int d\omega_2 d\omega' |\xi(z', \omega, \omega')|^2 |\Phi(L_1, \omega_p, \omega_p - \omega_2 - \omega + \omega', \omega - \omega')|^2 n_3(\omega') + \\
 & 2Re \left( \iint d\varpi' d\omega' \xi^*(z', \omega, \varpi') \xi(z', \omega, \omega') \Phi(L_1, \omega_p, \omega_p - \omega, \omega - \omega') \Phi^*(L_1, \omega_p, \omega_p - \omega, \omega - \varpi') n_3(\omega') \right) + \\
 & \left| \int d\omega' \xi(z', \omega, \omega') \Phi(L_1, \omega_p, \omega_p - \omega, \omega - \omega') \right|^2
 \end{aligned}$$

Pour montrer que moyennant le changement d'indices appropriés, les deux sommes sont identiques, procédons tout d'abord aux changements de variables  $\Omega' = \omega - \omega'$  et  $\tilde{\Omega}' = \omega - \varpi'$  dans l'expression (C.24), qui devient :

$$\begin{aligned}
 n_\omega(\omega, z') = & \iint \int d\omega_1 d\tilde{\Omega}' d\Omega' \xi^*(z', \omega, \omega - \tilde{\Omega}') \xi(z', \omega, \omega - \Omega') \Phi(L_1, \omega_p, \omega - \Omega', \omega_1) \Phi^*(L_1, \omega_p, \omega - \tilde{\Omega}', -\Omega' + \omega_1 + \tilde{\Omega}') \times \\
 & \sqrt{n_2(\tilde{\Omega}')} \sqrt{n_2(\Omega')} \sqrt{n_2(-\Omega' + \omega_1 + \tilde{\Omega}')} \sqrt{n_2(\omega_1)} + \\
 & \iint d\Omega' d\omega_1 |\xi(z', \omega, \omega - \Omega')|^2 |\Phi(L_1, \omega_p, \omega - \Omega', \omega_1)|^2 n_2(\Omega') + \\
 & 2Re(\iint d\tilde{\Omega}' d\Omega' \xi^*(z', \omega, \omega - \tilde{\Omega}') \xi(z', \omega, \omega - \Omega') \Phi^*(L_1, \omega_p, \omega - \tilde{\Omega}', \tilde{\Omega}') \Phi(L_1, \omega_p, \omega - \Omega', \Omega') n_2(\Omega')) + \\
 & \left| \int d\Omega' \xi(z', \omega, \omega - \Omega') \Phi(L_1, \omega_p, \omega - \Omega', \Omega') \right|^2
 \end{aligned} \tag{C.26}$$

ce qui s'écrit encore :

$$\begin{aligned}
 n_\omega(\omega, z') = & \iint \int d\omega_1 d\varpi' d\omega' \xi^*(z', \omega, \omega - \varpi') \xi(z', \omega, \omega - \omega') \Phi(L_1, \omega_p, \omega - \omega', \omega_1) \Phi^*(L_1, \omega_p, \omega - \varpi', -\omega' + \omega_1 + \varpi') \times \\
 & \sqrt{n_2(\varpi')} \sqrt{n_2(\omega')} \sqrt{n_2(-\omega' + \omega_1 + \varpi')} \sqrt{n_2(\omega_1)} + \\
 & \iint d\omega' d\omega_1 |\xi(z', \omega, \omega - \omega')|^2 |\Phi(L_1, \omega_p, \omega - \omega', \omega_1)|^2 n_2(\omega') + \\
 & 2Re(\iint d\varpi' d\omega' \xi^*(z', \omega, \omega - \varpi') \xi(z', \omega, \omega - \omega') \Phi^*(L_1, \omega_p, \omega - \varpi', \varpi') \Phi(L_1, \omega_p, \omega - \omega', \omega') n_2(\omega')) + \\
 & \left| \int d\omega' \xi(z', \omega, \omega - \omega') \Phi(L_1, \omega_p, \omega - \omega', \omega') \right|^2
 \end{aligned} \tag{C.27}$$

Il est possible de passer de la première somme de fréquences des champs 2 et 3 avec mono-injection sur le champ 3 à la seconde somme des champs 1 et 2 avec mono injection sur le champ 2, en considérant que le champ 1 du second cas joue le rôle du champ 2 du premier cas, sommé mais non injecté, que le champ 2 du premier second joue le rôle du champ 3 du premier cas, sommé et injecté, et que le champ 3 du second cas joue le rôle du champ 1 du premier cas, non sommé. Ainsi, il suffit de permuter les indices par rotation circulaire :  $1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2$ . Ainsi, dans les expressions, la densité spectrale injectée  $n_3$  devient  $n_2$ , et dans  $\Phi$  les indices s'échangent par rotation circulaire (ils ne sont donc pas interchangés ici, puisqu'on change deux paramètres) :  $\omega_2$  devient  $\omega_1$  et  $\omega_3$  devient  $\omega_2$  (et  $\omega_1$  devient  $\omega_3$ ). C'est exactement ce qui se passe entre les deux expressions (C.24) et (C.22). On peut noter que dans nos expressions (C.24) et (C.22),  $\omega_s$  et  $\omega_i$  sont également interchangés dans  $\xi$ , cela est dû au fait que l'on n'a pas renommé les fréquences mais simplement considéré que  $\xi(z', \omega, \omega_s)$  était ordonné au sens où  $k_s$  et  $k_i$  s'appliquaient toujours aux indices du premier et du deuxième champ sommés dans l'ordre donné, c'est-à-dire 2 et 3 ou 1 et 2 ; ainsi pour passer de la première somme à la seconde, le champ 2 prend l'indice ' $i$ ' au lieu de ' $s$ ', d'où l'inversion des fréquences. Ainsi, dans la première somme  $k_s = k_2, k_i = k_3$  et dans la seconde somme  $k_s = k_1, k_i = k_2$ .

### C.3 Recombinaison des photons émis par fluorescence paramétrique

Dans ce cas, toutes les densités spectrales des champs d'injection s'annulent, et on obtient pour la somme des champs 1 et 2 (les autres sommes s'en déduisant par une interversion d'indices) :

$$n_{\omega}(\omega, z') = \left| \int d\omega' \xi(z', \omega, \omega') \Phi(L_1, \omega_p, \omega', \omega - \omega') \right|^2 \quad (\text{C.28})$$

ce qui est bien l'expression (IV.21) obtenue directement au paragraphe IV.3.1.

## Annexe D

# Résolution des équations couplées de génération

Cette annexe développe la résolution des équations d'évolution des opérateurs création et annihilation des champs triplets, définis dans le cas général par le système d'équations (III.2) rappelé ci dessous :

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{a}_1(z, \omega_1)}{\partial z} = -i \iint d\omega_2 d\omega_p \Gamma(\omega_1, \omega_2, \omega_p) A_p(\omega_p) \hat{a}_2^+(z, \omega_2) \hat{a}_3^+(z, \omega_p - \omega_1 - \omega_2) e^{+i\Delta k(\omega_1, \omega_2, \omega_p)z} \\ \frac{\partial \hat{a}_2(z, \omega_2)}{\partial z} = -i \iint d\omega_1 d\omega_p \Gamma(\omega_1, \omega_2, \omega_p) A_p(\omega_p) \hat{a}_1^+(z, \omega_1) \hat{a}_3^+(z, \omega_p - \omega_1 - \omega_2) e^{+i\Delta k(\omega_1, \omega_2, \omega_p)z} \\ \frac{\partial \hat{a}_3(z, \omega_p - \omega_1 - \omega_2)}{\partial z} = -i \iint d(\omega_1 + \omega_2) d\omega_p \Gamma(\omega_1, \omega_2, \omega_p) A_p(\omega_p) \hat{a}_1^+(z, \omega_1) \hat{a}_2^+(z, \omega_2) e^{+i\Delta k(\omega_1, \omega_2, \omega_p)z} \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

Rappelons que les intégrales sont muettes et décrivent tout le spectre.

Rappelons que les champs sont définis par :

$$\hat{E}^{(+)}(z, t) = \int d\omega \sqrt{\frac{\hbar\omega}{4\pi\epsilon_0 c S n(\omega)}} \hat{a}(z, \omega) e^{-i\omega(t - n(\omega)z/c)} \quad (\text{D.2})$$

Cette définition inclut l'évolution linéaire de l'onde, qui est directement résolue dans l'expression de l'évolution du champ, et ainsi dans la variation  $\hat{a}(z, \omega)$  n'est prise en compte que l'évolution due à la partie non linéaire (qui va modifier l'enveloppe dans notre milieu).

Rappelons l'opérateur moment non linéaire, selon l'expression (I.58) :

$$\hat{G}_{NL}(z) = \int d\omega_1 \int d\omega_2 \int d\omega \hbar \Gamma(\omega_1, \omega_2, \omega) e^{-i\Delta k z} \hat{a}_1(z, \omega_1) \hat{a}_2(z, \omega_2) \hat{a}_3(z, \omega - \omega_1 - \omega_2) \hat{a}^+(z, \omega) + cc \quad (\text{D.3})$$

Cet opérateur moment agit comme propagateur de l'évolution non linéaire des opérateurs. Il va donc nous donner la variation recherchée de la partie non linéaire des opérateurs création et annihilation, suivant l'expression suivante lorsque la variation de  $\hat{G}_{NL}$  en  $z$  est faible :

$$\hat{a}_j(z) = e^{i\frac{\hat{G}_{NL}(z) \times z}{\hbar}} \hat{a}_j(0) e^{-i\frac{\hat{G}_{NL}(z) \times z}{\hbar}}, \quad j = \{1, 2, 3\} \quad (\text{D.4})$$

Appliquons la formule de Baker-Haudorff sur l'opérateur création  $\hat{a}_1(z)$  :

$$\begin{aligned} \hat{a}_1(z) &= e^{+i\frac{\hat{G}_{NL}(z)\times z}{\hbar}}\hat{a}_1(0)e^{-i\frac{\hat{G}_{NL}(z)\times z}{\hbar}} \\ &= \hat{a}_1(0) + \left[ \frac{z \times i\hat{G}_{NL}(z)}{\hbar}, \hat{a}_1(0) \right] + \frac{1}{2!} \left[ \frac{z \times i\hat{G}_{NL}(z)}{\hbar}, \left[ \frac{z \times i\hat{G}_{NL}(z)}{\hbar}, \hat{a}_1(0) \right] \right] + \\ &\quad \frac{1}{3!} \left[ \frac{z \times i\hat{G}_{NL}(z)}{\hbar}, \left[ \frac{z \times i\hat{G}_{NL}(z)}{\hbar}, \left[ \frac{z \times i\hat{G}_{NL}(z)}{\hbar}, \hat{a}_1(0) \right] \right] \right] + \dots \end{aligned} \quad (D.5)$$

ce qui donne compte tenu de :  $\frac{i}{\hbar} \left[ \hat{G}_{NL}(z), \hat{a}_1(0) \right] = \left( \frac{\partial \hat{a}_1(z)}{\partial z} \right)_{z=0}$  :

$$\hat{a}_1(L) = \hat{a}_1(0) + \left( \frac{\partial \hat{a}_1(z)}{\partial z} \right)_{z=0} L + \left( \frac{\partial^2 \hat{a}_1(z)}{\partial z^2} \right)_{z=0} \frac{L^2}{2!} + \left( \frac{\partial^3 \hat{a}_1(z)}{\partial z^3} \right)_{z=0} \frac{L^3}{3!} + \left( \frac{\partial^4 \hat{a}_1(z)}{\partial z^4} \right)_{z=0} \frac{L^4}{4!} + \dots \quad (D.6)$$

Recherchons les dérivées d'ordre n à partir des équations (D.1).

Pour la dérivée d'ordre 2, on a la relation suivante d'après (D.1) (on note pour alléger  $\Delta k(\omega_1, \omega_2, \omega_p) = \Delta k$ ) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{a}_1(z, \omega_1)}{\partial z^2} &= -i \iint d\omega_p d\omega_2 \Gamma(\omega_1, \omega_2, \omega_p) A_p(\omega_p) e^{+i\Delta k z} \left[ i\Delta k \cdot \hat{a}_2^+(z, \omega_2) \hat{a}_3^+(z, \omega_p - \omega_1 - \omega_2) + \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{\partial \hat{a}_2^+(z)}{\partial z} \right) \hat{a}_3^+ + \left( \frac{\partial \hat{a}_3^+(z)}{\partial z} \right) \hat{a}_2^+ \right] \end{aligned} \quad (D.7)$$

soit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{a}_1(z, \omega_1)}{\partial z^2} &= -i \iint d\omega_p d\omega_2 \Gamma(\omega_1, \omega_2, \omega_p) A_p(\omega_p) e^{+i\Delta k z} \left[ i\Delta k \cdot \hat{a}_2^+(z, \omega_2) \hat{a}_3^+(z, \omega_p - \omega_1 - \omega_2) + \right. \\ &\quad \left( i \iint d\omega_p d\omega'_1 \Gamma(\omega'_1, \omega_2, \omega_p) A_p^*(\omega_p) \hat{a}_1(z, \omega'_1) \hat{a}_3(z, \omega_p - \omega'_1 - \omega_2) e^{-i\Delta k(\omega'_1, \omega_2, \omega_p)z} \right) \hat{a}_3^+(z, \omega_p - \omega_1 - \omega_2) + \\ &\quad \left. \left( i \iint d\omega_p d\omega''_1 \Gamma(\omega''_1, \omega'_2, \omega_p) A_p^*(\omega_p) \hat{a}_1(z, \omega''_1) \hat{a}_2(z, \omega_p - \omega''_1 - \omega_2) e^{-i\Delta k(\omega''_1, \omega_2, \omega_p)z} \right) \hat{a}_2^+(z, \omega_p - \omega_1 - \omega_2) \right] \end{aligned} \quad (D.8)$$

Soit encore, en faisant un développement limité à l'ordre 1 en  $\Gamma(\omega_1, \omega_2, \omega_p)$ , correspondant au gain, c'est à dire en négligeant tous les termes d'ordre 2 ou supérieur en  $\Gamma$  :

$$\frac{\partial^2 \hat{a}_1(z, \omega_1)}{\partial z^2} = -i \iint d\omega_p d\omega_2 \Gamma(\omega_1, \omega_2, \omega_p) A_p(\omega_p) e^{+i\Delta k z} \cdot i\Delta k \cdot \hat{a}_2^+(z, \omega_2) \hat{a}_3^+(z, \omega_p - \omega_1 - \omega_2) \quad (D.9)$$

Pour la dérivée d'ordre trois on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \hat{a}_1(z, \omega_1)}{\partial z^3} &= -i \iint d\omega_p d\omega_2 \Gamma(\omega_1, \omega_2, \omega_p) A_p(\omega_p) i\Delta k \cdot \frac{\partial}{\partial z} (e^{+i\Delta k z} \cdot \hat{a}_2^+(z, \omega_2) \hat{a}_3^+(z, \omega_p - \omega_1 - \omega_2)) \\ &= -i \iint d\omega_p d\omega_2 \Gamma(\omega_1, \omega_2, \omega_p) A_p(\omega_p) \cdot e^{+i\Delta k z} (i\Delta k)^2 \hat{a}_2^+(z, \omega_2) \hat{a}_3^+(z, \omega_p - \omega_1 - \omega_2) \end{aligned}$$

et par récurrence pour les dérivées d'ordre supérieur :

$$\frac{\partial^n \hat{a}_1(z, \omega_1)}{\partial z^n} = -i \iint d\omega_p d\omega_2 \Gamma(\omega_1, \omega_2, \omega_p) A_p(\omega_p) \cdot e^{+i\Delta k z} (i\Delta k)^{n-1} \hat{a}_2^+(z, \omega_2) \hat{a}_3^+(z, \omega_p - \omega_1 - \omega_2) \quad (\text{D.10})$$

Vérification de l'expression D.10 par récurrence :

- $n = 1$  : OK
- soit

$$\frac{\partial^n \hat{a}_1(z, \omega_1)}{\partial z^n} = -i \iint d\omega_p d\omega_2 \Gamma(\omega_1, \omega_2, \omega_p) A_p(\omega_p) \cdot e^{+i\Delta k z} (i\Delta k)^{n-1} \hat{a}_2^+(z, \omega_2) \hat{a}_3^+(z, \omega_p - \omega_1 - \omega_2) ,$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{n+1} \hat{a}_1(z, \omega_1)}{\partial z^{n+1}} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^n \hat{a}_1(z, \omega_1)}{\partial z^n} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left( -i \iint d\omega_p d\omega_2 \Gamma(\omega_1, \omega_2, \omega_p) A_p(\omega_p) \cdot e^{+i\Delta k z} (i\Delta k)^{n-1} \hat{a}_2^+(z, \omega_2) \hat{a}_3^+(z, \omega_p - \omega_1 - \omega_2) \right) \\ &= -i \iint d\omega_p d\omega_2 \Gamma(\omega_1, \omega_2, \omega_p) A_p(\omega_p) (i\Delta k)^{n-1} \frac{\partial}{\partial z} \left( e^{+i\Delta k z} \hat{a}_2^+(z, \omega_2) \hat{a}_3^+(z, \omega_p - \omega_1 - \omega_2) \right) \\ &= -i \iint d\omega_p d\omega_2 \Gamma(\omega_1, \omega_2, \omega_p) A_p(\omega_p) (i\Delta k)^{n-1} \left[ i\Delta k \hat{a}_2^+(z, \omega_2) \hat{a}_3^+(z, \omega_p - \omega_1 - \omega_2) + \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{\partial \hat{a}_2^+(z)}{\partial z} \right) \hat{a}_3^+(z) + \left( \frac{\partial \hat{a}_3^+(z)}{\partial z} \right) \hat{a}_2^+(z) \right] e^{+i\Delta k z} \end{aligned}$$

Les deux termes en  $\left( \frac{\partial \hat{a}_2^+(z)}{\partial z} \right)$  et  $\left( \frac{\partial \hat{a}_3^+(z)}{\partial z} \right)$  vont donner une expression en  $\Gamma$  qui s'annulera avec l'ordre 1 du développement, donc :

$$\frac{\partial^{n+1} \hat{a}_1(z, \omega_1)}{\partial z^{n+1}} = -i \iint d\omega_p d\omega_2 \Gamma(\omega_1, \omega_2, \omega_p) A_p(\omega_p) e^{+i\Delta k z} (i\Delta k)^{n-1} (i\Delta k) \hat{a}_2^+(z, \omega_2) \hat{a}_3^+(z, \omega_p - \omega_1 - \omega_2)$$

ce qui valide l'expression (D.10) obtenue par récurrence.

Le développement de l'opérateur  $\hat{a}_1(\omega_1, L)$  est donc le suivant (sachant que l'on prend la valeur des dérivées n-ièmes en  $z = 0$ ) :

$$\begin{aligned} \hat{a}_1(\omega_1, L) &= \hat{a}_1(\omega_1, 0) + \hat{a}_1(\omega_1, 0) [(-ik_1 L) + (-ik_1)^2 \frac{L^2}{2!} + \dots + (-ik_1)^n \frac{L^n}{n!} + \dots \\ &- i \iint d\omega_p d\omega_2 \Gamma(\omega_1, \omega_2, \omega_p) A_p(\omega_p) \hat{a}_2^+(0, \omega_2) \hat{a}_3^+(0, \omega_p - \omega_1 - \omega_2) \times \\ &\quad \left[ L (i\Delta k)^0 + \frac{L^2}{2!} (i\Delta k) + \frac{L^3}{3!} (i\Delta k)^2 + \dots + \frac{L^n}{n!} (i\Delta k)^{n-1} + \dots \right] \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

soit :

$$\hat{a}_1(L) = -i \iint d\omega_p d\omega_2 \Gamma(\omega_1, \omega_2, \omega_p) A_p(\omega_p) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{L^n}{n!} (i\Delta k)^{n-1} \hat{a}_2^+(0, \omega_2) \hat{a}_3^+(0, \omega_p - \omega_1 - \omega_2) \quad (\text{D.12})$$

et suivant les développements en séries entières :  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$  on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{L^n}{n!} (i\Delta k)^{n-1} = L \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(i\Delta k L)^{n-1}}{n!} = L \frac{e^{i\Delta k L} - 1}{i\Delta k L} = \frac{e^{i\Delta k L} - 1}{i\Delta k} = e^{i\frac{\Delta k L}{2}} L \text{sinc}\left(\frac{\Delta k L}{2}\right)$$

soit finalement :

$$\hat{a}_1(\omega_1, L) = \hat{a}_1(\omega_1, 0) - i \iint d\omega_p d\omega_2 \Gamma(\omega_1, \omega_2, \omega_p) L e^{i\frac{\Delta k L}{2}} A_p(\omega_p) \text{sinc}\left(\frac{\Delta k L}{2}\right) \hat{a}_2^+(0, \omega_2) \hat{a}_3^+(0, \omega_p - \omega_1 - \omega_2) \quad (\text{D.13})$$

D'où, pour les opérateurs d'évolution de chacun des champs :

$$\begin{aligned} \hat{a}_j(\omega, L) &= \hat{a}_j(\omega_j, 0) - i \iint d\omega_p d\omega_k \Gamma(\omega, \omega_k, \omega_p) L e^{i\frac{\Delta k L}{2}} A_p(\omega_p) \times \\ &\quad \text{sinc}\left(\frac{\Delta k(\omega, \omega_k, \omega_p)L}{2}\right) \hat{a}_k^+(0, \omega_k) \hat{a}_l^+(0, \omega_p - \omega - \omega_k), \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

$$\forall \{j, k, l\} \in \{1, 2, 3\}$$

# Annexe E

## Vision interférentielle du phénomène de cohérence

Les non commutations entre opérateurs de création et d'annihilation qui existent lorsqu'ils "codent" exactement pour le même photon sont rendues possibles par la cohérence temporelle et spectrale quasi parfaite entre photons d'un même triplet. Ainsi, la recombinaison de photons d'un même triplet fait intervenir des opérateurs parfaitement conjugués entre eux, du fait de la génération de ces photons à fréquences complémentaires, à un même instant et à une même cote. La non commutation de ces opérateurs conjugués entraîne une amplification de la probabilité de photons générés par rapport à un cas non cohérent, c'est à dire un cas où aucun des opérateurs codant pour un des trois modes ne pourrait trouver de conjugué dans l'expression des opérateurs des deux autres modes. Étant donné que cette cohérence entre les photons est inhérente à leur **génération**, on peut l'appeler cohérence quantique.

Cette annexe a pour but de démontrer que la cohérence entre photons issus d'un même triplet, qui perturbe la probabilité de distribution du champ issu de leur somme et les pousse à se recombinaison préférentiellement entre eux, et ressort dans les calculs menés dans la thèse en formalisme quantique, peut s'appréhender simplement par une vision classique en considérant des interférences constructives entre composantes spectrales en phases. Ces interférences constructives se produisent lorsque les photons sommés ont un lien de phase fixé entre eux, ce qui est possible lorsqu'ils proviennent du même triplet. Bien que cette vision soit classique, il faut bien garder en tête que ce lien de phase est dû à la cohérence des photons d'un même triplet inhérente à leur génération, le phénomène étant donc d'origine quantique, de manière équivalente au traitement en formalisme quantique.

Nous n'avons dans la thèse pris en compte que le caractère de cohérence spectrale, c'est à dire la complémentarité en fréquences des photons triplets. Tous les photons sont ainsi considérés être générés en même temps et à la même cote. Prendre en compte un déphasage temporel ou en  $z$  pour des photons issus de triplets différents ne ferait qu'enrichir notre raisonnement, mais n'apporterait rien de plus sur le principe.

Détaillons cette vision classique des termes amplifiés par interférences constructives pour le phénomène de somme de fréquences à trois photons.

Considérons un champ pompe monochromatique oscillant à  $\omega_0$  :  $E_0(z, t) = E_0 e^{i(\omega_0 t - k_0 z + \varphi_0)}$ . Notons  $\phi_0(z, t) = \omega_0 t - k_0 z + \varphi_0$  sa phase au sens large.

Trois composantes spectrales décrivant l'évolution de trois photons triplets générés à partir d'un même photon parent à  $t = t_0$  à la cote  $z = z_0$ , de fréquences notées  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  et  $\omega_3$  avec  $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \omega_0$ , s'expriment selon :

$$\begin{cases} E_1(z, t) = E_1 e^{i(\omega_1(t-t_0) - k_1(z-z_0) + \varphi_1)} \\ E_2(z, t) = E_2 e^{i(\omega_2(t-t_0) - k_2(z-z_0) + \varphi_2)} \\ E_3(z, t) = E_3 e^{i(\omega_3(t-t_0) - k_3(z-z_0) + \varphi_3)} \end{cases} \quad (\text{E.1})$$

soit encore :

$$\begin{cases} E_1(z, t) = E_1 e^{i\phi_1(z, t)} \\ E_2(z, t) = E_2 e^{i\phi_2(z, t)} \\ E_3(z, t) = E_3 e^{i\phi_3(z, t)} \end{cases} \quad (\text{E.2})$$

Et on a la relation de phase suivante pour la somme des phases des trois photons :

$$\sum \phi_{\text{triplets}}(z, t) = (t - t_0)(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) - (z - z_0)(k_1 + k_2 + k_3) + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \quad (\text{E.3})$$

Étant donné que pour trois photons d'un même triplet vérifiant l'accord de phase :  $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \omega_0$  et  $k_1 + k_2 + k_3 = k_0$ , la somme des phases (E.3) devient :

$$\begin{aligned} \sum \phi_{\text{triplets}}(z, t) &= \omega_0(t - t_0) - k_0(z - z_0) + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \\ &= \phi_0(z - z_0, t - t_0) - \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

avec  $-\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \Delta\varphi$

L'évolution des photons générés par processus de fluorescence paramétrique non linéaire est maximisée pour

$$\sum \phi_{\text{triplets}}(z, t) - \phi_0(z, t) = -\pi/2 \quad (\text{E.5})$$

car les trois champs générés évoluent en  $z$  et  $t$  selon  $\sin(\sum \phi_{\text{triplets}}(z, t) - \phi_0(z, t))$ . On peut considérer que seuls les photons vérifiant cette condition se propagent vraiment, les autres ayant un champ associé négligeable. Or d'après (E.4) on a :

$$\sum \phi_{\text{triplets}}(z, t) - \phi_0(z, t) = \omega_0 t_0 - k_0 z_0 + \Delta\varphi \quad (\text{E.6})$$

donc la condition (E.5) devient :  $\omega_0 t_0 - k_0 z_0 + \Delta\varphi = -\pi/2$ .

Notons que comme annoncé, le lien de somme des phases constante pour les photons

triplets nécessite les deux conditions quantiques de corrélation parfaite en temps et en énergie (complémentarité en énergie) des photons triplets.

Maintenant, considérons la recombinaison. Si on somme des photons quelconques, à l'instant  $t'$  à la cote  $z'$ , la somme des phases des photons sommés va valoir :

$$\begin{aligned}\sum \phi(z', t') &= \phi_1(z', t') + \phi_2(z', t') + \phi_3(z', t') \\ &= (\omega_1 (t' - t_{10}) - k'_1 (z' - z_{10}) + \varphi_1) + \\ &\quad (\omega'_2 (t' - t_{20}) - k'_2 (z' - z_{20}) + \varphi_2) + (\omega'_3 (t' - t_{30}) - k'_3 (z' - z_{30}) + \varphi_3)\end{aligned}$$

avec  $t_{j0}$ ,  $z_{j0}$ ,  $j = 1, 2, 3$ , la date et la cote de génération de chacun des photons considérés.

Considérons la somme de trois photons quelconques susceptibles de se trouver en  $z'$  à  $t'$ . Ils n'ont a priori été générés ni à la même fréquence, ni en même temps, ni à la même cote  $z$ . Leurs fréquences et leurs instants de génération n'ont aucun lien entre eux. Ils vont quand même se sommer, et la différence de leur somme de phase avec celle du photon généré vaudra  $\pi/2$  pour que l'interaction non linéaire soit efficace :

$$\sum \phi(z', t') - \phi_r(z', t') = \pi/2 \quad (\text{E.7})$$

soit

$$\phi_r(z', t') = \sum \phi(z', t') - \pi/2 \quad (\text{E.8})$$

où  $\phi_r(z', t')$  représente la phase globale du photon recombiné.

Si maintenant on considère trois photons d'un même triplet aussi susceptibles de se trouver en  $z'$  à  $t'$ . La somme de leurs phases vaut :

$$\sum \phi_{\text{triplets}}(z', t') = \phi_0(z', t') - \pi/2 \quad (\text{E.9})$$

Le photon généré par la somme de ces trois photons issus d'un même triplet aura donc une phase de

$$\phi_r(z', t') = \sum \phi_{\text{triplets}}(z', t') - \pi/2 = \phi_0(z', t') - \pi. \quad (\text{E.10})$$

Maintenant, en considérant à cet instant  $z'$ ,  $t'$  tous les photons issus d'un même triplet : toutes leurs sommes vont donner un photon de phase  $\phi_r(z', t') = \phi_0(z', t') - \pi$ , c'est à dire que tous les photons issus de leurs sommes auront la même phase, la phase à l'origine des photons pompe étant fixée. Le champ somme total alors généré si on considère la recombinaisons de  $3N$  photons sera la somme de  $N$  composantes composées d'un seul photon, en phase :  $E_r(z', t') = E_r e^{i\phi_r(z', t')} = N \times E_{r \text{ 1photon}} e^{i\phi_r(z', t')}$ . Toutes ces composantes ayant la même phase, elles vont interférer constructivement, et l'intensité du champ généré sera ainsi proportionnelle au carré du champ, donc à  $N^2 \times |E_{r \text{ 1photon}}|^2$  et non à la somme incohérente de toutes les composantes au carré :  $N \times |E_{r \text{ 1photon}}|^2$ . Ainsi, plus généralement, si on considère la recombinaison de  $3N$  photons, la probabilité

de recombinaison à chaque fréquence appartenant au spectre du champ pompe va avoir une amplitude dépendant de l'efficacité de la somme de fréquences multipliée un terme en somme de  $N^2$  et  $N$ , traduisant respectivement les recombinaisons cohérentes de photons trois par trois d'un même triplet et les recombinaisons incohérentes de photons n'ayant pas de lien de phase entre eux. Le terme incohérent en  $N$  étant négligeable devant le terme cohérent en  $N^2$ , le champ final sera composé très majoritairement de la somme de fréquences des photons issus d'un même parent entre eux.

Le terme issu de la somme de fréquences de photons de triplets différents est facile à identifier dans les expressions obtenues pour nos champs dans le formalisme quantique, au chapitre IV, puisqu'il correspond au terme pour lequel tous les opérateurs commutent. Tous les autres termes sont donc la conséquence d'une cohérence entre les photons sommés, possible grâce au lien de phase qui unit ces photons à l'issue de leur génération, donc d'origine quantique. Ils sont amplifiés par cohérence par rapport au terme issu de la somme de fréquences quelconques, non cohérent. Ce terme "incohérent quantiquement", est en effet négligeable dans quasiment tous les cas de génération et de recombinaison envisagés, ce qui prouve que la cohérence quantique des photons triplets n'est pas masquée dans nos protocoles. Le seul cas où ce terme ne traduisant pas la cohérence quantique n'est plus négligeable et devient prépondérant est celui où la génération s'effectue en régime bi-stimulé (paragraphes IV.2.3 et IV.3.3). En effet, dans ce cas particulier, la bi-stimulation suffit à fixer les phases de tous les champs, puisque les phases des deux champs d'injection et du champ pompe sont fixées, celle du champ non injecté est alors fixée aussi par la condition de génération non linéaire efficace (E.5). Ainsi, dans ce cas, tous les photons sont en phase et toutes leurs sommes cohérentes et efficaces, mais cette cohérence est fixée classiquement, et n'est plus du tout due au caractère quantique de la génération des photons par scission d'un même photon parent. Le terme issu de la somme de fréquence de photons quelconques est donc cette fois-ci cohérent donc intense, mais cette cohérence est de nature classique.

En conclusion, les termes ne prenant pas en compte la cohérence quantique sont incohérents dans le cas d'une génération spontanée ou mono-stimulée. Dans ce cas, cette cohérence de nature quantique n'est pas masquée lors de la recombinaison, puisque les termes dans lesquels elle entre en jeu sont plus intenses par interférences constructives que ceux dans lesquels elle n'entre pas en jeu. Dans le cas d'une génération bi-stimulée par contre, le terme ne prenant pas en compte la cohérence quantique est cohérent (classiquement) donc de grande intensité car également amplifié par interférences constructives, et ce terme masque alors ceux issus de la cohérence de nature quantique.

# Bibliographie

- [1] A Zeilinger, M A Horne, H Weinfurter, and M Zukowski. Three-particle entanglements from two entangled pairs. *Phys. Rev. Lett.*, 78(16) :3031–3034, 1997.
- [2] Jian-Wei Pan, Dik Bouwmeester, Matthew Daniell, Harald Weinfurter, and Anton Zeilinger. Experimental test of quantum nonlocality in three-photon Greenberger-Horne-Zeilinger entanglement. *Nature*, 403 :515–519, 2000.
- [3] Dik Bouwmeester, Jian-wei Pan, Matthew Daniell, Harald Weinfurter, and Anton Zeilinger. Observation of three-photon Greenberger-Horne-Zeilinger entanglement. pages 1–4.
- [4] K Banaszek and P L Knight. Quantum interference in three-photon down-conversion. *Phys. Rev. A*, 55(3) :2368–2375, 1997.
- [5] Maria Corona, Karina Garay-Palmett, and Alfred Uren. Experimental proposal for the generation of entangled photon triplets by third-order spontaneous parametric downconversion in optical fibers. *Optics letters*, 36(2) :190–2, January 2011.
- [6] Maria Corona, Karina Garay-Palmett, and Alfred Uren. Third-order spontaneous parametric down-conversion in thin optical fibers as a photon-triplet source. *Physical Review A*, 84(3) :1–13, September 2011.
- [7] S Richard, K Bencheikh, B Boulanger, and J a Levenson. Semiclassical model of triple photons generation in optical fibers. *Optics letters*, 36(15) :3000–2, August 2011.
- [8] J Douady and B Boulanger. Experimental demonstration of a pure third-order optical parametric downconversion process. *Opt. Lett.*, 29(23) :2794–2796, 2004.
- [9] K Bencheikh, F Gravier, J Douady, J A Levenson, and B Boulanger. Triple photons : a challenge in nonlinear and quantum optics. *C. R. Phys.*, 8(2) :206–220, 2007.
- [10] Fabien Gravier and Benoît Boulanger. Triple-photon generation : comparison between theory and experiment. *J. Opt. Soc. Am. B*, 25(1) :98, 2008.
- [11] Hannes Hübel, Deny R Hamel, Alessandro Fedrizzi, Sven Ramelow, Kevin J Resch, and Thomas Jennewein. Direct generation of photon triplets using cascaded photon-pair sources. *Nature*, 466(7306) :601–3, July 2010.
- [12] Timo Felbinger, Stephan Schiller, and Jürgen Mlynek. Oscillation and Generation of Nonclassical States in Three-Photon Down-Conversion. *Physical Review Letters*, 80(3) :492–495, January 1998.

- 
- [13] Barak Dayan. Theory of two-photon interactions with broadband down-converted light and entangled photons. *Phys. Rev. A*, 76(4) :43813, 2007.
- [14] Izo Abram, Rama Raj, Jean-Louis Oudar, and G Dolique. Direct observation of the second-order coherence of parametric generated light. *Phys. Rev. Lett.*, 57(20) :2516–2519, 1986.
- [15] A Yariv and P Yeh. *Optical waves in crystals*. Wiley New York, 1984.
- [16] J F Nye. *Physical properties of crystals*. Clarendon Press, 1957.
- [17] B Boulanger and J Zyss. Chapter 1.7 : Nonlinear optical properties. *International tables for crystallography*, 2003.
- [18] A. Hadni. *Essentials of modern physics applied to the study of the infrared*. Oxford : Pergamon Press, 1967.
- [19] <http://www.unitedcrystals.com/KTPProp.html>.
- [20] N Bloembergen. *Nonlinear Optics*. World Scientific, 1965.
- [21] M. V. Hobden. Phase-matched second harmonic generation in biaxial crystals. *J. Appl. Phys.*, 38 :4365–4372, 1967.
- [22] K J Blow, Rodney Loudon, Simon J D Phoenix, and T J Shepherd. Continuum fields in quantum optics. *Phys. Rev. A*, 42(7) :4102–4114, 1990.
- [23] B Huttner, S Serulnik, and Y Ben-Aryeh. Quantum analysis of light propagation in a parametric amplifier. *Phys. Rev. A*, 42(9) :5594, 1990.
- [24] E.R. Pike and H. Walther. *Photons and Quantum Fluctuations*. Hilger, 1988.
- [25] Toshiaki SUHARA and Hiroki KINTAKA. Quantum theory analysis of twin-photon beams generated by parametric fluorescence. *IEEE journal of quantum electronics*, 41(9) :1203–1212.
- [26] Alain Aspect, Philippe Grangier, and Gerard Roger. Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment : A New Violation of Bell's Inequalities. *Phys. Rev. Lett.*, 42(2) :91—94, 1982.
- [27] D ; Bouwmeester, A. Ekert, and A. Zeilinger. *The physics of quantum information*. Springer, 2000.
- [28] P. Cirac, J. I. and Zoller. Preparation of macroscopic superpositions in many-atom systems. *Phys. Rev. A*, 50(4) :R2799—R2802, 1994.
- [29] Christopher C. Gerry. Preparation of multiatom entangled states through dispersive atom cavity-field interactions. *Phys. Rev. A*, 53(4) :2857—2860, 1996.
- [30] Arno Rauschenbeutel, Gilles Nogues, Stefano Osnaghi, Patrice Bertet, Michel Brune, Jean-Michel Raimond, and Serge Haroche. Step-by-Step Engineered Multiparticle Entanglement. *Science*, 288(5473) :2024–2028, June 2000.
- [31] Daniel M. Greenberger, Michael A. Horne, and Anton Zeilinger. Going Beyond Bell's Theorem. pages 69–72, December 2007.
-

- 
- [32] T Jennewein, C Simon, G Weihs, H Weinfurter, and A Zeilinger. Quantum cryptography with entangled photons. *Phys. Rev. Lett.*, 84(20) :4729–4732, 2000.
- [33] Yanhua Kwiat, Paul G. and Mattle, Klaus and Weinfurter, Harald and Zeilinger, Anton and Sergienko, Alexander V. and Shih. New High-Intensity Source of Polarization-Entangled Photon Pairs. *Phys. Rev. Lett.*, 75(24) :4337–4341, 1995.
- [34] D S Naik, C G Peterson, A G White, A J Berglund, and P G Kwiat. Entangled state quantum cryptography : eavesdropping on the Ekert protocol. *Phys. Rev. Lett.*, 84(20) :4733–4736, 2000.
- [35] W Tittel, J Brendel, H Zbinden, and N Gisin. Quantum cryptography using entangled photons in energy-time Bell states. *Phys. Rev. Lett.*, 84(20) :4737–4740, 2000.
- [36] V. Bužek and P. L. Knight. The origin of squeezing in a superposition of coherent states. *Optics Communications*, 81(5) :331–336, 1991.
- [37] G. S. Kanter and P. Kumar. Enhancement of bright squeezing in the second harmonic by internally seeding the X(2) interaction. *IEEE journal of quantum electronics*, 36(8) :916–922.
- [38] J Douady. Génération de tierce harmonique et production de triplets de photons pour l’optique quantique. *Thèse de doctorat de l’université Joseph Fourier*, 2004.
- [39] B C Stuart, M D Feit, A M Rubenchik, B W Shore, and M D Perry. Laser-induced damage in dielectrics with nanosecond to subpicosecond pulses. *Phys. Rev. Lett.*, 74(12) :2248–2251, 1995.
- [40] J Douady and B Boulanger. Calculation of quadratic cascading contributions associated with a phase-matched cubic frequency difference generation in a KTiOPO<sub>4</sub> crystal. *J. Opt. A : Pure Appl. Opt.*, 7(9) :467–471, 2005.
- [41] F Gravier and B Boulanger. Cubic parametric frequency generation in rutile single crystal. *Opt. Express*, 14(24) :11715–11720, 2006.
- [42] J P Fève, B Boulanger, and J Douady. Specific properties of cubic optical parametric interactions compared to quadratic interactions. *Phys. Rev. A*, 66(6) :63817, 2002.
- [43] F. Gravier. *Conception et étude d’un générateur et d’un corrélateur de triplets de photons basés sur KTiOpO<sub>4</sub> et TiO<sub>2</sub>*. PhD thesis, 2007.
- [44] F Boitier, a Godard, N Dubreuil, P Delaye, C Fabre, and E Rosencher. Photon extrabunching in ultrabright twin beams measured by two-photon counting in a semiconductor. *Nature communications*, 2(may) :425, January 2011.
- [45] Barak Dayan, Avi Pe’er, Asher Friesem, and Yaron Silberberg. Two Photon Absorption and Coherent Control with Broadband Down-Converted Light. *Physical Review Letters*, 93(2) :1–4, July 2004.
- [46] Donald L. Burnham, David C. and Weinberg. Observation of Simultaneity in Parametric Production of Optical Photon Pairs. *Phys. Rev. Lett.*, 25(2) :84–87, 1970.
-

- [47] Barak Dayan, Yaron Bromberg, Itai Afek, and Yaron Silberberg. Spectral polarization and spectral phase control of time-energy entangled photons. *Physical Review A*, 75(4) :1–5, April 2007.
- [48] Avi Pe'er, Barak Dayan, Asher Friesem, and Yaron Silberberg. Temporal Shaping of Entangled Photons. *Physical Review Letters*, 94(7) :1–4, February 2005.
- [49] F. C. Zumsteg, J. D. Bierlein, and T. E. Gier. K=Rb1-. TiOPO4 : a new nonlinear optical material. *J. Appl. Phys.*, 47 :4980–4985, 1976.
- [50] Roy J Glauber. Coherent and Incoherent States of the Radiation Field. *Phys. Rev.*, 131(6) :2766—2788, 1963.
- [51] Fabien Boitier, Antoine Godard, Aleksandr Ryasnyanskiy, Nicolas Dubreuil, Philippe Delaye, Claude Fabre, and Emmanuel Rosencher. Second order coherence of broadband down-converted light on ultrashort time scale determined by two photon absorption in semiconductor. *Optics Express*, 18(19) :20401–20408, 2010.
- [52] B Boulanger, J P Fève, P Delarue, I Rousseau, and G Marnier. Cubic optical nonlinearity of KTiOPO 4. *J. Phys. B*, 32 :475–488, 1999.
- [53] Y.R. Shen. *The principles of nonlinear optics*. Wiley-Interscience, wiley clas edition, 2003.
- [54] Paul L. Voss, Kahraman G. Köprülü, and Prem Kumar. Raman-noise-induced quantum limits for  $\chi$  (3) nondegenerate phase-sensitive amplification and quadrature squeezing. *Journal of the Optical Society of America B*, 23(4) :598, April 2006.
- [55] B Boulanger, M.M. Fejer, R. Blachman, and P. Bordui. Study of KTiOPO4 gray-tracking at 1064, 532 and 355 nm. *Appl. Phys. Lett.*, 69(19) :2401–2403, 1994.

# Production scientifique liée aux travaux de la thèse

## Publications

- **Dot A.**, Borne A., Bencheikh K., Boulanger B., Levenson J.A. - Quantum theory analysis of triplet-photons generated by  $\chi^{(3)}$  process – Phys. Rev. A 85, 023809 (2012).
- **Dot A.**, Borne A., Boulanger B., Bencheikh K., Levenson J.A. – Energy and spectral properties of triple photons generation in a phase-matched *KTiOPO<sub>4</sub>* crystal – Optics Letters, en préparation.

## Conférences invitées

- **Dot A.**, Bencheikh K., Boulanger B., Levenson A., Segonds P. and Félix C. – Triple photons generation : toward a new state of light – Non Linear Optics, Hawaii, USA, July 12 – 17, 2009.
- **Dot A.**, Bencheikh K., Boulanger B., Levenson A., Segonds P., Félix C. - Triplets de photons : de l'optique non linéaire à l'optique quantique - COLOQ, Marseille, 4-7 juillet 2011.
- Boulanger B., **Dot A.**, Bencheikh K., Levenson A., Segonds P., Félix C. - Triple photons : a new state of light – International Laser Physics Workshop 2011, Sarajevo, Bosnia and Herzegovina, July 11 – 15, 2011.
- Boulanger B., **Dot A.**, Bencheikh K., Levenson A., Segonds P., Félix C. - Triple photons : from nonlinear generation to quantum correlations – XXX URSI General Assembly and Scientific Symposium, Lasers Session, Istanbul, Turkey, 13- 20 August 2011.
- Boulanger B., **Dot A.**, Borne A., Segonds P., Bencheikh K., Levenson A., Richard S. -  $\chi^{(3)}$  Third Harmonic Generation and Triple Photon Generation – Photonics West, San Francisco, 21 – 26 January 2012.

## Communications orales

- **Dot A.**, Bencheikh K., Boulanger B., Levenson A., Segonds P., Gérardin A., Félix C. - First Theoretical and Experimental Demonstration of Quantum Correlations

- of Triple Photons – Postdeadline Paper APDP3, ASSP, San Diego, February 1-3, 2010.
- **Dot A.**, Bencheikh K., Boulanger B., Levenson A., Segonds P., Gérardin A., Félix C. - Triple photons : a new challenge for parametric nonlinear crystal optics – “Advances in Molecular Nonlinear Optics : Information Technology and Life Sciences” (AMARIS10), Cachan, May 24-28, 2010.
  - **Dot A.**, Bencheikh K., Boulanger B., Levenson A., Segonds P., Félix C. – Theoretical and experimental demonstrations of triple photon quantum correlations - 7th European-Israeli Workshop (EIW 2010) “, Lyon, France, December 8th - 9th, 2010.
  - **Dot A.**, Bencheikh K., Boulanger B., Levenson A., Segonds P., Félix C. - Triple photons quantum correlations – FRISNO, Aussois, France, March 28-April 1st, 2011.
  - **Dot A.**, Bencheikh K., Boulanger B., Levenson A., Segonds P., Félix C. - Démonstration des corrélations quantiques de triplets de photons - JNCO, Marseille, 4-7 juillet 2011.

### Communication par affiches

- **Dot A.**, Bencheikh K., Boulanger B., Levenson A., Segonds P. – Theoretical and experimental demonstrations of Triple Photon quantum correlations – Europhoton, Hamburg, Germany, August 29th – September 3rd, 2010.

## Résumé

Ce travail porte sur l'étude de la cohérence entre champs triplets générés par interaction non linéaire d'ordre trois. Un protocole indirect, basé sur l'étude du champ issu de la somme de fréquences des champs triplets dans un cristal non linéaire a été proposé. Une modélisation théorique en formalisme quantique de l'évolution des champs, de leur génération à leur recombinaison, a été développée, donnant lieu à une recherche exhaustive des signatures de corrélations susceptibles d'émerger du protocole choisi. Tous les cas possibles ont été étudiés : génération par fluorescence paramétrique, par stimulation sur un ou deux des champs triplets, suivis des recombinaisons de deux ou des trois champs triplets. Les expériences menées, à savoir la génération non linéaire bi-stimulée et la recombinaison des champs ainsi générés, sont en accord avec notre modèle théorique et permettent de mettre en évidence le masquage des corrélations entre les champs dans ce régime fortement injecté, ces corrélations étant contenues dans les fluctuations quantiques, alors négligeables, des opérateurs champs. Le calcul théorique prédit une signature de corrélations fortes entre les photons triplets dans la cas d'un génération par fluorescence paramétrique, et plus faible dans le cas d'une génération mono-stimulée.

Mots clés : Optique non linéaire, Optique quantique, interactions d'ordre trois, cohérence, corrélations quantiques

This work deals with the study of coherence between triple photon beams generated by a third order non linear interaction. A protocol, based on the study of the field arising from sum-frequency of the triplet fields in a non linear crystal, was proposed. A theoretical model, in the quantum formalism, was developed, leading to an exhaustive research of the potential signature of the correlations. All the possible schemes were studied : triple fields generation from parametric fluorescence or from stimulated interaction, and recombination of two or three of the triple fields. The experiments we led, i.e. the bi-stimulated non linear generation and the recombination of the so-born fields, agree with our theoretical model and put into light the correlations hiding in this highly stimulated regime, since these correlations lie in the quantum fluctuations of the fields operators. The theoretical calculations predicts a strong correlations signature when the fields are generated from parametric fluorescence, and a weaker one in the case of a generation mono-stimulated.

Key words : Non linear optics, Quantum optics, third order interactions, coherence, quantum correlations