



HAL
open science

Contribution à l'homogénéisation de matériaux hétérogènes viscoélastiques : milieux aléatoires et périodiques et prise en compte des interfaces

Duc Hieu Hoang

► **To cite this version:**

Duc Hieu Hoang. Contribution à l'homogénéisation de matériaux hétérogènes viscoélastiques : milieux aléatoires et périodiques et prise en compte des interfaces. Autre. Université Paris-Est, 2011. Français. NNT : 2011PEST1086 . tel-00682436

HAL Id: tel-00682436

<https://theses.hal.science/tel-00682436>

Submitted on 26 Mar 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Paris-Est Marne la Vallée
Laboratoire Modélisation et Simulation Multi Echelle (UMR CNRS 8208)

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS-EST

Discipline : Mécanique

présentée et soutenue publiquement par

Duc Hieu HOANG

date de soutenance : le 16 décembre 2011

Contribution à l'homogénéisation de matériaux hétérogènes viscoélastiques. Milieux aléatoires et périodiques et prise en compte des interfaces

JURY

<i>Rapporteurs :</i>	E. HERVE I. DOGHRI	Professeure, Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines Professeur, Ecole Polytechnique de Louvain, Belgique
<i>Examineur :</i>	H. DUMONTET	Professeure, Université Pierre et Marie Curie, Paris
<i>Directeur de thèse :</i>	G. BONNET F. MEFTAH	Professeur, Université Paris-Est Marne la Vallée Professeur, Université de Cergy-Pontoise

Mis en page avec la classe thloria.

Remerciements

Les travaux de thèse que j'ai l'honneur de présenter dans ce mémoire sont le fruit de trois années de travail d'équipe au sein du laboratoire de Modélisation et Simulation Multi Echelle (MSME) de l'Université Paris Est.

A ce titre je voudrais remercier toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à l'aboutissement de ces travaux.

Je tiens à remercier tout d'abord le Professeur BONNET Guy, Directeur-adjoint du laboratoire MSME, Directeur de ma thèse, qui m'a beaucoup apporté, a toujours été disponible pour m'aider aussi bien dans les développements théoriques et qui m'a fait confiance en me laissant de l'autonomie durant ces trois années de thèse.

Je remercie également Monsieur MEFTAH Fékri, Professeur des Universités à Cergy-Pontoise, Co-directeur de ma thèse, pour m'avoir pour avoir dirigé une partie de ma thèse et pour m'avoir fait confiance en me donnant l'opportunité de réaliser cette thèse.

J'exprime toute ma reconnaissance à chacun des membres du jury pour l'intérêt manifesté pour ces travaux. Je remercie Madame DUMONTET Hélène, Professeure de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, pour l'honneur qu'elle m'a fait en acceptant la présidence de ce jury. Je remercie Monsieur DOGHRI Issam, Professeur de l'Ecole Polytechnique de Louvaain, et, Madame HERVE Evelyne, Professeure de l'Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines pour le temps passé à l'évaluation de ce mémoire.

Enfin, je tiens à remercier tous mes collègues du laboratoire MSME qui m'ont aidé en répondant à mes questions. Que ma famille et tous mes amis soient assurés de mon immense gratitude et de ma sincère reconnaissance pour leur soutien permanent.

Table des matières

Table des figures	7
Liste des tableaux	11
Notations	13
Introduction générale	15
Chapitre 1 Notions et relations de base des techniques d'homogénéisation en élasticité linéaire	17
1.1 Volume élémentaire représentatif et relation entre variables locales et variables macroscopiques	17
1.1.1 Volume élémentaire représentatif	17
1.1.2 Construction de la moyenne des champs locaux	18
1.2 Localisation et homogénéisation	21
1.2.1 Localisation	21
1.2.2 Homogénéisation	22
1.2.3 Estimation des propriétés effectives à partir du tenseur de localisation par phase	23
1.3 Schémas d'homogénéisation utilisés dans le mémoire	24
1.3.1 Problème d'inhomogénéité	24
1.3.2 Schéma auto-cohérent généralisé (ACG)	26
1.3.3 Homogénéisation de milieux périodiques	32
1.3.4 Homogénéisation de milieux périodiques par la méthode approchée .	38
1.3.5 Homogénéisation de milieux périodiques par résolution numérique de l'équation intégrale	48
1.4 Conclusion	54

Chapitre 2 Viscoélasticité linéaire et principe de correspondance	57
2.1 Comportement viscoélastique linéaire	57
2.1.1 Fonction de fluage(Cas scalaire)	57
2.1.2 Fonction de relaxation(Cas scalaire)	58
2.1.3 Comportement linéaire tridimensionnel	58
2.1.4 Relation constitutive	59
2.1.5 Matériau non-vieillissant	60
2.1.6 Matériau isotrope	61
2.2 Transformée de Laplace-Carson et principe de correspondance	61
2.2.1 Transformée de Laplace-Carson	61
2.2.2 Principe de correspondance	62
2.2.3 Transformée de Laplace inverse	62
2.3 Schémas rhéologiques	63
2.3.1 Modèle de Maxwell	63
2.3.2 Modèle de Kelvin-Voigt	64
2.3.3 Modèle de Zener	65
2.3.4 Modèle de Maxwell généralisé	65
2.3.5 Modèle de Kelvin généralisé	66
2.4 Conclusion	66
Chapitre 3 Obtention du comportement viscoélastique effectif par le schéma ACG	67
3.1 Introduction	67
3.2 Problème de viscoélasticité biphasique avec interface parfaite	68
3.2.1 Formulation élastique	68
3.2.2 Formulation viscoélastique	73
3.2.3 Approximation de la racine du discriminant	74
3.2.4 Application à différents modèles rhéologiques	75
3.2.5 Domaine d'application de la méthode approchée	87
3.3 Problème viscoélastique biphasique avec interface imparfaite	89
3.4 Conclusion	94
Chapitre 4 Homogénéisation par la méthode FFT approchée	95
4.1 Introduction	95
4.2 Formulation viscoélastique	95

4.3	Application numérique à différents modèles rhéologiques	98
4.3.1	Modèle de Kelvin-Voigt	98
4.3.2	Modèle de Maxwell	101
4.3.3	Modèle de Burgers	103
4.4	Validation de la méthode sur un résultat de la littérature	105
4.5	Conclusions	107
Chapitre 5 Homogénéisation par utilisation de la série de Neumann		109
5.1	Introduction	109
5.2	Formulation viscoélastique	110
5.2.1	Matériau viscoélastique incompressible	110
5.2.2	Matériau viscoélastique compressible	116
5.3	Application numérique	116
5.4	Conclusion	118
Conclusion générale		119
Bibliographie		121
Annexe A Calcul des coefficients de l'équation du second degré		127
Annexe B Inversion de la transformée de Laplace-Carson par la méthode différentielle (Donolato 2002)		129
Annexe C Décomposition dans la base de Walpole		131
Annexe D Décomposition des tenseurs d'élasticité et de viscoélasticité		135
D.1	Comportement élastique	135
D.2	Comportement viscoélastique	135
D.2.1	Modèle de Kelvin-Voigt	135
D.2.2	Modèle de Maxwell	136
Annexe E Application du Schéma ACG pour le modèle de Maxwell		137
Annexe F Application du Schéma ACG pour le modèle de Zener		141
		145

Table des figures

1.1	Un exemple de la microstructure du béton proposé par Luc Dormieux 2009	18
1.2	Une structure constituée d'un matériau hétérogène	19
1.3	Cellule de base d'un milieu hétérogène périodique	33
1.4	Estimation du premier module effectif de cisaillement en fonction de la concentration d'inclusions. Cas d'une structure cubique simple. Comparaison avec les bornes de Voigt et de Reuss.	46
1.5	Estimation du module effectif d'incompressibilité en fonction de la concentration d'inclusions. Cas d'une structure cubique simple. Comparaison avec les bornes de Voigt et de Reuss.	47
1.6	Etude de la convergence en fonction du nombre de vecteurs d'ondes pour le calcul du premier module de cisaillement.	47
1.7	Etude de la convergence en fonction du nombre de vecteurs d'ondes pour le module d'incompressibilité.	48
1.8	Fonction logarithme népérien d'un terme de série U en fonction du nombre d'itérations	52
1.9	Solution obtenue par la série de Neumann ("Méthode exacte") comparée avec la solution obtenue par la méthode FFT approchée et avec les bornes de Voigt et Reuss	54
2.1	Expérience de fluage unidimensionnel	58
2.2	Expérience de relaxation unidimensionnelle	59
2.3	Invariance du comportement par translation dans le temps	60
2.4	Modèle de Maxwell	63
2.5	Modèle de Kelvin-Voigt	64
2.6	Modèle de Zener	65
2.7	Modèle de Maxwell généralisé	66
2.8	Modèle de Kelvin généralisé	66
3.1	Modèle d'un composite de deux phases.	75
3.2	Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée dans l'espace de Laplace-Carson du modèle où la matrice est viscoélastique de Kelvin-Voigt contenant une inclusion élastique.	76
3.3	Evaluation de l'erreur de la méthode approchée dans l'espace de Laplace-Carson du modèle où la matrice est viscoélastique de Kelvin-Voigt contenant une inclusion élastique.	77

3.4	Fonction de relaxation effective du modèle où la matrice est viscoélastique de Kelvin-Voigt contenant une inclusion élastique.	77
3.5	Fonction de relaxation effective obtenue par la méthode différentielle sur la solution exacte et sur la solution approchée. La matrice est viscoélastique de Kelvin contenant une inclusion élastique.	78
3.6	Modèle rhéologique associé au comportement macroscopique de cisaillement.	79
3.7	Fonction de fluage effective du modèle où la matrice est viscoélastique de Kelvin-Voigt et contient une inclusion élastique.	80
3.8	Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée dans l'espace de Laplace-Carson pour le modèle où la matrice est viscoélastique de Kelvin-Voigt et contient des vides.	81
3.9	Evaluation de l'erreur obtenue par la méthode approchée dans l'espace de Laplace-Carson pour le modèle où la matrice est viscoélastique de Kelvin-Voigt et contient des vides.	82
3.10	Fonction de relaxation effective du modèle où la matrice est viscoélastique de type Kelvin-Voigt et contient des vides.	82
3.11	Fonction de relaxation effective obtenue par la méthode différentielle sur la solution exacte et sur la solution approchée du modèle où la matrice est viscoélastique de Kelvin-Voigt et contient des vides.	83
3.12	Fonction de fluage effective du modèle où la matrice est viscoélastique de Kelvin-Voigt et contient des vides.	83
3.13	Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée dans l'espace de Laplace-Carson pour le modèle où la matrice viscoélastique de Kelvin-Voigt contient une inclusion rigide.	84
3.14	Evaluation de l'erreur obtenue par la méthode approchée dans l'espace de Laplace-Carson pour le modèle où la matrice viscoélastique de Kelvin-Voigt contient une inclusion rigide.	85
3.15	Fonction de relaxation effective du modèle où la matrice viscoélastique de Kelvin-Voigt contient une inclusion rigide.	85
3.16	Fonction de relaxation effective obtenue par la méthode différentielle sur la solution exacte et sur la solution approchée pour le modèle où la matrice est viscoélastique de Kelvin-Voigt et contient une inclusion rigide.	86
3.17	Fonction de fluage effective pour le modèle où la matrice est viscoélastique de Kelvin-Voigt et contient une inclusion rigide.	86
3.18	Evaluation de l'erreur apportée par la méthode approchée pour le modèle de Kelvin-Voigt	88
3.19	Evaluation de l'erreur apportée par la méthode approchée sur le modèle de Maxwell	88
3.20	Evaluation de l'erreur apportée par la méthode approchée sur le modèle de Zener	89
3.21	Modèle d'un composite de deux phases avec interface imparfaite	90
3.22	Comparaison entre le modèle homogène et le modèle avec interface	93
3.23	Fonction de relaxation en cisaillement d'un composite avec prise en compte de l'interface imparfaite	94

4.1	Fonction de relaxation effective pour le module de cisaillement d'un composite périodique avec une matrice viscoélastique de Kelvin-Voigt. Méthode FFT approchée	99
4.2	Fonction de relaxation effective pour le module de compression isotrope d'un composite périodique avec une matrice viscoélastique de Kelvin-Voigt. Méthode FFT approchée.	99
4.3	Fonction de relaxation effective pour le module de cisaillement complémentaire d'un composite périodique avec une matrice viscoélastique de Kelvin-Voigt. Méthode FFT approchée.	100
4.4	Modèle rhéologique associé au comportement macroscopique d'un composite viscoélastique périodique comportant une matrice de Kelvin en utilisant la méthode FFT approchée.	100
4.5	Fonction de relaxation effective en cisaillement d'un composite périodique avec la matrice viscoélastique de Maxwell. Méthode FFT approchée	102
4.6	Fonction de relaxation effective en compression d'un composite périodique avec la matrice viscoélastique de Maxwell. Méthode FFT approchée	102
4.7	Fonction de relaxation effective en cisaillement complémentaire d'un composite périodique avec la matrice viscoélastique de Maxwell. Méthode FFT approchée	103
4.8	Fonction de relaxation effective en cisaillement d'un composite périodique dans le cas de la matrice viscoélastique de Burgers. Méthode FFT approchée.	104
4.9	Fonction de relaxation effective en compression d'un composite périodique avec la matrice viscoélastique de Burgers. Méthode FFT approchée	104
4.10	Fonction de relaxation effective en cisaillement complémentaire d'un composite périodique avec la matrice viscoélastique de Burgers. Méthode FFT approchée.	105
4.11	Réponse de composites renforcés par fibres sous chargement monotone. Comparaison entre les résultats de la méthode FFT approchée et ceux obtenus par la méthode de Lahellec et Suquet	106
5.1	Modèle de Zener	110
5.2	Composante $C_{2323}^{eff}(t)$ calculée par la méthode SN et par la méthode FFT approchée	117
5.3	Composante $C_{1212}^{eff}(t)$ calculée par la méthode SN et par la méthode FFT approchée	118
E.1	Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée dans l'espace de Laplace-Carson pour le modèle où la matrice est viscoélastique de Maxwell et contient une inclusion élastique.	138
E.2	Evaluation de l'erreur apportée par la méthode approchée dans l'espace de Laplace-Carson pour le modèle où la matrice est viscoélastique de Maxwell et contient une inclusion élastique.	138
E.3	Comparaison des fonctions de relaxation obtenues par la méthode différentielle et par la méthode approchée pour le cas où la matrice est viscoélastique de Maxwell et contient une inclusion élastique.	139

E.4	Fonction de relaxation effective obtenue par la méthode différentielle sur la solution exacte et sur la solution approchée pour le modèle où la matrice est viscoélastique de Maxwell et contient une inclusion élastique.	139
F.1	Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée dans l'espace de Laplace-Carson pour le modèle où la matrice est viscoélastique de Zener et contient une inclusion élastique.	142
F.2	Evaluation de l'erreur apportée par la méthode approchée dans l'espace de Laplace-Carson pour le modèle où la matrice est viscoélastique de Zener et contient une inclusion élastique.	143
F.3	Comparaison des fonctions de relaxations obtenues pour le modèle où la matrice est viscoélastique de Zener et contient une inclusion élastique.	143
F.4	Fonction de relaxation effective obtenue par la méthode différentielle sur la solution exacte et sur la solution approchée pour le modèle où la matrice est viscoélastique de Zener et contient une inclusion élastique.	144
F.5	Fonction de fluage effective pour le modèle où la matrice est viscoélastique de Zener et contient une inclusion élastique.	144

Liste des tableaux

1.1	Propriétés élastiques du composite	46
3.1	Propriétés mécaniques du composite de deux phases pour le cas intermédiaire.	76
3.2	Propriétés viscoélastiques macroscopiques du modèle rhéologique associé avec le comportement macroscopique de cisaillement pour une matrice de type Kelvin-Voigt et une inclusion élastique.	79
3.3	Fractions volumiques et propriétés mécaniques d'une matrice viscoélastique contenant des vides.	80
3.4	Fractions volumiques et propriétés mécaniques de deux phases composites avec une inclusion rigide.	84
4.1	Propriétés mécaniques du composite périodique avec la matrice viscoélastique de Kelvin-Voigt.	98
4.2	Propriétés viscoélastiques macroscopiques du modèle rhéologique associé avec le comportement macroscopique en cisaillement d'un composite périodique de Kelvin en utilisant la méthode FFT approchée.	101
4.3	Propriétés viscoélastiques macroscopiques du modèle rhéologique associé avec le comportement macroscopique en compression d'un composite périodique composé d'une matrice de type Kelvin en utilisant la méthode FFT approchée.	101
4.4	Propriétés viscoélastiques macroscopiques du modèle rhéologique associé avec le comportement macroscopique en cisaillement complémentaire d'un composite périodique de Kelvin en utilisant la méthode FFT approchée.	101
4.5	Propriétés mécaniques du composite périodique avec une matrice viscoélastique de type Maxwell.	101
4.6	Propriétés mécaniques du composite à deux phases pour le modèle de Burgers.	103
5.1	Propriétés mécaniques du composite viscoélastique incompressible de type Zener.	117
E.1	Propriétés mécaniques du composite de deux phases pour le modèle de Maxwell.	137
F.1	Propriétés mécaniques du composite pour le modèle de Zener.	141

Notations

• Notations tensorielles

a	scalaire,	\mathbf{a}	vecteur,
\mathbf{A}	tenseurs d'ordre deux,	\mathbb{A}	tenseurs d'ordre quatre,
\mathbf{i}	tenseur identité d'ordre deux,	\mathbb{I}	tenseur identité d'ordre quatre,
\cdot	produit contracté d'ordre un,	$:$	produit contracté d'ordre deux,
\otimes	produit tensoriel,	\otimes^{sym}	produit tensoriel symétrisé,
δ_{ij}	symbole de Kronecker.	$*$	produit de convolution

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A}\overline{\otimes}\mathbf{B})_{ijkl} &= A_{ik}B_{jl} & (\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})_{ijkl} &= A_{il}B_{jk} \\
 (\mathbf{A}\overline{\otimes}\mathbf{B})_{ijkl} &= \frac{1}{2}(A_{ik}B_{jl} + A_{il}B_{jk}) & sym\{A_{ijkl}\} &= \frac{1}{4}(A_{ijkl} + A_{jikl} + A_{ijlk} + A_{jilk}) \\
 I_{ijkl} &= \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})
 \end{aligned}$$

• Notations communes à tous les chapitres

ξ	vecteur d'onde,
$\Gamma^0(\xi)$	opérateur de Green pour les déformations,
$\Delta^0(\xi)$	opérateur de Green pour les contraintes,
σ	tenseur des contraintes microscopiques,
Σ	tenseur des contraintes macroscopiques,
\mathbf{u}	champ de déplacement,
ε	tenseur des déformations microscopiques,
\mathbf{E}	tenseur des déformations macroscopiques,
\mathbb{C}	tenseur de rigidité,
\mathbb{S}	tenseur de souplesse,

Introduction générale

Dans le calcul des structures, la prise en compte des effets dus aux déformations différées des matériaux, spécialement le fluage des matériaux, est un aspect important. Il provoque des déplacements au cours du temps pour les systèmes statiques et des redistributions des efforts intérieurs dans les systèmes hyperstatiques. Dans le cas des matériaux hétérogènes, il y a généralement une phase caractérisée par un fluage beaucoup plus important. Le cas extrême est celui de l'eau dans le béton au jeune âge, où l'on peut considérer que la viscosité vient principalement de la présence de l'eau. Toutefois, l'obtention des propriétés effectives d'un tel matériau hétérogène est un cas particulier d'un matériau hétérogène comportant des phases viscoélastiques. La prédiction des propriétés effectives d'un matériau hétérogène composé de phases viscoélastiques a fait l'objet de plusieurs travaux. Ce mémoire entre dans ce cadre. Il existe différentes méthodes pour traiter ce problème. L'utilisation de méthodes utilisant des variables cachées permet par exemple de traiter le cas de matériaux vieillissants. Toutefois, de nombreux travaux ont été réalisés en utilisant des solutions de problèmes d'élasticité grâce à la similitude des équations de la viscoélasticité dans le domaine de Laplace-Carson avec les équations de l'élasticité. Cette similitude, connue sous le nom de principe de correspondance (Mandel 1966 [48]; Lee 1961 [44]; Y.Rougier, C. Stolz et A. Zaoui 1993 [69]; S. Beurthey et A. Zaoui [4]) permet d'obtenir des relations explicites des lois de relaxation et de fluage, dans le cas où l'inverse de la transformée de Laplace-Carson est explicite. Le cas où le spectre dans le domaine de Laplace-Carson est continu conduit à une expression peu pratique des lois de relaxation et de fluage. Ce mémoire est donc limité au cas où la transformée de Laplace est traitée pour un spectre discret.

En restant dans ce cadre, on peut noter que le problème a été traité d'abord dans le cas du modèle de Mori-Tanaka (Y.M.Wang et G.J.Weng [78]; L.C.Brinson et W.S.Lin [9]; Q.V.Le [43]) qui permet d'obtenir une expression explicite de la transformée de Laplace. Compte tenu des limitations de ce modèle, plusieurs travaux ont porté sur le Schéma Autocohérent Généralisé (ACG). Toutefois dans ce cas, on obtient un spectre continu et la transformée de Laplace inverse comporte une partie qui n'est pas analytique et se présente sous forme d'intégrale (Y.Rougier [69]; S.Beurthey et A.Zaoui [4]). Une possibilité pour approcher l'inverse de Laplace est d'utiliser l'approximation de Padé comme décrit par M.F. Selivanov et Y.A. Chernouvan [72]. Dans ce mémoire, le Schéma Autocohérent Généralisé est traité à l'aide d'une méthode simplifiée permettant d'obtenir simplement la transformée de Laplace inverse. Le schéma autocohérent généralisé rend compte de façon approximative de la structure du matériau à l'échelle microscopique. Aussi, nous sommes intéressés aux méthodes utilisant la Transformée de Fourier, méthodes permet-

tant de prendre en compte de façon explicite la géométrie de la microstructure.

Le mémoire est structuré de la façon suivante :

Les deux premiers chapitres comportent peu de résultats originaux mais présentent les principaux aspects liés aux techniques d'homogénéisation qui seront étendues dans la suite du mémoire (chapitre 1) et au traitement des problèmes liés à la viscoélasticité par utilisation du principe de correspondance. Le chapitre 3 traite de deux extensions du schéma AutoCohérent Généralisé (ACG). La première extension porte sur une approximation simple permettant de rendre explicite la transformée de Laplace inverse de la solution obtenue pour le schéma ACG. La deuxième extension porte sur la prise en compte d'interfaces imparfaites. Les deux derniers chapitres portent sur la mise en oeuvre de méthodes reposant sur la transformée de Fourier qui permettent de prendre explicitement en compte la géométrie de la microstructure. Le chapitre 4 porte sur l'extension à la viscoélasticité d'une méthode approchée pour la détermination des propriétés effectives développée dans le cadre de la théorie de l'élasticité (Nemat-Nasser, Iwakuma et Hejazi 1982 [62], 1986 [61], 1993 [63], 1999 [60]) et reposant sur la décomposition des champs locaux en séries de Fourier. Enfin, le dernier chapitre porte sur l'extension à la viscoélasticité des techniques "exactes" d'homogénéisation par utilisation de la transformée de Fourier et du tenseur de Green développées dans les années 90 par Michel, Suquet et Moulinec ([52], [53], [54], [58]), puis reprises par Bonnet 2007 [5] et Monchiet et al. 2009 [55].

Chapitre 1

Notions et relations de base des techniques d'homogénéisation en élasticité linéaire

Ce chapitre, de nature en partie introductive et bibliographique, est destiné à présenter différentes techniques d'homogénéisation utilisées en élasticité linéaire. Ces techniques seront ensuite étendues au cours des chapitres suivants dans le cadre de la viscoélasticité. La notion de Volume Élémentaire Représentatif, puis les problèmes de localisation et d'homogénéisation sont présentés. Différentes solutions du problème de localisation sont ensuite présentées, soit dans le cas d'une microstructure simplifiée, soit dans le cas d'une microstructure complexe. L'apport original de ce chapitre réside d'une part dans l'expression par transformée de Fourier de la solution du problème d'homogénéisation de structures périodiques qui soit bien adaptée pour l'expression de la transformée de Laplace inverse et d'autre part dans la comparaison entre la solution exacte par FFT du problème d'homogénéisation de structures périodiques et la solution approchée développée par Iwakuma et Nemat-Nasser[40], qui se prête particulièrement bien à l'extension au cas de la viscoélasticité.

1.1 Volume élémentaire représentatif et relation entre variables locales et variables macroscopiques

1.1.1 Volume élémentaire représentatif

Dans le calcul des structures, les matériaux constitutifs sont souvent supposés homogènes, ou au moins homogènes par zone. En réalité, le matériau est toujours hétérogène à une échelle inférieure, plus ou moins petite suivant les matériaux (cf exemple de la figure 1.1). Lorsque l'on descend à cette échelle, dite microscopique, on constate généralement que le matériau est constitué de différentes zones pouvant être considérées comme homogènes.

L'objectif principal des techniques d'homogénéisation est de définir un milieu homogène fictif ayant " en moyenne " un comportement identique à l'assemblage observé à l'échelle

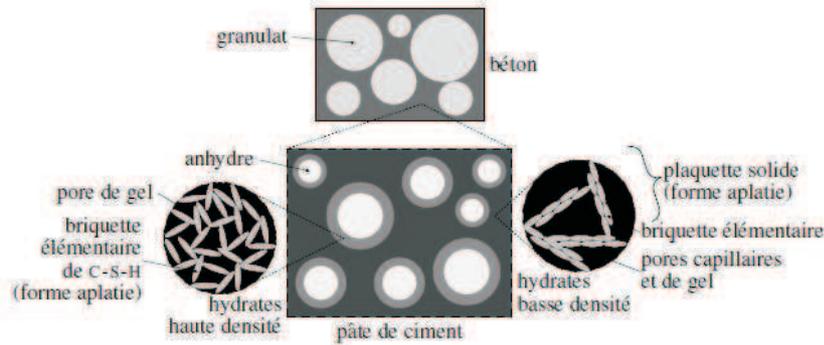


FIGURE 1.1 – Un exemple de la microstructure du béton proposé par Luc Dormieux 2009

microscopique. Pour ce faire, un objet d'étude est introduit, dénommé volume élémentaire représentatif (V.E.R) de matériau hétérogène par Hill 1963 [34], Hashin 1965 [28], Willis 1980 [79] et Nemat-Nasser 1986 [61]. Un V.E.R pour un "point matériel" d'une masse donnée à l'échelle macroscopique est un volume de matière qui est représentatif à l'échelle microscopique de la constitution interne du matériau (cf l'exemple de la figure 1.2). Ceci n'est possible en général que s'il y a séparation d'échelle, c'est à dire en général si la taille du V.E.R. peut être choisie suffisamment petite par rapport à la taille de la structure.

1.1.2 Construction de la moyenne des champs locaux

Le principe des techniques d'homogénéisation est en général de considérer qu'à l'échelle macroscopique, les tenseurs de contraintes et déformations varient peu mais supportent des fluctuations plus importantes à l'échelle microscopique. La cohérence entre les deux échelles sera assurée en considérant les moyennes de volume de ces champs tensoriels sur le V.E.R. La moyenne de volume du champ $\mathbb{T}(\mathbf{x})$ est définie par :

$$\langle \mathbb{T} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \mathbb{T}(\mathbf{x}) dV \quad (1.1)$$

où V définit le volume de V.E.R. considéré.

1.1.2.1 Moyenne volumique d'un champ de contraintes en équilibre sur le V.E.R.

Soit un V.E.R en équilibre soumis à des sollicitations sur la frontière ∂V du V.E.R. V , ces efforts étant supposés en équilibre sans forces de volume.

Le tenseur de contraintes internes associé vérifie la condition d'équilibre :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad \text{dans } V \quad (1.2)$$

On considère la moyenne volumique du champ de contrainte définie par :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) dV \quad (1.3)$$

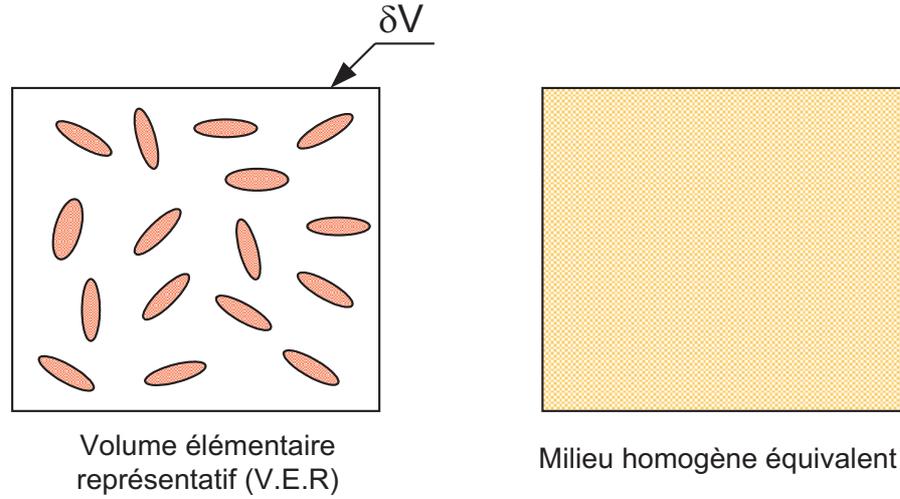


FIGURE 1.2 – Une structure constituée d'un matériau hétérogène

Par le théorème de Gauss, et compte tenu des équations d'équilibre, la moyenne volumique du champ de contrainte statique admissible sur le domaine V est reliée au vecteur contrainte sur la frontière ∂V par :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{V} \int_{\partial V} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \otimes^{sym} \mathbf{x} dS = \frac{1}{V} \int_{\partial V} (\mathbf{t}^0 \otimes^{sym} \mathbf{x}) dS \quad (1.4)$$

où \mathbf{n} est le vecteur unitaire normal à la frontière ∂V , \mathbf{t}^0 est le vecteur de contrainte imposé sur le bord ∂V :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}^0 \quad (1.5)$$

et l'opération \otimes^{sym} est définie par :

$$\mathbf{x} \otimes^{sym} \mathbf{y} = \frac{1}{2} (\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} + \mathbf{y} \otimes \mathbf{x}) \quad (1.6)$$

1.1.2.2 Moyenne volumique des déformations

De façon similaire, la moyenne volumique du champs de déformations sur le volume V , ne dépend que du vecteur déplacement sur le bord du domaine, ∂V :

$$\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle = \frac{1}{V} \int_{\partial V} (\mathbf{n} \otimes^{sym} \mathbf{u}) dS \quad (1.7)$$

1.1.2.3 Conditions aux limites en déplacements et contraintes

Par la suite, la solution du problème d'homogénéisation du milieu hétérogène sera obtenue soit à partir de la condition en déplacement imposé sur la frontière compatible avec une déformation uniforme sur le bord du domaine, soit à partir d'une condition de vecteur contrainte imposé sur la frontière compatible avec un champ de contraintes uniforme.

Approche en contraintes

Pour le cas où l'on impose le vecteur contrainte sur le contour ∂V compatible avec le tenseur de contraintes Σ uniforme, on obtient :

$$\mathbf{T} = \Sigma \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \partial V \quad (1.8)$$

Il en résulte que le champ de contraintes $\sigma(\mathbf{x})$ dans V vérifie la relation de moyenne spatiale :

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1}{V} \int_{\partial V} (\mathbf{t}^0 \otimes^{sym} \mathbf{x}) dS = \Sigma \quad (1.9)$$

Approche en déformations

Pour le cas dual, un champ de déplacement linéaire et fonction de la déformation constante \mathbf{E} est imposé sur la frontière ∂V :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} \quad \text{sur } \partial V \quad (1.10)$$

où \mathbf{E} est uniforme.

La relation entre la moyenne volumique du champ de déformations et la déformation constante \mathbf{E} est donnée par :

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{1}{V} \int_{\partial V} (\mathbf{n} \otimes^{sym} \mathbf{u}) dS = \mathbf{E} \quad (1.11)$$

Dans les deux situations considérées, il est clair que les champs de déformations et de contraintes locaux à l'intérieur du V.E.R. peuvent être considérés comme la superposition d'un champ constant fixé par les conditions aux limites et d'une fluctuation dépendant des propriétés élastiques locales.

1.1.2.4 Condition aux limites périodiques au contour

De nombreux résultats de ce mémoire seront obtenus pour des conditions aux limites périodiques sur le contour du V.E.R. Pour ce type de conditions aux limites, on peut également distinguer également une approche en contraintes et une approche en déformations.

Approche en contraintes

Le champ de contraintes au point \mathbf{x} de cellule de base V est considéré comme étant de la forme :

$$\sigma(\mathbf{x}) = \Sigma + \sigma^{per}(\mathbf{x}) \quad (1.12)$$

où $\sigma^{per}(\mathbf{x})$ est un champ de contraintes périodique. Il est notable qu'un tel champ de contraintes est en équilibre sur le bord du domaine, car la périodicité du tenseur des contraintes implique l'antipériodicité du vecteur contrainte sur le bord du domaine. Par ailleurs, sa moyenne de volume peut être fixée à la valeur Σ comme dans le cas de conditions aux limites fixées.

Approche en déformations

Le champ de déplacement au point \mathbf{x} de la cellule de base V est déterminé de façon similaire par la relation :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}^{per}(\mathbf{x}) \quad (1.13)$$

où $\mathbf{u}(\mathbf{x})^{per}$ est un champ de déplacement périodique. Alors, le champ de déformations au point \mathbf{x} de la cellule de base V est donné par :

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{E} + \boldsymbol{\epsilon}^{per}(\mathbf{x}) \quad (1.14)$$

1.1.2.5 Lemme de Hill-Mandel

Pour tout champ de contraintes statiquement admissible et tout champ de déformations cinématiquement admissible, on a la relation :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \rangle : \langle \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) \rangle \quad (1.15)$$

On en déduit que pour la condition au contour compatible avec une contrainte homogène, on a :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) \rangle = \boldsymbol{\Sigma} : \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle \quad (1.16)$$

On en déduit que l'énergie potentielle dans le matériau hétérogène est conservée par changement d'échelle :

$$\int_V (\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon}) dV = \langle \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon} \rangle . V = \boldsymbol{\Sigma} : \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle . V = \mathbf{E} : \boldsymbol{\Sigma} . V \quad (1.17)$$

à condition de définir le tenseur de déformation macroscopique par :

$$\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle = \mathbf{E} \quad (1.18)$$

Inversement, dans le problème dual, la conservation de l'énergie entre les échelles est vérifiée à condition de prendre pour contrainte macroscopique la moyenne volumique des contraintes :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \boldsymbol{\Sigma} \quad (1.19)$$

On voit ainsi que la définition des contraintes et déformations macroscopiques à partir de moyennes de volume est compatible avec la conservation de l'énergie et inversement.

1.2 Localisation et homogénéisation

1.2.1 Localisation

L'obtention des propriétés effectives nécessite la connaissance d'informations sur les champs de contraintes et déformations locales correspondant aux différents problèmes aux limites définis précédemment. Cette étape, correspondant au processus de "localisation" est fondamentale dans l'obtention des propriétés effectives.

- *Conditions aux limites homogènes en contraintes.*

Soit le champ de contraintes $\boldsymbol{\Sigma}$ définissant les conditions aux limites sur le contour du domaine V contenant un matériau hétérogène. Lors de la résolution du problème aux limites correspondant, il existe une relation linéaire entre les composantes du tenseur de

contrainte microscopique et celles du tenseur de contrainte macroscopique. Cette relation linéaire peut être caractérisée par un tenseur $\mathbb{B}(\mathbf{x})$ dit "tenseur de localisation" tel que :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbb{B}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\Sigma} \quad (1.20)$$

$\mathbb{B}(\mathbf{x})$ est un champ de tenseurs du quatrième ordre, dépendant non seulement de \mathbf{x} , mais de l'ensemble du champ de tenseurs définissant les propriétés élastiques en tout point. Il va donc dépendre de tous les paramètres définissant par exemple la géométrie de zones de propriétés homogènes, la répartition statistique des propriétés élastiques,... Le tenseur \mathbb{B} a les propriétés de symétrie :

$$\mathbf{B}_{ijkl} = \mathbf{B}_{jikl} = \mathbf{B}_{ijlk} \quad (1.21)$$

Compte tenu du lemme de Hill-Mandel, le tenseur de localisation vérifie :

$$\langle \mathbb{B} \rangle = \mathbb{I} \quad (1.22)$$

où \mathbb{I} est le tenseur unité du quatrième ordre, défini par :

$$\mathbb{I} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \underline{\mathbf{I}} \otimes \underline{\mathbf{I}}) \quad (1.23)$$

avec

$$\begin{cases} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})_{ijkl} = \delta_{ik} \delta_{jl} \\ (\underline{\mathbf{I}} \otimes \underline{\mathbf{I}})_{ijkl} = \delta_{il} \delta_{jk} \end{cases} \quad (1.24)$$

- *Conditions aux limites homogènes en déformations.*

De façon similaire, la relation linéaire entre le tenseur de déformations microscopique et le tenseur de déformations macroscopique peut s'écrire :

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) = \mathbb{A}(\mathbf{x}) : \mathbf{E} \quad (1.25)$$

où \mathbb{A} est le tenseur de localisation des déformations, qui a des propriétés analogues à celles de \mathbb{B} , soit :

$$\langle \mathbb{A} \rangle = \mathbb{I} \quad (1.26)$$

avec :

$$\mathbf{A}_{ijkl} = \mathbf{A}_{jikl} = \mathbf{A}_{ijlk} \quad (1.27)$$

1.2.2 Homogénéisation

L'homogénéisation est la dernière étape du processus. Elle vise à la détermination de la relation entre les contraintes macroscopiques et les déformations macroscopique afin de déterminer les propriétés élastiques "effectives" à l'échelle macroscopique.

- *Conditions aux limites en contraintes.*

Le comportement local est défini par la la relation :

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) = \mathbb{S}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \quad (1.28)$$

où $\mathbb{S}(\mathbf{x})$ est le tenseur de complaisance local.

Supposant résolu le problème de localisation, nous avons :

$$\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle = \mathbf{E} = \langle \mathbb{S} : \mathbb{B} \rangle : \boldsymbol{\Sigma} \quad (1.29)$$

Par conséquent, on obtient le tenseur de complaisance effectif $\mathbb{S}_{\boldsymbol{\sigma}}^{eff}$ sous la forme suivante :

$$\mathbb{S}_{\boldsymbol{\sigma}}^{eff} = \langle \mathbb{S}(\mathbf{x}) : \mathbb{B} \rangle \quad (1.30)$$

La détermination des propriétés effectives est donc immédiate dès que le tenseur de localisation est obtenu.

- *Conditions aux limites homogènes en déformations.*

De façon similaire, le comportement macroscopique est écrit sous la forme :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \boldsymbol{\Sigma} = \langle \mathbb{C} : \mathbb{A} \rangle : \mathbf{E} \quad (1.31)$$

où, \mathbb{C} est le tenseur d'élasticité local.

d'où, avec une définition et des notations similaires, le tenseur d'élasticité effectif $\mathbb{C}_{\boldsymbol{\epsilon}}^{eff}$ est donné sous la forme :

$$\mathbb{C}_{\boldsymbol{\epsilon}}^{eff} = \langle \mathbb{C}(\mathbf{x}) : \mathbb{A} \rangle \quad (1.32)$$

1.2.3 Estimation des propriétés effectives à partir du tenseur de localisation par phase

De nombreux problèmes, spécialement concernant les matériaux composites, sont définis à partir d'une microstructure où les matériaux sont homogènes par phase. Pour simplifier le problème, il est possible d'estimer les moyennes volumiques par phase du tenseur de localisation. Cette moyenne correspond à un tenseur de localisation qui n'est plus fonction de la position de chaque point de la microstructure, mais uniquement de la phase considérée.

Pour l'approche en déformations \mathbf{E} , l'estimation de la moyenne par phase i est donnée par :

$$\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_i = \mathbb{A}_i : \mathbf{E} \quad (1.33)$$

D'où :

$$\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle = \sum_i f_i \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_i = \sum_i f_i \mathbb{A}_i : \mathbf{E} \quad (1.34)$$

où, f_i est la fraction volumique de la phase (i), $f_i = \frac{V_i}{V}$

De l'équation (1.32), le tenseur d'élasticité effectif est donné par :

$$\mathbb{C}_{\boldsymbol{\epsilon}}^{eff} = \sum_i f_i \mathbb{C}_i : \mathbb{A}_i \quad (1.35)$$

De façon similaire pour le cas de l'approche en contraintes, le tenseur de localisation par phase est défini par :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_i = \mathbb{B}_i : \boldsymbol{\Sigma} \quad (1.36)$$

conduisant à l'estimation suivante du tenseur de complaisance effectif :

$$\mathbb{S}_{\boldsymbol{\sigma}}^{eff} = \sum_i f_i \mathbb{S}_i : \mathbb{B}_i \quad (1.37)$$

1.3 Schémas d'homogénéisation utilisés dans le mémoire

Dans cette section, nous présentons dans le cadre de la théorie de l'élasticité les différents schémas d'homogénéisation qui seront étendus par la suite à la viscoélasticité.

1.3.1 Problème d'inhomogénéité

Soit un V.E.R V de matériau élastique hétérogène composé d'inclusions plongées dans une matrice. On cherche à caractériser l'interaction entre cette inclusion et la matrice environnante et l'on considère maintenant un problème auxiliaire d'une inclusion unique située dans le domaine Ω plongée dans une matrice homogène. Le V.E.R. est soumis à des conditions aux limites correspondant à un champ de déplacement appliqué au contour, compatible avec une déformation homogène \mathbf{E} . Les champs de déplacements $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, de déformations $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x})$ et de contraintes $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ sont solutions des équations :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbb{C}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in V \\ \operatorname{div} \{\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})\} = 0 & \mathbf{x} \in V \\ \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\operatorname{grad} \mathbf{u} + {}^t \operatorname{grad} \mathbf{u}) & \mathbf{x} \in V \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}^d = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} & \mathbf{x} \in \partial V \end{cases} \quad (1.38)$$

En absence de l'inclusion, le champ de déformations interne est constant et égal à \mathbf{E} . En présence de l'inclusion, le champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ et celui de déformations, $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x})$ sont exprimés par :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{E} + \boldsymbol{\epsilon}^d(\mathbf{x}) \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\sigma}^d(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (1.39)$$

où $\boldsymbol{\epsilon}^d(\mathbf{x})$ et $\boldsymbol{\sigma}^d(\mathbf{x})$ sont les perturbations des déformations et des contraintes en raison de la présence de l'inclusion. Alors, le comportement élastique se traduit par :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbb{C}^M : (\mathbf{E} + \boldsymbol{\epsilon}^d) & \text{dans } (V - \Omega) \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbb{C}^\Omega : (\mathbf{E} + \boldsymbol{\epsilon}^d) & \text{dans } (\Omega) \end{cases} \quad (1.40)$$

et

$$\begin{cases} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) = \mathbb{D}^M : (\boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\sigma}^d) & \text{dans } (V - \Omega) \\ \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) = \mathbb{D}^\Omega : (\boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\sigma}^d) & \text{dans } (\Omega) \end{cases} \quad (1.41)$$

où \mathbb{C}^α et \mathbb{D}^α sont des tenseurs des raideurs et des souplesses, l'indice α indique la matrice ou l'inclusion.

1.3.1.1 Problème d'inclusion

Pour résoudre le problème d'inhomogénéité, on introduit un problème auxiliaire dit "problème d'inclusion" dans lequel un corps élastique homogène de module \mathbb{C}^0 dit "milieu de référence", occupe le même volume Ω sous les mêmes conditions au contour $\partial\Omega$. La solution du problème d'inhomogénéité peut être cherchée à partir de la solution d'un

problème en milieu homogène dans lequel on introduit dans le volume de l'inclusion un champ de déformations libres $\boldsymbol{\epsilon}^L(\mathbf{x})$ qui va être choisie pour que la solution soit identique au problème d'inhomogénéité. Ce nouveau problème est classiquement appelé "problème d'inclusion". Ce problème permet de retrouver la solution du problème d'inhomogénéité si le tenseur d'élasticité du milieu de référence \mathbb{C}^0 est choisi comme étant égal à celui de la matrice $\mathbb{C}^0 = \mathbb{C}^M = \mathbb{C}$. Le champ de déformations libres est choisi comme :

$$\boldsymbol{\epsilon}^L(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{dans } M \\ \boldsymbol{\epsilon}^L & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (1.42)$$

L'expression de la loi de comportement élastique dans cette nouvelle situation s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbb{C} : (\mathbf{E} + \boldsymbol{\epsilon}^d(\mathbf{x})) & \text{dans } M \\ \mathbb{C} : (\mathbf{E} + \boldsymbol{\epsilon}^d(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\epsilon}^L(\mathbf{x})) & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (1.43)$$

Des équations (1.39), (1.43), on peut déduire la relation entre la déformation libre $\boldsymbol{\epsilon}^L$ et la perturbation $\boldsymbol{\epsilon}^d$ comme suit :

$$\boldsymbol{\sigma}^d(\mathbf{x}) = \mathbb{C} : (\boldsymbol{\epsilon}^d(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\epsilon}^L(\mathbf{x})) \quad (1.44)$$

1.3.1.2 Contrainte libre

Un traitement analogue peut être mené en introduisant une "contrainte libre" $\boldsymbol{\sigma}^L(\mathbf{x})$. Cette contrainte libre (souvent dénommée "polarisation" par analogie avec un problème comparable en électrostatique) est choisie à nouveau sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}^L(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{dans } M \\ \boldsymbol{\sigma}^L & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (1.45)$$

La loi de comportement s'écrit alors :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbb{C} : (\mathbf{E} + \boldsymbol{\epsilon}^d(\mathbf{x})) & \text{dans } M \\ \mathbb{C} : (\mathbf{E} + \boldsymbol{\epsilon}^d(\mathbf{x})) - \boldsymbol{\sigma}^L(\mathbf{x}) & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (1.46)$$

La relation entre la contrainte libre et la perturbation est donnée par :

$$\boldsymbol{\sigma}^d(\mathbf{x}) = \mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon}^d(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\sigma}^L(\mathbf{x}) \quad (1.47)$$

1.3.1.3 Champ de déformation libre et de contrainte libre uniformes

Soit un milieu hétérogène V comprenant une inclusion ellipsoïdale Ω où $V - \Omega$ est homogène, élastique linéaire et infini. Un résultat important dû à Eshelby 1957 [24] est que le champ de déformations libre dans l'inclusion induit par une déformation libre uniforme $\boldsymbol{\epsilon}^L$ est également uniforme dans Ω et la relation entre le champ de déformations libre et la déformation induite est exprimée par :

$$\boldsymbol{\epsilon}^d = \mathbb{S}^\Omega : \boldsymbol{\epsilon}^L \quad (1.48)$$

où le tenseur d'ordre quatre \mathbb{S}^Ω est le tenseur d'Eshelby qui ne dépend que de la géométrie de l'inclusion ellipsoïdale et des paramètres élastiques de la matrice.

Un résultat similaire est obtenu pour la relation entre une contrainte libre uniforme imposée et la contrainte induite :

$$\boldsymbol{\sigma}^d = \mathbb{T}^\Omega : \boldsymbol{\sigma}^L \quad (1.49)$$

1.3.1.4 Condition de cohérence

Compte tenu de la sous-section précédente, le problème d'hétérogénéité peut être remplacé par un problème d'inclusion, à condition de vérifier la condition de cohérence qui exige la même réponse $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ ou $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x})$ pour les deux problèmes. Des équations (1.40) et (1.43) on déduit :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbb{C}^\Omega : \{\mathbf{E} + \boldsymbol{\epsilon}^d(\mathbf{x})\} = \mathbb{C} : \{\mathbf{E} + \boldsymbol{\epsilon}^d - \boldsymbol{\epsilon}^L\} & \text{dans } \Omega \\ \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) = \mathbb{D}^\Omega : \{\boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\sigma}^d(\mathbf{x})\} = \mathbb{D} : \{\boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\sigma}^d - \boldsymbol{\sigma}^L\} & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (1.50)$$

d'où la relation entre déformations (ou contraintes) induites et déformations (ou contraintes) libres :

$$\begin{cases} \mathbf{E} + \boldsymbol{\epsilon}^d = \mathbb{J}^\Omega : \boldsymbol{\epsilon}^L & \text{dans } \Omega \\ \boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\sigma}^d = \mathbb{K}^\Omega : \boldsymbol{\sigma}^L & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (1.51)$$

Avec :

$$\begin{cases} \mathbb{J}^\Omega = (\mathbb{C} - \mathbb{C}^\Omega)^{-1} : \mathbb{C} \\ \mathbb{K}^\Omega = (\mathbb{D} - \mathbb{D}^\Omega)^{-1} : \mathbb{D} \end{cases} \quad (1.52)$$

En introduisant le tenseur d'Eshelby (1.48) on obtient :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\epsilon}^L = [\mathbb{J}^\Omega - \mathbb{S}^\Omega]^{-1} : \mathbf{E} & \text{dans } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}^L = [\mathbb{K}^\Omega - \mathbb{T}^\Omega]^{-1} : \boldsymbol{\Sigma} & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (1.53)$$

D'où :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\epsilon} = \mathbb{J}^\Omega : [\mathbb{J}^\Omega - \mathbb{S}^\Omega]^{-1} : \mathbf{E} \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{K}^\Omega : [\mathbb{K}^\Omega - \mathbb{T}^\Omega]^{-1} : \boldsymbol{\Sigma} \end{cases} \quad (1.54)$$

Ces équations expriment la relation entre le champ obtenu dans l'inclusion pour le problème d'hétérogénéité et le champ induit à l'infini. Cette relation conduit à plusieurs solutions approchées possibles du problème de localisation. Dans ce mémoire, les solutions à base du tenseur d'Eshelby ne seront pas utilisées, mais la relation de cohérence sera étendue pour présenter différentes formes de l'homogénéisation de structures périodiques. Dans ce cas, la condition de cohérence présentera une forme plus complexe et en particulier la solution ne sera plus systématiquement explicite.

1.3.2 Schéma auto-cohérent généralisé (ACG)

Les solutions relatives à une interaction simplifiée entre inclusions ellipsoïdales et matrice peuvent se présenter de plusieurs façons suivant le type d'interaction retenue. Pour l'extension au cas de la viscoélasticité qui constitue l'objectif de ce mémoire, le schéma de Mori-Tanaka [?] est particulièrement attractif car il permet une extension simple au cas de la viscoélasticité, la solution dans l'espace de Laplace-Carson étant obtenue sous forme de fraction rationnelle. Par contre, il est connu que la solution obtenue par le schéma de Mori-Tanaka se détériore à fortes concentrations, d'où la mise en oeuvre du schéma autocohérent généralisé [16],[33]. Pour le schéma autocohérent généralisé, la solution du problème d'élasticité ne se présente plus sous forme de fraction rationnelle dans l'espace

de Laplace-Carson. Différentes solutions plus ou moins complexes existent pour effectuer la transformée de Laplace inverse, et nous présenterons dans le chapitre 3 une alternative simple aux solutions existantes. Cette sous-section sera donc consacrée à la présentation de ce modèle dans le cas de l'élasticité.

L'esprit est proche de celui adopté pour le problème d'inclusion décrit précédemment, qui permet d'obtenir une solution approchée du problème de localisation. Toutefois, pour de nombreux problèmes de type "inclusion-matrice", il est nécessaire de conserver la connexité de la matrice à fortes concentrations. Il est alors possible d'étudier un domaine hétérogène constitué d'une inclusion homogène sphérique entourée par une zone constituée du matériau constituant la matrice, l'ensemble étant entouré, comme pour le schéma autocohérent, par un domaine infini constitué par un matériau possédant les propriétés élastiques du "milieu homogène équivalent". Ce schéma est bien adapté pour prévoir les propriétés de matériaux de type "inclusion-matrice". La solution peut être étendue sans difficulté au cas général d'une inclusion sphérique entourée de couches sphériques successives d'épaisseur variable. Nous présenterons donc ci-après le cas général du schéma multi-couche.

Soit un milieu hétérogène constitué de n phases élastiques isotropes. On considère le système constitué d'une sphère centrale entourée par $n - 1$ couches sphériques homogènes concentriques. Chaque matériau i est caractérisé par le module d'incompressibilité κ_i , le module de cisaillement μ_i et compris entre les sphères de rayons R_{i-1} et R_i , avec $R_0 = 0$. La concentration de la phase i est donnée par $f_i = \frac{R_i^3 - R_{i-1}^3}{R_n^3}$. Comme dans le schéma autocohérent, le milieu effectif correspond à la phase $n + 1$ et est caractérisé par les modules effectifs d'incompressibilité κ_{eff} et de cisaillement μ_{eff} recherchés.

1.3.2.1 Problème de compressibilité

On impose à l'infini une condition en déplacement correspondant à une déformation homogène isotrope :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \epsilon_0 \cdot \mathbf{x} \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (1.55)$$

où ϵ_0 est constante.

Le champs de déplacements et de contraintes solutions dans chaque phase k sont donnés par :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_r^{(k)} = A_k r + \frac{B_k}{r^2} \\ \sigma_{rr}^{(k)} = 3\kappa_k A_k - \frac{4\mu_k}{r^3} B_k \\ \sigma_{\theta\theta}^{(k)} = 3\kappa_k A_k + \frac{2\mu_k}{r^3} B_k \\ \sigma_{\theta\theta}^{(k)} = \sigma_{\phi\phi}^{(k)} \end{cases} \quad (1.56)$$

La condition de continuité à l'interface supposée parfaite entre la phase k et la phase $k + 1$ peut s'écrire :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_r^{(k+1)}(R_k) = \mathbf{u}_r^{(k)}(R_k) \\ \sigma_{rr}^{(k+1)}(R_k) = \sigma_{rr}^{(k)}(R_k) \end{cases} \quad (1.57)$$

ce qui donne :

$$\mathbf{J}_{k+1}(R_k) \begin{Bmatrix} A_{k+1} \\ B_{k+1} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}_k(R_k) \begin{Bmatrix} A_k \\ B_k \end{Bmatrix} \quad (1.58)$$

où la matrice $\mathbf{J}_i(R_j)$ est définie par :

$$\mathbf{J}_i(R_j) = \begin{bmatrix} R_j & R_j^{-2} \\ 3\kappa_i & -4\mu_i R_j^{-3} \end{bmatrix} \quad (1.59)$$

Pour la première phase ($k = 1$), le terme en B_k doit s'annuler pour que le déplacement reste fini à l'origine et le terme en A_k doit être égal à ϵ_0 lorsque $k = n + 1$ pour vérifier la condition à l'infini, ce qui conduit aux conditions :

$$\begin{cases} B_1 = 0 \\ A_{n+1} = \epsilon_0 \end{cases} \quad (1.60)$$

Une dernière condition est apportée en écrivant que l'énergie élastique du domaine sphérique contenant les n matériaux doit être la même que l'énergie élastique d'un domaine identique rempli du matériau homogène équivalent. Cette condition dite de neutralité énergétique donne :

$$B_{n+1} = 0 \quad (1.61)$$

On peut alors construire par récurrence une relation entre $\{A_{n+1}, B_{n+1}\}$ et $\{A_1, B_1\}$:

$$\begin{cases} \begin{Bmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}_{n+1}^{-1}(R_n) \cdot \mathbf{J}_n(R_n) \begin{Bmatrix} A_n \\ B_n \end{Bmatrix} \\ \dots \\ \begin{Bmatrix} A_k \\ B_k \end{Bmatrix} = \mathbf{J}_k^{-1}(R_{k-1}) \cdot \mathbf{J}_{k-1}(R_{k-1}) \begin{Bmatrix} A_{k-1} \\ B_{k-1} \end{Bmatrix} \\ \dots \\ \begin{Bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{J}_2^{-1}(R_1) \cdot \mathbf{J}_1(R_1) \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{Bmatrix} \end{cases} \quad (1.62)$$

On obtient donc :

$$\mathbf{J}_{n+1}(R_n) \begin{Bmatrix} \epsilon_0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \mathbf{J}_n(R_n) \cdot \mathbf{Q}^{n-1} \begin{Bmatrix} A_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.63)$$

avec :

$$\mathbf{Q}^{n-1} = \prod_{k=n-1}^1 \mathbf{N}^k \quad (1.64)$$

et :

$$\mathbf{N}^k = \mathbf{J}_{k+1}^{-1}(R_k) \mathbf{J}_k(R_k) \quad (1.65)$$

La relation (1.63) peut être exploitée pour déterminer l'expression du module d'incompressibilité effectif. En effet :

$$\begin{Bmatrix} R_n \\ 3\kappa_{eff} \end{Bmatrix} \epsilon_0 = \begin{bmatrix} R_n & R_n^{-2} \\ 3\kappa_n & -4\mu_n R_n^{-3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{11}^{n-1} \\ Q_{21}^{n-1} \end{Bmatrix} A_1 \quad (1.66)$$

ce qui donne finalement :

$$\kappa_{eff} = \frac{3\kappa_n R_n^3 Q_{11}^{(n-1)} - 4\mu_n Q_{21}^{(n-1)}}{3 \left(R_n^3 Q_{11}^{(n-1)} + Q_{21}^{(n-1)} \right)} \quad (1.67)$$

1.3.2.2 Problème de cisaillement

On impose à l'infini une condition en déplacement associée à une distorsion homogène :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \gamma_0 x \mathbf{e}_x - \gamma_0 y \mathbf{e}_y \quad (1.68)$$

En coordonnées sphériques, les composantes du champ de déplacement sont données par :

$$\begin{cases} u_r = \gamma_0 r \sin^2 \theta \cos 2\phi \\ u_\theta = \gamma_0 r \sin \theta \cos \theta \cos 2\phi \\ u_\phi = -\gamma_0 r \sin \theta \sin 2\phi \end{cases} \quad (1.69)$$

Le vecteur déplacement $\mathbf{u}^{(k)}$ et le vecteur contrainte $\mathbf{T}^{(k)}$ (pour une normale radiale) dans chaque phase k sont donnés par :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{(k)} = u_r^{(k)} \mathbf{e}_r + u_\theta^{(k)} \mathbf{e}_\theta + u_\phi^{(k)} \mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{T}^k(\mathbf{e}_r) = \sigma_{rr}^{(k)} \mathbf{e}_r + \sigma_{r\theta}^{(k)} \mathbf{e}_\theta + \sigma_{r\phi}^{(k)} \mathbf{e}_\phi \end{cases} \quad (1.70)$$

avec :

$$\begin{cases} u_r^{(k)} = U_r^{(k)}(r) \sin^2 \theta \cos 2\phi \\ u_\theta^{(k)} = U_\theta^{(k)}(r) \sin \theta \cos \theta \cos 2\phi \\ u_\phi^{(k)} = U_\phi^{(k)}(r) \sin \theta \sin 2\phi \end{cases} \quad (1.71)$$

où :

$$\begin{cases} U_r^{(k)}(r) = A_k r - \frac{6\nu_k}{1-2\nu_k} B_k r^3 + \frac{3}{r^4} C_k + \frac{5-4\nu_k}{(1-2\nu_k)r^2} D_k \\ U_\theta^{(k)}(r) = A_k r - \frac{7-4\nu_k}{1-2\nu_k} B_k r^3 - \frac{2}{r^4} C_k + \frac{2}{r^2} D_k \\ U_\phi^{(k)}(r) = -U_\theta^{(k)}(r) \end{cases} \quad (1.72)$$

et :

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^{(k)} = 2\mu_k \left(A_k + \frac{3\nu_k}{1-2\nu_k} B_k r^2 - \frac{12}{r^5} C_k - \frac{2(5-\nu_k)}{(1-2\nu_k)r^3} D_k \right) \sin^2 \theta \cos 2\phi \\ \sigma_{r\theta}^{(k)} = 2\mu_k \left(A_k - \frac{7+2\nu_k}{1-2\nu_k} B_k r^2 + \frac{8}{r^5} C_k + \frac{2(1+\nu_k)}{(1-2\nu_k)r^3} D_k \right) \sin \theta \cos \theta \cos 2\phi \\ \sigma_{r\phi}^{(k)} = -2\mu_k \left(A_k - \frac{7+2\nu_k}{1-2\nu_k} B_k r^2 + \frac{8}{r^5} C_k + \frac{2(1+\nu_k)}{(1-2\nu_k)r^3} D_k \right) \sin \theta \sin 2\phi \end{cases} \quad (1.73)$$

Les conditions à chaque interface entre une phase k et une phase $k+1$ donnent :

$$\mathbf{L}_{k+1}(R_k) \begin{pmatrix} A_{k+1} \\ B_{k+1} \\ C_{k+1} \\ D_{k+1} \end{pmatrix} = \mathbf{L}_k(R_k) \begin{pmatrix} A_k \\ B_k \\ C_k \\ D_k \end{pmatrix} \quad (1.74)$$

où :

$$\mathbf{L}_k(r) = \begin{bmatrix} r & -\frac{6\nu_k r^3}{1-2\nu_k} & \frac{3}{r^4} & \frac{5-4\nu_k}{(1-2\nu_k)r^2} \\ r & -\frac{(7-4\nu_k)r^3}{1-2\nu_k} & -\frac{2}{r^4} & \frac{2}{r^2} \\ \mu_k & \frac{3\nu_k \mu_k r^2}{(1-2\nu_k)} & -\frac{12\mu_k}{r^5} & -\frac{2(5-\nu_k)\mu_k}{(1-2\nu_k)r^3} \\ \mu_k & -\frac{(7-2\nu_k)\mu_k r^2}{1-2\nu_k} & \frac{8\mu_k}{r^5} & \frac{2(1+\nu_k)\mu_k}{(1-2\nu_k)r^3} \end{bmatrix} \quad (1.75)$$

Pour la première phase ($k = 1$) et pour le milieu effectif ($k = n + 1$), des conditions analogues à celles décrites pour le cas du problème d'incompressibilité donnent :

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ D_1 = 0 \\ A_{n+1} = \gamma_0 \\ B_{n+1} = 0 \end{cases} \quad (1.76)$$

Par ailleurs, la condition de neutralité énergétique donne :

$$D_{n+1} = 0 \quad (1.77)$$

La relation de récurrence permet d'obtenir une relation entre $\{ A_{n+1} \ B_{n+1} \ C_{n+1} \ D_{n+1} \}$ et $\{ A_1 \ B_1 \ C_1 \ D_1 \}$, ce qui donne finalement :

$$\begin{Bmatrix} \gamma_0 \\ 0 \\ C_{n+1} \\ 0 \end{Bmatrix} = \mathbf{M}^{(n)} \dots \mathbf{M}^{(k)} \dots \mathbf{M}^{(1)} \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \mathbf{P}^{(n)} \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.78)$$

avec :

$$\mathbf{P}^{(n)} = \prod_{k=1}^n \mathbf{M}^{(n-k+1)} \quad (1.79)$$

et :

$$\mathbf{M}^{(k)} = \mathbf{L}_{k+1}^{-1}(R_k) \mathbf{L}_k(R_k) \quad (1.80)$$

Ainsi, le système d'équations (1.78) devient :

$$\begin{Bmatrix} \gamma_0 \\ 0 \\ C_{n+1} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{11}^{(n)} A_1 + P_{12}^{(n)} B_1 \\ P_{21}^{(n)} A_1 + P_{22}^{(n)} B_1 \\ P_{31}^{(n)} A_1 + P_{32}^{(n)} B_1 \\ P_{41}^{(n)} A_1 + P_{42}^{(n)} B_1 \end{Bmatrix} \quad (1.81)$$

Les deux premières équations sont exploitées pour déterminer A_1 et B_1 :

$$\begin{bmatrix} P_{11}^{(n)} & P_{12}^{(n)} \\ P_{21}^{(n)} & P_{22}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.82)$$

Donc :

$$\begin{cases} A_1 = \frac{P_{22}^{(n)}}{P_{11}^{(n)}P_{22}^{(n)} - P_{12}^{(n)}P_{21}^{(n)}} \gamma_0 \\ B_1 = -\frac{P_{21}^{(n)}}{P_{11}^{(n)}P_{22}^{(n)} - P_{12}^{(n)}P_{21}^{(n)}} \gamma_0 \end{cases} \quad (1.83)$$

On explicite le système (1.78) en faisant apparaître $\mathbf{M}^{(n)}$ qui contient les propriétés du milieu effectif et $\mathbf{P}^{(n-1)}$ qui contient celles des autres phases :

$$\begin{pmatrix} \gamma_0 \\ 0 \\ C_{n+1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}^{(n)} & M_{12}^{(n)} & M_{13}^{(n)} & M_{14}^{(n)} \\ 0 & M_{22}^{(n)} & M_{23}^{(n)} & M_{24}^{(n)} \\ M_{31}^{(n)} & M_{32}^{(n)} & M_{33}^{(n)} & M_{34}^{(n)} \\ M_{41}^{(n)} & M_{42}^{(n)} & 0 & M_{44}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} P_{11}^{(n-1)}A_1 + P_{12}^{(n-1)}B_1 \\ P_{21}^{(n-1)}A_1 + P_{22}^{(n-1)}B_1 \\ P_{31}^{(n-1)}A_1 + P_{32}^{(n-1)}B_1 \\ P_{41}^{(n-1)}A_1 + P_{42}^{(n-1)}B_1 \end{pmatrix} \quad (1.84)$$

on substitue A_1 et B_1 par leurs expressions (1.83) :

$$\begin{pmatrix} \gamma_0 \\ 0 \\ C_{n+1} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\gamma_0}{P_{11}^{(n)}P_{22}^{(n)} - P_{12}^{(n)}P_{21}^{(n)}} \begin{bmatrix} M_{11}^{(n)} & M_{12}^{(n)} & M_{13}^{(n)} & M_{14}^{(n)} \\ 0 & M_{22}^{(n)} & M_{23}^{(n)} & M_{24}^{(n)} \\ M_{31}^{(n)} & M_{32}^{(n)} & M_{33}^{(n)} & M_{34}^{(n)} \\ M_{41}^{(n)} & M_{42}^{(n)} & 0 & M_{44}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} P_{11}^{(n-1)}P_{22}^{(n-1)} - P_{12}^{(n-1)}P_{21}^{(n-1)} \\ P_{21}^{(n-1)}P_{22}^{(n-1)} - P_{22}^{(n-1)}P_{21}^{(n-1)} \\ P_{31}^{(n-1)}P_{22}^{(n-1)} - P_{32}^{(n-1)}P_{21}^{(n-1)} \\ P_{41}^{(n-1)}P_{22}^{(n-1)} - P_{42}^{(n-1)}P_{21}^{(n-1)} \end{pmatrix} \quad (1.85)$$

On exploite la dernière équation qui correspond à la condition d'autocohérence $D_{n+1} = 0$ du système ci-dessus ce qui donne :

$$P_{41}^{(n)}P_{22}^{(n)} - P_{42}^{(n)}P_{21}^{(n)} = 0 \quad (1.86)$$

où :

$$\begin{cases} P_{41}^{(n)} = M_{41}^{(n)}P_{11}^{n-1} + M_{42}^{(n)}P_{21}^{n-1} + M_{44}^{(n)}P_{41}^{n-1} \\ P_{42}^{(n)} = M_{41}^{(n)}P_{12}^{n-1} + M_{42}^{(n)}P_{22}^{n-1} + M_{44}^{(n)}P_{42}^{n-1} \end{cases} \quad (1.87)$$

Par ailleurs, l'expression de la matrice \mathbf{P}^n de (1.79) donne :

$$\begin{cases} P_{21}^{(n)} = M_{22}^{(n)}P_{21}^{n-1} + M_{23}^{(n)}P_{31}^{n-1} + M_{24}^{(n)}P_{41}^{n-1} \\ P_{22}^{(n)} = M_{22}^{(n)}P_{22}^{n-1} + M_{23}^{(n)}P_{32}^{n-1} + M_{24}^{(n)}P_{42}^{n-1} \end{cases} \quad (1.88)$$

La condition d'auto-cohérence devient alors :

$$\begin{aligned} & M_{41}^{(n)} \left(M_{22}^{(n)}Z_{12}^{n-1} + M_{23}^{(n)}Z_{13}^{n-1} + M_{24}^{(n)}Z_{14}^{n-1} \right) + M_{42}^{(n)}M_{23}^{(n)}Z_{23}^{n-1} + \\ & \left(M_{42}^{(n)}M_{24}^{(n)} - M_{44}^{(n)}M_{22}^{(n)} \right) Z_{24}^{n-1} + M_{44}^{(n)}M_{23}^{(n)}Z_{43}^{(n-1)} = 0 \end{aligned} \quad (1.89)$$

avec :

$$Z_{\alpha\beta}^{n-1} = P_{\alpha 1}^{(n-1)}P_{\beta 2}^{(n-1)} - P_{\alpha 2}^{(n-1)}P_{\beta 1}^{(n-1)} \quad (1.90)$$

Cette condition donne alors une équation du second ordre à résoudre pour déterminer μ_{eff} :

$$A \left(\frac{\mu_{eff}}{\mu_n} \right)^2 + B \left(\frac{\mu_{eff}}{\mu_n} \right) + C = 0 \quad (1.91)$$

où les coefficients A , B , C sont définis par :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = 4(1 - 2\nu_n) \left[(7 - 10\nu_n) Z_{12}^{(n-1)} + 5R_n^{-7} (1 - 2\nu_n) Z_{13}^{(n-1)} \right] \\ \quad + 4(1 - 2\nu_n) \left[3R_n^{-5} \left(Z_{14}^{(n-1)} - 7Z_{23}^{(n-1)} \right) + 4R_n^{-10} (4 - 5\nu_n) Z_{43}^{(n-1)} \right] \\ \quad + 20R_n^{-3} (7 - 12\nu_n + 8\nu_n^2) Z_{42}^{(n-1)} \\ B = -(1 - 2\nu_n) \left[3(7 - 15\nu_n) Z_{12}^{(n-1)} + 40R_n^{-7} (1 - 2\nu_n) Z_{13}^{(n-1)} \right] \\ \quad - 8(1 - 2\nu_n) \left[3R_n^{-5} \left(Z_{14}^{(n-1)} - 7Z_{23}^{(n-1)} \right) + R_n^{-10} (1 - 5\nu_n) Z_{43}^{(n-1)} \right] \\ \quad - 60R_n^{-3} (3 - \nu_n) \nu_n Z_{42}^{(n-1)} \\ C = -(1 - 2\nu_n) \left[(7 + 5\nu_n) Z_{12}^{(n-1)} - 20R_n^{-7} (1 - 2\nu_n) Z_{13}^{(n-1)} \right] \\ \quad + 4(1 - 2\nu_n) \left[3R_n^{-5} \left(Z_{14}^{(n-1)} - 7Z_{23}^{(n-1)} \right) - 2R_n^{-10} (7 - 5\nu_n) Z_{43}^{(n-1)} \right] \\ \quad + 10R_n^{-3} (7 - \nu_n^2) Z_{42}^{(n-1)} \end{array} \right. \quad (1.92)$$

Le module homogénéisé correspond à la racine positive de cette équation :

$$\mu_{eff} = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \mu_n \quad (1.93)$$

Cette solution sera utilisée dans le chapitre 3 pour la résolution d'un problème similaire lorsque les constituants sont viscoélastiques.

1.3.3 Homogénéisation de milieux périodiques

Dans la section précédente, on a présenté les méthodes d'estimation de comportement macroscopique d'un milieu hétérogène où l'interaction entre les différentes phases est schématiquement représentée par l'inclusion sphérique composite. Le cas du schéma autocohérent correspond au cas de phases réparties aléatoirement. Le schéma autocohérent généralisé correspond à une schématisation de la distribution des différentes phases qui peut être loin de la distribution réelle. La prise en compte de distributions réelles d'inclusions peut être réalisée en utilisant des méthodes permettant de trouver la solution sous forme de série de Fourier. Deux méthodes utilisant l'expression des solutions dans l'espace de Fourier et le tenseur de Green dans le même espace ont été introduites pour traiter le cas de l'homogénéisation en élasticité. Dans cette section, la formulation du problème d'homogénéisation en milieu hétérogène périodique dans l'espace de Fourier est présentée, conduisant à l'expression de la condition de cohérence. Cette condition servira de base aux méthodes de résolution du problème d'élasticité en milieu hétérogène traitées dans les sections suivantes.

1.3.3.1 Microstructure périodique et problème de cellule

L'obtention du problème de cellule pour le cas de l'élasticité peut être traitée en utilisant une méthode de développement asymptotique aux petites échelles. Dans la suite, le problème sur une cellule de base sera présenté sans introduire de développement asymptotique, mais la formulation décrite est strictement compatible avec celle obtenue à l'aide de développements asymptotique.

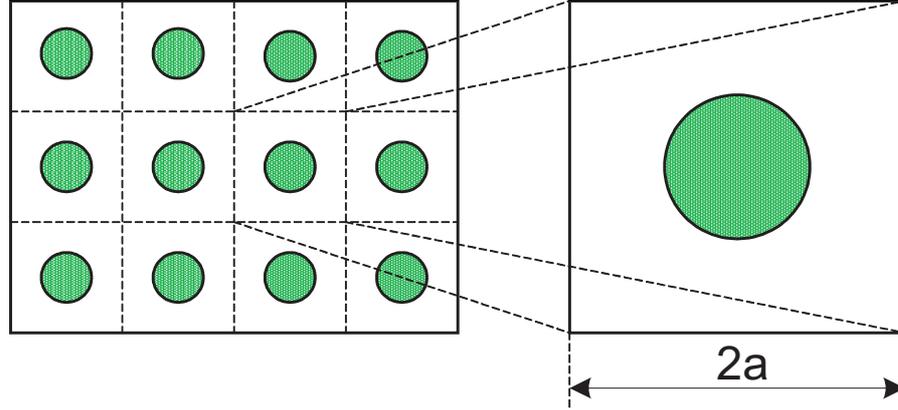


FIGURE 1.3 – Cellule de base d'un milieu hétérogène périodique

En pratique, tout se passe comme si la cellule de base (figure 1.3) était un V.E.R. auquel sont appliquées des conditions de périodicité en contraintes et déformations. Un milieu périodique est donc défini par une cellule de base permettant de décrire le milieu périodique par translation le long de trois directions de l'espace. Il n'y a pas unicité de la cellule de base et l'on choisira la cellule la plus simple possible, cette cellule possédant souvent des plans de symétrie. On note $2a_i$ ($i = 1, 2, 3$), la dimension d'une cellule de base parallélépipédique dans la direction x_i . Alors, les champs de déplacement $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$, de déformations $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x})$ et de contraintes $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ doivent satisfaire les relations suivantes :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \{ \nabla \otimes \mathbf{u}(\mathbf{x}) + (\nabla \otimes \mathbf{u}(\mathbf{x}))^t \} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbb{C}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}_{per}(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (1.94)$$

où \mathbf{u}_{per} est périodique et où $\mathbb{C}(\mathbf{x})$ est le tenseur d'élasticité vérifiant la condition de périodicité :

$$\begin{cases} \mathbb{C}(\mathbf{x}) = \mathbb{C}(\mathbf{x} + \mathbf{d}) \\ \mathbf{d} = \sum_{i=1}^3 2n_i a_i \mathbf{e}_i \end{cases} \quad (1.95)$$

où n_i est un nombre entier arbitraire. \mathbf{u}^{per} est un champ de déplacement périodique et par conséquent les champs de déformations et de contraintes sont périodiques :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x} + \mathbf{d}) \\ \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x} + \mathbf{d}) = \mathbf{E} + \boldsymbol{\epsilon}_{per} \end{cases} \quad (1.96)$$

où ϵ_{per} dérive de \mathbf{u}_{per}

1.3.3.2 Transformée de Fourier discrète

En raison de la périodicité du milieu, la solution du problème peut être développée en séries de Fourier, comme proposé par T.Iwakuma et S.Nemat-Nasser [40] ou H.Moulinec et P.Suquet ([52],[58]). Cette série est la forme discrète de la transformée de Fourier d'une fonction périodique

Soit une fonction $f(\mathbf{x})$ périodique sur le domaine V défini par :

$$V = \{\mathbf{x}, -a_j \leq x_j \leq a_j (j = 1, 2, 3)\} \quad (1.97)$$

avec la condition de périodicité : $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{d})$.

Cette fonction peut être développée en série de Fourier comme suit :

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\xi} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi\mathbf{x}} \quad (1.98)$$

où les coefficients \widehat{f} sont obtenus à partir de la fonction $f(\mathbf{x})$ par :

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{V} \int_V f(\mathbf{x}) e^{-i\xi\mathbf{x}} dV \quad (1.99)$$

où les composantes des vecteurs d'onde sont définis par :

$$\xi_j = \frac{\pi n_j}{a_j} \quad (n_j = 0, \pm 1, \dots \pm \infty) \quad (1.100)$$

Ces coefficients sont uniques et la somme infinie va converger en tout point de V en particulier si la fonction $f(\mathbf{x})$ est bornée dans V .

Par la suite, on nommera transformée de Fourier le résultat de la série de Fourier. Cette transformée vérifie les propriétés classiques :

+ La transformée de Fourier de la dérivation d'une fonction $f(\mathbf{x})$ est donnée par :

$$\widehat{f_{,x_j}}(\mathbf{x}) = i \cdot \xi_j \widehat{f}(\xi) \quad (1.101)$$

+ La transformée de Fourier du produit de convolution est donnée par :

$$\widehat{f(\mathbf{x}) * g(\mathbf{x})} = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi) \quad (1.102)$$

1.3.3.3 Champs de déformations et de contraintes dans l'espace de Fourier

On considère la partie périodique \mathbf{u}_{per} du champ de déplacement \mathbf{u} et l'on considère que ce champ est de moyenne nulle (le déplacement moyen est donc supposé nul). La contribution périodique du champ de déplacement est alors donnée par :

$$\mathbf{u}_{per}(\mathbf{x}) = \sum_{\xi} \widehat{\mathbf{u}_{per}}(\xi) e^{i\xi\mathbf{x}} \quad (1.103)$$

où :

$$\widehat{\mathbf{u}}_{per}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{u}_{per}(\mathbf{x}) e^{-i\boldsymbol{\xi}\mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad (1.104)$$

l'accent sur \sum indique que la somme élimine le point $\boldsymbol{\xi} = 0$.

Pout traiter le champ de déformations dans l'espace de Fourier associé aux déplacements périodiques on cherche la transformée de Fourier du gradient de déplacement :

$$\nabla \otimes \widehat{\mathbf{u}}_{per}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{V} \int_V \nabla \otimes \mathbf{u}_{per}(\mathbf{x}) e^{-i\boldsymbol{\xi}\mathbf{x}} dV \quad (1.105)$$

Par le théorème de Gauss (1.105) est réécrite :

$$\nabla \otimes \widehat{\mathbf{u}}_{per}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{V} \int_{\partial V} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{u}_{per}(\mathbf{x}) e^{-i\boldsymbol{\xi}\mathbf{x}} dS - \frac{1}{V} \int_V \nabla \cdot \{e^{-i\boldsymbol{\xi}\mathbf{x}}\} \otimes \mathbf{u}_{per}(\mathbf{x}) dV \quad (1.106)$$

où $\boldsymbol{\nu}$ est le vecteur normal unitaire sur ∂V .

$\mathbf{u}_{per}(\mathbf{x})$ étant périodique, nous avons :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{per}(\mathbf{x} = a_i) = \mathbf{u}_{per}(\mathbf{x} = -a_i) \\ e^{i\boldsymbol{\xi}\mathbf{x}}(\mathbf{x} = a_i) = e^{i\boldsymbol{\xi}\mathbf{x}}(\mathbf{x} = -a_i) \\ \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x} = a_i) = -\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x} = -a_i) \end{cases} \quad (1.107)$$

Alors, l'intégration sur le contour ∂V est nulle, compte tenu de la périodicité de $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{per}$:

$$\int_{\partial V} \boldsymbol{\nu} \otimes \mathbf{u}_{per}(\mathbf{x}) e^{-i\boldsymbol{\xi}\mathbf{x}} dS = 0 \quad (1.108)$$

Le gradient du champ de déplacement devient :

$$\nabla \otimes \widehat{\mathbf{u}}_{per}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{V} \int_V i\boldsymbol{\xi} e^{i\boldsymbol{\xi}\mathbf{x}} \otimes \mathbf{u}_{per}(\mathbf{x}) dV \quad (1.109)$$

Dans cette expression, $e^{i\boldsymbol{\xi}\mathbf{x}}$ est un scalaire et l'intégration est comptée sur le domaine de \mathbf{x} . On obtient donc :

$$\nabla \otimes \widehat{\mathbf{u}}_{per}(\boldsymbol{\xi}) = i\boldsymbol{\xi} \otimes \left\{ \frac{1}{V} \int_V \mathbf{u}_{per}(\mathbf{x}) e^{i\boldsymbol{\xi}\mathbf{x}} dV \right\} = i\boldsymbol{\xi} \otimes \widehat{\mathbf{u}}_{per}(\boldsymbol{\xi}) \quad (1.110)$$

La transformée de Fourier de $\nabla \otimes \mathbf{u}$ est donnée par :

$$\nabla \otimes \widehat{\mathbf{u}}_{per}(\mathbf{x}) = \sum_{\boldsymbol{\xi}}' i\boldsymbol{\xi} \otimes \widehat{\mathbf{u}}_{per}(\boldsymbol{\xi}) e^{i\boldsymbol{\xi}\mathbf{x}} \quad (1.111)$$

On en déduit l'expression de la transformée de Fourier du champ de déformations :

$$\boldsymbol{\epsilon}_{per}(\mathbf{x}) = \sum_{\boldsymbol{\xi}}' \widehat{\boldsymbol{\epsilon}}_{per}(\boldsymbol{\xi}) e^{i\boldsymbol{\xi}\mathbf{x}} \quad (1.112)$$

avec :

$$\widehat{\boldsymbol{\epsilon}}_{per}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{i}{2} \{ \boldsymbol{\xi} \otimes \widehat{\mathbf{u}}_{per}(\boldsymbol{\xi}) + \widehat{\mathbf{u}}_{per}(\boldsymbol{\xi}) \otimes \boldsymbol{\xi} \} \quad (1.113)$$

Pour contruire la transformée de Fourier du champ de contraintes, on utilise la loi de comportement élastique. Le tenseur d'élasticité périodique $\mathbb{C}(\mathbf{x})$ est développé en série de Fourier suivant :

$$\mathbb{C}(\mathbf{x}) = \sum_{\boldsymbol{\xi}} \widehat{\mathbb{C}}(\boldsymbol{\xi}) e^{i\boldsymbol{\xi}\mathbf{x}} \quad (1.114)$$

où :

$$\widehat{\mathbb{C}}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{V} \int_V \mathbb{C}(\mathbf{x}) e^{-i\boldsymbol{\xi}\mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad (1.115)$$

La loi de comportement permet le calcul du champ de contraintes :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) &= \mathbb{C}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) \\ &= \left\{ \sum_{\boldsymbol{\xi}} \widehat{\mathbb{C}}(\boldsymbol{\xi}) e^{i\boldsymbol{\xi}\mathbf{x}} \right\} : \left\{ \sum_{\boldsymbol{\zeta}} \widehat{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{\zeta}) e^{i\boldsymbol{\zeta}\mathbf{x}} \right\} \end{aligned} \quad (1.116)$$

Dans la formule (1.116) on peut réarranger la somme infinie et on obtient donc le développement du champ de contraintes sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \sum_{\boldsymbol{\xi}} \left\{ \sum_{\boldsymbol{\zeta}} \widehat{\mathbb{C}}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\zeta}) : \widehat{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{\zeta}) \right\} e^{i\boldsymbol{\xi}\mathbf{x}} \quad (1.117)$$

où la transformée de Fourier du champ de contraintes est définie par :

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\xi}) &= \sum_{\boldsymbol{\zeta}} \widehat{\mathbb{C}}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\zeta}) : \widehat{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{\zeta}) \\ &= i \sum_{\boldsymbol{\zeta}} \widehat{\mathbb{C}}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\zeta}) : \{ \boldsymbol{\zeta} \otimes \widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\zeta}) \} \end{aligned} \quad (1.118)$$

1.3.3.4 Homogénéisation

La procédure d'homogénéisation du milieu périodique est effectuée de façon similaire à celle décrite précédemment lors de la description du problème d'hétérogénéité unique. On introduit le champ de déformations libres $\boldsymbol{\epsilon}^L$ ou de contraintes libres $\boldsymbol{\sigma}^L$ qui sont à introduire dans un milieu homogène de tenseur d'élasticité \mathbb{C}^0 dit "milieu de référence" pour obtenir les déformations et contraintes obtenus dans le milieu hétérogène de tenseur d'élasticité variable $\mathbb{C}(\mathbf{x})$. Les déformations (ou contraintes) libres doivent être périodiques :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\epsilon}^L(\mathbf{x} + \mathbf{d}) = \boldsymbol{\epsilon}^L(\mathbf{x}) \\ \boldsymbol{\sigma}^L(\mathbf{x} + \mathbf{d}) = \boldsymbol{\sigma}^L(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (1.119)$$

Alors, la série de Fourier de ces champs de déformations et de contraintes libres sont donnés par :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^L(\mathbf{x}) = \sum_{\boldsymbol{\xi}} \widehat{\boldsymbol{\sigma}}^L(\boldsymbol{\xi}) e^{i\boldsymbol{\xi}\mathbf{x}} \\ \boldsymbol{\epsilon}^L(\mathbf{x}) = \sum_{\boldsymbol{\xi}} \widehat{\boldsymbol{\epsilon}}^L(\boldsymbol{\xi}) e^{i\boldsymbol{\xi}\mathbf{x}} \end{cases} \quad (1.120)$$

où :

$$\begin{cases} \widehat{\boldsymbol{\sigma}}^L(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma}^L(\mathbf{x}) e^{-i\boldsymbol{\xi}\mathbf{x}} dV \\ \widehat{\boldsymbol{\epsilon}}^L(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\epsilon}^L(\mathbf{x}) e^{-i\boldsymbol{\xi}\mathbf{x}} dV \end{cases} \quad (1.121)$$

Par suite, le champ de contraintes est défini par :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbb{C}^0 : (\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\epsilon}^L(\mathbf{x})) \quad (1.122)$$

Dans l'espace de Fourier, cette expression devient :

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\xi}) &= \mathbb{C}^0 : (\widehat{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{\xi}) - \widehat{\boldsymbol{\epsilon}}^L(\boldsymbol{\xi})) \\ &= \mathbb{C}^0 : (i\boldsymbol{\xi} \otimes \widehat{\mathbf{u}}_{per}(\boldsymbol{\xi}) + \mathbf{E} - \widehat{\boldsymbol{\epsilon}}^L(\boldsymbol{\xi})) \end{aligned} \quad (1.123)$$

L'équation d'équilibre (1.94) donne :

$$i\boldsymbol{\xi} \cdot \widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\xi}) = 0 \quad (1.124)$$

En introduisant l'expression ci-dessus pour $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}$ et en notant que la dérivée du terme en \mathbf{E} s'annule, l'inversion du système précédent pour les composantes du déplacement donne :

$$\widehat{\mathbf{u}}_{per}(\boldsymbol{\xi}) = -i\boldsymbol{\xi} (\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbb{C}^0 \cdot \boldsymbol{\xi})^{-1} \cdot \mathbb{C}^0 : \widehat{\boldsymbol{\epsilon}}^L(\boldsymbol{\xi}) \quad (1.125)$$

Compte tenu de la symétrie mineure de \mathbb{C}^0 sur les deux premiers indices, la relation de compatibilité donne :

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{\epsilon}}_{per}(\boldsymbol{\xi}) &= i\boldsymbol{\xi} \otimes^{sym} \widehat{\mathbf{u}}_{per}(\boldsymbol{\xi}) \\ &= sym \left\{ \boldsymbol{\xi} \otimes (\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbb{C}^0 \cdot \boldsymbol{\xi})^{-1} \otimes \boldsymbol{\xi} \right\} : \mathbb{C}^0 : \widehat{\boldsymbol{\epsilon}}^L(\boldsymbol{\xi}) \end{aligned} \quad (1.126)$$

où $sym \{ \mathbb{A} \}$ est défini par :

$$sym(A_{ijkl}) = \frac{1}{4} (A_{ijkl} + A_{jikl} + A_{ijlk} + A_{jilk}) \quad (1.127)$$

En posant :

$$\begin{cases} \widehat{\boldsymbol{\Gamma}}(\boldsymbol{\xi}) = sym \left\{ \boldsymbol{\xi} \otimes (\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbb{C}^0 \cdot \boldsymbol{\xi})^{-1} \otimes \boldsymbol{\xi} \right\} \\ \widehat{\boldsymbol{\mathbb{S}}}(\boldsymbol{\xi}) = \widehat{\boldsymbol{\Gamma}}(\boldsymbol{\xi}) : \mathbb{C}^0 \end{cases} \quad (1.128)$$

on obtient les relations suivantes :

$$\begin{cases} \widehat{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{\xi}) = \widehat{\boldsymbol{\mathbb{S}}}(\boldsymbol{\xi}) : \widehat{\boldsymbol{\epsilon}}^L(\boldsymbol{\xi}) \\ \widehat{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{\xi}) = -\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}(\boldsymbol{\xi}) : \widehat{\boldsymbol{\sigma}}^L(\boldsymbol{\xi}) \end{cases} \quad (1.129)$$

Ces expressions font intervenir différents tenseurs de Green qui permettent de calculer les champs de déformations induits par des déformations ou contraintes libres. Le plus utilisé est le tenseur $\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}$. Ces tenseurs permettent de reformuler le problème d'élasticité en milieu hétérogène sous la forme d'équations de type "Lippman-Schwinger-Dyson". Pour ce faire, on peut construire une condition de cohérence de façon exactement similaire à celle décrite dans le cas du problème d'inhomogénéité unique (1.50). Dans cette nouvelle formulation pour le milieu périodique, les perturbations sont remplacées par le champ de déformations périodique $\boldsymbol{\epsilon}_{per}(\mathbf{x})$ associé au champ de déplacements périodique $\mathbf{u}_{per}(\mathbf{x})$:

$$\mathbb{C}(\mathbf{x}) : (\mathbf{E} + \boldsymbol{\epsilon}_{per}(\mathbf{x})) = \mathbb{C}^0 : (\mathbf{E} + \boldsymbol{\epsilon}_{per}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\epsilon}^L(\mathbf{x})) \quad (1.130)$$

On en déduit :

$$(\mathbb{C}^0 - \mathbb{C}(\mathbf{x})) : (\mathbf{E} + \boldsymbol{\epsilon}_{per}(\mathbf{x})) = \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\epsilon}^L(\mathbf{x}) \quad (1.131)$$

Par ailleurs, (1.129) donne :

$$\boldsymbol{\epsilon}^{per}(\mathbf{x}) = \sum_{\boldsymbol{\xi}}' \widehat{\mathbb{S}}(\boldsymbol{\xi}) : \left\{ \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\epsilon}^L(\mathbf{x}') e^{i\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} dV_{\mathbf{x}'} \right\} \quad (1.132)$$

Finalement, on obtient donc :

$$(\mathbb{C}^0 - \mathbb{C}(\mathbf{x})) : \left(\mathbf{E} + \sum_{\boldsymbol{\xi}}' \widehat{\mathbb{S}}(\boldsymbol{\xi}) : \left\{ \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\epsilon}^L(\mathbf{x}') e^{i\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} dV_{\mathbf{x}'} \right\} \right) = \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\epsilon}^L(\mathbf{x}) \quad (1.133)$$

L'équation (1.133) décrit la relation entre le champ de déformations libres $\boldsymbol{\epsilon}^L(\mathbf{x})$ et la déformation macroscopique. La solution de cette équation donne alors le champ de déformations libres exactement nécessaire pour produire, avec un tenseur d'élasticité de milieu de référence choisi uniforme \mathbb{C}^0 , les champs de contraintes et déformations induits dans un solide hétérogène.

1.3.4 Homogénéisation de milieux périodiques par la méthode approchée

Les équations provenant de la condition de compatibilité font intervenir un produit de convolution entre la déformation libre et les tenseurs de Green choisis qui couplent toutes les composantes de Fourier de la fonction inconnue entre elles. Plusieurs stratégies existent pour résoudre ces équations. Dans un premier temps, nous présentons la méthode de résolution approchée introduite par Nemat-Nasser. Cette méthode peut se décrire comme suit :

1.3.4.1 Formulation

On considère une cellule de base D composée d'une matrice de tenseur d'élasticité linéaire \mathbb{C}^M contenant des inclusions Ω de tenseur d'élasticité \mathbb{C}^I . En adoptant comme tenseur d'élasticité du milieu de référence celui correspondant à la matrice et compte tenu des résultats présentés dans la section (1.3.3.4), on obtient :

$$(\mathbb{C}^M - \mathbb{C}^I) : \left(\mathbf{E} + \sum_{\boldsymbol{\xi}}' \widehat{\mathbb{S}}(\boldsymbol{\xi}) : \left\{ \frac{1}{V} \int_{V_{\Omega}} \boldsymbol{\epsilon}^L(\mathbf{x}') e^{i\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} d\mathbf{x}' \right\} \right) = \mathbb{C}^M : \boldsymbol{\epsilon}^L(\mathbf{x}) \quad (1.134)$$

où le tenseur d'ordre quatre $\widehat{\mathbb{S}}(\boldsymbol{\xi})$, défini par (1.128), dépend uniquement du tenseur d'élasticité de la matrice \mathbb{C}^M . On suppose par la suite que la matrice et l'inclusion sont constituées de matériaux isotropes. Le tenseur d'élasticité \mathbb{C}^M est déterminé alors par :

$$\mathbb{C}^M = \lambda_M \mathbf{i} \otimes \mathbf{i} + 2\mu_M \mathbb{I} \quad (1.135)$$

où \mathbf{i} est le tenseur identité d'ordre deux.

Alors :

$$\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbb{C}^M \cdot \boldsymbol{\xi} = (\lambda_M + \mu_M) \boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi} + \mu_M \xi^2 \mathbf{i} \quad (1.136)$$

où le module du vecteur d'onde ξ est défini par $\xi = |\boldsymbol{\xi}| = \sqrt{\xi_i \xi_i}$.

Pour déterminer le tenseur $\widehat{\Gamma}(\boldsymbol{\xi})$ qui intervient dans 1.128, on effectue l'inverse $(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbb{C}^M \cdot \boldsymbol{\xi})^{-1}$ en posant :

$$(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbb{C}^M \cdot \boldsymbol{\xi})^{-1} = A \boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi} + B \mathbf{i} \quad (1.137)$$

On en déduit :

$$(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbb{C}^M \cdot \boldsymbol{\xi}) \cdot (A \boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi} + B \mathbf{i}) = \mathbf{i} \quad (1.138)$$

ce qui donne :

$$\{A(\lambda_M + 2\mu_M) \xi^2 + B(\lambda_M + \mu_M)\} \boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi} + B\mu_M \xi^2 \mathbf{i} = \mathbf{i} \quad (1.139)$$

Par conséquent :

$$\begin{cases} A = -\frac{\lambda_M + \mu_M}{\mu_M(\lambda_M + 2\mu_M)} \xi^{-4} \\ B = \frac{1}{\mu_M} \xi^{-2} \end{cases} \quad (1.140)$$

L'inverse de $(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbb{C}^M \cdot \boldsymbol{\xi})$ est alors :

$$(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbb{C}^M \cdot \boldsymbol{\xi})^{-1} = \frac{1}{\mu_M} \xi^{-2} \left(-\frac{\lambda_M + \mu_M}{\lambda_M + 2\mu_M} \xi^{-2} \boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi} + \mathbf{i} \right) \quad (\xi \neq 0) \quad (1.141)$$

Alors $\widehat{\Gamma}(\boldsymbol{\xi})$ devient :

$$\widehat{\Gamma}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\mu_M} \left\{ -\frac{\lambda_M + \mu_M}{\lambda_M + 2\mu_M} \bar{\boldsymbol{\xi}} \otimes \bar{\boldsymbol{\xi}} \otimes \bar{\boldsymbol{\xi}} \otimes \bar{\boldsymbol{\xi}} + \text{sym} \{ \bar{\boldsymbol{\xi}} \otimes \mathbf{i} \otimes \bar{\boldsymbol{\xi}} \} \right\} \quad (1.142)$$

et le tenseur $\widehat{\mathbb{S}}(\boldsymbol{\xi})$ est donné d'après 1.128 par :

$$\widehat{\mathbb{S}}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\lambda_M}{\lambda_M + 2\mu_M} \bar{\boldsymbol{\xi}} \otimes \bar{\boldsymbol{\xi}} \otimes \mathbf{i} - \frac{2(\lambda_M + \mu_M)}{\lambda_M + 2\mu_M} \bar{\boldsymbol{\xi}} \otimes \bar{\boldsymbol{\xi}} \otimes \bar{\boldsymbol{\xi}} \otimes \bar{\boldsymbol{\xi}} + 2 \text{sym} \{ \bar{\boldsymbol{\xi}} \otimes \mathbf{i} \otimes \bar{\boldsymbol{\xi}} \} \quad (1.143)$$

où $\bar{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\xi}/\xi$ avec $\xi = |\boldsymbol{\xi}|$

Nous avons pour objectif d'obtenir le module effectif défini par :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \mathbb{C}^{eff} : \mathbf{E} \quad (1.144)$$

Pour atteindre cet objectif, il va être nécessaire de déterminer la moyenne volumique du champ de déformations libre $\langle \boldsymbol{\epsilon}^L \rangle$. Elle est donnée par (1.134) comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^M : \langle \boldsymbol{\epsilon}^L(\mathbf{x}) \rangle &= \mathbb{C}^M : \frac{1}{V_\Omega} \int_\Omega \boldsymbol{\epsilon}^L(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= (\mathbb{C}^M - \mathbb{C}^I) : \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{V} \sum_{\boldsymbol{\xi}}' \widehat{\mathbb{S}}(\boldsymbol{\xi}) : \left[\frac{1}{V_\Omega} \int_\Omega \boldsymbol{\epsilon}^L(\mathbf{x}') e^{-i\boldsymbol{\xi}\mathbf{x}'} d\mathbf{x}' \right] \cdot \int_\Omega e^{i\boldsymbol{\xi}\mathbf{x}} d\mathbf{x} \right\} \end{aligned} \quad (1.145)$$

L'approximation introduite par Nemat-Nasser et ses collègues est de remplacer le champ de déformations libres ϵ^L par sa moyenne volumique dans l'expression ci-dessus. Nous obtenons donc :

$$\mathbb{C}^M : \langle \epsilon^L(\mathbf{x}) \rangle = (\mathbb{C}^M - \mathbb{C}^I) : \left\{ \mathbf{E} + \sum_{\xi} f \left\{ \frac{1}{V_{\Omega}} I(\xi) \right\} \left\{ \frac{1}{V_{\Omega}} I(-\xi) \right\} \widehat{\mathbb{S}}(\xi) : \langle \epsilon^L(\mathbf{x}) \rangle \right\} \quad (1.146)$$

où f est la fraction volumique de l'inclusion. $I(\xi)$ est "la fonction de forme", dépendant uniquement de la géométrie de l'inclusion et définie par :

$$I(\xi) = \int_{\Omega} e^{i\xi \mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad (1.147)$$

En posant :

$$P(\xi) = f \left\{ \frac{1}{V_{\Omega}} I(\xi) \right\} \left\{ \frac{1}{V_{\Omega}} I(-\xi) \right\} \quad (1.148)$$

On obtient donc :

$$\left[(\mathbb{C}^M - \mathbb{C}^I)^{-1} : \mathbb{C}^M - \sum_{\xi} P(\xi) \widehat{\mathbb{S}}(\xi) \right] : \langle \epsilon^L(\mathbf{x}) \rangle = \mathbf{E} \quad (1.149)$$

ou bien :

$$[\mathbb{A} - \mathbb{Q}] : \langle \epsilon^L(\mathbf{x}) \rangle = \mathbf{E} \quad (1.150)$$

avec :

$$\begin{cases} \mathbb{A} = (\mathbb{C}^M - \mathbb{C}^I)^{-1} : \mathbb{C}^M \\ \mathbb{Q} = \sum_{\xi} P(\xi) \widehat{\mathbb{S}}(\xi) \end{cases} \quad (1.151)$$

Cette relation va permettre d'obtenir le tenseur d'élasticité effectif. Pour obtenir le module effectif défini par (1.144), on écrit l'équivalence entre la moyenne volumique de l'énergie élastique dans la cellule de base hétérogène avec l'énergie élastique totale calculée pour le milieu homogène équivalent.

L'énergie totale de la cellule de base dans le milieu homogène équivalent est définie par :

$$W_0 = \frac{V}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}^{eff} : \mathbf{E} \quad (1.152)$$

Dans la cellule de base hétérogène, le champ de contraintes est donné par :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbb{C}^M : (\mathbf{E} + \boldsymbol{\epsilon}_{per}(\mathbf{x})) & \text{dans } D - \Omega \\ \mathbb{C}^M : (\mathbf{E} + \boldsymbol{\epsilon}_{per}(\mathbf{x}) - \epsilon^L(\mathbf{x})) & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (1.153)$$

Sa moyenne est déterminée par :

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \rangle &= (1-f) \langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \rangle_{D-\Omega} + f \langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} \\ &= \mathbb{C}^M : \mathbf{E} + \mathbb{C}^M : \langle \boldsymbol{\epsilon}_{per}(\mathbf{x}) \rangle - f \mathbb{C}^M : \langle \epsilon^L(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} \end{aligned} \quad (1.154)$$

Par ailleurs, compte tenu de la définition de $\boldsymbol{\epsilon}_{per}$, on a :

$$\langle \boldsymbol{\epsilon}_{per}(\mathbf{x}) \rangle = 0 \quad (1.155)$$

D'après le lemme de Hill-Mandel, on a :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \rangle : \langle \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) \rangle = \mathbb{E} : (\mathbb{C}^M : \mathbf{E} - f\mathbb{C}^M \langle \boldsymbol{\epsilon}^L(\mathbf{x}) \rangle) \quad (1.156)$$

L'énergie totale de la cellule de base hétérogène est alors :

$$W_{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{V}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}^{eff} : \mathbf{E} = \frac{V}{2} \mathbf{E} : (\mathbb{C}^M : \mathbf{E} - f\mathbb{C}^M \langle \boldsymbol{\epsilon}^L(\mathbf{x}) \rangle) \quad (1.157)$$

Cette identité étant vraie pour toute valeur de la déformation macroscopique, cela induit :

$$\mathbb{C}^{eff} : \mathbf{E} = \mathbb{C}^M : \mathbf{E} - f\mathbb{C}^M : \langle \boldsymbol{\epsilon}^L(\mathbf{x}) \rangle \quad (1.158)$$

soit :

$$\mathbb{C}^{eff} : \mathbf{E} = \mathbb{C}^M : \mathbf{E} - f\mathbb{C}^M : (\mathbb{A} - \mathbb{Q})^{-1} : \mathbf{E} \quad (1.159)$$

à condition que $(\mathbb{A} - \mathbb{Q})$ soit inversible.

Cette égalité étant vraie à nouveau pour toute valeur de la déformation macroscopique, on a :

$$f\mathbb{C}^M := (\mathbb{C}^M - \mathbb{C}^{eff}) : (\mathbb{A} - \mathbb{Q}) \quad (1.160)$$

En utilisant (1.151), on obtient alors :

$$f\mathbb{C}^M = (\mathbb{C}^M - \mathbb{C}^{eff}) : \left((\mathbb{C}^M - \mathbb{C}^I)^{-1} - \sum_{\boldsymbol{\xi}}' P(\boldsymbol{\xi}) \widehat{\Gamma}(\boldsymbol{\xi}) \right) : \mathbb{C}^M \quad (1.161)$$

ce qui donne finalement :

$$f\mathbb{I} = (\mathbb{C}^M - \mathbb{C}^{eff}) : \left((\mathbb{C}^M - \mathbb{C}^I)^{-1} - \sum_{\boldsymbol{\xi}}' P(\boldsymbol{\xi}) \widehat{\Gamma}(\boldsymbol{\xi}) \right) \quad (1.162)$$

où le tenseur de Green $\widehat{\Gamma}(\boldsymbol{\xi})$ est défini par (1.142). Ce tenseur de Green est un tenseur isotrope transverse d'ordre 4. Il peut donc s'exprimer dans la base de Walpole ([77],[76]) par :

$$\widehat{\Gamma}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\lambda_M + 2\mu_M} \mathbb{E}_2 + \frac{1}{2\mu} \mathbb{E}_4 \quad (1.163)$$

où :

$$\begin{cases} \mathbb{E}_2 = \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} \\ \mathbb{E}_4 = \mathbf{k}^\perp \otimes \mathbf{k} + \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}^\perp \\ \mathbf{k} = \frac{1}{\xi^2} \boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi} \\ \mathbf{k}^\perp = \mathbf{i} - \mathbf{k} \end{cases} \quad (1.164)$$

La résolution de l'équation (1.162) va être rendue plus claire par l'expression des tenseurs d'ordre 4 sous forme de tenseurs d'ordre 2 qui peuvent se représenter de façon matricielle. On considère le tenseur \mathbb{L} d'ordre 4 de composantes L_{ijkl} symétrique par rapport aux couples (i, j) et (k, l) . La relation induite par contraction à partir des composantes de ce tenseur entre deux tenseurs d'ordre 2 symétriques \mathbf{a} et \mathbf{b} est donnée par :

$$\mathbf{b} = \mathbb{L} : \mathbf{a} \quad (1.165)$$

Cette relation peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$[B_\alpha] = [L_{\alpha\beta}] [A_\beta] \quad (1.166)$$

où :

$$[B] = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{22} \\ b_{33} \\ \sqrt{2}.b_{23} \\ \sqrt{2}.b_{31} \\ \sqrt{2}.b_{12} \end{bmatrix} \quad [A] = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ a_{33} \\ \sqrt{2}.a_{23} \\ \sqrt{2}.a_{31} \\ \sqrt{2}.a_{12} \end{bmatrix} \quad (1.167)$$

$$[L] = \begin{bmatrix} L_{1111} & L_{1122} & L_{1133} & \sqrt{2}L_{1123} & \sqrt{2}L_{1131} & \sqrt{2}L_{1112} \\ L_{2211} & L_{2222} & L_{2233} & \sqrt{2}L_{2223} & \sqrt{2}L_{2231} & \sqrt{2}L_{2212} \\ L_{3311} & L_{3322} & L_{3333} & \sqrt{2}L_{3323} & \sqrt{2}L_{3331} & \sqrt{2}L_{3312} \\ \sqrt{2}.L_{2311} & \sqrt{2}.L_{2322} & \sqrt{2}.L_{2333} & 2.L_{2323} & 2.L_{2331} & 2.L_{2312} \\ \sqrt{2}.L_{3111} & \sqrt{2}.L_{3122} & \sqrt{2}.L_{3133} & 2.L_{3123} & 2.L_{3131} & 2.L_{3112} \\ \sqrt{2}.L_{1211} & \sqrt{2}.L_{1222} & \sqrt{2}.L_{1233} & 2.L_{1223} & 2.L_{1231} & 2.L_{1212} \end{bmatrix} \quad (1.168)$$

L'équation (1.162) peut se réécrire comme suit :

$$f\mathbb{I} = (\mathbb{C}^M - \mathbb{C}^{eff}) : \left((\mathbb{C}^M - \mathbb{C}^I)^{-1} - \mathbb{S}_1 \right) \quad (1.169)$$

où :

$$\mathbb{S}_1 = \frac{1}{\lambda_M + 2\mu_M} \mathbb{U} + \frac{1}{2\mu_M} \mathbb{V} \quad (1.170)$$

avec :

$$\begin{cases} \mathbb{U} = \sum_{\xi} P(\xi) \mathbb{E}_2(\xi) \\ \mathbb{V} = \sum_{\xi} P(\xi) \mathbb{E}_4(\xi) \end{cases} \quad (1.171)$$

L'expression matricielle du tenseur d'élasticité effectif est alors donnée par :

$$\begin{aligned} [\mathbb{C}^{eff}] &= [\mathbb{C}^M] - f \left[(\mathbb{C}^M - \mathbb{C}^I)^{-1} - \frac{1}{\lambda_M + 2\mu_M} \mathbb{U} - \frac{1}{2\mu_M} \mathbb{V} \right]^{-1} \\ &= [\mathbb{C}^M] - f [\mathbb{D}]^{-1} \end{aligned} \quad (1.172)$$

où l'on a noté :

$$[\mathbb{D}] = \left[(\mathbb{C}^M - \mathbb{C}^I)^{-1} - \frac{1}{\lambda_M + 2\mu_M} \mathbb{U} - \frac{1}{2\mu_M} \mathbb{V} \right] \quad (1.173)$$

Les tenseurs \mathbb{U} et \mathbb{V} se calculent à partir des tenseurs \mathbb{E}_2 et \mathbb{E}_4 . Ces tenseurs s'expriment eux-mêmes à partir de deux tenseurs $\mathbf{g}^{(1)}$ et $\mathbf{g}^{(2)}$ introduits par Nemat-Nasser, sous la forme :

$$\begin{cases} \mathbb{E}_2 = \mathbf{g}^{(2)} \\ \mathbb{E}_4 = \mathbf{g}^{(1)} - 2\mathbf{g}^{(2)} \end{cases} \quad (1.174)$$

Les expressions complètes de ces tenseurs sont données par :

$$\begin{cases} g_{ijkl}^{(1)} = \frac{1}{2} \{ \bar{\xi}_j (\delta_{il} \bar{\xi}_k + \delta_{ik} \bar{\xi}_l) + \bar{\xi}_i (\delta_{jl} \bar{\xi}_k + \delta_{jk} \bar{\xi}_l) \} \\ g_{ijkl}^{(2)} = \bar{\xi}_i \bar{\xi}_j \bar{\xi}_k \bar{\xi}_l \end{cases} \quad (1.175)$$

où l'on a noté $(\bar{\xi}_l)$ la valeur de ξ_l divisée par le module du vecteur d'onde correspondant. On montre alors que pour une cellule parallélépipédique comportant trois plans de symétrie, seuls vont intervenir 9 termes :

$$\begin{cases} h_1 = (\bar{\xi}_1)^2, & h_2 = (\bar{\xi}_2)^2, & h_3 = (\bar{\xi}_3)^2 \\ h_4 = (\bar{\xi}_1)^4, & h_5 = (\bar{\xi}_2)^4, & h_6 = (\bar{\xi}_3)^4 \\ h_7 = (\bar{\xi}_2 \bar{\xi}_3)^2, & h_8 = (\bar{\xi}_3 \bar{\xi}_1)^2, & h_9 = (\bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2)^2 \end{cases} \quad (1.176)$$

Avec les notations ci-dessus, les matrices associées aux tenseurs $g_{ijkl}^{(m)}$ sont données par :

$$[G^{(1)}] = \begin{bmatrix} 2h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2h_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_2 + h_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_3 + h_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_1 + h_2 \end{bmatrix} \quad (1.177)$$

$$[G^{(2)}] = \begin{bmatrix} h_4 & h_9 & h_8 & 0 & 0 & 0 \\ h_9 & h_5 & h_7 & 0 & 0 & 0 \\ h_8 & h_7 & h_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2h_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2h_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2h_9 \end{bmatrix} \quad (1.178)$$

En conséquence, on obtient les matrices $[\mathbf{U}]$ et $[\mathbf{V}]$ sous la forme :

$$\begin{cases} [\mathbf{U}] = \sum_{\xi} P(\xi) [G^{(2)}(\xi)] \\ [\mathbf{V}] = \sum_{\xi} P(\xi) \{ [G^{(1)}(\xi)] - 2 [G^{(2)}(\xi)] \} \\ = [\mathbf{W}] - 2 [\mathbf{U}] \end{cases} \quad (1.179)$$

avec :

$$[\mathbf{W}] = \sum_{\xi} P(\xi) [G^{(1)}(\xi)] \quad (1.180)$$

On en déduit que les matrices $[\mathbf{U}]$ et $[\mathbf{W}]$ peuvent être déterminées par :

$$[\mathbf{W}] = \begin{bmatrix} 2S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2S_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2S_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_2 + S_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_3 + S_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_1 + S_2 \end{bmatrix} \quad (1.181)$$

$$[\mathbf{U}] = \begin{bmatrix} S_4 & S_9 & S_8 & 0 & 0 & 0 \\ S_9 & S_5 & S_7 & 0 & 0 & 0 \\ S_8 & S_7 & S_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2S_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2S_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2S_9 \end{bmatrix} \quad (1.182)$$

où les coefficients S_i sont les coefficients introduits par Nemat-Nasser et al :

$$S_i = \sum_{\xi} P(\xi) h_i(\xi) \quad (1.183)$$

1.3.4.2 Inversion de la matrice \mathbf{D}

On ne traitera ici que le cas où les matrices $[(\mathbf{C}^M - \mathbf{C}^I)^{-1}]$, $[\mathbf{U}]$ et $[\mathbf{V}]$ diagonalisent dans une même base

Dans le premier temps, on suppose que les matrices associées à $[(\mathbf{C}^M - \mathbf{C}^I)^{-1}]$, $[\mathbf{U}]$ et $[\mathbf{V}]$ dans la représentation classique par la matrice 6×6 diagonalisent dans la même base. Par ailleurs, les valeurs propres de $[(\mathbf{C}^M - \mathbf{C}^I)^{-1}]$ sont, pour des constituants isotropes :

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{3(\lambda_M - \lambda_I) + 2(\mu_M - \mu_I)} \\ a_2 = \frac{1}{2(\mu_M - \mu_I)} = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 \end{cases} \quad (1.184)$$

où a_2 est racine d'ordre 5.

On a donc, en associant les matrices aux opérateurs correspondants :

$$[\mathbf{D}] = [\mathbf{Q}]^{-1} \left([\mathbf{D}_a] - \frac{1}{\lambda_M + 2\mu_M} [\mathbf{D}_u] - \frac{1}{2\mu_M} [\mathbf{D}_v] \right) [\mathbf{Q}] \quad (1.185)$$

où $[\mathbf{D}_u]$ est une matrice diagonale contenant les valeurs propres u_k de $[\mathbf{U}]$ et de même pour $[\mathbf{D}_v]$ contenant les valeurs propres de $[\mathbf{V}]$ et $[\mathbf{D}_a]$ pour les valeurs propres de $[(\mathbf{C}^M - \mathbf{C}^I)^{-1}]$ $[\mathbf{Q}]$ est la matrice de changement de base.

Alors :

$$\begin{aligned} [\mathbf{D}]^{-1} &= [\mathbf{Q}] \left([\mathbf{D}_a] - \frac{1}{\lambda_M + 2\mu_M} [\mathbf{D}_u] - \frac{1}{2\mu_M} [\mathbf{D}_v] \right)^{-1} [\mathbf{Q}]^{-1} \\ &= [\mathbf{Q}] \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_6 \end{bmatrix} [\mathbf{Q}]^{-1} \\ &= \sum_k r_k [\mathbf{F}_{(k)}] \end{aligned} \quad (1.186)$$

où les matrices $[\mathbf{F}_{(k)}]$ décrivent la diagonale :

$$F_{(k)ij} = \delta_{ik}\delta_{jk} \quad (1.187)$$

et :

$$r_k = \frac{1}{a_k - \frac{u_k}{\lambda_M + 2\mu_M} - \frac{v_k}{2\mu_M}} \quad (1.188)$$

Finalement, la matrice associée au tenseur effectif est donné par :

$$[\mathbf{C}^{eff}] = [\mathbf{C}^M] - f \sum_{k=1}^6 \frac{1}{a_k - \frac{u_k}{\lambda_M + 2\mu_M} - \frac{v_k}{2\mu_M}} [\mathbf{H}_{(k)}] \quad (1.189)$$

avec :

$$[\mathbf{H}_{(k)}] = [\mathbf{Q}] [\mathbf{F}_{(k)}] [\mathbf{Q}]^{-1} \quad (1.190)$$

où les matrices $[\mathbf{H}_{(k)}]$ ne dépendent que de la géométrie des inclusions. On constate que cette expression se présente sous forme d'une fraction rationnelle des modules des composants. Cette forme sera donc particulièrement utile au calcul des propriétés effectives de matériaux viscoélastiques

1.3.4.3 Exemple numérique et comparaison

Pour illustration, nous considérons un composite périodique représenté par une cellule de base cubique de taille Λ contenant une inclusion sphérique de rayon R centrée. La fonction de forme à introduire dans l'équation (1.147) est donnée par Nemat-Nasser [62] :

$$\frac{1}{V_\Omega} I(\boldsymbol{\xi}) = \frac{3(\sin \eta - \eta \cos \eta)}{\eta^3} \quad \eta \neq 0 \quad (1.191)$$

avec :

$$\begin{cases} \eta = 2\pi \left(\frac{3f}{4\pi} \right)^{1/3} (n_k n_k)^{1/2} \\ \bar{\xi}_j = \frac{n_j}{(n_k n_k)^{1/2}} \end{cases} \quad (1.192)$$

En raison de la symétrie, nous avons :

$$\begin{cases} S_4 = S_5 = S_6 \\ S_7 = S_8 = S_9 \end{cases} \quad (1.193)$$

Donc, les matrices $[(\mathbf{C}^M - \mathbf{C}^I)^{-1}]$, $[\mathbf{U}]$ et $[\mathbf{V}]$ diagonalisent dans la même base avec la matrice de changement de base $[\mathbf{Q}]$ déterminée par :

$$[\mathbf{Q}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.194)$$

Le matériau homogénéisé a la symétrie cubique. En conséquence, le tenseur d'élasticité effectif est défini par trois paramètres indépendants.

- Le module effectif d'incompressibilité κ_{eff} est défini par :

$$\kappa_{eff} = \frac{C_{1111}^{eff} + 2C_{1122}^{eff}}{3} \quad (1.195)$$

- Le premier module effectif de cisaillement μ_{eff} est défini par :

$$\mu_{eff} = C_{2323}^{eff} \quad (1.196)$$

- Le deuxième module effectif de cisaillement μ_{eff}^* est défini par la relation suivante :

$$(\Sigma_{11} - \Sigma_{22}) = 2\mu_{eff}^*(E_{11} - E_{22}) \quad (1.197)$$

Soit :

$$\mu_{eff}^* = \frac{C_{1111}^{eff} - C_{1122}^{eff}}{2} \quad (1.198)$$

Les propriétés élastiques de chaque phase sont données dans la table (1.1)

TABLE 1.1 – Propriétés élastiques du composite

Module élastique	Matrice	Inclusion
Module d'incompressibilité κ (GPa)	30	100
Module de cisaillement μ (GPa)	20	50

La figure (1.4) illustre la valeur du premier module de cisaillement effectif en fonction de la concentration de l'inclusion sphérique, comparée avec les bornes de Voigt et Reuss

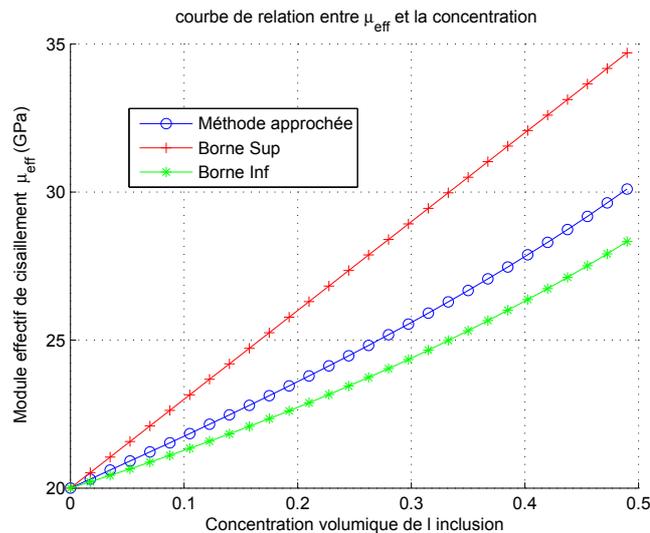


FIGURE 1.4 – Estimation du premier module effectif de cisaillement en fonction de la concentration d'inclusions. Cas d'une structure cubique simple. Comparaison avec les bornes de Voigt et de Reuss.

La figure (1.5) illustre la valeur du module effectif d'incompressibilité en fonction de la concentration d'inclusions, comparée avec les bornes de Voigt et Reuss

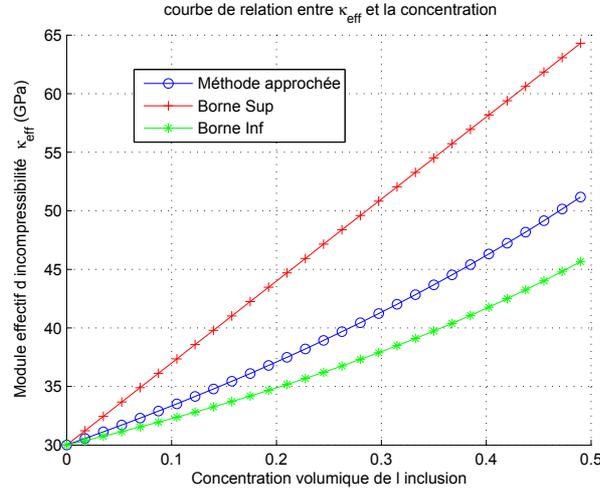


FIGURE 1.5 – Estimation du module effectif d'incompressibilité en fonction de la concentration d'inclusions. Cas d'une structure cubique simple. Comparaison avec les bornes de Voigt et de Reuss.

Le calcul par la méthode approchée dépend du nombre de vecteurs d'ondes utilisé dans la transformée de Fourier. Les figures (1.6) et (1.7) montrent les valeurs de modules effectifs obtenues pour différents choix du nombre de vecteurs d'ondes. Ces figures montrent qu'un nombre d'ondes dans la formule (1.100) avec $n_j \in [-64 : 63]$ dans chaque direction, soit un nombre total de vecteurs d'ondes de $128 \times 128 \times 128$, permet d'assurer la convergence des sommes apparaissant dans l'expression du module effectif.

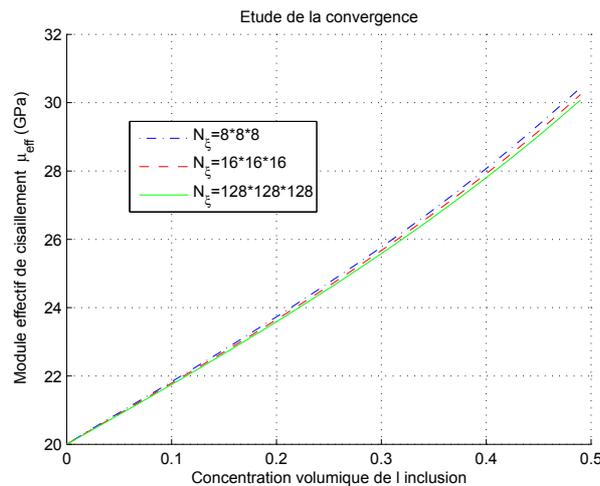


FIGURE 1.6 – Etude de la convergence en fonction du nombre de vecteurs d'ondes pour le calcul du premier module de cisaillement.

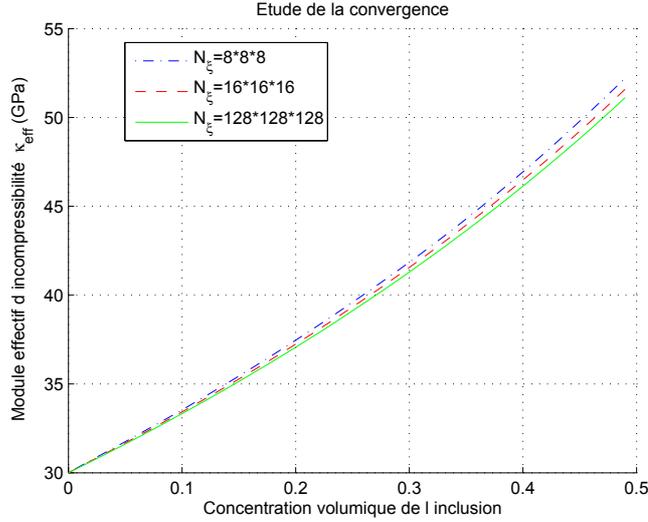


FIGURE 1.7 – Etude de la convergence en fonction du nombre de vecteurs d'ondes pour le module d'incompressibilité.

1.3.5 Homogénéisation de milieux périodiques par résolution numérique de l'équation intégrale

Une deuxième méthode pour résoudre l'équation provenant de la relation de cohérence est de résoudre numériquement cette équation. Cette méthode numérique utilise le développement classique en série de Neumann de la solution du problème d'élasticité périodique dans l'espace de Fourier. De cette façon, Michel 1999 [52], Moulinec et Suquet 2004 [53] ont proposé une méthode de résolution numérique basée sur la Transformée de Fourier Rapide (TFR). G.Bonnet 2007 [5] a montré que l'utilisation des fonctions de forme permettait d'éviter les erreurs dues uniquement à la discrétisation géométrique de la microstructure lorsque les inclusions présentent des formes ellipsoïdales. Dans cette section, on présente la méthode dans le cadre du problème élastique et l'on exprime la solution sous une forme qu'il sera possible d'utiliser dans le chapitre 4 pour déterminer la solution de certains problèmes d'homogénéisation dans le cadre de la viscoélasticité.

1.3.5.1 Résolution du problème de localisation

La résolution numérique de l'équation intégrale peut s'effectuer soit par une approche en déformations, soit par une approche en contraintes. Il est possible de montrer que l'approche en déformations est mieux adaptée lorsque les inclusions sont moins raides que la matrice et inversement pour l'approche en contrainte. Par la suite, on ne présentera que la méthode d'approche en déformations, le cas dual de l'approche en contraintes se formule de façon similaire. On considère à nouveau la condition de cohérence (1.123) exprimée sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbb{C}(\mathbf{x}) : (\mathbf{E} + \boldsymbol{\epsilon}_{\text{per}}(\mathbf{x})) = \mathbb{C}^0 : (\mathbf{E} + \boldsymbol{\epsilon}_{\text{per}}(\mathbf{x})) + \boldsymbol{\sigma}^L \quad (1.199)$$

où \mathbb{C}^0 est le tenseur d'élasticité constant du milieu de référence. $\mathbb{C}(\mathbf{x})$ est le tenseur d'élasticité local qui peut s'écrire comme suit :

$$\mathbb{C}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha} I_{\alpha}(\mathbf{x}) \cdot \mathbb{C}_{\alpha} \quad (1.200)$$

\mathbb{C}_{α} est le tenseur d'élasticité de la phase α et $I_{\alpha}(\mathbf{x})$ est la fonction caractéristique permettant de décrire le volume de la phase α .

Le champ de contraintes libres est donné alors par :

$$\boldsymbol{\sigma}^L(\mathbf{x}) = (\mathbb{C}(\mathbf{x}) - \mathbb{C}^0) : (\mathbf{E} + \boldsymbol{\epsilon}_{per}(\mathbf{x})) \quad (1.201)$$

Par ailleurs, l'utilisation du tenseur de Green permet d'obtenir le champ de déformations périodiques $\boldsymbol{\epsilon}_{per}(\mathbf{x})$ en fonction du tenseur de contraintes libres(1.129) :

$$\boldsymbol{\epsilon}_{per}(\boldsymbol{\xi}) = -\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\xi}) : \boldsymbol{\sigma}^L(\boldsymbol{\xi}) \quad (1.202)$$

Cette écriture dans l'espace réel correspond à :

$$\boldsymbol{\epsilon}_{per}(\mathbf{x}) = -\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}) * \boldsymbol{\sigma}^L(\mathbf{x}) \quad (1.203)$$

On en déduit :

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{E} + \boldsymbol{\epsilon}_{per}(\mathbf{x}) = \mathbf{E} - \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\xi}) * \boldsymbol{\sigma}^L(\mathbf{x}) \quad (1.204)$$

Compte tenu des relations précédentes, on obtient l'équation :

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{E} - \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}) * (\delta\mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x})) \quad (1.205)$$

Cette équation est dite équation intégrale en raison du fait que le produit de convolution peut s'écrire comme intégrale portant sur le tenseur des déformations inconnu. Dans cette expression, on a noté $\delta\mathbb{C}(\mathbf{x}) = (\mathbb{C}(\mathbf{x}) - \mathbb{C}^0)$, ce qui conduit à :

$$\delta\mathbb{C}(\mathbf{x}) = (\mathbb{C}_I - \mathbb{C}^0) I_I(\mathbf{x}) + (\mathbb{C}_M - \mathbb{C}^0) I_M(\mathbf{x}) \quad (1.206)$$

La solution de cette équation intégrale est exprimée en utilisant la série de Neumann (Milton 2002) :

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) = [\mathbb{I} - \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}) * \delta\mathbb{C} + \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}) * [\delta\mathbb{C} \cdot (\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}) * \delta\mathbb{C})] - \dots] : \mathbf{E} \quad (1.207)$$

La somme de cette série peut être obtenue par approximations successives en utilisant le schéma itératif :

$$\boldsymbol{\epsilon}^{i+1}(\mathbf{x}) = \mathbf{E} - \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}) * (\delta\mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon}^i(\mathbf{x})) \quad (1.208)$$

Par la suite, on adopte $\mathbb{C}^0 = \mathbb{C}_M$, ce qui n'est admissible que si les inclusions sont moins raides que la matrice, d'où :

$$\delta\mathbb{C}(\mathbf{x}) = (\mathbb{C}_I - \mathbb{C}_M) I_I(\mathbf{x}) \quad (1.209)$$

A noter que le cas d'inclusions plus raides que la matrice doit être traité avec le schéma en contraintes. La déformation locale à convergence est donnée alors par :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}^\infty(\mathbf{x}) = & \left\{ \mathbb{I} - \underbrace{[\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}) (\mathbb{C}_I - \mathbb{C}_M)] * I_I(\mathbf{x})}_1 + \dots \right. \\ & \left. + (-1)^m \underbrace{[\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}) (\mathbb{C}_I - \mathbb{C}_M)] * I_I(\mathbf{x})}_1 \dots \underbrace{[\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}) (\mathbb{C}_I - \mathbb{C}_M)] * I_I(\mathbf{x})}_m \right\} : \mathbf{E} \end{aligned} \quad (1.210)$$

ou bien :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}^\infty(\mathbf{x}) = & \left\{ \mathbb{I} + \underbrace{[\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}) (\mathbb{C}_M - \mathbb{C}_I)] * I_I(\mathbf{x})}_1 + \dots \right. \\ & \left. + \underbrace{[\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}) (\mathbb{C}_M - \mathbb{C}_I)] * I_I(\mathbf{x})}_1 \dots \underbrace{[\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}) (\mathbb{C}_M - \mathbb{C}_I)] * I_I(\mathbf{x})}_m \right\} : \mathbf{E} \end{aligned} \quad (1.211)$$

1.3.5.2 Homogénéisation

La contrainte locale à convergence est donnée par :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^\infty(\mathbf{x}) &= \mathbb{C}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\epsilon}^\infty(\mathbf{x}) \\ &= (\mathbb{C}_I I_I(\mathbf{x}) + \mathbb{C}_M I_M(\mathbf{x})) : \boldsymbol{\epsilon}^\infty(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (1.212)$$

D'où la contrainte totale :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_I + \boldsymbol{\Sigma}_M \quad (1.213)$$

avec les contraintes partielles :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Sigma}_I = \mathbb{C}_I : \langle I_I(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\epsilon}^\infty(\mathbf{x}) \rangle \\ \boldsymbol{\Sigma}_M = \mathbb{C}_M : \langle I_M(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\epsilon}^\infty(\mathbf{x}) \rangle \end{cases} \quad (1.214)$$

ou bien :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_I = \mathbb{C}_I : & \{ \langle I_I(\mathbf{x}) \rangle \mathbb{I} + \langle I_I(\mathbf{x}) \cdot ([\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}) (\mathbb{C}_M - \mathbb{C}_I)] * I_I(\mathbf{x})) \rangle + \dots \\ & + \langle I_I(\mathbf{x}) \cdot ([\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}) (\mathbb{C}_M - \mathbb{C}_I)] * [I_I(\mathbf{x}) \dots ([\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}) (\mathbb{C}_M - \mathbb{C}_I)] * I_I(\mathbf{x}))]) \rangle \} : \mathbf{E} \end{aligned} \quad (1.215)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_M = \mathbb{C}_M : & \{ \langle I_M(\mathbf{x}) \rangle \mathbb{I} + \langle I_I(\mathbf{x}) \cdot ([\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}) (\mathbb{C}_M - \mathbb{C}_I)] * I_I(\mathbf{x})) \rangle + \dots \\ & + \langle I_M(\mathbf{x}) \cdot ([\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}) (\mathbb{C}_M - \mathbb{C}_I)] * [I_I(\mathbf{x}) \dots ([\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}) (\mathbb{C}_M - \mathbb{C}_I)] * I_I(\mathbf{x}))]) \rangle \} : \mathbf{E} \end{aligned} \quad (1.216)$$

En posant :

$$\begin{cases} \mathbb{A}_0 = f_I \mathbb{I} \\ \mathbb{B}_0 = f_M \mathbb{I} \\ \mathbb{A}_m = \langle I_I(\mathbf{x}) \cdot ([\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}) (\mathbb{C}_M - \mathbb{C}_I)] * [I_I(\mathbf{x}) \dots ([\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}) (\mathbb{C}_M - \mathbb{C}_I)] * I_I(\mathbf{x}))]) \rangle \\ \mathbb{B}_m = \langle I_M(\mathbf{x}) \cdot ([\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}) (\mathbb{C}_M - \mathbb{C}_I)] * [I_I(\mathbf{x}) \dots ([\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}) (\mathbb{C}_M - \mathbb{C}_I)] * I_I(\mathbf{x}))]) \rangle \end{cases} \quad (1.217)$$

On obtient :

$$\boldsymbol{\Sigma}_I = \mathbb{C}_I : \left[\mathbb{A}_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{A}_m \right] : \mathbf{E} \quad (1.218)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_M = \mathbb{C}_M : \left[\mathbb{B}_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{B}_m \right] : \mathbf{E} \quad (1.219)$$

D'après (1.217), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_m + \mathbb{B}_m &= \langle [\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}) (\mathbb{C}_M - \mathbb{C}_I)] * [I_I(\mathbf{x}) \dots ([\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}) (\mathbb{C}_M - \mathbb{C}_I)] * I_I(\mathbf{x}))] \rangle \\ &= \langle \mathbb{F}_m(\mathbf{x}) \rangle \end{aligned} \quad (1.220)$$

où :

$$\mathbb{F}_m(\mathbf{x}) = [\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}) (\mathbb{C}_M - \mathbb{C}_I)] * [I_I(\mathbf{x}) \dots ([\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}) (\mathbb{C}_M - \mathbb{C}_I)] * I_I(\mathbf{x}))] \quad (1.221)$$

Par ailleurs, $\langle \mathbb{F}_m(\mathbf{x}) \rangle$ est déterminé par sa transformée de Fourier au point $\boldsymbol{\xi} = 0$:

$$\langle \mathbb{F}_m(\mathbf{x}) \rangle = \mathbb{F}_m(\boldsymbol{\xi} = 0) \quad (1.222)$$

où :

$$\mathbb{F}_m(\boldsymbol{\xi}) = [\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\xi}) (\mathbb{C}_M - \mathbb{C}_I)] \cdot [I_I(\boldsymbol{\xi}) * \dots * ([\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\xi}) (\mathbb{C}_M - \mathbb{C}_I)] \cdot I_I(\boldsymbol{\xi}))] \quad (1.223)$$

En plus, le tenseur de Green $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\xi})$ est nul au point zéro $\boldsymbol{\xi} = 0$, alors :

$$\mathbb{F}_m(\boldsymbol{\xi} = 0) = 0 \quad (1.224)$$

Donc :

$$\mathbb{A}_m + \mathbb{B}_m = 0 \quad (1.225)$$

Le tenseur d'élasticité effectif est donné finalement par :

$$\mathbb{C}^{eff} = \mathbb{C}_I : (\mathbb{A}_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{A}_m) + \mathbb{C}_M : ((\mathbb{I} - \mathbb{A}_0) - \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{A}_m) \quad (1.226)$$

Sous cette forme, le tenseur d'élasticité effectif apparaît comme une série polynomiale en fonction des tenseurs d'élasticité des deux phases. Cette forme permettra dans le chapitre 5 d'obtenir les propriétés viscoélastiques de milieux hétérogènes lorsque les tenseurs d'élasticité sont des fractions rationnelles de la variable de Laplace, ce qui correspond aux cas couramment rencontrés.

1.3.5.3 Condition de convergence

En général, la solution du problème d'homogénéisation du milieu périodique par le développement d'une série de Neumann et utilisant la méthode de la Transformée de Fourier Rapide (TFR) dépend de trois éléments :

* La quantité du nombre de vecteurs d'onde utilisés dans la Transformée de Fourier.

* Le nombre de termes N calculés dans la série de Neumann, qui correspond au nombre d'itérations utilisées pour le processus itératif comme décrit dans la section précédente.

* Les propriétés élastiques du milieu de référence élastique et des phases.

Dans le cas où l'on choisit le module de la matrice pour le milieu de référence $\mathbb{C}^0 = \mathbb{C}_M$, la convergence n'est possible que si le module de l'inclusion est moins raide que celui de la matrice. Dans le cas contraire, il faut utiliser l'approche en contraintes.

Les critères de convergence utilisés pour assurer la convergence de la série de Neumann portent soit sur les équations d'équilibre, soit sur le dernier terme de la série, soit sur les équations de compatibilité, suivant le schéma choisi. A priori, un critère de convergence sur le dernier terme de la série n'est pas forcément indicateur de l'erreur de troncature comme le montre le cas de la série en $\frac{1}{n}$. Toutefois, Milton montre que la convergence correspond plutôt à celle d'une série géométrique. Pour préciser ce point, on peut noter que le module effectif obtenu par le schéma ci-dessus (1.226) peut être réécrit sous la forme d'une série :

$$\mathbb{C}_n^{eff} = \sum_{i=0}^n \mathbb{U}_i \quad (1.227)$$

Le résultat du calcul numérique correspondant a été traité sur la figure (1.8) où l'on a

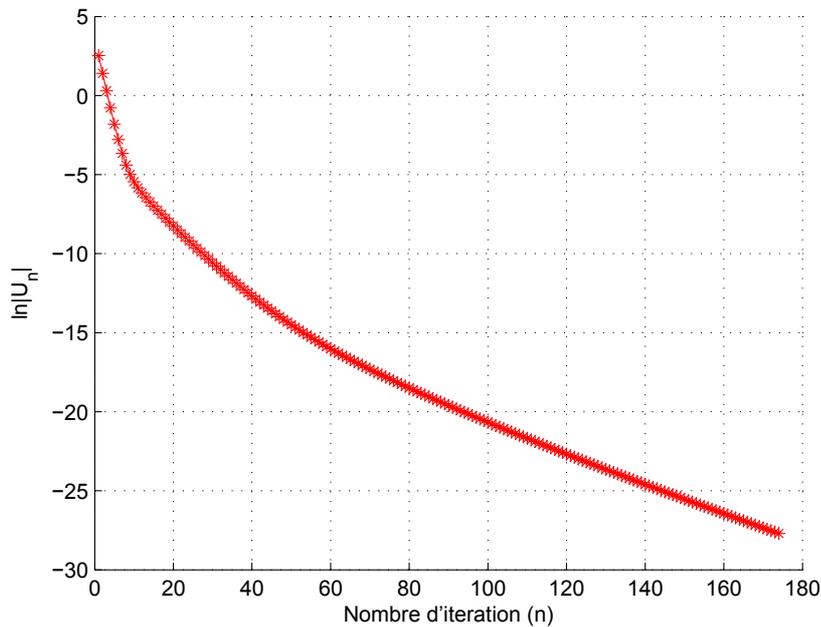


FIGURE 1.8 – Fonction logarithme népérien d'un terme de série U en fonction du nombre d'itérations

reporté le logarithme népérien d'un terme de la série U_n en fonctions du nombre d'itérations en axes semi-logarithmiques. On constate que le comportement peut être considéré comme pratiquement linéaire à partir d'environ 80 itérations, ce qui peut se traduire par :

$$\ln |U_n| = -an + C \quad (1.228)$$

où α est la pente et C est une constante.

La suite des sommes partielles S_N est définie par :

$$S_N = \sum_{m=N+1}^{\infty} U_m \quad (1.229)$$

soit encore :

$$S_N = U_0 q^{N+1} (1 + q + q^2 + \dots) \quad (1.230)$$

où :

$$\begin{cases} U_0 = e^C \\ q = e^{-\alpha} \end{cases} \quad (1.231)$$

Si N est le nombre de termes conservés dans la série, l'erreur sur la solution est donnée par $\delta = S_N$ soit :

$$\delta = \frac{U_0 q^{N+1}}{1 - q} \quad (1.232)$$

Si l'on note δ l'erreur acceptée pour la somme de la série, on voit que le nombre de termes nécessaires pour assurer la convergence à ce niveau est donné par :

$$N = \frac{\ln \frac{\delta(1-q)}{U_0}}{\ln q} - 1 \quad (1.233)$$

1.3.5.4 Exemple numérique et comparaison entre la méthode approchée et la solution numérique de l'équation intégrale

Comme on le verra dans les chapitres suivants, l'expression donnée par la série de Neumann ne peut conduire à une expression de complexité raisonnable des propriétés élastiques effectives que dans certains cas, contrairement à la solution approchée. Il nous a donc semblé intéressant de comparer ces deux solutions pour évaluer le domaine de validité de la solution approchée par rapport à la solution utilisant l'équation intégrale, considérée comme référence. On étudie donc un composite élastique périodique où la cellule de base correspond à un réseau plan à mailles carrées, les inclusions étant constituées par des fibres de section circulaire. Le matériau est supposé élastique linéaire isotrope incompressible. Le module de cisaillement de la matrice est : $\mu_M = 70GPa$ et celui de la fibre est donné par : $\mu_I = 5GPa$.

La "fonction de forme" qui intervient dans le calcul \mathbb{A}_i est donné par Nemat-Nasser [62] :

$$I_\alpha(\xi) = \frac{2 \cdot S_\alpha J_1(\eta)}{\eta} \quad (1.234)$$

où J_1 est la fonction de Bessel de premier ordre. S_α est la surface de l'inclusion, η est donné par :

$$\eta = R (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2} \quad (1.235)$$

où R est le rayon de la fibre.

Le tenseur de Green est donné dans le cas incompressible par :

$$\hat{\Gamma}(\xi) = \frac{\mathbb{E}_4}{2\mu} \quad (1.236)$$

où :

$$[\mathbf{E}_4] = 2 \begin{bmatrix} 2(\xi_1^2 - \xi_1^4) & -2\xi_1^2\xi_2^2 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\xi_1\xi_2(1 - 2\xi_1^2) \\ -2\xi_1^2\xi_2^2 & 2(\xi_2^2 - \xi_2^4) & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\xi_1\xi_2(1 - 2\xi_2^2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_2^2 & \xi_1\xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_1\xi_2 & \xi_1^2 & 0 \\ \sqrt{2}\xi_1\xi_2(1 - 2\xi_1^2) & \sqrt{2}\xi_1\xi_2(1 - 2\xi_2^2) & 0 & 0 & 0 & \xi_1^2 + \xi_2^2 - 4\xi_1^2\xi_2^2 \end{bmatrix} \quad (1.237)$$

La figure (1.9) présente les valeurs de C_{2323}^{eff} en fonction de la concentration en fibres pour

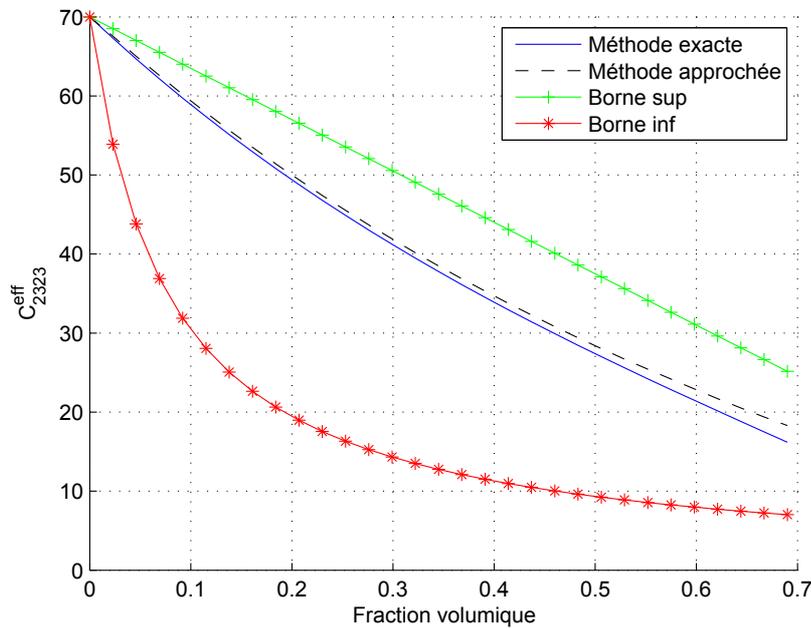


FIGURE 1.9 – Solution obtenue par la série de Neumann ("Méthode exacte") comparée avec la solution obtenue par la méthode FFT approchée et avec les bornes de Voigt et Reuss

la solution FFT approchée et pour la solution par série de Neumann. Les bornes de Voigt et Reuss ont été reportées également. Les résultats montrent que la solution approchée est proche de la solution par série de Neumann jusqu'à des concentrations proches de 0.5. Ce résultat sera retrouvé dans le cas de l'homogénéisation en viscoélasticité.

1.4 Conclusion

Ce premier chapitre a porté sur les méthodes de détermination de propriétés effectives en élasticité linéaire. Les méthodes qui seront étendues par la suite dans le cadre de la viscoélasticité ont été présentées. Ce chapitre a permis de montrer que la solution approchée ou la solution par sommation de la série de Neumann utilisées pour les milieux à structure périodique permettent de s'exprimer sous forme de fractions rationnelles ou de

polynomes en fonction des propriétés élastiques. Il a été montré également que la solution approchée présente un bon niveau d'approximation par rapport à la solution "exacte" utilisant la série de Neumann. Ces résultats permettront une extension de ces méthodes au cas de la viscoélasticité.

Chapitre 2

Viscoélasticité linéaire et principe de correspondance

Ce chapitre ne comporte pas d'aspects originaux. Il est destiné à introduire les notions nécessaires pour traiter les problèmes d'homogénéisation en viscoélasticité. Dans la première partie de ce chapitre, on présente la description du comportement viscoélastique linéaire d'un matériau supposé isotrope et non-vieillissant. Puis, on présente le principe de correspondance en utilisant la transformée de Laplace-Carson, ce qui constitue un outil permettant dans certains cas de résoudre le problème d'homogénéisation de matériaux viscoélastiques hétérogènes. Enfin, quelques modèles rhéologiques classiques permettant de modéliser le comportement d'une phase viscoélastique sont présentés. La présentation adoptée s'appuie sur celle développée dans la référence [72].

2.1 Comportement viscoélastique linéaire

2.1.1 Fonction de fluage(Cas scalaire)

Pour un matériau viscoélastique, l'essai de fluage est un essai fondamental pour caractériser le comportement différé du matériau dans le cadre isotherme. Un essai de fluage correspond à l'application d'un champ de contraintes constant et à l'observation des déformations qui en résultent. Un exemple de résultat d'un tel essai dans le cas d'un fluage unidimensionnel est montré en 2.1 où l'on a reporté la variation de la déformation en fonction du temps.

La contrainte uniaxiale varie en fonction du temps suivant :

$$\sigma(t) = \sigma^0 Y_{t_0}(t) \quad (2.1)$$

où $Y_{t_0}(t)$ est la fonction de Heaviside appliquée à l'instant t_0 . La réponse correspondante est décrite par la relation :

$$\epsilon(t) = J(t_0, t; \sigma^0) : \sigma^0 \quad (2.2)$$

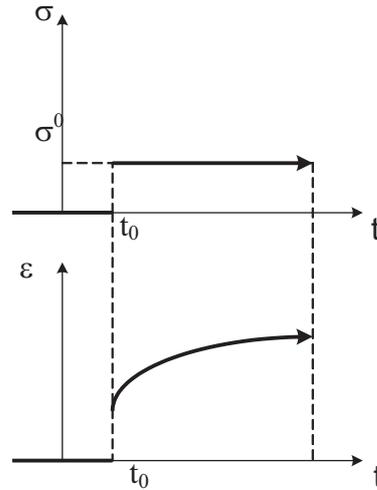


FIGURE 2.1 – Expérience de fluage unidimensionnel

où $J(t_0, t; \sigma^0)$ est la fonction de fluage qui est telle que :

$$\begin{cases} J(t_0, t; \sigma^0) = 0 & \text{si } t < t_0 \\ J(t_0, t; \sigma^0) \text{ croissante} & \text{pour } t \geq t_0 \end{cases} \quad (2.3)$$

2.1.2 Fonction de relaxation(Cas scalaire)

L'expérience de relaxation est l'analogue de la précédente dans laquelle la sollicitation imposée est une déformation constante à partir du temps origine (Figure 2.2) dont l'histoire est donnée par :

$$\epsilon(t) = \epsilon^0 Y_{t_0}(t) \quad (2.4)$$

La réponse dans l'expérience de la relaxation est l'histoire de la contrainte axiale σ :

$$\sigma(t) = R(t_0, t; \epsilon^0) : \epsilon^0 \quad (2.5)$$

où $R(t_0, t; \epsilon^0)$ est la fonction de relaxation telle que :

$$\begin{cases} R(t_0, t; \epsilon^0) = 0 & \text{si } t < t_0 \\ \|R(t_0, t; \epsilon^0)\| \geq 0 & \text{pour } t \geq t_0 \\ R(t_0, t; \epsilon^0) \text{ décroissante} & \text{pour } t \geq t_0 \end{cases} \quad (2.6)$$

2.1.3 Comportement linéaire tridimensionnel

On suppose désormais que le matériau étudié est Boltzmannien, c'est-à-dire que son comportement mécanique est régi par le principe de superposition, qui sera appliqué aux histoires σ et ϵ . La loi de comportement isotherme du matériau permet de déterminer à chaque instant la déformation ϵ en fonction de l'histoire de la contrainte σ :

$$\epsilon(t) = \mathcal{F}_t [\sigma(\tau)_{-\infty}^t] \quad (2.7)$$

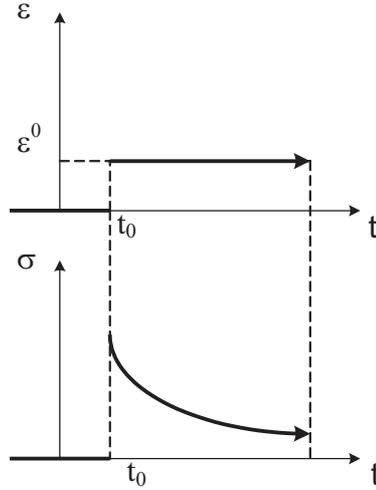


FIGURE 2.2 – Expérience de relaxation unidimensionnelle

et inversement :

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{R}_t [\boldsymbol{\epsilon}(\tau)_{-\infty}^t] \quad (2.8)$$

En conséquence de cette hypothèse, il en résulte en particulier qu'une histoire de sollicitation multidimensionnelle peut être considérée comme la superposition d'histoires de sollicitations unidimensionnelles.

La linéarité du comportement permet d'exprimer la réponse $\boldsymbol{\epsilon}(t_0, t; \boldsymbol{\sigma}^0)$ dans l'expérience de fluage sous la forme tensorielle suivante :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{\sigma}^0 Y_{t_0}(t) \\ \boldsymbol{\epsilon}(t) = \tilde{\mathbb{J}}(t_0, t) : \boldsymbol{\sigma}^0 \end{cases} \quad (2.9)$$

où $\tilde{\mathbb{J}}(t_0, t)$ est un tenseur du 4^{eme} ordre, fonction de fluage tensorielle de t , nulle pour $t < t_0$.

De façon similaire, la réponse $\boldsymbol{\sigma}(t_0, t; \boldsymbol{\epsilon}^0)$ dans l'expérience de relaxation s'exprime en introduisant le tenseur du 4^{eme} ordre $\mathbb{R}(t_0, t)$, nul pour $t < t_0$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\epsilon}(t) = \boldsymbol{\epsilon}^0 Y_{t_0}(t) \\ \boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbb{R}(t_0, t) : \boldsymbol{\epsilon}^0 \end{cases} \quad (2.10)$$

En tenant compte du fait que la déformation élastique instantanée est linéaire élastique, les fonctions de fluage $\tilde{\mathbb{J}}(t_0, t_0)$ et de relaxation $\mathbb{R}(t_0, t_0)$ doivent vérifier la relation :

$$\tilde{\mathbb{J}}(t_0, t_0) : \mathbb{R}(t_0, t_0) = \mathbb{I} \quad (2.11)$$

2.1.4 Relation constitutive

En utilisant le principe de superposition de Boltzmann, pour la réponse à une histoire de $\boldsymbol{\sigma}$, on obtient la relation ([71]) :

$$\boldsymbol{\epsilon}(t) = \tilde{\mathbb{J}}(t, t) : \boldsymbol{\sigma}(t) - \int_{t_0}^t \frac{\partial \tilde{\mathbb{J}}}{\partial \tau}(\tau, t) : \boldsymbol{\sigma}(\tau) d\tau \quad (2.12)$$

De façon similaire, la réponse à une histoire de ϵ donnée s'écrit :

$$\sigma(t) = \mathbb{R}(t, t) : \epsilon(t) - \int_{t_0}^t \frac{\partial \mathbb{R}}{\partial \tau}(\tau, t) : \epsilon(\tau) d\tau \quad (2.13)$$

Les formules de Boltzmann mettent en évidence que pour le matériau viscoélastique linéaire, le comportement différé est entièrement décrit par la seule connaissance de ses fonctions de fluage ou de ses fonctions de relaxation.

2.1.5 Matériau non-vieillissant

Les expériences d'identification du comportement montrent que les propriétés physiques du matériau étudié peuvent évoluer indépendamment des sollicitations mécaniques auxquelles il est soumis. Ceci peut être le résultat de causes diverses : température, hygrométrie, cristallisation, etc. Ce phénomène est appelé de façon générale "vieillessement". Contrairement à ce type de situation, le matériau viscoélastique est considéré comme non-vieillissant si ses propriétés mécaniques ne varient pas avec le temps. Ceci se traduit mathématiquement par la propriété d'invariance par translation dans le temps : la réponse à l'instant t pour une sollicitation à l'instant t_0 ($t_0 < t$) est la même que la réponse à l'instant $(t + \tau)$ pour la même sollicitation à l'instant $(t_0 + \tau)$ (Figure 2.3). Dans ce cas, les fonctions de fluage et de relaxation ne dépendent que d'une seule variable temporelle correspondant au temps passé depuis le moment d'application de la sollicitation :

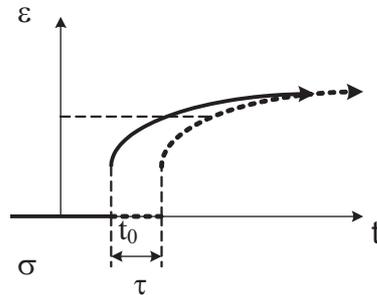


FIGURE 2.3 – Invariance du comportement par translation dans le temps

$$\begin{cases} \tilde{\mathbb{J}}(t_0, t) \equiv \tilde{\mathbb{J}}(t_0 - t) \\ \mathbb{R}(t_0, t) \equiv \mathbb{R}(t_0 - t) \end{cases} \quad (2.14)$$

Finalement, pour un matériau viscoélastique linéaire non-vieillissant, le comportement est décrit sous la forme de produit de convolution de Riemann comme suit :

$$\begin{cases} \epsilon(t) = \tilde{\mathbb{J}}(t) * \dot{\sigma} \\ \sigma(t) = \mathbb{R}(t) * \dot{\epsilon} \end{cases} \quad (2.15)$$

où, le produit de convolution de deux fonctions f et g , qui se note " $f * g$ " est défini par :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - t) . g(t) dt \quad (2.16)$$

Au début et à l'infini les tenseurs \mathbb{J} et \mathbb{R} sont inverses :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbb{J}}(0) : \mathbb{R}(0) = \mathbb{I} \\ \tilde{\mathbb{J}}(\infty) : \mathbb{R}(\infty) = \mathbb{I} \end{cases} \quad (2.17)$$

2.1.6 Matériau isotrope

Par la suite, on suppose que le matériau viscoélastique linéaire étudié est isotrope. Le principe de Onsager (Mandel 1966 [48]) stipule que le tenseur $\mathbb{R}(t)$ relatif à un matériau viscoélastique isotrope ne dépend que de deux fonctions scalaires de $t, \kappa(t)$ et $\mu(t)$:

$$\mathbb{R}(t) = 3\kappa(t)\mathbb{J} + 2\mu(t)\mathbb{K}. \quad (2.18)$$

où $2\mu(t)$ apparaît comme la fonction de relaxation en cisaillement simple. $\kappa(t)$ apparaît comme la fonction de relaxation en compression isotrope. Les tenseurs d'ordre quatre \mathbb{J} et \mathbb{K} sont définis en annexe D.

Cette équation permet d'exprimer la loi de comportement viscoélastique sous la forme du produit de convolution :

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \kappa(t) * \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}(t)) \cdot \mathbf{i} + 2\mu * \boldsymbol{\epsilon}^d(t) \quad (2.19)$$

où $\boldsymbol{\epsilon}^d$ est le tenseur déviatorique de déformations.

2.2 Transformée de Laplace-Carson et principe de correspondance

2.2.1 Transformée de Laplace-Carson

Une méthode classique permettant de résoudre les problème de mécanique relatifs aux matériaux viscoélastiques linéaires non-vieillissants est l'utilisation de la transformée de Laplace-Carson, qui se définit comme suit.

Soit une fonction $f(t)$, sa transformée de Laplace-Carson, noté $f^*(s)$ est obtenue à partir de sa transformée de Laplace, notée $\tilde{f}(s)$ par :

$$f^*(s) = s\tilde{f}(s) = s \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad (2.20)$$

où s est la variable dans l'espace de Laplace-Carson qui est supposée réelle.

Cette transformée présente des propriétés intéressantes et en particulier les théorèmes liés à la valeur initiale et à la valeur finale Le théorème de la valeur initiale est exprimé par :

$$\lim_{s \rightarrow 0} f^*(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \quad (2.21)$$

et le théorème de la valeur finale par :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} f^*(s) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) \quad (2.22)$$

Compte tenu des propriétés de la transformée de Laplace Carson, le comportement viscoélastique linéaire du matériau isotrope sera exprimé dans l'espace de Laplace-Carson par :

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \kappa^* \text{tr} \boldsymbol{\epsilon}^* \mathbf{i} + 2\mu^* \boldsymbol{\epsilon}^{d*} \quad (2.23)$$

On constate que ces relations sont strictement identiques aux relations de l'élasticité, à s fixé.

2.2.2 Principe de correspondance

Dans l'espace de Laplace-Carson, la loi de comportement du matériau viscoélastique linéaire isotrope non-vieillissant est formellement identique à celle du matériau élastique linéaire isotrope. Ceci conduit au principe exposé par Mandel 1955 [48] suivant lequel, dans l'hypothèse de changements de géométrie négligeables, la résolution de la plupart des problèmes pour un système constitué d'un matériau viscoélastique linéaire isotrope non-vieillissant se ramène à la résolution du problème homologue pour le même système constitué d'un matériau élastique linéaire isotrope.

Ce principe a déjà été utilisé de nombreuses fois pour traiter les problèmes d'homogénéisation en viscoélasticité et toute la suite du mémoire sera basée sur cette méthodologie. Le problème est déjà résolu sous forme analytique ou semi-analytique en utilisant les résultats de la théorie de l'élasticité dans l'espace de Laplace-Carson, puis les résultats dans l'espace réel sont obtenus en procédant à la transformée de Laplace inverse.

2.2.3 Transformée de Laplace inverse

La principale difficulté dans la résolution des problèmes d'homogénéisation en viscoélasticité est de procéder à la transformée de Laplace inverse pour obtenir des résultats prédisant les fonctions de fluage et de relaxation. Différentes méthodes numériques approchées peuvent être utilisées, mais elles présentent peu d'intérêt si la transformée de Laplace inverse ne peut se calculer de façon explicite. Un cas très important est celui où les fonctions de fluage et de relaxation peuvent s'exprimer sous forme de fraction rationnelle. Il est alors possible d'exprimer explicitement la transformée de Laplace inverse.

En effet, soit une fonction $\tilde{g}(s)$ dans l'espace de Laplace qui s'exprime sous la forme d'une fraction rationnelle $\tilde{g}(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, où $P(s)$ est un polynôme de degré inférieur à celui du polynôme $Q(s)$. Le polynôme $Q(s)$ peut toujours se décomposer sous la forme :

$$Q(s) = \prod_{i=1}^p (s - s_i)^{m_i} \quad (2.24)$$

où s_i sont les racines de degré m_i du polynôme $Q(s)$ et $\sum_{i=1}^p m_i = n$, degré de $Q(s)$. Alors, on peut décomposer $g(s)$ en fractions rationnelles simples comme suit :

$$\tilde{g}(s) = \sum_{i=1}^p \left(\sum_{k=1}^{m_i} \frac{A_k^i}{(s - s_i)^k} \right) \quad (2.25)$$

où A_k^i est le résidu, qui est donné par :

$$A_k^i = \lim_{s \rightarrow s_i} \frac{1}{(m^i - k)!} \frac{d^{(m^i - k)}}{ds^{(m^i - k)}} \{L_i(s)\} \quad (2.26)$$

avec :

$$L_i(s) = (s - s_i)^{m^i} \tilde{g}(s) \quad (2.27)$$

La transformée de Laplace inverse de $\tilde{g}(s)$ est donnée par :

$$g(t) = \sum_{i=1}^p e^{s_i t} \left(\sum_{k=1}^{m^i} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A_k^i \right) \quad (2.28)$$

2.3 Schémas rhéologiques

Le comportement viscoélastique linéaire d'un matériau isotrope non-vieillissant peut toujours être représenté par un "modèle rhéologique" constitué de parties élastiques et de parties visqueuses dont la réponse est identique à celle du matériau. Ce modèle permet de visualiser le comportement du matériau et par ailleurs, tout modèle de viscoélasticité construit sur un modèle rhéologique respecte les principes de la thermodynamique. Dans le cas général, ces modèles peuvent être plus ou moins complexes.

Dans cette section, on présente les modèles les plus simples couramment utilisés et permettant de caractériser les lois de comportement relatives à de nombreux matériaux viscoélastiques.

2.3.1 Modèle de Maxwell

Le modèle de Maxwell est un modèle qui est représenté par l'assemblage d'un ressort et d'un amortisseur (Figure 2.4). La fonction de relaxation, obtenue dans l'espace de



FIGURE 2.4 – Modèle de Maxwell

Laplace-Carson, est donnée par :

$$R^*(s) = \frac{E\eta s}{E + \eta s} \quad (2.29)$$

dont on déduit, dans l'espace réel :

$$R(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2.30)$$

où τ est le temps caractéristique de relaxation qui est défini par :

$$\tau = \frac{\eta}{E} \quad (2.31)$$

On voit que la fonction de relaxation est une fonction exponentielle décroissante qui tend vers 0 lorsque le temps tend vers l'infini.

Ce modèle est défini dans le cas unidimensionnel, mais peut être aisément étendu au cas tridimensionnel comme suit. Comme on l'a vu précédemment, un matériau viscoélastique isotrope est caractérisé par deux fonctions du temps. La meilleure façon de représenter un tel comportement est d'introduire deux fonctions de relaxation, l'une pour des sollicitations en compression isotrope $R_\kappa^*(s)$ et l'autre pour des sollicitations de cisaillement $R_\mu^*(s)$. Si les deux mécanismes sont de type "Maxwell", ces fonctions sont données par (voir annexe D) :

$$\begin{cases} R_\kappa^*(s) = \frac{K\eta_\kappa s}{K + \eta_\kappa s} \\ R_\mu^*(s) = \frac{G\eta_\mu s}{G + \eta_\mu s} \end{cases} \quad (2.32)$$

où K et G sont les modules d'incompressibilité et de cisaillement, respectivement, de la partie élastique.

et η_κ, η_μ sont des termes de viscosité en compression et en cisaillement respectivement. Dans les chapitres suivants, on utilisera les notations :

$$\begin{cases} \kappa(s) = R_\kappa^*(s) \\ \mu(s) = R_\mu^*(s) \end{cases} \quad (2.33)$$

2.3.2 Modèle de Kelvin-Voigt

Le modèle de Kelvin-Voigt est représenté par une partie élastique et un amortisseur en parallèle (Figure 2.5). La fonction de relaxation dans ce cas est donnée dans l'espace

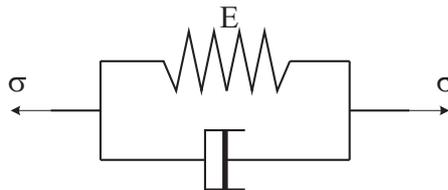


FIGURE 2.5 – Modèle de Kelvin-Voigt

de Laplace-Carson par :

$$R^*(s) = E + \eta s \quad (2.34)$$

On obtient la fonction de fluage :

$$J^*(s) = \frac{1}{E + \eta s} \quad (2.35)$$

L'inverse de Laplace produit la fonction de fluage dans l'espace réel :

$$J(t) = \frac{1}{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (2.36)$$

Pour un matériau viscoélastique isotrope pour lequel la réponse en cisaillement et la réponse en compression isotrope sont tous deux caractérisés par un modèle de Kelvin-Voigt, on obtient (voir annexe D) :

$$\begin{cases} R_{\kappa}^*(s) = K + \eta_{\kappa}s \\ R_{\mu}^*(s) = G + \eta_{\mu}s \end{cases} \quad (2.37)$$

L'équation (2.36) met en évidence que la réponse temporelle déduite du modèle de Kelvin-Voigt est bornée. Lorsque le temps tend vers l'infini, la réponse produit une déformation résiduelle caractérisée par un module relaxé E .

2.3.3 Modèle de Zener

Le modèle est constitué de deux parties élastiques et d'une partie visqueuse disposées comme indiqué en Figure 2.6. La fonction de relaxation correspondante s'écrit sous la

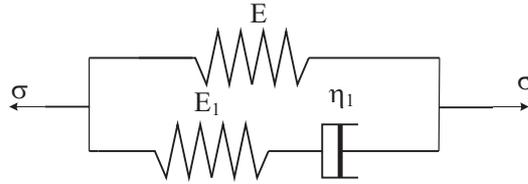


FIGURE 2.6 – Modèle de Zener

forme :

$$\begin{cases} R^*(s) = \frac{EE_1 + \eta_1(E + E_1)s}{E_1 + \eta_1s} \\ R(t) = E + E_1e^{-\frac{t}{\tau_1}} \\ \tau_1 = \frac{\eta_1}{E_1} \end{cases} \quad (2.38)$$

2.3.4 Modèle de Maxwell généralisé

Le modèle de Maxwell généralisé est constitué de n modèles de Maxwell assemblés en parallèle (Figure 2.7).

La fonction de relaxation est donnée dans l'espace de Laplace-Carson par :

$$R^*(s) = E + \sum_{i=1}^n E_i \frac{s}{s + \frac{1}{\tau_i}} \quad (2.39)$$

et dans l'espace réel par :

$$R(t) = E + \sum_{i=1}^n E_i e^{-\frac{t}{\tau_i}} \quad (2.40)$$

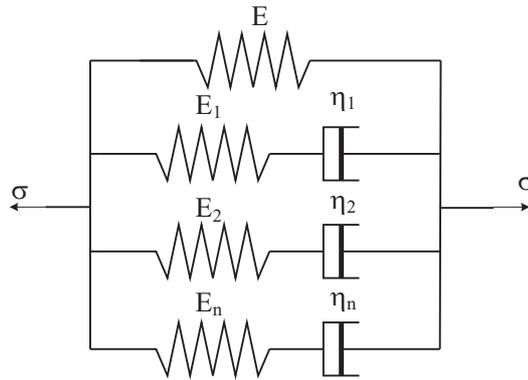


FIGURE 2.7 – Modèle de Maxwell généralisé

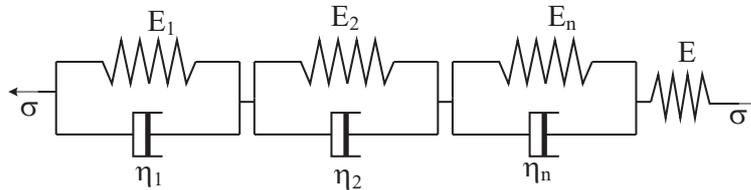


FIGURE 2.8 – Modèle de Kelvin généralisé

2.3.5 Modèle de Kelvin généralisé

Le modèle de Kelvin généralisé est constitué de n modèles de Kelvin-Voigt assemblés en série (Figure 2.8) avec en complément une partie élastique.

La fonction de fluage est donnée dans l'espace de Laplace-Carson par :

$$J^*(s) = \frac{1}{E} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{E_i + \eta_i s} \quad (2.41)$$

et dans l'espace réel par :

$$J(t) = \frac{1}{E} + \sum_{i=1}^n \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}}\right) \quad (2.42)$$

2.4 Conclusion

En conclusion, le comportement viscoélastique non vieillissant d'un matériau isotrope est constitué de deux parties, l'une caractérisant la réponse temporelle à une déformation isotrope imposée et l'autre caractérisant la réponse à une déformation de cisaillement imposée. L'écriture de la loi de comportement ainsi obtenue dans l'espace de Laplace-Carson permet d'obtenir une relation entre contraintes et déformations qui est strictement identique à celle caractérisant le comportement élastique. Les expressions des fonctions de relaxation et de fluage peuvent être obtenues explicitement pour certains modèles rhéologiques combinant des parties élastiques et des parties visqueuses.

Chapitre 3

Obtention du comportement viscoélastique effectif par le schéma autocohérent généralisé

3.1 Introduction

Ce chapitre est dédié à l'obtention du comportement effectif d'un composite viscoélastique par une approche simplifiée du Schéma Autocohérent Généralisé, développé en élasticité depuis de nombreuses années [33, 16]. Rappelons qu'une des difficultés qui apparaît pour l'obtention de la solution du problème de viscoélasticité est dans l'inversion de la solution apportée par ce schéma dans l'espace de Laplace-Carson, en raison du fait que la solution n'apparaît pas sous forme de fraction rationnelle dans l'espace de Laplace. Dans ce contexte, une méthode de détermination des spectres de relaxation est donnée par Beurthey et Zaoui [4] en utilisant le contour d'intégration de Bromwich pour l'inversion de la transformée de Laplace. D'autres solutions sont possibles également, telles que l'utilisation de l'approximation de Padé [72] ou la mise en oeuvre de transformées inverses sous forme numérique, telle que la méthode introduite par [22]. Dans ce chapitre, nous présentons une méthode simple pour obtenir une valeur approchée sous forme de fraction rationnelle de la solution du problème autocohérent généralisé représentée par la solution d'une équation du second degré dans l'espace de Laplace-Carson sous la forme de fraction rationnelle. La méthode approchée sera appliquée pour le modèle autocohérent généralisé dans le cas biphasique avec et sans interface. Nous évaluerons le domaine de validité de ce type de solution approchée. En particulier, nous comparerons la solution obtenue avec la solution obtenue par inversion de la transformée de Laplace-Carson par la méthode de Donolato [22]. Enfin, le chapitre se terminera sur la mise en place d'une solution pour un modèle avec interface imparfaite.

3.2 Problème de viscoélasticité biphasique avec interface parfaite

3.2.1 Formulation élastique

Le modèle autocohérent généralisé est utilisable pour un nombre de phases quelconques. Toutefois, l'exposition de la méthode simplifiée sera effectuée dans le cas d'un matériau biphasique, de type matrice-inclusion, les matériaux étant supposés isotropes.

Notons que, compte tenu des résultats du chapitre 1, la solution du problème correspondant à une sollicitation isotrope se présente déjà sous forme de fraction rationnelle dans l'espace de Laplace-Carson, dont la transformée inverse est immédiate. Dans ce chapitre, on s'intéressera donc essentiellement au problème de sollicitation en cisaillement. Notons que la solution classique présentée dans le chapitre 1 est bien adaptée pour les problèmes de comportement élastique. Toutefois, pour l'extension au cas viscoélastique, il est important de bien faire apparaître sous quelle forme apparaissent les propriétés élastiques des phases constituantes et une formulation un peu différente sera utilisée. Cette formulation permet en outre une extension simple au cas de l'interface imparfaite qui sera étudié ensuite.

3.2.1.1 Reformulation de la solution élastique dans le cas de deux phases

La formulation utilise des notations similaires à celles utilisées au chapitre 1. La fonction de transfert donnée par la relation (1.78) est réécrite sous la forme :

$$[\mathbf{L}_{eff}(R_2)] \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ 0 \\ C_3 \\ 0 \end{bmatrix} = [\mathbf{L}_2(R_2)] [\mathbf{L}_2(R_1)]^{-1} [\mathbf{L}_1(R_1)] \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} R_2\gamma_0 + 3R_2^{-4}C_3 \\ R_2\gamma_0 - 2R_2^{-4}C_3 \\ \mu_{eff}(\gamma_0 - 12R_2^{-5}C_3) \\ \mu_{eff}(\gamma_0 + 8R_2^{-5}C_3) \end{bmatrix} = [\mathbf{L}_2(R_2)] [\mathbf{L}_2(R_1)]^{-1} [\mathbf{L}_1(R_1)] \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

en posant $\mu = \mu_2, x = \frac{\kappa_2}{\mu_2}$, la matrice $[\mathbf{L}_2(r)]$ est réécrite sous la forme :

$$[\mathbf{L}_2(r)] = [\mathbf{N}_g(r, \mu)] [\mathbf{L}_2^*] [\mathbf{N}_d(r)] \quad (3.3)$$

avec :

$$\mathbf{L}_2^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 - 3x & 3 & 3 + 3x \\ 1 & -5x - \frac{11}{3} & -2 & 2 \\ 1 & \frac{3x}{2} - 1 & -12 & -9x - 4 \\ 1 & -8x - \frac{5}{3} & 8 & 3x \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{N}_g(r, \mu) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\mu}{r} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{N}_d(r) = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-2} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Cette forme fait apparaître la matrice adimensionnelle centrale, fonction uniquement du coefficient de Poisson et deux matrices diagonales faisant intervenir un module élastique et le rayon de l'interface : La matrice de transfert s'exprime dans cette nouvelle formulation selon :

$$[\mathbf{L}_2(R_2)] [\mathbf{L}_2(R_1)]^{-1} = [\mathbf{N}_g(R_2, \mu)] [\mathbf{L}_2^*] [\mathbf{N}_d(\alpha)] [\mathbf{L}_2^*]^{-1} [\mathbf{N}_g(R_1, \mu)]^{-1} \quad (3.7)$$

avec $\alpha = \frac{R_2}{R_1}$ et $[\mathbf{L}_2^*]$ est calculée avec $x = x_2 = \frac{\kappa_2}{\mu_2}$, les coefficients κ_2, μ_2 étant nommés κ, μ .

Par ailleurs, la matrice adimensionnelle $[\mathbf{L}_2^*]$ s'inverse sous la forme analytique :

$$[\mathbf{L}_2^*]^{-1} = \frac{1}{5(3x+4)} \begin{bmatrix} \frac{18x+8}{24} & -\frac{9x}{24} & \frac{6x+6}{6} & \frac{6}{6} \\ \frac{3x-2}{7} & -\frac{24x-5}{7} & \frac{6x-4}{7} & \frac{15x+11}{7} \\ \frac{7}{2} & \frac{7}{3} & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

On en déduit l'expression de la partie centrale de la matrice de transfert :

$$[\mathbf{L}_2^*] [\mathbf{N}_d(\alpha)] [\mathbf{L}_2^*]^{-1} = \frac{\mathbf{C}_\kappa(\alpha)x + \mathbf{C}_\mu(\alpha)}{5\alpha^4(3x+4)} \quad (3.9)$$

où chaque matrice $[\mathbf{C}_\kappa(\alpha)]$ et $[\mathbf{C}_\mu(\alpha)]$ est donnée par un polynôme en α ayant des coefficients matriciels constants :

$$[\mathbf{C}_l(\alpha)] = [\mathbf{C}_{l0}] + [\mathbf{C}_{l2}]\alpha^2 + [\mathbf{C}_{l5}]\alpha^5 + [\mathbf{C}_{l7}]\alpha^7 \quad (3.10)$$

avec $l = \kappa, \mu$

et :

$$\mathbf{C}_{\kappa 0} = \frac{3}{7} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -12 \\ 8 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ -8 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{C}_{\kappa 2} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{C}_{\kappa 5} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\mathbf{C}_{\kappa 7} = \frac{3}{7} \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ -3 \\ 16 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{C}_{\mu 0} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -12 \\ 8 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ -4 \\ 11 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{C}_{\mu 2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$\mathbf{C}_{\mu 5} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{C}_{\mu 7} = \frac{2}{7} \begin{bmatrix} -6 \\ 11 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

on en déduit :

$$\begin{bmatrix} \gamma_0 + 3R_2^{-5}C_3 \\ \gamma_0 - 2R_2^{-5}C_3 \\ \bar{\mu}_{eff} (\gamma_0 - 12R_2^{-5}C_3) \\ \bar{\mu}_{eff} (\gamma_0 + 8R_2^{-5}C_3) \end{bmatrix} = \frac{1}{5\mu\alpha^4 (3\kappa + 4\mu)} (\kappa [\mathbf{C}_\kappa (\alpha)] + \mu [\mathbf{C}_\mu (\alpha)]) \quad (3.19)$$

$$(\mu [\mathbf{W}_1] + R_1 [\mathbf{W}_0]) \mathbf{L}_1 (R_1) \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

avec :

$$\bar{\mu}_{eff} = \frac{\mu_{eff}}{\mu_2} \quad (3.20)$$

$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\mathbf{W}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

on note $C'_3 = R_2^{-5}C_3$ et $A'_1 = \frac{A_1}{5\mu\alpha^4 R_2(3\kappa + 4\mu)}$:

$$\begin{bmatrix} \gamma_0 + 3C'_3 \\ \gamma_0 - 2C'_3 \\ \bar{\mu}_{eff}(\gamma_0 - 12C'_3) \\ \bar{\mu}_{eff}(\gamma_0 + 8C'_3) \end{bmatrix} = (\kappa [\mathbf{C}_\kappa(\alpha)] + \mu [\mathbf{C}_\mu(\alpha)]) (\mu [\mathbf{W}_1] + R_1 [\mathbf{W}_0]) [\mathbf{L}_1(R_1)] \begin{bmatrix} A'_1 \\ B'_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

avec $x_1 = \frac{\kappa_1}{\mu_1}$, la matrice $[\mathbf{L}_1(R_1)]$ peut se décomposer sous la forme :

$$[\mathbf{L}_1(R_1)] = [\mathbf{N}_g(\mu_1, R_1)] [\mathbf{L}_1^*(x_1)] [\mathbf{N}_d(R_1)] \quad (3.24)$$

la matrice $[\mathbf{N}_d(R_1)]$ est diagonale et produit :

$$[\mathbf{N}_d(R_1)] \begin{bmatrix} A'_1 \\ B'_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A''_1 \\ B''_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

avec : $A''_1 = R_1 A'_1$ et $B''_1 = R_1^3 B'_1$
et donc :

$$\begin{bmatrix} \gamma_0 + 3C'_3 \\ \gamma_0 - 2C'_3 \\ \bar{\mu}_{eff}(\gamma_0 - 12C'_3) \\ \bar{\mu}_{eff}(\gamma_0 + 8C'_3) \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} A''_1 \\ B''_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

où :

$$[\mathbf{T}] = (\kappa [\mathbf{C}_\kappa(\alpha)] + \mu [\mathbf{C}_\mu(\alpha)]) (\mu [\mathbf{W}_1] + \mu_1 [\mathbf{W}_0]) [\mathbf{L}_1^*(x_1)] \quad (3.27)$$

Sous cette dernière forme, on voit que la matrice de transfert fait apparaître clairement l'influence des coefficients élastiques des deux phases au sein de la matrice $[\mathbf{T}]$.

Le remplacement des constantes initiales A_1, B_1 par A''_1, B''_1 ne pose de pas de difficulté car l'expression de la solution est obtenue à partir du déterminant de ces équations. La dernière relation se présente comme un système homogène portant sur les inconnues $\gamma_0, C'_3, A''_1, B''_1$. Ce système présente une solution non triviale si le déterminant est nul, soit :

$$Det = \begin{vmatrix} 1 & 3 & T_{11} & T_{12} \\ 1 & -2 & T_{21} & T_{22} \\ \bar{\mu}_{eff} & -12\bar{\mu}_{eff} & T_{31} & T_{32} \\ \bar{\mu}_{eff} & 8\bar{\mu}_{eff} & T_{41} & T_{42} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.28)$$

ce qui amène évidemment à une équation du second degré pour la détermination du module de cisaillement effectif normalisé $\bar{\mu}_{eff}$, qui est déterminé par :

$$A(\bar{\mu}_{eff})^2 + B\bar{\mu}_{eff} + C = 0 \quad (3.29)$$

où les coefficients A, B, C sont donnés par (Annexe A) :

$$\begin{cases} A = 4\Delta_{12} \\ B = \Delta_{23} - 2\Delta_{13} + 3\Delta_{24} - 2\Delta_{14} \\ C = -\Delta_{34} \end{cases} \quad (3.30)$$

où Δ_{kl} est donné par :

$$\Delta_{kl} = \begin{vmatrix} T_{k1} & T_{k2} \\ T_{l1} & T_{l2} \end{vmatrix} \quad (3.31)$$

3.2.1.2 Inclusion vide

Dans ce cas, on cherche la solution lorsque $\mu_1 \approx 0$. La matrice de transfert \mathbf{T} devient :

$$[\mathbf{T}] = (\kappa [\mathbf{C}_\kappa(\alpha)] + \mu [\mathbf{C}_\mu(\alpha)]) \mu [\mathbf{W}_1] [\mathbf{L}_1^*(x_1)] \quad (3.32)$$

Alors, le produit final est donné par :

$$\mu [\mathbf{W}_1] [\mathbf{L}_1^*(x_1)] \begin{bmatrix} A_1'' \\ B_1'' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ D \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Le traitement est identique au cas précédent avec la matrice de transfert :

$$[\mathbf{T}_0] = \kappa [\mathbf{C}_\kappa(\alpha)] + \mu [\mathbf{C}_\mu(\alpha)] \quad (3.34)$$

3.2.1.3 Inclusion rigide

Dans ce cas, $\mu_1 \gg \mu$ et la matrice de transfert est :

$$[\mathbf{T}] = (\kappa [\mathbf{C}_\kappa(\alpha)] + \mu [\mathbf{C}_\mu(\alpha)]) \mu_1 [\mathbf{W}_0] [\mathbf{L}_1^*(x_1)] \quad (3.35)$$

ce qui donne :

$$\mu_1 [\mathbf{W}_0] [\mathbf{L}_1^*(x_1)] \begin{bmatrix} A_1'' \\ B_1'' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E \\ F \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

La construction de la matrice Δ_{kl} peut s'effectuer alors par l'utilisation de la matrice :

$$[\mathbf{T}_\infty] = (\kappa [\mathbf{C}_\kappa(\alpha)] + \mu [\mathbf{C}_\mu(\alpha)]) [\mathbf{P}] \quad (3.37)$$

où, \mathbf{P} est la matrice de permutation :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

3.2.2 Formulation viscoélastique

Dans le cas général, la matrice $[\mathbf{T}]$ est un polynôme du second degré en (μ, κ) à coefficients matriciels. Pour le problème viscoélastique, les coefficients élastiques deviennent des fonctions de la variable de Laplace-Carson s . Dans ce qui suit, on s'intéressera plus spécialement au problème d'une matrice viscoélastique contenant des inclusions élastiques et la matrice $[\mathbf{T}(s)]$ peut s'écrire comme d'après (3.27) :

$$[\mathbf{T}(s)] = \mu^2(s) [\mathbf{T}_{\mu^2}] + \mu(s) \kappa(s) [\mathbf{T}_{\mu\kappa}] + \mu(s) [\mathbf{T}_{\mu}] + \kappa(s) [\mathbf{T}_{\kappa}] \quad (3.39)$$

où les coefficients matriciels sont uniquement des fonctions de μ_1, κ_1 et α :

$$\begin{cases} [\mathbf{T}_{\mu^2}] = [\mathbf{C}_{\mu}(\alpha)] [\mathbf{W}_1] [\mathbf{L}_1^*(x_1)] \\ [\mathbf{T}_{\mu\kappa}] = [\mathbf{C}_{\kappa}(\alpha)] [\mathbf{W}_1] [\mathbf{L}_1^*(x_1)] \\ [\mathbf{T}_{\mu}] = \mu_1 [\mathbf{C}_{\mu}(\alpha)] [\mathbf{W}_0] [\mathbf{L}_1^*(x_1)] \\ [\mathbf{T}_{\kappa}] = \mu_1 [\mathbf{C}_{\kappa}(\alpha)] [\mathbf{W}_0] [\mathbf{L}_1^*(x_1)] \end{cases} \quad (3.40)$$

On suppose que le comportement de la matrice est associé à un des modèles présentés dans la chapitre 2. Alors, le module d'incompressibilité $\kappa(s)$ et de cisaillement $\mu(s)$ sont des fractions rationnelles qui peuvent s'exprimer sous la forme :

$$\kappa(s) = \frac{\kappa_N(s)}{\kappa_D(s)} \quad (3.41)$$

$$\mu(s) = \frac{\mu_N(s)}{\mu_D(s)} \quad (3.42)$$

Dans ces conditions, la matrice $[\mathbf{T}(s)]$ peut d'écrire :

$$[\mathbf{T}(s)] = \frac{1}{\mu_D^2 \kappa_D} (\mu_N^2 \kappa_D [\mathbf{T}_{\mu^2}] + \mu_N \mu_D [\mathbf{T}_{\mu\kappa}] + \mu_N \mu_D \kappa_D [\mathbf{T}_{\mu}] + \mu_D^2 \kappa_N [\mathbf{T}_{\kappa}]) \quad (3.43)$$

Le terme $\frac{1}{\mu_D^2 \kappa_D}$ n'intervient pas dans le calcul du déterminant du système d'équations et la matrice $[\mathbf{T}(s)]$ peut être donc remplacée par $[\mathbf{T}'(s)]$ avec :

$$[\mathbf{T}'(s)] = \mu_N^2 \kappa_D [\mathbf{T}_{\mu^2}] + \mu_N \mu_D [\mathbf{T}_{\mu\kappa}] + \mu_N \mu_D \kappa_D [\mathbf{T}_{\mu}] + \mu_D^2 \kappa_N [\mathbf{T}_{\kappa}] \quad (3.44)$$

Dans l'hypothèse ci-dessus, si les modules $\kappa(s)$ et $\mu(s)$ sont des fractions rationnelles caractérisées par des numérateurs de degré n et des dénominateurs de degré d , le degré t de la matrice $[\mathbf{T}'(s)]$ en s est égal à :

$$t = \sup(2n + d, 2d + n) \quad (3.45)$$

A noter que les matrices qui composent $[\mathbf{T}'(s)]$ dénommées ci-dessus $[\mathbf{T}_{\mu^2}]$, $[\mathbf{T}_{\mu\kappa}]$, $[\mathbf{T}_{\mu}]$, $[\mathbf{T}_{\kappa}]$ sont indépendantes des degrés des polynômes et ne dépendent que de la géométrie et des propriétés de la phase élastique via $[\mathbf{L}_1(R_1)]$. Les coefficients de l'équation du second degré sont alors des polynômes en s de degré égal à $2t$ compte tenu du fait que le calcul de μ_{eff}^* fait apparaître les produits deux à deux de termes de $[\mathbf{T}'(s)]$.

3.2.3 Approximation de la racine du discriminant

Comme expliqué précédemment, la transformée de Laplace inverse directe de la solution de l'équation du second degré n'est pas immédiate en raison de la racine apparaissant dans la solution.

En effet, le module effectif en cisaillement est donné dans l'espace de Laplace-Carson par la solution positive de l'équation du second degré (3.29) :

$$\mu_{eff}^*(s) = \frac{-B(s) + \sqrt{\Delta(s)}}{2A(s)} \mu(s) \quad (3.46)$$

où $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$ sont des polynômes en s , et $\Delta(s) = B^2(s) - 4A(s)C(s)$.

Dans l'esprit de la méthode de Padé, cette fonction va être estimée par une approximation $\tilde{\mu}_{eff}^*(s)$, qui se présente sous la forme d'une fraction rationnelle :

$$\mu_{eff}^*(s) \approx \tilde{\mu}_{eff}^*(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \quad (3.47)$$

où $P(s)$ et $Q(s)$ sont deux polynôme de s qui doivent bien entendu vérifier les conditions extrêmes pour les petites et grandes valeurs de s :

La condition de la valeur initiale est :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \mu_{eff}^*(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \tilde{\mu}_{eff}^*(s) \quad (3.48)$$

La condition de la valeur finale est :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mu_{eff}^*(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \tilde{\mu}_{eff}^*(s) \quad (3.49)$$

Afin de tirer parti de la forme particulière de la solution de l'équation du second degré, la construction de $P(s)$ est obtenue par la recherche d'une valeur approchée de $\Delta(s)$ sous la forme $\Delta(s) \approx T^2(s)$ où :

$$T(s) = a_0 + a_1s + \dots + a_ms^m \quad (3.50)$$

avec $m = 2t$.

Sachant que $\Delta(s)$ est donné par :

$$\Delta(s) = \Delta_0 + \Delta_1s + \dots + \Delta_ps^p \quad (3.51)$$

avec $p = 2m$.

Les coefficients Δ_i sont toujours positifs. Donc, les conditions de la valeur initiale et de la valeur finale sont satisfaites si :

$$\begin{cases} a_0 = \sqrt{\Delta_0} \\ a_m = \sqrt{\Delta_p} \end{cases} \quad (3.52)$$

Les autres coefficients de $T(s)$ sont obtenus ensuite en identifiant le carré du polynôme $T(s)$ avec le polynome $\Delta(s)$:

$$T^2(s) = \sum_{i=0}^p b_i s^i \approx \Delta(s) \quad (3.53)$$

ce qui conduit à un système de $p + 1$ équations :

$$b_i = \sum_{r=0}^i a_r a_{i-r} \quad (i \leq m) \quad (3.54)$$

et :

$$b_i = \sum_{r=i-m}^{p-m} a_r a_{i-r} \quad (i > m) \quad (3.55)$$

Ces équations ne peuvent évidemment pas être vérifiées en totalité. En tenant compte du fait que deux de ces équations sont vérifiées en raison des théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale, $(m - 1)$ équations supplémentaires peuvent être utilisées pour obtenir les coefficients de $T(s)$. Le choix des coefficients de $T(s)$ qui est adopté est de permettre de reproduire exactement en nombre égal les coefficients de plus haut degré et les coefficients de plus bas degré. Les coefficients de $T(s)$ sont alors complètement explicites et le résultat obtenu approche au mieux le comportement de la solution pour les petites et les grandes valeurs de s .

3.2.4 Application à différents modèles rhéologiques

3.2.4.1 Modèle de Kelvin-Voigt

La méthode qui est décrite dans la section précédente sera utilisée dans cette section pour obtenir les propriétés effectives d'un composite biphasique avec la matrice viscoélastique de type Kelvin-Voigt et l'inclusion élastique. On étudie trois cas, dépendant du contraste. Le premier est le cas intermédiaire où les contrastes entre les propriétés élastiques de la matrice et de l'inclusion sont finis. Ensuite, le cas de la matrice contenant une inclusion infiniment rigide est présenté et finalement, on traite le cas d'une inclusion vide.

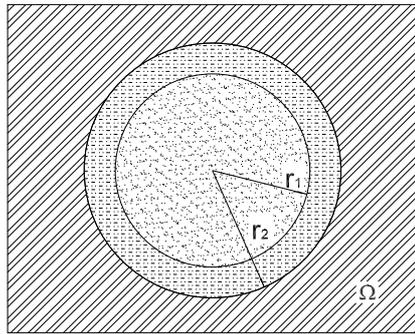


FIGURE 3.1 – Modèle d'un composite de deux phases.

Dans le cas intermédiaire, le composite comprend des inclusions élastiques linéaires isotropes caractérisées par le module d'incompressibilité κ_1 , le module de cisaillement μ_1 et la concentration f_1 . Le comportement viscoélastique de la matrice est de type Kelvin-Voigt.

La loi de comportement peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$\begin{cases} s_{ij} = 2Ge_{ij} + 2\eta_G \dot{e}_{ij} \\ \sigma_{kk} = 3K\epsilon_{kk} + 3\eta_K \dot{\epsilon}_{kk} \end{cases} \quad (3.56)$$

où K , G sont des modules instantanés en compression et en cisaillement, η_K , η_G sont des viscosités en compression et en cisaillement, les tenseurs \mathbf{e} et \mathbf{s} sont les déviateurs des tenseurs de déformation et de contrainte, respectivement.

Dans l'espace de Laplace-Carson, le comportement s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbb{R}^* : \boldsymbol{\epsilon}^* \quad (3.57)$$

où le tenseur d'ordre quatre \mathbb{R}^* est isotrope et caractérisé par deux coefficients d'incompressibilité et de cisaillement :

$$\begin{cases} R_\kappa^* = K + \eta_K s \\ R_\mu^* = G + \eta_G s \end{cases} \quad (3.58)$$

Tous les paramètres physiques utilisés pour l'application sont rassemblés dans le tableau (3.1)

TABLE 3.1 – Propriétés mécaniques du composite de deux phases pour le cas intermédiaire.

Phase	Inclusion	Matrice
Fraction volumique (%)	40	60
Module d'incompressibilité κ (GPa)	70	0.1
Module de cisaillement μ (GPa)	10	0.0375
Viscosité en compression η_K (GPa.jour)	0	5
Viscosité en cisaillement η_G (GPa.jour)	0	1

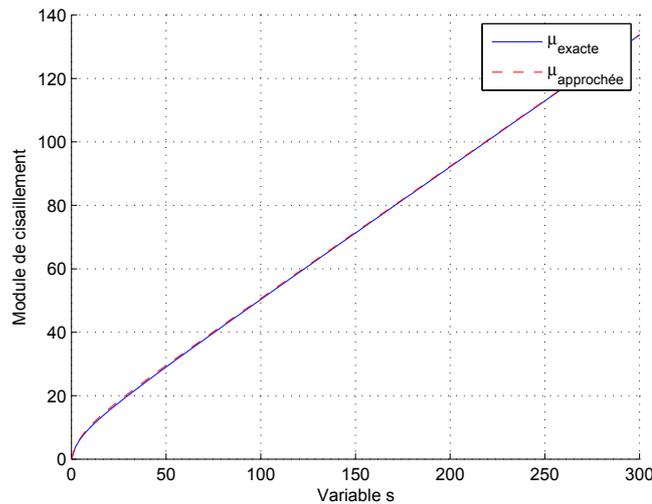


FIGURE 3.2 – Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée dans l'espace de Laplace-Carson du modèle où la matrice est viscoélastique de Kelvin-Voigt contenant une inclusion élastique.

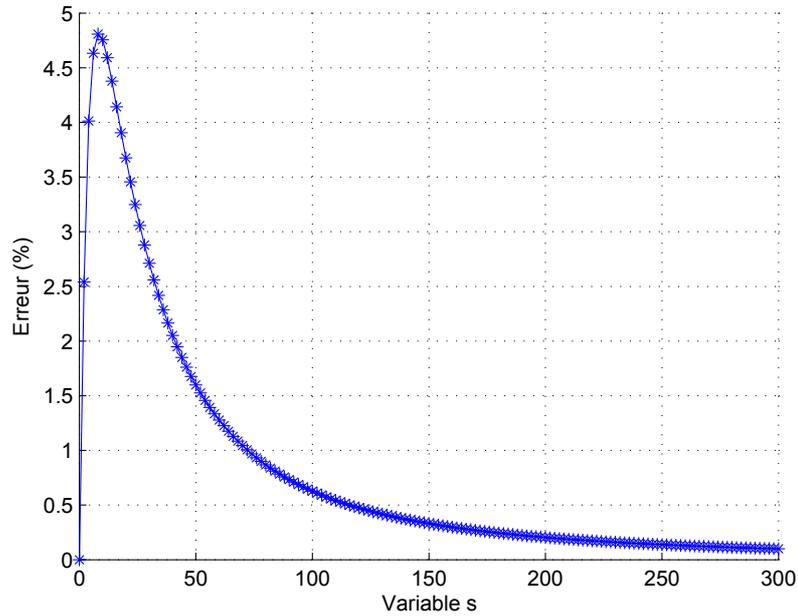


FIGURE 3.3 – Evaluation de l'erreur de la méthode approchée dans l'espace de Laplace-Carson du modèle où la matrice est viscoélastique de Kelvin-Voigt contenant une inclusion élastique.

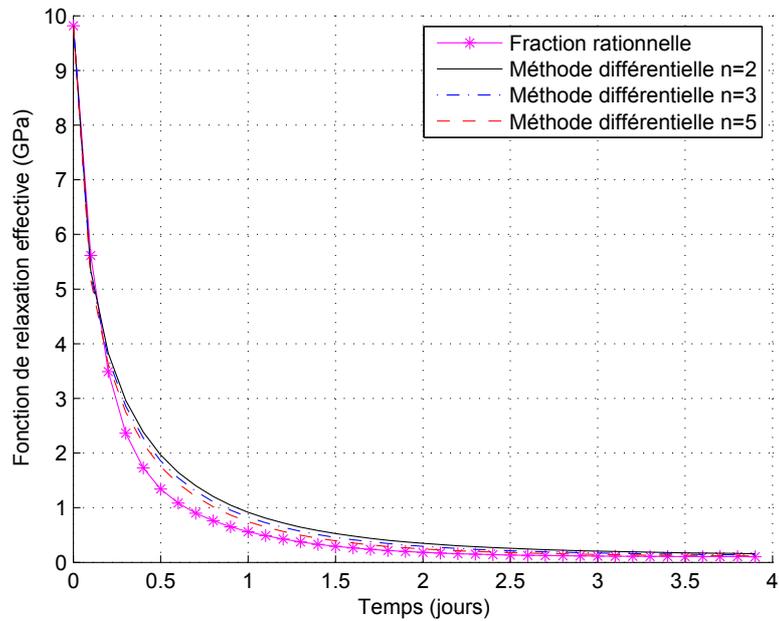


FIGURE 3.4 – Fonction de relaxation effective du modèle où la matrice est viscoélastique de Kelvin-Voigt contenant une inclusion élastique.

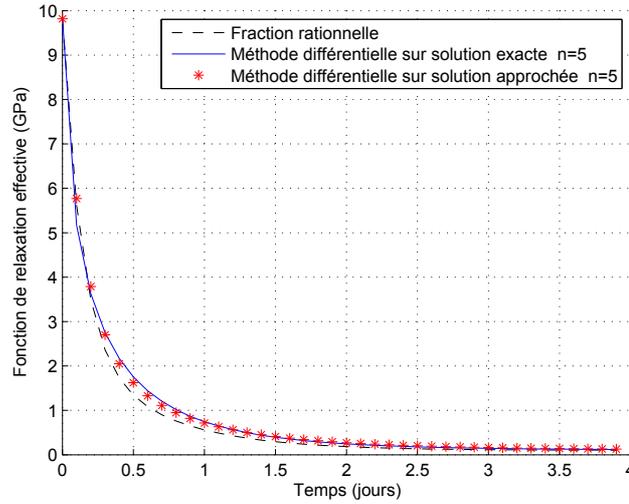


FIGURE 3.5 – Fonction de relaxation effective obtenue par la méthode différentielle sur la solution exacte et sur la solution approchée. La matrice est viscoélastique de Kelvin contenant une inclusion élastique.

Les résultats sont illustrés dans les figures (3.2),(3.3),(3.4),(3.5),(3.7).

La comparaison entre les solution exacte et la solution approchée dans l'espace de Laplace-Carson est donnée dans la figure (3.2) qui montre un bon accord.

Le niveau d'approximation dans l'espace de Laplace-Carson peut être plus précisément estimé par les valeurs de la fonction :

$$Err = \frac{\mu_{eff}^*(s) - \tilde{\mu}_{eff}^*(s)}{\mu_{eff}^*(s)} \quad (3.59)$$

L'erreur donnée par cette relation est donnée dans la figure (3.3). Cette erreur atteint 5% à son maximum et l'on vérifie que cette erreur s'annule pour $s = 0$ et s infini, ce qui correspond au fait que la solution approchée vérifie par construction exactement les limites extrêmes.

Afin d'évaluer la qualité de la solution, une comparaison est faite avec un résultat donné par la méthode semi-analytique de [22] décrite dans l'annexe B. Comme expliqué dans l'annexe, la qualité dépend du niveau d'ordre de la différentiation utilisée dans la méthode semi-analytique. La figure 3.4 montre que la méthode différentielle utilisée à des ordres 2, 3 et 5 donnent des résultats similaires mais dont l'écart avec la solution approchée ne s'annule pas, même pour $n = 5$.

Afin de comprendre si l'écart entre ces deux solutions est dû à notre solution approchée ou à la solution donnée par la méthode différentielle, la méthode différentielle a été utilisée pour déterminer la transformée de Laplace inverse de la solution approchée, dont la transformée de Laplace inverse peut être obtenue exactement. La figure (3.5) présente une comparaison entre les fonctions de relaxation obtenues à partir de la méthode différentielle pour la solution exacte et pour la méthode approchée. La figure montre que la méthode différentielle fournit des résultats qui sont à peu près les mêmes pour la solution exacte

et pour la solution approchée, même lorsque la méthode différentielle est utilisée au 5^e ordre. Par ailleurs, l'écart entre l'inverse de Laplace obtenu par la méthode différentielle et par la méthode approchée reste le même que dans la figure précédente. Ces résultats tendent à montrer que l'écart observé sur la figure 3.4 entre la solution obtenue par la méthode différentielle et la méthode approchée est très probablement dû principalement à la méthode différentielle.

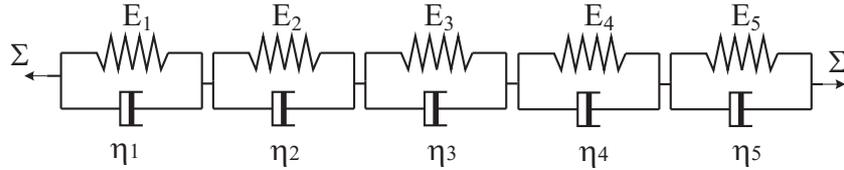


FIGURE 3.6 – Modèle rhéologique associé au comportement macroscopique de cisaillement.

D'un autre point de vue, la solution approchée étant sous forme de fraction rationnelle, la décomposition en éléments simples de cette fraction a permis de reconstituer un modèle rhéologique. Celui-ci est reporté en figure (3.6) sous la forme de 5 éléments de type "Kelvin-Voigt", c'est à dire un modèle du type "Kelvin-Voigt généralisé". La détermination des coefficients du modèle rhéologique est en effet donnée par :

$$\begin{cases} \eta_i = \frac{1}{R_i} \\ E_i = \frac{S_i}{R_i} \end{cases} \quad (3.60)$$

où les coefficients R_i , S_i sont obtenus à partir de la décomposition :

$$J_{eff}^*(s) = \frac{1}{\mu_{eff}^*(s)} \approx \frac{Q(s)}{P(s)} = \sum_{i=1}^N \frac{R_i}{s - S_i} \quad (3.61)$$

TABLE 3.2 – Propriétés viscoélastiques macroscopiques du modèle rhéologique associé avec le comportement macroscopique de cisaillement pour une matrice de type Kelvin-Voigt et une inclusion élastique.

Element	Module de cisaillement E (GPa)	Viscosité η_μ (GPa.jour)
1	15.78	0.53
2	16.98	5.66
3	0.19	5.05
4	0.26	8.09
5	1.08	47.05

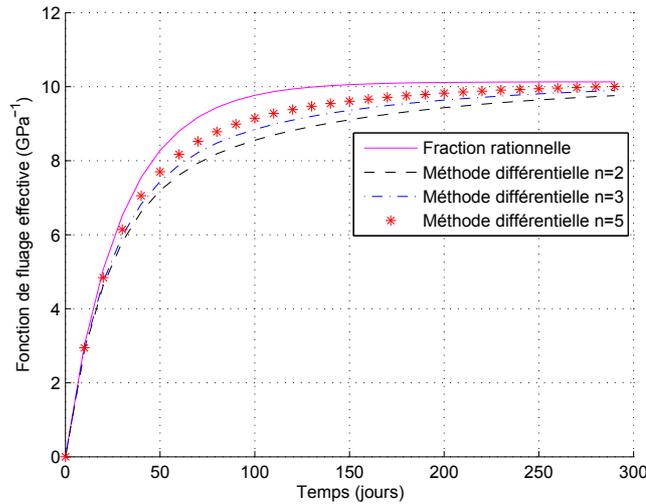


FIGURE 3.7 – Fonction de fluage effective du modèle où la matrice est viscoélastique de Kelvin-Voigt et contient une inclusion élastique.

La fonction de fluage effective obtenue par (3.61) est illustrée dans la figure (3.7). Les résultats correspondant à la solution approchée et aux solutions obtenues par la méthode différentielle sont présentés à nouveau et pour cette nouvelle fonction, l'écart apparaît moins important que pour la fonction de relaxation.

Un deuxième résultat est maintenant présenté dans le cas d'une matrice viscoélastique contenant des vides, pour les propriétés mécaniques données dans la table (3.3).

TABLE 3.3 – Fractions volumiques et propriétés mécaniques d'une matrice viscoélastique contenant des vides.

Phase	Inclusion	Matrice
Fraction volumique (%)	67	33
<i>Propriétés élastiques</i>		
Module d'incompressibilité κ (GPa)	0	100
Module de cisaillement μ (GPa)	0	20
<i>Propriétés visqueux</i>		
Viscosité en compression η_K (GPa.jour)	0	30
Viscosité en cisaillement η_G (GPa.jour)	0	27

Les résultats sont présentés dans les figures 3.8, 3.9, 3.10,3.11,3.12. Comme précédemment, la comparaison est effectuée entre les solutions exactes et approchées dans l'espace de Laplace-Carson en figure 3.8. Le deux résultats correspondent à des droites, ce qui montre que le comportement effectif est également proche d'un modèle de type "Kelvin-Voigt", correspondant au modèle introduit pour la matrice. Plusieurs auteurs ont trouvé

effectivement que le type de comportement est identique au comportement de la matrice, dans le cas d'inclusions rigides ou vides. Par exemple, l'étude par homogénéisation du comportement de matériaux viscoélastiques endommagés comportant une matrice de type "Burgers" est également du type "Burgers"[64].

L'écart entre les deux courbes de la figure 3.8 est reporté dans la figure 3.9. Sur ce nouvel exemple, l'écart est inférieur à 9.10^{-3} , ce qui montre la bonne qualité du modèle approché. La fonction de relaxation effective est reportée en figure 3.10, où les résultats obtenus par la méthode différentielle sont maintenant reportés. Il reste un écart avec la méthode différentielle comme dans le résultat précédent. La figure 3.11 montre que les résultats obtenus par la méthode exacte sur la solution exacte et sur la solution approchée sont les mêmes, mais que ces résultats diffèrent de ceux obtenus à l'aide de la fraction rationnelle, ce qui tend à nouveau à montrer que l'écart obtenu entre la solution approchée et la méthode différentielle sont dus à un défaut de la méthode différentielle. Finalement, la figure 3.12 montre les fonctions de fluage obtenues par la méthode différentielle et par la méthode approchée. Contrairement au cas précédent, ces résultats montrent que l'écart entre la méthode différentielle et la solution approchée reste apparent sur la fonction de fluage.

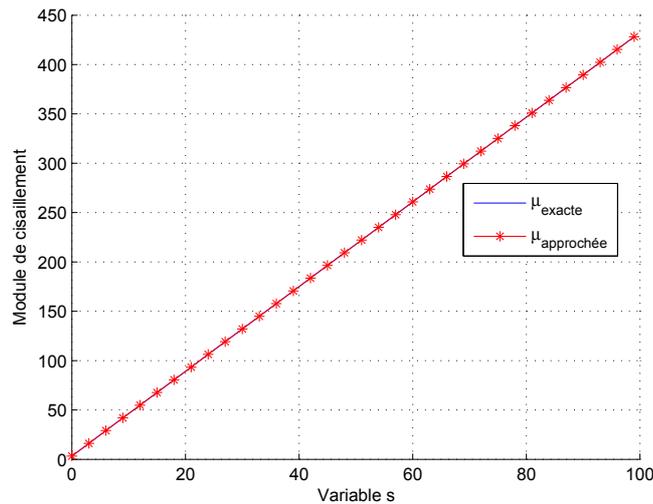


FIGURE 3.8 – Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée dans l'espace de Laplace-Carson pour le modèle où la matrice est viscoélastique de Kelvin-Voigt et contient des vides.

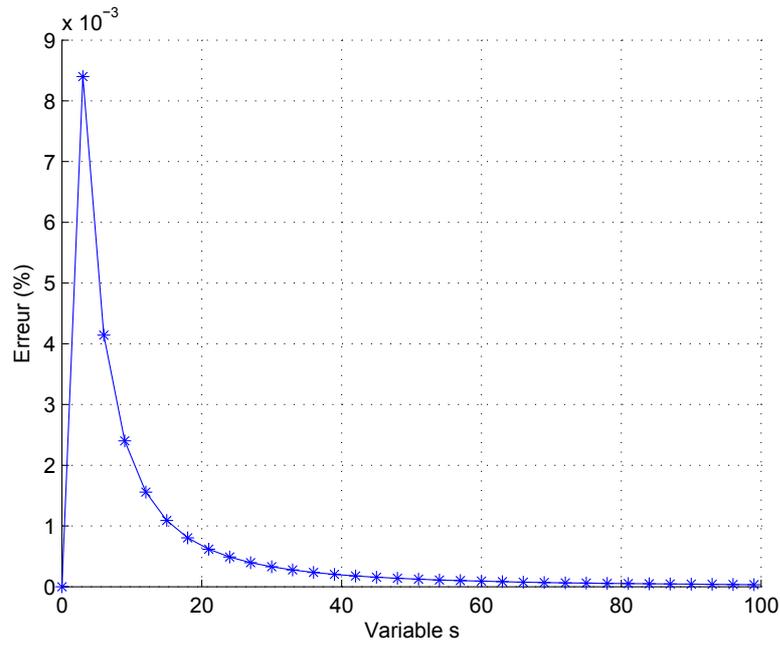


FIGURE 3.9 – Evaluation de l’erreur obtenue par la méthode approchée dans l’espace de Laplace-Carson pour le modèle où la matrice est viscoélastique de Kelvin-Voigt et contient des vides.

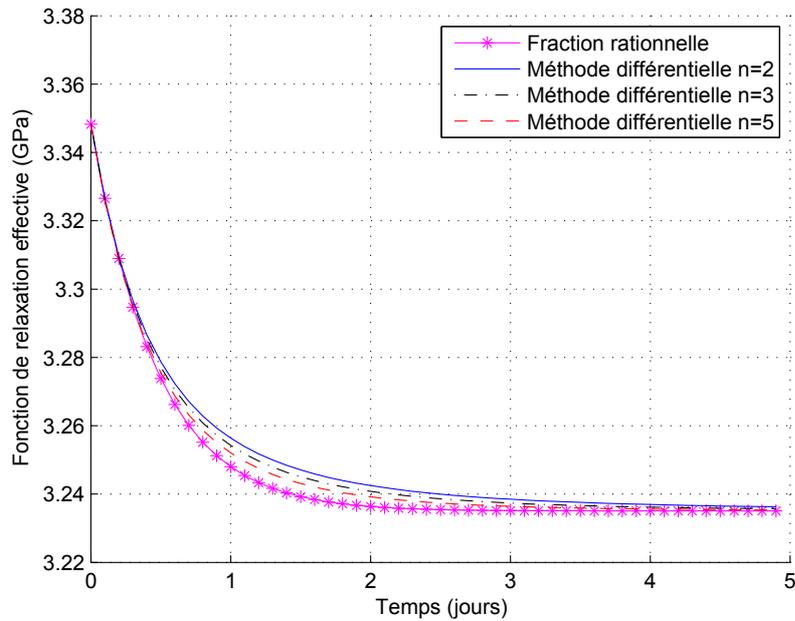


FIGURE 3.10 – Fonction de relaxation effective du modèle où la matrice est viscoélastique de type Kelvin-Voigt et contient des vides.

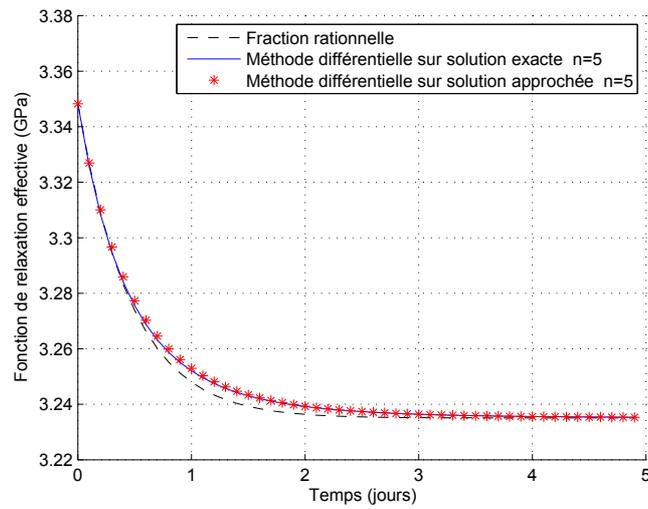


FIGURE 3.11 – Fonction de relaxation effective obtenue par la méthode différentielle sur la solution exacte et sur la solution approchée du modèle où la matrice est viscoélastique de Kelvin-Voigt et contient des vides.

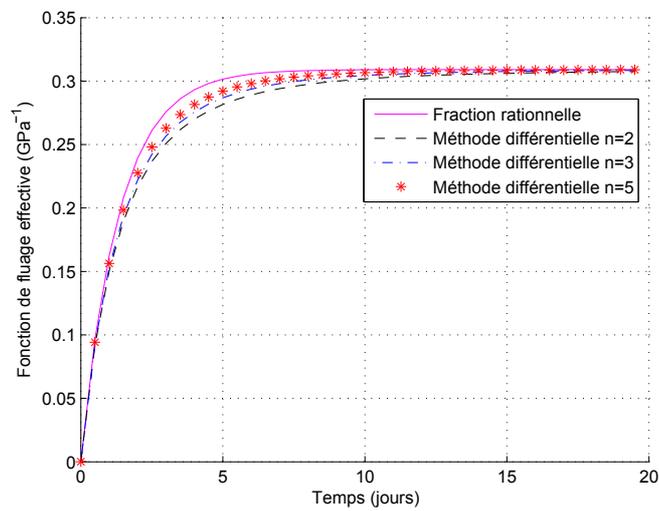


FIGURE 3.12 – Fonction de fluage effective du modèle où la matrice est viscoélastique de Kelvin-Voigt et contient des vides.

Un dernier résultat est obtenu dans le cas d'une matrice viscoélastique de type Kelvin-Voigt contenant des inclusions rigides, avec les données du tableau 3.4.

TABLE 3.4 – Fractions volumiques et propriétés mécaniques de deux phases composites avec une inclusion rigide.

Phase	Inclusion	Matrice
Fraction volumique (%)	67	33
<i>Propriétés élastiques</i>		
Module d'incompressibilité κ (GPa)	∞	100
Module de cisaillement μ (GPa)	∞	20
<i>Propriétés visqueux</i>		
Viscosité en compression η_K (GPa.jour)	0	45
Viscosité en cisaillement η_G (GPa.jour)	0	30

Les résultats correspondants sont reportés en figures 3.13, 3.14, 3.15, 3.16, 3.17. La figure 3.13 montre que le comportement effectif observé est de type "Kelvin-Voigt", comme celui de la matrice, montrant que pour l'inclusion rigide, le comportement homogénéisé est du même type que celui de la matrice. La figure 3.14 montre que l'écart entre la solution approchée et la solution exacte dans l'espace de Laplace-Carson atteint 0.09, ce qui montre que la qualité de la méthode approchée est moins bonne que dans le cas des vides. La figure 3.15 montre à nouveau que la méthode différentielle produit des résultats significativement différents de la solution apportée par la fraction rationnelle et la figure 3.16 montre à nouveau sur la solution approchée que la méthode différentielle n'est probablement pas convergée. Finalement la fonction de fluage peut être observée en figure 3.17.

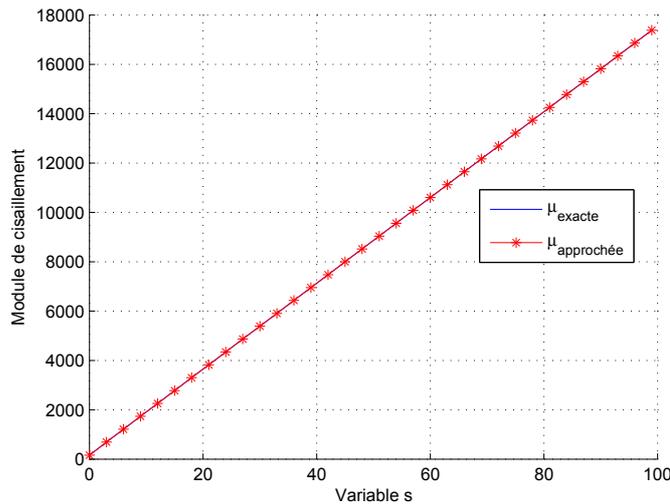


FIGURE 3.13 – Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée dans l'espace de Laplace-Carson pour le modèle où la matrice viscoélastique de Kelvin-Voigt contient une inclusion rigide.

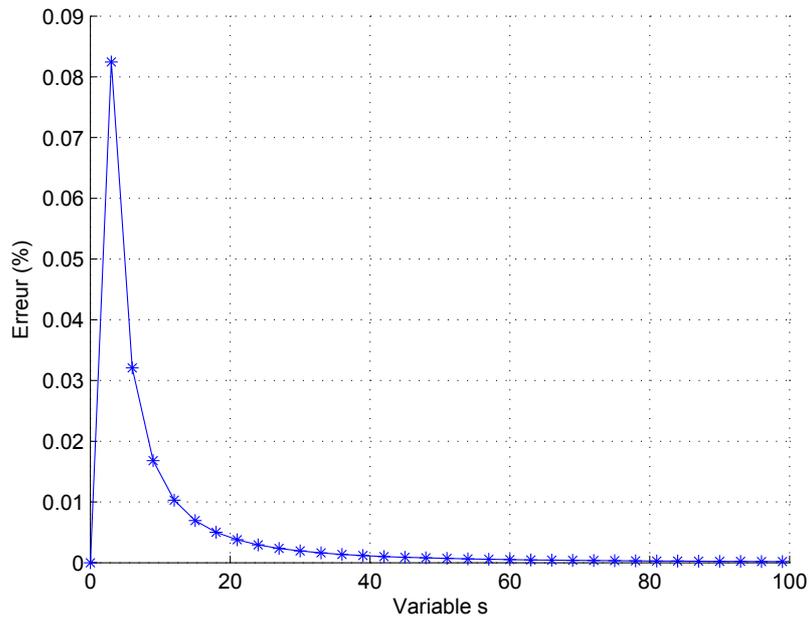


FIGURE 3.14 – Evaluation de l'erreur obtenue par la méthode approchée dans l'espace de Laplace-Carson pour le modèle où la matrice viscoélastique de Kelvin-Voigt contient une inclusion rigide.

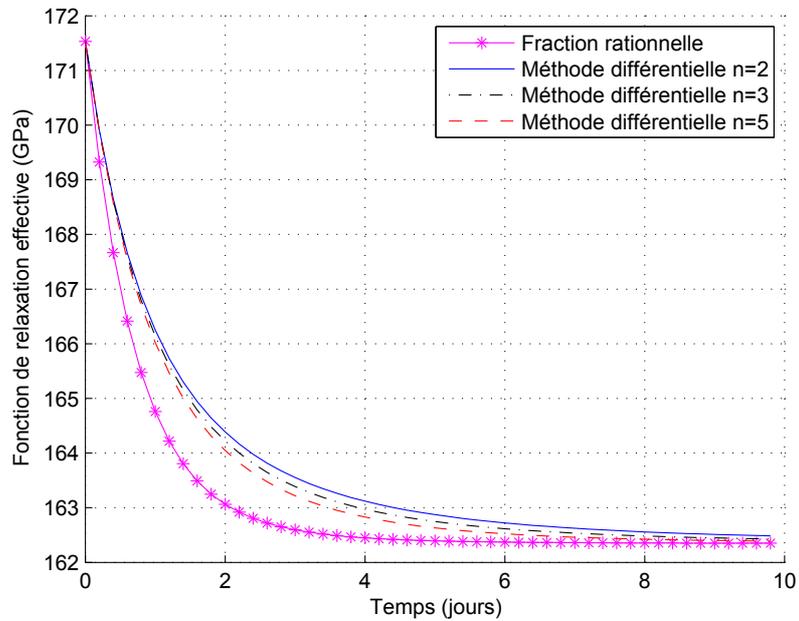


FIGURE 3.15 – Fonction de relaxation effective du modèle où la matrice viscoélastique de Kelvin-Voigt contient une inclusion rigide.

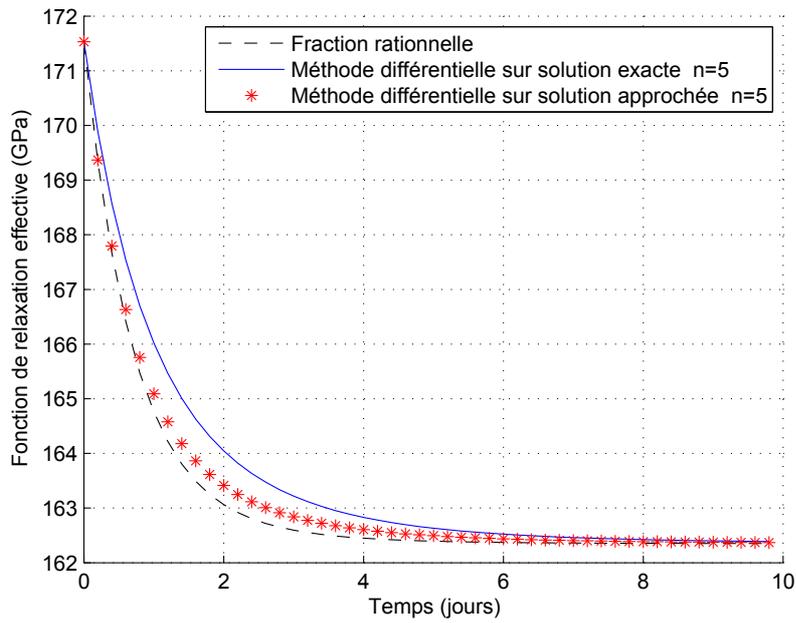


FIGURE 3.16 – Fonction de relaxation effective obtenue par la méthode différentielle sur la solution exacte et sur la solution approchée pour le modèle où la matrice est viscoélastique de Kelvin-Voigt et contient une inclusion rigide.

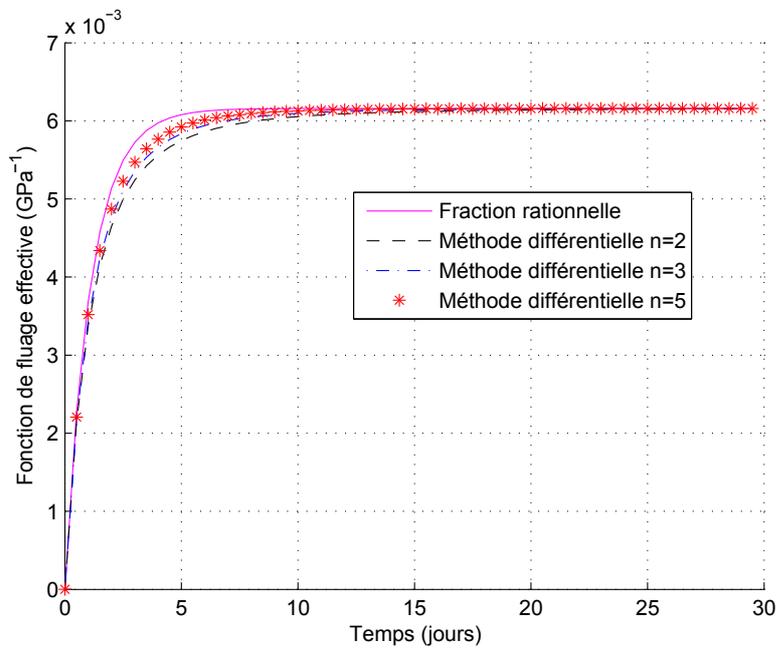


FIGURE 3.17 – Fonction de fluage effective pour le modèle où la matrice est viscoélastique de Kelvin-Voigt et contient une inclusion rigide.

3.2.4.2 Modèles de Maxwell et Zener

Afin de montrer la flexibilité de la méthode, celle-ci a été appliquée également dans le cas des modèles rhéologiques de Maxwell et de Zener. Afin de ne pas surcharger le texte, les résultats ont été reportés dans les annexes E et F.

3.2.5 Domaine d'application de la méthode approchée

L'écart entre la solution approchée et la solution exacte du schéma autocohérent généralisé dépend des propriétés des constituants. Cette section est destinée à évaluer l'erreur apportée par la solution approchée en fonction des paramètres physiques du problème. Compte tenu du nombre de paramètres en cause, l'évaluation de cette erreur sera effectuée en supposant que le coefficient de Poisson de la partie viscoélastique est constant.

3.2.5.1 Modèle de Kelvin-Voigt

Dans le cas général, le module effectif normalisé $\bar{\mu}_{eff}$ dépend de la matrice de transfert $[\mathbf{T}]$ (équation 3.27). Compte tenu de l'hypothèse de coefficient de Poisson constant, cette matrice de transfert, pour le modèle de Kelvin-Voigt, dépend de 5 paramètres indépendants : ν_M , ν_I , γ , ξ et f_I qui sont déterminés, hors f_I , par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu_M = \nu_M \left\{ \begin{array}{l} \kappa(s) \\ \mu(s) \end{array} \right\} \\ \nu_I = \nu_I \left\{ \begin{array}{l} \kappa_I \\ \mu_I \end{array} \right\} \\ \gamma = \frac{G}{\mu_1} \\ \xi = \frac{\eta_G}{\mu_I} \end{array} \right. \quad (3.62)$$

où $\kappa(s)$, $\mu(s)$ sont des coefficients d'incompressibilité et de cisaillement dans l'espace de Laplace-Carson. κ_I , μ_I sont des coefficients d'incompressibilité et de cisaillement de l'inclusion, respectivement et f_I est la concentration de l'inclusion.

Par la suite, on utilisera trois valeurs différentes du coefficient de Poisson : 0.1, 0.3, et 0.45. La figure (3.18) montre l'erreur maximale (pour des valeurs de γ , et ξ comprise entre 0 et 1000) calculée dans l'espace de Laplace-Carson, en fonction de la fraction volumique de l'inclusion et des coefficients de "Poisson". On constate que l'erreur décroît avec ν_I , à ν_M constant et inversement augmente avec ν_M , à ν_I constant. Pour des coefficients de Poisson comparables dans les deux phases, une erreur inférieure à 0.05 est assurée pour des concentrations inférieures à 0.6.

3.2.5.2 Modèle de Maxwell

Les résultats obtenus dans les mêmes condition sont présentés en figure 3.19. On trouve que l'erreur obtenue sur le modèle de Maxwell est très nettement inférieure à celle obtenue pour le modèle de Kelvin-Voigt, l'erreur apportée en utilisant le modèle simplifié est inférieure à 0.001 jusqu'à des concentrations proches de 0.7.

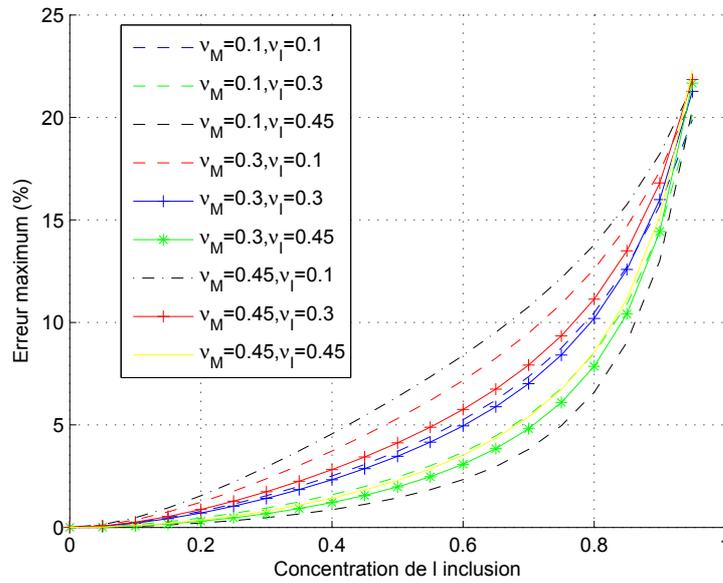


FIGURE 3.18 – Evaluation de l'erreur apportée par la méthode approchée pour le modèle de Kelvin-Voigt

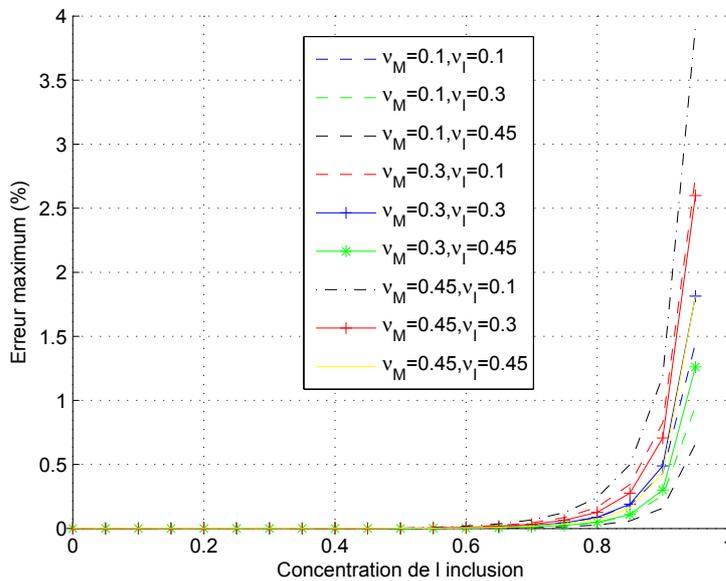


FIGURE 3.19 – Evaluation de l'erreur apportée par la méthode approchée sur le modèle de Maxwell

3.2.5.3 Modèle de Zener

Pour le modèle de Zener, il est nécessaire d'introduire un paramètre supplémentaire. Les calculs ont été réalisés pour un module $E = E_1$ dans le modèle de Zener (figure 2.6).

Les erreurs maximales obtenues dans ces conditions par le modèle simplifié sont reportées en figure 3.20. Les résultats montrent que l'erreur apportée par la méthode approchée est de l'ordre de 10^{-7} pour des concentrations allant jusqu'à 0.6. Bien entendu, il est possible de passer continuellement du modèle de Zener au modèle de Kelvin-Voigt en utilisant des valeurs très petites du module E_1 . Les résultats obtenus sont donc liés au choix de fixer ce module à une valeur dont l'ordre de grandeur est comparable à celui des autres paramètres.

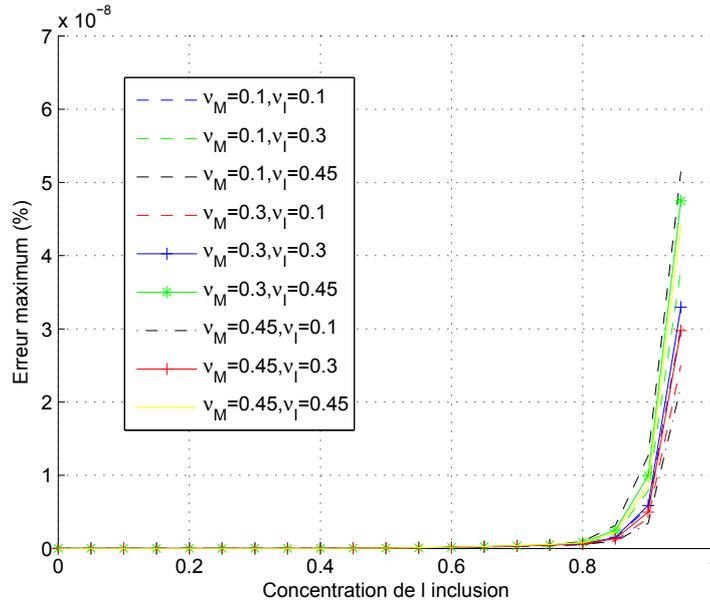


FIGURE 3.20 – Evaluation de l'erreur apportée par la méthode approchée sur le modèle de Zener

Finalement, les résultats obtenus montrent que la méthode simplifiée peut être utilisée dans de nombreuses situations, pour une large gamme de concentrations.

3.3 Problème viscoélastique biphasique avec interface imparfaite

Dans cette partie, on s'intéresse à un modèle biphasique où l'interface entre les deux phases est imparfaite. D'une façon générale, il existe deux types d'interfaces imparfaites, l'une correspondant à l'interface "raide" correspond au cas limite d'une couche fine contenant un matériau de module élastique plus élevé que la matrice. Le second cas, qui sera étudié dans ce qui suit, de "l'interface souple", correspond au cas limite d'une couche de faible épaisseur contenant un matériau plus souple que les matériaux environnants [67]. Ce type d'interface se présente dans différents types de matériaux. Un cas particulier d'une telle interface est celui où la couche fine contient un fluide visqueux. Un tel modèle pourrait s'appliquer à l'étude de la prévision de matériaux cimentaires qui, aux échelles nanométriques, présente des feuillets de CSH (Silicates de Calcium Hydratés) connectés

par des couches d'eau d'épaisseur de l'ordre du nanomètre. Ce sont ces couches d'eau qui seraient à l'origine des propriétés visqueuses des matériaux cimentaires.

Un moyen simple de prédire le comportement de matériaux comportant une interface est de considérer le cas d'une interphase d'épaisseur finie et d'étudier la limite lorsque l'épaisseur de l'interphase devient très petite.

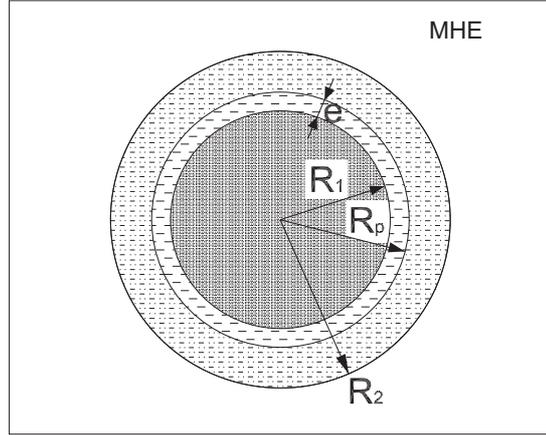


FIGURE 3.21 – Modèle d'un composite de deux phases avec interface imparfaite

On considère donc un assemblage représenté par le schéma autocohérent généralisé, mais constitué de 3 matériaux. Les matériaux repérés 1 et 2 correspondent à l'inclusion et à la matrice. Le matériau repéré par p correspond au matériau d'une interphase. Les conditions de continuité entre ces différentes phases peuvent s'écrire :

$$\begin{bmatrix} R_2\gamma_0 + 3R_2^{-4}C_3 \\ R_2\gamma_0 - 2R_2^{-4}C_3 \\ \mu_{eff}(\gamma_0 - 12R_2^{-5}C_3) \\ \mu_{eff}(\gamma_0 + 8R_2^{-5}C_3) \end{bmatrix} = [\mathbf{L}_2(R_2)] [\mathbf{L}_2(R_p)]^{-1} [\mathbf{L}_p(R_p)] [\mathbf{L}_p(R_1)]^{-1} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

De la même façon que pour le matériau biphasé étudié précédemment, le produit $[\mathbf{L}_p(R_p)] [\mathbf{L}_p(R_1)]^{-1}$ est donné, d'après (3.7) par :

$$[\mathbf{L}_p(R_p)] [\mathbf{L}_p(R_1)]^{-1} = [\mathbf{N}_g(R_p, \mu)] [\mathbf{L}_p^*] [\mathbf{N}_d(\alpha)]^{-1} [\mathbf{L}_p^*]^{-1} [\mathbf{N}_g(R_1, \mu)]^{-1} \quad (3.64)$$

où le produit $[\mathbf{L}_p^*] [\mathbf{N}_d(\alpha)] [\mathbf{L}_p^*]^{-1}$ est égal à :

$$[\mathbf{L}_p^*] [\mathbf{N}_d(\alpha)] [\mathbf{L}_p^*]^{-1} = \frac{1}{5(3x+4)\alpha^4} ([\mathbf{C}_K(\alpha)]x + \mathbf{C}_\mu(\alpha)) \quad (3.65)$$

où le coefficient α est égal à R_p/R_1 et où chaque matrice $[\mathbf{C}_K(\alpha)]$ et $[\mathbf{C}_\mu(\alpha)]$ est donnée par un polynôme en α à coefficients matriciels constants :

$$[\mathbf{C}_l(\alpha)] = [\mathbf{C}_{l0}] + [\mathbf{C}_{l2}]\alpha^2 + [\mathbf{C}_{l5}]\alpha^5 + [\mathbf{C}_{l7}]\alpha^7 \quad (l = K, \mu) \quad (3.66)$$

Le cas de l'interface correspond au cas où α est proche de 1. On pose donc :

$$\alpha = 1 + \frac{dR}{R_{p-1}} = 1 + \frac{e}{R_{p-1}} = 1 + e^* \quad (3.67)$$

Dans ces conditions, les matrices $[\mathbf{C}_l(\alpha)]$ deviennent au premier ordre :

$$[\mathbf{C}_l(\alpha)] = [\mathbf{C}_{l0}] + [\mathbf{C}_{l2}] + [\mathbf{C}_{l5}] + [\mathbf{C}_{l7}] + e^* (2[\mathbf{C}_{l2}] + 5[\mathbf{C}_{l5}] + 7[\mathbf{C}_{l7}]) \quad (3.68)$$

On obtient ainsi :

$$[\mathbf{C}_K(e^*)] = 15[\mathbf{I}] + e^* [\mathbf{C}_{K(e)}] \quad (3.69)$$

$$[\mathbf{C}_\mu(e^*)] = 20[\mathbf{I}] + e^* [\mathbf{C}_{\mu(e)}] \quad (3.70)$$

avec :

$$[\mathbf{C}_{K(e)}] = 15 \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 2 \\ 6 & -9 & 5 & 3 \\ -6 & 11 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

$$[\mathbf{C}_{\mu(e)}] = 10 \begin{bmatrix} 10 & -3 & 3 & 0 \\ -4 & 10 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

d'où :

$$[\mathbf{L}_p^*] [\mathbf{N}_d(\alpha)] [\mathbf{L}_p^*]^{-1} = \alpha^{-4} \left([\mathbf{I}] + \frac{e^*}{5(3x+4)} ([\mathbf{C}_{K(e)}] x + [\mathbf{C}_{\mu(e)}]) \right) \quad (3.73)$$

Par ailleurs, la matrice $[\mathbf{N}_g(R_p, \mu)]$ devient :

$$[\mathbf{N}_g(R_p, \mu)] \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu(1-e^*)}{R_{p-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\mu(1-e^*)}{R_{p-1}} \end{bmatrix} = [\mathbf{N}_g(R_{p-1}, \mu)] - \frac{e^* \mu}{R_{p-1}} [W_0] \quad (3.74)$$

Si les modules du matériau de l'interphase sont du même ordre que ceux des matériaux qui entourent l'interface, il y a continuité de déplacement à travers l'interface qui ne joue aucun rôle. Le cas intéressant est celui où le matériau de l'interface a des propriétés mécaniques plus faibles que les matériaux environnants, soit :

$$\mu = \beta e^* \quad (3.75)$$

où β est $O(1)$. Le développement limité en e^* de la matrice de transfert de l'interface $[\mathbf{L}_p(R_p)] [\mathbf{L}_p(R_1)]^{-1}$ est alors donné par :

$$[\mathbf{L}_p(R_p)] [\mathbf{L}_p(R_1)]^{-1} \approx \alpha^{-4} \left([\mathbf{I}] + \frac{R_{p-1}}{5\beta(3x+4)} [\mathbf{W}_1] ([\mathbf{C}_{K(e)}] x + [\mathbf{C}_{\mu(e)}]) [\mathbf{W}_0] \right) \quad (3.76)$$

ce qui donne :

$$[\mathbf{L}_p(R_p)] [\mathbf{L}_p(R_1)]^{-1} = \alpha^{-4} \left([\mathbf{I}] + \frac{R_{p-1}}{5\beta(3x+4)} ([\mathbf{P}_K]x + [\mathbf{P}_\mu]) \right) \quad (3.77)$$

ou :

$$[\mathbf{L}_p(R_p)] [\mathbf{L}_p(R_1)]^{-1} = \alpha^{-4} \left([\mathbf{I}] + \frac{e}{5\mu(3x+4)} ([\mathbf{P}_K]x + [\mathbf{P}_\mu]) \right) \quad (3.78)$$

avec :

$$[\mathbf{P}_K] = 30 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

$$[\mathbf{P}_\mu] = 10 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

On voit donc que l'interface est représentée par une matrice de transfert analogue à celles des autres couches. Le cas d'une interface de propriétés viscoélastiques ne sera pas abordé. Nous traiterons uniquement le cas particulier dont l'intérêt physique a été signalé précédemment, à savoir le cas d'une interface correspondant à une fine couche d'eau située entre deux matériaux de mêmes caractéristiques élastiques.

Dans le cas d'une interphase remplie de fluide, on a :

$$\mu = \eta s \quad (3.81)$$

où s est la variable dans l'espace de Laplace-Carson, η est la viscosité du fluide.

Aux temps courts, lorsque $s \rightarrow \infty$, μ tend vers ∞ et la matrice de transfert tend vers l'identité, ce qui conduit à la continuité des contraintes et des déplacements à l'interface. Aux temps longs, lorsque $s \rightarrow 0$, μ tend vers 0 et la matrice de transfert fait apparaître une discontinuité.

Par comparaison au cas du calcul matrice-inclusion, et en effectuant le même type de changement de variable sur les constantes A_1 et B_1 , on voit que, si l'interface est plongée dans une matrice homogène, le système peut s'écrire également sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \gamma_0 + 3C'_3 \\ \gamma_0 - 2C'_3 \\ \mu_{eff}(\gamma_0 - 12C'_3) \\ \mu_{eff}(\gamma_0 + 8C'_3) \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} A''_1 \\ B''_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

où la matrice $[\mathbf{T}]$ est égale à :

$$[\mathbf{T}] = [\mathbf{L}_2(R_2)] [\mathbf{L}_2(R_1)]^{-1} \{ \mu(15\kappa + 20\mu) [\mathbf{I}] + e\kappa [\mathbf{P}_K] + e\mu [\mathbf{P}_\mu] \} [\mathbf{L}_1(R_1)] \quad (3.83)$$

où bien :

$$[\mathbf{T}] = \mu(15\kappa + 20\mu) [\mathbf{T}_{\kappa\mu}] + e\kappa [\mathbf{T}_\kappa] + e\mu [\mathbf{T}_\mu] \quad (3.84)$$

avec :

$$[\mathbf{T}_{\kappa\mu}] = [\mathbf{L}_2(R_2)] [\mathbf{L}_2(R_1)]^{-1} [\mathbf{L}_1(R_1)] \quad (3.85)$$

$$[\mathbf{T}_{\kappa}] = [\mathbf{L}_2(R_2)] [\mathbf{L}_2(R_1)]^{-1} [\mathbf{P}_K] [\mathbf{L}_1(R_1)] \quad (3.86)$$

$$[\mathbf{T}_{\mu}] = [\mathbf{L}_2(R_2)] [\mathbf{L}_2(R_1)]^{-1} [\mathbf{P}_{\mu}] [\mathbf{L}_1(R_1)] \quad (3.87)$$

La détermination du module de cisaillement effectif se déduit comme précédemment en écrivant que le déterminant du système d'équations homogène s'annule pour assurer l'existence d'une solution. L'application numérique étudiée correspond à une matrice élastique de module de cisaillement $\mu_M = 10GPa$ et de module d'incompressibilité $\kappa_M = 70GPa$. La viscosité du fluide composant l'interface est égale à $\eta = 0.03GPa.s$ et l'épaisseur de l'interface est égale à $e = 1A^\circ$; Le rapport entre les rayons positionnant la sphère définissant l'interface et la sphère de l'inclusion composite complète est égal à 0.74. On a reporté en figure 3.22 le module effectif pour le cas avec interface, comparé au module constant correspondant au cas sans interface. On constate, comme attendu, que le module effectif du matériau viscoélastique effectif tend vers le module effectif de la matrice lorsque s tend vers l'infini.

La figure (3.23) montre la fonction de relaxation qui peut s'en déduire par transformée de Laplace inverse. La méthode simplifiée donne des résultats insatisfaisants dans ce cas et seuls sont représentés les résultats correspondant à l'inversion de la transformée de Laplace par la méthode de Donolato, malgré les imperfections constatées précédemment. On constate que, pour les temps courts, la fonction de relaxation est égale au module de cisaillement instantané correspondant au module de la matrice, et que le modèle prévoit bien une relaxation aux temps longs.

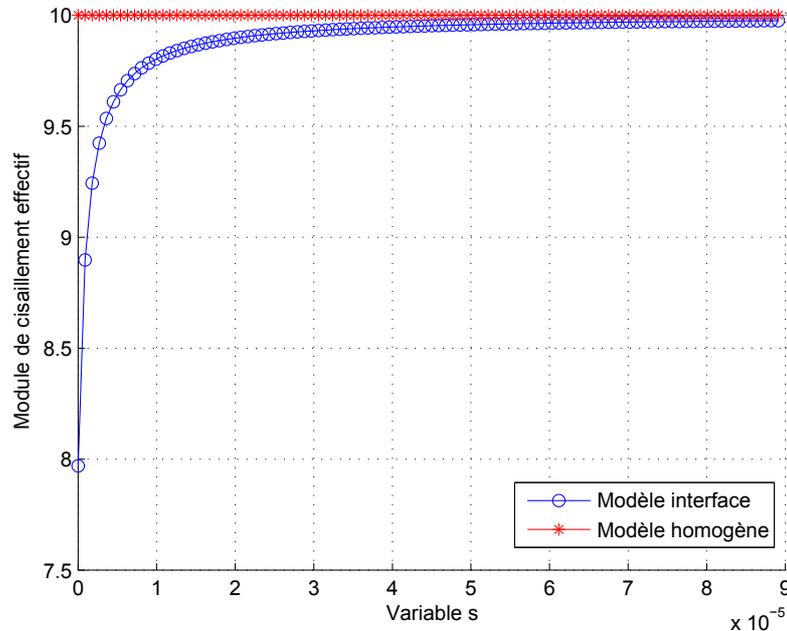


FIGURE 3.22 – Comparaison entre le modèle homogène et le modèle avec interface

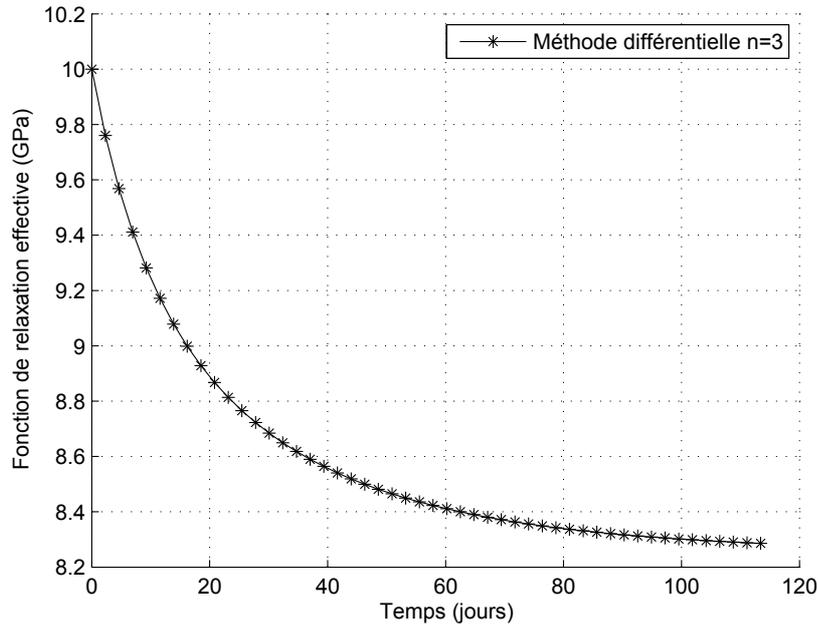


FIGURE 3.23 – Fonction de relaxation en cisaillement d’un composite avec prise en compte de l’interface imparfaite

3.4 Conclusion

Ce chapitre a été dédié principalement à l’application d’une nouvelle méthode simplifiée pour obtenir la solution du Schéma Autocoherent Généralisé pour le cas de matériaux constituants viscoélastiques. La méthode simplifiée permet d’inverser sans difficulté la transformée de Laplace et de trouver sous forme explicite les fonctions de fluage et de relaxation. Les résultats obtenus montrent que cette méthode simplifiée peut s’appliquer dans de nombreux cas de matériaux à matrice viscoélastique et à inclusions composites. En fin de chapitre, le schéma ACG a été étendu au cas d’une inclusion composite contenant une interface. La solution est obtenue en calculant explicitement la fonction de transfert de l’interface, par obtention de la limite lorsque l’épaisseur de l’interphase tend vers 0. Les résultats obtenus sont appliqués au cas où l’interphase est constituée uniquement d’un fluide visqueux newtonien. Les résultats montrent que le modèle avec interface visqueuse permet de prévoir un comportement viscoélastique de l’ensemble.

Chapitre 4

Homogénéisation de milieux viscoélastiques périodiques par la méthode FFT approchée

4.1 Introduction

Pour un milieu contenant des inhomogénéités distribués, les travaux actuels tendent de plus en plus vers la prévision de propriétés effectives à partir de données expérimentales permettant de décrire la microstructure, en particulier celles issues de la tomographie permettant de représenter la microstructure d'échantillons sous forme tridimensionnelle. Dans ce contexte, une des possibilités est d'utiliser les méthodes d'homogénéisation reposant sur la transformée de Fourier rapide, qui s'adaptent bien à la représentation pixélisée des résultats de tomographie et de plus s'appuient sur l'efficacité des algorithmes de FFT. Les méthodes d'homogénéisation peuvent se présenter alors soit sous forme explicite ([40], [62], [63]), soit sous forme de séries nécessitant une intégration numérique ([52], [5], [83],[58], [74]). Enfin, ce type de méthode permet également de s'étendre au traitement de problèmes non-linéaires. Ce chapitre sera consacré à la mise en oeuvre d'une méthode semi-analytique approchée permettant de prévoir les propriétés effectives de matériaux viscoélastiques sur les bases des travaux de Nemat-Nasser et de ses collègues ([40], [62], [63]). La méthode est mise en oeuvre sur une microstructure périodique. Toutefois, cette méthode peut s'appliquer également à la modélisation sur des microstructures issues d'observations sur des matériaux aléatoires [57]

4.2 Formulation viscoélastique

La formulation viscoélastique repose sur les développements présentés dans le chapitre 1. On considère une microstructure caractérisée par une cellule ayant une symétrie au moins cubique(cubique ou isotrope), les matériaux constitutifs étant caractérisés par une matrice ayant un comportement viscoélastique de type Kelvin, Maxwell ou Burgers, et les inclusions étant linéairement élastiques.

Compte tenu des résultats du chapitre 1, le tenseur d'élasticité effectif dans l'espace

de Laplace-Carson est donné par(1.172) :

$$\mathbb{C}^{eff}(s) = \mathbb{C}(s) - f\mathbb{D}^{-1}(s) \quad (4.1)$$

soit sous la forme matricielle :

$$[\mathbb{C}^{eff}(s)] = [\mathbb{C}(s)] - f \sum_{k=1}^6 \frac{[\mathbf{H}_{(k)}]}{a_k(s) - \frac{u_k}{\lambda(s) + 2\mu(s)} - \frac{v_k}{2\mu(s)}} \quad (4.2)$$

où la matrice $[\mathbf{H}_{(k)}]$ ne dépend que de la géométrie des inclusions et est donnée par (1.190).

Les valeurs propres de la matrice $[U]$ et $[V]$ sont données par :

$$\{u\} = \begin{bmatrix} S_4 + 2S_7 \\ S_4 - S_7 \\ S_4 - S_7 \\ 2S_7 \\ 2S_7 \\ 2S_7 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

et :

$$\{v\} = \begin{bmatrix} 2S_1 - 2S_4 - 4S_7 \\ 2S_1 - 2S_4 + 2S_7 \\ 2S_1 - 2S_4 + 2S_7 \\ 2S_4 - 4S_7 \\ 2S_4 - 4S_7 \\ 2S_4 - 4S_7 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

où S_i est défini par (1.183).

Alors l'inverse de la matrice $[\mathbf{D}]$ peut se calculer comme suit :

$$[\mathbf{D}]^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} r_1(s) + 2r_2(s) & r_1(s) - r_2(s) & r_1(s) - r_2(s) & 0 & 0 & 0 \\ r_1(s) - r_2(s) & r_1(s) + 2r_2(s) & r_1(s) - r_2(s) & 0 & 0 & 0 \\ r_1(s) - r_2(s) & r_1(s) - r_2(s) & r_1(s) + 2r_2(s) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3r_4(s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3r_4(s) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3r_4(s) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

où les coefficients $r_1(s), r_2(s), r_4(s)$ sont donnés par :

$$r_1(s) = \frac{6(\kappa(s) - \kappa_I)(3\kappa(s) + 4\mu(s))\mu(s)}{8\mu^2(s) - 9v_1\kappa^2(s) + (6 - 18u_1 - 12v_1)\kappa(s)\mu(s) + \kappa_I((18u_1 + 12v_1)\mu(s) + 9v_1\kappa(s))} \quad (4.6)$$

$$r_2(s) = \frac{2(\mu_I - \mu(s))(3\kappa(s) + 4\mu(s))\mu(s)}{(6u_2 + 4v_2 - 4)\mu^2(s) + 3(v_2 - 1)\kappa(s)\mu(s) - \mu_I(6u_2 + 4v_2)\mu(s) - 3v_2\mu_I\kappa(s)} \quad (4.7)$$

$$r_4(s) = \frac{2(\mu_I - \mu(s))(3\kappa(s) + 4\mu(s))\mu(s)}{(6u_4 + 4v_4 - 4)\mu^2(s) + 3(v_4 - 1)\kappa(s)\mu(s) - \mu_I(6u_4 + 4v_4)\mu(s) - 3v_4\mu_I\kappa(s)} \quad (4.8)$$

Finalement, les composantes du tenseur d'élasticité effectif dans l'espace de Laplace-Carson $\mathbb{C}^{eff}(s)$ sont déterminées sous les formes suivantes :

$$C_{1111}^{eff}(s) = \frac{3\kappa(s) + 4\mu(s) - f(r_1(s) + 2r_2(s))}{3} \quad (4.9)$$

$$C_{1122}^{eff}(s) = \frac{3\kappa(s) - 2\mu(s) - f(r_1(s) - r_2(s))}{3} \quad (4.10)$$

$$C_{2323}^{eff}(s) = \frac{2\mu(s) - fr_4(s)}{2} \quad (4.11)$$

Dans la suite, on s'intéresse à des matériaux périodiques pour lesquels le comportement de la matrice est viscoélastique linéaire, isotrope selon un des modèles de Kelvin, Maxwell ou Burgers, alors que l'inclusion est élastique isotrope linéaire. Donc, les modules de compressibilité et de cisaillement dans l'espace de Laplace-Carson sont donnés sous la forme :

$$\begin{cases} \mu(s) = \frac{\mu_N(s)}{\mu_D(s)} \\ \kappa(s) = \frac{\kappa_N(s)}{\kappa_D(s)} \end{cases} \quad (4.12)$$

d'où :

$$r_1 = \frac{6(3G_{16} + 4G_{52} - \kappa_I(3G_{56} + 4G_{32}))}{8G_{32} - 9v_1G_{14} + (6 - 18u_1 - 12v_1)G_{56} + \kappa_I((18u_1 + 12v_1)G_{36} + 9v_1G_{54})} \quad (4.13)$$

$$r_2 = \frac{2\mu_I(3G_{47} + 4G_{28}) - 2(3G_{210} + 4G_{29})}{(6u_2 + 4v_2 - 4)G_{28} + 3(v_2 - 1)G_{74} - \mu_I((6u_2 + 4v_2)G_{94} + 3v_2G_{104})} \quad (4.14)$$

$$r_4 = \frac{2\mu_I(3G_{47} + 4G_{28}) - 2(3G_{210} + 4G_{29})}{(6u_4 + 4v_4 - 4)G_{28} + 3(v_4 - 1)G_{74} - \mu_I((6u_4 + 4v_4)G_{94} + 3v_4G_{104})} \quad (4.15)$$

où :

$$G_{ij} = F_i F_j \quad (i, j = 1..10) \quad (4.16)$$

et :

$$\begin{aligned} F_1 &= \kappa_N^2(s) & F_2 &= \mu_N^2(s) & F_3 &= \kappa_D^2(s) \\ F_4 &= \mu_D^2(s) & F_5 &= \kappa_N(s)\kappa_D(s) & F_6 &= \mu_N(s)\mu_D(s) \\ F_7 &= \kappa_N(s)\mu_N(s) & F_8 &= \kappa_D(s)\mu_D(s) & F_9 &= \kappa_D(s)\mu_N(s) \\ F_{10} &= \kappa_N(s)\mu_D(s) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Cette relation fait donc apparaître les modules effectifs comme des fractions rationnelles en fonction de la variable de Laplace s , ce qui permet une inversion simple de la transformée de Laplace.

4.3 Application numérique à différents modèles rhéologiques

4.3.1 Modèle de Kelvin-Voigt

Pour illustrer la méthode décrite ci-dessus, une application est réalisée dans le cas d'une microstructure comportant des inclusions réparties sur un réseau cubique simple. La fonction de forme est donnée par l'équation (1.147). Les matériaux constitutifs sont isotropes et le tenseur effectif correspondant à la géométrie cubique telle que le tenseur d'élasticité d'ordre quatre $\mathbb{R}(t)$ ne dépend que de trois paramètres indépendants, ce qui conduit à :

- Une fonction de relaxation effective en compression $\kappa_{eff}(t)$:

$$\kappa_{eff}(t) = \frac{C_{1111}^{eff}(t) + 2C_{1122}^{eff}(t)}{3} \quad (4.18)$$

- Deux fonctions de relaxation effectives en cisaillement $\mu_{eff}(t)$ et $\mu_{eff}^*(t)$:

$$\mu_{eff}(t) = C_{2323}^{eff}(t) \quad (4.19)$$

$$\mu_{eff}^*(t) = \frac{C_{1111}^{eff}(t) - C_{1122}^{eff}(t)}{2} \quad (4.20)$$

Une application numérique est présentée avec les paramètres définis dans la table 4.1. Pour présenter les résultats et distinguer cette nouvelle solution de la solution approchée développée au chapitre 2 dans le cadre du schéma aucohérent généralisé, la méthode sera dénotée "FFT approchée"

TABLE 4.1 – Propriétés mécaniques du composite périodique avec la matrice viscoélastique de Kelvin-Voigt.

Phase	Inclusion	Matrice
Fraction volumique (%)	15	85
Module d'incompressibilité κ (GPa)	70	20
Module de cisaillement μ (GPa)	30	5
Viscosité en compression η_K (GPa.jour)	0	7
Viscosité en cisaillement η_G (GPa.jour)	0	5

Les figures (4.1),(4.2),(4.3) montrent les fonctions de relaxation effectives en fonction du temps. La qualité des résultats dépend de la sommation sur les nombres d'ondes qui apparaît en particulier dans le calcul des fonctions S_i . Les résultats correspondant aux différents nombres de vecteurs d'ondes sont reportés sur les différentes figures, permettant d'assurer la convergence des résultats.

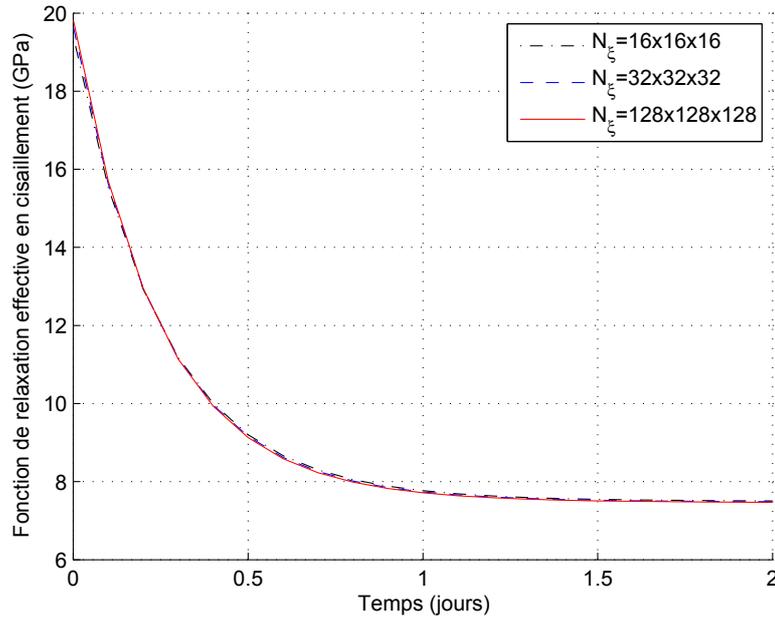


FIGURE 4.1 – Fonction de relaxation effective pour le module de cisaillement d’un composite périodique avec une matrice viscoélastique de Kelvin-Voigt. Méthode FFT approchée

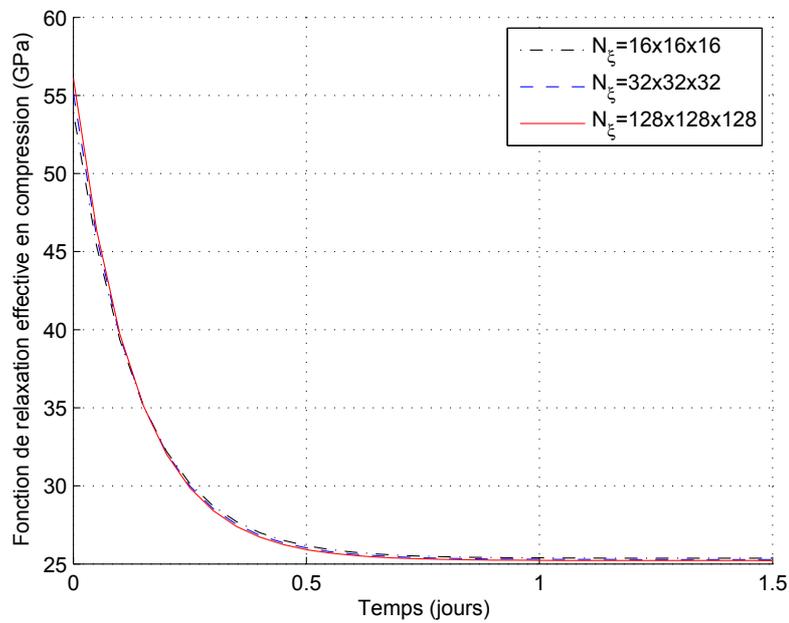


FIGURE 4.2 – Fonction de relaxation effective pour le module de compression isotrope d’un composite périodique avec une matrice viscoélastique de Kelvin-Voigt. Méthode FFT approchée.

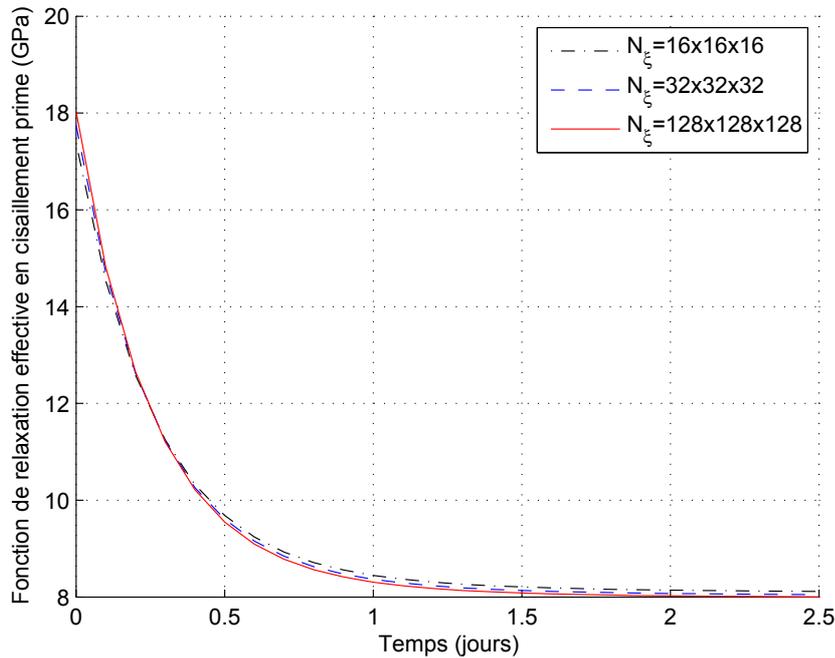


FIGURE 4.3 – Fonction de relaxation effective pour le module de cisaillement complémentaire d’un composite périodique avec une matrice viscoélastique de Kelvin-Voigt. Méthode FFT approchée.

Le comportement viscoélastique macroscopique est alors représenté par un modèle rhéologique qui est composé de trois éléments de Kelvin assemblés en série dans la figure (4.4). Ses valeurs numériques sont trouvées dans les tables (4.2),(4.3),(4.4) Le comportement effectif peut être représenté dans les trois cas par un modèle rhéologique comportant 3 éléments de type "Kelvin-Voigt" comme indiqué sur la figure 4.4.

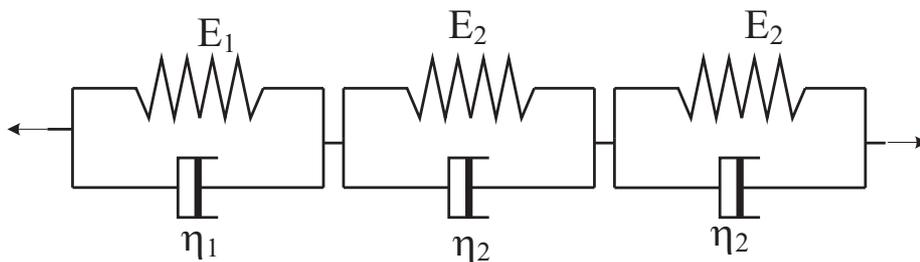


FIGURE 4.4 – Modèle rhéologique associé au comportement macroscopique d’un composite viscoélastique périodique comportant une matrice de Kelvin en utilisant la méthode FFT approchée.

Les paramètres permettant de simuler le matériau effectif à partir de ce modèle rhéologique sont représentés dans les tables 4.2, 4.3 et 4.4. Le comportement viscoélastique est alors complètement déterminé par ces paramètres.

TABLE 4.2 – Propriétés viscoélastiques macroscopiques du modèle rhéologique associé avec le comportement macroscopique en cisaillement d'un composite périodique de Kelvin en utilisant la méthode FFT approchée.

Element	Module de cisaillement $\mu(GPa)$	Viscosité $\eta_\mu(GPa.jour)$
1	46.57	4.97
2	187.77	100.35
3	9.32	9.32

TABLE 4.3 – Propriétés viscoélastiques macroscopiques du modèle rhéologique associé avec le comportement macroscopique en compression d'un composite périodique composé d'une matrice de type Kelvin en utilisant la méthode FFT approchée.

Element	Module d'incompressibilité (GPa)	Viscosité $\eta_K(GPa.jour)$
1	133.23	6.11
2	32.44	13.15
3	1.86	1.87

TABLE 4.4 – Propriétés viscoélastiques macroscopiques du modèle rhéologique associé avec le comportement macroscopique en cisaillement complémentaire d'un composite périodique de Kelvin en utilisant la méthode FFT approchée.

Element	Module de cisaillement $\mu'(GPa)$	Viscosité $\eta_{\mu'}(GPa.jour)$
1	44.68	5.38
2	38.07	22.73
3	13.04	13.04

4.3.2 Modèle de Maxwell

Sur ce deuxième exemple, la matrice est représentée par un modèle de Maxwell, les données numériques étant données en table 4.5. Les résultats sont illustrés dans les figures (4.5),(4.6),(4.7). Ces résultats montrent que la convergence en nombre de vecteurs d'ondes est plus rapide sur les modules de cisaillement que sur le module de compression isotrope.

TABLE 4.5 – Propriétés mécaniques du composite périodique avec une matrice viscoélastique de type Maxwell.

Phase	Inclusion	Matrice
Fraction volumique (%)	50	50
Module d'incompressibilité $\kappa (GPa)$	100	60
Module de cisaillement $\mu (GPa)$	30	45
Viscosité en compression $\eta_K (GPa.jour)$	0	14
Viscosité en cisaillement $\eta_G (GPa.jour)$	0	5

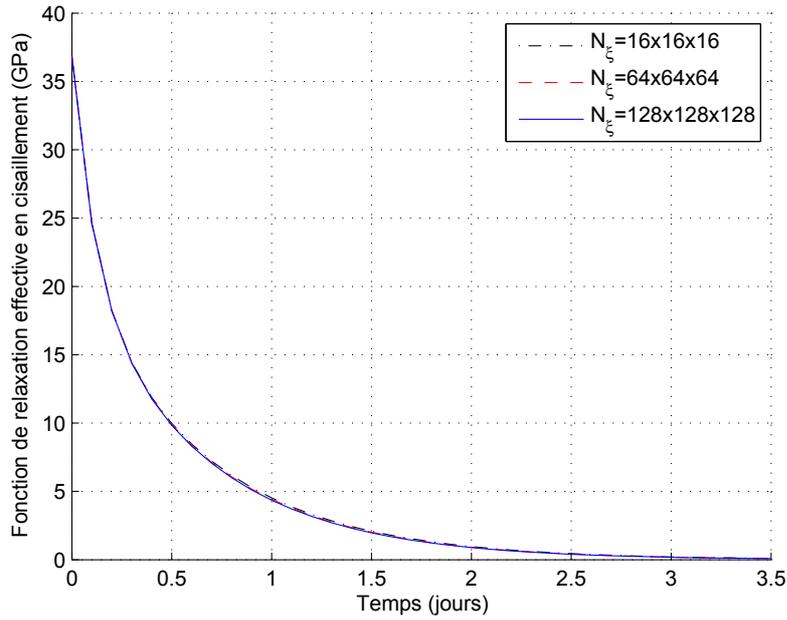


FIGURE 4.5 – Fonction de relaxation effective en cisaillement d’un composite périodique avec la matrice viscoélastique de Maxwell. Méthode FFT approchée

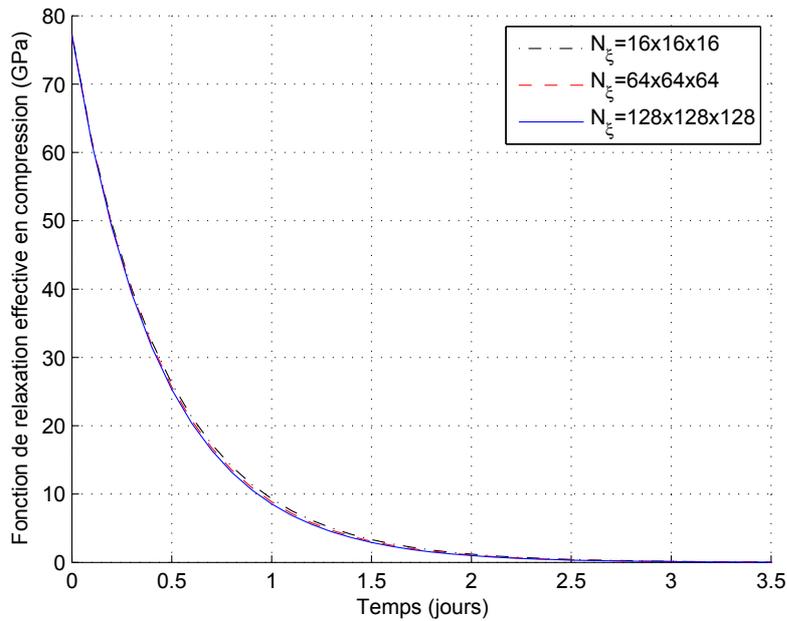


FIGURE 4.6 – Fonction de relaxation effective en compression d’un composite périodique avec la matrice viscoélastique de Maxwell. Méthode FFT approchée

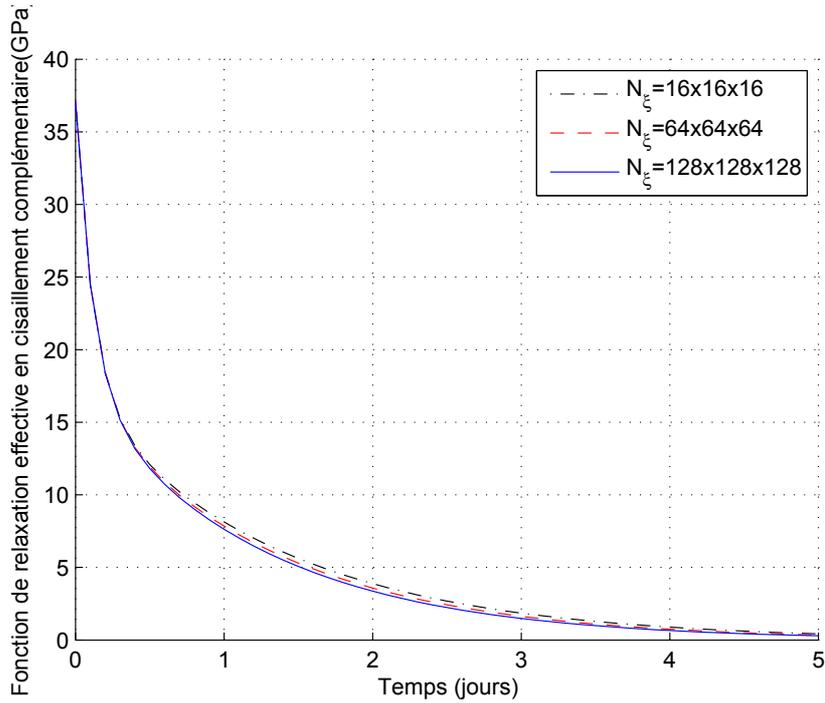


FIGURE 4.7 – Fonction de relaxation effective en cisaillement complémentaire d’un composite périodique avec la matrice viscoélastique de Maxwell. Méthode FFT approchée

4.3.3 Modèle de Burgers

La modélisation peut s’étendre à des comportements viscoélastiques plus ou moins complexes. Dans cette sous-section, un comportement de type ”Burgers” a été introduit pour la matrice. Les propriétés mécaniques utilisées pour chaque composant du modèle rhéologique se trouvent dans la table (4.6). Les résultats montrent que la méthode s’applique sans difficulté au modèle de Burgers qui comporte 8 paramètres de définition de la matrice. Dans ce cas, le modèle rhéologique associé à la matrice comporte un trop grand nombre d’éléments pour être représenté simplement.

TABLE 4.6 – Propriétés mécaniques du composite à deux phases pour le modèle de Burgers.

Phase	Inclusion	Matrice	
		Maxwell	Kelvin-Voigt
Fraction volumique (%)	30	70	
Module d’incompressibilité κ (GPa)	70	60	40
Module de cisaillement μ (GPa)	20	30	25
Viscosité en compression η_K (GPa.jour)	0	5	35
Viscosité en cisaillement η_G (GPa.jour)	0	2	12

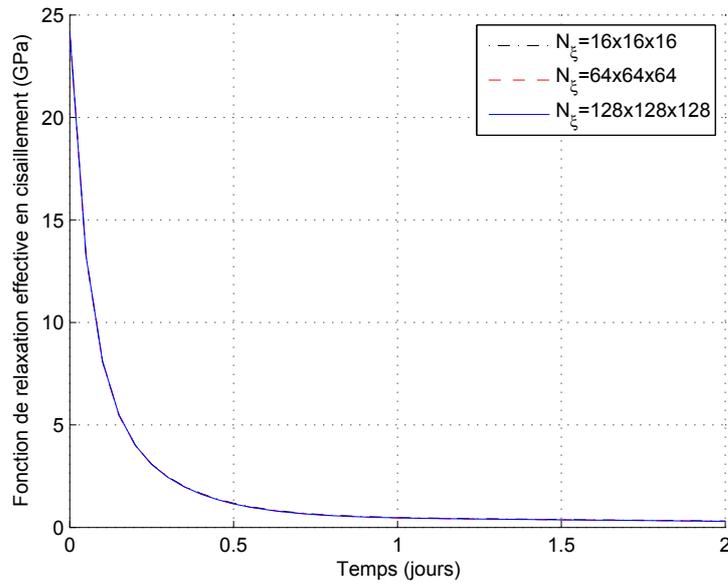


FIGURE 4.8 – Fonction de relaxation effective en cisaillement d’un composite périodique dans le cas de la matrice viscoélastique de Burgers. Méthode FFT approchée.

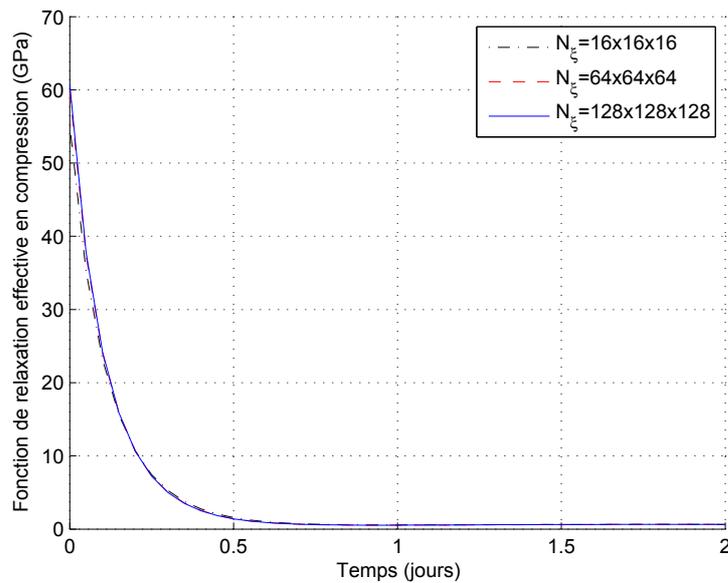


FIGURE 4.9 – Fonction de relaxation effective en compression d’un composite périodique avec la matrice viscoélastique de Burgers. Méthode FFT approchée

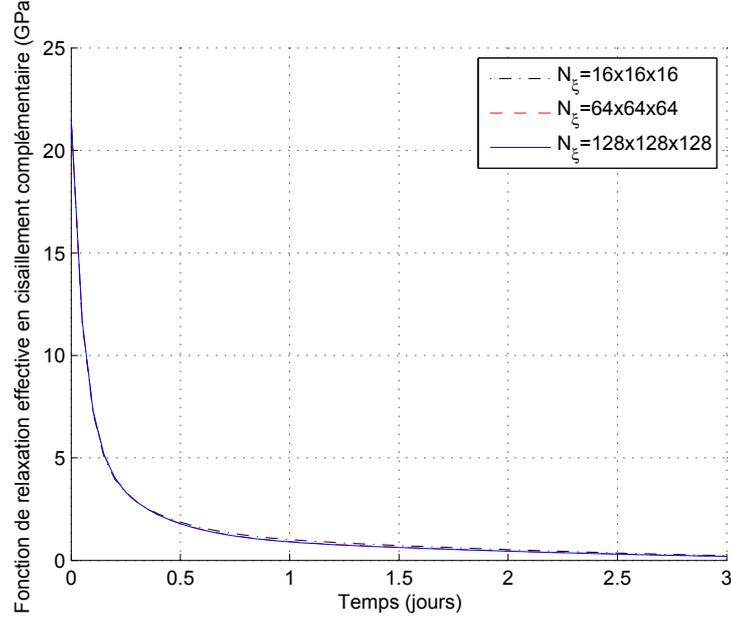


FIGURE 4.10 – Fonction de relaxation effective en cisaillement complémentaire d'un composite périodique avec la matrice viscoélastique de Burgers. Méthode FFT approchée.

4.4 Validation de la méthode sur un résultat de la littérature

Dans cette section, la précision de la méthode FFT approchée est évaluée par comparaison avec une autre méthode proposée par Lahellec et Suquet [42]. Le modèle étudié est un composite à fibres constitué de deux phases. La fibre alignée dans l'axe x_3 sera identifiée comme la phase 1, élastique, linéaire, isotrope et caractérisée par le module d'incompressibilité $\kappa^{(1)} = 222.2GPa$ et le module de cisaillement $2\mu^{(1)} = 333.3GPa$. Sa concentration est donnée par $c_1 = 0.25$. Le comportement de la matrice est viscoélastique de Maxwell, caractérisé par le coefficient d'incompressibilité $k^{(2)} = 58.33GPa$, de cisaillement $2\mu^{(2)} = 53.84GPa$ et la viscosité $\eta^{(2)} = 10GPas$.

Le problème est en deux dimensions et le chargement est une déformation imposée :

$$\mathbf{E}(t) = E_{11}(t) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - E_{11}(t) \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \quad (4.21)$$

où $E_{11}(t)$ est un chargement monotone croissant avec une constante $\dot{E}_{11} = 5.10^{-3}s^{-1}$

La fonction de forme est donnée par :

$$I(\boldsymbol{\xi}) = \frac{2S J_1(\eta)}{\eta} \quad (4.22)$$

où J_1 est la fonction de Bessel de premier ordre, S est la superficie de l'inclusion, $\eta = a \|\boldsymbol{\xi}\|$ avec $\|\boldsymbol{\xi}\|$ est le module de vecteur d'onde.

Les valeurs propres de la matrice $[U]$ et $[V]$ sont données par :

$$\{u\} = \begin{bmatrix} S_4 + S_9 \\ S_4 - S_9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2S_9 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

et :

$$\{v\} = \begin{bmatrix} 2S_1 - 2S_4 - 4S_9 \\ 2S_1 - 2S_4 + 2S_9 \\ 0 \\ S_1 \\ S_1 \\ 2S_1 - 4S_9 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

La matrice de changement de base \mathbf{Q} est donnée par :

$$[\mathbf{Q}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

La figure 4.11 montre le comportement viscoélastique macroscopique du composite. Ce résultat est comparé avec celui de la méthode proposée par Lahellec et Suquet [42].

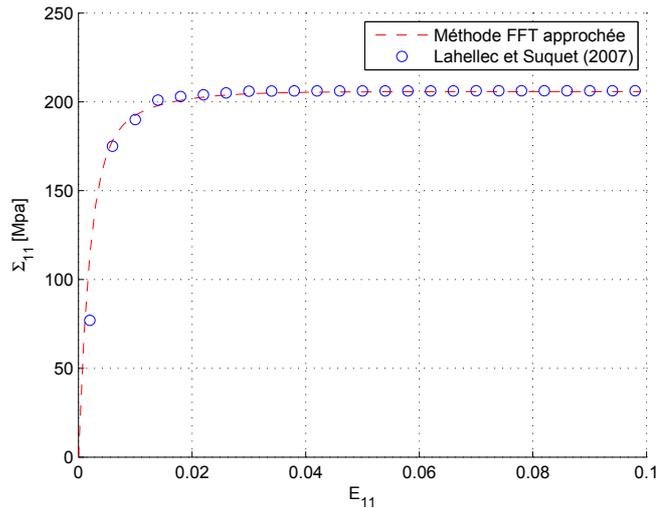


FIGURE 4.11 – Réponse de composites renforcés par fibres sous chargement monotone. Comparaison entre les résultats de la méthode FFT approchée et ceux obtenus par la méthode de Lahellec et Suquet

4.5 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons procédé à la détermination de propriétés viscoélastiques approchées pour un composite constitué d'une matrice périodique. Le module effectif dans l'espace de Carson se présente pour ce type de modèle sous forme de fraction rationnelle, ce qui permet l'inversion analytique de la transformée de Laplace, ce qui permet de calculer explicitement la fonction de relaxation du matériau. Les exemples testés dans le cas d'une microstructure périodique de type cubique simple ont montré que la méthode permet de traiter le cas de différents types de comportement pour la matrice. Enfin, la méthode approchée est validée par une comparaison avec le résultat de la méthode numérique de Lahellec et Suquet 2007 [42].

Chapitre 5

Homogénéisation d'un milieu hétérogène viscoélastique périodique par utilisation de la série de Neumann

5.1 Introduction

La détermination des propriétés effectives d'un milieu périodique élastique en utilisant le développement classique en série de Neumann a été initialement introduite par Moulinec et Suquet [58], dans la ligne de travaux antérieurs sur l'obtention de la conductivité de milieux hétérogènes. Cette méthode utilise la Transformée de Fourier Discrète et par conséquent la Transformée de Fourier Rapide. Une combinaison du développement en série de Neumann combinée avec l'utilisation des fonctions de forme proposées par Nemat-Nasser et al [62] pour caractériser la géométrie de la microstructure a été introduite par G.Bonnet [5]. Cette méthode permet de prendre en compte exactement la forme des inclusions. Dans le cadre de ce dernier chapitre, on présentera une extension de cette méthode, qui sera notée "Méthode SN" car la solution qui permet de déterminer le comportement macroscopique de milieux viscoélastiques périodiques est développée en Série de Neumann (SN). Les propriétés effectives sont obtenues dans l'espace de Laplace-Carson en utilisant les résultats obtenus dans le chapitre 1, qui permettent d'exprimer les différents termes de la série de Neumann sous forme de fraction rationnelle. La fonction de relaxation est ensuite déterminée par inversion explicite de la transformée de Laplace. Un exemple d'application sera traité pour un matériau viscoélastique caractérisé par un modèle rhéologique de type Zener.

Dans la première partie du chapitre, on étudiera une cellule de base qui est composée d'une matrice viscoélastique incompressible de type Zener contenant des inclusions élastiques. Dans un deuxième temps, le matériau compressible sera étudié en supposant que le coefficient de poisson ν de la matrice est constant. Les résultats obtenus par cette méthode seront enfin comparés à ceux obtenus par la méthode approchée présentée dans le chapitre 4.

5.2 Formulation viscoélastique

5.2.1 Matériau viscoélastique incompressible

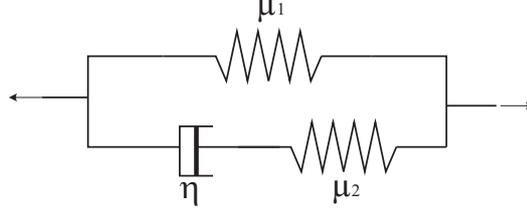


FIGURE 5.1 – Modèle de Zener

On considère une microstructure de type inclusion-matrice où la matrice est viscoélastique incompressible de type Zener et les inclusions élastiques incompressibles. Le comportement de la matrice dans l'espace de Laplace-Carson est décrit par la relation entre déviateurs de contraintes et déformations sous la forme :

$$\mathbf{s} = 2\mu(s) \boldsymbol{\epsilon} \quad (5.1)$$

où le coefficient $\mu(s)$ est le module de cisaillement dans l'espace de Laplace-Carson défini par :

$$\mu_M = \mu(s) = \frac{\mu_1(\mu_2 + \eta s) + \mu_2 \eta s}{\mu_2 + \eta s} \quad (5.2)$$

Le schéma itératif qui est présenté par l'équation (1.208) du chapitre 1 et qui permet de résoudre le problème de localisation est écrit dans l'espace de Laplace-Carson sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(i+1)}(s, \mathbf{x}) = \mathbf{E} - \boldsymbol{\Gamma} * (\delta\mathbb{C}(s, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\epsilon}^{(i)}(s, \mathbf{x})) \quad (5.3)$$

où le tenseur d'ordre quatre $\boldsymbol{\Gamma}$ est donné dans le cas incompressible par :

$$\boldsymbol{\Gamma} = \frac{1}{2\mu_0} \mathbb{E}_4 \quad (5.4)$$

Le tenseur d'ordre quatre \mathbb{E}_4 est donné par (1.174). L'écart entre modules $\delta\mathbb{C}(s, \mathbf{x})$ est défini par :

$$\delta\mathbb{C}(s, \mathbf{x}) = 2 [(\mu_I - \mu_0) I_I + (\mu_M(s) - \mu_0) I_M] \mathbb{I} \quad (5.5)$$

où les indices M, I signalent la matrice et l'inclusion, respectivement.

Le schéma itératif s'écrit alors :

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(i+1)}(s, \mathbf{x}) = \mathbf{E} - \mathbb{E}_4 * \left[\frac{\mu_I - \mu_0}{\mu_0} I_I + \frac{\mu_M(s) - \mu_0}{\mu_0} I_M \right] : \boldsymbol{\epsilon}^{(i)}(s, \mathbf{x}) \quad (5.6)$$

Le tenseur de Green $\mathbf{\Gamma}$ se calcule sous forme matricielle à partir des matrices $[G^{(1)}]$, $[G^{(2)}]$ qui sont données par :

$$[\mathbf{G}^{(1)}] = \frac{1}{\xi^2} \begin{bmatrix} 2\xi_1^2 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\xi_1\xi_3 & \sqrt{2}\xi_1\xi_2 \\ 0 & 2\xi_2^2 & 0 & \sqrt{2}\xi_2\xi_3 & 0 & \sqrt{2}\xi_1\xi_2 \\ 0 & 0 & 2\xi_3^2 & \sqrt{2}\xi_2\xi_3 & \sqrt{2}\xi_2\xi_3 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\xi_2\xi_3 & \sqrt{2}\xi_2\xi_3 & \xi_2^2 + \xi_3^2 & \xi_1\xi_2 & \xi_3\xi_1 \\ \sqrt{2}\xi_1\xi_3 & 0 & \sqrt{2}\xi_2\xi_3 & \xi_1\xi_2 & \xi_3^2 + \xi_1^2 & \xi_2\xi_3 \\ \sqrt{2}\xi_1\xi_2 & \sqrt{2}\xi_1\xi_2 & 0 & \xi_3\xi_1 & \xi_2\xi_3 & \xi_1^2 + \xi_2^2 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

$$[\mathbf{G}^{(2)}] = \frac{1}{\xi^4} \begin{bmatrix} \xi_1^4 & \xi_1^2\xi_2^2 & \xi_3^2\xi_1^2 & \sqrt{2}\xi_1^2\xi_2\xi_3 & \sqrt{2}\xi_1^3\xi_3 & \sqrt{2}\xi_1^3\xi_2 \\ \xi_1^2\xi_2^2 & \xi_1^4 & \xi_2^2\xi_3^2 & \sqrt{2}\xi_2^3\xi_3 & \sqrt{2}\xi_2^2\xi_3\xi_1 & \sqrt{2}\xi_2^3\xi_1 \\ \xi_3^2\xi_1^2 & \xi_2^2\xi_3^2 & \xi_3^4 & \sqrt{2}\xi_3^3\xi_2 & \sqrt{2}\xi_3^3\xi_1 & \sqrt{2}\xi_3^2\xi_2\xi_1 \\ \sqrt{2}\xi_1^2\xi_2\xi_3 & \sqrt{2}\xi_2^3\xi_3 & \sqrt{2}\xi_3^3\xi_2 & 2\xi_2^2\xi_3^2 & 2\xi_3^2\xi_1\xi_2 & 2\xi_2^2\xi_1\xi_3 \\ \sqrt{2}\xi_1^3\xi_3 & \sqrt{2}\xi_2^2\xi_3\xi_1 & \sqrt{2}\xi_3^3\xi_1 & 2\xi_3^2\xi_1\xi_2 & 2\xi_3^2\xi_1^2 & 2\xi_1^2\xi_2\xi_3 \\ \sqrt{2}\xi_1^3\xi_2 & \sqrt{2}\xi_2^3\xi_1 & \sqrt{2}\xi_3^2\xi_1\xi_2 & 2\xi_2^2\xi_1\xi_3 & 2\xi_1^2\xi_2\xi_3 & 2\xi_1^2\xi_2^2 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

5.2.1.1 Cas des inclusions moins raides que la matrice

Dans ce cas, on choisit le module du milieu de référence comme égal à celui de la matrice $\mu_0 = \mu_M(s)$. Le schéma itératif s'écrit alors :

$$\epsilon^{(i+1)}(s, \mathbf{x}) = \mathbf{E} - \frac{\mu_I - \mu_M(s)}{\mu_M(s)} \mathbb{E}_4 * (I_I \epsilon^{(i)}(s, \mathbf{x})) \quad (5.9)$$

La déformation locale à convergence est donnée alors par :

$$\epsilon^\infty(s, \mathbf{x}) = \left\{ \mathbb{I} - \frac{\mu_I - \mu_M(s)}{\mu_M(s)} \underbrace{\mathbb{E}_4(\mathbf{x}) * I_I(\mathbf{x})}_1 + \dots \right. \\ \left. + (-1)^m \left(\frac{\mu_I - \mu_M(s)}{\mu_M(s)} \right)^m \underbrace{\mathbb{E}_4(\mathbf{x}) * I_I(\mathbf{x})}_1 \dots \underbrace{\mathbb{E}_4(\mathbf{x}) * I_I(\mathbf{x})}_m \right\} : \mathbf{E} \quad (5.10)$$

La contrainte locale à convergence est donnée par :

$$\begin{aligned} \sigma^\infty(s, \mathbf{x}) &= \mathbb{C}(s, \mathbf{x}) : \epsilon^\infty(s, \mathbf{x}) \\ &= 2(\mu_I I_I(\mathbf{x}) + \mu_M(s) I_M(\mathbf{x})) : \epsilon^\infty(s, \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (5.11)$$

ce qui donne la contrainte totale :

$$\Sigma(s, \mathbf{x}) = \Sigma_I(s, \mathbf{x}) + \Sigma_M(s, \mathbf{x}) \quad (5.12)$$

avec les contraintes partielles :

$$\begin{cases} \Sigma_I(s, \mathbf{x}) = 2\mu_I : \langle I_I(\mathbf{x}) . \epsilon^\infty(s, \mathbf{x}) \rangle \\ \Sigma_M(s, \mathbf{x}) = 2\mu_M(s) : \langle I_M(\mathbf{x}) . \epsilon^\infty(s, \mathbf{x}) \rangle \end{cases} \quad (5.13)$$

Les deux contraintes partielles s'expriment alors sous la forme :

$$\begin{aligned} \Sigma_I(s, \mathbf{x}) = & 2\mu_I : \left\{ \langle I_I(\mathbf{x}) \rangle \mathbb{I} + \frac{\mu_M(s) - \mu_I}{\mu_M(s)} \langle I_I(\mathbf{x}) \cdot (\mathbb{E}_4(\mathbf{x}) * I_I(\mathbf{x})) \rangle + \dots \right. \\ & \left. + \left(\frac{\mu_M(s) - \mu_I}{\mu_M(s)} \right)^m \langle I_I(\mathbf{x}) \cdot (\mathbb{E}_4(\mathbf{x}) * [I_I(\mathbf{x}) \dots (\mathbb{E}_4(\mathbf{x}) * I_I(\mathbf{x}))]) \rangle \right\} : \mathbf{E} \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_M(s, \mathbf{x}) = & 2 \left\{ \mu_M(s) \langle I_M(\mathbf{x}) \rangle \mathbb{I} + (\mu_M(s) - \mu_I) \langle I_I(\mathbf{x}) \cdot (\mathbb{E}_4(\mathbf{x}) * I_I(\mathbf{x})) \rangle + \dots \right. \\ & \left. + \frac{(\mu_M(s) - \mu_I)^m}{\mu_M^{m-1}(s)} \langle I_M(\mathbf{x}) \cdot (\mathbb{E}_4(\mathbf{x}) * [I_I(\mathbf{x}) \dots (\mathbb{E}_4(\mathbf{x}) * I_I(\mathbf{x}))]) \rangle \right\} : \mathbf{E} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Sous cette forme, on voit que tous les termes sont des fractions rationnelles en s multipliées par des constantes correspondant aux moyennes volumiques des champs locaux sur chaque phase. Alors, on obtient les contraintes partielles, en supposant la série développée jusqu'à l'ordre m :

$$\Sigma_I(s, \mathbf{x}) = \mu_I \left[\mathbb{A}_0 + \sum_{i=1}^m \mathbb{A}_i : \left(\frac{\mu_M(s) - \mu_I}{\mu_M(s)} \right)^i \right] : \mathbf{E} \quad (5.16)$$

$$\Sigma_M(s, \mathbf{x}) = \mu_M(s) \left[\mathbb{B}_0 + \sum_{i=1}^m \mathbb{B}_i : \frac{(\mu_M(s) - \mu_I)^i}{\mu_M^{(i-1)}(s)} \right] : \mathbf{E} \quad (5.17)$$

où les tenseurs d'ordre quatre sont définis par :

$$\begin{cases} \mathbb{A}_0 = 2f_I \mathbb{I} \\ \mathbb{B}_0 = 2f_M \mathbb{I} \\ \mathbb{A}_i = 2 \langle I_I(\mathbf{x}) \cdot (\mathbb{E}_4(\mathbf{x}) * [I_I(\mathbf{x}) \dots (\mathbb{E}_4(\mathbf{x}) * I_I(\mathbf{x}))]) \rangle \\ \mathbb{B}_i = 2 \langle I_M(\mathbf{x}) \cdot (\mathbb{E}_4(\mathbf{x}) * [I_I(\mathbf{x}) \dots (\mathbb{E}_4(\mathbf{x}) * I_I(\mathbf{x}))]) \rangle \end{cases} \quad (5.18)$$

Par ailleurs, on a :

$$\mathbb{A}_i + \mathbb{B}_i = \mathbb{F}_i(\xi = 0) \quad (5.19)$$

avec :

$$\mathbb{F}_i(\xi) = 2 \langle \mathbb{E}_4(\xi) \cdot [I_I(\xi) * \dots * (\mathbb{E}_4(\xi) \cdot I_I(\xi))] \rangle \quad (5.20)$$

Ces tenseurs peuvent être obtenus indépendamment du calcul des coefficients élastiques en conservant les moyennes volumiques. En effectuant ce calcul, on peut d'ailleurs étudier la convergence de chaque terme en fonction de la discrétisation en vecteurs d'ondes choisie. Finalement, on obtient le module effectif dans l'espace de Laplace-Carson sous la forme :

$$\mathbb{C}^{eff}(s) = \mathbb{A}_0 \mu_I + (2\mathbb{I} - \mathbb{A}_0) \mu_M(s) + \sum_{i=1}^m \mathbb{A}_i \left(\frac{\mu_M(s) - \mu_I}{\mu_M(s)} \right)^i (\mu_I - \mu_M(s)) \quad (5.21)$$

Tous les termes sont des fractions rationnelles dont il est possible de calculer explicitement la transformée de Laplace inverse pour déterminer la fonction de relaxation dans l'espace réel.

On remarque que pour un matériau de type Zener, le module de cisaillement de la matrice dans l'espace de Laplace-Carson est donné sous la forme :

$$\mu_M(s) = \frac{A + Bs}{C + Ds} \quad (5.22)$$

On pose :

$$s^* = \frac{Bs}{A} \quad (5.23)$$

ce qui donne :

$$\mu_M(s) = \frac{B}{D} \left(\frac{s^* + 1}{s^* + b} \right) \quad (5.24)$$

$$\mu_M(s) - \mu_I = \frac{EB + FAs^*}{CB + DAs^*} \quad (5.25)$$

et :

$$\frac{\mu_M(s) - \mu_I}{\mu_M} = \frac{BE + FAs^*}{AB(s^* + 1)} \quad (5.26)$$

avec :

$$\begin{cases} E = A - \mu_I C \\ F = B - \mu_I D \\ b = \frac{CB}{DA} \end{cases} \quad (5.27)$$

Pour obtenir la fonction de relaxation dans l'espace temporel, il faut inverser la transformée de Laplace $\hat{\mathbb{C}}^{eff}(s)$ qui est définie par :

$$\hat{\mathbb{C}}^{eff}(s) = \frac{\mathbb{C}^{eff}(s)}{s} \quad (5.28)$$

La fonction de relaxation dans l'espace de Laplace est alors donnée par :

$$\hat{\mathbb{C}}^{eff}(s^*) = \frac{B\mu_I\mathbb{A}_0}{As^*} + \frac{B^2(2\mathbb{I} - \mathbb{A}_0)}{AD} \frac{s^* + 1}{s^*(s^* + b)} - \sum_{i=1}^m \frac{\mathbb{A}_i B \alpha^i \beta}{A} \frac{(s^* + a)^{i+1}}{(s^* + 1)^i (s^* + b) s^*} \quad (5.29)$$

où :

$$\alpha = \frac{F}{B} \quad \beta = \frac{F}{D} \quad (5.30)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{C}}^{eff}(s^*) &= \left(\frac{B\mu_I\mathbb{A}_0}{A} + \frac{B^2(2\mathbb{I} - \mathbb{A}_0)}{bAD} \right) \frac{1}{s^*} + \frac{B^2(b-1)(2\mathbb{I} - \mathbb{A}_0)}{ADb} \frac{1}{(s^* + b)} \\ &\quad - \sum_{i=1}^m \frac{\mathbb{A}_i B \alpha^i \beta}{A} \frac{(s^* + a)^{i+1}}{(s^* + 1)^i (s^* + b) s^*} \\ &= \mathbb{G}_1 \frac{1}{s^*} + \mathbb{G}_2 \frac{1}{s^* + b} - \sum_{i=1}^m \mathbb{K}_i \hat{L}^{(i)} \end{aligned} \quad (5.31)$$

en posant :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{G}_1 &= \frac{B\mu_I}{A} \mathbb{A}_0 + \frac{B^2}{bAD} (2\mathbb{I} - \mathbb{A}_0) \\
 \mathbb{G}_2 &= \frac{B^2(b-1)}{ADb} (2\mathbb{I} - \mathbb{A}_0) \\
 \mathbb{K}_i &= \frac{B\alpha^i \beta}{A} \mathbb{A}_i \\
 \hat{L}^{(i)} &= \frac{(s^* + a)^{i+1}}{(s^* + 1)^i (s^* + b) s^*}
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

La fraction rationnelle $\hat{L}^{(i)}$ se décompose sous la forme :

$$\hat{L}^{(i)} = \frac{H_1^{(i)}}{s^*} + \frac{H_2^{(i)}}{s^* + b} + \sum_{j=1}^i \frac{M_j}{(s^* + 1)^j} \tag{5.33}$$

où les coefficients H_1, H_2, M_i sont déterminés à partir des pôles $s^* = 0, s^* = -b, s^* = -1$:

- Pour le pôle $s^* = 0$:

$$H_1^{(i)} = \lim_{s^* \rightarrow 0} \left\{ s^* \hat{L}^{(i)} \right\} = \frac{a^{i+1}}{b} \tag{5.34}$$

- Pour le pôle $s^* = -b$:

$$H_2^{(i)} = \lim_{s^* \rightarrow -b} \left\{ \frac{1}{s^*} \left(\frac{s^* + a}{s^* + 1} \right)^i (s^* + a) \right\} = \frac{(a-b)^{i+1}}{-b(1-b)^i} \tag{5.35}$$

- Pour le pôle $s^* = -1$:

$$M_j = \lim_{s^* \rightarrow -1} \left\{ \frac{1}{(i-j)!} \frac{d^{(i-j)}}{ds^{*(i-j)}} \left[\frac{(s^* + a)^{i+1}}{s^* (s^* + b)} \right] \right\} \tag{5.36}$$

ce qui donne :

$$M_j = \frac{1}{b} \frac{1}{(i-j)!} (M_j^1 + M_j^2) \tag{5.37}$$

avec :

$$M_j^1 = \lim_{s^* \rightarrow -1} \left\{ \frac{d^{(i-j)}}{ds^{*(i-j)}} \left[\frac{(s^* + a)^{i+1}}{s^*} \right] \right\} \tag{5.38}$$

$$M_j^2 = - \lim_{s^* \rightarrow -1} \left\{ \frac{d^{(i-j)}}{ds^{*(i-j)}} \left[\frac{(s^* + a)^{i+1}}{s^* + b} \right] \right\} \tag{5.39}$$

En utilisant la formule de Leibniz on obtient :

$$M_j^1 = - \sum_{r=0}^{i-j} C_r^{i+1} (i-j)! (a-1)^{i-r+1} \tag{5.40}$$

$$M_j^2 = - \sum_{r=0}^{i-j} C_r^{i+1} (i-j)! (a-1)^{i-r+1} (-1)^{i-j-r} \left(\frac{1}{b-1} \right)^{i-j-r+1} \tag{5.41}$$

Donc :

$$M_j = -\frac{1}{b} \sum_{r=0}^{i-j} C_r^{i+1} (a-1)^{i-r+1} \left[1 + (-1)^{i-j-r+1} \left(\frac{1}{b-1} \right)^{i-j-r+1} \right] \quad (5.42)$$

où C_n^k est le coefficient binomial qui se définit comme : $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

La fonction de relaxation est obtenue en recombinaut les différents termes apparaissant dans les transformées de Laplace inverses :

$$\hat{\mathbb{C}}^{eff}(s^*) = \mathbb{R}_1 \frac{1}{s^*} + \mathbb{R}_2 \frac{1}{s^* + b} - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^i \mathbb{K}_i M_j \frac{1}{(s^* + 1)^j} \quad (5.43)$$

avec :

$$\mathbb{R}_1 = \mathbb{G}_1 - \sum_{i=1}^m \mathbb{K}_i H_1^{(i)} \quad (5.44)$$

$$\mathbb{R}_2 = \mathbb{G}_2 - \sum_{i=1}^m \mathbb{K}_i H_2^{(i)} \quad (5.45)$$

Donc, la fonction de relaxation dans l'espace réel t^* est déterminée explicitement par la formule suivante :

$$\mathbb{C}^{eff}(t^*) = \mathbb{R}_1 + \mathbb{R}_2 e^{-bt^*} - e^{-t^*} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^i \mathbb{K}_i M_j \frac{t^{*j-1}}{(j-1)!} \quad (5.46)$$

En utilisant la relation :

$$L^{-1} \left\{ F \left(\frac{s}{k} \right) \right\} = kf(kt) \quad (5.47)$$

On obtient finalement la fonction de relaxation dans l'espace réel t :

$$\mathbb{C}^{eff}(t) = \frac{A}{B} \left\{ \mathbb{R}_1 + \mathbb{R}_2 e^{-\frac{bAt}{B}} - e^{-\frac{At}{B}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^i \mathbb{K}_i M_j \frac{\left(\frac{At}{B}\right)^{j-1}}{(j-1)!} \right\} \quad (5.48)$$

5.2.1.2 Cas des inclusions plus raides que la matrice

Dans ce cas, il est nécessaire d'utiliser la formulation duale en utilisant le tenseur de Green pour les contraintes qui s'écrit :

$$\mathbf{\Lambda} = 2\mu_0 (3\mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_3) \quad (5.49)$$

où \mathbb{E}_1 et \mathbb{E}_3 sont les tenseurs d'ordre quatre de la base de Walpole :

$$\begin{cases} \mathbb{E}_1 = \frac{1}{2} \mathbf{k}^\perp \otimes \mathbf{k}^\perp \\ \mathbb{E}_3 = \mathbf{k}^\perp \underline{\otimes} \mathbf{k}^\perp - \frac{1}{2} \mathbf{k}^\perp \otimes \mathbf{k}^\perp \end{cases} \quad (5.50)$$

Les étapes suivantes sont similaires.

5.2.2 Matériau viscoélastique compressible

Dans ce cas, le problème doit être traité avec le tenseur de Green complet et il n'est plus possible d'écrire la série de Neumann sous la forme de série de fractions rationnelles indépendantes, sauf si les parties sphériques et déviatoriques sont proportionnelles, c'est à dire si le coefficient de Poisson est indépendant de la variable de Laplace et si l'on suppose de plus que le coefficient de Poisson est le même dans la partie élastique. Dans ce cas particulier, on peut se ramener comme dans le cas précédent à une série comprenant des fractions rationnelles puissances d'un même terme en s .

Dans tout autre cas, chaque terme devient un développement de puissances de fractions rationnelles suivant la loi du binôme et le calcul devient inextricable.

Dans le cas particulier précédemment défini, le tenseur de Green s'écrit, en adoptant à nouveau le tenseur élastique de la matrice pour définir le milieu de référence :

$$\mathbf{\Gamma}_0 = \frac{1}{\lambda_M(s) + 2\mu_M(s)} \mathbb{E}_2 + \frac{1}{2\mu_M(s)} \mathbb{E}_4 = \frac{1}{2\mu_M(s)} \mathbf{\Gamma}' \quad (5.51)$$

avec :

$$\mathbf{\Gamma}' = c(\nu) \mathbb{E}_2 + \mathbb{E}_4 \quad (5.52)$$

$$c(\nu) = \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \quad (5.53)$$

Les tenseurs élastiques des deux phases s'écrivent :

$$\mathbb{C} = 3\kappa\mathbb{J} + 2\mu\mathbb{K} = 2\mu\mathbb{C}' \quad (5.54)$$

où

$$\mathbb{C}' = d(\nu)\mathbb{J} + \mathbb{I} \quad (5.55)$$

Alors, le schéma itératif s'écrit :

$$\epsilon^{(i+1)}(s, \mathbf{x}) = \mathbf{E} - \frac{\mu_I - \mu_M(s)}{\mu_M(s)} \mathbf{\Gamma}' * (I_I \mathbb{C}' \epsilon^{(i)}(s, \mathbf{x})) \quad (5.56)$$

Cette forme est similaire au cas des matériaux incompressibles, la seule différence étant dans le calcul des termes en facteur des puissances de la fraction rationnelle faisant intervenir μ_I et μ_M . La procédure de calcul est alors similaire au cas précédent.

5.3 Application numérique

Dans cette application numérique, on va étudier le comportement macroscopique d'un matériau viscoélastique de Zener contenant des inclusions sous forme de fibres cylindriques à base circulaire distribuées suivant un réseau à mailles carrées. Les données numériques sont définies dans la table (5.1). Le nombre des termes maintenus dans la série de la solution est déterminé par (1.233) avec une précision ϵ égale à 10^{-4} . Le nombre de termes dépend du contraste entre les modules des différentes phases dans le cas élastique. Dans le cas des modules dans l'espace de Laplace-Carson, le nombre d'itérations est calculé selon

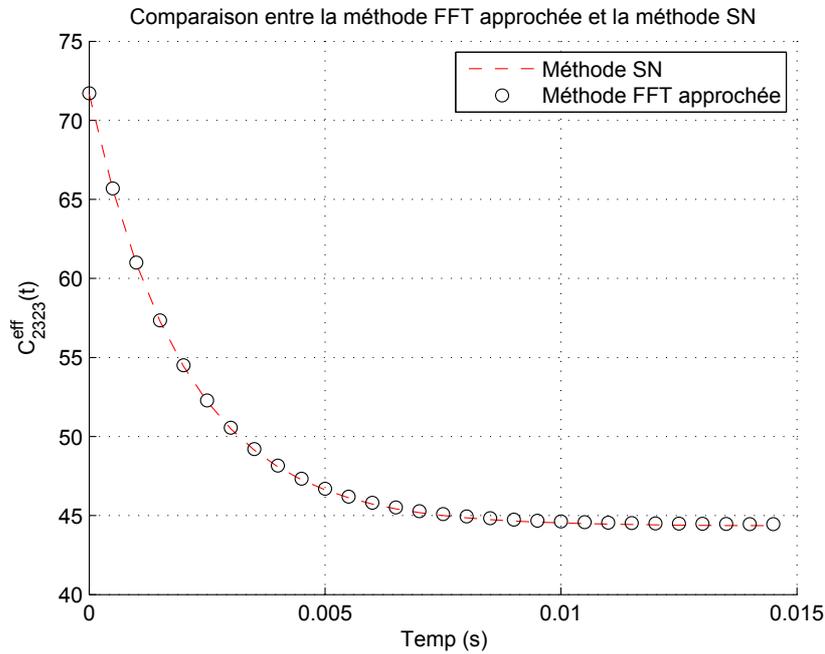
TABLE 5.1 – Propriétés mécaniques du composite viscoélastique incompressible de type Zener.

Phase	Inclusion	Matrice	
		Elément 1	Elément 2
Fraction volumique (%)	30	70	
Module de cisaillement μ (GPa)	10	70	50
Viscosité en cisaillement η_G (GPa.s)	0	0.2	

le nombre maximum engendré dans les deux cas extrêmes du module maximum et du module minimum :

$$N = \text{Sup} \{N(\text{Sup} \{\mu_M(s)\}), N(\text{Inf} \{\mu_M(s)\})\} \quad (5.57)$$

Le tenseur effectif obtenu dépend de deux composantes indépendantes $C_{2323}(t)$ et $C_{1212}(t)$. L'évolution en cours du temps de ces deux composantes est donnée dans les figures (5.2) et (5.3). Ces résultats sont comparés avec ceux obtenus par la méthode FFT approchée. Le calcul de la fonction de relaxation effective par la méthode FFT approchée est réalisé comme dans le cas du chapitre 4, mais pour la géométrie des fibres. La fonction de relaxation effective obtenue par la méthode FFT approchée est donnée dans l'annexe. Le nombre de vecteurs d'onde utilisé est de $64 * 64$ dans les deux cas.

FIGURE 5.2 – Composante $C_{2323}^{eff}(t)$ calculée par la méthode SN et par la méthode FFT approchée

Les résultats obtenus par la méthode FFT approchée et par la méthode SN sont identiques pour les deux fonctions de relaxation calculées, ce qui correspond bien aux

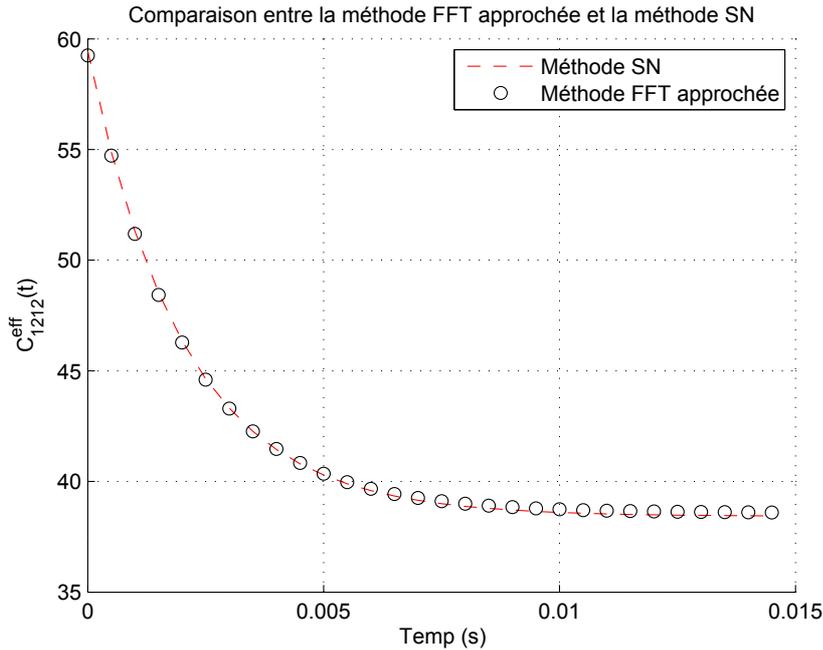


FIGURE 5.3 – Composante $C_{1212}^{eff}(t)$ calculée par la méthode SN et par la méthode FFT approchée

résultats trouvés dans le chapitre 1 montrant que la méthode FFT approchée donne des résultats pratiquement identiques à ceux de la méthode SN dans le cas élastique pour une concentration de l'ordre de 30%.

5.4 Conclusion

Ce dernier chapitre a décrit une solution en série pour obtenir les propriétés effectives de certains composites viscoélastiques périodiques. La méthode utilise l'expansion en série classique de Neumann dans l'espace de Fourier et est basée sur les expressions exactes du tenseur de Green et des facteurs de forme dans l'espace de Fourier. Cette méthode n'a pu être développée que pour le cas de matériaux incompressibles ou pour le cas de matériaux caractérisés par des "modules de Poisson" identiques et indépendants du temps. Toutefois, les résultats permettent de valider la méthode FFT approchée développée au chapitre précédent pour ces cas particuliers, montrant ainsi que la méthode approchée peut également être utilisée pour la prédiction de propriétés effectives de matériaux constitués par une matrice viscoélastique, l'hypothèse adoptée au chapitre 4 étant acceptable pour des concentrations moyennes en inclusions.

Conclusion générale

Ce mémoire a tenté d'apporter une contribution à la prévision de propriétés viscoélastiques effectives de matériaux composites.

Le chapitre 1, de nature en partie introductive et bibliographique, a permis de présenter trois modèles classiques pour l'homogénéisation en élasticité linéaire. Le premier modèle présenté est plutôt adapté pour des matériaux de structure inclusion matrice de répartition aléatoire et pouvant être représentés en première approximation par le schéma AutoCohérent Généralisé caractérisé par un motif composé d'une sphère composite en milieu infini. Les deux autres modèles considèrent une microstructure périodique et déterminent les propriétés élastiques en utilisant la transformée de Fourier spatiale des champs locaux. Les calculs sont réalisés sous forme approchée ou en effectuant le calcul de la solution sous forme de série de Neumann qui converge vers la solution exacte lorsque le nombre de vecteurs d'ondes est infini. Il est important de noter que les deux méthodes peuvent permettre de traiter des géométries très complexes telles que celles issues de mesures de champ par tomographie réalisées sur échantillons réels. Ce premier chapitre est l'occasion de comparer la solution approchée et la solution exacte sur un exemple et de montrer que la solution approchée présente un bon niveau d'approximation pour des concentrations faibles à moyennes.

Le chapitre 2, uniquement de nature introductive, présente les notions de base nécessaires à la compréhension du mémoire dans le domaine des matériaux viscoélastiques non vieillissants et de l'utilisation de la transformée de Laplace-Carson.

Le chapitre 3 présente un développement nouveau du schéma AutoCohérent Généralisé. Le schéma Autocohérent Généralisé est reformulé de façon à faire apparaître une expression de l'équation permettant de déterminer le module effectif de cisaillement dont les termes sont des polynômes en s , variable de Laplace. La solution dans l'espace de Laplace-Carson se présente sous forme irrationnelle et la transformée de Laplace inverse se présente sous la forme de termes discrets ("spectre discret") qui correspondent aux pôles de la solution et d'une intégrale continue correspondant aux points singuliers provenant de la racine ("spectre continu"). Bien qu'une telle inversion puisse être effectuée numériquement, cette procédure reste délicate à manipuler. Pour contourner cette difficulté, la solution approchée qui a été présentée dans ce mémoire utilise une approximation de la racine carrée apparaissant dans l'équation du second degré sous forme polynomiale, conduisant ainsi à une expression de la solution sous forme rationnelle. Les résultats présentés correspondant à de nombreux cas de matrices viscoélastiques contenant des inclusions élastiques sont étonnamment bons. D'un point de vue mathématique, ces résultats montrent que la contribution correspondant au spectre continu apparaissant dans

la solution exacte n'est pas toujours nécessaire pour obtenir le comportement effectif. Une dernière application du schéma AutoCohérent Généralisé porte sur l'utilisation de ce schéma dans le cas où les inclusions et la matrice sont séparées par une interface imparfaite de type "souple". La reformulation précitée des équations du schéma Autocohérent Généralisé permet d'explicitier simplement la fonction de transfert de la zone interfaciale.

Le chapitre 4 a permis de mettre en oeuvre la méthode FFT approchée dans le cas d'une microstructure tridimensionnelle périodique et de matériaux constitués de matrices viscoélastiques de différents types. La solution dans l'espace de Laplace Carson étant obtenue sous forme de fraction rationnelle, aucune approximation n'est faite au cours du calcul de la transformée de Laplace inverse. Par ailleurs, l'expression de la fonction de relaxation se présente sous une forme simple. Par contre, il reste une interrogation sur la validité des résultats obtenus, qui a été levée partiellement au chapitre 5.

Le chapitre 5 a permis de calculer les propriétés élastiques de matériaux viscoélastiques périodiques à l'aide de la solution sous forme de série de Neumann. La solution n'a pu être mise en oeuvre que pour des matériaux à coefficients de Poisson constants dans le temps et identiques dans les deux phases, incluant le cas de matrice et inclusion incompressibles. La solution se présente sous la forme de série comprenant des coefficients dépendant uniquement de la microstructure et des fractions rationnelles simples de la variable de Laplace, qu'il est possible d'inverser analytiquement. La méthode a pu être mise en oeuvre dans le cas d'un matériau composite à fibres. Dans ce cas, la comparaison avec la solution approchée développée au chapitre 4 a permis de valider cette dernière sur un cas particulier.

Le travail réalisé dans ce mémoire présente des perspectives intéressantes. Sur le plan pratique, le schéma Autocohérent Généralisé simplifié permet de disposer d'expressions simples du comportement effectif, faciles à utiliser pour des applications concrètes. Les méthodes d'homogénéisation de structures utilisant la transformée des champs locaux présentent un large domaine d'application puisqu'elles peuvent permettre de déterminer les propriétés effectives de matériaux dont la microstructure est déterminée expérimentalement. La méthode FFT approchée permet de traiter le cas de microstructures quelconques et peut donc s'utiliser directement sur des structures réelles. Par contre, la méthode exacte n'a été développée que pour des cas particuliers de matériaux composites viscoélastiques. De nouveaux développements seraient nécessaires pour traiter de composites viscoélastiques quelconques.

Bibliographie

- [1] AHN, J., KANG, S., AND KWON, Y. A flexible inverse Laplace transform algorithm and its application. *Computing* 71, 2 (2003), 115–131.
- [2] BALENDRAN, B., AND NEMAT-NASSER, S. Bounds on elastic moduli of composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 43, 11 (1995), 1825 – 1853.
- [3] BENVENISTE, Y. A new approach to the application of Mori-Tanaka’s theory in composite materials. *Mechanics of Materials* 6, 2 (1987), 147–157.
- [4] BEURTHEY, S., AND ZAOUI, A. Structural morphology and relaxation spectra of viscoelastic heterogeneous materials. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 19, 1 (2000), 1 – 16.
- [5] BONNET, G. Effective properties of elastic periodic composite media with fibers. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 55, 5 (2007), 881 – 899.
- [6] BORNERT, M., BRETHEAU, T., AND GILORMINI, P. Homogénéisation en mécanique des matériaux 1 : Matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques. *Paris : Hermes Science Publications* (2001).
- [7] BORNERT, M., BRETHEAU, T., AND GILORMINI, P. Homogénéisation en mécanique des matériaux 2 : Comportements non linéaires et problèmes ouverts. *Paris : Hermes Science Publications* (2000).
- [8] BREUER, S., AND ONAT, E. On the determination of free energy in linear viscoelastic solids. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)* 15, 2 (1964), 184–191.
- [9] BRINSON, L., AND LIN, W. Comparison of micromechanics methods for effective properties of multiphase viscoelastic composites. *Composite Structures* 41, 3-4 (1998), 353 – 367.
- [10] BRISARD, S., AND DORMIEUX, L. FFT-based methods for the mechanics of composites : A general variational framework. *Computational Materials Science* 49, 3 (2010), 663 – 671.
- [11] BUDIANSKY, B. On the elastic moduli of some heterogeneous materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 13, 4 (1965), 223 – 227.
- [12] CHENG, L., XIA, X., SCRIVEN, L., AND GERBERICH, W. Spherical-tip indentation of viscoelastic material. *Mechanics of materials* 37, 1 (2005), 213–226.
- [13] CHRISTENSEN, R. *Theory of viscoelasticity*. Dover Publ., 2003.
- [14] CHRISTENSEN, R. M. Viscoelastic properties of heterogeneous media. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 17, 1 (1969), 23 – 41.

- [15] CHRISTENSEN, R. M. A critical evaluation for a class of micro-mechanics models. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 38, 3 (1990), 379 – 404.
- [16] CHRISTENSEN, R. M., AND LO, K. H. Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 27, 4 (1979), 315 – 330.
- [17] CHUNG, P., TAMMA, K., AND NAMBURU, R. A micro/macro homogenization approach for viscoelastic creep analysis with dissipative correctors for heterogeneous woven-fabric layered media. *Composites science and technology* 60, 12-13 (2000), 2233–2253.
- [18] COHEN, A. *Numerical methods for Laplace transform inversion*. Springer Verlag, 2007.
- [19] COLEMAN, B., AND NOLL, W. Foundations of linear viscoelasticity. *Reviews of Modern Physics* 33, 2 (1961), 239.
- [20] CRUZ, C., DIANI, J., AND RÉGNIER, G. Micromechanical modelling of the viscoelastic behaviour of an amorphous poly(ethylene)terephthalate (PET) reinforced by spherical glass beads. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing* 40, 6-7 (2009), 695 – 701.
- [21] DEBOTTON, G., AND TEVET-DEREE, L. The response of a fiber-reinforced composite with a viscoelastic matrix phase. *Journal of composite materials* 38, 14 (2004), 1255.
- [22] DONOLATO, C. Analytical and numerical inversion of the Laplace-Carson transform by a differential method. *Computer Physics Communications* 145, 2 (2002), 298 – 309.
- [23] DURBIN, F. Numerical inversion of Laplace transforms : An efficient improvement to Dubner and Abate’s method. *The Computer Journal* 17, 4 (1974), 371.
- [24] ESHELBY, J. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* 241, 1226 (1957), 376.
- [25] FISHER, F., AND BRINSON, L. Viscoelastic interphases in polymer-matrix composites : theoretical models and finite-element analysis. *Composites Science and technology* 61, 5 (2001), 731–748.
- [26] FRANCFORT, G., AND MURAT, F. Homogenization and optimal bounds in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 94, 4 (1986), 307–334.
- [27] FRIEBEL, C., DOGHRI, I., AND LEGAT, V. General mean-field homogenization schemes for viscoelastic composites containing multiple phases of coated inclusions. *International journal of solids and structures* 43, 9 (2006), 2513–2541.
- [28] HASHIN, Z. On elastic behaviour of fibre reinforced materials of arbitrary transverse phase geometry. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 13, 3 (1965), 119 – 134.
- [29] HASHIN, Z. Composite materials with viscoelastic interphase : creep and relaxation. *Mechanics of Materials* 11, 2 (1991), 135 – 148.

-
- [30] HASHIN, Z., AND SHTRIKMAN, S. On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 10, 4 (1962), 335 – 342.
- [31] HASHIN, Z., AND SHTRIKMAN, S. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 10, 4 (1962), 343 – 352.
- [32] HASHIN, Z., AND SHTRIKMAN, S. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 11, 2 (1963), 127 – 140.
- [33] HERVE, E., AND ZAOUI, A. n-layered inclusion-based micromechanical modelling. *International Journal of Engineering Science* 31, 1 (1993), 1 – 10.
- [34] HILL, R. Elastic properties of reinforced solids : Some theoretical principles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 11, 5 (1963), 357 – 372.
- [35] HILL, R. Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 13, 2 (1965), 89 – 101.
- [36] HILL, R. A self-consistent mechanics of composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 13, 4 (1965), 213 – 222.
- [37] HONIG, G., AND HIRDES, U. A method for the numerical inversion of Laplace transforms. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 10, 1 (1984), 113 – 132.
- [38] HUET, C. Bounds for the overall properties of viscoelastic heterogeneous and composite materials. *Archives of Mechanics* 47, 6 (1995), 1125–1155.
- [39] IDIART, M., MOULINEC, H., CASTAÑEDA, P. P., AND SUQUET, P. Macroscopic behavior and field fluctuations in viscoplastic composites : Second-order estimates versus full-field simulations. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 54, 5 (2006), 1029 – 1063.
- [40] IWAKUMA, T., AND NEMAT-NASSER, S. Composites with periodic microstructure. *Computers & Structures* 16, 1-4 (1983), 13 – 19.
- [41] KANTOR, Y., AND BERGMAN, D. J. Improved rigorous bounds on the effective elastic moduli of a composite material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 32, 1 (1984), 41 – 62.
- [42] LAHELLEC, N., AND SUQUET, P. Effective behavior of linear viscoelastic composites : A time-integration approach. *International Journal of Solids and Structures* 44, 2 (2007), 507 – 529.
- [43] LE, Q., MEFTAH, F., HE, Q., AND LE PAPE, Y. Creep and relaxation functions of a heterogeneous viscoelastic porous medium using the Mori-Tanaka homogenization scheme and a discrete microscopic retardation spectrum. *Mechanics of Time-Dependent Materials* 11, 3 (2007), 309–331.
- [44] LEE, E. Stress analysis for linear viscoelastic materials. *Rheologica Acta* 1, 4 (1961), 426–430.

- [45] LEMAITRE, J., CHABOCHE, J., AND GERMAIN, P. *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, Paris, 1985.
- [46] LÉVESQUE, M., GILCHRIST, M., BOULEAU, N., DERRIEN, K., AND BAPTISTE, D. Inversion numérique des transformées de Laplace-Carson rencontrées dans les problèmes d’homogénéisation numerical inversion of the Laplace-Carson transforms in homogenization problems.
- [47] LI, J., AND WENG, G. J. Effect of a viscoelastic interphase on the creep and stress/strain behavior of fiber-reinforced polymer matrix composites. *Composites Part B : Engineering* 27, 6 (1996), 589 – 598. Thick Composites.
- [48] MANDEL, J. *Cours de mécanique des milieux continus*. Gauthier-Villars, 1966.
- [49] MASSON, R., BORNERT, M., SUQUET, P., AND ZAOUI, A. An affine formulation for the prediction of the effective properties of nonlinear composites and polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 48, 6-7 (2000), 1203–1227.
- [50] MASSOUROS, P., AND GENIN, G. Algebraic inversion of the Laplace transform. *Computers & Mathematics with Applications* 50, 1-2 (2005), 179–185.
- [51] MERCIER, S., AND MOLINARI, A. Homogenization of elastic-viscoplastic heterogeneous materials : Self-consistent and Mori-Tanaka schemes. *International Journal of Plasticity* 25, 6 (2009), 1024–1048.
- [52] MICHEL, J., MOULINEC, H., AND SUQUET, P. Effective properties of composite materials with periodic microstructure : a computational approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 172, 1-4 (1999), 109 – 143.
- [53] MICHEL, J., AND SUQUET, P. Computational analysis of nonlinear composite structures using the nonuniform transformation field analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193, 48-51 (2004), 5477 – 5502. Advances in Computational Plasticity.
- [54] MICHEL, J. C., AND SUQUET, P. The constitutive law of nonlinear viscous and porous materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 40, 4 (1992), 783 – 812.
- [55] MONCHIET, V., BONNET, G., AND LAURIAT, G. A FFT-based method to compute the permeability induced by a Stokes slip flow through a porous medium. *Comptes Rendus Mécanique* 337, 4 (2009), 192 – 197.
- [56] MORI, T., AND TANAKA, K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta metallurgica* 21, 5 (1973), 571–574.
- [57] MOULINEC, H., AND SUQUET, P. A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 157, 1-2 (1998), 69 – 94.
- [58] MOULINEC, H., AND SUQUET, P. Comparison of FFT-based methods for computing the response of composites with highly contrasted mechanical properties. *Physica B : Condensed Matter* 338, 1-4 (2003), 58 – 60.
- [59] MURA, T. *Micromechanics of defects in solids*, vol. 3. Publ. Springer, Berlin, 1987.

-
- [60] NEMAT-NASSER, S., AND HORI, M. *Micromechanics : overall properties of heterogeneous materials*. Publ.Elsevier The Netherlands, 1999.
- [61] NEMAT-NASSER, S., IWAKUMA, T., AND ACCORSI, M. Cavity growth and grain boundary sliding in polycrystalline solids. *Mechanics of Materials* 5, 4 (1986), 317 – 329.
- [62] NEMAT-NASSER, S., IWAKUMA, T., AND HEJAZI, M. On composites with periodic structure. *Mechanics of Materials* 1, 3 (1982), 239 – 267.
- [63] NEMAT-NASSER, S., YU, N., AND HORI, M. Bounds and estimates of overall moduli of composites with periodic microstructure. *Mechanics of Materials* 15, 3 (1993), 163 – 181.
- [64] NGUYEN, S. T., DORMIEUX, L., PAPE, Y. L., AND SANAHUJA, J. Crack propagation in viscoelastic structures : Theoretical and numerical analyses. *Computational Materials Science* 50, 1 (2010), 83 – 91.
- [65] NORRIS, A. A differential scheme for the effective moduli of composites. *Mechanics of Materials* 4, 1 (1985), 1 – 16.
- [66] PICHLER, C., LACKNER, R., AND AIGNER, E. Generalized self-consistent scheme for upscaling of viscoelastic properties of highly-filled matrix-inclusion composites - application in the context of multiscale modeling of bituminous mixtures. *Composites Part B : Engineering In Press, Corrected Proof* (2011), 457 – 464,
- [67] QUANG, H. L., AND HE, Q.-C. A one-parameter generalized self-consistent model for isotropic multiphase composites. *International Journal of Solids and Structures* 44, 21 (2007), 6805 – 6825.
- [68] RICAUD, J.-M., AND MASSON, R. Effective properties of linear viscoelastic heterogeneous media : Internal variables formulation and extension to ageing behaviour. *International Journal of Solids and Structures* 46, 7-8 (2009), 1599 – 1606.
- [69] ROUGIER, Y., STOLZ, C., AND ZAOUI, A. Représentation spectrale en viscoélasticité linéaire des matériaux hétérogènes. *Comptes rendus de l’Académie des sciences. Série 2, Mécanique, Physique, Chimie, Sciences de l’univers, Sciences de la Terre* 316, 11 (1993), 1517–1522.
- [70] ROUSSETTE, S., MICHEL, J., AND SUQUET, P. Nonuniform transformation field analysis of elastic-viscoplastic composites. *Composites Science and Technology* 69, 1 (2009), 22 – 27.
- [71] SALENÇON, J. *Viscoélasticité pour le calcul des structures*. Editions Ecole Polytechnique, 2009.
- [72] SELIVANOV, M. F., AND CHERNOIVAN, Y. A. A combined approach of the Laplace transform and Padé approximation solving viscoelasticity problems. *International Journal of Solids and Structures* 44, 1 (2007), 66 – 76.
- [73] SPIEGEL, M. *Laplace transforms*. McGraw-Hill, 1992.
- [74] TRIAS, D., COSTA, J., MAYUGO, J., AND HURTADO, J. Random models versus periodic models for fibre reinforced composites. *Computational Materials Science* 38, 2 (2006), 316 – 324.

- [75] VAN ISEGHEM, J. Laplace transform inversion and Padé-type approximants. *Applied numerical mathematics* 3, 6 (1987), 529–538.
- [76] WALPOLE, L. On bounds for the overall elastic moduli of inhomogeneous systems–I. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 14, 3 (1966), 151 – 162.
- [77] WALPOLE, L. Elastic behavior of composite materials : theoretical foundations. *Advances in applied mechanics* 21 (1981), 169–242.
- [78] WANG, Y. M., AND WENG, G. J. The influence of inclusion shape on the overall viscoelastic behavior of composites. *Journal of Applied Mechanics* 59, 3 (1992), 510–518.
- [79] WILLIS, J. Elasticity theory of composites. Tech. rep., DTIC Document, 1980.
- [80] WILLIS, J. R. Bounds and self-consistent estimates for the overall properties of anisotropic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 25, 3 (1977), 185 – 202.
- [81] YI, Y.-M., PARK, S.-H., AND YOUN, S.-K. Asymptotic homogenization of viscoelastic composites with periodic microstructures. *International Journal of Solids and Structures* 35, 17 (1998), 2039 – 2055.
- [82] ZAOUI, A., *Matériaux hétérogènes et composites*. Ecole polytechnique, 1998.
- [83] ZEMAN, J., VONDREJC, J., NOVÁK, J., AND MAREK, I. Accelerating a FFT-based solver for numerical homogenization of periodic media by conjugate gradients. *Journal of Computational Physics* 229, 21 (2010), 8065 – 8071.
- [84] ZI, G., AND BAŽANT, Z. Continuous relaxation spectrum for concrete creep and its incorporation into microplane model M4. *Journal of Engineering Mechanics* 128 (2002), 1331.

Annexe A

Calcul des coefficients de l'équation du second degré

$$\begin{aligned}
 Det &= \mu_{eff}^* \begin{vmatrix} 0 & 3 & T_{11} & T_{12} \\ 0 & -2 & T_{21} & T_{22} \\ 1 & -12\mu_{eff}^* & T_{31} & T_{32} \\ 1 & 8\mu_{eff}^* & T_{41} & T_{42} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R_2 & 3R_2 & T_{11} & T_{12} \\ R_2 & -2R_2 & T_{21} & T_{22} \\ 0 & -12\mu_{eff}^* & T_{31} & T_{32} \\ 0 & 8\mu_{eff}^* & T_{41} & T_{42} \end{vmatrix} \\
 &= \mu_{eff}^* D_1 + D_2
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \begin{vmatrix} 0 & 3 & T_{11} & T_{12} \\ 0 & -2 & T_{21} & T_{22} \\ 1 & -12\mu_{eff}^* & T_{31} & T_{32} \\ 1 & 8\mu_{eff}^* & T_{41} & T_{42} \end{vmatrix} \\
 &= \mu_{eff}^* \begin{vmatrix} 0 & 0 & T_{11} & T_{12} \\ 0 & 0 & T_{21} & T_{22} \\ 1 & -12 & T_{31} & T_{32} \\ 1 & 8 & T_{41} & T_{42} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 3 & T_{11} & T_{12} \\ 0 & -2 & T_{21} & T_{22} \\ 1 & 0 & T_{31} & T_{32} \\ 1 & 0 & T_{41} & T_{42} \end{vmatrix} \\
 &= \mu_{eff}^* D_3 + D_4
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned}
 D_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & T_{11} & T_{12} \\ 1 & -2 & T_{21} & T_{22} \\ 0 & -12\mu_{eff}^* & T_{31} & T_{32} \\ 0 & 8\mu_{eff}^* & T_{41} & T_{42} \end{vmatrix} \\
 &= \mu_{eff}^* \begin{vmatrix} R_2 & 0 & T_{11} & T_{12} \\ R_2 & 0 & T_{21} & T_{22} \\ 0 & -12 & T_{31} & T_{32} \\ 0 & 8 & T_{41} & T_{42} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R_2 & 3R_2 & T_{11} & T_{12} \\ R_2 & -2R_2 & T_{21} & T_{22} \\ 0 & 0 & T_{31} & T_{32} \\ 0 & 0 & T_{41} & T_{42} \end{vmatrix} \\
 &= \mu_{eff}^* D_5 + D_6
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

ce qui donne :

$$D_3 \mu_{eff}^{*2} + \mu_{eff}^* (D_4 + D_5) + D_6 = 0 \tag{A.4}$$

Le calcul de D_3, D_4, D_5, D_6 ne fait intervenir que les déterminants de la forme :

$$\Delta_{kl} = \begin{vmatrix} T_{k1} & T_{k2} \\ T_{l1} & T_{l2} \end{vmatrix} \quad (\text{A.5})$$

avec :

$$D_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & T_{11} & T_{12} \\ 1 & 0 & T_{21} & T_{22} \\ 0 & -12 & T_{31} & T_{32} \\ 0 & 8 & T_{41} & T_{42} \end{vmatrix} \quad (\text{A.6})$$

$$= 20\Delta_{12}$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 0 & 3 & T_{11} & T_{12} \\ 0 & -2 & T_{21} & T_{22} \\ 1 & 0 & T_{31} & T_{32} \\ 1 & 0 & T_{41} & T_{42} \end{vmatrix} \quad (\text{A.7})$$

$$= 3\Delta_{24} + 2\Delta_{14} - 3\Delta_{23} - 2\Delta_{13}$$

$$D_5 = \begin{vmatrix} R_2 & 0 & T_{11} & T_{12} \\ R_2 & 0 & T_{21} & T_{22} \\ 0 & -12 & T_{31} & T_{32} \\ 0 & 8 & T_{41} & T_{42} \end{vmatrix} \quad (\text{A.8})$$

$$= 4R_2 (3\Delta_{24} + 2\Delta_{23} - 3\Delta_{14} - 2\Delta_{13})$$

$$D_6 = \begin{vmatrix} R_2 & 3R_2 & T_{11} & T_{12} \\ R_2 & -2R_2 & T_{21} & T_{22} \\ 0 & 0 & T_{31} & T_{32} \\ 0 & 0 & T_{41} & T_{42} \end{vmatrix} \quad (\text{A.9})$$

$$= 5\Delta_{34}$$

d'où :

$$A = 20\Delta_{12} \quad (\text{A.10})$$

$$B = 5 (\Delta_{23} - 2\Delta_{13} + 3\Delta_{24} - 2\Delta_{14}) \quad (\text{A.11})$$

$$C = -5\Delta_{34} \quad (\text{A.12})$$

Annexe B

Inversion de la transformée de Laplace-Carson par la méthode différentielle (Donolato 2002)

La transformée de Laplace-Carson $f^*(p)$ d'une fonction réelle $f(t)$, $t \geq 0$, est simplement sa transformée de Laplace $\tilde{f}(p)$ multipliée par p :

$$f^*(p) = p\tilde{f}(p) = p \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt \quad (\text{B.1})$$

En transformant la variable $u = \frac{1}{p}$, on obtient :

$$g(u) = f^*\left(\frac{1}{u}\right) = \int_0^\infty \frac{t}{u} e^{-\frac{t}{u}} f(t) \frac{dt}{t} \quad (\text{B.2})$$

On note $h(x) = \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}$ ce qui donne :

$$g(u) = \int_0^\infty h\left(\frac{u}{t}\right) f(t) \frac{dt}{t} \quad (\text{B.3})$$

La transformée de Mellin d'une fonction $y(x)$ est définie par :

$$M[y(x)] \equiv Y(s) = \int_0^\infty y(x) x^{s-1} dx \quad (\text{B.4})$$

Pour le cas particulier de la fonction $h(x)$, sa transformée de Mellin est donnée par :

$$M[h(x)] \equiv H(s) = \Gamma(1-s) \quad (\text{B.5})$$

où Γ est la fonction Gamma. La relation (C.3) fait apparaître les fonctions h et f . L'intégrande correspond à l'équivalent, pour la transformée de Mellin, du produit de convolution, pour la transformée de Laplace. D'après Donolato [22] et compte tenu des propriétés de la transformée de Mellin, la relation B.3 entraîne que :

$$G(s) = H(s) F(s) \quad (\text{B.6})$$

donc :

$$F(s) = \frac{G(s)}{\Gamma(1-s)} \quad (\text{B.7})$$

Donolato [22] montre alors que la fonction $\frac{1}{\Gamma(1-s)}$ peut être approchée par :

$$\frac{1}{\Gamma(1-s)} \cong (1-s) \left(1 - \frac{s}{2}\right) \dots \left(1 - \frac{s}{n}\right) (n+1)^s \quad (\text{B.8})$$

et montre alors que la transformée de Mellin peut s'inverser et que l'approximation $f_n(t)$ de la fonction f obtenue à partir de l'approximation à l'ordre n de la fonctions Γ apportée par le produit (C.8) est donnée par :

$$f_n(t) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{du^n} [u^n \cdot g(u)] \quad (\text{B.9})$$

avec :

$$u = \frac{t}{n+1} \quad (\text{B.10})$$

Annexe C

Décomposition dans la base de Walpole

On introduit les notations de la base de Walpole [77] pour les tenseurs d'ordre quatre présentant une symétrie de type isotrope transverse. Cette base permet notamment d'effectuer les opérations de produit doublement contracté et d'inversion de ces tenseurs sans grande difficulté.

Les éléments de la base de Walpole sont définis par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{E}_1(\underline{\xi}) = \frac{1}{2} \mathbf{k}^\perp \otimes \mathbf{k}^\perp \\ \mathbb{E}_2(\underline{\xi}) = \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} \\ \mathbb{E}_3(\underline{\xi}) = \mathbf{k}^\perp \overline{\otimes} \mathbf{k}^\perp - \mathbb{E}_1 \\ \mathbb{E}_4(\underline{\xi}) = \mathbf{k}^\perp \overline{\otimes} \mathbf{k} + \mathbf{k} \overline{\otimes} \mathbf{k}^\perp \\ \mathbb{E}_5(\underline{\xi}) = \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}^\perp, \quad \mathbb{E}_6(\underline{\xi}) = \mathbf{k}^\perp \otimes \mathbf{k} \end{array} \right. \quad (\text{C.1})$$

où \mathbf{k} et \mathbf{k}^\perp sont définis par :

$$\mathbf{k} = \frac{1}{|\underline{\xi}|^2} \underline{\xi} \otimes \underline{\xi}, \quad \mathbf{k}^\perp = \mathbf{i} - \mathbf{k} \quad (\text{C.2})$$

avec la condition $\underline{\xi} \neq 0$.

Le produit doublement contracté de deux éléments de la base de Walpole est donné dans la table ci-dessous :

	$\mathbb{E}_1(\underline{\xi})$	$\mathbb{E}_2(\underline{\xi})$	$\mathbb{E}_3(\underline{\xi})$	$\mathbb{E}_4(\underline{\xi})$	$\mathbb{E}_5(\underline{\xi})$	$\mathbb{E}_6(\underline{\xi})$
$\mathbb{E}_1(\underline{\xi})$	$\mathbb{E}_1(\underline{\xi})$	0	0	0	0	$\mathbb{E}_6(\underline{\xi})$
$\mathbb{E}_2(\underline{\xi})$	0	$\mathbb{E}_2(\underline{\xi})$	0	0	$\mathbb{E}_5(\underline{\xi})$	0
$\mathbb{E}_3(\underline{\xi})$	0	0	\mathbb{E}_3	0	0	0
$\mathbb{E}_4(\underline{\xi})$	0	0	0	$\mathbb{E}_4(\underline{\xi})$	0	0
$\mathbb{E}_5(\underline{\xi})$	$\mathbb{E}_5(\underline{\xi})$	0	0	0	0	$2\mathbb{E}_2(\underline{\xi})$
$\mathbb{E}_6(\underline{\xi})$	0	$\mathbb{E}_6(\underline{\xi})$	0	0	$2\mathbb{E}_1(\underline{\xi})$	0

Tout tenseur d'ordre 4 isotrope transverse, peut être représenté dans la base de Walpole :

$$\mathbb{A} = a_1 \mathbb{E}_1(\underline{\xi}) + a_2 \mathbb{E}_2(\underline{\xi}) + a_3 \mathbb{E}_3(\underline{\xi}) + a_4 \mathbb{E}_4(\underline{\xi}) + a_5 \mathbb{E}_5(\underline{\xi}) + a_6 \mathbb{E}_6(\underline{\xi}) \quad (\text{C.3})$$

\mathbb{A} est symétrique si $a_5 = a_6$. Considérons un second tenseur d'ordre quatre, \mathbb{B} et notons par b_1, \dots, b_6 ses composantes dans la base de Walpole. Le produit doublement contracté de \mathbb{A} par \mathbb{B} s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbb{A} : \mathbb{B} = & (a_1 b_1 + 2a_6 b_5) \mathbb{E}_1(\underline{\xi}) + (a_2 b_2 + 2a_5 b_6) \mathbb{E}_2(\underline{\xi}) + a_3 b_3 \mathbb{E}_3(\underline{\xi}) + a_4 b_4 \mathbb{E}_4(\underline{\xi}) \\ & + (a_2 b_5 + a_5 b_1) \mathbb{E}_5(\underline{\xi}) + (a_1 b_6 + a_6 b_2) \mathbb{E}_6(\underline{\xi}) \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

L'inverse de \mathbb{A} est :

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{a_2}{\Delta} \mathbb{E}_1(\underline{\xi}) + \frac{a_1}{\Delta} \mathbb{E}_2(\underline{\xi}) + \frac{1}{a_3} \mathbb{E}_3(\underline{\xi}) + \frac{1}{a_4} \mathbb{E}_4(\underline{\xi}) - \frac{a_5}{\Delta} \mathbb{E}_5(\underline{\xi}) - \frac{a_6}{\Delta} \mathbb{E}_6(\underline{\xi}) \quad (\text{C.5})$$

avec $\Delta = a_1 a_2 - 2a_5 a_6$. Cette relation induit évidemment des conditions d'inversibilité du tenseur considéré.

La décomposition sur les $\mathbb{E}_n(\underline{\xi})$ de l'identité d'ordre quatre, \mathbb{I} , et des tenseurs isotropes $\mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J}$ et $\mathbb{J} = \frac{1}{3} \mathbf{i} \otimes \mathbf{i}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbb{I} &= \mathbb{E}_1(\underline{\xi}) + \mathbb{E}_2(\underline{\xi}) + \mathbb{E}_3(\underline{\xi}) + \mathbb{E}_4(\underline{\xi}) \\ \mathbb{K} &= \frac{1}{3} (\mathbb{E}_1(\underline{\xi}) + 2\mathbb{E}_2(\underline{\xi})) + \mathbb{E}_3(\underline{\xi}) + \mathbb{E}_4(\underline{\xi}) - \frac{1}{3} (\mathbb{E}_5(\underline{\xi}) + \mathbb{E}_6(\underline{\xi})) \\ \mathbb{J} &= \frac{1}{3} (2\mathbb{E}_1(\underline{\xi}) + \mathbb{E}_2(\underline{\xi})) + \frac{1}{3} (\mathbb{E}_5(\underline{\xi}) + \mathbb{E}_6(\underline{\xi})) \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Les tenseur de Green $\mathbf{\Gamma}^0(\underline{\xi})$ et $\mathbf{\Delta}^0(\underline{\xi})$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}^0(\underline{\xi}) &= \frac{1}{\lambda_0 + 2\mu_0} \mathbb{E}_2(\underline{\xi}) + \frac{1}{2\mu_0} \mathbb{E}_4(\underline{\xi}) \\ \mathbf{\Delta}^0(\underline{\xi}) &= \frac{2\mu_0(3\lambda_0 + 2\mu_0)}{\lambda_0 + 2\mu_0} \mathbb{E}_1(\underline{\xi}) + 2\mu_0 \mathbb{E}_3(\underline{\xi}) \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Pour tout tenseur $\mathbb{C}^0 = 3\lambda_0 \mathbb{J} + 2\mu_0 \mathbb{I}$ (et $\mathbb{S}^0 = (\mathbb{C}^0)^{-1}$), on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}^0(\underline{\xi}) : \mathbb{C}^0 &= \mathbb{P}(\underline{\xi}) + \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + 2\mu_0} \mathbb{E}_5(\underline{\xi}) \\ \mathbf{\Delta}^0(\underline{\xi}) : \mathbb{S}^0 &= \mathbb{Q}(\underline{\xi}) - \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + 2\mu_0} \mathbb{E}_6(\underline{\xi}) \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{I} - \mathbf{\Gamma}^0 : \mathbb{C}^0 &= \mathbb{Q}(\underline{\xi}) - \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + 2\mu_0} \mathbb{E}_5 \\ \mathbb{I} - \mathbf{\Delta}^0 : \mathbb{S}^0 &= \mathbb{P}(\underline{\xi}) + \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + 2\mu_0} \mathbb{E}_6 \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Pour tout champ $\mathbf{a}(\underline{\xi})$ vérifiant la propriété $\forall \underline{\xi} \neq 0 : \mathbb{Q}(\underline{\xi}) : \mathbf{a}(\underline{\xi}) = 0$, on a $\forall \underline{\xi} : \mathbb{E}_n(\underline{\xi}) : \mathbf{a}(\underline{\xi}) = 0$ pour $n = 1, 3, 5$. En conséquence :

$$\forall \underline{\xi} \neq 0 : \mathbf{\Gamma}^0(\underline{\xi}) : \mathbb{C}^0 : \mathbf{a}(\underline{\xi}) = \mathbf{a}(\underline{\xi}) \quad (\text{C.10})$$

Pour tout champ $\mathbf{a}(\underline{\xi})$ vérifiant la propriété $\forall \underline{\xi} \neq 0 : \mathbb{P}(\underline{\xi}) : \mathbf{a}(\underline{\xi}) = 0$, on a $\forall \underline{\xi} : \mathbb{E}_n(\underline{\xi}) : \mathbf{a}(\underline{\xi}) = 0$ pour $n = 2, 4, 6$. En conséquence :

$$\forall \underline{\xi} \neq 0 : \mathbf{\Delta}^0(\underline{\xi}) : \mathbb{S}^0 : \mathbf{a}(\underline{\xi}) = \mathbf{a}(\underline{\xi}) \quad (\text{C.11})$$

Annexe D

Décomposition des tenseurs d'élasticité et de viscoélasticité

D.1 Comportement élastique

Dans le cas d'un matériau hétérogène dont chaque phase a un comportement élastique isotrope, défini par les modules de cisaillement μ et d'incompressibilité κ . Alors, les tenseurs de raideur \mathbb{C} et de souplesse \mathbb{S} sont déterminés par Zaoui (1998) [82] :

$$\begin{cases} \mathbb{C} = 2\mu\mathbb{K} + 3\kappa\mathbb{J} \\ \mathbb{S} = \frac{1}{2\mu}\mathbb{K} + \frac{1}{3\kappa}\mathbb{J} \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

où les tenseurs d'ordre quatre \mathbb{K} et \mathbb{J} sont des parties déviatorique et sphérique, respectivement et définis par :

$$\begin{cases} \mathbb{J} = \frac{1}{3}\mathbf{i} \otimes \mathbf{i} \\ \mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J} \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

L'intérêt de l'emploi des tenseurs unités du quatrième ordre \mathbb{K} et \mathbb{J} est justifié par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \mathbb{I} : \mathbb{I} = \mathbb{I} & \mathbb{K} : \mathbb{K} = \mathbb{K} & \mathbb{J} : \mathbb{J} = \mathbb{J} \\ \mathbb{K} : \mathbb{J} = 0 & \mathbb{I} : \mathbf{i} = \mathbb{J} : \mathbf{i} = \mathbf{i} & \mathbb{K} : \mathbf{i} = 0 \\ \mathbb{J} : \mathbb{K} = 0 & \mathbb{K} : \boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^d & \mathbb{J} : \boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{3}tr(\boldsymbol{\epsilon})\mathbf{i} \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

où le tenseur $\boldsymbol{\epsilon}^d$ est le déviateur d'un tenseur symétrique du second ordre $\boldsymbol{\epsilon}$

D.2 Comportement viscoélastique

D.2.1 Modèle de Kelvin-Voigt

Le comportement viscoélastique de Kelvin-Voigt est donné par :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\eta} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (\text{D.4})$$

où $\boldsymbol{\eta}$ est le tenseur d'ordre quatre, défini par :

$$\boldsymbol{\eta} = 3\eta_\kappa \mathbb{J} + 2\eta_\mu \mathbb{K} \quad (\text{D.5})$$

Dans l'espace de Laplace-Carson :

$$\boldsymbol{\sigma}^* = (\mathbb{C} + \boldsymbol{\eta}s) : \boldsymbol{\epsilon}^* \quad (\text{D.6})$$

ce qui donne :

$$\boldsymbol{\sigma}^* = [3(\kappa + \eta_\kappa s) \mathbb{J} + 2(\mu + \eta_\mu s) \mathbb{K}] : \boldsymbol{\epsilon}^* \quad (\text{D.7})$$

ou bien :

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbb{R}^* : \boldsymbol{\epsilon}^* \quad (\text{D.8})$$

avec :

$$\mathbb{R}^* = 3R_\kappa^* \mathbb{J} + 2R_\mu^* \mathbb{K} \quad (\text{D.9})$$

et

$$\begin{cases} R_\kappa^* = \kappa + \eta_\kappa s \\ R_\mu^* = \mu + \eta_\mu s \end{cases} \quad (\text{D.10})$$

où η_κ, η_μ sont des termes de viscosité en compression et en cisaillement, respectivement.

D.2.2 Modèle de Maxwell

Le comportement viscoélastique de Maxwell est donné par :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbb{C}^{-1} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\eta}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{D.11})$$

Dans l'espace de Laplace-Carson :

$$\boldsymbol{\epsilon}^* = \left(\mathbb{C}^{-1} + \frac{1}{s} \boldsymbol{\eta}^{-1} \right) : \boldsymbol{\sigma}^* \quad (\text{D.12})$$

ce qui donne :

$$\boldsymbol{\epsilon}^* = \left[\left(\frac{1}{3\kappa} + \frac{1}{3\eta_\kappa s} \right) \mathbb{J} + \left(\frac{1}{2\mu} + \frac{1}{2\eta_\mu s} \right) \mathbb{K} \right] : \boldsymbol{\sigma}^* \quad (\text{D.13})$$

ou bien :

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbb{R}^* : \boldsymbol{\epsilon}^* \quad (\text{D.14})$$

avec :

$$\begin{cases} R_\kappa^* = \frac{\kappa\eta_\kappa s}{\kappa + \eta_\kappa s} \\ R_\mu^* = \frac{\mu\eta_\mu s}{\mu + \eta_\mu s} \end{cases} \quad (\text{D.15})$$

Annexe E

Application du Schéma ACG pour le modèle de Maxwell

Dans cette partie, le comportement viscoélastique de la matrice sera modélisé par le modèle de Maxwell et supposé isotrope. Les coefficients relatifs à la compression isotrope $\kappa(s)$ et au cisaillement $\mu(s)$ sont donnés dans ce cas dans l'espace de Laplace-Carson par :

$$\begin{cases} \kappa(s) = \frac{K\eta_K s}{K + \eta_K s} \\ \mu(s) = \frac{G\eta_G s}{G + \eta_G s} \end{cases} \quad (\text{E.1})$$

Les propriétés mécaniques des constituants utilisées pour ce nouvel exemple sont données dans le tableau E.1.

TABLE E.1 – Propriétés mécaniques du composite de deux phases pour le modèle de Maxwell.

Phase	Inclusion	Matrice
Fraction volumique (%)	37	63
Module d'incompressibilité κ (GPa)	100	15
Module de cisaillement μ (GPa)	20	2
Viscosité en compression η_K (GPa.jour)	0	24
Viscosité en cisaillement η_G (GPa.jour)	0	18

Les résultats correspondants sont reportés en figures E.1 ; E.2 ; E.3 ; E.4. La figure E.1 montre la comparaison entre les modules de cisaillement obtenus dans l'espace de Laplace-Carson pour la solution exacte et pour la solution approchée et la figure E.2 montre l'écart entre les deux solutions. Ces figures montrent que la solution approchée permet de retrouver la solution dans l'espace de Laplace-Carson avec une erreur inférieure à $1.2.10^{-2}$. Les figures E.3 et E.4 montrent à nouveau un écart entre la solution approchée et les transformées inverses obtenues par la méthode différentielle, montrant que l'écart entre les deux méthodes est dû principalement au défaut de convergence de la méthode différentielle.

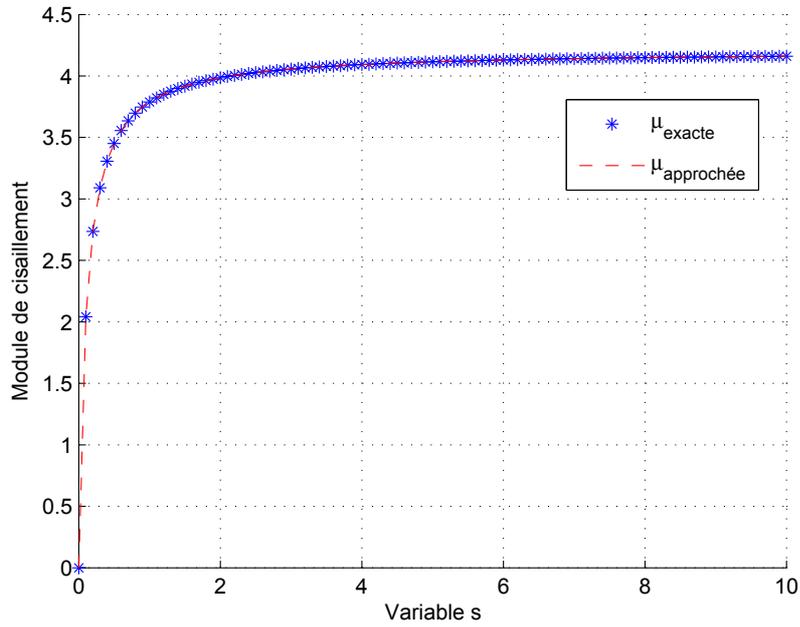


FIGURE E.1 – Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée dans l'espace de Laplace-Carson pour le modèle où la matrice est viscoélastique de Maxwell et contient une inclusion élastique.

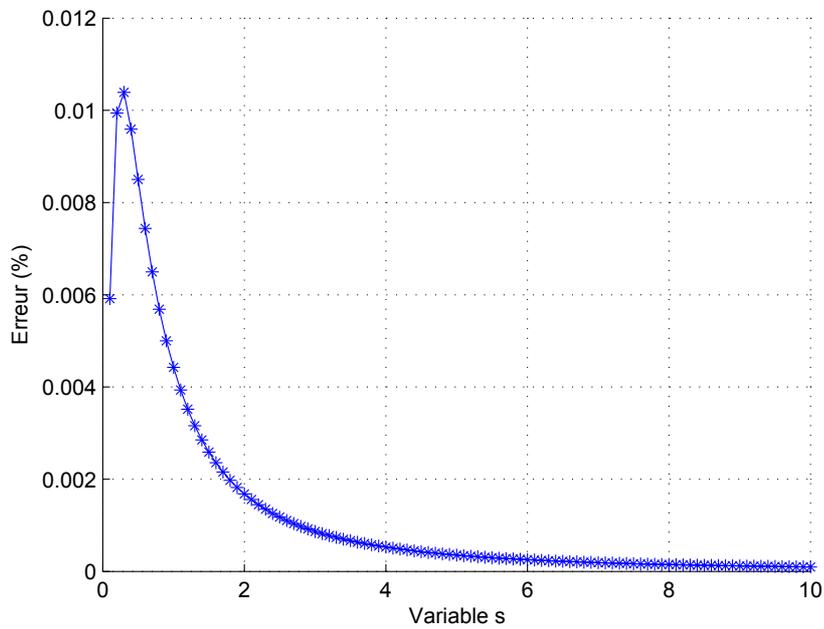


FIGURE E.2 – Evaluation de l'erreur apportée par la méthode approchée dans l'espace de Laplace-Carson pour le modèle où la matrice est viscoélastique de Maxwell et contient une inclusion élastique.

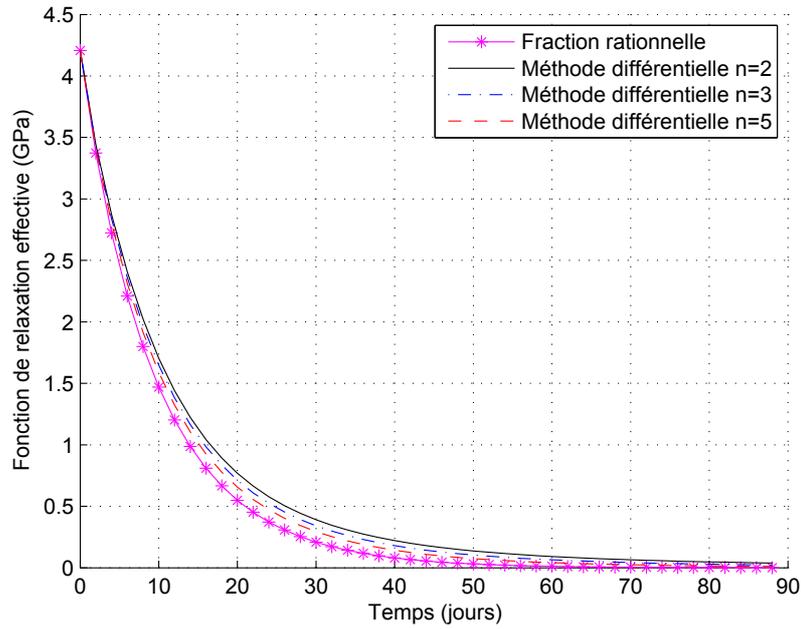


FIGURE E.3 – Comparaison des fonctions de relaxation obtenues par la méthode différentielle et par la méthode approchée pour le cas où la matrice est viscoélastique de Maxwell et contient une inclusion élastique.

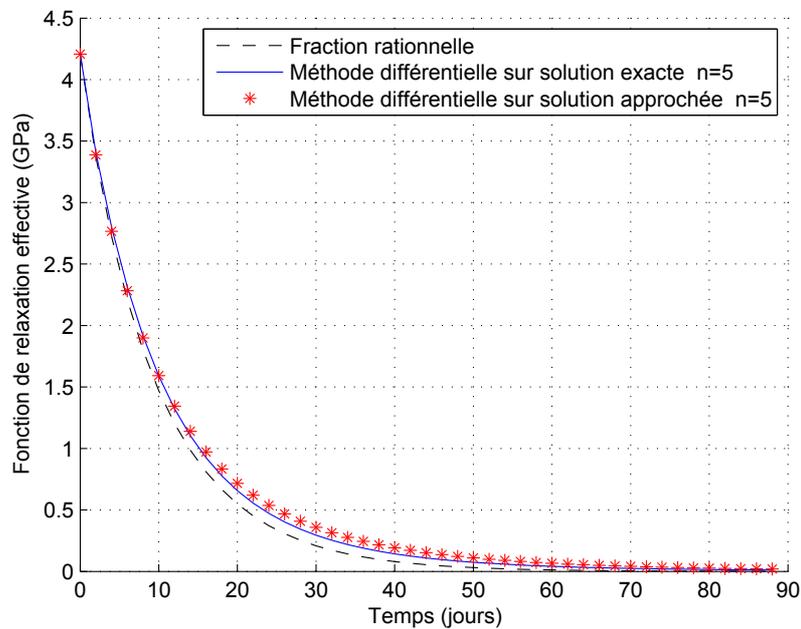


FIGURE E.4 – Fonction de relaxation effective obtenue par la méthode différentielle sur la solution exacte et sur la solution approchée pour le modèle où la matrice est viscoélastique de Maxwell et contient une inclusion élastique.

Annexe F

Application du Schéma ACG pour le modèle de Zener

Dans ce dernier exemple numérique, on utilise le modèle rhéologique de Zener pour modéliser le comportement viscoélastique d'un composite caractérisé par une matrice viscoélastique contenant une inclusion élastique. Les deux coefficients en compression et en cisaillement dans l'espace de Laplace-Carson sont donnés par :

$$\begin{cases} \kappa(s) = \frac{K_1 + \tau_{K_2}(K_1 + K_2)s}{1 + \tau_{K_2}s} \\ \mu(s) = \frac{G_1 + \tau_{G_2}(G_1 + G_2)s}{1 + \tau_{G_2}s} \end{cases} \quad (\text{F.1})$$

où τ_{K_2} et τ_{G_2} sont les temps de relaxation en compression et en cisaillement, respectivement, et sont donnés par :

$$\tau_\pi = \frac{\eta_\pi}{\pi} \quad \text{avec} \quad \pi = K_2, G_2 \quad (\text{F.2})$$

Les propriétés mécaniques de chaque phase se trouvent dans la table (F.1).

TABLE F.1 – Propriétés mécaniques du composite pour le modèle de Zener.

Phase	Inclusion	Matrice	
		Ressort 1	Ressort 2
Fraction volumique (%)	37	63	
Module d'incompressibilité κ (GPa)	70	80	90
Module de cisaillement μ (GPa)	10	20	25
Viscosité en compression η_K (GPa.jour)	0	25	
Viscosité en cisaillement η_G (GPa.jour)	0	17	

Les résultats sont reportés dans les figures F.1 ; F.2 ; F.3 et F.5. La figure F.1 montre les solutions obtenues dans l'espace de Laplace-Carson et la figure F.1 montre l'écart observé

entre la solution approchée et la solution exacte dans l'espace de Laplace-Carson, qui est plus faible que dans le cas similaire pour la matrice de type Kelvin-Voigt. On obtient de façon similaire la fonction de relaxation en figure F.3 et la fonction de fluage en figure F.5. Un écart entre la solution approchée et la solution obtenue par la méthode différentielle est à nouveau observé.

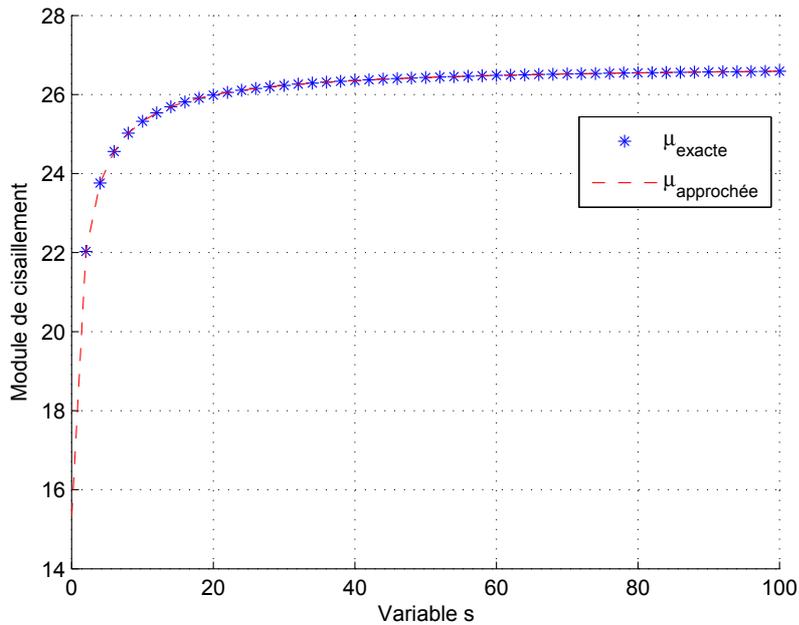


FIGURE F.1 – Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée dans l'espace de Laplace-Carson pour le modèle où la matrice est viscoélastique de Zener et contient une inclusion élastique.

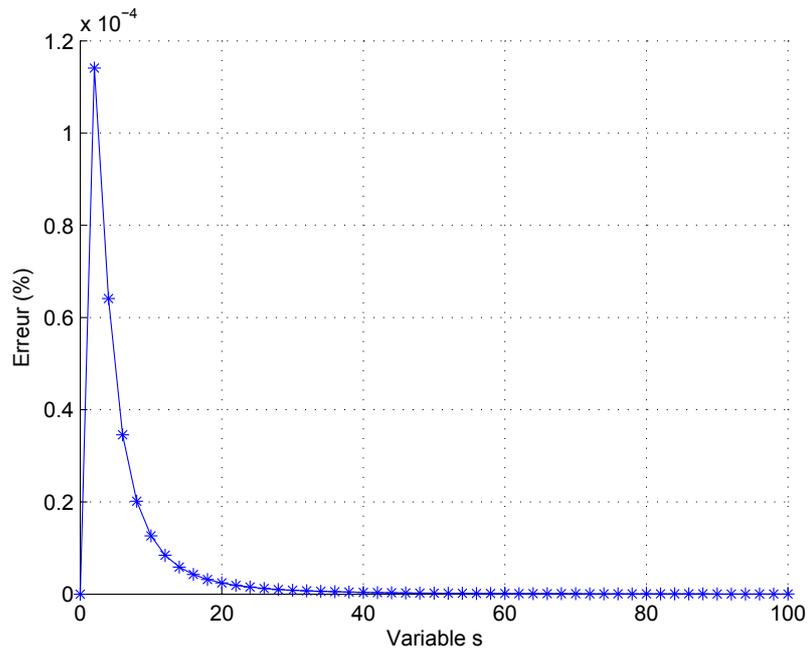


FIGURE F.2 – Evaluation de l'erreur apportée par la méthode approchée dans l'espace de Laplace-Carson pour le modèle où la matrice est viscoélastique de Zener et contient une inclusion élastique.

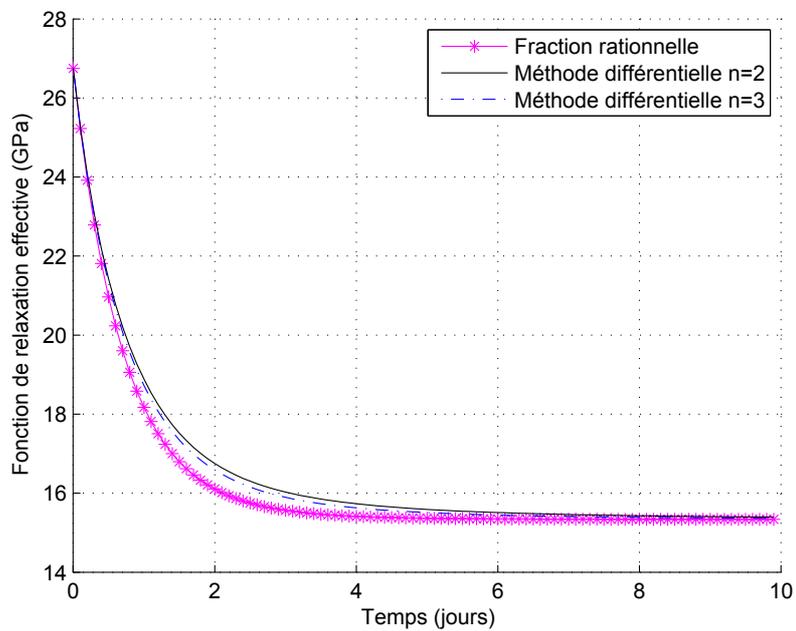


FIGURE F.3 – Comparaison des fonctions de relaxations obtenues pour le modèle où la matrice est viscoélastique de Zener et contient une inclusion élastique.

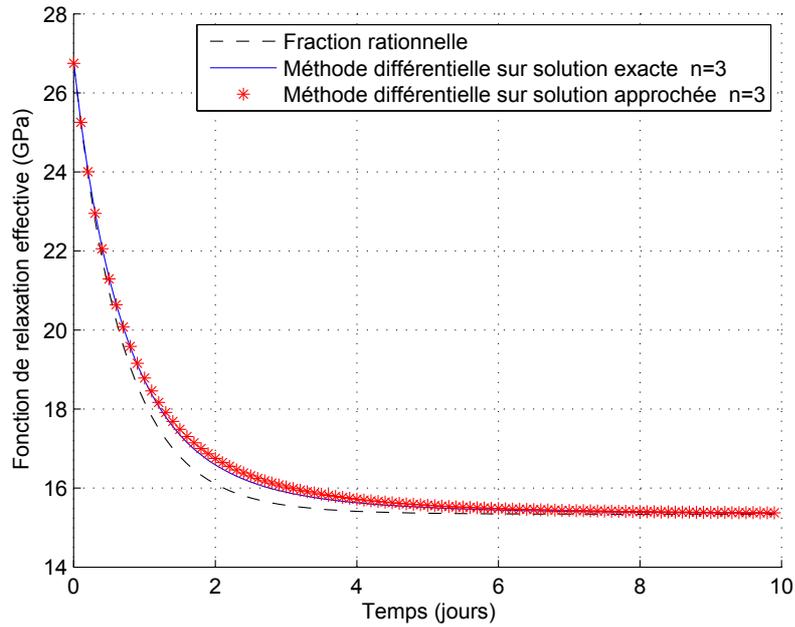


FIGURE F.4 – Fonction de relaxation effective obtenue par la méthode différentielle sur la solution exacte et sur la solution approchée pour le modèle où la matrice est viscoélastique de Zener et contient une inclusion élastique.

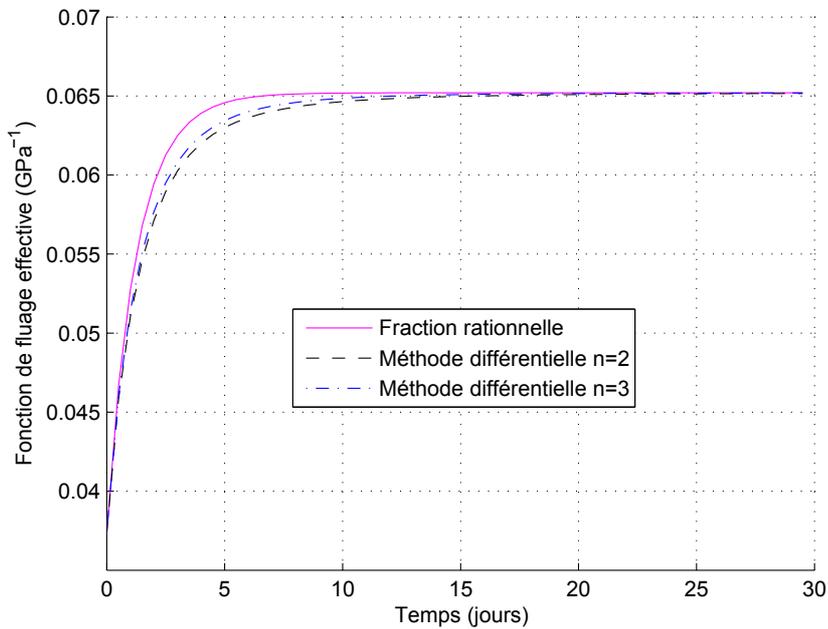


FIGURE F.5 – Fonction de fluage effective pour le modèle où la matrice est viscoélastique de Zener et contient une inclusion élastique.

Résumé : Ce mémoire porte sur la mise en place de techniques d'homogénéisation pour la prévision du comportement de matériaux hétérogènes viscoélastiques. Les matériaux composites étudiés sont constitués d'une matrice renforcée par des inclusions distribuées de façon aléatoire ou périodique. Les différentes techniques d'homogénéisation mises en place utilisent la formulation élastique équivalente dans l'espace de Laplace-Carson.

Pour les matériaux viscoélastiques renforcés par des inclusions élastiques aléatoires, le Schéma Autocohérent Généralisé (ACG) est reformulé, l'équation pour la détermination du module de cisaillement faisant apparaître des coefficients fonctions de la variable de Laplace-Carson sous forme polynomiale. La solution est ensuite approchée par une fraction rationnelle découlant directement de ces coefficients polynomiaux. La solution est étendue au cas d'inclusion composite comportant des interfaces imparfaites

Pour les matériaux de microstructure périodique, deux méthodes reposant sur la transformée de Fourier spatiale sont utilisées. La première repose sur une solution approchée de l'équation intégrale caractérisant le milieu viscoélastique hétérogène. Cette méthode permet d'obtenir systématiquement une solution sous forme de fraction rationnelle dans l'espace de Laplace-Carson. Cette solution prend explicitement en compte la distribution des hétérogénéités dans la cellule périodique. La seconde méthode, utilisable seulement pour certains types de composites viscoélastiques, en particulier les matériaux comportant des phases incompressibles, repose sur l'utilisation de la solution semi-analytique provenant de la série de Neumann associée à l'équation intégrale du milieu hétérogène.

Mots clés : Micromécanique, Composite, Viscoélasticité, Homogénéisation, Transformée de Laplace-Carson, Transformée de Fourier, Schéma Autocohérent Généralisé.

Abstract : This thesis focuses on the prediction of the effective properties of heterogeneous viscoelastic materials. The composite materials under study contain randomly or periodically distributed inclusions. The solution uses the classical equivalent elastic formulation in Laplace-Carson space.

For viscoelastic materials reinforced by randomly distributed elastic inclusions, the Generalized Self-Consistent Scheme is reformulated, leading to an expression for the shear modulus which contains polynomial coefficients. Then, the solution of the second order equation is approximated by a simple rational fraction which is a function of the Laplace-Carson variable. The solution is extended to account for imperfect interfaces between different materials.

For viscoelastic composites containing periodically distributed inclusions, two methods are proposed, both resting on spatial Fourier transform. The first one uses a semi-analytical approximation based on a simplified solution of the integral equation for heterogeneous materials. The approximate solution thus obtained is always in the form of a rational fraction which is a function of the Laplace-Carson variable. The solution includes a function containing information on the distribution of the heterogeneities. A study of the type of materials for which this simplified solution can be used is presented. The second method uses the classical solution of the integral equation resting on the associated Neumann series expansion. Such a solution is obtained for some specific materials, including incompressible materials.

Keywords : Micromechanics, Composite Materials, Viscoelasticity, Homogenization, Carson Laplace transform, Fourier transform, Generalized self-consistent scheme, Effective properties.