



**HAL**  
open science

**Approches experimentales et theoriques de la  
dynamique du noyau terrestre : tourbillon geostrophique  
de gallium liquide dans un champ magnetique,  
anisotropie et rotation de la graine, chemins d'inversion**

Daniel Brito

► **To cite this version:**

Daniel Brito. Approches experimentales et theoriques de la dynamique du noyau terrestre : tourbillon geostrophique de gallium liquide dans un champ magnetique, anisotropie et rotation de la graine, chemins d'inversion. Géophysique [physics.geo-ph]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 1998. Français. NNT : . tel-00683525

**HAL Id: tel-00683525**

**<https://theses.hal.science/tel-00683525>**

Submitted on 29 Mar 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Thèse

Présentée pour l'obtention du  
Doctorat en Sciences de l'Université de Paris VII, Denis Diderot

Spécialité : Géophysique Interne

## Approches expérimentales et théoriques de la dynamique du noyau terrestre: tourbillon géostrophique de gallium liquide dans un champ magnétique, anisotropie et rotation de la graine, chemins d'inversion

par

**Daniel BRITO**

le 6 Janvier 1998

devant un jury composé de :

D. FEARN	University of Glasgow	Examineur
G. HULOT	Institut de Physique du Globe de Paris	Rapporteur
C. JAUPART	Institut de Physique du Globe de Paris	Président
H.-C. NATAF	Université Joseph Fourier (Grenoble)	Directeur de thèse
P. OLSON	Université Johns Hopkins (Baltimore)	Directeur de thèse
J. SOMMERIA	Ecole Normale Supérieure de Lyon	Rapporteur

Thèse préparée au  
Département Terre-Atmosphère-Océan, Ecole Normale Supérieure, Paris  
&  
Department of Earth and Planetary Sciences, Johns Hopkins University, Baltimore

# Remerciements

Je tiens à remercier Philippe Cardin et Henri-Claude Nataf pour m'avoir fait confiance dès mon stage de DEA. C'est grâce à eux que j'ai continué en thèse dans un domaine qui était alors nouveau pour moi, la Géophysique. Merci pour m'avoir remarquablement encadré pendant toutes ces années. La compétence scientifique et les qualités humaines de Philippe Cardin m'ont impressionné; je le remercie vivement pour le temps qu'il m'a consacré et pour l'énergie qu'il a su me donner. La disponibilité, la motivation permanente, la grande culture en Sciences de la Terre d'Henri-Claude Nataf furent pour beaucoup dans le plaisir que j'ai eu à effectuer cette thèse.

Je remercie David Fearn, Gauthier Hulot, Claude Jaupart et Joël Sommeria pour avoir accepté de faire partie du jury de cette thèse.

Je remercie sincèrement Claude Froidevaux pour les efforts qu'il a fourni pour m'obtenir une bourse de thèse. Il était le personnage clef de l'équipe de Géophysique à l'Ecole Normale Supérieure où j'ai effectué les deux premières années de ma thèse. Merci à tous les membres de cette équipe où l'ambiance chaleureuse et animée fut si agréable. Merci en particulier à Marie-Pierre, Laurent, Bruno, Fawzia, Valérie, Marie-Noëlle, Misha, Andrea, Ying, Yannick, Christophe, Luce, Dominique. Je remercie spécialement Denise et Françoise. Enfin, les expériences réalisées à Paris n'auraient pas vu le jour sans la compétence de Guy Marolleau et l'aide de la société Rhône-Poulenc qui nous a prêté le gallium: merci à eux.

J'ai par la suite effectué mon service national en tant que coopérant à l'Université Johns Hopkins aux Etats-Unis; je remercie vivement Peter Olson pour m'avoir trouvé un financement et dirigé pendant la seconde partie de ma thèse. Je lui suis très reconnaissant de m'avoir encouragé à travailler sur plusieurs aspects de la dynamique du noyau. Merci à John Ferry pour m'avoir accueilli au sein du département "Earth and Planetary Sciences". Je me suis adapté tant bien que mal au mode de vie américain (plutôt bien pour finir...) et je le dois, entre autres, aux personnes que j'ai côtoyées à Baltimore: merci à Jon avec qui j'ai beaucoup apprécié de travailler, Jim, Boz, Dave, Andrea, Sarah, Alessandra, David, Soni, Anitha, Gillian, Wesley, Jean.

Enfin, merci à Michel Campillo de m'avoir accueilli au sein du Laboratoire de Géophysique et Tectonophysique de Grenoble pour les derniers mois de ma thèse. J'ai pu la rédiger dans les meilleures conditions (face au massif de la Chartreuse) au sein de l'équipe "géodynamo". Je tiens à remercier tout particulièrement Bénédicte, la famille Cardin au complet, Jérôme et Marie, Judith pour m'avoir soutenu et épaulé lors de

cette dernière ligne droite.

J'exprime ici toute ma reconnaissance à Daniela qui m'a beaucoup aidé dans les derniers mois à Baltimore et qui a si aimablement accepté de relire le manuscrit.

Je remercie et salue toutes les personnes que j'ai pu rencontrer au détour d'un congrès ou d'une école d'été et qui sont devenues des amis (les Man-Houches, par exemple, pour ne citer qu'eux). Merci enfin à tous mes autres amis qui m'ont directement ou indirectement aidés pendant ces longues années de thèse.

Merci Sophie.

Je dédie ce travail à ma famille et tout spécialement à mes parents dont j'ai toujours admiré le courage.

# Résumé

# Résumé

J'ai étudié durant ma thèse quatre problèmes physiques et magnétohydrodynamiques intervenant dans le noyau terrestre. Chaque étude fait l'objet d'une partie indépendante de ce mémoire. Les deux premières parties s'appuient sur des expériences en laboratoire et les deux dernières reposent sur des calculs théoriques et numériques.

La première partie traite de l'étude expérimentale d'un tourbillon vertical de métal liquide (gallium) soumis à un champ magnétique transverse. Nous avons étudié l'effet simultané des forces de Coriolis (dues à la rotation) et des forces de Lorentz (dues au champ magnétique) sur une structure dynamique analogue à celles qui pourraient être présentes dans le noyau liquide (colonnes convectives géostrophiques). Les mesures expérimentales (vitesse du fluide, champ magnétique induit, différences de potentiels électriques, température) sont interprétées à l'aide d'un modèle rendant compte de la dynamique du tourbillon et de la distribution des courants électriques en son sein. Les forces de Coriolis rigidifient l'écoulement selon l'axe de rotation alors que l'effet principal du champ magnétique est d'une part, de freiner le fluide, et d'autre part, d'agrandir la partie centrale du tourbillon; cet élargissement concorde avec la présence de colonnes géostrophiques de grand diamètre dans le noyau liquide. Les mesures expérimentales de dissipation ohmique (effet Joule) ont permis de montrer quant à elles que le champ magnétique toroïdal de grande échelle dans le noyau liquide ne peut excéder 25 mT si la convection s'y déroule sous la forme de colonnes géostrophiques.

La deuxième partie traite de cristallisation expérimentale de gallium. L'objectif est cette fois de comprendre l'origine de l'anisotropie élastique de la graine terrestre. Nous avons suivi expérimentalement les vitesses de cristallisation et analysé la texture des cristaux de gallium. L'anisotropie élastique mesurée au sein des polycristaux de gallium (méthode ultrasonore) montre que l'orientation des axes cristallins n'est pas déterminée par la direction du flux de chaleur, mais plutôt guidée par l'orientation de germes initiaux. Nous avons de plus montré que la texture des cristaux de gallium est indépendante des conditions de solidification tels la vigueur de l'écoulement ou le champ magnétique imposé. Il est conclu que l'anisotropie de la graine pourrait être causée par une orientation préférentielle du réseau cristallin de fer, cette orientation étant déterminée par les germes initiaux présents au centre de la graine.

La troisième partie traite d'un problème de couplage électromagnétique entre le noyau liquide et la graine solide; ce travail est motivé par de récentes études sismologiques s'attachant à mesurer une rotation différentielle de la graine par rapport au manteau terrestre. Nos simulations numériques montrent que le couplage électroma-

gnétique est extrêmement efficace entre la graine et le noyau: le couple synchronise la vitesse de rotation de la graine solide à la vitesse du fluide avoisinant dans le noyau liquide. Dans le cadre de nos hypothèses, une relation est établie entre le champ magnétique toroïdal présent dans le noyau liquide et la superrotation de la graine; cette relation suggère qu'une détermination précise de la rotation différentielle de la graine pourrait donner accès à l'intensité du champ magnétique toroïdal présent dans les profondeurs du noyau.

La quatrième partie traite d'un problème de couplage électromagnétique entre le noyau liquide et le manteau solide; nous avons étudié l'influence d'une couche  $D''$  hétérogène (en conductivité électrique) présente à la base du manteau sur les chemins d'inversion d'un dipôle magnétique. Le couplage électromagnétique hétérogène résulte en une rotation différentielle entre le noyau et le manteau; cette rotation est très lente (à l'échelle de temps des inversions) et ne peut expliquer l'existence éventuelle d'un confinement longitudinal des Pôles Géomagnétiques Virtuels (PGV) pendant les inversions du champ magnétique.

# Abstract



# Abstract

During my thesis I concentrated on four different aspects of physics and magneto-hydrodynamics taking place in the Earth's core. Each study is presented independently in my dissertation. The first two parts are experimental studies and the two last parts theoretical and numerical calculations.

In the first part, we study experimentally a vertical vortex of liquid metal (gallium) subject to a transverse magnetic field. We investigate the simultaneous effect of Coriolis forces (due to rotation) and Lorentz forces (due to magnetic field) on a dynamical structure similar to those possibly present in the liquid outer core (convective geostrophic columns). Experimental measurements (fluid velocity, induced magnetic field, differences in electrical potential, temperature) are interpreted with a model providing a clear picture of the dynamics of the vortex, as well as a description of the electrical currents generated in the vortex. Coriolis forces tends to rigidify the fluid flow along the rotation axis whereas the main effect of the magnetic field is firstly, to severely slow down the fluid and, secondly, to increase the central part of the vortex. This increase supports the presence of large diameter convective columns in the liquid core. Experimental measurements of ohmic dissipation (Joule heating) demonstrated that large scale toroidal magnetic field in the Earth's core can not exceed 25 mT if the convective flow takes place under geostrophic columns.

In the second part, we present an experiment where liquid gallium is crystallized. The goal is to understand the origin of the inner core elastic anisotropy. Experimentally, we observed the crystallization velocities and analyzed the gallium crystal texture. Elastic anisotropy measured within gallium polycrystals (ultrasonic method) showed that crystals axis orientations are not determined by heat flux direction but seemingly by initial germs orientation. Moreover, we showed that gallium texture is independent of solidification conditions such as the vigor of the fluid flow or the imposed magnetic field. We concluded that the inner core anisotropy may be due to a preferred lattice orientation, the orientation being determined by initial germs present in the center of the core.

In the third part, we investigate electromagnetic coupling between the liquid outer core and the solid inner core; this study is motivated by recent seismological studies which have endeavoured to observe a differential rotation between the inner core and the mantle. Our numerical simulations show that electromagnetic coupling is extremely efficient between the solid and the liquid: the torque tightly couples the inner core rotation to the fluid motion. Under our assumptions, a relation is established between the outer core toroidal magnetic field and the inner core superrotation. This

relationship suggests that a precise determination of the inner core differential rotation might provide a good way to estimate the Earth's core toroidal magnetic field intensity.

In the fourth part we investigate electromagnetic coupling between the liquid core and the solid mantle; we study the influence of an heterogeneous  $D''$ -layer (in electrical conductivity) at the base of the mantle on dipole magnetic field pole paths during reversals. Heterogeneous electromagnetic coupling results in a differential rotation between the core and the mantle; the rotation is nevertheless very slow (at the time scale of reversals) and can not explain longitudinal confinements of Virtual Geomagnetic Poles (VGP) during reversals of the Earth's magnetic field.

# Table des matières

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>1</b>
<b>Résumé</b>	<b>3</b>
<b>Abstract</b>	<b>7</b>
<b>Table des matières</b>	<b>11</b>
<b>Introduction</b>	<b>19</b>
0.1 Structure et composition du noyau terrestre . . . . .	21
0.1.1 Structure du noyau . . . . .	21
0.1.2 Composition du noyau . . . . .	23
0.1.3 La convection dans le noyau liquide . . . . .	24
0.2 Le champ magnétique terrestre . . . . .	26
0.2.1 Description spatiale du champ magnétique terrestre actuel . . . . .	26
0.2.2 Description temporelle du champ magnétique . . . . .	27
0.2.3 La géodynamo . . . . .	29
0.3 Plan du mémoire . . . . .	31
<b>I Étude expérimentale d'un tourbillon de gallium</b>	<b>33</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>35</b>
<b>2 Présentation détaillée du dispositif expérimental</b>	<b>37</b>
2.1 Présentation globale de l'expérience . . . . .	37
2.2 Le gallium . . . . .	37
2.2.1 Pourquoi choisir le gallium? . . . . .	37
2.2.2 Ses propriétés et conditions d'utilisation en laboratoire . . . . .	38
2.3 Le tourbillon de gallium . . . . .	39
2.3.1 Les composantes mécaniques . . . . .	39
2.3.2 Les instruments de mesures . . . . .	40

<b>3</b>	<b>Étude dynamique du tourbillon de gallium soumis à un champ magnétique</b>	<b>43</b>
	“Experimental study of a geostrophic vortex of gallium in a transverse magnetic field”, article publié dans <i>Physics of the Earth and Planetary Interiors</i> (1995).	43
3.1	Introduction	45
3.2	Experimental description and methods	46
3.2.1	Liquid gallium	46
3.2.2	Set-up description	47
3.2.3	Description of experimental measurements	47
3.2.4	Chemical treatment of gallium	50
3.3	Equations and dimensionless numbers	50
3.4	Study of a vortex generated by a disk without magnetic field	51
3.4.1	Pressure profiles	51
3.4.2	2-D kinematic model	52
3.4.3	Experimental test of the 2-D kinematic model	53
3.5	Vortex of gallium in a transverse magnetic field	55
3.5.1	Slowing-down of the vortex and increase in diameter	55
3.5.2	Electrical potential and height of the vortex	61
3.5.3	Induced magnetic field	65
3.6	Conclusion	70
	Appendix A: Mathematical derivation of a 2-D kinematic model in a vortex	72
	Appendix B: Model of electrical potential in a geostrophic vortex	73
	Appendix C: Model of induced magnetic field at mid-height of the cylinder	75
3.7	Etudes complémentaires	76
3.7.1	Comparaison entre un tourbillon avec surface libre et avec surface rigide	76
3.7.2	Les courants électriques et le champ magnétique induit au sommet du tourbillon	77
3.7.3	Etude de la bidimensionnalité du tourbillon en fonction du nombre d’Elsasser	79
<b>4</b>	<b>Mesure de la dissipation ohmique dans le tourbillon de gallium</b>	<b>83</b>
	“Experiments on Joule heating and the intensity of the Earth’s magnetic field”, article publié dans <i>Geophysical Journal International</i> (1996).	83
4.1	Introduction	85
4.2	Experimental approach	86
4.2.1	Experimental set-up	86
4.2.2	Measurement of heat production in liquid gallium	88
4.3	Experimental results	89
4.3.1	Joule heating	89
4.3.2	Torque measurements	91
4.3.3	Induced magnetic field	91
4.4	Interpretation of the results	93
4.4.1	Joule heating at low magnetic Reynolds number	95
4.4.2	Joule heating in the experiments	98
4.4.3	Joule heating at high magnetic Reynolds number	98

4.4.4	Ohmic dissipation as a function of the magnetic Reynolds number	99
4.5	Application to Joule heating in the Earth's core . . . . .	101
4.6	Conclusion . . . . .	102
<b>5</b>	<b>La vélocimétrie Doppler utilisée dans le tourbillon</b>	<b>104</b>
5.1	Le nouveau dispositif expérimental . . . . .	104
5.1.1	Le vélocimètre Doppler . . . . .	104
5.1.2	Le nouveau cylindre . . . . .	106
5.2	Mesures ultrasonores de vitesse dans le tourbillon . . . . .	106
5.2.1	Le tourbillon d'eau . . . . .	106
5.2.2	Le tourbillon de gallium . . . . .	107
5.3	Mesures de champ magnétique induit et de dissipation ohmique . . . . .	108
<b>6</b>	<b>Conclusions sur l'étude expérimentale du tourbillon de gallium</b>	<b>113</b>
6.1	Comparaison entre le tourbillon de gallium et l'écoulement dans le noyau liquide terrestre . . . . .	113
6.2	Application des résultats expérimentaux au noyau terrestre . . . . .	115
6.3	Conclusion . . . . .	117
	Appendice: Des précisions sur le dispositif expérimental . . . . .	118
	Remplissage du cylindre sous atmosphère contrôlée d'azote . . . . .	118
	Le pilotage autonome d'une expérience . . . . .	119
<b>II</b>	<b>Cristallisation expérimentale de gallium</b>	<b>125</b>
<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>127</b>
1.1	Anisotropie de la graine terrestre . . . . .	127
1.1.1	Les principes de mesure . . . . .	127
1.1.2	Les études sismologiques . . . . .	127
1.2	Des modèles expliquant l'anisotropie? . . . . .	130
1.3	Cristallisation expérimentale de gallium . . . . .	132
<b>2</b>	<b>Le dispositif expérimental et les mesures d'anisotropie</b>	<b>135</b>
2.1	Le cube en cuivre . . . . .	135
2.2	Le matériel ultrasonore . . . . .	138
2.3	Déterminations des vitesses des ondes de compression $V_P$ dans le cuivre et dans le gallium . . . . .	138
2.3.1	$V_P$ dans le cuivre . . . . .	139
2.3.2	$V_P$ dans le gallium liquide . . . . .	143
2.3.3	$V_P$ dans le gallium solide . . . . .	148
<b>3</b>	<b>Cristallisation de gallium</b>	<b>155</b>
3.1	Cristallisation de gallium avec un gradient de température horizontal . . . . .	155
3.1.1	Cristallisation pure de gallium avec un gradient de température horizontal . . . . .	160
3.1.2	Cristallisation de gallium avec germes et un gradient de tempé- rature horizontal . . . . .	167

3.2	Cristallisation de gallium avec un gradient de température horizontal et un écoulement tourbillonnant . . . . .	169
3.3	Cristallisation de gallium avec un gradient de température horizontal et un champ magnétique . . . . .	170
3.4	Cristallisation de gallium avec un gradient de température vertical . . . . .	170
<b>4</b>	<b>Anisotropie des polycristaux de gallium</b>	<b>175</b>
4.1	Observation des polycristaux de gallium . . . . .	175
4.1.1	Structure cristalline du gallium solide à pression atmosphérique . . . . .	175
4.1.2	Etude des blocs de gallium solide obtenus après cristallisation . . . . .	176
4.2	Analyse des mesures d'anisotropie élastique dans les polycristaux de gallium . . . . .	179
4.2.1	Orientation préférentielle du réseau . . . . .	184
4.2.2	La nucléation . . . . .	189
4.2.3	Des polycristaux isotropes . . . . .	191
4.3	Synthèse . . . . .	191
<b>5</b>	<b>Conclusion et application à la graine terrestre</b>	<b>194</b>

### III Couplage électromagnétique entre le noyau liquide et la graine 197

<b>Introduction</b>	<b>199</b>
<b>1 Superrotation de la graine: un mécanisme</b>	<b>201</b>
“Mechanics of inner core super-rotation”, article publié dans <i>Geophysical Research Letters</i> (1996). . . . .	201
1.1 Introduction . . . . .	203
1.2 Tangent cylinder thermal wind . . . . .	205
1.3 Induction at the ICB . . . . .	206
1.4 Electromagnetic coupling of the inner core to the tangent cylinder fluid . . . . .	207
1.5 Model results . . . . .	207
Acknowledgments . . . . .	208
<b>2 Rotation de la graine et le champ magnétique toroïdal</b>	<b>209</b>
“Anomalous rotation of the inner core and the toroidal magnetic field”, article à paraître dans <i>Journal of Geophysical Research</i> (1998) . . . . .	209
2.1 Introduction . . . . .	211
2.2 Description of the models . . . . .	212
2.3 Governing equations . . . . .	213
2.4 Poloidal magnetic field models . . . . .	215
2.4.1 Current-Carrying dipole magnetic field . . . . .	215
2.4.2 Uniform poloidal field . . . . .	215
2.5 Fluid flow models . . . . .	215
2.5.1 Thermal wind flow (Model 1) . . . . .	216
2.5.2 X-wind flow (Model 2) . . . . .	216
2.5.3 Flow derived from geomagnetic westward drift (Model 3) . . . . .	217
2.6 Numerical techniques . . . . .	217

2.6.1	Thermal wind flow results . . . . .	218
2.6.2	X-wind flow results . . . . .	220
2.6.3	Results for westward drift flow . . . . .	225
2.7	Spin-up of the inner core . . . . .	231
2.8	Discussion . . . . .	234
2.8.1	Physical mechanism . . . . .	234
2.8.2	Model comparisons . . . . .	234
2.8.3	Joule heat production . . . . .	237
2.8.4	Stewartson layer . . . . .	238
2.9	Conclusions . . . . .	238
2.10	Acknowledgements . . . . .	239

## **IV Couplage électromagnétique hétérogène à la frontière Noyau-Manteau 241**

<b>1</b>	<b>Introduction 243</b>
<b>2</b>	<b>Présentation du modèle de couplage électromagnétique 247</b>
2.1	Les hypothèses du modèle . . . . . 247
2.2	Le couple électromagnétique $\Gamma_M$ exercé sur le manteau . . . . . 248
2.3	L'approximation de coquille mince pour la couche $D''$ . . . . . 249
<b>3</b>	<b>Calcul statique du couple sur le manteau dû aux variations temporelles du flux magnétique d'un champ dipolaire à la frontière Noyau-Manteau 251</b>
3.1	Calcul du couple poloïdal $\Gamma_{M \text{ pol}}$ en fonction des coefficients de Gauss . 251
3.1.1	Le couple poloïdal $\Gamma_{M \text{ pol}}$ . . . . . 251
3.1.2	Introduction des coefficients de Gauss . . . . . 254
3.2	Calcul analytique du couple poloïdal $\Gamma_{M \text{ flux}}$ . . . . . 255
3.3	Calcul numérique du couple poloïdal $\Gamma_{M \text{ flux}}$ utilisant les modèles tomographiques . . . . . 257
3.3.1	Structure et conductivité électriques du manteau inférieur . . . . 257
3.3.2	Calcul numérique . . . . . 259
3.4	Conclusion de l'étude statique . . . . . 262
<b>4</b>	<b>Calcul du couple associé au déplacement d'un champ magnétique dipolaire à la frontière Noyau-Manteau 263</b>
4.1	Calcul du couple poloïdal $\Gamma_{M \text{ pol rot}}$ dû à la rotation du champ magnétique à la frontière Noyau-Manteau . . . . . 263
4.2	Calcul du couple toroïdal $\Gamma_{M \text{ tor}}$ dû au cisaillement des lignes de champ à la frontière Noyau-Manteau . . . . . 264
4.3	Le couple électromagnétique $\Gamma_{M \text{ déplacement}}$ . . . . . 265
4.3.1	Calcul du couple électromagnétique pour un déplacement longitudinal du dipôle . . . . . 266
4.3.2	Calcul du couple électromagnétique pour une rotation du dipôle en latitude . . . . . 267



<b>5</b>	<b>Calcul dynamique des chemins d'inversion</b>	<b>271</b>
5.1	Inversion du champ magnétique précédée d'une décroissance de l'intensité du dipôle . . . . .	271
5.2	Inversion du champ magnétique par simple rotation du dipôle . . . . .	274
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>278</b>
	Appendice A: Expressions des coefficients de Gauss pour un champ magnétique dipolaire incliné à la frontière Noyau-Manteau . . . . .	280
	Appendice B: Calcul du champ magnétique toroïdal induit dans la couche D'' par cisaillement des lignes de champ poloïdal . . . . .	280
	<b>Conclusion</b>	<b>283</b>
	<b>Annexe</b>	<b>287</b>
	Propriétés du gallium liquide à 30°C . . . . .	289
	Propriétés du gallium solide . . . . .	289
	<b>Références bibliographiques</b>	<b>291</b>

# Introduction



# Introduction générale au noyau terrestre

L'Age d'Or du Portugal symbolisé par ses navigateurs du XV<sup>e</sup> n'aurait peut-être jamais vu le jour s'il n'existait pas de champ magnétique à la surface de la Terre. C'est en effet grâce à la boussole que ces grands navigateurs ont réussi à s'orienter en mer et à découvrir des nouveaux territoires.

Je me suis intéressé au cours de mon travail de thèse à la région de la Terre où est généré le champ magnétique: le noyau. Je présente dans ce chapitre d'introduction les caractéristiques principales du noyau et du champ magnétique terrestre.

## 0.1 Structure et composition du noyau terrestre

### 0.1.1 Structure du noyau

La figure 0.1 A) représente une coupe transversale de la Terre. Elle se divise en 3 couches principales: la croûte, le manteau, puis au centre, le noyau.

C'est à l'aide de la sismologie que l'on a découvert au début du XX<sup>e</sup> siècle l'existence d'un "noyau" au centre de la Terre possédant des propriétés différentes de celles du manteau. En 1906, Richard Oldham remarquait que les ondes sismiques de cisaillement  $S$  se propageaient lentement dans les profondeurs de la Terre, et, avançait l'hypothèse d'un noyau central. Peu après, en 1914, Beno Gutenberg déterminait avec une précision de 1% le rayon du noyau à l'aide de la réflexion des ondes de compression  $P$  à l'interface Noyau-Manteau. Il démontrait l'existence d'une zone d'ombre du noyau ne permettant pas d'observer d'arrivées d'ondes pour des distances épacentrales entre 105° et 142°. C'est en 1926 que Harold Jeffreys proposa un noyau liquide en se basant sur l'amplitude des marées terrestres et la non-propagation des ondes de cisaillement  $S$  dans le noyau. Il est aujourd'hui communément admis que le noyau est liquide et de rayon 3485 km environ (figure 0.1 B).

En 1936 Inge Lehman observa, en étudiant les ondes  $PKP$  réfractées à l'interface Noyau-Manteau, une triplification de ces ondes suggérant l'existence d'une nouvelle discontinuité majeure au centre de la Terre située à un rayon de  $2/9R_T$ : l'interface Graine-Noyau. Dès 1946, Edward Bullen proposait l'existence d'une graine solide; on eut confirmation de cette hypothèse après l'enregistrement du plus important tremblement de Terre du XX<sup>e</sup> siècle au Chili en 1960. Le rayon de la graine, connu aujourd'hui avec une précision de l'ordre du kilomètre, est de 1220 km (voir figure 0.1 B).

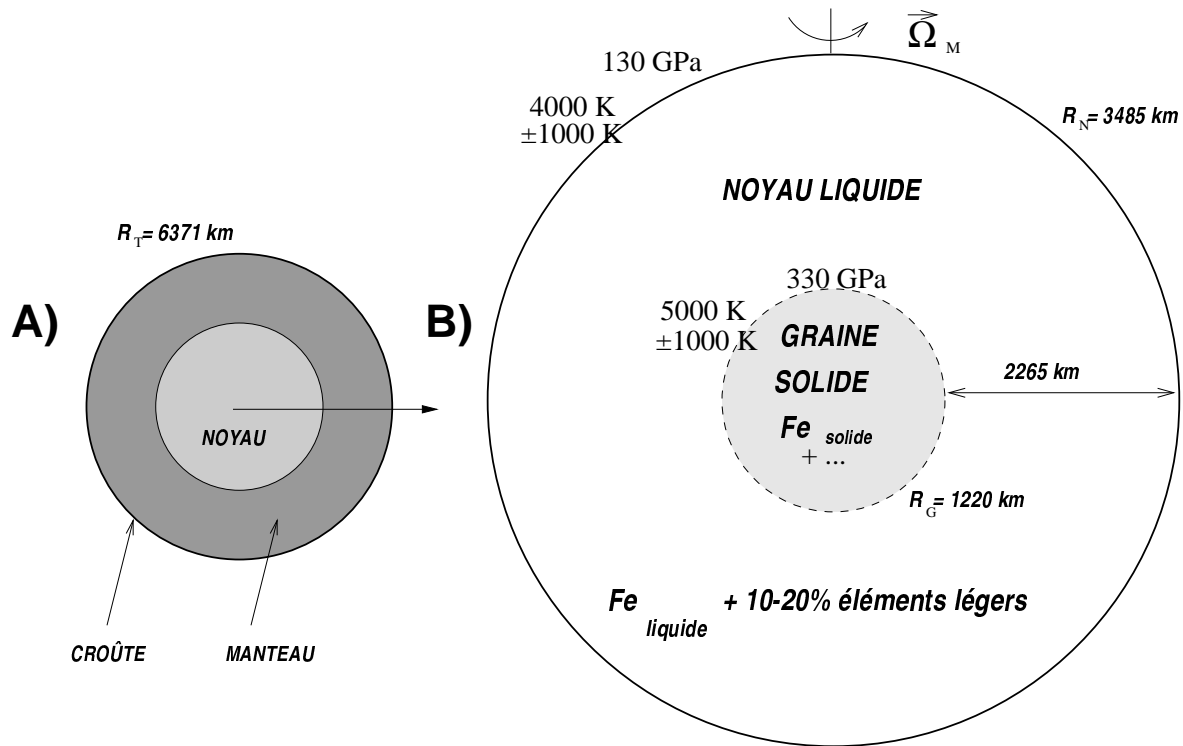


FIG. 0.1 – A) Coupe transversale de la Terre. La Terre se divise en 3 couches principales: la croûte, le manteau et le noyau. B) Propriétés physiques du noyau liquide et de la graine solide.

On possède maintenant des modèles globaux de Terre. Pour les construire on utilise les données sismologiques (temps de parcours des ondes sismiques en fonction de leur distance épacentrale et analyse des modes de vibration propres de la Terre à la suite d'un séisme); on "inverse" ensuite toutes ces données pour obtenir le meilleur modèle de Terre. La figure 0.2 représente le modèle PREM, obtenu en 1981 par Dziewonski & Anderson, donnant la densité, la pression et la gravité en fonction de la profondeur. Ce type de modèle global à symétrie sphérique rend bien compte des propriétés physiques de la Terre au premier ordre. On est cependant en mesure de conduire des études locales plus précises qui rendent compte des hétérogénéités latérales; c'est ainsi que l'on a déterminé une anisotropie de la graine de 3% en terme de vitesse de propagation des ondes  $P$ , ces dernières se propageant plus rapidement selon l'axe Nord-Sud que dans le plan équatorial (voir Partie II). C'est grâce à cette anisotropie élastique que les sismologues prétendent observer une rotation différentielle *prograde* (ou "superrotation") de la graine par rapport au manteau terrestre (Song & Richards, 1996; voir partie III).

Les structures du noyau et de la graine sont relativement bien connues comme on vient de le voir. Une détermination sismologique plus précise de l'anisotropie de la graine ou du saut de densité à l'interface Graine-Noyau est nécessaire cependant pour progresser dans les domaines que nous allons présenter dans les paragraphes suivants, à savoir la composition du noyau et la convection dans le noyau liquide.

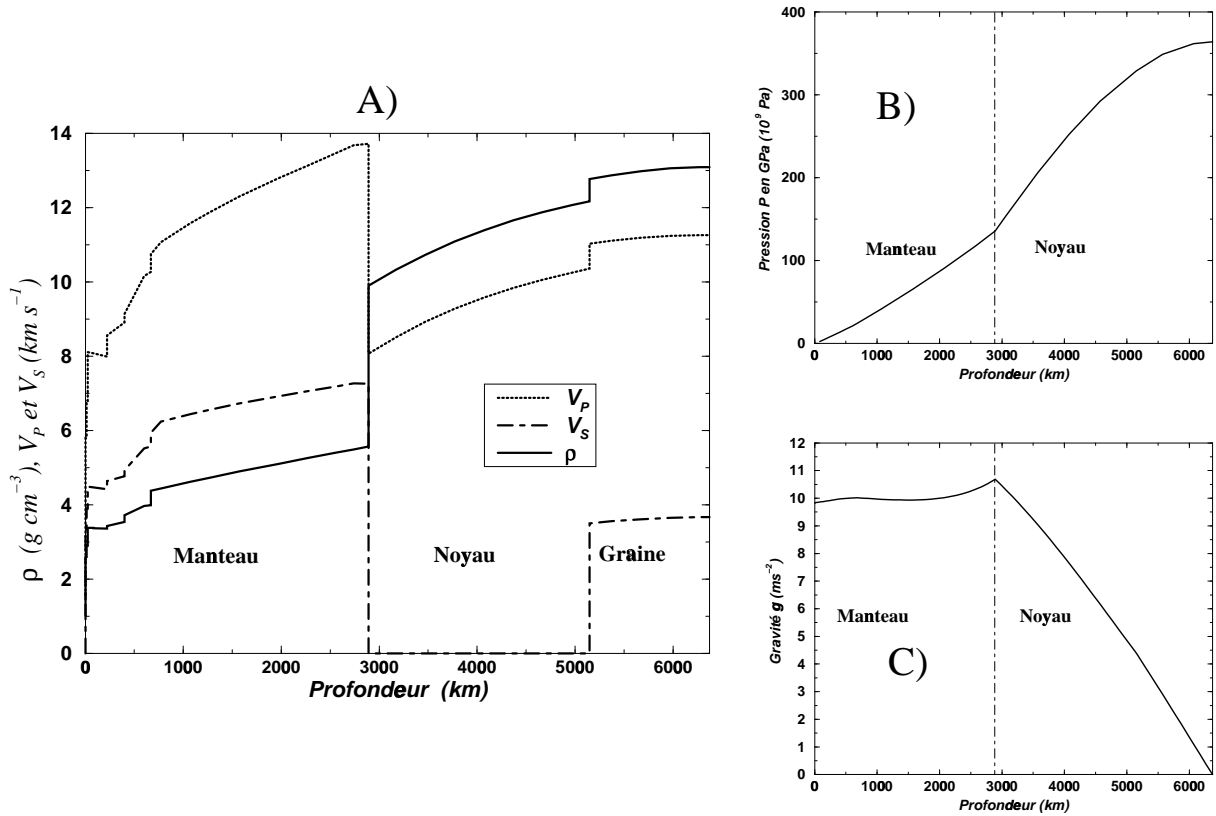


FIG. 0.2 – Modèle global de Terre PREM (Dziewonski & Anderson, 1981). A) Vitesse des ondes de compression  $V_P$ , des ondes de cisaillement  $V_S$  et densité  $\rho$  en fonction de la profondeur. B) Pression en fonction de la profondeur. C) Gravité en fonction de la profondeur.

### 0.1.2 Composition du noyau

Dès 1950, Francis Birch montrait que le noyau liquide de forte densité devait être constitué principalement de fer. Peu après, Jack Jacobs avançait des arguments convaincants selon lesquels la graine était constituée de fer à l'état solide et, le noyau externe de fer à l'état liquide.

Les équations d'état du fer à haute pression ont depuis montré que le noyau liquide contient nécessairement des éléments légers qui abaissent la densité du noyau liquide d'environ 10% par rapport à celle du fer pur (Jacobs, 1987; Poirier, 1994).

On fait appel à des modèles de formation de la Terre pour établir la composition en éléments légers du noyau. L'idée de base pour déterminer la nature de ces éléments est la suivante: on suppose que la Terre est née suite à l'accrétion de météorites. On fait l'hypothèse, dans un premier temps, que toutes les météorites ont la même composition que celles que l'on a pu étudier. L'analyse d'échantillons provenant de la croûte et du manteau terrestre permet dans un second temps de déduire la composition de ces couches supérieures de la Terre. De la comparaison entre la composition d'une météorite

d'une part, et la composition du manteau et de la croûte d'autre part, on peut déduire celle du noyau: c'est le principe (simplifié) des modèles de cosmochimie. Le tableau 0.1.2 donne la composition du noyau obtenue ainsi par Allègre et al. (1995).

Composition du Noyau	
en %	en ppm
Fe = $79.29 \pm 2$	Mn = 5 820
Ni = $4.87 \pm 0.3$	Cr = 7 790
Si = 7.35	Co = 2530
S = $2.30 \pm 0.2$	P = 2 530
O = $4.10 \pm 0.5$	

TAB. 0.1 – *Composition du noyau selon le modèle géochimique de Terre de Allègre et al. (1995).*

Les incertitudes dans ces modèles de composition sont grandes (dépend du modèle de formation de Terre) mais on s'accorde à dire que le pourcentage d'éléments légers dans le noyau liquide se situe entre 10 et 20. La densité de la graine est proche de celle du fer à l'état solide; il est cependant possible qu'un faible pourcentage d'éléments légers soit également présent dans la graine (Jephcoat & Olson, 1987). On pourrait en avoir la certitude dans le futur avec les études minéralogiques haute pression du fer.

La physique des hautes pressions et hautes températures connaît en effet un essor important depuis quelques années avec l'apparition des presses à enclume de diamant: on peut aujourd'hui soumettre un minéral à une pression de l'ordre de 200 GPa (la pression à l'interface Graine-Noyau est de 330 GPa, voir figure 0.2 B) ) et des températures de l'ordre de 2000°C (en chauffant l'échantillon à l'aide d'un laser). On est maintenant en mesure d'étudier le diagramme de phase du fer pur avec une précision de plus en plus importante; on vient ainsi de déterminer une nouvelle transition de phase du fer à une pression de l'ordre de 30 GPa (Andraut et al., 1997). Cette nouvelle phase du fer orthorhombique,  $Fe\beta$ , pourrait être la phase stable aux conditions de pression et de température de la graine et être responsable de l'anisotropie élastique observée dans la graine solide (voir Partie IV).

Si le noyau liquide n'était composé que de fer pur, le diagramme de phase du fer nous donnerait directement la température à l'interface Graine-Noyau aux conditions de pression de la graine. Cependant, la présence d'éléments légers dans le noyau liquide abaisse vraisemblablement la température du solidus. Les diagrammes de phase des alliages de fer sont encore très mal connus et il semble important d'intensifier leur étude si l'on veut mieux contraindre la température à l'interface Graine-Noyau et, de fait, mieux comprendre la convection dans le noyau liquide.

### 0.1.3 La convection dans le noyau liquide

La température au sein du noyau est mal contrainte. On vient de voir que l'on n'a pas accès, pour l'instant, à la température à l'interface Graine-Noyau. La température à l'autre interface, Noyau-Manteau, est encore plus mal connue, en particulier parce que l'on ne connaît pas précisément le flux de chaleur évacué à l'interface Noyau-Manteau

(Labrosse, 1997; voir partie I). On estime cependant le gradient de température entre les deux interfaces du noyau à environ  $1000^\circ\text{K}$  en supposant qu'il est adiabatique (Jacobs, 1987). À l'aide du diagramme de phase du fer pur on en déduit que la température à l'interface Graine-Noyau serait de l'ordre de  $T_{\text{GN}}=5000\pm 1000^\circ\text{K}$  et à l'interface Noyau-Manteau de  $T_{\text{NM}}=4000\pm 1000^\circ\text{K}$ .

On sait que la Terre se refroidit au cours du temps et on pense que c'est ce refroidissement qui est à l'origine des mouvements de convection dans le noyau liquide: en effet, puisque le noyau se refroidit, le liquide du noyau cristallise peu à peu sur la graine. La cristallisation libère de la chaleur latente de fusion et cela réchauffe localement le fluide. Le fluide "chaud" (donc moins dense) se retrouve dans un état dynamiquement instable à l'interface Graine-Noyau et la force d'Archimède le met en mouvement vers la frontière Noyau-Manteau. C'est le principe de la *convection thermique* dans le noyau. Il existe un autre type de convection dans le noyau liquide: puisque la densité de la graine est supérieure à la densité du noyau liquide (voir figure 0.2 A)), on en déduit que la cristallisation du fer s'accompagne d'expulsion d'éléments légers à l'interface Graine-Noyau. Ces éléments légers se retrouvent également instables dynamiquement ce qui génère une *convection compositionnelle* ou *convection solutale*. Le débat existe quant à savoir lequel de ces deux types de convection est dominant dans le noyau mais il se pourrait qu'elles soient d'importance comparable (Cardin & Olson, 1994). La connaissance précise du saut de densité à l'interface Graine-Noyau par l'intermédiaire des études sismologiques (voir paragraphe 0.1.1), combinée à un diagramme de phase de fer pur précis déduit des études minéralogiques, pourrait permettre de quantifier l'importance de la convection compositionnelle par rapport à la convection thermique.

Intéressons-nous maintenant à la forme de l'écoulement que génère la convection dans le noyau liquide. Si on ne prend pas en compte les forces de Lorentz associées au champ magnétique, la force de Coriolis (force d'inertie associée à la rotation de la Terre) est dominante face aux autres forces présentes dans le noyau terrestre. Le théorème de Proudman-Taylor (Greenspan, 1968) montre que dans ce type d'écoulement dominé par la force de Coriolis, la vitesse du fluide ne varie pas selon la direction parallèle à l'axe de rotation; ces mouvements sont dits *géostrophiques*. L'étude théorique de Busse en 1970 (voir aussi Roberts, 1968) et la confirmation expérimentale de Carrigan & Busse (1983), puis de Cardin & Olson (1994) ont en effet montré que la convection thermique dans une sphère en rotation rapide s'organise effectivement en une multitude de tourbillons géostrophiques parallèles à l'axe de rotation. Nous reviendrons en détail sur ces tourbillons géostrophiques dans la partie I: on discutera, en particulier, de l'effet du champ magnétique sur ces tourbillons.

Les conditions aux limites de l'écoulement dans le noyau liquide, aux frontières Graine-Noyau et Noyau-Manteau, sont très mal connues. On sait par l'intermédiaire de la tomographie (Masters et al., 1996) et d'études locales sismologiques (Garnero et al., 1997) que la frontière Noyau-Manteau possède de fortes hétérogénéités latérales, mais on ne connaît pas encore bien l'influence qu'elles pourraient avoir sur la convection dans le noyau (voir partie IV). L'autre frontière est le front d'avancée de solidification de la graine se propageant au cours du temps. On sait que solide et liquide pourraient cohabiter dans une région de type "mushy zone" (Tait & Jaupart, 1992), avec en parti-



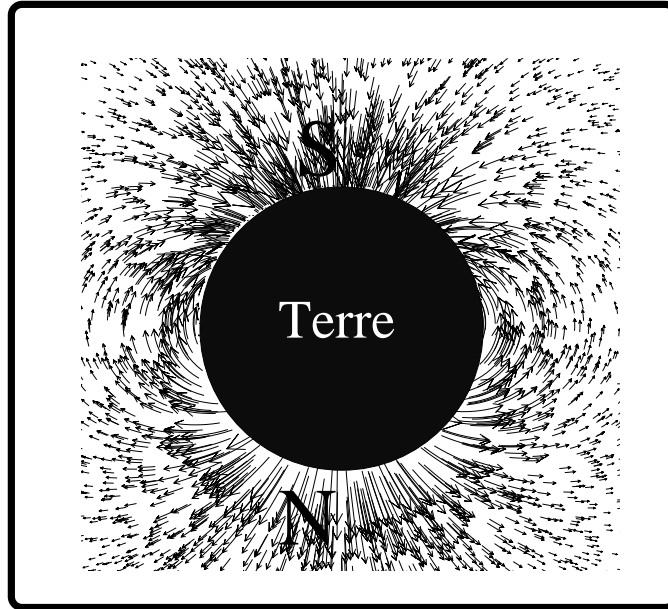


FIG. 0.3 – *Champ magnétique terrestre dipolaire; les flèches représentent les lignes de forces du champ magnétique. Le pôle Nord magnétique (N sur la figure) se trouve aujourd’hui au pôle Sud géographique.*

culier une solidification dendritique de la graine (Loper & Roberts, 1981; voir Partie II). L’impact sur la convection dans le noyau liquide d’une telle région poreuse au sommet de la graine reste à déterminer.

## 0.2 Le champ magnétique terrestre

La Terre est un système dynamique: on s’en rend compte par les éruptions volcaniques ou encore par les tremblements de Terre provoqués, par exemple, par la descente des plaques lithosphériques dans le manteau terrestre. Le noyau liquide s’exprime lui de manière beaucoup plus “discrète”: il génère un champ magnétique par l’intermédiaire des mouvements d’un grand océan de fer liquide, quelques 4000 km sous nos pieds. Nous décrivons dans les prochains paragraphes les grands traits caractéristiques du champ magnétique terrestre à l’échelle des temps historiques et géologiques, et nous terminerons par des remarques d’ordre générale sur l’effet dynamo qui auto-entretient le champ magnétique.

### 0.2.1 Description spatiale du champ magnétique terrestre actuel

Le champ magnétique est principalement dipolaire à la surface de la Terre (figure 0.3). L’axe de symétrie du dipôle est actuellement incliné de  $11^\circ$  par rapport à l’axe de rotation de la Terre. Le pôle Sud magnétique (intersection de l’axe du dipôle avec la surface du globe) se situe aujourd’hui dans le nord du Canada latitude  $79^\circ\text{N}$  et longitude  $288^\circ$ . L’intensité du champ magnétique est de  $70 \mu\text{T}$  aux pôles et  $35 \mu\text{T}$  à

l'équateur.

En supposant que le manteau est isolant (approximation valable au premier ordre), on peut prolonger le champ magnétique à la surface de la Terre jusqu'à la surface du noyau; on obtient ainsi le champ magnétique à la frontière Noyau-Manteau. La figure 0.4 représente le champ magnétique à la surface du noyau développé jusqu'au degré 10 des harmoniques sphériques, obtenu à partir des données IGRF ("International Geomagnetic Reference Field Model") pour l'année 1995. Lorsqu'on calcule le spectre en énergie du champ magnétique à la surface du noyau, on s'aperçoit que le terme dominant est le dipôle et que le reste du spectre est à peu près plat (Langel & Estes, 1982), signifiant que tous les degrés d'harmoniques sphériques contribuent à poids égal à l'énergie du champ magnétique à la frontière Noyau-Manteau.

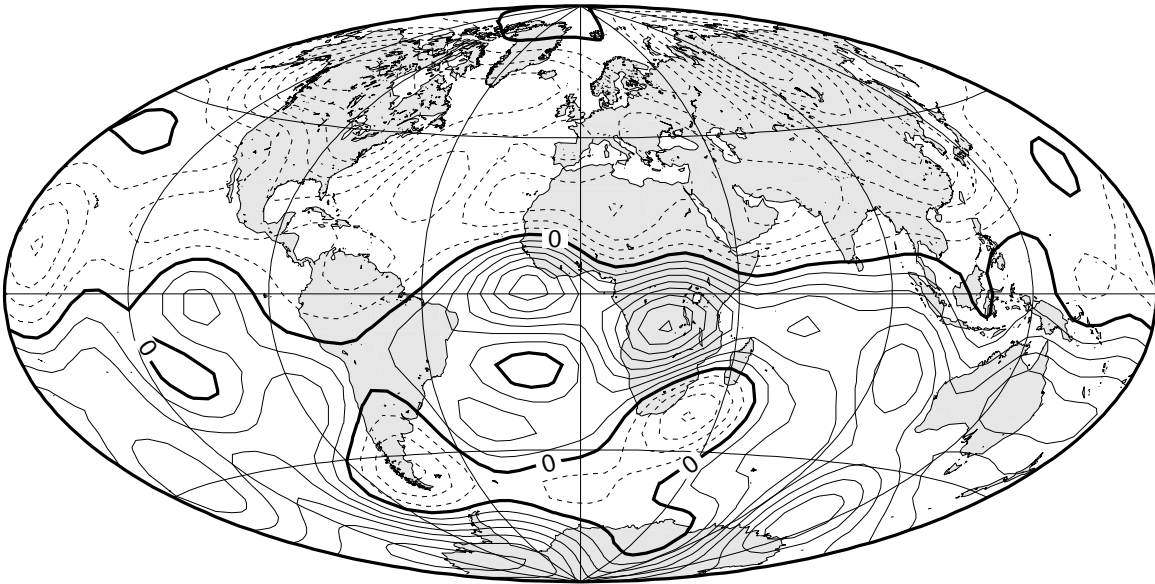


FIG. 0.4 – *Champ magnétique radial à la frontière Noyau-Manteau (les continents jouent le rôle de référence) développé jusqu'au degré 10 des harmoniques sphériques, obtenu à partir des données IGRF de l'année 1995. Les contours continus sont les valeurs positives du champ magnétique radial et les contours en pointillé les valeurs négatives. L'intervalle entre les courbes est de  $100 \mu T$ .*

## 0.2.2 Description temporelle du champ magnétique

### L'échelle historique

On possède des mesures du champ magnétique exploitables depuis le XVI<sup>e</sup> siècle. On mesure, par exemple, la déclinaison du champ magnétique à Paris depuis 1541 (Alexandrescu et al., 1996a). Bloxham & Jackson (1992) ont compilé par ailleurs trois siècles de données historiques pour établir l'évolution du champ magnétique radial à la frontière Noyau-Manteau depuis 1690. Il faut cependant remarquer que les mesures du champ magnétique sont devenues plus précises au cours du XIX<sup>e</sup> siècle, lorsque le nombre d'observatoires s'est multiplié suite à la démonstration par Gauss, en 1835, que le champ magnétique était bien d'origine interne.

Des expéditions marines permettent depuis le début du XX<sup>e</sup> siècle de mesurer le champ magnétique au niveau des océans et de compléter ainsi la couverture des mesures à l'échelle du globe. Enfin, les satellites modernes permettent aujourd'hui de mesurer avec précision le champ magnétique avec à l'échelle planétaire. Le satellite Oersted devrait effectuer de nouvelles mesures au cours de l'année 1998.

On assiste à l'échelle de la *variation séculaire* à une dérive lente de l'ordre du km/an du pôle Sud magnétique autour du pôle Nord géographique (voir figure 0.3). La dérive du pôle s'accompagne d'une décroissance du moment dipolaire; il a ainsi chuté de près de 10% depuis 160 ans. Les termes non-dipolaires varient quant à eux beaucoup plus rapidement, sur des échelles de temps de l'ordre de 200 ans (Hulot & Le Mouél, 1994).

Edmond Halley avait observé en 1700 une dérive vers l'Ouest du champ magnétique mesuré au niveau de l'Atlantique. Il s'avère aujourd'hui, à l'aide des mesures globales, que la dérive vers l'Ouest du champ magnétique est une caractéristique locale du champ magnétique à la surface du noyau.

Les mesures précises du champ magnétique au XX<sup>e</sup> siècle ont permis d'isoler des secousses magnétiques ponctuelles en 1914, 1969, 1979 se manifestant par un changement brusque dans la dérivée seconde du champ magnétique par rapport au temps (Courtillot & Le Mouël, 1984; Alexandrescu et al., 1996b). Ces secousses sont associées à des changements de régime des mouvements du fluide à la surface du noyau (Le Huy, 1995) que l'on ne comprend pas encore.

## L'échelle archéologique et géologique

Il est possible de procéder à des mesures *archéomagnétiques* et *paléomagnétiques* et de remonter ainsi à l'histoire ancienne du champ magnétique terrestre. Pour cela on mesure le champ magnétique dans des roches volcaniques, des roches sédimentaires, ou encore dans des poteries pour les mesures les plus récentes. Le principe d'enregistrement d'un champ magnétique pour les coulées volcaniques (ou poteries) est le suivant: lorsque la température de la lave s'élève au dessus de la température de Curie, elle perd ses propriétés magnétiques; lorsqu'elle se refroidit, elle se magnétise alors dans le champ magnétique ambiant. On sait également que certains sédiments se déposent en s'orientant selon une direction dépendant du champ magnétique. Une analyse du champ magnétique enregistré par ces échantillons, complétée par une datation, permettent (avec beaucoup de précautions) ainsi d'accéder au champ magnétique du passé.

Les mesures archéomagnétiques montrent que l'intensité du moment dipolaire se situait autour d'une valeur moyenne depuis 10000 ans mais que depuis 3000 ans, cette intensité décroît constamment au cours du temps (Hongre et al., 1998). Les études de paléo-variation séculaire montrent que le champ magnétique dipolaire domine depuis 5 millions d'années, représentant 90 % de l'énergie totale du champ magnétique; le quadripôle axial ne compterait quant à lui que pour 5 % de l'énergie, tous les autres termes du champ magnétique étant de moyenne nulle au cours du temps (Courtillot & Valet, 1995).

## Les inversions du champ magnétique

En 1906, Brunhes mesurait dans des laves du Massif Central un champ magnétique montrant que la France était dans l'hémisphère Sud il y a 750 000 ans... On a depuis compris qu'à l'échelle des temps géologiques le champ magnétique dipolaire s'est inversé de nombreuses fois. C'est en particulier l'enregistrement de ces inversions magnétiques aux abords des rifts dans les fonds sous marins qui ont permis à la théorie de Wegener (1912) sur la dérive des continents d'être définitivement admise par la communauté Géophysique dans les années 1960, sous le nom de théorie de la tectonique des plaques...

La fréquence des inversions du champ magnétique terrestre ne suit pas une loi temporelle simple. La dernière inversion a eu lieu il y a 780 000 ans, par exemple, alors que lors des derniers millions d'années le champ magnétique s'est inversé au rythme de quatre inversions par million d'années environ. Un autre exemple est la période dite de "superchron": durant le Crétacé (il y a 120 Millions d'années), le champ magnétique est resté dans une polarité stable pendant 40 millions d'années. Le mécanisme des inversions du champ magnétique terrestre continue d'être un grand mystère pour les géomagnéticiens.

Les mesures de paléo-intensité indiquent que le champ magnétique ne s'inverse que durant des périodes où le moment dipolaire est faible (Valet et al., 1993); ces inversions se produisent toujours en moins de 10000 ans. L'histoire du champ magnétique révèle aussi de nombreuses périodes dites d'*excursion* où le pôle magnétique, après un premier mouvement suggérant le début d'une inversion, revient à sa position initiale et demeure dans une polarité stable.

Des mesures de Laj et al. (1991) ont montré que le pôle du champ magnétique pourrait s'inverser en suivant des chemins préférentiels à la surface du manteau. Le débat est encore ouvert sur cette observation qui pourrait suggérer que les inversions sont contrôlées par la couche D'' ou par le manteau (voir partie IV).

Une autre controverse chez les paléomagnéticiens concerne les mesures effectuées dans la "Steens Mountain", une coulée volcanique en Oregon (Etats-Unis): Coe et al. (1995) prétendent que les laves échantillonnées sur ce site ont enregistré des vitesses de déplacement du pôle magnétique de plusieurs degrés en quelques jours au cours d'une inversion du champ magnétique. Ces vitesses excèdent de plusieurs ordres de grandeur toutes les vitesses de variations du champ magnétique que l'on connaisse à l'échelle des temps historiques. J'ai eu le plaisir au cours de ma thèse de participer à une nouvelle campagne de mesures paléomagnétiques dans les coulées volcaniques de la Steens Mountain, en compagnie de Pierre Camps, Rob Coe & Jon Aurnou. Les nouveaux échantillons, en cours d'analyse, permettront peut-être d'éclaircir le mystère que constituent, pour l'instant, ces variations extrêmement rapides du champ magnétique.

### 0.2.3 La géodynamo

Gauss démontre en 1835 à l'aide de la décomposition du champ magnétique en harmoniques sphériques que le champ magnétique terrestre a nécessairement une source d'origine interne. On a depuis établi que les sources magnétiques sont trop faibles dans la croûte terrestre et dans le manteau pour être rendues responsables de l'intensité du champ magnétique que l'on observe en surface.

On sait d'autre part que si le champ magnétique n'était pas entretenu, il s'étein-

drait en 40000 ans environ, ce qui correspond au temps de diffusion magnétique du dipôle dans le noyau. Les mesures paléomagnétiques sur des échantillons très anciens permettent d'affirmer que la Terre possède un champ magnétique depuis au moins 3.2 milliards d'années. C'est pour ces raisons que l'on s'est tourné au début du XX<sup>e</sup> siècle vers l'idée d'une "dynamo" générant un champ magnétique auto-entretenu au sein du noyau liquide.

C'est Elsasser qui étudia en 1945 le premier les équations de la magnétohydrodynamique appliquées au noyau terrestre. L'idée d'une dynamo fluide au sein du noyau est aujourd'hui acceptée par l'ensemble de la communauté Géophysique. Voici son principe: les mouvements du noyau fluide conducteur (principalement du fer), au sein d'un champ magnétique existant, génèrent un déplacement de charges électriques; le déplacement de charges induit un champ magnétique. Il existe des écoulements fluides, comme celui du noyau, où le champ magnétique "induit" entretient le champ magnétique "existant"; il en découle un système auto-entretenu ou *dynamo*. Le moteur des mouvements dans le noyau est, comme on l'a vu dans la première partie de cette introduction, la convection thermique et la convection compositionnelle. Il faut signaler qu'une autre source d'énergie pour la dynamo pourrait provenir des mouvements de précession de la Terre (Malkus, 1968).

Résoudre les équations de la dynamo dans la géométrie sphérique du noyau terrestre s'avère problématique pour plusieurs raisons. Nous décrivons ci-dessous quelques-unes d'entre elles:

- Il faut résoudre simultanément l'équation du mouvement (équation de Navier-Stokes de l'hydrodynamique à laquelle s'ajoute la force de Lorentz), l'équation d'induction provenant des équations de Maxwell de l'électromagnétisme, et, l'équation de la chaleur; ces 3 équations non-linéaires n'ont pas de solution analytique connue.
- Il existe un théorème anti-dynamo de Cowling (1934) qui nous dit qu'un écoulement axisymétrique ne peut pas générer une dynamo dans une géométrie sphérique. Cela empêche toute une classe d'écoulements "simples" de générer une dynamo et supprime l'espoir de résoudre le problème tridimensionnel de la dynamo terrestre dans un espace bidimensionnel.
- Les "observations" sur la dynamo terrestre sont très limitées. On ne connaît de manière directe que le champ magnétique poloïdal provenant du noyau. Le champ magnétique toroïdal (qui est confiné au conducteur sphérique) n'est pas observable; on ne sait donc pas si le noyau est une dynamo à champ toroïdal *faible* ou *fort* (Gubbins & Roberts, 1987). On sait cependant que le champ magnétique toroïdal ne peut pas excéder une certaine valeur, à cause de la limite imposée sur la valeur du flux de chaleur à la frontière Noyau-Manteau (voir Partie I). A noter que l'on pourra peut-être relier le champ magnétique toroïdal à la superrotation de la graine si celle-ci est confirmée par les sismologues dans le futur (voir Partie III).
- La résolution numérique de la dynamo terrestre requiert des temps de calcul énormes. On est toutefois encore loin d'une résolution numérique des fines structures de l'écoulement dans le noyau. La faible viscosité du fluide du noyau pose en

effet un problème important: la couche limite d'Ekman, par exemple, qui représente la zone où la viscosité joue un rôle prépondérant pour l'écoulement dans un système de fluide en rotation, est d'une taille caractéristique de l'ordre du mètre... dans un noyau de rayon 3485 km. On ne sera bien entendu jamais en mesure de résoudre l'écoulement avec un maillage d'un mètre de rayon mais il est cependant nécessaire de s'approcher de la limite asymptotique des faibles viscosités (Dormy et al., 1998).

Les dernières années ont vu l'apparition de la première génération de dynamo numérique tridimensionnelle (Glatzmaier & Roberts, 1995; Kuang & Bloxham, 1997; Christensen et al., 1998). Ces simulations numériques présentent l'intérêt d'avoir montré qu'une dynamo sphérique fluide homogène ayant pour source d'énergie des mouvements de convection peut, dans le principe, exister. Les régimes de dynamos explorés sont cependant encore très lointains du régime de la géodynamo.

### 0.3 Plan du mémoire

Ce mémoire comporte quatre parties; elles sont indépendantes mais ont pour point commun l'étude de phénomènes physiques reliés à la dynamique du noyau terrestre.

Dans la partie I, nous présentons l'étude expérimentale d'un tourbillon vertical de métal liquide (gallium) soumis à un champ magnétique. Nous avons choisi d'étudier un tourbillon car c'est sous cette forme que la convection pourrait être organisée dans le noyau terrestre. Dans la partie II nous présentons des expériences de cristallisation de gallium. Nous avons mesuré et analysé l'anisotropie élastique des polycristaux de gallium dans le but de progresser dans la compréhension de l'anisotropie élastique de la graine terrestre. A noter que cette partie II s'appuie sur un travail expérimental réalisé l'été dernier (1997); l'interprétation et les résultats présentés ici sont préliminaires. Dans la partie III nous présentons un modèle de couplage électromagnétique entre la graine solide et le noyau liquide. Nous avons étudié, en particulier, un type d'écoulement qui pourrait expliquer la superrotation de la graine observée par les sismologues. Dans la partie IV nous présentons un autre modèle de couplage électromagnétique, cette fois entre le noyau et la couche  $D''$  hétérogène; nous avons réalisé cette étude dans le but de déterminer si un couplage électromagnétique peut influencer le chemin du pôle magnétique lors d'une inversion.



Première partie

**Etude expérimentale d'un  
tourbillon de gallium**





# Chapitre 1

## Introduction

Busse (1970) a démontré que la convection thermique dans une sphère en rotation rapide se développe sous la forme d'une couronne de tourbillons, comme schématisée sur la figure 1.1 (voir aussi Roberts, 1968). Ces tourbillons bidimensionnels résultent de la *géostrophie* (Greenspan, 1968) qui rigidifie l'écoulement selon l'axe de rotation dès que la force de Coriolis est dominante dans la balance des forces (théorème de Proudman-Taylor). Busse (1975) a poursuivi son étude en introduisant la présence d'un champ magnétique et a démontré que l'on peut générer un effet-dynamo avec ce type d'écoulement tourbillonnant.

La convection se développe-t-elle sous la forme de colonnes géostrophiques en présence d'un champ magnétique dans le noyau? Le théorème de Proudman-Taylor s'applique-t-il à l'écoulement dans le noyau? On ne sait pas répondre; en effet, on ne connaît pas précisément le rapport des forces de Lorentz sur les forces de Coriolis dans le noyau (nombre d'Elsasser  $\Lambda$ ), l'intensité du champ magnétique toroïdal du noyau étant inconnue (inaccessible à l'observation). On sait néanmoins qu'un "fort" champ magnétique dans le noyau, impliquant des forces de Lorentz supérieures à la force de Coriolis, pourrait briser la géostrophie de l'écoulement observé par Busse (1970).

Les observations du champ magnétique terrestre montrent cependant que la force de Coriolis semble jouer un rôle important dans l'écoulement du noyau et la génération du champ magnétique :

- le champ magnétique terrestre à l'échelle des temps historiques et paléomagnétiques est fortement dipolaire; l'axe de symétrie du dipôle est aligné avec l'axe de rotation de la Terre (en moyenne) au cours du temps (Courtillet & Valet, 1995).
- on observe généralement une symétrie équatoriale des mouvements à la surface du noyau déduite de la variation séculaire du champ magnétique (Hulot et al., 1990); cette symétrie suggère la présence de colonnes géostrophiques de grands diamètres au sein du noyau.

C'est en supposant que la convection dans le noyau s'effectue sous la forme de colonnes géostrophiques que l'on s'est fixé la géométrie de l'expérience de magnétohydrodynamique présentée dans les chapitres suivants. Nous avons considéré un simple tourbillon de gallium géostrophique soumis à un champ magnétique horizontal, dans l'idée de reproduire un tourbillon en convection thermique (dans une sphère) soumis à un champ magnétique toroïdal.

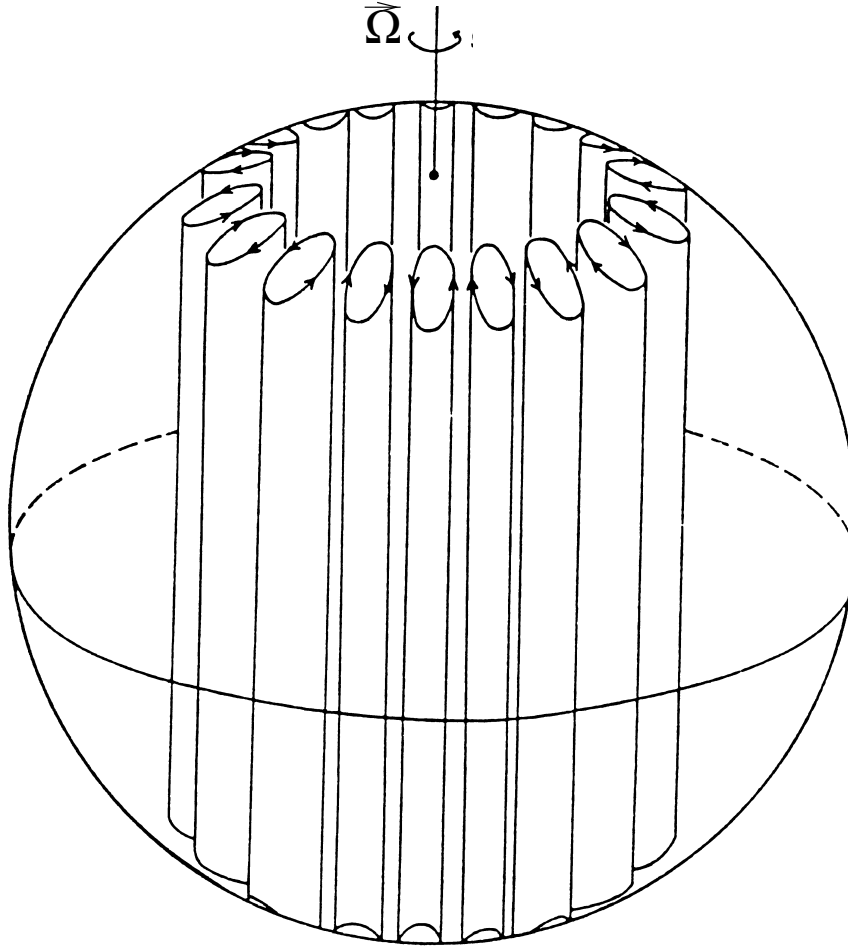


FIG. 1.1 – Organisation de la convection thermique dans une sphère en rotation rapide sous la forme de tourbillons géostrophiques (Busse, 1970).  $\vec{\Omega}$  est le vecteur rotation de la sphère.

Le chapitre 2 consiste en une description détaillée du dispositif expérimental. Le chapitre 3 s'articule autour d'un article publié dans *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, "Experimental study of a geostrophic vortex of gallium in a transverse magnetic field", présentant les résultats sur la dynamique du tourbillon. Dans le chapitre 4, l'étude de la dissipation ohmique au sein du tourbillon est présentée sous la forme d'un article publié dans *Geophysical Journal International*, "Experiments on Joule heating and the intensity of the Earth's magnetic field". Dans le chapitre 5, nous présentons une dernière série d'expériences au cours de laquelle nous avons utilisé une technique ultrasonore de mesure de vitesses. Dans le dernier chapitre, nous concluons ce travail en appliquant nos résultats expérimentaux au noyau terrestre, puis, nous évoquons les perspectives expérimentales.

## Chapitre 2

# Présentation détaillée du dispositif expérimental

### 2.1 Présentation globale de l'expérience

Nous avons généré un tourbillon de gallium dans un cylindre vertical en polycarbonate de 8 cm de diamètre intérieur et 22 cm de hauteur. Le fluide était entraîné par un disque crénelé à la base du cylindre. Le cylindre était placé entre les pôles d'un électro-aimant imposant un champ magnétique horizontal. Nous avons étudié ce tourbillon dans un repère en rotation (chapitre 3) et dans un repère stationnaire (chapitres 4 et 5).

Plusieurs grandeurs physiques ont été mesurées au sein de l'écoulement tourbillonnant:

- la vitesse du fluide,
- la pression dynamique,
- des différences de potentiels électriques,
- le champ magnétique induit,
- la température.

L'expérience était pilotée de manière autonome par un PC connecté aux différentes composantes expérimentales.

### 2.2 Le gallium

#### 2.2.1 Pourquoi choisir le gallium ?

François Lecoq de Boisbaudran découvrit le gallium en 1875 par l'intermédiaire de l'analyse spectrale (Pascal, 1961). Deux origines sont attribuées au nom *gallium*: gallium proviendrait soit du latin "Gallia" signifiant la Gaule, soit du latin "gallus" signifiant le coq (en l'honneur de Lecoq de Boisbaudran).

Le gallium est un corps simple métallique. Sa concentration dans la croûte terrestre est de l'ordre de 10 à 20 ppm; on le trouve généralement dans les échantillons de blende et de bauxite (De la Bretèque, 1962). Il est aujourd'hui beaucoup utilisé dans le milieu industriel des semi-conducteurs. La société Rhône-Poulenc nous a d'abord prêté 30 kg de gallium, puis nous les a vendus après une période d'essai fructueuse.

Nous sommes les premiers à avoir utilisé du gallium pur dans une expérience de magnétohydrodynamique ayant pour application le noyau terrestre. Il est aujourd'hui également utilisé à l'Ecole Normale Supérieure de Lyon dans une expérience où deux disques coaxiaux entraînent le gallium dans un cylindre (Pinton et al., en préparation), ainsi qu'à l'Université Johns Hopkins (Baltimore) où la convection de Rayleigh-Bénard en présence d'un champ magnétique est étudiée (Aurnou & Olson, 1997).

L'avantage du gallium par rapport aux autres fluides couramment choisis pour les expériences de magnétohydrodynamique est que d'une part, il ne requiert pas de conditions de sécurité particulières comme c'est le cas, par exemple, avec le sodium liquide (Plunian, 1996; Gailitis, 1996; Stieglitz & Müller, 1997), et que d'autre part, il est moins toxique que le mercure (Nagakawa, 1957; Alemany et al., 1979; Sommeria, 1985; Alboussière, 1994).

Par ailleurs, le rapport entre la densité et la conductivité électrique du gallium se prête bien à l'étude d'écoulements dont le nombre d'Elsasser  $\Lambda = \frac{\sigma B^2}{\rho \Omega}$  est de l'ordre de 1, ce qui rend le gallium attrayant pour les expériences de magnétohydrodynamique appliquées au noyau terrestre.

### 2.2.2 Ses propriétés et conditions d'utilisation en laboratoire

Les propriétés physiques du gallium liquide à 30°C sont présentées en Annexe. Sa faible température de fusion  $T_f = 29.78^\circ\text{C}$  (voir Annexe) le rend facilement utilisable en laboratoire. Son volume s'étend de 3.2% lors de la solidification (seuls le germanium et le bismuth, parmi les autres éléments, possèdent également cette propriété). La conductivité électrique du gallium est quatre fois plus grande que celle du mercure et deux fois plus petite que celle du sodium (voir le tableau 3.1).

Le gallium liquide est argenté et brillant comme on le voit sur la photographie 2.1. Il réagit avec beaucoup de métaux tels que l'aluminium, l'acier et avec des matières plastiques contenant des éléments métalliques tel que le plexiglas. Tous les matériaux en contact avec le gallium dans notre dispositif expérimental ont par conséquent été testés tout d'abord.

Une autre caractéristique du gallium est son oxydation quasi-instantanée au contact de l'air (Wang et al., 1994). Pour éviter une oxydation nuisible à l'écoulement fluide, nous avons construit un circuit d'azote destiné à conserver le gallium sous atmosphère contrôlée durant toutes les expériences. Le mode opératoire utilisé pour le remplissage du cylindre sous atmosphère contrôlée est décrit, par exemple, en Appendice. Malgré les précautions prises pour assurer une parfaite étanchéité entre l'intérieur et l'extérieur du cylindre, des oxydes sont régulièrement apparus au sommet du tourbillon, à la surface du gallium. Nous les faisons disparaître presque instantanément en versant dessus quelques gouttes d'acide chlorhydrique diluées dans de l'éthanol (Roughton & Nash, 1962).

La toxicité du gallium n'étant pas très bien connue, nous avons toujours travaillé avec des gants lors de manipulations de gallium, en prenant soin en particulier de ne pas répandre du gallium dans le laboratoire expérimental.

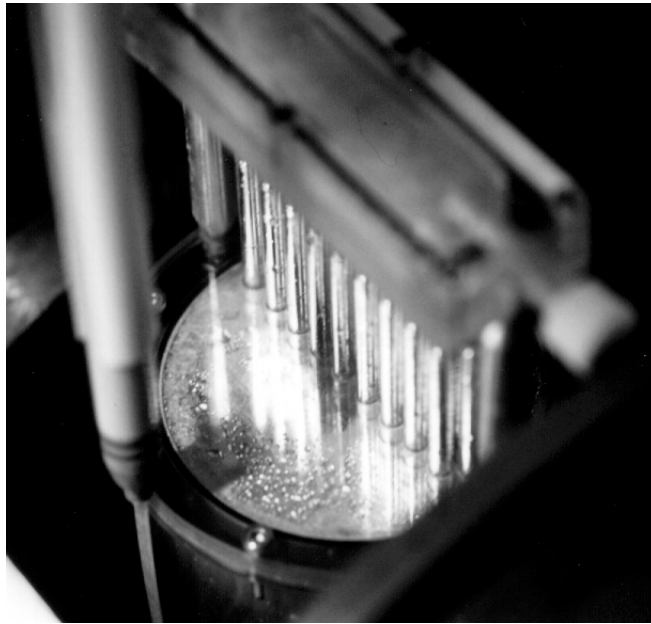


FIG. 2.1 – Vue de dessus du cylindre de gallium. Le gallium liquide est en contact avec le couvercle supérieur du cylindre. Les tubes de Venturi mesurent la pression dynamique au sommet du tourbillon et le gaussmètre mesure le champ magnétique induit le long du cylindre.

## 2.3 Le tourbillon de gallium

La technologie expérimentale du tourbillon de gallium est peu abordée dans les articles des chapitres 3 et 4. Nous détaillons ici ainsi qu'en Appendice le long travail de préparation expérimentale qui a précédé les premières mesures. Un schéma du dispositif expérimental dont nous allons discuter par la suite est présenté sur la figure 3.1 du chapitre 3.

### 2.3.1 Les composantes mécaniques

La cuve cylindrique est en polycarbonate translucide, polymère très résistant mécaniquement. Le contact et l'étanchéité entre les couvercles (haut et bas) et le cylindre se fait par deux joints toriques en caoutchouc. Le disque crénelé entraînant le fluide à la base du cylindre est également en polycarbonate. L'axe par lequel est entraîné le disque est en acier recouvert d'une fine couche de carbone de  $2 \mu\text{m}$  afin que l'acier ne réagisse pas avec le gallium. L'étanchéité entre l'axe et la cuve est assurée par un joint torique composé d'une bague d'étanchéité en P.T.F.E. et d'un ressort en fil d'acier inoxydable supportant les charges. Ce joint très résistant a parfaitement supporté des vitesses de l'ordre de  $1 \text{ m/s}$  en bordure d'axe, pendant des expériences durant plus de 30 minutes. La transmission de la rotation entre le moteur et le disque se fait par l'intermédiaire de deux poulies (à la base de l'axe et sur le moteur) reliées par une courroie. Nous avons utilisé un moteur tachymétrique dont la vitesse nominale est de  $1500 \text{ tours min}^{-1}$  (Usafed 13C-22K de Yaskawa) et le couple nominal de  $8.34 \text{ N}\cdot\text{m}$ , délivrant une vitesse stabilisée à  $10^{-4}$  près. Les bobines de l'électro-aimant sont alimentées par un

générateur 50V-40A stabilisé à  $10^{-4}$ .

### 2.3.2 Les instruments de mesures

Une information primordiale dont on a besoin dans les expériences de magnétohydrodynamique est la vitesse du fluide au sein de l'écoulement. En effet, c'est à partir de celle-ci que l'on construit le nombre de Reynolds magnétique  $Re_m = \mu_0 \sigma U D$ , nombre caractéristique dans l'étude de la dynamo.

Le gallium étant opaque, aucune des mesures de vitesses avec traceurs, traditionnellement utilisées en Mécanique des Fluides, ne pouvaient s'appliquer à nos expériences. A notre connaissance, seule une technique radioscopique utilisant les contrastes de densité dans une couche très fine a permis de visualiser une convection lente dans du gallium (Campbell and Koster, 1994; Koster, 1997). Cette technique ne s'applique cependant pas à des écoulements dont la taille caractéristique excède le millimètre, ce qui était le cas dans nos expériences.

Notre manque d'expérience en terme de mesure de vitesses dans les fluides opaques nous a conduit à tester successivement plusieurs techniques de mesures; comme nous allons le voir dans les prochains paragraphes, c'est par ce biais que nous avons évolué technologiquement au fil des expériences.

Dans un premier temps, nous avons mis au point un tourbillon avec une surface libre. Nous avons utilisé un rayon laser réfléchi sur la surface libre du tourbillon pour mesurer le profil topographique au sommet, et en déduire indirectement la vitesse. Cette technique s'est révélée très performante avec un tourbillon d'eau et bien plus laborieuse à mettre en place avec un tourbillon de gallium: le gallium, un miroir parfait lorsque sa surface libre est propre, réfléchit presque entièrement un rayon laser incident rendant l'impact du laser à la surface pratiquement invisible (Brito, 1993).

Dans un second temps, nous avons placé le tourbillon sur une table tournante afin d'ajouter l'accélération de Coriolis dans les balances de force de l'écoulement et nous rapprocher ainsi des conditions de géostrophie du noyau terrestre. Nous avons utilisé le "manège" de 8 mètres de diamètre du palais de la Découverte à Paris (voir la photographie 2.2). La vitesse maximale de rotation de cette table est assez élevée (11 tours  $\text{min}^{-1}$ ) mais sa mauvaise stabilité horizontale pendant la rotation nous a empêché de réaliser de bonnes mesures de profils topographiques avec le laser.

Dans un troisième temps, nous avons changé les conditions limites du tourbillon en imposant une condition de surface rigide au sommet. Cela nous a permis de nous affranchir des problèmes d'oscillation de la surface libre, et nous a rapproché des conditions limites des colonnes de Proudman-Taylor présentes dans une sphère en convection thermique (voir Introduction). Nous avons alors adopté une nouvelle technique de mesure de vitesses dont le principe est celui du tube de Venturi (Tritton, 1988). Des tubes en verre assemblés le long d'un diamètre au sommet du cylindre ont permis de mesurer la pression dynamique au sommet du tourbillon (voir la photographie 2.1). A l'aide d'un modèle reliant la pression dynamique à la vitesse, nous avons pu en déduire le champ de vitesse au sommet du tourbillon. C'est ce cylindre avec surface rigide que nous avons utilisé lors des expériences réalisées sur la rapide table tournante du Laboratoire des Ecoulements Géophysiques et Industriels de Grenoble (LEGI) (voir la photographie 2.3).

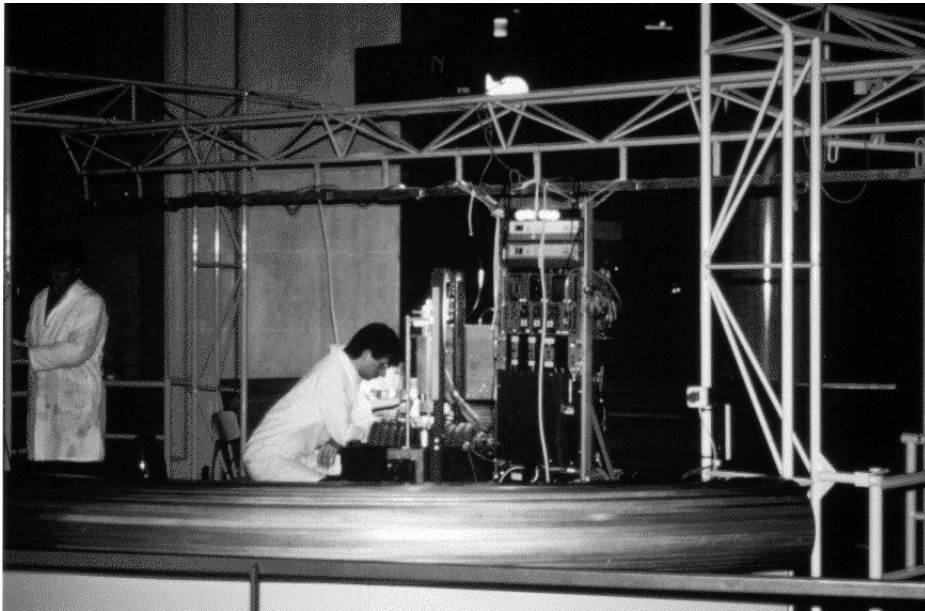


FIG. 2.2 – Photo de notre expérience installée sur la table tournante du Palais de la Découverte à Paris. Au centre de la table (8 mètres de diamètre) se trouve le tourbillon avec une surface libre placé entre les bobines de l'électro-aimant. Toutes les composantes électroniques sont disposées sur un support vertical sanglé à l'armature de la table tournante.

Enfin dans un dernier temps, nous avons développé une technique de mesure de vitesses qui devrait être utilisable, cette fois, quelle que soit la géométrie du conteneur: la vélocimétrie ultrasonore utilisant l'effet Doppler. Cette technique sera décrite en détail dans le chapitre 5.

L'autre information qu'il est nécessaire de déterminer dans les expériences de magnétohydrodynamique est la valeur du champ magnétique induit. Nous l'avons mesurée avec deux différents gaussmètres. Un premier gaussmètre (modèle GMO5 de Hirst Magnetic Instruments) n'a pas donné pleine satisfaction car sa fréquence de mesure (une mesure à la seconde) est trop lente pour nos expériences (chapitres 3 et 4). Un second gaussmètre (modèle MAG-03 de Bartington) doté d'une sonde tridirectionnelle a donné des mesures bien plus précises (chapitre 5) à une fréquence d'échantillonnage de 100 kHz.

Cinq électrodes en cuivre alignées le long d'un plan vertical du cylindre et pénétrant le cylindre d'environ 2 à 3 mm ont mesuré des différences de potentiels très précieuses pour la compréhension de la dynamique du tourbillon (voir chapitre 3).

Cette présentation technique se poursuit en Appendice; on y explique comment nous nous sommes adaptés à un dispositif expérimental dont les capacités sont de 300 kg en rotation à 90 tours  $\text{min}^{-1}$ , et, en particulier, comment nous avons interfacé les instruments de mesures au PC pilotant l'expérience. On y détaille aussi l'algorithme du pilotage expérimental.





FIG. 2.3 – Photo de notre expérience installée sur la table tournante du Laboratoire des Ecoulements Géophysiques et Industriels de Grenoble (LEGI). L'électro-aimant est fixé au centre de la table de 1.5 mètre de diamètre. Le support vertical, où se trouve l'essentiel de l'électronique, est arrimé à l'électro-aimant avec une sangle. L'unité centrale du PC (à gauche) pilote l'expérience en étant embarquée sur la table pendant la rotation.

## Chapitre 3

# Étude dynamique du tourbillon de gallium soumis à un champ magnétique

### Experimental study of a geostrophic vortex of gallium in a transverse magnetic field

Daniel Brito, Philippe Cardin, Henri-Claude Nataf, Guy Marolleau

*Département Terre-Atmosphère-Océan, Ecole Normale Supérieure,  
URA 1316 du CNRS, 24 rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France.*

Article publié dans *Physics of the Earth and Planetary Interiors*  
**91**, 77-98 (1995).

#### Résumé:

Nous avons étudié expérimentalement l'interaction entre un vortex vertical de gallium liquide (généré par un disque) et un champ magnétique horizontal. Un nombre de Reynolds magnétique de l'ordre de 0.1 a pu être atteint. Etant donné que cette expérience a été réalisée sur une table tournante, les forces de Coriolis et de Lorentz étaient dominantes dans l'écoulement, comme dans le noyau terrestre. Trois grandeurs ont été mesurées : la pression à la surface du vortex, la différence de potentiels entre des points situés sur la génératrice du vortex, et le champ magnétique induit par l'écoulement. Pour améliorer notre compréhension du vortex, nous avons introduit un modèle de vitesse bidimensionnel simple, qui rend très bien compte des trois types de mesures effectuées. Le nombre d'Elsasser (rapport entre les forces de Lorentz et les forces de

Coriolis) est le paramètre critique contrôlant la dynamique du vortex. Sous l'influence du champ magnétique, le vortex est freiné mais reste bidimensionnel ou géostrophique, jusqu'à un nombre d'Elsasser de 0.2. En revanche, la taille du vortex augmente avec l'intensité du champ magnétique. Le champ magnétique induit prend la forme d'un dipôle horizontal perpendiculaire au champ magnétique imposé. Nous montrons que cela est dû à la géométrie des courants électriques et des parois isolantes, plutôt qu'à l'hélicité de l'écoulement.

**Abstract:**

We built an experimental set-up to study the interaction between one single vertical vortex of liquid gallium, generated by a disk, and a transverse magnetic field. Magnetic Reynolds number of 0.1 has been reached. This experiment has been conducted on a rotating table. Therefore the dominant forces are Coriolis and Lorentz forces, as in the Earth's core. We measured pressure profiles at the top of the vortex, differences in electrical potentials between some points in the vortex and the magnetic field induced by the flow. To understand the velocity flow of the vortex, we introduced a simple two dimensional model which predicts well these three types of measurements. The Elsasser number (ratio of Lorentz to Coriolis forces) is the critical parameter for the dynamical aspect of the vortex. Under the influence of the magnetic field, the vortex is slowed down but remains two-dimensional or geostrophic, up to Elsasser number 0.2. On the other hand, the size of the vortex increases with the strength of the magnetic field. The induced magnetic field forms a horizontal dipole perpendicular to the imposed field, and has a significant vertical component associated with the geometry of electrical currents and insulating boundaries, and not with the helicity.

### 3.1 Introduction

The understanding and modeling of the Earth's dynamo responsible for its magnetic field (Elsasser, 1946) remains one of the most challenging problems in the Earth sciences. The major ingredients of this phenomenon are now well established : the engine of the dynamo lies in the convective motions linked with the solidification of the inner core; there is an equilibrium between diffusion and advection of the magnetic field (the magnetic Reynolds number, which is the ratio of advection to diffusion, is larger than unity); the flow is dominated by the Coriolis and Lorentz forces, which are of the same order (the Elsasser number,  $\Lambda$ , which is the ratio of the Lorentz forces over the Coriolis forces is of order unity). The full modeling of the dynamo with these ingredients has not been attempted yet.

However, in the recent years, following the pioneer work of Busse (1970), considerable progress has been made in the understanding of convection in the core in the presence of rotation, without a magnetic field. Under these conditions, the Coriolis force is dominant and the flow is geostrophic. It takes the form of columnar vortices, with their axels aligned with the rotation axis (Busse, 1970). This organization of the flow remains in the turbulent regime, which sets in for more active convection (Cardin and Olson, 1994). The inference that this flow could adequately describe actual motions in the core is suggested by the equatorial symmetry of the flow at the surface of the core, as deduced from the inversion of the observed secular variation of the magnetic field (Le Moüel et al, 1985; Hulot et al., 1990), and also by the alignment of the dipolar magnetic field with the rotation axis for all planets in the solar system (Busse, 1983; Sun et al. 1993; Manneville and Olson, 1996).

Although these observations suggest a strong control of rotation on the generation of the magnetic field, limitations of this approach are obvious. First, the Lorentz forces cannot be neglected, as they should roughly balance the Coriolis forces. Second, the diameter of the vortices expected in the core in the absence of magnetic field is only a few tens of kilometers (Cardin and Olson, 1994), much smaller than the "observed" vortices at the surface of the core. Nevertheless, the idea that vortices parallel to the rotation axis are the basic element of the flow is a powerful guide.

Within this frame, in which geostrophy is assumed, several workers have investigated the effect of an imposed magnetic field. These studies have shown that the magnetic field strongly enlarges the vortices and decreases the threshold above which convection starts (Fearn, 1979; Cardin and Olson, 1995). It has also been demonstrated that dynamo action could be substained by such a flow (Busse, 1975).

Of course the limitation of these studies is that geostrophy is assumed to hold, even in the presence of a strong magnetic field. For very large Elsasser numbers, geostrophy is replaced by magnetostrophy with the flow following the field magnetic lines. Very few studies attempt to model convection in the core in 3-D geometry, with both the Coriolis and Lorentz forces present. Recently, Zhang (1992), and Glatzmaier and Olson (1993) have obtained results in this situation that seem to indicate that the equatorial symmetry of the flow, and its organization in vortices, would hold for Elsasser numbers of order unity.

In any case the regime in which the Coriolis and Lorentz forces are comparable appears to be very rich, and relatively unexplored. Although several types of instabilities have been discovered (Braginsky and Meytlis, 1991; St.Pierre, 1994; Moffatt and

			GALLIUM	MERCURY	SODIUM
Density	$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	$6.09 \times 10^3$	$13.59 \times 10^3$	$0.93 \times 10^3$
Kinematic viscosity	$\nu$	m <sup>2</sup> /s	$3.1 \times 10^{-7}$	$1.14 \times 10^{-7}$	$7.75 \times 10^{-7}$
Electrical conductivity	$\sigma$	(m $\Omega$ ) <sup>-1</sup>	$3.68 \times 10^6$	$1.06 \times 10^6$	$10.35 \times 10^6$
Melting point	$T_m$	°C	29	-39	98
Boiling point	$T_b$	°C	2227	356	881
Coefficient of thermal expansion	$\alpha$	K <sup>-1</sup>	$1.0 \times 10^{-4}$		
Surface tension	$\gamma$	N/m	0.735		

TAB. 3.1 – *Physical properties of liquid gallium, and other liquid metals.*

Loper, 1994) we wish to concentrate on a simple problem.

In this paper, we present laboratory experiments that aim at clarifying the influence of the core toroidal field upon the basic element of the convective flow – a vortex aligned with the axis of rotation. We model this by spinning a small disk at the base of a vertical cylinder filled with a liquid metal—gallium. The cylinder is submitted to a horizontal magnetic field, and the experiment is carried out on a rotating table. The Elsasser number can be varied from zero to one, and the magnetic Reynolds number remains less than 0.1 (i.e., magnetic diffusion is larger than advection). The experimental study of magnetohydrodynamics is rather rare. Experiments have been performed by Nakagawa (1957,1958), using mercury, to check the marginal stability predictions of Chandrasekar (1961), in a rather different configuration. More recently Gailitis (1992) has tried an experimental dynamo formed by circulating liquid sodium in a pair of helicoidal tubes. We think our experiments are novel and open new perspectives for the realization of an experimental dynamo, which would move closely approach a geometry and regime relevant for the Earth’s core.

In the next section, we describe the experimental set-up and the various measurements we perform. In section 3.3, we present the results obtained for a vortex without magnetic field, and a simple 2-D model is introduced. Section 3.4 reports on the influence of the magnetic field on the vortex. Results on the dynamical, electrical, and magnetic configurations are presented, and discussed in connection with a simple model, which provides a coherent description of these three configurations.

## 3.2 Experimental description and methods

### 3.2.1 Liquid gallium

In 1875, Lecoq de Boisbaudran discovered spectroscopically a new element, gallium, which had been predicted and described by Mendeleev in 1871. It is a metal, extracted as a trace element from bauxite. Gallium has a silvery appearance, and is opaque and bright. The physical properties of liquid gallium, mercury, and sodium are listed in Table 1. Gallium becomes liquid at 29°C, which is an easy temperature to reach in the laboratory, as opposed to 98°C for sodium. It is four times more conductive and less than half as dense as mercury. We will see that this enables us to approach geophysically interesting regimes. The dynamic viscosity of liquid gallium is similar to that of water.

Unlike mercury, it has a low vapor pressure at room temperature (Pascal, 1961), and is therefore much less dangerous to use. The toxicity of gallium is believed to be low (Pascal, 1961). Nevertheless, special care must be taken to avoid contact with gallium, as well as losses. Gallium strongly reacts with most metals (especially aluminum), and oxygen. In our set-up, care was taken to avoid contact with metals and air at all times. In the present experiment, we made use of 6 kg of ultra-pure (6N) gallium, which was lent to our laboratory by Rhône-Poulenc.

### 3.2.2 Set-up description

Fig. 3.1 is a sketch of the apparatus built for our experiment. Liquid gallium is contained in a polycarbonate cylinder ((1) in Fig. 3.1), whose inner dimensions are 80 mm (diameter) x 220 mm (height). ( Polycarbonate was favored over Polymethyl-metacrylate because it does not react with gallium (Rhône-Poulenc, personal communication, 1993) and exhibits larger mechanical strength.) Wall thickness is 10 mm. A single vortex, with vertical axis, is produced by spinning a polycarbonate disk (2) of 40 mm-diameter, 38 mm above the base of the cylinder. The disk is 8 mm thick, and has 3 mm-deep crenellations, radiating from the center. Preparatory tests with water indicated that crenellations were needed for sufficiently strong entrainment of the liquid to be strong enough. The disk is attached to stainless steel axis of 11.5 mm diameter, which passes through the bottom of the cylinder inside a ring. (Since gallium should not be in contact with metal, the axis is covered with a 2  $\mu\text{m}$  thick amorphous carbon deposit, of high mechanical strength.) This axis is driven by a tachymetric motor (USAFED-13C22k from Yaskawa Electric Corporation, Tokyo, Japan) which maintains the rotation velocity constant within  $10^{-4}$ . The maximum rotation velocity is  $700 \text{ rev min}^{-1}$ .

The cylinder is symmetrically placed between the poles, of 160 mm-diameter, of an electromagnet (3), which produces a horizontal magnetic field whose intensity can reach 0.1 T. The current to the magnet is delivered by a power source, stabilized within  $10^{-4}$ . The temperature around the cylinder is kept at all times above  $29^\circ\text{C}$  (the melting temperature of gallium) by circulating hot water in the coils of the magnet, and hot air around it.

All these components, weighting around 300 kg, are attached to a rotating table (4). This table was built by the Laboratoire des Écoulements Géophysiques et Industriels in Grenoble, where the experiments took place, and consists of a duralumin plate of 1.5 m-diameter, entrained by a tachymetric motor. The table has excellent horizontal stability during rotation. We could spin it up to  $45 \text{ rev min}^{-1}$  ( $75 \text{ rev min}^{-1}$  for a lightened version), with a velocity control of  $10^{-3}$ , and to  $60 \text{ rev min}^{-1}$  (respectively  $90 \text{ rev min}^{-1}$ ) with a poorer velocity control of about 4%.

### 3.2.3 Description of experimental measurements

We try to retrieve as much information as possible on the kinematic, electrical, magnetic, and dynamical state of our vortex. This is not an easy task, as gallium is opaque. We perform three types of measurements :

(1) Dynamical pressure profiles at the top of the cylinder are obtained by measuring the height of gallium in a set of Venturi tubes ([5] in Fig. 3.1). We use 19 tubes of 70

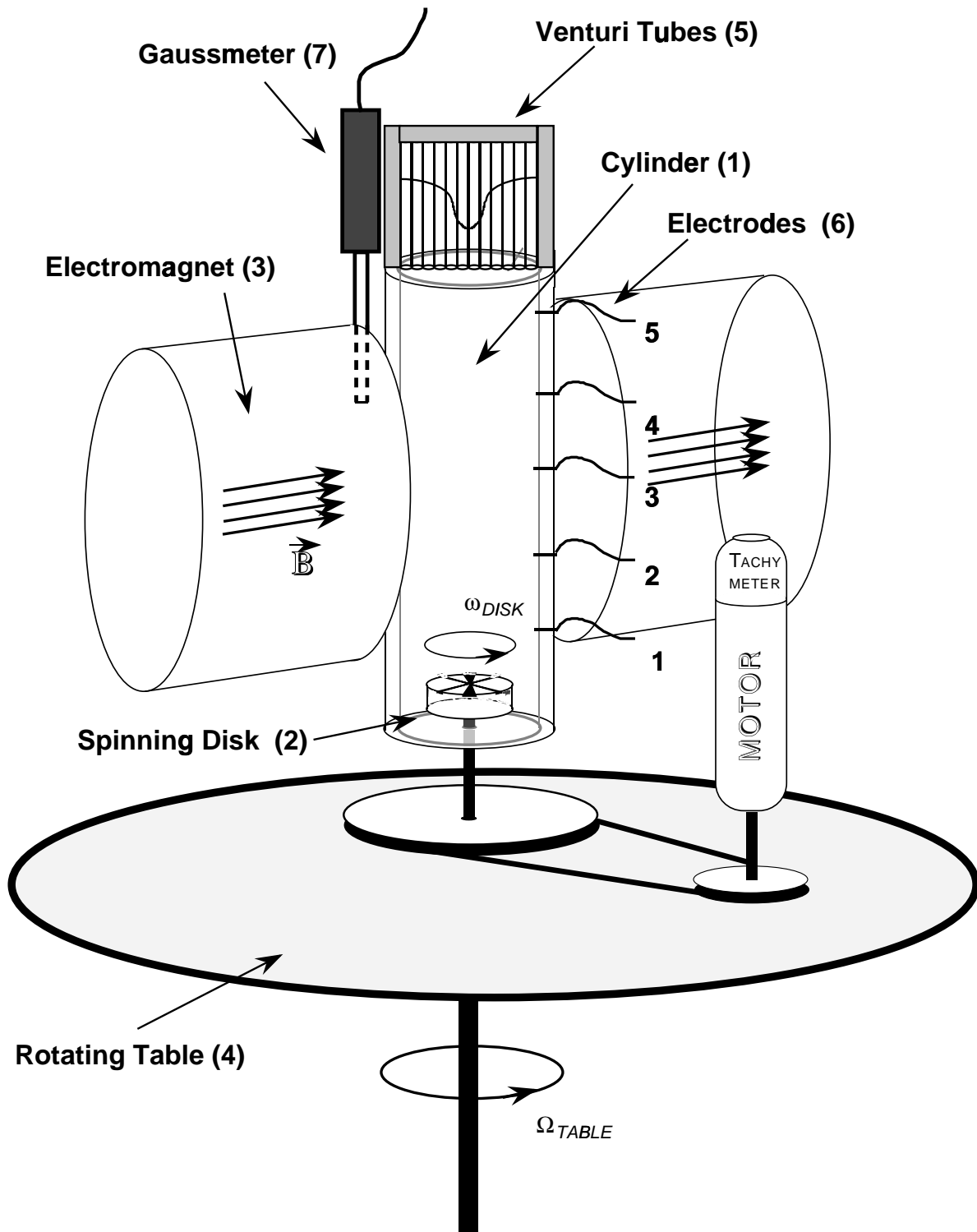


FIG. 3.1 – Sketch of the experimental set-up.

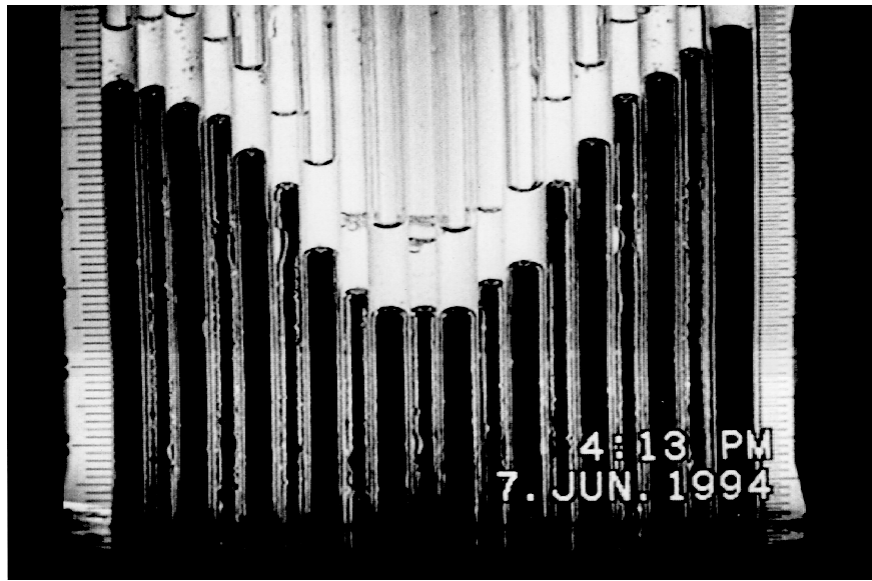


FIG. 3.2 – *Picture of the Venturi tubes during a run ( $\Omega = 0 \text{ rev min}^{-1}$ ,  $\omega = 500 \text{ rev min}^{-1}$ ,  $B = 0 \text{ mT}$ ). The level in each tube is proportional to the dynamical pressure at the top of the vortex. The rulers on both sides are used to measure the height of gallium in each tube. (Note the presence of hydrochloric acid – alcohol above gallium in order to keep it in a reduced state.)*

mm high and with an inner diameter of 3 mm, on two close rows around a diameter. We obtain an actual sensitivity of 30 Pa. Levels in the tubes are recorded using a high-resolution camcorder (Canon UC5Hi8 with 470000 pixels of resolution) attached to the magnet frame. Fig. 3.2 shows an image from one of the runs.

(2) Differences in electrical potential on the side of the cylinder are measured using five copper electrodes [6]. They are located along the generatrix of the cylinder, in the plane that contains  $\vec{B}$  and reach 3 mm inside the cylinder. The resolution of the voltmeter is  $1 \mu\text{V}$ .

(3) Induced magnetic field is measured with a gaussmeter [7]. The Hall effect probe is placed just outside the cylinder, usually to measure the horizontal component of the induced field, perpendicular to the imposed field. The typical accuracy of the measurement is 0.01 mT (0.03 mT according to the manufacturer).

As all the components of the experiment, including the data loggers and voltmeters, are on the rapidly rotating table, we need a system that controls the experiment on the table, from the beginning to the end of a run. The system we built relies on a PC 486, placed on the table, and a stand-alone program, which is responsible for three tasks :

(1) it regularly checks that the experiment is behaving properly. An emergency stop of the disk and an alarm ringing are triggered if any of the following dysfunctions is detected : i) temperature drops below  $30^\circ\text{C}$ ; ii) gallium is leaks from the cylinder; iii) the torque on the disk drive is higher than a given threshold.

(2) it sets the rotation velocity of the disk to the programmed values.

(3) it triggers the data loggers, and records the measurements from the electrodes and the gaussmeter.



All data and programs are written on a virtual disk in random access memory, to avoid accessing the hard disk during rotation. Coded sounds and lights inform the experimentalists of the progress of the run. We control the speed of the rotating table from the outside, as well as the intensity in the magnet, and the movie camera.

### 3.2.4 Chemical treatment of gallium

To avoid the oxidation of gallium, the filling and emptying of the cylinder were performed under a nitrogen atmosphere. Even so, oxides were visible at the top of each column of gallium in the Venturi tubes. We therefore injected into each tube an identical quantity of alcohol mixed with hydrochloric acid (Fig. 3.2), which reacted completely with oxides, yielding a clean surface.

## 3.3 Equations and dimensionless numbers

We consider a vortex in an incompressible, conductive fluid, in a magnetic field, rotating on a table. The temperature and all material properties are constant. We can write the equation for conservation of mass, the third Maxwell equation, the equation for conservation of momentum, and the induction equation of the magnetic field.

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0 \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.2)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \underbrace{\rho(\vec{U} \cdot \nabla)\vec{U}}_{\text{Inertial term}} + \underbrace{2\rho\vec{\Omega} \times \vec{U}}_{\text{Coriolis term}} = -\vec{\nabla}P + \underbrace{\mu\nabla^2\vec{U}}_{\text{Viscous term}} + \underbrace{\vec{J} \times \vec{B}}_{\text{Lorentz term}} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \underbrace{\vec{\nabla} \times (\vec{U} \times \vec{B})}_{\text{Magnetic advection term}} = \underbrace{\lambda\nabla^2\vec{B}}_{\text{Magnetic diffusion term}} \quad (3.4)$$

where  $\vec{U}$  is the fluid velocity vector in the rotating frame,  $\vec{B}$  is the total magnetic field vector  $\vec{B} = \vec{B}_{\text{imposed}} + \vec{B}_{\text{induced}}$ ,  $\vec{J}$  is the current density vector.  $P$  is the following scalar :

$$P = p + \frac{1}{2}\Omega^2 r^2 + \rho\Phi$$

where  $p$  is the fluid pressure , the second term is the centrifugal force and  $\Phi$  is the gravity potential.

$\rho$  is the fluid density,  $\mu$  the dynamic viscosity,  $\nu = \mu/\rho$  the kinematic viscosity,  $\vec{\Omega}$  the angular velocity vector of the table;  $\lambda = 1/\mu_0\sigma$  is the magnetic diffusivity, where  $\sigma$  the electrical conductivity and  $\mu_0$  the magnetic permeability of vacuum.

Eq. (3) is the classical Navier-Stokes equation in a rotating frame, with the Lorentz term added. We look for stationary solutions and therefore drop the first term of Eqs. (3) and (4).

Nondimensional equations are obtained, using the following scales :

The length scale  $D$  is the radius of the spinning disk; the velocity scale  $U$  is the imposed velocity at the edge of the disk;  $B$  is the intensity of the applied magnetic field. We

Symbol	Name	Definition	Experiments	Earth's core
Ro	Rossby	$U/\Omega D$	0.7-15	$10^{-6} - 10^{-5}$
E	Ekman	$\nu/\Omega D^2$	$10^{-6} - 10^{-4}$	$10^{-15} - 10^{-13}$
$\Lambda$	Elsasser	$\sigma B^2/\rho\Omega$	$10^{-3} - 1.5$	0.1-10
$Re_m$	Magnetic Reynolds	$UD/\lambda = \mu_0\sigma UD$	$10^{-4}-0.1$	100

TABLE 3.2 – Values of characteristic dimensionless numbers of the experiment, and in the Earth's core.

derive the scale for current density,  $\sigma UB$ , and pressure scale  $P_0$  is the hydrostatic pressure at the depth of the disk.

We write dimensionless vectors with a tilde, and dimensionless scalars with a circumflex. Eqs. (1) and (2) retain the same form, whereas Eqs. (3) and (4) become

$$\begin{aligned} \text{Ro}(\tilde{U} \cdot \tilde{\nabla})\tilde{U} + 2\tilde{U} \times \tilde{\Omega} &= \frac{P_0}{\rho D U \Omega} \tilde{\nabla} \hat{P} + \text{E}(\nabla^2 \tilde{U}) + \Lambda(\tilde{J} \times \tilde{B}) \\ \text{Re}_m(\tilde{\nabla} \times (\tilde{U} \times \tilde{B})) &= \nabla^2 \tilde{B} \end{aligned}$$

where 4 dimensionless numbers appear: the Rossby, Ekman, Elsasser and magnetic Reynolds numbers. Table 2 gives typical values of these four numbers in the Earth's core, and in our experiments.

### 3.4 Study of a vortex generated by a disk without magnetic field

#### 3.4.1 Pressure profiles

Fig. 3.3 shows pressure profiles in gallium experiments, for a given velocity of the table. There are three profiles corresponding to three velocities of the disk. The pressure is given in height of gallium in the tubes. The height is measured from a reference state in which the disk is stopped and the table rotates at a set speed. We observe that the amplitude of the profile increases as the speed of the disk increases. This simply means that the velocity of the vortex measured at the top increases with the imposed velocity at the bottom. It should be noted that the pressure increase is almost quadratic with respect to the disk velocity increase.

Fig. 3.4 shows pressure profiles for a given velocity of the disk, and for three velocities of the rotating table. We observe that the velocity of the vortex increases markedly from  $\Omega_{\text{table}}=0 \text{ rev min}^{-1}$  to  $\Omega_{\text{table}}=30 \text{ rev min}^{-1}$ , and slightly from  $\Omega_{\text{table}}=30 \text{ rev min}^{-1}$  to  $\Omega_{\text{table}}=60 \text{ rev min}^{-1}$ . Under the action of the Coriolis force, the velocity of the vortex at the top actually tends towards the velocity of the disk, as the rotation of the table increases. This is because the effect of the viscous coupling on the walls is reduced by the presence of Coriolis forces.

The errors on the pressure measurements come from three sources: reading errors of about 0.5 mm, errors caused by vibrations of the table at high rotation rates (up to 0.5 mm) and an error caused by dynamical fluctuations of pressure. This source of error is the most important. It is largest at the center of the vortex, and increases with

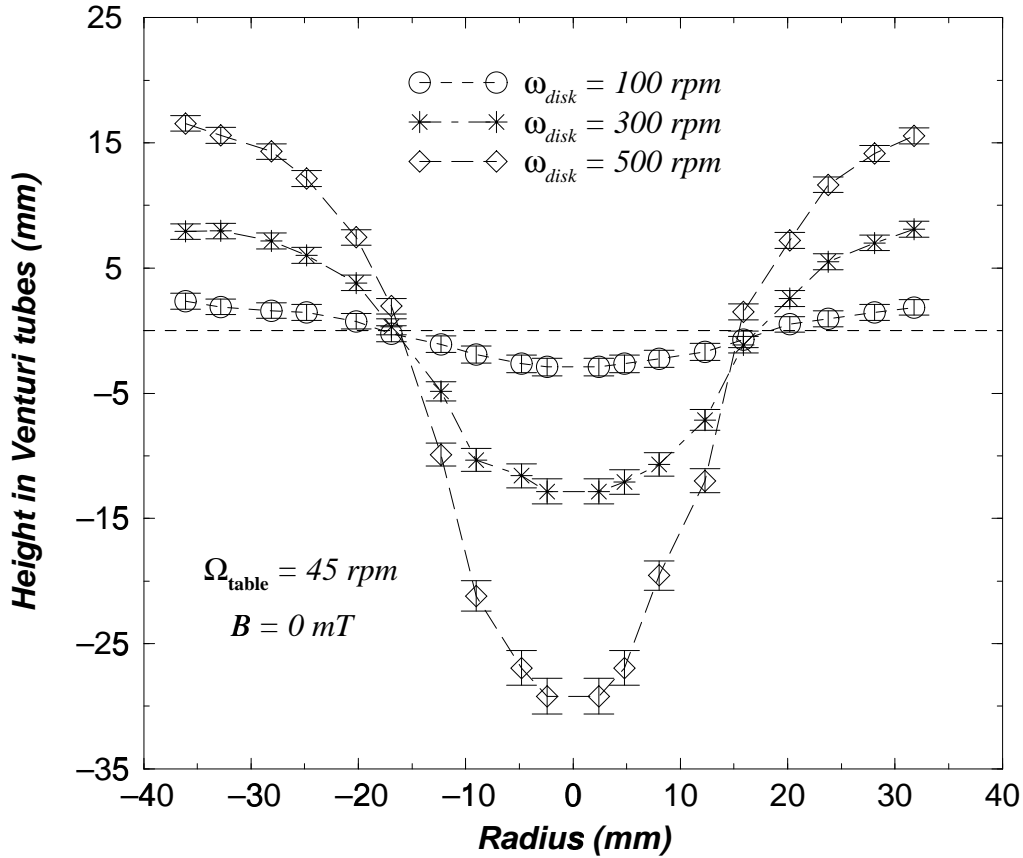


FIG. 3.3 – Pressure profiles measured for a constant velocity of the table  $\Omega_{table} = 45 \text{ rev min}^{-1}$ , and three velocities of the disk  $\omega_{disk} = 100, 300, 500 \text{ rev min}^{-1}$ . The velocity of the vortex increases with the velocity of the disk.

the amplitude of the deflection. We estimate it reaches 2.5 mm for the deepest profiles we measure. The resulting error bars are drawn in Fig. 3.3 and 3.4.

### 3.4.2 2-D kinematic model

The present experiment was designed to investigate the effect of a simple magnetic field geometry on a simple hydrodynamic flow. The flow we study is simply a forced vortex in a cylinder. This is in fact already a rather complex flow (Spohn, 1991): it is turbulent and three-dimensional, and the viscous coupling with the crenellated disk is far from trivial. Despite all these complexities, the advantage of this flow is that the velocity field is clearly dominated by one component: the azimuthal velocity. Furthermore, we expect little variation in the vertical direction, as a consequence of the Proudman-Taylor theorem under geostrophic or vortostrophic conditions.

To investigate the effect of a magnetic field and to relate our various measurements, we need some simple kinematic model. The model we use is described in Fig. 3.5: rigid rotation in the central part of the vortex is matched with simple shear at the wall of the cylinder. There is no variation in the vertical direction. Velocity is deduced everywhere in the cylinder, and pressure at the top is computed. The mathematical derivation is

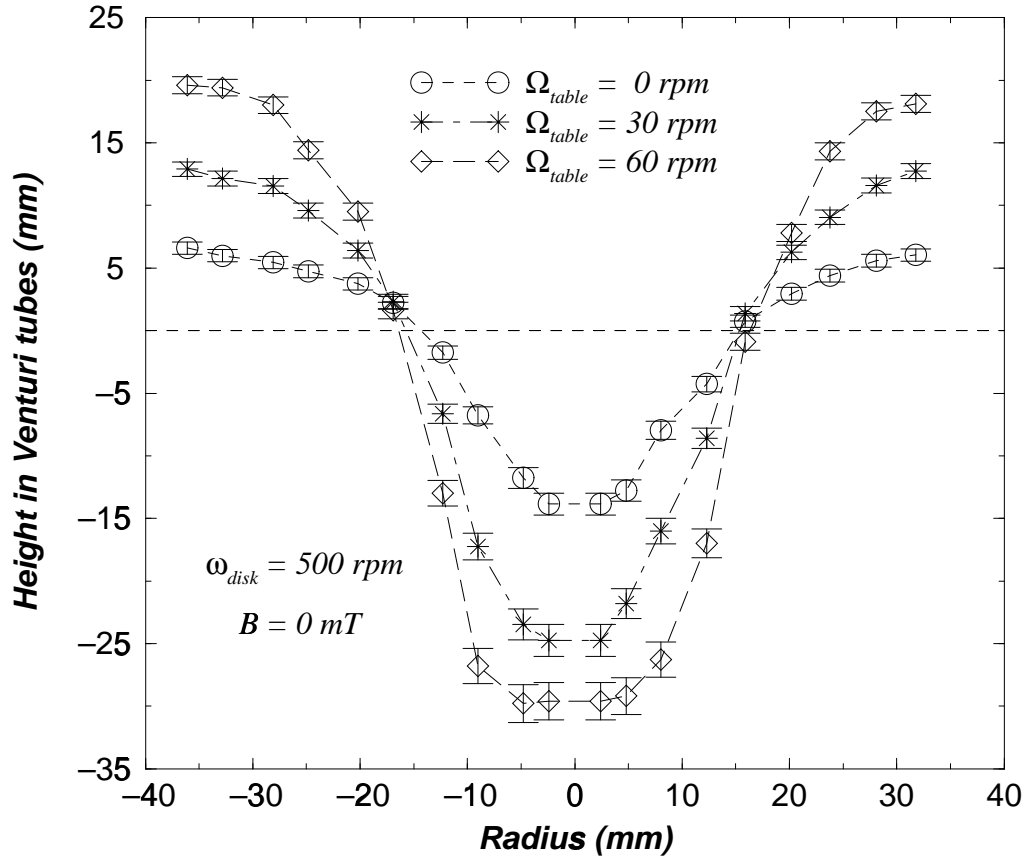


FIG. 3.4 – Pressure profiles measured for a constant velocity of the disk  $\omega_{disk} = 500 \text{ rev min}^{-1}$ , and three velocities of the table  $\Omega_{table} = 0, 30, 60$ . With rapider rotation of the table, the vortex becomes increasingly geostrophic, and its angular velocity tends towards the velocity of the disk.

given in Appendix A. There are only two parameters in this model :  $R_{solid}$ , the radius of the central region of solid body rotation, and  $\omega_{solid}$ , its angular velocity.

From each experimental pressure profile, we derive these two parameters by least-square inversion. Fig. 3.6 shows two examples. We see that the simple 2D-model provides a good fit to the measured profiles. The retrieved angular velocity is close to the imposed disk velocity. We will discuss in section 3.5 the uncertainty on the inverted parameters.

### 3.4.3 Experimental test of the 2-D kinematic model

We have seen that our simple 2-D model provides a good fit to the observed pressure profiles. However, pressure is relatively insensitive to the precise velocity distribution. It is difficult to obtain more information on the velocity field in an opaque liquid such as gallium. To check the validity of our model, we performed similar experiments with water, the rotating table being at rest.

Fig. 3.7 shows the angular velocity as a function of radius at different heights in the

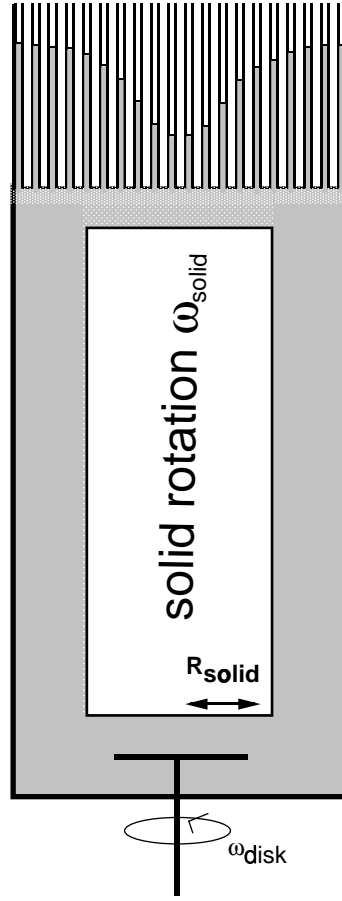


FIG. 3.5 – 2-D kinematic model of the vortex velocity field. The central cylinder of radius  $R_{solid}$  is rotating with a constant angular velocity  $\omega_{solid}$ . The solid part is matched with simple shear at the wall of the cylinder. Each measured profile is inverted numerically for the two parameters of this model,  $R_{solid}$  and  $\omega_{solid}$ .

cylinder. This was obtained by taking pictures, from the top, of illuminated slices of water, of 5 mm thickness containing aluminum flakes. Even though the table is not rotating, we observe that the profile is almost independent of height, and that the velocity in the center of the vortex is close to that of the disk. Vortostrophy was able to make the vortex rigid in the vertical direction. We expect the agreement to become even better under the action of the Coriolis force, when the table is rotating.

We also measured the pressure profile in this experiment, and inverted for the two parameters  $\omega_{solid}$  and  $R_{solid}$  of our 2-D kinematic model. The continuous line in Fig. 3.7 is the dimensionless angular velocity profile deduced from this model. We note that the experimental points do not follow exactly the theoretical shear profile. Indeed, the velocity does not drop to zero until a very thin boundary layer along the wall of the cylinder. Clearly, this Stewartson boundary layer was not part of our modeling. However, the overall shape of the theoretical profile is not too different from the observed one. For a given velocity of the disk, we observe that the inverted velocity at the top,  $\omega_{solid}$ , steadily increases as the rotation rate of the table  $\Omega_{table}$  increases from 0 to 60 rev min<sup>-1</sup>. It tends towards the velocity of the disk, and the solid rotation radius tends towards the radius of the disk (20 mm). Clearly, the geostrophy of the flow

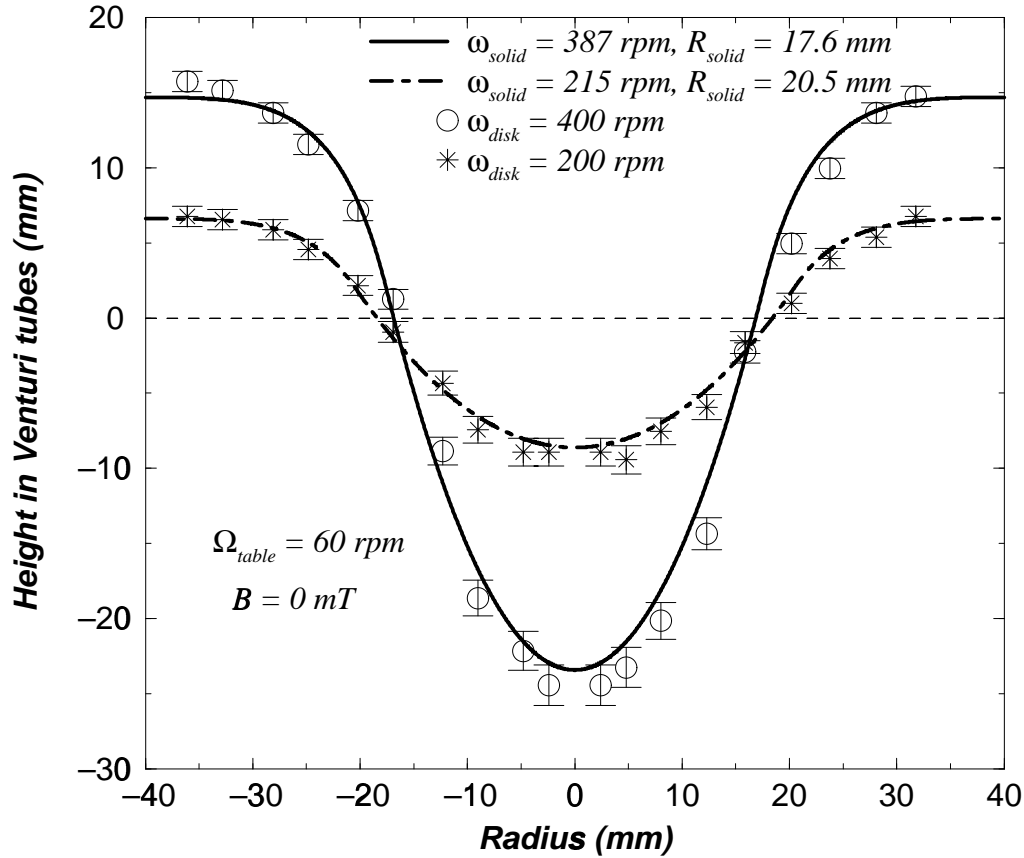


FIG. 3.6 – Pressure profiles measured for a constant velocity of the table  $\Omega_{table} = 60 \text{ rev min}^{-1}$ , and two velocities of the disk  $\omega_{disk} = 200$  and  $400 \text{ rev min}^{-1}$ . For each experimental profile, we represent its theoretical profile deduced from the numerical inversion: each inverted profile is characterized by the two parameters of the model,  $\omega_{solid}$  and  $R_{solid}$ . The inverted profiles stay within error bars of the experimental profiles almost everywhere.

increases with the rotation of the table. For  $\Omega_{table} \geq 60 \text{ rev min}^{-1}$  we see no further variation: the vortex is made completely rigid along the vertical axis. It should be noted that this is true only when the disk rotates in the same sense as the table: contra-rotating vortices are completely destroyed.

### 3.5 Vortex of gallium in a transverse magnetic field

#### 3.5.1 Slowing-down of the vortex and increase in diameter

In a conductor in motion in a magnetic field, the electromotive field  $\vec{U} \times \vec{B}$  displaces electric charges: it creates induced electrical currents, called Foucault currents. Owing to these currents, the conductor is submitted to Lorentz forces  $\vec{J} \times \vec{B}$ , which are opposed to the motion of the conductor and act as a brake; this phenomenon is commonly used to slow down trucks.

Fig. 3.8 shows different pressure profiles obtained with the Venturi tubes, for a

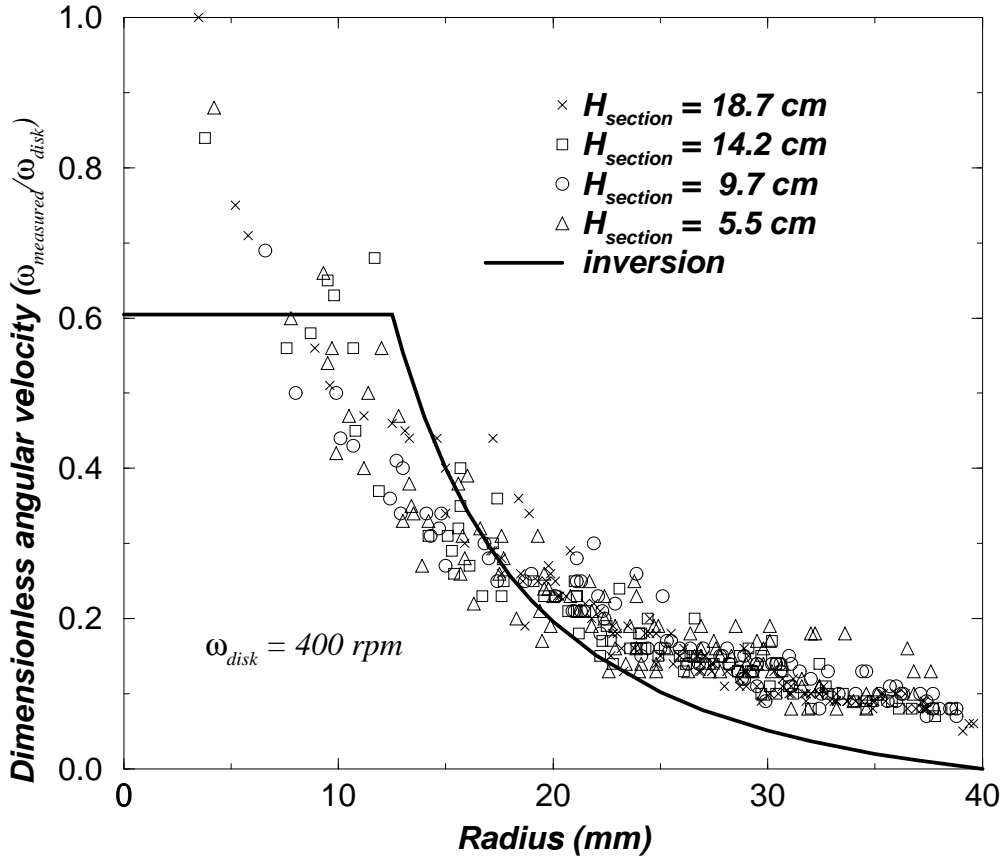


FIG. 3.7 – Dimensionless angular velocities as a function of radius at different heights in water. The table is not rotating and the velocity of the disk is  $\omega_{\text{disk}} = 400 \text{ rev min}^{-1}$ .  $H_{\text{section}}$  is the vertical height of the horizontal section from the bottom of the cylinder. We observe that angular velocity does not vary along the height of the vortex. The continuous line is the angular velocity profile predicted by our 2-D kinematic model. The two parameters of the model,  $\omega_{\text{solid}}$  and  $R_{\text{solid}}$  were inverted from the measured pressure profile.

given rotation rate of the table, a given disk velocity, and for increasing values of the imposed magnetic field. As expected, the first effect of the magnetic field is to decrease severely the rotation of the vortex. We note that this magnetic brake is very efficient: for  $B=30 \text{ mT}$  and  $\Omega_{\text{table}} = 60 \text{ rev min}^{-1}$  (Elsasser number  $\Lambda=0.09$ ), the pressure at the surface is less than half that without magnetic field. When  $B=60 \text{ mT}$  ( $\Lambda=0.35$ ), the central depression is only a few millimeters deep: the motion at the top of the vortex is very slow.

As the Lorentz force acts only upon the flow components that are not parallel to the magnetic field, one might expect the axisymmetry of the vortex to be broken by the magnetic field. This does not seem to be the case. Indeed, we performed a few experiments with a free surface and observed that the vortex depression remained axisymmetric as long as it was observable. We therefore use the same 2-D axisymmetric model to fit the observed pressure profiles.

Fig. 3.9 is a 3D representation of the inverted solid body angular velocities vs.

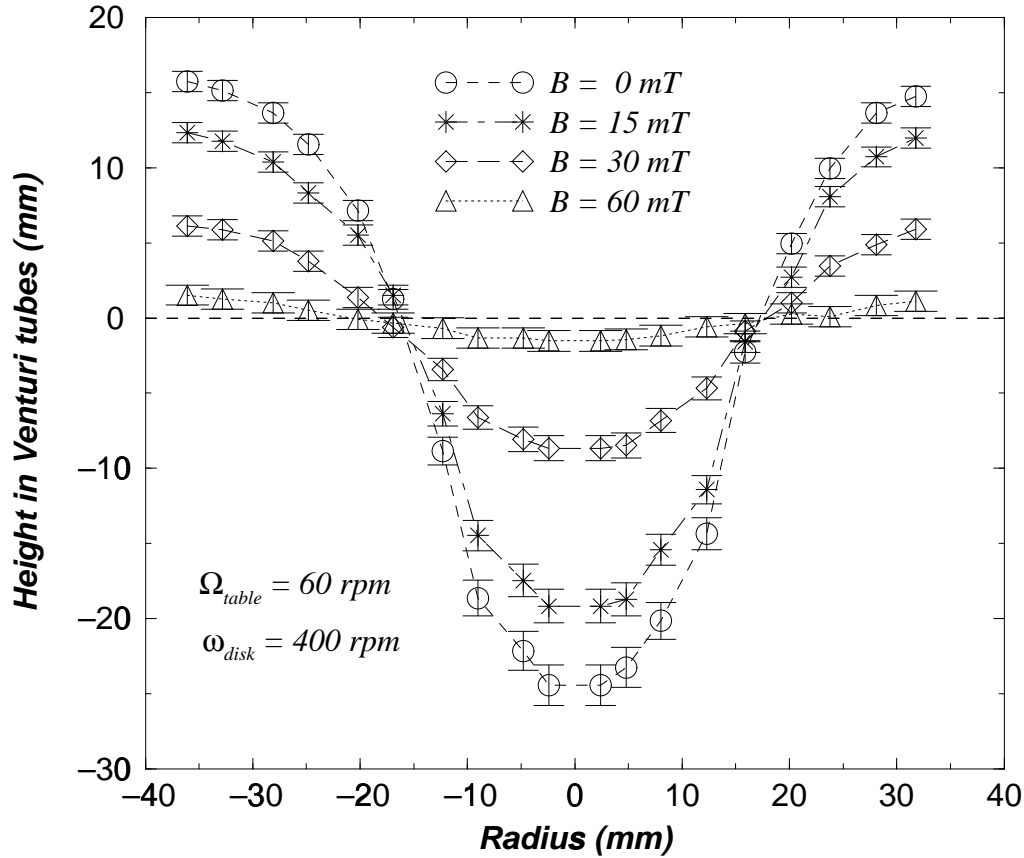


FIG. 3.8 – Pressure profiles in gallium for increasing values of the imposed magnetic field from  $B=0$  mT to 60 mT. The rotation rates of the table and of the disk are constant:  $\Omega_{table} = 60$  rev  $min^{-1}$  and  $\omega_{disk} = 400$  rev  $min^{-1}$ . (Note the strong slowing down imposed by the magnetic field.)

$\Omega_{table}$  and  $B$ , from all the pressure profiles we have measured with  $\omega_{disk} = 400$  rev  $min^{-1}$ . The evolution of  $\omega_{solid}$  along the lines of constant  $B$  clearly shows the effect of the Coriolis force: the inverted solid body angular velocity increases when the rotation speed of the table increases. When the magnetic field is zero, it tends towards the rotation rate of the disk (400 rev  $min^{-1}$ ). Looking now at the evolution of  $\omega_{solid}$  along the lines of constant  $\Omega_{table}$ , we see the strong slowing-down imposed by the magnetic field. It also should be noted that when the table is at rest, the pressure profiles are not deep enough to be inverted for magnetic larger than 37.5 mT, whereas for twice this value the profile for  $\Omega_{table} = 90$  rev  $min^{-1}$  yields a sufficiently deep profile. Our results confirm and quantify the effects of the Coriolis force and the Lorentz force on the vortex velocity. We will propose a combined view of these two effects later in this section.

Let us now examine the inverted solid body rotation radius,  $R_{solid}$ , for the same runs, as shown in Fig. 3.10. When the magnetic field is zero (rightmost columns), we observe a slight increase of  $R_{solid}$  as the rotation rate of the table increases: it tends towards the radius of the disk (20 mm) because of the vortex being made rigid under the action of the Coriolis force. More unexpected is the slight increase of  $R_{solid}$  with



increasing values of the imposed magnetic field (to the left), when the table is rotating ( $\Omega_{\text{table}} \geq 60 \text{ rev min}^{-1}$ ).

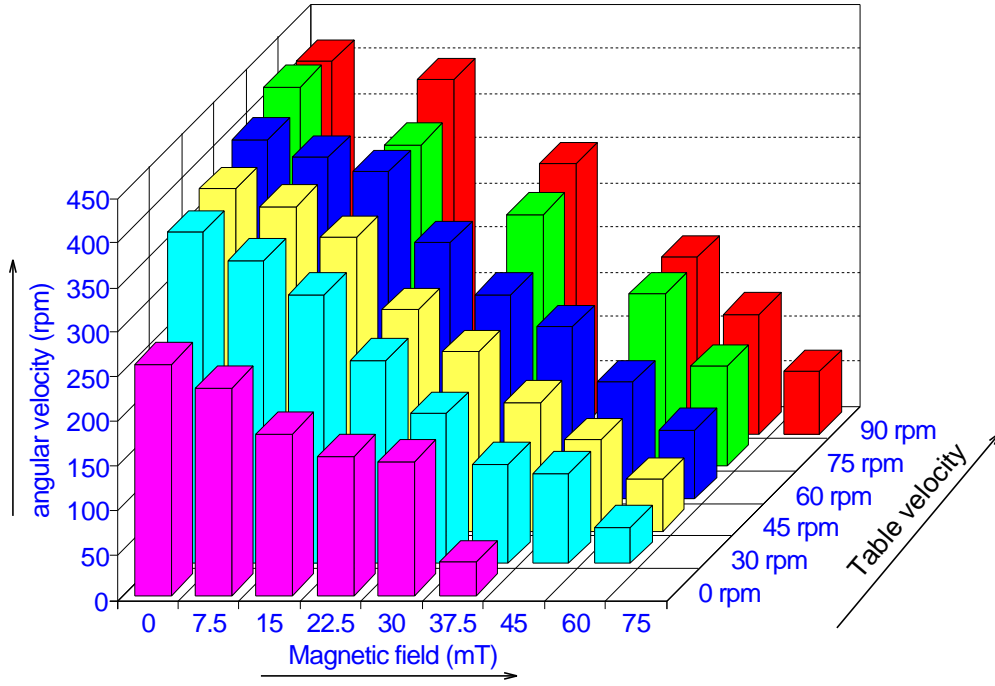


FIG. 3.9 – 3-D representation of the evolution of  $\omega_{\text{solid}}$  vs. the imposed magnetic field (x-axis) and the rotation rate of the table (y-axis), for  $\omega_{\text{disk}} = 400 \text{ rev min}^{-1}$ . Along a straight line parallel to the y axis, we see the effect of the vortex being made rigid owing to geostrophy, which yields higher velocities at the top of the vortex. Along a straight line parallel to the x-axis we observe the slowing-down of the flow owing to the magnetic field. (Note that the horizontal scales are not quite linear.)

As the increase is rather subtle, we want to assess whether it is really required by the data. For a given pressure profile, we define the misfit function  $\chi^2(\omega_{\text{solid}}, R_{\text{solid}})$ , as

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N_{\text{tubes}}=19} \left[ \frac{H_{\text{exp}}(i) - H_{\text{model}}(i)}{\sigma(i)} \right]^2 \quad (3.5)$$

where  $i$ , varying from 1 to 19, indexes the Venturi tubes,  $H_{\text{exp}}(i)$  is the measured height in tube  $i$ ,  $H_{\text{model}}(i)$  is the height for the same tube predicted by our 2-D kinematic model for given  $\omega_{\text{solid}}$  and  $R_{\text{solid}}$ , and  $\sigma(i)$  is the error bar for tube  $i$ . Bearing in mind that the 2D model is a simplified model, we need to include an 'error on the model' in  $\sigma(i)$ :

$$\sigma(i) = \sigma_{\text{exp}}(i) + \sigma_{\text{model}}(i)$$

where  $\sigma_{\text{exp}}$  is the experimental error, discussed in section 3.4. We assume that the relative error on the model  $\sigma_{\text{model}}/H_{\text{max}}$  is independent of the maximum depth  $H_{\text{max}}$

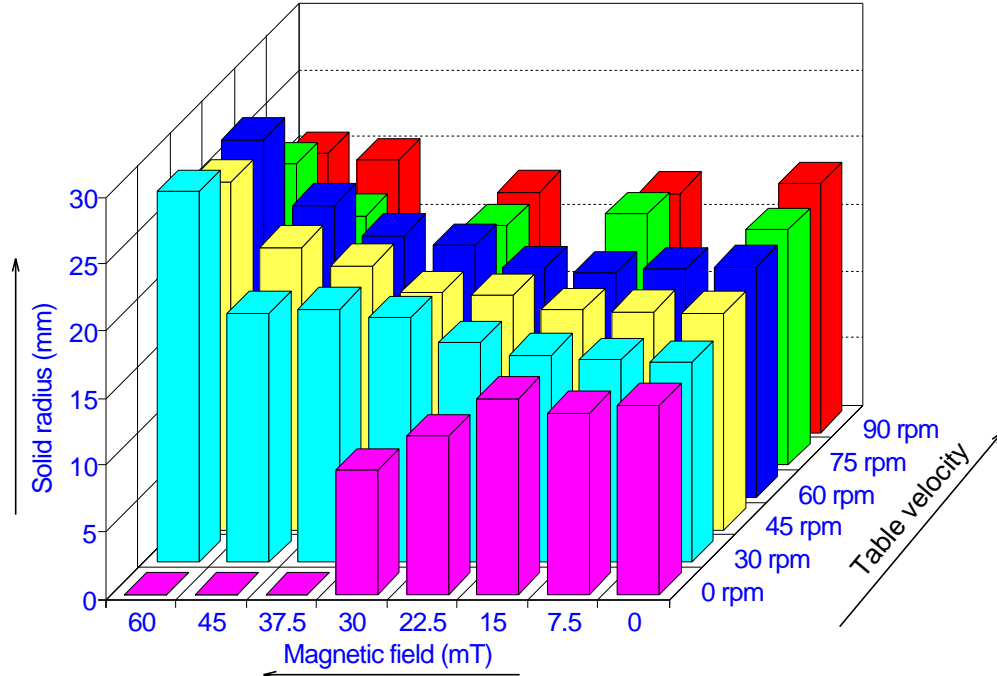


FIG. 3.10 – 3-D representation of the evolution of  $R_{\text{solid}}$  vs. the imposed magnetic field and the velocity of the table, for  $\omega_{\text{disk}} = 400 \text{ rev min}^{-1}$ . We observe that the solid radius of the vortex increases with the magnetic field, when the table is rotating. (Note that the axis for the magnetic field is reversed as compared with the previous figure.)

of the profile, and of  $i$ . We estimate that this relative error is about 40%. We can now contour the variation of the misfit function above its minimum in the  $(\omega_{\text{solid}}, R_{\text{solid}})$  plane, for each experimental profile. Fig. 3.11 shows the results for  $\Omega_{\text{table}} = 45 \text{ rev min}^{-1}$ , and  $\omega_{\text{disk}} = 500 \text{ rev min}^{-1}$ . The slight trade-off between  $\omega_{\text{solid}}$  and  $R_{\text{solid}}$  should be noted. We observe that both the strong decrease of  $\omega_{\text{solid}}$  as  $B$  increases, and the corresponding slight increase of  $R_{\text{solid}}$  (here from 15 to 30 mm) are required by the data.

Going back to the angular velocity results, we note that in plots such as Fig. 3.9, there is a coherent and systematic increase of  $\omega_{\text{solid}}$  as  $\Omega_{\text{table}}$  increases, and decrease as  $B$  increases. It is then reasonable to assume that the value of  $\omega_{\text{solid}}/\omega_{\text{disk}}$  results from a balance between the Lorentz and Coriolis forces. Fig. 3.12 is a plot of all inverted normalized solid angular velocities  $\omega_{\text{solid}}/\omega_{\text{disk}}$  vs. the Elsasser number  $\Lambda = \sigma B^2/\rho\Omega$ , which is precisely the ratio of the Lorentz force to the Coriolis force. The plot contains all available data points for  $\Omega_{\text{table}} = 45\text{-}90 \text{ rev min}^{-1}$ ,  $\omega_{\text{disk}} = 200\text{-}600 \text{ rev min}^{-1}$ , and  $B = 0\text{-}75 \text{ mT}$ . We observe that almost all data points fall on a single curve, confirming that the Elsasser number is the relevant parameter. Whereas the right parameter to quantify the magnetic break on the flow is the Elsasser number, the increase of the solid radius of the vortex is well characterized by the applied magnetic field on the vortex. Fig. 3.13 represents the evolution of the solid radius with the imposed magnetic field for  $\omega_{\text{disk}} = 500$  and  $600 \text{ rev min}^{-1}$ . The increase of the solid radius is of the same order

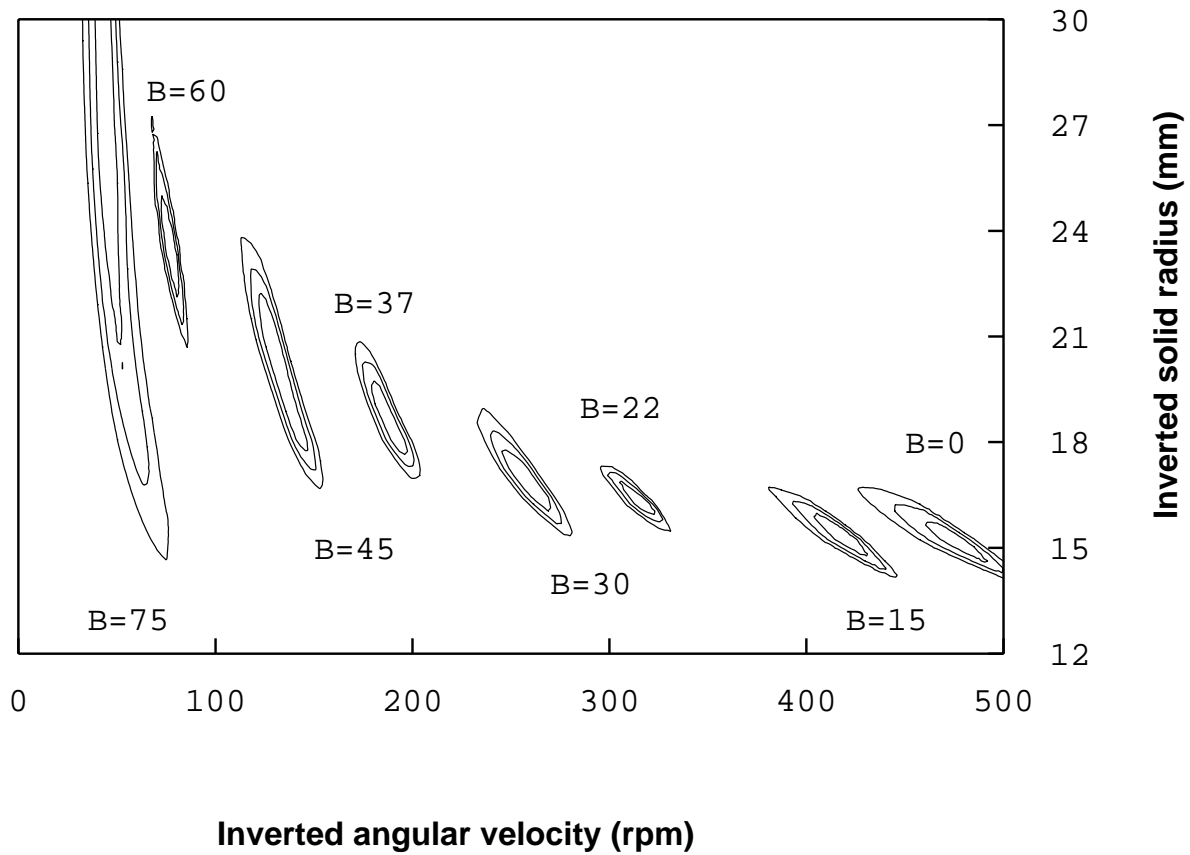


FIG. 3.11 – Contour lines of the misfit function  $\chi^2$  of the pressure profiles, in the  $(\omega_{solid}, R_{solid})$  plane. The contours are 0.3, 0.35, and 0.4.  $\Omega_{table} = 45 \text{ rev min}^{-1}$ ,  $\omega_{disk} = 500 \text{ rev min}^{-1}$ , and the magnetic field varies from  $B = 0$  to 75 mT. (Note the slight trade-off between  $\omega_{solid}$  and  $R_{solid}$ , and the increase of  $R_{solid}$  with  $B$ .)

as that observed for  $\omega_{disk} = 400 \text{ rev min}^{-1}$  in Fig. 3.10. We see that for strong imposed magnetic fields, the radius of solid body rotation greatly exceeds the radius of the disk.

In conclusion in this section, we can say that the first effect of the imposed magnetic field is to slow down the fluid rotation, this slowing-down being controlled by the balance between the Lorentz and Coriolis forces. The second effect is to increase the size of the vortex, to drive more fluid to a body rotation in the core of the vortex.

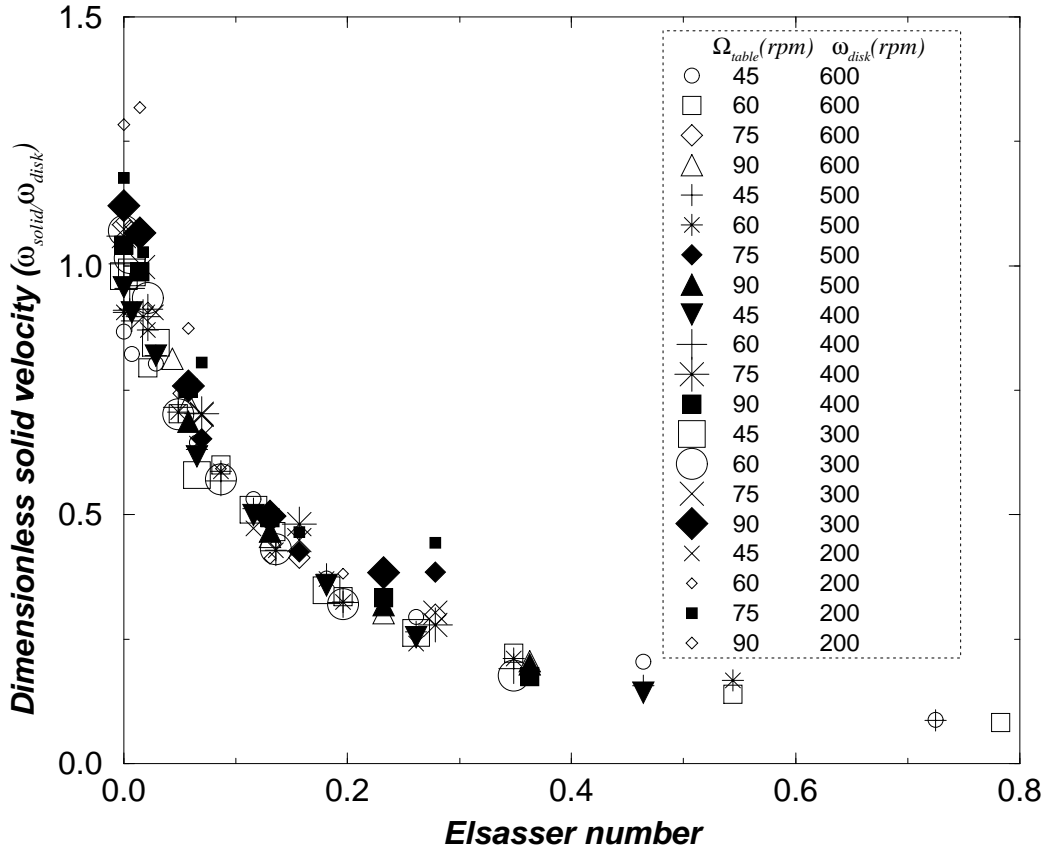


FIG. 3.12 – Normalized solid body angular velocities vs. Elsasser number. All values obtained from experimental profiles with the table rotating at 45, 60, 75, and 90  $\text{rev min}^{-1}$  are represented in this graph. The normalized vortex velocity only depends upon the ratio of the Lorentz forces to the Coriolis forces.

### 3.5.2 Electrical potential and height of the vortex

To understand the geometry and strength of the Foucault currents in the vortex, and to relate our measurements of electrical potentials to the flow in the vortex, we use a numerical model which describes the electrical currents in a geostrophic vortex: the vortex rotates with a stationary 2-D velocity field, as defined previously (Appendix A), and a constant horizontal magnetic field is applied to it.

Mathematical derivations of this model are given in Appendix B. In Fig. 3.14, we see the representation, in the vertical section of the cylinder that contains  $\vec{B}$ , of the circulation of the electrical current

$$\vec{J} = \sigma(\vec{U} \times \vec{B} - \vec{\nabla}\varphi) \quad (3.6)$$

deduced from the numerical simulation.  $\vec{J}$  is the vector of electrical current density,  $\vec{U}$  is the fluid velocity vector,  $\vec{B}$  is the imposed magnetic field and  $\varphi$  is the electrical

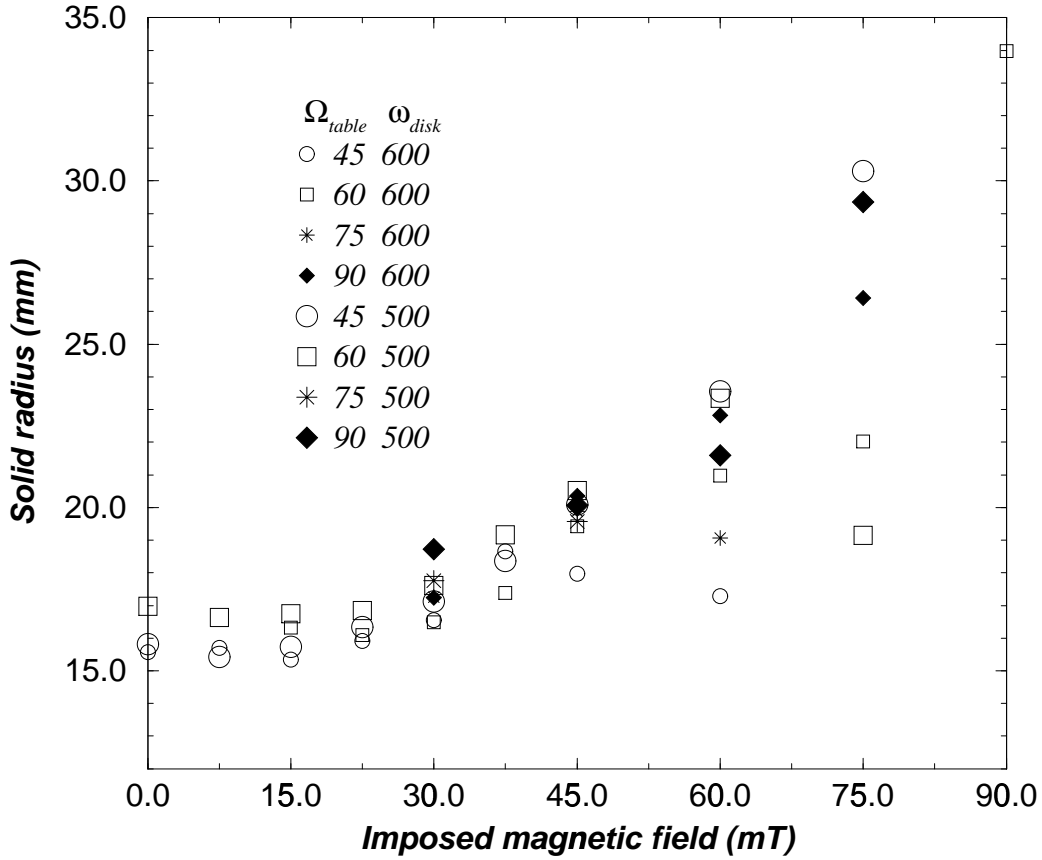


FIG. 3.13 – Solid radius vs. the applied magnetic field  $B$ . The increase of the solid radius is the same order regardless of velocity of the disk  $\omega$ ; it depends only on the applied magnetic field.

potential.

Surface accumulation of electrical charges at the top and the bottom of the vortex (an effect of Lorentz forces), creates a strong electrical field  $\vec{E}$  around these two boundaries. The intensity of this electrical field  $\vec{E}$  decreases rapidly from the top or the bottom to the central part of the cylinder, where the electromotive component of the electrical current  $\vec{U} \times \vec{B}$  is strongly dominant over  $\vec{\nabla}\varphi$ . As  $\vec{U} \times \vec{B}$  is along the  $z$ -axis,  $\vec{J}$  is then mainly vertical in this area.

The electrical current in the vortex consists in a vertical loop with upward currents on one side and downward on the other side. This loop of current is the same all around the cylinder in vertical planes containing a cylinder diameter, but in term of intensity,  $\vec{J}$  is maximum in the vertical plane that contains  $\vec{B}$ , and decreases until  $\vec{J} = \vec{0}$  in the orthogonal plane, where  $\vec{B}$  and  $\vec{U}$  are parallel.

Because the cylinder is bounded by two horizontal insulating plates, the electrical currents must curl at both ends of the vortex. As there is no variation of the electromotive term  $\vec{U} \times \vec{B}$  along the  $z$ -axis, it must be balanced by the potential gradient. Thus, at both ends, the gradient of electrical potential is strong.

In Fig. 3.14, we also see the positions of the five electrodes used in the experiment. They are placed along the height of the cylinder, in the vertical plane that contains  $\vec{B}$ ,

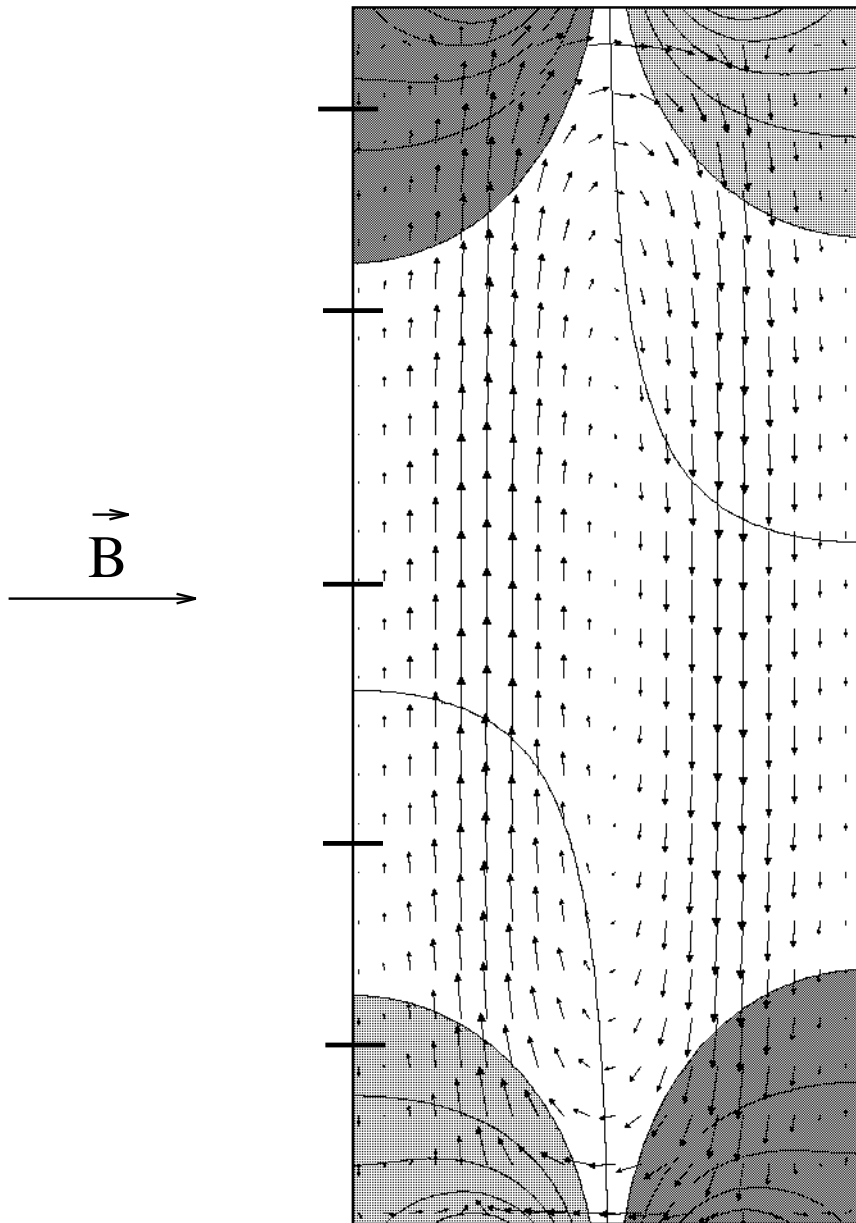


FIG. 3.14 – Numerical model of Foucault electrical currents in the cylinder. View of the vertical section of the cylinder that contains the imposed magnetic field  $\vec{B}$ .  $\vec{J}$  is represented by arrows. The solid lines are equipotentials. Colored surfaces are the regions of highest electrical potentials  $\varphi$ , positive in black and negative in grey. Foucault electrical currents consist of a loop of current with upward currents on the left and downward current on the right. Surface accumulation of electrical charges at both end of the vortex are responsible for high electrical potentials in these areas. The horizontal bars on the left give the positions of the five electrodes in the experiment.

where the intensity of  $\vec{J}$  is maximum in our model. It should be noted that, despite the geometrical complexities we discussed, the electrical potential at any given point is predicted to vary proportionally to the electromotive field  $\vec{U} \times \vec{B}$ .

In Fig. 3.15, we plot the potential differences measured on the four pairs of electrodes vs. the intensity of the actual electromotive field  $U * B$ . This is obtained by taking  $U = R_{\text{disk}} \omega_{\text{solid}}$  where  $\omega_{\text{solid}}$  is inverted from the pressure profiles; it thus takes into account the strong slowing-down imposed by the magnetic field. (It should be noted that we choose not to include the slight variation in  $R_{\text{solid}}$  here, and use  $R_{\text{disk}} = 20$  mm instead, to preserve a simple linear law for the predicted potentials.)

We observe that the measurements from the four electrode pairs roughly line up along four straight lines with different slopes. These straight lines are the predictions of our simple model, when we compute the electrical potentials at the actual positions of our electrodes.  $V_2$  and  $V_3$  yield the smallest signals because they sample the central region of the cylinder, where electrical potentials are small.  $V_1$  and  $V_4$  are larger, because they sample the regions of high electrical potentials, near the bottom and top of the cylinder.

The measurements shown in Fig. 3.15 were obtained for  $\Omega_{\text{table}} = 60 \text{ rev min}^{-1}$ ,  $\omega_{\text{disk}} = 200, 300, 400, 500$  and  $600 \text{ rev min}^{-1}$ , and  $B$  varying from 7.5 to 37.5 mT. It is remarkable that, in this range of parameters, all our measurements are well accounted for by our simple model, once the geometry is well represented, if the proper effective velocity is used. This observation implies that in this regime the vortex retains its axisymmetric geometry, imposed by geostrophy.

For higher values of the imposed magnetic field, the rigidity of the vortex is broken, and the signals on the electrodes are no longer proportional to the electromotive field deduced from the inverted velocity. This seems to happen for values of the Elsasser number higher than about 0.2 (transition at  $B \approx 45 \text{ mT}$  for  $\Omega_{\text{table}} = 60 \text{ rev min}^{-1}$ , and  $B \approx 30 \text{ mT}$  for  $\Omega_{\text{table}} = 30 \text{ rev min}^{-1}$ ).

Fig. 3.16 illustrates how the electrical signals record the loss of rigidity as the magnetic field increases. The previously described four potential pairs, and the potential difference between two transverse electrodes, are plotted against the imposed magnetic field, for  $\Omega_{\text{table}} = 0$  and  $\omega_{\text{disk}} = 300 \text{ rev min}^{-1}$ . For  $B$  up to about 20 mT, the potentials behave gently: we are in the linear, geostrophic, regime. Some saturation level is reached, because the magnetic field slows the vortex down, reducing the  $U * B$  product. When the magnetic field is increased further, we note that, one after the other, electrode pairs  $V_4$ ,  $V_3$ ,  $V_2$ , and  $V_1$  severely drop to negative (resistive) values. This shows that, as the magnetic field increases, the loop of current curls lower and lower in the cylinder, because motions are killed closer and closer to the spinning disk. The transverse electrode pair, which is sensitive to currents induced by vertical motions in the cylinder then yields the largest signal. The same scenario is observed for larger intensities of the transition magnetic field when the table is rotating.

It should be noted that, in the linear, geostrophic, regime the signal on the transverse electrodes is always very small, consistent with vertical velocities (possibly owing to Ekman pumping) being at least one order of magnitude lower than the azimuthal velocities.

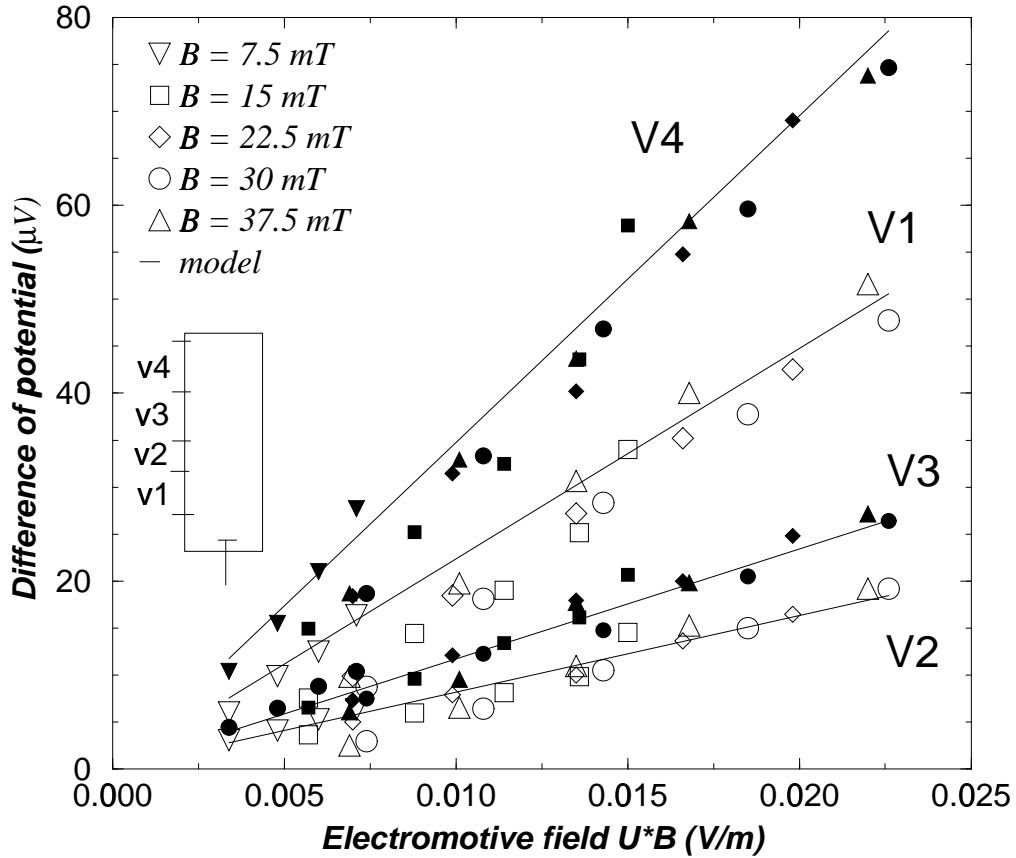


FIG. 3.15 – Differences of potential measured between five copper electrodes that extend into in the cylinder. Measurements obtained for  $\Omega_{table} = 60 \text{ rev min}^{-1}$ ,  $200 \leq \omega_{disk} \leq 600 \text{ rev min}^{-1}$  and the imposed magnetic field  $B$  varying from 7.5 to 37.5 mT. The numerical predictions of these differences of potential (continuous lines) are linear with the electromotive field  $U \times B$ . Experimental data points are coherent with the model until  $B = 37.5 \text{ mT}$ , which proves that the vortex is in a geostrophic state.

### 3.5.3 Induced magnetic field

According to Ampère's equation,  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ , the electrical current  $\vec{J}$  generated in the vortex induces a magnetic field. Assuming a geostrophic vortex with a big loop of current as described in section 3.5.3 and shown in Fig. 3.14, we calculate the magnetic field induced in the horizontal plane at mid-height of the cylinder. In that region of the cylinder, we can safely neglect the  $\vec{\nabla} \varphi$  term, and retain only the electromotive component  $\vec{U} \times \vec{B}$  in  $\vec{J}$ . This component being vertical, the magnetic field it induces is horizontal. The mathematical derivation of the model is given in Appendix C.

Fig. 3.17 is a map of the induced magnetic field deduced from our calculation. It has a dipolar geometry, with an axis orthogonal to the applied field. We clearly see the two components of the dipole: one, on the left side is the magnetic field induced by the part of the loop of current going downward, and the other one, on the right, is induced by  $\vec{J}$  going upward. The maximum intensity of the induced field is in the center of the vortex, perpendicular to the applied magnetic field. We observe that the intensity of



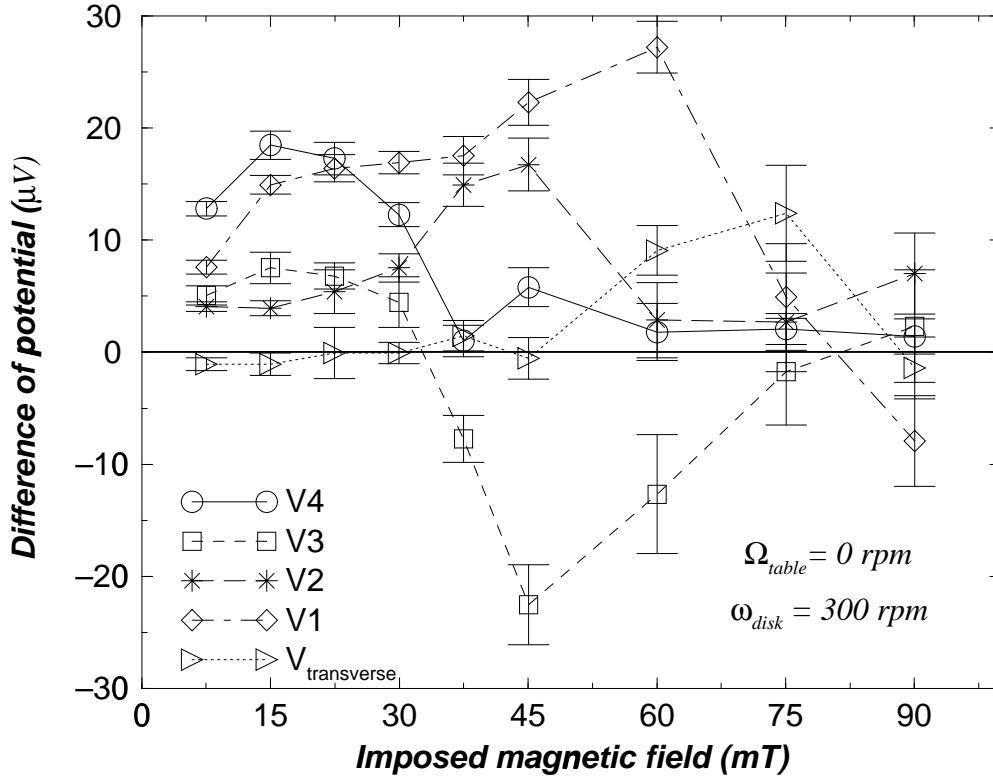


FIG. 3.16 – Differences of potential  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$ ,  $V_4$  and  $V_T$  vs. the imposed magnetic field.  $\Omega_{table}=0 \text{ rev min}^{-1}$ ,  $\omega_{disk}=300 \text{ rev min}^{-1}$  and the magnetic field varies from 7.5 to 90 mT. For  $B \geq 15 \text{ mT}$ ,  $V_4, V_3, V_2$  and  $V_1$  drop one after the other: we leave the geostrophic state. The loop of current does not extend to the top of the cylinder as in a geostrophic vortex; the loop curls lower in the cylinder because of volume accumulation of electrical charges inside the vortex.

the induced magnetic field decreases sharply outside the cylinder. Unfortunately with the gaussmeter, we had to measure  $B_{induced}$  outside the vortex; we approach with the probe as close as we can to the wall of the cylinder.

Fig. 3.18 represents the experimental induced magnetic field over the applied magnetic field vs. the magnetic Reynolds number,  $Re_m = \mu_0 \sigma U L$ ; we take  $U = R_{disk} \omega_{solid}$  and  $L = R_{disk}$ , where  $R_{disk}$  is the radius of the disk and  $\omega_{solid}$  the angular velocity deduced from the inversions of the pressure profiles. We took the measurements along the axis of the dipole, just outside the cylinder. Again, we find a remarkable agreement between the observations and the predictions of our simple 'geostrophic' model, once we take the effective velocity deduced from the pressure profile as the velocity scale. The induced magnetic field is much less sensitive to the loss of rigidity recorded by the electrodes:  $B$  as high as 60 mT still yields the expected induced field. According to our model the maximum intensity of the induced magnetic field, in the core of the vortex, is about seven times larger than that measured outside the cylinder, and is represented in Fig. 3.17.

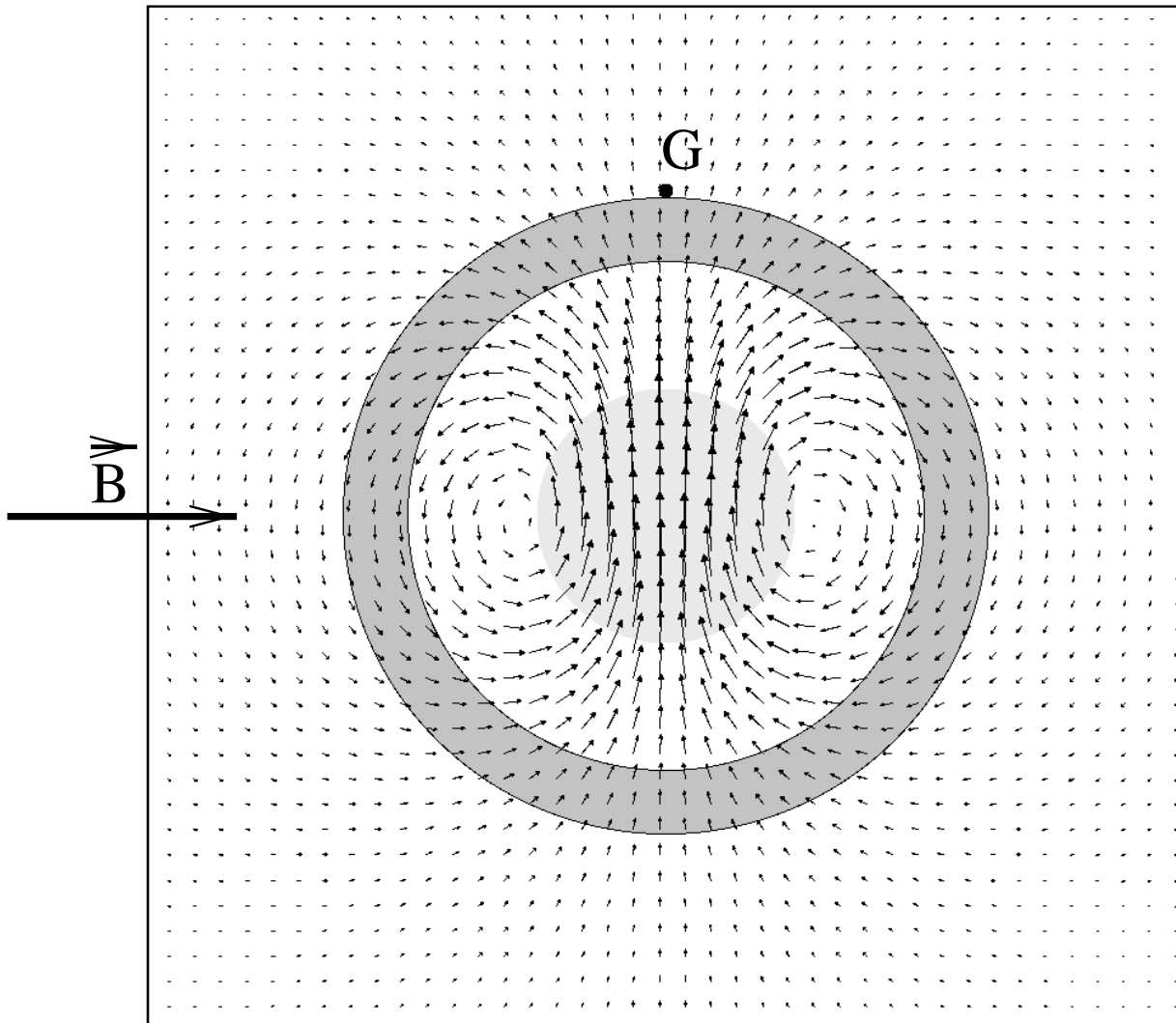


FIG. 3.17 – Map of the induced magnetic field in the horizontal plane at mid-height of a geostrophic vortex. We distinguish two components of the induced magnetic field: one induced by the current going upward, and the other by the current going downward. The induced magnetic field is a dipole whose axis is orthogonal to the applied magnetic field. The dark gray surface represents the walls of the cylinder and the light gray circle is the region of solid body rotation. The maximum induced magnetic field is in the center of the vortex. The point  $G$  just outside the cylinder marks the position of the gaussmeter probe in the experiment.

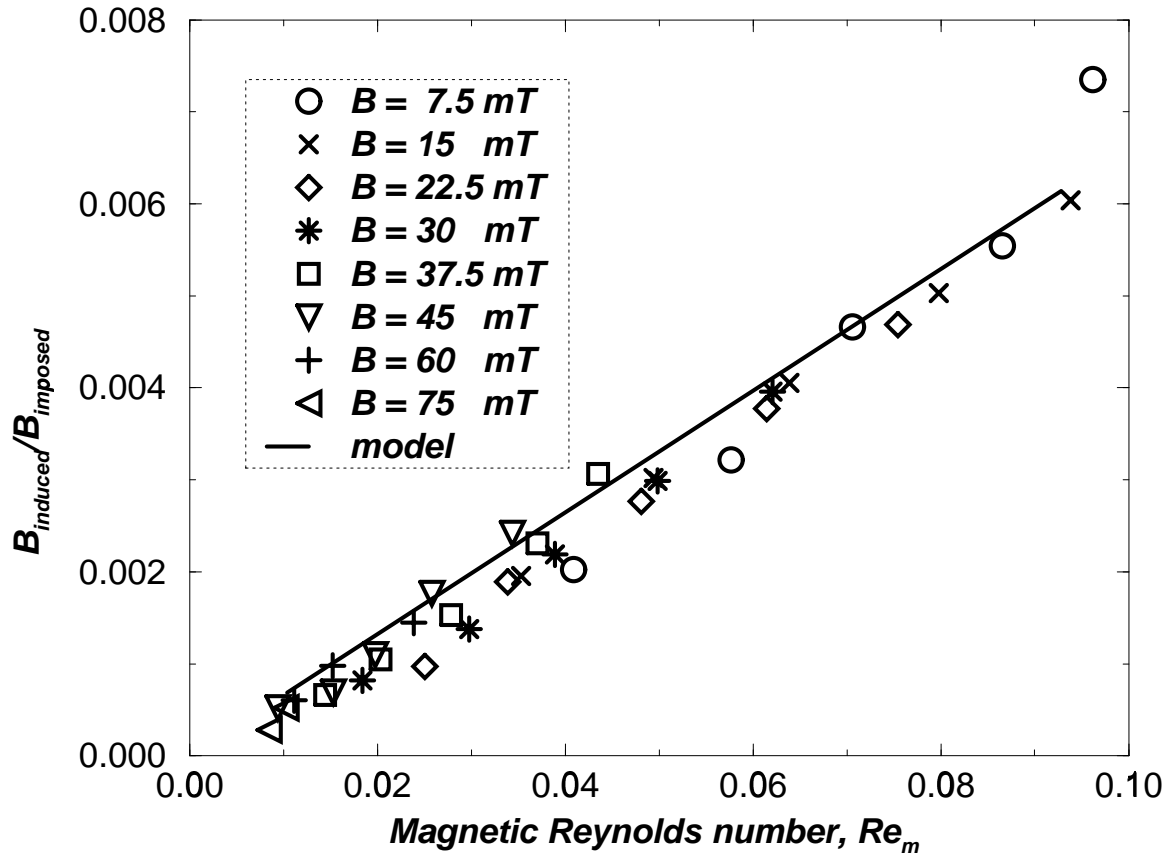


FIG. 3.18 – Normalized induced magnetic field vs. the magnetic Reynolds number. Measurements obtained for  $\Omega_{\text{table}} = 45 \text{ rev min}^{-1}$ ,  $200 \leq \omega_{\text{disk}} \leq 600 \text{ rev min}^{-1}$ , and the imposed magnetic field  $B$  varying from 7.5 to 75 mT. The straight line is the prediction of our model.

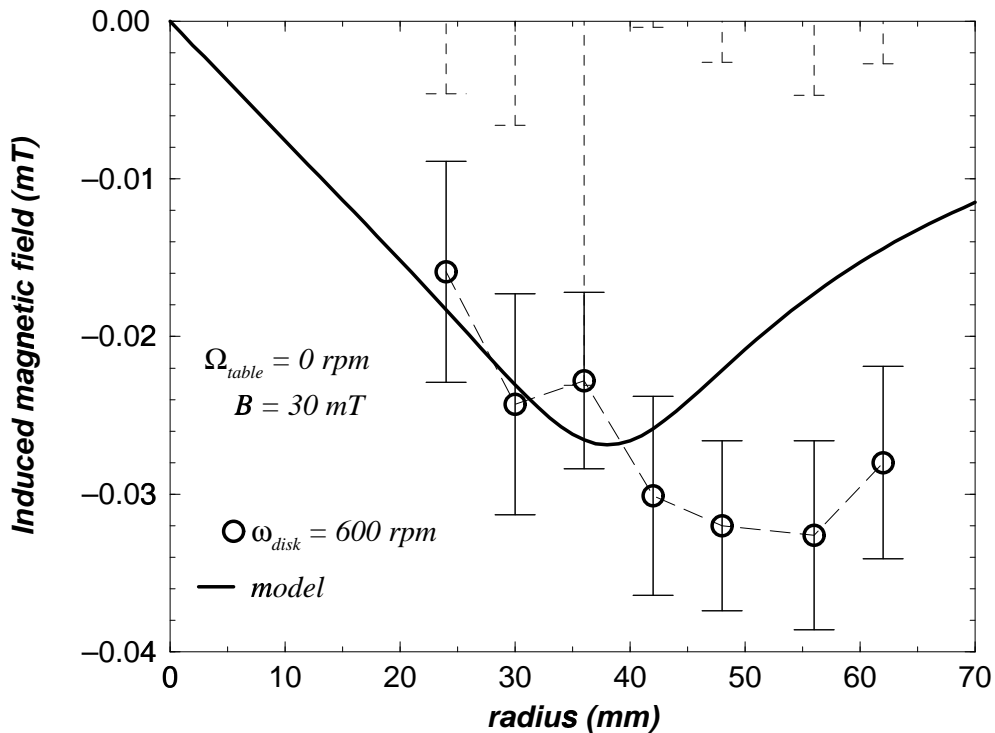


FIG. 3.19 – Horizontal profile of the vertical induced magnetic field above the lid of the cylinder. The measurements were obtained for  $B = 30 \text{ mT}$ ,  $\omega_{disk} = 600 \text{ rev min}^{-1}$ , the table being at rest. The vertical dashed lines give the drift of the background field observed over the time of each measurement. The continuous line is the prediction from our simple model.

Fig. 3.19 shows the vertical induced magnetic field we measure above the top of the cylinder, along a radius perpendicular to the imposed magnetic field. It is compared with the prediction of our simple model. Here the vertical component of the induced magnetic field was computed by integration of the Biot and Savart law, using the current distribution over the entire volume of the cylinder. We observe that the measured maximum intensity, which is about half the horizontal induced field discussed previously, occurred outside the cylinder, in contrast with the model prediction. Nevertheless, the model produces the right amplitude. This is somewhat surprising because Ekman pumping is often considered to be the source of the axial induced magnetic field, and Ekman pumping is not included in our model. We conclude that the observed axial magnetic field results from the horizontal electrical current beneath the insulating lid, with no evidence of contribution from vertical fluid motions.

### 3.6 Conclusion

Our experimental study of the effect of a horizontal magnetic field on a vortex with vertical axis yields four important results :

(1) The dynamical regime is controlled by the balance between the Coriolis and Lorentz forces : the normalized angular velocity at the top of the vortex only depends on the value of the Elsasser number, and not on the Ekman or Rossby number.

(2) The radius of the solid body rotation core of the vortex increases with the applied magnetic field. In our experiments, this increase is modest (at most a factor of two), because the vortex is strongly constrained by the cylinder. It is reminiscent of the large increase of vortex diameter observed in numerical experiments on magnetoconvection (Fearn, 1979; Cardin and Olson, 1995; Glatzmaier and Olson, 1993.). Within the frame of our simple kinematic model, we could not derive an adequate explanation of this phenomenon. It should be noted that a related problem was treated by Parker (1966) and Gubbins and Roberts (1987); they looked at the effect of a magnetic field on a rapidly rotating solid conducting cylinder, and found that the magnetic field is pushed out from the cylinder. Although their calculation assumes a fixed diameter, it gives the intuition that a natural vortex would contract, so as to minimize the field expulsion (P.H. Roberts, personal communication, 1992). This is the opposite to what we observe in our experiments. However, their calculation is valid for  $Re_m$  of order 1, whereas  $Re_m$  is always less than 0.1 in ours experiments.

(3) We observe that geostrophy is preserved for Elsasser numbers up to 0.2. This is clearly demonstrated by the linearity of the electrical signals with the electromotive term. For higher Elsasser numbers the same signals, which are very sensitive to any geometric change, indicate a gradient of the azimuthal velocity with depth, with smaller velocities at the top of the vortex, and the appearance of growing vertical velocities. However, the good agreement between the observed induced magnetic field (which yields a more global view) and the predictions of our simple model suggest that the vortex remains almost two-dimensional, with a strong influence of rotation, up to Elsasser number of order unity. Therefore, it might be appropriate to assume geostrophy, or at least some rigidity along the rotation axis, even in the dynamo regime.

(4) We measure a significant axial (vertical) induced magnetic field at the top of the vortex, which is in fair agreement with the predictions of our simple model. It is often assumed that the helicity of the flow in a vortex (which results from the combination of the strong azimuthal velocities with vertical velocity owing to Ekman pumping) is responsible for the conversion of toroidal to axial field (Busse, 1975; Gubbins and Roberts, 1987). Here the mechanism is different : in our model, it entirely results from the presence of an insulating lid on top of the vortex, which forces the electrical currents to form a horizontal jet linking the two vertical branches of the current distribution. No vertical velocity is needed. It would be interesting to see if this mechanism plays a role in the geodynamo.

Another important outcome of our experimental study is a better understanding of the potential and difficulties of magnetohydrodynamics experiments using liquid gallium. We found that gallium was a very good working fluid. Special care needs to be taken in order to avoid oxidation and contact with metals, but it is much more suited to laboratory operation than mercury or sodium, and providing excellent electromagnetic properties.

In our study, information on the velocity field is essential: we need to know the effective velocities in the vortex, so as to estimate the actual dynamical balance. The pressure measurements at the surface did provide an accurate, through integrated, control. The electrodes provide a very sensitive probe of the flow, but through a complex mechanism – the slight imbalance between the electromotive and resistive electrical field. Their use requires a good model of the geometrical effect.

The measurement of the induced magnetic field yields a more global picture of the interaction of the flow with the magnetic field. In our set-up, the measured signals were not very large as compared with the observed drift.

Overall, our experiments lead us to believe that the experimental realization of a realistic self-induced dynamo is not out of reach. However, its understanding will require a method that can provide an adequate knowledge of the velocity field inside the conductive liquid.

## Acknowledgments

This study would not have taken place without the contribution of Rhône-Poulenc, who lent us the gallium used in the experiment. We gratefully acknowledge their support. As crucial was the access to the rotating table of the Laboratoire des Ecoulements Géophysiques et Industriels in Grenoble. We cheerfully thank Emil Hopfinger for hosting our experiment, and Serge Layat for his invaluable technical assistance. A preliminary experiment was performed on a demonstration rotating table at the Palais de la Découverte in Paris. We gratefully acknowledge the staff of that museum, and in particular Andrée Bergeron, and its Director Michel Demazure. We thank Yannick Ricard and Bénédicte Pascal for discussions and assistance. We thank Fritz Busse for helpful comments. This study was supported by the Centre National de la Recherche Scientifique, in particular through grants of the GdR Mécanique des Fluides Géophysiques et Astrophysiques, and CNRS-INSU DBT Terre Profonde (Contribution number 12).

## Appendix A: Mathematical derivation of a 2-D kinematic model in a vortex

We consider a vortex in an incompressible fluid. We suppose that the temperature is constant in the flow. We want to derive a stationary and axisymmetric solution velocity model.

We write the two classical Navier-Stokes equations in a fixed frame with the cylindrical coordinates  $(r, \theta, z)$  (In these equations, the rotation of the table, and consequently the Coriolis force do not appear; actually, we look for a 2-D solution because we are in a geostrophic flow, then the large influence of the Coriolis force is implicitly taken into account in the Navier-Stokes equations (A1) and (A2))

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \quad (\text{A1})$$

$$\rho(\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{U} = \rho\vec{g} - \vec{\nabla}p + \mu\nabla^2\vec{U} \quad (\text{A2})$$

$\rho$  is the fluid density,  $\vec{U}$  the fluid velocity vector in a fixed frame,  $\vec{g}$  the gravity vector,  $p$  the fluid pressure and  $\mu$  the dynamic viscosity of the fluid.

We assume that the core of the vortex is in rigid rotation, characterized by:

$$\vec{U}(r) = r\omega_{\text{solid}} \vec{e}_\theta \quad \text{for } 0 \leq r \leq R_{\text{solid}} \quad (\text{A3})$$

with  $0 < R_{\text{solid}} < R_{\text{cylinder}}$ ,  $R_{\text{cylinder}}$  being the radius of the cylinder. The boundary condition on the wall is:

$$\vec{U} = \vec{0} \quad \text{for } r = R_{\text{cylinder}} \quad (\text{A4})$$

We suppose that there is no radial or axial motions: hence,  $U_r = U_z = 0$  everywhere. The mass equation and the z-component of the momentum equations are automatically satisfied.

We are left with two equations to solve for  $U_\theta$ :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{U_\theta^2}{r} \quad (\text{A5})$$

$$\frac{\partial^2 U_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial r} = \frac{U_\theta}{r^2} \quad (\text{A6})$$

The right hand term in Eq. (A5) is the centrifugal force. It is equilibrated by the pressure gradient.

We actually have to solve a ‘‘Couette’’ flow (A6), with the angular velocity  $\omega = 0$  for  $r = R_{\text{cylinder}}$  and  $\omega = \omega_{\text{solid}}$  for  $r = R_{\text{solid}}$ .

Writing the angular velocity  $\omega(r) = U_\theta(r)/r$ , the solution is:

$$\omega(r) = -C + \frac{CR_{\text{cylinder}}^2}{r^2} \quad \text{for } R_{\text{solid}} < r < R_{\text{cylinder}} \quad (\text{A7})$$

$$\text{where } C = \frac{\omega_{\text{solid}}R_{\text{solid}}^2}{R_{\text{cylinder}}^2 - R_{\text{solid}}^2}$$

$$\omega(r) = \omega_{\text{solid}} \quad \text{for } 0 < r < R_{\text{solid}} \quad (\text{A8})$$

By integrating Eq. (A5), we compute the pressure at the surface. Expressed as height of liquid  $H(r)$  in the Venturi tubes, we obtain:

$$H(r) = \frac{C^2}{2g} \left[ r^2 - R_{\text{solid}}^2 - R_{\text{cylinder}}^4 \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{R_{\text{solid}}^2} \right) + 4R_{\text{cylinder}}^2 \log\left(\frac{R_{\text{solid}}}{r}\right) \right] + \frac{\omega^2 R_{\text{solid}}^2}{2g} \quad \text{for } R_{\text{solid}} < r < R_{\text{cylinder}} \quad (\text{A9})$$

$$H(r) = \frac{\omega^2 r^2}{2g} \quad \text{for } 0 < r < R_{\text{solid}} \quad (\text{A10})$$

where  $H(r)$  is measured with respect to the position when  $\omega = 0$ .

According to this 2-D model, the solid body rotation radius is the radius of the parabolic part of the pressure profile. It also should be noted that in this model, density and viscosity do not appear explicitly. It means that whatever incompressible fluid we use, the shape of the pressure profile should be the same. In fact, we found a small difference for the same experiments conditions between pressures profiles of water and gallium. We explained this by bigger capillarity tensions in tubes with water.

## Appendix B: Model of electrical potential in a geostrophic vortex

A vortex of gallium is generated in a cylinder of radius  $R_{\text{cylinder}}$ , of height  $H_{\text{cylinder}}$ , of volume  $V$  and boundaries  $\partial V$ . The vortex is submitted to a constant magnetic field  $\vec{B}$ , orthogonal to the rotation axis of the vortex.

To describe the electrical currents induced in the vortex by the interaction of the velocity field  $\vec{U}$  with the magnetic field  $\vec{B}$ , we write the second Maxwell equation, the Ohm equation, and the equation for conservation of charges, in the stationary case:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \quad (\text{B1})$$

$$\vec{J} = \sigma(\vec{U} \times \vec{B} + \vec{E}) \quad (\text{B2})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho_C}{\partial t} = 0 \quad (\text{B3})$$

where  $\vec{E}$  is the electrical field,  $\vec{J}$  is the density vector of electrical current,  $\sigma$  is the electrical conductivity,  $\vec{U}$  is the velocity vector,  $\vec{B}$  is the magnetic field and  $\rho_C$  is the density of electrical charges.

Boundary conditions are :

$$\vec{J} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{on } \partial V \quad (\text{B4})$$

where  $\vec{n}$  is the normal vector to the electrically insulating walls of the cylinder. This condition expresses that electrical currents must curl inside the cylinder. The velocity field  $\vec{U}$  is taken from Appendix A.

Introducing the electrical potential  $\varphi$ , as  $\vec{\nabla} \varphi = \vec{E}$ , we obtain the following system of equations, written in a cylindrical frame where the origin of the  $z$  axis is at mid-height



of the cylinder:

$$\Delta\varphi = \vec{\nabla} \cdot (\vec{U} \times \vec{B}) = 0 \quad \text{in } V \quad (\text{B5})$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0 \quad \text{for } r = R_{\text{cylinder}} \quad (\text{B6})$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = (\vec{U} \times \vec{B}) \cdot \vec{e}_z = -U_\theta(r)B\cos\theta \quad \text{for } z = \pm H_{\text{cylinder}}/2 \quad (\text{B7})$$

where  $\theta$  is the angle between the imposed magnetic field  $\vec{B}$  and  $\vec{e}_r$ .

Writing  $\varphi$  with separable variables,

$$\varphi = \Theta(\theta)R(r)Z(z) \quad (\text{B8})$$

Laplace Eq. (B5) separates into:

$$(d^2\Theta/d\theta^2) + m^2\Theta = 0 \quad (\text{B9})$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) + \left( k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (\text{B10})$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2} - k^2Z = 0 \quad (\text{B11})$$

Boundary conditions impose to  $\varphi$  a symmetry in  $\cos\theta$ ; we deduce  $m=1$ .

The equation in  $R(r)$  becomes :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) + \left( k^2 - \frac{1}{r^2} \right) R = 0 \quad (\text{B12})$$

The solution of the z-equation is:

$$Z(z) = e^{kz} + e^{-kz} \quad (\text{B13})$$

whose solutions are the classical Bessel functions  $J_1(kr)$  and  $N_1(kr)$ , where only  $J_1(kr)$  is finite at the origin. We deduce the general form of the function  $\varphi$ :

$$\varphi = \sum_{k_i} (\alpha_{k_i} J_1(k_i r) e^{k_i z} + \beta_{k_i} J_1(-k_i r) e^{-k_i z}) \cos\theta \quad (\text{B14})$$

Using the analytical expression of the derivative of  $J_1(k_i r)$ ,

$$\frac{d}{dr} J_1(k_i r) = \frac{k_i}{2} (J_0(k_i r) - J_2(k_i r)) \quad (\text{B15})$$

to write boundary conditions, we deduce from (B6) and (B7) that  $\alpha_{k_i} = -\beta_{k_i}$ , so that:

$$\varphi = \sum_{k_i} \alpha_{k_i} \cos\theta J_1(k_i r) (e^{k_i z} - e^{-k_i z}) \quad (\text{B16})$$

where  $k_i$  and  $\alpha_{k_i}$  are solutions of:

$$J_0(k_i R_{\text{cylinder}}) = J_2(k_i R_{\text{cylinder}}) \quad (\text{B17})$$

$$\sum_{k_i} (\alpha_{k_i} k_i J_1(k_i r)) \left( e^{k_i \frac{H_{\text{cylinder}}}{2}} + e^{-k_i \frac{H_{\text{cylinder}}}{2}} \right) = -U(r)B \quad (\text{B18})$$

We write a numerical program which in a first step finds the  $N$  solutions  $k_i$  of Eq. (B17). In a second step,  $k_i$  solutions are inserted in Eq. (B18); then, we have to solve the matrix system

$$C_{ij}\alpha_j = D_i \quad 1 \leq i \leq N \quad \text{and} \quad 1 \leq j \leq N$$

where

$$\begin{aligned} C_{ij} &= (k_i e^{k_i \frac{H_{\text{cylinder}}}{2}} + k_i e^{-k_i \frac{H_{\text{cylinder}}}{2}}) J_1(k_i r_j) \\ D_i &= -BU(r_i) \end{aligned}$$

with  $r_i$  varying from 0 to  $R_{\text{cylinder}}$

We use the method of least mean square to invert the matrix  $C$ , and obtain the  $\alpha_{k_i}$  coefficients.

We thus derive the electrical potential  $\varphi(r, \theta, z)$  and  $\vec{J}(r, \theta, z)$  the current density vector everywhere in the cylinder.

### Appendix C: Model of induced magnetic field at mid-height of the cylinder

According to Appendix B, the current density vector can be written  $\vec{J} = \sigma(\vec{U} \times \vec{B} + \vec{E})$ . In section 3.5.2, we have observed that, in the middle plane of the cylinder, the electrical field  $\vec{E}$  is negligible. To calculate the magnetic field induced at mid-height of the cylinder, we make the assumption that  $\vec{E} = \vec{0}$ . Using the 2-D kinematic model described in Appendix A, we note that the vector  $\vec{J} = \sigma(\vec{U} \times \vec{B})$  has only one component along the  $z$ -axis, whose amplitude depends upon the radius  $r$  and the angle  $\theta$  in a cylindrical frame.  $\vec{J}$  points upwards or downwards, and is zero in the plane where  $\vec{U}$  and  $\vec{B}$  are parallel. To achieve analytically our calculation, we consider that the lines of density current  $\vec{J}$  are infinite along the  $z$ -axis.

According to Biot and Savart law, the magnetic field induced by one infinite wire with a current  $I$ , oriented along the  $z$ -axis, at a point  $M(r, \theta)$  has the expression

$$\vec{B}_M(r, \theta) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \vec{e}_\theta \quad (\text{C1})$$

where  $R=d(M, M')$  is the distance between the point  $M$  and the wire.

In our case we have infinite lines of density current, or  $\vec{J} dS = \vec{I}$ . Using this last equality and Eq. (C1), dividing the horizontal middle plane of the cylinder in small surfaces, we can compute the magnetic field induced anywhere, making the sum of the magnetic field induced by each surface covered by a density current  $\vec{J}$ . Thus, we define a square surface  $S$  of side  $4R_{\text{cylinder}}$  centered on the cylinder, and we divide this surface in square surfaces  $\Delta S$ . We use in that case cartesian frame  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

The expression of the magnetic field induced at a point  $M(X, Y)$  of the surface  $S$  (inside or outside the cylinder) is

$$\vec{B}_M(X, Y) = \sum_{x, y \in S_{\text{cylinder}}} \frac{\mu_0 J(x, y) \Delta S}{2\pi R} \left( -\frac{Y-y}{R} \vec{e}_x + \frac{X-x}{R} \vec{e}_y \right) \quad (\text{C2})$$

where  $R=d[M(X, Y), M'(x, y)]$  is the distance between the point where the magnetic field is computed and,  $M'$  the point of the cylinder of coordinates  $(x, y)$ .

### 3.7 Etudes complémentaires

#### 3.7.1 Comparaison entre un tourbillon avec surface libre et avec surface rigide

Préalablement aux expériences réalisées sur la table tournante du LEGI, nous avons étudié un tourbillon avec surface libre entraîné par un disque de 30 mm de rayon (et non de 20 mm comme c'était le cas sur la table tournante). Nous avons obtenu la vitesse en haut du tourbillon en mesurant la topographie de la surface libre, en utilisant la réflexion d'un rayon laser à la surface du tourbillon (Brito, 1993). Le modèle de vitesse 2-D cinématique présenté dans l'Appendice A de l'article demeure un très bon modèle de vitesse de ce tourbillon avec surface libre, les deux paramètres ( $\omega_{\text{solide}}$ ,  $R_{\text{solide}}$ ) caractérisant bien la forme de la surface libre.

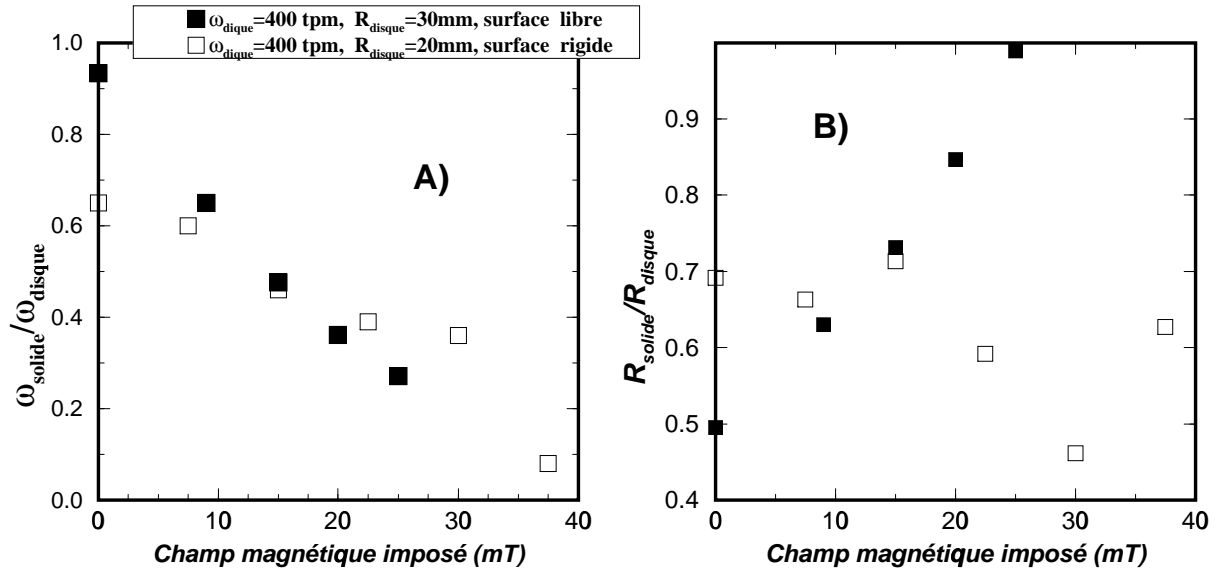


FIG. 3.20 – Comparaison des paramètres ( $\omega_{\text{solide}}$ ,  $R_{\text{solide}}$ ) obtenus pour un tourbillon avec surface libre (carrés noirs) et un tourbillon avec surface rigide (carrés blancs). Ces expériences ont été réalisées dans un repère au repos  $\Omega_{\text{table}}=0$ . La figure A) montre que l'efficacité du freinage par le champ magnétique est identique quelle que soit la taille du disque entraînant le fluide et les conditions limites imposées en surface. Sur la figure B) la représentation du rayon solide  $R_{\text{solide}}$  en fonction du champ magnétique imposé montre que l'élargissement du tourbillon est bien plus net pour les expériences réalisées avec un tourbillon avec surface libre que pour les expériences réalisées avec un tourbillon avec surface rigide.

Des expériences réalisées avec les mêmes vitesses du disque mais des conditions aux limites différentes sont comparées sur la figure 3.20: tourbillons avec surface libre et avec surface rigide. Les deux paramètres ( $\omega_{\text{solide}}$ ,  $R_{\text{solide}}$ ) du tourbillon sont représentés en fonction du champ magnétique imposé. La figure 3.20 A) montre que le tourbillon avec surface libre et entraîné par un disque de 30 mm, sans présence de champ magnétique, est bien rigidifié selon l'axe de rotation dans un repère au repos ( $\Omega_{\text{table}} = 0$ ), contrairement au tourbillon avec surface rigide. Cela indique que l'écoulement secon-

naire important dans le cas du tourbillon avec surface rigide (voir ci-dessous) freine plus efficacement le tourbillon que dans le cas avec surface libre. Par contre, lorsqu'on impose un champ magnétique dans le repère au repos, le freinage du tourbillon que l'on caractérise sur la figure 3.20 A) par le rapport  $\frac{\omega_{\text{solide}}}{\omega_{\text{disque}}}$  est du même ordre pour les deux tourbillons. Cela confirme une des conclusions de l'article, la fonction  $\omega_{\text{solide}} / \omega_{\text{disque}}$  est une fonction du nombre d'Elsasser qui s'écrit en  $B^2/\Omega$ : dans le cas de la figure 3.20, puisque  $\Omega$  la vitesse du référentiel tournant est nul,  $\omega_{\text{solide}} / \omega_{\text{disque}}$  devient uniquement une fonction de  $B$ .

Le second paramètre,  $R_{\text{solide}}$ , indiquant la taille du rayon solide sur la figure 3.20 B), montre que l'augmentation de la taille du tourbillon sous l'effet du champ magnétique est plus significative dans le cas du tourbillon avec surface libre que dans le cas du tourbillon avec surface rigide. Sans champ magnétique, le rapport entre le rayon solide et le rayon du disque est du même ordre pour les deux tourbillons. En revanche, alors que  $R_{\text{solide}}$  reste constant autour d'une valeur moyenne de 10-12 mm lorsqu'on augmente le champ magnétique imposé pour les expériences avec surface rigide,  $R_{\text{solide}}$  augmente de 15 à 30 mm pour les expériences avec surface libre. Spohn (1991) a montré que la différence marquante entre les deux tourbillons est la présence d'un pompage important vers le disque (écoulement axial dans le coeur tourbillonnant) lorsque le tourbillon possède une surface rigide, et d'un pompage faible pour un tourbillon avec surface libre. Spohn montre en effet que l'écoulement secondaire pour un tourbillon avec surface libre est cantonné essentiellement le long des parois latérales du tourbillon. Par conséquent, la figure 3.20 B) nous indique qu'un pompage important vers le disque, dans le cas du tourbillon avec surface rigide, semble défavoriser l'agrandissement du tourbillon soumis à un champ magnétique par rapport au tourbillon avec surface libre. Cette observation concorde avec la figure 3.10: le rayon solide du tourbillon augmente avec le champ magnétique imposé dès que la table est en rotation, la bidimensionnalité du tourbillon augmentant avec la rotation de la table et le pompage diminuant par la même occasion.

En conclusion, le pompage (ou écoulement secondaire dans notre expérience) semble jouer un rôle important dans l'agrandissement des structures dynamiques sous l'effet du champ magnétique.

### 3.7.2 Les courants électriques et le champ magnétique induit au sommet du tourbillon

Le champ de vitesse cinématique 2-D du fluide en interaction avec un champ magnétique imposé horizontal a permis de développer un modèle de circulation de courants électriques (courants de Foucault) dans le tourbillon. Ce modèle est présenté dans l'Appendice A de l'article du chapitre 3. Les figures 3.21 A), B) et C) illustrent ce modèle: la figure 3.21 A) (équivalente de la figure 3.14) représente la géométrie des courants induits le long du tourbillon, et la figure 3.21 B) les courants induits au sommet. La figure 3.21 C) représente le champ magnétique vertical induit au sommet du tourbillon, généré par le bouclage des courants que l'on voit sur la figure 3.21 B): le champ magnétique induit se caractérise par deux maxima de signe opposé au sommet du tourbillon.

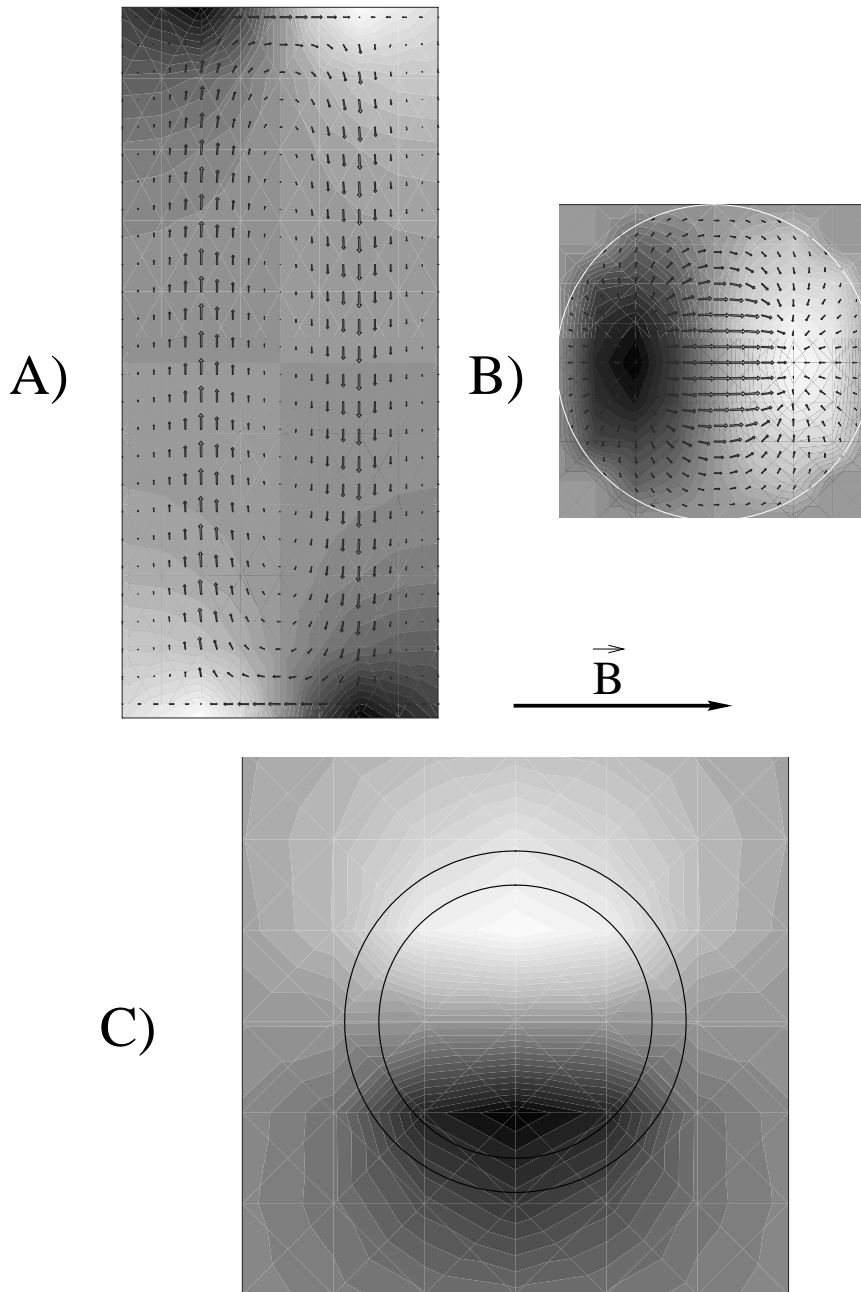


FIG. 3.21 – Circulation des courants électriques  $\vec{J}$  dans le tourbillon et distribution du champ magnétique induit vertical au sommet du tourbillon. A) Coupe transversale et B) vue du haut du cylindre. Les flèches représentent la densité de courants électriques  $\vec{J}$  bouclant dans le cylindre. Les surfaces grisées sont les surfaces d'équipotentiels électriques, en foncé les zones à potentiels positifs et en clair les zones à potentiels négatifs. En A), la boucle de courants verticale est induite par la force électromotrice  $\vec{U} \times \vec{B}$ . En B), les forts gradients de potentiels au sommet du cylindre s'opposent à la force électromotrice et font boucler les courants. C) Géométrie du champ magnétique induit au sommet du tourbillon. Les surfaces grisées claires représentent le champ magnétique induit positif, et les surfaces foncées le champ magnétique induit négatif. Le vecteur champ magnétique  $\vec{B}$  indique la direction du champ magnétique imposé.

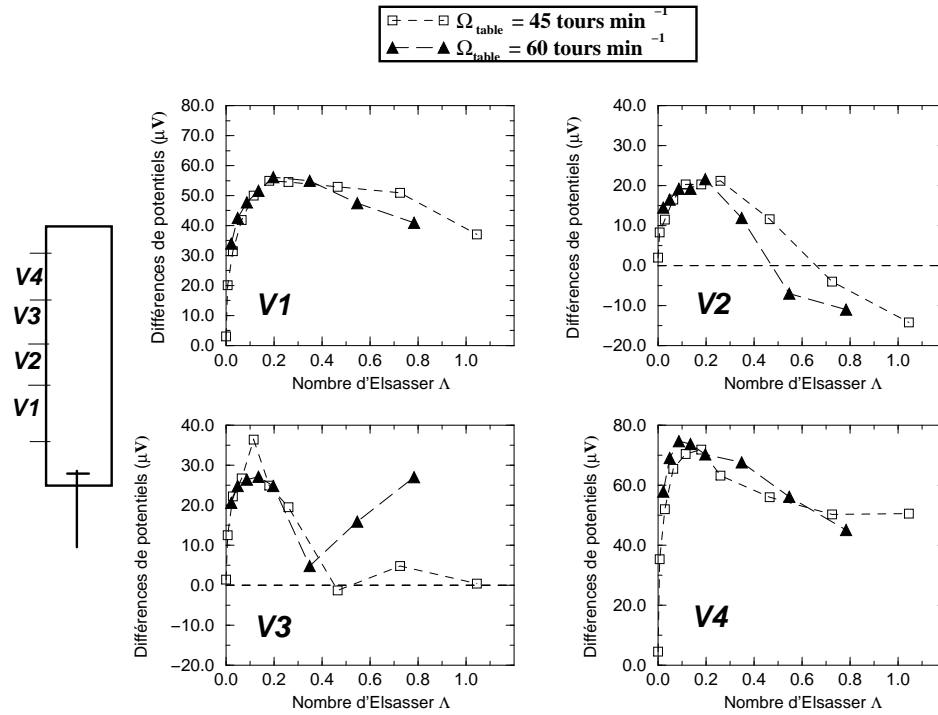


FIG. 3.22 – Mesures expérimentales des différences de potentiels électriques  $V_1, V_2, V_3, V_4$  en fonction du nombre d'Elsasser, pour une vitesse du disque  $\omega_{\text{disque}} = 600$  tours  $\text{min}^{-1}$  et deux vitesses de la table tournante  $\omega_{\text{table}} = 45, 60$  tours  $\text{min}^{-1}$ .  $V_1$  et  $V_4$  demeurent élevées avec le nombre d'Elsasser alors que  $V_2$  et  $V_3$  chutent près de zéro pour  $\Lambda \geq 0.2$  avant de recroître et décroître respectivement vers  $\Lambda \simeq 0.5$ .

### 3.7.3 Etude de la bidimensionnalité du tourbillon en fonction du nombre d'Elsasser

Les cinq électrodes de cuivre disposées le long du cylindre ont mesuré des différences de potentiels électriques au sein du tourbillon de gallium. Le modèle de courants de Foucault dans le tourbillon a permis d'interpréter quantitativement les mesures expérimentales: la figure 3.15, par exemple, montre que lorsque le tourbillon est géostrophique, les mesures de différences de potentiels sont en corrélation avec les prédictions du modèle. Du point de vue qualitatif cette fois, les mesures de différences de potentiels ont montré que les courants électriques se confinaient de plus en plus près du disque en rotation au fur et à mesure que l'on augmentait le champ magnétique imposé et que la bidimensionnalité du tourbillon se brisait. Dans cette section, nous allons caractériser la bidimensionnalité du tourbillon en fonction du nombre d'Elsasser en utilisant les mesures de différences de potentiels effectuées sur la table en rotation.

La figure 3.22 représente des mesures de différences de potentiels en fonction du nombre d'Elsasser, pour une vitesse du disque  $\omega_{\text{disque}} = 600$  tours  $\text{min}^{-1}$  et deux vitesses de la table tournante  $\Omega_{\text{table}} = 45, 60$  tours  $\text{min}^{-1}$ . Ces différences de potentiels sont moins simples à interpréter que celles mesurées pour  $\Omega_{\text{table}} = 0$  tours  $\text{min}^{-1}$  sur

la figure 3.16: en effet, pour la table à l'arrêt,  $V_4$ ,  $V_3$ ,  $V_2$ ,  $V_1$  décroissent à tour de rôle vers 0 indiquant que les courants se confinent au fur et à mesure près du disque, c'est-à-dire près du gallium demeurant en mouvement. Sur la figure 3.22 où la table est en rotation,  $V_1$  et  $V_4$  continuent à mesurer d'importantes différences de potentiels quel que soit le nombre d'Elsasser, alors que  $V_2$  et  $V_3$  chutent brutalement vers 0 dès lors qu'on se trouve au delà d'un nombre d'Elsasser de 0.2.

Afin d'analyser plus en détail ces mesures de différences de potentiels, nous utilisons le modèle de courants bidimensionnels dans le tourbillon: ce modèle prédit que  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  et  $V_4$  (loin de la base et du sommet du tourbillon) sont proportionnelles au champ électromoteur  $U * B$  lorsque le tourbillon est géostrophique.

Sur la figure 3.23 A),  $U_{solide} * B_{imposé}$  est représenté en fonction du nombre d'Elsasser pour les expériences de la figure 3.22, les vitesses  $U_{solide}$  provenant des mesures effectuées avec les tubes de Venturi. En comparant  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$ ,  $V_4$  sur la figure 3.22 et  $U_{solide} * B_{imposé}$  sur la figure 3.23 A), on remarque que jusqu'à  $\Lambda \simeq 0.2$  il y a bien proportionnalité entre les différences de potentiels et le champ électromoteur. Chaque quantité croît jusqu'à un pic intervenant vers  $\Lambda \simeq 0.15$ . Ceci confirme les résultats de la figure 3.15 où l'on a montré que le tourbillon reste bidimensionnel jusqu'à un nombre d'Elsasser d'environ 0.15.

Pour  $\Lambda \geq 0.2$ ,  $V_1$  et  $V_4$  décroissent lentement comme le produit  $U_{solide} * B_{imposé}$ , mais  $V_2$  et  $V_3$  s'écartent rapidement du modèle. On voit que  $V_2$  devient même négative aux alentours de  $\Lambda = 0.4$ : on peut comprendre pourquoi en regardant l'expression du gradient de potentiels

$$\vec{\nabla}\varphi = (\vec{U} \times \vec{B}) - \frac{\vec{J}}{\sigma} \quad (3.3)$$

Comme on l'a vu précédemment, lorsqu'on est dans un tourbillon géostrophique comme dans le cadre de notre modèle de courants (figure 3.21 A), les courants  $\vec{J}$  à mi-hauteur dans le tourbillon sont induits par le terme  $(\vec{U} \times \vec{B})$  de l'expression (3.3). Lorsque le tourbillon quitte l'état géostrophique et que les mouvements du gallium sont confinés au voisinage du disque, il existe toujours une région près du disque où les courants sont induits par le terme d'induction dans (3.3). Par contre, juste au dessus de cette région, le fluide est efficacement freiné et le terme d'induction dans (3.3) devient plus faible que le terme "résistif"  $-\frac{\vec{J}}{\sigma}$ . On comprend alors que les courants électriques vont toujours boucler verticalement dans la région au dessus du disque mais que, puisque cette région est de nature résistive lorsque le tourbillon n'est pas géostrophique, le gradient de potentiels  $\vec{\nabla}\varphi$  change de signe d'après (3.3). Il faut cependant préciser que cette démonstration n'est que qualitative puisque si  $V_2$  change effectivement de signe pour  $\Lambda \geq 0.3$ ,  $V_3$  demeure quant à elle positive sur la figure 3.22.

Ce que l'on peut conclure de cette étude des mesures d'électrodes est que le tourbillon quitte un état géostrophique pour des nombres d'Elsasser supérieurs à 0.2, la rupture de la géostrophie dans notre cas signifiant que les mouvements près du disque sont de nature différente de ceux dans le coeur du vortex.

La figure 3.23 B) représente le champ magnétique induit mesuré à mi hauteur du tourbillon en fonction du nombre d'Elsasser, pour la même série d'expériences que sur les figures 3.22 et 3.23 A). Cette figure montre que des courants axiaux continuent à induire un champ magnétique transverse à mi-hauteur du cylindre pour  $\Lambda \geq 0.2$ . Ces

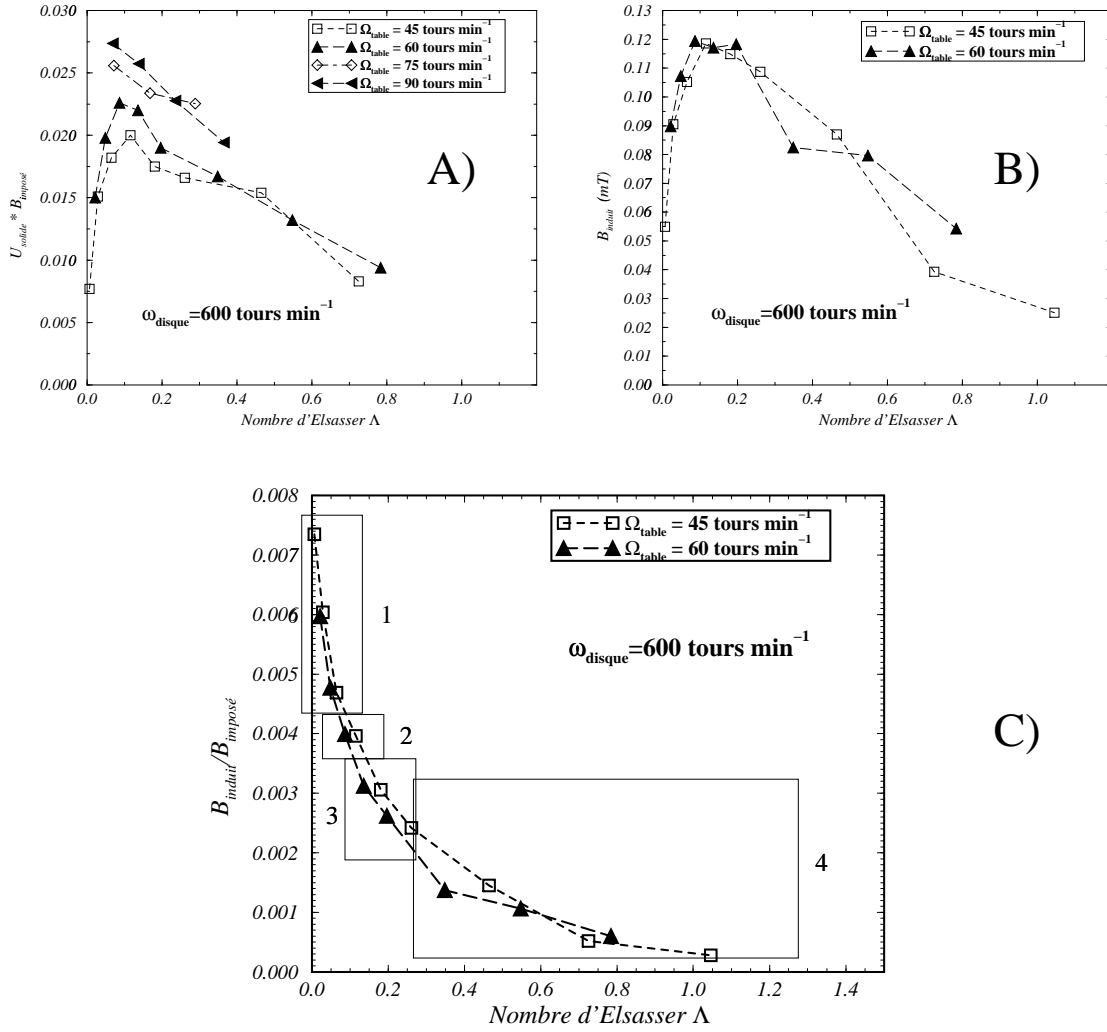


FIG. 3.23 – Champ électromoteur  $U_{solide} * B_{imposé}$ , champ magnétique induit  $B_{induit}$  et rapport entre le champ magnétique induit et le champ magnétique imposé  $\frac{B_{induit}}{B_{imposé}}$  en fonction du nombre d'Elsasser pour des expériences réalisées avec  $\omega_{disque} = 600 \text{ tours min}^{-1}$  et  $\Omega_{table} = 45, 60, 75 \text{ et } 90 \text{ tours min}^{-1}$ .



mesures démontrent que même lorsque la géostrophie de l'écoulement est rompue, les courants électriques générés près du disque continuent à aller boucler à une certaine hauteur dans le tourbillon, dans des régions que l'on a qualifiées de résistives dans le paragraphe précédent.

Nous remarquons sur les figures 3.22, 3.23 A) et 3.23 B) que les différences de potentiels, le champ électromoteur et le champ magnétique induit possèdent une valeur maximale commune vers  $\Lambda = 0.1$ . Cela s'explique par le fait que lorsque le tourbillon est géostrophique, ces 3 quantités sont proportionnelles entre elles selon notre modèle de tourbillon géostrophique. Nous allons maintenant expliquer pourquoi ce maximum intervient à  $\Lambda \simeq 0.1$ .

La figure 3.23 C) est le rapport du champ magnétique induit sur le champ magnétique imposé en fonction du nombre d'Elsasser, toujours pour les mêmes expériences que sur les figures précédentes. Cette figure est destinée à montrer que le tourbillon passe par des régimes différents dépendant du nombre d'Elsasser: quatre régimes sont indiqués sur la figure 3.23 C).

Dans le régime 1 où  $\Lambda \ll 0.1$ , le champ magnétique imposé est faible et ne freine que très peu l'écoulement. Le rapport  $B_{\text{induit}}/B_{\text{imposé}}$  est maximal et s'explique par un champ magnétique imposé petit. Ce régime donne un grand U mais un faible B ce qui correspond à un champ électromoteur assez important sur la figure 3.23.

Dans le régime 2 où  $\Lambda \simeq 0.1$ , la vitesse du tourbillon géostrophique est diminuée environ de moitié par rapport à la vitesse sans champ magnétique imposé, comme on peut le voir sur la figure 3.12. Ce régime coïncide avec un champ magnétique induit maximal s'étendant entre  $\Lambda \simeq 0.1$  et  $\Lambda \simeq 0.2$  comme on le voit sur la figure 3.23 B). C'est par conséquent dans ce régime que le champ électromoteur  $U_{\text{solide}} * B_{\text{imposé}}$  est maximal.

Dans le régime 3 où  $0.15 \leq \Lambda \leq 0.25$ , le tourbillon est toujours géostrophique mais puisqu'il est davantage freiné que dans le régime 2,  $U_{\text{solide}} * B_{\text{imposé}}$  décroît.

Dans le dernier régime où  $\Lambda \geq 0.2$ , le tourbillon quitte l'état géostrophique et est efficacement freiné, le champ électromoteur décroissant progressivement vers 0.

Pour conclure, il faut savoir que l'étude menée dans ce paragraphe pour  $\omega_{\text{disque}} = 600$  tours  $\text{min}^{-1}$  est caractéristique des autres vitesses du disque: quelle que soit la vitesse de rotation du disque  $\omega_{\text{disque}}$  nous avons observé un maximum pour les différences de potentiels, pour le champ magnétique induit et pour le champ électromoteur aux alentours de  $\Lambda \simeq 0.1$  accompagné d'une rupture de la géostrophie du tourbillon aux alentours de  $\Lambda \simeq 0.2$ .

## Chapitre 4

# Mesure de la dissipation ohmique dans le tourbillon de gallium

### Experiments on Joule heating and the intensity of the Earth's magnetic field

Daniel Brito<sup>1</sup>, Philippe Cardin<sup>1</sup>, Henri-Claude Nataf<sup>1</sup>, Peter Olson<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Département Terre-Atmosphère-Océan, Ecole Normale Supérieure,  
URA 1316 du CNRS, 24 rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France.*

<sup>2</sup> *Department of Earth and Planetary Sciences, Olin Hall,  
Johns Hopkins University, Baltimore, MD 21218, USA.*

Article publié dans *Geophysical Journal International*  
**127**, 339-347 (1996).

#### Résumé:

Dans cet article, nous présentons des mesures de puissance de dissipation ohmique (effet Joule) effectuées dans un vortex de gallium soumis à un champ magnétique uniforme transversal. Nous trouvons que la production de chaleur est proportionnelle au carré de l'intensité du champ magnétique appliqué, pour des champs faibles et modérés, et pour un nombre de Reynolds magnétique inférieur à 1. Pour des champs plus forts, les forces de Laplace détruisent la bidimensionnalité du vortex, et la production de chaleur par effet Joule devient pratiquement indépendante de l'intensité du champ magnétique appliqué. Nous établissons des lois d'échelles qui relient la vitesse du fluide dans le vortex, l'intensité du champ magnétique appliqué, et la puissance ohmique dissipée, pour les régimes bas et haut nombre de Reynolds magnétique. L'application de ces lois

à l'induction magnétique dans le noyau terrestre indique que la production de chaleur par ce mécanisme est assez grande pour limiter l'intensité du champ magnétique dans le noyau.

**Abstract:**

We present measurements of Joule heat production in a fluid gallium vortex permeated by a uniform transverse magnetic field. We find that the Joule heat production increases as the square of the imposed field intensity for weak and moderately strong magnetic fields and magnetic Reynolds numbers up to about one. For stronger magnetic fields, Lorentz forces destroy the two-dimensional structure of the vortex and the Joule heat production becomes nearly independent of the intensity of the imposed magnetic field. We derive scaling laws relating fluid velocity in the vortex, imposed magnetic field intensity and Joule heat production, for both low and high magnetic Reynolds number regimes. Application of these laws to magnetic induction in the Earth's fluid core indicates that Joule heat production by this mechanism is large enough to limit the intensity of magnetic fields within the core.

## 4.1 Introduction

The geomagnetic field is continually regenerated by motions of the electrically conducting iron-rich outer core. Although the concept of a self-sustaining dynamo is widely accepted for the core (Elsasser, 1946; Bullard and Gellman, 1954; Loper and Roberts, 1983; Braginski, 1990; Cardin and Olson, 1992), many of the critical parameters are unresolved. For example the intensity of the magnetic field on the core-mantle boundary is known to be about 0.5 mT (Voorhies, 1986; Bloxham, Gubbins and Jackson, 1989), but inside the electrically conducting core the field intensity is essentially unknown. Some dynamo theories predict intense toroidal fields in the core, of the order 1000 mT (Kumar and Roberts, 1975; Braginski, 1990), whereas other theories predict the core toroidal field is only about as strong as the dipole field (Pekeris, Accad and Shkoller, 1973; Busse, 1975). The Glatzmaier and Roberts (1995) numerical simulation of thermal convection in a rotating, electrically-conducting fluid sphere produced an external magnetic field with an amplitude similar to the Earth's dipolar field with an internal field of the order 10 mT. Zhang and Fearn (1993a) have argued that diffusive instabilities limit the strength of the toroidal field to about 10 mT or less. It is clear from the spread of values among these estimates that the toroidal field is very poorly constrained despite its value would change dramatically our understanding of the dynamo.

Another important but poorly understood process is the mechanism by which the dynamo dissipates energy. It is generally agreed that the kinetic energy in the core is transformed into heat primarily by Ohmic, rather than viscous dissipation (Verhoogen, 1980). The rate of Ohmic dissipation is the Joule heat production, given by

$$P_J = \int_{\text{core}} \frac{J \cdot J}{\sigma} dV \quad (4.1)$$

where  $J$  is the current density and  $\sigma$  is the electrical conductivity. Since

$$\mu_0 J = \nabla \times B \quad (4.2)$$

where  $B$  is the magnetic induction, the process of energy dissipation is closely related to the intensity and the structure of the magnetic field in the core.

Theoretical considerations indicate the dynamo is dissipation-limited, which implies there is a close relationship between the energy available to drive the dynamo and the energy dissipated by the dynamo. For example, in convection-driven dynamos the dissipation is proportional to the convective heat transport  $P_C$  via

$$P_J = \eta P_C \quad (4.3)$$

where  $\eta \simeq 0.1$  is the thermodynamic efficiency factor. Since the core energy budget limits the convective heat transport to roughly  $P_C \leq 5$  TW (Verhoogen, 1980; Lister and Buffett, 1995), the Joule heat production is limited to about  $P_J \leq 0.5$  TW.

The amount of Joule heating associated with the present-day dipole moment of the geomagnetic field is only about  $10^{-2}$  TW, well below the thermodynamic limit. However, it is likely that Joule heating in the core is concentrated in smaller-scale current systems that do not contribute directly to the dipole moment (Gubbins, Masters and Jacobs, 1979). Evidence for dissipation in smaller-scale electrical currents comes from

the spectrum of the geomagnetic field on the core-mantle boundary (CMB). Excluding the dipole term, the power spectrum of the radial field on the CMB is nearly constant out to spherical harmonic degree  $l = 13$ , the limit of resolution of the core field (Hulot and Le Mouél, 1994). Since the magnetic energy spectrum is nearly constant, the energy dissipation spectrum may actually *increase with spherical harmonic degree* over this range, implying that Joule heating is larger at higher degrees, that is, at short length scales.

The experiments we present here illustrate this effect, demonstrating that the Joule heating occurs on the internal length scales of the flow, in particular, the scale of vortices. We measure the dissipation in a fluid vortex permeated by a transverse magnetic field. This serves as a simplified model for dissipation in the core: the vortex represents a single geostrophic convection column with its axis parallel with the axis of rotation (Busse, 1970; Cardin and Olson, 1994; Brito, Cardin, Nataf and Marolleau, 1995) and the transverse magnetic field represents the toroidal magnetic field in the core.

A previous study (Bruto et al., 1995), examined the dynamics of a mechanically-driven geostrophic vortex of gallium in a transverse magnetic field. In that study, the effect of the Lorentz force on the circulation and radius of the vortex was determined, and the pattern of the induced magnetic field was delineated.

Here, we use the same apparatus to measure Joule heating that results from the interaction of the vortex with the imposed magnetic field. The experimental results, up to magnetic Reynolds number of 0.3, are compared with two simplified theoretical models of Joule heating, valid at low and high magnetic Reynolds number, respectively, and then extrapolated to the parameter regime of the Earth's core.

The plan of this paper is as follows. We describe the experiment design in section 4.2, and the Joule heating results are given in section 4.3. A simple scaling law for these results is derived in section 4.4, together with an analytical extension of this law for very large magnetic Reynolds number. In section 4.5, we extrapolate our results to estimate the dissipation in the Earth's core. Conclusions and perspectives are presented in section 4.6.

## 4.2 Experimental approach

### 4.2.1 Experimental set-up

The experimental set-up is essentially the same as in Brito et al. (1995), hereafter referred to as paper I. Figure 4.1 illustrates the main features. A polycarbonate cylinder [8 cm (inner diameter)  $\times$  22 cm (inner height)] is filled with liquid gallium (one liter), and is mounted vertically between the poles of an electromagnet. The physical properties of gallium required for the analysis are listed in Table 1 (Pascal, 1961). The magnet produces a uniform horizontal magnetic field between the two 16 cm diameter poles with a maximum intensity of 80 mT. The magnet axis passes 13 cm above the base of the cylinder.

A fluid vortex with a vertical axis is created in the gallium by the steady rotation of a 4 cm diameter crenellated disk, located 3.8 cm above the base of the cylinder. The disk is connected to a speed and torque controlled motor, via a shaft and drive belt system. The motor is shielded from the fluid in order to avoid interference with the applied or induced magnetic fields.

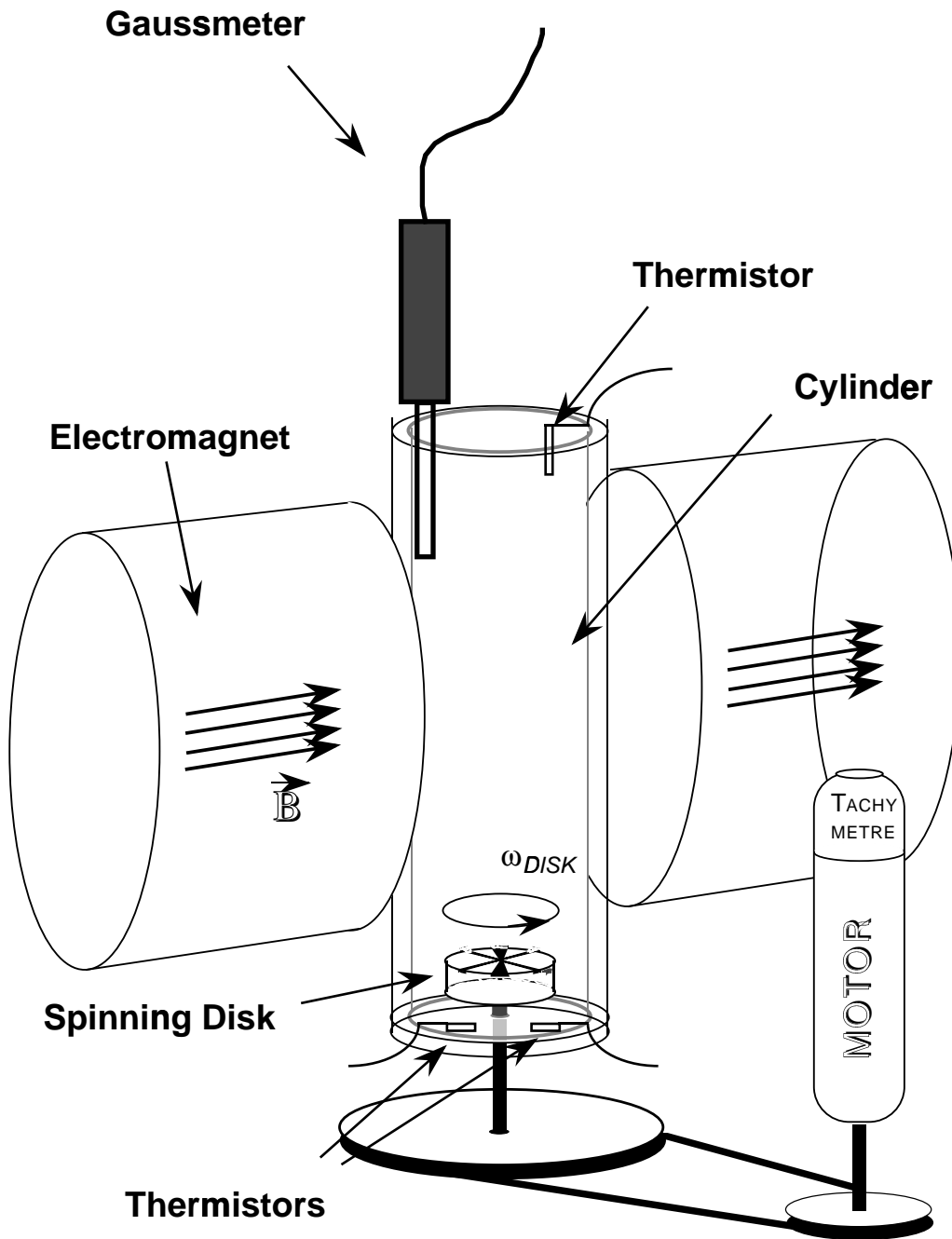


FIG. 4.1 – Sketch of the experimental set-up.

Temperature in the fluid is recorded by a thermistor located near the top of the cylinder as shown in figure 4.1. Two other thermistors located in the polycarbonate base plate are used to monitor the effects of friction at the rotary joint where the motor shaft enters the cylinder. In addition to measuring temperature, we also measure the horizontal component of the induced field, in the direction perpendicular to the applied field using a Gaussmeter positioned just outside of the cylinder polycarbonate, at a height of 13 cm above its base.

There are several differences between the set-up of this experiment and the experiment reported in paper I. Among these are: i) the cylinder and applied magnetic field are at rest in the laboratory frame, whereas they were rotating in paper I; ii) in this experiment we use disk velocities up to  $1500 \text{ rev min}^{-1}$ , where velocities less than  $600 \text{ rev min}^{-1}$  were used in paper I; and iii) the top cover that received an array of Venturi tubes in paper I is replaced by a plain cover with a Pt-100 thermistor (3 mK precision) attached to it.

#### 4.2.2 Measurement of heat production in liquid gallium

The principle of our experiments is very simple: we measure the heat production from dissipative processes in the fluid by monitoring the increase in temperature of the liquid gallium as a function of time. If the cylinder was perfectly insulated and Joule heating the only source of dissipation, we would have:

$$P_J = mC \frac{d\bar{T}}{dt} \quad (4.4)$$

where  $P_J$  is Joule power,  $m$  is the mass of fluid,  $C$  is the specific heat and  $\bar{T}$  is the average temperature of gallium. In reality, the experiment involves additional sources of heat and the polycarbonate container is not perfectly insulating. The most important complicating effects consist of heat loss  $P_{\text{loss}}$  through the insulated walls of the cylinder, heat production by viscous dissipation in the liquid  $P_\mu$ , and frictional heating by the shaft of the spinning disk  $P_{\text{shaft}}$ . Including these effects leads to

$$mC \frac{d\bar{T}}{dt} = P_J + P_\mu + P_{\text{shaft}} - P_{\text{loss}} \quad (4.5)$$

We estimated the relative importance of each of these effects using a series of preliminary tests of the device. The dominant heat source turns out to be  $P_{\text{shaft}}$ , which is typically a factor of ten larger than the dissipation within the fluid.

In order to eliminate the contribution of  $P_{\text{shaft}}$  and  $P_{\text{loss}}$  in (4.5), we use *differential* measurements of temperature increase, as follows. Prior to and during each experiment, the cylinder is maintained at a temperature of about  $40 \text{ }^\circ\text{C}$  by a circulating hot air system. To begin each experiment, the disk is spun from rest to a constant angular velocity  $\omega_{\text{disk}}$  and maintained at this velocity until the temperature near the shaft (measured by two auxiliary thermistors shown in figure 4.1) is  $2 \text{ }^\circ\text{C}$  higher than the temperature in the gallium. We then switch on the electromagnet, applying a steady magnetic field with intensity  $B_{\text{imposed}}$  and record the fluid temperature at 10 second intervals for about 3 minutes. We then switch off the electromagnet and continue recording temperature for another 3 minutes, again at 10 second intervals.

Density	$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	$6.09 \times 10^3$
Kinematic viscosity	$\nu$	m <sup>2</sup> /s	$3.1 \times 10^{-7}$
Electrical conductivity	$\sigma$	(m $\Omega$ ) <sup>-1</sup>	$3.68 \times 10^6$
Melting point	$T_m$	°C	29
Boiling point	$T_b$	°C	2227
Coefficient of thermal expansion	$\alpha$	K <sup>-1</sup>	$1.0 \times 10^{-4}$
Surface tension	$\gamma$	N/m	0.735
Specific heat	C	(J/kg)/K	410

TAB. 4.1 – *Physical properties of liquid gallium.*

Since the liquid is well stirred by the swirling vortex, the temperature measured at the top approximates very closely the average temperature of the gallium. Using the *difference* in the rate of temperature increase with and without magnetic field eliminates the contribution from  $P_{\text{shaft}}$ . It also largely eliminates the contribution to (4.5) from imperfect insulation, since  $P_{\text{loss}}$  is proportional to the temperature difference between the liquid and the outside temperature, which is almost constant during a complete run. Finally, viscous dissipation is found to be negligible compared with Ohmic dissipation, as anticipated (Tritton, 1988). The characteristic spin down time of the fluid is of the order of a few minutes, which yields a maximum viscous dissipation of about 0.1 W.

Figure 4.2 shows a typical record of temperature in the fluid obtained using this technique. The temperature time series is piece-wise linear, with a clear decrease in slope when the magnetic field is switched off. According to the arguments just given, the difference in slope yields the Joule heating  $P_J$  as a function of  $\omega_{\text{disk}}$  and  $B_{\text{imposed}}$  as follows:

$$P_J = mC \left[ \left( \frac{dT}{dt} \right)_{\omega=\omega_{\text{disk}}}^{B=B_{\text{imposed}}} - \left( \frac{dT}{dt} \right)_{\omega=\omega_{\text{disk}}}^{B=0} \right] \quad (4.6)$$

In evaluating the r.h.s. of this expression, we determine the slopes of the two segments of  $\frac{dT}{dt}$  using the least-square fits of linear equations to the data points, and then compute the difference in the two slopes. To verify that the break in slope with change in magnetic field was repeatable, we did preliminary tests where the magnetic field was switched on and off several times. We observed repeated slope changes similar to those in figure 4.2.

## 4.3 Experimental results

### 4.3.1 Joule heating

Joule heating was measured with the techniques described above for disk velocities  $\omega_{\text{disk}}$  of 600, 1000, 1250 and 1500 rev min<sup>-1</sup>, and applied magnetic fields from 0 to 80 mT. Figure 4.3 displays the results. The error bars are the  $2\sigma$  standard deviations deduced from the linear fits to the temperature time series only. The data points for  $\omega_{\text{disk}} = 1500$  rev min<sup>-1</sup> illustrate the behavior we find generally. These data exhibit two regimes. In the first regime, for magnetic field up to about 40 mT, Joule heating increases nearly quadratically with the field intensity. Beyond this value is a second



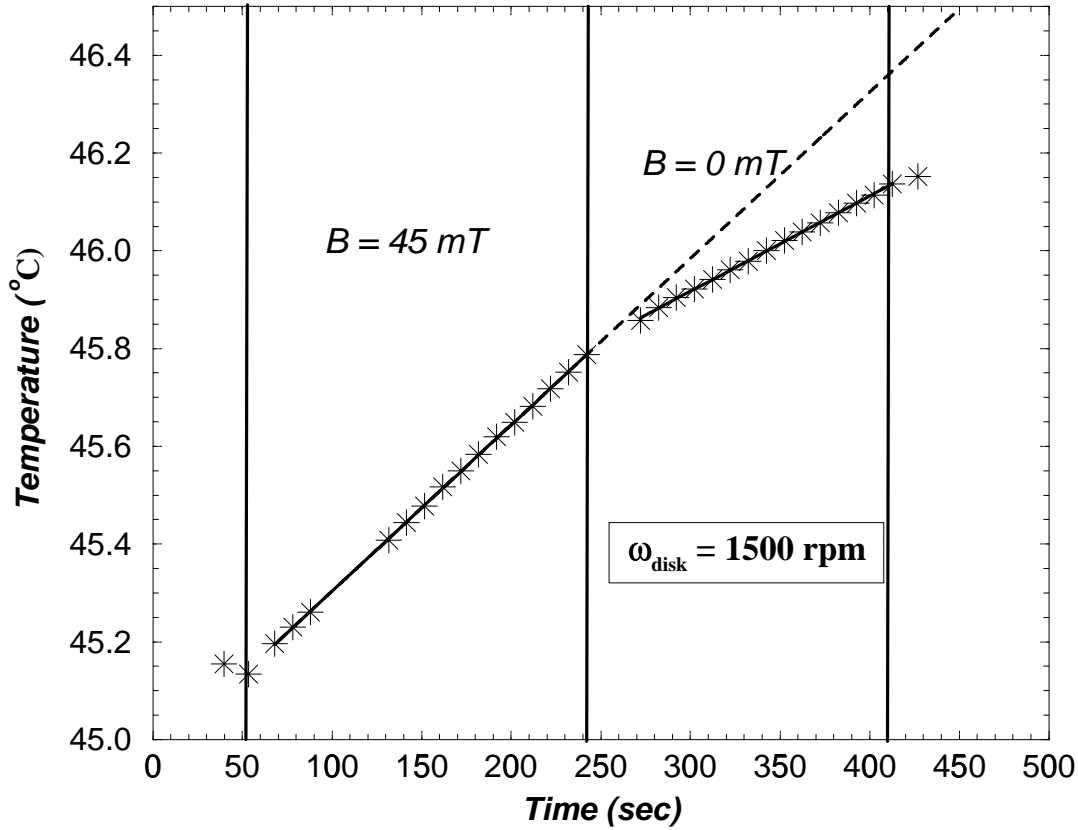


FIG. 4.2 – Temperature increase measured for  $\omega_{\text{disk}} = 1500 \text{ rev min}^{-1}$ . From 50 s to 250 s a magnetic field of 45 mT is applied, and from 250 s to 410 s the electromagnet is switched off. Each triangle (every 10 s) is one measurement of the temperature at the top of the vortex. The continuous lines are the slopes of the least squares straight fits for  $\left(\frac{dT}{dt}\right)_{\omega=1500}^{B=45}$  and  $\left(\frac{dT}{dt}\right)_{\omega=1500}^{B=0}$  of equation (6). We can notice the difference in slopes between the dashed line and the solid line during the second part of the experiment (after 250 s): the increase of temperature in the tank of gallium is larger when the magnetic field is applied because of the heat dissipated by the electrical currents (Joule heating).

regime where Joule heating levels off and perhaps even decreases with increasing field strength. For lower values of  $\omega_{\text{disk}}$ , a similar behavior is seen, except that the transition between the two regimes occurs at a corresponding lower value of magnetic field.

The existence of two regimes in Joule heating is consistent with the experimental findings in paper I. In I, measurements of pressure profiles at the top of the vortex, electrical potentials, and induced magnetic field, identified two distinct flow regimes. In those experiments the controlling parameter was found to be the Elsasser number, the ratio of Lorentz over Coriolis forces. It was observed that for low Elsasser number, less than 0.2 approximately (corresponding to low imposed magnetic fields), the vortex is slowed down by the magnetic field but remains essentially two-dimensional and extends throughout the height of the cylinder. The effective diameter of the vortex increases with the imposed field in this regime. At higher values of the imposed field (or, alternatively smaller values of  $\Omega_{\text{table}}$ ), corresponding to larger Elsasser numbers, the vortex is nearly arrested by the magnetic field, and the basic two-dimensionality of the flow is destroyed. For increasing field strengths, the motion in the fluid is increasingly confined to the vicinity of the spinning disk in this regime. Nevertheless, the fluid seems always well mixed because we see immediate response in temperature to changes in the field strength, both on increase and decrease.

In the section 4.4 we will present a quantitative analysis of our results on Joule heating in terms of the vortex velocity, and demonstrate that the transition between these two flow regimes explains the Joule heating data.

### 4.3.2 Torque measurements

In addition to measuring the heat dissipated within the fluid, we monitored the torque applied by the motor that drives the disk. Torque variations were recorded as a function of time in all the experiments. Using the same differential measurement technique as described above for heating, we have obtained the torque  $\Gamma_L$  applied by the fluid on the disk when Lorentz forces are present. A simple energy balance indicates that Ohmic dissipation within the fluid is equal to the work done on the fluid by Lorentz forces and is thus related to the torque driving the disk by:

$$P_J = \Delta\Gamma_L \omega_{\text{disk}} \quad (4.7)$$

where  $\Delta\Gamma_L$  is the torque difference between the portions of the experiment with and without the field of the electromagnet imposed. In principle, this provides an alternative measurement of Joule heating. We find that the dissipation measured this way depends on the field intensity in the same way as the measurements shown in figure 4.3 except for one important difference. The dissipation derived from the torque is always about 3.5 larger than the one obtained from the temperature series. We could not find the reason for this systematic discrepancy, but because they are more direct, we regard the temperature measurements as being more accurate.

### 4.3.3 Induced magnetic field

Figure 4.4 shows the ratio of the induced magnetic field to the imposed field, as a function of the imposed field intensity, for several disk velocities. The two regimes are clearly identified. In the low field regime the efficiency of the induction decreases slowly

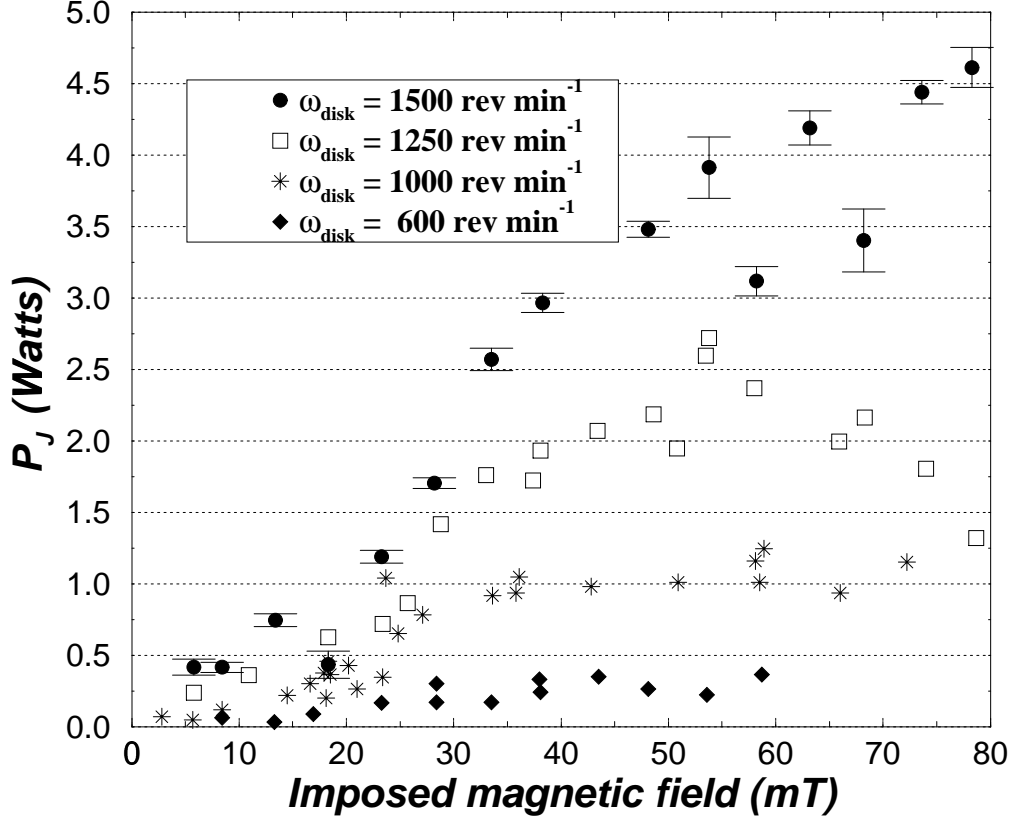


FIG. 4.3 – Joule Heating measured for  $\omega_{\text{disk}} = 600, 1000, 1250$  and  $1500 \text{ rev min}^{-1}$ . We clearly observe two regimes for the four different velocities. The second regime is reached for lower magnetic field when the velocity of the disk is lower. Note that error bars are the  $2\sigma$  standard deduced from the linear fits to the temperature time series only.

as the magnetic field is increased up to  $B_{\text{imposed}} \simeq 40 \text{ mT}$ , as a consequence of the decrease in vortex velocity. At values of  $B_{\text{imposed}} > 40 \text{ mT}$ , the ratio decreases sharply with increasing imposed field as the vortex loses its two-dimensionality.

Accordingly, for each regime and each velocity of the disk, we fit the data by a linear function of  $B_{\text{imposed}}$ :

$$B_{\text{induced}}/B_{\text{imposed}} = A_0 + A_1 B \quad (4.8)$$

where the two constants  $A_0$  and  $A_1$  are obtained from the linear fits of the data of figure 4.4.

It was demonstrated in paper I that the ratio  $B_{\text{induced}}/B_{\text{imposed}}$  is proportional to the effective magnetic Reynolds number,  $\text{Re}_m = \mu_0 \sigma U_{\text{eff}} L$ , where  $\sigma$  is the electrical conductivity,  $\mu_0$  the magnetic permeability,  $L$  a typical dimension (here the disk radius), and  $U_{\text{eff}}$  the typical effective velocity (here  $\omega_{\text{eff}} L$ ). We expect this relationship to remain valid over the parameter regime of this experiment as well. Thus, we have a second

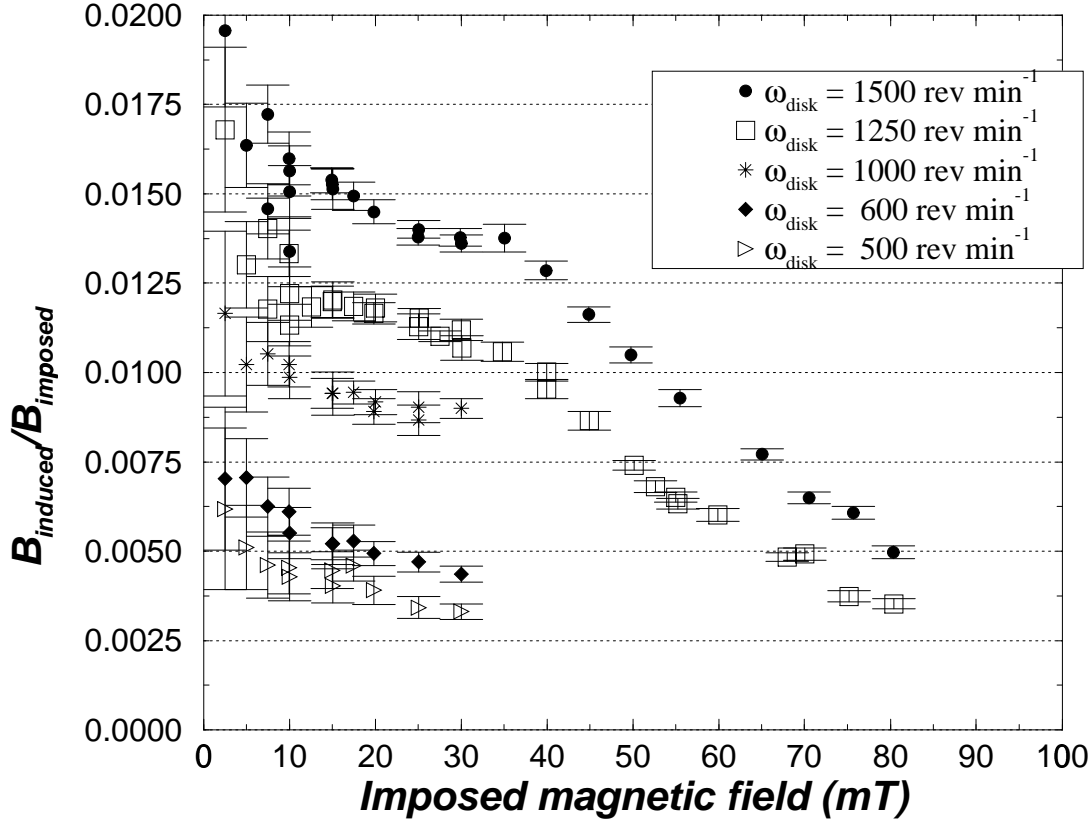


FIG. 4.4 – Induced magnetic field measured outside the cylinder during the experiments for different imposed magnetic fields from 2.5 mT to 78 mT, and for different velocities of the disk. The ratio  $B_{\text{induced}}/B_{\text{imposed}}$  increases with the velocity of the disk. Note the break of slope for  $\omega_{\text{disk}} = 1250$  and  $1500 \text{ rev min}^{-1}$  around 35-40 mT.

relationship:

$$B_{\text{induced}}/B_{\text{imposed}} = C_1 \text{Re}_m = C_1 \mu_0 \sigma L U(B) \quad (4.9)$$

where  $C_1 = 6.61 \cdot 10^{-2}$  from paper I.

Accordingly, we use these two last relationship (4.8) and (4.9) between  $B_{\text{induced}}/B_{\text{imposed}}$  and  $\text{Re}_m$  to deduce the vortex velocity  $U_{\text{eff}}$ . Figure 4.5 shows the results in terms of effective angular velocity  $\omega_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}(B)}{L}$  as a function of the imposed magnetic field  $B_{\text{imposed}}$ .

#### 4.4 Interpretation of the results

We wish to find a simple relationship between the amount of Joule heating, the fluid velocity in the vortex, and the intensity of the imposed field. Simple physical

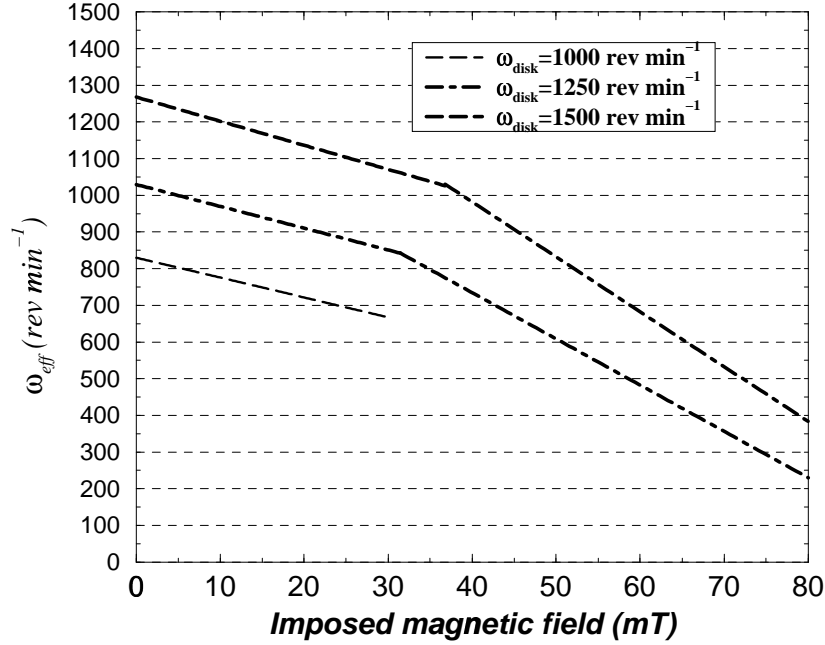


FIG. 4.5 – *Effective angular velocity in the vortex as a function of the imposed magnetic field,  $\omega_{eff}(B) = \left(\frac{U_{eff}(B)}{L}\right)$  obtained from the measurements of the induced magnetic field. Note that for zero imposed magnetic field, the velocity at the top of the vortex is slightly lower than the velocity of the disk, demonstrating that the vortex is not completely two-dimensional.*

considerations suggest a relationship of the form

$$P_J = a \sigma U^2 B^2 \quad (4.10)$$

where  $a$  is a constant which depends on geometry,  $\sigma$  is the electrical conductivity,  $U$  is the typical velocity, and  $B$  the typical magnetic field. This scaling can be obtained by combining the relationship between the current density  $J$  and the electromotive-force:

$$J \simeq \sigma U B \quad (4.11)$$

and the definition of Joule heating

$$P_J = \int_V \frac{J^2}{\sigma} dV \quad (4.12)$$

The main assumption underlying (4.10) is that the magnetic Reynolds number of the flow is small, implying  $B_{induced} \ll B_{imposed}$ . This is certainly the case in the experiment, but is problematic in the core. Because of this ambiguity, we examine two models of Joule heating. The first is appropriate for small magnetic Reynolds numbers, which yields the scaling given in (4.10). The second model, appropriate for the limit of very large magnetic Reynolds numbers, yields a somewhat different scaling law. We then compare the predictions of each law for dissipation in the Earth's core.

#### 4.4.1 Joule heating at low magnetic Reynolds number

In paper I we introduced a simple 2D kinematic model of an MHD vortex, consisting of a core in a solid-body rotation plus a shear layer which adjusts the vorticity of the core to the vorticity of the container. There are only two parameters in this model, the radius  $R_{\text{solid}}$  of the vortex core, and its angular velocity  $\omega_{\text{solid}}$ . In paper I, we also computed the distribution of the Foucault electrical currents generated by this simple vortex in an imposed horizontal magnetic field, taking into account the finite vertical extent of the cylinder. Figure 4.6 shows the distribution of Joule heating in the model, computed from the electrical currents. Joule heating mostly occurs along the loop of current close to  $r = R_{\text{solid}}$ , in the plane that contains  $\vec{B}$ , where the product  $\vec{U} \times \vec{B}$  is maximum.

To obtain a scaling law between Joule heating and the other parameters, we will simplify the model further, by treating the vortex as if it were infinitely long and neglecting the  $\vec{\nabla}\varphi$  term in the expression for the current density,

$$\vec{J} = \sigma(\vec{U} \times \vec{B} - \vec{\nabla}\varphi) \quad (4.13)$$

The Joule heating then becomes

$$P_J = \int_V \frac{J^2}{\sigma} dV = \int_V [\sigma(\vec{U} \times \vec{B})^2 r dr d\theta dz] \quad (4.14)$$

$$= H \int_S \sigma U^2(r) B^2 \cos^2 \theta r dr d\theta \quad (4.15)$$

Introducing  $R_{\text{solid}} = f R_{\text{vortex}}$  (with  $0 \leq f \leq 1$ ), and using the velocity distribution in Appendix A of paper I, we get:

$$P_J = \sigma H \pi \left( \int_0^{fR_v} \omega^2 r^2 r dr + C \int_{fR_v}^{R_v} \left( \frac{R_v^2}{r} - r \right)^2 r dr \right) \quad (4.16)$$

$$\text{where } C = \frac{\omega f^2}{1 - f^2} \quad (4.17)$$

leading to

$$P_J = \sigma U(f)^2 B^2 \text{Volume} \underbrace{\left[ \frac{f^2}{4} + \frac{f^2}{(1-f^2)^2} \left( -\frac{3}{4} - \frac{f^4}{4} + f^2 + \ln\left(\frac{1}{f}\right) \right) \right]}_{C(f)} \quad (4.18)$$

According to (4.18), Joule heating varies as  $\sigma U^2 B^2$ , where U is the actual velocity for a given imposed B. In our model, U and  $P_J$  also depends upon the radius of solid body rotation. If we take  $R_{\text{solid}} = R_{\text{disk}} = \frac{1}{2} R_{\text{vortex}}$  (i.e.  $f = \frac{1}{2}$ ), as suggested by the results of paper I, we obtain

$$P_J = 1.3 \cdot 10^{-4} \sigma U^2(B) B^2 \quad (4.19)$$

for the scaling law at low magnetic Reynolds number.

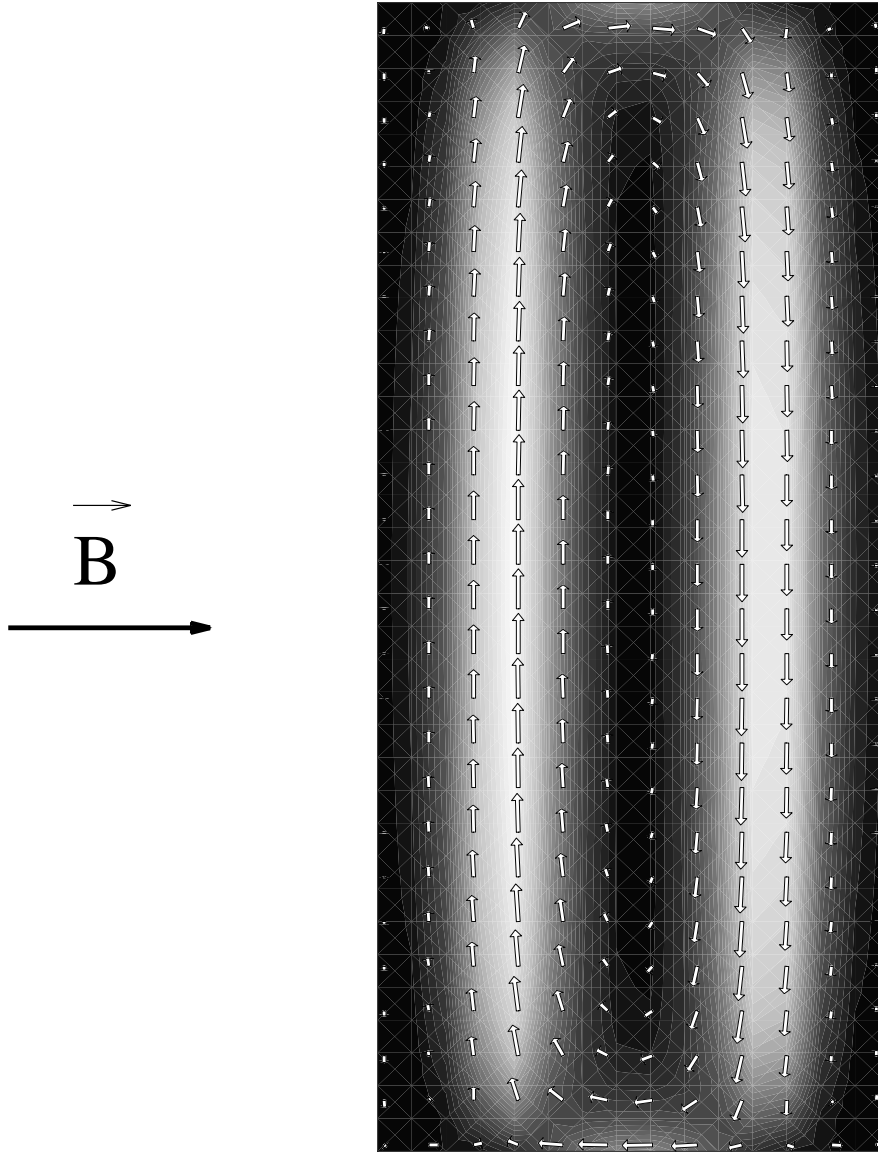


FIG. 4.6 – Numerical model of Foucault electrical currents in the cylinder. View of the vertical section of the cylinder that contains the imposed magnetic field  $\vec{B}$ .  $\vec{J}$  is represented by arrows. Foucault electrical currents consist in a loop of current with upward currents on the left and downward current on the right. The colored areas are the distribution of the Joule heating in the cylinder: the brightest area (area of the largest dissipation) is located along the loop of current where  $J \simeq \sigma UB$  is maximum. This model depends upon two parameters: 1)  $R_{\text{solid}}$ , the radius of solid body rotation.  $R_{\text{solid}}$  determines the geometrical distribution of the electrical currents and consequently the total quantity of Joule heating in the tank. 2)  $\omega_{\text{solid}}$ , the angular velocity of the solid body rotation, which controls the amplitude of the currents.

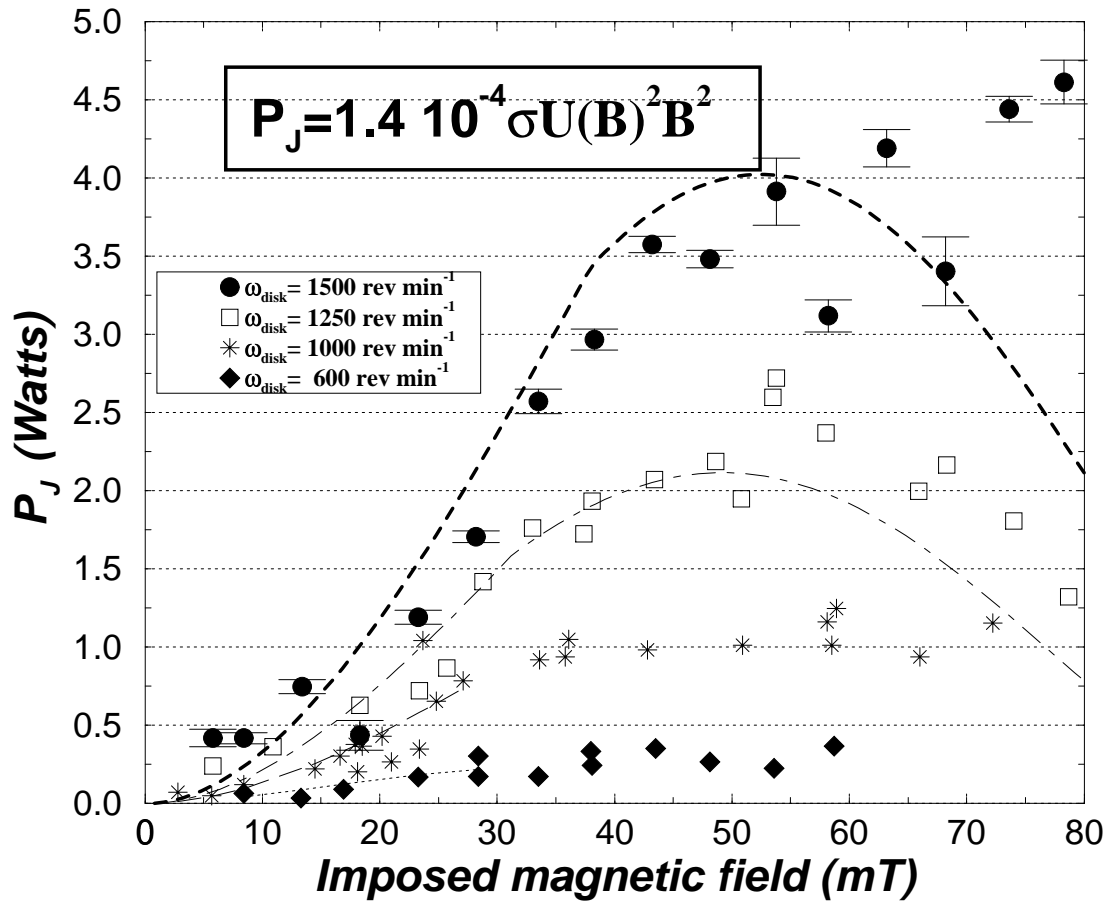


FIG. 4.7 – In dashed lined, fits of the experimental data set by a global scaling law for the Joule heating of the type  $P_J = \alpha \sigma U(B)^2 B^2$ .  $U(B)$  in this law is derived from the measurements of the induced magnetic field. The fit predicts reasonably the two regimes: at first, a quadratic increase of the Joule heating in  $U$  and  $B$ , and for the high applied magnetic fields, a slight decrease of the Joule heating linked to the break of the vertical rigidity of the vortex.



#### 4.4.2 Joule heating in the experiments

The measurements in section 4.3.1 show the variation of Joule heating as a function of the imposed magnetic field, for various disk velocities. We now compare that data with the scaling law derived in the previous section. In order to make this comparison, we must relate the measured Joule heating to the actual fluid velocity in the vortex. To obtain the fluid velocity, we use the induced magnetic field shown in figure 4.4 in conjunction with the calibration between vortex velocity and induced magnetic field derived in paper I. In doing so, we implicitly neglect the effect of the small variation of the radius of solid body rotation found in paper I. In using this approach we are also implicitly assuming that the vortex remains two-dimensional. This assumption certainly breaks down for the highest values of the imposed magnetic field tested here. In addition, uncertainties on the position of the Gaussmeter as compared to its location in paper I (about 2 mm) can result in errors in the induced field and velocity of about 20 %.

With these approximations in mind, we proceed as follows. We first derive the velocity  $U(B)$  by fitting two segments of straight line to the curves  $\frac{B_{\text{induced}}}{B_{\text{imposed}}} = f(B_{\text{imposed}})$ . One segment is for the first regime (up to to  $B_{\text{imposed}}=30$  mT), the other one is for the regime where the induced field (and hence  $U$ ) decreases more strongly. By comparing with the Joule heating measurements, we deduce the following experimental law:

$$P_J \simeq 1.4 \cdot 10^{-4} \sigma U^2(B) B^2 \quad (4.20)$$

We can note the remarkable consistency between this experimental law and the law (4.19) derived from the 2-D model. Figure 4.7 compares the actual experimental results with the predictions of this law (4.20).

There is agreement in the first regime, where  $P_J$  is nearly quadratic in  $B$ . For higher values of  $B$ , our law predicts that Joule heating levels off and finally decreases with increasing  $B$ , in agreement with the set of measurements for  $\omega_{\text{disk}} = 1250 \text{ rev min}^{-1}$ , but not so evident for other disk velocities. This drop in Joule heating, which is due to the strong reduction in fluid velocity by the magnetic field and strong departures from two-dimensionality in the vortex, is not as clear for the other values of the imposed disk velocity.

#### 4.4.3 Joule heating at high magnetic Reynolds number

The maximum magnetic Reynolds number reached in our experiments is  $\text{Re}_m \simeq 0.3$  and the previous analysis is probably valid up to this value. For application to the Earth's core, however, it is necessary to consider how the relationship between Joule heating and imposed magnetic field changes at higher magnetic Reynolds numbers. Here we consider the limit of high magnetic Reynolds number, the regime where advection of magnetic field dominates over diffusion. In this regime the classical law in  $\sigma U^2(B) B_{\text{imposed}}^2$  breaks down because the imposed magnetic field strength is no longer representative of the magnetic field within the vortex.

To derive the appropriate law for this regime, we follow Roberts (Gubbins and Roberts, 1987) who considers a uniform conductor filling the whole space, and everywhere at rest except for a cylindrical rotor of radius  $R_{\text{rotor}}$ , which spins about its vertical axis with the angular velocity  $\omega$ . A uniform horizontal magnetic field  $B_{\text{imposed}}$  is applied.

Roberts (Gubbins and Roberts, 1987) demonstrates that when  $\text{Re}_m \gg 1$ , the magnetic field is expelled from the interior of the rotor, to form flux sheets near its surface.

This 2-D model is based on flux expulsion, at large  $\text{Re}_m$ . In this regime, the breakdown of 2-D structures seen in paper I at  $\Lambda \simeq 0.2$  may occur at larger Elsasser numbers values. Indeed, numerical experiments of magneto-convection (Olson and Glatzmaier, 1995) show breakdown of 2-D structures for  $\Lambda \geq 1$ .

Roberts (Gubbins and Roberts, 1987) derived the analytical expression of the total magnetic field  $\vec{B}_2$  just outside the rotor, as a function of the  $B_{\text{imposed}}$ , in the limit  $\text{Re}_m \rightarrow \infty$ . Note that in this limit the interior magnetic field  $\vec{B}_1$  is zero.

For finite  $\text{Re}_m$ , the discontinuity of B will be smoothed on a length scale  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$  called the skin.

The tangential components of the magnetic field are related to the surface electrical current  $\vec{J}_s$ , which develop on the surface of the rotor, by:

$$\vec{B}_1^T - \vec{B}_2^T = \mu_0 (\vec{J}_s \times \vec{n}_{12}), \quad (4.21)$$

where  $\vec{n}_{12}$  is the unit vector perpendicular to the rotor. Since the interior magnetic field  $\vec{B}_1$  is zero, we deduce  $\vec{J}_s$  from the expression of  $\vec{B}_2^T$  given by Roberts (Gubbins and Roberts, 1987).

Integrating  $J_s^2$  along the rotor and over its height  $H_{\text{rotor}}$ , we get the expression for Joule heating :

$$P_{J_{\text{rotor}}} = \frac{4\pi B^2 R_{\text{rotor}} H_{\text{rotor}}}{\mu_0^2 \sigma \delta} \quad (4.22)$$

$$P_{J_{\text{rotor}}} = \frac{2\sqrt{2}\pi B^2 R_{\text{rotor}} H_{\text{rotor}} \sqrt{\omega}}{\mu_0^{\frac{3}{2}} \sigma^{\frac{1}{2}}} \quad (4.23)$$

Rewriting this in terms of the magnetic Reynolds number, we get:

$$P_{J_{\text{rotor}}} = 8.89 H_{\text{rotor}} B^2 \frac{\sqrt{\text{Re}_m}}{\mu_0^2 \sigma} \quad (4.24)$$

#### 4.4.4 Ohmic dissipation as a function of the magnetic Reynolds number

The expression for Joule heating as a function of the actual fluid velocity in our experiments, rewritten in terms of the actual magnetic Reynolds number is

$$P_J = 1.56 \cdot 10^{-1} \pi R_{\text{vortex}}^2 H_{\text{vortex}} B^2 \frac{\text{Re}_m^2}{\mu_0^2 \sigma \frac{R_{\text{vortex}}^2}{4}}$$

or

$$P_J = 1.96 H_{\text{vortex}} B^2 \frac{\text{Re}_m^2}{\mu_0^2 \sigma} \quad (4.25)$$

and is valid for low magnetic Reynolds number. For high magnetic Reynolds number we obtained the following expression

$$P_J = 8.89 H_{\text{vortex}} B^2 \frac{\sqrt{\text{Re}_m}}{\mu_0^2 \sigma} \quad (4.26)$$

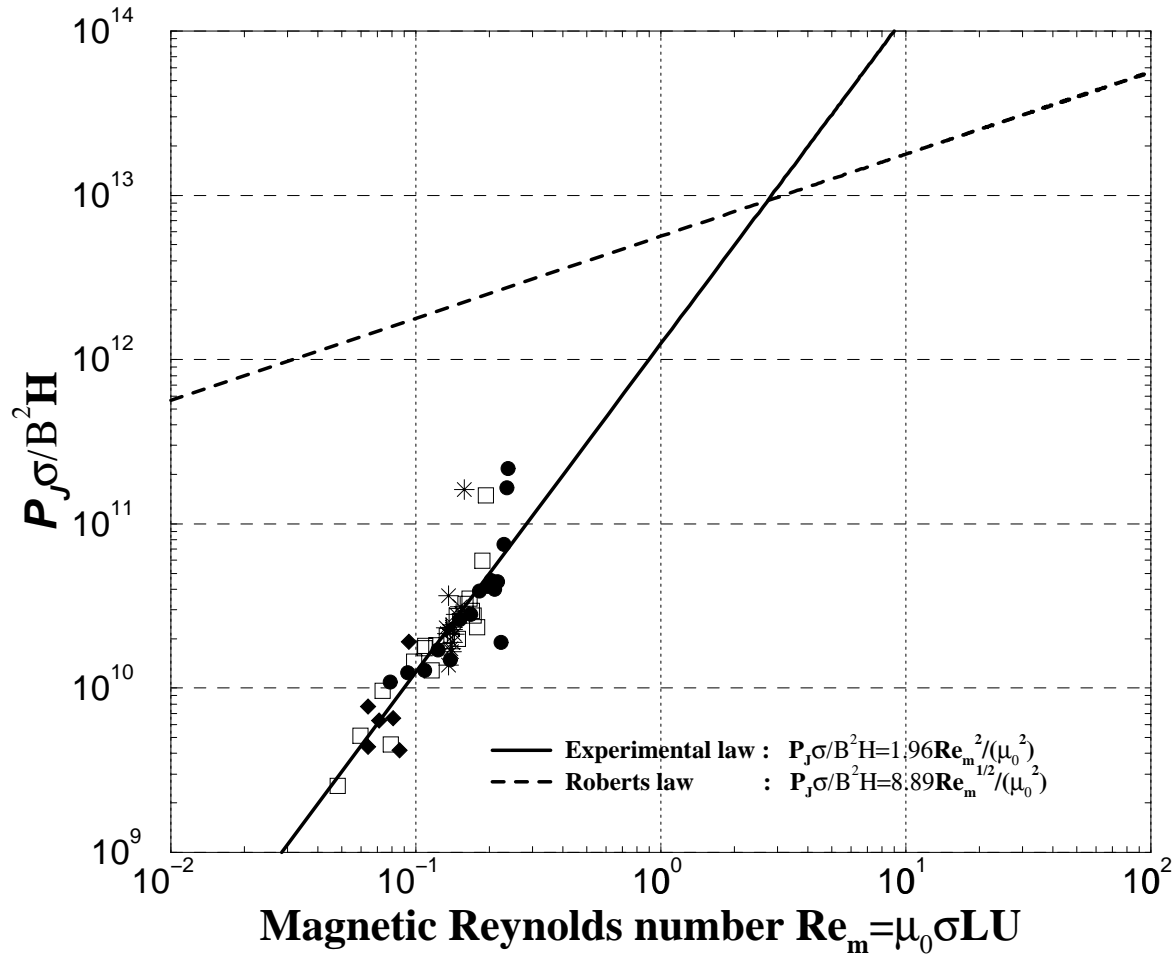


FIG. 4.8 –  $P_J$  is the total Joule heating (Watts) dissipated in a vortex and is scaled by a typical power (magnetic energy divided by magnetic diffusion time);  $\sigma$  is the electrical conductivity of the fluid,  $H$  is the height of the vortex and  $B$  is the transverse magnetic field applied. The characteristic length scale used for the magnetic Reynolds number is the radius of the vortex and the characteristic velocity scale is the  $U = \omega L$  where  $\omega$  is the angular velocity of the solid body rotation of the vortex. The experimental law has been established for low magnetic  $\text{Re}_m$ : the experimental data points are represented with symbols. The convention used for these symbols is the same as in figure 4.3. The law of Roberts has been established for  $\text{Re}_m \gg 1$ . Consequently our global law for all the magnetic Reynolds numbers is probably not satisfactory around the point where the two law cross, around  $\text{Re}_m = 2.7$ . Elsewhere we can apply this law for estimations of the physical parameters of the Earth's core, supposing that thermal convection forms vortices in the Earth's core.

Figure 4.8 represents  $P_J * (2\mu_0^2\sigma/HB^2)$  as a function of  $Re_m$ . The laws corresponding to the two different  $Re_m$  regimes are shown, together with our experimental data points.

## 4.5 Application to Joule heating in the Earth's core

Rewriting the formula (4.3) for dynamo efficiency from the introduction in terms of core heat loss

$$P_{J_{\text{core}}} = \eta P_{\text{CMB}} \quad (4.27)$$

where  $P_J$  is Joule heat production in the Earth's core,  $P_{\text{CMB}}$  is the total heat flowing out of the core, and  $\eta$  is an efficiency factor. There is a considerable uncertainty on both  $\eta$  and  $P_{\text{CMB}}$ , but reasonable upper bounds seem to be (Lister et al., 1995):

$$\eta \leq 0.10 \quad (4.28)$$

$$P_{\text{CMB}} \leq 5 \text{ TW} \quad (4.29)$$

From which we get:

$$P_{J_{\text{core}}} \leq 0.5 \text{ TW} \quad (4.30)$$

This upper bound has often been used in the framework of kinematic dynamos to check the viability of the dynamo, and to put an upper bound on the intensity of the toroidal magnetic field in the core. Indeed, only the radial component of the poloidal part of the Earth's magnetic field can be obtained from measurements at the surface. Its maximum intensity at the surface of the core is about 0.5 mT. However, the constraint on the toroidal field from these analyses appears very weak: the kinematic dynamo of Pekeris et al. (1973) dissipates only  $10^{-3}$  TW, with a toroidal field of 5 mT, while that of Kumar et al. (1975) dissipates 1.2 TW for a toroidal field of 200 mT. These dynamo models consider dissipation only at the largest (imposed) spatial scales of the velocity field. Our experiments suggest that this is not where most of the dissipation occurs. Instead, we find that dissipation by relatively small-diameter vertical vortices in the large-scale toroidal magnetic field could be predominant. The fact that the power spectrum of the poloidal field at the Core-Mantle-Boundary (Langel and Estes, 1982; Hulot and Le Mouél, 1994) is almost flat in the harmonic degree  $l$  (beyond the dominant dipole), and hence that the spectrum of  $B^2$  rises sharply with  $l$  (at least up to  $l=13$ ), also points towards dominant dissipation at short scales.

We apply our scaling law for Joule heating of vertical vortices in a uniform horizontal magnetic field to estimate the upper bound on the toroidal magnetic field using two models for core flow, Busse's convection-driven dynamo and the "observed" velocity field at the surface of the core. In the dynamo model of Busse (1970), thermal convection drives a circulation that takes the form of columnar vortices aligned with the axis of rotation (Taylor columns). The results of his analytical study indicate that the wavelength  $\lambda_c$  of this columnar instability in the equatorial plane is:

$$\lambda_c = \left( \frac{\text{Pr}\sqrt{5/2}}{2E(1+\text{Pr})} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.31)$$

where  $\text{Pr}$  is the Prandtl number, and  $E$  the Ekman number. Taking for the Earth  $\text{Pr}=1$  and  $E=10^{-15}$ , the number of columns is around 74000. Assuming that these 6200

km high narrow columns are arrayed within a uniform toroidal field  $B_T$  and that the magnetic Reynolds number of the columns does not exceed 1, we derive from equation (4.25) and the upper bound (4.30) that  $B_T$  cannot exceed 0.6 mT. It is probably not possible to sustain the geodynamo with such a low toroidal field, which indicates that the wavelength of convection deduced from Busse's analysis is too small for the core.

The second situation is perhaps more relevant, because it is based upon the "observed" velocity field. Maps of fluid velocity at the top of the core have been obtained from the analysis of the secular variation of the magnetic field (Gire and Le Mouél, 1990; Bloxham et al., 1989; Jault, 1990). We assume that the velocity field of Hulot, Le Mouél and Jault (1990), for example, is the surface expression of geostrophic vortices extending through the core. To estimate the amount of Joule heating produced by such geostrophic vortices, we assume their flow consists of four large-diameter vortices tangent to the inner core, with height=5140 km, radius=1135 km, and velocity =  $5 \cdot 10^{-4}$  m/s, plus four smaller equatorial vortices each with height = 4000 km, radius = 800 km, and velocity =  $3 \cdot 10^{-4}$  m/s. The Joule heating of this array in a uniform toroidal field  $B_T$  can be calculated with the aid of equation (4.26). Using the upper bound (4.30), we find that  $B_T$  cannot exceed 9 mT for such a flow. Considering that we have computed the highest possible dissipation, and that smaller-scale features have not been included, the toroidal magnetic field in the Earth should be even smaller. On this basis, dynamo mechanisms that require a  $B_T/B_P$  ratio of more than about 20 are probably too dissipative for the Earth's core.

## 4.6 Conclusion

We have measured Joule dissipation in a vortex of liquid gallium permeated by a uniform transverse magnetic field, up to a magnetic Reynolds number of 0.3. The data indicate two regimes, which reflect the change in flow structure with increasing magnetic field intensity. For low magnetic field intensity the main effect of the Lorentz force is to reduce the fluid velocity while increasing the dimensions of the vortex. In this regime the Joule heating varies as the square of the imposed field. For very intense fields the Lorentz forces destroy the two-dimensionality of the vortex and the Joule heating becomes nearly independent of the applied field intensity or can decrease when B increases. Using the induced magnetic field to calibrate the actual velocity in the vortex, we find a simple scaling law for Joule heating  $P_J$ , in the first regime with the form

$$P_J \simeq 4 \text{Re}_m^2 P_D \quad (4.32)$$

where  $\text{Re}_m$  is the magnetic Reynolds number based on the fluid velocity and  $P_D = H_{\text{vortex}} B^2 / \mu_0^2 \sigma$  is the joule heating by magnetic diffusion (with no motion). We compared this result with the Joule heating predicted in the asymptotic limit of high  $\text{Re}_m$  using the flux-expulsion model of Roberts (Gubbins and Roberts, 1987)

$$P_J \simeq 18 \sqrt{\text{Re}_m} P_D \quad (4.33)$$

We applied these two formulas to estimate Ohmic dissipation of geostrophic vortices in the large-scale magnetic field inside the Earth's core. We find that large Joule heating occurs by this mechanism. This places some limitation on the intensity of magnetic fields

allowed within the core, since the total Joule heat production within the core is limited thermodynamically. For example, using an upper bound of 0.5 TW for Joule heating in the core and the model of Hulot et al. (1990) for core vortices, we find that the toroidal magnetic field in the core cannot be larger than 9 mT (about 20 times the observed poloidal field). Although this upper bound is ample to explain the geodynamo, it is less than some dynamo models predict. This indicates that Joule heat production can be used to constrain models of the geodynamo.

## **Acknowledgments**

This study would not have taken place without the skillful technical assistance of Guy Marolleau. We are very much indebted to "Rhône-Poulenc" who lent us the gallium used in the experiments, thanks to the effort of M<sup>r</sup> Lauvray. We thank two anonymous reviewers for constructive remarks.

We thank Ralph Holz and Caroline Dumoulin for helping with the experiments. The visit of Peter Olson was made possible through support from Ecole Normale Supérieure. This study is supported by CNRS-INSU, in particular through its program "Terre Profonde".

## Chapitre 5

# La vélocimétrie Doppler utilisée dans le tourbillon

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats d'une dernière série d'expériences réalisée avec le tourbillon. Après avoir mené à bien les études sur la dynamique (chapitre 3) et l'effet Joule dissipé (chapitre 4), nous avons cherché à poursuivre ces expériences à des nombres de Reynolds magnétiques plus élevés, tout en développant en parallèle une technique ultrasonore pour mesurer la vitesse du fluide. Cette étude a été menée avec Bénédicte Pascal lors de son stage de D.E.A.

### 5.1 Le nouveau dispositif expérimental

#### 5.1.1 Le vélocimètre Doppler

Les tubes de Venturi (chapitre 3) étaient particulièrement adaptés à la géométrie cylindrique du tourbillon. Réussir à obtenir le champ de vitesse au sein du gallium dans un quelconque autre conteneur, par exemple une sphère, aurait été beaucoup plus difficile. C'est pourquoi il nous a semblé important à ce stade de l'expérience de tirer profit des mesures obtenues avec les profils de pression afin de développer et calibrer un nouvel instrument de mesure de vitesses adaptable à une quelconque géométrie: la vélocimétrie ultrasonore.

Nous avons utilisé un appareil récemment commercialisé, le DOP1000 (Signal Processing S.A.). Il se compose d'une sonde ultrasonore (100 mm de long et 10 mm de rayon) reliée à une unité centrale. L'unité centrale se connecte à un PC qui enregistre les données. Le DOP1000 utilise l'effet Doppler pour mesurer la vitesse au sein d'un fluide: la sonde émet une onde sonore à une fréquence de l'ordre du MHz. L'onde acoustique pénètre le fluide puis est diffusée en direction de la sonde lorsqu'elle rencontre une particule dans le fluide. La différence de fréquence entre l'onde de départ et l'onde d'arrivée reçue par la sonde est proportionnelle à la vitesse de la particule: c'est le principe de la mesure par effet Doppler. Plusieurs paramètres peuvent être ajustés dans le DOP1000: la fréquence du signal (nous avons utilisé 4 MHz), la puissance d'émission, la fréquence d'émission et le temps d'écoute de la sonde. Comme c'est souvent le cas pour un appareil de mesure expérimental très sensible, c'est en variant beaucoup les paramètres du DOP1000 que l'on a obtenu la meilleure combinaison donnant le meilleur signal (Pascal, 1996).

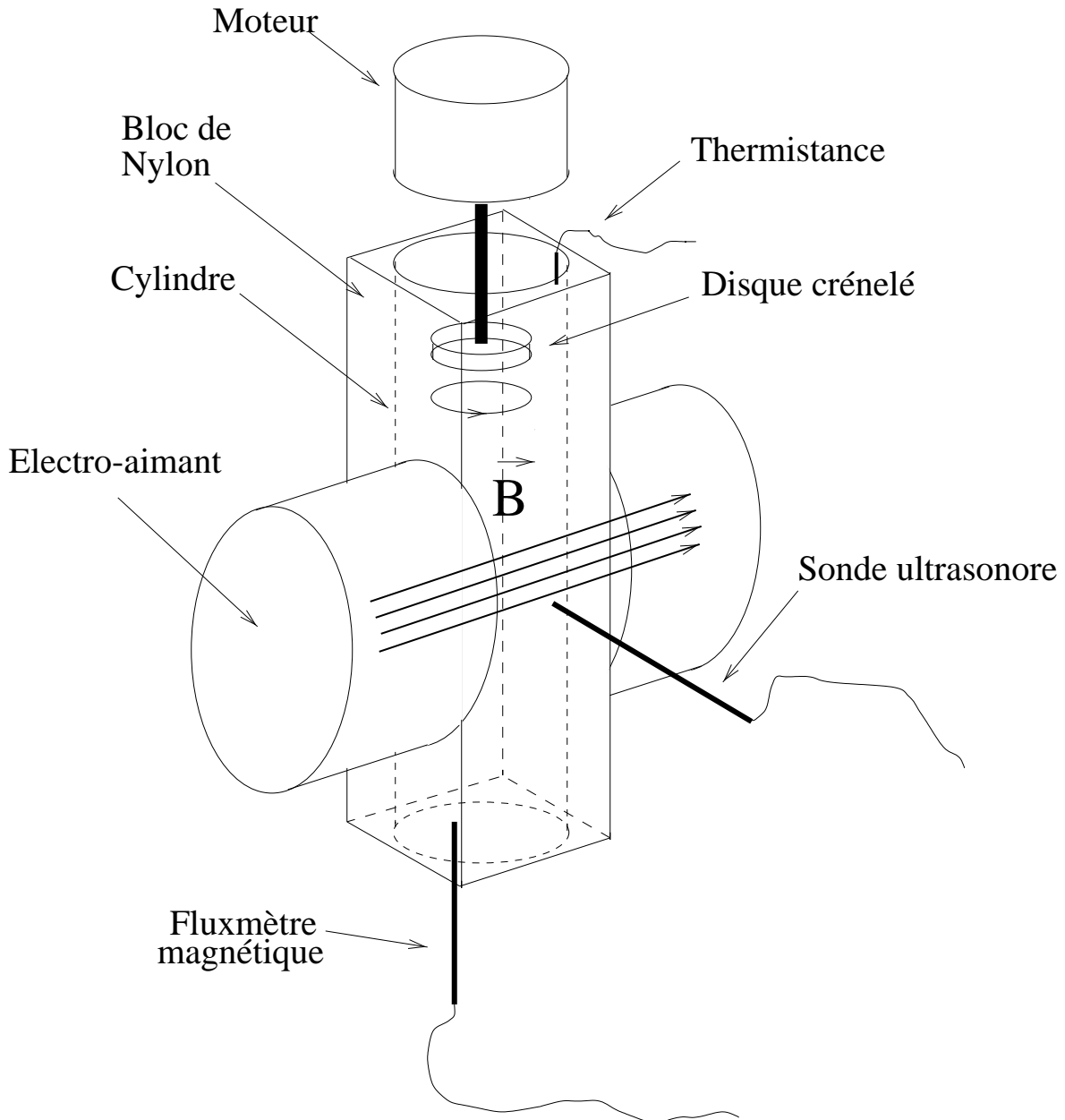


FIG. 5.1 – Nouveau cylindre expérimental taillé au sein d'un bloc parallélépipédique de nylon. Le moteur du disque est désormais positionné en haut du cylindre. La sonde du DOP1000 est mobile et peut mesurer la vitesse du fluide à différentes hauteurs du cylindre. La sonde est couplée au bloc de nylon avec du gel de couplage pour assurer la transmission des ultrasons. Le fluxmètre magnétique mesure le champ magnétique induit. Des profils de vitesses ou des profils de champ magnétique induit sont réalisés en fixant la sonde Doppler ou la sonde magnétique sur une table se déplacé avec un moteur pas à pas.



### 5.1.2 Le nouveau cylindre

Le nouveau cylindre possède les mêmes dimensions intérieures que le précédent (chapitres 3 et 4) et est taillé au sein d'un bloc parallélépipédique de nylon 6/6 représenté sur la figure 5.1. Nous avons choisi un bloc parallélépipédique afin d'obtenir des mesures Doppler plus précises. En effet, la trajectoire d'une onde acoustique à l'interface entre deux milieux suit la loi de Snell-Descartes

$$\frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin i_2}{v_2} \quad (5.1)$$

où  $i_1$  est l'angle entre l'onde incidente et la normale à l'interface milieu 1-milieu 2,  $i_2$  est l'angle entre la normale à l'interface et l'onde se propageant dans le milieu 2,  $v_1$  est la vitesse acoustique du milieu 1 et  $v_2$  la vitesse acoustique du milieu 2. Nous avons mesuré les vitesses dans le gallium liquide et le nylon avec le DOP1000 et nous avons obtenu respectivement  $V_{\text{gallium}} = 2740$  m/s et  $V_{\text{nylon}} = 2900$  m/s. En connaissant ces vitesses précisément et en utilisant des ondes acoustiques incidentes perpendiculaires ( $\sin i_1 = \sin i_2 = 0$  dans (5.1)) à une face du parallélépipède en une position connue, il est alors possible de déterminer avec précision la trajectoire suivie par une onde acoustique au sein du cylindre; des exemples de cordes "sondées" par l'onde sont tracés sur la figure 5.2. Nous avons sélectionné le nylon car d'une part il ne réagit pas avec le gallium, et d'autre part, puisque la vitesse des ultrasons dans le nylon est proche de celle dans le gallium, il était ainsi facile de "suivre" la trajectoire des ondes dans le gallium à l'aide de la formule (5.1).

Nous avons utilisé un moteur plus léger et plus rapide (au maximum 8000 tours  $\text{min}^{-1}$ ) (servomoteur MSK 08 de Infranor) que le précédent (voir chapitre 2), et nous l'avons positionné cette fois au sommet du tourbillon (figure 5.1), cela étant plus commode pour parer éventuellement à un problème de fuite de gallium. Nous avons utilisé un nouveau gaussmètre MAG-03 ayant trois sondes indépendantes et permettant donc d'accéder au vecteur champ magnétique induit  $\vec{B}$  en un point. Une table, se déplaçant avec un moteur pas à pas, a permis de réaliser des profils de mesures de champ magnétique ou de vitesse le long des faces du parallélépipède.

## 5.2 Mesures ultrasonores de vitesse dans le tourbillon

Le DOP1000 ne peut mesurer des vitesses que si le fluide possède des particules pouvant diffuser une onde acoustique, ces particules devant posséder une impédance acoustique différente de celle du fluide. Pour les mesures dans le tourbillon d'eau, nous avons utilisé des particules d'amidon, et pour le tourbillon de gallium des particules de borure de zirconium  $\text{ZrB}_2$  (densité  $\rho = 6.17$   $\text{kg/m}^3$  très proche du gallium liquide).

### 5.2.1 Le tourbillon d'eau

Les mesures Doppler effectuées dans un tourbillon d'eau ont été une réussite. Les particules d'amidon immergées dans l'eau ont diffusé les ondes acoustiques très efficacement. Les résultats obtenus sont illustrés sur la figure 5.3. La figure 5.3 C) est un profil caractéristique "brut" obtenu avec le DOP 1000; les données des figures 5.3 A),

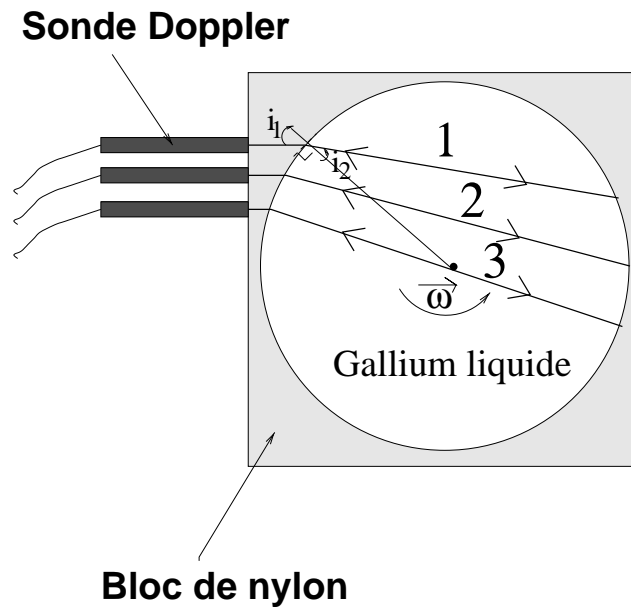


FIG. 5.2 – Vue de dessus du parallélépipède de nylon (surface grisée). Les lignes continues 1, 2 et 3 représentent trois différentes trajectoires d'ondes acoustiques pénétrant avec une incidence normale sur une face du bloc. A l'interface nylon-gallium, les ondes sont transmises dans le gallium avec un angle d'incidence  $i_2$  définie dans l'équation (5.1). Les ondes sont ensuite diffusées par des particules de borure de zirconium présentes dans le gallium. Les ondes diffusées sont reçues par la sonde et converties en vitesse. Connaissant la position exacte de la sonde sur la face du parallélépipède, cette technique permet de déduire la vitesse du fluide sur des cordes connues.

B) et D) ont été obtenues après traitement du signal brut (Pascal, 1996).

La figure 5.3 A) montre l'accord remarquable entre le profil de vitesses obtenu par photographie (figure 3.7 du chapitre 3) et le profil de vitesses obtenu avec le DOP1000, pour une vitesse de rotation du disque  $\omega_{\text{disque}} = 400 \text{ tours min}^{-1}$ . La figure 5.3 B) montre que lors de ces expériences réalisées dans un référentiel à l'arrêt ( $\Omega_{\text{table}} = 0$ ), le tourbillon était bien rigidifié selon l'axe de rotation puisque les vitesses ne varient que très peu avec la hauteur dans le cylindre. Les figures 5.3 C) et D) sont complémentaires et montrent que la géométrie du champ de vitesse dans le cylindre demeure quasi identique quelle que soit la vitesse du disque, jusqu'à  $\omega_{\text{disque}} = 3000 \text{ tours min}^{-1}$ , le champ de vitesse se décomposant en un coeur solide et une zone de cisaillement. En particulier, la figure 5.3 D) pour des vitesses  $\omega_{\text{disque}} \geq 1000 \text{ tours min}^{-1}$  montre un coeur en rotation solide de rayon 10 mm environ.

### 5.2.2 Le tourbillon de gallium

Les mesures de vitesse dans le tourbillon de gallium se sont révélées bien plus difficiles à réaliser que dans l'eau. En effet, réaliser le bon dosage de particules de borure de zirconium au sein du gallium afin que l'onde acoustique ne soit ni trop, ni pas assez absorbée, est une tâche difficile (Pascal, 1996).

La figure 5.4 est un exemple de profils de vitesse obtenus dans le tourbillon de

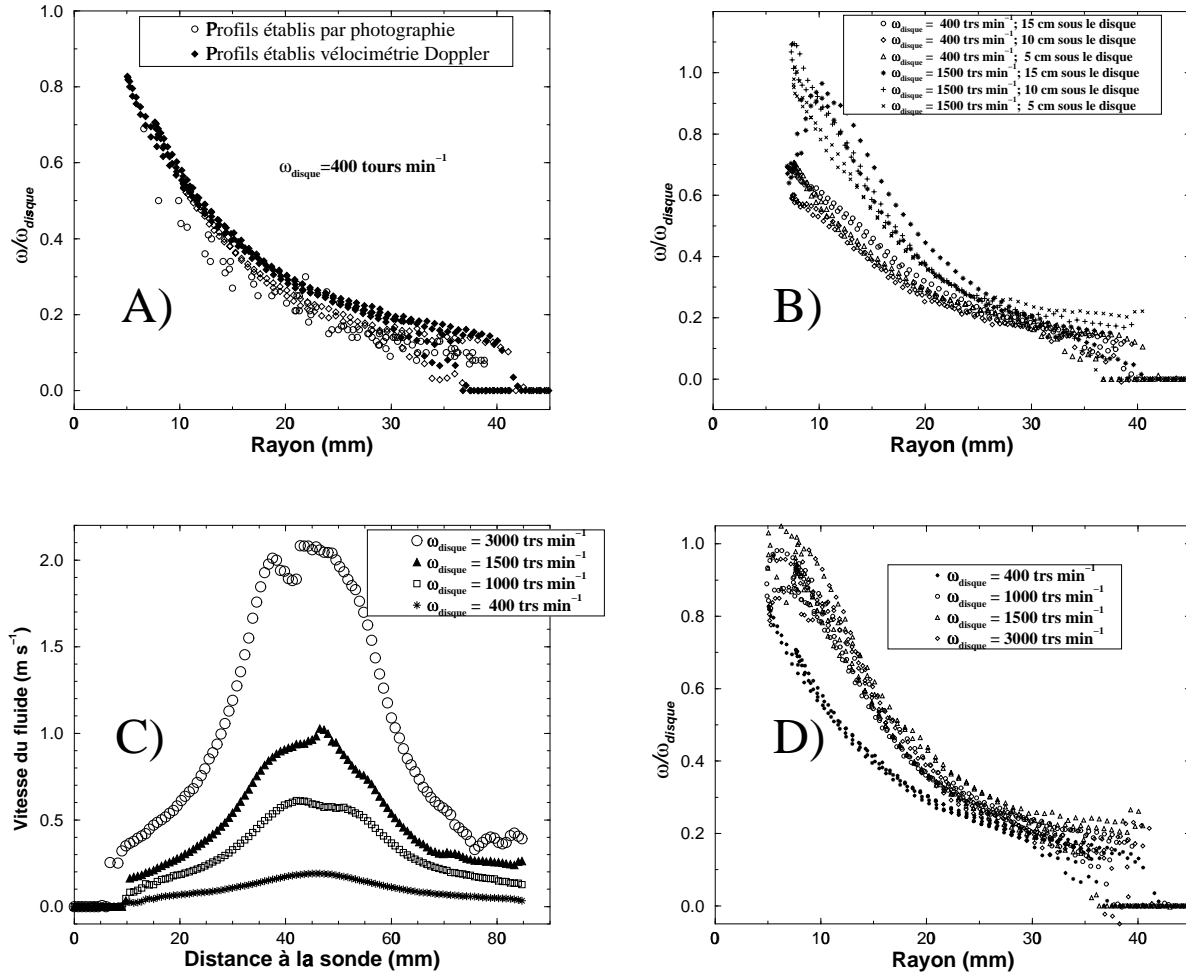


FIG. 5.3 – Profils de vitesse obtenus dans un tourbillon d'eau par vélocimétrie Doppler.

gallium lorsque la concentration de particules de  $\text{ZrB}_2$  était optimale. Ces mesures apportent la preuve que l'utilisation des ultrasons pour mesurer la vitesse dans un fluide opaque est une voie très prometteuse pour les futures études expérimentales.

### 5.3 Mesures de champ magnétique induit et de dissipation ohmique

En raison d'un problème de puissance de moteur, nous n'avons pas excédé un nombre de Reynolds magnétique de 0.3 dans nos expériences. Nous sommes donc restés dans un régime d'écoulement où la diffusion domine largement devant l'induction de champ magnétique, tout comme dans nos études précédentes (chapitres 3 et 4).

La figure 5.5 A) démontre le remarquable accord entre les mesures expérimentales de champ magnétique induit vertical et le modèle théorique: le profil antisymétrique de

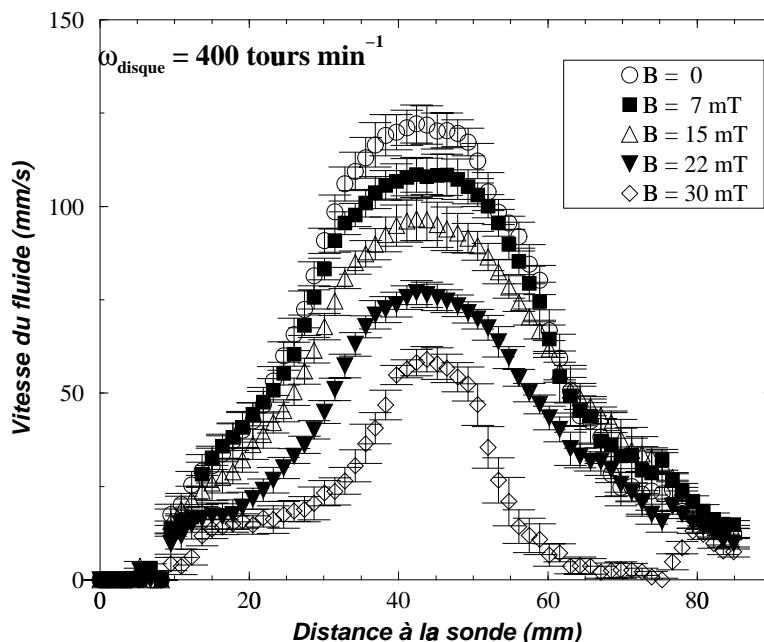


FIG. 5.4 – Profils de vitesse obtenus dans un tourbillon de gallium par vélocimétrie Doppler. Profils obtenus pour  $\omega_{\text{disque}} = 400 \text{ tours min}^{-1}$  et  $B_{\text{imposé}}$  croissant de 0 à 30 mT. Ces mesures montrent le freinage efficace du champ magnétique.

champ magnétique induit vertical est la signature du bouclage des courants au sommet du tourbillon, comme le prédit le modèle sur la figure 3.21 C).

Nous avons comparé le champ magnétique vertical induit par l'écoulement principal par rapport au champ magnétique induit par l'écoulement secondaire vertical (pompage du fluide en direction du disque en rotation). Pour quantifier l'effet du pompage, nous avons procédé de la manière suivante: lors d'une première expérience, on mesure le champ magnétique induit par la rotation du disque dans le sens prograde, puis dans une seconde expérience, on recommence les mesures avec cette fois la rotation du disque dans le sens rétrograde. L'écoulement principal génère un champ magnétique induit de signe opposé dans ces deux expériences puisque la vitesse  $\vec{U}$  est changée en  $-\vec{U}$  d'une expérience à l'autre, alors que le champ magnétique imposé  $B_{\text{imposé}}$  reste identique. Le champ magnétique induit par le pompage vertical est lui identique dans les deux expériences (car le pompage est toujours en direction du disque). La figure 5.5 B) représente les mesures de champ magnétique induit vertical réalisées pour  $\omega_{\text{disque}} = 1500 \text{ tours min}^{-1}$  puis  $\omega_{\text{disque}} = -1500 \text{ tours min}^{-1}$ . On voit que le champ magnétique induit est effectivement de signe opposé d'une expérience à l'autre. La dernière courbe sur la figure 5.5 B) est la somme du champ magnétique induit vertical dans les deux expériences et représente donc le champ magnétique induit vertical induit par le pompage du fluide. On voit sur cette figure que le champ magnétique induit par l'écoulement secondaire est négligeable devant le champ magnétique induit par l'écoulement principal: c'est le bouclage des courants au sommet du vortex qui induit pratiquement la

totalité du champ magnétique vertical que l'on mesure. On en conclut que le champ magnétique induit par le pompage était négligeable dans nos expériences et cela, même si le pompage d'Ekman "classique" (Greenspan, 1968) était accru par la présence de rainures sur le disque (voir chapitre 3).

La figure 5.6 reprend les mesures de dissipation ohmique de la figure 4.7 et inclut les nouvelles mesures effectuées à des vitesses de disque supérieures,  $\omega_{\text{disque}} = 2200$  tours  $\text{min}^{-1}$  et  $\omega_{\text{disque}} = 2500$  tours  $\text{min}^{-1}$ . Les nouvelles mesures ne montrent pas une décroissance de la dissipation ohmique pour des champs magnétiques imposés forts (jusqu'à 120 mT) comme on l'avait observé sur la figure 4.7; il est cependant possible que la dissipation ohmique décroisse à des champs magnétiques plus intenses que 120 mT (nous étions limités dans nos expériences par la puissance maximale de l'électro-aimant), néanmoins notre manque d'informations sur le champ de vitesse dans le tourbillon nous empêche d'être plus précis dans l'interprétation de ces nouvelles mesures.

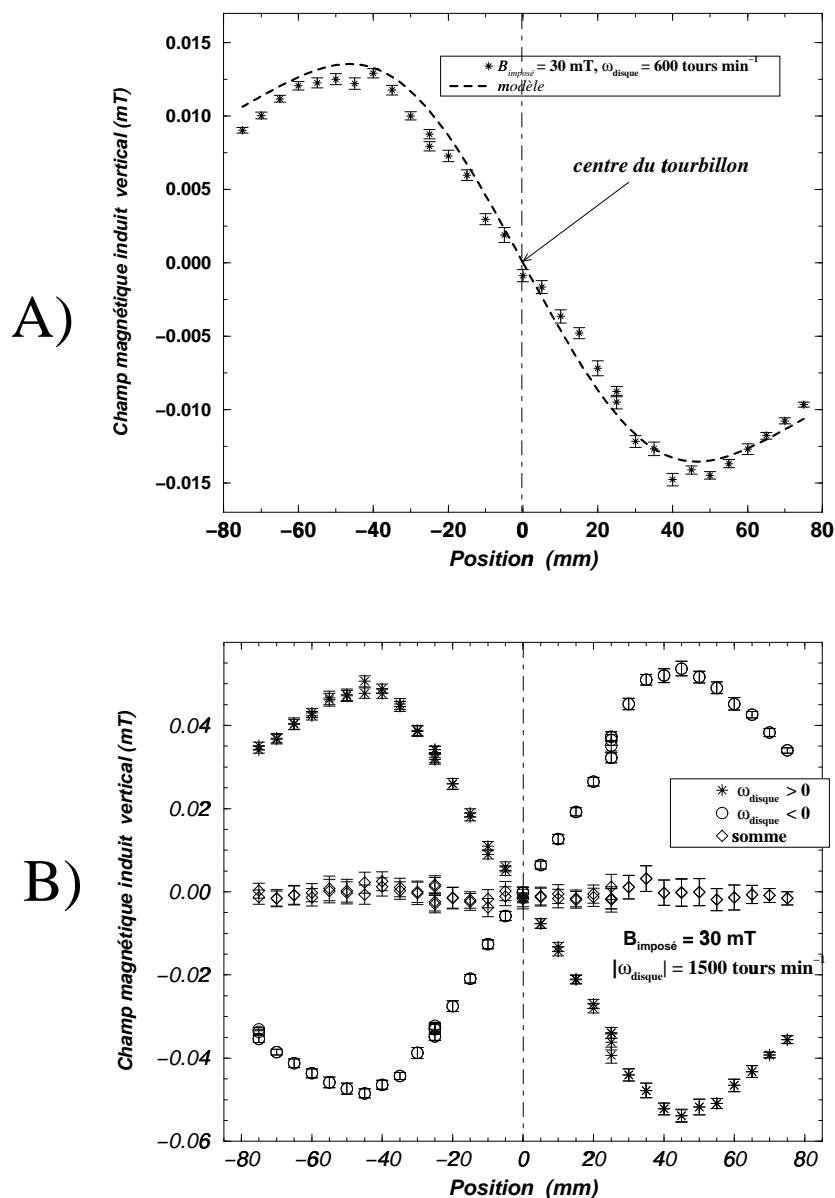


FIG. 5.5 – A) *Champ magnétique induit vertical au sommet du cylindre pour un tourbillon à  $\omega_{\text{disque}} = 400 \text{ tours min}^{-1}$  et  $B_{\text{imposé}} = 30 \text{ mT}$ . L'abscisse est la position par rapport au centre du tourbillon mesurée sur le diamètre perpendiculaire au champ magnétique imposé. Le profil antisymétrique du champ magnétique induit par rapport au centre du cylindre démontre que les courants électriques bouclent au sommet du tourbillon comme le modèle de courant le prédit (figure 3.21 C).* B) *Champ magnétique induit vertical au sommet du cylindre pour un tourbillon à  $\omega_{\text{disque}} = 1500 \text{ tours min}^{-1}$  (croix),  $\omega_{\text{disque}} = -1500 \text{ tours min}^{-1}$  (cercle) et  $B_{\text{imposé}} = 30 \text{ mT}$ . En faisant la somme de ces deux profils, on obtient le champ magnétique induit par le pompage vertical (écoulement secondaire): le champ magnétique induit par le pompage est négligeable devant le champ magnétique induit par le bouclage des courants au sommet du tourbillon.*

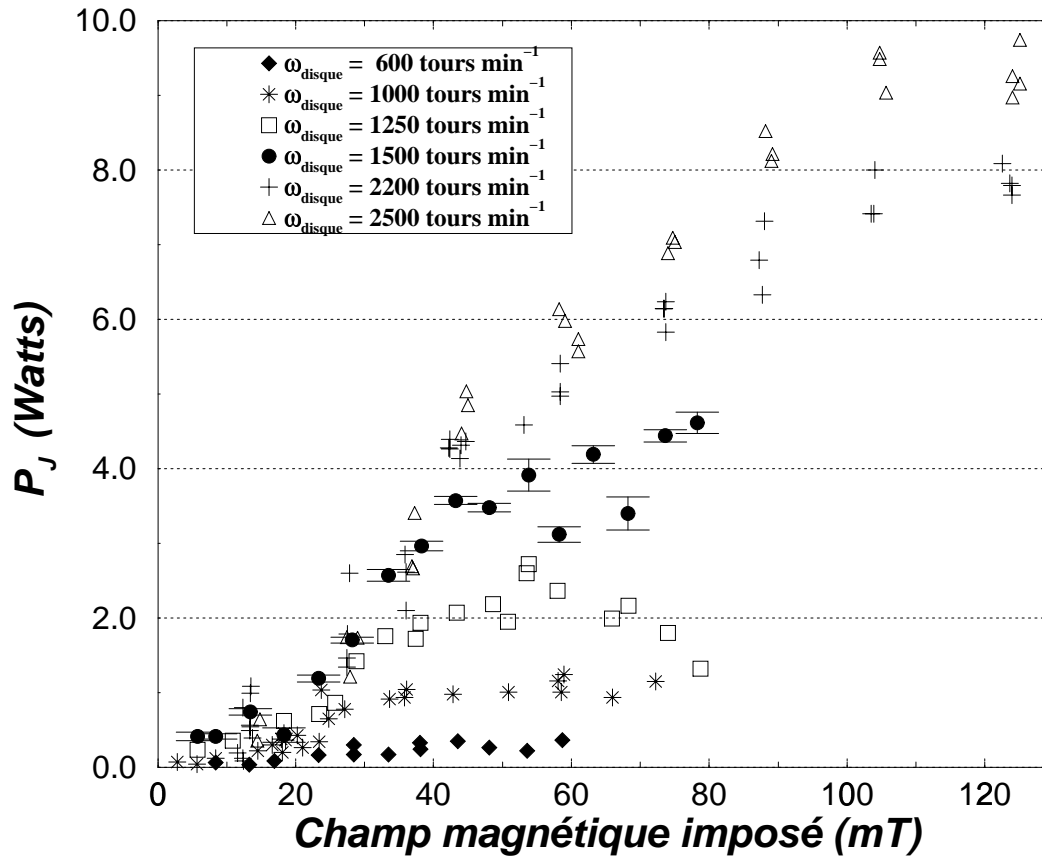


FIG. 5.6 – Effet Joule ( $P_J$ ) en Watts en fonction du champ magnétique imposé. Les nouvelles mesures réalisées à  $\omega_{\text{disque}} = 2200$  et  $2500 \text{ tours min}^{-1}$  confirment l'existence de deux régimes pour la dissipation ohmique en fonction du champ magnétique imposé observés dans le chapitre 4. On observe cependant pas une décroissance de  $P_J$  jusqu'à  $B_{\text{imposé}} = 120 \text{ mT}$ , ce qui diffère des mesures de la figure 4.7 pour  $\omega_{\text{disque}} \leq 1500 \text{ tours min}^{-1}$ .

## Chapitre 6

# Conclusions sur l'étude expérimentale du tourbillon de gallium

Dans la première partie de ces conclusions, une comparaison des nombres sans dimension de l'expérience et du noyau permettent de situer notre étude expérimentale dans le contexte des paramètres de la géodynamo. Dans la seconde partie, nous appliquons nos résultats au noyau terrestre, puis enfin dans la troisième nous dressons une conclusion générale sur ce travail expérimental.

### 6.1 Comparaison entre le tourbillon de gallium et l'écoulement dans le noyau liquide terrestre

Les nombres sans dimensions caractéristiques du tourbillon expérimental sont comparés à ceux du noyau dans le tableau 6.1.

**Le nombre de Rossby** La différence la plus importante, en terme d'ordres de grandeur, entre les nombres caractéristiques expérimentaux et ceux du noyau terrestre réside dans le nombre de Rossby: de l'ordre de l'unité pour le tourbillon et de  $10^{-6}$  pour le noyau terrestre. Les mouvements du fluide dans le noyau sont causés par la convection thermique et la convection compositionnelle (Cardin & Olson, 1992), résultant en des mouvements de grande échelle mais de faible vitesse, expliquant une faible inertie du fluide devant l'accélération de Coriolis (faible nombre de Rossby). Le tourbillon

Symbole	Nom	Définition	Expérience	Noyau terrestre
Ro	Rossby	Inertie/Coriolis= $U/\Omega D$	0.7-15	$10^{-6} - 10^{-5}$
$\Lambda$	Elsasser	Lorentz/Coriolis= $\sigma B^2/\rho\Omega$	$10^{-3}$ -1.5	0.1-10
Re <sub>m</sub>	Reynolds magnétique	$UD/\lambda = \mu_0\sigma UD$	$10^{-4}$ -0.3	100
E	Ekman	Visqueux/Coriolis = $\nu/\Omega D^2$	$10^{-6} - 10^{-4}$	$10^{-15} - 10^{-13}$
P <sub>m</sub>	Prandtl magnétique	$\nu/\lambda$	$1.5 \times 10^{-6}$	$10^{-5}$ - $10^{-6}$

TAB. 6.1 – Comparaison des nombres caractéristiques sans dimension dans le tourbillon de gallium et dans le noyau terrestre.



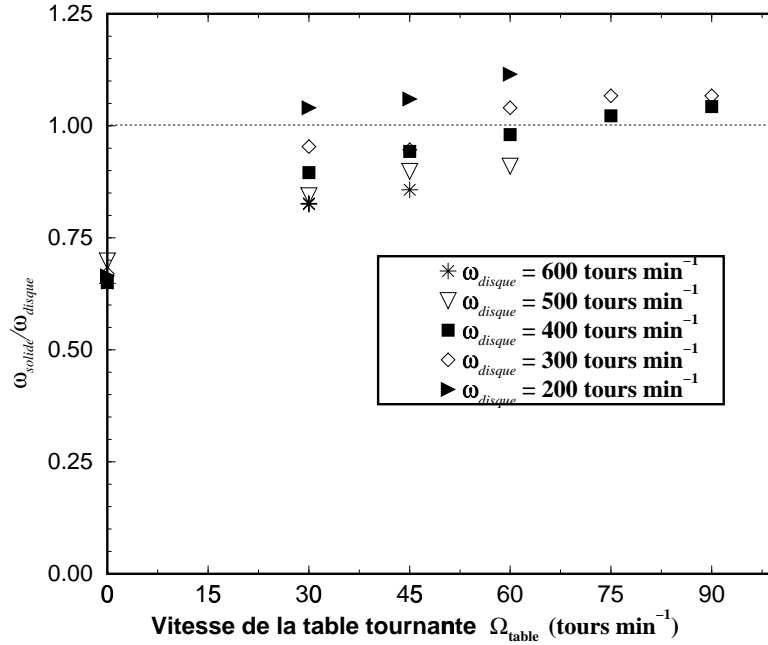


FIG. 6.1 – Rapports entre la rotation solide du tourbillon expérimental  $\omega_{solide}$  et la rotation du disque  $\omega_{disque}$ , en fonction de la vitesse de rotation la table tournante  $\Omega_{table}$ , pour des vitesses de disque variant entre 200 tours  $\text{min}^{-1}$  et 600 tours  $\text{min}^{-1}$  et un champ magnétique imposé nul. Dès  $\Omega_{table}=30$  tours  $\text{min}^{-1}$  le rapport  $\frac{\omega_{solide}}{\omega_{disque}}$  est très proche de 1, démontrant que l'écoulement est bidimensionnel.

expérimental est par contre généré mécaniquement par la rotation du disque à la base du cylindre, le disque transmettant son inertie au fluide. Durant les expériences, la rotation de la table était toujours inférieure à celle du disque, c'est pourquoi nous avons obtenu un nombre de Rossby bien plus élevé dans le tourbillon que dans le noyau terrestre. Il peut alors paraître inapproprié d'avoir qualifié notre tourbillon de géostrophique (chapitre 3), puisque par définition, dans un écoulement géostrophique le nombre de Rossby doit être petit devant 1 (Greenspan, 1968). Nous avons en effet utilisé le terme *géostrophique* dans le sens *bidimensionnel* par abus de langage, la bidimensionnalité étant une conséquence de la géostrophie (théorème de Proudman-Taylor). En effet, la figure 6.1 démontre que dès que l'accélération de Coriolis est rajoutée à la balance des forces de l'écoulement, le tourbillon se rigidifie selon l'axe de rotation et devient bidimensionnel. En réalité, le terme d'inertie, bien que dominant dans l'équation de Naviers-Stokes régissant l'écoulement du tourbillon, ne joue qu'un rôle moteur dans l'écoulement, l'équilibre se faisant entre les forces de Lorentz et l'accélération de Coriolis comme le démontre la figure 3.12: la vitesse du tourbillon est déterminée par le nombre d'Elsasser et ceci quel que soit le nombre de Rossby.

**Le nombre d'Elsasser** Nous avons atteint un nombre d'Elsasser de l'ordre de l'unité avec le tourbillon de gallium. Le nombre d'Elsasser basé sur le champ magnétique poloïdal sortant du noyau (de l'ordre de  $10^{-4}$  T) est de l'ordre de l'unité également. Le nombre d'Elsasser basé sur le champ magnétique toroïdal est lui bien plus incertain puisque la valeur du champ magnétique toroïdal dans le noyau est inconnue. Suivant les études dynamos partisans d'un champ magnétique fort ou d'un champ magnétique faible (Gubbins & Roberts, 1987), le nombre d'Elsasser peut varier entre 0.1 et 100. Une analyse de stabilité au seuil de la convection thermique dans une sphère en rotation montre que  $\Lambda \simeq 1$  est la valeur préférentielle pour le démarrage de la convection (Cardin & Olson, 1995).

**Le nombre de Reynolds magnétique** La principale différence entre le tourbillon et le noyau terrestre en terme de physique se caractérise par le nombre de Reynolds magnétique: la diffusion du champ magnétique est prépondérante dans l'expérience et nous sommes loin d'un équilibre diffusion-induction caractéristique d'une dynamo. Ce qui nous a limité dans la valeur du nombre de Reynolds magnétique  $Re_m = \mu_0 \sigma U D$  est la taille caractéristique de notre écoulement. Nous avons atteint au mieux  $Re_m = 0.3$  (chapitre 5) alors que dans le noyau le nombre de Reynolds magnétique est nécessairement supérieur à 1, et, est peut-être de l'ordre de la centaine (Gubbins & Roberts, 1987).

**Les nombres d'Ekman et de Prandtl magnétique** Comme on le voit sur le tableau 6.1, nous étions durant l'expérience dans le bon ordre de grandeur pour les nombres d'Ekman et de Prandtl magnétique par rapport à ceux du noyau terrestre. Les études expérimentales de magnétohydrodynamique permettent en effet d'obtenir une diffusivité magnétique du fluide plusieurs ordres de grandeur supérieure à la diffusivité visqueuse; dans les simulations numériques on est obligé d'imposer une diffusivité magnétique de l'ordre de la diffusivité visqueuse ( $P_m \simeq 1$ ) pour des raisons de stabilité du code. C'est de ce point de vue que les études expérimentales pourraient s'avérer les plus utiles.

## 6.2 Application des résultats expérimentaux au noyau terrestre

La différence de régime entre le tourbillon et le noyau, notamment en terme de nombre de Reynolds magnétique, conduit à de la prudence dans l'application des résultats expérimentaux au noyau terrestre. C'est pourquoi nous resterons qualitatifs dans nos conclusions.

La figure 3.12 a permis de regrouper toutes nos expériences sur un seul et même graphe: le rapport  $\frac{\omega_{\text{solide}}}{\omega_{\text{disque}}}$  dans le tourbillon de gallium est une fonction monotone ne dépendant que du nombre d'Elsasser. Cette fonction mesure en fait la vitesse du fluide en fonction du champ magnétique imposé pour un moteur de l'écoulement constant, le moteur étant l'entraînement du fluide par le disque dans notre expérience. Si une telle relation existe entre la vitesse angulaire moyenne du fluide au sein du noyau et

le champ magnétique toroïdal, cela pourrait nous informer sur l'ordre de grandeur du champ magnétique toroïdal présent dans le noyau terrestre, par exemple en regardant localement la vitesse des structures à la frontière Noyau-Manteau (Hulot et al., 1990).

Toujours à partir de la figure 3.12, on constate que le freinage du fluide par les forces de Lorentz est très efficace: par exemple pour  $\Lambda = 0.8$ , la vitesse du fluide est ralentie d'un facteur 10 par rapport à un écoulement sans champ magnétique. En fait, l'effet du champ magnétique est si intense que la bidimensionnalité de l'écoulement est rompue dès un nombre d'Elsasser  $\Lambda > 0.2$ . Si l'on fait l'analogie entre le champ magnétique induit dans le tourbillon et le champ magnétique toroïdal du noyau, on obtient

$$\Lambda = \frac{\sigma B_{\text{toroïdal}}^2}{\rho\Omega} \leq 0.2 \Rightarrow B_{\text{toroïdal}} \leq 5.4 \cdot 10^{-4} T = 5.4 \text{ Gauss}$$

ce qui signifie qu'un champ toroïdal dans le noyau de l'ordre de grandeur du champ poloïdal observable à la surface du noyau pourrait briser la géostrophie de l'écoulement. Bien entendu, l'application de notre loi expérimentale au noyau terrestre est non justifiée, mais qualitativement nos expériences semblent montrer qu'il est difficile de conserver du mouvement pour des nombres d'Elsasser largement supérieurs à un (figure 12) dès lors que les lignes de champ magnétique coupent l'écoulement principal.

L'étude menée dans le chapitre 4 a démontré qu'énergétiquement le champ magnétique toroïdal du noyau ne peut-être supérieur à 25 mT en moyenne, si l'on suppose que l'écoulement dans le noyau est géostrophique. Ceci est un résultat important et va peut-être attirer l'attention des modélisateurs de la dynamique du noyau: en effet, peu nombreuses sont les contraintes ou conditions limites à respecter quand on modélise la dynamique du noyau et la dissipation ohmique dans le noyau fait partie de celles-ci. Connaissant la puissance totale dissipée dans la Terre et dans le manteau, il est alors possible d'en déduire une borne limite supérieure pour la puissance ohmique dissipée dans le noyau liquide (Lister et al., 1995). Ceci est une contrainte réelle pour le noyau et il est important d'en tenir compte si l'on veut comparer son modèle au noyau terrestre.

L'étude détaillée de la distribution des courants électriques dans le tourbillon de gallium a permis d'isoler un mécanisme créant un champ magnétique poloïdal à partir d'un champ magnétique toroïdal dans un écoulement sans hélicité. C'est en effet l'hélicité qui est invoquée traditionnellement pour expliquer la conversion du champ magnétique toroïdal en champ magnétique poloïdal sous le nom de effet- $\alpha$  (Moffatt, 1978). Dans le tourbillon, c'est le bouclage des courants électriques en contact avec la paroi isolante qui est responsable de la génération d'un champ magnétique poloïdal. Ce bouclage génère un champ magnétique induit vertical sous la forme de concentrations de flux magnétiques de signes opposés au sommet du tourbillon (voir figure 3.21 C). Par analogie, si l'écoulement dans le noyau terrestre se compose de grandes colonnes de Taylor géostrophiques avec une vitesse principalement zonale, les courants électriques poloïdaux du noyau doivent nécessairement boucler à la frontière Noyau-Manteau: la signature de colonnes à l'interface Noyau-Manteau devrait alors se traduire par des flux locaux de champ magnétique poloïdal à la frontière Noyau-Manteau. Si de plus des colonnes contra-rotatives se juxtaposent (Busse, 1970) à la frontière Noyau-Manteau, l'intensité de ces flux magnétiques devrait être accrue.

### 6.3 Conclusion

L'étude expérimentale d'un tourbillon de gallium soumis à un champ magnétique nous a donné satisfaction pour deux raisons principales.

La première est que cette expérience a permis de comprendre en détail un écoulement de magnétohydrodynamique. Nous avons été en mesure de comprendre et interpréter les mesures expérimentales à l'aide d'un modèle simple d'écoulement dans le tourbillon. Nous avons démontré expérimentalement que le champ magnétique élargit les structures dynamiques dans un régime magnétostrophique; à noter qu'Alemanly et al. (1979) avaient observé expérimentalement l'élargissement des structures dynamiques dans la direction du champ magnétique en magnétohydrodynamique turbulente. Les mesures quantitatives de dissipation par effet Joule ont suggéré que la dissipation ohmique est une source de dissipation importante à ne pas négliger dans les modèles de géodynamo. La rupture de la géostrophie du tourbillon à faible nombre d'Elsasser ainsi qu'un freinage très important du mouvement pour  $\Lambda \simeq 1$  vont à l'encontre des modèles de dynamo à champ fort (Gubbins & Roberts, 1987).

Le deuxième motif de satisfaction est la réussite d'un point de vue technologique. Nous avons en effet démarré cette expérience avec bien des inconnues, à commencer par le gallium que nous n'avions jamais utilisé. Nous avons su évoluer au cours des expériences, par exemple en utilisant quatre méthodes de mesure de vitesses différentes, pour acquérir au bout du compte un savoir-faire important dans la *manipulation* du gallium et dans les mesures expérimentales dans un repère en rotation. Les méthodes de mesures de différences de potentiels électriques, de champ magnétique induit et de vitesses ultrasonores vont maintenant pouvoir être utilisées dans des géométries sphériques plus réalistes pour l'étude du noyau terrestre.

Cette expérience représente une première étape dans un projet à long terme qui a pour but de se rapprocher de la réalisation d'une dynamo expérimentale dans une géométrie sphérique. A l'heure où les dynamos numériques émergent (Glatzmaier & Roberts, 1985; Kuang & Bloxham, 1997; Christensen et al., 1998), il est sage de rappeler que ces dynamos sont encore loin d'être dans un régime de paramètres réalistes pour la modélisation de la dynamo terrestre. L'hyperdiffusivité, par exemple, utilisée dans les codes pour des raisons de stabilité numérique, rendent ces dynamos "*visqueuses*" bien particulières, d'où il est difficile d'extraire des informations qui soient vraiment pertinentes pour la géodynamo. C'est pourquoi il est fondamental de poursuivre des études expérimentales qui permettront d'une part de confirmer ou non les résultats numériques, et d'autre part d'arriver à une gamme de paramètres à l'heure actuelle hors d'atteinte des calculs avec les ordinateurs les plus puissants.

La deuxième étape de ce projet expérimental va consister à étudier une sphère de gallium en magnétoconvection, avec un champ magnétique imposé toroïdal ou poloïdal. Cette expérience est en construction à l'Université Joseph Fourier de Grenoble, au sein de la nouvelle équipe "géodynamo" du Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique.

# Appendice: Des précisions sur le dispositif expérimental

## Remplissage du cylindre sous atmosphère contrôlée d'azote

Comme nous l'avons évoqué dans le chapitre 2, le gallium s'oxyde quasi-instantanément en présence d'air. Nous l'avons par conséquent toujours manipulé sous atmosphère d'azote.

La figure 6.2 illustre comment nous avons utilisé le circuit sous atmosphère contrôlée lors du remplissage du cylindre avec du gallium.

Le remplissage du cylindre s'effectue en deux étapes, A) et B) sur la figure 6.2. Le schéma A) représente une alimentation continue du cylindre avec de l'azote pendant 30 minutes via des tubes de 3 mm de diamètre en téflon: l'azote pénètre par le robinet R1 en téflon (robinet de type Luer-Lock vissé sur le couvercle de polycarbonate, assurant une bonne étanchéité entre l'intérieur et l'extérieur du cylindre) et chasse l'oxygène par le robinet R2. L'intérieur du cylindre se retrouve ainsi entièrement sous atmosphère d'azote au bout de 30 minutes. L'azote évacué par le bulleur témoin permet de vérifier que la circulation se fait correctement. Le schéma B) représente le remplissage progressif du cylindre avec le gallium: l'arrivée d'azote dans la bouteille réservoir de gallium provoque une légère surpression qui amorce une "pompe" dans le tube plongé dans le gallium. Le gallium circule alors entre la bouteille et le cylindre avec un débit faible (débit imposé par la surpression dans la bouteille) et chasse progressivement l'azote du cylindre. Le remplissage est terminé lorsque la bouteille réservoir s'est vidée, remplissant le cylindre de gallium et évacuant complètement l'azote. Le bulleur est toujours témoin du bon déroulement de ces opérations.

La vidange du cylindre utilise le même dispositif. On commence par désoxygéner la bouteille réservoir comme en A), puis l'on connecte le robinet R3 et la bouteille. On ouvre ensuite le robinet R3, la bouteille se remplissant de gallium et se vidant d'azote simultanément.

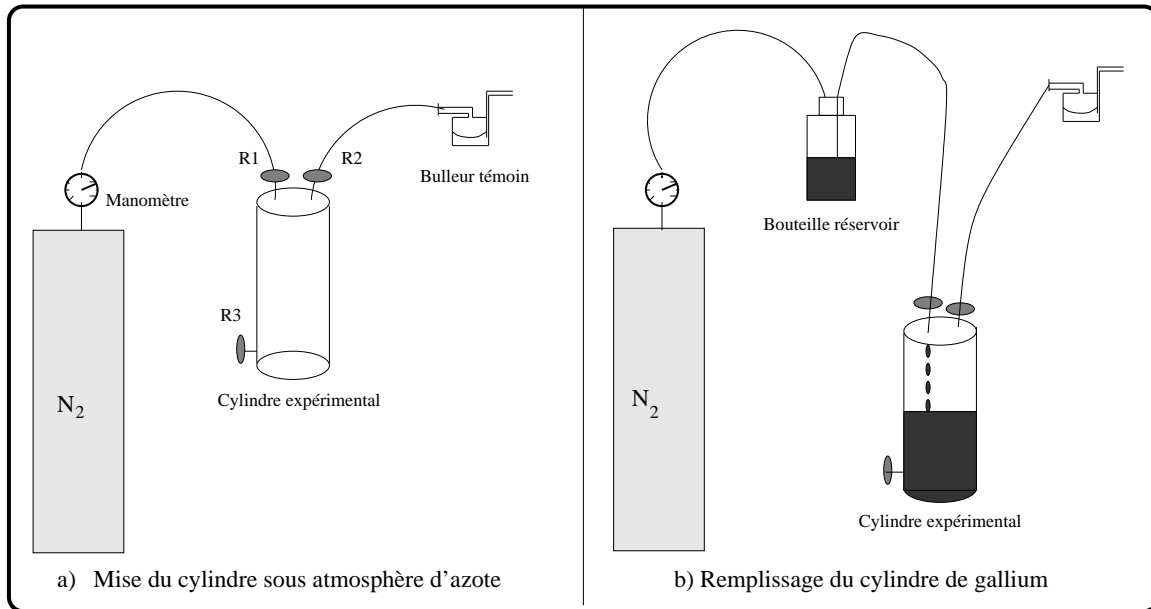


FIG. 6.2 – Illustration du remplissage du cylindre de gallium sous atmosphère contrôlée d'azote.

### Le pilotage autonome d'une expérience

Les composantes mécaniques et les instruments de mesures expérimentaux ont été décrits dans le chapitre 2. Dans cet appendice, nous expliquons comment nous avons relié tous ces éléments et comment nous avons enregistré les informations provenant de la table en rotation.

**Une contrainte: la vitesse de rotation élevée du dispositif expérimental** Lors de nos expériences au palais de la Découverte (Chapitre 2), tout le dispositif expérimental ainsi que les expérimentateurs étaient sur la table tournante; nous nous sommes ainsi assurés que les différents outils de mesure ne présentaient pas de dysfonctionnement majeur sous l'effet de la rotation, pour une rotation maximale de  $11 \text{ tours min}^{-1}$ . C'était un avantage d'être sur la table pour nous utilisateurs: en effet nous étions ainsi aux commandes des instruments de mesures via l'ordinateur de manière interactive, prêts à parer instantanément à des défaillances mécaniques, informatiques ou électroniques du dispositif expérimental.

La configuration de l'expérience à Grenoble était très différente: une vitesse de rotation de la table tournante de  $90 \text{ tours min}^{-1}$  excluait *de facto* toute présence humaine sur la table. Il a fallu alors insister sur deux points pour le bon déroulement de cette expérience : l'arrimage parfait du dispositif assurant la sécurité des lieux, et le pilotage informatique "autonome" de l'expérience, c'est-à-dire un contrôle total de l'expérience par le PC embarqué sur la table tournante. L'électro-aimant, le moteur, les deux multiplexeurs posés sur un même support, le gaussmètre, le PC, tous arrimés à la table (figure 2.3), pesaient au total environ 300 kg. Pour donner une meilleure idée du danger que ce poids représente, sachez que la force centrifuge en bordure de table lorsqu'elle tournait à  $90 \text{ tours min}^{-1}$  était de l'ordre de  $7 |\vec{g}|$  correspondant à une vitesse linéaire

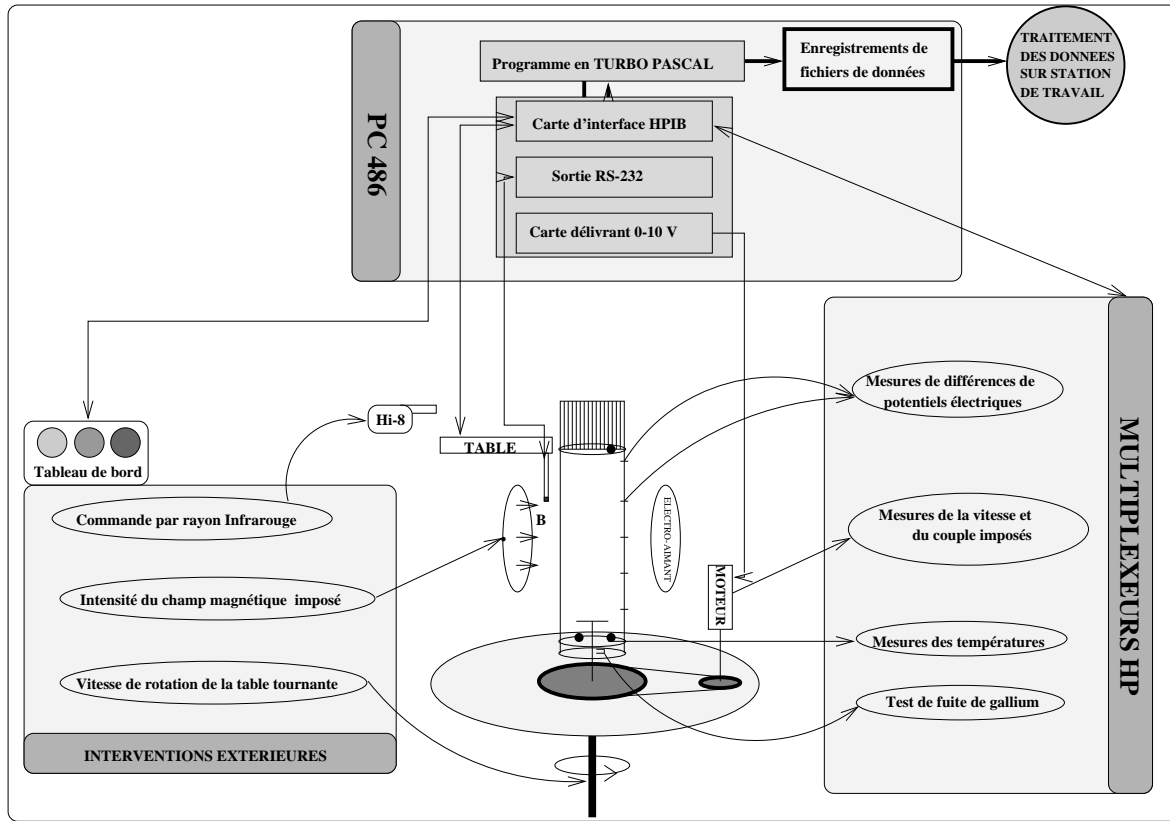


FIG. 6.3 – Schéma présentant les connexions électroniques et informatiques entre les différentes composantes expérimentales.

de 7 m/s. Nous avons fixé avec précaution l'électro-aimant (la plus grande masse) au centre de la table afin d'équilibrer les charges sur la table, puis arrimé avec de puissantes sangles tout le reste du dispositif à l'électro-aimant.

**L'interface électronique-informatique** Le schéma 6.3 représente l'architecture de l'interface entre l'informatique et les différents instruments de mesures dans notre expérience. Toutes les informations transitaient par un PC 486 qui gérait le programme informatique pilotant l'expérience.

Le PC possédait 3 cartes électroniques d'interface:

- La carte Hewlett-Packard Interface Bus (HP-IB) permettait de donner des ordres à des unités ou instruments HP (deux multiplexeurs et une table pas-à-pas de déplacement) à partir du programme informatique écrit en Turbo-Pascal. L'information circulait entre la carte et les unités par l'intermédiaire de câbles HP-IB. Les multiplexeurs pouvaient être utilisés avec des fonctions différentes: ils ouvraient et fermaient un circuit électrique, vérifiaient si deux points d'un circuit étaient en contact (par exemple si une fuite de gallium se produisait sous l'axe de rotation, les deux branches métalliques de la figure 6.3 auraient fait contact et le multiplexeur aurait alors détecté cette fuite), mesuraient la résistance électrique

(des thermistances Pt-100, dont les résistances varient de façon connue avec la température, permettaient de mesurer les températures en 3 positions du cylindre précisées sur la figure 6.3), mesuraient des différences de potentiels (on mesurait une différence de potentiels pour chaque paire d'électrodes, ainsi que des différences de potentiels nous donnant les valeurs précises de la vitesse et du couple délivrées par le moteur entraînant le disque). L'autre unité, le moteur pas-à-pas, déplaçait horizontalement une table portant la sonde du gaussmètre, permettant ainsi de réaliser des profils de champ magnétique dans la direction voulue.

- La sortie RS-232 sur le PC nous permettait d'enregistrer l'intensité du champ magnétique mesurée par le gaussmètre.
- Une carte montée sur le PC délivrait une tension électrique variable entre 0 et 10 V activant le moteur du disque à la vitesse voulue.

Comme le montre la figure 6.3, nous pilotions de l'extérieur la vitesse de rotation de la table, l'intensité du champ magnétique imposé ainsi que l'enregistrement des profils des tubes de Venturi sur caméra vidéo Hi-8 par l'intermédiaire d'une télécommande infrarouge.

### Présentation d'un algorithme décrivant un pilotage d'expérience "autonome"

Le schéma 6.4 présente l'algorithme du programme informatique pilotant le déroulement de l'expérience. Ce programme écrit en Turbo-Pascal était divisé en huit unités différentes, chaque unité ayant une fonction particulière, par exemple l'enregistrement des mesures.

Au démarrage d'une expérience nous fixions trois paramètres: le champ magnétique imposé  $B_0$ , la vitesse de la table tournante  $\Omega_0$  et le nombre de vitesse du disque  $N$  que l'on voulait activer durant cette série. Après avoir rentré ces paramètres dans le programme, on pouvait commencer la rotation de la table. Suivait ensuite une boucle avec les différentes vitesses du disque  $N_i$  (figure 6.4), chaque mesure (mesures de différences de potentiels, de champ magnétique induit, des profils de pression) alternant avec des tests de sécurité:

- *Test HPIB*: au début de chaque nouvelle vitesse du disque  $N_i$ , le programme vérifiait que le réseau HPIB (câbles, multiplexeur, table pas-à-pas) n'était pas pollué par des informations non transmises ou par une autre anomalie qui aurait entraînée un mauvais déroulement de l'expérience: en cas de problème, le programme interrompait l'expérience et on procédait à une ré-initialisation des instruments HP avant de relancer l'expérience.
- *Test manip partiel* vérifiait d'une part qu'il n'y avait pas de fuite de gallium et d'autre part que le couple imposé par le moteur du disque n'était pas anormalement grand.
- *Test manip complet* était identique à test manip partiel avec en plus la vérification de la température du gallium: le programme vérifiait que le gallium ne se trouvait jamais sous sa température de solidification.

Ces tests étaient destinés à interrompre précipitamment l'expérience en cas d'anomalie.



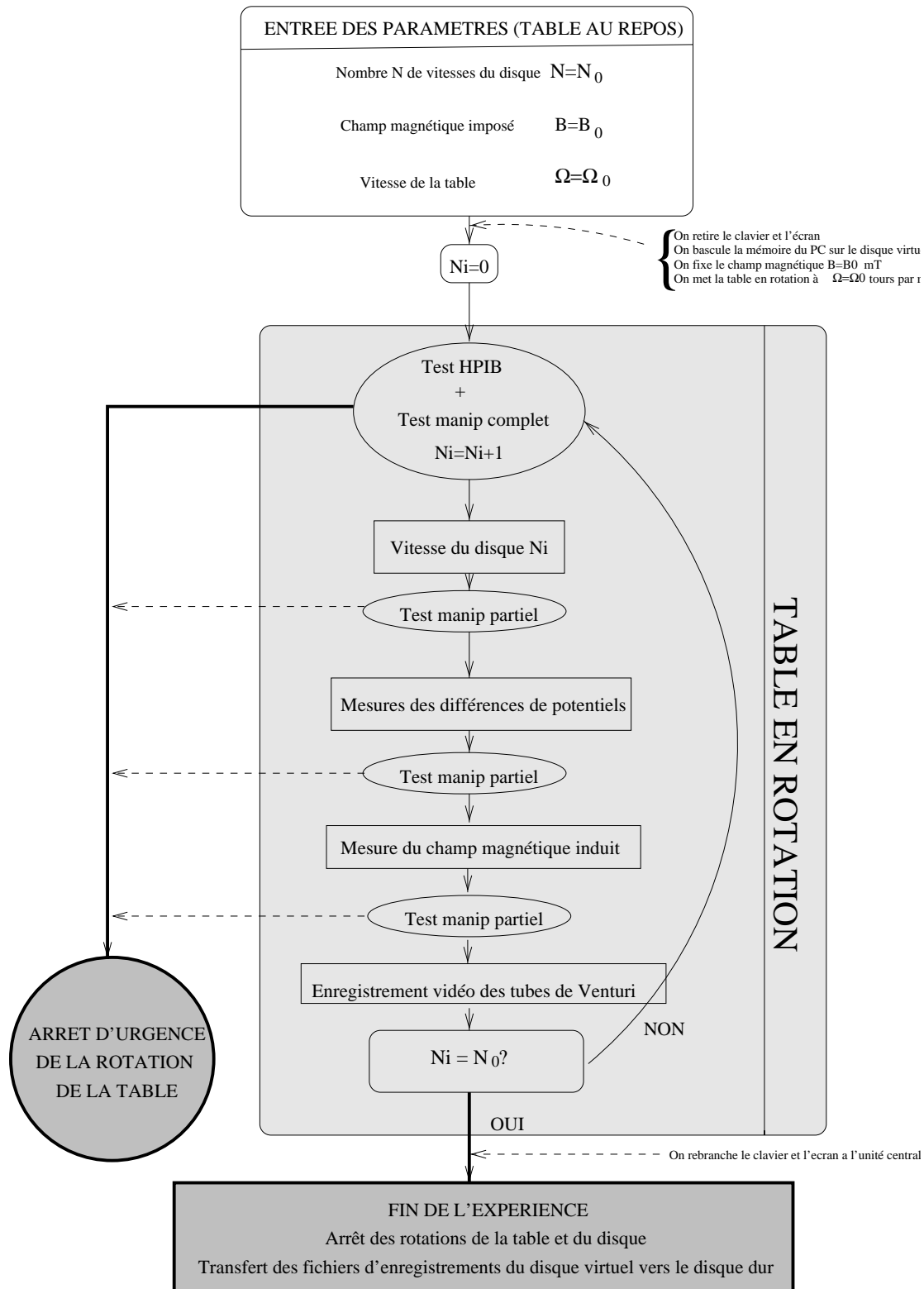


FIG. 6.4 – Algorithme du programme informatique pilotant l'expérience.

Ne connaissant pas le comportement de la tête de lecture du disque dur sous l'influence de l'accélération de Coriolis et de la force centrifuge, nous avons préféré enregistrer nos mesures expérimentales sur un disque virtuel pendant la rotation de la table. Au début de l'expérience, le disque dur était désactivé et un disque virtuel prenait le relais; à la fin de l'expérience, il suffisait de faire un transfert complet de tous les fichiers du disque virtuel vers le disque dur.

Afin d'être informés en permanence sur le déroulement de l'expérience, nous avons mis au point un tableau de bord extérieur avec des petites diodes de couleur commandées par les multiplexeurs (figure 6.3); grâce à un code d'allumage et de clignotement de ces diodes, nous savions précisément où en était l'expérience, c'est-à-dire à quelle boucle en vitesse  $N_i$  (figure 6.4) ou à quelle mesure (potentiels électriques, champ magnétique induit, tests...). Des sons émis par l'unité centrale de l'ordinateur complétaient l'information.

Notons encore que la transmission électrique entre la table et l'extérieur pendant la rotation se faisait par des contacts tournants en cuivre situés sur l'axe de rotation de la table. Ces contacts nous ont permis, par exemple, de suivre et mesurer en direct le profil de pression des tubes de Venturi transmis par la caméra sur un moniteur, ou encore de pouvoir varier l'intensité du champ magnétique imposé.



Deuxième partie

**Cristallisation expérimentale de  
gallium**



# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Anisotropie de la graine terrestre

Comme on l'a vu dans l'introduction de ce mémoire, la graine solide de 1220 km de rayon occupe le centre de notre planète. Elle est entourée du noyau liquide, composée principalement de fer liquide et d'éléments légers (10 à 20 %). Il est raisonnable de penser que le noyau de la Terre se refroidit au cours du temps et que le liquide du noyau cristallise progressivement sur la graine, à une vitesse de l'ordre du dixième de millimètre par an en rayon (Labrosse, 1997). Dans la première partie de cette introduction, nous présentons les mesures sismologiques relatives à l'anisotropie élastique de la graine, puis nous évoquons les différents modèles proposés pour l'expliquer.

#### 1.1.1 Les principes de mesure

Des ondes sismiques sont générées lorsque la Terre "tremble", suite à un séisme ou à une forte explosion. Les sismomètres à la surface de la Terre enregistrent l'arrivée de ces ondes, celles-ci étant des ondes de pression (les ondes  $P$ ), des ondes de cisaillement (les ondes  $S$ ) ou encore des modes propres de vibration de la Terre. C'est en analysant les signaux des ondes que l'on en a conclu que la graine est anisotrope. La figure 1.1 explique comment on utilise les temps de parcours des ondes de compression  $P$  pour caractériser l'anisotropie de la graine.

#### 1.1.2 Les études sismologiques

C'est en 1936 que Inge Lehmann repéra la présence d'une graine au centre de la Terre (voir introduction générale). Ce n'est cependant que dans le début des années 80 que l'on a découvert indirectement l'anisotropie de la graine.

En 1981, Masters & Gilbert identifiaient des modes normaux de vibration de la Terre associés à l'énergie du noyau mais ne se doutaient pas qu'ils étaient dus à une graine anisotrope. En 1983, Poupinet et al. observaient des ondes de pression  $P$  se propageant plus rapidement suivant la direction des pôles de la graine (parallèle à l'axe de rotation de la Terre) que dans un plan équatorial. C'est finalement en 1986 que, Morelli et al. avec une analyse des temps de parcours d'ondes  $PKP(DF)$  (voir figure 1.1), et Woodhouse et al., avec une étude de modes normaux, proposaient conjointement que la graine était anisotrope. Le modèle d'anisotropie de la graine proposé était à symétrie cylindrique

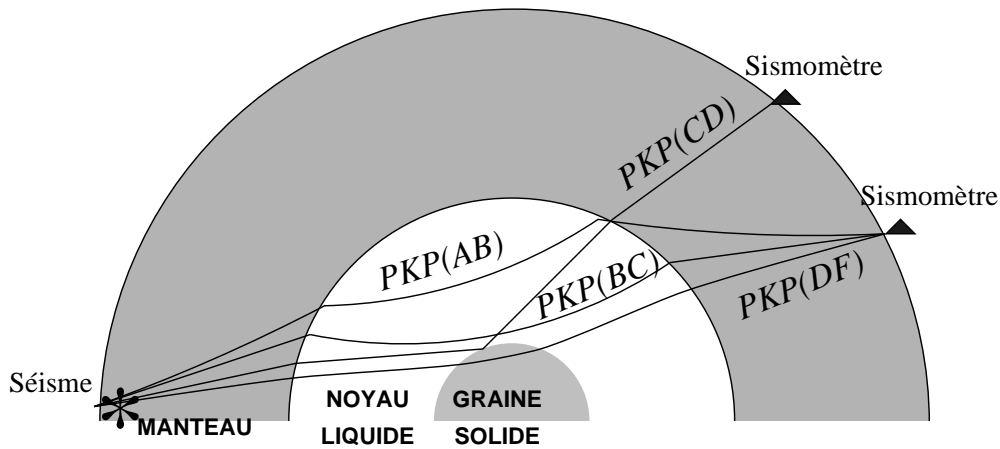


FIG. 1.1 – Trajectoire des rais se propageant dans le manteau et dans le noyau liquide, puis éventuellement dans la graine. Les ondes de pression  $P$  traversant le noyau sont les ondes  $PKP$ . Les différentes branches d'ondes ont des noms différents selon les trajectoires suivies dans le noyau:  $(AB)$ ,  $(BC)$ ,  $(CD)$  et  $(DF)$ . A noter que  $PKP(CD)$  et  $PKP(DF)$  s'appellent aussi respectivement  $PKiKP$  et  $PKIKP$ . Deux techniques de mesures sont utilisées à l'aide de ces ondes afin de déterminer l'anisotropie de la graine: la première consiste à mesurer les variations de temps de parcours des ondes  $PKP(DF)$  selon les différentes trajectoires des rais dans la graine. La deuxième technique consiste quant à elle à mesurer des temps de trajets différentiels entre les ondes  $PKP(AB)$  ou  $PK(BC)$  et les ondes  $PK(DF)$ .

avec l'axe de symétrie aligné sur l'axe de rotation de la Terre; selon ce modèle, les ondes  $P$  dans la graine se propageaient plus rapidement le long de l'axe de rotation (propagation plus rapide de 1% pour Morelli et al., et de 3.4 % pour Woodhouse et al.) que le long d'un plan équatorial.

Cela fait dix ans maintenant que l'analyse des anomalies de temps de parcours des ondes  $PKP(DF)$  (Shearer et al., 1988; Su & Dziewonski, 1995), des temps de parcours différentiels (Shearer & Toy, 1991; Creager, 1992; Song & Helmberger, 1993) et des oscillations propres de la Terre (Tromp, 1993) concordent pour montrer que l'anisotropie cylindrique (ou transverse) proposée en 1986, est, au premier ordre, un bon modèle. Ces études convergent vers un temps de parcours des ondes  $P$  plus rapides le long des pôles de la graine que le long de l'équateur, d'environ 3 à 3.5%. La figure 1.2 est une représentation schématique de ce modèle d'anisotropie.

Faire mieux que ce modèle simple d'anisotropie constitue aujourd'hui un défi important à relever pour les sismologues. En effet, deux problèmes majeures apparaissent lorsqu'on cherche à résoudre l'anisotropie de la graine avec une grande précision:

(i) La petite taille de la graine terrestre (moins de 1% du volume terrestre, voir la figure 1.1 à l'échelle), cumulée à la mauvaise couverture du réseau sismique mondial (entre autre à cause de la surface terrestre recouverte au 2/3 par les océans), rend la graine peu exposée aux ondes de pressions  $PKP(DF)$ ; les données sismologiques sur la graine sont par conséquent peu nombreuses.

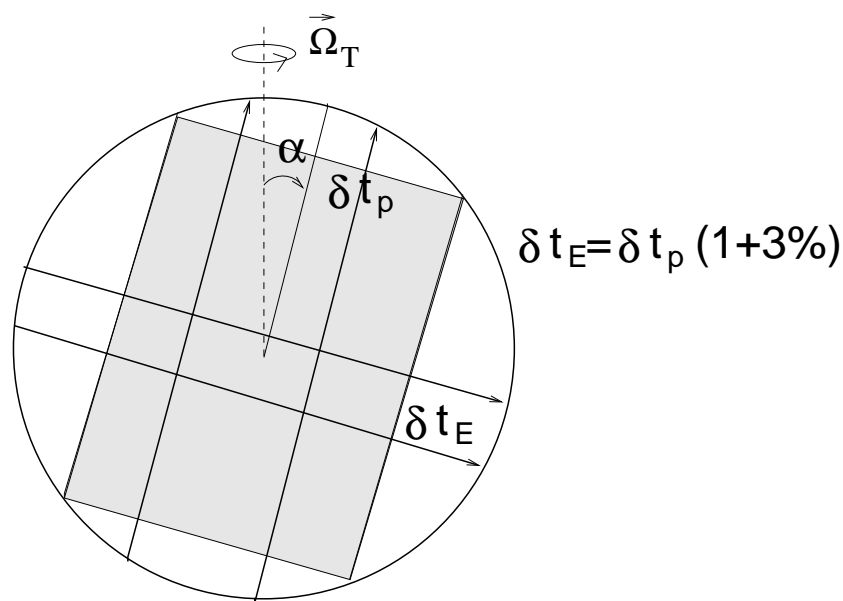


FIG. 1.2 – Coupe transversale de la graine terrestre; les flèches représentent le parcours des ondes de compression  $P$  dans la graine. Les études sismologiques convergent pour donner un temps de parcours  $\delta_P$  le long des pôles de la graine inférieur de 3% au temps de parcours  $\delta_E$  le long de l'équateur. L'inclinaison de l'axe de symétrie de l'anisotropie de la graine,  $\alpha$ , par rapport à l'axe de rotation de la Terre (selon  $\vec{\Omega}_T$ ), est de l'ordre de  $10^\circ$  selon certaines études (voir précisions dans le texte).

(ii) Le second problème découle du premier: si l'on veut une description tridimensionnelle détaillée de l'anisotropie de la graine, il faut recevoir à la surface de la Terre de rais s'étant propagés dans toutes les directions au sein de la graine. Cela demande d'une part, une couverture du réseau sismique bien meilleure que celle dont on dispose aujourd'hui, et d'autre part, une connaissance précise de la vitesse des ondes dans le manteau, et en particulier, dans la couche  $D''$  très hétérogène (voir partie IV).

On commence, cependant, à obtenir des informations sur la distribution de l'anisotropie dans la graine en fonction de la profondeur. L'anisotropie reste à 3% jusqu'au coeur de la graine selon Vinnik et al. (1994) ou Song (1996). Su & Dziewonski (1995), quant à eux, ont effectué une inversion tridimensionnelle des données ISC ("International Seismological Centre Bulletins") et prédisent une augmentation de l'anisotropie jusqu'à 4% au centre de la graine, avec d'importantes variations longitudinales de l'anisotropie. En revanche, McSweeney et al. (1997) prédisent une diminution de l'anisotropie au centre de la graine.

La dernière centaine de kilomètres au sommet de la graine, mieux contrainte par les données, semble n'être que faiblement anisotrope (Shearer, 1994; Song & Helmberger, 1995a; McSweeney et al., 1997).

L'autre caractéristique majeure de l'anisotropie semblant se dégager au fil des études de propagations d'ondes  $P$  dans la graine est l'inclinaison de quelques degrés de l'axe de symétrie de l'anisotropie par rapport à l'axe de rotation de la Terre (voir figure 1.2) (Shearer and Toy, 1991; Creager, 1992; Su & Dziewonski, 1995; Song & Richards, 1996). Une analyse récente utilisant à la fois les modes normaux et les temps différen-



tiels privilégie également une inclinaison d'une dizaine de degrés (Romanowicz et al., 1996). C'est une observation importante puisque c'est en se basant sur cette inclinaison que plusieurs études indépendantes prétendent avoir observées une superrotation de la graine (Song & Richards, 1996; Su & al, 1996; Creager, 1997; voir aussi partie III). McSweeney et al. (1997) montrent cependant qu'un axe de symétrie aligné avec la rotation de la Terre fait partie de l'espace des solutions qu'ils obtiennent suite à leur inversion globale, même si la solution qui contraint le mieux leurs données a effectivement un axe de symétrie incliné de  $10^\circ$ . Souriau et al. (1997), par contre, affirment que les données présentes sont insuffisantes pour considérer que l'inclinaison est un résultat robuste: ils prétendent que la couverture inhomogène du réseau sismique est susceptible d'incliner l'axe de symétrie via un artefact.

L'étude de Tanaka & Hamaguchi (1997) risque néanmoins de remettre en cause la représentation "simple" de l'anisotropie de la graine que l'on se faisait jusqu'à maintenant (figure 1.2): ils viennent de montrer que la distribution de l'anisotropie de la graine est hémisphérique entre les profondeurs 100 km et 500 km, seul l'hémisphère Ouest étant anisotrope, l'hémisphère Est étant quant à lui pratiquement isotrope.

## 1.2 Des modèles expliquant l'anisotropie?

Après une dizaine d'années d'études sismologiques, l'existence de l'anisotropie de la graine est désormais bien établie; cependant, comme on l'a vu dans la partie précédente, la complexité de la distribution de l'anisotropie dans la graine se dégage au fur et à mesure que les études deviennent de plus en plus précises. Nous allons énumérer ici les modèles qui sont avancés pour tenter d'expliquer l'anisotropie de la graine.

Fearn et al. (1981) ont proposé que la graine soit constituée d'une matrice solide métallique en équilibre avec des inclusions fluides (voir aussi Cormier, 1981). L'existence d'une telle région (baptisée "mushy zone") s'étendant jusqu'au centre de la Terre, aurait pu expliquer en particulier l'atténuation des ondes sismiques dans la graine. Les réflexions très prononcées des ondes sismiques à la surface de la graine vont cependant à l'encontre de ce modèle. En outre, Souriau & Romanowicz (1996) viennent de montrer qu'une forte atténuation des ondes dans la graine est corrélée à une rapide propagation des ondes; elles en déduisent que l'anisotropie de la graine a pour origine la structure cristalline anisotrope du fer dans la graine et non la présence d'inclusions fluides. Les autres modèles proposés ci-dessous supposent tous que la graine est constituée de fer à l'état solide.

Jeanloz & Wenk (1988) ont proposé que la convection thermique dans la graine puisse produire un champ de déformation orientant préférentiellement les cristaux de fer; Romanowicz et al. (1996) ont montré que la distribution d'anisotropie dans la graine pourrait en effet suggérer un lien avec une convection de grande échelle. Les calculs de Weber & Machetel (1992) semblent indiquer, en effet, que la graine est dans un régime convectif, mais il est difficile de caractériser la vigueur de la convection (avec le nombre de Rayleigh par exemple), tant les incertitudes sur les paramètres physiques de la graine sont grandes. Il n'est cependant pas clair que la convection dans la graine puisse induire une anisotropie de l'ordre de 3% (Wenk et al., 1988; Stixrude & Cohen, 1995). Labrosse (1997) montre quant à lui que la graine est dans un état sous-adiabatique et

que la convection est par conséquent improbable.

Le cisaillement des cristaux de fer pourrait également avoir pour origine le réajustement isostatique de la forme de la graine vers une forme d'équilibre (Stacey, 1992): en effet, la graine pourrait cristalliser plus rapidement à l'équateur qu'au pôle à cause de la structure de la convection dans le noyau liquide (Yoshida et al., 1996), ou bien la forme de la graine pourrait être réajustée au cours de la rotation différentielle entre la graine et le manteau (voir partie III) si la viscosité de la graine est suffisamment faible (Buffet, 1997). Le calcul de Yoshida et al. suggère cependant que l'anisotropie de la graine est trop importante pour que le réajustement visqueux soit le seul mécanisme induisant une orientation préférentielle des cristaux: il faudrait que le même champ de contraintes s'exerce sur un temps de l'ordre du milliard d'années pour que 3% d'anisotropie soit induit à partir d'un réseau de cristaux de fer à structure hexagonale compacte *hcp* distribués uniformément initialement.

Karato (1993) proposa que la susceptibilité magnétique anisotrope du fer pourrait solidifier les cristaux avec une orientation préférentielle si le champ magnétique à l'interface Graine-Noyau est suffisamment important (voir aussi Mc Sweeney et al., 1997). Des calculs *ab-initio* de la susceptibilité magnétique du fer (Sherman, EUG 1996) montrent cependant que cet effet serait négligeable.

Comme on l'a vu ci-dessus, les observations sismologiques semblent montrer que la graine ne possède pas d'inclusions fluide, mais il est cependant possible qu'il existe une fine couche à la surface de la graine où cohabiteraient liquide et solide (Loper & Roberts, 1981): Fearn et al. (1981) ont montré que cette "mushy zone" pourrait être le siège d'une croissance dendritique de la graine. Suivant cette idée, Bergman (1996) a mené des expériences de cristallisation dendritique avec un alliage Etain-Plomb. Il a montré que les dendrites ont tendance à s'orienter préférentiellement selon un axe cristallin orienté le long du flux de chaleur imposé. La solidification en texture induit par l'orientation préférentielle des cristaux conduit à une anisotropie élastique du bloc solide Etain-Plomb. Bergman construit alors un modèle dendritique de croissance de la graine, avec des dendrites orientées dans un plan parallèle à l'équateur de la graine; il en déduit, qualitativement, que les cristaux de fer *hcp* ont la bonne structure cristalline pour expliquer l'anisotropie de la graine.

Stixrude & Cohen (1995) ont calculé numériquement l'anisotropie élastique des phases *hcp* et *fcc* (cubique à face centrée) des cristaux de fer à haute pression. Ils en déduisent que la graine pourrait être un cristal géant de fer *hcp* (ou alternativement des cristaux alignés presque parfaitement), avec l'axe *c* cristallin de la structure hexagonale aligné sur l'axe de rotation de la Terre: leur modèle prédit en effet un maximum d'anisotropie de l'ordre de 3% entre les pôles et l'équateur, en accord avec les observations sismologiques. Ce modèle de monocristal est cependant difficile à réconcilier avec de fortes variations latérales d'anisotropie observées au sein de la graine par les sismologues.

On vient de voir que les modèles proposés pour expliquer l'anisotropie de la graine sont nombreux. La plupart de ces modèles proposent effectivement des mécanismes qui peuvent induire une anisotropie à symétrie cylindrique dans la graine, avec un axe de propagation rapide des ondes *P* le long des pôles. Il est cependant difficile de sélectionner un des modèles au détriment d'un autre tant les incertitudes sur les propriétés de la

graine sont importantes. En revanche, aucun des modèles n'est en mesure d'expliquer pourquoi l'axe de symétrie de la graine serait incliné d'une dizaine de degrés par rapport à l'axe de rotation de la Terre, ou encore pourquoi l'on observe de si fortes variations en longitude et latitude dans l'anisotropie de la graine (Su & Dzierwonski, 1995; Tanaka & Hamaguchi, 1997).

Pour finir, il faut savoir que si la nouvelle phase  $\beta$  du fer à structure orthorhombique (Andrault et al., 1997) s'avère être la phase du fer stable aux conditions de température et de pression de la graine, il sera nécessaire de reconsidérer les modèles d'anisotropie de la graine énumérés ci-dessus qui basés sur la présence de fer à structure hexagonale compacte (*hcp*) dans la graine.

### 1.3 Cristallisation expérimentale de gallium

Dans les chapitres suivants nous allons présenter des expériences dans lesquelles nous avons cristallisé du gallium pur dans un cube en cuivre. A l'aide de ce cube, nous avons pu imposer différentes conditions de solidification sur le gallium liquide, par exemple en variant les conditions aux limites en température sur les parois, en imposant un champ magnétique sur le gallium ou encore en variant la vitesse de l'écoulement du gallium fluide. Nous avons ainsi voulu créer des conditions de solidification du gallium proches des conditions de solidification du fer dans le noyau liquide, puis, à la fin de la cristallisation, caractériser l'anisotropie élastique des polycristaux de gallium et faire le lien avec l'anisotropie de la graine.

Avant de commencer à décrire nos expériences nous faisons un bref rappel sur ce qui est connu dans le domaine de la métallurgie concernant les différents types de cristallisation, et plus particulièrement, les différents types de front de solidification.

On peut classer les fronts de solidification lors d'une expérience de cristallisation en trois groupes principaux: les figures 1.3 A), B) et C) illustrent les trois cas, avec les profils de température à l'interface solide/liquide correspondant à chacun d'entre eux.

La figure 1.3 A) représente un profil de température dans une expérience de solidification avec une interface solide/liquide thermiquement stable: si une portion de l'interface solide/liquide est en avance par rapport à une autre portion en terme de distance  $x$  (figure 1.3 A) ), alors elle est en contact avec une zone plus chaude du fluide et donc cristallise moins rapidement. Dans ces conditions, le fluide a tendance à cristalliser avec un front de solidification plan.

La figure 1.3 B) est le type de profil de température que l'on obtient dans des expériences particulières de solidification d'un métal pur, dans lesquelles le liquide est en *surfusion thermique*, c'est-à-dire à une température inférieure à la température de solidification du métal: la température à l'interface solide/liquide est maximale à cause de la chaleur latente de fusion libérée à l'interface. L'interface est thermiquement instable dans ces conditions: en effet, si une excroissance solide se développe au niveau du front d'interface, alors elle se retrouve au contact du liquide plus froid et cristallise plus rapidement que le reste de l'interface. Ce profil de température, connu sous le nom d'*inversion de température*, est propice à une croissance dendritique de l'interface.

Le dernier type de front de solidification est caractérisé sur la figure 1.3 C) et représente un profil de température que l'on obtient lors de la solidification d'un alliage. Dans ce

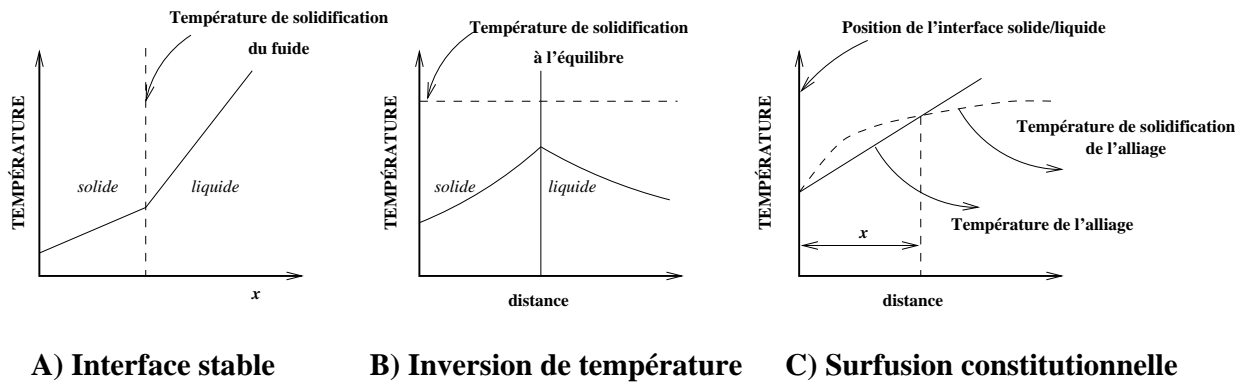


FIG. 1.3 – A) Profil de température dans une expérience de solidification avec un front d'avancée solide/liquide thermiquement stable. B) Profil de température dans un métal pur en surfusion thermique en cours de solidification: on assiste à une inversion de température. C) Profil de température dans un alliage en cours de solidification. L'alliage liquide est en surfusion sur la distance  $x$  adjacente à l'interface solide/liquide. Ce phénomène est connu sous le nom de surfusion constitutionnelle.

cas, la température de solidification de l'alliage (trait pointillé sur la figure 1.3 C) est une fonction dépendant de la position de l'interface puisque la composition du liquide varie au cours de l'expérience. Comme dans le cas de la figure B), le liquide est en surfusion au voisinage de l'interface et, par conséquent, le front d'interface est instable. Ce type de surfusion est dit *constitutionnelle* et peut éventuellement donner naissance à une croissance dendritique du solide, en particulier si la surfusion est élevée (Reed-Hill, 1964).

Dans quel groupe classer la surface de la graine, A), B) ou C)? On aurait plutôt tendance à répondre C) puisque le noyau liquide n'est pas du fer pur. L'étude de Loper & Roberts (1981) suggère en effet que le fluide du noyau au voisinage de l'interface Graine-Noyau est en surfusion constitutionnelle (figure 1.3 C) ), ce qui pourrait développer une "mushy zone" avec croissance dendritique de la graine (Fearn et al., 1981). Même si la présence de cette couche au sommet de la graine est vraisemblable d'après Loper & Roberts, elle n'a cependant jamais été observé par les sismologues, ce qui implique qu'elle est certainement d'une épaisseur très fine (inférieure au km) si elle existe.

Durant nos expériences nous avons cristallisé du gallium pur dans des conditions d'interface stable (situation de la figure 1.3 A) ). Ces expériences peuvent par conséquent paraître quelque peu éloignées des conditions de solidification du noyau dans la mesure où nous avons solidifié un métal pur et non un métal contenant des éléments légers comme dans le noyau: nous expliquons ici les raisons pour lesquelles nous avons cristallisé du gallium pur et non un alliage de gallium.

La première raison est qu'il n'existe pas d'étude, à notre connaissance, où l'on a cherché à caractériser et à quantifier l'anisotropie dans un polycristal de métal pur; les métallurgistes étudient certes les processus de solidification mais ne caractérisent pas spécifiquement l'anisotropie. Il me semble important de commencer par comprendre comment un métal pur cristallise et quel est le type d'anisotropie qui en résulte avant de passer à l'étape suivante où l'on cristallise un métal en présence d'autres éléments. Les ques-

tions que nous nous posions préalablement aux expériences étaient aussi simples que: “Est ce qu’un polycristal de gallium à l’échelle de notre expérience sera anisotrope ou isotrope?”, “Quelle est la taille caractéristique des cristaux que nous allons obtenir?”, “Est ce que les cristaux sont orientés préférentiellement dans une certaine direction lorsqu’ils cristallisent?”. Nous allons voir comment nous avons pu répondre à toutes ces questions.

La seconde raison qui nous a amené à utiliser du gallium pur est que l’on connaît bien les propriétés de sa phase solide; elles sont décrites en Annexe. Le cristal de gallium pur est, en particulier, très anisotrope dans ses propriétés physiques, ce qui est parfait pour réaliser des expériences où l’on veut caractériser et quantifier l’anisotropie.

Le chapitre 2 consiste en une description du dispositif expérimental et en une présentation de la technique de mesures de vitesse des ondes ultrasonores dans le cuivre, dans le gallium liquide et dans le gallium solide. La présentation des mesures d’ultrasons est détaillée car c’est une technique nouvelle qui n’a pas été décrite auparavant (en Géophysique). Dans le chapitre 3, nous caractérisons l’avancée du front de solidification de gallium au sein du cube. Dans le chapitre 4 nous analysons dans un premier temps la structure cristalline des polycristaux de gallium puis, dans un second temps, l’anisotropie mesurée dans ces polycristaux. Dans le dernier chapitre, nous concluons sur les résultats expérimentaux et discutons de l’application de nos expériences à la graine terrestre.

## Chapitre 2

# Le dispositif expérimental et les mesures d'anisotropie

### 2.1 Le cube en cuivre

Le gallium est cristallisé dans un cube en cuivre de 3.81 cm de côté; les dimensions précises du cube sont données sur la figure 2.1 A). Les figures 2.1 B) et C) sont des photographies du cube vus de face et de dessus. Le couvercle, ne recouvrant que partiellement le sommet du cube, permet ainsi au gallium de se dilater de 3% en volume lors de la solidification.

	Cu-Ga <sub>liquide</sub>	Cu-Ga <sub>solide</sub>	Plexiglas-Ga <sub>liquide</sub>	Plexiglas-Ga <sub>solide</sub>
$\mathcal{R}_{(i=0)} = \frac{\rho_2 V_{P2} - \rho_1 V_{P1}}{\rho_1 V_{P1} + \rho_2 V_{P2}}$	0.43	0.24	0.68	0.77
$\mathcal{T}_{(i=0)} = \frac{2\rho_1 V_{P2}}{\rho_1 V_{P1} + \rho_2 V_{P2}}$	0.84	1.15	0.32	0.95

TAB. 2.1 –  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{T}$  sont les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude pour une onde acoustique arrivant avec un angle d'incidence nul sur une interface séparant deux milieux 1 et 2, ces deux milieux ayant respectivement pour densité  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  et pour vitesse d'ondes de compression  $V_{P1}$  et  $V_{P2}$ . Les valeurs utilisées dans ces calculs de coefficients sont  $\rho_{plexiglas} = 1.18 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $V_{Pplexiglas} = 2680 \text{ m/s}$ ,  $\rho_{cuivre} = 8.93 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $V_{Pcuivre} = 4660 \text{ m/s}$ ,  $\rho_{gallium \text{ liquide}} = 6.09 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $V_{Pgallium \text{ liquide}} = 2740 \text{ m/s}$ ,  $\rho_{gallium \text{ solide}} = 5.9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $V_{Pgallium \text{ solide}} = 4300 \text{ m/s}$  (valeur moyenne).

Nous avons opté pour un conteneur en cuivre pour plusieurs raisons. La première est que le contraste d'impédance acoustique entre le gallium et le cuivre est dans le bon ordre de grandeur pour obtenir des ondes acoustiques transmises et réfléchies mesurables par nos instruments. A titre de comparaison, le tableau 2.1 dresse la liste des coefficients de transmission et de réflexion acoustiques (Lay & Wallace, 1995) entre le gallium (liquide ou solide) et le cuivre ainsi qu'entre le gallium et le plexiglas. Comme on le lit sur ce tableau, et comme nous le verrons plus loin dans cette étude, les ondes de compression dans le gallium liquide sont bien réfléchies et bien transmises au contact d'une interface en cuivre, alors que les ondes de compression dans le gallium solide sont bien mieux transmises que réfléchies au contact de cette même interface. Le tableau 2.1 indique aussi qu'il aurait été possible d'utiliser une boîte en plexiglas en terme

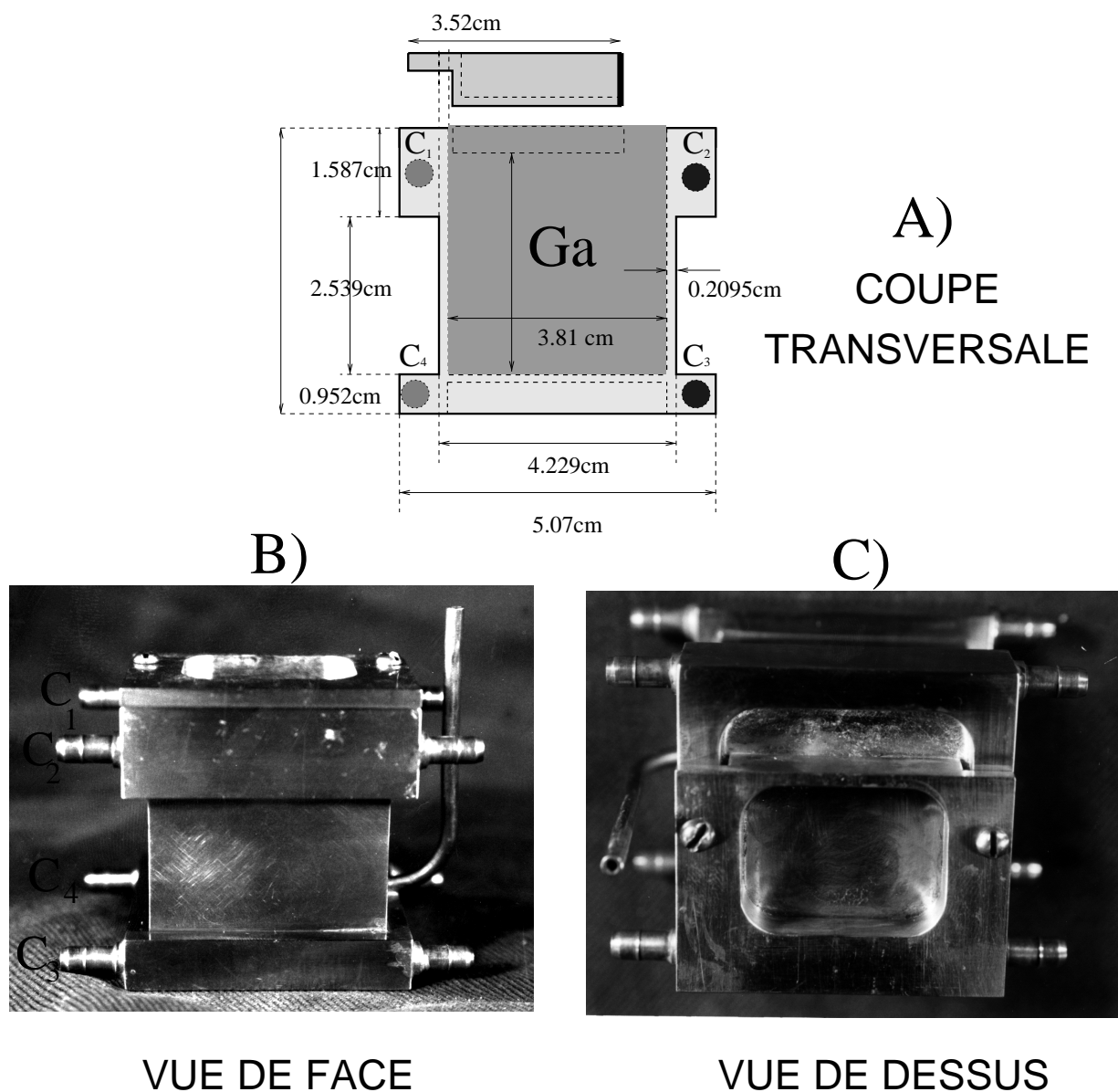


FIG. 2.1 – Cube en cuivre au sein duquel le gallium est cristallisé. En A), coupe transversale du cube en cuivre avec les dimensions. A noter que les dimensions du cube ont été fixées en pouces, ce qui explique ces nombres compliqués en système métrique.  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  et  $C_4$  représentent des conduites de 5 mm de diamètre percées sur toute la largeur du bloc de cuivre. En B) photographie du cube vu de face. A noter les conduites en cuivre que l'on relie à un circuit d'eau avec des tuyaux en vinyle ainsi que le vase d'expansion en forme de "cheminée" sur la droite du cube. En C) photographie du cube vu de dessus; à noter le couvercle ne recouvrant que partiellement le sommet du cube laissant ainsi un volume d'expansion pour le gallium durant la solidification.

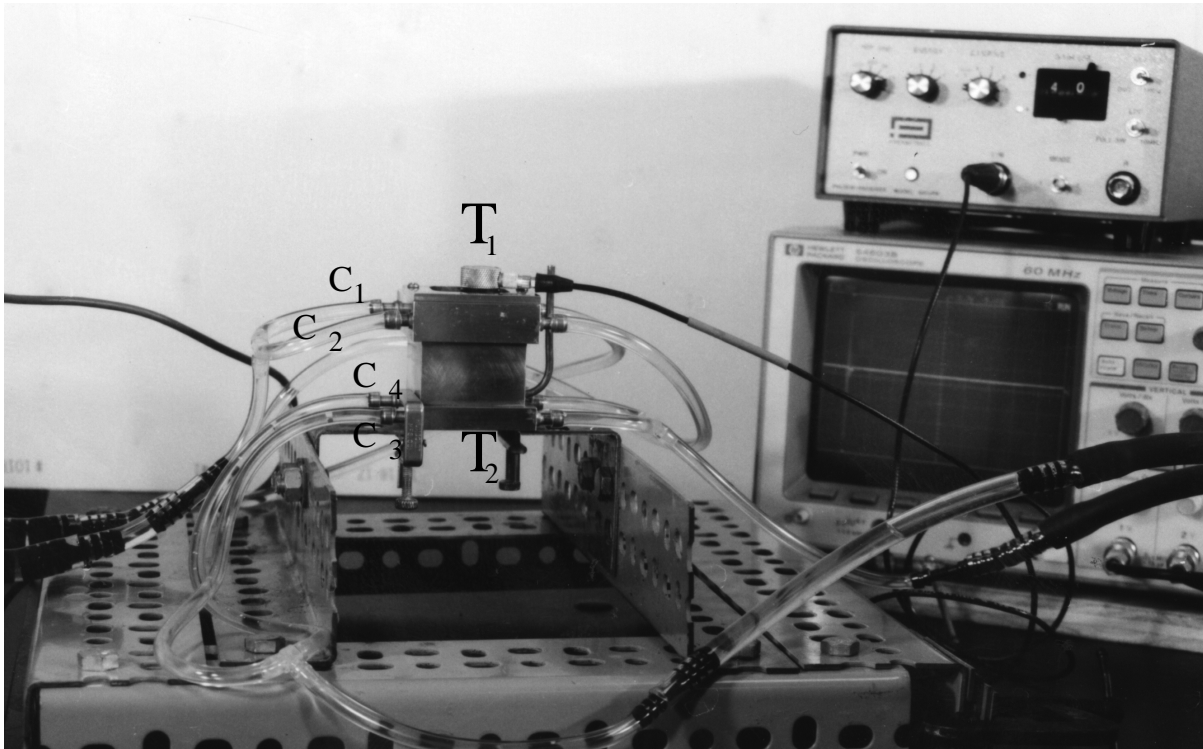


FIG. 2.2 – Photographie du dispositif expérimental. La température  $T_1$  est imposée au sommet du cube puisque  $C_1$  et  $C_2$  sont alimentées par le même bain thermostaté, et  $T_2$  est imposée à la base puisque  $C_3$  et  $C_4$  sont alimentées par l'autre bain thermostaté. On remarque la sonde ultrasonore posée sur le couvercle du cube mesurant la vitesse des ondes au sein du gallium dans la direction verticale. A noter également le générateur de signal connecté à l'oscilloscope sur la droite de la photographie.

d'amplitude du signal.

Nous avons imposé les températures sur les faces du cube en cuivre par l'intermédiaire de deux bains thermostatés reliés au cube par un circuit d'eau composé de tuyaux en vinyle. Le circuit d'eau était connecté au cube en quatre entrées  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  et  $C_4$  (figure 2.1). Avec ce cube il était possible d'imposer des conditions aux limites en température soit horizontales, soit verticales. La photographie 2.2 est l'exemple d'une expérience où des conditions aux limites en température horizontales étaient imposées.

Imposer des conditions aux limites en température avec ce cube en cuivre a présenté à la fois des avantages et des inconvénients. En effet, puisque le cuivre est un excellent conducteur thermique - la conductivité thermique du cuivre  $k_{\text{cuivre}} = 401 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$  (Lide, 1995) est environ 13 fois supérieure à celle du gallium liquide, alors que le gallium est déjà un très bon conducteur - il nous était facile de changer rapidement les températures imposées  $T_1$  et  $T_2$  sur les faces du cube au cours du temps. D'un autre côté, puisque le cuivre conduit si bien la température, un cube entièrement en cuivre ne nous a pas permis de fixer des conditions aux limites en température très précises; nous le verrons par la suite.



Enfin, avoir choisi un conteneur en cuivre s'est révélé au cours des expériences être un choix judicieux: il faut signaler que si nous avons utilisé un isolant thermique tel le plexiglas, le cube se serait certainement brisé car les faces du cube en cuivre ont en effet été souvent déformées de quelques dixièmes de millimètre par l'expansion du gallium durant la phase de solidification.

## 2.2 Le matériel ultrasonore

Nous avons utilisé un générateur d'ultrasons de fréquence 35 MHz (modèle 5072PR Panametrics). C'est un appareil simple à utiliser avec plusieurs paramètres d'entrée comme l'énergie, l'amortissement, le gain ou l'atténuation du signal. Il s'utilise avec une ou deux sondes ultrasonores; le générateur se connecte à un oscilloscope où on observe le signal en fonction du temps. Le principe de mesure est le suivant: le générateur émet un signal électrique qui est transmis à la sonde par un câble et qui active un piézo-électrique émettant une onde acoustique d'une certaine fréquence. Deux différentes techniques sont alors offertes pour mesurer la vitesse de propagation des ondes:

- une technique de réflexion: une onde acoustique quitte la sonde et se propage dans un milieu jusqu'à ce qu'elle se heurte à un autre milieu possédant une impédance acoustique différente. L'onde est alors partiellement diffusée puis est enregistrée à son retour par la sonde.
- une technique de transmission: une première sonde émettrice envoie une onde acoustique. Cette onde est reçue par une seconde sonde réceptrice qui se trouve dans le champ de propagation de l'onde. Cette technique nécessite deux sondes.

On discutera les avantages et les inconvénients de ces deux techniques dans la suite de ce chapitre. Nous avons utilisé 2 sondes de rayon 10 mm et fréquence 5 MHz générant des ondes de compression  $P$  (sonde V126RM Panametrics) pour réaliser nos mesures. Nous avons fait varier la longueur d'onde du signal en utilisant également des fréquences de 7.5 MHz et 10 MHz; des précisions du même ordre de grandeur obtenues aux 3 fréquences ont démontré qu'une fréquence de 5 MHz (amplitude du signal la plus grande) était suffisante pour nos mesures. Le couplage entre les sondes et le milieu sondé joue un rôle fondamental dans ces expériences utilisant la propagation d'ultrasons: les meilleurs couplants entre le cuivre et les sondes sont la vaseline et le sirop de sucre.

Le signal ultrasonore est lu sur un oscilloscope digital de 60 MHz de fréquence (modèle 54603 B Hewlett Packard); on y lit la propagation des ondes ultrasonores en fonction du temps, comme sur un sismogramme. Le signal provenant de l'oscilloscope est enregistré sur un PC puis dans un second temps analysé sur une station de travail.

La photographie 2.3 est une vue générale du dispositif expérimental.

## 2.3 Déterminations des vitesses des ondes de compression $V_P$ dans le cuivre et dans le gallium

Nous allons expliquer ici les techniques de détermination des vitesses des ondes de compression  $V_P$  dans le cuivre, dans le gallium liquide puis dans le gallium solide. Ces

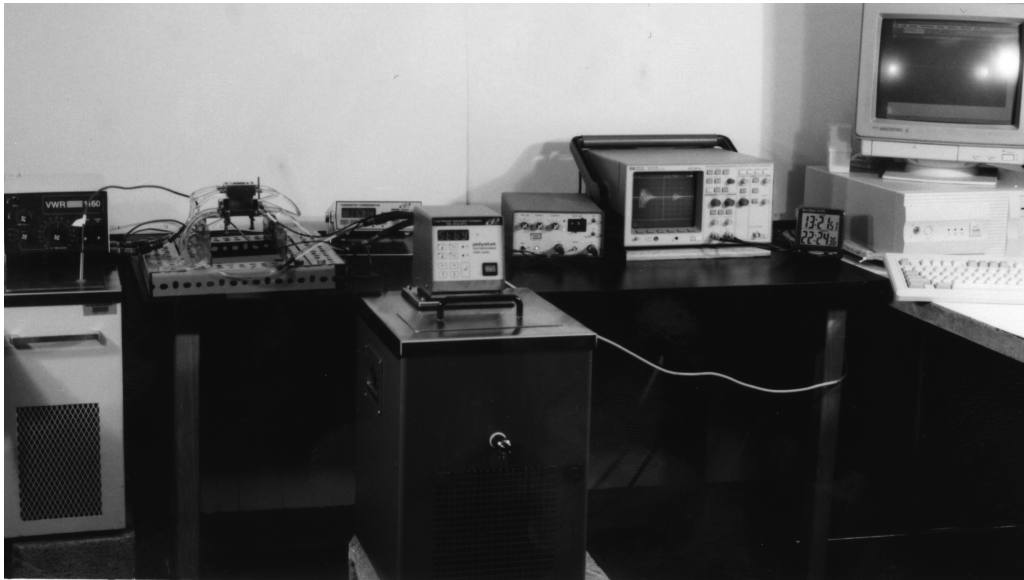


FIG. 2.3 – Vue générale du dispositif expérimental. Le cube en cuivre est posé sur un socle (à gauche de la photographie). Les deux bains thermostatés alimentent le circuit d'eau de part et d'autre du cube. La température au sein du gallium est mesurée par un thermocouple et s'affiche sur le boîtier à droite du cube. A noter le générateur de signal, l'oscilloscope et le PC sur la droite.

mesures seront utilisées tout au long des chapitres 3 et 4.

### 2.3.1 $V_P$ dans le cuivre

Nous avons commencé par mesurer la vitesse des ondes de compression dans le cuivre afin d'une part, de nous familiariser avec les instruments de mesure et d'autre part, de déterminer le degré de précision des mesures ultrasonores.

#### Le signal obtenu

Les figures 2.4 A), B) illustrent 2 types de mesures effectuées sur un bloc de cuivre. Pour chaque mesure, que ce soit en réflexion ( A ) ou en transmission ( B ) (voir début du chapitre), le temps  $t = 0$  correspond approximativement au départ de la première onde quittant la sonde ultrasonore; nous discuterons de la précision de cette origine en temps dans la prochaine section. Intéressons-nous maintenant à l'interprétation des signaux de la figure 2.4:

- En A), l'onde émise au temps  $t \simeq 0$  parcourt une distance  $D_{\text{cuivre}}$  (épaisseur du bloc) avant d'être réfléchié à l'interface Cuivre-Air; l'onde est alors renvoyée en direction de la sonde et re-parcourt une distance  $D_{\text{cuivre}}$  avant d'être reçue par la sonde. L'arrivée de cette onde est enregistrée au temps  $t \simeq 8.9 \mu\text{s}$  sur la figure 2.4 A); c'est la première arrivée. Une partie de l'énergie de l'onde n'est pas transmise à la sonde mais est réfléchié à l'interface Cuivre-sonde (voir tableau 2.1); l'onde réfléchié repart donc pour un aller-retour le long du bloc de cuivre. Cette onde est reçue par la sonde au temps  $t \simeq 17.8 \mu\text{s}$ : c'est la seconde arrivée. Les multiples

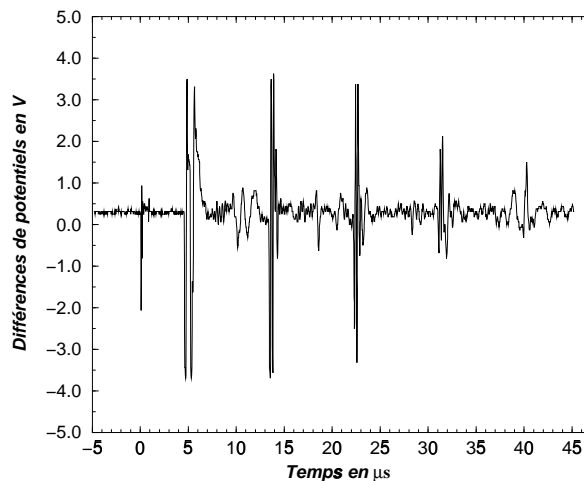
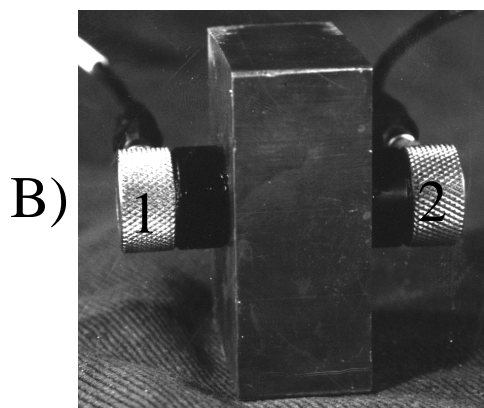
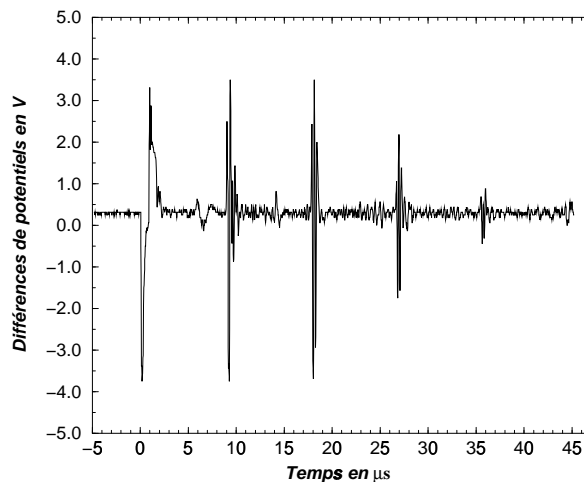
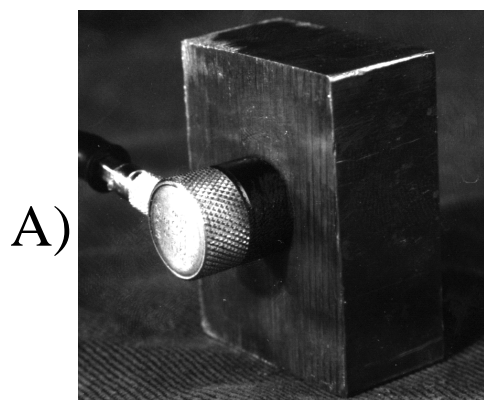


FIG. 2.4 – Illustration des différentes techniques ultrasonores avec des mesures effectuées sur un bloc de cuivre d'épaisseur  $D_{\text{cuivre}} = 2.09 \text{ cm}$ . Chaque technique est illustrée par une photographie sur la gauche et par le signal obtenu sur la droite. En A) la technique de réflexion est utilisée afin de déterminer  $V_P$ . En B) deux sondes à ondes P sont utilisées en technique de transmission.

aller-retour ou *réverbérations* continuent jusqu'à ce que l'énergie de l'onde initiale soit dissipée. Les réverbérations expliquent la succession d'arrivées d'ondes sur la figure 2.4 A): ces arrivées sont espacées d'environ  $8.85 \mu\text{s}$  ce qui correspond au temps que l'onde met à parcourir  $2 D_{\text{cuivre}}$ .

- En B), la technique de transmission avec deux sondes à ondes  $P$  est utilisée. L'onde émise à l'instant  $t \simeq 0$  par la sonde 1 est reçue par la sonde 2 à un temps  $t \simeq 4.5 \mu\text{s}$  après avoir parcouru une distance  $D_{\text{cuivre}}$ ; cela explique pourquoi la première arrivée en 2.4 B) intervient deux fois plus tôt qu'en 2.4 A). Comme dans la situation à une sonde (figure 2.4A) ), la première arrivée se réverbère dans le bloc de cuivre et on assiste à une succession d'arrivées d'ondes espacée de  $8.85 \mu\text{s}$ .

On remarque que les ondes  $P$  sont très peu atténuées dans le bloc de cuivre car l'amplitude du signal au temps  $t \simeq 0$  est du même ordre de grandeur que l'amplitude du signal des deux premières arrivées (voir figure 2.4). A noter que l'on voit sur les figures 2.4 A) et B) des ondes de faibles amplitudes et faibles fréquences, par exemple au temps  $5 \mu\text{s}$  sur la figure A): on a vérifié que ces ondes étaient bien extérieures au signal mesuré.

### Traitement du signal

La technique ultrasonore de réflexion (pulse-echo en anglais) est bien connue (Green, 1973): elle consiste à repérer une forme d'onde à un temps donné  $t_1$ , puis à la retrouver à un temps  $t_1 + \delta t$  après qu'elle se soit propagée dans un milieu de longueur connue. La différence de temps  $\delta t$  permet d'en déduire la vitesse de propagation de l'onde. Par exemple sur la figure 2.4 A), on voit que  $\delta t = 8.85 \mu\text{s}$  est la durée qui sépare les réverbérations des ondes dans le bloc de cuivre d'épaisseur  $D_{\text{cuivre}}$ .

Afin d'obtenir  $\delta t$  avec précision pour les mesures de la figure 2.4, une technique de superposition est utilisée entre les arrivées d'ondes successives. Sur les figures 2.5 et 2.6 nous appliquons cette technique aux signaux obtenus sur les figure 2.4 A), B). Sur la figure 2.5 A), par exemple, nous avons superposé le signal obtenu en 2.4 A) en trait continu avec ce même signal translaté en temps de  $8.85 \mu\text{s}$  en trait pointillé: la deuxième arrivée d'ondes se superpose alors à la première arrivée d'ondes, la troisième arrivée se superpose à la seconde, la quatrième à la troisième. Les superpositions sont représentées sur les figures 2.5 B), C) et D): on remarque sur ces figures que les maxima au niveau de chaque arrivée d'ondes ne se superposent pas tous précisément. Nous avons attribué cette imprécision aux distorsions d'ondes créées par le couplage entre la sonde et le bloc de cuivre. En effet, au temps  $t = 0$  lorsque l'onde initiale est émise par la sonde, la fine couche de vaseline couplant les deux milieux est propice à des réflexions multiples induisant à terme, une distorsion de la forme de l'onde initiale. Selon ce raisonnement, l'onde ou plutôt la fraction de l'onde qui est la moins sujette à être déformée est la première sinusoïde quittant la sonde, puisqu'elle est transmise dans le cuivre avant que les réflexions parasites n'aient commencé. C'est pour cette raison que nous avons calculé les temps de translation des signaux sur les figures 2.5 et 2.6, afin que les *premières* sinusoïdes de chaque train d'ondes se superposent. Ce choix de superposition des premières arrivées semble le plus logique; néanmoins, puisqu'il est difficile d'être certain que c'est le choix le plus juste, nous avons inclus la différence de temps maximale séparant les autres pics (parmi les différentes arrivées d'ondes) dans les barres

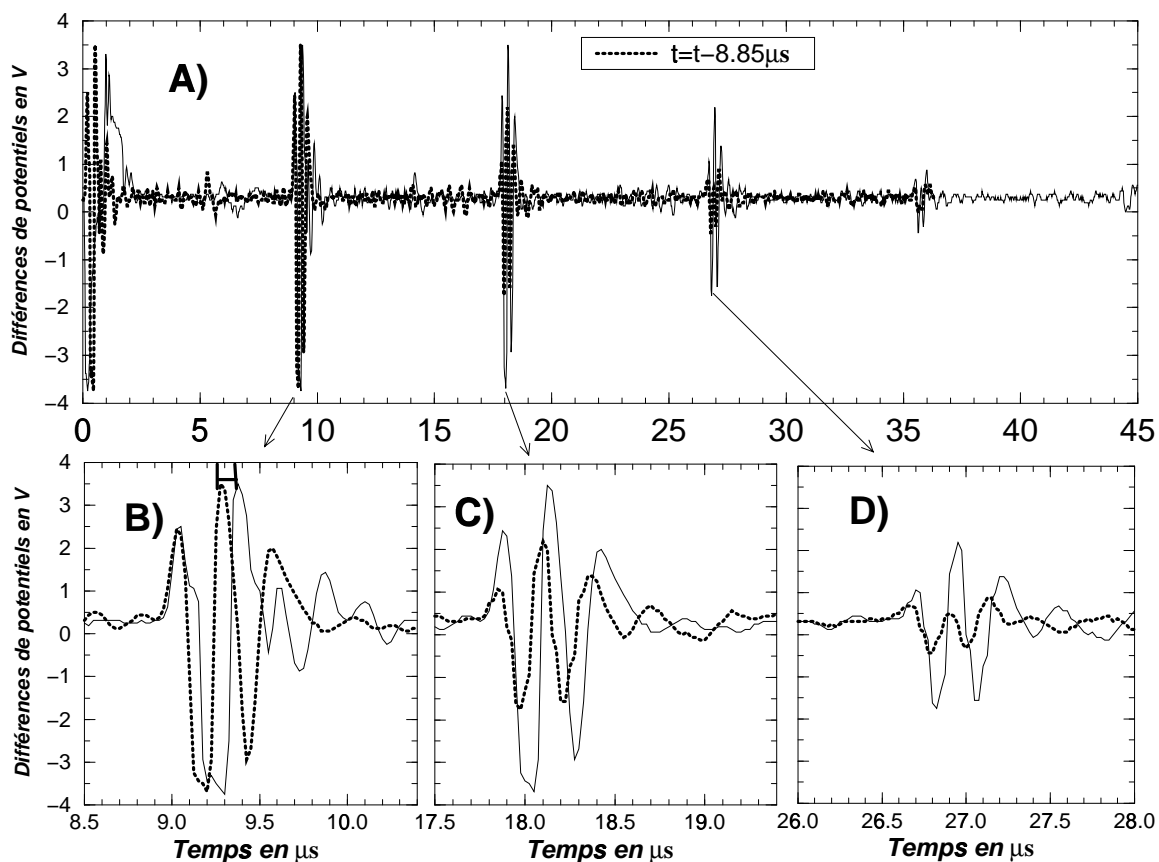


FIG. 2.5 – A) Signal obtenu en technique de réflexion avec une sonde à ondes P sur un bloc de cuivre d'épaisseur  $D_{\text{cuivre}} = 2.09$  cm. L'enregistrement original provenant de l'oscilloscope est en trait continu; en pointillé, ce signal est traduit de  $8.85 \mu s$  afin que la deuxième arrivée d'ondes se superpose à la première, la troisième à la deuxième etc... B), C) et D) sont les agrandissements des trois arrivées d'ondes de la figure A) (trait continu) superposées au signal traduit (trait pointillé). Une barre d'erreur de  $0.1 \mu s$  sur la figure B) est représentative de l'incertitude associée à la technique de superposition.

d'erreurs. Par exemple sur 2.5 B), C) et D), l'écart maximal entre les différents pics se situe sur la figure 2.5 B) au temps  $t \simeq 9.25 \mu\text{s}$ . Cette barre d'erreur vaut dans ce cas particulier  $0.1 \mu\text{s}$  et est représentée sur la figure 2.5 B) par un segment en ligne continue.

La figure 2.6 démontre que les techniques de réflexion et de transmission donnent strictement les mêmes valeurs pour le temps de propagation  $\delta t_P$  des ondes de compression dans le cuivre. En effet, on obtient  $\delta t_P = 8.85 \pm 0.1 \mu\text{s}$  sur les figures 2.5 et 2.6.

Nous attirons maintenant l'attention sur la précision absolue de la première arrivée d'onde dans nos mesures. La première arrivée est la technique utilisée en sismologie pour calculer le temps de parcours d'une onde dans la Terre, puisque les sismologues n'ont pas accès aux multiples réflexions comme dans notre expérience. Sur la figure 2.5, la première arrivée intervient au temps  $t = 8.90 \mu\text{s}$ . Or, si le signal initial était émis exactement au temps  $t = 0$ , cette onde devrait arriver au temps  $t = 8.85 \mu\text{s}$  puisque c'est le temps de parcours obtenu avec les mesures de temps différentiels. Ce décalage de  $0.05 \mu\text{s}$  environ vient du fait que l'origine du temps dans nos signaux n'est pas très bien définie: en effet, approximativement au temps  $t = 0$  un signal électrique est imposé au piézo-électrique de la sonde, mais le temps de réaction du piézo-électrique peut varier suivant la forme et le temps d'arrivée du signal qui lui est adressé: il n'y a aucune raison pour que le signal initial quitte la sonde exactement au temps  $t = 0$ . La conclusion est qu'il est bien entendu plus précis d'utiliser des arrivées successives et de les superposer puisqu'on utilise dans ce cas là des temps différentiels et non des temps absolus.

On a obtenu pour temps de parcours des ondes  $P$  le long du bloc de cuivre

$$\delta t_P = 8.85 \pm 0.1 \mu\text{s},$$

le bloc de cuivre étant de largeur  $D_{\text{cuivre}} = 2.09 \pm 0.01 \text{cm}$ , on en déduit

$$V_{P\text{cuivre}} = \frac{2 \cdot D_{\text{cuivre}}}{\delta t_P} = \frac{4.18 \cdot 10^{-2}}{8.85 \cdot 10^{-6}} = 4723 \pm 64 \text{ m/s} \quad (2.1)$$

La valeur standard de  $V_{P\text{cuivre}}$  est

$$V_{P\text{cuivre}} = 4660 \text{ m/s} \text{ (Nondestructive Testing Handbook, 1991)} \quad (2.2)$$

En comparant les valeurs (2.1) et (2.2), on voit qu'il y a un bon accord entre nos mesures expérimentales et la valeur standard. Nous avons obtenu des barres d'erreurs inférieures à  $60 \text{ m/s}$  pour les mesures dans le bloc de cuivre où les conditions expérimentales étaient favorables: l'atténuation était faible (voir figure 2.4) et la technique de superposition se prêtait très bien aux mesures (voir figures 2.5 et 2.6). Nous verrons dans les prochains chapitres que cette précision est amplement suffisante pour étudier l'anisotropie dans les polycristaux de gallium.

### 2.3.2 $V_P$ dans le gallium liquide

Dans cette partie nous décrivons les mesures de vitesse de compression  $V_P$  effectuées dans le gallium liquide contenu dans le cube en cuivre. Nous avons utilisé deux sondes à ondes  $P$  en technique de transmission; nous les avons alignées sur deux faces parallèles du cube comme le montre la figure 2.7.

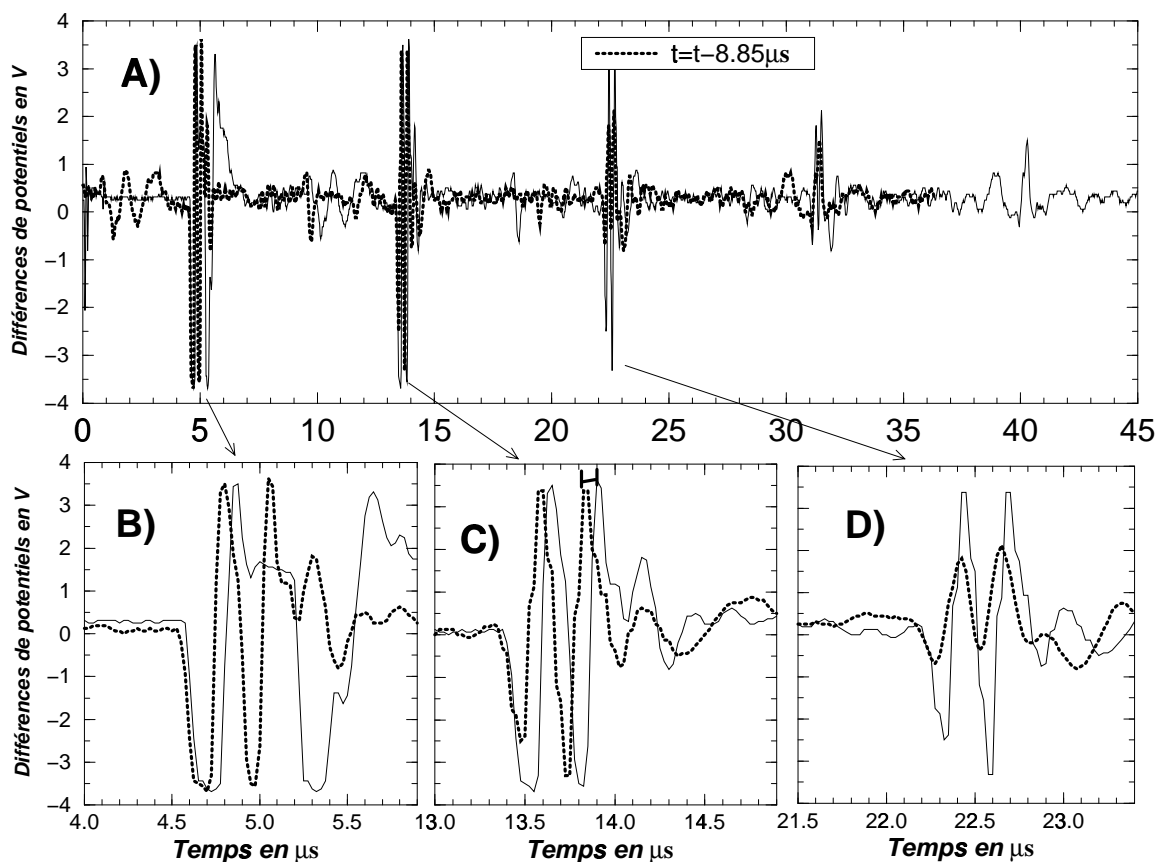


FIG. 2.6 – A) Signal obtenu en technique de transmission avec deux sondes à ondes P sur un bloc de cuivre d'épaisseur  $D_{\text{cuivre}} = 2.09 \text{ cm}$ . L'enregistrement original provenant de l'oscilloscope est en trait continu; en pointillé, ce signal est translaté de  $8.85 \mu s$  afin que la deuxième arrivée d'ondes se superpose à la première, la troisième à la deuxième etc... B), C) et D) sont les agrandissements des trois premières arrivées d'ondes de la figure A) (trait continu) superposées au signal translaté (trait pointillé). Une barre d'erreur de  $0.1 \mu s$  sur la figure C) est représentative de l'incertitude associée à la technique de superposition.

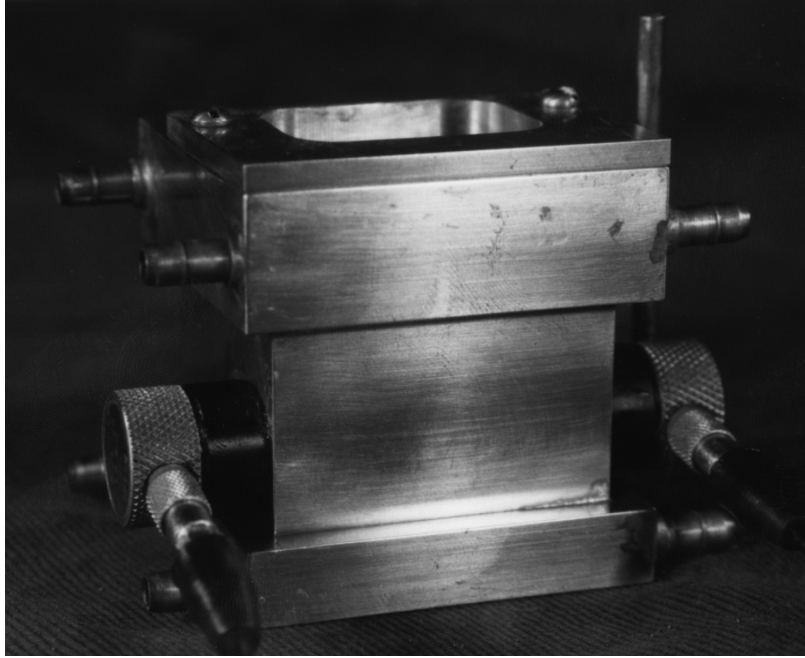


FIG. 2.7 – Vue de côté du cube en cuivre. La technique de transmission est utilisée pour mesurer  $V_P$  dans le gallium liquide avec deux sondes, l'une émettant un signal et l'autre le recevant.

### Interprétation de l'enregistrement ultrasonore

On analyse un signal obtenu avec le gallium liquide sur la figure 2.8. La figure 2.8 A) est l'enregistrement obtenu à partir de l'oscilloscope. Au temps  $t = t_0$  ( $t_0 \simeq 0$ , voir section 2.3.1 concernant la précision du temps d'origine), le transmetteur envoie l'onde initiale en direction du récepteur; le trajet de cette onde est représenté sur la figure 2.8 B). La figure 2.8 B) suggère que les “trains d'ondes” aux temps  $t = t_1$ ,  $t = t_2$  et  $t = t_3$  sur la figure 2.8 A) sont la signature des réverbérations des ondes dans la paroi du cube en cuivre.

Nous utilisons la technique de superposition décrite dans la section 2.3.1 afin de tirer des informations sur le signal de la figure 2.8 A). Pour cela, il est nécessaire de connaître précisément le temps de propagation des ondes  $P$  à travers la paroi du cube en cuivre d'épaisseur  $\delta d_{\text{cuivre}} = 2.095$  mm. Nous avons obtenu précédemment:

$$V_{P\text{cuivre}} = 4723 \text{ m/s}$$

Nous en déduisons le temps de parcours  $\delta t_{\text{cuivre}}$  des ondes  $P$  le long de l'épaisseur  $\delta d_{\text{cuivre}}$ :

$$\delta t_{\text{cuivre}} = \frac{\delta d_{\text{cuivre}}}{V_{P\text{cuivre}}} = \frac{2.095 \cdot 10^{-3}}{4723} = 4.435 \cdot 10^{-7} \text{ s} = 0.4435 \mu\text{s} \quad (2.3)$$

A partir de la figure 2.8 B), nous prédisons que les ondes devraient se réverbérer immédiatement après les temps  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$  avec une période  $T_{\text{réverbération}} = 2 \cdot \delta t_{\text{cuivre}} = 0.88 \mu\text{s}$ , chaque réverbération se traduisant par deux traversées de l'épaisseur de la



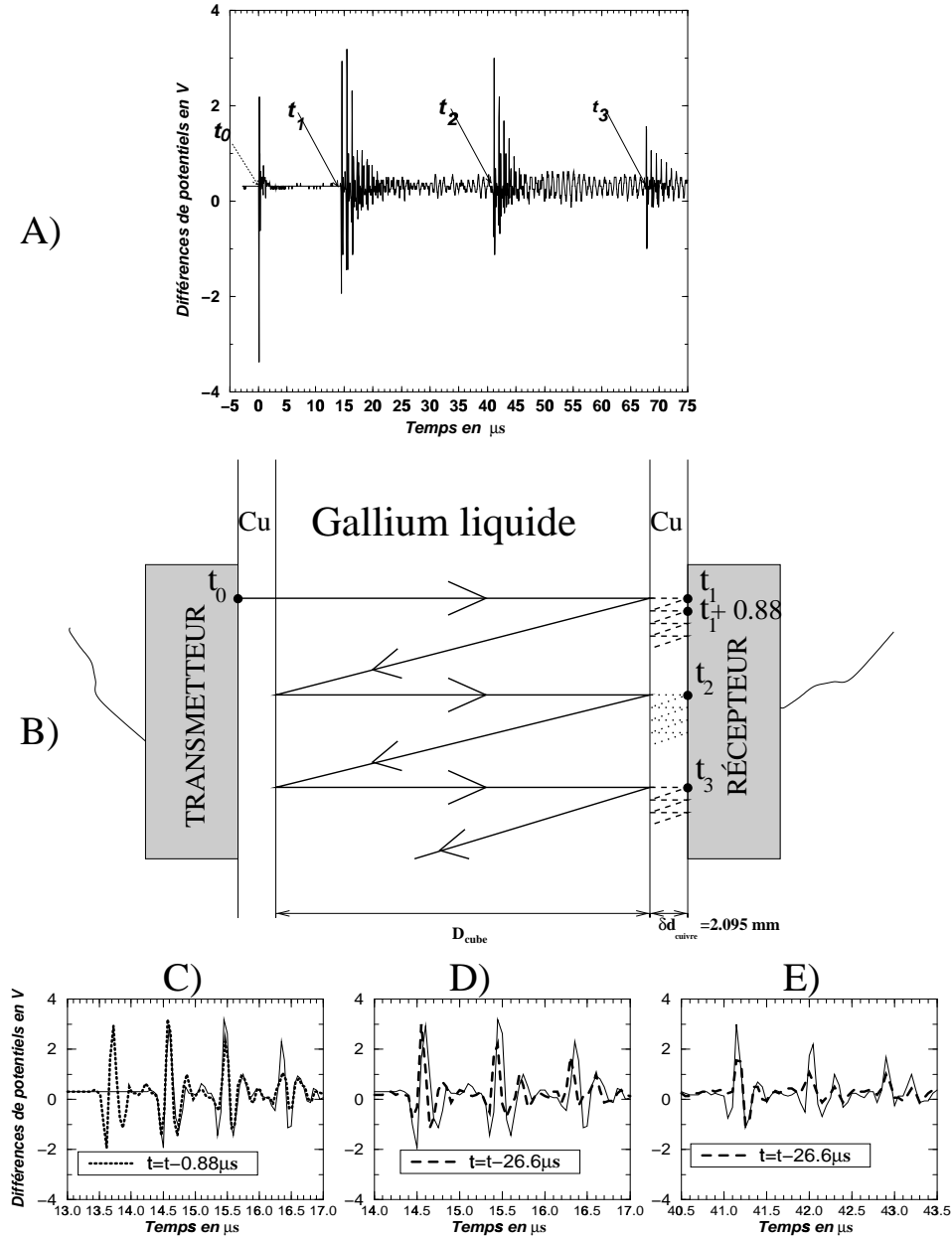


FIG. 2.8 – A) Enregistrement ultrasonore d'une onde de compression se propageant dans le gallium liquide contenu dans le cube en cuivre; signal obtenu en utilisant la technique de transmission décrite dans la section 2.3.1. A noter que le signal au temps  $t = t_0$  provient du fait que le récepteur envoie aussi une onde qui se réverbère en son sein. B) Trajet détaillé de l'onde de compression au sein du cuivre et du gallium liquide.  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$  sont les premières arrivées des 3 trains d'ondes de la figure A). C), D), E): Technique de superposition utilisée pour analyser le signal de la figure A). C) démontre que les ondes se réverbèrent dans la paroi de cuivre. D) et E) montrent que le temps de parcours des ondes P dans le gallium liquide est  $26.6 \mu\text{s}$  sur la distance  $2 D_{\text{cube}}$ .

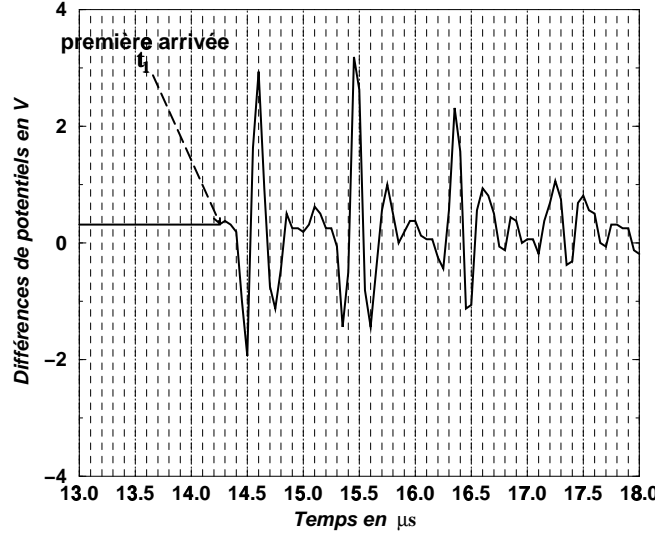


FIG. 2.9 – Détermination précise de la première arrivée du signal de la figure 2.8 a). La première arrivée se produit au temps  $t_1 = 14.27 \mu\text{s}$ .

paroi du cube.

Sur la figure 2.8 C), on démontre que le train d'ondes que l'on observe entre environ  $t = 14 \mu\text{s}$  et  $t = 20 \mu\text{s}$  sur la figure 2.8 A) est bien la signature de réverbérations dans la paroi de cuivre: le signal en trait continu sur 2.8 C) est le signal extrait de 2.8 A) entre  $t = 13 \mu\text{s}$  et  $t = 17 \mu\text{s}$ , et le signal en trait pointillé est ce même signal translaté en temps de  $0.88 \mu\text{s}$ , c'est-à-dire la durée d'une réverbération. La remarquable superposition des deux courbes sur 2.8 C) montre clairement que la première arrivée d'onde se répète toutes les  $0.88 \mu\text{s}$ .

La figure 2.8 B) montre que la durée  $2\delta t_{\text{gallium liquide}}$  séparant  $t_1$  de  $t_2$  est exactement le temps de parcours d'une onde P dans le gallium sur la distance  $2 \cdot D_{\text{cube}}$ . On en déduit:

$$2\delta t_{\text{gallium liquide}} = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \frac{2 \cdot D_{\text{cube}}}{V_{\text{gallium liquide}}} \quad (2.4)$$

Afin d'obtenir précisément les valeurs de  $t_2 - t_1$  et  $t_3 - t_2$ , nous superposons le second train d'ondes avec le premier sur la figure 2.8 D), et le troisième train d'ondes avec le second sur la figure 2.8 E): la superposition est remarquable et la barre d'erreur n'est que de l'ordre de  $0.1 \mu\text{s}$  (segment continu sur la figure D) ). Les deux superpositions concordent pour donner  $2\delta t_{\text{gallium liquide}} = 26.6 \pm 0.1 \mu\text{s}$ .

La première arrivée du signal de la figure 2.8 A) est déterminée avec précision sur la figure 2.9. On obtient  $t_1 = 14.27 \mu\text{s}$ . En utilisant les trajets d'ondes décrits sur la figure 2.8 B), nous sommes en mesure d'estimer le décalage entre le temps d'origine  $t = 0$  et le temps  $t_0$  où l'onde initiale est envoyée par la sonde:

$$\begin{aligned} t_1 &= t_0 + \delta t_{\text{cuivre}} + \delta t_{\text{gallium liquide}} + \delta t_{\text{cuivre}} \\ \iff t_0 &= 14.27 - 13.3 - 0.88 = 0.09 \mu\text{s} \end{aligned}$$

On obtient donc  $t_0 = 0.09 \mu\text{s}$  pour le signal de la figure 2.8. On en conclut que l'erreur commise, si l'on n'avait considéré que la première arrivée, aurait été de l'ordre de  $0.1 \mu\text{s}$  pour les mesures dans le gallium liquide.

Nous avons obtenu ci-dessus

$$2\delta t_{\text{gallium liquide}} = 26.6 \pm 0.1 \mu\text{s}$$

et nous connaissons précisément la dimension intérieure du cube (usinage précis du cube)

$$D_{\text{cube}} = 3.81 \cdot 10^{-2} \text{ m. (voir figure 2.1)}$$

Nous en déduisons la vitesse des ondes de compression dans le gallium liquide:

$$\begin{aligned} V_{P_{\text{gallium liquide}}} &= \frac{2 \cdot D_{\text{cube}}}{2\delta t_{\text{gallium liquide}}} = \frac{7.62 \cdot 10^{-2}}{26.6 \cdot 10^{-6}} \\ V_{P_{\text{gallium liquide}}} &= 2864.6 \pm 12 \text{ m/s} \end{aligned} \quad (2.5)$$

La valeur standard de  $V_{P_{\text{gallium liquide}}}$  ainsi que celle obtenue expérimentalement dans le tourbillon de gallium (Partie I) est

$$V_{P_{\text{gallium liquide}}} = 2740 \text{ m/s} \quad (2.6)$$

On a donc obtenu avec nos mesures expérimentales une valeur de  $V_{P_{\text{gallium liquide}}}$  qui est supérieure d'environ 4% à la valeur standard. Nous avons cherché à expliquer cette différence.

On a vérifié que l'on obtenait bien le même  $\delta t_{\text{gallium liquide}}$  (donc la même vitesse) en mesurant dans les autres directions du cube. Afin de mesurer expérimentalement  $V_{P_{\text{gallium liquide}}} = 2740 \text{ m/s}$ , nous aurions dû obtenir sur la figure 2.8,  $2\delta t_{\text{gallium liquide}} = 27.81 \mu\text{s}$ , or, nous avons obtenu  $\delta t_{\text{gallium liquide}} = 26.6 \mu\text{s}$ . Cette différence de  $1.2 \mu\text{s}$  est énorme lorsqu'on la compare aux barres d'erreurs de nos mesures qui sont un ordre de grandeur plus petites. La possibilité d'avoir fait une grossière erreur dans la technique de mesure semble également exclue lorsqu'on sait que l'on a obtenu des valeurs réalistes pour  $V_P$  dans le cuivre et lorsqu'on voit la qualité du signal de la figure 2.8 A).

Pour conclure, nous sommes convaincus que la valeur  $V_{P_{\text{gallium liquide}}} = 2864.6 \pm 12 \text{ m/s}$  mesurée expérimentalement est correcte; si la valeur standard pour le gallium pur liquide  $V_{P_{\text{gallium liquide}}} = 2740 \text{ m/s}$  est très précise, cela implique nécessairement que le gallium utilisé dans nos expériences contenait des impuretés responsables d'une "accélération" des ondes de compression dans le gallium d'environ 4%.

### 2.3.3 $V_P$ dans le gallium solide

Nous avons utilisé une technique de mesure des  $V_P$  dans le gallium solide différente de celles utilisées dans le cuivre et le gallium liquide. Le gallium solide s'est avéré être très anisotrope et par conséquent les vitesses des ondes  $P$  variaient selon le trajet sélectionné dans le bloc de gallium solide. Nous avons donc mesuré la vitesse des ondes  $P$  selon chaque direction du cube en cuivre, c'est-à-dire selon  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$  sur la figure 2.10 A). Nous avons de plus mesuré la vitesse des ondes en 6 points différents sur les

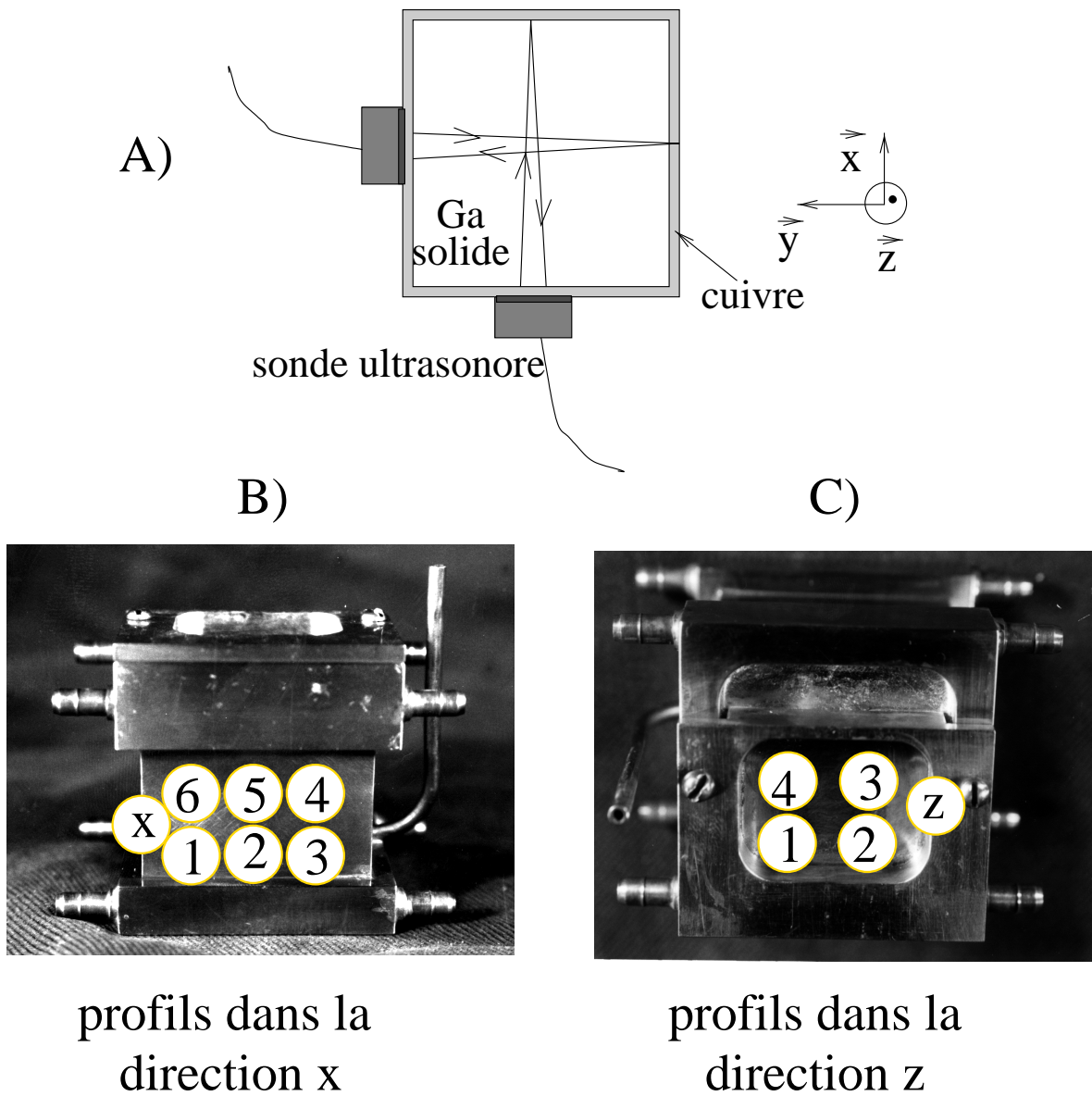


FIG. 2.10 – Principe de mesure des ondes  $P$  dans le gallium solide contenu au sein du cube en cuivre. A) Exemple de la technique de réflexion ultrasonore utilisée pour mesurer  $V_P$  selon deux trajets orientés dans la direction  $\vec{x}$  et la direction  $\vec{y}$ . B) Distribution spatiale des six mesures effectuées pour réaliser un profil de la valeur de  $V_P$  dans la direction  $\vec{x}$ . On a également mesuré en six points pour mesurer dans la direction  $\vec{y}$ . C) Distribution spatiale des quatre mesures effectuées pour réaliser un profil de la valeur de  $V_P$  dans la direction  $\vec{z}$ . Pour chaque bloc de gallium cristallisé, nous avons par conséquent réalisé 16 mesures ultrasonores.

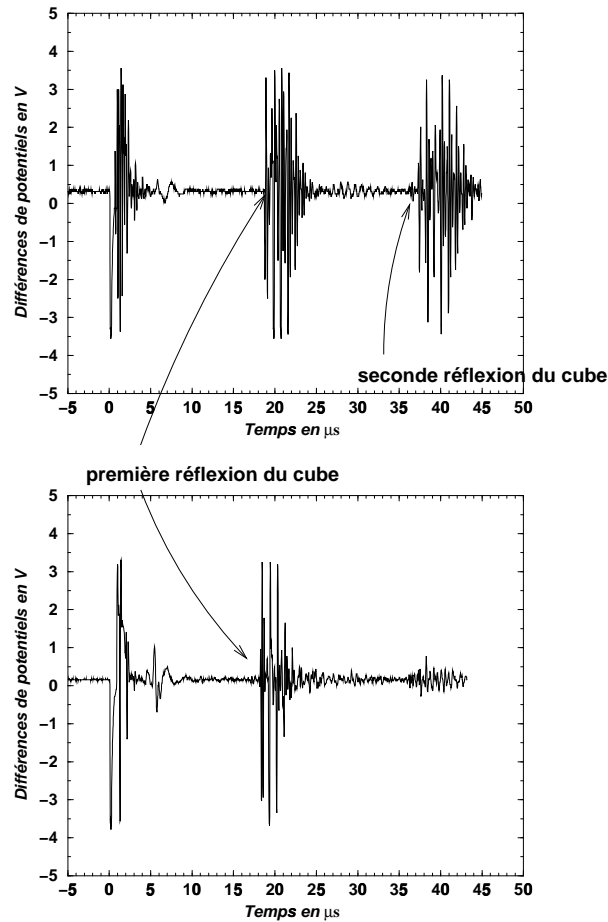


FIG. 2.11 – Exemple de signaux ultrasonores obtenus dans le gallium solide. En A) le signal est très peu atténué; en B) l'atténuation est bien plus grande puisque la seconde réflexion du cube n'est pas mesurable.

faces orientées selon  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ , et en 4 points sur la face orientée selon  $\vec{z}$ . La figure 2.10 B) représente précisément la distribution spatiale des mesures dans le cube. Le grand diamètre de la sonde ultrasonore (10 mm) devant la taille caractéristique des cristaux observés (voir chapitre 4), nous assure que l'on a mesuré la vitesse des ondes  $P$  à travers plusieurs grains (voir définition dans le chapitre 4) en déplaçant la sonde entre les positions 1 à 6.

La figure 2.11 représente deux enregistrements ultrasonores typiques obtenus dans le gallium solide avec la technique de réflexion:

- l'enregistrement A) est un signal où l'atténuation dans le gallium solide est très faible étant donné que les deux premières arrivées de train d'ondes sont très nettes.
- l'enregistrement B) montre un signal où l'arrivée du second train d'ondes est trop faible en amplitude pour être mesurable.

Puisque nous avons obtenu des enregistrements où l'arrivée du second train d'ondes

n'était pas mesurable (cas B) ), nous avons décidé pour chaque enregistrement de ne mesurer que la première arrivée d'ondes en calibrant le temps  $t_0$  du signal,  $t_0$  étant reproductible d'une expérience à l'autre.

Sur la figure 2.12 nous étudions le trajets des ondes au sein du gallium solide dans le cube en cuivre, comme nous l'avons fait dans le paragraphe 2.3.2 pour le trajet des ondes dans le gallium liquide (voir figure 2.13). Le trajet des ondes dans le cas du gallium solide est un peu plus compliqué que dans le cas liquide mais ne repose en fait que sur deux points essentiels:

- Le premier point concerne la transmission et la réflexion d'ondes à l'interface gallium solide-cuivre. Comme nous l'avons vu en début de chapitre dans le calcul des coefficients de transmission et de réflexion (voir tableau 2.1), les ondes se propageant dans le gallium solide sont très peu réfléchies à l'interface avec le cuivre mais sont par contre très bien transmises. Cela nous indique que l'énergie dans le signal mesurant la vitesse  $V_{P\text{gallium solide}}$  proviendra principalement des ondes qui auront été transmises dans les parois du cube en cuivre.
- Le second point est une loi sur les changements de phase relatif à la propagation des ondes: *Quand une onde est réfléchiée par l'interface d'un milieu possédant un indice de réfraction inférieur au milieu dans lequel l'onde se propageait, l'onde réfléchiée ne subit pas de changement de phase; quand l'onde est réfléchiée par l'interface d'un milieu possédant un indice de réfraction supérieur au milieu dans lequel l'onde se propageait, l'onde réfléchiée subit un changement de  $180^\circ$ . Dans chacun des cas, l'onde transmise ne subit pas de changement de phase.* L'indice de réfraction  $n$  d'un milieu est par définition le rapport de la vitesse de l'onde dans l'air  $c$  sur la vitesse de l'onde dans le milieu  $v$ :

$$n = \frac{c}{v}$$

Cette loi est capitale en qui concerne le trajet des ondes dans le cube en cuivre et le gallium solide: puisque la vitesse des ondes  $P$  dans le gallium  $V_{P\text{gallium solide}}$  est inférieure à la vitesses des ondes  $P$  dans le cuivre  $V_{P\text{cuivre}}$  (voir section 2.3.1), l'indice de réfraction du gallium solide  $n_{\text{gallium solide}}$  est supérieur à l'indice de réfraction du cuivre  $n_{\text{cuivre}}$ . On en déduit avec la loi de changement de phase que les ondes  $P$  ne changent pas de phase à l'interface gallium solide-cuivre. Par contre, puisque  $V_{P\text{cuivre}}$  est supérieure à la vitesse des ondes  $P$  dans l'air, on en déduit que les ondes  $P$  transmises dans le cuivre changent de phase à l'interface Cuivre-Air. Cette loi est illustrée par la figure 2.12 A).

La trajectoire des ondes ultrasonores dans le gallium solide et le cuivre est représentée sur la figure 2.12 B): les deux premières arrivées d'ondes au temps  $t = t_1$  sont en déphasage et les trois premières arrivées au temps  $t = t_2$  également.

Sur la figure 2.13 A), nous avons reproduit l'enregistrement de la figure 2.11 A) en indiquant cette fois les premières arrivées aux temps  $t_1$  et  $t_2$  de chaque train d'ondes (voir figure 2.12 B) ). Sur la figure 2.13 B), nous avons superposé ce signal avec son translaté de  $0.88 \mu\text{s}$  (durée d'une réverbération dans la paroi de cuivre) au niveau de l'arrivée du premier train d'ondes: nous montrons que les deux premières arrivées au

temps  $t = t_1$  sont en opposition de phase, comme prédit par la figure 2.12 B). Sur la figure 2.13 C), nous montrons que les trois premières arrivées du second train d'ondes au temps  $t = t_2$  sont en opposition de phase comme prédit par la figure 2.12 B). Sur la figure D), nous avons superposé le signal de A) avec son translaté de  $17.64 \mu\text{s}$  afin de superposer le premier train d'ondes au second train d'ondes de la figure A).

Comme le montre la figure 2.12 B), les mesures de  $V_P$  dans le gallium solide se sont avérées très précises; la barre d'erreur maximale que l'on ait obtenu est de  $0.1 \mu\text{s}$ .

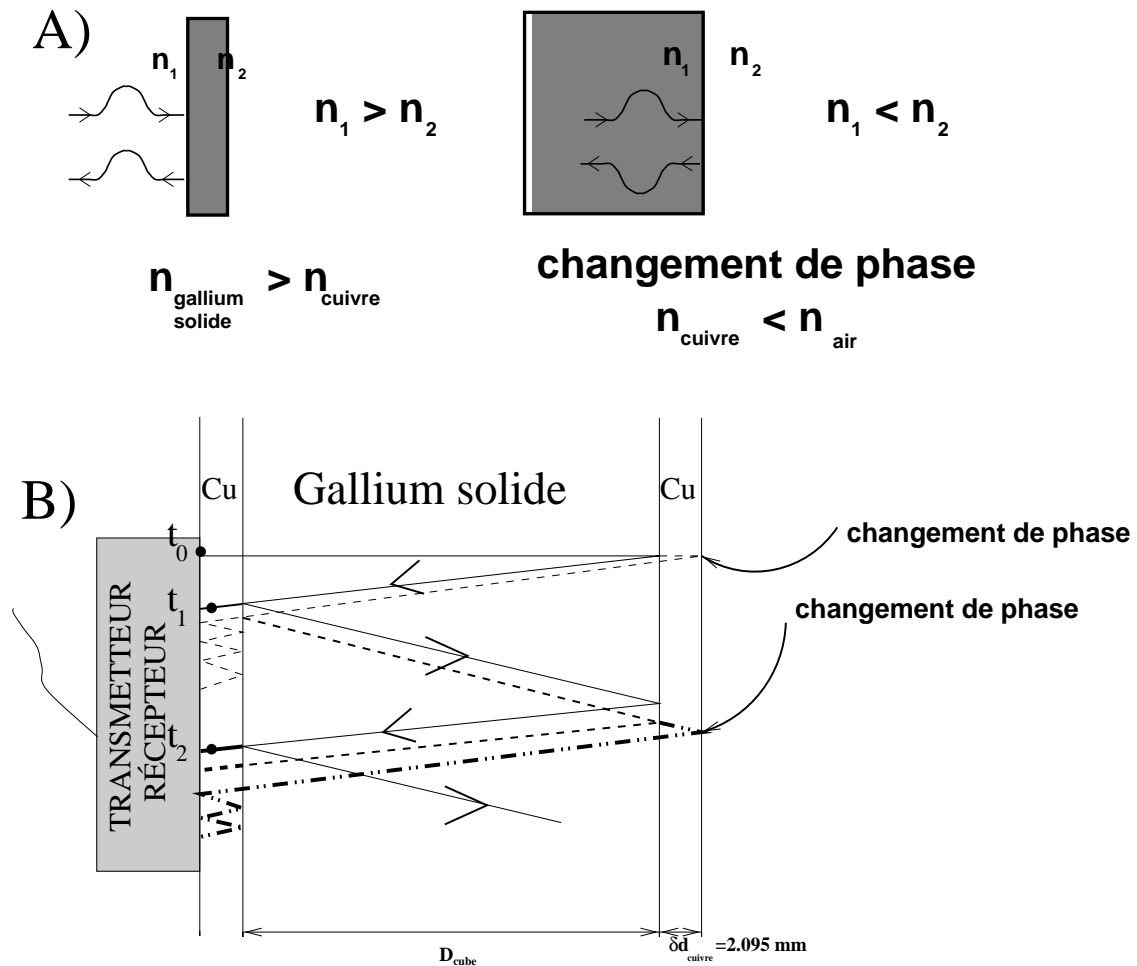


FIG. 2.12 – A) Illustration de la loi sur les changements de phase: lorsque  $n_1 > n_2$  l'onde ne subit pas de changement de phase, par contre, lorsque  $n_1 < n_2$  l'onde subit un changement de phase. B) Trajet des ondes de compression  $P$  dans le gallium solide contenu dans le cube en cuivre: les deux premières arrivées d'ondes au temps  $t = t_1$  sont en déphasage ainsi que les trois premières arrivées au temps  $t = t_2$ .



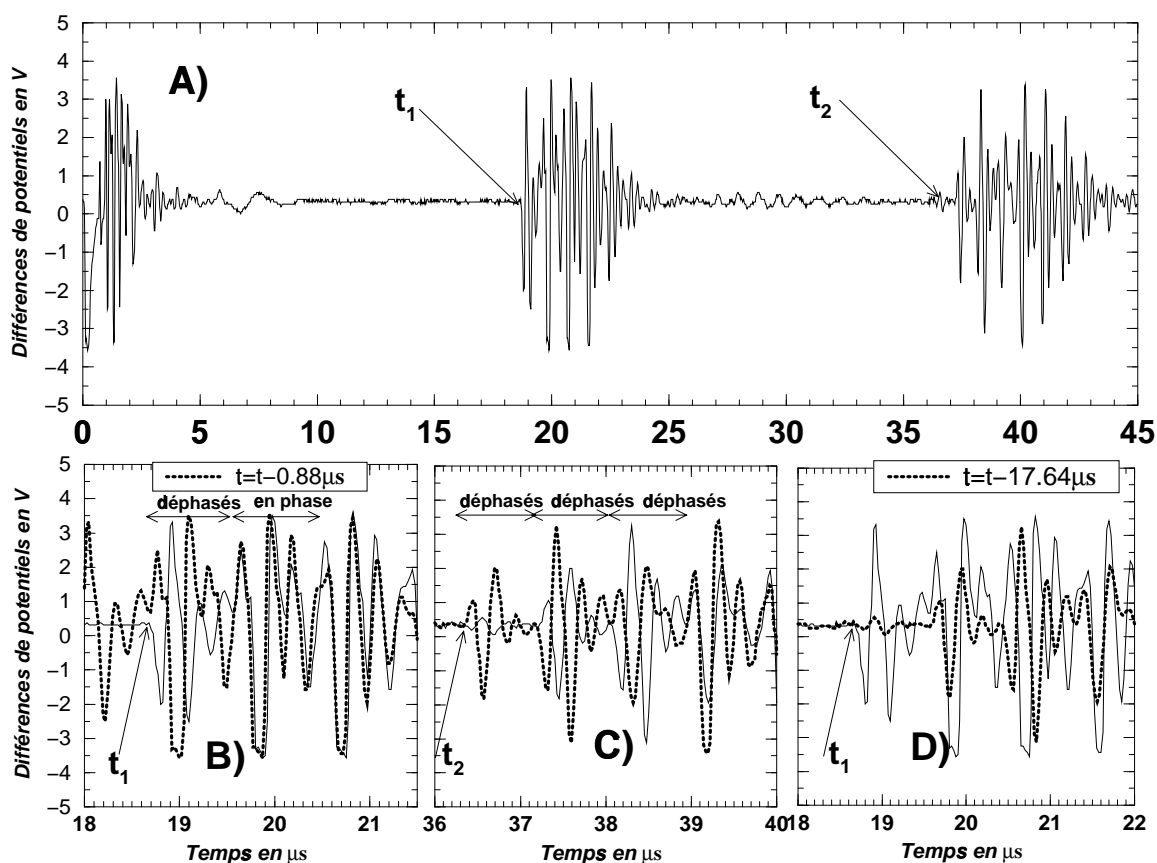


FIG. 2.13 – Traitement du signal obtenu dans le gallium solide. La figure A) est le signal obtenu avec une technique de réflexion.  $t_1$  est la première arrivée du premier train d'ondes et  $t_2$  est la première arrivée du second train d'ondes. La figure A) montre que les deux premières ondes du premier train d'ondes sont en déphasage. La figure B) montre que les trois premières ondes du second train d'ondes sont en déphasage. La figure C) est la superposition du premier train d'onde avec le second; le temps différentiel de parcours des ondes  $P$  le long de deux largeurs du cube  $2D_{\text{cube}}$  est  $17.64 \mu\text{s}$ .

## Chapitre 3

# Cristallisation de gallium

Nous avons cristallisé le gallium dans le cube en cuivre avec différents type d'écoulements et différentes conditions aux limites en température. Dans ce chapitre, nous caractérisons qualitativement l'évolution du front de solidification en utilisant les profils de températures réalisés au sein du gallium ainsi que les mesures ultrasonores effectuées durant la cristallisation. Nous remarquerons que les conditions initiales de cristallisation sont très importantes dans le cube en cuivre.

### 3.1 Cristallisation de gallium avec un gradient de température horizontal

Le gallium est solidifié avec un gradient de température horizontal comme représenté sur la figure 3.1: la face 1 verticale est à une température  $T_1$  pendant toute la durée de l'expérience et la face 2, opposée à la face 1, à une température  $T_2$ . Le flux de chaleur  $\bar{q}$  est représenté dans la direction horizontale sur la figure mais ce flux axial est en réalité localement perturbé par les pertes de chaleur à travers les parois latérales en cuivre thermiquement conductrices. Les conditions aux limites sur les faces latérales du cube rendent notre expérience un peu singulière: généralement, la convection naturelle dans une cavité rectangulaire est étudiée avec des faces latérales thermiquement isolantes (Tritton, 1988; Hurle, 1993). Dans les prochains paragraphes, nous dressons cependant une revue sommaire des études réalisées sur la convection naturelle en présence de solidification pour un fluide à bas nombre de Prandtl comme le gallium (voir Annexe); cette revue nous sera utile par la suite pour analyser l'écoulement obtenu dans notre expérience.

Commençons tout d'abord par la convection naturelle sans cristallisation. Lorsqu'on impose une température sur les bords verticaux d'une cavité rectangulaire, une ou plusieurs cellules de convection thermique sont générées (Were, 1987; Hurle, 1993; Koster et al., 1997); la convection à une cellule est schématisée sur la figure 3.2. La structure de la convection est alors gouvernée par trois paramètres principaux:

- le nombre de Prandtl  $Pr = \nu/\kappa$ ,  $\nu$  étant la viscosité cinématique du fluide et  $\kappa$  la diffusivité thermique.
- le rapport d'aspect entre la longueur  $L$  et la hauteur  $H$  de la cavité.

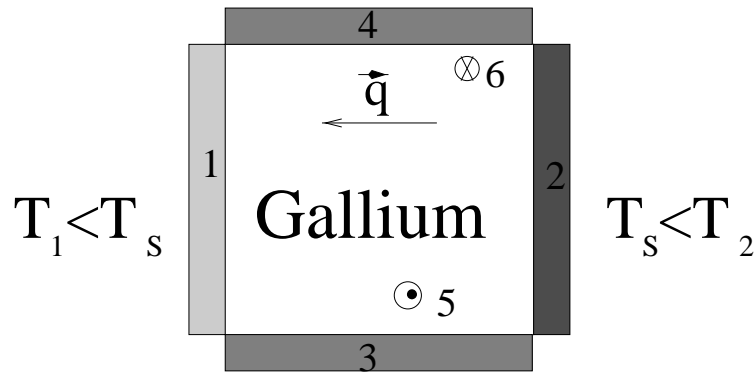


FIG. 3.1 – Cristallisation de gallium avec un gradient de température horizontal. Une température  $T_1$  (inférieure à la température de solidification du gallium  $T_s$ ) est imposée sur la face 1 du cube. Une température  $T_2$  (supérieure à  $T_s$ ) est imposée sur la face 2 du cube. Un flux de chaleur  $\vec{q}$  s'établit de la face 2 vers la face 1. Les faces latérales 3, 4, 5 et 6 sont en cuivre et par conséquent conduisent également la chaleur.

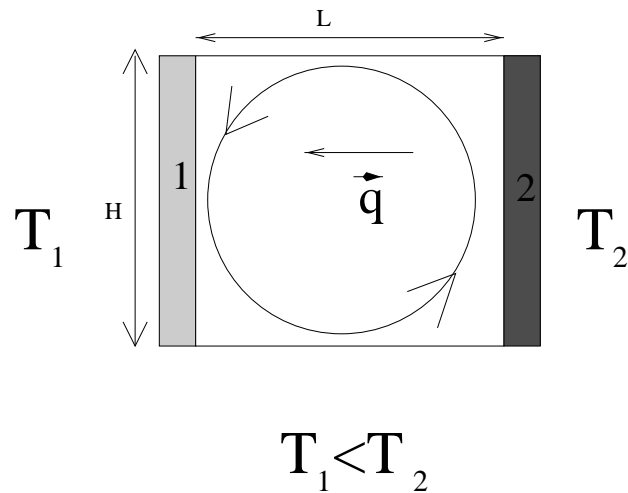


FIG. 3.2 – Illustration de la convection naturelle dans une cavité horizontale de longueur  $L$  et de hauteur  $H$ . Un gradient de température horizontal génère une cellule de convection thermique. Le fluide remonte le long de la face 2 et redescend le long de la face 1.

- le nombre de Rayleigh (ou de Grashof).

Davoust (1996) discute les différents régimes de convection naturelle que l'on obtient en variant le nombre de Rayleigh et le nombre de Prandtl. Contrairement à la convection de Rayleigh-Bénard, cette convection ne comporte pas de seuil et une instabilité se développe dès que le nombre de Rayleigh est différent de 0.

Le faible nombre de Prandtl,  $Pr \simeq 0.025$  du gallium (voir Annexe), est caractéristique d'un fluide à faible viscosité et à grande diffusivité thermique. Gill (1974) puis Hart (1982) discutent de la stabilité des cellules de convection en convection naturelle pour ce type de fluide et comparent leurs études analytiques à des études expérimentales de convection naturelle dans du gallium liquide (Skafel, 1972; Hurle et al., 1974). Ces travaux se sont attachés principalement à étudier les oscillations thermiques au sein du fluide.

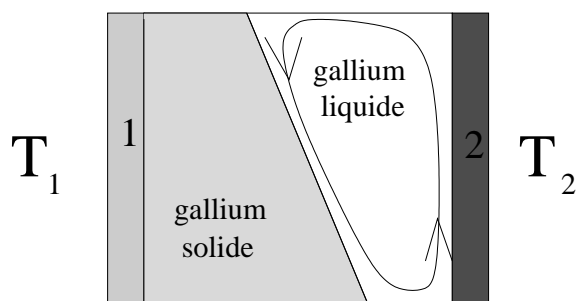
La convection naturelle dans une cavité rectangulaire couplée à la cristallisation d'un fluide a été étudiée expérimentalement avec du plomb par Szekely & Chhabra (1970), et avec du gallium par Gau & Viskanta (1986). Ces études ont caractérisé, en particulier, les transferts de chaleur entre le liquide et le solide, la forme de l'interface liquide/solide et la vitesse du front de solidification. Récemment, une équipe de l'Université du Colorado a reproduit les expériences avec le gallium en utilisant la radioscopie pour visualiser les contrastes de densité. Cette technique novatrice leur a permis de suivre l'avancée du front (Campbell & Koster, 1994) et d'observer la structure de la convection thermique (Koster, 1997; Koster et al., 1997) dans une couche d'épaisseur très faible (de l'ordre du mm).

Il résulte de l'ensemble de ces études que lorsque la convection naturelle contrôle la forme du front de solidification, l'interface solide/liquide se caractérise par une pente négative comme schématisé sur la figure 3.3. Cette pente négative est une conséquence de la convection thermique qui refroidit la base de l'écoulement plus efficacement que le sommet. La forme de l'interface solide/liquide dans ces expériences de cristallisation est rugueuse: la structure locale de l'écoulement et les échanges de chaleur près de l'interface sont influencés par la morphologie et la forme irrégulière de l'interface, et *vice-versa* (Gau et Viskanta, 1986; Hurle, 1993; Campbell & Koster, 1994).

La photographie 3.4 illustre la particularité de la convection naturelle que nous avons générée en utilisant un cube expérimental en cuivre: nous avons pris cette photographie lors d'une expérience de cristallisation réalisée avec un gradient de température horizontal et sans couvercle. Pour prendre cette photographie, nous avons retiré le gallium liquide du cube avec une seringue. On voit clairement la forme parabolique du front de solidification dans la direction transverse (direction perpendiculaire à l'avancée du front), montrant que le gallium a cristallisé plus rapidement le long des faces 3 et 4 qu'au centre du cube, le cuivre étant un meilleur conducteur thermique que le gallium.

Au fil des expériences, nous avons appris que la vitesse de solidification était considérablement influencée par l'état initial du gallium dans le cube. Deux types d'expérience se sont dégagés:

- Si après chaque expérience de cristallisation, le cube en cuivre est nettoyé, c'est-à-dire débarrassé d'impuretés éventuelles attachées aux parois, alors on observe que la vitesse de solidification du gallium varie pour des expériences réalisées



$$T_1 < T_2$$

FIG. 3.3 – Illustration du front de solidification lors de cristallisation dans une cavité rectangulaire en convection naturelle. Le fluide cristallise plus rapidement à la base de la cavité car il est refroidi plus efficacement par la convection thermique. En trait continu nous avons schématisé la cellule de convection thermique, les flèches indiquant le sens du mouvement.

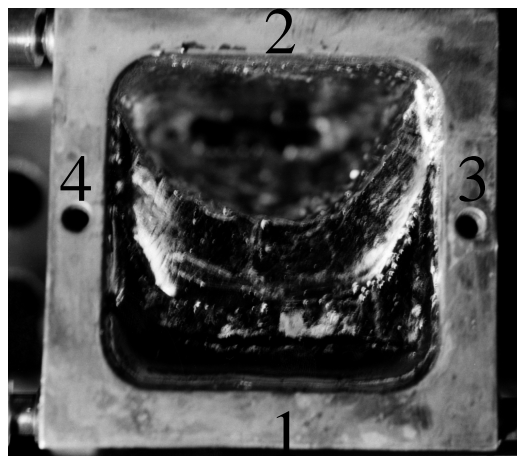


FIG. 3.4 – Photographie du cube vu du haut. Photographie prise après avoir retiré le gallium liquide avec une seringue lors d'une expérience de cristallisation avec un gradient horizontal de température; on voit clairement la forme parabolique de l'interface montrant que le gallium cristallise plus rapidement le long des faces 3 et 4 du cube qu'au centre du cube.

avec les mêmes gradients de température. Ce type d'expérience est qualifié de "cristallisation *pure*".

- Si le gallium est conservé dans le cube en cuivre lors d'une série d'expériences, alors on observe que la vitesse de solidification d'une expérience à l'autre devient rapidement reproductible. Par ailleurs, cette vitesse de solidification est bien plus rapide que dans le cas d'une cristallisation initiée dans un cube propre. Une vitesse de solidification rapide et reproductible démontre, comme nous le verrons plus loin, que la solidification est influencée par des cristaux ou *germes* demeurant sur les parois du cube en cuivre d'une expérience à l'autre (voir section 3.1.2). Ce type d'expérience est qualifié de "cristallisation avec *germes*".

Afin de donner une idée de l'intensité de la convection régnant dans le cube en cuivre, nous avons calculé les nombres de Rayleigh et de Grashof basés sur les équations de la convection naturelle (Tritton, 1988):

$$\text{Ra} = \frac{g \alpha \Delta T_X D_{\text{cube}}^3 (1 - X)^3}{\nu \kappa} = 1.17 \cdot 10^4 (1 - X)^3 \Delta T_X \quad (3.1)$$

$$\text{Gr} = \text{Ra}/\text{Pr} = \frac{g \alpha \Delta T_X D_{\text{cube}}^3 (1 - X)^3}{\nu^2} = 7.45 \cdot 10^5 (1 - X)^3 \Delta T_X \quad (3.2)$$

où  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  est la gravité, les coefficients  $\alpha$ ,  $\nu$ ,  $\kappa$  du gallium sont donnés en Annexe,  $D_{\text{cube}} = 3.81 \cdot 10^{-2} \text{ m}$  est la taille caractéristique du cube en cuivre,  $0 \leq X \leq 1$  est la fraction volumique de gallium solidifiée dans le cube (normalisée par le volume total de gallium en supposant que le front de solidification est plan).  $\Delta T_X$  est la différence de température caractéristique de l'écoulement: si le gallium est complètement liquide (état initial de l'expérience)  $\Delta T_X = T_2 - T_1$  est la différence de température entre les faces 1 et 2, et si le gallium est partiellement solide  $\Delta T_X = T_2 - T_S$  est la différence de température entre le front de solidification et la température de la face 2, la température du front de solidification étant à la température de fusion du gallium.

Le tableau 3.1 donne les valeurs des nombres de Rayleigh et de Grashof pour une expérience où  $T_1 = 5^\circ\text{C}$  et  $T_2 = 36^\circ\text{C}$ , une différence de température typique dans nos expériences. Ces nombres sont calculés pour différentes positions du front de solidification, c'est à dire selon les définitions (3.1) et (3.2), pour différentes valeurs de  $X$ . Ces nombres de Rayleigh montrent que la convection thermique est très vigoureuse lors d'une première phase de la solidification, environ jusqu'à ce que la moitié du gallium soit solide ( $X \simeq \frac{1}{2}$ ), puis dans le seconde phase, la vigueur de la convection décroît très vite pour devenir faible lorsque le gallium est presque entièrement solide.

Nombre sans dimension	$X = 0$	$X = \frac{1}{4}$	$X = \frac{1}{2}$	$X = \frac{3}{4}$	$X = \frac{4}{5}$
$\text{Ra}_X$	$3.35 \cdot 10^5$	$3.07 \cdot 10^4$	$9.07 \cdot 10^3$	$7.37 \cdot 10^2$	$5.8 \cdot 10^2$
$\text{Gr}_X$	$2.16 \cdot 10^7$	$1.95 \cdot 10^6$	$5.77 \cdot 10^5$	$7.18 \cdot 10^4$	$3.7 \cdot 10^4$

TAB. 3.1 – Nombres de Rayleigh et de Grashof pour une expérience de cristallisation réalisée avec un gradient de température horizontal, avec  $T_1 = 5^\circ\text{C}$  et  $T_2 = 36^\circ\text{C}$ .  $X$  est la fraction volumique (normalisée) de gallium solidifié dans le cube. La vigueur de la convection décroît avec l'avancée du front.

### 3.1.1 Cristallisation pure de gallium avec un gradient de température horizontal

#### Propagation du front de cristallisation avec un gradient de température horizontal

Nous avons suivi l'évolution du front de cristallisation au cours du temps pendant les expériences de solidification en mesurant la première arrivée d'onde ultrasonore: pour cela, nous avons utilisé la technique de transmission (voir chapitre 2) avec deux sondes alignées dans la direction d'avancée du front de solidification.

L'expérience débute à l'instant 0 en imposant brutalement la température  $T_1$  sur la face verticale 1 (voir figure 3.4), le système étant initialement à la température uniforme  $T_2$ . A l'instant 0 sur la figure 3.5 A), on mesure la vitesse des ondes de compression dans le gallium liquide; la première arrivée se produit au temps  $t \simeq 14.4 \mu\text{s}$ . Après 26 minutes, la cristallisation a commencé et la première arrivée se produit maintenant au temps  $t \simeq 12.2 \mu\text{s}$ : la première arrivée intervient plus tôt car la vitesse des ondes de compression dans le gallium solide est plus rapide que dans le gallium liquide. Après 50 minutes, le front de solidification a continué son avancée, puis finalement, après 104 minutes, le front ne se propage plus comme on le voit sur la figure 3.5 B); la figure 3.5 B) reporte toutes les mesures ultrasonores effectuées au cours de la cristallisation sur un même graphe où le temps de parcours des ondes ultrasonores est représenté en fonction du temps écoulé dans l'expérience. On lit sur cette figure que la nucléation du premier cristal de gallium solide s'est produite environ 7 minutes après le début de l'expérience. Suite à la nucléation, le front de solidification a avancé progressivement, puis après 102 minutes la cristallisation est stoppée: le gallium solide et le liquide sont en équilibre thermique puisque l'interface ne se propage plus. Après 105 minutes, nous avons interrompu les circulations d'eau alimentant les températures  $T_1$  et  $T_2$ : la face 2 chute alors de  $T_2 = 36^\circ\text{C}$  à une température inférieure à la température de solidification, et par conséquent le gallium liquide cristallise rapidement: cette cristallisation rapide se traduit par un saut en temps de la première arrivée sur la figure 3.5 B) après 105 minutes.

Sur la figure 3.5 C) nous avons converti les temps de première arrivée de la figure B) en fraction de gallium cristallisé  $X$  le long du trajet des ultrasons. Pour faire cette conversion, nous avons supposé la vitesse des ondes  $P$  dans la direction du front de solidification isotrope. Nous interpréterons cette figure un peu plus loin dans ce chapitre.

#### Température au sein du gallium pendant une expérience avec un gradient de température horizontal

En parallèle des mesures ultrasonores, nous avons mesuré la température au sein du gallium durant les expériences de cristallisation. La figure 3.6 A) est la température mesurée avec un thermocouple plongé dans le gallium pendant une expérience où  $T_1 = 2^\circ\text{C}$  et  $T_2 = 33^\circ\text{C}$ . Le thermocouple est positionné à environ 1 cm au dessus de la base du cube et 0.7 cm de la face 2 (figure 3.6 B) ).

Durant les 10 premières minutes de cette expérience, seule la température  $T_2$  est imposée sur la face 2, et, comme on le voit sur la figure 3.6 A), le gallium est thermalisé à environ  $32.7^\circ\text{C}$ : cette différence de  $0.3^\circ\text{C}$  entre la température du bain et la température du gallium s'explique par la perte de chaleur le long des tuyaux en vinyle alimentant le cube

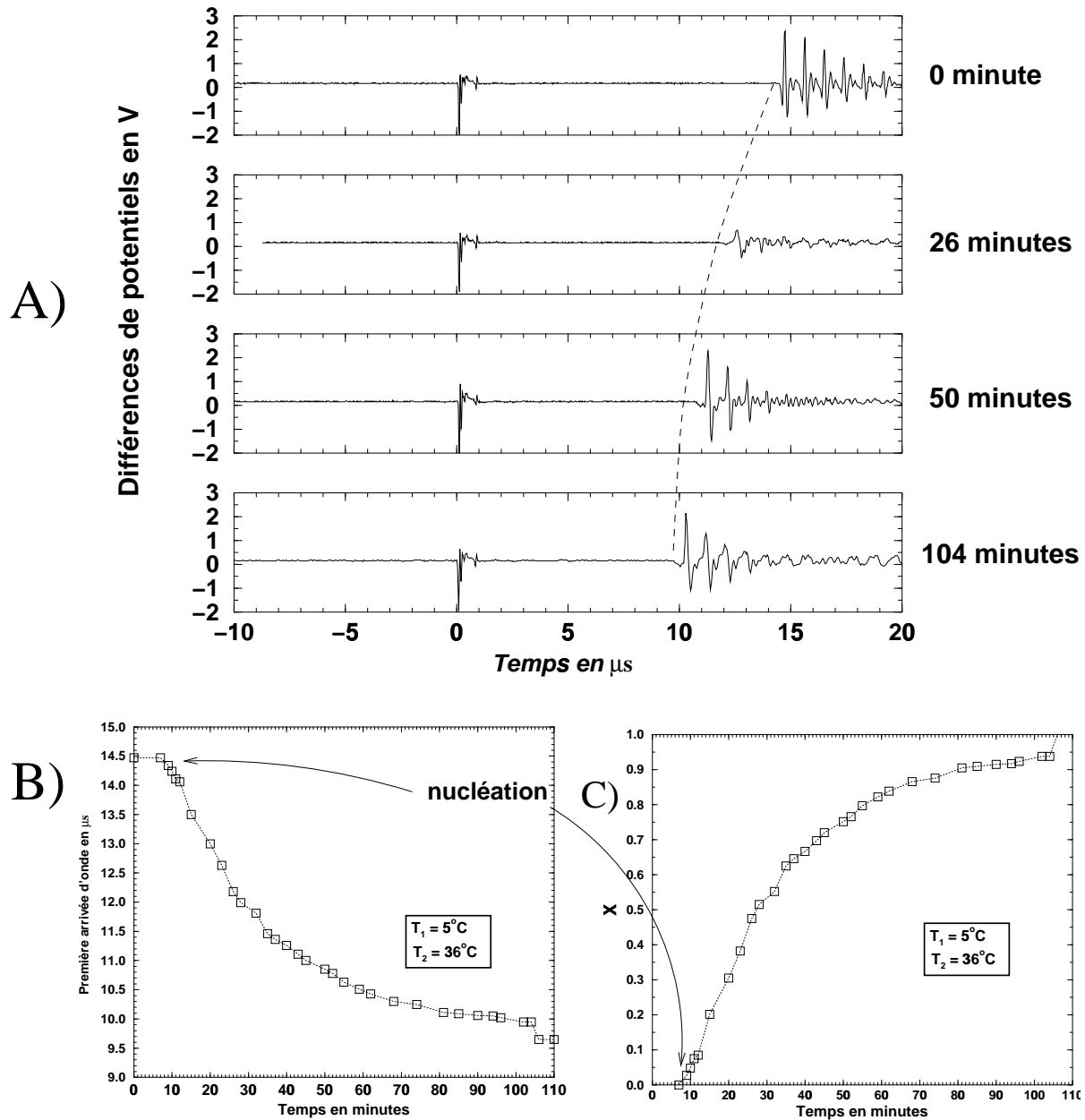


FIG. 3.5 – Mesures ultrasonores utilisant une technique de transmission avec deux sondes à ondes P. La première sonde se trouve sur la face 1 du cube et la seconde se trouve la face 2. Ces mesures ont été réalisées durant une expérience de cristallisation pure de gallium avec un gradient de température horizontal avec  $T_1 = 5^\circ\text{C}$  et  $T_2 = 36^\circ\text{C}$ . Les ultrasons se propagent dans la direction d'avancée du front de solidification. A) Signal lu sur l'oscilloscope après 0 minute, 26 minutes, 52 minutes et 104 minutes. La droite en pointillé indique approximativement les premières arrivées d'ondes sur les 4 figures. B) Premières arrivées en fonction du temps écoulé dans l'expérience. C) Fraction de gallium cristallisé,  $X$ , en fonction du temps écoulé dans l'expérience.



(voir photographie 2.2). Après 10 minutes, la température  $T_1 = 2^\circ\text{C}$  est brutalement imposée sur la face 1: la température du gallium au niveau du thermocouple se met à décroître en moins de deux minutes de  $32.7^\circ\text{C}$  à environ  $25^\circ\text{C}$ . Cette rapide décroissance de la température au niveau du thermocouple, bien que celui-ci se trouve près de la face 2 opposée à la face 1, se comprend car gallium est un très bon conducteur thermique; le temps de diffusion thermique  $\tau$  sur la distance qui sépare la face 1 du thermocouple ( $\simeq 3\text{ cm}$ ) est environ

$$\tau = \frac{l^2}{\kappa} = \frac{9 \cdot 10^{-4}}{1.5 \cdot 10^{-5}} \simeq 69 \text{ secondes} \quad (3.3)$$

La chaleur “pompée” par la face 1 (voir modèle plus loin), cumulée à un temps de diffusion thermique très rapide dans le gallium, explique pourquoi la température chute si brutalement sur la figure 3.6 A) entre les minutes 10 et 12 de l’expérience.

Après 12 minutes sur la figure 3.6 A), on constate qu’en trente secondes environ la température remonte de  $25^\circ\text{C}$  à  $30.2^\circ\text{C}$ : cette montée soudaine est provoquée par la libération de chaleur latente de fusion qui a suivi la première nucléation du gallium. Le gallium liquide était en état de surfusion pratiquement dès que l’on a imposé la température  $T_1$  puisque la température de solidification du gallium est  $29.78^\circ\text{C}$ , cet état de surfusion étant bien connu pour les métaux liquide (Reed-Hill, 1973; Dymov & Savostin, 1970) et en particulier pour le gallium (Pascal, 1961). Le gallium étant en état de surfusion lorsque le premier cristal s’est formé, un important volume a cristallisé instantanément, le front de solidification ne stoppant son avancée que lorsque la quantité de chaleur latente libérée a permis au fluide au voisinage du front de dépasser la température de solidification du gallium.

La remontée spectaculaire de la température après la nucléation sur la figure 3.6 A) s’explique par un coefficient de chaleur latente de fusion ( $80\text{ kJ/kg}$ ) immense devant la chaleur spécifique ( $390\text{ J/kg}\cdot\text{K}$ ) du gallium (voir Annexe).

Cette libération importante de chaleur latente a donc remonté la température à  $30.2^\circ\text{C}$  au niveau du thermocouple, environ  $0.5^\circ\text{C}$  au dessus de la température de solidification du gallium. Entre 12 minutes et 19 minutes, le front de solidification continue à se propager horizontalement dans le cube et la température au niveau du thermocouple décroît légèrement. Après 19.2 minutes environ, on observe une légère discontinuité dans la pente du profil de température: cette discontinuité observée dans toutes nos expériences, est induite par l’arrivée du front de solidification au niveau du thermocouple. La discontinuité accompagnée d’une rupture de pente dans les températures, révèle que le thermocouple s’est soudainement retrouvé dans le milieu solide, avec une température décroissant à un taux différent, en particulier parce que la conductivité thermique du gallium solide est différente de celle du liquide (voir Annexe).

La précision du thermocouple utilisée était de  $0.2^\circ\text{C}$ ; il est par conséquent difficile de déduire avec précision la température de solidification du gallium expérimental à partir de la figure 3.6. Nous avons cependant toujours observé cette discontinuité dans une fourchette allant de  $29.4^\circ\text{C}$  à  $29.6^\circ\text{C}$ . Sachant que la température de solidification du gallium pur est de  $29.78^\circ\text{C}$  environ (voir Annexe), et que nos mesures expérimentales sont précises à  $0.2^\circ\text{C}$  près, nous pouvons simplement conclure que la présence d’oxydes et autres polluants (cuivre et aluminium, voir section 4.1) a au plus modifié la température de solidification du gallium expérimental de  $0.2^\circ\text{C}$ , voire de  $0.4^\circ\text{C}$ .

Entre 19 minutes et 24 minutes, la cristallisation s’achève dans le cube. Une importante

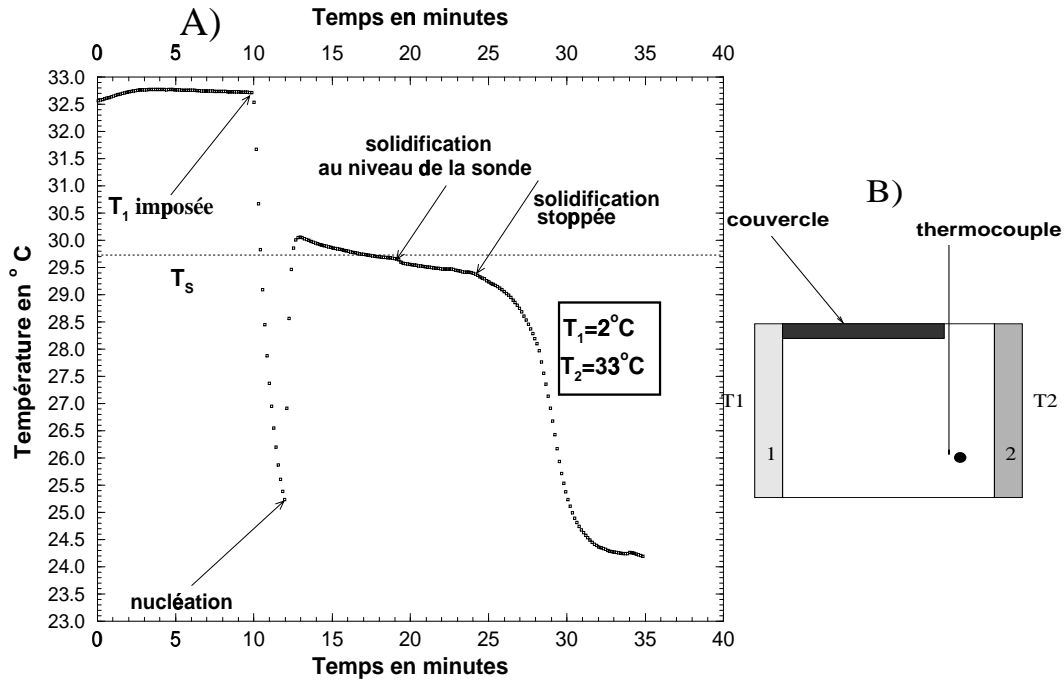


FIG. 3.6 – A) Température obtenue avec un thermocouple plongé dans le gallium pendant une expérience de cristallisation de gallium avec une différence de température horizontale où  $T_1 = 2^\circ\text{C}$  et  $T_2 = 33^\circ\text{C}$ . La température est mesurée toutes les dix secondes environ. B) Le thermocouple est positionné environ 1 cm au-dessus de la base du cube et à 1 cm de la face verticale 2.

rupture de pente des températures après 24 minutes d'expérience montre que le front de solidification a stoppé son avancée, ou, en d'autres termes, qu'il n'y a plus de chaleur latente de fusion libérée, expliquant pourquoi le gradient de température conductif dans le gallium solide évacue soudainement si bien la chaleur du cube.

### Modèle d'avancée du front de solidification

Le temps nous a manqué pour construire un modèle quantitatif d'évolution temporelle du front de solidification. Nous présentons néanmoins ici un modèle qualitatif qui rend compte, au premier ordre, des mesures d'ultrasons et des mesures de température décrites dans les deux parties précédentes.

Nous supposons dans notre modèle (schématisé sur la figure 3.7) que les faces latérales du cube en cuivre sont isolantes et que l'interface solide/liquide du gallium est plane. Le modèle est basé sur les échanges de flux de chaleur entre les parties solide et liquide du gallium au sein du cube en cuivre. On écrit le bilan d'énergie de notre système

$$(q_S - q_L)S = \rho \frac{dX}{dt} D_{\text{cube}}^3 L + \rho C \frac{dT}{dt} D_{\text{cube}}^3 \quad (3.4)$$

où  $q_S$  est le flux de chaleur évacuée de la partie solide du gallium,  $q_L$  le flux de cha-

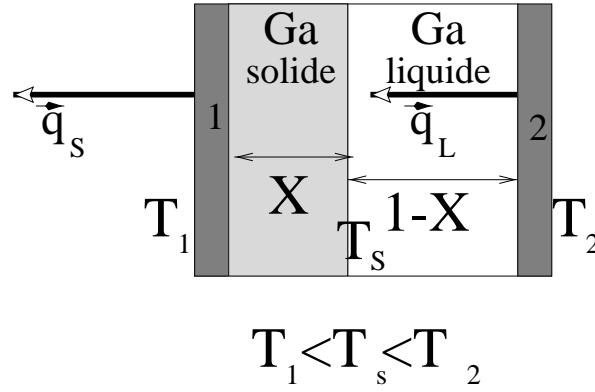


FIG. 3.7 – *Modèle d'échange de flux de chaleur durant la cristallisation du gallium.*  $X$  et  $(1-X)$  sont les épaisseurs respectives de gallium solide et liquide (normalisées par la longueur du cube  $D_{\text{cube}}$ ).  $T_1$  et  $T_2$  sont les températures sur les faces 1 et 2, respectivement.  $T_s$ , la température sur le front de solidification, est la température de solidification du gallium. Dans ce modèle, seules les faces 1 et 2 conduisent la chaleur.  $\bar{q}_s$  est le flux de chaleur évacuée du gallium solide par conduction,  $\bar{q}_L$  est le flux de chaleur évacuée du gallium liquide (vers le solide). La différence entre  $q_L$  et  $q_S$  provient de la chaleur latente de fusion libérée à l'interface solide/liquide.

leur évacuée de la partie liquide,  $L$  la chaleur latente de solidification,  $\rho$  la densité du gallium solide (voir Annexe),  $S = D_{\text{cube}}^2$  la surface du cube,  $X$  la position du front de solidification (normalisée par  $D_{\text{cube}}$ ),  $\frac{dX}{dt}$  la vitesse d'avancée du front de solidification,  $C$  la chaleur spécifique du gallium liquide et  $T$  la température du système.

On peut négliger  $\rho C \frac{dT}{dt}$  devant  $\rho \frac{dX}{dt} L$  dans l'équation (3.4) puisque la variation d'énergie du système est principalement dû à la libération de chaleur latente (parce que  $L \gg C * 1K$ , voir Annexe).

On en déduit une équation d'évolution du front de solidification:

$$\frac{dX}{dt} = \frac{(q_S - q_L)}{\rho D_{\text{cube}} L} \quad (3.5)$$

Précisons maintenant les flux de chaleur  $q_S$  et  $q_L$ :

- le flux de chaleur  $q_S$  évacuée par conduction dans le solide s'écrit

$$q_S = -k_S \nabla T \simeq k_S \frac{T_S - T_1}{X D_{\text{cube}}} \quad (3.6)$$

où  $k_S$  est la conductivité du gallium solide,  $T_S$  la température de l'interface solide/liquide,  $T_1$  est la température de la face 1 du cube (voir figure 3.7).

- le flux de chaleur  $q_L$  transportée de la partie liquide du gallium s'écrit:

$$q_L = \text{Nu} \cdot q_{\text{CL}} = \text{Nu} \cdot \left( k_L \frac{T_2 - T_S}{(1-X) D_{\text{cube}}} \right) \quad (3.7)$$

où  $k_L$  est la conductivité thermique du gallium liquide (voir Annexe),  $T_2$  est la température de la face 2 du cube. Le nombre de Nusselt,  $\text{Nu}$  adimensionné ( $\text{Nu} \geq 1$ ) est une fonction du nombre de Rayleigh; ce nombre est le rapport entre le flux de chaleur

transportée du système par convection et le flux de chaleur qui serait conduit dans le liquide ( $q_{CL}$  dans l'équation (3.7)) (Tritton, 1988). Nous n'avons pas mesuré le nombre de Nusselt dans notre expérience, mais il aurait certainement été difficile à estimer.

Les faibles nombres de Rayleigh obtenus dans le tableau 3.1 lorsque  $X \geq 0.7$  montre cependant que l'on est proche d'un régime de conduction thermique en fin d'expérience dans la partie liquide;  $Nu \simeq 1$  est donc une bonne approximation pour  $X \geq 0.7$ .

Nous avons représenté sur la figure 3.8 le flux de chaleur  $q_S$  et le flux de chaleur  $q_L$  (pour  $Nu = 1$ ) à partir de (3.6) et (3.7) en fonction de la position du front de solidification  $X$ . On en déduit à partir de la figure 3.8 un modèle d'avancée du front de solidification dans nos expériences en trois phases:

- La *première phase* débute au moment où on impose brutalement la température  $T_1$  sur la face 1 par l'intermédiaire d'un bain thermostaté. Le gallium est en surfusion au début de cette première phase (figure 3.6) puis la nucléation intervient; le front de solidification se propage alors en libérant de la chaleur latente de fusion. Le facteur limitant l'avancée du front lors de cette première phase est la puissance d'évacuation de la chaleur par le bain thermostaté,  $Q_0$  sur la figure 3.8; en effet, comme on la voit sur la figure 3.8 le flux de chaleur  $q_S$  est très grand dans les premiers instants de la solidification, or, le bain ne peut extraire si vite cette chaleur.

- Lors de la *seconde phase*, la face 1 est désormais thermalisée à la température  $T_1$ ; elle joue le rôle de puits de chaleur en "pompe" de l'énergie à l'interface solide/liquide. On a vu sur le tableau 3.1 que le liquide convecte vigoureusement pour les positions de l'interface  $X \leq 0.7$ ; le flux de chaleur conductif  $q_L$  sur la figure 3.8 doit donc être multiplié par le nombre de Nusselt  $Nu$  (indéterminé dans nos expériences) lors de cette phase. Il est cependant clair d'après la figure 3.8 que  $q_S$  domine  $q_L$  lors de cette phase, y compris pour un Nusselt de l'ordre de 10. La vigueur de la convection décroît au fur et à mesure que le front solide/liquide se propage horizontalement sur la figure 3.7 (voit tableau 3.1). Pour des valeurs  $X \geq 0.7$ , la convection devient très faible et un nombre de Nusselt de 1 est une bonne approximation.

- Dans une *troisième phase*, le flux de chaleur pompé par le solide devient égal au flux de chaleur extrait par le fluide, soit  $q_S = q_L$ . On se retrouve alors en équilibre thermique et le front stoppe sa propagation à la position  $X_{eq}$  sur la figure 3.8.

Comme on le voit dans ce modèle simple, c'est la conduction de chaleur dans la partie solide qui dicte la vitesse d'avancée du front de propagation solide/liquide. La convection thermique dans le liquide peut quant à elle moduler la forme de l'interface; en effet, une température plus froide du liquide à la base par rapport au sommet du cube augmente le flux de chaleur extrait  $q_L$  à la base du cube, ce qui induit une cristallisation plus rapide. On peut par conséquent obtenir une interface avec une pente négative comme décrit sur la figure 3.2.

En outre, on peut écrire une équation d'évolution en temps de l'interface en ignorant la contribution de la convection liquide, soit  $q_S \gg q_L$ . On écrit à partir de 3.6

$$\frac{dX}{dt} = \frac{k_S(T_S - T_1)}{\rho X D_{\text{cube}}^2 L} \quad (3.8)$$

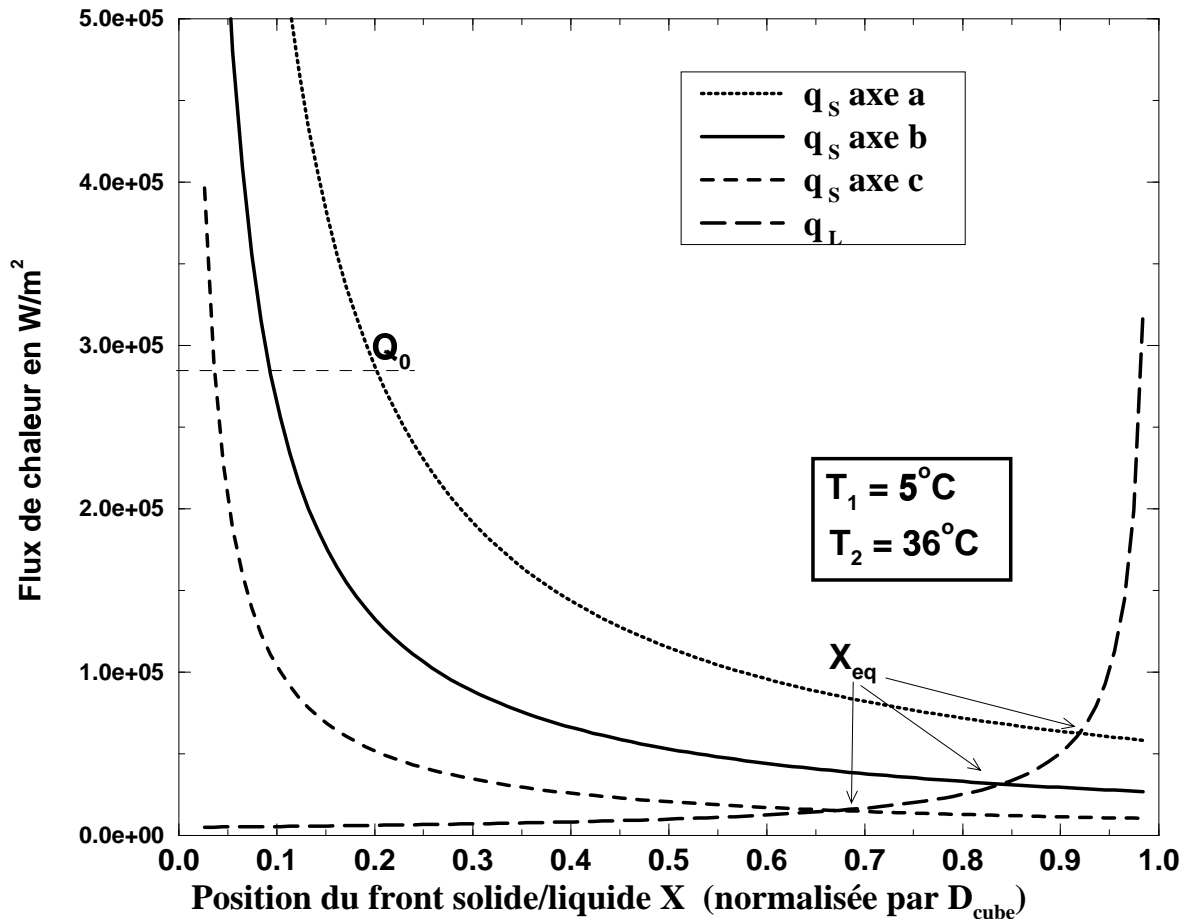


FIG. 3.8 – Flux de chaleur  $q_S$  et  $q_L$  pour  $Nu = 1$  (voir expressions (3.6) et (3.7)), calculés en fonction de la fraction  $X$  de gallium cristallisé dans le cube en cuivre. Le flux de chaleur  $q_S$  est calculé pour les 3 valeurs des conductivités thermiques du gallium orthorhombique  $Ga_\alpha$  (voir Annexe) selon les 3 axes cristallins. Suite à la nucléation initiale, la chaleur évacuée par la partie solide est limitée par la puissance de refroidissement du bain thermostaté  $Q_0$ . Par la suite, le face 1 se thermalise à la température  $T_1$  et l'avancée du front de propagation est contrôlée par la chaleur évacuée par conduction dans la partie solide  $q_S$ . Le flux de chaleur  $q_L$  représenté est incorrecte lorsque le gallium convecte vigoureusement dans la partie liquide; on devrait en effet multiplier  $q_L$  par le nombre de Nusselt qui est dans ce cas supérieur à 1. En revanche, en fin d'expérience lorsque  $X \geq 0.7$  et que le gallium ne convecte que très modérément (voir tableau 3.1),  $q_L$  représenté sur la figure est une bonne approximation. La position d'équilibre  $X_{eq}$  correspond à la fin de l'avancée du front de propagation solide/liquide.

On résout cette équation différentielle et on obtient

$$X(t) = \sqrt{\frac{2k_S}{\rho D_{\text{cube}}^2 L} (T_S - T_1) \sqrt{t}} \quad (3.9)$$

Notre modèle prédit donc une avancée du front de solidification en racine carrée du temps lorsqu'on suppose que c'est le flux de chaleur conduit dans la partie solide qui dicte l'avancée du front de solidification. La figure 3.5 C) montre que qualitativement le modèle semble bien reproduire les données expérimentales; on observe effectivement une évolution rapide du front dans une première phase, puis une vitesse qui décroît dans une seconde phase. Nous pensons que ce modèle s'applique bien aux expériences de cristallisation pure où seule la thermodynamique intervient dans l'avancée du front; nous verrons dans la prochaine partie que la cinétique du front de solidification est accélérée dans les cas d'expérience avec germes.

Enfin notons que la vitesse de solidification dans ces expériences de cristallisation pure se sont révélées être très variables, y compris pour un même gradient de température ( $T_S - T_1$ ) dans l'expression (3.9), suggérant que l'orientation des cristaux anisotropes de gallium (voir Annexe) était un facteur déterminant contrôlant la vitesse d'avancée par l'intermédiaire du facteur  $k_S$  dans (3.9).

### 3.1.2 Cristallisation de gallium avec germes et un gradient de température horizontal

Dans cette partie nous abordons les expériences qualifiées de cristallisation avec germes: ce sont les expériences que nous avons réalisées à la suite les unes des autres sans vidanger et nettoyer le cube entre chacune d'elles. Ces expériences ont permis d'obtenir une vitesse de solidification reproductible, associée à une anisotropie du gallium solide également reproductible comme nous le verrons dans le prochain chapitre.

Les mesures ultrasonores réalisées lors d'une expérience de cristallisation forcée avec  $T_1 = 15.5^\circ\text{C}$  et  $T_2 = 35^\circ\text{C}$  sont représentées sur la figure 3.9. Les deux courbes avec des symboles pleins sur la figure caractérisent l'avancée du front de solidification à la base du cube; elles sont beaucoup plus "heurtées" que dans le cas de l'expérience de cristallisation pure représentée sur la figure 3.5 B). Cela démontre que le front de solidification se propage plus par à-coups dans le cas d'une expérience de cristallisation avec germes, que par une avancée régulière comme dans le cas d'une expérience de cristallisation pure. L'avancée heurtée suggère que des germes solides persistent sur les parois du cube d'une expérience à l'autre, et que ces germes accélèrent la cinétique de solidification.

Une autre observation confirme que ces germes accélèrent la solidification: la vitesse de solidification lors des expériences de cristallisation de la figure 3.9, réalisées avec un gradient de température de  $20^\circ\text{C}$  ( $T_2 - T_1$ ), est du même ordre de grandeur que la vitesse de solidification obtenue en cristallisation pure avec un gradient de température de  $31^\circ\text{C}$  sur la figure 3.5. Nous avons toujours obtenu, à gradients de température  $T_2 - T_1$  égaux, des vitesses de solidification avec germes supérieures aux vitesses de solidification pure. Par ailleurs, la figure 3.9 montre que l'interface solide/liquide avance linéairement au cours du temps et non en une fonction racine du temps comme dans les expériences

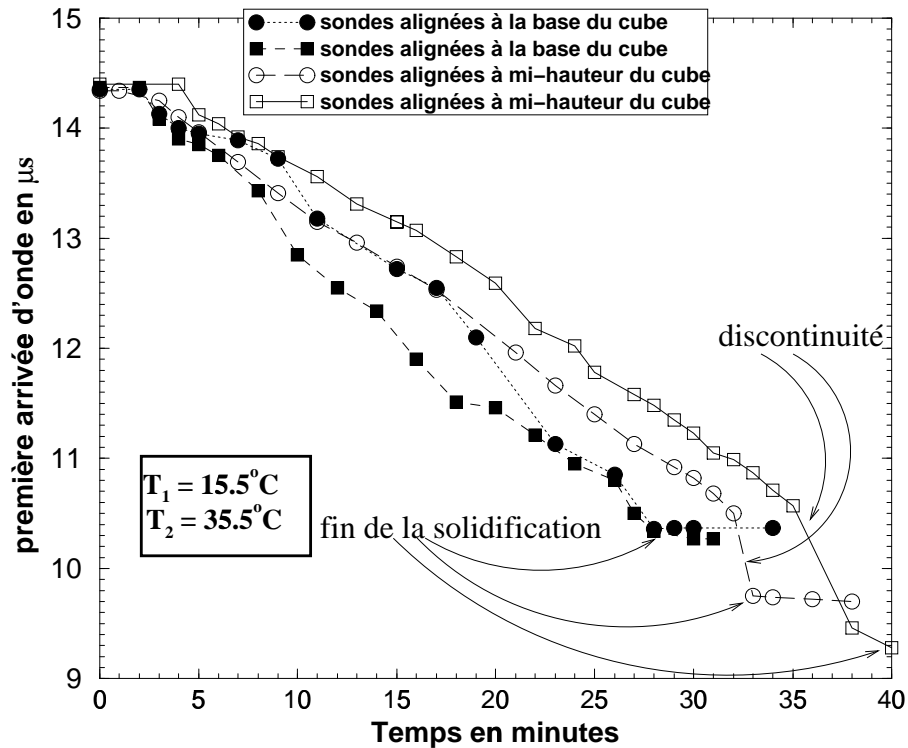


FIG. 3.9 – Mesures ultrasonores utilisant une technique de transmission avec deux sondes à ondes P. La première sonde est sur la face 1 du cube, celle-ci étant à une température  $T_1 = 15.5^\circ\text{C}$ ; la seconde sonde est sur la face 2 (température  $T_2 = 35.5^\circ\text{C}$ ). Les deux expériences reportées avec des cercles et des carrés pleins ont été réalisées avec les sondes en position basse sur le cube. Les deux expériences reportées avec des cercles et des carrés vides ont été réalisées avec les sondes à mi-hauteur sur le cube. Le gallium solidifie plus rapidement à la base du cube.

de cristallisation pure (figure 3.5 C) ) : cela démontre que le modèle développé pour les expériences de cristallisation pure ne s'applique pas ici pour les expériences de cristallisation avec germes.

On en conclut que dans le cas des expériences de cristallisation avec germes, la cinétique de cristallisation est précisément accélérée par les germes présents sur les parois du cube, ce qui fait que l'avancée du du front n'est pas uniquement contrôlée (au premier ordre) par la thermodynamique comme dans les expériences de cristallisation pure.

L'autre intérêt de la figure 3.9 concerne les mesures ultrasonores réalisées en position haute sur le cube. Les deux courbes en carrés et cercles vides représentent les premières arrivées d'ondes mais cette fois à mi-hauteur du cube. Nous apprenons que le gallium à mi-hauteur met environ 10 minutes de plus à cristalliser par rapport au gallium à la base du cube: cela démontre que l'interface se propage avec une pente négative dans

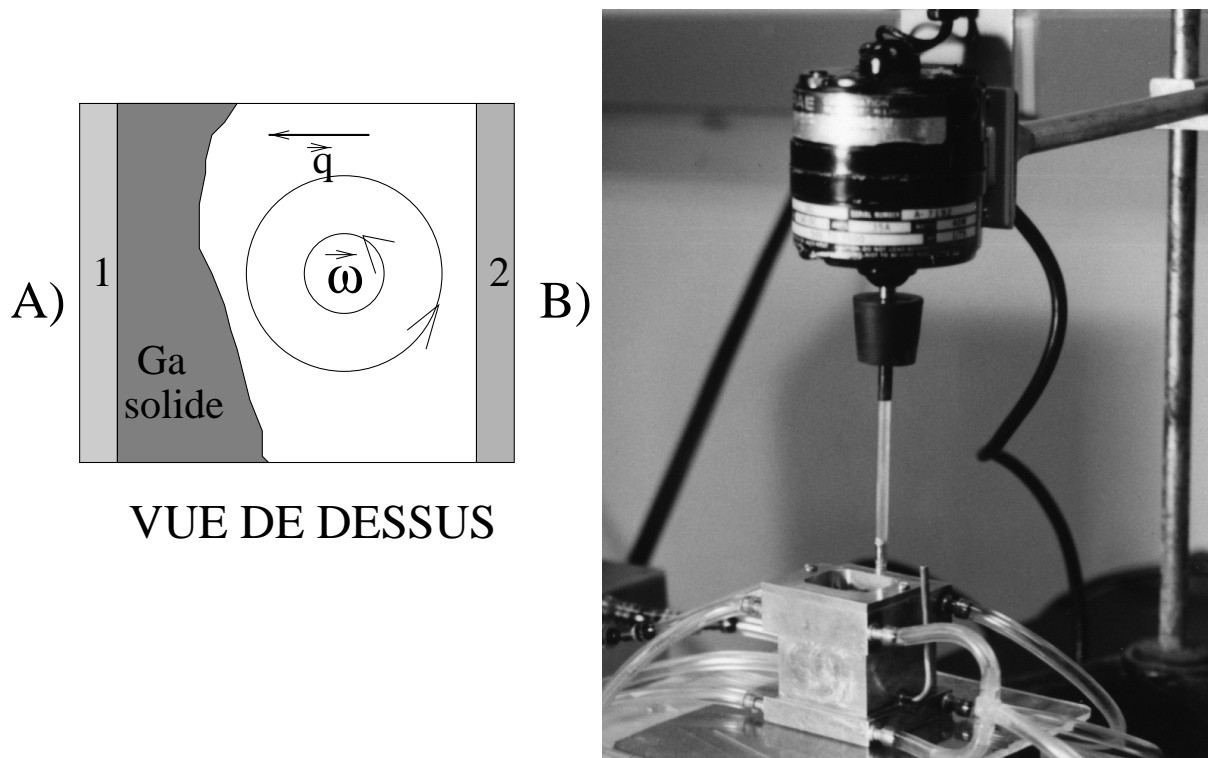


FIG. 3.10 – Cristallisation de gallium avec un gradient de température horizontal et un écoulement tourbillonnant. A) Vue de dessus du cube en cuivre: la face 1 est à une température  $T_1$  et la face 2 à une température  $T_2$ . Le front de solidification se propage de la face 1 vers la face 2. Le gallium liquide est soumis à un écoulement tourbillonnant généré par une hélice en rotation à  $\omega = 500 \text{ tours min}^{-1}$ . B) Photographie du mélangeur pénétrant le gallium au niveau de la fente non recouverte par le couvercle du cube.

nos expériences, comme dans le cas de la convection naturelle classique (voir figure 3.3). Cela montre que la convection thermique vigoureuse au début de l'expérience joue bien un rôle dans la forme de l'interface solide/liquide.

On remarque sur la figure 3.9 que les courbes à carrés vides et à cercles vides ont deux sauts marqués en terme d'arrivée de la première onde après 32 minutes et 35 minutes, respectivement: ces sauts rapides indiquent qu'une fois que le gallium est cristallisé à la base du cube, la cristallisation se propage alors verticalement.

### 3.2 Cristallisation de gallium avec un gradient de température horizontal et un écoulement tourbillonnant

Nous avons cristallisé le gallium avec un gradient de température horizontal et un écoulement tourbillonnant horizontal: nous avons placé un mélangeur à hélice au sein du gallium en le faisant pénétrer au niveau du couvercle. Ce dispositif est illustré sur la figure 3.10. Le mélangeur tourne à une vitesse de rotation  $\omega = 500 \text{ tours min}^{-1}$ . Nous sommes ainsi dans des conditions dynamiques de cristallisation proches de celles du noyau terrestre où la vitesse du fluide est plusieurs ordres de grandeur supérieure à



la vitesse de cristallisation de la graine.

### 3.3 Cristallisation de gallium avec un gradient de température horizontal et un champ magnétique

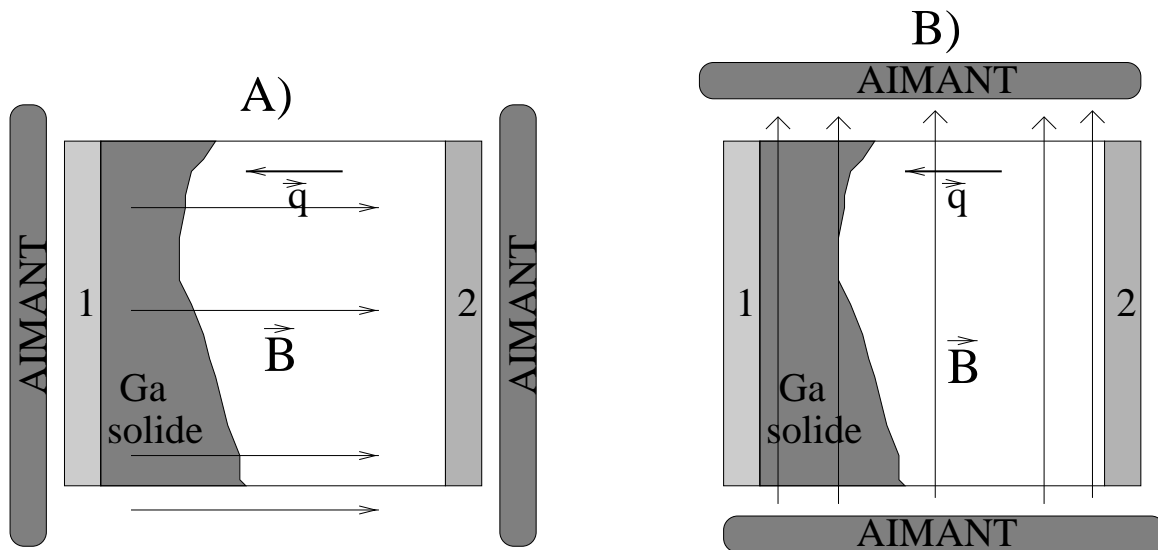
Nous avons cristallisé le gallium avec un gradient de température horizontal et deux champs magnétiques d'intensités 600 G et 1200 G. Les deux différentes géométries du champ étudiées sont illustrées sur la figure 3.11: le champ magnétique imposé est soit vertical, soit horizontal dans la direction de l'avancée du front de solidification. C'est en effet dans ces directions que le champ magnétique doit empêcher la cellule de convection (décrite sur la figure 3.2) de se développer. Le champ magnétique est généralement utilisé pour stabiliser ou freiner l'écoulement dans les processus de solidification (Hurle, 1966; Okada & Ozoe, 1992; Davoust, 1996). Nous n'avons pas été en mesure d'observer un freinage significatif de la solidification dans la mesure où la vitesse du front de solidification est dominée pendant la plupart de l'expérience par le flux de chaleur conductif à travers le gallium solide, ce flux de chaleur étant indépendant du champ magnétique imposé.

### 3.4 Cristallisation de gallium avec un gradient de température vertical

Afin de caractériser la cristallisation du gallium avec un gradient de température stable, nous avons imposé une température  $T_3$  à la base du cube (inférieure à la température de solidification) et une température  $T_4$  au sommet du cube (supérieure à la température de solidification) comme illustré sur la figure 3.12. C'est par conséquent une configuration où le gallium est *a priori* cristallisé sans être mis en mouvement.

La figure 3.13 montre deux photographies prises au cours d'une expérience de cristallisation de gallium avec gradient de température vertical. Sans surprise, on se retrouve comme dans le cas du gradient de température horizontal (voir figure 3.4) avec le gallium cristallisant plus rapidement le long des faces en cuivre qu'au centre du cube, la conductivité thermique du cuivre étant supérieure à celle du gallium.

La figure 3.14 représente trois profils de température obtenus durant des expériences de cristallisation avec un gradient vertical où  $T_3 = 5^\circ\text{C}$  et  $T_4 = 36^\circ\text{C}$ . Les trois profils de température ont été réalisés à différentes hauteurs dans le cube. Pour chacune des courbes, on retrouve le même comportement décrit dans la section 3.1: lorsque  $T_3$  est imposée, le gallium passe par un stade de surfusion puis la nucléation initiale intervient. Une importante chaleur de fusion est alors libérée et réchauffe le fluide. On observe aussi clairement sur chacune des courbes les deux ruptures de pente dont on a discuté dans la section 3.1: une première rupture de pente lorsque le front de solidification arrive au niveau du thermocouple - cette rupture de pente étant provoquée par une différence de conductivité thermique entre le gallium liquide et le gallium solide - et une seconde lorsque la cristallisation stoppe, arrêtant la libération de chaleur de fusion. Enfin, les trois profils de température réalisés aux trois différentes hauteurs sur la figure 3.14 témoignent que l'on était bien avec un gradient stable de température verticale durant ces expériences puisque plus la position du thermocouple était haute dans le



## VUES DE COTE

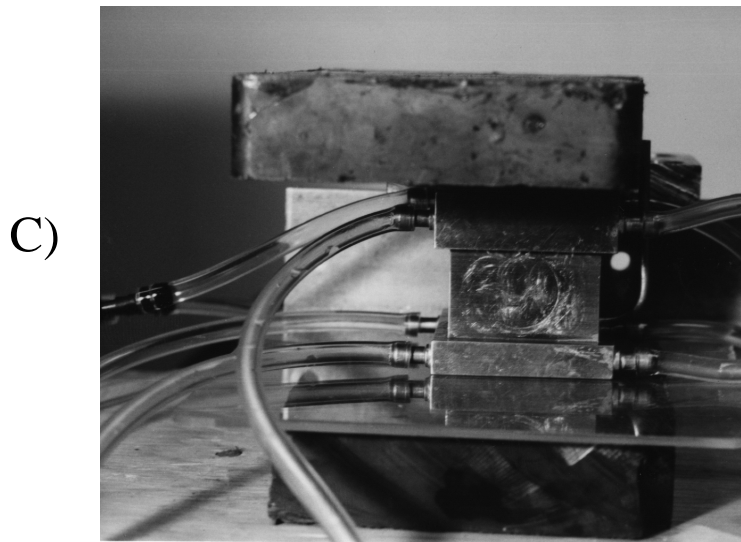


FIG. 3.11 – Cristallisation de gallium avec un gradient de température horizontal et un champ magnétique imposé. En B) le champ magnétique est horizontal, imposé dans la direction d'avancée du front de solidification. En A) le champ magnétique imposé est vertical. En C), photographie des aimants imposant un champ magnétique vertical  $B = 600 \text{ G}$  au sein du cube.

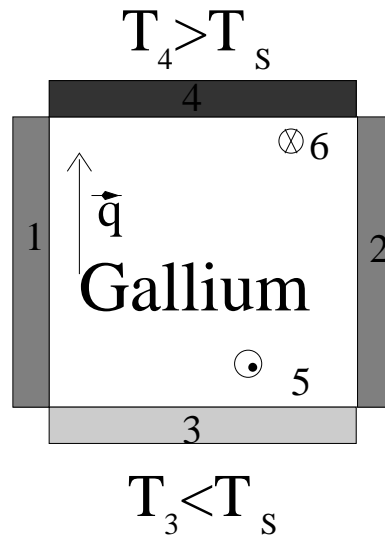
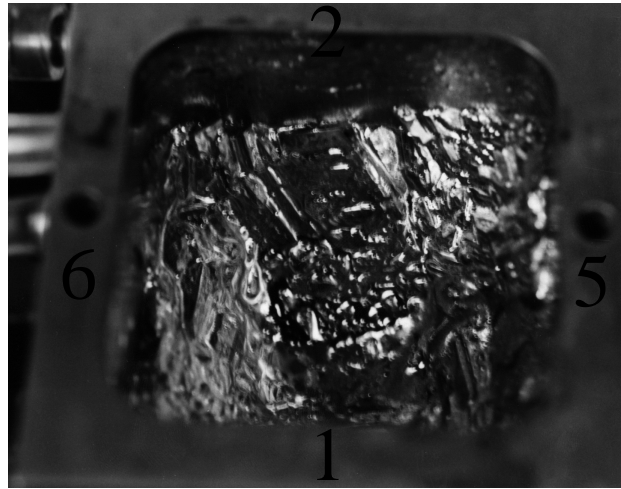
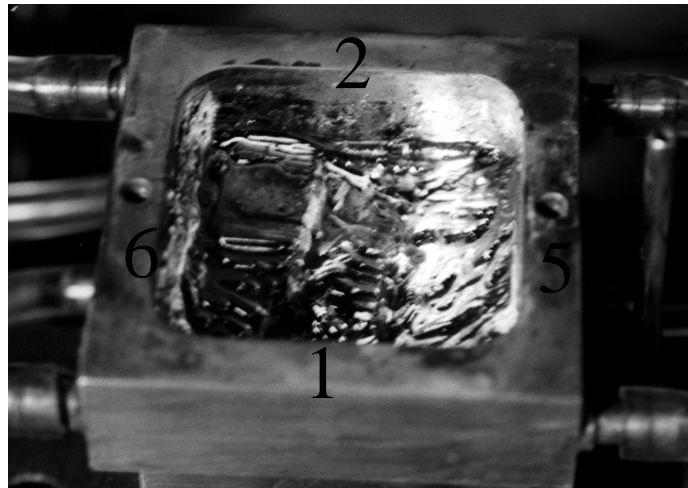


FIG. 3.12 – *Cristallisation de gallium avec un gradient de température vertical stable. Une température  $T_1$  (inférieure à la température de solidification du gallium  $T_S$ ) est imposée sur la face 3 du cube. Une température  $T_2$  (supérieure à  $T_S$ ) est imposée sur la face 4 du cube. Un flux de chaleur  $\vec{q}$  s'établit de la face 3 vers la face 4. Les faces latérales 1, 2, 5 et 6 sont en cuivre et par conséquent conduisent également la température.*

cube, plus on se rapprochait de la température du couvercle  $T_4$ . La forme en creuset de l'interface solide/liquide a certes généré des mouvements de convection thermique mais moins importants que dans le cas des expériences de solidification avec un gradient de température horizontal.



A)



B)

FIG. 3.13 – Photographies du cube vu du haut. Ces photographies ont été prises au cours d'une expérience de cristallisation de gallium avec un gradient de température vertical stable. Le gallium liquide a été pompé avec une seringue pour prendre ces photographies. On devine une interface avec forme parabolique sur les photographies A) et B), le gallium cristallisant plus rapidement le long des faces 1, 2, 5 et 6 qu'au centre du cube. La parabole est plus prononcée sur la photographie A) car c'est une photographie prise plus tôt dans l'expérience que la photographie B).

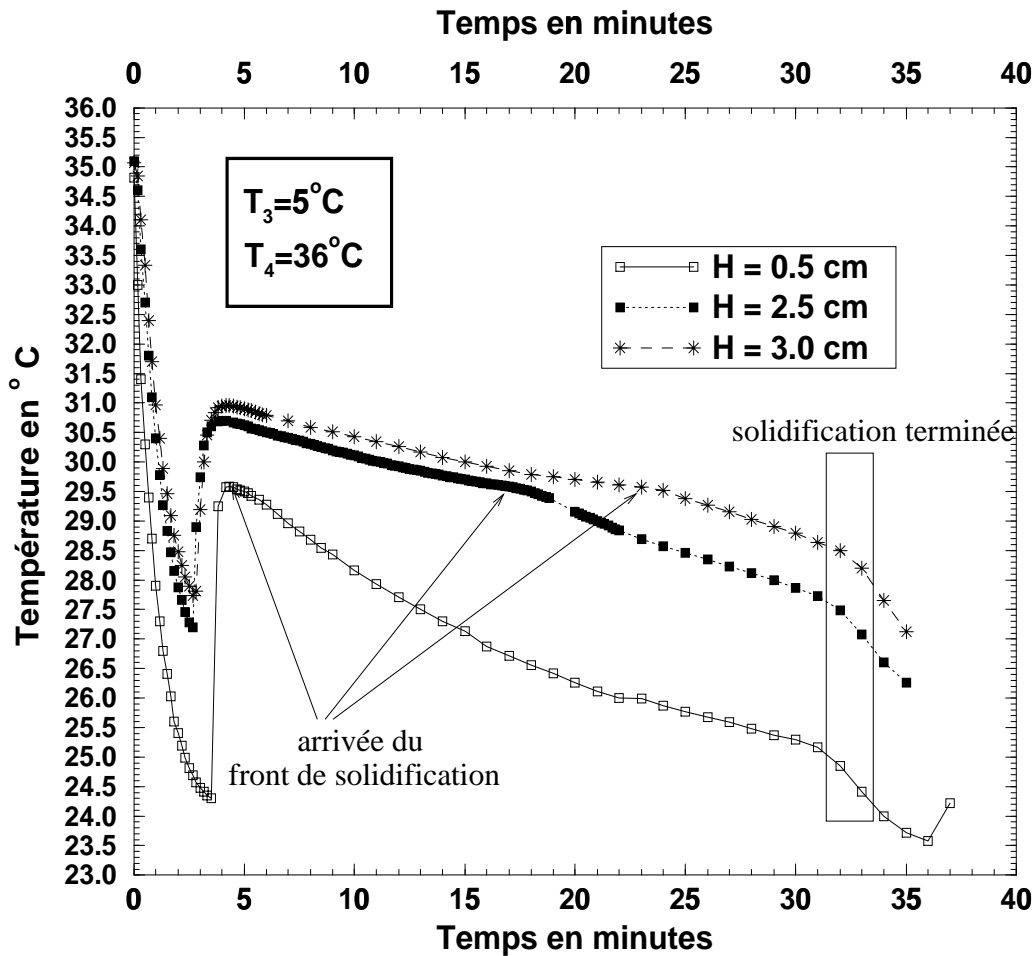


FIG. 3.14 – A) Températures obtenues avec un thermocouple plongé dans le gallium durant trois expériences de cristallisation de gallium avec une différence de température verticale où  $T_3 = 5^\circ\text{C}$  et  $T_4 = 36^\circ\text{C}$  (voir figure 3.12). La température est mesurée toutes les dix secondes environ. Le profil avec des carrés vides est obtenu avec le thermocouple placé à une hauteur  $H=0.5$  cm à partir de la base du cube; celui avec les carrés pleins à une hauteur  $H=2.0$  cm et enfin celui avec des étoiles à une hauteur  $H=3.0$  cm.

## Chapitre 4

# Anisotropie des polycristaux de gallium

Dans ce chapitre nous étudions les polycristaux de gallium obtenus après cristallisation dans le cube en cuivre. Dans la première partie du chapitre, nous commentons les photographies de blocs de gallium solide extraits du cube, puis dans la seconde partie, nous analysons les mesures d'anisotropie élastique obtenues avec le dispositif ultrasonore présenté dans le chapitre 2.

Nous définissons ici trois termes fréquemment utilisés dans le chapitre.

- Un *grain* est un domaine cristallin de taille variable; c'est un élément différencié macroscopiquement au sein d'un polycristal. Dans un grain, les axes cristallins de la maille sont orientés préférentiellement dans une même direction. Il peut cependant y avoir de nombreuses dislocations dans le réseau cristallin au niveau microscopique.

- La *texture* est la forme macroscopique des grains dans le polycristal; elle est repérée par les joints de grains (frontières entre grains).

- Une *orientation préférentielle de réseau* ou *opr* signifie que le réseau cristallin est orientée préférentiellement dans une même direction.

### 4.1 Observation des polycristaux de gallium

#### 4.1.1 Structure cristalline du gallium solide à pression atmosphérique

Il existe plusieurs phases métastables du gallium solide à pression atmosphérique  $Ga\beta$  (Bosio & Defrain, 1968),  $Ga\delta$ ,  $Ga\gamma$ ,  $Ga\epsilon$  (Bosio et al., 1972). Le gallium solide cristallisé dans nos expériences est la phase stable orthorhombique  $Ga\alpha$  (Bradley, 1935): nous l'avons démontré en utilisant un diffractomètre à rayons X sur de la poudre de gallium solide expérimental (David Elbert, communication personnelle). La maille d'un cristal orthorhombique est un parallélépipède rectangle à trois arêtes inégales  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Les propriétés du cristal de gallium  $Ga\alpha$  sont décrites dans l'Annexe.

### 4.1.2 Etude des blocs de gallium solide obtenus après cristallisation

Nous avons étudié en détail quatre blocs de gallium solide extrait du cube en cuivre après les expériences de cristallisation.

#### Imagerie en électrons rétro-diffusés et spectroscopie à rayons X des polycristaux de gallium

Les blocs de gallium solide sont dissous dans de l'acide chlorhydrique pur pendant environ 10 minutes afin de faire apparaître les frontières entre grains. Ils sont ensuite observés au microscope.

Certains échantillons observés au microscope contiennent des cristaux de petites tailles, couleur cuivre. Nous avons utilisé l'imagerie en électrons rétro-diffusés à énergie dispersive (backscattered-electron imaging en anglais, ci-après BEI), ainsi que la spectroscopie à rayons X (X-ray spectroscopy en anglais, ci-après EDS) afin de déduire la nature de ces cristaux. L'imagerie et la spectroscopie ont été effectuées sur les appareils JEOL JXA-8660 Superprobe electron microprobe et Tracor-Notern TN-500 EDS (Université Johns Hopkins).

Les figures 4.1 sont les images BEI des cristaux couleur cuivre. Ces cristaux ont été généralement observés dans des groupes contenant entre 2 et 15 grains. Le spectre EDS de l'un de ces grains est représenté sur la figure 4.2 A). Une analyse semi-quantitative du spectre révèle que ce grain, en particulier, est un alliage contenant approximativement 45% de gallium et 55% de cuivre, en accord avec le diagramme de phase de l'alliage Gallium-Cuivre déterminé par Weibke (1934). Le spectre EDS a également démontré que certains cristaux de gallium sont contaminés par quelques pour cent d'aluminium comme on le voit sur la figure 4.2 B). Enfin, la figure 4.2 C) est le spectre EDS d'un grain de gallium pur. Nous pensons que les impuretés de cuivre provenaient du cube, mais que l'aluminium provenait quant à lui d'un produit utilisé pour polir la surface du bloc de gallium.

Ce qui est à retenir de ces analyses est que les impuretés ne représentaient que moins de 0.1% de la composition totale du bloc solide de gallium; elles n'ont dû, par conséquent, que peu perturber la cristallisation du gallium.

#### Analyse photographique des polycristaux de gallium

Nous avons photographié quatre blocs de gallium solide retirés du cube en cuivre après la fin de la cristallisation. Les figures 4.3, 4.4, 4.5 et 4.6 sont des photographies de ces échantillons prises selon plusieurs perspectives. Les flèches sur les figures indiquent la direction du gradient de température selon laquelle le gallium a cristallisé.

##### – Gallium cristallisé avec un gradient de température vertical

Les figures 4.3 A), B) et C) sont des photographies de la face supérieure du bloc de gallium solide: c'est la dernière face ayant cristallisé lors d'une expérience de cristallisation pure avec un gradient de température vertical. Ces photographies révèlent clairement l'existence de plusieurs frontières entre grains sur la face supérieure du bloc de gallium: ce bloc de gallium est, sans ambiguïté possible, polycristallin. Le nombre de grains est difficile à estimer car, selon l'orientation du bloc par rapport à la lumière, de nouvelles frontières peuvent apparaître ou

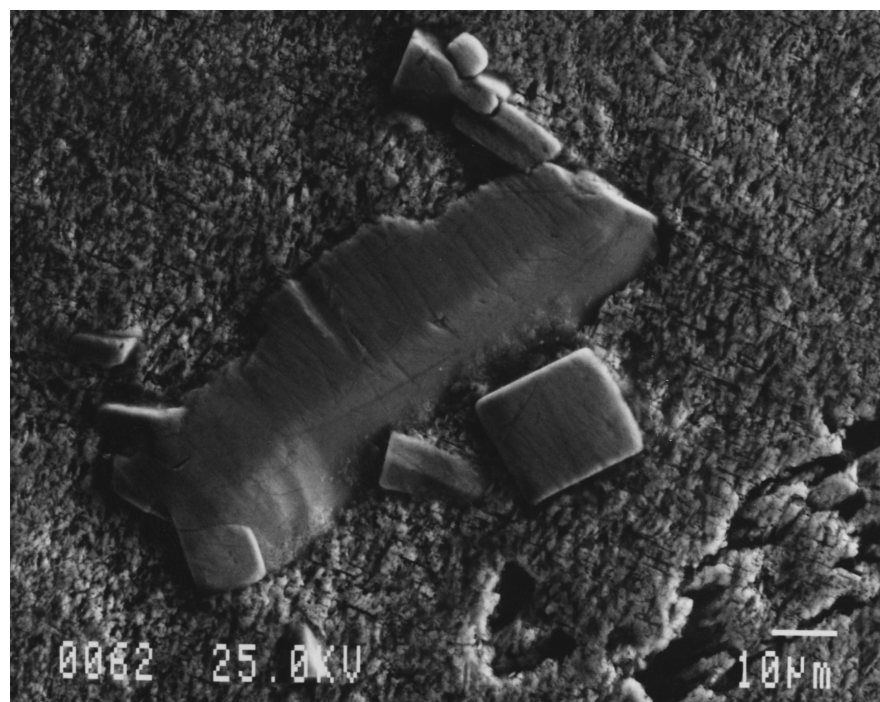
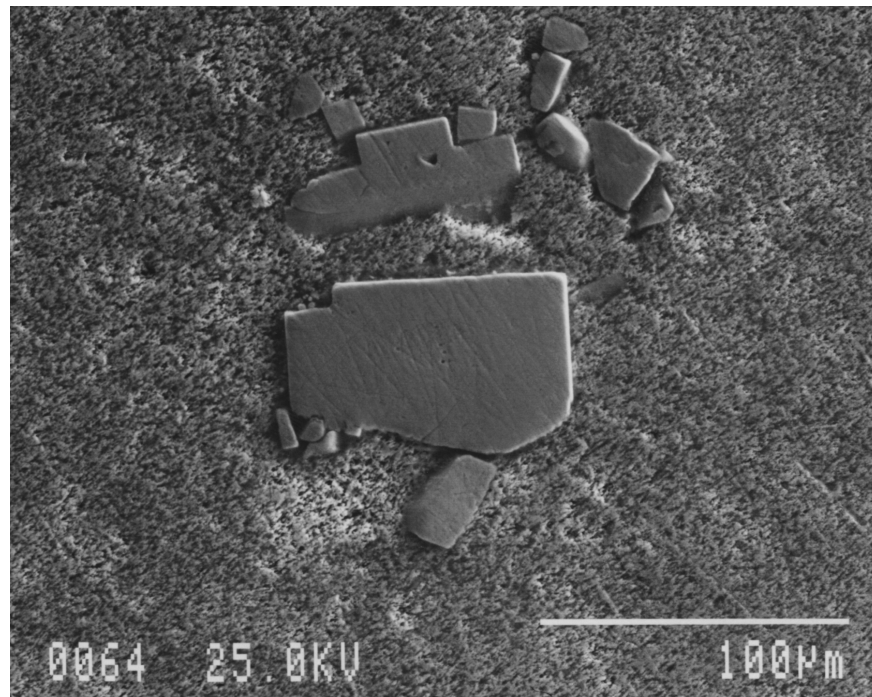


FIG. 4.1 – Images en électrons rétro-diffusés (BEI) de grains impurs présents au sein du gallium solide. On voit au centre de ces deux photographies plusieurs petits cristaux d'un alliage Gallium-Cuivre; la taille maximale des cristaux est d'environ 100  $\mu\text{m}$ . Les cristaux de l'alliage sont entourés de gallium pur poli.



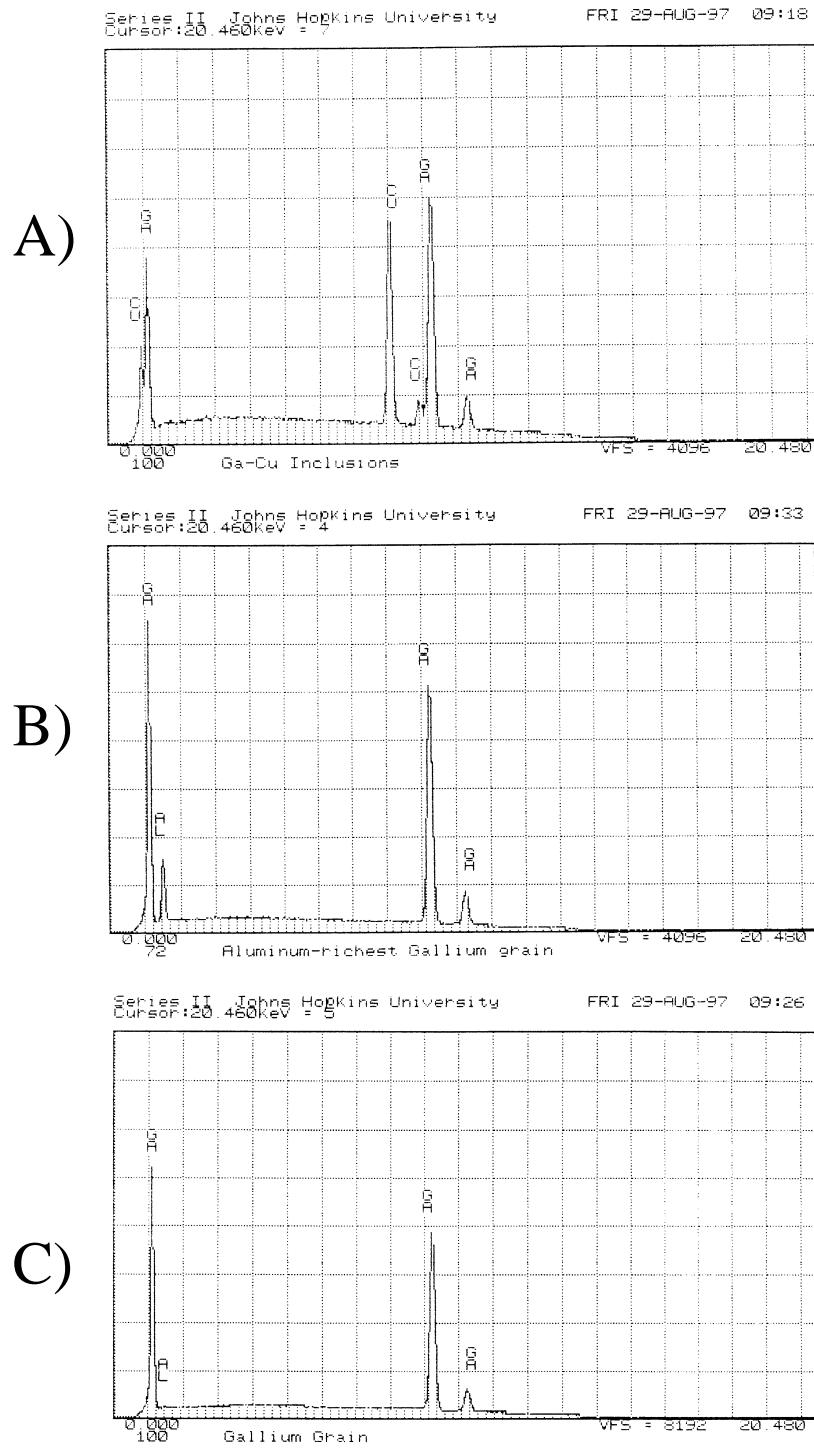


FIG. 4.2 – Spectroscopie à rayons X d'échantillons de gallium solide. La figure A) est le spectre obtenu à partir d'un grain impur de la figure 4.1: le spectre démontre que c'est un grain d'un alliage Gallium-Cuivre. La figure B) est le spectre d'un grain de gallium contenant quelques pour cent d'aluminium. La figure C) est le spectre d'un grain de gallium pur.

disparaître. Nous sommes certains qu'au moins une vingtaine de grains de gallium sont présents dans ce bloc. La taille des grains varie de quelques millimètres d'épaisseur à environ un demi centimètre.

Les figures 4.3 D) et E) montrent, en particulier, un joint très net entre deux grains de gallium étirés selon la direction de solidification: c'est par définition une texture de grain, celle-ci étant orientée dans la direction du flux de chaleur. Il est clair (à l'œil nu) que cette frontière se poursuit en réalité jusqu'au sommet du bloc, celle-ci étant délimitée sur la figure 4.3 D) en pointillé.

Pour extraire le bloc de gallium solide, nous avons réchauffé les parois pour fondre une mince couche de gallium qui a recristallisé dès la sortie du bloc. Cette recristallisation est visible sur les photographies; elles correspondent aux rainures microscopiques que l'on voit bien sur les photographies D) et E).

#### – Gallium cristallisé avec un gradient de température horizontal

Les photographies 4.4, 4.5 et 4.6 montrent différents blocs de gallium cristallisés avec un gradient de température horizontal. Ces blocs présentent, au premier ordre, des similitudes: toutes les photographies prises dans la direction du gradient de température montrent, clairement, une texture de grains dans la direction du flux de chaleur. Celle-ci est particulièrement nette sur les photographies 4.4 B), 4.4 C), 4.5 C) et 4.6 C): les frontières entre grains de gallium se superposent horizontalement.

La figure 4.5 B) montre la présence de nombreux grains de petites tailles. C'est précisément la taille des grains qui peut varier énormément d'une expérience à l'autre: par exemple, les photographies 4.4 C) et 4.6 montrent des grains de grandes tailles, typiquement supérieures à 5 millimètres, alors que la photographie 4.5 A) montre une multitude de grains de taille inférieure au millimètre.

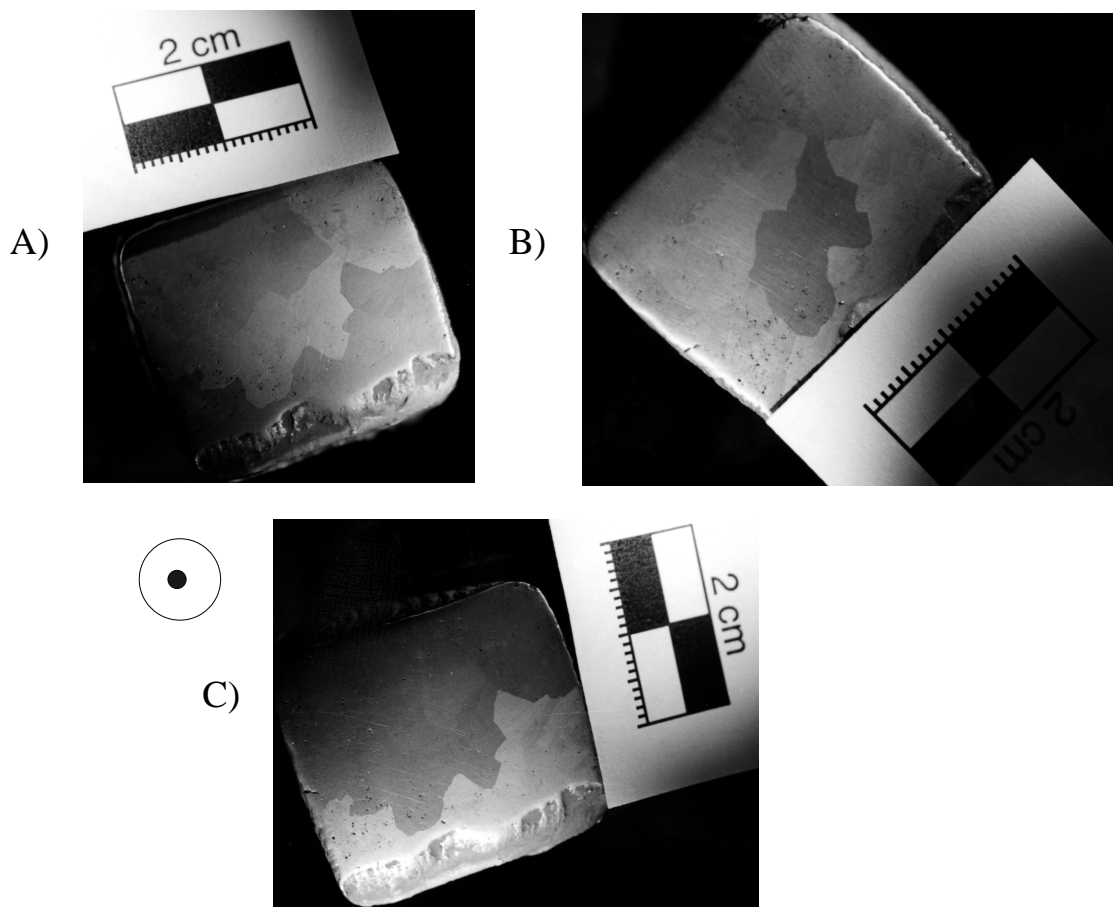
En conclusion, nous dirons que le caractère dominant à retenir de ces analyses photographiques est que les grains de cristallisation sont toujours étirés selon la direction du flux de chaleur (propriété connue et utilisée en métallurgie, Chalmers (1964) ) et que la taille des grains est très variable d'une expérience à l'autre.

## 4.2 Analyse des mesures d'anisotropie élastique dans les polycristaux de gallium

Les propriétés du cristal orthorhombique  $Ga\alpha$  sont données en Annexe. C'est un cristal pseudo-quadratique parce que la longueur de l'axe cristallin  $a$  est très proche de la longueur de l'axe  $b$ . Il est très anisotrope aussi bien en conductivités thermique et électrique que dans ses propriétés élastiques.

Deux déterminations des vitesses  $V_P$  des ondes de compression ont été effectuées sur un monocristal de gallium  $Ga\alpha$ : Roughton & Nash (1962) ont utilisé une technique de "pulse-echo" ultrasonore classique (Lazarus, 1949), alors que Lyall & Cochran (1971) ont utilisé des ondes acoustiques générées électromagnétiquement. Ces deux études donnent des vitesses  $V_P$  légèrement différentes, en revanche, elles concordent pour donner une anisotropie élastique du gallium  $Ga\alpha$  de l'ordre de 18% (voir Annexe); par exemple, les ondes  $P$  se propagent à 4823 m/s selon l'axe  $c$  du  $Ga\alpha$  et à 3948 m/s selon l'axe  $b$  d'après Lyann & Cochran.

## VUES DE DESSUS



## VUES DE CÔTÉ

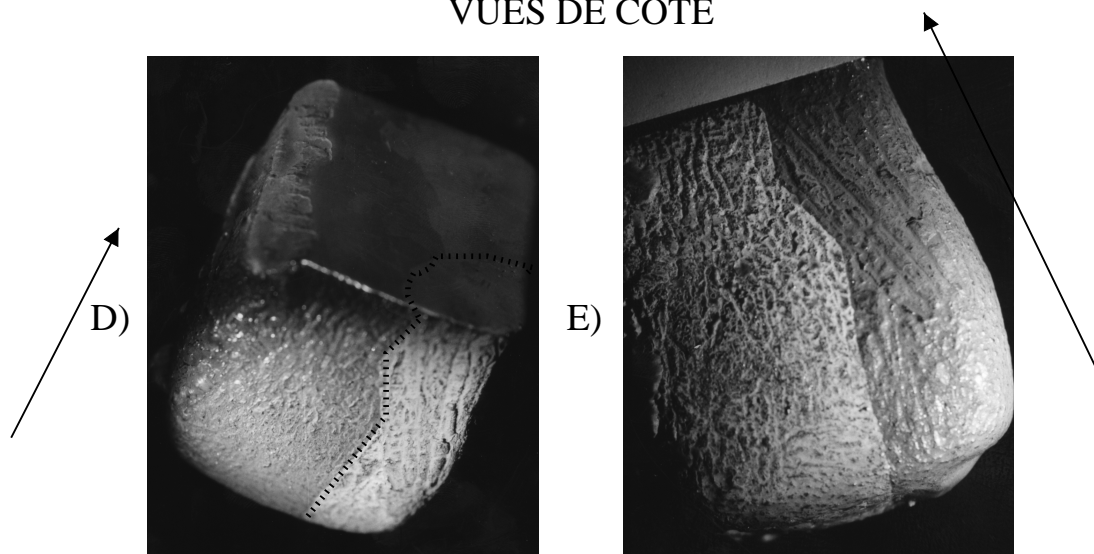


FIG. 4.3 – Bloc de gallium cristallisé avec un gradient de température vertical. Les flèches représentent la direction de solidification. Les photographies A), B) et C) sont les photographies de la dernière face ayant cristallisé. Ces 3 photographies montrent de multiples joints de grain au sommet du bloc. Les photographies D) et E) montrent une frontière entre grains très nette étirée selon la direction de solidification: la texture des grains est orientée dans la direction du flux de chaleur. Le trait en pointillé sur la figure D) montre que la frontière latérale continue jusqu'au sommet du bloc.

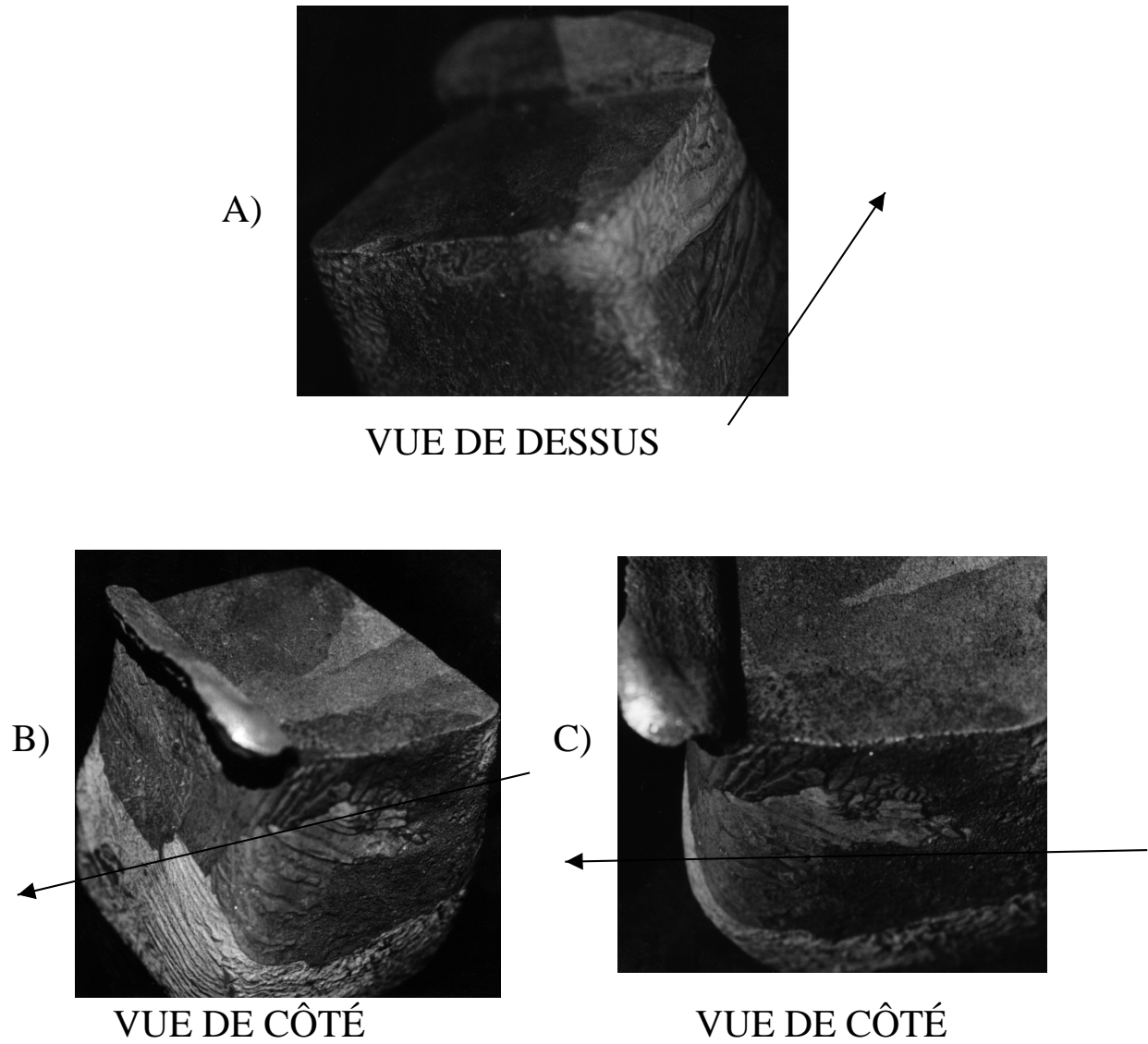


FIG. 4.4 – Bloc de gallium cristallisé avec un gradient de température horizontal. Les flèches représentent la direction de solidification sur chaque photographie.

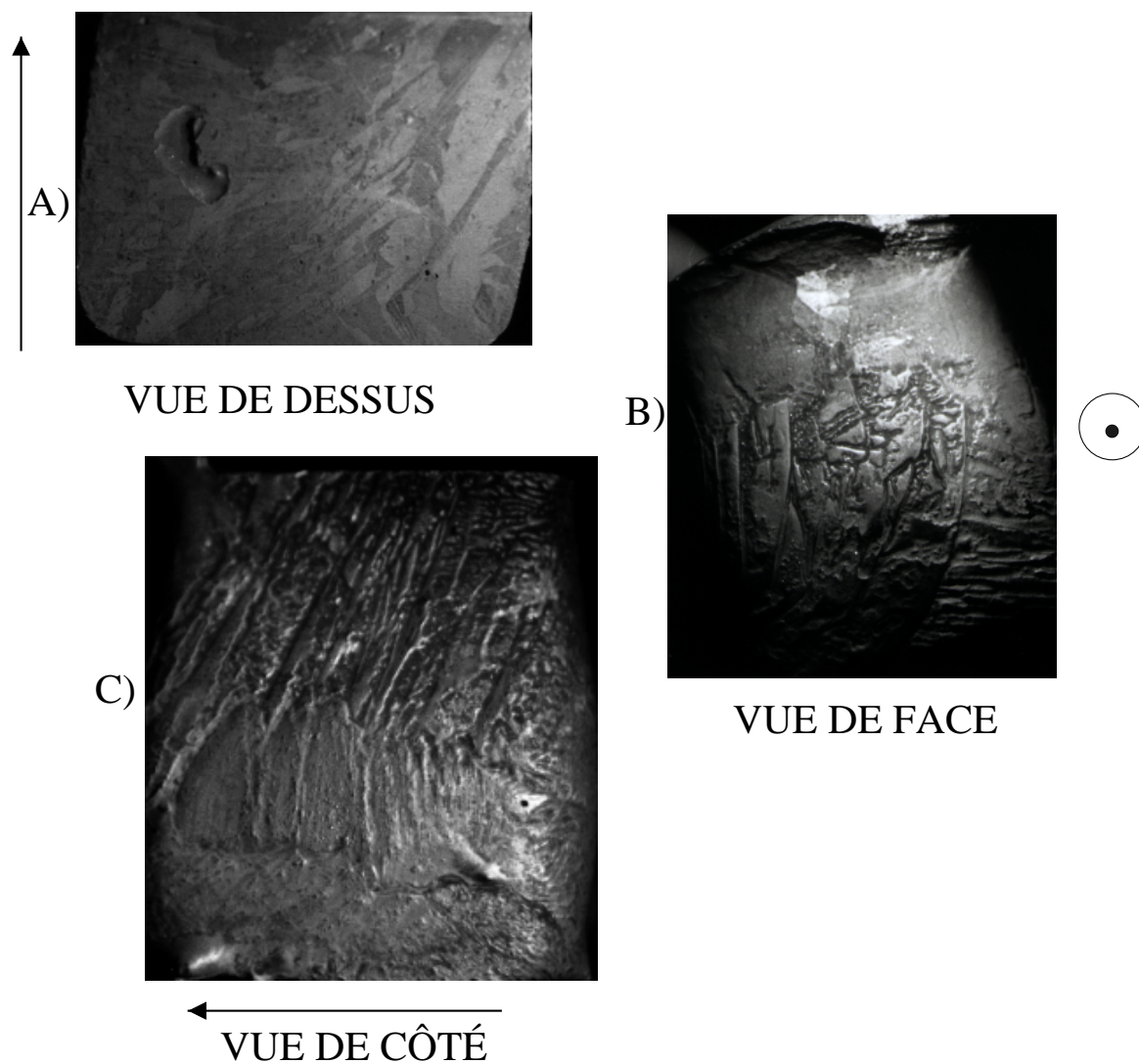


FIG. 4.5 – Bloc de gallium cristallisé avec un gradient de température horizontal. Les flèches représentent la direction de solidification sur chaque photographie.

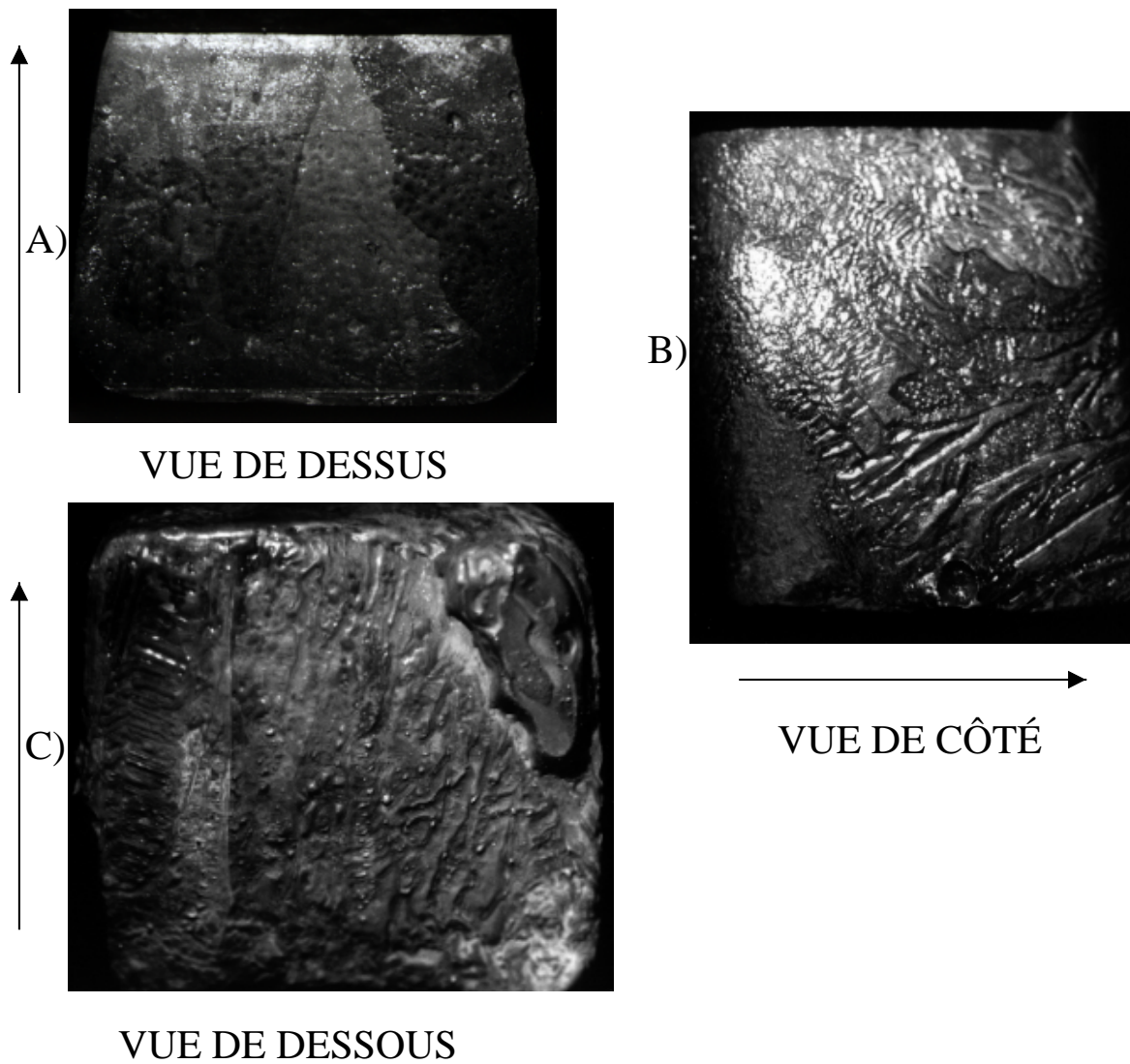


FIG. 4.6 – Bloc de gallium cristallisé avec un gradient de température horizontal. Les flèches représentent la direction de solidification sur chaque photographie.

### 4.2.1 Orientation préférentielle du réseau

La figure 4.7 présente les mesures des vitesses des ondes ultrasonores de compression  $V_P$  dans les blocs de gallium solidifiés avec un gradient de température vertical (cristallisation pure). Chaque point sur la figure 4.7 est la valeur moyenne de 6 mesures réalisées sur les faces  $x$  ou  $y$ , ou encore la valeur moyenne de 4 mesures réalisées sur la face  $z$  (voir figure 2.10); la barre d'erreur, autour de chaque valeur moyenne, représente l'écart entre les valeurs maximales et minimales mesurées. Les barres d'erreur reflètent par conséquent les hétérogénéités de vitesse des ondes  $P$  dans le gallium le long des faces du cube.

Le premier enseignement que l'on tire de la figure 4.7 est la très faible valeur des hétérogénéités mesurées dans chaque expérience le long des 3 faces du cube en cuivre. Cela suggère que les conditions de solidification avec un gradient thermique vertical sont propices à une orientation préférentielle de réseau ou *opr* au sein de la texture observée sur les photographies. On distingue deux types d'anisotropie dans les mesures de la figure 4.7:

- une anisotropie *triaxe* avec des vitesses  $V_P$  très différentes selon les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$ , comme on voit dans les expériences 2 et 4. L'anisotropie triaxe dans les polycristaux est proche de l'anisotropie du monocristal de gallium  $Ga\alpha$  orthorhombique: l'anisotropie dans les expériences 2 et 4 est de l'ordre de 14%. Les hétérogénéités de vitesses  $V_P$  selon les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$  ne sont que de 50 m/s environ.
- une anisotropie *transverse* où deux des directions possèdent des  $V_P$  très proches, et l'autre direction un  $V_P$  différent. C'est le cas de toutes les expériences de la figure 4.7, mis à part les expériences 2 et 4. L'anisotropie dans ces polycristaux varient entre 3 et 10 % et les hétérogénéités de vitesses sont comprises entre 50 et 150 m/s.

La figure 4.8 schématise l'interprétation que l'on a fait de ces deux types d'anisotropie: les faibles hétérogénéités mesurées montrent que le réseau cristallin est préférentiellement orienté. Nous avons grossièrement schématisé cette *opr* sur la figure 4.8 avec des cristaux de  $Ga\alpha$  parfaitement parallèles entre eux. Dans le cas de l'anisotropie triaxe, les parallélépipèdes des cristaux orthorhombiques sont quasi-parallèles aux directions du cube  $x$ ,  $y$  et  $z$ . En supposant que la texture conserve cette *opr* sur toute la longueur du cube, les vitesses  $V_P$  mesurées au sein des polycristaux sont par conséquent proches des valeurs  $V_P$  selon les axes  $a$ ,  $b$  et  $c$  du monocristal  $Ga\alpha$ . Dans le cas de l'anisotropie transverse, les faces des parallélépipèdes ne sont pas orientées parallèlement aux faces du cube; par conséquent, les vitesses  $V_P$  mesurées au sein du polycristal sont des valeurs moyennes des valeurs de  $V_P$  selon les axes  $a$ ,  $b$  et  $c$  du gallium  $Ga\alpha$ .

L'autre enseignement que l'on tire de la figure 4.7 est le fait que l'axe de vitesse maximale de  $V_P$  varie d'une expérience à l'autre: on obtient en effet une vitesse maximale des  $V_P$  dans la direction du flux de chaleur (par exemple expérience 2), ou perpendiculaire au flux de chaleur (par exemple expériences 3 et 4). Cela démontre que dans le cas de nos expériences où le front de solidification est thermiquement stable, on n'a pas observé de direction préférentielle de croissance cristalline; en d'autres termes cela signifie que ce n'est pas le flux de chaleur qui guide l'anisotropie. C'est une différence marquante avec les expériences de cristallisation dendritique. En effet, dans les théories classiques de solidification dendritique, on montre que les dendrites ont un axe cristallin de croissance préférentielle; dans le cas des cristaux cubiques centrés ou à faces centrés,

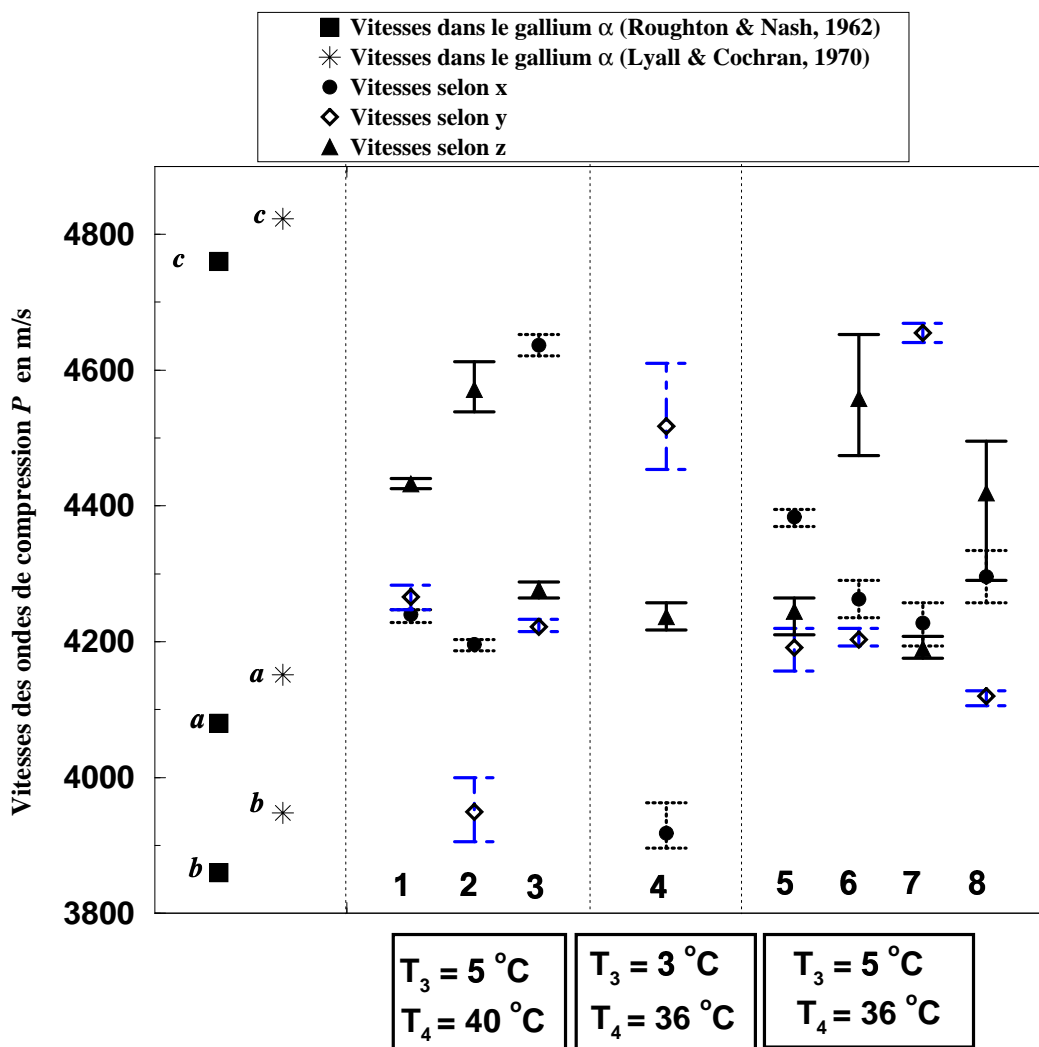


FIG. 4.7 – Mesures ultrasonores des vitesses d'ondes de compression  $V_P$  dans les polycristaux de gallium cristallisés avec un gradient de température vertical (expériences de cristallisation pure).  $T_3$  est la température imposée à la base du cube et  $T_4$  est la température imposée au sommet du cube.  $V_P$  est mesurée selon les directions  $x, y$  et  $z$  du cube en cuivre (voir figure 2.10). Sur chaque face du cube, plusieurs mesures sont réalisées: chaque point sur la figure représente la valeur moyenne de ces mesures. Les valeurs minimale et maximale mesurées sur chaque face sont représentées à l'aide de barres d'erreur. Les valeurs de  $V_P$  selon les 3 axes cristallins dans un monocristal de  $\text{Ga}_\alpha$  sont ajoutées comme référence. L'erreur expérimentale liée à l'incertitude de lecture du signal ultrasonore est de l'ordre de 50 m/s.



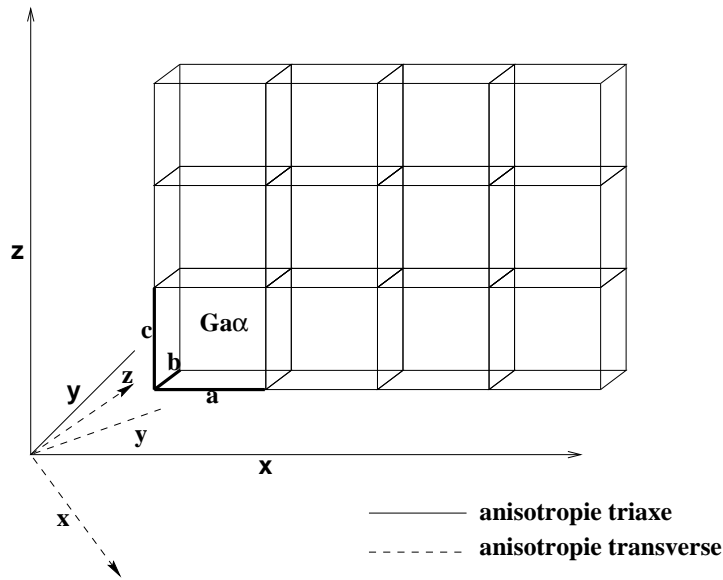


FIG. 4.8 – Anisotropie triaxe et transverse mesurées au sein des polycristaux de gallium.  $x$ ,  $y$  et  $z$  représentent la direction des faces du cube en cuivre au sein duquel le gallium est cristallisé. Dans le cas de l'anisotropie triaxe, les cristaux de gallium sont quasi-parallèles aux directions du cube ( $x$ ,  $y$  et  $z$  en trait continu). L'orientation préférentielle de réseau est schématisée par un parfait parallélisme des cristaux orthorhombiques de  $Ga\alpha$ .

par exemple, c'est l'axe  $\langle 100 \rangle$  qui croît le long de la direction dendritique (Chalmers, 1964).

Les figures 4.9 et 4.10 regroupent les expériences de cristallisation pure réalisées avec un gradient de température horizontal. Les expériences de la figure 4.9 ont été effectuées sans champ magnétique et celles de la figure 4.10 en présence d'un champ magnétique imposé. Au premier ordre, on ne voit pas de différences majeures entre les mesures d'anisotropie des figures 4.9, 4.10 et les mesures de la figure 4.7: on retrouve dans certaines expériences les deux types d'anisotropie, triaxe et transverse, où l'axe rapide des  $V_P$  est indifféremment orienté le long du flux ou perpendiculaire au flux de chaleur. Il existe cependant des expériences où les hétérogénéités sont grandes, par exemple les expériences 3 ou 7 de la figure 4.9; ces expériences montrent que l'*opr* n'est pas systématique dans nos expériences.

Les figures 4.9 et 4.10, par comparaison avec la figure 4.7, démontrent que la vigueur de l'écoulement dans le fluide (un gradient de température horizontal induit une convection bien plus vigoureuse qu'un gradient de température vertical) ou le champ magnétique imposé n'interviennent pas directement dans l'orientation des cristaux lors de la solidification.

A noter que les expériences 1-5 avec un champ magnétique imposé vertical semblaient indiquer que l'axe  $z$  aligné avec les lignes de champ magnétique coïncidaient systématiquement avec la direction de vitesse rapide  $V_P$ ; lors des expériences 6-8 on a doublé l'intensité du champ magnétique imposé et l'on a pas retrouvé pas cette di-

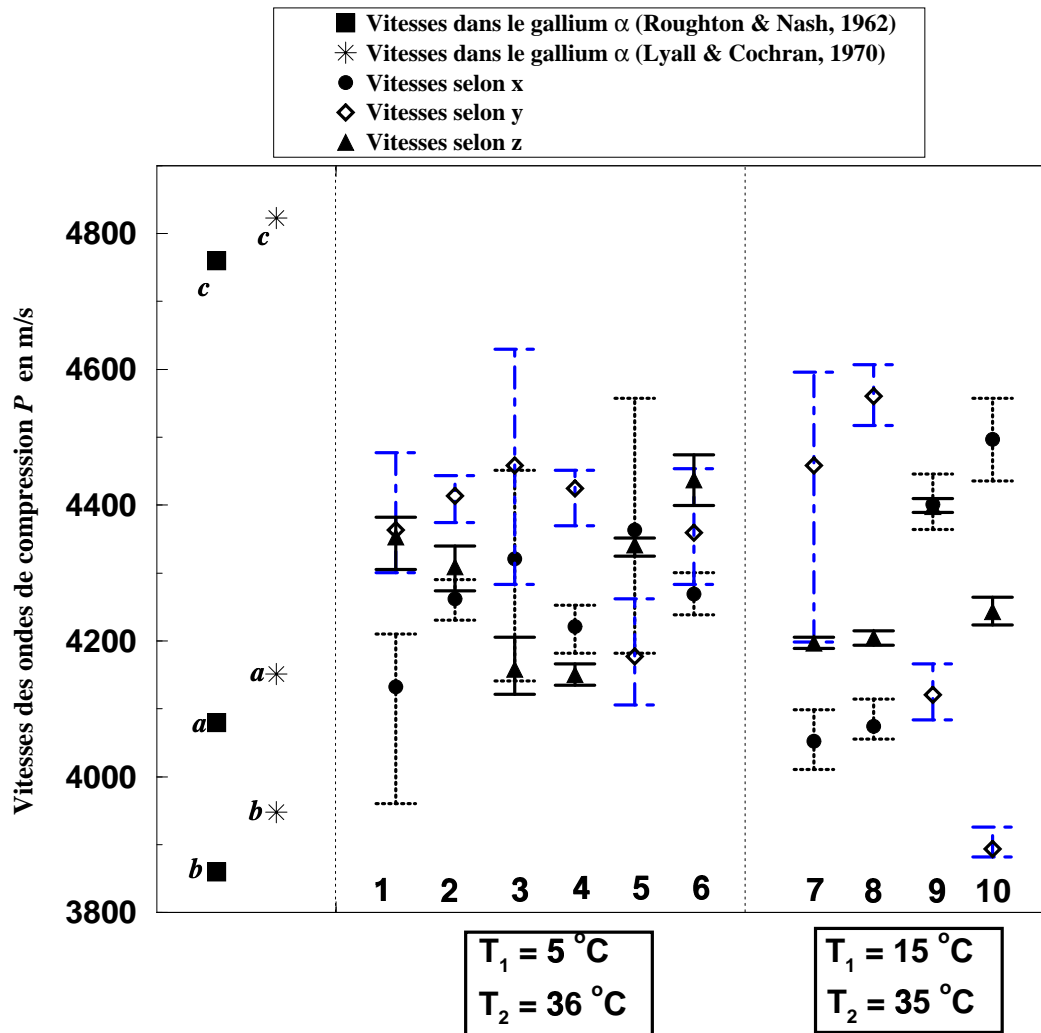


FIG. 4.9 – Mesures ultrasonores des vitesses d'ondes de compression  $V_P$  dans les polycristaux de gallium cristallisés avec un gradient de température horizontal (cristallisation pure). Deux séries d'expériences avec différents gradients de température sont représentées. L'erreur expérimentale liée à l'incertitude de lecture du signal ultrasonore est de l'ordre de 50 m/s.

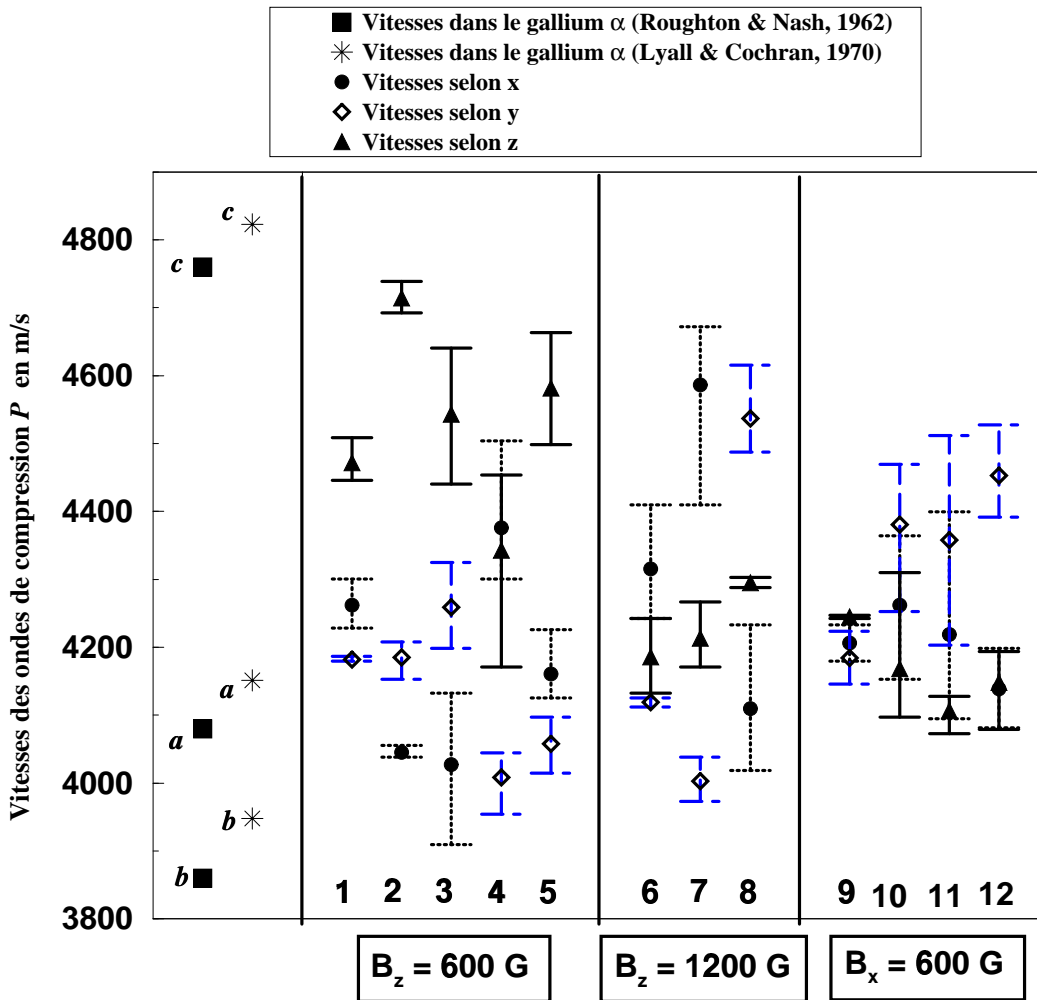


FIG. 4.10 – Mesures ultrasonores des vitesses d'ondes de compression  $V_P$  dans les polycristaux de gallium cristallisés avec un gradient de température horizontal en présence d'un champ magnétique imposé (cristallisation pure). Les températures imposées dans ces expériences étaient  $T_1 = 5^\circ\text{C}$  et  $T_2 = 36^\circ\text{C}$ . Dans les expériences 1-5 le champ magnétique imposé est vertical et a pour intensité 600 G. Pour les expériences 6-8 l'intensité du champ magnétique imposé est doublée. Dans les expériences 9-12, le champ magnétique est imposé dans la direction d'avancée du front de solidification. L'erreur expérimentale liée à l'incertitude de lecture du signal ultrasonore est de l'ordre de 50 m/s.

rection préférentielle d'orientation des cristaux selon l'axe  $z$  confirmant que le champ magnétique n'influence pas directement la cristallisation.

Outre le fait que le champ magnétique imposé change la structure de la convection dans le cube en cuivre, on pensait que les cristaux de gallium  $Ga\alpha$  très anisotropes en conductivité électrique (voir Annexe) auraient pu être orientés préférentiellement en présence d'un champ magnétique; ce n'est pas ce que nous avons observé.

#### 4.2.2 La nucléation

Les mesures présentées sur la figure 4.11 ont été obtenues au cours de 18 expériences réalisées à la suite les unes des autres, sans jamais vider le gallium du cube; c'est ce type d'expérience que nous avons qualifié de cristallisation avec germes dans le chapitre 3. Comme on le voit sur la figure, nous avons alterné entre des expériences de cristallisation avec un écoulement tourbillonnant et des expériences classiques du type de celles décrites dans la partie précédente 4.2.1.

Les expériences 1-3 ont été réalisées avec un écoulement tourbillonnant à une vitesse de rotation de  $\omega = 500$  tours  $\text{min}^{-1}$ . Les hétérogénéités de vitesse mesurées selon les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont du même ordre grandeur que les hétérogénéités des figures 4.7, 4.9 et 4.10. Cela montre à nouveau que c'est bien le gradient de température (ou flux de chaleur) qui est propice à la texture, l'écoulement du fluide n'influençant pas directement l'orientation des grains lors de la cristallisation.

Le point remarquable de la figure 4.11 concerne les expériences numérotées de 9 à 17: on retrouve la même anisotropie dans les polycristaux de gallium quelles que soient les conditions de solidification, en particulier que l'on cristallise le gallium dans la direction horizontale ou verticale. Cela nous a amené à penser que la nucléation initiale est prépondérante dans nos expériences.

Il existe deux types de nucléations dans le processus de solidification des métaux, une nucléation dite *homogène* et une nucléation dite *hétérogène*. Les nucléations *homogènes* sont très difficiles à réaliser dans les expériences de solidification de métal pur: cela demande un degré de pureté exceptionnel du métal et une surfusion de l'ordre de la centaine de degrés (Reed-Hill, 1973). La nucléation hétérogène est beaucoup étudiée par les métallurgistes car c'est un phénomène complexe. La nucléation hétérogène dépend de plusieurs paramètres tels la "pollution" initiale du fluide (présence d'impuretés par exemple), la rugosité de l'interface avec lequel le fluide est en contact, ou encore les propriétés anisotropes du cristal formé. Une surfusion du gallium dans nos expériences de l'ordre de  $5^\circ\text{C}$  seulement, cumulée à la présence d'impuretés (cuivre, aluminium..) faisant office de catalyseur dans la nucléation au sein du gallium liquide, démontre que la nucléation est hétérogène dans nos expériences. Il reste à déterminer maintenant comment la nucléation hétérogène a pu influencer l'anisotropie du bloc polycristallin de gallium.

On a observé avec les photographies que la texture des grains est orientée dans le sens du flux de chaleur; on en déduit donc que si la nucléation initiale générerait une multitude de grains orientés aléatoirement, alors nous aurions dû mesurer des  $V_P$  très hétérogènes dans la direction d'avancée du front. Le fait d'avoir mesuré une grande

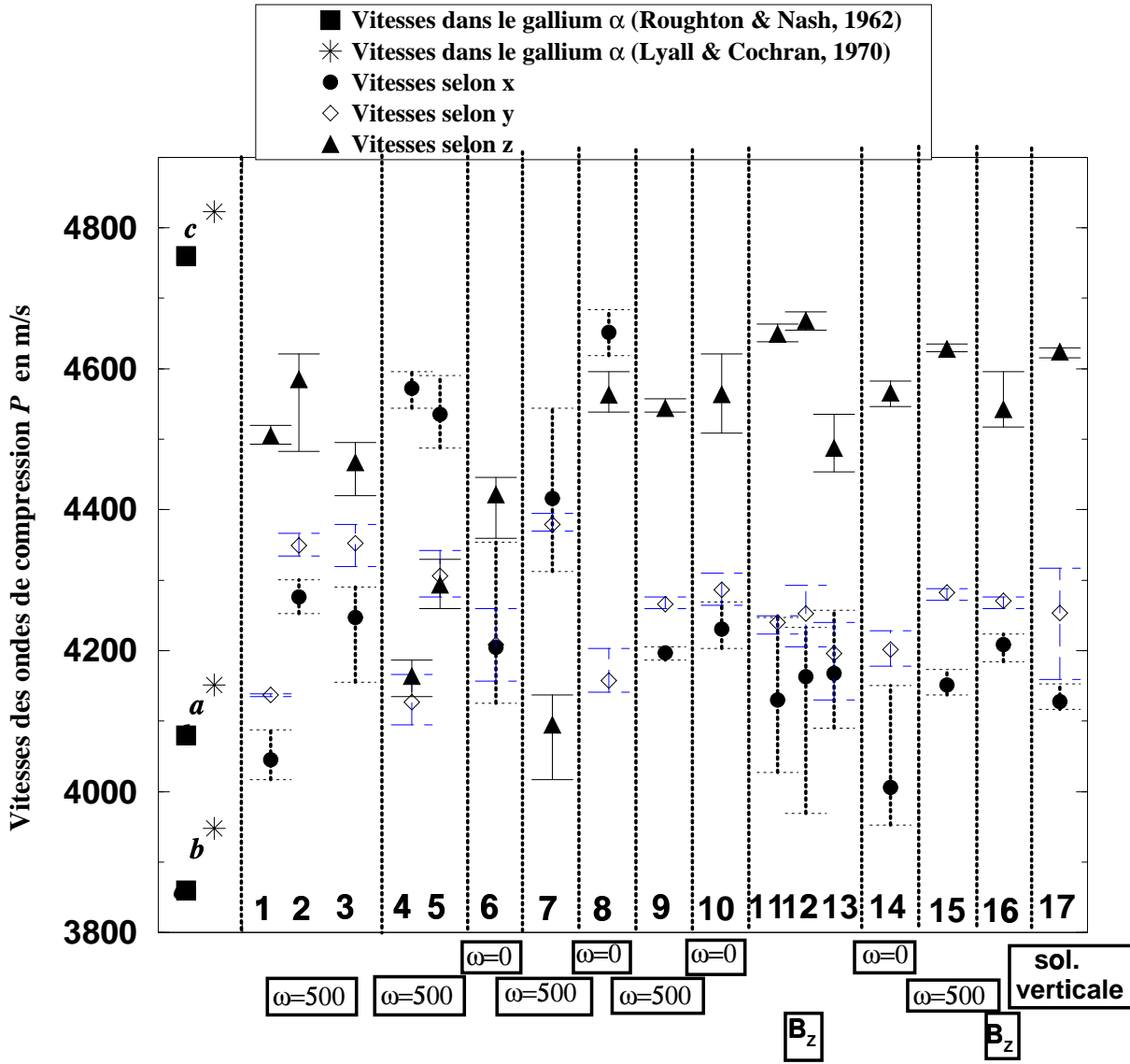


FIG. 4.11 – Mesures ultrasonores des vitesses d'ondes de compression  $V_P$  dans les polycristaux de gallium cristallisés lors d'une série d'expériences de cristallisation avec germes. Les expériences 1-16 ont été réalisées avec un gradient de température horizontal où  $T_1 = 5^\circ\text{C}$  et  $T_2 = 36^\circ\text{C}$ , l'expérience 17 avec un gradient de température vertical où  $T_3 = 3^\circ\text{C}$  et  $T_4 = 36^\circ\text{C}$ . Pour les expériences annotées  $\omega = 500$ , le gallium est solidifié avec un écoulement tourbillonnant généré par un mixeur en rotation à 500 tours  $\text{min}^{-1}$  (voir figure 3.10). Pour les expériences annotées  $\omega = 0$  le mixeur est retiré du cube. Pour les expériences annotées  $B_z$ , un champ magnétique vertical est imposé durant la solidification. L'erreur expérimentale liée à l'incertitude de lecture du signal ultrasonore est de l'ordre de 50 m/s.

homogénéité de  $V_P$  selon  $x$ ,  $y$  et  $z$  dans la plupart de nos expériences suggère, au contraire, que le réseau cristallin est préférentiellement orienté même en présence d'une multitude de grains. Nos différentes mesures nous amènent à penser que la nucléation initiale constitue une *matrice* homogène de cristaux servant de *guide* à la cristallisation: les différents grains de gallium cristallisent alors dans le sens du flux de chaleur à partir de cette matrice, et c'est pour cette raison que l'on a obtenu parfois des polycristaux si homogènes sur les figures 4.7, 4.9, 4.10.

Cette interprétation est appuyée par les expériences 9 à 17 de la figure 4.11; dans ces expériences l'anisotropie est reproductible d'une expérience à l'autre. Nous pensons que cette reproductibilité est due à des germes de gallium solide rémanents sur les faces du cube entre chaque expérience; ces germes activent la nucléation initiale à chaque début d'expérience guidant la direction de l'op $r$  au sein de la matrice homogène initiale.

### 4.2.3 Des polycristaux isotropes

La figure 4.12 regroupe les mesures de vitesses d'ondes  $P$  réalisées sur des blocs de gallium solidifiés uniformément: dans les expériences 1-3, on a laissé le gallium se solidifier à température ambiante au cours de solidifications durant plusieurs heures. Dans les expériences 4-8, on a solidifié en imposant une température de 25°C sur les quatre faces latérales du cube en cuivre.

L'anisotropie mesurée sur la figure 4.12 est très faible; en effet, à part pour l'expérience 3, les hétérogénéités selon chaque face sont très grandes (de l'ordre de 100 à 400 m/s) et les mesures de  $V_P$  se recourent selon les directions  $x$  et  $y$ . Cela signifie que le gallium cristallisé est très hétérogène, ou en d'autres termes que les grains de gallium n'ont pas d'orientation préférentielle. La ligne en pointillé horizontale sur la figure 4.12 est la moyenne des vitesses  $V_P$  selon les axes  $a$ ,  $b$  et  $c$  du cristal  $Ga\alpha$  (mesures de Lyall & Cochran (1970)): les mesures expérimentales ne s'écartent que très peu de cette valeur moyenne, confirmant que les polycristaux de gallium obtenus avec solidification uniforme ne sont que très faiblement anisotropes par rapport à l'anisotropie mesurée dans le cas des expériences de cristallisation avec un flux de chaleur horizontal ou vertical.

Cette faible anisotropie se comprend dans la mesure où le centre du cube est le "point de rencontre hétérogène" de différents grains avec différentes orientations ayant cru à partir des quatre faces. Les importantes hétérogénéités de vitesse  $V_P$  expliquent pourquoi on a obtenu des polycristaux relativement isotropes dans nos expériences avec solidification uniforme.

## 4.3 Synthèse

On fait la synthèse des mesures expérimentales avec deux idées principales qui reprennent l'ensemble des mesures ultrasonores et observations photographiques:

- les expériences de cristallisation pure ont montré que lorsqu'on cristallise le gallium avec un gradient de température horizontal ou vertical, la texture des grains est orientée dans la direction du flux. Les grains peuvent être de taille très variables comme on l'a vu dans la section 4.1.2 mais il s'est avéré que l'on a observé dans la plupart des expériences une orientation préférentielle du réseau cristallin (faibles hétérogénéités). Bien que le cristal de gallium orthorhombique soit très anisotrope aussi bien en conductivité thermique qu'en conductivité électrique, l'anisotropie ne contrôle pas ou n'impose pas

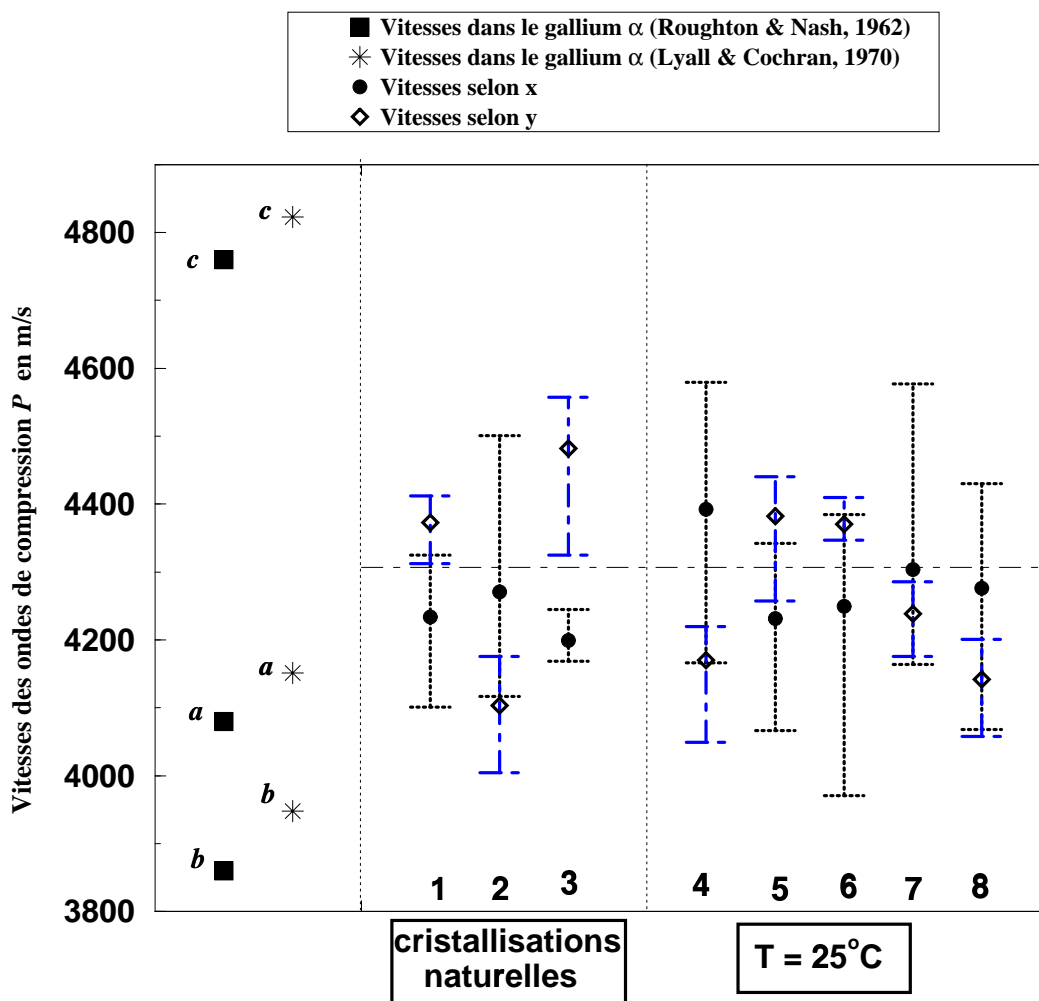
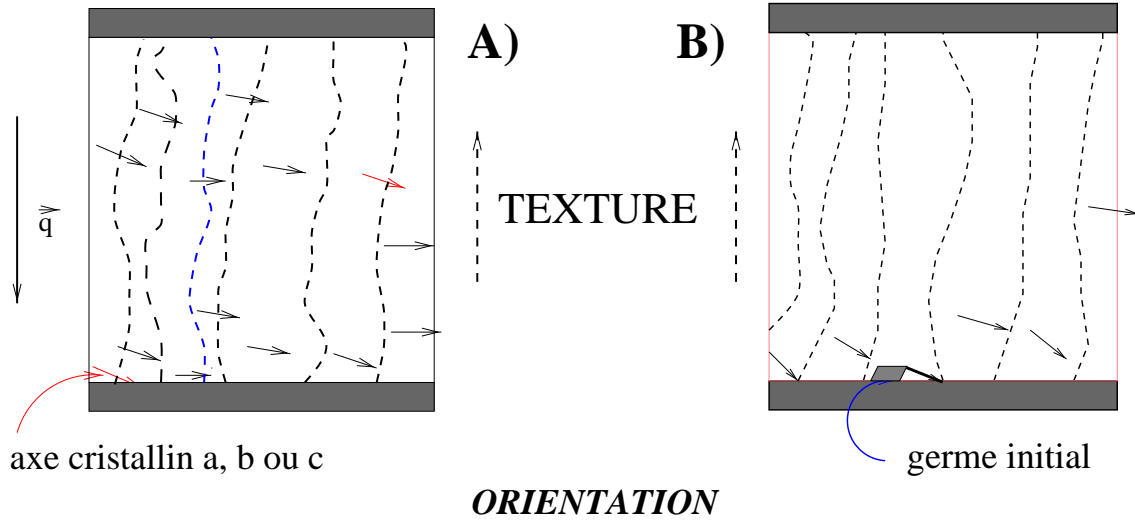


FIG. 4.12 – Mesures ultrasonores des vitesses d'ondes de compression  $V_P$  dans les polycristaux de gallium cristallisés avec un gradient de température uniforme. Dans les expériences 1-3, on a laissé le gallium se solidifier à température ambiante du laboratoire (cristallisations naturelles); ces expériences ont duré typiquement de l'ordre de 5 à 6 heures. Dans les expériences 4-8, on a imposé une température  $T=25^\circ\text{C}$  sur les faces latérales du cube. L'erreur expérimentale liée à l'incertitude de lecture du signal ultrasonore est de l'ordre de 50 m/s. A noter que l'on a pas mesuré  $V_P$  selon la direction  $z$ ; on a en effet réalisé ces expériences sans le couvercle supérieur du cube afin d'éviter les problèmes liés à l'expansion volumique du gallium pendant la solidification.

un axe de croissance cristalline préférentielle. Comme on le schématise sur la figure 4.13 A), l'axe cristallin  $a$ , par exemple, peut être aussi bien aligné avec la direction du flux de chaleur ou perpendiculaire à celle-ci.

- Nos mesures d'anisotropie dans les expériences de cristallisation pures et avec germes suggèrent que l'anisotropie élastique du polycristal est guidée par les conditions initiales de nucléation: c'est en effet la nucléation initiale qui dicterait l'*opr* comme on le voit sur la figure 4.13 B).



### ***PRÉFÉRENTIELLE DU RÉSEAU***

FIG. 4.13 – Schématisation de l'interprétation des mesures d'anisotropie dans les polycristaux de gallium. A) Les faibles hétérogénéités de vitesse  $V_P$  observées dans la plupart des expériences suggèrent que les axes cristallins sont parallèles de grains à grains (frontières entre grains en pointillé) dans les polycristaux de gallium. Nous n'avons pas détecté d'axe de croissance cristalline préférentielle: l'axe cristallin  $a$ , par exemple, pouvant être d'une expérience à l'autre aussi bien aligné avec le flux de chaleur ou perpendiculaire à celui-ci. B) La reproductibilité observée dans les expériences avec germes (figure 4.11) suggère que ce sont les germes initiaux (rémanents d'une expérience à l'autre) qui guident l'anisotropie du polycristal. Dans chaque expérience, la texture est alignée avec le flux de chaleur comme on l'a vu avec les photographies.



## Chapitre 5

# Conclusion et application à la graine terrestre

L'anisotropie élastique de la graine, en terme de vitesse d'ondes de compression  $V_P$ , est de l'ordre de 3% entre les directions polaires et équatoriales (voir chapitre 1). Un des mécanismes qui pourrait être à l'origine de l'anisotropie est l'orientation préférentielle du réseau cristallin (*opr*) au sein du polycristal texturé par le flux de chaleur.

Nous avons étudié expérimentalement la solidification en texture en cristallisant du gallium dans un cube en cuivre, avec différentes conditions de cristallisation. L'intérêt d'avoir utilisé du gallium est qu'il cristallise à température du laboratoire, dans un système cristallin orthorhombique  $Ga\alpha$  très anisotrope. Nous avons pu systématiquement quantifier l'anisotropie élastique des polycristaux de gallium en utilisant un dispositif expérimental ultrasonore mesurant la vitesse des ondes de compression  $V_P$  selon la direction voulue. Cette technique expérimentale s'est avérée très performante et très fiable.

L'interface gallium solide/liquide était stable thermiquement durant nos expériences de cristallisation. Nous avons suivi son évolution au cours du temps à l'aide des mesures ultrasonores. Par l'intermédiaire d'un modèle basé sur les échanges de flux de chaleur entre les parties solide et liquide au sein du cube en cuivre, nous avons montré que l'avancée de l'interface solide/liquide était contrôlée par la conduction de la chaleur dans la partie solide.

Nous avons observé que les grains de gallium cristallisent avec une texture orientée selon la direction du flux de chaleur. Les faibles hétérogénéités de vitesse  $V_P$  mesurées dans la plupart de nos expériences montrent que le réseau était préférentiellement orienté au sein du polycristal. L'anisotropie, ou en d'autres termes l'orientation du réseau cristallin, n'était pas déterminée par le flux de chaleur dans nos expériences. Nos expériences semblent plutôt indiquer que c'est la nucléation initiale qui guide l'anisotropie.

Nous avons constamment mesuré une anisotropie élastique de l'ordre de plusieurs pour cent dans les polycristaux de gallium; au cours de quelques expériences dans les-

quelles les cristaux orthorhombiques ont cristallisé avec une orientation quasi-parallèle aux faces du cubes, l'anisotropie des polycristaux de gallium était de l'ordre de 14% alors que l'anisotropie élastique d'un cristal orthorhombique  $Ga\alpha$  est de 18%.

L'ensemble des expériences de cristallisation dans un flux de chaleur imposé montre que l'anisotropie mesurée au sein du polycristal texturé n'est pas contrôlée ou influencée par un champ magnétique, par la convection, par le flux de chaleur ou par des propriétés anisotropes des conductivités du solide.

Dans le cadre de la compréhension de ces expériences, on pourrait expliquer l'anisotropie de la graine terrestre de la manière suivante: le polycristal graine aurait une orientation préférentielle de réseau cristallin liée à l'orientation des cristaux germes (initiaux) se trouvant au coeur de la graine. La texture de la graine serait, quant à elle, orientée selon le flux de chaleur présent à l'interface (principalement radial avec peut-être une perturbation cylindrique liée à la dynamique du noyau liquide). Ce scénario présente l'avantage de conserver une anisotropie au cours du temps, indépendamment des mouvements de la graine ou des variations de conditions extérieures (champ magnétique, dynamique,...). En revanche, ce modèle n'explique pas la géométrie de l'anisotropie qui apparaît alors comme fortuite. C'est la principale faiblesse de ce scénario. La texture du polycristal de la graine peut être la cause d'hétérogénéités d'anisotropie conformément à certaines de nos expériences.

Plus généralement, une forte température, une vitesse de solidification très lente et une gravité faible à l'interface Graine-Noyau liquide sont des conditions extrêmement favorables pour la croissance de grains de grandes tailles, ce qui favorise l'homogénéité de l'anisotropie observée.

Il est cependant prématuré de s'avancer et donner un modèle de graine construit à partir d'une solidification en texture; pour cela il est nécessaire de faire appel à la physique des hautes pressions. Il est en effet nécessaire de connaître la phase du fer solide dans la graine et en particulier son anisotropie élastique si on veut être quantitatif et être en mesure d'expliquer précisément une anisotropie de 3% dans la graine. Des études numériques et expérimentales ont montré que l'on devrait être prochainement en mesure de connaître l'anisotropie élastique des cristaux de fer à haute pression: Stixrude & Cohen (1995) ont obtenu numériquement une anisotropie maximale de 3% pour le fer *hcp* et une anisotropie de 10% pour le fer *bcc*. Mao et al. (1996) ont quant à eux obtenus, avec l'utilisation des rayons X dans une cellule à diamant, une anisotropie de 10% pour le fer *hcp*.

Toutes les conclusions que l'on vient d'avancer proviennent de l'application de nos résultats expérimentaux où le front de solidification était stable thermiquement; l'interface Graine-Noyau pourrait être d'une nature différente à cause de la présence d'éléments légers au sein du fer dans le noyau liquide (voir chapitre 1). Par exemple, Fearn et al. (1981) ont montré avec des arguments thermodynamiques que l'interface entre la graine et le liquide est dans un état de surfusion constitutionnelle (voir figure 1.3 C) ) et que cela pourrait se traduire par une croissance dendritique du fer dans la "mushy zone" (Tait & Jaupart 1992). On pourrait tester l'influence de la présence d'éléments légers dans les résultats d'anisotropie: le gallium a par coïncidence la même structure cristalline orthorhombique que la phase du fer  $Fe\beta$  récemment découverte (Andraut et al., 1997), celle-ci étant est la phase du fer haute pression, haute température connue. Il

serait intéressant de tester nos résultats obtenus ici lors d'expériences de cristallisation avec un alliage de gallium liquide, ce qui ajouterait deux nouveaux phénomènes: la convection compositionnelle et la croissance dendritique.

## **Remerciements**

Nous tenons à remercier Boro Djordjovic et Robert Green ("Center for Nondestructive Evaluation" de l'Université Johns Hopkins) pour nous avoir permis de nous familiariser avec les mesures ultrasonores et pour nous avoir prêté généreusement des instruments de mesure. Merci à Walter & Mike pour avoir si bien usiné le cube en cuivre. Merci encore à David Elbert et Ken Levi pour avoir réalisés les mesures spectroscopiques et pour les nombreuses discussions qui nous ont permis de mieux caractériser les polycristaux de gallium. Enfin merci à Claude Jaupart pour des discussions sur l'interprétation des résultats.

## Troisième partie

# Couplage électromagnétique entre le noyau liquide et la graine



# Introduction

Gubbins (1981) fut le premier à montrer que la graine solide au centre de la Terre est soumise à des couples électromagnétiques pouvant induire une rotation différentielle de la graine par rapport au manteau. La graine solide, moins de 5% du volume total du noyau, possède en effet un moment d'inertie faible et peut par conséquent facilement être mise en rotation au centre du noyau liquide. Comme Gubbins l'a souligné, cette rotation est cependant extrêmement difficile à prédire dans la mesure où elle repose, entre autres, sur la structure du champ magnétique toroïdal dans le noyau que l'on ne peut pas observer. En 1981, il n'était pas question de déterminer une éventuelle rotation différentielle de la graine à l'aide de la sismologie puisque l'on n'avait pas encore détecté l'anisotropie de la graine.

Il a fallu attendre près de quinze ans et un calcul numérique tridimensionnel de Glatzmaier & Roberts (1995) pour inciter les sismologues à rechercher une rotation différentielle de la graine terrestre; le calcul de dynamo convective de Glatzmaier & Roberts prédisait en effet une superrotation de la graine conductrice de  $2^\circ/\text{an}$  environ. Moins d'un an après ce résultat numérique, deux équipes indépendantes, Song & Richards (1996) puis Su et al. (1996), détectaient la superrotation de la graine à l'aide de sismogrammes datant des 30 dernières années. Ce qui est surprenant, c'est que les vitesses de rotation différentielle reportées par Song & Richards ( $1^\circ/\text{an}$ ) et Su et al. ( $3^\circ/\text{an}$ ) étaient exactement de l'ordre de grandeur de la prédiction de Glatzmaier & Roberts ( $2^\circ/\text{an}$ ) obtenue quant à elle, au moyen d'un calcul numérique dont les paramètres physiques sont bien éloignés de ceux de la géodynamo.

Depuis, Souriau et al. (1996) ont montré que l'étude de Su et al. (1996) ne peut pas être considérée comme solide, en particulier à cause de l'incertitude qui règne sur la position de l'axe de symétrie de l'anisotropie dans la graine (voir partie II). Souriau et al. montrent également qu'il faut utiliser les mesures de Song & Richards avec prudence car il existe de nombreux artefacts qui pourraient avoir biaisés leurs observations. Le sentiment général dans la communauté Géophysique, en particulier chez les sismologues, est qu'il est prématuré de conclure sur la rotation différentielle de la graine avec les données dont on dispose aujourd'hui. Cela se confirme lorsqu'on voit que les résultats d'une troisième étude (Creager, 1997) indiquent un mouvement prograde de la graine d'au plus  $0.3^\circ/\text{an}$ . Tous ces travaux montrent qu'il est nécessaire de faire au préalable des progrès dans la résolution de l'anisotropie dans la graine (voir partie II), avant de pouvoir se prononcer qualitativement sur une rotation différentielle de la graine solide.

La perspective de pouvoir disposer, dans le futur, de la vitesse de rotation de la graine en fonction du temps est particulièrement importante pour les géomagnéticiens: la rotation de la graine constituerait alors une observation supplémentaire à prendre en compte dans la modélisation de la dynamo terrestre, et s'ajouterait à la seule observation dont on dispose aujourd'hui, la variation séculaire du champ magnétique à la surface de la Terre (que l'on extrapole jusqu'à la frontière Noyau-Manteau). C'est dans cette optique que nous plaçons les articles contenus dans les deux chapitres suivants.

Dans le premier chapitre nous proposons un mécanisme (un cylindre tangent à la graine en excès de température par rapport au reste du noyau liquide) qui pourrait être à l'origine de la superrotation de la graine; ce travail est présenté sous la forme d'un article publié dans *Geophysical Research Letters*, "Mechanics of inner core super-rotation". Dans le second chapitre, nous poursuivons l'analyse de ce mécanisme numériquement, et montrons, dans le cadre de nos hypothèses, que la rotation différentielle de la graine est reliée directement à l'intensité du champ magnétique toroïdal présent dans le noyau liquide. Notre approche, avec un modèle de vitesse cinématique, permet d'isoler et de comprendre en détail le couplage électromagnétique à l'interface Graine-Noyau liquide responsable de la superrotation de la graine dans nos simulations numériques. Cette étude est présentée sous la forme d'un article à paraître dans *Journal of Geophysical Research*, "Anomalous rotation of the inner core and the toroidal magnetic field".

## Chapitre 1

# Superrotation de la graine: un mécanisme

### Mechanics of inner core super-rotation

Jonathan Aurnou, Daniel Brito, Peter Olson

*Department of Earth and Planetary Sciences, Olin Hall,  
Johns Hopkins University, Baltimore, MD 21218, USA.*

Article publié dans *Geophysical Research Letters*  
**23**, 3401-3404 (1996).

#### Résumé:

Nous proposons un mécanisme pour expliquer la rotation prograde de la graine solide terrestre telle qu'elle est suggérée par des études sismologiques; ce mécanisme est lié à la structure de la convection dans le noyau liquide. Des calculs numériques de convection et de régime dynamo dans le noyau liquide révèlent des excès de température dans le cylindre tangent autour de la graine. Nous montrons que cet excès de température génère un vent thermique prograde et un fort champ magnétique azimuthal dans le cylindre tangent. Les couples électromagnétiques qui s'exercent sur la graine, résultant de l'interaction entre le champ magnétique azimuthal induit et le champ magnétique poloïdal ambiant, sont en équilibre lorsque la vitesse angulaire de la graine est inférieure de 14% environ à celle du cylindre tangent. Il résulte, d'une part, que la super-rotation de la graine (1.1-3°/an par rapport au manteau) peut être générée par une très petite anomalie thermique ( $\simeq 0.001$  K) dans le cylindre tangent, et d'autre part, que cette super-rotation s'accompagne d'un fort champ magnétique toroïdal dans le noyau liquide



dont l'intensité maximale varie entre 24 et 66 mT.

**Abstract:**

A mechanism is proposed to explain the seismologically-inferred prograde rotation of the Earth's solid inner core in terms of the structure of convection in the fluid outer core. Numerical calculations of convection and dynamo action in the outer core exhibit excess temperatures inside the tangent cylinder surrounding the inner core. We show that this temperature difference generates a prograde thermal wind and a strong azimuthal magnetic field inside the tangent cylinder. Electromagnetic torques on the inner core derived from induced azimuthal magnetic fields and the ambient poloidal field equilibrate when the inner core angular velocity lags the nearby tangent cylinder fluid angular velocity by approximately 14%. The inferred prograde rotation of the inner core ( $1.1 - 3^\circ/\text{year}$  relative to the mantle) can be produced by a very small ( $\simeq 0.001$  K) temperature anomaly within the tangent cylinder and indicates strong toroidal magnetic fields with peak intensities of 24-66 mT in that region of the core.

## 1.1 Introduction

Song & Richards (1996) have recently identified a secular change in travel times of seismic waves traversing the Earth's solid, anisotropic inner core. They have interpreted these observations as indicating a prograde (eastward) differential rotation of the inner core at a rate of about  $\Delta\Omega_{IC} \simeq 1.1^\circ/\text{yr}$  relative to the mantle. Using a different seismic data set and a different data reduction technique, Su, Dziewonski & Jeanloz (1996) have also identified a secular change in seismic travel times for the same region, and have inferred an even faster prograde rotation for the inner core, nearly  $3^\circ/\text{yr}$ .

Existence of inner core super-rotation, especially at the rapid rates implied by the seismic observations, has profound implications for the dynamics of the core and for the process of magnetic field generation (Whaler & Holme, 1996; Gubbins, 1981; Steenbeck & Helmig, 1975). The traditional methods for inferring angular velocity of fluid motion just below the core-mantle boundary (CMB) are based on secular variation of the geomagnetic field and typically yield estimates of  $0.2^\circ/\text{yr}$  or less, generally in the retrograde (westward) sense relative to the mantle (Jault et al., 1988). Taken together, the seismic and geomagnetic observations indicate a large-scale variation in angular velocity, with the deepest portion of the core having an angular velocity excess and the outer portion an angular velocity deficit, relative to the mantle.

Prograde rotation of the inner core relative to the rest of the core and relative to the mantle are featured in recent numerical calculations of dynamo action in rotating, electrically conducting fluid shells. The Glatzmaier & Roberts (1995a,b) dynamo calculations which explicitly permit variable rotation of the inner core, show prograde rotation of the inner core at a rate of about  $1^\circ/\text{yr}$  when scaled to Earth conditions. The physical explanation for this effect can be found in the structure of the convective motions maintaining the dynamo, which are strongly influenced by the planetary rotation and the particular geometry of the core. The tendency for rotationally-constrained two-dimensional motion implied by the Taylor-Proudman theorem effectively divides the core into two dynamically distinct regions, separated by the *tangent cylinder*, an imaginary cylinder circumscribing the inner core and aligned parallel to the Earth's spin axis. Because of planetary rotation, the convection tends to be columnar in the region outside the tangent cylinder where the direction of gravity is nearly perpendicular to the rotation axis, but within the tangent cylinder, where gravity is nearly aligned with the rotation axis, the convection tends to be more three-dimensional (Busse, 1983). In the Glatzmaier-Roberts dynamo calculations, the convection results in a higher average temperature within the tangent cylinder compared to fluid at the same radius outside. As shown schematically in Figure 1, the large-scale temperature difference across the tangent cylinder drives an azimuthal *thermal wind* flow within the tangent cylinder that is directed eastward near the inner core boundary (ICB). A combination of frictional and electromagnetic coupling drags the inner core into super-rotation in the same direction as the thermal wind, but at a slightly reduced rate.

There are other proposed explanations for the seismically-inferred super-rotation of the inner core, such as spin-down of the whole core in response to tidal friction (Su et al., 1996). We prefer the preceding explanation, as it is consistent with our present understanding of the geodynamo. Specifically, a recent re-analysis of the Glatzmaier-Roberts dynamo verifies that thermal winds with electromagnetic coupling constitute the principal mechanism driving the inner core super-rotation in their calculations (Glatzmaier

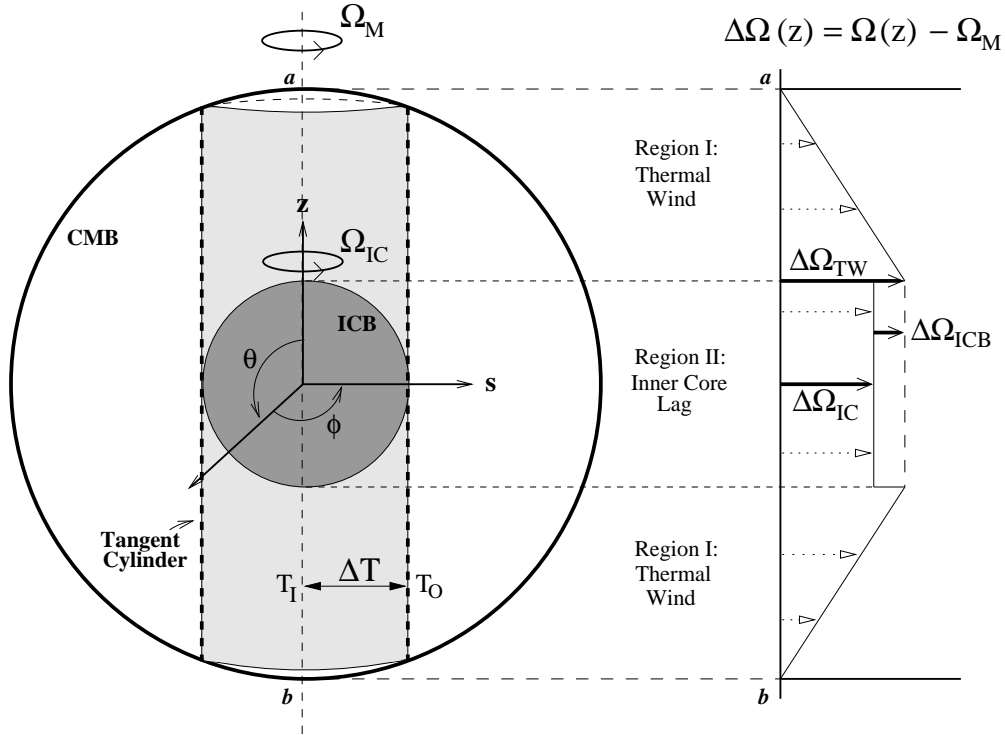


FIG. 1.1 – *Illustration of model geometry. Left: Sketch showing the tangent cylinder surrounding the solid inner core. Right: Profile of the prograde angular velocity along the rotation axis  $\Delta\Omega(z)$  relative to the mantle angular rotation rate,  $\Omega_M$ . Because of the rotational constraint on convection, the temperature of the outer core fluid near the axis of the tangent cylinder  $T_I$  is slightly higher than the temperature outside of the tangent cylinder  $T_O$ . This temperature difference drives a prograde “thermal wind” inside the tangent cylinder (Region I). This thermal wind produces a difference in angular velocity  $\Delta\Omega_{TW}$  between the mantle and the fluid at the base of the tangent cylinder near the ICB. Electromagnetic torques are derived from the interaction of the ambient poloidal magnetic field and induced toroidal fields. These toroidal fields are generated by the thermal wind and by the lag of the inner core relative to the surrounding fluid in Region II of the tangent cylinder  $\Delta\Omega_{ICB}$ . The torques equilibrate when the inner core rotates in a prograde direction relative to the mantle at a rate  $\Delta\Omega_{IC}$ .*

& Roberts, 1996). Furthermore, it is substantiated by magnetoconvection calculations, which exhibit similar flow structures in the so-called “strong-field” regime where the imposed magnetic field is comparable to the generated field (Olson & Glatzmaier, 1995; 1996).

## 1.2 Tangent cylinder thermal wind

We formulate a simple, analytical model of inner core super-rotation, based on the mechanism just described. The essential features of the model are illustrated in Figure 1. We suppose the temperature of the fluid along the axis of the tangent cylinder  $T_I$  is slightly different than the fluid temperature outside  $T_O$ , so that the temperature difference across the tangent cylinder is  $\Delta T = T_I - T_O \neq 0$ . The model works equally well if core convection is predominantly compositionally-driven (Loper, 1989). In that case, thermal buoyancy is replaced by compositional buoyancy due to light element enrichment in the tangent cylinder. We also suppose that the tangent cylinder, including the solid inner core, is permeated by a uniform poloidal magnetic field  $B_z$  oriented anti-parallel to the spin axis.

Within the tangent cylinder fluid we presume a balance between Coriolis, buoyancy and Lorentz forces, as is appropriate for the Earth’s core (Moffatt, 1978). Then the azimuthal component of the steady-state vorticity balance reduces to the thermal wind equation

$$\frac{\partial u_\phi}{\partial z} = \frac{\alpha g}{2\Omega_M} \frac{dT}{ds} \quad (1.1)$$

where  $u_\phi$  is the azimuthal fluid velocity,  $\alpha$  is the thermal expansion coefficient,  $g$  is gravity,  $\Omega_M$  is the angular velocity of planetary rotation, and  $(s, \phi, z)$  are cylindrical coordinates. We assume that the temperature gradient in the tangent cylinder is only a function of cylindrical radius  $s$ , while the temperature outside the tangent cylinder is held constant at  $T_O$ . This temperature profile generates thermal winds that are located entirely within the interior of the tangent cylinder and that only vary in the  $\hat{z}$ -direction.

In this model the thermal wind equation holds in the parts of the core labeled *Region I* in Figure 1. We treat these upper and lower sections of the tangent cylinder as right circular cylinders which have the radius of the inner core  $R_{ICB}$ , and a height  $H = R_{CMB} - R_{ICB}$  where  $R_{CMB}$  is the radius of the CMB. Consistent with the observation that the geomagnetic secular variation is five to fifteen times smaller than the inferred inner core rotation rate, we impose zero flow boundary conditions at the CMB.

With these simplifying assumptions (1.1) can be integrated to determine  $\Delta\Omega_{TW}$ , the difference in angular velocity between the fluid at the base of the tangent cylinder near the ICB and the mantle:

$$\Delta\Omega_{TW} = \frac{\alpha g H}{\Omega_M R_{ICB}^2} \Delta T \quad (1.2)$$

Using the thermal wind velocity from (1.1), the steady-state magnetic induction equation

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B} = 0 \quad (1.3)$$

reduces to

$$(\nabla^2 - \frac{1}{s^2})B_1 = \frac{\Delta\Omega_{TW}B_z s}{\eta H} \quad (1.4)$$

where  $\hat{\phi}B_1$  is the azimuthal magnetic field induced by the thermal wind and  $\eta$  is the magnetic diffusivity of the core fluid. Subject to the condition  $B_1 = 0$  at  $s = 0$  and a zero-gradient boundary condition  $dB_1/ds = 0$  at  $s = R_{ICB}$ , the solution is

$$B_1 = \frac{\Delta\Omega_{TW}B_z}{8\eta H} s(s^2 - 3R_{ICB}^2) \quad (1.5)$$

We approximate this cylindrical solution along the spherical ICB using the projection  $s(s^2 - 3R_{ICB}^2) \Rightarrow -R_{ICB}^3 \sin 2\theta$ , yielding

$$B_1(r = R_{ICB}) \simeq -\frac{\Delta\Omega_{TW}B_z R_{ICB}^3}{8\eta H} \sin 2\theta \quad (1.6)$$

where  $\theta$  denotes colatitude.

### 1.3 Induction at the ICB

Coupling between the tangent cylinder fluid and the solid inner core is provided by a combination of viscous and electromagnetic stresses, and perhaps additional stresses arising from topography on the ICB. According to most estimates, electromagnetic coupling should be the largest of these (see Whaler & Holme, 1996) although the lack of constraints on ICB topography makes its contribution impossible to calculate. In our model, electromagnetic coupling is dominant because of the strong toroidal field generated by the thermal wind in the tangent cylinder.

Equilibrium electromagnetic coupling causes the inner core to rotate in the same sense as the adjacent fluid in the tangent cylinder, although at a slightly slower rate, as determined by the condition that the sum of all electromagnetic torques on the inner core is zero (Gubbins, 1981). One torque is due to the azimuthal field induced by the thermal wind,  $B_1$ . This must be balanced by the torque produced by a second azimuthal field  $B_2$ , induced at the ICB by the difference in rotation between the inner core and the surrounding core fluid. This jump in angular velocity is denoted by  $\Delta\Omega_{ICB}$  and occupies *Region II* in Figure 1. The induction equation (1.3) for this field reduces to, in spherical  $(r, \theta, \phi)$  coordinates

$$(\nabla^2 - \frac{1}{s^2})B_2 = \frac{\Delta\Omega_{ICB}B_z \sin 2\theta}{2\eta} \delta\left(\frac{R_{ICB} - r}{R_{ICB}}\right) \quad (1.7)$$

where  $\delta(\frac{R_{ICB}-r}{R_{ICB}})$  is a Dirac  $\delta$ -function centered on the ICB. This  $\delta$ -function represents the source of toroidal field provided by the jump in the angular velocity between the tangent cylinder fluid surrounding the inner core and the solid inner core.

Using standard techniques, the solution to (1.7) which vanishes at the CMB and on the rotation axis gives the following azimuthal field on the ICB:

$$B_2(r = R_{ICB}) = -\frac{\Delta\Omega_{ICB}B_z R_{ICB}^2}{2\eta} \sin 2\theta \quad (1.8)$$

## 1.4 Electromagnetic coupling of the inner core to the tangent cylinder fluid

The axial component of the electromagnetic torque on the inner core can be written as a surface integral (Rochester, 1962)

$$\Gamma = \frac{1}{\mu} \int_{ICB} r B_r B_\phi \sin \theta dA \quad (1.9)$$

where  $\mu$  is magnetic permeability. Setting  $B_r = B_z \cos \theta$ ,  $B_\phi = B_1 + B_2$ , and substituting (1.6) and (1.8) into (1.9), yields, at equilibrium ( $\Gamma = 0$ ) the following relationship between the angular velocity increments shown in Figure 1.

$$\Delta\Omega_{ICB} = - \left( \frac{R_{ICB}}{4H} \right) \Delta\Omega_{TW} \simeq -0.14 \Delta\Omega_{TW} \quad (1.10)$$

In electromagnetic equilibrium, the inner core lags the nearby tangent fluid cylinder in prograde rotation only by about 14%.

As illustrated in Figure 1, the seismically-inferred rotation of the inner core relative to the mantle is the sum of these two increments,  $\Delta\Omega_{IC} = \Delta\Omega_{ICB} + \Delta\Omega_{TW}$ . Using (1.2) we can express the temperature excess across the tangent cylinder in terms of the inner core super-rotation as

$$\Delta T \simeq \frac{1.16\Omega R_{ICB}^2}{\alpha g H} \Delta\Omega_{IC} \quad (1.11)$$

and using (1.6) the maximum toroidal field, found on the tangent cylinder, is

$$B_\phi(s = R_{ICB}) \simeq - \frac{1.16 B_z R_{ICB}^3}{4\eta H} \Delta\Omega_{IC} \quad (1.12)$$

From (1.6), (1.8) and (1.9) it can also be seen that the torque  $\Gamma$  is a function of  $B_z^2$ , so the polarity of the axial magnetic field does not affect the torque. The direction of rotation of the inner core depends only on the sign of the temperature difference  $\Delta T$  across the tangent cylinder.

## 1.5 Model results

The inferred super-rotation of the inner core can be driven by an extremely small temperature (or equivalently, light element) excess in the tangent cylinder. Using  $\Omega = 7.29 \times 10^{-5}/s$ ,  $\alpha = 1 \times 10^{-5}/K$ ,  $g = 7 \text{ m/s}^2$ ,  $R_{ICB} = 1.22 \times 10^6 \text{ m}$ , and  $H = 2.26 \times 10^6 \text{ m}$ , (1.11) gives  $\Delta T \simeq 5 \times 10^{-4} \text{ K}$  and  $\Delta T \simeq 1.3 \times 10^{-3} \text{ K}$  for  $\Delta\Omega_{IC} = 1.1^\circ/\text{yr}$  and  $\Delta\Omega_{IC} = 3^\circ/\text{yr}$ , respectively. On the other hand, the toroidal field induced by this small anomaly is quite large. Using the characteristic radial field intensity on the CMB (Blokhin et al., 1989) for the axial field in the tangent cylinder  $B_z = -0.5 \text{ mT}$ , and  $\eta = 3 \text{ m}^2/s$  for the core magnetic diffusivity, (1.12) predicts peak toroidal field intensities on the tangent cylinder of  $B_\phi \simeq 24 \text{ mT}$  and  $B_\phi \simeq 66 \text{ mT}$  for  $\Delta\Omega_{IC} = 1.1^\circ/\text{yr}$  and  $\Delta\Omega_{IC} = 3^\circ/\text{yr}$ , respectively. We note that these toroidal field intensities are consistent with the toroidal field intensities obtained in the tangent cylinder region of

the Glatzmaier-Roberts dynamo calculations, and that the thermal anomalies in those calculations, when scaled to Earth conditions, are comparable to the thermal anomaly in our model.

The fact that *a priori* calculations of convection and dynamo action in a rotating, electrically spherical shell can account for the direction and the magnitude of the seismically-inferred super-rotation of the inner core offers significant support for the convection theory of the geodynamo. Our model of inner core rotation, in which the tangent cylinder plays a central role, is motivated by the results of those calculations. Although highly idealized, it demonstrates how inner core rotation can be used to probe the heart of geodynamo, to constrain critical variables such as flow velocity and toroidal magnetic fields near the Earth's center.

## Acknowledgments

We thank X. Song and W.-J. Su for providing preprints of their articles. Support from the Institute of Geophysics and Planetary Physics (Los Alamos) is gratefully acknowledged.

## Chapitre 2

# Rotation de la graine et le champ magnétique toroïdal

### Anomalous rotation of the inner core and the toroidal magnetic field

Jonathan Aurnou, Daniel Brito, Peter Olson

*Department of Earth and Planetary Sciences, Olin Hall,  
Johns Hopkins University, Baltimore, MD 21218, USA.*

Article à paraître dans *Journal of Geophysical Research*

#### Résumé:

Nous calculons numériquement l'induction du champ magnétique par les mouvements axisymétriques d'un fluide conducteur dans une coquille sphérique; le but est d'établir une relation entre le champ magnétique toroïdal terrestre et la rotation de la graine solide. Dans notre étude, un écoulement axisymétrique et stationnaire dans le noyau interagit avec différents modèles du champ magnétique poloïdal; nous calculons le champ magnétique toroïdal induit et la rotation de la graine résultant de cette interaction. Trois modèles d'écoulements azimutaux dans le noyau liquide sont étudiés: deux vents thermiques dans le cylindre tangent (prédits par certains modèles de géodynamo), et un écoulement en colonnes (autour du cylindre tangent à la graine) déduit de la dérive vers l'ouest du champ magnétique terrestre. Les résultats indiquent que le couplage électromagnétique synchronise la rotation de la graine avec le mouvement du fluide



environnant. Le couplage électromagnétique met la graine en rotation à travers des oscillations de torsion amorties, d'une période d'environ 4 années dépendante de l'intensité du champ magnétique poloïdal. En régime stationnaire, les vent thermiques dans le cylindre tangent génèrent un champ magnétique toroïdal d'intensité maximale 25 mT et une rotation de la graine de  $1^\circ/\text{an}$ . Le modèle d'écoulement en colonnes, quant à lui, génère un champ magnétique toroïdal d'intensité maximale 4 mT accompagné d'une très faible rotation rétrograde de la graine de  $-0.013^\circ/\text{an}$ . Le mouvement rétrograde de la graine obtenu avec le couplage électromagnétique associé à la dérive vers l'ouest du champ magnétique ne peut expliquer la superrotation de la graine suggérée par les études sismologiques.

**Abstract:**

We use numerical calculations of magnetic induction by axisymmetric motions in a spherical shell of conducting fluid to investigate the relationship between the Earth's toroidal magnetic field and the time-dependent anomalous rotation of the solid inner core. We compute the induced toroidal magnetic field and inner core rotation maintained by the interaction of time-independent, axisymmetric outer core fluid flow with models of the poloidal magnetic field. Three possible models of the azimuthal flow in the outer core are investigated: two thermal wind flows inside the tangent cylinder (predicted by some numerical models of the geodynamo) and a columnar flow outside the inner core tangent cylinder inferred from the geomagnetic westward drift. Results indicate that electromagnetic torques tightly couple the inner core rotation to the fluid motion. Electromagnetic spin-up of the inner core occurs through damped torsional oscillations with periodicity near 4 years depending on the strength of the poloidal magnetic field. In steady state the thermal winds inside the tangent cylinder generate a peak toroidal field of 25 mT accompanying a prograde inner core rotation rate of  $1^\circ/\text{yr}$ . In contrast, the columnar westward drift model generates toroidal field with peak intensity near 4 mT and a small, retrograde anomalous inner core rotation of  $-0.013^\circ/\text{yr}$ . The weak retrograde motion of the inner core produced by electromagnetic coupling to the westward drift cannot explain the seismically inferred prograde anomalous rotation.

## 2.1 Introduction

The first suggestion of anomalous inner core rotation was made by Gubbins (1981) who argued that the inner core is unlikely to rotate at precisely the same angular velocity as the mantle, owing to the low viscosity of the fluid outer core and electromagnetic torques associated with the geodynamo acting on the electrically conducting inner core. Gubbins demonstrated that electromagnetic torques couple the rotation rate of the inner core to the outer core fluid motion and, when perturbed, the inner core will spin-up into rotational equilibrium via damped torsional oscillations with periods near 6 years, the precise value depending on the intensity of the poloidal field near the inner core boundary (ICB). However, the full significance of Gubbins' work was not appreciated until Glatzmaier & Roberts (1995a,b) produced a three-dimensional convectively driven numerical model of the geodynamo which featured a persistent superrotation of the inner core of roughly  $2^\circ/\text{yr}$ . Several seismic studies have identified prograde superrotation of the inner core relative to the mantle. Song & Richards (1996) obtained a  $1.1^\circ/\text{yr}$  prograde (eastward) rotation of the inner core relative to the mantle, and Su et al. (1996) obtained a  $3^\circ/\text{yr}$  prograde rotation rate. Creager (1997) has also inferred a prograde anomalous rotation, although much slower, about  $0.25^\circ/\text{yr}$ .

In addition to observational questions such as the precise magnitude of the present-day anomalous inner core rotation rate and whether it represents a persistent or a transient effect, there are also geodynamical questions concerning the origin of the inner core superrotation and its connection with the dynamo mechanism. Specifically, the superrotation rates inferred by Song & Richards (1996) and Su et al. (1996) imply much larger angular velocities of the outer core fluid than were previously thought, which has important implications for the process of toroidal field generation. Prior to the detection of anomalous inner core rotation, the main evidence for azimuthal flow in the outer core fluid came from the westward drift of the geomagnetic field. Westward drift deduced from the pattern of geomagnetic secular variation indicates retrograde motion of the fluid below the core-mantle boundary (CMB) at an average rate of approximately  $-0.2^\circ/\text{yr}$  (Bloxxham et al., 1989). The correlation between changes in westward drift and the decade-scale fluctuations in the rotation rate of the mantle implies that the momentum of the fluid involved in the westward drift is quite large and has led to the idea that the pattern of westward drift results from differential rotation of coaxial cylinders of fluid (Jault et al., 1988), as illustrated in Figure 2.1c. It has long been recognized that the shear between differentially rotating fluid cylinders is an efficient mechanism for toroidal field generation through the so-called  $\omega$  effect (Elsasser, 1946), and in many geodynamo models this is the primary source of toroidal field (Hollerbach, 1996).

However, recent numerical modeling of the structure of convection in the outer core (Olson & Glatzmaier, 1995; Glatzmaier & Roberts, 1995a,b) has identified another source of toroidal field, high-velocity thermal wind shear flows located inside the inner core tangent cylinder, as illustrated in Figures 2.1a and 2.1b. Thermal winds are equally effective at generating toroidal field as the flow associated with westward drift and furthermore, they offer an explanation for prograde inner core rotation (Aurnou et al., 1996; Glatzmaier & Roberts, 1996). Electromagnetic torques act to couple the motion of the inner core to the prograde motion of the surrounding fluid, and the inner core rotates with the fluid adjacent to the inner core boundary, but at a slightly reduced

rate.

In addition to electromagnetic coupling, two other mechanisms have been proposed to explain the anomalous rotation: tidal spin-down of the mantle relative to the inner core (Su et al., 1996) and long-period inner core oscillation in response to torques exerted by the gravitational field of the mantle (Buffett, 1996b). Both of these alternative mechanisms are likely to affect inner core rotation to some degree. However, the electromagnetic coupling mechanism predicted by Gubbins' (1981) original analysis (and substantiated by the recent dynamo calculations of Glatzmaier & Roberts (1996) and Kuang & Bloxham (1997) provides amply strong torques to drive the anomalous rotation of the inner core.

In this paper we use numerical models of toroidal magnetic field generation by an imposed axisymmetric core flow to compute the anomalous inner core rotation resulting from electromagnetic torques. In our previous paper (Aurnou et al., 1996) we presented a simplified analytical model of inner core superrotation based on electromagnetic coupling between the inner core and a “thermal wind” shear flow located inside the tangent cylinder of the inner core that reproduces the essential physics found in the (Glatzmaier & Roberts, 1995a,b,1996) dynamo calculations. Here we extend that model to an axisymmetric spherical geometry with time dependence, and we investigate the anomalous inner core rotation produced by a second thermal wind model and an azimuthal flow inferred from the geomagnetic westward drift.

## 2.2 Description of the models

The Earth's core is modeled with a solid inner core and a liquid outer core, both having a uniform electrical conductivity. The solid mantle is treated as electrically insulating and its rotation rate is assumed constant. A steady axisymmetric dipolar magnetic field is imposed throughout the core and a steady azimuthal flow is imposed in the liquid outer core. Figure 2.1 illustrates the three core flow models that are used to calculate the toroidal magnetic field and the anomalous inner core rotation. We do not consider the action of the so-called “magnetic wind” acting back on the motion of the outer core fluid, although the magnetic wind represents an additional source of azimuthal motion in the fluid (R. Hollerbach, personal communication, 1997).

The rotation rate of the inner core is allowed to vary through the action of applied torques. We use free slip boundary conditions at the inner core boundary and we ignore the effects of topography on the ICB, so the inner core rotation rate is affected only by electromagnetic torques. The outer core flow interacts with an imposed poloidal magnetic field, inducing toroidal field which diffuses throughout the core and produces electromagnetic torques on the inner core.

Flow model 1, illustrated in Figure 2.1*a*, consists of a thermal wind shear flow located inside the tangent cylinder similar to the flow used in our analytical model. Flow model 2, shown in Figure 2.1*b*, consists of a thermal wind flow model with the pattern of shear kinematically similar to the thermal wind found in the dynamo calculations of Glatzmaier & Roberts (1996). Flow model 3, shown in Figure 2.1*c*, consists of differential rotation of concentric cylinders of fluid in the region outside the tangent cylinder. The distribution of differential rotation is obtained from the pattern of zonal fluid velocities derived from secular variation of the geomagnetic field (Jault et al., 1988), and

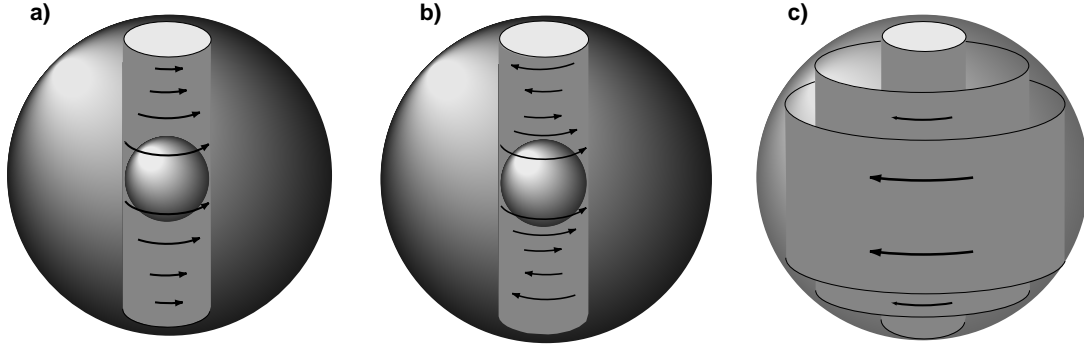


FIG. 2.1 – Sketches of the three models of azimuthal fluid flow in the outer core. a) Prograde thermal wind inside the inner core tangent cylinder (model 1). b) A second thermal wind flow model, called the X-wind (model 2), has strong prograde flow inside the tangent cylinder surrounding the inner core and an equally strong retrograde flow at the CMB. c) The flow in model 3 consists of retrograde differential fluid motion on concentric cylinders outside the tangent cylinder.

this motion is kinematically similar to the Kuang & Bloxham (1997) dynamo.

### 2.3 Governing equations

The induction equation for the magnetic field is

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B} \quad (2.1)$$

where  $\mathbf{B} = (B_r, B_\theta, B_\phi)$  is the magnetic induction in spherical  $(r, \theta, \phi)$  coordinates,  $\mathbf{u}$  is the fluid velocity,  $\eta$  is the magnetic diffusivity, and  $t$  is time.

Anomalous rotation of the inner core about the polar  $\hat{z}$ -direction is governed by the following angular momentum balance:

$$I \frac{d(\Delta\Omega_{IC})}{dt} = \Gamma \quad (2.2)$$

where  $I$  is the polar moment of inertia of the inner core,  $\Delta\Omega_{IC}$  is the anomalous angular velocity of the inner core and  $\Gamma$  is the  $\hat{z}$ -component of torque acting on the inner core. In our model, we consider only the electromagnetic torque on the inner core. This torque can be written as a surface integral over the ICB (Rochester, 1962)

$$\Gamma = \frac{1}{\mu} \int_{ICB} B_r B_\phi r \sin\theta \, dS \quad (2.3)$$

where  $\mu$  is the magnetic permeability (see Table 2.1).

The axisymmetric magnetic field is decomposed into poloidal and toroidal parts (labeled  $P$  and  $T$ , respectively)

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_P + \mathbf{B}_T \quad (2.4)$$

Both parts can be expressed in terms of scalar variables,  $A_\phi$  and  $B_T$  (Moffatt, 1978). The poloidal part is

$$\mathbf{B}_P = \nabla \wedge \hat{\phi} A_\phi \quad (2.5)$$

Symbol	Parameter	Value
$\Delta\Omega_{TW}$	Maximum rate of thermal wind	$1^\circ\text{-}3^\circ/\text{yr}$
$\Delta\Omega_{XW}$	Maximum rate of X wind	$1^\circ\text{-}3^\circ/\text{yr}$
$R_C$	Core radius	$3.48 \times 10^6 \text{ m}$
$R_I$	Inner core radius	$1.22 \times 10^6 \text{ m}$
$I$	Inner core moment of inertia	$5.87 \times 10^{34} \text{ kg m}^2$
$\mu$	Magnetic permeability	$4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$
$\eta$	Core magnetic diffusivity	$2.65 \text{ m}^2/\text{s}$
$B_o$	Typical magnetic field on CMB	$0.37 \text{ mT}$

TABLE 2.1 – *Parameter values used in numerical simulations of anomalous inner core rotation.*

with components

$$(B_r, B_\theta) = \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi), -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right) \quad (2.6)$$

and the toroidal part is

$$\mathbf{B}_T = \hat{\phi} B_T \quad (2.7)$$

Substituting equations (2.5), (2.6) and (2.7) into equation (2.1), the induction equation for the toroidal field subject to an axisymmetric, azimuthal flow  $\mathbf{u} = \hat{\phi} u_\phi$  is

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \eta (\nabla^2 - \frac{1}{s^2}) \right) B_T = B_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{B_\theta}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} \quad (2.8)$$

where  $s = r \sin \theta$  is the cylindrical radial coordinate.

The boundary condition for axisymmetry requires

$$B_T = 0 \quad \text{at} \quad \theta = 0, \pi \quad (2.9)$$

which forces the toroidal field to vanish along the rotation axis. Assuming the mantle to be an electrical insulator requires the condition

$$B_T = 0 \quad \text{at} \quad r = R_C \quad (2.10)$$

where  $R_C$  is the radius of the core (see Table 2.1).

At the ICB, the tangential electric field must be continuous, leading to the following condition:

$$\frac{\partial B_T}{\partial r} \Big|_{ICB-}^{ICB+} = -\frac{\Delta v B_{p\perp}}{\eta} \quad (2.11)$$

where  $\Delta v$  is the jump in velocity across the ICB, and  $B_{p\perp}$  is the magnitude of the poloidal magnetic field that is perpendicular to the boundary. In our calculations, we directly integrate the induction equation across the ICB. This technique approximates the velocity discontinuity resulting from a free slip boundary condition with a sharp velocity gradient at the ICB,  $\Delta v / \Delta r$ , where  $\Delta r$  is the radial numerical grid spacing. This representation introduces an error into our solutions that is of the order  $\Delta r / R_C$  which is less than 1% in all the calculations presented.

## 2.4 Poloidal magnetic field models

Two imposed poloidal magnetic field models are used inside the core: a fundamental mode, current-carrying dipole field and a uniform  $\hat{z}$ -directed magnetic field. These two poloidal fields have the same potential field solution at the CMB but strongly differ inside the core. The current-carrying dipole is the slowest freely-decaying field inside the core. The uniform  $\hat{z}$  magnetic field results from an externally-imposed dipole field to diffuse into the core. The uniform field, though somewhat less physically plausible, is identical to the magnetic field used in our analytical model (Aurnou et al., 1996) and allows us to compare numerical and analytical results.

### 2.4.1 Current-Carrying dipole magnetic field

The current-carrying dipole field is generated from a poloidal potential  $A_\phi$  in (2.5), of the form

$$A_\phi = (\pi R_C) B_o J_1\left(\frac{\pi r}{R_C}\right) \sin\theta \quad (2.12)$$

This corresponds to the first fundamental mode of a freely-decaying axial dipole field with a radial dependence given by the Bessel function (Abramowitz & Stegun, 1964)

$$J_1(x) = \frac{\sin(x)}{x^2} - \frac{\cos(x)}{x} \quad (2.13)$$

This magnetic vector potential produces a magnetic field with intensity  $B_o$  on the north pole of the CMB.

### 2.4.2 Uniform poloidal field

The azimuthal component of the magnetic vector potential for a uniform field is

$$A_\phi = \frac{B_o}{2} r \sin\theta = \frac{B_o}{2} s \quad (2.14)$$

which produces a uniform magnetic field vector  $B_o \hat{z}$  throughout the core.

## 2.5 Fluid flow models

The imposed axisymmetric flow fields consist of azimuthal fluid flows

$$u_\phi = s\omega \quad (2.15)$$

where the angular velocity  $\omega$  can vary as a function of distance from the equatorial plane  $z$  and radius  $s$  in cylindrical coordinates. The inner core motion consists of solid body rotation. Consequently, inside the inner core  $r \leq R_I$  we set

$$\omega = \Delta\Omega_{IC} \quad (2.16)$$

where  $\Delta\Omega_{IC}$  is determined from equation (2.2) and  $R_I$  is the inner core radius (see Table 2.1).

### 2.5.1 Thermal wind flow (Model 1)

Our first model of a thermal wind located inside the inner core tangent cylinder is as follows (see Figure 2.1a). Within the tangent cylinder, in the region  $s \leq R_I$  and  $|z| \geq R_I$ , we represent the angular velocity as a function of the  $z$  coordinate in equation (2.15) and set

$$\omega(z) = \Delta\Omega_{TW} z^* \quad (2.17)$$

where  $z^* = (R_C - |r\cos\theta|)/(R_C - R_I)$  is the dimensionless depth below the CMB measured parallel to the rotation axis,  $\Delta\Omega_{TW}$  is the maximum angular velocity of the fluid in the tangent cylinder relative to the mantle. This motion (2.17) consists of solid body rotation of the fluid in planes perpendicular to the rotation axis, with angular velocity decreasing with distance from the ICB.

By prescribing flow only within the tangent cylinder, a discontinuity in angular velocity at the tangent cylinder wall is produced. In reality, the change in angular velocity occurs continuously in a narrow, free shear layer, a so-called *Stewartson layer* at the tangent cylinder boundary (Greenspan, 1968; Kleeorin et al., 1997; Dormy et al., 1998). We model the Stewartson layer by multiplying  $\omega$  by a taper function  $\Psi_{St}$  defined by

$$\Psi_{St} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \tanh \left( \frac{3(s - S_o)}{S_o - R_I} \right) \right] \quad (2.18)$$

where  $s = r\sin\theta$  is the cylindrical radius,  $R_I$  is the inner core radius and  $S_o$  is the location of the tangent cylinder. In the calculations presented here we have defined  $S_o = 1270$  km in (2.18) which produces a 100 km thick Stewartson layer centered 50 km outside the radius of the inner core.

Another region where the thermal wind velocity is problematic is the corner region of the tangent cylinder,  $|z| < R_I$ ,  $s < R_I$  and  $r > R_I$ , which tapers down to a wedge at the equator. To avoid a shear singularity in the wedge, we hold the angular velocity constant at  $\Delta\Omega_{TW}$  inside this region.

### 2.5.2 X-wind flow (Model 2)

A second model of a tangent cylinder thermal wind we consider is an “X-wind” flow model so-called because the velocity vectors trace out an “X” in each hemisphere (see Figure 2.1b). Model 2 is kinematically similar to the model 1 except that the angular velocity is now

$$\omega = \Delta\Omega_{XW} z^* \quad (2.19)$$

where  $\Delta\Omega_{XW}$  is the magnitude of the azimuthal velocity at  $z = R_I$  and  $z^*$  is now

$$z^* = \frac{(R_C + R_I) - 2|r\cos\theta|}{R_C - R_I} \quad (2.20)$$

This model has zero angular velocity midway between  $R_C$  and  $R_I$  whereas flow model 1 locates this zero at the CMB. Flow model 2 is very similar to the azimuthal flow field induced by the polar upwellings in the dynamo model of Glatzmaier & Roberts (1996).

Model	Fluid Flow Model	Poloidal Field Model
1a	Thermal Wind	Current-Carrying Dipole
1b	Thermal Wind	Uniform $\hat{z}$ Field
2a	X-wind	Current-Carrying Dipole
2b	X-wind	Uniform $\hat{z}$ Field
3	Westward Drift	Current-Carrying Dipole

TAB. 2.2 – Numerical models of time-independent, axisymmetric outer core fluid flow and poloidal magnetic field.

### 2.5.3 Flow derived from geomagnetic westward drift (Model 3)

Prior to the inference of inner core superrotation, the westward drift of the surface magnetic field provided the basic velocity scale for core motions. Thus, for comparison we include the case of the toroidal field generated by the zonal fluid velocities inferred from geomagnetic secular variation. In this westward drift model, the flow is assumed to be on cylinders aligned with the rotation axis (Jault et al., 1988). Instead of the shear inside the tangent cylinder, where  $\omega = \omega(z)$ , the shear in the westward drift model is a function of cylindrical radius alone,  $\omega = \omega(s)$ , as shown in Figure 2.1c.

This westward drift model uses the data of Jault et al. (1988). The azimuthal velocities from all epochs have been stacked into one data set and zonally averaged. The result of this averaging is seen in Figure 2.10a which shows the angular velocity as a function of colatitude. The profile by Jault et al. (1988) extends from 65° N to 65° S latitude and produces zero fluid flow inside the tangent cylinder. More recent inversions of the secular variation (Jackson, 1998) yield more complete azimuthal flows, which are nevertheless similar to Figure 2.10a.

The different numerical models are summarized in Table 2.2. Note that there is no westward drift model with a uniform  $\hat{z}$  magnetic field. This is because the cylindrical fluid shear in the westward drift flow model will not induce any toroidal magnetic field.

## 2.6 Numerical techniques

Second-order central finite differences and explicit, first order time-stepping are used to solve equations (2.2), (2.8), (2.9) and (2.10) in their non-dimensionalized forms. Parameter values used in these equations are given in Table 2.1. The computational scheme calculates the electromagnetic torques on the inner core using equation (2.3) with the magnetic field values of the previous time-step. The angular momentum balance (2.2) is updated with the new torque value. The time step is completed by solving the toroidal induction equation (2.8) with the new value of inner core angular velocity and subject to the application of the toroidal field boundary conditions (2.9) and (2.10).

A numerical grid in  $r$  and  $\theta$  of  $120 \times 120$  has been used in calculations that reach steady state in roughly 20,000 simulated years. This produces equidistant grid points with spacings of  $\Delta r = 25$  km and  $\Delta\theta = 1.5^\circ$  and a simulated time step of roughly one month. 120 grid points with a 25 km step size are sufficient to comprise our radial grid as we do not solve the equations in the innermost 500 km of the core. Numerical experiments were also run using grids on the order of  $40 \times 40$ . The  $40 \times 40$  grids gave



qualitatively similar results to the  $120 \times 120$  grids but the larger grid was found to be needed to effectively resolve the Stewartson layer.

Modelling of the spin-up process of the inner core has also been carried out by taking very small time steps,  $O(1 \text{ day})$ , and running the code for at most 30 simulated years. These simulations are initialized with either imposed poloidal magnetic field configuration, flow model 1 and no motion of the inner core. In these spin-up calculations, a  $395 \times 120$  numerical grid is used for the current-carrying dipole field model. For the uniform field calculations, a smaller computational shell grid is used. The shell is centered around the ICB and has a width of  $0.1R_C$  which allows the use of a  $50 \times 50$  grid. Both these grids have an equidistant nodal spacing of  $\Delta r = 7 \text{ km}$  radially. This grid spacing produces a simulated time step of 25 hours. Gradients in the  $\theta$ -direction were small and fewer points were needed to achieve adequate  $\theta$ -resolution.

### 2.6.1 Thermal wind flow results

The velocity field  $u_\phi$  acts on the imposed poloidal magnetic field to induce toroidal fields, which in turn produce electromagnetic torques on the inner core. The exterior magnetic field at the CMB is constructed by using the present day gauss coefficient for the axial dipole field,  $g_1^0 \simeq -30,000 \text{ nT}$ , from the International Geomagnetic Reference Field model (IAGA Division V, Working Group 8, 1996) and downward continuing to the CMB assuming the mantle to be a perfect insulator. This yields a value of  $B_o = -0.37 \text{ mT}$  in equations (2.12) and (2.14).

Figure 2.2 shows the results of a calculation after 25,000 simulated years for an imposed thermal wind of  $\Delta\Omega_{TW} = 3^\circ/\text{yr}$  interacting with a fundamental mode current-carrying dipole field (model 1a). The right side of the figure shows the angular velocity in shaded contours as well as lines of force of the poloidal field. The left side of the figure shows the shaded contours of the induced toroidal magnetic field intensity. The angular velocity increases linearly towards the ICB from zero at the CMB. The fluid rotates on solid-body discs at every level in  $z^*$ . The Stewartson layer truncation bends the angular velocity contours downwards for  $s > R_I$  so that large cylindrical fluid shears exist at the tangent cylinder wall and no further fluid motions exist outside of this shear layer. The contouring of the inner core is darker than that of the surrounding fluid in the “corner region” because the core is lagging behind the fluid.

The induced toroidal field contoured on the left hand side of Figure 2.2 is generated dominantly inside the tangent cylinder. The maximum toroidal field strength is located slightly below mid-height and close to the boundary of the tangent cylinder. The effect of the Stewartson layer is clearly visible in the contours of the toroidal field.

Time series of the rotation rate of the inner core, the maximum toroidal field in the core and the Joule heating in the core are plotted in Figure 2.3 for a  $3^\circ/\text{yr}$  thermal wind. The current-carrying dipole model reaches equilibrium with the inner core in prograde rotation, lagging the surrounding fluid by 29%, i.e.,

$$\Delta\Omega_{IC} = 0.71 \Delta\Omega_{TW} \quad (2.21)$$

In this calculation the maximum imposed thermal wind velocity,  $\Delta\Omega_{TW}$  is  $3^\circ/\text{yr}$  and the seismically observable inner core rotation rate,  $\Delta\Omega_{IC}$ , is  $2.13^\circ/\text{yr}$  (Figure 2.3a). As shown in Figure 2.3b, the maximum toroidal magnetic field generated by a  $3^\circ/\text{yr}$

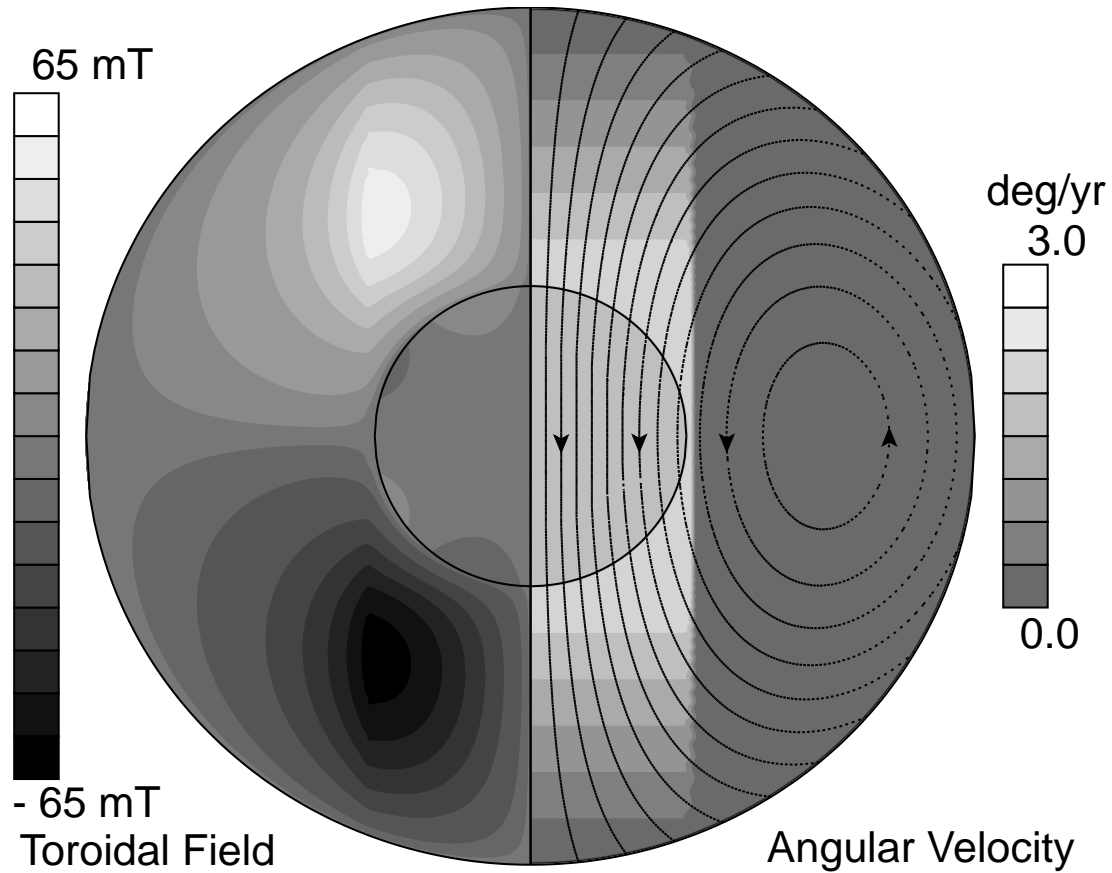


FIG. 2.2 – *Steady state results of the model with a current-carrying dipolar magnetic field and the  $3^\circ/\text{yr}$  thermal wind flow (model 1a). Contours of angular velocity relative to the mantle of the outer core fluid flow and the solid inner core are shown on the right hand side. Dipole field lines are superimposed on the angular velocity contours. Shaded contours of the induced toroidal field in militeslas are shown on the left side. The anomalous inner core rotation ( $\Delta\Omega_{IC} = 2.13^\circ/\text{yr}$ ) is indicated by the darker shading of the angular velocity contours inside the inner core relative to the surrounding fluid ( $\Delta\Omega_{TW} = 3^\circ/\text{yr}$ ). The maximum toroidal field is 62 mT.*

Model	$\Delta\Omega_{max}, \text{ }^\circ/\text{yr}$	$\Delta\Omega_{IC}, \text{ }^\circ/\text{yr}$	$B_{T_{max}}, \text{ mT}$	$P_J, \text{ GW}$
1a	3.0	2.13	60.8	571
1a	1.0	0.71	20.3	63.5
1b	3.0	2.56	17.3	53.2
1b	1.0	0.85	5.8	6.0
2a	3.0	1.87	78.3	899.4
2a	1.0	0.62	26.1	101.6
2b	3.0	2.12	34.6	194.3
2b	1.0	0.71	11.5	26.6
3	-0.13	-0.013	3.2	4.7

TABLE 2.3 – Results of numerical simulations of anomalous inner core rotation and toroidal field generation.  $\Delta\Omega_{max}$  is the maximum imposed angular flow velocity in a simulation,  $\Delta\Omega_{IC}$  is the resultant steady state anomalous inner core rotation rate,  $B_{T_{max}}$  is the maximum induced toroidal field value at steady state and  $P_J$  is the steady state Joule dissipation.

thermal wind is on the order of 60 mT. The Joule heating in the core is about 600 GW for this flow (Figure 2.3c).

The calculation shown in Figure 2.4 is similar to Figure 2.2 except that a uniform poloidal magnetic field has been imposed on the thermal wind flow (model 1b). In this case the inner core again lags behind the surrounding fluid, but by a smaller percentage than for the current-carrying dipole model. The toroidal field is centered closer to the CMB and the rotation axis than in the case shown in Figure 2.2. No evidence of a tangent cylinder is discernible in the toroidal field contours in Figure 2.4.

As shown in Figure 2.3a and Table 2.3, the inner core rotates at  $\Delta\Omega_{IC} = 2.56^\circ/\text{yr}$ , which corresponds to inner core prograde rotation with a lag of 15% behind the imposed  $3^\circ/\text{yr}$  thermal wind velocity:

$$\Delta\Omega_{IC} = 0.85 \Delta\Omega_{TW} \quad (2.22)$$

The toroidal field equilibrates after 20,000 years and has a maximum value of roughly 20 mT as shown in Figure 2.3b. This is a reduction by a factor of almost 3 from the toroidal fields found in the current-carrying dipole numerical solution and a factor of 2 from the analytical model (Aurnou et al., 1996). The Joule heating in the core is correspondingly decreased, and is roughly 50 GW, as shown in Figure 2.3b.

Figure 2.5 shows the results of thermal wind model 1 simulations with  $\Delta\Omega_{TW} = 1^\circ/\text{yr}$ . The inner core is again found to super rotate and lags behind the surrounding fluid by 15% in the uniform field model and by 29% in the current-carrying dipole field model. Relationships (2.21) and (2.22) are found to be valid for all values of the maximum thermal wind velocity.

### 2.6.2 X-wind flow results

Figure 2.6 shows the results of a calculation after 25,000 simulated years for an imposed X-wind flow of  $\Delta\Omega_{XW} = 3^\circ/\text{yr}$  interacting with a fundamental mode current-carrying dipole field (model 2a). The shaded contours on the right hand side shows how

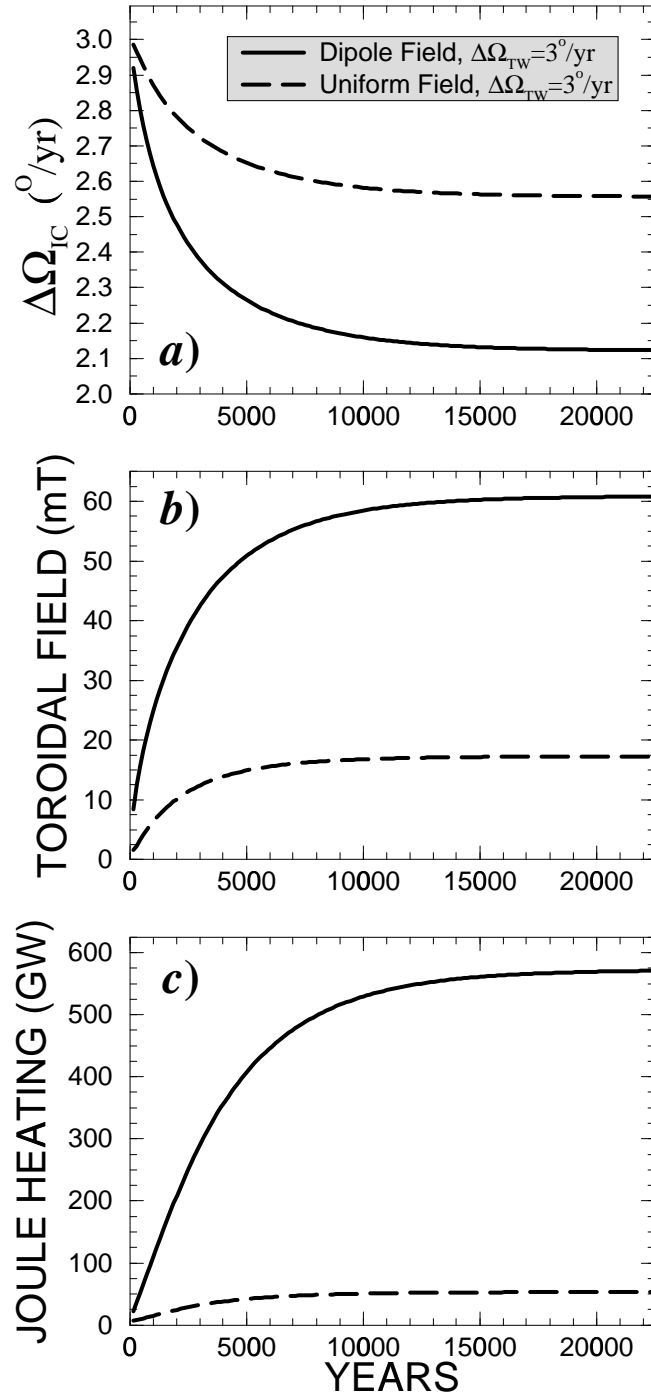


FIG. 2.3 – Time series plots of a) the anomalous rotation of the inner core  $\Delta\Omega_{IC}$ , b) the maximum induced toroidal magnetic field  $B_{T_{max}}$  and c) the Joule heating in the core resulting from a  $3^\circ/\text{yr}$  thermal wind acting on a current-carrying dipole and a uniform  $\hat{z}$  poloidal magnetic field. The calculations were made using a  $120 \times 120$  grid for 25,000 simulated years. Steady state is reached after approximately 20,000 years.

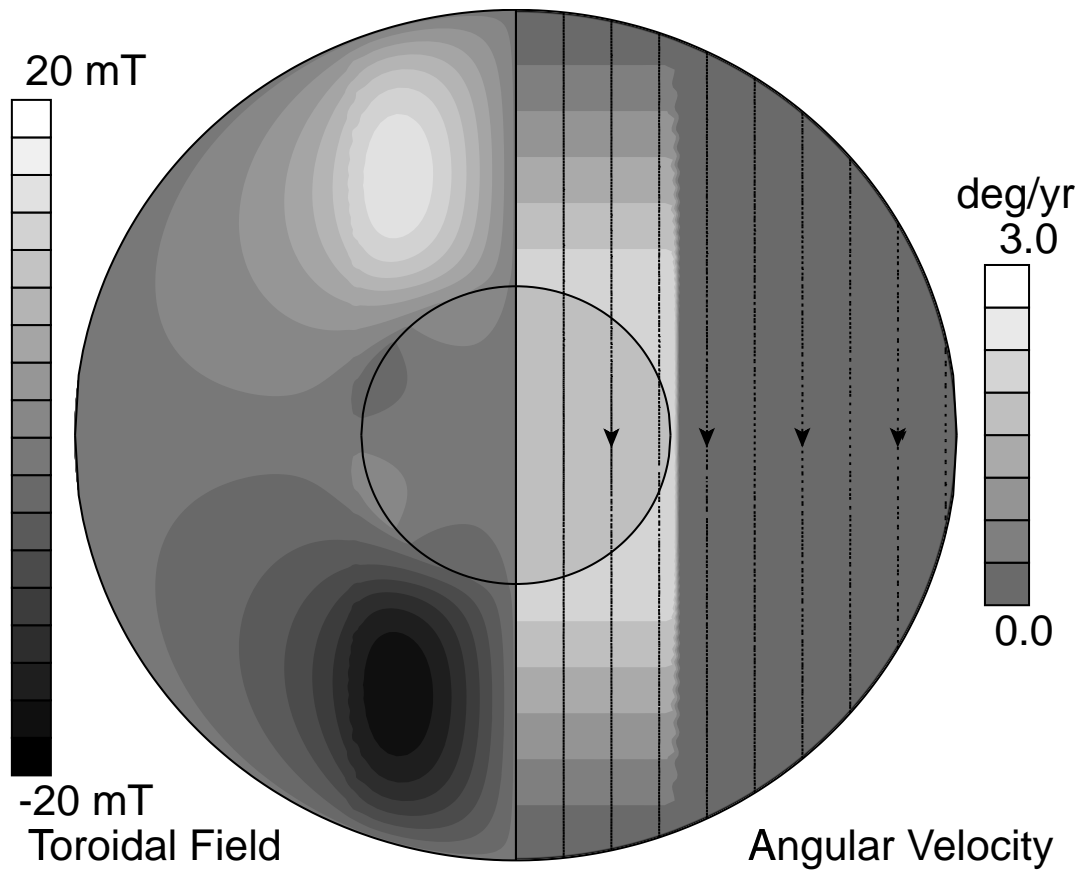


FIG. 2.4 – *Steady state results of the model with a uniform  $\hat{z}$  poloidal magnetic field and the  $3^\circ/\text{yr}$  thermal wind flow (model 1b). Contours of angular velocity relative to the mantle of the outer core fluid flow and the solid inner core are shown on the right hand side. Uniform  $\hat{z}$  field lines are superimposed on the angular velocity contours. Shaded contours of the induced toroidal field in militeslas are shown on the left side. The anomalous inner core rotation ( $\Delta\Omega_{IC} = 2.55^\circ/\text{yr}$ ) is indicated by the darker shading of the angular velocity contours inside the inner core relative to the surrounding fluid ( $\Delta\Omega_{TW} = 3^\circ/\text{yr}$ ). The maximum toroidal field is 17 mT.*

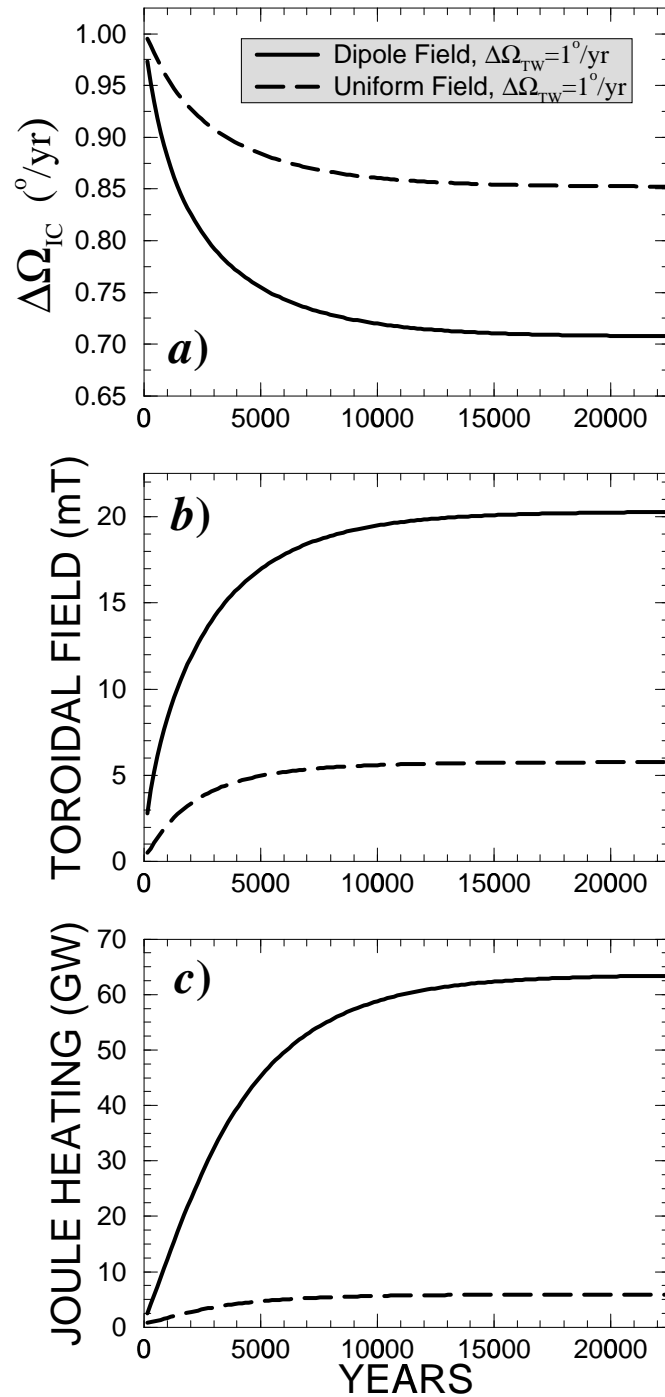


FIG. 2.5 – Time series plots of a) the anomalous rotation of the inner core  $\Delta\Omega_{IC}$ , b) the maximum induced toroidal magnetic field  $B_{T_{max}}$  and c) the Joule heating in the core resulting from a  $1^\circ/\text{yr}$  thermal wind acting on a current-carrying dipole and a uniform poloidal magnetic field (model 1a shown in Figure 2.2 and model 1b in Figure 2.4). The calculations were made using a  $120 \times 120$  grid for 25,000 simulated years. Steady state is reached after approximately 20,000 years.

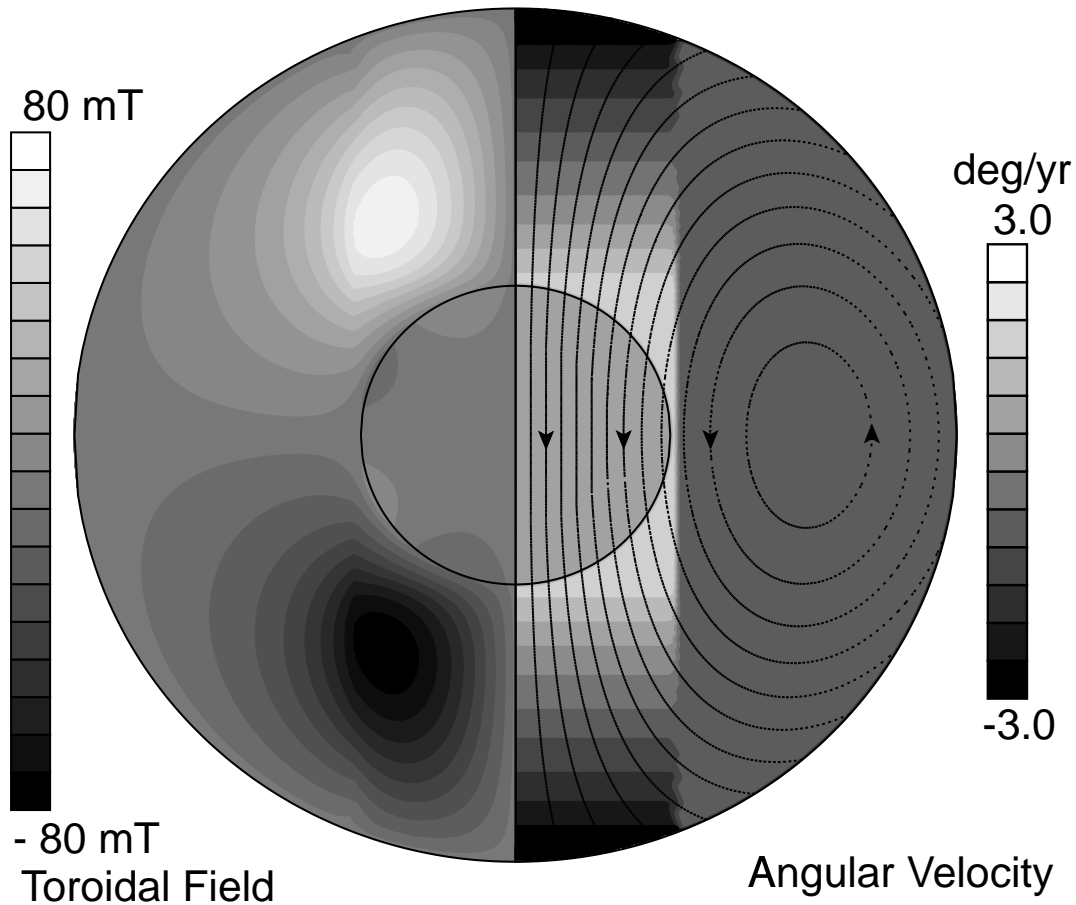


FIG. 2.6 – *Steady state results of the model with a current-carrying dipolar magnetic field and the  $3^\circ/\text{yr}$  X-wind flow (model 2a). Contours of angular velocity relative to the mantle of the outer core fluid flow and the solid inner core are shown on the right side. Dipole field lines are superimposed on the angular velocity contours. Shaded contours of the induced toroidal field in militeslas are shown on the left side. The anomalous inner core rotation ( $\Delta\Omega_{IC} = 1.87^\circ/\text{yr}$ ) is indicated by the darker shading of the angular velocity contours inside the inner core relative to the surrounding fluid ( $\Delta\Omega_{XW} = 3^\circ/\text{yr}$ ). The maximum toroidal field value is 78 mT.*

the angular velocity increases linearly from  $-3^\circ/\text{yr}$  at the CMB to  $+3^\circ/\text{yr}$  at  $z = R_I$ . The Stewartson layer truncation bends the angular velocity contours downwards for  $s > R_I$  and  $z < (R_C + R_I)/2$  but bends the angular velocity contours upwards for  $s > R_I$  and  $z > (R_C + R_I)/2$ . This changes the net effect of the Stewartson layer truncation between model 2 and model 1.

In this case, the inner core equilibrates with a prograde rotation rate of  $1.87^\circ/\text{yr}$ , which corresponds to an inner core lag of 37% behind the surrounding fluid.

$$\Delta\Omega_{IC} = 0.63 \Delta\Omega_{XW} \quad (2.23)$$

The maximum induced toroidal field by this model is almost 80 mT (see the shaded contours on the left-hand side of Figure 2.6) and the Joule dissipation is nearly 900 GW. The toroidal field maximum is located inside the tangent cylinder just below midheight. The Stewartson layer is visible in the shaded contours of the toroidal field on the left side of Figure 2.6, although it has less effect on the toroidal field than in the case shown in Figure 2.2.

Figure 2.7 shows the results of a calculation after 25,000 simulated years for an imposed X-wind flow of  $\Delta\Omega_{XW} = 3^\circ/\text{yr}$  interacting with the uniform  $\hat{z}$  magnetic field (model 2b). The inner core anomalous rotation is  $2.12^\circ/\text{yr}$  prograde which corresponds to an inner core lag of 29% behind the surrounding fluid, so that

$$\Delta\Omega_{IC} = 0.71 \Delta\Omega_{XW} \quad (2.24)$$

The maximum induced toroidal field by this model is about 35 mT and is located close to midheight inside the tangent cylinder and closer to the rotation axis than the toroidal field of model 2a. Thus, the location of the toroidal field maxima are similar in models 1 and 2. The Joule dissipation is just under 200 GW in this case.

The results in Figures 2.3 and 2.5 and Table 2.3 indicate that the maximum induced toroidal field is a linear function of the thermal wind velocity. In Figure 2.8 the maximum toroidal field,  $B_{T_{max}}$  is plotted versus  $\Delta\Omega_{IC}$  the seismically-observable inner core rotation rate produced by the thermal wind models. These relations are linear because both variables linearly vary with  $\Delta\Omega_{TW}$  in model 1 or with  $\Delta\Omega_{XW}$  in model 2. We find the following relationships between the maximum induced toroidal field intensity and the anomalous rotation rate of the inner core:

$$B_{T_{max}} = \begin{cases} 28.4 \Delta\Omega_{IC} & \text{Model 1a} \\ 6.7 \Delta\Omega_{IC} & \text{Model 1b} \\ 41.8 \Delta\Omega_{IC} & \text{Model 2a} \\ 16.4 \Delta\Omega_{IC} & \text{Model 2b} \\ 17.9 \Delta\Omega_{IC} & \text{Analytical model} \end{cases} \quad (2.25)$$

The maximum induced toroidal field depends strongly on the flow field and the structure of the poloidal field inside the core.

### 2.6.3 Results for westward drift flow

Figure 2.9 shows the results of the westward drift calculations (model 3) after 25,000 years of simulated time. As in Figures 2.2, 2.4, 2.6, 2.7 the right side of the figure shows shaded contours of angular velocity as a function of position in the core and line contours



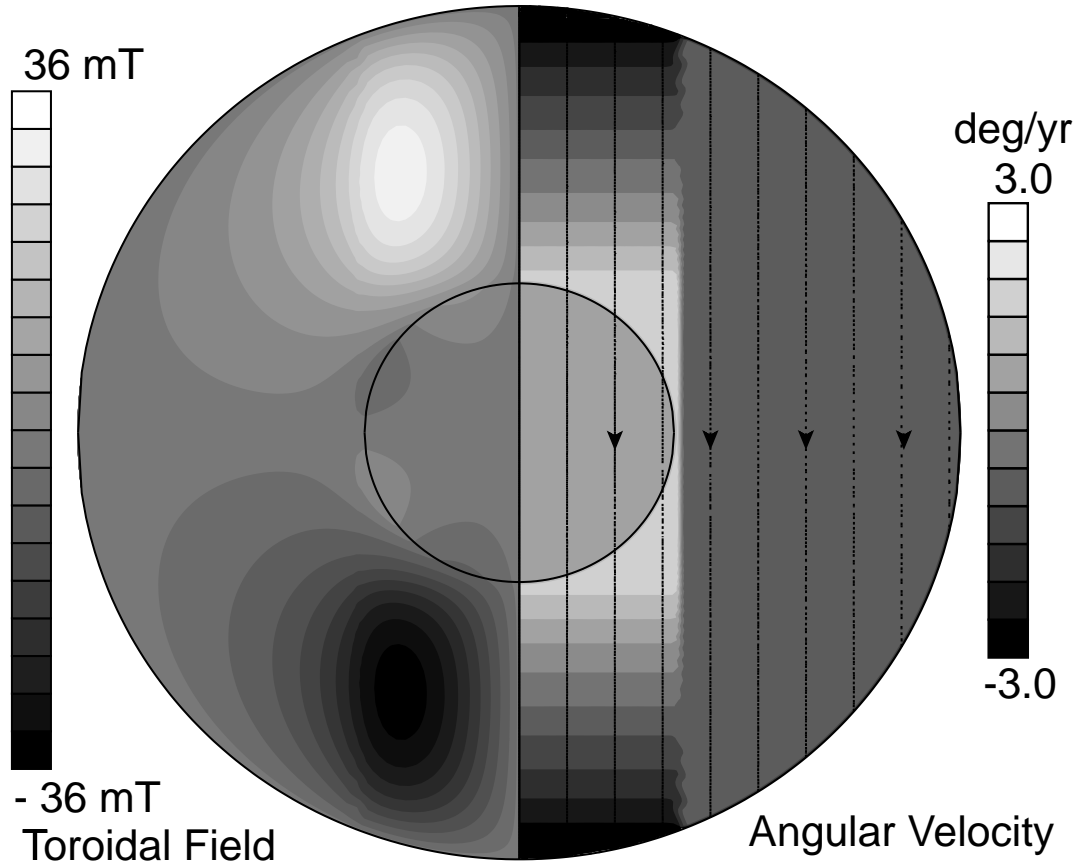


FIG. 2.7 – *Steady state results of the model with a uniform  $\hat{z}$  poloidal magnetic field and the  $3^\circ/\text{yr}$  X-wind flow (model 2b). Contours of angular velocity relative to the mantle of the outer core fluid flow and the solid inner core are shown on the right side. Uniform  $\hat{z}$  field lines are superimposed on the angular velocity contours. Shaded contours of the induced toroidal field in militeslas are shown on the left side. The anomalous inner core rotation ( $\Delta\Omega_{IC} = 2.13^\circ/\text{yr}$ ) is indicated by the darker shading of the angular velocity contours inside the inner core relative to the surrounding fluid ( $\Delta\Omega_{TW} = 3^\circ/\text{yr}$ ). The maximum toroidal field is 35 mT.*

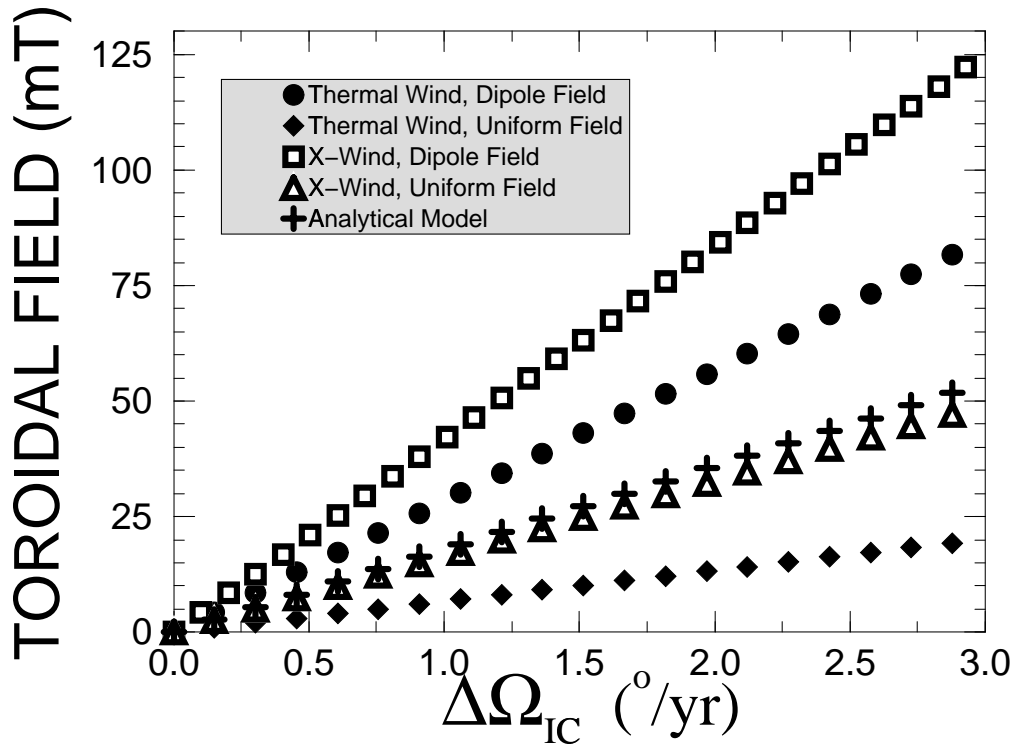


FIG. 2.8 – Maximum toroidal magnetic field  $B_{T_{max}}$  versus steady state anomalous inner core rotation rate  $\Delta\Omega_{IC}$  for five different models.  $B_{T_{max}}$  varies linearly as a function of the strength of  $\Delta\Omega_{IC}$  in the numerical models 1a, 1b, 2a and 2b as well as in the analytical model of Aurnou et al. (1996).

of the imposed poloidal magnetic field. The left side of the figure shows the induced toroidal magnetic field.

Qualitative and quantitative differences are apparent in comparing Figure 2.9 with the thermal wind calculations shown in Figures 2.2, 2.4, 2.6 and 2.7. The inner core is almost at rest with respect to the mantle, having a westward (retrograde) rotation rate of  $-0.013^\circ/\text{yr}$  as shown in Figure 2.10b. The toroidal field is concentrated outside of the tangent cylinder and attains a maximum value of roughly 5 mT (Figure 2.10c), typical of toroidal field amplitudes in the dynamo model of Kuang & Bloxham (1997). Figure 2.10d shows the Joule heat production in the core equilibrating to a value just under 5 GW in this simulation.

Jackson (1998) inferred the flow velocities inside the tangent cylinder to be between  $\omega = -0.09^\circ/\text{yr}$  and  $+0.22^\circ/\text{yr}$ . Adding a tangent cylinder flow of this magnitude will not affect the results of the westward drift model.

Figure 2.11 shows two magnetic field lines inside the Earth's core at steady state. The thin, inner field line is produced by a thermal wind simulation (model 1a with  $\Delta\Omega_{TW}=3^\circ/\text{yr}$ ), whereas the thick, outer field line is generated in a simulation of the westward drift flow (model 3). In both simulations the current-carrying dipole field model has been imposed. The westward drift field line enters the core at  $(r = R_C, \theta = \pi/3, \phi \simeq \pi/2)$  and exits the core at  $(r = R_C, \theta = 2\pi/3, \phi \simeq \pi/2)$ . The thermal

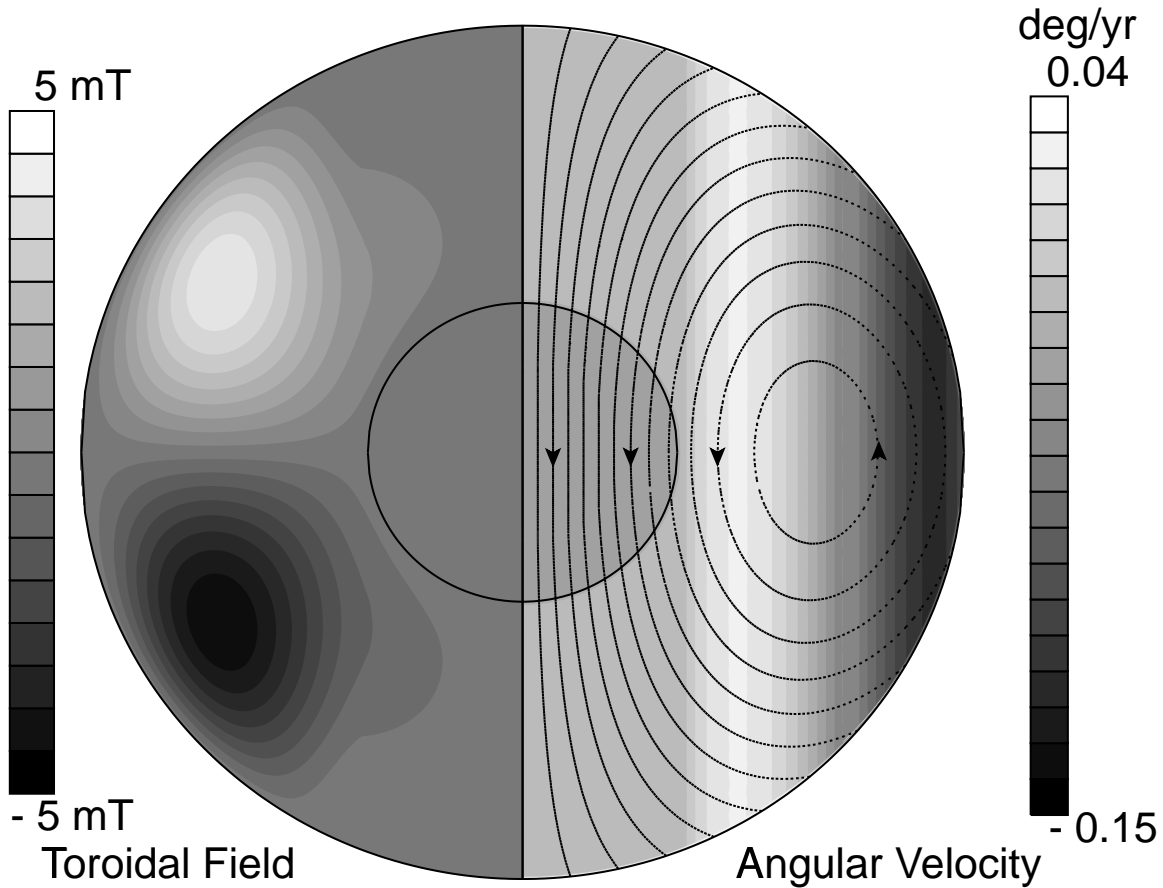


FIG. 2.9 – *Steady state results of the model with a current-carrying dipolar magnetic field and the concentric, cylindrical fluid flow model derived from geomagnetic westward drift (model 3). Contours of angular velocity relative to the mantle of the outer core fluid flow and the solid inner core are shown on the right side. Current-carrying dipole field lines are superimposed on the angular velocity contours. Shaded contours of the induced toroidal field in militeslas are shown on the left side. The inner core rotation is retrograde in this model,  $\Delta\Omega_{IC} = -0.013^\circ/\text{yr}$ , as is indicated by the darker shading of the angular velocity contours inside the inner core relative to the neighboring fluid. The fluid inside the tangent cylinder is motionless in this flow model. The maximum toroidal field is 5 mT.*

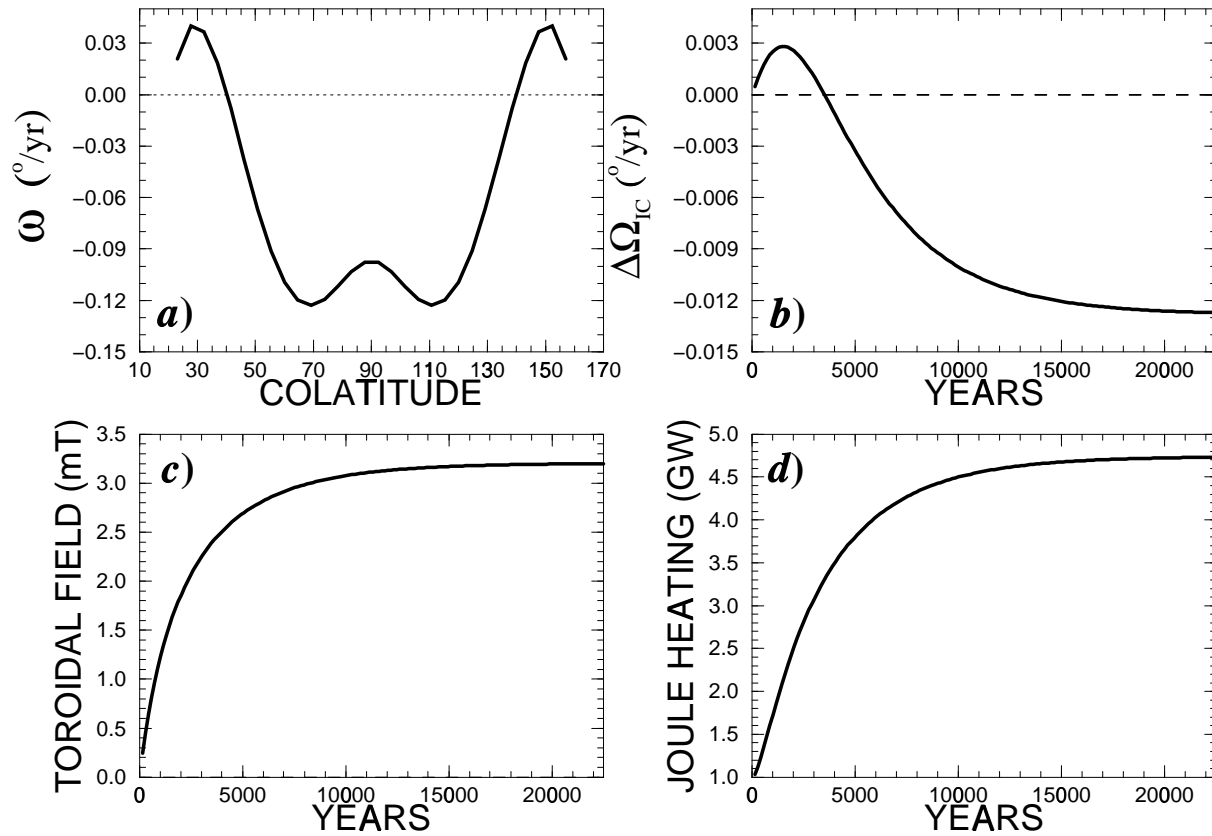


FIG. 2.10 – a) Angular velocity  $\omega(s)$  used in flow model 3, derived from geomagnetic westward drift (adapted from Jault et al., 1988), b) time series of the anomalous rotation of the inner core  $\Delta\Omega_{IC}$ , c) the maximum induced toroidal field  $B_{T_{max}}$  and d) the Joule heating produced by the interaction of this flow field with the current-carrying dipole field model.

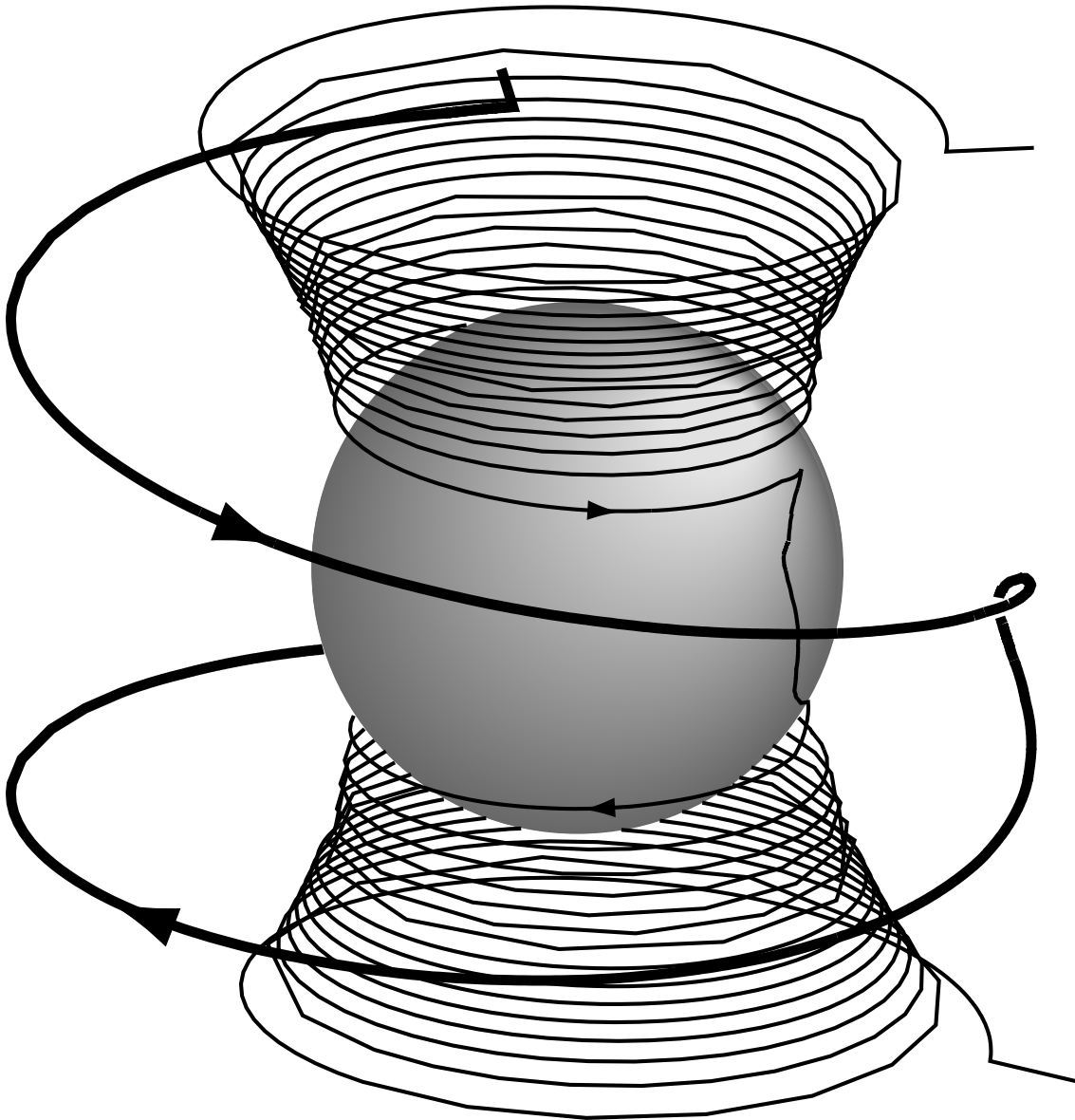


FIG. 2.11 – Geometry of magnetic field lines traversing the core. The thin, inner line is obtained at steady state from the thermal wind flow (model 1a) with  $\Delta\Omega_{TW} = 3^\circ/\text{yr}$ . The thick, outer field line is obtained at steady state from the westward drift flow (model 3).

wind field line enters the core at  $(r = R_C, \theta = \pi/6, \phi = 0)$  and exits at  $(r = R_C, \theta = 5\pi/6, \phi = 0)$ . The two field lines are located in different parts of the core such that each line passes close to the region of maximum toroidal field induction in that particular flow simulation.

Initially the field lines were purely poloidal but at the time shown, after 28,000 simulated years, the equilibrated magnetic fields have been wound up by the shearing fluid motions in the outer core, resulting in both poloidal and toroidal magnetic field components. The thin, inner field line produced in a thermal wind simulation has been wound into a dominantly toroidal field that lies mostly within the tangent cylinder. This field line penetrates the inner core near the equator. The thick, outer field line produced by the westward drift model is situated well outside the tangent cylinder. Though still dominantly toroidal, the magnetic field produced by the westward drift is much weaker than that of the thermal wind.

## 2.7 Spin-up of the inner core

Gubbins (1981) calculated the period of rotational oscillation of the inner core subject to electromagnetic torques, and calculated that in the presence of a uniform 0.5 mT poloidal field, oscillations of the inner core have a period of approximately 6 years and a decay time of approximately 11 years. Gubbins also found the length scale of the ICB magnetic boundary layers to be 15 km. Gubbins neglected the viscous torque on the inner core because he estimated it be 3-4 orders of magnitude less than the inner core electromagnetic torque, which agrees with the recent numerical calculations of Dormy et al. (1998).

We have carried out numerical calculations to determine the spin-up behavior of the inner core under the action of electromagnetic torques in our model. These calculations were begun by fixing the strength of the poloidal field  $B_o$  in equations (2.12) and (2.14) and the thermal wind at  $\Delta\Omega_{TW}$ . The inner core rotation rate  $\Delta\Omega_{IC}$  and the toroidal magnetic field were both initially zero as in all the other calculations.

The results of the spin-up calculations are shown in Figure 2.12. All the calculations were carried out using a  $3^\circ/\text{yr}$  thermal wind except in Figure 2.12b. Figure 2.12a compares the spin-up processes occurring for the different poloidal field models with  $B_o = -0.37$  mT in (2.12) and (2.14). The spin-up time for the uniform magnetic field model is roughly 25 years, while the spin-up of the current-carrying dipole model is roughly half that value at close to 12 years. Here we define the spin-up time as the time taken for the inner core to reach a quasi-steady rotation rate.

Figure 2.12b contrasts the spin-up of the inner core subjected to two different thermal wind strengths of  $1.1^\circ/\text{yr}$  and  $3^\circ/\text{yr}$ . The spin-up oscillations are in phase and, thus,  $\Delta\Omega_{TW}$  only controls the final angular velocity of the inner core.

Figure 2.12c demonstrates how the spin-up process varies as a function of the strength of the uniform  $\hat{z}$  poloidal magnetic field. Stronger poloidal fields generate stronger magnetic torques which increase the oscillation frequency of the inner core. This increase in the inner core oscillation frequency leads to thinner magnetic boundary layers that efficiently diffuse the ICB magnetic field so that the inner core equilibrates faster to the angular velocity of the surrounding fluid.

The highest value for the strength of the uniform  $\hat{z}$  magnetic field used in Figure

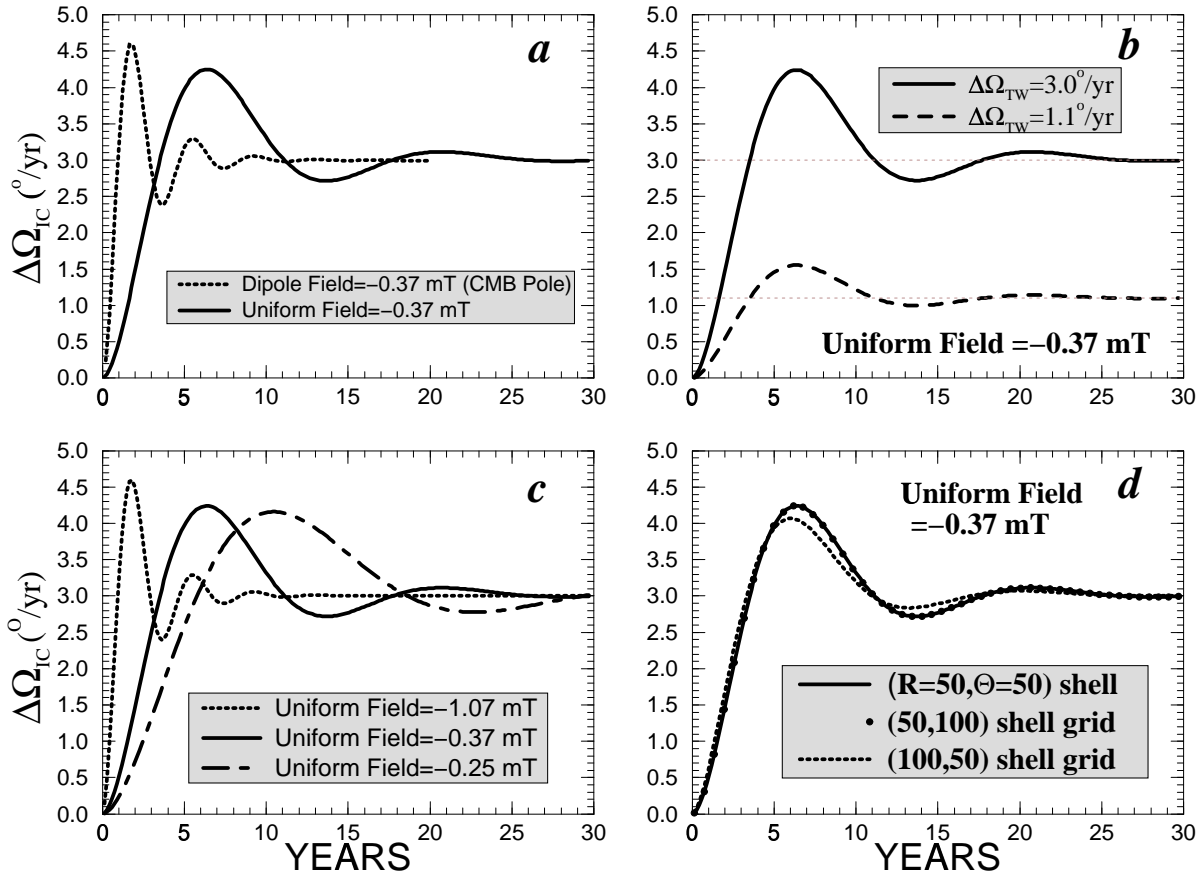


FIG. 2.12 – Evolution of the anomalous inner core angular velocity  $\Delta\Omega_{IC}$  versus time for (a) various poloidal magnetic field geometries and (Figures 2.12a and 2.12c) strengths, (b) differences in the strength of the imposed thermal wind  $\Delta\Omega_{TW}$ , and (d) the size and density of the computational grid.

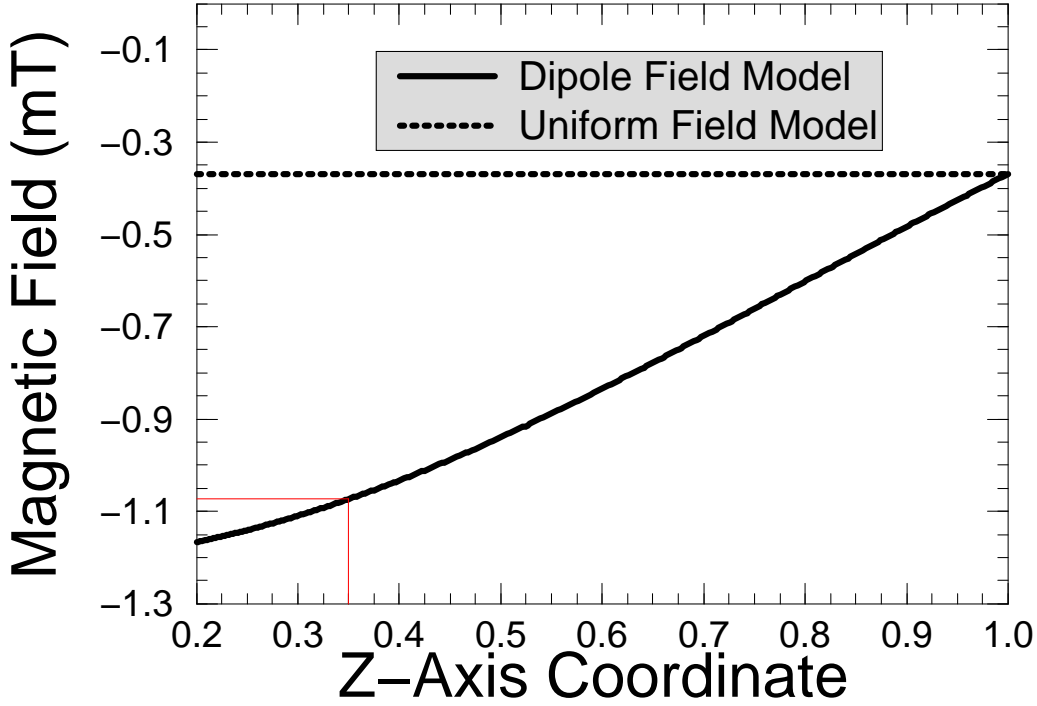


FIG. 2.13 – *Magnetic field strength versus the  $z$  axis coordinate inside the Earth's core. The magnetic field strength increases with depth for the current-carrying dipole model and is constant for the uniform  $\hat{z}$  field model.*

2.12c is  $B_o = -1.07$  mT which generates maximal inner core torques on the order of  $10^{18}$  Nm. When  $B_o = -0.37$  mT in equation (2.12), the strength of the poloidal magnetic field on the ICB is also  $-1.07$  mT, as shown in Figure 2.13. Comparing the spin-up for the current-carrying dipole field model having  $B_o = -0.37$  mT in Figure 2.12a with the spin-up for the uniform  $\hat{z}$  field model having  $B_o = -1.07$  mT in Figure 2.12c, we see that their spin-up time series are identical. Thus the strength of the poloidal magnetic field on the ICB is the dominant controlling mechanism of the inner core spin-up process.

Because the control of the spin-up process occurs in the magnetic boundary layer surrounding the ICB, the numerical domain was restricted for these calculations to a much smaller spherical shell centered around the ICB. An estimate for the thickness of an appropriate computational shell is the thickness of the magnetic boundary layer

$$\delta = \sqrt{\frac{\eta}{\omega}} \sim 20 \text{ km} \quad (2.26)$$

based on  $\eta = 2.65$  m<sup>2</sup>/s from Table 2.1 and the angular frequency of the oscillations,  $\omega = 2\pi/T$ , with oscillation period  $T \simeq 20$  years. This agrees with the length scale used by Gubbins (1981). After some experimentation, we have adopted a shell of thickness  $0.1R_C \simeq 350$  km, which extends roughly 10 boundary layer thicknesses on either side of the ICB. The shell calculations were run using the uniform poloidal field. The shell grid



used is  $50 \times 50$ . The current-carrying dipolar field was tested using the full computational grid at much higher radial resolution,  $395 \times 120$ , than for the toroidal field equilibration calculations discussed in sections 2.6.1 through 2.6.3.

Figure 2.12d shows the results of the shell calculations. By doubling the  $\theta$ -resolution to  $50 \times 100$  no change occurs in the spin-up, indicating that the boundary layer is well resolved in  $\theta$ . Doubling the radial resolution to  $100 \times 50$  produces a slightly more damped solution, indicating that the thickness of the magnetic boundary layer is even less than 20 km, and our fine grid is barely adequate to resolve the boundary layer properly. This seems to agree with the work of Glatzmaier & Roberts (1996) where their calculations produce a heavily damped spin-up which equilibrates within roughly 2 years.

## 2.8 Discussion

### 2.8.1 Physical mechanism

The combination of poloidal and toroidal magnetic fields at the ICB results in torques on the inner core (equation (2.3)). Differential flows in the outer core induce toroidal fields that diffuse onto the ICB and produce torques on the inner core. The difference in angular velocity across the ICB strongly shears any magnetic field lines that intersect the ICB surface. The toroidal field generated at this ICB shear layer leads to a second set of electromagnetic restoring torques. These secondary torques couple the inner core to the surrounding fluid so that the angular velocity of the inner core equilibrates to a value close to the angular velocity, or some weighted average of the angular velocity, of the fluid surrounding the inner core. Thus, the two torques balance in steady state, with the inner core lagging slightly behind the motion of the surrounding fluid.

### 2.8.2 Model comparisons

#### Analytical model

The steady state analytical model of inner core superrotation of Aurnou et al. (1996) produced a prograde superrotation of the inner core by imposing a prograde thermal wind inside the tangent cylinder. Their thermal wind flow field is similar to the one used here (model 1) excepting that the analytical model did not have a Stewartson layer at the tangent cylinder boundary. In the analytical model the angular velocity of the inner core was prograde and lagged the surrounding fluid by approximately 14%. Steady state toroidal fields of 20-55 mT were produced by inner core rotation rates  $\Delta\Omega_{IC}$  of 1.1 to 3°/yr, respectively. It was also shown that a temperature difference across the tangent cylinder of  $\sim 5 \times 10^{-4}$  K is required to set-up an inner core superrotation rate of 1.1°/yr.

#### Toroidal magnetic fields

The westward drift flow (model 3) produces an equilibrium toroidal field with a different spatial structure from the thermal wind flows (models 1 and 2). All the flow models produce large scale, large amplitude toroidal fields but the seat of the toroidal field produced by the thermal wind models is inside the tangent cylinder while

the westward drift model produces a toroidal field centered well outside the tangent cylinder (compare Figures 2.2, 2.4, 2.6, 2.7, 2.9 and 2.11). In the westward drift flow model the sign of the induced toroidal field is the same as that produced by a “hot” tangent cylinder thermal wind with the toroidal magnetic field directed to the east in the northern hemisphere and a directed to the west in the southern hemisphere as illustrated in Figure 2.9. The electromagnetic torque produced by this magnetic field configuration drives the inner core into retrograde motion. Because the fluid within the tangent cylinder is completely motionless in this model, the inner core comes into torque equilibrium with a very small westward angular velocity of  $-0.013^\circ/\text{yr}$  (Figure 2.10b).

This difference between the values of the inner core rotation rate predicted by the thermal wind models,  $\Delta\Omega_{IC} \simeq +2^\circ/\text{yr}$ , and the westward drift model,  $\Delta\Omega_{IC} \simeq -0.01^\circ/\text{yr}$ , may allow for observational tests of the two flow models.

While the comparisons between the westward drift model and the thermal wind models are fairly straight-forward as seen in Figure 2.11, the differences between the thermal wind models 1a and 1b are more subtle and understanding these differences can shed light on the processes occurring in the electromagnetic torque problem. The induced toroidal field in model 1a differs from model 1b because the Stewartson layer acts as a source of toroidal field only in model 1a. The horizontal fluid shears in the Stewartson layer couple with the horizontal components of the magnetic field in model 1a to produce strong toroidal fields inside the Stewartson layer. In model 1b the uniform  $\hat{z}$  magnetic field vector is completely insensitive to these horizontal shears. Thus the Stewartson layer increases the strength of the toroidal field in model 1a and acts to push the location of the maximum toroidal field values out in  $s$  toward the tangent cylinder wall. The toroidal field production in the Stewartson layer also allows one to trace the outline of the tangent cylinder in the toroidal field contours of model 1a (see Figure 2.2). No detectable signs of the tangent cylinder are visible in the toroidal field generated by model 1b (see Figure 2.4).

The difference in the induced toroidal fields between models 1a and 1b also occurs because the strength of the poloidal field is spatially variable in model 1a while remaining fixed in model 1b. Figure 2.13 compares the strength of the poloidal field between model 1a and model 1b as a function of height  $z$  in the core. The strength of the current-carrying dipole field triples in value from the CMB to the ICB which leads to stronger induced toroidal fields occurring deeper within the core in model 1a as compared to model 1b.

The gradient in  $\hat{z}$  of the imposed thermal wind is twice as strong in model 2 as in model 1. Thus the results in Table 2.3 show that model 2 produces greater lag of the inner core behind the surrounding fluid, stronger induced toroidal fields and higher Joule heating in comparison to model 1. A second difference between the thermal wind models is that in model 2a the intersection of the retrograde region of the X-wind flow with the Stewartson layer will create toroidal field of the opposite sense as found in the rest of that hemisphere. Thus, the symmetric X-shape of the thermal wind in model 2a leads to a toroidal field that is less concentrated near the edge of the tangent cylinder (see Figures 2.2 and 2.6).

In the uniform  $\hat{z}$  magnetic field models the  $\hat{z}$ -shear of the tangent cylinder fluid is twice as strong in model 2b as the shear imposed in model 1b. Since this shear is the only source of toroidal field generation in the fluid outer core for these two models, the

lag of the inner core as well as  $B_{T_{max}}$  in model 2b are twice that of model 1b.

The toroidal field generated in the uniform  $\hat{z}$  field model 1b is about one-third the toroidal field found in the analytical solution. This is due to the treatment of diffusion in the different models. In the analytical model we consider diffusion solely from the cylindrical volume of the tangent cylinder. The diffusion is only a function of radius  $s$  with a zero field boundary condition on the rotation axis and a zero radial flux condition on the tangent cylinder boundary. This is much more restrictive than the numerical problem where we allow diffusion to occur throughout the sphere with a zero toroidal field condition on the rotation axis and at the CMB.

The steady state toroidal field does not go to zero on the ICB in any of the numerical models even though the net electromagnetic torque on the inner core does vanish at equilibrium. The steady state ICB toroidal fields, which are on the order of  $10^{-2}B_{T_{max}}$ , are antisymmetric across the equator. If a purely positive ICB toroidal field existed in the northern hemisphere and a purely negative ICB toroidal field existed in the southern hemisphere then a retrograde electromagnetic torque would necessarily result (see equation (2.3)). However, there is also a change in the sign of the ICB toroidal field within each hemisphere in Figures 2.2, 2.4, 2.6 and 2.7 such that  $\Gamma_N$ , the northern hemisphere net axial torque

$$\Gamma_N = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{R_I^3}{\mu} B_r B_\phi \sin^2\theta \, d\theta d\phi \quad (2.27)$$

and  $\Gamma_S$ , the southern hemisphere net axial torque

$$\Gamma_S = \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{R_I^3}{\mu} B_r B_\phi \sin^2\theta \, d\theta d\phi \quad (2.28)$$

are separately equal to zero,  $\Gamma_N = \Gamma_S = 0$ . This result is also found in the dynamo simulations of Glatzmaier & Roberts (1995a,b,1996).

### Inner core rotation

The anomalous rotation rate of the inner core  $\Delta\Omega_{IC}$  is seen to decrease whenever the effects of the Stewartson layer or depth-dependent poloidal field strength act to induce larger toroidal fields  $B_{T_{max}}$  in the bulk of the core. The increase in toroidal field strength requires  $\Delta\Omega_{IC}$  to decrease so that the lag between the inner core and the surrounding fluid increases. This increase in lag generates a stronger opposing toroidal field on the ICB needed to establish a torque balance.

The westward drift flow model produces a steady state inner core rotation rate that is retrograde. Before reaching this steady state, Figure 2.10b shows that the inner core rotates eastward in the prograde direction. This initial prograde rotation of the inner core occurs because the magnetic field that first diffuses onto the ICB is induced by the reversed shear in the flow modeled at high latitudes in Figure 2.10a. After about 3500 years the magnetic field induced by the main shear in the westward drift model, located between  $30^\circ$  and  $150^\circ$  colatitude in 2.10a, diffuses onto the ICB and reverses the direction of the inner core rotation anomaly from prograde to retrograde.

The prograde rotation rate of the inner core,  $\Delta\Omega_{IC}$ , is  $0.85\Delta\Omega_{TW}$  in the case of a uniform field and  $0.86\Delta\Omega_{TW}$  in the analytical model. The close match between the

anomalous rotation rate for the analytical model and the uniform field model 1b is coincidental. The approximations made in the analytical model happen to produce almost the same inner core rotation as found for the uniform field model while generating a very different toroidal field in amplitude and spatial structure.

It should be reiterated that our simulations use kinematic models of the fluid flow in the outer core. In a fully dynamical simulation the electromagnetic torques act to change the flow field itself. For example, the electromagnetic torques that affect only the inner core rotation in model 3 would likely also spin-up the fluid within the tangent cylinder in a dynamical simulation.

### 2.8.3 Joule heat production

The Joule heat production as a function of time is plotted in Figures 2.3c, 2.5c and 2.10d. Steady state Joule heating rates are given for all the models in Table 2.3. The Joule heating  $P_J$  varies as the square of the maximum induced toroidal field value, according to the following formulas

$$P_J = \begin{cases} 0.149(B_{T_{max}})^2 & \text{Model 1a} \\ 0.148(B_{T_{max}})^2 & \text{Model 1b} \\ 0.142(B_{T_{max}})^2 & \text{Model 2a} \\ 0.148(B_{T_{max}})^2 & \text{Model 2b} \\ 0.340(B_{T_{max}})^2 & \text{Model 3} \end{cases} \quad (2.29)$$

where  $P_J = \int_{core} \frac{2}{\mu} (\nabla \times \mathbf{B})^2 dV$  is the total Joule heat production in the models shown in Figures and 2.3c, 2.5c and 2.10d.  $B_{T_{max}}$  is the maximum induced toroidal field in Figures 2.3b, 2.5b and 2.10c. The proportionality coefficients in (2.29) are the slopes of linear regressions of the time series of the joule dissipation,  $P_J$ , versus the square of the maximum induced toroidal field,  $B_{T_{max}}^2$ , for each of the models shown. All the linear regressions gave correlations coefficients  $0.999 < R^2 < 1$ . The proportionality coefficient in (2.29) for the westward drift model is more than twice that of the thermal wind models. This is due to the difference in the spatial structure of the induced fields produced by the two flow models: the normalized moment of the magnetic energy is greater in the case of the westward drift flow because the field is produced outside the tangent cylinder at greater  $s$  values. The fact that the coefficients for the four thermal wind models differ by less than 5% demonstrates the close correlation between their gross field structures.

The Joule heat production in the core is related to the total heat flux at the CMB as

$$P_J = \varepsilon P_{CMB} \quad (2.30)$$

where  $P_{CMB}$  is the total outward heat flux evaluated at the CMB and  $\varepsilon$  is an efficiency factor (Backus, 1975; Hewitt et al., 1975; Lister & Buffett, 1995). Lister & Buffett (1995) have estimated  $P_{CMB} = 3$  TW and  $\varepsilon = 0.2$  so that a typical estimate of the Joule dissipation in the core is roughly 600 GW.

The interaction of the current-carrying dipole field model with the  $3^\circ/\text{yr}$  flow model 1 produces nearly 600 GW and the  $3^\circ/\text{yr}$  X-wind flow model produces 900 GW of Ohmic dissipation, close to and over the thermodynamic limit estimated by Lister & Buffet. Considering that we do not take in to account Joule heat production at small length

Layer Thickness, km	$\Delta\Omega_{IC}$ , °/yr	$B_{T_{max}}$ , mT	$P_J$ , GW	$P_J/B_{T_{max}}^2$ , GW/mT <sup>2</sup>
50	2.150	58.82	519	0.145
100	2.129	60.46	565	0.149
150	2.108	62.17	613	0.154
200	2.087	64.05	663	0.157
250	2.068	66.01	714	0.159

TABLE 2.4 – Results of numerical simulations of model 1a with  $\Delta\Omega_{TW} = 3^\circ/\text{yr}$  subject to variations in thickness of the Stewartson layer. Layer thickness is the thickness of the Stewartson layer truncation in kilometers.  $\Delta\Omega_{IC}$  is the steady state anomalous rotation rate of the inner core,  $B_{T_{max}}$  is the maximum induced toroidal field at steady state, and  $P_J$  is the Joule dissipation in the core. The last column of data is the slope determined from a linear regression analysis of the time series of  $P_J$  as a function of  $(B_{T_{max}})^2$ .

scales as is likely to occur in the core (Brito et al., 1996), energy considerations suggest an upper bound close to  $3^\circ/\text{yr}$  for the strength of thermal wind flows inside the tangent cylinder.

#### 2.8.4 Stewartson layer

The results of models with differing thickness of the Stewartson layer are given in Table 2.4. The flow model used in these simulations was the thermal wind model 1a with a maximum angular velocity of  $\Delta\Omega_{TW} = 3^\circ/\text{yr}$ .

The anomalous inner core rotation rate,  $\Delta\Omega_{IC}$  in Table 2.4, decreases linearly with increasing Stewartson layer thickness while  $B_{T_{max}}$  linearly increases with the thickness of the layer. Thus, in flow model 1a, the Stewartson layer acts as a source of toroidal magnetic field which increases in source strength with layer thickness.

In the last column of Table 2.4 we show slope from the linear regression of the time series of the joule dissipation,  $P_J$ , versus the square of the maximum induced toroidal field,  $B_{T_{max}}^2$  for each of the Stewartson layer models. As in the section 2.8.3, all the linear regressions gave correlations coefficients  $0.999 < R^2 < 1$ . The ratio  $P_J/B_{T_{max}}^2$  increases with the Stewartson layer thickness because the moment of the magnetic energy increases in the core with increasing Stewartson layer thickness.

## 2.9 Conclusions

The combination of toroidal and poloidal magnetic fields exerts electromagnetic torques on the solid inner core, resulting in its anomalous spin. Our calculations indicate a close relationship between the anomalous rotation of the inner core and the generation of toroidal magnetic field by the  $\omega$  effect. The toroidal magnetic field is induced from the poloidal magnetic field by the azimuthal motions of the outer core fluid. In equilibrium, two opposing electromagnetic torques couple the inner core to the fluid motion such that the anomalous angular velocity of the inner core is proportional to the average angular velocity of the adjacent fluid.

Azimuthal motion consisting of cylindrical flow on geostrophic contours inferred from the geomagnetic westward drift induces toroidal magnetic field concentrated out-

side the tangent cylinder of the inner core and results in a small retrograde inner core rotation anomaly. This behavior is not compatible with the seismic interpretations of a prograde inner core rotation anomaly. In contrast, thermal wind azimuthal flow resulting from a positive temperature anomaly within the inner core tangent cylinder can easily account for the seismically inferred inner core rotation anomaly. This mechanism connects the toroidal field, which is concentrated along a Stewartson shear layer located at the inner core tangent cylinder, to the anomalous inner core rotation rate. For the current-carrying dipole field and the X wind flow model with  $\Delta\Omega_{IC} = 3^\circ/yr$  (Su et al., 1996),  $B_{T_{max}} \simeq 125$  mT; for  $\Delta\Omega_{IC} = 1.1^\circ/yr$  (Song & Richards, 1996),  $B_{T_{max}} \simeq 47$  mT; for  $\Delta\Omega_{IC} = 0.25^\circ/yr$  (Creager, 1997),  $B_{T_{max}} \simeq 10$  mT. Time-dependent calculations demonstrate that if the electromagnetic torque equilibrium is disturbed, the inner core rotation adjusts via damped oscillations having a periodicity of about 4 years and a spin-up time close to 12 years, in accord with both the analytical model of Gubbins (1981) and the Glatzmaier & Roberts (1996) numerical dynamo model.

## 2.10 Acknowledgements

This research was supported by the NSF Geophysics Program and the IGPP at Los Alamos. The authors wish to thank Andrew Jackson and two anonymous referees for useful comments and Jim Buttle for his help with the 3D graphics.



Quatrième partie

Couplage électromagnétique  
hétérogène à la frontière  
Noyau-Manteau





# Chapitre 1

## Introduction

L'étude du comportement du champ magnétique terrestre durant une inversion est importante pour la compréhension de la dynamo terrestre. Elle pourrait nous informer, en particulier, sur le couplage entre le noyau et le manteau. Si le manteau et le noyau étaient totalement découplés, le champ magnétique extrait du noyau ne serait jamais influencé par la structure tridimensionnelle du manteau terrestre. L'orientation du manteau par rapport au noyau, par exemple, serait arbitraire et les trajets du pôle magnétique vus en différents endroits du globe au cours d'inversions successives du champ magnétique seraient uniformément distribués en longitude.

Il existe cependant de nombreuses données paléomagnétiques suggérant que le chemin emprunté par le pôle durant une polarité transitoire (en cours d'inversion) n'est pas indépendant de la longitude, suggérant ainsi que la structure du manteau solide joue un rôle durant le processus d'inversion. Plusieurs études indépendantes ont vu ce confinement en longitude (Tric et al., 1991; Clement, 1991; Hoffman, 1992; Clement et al., 1995), mais la plus frappante d'entre elles provient de la compilation de Laj et al. (1991): cette compilation, regroupant tous les trajets des Pôles Géomagnétiques Virtuels (PGV) obtenus à partir de sédiments marins datant des 12 derniers millions d'années, indique deux chemins préférentiels d'inversion, un premier sous les Amériques et un second sous l'Asie, ces deux chemins étant séparés par environ  $180^\circ$  en longitude (figure 1.1). McFadden et al. (1993) ont démontré que le nombre de PGV situés dans le voisinage de ces deux bandes préférentielles est statistiquement bien supérieur à ce que l'on pourrait attendre d'une distribution uniforme des PGV à la Frontière Noyau-Manteau (FNM). Ces chemins coïncident avec des régions du manteau inférieur possédant de fortes anomalies sismiques (comparer les figures 1.1 et 3.3), suggérant un lien entre ces chemins et la structure ou la dynamique du manteau.

Cette interprétation a été amplement remise en question, en particulier par les paléomagnéticiens utilisant des données extraites de coulées volcaniques. En effet, des compilations de PGV produites à partir de mesures dans des roches volcaniques ne confirment absolument pas un confinement longitudinal pendant les inversions du champ magnétique (Valet et al., 1992; Prévot & Camps, 1993; Courtillot & Valet, 1995). Une mauvaise distribution des sites d'échantillonnage, des enregistrements du champ magnétique moins fiables dans les sédiments que dans les laves (Quidelleur & Valet, 1994), ou encore un

champ magnétique fortement non-dipolaire durant une polarité transitoire sont souvent cités comme responsables d'un artefact résultant en un confinement longitudinal des PGV (Gubbins & Coe, 1993; Barton & McFadden, 1996).

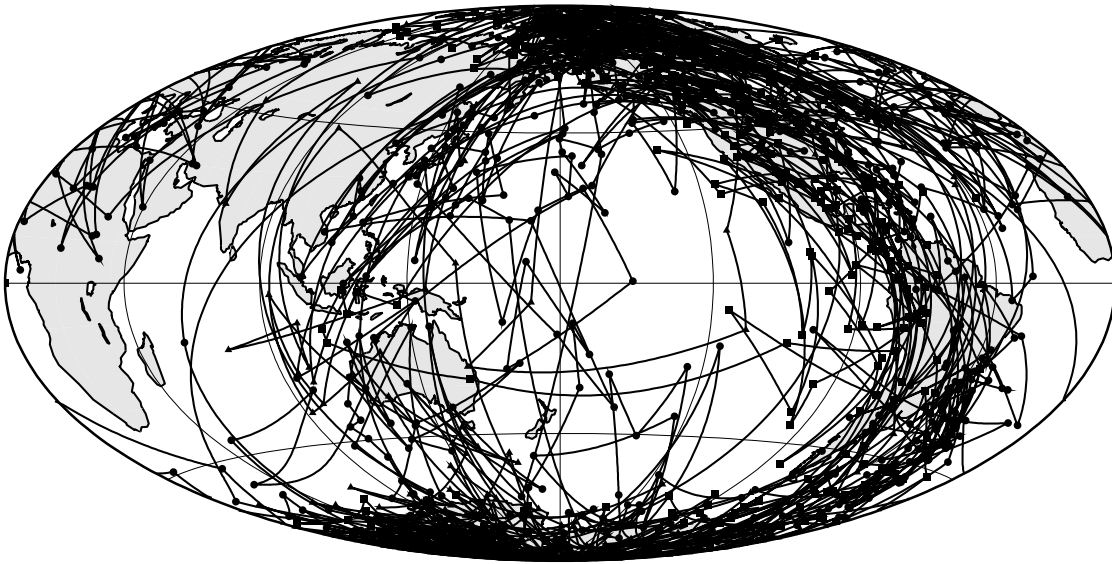


FIG. 1.1 – *Compilation des Pôles Géomagnétiques Virtuels (PGV) enregistrés pendant des inversions du champ magnétique dans des sédiments des 12 derniers millions d'années (Laj et al., 1991). Deux bandes longitudinales et antipodales semblent être préférentiellement suivies par les pôles durant les inversions: une bande sous les Amériques et une autre sous l'Asie.*

La structure du champ magnétique durant une inversion complique davantage la situation: plusieurs études paléomagnétiques semblent montrer que le champ magnétique transitoire reste dipolaire et se déplace d'un pôle géographique à l'autre par une simple rotation (Tric et al., 1991; Hoffman, 1992), mais il existe d'autres études démontrant que ce n'est pas toujours le cas (Glen et al., 1994). Gubbins & Coe (1993) et Gubbins (1994) ont montré qu'un champ magnétique partiellement non-dipolaire pourrait induire un confinement des PGV en longitude purement artificiel. Finalement, à l'heure actuelle, les différentes données paléomagnétiques produisent des images du champ magnétique transitoire très différentes et c'est pourquoi de multiples interprétations du processus d'inversion sont offertes.

En oubliant la controverse sur les données paléomagnétiques et en supposant, le temps de notre étude, que le confinement longitudinal des PGV est réel, ce que l'on connaît aujourd'hui de la structure mantellique et de la dynamique du manteau suggère que le manteau influence le comportement de la dynamo terrestre et les inversions du champ magnétique. Le large spectre d'hétérogénéités présentes dans la couche D'' à la base du manteau pourrait indiquer que d'importants paramètres physiques comme le flux de chaleur et la conductivité électrique varient fortement à la frontière Noyau-Manteau, coté manteau (Loper & Lay, 1995). Ces hétérogénéités pourraient influencer

les inversions géomagnétiques de plusieurs façons:

- une interaction thermique entre le noyau et le manteau pourrait induire des variations de flux de chaleur latérales sur la FNM, produisant un couplage thermique.
- une interaction électromagnétique entre le noyau et le manteau pourrait être induite par des hétérogénéités en conductance électrique à la FNM, produisant un couplage électromagnétique.

Le couplage thermique a déjà fait l'objet de calculs numériques simulant une convection thermique dans une sphère en rotation induite par des hétérogénéités de température ou des hétérogénéités de flux de chaleur sur la frontière externe de la sphère (Zhang & Gubbins, 1993b; Sun et al., 1994; Olson & Glatzmaier, 1996; Glatzmaier & Roberts, 1997). Le principal enseignement que l'on tire de ces simulations est que des hétérogénéités thermiques présentes à la FNM perturbent la structure de la convection dans le noyau en ajoutant une composante de l'écoulement liée à la structure du manteau. En utilisant des modèles de dynamo cinématique, Gubbins & Sarson (1994) ont montré qu'un écoulement dans le noyau "lié" au manteau par couplage peut perturber la dynamo et induire un confinement des pôles pendant une inversion du champ magnétique.

La seconde alternative basée sur le couple électromagnétique a été reçue avec scepticisme par les géomagnéticiens. Runcorn (1992, 1996) fut le premier à soumettre cette idée en montrant la différence radicale entre un couplage thermique et un couplage électromagnétique à la FNM. L'idée de Runcorn est que le couplage électromagnétique est faible durant les périodes de polarité stable comme aujourd'hui, mais durant une inversion, lorsque le champ magnétique devient très asymétrique par rapport à l'axe de rotation de la Terre, ce couplage augmente et peut induire une rotation différentielle entre le noyau et le manteau. Au lieu de coupler la convection dans le noyau à la structure du manteau comme dans le couplage thermique, les couples électromagnétiques génèrent une rotation du noyau jusqu'à ce qu'il se cale sur le manteau au niveau d'une position préférentielle, faisant apparaître le champ magnétique transitoire comme ancré sur le manteau jusqu'à la fin de l'inversion. Ce mécanisme est intrinsèquement plus simple que le couplage thermique car il ne nécessite pas d'explication sur la cause de l'inversion ni sur l'origine du champ magnétique.

Le modèle proposé par Aurnou et al. (1996) sur le confinement longitudinal des pôles durant les inversions magnétiques basés sur le couple électromagnétique à la FNM est poursuivi et complété dans notre étude. Dans le second chapitre, les hypothèses et les équations du modèle sont décrites. Dans le troisième chapitre, le couple "poloïdal" associé à la variation du flux magnétique à la FNM est calculé; il est calculé dans un premier temps avec un modèle analytique des variations de conductance électrique à la base du manteau, puis dans un second temps avec des modèles de variations de conductance basés sur des modèles de tomographie du manteau inférieur. Dans le quatrième chapitre, les couples électromagnétiques associés au déplacement à la FNM d'un champ magnétique dipolaire sont calculés. Dans le cinquième chapitre les trajectoires des PGV sont simulées numériquement pour deux modèles simples du champ magnétique transitoire. Enfin nous tirons les conclusions de cette étude dans le dernier chapitre.

Le couplage électromagnétique est étudié généralement dans d'autres contextes en Géophysique. Par exemple, il est invoqué pour expliquer la variation décennale de la longueur du jour (Stix & Roberts, 1984; Jault & Le Mouël, 1991; Holme, 1998). L'amplitude de ce couple est cependant incertaine puisqu'elle dépend à la fois de la conductivité électrique du manteau inférieur et de la structure du champ magnétique toroïdal, or, l'intensité et la géométrie du champ magnétique toroïdal sont inconnues à la FNM.

Le couplage électromagnétique n'est qu'un seul type de couplage parmi d'autres à la FNM. Le couplage topographique, par exemple, résultant de l'interaction des variations de pression dans le fluide avec la topographie de la frontière Noyau-Manteau en est un autre (Jault & Le Mouël, 1990; Greff-Lefftz & Legros, 1995); l'amplitude de ce couple est également peu contrainte étant donné que la topographie de la FNM est inconnue. Le couplage gravitationnel résultant des irrégularités du géoïde pourrait également coupler le manteau à la graine (Buffett, 1996a,b).

## Chapitre 2

# Présentation du modèle de couplage électromagnétique

Dans ce chapitre, la formule du couple électromagnétique sur le manteau est établie; ce couple résulte de l'interaction entre le champ magnétique provenant du noyau liquide et les courants électriques induits à la frontière Noyau-Manteau et dans la couche  $D''$ . La couche  $D''$  est modélisée par une coquille mince et conductrice avec des hétérogénéités latérales en conductance électrique (conductivité intégrée sur l'épaisseur de la couche) à la base du manteau.

### 2.1 Les hypothèses du modèle

Les hypothèses du modèle sont énumérées ci-dessous:

- Un modèle de Terre à trois couches est étudié:
  - (i) La première couche est le noyau liquide, infiniment conducteur et de rayon  $r_C$ .
  - (ii) La seconde couche est la couche  $D''$  en contact avec le noyau liquide. L'épaisseur  $D(\theta, \phi)$  de cette couche à la frontière Noyau-Manteau est hétérogène et la conductivité électrique  $\sigma_M(r)$  dépend du rayon.
  - (iii) La troisième couche est le manteau isolant.
 Ces couches sont illustrées sur les figures 2.1 et 2.2.
- Le champ magnétique issu du noyau est purement dipolaire. Les coordonnées du pôle Nord magnétique de ce dipôle à la frontière Noyau-Manteau sont  $(r_C, \theta_1, \phi_1)$  en coordonnées sphériques (voir figure 2.1).
- La fluidité du noyau lui permet d'être en rotation différentielle par rapport à l'axe de rotation du manteau. Dans notre modèle, la rotation relative est déterminée uniquement par la composante verticale ou axiale (parallèle à l'axe de rotation du manteau) du couple électromagnétique. Nous adoptons l'hypothèse du flux gelé associé à ces mouvements de rotation différentielle; cette hypothèse consiste à négliger le terme de diffusion du champ magnétique dans l'équation d'induction (Jacobs, 1987)

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \nabla \times (\vec{U}_N \times \vec{B}) + \underbrace{\eta \nabla^2 \vec{B}}_{\text{terme de diffusion}} \quad (2.1)$$

où  $\vec{B}$  est le vecteur champ magnétique,  $\vec{U}_N$  est la vitesse du fluide au sein du noyau et  $\eta$  est la diffusivité magnétique du noyau. Par conséquent, le déplacement du champ magnétique à la FNM est “gelé” au mouvement du fluide situé juste sous la FNM. La diffusion du champ magnétique est donc ignorée dans notre problème, bien qu’à l’échelle de temps des inversions ce terme pourrait être important (Gubbins, 1994).

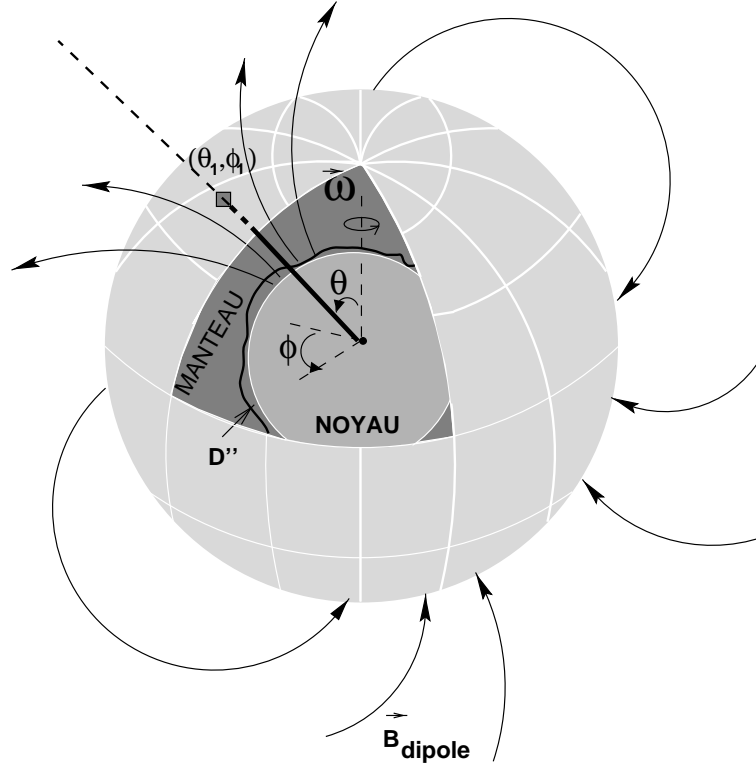


FIG. 2.1 – *Illustration du modèle de couplage électromagnétique à la frontière Noyau-Manteau. Le champ magnétique  $\vec{B}_{\text{dipole}}$  issu du noyau liquide est dipolaire; le pôle Nord magnétique de ce dipôle a pour coordonnées  $(r_C, \theta_1, \phi_1)$  à la frontière Noyau-Manteau. L'épaisseur de la couche  $D''$  conductrice à la base du manteau est hétérogène; elle est représentée en ligne continue. Le manteau est isolant. Le couple électromagnétique induit une rotation différentielle  $\vec{\omega}$  entre le noyau et le manteau selon l'axe de rotation du manteau.*

## 2.2 Le couple électromagnétique $\Gamma_M$ exercé sur le manteau

Le vecteur couple électromagnétique exercé sur le manteau est

$$\vec{\Gamma}_M = \int_{V_M} \vec{r} \times (\vec{J}_M \times \vec{B}) dV \quad (2.2)$$

où  $\vec{r}$  est le vecteur radial,  $\vec{J}_M$  est le vecteur densité de courant électrique dans le manteau,  $\vec{B}$  est le vecteur champ magnétique et  $V_M$  est le volume du manteau électriquement conducteur (Rochester, 1962).

Dans notre modèle, seule la composante de  $\vec{\Gamma}_M$  parallèle à l'axe de rotation du manteau joue un rôle dans la rotation entre le manteau et le noyau. Cette composante verticale  $\Gamma_M$  s'écrit à partir de (2.2)

$$\begin{aligned}\Gamma_M &= \vec{e}_z \cdot \int_{V_M} \vec{r} \times (\vec{J}_M \times \mathbf{B}) dV \\ \Gamma_M &= \int_{V_M} (\vec{J}_M \times \vec{B}) \cdot (\vec{e}_z \times \vec{r}) dV \\ \Gamma_M &= \int_{V_M} (\vec{J}_M \times \vec{B})_\phi r \sin \theta dV \\ \Gamma_M &= \int_{V_M} (J_{Mr} B_\theta - J_{M\theta} B_r) \sin \theta dV\end{aligned}\quad (2.3)$$

où  $\vec{e}_z$  est le vecteur unitaire parallèle à l'axe de rotation du manteau et les composantes de  $\vec{J}$  et  $\vec{B}$  sont écrites en coordonnées sphériques.

### 2.3 L'approximation de coquille mince pour la couche D''

Nous allons utiliser l'approximation de coquille mince pour la couche D''. En effet, dans la suite de cette étude l'épaisseur de la couche D'' est considérée bien inférieure au rayon du noyau:

$$D(\theta, \phi) \ll r_C \quad (2.4)$$

A la frontière entre la couche D'' et le manteau, au rayon  $r = r_C + D(\theta, \phi)$ , la condition de non-pénétration des courants électriques dans le manteau isolant s'écrit:

$$\begin{aligned}\vec{J}_M \cdot \vec{n} &= 0 \\ \text{avec } \vec{n} &= \vec{e}_r - \frac{1}{r_C} \frac{\partial D(\theta, \phi)}{\partial \theta} \vec{e}_\theta - \frac{1}{r_C \sin \theta} \frac{\partial D(\theta, \phi)}{\partial \phi} \vec{e}_\phi \\ \Rightarrow J_{Mr} - \frac{1}{r_C} \frac{\partial D(\theta, \phi)}{\partial \theta} J_{M\theta} - \frac{1}{r_C \sin \theta} \frac{\partial D(\theta, \phi)}{\partial \phi} J_{M\phi} &= 0\end{aligned}$$

On en déduit que les restrictions

$$\frac{1}{r_C} \frac{\partial D(\theta, \phi)}{\partial \theta} \ll 1, \quad \frac{1}{r_C \sin \theta} \frac{\partial D(\theta, \phi)}{\partial \phi} \ll 1, \quad (2.5)$$

permettent de négliger les courants électriques radiaux  $J_{Mr}$  devant les autres composantes  $J_{M\theta}$  et  $J_{M\phi}$  dans la couche D''. Les conditions (2.5) permettent en particulier de négliger le premier terme  $J_{Mr} B_\theta$  devant le second terme  $J_{M\theta} B_r$  dans l'intégrale (2.3). Les conditions (2.4) et (2.5) équivalent à traiter la couche D'' comme localement uniforme dans le cadre de l'approximation de coquille mince:  $J_{M\theta}$  est localement constante sur l'épaisseur de la couche D'', comme schématisé sur la figure 2.2.

Sous les hypothèses énumérées ci-dessus, l'expression (2.3) est intégrée à partir de la frontière Noyau-Manteau jusqu'en haut de la couche D''. On obtient l'intégrale de surface suivante pour expression générale du couple électromagnétique s'exerçant sur le manteau

$$\Gamma_M = -r_C \oint_{FNM} [J_{M\theta} B_r]_{r=r_C} D(\theta, \phi) \sin \theta dS \quad (2.6)$$



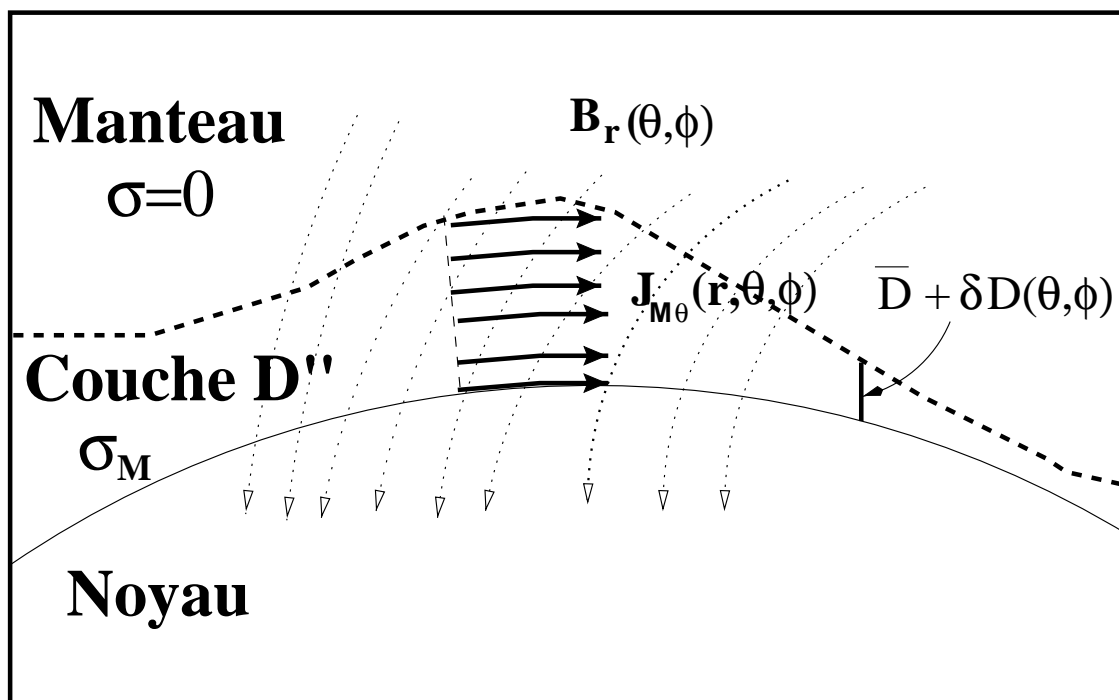


FIG. 2.2 – *Illustration du modèle à la frontière Noyau-Manteau. Le noyau liquide infiniment conducteur génère un champ magnétique dipolaire; les lignes de champ de la composante radiale  $B_r$  sont représentées. La couche  $D''$  d'épaisseur variable  $D(\theta, \phi)$  et de conductivité  $\sigma_M$  est le siège de courants électriques induits  $J_{M\theta}(\theta, \phi)$ ; dans l'approximation de coquille mince, ces courants induits sont localement uniformes sur l'épaisseur de la couche  $D''$ . Le manteau est isolant.*

## Chapitre 3

# Calcul statique du couple sur le manteau dû aux variations temporelles du flux magnétique d'un champ dipolaire à la frontière Noyau-Manteau

Dans ce chapitre, nous calculons le couple électromagnétique exercé sur le manteau induit par les variations temporelles de flux magnétique d'un dipôle stationnaire (en espace) à la FNM. Le couple  $\Gamma_{M \text{ flux}}$  dépend des variations latérales en conductance électrique de la couche  $D''$ . Le schéma de la figure 3.1 illustre le mécanisme de ce couplage électromagnétique.

Dans la première partie du chapitre, la formule générale du couple poloïdal  $\Gamma_{M \text{ pol}}$  est exprimée en fonction des coefficients de Gauss. Dans la deuxième partie,  $\Gamma_{M \text{ flux}}$  est calculé analytiquement en prenant un modèle simple des hétérogénéités de conductivité électrique à la FNM. Dans la dernière partie du chapitre,  $\Gamma_{M \text{ flux}}$  est calculé numériquement pour différents modèles d'hétérogénéités de conductivité électrique à la FNM basés sur des modèles récents de tomographie du manteau inférieur.

### 3.1 Calcul du couple poloïdal $\Gamma_{M \text{ pol}}$ en fonction des coefficients de Gauss

#### 3.1.1 Le couple poloïdal $\Gamma_{M \text{ pol}}$

L'expression de  $\Gamma_M$  obtenue en (2.6) va être reformulée en fonction des coefficients de Gauss afin d'écrire l'expression générale du couple poloïdal  $\Gamma_{M \text{ pol}}$ . Pour cela, on repart de l'expression générale de  $\Gamma_M$  écrite sous la forme d'une intégrale de volume en (2.3)

$$\Gamma_M = \int_{V_M} (J_{Mr} B_\theta - J_{M\theta} B_r) r \sin \theta dV \quad (3.1)$$

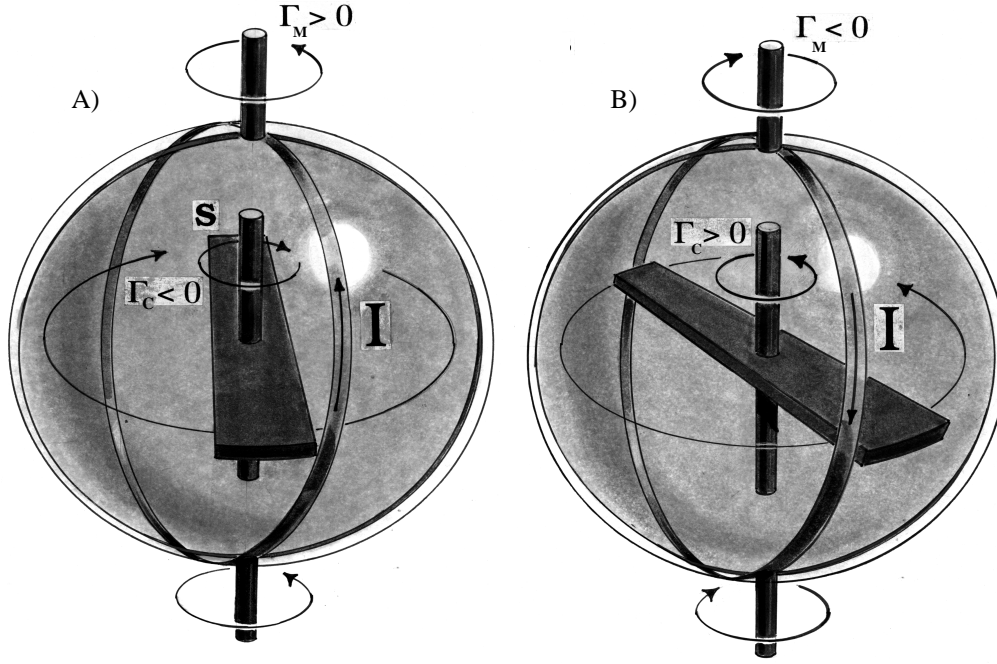


FIG. 3.1 – Schéma illustrant le couple électromagnétique associé aux hétérogénéités latérales de conductivité électrique à la FNM. La coquille sphérique extérieure représente le manteau. La barre aimantée représente le noyau avec un champ magnétique dipolaire. N et S représentent respectivement les pôles Nord et Sud magnétiques. Une boucle de courant électrique I est induite dans le manteau par la décroissance du champ magnétique du noyau. L'interaction entre la boucle de courant électrique et le champ magnétique génère des forces de Lorentz; le couple électromagnétique résultant de ces forces exerce un couple  $\Gamma_M$  sur le manteau, et un couple opposé sur le noyau  $\Gamma_C$ . Dans chacun des cas illustrés A) et B), lorsque la barre aimantée n'est pas dans le plan de la boucle de courant, le couple électromagnétique impose une rotation de la barre en direction des positions où le couple électromagnétique vaut zéro. Dans les deux cas A) et B) le couple est nul lorsque la barre est dans un plan perpendiculaire au plan défini par la boucle de courant.

Le champ magnétique dans le manteau s'écrit de façon standard avec un vecteur poloïdal  $\vec{P}$  (Jacobs, 1987)

$$\vec{B} = \vec{P} = \nabla \times \nabla \times (\vec{r}p)$$

où  $p$  est le scalaire poloïdal.

Les composantes de  $\vec{P}$  s'écrivent en coordonnées sphériques

$$\vec{P} = \left( \frac{1}{r} L^2 p, \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 p}{\partial r \partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 p}{\partial r \partial \phi} \right) \quad (3.2)$$

$$\text{avec } L^2 p = - \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) p$$

La loi d'Ampère donne les courants électriques dans le manteau

$$\vec{J}_M = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \nabla \times (\vec{r}p) = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \times (\vec{r}(\nabla^2 p))$$

dont les composantes en coordonnées sphériques sont

$$\vec{J}_M = \left( 0, -\frac{1}{\mu_0 \sin \theta} \frac{\partial(\nabla^2 p)}{\partial \phi}, \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial(\nabla^2 p)}{\partial \theta} \right) \quad (3.3)$$

A l'aide de (3.2) et (3.3), (3.1) se réduit à

$$\Gamma_M = \int_{V_M} \frac{1}{\mu_0} L^2 p \frac{\partial(\nabla^2 p)}{\partial \phi} dV \quad (3.4)$$

Dans la couche D'' conductrice, le champ magnétique obéit à l'équation de diffusion

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \lambda_M \nabla^2 \vec{B} \quad (3.5)$$

où  $\lambda_M = \frac{1}{\mu_0 \sigma_M}$  est la diffusivité magnétique de D'',  $\mu_0$  la perméabilité du vide et  $\sigma_M$  la conductivité électrique de la couche D''.

L'équation de diffusion pour le scalaire poloidal  $p$  se réécrit

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \lambda_M \nabla^2 p \quad (3.6)$$

En supposant que la conductivité électrique de la couche D'' est bien inférieure à la conductivité électrique du noyau

$$\sigma_M < \sigma_C \quad (3.7)$$

on en déduit les courants induits dans la couche conductrice en utilisant une perturbation  $p_1$  du champ magnétique provenant du noyau  $p_0$  (Roberts, 1972):

$$p = p_0 + p_1 + \dots \quad (3.8)$$

En écrivant (3.7), on a fait l'hypothèse que  $p_1$  est petit devant le potentiel du champ magnétique du noyau  $p_0$ . Au premier ordre, les variations temporelles de  $p_0$  induisent un courant électrique dans le manteau et (3.6) s'écrit

$$\frac{\partial p_0}{\partial t} = \lambda_M \nabla^2 p_1 \quad (3.9)$$

Finalement, en utilisant (3.6), (3.7) et (3.9), (3.4) devient le couple électromagnétique communément appelé le "couple poloidal" (Stix & Roberts, 1984) qui sera noté ici  $\Gamma_{M \text{ pol}}$

$$\Gamma_{M \text{ pol}} = \int_{V_M} \sigma_M L^2 p_0 \frac{\partial^2 p_0}{\partial t \partial \phi} dV \quad (3.10)$$

En utilisant l'approximation de coquille mince dans la couche  $D''$  décrite dans le chapitre précédent avec la condition (2.4), (3.10) est intégrée sur l'épaisseur  $D(\theta, \phi)$  de la couche  $D''$  et on obtient l'intégrale surfacique suivante

$$\Gamma_{M \text{ pol}} = \oint_{FNM} \left[ L^2 p_0 \frac{\partial^2 p_0}{\partial t \partial \phi} \right]_{r=r_C} C(\theta, \phi) dS \quad (3.11)$$

où la conductance dans la couche  $D''$  est définie localement par

$$C(\theta, \phi) = \int_{r_C}^{r_C + D(\theta, \phi)} \sigma_M(r) dr \quad (3.12)$$

### 3.1.2 Introduction des coefficients de Gauss

Le champ géomagnétique est généralement décrit à l'extérieur du noyau par un champ potentiel (Merrill et al., 1996)

$$\begin{cases} \vec{B} & = -\vec{\nabla} W \\ W(r, \theta, \phi) & = r_E \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{r_E}{r} \right)^{n+1} P_n^m(\cos \theta) (g_n^m \cos m\phi + h_n^m \sin m\phi) \end{cases} \quad (3.13)$$

où  $r_E$  est le rayon de la Terre,  $W$  est le potentiel magnétique,  $(g_n^m, h_n^m)$  sont les coefficients de Gauss et  $P_n^m$  sont les polynômes de Legendre normalisés par la convention de Schmidt.

Un champ magnétique poloïdal  $\vec{B}$  peut se décomposer en une somme de deux termes

$$\vec{B} = \nabla \times \nabla \times (p\vec{r}) = \vec{\nabla} \left( \frac{\partial}{\partial r} (rp) \right) - r \nabla^2 p \vec{e}_r$$

Au premier ordre dans l'équation (3.8), le champ potentiel s'écrit

$$\vec{B}_0 = \vec{\nabla} \left( \frac{\partial}{\partial r} (rp_0) \right) = -\vec{\nabla} W \quad (3.14)$$

En utilisant (3.13) et (3.14), on en déduit le potentiel scalaire  $p_0$

$$p_0(r, \theta, \phi) = r_E \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{n} \left( \frac{r_E}{r} \right)^{n+1} P_n^m(\cos \theta) (g_n^m \cos m\phi + h_n^m \sin m\phi) \quad (3.15)$$

A l'aide de (3.11), (3.15) et de la propriété des harmoniques sphériques  $L^2 p_0 = n(n+1)p_0$ , le couple électromagnétique poloïdal se réécrit

$$\begin{aligned} \Gamma_{M \text{ pol}} = \oint_{FNM} & \left[ r_E \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \frac{m}{n} \left( \frac{r_E}{r_C} \right)^{n+1} P_n^m(\cos \theta) (\dot{h}_n^m \cos m\phi - \dot{g}_n^m \sin m\phi) \right] \\ & \bullet \left[ r_E \sum_{n'=1}^{\infty} \sum_{m'=0}^{n'} (n'+1) \left( \frac{r_E}{r_C} \right)^{n'+1} P_{n'}^{m'}(\cos \theta) (g_{n'}^{m'} \cos m'\phi + h_{n'}^{m'} \sin m'\phi) \right] \\ & \bullet C(\theta, \phi) dS \end{aligned} \quad (3.16)$$

Le premier terme entre crochets dans (3.16) représente les courants électriques dans la couche  $D''$ : ces courants électriques sont induits par les variations temporelles ou flux du champ magnétique poloïdal à la FNM et se distinguent par la présence des dérivées en

temps des coefficients de Gauss  $\dot{g}_n^m = \frac{dg_n^m}{dt}$ ,  $\dot{h}_n^m = \frac{dh_n^m}{dt}$ . Le second terme entre crochets représente la composante radiale du champ magnétique poloïdal extrait du noyau.

Bien que la formulation générale (3.16) ait été écrite avec une conductivité dépendant du rayon  $\sigma_M(r)$  dans la couche  $D''$ , nous considérerons par la suite une conductivité uniforme en rayon afin de simplifier le problème.

Afin de mettre en évidence le rôle des hétérogénéités latérales en conductance électrique dans la couche  $D''$ , on écrit la conductance  $C(\theta, \phi)$  comme la somme d'un terme moyen  $\bar{C}$  et d'un terme représentant les hétérogénéités  $\delta C(\theta, \phi)$

$$C(\theta, \phi) = \bar{C} + \delta C(\theta, \phi) = \sigma_M \bar{D} + \sigma_M \delta D(\theta, \phi) \quad (3.17)$$

où  $\bar{D}$  est l'épaisseur moyenne de  $D''$  et  $\delta D(\theta, \phi)$  est le terme représentant les variations d'épaisseur de la couche  $D''$ .

En utilisant la formulation (3.17), le couple poloïdal (3.16) s'écrit maintenant comme la somme de deux termes

$$\Gamma_{M \text{ pol}} = \Gamma_{M \text{ pol} \bar{D}} + \Gamma_{M \text{ pol} \delta D}$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{M \text{ pol} \bar{D}} \\ \Gamma_{M \text{ pol} \delta D} \end{array} \right\} = \sigma_M r_E^2 \oint_{FNM} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left[ \frac{m}{n} \left( \frac{r_E}{r_C} \right)^{n+1} P_n^m(\cos \theta) (\dot{h}_n^m \cos m\phi - \dot{g}_n^m \sin m\phi) \right. \\ \left. \left[ \sum_{n'=1}^{\infty} \sum_{m'=0}^{n'} (n'+1) \left( \frac{r_E}{r_C} \right)^{n'+1} P_{n'}^{m'}(\cos \theta) \right. \right. \\ \left. \left. (g_{n'}^{m'} \cos m'\phi + h_{n'}^{m'} \sin m'\phi) \right] \right. \\ \left. \left\{ \begin{array}{l} \bar{D} dS \\ \delta D(\theta, \phi) dS \end{array} \right\} \right] \quad (3.18)$$

$\Gamma_{M \text{ pol} \bar{D}}$  est la contribution du couple électromagnétique sur le manteau induite par l'épaisseur moyenne  $\bar{D}$  de la couche  $D''$ , et  $\Gamma_{M \text{ pol} \delta D}$  est la contribution du couple électromagnétique sur le manteau induite par les hétérogénéités latérales  $\delta D(\theta, \phi)$  en épaisseur.

Le calcul de  $\Gamma_{M \text{ pol} \bar{D}}$  et  $\Gamma_{M \text{ pol} \delta D}$  à partir de (3.18) requiert d'une part un modèle d'évolution temporelle du champ magnétique poloïdal à la FNM donnant les coefficients  $g_n^m, h_n^m, \dot{g}_n^m, \dot{h}_n^m$ , et, d'autre part, un modèle de conductance électrique à la FNM donnant  $\bar{D}$  et  $\delta D(\theta, \phi)$ .

Dans la suite de ce chapitre, un dipôle stationnaire à la FNM dont l'intensité est en décroissance libre (mode propre diffusif) sera utilisé pour modéliser l'intensité du champ magnétique au cours du temps. Un premier calcul sera conduit analytiquement avec un modèle simple d'épaisseur de la couche  $D''$ , puis dans un second calcul numérique on utilisera des images tomographiques du manteau inférieur pour modèles des variations d'épaisseur de la couche  $D''$ .

## 3.2 Calcul analytique du couple poloïdal $\Gamma_{M \text{ flux}}$

La structure tridimensionnelle à la base du manteau inférieur est dominée par le degré deux des harmoniques sphériques (voir la figure 3.3 et la section suivante 3.3.1).

En particulier, la ceinture autour de l'océan Pacifique à vitesses sismiques élevées et la région sous l'Afrique et le centre du Pacifique à vitesses sismiques faibles suggèrent le modèle suivant pour les variations d'épaisseur de la couche  $D''$

$$D(\theta, \phi) = \bar{D} + \delta D(\theta, \phi) = \bar{D} + D_0 \sin^2 \theta \cos 2\phi \quad (3.19)$$

L'intégration de l'expression du couple électromagnétique poloïdal (3.18), avec pour modèle d'épaisseur de la couche  $D''$  l'expression (3.19), donne pour un champ magnétique dipolaire (degré 1 dans la formule (3.18))

$$\begin{cases} \Gamma_{M \text{ pol} \bar{D}} &= \sigma_M \left( \frac{r_E^6}{r_C^2} \right) \frac{8\pi}{3} \bar{D} \left[ \dot{\mathbf{h}}_1^1 \mathbf{g}_1^1 - \dot{\mathbf{g}}_1^1 \mathbf{h}_1^1 \right] \\ \Gamma_{M \text{ pol} \delta D} &= \sigma_M \left( \frac{r_E^6}{r_C^2} \right) \frac{16\pi}{15} D_0 \left[ \dot{\mathbf{h}}_1^1 \mathbf{g}_1^1 + \dot{\mathbf{g}}_1^1 \mathbf{h}_1^1 \right] \end{cases} \quad (3.20)$$

Les mesures d'intensités paléomagnétiques indiquent que l'intensité du champ magnétique chute typiquement d'un facteur compris entre 2 et 10 juste avant que l'inversion du champ ne commence (Valet & Meynadier, 1993). Puisque nous voulons précisément étudier un couplage Noyau-Manteau qui orienterait le noyau préférentiellement par rapport au manteau juste avant le début de l'inversion du champ, les données paléomagnétiques nous suggèrent de prendre un modèle simple de champ magnétique où l'intensité du dipôle est en décroissance libre au cours du temps.

L'expression d'un champ dipolaire d'intensité  $B_1$  et dont le pôle Nord magnétique est à la position  $(\theta_1, \phi_1)$  sur la FNM est écrite en fonction des coefficients de Gauss  $g_1^0(\theta_1, \phi_1)$ ,  $g_1^1(\theta_1, \phi_1)$  et  $h_1^1(\theta_1, \phi_1)$  en Appendice A. On en déduit l'expression générale d'un dipôle dont l'intensité  $B_1$  varie exponentiellement au cours de temps avec un facteur  $k$

$$\begin{cases} B_1 &= 2 \cdot \left( \frac{r_E}{r_C} \right)^3 \cdot \sqrt{(g_1^0)^2 + (g_1^1)^2 + (h_1^1)^2} e^{k \cdot t} \\ \dot{g}_1^1(\theta_1, \phi_1) &= k g_1^1(\theta_1, \phi_1) \\ \dot{h}_1^1(\theta_1, \phi_1) &= k h_1^1(\theta_1, \phi_1) \end{cases} \quad (3.21)$$

A l'aide des expressions (3.20) et de l'Appendice A, on obtient le couple électromagnétique poloïdal  $\Gamma_{M \text{ flux}}$  induit par la variation de flux magnétique à travers la FNM d'un champ magnétique dipolaire en fonction de la position du pôle Nord magnétique du dipôle  $(\theta_1, \phi_1)$

$$\begin{cases} \Gamma_{M \text{ flux} \bar{D}} &= 0 \\ \Gamma_{M \text{ flux} \delta D}(\theta_1, \phi_1, t) &= \sigma_M r_C^4 D_0 k \frac{4\pi}{15} B_1^2 e^{2kt} \left( \sin^2 \theta_1 \sin 2\phi_1 \right) \end{cases} \quad (3.22)$$

où  $k$  est le facteur représentant la variation temporelle du flux magnétique du dipôle (dans le cas d'un dipôle décroissant en intensité,  $k$  est négatif).

La contribution de l'épaisseur moyenne  $\Gamma_{M \text{ flux} \bar{D}}$  dans le couple électromagnétique  $\Gamma_{M \text{ flux}}$  est nulle car les courants électriques induits dans la coquille sphérique sont symétriques par rapport à l'équateur magnétique du dipôle; par conséquent les contributions des courants induits de part et d'autre de l'équateur s'annulent dans l'intégrale

(3.18). Mathématiquement,  $\Gamma_{M \text{ flux} \bar{D}}$  est nul à cause de l'orthogonalité des harmoniques sphériques. On en déduit que seules les variations latérales de conductance électrique contribuent à générer un couple électromagnétique  $\Gamma_{M \text{ flux} \delta D}$  lorsque l'intensité d'un dipôle stationnaire varie au cours du temps à la FNM.

La figure 3.2 A) représente les variations de  $\Gamma_{M \text{ flux}}$  obtenues en (3.22), pour un dipôle en décroissance libre ( $k < 0$ ), en fonction de la position du pôle ( $\theta_1, \phi_1$ ): quatre longitudes où le couple est nul séparent les régions à valeurs positives des régions à valeurs négatives de  $\Gamma_{M \text{ flux}}$ . L'interprétation des contours des valeurs de  $\Gamma_{M \text{ flux}}$  de la figure 3.2 A) est détaillée sur la figure 3.2 B): lorsque le pôle se trouve dans une région où le couple est positif, le manteau est accéléré et le noyau décéléralé. De même, lorsque le pôle se trouve dans une région où le couple est négatif, le manteau est décéléralé et le noyau accéléré. Les deux figures 3.2 A) et B) démontrent que le couple électromagnétique  $\Gamma_{M \text{ flux}}$  cherche à rapprocher le pôle du champ magnétique des deux courbes dynamiquement stables où  $\Gamma_M = 0$  (lignes épaisses sur 3.2 A) ), ou dit autrement,  $\Gamma_{M \text{ flux}}$  cherche à repousser le pôle des deux autres longitudes où  $\Gamma_M = 0$  également, mais qui sont des positions dynamiquement instables pour le dipôle. En raisonnant maintenant en termes d'épaisseur de la couche  $D''$ , les PGV ont donc tendance à être repoussés des zones à conductance élevée (régions épaisses de la couche conductrice  $D''$ ) et à être rapprochés des zones à conductance faible.

### 3.3 Calcul numérique du couple poloïdal $\Gamma_{M \text{ flux}}$ utilisant les modèles tomographiques

#### 3.3.1 Structure et conductivité électriques du manteau inférieur

Dans le calcul analytique de la partie précédente, la couche  $D''$  a été modélisée par une couche possédant de grandes variations de conductance électrique. L'existence ou non d'une telle couche avec des propriétés électriques hétérogènes demeure une question ouverte. Par exemple, Runcorn (1992) a interprété une faible variation séculaire dans le Pacifique comme étant l'évidence de l'existence d'une portion à conductivité élevée dans cette région du manteau inférieur. Yukutake (1993) prétend quant à lui que la faible variation séculaire dans le Pacifique est due à l'absence momentanée de termes non-dipolaire du champ magnétique dans cette région.

Les études sismologiques en cours à la FNM indiquent qu'il existe une couche hétérogène à la base du manteau inférieur; cette couche pourrait être le siège de grandes variations en conductivité électrique. Ces études sismologiques montrent qu'il existe des régions à la base du manteau où les vitesses des ondes de compression P sont très réduites. Dans ces régions dont l'épaisseur varie de 0 à 40 km, les vitesses d'ondes P sont ralenties d'environ 10% par rapport aux vitesses dans le manteau juste au dessus (Garnero & Helmberger, 1996). Cette couche est particulièrement épaisse sous le centre de l'océan Pacifique où les modèles globaux de tomographie indiquent une zone à vitesses lentes par rapport aux vitesses moyennes dans le manteau inférieur. Cette couche, ULVZ en anglais pour "Ultra Low Velocity Zone", n'a pas été détectée pour l'instant sous la ceinture autour du Pacifique où les modèles de tomographie indiquent des vitesses élevées. 35% de la FNM ont été explorés jusqu'à maintenant en utilisant des



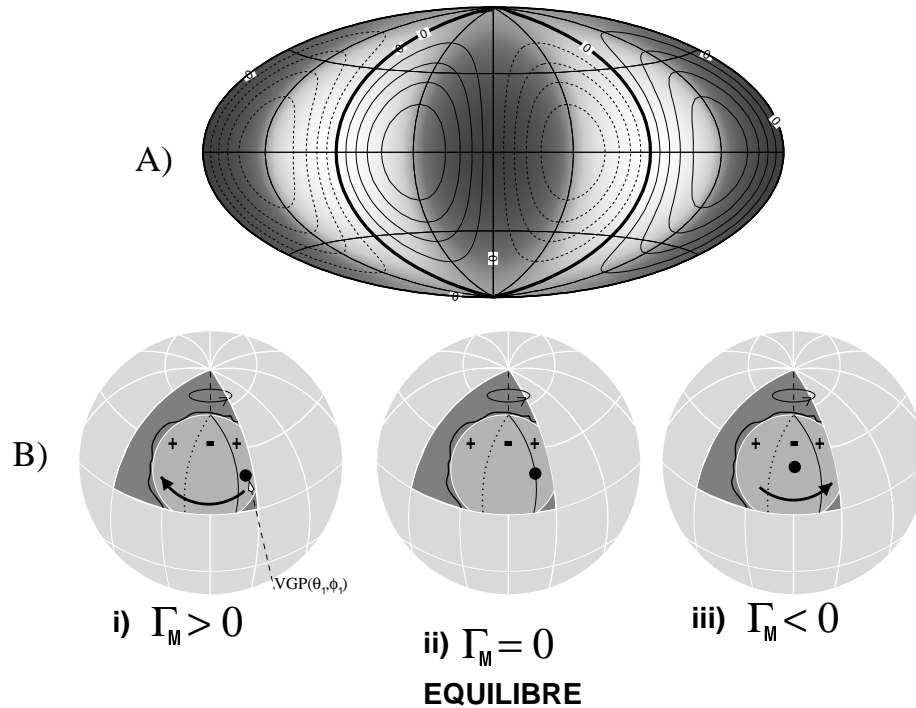


FIG. 3.2 – A) Valeur du couple électromagnétique  $\Gamma_{M \text{ flux}}$  exercé sur le manteau en fonction de la position du pôle du champ magnétique  $(\theta_1, \phi_1)$ . Calcul effectué en prenant une épaisseur de la couche  $D''$  conductrice variant avec l'harmonique sphérique  $P_2^2(\cos \theta)$ . Les lignes continues représentent les contours des valeurs positives de  $\Gamma_{M \text{ flux}}$ , et les lignes pointillées représentent les contours des valeurs négatives. Les surfaces grisées représentent les variations d'épaisseur de la couche  $D''$ , les surfaces foncées étant les régions épaisses et les surfaces claires étant les régions fines. Le couple électromagnétique est nul sur quatre longitudes ( $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  et  $270^\circ$ ) mais seules les deux lignes épaisses sont dynamiquement stables pour le dipôle. B) Interprétations de la figure A). Les couches successives des figures i), ii) et iii) sont la surface de la Terre, le manteau, la couche  $D''$  et le noyau. Les lignes pointillées et continues sont les frontières entre les régions où  $\Gamma_M$  change de signe. Le gros point  $\bullet$  représente la position instantanée (ou PGV) du champ magnétique transitoire. Situation i)  $\Gamma_M$  est positif, le manteau se met en rotation vers l'Est et le noyau vers l'Ouest (flèche). En supposant que le champ magnétique suive le mouvement du noyau (flux gelé) et que  $\Gamma_M$  soit le couple dominant, le PGV se déplace alors vers l'Ouest jusqu'à ce qu'il se retrouve dans une position stable. Situation ii) Le PGV se trouve sur une position d'équilibre stable où  $\Gamma_M = 0$ : si le PGV se déplace légèrement vers l'Est, la valeur positive de  $\Gamma_M$  ramène le PGV vers sa position initiale. De même, si le PGV se déplace légèrement vers l'Ouest, la valeur négative de  $\Gamma_M$  ramène le PGV vers la position stable (situation iii)). Un raisonnement similaire montre que les lignes pointillées sont dynamiquement instables. En conclusion, les PGV sont repoussés des régions très conductrices de la couche  $D''$  (en noir sur A)) et attirés par les régions peu conductrices (en blanc sur A)).

ondes diffractées *SPdKS* (Garnero et al., 1997), et les zones où la couche hétérogène a été repérée sont en corrélation avec les zones à vitesses faibles des modèles globaux de tomographie à la FNM. En outre, la FNM sous les Amériques bien que sondée par les ondes P diffractées, n'a pas révélé l'existence de cette couche or c'est justement une région où les modèles globaux de tomographie prédisent une vitesse élevée des ondes sismiques.

Une corrélation entre des régions ULVZ à la frontière Noyau-Manteau et des vitesses d'ondes faibles mesurées par la tomographie est précisément ce que l'on s'attend à voir à la base du manteau si la convection mantellique crée une zone dense, de composition chimique différente du reste du manteau. On peut penser, en effet, que la convection du manteau à grande échelle pourrait faire varier l'épaisseur de cette couche à la base de la FNM, de telle sorte qu'elle soit épaisse sous les panaches montants et fine sous les panaches descendants du manteau inférieur (Kellogg & King, 1993). Si l'on accepte cette interprétation, on comprend alors la corrélation entre les couches détectées ULVZ et la structure tomographique du manteau inférieur: dans ce cas, les variations à grandes échelles des vitesses sismiques du manteau inférieur reflètent des variations de densité associées à la convection dans le manteau.

La composition de cette couche distincte ne peut à l'heure actuelle que donner lieu à des spéculations. Il n'y a cependant que deux possibilités viables qui pourraient expliquer sa particularité: soit une fusion partielle, soit une couche enrichie en fer. Une couche en fusion partielle serait plus en accord avec les observations (Williams & Garnero, 1996). Il faut cependant remarquer que Poirier & Le Mouél (1992), en désaccord avec Jeanloz (1993), ont démontré que l'inclusion de fer liquide dans la couche D'' ne modifierait que légèrement la conductivité électrique de cette couche.

### 3.3.2 Calcul numérique

Dans la partie précédente nous avons émis l'hypothèse que les structures à grande échelle du manteau inférieur pourraient être reliées à la variation de conductance à la base du manteau. Dans cette optique, nous allons utiliser les structures du manteau inférieur imagées par la sismologie pour modéliser les variations de conductance dans la couche D''.

La figure 3.3 présente 5 modèles de variations de vitesses sismiques  $\delta v/v$  près de la base du manteau utilisés pour calculer la distribution de la valeur du couple poloïdal  $\Gamma_{M \text{ flux}}$  à la frontière Noyau-Manteau. Nous faisons l'hypothèse que les variations de vitesses sismiques à la base du manteau sont proportionnelles à l'épaisseur de la couche conductrice, si bien que l'on peut substituer  $\delta D$  dans le calcul du couple électromagnétique (équations (3.18)) par un facteur d'échelle provenant des modèles tomographiques. Plus spécifiquement, on utilise la relation

$$\delta D = -K \frac{\delta v}{v} \quad (3.23)$$

où le facteur d'échelle  $K$  est ajusté de telle sorte que l'épaisseur de la couche soit au maximum 40 km (Garnero & Helmberger, 1996).

La figure 3.4 représente les variations du couple électromagnétique exercé sur le manteau en fonction de la position du PGV, calculées avec les expressions (3.18), (3.21),

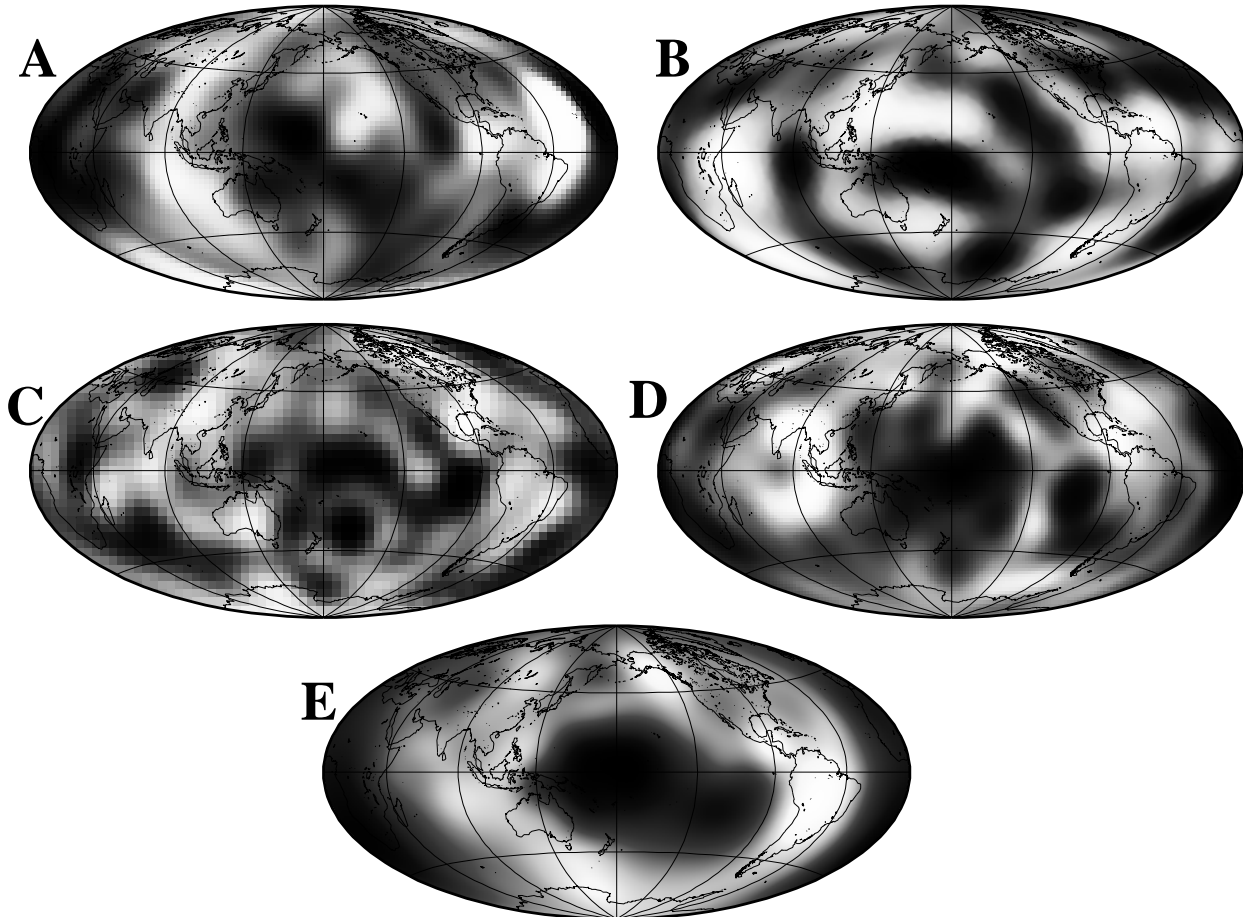


FIG. 3.3 – *Modèles de variation des vitesses sismiques près de la base du manteau utilisés pour calculer les couples électromagnétiques. Chaque figure représente les contours de  $\delta v/v$ , variant entre le noir (valeurs maximales) et le blanc (valeurs minimales). Les traces des continents ont été ajoutées pour référence. A: variation des vitesses d'ondes S (-3% à +8%) dans la couche D'' (pas de variation avec la profondeur près de la couche D'' pour ce modèle) (Sylvander & Souriau, 1996); B: variation des vitesses d'ondes P (-2.5% à +1.5%) à la profondeur 2886 km, modèle Pdiff96 (Wysession, 1996); C: variation des vitesses d'ondes S (-4.5% à +4%) à la profondeur 2886 km, modèle SAW12D (Li & Romanowicz, 1995); D: variation des vitesses d'ondes S (-4.5% à +3.5%) à la profondeur 2886 km, modèle SKS12 (Dziewonski et al., 1996); E: variation des vitesses d'ondes S (-4% à +3%) à la profondeur 2886 km, modèle S16B30 (Masters et al., 1996).*

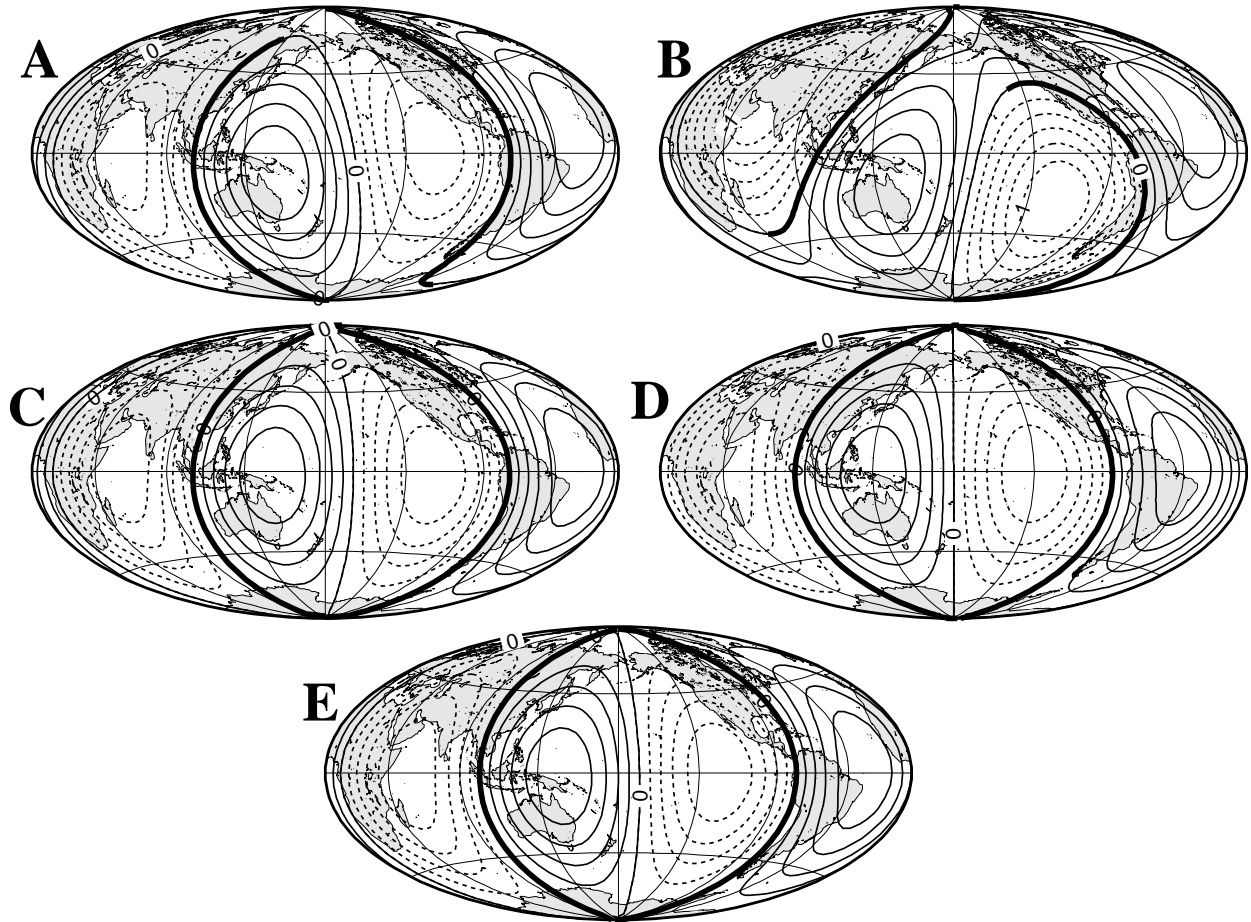


FIG. 3.4 – Composante axiale du couple électromagnétique  $\Gamma_{M \text{ flux}}$  exercé sur le manteau, en fonction de la position du PGV pour un champ magnétique dipolaire, stationnaire, décroissant en intensité. Les couples électromagnétiques sont calculés avec les modèles tomographiques de la figure 3.3 comme modèles d'épaisseur de la couche  $D''$ . Les lignes continues et pointillées représentent respectivement les contours des valeurs positives et négatives du couple. Les deux lignes épaisses sur chaque figure sont les positions dynamiquement stables où les couples électromagnétiques sont nuls.

(3.23) et les cinq modèles tomographiques de la figure 3.3 pour modèles d'épaisseur de la couche  $D''$ . Les lignes épaisses sur cette figure sont les positions où le couple est nul et où la position du PGV est dynamiquement stable (pour les mêmes raisons que sur la figure 3.2). Quatre des cinq modèles tomographiques donnent des positions stables selon deux lignes remarquablement longitudinales, l'une au dessus des Amériques et l'autre au travers de l'Asie du Sud-Est. Les cinq différents modèles donnent qualitativement les mêmes positions car  $\Gamma_{M \text{ flux}}$  est, dans le cas d'un champ magnétique dipolaire, un produit entre un champ magnétique de degré 1 en harmoniques sphériques et une structure du manteau inférieur largement dominée par un degré deux en harmoniques sphériques, quel que soit le modèle tomographique. Par conséquent, il n'est pas surprenant que ces modèles d'épaisseur de la couche  $D''$  basés sur les modèles tomographiques donnent des positions stables pour les PGV très rapprochées des positions stables obtenues au moyen du calcul analytique présenté sur la figure 3.2A); en effet le calcul analytique a été effectué avec une épaisseur de la couche  $D''$  proportionnelle au degré 2 des harmoniques sphériques (voir expression (3.19)).

### 3.4 Conclusion de l'étude statique

Dans ce chapitre nous avons calculé le couple électromagnétique poloïdal  $\Gamma_{M \text{ flux}}$  exercé sur le manteau, induit par la décroissance d'un champ magnétique dipolaire, stationnaire à la frontière Noyau-Manteau, en supposant que les variations de conductance électrique de la couche  $D''$  à la base du manteau sont dominées par le degré 2 des harmoniques sphériques. Nous avons formalisé le calcul de Aurnou et al. (1996) en dérivant une expression du couple électromagnétique poloïdal dépendant des variations temporelles de l'intensité du champ magnétique à la FNM. Nous avons montré qu'une variation d'épaisseur de la couche  $D''$  proportionnelle au degré 2 des harmoniques sphériques est un modèle fidèle de l'épaisseur déduite des modèles tomographiques du manteau inférieur.

En ne considérant que le couple électromagnétique poloïdal  $\Gamma_{M \text{ flux}}$  calculé, les deux positions stables du noyau par rapport au manteau sont situées approximativement selon les bandes préférentielles longitudinales obtenues dans la compilation des PGV de Laj et al. (1991). Aurnou et al. (1996) ont conclu sur la base d'arguments qualitatifs que l'amplitude du couple électromagnétique poloïdal est suffisamment importante pour mettre le noyau en rotation et l'orienter préférentiellement selon les positions stables. Dans les deux prochains chapitres, ces conclusions sont testées en incorporant le couple électromagnétique poloïdal  $\Gamma_{M \text{ flux}}$  au sein d'un modèle dynamique tenant compte de tous les couples électromagnétiques exercés sur le manteau lors du déplacement d'un champ magnétique dipolaire à la FNM, et où la rotation différentielle entre le noyau et le manteau est calculée explicitement.

## Chapitre 4

# Calcul du couple associé au déplacement d'un champ magnétique dipolaire à la frontière Noyau-Manteau

Dans le chapitre précédent, nous avons calculé le couple électromagnétique poloïdal axial exercé sur le manteau, induit par les variations temporelles de l'intensité d'un champ magnétique stationnaire à la FNM. Or, si le couple poloïdal axial en un point de la FNM est non-nul, le noyau et le champ magnétique se retrouvent en rotation différentielle selon l'axe de rotation du manteau d'après notre hypothèse de flux gelé. Cette rotation différentielle entre deux conducteurs, le noyau et la couche D'', génère à son tour un couple électromagnétique que nous calculons explicitement dans ce chapitre. Dans les pages suivantes nous calculons également le couple électromagnétique exercé sur le manteau lorsqu'une source interne au noyau génère un mouvement du dipôle en latitude (selon  $\vec{e}_\theta$ ).

Notons encore que dans la suite de cette étude, l'expression analytique (3.19) sera utilisée comme modèle des variations d'épaisseur de la couche D''.

### 4.1 Calcul du couple poloïdal $\Gamma_{M \text{ pol rot}}$ dû à la rotation du champ magnétique à la frontière Noyau-Manteau

La formule générale du couple poloïdal obtenue en (3.18) s'écrit dans le cas d'un dipôle:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{M \text{ pol } \bar{D}} \\ \Gamma_{M \text{ pol } \delta D} \end{array} \right\} = \sigma_M r_E^2 \oint_{FNM} \left( \frac{rE}{r_C} \right)^2 \sin \theta (h_1^1 \cos \phi - \dot{g}_1^1 \sin \phi) \\ 2 \left( \frac{rE}{r_C} \right)^2 \left( (\cos \theta) g_1^0 + \sin \theta (g_1^1 \cos \phi + h_1^1 \sin \phi) \right) \\ \left\{ \begin{array}{l} \bar{D} dS \\ \delta D(\theta, \phi) dS \end{array} \right\} \quad (4.1)$$

Les dérivées en temps des coefficients de Gauss, en fonction de la vitesse de déplacement du pôle Nord magnétique  $(\dot{\theta}_1, \dot{\phi}_1)$  du dipôle à la FNM, s'écrivent:

$$\dot{g}_1^1 = \frac{dg_1^1}{dt} = \frac{\partial g_1^1}{\partial \theta_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial t} + \frac{\partial g_1^1}{\partial \phi_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} = \frac{\partial g_1^1}{\partial \theta_1} \dot{\theta}_1 + \frac{\partial g_1^1}{\partial \phi_1} \omega \quad (4.2)$$

$$\dot{h}_1^1 = \frac{dh_1^1}{dt} = \frac{\partial h_1^1}{\partial \theta_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial t} + \frac{\partial h_1^1}{\partial \phi_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} = \frac{\partial h_1^1}{\partial \theta_1} \dot{\theta}_1 + \frac{\partial h_1^1}{\partial \phi_1} \omega \quad (4.3)$$

Dans les notations de (4.2) et (4.3),  $\omega = \frac{\partial \phi_1}{\partial t}$  représente la vitesse angulaire de déplacement du pôle Nord magnétique dans le repère lié au manteau. Puisque nous sommes dans l'hypothèse du flux gelé,  $\omega$  correspond aussi à la vitesse angulaire de rotation du noyau par rapport au manteau selon l'axe de rotation de la Terre.

A l'aide de l'Appendice A donnant les expressions de  $g_1^1$  et  $h_1^1$  à la FNM en fonction de la position du pôle Nord magnétique, on déduit à partir de (4.2) et (4.3)

$$\begin{cases} B_1 & = 2 \cdot \left(\frac{r_E}{r_C}\right)^3 \cdot \sqrt{(g_1^0)^2 + (g_1^1)^2 + (h_1^1)^2} \\ \dot{g}_1^1(\theta_1, \phi_1, t) & = B_1 \frac{1}{2} \left(\frac{r_C}{r_E}\right)^3 (\cos \theta_1 \cos \phi_1 \dot{\theta}_1 - \sin \theta_1 \sin \phi_1 \omega) \\ \dot{h}_1^1(\theta_1, \phi_1, t) & = B_1 \frac{1}{2} \left(\frac{r_C}{r_E}\right)^3 (\cos \theta_1 \sin \phi_1 \dot{\theta}_1 + \sin \theta_1 \cos \phi_1 \omega) \end{cases} \quad (4.4)$$

En incluant (4.4) et (A3) dans l'expression du couple poloïdal (4.1), on obtient la valeur du couple électromagnétique poloïdal  $\Gamma_{M \text{ pol rot}}$  induit par le déplacement à la vitesse  $(\dot{\theta}_1, \omega)$  d'un dipôle d'intensité constante  $B_1$  à la FNM hétérogène avec l'expression (3.19) pour  $\delta D(\theta, \phi)$ :

$$\Gamma_{M \text{ pol rot}} = \sigma_M r_C^4 B_1^2 \frac{2\pi}{15} \left[ D_0 [\sin 2\theta_1 \sin 2\phi_1] \dot{\theta}_1 + \left( 5 \bar{D} [\sin^2 \theta_1] + 2D_0 [\sin^2 \theta_1 \cos 2\phi_1] \right) \omega \right] \quad (4.5)$$

Le rôle de ce couple dans la dynamique du système Noyau-Manteau sera étudié plus loin dans ce chapitre.

## 4.2 Calcul du couple toroïdal $\Gamma_{M \text{ tor}}$ dû au cisaillement des lignes de champ à la frontière Noyau-Manteau

Le champ magnétique poloïdal est cisailé lorsqu'il se déplace à la FNM puisqu'il traverse la couche  $D''$  conductrice. Le cisaillement, schématisé sur la figure 4.1, donne naissance à un champ magnétique toroïdal dans la couche  $D''$ . Le cisaillement génère un couple électromagnétique communément appelé le couple "toroïdal" (Stix & Roberts, 1984), résultant de l'interaction entre le champ magnétique poloïdal et les courants électriques, ces derniers étant générés par le champ magnétique toroïdal induit dans la couche  $D''$  par le cisaillement.

En Appendice B), l'expression des courants électriques  $J_{M\theta}$ , induits dans la couche  $D''$  par le cisaillement des lignes de champ de la composante radiale  $B_r$  du champ magnétique poloïdal, est calculée dans l'approximation de coquille mince. On obtient

$$J_{M\theta}(\theta, \phi) = -\sigma_M r_C B_r(\theta, \phi) \sin \theta \omega \text{ pour } r_C \leq r \leq r_C + D(\theta, \phi) \quad (4.6)$$

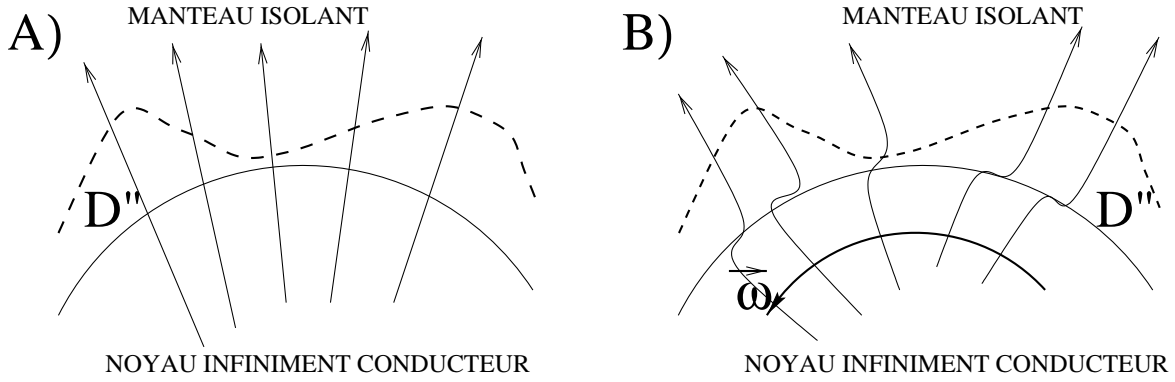


FIG. 4.1 – Illustration du cisaillement des lignes de champ magnétique poloïdal par la rotation différentielle entre le manteau et le noyau. En A) les lignes de champ magnétique poloïdal issu du noyau infiniement conducteur traversent la couche  $D''$  puis le manteau isolant. Les variations d'épaisseur de la couche  $D''$  conductrice sont représentées par une ligne pointillée. En B) la rotation différentielle  $\vec{\omega}$  du noyau par rapport au manteau a cisailé les lignes de champ poloïdal, induisant un champ magnétique toroïdal au sein de la couche  $D'$ . C'est le mécanisme qui est à l'origine du couple électromagnétique toroïdal. A noter que dans le cas particulier d'une couche  $D'$  hétérogène, les lignes de champ poloïdal sont davantage cisillées dans les régions épaisses très conductrices de la couche  $D'$  que dans les régions fines moins conductrices.

On en déduit la formule du couple toroïdal  $\Gamma_{M \text{ tor}}$  à partir de la formule générale du couple électromagnétique sur le manteau (2.6) établie dans le chapitre 2

$$\Gamma_{M \text{ tor}} = -r_C \oint_{FNM} [J_{M\theta} B_r]_{r=r_C} D(\theta, \phi) \sin \theta dS \quad (4.7)$$

$$\Rightarrow \Gamma_{M \text{ tor}} = \sigma_M r_C^2 \left( \oint_{FNM} B_r^2 \left\{ \frac{\bar{D}}{\delta D(\theta, \phi)} \right\} \sin \theta dS \right) \omega \quad (4.8)$$

A l'aide de l'Appendice B donnant l'expression de  $B_r$  et de l'expression (3.19) donnant les variations d'épaisseur  $\delta D(\theta, \phi)$  de la couche  $D''$ , l'intégration de l'expression (4.8) donne finalement l'expression générale du couple toroïdal à la FNM

$$\Gamma_{M \text{ tor}} = \sigma_M r_C^4 B_1^2 \left[ \frac{16\pi}{35} D_0 [\sin^2 \theta_1 \cos 2\phi_1] + \frac{8\pi}{15} \bar{D} [1 + \sin^2 \theta_1] \right] \omega \quad (4.9)$$

### 4.3 Le couple électromagnétique $\Gamma_{M \text{ déplacement}}$

Dans les deux sections précédentes, nous avons calculé les différentes composantes du couple électromagnétique exercé sur le manteau lors du déplacement d'un dipôle d'intensité constante à la frontière Noyau-Manteau. Dans cette section, nous faisons la somme du couple poloïdal en rotation  $\Gamma_{M \text{ pol rot}}$  calculé en (4.5) et du couple toroïdal  $\Gamma_{M \text{ tor}}$  calculé en (4.9) pour aboutir au couple total  $\Gamma_{M \text{ déplacement}}$  s'exerçant sur le manteau lors du déplacement du dipôle à la FNM. D'après (4.5) et (4.9),

$$\Gamma_{M \text{ déplacement}} = \sigma_M r_C^4 B_1^2 \frac{2\pi}{15} \left[ \bar{D} \left[ 4 \left( 1 + \frac{9}{4} \sin^2 \theta_1 \right) \right] \omega \right]$$



$$\begin{aligned}
& + D_0 \left[ \frac{38}{7} \sin^2 \theta_1 \cos 2\phi_1 \right] \omega \\
& + D_0 \left[ \sin^2 \theta_1 \sin 2\phi_1 \right] \dot{\theta}_1
\end{aligned} \tag{4.10}$$

où  $B_1$  est l'intensité du dipôle à la FNM et  $(\dot{\theta}_1, \omega)$  est la vitesse de déplacement du dipôle.

$\Gamma_{\text{déplacement}}$  est décomposé en trois termes entre crochets:

- le premier terme est le couple électromagnétique sur le manteau induit par une rotation en latitude du noyau selon  $\vec{e}_\phi$ , en présence d'une couche  $D''$  sphérique d'épaisseur  $\bar{D}$ .
- le second terme est le complémentaire du premier terme: il représente les variations de la valeur du premier terme induites par la présence d'hétérogénéités  $\delta D(\theta, \phi)$  dans la couche  $D''$ .
- le troisième terme est le couple électromagnétique induit par la rotation d'un dipôle à la vitesse  $\dot{\theta}_1$  selon une longitude.

Les calculs suivants seront tous effectués avec une valeur moyenne de l'épaisseur de  $D''$  de l'ordre de grandeur des hétérogénéités, soit  $\bar{D} = D_0$  dans l'expression (3.19); en effet les études sismologiques indiquent que la couche hétérogène à la base du manteau (voir la section 3.3.1) varie entre une épaisseur nulle et une épaisseur maximale de 40 km (Garnero & Helmberger, 1996). Cela nous conduit à étudier  $\bar{D} = D_0 = 20$  km dans la formule (3.19).

### 4.3.1 Calcul du couple électromagnétique pour un déplacement longitudinal du dipôle

La formule (4.10) donne dans le cas d'un déplacement purement longitudinal du dipôle:

$$\Gamma_{M \text{ déplacement}} = \sigma_M r_C^4 B_1^2 \frac{2\pi}{15} D_0 \left[ \sin^2 \theta_1 \sin 2\phi_1 \right] \dot{\theta}_1 \tag{4.11}$$

Pour ce type de déplacement, la valeur du couple toroïdal  $\Gamma_{M \text{ tor}}$  est nulle puisque les lignes de champ radiales sont cisailées dans la direction  $\vec{e}_\theta$ , induisant des courants électriques  $J_{M\phi}$  qui n'affectent pas la composante axiale du couple électromagnétique définie en (2.6). Par ailleurs, seule la composante associée aux hétérogénéités d'épaisseur de la couche  $D''$  intervient dans l'expression (4.11); comme dans le calcul de  $\Gamma_{M \text{ flux}}$  dans le chapitre précédent, la contribution de l'épaisseur moyenne  $\bar{D}$  de la couche  $D''$  est nulle.

La figure 4.2 représente la distribution de la valeur du couple déplacement  $\Gamma_{M \text{ déplacement}}$  exercé sur le manteau en fonction de la position du pôle Nord magnétique du dipôle  $(\theta_1, \phi_1)$ , pour un dipôle en rotation à une vitesse constante  $\dot{\theta}_1 > 0$ , c'est-à-dire en direction du pôle Sud géographique.

Comme pour le dipôle en décroissance libre traité dans le chapitre 3, il existe des positions sur la figure 4.2 où le couple électromagnétique change de signe à la FNM, générant

des positions dynamiquement stables et des positions dynamiquement instables pour le dipôle. Nous avons expliqué dans le chapitre précédent sur la figure 3.2 B) comment discerner les positions stables des positions instables. Les positions dynamiquement stables sont les positions tracées avec des lignes continues épaisses sur la figure 4.2. On remarque que les positions stables sont décalées de  $90^\circ$  entre les hémisphères Nord et Sud. Ces positions ne sont par conséquent pas deux lignes longitudinales comme dans le cas du dipôle en décroissance libre, mais quatre segments distincts. L'origine de la segmentation des positions stables se lit dans la formule générale du couple poloïdal obtenue en (3.20)

$$\Gamma_{M \text{ poloïdal}} \propto \dot{\mathbf{h}}_1^1 \mathbf{g}_1^1 + \dot{\mathbf{g}}_1^1 \mathbf{h}_1^1 \quad (4.12)$$

L'expression (4.12) montre que le signe de  $\Gamma_{M \text{ poloïdal}}$  dépend de l'évolution temporelle du dipôle équatorial à travers les coefficients  $\dot{g}_1^1$  et  $\dot{h}_1^1$ . Ainsi sur la figure 4.2, lorsqu'on se situe dans l'hémisphère Nord et que le dipôle est en rotation du Nord vers le Sud géographique, l'intensité du dipôle équatorial croît. Dès que l'on a franchi l'équateur et que le dipôle continue sa rotation vers le Sud, le dipôle équatorial décroît: ce changement de signe dans  $\Gamma_{M \text{ poloïdal}}$  explique pourquoi l'on voit ces positions stables décalées entre l'hémisphère Nord et l'hémisphère Sud. La figure 3.2 A) du chapitre précédent représente le couple électromagnétique dans le cas où le dipôle est en décroissance libre: l'intensité du dipôle équatorial décroît partout à la FNM et c'est pourquoi les deux positions stables de la figure 3.2 A) coïncident avec les positions stables de l'hémisphère Sud de la figure 4.12.

### 4.3.2 Calcul du couple électromagnétique pour une rotation du dipôle en latitude

La formule (4.10) donne dans le cas d'une rotation du dipôle en latitude:

$$\Gamma_{M \text{ déplacement}} = \sigma_M r_C^4 B_1^2 \frac{2\pi}{15} \left[ \underbrace{\bar{D} \left[ 4 \left( 1 + \frac{9}{4} \sin^2 \theta_1 \right) \right]}_{\text{figure 4.3 A}} + \underbrace{D_0 \left[ \frac{38}{7} \sin^2 \theta_1 \cos 2\phi_1 \right]}_{\text{figure 4.3 B}} \right] \omega \quad (4.13)$$

Contrairement au cas d'un dipôle en décroissance libre ou d'un dipôle en rotation longitudinale, il existe pour un dipôle en rotation selon une latitude un couple exercé sur le manteau dû à la composante d'épaisseur moyenne  $\bar{D}$  de la couche  $D''$ . On peut faire deux remarques sur la formule (4.13):

- La contribution à  $\Gamma_{M \text{ déplacement}}$  de l'épaisseur constante  $\bar{D}$  de la couche  $D''$  domine la contribution des hétérogénéités associées à  $D_0$  puisque

$$|(4 + 9 \sin^2 \theta_1)| > \left| \frac{38}{7} \sin^2 \theta_1 \cos 2\phi_1 \right| \quad (4.14)$$

- Le couple  $\Gamma_{M \text{ déplacement}}$  est un couple résistant qui s'oppose en permanence au mouvement du noyau par rapport au manteau: si le noyau en rotation angulaire vers l'Est,  $\omega > 0$ , alors la valeur du couple exercé sur le manteau est positive d'après la formule (4.13), par conséquent, le couple sur le noyau négatif s'oppose donc à la rotation vers l'Est. On démontre de la même façon que le couple sur le manteau s'oppose au mouvement lorsque la rotation angulaire du noyau est vers l'Ouest.

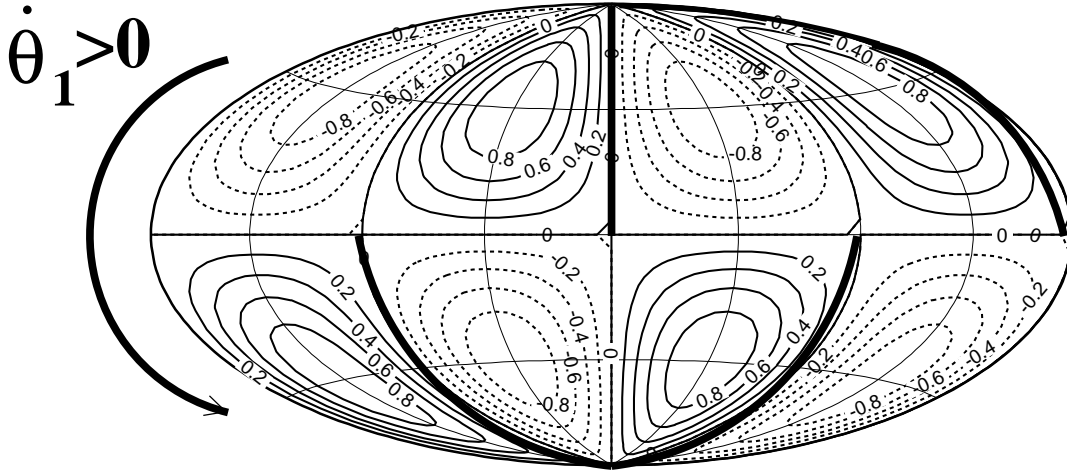


FIG. 4.2 – *Composante axiale du couple électromagnétique exercé sur le manteau en fonction de la position du PGV, pour un champ magnétique dipolaire en rotation selon une longitude à une vitesse  $\dot{\theta}_1 > 0$ , en direction du pôle Sud géographique. Les lignes continues sont les contours des valeurs positives du couple et les lignes pointillées celles des valeurs négatives. Les quatre segments épais sont les positions dynamiquement stables pour les PGV: ces positions sont en déphasage de  $90^\circ$  entre l'hémisphère Nord et l'hémisphère Sud, car, dans l'hémisphère Nord le dipôle équatorial décroît en intensité alors que dans l'hémisphère Sud il croît. Les contours sont normalisés par la valeur maximale du couple.*

La figure 4.3 est la distribution de la valeur du couple déplacement  $\Gamma_M$  déplacement sur le manteau en fonction de la position du pôle Nord magnétique du dipôle ( $\theta_1, \phi_1$ ), pour un dipôle en rotation à une vitesse  $\omega \vec{e}_\phi$  avec  $\omega > 0$ . La figure 4.3 A) est la contribution du couple  $\Gamma_M$  déplacement associée à une couche  $D''$  homogène d'épaisseur  $D_0$ , le premier terme entre crochets de l'expression (4.10). La figure 4.3 B) est la contribution associée aux hétérogénéités de la couche  $D''$ , le deuxième terme de (4.10). Enfin, la figure 4.3 C) est le couple électromagnétique total s'exerçant sur le manteau lorsque le dipôle est en rotation vers l'Est à la FNM, ce qui correspond à la somme des couples des figures A) et B).

La figure 4.3 C) démontre effectivement que la contribution des hétérogénéités de  $D''$  au couple  $\Gamma_M$  déplacement ne fait que moduler l'amplitude de la contribution associée à une épaisseur constante de  $D''$  sans changer son signe. Le signe positif du couple sur le manteau  $\Gamma_M$  déplacement  $> 0$  lorsque la rotation du noyau est positive démontre que  $\Gamma_M$  déplacement est un couple résistant. La figure 4.3 C) est également une illustration quantitative de la figure 4.1: le couple  $\Gamma_M$  déplacement est partout résistant, mais la résistance est maximale où la couche  $D''$  est épaisse (cisaillement important des lignes du champ magnétique poloïdal) et minimale où la couche  $D''$  est mince (cisaillement faible).

On conclut que le couple exercé sur le manteau  $\Gamma_{M \text{ déplacement}}$  lors d'une rotation du dipôle en latitude est un couple purement résistant et ne peut en aucun cas à lui seul orienter préférentiellement le noyau par rapport au manteau. D'autre part, des hétérogénéités  $\delta D$  de l'ordre de grandeur de l'épaisseur totale de la couche  $\bar{D} = D_0$  jouent un faible rôle dans l'amplitude totale du couple électromagnétique  $\Gamma_{M \text{ déplacement}}$ .

A noter que Braginsky & Fishman (1976) ont écrit la formule générale de  $\Gamma_{M \text{ déplacement}}$  pour une géométrie quelconque du champ magnétique radial à la FNM et une couche conductrice d'épaisseur constante  $\bar{D}$  à la base du manteau.

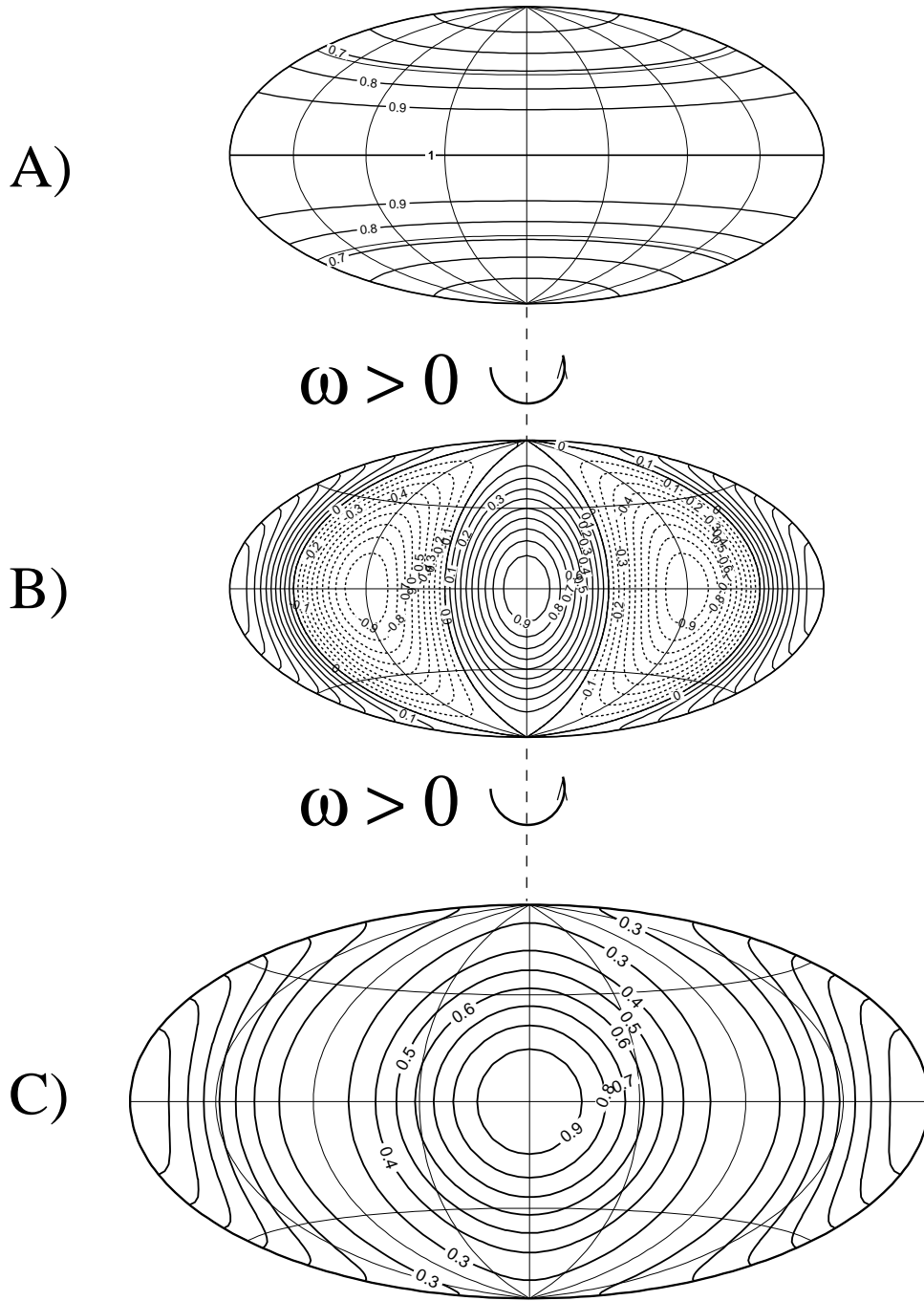


FIG. 4.3 – *Composante axiale du couple électromagnétique exercé sur le manteau en fonction de la position du PGV pour un champ magnétique dipolaire en rotation angulaire positive  $\omega > 0$ . A) Contours de la contribution du couple électromagnétique provenant de la couche d'épaisseur constante  $\bar{D}$ . B) Contours de la contribution du couple électromagnétique provenant des hétérogénéités  $D_0(\theta, \phi)$  de la couche  $D'$ . C) Contours de la valeur du couple  $\Gamma_M^{\text{déplacement}}$  total représentant la somme des couples des figures A) et B). Les lignes continues et pointillées sur A), B) et C) sont les contours des valeurs respectivement positives et négatives du couple exercé sur le manteau. Les contours sont normalisés par la valeur maximale du couple de chaque figure. Ces figures ont été calculées avec  $\bar{D} = D_0$ : on constate que la valeur du couple  $\Gamma_M^{\text{déplacement}}$  en C) est peu modifiée par les hétérogénéités d'épaisseur de la couche  $D'$  puisque ce couple reste positif en tous les points de la FNM comme sur la figure A).*

## Chapitre 5

# Calcul dynamique des chemins d'inversion

Résumons l'essentiel des chapitres précédents: nous avons montré d'une part que des hétérogénéités en épaisseur de la couche  $D''$  sont susceptibles d'orienter préférentiellement le noyau par rapport au manteau, soit dans le cas d'un dipôle décroissant en intensité à la FNM, soit dans le cas d'un dipôle en rotation à la FNM dans la direction longitudinale. Nous avons montré, d'autre part, que les couples électromagnétiques exercés sur le manteau résistent à toute rotation différentielle entre le noyau et le manteau selon la direction  $\vec{e}_\phi$ .

La dernière étape de cette étude consiste donc à déterminer si le couple électromagnétique résistant est dominant ou bien s'il est faible devant les deux autres couples générant la rotation différentielle. Dans ce chapitre, nous répondons à cette question en incluant les différents couples électromagnétiques dans un calcul dynamique simulant une inversion d'un champ magnétique dipolaire, en considérant deux modèles simples de champ magnétique transitoire. Dans ces calculs dynamiques, la conservation du moment angulaire du système Noyau-Manteau s'écrit

$$\Gamma_M = I_N \frac{d\omega}{dt} \quad (5.1)$$

où  $\Gamma_M$  est la somme des couples exercés sur le manteau,  $I_N = 9.2 \cdot 10^{36} \text{ kg m}^2$  est le moment d'inertie du Noyau,  $\omega$  est la rotation angulaire du noyau par rapport au manteau et  $t$  est le temps.

### 5.1 Inversion du champ magnétique précédée d'une décroissance de l'intensité du dipôle

Dans le premier modèle d'inversion du champ magnétique, l'influence du couple électromagnétique associé à la décroissance du champ magnétique va être testée. Nous considérons une inversion du champ magnétique en trois phases:

- i) Dans la phase 1, le PGV d'un dipôle est à une colatitude fixe  $\theta_0$ , près de l'un des pôles géographiques. L'intensité  $B_1$  du dipôle décroît exponentiellement au cours du temps avec un taux  $k$ .
- ii) Dans la phase 2, l'inversion du champ magnétique dipolaire s'effectue à une vitesse

$\dot{\theta}_1 = \tau$  entre les colatitudes  $\theta_0$  et  $\pi - \theta_0$ . Dans le même temps, l'intensité  $B_1$  du dipôle continue à décroître jusqu'à ce que le PGV se trouve à l'équateur, puis une fois l'équateur franchi,  $B_1$  se met à croître exponentiellement avec un taux  $-k$ .

iii) Dans la phase 3, le PGV se retrouve à une colatitude fixe  $\pi - \theta_0$  et l'intensité  $B_1$  du dipôle croît jusqu'à ce qu'il retrouve l'intensité précédant l'inversion.

Le couple électromagnétique  $\Gamma_M$  exercé sur le manteau lors de cette inversion s'écrit à partir des expressions (3.21), (3.22), (4.10):

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_M = \sigma_M r_C^4 B_1^2(t) \frac{2\pi}{15} \left[ \begin{array}{l} 2 D_0 [\sin^2 \theta_1 \sin 2\phi_1] \mathbf{k} \\ + D_0 [\sin 2\theta_1 \sin 2\phi_1] \dot{\theta}_1 \\ + \left( 4 \bar{D} \left[ 1 + \frac{9}{4} \sin^2 \theta_1 \right] + \frac{38}{7} D_0 [\sin^2 \theta_1 \cos 2\phi_1] \right) \omega \end{array} \right] \\ B_1(t) = B_1 \Big|_{t=0} e^{kt} \text{ pour } 0 \leq t \leq \frac{\Delta T}{2} \\ B_1(t) = \left( B_1 \Big|_{t=0} e^{k \frac{\Delta T}{2}} \right) e^{-kt} \text{ pour } \frac{\Delta T}{2} \leq t \leq \Delta T \end{array} \right. \quad (5.2)$$

Les paramètres de cette expression sont

- la conductivité du manteau,  $\sigma_M$ .
- l'intensité initiale du dipôle  $B_1 \Big|_{t=0}$ .
- le taux de décroissance exponentielle du champ magnétique  $k$  et la durée de la décroissance  $\frac{\Delta T}{2}$ .
- la vitesse de l'inversion  $\dot{\theta}_1 = \tau$ .
- l'épaisseur moyenne de la couche D'',  $\bar{D}$ , et l'amplitude des hétérogénéités caractérisée par  $D_0$

Dans ce modèle, le couple moteur qui génère le mouvement durant la phase 1 est le terme proportionnel à  $k$  dans (5.2). C'est en effet la décroissance du champ magnétique dans la phase 1 qui démarre la rotation différentielle entre le noyau et le manteau.

Le système à résoudre afin de déterminer la trajectoire d'un PGV (dont la position initiale est  $(\phi_1 \Big|_{t=0}, \theta_1 \Big|_{t=0})$ ) est le suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_1(t=0) = \phi_1 \Big|_{t=0} \\ \theta_1(t=0) = \theta_1 \Big|_{t=0} \\ \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{\Gamma_M(\dot{\theta}_1, \phi_1, t)}{I_N} \\ \frac{d\phi_1}{dt} = \omega(t) \\ \frac{d\theta_1}{dt} = \begin{cases} 0 & \text{durant les phases 1 et 3} \\ \tau & \text{durant la phase 2} \end{cases} \end{array} \right. \quad (5.3)$$

Nous avons intégré numériquement ce système d'équations par une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. La figure 5.1 est l'exemple d'un modèle d'inversion du champ magnétique comportant les 3 phases décrites ci-dessus. Durant la phase 1, le PGV est à la

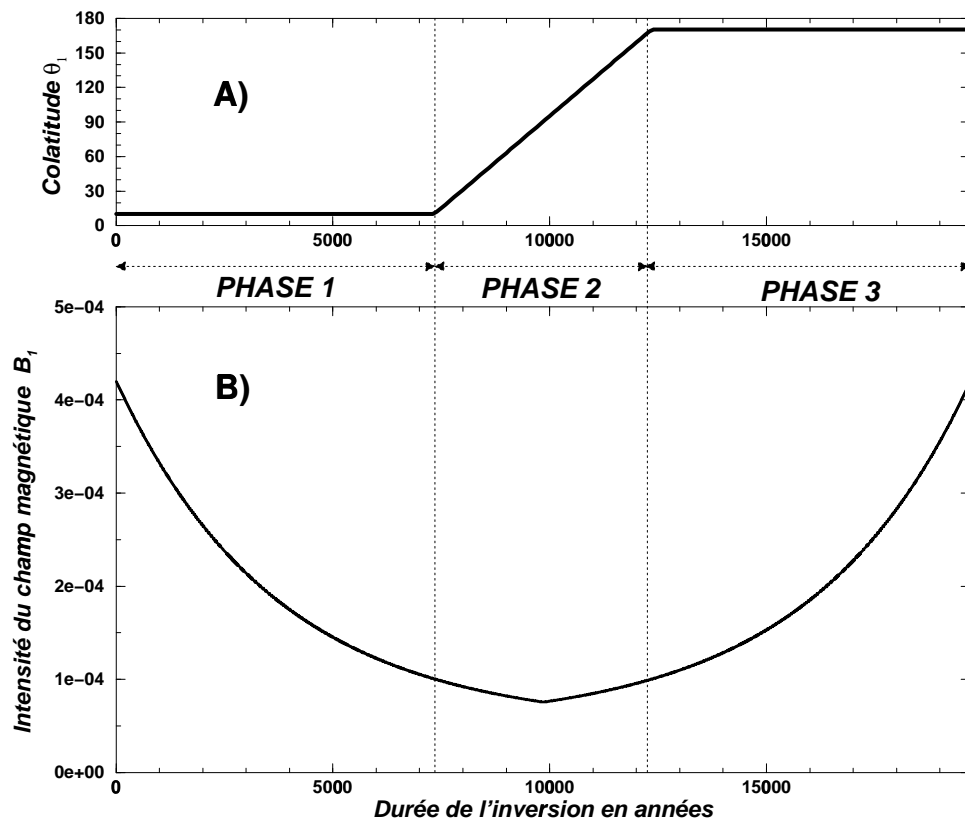


FIG. 5.1 – *Modèle du champ magnétique dipolaire durant une inversion. La colatitude du PGV est représentée au cours du temps en A). L'intensité totale  $B_1$  du dipôle est représentée au cours du temps en B).*

colatitude  $\theta_1 = 10^\circ$  et l'intensité du champ magnétique  $B_1$  décroît d'un facteur  $(1/2e)$  en 7355 ans. Cela correspond à un taux de décroissance  $k = -\frac{(2\pi)^2}{\mu_0 \sigma_C r_C^2}$  qui est le taux de décroissance du second mode propre de décroissance libre d'un dipôle (Moffatt, 1978). Nous avons considéré le second mode propre afin que le "moteur initial" du mouvement soit plus important, le champ magnétique décroissant plus rapidement que pour le premier mode propre; nous verrons que ce choix de mode propre n'a aucune incidence sur les conclusions que l'on tirera de cette étude. Durant la phase 2, on impose une inversion du dipôle en 5000 ans de la latitude  $\theta_1 = 10^\circ$  à  $\theta_1 = 170^\circ$ . L'intensité du dipôle décroît jusqu'à l'équateur puis croît avec le taux  $-k$  comme représenté sur la figure 5.1 B). Durant la phase 3, la colatitude du PGV est conservée et l'intensité du dipôle  $B_1 \Big|_{t=0}$  est retrouvée après 19710 ans.

La figure 5.2 présente le résultat de l'intégration numérique du système d'équations (5.3) avec le modèle d'inversion présenté sur la figure 5.1. Dans ce calcul, les valeurs de  $D_0$  et  $\bar{D}$  sont de 20 km et la conductivité électrique du manteau est  $\sigma_M = 3 \times 10^4$  S/m, soit environ un dixième de la conductivité du noyau. La figure 5.2 montre que durant la phase 1 où le PGV est à la colatitude  $\theta_1 = 10^\circ$ , on assiste à une dérive constante du PGV de quelques dixièmes de degrés, quelle que soit la longitude initiale. Durant cette



phase, le couple résistant s'oppose efficacement au mouvement du noyau dès le début de la décroissance de  $B_1$ , et, il s'établit un régime stationnaire où le couple résistant contre le couple moteur:

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = 0 \implies \omega \simeq -\frac{2(\sin^2 \theta_1 \sin 2\phi_1)}{4 + 9 \sin^2 \theta_1} \mathbf{k} \quad (5.4)$$

Cette expression (5.4) montre qu'il s'établit un régime stationnaire indépendant à la fois de l'intensité du dipôle  $B_1$ , de la conductivité du manteau  $\sigma_M$  et du moment d'inertie du noyau. La vitesse de dérive du noyau par rapport au manteau est contrôlée uniquement par le taux de décroissance du champ magnétique dipolaire  $k$ . La présence d'un dénominateur toujours positif dans l'expression (5.4) traduit le fait que le couple résistant s'oppose toujours au mouvement quelque soit la position du PGV à la FNM. L'équation (5.4) démontre clairement qu'en prenant un taux de décroissance réaliste pour le champ magnétique terrestre comme nous l'avons fait pour le calcul de la figure 5.2, la dérive du PGV restera typiquement de l'ordre du dixième de degré tous les 1000 ans et ceci, quelles que soient la conductance de la couche  $D''$  et l'intensité du champ magnétique dipolaire  $B_1$ .

Du point de vue du champ magnétique à la FNM, les lignes de champ magnétique poloidal du dipôle sont cisailées par la rotation différentielle afin de créer un couple exactement opposé au couple associé à la décroissance du champ. La somme de ces deux couples dominants est donc nulle dans l'équation de la conservation du moment angulaire (5.1), et il peut s'établir une dérive stationnaire  $\omega$  du noyau par rapport au manteau (mécanisme identique à celui traité dans la partie III avec le couplage Graine-Noyau liquide).

Durant la phase 2 de l'inversion sur la figure 5.2 B), la rotation du noyau est au plus d'une dizaine de degrés; cette rotation du noyau plus importante dans la phase 2 que dans la phase 1 est causée par le couple associé à la rotation, et non au couple associé à la décroissance du champ. Nous reviendrons sur le couple en rotation dans la prochaine section du chapitre.

Enfin dans la phase 3, l'équilibre de la phase 1 se remet en place avec cette fois ci un coefficient  $-k$  dans l'expression (5.4). La dérive longitudinale du noyau est dans le sens opposé de la dérive de la phase 1 puisque le champ croît dans la phase 3.

## 5.2 Inversion du champ magnétique par simple rotation du dipôle

Dans le second modèle d'inversion du champ magnétique, nous allons étudier l'influence du couple électromagnétique associé à la rotation du dipôle en latitude. Nous considérons que le dipôle s'inverse d'un pôle géographique à l'autre, tout en conservant son intensité totale  $B_1$  constante.

Le couple électromagnétique  $\Gamma_M$  exercé sur le manteau lors de cette inversion s'écrit à

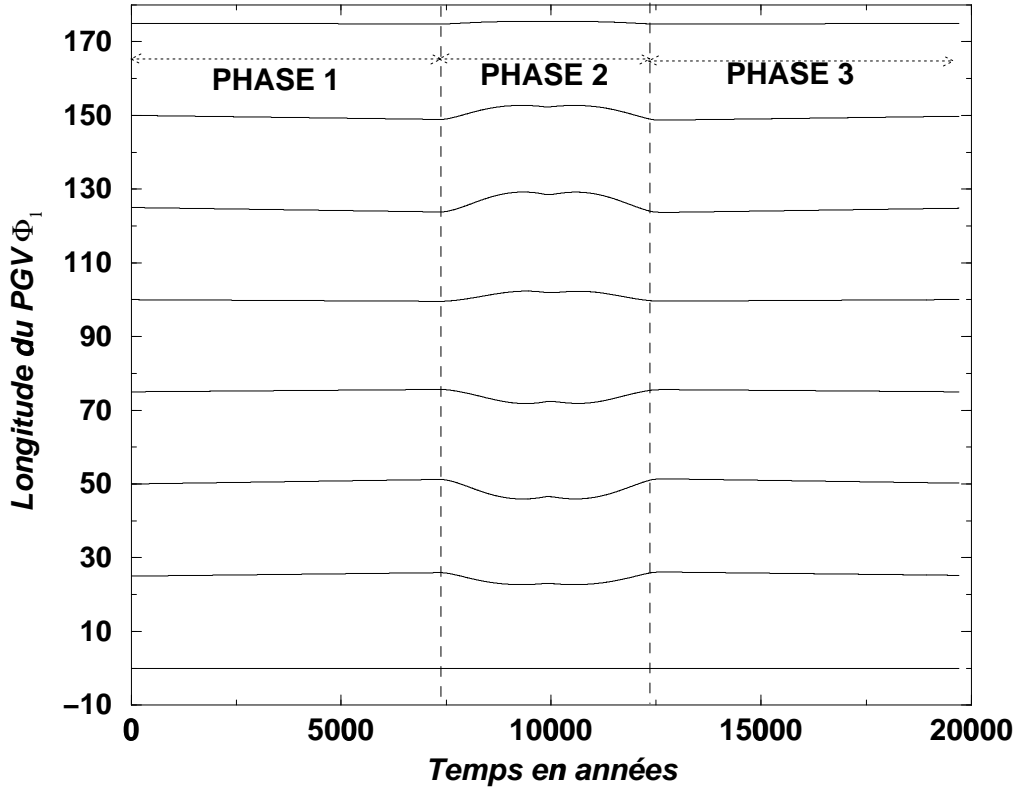


FIG. 5.2 – Résultat de l'intégration numérique des équations régissant la position du PGV pendant l'inversion modélisée sur la figure 5.1. Huit trajets en longitude des PGV sont représentés pour des PGV initialement situés à des longitudes différentes.

partir des expressions (3.21), (3.22), (4.10):

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_M = \sigma_M r_C^4 B_1^2 \frac{2\pi}{15} \left[ \begin{array}{l} D_0 [\sin 2\theta_1 \sin 2\phi_1] \dot{\theta}_1 \\ + \left( 4 \bar{D} \left[ 1 + \frac{9}{4} \sin^2 \theta_1 \right] + \frac{38}{7} D_0 [\sin^2 \theta_1 \cos 2\phi_1] \right) \omega \end{array} \right] \\ B_1(t) = B_1 \Big|_{t=0} \end{array} \right. \quad (5.5)$$

Dans ce second modèle, le couple moteur dans l'équation (5.5) est le couple proportionnel à  $\dot{\theta}_1$  qui, comme on l'a vu sur la figure 4.2, génère des positions dynamiquement stables du noyau par rapport au manteau, ces positions stables étant déphasées de  $90^\circ$  entre chaque hémisphère. Nous avons intégré numériquement le système d'équations différentielles (5.3) avec l'expression (5.5) pour  $\Gamma_M$ .

La figure 5.3 représente les résultats de plusieurs calculs effectués avec  $\sigma_M = 3 \times 10^5$  S/m,  $D_0 = 20$  km,  $\bar{D} = 20$  km,  $B_1 = 3.7 \times 10^{-4}$  T (valeur actuelle du champ géomagnétique dipolaire). Nous avons étudié trois durées d'inversion 500 ans, 1000 ans et 10000

ans, ainsi que trois longitudes initiales différentes du PGV,  $\phi_1 \Big|_{t=0} = 10^\circ, 80^\circ, 135^\circ$ .

Les trajets des PGV dans ces calculs suivent les prédictions qualitatives de la figure 4.3; nous avons obtenu des positions stables aux longitudes  $\phi = 0^\circ$  et  $\phi = 180^\circ$  dans l'hémisphère Nord de la figure 4.3. Dans le calcul dynamique complet de la figure 5.3, les PGV se rapprochent bien des longitudes stables au cours de l'inversion. Dans l'hémisphère Sud, le signe du couple poloïdal associé à la rotation a changé sur la figure 4.3, et on voit effectivement sur la figure 5.3 que chaque PGV est maintenant attiré par une longitude opposée à celle vers laquelle il se rapprochait dans l'hémisphère Nord. Du point de vue quantitatif cette fois, on constate que les PGV sont au plus déplacés d'une dizaine de degrés durant l'inversion et ce, quelle que soit la vitesse d'inversion du champ magnétique.

Comme dans le cas du premier modèle d'inversion, on écrit l'équilibre stationnaire s'établissant durant l'inversion entre les couples dominants de l'équation (5.5):

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = 0 \implies \omega \simeq -\frac{(\sin^2 \theta_1 \sin 2\phi_1)}{4 + 9 \sin^2 \theta_1} \dot{\theta}_1 \quad (5.6)$$

Comme dans le cas de l'expression (5.4), le rapport (5.6) montre que le couple résistant empêche le noyau de se déplacer rapidement par rapport au manteau: même en variant la vitesse  $\dot{\theta}_1$  d'un facteur 20 sur la figure 5.3, la dérive maximale du noyau est pratiquement inchangée.

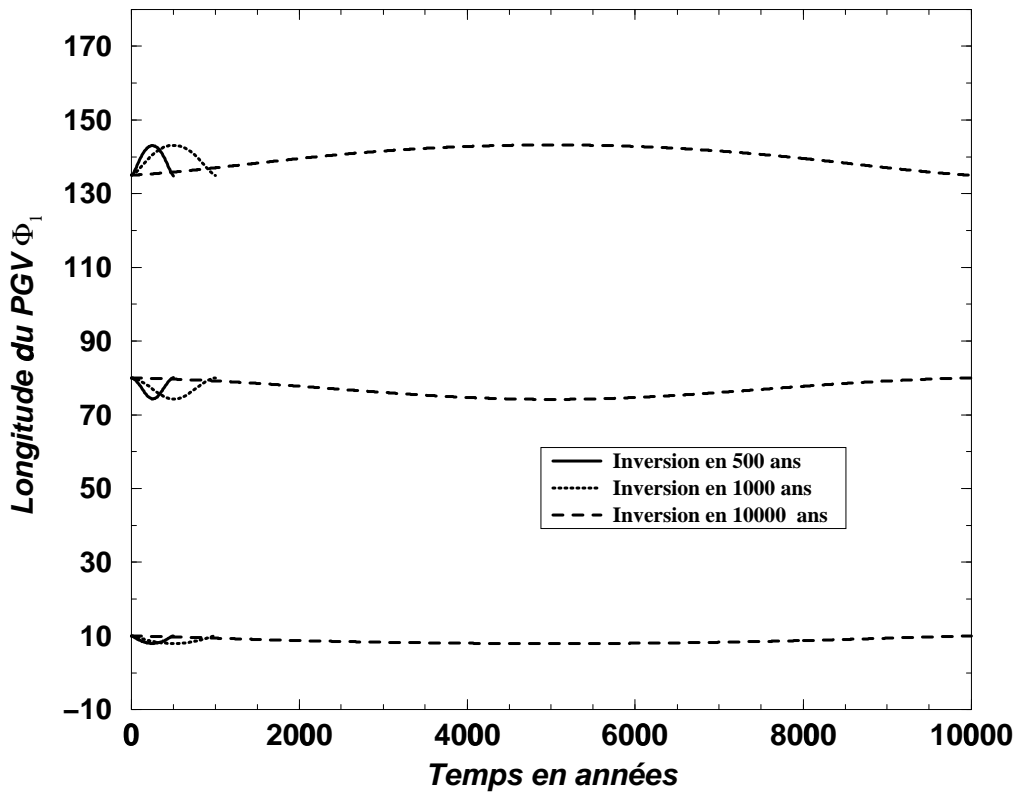


FIG. 5.3 – Résultat de l'intégration numérique des équations régissant la longitude du PGV pendant une inversion du champ magnétique où l'intensité totale du dipôle  $B_1$  reste constante. Le couple poloïdal, moteur du mouvement du noyau, se fait contrer par le couple résistant quelle que soit la longitude initiale du PGV.

## Chapitre 6

# Conclusion

Nous avons construit un modèle de couplage électromagnétique calculant les trajectoires des PGV lors de l'inversion d'un champ magnétique purement dipolaire. Nous avons étudié en particulier l'influence d'une couche  $D''$  conductrice et hétérogène sur les chemins d'inversion des PGV. Il résulte de cette analyse qu'un couplage électromagnétique hétérogène à la FNM ne peut générer une rotation différentielle importante du noyau par rapport au manteau pendant une durée typique d'inversion du champ géomagnétique, cette durée étant de l'ordre de quelques milliers d'années. Une couche  $D''$  hétérogène à la base du manteau crée en effet des positions stables du noyau par rapport au manteau où le couple électromagnétique est nul, mais les couples électromagnétiques moteurs de la rotation du noyau sont trop faibles devant les couples électromagnétiques résistant au mouvement: bien que le noyau dérive vers les positions stables durant l'inversion, la vitesse de dérive est bien trop lente par rapport à la durée de l'inversion.

C'est Runcorn (1993, 1996) qui le premier a prétendu que ce couplage hétérogène pourrait orienter préférentiellement le noyau par rapport au manteau et ainsi expliquer les bandes préférentielles des PGV obtenues par Laj et al. (1991). Son idée était originale et il avait raison en disant que les hétérogénéités de la couche  $D''$  induisent un couple électromagnétique qui met le noyau en rotation par rapport au manteau; il avait toutefois sous-estimé le rôle du cisaillement des lignes de champ lors de la rotation différentielle entre le noyau et le manteau. C'est ce cisaillement qui impose un couple résistant au mouvement et qui prohibe toute rotation "rapide" du noyau par rapport au manteau. Aurnou et al. (1996) ne tiennent pas compte du couple résistant et c'est pourquoi leurs conclusions sont également erronées.

A l'inverse des études de Runcorn et Aurnou et al., nous avons montré que si le champ magnétique transitoire est dipolaire, les PGV s'inverseront le long d'une longitude, cette longitude étant déterminée uniquement par la position initiale du PGV.

Afin de poursuivre et compléter notre travail, nous étudierons prochainement l'influence dans notre calcul de couplage électromagnétique de la diffusion dans la couche  $D''$  du champ magnétique toroïdal provenant du noyau; c'est une composante bien connue dans les problèmes de couplage électromagnétique Noyau-Manteau (Stix & Roberts, 1984). Il est cependant probable que les conclusions de notre étude dans laquelle nous n'avons considéré que le champ magnétique poloïdal (le seul accessible à l'observation) resteront inchangées.

## **Remerciements**

Nous remercions Dominique Jault, Richard Holme, Paul Roberts pour de très précieuses discussions sur ce travail.

Nous remercions Mathieu Sylvander, Charles Megnin, Michael Wysession, Xian-Feng Liu & Stuart Johnson pour nous avoir transmis les modèles de tomographie. Enfin merci Peter Ivanoff pour le dessin illustrant le mécanisme du couple électromagnétique.

## Appendice A: Expressions des coefficients de Gauss pour un champ magnétique dipolaire incliné à la frontière Noyau-Manteau

Supposons que le pôle Nord magnétique d'un dipôle soit situé à la position  $(\theta_1, \phi_1)$  sur la frontière Noyau-Manteau au rayon  $r_C$ . On peut alors définir le champ magnétique en utilisant un système de coordonnées composé des axes  $(x_1, y_1, z_1)$  où l'axe  $z_1$  est aligné avec l'axe de symétrie du dipôle. Dans ce système de coordonnées, le champ magnétique radial à la position  $(\theta, \phi)$  sur la FNM s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} B_r(r_C, \theta, \phi, \theta_1, \phi_1) = B_1 P_1\left(\frac{z_1}{r_C}\right) \\ \phantom{B_r(r_C, \theta, \phi, \theta_1, \phi_1)} = B_1 \left( \cos \theta \cos \theta_1 + \sin \theta \cos \phi \sin \theta_1 \cos \phi_1 \right. \\ \phantom{B_r(r_C, \theta, \phi, \theta_1, \phi_1)} \left. + \sin \theta \sin \phi \sin \theta_1 \sin \phi_1 \right) \\ \frac{z_1}{r_C} = \sin \theta_1 \cos \phi_1 \sin \theta \cos \phi + \sin \theta_1 \sin \phi_1 \sin \theta \sin \phi + \cos \theta_1 \cos \theta \end{array} \right. \quad (\text{A1})$$

où  $B_1$  est le facteur d'échelle de l'intensité du champ magnétique dipolaire et  $P_1$  est la fonction de Legendre de degré 1.

Le potentiel scalaire de degré 1 défini en (3.15) s'écrit

$$B_r(r_C, \theta, \phi, \theta_1, \phi_1) = 2 \left( \frac{r_E}{r_C} \right)^3 \left( \cos \theta g_1^0(\theta_1, \phi_1) + \sin \theta \cos \phi g_1^1(\theta_1, \phi_1) + \sin \theta \sin \phi h_1^1(\theta_1, \phi_1) \right) \quad (\text{A2})$$

En identifiant les expressions (A1) et (A2), on déduit les trois coefficients de Gauss de degré 1 en fonction de la position du pôle  $(\theta_1, \phi_1)$  et de l'intensité du champ magnétique du dipôle  $B_1$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} g_1^0(\theta_1, \phi_1) = \frac{1}{2} \left( \frac{r_C}{r_E} \right)^3 \cdot B_1 \cdot \cos \theta_1 \\ g_1^1(\theta_1, \phi_1) = \frac{1}{2} \left( \frac{r_C}{r_E} \right)^3 \cdot B_1 \cdot \sin \theta_1 \cos \phi_1 \\ h_1^1(\theta_1, \phi_1) = \frac{1}{2} \left( \frac{r_C}{r_E} \right)^3 \cdot B_1 \cdot \sin \theta_1 \sin \phi_1 \\ B_1 = 2 \cdot \left( \frac{r_E}{r_C} \right)^3 \cdot \sqrt{(g_1^0)^2 + (g_1^1)^2 + (h_1^1)^2} \end{array} \right. \quad (\text{A3})$$

## Appendice B: Calcul du champ magnétique toroïdal induit dans la couche D'' par le cisaillement des lignes de champ poloïdal

Le mécanisme de création de champ magnétique toroïdal dans la couche D'' par le cisaillement des lignes de champ poloïdal est décrit sur la figure 4.1. Dans cet Appendice, on calcule les courants électriques  $J_{M\theta}$  induits dans D'' par une rotation différentielle

$\omega \vec{e}_\phi$  entre le noyau et le manteau.

La couche D'' dans ce modèle est une coquille sphérique d'épaisseur  $\bar{D}$  et conductivité électrique  $\sigma_M$ . Dans cette couche, l'équation d'induction, écrite dans le repère lié au manteau, est au premier ordre

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{U}_{D''} \times \vec{B}) + \frac{1}{\mu_0 \sigma_M} \Delta \vec{b} \quad (\text{B1})$$

où  $\vec{b}$  est le vecteur champ magnétique induit dans D'' par la rotation différentielle entre le noyau et le manteau. On suppose que le champ magnétique poloïdal à la FNM est constant d'où  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ . Puisque l'on écrit cette équation dans le repère du manteau  $\vec{U}_{D''} = \vec{0}$ , on en déduit que l'équation (B1) se réduit à une équation de diffusion

$$\Delta \vec{b} = 0 \quad (\text{B2})$$

La composante longitudinale de cette équation de diffusion s'écrit dans l'approximation de coquille mince

$$\Delta b_\phi = \frac{\partial^2 b_\phi}{\partial r^2} = 0 \quad (\text{B3})$$

L'approximation de coquille mince a permis en effet de négliger tous les termes en  $\frac{1}{r_C}$  dans le laplacien vectorielle  $(\Delta \vec{b})_\phi$  et dans le laplacien scalaire  $\Delta b_\phi$ .

Puisque la rotation différentielle est selon  $\vec{e}_\phi$ , la composante du champ induit  $b_\theta$  est nulle. La composante du champ induit  $b_r$  est négligée dans l'approximation de coquille mince.

La première condition limite dans ce problème s'écrit au sommet de la couche D'': le champ magnétique toroïdal induit doit être nul au contact du manteau isolant, soit

$$b_\phi(r_C + \bar{D}) = 0 \quad (\text{B4})$$

La seconde condition limite s'écrit à la frontière Noyau-Manteau. On écrit la continuité de la composante tangentielle du champ électrique  $\vec{E}$  entre le noyau et la couche D'': du côté noyau, le champ électrique  $\vec{E}_N$  s'écrit dans le repère lié au manteau

$$\vec{E}_N = -(U_N \vec{e}_\phi \times \vec{B}_N) = \begin{pmatrix} U_N B_\theta \\ -U_N B_r \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B5})$$

Dans la couche D'', le champ électrique  $\vec{E}_M$  s'écrit dans l'approximation de coquille mince

$$\vec{E}_M = \frac{1}{\mu_0 \sigma_M} \nabla \times (\vec{b}) = \frac{1}{\mu_0 \sigma_M} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\partial b_\phi}{\partial r} \\ \frac{\partial b_\theta}{\partial r} \end{pmatrix} \quad (\text{B6})$$

A l'aide de (B5) et (B6), la continuité de la composante tangentielle du champ électrique s'écrit

$$\frac{\partial b_\phi}{\partial r} = \sigma_M \mu_0 B_r U_N \quad (\text{B7})$$



Les conditions (B3), (B4) et (B7) permettent d'en déduire l'expression de  $b_\phi$  dans la couche D''

$$b_\phi(\theta, \phi) = \sigma_M \mu_0 B_r(\theta, \phi) U_N(\theta) [r - (r_C + \bar{D})] \omega \text{ pour } r_C < r < r_C + \bar{D} \quad (\text{B8})$$

La vitesse du noyau dans le repère lié au manteau est  $U_N(\theta) \vec{e}_\phi = r_C \sin \theta \omega \vec{e}_\phi$  pour les points situés sur la frontière Noyau-Manteau. La loi d'Ampère permet enfin d'en déduire les courants électriques induit  $J_{M\theta}$  dans la couche D''

$$J_{M\theta}(\theta, \phi) = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial b_\phi}{\partial r} = -\sigma_M r_C B_r(\theta, \phi) \sin \theta \omega \text{ pour } r_C < r < r_C + \bar{D} \quad (\text{B9})$$

Bien que l'expression de  $J_{M\theta}(\theta, \phi)$  ait été obtenue pour une coquille sphérique mince d'épaisseur constante  $\bar{D}$ , nous utiliserons cette expression pour une épaisseur variable  $D_0(\theta, \phi)$ , puisque dans le cadre de l'approximation de couche mince les courants  $J_{M\theta}(\theta, \phi)$  sont considérés localement uniformes.

## Conclusion



# Conclusion

Nous avons contribué à l'étude du noyau terrestre en abordant quatre problèmes différents.

Dans la première partie, nous avons étudié expérimentalement un tourbillon géostrophique de gallium soumis à un champ magnétique. Nous avons montré que les structures dynamiques de l'écoulement sont élargies dans un régime magnétostrophique, confirmant les prédictions numériques (Cardin & Olson, 1995) et soutenant la présence de colonnes géostrophiques de diamètre important dans le noyau liquide terrestre (Hulot & al., 1990). Nous avons montré, par l'intermédiaire de mesures de dissipation ohmique dans le tourbillon expérimental, que le champ magnétique toroïdal moyen ne peut excéder 25 mT dans le noyau liquide, dans l'hypothèse où l'écoulement est géostrophique et de grande échelle. Enfin, nous avons montré que le champ magnétique induit vertical a pour origine le bouclage des courants électriques au sommet du tourbillon, c'est-à-dire à l'interface avec l'isolant. Par analogie, ce type de bouclage génère un champ magnétique poloïdal à l'interface Noyau-Manteau, ce qui nous rappelle que l'effet- $\alpha$  n'est pas le seul mécanisme créant du champ magnétique poloïdal dans le noyau terrestre. L'étude du tourbillon constituait une étape nécessaire pour la construction d'expériences avec des géométries plus réalistes pour le noyau terrestre; elle nous a permis, en particulier, d'acquérir un savoir-faire important en terme de mesures expérimentales. Ainsi, une expérience en géométrie sphérique est en construction à Grenoble où il sera étudié un écoulement de gallium en magnétoconvection dans une sphère en rotation rapide. La mise au point des techniques de mesure va nous être utile pour caractériser d'une part, la convection thermique d'un métal liquide en rotation rapide, et d'autre part, les effets d'un champ magnétique poloïdal ou toroïdal sur l'écoulement. A plus long terme, cette étude se place dans le cadre de la construction d'une dynamo expérimentale auto-induite dans du sodium liquide (collaboration CNRS-CEA, projet Ampère).

Les expériences de cristallisation de gallium, dans la seconde partie, ont montré qu'un polycristal peut posséder des propriétés d'anisotropie élastique importantes (proches de celles d'un monocristal). Nous avons observé que le flux de chaleur oriente la texture du polycristal en allongeant les grains dans la direction du flux. En revanche, le flux de chaleur ne permet pas d'expliquer l'anisotropie observée dans les polycristaux de gallium. Néanmoins, la cohérence de l'anisotropie sur l'ensemble du polycristal nous amène à penser qu'il existe une orientation préférentielle du réseau cristallin sur l'ensemble du bloc cristallisé. Cette orientation serait liée aux conditions initiales de solidification (nucléation initiale ou germes rémanents), et non pas aux conditions extérieures de cristallisation comme la convection, le champ magnétique imposé, la direction

du flux de chaleur ou l'anisotropie des conductivités thermique ou électrique du solide. On en a déduit que l'anisotropie élastique de la graine terrestre pourrait être due à l'orientation préférentielle de son réseau cristallin, l'orientation étant déterminée par les cristaux présents au coeur de la graine. En effet, les conditions extérieures comme la vigueur de la convection ou le champ magnétique n'influenceraient pas la direction du réseau cristallin au cours de la croissance de la graine.

Il est maintenant possible de poursuivre les expériences de cristallisation en ajoutant des éléments légers au sein du gallium; cela permettrait de tester si la nature de l'interface solide/liquide peut changer nos résultats expérimentaux.

Dans la troisième partie, nous avons étudié un mécanisme de couplage électromagnétique entre le noyau liquide et la graine solide résultant en une superrotation de la graine. Cette étude a démontré que le couplage électromagnétique entre la graine et le noyau liquide est extrêmement efficace et que la rotation de la graine se synchronise avec l'écoulement du fluide environnant. La vitesse de superrotation de la graine est directement reliée à l'intensité du champ magnétique toroïdal présent au sein du noyau, dans le cadre des hypothèses de notre modèle. Ainsi, une mesure confirmée et robuste de la rotation de la graine par les sismologues permettrait d'estimer le champ magnétique toroïdal dans le noyau.

Enfin, dans la quatrième partie, nous avons montré que la présence d'une couche  $D''$  hétérogène en conductivité électrique à la base du manteau ne peut expliquer une orientation préférentielle du noyau par rapport au manteau durant une inversion du champ magnétique terrestre. Une couche  $D''$  hétérogène induit un couplage électromagnétique, et, par conséquent, une rotation différentielle entre le noyau et le manteau, mais cette rotation est bien trop lente à l'échelle du temps des inversions du champ magnétique terrestre. Si les pôles géomagnétiques virtuels suivent des chemins d'inversion préférentiels, cela ne peut pas être dû à un couplage électromagnétique et il faut trouver un autre mécanisme pour expliquer ce phénomène (convection, topographie,...).

En cette fin de  $XX^e$  siècle, serions-nous à l'*Age d'Or* du noyau terrestre dans les Sciences de l'Univers? De nouveaux outils numériques et expérimentaux, ainsi qu'une motivation renouvelée de la communauté scientifique ont permis la découverte de résultats importants pour la compréhension du noyau terrestre. Ces nouvelles connaissances engendrent de nombreuses questions, chances et défis pour les chercheurs explorateurs de l'inaccessible et mystérieux centre de la Terre.

# Annexe



# Propriétés physiques du gallium

## Propriétés du gallium liquide à 30°C

GALLIUM LIQUIDE			
Densité	$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	<sup>†,‡</sup> 6.095×10 <sup>3</sup>
Viscosité dynamique	$\mu$	kg/(m·s)	<sup>†</sup> 1.96×10 <sup>-3</sup> , <sup>‡</sup> 1.8 ×10 <sup>-3</sup>
Viscosité cinématique	$\nu = \frac{\mu}{\rho}$	m <sup>2</sup> /s	<sup>†</sup> 3.22×10 <sup>-7</sup> , <sup>‡</sup> 2.95 ×10 <sup>-7</sup>
Température de fusion	$T_f$	°C	<sup>‡</sup> 29.771, <sup>Δ</sup> 29.78, * 29.76
Température d'ébullition	$T_e$	°C	<sup>Δ</sup> 22403, * 2204
Coefficient d'expansion thermique	$\alpha$	K <sup>-1</sup>	<sup>B</sup> 1.26 ×10 <sup>-4</sup>
Conductivité thermique	$k$	W/(m·K)	<sup>B</sup> 30.6 (à 30°C) <sup>‡</sup> 28.68 (à 77°C)
Chaleur spécifique	$C$	(J/kg·K)	<sup>‡</sup> 381.5, <sup>Δ</sup> 397.6
Diffusivité thermique	$\kappa = \frac{k}{\rho C}$	m <sup>2</sup> /s	1.18 ·10 <sup>-5</sup> ≤ $\kappa$ ≤ 1.36 ·10 <sup>-5</sup> (calculée)
Nombre de Prandtl	$Pr$	$\frac{\nu}{\kappa}$	≈ 0.022 ≤ $Pr$ ≤ 0.027 (calculé)
Conductivité électrique	$\sigma$	(mΩ) <sup>-1</sup>	<sup>‡</sup> 3.87×10 <sup>6</sup> , <sup>Δ</sup> 3.85×10 <sup>6</sup>
Diffusivité magnétique	$\lambda = \frac{1}{\mu_0 \sigma}$	m <sup>2</sup> /s	0.21 (calculé)
Nombre de Prandtl magnétique	$P_m$	$\frac{\nu}{\lambda}$	1.4 ×10 <sup>-6</sup> ≤ $P_m$ ≤ 1.53 ×10 <sup>-6</sup> (calculé)
Tension superficielle	$\gamma$	N/m	<sup>‡</sup> 0.709

## Propriétés du gallium solide

Le gallium cristallise dans le système orthorhombique *Cmca*. Les propriétés du gallium selon les 3 axes cristallins *a*, *b* et *c* sont décrits dans le tableau suivant.

GALLIUM SOLIDE			
Axes cristallin	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
Longueur en nm	<sup>‡</sup> 0.45186	<sup>‡</sup> 0.45258	<sup>‡</sup> 0.76602
Conductivité thermique <i>k</i> en W/(m·K)	<sup>‡</sup> 88.4	<sup>‡</sup> 40.8	<sup>‡</sup> 16.0
Conductivité électrique $\sigma$ en (mΩ) <sup>-1</sup>	<sup>‡</sup> 12.3×10 <sup>6</sup>	<sup>‡</sup> 5.7×10 <sup>6</sup>	<sup>‡</sup> 1.8×10 <sup>6</sup>
Chaleur latente de fusion <i>L</i> en kJ/kg	<sup>‡</sup> 79.8, <sup>Δ</sup> 80.16		
Vitesse des ondes de compression $V_P$ en m/s	<sup>π</sup> 4080, <sup>Ⓞ</sup> 4151	<sup>π</sup> 3860, <sup>Ⓞ</sup> 3948	<sup>π</sup> 4760, <sup>Ⓞ</sup> 4823

Sources: <sup>†</sup>Spells (1936), <sup>‡</sup>Sabot & Lauvray (1995), <sup>Δ</sup>Cubbery (1979), \*Lide (1995), <sup>B</sup>Okada & Ozoe (1992), <sup>π</sup>Roughthon & Nash (1962), <sup>Ⓞ</sup>Lyall & Cochran (1971).





## Références bibliographiques



# Références bibliographiques

- Abramowitz, M., & Stegun I. A. 1964. *Handbook of mathematical functions*. Dover Publications.
- Alboussière, T. 1994. *Magnétohydrodynamique et ségrégation solutale en croissance Bridgman horizontale*. Thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Grenoble.
- Aleman, A., Moreau, R., Sulem, P.-L., & Frisch U. 1979. Influence of an external magnetic field on homogeneous turbulence. *J. de Mécanique*, **18**, 277-313.
- Alexandrescu, M., Courtillot, V., & Le Mouél, J.-L. 1996a. Geomagnetic field in Paris since the mid-sixteenth century. *Phys. Earth Planet. Inter.*, **98**, 321-360.
- Alexandrescu, M., Gibert, D., Hulot, G., Le Mouél, J.-L., & Saracco, G. 1996b. Worldwide wavelet analysis of geomagnetic jerks. *J. Geophys. Res.*, **101**, 21975-21994.
- Allègre, C. J., Poirier, J.-P., Humler, E., & Hofman, A. W. 1995. The chemical composition of the Earth. *Earth Planet. Sci. Lett.*, **134**, 515-526.
- Andraut, D., Fiquet, G., Kunz, M., Visoceskis, F., & Hašermann, D. 1997. The orthorhombic structure of iron: an in-situ study at high-temperature and high-pressure. *Science*, **278**, 831-834.
- Aurnou, J., & Olson, P. 1997. An Experimental Study of Rotating Magnetoconvection. *Eos, Trans. (suppl.) AGU*, **78**, 46.
- Aurnou, J. M., Brito, D., & Olson, P. L. 1996. Mechanics of inner core super-rotation. *Geophys. Res. Lett.*, **23**, 3401-3404.
- Aurnou, J. M., Buttle, J. L., Neumann, G. A., & Olson, P. L. 1996. Electromagnetic Core-Mantle coupling and paleomagnetic reversal paths. *Geophys. Res. Lett.*, **23**, 2705-2708.
- Backus, G. E. 1975. Gross thermodynamics of heat engines in the deep interior of Earth. *Proc. Natn. Acad. Sci. U.S.A.*, **72**, 1555-1558.
- Barton, C. E., & McFadden, P. L. 1996. Inclination shallowing and preferred transitional VGP paths. *Earth Planet. Sci. Lett.*, **140**, 147-157.
- Bergman, M. I. 1997. Measurements of elastic anisotropy due to solidification texturing and the implications for the Earth's inner core. *Nature*, **389**, 60-63.

- Bergman, M. I., & Fearn, D. R. 1994. Chimneys on the Earth's inner-outer core boundary?. *Geophys. Res. Lett.*, **21**, 477-480.
- Bloxham, J., Gubbins, D., & Jackson, A. 1989. Geomagnetic secular variation. *Philos. Trans. R. Soc. London*, **A329**, 415-502.
- Bloxham, J., & Jackson, A. 1992. Time-dependent mapping of the magnetic field at the Core-Mantle boundary. *J. Geophys. Res.*, **97**, 19537-19563.
- Bosio, L., & Defrain, A. 1969. Structure Cristalline du Ga $\beta$ . *Acta Cryst.*, **B25**, 995.
- Bosio, L., Curien, H., Dupont, M., & Rimsky, A. 1973. Structure cristalline de Ga $\delta$ . *Acta Cryst.*, **B29**, 367-368.
- Bradley, A. J. 1935. *Z. Kristallogr.*, **91**, 302-316.
- Braginski, S. I., & Fishman, V. M. 1976. Electromagnetic coupling of the core and mantle when electrical conductivity is concentrated near the core boundary. *Geomagnetism and aeronomy*, **16**, 443-446.
- Braginsky, S. I., & Meytlis, V. P. 1991. Local turbulence in the Earth's core. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **55**, 71-87.
- Brito, D. 1993. *Etude expérimentale de l'interaction d'un vortex de gallium avec un champ magnétique*. Rapport du D.E.A. de Mécanique de l'Université Paris VI.
- Brito, D., Cardin, P., Nataf, H.-C., & Marolleau, G. 1995. Experimental study of a geostrophic vortex of gallium in a transverse magnetic field. *Phys. Earth Planet. Inter.*, **91**, 77-98.
- Brito, D., Cardin, P., Nataf, H. C., & Olson, P. L. 1996. Experiments on Joule heating and the dissipation of energy in the Earth's core. *Geophys. J. Intl.*, **127**, 339-347.
- Buffett, B. A. 1996a. Gravitational oscillations in the length of day. *Geophys. Res. Lett.*, **23**, 2279-2282.
- Buffett, B. A. 1996b. A mechanism for decade fluctuations in the length of day. *Geophys. Res. Lett.*, **23**, 3803-3806.
- Buffett, B. A. 1997. Geodynamic estimates of the viscosity of the Earth's inner core. *Nature*, **388**, 571-573.
- Bullard, E. C., & Gellman, H. 1954. Homogeneous dynamos and terrestrial magnetism. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, **A 247**, 213-278.
- Busse, F. H. 1970. Thermal instabilities in rapidly rotating systems. *J. Fluid Mech.*, **44**, 441-460.
- Busse, F. H. 1975. A model of the Geodynamo. *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, **42**, 437-459.
- Busse, F. H. 1983. A model of mean zonal flow in the major planets. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **23**, 152-174.

- Campbell, T. A., & Koster, J. N. 1994. Visualization of liquid-solid interface morphologies in gallium subject to natural convection. *J. Crystal Growth*, **140**, 414-425.
- Cardin, P., & Olson, P. 1992. An experimental approach to thermochemical convection in the Earth's core. *Geophys. Res. Lett.*, **19**, 1995-1998.
- Cardin, P., & Olson, P. 1994. Chaotic thermal convection in a rapidly rotating spherical shell: consequences for flow in the outer core. *Phys. Earth Planet. Inter.*, **82**, 235-259.
- Cardin, P., & Olson, P. 1995. The influence of toroidal magnetic field on thermal convection in the core. *Earth Planet. Sci. Lett.*, **132**, 167-181.
- Chalmers, B. 1964. *Principles of solidification*. Jon Wiley & Sons, Inc., New York.
- Chalmers, B. 1970. *Shapes and sizes of grains in castings* dans *Solidification*, American Society for Metals, Metal Park, Ohio, pages 295-310.
- Chandrasekar, S. 1961. *Hydrodynamic and Hydromagnetic stability*. Clarendon, Oxford.
- Christensen, U., Olson, P., & Glatzmaier, G. 1998. A dynamo model interpretation of geomagnetic field structures, soumis à *Geophys. Res. Lett.*
- Clement, B. M. 1991. Geographical distribution of transitional VGPs: evidence for non-zonal equatorial symmetry during Matuyama-Brunhes geomagnetic reversal. *Earth Planet. Sci. Lett.*, **104**, 48-58.
- Clement, B. M., Rodda, P., Smith, E., & Sierra, L. 1995. Recurring transitional geomagnetic field geometries. *Geophys. Res. Lett.*, **22**, 3171-3174.
- Coe, R., Prevot, M., & Camps, P. 1995. New evidence for extraordinarily rapid change of the geomagnetic field during a reversal. *Nature*, **374**, 687-692.
- Cormier, V. F. 1981. Short-period *PKP* phases and the anelastic mechanism of the inner core. *Phys. Earth Planet. Inter.*, **24**, 291-301.
- Courtillot, V., & Le Mouél, J.-L. 1984. Geomagnetic secular variation impulses. *Nature*, **311**, 709-716.
- Courtillot, V., & Valet, J. P. 1995. Secular variation of the Earth's magnetic field: from jerks to reversals. *C.R. Acad. Sci. Paris*, **320**, 903-922.
- Cowling, T. G. 1934. The magnetic field of sunspots. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **94**, 39-48.
- Creager, K. C. 1992. Anisotropy of the inner core from differential *PKP* travel times of the phases *PKP* and *PKIKP*. *Nature*, **356**, 309-314.
- Creager, K. C. 1997. Inner core rotation from small-scale heterogeneity and time-varying travel times. *Science*, **278**, 1284-1288.

- Cubbery, W. H. 1979. *Metal Handbook II*, 9<sup>th</sup> ed., American Society of Metals, Metals Park, Ohio, pages 736-737.
- Davoust, L. 1996. *Convection naturelle MHD dans une cavité horizontale élançée*. Thèse de Doctorat de l'Institut national polytechnique de Grenoble.
- De la Bretèque, P. 1962. *Gallium, propriétés principales*, Société française pour l'industrie de l'aluminium, Marseille.
- Dormy, E., Cardin, P., & Jault, D. 1997. MHD flow in a slightly differentially rotating spherical shell, with conducting inner core in a dipolar magnetic field. A paraître dans *Earth Planet. Sci. Lett.*
- Dymov, A. M., & Savostin, A. P. 1970. *Analytical Chemistry of Gallium*, Ann Arbor Science Publishers, Ann Arbor, MI, pages 6-8.
- Dziewonski, A. M., & Anderson, D. L. 1981. Preliminary reference Earth model. *Phys. Earth Planet. Inter.*, **25**, 297-356.
- Dziewonski, A. M., Ekstrom, G., & Liu, X.-F. 1996. *Structure at the top and bottom of the mantle*, E.S. Husebye and A.M. Dainty (eds.), Monitoring Test Ban Treaty, pages 521-550.
- Dziewonski, A. M., Liu, X.-F., & Su, W.-J. 1996. *Lateral Heterogeneity in the Lowermost Mantle*. A lecture in the memory of Durk Doornbos.
- Elsasser, W. M. 1946. Induction effects in terrestrial magnetism. *Phys. Rev.*, **69**, 106-116.
- Fearn, D. R. 1979. Thermally driven hydromagnetic convection in a rapidly rotating sphere. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, **A369**, 227-242.
- Fearn, D. R., Loper, D. E., & Roberts, P. H. 1981. Structure of the Earth's inner core. *Nature*, **292**, 232-233.
- Gailitis, A. 1992. *Experimental aspects of a laboratory scale liquid sodium dynamo model* dans *Solar and planetary dynamos*, Ed. by M.R.E. Proctor, P.C. Matthews & A. M. Rucklidge, Publication of the Newton Institute, Cambridge, pages 91-98.
- Gailitis, A. K. 1996. Project of a liquid sodium MHD dynamo experiment. *Magneto-hydrodynamics*, **32**, 63.
- Garnero, E. J., & Helmberger, D. V. 1996. Seismic detection of a thin laterally varying boundary layer at the base of the mantle beneath the central-Pacific. *Geophys. Res. Lett.*, **23**, 977-980.
- Garnero, E. J., Revenaugh, J., Williams, Q., & Lay, T. 1997. Ultralow velocity zone at Core-Mantle boundary, soumis à *Special AGU monograph on CMB*.
- Gau, C., & Viskanta, R. 1986. Melting and solidification of a pure metal on a vertical wall. *Jour. Heat Transfer*, **108**, 174-181.

- Gill, A. E. 1974. A theory of thermal oscillations in liquid metals. *J. Fluid Mech.*, **64**, 577-588.
- Gire, C., & Le Mouél, J.-L. 1990. Tangentially geostrophic flow at the core mantle boundary compatible with the observed geomagnetic secular variation ; the large scale component of the flow, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **59**, 259-287.
- Glatzmaier, G. A., & Olson, P. 1993. Highly supercritical thermal convection in a rotating spherical shell: centrifugal vs. radial gravity. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **70**, 113-136.
- Glatzmaier, G. A., & Roberts, P. H. 1995a. A three-dimensional, self-consistent computer simulation of a geomagnetic reversal. *Nature*, **377**, 203-208.
- Glatzmaier, G. A., & Roberts, P. H. 1995b. A three-dimensional convective dynamo solution with rotating and finitely conducting inner core and mantle. *Phys. Earth Planet. Inter.*, **91**, 63-75.
- Glatzmaier, G. A., & Roberts, P. H. 1996. Rotation and magnetism of Earth's inner core. *Science*, **274**, 1887-1891.
- Glatzmaier, G. A., & Roberts, P. H. 1997. Simulating the Geodynamo. *Contemporary Physics*, **38**, 269-288.
- Glen, J. M., Coe, R. S., & Liddicoat, J. C. 1994. Persistent features of polarity transition records from western North America. *Geophys. Res. Lett.*, **21**, 1165-1168.
- Green, R. E. 1973. *Ultrasonic investigation of mechanical properties*. Academic Press, New York.
- Greenspan, H. P. 1968. *The theory of rotating fluids*. Cambridge University Press.
- Greff-Lefftz, M., & Legros, H. 1995. Core-Mantle coupling and polar motion. *Phys. Earth Planet. Inter.*, **91**, 273-283.
- Gubbins, D. 1981. Rotation of the inner core. *J. Geophys. Res.*, **86**, 11695-11699.
- Gubbins, D. 1994. Geomagnetic polarity reversals: a connection with secular variation and Core-Mantle interaction?. *Reviews of Geophysics*, **32**, 61-83.
- Gubbins, D., Masters, T. G., & Jacobs, J. A. 1979. Thermal evolution of the Earth's core. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, **59**, 57-99.
- Gubbins D. & Roberts P. H. 1987. *Magnetohydrodynamics of the Earth's core* dans dans *Geomagnetism* vol. 2, ed. Jacobs J. A., pages 1-184.
- Gubbins, D., & Coe, R. S. 1993. Longitudinally confined geomagnetic reversal paths from non-dipolar transition fields. *Nature*, **362**, 51-53.
- Gubbins, D., & Sarson, G. 1994. Geomagnetic field morphologies from a kinematic dynamo model, *Nature*, **368**, 51-55.



- Hart, J. 1983. A note on the stability of low-Prandtl-number Hadley circulations. *J. Fluid Mech.*, **132**, 271-281.
- Hewitt, J. M., McKenzie, D. P., & Weiss, N. O. 1975. Dissipative heating in convective flows. *J. Fluid Mech.*, **68**, 721-738.
- Hoffman, K. 1992. Dipolar reversal states of the geomagnetic field and Core-Mantle dynamics. *Nature*, **359**, 789-794.
- Hollerbach, R. 1996. On the theory of the geodynamo. *Phys. Earth Planet. Inter.*, **98**, 163-185.
- Hollerbach, R., & Jones C. A. 1993. Influence of the Earth's inner core on geomagnetic fluctuations and reversals. *Nature*, **365**, 541-543.
- Holme, R. 1997. Electromagnetic Core-Mantle coupling—I. Explaining decadal changes in the length of day. *Geophys. J. Int.*, **132**, 167-180.
- Hongre, G., Hulot, G., & Khokhlov, A. 1998. An analysis of the geomagnetic field over the past 2000 years. A paraître dans *Phys. Earth Planet. Inter.*
- Hulot, G., Le Mouël, J.-L., & Jault, D. 1990. The flow at the Core-Mantle boundary: symmetry properties. *J. Geomag. Geoelectr.*, **42**, 857-874.
- Hulot, G., & Le Mouël, J.-L. 1994. A statistical approach to the Earth's main magnetic field. *Phys. Earth Planet. Inter.*, **82**, 167-183.
- Hurle, D. T. J. 1966. Temperature oscillations in molten metals and their relationships to growth striae in melt-grown crystals. *Philos. Mag.*, **13**, 305-310.
- Hurle, D. T. J., Jackeman, E., & Johnson, C. P. 1974. Convective temperature oscillations in molten gallium. *J. Fluid Mech.*, **64**, 565-576.
- Hurle, D. T. J. 1993. *Handbook of crystal growth*, ed. Elsevier Science.
- IAGA Division V, Working group 8. 1996. *Eos, Trans., AGU*, **77**, 153.
- Jacobs, J. A. 1987. *The Earth's core*. Academic Press, New York.
- Jackson, A. 1998. Time dependency of tangentially-geostrophic core surface motions. A paraître dans *Phys. Earth Planet. Inter.*
- Jault, D. 1990. *Variations séculaires du champ géomagnétique et fluctuations de la longueur du jour*. Thèse de Doctorat de l'Université Paris VII.
- Jault, D., Gire, C. & Le Mouël, J.-L. 1988. Westward drift, core motions and exchanges of angular momentum between the core and mantle. *Nature*, **333**, 353-356.
- Jault, D., & Le Mouël, J.-L. 1990. Core-Mantle boundary shape: constraints inferred from the pressure torque acting between the core and the mantle. *Geophys. J. Int.*, **101**, 233-241.
- Jault, D., & Le Mouël, J.-L. 1991. Exchange of angular momentum between the core and the mantle. *J. Geomag. Geoelectr.*, **43**, 111-129.

- Jeanloz, R. 1993. *Relating Geophysical Structures and Processes: The Jeffreys Volume*, AGU Geophys. Monograph **76**, 121-127.
- Jeanloz, R., & Wenk, H. R. 1988. Convection and anisotropy of the inner core. *Geophys. Res. Lett.*, **15**, 72-75.
- Jephcoat, A., & Olson, P. 1987. Is the inner core of the Earth pure iron?. *Nature*, **325**, 332-335.
- Karato, S. 1993. Inner core anisotropy due to the magnetic-field preferred orientation of iron. *Science*, **262**, 1708-1711.
- Kellogg, L. H., & King, S. 1993. Effect of mantle plumes on the growth of D'' by reaction between the core and mantle. *Geophys. Res. Lett.*, **20**, 379-382.
- Kleeorin, N., Rogachevskii, I., Ruzmaikin, A., Soward, A. M., & Starchenko, S. 1997. Axisymmetric flow between differentially rotating spheres in a dipole magnetic field. *J. Fluid Mech.*, **344**, 213-244.
- Koster, J. N. 1997. Visualization of Rayleigh-Bénard convection in liquid metals. *Eur. J. Mech. B/Fluids*, **16**, 447-454.
- Koster, J. N., Seidel, T., & Derebail, R. 1997. A radiosopic technique to study convective fluid dynamics in opaque liquid metals. *J. Fluid Mech.*, **343**, 29-41.
- Kuang, W. J., & Bloxham, J. 1997. An Earth-like numerical dynamo model. *Nature*, **389**, 371-374.
- Kumar, S., & Roberts, P. H. 1975. A three-dimensional kinematic dynamo. *Proc. R. Soc. Lond., A* **344**, 235-258.
- Labrosse, S. 1996. *Contribution à l'étude du refroidissement de la Terre*. Thèse de Doctorat de l'Université Paris VII.
- Laj, C., Mazaud, A., Weeks, R., Fuller, M., & Herrero-Bervera, E. Geomagnetic reversal paths. *Nature*, **351**, 447, 1991.
- Langel, R. A., & Estes, R. H. 1982. Geomagnetic field spectrum. *Geophys. Res. Lett.*, **9**, 250-253.
- Lay, T., & Wallace, T. C. 1995. *Modern Global Seismology, International Geophysics*, Volume 58, Academic Press.
- Lazarus, D. 1949. The variation of the adiabatic elastic constants of KCl, NaCl, CuZn, Cu and Al with Pressure to 10,000 Bars. *Physical Review*, **76**, 545-553.
- Lehmann, I. 1936. P'. *Publ. Bur. Cent. Sismol. Int. Trav. Sci.*, **A 14**, 87-115.
- Le Huy, M. 1995. *Le champ géomagnétique, les mouvements du fluide à la surface du noyau et les variations décennales de la rotation de la Terre*. Thèse de Doctorat de l'Université Paris VII.

- Le Mouél, J.-L., Gire, C., & Madden, T. 1985. Motions at the core surface in geostrophic approximation. *Phys. Earth Planet. Int.*, **39**, 270-287.
- Li, X.-D., & Romanowicz, B. 1995. Comparison of global waveform inversions with and without considering cross-branch modal coupling. *Geophys. J. Int.*, **121**, 695-709.
- Lide, D. R. 1995. *Handbook of Chemistry and Physics*, 75<sup>th</sup> ed., CRC Edition.
- Lister, J. R., & Buffett, B. A. 1995. The strength and efficiency of thermal and compositional convection in the geodynamo. *Phys. Earth Planet. Inter.*, **91**, 17-30.
- Loper, D. E. 1989. Dynamo energetics and the structure of the outer core. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **49**, 213-219.
- Loper, D. E., & Roberts, P. H. 1981. A study of conditions at the inner core boundary of the Earth. *Phys. Earth Planet. Inter.*, **24**, 302-307.
- Loper, D. E., & Roberts, P. H. 1983. *Compositional convection and the gravitationally powered dynamo* dans *Stellar & Planetary Magnetism*, Gordon and Breach, London.
- Loper, D., & Lay, T. 1995. The Core-Mantle boundary region. *J. Geophys. Res.*, **100**, 6397-6420.
- Lyall, K. R., & Cochran, J. F. 1971. Velocity of sound and acoustic attenuation in pure gallium single crystals. *Can. Jour. Phy.*, **49**, 1075-1097.
- Malkus, W. V. R. 1968. Precession of the Earth as cause of geomagnetism. *Science*, **169**, 259-264.
- Manneville, J. B., & Olson, P. 1996. Banded Convection in a Rotating Fluid Sphere. *Icarus*, **122**, 242-250.
- Mao, H., Shu, J., & Hemley, R. J. 1996. Rheology, strength, and elasticity of iron at high pressure. *Eos, Trans. (suppl.) AGU*, **77 (12)**.
- Masters, G., Johnson, S., Laski, G., & Bolton, H. 1996. A shear-velocity model of the mantle. *Phil. Trans. Roy. Astron. Soc.*, **A354**, 1385-1411.
- Masters, G., & Gilbert, F. 1981. Structure of the inner core inferred from observations of its spheroidal shear modes. *Geophys. Res. Lett.*, **8**, 569-571.
- McFadden, P., Barton, C., & Merrill, R. T. 1993. Do virtual geomagnetic poles follow preferred paths during geomagnetic reversals? *Nature*, **361**, 342-344.
- McSweeney, T. J., Creager, K. C., & Merrill, R. T. 1997. Depth extent of inner-core seismic anisotropy and implications for geomagnetism. *Phys. Earth Planet. Inter.*, **101**, 131-156.
- Merrill, R. T., McElhinny, M. W., & McFadden, P. L. 1996. *The Magnetic Field of the Earth*. International Geophysics Series, Volume 63, Academic Press, London.

- Moffatt, H. K. 1978. *Magnetic field generation in electrically conducting fluids*. Cambridge University Press.
- Moffatt, H. K., & Loper, D. E. 1994. The magnetostrophic rise of buoyant parcel in the Earth's core. *Geophys. J. Int.*, **117**, 394-402.
- Morelli, A., Dziewonski, A. M., & Woodhouse, J. H. 1986. Anisotropy of the inner core inferred from *PKIKP* travel times. *Geophys. Res. Lett.*, **13**, 1545-1548.
- Nakagawa, Y. 1957. Experiments on the instability of a layer of mercury heated from below and subject to the simultaneous action of a magnetic field and rotation. *Proc. Roy. Soc.*, **A 242**, 81-88.
- Nakagawa, Y. 1958. Experiments on the instability of a layer of mercury heated from below and subject to the simultaneous action of a magnetic field and rotation II. *Proc. Roy. Soc.*, **A 249**, 138-145.
- Nondestructive Testing Handbook. 1991. 2<sup>nd</sup> ed., Volume 7, Ultrasonic Testing ASNT, ed Paul McIntire.
- Okada, K., & Hiroyuki, O. 1992. Transient responses of natural convection heat transfer with liquid gallium under an external magnetic field in either the  $x$ ,  $y$ , or  $z$  direction. *Ind. Eng. Chem. Res.*, **31**, 700-706.
- Olson, P. L., & Glatzmaier, G. A. 1995. Magnetoconvection in a rotating spherical shell: structure of flow in the outer core. *Phys. Earth Planet. Inter.*, **92**, 109-118.
- Olson, P., & Glatzmaier, G. A. 1996. Magnetoconvection and thermal coupling of the Earth's core and mantle. *Phil. Trans. Roy. Astron. Soc.*, **A354**, 1413-1424.
- Ostrach, S. 1988. Natural convection in enclosures. *Jour. Heat Transfer*, **110**, 1175-1190.
- Parker, R. L. 1966. Reconnexion of lines of forces in rotating spheres and cylinders. *Proc. Roy. Soc.*, **A 291**, 60-72.
- Pascal, B. 1996. *Etude expérimentale d'un vortex de gallium dans un champ magnétique transversal*. Rapport de stage du D.E.A. Dynamique des fluides et des transferts, Paris XI.
- Pascal, P. 1961. *Nouveau traité de chimie minérale VI*. Masson et Cie éditeurs, 669-774.
- Pekeris, C. L., Accad, Y., & Shkoller, B. 1973. Kinematic dynamos and the Earth's magnetic field, *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, **A 275**, 425-461.
- Plunian, F. 1996. *Etude de l'effet dynamo dans le coeur du réacteur Phenix*. Thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Grenoble.
- Poirier, J.-P. 1994. Light elements in the Earth's outer core: a critical review. *Phys. Earth Planet. Inter.*, **85**, 319-337.

- Poirier, J.-P., & Le Mouél, J.-L. 1992. Does infiltration of core material into the lower mantle affect the observed geomagnetic field?. *Phys. Earth Planet. Inter.*, **73**, 29-37.
- Poupinet, G., Pillet, R., & Souriau, A. 1983. Possible heterogeneity of the Earth's core deduced from *PKIKP* travel times. *Nature*, **304**, 204-206.
- Powell, R. W. 1951. The electrical resistivity of gallium and some other anisotropic properties of this metal. *Proc. Roy. Soc.* **A209**, 525-541.
- Prevot, M., & Camps, P. 1993. Absence of preferred longitude sectors for poles from volcanic records of geomagnetic reversals. *Nature*, **366**, 56-57.
- Quidelleur, X., & Valet, J. P. 1994. Paleomagnetic records of excursions and reversals; possible biases caused by magnetization artefacts. *Phys. Earth Planet. Inter.*, **82**, 27-48.
- Reed-Hill, R. E. 1973. *Physical Metallurgy Principles, Second Edition*. PWS-KENT Publishing company, Boston.
- Roberts, P. H. 1968. On the thermal instability of a rotating fluid sphere containing heat sources. *Philos. Trans. R. Soc. London*, **A263**, 93-117.
- Roberts, P. H. 1972. Electromagnetic Core-Mantle coupling, *J. Geomagn. Geoelectr.*, **24**, 231-259.
- Rochester, M. G. 1962. Geomagnetic Core-Mantle coupling. *J. Geophys. Res.*, **67**, 4833-4836.
- Romanowicz, B., Li, X.-D., & Durek, J. 1996. Anisotropy in the inner core: could it be due to low order convection?. *Science*, **274**, 963-966.
- Roughton, N. A., & Nash, H. C. 1962. Single crystal elastic constants of gallium. *Office of Naval research*, Technical Report, N°6.
- Runcorn, S. K. 1992. Polar path in geomagnetic reversals. *Nature*, **356**, 654-656.
- Runcorn, S. K. 1996. Preferred paths of VGPs in geomagnetic reversal records and their significance. *Surveys in Geophysics*, **17**, 229-232.
- Sabot, J.-L., & Lauvray, H. 1995. *Gallium and gallium compounds* dans *Kirk-Othmer, Encyclopedia of Chemical Technology*, 4<sup>th</sup> ed., **12**, 299-317.
- Shearer, P. M. 1994. Constraints on inner core anisotropy from *PKP(DF)* travel times. *J. Geophys. Res.*, **99**, 19647-19659.
- Shearer, P. M., Toy, K. M., & Orcutt, J. A. 1988. Axi-symmetric Earth models and inner-core anisotropy. *Nature*, **333**, 228-232.
- Shearer, P. M., & Toy, K. M. 1991. *PKP(DF)* differential travel times and aspherical structure in the Earth's inner core. *J. Geophys. Res.*, **96**, 2233-2247.

- Sommeria, J. 1985. *Sur la turbulence bidimensionnelle: une approche par la magnétohydrodynamique*. Thèse d'Etat de l'Université Scientifique et Médicale et de l'Institut National Polytechnique de Grenoble.
- Song, X. 1997. Anisotropy of the Earth's inner core, *Rev. Geophys.*, **35**, 297-313.
- Song, X., & Helmberger, D. V. 1993. Velocity structure near the inner core boundary from waveform modelling. *J. Geophys. Res.*, **97**, 6573-6586.
- Song, X. & Helmberger D. V. 1995. Depth dependence of anisotropy of Earth's inner core. *J. Geophys. Res.*, **100**, 9805-9816.
- Song, X., & Richards, P. G. 1996. Observational evidence for differential rotation of the Earth's inner core. *Nature*, **382**, 221-224.
- Souriau, A., & Romanowicz, B. 1997. Anisotropy in the inner core: relation between P-velocity and attenuation. *Phys. Earth Planet. Inter.*, **101**, 33-47.
- Souriau, A., Roudil, P., & Moynot, B. 1997. Inner core rotation: facts and artefacts. *Geophys. Res. Lett.*, **24**, 2103-2106.
- Spells, K. E. 1936. The determination of the viscosity of liquid gallium over an extended range of temperature. *Proc. Phys. Soc.*, **48**, 299-311.
- Spohn, A. 1991. *Écoulement et éclatements tourbillonnaires engendrés par un disque tournant dans une enceinte cylindrique*. Thèse de Doctorat de l'Université de Grenoble 1.
- Stacey, F. D. 1992. *Physics of the Earth, third edition*, Brookfield Press, Brisbane, Australia.
- Steenbeck, M., & Helms, G. 1975. Rotation of the Earth's solid core as a possible cause of declination, drift and reversals of the Earth's magnetic field. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, **41**, 237-244.
- Stieglitz, R., & Müller, U. 1997. Geodynamo- An experiment facility to demonstrate the mean field dynamo-effect, dans *Proc. 3<sup>rd</sup> int. conf. on Transfer Phenomena in MagnetoHydroDynamic and Electroconducting Flows, Aussois*, pages 15-20
- Stix, M., & Roberts, P. H. 1984. Time-dependent electromagnetic Core-Mantle coupling. *Phys. Earth Planet. Inter.*, **36**, 49-60.
- Stixrude, L., & Cohen, R. E. 1995. High pressure elasticity of iron and anisotropy of Earth's inner core. *Science*, **267**, 1972-1975.
- St. Pierre, M. G. 1994. The stability of buoyant structures in the outer core. Oral communication in SEDI congress, 7-12 August 1994, Whistler Mountain, British Columbia, Canada.
- Su, W. J., & Dziewonski, A. M. 1995. Inner core anisotropy in three dimensions. *J. Geophys. Res.*, **100**, 9831-9852.

- Su, W. J., Dziewonski, A. M., & Jeanloz, R. 1996. Planet within a planet: rotation of the inner core of the Earth. *Science*, **274**, 1883-1887.
- Sun, Z., Schubert, G., & Glatzmaier, G. A. 1993. Banded surface flow maintained by convection in a model of rapidly rotating giant planets. *Science*, **260**, 661-664.
- Sun, Z.-P., Schubert, G., & Glatzmaier, G. A. 1994. Numerical simulations of thermal convection in a rapidly rotating spherical shell cooled inhomogeneously from above. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **75**, 199-226.
- Sylvander, M., & Souriau A. 1996. Mapping S-velocity heterogeneities in the D'' region, from SmKS differential travel times. *Phys. Earth Planet. Inter.*, **94**, 1-21.
- Szekely, J., & Chhabra, P. S. 1970. The effect of natural convection on the shape and movement of the melt-solid interface in the controlled solidification of lead. *Mettalurgical Transactions*, volume 1, 1195-1203.
- Tait, S., & Jaupart, C. 1992. Compositional convection in a reactive crystalline mush and melt differentiation. *J. Geophys. Res.*, **97**, 6735-6756.
- Tanaka, S., & Hamaguchi, H. 1997. Degree one heterogeneity and hemispherical variation of anisotropy in the inner core from PKP(BC)-PKP(DF) times. *J. Geophys. Res.*, **102**, 2925-2938.
- Tric, E., Laj, C., Jehanno, C., Valet, J. P., Kissel, C., Mazaud, A., & Iccarino, S. 1991. High resolution record of the Upper Olduvai Transition from Po Valley (Italy) sediments: support for dipolar transition geometry? *Phys. Earth Planet. Inter.*, **65**, 319-336.
- Tritton, D. J. 1988. *Physical Fluid Dynamics*. Oxford Science Publication.
- Tromp, J. 1993. Support for anisotropy of the Earth's inner core from free oscillations. *Nature*, **366**, 678-681.
- Valet, J. P., Tucholka, P., Courtillot, V., & Meynadier, L. 1992. Paleomagnetic constraints on the geometry of the geomagnetic field during reversals. *Nature*, **356**, 400-407.
- Valet, J. P., & Meynadier, L. Geomagnetic field intensity and reversals during the past four million years. *Nature*, **336**, 234-238, 1993.
- Vere, A. W. 1987. *Crystal Growth Principles and Progress*. Plenum Press, New York.
- Verhoogen, J. 1980. *Energetics of the Earth*, National Academy of Sciences, Washington, D.C.
- Vinnik, L., Romanowicz, B., & Breger, L. 1994. Anisotropy in the center of the inner core. *Geophys. Res. Lett.*, **21**, 1671-1674.
- Voorhies, C. V. 1986. Steady flows at the top of the core derived from geomagnetic field models. *J. Geophys. Res.*, **91**, 12444-12466.

- Wang, Y. L., Doong, Y. Y., Chen, T. S., & Haung, J. S. 1994. Oxidation of liquid gallium surface: Nonequilibrium growth kinetics on 2+1 dimensions. *J. Vac. Sci. Technol.*, **A 12**(4), 2081-2086.
- Weber, P. & Machetel P. 1992. Convection within the inner-core and thermal applications. *Geophys. Res. Lett.*, **19**, 2107-2110.
- Wegener, A. 1924. *The origin of continents and oceans*. Methuen, London.
- Weibke, F. 1934. *Z. anorg. Chem*, **220**, 293-311.
- Wenk, H. R., Takeshita, T., Jeanloz, R., & Johnson, G. C. 1988. Development of texture and elastic anisotropy during deformation of *hcp* metals. *Geophys. Res. Lett.*, **15**, 76-79.
- Whaler, K., & Holme, R. 1996. Catching the inner core in a spin. *Nature*, **382**, 205-206.
- Williams, Q., & Garnero, E. J. 1996. Seismic evidence For partial melt at the base of Earth's mantle. *Science*, **273**, 1528-1530.
- Woodhouse, J. H., Giardini, D., & Li, X.-D. 1986. Evidence for inner core anisotropy from free oscillations. *Geophys. Res. Lett.*, **13**, 1549-1552.
- Wyssession, M. E. 1996. Large-scale structure at the Core-Mantle boundary from core-diffracted waves. *Nature*, **382**, 244-248.
- Yaqub, M., & Cochran, J. F. 1965. Mean free path of electrons and magnetomorphic effects in small single crystals of gallium. *Physical Review*, **137**, A1182-A1200.
- Yoshida, S., Sumita, I., & Kumazawa, M. 1996. Growth-model of the inner core coupled with the outer core dynamics and the resulting elastic anisotropy. *J. Geophys. Res.*, **101**, 28085-28103.
- Yukutake, T. 1993. The geomagnetic non-dipole field in the Pacific. *J. Geomag. Geoelect.*, **45**, 1441-1453.
- Zhang, K. K. 1992. Spiralling columnar convection in rapidly rotating spherical fluid shells. *J. Fluid Mech.*, **236**, 535-556.
- Zhang, K. K., & Fearn, D. 1993. How strong is the invisible component of the magnetic field in the Earth's core?. *Geophys. Res. Lett.*, **20**, 2083-2088.
- Zhang, K. K., & Gubbins, D. 1993b. Convection in a rotating spherical fluid shell with an inhomogeneous temperature boundary condition at infinite Prandtl number. *J. Fluid Mech.*, **250**, 209-232.