HAL
open science

Modèles expérimentaux et numériques de la convection dans le noyau de la Terre.

Julien Aubert

To cite this version:

Julien Aubert. Modèles expérimentaux et numériques de la convection dans le noyau de la Terre.. Géophysique [physics.geo-ph]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2001. Français. NNT : . tel-00683861v1

HAL Id: tel-00683861

https://theses.hal.science/tel-00683861v1

Submitted on 30 Mar 2012 (v1), last revised 9 Aug 2014 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

GEOLOGIE GRENOBLE UJF
D 050 035704 3

OBSERVATOIRE DE GRENOBLE
et
LABORATOIRE DE GÉOPHYSIQUE INTERNE ET TECTONOPHYSIQUE

Thèse

présentée par

Julien AUBERT

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Joseph Fourier - Grenoble I

Spécialité : **Géophysique**

Modèles expérimentaux et numériques de la convection dans le noyau de la Terre.

Date de soutenance : 1er Octobre 2001

Composition du jury :

M. Michel Campillo	Président
M. Emil Hopfinger	Rapporteur
M. Gauthier Hulot	Rapporteur
M. Fritz Busse	Examinateur
M. Bernard Legras	Examinateur
M. Philippe Cardin	Directeur de Thèse

Univ. J. Fourier - O.S.U.G.
MAISON DES GEOSCIENCES
DOCUMENTATION
B.P. 53
F. 38041 GRENOBLE CEDEX
Tél. 04 76 63 54 27 - Fax 04 76 51 40 58
Mail : ptalour@ujf-grenoble.fr

OBSERVATOIRE DE GRENOBLE
et
LABORATOIRE DE GÉOPHYSIQUE INTERNE ET TECTONOPHYSIQUE

Thèse

présentée par

Julien AUBERT

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Joseph Fourier - Grenoble I

Spécialité : **Géophysique**

Modèles expérimentaux et numériques de la convection dans le noyau de la Terre.

Date de soutenance : 1er Octobre 2001

Composition du jury :

M. Michel Campillo	Président
M. Emil Hopfinger	Rapporteur
M. Gauthier Hulot	Rapporteur
M. Fritz Busse	Examinateur
M. Bernard Legras	Examinateur
M. Philippe Cardin	Directeur de Thèse

Univ. J. Fourier - O.S.U.G.
MAISON DES GEOSCIENCES
DOCUMENTATION
B.P. 53
F. 38041 GRENOBLE CEDEX
Tél. 04 76 63 54 27 - Fax 04 76 51 40 58
Mail : ptalour@ujf-grenoble.fr

OBSERVATOIRE DE GRENOBLE
et
LABORATOIRE DE GÉOPHYSIQUE INTERNE ET TECTONOPHYSIQUE

Thèse

présentée par

Julien AUBERT

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Joseph Fourier - Grenoble I

Spécialité : **Géophysique**

Modèles expérimentaux et numériques de la convection dans le noyau de la Terre.

Date de soutenance : 1er Octobre 2001

Composition du jury :

M. Michel Campillo	Président
M. Emil Hopfinger	Rapporteur
M. Gauthier Hulot	Rapporteur
M. Fritz Busse	Examinateur
M. Bernard Legras	Examinateur
M. Philippe Cardin	Directeur de Thèse

Table des matières

Remerciements 7

Introduction 9
1 Le noyau de la Terre. 9
1.1 Contraintes sismologiques. 9
1.2 Contraintes géochimiques 10
1.3 Contraintes gravimétriques. 11
1.4 Contraintes magnétiques : la géodynamo. 11
2 Phénomènes de convection. 13
2.1 Bilan thermique du noyau. 13
2.2 Structure d'un écoulement convectif dans le noyau. . . . 14
3 Défis scientifiques et avancées récentes. 16
3.1 Difficultés d'obtention de modèles dynamos. 16
3.2 Les dynamos cinématiques expérimentales. 17
3.3 les dynamos convectives numériques. 17
3.4 Domaine non-linéaire de la convection sans champ. . . . 18
4 Besoins de modélisation. 19

Références de l'introduction. 21

1 Théorie et modélisation. 25
1.1 Premiers pas dans la modélisation. 25
1.1.1 Le gradient adiabatique. 25
1.1.2 Les conditions aux limites. 27
1.2 Éléments de la théorie des fluides en rotation. 28
1.2.1 Équation du mouvement pour un fluide en rotation. . . . 28
1.2.2 Nombres sans dimensions. 29
1.2.3 Écoulement dans un volume confiné. 29
1.3 Convection. 37
1.3.1 Approximation de Boussinesq. 37
1.3.2 Équation d'énergie. 37
1.3.3 Force d'Archimède. 38
1.3.4 Bilan 38
1.4 Modèle quasigéotrophique de la convection dans une sphère en rotation. 39
1.4.1 Modèle pour les mouvements convectifs. 42

1.4.2 Équation de température. 44
1.4.3 Mouvements zonaux. 45
1.5 Études au seuil. 48
1.5.1 Le seuil de convection. 48
1.5.2 Études de réfèrence. 49
1.5.3 Le principe de l'onde de Rossby 51
1.5.4 Études proches du seuil : le domaine faiblement non-linéaire 52
1.6 La turbulence quasigéostrophique. 53
1.6.1 Énergie et enstrophie. 53
1.6.2 Invariants et cascades. 55
1.6.3 Sources et puits. 58
1.6.4 Turbulence et contrainte de Proudman-Taylor. 59

Références du chapitre 1. **61**

2 Modèle expérimental de la convection dans le noyau terrestre. **63**
2.1 A systematic experimental study of rapidly rotating spherical convection in water and liquid gallium. 63
2.1.1 Introduction 65
2.1.2 Experimental set-up 69
2.1.3 Basic properties of the flow. 72
2.1.4 Velocity profiles 75
2.1.5 Evolution with control parameters. 79
2.1.6 Scaling analysis. 84
2.1.7 Discussion 92
2.2 Corrélation latérale de profils Doppler. 98

Références du chapitre 2. **103**

3 Modèle numérique de la convection dans le noyau terrestre. **107**
3.1 Introduction. 107
3.1.1 Bilan de l'expérience. 107
3.1.2 Repères bibliographiques. 108
3.2 Équations. 110
3.3 Résultats au seuil de convection. 111
3.3.1 Chauffage différentiel, $P = 1$. 111
3.3.2 Chauffage interne, $P = 1$. 115
3.3.3 Bilan 117
3.3.4 Paramètres critiques pour l'expérience. 117
3.4 Étude non-linéaire du modèle 120
3.4.1 Espace des paramètres 120
3.4.2 Régimes dynamiques de l'écoulement. 122
3.4.3 Structures thermiques. 132
3.4.4 Structures dynamiques. 137
3.4.5 Régime faiblement non-linéaire dans le gallium 143
3.5 Comparaison du modèle numérique et de l'expérience. 144
3.5.1 Comparaison des aspects thermiques. 144

3.5.2 Lois d'échelle d'origine numérique 145
3.5.3 Comparaison structurelle des profils Doppler. 147
3.6 Comparaison de modèles numériques bidimensionnels et tridimensionnels. 158
3.7 Conclusion de l'étude numérique. 164
3.7.1 Bilan général. 164
3.7.2 Discussion. 165

Références du chapitre 3. **167**

Conclusions et perspectives **169**
1 Résultats scientifiques. 169
2 Perspectives 171
2.1 Turbulence quasigéostrophique. 171
2.2 Modèles hybrides de la dynamo. 171
2.3 Magnétoconvection expérimentale. 172
3 Le mot de la fin... 172

Réferences de la conclusion **173**

A Compléments. **175**
A.1 Vorticité potentielle dans l'atmosphère. 175
A.2 Ondes de Rossby dans les océans. 175
A.3 Régimes dynamiques de l'écoulement. 177
A.4 Extrapolation et stabilité des couches d'Ekman. 178

Réferences complémentaires. **179**

B Implémentation numérique du code bi-dimensionnel. **181**
B.1 Formulation numérique des equations. 181
B.2 Traitement spectral 182
B.3 Implémentation numérique 183
B.3.1 Grille radiale 183
B.3.2 Équation de vorticité 184
B.3.3 Équation de température. 189
B.3.4 Équation des mouvements axisymétriques 191

C A numerical dynamo benchmark. **193**

D Ultrasonic Doppler Velocimetry in liquid Gallium. **195**

Remerciements

Cette Thèse n'est pas une *success story*. Elle doit peu au hasard, il n'y a pas eu de coup de chance, de rencontre cruciale, de tournant dans ma vie. Ce travail est simplement le fruit de l'indulgence, la disponibilité, le savoir-faire et l'intuition caractéristiques de l'encadrement d'Henri-Claude, Daniel, Philippe, Dominique et Jean-Paul. Je les remercie profondément d'avoir pris, avec constance, le temps de me former.

Le L.G.I.T. est un endroit agréable rempli de gens toujours compétents et souvent sympathiques. Merci à toutes et à tous pour les conditions de travail, l'aide, les conseils pratiques et le soutien moral. De ce point de vue, tous les labos ne se valent pas, loin de là.

Merci à mes parents, Philippe, Maryse, à Augustin et Elise. Vous êtes dans mon cœur. Merci à tous les copains d'avant Grenoble, faut que je vous téléphone un jour. Merci à tous les copains de Grenoble, j'ai manqué de disponibilité, pardonnez-moi.

Enfin et surtout, un merci sans fin à Tassadite pour avoir tenté l'aventure avec moi. Bonne chance pour la suite, prends soin de toi et peut-être à bientôt.

Introduction

Géodynamo et convection: contraintes, avancées récentes et besoins de modélisation.

La géophysique interne est une affaire d'âmes sensibles. Aveugles de naissance, elles ont en revanche l'oreille musicale. Dotées de papilles très sûres, elles sauront faire la différence entre une Terre bien composée et un caillou frelaté. De leurs mains, elles font de délicats modèles, qu'elles appliquent avec flair à une réalité très indécise. Un sixième sens leur fut donné: la perception du champ magnétique.

1 Le noyau de la Terre.

1.1 Contraintes sismologiques.

L'étude minutieuse des ondes sismiques profondes a permis, au cours du vingtième siècle, de mettre en évidence la discontinuité noyau-manteau (Oldham, 1906; Gutenberg et Geiger, 1912), et la graine (Lehmann, 1936). L'état fluide du noyau externe fut d'abord l'objet de conjectures basées sur les marées terrestres (Jeffreys, 1926), et on proposa par la suite que le noyau interne était en revanche solide (Bullen, 1946), ce qui fut en partie confirmé en 1960 par l'étude du séisme du Chili. Ce n'est que trés récemment (Okal et Cansi, 1998; Deuss et al., 2000) que la phase PKJKP, qui traverse la graine sous la forme d'une onde de cisaillement, fut découverte et apporta la preuve définitive de l'état solide de la graine.

Aujourd'hui, les progrès de la théorie de l'inversion ont permis de rassembler

les études sismologiques de propagation et de modes propres dans des modèles globaux à symétrie sphérique. C'est ainsi que Dziewonski et Anderson (1981) ont proposé PREM, dont certaines des propriétés sont en figure 2, et illustrées en figure 1. On a depuis entrepris d'inverser les données sismiques pour mettre en évidence des hétérogénéités latérales, en particulier l'anisotropie de la graine (voir par exemple Brito (1998), partie 2, pour une revue).

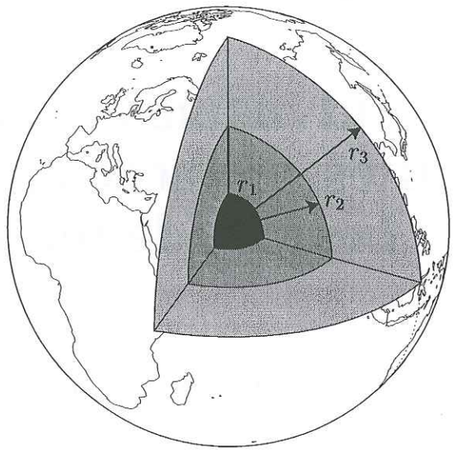


FIG. 1 – *Vue écorchée du globe terrestre. En bleu sombre, la graine solide ($r_1 = 1220 \pm 1$ km). En bleu clair, le noyau liquide, $r_2 = 3485 \pm 10$ km), et en orange, le manteau et la croûte ($r_3 = 6370$ km).*

1.2 Contraintes géochimiques

La connaissance de la composition des météorites, ainsi que les modèles selon lesquels la Terre était, avant sa différenciation, de composition assez similaire, permirent d'avancer rapidement l'hypothèse selon laquelle le noyau devait être constitué de fer. Les phases silicatées étaient en tout cas exclues pour des raisons de densité (Birch, 1952). L'existence de la graine fut interprétée ainsi (Jacobs, 1953) : le point de fusion du fer augmente avec la pression, donc avec la profondeur, mais il augmente plus vite que la température elle-même. Les deux courbes se croisent à la profondeur de la graine. Cette explication supportait à nouveau la candidature du fer.

Aujourd'hui, on pense (voir Poirier (1994) pour une revue) que le noyau liquide contient des éléments légers (Si, O, S) et autres (Ni) en plus du fer pur, qui ne constituerait lui-même qu'entre 80 et 90 % de la matière présente.

1.3 Contraintes gravimétriques.

La Terre profonde parle aussi par ses effets de marée gravimétrique. Ces marées sont des variations de la distribution de masse liés à la rotation de la Terre et au couplage noyau-manteau. Aujourd'hui, on dispose de gravimètres supraconducteurs atteignant des niveaux de précision de l'ordre du pico-g avec de très faibles dérives. Ces instruments sont capables de couvrir environ huit ordres de grandeurs en période (d'une seconde à plusieurs années), et les séries temporelles de gravité au sol qu'ils produisent permettent de mettre en évidence les multiples modes de résonance de la Terre (on pourra consulter Hinderer et Crossley (2000) pour une revue).

1.4 Contraintes magnétiques : la géodynamo.

Le champ magnétique de la Terre est d'origine interne (Gauss, 1835). Les sources magnétiques disponibles dans la croûte et le manteau sont trop faibles pour l'expliquer, et les constantes de temps des phénomènes prenant place dans ces couches sont incompatibles avec celles du champ. Son origine se trouve donc dans le noyau.

Ce champ magnétique fait l'objet d'observations depuis le XVIe siècle (on pourra consulter Alexandrescu (2001) pour un historique détaillé). Au vingtième siècle, le développement du paléomagnétisme a permis, par l'observation des fonds océaniques ainsi que des laves, sédiments et inclusions présentes sur les continents, de remonter encore l'échelle du temps (voir, par exemple, Valet et Meynadier (1993), et Dormy et al. (2000) pour une revue), jusqu'à 3.2 milliards d'années pour les échantillons les plus anciens. La gamme des échelles de temps des phénomènes géomagnétiques est extrêmement large : d'environ 100 ans jusqu'à plusieurs millions d'années. Parmi ces phénomènes, les plus spectaculaires sont certainement les inversions du champ magnétique. L'intervalle de temps entre deux inversions est chaotique, d'ordre de grandeur 100 000 ans, et la durée d'une inversion est beaucoup plus rapide (inférieure à 10 000 ans). Les séries temporelles du champ sont un indicateur très précieux du comportement du noyau en temps que système dynamique. Le vingtième siècle a vu leur résolution s'améliorer, avec le développement des observatoires magnétiques et des mesures satellitaires.

Initialement très lacunaire, la distribution spatiale des observations s'est homogénéisée lors de campagnes maritimes, et est aujourd'hui presque totale grâce à la cartographie magnétique par des satellites tels que Oersted (figure 3). Le champ magnétique, mesuré à la surface du globe, est très fortement dipolaire.

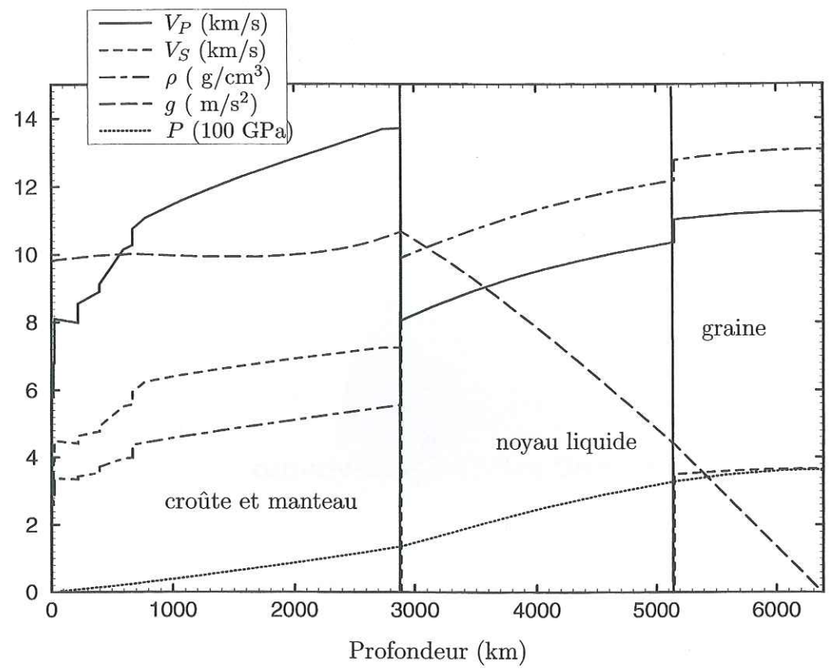


FIG. 2 – *Modèle PREM (Dziewonski et Anderson, 1981). V_P est la vitesse des ondes de compression, V_S celle des ondes de cisaillement (qui ne se propagent pas dans les liquides), g la gravité et ρ la masse volumique. P est la pression hydrostatique déduite de ces observations, en centaines de gigapascals.*

S'il n'était pas entretenu par une source interne, le champ magnétique terrestre se serait éteint sur une période de temps de l'ordre de son temps caractéristique de diffusion, qui est estimé à 40 000 ans (Gubbins et Roberts, 1987). Il faut donc, pour expliquer sa pérennité, invoquer un mécanisme auto-entretenu.

Parmi toutes les possibilités (voir, par exemple, Cardin (1992) pour une revue), l'hypothèse de la géodynamo est maintenant unanimement acceptée. La géodynamo est le mécanisme par lequel le fluide conducteur de la partie liquide du noyau amplifie par ses mouvements un champ magnétique préexistant. Le champ créé rétroagit sur l'écoulement, et sous certaines conditions, le système évolue vers un état de champ magnétique non nul en permanence. C'est ce que l'on appelle l'effet dynamo, et il convertit l'énergie cinétique du fluide en énergie magnétique.

La géodynamo impose une contrainte (au sens géophysique) forte : il faut trouver une source d'énergie cinétique dans le noyau. Ici encore, plusieurs hypothèses furent examinées, parmi lesquelles la précession (voir Noir (2000) pour

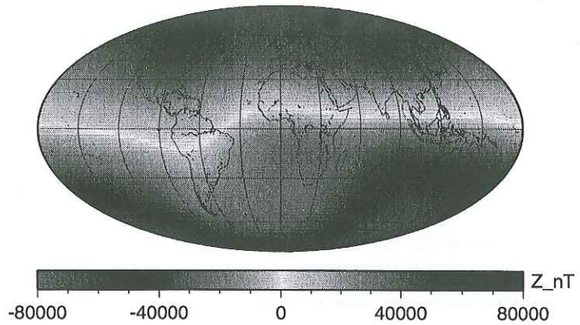


FIG. 3 – *Composante verticale, en nanoteslas, du champ magnétique terrestre, mesurée en 2000 par le satellite Oersted (courtoisie B. Langlais, IPGP).*

une revue). L'hypothèse aujourd'hui la plus solide est la convection thermo-compositionnelle dans le noyau liquide.

2 Phénomènes de convection.

2.1 Bilan thermique du noyau.

On pense (Verhoogen, 1980) que plusieurs sources de chaleur actives existent dans le noyau :

- la Terre évacue en permanence la chaleur accumulée lors de son accrétion. La quantité perdue actuellement par le noyau dépend de l'histoire thermique passée de celui-ci.
- en se refroidissant, le noyau cristallise et la graine croît. Sur la base d'un refroidissement à flux constant d'une terre vieille de 4.5 milliards d'années, on peut calculer qu'actuellement, de l'ordre de 500 tonnes de fer passent à l'état solide par seconde, ce qui fait une vitesse de croissance de l'ordre de 0.1 millimètre par an. La cristallisation libère de la chaleur latente de fusion qui réchauffe le fluide proche de la graine.
- lors de cette cristallisation, la distribution de masse change. Du liquide est remplacé par un solide plus dense, ce qui diminue l'énergie potentielle de gravité.
- il est possible que des éléments radioactifs tels que le potassium se désintègrent dans le noyau.

Entre 2 et 10 térawatts sont ainsi cédés par le noyau au manteau (voir Labrosse (1996) pour une revue). Il faut donc trouver des mécanismes d'évacuation de la chaleur par le noyau.

- la convection thermique : le fluide chaud, moins dense et plus profond que le fluide froid, est instable, et va monter sous l'action de la force d'Archimède.
- la convection compositionnelle : le fer liquide se solidifie pour former la graine, mais les éléments légers sont en grande partie rejetés dans le liquide. Le fluide proche de la graine, plus concentré en éléments légers, est moins dense, et doit monter pour la même raison que précédemment.
- le flux de chaleur adiabatique : le noyau externe est compressible (sa densité varie de 9.9 à la frontière noyau-manteau à 12.2 à la graine). Cette compressibilité induit le refroidissement adiabatique du fluide montant vers les basses pressions (voir section 1.1 du chapitre 1). Ceci se traduit par l'existence d'un flux de chaleur adiabatique, qui transporte tout ou partie de la chaleur initialement disponible pour la convection (Tritton, 1988), et d'un gradient thermique associé, estimé par Jacobs (1987) à 1000 K entre la graine et la frontière noyau-manteau.

L'hypothèse de convection thermo-compositionnelle est cependant affaiblie par la difficulté de contraindre précisément le flux de chaleur qu'elle évacue, car le gradient adiabatique est en mesure de transporter la majorité de la chaleur disponible (Cardin, 1992; Labrosse, 1996). La prédominance d'un type de convection sur l'autre est aussi un sujet de débat.

2.2 Structure d'un écoulement convectif dans le noyau.

Nous entrons ici dans des détails de la convection qui sont discutés dans le développement de cette Thèse. On peut (voir section 1.1 du chapitre 1) modéliser l'écoulement convectif dans le noyau en prenant une hypothèse de fluide incompressible satisfaisant les équations de Navier-Stokes dans l'approximation de Boussinesq. La rotation joue un rôle prépondérant à travers la force de Coriolis. Lorsqu'elle domine toutes les autres forces en présence, la force magnétique n'étant pas prise en compte (les rapports sont mesurés par les nombres de Rossby, Busse et Ekman, voir section 2.1.6 du chapitre 2), l'écoulement doit devenir quasiment invariant dans la direction de l'axe, à part dans les couches limites où la viscosité reprend de l'importance (couches d'Ekman). C'est la contrainte de Proudman-Taylor (section 1.2.3 du chapitre 1). Parmi les nombres sus-cités, le nombre d'Ekman mesure le rapport entre les forces visqueuses et la force de Coriolis. On l'estime couramment à 10^{-14} pour le noyau terrestre (voir les tables 2.1, 2.2 et 2.4 du chapitre 2).

Ainsi, les vortex convectifs du plan équatorial prennent la forme de colonnes

parallèles à l'axe de rotation, appelées colonnes de Taylor. Au seuil de convection, le système de colonnes est une onde de Rossby d'origine thermique (section 1.5.3 du chapitre 1). Cette vision théorique (Roberts, 1968; Busse, 1970) a rapidement bénéficié d'un support expérimental (Carrigan et Busse, 1983) et numérique (Zhang, 1992) important. Il a été montré (Glatzmaier et Olson, 1993; Cardin et Olson, 1994) que la structure quasiment bi-dimensionnelle de ces colonnes est robuste et subsiste jusqu'à grand forçage thermique. Chaque colonne est associée à un écoulement axial dont le rôle dynamique est secondaire (section 1.4.1 du chapitre 1), mais qui confère une hélicité non-nulle à l'écoulement. Il est judicieux de modéliser le comportement d'un tel fluide convectif, aux bas nombres d'Ekman, par un système quasigéostrophique bidimensionnel (section 1.4 du chapitre 1). Dans un tel système, la convection ne force pas directement le mouvement axisymétrique zonal, mais un flux d'énergie non-linéaire l'alimente (le mouvement zonal sera très étudié dans les chapitres 2 et 3).

Cette modélisation semble recevoir un certain support de l'observation. On peut modéliser la fonction de transfert du manteau pour le champ magnétique en estimant sa conductivité, et déconvoluer les cartes satellitaires obtenues à la surface du globe de cette réponse, de façon à obtenir le champ magnétique à la surface du noyau (figure 4.1). Sous certaines hypothèses assurant l'unicité, on peut alors déduire des variations séculaires de ce champ un écoulement à la surface du noyau (voir par exemple Hulot et al. (1990), et références à l'intérieur). Le résultat (figure 4.2) possède de remarquables propriétés de symétrie équatoriale, ce qui suggère la présence de gigantesques colonnes fluides dans le noyau. Il faut cependant rester prudent : selon l'époque que l'on choisit pour inverser les mouvements, les propriétés de symétrie ne sont pas toujours évidentes.

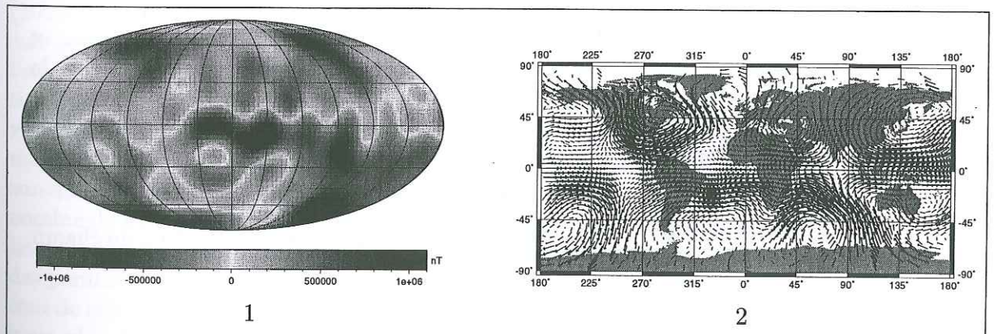


FIG. 4 – *Gauche : composante radiale du champ magnétique à la surface du noyau, tel que vu par le satellite Oersted en 2000. Droite : mouvements de surface inversés pour 1980 (courtoisie G. Hulot, IPGP).*

Un tel dispositif est virtuellement capable d'entretenir la géodynamo. L'écoulement hélicitaire des colonnes peut convertir un champ magnétique toroïdal

en champ poloïdal (et réciproquement), c'est ce que l'on appelle l'effet α. Le cisaillement du mouvement zonal peut convertir le champ poloïdal en champ toroïdal. C'est l'effet ω. Les effets α et ω sont des modèles simplifiés de la façon dont les mouvements du fluide agissent sur le champ. On modélise l'action dynamo en les combinant. On a longtemps pensé que des dynamos fluides α^2 ou bien $\alpha\omega$ maintenues énergétiquement par la convection pouvaient exister, sans toutefois en avoir la preuve définitive. En effet, comme nous allons le voir, obtenir un écoulement aux propriétés dynamos est une chose extrêmement difficile.

3 Défis scientifiques et avancées récentes.

3.1 Difficultés d'obtention de modèles dynamos.

En 1934, le mathématicien Cowling a montré qu'un champ magnétique axisymétrique ne pouvait pas être maintenu par action dynamo. Cette contrainte impose donc au champ magnétique de ne pas être axisymétrique, et par là, elle impose un niveau de complexité minimal à l'écoulement générateur d'effet dynamo. De plus, la théorie des dynamos cinématiques (voir par exemple Gubbins et Roberts (1987), partie 2) requiert que l'advection du champ magnétique par le champ de vitesse du fluide soit au moins de l'ordre de 100 fois sa diffusion, pour qu'un mécanisme auto-entretenu puisse prendre place. C'est le nombre de Reynolds magnétique Re_m qui mesure ce rapport :

$$Re_m = \frac{UD}{\lambda} > 100. \tag{1}$$

U et D sont des échelles typiques de vitesse et de longueur du système, et λ est la diffusivité magnétique du fluide. On peut évaluer, pour le noyau, le nombre de Prandtl magnétique P_m, qui mesure le rapport entre les diffusivités cinématique (ν, appelée aussi viscosité dynamique) et magnétique (voir la table 2.1 du chapitre 2) :

$$P_m = \frac{\nu}{\lambda} \approx 10^{-6}$$

Ainsi, le nombre de Reynolds cinématique Re, qui mesure l'advection du champ de vitesse par rapport à sa diffusion, doit valoir environ :

$$Re = \frac{UD}{\nu} = P_m Re_m \approx 10^8,$$

valeur très élevée. Re caractérise l'état de turbulence du fluide, et nous attendons donc que celle-ci soit très développée dans le noyau. Dans la configuration fortement bi-dimensionnelle imposée par la contrainte de Proudman-Taylor, c'est une forme quasi-géostrophique de turbulence qui prend alors place (voir la section 1.6 du chapitre 1), avec certaines limitations toutefois (section 1.6.4 du même chapitre).

3.2 Les dynamos cinématiques expérimentales.

Du fait de la condition (1), il est fort peu probable qu'on puisse réaliser, à l'échelle du laboratoire, avec les moteurs, systèmes de chauffage et les métaux liquides dont nous disposons, une expérience dynamo dont la source soit la convection thermique. Durant ces trois dernières années, nous avons en revanche pu être les témoins de l'aboutissement de plusieurs projets de dynamos cinématiques (pour lesquelles on prescrit le champ de vitesse à l'aide de pompes et tubes), utilisant toutes du sodium liquide, qui est le meilleur candidat pour des raisons de diffusivité magnétique et de densité : la dynamo de Riga (Gailitis et al., 2000), et la dynamo de Karlsruhe (Stieglitz et Müller, 2000). Dans le premier cas, un mode propre croissant du champ magnétique s'est superposé a l'excitation externe pendant une quinzaine de secondes. Des expériences ultérieures ont permis d'observer la saturation de ce mode propre croissant. Dans le second cas, un champ magnétique auto-entretenu a été observé pendant une dizaine de minutes. Ces résultats expérimentaux sont en accord avec les prédictions des modèles théoriques et numériques de dynamos cinématiques.

3.3 les dynamos convectives numériques.

Les difficultés théoriques, ainsi que l'impasse expérimentale ont encouragé les recherches concernant les interactions entre convection et dynamo à s'engager dans la voie de la simulation numérique, et ce n'est que dans les six dernières années que des dynamos convectives numériques, dont la géométrie de champ ressemble à celle de la Terre, ont pu être obtenues (voir Dormy et al. (2000) pour une revue). Un tel calcul demande beaucoup de puissance de calcul, pour résoudre les couches limites d'Ekman, ainsi que les petites échelles turbulentes si elles sont présentes. Certains modèles utilisent des approximations telles que l'hyperdiffusivité, d'autres, plus récents, comme les dynamos visqueuses de Christensen et al. (1998), n'emploient aucune approximation. Ces modèles se placent à des nombres d'Ekman assez hauts, ne sont pas fortement sur-critiques, donc pas turbulents. La faiblesse de Re est compensée par un nombre de Prandtl magnétique assez haut, ce qui permet de satisfaire la condition (1). De telles dynamos convectives sont donc évidemment très éloignées des paramètres et comportements attendus de la géodynamo, mais constituent tout de même un outil de compréhension de grande valeur. On pourra consulter, pour plus de détails, l'article *A numerical dynamo benchmark*, de Christensen et al. (2001), auquel j'ai participé, et qui se trouve dans l'annexe C. La figure 5 présente trois visualisations de la dynamo numérique ayant servi de base à une comparaison internationale de codes indépendants.

Dans les dynamos visqueuses telles que celle de Christensen et al. (1998), le champ magnétique rétroagit très peu sur l'écoulement. C'est donc la convection

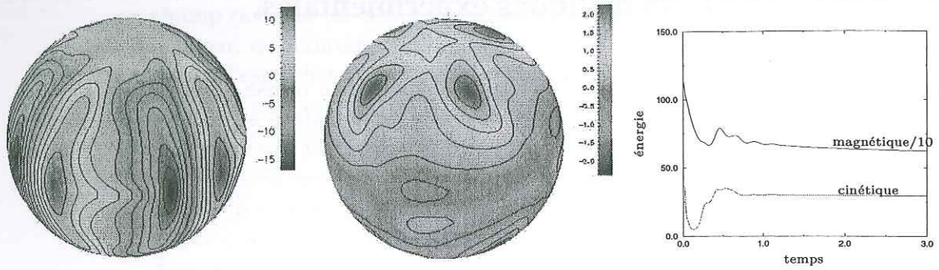


FIG. 5 – *Dynamo visqueuse pour un nombre d'Ekman de 10^{-3}, un nombre de Prandtl magnétique de 5, un nombre de Prandtl de 1 et un chauffage (nombre de Rayleigh) deux fois critique (Christensen et al., 2001). Gauche : champ de vitesse radiale à mi-profondeur. Les colonnes de convection sont visibles. Centre : champ magnétique radial à la surface exterieure du modèle. Le champ est pratiquement totalement dipolaire. Droite : évolution temporelle des énergies du modèle. Le système tend vers un état stationnaire, à part une dérive prograde des colonnes, d'énergie cinétique et magnétique non nulles.*

qui détermine en grande partie la structure de l'écoulement magnétohydrodynamique à effet dynamo. Ces dynamos semblent s'écrouler lorsque l'on baisse le nombre d'Ekman, ou bien le nombre de Prandtl magnétique, pour essayer de rapprocher ces deux valeurs de celles qui sont attendues pour la géodynamo.

3.4 Domaine non-linéaire de la convection sans champ.

Ainsi, un objet d'intérêt géophysique fort comme une dynamo convective à bas P_m, donc turbulente, n'a encore pas pu être observé directement. Comme le suggèrent les dynamos visqueuses, un premier pas vers cet objectif consiste en l'étude de la convection sans champ, dans son domaine non-linéaire, voire turbulent. Les études tri-dimensionnelles numériques les plus récentes (Tilgner et Busse, 1997; Ardes et al., 1997) ne descendent pas en dessous de nombres d'Ekman de l'ordre de 10^{-4}, et ne sont pas fortement sur-critiques. La voie des modèles quasigéostrophiques bidimensionnels a été bien défrichée par Cardin et Olson (1994). La réduction du problème à deux dimensions a permis de descendre le nombre d'Ekman jusqu'à 10^{-5} et d'atteindre des régimes fortement sur-critiques, de manière peu quantitative toutefois. Les études expérimentales ont permis d'atteindre les nombres d'Ekman les plus bas, de l'ordre de 10^{-6}. Ici encore, aucune étude réellement quantitative n'existe dans le domaine non-linéaire.

4 Besoins de modélisation.

Ainsi, si le seuil de convection est maitenant bien connu (Jones et al., 2000), ce n'est pas tout à fait vrai du domaine non-linéaire de la convection, et encore moins du domaine turbulent. C'est pourtant ce dernier domaine qui est d'intérêt pour la compréhension de la dynamo terrestre. De plus, la majorité des expériences en géométrie sphérique (Cardin et Olson, 1992; Sumita et Olson, 2000) utilisent de l'eau, de nombre de Prandtl (rapport entre les diffusivités cinématique et thermique) d'ordre 1. Les études numériques existantes utilisent aussi, en majorité, des nombres de Prandtl de cet ordre. Or, les métaux liquides tels que le fer du noyau ont plutôt des nombres de Prandtl assez bas, d'ordre 0.1. On ne sait pas si la convection dans un métal liquide tel que le fer du noyau se rapproche ou non, dans le domaine non-linéaire, du comportement d'un système dont le nombre de Prandtl est d'ordre 1.

Il existe donc un réel besoin de modélisation, dont les contraintes sont les suivantes :

- adopter la géométrie sphérique,
- utiliser des métaux liquides,
- atteindre de bas nombres d'Ekman,
- atteindre des régimes fortement sur-critiques,
- mener une étude quantitative autant que possible, avec en particulier, l'obtention des lois d'échelle de ce type de convection dans le domaine non-linéaire.

L'objectif de ce travail de Thèse est d'effectuer cette modélisation. Nous avons opté pour une approche mixte, à la fois numérique et expérimentale. Nous avons d'abord mené une étude expérimentale systématique de la convection dans une sphère en rotation rapide, c'est l'objet du chapitre 2 de ce manuscrit. De l'eau et du gallium liquide ont été utilisés comme fluides de travail. Une technique quantitative de vélocimétrie Doppler ultrasonore a été utilisée pour cartographier l'écoulement. Les conclusions de cette étude ont permis d'améliorer le modèle quasigéostrophique bi-dimensionnel de Cardin et Olson (1994), afin de le rendre quantitatif, et en excellent accord avec l'expérience. De cette manière, une étude numérique (chapitre 3) précise de la convection à grand forçage a été menée, dans des situations simulant l'eau et le gallium liquide, pour des nombres d'Ekman allant jusqu'à 7 10^{-7}. Nous avons pu décrire plus précisément la turbulence quasigéostrophique d'un tel système. La comparaison des deux nombres de Prandtl nous permet de couvrir un domaine de comportement assez vaste, et de nous donner une idée de la structure que la convection pourrait prendre dans le noyau, dans l'hypothèse thermique ou compositionnelle.

Le chapitre 1 de ce manuscrit contient les éléments théoriques nécessités

par l'analyse. L'annexe A contient des compléments. L'annexe B contient les détails techniques de la simulation numérique. L'annexe C contient l'article *A numerical dynamo benchmark*. L'annexe D contient l'article *Ultrasonic Doppler Velocimetry in liquid Gallium*.

Références de l'introduction.

Alexandrescu, M., *Observations magnétiques et intérieur de la Terre*, Thèse d'Habilitation, Institut de Physique du Globe, Paris, 2001.

Ardes, M., Busse, F. H., et Wicht, J., Thermal convection in rotating spherical shells, *Phys. Earth Planet. Int.*, *99*, 55–67, 1997.

Birch, F., Elasticity and constitution of the Earth's interior, *J. Geophys. Res.*, *57*, 227–, 1952.

Brito, D., *Approches expérimentales et théoriques de la dynamique du noyau terrestre.*, Thèse de Doctorat, Unversité Denis Diderot, Paris, 1998.

Bullen, K. E., A hypothesis on compressibility at pressures of the order of a million atmospheres., *Nature*, *157*, 405, 1946.

Busse, F. H., Thermal instabilities in rapidly rotating systems, *J. Fluid Mech.*, *44*, 441–460, 1970.

Cardin, P., *Aspects de la convection dans la Terre.*, Thèse de Doctorat, Université Paris 6, 1992.

Cardin, P. et Olson, P., An experimental approach of thermo-chemical convection in the Earth's core, *Geophys. Res. Let.*, *19*, 1995–1998, 1992.

Cardin, P. et Olson, P., Chaotic thermal convection in a rapidly rotating spherical shell : consequences for flow in the outer core, *Phys. Earth Planet. Int.*, *82*, 235–239, 1994.

Carrigan, C. R. et Busse, F. H., An experimental and theoretical investigation of the onset of convection in rotating spherical shells, *J. Fluid Mech.*, *126*, 287–305, 1983.

Christensen, U., Olson, P., et Glatzmaier, G. A., A dynamo model interpretation of geomagnetic field structures, *Geophys. Res. Let.*, *25*, 1565–1568, 1998.

Christensen, U. R., Aubert, J., Busse, F. H., Cardin, P., Dormy, E., Gibbons, S., Glatzmaier, G. A., Honkura, Y., Jones, C. A., Kono, M., Matsushima, M., Sakuraba, A., Takahashi, F., Tilgner, A., Wicht, J., et Zhang, K., A numerical dynamo benchmark, in press, *Phys. Earth Planet. Int.*, 2001.

Deuss, A., Woodhouse, J. H., Paulssen, H., et Trampert, J., The observation of inner core shear waves., *Geophys. J. Int.*, *42*, 67–73, 2000.

Dormy, E., Valet, J. P., et Courtillot, V., Numerical models of the geodynamo and observational constraints, *Geochem. Geophy. Geosystems. (G-cubed)*, *1*, 2000.

Dziewonski, A. et Anderson, D., Preliminary reference Earth model PREM, *Phys. Earth Planet. Int.*, *25*, 297–356, 1981.

Gailitis, A., Lielausis, O., Dement'ev, S., Platacis, E., Cifersons, A., Gerbeth, G., Gundrum, T., Stefani, F., Christen, M., Hänel, H., et Will, G., Detection of a flow induced magnetic field eigenmode in the Riga dynamo facility, *Phys. Rev. Lett.*, *84*, 4365, 2000.

Glatzmaier, G. A. et Olson, P., Highly supercritical thermal convection in a rotating spherical shell : centrifugal vs. radial gravitiy, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, *70*, 113–136, 1993.

Gubbins, D. et Roberts, P. H., Magnetohydrodynamics of the Earth's core, in *Geomagnetism*, edité par J. A. Jacobs, vol. 2, 1987.

Gutenberg, B. et Geiger, L., *Über Erdbenwellen V und VI*, Nachr. d. Kön. Ges. d. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl., 1912.

Hinderer, J. et Crossley, D., Time variations in gravity and inferences on the Earth's structure and dynamics., *Surveys in Geophysics*, *21*, 1–45, 2000.

Hulot, G., Le Mouël, J.-L., et Jault, D., The flow at the Core-Mantle boundary : symmetry properties, *J. Geomag. Geoelectr.*, *42*, 857–874, 1990.

Jacobs, J., The Earth's inner core., *Nature*, *172*, 297–, 1953.

Jacobs, J. A., *The Earth's core*, Academic Press, 1987.

Jeffreys, H., The rigidity of the Earth's central core., *Mon. Notices R. astr. Soc.*, *1*, 371–, 1926.

Jones, C. A., Soward, A. M., et Mussa, A. I., The onset of thermal convection in a rapidly rotating sphere, *J. Fluid Mech.*, *405*, 157–179, 2000.

Labrosse, S., *Contribution à l'étude du refroidissement de la Terre.*, Thèse de Doctorat, Unversité Paris 7., 1996.

Lehmann, I., P', *Union Geodesique at Geophysique Internationale, Serie A, Travaux Scientifiques*, 1936.

Nataf, H.-C. et Sommeria, J., *La physique et la Terre*, Belin-CNRS éditions, Paris, 2000.

Noir, J., *Ecoulement d'un fluide dans une cavité en précession : approches numériques et expérimentales*, Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble, 2000.

Okal, E. A. et Cansi, Y., Detection of PKJKP at intermediate periods by progressive multi-channel correlation., *Earth Plan. Sci. Let.*, *164*, 23–30, 1998.

Oldham, R. D., The constitution of the interior of the Earth as revealed by earthquakes., *Quart. J. Geol. Soc.*, *62*, 456–, 1906.

Poirier, J. P., Light elements in the Earth's outer core : a critical review, *Phys. Earth Planet. Int.*, *85*, 319–337, 1994.

Poirier, J. P., *Le noyau de la Terre*, Dominos, Paris, 1996.

Roberts, P. H., On the thermal instability of a self gravitating fluid sphere containing heat sources, *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A*, *263*, 93–117, 1968.

Stieglitz, R. et Müller, U., Prliminary results of the first dynamo experiment at Forschungszentrum Karlsruhe., *Hydromag. Newslett.*, *1*, 2000.

Sumita, I. et Olson, P., Laboratory experiments on high Rayleigh number thermal convection in a rapidly rotating hemispherical shell, *Phys. Earth Planet. Int.*, *117*, 153–170, 2000.

Tilgner, A. et Busse, F. H., Finite amplitude convection in rotating spherical fluid shells, *J. Fluid Mech.*, *332*, 359–376, 1997.

Tritton, D. J., *Physical fluid dynamics*, Oxford Science, 1988.

Valet, J. P. et Meynadier, L., Geomagnetic field intensity and reversals during the past four million years., *Nature*, *336*, 234–238, 1993.

Verhoogen, J., *Energetics of the Earth.*, National Academy of Sciences., Washington, D.C., 1980.

Zhang, K., Spiralling columnar convection in rapidly rotating spherical shells, *J. Fluid Mech.*, *236*, 535–556, 1992.

Chapitre 1

Théorie et modélisation.

1.1 Premiers pas dans la modélisation.

1.1.1 Le gradient adiabatique.

Nous cherchons dans ce chapitre le modèle le plus simple pour capturer la physique des mouvements de convection du noyau liquide. Nous connaissons beaucoup de la mécanique des fluides incompressibles, homogènes, isotropes et Newtoniens. L'approximation de Boussinesq, dont nous traitons un peu plus loin dans ce chapitre, nous permet de modéliser la convection en restant, pour la partie dynamique, dans un cadre de fluide incompressible. Dans quelle mesure toutes ces restrictions peuvent-elles décrire correctement le noyau?

Considérer le mélange liquide comme un fluide isotrope et Newtonien ne pose pas de grand problème, c'est une modélisation valable dans une très large gamme de pressions et températures. Le considérer comme homogène et incompressible, lorsque l'on sait que la densité donnée par le modèle PREM (voir figure 2 du chapitre 1) varie entre 9.9 à la surface du noyau jusqu'à 12.2 à la graine est plus problématique. En effet, l'effet des variations de pression hydrostatique influe sur le comportement thermique du noyau : lorsque du fluide monte vers des pressions plus faibles, il se détend et donc se refroidit. Lorsque du fluide descend, il se comprime et donc s'échauffe. C'est un effet qui sera complètement ignoré par l'approximation de Boussinesq.

Considérons une particule fluide proche de la graine. Du fait de l'excès de chaleur dont nous avons parlé dans le chapitre 1, cette particule est plus chaude que son environnement, donc plus légère, et elle va avoir tendance à se déplacer vers l'extérieur du noyau. Plaçons nous temporairement en géométrie cartésienne, la gravité étant dirigée vers le bas. Imaginons un déplacement

quasi-statique et adiabatique sur une hauteur dz vers le haut. Nous reviendrons sur le caractère adiabatique à la fin de cette section. À l'issue de ce déplacement, deux cas se présentent selon la modélisation adoptée :

- si le fluide est considéré comme incompressible, la particule est toujours plus légère que son environnement. Elle continuera donc indéfiniment son ascenscion, et le critère d'instabilité locale du fluide s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} < 0, \tag{1.1}$$

  T étant la température.
- si le fluide n'est pas considéré comme incompressible, la particule, en montant, se sera détendue et donc refroidie. Ce n'est que si elle est toujours plus légère que son environnement qu'elle continuera à monter. Ainsi, un profil de température décroissant avec les z croissants peut exister, sans qu'aucune instabilité convective ne prenne place. Appelons T_a ce profil. Le déplacement que nous considérons est adiabatique, donc nous pouvons écrire :

$$\frac{\mathrm{d}T_a}{\mathrm{d}z} = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z},$$

  S est l'entropie de la particule (supposée constante) et p la pression hydrostatique, qui s'exprime par

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\rho g,$$

  ρ étant la masse volumique. Nous réduisons, à l'aide des régles thermodynamiques classique, la dérivée

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p = \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_p \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{\alpha T}{\rho C_p}$$

  V étant le volume, α le coefficient de compressibilité isotherme, et C_p la chaleur spécifique à pression constante. Ainsi, le nouveau critère d'instabilité adiabatique s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} < \frac{\mathrm{d}T_a}{\mathrm{d}z}$$

  ou encore

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} < -\frac{\alpha g T}{C_p}. \tag{1.2}$$

En prenant l'hypothèse du déplacement adiabatique, nous n'avons négligé que les effets de la conduction thermique, et de la viscosité, dans cette discussion. Ces effets modifient les critères d'instabilité (1.1) et (1.2). Cependant, leur prise en compte n'est pas nécéssaire pour la discussion du gradient adiabatique. Nous les réintroduirons dans la suite.

Ainsi, la compressibilité du noyau se traduit par l'existence du gradient adiabatique, estimé par Jacobs (1987) à 1000 K entre les deux frontières du noyau liquide. Ce gradient se traduit par un flux de chaleur, qui peut transporter tout ou partie de la chaleur disponible. Si le gradient thermique est sur-adiabatique, une instabilité convective pourra s'installer. En introduisant une nouvelle température, appelée température potentielle θ (Tritton, 1988) :

$$\theta = T - T_a$$

Nous pourrons écrire les équations de la convection comme si le fluide était incompressible. Pour conclure sur ce point, nous pouvons dire que les effets, en termes de convection, de la déviation du gradient thermique par rapport à l'adiabat T_a peuvent être modélisés dans une hypothèse de fluide homogène et incompressible.

Avant de passer à la suite, nous discutons le cadre isentropique que nous avons adopté dans cette discussion. L'état isentropique est l'état vers lequel tend un système dont les grandeurs extensives sont bien mélangées. Ce serait donc le cas d'un noyau très turbulent. C'est la raison pour laquelle nous prenons l'hypothèse adiabatique pour décire les effets de la compressibilité.

1.1.2 Les conditions aux limites.

L'équation dynamique et l'équation thermique que nous allons dériver réclament toutes deux des conditions aux limites. Si l'expérience ne permet pas (ou rarement) de choisir celles-ci, les études numériques peuvent simuler une grande variété de situations.

Les conditions dynamiques sont très mal connues. Les études de tomographie sismique (Masters et al., 1996; Garnero et al., 1998) montrent que la frontière noyau-manteau possède de fortes hétérogénéités latérales, qui pourraient influer sur la convection du noyau. La frontière graine-noyau liquide est encore plus complexe à modéliser : elle se déplace avec le temps, et il a été proposé (Tait et Jaupart, 1992) qu'une région spongieuse y fasse cohabiter solide et liquide.

Pour réaliser une modélisation simple, deux écoles existent : l'une, dont nous ferons partie, préconise d'adopter des conditions aux limites rigides (*no-slip*). Dans le cadre de l'expérience, nous n'avons en effet pas le choix, et notre but est de réaliser une combinaison d'expériences et de simulations numériques cohérentes entre elles. L'autre, adoptée par des études comme celle de Grote et al. (2000), préconise d'utiliser des conditions de type contraintes libres (*free-slip* ou *stress-free*), l'essentiel du frottement étant confiné dans des couches d'Ekman (voir la section 1.2.3) de plus en plus fines.

Comme nous l'avons vu dans l'introduction, les processus thermiques qui prennent place dans le noyau suggèrent que la meilleure modélisation possible soit une modélisation qui prescrive le flux de chaleur à travers le modèle. Cependant, ceci est très difficile à réaliser expérimentalement, et ceci nous amène à prescrire la différence de température entre les frontières du modèle, ce qui est amplement suffisant pour la description de la physique des mouvements convectifs à grand forçage.

1.2 Éléments de la théorie des fluides en rotation.

Nous choisissons donc de modéliser la partie liquide du noyau comme un fluide homogène, isotrope, incompressible et Newtonien.

1.2.1 Équation du mouvement pour un fluide en rotation.

Soit $\mathcal{G}$ un réferentiel galiléen, $\mathbf{e}_z$ l'un de ses axes, $\mathbf{r}$ le rayon-vecteur dans ce réferentiel. Soit $\mathcal{T}$ un réferentiel tournant à la vitesse constante $\mathbf{\Omega} = \Omega\mathbf{e}_z$ par rapport à $\mathcal{G}$. Soit $\mathbf{u}$ le champ de vitesse du fluide. Les formules de changement de réferentiel permettent de relier la vitesse du fluide dans $\mathcal{G}$ et $\mathcal{T}$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u})_{\mathcal{G}} &= (\mathbf{u})_{\mathcal{T}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}, \\ \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{G}} &= \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{T}} + 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{u} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

La loi de Newton, dans le cas d'un fluide tel que celui décrit au début de ce chapitre, n'est autre que l'équation de Navier-Stokes, que nous exprimons ici dans le réferentiel $\mathcal{G}$:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{G}} = -\frac{\nabla\Pi}{\rho} + \mathbf{f}_v + \nu\nabla^2\mathbf{u}. \tag{1.4}$$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ est la dérivée totale, qui s'exprime :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$$

ρ est la masse volumique du fluide, ν la viscosité dynamique, Π est la pression, et $\mathbf{f}_v$ la force volumique agissant sur le fluide. ∇ est l'opérateur différentiel dans

$\mathcal{G}$. Le changement de réferentiel donne :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{T}} + 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{u} = -\nabla\Pi' + \mathbf{f}_v + \nu\nabla^2\mathbf{u}. \tag{1.5}$$

avec $\Pi' = \Pi/\rho + \Omega^2|\mathbf{r}|^2/2$. l'équation (1.5) est l'équation de Navier-Stokes dans un réferentiel tournant. Pour la modélisation du noyau, nous considérerons que les propriétés ρ et ν sont homogènes. Dans la suite de ce chapitre, nous omettons les notations $()_{\mathcal{T}}$.

1.2.2 Nombres sans dimensions.

Considérons d'abord le cas $f_v = 0$, dans lequel aucune autre force volumique que la viscosité n'agit sur le fluide. Il existe plusieurs façons de rendre l'équation (1.5) non-dimensionnelle. Si nous choisissons Ω^{-1} comme échelle de temps, D comme échelle de longueur, Π_0 (pression arbitraire) comme échelle de pression, et U comme échelle de vitesse, nous obtenons, pour les variables adimensionnées (par abus de notation, nous les notons comme les variables dimensionnées) :

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + Ro\ (\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u}) + 2\mathbf{e}_z \times \mathbf{u} = -\nabla\Pi' + E\nabla^2\mathbf{u}. \tag{1.6}$$

Les nombres de Rossby et d'Ekman sont définis par

$$Ro = \frac{U}{\Omega D}, E = \frac{\nu}{\Omega D^2}.$$

Ro mesure le rapport entre les forces d'inertie et la force de Coriolis. E mesure le rapport entre la force visqueuse et la force de Coriolis. Nous savons que $\Omega = 7\,10^{-5}$ rad/s. Si l'on s'intéresse aux mouvements à grande échelle dans le noyau, nous pouvons poser $D = 1000$ km. La viscosité du noyau est le paramètre le moins contraint. On peut néanmoins partir d'une estimation de celle-ci basée sur la viscosité du fer au point de fusion (Stacey, 1992) : $\nu \approx 10^{-6}$ m^2/s. On obtient alors pour le nombre d'Ekman $E \approx 10^{-14}$, et pour le nombre de Rossby $Ro \approx 10^{-6}$.

Il est donc très probable que l'écoulement dans le noyau soit dominé par la force de Coriolis. Nous allons maintenant déterminer les caractéristiques d'un tel écoulement.

1.2.3 Écoulement dans un volume confiné.

Nous étudions maintenant un écoulement soumis à l'équation (1.5), sans autre force volumique que la force visqueuse. Nous supposons que cet écoulement (figure 1.1) est contenu dans un conteneur rigide sphérique, et nous

choisissons des conditions aux limites de non-glissement (*no-slip*) aux frontières de ce conteneur. Nous adoptons un système de coordonées **cylindriques** et les axes locaux $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$.

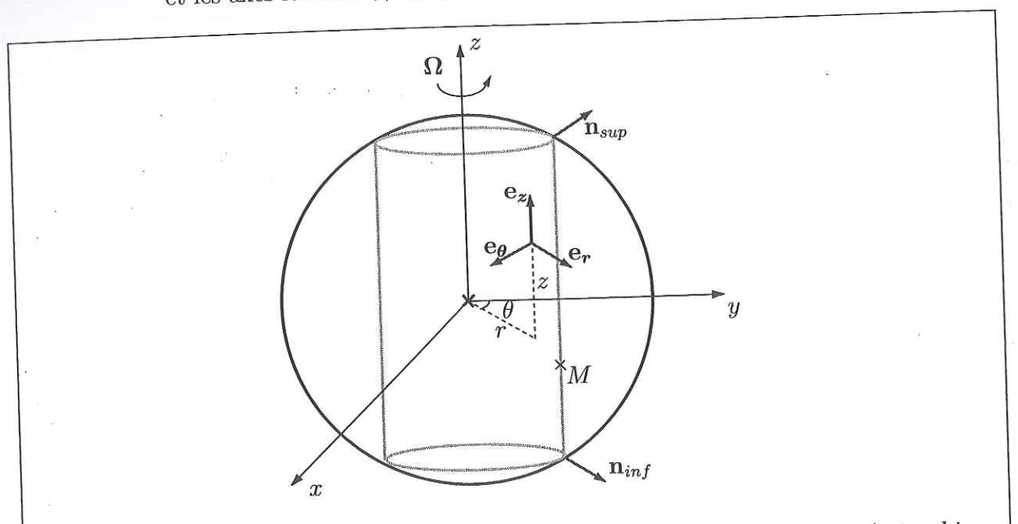


FIG. 1.1 – *Schéma général de la configuration de travail. En gris, un cylindre géostrophique.*

La limite des rotations rapides ($Ro << 1, E << 1$) nous incite à séparer deux domaines dans le fluide. L'*intérieur du fluide* ou *cœur* désignera le volume de fluide situé loin des bords. On pourra considérer que les effets de la viscosité y sont négligeables. La *couche limite* désignera le volume du fluide situé près des bords, dans lequel de forts gradients de vitesse redonnent de l'importance au terme visqueux.

Intérieur du fluide.

À l'intérieur du fluide, l'équation (1.5) se réduit à :

$$2\mathbf{e}_z \times \mathbf{u} = -\nabla \Pi'. \tag{1.7}$$

L'équation (1.7) est appelée équilibre (ou *balance*) géostrophique. Elle stipule qu'un gradient de pression doit équilibrer la force de Coriolis. Cet équilibre est dégénéré : la connaissance du gradient de pression n'implique pas une détermination univoque du champ de vitesse. Nous appelons mouvement géostrophique un mouvement obéissant à (1.7).

Si nous prenons le rotationnel de (1.5), il vient :

$$2\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = 0.$$

C'est le théorème (ou contrainte) de Proudman-Taylor. Il stipule qu'un mouvement géostrophique doit être invariant dans la direction parallèle à l'axe de rotation.

Nous recherchons maintenant les mouvements géostrophiques qui peuvent prendre place dans une sphère. Soit $\mathbf{u} = u_r\mathbf{e}_r + u_\theta\mathbf{e}_\theta + u_z\mathbf{e}_z$.

Supposons que u_r ne soit pas nul en un point quelconque M de l'intérieur du fluide. Dans ce cas, puisque u_r est z-invariant, u_r ne sera pas nul aux deux intersections de la sphère et de la verticale passant par M. La conservation du volume, ou non-pénétration du fluide dans la paroi externe imposera alors :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{inf} = 0$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{sup} = 0$$

Ces conditions réclament l'existence d'une vitesse verticale, antisymétrique par rapport à l'équateur. Cette vitesse sera donc z-variable, ce qui viole l'hypothèse géostrophique. Le même raisonnement tient pour u_z. Les seuls mouvements qui ne violent pas cette hypothèse sont les mouvements zonaux (selon $\mathbf{e}_\theta$) et z-invariants. Ces mouvements prennent place le long de cylindres inclus dans la sphère appelés cylindres géostrophiques (figure 1.1).

Nous remarquons que ce type de mouvement ne respecte évidemment pas les conditions aux limites. C'est ce qui justifie la séparation de l'intérieur du fluide, et de la couche limite, que nous allons maintenant étudier.

Couche d'Ekman.

L'écoulement de l'intérieur du fluide va se raccrocher à la condition de vitesse nulle le long de la paroi rigide à travers une couche limite appelée couche d'Ekman, dans laquelle les forces visqueuses et la force de Coriolis sont en équilibre. L'équation (1.5) s'écrit alors :

$$2\mathbf{e}_z \times \mathbf{u} = -\nabla \Pi' + E\nabla^2\mathbf{u}. \tag{1.8}$$

Nous développons ici, de manière simplifiée, une théorie de couche limite (Gubbins et Roberts, 1987). Le principe est d'opérer, près de la paroi, un « zoom » de la coordonnée normale à celle-ci (que nous allons appeler z ci-dessous), de façon à ce que la paroi soit à $z = 0$ et l'intérieur du fluide, à $z = \infty$. Cette opération, qui est en fait, d'un point de vue mathématique, un développement limité, est justifiée par la finesse de la couche limite.

Ce zoom nous autorise à négliger les effets de courbure du conteneur, et donc à abandonner temporairement la géométrie sphérique. Nous allons donc étudier une couche plane en géométrie cartésienne. L'orientation du vecteur rotation

par rapport à cette couche peut varier. Pour simplifier, nous considérerons d'abord que le vecteur rotation est normal à la couche. Le cas le plus général sera rapporté par la suite.

Nous adoptons donc un repère cartésien $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$. Le vecteur rotation, et la normale à la paroi sont portées par z. Nous appelons U et V les composantes x et y de l'écoulement géostrophique du cœur (à $z = \infty$). Cet écoulement n'a pas de composante suivant z du fait de la contrainte de Proudman-Taylor.

Le champ de vitesse dans la couche limite obéit aux conditions aux limites suivantes : il est nul sur la paroi, et se raccroche à la vitesse de cœur U,V à $z = \infty$. Du fait de l'agrandissement de la coordonnée normale, on pourra considérer que les variations de l'écoulement de couche limite suivant z dominent celles suivant x et y. Ces dernières variations horizontales n'interviendront que par la dépendance des conditions aux limites U et V (vitesse de cœur) avec x et y.

Appelons u, v, w les composantes de la vitesse dans la couche d'Ekman. Nous ne considérerons que la dépendance de ces variables par rapport à z, le reste de la dépendance étant donné par les conditions aux limites à $z = \infty$. L'équation (1.8) s'écrit :

$$-2v = -\frac{\partial \Pi'}{\partial x} + E\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$2u = -\frac{\partial \Pi'}{\partial y} + E\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

$$0 = \frac{\partial \Pi'}{\partial z}$$

La troisième relation implique

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right)}{\partial z} = 0, \frac{\partial\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right)}{\partial z} = 0.$$

Le gradient de pression est indépendant de z, il est le même dans la couche limite et dans le cœur, donc il est tel que

$$-2V = -\frac{\partial \Pi'}{\partial x}$$

$$2U = -\frac{\partial \Pi'}{\partial y}$$

Il est donc possible de faire disparaître le gradient de pression en établissant

l'équation pour $u' = u - U$ et $v' = v - V$:

$$-2v' = E\frac{\partial^2 u'}{\partial z^2}$$

$$2u' = E\frac{\partial^2 v'}{\partial z^2}$$

$$0 = \frac{\partial \Pi'}{\partial z}$$

soit

$$\frac{\partial^4 u'}{\partial z^4} + 4E^{-2}u' = 0.$$

$$\frac{\partial^4 v'}{\partial z^4} + 4E^{-2}v' = 0.$$

Introduisons $\delta = E^{1/2}$, la solution s'écrit :

$$u - U = \left(-U\cos\frac{z}{\delta} + V\sin\frac{z}{\delta}\right)\mathrm{e}^{-\frac{z}{\delta}}$$

$$v - V = \left(U\sin\frac{z}{\delta} - V\cos\frac{z}{\delta}\right)\mathrm{e}^{-\frac{z}{\delta}}$$

L'écoulement de couche limite opère, sur une épaisseur δ, la transition entre la vitesse nulle à la paroi et la vitesse de cœur. La figure 1.2 présente la forme des fonctions de vitesse lorsque $V = 0$. On pourra alors remarquer que la couche d'Ekman fait apparaître une vitesse suivant y alors qu'il n'y en a pas dans le cœur. Le tracé de la vitesse v' en fonction de la vitesse u' est appelé spirale d'Ekman.

L'écoulement de couche limite possède une particularité très importante : sa divergence horizontale n'est pas toujours nulle ! Il faut donc faire appel à un écoulement vertical w pour respecter la conservation de la matière dans la couche limite.

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

On obtient

$$w = \frac{1}{2}\delta\omega_z\left(1 - e^{-\frac{z}{\delta}}\left(\cos\frac{z}{\delta} - \sin\frac{z}{\delta}\right)\right)$$

avec ω_z, vorticité verticale de l'écoulement de cœur, calculée dans le référentiel tournant, définie par :

$$\omega_z = \nabla \times \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \cdot \mathbf{e}_z.$$

La figure 1.3 trace l'ecoulement w en fonction de la coordonée de couche limite z. Cet écoulement vertical est non nul lorsque $z \to \infty$, et ainsi, un écoulement

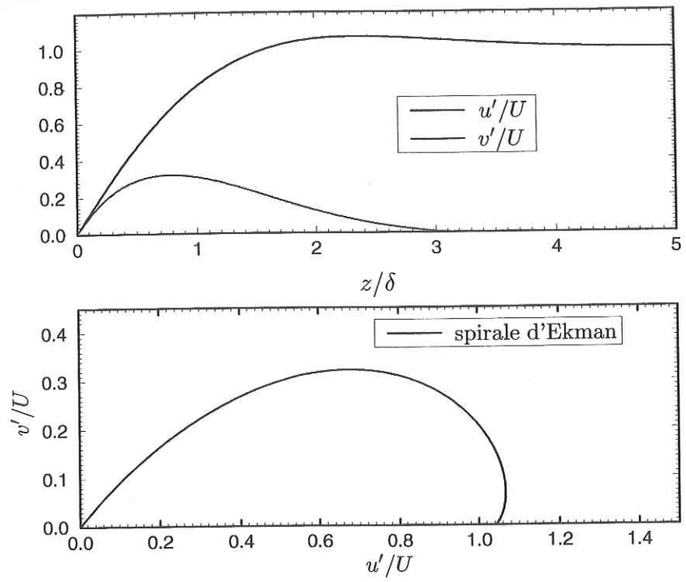


FIG. 1.2 – *Vitesses dans la couche d'Ekman (cas $V = 0$).*

est induit par la couche d'Ekman dans le cœur. Cette couche est donc active, et provoque l'apparition de la vitesse :

$$w = \frac{1}{2} E^{1/2} \omega_z \tag{1.9}$$

Cet écoulement brise la géostrophie du fluide à l'ordre $E^{1/2}$, on l'appelle écoulement secondaire induit par le pompage d'Ekman.

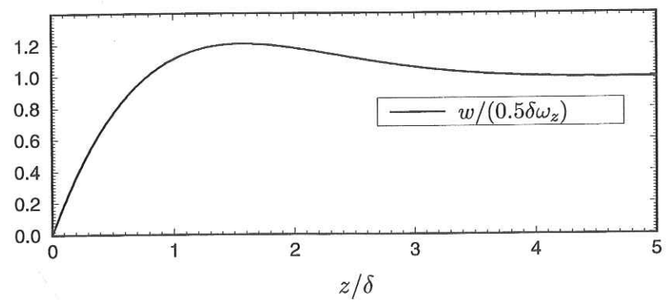


FIG. 1.3 – *Écoulement secondaire de pompage d'Ekman.*

La vorticité de l'écoulement de cœur est donc directement reliée au pompage d'Ekman. Considérons la situation de le figure 1.4. Un cyclone (ω_z positive), et

un anticyclone (ω_z négative) existent dans le cœur du fluide. Ils sont géostrophiques, donc invariants suivant z. Chacun de ces deux vortex est donc en fait une colonne. Une couche d'Ekman existe à la base de ces deux structures. La formule (1.9) prévoit un pompage d'Ekman comme indiqué sur la figure. Notons que si une couche d'Ekman existe au sommet de ces colonnes, elle induit le pompage inverse. Dans tous les cas, du fluide est injecté dans le cyclone, et éjecté de l'anticyclone.

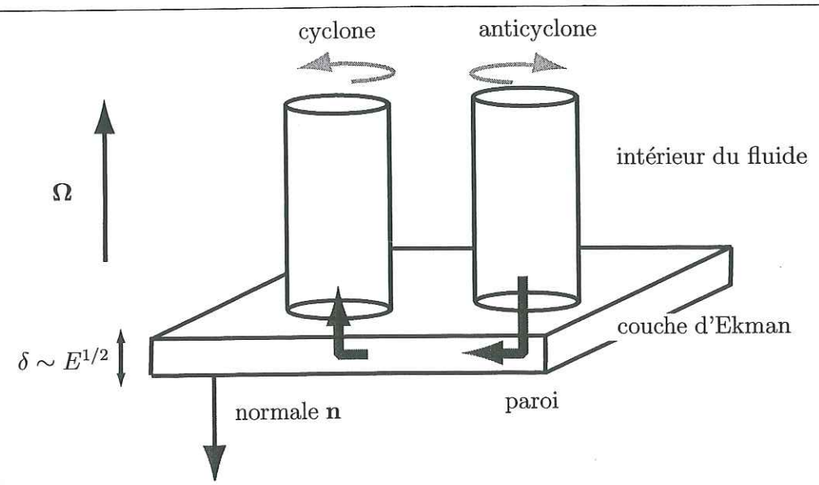


FIG. 1.4 – *Pompage d'Ekman induit par un cyclone, ou un anticyclone.*

Nous appelons moment cinétique planétaire le moment cinétique du fluide calculé dans le réferentiel galiléen du laboratoire $\mathcal{G}$. Un cyclone peut être considéré comme un excès local de moment cinétique planétaire. La couche d'Ekman réagit donc en y injectant du fluide qui, étant initialement en contact avec les parois, possède moins de moment cinétique planétaire que ce cyclone. Cette injection provoque la dissipation de la structure cyclonique, elle est équivalente à un frottement visqueux sur les parois. Inversement, un anticyclone est un défaut local de moment cinétique planétaire. La couche d'Ekman le fera relaxer en injectant du fluide de plus fort moment cinétique planétaire.

Ainsi, le pompage d'Ekman traduit, à l'intérieur du fluide, les effets de la viscosité sur les bords. S'ils ne sont pas entretenus par une source d'énergie quelconque, le cyclone et l'anticyclone de la figure 1.4 dissiperont sous l'effet du frottement sur les parois. Ce frottement équivalent au pompage d'Ekman est appelé frottement d'Ekman.

Le frottement d'Ekman est à l'origine des phases de mise en rotation solide, ou de décélération d'un fluide appelées spin-up et spin-down. Lorsque l'on met le conteneur d'un fluide initialement au repos en rotation, des couches d'Ekman

se forment. Du fluide à fort moment cinétique est injecté depuis la couche limite vers le cœur, tandis que du fluide à faible moment cinétique est éjecté en sens inverse. Sur une échelle de temps de l'ordre de $E^{1/2}\Omega^{-1}$, appelée temps de spin-up, l'intérieur du fluide se met à l'équilibre, en rotation rapide à la vitesse des parois.

Ainsi, dans le cas d'une sphère mise en rotation, du fluide va être injecté dans le cœur près de l'équateur, et ejecté vers la couche d'Ekman au niveau des pôles. On peut aussi examiner le spin-down de la tasse de thé : alors que le liquide se ralentit, les feuilles de thé se rassemblent au centre de la tasse. Du fluide immobile est en effet injecté dans le cœur à cet endroit, alors que du fluide à fort moment cinétique est éjecté sur les côtés. Les feuilles de thé sont advectées par la circulation de couche limite, elles se rassemblent donc au centre du fond de la tasse.

Pour en revenir au cas de la sphère, une étude plus générale de la couche d'Ekman peut être menée dans le cas de parois inclinées par rapport au vecteur rotation. La vitesse de cœur calculée loin de la paroi dans la direction de l'axe de rotation s'exprime par (Gubbins et Roberts, 1987) :

$$\mathbf{v_c} = \frac{1}{2}E^{1/2}\mathbf{e_z}\cdot\nabla\times\left[\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{e_z}|}}(\mathbf{n}\times\mathbf{u}-\mathbf{u}\,\mathrm{sgn}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{e_z}))\right]\mathbf{e_z}. \tag{1.10}$$

$\mathbf{n}$ est la normale à la sphère dirigée vers l'extérieur. Cette formule possède une singularité lorsque $\mathbf{n}$ et $\mathbf{e_z}$ sont orthogonaux. Il y a alors explosion de la couche limite en $E^{1/2}$. Il faut alors développer les équations de couche limite à l'ordre supérieur. C'est alors une couche visqueuse plus épaisse (en $E^{2/5}$) qui prend place, sur une distance latérale d'ordre $E^{1/5}$ (voir Noir (2000)). Dans le cas sphérique qui nous intéresse, cette singularité est concentrée à l'equateur.

L'équation (1.10), établie en régime stationnaire, peut être considérée comme valide dans des régimes dépendants du temps (Duck et Foster, 2001). En effet, l'adaptation de la couche d'Ekman aux variations de vitesse à l'intérieur du fluide résulte de l'incompressibilité de ce dernier. Dans un tel modèle, la couche s'adapte donc instantanément. En fait, sur une échelle de temps de l'ordre de la période de rotation, les effets inertiels ne peuvent plus être négligés comme nous l'avons fait dans l'équation (1.8), et la couche d'Ekman devient dépendante du temps. Pour résumer, nous pouvons dire que le pompage stationnaire est valable lorsque l'échelle de temps des variations de vitesse dans le cœur est plus lente que Ω^{-1}.

1.3 Convection.

Nous disposons d'une équation dynamique pour les mouvements dans un fluide en rotation. Pour clore notre modèle de convection, nous devons maintenant nous intéresser à l'équation d'énergie, et à l'expression de la force volumique d'Archimède. Nous rappelons que nous considérons pour modéliser le noyau un fluide incompressible, homogène, isotrope et Newtonien.

1.3.1 Approximation de Boussinesq.

L'approximation la plus utilisée pour les modèles de convection est l'approximation de Boussinesq. Malgré la simplicité apparente des équations qui en résultent, les conditions de cette approximation sont assez complexes. Nous ne les étudierons pas toutes ici, le lecteur pourra consulter Gubbins et Roberts (1987); Tritton (1988) pour une démonstration complète.

Le principe de l'approximation est simple : un fluide purement incompressible tel que celui que nous avons pris pour modèle ne peut pas convecter. En effet, dire que le fluide est incompressible revient, par l'équation de continuité, à dire que sa densité reste invariablement la même. Or, ce sont les changements de densité liés aux changements de température qui permettent de créer des mouvements convectifs. L'approximation de Boussinesq cherche à établir dans quelles circonstances on peut considérer le fluide comme incompressible, « sauf en ce qui concerne les effets liés à la gravité », comme l'a écrit Rayleigh.

Pour résumer, cette approximation est valable si les changements de densité et de viscosité liés aux variations de température sont faibles, et si l'échauffement du fluide par frottement visqueux est négligeable. En fait, la plus grande limitation que rencontre cette approximation provient du gradient adiabatique, ce qui nous renvoie à la discussion de l'introduction. Nous avons alors vu que l'approximation de Boussinesq décrit bien les mouvements engendrés par les écarts thermiques au gradient adiabatique.

1.3.2 Équation d'énergie.

Nous établissons ici l'équation régissant l'évolution de l'énergie interne du fluide. Soit e l'énergie interne massique du fluide. Nous pouvons écrire (Tritton, 1988) :

$$\rho\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \nabla\cdot\mathbf{q}+\epsilon \tag{1.11}$$

$\mathbf{q}$ est le flux de chaleur, qui s'exprime par (loi de Fourier) $\mathbf{q} = -k\nabla T$ où k est le coefficient de conductivité thermique et T le champ de température locale. ϵ est le taux de production d'énergie lié aux sources internes de chaleur (radioactivité...). L'approximation de Boussinesq stipule que ϵ ne contient pas de termes liés à l'échauffement lié au frottement visqueux.

Si nous choisissons la pression et la température pour décrire l'état thermodynamique du fluide, l'approximation de Boussinesq permet de dire que l'énergie interne ne dépend pas de la pression :

$$e = C_p T.$$

Ceci donne, pour l'équation (1.11) :

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \kappa\nabla^2 T + \frac{\epsilon}{\rho C_p}. \tag{1.12}$$

$\kappa = k/\rho C_p$ est la diffusivité thermique du fluide. Le plus souvent, nous considérerons pour cette équation des conditions aux limites de température fixée, en l'absence de chauffage interne. L'équation s'exprime donc :

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \kappa\nabla^2 T. \tag{1.13}$$

1.3.3 Force d'Archimède.

L'approximation de Boussinesq néglige la compressibilité du fluide, sauf dans l'expression de la force d'Archimède. On linéarise la densité $\rho(T)$ du fluide autour d'un état de densité uniforme ρ_0, à la température de référence $T = T_0$:

$$\rho(T) = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0)).$$

α est le coefficient de compressibilité isotherme du fluide. La densité ρ_0 n'a aucun effet dynamique, puisqu'elle est compensée hydrostatiquement par un gradient de pression. Ce n'est donc que la variation de densité qui induit une force d'Archimède s'exprimant par :

$$\mathbf{f}_v = (\rho - \rho_0)\mathbf{g} = -\rho_0\alpha(T - T_0)\mathbf{g}, \tag{1.14}$$

g étant le champ de gravité.

1.3.4 Bilan

Nous décrirons un fluide en rotation et en convection en utilisant l'ensemble des équations (1.5), (1.14) et (1.13) :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u} + 2\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{u} = -\nabla\Pi' - \alpha(T - T_0)\mathbf{g} + \nu\nabla^2\mathbf{u}. \\ &\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,T = \kappa\nabla^2 T \end{aligned} \tag{1.15}$$

Les conditions aux limites adoptées seront le non-glissement pour la vitesse, et la différence de température fixée aux frontières. Dans la suite nous poserons, sans perte de généralité, $T_0 = 0$.

1.4 Modèle quasigéotrophique de la convection dans une sphère en rotation.

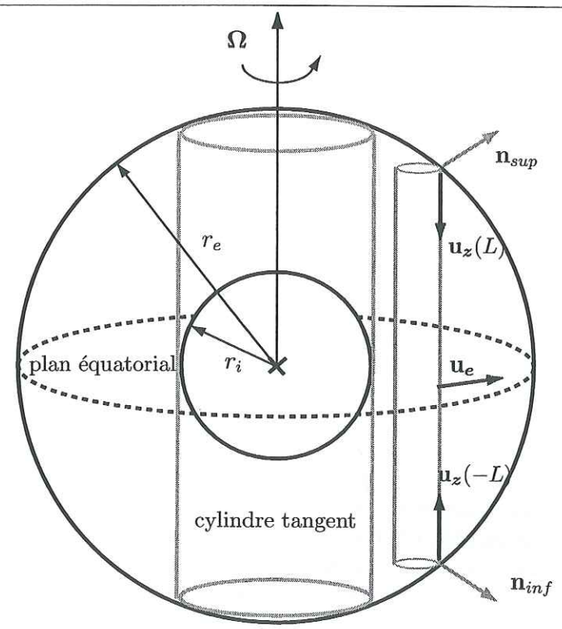


FIG. 1.5 – *Schéma général pour le modèle quasigéostrophique. Le cylindre tangent est en gris.*

Comme nous l'avons vu, les seuls mouvements purement géostrophiques dans la sphère sont les mouvements zonaux. La convection dans une sphère en rotation brisera forcément cette contrainte en créant des mouvements radiaux. Des mouvements non-géostrophiques prendront donc place dans la sphère. Cependant, comme nous l'avons vu dans l'introduction, les expériences montrent

que l'invariance des colonnes de convection suivant la direction z est une caractéristique robuste de l'écoulement lorsque E est bas. De plus, si l'on exclut les forces magnétiques, l'équilibre de forces qui régit les mouvements dans le noyau est probablement géostrophique.

La z-invariance des colonnes de convection ne requiert que la z-invariance des mouvements horizontaux. Les mouvements verticaux peuvent ne pas être z-invariants. Ceci suggère de développer un modèle dans lequel les mouvements horizontaux seront géostrophiques, pas les mouvements verticaux. On appellera ce modèle le modèle quasigéostrophique. Cette section est basée sur les travaux de Cardin et Olson (1994). L'analyse est cependant très différente sur certains points, parmi lesquels la gravité du modèle, le traitement du mouvement zonal et l'inclusion de son frottement sur la sphère externe.

Nous étudions les mouvements d'un fluide en rotation décrit par les équations de Navier-Stokes dans l'approximation de Boussinesq, contenu entre deux sphères concentriques de rayons r_i et r_e avec $r_i < r_e$ (figure 1.5). Le rapport d'aspect r_i/r_e vaut 4/11 dans le cadre de l'expérience, 0.35 dans le cas de la Terre.

Pour chaque colonne fluide telle que celle représentée dans la figure 1.5, nous avons vu que la condition de non-pénétration du fluide aux parois va induire un écoulement vertical $\mathbf{u}_z$ pour tout écoulement radial $\mathbf{u}_e$. Cet écoulement vertical est dépendant de la coordonnée verticale z, donc il brise la contrainte de Proudman-Taylor, et il la brise d'autant plus que la pente des parois est forte. Nous verrons que de ce fait, l'écoulement convectif dans le plan de l'équateur sera faible près de la frontière extérieure. De plus, la composante de la force d'Archimède parallèle à l'axe de rotation ne sera pas réellement utile aux mouvements convectifs, puisqu'elle induira des mouvements interdits par cette même contrainte de Proudman-Taylor.

Les situations de pente forte (sur la sphère intérieure) et de force d'Archimède majoritairement parallèle à l'axe se trouvent réunies dans le cylindre tangent à la sphère intérieure. Nous pensons donc que les mouvements qui prennent place à cet endroit ne représentent pas une partie significative de la convection. C'est la raison pour laquelle nous ne les modélisons pas ici. Dans le dispositif expérimental du chapitre 2, ou bien dans le modèle quasigéostrophique que nous allons exposer, nous remplaçons le cylindre tangent par un cylindre matériel.

Nous commençons en adimensionnant à nouveau le système (1.15). Nous choisissons cette fois un adimensionnement orienté vers le rôle de la viscosité, adapté aux mouvements que l'on veut étudier :

- $D = r_e - r_i$ pour l'échelle de longueur,
- D^2/ν pour l'échelle de temps,

- $(T_e - T_i)\nu/\kappa$ pour l'échelle de température.

Nous choisissons un repère cylindrique $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$, et un champ de gravité centrifuge s'exprimant par $\mathbf{g} = \Omega^2\mathbf{r}$. Ce type de champ de gravité est adapté à la description d'une sphère en rotation rapide (Carrigan et Busse, 1983). Glatzmaier et Olson (1993) on montré de plus que dans le cadre des mouvements quasigéostrophiques, la gravité centrifuge est une excellente approximation de la gravité centrale, car seule la composante de celle-ci qui est perpendiculaire à l'axe de rotation joue un rôle dynamique.

Soit $\mathbf{u}$ la vitesse du fluide, T la température (pas la pertubation), Π la pression (avec la contribution du potentiel de gravité). Les équations s'écrivent alors :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u} + 2E^{-1}\mathbf{e}_z \times \mathbf{u} = -E^{-1}\nabla\Pi - Ra\mathbf{e}_r T + \nabla^2\mathbf{u}. \tag{1.16}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,T = P^{-1}\nabla^2 T. \tag{1.17}$$

Les nombres sans dimension s'expriment par :

Le nombre de Rayleigh $Ra = \dfrac{\alpha\Delta T\Omega^2 D^4}{\kappa\nu}$,

Le nombre d'Ekman $E = \dfrac{\nu}{\Omega D^2}$,

Le nombre de Prandtl $P = \dfrac{\nu}{\kappa}$.

Nous avons déjà vu que E mesure le rapport entre les forces visqueuses et la force de Coriolis. Ra mesure l'importance du forçage thermique. Il caractérise le rapport de forces entre les forces d'Archimède, et les phénomènes qui empêchent le mouvement : dissipations visqueuse et thermique. Le nombre de Prandtl mesure le rapport entre diffusivité cinématique et thermique du fluide. Les conditions aux limites adoptées sont non-glissement pour la vitesse, et différence de température imposée aux frontières du domaine.

Le principe du modèle est de prescrire la forme de $\mathbf{u}$, telle que u_r et u_θ soient z-indépendants, et seul u_z varie avec z :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_r(r,\theta) \\ u_\theta(r,\theta) \\ u_z(r,\theta,z) \end{pmatrix}$$

et de chercher à décrire les mouvements de cette manière.

Nous allons traiter ces équations en séparant la résolution des mouvements axisymétriques et celle des mouvements non-axisymétriques. La raison principale est la commodité de l'écriture et de la résolution numérique. Ce point est discuté dans l'annexe B.

1.4.1 Modèle pour les mouvements convectifs.

Les mouvements non-axisymétriques étant forcés par la convection, nous les appelons maintenant mouvements convectifs. Le point de départ est la démarche initiée par Busse (1970), étendue dans le domaine non-linéaire par Cardin et Olson (1994). On prend le rotationnel de l'équation (1.16) :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\,\mathbf{u} - 2E^{-1}\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}z} = \nabla^2\boldsymbol{\omega} + Ra\; r\;\nabla\times(T\mathbf{e}_r) \qquad (1.18)$$

avec $\boldsymbol{\omega} = \nabla\times\mathbf{u}$, la vorticité de l'écoulement. Nous allons prendre la composante z de l'équation (1.18). Posons donc $\omega(r,\theta) = \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{e}_z$, et

$$\nabla = \nabla_e + \frac{\partial}{\partial z}.$$

Nous posons aussi

$$\mathbf{u}_e = u_r(r,\theta)\mathbf{e}_r + u_\theta(r,\theta)\mathbf{e}_\theta.$$

Il vient l'équation

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + (\mathbf{u}_e\cdot\nabla_e)\,\omega - \left(2E^{-1}+\omega\right)\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}z} = \nabla_e^2\omega + Ra\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\theta} \qquad (1.19)$$

Le cadre bi-dimensionnel dans lequel nous nous plaçons implique que les effets non-linéaires sont faibles devant la force de Coriolis, donc que le nombre de Rossby de l'écoulement est faible devant 1. Dans l'adimensionnement que nous avons choisi, ceci implique $\omega E << 1$, ce qui permet de simplifier le dernier terme du membre de gauche de (1.19). Cette équation fait intervenir beaucoup de quantités z-invariantes, l'idée est donc de la moyenner dans la direction de l'axe de rotation. Nous introduisons l'opérateur de moyennage

$$<>_z = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} dz,$$

avec

$$L = \sqrt{r_e^2 - r^2}.$$

L est la moitié de la hauteur d'une colonne fluide verticale au rayon cylindrique r. Le moyennage n'affecte pas ω, $\mathbf{u}_e$, et ∇_e, qui sont indépendants de z. L'équation (1.19) devient donc :

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + (\mathbf{u}_e\cdot\nabla_e)\,\omega - \frac{2E^{-1}}{2L}\left[u_z\right]_{-L}^{L} = \nabla_e^2\omega + Ra\frac{\mathrm{d}<T>_z}{\mathrm{d}\theta}$$

L'injection de fluide aux extrémités inférieure et supérieure de la colonne (troisième terme de cette équation) agit donc comme une source de vorticité. Nous pouvons identifier les deux principales sources de mouvement vertical : la première est la circulation verticale forcée par les mouvements radiaux, du fait de la non-pénétration à la frontière sphérique externe :

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}_{sup} = 0 \Rightarrow u_z(L) = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}r}u_{r0}, \qquad (1.20)$$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}_{inf} = 0 \Rightarrow u_z(-L) = -\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}r}u_{r0}. \qquad (1.21)$$

La seconde est le pompage induit par la couche d'Ekman prèsente près de la frontière. Un peu de calcul sur l'équation (1.10) donne :

$$u_z(L) = \mathbf{v_c}\cdot\mathbf{e}_z(L) = -\frac{1}{2}\frac{E^{1/2}}{\sqrt{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_z|}}\omega.$$

La face inférieure induit le pompage opposé. u_z peut donc être vue comme esclave des quantités géostrophiques. L'équation (1.19) devient :

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + (\mathbf{u}_e\cdot\nabla_e)\,\omega + E^{-1/2}\frac{1}{L\sqrt{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_z|}}\omega - E^{-1}\frac{2}{L}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}r}\mathbf{u}_e\cdot\mathbf{e}_r = \nabla_e^2\omega + Ra\frac{\partial<T>_z}{\partial\theta} \qquad (1.22)$$

Le pompage d'Ekman est négligeable, aux bas nombres d'Ekman, devant la circulation forcée par la pente. Nous ne le retiendrons que ponctuellement dans la modélisation, afin d'étudier son effet.

Nous définissons ici le champ de vorticité potentielle Λ de l'écoulement par :

$$\Lambda = \omega - \frac{2}{E}\ln L.$$

(1.22) s'écrit alors :

$$\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}t} = \nabla_e^2\omega + Ra\frac{\partial<T>_z}{\partial\theta} \qquad (1.23)$$

(1.23) est l'équation quasigéostrophique pour les mouvements convectifs, que nous allons retenir pour la suite de l'étude. C'est la première équation importante du modèle. Elle se comprend ainsi : la vorticité potentielle de l'écoulement est une quantité matériellement conservée le long du trajet d'une particule fluide, hors des sources (force d'Archimède et entraînement visqueux) et des puits (dissipation visqueuse) de vorticité. Ainsi, si une colonne fluide se déplace radialement vers l'extérieur, la diminution de L va la forcer à se contracter, et, ce faisant, à acquérir de la vorticité négative (anticyclonique) pour conserver son moment cinétique. Inversement, une colonne fluide se rapprochant de l'axe va s'étirer et acquérir de la vorticité positive. Cet effet se nomme *effet β*. L'équation (1.23) est par ailleurs aussi appelée équation du plan β, et elle intervient, sous une forme quasiment analogue, dans beaucoup de systèmes géophysiques quasi-bidimensionnels comme l'atmosphère terrestre ou les océans (Pedlosky, 1987). On peut voir le plan β comme un échangeur de vorticité entre la vorticité dite planétaire $2/E\ln L$, que l'on peut comprendre comme la vorticité disponible dans le réferentiel du laboratoire, du fait de la rotation globale du fluide, et la vorticité ω du fluide dans le réferentiel tournant. En annexe A.1, on pourra lire quelques détails supplémentaires sur l'utilisation du concept de vorticité potentielle dans la physique des couches atmosphériques.

L'équation de continuité s'écrit $\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$, ce qui implique

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = \mathrm{cte}(r,\theta).$$

La vitesse verticale doit être une fonction affine de la hauteur, antisymétrique par rapport à l'équateur.

$$u_z(r,\theta,z) = \frac{z}{L}\left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}r}u_r(r,\theta) - \frac{1}{2}\frac{E^{1/2}}{\sqrt{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_z|}}\omega(r,\theta).\right) \tag{1.24}$$

Le pompage d'Ekman peut encore être négligé ici.

Comme nous venons de le voir, le modèle assujettit donc la vitesse verticale à la vitesse radiale. Cette vitesse verticale, en recirculant, va provoquer un écoulement horizontal divergent $\mathbf{u}_{div}$. Nous pouvons donc écrire $\mathbf{u}_e$ comme :

$$\mathbf{u}_e = \nabla \times (\Psi \mathbf{e}_z) + \mathbf{u}_{div}$$

La première partie est purement rotationnelle (Ψ est la fonction courant), la seconde possède une divergence horizontale non nulle telle que :

$$\nabla_e \cdot \mathbf{u}_{div} = -\frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Dans la limite des faibles nombres d'Ekman, nous attendons que $\mathbf{u}_{div}$ joue un rôle négligeable dans la dynamique de l'écoulement. En effet, la force de Coriolis, très puissante, tend à convertir tout écoulement à divergence horizontale non nulle en un écoulement à divergence horizontale négligeable. Le principe de l'approximation quasigéostrophique est de considérer *a priori* que $\mathbf{u}_{div} = 0$ et ainsi d'écrire :

$$\mathbf{u}_e = \nabla \times (\Psi \mathbf{e}_z) \tag{1.25}$$

Le système formé de (1.23),(1.24) et (1.25) est le système dynamique que nous choisissons de résoudre. Il faut noter que l'approximation que nous venons de faire aboutit sur un système mathématiquement non clos : si $\mathbf{u}_{div} = 0$, alors $\mathbf{u}_z$ ne devrait plus varier avec z. Nous disons simplement que la rétroaction de $\mathbf{u}_{div}$ sur l'écoulement est négligeable.

1.4.2 Équation de température.

Nous effectuons maintenant le moyennage vertical de l'équation (1.17) :

$$\frac{\partial < T >_z}{\partial t} + < (\mathbf{u}\cdot\nabla)T >_z = P^{-1}\left(\nabla_e^2 < T >_z + \left[\frac{\partial T}{\partial z}\right]_{-L}^{L}\right).$$

Nous avons

$$< (\mathbf{u}\cdot\nabla)T >_z = (\mathbf{u}_e\cdot\nabla_e) < T >_z + < u_z\frac{\partial T}{\partial z} >_z$$

Les deux derniers termes de ces deux équations représentent l'advection verticale de température par la circulation forcée par la pente, et la diffusion verticale de température. L'existence de gradients verticaux de température n'est pas conciliable avec l'approche que nous sommes en train de développer. En effet, un gradient vertical de température peut provoquer un vent thermique zonal non géostrophique. Ces mouvements étant exclus de notre description, nous devons nous placer dans des circonstances dans lesquelles la température est z-invariante. Ceci peut sembler restreindre le champ d'application du modèle. Cependant, pour les situations fortement sur-critiques, l'advection par le mouvement vertical aura tendance à homogénéiser la température suivant z. En ce qui concerne les situations plus proches du seuil, nous essaierons de voir à quel point une telle description est valable. Pour la suite, nous éliminons donc les gradients verticaux de température :

$$\frac{\partial < T >_z}{\partial t} + (\mathbf{u}_e\cdot\nabla_e) < T >_z = P^{-1}\nabla_e^2 < T >_z . \tag{1.26}$$

Dans la suite (voir annexe B), nous décomposerons le champ de température totale en $< T >_z = \Theta + T_{s2D}$. T_{s2D} est le champ statique de température, il est solution de l'équation $\nabla_e^2 T_{s2D} = 0$. Ce profil vaut :

$$T_{s2D} = \frac{\ln\left(\frac{r}{r_i}\right)}{P\ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)}.$$

Dans le chapitre 3, nous chercherons à remplacer ce profil statique par d'autres profils, plus adaptés à la simulation de situations dans lesquelles le profil statique est fortement z-variable.

(1.26) se joint à (1.23),(1.24),(1.25) pour clore le système. Nous résolvons les champs Ψ et $< T >_z$, dans l'espace du plan équatorial situé entre les cercles de rayon r_i et r_e, avec les conditions aux limites stipulées au début de cette section (voir annexe B pour le développement).

1.4.3 Mouvements zonaux.

On traite ici les mouvements axisymétriques. Ces mouvements sont nécessairement zonaux, du fait de l'incompressiblité horizontale du fluide. Nous avons vu dans la section précédente que pour les mouvements convectifs présentant une composante radiale, le rôle de la paroi était de convertir cette composante en composante verticale (condition (1.20)). Pour les mouvements zonaux, qui ne présentent pas de composante radiale, la paroi ne joue plus ce rôle. Elle va cependant freiner les mouvements zonaux par le frottement d'Ekman.

Nous cherchons à établir une équation pour $< u_\theta >_\theta$, que nous noterons, pour alléger, $\overline{u_\theta}$. Ce champ est bi-dimensionnel, et ceci suggère donc de partir de l'équation (1.16) projetée dans la direction θ, et de lui appliquer l'opérateur $<>_{z,\theta}$ de double moyennage dans les directions z et θ :

$$\frac{\mathrm{d}\overline{u_\theta}}{\mathrm{d}t} + \overline{(\mathbf{u_e}\cdot\nabla_e)\,u_\theta} + \frac{2E^{-1}}{2L}\int_{-L}^{L} \mathbf{e}_z \times \overline{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{e}_\theta\, dz = -E^{-1}\overline{\nabla_e \Pi\cdot\mathbf{e}_\theta} + \nabla_e^2\overline{\mathbf{u_e}}\cdot\mathbf{e}_\theta. \tag{1.27}$$

Cette équation montre que le mouvement zonal n'est pas forcé par l'instabilité convective, mais par le terme non-linéaire ou tenseur de Reynolds. C'est le résultat des interactions non-linéaires qui force le mouvement zonal. Ceci est vrai pour un mouvement zonal purement géostrophique, mais il faut noter que si les isothermes du champ de température ne sont pas tout à fait z-invariants, alors un mouvement zonal non-géostrophique appelé vent thermique peut prendre place. Nous choisissons de le négliger dans le cadre de notre modélisation, et nous y reviendrons dans le chapitre 2.

Du fait du moyennage latéral, le gradient de pression disparaît indentiquement. Il y a un petit piège : le terme visqueux s'écrit :

$$\nabla_e^2\overline{\mathbf{u_e}}\cdot\mathbf{e}_\theta = \nabla_e^2\overline{u_\theta} - \frac{\overline{u_\theta}}{r^2}.$$

Ce petit piège signalé, nous poursuivons. Le terme de Coriolis s'écrit :

$$\frac{2E^{-1}}{2L}\int_{-L}^{L} \mathbf{e}_z \times \overline{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{e}_\theta\, dz = \frac{E^{-1}}{L}\int_{-L}^{L} \overline{u_r}\, dz.$$

A l'ordre dominant et du fait de l'incompressibilité du fluide, $\overline{u_r}$ est bien sûr nul. Cependant, il faut aller à l'ordre supérieur et exprimer le pompage d'Ekman. On part donc de l'incompressibilité :

$$\iint_S \mathbf{u}\cdot d\mathbf{S} = 0$$

On prend pour S la surface fermée formée du cylindre de rayon r, du cylindre de rayon r_i et de deux calottes sphériques trouées refermant l'espace entre les deux cylindres. On néglige la contribution de la couche limite parallèle présente dans le volume intérieur autour du rayon r_i. On développe le flux de matière en trois termes : un pour le cylindre intérieur (nul), un pour le cylindre extérieur, un pour les couvercles, et on fait apparaître les quantités moyennées dans la direction zonale. Pour le cylindre extérieur, on fait apparaître $\overline{u_r}$, vitesse radiale moyennée dans la direction zonale :

$$2\pi r\int_{-L}^{L} \overline{u_r} dz + \iint_{S_2} [\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}]_{-L}^{L} dS = 0$$

S_2 est la surface du couvercle supérieur (moins le trou du cylindre tangent), et $\mathbf{n}$ la normale sortante à ce couvercle. $\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}$ est la vitesse normale engendrée par le pompage d'Ekman. Celle-ci s'exprime, pour le couvercle supérieur, par :

$$\mathbf{v}(L)\cdot\mathbf{n} = \frac{1}{2}E^{1/2}\mathbf{n}\cdot\nabla_e \times \left(\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_z|}}(\mathbf{n}\times\mathbf{u}-\mathbf{u})\right).$$

$\mathbf{u}$ est ici la vitesse du fluide dans le cœur. Pour le couvercle inférieur, le pompage est le même, avec le signe opposé. Ainsi

$$[\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}]_{-L}^{L} = E^{1/2}\mathbf{n}\cdot\nabla_e \times \left(\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_z|}}(\mathbf{n}\times\mathbf{u}-\mathbf{u})\right)$$

et

$$2\pi r\int_{-L}^{L} \overline{u_r}\, dz + E^{1/2}\iint_{S_2} \nabla_e \times \left(\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_z|}}(\mathbf{n}\times\mathbf{u}-\mathbf{u})\right)\cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Pour appliquer le théorème du rotationnel, il faut que le contour sur lequel s'appuie la surface soit connexe, ce qui n'est pas le cas pour le contour d'une surface à trous. Cependant on peut écrire :

$$\iint_{S_2} = \iint_{S_{tot}} - \iint_{S_{trou}}$$

S_{tot}, surface englobant le trou, et S_{trou} sont deux surfaces à contour connexe. On peut prolonger le champ de vitesse en le posant nul à l'intérieur du cylindre tangent. Ceci assure l'equivalence de notre problème avec ce second problème de mêmes conditions aux limites. Le pompage associé est alors nul, ce qui annule la contribution du trou. Le résultat est donc, en appelant $\mathcal{L}$ le cercle de rayon r :

$$\iint_{S_2} \nabla_e \times \left(\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_z|}}(\mathbf{n}\times\mathbf{u}-\mathbf{u})\right) d\mathbf{S} = \int_{\mathcal{L}} \frac{\mathbf{n}\times\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_\theta}{\sqrt{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_z|}} r d\theta - \int_{\mathcal{L}} \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_\theta}{\sqrt{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_z|}} r d\theta$$

A noter : le développement précedent ne serait pas valable si le cylindre était en super-rotation, ou si les conditions aux limites étaient du type contraintes libres, car il n'existerait pas de prolongement possible du champ de vitesse à l'intérieur du cylindre respectant les conditions aux limites, c'est à dire tel que le champ de vitesse soit constant, et le pompage nul. Ce point très important a été mis en évidence par Plaut et Busse (2001).

Le premier terme de l'équation précédente est un produit mixte avec $\mathbf{n} = \mathbf{u}_r$ et $\mathbf{e}_\theta$. Il disparaît donc indentiquement. Ne reste que le second terme. $\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_z$ est le cosinus de la colatitude, il est indépendant de θ, et ainsi :

$$\int_{-L}^{L} \overline{u_r}\, dz = \frac{E^{1/2}\overline{u_\theta}}{\sqrt{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_z|}}$$

Et pour finir l'équation (1.27) s'écrit :

$$\frac{\partial \overline{u_\theta}}{\partial t} + \overline{(\mathbf{u_e} \cdot \nabla_e)\, u_\theta} + \frac{E^{-1/2}}{L\sqrt{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{e_z}|}}\overline{u_\theta} = \nabla_e^2 \overline{u_\theta} - \frac{\overline{u_\theta}}{r^2}. \tag{1.28}$$

avec $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e_z} = \sqrt{1-(r/r_e)^2}$ et L=$\sqrt{r_e^2 - r^2}$. Le freinage associé au pompage d'Ekman a remplacé la condition (1.20). Deux conditions aux limites suffisent pour u_θ, qui sont : $u_\theta = 0$ aux deux frontières du domaine.

1.5 Études au seuil.

1.5.1 Le seuil de convection.

En présence de dissipation visqueuse et thermique, les phénomènes convectifs ne démarrent en général pas dès que Ra prend une valeur légèrement positive. Il existe une valeur seuil de Ra appelée nombre de Rayleigh critique Ra_c à laquelle la convection démarre, et adopte un motif spatio-temporel bien défini par un vecteur d'onde, et une pulsation (qui peut-être nulle dans le cas de motifs stationnaires).

Le cas que nous étudions est assez standard. Il s'agit d'une bifurcation de Hopf, correspondant à une transition de phase du premier ordre (Busse, 1970), et les mouvements qui prennent place au seuil ($Ra \to Ra_c$) sont infiniment petits. Les termes non-linéaires sont donc infiniments petits d'ordre supérieur, et une analyse *linéaire*, c'est à dire se basant sur des équations linéarisées, est suffisante pour prédire le seuil.

Nous linéarisons le système (1.23),(1.26) autour de l'état conductif. Les équations linéarisées s'obtiennent simplement en enlevant les termes non-linéaires (le terme non-linéaire de l'équation de température laisse cependant un terme linéarisé contenant le gradient conductif de température) :

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial t} = \nabla_e^2 \omega + Ra \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \tag{1.29}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial T_{s2D}}{\partial r} = P^{-1} \nabla_e^2 \Theta. \tag{1.30}$$

avec

$$\Lambda = \omega - \frac{2}{L} \ln L$$

On recherche des solutions sous la forme

$$\omega = f(r) e^{\sigma t - m\theta}$$

$$\Theta = g(r) e^{\sigma t - m\theta}$$

Dans la pratique, le principe est de fixer Ra et d'itérer numériquement la résolution des équations (1.29) et (1.30). On obtient alors, pour chaque mode m, les fonctions propres $f_m(r)$ et $g_m(r)$, et la pulsation complexe σ_m. On cherche alors le nombre de Rayleigh critique Ra_c tel qu'il n'existe qu'un seul mode $m = m_c$ pour lequel le taux de croissance de l'instabilité (la partie réelle de σ_{mc}) soit nul, tous les autres modes étant tels que $Re(\sigma_m) < 0$. On sait alors exactement à quelle valeur Ra_c de Ra la convection démarre, et quelle est la forme de la convection au seuil : fonctions radiales $f_{mc}(r)$ et $g_{mc}(r)$, numéro de mode critique m_c, pulsation du mode critique $\omega_c = Im(\sigma_{mc})$.

1.5.2 Études de réfèrence.

Il sera très utile de comparer quantitativement les résultats du modèle quasigéostrophique aux résultats d'études théoriques de réference, réalisées dans un contexte tri-dimensionnel : la théorie de Roberts (1968), corrigée par Busse (1970), que nous appelerons Roberts-Busse, et la théorie de Jones et al. (2000). Ces études étant tridimensionnelles, les fonctions f et g dont nous parlions plus haut dépendent maintenant de deux variables : θ et z. Roberts a d'abord prescrit la forme radiale qu'elles devaient prendre : une fonction de Bessel sphérique. Ensuite, il a résolu l'équation différentielle que vérifie la forme verticale. L'erreur de Roberts, corrigée par Busse en 1970 après une analyse quasi-géostrophique très similaire à celle que nous avons développée, était de penser que le mode de convection dominant au seuil était antisymétrique par rapport à l'équateur. Busse a restauré la bonne symétrie.

Le modèle quasi-géostrophique de Busse lui a aussi permis de décrire la forme que prend la convection au seuil : il s'agit d'une onde, appelée *onde de Rossby thermique* pour des raisons que nous allons détailler plus bas. La figure 1.6 montre le dessin célèbre de Busse. L'onde de Rossby est un collier de colonnes parallèles à l'axe de rotation. Cette onde se déplace dans la direction prograde, c'est à dire dans le même sens que la rotation solide du fluide, mais plus vite que celle-ci. Pour des raisons mathématiques, les conditions aux limites adoptées par Busse pour l'équation thermique sont le chauffage interne. C'est la raison pour laquelle le collier de colonnes prend place au cœur de l'espace entre la sphère intérieure et la sphère extérieure.

Dans son dessin, Busse a négligé une caractéristique importante de ce type de convection, mise en évidence plus tard des des études expérimentales (Carrigan et Busse, 1983) puis numériques (Zhang, 1992; Cardin et Olson, 1994) : du fait de la pente de la frontière sphérique externe, les colonnes de convection sont penchées dans la direction prograde. Cardin et Olson (1994) ont montré que l'inclinaison des cellules de convection dépendait de la valeur locale de la pente. Ainsi, dans le cas d'une sphère, les cellules de convections prennent une forme en spirale. La figure 1.7, extraite d'une simulation du chapitre 3 de cette

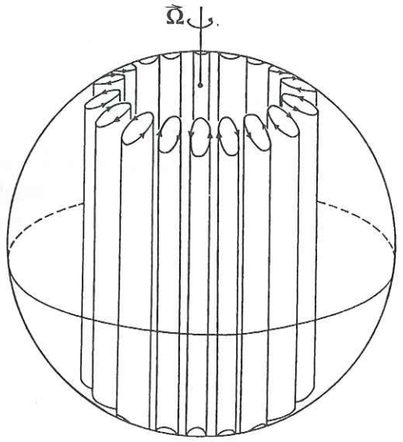


FIG. 1.6 – *Dessin de Busse (1970) illustrant l'onde de Rossby thermique au seuil de la convection dans une sphère en rotation.*

étude, illustre cette caractéristique.

Le modèle quasi-géostrophique de Busse a permis d'établir le comportement asymptotique des paramètres critiques Ra_c, m_c, ω_c dans la limite $E \to 0$ des rotations rapides. Ces comportements sont

$$Ra_c \sim E^{-4/3}, m_c \sim E^{-1/3}, \omega_c \sim E^{-2/3}$$

et ont reçu depuis un support expérimental et numérique très conséquent (voir bibliographies locales des chapitre 2 et 3).

Cependant, il fut pointé (Soward, 1977; Yano, 1992) que la dépendance radiale choisie par Roberts ne permettait pas d'obtenir une solution mathématiquement consistente. C'est la raison pour laquelle Jones et al. (2000) ont repris l'étude, en ne supposant cette fois aucune forme radiale pour la solution tri-dimensionnelle. Leur étude asymptotique est validée par les simulations numériques 3D. Elle sera donc considérée comme la référence de comparaison dans la chapitre 3.

Nous aurons aussi l'occasion de confronter nos résultats numériques avec ceux, tridimensionnels, de Dormy (1997).

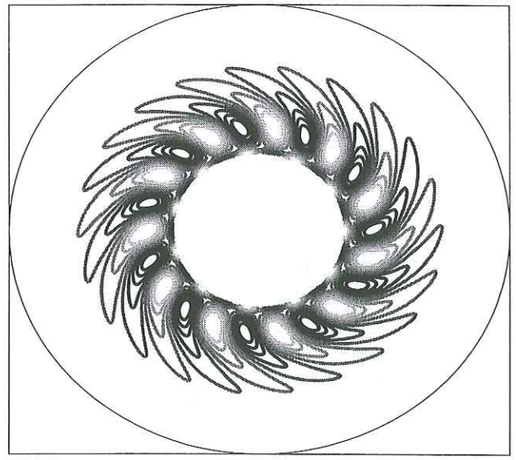


FIG. 1.7 – *Structure (en vorticité) d'une onde de Rossby thermique dans le plan équatorial ($E = 5\ 10^{-5}, P = 1$, calcul bidimensionnel en non-glissement et chauffage différentiel, voir chapitre 3).*

1.5.3 Le principe de l'onde de Rossby

L'onde de Rossby thermique, consacrée par Busse, doit son nom aux ondes de Rossby, très fréquentes dans les systèmes géophysiques que sont l'atmosphère et les océans. Nous allons voir ici que son principe est fondamentalement lié à l'existence d'un plan β (d'une pente des couvercles) et au concept de vorticité potentielle. Pour cela, nous nous placons temporairement en géométrie cartésienne, et étudions la situation de la figure 1.8. La flèche indique la direction des L décroissants (fluide peu profond). Initialement A, B et C sont au repos. Imaginons (situation 1) que B soit déplacé dans la direction du fluide peu profond par une perturbation. Du fait de la conservation de la vorticité potentielle, un anticyclone se crée donc en B, qui va (situation 2) déplacer A vers le haut, et C vers le bas dans son champ proche. Un anticyclone va donc se créer en A, et un cyclone en C, qui vont ramener B à sa position initiale (situation 3). Les conditions aux limites sont périodiques, donc A influe sur C et le ramène à sa position initiale. La perturbation qui était en B s'est maintenant déplacée en A (situation 4). Ce déplacement ondulatoire se fait de telle manière qu'un observateur chevauchant une crête d'onde voie le fluide peu profond sur sa droite. Dans la géométrie qui nous intéresse, il s'agit donc de la direction prograde azimutale. La période de l'onde de Rossby diminue quand augmente la force de rappel agissant sur les structures de vorticité en A, B, C, D. Ce rappel augmente avec la pente des parois.

On pourra consulter l'annexe A.2 pour un exemple d'ondes de Rossby dans

l'océan Indien.

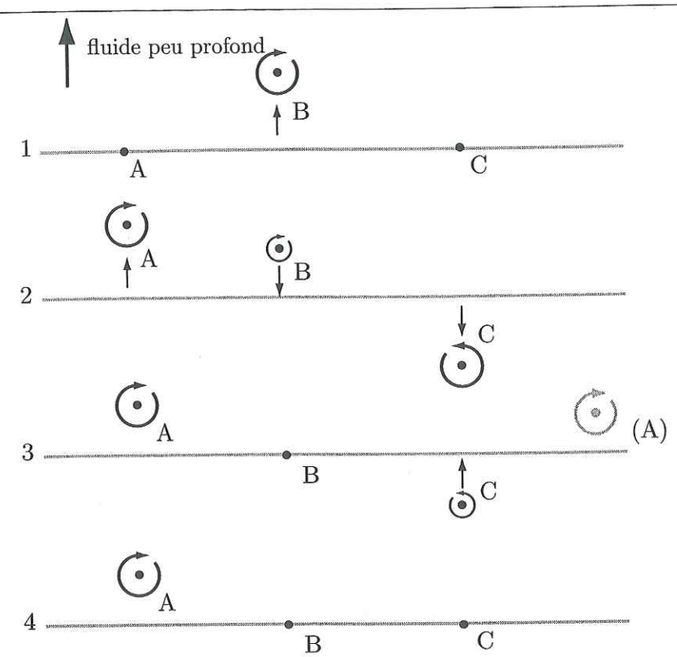


FIG. 1.8 – *le mécanisme de l'onde de Rossby.*

1.5.4 Études proches du seuil: le domaine faiblement non-linéaire

Le problème de la convection dans une sphère en rotation a aussi été investi par des études théoriques au delà du seuil, dans le domaine faiblement non-linéaire, domaine dans lequel on peut traiter perturbativement le terme non-linéaire, qui reste faible. On étudie l'interaction entre plusieurs ondes de Rossby (triades résonantes), et on essaie alors de déterminer une équation pour leur amplitude, appelée équation d'amplitude. Le développement implique en général une échelle de temps rapide (celle des ondes de Rossby), et une échelle plus lente (celle des modulations de l'amplitude des ondes). Parmi ces études, on distinguera Plaut et Busse (2001), qui ont déterminé l'équation d'amplitude dans une géométrie de cylindre aux couvercles penchés, ainsi que le mouvement zonal moyen excité par les termes non-linéaires. Une des conclusions étonnantes de cette étude, dont nous aurons l'occasion de reparler, est qu'à bas nombre de Prandtl, l'instabilité thermique peut démarrer sous la forme d'une onde de

Rossby dont l'amplitude est modulée en temps.

Plus loin du seuil en nombre de Rayleigh, plus aucune théorie précise n'existe, et nous allons nous raccrocher, pour la compréhension des calculs numériques, aux grands résultats concernant la turbulence quasigéostrophique que nous étudions maintenant.

1.6 La turbulence quasigéostrophique.

Dans les chapitres 3 et 2, nous verrons que lorsque le forçage thermique devient fort, nous pouvons amener le système dans un état turbulent. Le mot « turbulence » recouvre souvent des réalités très diverses, c'est pourquoi il est utile d'en donner ici une définition. Un fluide turbulent réunit ces trois propriétés :

- Le champ de vitesses possède un comportement en temps chaotique (sensible aux conditions initiales).
- Le champ de vitesses présente une large gamme d'échelle spatiales.
- Les propriétés de mélange du fluide (diffusivité thermique, de la quantité de mouvement, magnétique...) sont renforcées par rapport aux propriétés moléculaires.

Classiquement, l'état de développement de la turbulence est quantifié par le nombre de Reynolds Re, qui mesure l'importance de l'advection (termes non-linéaires) du champ de vitesse par rapport à sa diffusion :

$$Re = \frac{|(\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}|}{|\nabla^2\mathbf{u}|} = \frac{UL}{\nu}$$

où U et L sont la vitesse caractéristique du fluide et la taille caractéristique du conteneur. Le système que nous étudions est fortement bidimensionnel. Nous pensons donc pouvoir appliquer les théories existantes sur la turbulence bidimensionnelle, appelée turbulence quasigéostrophique dans le cadre de notre modèle. Cependant, ce système possède plusieurs particularités, du fait de l'existence du plan β, auquelles nous devons nous intéresser.

1.6.1 Énergie et enstrophie.

Nous allons développer une vision macroscopique de notre système, en calculant deux quantités intégrées depuis le champ de vorticité (moments) : l'énergie et l'enstrophie. Nous suivons dans ce paragraphe une démonstration de

Pedlosky (1987), que nous avons adaptée à la géométrie cylindrique. Posons $\mathbf{u}_e = \nabla \times (\Psi \mathbf{e}_z)$. Nous avons alors $\omega = -\nabla^2\Psi$, et l'équation (1.23) s'écrit :

$$\frac{\partial \nabla^2\Psi}{\partial t} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}\frac{\partial \nabla^2\Psi}{\partial r} - \frac{\partial \Psi}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial \nabla^2\Psi}{\partial \theta}\right) + E^{-1}\frac{2}{L}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}r}\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \nabla^4\Psi - Ra\frac{\partial T}{\partial \theta}. \tag{1.31}$$

On multiplie (1.31) par Ψ et on manipule un peu pour obtenir :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = \Psi\nabla^4\Psi - \Psi\ Ra\frac{\partial T}{\partial \theta}. \tag{1.32}$$

ε définit la densité d'énergie du fluide, qui vaut :

$$\varepsilon = \frac{(\nabla\Psi)^2}{2},$$

$\mathbf{S}$ est le vecteur flux de densité d'énergie, qui vaut

$$\mathbf{S} = -\Psi\nabla\frac{\partial \Psi}{\partial t} - E^{-1}\frac{2}{L}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}r}\frac{\Psi^2}{2}\mathbf{e}_\theta - \mathbf{u}(\nabla^2\Psi).$$

On multiplie maintenant (1.31) par $\nabla^2\Psi$, et on manipule encore un peu pour obtenir :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{Q} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\left(rE^{-1}\frac{2}{L}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}r}\right)}{\mathrm{d}r}\frac{\partial \Psi}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \nabla^2\Psi\nabla^4\Psi - \nabla^2\Psi\ Ra\frac{\partial T}{\partial \theta}. \tag{1.33}$$

V est la densité d'enstrophie du fluide, définie par :

$$V = \frac{(\nabla^2\Psi)^2}{2},$$

et Q est le vecteur flux de densité d'enstrophie, qui vaut

$$\mathbf{Q} = \mathbf{u}V + E^{-1}\frac{2}{L}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\nabla\Psi}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} - \varepsilon\mathbf{e}_\theta\right).$$

Si l'on comprend bien ce qu'est l'énergie $\varepsilon = (\nabla\Psi)^2/2 = u^2/2$, on connaît moins l'enstrophie. L'enstrophie est en fait « l'énergie de la vorticité », puisque $V = (\nabla^2\Psi)^2 = \omega^2/2$. Intégrons (1.32) et (1.33) sur la surface S du plan équatorial contenue entre les cercles de rayon r_i et r_e. Les termes qui s'écrivent sous la forme d'une divergence disparaissent, et nous avons schématiquement :

$$\iint_S \varepsilon dS = D_\varepsilon + A_\varepsilon$$
$$\iint_S V dS = M_V + D_V + A_V$$

D représente la dissipation visqueuse d'énergie et d'enstrophie, et A le forçage dû à la force d'Archimède. Le terme supplémentaire M_V est un terme de variation d'enstrophie du fait de la présence du plan β. En effet, du fait des échanges de vorticité entre vorticité planétaire et vorticité dans le référentiel tournant, un terme doit apparaître dans le bilan d'enstrophie. Le plan β influence donc le bilan d'enstrophie, mais pas le bilan d'énergie.

1.6.2 Invariants et cascades.

Nous introduisons maintenant une description unidimensionnelle spatiale des spectres d'énergie et d'enstrophie (Pedlosky, 1987) :

$$\iint_S \varepsilon dS = \int E(k)dk$$
$$\iint_S V dS = \int \Omega(k)dk$$

k est le vecteur d'onde. Puisque $\varepsilon = (\nabla\Psi)^2/2$ et $V = (\nabla^2\Psi)^2/2$, nous avons

$$\Omega(k) = k^2E(k).$$

Nous cherchons ici à établir les conditions sous lesquelles l'énergie et l'enstrophie sont conservées par le fluide turbulent. Lorsque le nombre de Reynolds est grand, la dissipation visqueuse est négligeable devant l'advection sur une large gamme de nombre d'ondes, et ne devient prépondérante qu'à petite échelle. De plus, on associe fréquemment l'injection d'énergie dans le système à une échelle, ou à un intervalle d'échelles donnés. Enfin, le terme M_V diminue nécéssairement avec le nombre d'onde, car les structures les plus fines sont insensibles aux variations de pente des couvercles. Il est donc raisonnable de supposer qu'il existe une gamme de nombres d'ondes pour lesquelles l'énergie et l'enstrophie sont conservées.

Nous reproduisons ici des arguments phénoménologiques donnés par Rhines (1975), pour illustrer les conséquences de ces lois de conservation. Soit un fluide turbulent, obéissant à la définition donnée ci-dessus, pour lequel on ne cherche pas spécialement à caractériser l'état, ou les mécanismes de la turbulence. Définissons le « centre de gravité » d'un spectre d'énergie par :

$$k_1 = \frac{\int kE(k)dk}{\int E(k)dk}$$

Prenons un état initial dans lequel le spectre d'énergie est piqué autour de k_1. Notre expérience d'un écoulement turbulent nous incite à penser que les interactions non-linéaires auront tendance à élargir, avec le temps, ce pic, pour en faire un spectre large. Nous attendons donc que

$$\frac{\partial}{\partial t}\int (k-k_1)^2E(k)dk > 0$$

Or nous avons

$$\int (k-k_1)^2E(k)dk = \int k^2E(k)dk - 2k_1\int kE(k)dk + k_1^2\int E(k)dk$$
$$= \int k^2E(k)dk - k_1^2\int E(k)dk$$

Ainsi, si nous prenons la dérivée temporelle de l'équation précédente, et supposons la conservation de l'énergie et de l'enstrophie :

$$\frac{\partial k_1^2}{\partial t} = -\frac{\frac{\partial}{\partial t}\int (k-k_1)^2 E(k)dk}{\int E(k)dk} < 0$$

Le centre de gravité du spectre d'énergie doit se déplacer vers les grandes longueurs d'onde.

Que va-t-il arriver à l'enstrophie, dans ces conditions ? L'équation quasi-géostrophique est une équation d'advection de la vorticité. Dans la gamme d'échelle mise en évidence plus haut (pas de viscosité, pas de forçage thermique, pas d'effet du plan β), la vorticité est une quantité matériellement conservée :

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Ainsi, les contours des vortex sont « gelés » dans l'écoulement dans le plan équatorial. Si nous considérons un tel contour dans ce plan, notre intuition de la turbulence nous incite à penser qu'en moyenne, il sera dilaté par l'écoulement turbulent. Cependant, comme ce contour enclot une vorticité constante, il pourra se dilater dans une direction, mais devra se contracter dans l'autre. C'est ainsi que naissent les fils de vorticité, dont nous donnerons une illustration dans le chapitre 3.

Dans un écoulement bi-dimensionnel turbulent conservant ses deux moments (énergie et enstrophie), l'énergie doit donc remonter vers les grandes longueurs d'ondes, et l'enstrophie doit descendre vers les petites longueurs d'onde. Les arguments phénoménologiques que nous avons présenté mettent en évidence les deux phénomènes clés de la turbulence bi-dimensionnelle : la *cascade inverse d'énergie*, et la *cascade directe d'enstrophie*, découvertes théoriquement par Kraichnan (1967) à l'aide d'une théorie autosimilaire semblable à celle que Kolmogorov avait établie en 1941 pour la turbulence tri-dimensionnelle. La théorie autosimilaire de Kraichnan prévoit pour la cascade inverse d'énergie une pente spectrale en $k^{-5/3}$, et pour la cascade directe une pente spectrale en k^{-3}.

Pedlosky (1987) donne un exemple très parlant pour illustrer les deux cascades. Supposons que le spectre d'énergie soit initialement piqué autour un nombre d'onde k_0, et que du fait d'un mécanisme non-linéaire que nous ne cherchons pas à spécifier, toute cette énergie soit transférée sur deux nombres d'ondes k_1 et k_2 tels que $k_1 < k_0 < k_2$. Les contraintes de conservation de l'énergie et de l'enstrophie donnent :

$$E_0 = E_1 + E_2$$
$$k_0^2 E_0 = k_1^2 E_1 + k_2^2 E_2$$

Il s'ensuit

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{(k_2-k_0)}{(k_0-k_1)}\frac{(k_2+k_0)}{(k_0+k_1)}$$
$$\frac{\Omega_1}{\Omega_2} = \frac{k_1^2}{k_2^2}\frac{E_1}{E_2}$$

Pour fixer les idées, nous prenons $k_1 = k_0/2$ et $k_2 = 2k_0$. Il s'ensuit que $E_1/E_2 = 4$ et $\Omega_1/\Omega_2 = 1/4$. Ainsi, quatre fois plus d'énergie a migré vers les grandes longueurs d'onde, tandis que quatre fois plus d'enstrophie a migré vers les petites longueurs d'onde. Les tendances sont conformes à celles qui ont été annoncées ci-dessus.

Étendons l'argument de Pedlosky : Posons $k_2 = \alpha k_1$, α étant variable, et cherchons à savoir quelle est la fonction $E_1(k_1)$ pour $0 < k_1 < k_0$, pour diverses valeurs de α. Il vient :

$$E_1(k_1) = E_0 \frac{\frac{(\alpha^2-1)k_0^2}{(k_0^2-k_1^2)}}{1+\frac{(\alpha^2-1)k_0^2}{(k_0^2-k_1^2)}}$$

Nous avons tracé plusieurs de ces courbes sur la figure 1.9. Lorsque α augmente, c'est à dire lorsqu'on autorise l'enstrophie à migrer vers une échelle de plus en plus petite, alors une fraction de plus en plus importante de l'énergie totale migre vers les grandes échelles. En particulier, l'échelle $k_1 = 0$, qui est, dans notre modèle, l'échelle des mouvements géostrophiques zonaux, récolte l'énergie :

$$E_1(0) = E_0\left(1-\frac{1}{\alpha^2}\right)$$

Ceci souligne une propriété importante des deux cascades : le flux d'énergie vers les grandes échelles est conditionné par la disparité entre l'échelle d'injection de l'énergie, et l'échelle maximale à laquelle l'enstrophie peut aller. Cette échelle maximale est celle à laquelle la viscosité dissipe les fils d'enstrophie. Elle est d'autant plus petite que le nombre de Reynolds est grand, car $1/Re$ mesure le nombre d'onde auquel la viscosité reprend de l'importance sur l'advection.

Nous arrivons donc à une conclusion importante : nous pourrons écrire le mouvement zonal, que nous noterons plus tard $\overline{u_\theta}$, de la manière suivante :

$$\overline{u_\theta} = f(Re, \text{injection}) \tag{1.34}$$

Le mouvement zonal est une fonction du nombre de Reynolds, et de la quantité d'énergie injectée dans le système.

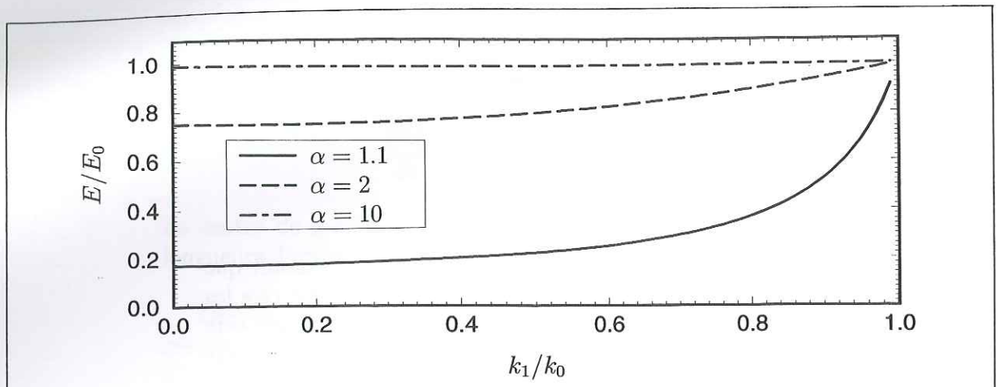


FIG. 1.9 – *Énergie migrant vers les grandes longueurs d'ondes, pour plusieurs valeurs de α, dans le modèle à trois niveaux.*

1.6.3 Sources et puits.

Nous réintroduisons maintenant les sources et les puits d'énergie et d'enstrophie, que nous avons jusqu'ici supposés négligeables sur une gamme de longueurs d'onde donnée. La figure 1.10 est un schéma récapitulatif du spectre d'énergie du fluide. Lorsque le nombre de Rayleigh est supérieur à sa valeur critique, l'instabilité convective excite une bande de longueurs d'ondes, pour lesquelles le taux de croissance est positif. À partir de là, nous avons dessiné les flux attendus pour l'énergie et l'enstrophie.

La viscosité du fluide joue deux rôles : comme nous l'avons vu, à petite échelle, elle dissipe l'enstrophie à l'intérieur du fluide. De plus, à grande échelle, la friction d'Ekman sur la sphère externe dissipe l'énergie du mouvement zonal. La dissipation visqueuse n'intervient donc qu'aux extrémités du spectre.

Le plan β empêche la conservation de l'enstrophie à grande échelle. Nous prédisons donc que la cascade inverse d'énergie va être brisée à certains endroits du spectre, provoquant l'apparition, à ces échelles, de structures cohérentes dans le fluide. Dans le chapitre 3, nous étudierons ces structures cohérentes inertielles. La rupture des cascades rend les théories autosimilaires inapplicables, car ces dernières supposent un flux continu de la plus grands à la plus petite échelle du fluide. L'apparition de structures cohérentes inertielles à échelle donnée pourrait éventuellement être traitée à l'aide de théories de mécanique statistique turbulente telles que celle de Sommeria et al. (1991); Robert et Sommeria (1991).

Nous nous intéresserons beaucoup à l'étude du mouvement zonal, qui, dans le contexte quasigéostrophique, ne peut pas être forcé par la convection directement, mais seulement par l'intermédiaire de la cascade inverse. Nous cher-

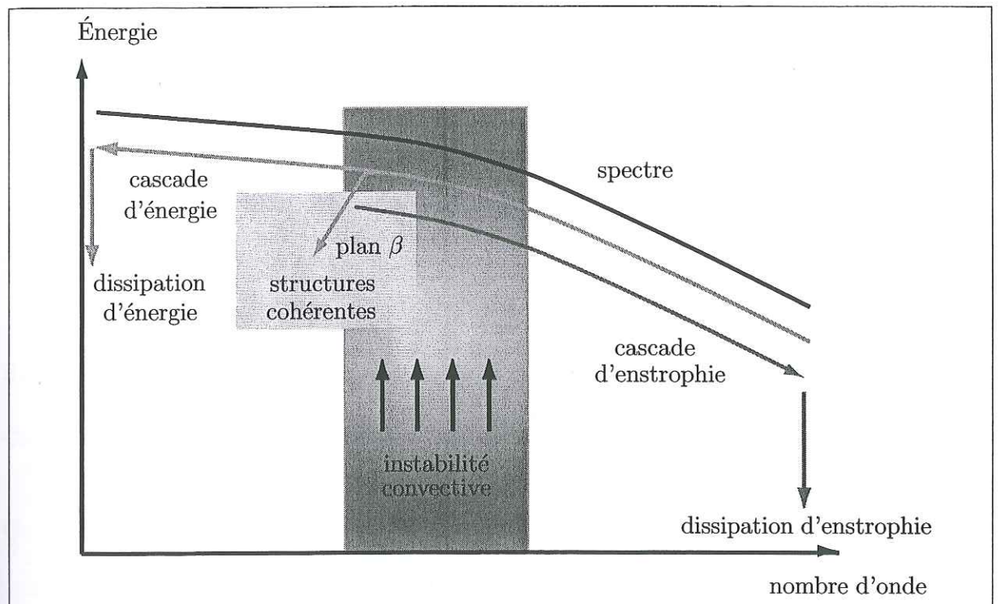


FIG. 1.10 – *Schéma du spectre d'énergie cinétique du fluide turbulent.*

cherons à expliciter la loi (1.34) au cours de nos études expérimentales et numériques.

1.6.4 Turbulence et contrainte de Proudman-Taylor.

Nous avons mis en place un cadre de turbulence bi-dimensionnelle pour l'étude à venir dans les chapitres suivants. Il a été souligné que les cascades d'énergie et d'enstrophie sont intimement liées. Les mécanismes régissant les plus petites échelles de vorticité sont donc d'importance fondamentale pour la dynamique globale du système. Or, la contrainte de Proudman-Taylor s'affaiblit lorsque l'échelle des mouvements considérés devient petite. Par exemple, les mouvements atmosphériques dont l'échelle est inférieure à la dizaine de mètres sont insensibles à la force de Coriolis. Nous nous posons donc légitimement la question suivante : dans le noyau, jusqu'à quelle échelle la contrainte de Proudman-Taylor contraint-elle l'écoulement à rester quasiment bi-dimensionnel ?

Schématiquement, on peut dire que le caractère bi-dimensionnel de l'écoulement sera brisé pour des petites structures issues de la cascade directe d'enstrophie lorsque le nombre de Rossby construit sur l'échelle de longueur de ces structures sera d'ordre 1. Nous avons vu en section 1.2.2 que le nombre de Rossby estimé pour les mouvements à grande échelle du noyau (1000 kilo-

mètres) vaut 10^{-6}. Un nombre de Rossby d'ordre 1 sera donc obtenu pour des structures dont l'échelle de longueur sera de l'ordre du mètre. Pour comparer, puisque le nombre de Reynolds attendu pour un tel écoulement est d'ordre 10^8 (voir le chapitre introductif), nous estimons l'échelle à laquelle les forces visqueuses sont du même ordre que les interactions non-linéaires à 1 centimètre. En résumé, lorsque l'on descend vers les petites échelles, la contrainte de Proudman-Taylor est brisée avant que le domaine de dissipation de l'enstrophie ne soit atteint. Un compromis, permettant d'utiliser la modélisation de turbulence bi-dimensionnelle, doit cependant pouvoir être trouvé. Le principe est de considérer que les effets liés à la rupture, à petite échelle, de la contrainte de Proudman-Taylor peuvent se traduire, dans le cadre théorique que nous avons établi, par une viscosité accrue. Nous ne considérerons plus ce problème par la suite, mais nous pensons qu'il est intéressant de le signaler, afin d'effleurer la difficulté de la modélisation du noyau terrestre comme un fluide turbulent.

Références du chapitre 1.

Busse, F. H., Thermal instabilities in rapidly rotating systems, *J. Fluid Mech.*, *44*, 441–460, 1970.

Cardin, P. et Olson, P., Chaotic thermal convection in a rapidly rotating spherical shell : consequences for flow in the outer core, *Phys. Earth Planet. Int.*, *82*, 235–239, 1994.

Carrigan, C. R. et Busse, F. H., An experimental and theoretical investigation of the onset of convection in rotating spherical shells, *J. Fluid Mech.*, *126*, 287–305, 1983.

Dormy, E., *Modélisation numérique de la dynamo terrestre*, Thèse de Doctorat, I.P.G.P, 1997.

Duck, P. W. et Foster, M. R., Spin-up of homogeneous and stratified fluids., *Annu. Rev. Fluid. Mech.*, *33*, 231–263, 2001.

Garnero, E. J., Revenaugh, J., Q., W., et Lay, T., Ultralow velocity zone at Core-Mantle boundary., in *The Core-Mantle Boundary*, edité par Gurnis et al., pp. 319–334, Washington D.C., 1998.

Glatzmaier, G. A. et Olson, P., Highly supercritical thermal convection in a rotating spherical shell : centrifugal vs. radial gravitiy, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, *70*, 113–136, 1993.

Grote, E., Busse, F. H., et Tilgner, A., Regular and chaotic spherical dynamos, *Phys. Earth Planet. Int.*, *117*, 259–272, 2000.

Gubbins, D. et Roberts, P. H., Magnetohydrodynamics of the Earth's core, in *Geomagnetism*, edité par J. A. Jacobs, vol. 2, 1987.

Jacobs, J. A., *The Earth's core*, Academic Press, 1987.

Jones, C. A., Soward, A. M., et Mussa, A. I., The onset of thermal convection in a rapidly rotating sphere, *J. Fluid Mech.*, *405*, 157–179, 2000.

Kraichnan, R. H., Inertial ranges in two-dimensional turbulence, *Phys. Fluids.*, *10*, 1417–1423, 1967.

Masters, G., Johnson, S., Laske, G., et Bolton, H., A shear velocity model of the mantle., *Phil. Trans. Roy. Astron. Soc.*, *A385*, 1385–1411, 1996.

Noir, J., *Ecoulement d'un fluide dans une cavité en précession : approches numériques et expérimentales*, Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble, 2000.

Pedlosky, J., *Geophysical fluid dynamics*, Springer, New-York, 1987.

Plaut, E. et Busse, F. H., Low prandtl number convection in a rotating cylindrical annulus., *Submitted to J. Fluid. Mech.*, 2001.

Rhines, P. B., Waves and turbulence on a beta-plane, *J. Fluid Mech.*, *69*, 417–443, 1975.

Robert, R. et Sommeria, J., Statistical equilibrium states for 2-dimensional flows., *J. Fluid Mech.*, *229*, 291–310, 1991.

Roberts, P. H., On the thermal instability of a self gravitating fluid sphere containing heat sources, *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A*, *263*, 93–117, 1968.

Sommeria, J., Nore, C., Dumont, T., et Robert, R., Statistical-theory of the great red spot of Jupiter., *CR. Acad. Sci. II*, *311*, 999–1005, 1991.

Soward, A. M., On the finite amplitude thermal instability of a rapidly rotating fluid sphere, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, *9*, 19–74, 1977.

Stacey, F. D., *Physics of the Earth*, Brookfield Press, 1992.

Tait, S. et Jaupart, C., Compositional convection in a reactive crystalline mush and melt differentiation., *J. Geophys. Res.*, *97*, 6735–6756, 1992.

Tritton, D. J., *Physical fluid dynamics*, Oxford Science, 1988.

Yano, J. I., Asymptotic theory of thermal convection in rapidly rotating systems, *J. Fluid Mech.*, *243*, 103–131, 1992.

Zhang, K., Spiralling columnar convection in rapidly rotating spherical shells, *J. Fluid Mech.*, *236*, 535–556, 1992.

Chapitre 2

Modèle expérimental de la convection dans le noyau terrestre.

Ce chapitre comprend un article accepté avec révisions par le journal *Physics of the Earth and Planetary Interiors.*, présenté ici dans sa version révisée. Dans une seconde partie, nous présentons des expériences complémentaires de corrélation de profils Doppler ultrasonores, en préliminaire au travail numérique qui sera mené dans le chapitre 3. La figure 2.1 présente le dispositif expérimental.

2.1 A systematic experimental study of rapidly rotating spherical convection in water and liquid gallium.

Abstract: Results of finite-amplitude convection experiments in a rotating spherical shell are presented. Water (Prandtl number $P = 7$) and liquid gallium ($P = 0.027$) have been used as working fluids. In both liquids, convective velocities could be measured in the equatorial plane using an ultrasonic Doppler velocimetry technique. The parameter space has been systematically explored, for values of the Ekman and Rayleigh numbers $E > 7\ 10^{-7}$ and $Ra < 5\ 10^{9}$. Both measured convective velocity and zonal circulation are much higher in liquid gallium than in water. A scaling analysis is formulated, which shows that higher convective velocities are an effect of the low Prandtl number in liquid gallium, and that higher zonal flows can be explained through a Reynolds stress mechanism. The Reynolds numbers in gallium ($Re = 250 - 2000$) are higher indeed than in water ($Re = 25 - 250$). An inertial regime sets up at high Re, in which kinetic energy does not dissipate at the scale of convective eddies and is transferred up to the scale of the container, where it is dissipated through

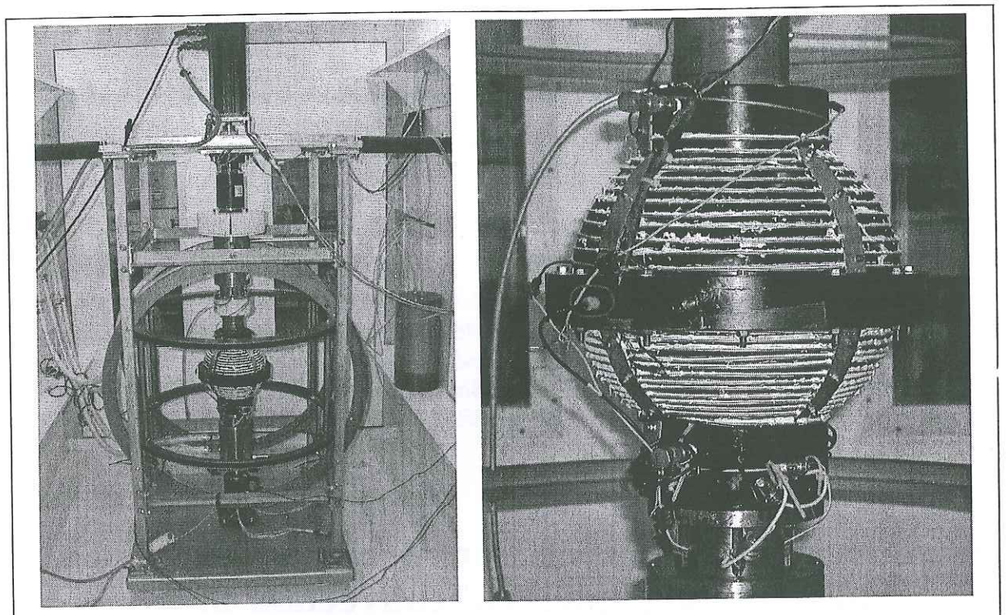


FIG. 2.1 – *Gauche : dispositif expérimental de convection dans une sphère de gallium liquide en rotation rapide. Voir le détail des éléments sur le schéma de la figure 2.2. Les grandes bobines de Helmholtz qui entourent la sphère serviront à annuler le champ magnétique terrestre lorsque ce dispositif sera utilisé en présence d'un champ prescrit (voir le chapitre de conclusion). Droite : vue rapprochée de la sphère de cuivre. On pourra remarquer la sonde Doppler (cerclée en rouge) en position de tir radial. Plus à droite sur l'équateur, un emplacement pour une seconde sonde. On remarquera aussi le bobinage de fil chauffant sur la surface externe de la sphère.*

Ekman friction of zonal flow. This upwards energy transfer can be seen as an effect of quasigeostrophic turbulence. Applying the scaling relations to an hypothetic non-magnetic flow in the Earth's core yields Reynolds numbers of the order of 10^8, in fair agreement with values required for dynamo action, convective velocities of order 10^{-3} m/s, zonal flow of similar amplitude, and eddy scales as low as 10 km.

2.1.1 Introduction

It is widely believed that the self-sustained dynamo of the Earth draws its energy from thermal (and solutal) convection in its liquid metallic outer core. The dynamo mechanism requires that the advection of the magnetic field by the convective flow be much larger than its diffusion. This means that the magnetic Reynolds number $Re_m = UD/\lambda$ (where U is a typical velocity, D the thickness of the liquid core, and λ the magnetic diffusivity, see table 2.1) has to be larger than about 100. In liquid metals, the ratio of magnetic diffusivity over kinematic viscosity ν is of the order of 10^6, so that the usual Reynolds number $Re = UD/\nu$ is expected to be of the order of 10^8. The convective flow responsible for the dynamo is therefore probably in a very turbulent state. However, it is also very much constrained by the influence of rotation, since the Coriolis force is one of the dominant forces in the system. This has given birth to several fundamental investigations of the properties of convection in a rapidly rotating sphere.

This type of convection is characterized by a small Ekman number $E = \nu/\Omega D^2$, where Ω is the rate of rotation of the Earth, see table 2.2. The Rayleigh number Ra measures the vigor of convection. The dominence of rotation yields two major effects: convective cells take the shape of vortex columns aligned with the axis of rotation as a consequence of the Taylor-Proudman constraint, and the onset of the convective instability occurs for a larger Rayleigh number than in the non-rotating case, demonstrating the stabilizing effect of rotation in this configuration. These results were first established from the theoretical analysis of the onset of convection in a rapidly rotating spherical fluid shell (Roberts, 1968; Busse, 1970). In the asymptotic limit $E \to 0$, these studies also showed that the width of the columns scales as $E^{1/3}$, with dissipation occuring in the bulk of the liquid, and the critical Rayleigh number Ra_c increases as $E^{-4/3}$. The analysis of Busse for an annulus with tilted upper and lower boundaries highlighted the role of the tilt in controling both the above scalings and the azimuthal structure of the cells: as liquid columns migrate from the inner boundary of the model towards the outer boundary, they have to contract in the direction of the rotation axis and elongate in the perpendicular directions. Contracting columns acquire a negative vorticity, while columns moving inwards acquire positive vorticity. This is the basic mechanism at the origin of Rossby waves, which propagate in the prograde azimuthal direction. At the

	Unit	Definition	water at 20°C	liq. gallium at 30°C	Earth's Core
ρ	kg/m^3	Mean density	1000	$^a6095$	$\approx 10^4$
ν	m^2/s	Kinematic viscosity	10^{-6}	$^a2.95\ 10^{-7}$	$^c \approx 7\ 10^{-6}$
α	K^{-1}	Thermal expansivity	$2\ 10^{-4}$	$^b1.26\ 10^{-4}$	$^c \approx 10^{-5}$
k	J/(s.m.K)	Thermal conductivity	0.59	$^b30$	$^c \approx 30$
C_p	J/(kg.K)	Specific heat	4180	$^a381.5$	$^c \approx 800$
κ	m^2/s	Thermal diffusivity	$1.4\ 10^{-7}$	$1.3\ 10^{-5}$	$\approx 4\ 10^{-6}$
σ	$1/(\Omega m)$	Electrical conductivity	–	$^a3.87\ 10^6$	$^c \approx 10^6$
λ	m^2/s	Magnetic diffusivity	–	0.21	≈ 1
r_e	m	Outer Radius	0.11	0.11	$3.48\ 10^6$
r_i	m	Inner Radius	0.04	0.04	$1.22\ 10^6$
D	m	Shell gap	0.07	0.07	$2.26\ 10^6$
Ω	rad/s	Rotation rate	20 – 80	40 – 80	$7.29\ 10^{-5}$
g_D	m/s^2	Gravity at radius D	30 – 480	90 – 480	7
ΔT	K	Temperature difference	0 – 25	0 – 30	?

Table 2.1: Physical parameters and geometric constants of the experiment. [a]: Sabot and Lauvray (1995); [b]: Okada and Ozoe (1992); [c]: estimated from properties of liquid iron at melting point given in Stacey (1992).

Number	Name	Exp. water	Exp. gallium	Earth's core
$Ra = \frac{\alpha \Delta T g_D D^3}{\kappa \nu}$	Rayleigh number	$3Ra_c - 80Ra_c$	$Ra_c - 10Ra_c$	?
$E = \frac{\nu}{\Omega D^2}$	Ekman number	$10^{-5} - 10^{-6}$	$10^{-6} - 10^{-7}$	$10^{-15} - 10^{-13}$
$P = \frac{\nu}{\kappa}$	Prandtl number	7	0.022 – 0.027	0.1 – 1

Table 2.2: Dimensionless parameters for the study of thermal convection. Ra_c is the critical Rayleigh number.

onset of convection, the convective columns are thus inclined in the prograde direction, by an angle that depends on the curvature of the boundaries.

These theoretical findings have been largely confirmed by the pionnering experimental studies of Busse and co-workers (Busse and Carrigan, 1976a,b; Carrigan and Busse, 1983; Chamberlain and Carrigan, 1986), and also by the numerical analysis of the onset of convection in spherical shells (Zhang, 1992). However, it became clear that discrepancies existed between the numerical results and the predictions of the local theory of Busse, especially when comparing the critical Rayleigh number for liquids with a small Prandtl number (Zhang, 1992). This has to do with the fact that the preferred lateral dimension of the columns (of order $E^{1/3}$) is small with respect to the shell thickness. It is only recently, that Jones et al. (2000) could solve the problem and propose a fully consistent asymptotic approach.

The understanding of marginal stability analyses allows to explore the field of finite amplitude convection, which has been investigated both in numerical simulations (Sun et al., 1993; Cardin and Olson, 1994; Ardes et al., 1997; Tilgner and Busse, 1997; Grote et al., 2000) and in laboratory experiments (Cardin and Olson, 1992; Cordero, 1993; Sumita and Olson, 2000). Recent numerical models describe a variety of boundary conditions, and achieve Prandtl numbers of order 1, fairly low Ekman numbers ($E = 10^{-5}$), and Rayleigh numbers up to 50 times critical. Experiments are usually done with water ($P = 7$), for Ekman numbers down to 10^{-6} and Rayleigh numbers up to 100 times critical. In all cases, the main characteristics presented above are retained: columnar vortices aligned with the axis of rotation, of small lateral extent, form near the inner sphere and travel around it. However, nonlinear convection also exhibits a number of distinct features that were revealed by these studies: Rossby waves turn into quasi-periodic plumes originating at the inner boundary, still tilted in the prograde direction. The pattern still drifts, but this is not the consequence of wave propagation anymore, but of a real zonal circulation that can be strong when compared to convective velocity. A transition to chaotic (in the sense of unpredictable, highly time dependent, statistically stationary) regimes has been found for Ra/Ra_c as low as 10 when using fluids with a Prandtl number around 1.

In an effort to mimic the effect of very small Ekman numbers, Grote et al. (2000) examined the case of a stress-free outer sphere. Very large zonal velocities were observed, which yield to intermittency as the zonal flow tends to wipe out the convective structures from which it draws its strength. It would be interesting to see if this behavior is really characteristic of low Ekman number convection even when dissipation occurs in the boundary layers rather than in the interior of the fluid. This appears to be a difficult challenge for numerical modeling, since it is generally accepted that the computer power needed to resolve nonlinear effects such as turbulence grows with the cube of the highest frequency to resolve, but in the rotating case it is even worse, because of the existence of active thin boundary layers (thickness $O(E^{1/2})$). Approximations have been worked out to extend the parameter range, among which the use of hyperdiffusivities (Glatzmaier and Roberts, 1995), and a quasigeostrophic model to make the problem two-dimensional (Cardin and Olson, 1994). This latter approach is particularly promising, but, as we shall see later, care must be taken to model the friction in the boundary layer located near the outer boundary of the model in an appropriate way.

The lowest Ekman numbers have been reached in laboratory experiments. For fully developped convection, vortices are found to occupy a large part of the spherical shell. Convective plumes originate from both the inner and the outer boundaries. Sumita and Olson (2000) observed a sizeable retrograde zonal velocity, and showed, in the continuation of the work by Cardin and Olson (1994), that it could be explained with a simple model of Reynolds stresses, implying that inertial effects were present.

In any case, the extrapolation of the results available so far to core conditions requires sound scaling relationships. Only a few studies have addressed this question (Cardin and Olson, 1994; Zhang and Gubbins, 2000; Jones, 2000). To be reliable, these relationships have to be derived in the proper regime. However, it appears that the Reynolds number in these studies is never larger than about 100, meaning that viscosity remains an important ingredient in the interior of the shell, in contrast to what is expected in the core. This problem is the main motivation for our study. We have performed laboratory convection experiments in a rapidly rotating sphere. In contrast to previous studies, which focused on the characterization of the convective structures using optical visualization methods and local temperature records, we obtain quantitative velocity measurements using a Doppler ultrasonic technique. Both radial and zonal velocity profiles have been measured, and we have determined how the retrieved characteristic velocities scale with the controlling parameters E and Ra. However, the main originality of our study is the use of two different working liquids: water ($P = 7$) and gallium ($P = 0.027$). Larger inertial effects are expected for gallium because of its low Prandtl number. Indeed, the measured radial velocities u_r indicate that the maximum Reynolds number attained is of the order of 250 for water and 2000 for gallium. A striking observation is that zonal velocities are much larger in gallium than in water. Indeed, the ratio u_θ/u_r, where u_θ is the zonal velocity, can exceed 2 in the gallium experiments whereas it remains lower than 0.7 in the water experiments. These two observations suggest that an inertial regime has been reached in gallium. We derive scaling relationships for this regime and show that they fit our measurements. In particular, we show that the large zonal velocities measured for gallium result from a balance between Reynolds stresses in the interior of the shell and viscous stresses in the Ekman layers of the outer boundary.

We believe that the scaling relationships we obtain permit a better extrapolation to core conditions. Of course, the presence of a magnetic field in the core is likely to affect the force balance to a considerable extent (Chandrasekhar, 1961; Brito et al., 1995; Aurnou and Olson, 2001), but we think that our results without a magnetic field are an important step towards a better understanding of the geodynamo.

In the next section we describe the experimental set-up. In section 3 we determine numerically the critical values and discuss the bidimensionality of the flow. In section 4 we present the velocity profiles for water and gallium, discuss their properties and show how we extract a set of scalar data to be used in the scaling analysis. The evolution of these data as a function of the control parmeters E, Ra/Ra_c and P is exposed in section 5. In section 6 we propose a scaling model, which is found to provide a good fit to the data. We discuss the implications of our results in section 7 and propose an extrapolation to the core.

2.1.2 Experimental set-up

The set-up (figure 2.2, and table 2.1) is a traditional centrifugal gravity experimental device, as pionneered by Busse and Carrigan (1976b): a sphere of radius 110 mm, filled with either water or gallium, can be spun up to speeds of order 1000 rpm by a 1.4 kW brushless motor, with a stability better than 0.1%. The sphere is transversed by a cylinder of radius 40 mm, coaxial with the rotation axis. The aspect ratio between boundaries is therefore 0.36.

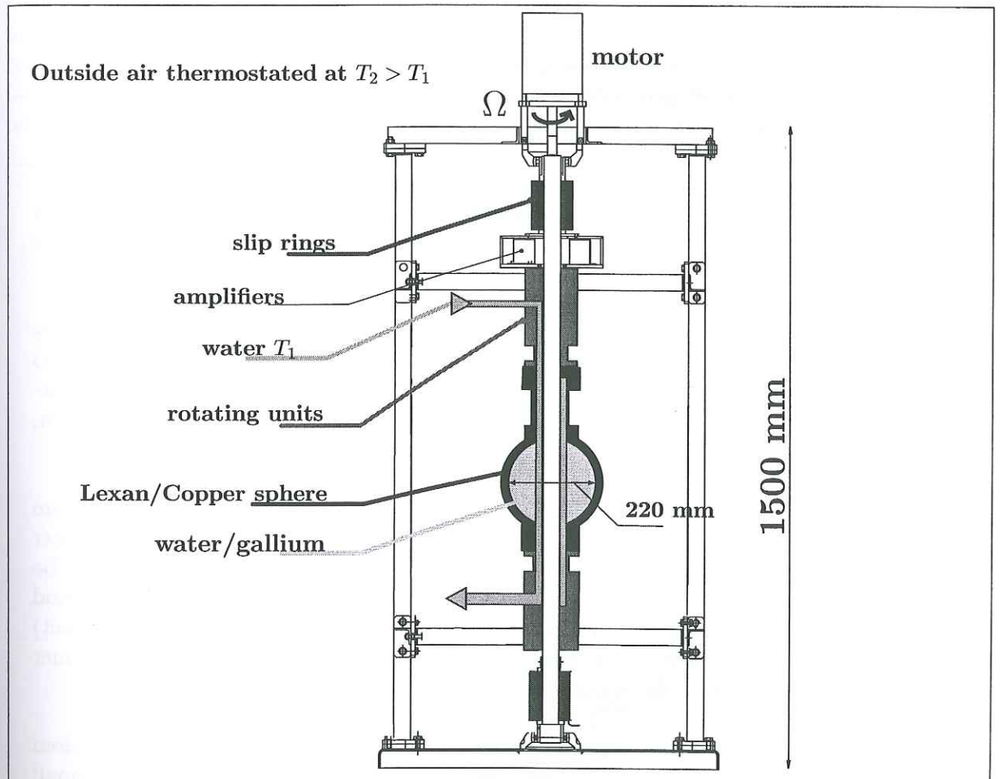


Figure 2.2: Sketch of the convection device.

The inner cylinder is made of copper, with the outer 3 mm replaced by polyethylene everywhere except for the 110 mm-high central part, in order to simulate a "central" heat flux. Two distinct spheres have been built: a lexan sphere for use with water, and a copper sphere for use with gallium. This choice has been guided by several requirements: one is to perform optical visualisations in water (see figure 2.4), one other is to use an excellent heat conductor with gallium, and the third is to obtain a good transmission of ultrasonic waves, taking care of the acoustic impedance adaptation.

The inner temperature (T_1) is fixed by circulating cold water in six channels within the inner cylinder. The cooling power of the device is 1 kW. Two rotary joint units allow the cold water to flow from the Earth-bound frame into the rotating frame. The whole device is installed in a thermostatic chamber, whose function is to set the hot external temperature (T_2). With gallium we had to complete the set-up with a 4 kW electric heater wired around the copper sphere. The heat transfer from the surface of the sphere is indeed not large enough to absorb the large quantity of heat conducted or advected in the liquid metal. The thermostatic chamber then helps maintaining gallium above its solidification point (29.8°C).

The imposed temperature gradient is opposite to that of the Earth's core because the centrifugal gravity is opposite to the radial gravity of a self-gravitating body. Doing so, one obtains destabilizing buoyancy forces. The difference between the cylindrical symmetry of gravity in the experiment versus spherical symmetry for the Earth has little importance, since in the asymptotic quasi-geostrophic state, only the component of gravity perpendicular to the rotation axis plays a dynamic role, the other component being balanced by a pressure gradient (Busse and Carrigan, 1976b; Glatzmaier and Olson, 1993).

Electric signals are passed through slip rings. A set of 10 analogic amplifiers is mounted in the rotating frame, to allow weak signals from thermocouples to be amplified before passing through the slip rings. Filling and emptying operations of the fluid shell are done under argon atmosphere when using gallium, to prevent oxydation.

The device has been instrumented for thermal measurements: two platinum thermo-resistive probes record the temperatures of the inner cylinder and outer sphere. Typical temperature variations at these boundaries are found to be less than 0.2 K during a run. Thermocouples (Iron/Constantan in water, and Platinum/Constantan in gallium, the liquid metal providing electrical contact) record temperature fluctuations (less than 2 K) at the surface of the inner cylinder, 25 mm above and below the equator.

The originality of our experiment is the implementation of ultrasonic pulsed Doppler velocimetry. This technique relies on echoes backscattered by small inhomogeneities of the fluid. From the time delay and Doppler shift of echoes can be retrieved the reflector's position and component of velocity along the ultrasonic beam. One thus obtains profiles of flow velocity (Takeda, 1986). Brito et al. (2001) validated the technique for use with water and gallium, measuring zonal velocities in a prescribed vortex flow. We use the DOP 1000 velocimeter of Signal Processing with 4 MHz cylindrical ultrasonic transducers (TR30405) of length 8 mm and diameter 8 mm. The main challenge is to measure convective velocities (of a few millimeters per second) in a sphere that is rotating at several hundreds of revolutions per minute. This is achieved by mounting the transducers in the rotating frame: they are embedded into the outer sphere in

one-end machined holes, at equatorial position, and the electric signal is passed through the slip-rings. This set-up gave excellent results, the main limitation being the contamination of the signals with motor-related electric noise as they pass through the slip-rings.

The top view of figure 2.3 displays the possible locations of the transducers. The radial beam allows us to retrieve the radial velocity field as a function of radius and time. The lateral beam enters the sphere at a normal angle of 40° and is refracted to normal angles of 24.5° and 21.5° respectively by the lexan/water and copper/gallium interface. The closest approach of the beam to the inner cylinder is 5 mm in water and 1 mm in gallium. This profile contains a combination of radial and zonal velocities, from which the latter can be extracted (see appendix for exact values of angles and procedure for the retrieval of mean zonal flow).

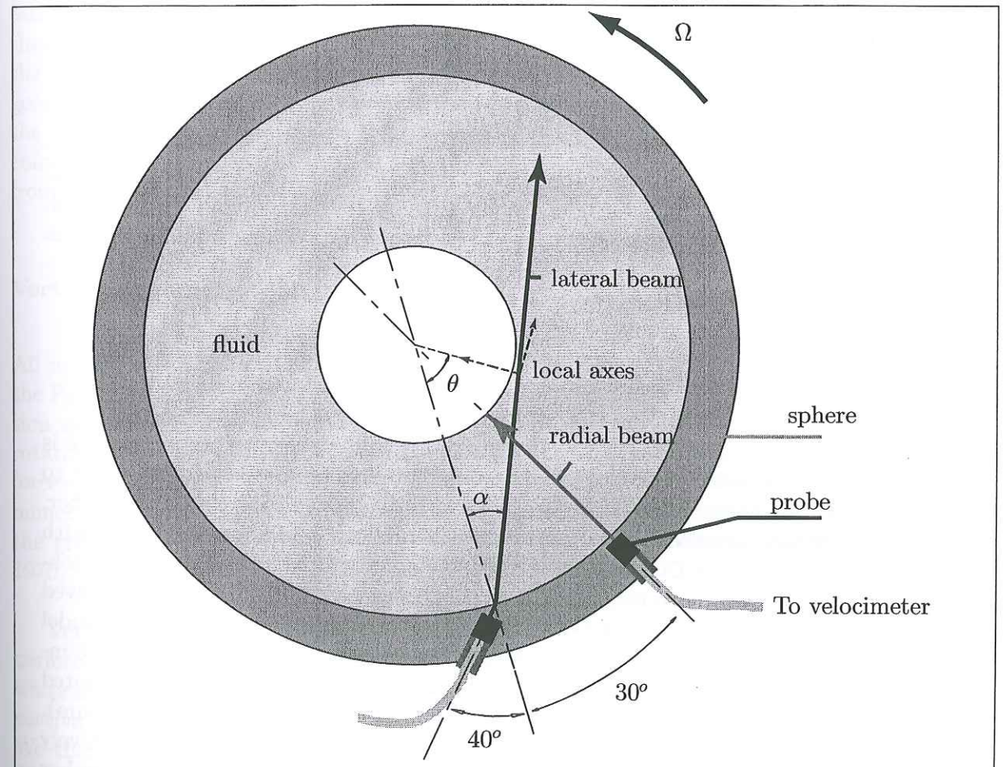


Figure 2.3: Top view of the equatorial plane, with locations of transducers.

Another difficulty is the seeding of the liquids in order to obtain sufficient echoes. Neutral buoyancy is crucial, because of the large centrifugal forces present in the rotating frame. In water, the best results were obtained with

pine pollen particles of typical dry size 20 μm. These particles fill with water and become neutrally buoyant (B. Andreotti, personal communication, 2000). In gallium we used Zirconium Boride with density 6.17, close to that of gallium, and a size of order 50 μm. It is also likely that gallium oxide particles act as inhomogeneities. In the gallium experiments, boundaries such as the copper part of the inner cylinder and the copper sphere were coated with a thin cataphoretic film, in order to ensure wet contact with gallium, and easy removal of oxides that scatter the ultrasonic beam (Brito et al., 2001).

Note that the use of ultrasonic Doppler velocimetry was dictated by the need to measure velocities in opaque liquid gallium. However, even in transparent water where visualization is possible, the quantitative information it provides is valuable for the determination of scaling laws as presented in this article. By using a set of several neighbouring multiplexed transducers, it is also possible to investigate the local velocity structure of the convective flow.

2.1.3 Basic properties of the flow.

In this section, we discuss properties of the flow which are needed for the forthcoming analysis. This includes a determination of the threshold of convection, a check of the two-dimensional character of the flow, with an assessment of the role of thermal wind.

Onset of convection

Our experimental set-up was built to study fully developed convection. It is not well suited for the investigation of the onset of convection. In order to scale our measurements, we need to determine the critical Rayleigh number. Therefore numerical marginal stability simulations have been performed, with a 3D code from Dormy et al. (1998), validated through the Dynamo Benchmark initiative currently in progress (Christensen et al., 2001). We have solved the eigenvalue problem by iteration of the linear part of the code. The model contains a spherical inner core with 0.35 aspect ratio, no-slip and fixed temperature boundary conditions, radial gravity. Solutions have been computed for two values of the Prandtl number : 7 (water) and 0.027 (liquid gallium). Ekman numbers as low as 4.9 10^{-6} and 4.9 10^{-7} have been reached respectively for $P = 7$ and $P = 0.027$. In order to reach the experimental Ekman number values, some extrapolation has been done for $P = 7$, using the asymptotic laws.

Table 2.3 summarizes the numerical results. Ω is the dimensional rotation rate, ΔT the dimensional temperature difference, m_c is the critical azimuthal wavenumber, ω_c is the non-dimensional critical pulsation of the Rossby wave

P	E	Ω (rpm)	Ra_c	ΔT (K)	ω_c	τ_c (s)	m_c
7	9.7 10^{-6}	200	9.6 10^6	0.65	1.3 10^2	246	17
7	4.8 10^{-6}	400	2.3 10^7	0.39	2.1 10^2	145	22
7*	3.3 10^{-6}	600	4 10^7	0.30	4.3 10^2	114.2	25
7*	2.4 10^{-6}	800	5.8 10^7	0.25	5.2 10^2	92.3	28
0.027	1.5 10^{-6}	400	1.2 10^7	8.5	1.2 10^4	8.6	15
0.027	9.7 10^{-7}	600	1.9 10^7	6.0	1.7 10^4	6.3	17
0.027	7.3 10^{-7}	800	2.7 10^7	4.8	2.0 10^4	5.2	19

Table 2.3: Critical values from numerical simulations. Stars denote extrapolated data.

(the time scale is D^2/ν), and τ_c its dimensional period. Note that all the numerical experiments predict that flow is two-dimensional indeed in these low-Ekman number situations. At $E = 9.7\ 10^{-6}$ in water we have experimentally bracketed the critical temperature difference using temperature signals on thermocouple probes: 0.8 K $< \Delta T_c <$ 1.2 K, which is somewhat higher than the numerical value. The discrepancy probably has to do with the difference in geometry of the inner boundary, and to the presence of thermal wind, unless the sensitivity of the method is not good enough to access the threshold of convection. Critical values used in this manuscript are always those derived from the numerical simulations.

Vertical structure of the flow

All numerical simulations of the convection onset have shown that because of the Proudman-Taylor constraint, which governs the low-Ekman number situation we consider, the convective vortices are columns aligned with the axis of rotation. However, z-invariance may be destroyed by the increasing buoyancy forces at higher Ra/Ra_c, and by thermal wind, which is not present in the numerical simulations, but plays a role in the experiment, due to the fact that the gravity equipotentials are not parallel to the isothermal surfaces (Busse, 1970).

Vertical invariance of the flow has been checked optically in all experiments performed in water, as illustrated by the photograph of figure 2.4. Vertical white lines are due to the alignment of Kalliroscope flakes oriented by the convective columns. In gallium, this type of direct visualization is not possible. We therefore rely on the temperature measurements displayed in figure 2.4. The 200 seconds-long records are from two thermocouples located at the surface of the inner cylinder, 25 mm above and below the equator in the vertical z direction. The two signals are strongly correlated over a very long timescale, indicating that temperature is advected by a velocity field with low vertical shear. Temperature measurements in water yield the same behaviour. Therefore, we are confident that all the velocity profiles measured in the equatorial

plane by ultrasonic Doppler velocimetry are representative of the full velocity field, apart from boundary layers.

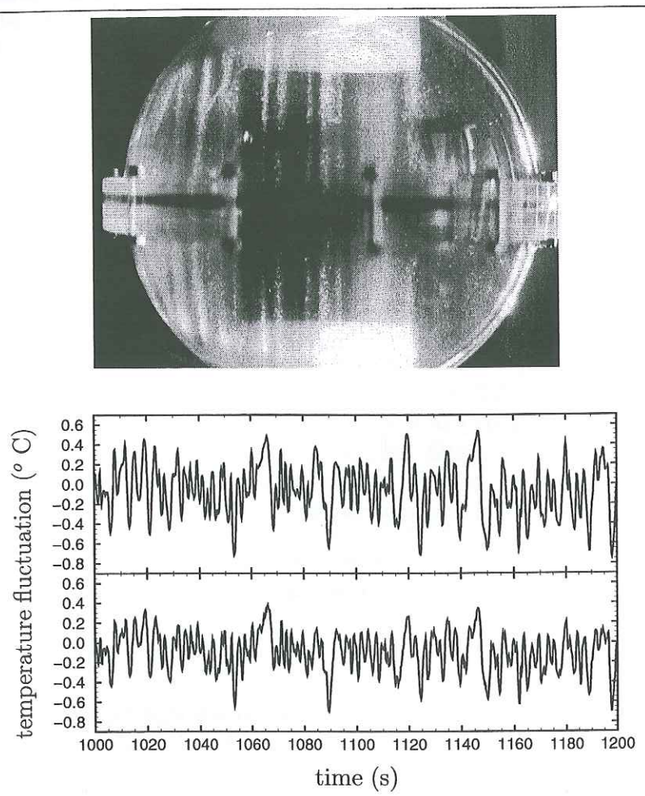


Figure 2.4: Up: Shear structures visualized in water using Kalliroscope flakes, in a plane containing the rotation axis, close to the inner cylinder. Ekman number is $E = 9.7\ 10^{-6}$, Rayleigh number is 4.2 times critical. Down: vertical correlations between two thermocouple probes located 5 cm away on the inner cylinder, done in gallium. Ekman number is $E = 7.3\ 10^{-7}$, Rayleigh number is 5.0 times critical.

Next we turn to thermal wind. The zonal velocity induced by thermal wind $\mathbf{u}_{\text{th}}$ is governed by the following equation (Busse, 1970):

$$2(\mathbf{\Omega} \cdot \nabla)\mathbf{u}_{\text{th}} = \alpha \nabla T \times \mathbf{g}_{\text{cen}} \tag{2.1}$$

where $\mathbf{g}_{\text{cen}} = \Omega^2 r$ is the centrifugal gravity field. Integrating along a vertical line at constant r yields, for the equatorial value of thermal wind:

$$\mathbf{u}_{\text{th}} = -\frac{\alpha \Delta T_r \Omega r}{2} \mathbf{e}_\theta$$

where $\mathbf{e}_\theta$ is the zonal unit vector and ΔT_r is the temperature difference between the spherical external boundary and the equator at radius r, apart from viscous boundary layers. Thermal wind is retrograde if the outer sphere is hotter than the inner cylinder, i.e. in the case of an adverse (destabilizing, convective) temperature gradient. An estimate in water using $\alpha = 2\ 10^{-4}\ \text{K}^{-1}$ (table 2.2), $\Delta T_r = 15$ K, $\Omega = 400$ rpm, and $r = 5$ cm yields a value of $u_{th} = 3.2$ mm/s. With a 15 K adverse temperature difference imposed between the boundaries, we have measured zonal velocities using the lateral Doppler probe and found a retrograde flow of only 1 mm/s at $r = 5$ cm. Moreover, thermal wind should induce vertical shear of convection columns, and this has not been observed.

Another estimate in gallium using $\alpha = 1.26\ 10^{-4}\ \text{K}^{-1}$, $\Delta T_r = 15$ K, $\Omega = 400$ rpm, and $r = 5$ cm yields a value of $u_{th} = 2$ mm/s. Thermal wind should be smaller indeed in gallium, due to a smaller thermal expansion coefficient. With an adverse temperature gradient of 15 K, we have measured a retrograde flow of 2.7 mm/s at $r = 5$ cm, which is, in contrast, higher than the water value. To estimate the thermal wind part of this flow, we have performed the same experiment, with a reverse (stable) temperature gradient of 15 K, and therefore no convection. This yields a prograde flow of only 1 mm/s.

In our set-up, thermal wind tends to be smaller than theoretical estimates using the full temperature difference. We therefore conclude that isothermal surfaces are more cylindrical than expected. This can be explained by the presence of the inner cylinder. Note that convection, when present, also tends to give a cylindrical shape to isothermal surfaces. Moreover, in the gallium case, thermal wind in the reverse situation is only one third of zonal circulation in the adverse situation. From this we conclude that thermal wind is not the predominant driving mechanism for the zonal circulations we observe.

2.1.4 Velocity profiles

Results reported in this section summarize the velocity measurements obtained in sequence experiments made at various Ekman and Rayleigh numbers, in both water and gallium. Ekman numbers we have reached in water are $E = 9.7\ 10^{-6}$ (motor speed of 200 rpm) down to $E = 2.4\ 10^{-6}$ (800 rpm), and in liquid gallium they are $E = 1.5\ 10^{-6}$ (motor speed of 400 rpm) down to $E = 7.3\ 10^{-7}$ (800 rpm).

Experimental radial velocity functions have been mapped in a time-depth color-contoured representation (see figure 2.5.). X-axis is time in seconds, Y-axis is distance in millimeters (the sphere is at $Y = 0$ mm and the inner cylinder at $Y = 70$ mm). Velocity is expressed in millimeters per second. Color red stands for a velocity flowing away from the probe, i.e towards the inner cylinder. The transducer sees a radial velocity function changing with

time, assumed to be associated with vortices in the equatorial plane, drifting across the beamline under the influence of either wave propagation or zonal flow as shown in the sketch in figure 2.6. For a stationary or periodic flow, the time axis could therefore be seen as a (deformed) lateral angle axis. Ultrasonic Doppler velocimetry is not perfect near boundaries. Boundary layers are not resolved, and multiple echoes due to an acoustic impedance contrast between sphere and fluid saturate part of the signal, which is lost near the sphere. This is especially true with the gallium experiment in figure 2.5.4 where the first 25 mm of the profile is lost.

Figure 2.5.1 shows a pattern obtained for $Ra = 4.2\ Ra_c$ in water. The experiment corresponds to the photography of figure 2.4. The velocity amplitude is very small (< 1 mm/s) and it is difficult to extract the velocity signal from noise for lower Ra number. Convection tends to be stronger in the vicinity of the inner cylinder. At any depth, we can appreciate a time oscillation between positive and negative velocity associated with the presence of thermal vortices. Its typical period (between 150 and 200 s) is close to 246 s, the period predicted for the Rossby wave at the onset of convection (see table 2.3). Moreover, we observe tilted bands approaching the inner cylinder when time goes on. This tilt could be explained by the prograde propagation of vortices spiralled in the prograde direction. For experiment 2.5.1, in contrast, a low retrograde mean zonal flow of 0.1 mm/s has been measured using the lateral Doppler probe. These observations suggest that the Doppler diagram 2.5.1. should be interpreted mostly in terms of the propagation of a Rossby wave. The departure from criticality induces loss of periodicity in the wave (vacillating, superposition).

In figure 2.5.2, Ra is higher up to 22.2 times critical while the Ekman number has been kept constant. The pattern exhibits several significant changes. Periodicity is now completely lost, characterictic time scales are shorter (< 50 s), tilts are different, typical velocities are larger, the distribution of radial sizes has broadened. We have clearly left the pseudo-periodic state of thermal Rossby waves to jump into a fully developed state of convection. In this case, a stronger retrograde zonal flow of 0.5 mm/s has been measured, using the lateral Doppler probe. The importance of zonal advection has therefore grown from case 2.5.1 to case 2.5.2. On figure 2.5.3, the Ekman number is lowered while Ra/Ra_c remains comparable. The state of convection remains the same, but velocities, sizes and durations have changed. The evolution of these characteristics with controlling parameters is discussed in next section.

Pattern 2.5.4 presents an experiment performed in liquid gallium, Ra/Ra_c is 3.2, a value which is similar to the conditions of pattern 2.5.1, and Ekman number is $1.5\ 10^{-6}$. Vortices attached to the inner cylinder have grown in radial size. Bands are less tilted, and this suggests that the convective structures are more radial. In that case, the zonal flow (5 mm/s) is very large and we cannot neglect its influence on the time analysis. The lateral size of the columns is

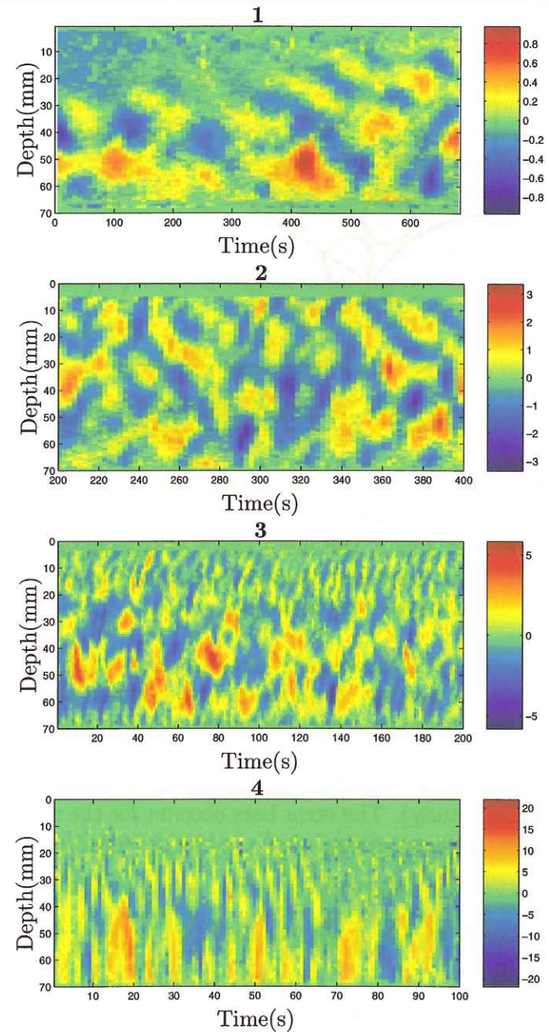


Figure 2.5: Time-depth radial velocity patterns. Velocities are expressed in millimeters per second. **1**: performed in water, with $Ra/Ra_c = 4.2, E = 9.7\ 10^{-6}$; **2**: performed in water, with $Ra/Ra_c = 22.2, E = 9.7\ 10^{-6}$; **3**: performed in water, with $Ra/Ra_c = 26.6, E = 4.8\ 10^{-6}$; **4**: performed in liquid gallium, with $Ra/Ra_c = 3.2, E = 1.5\ 10^{-6}$.

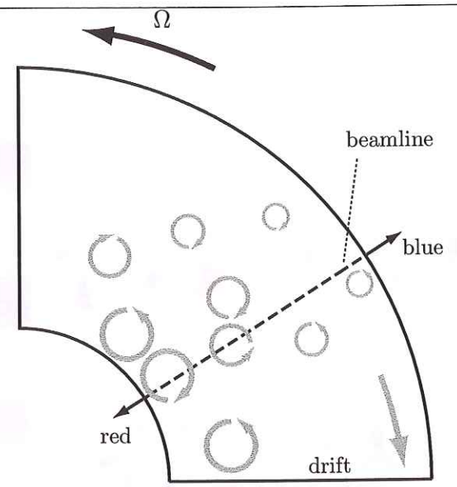


Figure 2.6: Explanation sketch for time-depth velocity maps.

presumably larger than in the water case. Anyhow, the gallium experiments never show quasiperiodic flow like in water (pattern 2.5.1) even for the lowest ratio Ra/Ra_c. We infer this is the main effect of the change when lowering the Prandtl number; the large amplitude of the velocities lead the system to turbulence just above the onset of convection.

The local organization of developed convective flow seems rather intricate on diagrams 2.5.1–2.5.4, and we therefore first concentrate on the study of its time averaged mean properties. For the radial velocity field of experiments 2.5.3 and 2.5.4, we plot (upper plots of figure 2.7) the time-averaged standard deviation of velocity $\tilde{u}_r$ against radius (see appendix for definitions of averaging operators used in this study). The error bars account for the reproducibility of measurements, and for uncertainties introduced by the centrifugation of seeding particles.

At a given radius r, we also study the distribution $\delta_r(r)$ defined as:

$$\delta_r(r) = \left((r'_i - r_i), 1 < i < N, \begin{cases} \tilde{u}_r(r'_i, t_i) = 0 \\ \tilde{u}_r(r_i, t_i) = 0 \\ r'_i > r > r_i \\ \forall y \in]r_i, r'_i[, \tilde{u}_r(y, t_i) \neq 0 \end{cases} \right).$$

N is the total number of profiles acquired during a run (see appendix) and t_i the time of profile i. δ_r is therefore the distribution of radial cell sizes around r. At any given depth, the histogram of δ_r is built. Figure 2.15 of the appendix shows an example of such an histogram. The lower plots of figure 2.7 represent the mean $\overline{\delta_r}$ of δ_r as a function of r. The error bar is the standard deviation $\tilde{\delta_r}$

of δ_r, and it accounts for the variety of cell sizes present around a given radius.

Figure 2.7 shows that when convection is developed, the instability extends throughout the space between boundaries, but most of the energy is located near the inner cylinder. The flow slows down, and vortex size decreases, as r increases (see section 2.1.6 for an interpretation). Figure 2.8 is a plot of mean zonal velocity $\overline{u_\theta}$ retrieved using the azimutal probe (see appendix for details). Error bars on $\overline{u_\theta}$ are of the same origin as those on $\tilde{u}_r$. Experimental parameters are close to those of patterns 2.5.3 and 2.5.4. The two zonal flows are retrograde near the inner cylinder. In most experiments done with gallium, we could appreciate a weak prograde zonal flow at larger radius. At even larger radius in gallium (broken lines in figures 2.7 and 2.8) energy peaks due to the impedance contrast between copper and gallium blind the ultrasonic measurement.

Zonal flow in gallium is comparable to convective flow, whereas in water it is lower. In the latter case, the observed radial variations are most probably due to an incomplete averaging of convective signal, and therefore not significant. The gallium profile clearly shows a maximum velocity close to the inner cylinder, coincident with the maximum of convective velocity, and relaxes to zero on the typical size of convection cells. Nonzero mean zonal flow can be associated to geostrophic motion along cylinders of constant r, and with this interpretation, two scales naturally appear in the flow: the scale of columns (which will be denoted as convective scale), and the scale of the container for geostrophic motion.

2.1.5 Evolution with control parameters.

The radial shape of time averaged mean properties, seen in the previous section, is a robust feature of the experiments we have conducted. We can infer that this shape scales homothetically with control parameters in the range covered by experiments. We therefore can separate the study of radial dependence in one hand, and the study of the homothetic scaling of a particular point of the profiles in the other hand. A model for radial dependence will be given in the next section. In this section we concentrate on the scaling of variables picked up at a given radius. We chose the radius r_{max} where the flow is stronger (maximum of $\tilde{u}_r$), to increase the signal to noise ratio.

This way we follow the evolution of $\tilde{u_r}(r_{max})$, $-\overline{u_\theta}(r_{max})$, and $\overline{\delta_r}(r_{max})$, with error bars as defined above, with the controlling parameters E, Ra/Ra_c, P. We also follow the evolution of the mean time $\overline{\Delta t}(r_{max})$ elapsed between two zeros of the radial velocity function, at the given radius r_{max}, with error bars corresponding to $\tilde{\Delta t}(r_{max})$.

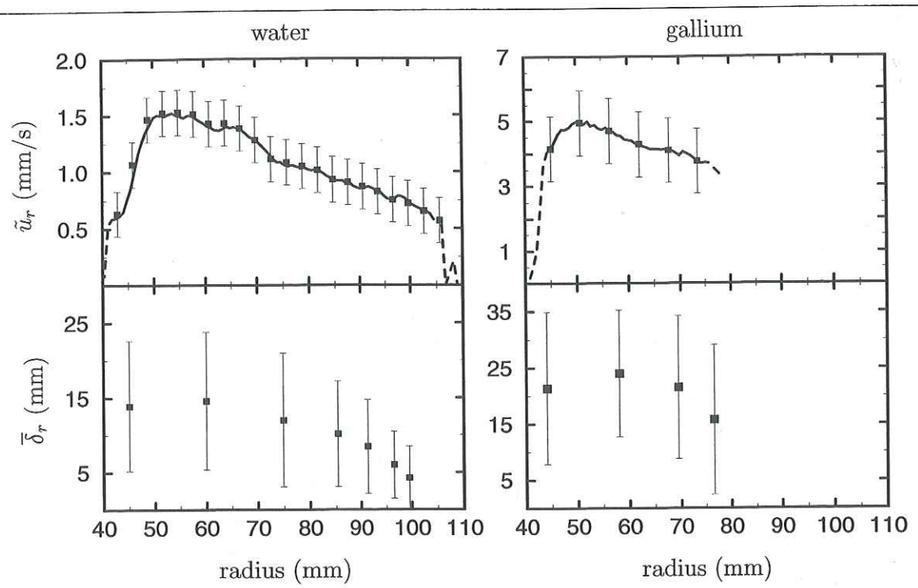


Figure 2.7: Mean properties for the flow extracted from patterns 3 and 4. Broken line in gallium plots of this figure and figure 2.8 highlights the region where the signal is saturated by multiple echoes due to the impedance contrast between copper and liquid gallium.

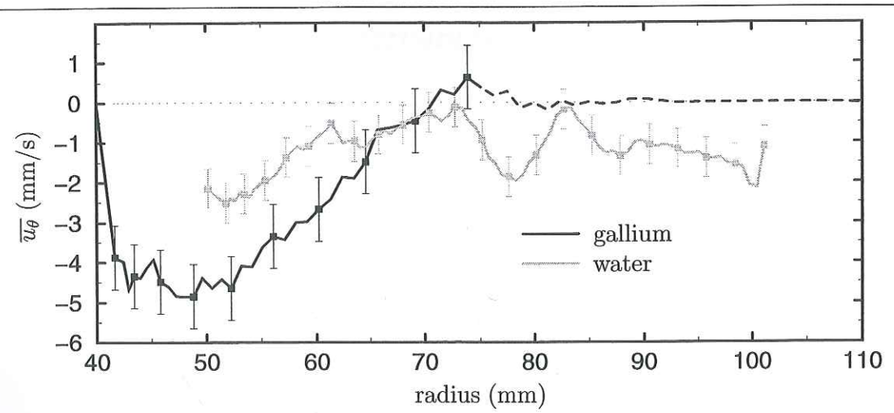


Figure 2.8: Mean zonal flow $\overline{u_\theta}$ in water (experiment 5: $E = 4.8\ 10^{-6}, Ra = 31Ra_c$), and gallium (experiment 6: $E = 1.5\ 10^{-6}, Ra = 3.2Ra_c$).

Figure 2.9 displays the resulting dataset, as a function of the departure from criticality $Ra/Ra_c - 1$. The horizontal error bars incorporate the fluctuations of the temperature gradient during the run. The runs with gallium are for the lower $Ra/Ra_c - 1$, on the left, while those for water have higher $Ra/Ra_c - 1$. The different symbols are for different Ekman numbers. The top two graphs give the evolution of the two components of velocity. For both liquids, velocities increase with the departure from criticality and also increase when the Ekman number is decreased. For a given $Ra/Ra_c - 1$, both $\tilde{u_r}$ and $\overline{u_\theta}$ are clearly much higher in gallium than in water. While it is expected to be zero in a purely viscous regime with no thermal wind, we always measure a retrograde zonal velocity at radius r_{max}. Nonzero retrograde zonal velocities have been observed experimentally (Sumita and Olson, 2000), and numerically (Cardin and Olson, 1994). This last study demonstrated that they could be explained in terms of the Reynolds stresses that result from non-linear inertial effects. Our quantitative measurements of the average zonal velocity confirm this observation and show that this effect is much larger in gallium. Cordero and Busse (1992) also invoked a retrograde zonal flow to explain temperature measurements in water experiments very close to the threshold of convection, in a narrow-gap configuration. They attributed this velocity to thermal wind. We have seen before that it was certainly not the predominant driving mechanism for the large zonal velocities we observe. Moreover, in experiments done in gallium, a weak prograde zonal flow has been observed at large radius. This is not compatible with a thermal wind explanation, since it requires a reverse temperature gradient to produce prograde zonal circulations.

The next two graphs deal with the dimensions of the convective cells. We first examine the variation of the average radial dimension $\overline{\delta_r}$. For water at moderate Rayleigh number, we note that $\overline{\delta_r}$ decreases as the Ekman number decreases. This is the expected behaviour, as size scales with $E^{1/3}$ in the geostrophic viscous regime that prevails at the onset of convection. However, we find that for the lowest Ekman numbers in water, and for experiments in gallium (which provide the largest radial dimensions), the mean of the cell size distribution generally increases with the Rayleigh number. This suggests that the size of the convective cells is no longer controlled by a geostrophic viscous balance, but rather depends on non-linear effects that increase when the Rayleigh number increases.

With our present set-up, we cannot access directly the dimension of the convective cells in the azimuthal direction. However, from the spatio-temporal maps of the preceeding section, we measure the mean time $\overline{\Delta t}$ elapsed between two zeros of the radial velocity function. If a cell of lateral extent $\overline{\delta_\theta}$ drifts across the line of measurement with an azimuthal velocity $\overline{u_\theta}$, it will result in a time signal with $2\overline{\Delta t} = \overline{\delta_\theta}/\overline{u_\theta}$. In water, we observe that $\overline{\Delta t}$ decreases when either E is decreased or Ra increased. For gallium, $\overline{\Delta t}$ is short as a consequence of the large zonal velocity. Later in this article, we will try to single out the variation of $\overline{\delta_\theta}$.

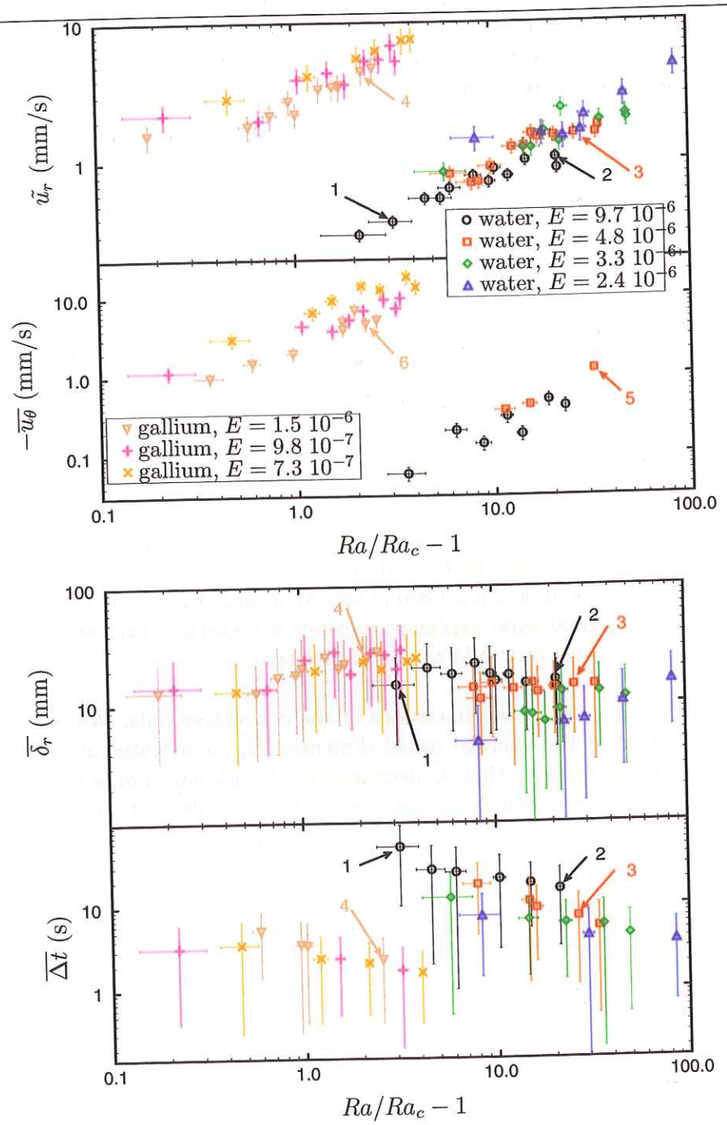


Figure 2.9: Scalar data extracted for scaling. Arrows 1–4 denote data points corresponding to shown velocity patterns (figure 2.5). Arrows 5 and 6 correspond to zonal flows shown on figure 2.8.

From the previous results, we derive the local convective Reynolds number : $Re_l = \tilde{u}_r \overline{\delta_r}/\nu$. Its variation is plotted in the next graph of figure 2.10. The data show a regular increase of the local Reynolds number with Ra/Ra_c for both water and gallium. The striking observation is that the Reynolds number is much higher in the gallium experiments, where it reaches 600, than in the water experiments, where 80 is the largest value, despite the fact that the Rayleigh number is much larger than Ra_c in this case. This is of course due to the larger convective velocities observed in gallium, together with the fact that the kinematic viscosity of gallium is about 3 times smaller than that of water. If we were to use the thickness of the shell rather than $\overline{\delta_r}$ in the definition of the Reynolds number, we would reach values of 2000 for gallium and 250 in water. Therefore, we expect non-linear effects to be fully developped in gallium, while they probably compete with viscous dissipation in water.

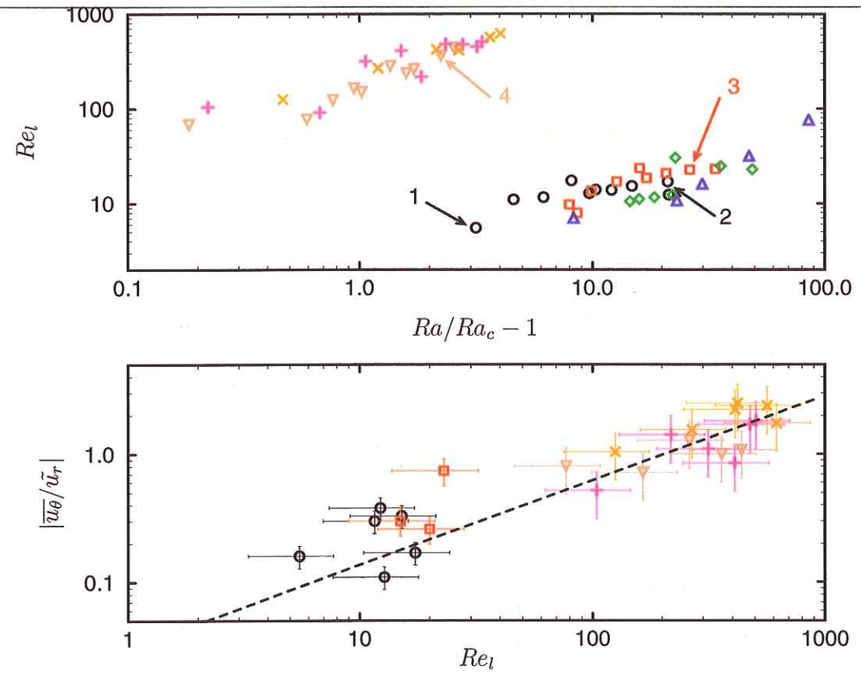


Figure 2.10: Scalar data (continued).

Since we anticipate that zonal velocities are caused by Reynolds stresses, we expect that they increase as the Reynolds number increases. This is best seen by plotting the ratio $|\overline{u_\theta}/\tilde{u}_r|$, which is a dimensionless quantity, versus Re_l. The results are shown in the last graph of figure 2.10. While this ratio is less than 0.7 in the water experiments, it reaches 2.5 in the gallium experiments, where the Reynolds number is the largest. The results presented in this section demonstrate the interest of comparing the properties of convection for liquids

Number	Definition	Experiment	Earth's core
$Bu = \frac{\alpha g \delta T}{\Omega U}$	Busse	< 0.1	$< 10^{-2}$
$Ro = \frac{U}{\Omega D}$	Rossby	$< 10^{-2}$	$\approx 10^{-6}$

Table 2.4: Auxiliary dimensionless parameters justifying the QG approximation in the experiment. δT is the order of magnitude for local temperature perturbations. Estimates are given for the Earth's core, using a typical velocity of 10^{-4} m/s (Jault et al., 1988).

with different Prandtl numbers. The behaviour observed for gallium, which has a low Prandtl number, with high Reynolds number and large zonal velocities, strongly suggests that convection is dominated first by the Coriolis force and second by non-linear inertial terms. In the next section, we perform a scaling analysis to test this idea.

2.1.6 Scaling analysis.

In this section, we introduce quasigeostrophic equations and derive scaling relationships for two different regimes: a viscous one and an inertial one. We then compare the predictions of these two approaches to the measurements of the previous section.

The fluid shell is described under the Boussinesq approximation, obeying both Navier-Stokes and heat equations, made dimensionless using D as length scale, D^2/ν as time scale, $P\Delta T$ as temperature scale. A cylindrical frame $\mathbf{e_r}, \mathbf{e_\theta}, \mathbf{e_z}$ is chosen. The momentum and heat equations are:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\,\mathbf{u} + 2E^{-1}\mathbf{e_z} \times \mathbf{u} = -E^{-1}\nabla\Pi - Ra\; r\mathbf{e_r}T + \nabla^2\mathbf{u}. \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\,T = P^{-1}\nabla^2 T. \tag{2.3}$$

Here $\mathbf{u}$ is the fluid velocity, T is the temperature, Π is pressure (including contribution from the gravity potential). Gravity grows linearly with the cylindrical radius r. Equation (2.2) is subject to no-slip boundary conditions, and equation (2.3) satisfies imposed temperatures on both the inner cylinder and the outer sphere.

Experimental facts strongly suggest that flow is quasigeostrophic (QG): it is columnar, which means that the order of magnitude of inertia, buoyancy and viscosity are small when compared to Coriolis force (balanced by a pressure gradient). This is confirmed by the quantitative estimates of these ratios, which respectively give the Rossby, Busse and Ekman numbers (see tables 2.2 and

2.4). A nonlinear QG model has been derived by Cardin and Olson (1994), from the local marginal stability theory of Busse (1970), under the following assumption: dissipation by friction through the Ekman layers near the outer spherical boundary is neglected. Fields are then expanded into powers of the Ekman number. To leading order a geostrophic balance exists between Coriolis force and the pressure gradient, which implies that flow is two-dimensional at this order. This equilibrium alone cannot solve the problem (geostrophic degeneracy), and to next order the equation governing the column-averaged z-component ω of vorticity is:

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} - E^{-1}\frac{2}{L}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}r}\mathbf{u} \cdot \mathbf{e_r} = \nabla^2\omega + Ra\frac{\partial T}{\partial \theta}, \tag{2.4}$$

where

$$L = \sqrt{r_e^2 - r^2}$$

is half the height of a fluid column, and dL/dr is thus the local slope of the external boundary. Equation (2.4) averages the effect of the Coriolis force using the non-penetration condition for velocity at sloping boundaries (Cardin and Olson, 1994). This results in the "vortex-stretching" term

$$\frac{2}{L}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}r}\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_r.$$

This term is found to be larger than Ekman-pumping induced circulation even for fairly low dL/dr. Only in the case of purely zonal velocities ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_r = 0$) will we need to reintroduce Ekman circulation. This fact implies that dissipation in the interior of the fluid will dominate dissipation in boundary layers at the scale of the convective flow, and justifies the approximation mentioned above.

Equation (2.4) will be re-written in the following manner, which highlights its formal analogy with the beta-plane equation used in geophysical fluid dynamics (Pedlosky, 1987):

$$\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}t} = \nabla^2\omega + Ra\frac{\partial T}{\partial \theta}, \tag{2.5}$$

we define Λ as the potential vorticity:

$$\Lambda = \omega - \frac{2}{E}\ln L.$$

Let $\tilde{u}(r)$ and $\tilde{T}(r)$ be time-averaged standard deviations for the convective velocity and temperature fluctuation, and $\delta(r)$ be the mean, time-averaged vortex size, as functions of the cylindrical radius. In order to derive scaling relationships, we identify two steps in the process of the evolution of the vorticity field.

First, the thermal instability produces lateral gradients of temperature, and this results in the creation of vorticity. For instance, one rising plume gives

birth to a cyclone on its prograde side, and an anticyclone on its retrograde side. We therefore write

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \sim Ra\frac{\partial T}{\partial \theta} \tag{2.6}$$

The fundamental assumption of this analysis is that later in time, structures of high Re_l evolve at constant potential vorticity. Under the influence of advection by rising and falling radial currents, they exchange vorticity with the planetary vorticity field $2\ln L/E$:

$$\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \sim E^{-1}\frac{2}{L}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}r}\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_r \tag{2.7}$$

The timescale of these phenomena is the vortex turnover time t:

$$t \sim 1/\omega \sim \delta/\tilde{u} \tag{2.8}$$

On this timescale, structures of high Re_l are indeed immune to viscosity, and therefore do not lose potential vorticity. This inertial balance thus assumes that under the influence of radial advection (Reynolds stresses), transfer of energy occurs between the convective scale and the scale of energy dissipation (this will be made more precise, see below).

This results in a three-term balance

$$(2.6),(2.7) \text{ and } (2.8) \quad \Rightarrow \quad \frac{\tilde{u}^2}{\delta^2} \sim \frac{Ra\, r\tilde{T}}{\delta} \sim E^{-1}\frac{2}{L}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}r}\tilde{u}. \tag{2.9}$$

One needs another equation to solve for $\tilde{u}$,$\tilde{T}$ and δ. It is provided by the Nusselt number, which is the ratio of the total heat flux Q_{tot} over the conductive heat flux:

$$Nu = \frac{Q_{tot}}{Q_{conv}} = 1 + \overline{uT}P^2.$$

Since lateral temperature gradients create radial velocity, we assume that $\tilde{u}$ and $\tilde{T}$ are correlated, and therefore we approximate $\overline{uT}$ by $\tilde{u}\tilde{T}$. In the limit of high departures from criticality Ra/Ra_c, we write:

$$Nu \sim 1 + \tilde{u}\tilde{T}P^2 \sim \tilde{u}\tilde{T}P^2. \tag{2.10}$$

Solving (2.9) and (2.10) for the three variables yields the set of inertial scaling relations:

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{u} \sim \left(r^{2/5}f(r)^{1/5}\right)\left(\frac{Ra_Q}{P^2}\right)^{2/5}E^{1/5} \\ \delta \sim \left(r^{1/5}f(r)^{3/5}\right)\left(\frac{Ra_Q}{P^2}\right)^{1/5}E^{3/5} \\ \tilde{T} \sim \left(r^{-2/5}f(r)^{-1/5}\right)\, Nu\,(Ra_Q P^3)^{-2/5}\,E^{-1/5} \end{array}\right| \; f(r) = \left(\frac{2}{L}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}r}\right)^{-1} = \frac{r_e^2 - r^2}{2r} \tag{2.11}$$

where $Ra_Q = Ra \cdot Nu$ is the heat-flux based Rayleigh number. These relations draw their interest from the fact that they depend on geophysically well-constrained parameters. The set of equations (2.11) has been written by Cardin and Olson (1994), and has been found to be in qualitative agreement with their experiments. It is interesting to note that in this inertial scaling, diffusion constants ν and κ do not play a role in the expressions for $\tilde{u}$ and δ (Christensen, 2001). This becomes clear when time is re-scaled using the container rotation time Ω^{-1} instead of the viscous diffusion time. Let starred variables $\tilde{u}^* = \tilde{u}E$ (which is the Rossby number), $\delta^* = \delta$, $\tilde{T}^* = \tilde{T}$ be the variables in the new scaling. There appears a parameter $\gamma = Ra_Q E^3 P^{-2}$, which is independent of either diffusion constant. These constants only play a role in the scaling for $\tilde{T}^*$, and the scaling relations write (dropping the r-dependence):

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{u}^* \sim \gamma^{2/5} \\ \delta^* \sim \gamma^{1/5} \\ \tilde{T}^* P E^{-1} \sim \gamma^{-2/5} \end{array}\right| \; \gamma = \frac{\alpha g Q_{tot}}{\rho C_p \Omega^3 D^2} \tag{2.12}$$

We now return to the original definition of the non-dimensional time, since we will also be interested in viscous effects. The previous scaling relations have indeed been derived in the limit of high Reynolds numbers and high departures from criticality. We investigate now the case when viscous effects are important, i.e. lower Reynolds numbers. We expect then that the conservation of potential vorticity will hold only on timescales of order of the viscous diffusion time, and (2.8) is replaced with:

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \sim \nabla^2\omega \Rightarrow t \sim \delta^2 \tag{2.13}$$

This yields another three-term balance:

$$(2.6),(2.7) \text{ and } (2.13) \quad \Rightarrow \quad \frac{\tilde{u}}{\delta^3} = \frac{Ra\, r\tilde{T}}{\delta} = E^{-1}\frac{2}{L}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}r}\tilde{u}. \tag{2.14}$$

Solving (2.14) and (2.10) for the three variables yields the set of viscous scaling relations:

$$\begin{array}{l} \tilde{u} \sim \left(r^{1/2}f(r)^{1/3}\right)\left(\frac{Ra_Q}{P^2}\right)^{1/2}E^{1/3} \\ \delta \sim \left(f(r)^{1/3}\right)\, E^{1/3} \\ \tilde{T} \sim \left(r^{-1/2}f(r)^{-1/3}\right)\, Nu\,(Ra_Q P^3)^{-1/2}\,E^{-1/3} \end{array} \tag{2.15}$$

The radial dependence of equations (2.11) and (2.15) predicts that velocity and vortex size must decrease at increasing radius, due to the influence of the increasing slope of the spherical boundary. This is the fundamental effect of the spherical geometry, and it is in qualitative agreement with the radial profiles shown on figure 2.7. We now factor out the r-dependence and turn to the scaling of variables picked up at r_{max}.

For quantitative validation by laboratory experiments some adaptations towards moderate Ra/Ra_c are necessary. In that case, Ra_c has to be substracted from Ra since it represents a part of buoyancy unavailable for generation of motion. The scaling parameter therefore has to be $Ra - Ra_c$ instead of Ra. The rest of the analysis above is valid if $Nu - 1$ replaces Nu. Moreover, in order to convert Ra into Ra_Q, we need an estimate of Nu, since it is not measured in our experiments. The exact relationship is not crucial however, since variations of $Nu - 1$ are not dramatic when compared to those of $Ra/Ra_c - 1$. For experiments done in water, Sumita and Olson (2000) have obtained $Nu \sim (Ra/Ra_c)^{1/2}$ in the parameter range we use, a value in agreement with calculations of Tilgner and Busse (1997) with $P = 10$. For the water case we will use this relation. For experiments done in liquid gallium, since the departure from criticality is not high, we will use a constant Nusselt number.

Figure 2.11 presents the test of a viscous, and inertial balance on the radial velocity data. While the inertial scaling adequately fits the data for both liquids, the viscous scaling is accurate only for experiments in water up to a value of Ra/Ra_c of order 10, and inaccurate for experiments in gallium. These conclusions are confirmed when we scale the mean of the radial cell size distribution, using the results for δ (Figure 2.12). A viscous scaling adequately describes the evolution of $\overline{\delta_r}$ in water, where, once the E dependance has been removed, no significant increase is observed with Ra/Ra_c. Only an inertial scaling can describe the increase of $\overline{\delta_r}$ with Ra/Ra_c in liquid gallium. However, this test is less significant than the previous one, because of the broadness of cell size distribution, and the low dynamics (less than one decade) of its variations. The evolution of the temperature fluctuations with the parameters (not shown) is also in good agreement with the predictions of the inertial model.

At the scale of the convection flow, the QG model with no dissipation at the spherical external boundary is thus accurate. Kinetic energy created by buoyancy is partly dissipated in water (inertial and viscous terms are of the same order of magnitude), and little dissipation takes place in gallium. One efficient dissipative mechanism of kinetic energy remains available in this latter case: zonal flow is not subject to any forced vertical circulation that prevents friction on the external boundary. We therefore suspect that kinetic energy is transported from the scale of convective flow to the scale of the container through Reynolds stresses.

An equation for the time-averaged zonal velocity $\overline{u_\theta}$ can be deduced by averaging the θ-component of equation (2.2):

$$\overline{(\mathbf{u}\cdot\nabla)\,u_\theta} + 2E^{-1}\mathbf{e}_z \times \overline{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{e}_\theta = -E^{-1}\overline{\nabla\Pi\cdot\mathbf{e}_\theta} + \nabla^2\overline{u_\theta}.$$

If we assume ergodicity, which seems to be realized by zonal flow, and identify the time-average with the θ-average, then $\overline{\nabla\Pi\cdot\mathbf{e}_\theta}$ identically vanishes. We also have

$$2E^{-1}\mathbf{e}_z \times \overline{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{e}_\theta = 2E^{-1}\overline{u_r}.$$

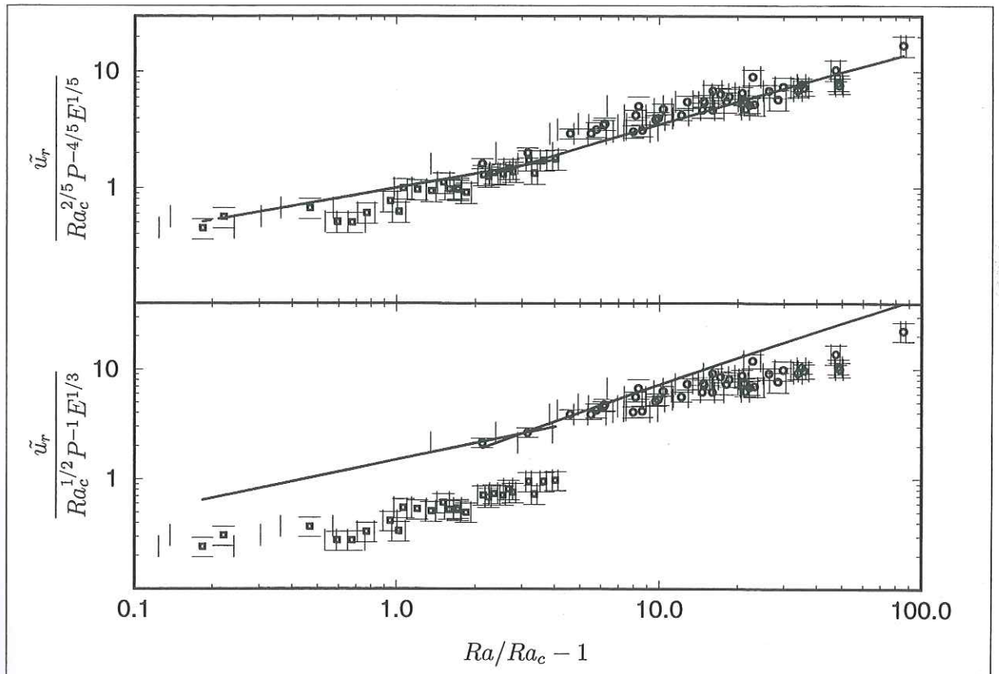


Figure 2.11: Reduced radial velocity for gallium (squares) and water (circles) experiments. Up: test of the inertial balance. Black line in water corresponds to theoretical dependence $y \sim ((Nu-1)(Ra/Ra_c-1))^{2/5}$ with $Nu \sim (Ra/Ra_c)^{1/2}$. Black line in gallium corresponds to dependence $y \sim (Ra/Ra_c - 1)^{2/5}$. Scaling prefactor is 1. Low: test of the viscous balance. Black line in water is $y \sim ((Nu-1)(Ra/Ra_c-1))^{1/2}$, and in gallium $y \sim (Ra/Ra_c-1)^{1/2}$. Prefactor is 1.5 .

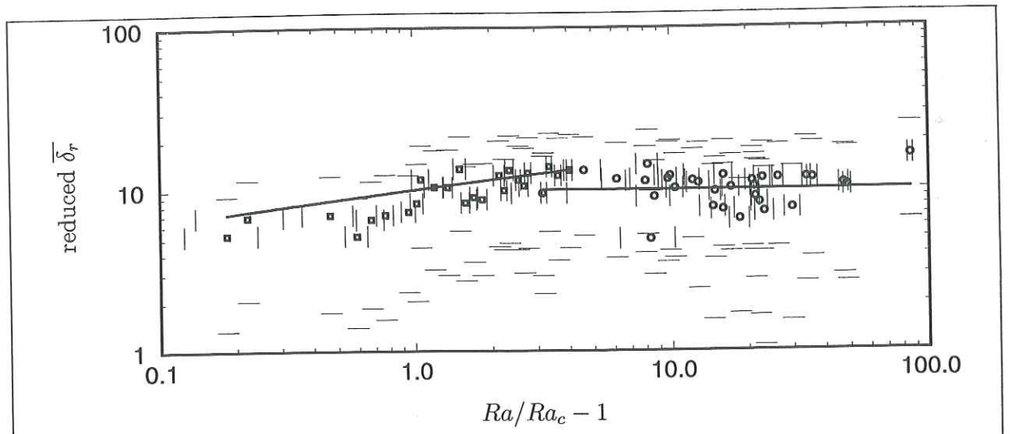


Figure 2.12: Reduced cell size for gallium (squares) and water (circles) experiments. The viscous scaling is tested for water experiments, the reduced cell size is therefore $\overline{\delta_r}/E^{1/3}$. The inertial scaling is tested for gallium experiments, the reduced cell size is therefore $\overline{\delta_r}/(Ra_Q^{1/5}P^{-2/5}E^{3/5})$. Black line in gallium corresponds to dependence $y \sim (Ra/Ra_c - 1)^{1/5}$. Black line in water is $y \sim 1$. Both prefactors are 10.

$\overline{u_r}$ can be expressed through the Ekman circulation formula (Greenspan, 1968):

$$\overline{u_r} = \frac{E^{1/2}}{2L\sqrt{\mathbf{n}\cdot\mathbf{e_z}}}\overline{u_\theta}$$

Where $\mathbf{n}$ is the normal to the spherical boundary. The time averaged θ-component of equation (2.2) finally writes:

$$\overline{(\mathbf{u}\cdot\nabla)\,u_\theta} + \frac{E^{-1/2}}{L\sqrt{\mathbf{n}\cdot\mathbf{e_z}}}\overline{u_\theta} = \nabla^2\overline{u_\theta}. \tag{2.16}$$

Far from the inner cylinder, Ekman friction dominates dissipation in the interior of the fluid and equilibrates with Reynolds stresses. Closer to the inner cylinder, a passive boundary layer can set up where the viscous drag from the interior of the fluid equilibrates Ekman friction. Therefore the predominant source of energy is Reynolds stresses, and the predominant sink of energy is Ekman friction on the outer boundary. This is the behavior of a large-gap configuration, and would not be true in a small-gap case (Plaut and Busse, 2001). The balance, from which we factor out, as usual, the r-dependence, writes:

$$\overline{u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}} \sim \frac{E^{-1/2}}{L\sqrt{\mathbf{n}\cdot\mathbf{e_z}}}\overline{u_\theta} \quad\Rightarrow\quad \frac{\tilde{u}^2}{\overline{\delta_r}} \sim \frac{\overline{u_\theta}}{E^{1/2}}. \tag{2.17}$$

The nonvanishing nonlinear coupling term is indeed the $r\theta$ component of Reynolds stress, and it has been estimated as $\tilde{u}^2/\overline{\delta_r}$, assuming that a constant degree of correlation exists between u_r and u_θ over the range covered by experiments. A justification for this can be found in the principle of potential

vorticity conservation: due to this principle, rising currents have a tendancy to turn into anticyclones. The excess of negative vorticity induces a retrograde zonal circulation which is well correlated with the radial flow. This interpretation also predicts that the energy contained into the zonal flow cannot be significantly higher than the energy contained into the radial flow. The degree of correlation has therefore to decrease as the zonal flow becomes too high.

Variations of $\overline{\delta_r}$ with controlling parameters are not very significant in the range of experiments ($\overline{\delta_r}$ is always of order 1), and therefore we keep $\overline{\delta_r} \sim 1$ in equation (2.17). Since zonal flow results from inertial effects, inertial scaling has to be adopted for $\tilde{u}$. The resulting formula writes:

$$\overline{u_\theta} \sim \left(\frac{Ra_Q}{P^2}\right)^{4/5} E^{9/10}. \tag{2.18}$$

This scaling is tested on figure 2.13, and yields a prefactor 1. Only data points corresponding to sufficiently developed convection are kept. The data for $\overline{u_\theta}$ are more scattered than for $\tilde{u_r}$, but the agreement with equation (2.18) is still good. This test highlights the importance of Ekman layers near the spherical boundary for the determination of zonal flow.

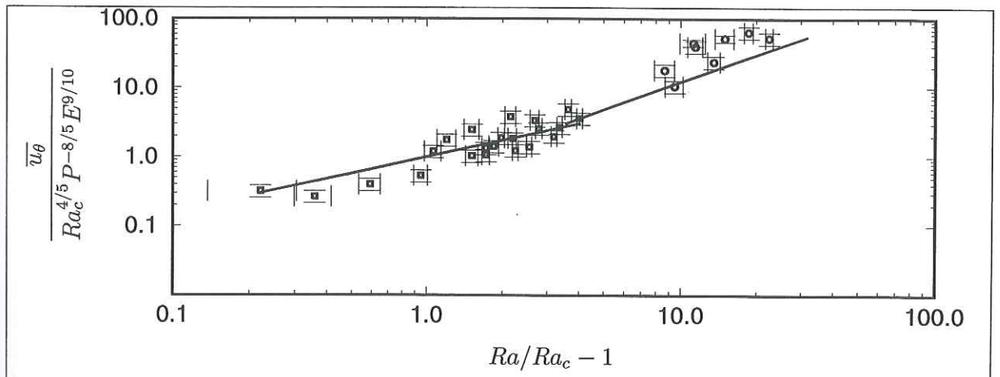


Figure 2.13: Reduced zonal flow velocity. Black line is $y \sim ((Nu-1)(Ra/Ra_c-1))^{4/5}$ in water and $y \sim (Ra/Ra_c - 1)^{4/5}$ in gallium. Scaling prefactor is 1.

This last point clearly shows the adequation of an interpretation of zonal flow in terms of Reynolds stresses. Zonal velocities observed in water are not important, because kinetic energy is partly dissipated at the convective scale. In gallium they take part in the only efficient dissipative mechanism left, and this explains their rapid growth as the convective instability injects more energy into the system.

A condition for the inertial regime can be established, by comparing the orders of magnitude of dissipation through Ekman friction of the zonal flow, and dissipation at the convective scale. The former can be estimated as $\overline{u_\theta}^2/E^{1/2}$

and the latter as $\tilde{u}^2/\delta^2$. Either inertial or viscous scaling predicts that δ is not smaller than $E^{1/3}$ and therefore the condition writes:

$$\frac{\overline{u_\theta}^2}{\tilde{u}^2} > E^{1/6}$$

and this yields (the fractional power of E is approximated for simplification):

$$\frac{Ra_Q}{P^2} E^{3/2} > 1 \tag{2.19}$$

Equation (2.19) is satisfied by gallium experiments, for which left-hand side of (2.19) is at least 30. For water experiments this term is of order 10^{-2} for experiments at $E = 9.7\ 10^{-6}$ near the onset, and reaches values of order 1 for the more supercritical experiments at $E = 2.4\ 10^{-6}$. This confirms that the inertial regime is attained only for the lower E experiments in water, and for all experiments in gallium.

Having proposed a mechanism for the zonal velocities, we come back to an interpretation of the measurements of $\overline{\Delta t}$, the average time between zeros of the radial velocity profiles, in terms of the average azimuthal size of the vortices $\overline{\delta_\theta}$. We have

$$\overline{\delta_\theta} = 2\overline{u_\theta}\overline{\Delta t}.$$

The factor 2 is used because $\overline{\Delta t}$, as it is defined, describes half a period. $\overline{\delta_\theta}$ is plotted on figure 2.14, with error bars corresponding to the standard deviation of lateral size distribution. Here zonal flow velocity is determined using theoretical scaling relations. Therefore only data points corresponding to sufficiently developped flows have been kept. Horizontal lines are predicted sizes of vortices at convection onset. Here again, the scaling proposed for δ in the previous section correctly describes the order of magnitude and variations of $\overline{\delta_\theta}$ within the error bars, and the increase in size predicted by the inertial scaling is effective only for high Re_l experiments. An aspect ratio δ_r/δ_θ can be estimated, and is of order 1 at high Re_l (compare figure 2.14 with the third graph in figure 2.9). In the inertial regime, cells generally tend to grow with increasing Ra/Ra_c, and can become larger than cells at convection onset.

2.1.7 Discussion

We have shown that thermal convection in water and gallium exhibits properties that can well be accounted for by the inertial model we have derived. The use of two liquids with very different Prandtl numbers was essential to discriminate between the inertial and the viscous models.

Our measurements enable us to show that the typical local Reynolds number is much larger in the gallium experiments than in water. The most striking consequence of these high Reynolds numbers for gallium is the apparition of

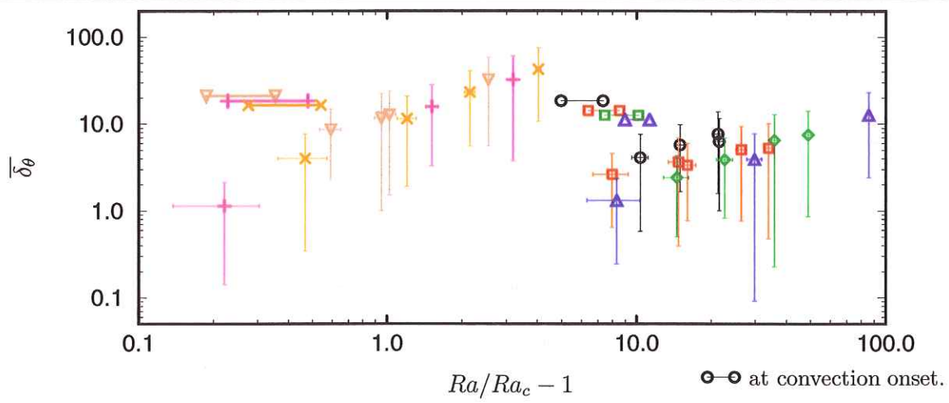


Figure 2.14: Lateral size of vortices at radius r_{max}, near the inner cylinder.

large zonal velocities, well explained by Reynolds stresses in the framework of our inertial model. By combining the expression for the local Reynolds number

$$Re_l = \tilde{u}\overline{\delta_r} \sim \left(\frac{Ra_Q}{P^2}\right)^{3/5} E^{4/5},$$

and those for the zonal and convective velocities, we obtain

$$\overline{u_\theta}/\tilde{u_r} \sim Re_l^{2/3} E^{1/6}.$$

As expected, this ratio is controlled almost entirely by the Reynolds number. The 2/3 slope is in good agreement with the data (dashed line in figure 2.10).

We emphasize that, in the inertial regime, there is no efficient dissipation mechanism at convective scale, and therefore kinetic energy created by buoyancy has to cascade to larger scales where dissipation takes place by shear of zonal flow on boundaries. The energy flow towards large scales is the classical mechanism invoked in 2D turbulence. While in a plane layer, this mechanism leads to the apparition of structures as large as the container (Sommeria, 1986), in the spherical geometry only zonal motions are permitted at this scale. The large zonal velocities we measure in gallium are reminiscent of the observations of Grote et al. (2000) for a numerical model of convection with a stress-free outer boundary. These authors report a strong intermittency as the zonal flow tends to wipe out the convective structures from which it draws its strength. In our experiments, we found no evidence for this mechanism. It is probably due to the fact that zonal velocities in our case are limited by friction on the Ekman layers of the outer boundary, while only viscosity in the interior of the shell can control the amplitude of the zonal flow in the numerical model.

The adequation of an explanation of experiments based on the model by Cardin and Olson (1994) reasserts the interest of a two-dimensional approach.

Variable	Value
Re_l	10^6
Re	10^8
$\tilde{u}$	10^{-3} m/s
$\overline{\delta_r}, \overline{\delta_\theta}$	10 km
$\overline{u_\theta}$	10^{-2} m/s

Table 2.5: Values for the Earth's core deduced from inertial scaling.

However, their model did not take Ekman friction of zonal flow on the external boundary into account. This represents an easy improvement, after which it will be possible to compare convective structures determined numerically and experimentally. Using more ultrasonic transducers, it should be possible indeed to construct a local map of convective structures, and investigate the radial and zonal geometry of convective vortices.

Our results also bear some relevance to the geodynamo problem. Recent numerical models (Christensen et al., 1998) have shown that dynamo action can take place in a spherical shell when thermal convection is only a few times critical. The mechanism is of α^2-type, meaning that the conversion of poloidal to toroidal magnetic field, and vice-versa, is done by vortices at the convective scale. In the Earth, it is believed that the conversion of poloidal to toroidal field is due to an ω effect, i.e. zonal flow. Our observations suggest that for sufficiently low Ekman numbers and high Reynolds numbers, this zonal flow will be naturally produced by the convective engine.

Although all these results apply to a non-magnetic case, we think it is of some interest to extrapolate them to the parameters of the core. We use $E = 10^{-14}$ and $P = 1$, both estimated using parameters in table 2.2. The heat-flux based Rayleigh number can be expressed as:

$$Ra_Q = \frac{\alpha g Q_{tot} D^2}{k\kappa\nu}.$$

From an upper bound for the total heat flux emerging at the Core- Mantle Boundary (CMB) $Q_{tot} = 10$ TW (Labrosse et al., 1997), we infer $Ra_Q = 10^{30}$. The condition (2.19) for the inertial regime is satisfied, and therefore the inertial scaling is chosen to derive the core estimates of convective velocity, cell size, Reynolds number and zonal flow which are summarized in table 2.5. The local Reynolds number is very high and indicates a strongly turbulent state. The global Reynolds number is of the same order of magnitude as the estimate made in the introduction. Convective flow velocities (10^{-3} m/s) are ten times larger than CMB estimates, of order 10^{-4} m/s (Hulot et al., 1990), obtained from secular variations of the magnetic field. The ratio of zonal over convective velocity yields the value 10, while estimates based on geophysical observations (Jault et al., 1988) lead to zonal velocities lower than convective velocities. As we have seen in the scaling analysis, this ratio is very likely to saturate at

a value of order 1 (Christensen, 2001), even though we have not observed it. A too strong zonal flow would indeed suppress convection by mixing plumes. Developed QG turbulence should favor large structures, but still the influence of vortex stretching results in very small typical cell sizes.

The kind of flow described by these parameters would not be very efficient in maintaining a magnetic field: the essential part of kinetic energy, which is in zonal flow, is lost for dynamo action. The first effects of the addition of a magnetic field on this configuration would be to enlarge structures and slow down velocities, especially zonal velocity (Brito et al., 1995). This will be checked in future experiments in the presence of an azimuthal magnetic field.

Acknowledgments.

We are grateful to D. Jault for sharing his valuable theoretical knowledge on rotating thermal convection. We also thank U. Christensen and an anonymous referee for helpful comments on this paper. This work was supported by program *Expérimentation* of CNRS/INSU, by the Région Rhône-Alpes and by the Université Joseph Fourier.

Appendix: Notes on experiments and data processing.

Experimental procedure.

For the acquisition of one experimental record, the sphere is spun up to the desired speed, and the thermal regulation system is then turned on and tuned to the desired gradient. Then we wait until spin-up is complete (3 mn), until thermal equilibrium is reached at boundaries (10 mn), until convection pattern is statistically stationary (depends on the departure from criticality, but typically 30 mn). Then recording is started.

Structure and resolution of recordings.

One velocity profile is a set of 224 (water) and 130 (gallium) velocity points covering a distance of respectively 83.6 and 92.8 mm. The effective resolution is therefore 0.37 mm (water) and 0.71 mm (gallium). In fact the real resolution is lower because one ultrasonic burst is composed of eight cycles. The Doppler apparatus then overlaps measurement windows of respective sizes $0.37 \times 8 = 2.96$ mm and $0.71 \times 8 = 5.68$ mm, to recover the aforementioned effective resolution. Some care has been taken on this point in figures 2.7 and 2.8,

where squares denote real measurement points, and the solid line represents the profile obtained at effective resolution.

$N = 4096$ complete radial velocity profiles are acquired, at a sampling rate between 6 and 18 profiles per second. This represents roughly one tenth of the viscous dissipation time D^2/ν. The actual time resolution is lower because of averaging for noise reduction. Typical averaging is done over 10 profiles, using a median filter, and this lowers the time step to some 0.5 seconds. Also recorded meanwhile are 4096 complete velocity profiles on the lateral probe.

Temperature perturbation signals are recorded at a sample rate of 3 to 6 samples per second. The imposed temperature gradient is recorded using thermo-resistive platinum probes. The temperature gradient has to be corrected by some 15 percent temperature drop in lexan when experimenting with water.

Extracted scalar data and error bars.

Scalars are extracted from filtered signals. Let N be the number of profiles, and $u_i(r)$ an individual profile. The mean velocity is

$$\overline{u}(r) = \frac{1}{N}\sum_i u_i(r),$$

and the standard deviation of velocity

$$\tilde{u}(r) = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_i (u_i(r) - \overline{u}(r))^2}.$$

Error bars on $\tilde{u_r}$ and $\overline{u_\theta}$ account for the reproductibility of measurements, and of the uncertainty due to seeding particles centrifugation (see retrieval of zonal flow). Error bars on $\overline{\delta_r}$, $\overline{\delta_\theta}$ and $\overline{\Delta t}$ are the standard deviations $\tilde{\delta_r}$, $\tilde{\delta_\theta}$ and $\tilde{\Delta t}$ of the size distributions. An example histogram of size distribution is shown on figure 2.15.

Retrieval of mean zonal flow velocity.

The mean velocity $\overline{u}_{mes}$ measured on the lateral probe can be expressed in the system of local axes of figure 2.3 as a function of mean radial and zonal flow velocities $\overline{u_r}$ and $\overline{u_\theta}$:

$$\overline{u}_{mes} = \overline{u_r}\cos(\alpha+\theta) + \overline{u_\theta}\sin(\alpha+\theta).$$

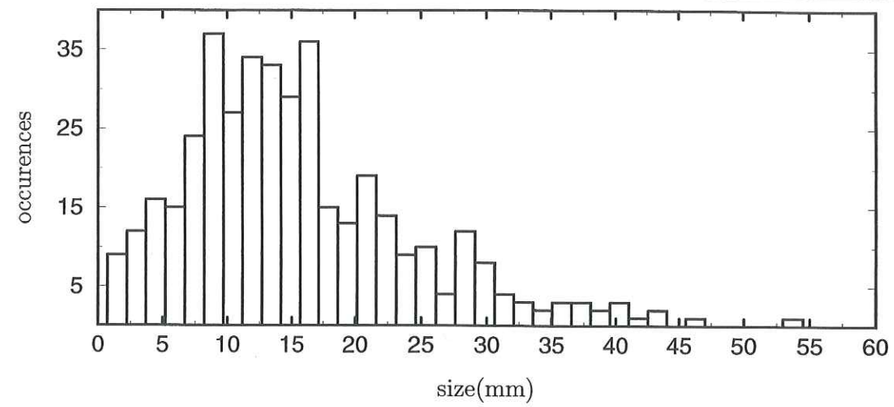


Figure 2.15: Histogram of the distribution of radial cell sizes in the convective flow, measured at radius 60 mm in water, for experiment of figure 2.5.3 (Ekman number is 4.8 10^{-6}, Rayleigh number is 26.6 times critical).

Medium	v_P (m/s)
water	1500 (at 20° C)
liq. gallium	[a] 2873 (at 30° C)
lexan	[b] 2340 ± 190
copper	[b] 5040 ± 350

Table 2.6: Compressional ultrasonic wave velocities v_P in media used in the experiment. [a]: Beyer and Ring (1972); [b]: this study.

The convention of positive radial velocity directed inwards has been used here. Hence

$$\overline{u_\theta} = \frac{\overline{u}_{mes}}{\sin(\alpha+\theta)} - \overline{u_r}\cot(\alpha+\theta).$$

For a purely convective flow $\overline{u_r}$ averages out. In the case of the experiment some care has to be taken on this point, since $\overline{u_r}$ is slightly different from zero due to centrifugation/centripetation of seeding particles. Therefore it has to be corrected here.

The unknown is the angle θ. if r denotes the distance on the lateral probe since the beam entered the fluid, and R the radius of the fluid sphere, some algebra yields:

$$\sin\theta = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - 2\cos\alpha\frac{R}{r} + \left(\frac{R}{r}\right)^2}}$$

α remains to be determined. The beam enters the solid sphere at an angle

40° and is then refracted at the liquid interface such that:

$$\sin(\alpha) = \frac{v_P(liq)}{v_P(sol)} \sin(40^o)$$

where v_P stands for the compressional ultrasonic wave velocity of the considered media. Using the values listed in table 2.6, this gives $\alpha = 24.3 \pm 1.5^o$ for experiments in water, and $\alpha = 21.5 \pm 1.5^o$ in gallium. This corresponds to a minimal distance to inner cylinder of $d = 5 \pm 3$ mm in water and $d = 1 \pm 3$ mm in gallium. The uncertainties are of the same importance as the size of the Doppler measurement volume, and they affect the horizontal position of plots in figure 2.8.

2.2 Corrélation latérale de profils Doppler.

À l'issue de l'étude de la section précédente, l'origine de la dérive latérale des structures devant la sonde Doppler n'est pas élucidée. C'est l'une des questions qui vont motiver l'étude numérique à venir dans le chapitre 3. Nous avons d'abord tenté de répondre à cette question par l'expérience, en installant deux sondes radiales, distantes latéralement d'un angle de 30 degrés, sur le dispositif expérimental (figure 2.16).

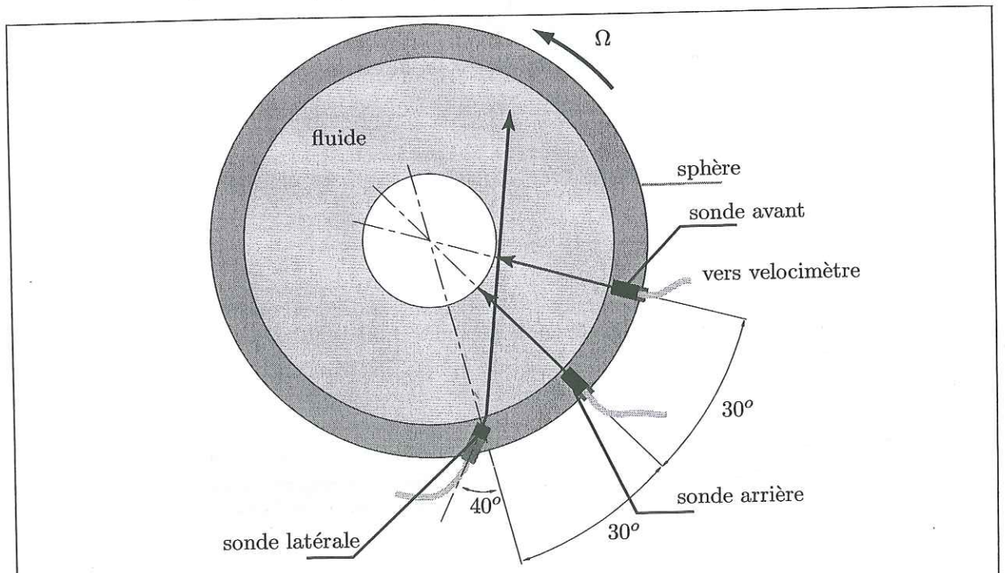


FIG. 2.16 – *Position des 3 sondes utilisées lors des expériences de corrélation.*

Un multiplexage nous permet d'acquérir un profil sur les sondes arrière et avant de manière quasi-simultanée. On enregistre aussi le profil de mouvement

zonal à l'aide de la sonde latérale. On corrèle ensuite mathématiquement les profils radiaux arrière et avant de la manière suivante: pour chaque profondeur, on calcule la fonction de corrélation normalisée entre les deux séries temporelles de la vitesse. Toutes les fonctions obtenues sont ensuite reportées sur une carte, à la manière des cartes Doppler. On peut ainsi isoler des taches correspondant à la dérive des structures. Certaines d'entre elles résultent du mouvement zonal; on reporte donc sur la carte la courbe du retard associé à ce dernier. Un tel graphe peut alors donner des éléments de réponse, en ce qui concerne le sens, la vitesse, et aussi la nature (ondulatoire ou advective) de la dérive. En effet, toute corrélation incompatible avec l'advection latérale trahit la présence d'ondes dans le système. En effet, des ondes comme les ondes de Rossby se déplacent latéralement sans mouvement de matière associé.

On pourra comparer les cartes présentées dans cette section avec celles, d'origine numérique, de la section 3.5.3.

La figure 2.17 présente deux expériences de corrélation réalisées dans l'eau. Le nombre d'Ekman est fixé à $E = 9.7\ 10^{-6}$, et le nombre de Rayleigh est 12 fois, puis 20 fois critique. Sur les cartes de corrélation, le trait bleu représente la dérive prévue dans l'hypothèse où le mouvement zonal advecte les structures. Nous pouvons remarquer que sur les deux cartes, ce trait bleu rencontre plusieurs taches de corrélation. Le mouvement zonal est donc une source de dérive des structures. Cependant, ces taches correspondent à un coefficient de corrélation faible, et ce coefficient est plus faible dans le cas $Ra/Ra_c = 20$ que dans le cas $Ra/Ra_c = 12$. La structure des cellules change donc de manière significative dans l'intervalle de temps qui sépare leur passage devant chaque sonde.

Dans les deux cas présentés, les coefficients de corrélation les plus importants se trouvent dans le domaine des décalages en temps positifs, correspondant à une dérive prograde de certaines structures. Cette observation est évidemment incompatible avec une explication de la dérive basée sur le mouvement zonal, et cela suggère que des ondes de Rossby sont encore présentes dans les deux écoulements, malgré l'écart important à la criticalité. Sur ce point, les modèles numériques de la section 3.5.3 apporteront des éléments supplémentaires.

La figure 2.18 présente une expérience de corrélation réalisée dans le gallium liquide. Une partie importante du signal est perdue près de l'extérieur, du fait des echos saturants induits par les réflexions multiples à l'interface cuivre-gallium.

Près du manchon, la plus forte tache de corrélation est en fait une anti-corrélation: les deux sondes voient simultanément les deux côtés d'une même cellule. Un peu plus loin du manchon, une forte tache de corrélation est en accord avec la prédiction associée au mouvement zonal rétrograde. Autour de

050 035704 3

Univ. J. Fourier - O.S.U.G.
MAISON DES GEOSCIENCES
DOCUMENTATION
B.P. 53
F. 38041 GRENOBLE CEDEX
Tél. 04 76 63 54 27 - Fax 04 76 51 40 58
Mail : ptalour@ujf-grenoble.fr

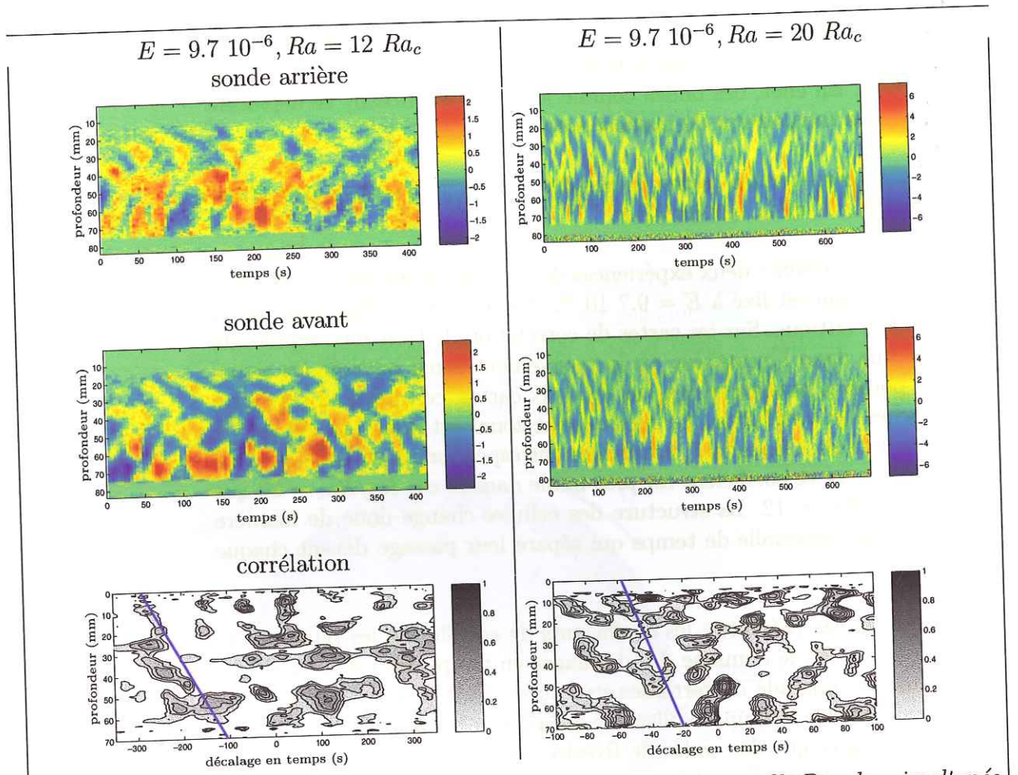


FIG. 2.17 – *Expériences de corrélation réalisées dans l'eau. Deux profils Doppler simultanés sont enregistrés (en haut et au milieu). En bas, carte de corrélation réalisée profondeur par profondeur. Le trait bleu représente la corrélation qui doit apparaître du fait de la dérive induite par le mouvement zonal.*

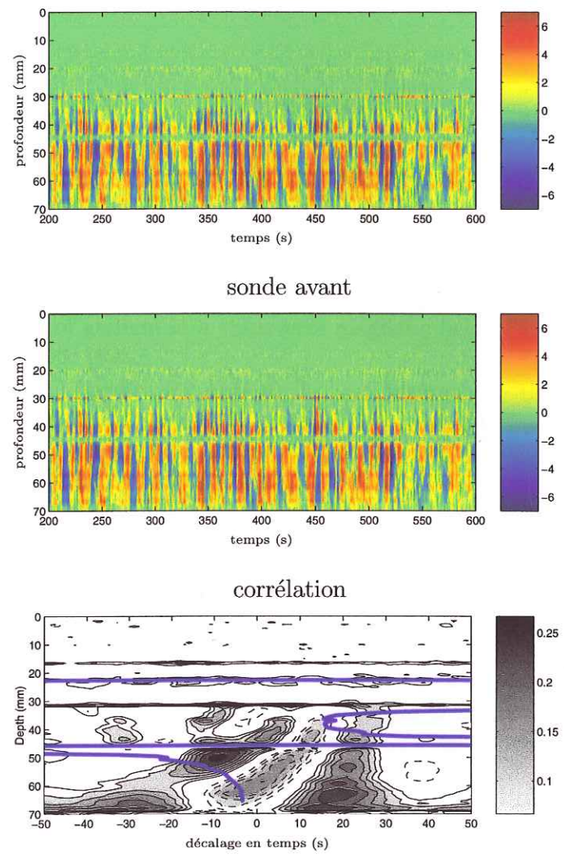


FIG. 2.18 – *expérience de corrélation réalisées dans le gallium liquide. Sur la carte de corrélation, les traits pointillés délimitent les taches d'anti-corrélation.*

la profondeur 45 mm, les deux profils Doppler montrent un «blanc», qui correspond à un pic d'echo saturant le signal, est n'est pas l'effet de l'annulation du mouvement zonal à cet endroit.

La carte de corrélation présente aussi, comme celles de la figure 2.17, une forte tache de corrélation dans la direction prograde. Ceci suggère ici encore que les ondes de Rossby jouent un rôle important dans la dérive des structures. Nous avons maintenant besoin d'un modèle numérique pour confirmer les quelques hypothèses que nous venons de formuler.

Références du chapitre 2.

Ardes, M., Busse, F. H., and Wicht, J., Thermal convection in rotating spherical shells, *Phys. Earth Planet. Int.*, *99*, 55–67, 1997.

Aurnou, J. M. and Olson, P., Rotating magnetoconvection experiments in liquid gallium, *Submitted to J. Fluid. Mech.*, 2001.

Beyer, R. T. and Ring, E. M., *Liquid metals: chemistry and physics*, Marcel Dekker, N.Y., 1972.

Brito, D., Cardin, P., Nataf, H.-C., and Marolleau, G., Experimental study of a geostrophic vortex of gallium in a transverse magnetic field, *Phys. Earth Planet. Int.*, *91*, 77–98, 1995.

Brito, D., Nataf, H.-C., Cardin, P., Aubert, J., and Masson, J., Ultrasonic Doppler velocimetry in liquid gallium, in press, *Experiments In Fluids*, 2001.

Busse, F. H., Thermal instabilities in rapidly rotating systems, *J. Fluid Mech.*, *44*, 441–460, 1970.

Busse, F. H. and Carrigan, C. R., Laboratory simulation of thermal convection in rotating planets and stars, *Science*, *191*, 81–83, 1976a.

Busse, F. H. and Carrigan, C. R., Convection induced by centrifugal buoyancy, *J. Fluid Mech.*, *62*, 579–592, 1976b.

Cardin, P. and Olson, P., An experimental approach of thermo-chemical convection in the Earth's core, *Geophys. Res. Let.*, *19*, 1995–1998, 1992.

Cardin, P. and Olson, P., Chaotic thermal convection in a rapidly rotating spherical shell: consequences for flow in the outer core, *Phys. Earth Planet. Int.*, *82*, 235–239, 1994.

Carrigan, C. R. and Busse, F. H., An experimental and theoretical investigation of the onset of convection in rotating spherical shells, *J. Fluid Mech.*, *126*, 287–305, 1983.

Chamberlain, J. A. and Carrigan, C. R., An experimental investigation of convection in a rotating sphere subject to time-varying thermal boundary conditions, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, *8*, 303–327, 1986.

Chandrasekhar, S., *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Clarendon, Oxford, 1961.

Christensen, U., Olson, P., and Glatzmaier, G. A., A dynamo model interpretation of geomagnetic field structures, *Geophys. Res. Let.*, *25*, 1565–1568, 1998.

Christensen, U. R., Excitation of zonal flow by deep convection in the major planets, poster Communication at European Geophysical Society, 2001.

Christensen, U. R., Aubert, J., Busse, F. H., Cardin, P., Dormy, E., Gibbons, S., Glatzmaier, G. A., Honkura, Y., Jones, C. A., Kono, M., Matsushima, M., Sakuraba, A., Takahashi, F., Tilgner, A., Wicht, J., and Zhang, K., A numerical dynamo benchmark, in press, *Phys. Earth Planet. Int.*, 2001.

Cordero, S., Experiments of convection in a rotating hemispherical shell: transition to chaos, *Geophys. Res. Let.*, *20*, 2587–2590, 1993.

Cordero, S. and Busse, F. H., Experiments of convection in a rotating hemispherical shell: transition to a quasi periodic state, *Geophys. Res. Let.*, *19*, 733–736, 1992.

Dormy, E., Cardin, P., and Jault, D., MHD flow in a slightly differentially rotating spherical shell, with conducting inner core, in a dipolar magnetic field, *Earth Plan. Sci. Let.*, *160*, 15–30, 1998.

Glatzmaier, G. A. and Olson, P., Highly supercritical thermal convection in a rotating spherical shell: centrifugal vs. radial gravitiy, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, *70*, 113–136, 1993.

Glatzmaier, G. A. and Roberts, P. H., A three dimensional self consistent computer simulation of the geomagnetic field reversal, *Nature*, *377*, 203–209, 1995.

Greenspan, H. P., *The theory of rotating fluids*, Breukelen Press, 1968.

Grote, E., Busse, F. H., and Tilgner, A., Regular and chaotic spherical dynamos, *Phys. Earth Planet. Int.*, *117*, 259–272, 2000.

Hulot, G., Le Mouël, J.-L., and Jault, D., The flow at the Core-Mantle boundary: symmetry properties, *J. Geomag. Geoelectr.*, *42*, 857–874, 1990.

Jault, D., Gire, C., and Le Mouël, J. L., Westward drift, core motions and exchanges of angular momentum between core and mantle, *Nature*, *333*, 353–356, 1988.

Jones, C. A., Convection-driven geodynamo models, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, *358*, 873–897, 2000.

Jones, C. A., Soward, A. M., and Mussa, A. I., The onset of thermal convection in a rapidly rotating sphere, *J. Fluid Mech.*, *405*, 157–179, 2000.

Labrosse, S., Poirier, J. P., and Le Mouel, J. L., On cooling of the earth's core, *Phys. Earth Planet. Int.*, *99*, 1–17, 1997.

Okada, K. and Ozoe, H., Transient responses of natural convection heat transfer with liquid gallium under an external magnetic field in either the x, y, or z direction, *Ind. Eng. Chem. Res.*, *31*, 700–706, 1992.

Pedlosky, J., *Geophysical fluid dynamics*, Springer, New-York, 1987.

Plaut, E. and Busse, F. H., Low prandtl number convection in a rotating cylindrical annulus., *Submitted to J. Fluid. Mech.*, 2001.

Roberts, P. H., On the thermal instability of a self gravitating fluid sphere containing heat sources, *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A*, *263*, 93–117, 1968.

Sabot, J.-L. and Lauvray, H., Gallium and gallium compounds, in *Encyclopedia of Chemical technology*, vol. 12, pp. 299–317, Kirk-Othmer, 1995.

Sommeria, J., Experimental study of the two-dimensional inverse energy cascade in a square box, *J. Fluid Mech.*, *170*, 139–168, 1986.

Stacey, F. D., *Physics of the Earth*, Brookfield Press, 1992.

Sumita, I. and Olson, P., Laboratory experiments on high Rayleigh number thermal convection in a rapidly rotating hemispherical shell, *Phys. Earth Planet. Int.*, *117*, 153–170, 2000.

Sun, Z. P., Schubert, G., and Glatzmaier, G. A., Transition to chaotic thermal convection in a rapidly rotating sphericall shell, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, *69*, 95–131, 1993.

Takeda, Y., Velocity profiles measurements by ultrasonic doppler shift method, *Int. J. Heat Fluid Flow*, *8*, 313–, 1986.

Tilgner, A. and Busse, F. H., Finite amplitude convection in rotating spherical fluid shells, *J. Fluid Mech.*, *332*, 359–376, 1997.

Zhang, K., Spiralling columnar convection in rapidly rotating spherical shells, *J. Fluid Mech.*, *236*, 535–556, 1992.

Zhang, K. and Gubbins, D., Scale disparities and magnetohydrodynamics in the Earth's core, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, *358*, 899–920, 2000.

Chapitre 3

Modèle numérique de la convection dans le noyau terrestre.

3.1 Introduction.

3.1.1 Bilan de l'expérience.

La partie expérimentale de ce travail nous a permis d'obtenir des lois d'échelle quantitatives pour la convection dans une sphère en rotation. Nous avons décrit avec succès les mouvements convectifs et zonaux avec le modèle quasigéostrophique bi-dimensionnel de Cardin et Olson (1994). Nous avons mis en évidence et mesuré le mouvement zonal, qui peut devenir plus grand que la vitesse convective lorsque le nombre de Reynolds de l'écoulement augmente. Nous avons établi que ce mouvement est alimenté par le transfert d'énergie dû aux non-linéarités, et qu'il est freiné par le frottement sur la sphère externe, à travers les couches d'Ekman. Plusieurs questions ouvertes ont surgi à la suite de cette étude expérimentale:

- Quelle est la structure locale de l'écoulement, et comment interpréter les profils Doppler expérimentaux? Quel est le lien entre l'axe des temps de ces diagrammes, le mouvement zonal, la dérive des ondes de Rossby?
- Quels sont exactement les régimes dynamiques, thermiques de l'écoulement?
- Quel est le mécanisme de création du mouvement zonal? Pourquoi, bien que l'écoulement soit chaotique, la corrélation des vitesses radiales et latérales qui donne naissance aux contraintes de Reynolds est maintenue? Ce mouvement peut-il saturer lorsqu'il devient trop fort (plus fort que le mouvement convectif, dans lequel il trouve sa source)?
- Comment décrire la forme de turbulence bi-dimensionnelle qui prend

place dans l'écoulement?

La voie expérimentale n'est pas une stratégie d'investigation optimale pour répondre à ces questions, car elles réclament la connaissance de toutes les composantes des champs (vitesse, température, vorticité) du problème, avec une bonne résolution d'espace et de temps. Or, la méthode Doppler ne nous donne accès qu'a une composante à la fois, avec une résolution fonction du bruit et des limites de l'appareil. De plus, les mesures thermiques sont en général ponctuelles.

C'est la raison pour laquelle nous avons choisi de répondre à ces questions en utilisant la modélisation numérique.

3.1.2 Repères bibliographiques.

Historiquement, c'est d'abord le problème du seuil de convection qui a motivé les études numériques (Zhang et Busse, 1987; Zhang, 1992, 1993). Il s'agissait de retrouver les ondes de Rossby thermiques au seuil, leur structure caractéristique spirallée, ainsi que les lois de puissances $Ra_c \propto E^{-4/3}$, $m_c \propto E^{-1/3}$, $\omega_c \propto E^{-2/3}$ concernant respectivement le nombre de Rayleigh critique, le mode critique et la pulsation du mode critique, obtenues théoriquement dans des études telles que Busse (1970), et confirmées par les premières expériences de laboratoire telles que Carrigan et Busse (1983).

Un peu plus tard, la convection d'amplitude finie a commencé à être étudiée (Sun et al., 1993; Glatzmaier et Olson, 1993; Ardes et al., 1997; Tilgner et Busse, 1997; Grote et al., 2000). Tous ces modèles sont tridimensionnels, et pour résoudre les fines couches limites telles que les couches d'Ekman (de taille $O(E^{1/2})$), et les petites échelles crées par la non-linéarité (d'ordre $1/Re$, où Re est le nombre de Reynolds), la puissance de calcul requise est énorme. C'est pourquoi ces études ont adopté des nombres d'Ekman assez hauts (supérieurs à 10^{-5}), et n'ont pas investi des régimes très sur-critiques (jusqu'à 50 fois le nombre de Rayleigh critique). Les principaux résultats sont les suivants:

– la structure bi-dimensionnelle de l'écoulement est une caractéristique robuste lorsque le nombre d'Ekman est suffisamment petit (Sun et al., 1993). Dans ce contexte, la composante cylindrique de la gravité est la seule dynamiquement importante (Glatzmaier et Olson, 1993).

– L'onde de Rossby, et son motif de convection en cellules périodiques, et spirallées peut être rapidement déstabilisée en augmentant le nombre de Rayleigh (Sun et al., 1993; Ardes et al., 1997; Tilgner et Busse, 1997).

– Dès que les non-linéarités sont présentes dans le système, un mouvement

zonal moyen apparaît. Ce mouvement zonal peut être forcé par le vent thermique, qui résulte de la différence de géométrie entre isothermes et isogravités, ou par les transferts d'énergie liés au terme non-linéaire. Dans le cas où ce mouvement zonal n'est pas freiné (Grote et al., 2000), il peut devenir suffisamment fort pour déchirer les cellules de convection, processus de rétroaction négative qui aboutit à l'intermittence temporelle.

Une autre voie de modélisation a été adoptée par Cardin et Olson (1994). Puisque la bi-dimensionalité est une contrainte forte de l'écoulement, et puisque nous attendons que cette contrainte soit d'autant plus forte que le nombre d'Ekman est bas, les auteurs de cette étude ont établi un modèle quasigéostrophique 2D non-linéaire, en se basant sur l'analyse locale de Busse (1970). Ce modèle a servi de base à l'analyse en lois d'échelles de l'expérience, avec succès.

Il paraît donc naturel de reprendre ce modèle, pour aller plus loin dans la description locale de la convection non-linéaire. Toutefois, nous avons essayé de l'améliorer, à la lumière de ce que l'expérience a pu nous apprendre sur les ingrédients importants d'une modélisation pertinente:

– la gravité du modèle Cardin et Olson (1994) ne variait pas avec le rayon. Il est simple d'introduire une gravité centrifuge à géométrie cylindrique.

– Cardin et Olson (1994) laissaient la viscosité dans le volume freiner le mouvement zonal. Nous avons établi expérimentalement qu'à ce niveau, il était essentiel d'introduire le frottement sur les couches d'Ekman proches de la sphère. Plaut et Busse (2001) ont d'ailleurs réalisé une étude non-linéaire dans une géométrie d'anneau; ils ont conclu que la modélisation du frottement du mouvement zonal était essentielle.

Nous disposons de tous les outils pour insister sur la validation quantitative de ce modèle, au seuil et dans le régime d'amplitude finie, en le comparant aux théories, lorsqu'elles existent, aux études numériques basées sur des simulations tridimensionnelles, et aux données expérimentales.

Après avoir passé en revue les équations du modèle, nous faisons (section 3.3) l'analyse linéaire de l'instabilité convective avec le modèle 2D, et nous comparons ses résultats aux résultats théoriques et numériques 3D. Ensuite (section 3.4), nous passons à l'analyse non-linéaire du modèle. Nous terminons ce chapitre en comparant un calcul non-linéaire 2D à un calcul non-linéaire 3D, et en produisant des profils Doppler synthétiques pour une comparaison structurelle approfondie avec l'expérience (section 3.5).

3.2 Équations.

Le modèle quasigéostrophique que nous avons implémenté est décrit théoriquement dans le chapitre 1. Les détails techniques de l'implémentation se trouvent dans l'annexe B. Nous rappelons ici les trois équations qui sont résolues, pour obtenir le champ de vorticité équatorial ω, la température moyennée sur la direction verticale $< T >$ et le mouvement axisymétrique $\overline{u_\theta}$, moyenné dans la direction latérale:

- L'équation de la vorticité potentielle équatoriale (1.23), dans laquelle nous négligeons le frottement d'Ekman des modes convectifs sur la sphère externe devant la circulation forcée par la pente:

$$\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}t} = \nabla_e^2\omega + Ra\frac{\partial T}{\partial\theta} \tag{3.1}$$

avec

$$\Lambda = \omega - \frac{2}{E}\ln L$$

et

$$L = r_e\sqrt{1-\left(\frac{r}{r_e}\right)^2}.$$

r, θ sont un système de coordonnées polaires, ∇_e est l'opérateur différentiel équatorial associé.

- L'équation de la température (1.26):

$$\frac{\partial < T >_z}{\partial t} + (\mathbf{u}_e\cdot\nabla_e) < T >_z = P^{-1}\nabla_e^2 < T >_z, \tag{3.2}$$

avec $< T >_z = < \Theta >_z + < T_s >_z$: la température est la somme du profil conductif de température et de la perturbation convective, toutes deux moyennées sur la verticale.

- L'équation du mouvement zonal géostrophique $\overline{u_\theta} = < u_\theta >_{z,\theta}$ (1.28), dans laquelle nous avons inclu le frottement d'Ekman sur la sphère externe:

$$\frac{\partial\overline{u_\theta}}{\partial t} + \overline{(\mathbf{u_e}\cdot\nabla_e)\,u_\theta} + \frac{E^{-1/2}}{L\sqrt{\mathbf{n}\cdot\mathbf{e_z}}}\overline{u_\theta} = \nabla_e^2\overline{u_\theta} - \frac{\overline{u_\theta}}{r^2}. \tag{3.3}$$

Dans toutes les simulations, les conditions aux limites adoptées pour la vitesse sont le non-glissement («no-slip») aux deux frontières du modèle. Pour la température, les conditions aux limites sont la différence de température fixée aux frontières du domaine (mode de chauffage différentiel). Cependant, dans l'étude au seuil, nous adopterons temporairement le mode de chauffage interne, en vue de comparer aux études théoriques et numériques existantes.

3.3 Résultats au seuil de convection.

Nous avons établi numériquement les paramètres critiques de la convection au seuil dans le modèle 2D, en utilisant la méthode itérative décrite dans le chapitre 1 sur le système d'équations couplées 3.1-3.2, réduites à leur partie linéaire.

Le but de cette section est principalement de montrer que l'on peut retrouver avec une approximation 2D la plupart des résultats asymptotiques (lorsque $E \to 0$) obtenus précédemment en 3D. Nous nous intéressons d'abord au chauffage différentiel, puis au chauffage interne. Dans ces deux cas, nous fixons le nombre de Prandtl P à 1, la valeur couramment retenue pour les études asymptotiques de référence.

3.3.1 Chauffage différentiel, $P = 1$.

Nécessité d'adapter le profil thermique conductif.

Nous dénoterons exceptionnellement ici le rayon cylindrique par s et le rayon sphérique par r.

Cardin et Olson (1994) ont utilisé l'approximation quasigéostrophique pour faire l'étude de stabilité linéaire du système. Les résultats qu'ils trouvent ne sont pas en accord avec ceux que nous avons obtenu numériquement, avec une simulation tridimensionnelle, dans le chapitre 2. Nous cherchons d'abord à comprendre l'origine de ce désaccord.

Nous avons vu dans le chapitre 1 que l'équation de température (3.2) est une équation pour la température moyennée dans la direction de l'axe, négligeant le transport et la diffusion dans cette direction. Nous proposons donc la démarche suivante: pour reproduire au mieux la situation 3D, il faut remplacer le champ de température conductif du modèle 2D T_{s2D} par un champ de température conductif qui soit la moyenne, le long d'une colonne de fluide, du champ de température conductif 3D T_{s3D}.

- en 2D ce profil est

$$T_{s2D} = \frac{\ln\left(\frac{s}{s_i}\right)}{P\ln\left(\frac{s_e}{s_i}\right)}$$

- en 3D il vaut

$$T_{s3D} = \frac{r_e}{P(r_e - r_i)}\left(-\frac{r_i}{r} + 1\right)$$

Nous allons montrer que si nous remplacons, dans la simulation, le profil conductif 2D par un profil hybride résultant de l'opération de moyennage vertical du profil conductif 3D, nous retrouvons un accord bien meilleur. Tout d'abord on réexprime le profil 3D à l'aide de coordonées cylindriques s et z correspondant au rayon sphérique r:

$$T_{s3D} = \frac{r_e}{P(r_e - r_i)}\left(-\frac{r_i}{\sqrt{s^2+z^2}}+1\right),$$

et on moyenne sur une hauteur de fluide $2L$:

$$< T_{s3D} >_z = \frac{r_e}{P(r_e - r_i)}\left(-\frac{r_i}{L(s)}\text{arcsh}\left(\frac{L}{s}\right)+1\right).$$

Ce profil ne vaut pas 0 en $s = r_i$, car l'intégration sur une verticale tangente à la graine rencontre des isothermes 3D. Ce qui est intéressant, c'est d'essayer de superposer les deux profils statiques (figure 3.1). Soit le profil

$$T' = \frac{< T_{s3D} >_z (s) - < T_{s3D} >_z (r_i)}{1 - P < T_{s3D} >_z (r_i)}$$

Ce profil est représenté en pointillés sur la figure 3.1. La différence avec le profil statique 2D est minime, si ce n'est que nous réalisons qu'adopter ce dernier profil nous fait commettre une erreur d'un facteur $1/(1-PT_{s3D}(r_i)) = 2.247$ sur le nombre de Rayleigh critique. Ce coefficient est indépendant de P, purement géométrique. Il nous suffit donc, pour que les résultats au seuil aient du sens, de corriger le nombre de Rayleigh de ce facteur, tout en conservant le profil conductif bidimensionnel pour la cohérence du modèle.

Résultats.

Pour comparer nos résultats à ceux de Dormy (1997), obtenus avec une simulation 3D, nous optons pour les conditions suivantes: $P = 1$, rapport d'aspect entre les frontières de 0.35, conditions aux limites de no-slip (vitesse) et de chauffage différentiel (température). Nous reportons dans le tableau 3.1 le résultat de la comparaison 3D/ 2D. Ces résultats sont représentés graphiquement sur la figure 3.2. Sur la figure 3.3, nous comparons la structure radiale des solutions 2D et 3D. Les fonction utilisées pour la comparaison sont ici le carré de la vitesse radiale, et le carré de la perturbation de température, moyennées dans la direction latérale, prises dans le plan équatorial.

La figure 3.2 montre que les lois d'échelle classiques sont asymptotiquement vérifiées par les résultats 2D. La limite atteinte par le code 2D, celle du code 3D et la théorie locale de Dormy et al. (2000) sont distantes de moins de 10 %. Cette théorie locale reprend la méthode de Roberts-Busse (Busse, 1970) et

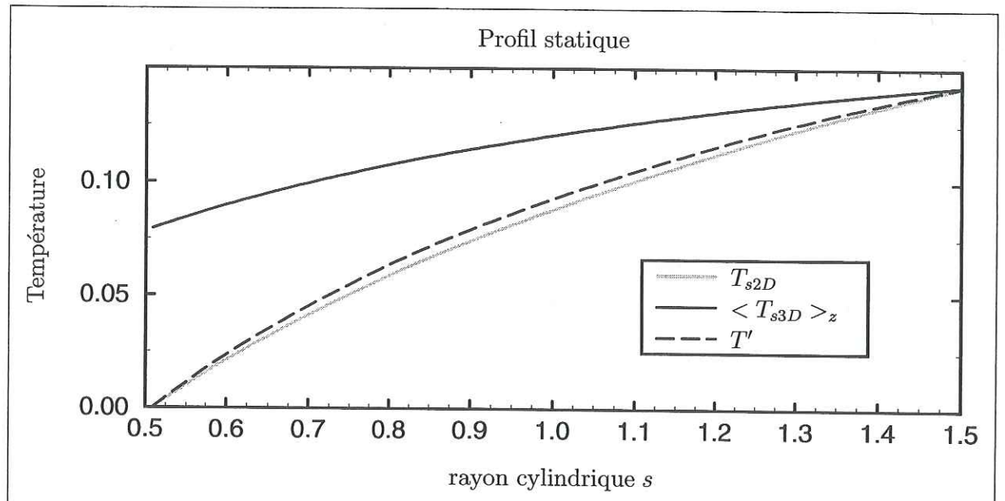


FIG. 3.1 – *Profils statiques de température pour $P = 7$. Le profil 3D moyenné sur la verticale $< T_{s3D} >$ diffère peu du profil 2D T_{s2D}, si ce n'est par un facteur de proportionnalité de nature géométrique, indépendant du nombre de Prandtl.*

Dimension	E	Ra_c	m_c	ω_c
3D	$4.73\ 10^{-3}$	$8.9\ 10^{3}$	3	2.99
3D	$4.73\ 10^{-4}$	$7.93\ 10^{4}$	5	16.43
3D	$4.73\ 10^{-5}$	$1.08\ 10^{6}$	9	232.4
3D	$4.73\ 10^{-6}$	$1.71\ 10^{7}$	19	1202
2D	$4.73\ 10^{-3}$	$7.6\ 10^{3}$	3	16.54
2D	$4.73\ 10^{-4}$	$7.56\ 10^{4}$	6	88.1
2D	$4.73\ 10^{-5}$	$9.55\ 10^{5}$	11	385.1
2D	$4.73\ 10^{-6}$	$1.47\ 10^{7}$	21	1717
2D	10^{-7}	$1.75\ 10^{9}$	70	21297
2D	10^{-8}	$3.55\ 10^{10}$	147	99137
2D/3D	$4.73\ 10^{-4}$	0.85	1	5.5
2D/3D	$4.73\ 10^{-4}$	0.95	1.2	5.36
2D/3D	$4.73\ 10^{-5}$	0.88	1.2	1.65
2D/3D	$4.73\ 10^{-6}$	0.86	1.11	1.42

TAB. 3.1 – *Paramètres critiques pour $P = 1$, en chauffage différentiel.*

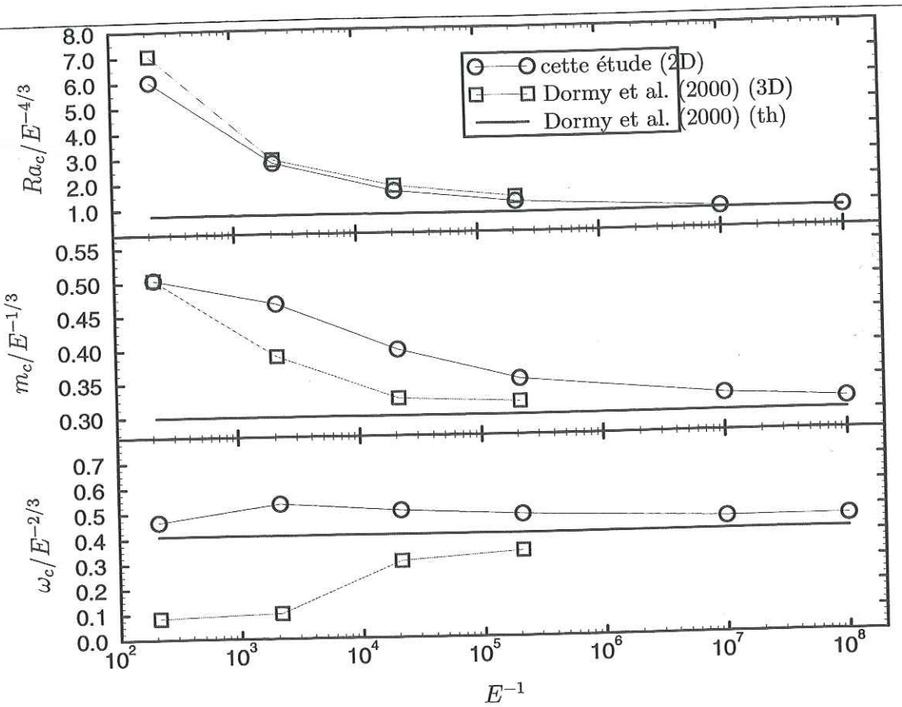


FIG. 3.2 – *Convergence des paramètres critiques lorsque $E \to 0$.*

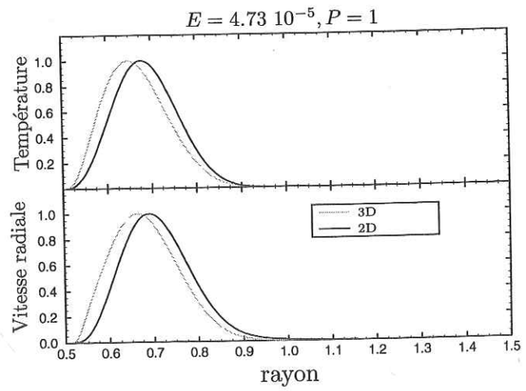


FIG. 3.3 – *Structure radiale de la solution dans l'espace réel.*

l'étend au cas du chauffage différentiel et des conditions aux limites de non-glissement.

Le désaccord entre codes 2D et 3D aux nombres d'Ekman typiques de 10^{-6} est dû au frottement des cellules de convection sur les couches d'Ekman de la sphère externe. Nous n'avons pas inclu ce frottement dans notre modèle parce qu'il est d'ordre $E^{1/2}$, et est donc dominé aux bas Ekman par la circulation verticale forcée par la pente. Zhang et Jones (1993) ont montré que lorsque l'on néglige ce frottement, ceci augmente significativement le numéro du mode critique et sa pulsation. Nos résultats sont en accord avec ces affirmations. La latitude critique à laquelle se développe la convection, et donc la structure radiale de celle-ci (figure 3.3) s'en trouvent modifiés.

On regarde enfin l'évolution radiale de la solution à différents Ekman (figure 3.4). On reporte ici le module de la fonction courant pour le mode critique, dans l'espace spectral. La taille radiale de la solution, ainsi que la taille de la couche limite pariétale, se mettent à l'échelle avec $E^{1/5}$, en accord avec Cardin et Olson (1994) , et l'étude locale d'instabilité (Dormy, communication personnelle).

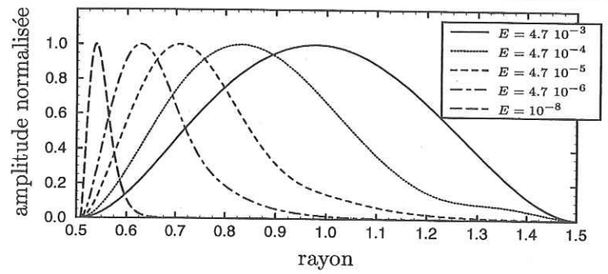


FIG. 3.4 – *Evolution du module de la solution dans l'espace spectral lorsque $E \to 0$.*

3.3.2 Chauffage interne, $P = 1$.

Pour le mode de chauffage interne, une théorie asymptotique exacte existe: Jones et al. (2000). C'est pourquoi il est intéressant de comparer les solutions 2D et 3D dans cette configuration. Dans ce mode, la solution se développe au cœur de la coquille sphérique, et on s'affranchit ainsi d'éventuels effets de bord (tels que l'équateur de la graine en 3D) qui peuvent être sources de différences entre les deux solutions.

Adaptation du profil conductif.

De même que précédemment, il faut adapter le profil conductif 3D. Nous reprenons la notation s pour le rayon cylindrique et r pour le rayon sphérique. Ce profil conductif est donné par l'équation:

$$\nabla^2 T_{s3D} = 3\beta,$$

β representant le taux de production de chaleur dû aux sources internes (Dormy, 1997).

Ceci implique un profil 3D

$$T_{s3D} = \frac{\beta r^2}{2} + T_0.$$

Intégrons le profil 3D sur une verticale de hauteur 2L. Le profil moyenné s'écrit:

$$< T_{s3D} > z = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} \frac{\beta(s^2+z^2)}{2} dz = \frac{\beta}{3}s^2 + T_0 + \frac{\beta}{6}r_e^2$$

Le profil statique 2D, issu de la même équation

$$\nabla_e^2 T_{s2D} = 3\beta,$$

donne

$$T_{s2D} = \frac{3}{4}\beta s^2.$$

Ainsi, le profil statique 2D est 9/4 fois plus fort que le 3D. Le nombre de Rayleigh critique 2D doit donc être multiplié par 9/4 pour correspondre au nombre de Rayleigh critique 3D.

Résultats

La figure 3.5 montre l'évolution des paramètres critiques, qui sont donnés numériquement dans la table 3.2. Nous disposons cette fois de deux points de comparaison: la théorie locale de Roberts-Busse et la théorie de Jones et al. La convergence est fortement retardée par rapport au cas du chauffage différentiel. Ceci est dû au fait que la convection se développe vers le milieu du domaine. A mesure que la pente des frontières augmente, il est de plus en plus difficile d'appliquer le modèle quasigéostrophique, car la circulation induite par la pente est de plus en plus forte, et le champ divergent $\mathbf{u}_{div}$ (voir chapitre 1) est de moins en moins négligeable. Ce modèle est donc de plus en plus faux à mesure que le rayon augmente.

Ainsi, nous ne pouvons discriminier, au nombre d'Ekman de 10^{-8} auquel nous sommes allés, si la limite Roberts-Busse ou la limite Jones sera atteinte. La figure 3.6 montre que le rayon cylindrique auquel l'instabilité se développe n'a pas, lui non plus, convergé suffisamment lorsque $E = 10^{-8}$, pour que nous puissions discriminer entre les deux théories.

Dimension	E	Ra_c	m_c	ω_c
2D	10^{-5}	$1.40\ 10^7$	19	$1.31\ 10^3$
2D	10^{-6}	$2.95\ 10^8$	43	$6.26\ 10^3$
2D	10^{-7}	$6.28\ 10^9$	93	$2.92\ 10^4$
2D	10^{-8}	$1.29\ 10^{11}$	207	$1.36\ 10^5$
3D	$4.73\ 10^{-5}$	$1.56\ 10^6$	13	$3.09\ 10^2$
3D	$1.50\ 10^{-5}$	$7.06\ 10^6$	20	$7.21\ 10^2$
3D	$4.73\ 10^{-6}$	$3.22\ 10^6$	30	$1.64\ 10^3$

TAB. 3.2 – *Paramètres critiques pour $P = 1$, en chauffage interne.*

3.3.3 Bilan

En chauffage différentiel, la solution 2D se rapproche asymptotiquement de la solution 3D, en ce qui concerne les paramètres critiques et la structure radiale de la solution. En chauffage interne, la convergence est beaucoup plus lente, du fait de la pente accrue des frontières à l'endroit où la convection se développe. Nous pouvons montrer qu'une source finie d'erreur subsiste dans le modèle quasigéostrophique lorsque $E \to 0$. Ce modèle prévoit en effet (voir chapitre 1) que la fonction $\mathbf{u_z}(z)$ doit être linéaire de la coordonnée z. Dormy et al. (2000) ont réalisé des calculs numériques de cette fonction pour $E \to 0$. Le résultat est en figure 3.7. La fonction n'est pas totalement linéaire. L'erreur est de plus fonction du rayon cylindrique. Il est donc normal que l'instabilité ne trouve pas le bon rayon critique. Cette erreur n'est pas énorme, puisque les paramètres critiques obtenus en 2D sont assez proches de ceux obtenus en 3D. Le code 2D simule quantitativement bien l'état de base sur lequel vont se construire les solutions non-linéaires.

3.3.4 Paramètres critiques pour l'expérience.

Dans toute la suite de ce chapitre, nous réalisons des calculs 2D dans le but de les comparer avec l'expérience: c'est pourquoi nous choisissons un rapport d'aspect de 4/11, des conditions aux limites de no-slip et de chauffage différentiel, un nombre de Prandtl de 7 (eau) ou 0.025 (gallium liquide).

Le tableau 3.3 donne les paramètres critiques obtenus pour les situations de l'expérience. On pourra comparer ces résultats avec ceux obtenus en 3D

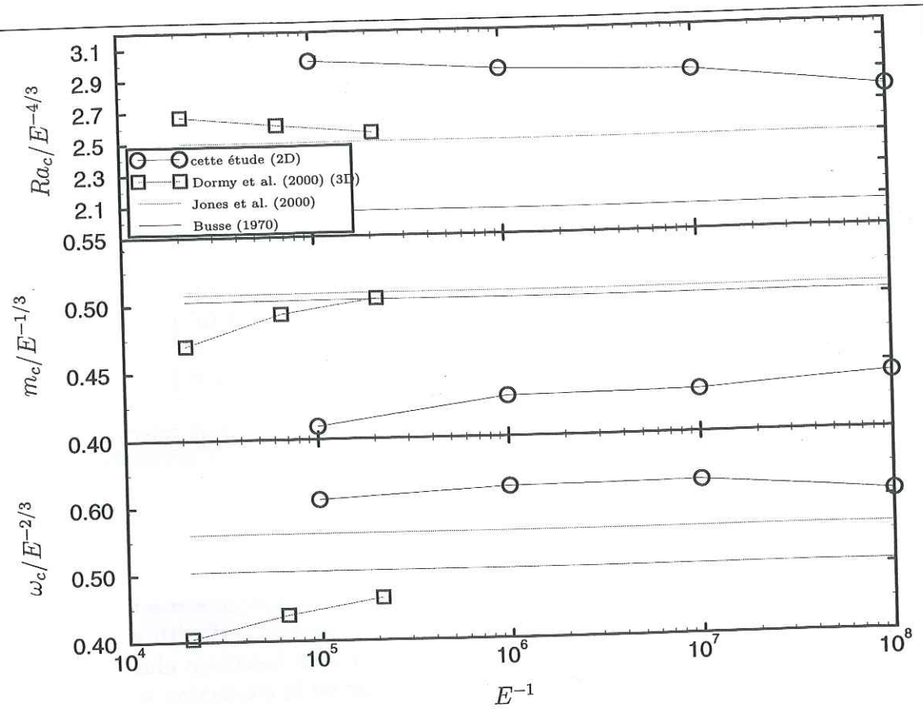


FIG. 3.5 – *Convergence des paramètres critiques lorsque $E \to 0$, dans le cas du chauffage interne.*

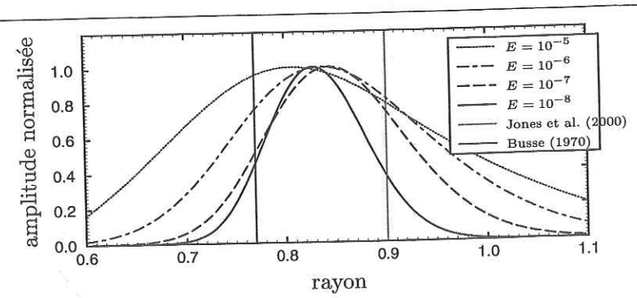


FIG. 3.6 – *Evolution de la structure radiale de la solution dans l'espace spectral lorsque $E \to 0$, dans le cas du chauffage interne.*

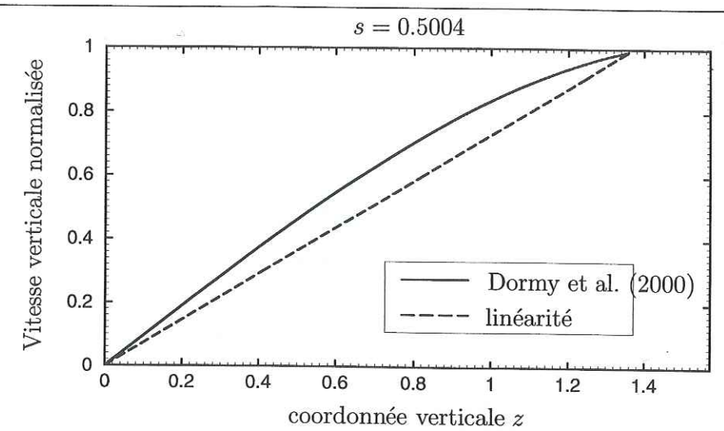


FIG. 3.7 – *Limite théorique, lorsque $E \to 0$, de la vitesse verticale convective induite par le mouvement radial, en fonction de la coordonnée verticale z, à la latitude $s = 0.5004$. L'écart à la linéarité (traits pointillés) ne tend pas vers 0 lorsque E tend vers 0. Les conditions théoriques sont chauffage interne, conditions aux limites de contraintes libres.*

dans l'article expérimental du chapitre 2. L'accord est bon, ce qui signifie que le modèle simule bien la variation du seuil avec le nombre de Prandtl.

P	E	Ω (rpm)	Ra_c	ΔT (K)	ω_c	τ_c (s)	m_c
7	$9.74\ 10^{-6}$	200	$1.11\ 10^{7}$	0.75	$2.47\ 10^{2}$	125	21
7	$4.87\ 10^{-6}$	400	$2.61\ 10^{7}$	0.44	$3.88\ 10^{2}$	79	26
7	$3.25\ 10^{-6}$	600	$4.32\ 10^{7}$	0.30	$5.06\ 10^{2}$	61	29
7	$2.44\ 10^{-6}$	800	$6.18\ 10^{7}$	0.26	$6.10\ 10^{2}$	51	32
0.025	$2.92\ 10^{-6}$	200	$5.12\ 10^{6}$	14.47	$9.76\ 10^{3}$	10.5	11
0.025	$1.46\ 10^{-6}$	400	$1.15\ 10^{7}$	8.10	$1.51\ 10^{4}$	6.8	16
0.025	$9.74\ 10^{-7}$	600	$1.82\ 10^{7}$	5.70	$2.00\ 10^{4}$	5.1	17
0.025	$7.31\ 10^{-7}$	800	$2.54\ 10^{7}$	4.49	$2.37\ 10^{4}$	4.3	20

TAB. 3.3 – *Valeurs critiques pour les paramètres atteints par l'expérience, obtenues en simulation 2D.*

La figure 3.8 représente deux exemples de tracés de la vorticité équatoriale du mode critique. Dans des conditions de no-slip, on peut remarquer que la couche limite interne contient beaucoup de vorticité.

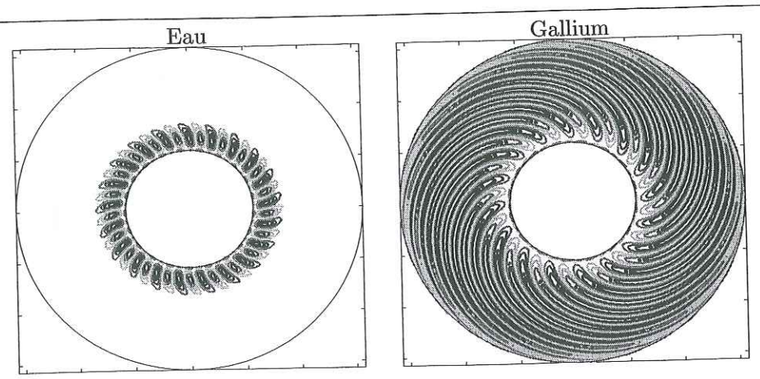


FIG. 3.8 – *Tracés de vorticité pour les ondes de Rossby au seuil, en chauffage différentiel. A gauche, mode critique 21 pour $P = 7$ (eau), dans la situation $E = 9.74\ 10^{-6}$; a droite: mode critique 16 pour $P = 0.025$ (gallium), dans la situation $E = 1.46\ 10^{-6}$.*

3.4 Étude non-linéaire du modèle

3.4.1 Espace des paramètres

La table 3.4 résume l'ensemble des expériences numériques que nous avons réalisées. Les paramètres a-priori tels que Ra, E, P sont listés dans cette table. Pour décrire les régimes dynamiques et thermiques de l'écoulement, nous aurons besoin de deux paramètres a-posteriori:

P	E	Ra/Ra_c	Ra_Q/Ra_c	Nombre de calculs	Re	Pe
7	$9.744\ 10^{-6}$	1.1–100	0.1–3000	12	1–500	1–3500
7	$2.436\ 10^{-6}$	1.1–20	0.1–200	8	1-160	1–1120
0.025	$1.462\ 10^{-6}$	1.05–10	0.7–30	8	150–7000	3–175

TAB. 3.4 – *Description des expériences numériques.*

- le nombre de Reynolds associé au phénomène de convection. Pour le définir, nous calculons la vitesse radiale moyenne du fluide comme suit: nous calculons l'énergie des modes non-axisymétriques E_{conv}, que nous appelerons énergie convective, nous la ramenons à l'unité de surface, et la moyennons dans le temps:

$$E_{conv} = \frac{1}{\pi(r_e^2 - r_i^2)} \iint \left(u_r^2 + u_\theta^2\right)_{m\neq 0} dS,$$

$$e_{conv} =< E_{conv} >_t .$$

La vitesse radiale moyenne U_r du fluide vaut

$$U_r = \sqrt{e_{conv}}, \tag{3.4}$$

et nous posons

$$Re = U_r, \tag{3.5}$$

du fait de l'adimensionnement choisi.

- le nombre de Péclet, défini par

$$Pe = P \cdot Re.$$

Nous définissons encore l'énergie zonale E_{zon} du fluide comme étant l'énergie contenue dans le mode axisymétrique, et la vitesse zonale moyenne U_θ comme

$$E_{zon} = \frac{1}{\pi(r_e^2 - r_i^2)} \iint (u_\theta)^2_{m=0}\, dS,$$

$$e_{zon} =< E_{zon} >_t,$$

$$U_\theta = \sqrt{e_{zon}}. \tag{3.6}$$

Pour comparer efficacement les simulations 2D avec l'expérience, nous aurons besoin de quantifier le flux de chaleur convecté par l'écoulement. En effet, nous verrons dans la section 3.5 que tous les paramètres a-priori étant fixés, l'écoulement du modèle 2D aura tendance à convecter plus de chaleur que l'écoulement expérimental. C'est un autre paramètre a-postériori qui intervient: le nombre de Nusselt. Ce nombre est défini comme le flux de chaleur total, divisé par le flux de chaleur conductif. On peut le calculer comme suit, à la frontière intérieure ou a la frontière extérieure:

$$Nu_i = \frac{< \frac{\mathrm{d}\overline{T}}{\mathrm{d}r}(r_i) >_{\theta,t}}{\frac{\mathrm{d}T_{s2D}}{\mathrm{d}r}(r_i)}, Nu_e = \frac{< \frac{\mathrm{d}\overline{T}}{\mathrm{d}r}(r_e) >_{\theta,t}}{\frac{\mathrm{d}T_{s2D}}{\mathrm{d}r}(r_e)}$$

et

$$Nu_i = Nu_e = Nu$$

$Ra_Q = Nu \cdot Ra$ est le nombre de Rayleigh basé sur le flux de chaleur. C'est ce paramètre qui intervient dans les lois d'échelle, et il permet de comparer expériences, simulations numériques 2D et 3D. Soit donc le paramètre critique

$$p = Ra_Q/Ra_c.$$

3.4.2 Régimes dynamiques de l'écoulement.

Nous avons anticipé, dans l'étude théorique du chapitre 1, l'importance de la représentation $U_\theta = f(\text{injection}, Re)$ (équation (1.34)). L'étude expérimentale nous a appris que $U_\theta/U_r = f(U_r)$ donnait une idée claire des régimes de l'écoulement. En la reproduisant numériquement (figure 3.9), Nous identifions ici quatre régimes, numérotés de 1 à 4. Nous allons maintenant décrire ces régimes, ainsi que les mécanismes des trois transitions.

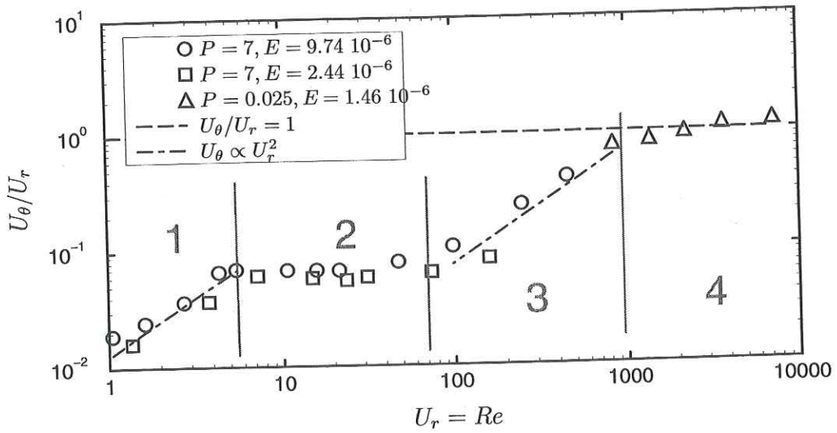


FIG. 3.9 – *Régimes dynamiques de l'écoulement.*

Régime 1

Les points numériques correspondant à ce régime ont été obtenus à $P = 7, E = 9.74\ 10^{-6}$ et $E = 2.46\ 10^{-6}$. La figure 3.10 montre la fonction courant et le mouvement zonal dans deux situations, le champ de température correspondant, et un exemple d'évolution temporelle du système.

Ce régime est un prolongement du seuil de convection. Il est stationnaire dans le temps et périodique en espace. Il correspond à une onde de Rossby thermique, non-linéairement stable, dont l'énergie sature. Le nombre de Reynolds croît comme $\sqrt{p-1}$, ce qui est compatible avec un mécanisme de transition de phase du premièr ordre, décrit par une équation de type Ginzburg-Landau.

La dérive prograde de cette onde est préservée. Néanmoins, un (faible) mouvement zonal rétrograde près du centre, puis prograde lorsque le rayon augmente, vient se superposer à cette dérive. Cardin et Olson (1994) ont expliqué ce mouvement zonal en invoquant les contraintes de Reynolds. Nous

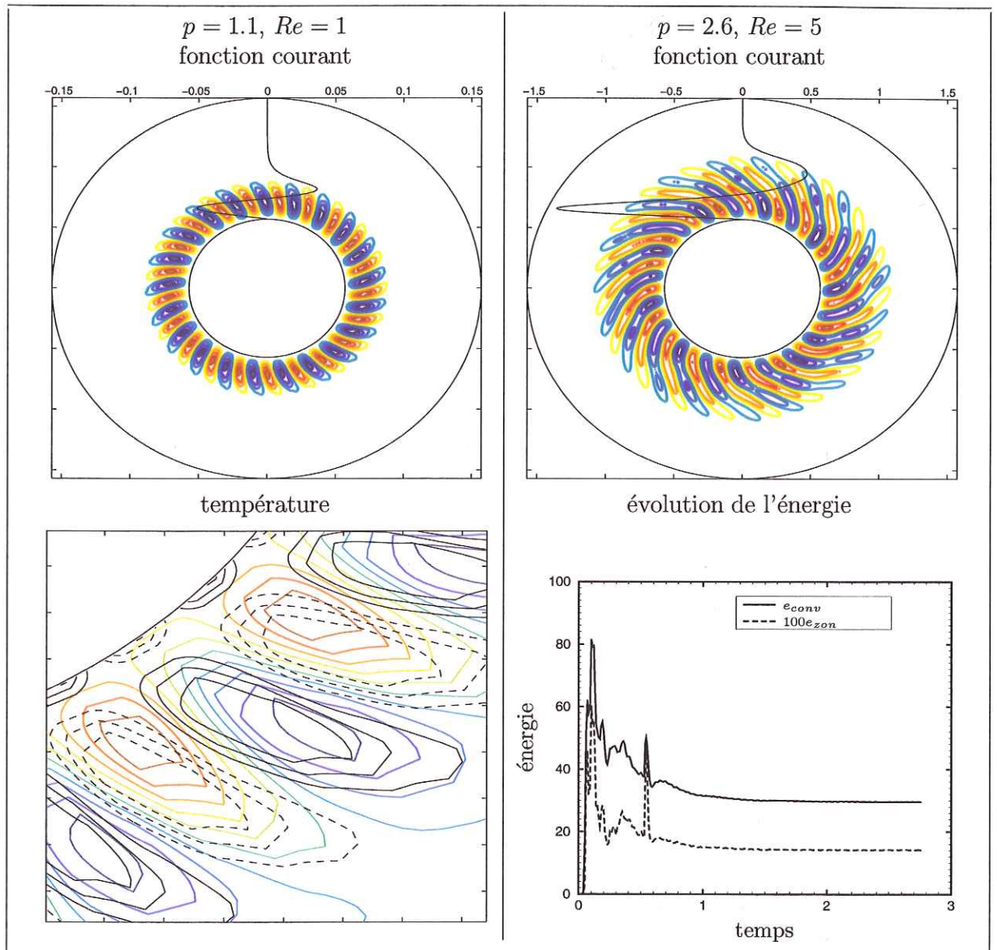


FIG. 3.10 – $P = 7, E = 9.7\ 10^{-6}$. *Le paramètre critique et le nombre de Reynolds sont indiqués en haut de chaque colonne. En haut: fonction courant (couleurs) et mouvement zonal (noir, son échelle est en haut du graphe). En bas à gauche: perturbation de température (couleurs) et vorticité (noir, les cyclones sont en traits pleins). En bas à droite: évolution temporelle de l'énergie convective, et de l'énergie zonale.*

reprenons ici cette explication.

Si nous reprenons l'équation 3.3 du mouvement zonal, nous pouvons écrire le terme non linéaire sous la forme:

$$\overline{(\mathbf{u_e} \cdot \nabla_e)\, u_\theta} = \overline{u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r}} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\overline{u_r u_\theta}\right)$$

La dernière égalité étant obtenue du fait de l'incompressibilité du fluide, et du caractère bi-dimensionnel de l'écoulement. On peut donc considérer que le cisaillement radial de la contrainte de Reynolds $\tau = \overline{u_r u_\theta}$ engendre le mouvement zonal. D'habitude, on emploie une description en termes de tenseur de Reynolds pour parler de turbulence, d'effets macroscopiques observés du fait de l'action moyenne des petites échelles. Ici, l'action des «petites» (non-axisymétriques, $m > 0$) échelles influence en moyenne la «grande» (axisymétriques, $m = 0$) échelle.

Ce mécanisme de création du mouvement zonal réclame deux ingrédients essentiels: la spirallisation des colonnes (sans cette dernière, il ne peut y avoir de variation radiale de la contrainte de Reynolds, donc de mouvement zonal), et un bon degré de corrélation entre u_r et u_θ. Ceci implique que le mouvement zonal se mettra à l'échelle comme:

$$U_\theta \propto U_r^2 \Rightarrow \frac{U_\theta}{U_r} \propto U_r$$

C'est la ligne pointillée tracée sur la figure 3.9.

L'onde de Rossby thermique est idéale pour ces deux conditions: la figure 3.11 illustre le lien entre cellules de convection spirallées et création de contraintes de Reynolds. Ces dernières prennent place entre deux cellules spirallées de vorticité opposée. Elles sont toujours assez nettement négatives, ce qui donne la moyenne latérale dessinée sur le graphe de droite de la figure 3.11. Pour mémoire, la forme du mouvement zonal est rappelée en-dessous. On remarque sur cette figure que près de la frontière interne, le mouvement zonal a une pente non-nulle, ce qui signifie que ce dernier exerce une contrainte visqueuse sur la paroi. La taille radiale de la zone sur laquelle se développe le mouvement zonal correspond à la taille radiale des cellules de convection.

Nous essayons d'éclaircir cela en traçant les différentes forces en présence dans l'équation qui régit les mouvements axisymétriques (figure 3.12). La friction d'Ekman est évidemment toujours résistante. Près des frontières du domaine, cette résistance est contrée par la viscosité dans le volume: l'entraînement par le fluide rapide du centre est à l'origine de forces motrices. À l'intérieur du fluide, le forçage non-linéaire devient dominant, et la viscosité vient ajouter sa résistance au frottement d'Ekman. Ainsi, le couple visqueux que le fluide exerce sur les parois est dû à la nécessite d'équilibrer le couple crée par le forçage non-linéaire sur le fluide.

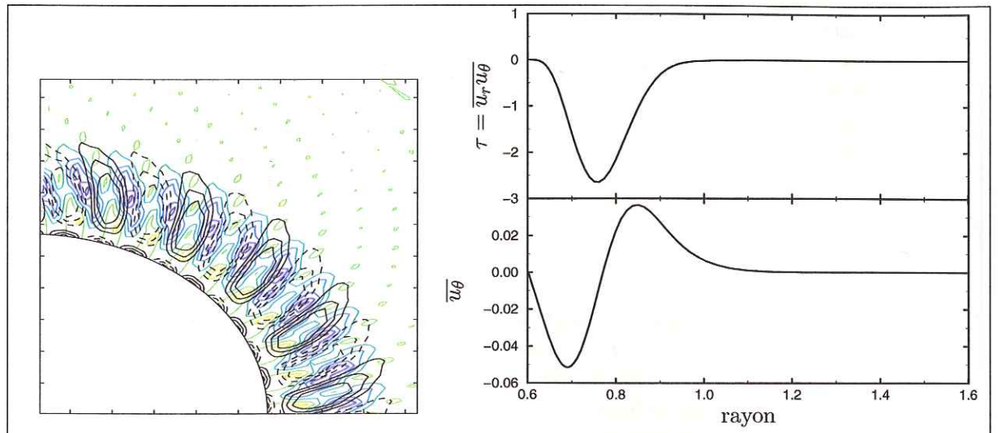


FIG. 3.11 – *Gauche: Localisation des contraintes de Reynolds (couleurs) par rapport aux structures de vorticité (les traits pleins dont les anticyclones. Droite: Contraintes de Reynolds moyennes et mouvement zonal ($P = 7$, $p = 1.1$, $E = 9.7\ 10^{-6}$).*

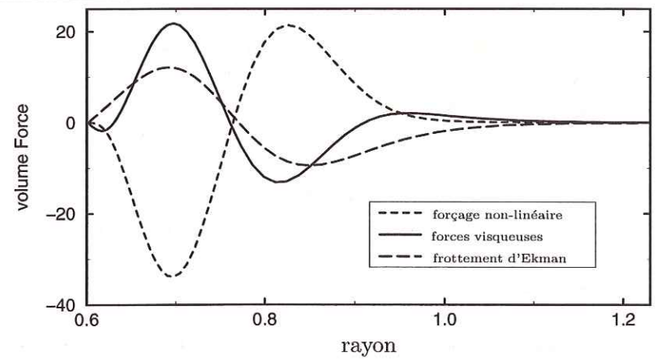


FIG. 3.12 – *Équilibre des forces volumiques produisant le mouvement zonal. La situation étudiée est stationnaire en temps ($P = 7, p = 1.1, E = 9.7\ 10^{-6}$).*

Transition chaotique et régime 2.

À mesure que le nombre de Reynolds de l'écoulement augmente, l'advection dans la direction radiale prend de la force. Cela implique que l'onde de Rossby va voir sa taille radiale augmenter (on le voit sur la figure 3.10). Cela implique aussi et surtout que l'échelle de temps des phénomènes inertiels va finir par égaler l'échelle de temps de l'onde de Rossby. On peut attendre alors que les effets inertiels fassent perdre au système sa périodicité unique. Le critère peut s'énoncer ainsi: dans un temps $2\pi/\omega_c$, l'advection radiale est suffisante pour déplacer un volume de fluide sur la taille d'une structure convective $2\pi/2m_c$, où encore:

$$U_r = Re = \frac{\omega_c}{2m_c}$$

où ω_c, m_c sont respectivement la pulsation et le nombre d'onde de l'onde de Rossby au seuil. Pour $P = 7, E = 9.74\ 10^{-6}$ la condition donne $Re = 6$, et pour $E = 2.44\ 10^{-6}$ cela donne $Re = 10$. Ces valeurs sont en accord avec celles que l'on relève sur la figure 3.9 pour la limite du régime 1. Asymptotiquement, lorsque $E \to 0$, la mise à l'échelle de ce critère est:

$$U_r = Re = \frac{\omega_c}{2m_c} \propto E^{-1/3}.$$

Pour le noyau, avec $E \sim 10^{-14}$ et $Re \sim 10^8$, ce critère est vérifié.

À ce moment, des défauts apparaissent dans l'onde de Rossby, et le système adopte un comportement chaotique en temps (figure 3.13). Nous allons expliquer cette transition en faisant intervenir une première fois ici le concept de vorticité potentielle. Ce concept et les raisonnements qui s'y attachent sont fondamentaux pour la compréhension du modèle.

Les tracés du champ de température totale (statique et perturbation), présents sur la figure 3.14, montrent que les effets non-linéaires ont tendance à confiner le gradient thermique déstabilisateur dans une zone limitrophe appelée couche limite thermique (voir section 3.4.3 pour plus de détails). La diffusion de température, depuis le bord (froid à l'intérieur) du modèle, est le phénomène dominant dans cette couche. Le gradient de température peut devenir critique localement et un courant montant prend naissance. Du fluide de la couche limite est alors injecté dans un canal, qui est la base du panache naissant. L'épaisseur latérale de ce canal est telle que la gradient de température entre l'intérieur et l'extérieur de ce dernier soit du même ordre que le gradient de couche limite. Ce canal adopte donc la largeur de la couche limite. Ainsi, les courants montants, dans ce type de convection, sont généralement plus fins et plus forts que les courants descendants.

Le canal du panache est à l'origine d'un gradient latéral de température, qui, selon l'équation 3.1, est créateur de vorticité. Initialement, un cyclone est créé sur le côté prograde du canal, dans lequel $\partial T/\partial\theta > 0$, et un anticyclone

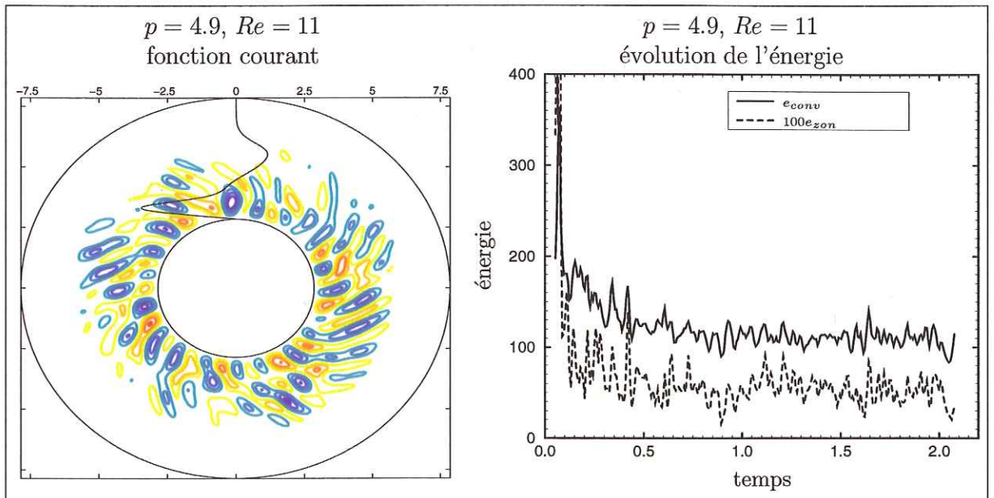


FIG. 3.13 – $P = 7, E = 9.7\ 10^{-6}$. *à gauche: fonction courant et mouvement zonal pour le régime chaotique 2. À droite: évolution temporelle de l'énergie.*

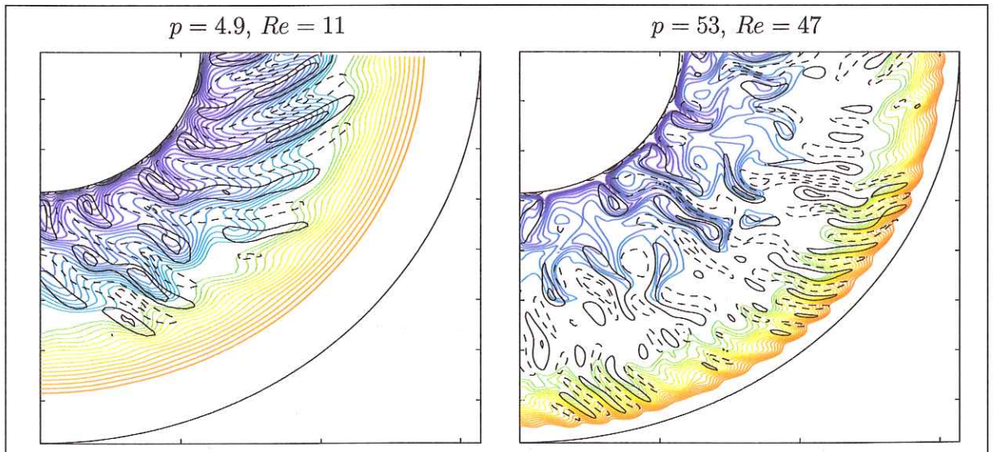


FIG. 3.14 – $P = 7, E = 9.7\ 10^{-6}$. *Tracés de la température totale (lignes colorées), et de la vorticité (lignes noires, les anticyclones sont en traits pleins).*

est créé sur le côté rétrograde du canal, dans lequel $\partial T/\partial\theta < 0$ (voir figures 3.14 et 3.17).

Hors des sources et des puits de vorticité, la vorticité potentielle $\Lambda = \omega - 2\frac{\ln L}{E}$ est une quantité matériellement conservée. L'évolution d'un vortex, loin des bords et en dehors du panache qui lui a donné naissance, est donc régie par la conservation de la vorticité potentielle. Cette loi de conservation peut être vue comme un échangeur entre la vorticité planétaire (la vorticité dûe à la rotation du référentiel contenant le fluide), et la vorticité du fluide dans son réferentiel. Un volume de fluide advecté depuis le bord intérieur du modèle vers des zones pour lesquelles L diminue doit donc acquérir de la vorticité anticyclonique, alors qu'un volume de fluide advecté depuis l'extérieur vers des zones de plus grand L doit devenir un cyclone. Dans le cas qui nous concerne ici, le champ de vitesse du panache montant advecte l'ensemble cyclone-anticyclone vers l'extérieur, donc vers les L décroissants. Ainsi, le cyclone doit s'affaiblir et l'anticyclone se renforcer. Cet effet peut être vu sur les deux dessins de température de la figure 3.14. Il est encore plus visible sur le dessin de température de la figure 3.17, dans lequel tout panache thermique montant s'enroule ultimement dans un anticyclone.

Ainsi, la combinaison de la disymétrie entre panaches montants et descendants, et de l'advection de la vorticité potentielle, déstabilisent l'onde de Rossby en renforcant ses anticyclones, qui advectent alors les cyclones dans leur champ proche. C'est de cette manière que le chaos spatio-temporel prend progressivement place.

Ce chaos supprime la spirallisation des structures, et leur régularité. Le mouvement zonal connaît donc une stagnation, qui est la caractéristique du régime 2.

régimes 3 et 4.

Le régime 3 est caractérisé par une reprise de la croissance linéaire de U_θ/U_r avec Re, et le régime 4 par une nouvelle stagnation. Cette reprise de la croissance suggère qu'un nouveau mécanisme alimente le mouvement zonal. Nous allons essayer de comprendre ce mécanisme.

Les régimes 3 et 4 ont été atteints à $P = 7$, et aussi à $P = 0.025$, nombre de Prandtl du gallium. Ces dernières simulations représentent les plus hauts nombres de Reynolds que nous avons atteints. La figure 3.15 montre l'évolution de la fonction courant dans ces deux régimes. L'augmentation du nombre de Reynolds favorise très nettement l'apparition de structures de plus en plus grandes, de rapport d'aspect 1. C'est une observation que nous avions déjà faite lors de l'étude expérimentale, qui prouve que dans ce système l'énergie

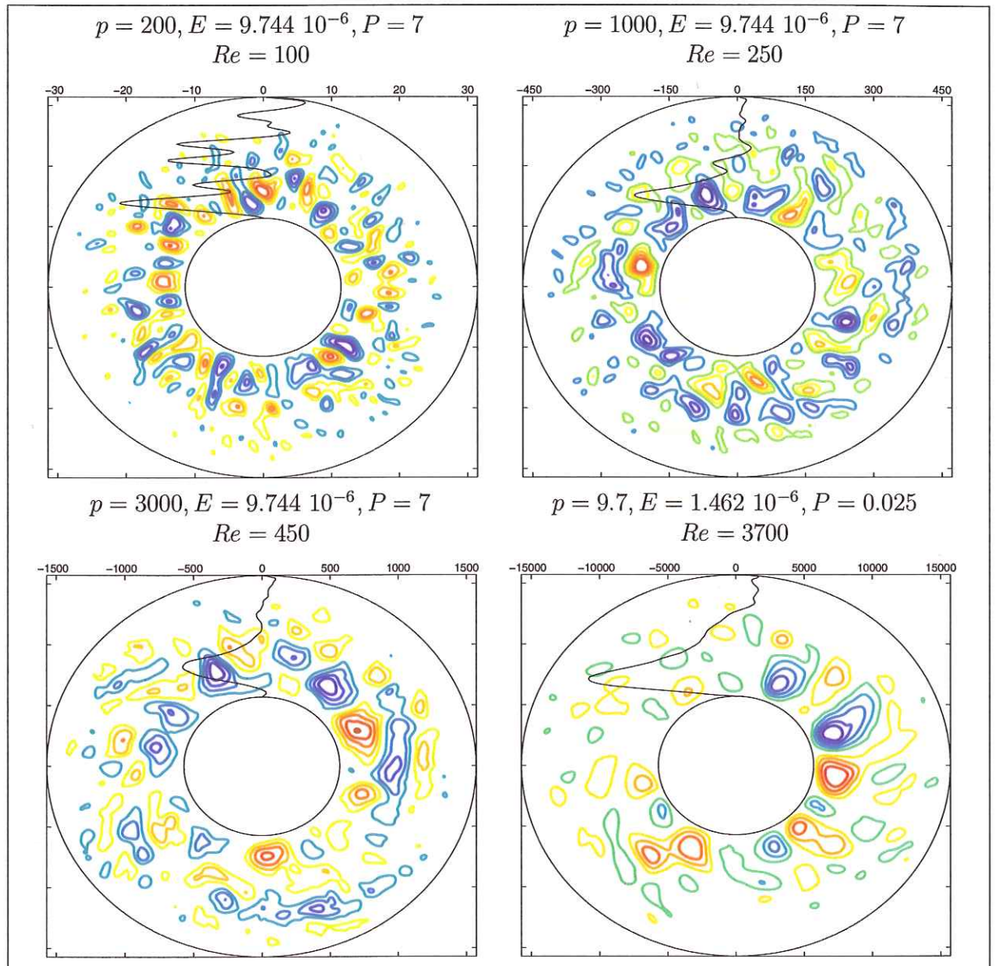


FIG. 3.15 – *Évolution de la fonction courant en régimes 3 et 4, lorsque le nombre de Reynolds augmente.*

cinétique a une tendance à la migration vers les grandes échelles.

Une autre observation peut conforter ce scénario: la figure 3.16 montre les énergies convectives et zonales du fluide, pour une expérience à $P = 0.025$.On observe ici (c'est aussi présent, mais moins visible, dans l'eau) dans la série temporelle de l'énergie, une anticorrélation temporelle entre énergie convective et énergie zonale: cette dernière augmente en général peu après que l'énergie convective ait chuté. La somme des deux énergies n'est cependant pas constante, puisque de l'énergie potentielle peut-être stockée sous forme de gradients thermiques sous-critiques. Ceci suggère un transfert de l'énergie convective vers l'énergie zonale.

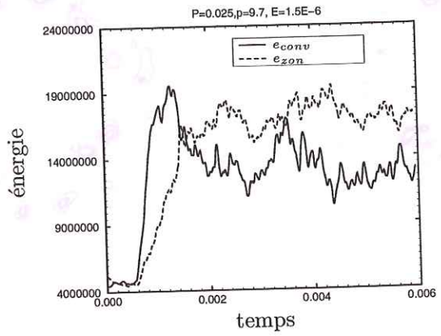


FIG. 3.16 – *Série temporelle d'énergie pour un calcul à $P = 0.025$, $p = 9.7$, $E = 1.46\ 10^{-6}$.*

La figure 3.17 montre les champs de vorticité et de température pour deux simulations des régimes 3 et 4, l'une pour $P = 7$, l'autre pour $P = 0.025$. La prédominance des anticyclones pour les panaches montants, que nous avons déjà rencontrée, est incontestable ici pour $P = 0.025$. Pour $P = 7$, cette prédominance est attestée par le champ de vorticité, et aussi par le fait que tout panache montant s'enroule ultimement dans un anticyclone. La différence de nombre de Prandtl s'illustre dans les gradients des structures thermiques, forts quand $P = 7$ et très diffus quand $P = 0.025$.

Dans la simulation à $P = 7$, nous remarquons l'existence de panaches descendants, d'éclenchés par une instabilité thermique originaire de la frontière externe du modèle. Du fait de l'advection de la vorticité potentielle vers l'intérieur, Ces panaches s'enroulent ultimement dans des cyclones. Ainsi, nous observons l'existence d'au moins deux fronts, l'un anticyclonique, l'autre cyclonique, entre les deux frontières. Les panaches qui s'appuient alternativement sur des cyclones et des anticyclones prennent une forme ondulée, en zigzag. L'instabilité externe est moins visible dans la simulation à $P = 0.025$, mais des cyclones descendants et les deux fronts sont bien présents. Cette instabilité thermique externe sera étudiée en détail dans la section 3.4.3.

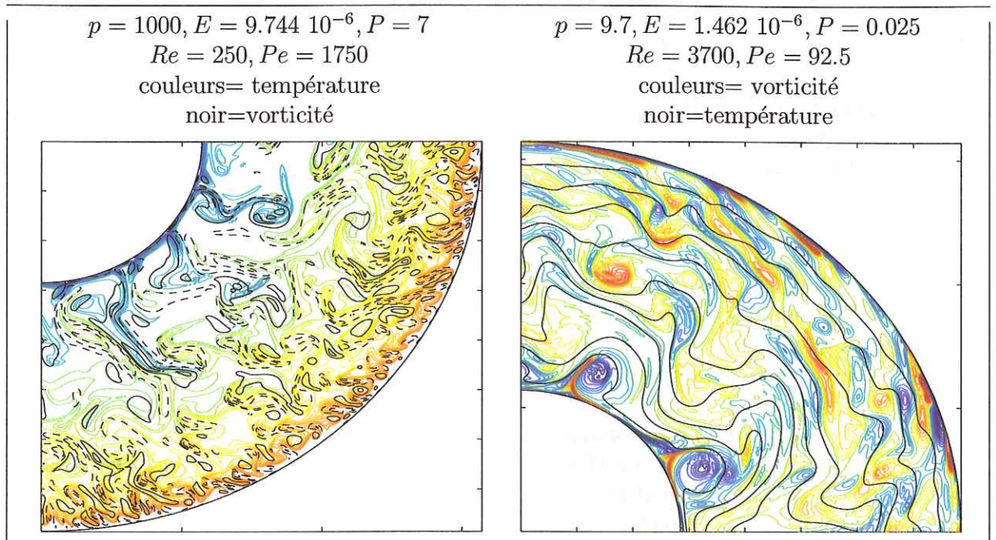


FIG. 3.17 – *Température et vorticité pour les régimes 3 et 4.*

Ainsi, les régimes 3 et 4 sont caractérisés par une grande visibilité d'un front anticyclonique près de la frontière intérieure, et de l'existence, à plus grand rayon, d'un front cyclonique. Dans les simulations à $P = 7$, ces fronts sont moins visibles, et peuvent être plus nombreux que 2, du fait de la taille plus faible des structures.

Ces observations nous donnent la clé du second mécanisme générateur du mouvement zonal: la ségrégation radiale des cyclones et des anticyclones est génératrice de circulation zonale moyenne. En effet, le mouvement zonal et la distribution de vorticité équatoriale sont liés par le théorème du rotationnel:

$$\iint_S \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\mathcal{L}} \mathbf{u} \cdot d\boldsymbol{l}.$$

En prenant pour S le disque de rayon r, et pour $\mathcal{L}$ le cercle de rayon r, on arrive à:

$$\int_S \overline{\omega} dr = r\overline{u_\theta},$$

Ce qui s'écrit encore

$$\overline{\omega} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\overline{u_\theta}\right).$$

Les variations du mouvement zonal sont reliées à la densité de vorticité moyenne. Bien entendu, si la densité radiale de vorticité peut présenter des inhomogénéites, la neutralité globale du fluide est préservée.

Une forte densité d'anticyclones induit donc un mouvement zonal fortement décroissant avec le rayon. Une forte densité de cyclones induit un mouvement zonal fortement croissant. C'est cela qui explique la forme caractéristique du mouvement zonal que l'on observe sur la figure 3.15. C'est aussi cela qui explique que le mouvement zonal est majoritairement rétrograde, car les anticyclones sont les structures les plus vigoureuses auprès de la frontière intérieure.

Ce mécanisme de ségrégation radiale des structures de vorticité permet de recréer une corrélation satisfaisante entre u_r et u_θ, et c'est ainsi que l'on quite le régime 2 pour entrer dans le régime 3. Le mouvement zonal croît à nouveau de manière quadratique par rapport au mouvement convectif. Nous essaierons de quantifier cette transition dans la section 3.4.4, lorsque notre réflexion sur la turbulence du fluide aura progressé.

Cependant, la ségrégation radiale n'est qu'un convertisseur, via la force de Coriolis, d'énergie convective en énergie zonale. C'est la raison pour laquelle cette dernière ne peut pas devenir beaucoup plus grande que l'énergie convective. C'est ce qui explique le passage du régime 3 au régime 4, et cette nouvelle saturation est définitive.

3.4.3 Structures thermiques.

Description d'un panache thermique.

Dans cette section, nous étudions maintenant le fluide sous l'angle thermique. Le nombre sans dimension caractérisant l'advection de température par rapport à sa diffusion est le nombre de Péclet défini par:

$$Pe = P \cdot Re$$

Lorsque l'advection de la température prend de l'importance par rapport à sa diffusion, donc lorsque $Pe >> 1$, nous voyons apparaître des panaches thermiques, comme ceux du premier dessin de la figure 3.17, pour lequel Pe vaut 1750. Nous allons étudier la structure d'un panache.

Nous avons dit plus tôt que lorsqu'un panache prend naissance, du fluide de la couche limite est injecté dans un canal, dont la largeur est de l'ordre de l'epaisseur de la couche limite. Le gradient latéral de température qui résulte de la présence du canal crée un cyclone sur le côté prograde du canal, un anticyclone sur le côté rétrograde. L'equilibre correspondant s'écrit:

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \sim Ra\frac{\partial T}{\partial \theta} \tag{3.7}$$

Par la suite, le panache montant, advectant cyclone et anticyclone vers les L décroissants, dans une situation où la vorticité potentielle est conservée, va

voir l'anticyclone forcir et le cyclone s'affaiblir. Ceci régit l'évolution de la tête du panache, qui s'enroule ultimement dans l'anticyclone, structure dominante. L'équilibre dynamique s'écrit:

$$\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}t} = 0 = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} - E^{-1}\frac{2}{L}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}r}\mathbf{u_e}\cdot\mathbf{e_r} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \sim E^{-1}\frac{2}{L}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}r}\mathbf{u_e}\cdot\mathbf{e_r}. \tag{3.8}$$

Sur une échelle de temps inertielle $t \sim 1/\omega$, les équations 3.7 et 3.8 sont à l'origine de la balance à trois termes, qui implique les lois d'échelles inertielles. Nous en verrons une nouvelle illustration en section 3.4.4. Ainsi, un panache thermique possède deux échelles de longueur:

- L'échelle latérale du canal, qui est celle de la couche limite. Le nombre de Nusselt Nu, qui mesure le flux de chaleur total, divisé par le flux de chaleur conductif, peut être directement relié à l'épaisseur d de cette couche limite thermique par

$$Nu = 1/d.$$

- L'échelle de la tête, qui est celle de l'anticyclone que le panache induit. Elle résulte d'un équilibre entre advection, force d'inertie et force de Coriolis, c'est donc l'échelle δ que nous avions identifiée lors de l'étude expérimentale:

$$\delta = c\left(\frac{Ra_Q}{P^2}\right)^{1/5} E^{3/5}$$

avec $c \approx 10$.

On peut s'étonner ici d'un préfacteur aussi grand pour une loi dite d'échelle... Ce préfacteur s'explique par le fait que nous avons écrit très grossièrement l'ordre de grandeur du terme de Coriolis, sans vraiment tenir compte des variations de pente le long du chemin du vortex, ce qui nous amène à surestimer l'effet de cette dernière force et donc à obtenir des tailles un peu petites.

Instabilité thermique externe.

Nous nous tournons maintenant vers la description de l'instabilité thermique externe. Alors que les panaches montants emmènent le fluide froid vers l'extérieur, le gradient thermique s'aplatit au milieu de la couche fluide, et un gradient thermique se localise près de la frontière extérieure, créant ainsi une seconde couche limite thermique externe. la figure 3.18 montre la localisation progressive de cette couche externe à mesure que le paramètre critique augmente.

Rappelons rapidement, à ce propos, le raisonnement qui permet d'obtenir la température à l'intérieur du fluide lorsque le mixage devient parfait ($p \Rightarrow +\infty$):

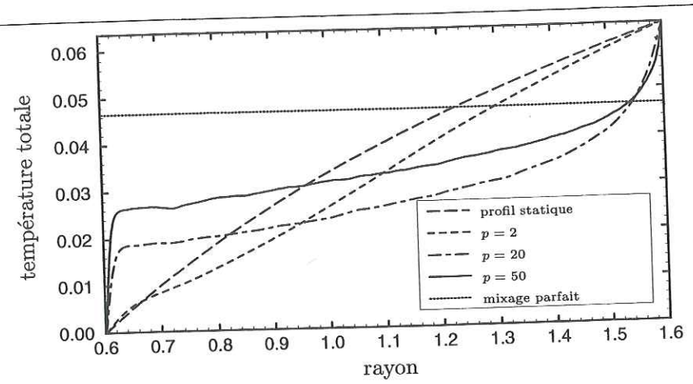


FIG. 3.18 – $E = 9.7\ 10^{-6}, P = 7$. *Profils de la composante axisymétrique de la température en fonction du paramètre critique p. La ligne horizontale est la température de l'intérieur prévue par la théorie du mixage parfait.*

Le flux de chaleur Φ à travers le modèle peut s'exprimer de deux façons:

$$\Phi = 2\pi r_i \Delta T_i Nu = 2\pi r_e \Delta T_e Nu$$

où ΔT_i et ΔT_e sont respectivement les différences de température régnant dans les couches limites interne et externe. Ceci implique

$$\Delta T_e = \frac{r_i}{r_e}\Delta T_i$$

et puisque $\Delta T_i + \Delta T_e = \Delta T$, nous avons

$$\Delta T_i = \frac{\Delta T}{r_i/r_e + 1} \tag{3.9}$$

et

$$\Delta T_e = \frac{\Delta T}{r_e/r_i + 1}$$

La température de l'intérieur du fluide, dans l'hypothèse d'un mixage parfait, vaut donc

$$T_0 = \frac{\Delta T}{r_i/r_e + 1}. \tag{3.10}$$

nous avons reporté cette température théorique sur la figure 3.18. La partie du fluide proche de la frontière extérieure tend vers l'état asymptotique moins rapidement que la partie du fluide proche de la frontière intérieure, du fait de la forte pente des couvercles, qui interdit les mouvements radiaux et donc le mixage. C'est ainsi que la couche limite externe, plus large, est plus difficile à déstabiliser que la couche interne, bien que la gravité soit plus forte à l'extérieur.

L'augmentation de p finit tout de même par déstabiliser la couche limite thermique externe, comme nous pouvons le voir sur les figures 3.14, et 3.17. Le nombre de Nusselt calculé à la frontière extérieure se met alors à osciller (figure 3.19), et ceci témoigne, avec la naissance de panaches descendants, de la naissance de la nouvelle instabilité. Cette instabilité est singulière, car bien que ses panaches induisent des mouvements radiaux vers l'intérieur, ces mouvements sont très limités par la grande pente des couvercles. Comme nous allons le voir dans la section 3.4.4, ceci crée des structures dissipatives très proches des ondes de Rossby au seuil.

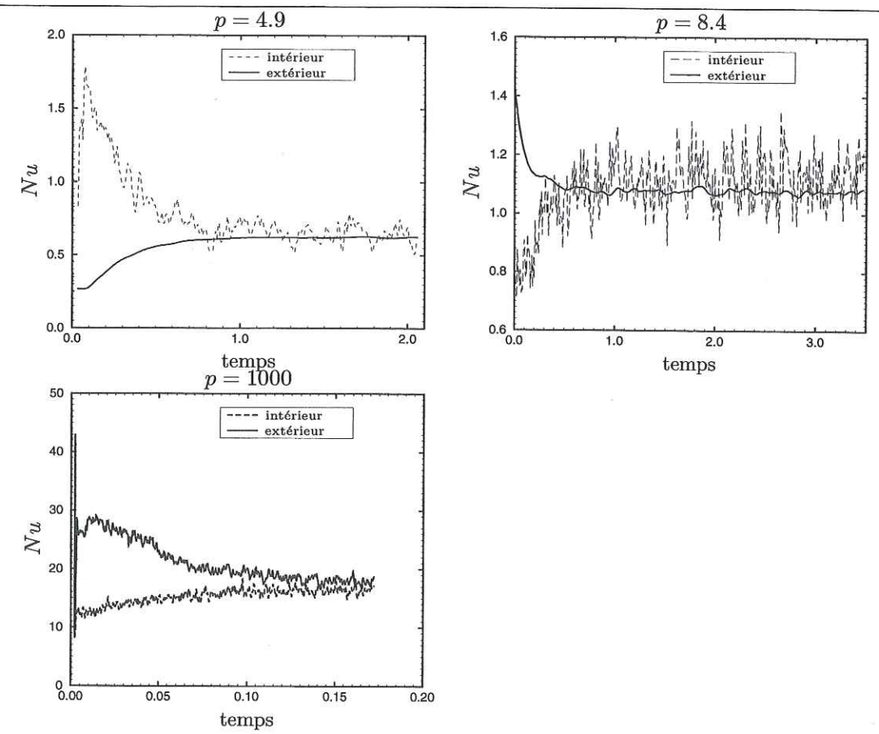


FIG. 3.19 – *Evolution temporelle du flux de chaleur (nombre de Nusselt), calculé aux deux frontières du modèle, dans l'eau. L'oscillation du flux externe atteste de la présence d'une instabilité thermique externe, et ceci permet de donner une fourchette pour le déclenchement de l'instabilité thermique externe:* $4.9 < p < 8.7$ *pour* $P = 7, E = 9.7\ 10^{-6}$.

La figure 3.20 représente, à la manière de ce qui a été fait sur la figure 3.9, un diagramme unificateur des différents fluides: le nombre de Nusselt Nu en fonction du nombre de Péclet (que nous définissons ici par $Pe = U_r \cdot P$). Ici encore, le nombre de Nusselt étant caractéristique de la thermique du fluide, il est normal qu'il dépende en grande partie du Péclet. L'instabilité externe survient pour $Pe \approx 100$, et $Nu = 2$. Il est difficile de donner un critère pour

cette instabilité, du fait de la difficulté de quantifier la localisation du gradient de couche limite externe.

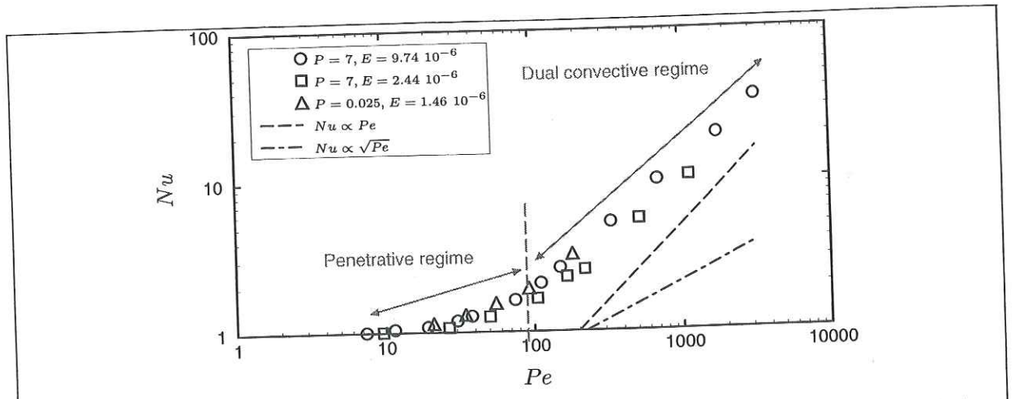


FIG. 3.20 – *Nombre de Nusselt en fonction du nombre de Péclet. Le changement de pente traduit une augmentation de l'efficacité de la machine convective, qui coincide avec l'apparition de l'instabilité externe.*

Ceci sépare deux régimes thermiques, que Sumita et Olson (2000) ont appelé régime de convection pénétrative (une seule instabilité) et régime de convection duale (deux instabilités). Le nombre de Nusselt stagne dans le régime pénétratif, puis augmente beaucoup dans le régime dual. Tilgner et Busse (1997) ont aussi observé ce comportement.

La machine convective est donc beaucoup plus efficace dans le régime dual. Pour comprendre cette augmentation de l'efficacité du transfert thermique, nous nous inspirons du raisonnement utilisé en convection du manteau pour trouver la dépendance de Nu avec Pe: supposons que nous sommes dans le régime pénétratif. Des panaches thermiques montent de l'intérieur, et, lorsque le mouvement radial devient difficile du fait de la pente des couvercles, ils se débarassent de leur chaleur par diffusion thermique vers l'extérieur avant de replonger. Puisqu'ils passent un temps $t = 1/U_r$ avant de replonger, la taille de la couche à travers laquelle ils se débarassent de leur chaleur vaut $d = \sqrt{1/(P \cdot U_r)}$, et le nombre de Nusselt doit varier comme $Nu \sim 1/d \sim \sqrt{Pe}$. C'est le type de comportement que les modèles de convection à Prandtl infini (manteau) donnent.

Dans le régime dual, nous devons formuler un nouveau raisonnement: des panaches issus des deux frontières du modèle viennent se rencontrer, et diffusent leur chaleur sur une échelle de longueur de l'ordre de $d = 1/Pe$ lors de leur rencontre. En effet, cette échelle est l'echelle à laquelle la diffusion thermique redevient prépondérante. Le nombre de Nusselt doit logiquement varier comme $Nu \sim 1/d \sim Pe$, c'est a dire beaucoup plus vite que précédemment. Cette loi de puissance est reportée sur la figure 3.20, et est en bon accord avec les données.

Ainsi, la machine convective devient plus efficace du fait de l'advection de matière chaude depuis l'extérieur, induite par l'instabilité thermique externe.

3.4.4 Structures dynamiques.

Lorsque le nombre de Reynolds devient grand (de l'ordre de 1000), le champ de vitesse présente de nombreuses caractéristiques assimilables à la présence d'une forme de turbulence, au sens où nous l'avons définie dans le chapitre théorique: chaos temporel, très large gamme d'échelle spatiale (voir la figure 3.17). Cette turbulence est bi-dimensionnelle, et nous avons déja identifié certains phénomènes qui supportent l'idée d'une cascade inverse d'énergie: les structures grandissent avec p, un mouvement zonal fort prend place à l'échelle $m = 0$. Nous avions l'intuition, dans le chapitre théorique, que le plan β devait favoriser l'apparition de structures cohérentes. Nous voulons identifier et étudier ces structures, les relier avec les lois d'échelle, et décrire les particularités et caractéristique de la turbulence quasi-géostrophique qui existe dans notre système.

Disparité d'échelle

Nous avons vu dans le chapitre 1 que le flux d'énergie vers les grandes échelles est conditionné par la disparité entre l'échelle d'injection de l'énergie, et l'échelle maximale à laquelle l'enstrophie peut aller. L'identification de la disparité d'échelle est donc un point important de l'étude des structures dynamiques. La figure 3.17 nous donne une idée de la gamme des échelles que l'on peut trouver dans l'écoulement. Nous ne devons pas oublier que la plus grande échelle, le mouvement zonal, fait aussi partie de cette gamme.

Nous cherchons d'abord l'échelle d'injection. L'instabilité convective force en général une gamme de longueurs d'onde donnée (figure 1.10 du chapitre 1). Cependant, la discussion de la section précédente a montré que les panaches, qui représentent la plus grande partie de l'énergie injectée, ont une tête d'échelle δ, résultant d'une interaction du plan β avec la poussée d'Archimède. Ce sont les structures cohérentes dont la figure 1.10 suggérait l'existence. δ peut donc être considérée comme l'échelle d'injection principale.

Nous avons ensuite deux échelles de dissipation, situées de part et d'autre de l'échelle d'injection:

- la grande échelle du mouvement zonal ($m = 0$): nous y avons introduit, lors de notre modélisation, une forte dissipation d'énergie cinétique: le frottement d'Ekman sur la sphère externe.

– la petite échelle visqueuse. Nous avons vu que cette échelle varie comme $1/Re$, échelle à laquelle la viscosité redevient comparable à l'advection. C'est là que l'enstrophie dissipe.

Nos simulations ont pu atteindre des régimes de fort Re, l'échelle δ restant de l'ordre de 0.1. Ainsi, nous avons obtenu de fortes disparités d'échelle (voir, par exemple, la figure 3.21). C'est une situation qui nous intéresse d'un point de vue géophysique, car, dans le chapitre 2, lors de l'extrapolation au noyau terrestre, nous avons obtenu $\delta \sim 20$ km, et $Re = 10^8$. Bien que l'échelle d'injection soit ici extrêmement faible devant la taille du noyau, elle est encore 10^6 fois plus grande que l'échelle visqueuse. Ainsi, nous attendons pour le noyau une très forte disparité d'échelle.

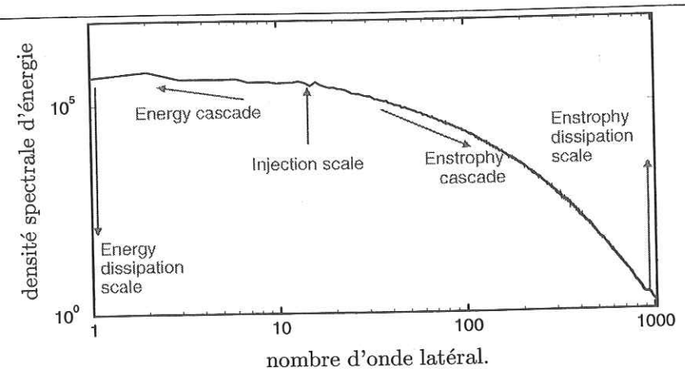


FIG. 3.21 – $P = 0.025, E = 1.5\ 10^{-6}, p = 9.7$. *Spectre d'énergie cinétique moyenné dans le temps, obtenu à $r = 0.6$. l'échelle d'injection est reportée.*

Structures cohérentes inertielles

Dans le but de comprendre le comportement dynamique d'un fluide présentant une grande disparité d'échelle, nous allons étudier le cas suivant: $P = 0.025, p = 9.7, E = 1.5\ 10^{-6}$, déja représentée sur la figure 3.17. Le nombre de Reynolds vaut 3700. Pour bien visualiser la vorticité, la carte de couleur a été modifiée: l'arc-en-ciel classique a été remplacé par une carte bimodale bleu-rouge, avec un dégradé de gris pour les faibles vorticités et une ligne de zéro jaune. Sur la même figure, on a reporté le champ de vitesse radiale correspondant à la première situation. Une carte de corrélation a été réalisée selon le principe suivant: à chaque rayon, une fonction de corrélation normalisée des deux champs présentés est calculée. Toutes ces fonctions sont ensuite représentées sur un graphe à deux dimensions et des contours sont tracés.

Concentrons nous d'abord sur ce qui se passe à la **frontière intérieure**: sur la gauche du premier dessin (t_0), un panache thermique montant a crée

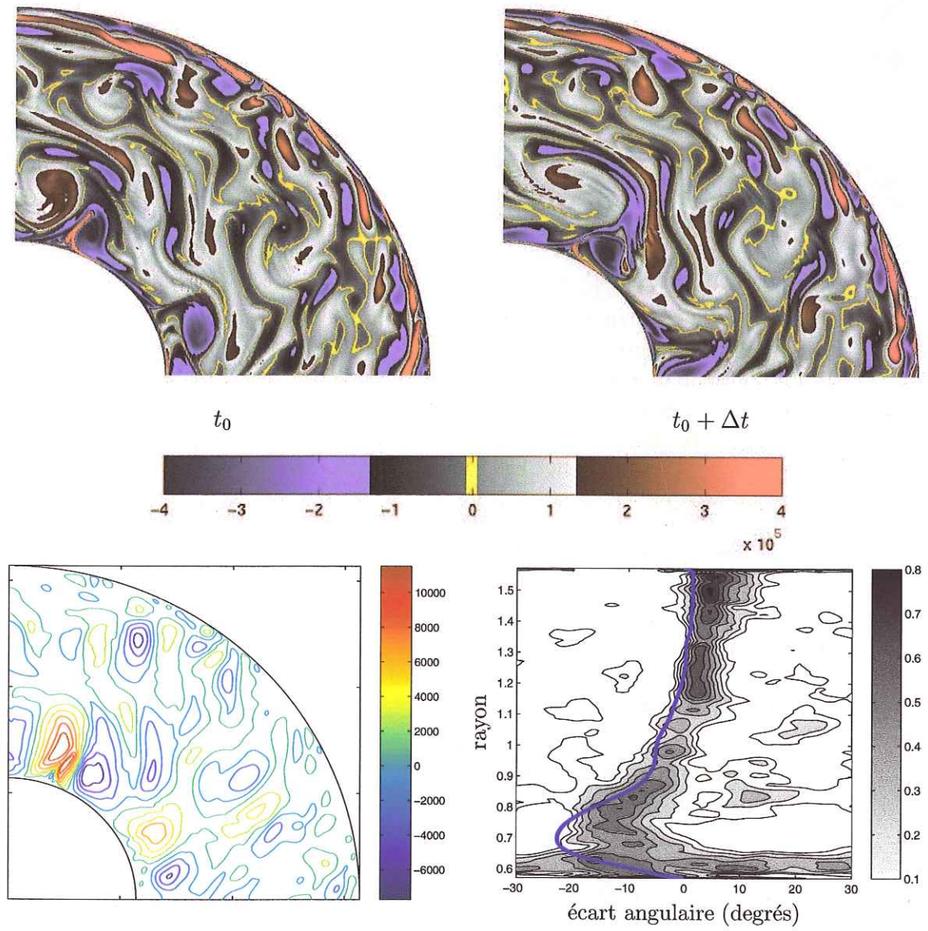


FIG. 3.22 – *En haut: cartes de vorticité distantes en temps de $\Delta t = 2.5\ 10^{-5}$. Les paramètres sont $P = 0.025, p = 9.7, E = 1.510^{-6}$. En bas à gauche: contours de la vitesse radiale correspondant à la première situation. A droite: carte de corrélation entre les deux situations. Le trait fort donne la dérive prévue par le mouvement zonal moyen.*

un cyclone sur son côté prograde, et un anticyclone sur son côté rétrograde. Plus tard $(t_0 + \Delta t)$, comme on peut le voir visuellement, et comme le montre la carte de corrélation, l'ensemble de la structure a dérivé latéralement, de manière assez homogène, dans la direction rétrograde. Le trait fort de la carte de corrélation montre que la dérive prévue par le mouvement zonal suffit à expliquer presque toute la dérive des structures; nous n'observons donc pas de comportement ondulatoire.

Regardons maintenant l'effet de l'advection radiale: en nous aidant du tracé de vitesse radiale de la figure 3.22, nous estimons à 10000 la vitesse radiale du panache montant. Si l'advection emmenait également le cyclone et l'anticyclone, alors l'ensemble de la structure se serait déplacé radialement sur une distance de $10000 \cdot \Delta t = 0.25$. Or, si le cyclone s'est effectivement éloigné de la frontière intérieure, l'anticyclone est resté «collé» sur le bord et s'est renforcé. Le cyclone, lui, s'est affaibli, puis a été emmené dans le champ proche de l'anticyclone. Ce n'est donc pas un mécanisme d'advection pure qui a dicté l'évolution de ces structures, mais plutôt un mécanisme d'évolution à vorticité potentielle constante. C'est donc du fait de l'existence de ces structures que la loi d'échelle inertielle (voir section 3.4.3) est vérifiée. Plus au centre de la couche fluide, les mêmes effets que ceux décrits précédemment prennent place, et ce sont cette fois les cyclones qui se renforcent en vorticité positive et sont favorisés. Cependant, l'effet est moins marqué, car les vitesses radiales sont beaucoup plus faibles à cet endroit, du fait de l'influence de la pente et de la contrainte de Proudman-Taylor.

Nous avons mis en évidence les structures de vorticité qui sous-tendent la loi d'échelle inertielle. Ces **structures cohérentes inertielles** sont caractérisées par la dominance de l'advection dans la direction radiale sur la dissipation de vorticité. Nous pouvons remarquer qu'elles jouent un rôle actif dans les cascades d'énergie et d'enstrophie:

- l'énergie remonte: deux anticyclones peuvent fusionner, lorsque chacun entre dans le champ d'interaction de l'autre. La figure 3.23 présente plusieurs étapes de ce mécanisme. Ceci explique la fusion de deux panaches thermiques, lorsque ceux-ci sont trop proches l'un de l'autre, ainsi que la production de structures de plus en plus grandes à mesure que l'on augmente le paramètre critique p. Cette cascade inverse se poursuit d'ailleurs jusqu'à $m = 0$, car la ségrégation et la production des anticyclones alimentent le mouvement zonal.
- l'enstrophie descend: nous avons vu dans le chapitre 1 qu'aux petites échelles, le plan β n'influence plus la conservation de l'enstrophie. Ceci implique la conservation matérielle des contours de vorticité. La figure 3.24 montre que ces contours sont étirés dans une direction par le champ de vitesse induit par les anticyclones. Dans l'autre direction, ils se tassent, ce qui crée de très petites échelles de vorticité. La viscosité diffuse ces structures et dissipe donc l'enstrophie.

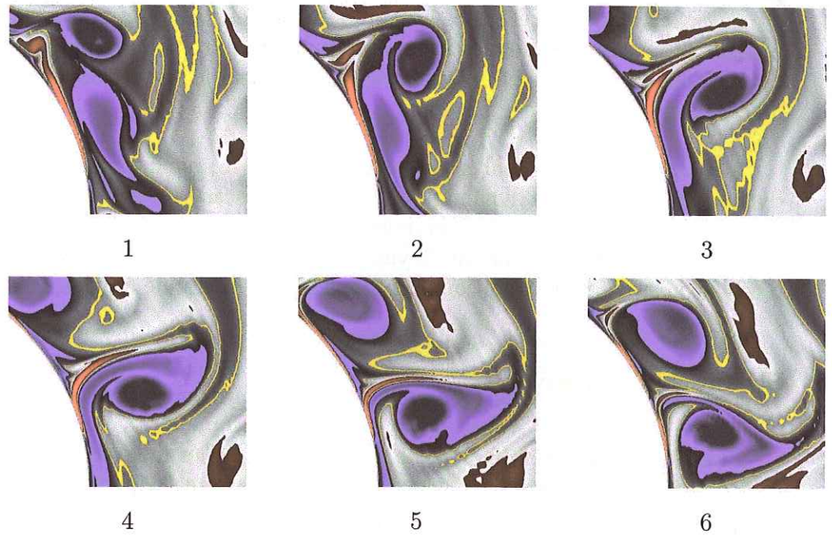


FIG. 3.23 – *Fusion de deux anticyclones près de la frontière intérieure. En 6, une deuxième fusion se prépare. Le pas de temps est $\Delta t = 10^{-5}$. Les paramètres sont toujours $P = 0.025, p = 9.7, E = 1.510^{-6}$. On pourra aussi remarquer sur ces dessins que la vorticité de couche limite visqueuse est emmenée au cœur de l'anticyclone qui passe (trace rouge vif au milieu du bleu). Ceci procède de l'alimentation du canal d'un panache avec la matière de la couche limite thermique.*

FIG. 3.24 – *Etirement des fils de vorticité, illustrant la migration de l'enstrophie vers les petites échelles.*

Cette étude souligne le rôle du plan β dans la turbulence quasigéostrophique. Il provoque l'apparition des structures cohérentes inertielles à l'échelle δ (nous avons vu dans le chapitre 1, figure 1.10 que ces structures pouvaient être interprétées comme la manifestation d'un puits d'enstrophie dans le spectre). Lorsque ces structures sont apparues, elles deviennent le moteur des transferts d'énergie et d'enstrophie.

À la lumière de cette analyse, on peut penser que le système passe du régime dynamique 2 au régime dynamique 3 lorsque la cascade inverse maintient un flux d'énergie suffisant vers les grandes échelles. On pourrait donc établir un critère dépendant du nombre de Reynolds, car c'est lui qui mesure la disparité d'échelle, disparité qui conditionne le flux d'énergie à grande échelle.

Structures dissipatives

Près de la frontière extérieure, le plan β contraint les mouvement radiaux à être très faibles (tracé de vitesse radiale de la figure 3.22). Il n'y a donc plus vraiment d'advection dans la direction radiale. Ceci restaure la symétrie entre cyclones et anticyclones. Localement, le nombre de Reynolds n'est pas très haut, la dissipation visqueuse a de nouveau de l'importance. Nous nous trouvons donc en situation d'équilibre visqueux:

$$\nabla^2\omega \sim Ra\, r\, \frac{\partial T}{\partial \theta} \sim E^{-1}\frac{2}{L}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}r}\mathbf{u_e}\cdot\mathbf{e}_r.$$

Cardin et Olson (1994) ont montré qu'une telle balance explique la forme spirallée dans la direction prograde des **structures dissipatives** qui en résultent. Leur définition est la suivante: ce sont les structures de l'écoulement pour lesquelles l'advection radiale de vorticité est de l'ordre de, ou plus petite que la dissipation de vorticité. La forme spirallée n'est pas sans rappeler les ondes de Rossby, ce qui nous suggère de regarder leur dérive zonale et son origine. La carte de corrélation montre que le seul mouvement zonal n'explique qu'environ 20 % de la dérive effective. Ainsi, ces structures sont presque entièrement ondulatoires, ce sont donc majoritairement des ondes de Rossby. Si l'on fait abstraction de leur dérive zonale, ces structures évoluent assez peu sur une échelle de temps advective: il faut beaucoup plus longtemps (Re fois plus longtemps), pour voir les effets de la viscosité.

Ainsi, la géographie d'un tel écoulement est scindée en deux régions, dont la limite est identifiable sur la carte de corrélation: une onde de Rossby laisse une signature prograde, de corrélation forte. Une structure inertielle laisse une signature rétrograde, beaucoup moins corrélée à cause de la turbulence. Près de la frontière intérieure, les fortes valeurs de la vitesse radiale (que l'on peut considérer comme un nombre de Reynolds local) provoquent l'apparition des

structures inertielles. Ces structures forcent des ondes de Rossby plus a l'extérieur du domaine fluide, là ou la vitesse radiale, et donc le nombre de Reynolds local, est plus faible. On pourrait donc séparer les deux domaines par un critère basé sur le nombre de Reynolds.

Pour résumer, nous avons isolé, parmi les mouvements non-axisymétriques d'un écoulement convectif en rotation à haut nombre de Reynolds, deux types de structures, géographiquement distinctes:

Structure inertielle	$\Leftrightarrow$	$(\mathbf{u}_r\cdot\nabla_e)\,\omega >> \nabla^2\omega$	$\Rightarrow$	Loi d'échelle du régime inertiel
Structure dissipative	$\Leftrightarrow$	$(\mathbf{u}_r\cdot\nabla_e)\,\omega \approx \nabla^2\omega$	$\Rightarrow$	Loi d'échelle du régime visqueux

Les structures dissipatives sont des ondes de Rossby thermiques et sont déjà bien connues. Nous nous sommes attachés à la description phénomènologique des structures inertielles, beaucoup moins connues. Nous avons vu qu'elles ont plusieurs propriétés remarquables: elles créent de fortes disymétries entre cyclones et anticyclones par advection de la vorticité potentielle; elles sont le pivot de la cascade inverse d'énergie, et de la cascade directe d'enstrophie.

Il est facile de discerner les structures inertielles des ondes de Rossby en regardant leur dérive zonale: les structures inertielles dérivent sous l'effet du mouvement zonal, les structures dissipatives sont plutôt ondulatoires.

On trouvera des structures inertielles dans les écoulements à forte disparité d'échelle (dont le noyau terrestre fait probablement partie), et dans les zones géographiques de faible pente. On trouvera des structures dissipatives dans les écoulements à faible disparité d'échelle, ou dans les zones géographiques de forte pente.

3.4.5 Régime faiblement non-linéaire dans le gallium

Près du seuil dans le gallium, nous avons identifié un mode de convection très différent de celui de l'eau. Il s'agit (figure 3.25) d'une onde de Rossby, dont l'énergie est modulée en temps. À $E = 1.46\ 10^{-6}$ et $P = 0.025$, ce comportement a pu être observé jusqu'à $p \approx 1.7$. Au dessus, le comportement du système rentre dans le cadre d'analyse exposé ci-dessus.

Ce comportement modulé en temps est prévu par l'analyse faiblement non-linéaire de Plaut et Busse (2001). Il semble que les contraintes de Reynolds qui s'applique sur l'onde de Rossby soient très fortes, du fait de la forte spirallisation de l'onde, et des fortes vitesses caractéristiques de la convection à bas Prandtl. Ces contraintes transfèrent énormément d'énergie au mouvement zonal, qui dissipe cette énergie par frottement. Ainsi, l'onde de Rossby n'est stable que temporairement, avant que son énergie décroisse, et que croisse celle

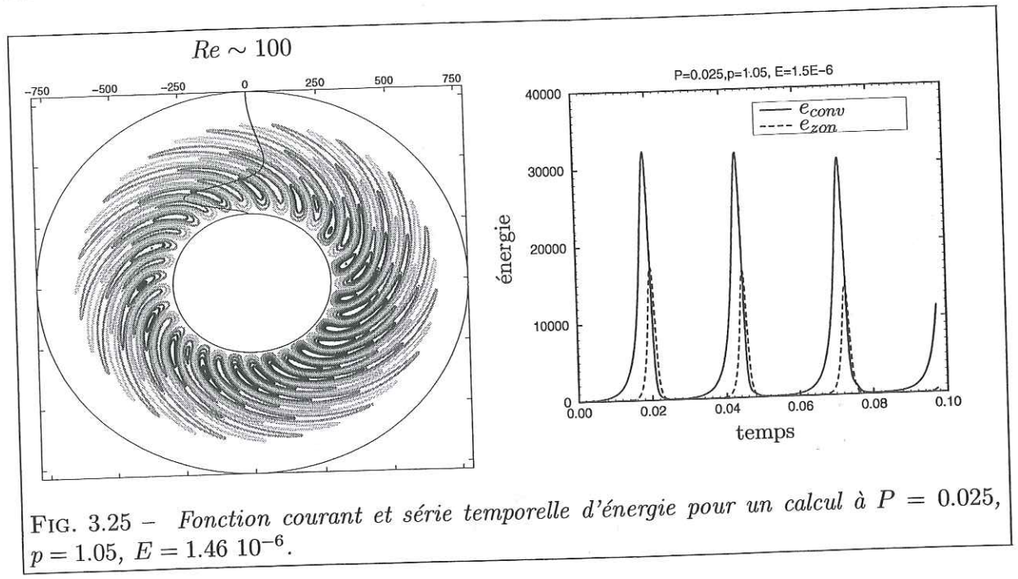


FIG. 3.25 – *Fonction courant et série temporelle d'énergie pour un calcul à* $P = 0.025$, $p = 1.05$, $E = 1.46\ 10^{-6}$.

du mouvement zonal. Par la suite, le mouvement zonal lui-même disparaît, car la convection qui le maintenait a disparu. Une nouvelle instabilité linéaire est ensuite amplifiée, et un nouveau cycle commence. Nous n'avons pas de confirmation expérimentale de l'existence de ce régime, et c'est la raison pour laquelle nous avons décidé de ne pas l'étudier plus, et de nous concentrer sur les points du modèle qui bénéficient de confirmation expérimentale. C'est le sujet de la prochaine section.

3.5 Comparaison du modèle numérique et de l'expérience.

3.5.1 Comparaison des aspects thermiques.

Nous n'avons pas vraiment étudié en détail le comportement thermique de notre expérience. Nous nous sommes servis de nos mesures thermiques pour confirmer l'aspect bidimensionnel de l'écoulement dans le gallium et vérifier les lois d'échelle. Nous n'avons pas mesuré le nombre de Nusselt. Sumita et Olson (2000) ont étudié ceci plus en détail, ce qui leur a permis de mettre en évidence l'instabilité thermique externe. Dans le second régime, qu'ils ont appelé régime dual, ils ont tracé le nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh:

$$Nu \sim Ra^{1/2}$$

Ainsi, si nous transformons cela pour faire apparaître le nombre de Rayleigh basé sur le flux de chaleur $Ra_Q = NuRa_c$, il vient:

$$Nu \sim Ra_Q^{1/3}$$

Il est important de souligner que notre modèle numérique est le premier modèle qui reproduise cette instabilité thermique externe. Pour ce même régime dual, nous avons obtenu $Nu \sim Pe$, et comme le nombre de Péclet varie comme la vitesse rms du fluide, nous obtenons $Nu \sim Ra_Q^{0.4-0.5}$, l'exposant dépendant du régime dynamique.

La comparaison qualitative des comportements thermiques du fluide est donc concluante, mais nous relevons que le modèle 2D fait passer plus de chaleur que l'expérience, à écart constant par rapport à la criticalité. En effet, les cellules de convection 3D perdent de la chaleur par diffusion à leurs extrémités inférieure et supérieur, qui sont au contact avec la sphère externe. Ceci n'est évidemment pas pris en compte dans le modèle 2D, pour lequel toute la chaleur est disponible pour la création de mouvements équatoriaux. Ainsi, ce dernier modèle aura une tendance générale à surestimer le nombre de Nusselt. On tient compte de cette différence si on adopte Ra_Q comme paramètre critique, et c'est ce que nous allons faire dans la section suivante pour les lois d'échelle d'origine numérique.

3.5.2 Lois d'échelle d'origine numérique

Rappels de l'étude expérimentale

Nous rappelons ici quelques uns des points de l'analyse théorique faite à partir des résulats expérimentaux. Nous avions proposé deux types de loi d'échelles, pour décrire des equilibres **locaux** présents dans le fluide. Ces lois s'appliquent lorsque $p >> 1$:

- la loi du régime visqueux met en équilibre création de vorticité par la force d'Archimède, dissipation de vorticité, et force de Coriolis. Elle prend pour hypothèse que l'énergie et l'enstrophie sont dissipées à l'échelle où elles sont crées. Son expression est, pour la déviation standard de la vitesse radiale (sans la dépendance radiale):

$$\tilde{u_r} = \left(\frac{Ra_Q}{P^2}\right)^{1/2} E^{1/3}$$

- la loi du régime inertiel met en équilibre création de vorticité par la force d'Archimède, advection de vorticité, et force de Coriolis. Elle prend pour

hypothèse que l'énergie n'est pas dissipée à l'échelle où elle est créee, et migre à grande échelle (celle du mouvement zonal). Son expression est:

$$\tilde{u_r} = \left(\frac{Ra_Q}{P^2}\right)^{2/5} E^{1/5}$$

Le mouvement zonal moyen peut, dans les deux cas, s'exprimer par:

$$\overline{u_\theta} = \tilde{u_r}^2 E^{1/2}$$

Cela revient à dire que l'énergie injectée dans le mouvement zonal du fait du terme non-linéaire (la convection ne force pas l'échelle $m = 0$) dissipe par frottement dans les couches d'Ekman. On suppose implicitement qu'un mécanisme maintient une bonne corrélation entre les vitesses radiales et latérales. Dans l'étude des structures inertielles, nous avons identifié ce mécanisme: il s'agit de la ségrégation radiale des structures de vorticité opposée.

Nous avions montré que les expériences en eau étaient correctement décrites (dans les barres d'erreur) par les deux lois, et qu'il fallait invoquer l'équilibre inertiel pour décrire les expériences en gallium.

Comparaison numérique

Pour valider les lois d'échelle obtenues expérimentalement, nous avons choisi de mettre à l'échelle les quantités U_r et U_θ (équations 3.4 et 3.6), que nous utilisons depuis le début de l'étude. Ceci permet une analyse plus globale que les quantités locales retenues pour l'expérience.

La figure 3.26 résume l'evolution de U_r et U_θ avec p.

Nous réalisons dans la figure 3.27 le même type de réduction de vitesse que lors de l'étude expérimentale, afin de décider quelle loi d'échelle est la plus adaptée aux données.

En ce qui concerne la vitesse convective, les lois d'échelle inertielle et visqueuse expliquent correctement les données à haut p. Ceci est normal car les quantités que nous mettons à l'échelle sont des intégrales sur tout le fluide, incluant des structures inertielles et visqueuses. Par contre, seule la loi d'échelle inertielle permet d'expliquer le comportement de U_θ.

Ainsi, nous venons de montrer que les lois d'échelle d'origine expérimentale sont vérifiées par la simulation numérique. Le mouvement zonal suit la loi d'échelle inertielle, et seules les structures inertielles alimentent le mouvement zonal. Donc les structures inertielles vérifient la loi d'échelle inertielle.

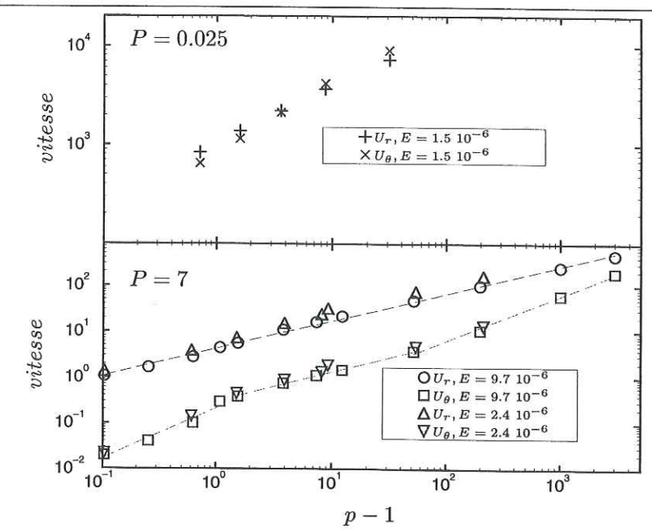


FIG. 3.26 – *Vitesses rms convective et zonale en fonction de la déviation au flux de chaleur au seuil.*

3.5.3 Comparaison structurelle des profils Doppler.

Afin de mieux localiser les expériences qui font l'objet des comparaisons à suivre, on pourra consulter l'annexe A.3 dans laquelle on a harmonisé le traitement des données numériques et expérimentales.

Nous avons démontré que le modèle numérique 2D suit les mêmes lois d'échelle que les mesures d'origine expérimentale. Nous allons maintenant utiliser des profils Doppler synthétiques de vitesse radiale pour les comparer aux profils expérimentaux, et comprendre la structure des champs de vitesse.

Nous procédons de la manière suivante: nous redimensionnons d'abord les synthétiques en utilisant les constantes de l'expérience. Ensuite, nous essayons d'obtenir pour une expérience donnée un synthétique pour lequel le profil carré moyen de la vitesse radiale corresponde à la mesure expérimentale, ainsi nous cherchons l'écoulement numérique de même nombre de Reynolds. Nous procédons ainsi car puisque nous n'avons pas de mesure expérimentale du nombre de Nusselt, il nous est impossible d'accéder précisément à Ra_Q. Après avoir contraint la vitesse radiale rms, nous comparons les autres propriétés.

Dans tous les diagrammes Doppler présentés, les distances sont en millimètres, les temps en secondes et les vitesses en millimètres par seconde.

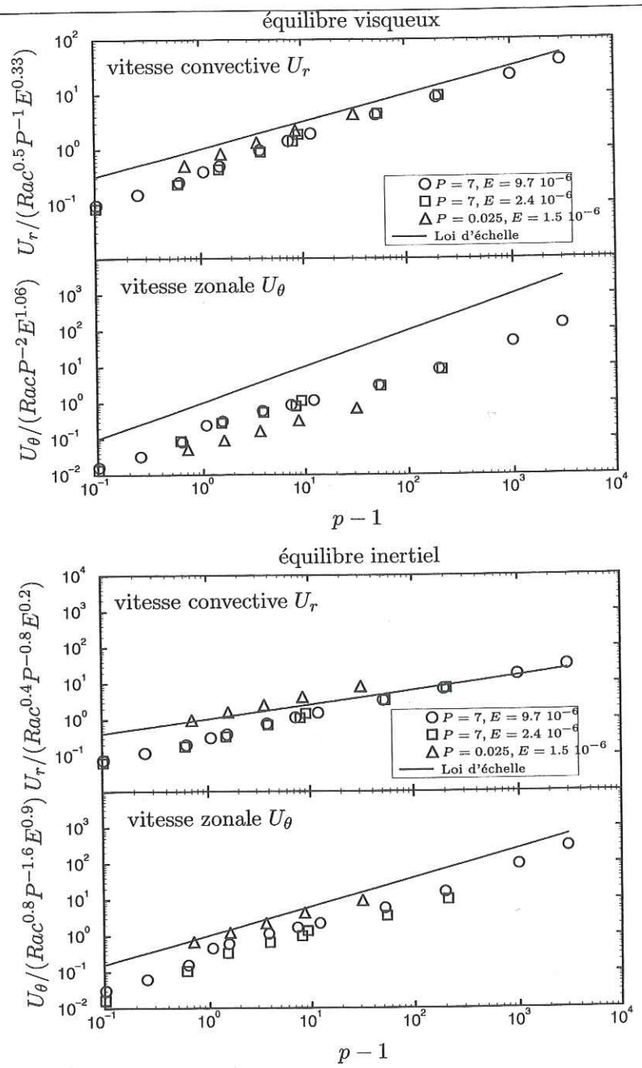


FIG. 3.27 – *Vitesses réduites, test des équilibres visqueux et inertiel. La ligne pleine donne la pente théorique, avec le préfacteur 1.*

Onde de Rossby thermique, près du seuil, dans l'eau.

La première situation que nous désirons étudier se trouve près du seuil de convection dans l'eau. Nous fixons $E = 9.74\ 10^{-6}$, $P = 7$, $Ra/Ra_c = 4.2$. Le profil Doppler expérimental de cette situation est présenté sur la figure 3.28.

Le modèle numérique obtenu pour $Ra = 5Ra_c$ restitue bien le profil expérimental carré moyen de la vitesse radiale (figure 3.29). Le nombre de Nusselt expérimental et le nombre de Nusselt numérique ne sont donc pas fondamentalement différents dans cette situation. Près de la frontière extérieure, la différence importante entre les deux courbes de la figure 3.29 doit être attribuée au bruit de la mesure de vitesse par vélocimétrie Doppler, et n'est donc pas significative.

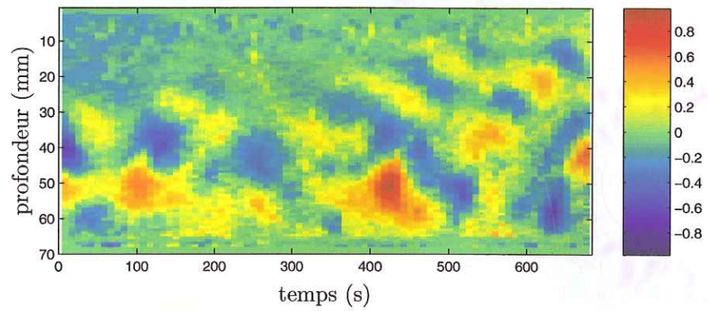


FIG. 3.28 – $E = 9.74\ 10^{-6}, P = 7, Ra = 4.2\ Ra_c$. *Profil Doppler expérimental.*

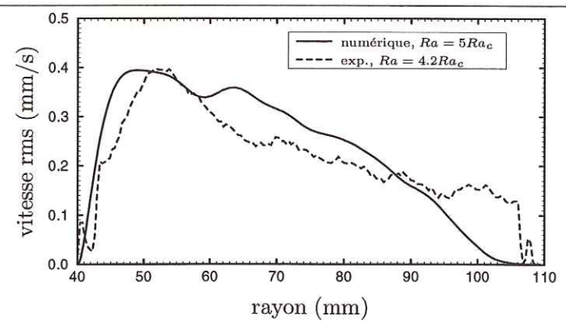


FIG. 3.29 – $E = 9.74\ 10^{-6}, P = 7$ *Choix du modèle expérimental reproduisant au mieux la distribution des vitesses radiales rms.*

Les caractéristiques du modèle sont en figure 3.30. En particulier, nous avons réalisé plusieurs profils synthétiques à différents azimuths et nous les avons corrélés entre eux. La carte de corrélation résultante est composée d'une fonction de corrélation pour chaque profondeur. En traits pleins et pointillés sont respectivement représentées la corrélation de deux sondes distantes de

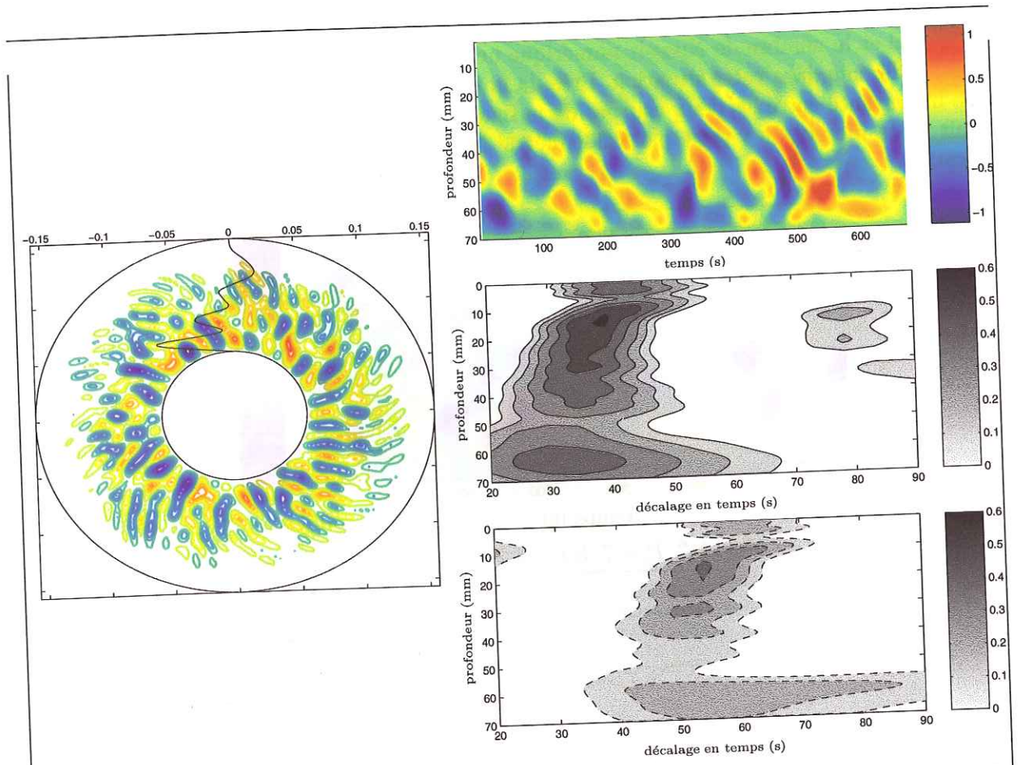


FIG. 3.30 – $E = 9.74\ 10^{-6}, P = 7, Ra = 5Ra_c$. *A gauche: fonction courant du modèle numérique. En haut à droite: profil synthétique de vitesse radiale. En bas à droite: cartes de corrélation entre synthétiques distants de 5 degrés (traits pleins), et dix degrés (traits pointillés).*

cinq, et dix degrés. Ainsi, nous pouvons apprécier la quantité de chaos temporel introduite par la dérive des structures à travers les lignes de tir Doppler.

Loin du manchon, les structures de la figure 3.30 sont majoritairement spirallées dans la direction prograde. La carte de corrélation montre qu'entre les profondeurs 0 et 50, ces structures dérivent de manière très stable (le degré de corrélation baisse peu entre cinq et dix degrés) dans la direction prograde. Cette dérive ne peut être expliquée par le mouvement zonal, bien trop faible (il est représenté avec la fonction courant, et redimensionné en millimètres par seconde). Ces structures sont donc des ondes de Rossby.

Cependant, près du manchon, le nombre de Reynolds de l'écoulement numérique (environ 20) est suffisant pour que l'advection radiale et l'onde de Rossby aient des échelles de temps comparables. C'est le critère d'instabilité des ondes de Rossby, que nous avons identifié lors de l'étude des régimes dynamiques. L'advection radiale favorise donc l'apparition de défauts à cet endroit, et le mouvement zonal rétrograde résultant ralentit irrégulièrement la dérive prograde des structures. Ceci est visible entre les profondeurs 50 et 70, sur la carte de corrélation: la tache de corrélation s'élargit considèrablement, et on constate une perte importante du degré de corrélation entre cinq et dix degrés de séparation. Nous sommes donc ici en présence de structures inertielles.

Le modèle numérique nous indique donc que l'écoulement est divisé géographiquement en deux, et contient une onde de Rossby entre 0 et 50 mm, et des structures inertielles entre 50 et 70 mm. Retournons maintenant au profil expérimental de la figure 3.28, et comparons le au synthétique de la figure 3.30. La signature des structures inertielles (plus lentes que les ondes de Rossby) est présente sur les deux profils, ainsi que la signature en bandes penchées des ondes de Rossby. La géographie radiale de l'écoulement est respectée. D'un point de vue plus quantitatif, si les tailles radiales caractéristiques des structures sont bien rendues, on peut remarquer que les échelles de temps du modèle numérique sont pratiquement deux fois plus rapides. C'est une remarque que nous avons déjà faite lors de l'analyse du modèle au seuil de convection: les ondes de Rossby du modèle 2D sont en général plus rapides que celles du modèle 3D.

Structures inertielles dans l'eau et temps de vie.

Le modèle numérique nous a donc permis de comprendre la structure sous-jacente à ce profil Doppler expérimental. Nous allons maintenant augmenter le nombre de Rayleigh de l'écoulement, en gardant E et P constants. Nous cherchons maintenant à décrire l'expérience de la figure 3.31, pour laquelle $Ra/Ra_c = 22.2$.

La figure 3.32 nous révèle que la valeur idéale du Ra/Ra_c numérique se

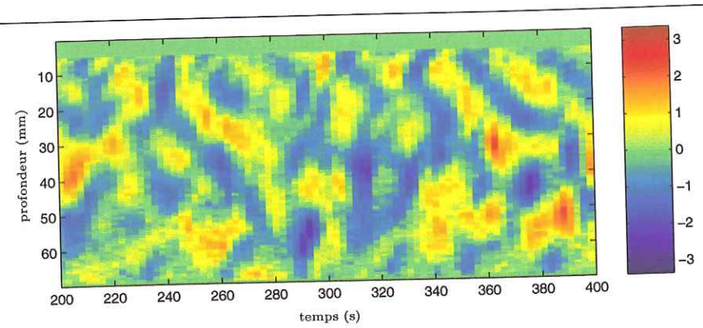


FIG. 3.31 – $E = 9.74\ 10^{-6}, P = 7, Ra = 22.2Ra_c$. *Profil Doppler expérimental.*

situe un peu au dessus de 10. L'échelle numérique de Ra/Ra_c a donc considérablement divergé de l'échelle expérimentale, ce qui signifie que le nombre de Nusselt du modèle numérique ne varie plus comme le nombre de Nusselt de l'expérience.

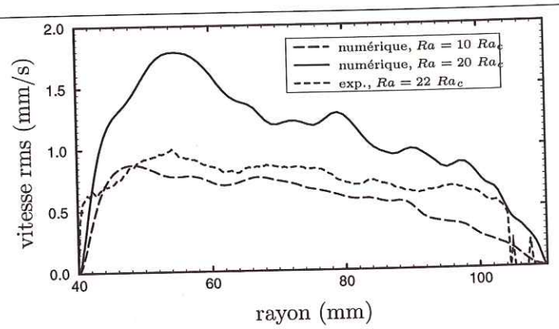


FIG. 3.32 – $E = 9.74\ 10^{-6}, P = 7$ *Choix du modèle expérimental reproduisant au mieux la distribution des vitesses radiales rms.*

Nous choisissons donc le modèle numérique pour lequel $Ra/Ra_c = 10$, et nous présentons ses caractéristiques en figure 3.33. Par rapport au modèle précédent, cette situation est plus chaotique. Les structures inertielles situées près de la frontière intérieure ont grossi, du fait de la cascade inverse d'énergie. Le mouvement zonal est un peu plus fort, mais reste toujours assez faible devant la vitesse convective. La spirallisation est perdue près de l'intérieur, mais subsiste faiblement à l'extérieur. La corrélation entre deux profils, même distants de 5 degrés, est perdue près de la frontière intérieure, et ce n'est que près du bord extérieur, que l'on retrouve une corrélation. Le profil Doppler synthétique montre à cet endroit la signature d'une onde de Rossby spirallée dérivant dans la direction prograde.

Cet écoulement est donc lui aussi divisé en deux zones géographiques, mais cette fois, la place dévolue aux structures inertielles a fortement rongé la place

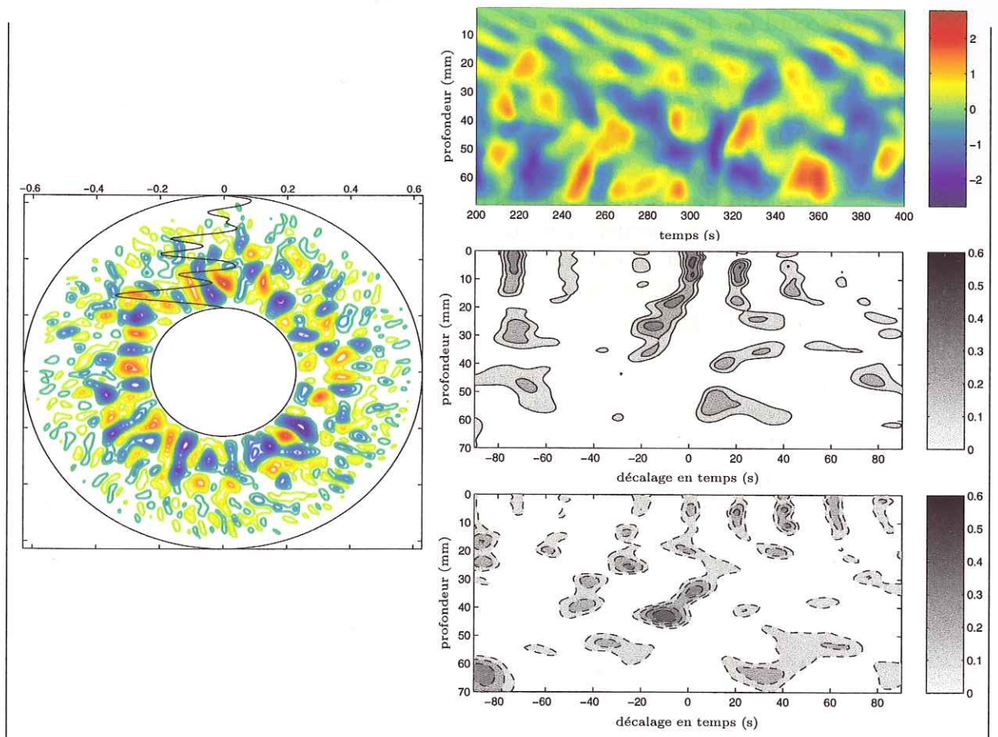


FIG. 3.33 – $E = 9.74\ 10^{-6}, P = 7, Ra = 10Ra_c$. *A gauche: fonction courant du modèle numérique. En haut à droite: profil synthétique de vitesse radiale. En bas à droite: cartes de corrélation entre synthétiques distants de 5 degrés (traits pleins), et dix degrés (traits pointillés).*

dévolue aux ondes de Rossby.

Comparons maintenant le synthétique et le profil expérimental Doppler: le synthétique porte clairement la trace du grandissement radial des structures inertielles, et nous retrouvons cela sur le profil expérimental. La géographie selon l'échelle radiale est donc correcte.

Comparons maintenant les échelles de temps: nous avons vu que dans le cas précédent, la géographie selon l'échelle des temps mettait en lumière le désaccord des pulsations des ondes de Rossby entre le modèle et l'expérience. Dans ce second cas, ce désaccord est toujours visible dans la zone géographique des ondes de Rossby, près de la frontière extérieure. Par contre, dans la zone inertielle, les échelles de temps des structures sont en bien meilleur accord entre le modèle et l'expérience.

Nous appellerons temps inertiel cette échelle de temps des structures inertielles. Ce temps inertiel, que l'on peut mesurer sur l'axe des abscisses des profils Doppler est le résultat de deux facteurs: la dérive zonale rétrograde des structures, et le temps de vie intrinsèque de celles-ci, conditionné par les échanges d'énergie entre échelles, donc par $U_r = Re$.

La figure 3.34 compare le mouvement zonal prévu par la simulation au mouvement zonal mesuré expérimentalement dans une situation proche de celle de la figure 3.31. Nous voyons ici que le mouvement zonal mesuré est assez supérieur au mouvement zonal numérique. Ceci s'explique par le fait que dans l'expérience, faite dans l'eau, du vent thermique vient probablement renforcer le mouvement zonal rétrograde, et cette explication est cohérente avec le fait que lors de la mise à l'échelle des expériences, nous avons mesuré dans l'eau des vitesses zonales un peu fortes pour être expliquées par des contraintes de Reynolds.

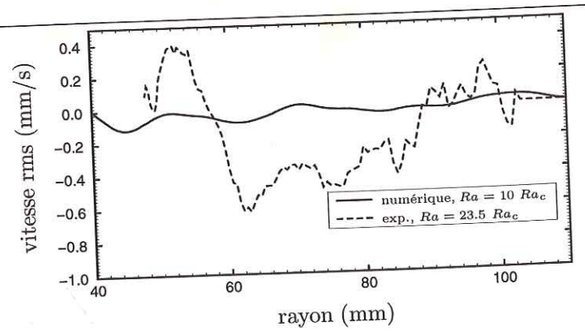


FIG. 3.34 – $E = 9.74\ 10^{-6}, P = 7$. *Mouvement zonal expérimental, comparé au mouvement zonal du modèle numérique.*

Si l'échelle des temps des profils Doppler était expliquée entièrement par le

mouvement zonal, nous devrions donc voir beaucoup plus de différence entre temps numérique et temps expérimental. Le temps de vie des structures est par contre le même dans l'expérience et le modèle, puisque nous avons ajusté les deux de façon à ce que Re soit le même. C'est donc essentiellement le temps intrinsèque de vie des structures que nous observons ici sur les profils Doppler. Ce temps de vie est ici plus faible, du fait de Re, que le temps qu'il faut à une cellule de convection pour croiser la ligne de tir Doppler en entier. La plupart des structures vues par la mesure Doppler naissent et meurent donc devant la sonde, sans avoir vraiment eu le temps de dériver.

Cette dernière conclusion explique pourquoi il est difficile de corréler deux profils de vitesse radiale mesurés à différents azimuths. Peu de structures dérivent suffisamment pour laisser une signature cohérente sur l'une, puis l'autre des sondes. C'est aussi la raison pour laquelle les cartes de corrélation expérimentales, obtenues dans l'eau (section 2.2), donnent un signal faible et difficile à interpréter.

Structures inertielles dans le gallium et dérive zonale.

Nous allons maintenant étudier une situation expérimentale pour laquelle nous avons utilisé du gallium liquide, et nous en profiterons pour étudier à nouveau la comparaison des mouvements zonaux d'orgine numérique et expérimentale. Nous choisissons l'expérience dont les paramètres et le profil Doppler sont présentés en figure 3.35.

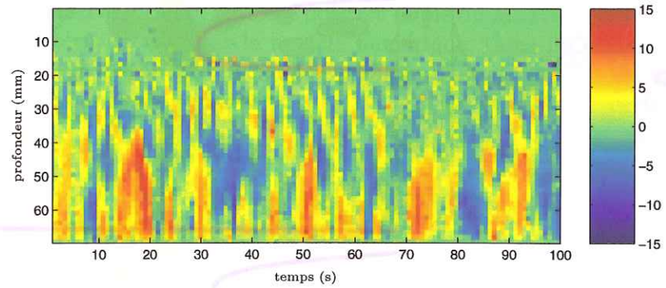


FIG. 3.35 – $E = 1.46\ 10^{-6}, P = 0.025, Ra = 3.2Ra_c$. *Profil Doppler expérimental.*

Le modèle numérique donnant le même nombre de Reynolds est entre $Ra = 1.5Ra_c$ (figure 3.36)et $Ra = 2Ra_c$. Nous choisissons de comparer l'expérience à la situation numérique $Ra = 1.5Ra_c$, présenté sur la figure 3.37.

Ce modèle est, ici encore, composé de deux domaines géographiques. L'essentiel de l'écoulement est composé de grosses structures inertielles, près du

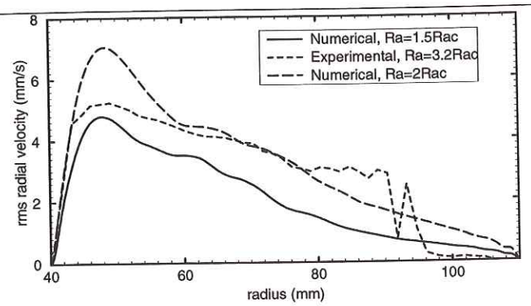


FIG. 3.36 – $E = 1.46\ 10^{-6}, P = 0.025$ *Choix du modèle expérimental reproduisant au mieux la distribution des vitesses radiales rms.*

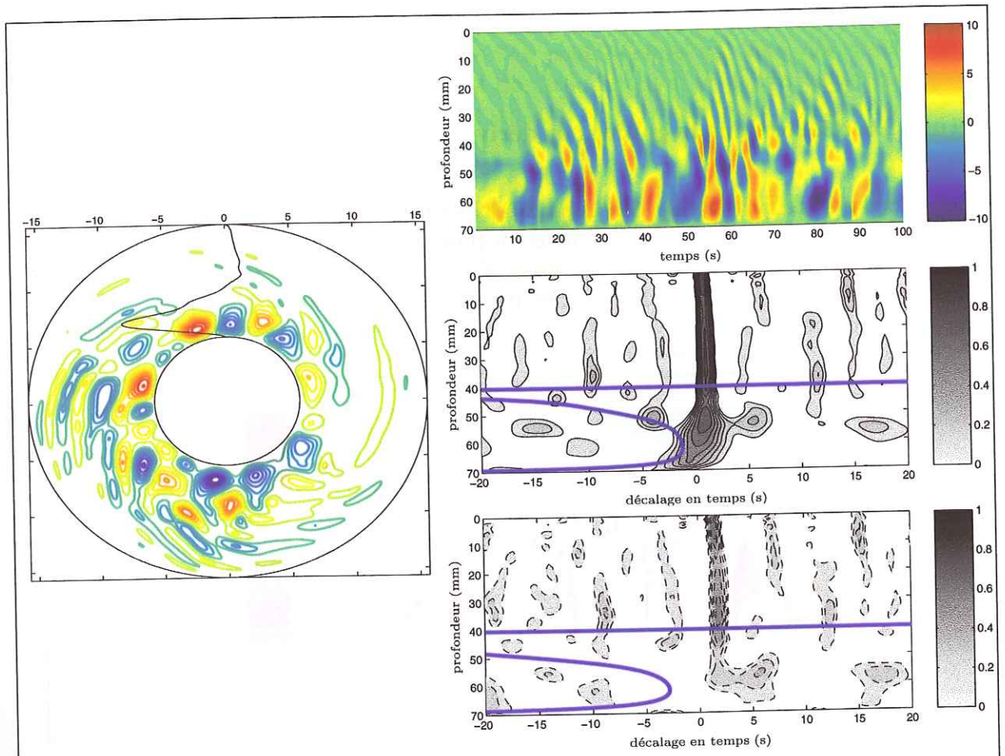


FIG. 3.37 – $E = 1.46\ 10^{-6}, P = 0.025, Ra = 1.5Ra_c$. *A gauche: fonction courant du modèle numérique. En haut à droite: profil synthétique de vitesse radiale. En bas à droite: cartes de corrélation entre synthétiques distants de 5 degrés (traits pleins), et dix degrés (traits pointillés). Le trait fort représente le temps que mettraient les structures à être advectées par le mouvement zonal.*

manchon. Les cartes de corrélation montrent clairement que ces structures inertielles dérivent dans la direction rétrograde. Dans la carte de corrélation faite avec un écart angulaire de 5 degrés, nous voyons que le trait fort, qui représente la dérive prévue par le mouvement zonal, passe par la tache de corrélation rétrograde. Le mouvement zonal emmène donc les structures inertielles. Ce trait fort ne rencontre plus aucune tache dans la carte de corrélation faite avec un écart angulaire de 10 degrés. La durée de vie des structures n'est donc pas très forte ici encore, on peut l'estimer entre 2 et 5 secondes. Cela explique pourquoi l'essentiel de la corrélation que nous avons vue expérimentalement (voir chapitre 2), dans un cas comme celui-ci, est une anticorrélation correspondant aux deux côtés d'une même cellule.

Les cartes de corrélation montrent aussi que dans le domaine 0-45 mm, la dérive globale est prograde. La valeur du décalage en temps est incompatible avec ce que donne le mouvement zonal, nous sommes ici en présence d'ondes de Rossby. La corrélation est robuste lorsque l'on passe l'écart latéral à dix degrés.

Ici encore, la comparaison avec le profil Doppler est concluante. Bien qu'il existe une zone aveugle dans le profil expérimental, nous voyons les bandes penchées, caractéristiques de l'onde de Rossby, entre les profondeurs 15 et 40 mm. Celles-ci sont aussi présentes sur le profil numérique. Les grosses structures inertielles sont aussi présentes sur les deux profils, a des profondeurs equivalentes (40-70 mm).

La comparaison des axes de temps demande, comme précédemment, une comparaison préalable des mouvements zonaux. La figure 3.38 en donne les résultats. La comparaison quantitative de l'ordre de grandeur des vitesse est bonne. La bosse négative forte, et la bosse positive faible du mouvement zonal expérimental sont bien décrites par le modèle numérique. Dans l'expérience, les zones de vortictié à dominante cyclonique et anticyclonique sont donc bien à la place prévue par le modèle numérique.

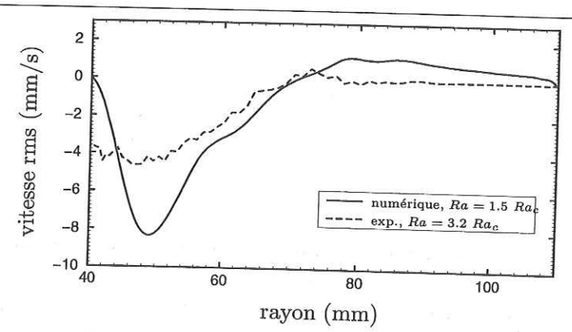


FIG. 3.38 – $E = 1.46\ 10^{-6}, P = 0.025$. *Mouvement zonal expérimental, comparé au mouvement zonal du modèle numérique.*

Ici encore, la différence relative des vitesses zonales entre modèle et expérience se répercute peu sur l'axe des temps des profils Doppler, car, comme nous l'avons vu un peu plus haut, dans cette situation encore, le temps de vie des structures est comparable au temps qu'il leur faut pour croiser la ligne de tir.

Bilan

L'expérience apporte donc un support quantitatif fort au modèle, et cela ne s'arrête pas là. Nous avons vu que les profils Doppler synthétiques sont en tout point comparables aux profils d'origine expérimentale.

Nous avons mis cette equivalence à profit pour comprendre quel type d'écoulement engendre les profils Doppler que nous avons mesurés. Dans les trois situations que nous avons étudiées, ces profils contiennent deux zones géographiques distinctes: près du manchon, des structures inertielles dérivent sous l'influence du mouvement zonal qu'elles créent, et près du bord, des structures dissipatives (ondes de Rossby) dérivent dans la direction prograde sans être sensibles au mouvement zonal éventuellement présent.

Le temps de vie des structures est conditionné par les échanges d'énergie entre échelles, donc par le nombre de Reynolds. Ce temps peut être plus faible que le temps qu'il faut à une structure pour dériver devant la sonde, sous l'influence de la propagation d'onde ou bien du mouvement zonal. Dans ce cas, c'est le temps de vie des structures que nous mesurons sur l'axe des abscisses des profils Doppler.

3.6 Comparaison de modèles numériques bidimensionnels et tridimensionnels.

Faire une comparaison non-linéaire entre les modèles numériques 2D et 3D suppose de sélectionner des paramètres que l'on peut atteindre avec les deux codes. Nous avons utilisé pour un calcul 3D le code de Dormy (1997), en conditions aux limites de no-slip, différence de température fixée, gravité à géométrie sphérique. Les non-linéarités, et le traitement des couches d'Ekman nous ont contraint à sélectionner pour le modèle 3D un nombre de Rayleigh faiblement surcritique, et un nombre d'Ekman assez élevé. Les paramètres retenus pour la comparaison sont donnés dans la table 3.5. La situation étant faiblement surcritique, nous n'avons pas besoin d'adapter le Ra/Ra_c du modèle 2D pour obtenir le même flux de chaleur que le modèle 3D, car les deux échelles coincident bien près du seuil, comme nous l'avons vu précédemment.

Variables globales.

Nous avons reporté dans cette table le flux de chaleur équatorial Nu à travers les deux modèles, ainsi que l'énergie surfacique contenue dans le plan équatorial. L'accord entre 2D et 3D pour ces deux variables est remarquable. Les deux solutions, prises au même écart par rapport à la criticalité, décrivent donc bien le même régime dynamique.

			2D	3D
Nombre d'Ekman	$4.73\ 10^{-4}$	Energie surfacique équatoriale	2.68	2.14
Nombre de Prandtl	7			
Nombre de Rayleigh	$1.5Ra_c$	Nombre de Nusselt équatorial	1.20	1.23

TAB. 3.5 – *Paramètres et sorties des modèles 2D et 3D.*

Vitesse radiale.

Comparons maintenant la structure des deux solutions. La figure 3.39 présente des coupes équatoriales de vitesse radiale. La simulation 2D est fausse d'une unité sur le mode critique, mais l'essentiel des caractéristiques de la convection est retenu. On peut s'en faire une idée plus précise en regardant les moyennes latérales rms de ces deux coupes, représentées sur la même figure, en fonction du rayon cylindrique.

La simulation 2D décrit bien la répartition radiale, et la vigueur de la convection dans le plan équatorial. Le maximum de cette moyenne rms est cependant légérement supérieur dans le cas de la simulation 3D. En effet, comme on peut le voir sur la coupe méridionale représentée sur la figure 3.39, du fait du nombre d'Ekman un peu grand, la contrainte de Proudman-Taylor ne rigidifie pas complètement les colonnes de convection, et le mouvement radial de la simulation 3D est un peu plus fort à l'équateur.

Champ de température.

La figure 3.40 fait le même type de comparaison, cette fois pour le champ de température total (statique et perturbation). La perturbation de température, qui n'est pas soumise à la contrainte de Proudman-Taylor (voir la coupe méridionale 3D), est concentrée autour de l'équateur. C'est la raison pour laquelle la coupe équatoriale 3D montre une perturbation de température plus pénétrative que la coupe équatoriale 2D: pour évacuer la même quantité de chaleur, la

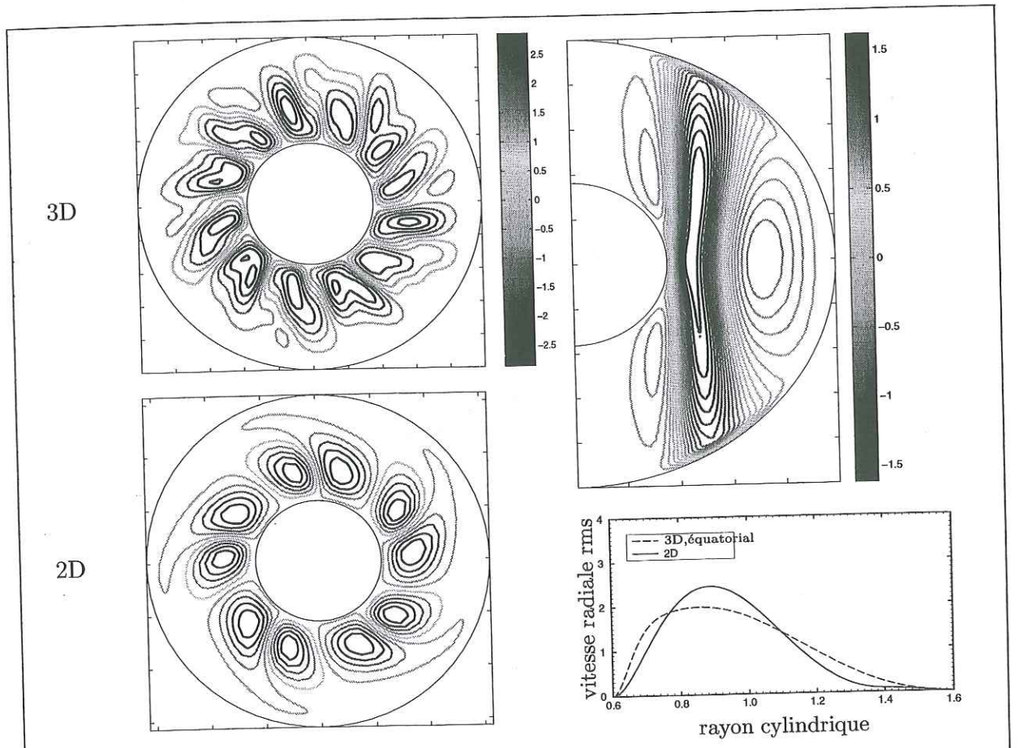


FIG. 3.39 – *A gauche: comparaison de la vitesse radiale dans le plan équatorial. En haut à droite: coupe méridionale faite dans la simulation 3D. En bas à droite: comparaison des vitesses radiales rms moyennés dans la direction latérale.*

convection doit se faire plus pénétrative lorsqu'elle est plus localisée. La comparaison des champs de température est donc décevante, et remet en question le choix d'une température moyennée suivant la verticale pour le modèle 2D. Cependant, la situation doit s'améliorer lorsque Ra/Ra_c augmente, car l'advection de température dans la direction verticale, liée à l'advection radiale par la condition de non-pénétration sur la sphère externe, doit mélanger la température de plus en plus efficacement, aboutissant à un champ de température plus invariant dans la direction de l'axe de rotation.

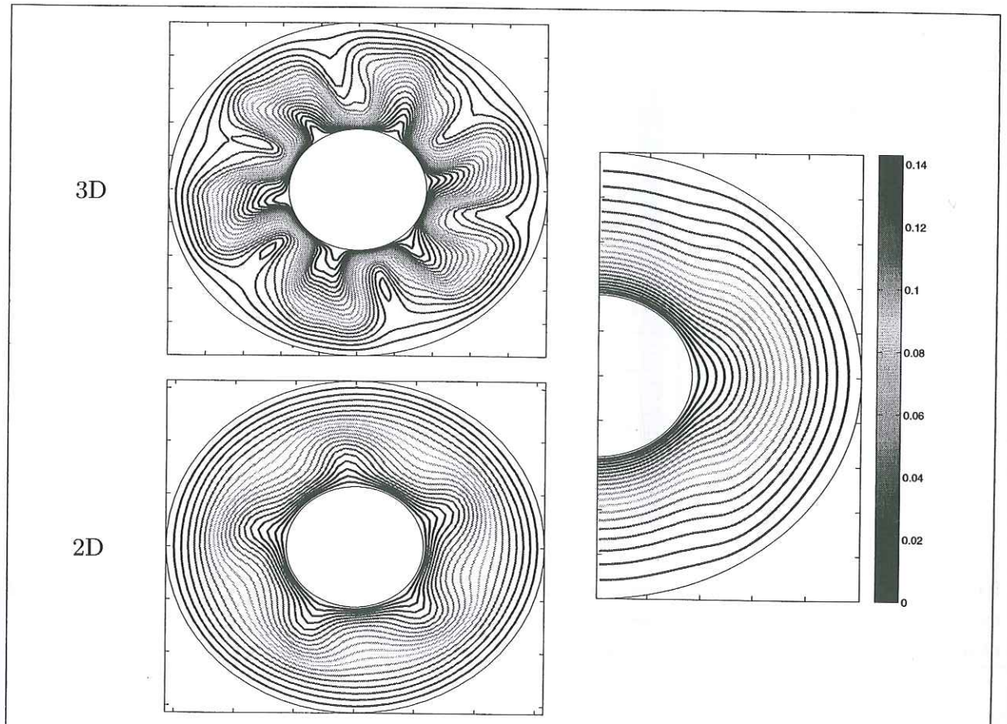


FIG. 3.40 – *A gauche: comparaison de la température totale dans le plan équatorial. À droite: coupe méridionale de température faite dans la simulation 3D.*

Vitesse zonale.

Il est important de comparer les circulations zonales engendrées par les deux modèles (figure 3.41). La coupe méridionale 3D révèle que le mouvement zonal n'est pas vraiment bidimensionnel, et présente une zone forte près de l'équateur. De plus, Le mouvement zonal relevé dans le plan équatorial, et sa moyenne sur une verticale sont plus forts que ce que prévoient les contraintes de Reynolds

du code 2D. Il apparaît de manière assez évidente que ce mouvement zonal équatorial est dû au vent thermique: les gradients verticaux de température (figure 3.40) coincident avec les gradients verticaux forts de mouvement zonal.

Le mouvement zonal 3D est donc entretenu ici par le vent thermique, source non présente dans la simulation 2D. La situation doit s'améliorer si on baisse le nombre d'Ekman: La rigidification verticale du champ de température rejette les isothermes près de la sphère extérieure. Dans ces zones limitrophes, l'effet de la viscosité limite le vent thermique, et les contraintes de Reynolds dans le fluide prennent le contrôle du mouvement zonal.

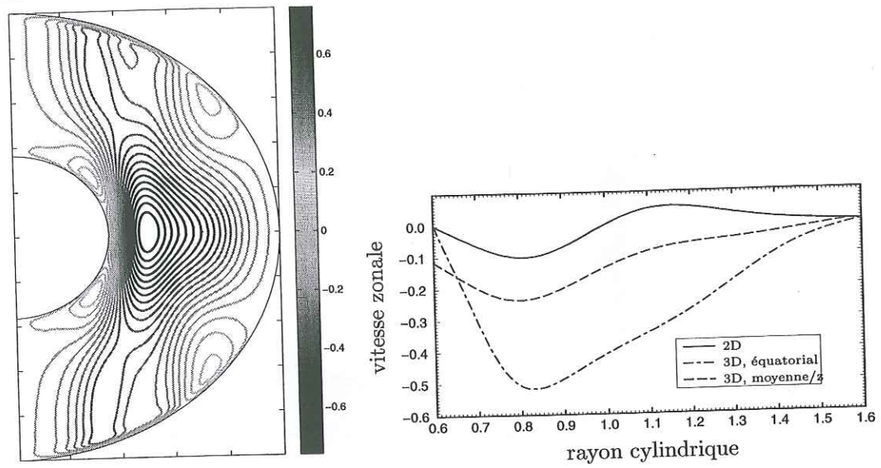


FIG. 3.41 – *A gauche: coupe méridionale du mouvement zonal. À droite: profils du mouvement zonal avec le rayon cylindrique; comparaison entre le profil 2D, le profil 3D équatorial et le profil 3D moyenné sur la verticale.*

Vitesse verticale.

Comme nous l'avons vu lors de l'étude au seuil, la fonction donnant la vitesse verticale en fonction de la coordonnée verticale est un élément crucial de l'adéquation de l'approximation 2D. Nous représentons donc sur la figure 3.42 une coupe méridionale de la vitesse verticale, ainsi qu'un graphe représentant celle-ci le long d'une verticale donnée. L'autocohérence du modèle bidimensionnel impose que la vitesse verticale varie linéairement avec la coordonnée verticale. C'est assez loin d'être le cas ici, et la situation va s'améliorer si on baisse le nombre d'Ekman, sans toutefois que la vitesse verticale tende vers un comportement totalement linéaire dans la limite $E \to 0$, comme nous l'avons souligné dans l'analyse au seuil de convection.

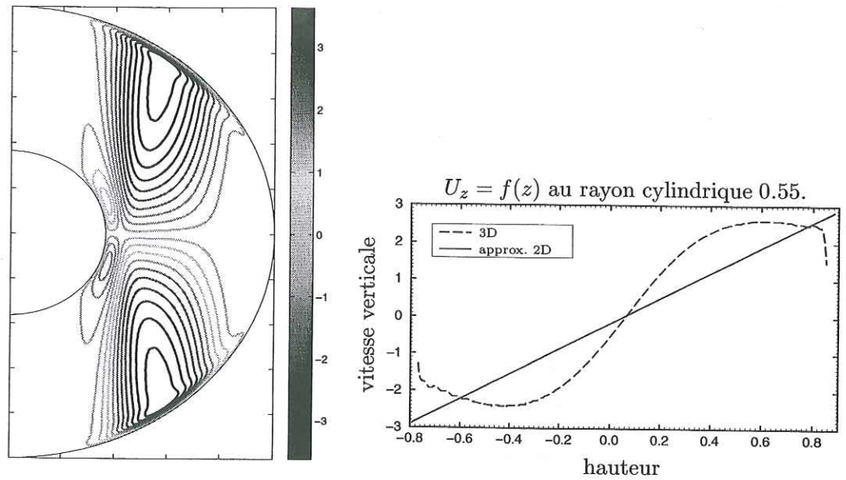


FIG. 3.42 – *A gauche: coupe méridionale de la vitesse verticale. À droite: profil vertical de la vitesse verticale, et comparaison avec le profil linéaire nécéssaire pour garantir l'autocohérence du modèle 2D.*

Bilan.

Cette comparaison, réalisée à un nombre d'Ekman assez fort, montre que le modèle 2D simule assez bien le régime dynamique dans le plan équatorial. Cependant, elle montre surtout certaines limites du modèle lorsque les champs ne sont pas rigidifiés suivant la verticale: les composantes non-géostrophiques de la vitesse zonale (vent thermique) et de la vitesse verticale rendent l'approximation quasigéostrophique (qui suppose que la partie géostrophique du mouvement, que nous simulons en 2D, dépasse largement la partie non-géostrophique) injustifiée.

En ce qui concerne la température, le modèle doit être suffisament surcritique pour que la situation s'améliore, et en ce qui concerne les champs de vitesse, l'abaissement du nombre d'Ekman assurera une meilleure modélisation.

3.7 Conclusion de l'étude numérique.

3.7.1 Bilan général.

La voie de la modélisation numérique est une approche qui s'est révèlée fructueuse pour répondre aux questions de l'introduction de ce chapitre.

- Nous avons compris la structure locale de l'écoulement, et nous sommes parvenus à interpréter qualitativement et quantitativement les mesures ultrasonores expérimentales. L'écoulement possède une géographie singulière composée de deux types de structures: des structures inertielles près du centre, obéissant à la loi d'échelle inertielle, et des structures dissipatives, qui sont des ondes de Rossby, près du bord. Ce n'est que dans les cas extrêmes des ondes de Rossby et des forts mouvements zonaux que nos mesures montrent la dérive des structures à travers la ligne de tir Doppler. Dans les autres cas, il s'agit plutôt de la naissance et de la mort des cellules devant la ligne de tir.
- Nous avons identifié, en utilisant le nombres de Reynolds, quatre régimes dynamiques. Chacun de ces régimes est caractérisé par une efficacité différente du transfert du mouvement convectif vers le mouvement zonal. D'un mécanisme de type contraintes de Reynolds, on passe à un nouveau mécanisme, que nous avons identifié ici: la ségrégation radiale des structures de vorticité de signe opposé. Ce phénomène est la conséquence de l'advection radiale de la vorticité potentielle du fluide. Ce mécanisme implique que l'énergie du mouvement zonal ne peut être plus forte que celle du mouvement radial, c'est la saturation définitive du mouvement zonal.
- En utilisant le nombre de Péclet, nous avons identifié, pour la première fois numériquement, deux régimes thermiques, déjà identifiés expérimentalement par Sumita et Olson (2000): le régime pénétratif et ses panaches issus de la frontière intérieure seule, le régime dual et ses panaches issus des deux frontières. Nous avons caractérisé l'efficacité de la machine convective dans le régime dual.
- nous avons illustré la turbulence bi-dimensionnelle de cette configuration. Le plan β modifie la turbulence pure en créant les structures inertielles. Ceci brise la continuité des flux d'énergie et d'enstrophie. Le plan β est aussi à l'origine de l'alimentation par la turbulence de l'échelle $m = 0$ (mécanisme de ségrégation).

Si notre modèle n'a reçu qu'un support mitigé de sa comparaison avec un modèle 3D (ni très surcritique, ni à très bas Ekman...), il a en revanche reçu un support expérimental fort, qui nous conforte dans la lecture que nous avons faite des résultats expérimentaux, et dans la confiance que nous avons en ces résultats numériques.

3.7.2 Discussion.

Noyau de la Terre.

Nous reprenons ici l'extrapolation non-magnétique aux conditions du noyau de la Terre que nous avions commencée lors de l'étude expérimentale. Le principe est d'essayer d'imaginer le type d'écoulement qui prendrait place dans le noyau si on pouvait le décrire comme un fluide de Boussinesq, en l'abscence de champ magnétique. Nous avions estimé le nombre de Reynolds à 10^8 dans cette configuration, d'après les conditions sur les dynamos cinématiques. Le nombre de Prandtl étant estimé à $10^{-2} - 1$, le nombre de Péclet de l'écoulement doit donc lui aussi être grand devant 1.

Pour se faire une image du style de convection qui doit prendre place dans ces conditions, nous devons réunir les observations numériques que nous avons faites, d'une part dans les écoulements à fort Reynolds mais faible Péclet (Gallium), d'autre part dans les écoulement à faible Reynolds mais fort Péclet (Eau).

Les structures inertielles doivent être présentes près de la graine. Alors qu'à $E = 10^{-6}$ nous n'observions qu'une rangée d'anticyclones, puis une rangée de cyclones déjà plus faibles, ici, à $E \sim 10^{-14}$, avec une taille des structures inertielles de 10 à 100 km, il faut s'attendre à avoir plusieurs rangées alternées d'anticyclones et de cyclones, car dans les 2200 km du noyau liquide, de la place est disponible pour beaucoup de ces structures.

Les panaches thermiques aussi doivent être présents, fins et bien définis. Les critères d'instabilité thermique externe ($Pe = 100$) étant largement remplis, il faut s'attendre à ce que des panaches partent de la frontière graine-noyau, et aussi de la frontière noyau-manteau. Du fait de la taille des structures inertielles, on peut penser que certains panaches pourront croiser plusieurs fronts de vorticité successifs (comme c'est le cas dans l'eau) et ainsi prendre la forme en zigzag que nous avons observée.

Le mouvement zonal ne peut pas dépasser le mouvement convectif. C'est ce que nous anticipions lors de la discussion qui fait suite à l'expérience, nous en avons maintenant la preuve.

Nous avons noté, au cours de l'étude, une caractéristique inhabituelle du mouvement zonal: il engendre un couple visqueux sur la graine. La machine convective peut donc, d'après nos calculs, mettre la graine en super-rotation.

Circulation zonale des grandes planètes.

Nos résultats peuvent aussi être appliqués au problème de la circulation zonale des grandes planètes telles que Jupiter. Le nombre d'Ekman de l'atmosphère Jovienne peut être estimé à 10^{-12} si l'on se base sur les diffusivités moléculaires (Manneville et Olson, 1996). Les nuages d'azote glacé montrent que les vents zonaux sont les circulations dominantes. Depuis le pôle jusqu'à l'équateur, environ 5 bandes sombres, alternant avec des bandes plus claires, peuvent être observées. (Manneville et Olson, 1996) ont réalisé des expériences de convection en rotation qui ont montré que plusieurs de ces caractéristiques pouvaient être expliquées par les mouvements géostrophiques zonaux résultant de la convection.

Nos calculs montrent que du fait de l'advection de la vorticité potentielle, cyclones et anticyclones s'organisent en fronts alternés, et que leur durée de vie est beaucoup plus longue que la durée de vie des vortex individuels qui les délimitent. Ces fronts stables sont à l'origine des variations du mouvement zonal, donc des bandes observées expérimentalement par Manneville et Olson (1996). D'après nos calculs, le nombre de fronts est une fonction de la place disponible, donc du rapport d'aspect et de la taille des structures. En particulier, puisque les structures grandissent quand Re augmente sous l'effet de la turbulence bi-dimensionnelle, nous prévoyons une diminution du nombre de fronts avec Re.

Pour une meilleure simulation, il faudrait adopter des conditions aux limites de contraintes libres à la frontière extérieure du modèle. En non-glissement nous remarquons tout de même que du fait de la géométrie sphérique, la densité de vorticité ne se distribue pas de manière homogène et un couple visqueux subsiste toujours près de la frontière extérieure, qui donnerait à celle-ci une vitesse prograde, dans le cas de conditions de contraintes libres. C'est compatible avec le jet équatorial prograde observé sur Jupiter.

Références du chapitre 3.

Ardes, M., Busse, F. H., et Wicht, J., Thermal convection in rotating spherical shells, *Phys. Earth Planet. Int.*, *99*, 55–67, 1997.

Busse, F. H., Thermal instabilities in rapidly rotating systems, *J. Fluid Mech.*, *44*, 441–460, 1970.

Cardin, P. et Olson, P., Chaotic thermal convection in a rapidly rotating spherical shell: consequences for flow in the outer core, *Phys. Earth Planet. Int.*, *82*, 235–239, 1994.

Carrigan, C. R. et Busse, F. H., An experimental and theoretical investigation of the onset of convection in rotating spherical shells, *J. Fluid Mech.*, *126*, 287–305, 1983.

Dormy, E., *Modélisation numérique de la dynamo terrestre*, Thèse de Doctorat, I.P.G.P, 1997.

Dormy, E., Cardin, P., et Jault, D., Structure of the onset of convection in rotating spherical shells, poster présenté au congrès *Study of the Earth and Planetary Interiors*, 2000, 2000.

Glatzmaier, G. A. et Olson, P., Highly supercritical thermal convection in a rotating spherical shell: centrifugal vs. radial gravitiy, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, *70*, 113–136, 1993.

Grote, E., Busse, F. H., et Tilgner, A., Regular and chaotic spherical dynamos, *Phys. Earth Planet. Int.*, *117*, 259–272, 2000.

Jones, C. A., Soward, A. M., et Mussa, A. I., The onset of thermal convection in a rapidly rotating sphere, *J. Fluid Mech.*, *405*, 157–179, 2000.

Manneville, J. et Olson, P., Banded convection in rotating fluid spheres and the circulation of the Jovian atmosphere, *Icarus*, *122*, 242–250, 1996.

Plaut, E. et Busse, F. H., Low prandtl number convection in a rotating cylindrical annulus., *Submitted to J. Fluid. Mech.*, 2001.

Sumita, I. et Olson, P., Laboratory experiments on high Rayleigh number thermal convection in a rapidly rotating hemispherical shell, *Phys. Earth Planet. Int.*, *117*, 153–170, 2000.

Sun, Z. P., Schubert, G., et Glatzmaier, G. A., Transition to chaotic thermal convection in a rapidly rotating sphericall shell, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, *69*, 95–131, 1993.

Tilgner, A. et Busse, F. H., Finite amplitude convection in rotating spherical fluid shells, *J. Fluid Mech.*, *332*, 359–376, 1997.

Zhang, K., Spiralling columnar convection in rapidly rotating spherical shells, *J. Fluid Mech.*, *236*, 535–556, 1992.

Zhang, K., On equatorially trapped boundary inertial waves, *J. Fluid Mech.*, *248*, 203–217, 1993.

Zhang, K. et Busse, F. H., On the onset of convection in rotating spherical shells, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, *39*, 119–147, 1987.

Zhang, K. et Jones, C. A., The influence of Ekman boundary layers on rotating convection, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, *71*, 145–162, 1993.

Conclusions et perspectives

Vers une étude des dynamos convectives turbulentes.

1 Résultats scientifiques.

L'étude combinée de modèles expérimentaux et numériques de la convection dans le noyau terrestre nous a permis de construire une description complète et quantitative de la structure d'un écoulement convectif turbulent à grand forçage.

Le principal résultat de l'étude expérimentale systématique du chapitre 2 est l'obtention des lois d'échelle pour les mouvements convectifs et zonaux. Ces lois ont mis l'accent sur l'existence de structures cohérentes inertielles, maintenues par un équilibre entre flux non-linéaire d'énergie, force d'Archimède et force de Coriolis. Cet équilibre prend place du fait de la conservation locale de la vorticité potentielle de l'écoulement.

L'étude théorique du chapitre 1 permet d'interpréter ces structures cohérentes comme le résultat de la non-conservation de l'enstrophie à grande échelle, qui brise, localement dans le spectre, la cascade inverse turbulente d'énergie.

L'étude numérique du chapitre 3 a repris la modélisation là où, faute de précision, la cartographie expérimentale achoppait. Nous avons identifié clairement les structures cohérentes inertielles, et montré qu'elles jouaient un rôle de pivot dans la cascade directe d'énergie et la cascade inverse d'enstrophie.

Nous avons montré aussi que même à grand forçage, des ondes de Rossby subsistaient dans l'écoulement, dans les zones géographiques où la contrainte de Proudman-Taylor force les mouvements à être faibles, et avec eux, le nombre de Reynolds local de l'écoulement. Ces ondes de Rossby sont excitées par les

structures inertielles.

Une attention particulière a été portée sur la validation quantitative du modèle numérique par rapport à l'expérience, et aux modèles numériques tri-dimensionnels, dans la mesure du possible. Le résultat, concluant tant au seuil que loin du seuil, ouvre une nouvelle voie de modélisation hybride de la dynamo (nous y reviendrons un peu plus loin).

Afin de répondre à la question de la dépendance de la convection avec le nombre de Prandtl, nous avons mené, autant que possible, une analyse conjointe du comportement de l'eau et d'un métal liquide, le gallium. Nous avons montré que dans la limite des grands forçages, les comportements des deux fluides pouvaient être rapprochés. Le cas de l'eau a permis d'analyser les structures thermiques à grand nombre de Péclet, et le cas du gallium a permis d'analyser les structures dynamiques à grand nombre de Reynolds. Ceci nous donne une image plus claire de la convection thermo-compositionnelle dans le noyau, qui réunit à la fois des nombre de Reynolds et de Péclet très élevés. Nous attendons que de très fins panaches thermiques partent de la graine, et aussi de la frontière noyau-manteau, et croisent les fronts de vorticité alternée qui maintiennent le mouvement zonal, zig-zaguant ainsi entre les vortex.

Les effets de la convection compositionnelle peuvent, en première approximation, se déduire de ceux d'une convection thermique dans laquelle on augmenterait le nombre de Prandtl, pour tenir compte de la faible diffusivité des éléments légers. Les panaches seraient donc encore plus fins. L'instabilité compositionnelle existe certainement au voisinage de la graine, et, comme le suggèrent Buffett et al. (2000), elle pourrait aussi exister à la frontière noyau-manteau. Elle prendrait ainsi la forme duale que nous avons observée numériquement.

Nous avons abondamment étudié le mouvement zonal, plus grande structure cohérente admissible par l'écoulement et manifestation la plus évidente de la cascade inverse d'énergie. Les lois d'échelle expérimentales ont révélé que le frottement d'Ekman du mouvement zonal sur la frontière extérieure constitue le puits d'énergie à grande échelle du système. Si l'effet de ce frottement est négligeable pour les modes convectifs (à part un ralentissement de la pulsation des ondes de Rossby au seuil), il est en revanche essentiel à la modélisation correcte du mode zonal.

Nous avons montré théoriquement et expérimentalement que le mouvement zonal tire son énergie de la convection, et il la tire d'autant mieux que cette convection est turbulente. Nous avons avancé un nouveau mécanisme pour l'expliquer: la ségrégation des structures de vorticité. Ce mécanisme prévoit une saturation du rapport entre l'énergie convective et l'énergie zonale, saturation que nous n'avons pas pu atteindre expérimentalement, mais que nous avons observée dans les modèles numériques.

L'idée selon laquelle une convection contenant de très petites échelles caractéristiques entretient une circulation à grande échelle est fréquemment invoquée en géophysique planétaire, pour expliquer des systèmes très variés comme le noyau terrestre, ou bien les vents de Jupiter. Nous pensons que notre étude du mouvement zonal illustre bien les mécanismes par lesquels l'énergie des modes convectifs nourrit le mode zonal.

2 Perspectives

Ce travail ouvre la voie à une étude approfondie des liens entre les dynamos convectives fluides et la turbulence. Plusieurs voies d'investigation complémentaires sont envisageables.

2.1 Turbulence quasigéostrophique.

Les illustrations que nous avons produites de la turbulence quasigéostrophique sur plan β sont convaincantes. Cependant, il nous manque une caractérisation plus quantitative des flux d'énergie et d'enstrophie, et un rapprochement, dans la mesure du possible, avec les théories existantes. Si les théories autosimilaires ne semblent pas adaptées, il pourrait en revanche être très intéressant d'essayer d'appliquer les théories de mécanique statistique turbulente telles que celle de Sommeria et al. (1991); Robert et Sommeria (1991) sur notre système. C'est ainsi que l'on pourrait essayer d'établir une théorie asymptotique pour ce type de turbulence, et l'appliquer au noyau terrestre.

2.2 Modèles hybrides de la dynamo.

Les limites actuelles du calcul numérique ne permettent pas d'obtenir des dynamos tridimensionnelles à bas nombre de Prandtl magnétique, réalisant la séparation d'échelle, c'est à dire permettant d'obtenir un champ magnétique à l'échelle du conteneur, entretenu par un champ de vitesse turbulent contenant de très petites échelles de vorticité. C'est pourtant le régime attendu pour la dynamo terrestre.

Nous avons montré que le modèle quasigéostrophique permet, sur la base de calculs bi-dimensionnels, donc économiques, d'obtenir, avec une précision acceptable, toutes les composantes du champ de vitesse tri-dimensionnel. Ceci se fait au prix d'un asservissement de la vitesse verticale à la vitesse radiale, mais conserve la propriété d'hélicité de l'écoulement, très intéressante pour la dynamo. On pourrait alors essayer de faire interagir un calcul bi-dimensionnel

de la vitesse, qui peut résoudre des structures de vorticité très fines, et un calcul tri-dimensionnel du champ magnétique, qui serait limité uniquement aux grandes échelles du champ. Cette approche représente potentiellement un progrès important dans la compréhension de la géodynamo.

2.3 Magnétoconvection expérimentale.

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, l'extrapolation des lois d'échelle au noyau donne des résultats intéressants, mais quelque peu fantaisistes, en particulier en ce qui concerne la taille des colonnes. Il est important d'étudier maintenant l'effet du champ magnétique sur la convection dans un métal liquide en rotation, dans la géométrie sphérique. Ce travail de Thèse peut être vu comme la première phase d'utilisation de l'expérience Grenobloise, sans champ magnétique. L'appareil peut maintenant évoluer pour étudier l'effet, sur la convection dans le gallium, d'un champ magnétique toroïdal prescrit, et donner lieu à un nouveau travail similaire, de détermination des lois d'échelle, puis d'investigation numérique structurelle.

3 Le mot de la fin...

...vaut mieux que s'il avait été mis en exergue au début! Nous laissons donc Henri Bergson nous donner encore du cœur à l'ouvrage:

> «... Là où il n'y a pas un effort personnel et même original, il n'y a même pas un commencement de science. »

Réferences de la conclusion

Buffett, B., Garnero, E., et Jeanloz, R., Sediments at the top of Earth's core, *Science*, *288*, 2007–2012, 2000.

Robert, R. et Sommeria, J., Statistical equilibrium states for 2-dimensional flows., *J. Fluid Mech.*, *229*, 291–310, 1991.

Sommeria, J., Nore, C., Dumont, T., et Robert, R., Statistical-theory of the great red spot of Jupiter., *CR. Acad. Sci. II*, *311*, 999–1005, 1991.

Annexe A

Compléments.

Cette annexe présente quelques éléments du travail effectué entre la réception des rapports concernant ce manuscrit et la soutenance proprement dite.

A.1 Vorticité potentielle dans l'atmosphère.

On peut compléter ce qui a été dit dans le chapitre introductif en présentant quelques beaux exemples des concepts de vorticité potentielle dans la physique de l'atmosphére et des océans. La figure A.1 présente l'exemple de la dynamique d'un traceur passif hypothétique dans l'air stratosphérique. La dynamique est régie par l'advection pure de vorticité potentielle. Les variations de vorticité ambiante sont cette fois liées aux variations du paramètre de Coriolis, maximal au pôle et nul à l'equateur. Un courant descendant du pôle Nord doit se charger en vorticité positive, donc devenir un cyclone. Le modèle numérique a été initialisé sur des données réelles, et a évolué sur un temps simulé de quatre jours. Il a par la suite été comparé à la situation finale réelle.

A.2 Ondes de Rossby dans les océans.

Nous poursuivons dans cette optique illustrative en présentant cette fois un exemple d'ondes de Rossby détectées dans l'océan par altimétrie satellite. La figure A.2 présente une carte altimétrique de la zone, ainsi qu'un diagramme espace-temps sur lequel le comportement ondulatoire, de périodes compatibles avec les périodes des ondes de Rossby, est clairement identifié. La force de rappel à l'origine du comportement ondulatoire est ici la variation du paramètre de Coriolis avec la latitude, et les ondes se propagent d'Est en Ouest.

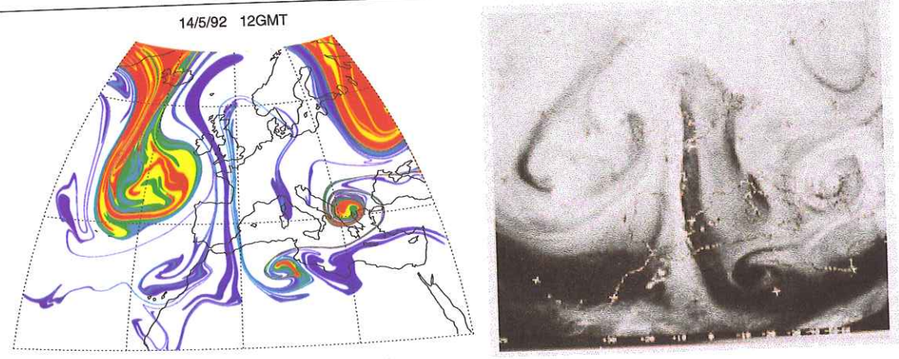


FIG. A.1 – *À gauche: évolution d'un traceur passif sur condition initiales réelles par advection de vorticité potentielle. A droite, situation finale réelle (air stratosphérique). Pour plus de détails, on consultera MacIntyre (2001), d'où cet exemple frappant a été tiré.*

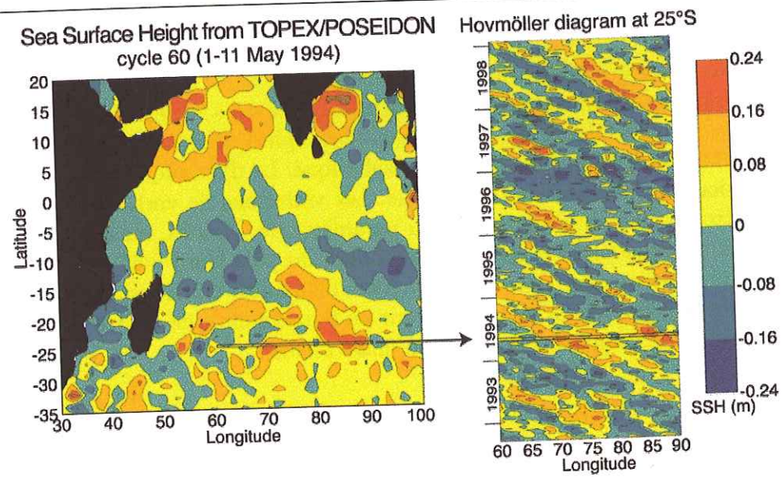


FIG. A.2 – *Gauche: altimétrie satellite (TOPEX/POSEIDON) dans l'océan, au large de Madagascar. Une carte spatio-temporelle (à droite) est créée, de la même manière que les cartes expérimentales de ce mémoire. On pourra consulter, pour plus de détails, Cipollini et al. (2001); Fu et Chelton (2001).*

A.3 Régimes dynamiques de l'écoulement.

Le but ést ici de mieux raccorder les études numériques et expérimentales. En effet, l'utilisation, dans ces deux chapitres, de méthodes de traitement parfois très différentes, rend un peu difficile la comparaison.

La figure A.3 est une copie de la figure 3.9, sur laquelle on a reporté les valeurs de la figure 2.10. Les modes de dépouillement des données expérimentales et numériques différaient. Ici nous avons adopté les conventions du chapitre 3 pour toutes les données.

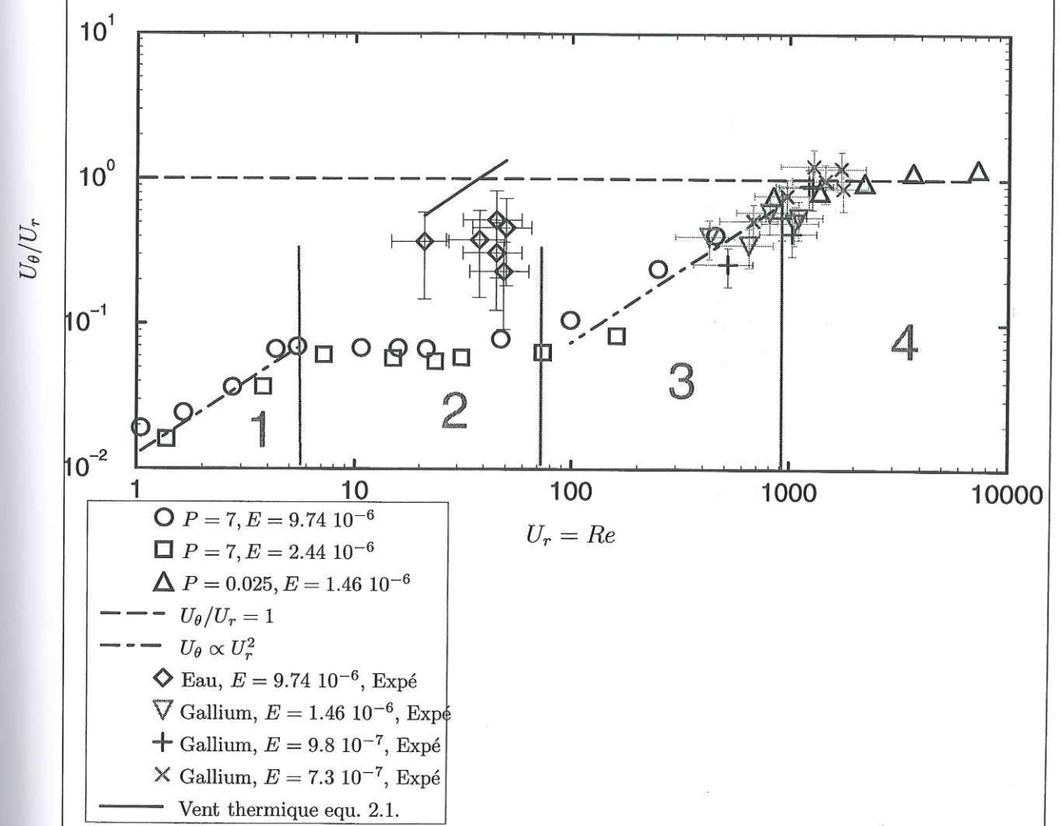


FIG. A.3 – *Régimes dynamiques de l'écoulement.*

Nous n'avons pas d'expériences dans le régime 1. En effet, le régime 1 impose de se rapprocher du seuil avec une grande précision et une grande stabilité, ce que le dispositif expérimental ne permet pas. Dans le régime 2, nous dis-

posons d'expériences faites en eau. La comparaison des cartographies Doppler numériques et expérimentales pour ces expériences était concluante (voir figure 3.28 et suivantes). Cependant, un désaccord était apparu entre le mouvement zonal du modèle numérique et nos mesures (figure 3.34). Ce désaccord figure encore ici. Il peut être partiellement attribué au bruit de mesure important pour ces expériences. Il semble aussi que le vent thermique (prévisions en trait fort sur la figure A.3) soit responsable de l'essentiel du mouvement zonal dans cette configuration.

Dans les régimes 3 et 4, nous disposons des expériences, faites pour la plupart en gallium liquide. L'accord entre les prévisions du modèle numérique et les expériences est cette fois beaucoup plus concluant, même si les expériences ont tendance à produire moins de mouvement zonal que le modèle numérique, à Re donné. Nous ne pouvons exclure qu'ici encore, une partie du mouvement zonal expérimental provienne du vent thermique, mais cependant, nous avons expliqué au chapitre 2 que dans la gamme des expériences, les prévisions de vent thermique était à peu près trois fois plus faibles que ce que nous observons. De plus, Lorsque Re augmente, le mouvement zonal issu de la ségrégation des structures de vorticité augmente, et le vent thermique doit rester limité car les isothermes prennent une forme de plus en plus cylindrique sous l'action du transport vertical de température.

Nous attendons donc que la source principale de mouvement zonal à grand Re soit le mécanisme de ségrégation. Cependant, il faudrait réaliser ultérieurement une étude minutieuse de l'action du vent thermique dans nos configurations expérimentales.

A.4 Extrapolation et stabilité des couches d'Ekman.

L'extrapolation des résultats de l'étude expérimentale aux conditions du noyau terrestre pose la question de la stabilité des couches d'Ekman. Desjardins et al. (2001) ont étudié ce problème de stabilité. Leur étude montre qu'une couche d'Ekman près d'une surface orthogonale au vecteur rotation devient instable à un nombre de Reynolds de 55. Nos résultats prévoient pour la couche d'Ekman externe un nombre de Reynolds local de l'ordre de $Re_l = Re \cdot \sqrt{E} = 10$. Au pôle, nous attendons donc une couche d'Ekman relativement stable. Cependant, à mesure que l'on descend vers l'equateur, la couche d'Ekman devient de plus en plus large, et son nombre de Reynolds local associé augmente. Il doit donc exister une latitude critique à laquelle la couche d'Ekman se déstabilise. L'effet serait alors probablement un freinage visqueux d'efficacité améliorée par rapport au freinage qui prend place à travers une couche d'Ekman laminaire.

Réferences complémentaires.

Cipollini, P., Cromwell, D., Challenor, P. G., et Raffaglio, S., Rossby waves detected in global ocean colour data, *Geophys. Res. Let.*, *28*, 323–326, 2001.

Desjardins, B., Dormy, E., et Grenier, E., Instability of ekman-hartmann boundary layers, with application to the fluid flow near the core-mantle boundary., *Phys. Earth Planet. Int.*, *123*, 15–26, 2001.

Fu, L. L. et Chelton, D. B., Large scale ocean circulation, in *Satellite Altimetry and Earth sciences*, edité par L. L. Fu et A. Cazenave, Academic Press, 2001.

MacIntyre, M. E., Numerical weather prediction: a vision of the future, updated still further., in *The lifecycle of extratropical cyclones*, edité par Shapiro et Gronas, Amer. Meteorol. Soc., Boston, 2001.

Annexe B

Implémentation numérique du code bi-dimensionnel.

Cette annexe est une notice technique pour la compréhension du code bi-dimensionnel que Philippe Cardin et moi avons écrit à l'occasion de ce travail de thèse. Pour plus d'explication sur les schémas numériques employés, on pourra consulter Dormy (1997). Ce code a, lui aussi, subi sa *benchmark*. En collaboration avec Emmanuel Plaut, nous avons comparé des résultats de simulation dans une géométrie d'anneau. Au seuil, les paramètres critiques Ra_c, m_c, ω_c ainsi que la forme radiale de la solution ont été examinés. Dans le domaine faiblement non-linéaire, le nombre de Nusselt et la forme radiale ont été comparés.

B.1 Formulation numérique des equations.

Nous résolvons le système d'equation 2.4, 2.8 et 1.26 en utilisant la fonction courant Ψ définie par

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \\ -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \end{pmatrix}$$

et la perturbation de température Θ (voir chapitre 1). Nous avons donc

$$\omega = -\nabla^2 \Psi.$$

Nous écrivons l'equation de la vorticité potentielle 2.4 sous la forme suivante, pour faire apparaître les schémas numériques de Adams-Bashford et Crank-Nicholson:

$$\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t}-\nabla^2\right)\nabla^2\Psi+E^{-1}\frac{2}{L}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}r}\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}}_{\substack{\text{Crank-Nicholson}\\ (+\text{ Coriolis})}} = \underbrace{-\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\frac{\partial\nabla^2\Psi}{\partial r}-\frac{\partial\Psi}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial\nabla^2\Psi}{\partial\theta}\right)}_{\substack{\text{Adams-Bashford}\\ \text{(non-linéaire)}}} + \underbrace{-Ra\frac{\partial T}{\partial\theta}}_{\substack{\text{Adams-Bashford}\\ \text{(Archimède linéaire)}}}. \tag{B.1}$$

Les conditions aux limites de non-glissement sont précisées un peu plus loin avec la décomposition spectrale. La température T se décompose en la somme de la perturbation Θ et du profil statique 2D T_s. L'équation pour Θ est:

$$\underbrace{\left(P\frac{\partial}{\partial t}-\nabla^2\right)\Theta}_{\text{Crank Nicholson}} = \underbrace{-P\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\frac{\partial\Theta}{\partial r}-\frac{\partial\Psi}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)}_{\substack{\text{Adams-Bashford}\\ \text{(non-linéaire)}}} - \underbrace{\frac{1}{\ln\left(r_e/r_i\right)r^2}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}}_{\substack{\text{Adams-Bashford}\\ \text{(linéaire)}}} \tag{B.2}$$

Nous avons ici utilisé le profil statique de température:

$$T_s=\frac{\ln\left(\frac{r}{r_i}\right)}{P\ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)}.$$

Les conditions aux limites pour Θ sont $\Theta=0$ aux deux frontières (chauffage différentiel). Le mouvement zonal obéit à:

$$\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t}-\nabla_e^2+\frac{1}{r^2}+\frac{E^{-1/2}}{r_e\left(1-\frac{r^2}{r_e^2}\right)^{3/4}}\right)\overline{u_\theta}}_{\text{Crank Nicholson}} = \underbrace{-\overline{\left(\mathbf{u}\cdot\nabla_e\right)u_\theta}}_{\substack{\text{Adams-Bashford}\\ \text{(non-linéaire)}}} \tag{B.3}$$

Les conditions aux limites aux deux frontières sont $\overline{u_\theta}=0$ (non-glissement du mouvement zonal).

B.2 Traitement spectral

On prend la décomposition:

$$\begin{aligned}\Psi&=\frac{1}{2}\sum_{-m_{max}}^{m_{max}}\Psi_m(r)e^{-im\theta}\\ \Theta&=\frac{1}{2}\sum_{-m_{max}}^{m_{max}}\Theta_m(r)e^{-im\theta}\end{aligned} \tag{B.4}$$

Dorénavant, les signes sommes sont sous-entendus. On a

$$\mathbf{u}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{r}im\Psi_m\\ -\frac{\partial\Psi_m}{\partial r}\end{pmatrix}.$$

Ceci nous permet d'écrire les conditions aux limites de non glissement pour la vitesse convective. Les fonctions u_r et u_θ devant être nulles sur les bords du domaine, et puisque $m\neq 0$, alors les conditions aux limites s'expriment:

$$\Psi_m=0 \text{ et } \frac{\mathrm{d}\Psi_m}{\mathrm{d}r}=0 \text{ aux frontières, pour tout } m\neq 0.$$

Ceci souligne l'intérêt d'avoir séparé mouvements axissymétriques et mouvements non-axissymétriques: nous n'aurions pas pu écire les conditions aux limites du mode $m=0$. Nous avons encore:

$$\nabla^2=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{m^2}{r^2}=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{m^2}{r^2}$$

B.3 Implémentation numérique

B.3.1 Grille radiale

On choisit une grille radiale irrégulière numérotée de `1` à `NR-1`. le point `0` est le manchon, et le point `NR` est la sphère. On a

$$\frac{\mathtt{r(0)}}{\mathtt{r(NR)}}=4/11$$
$$\mathtt{r(NR)}-\mathtt{r(0)}=1$$

soit donc $\mathtt{r(0)}=4/7$ et $\mathtt{r(NR)}=11/7$. Soit

$$dr(ir)=r(ir)-r(ir-1).$$

On adopte un schéma de différences finies d'ordre 2 dans la direction radiale.

$$f(ir+1)=f(ir)+dr(ir+1)\frac{\partial f}{\partial r}(ir)+\frac{dr^2(ir+1)}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(ir)+O(dr^3)$$

$$f(ir-1)=f(ir)-dr(ir)\frac{\partial f}{\partial r}(ir)+\frac{dr^2(ir)}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(ir)+O(dr^3)$$

Ainsi la dérivée première s'exprime au second ordre de précision par:

$$\frac{\partial f}{\partial r}(ir)=\frac{dr^2(ir)f(ir+1)-dr^2(ir+1)f(ir-1)-\left(dr^2(ir)-dr^2(ir+1)\right)f(ir)}{\left(dr(ir)dr(ir+1)\right)\left(dr(ir)+dr(ir+1)\right)}$$

La matrice Gr code pour cette dérivée. Ses éléments sont donc:

```
Gra(ir) = -dr(ir+1)            / (dr(ir)      * (dr(ir)+dr(ir+1)))
Grb(ir) = (dr(ir+1) - dr(ir))/ (dr(ir)      *  dr(ir+1))
Grc(ir) =  dr(ir)              / (dr(ir+1)    * (dr(ir)+dr(ir+1)))
```

On va aussi chercher la valeur de la dérivée seconde. On a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(ir) = 2\frac{dr(ir)f(ir+1) + dr(ir+1)f(ir-1) - (dr(ir) + dr(ir+1))\, f(ir)}{dr^2(ir)dr(ir+1) + dr(ir)dr^2(ir+1)}$$

La matrice L code pour la partie radiale du Laplacien. Ses éléments sont donc:

```
La(ir) =  2./(dr(ir)  * (dr(ir)+dr(ir+1))) +Gra(ir)/r(ir)
Lb(ir) = -2./(dr(ir)  *  dr(ir+1))          +Grb(ir)/r(ir)
Lc(ir) =  2./(dr(ir+1)* (dr(ir)+dr(ir+1))) +Grc(ir)/r(ir)
```

La matrice d2r code pour la dérivée seconde radiale. Ses éléments sont donc:

```
dr2a(ir) =  2./(dr(ir)  * (dr(ir)+dr(ir+1)))
dr2b(ir) = -2./(dr(ir)  * dr(ir+1))
dr2c(ir) =  2./(dr(ir+1)* (dr(ir)+dr(ir+1)))
```

Soient yp(Mmin:Mmax,-1:NR+1) et yt(Mmin:Mmax,0:NR) les transformées de Fourier respectives de la fonction courant et du champ de température. Mmin est nul quand on fait un calcul non-linéaire. Ut0(0:NR) est le mouvement zonal. On doit résoudre ces trois champs.

B.3.2 Équation de vorticité

L'équation B.1 est implémentée ainsi:

$$\mathtt{A2}\,[\mathtt{yp(t+dt)}] = \mathtt{B2}\,[\mathtt{yp(t)}] + 1.5 * \mathtt{adamsp(t)} - 0.5 * \mathtt{adamsp(t-dt)}$$

avec

$$\mathtt{A2} = \mathtt{A1}\nabla^2 + E^{-1}\frac{1}{L}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} = \mathtt{A1}\nabla^2 - \frac{1}{E\left(r_e^2 - r^2\right)}\frac{\partial}{\partial\theta} = \mathtt{A1}\nabla^2 + \frac{im}{E\left(r_e^2 - r^2\right)}$$

et

$$\mathtt{A1} = \frac{1}{dt} - \frac{1}{2}\nabla^2.$$

La matrice B2 s'exprime par

$$\mathtt{B2} = \frac{2}{dt}\nabla^2 - \mathtt{A2}.$$

A1 est tridiagonale. Ses éléments génériques sont:

```
A1a(ir)   = - La(ir)/2.
A1b(m,ir)= -(Lb(ir)-m*m*r_2(ir))/2.+(1.0/dt)
A1c(ir)   = - Lc(ir)/2.
```

Il n'y pas de problèmes de termes de bord, puisque A1 est définie de 1 à NR-1.

A2 est pentadiagonale. Elle ne contient, comme c'est le cas pour les forces codées dans le schéma de Crank-Nicholson, que la motié de la force de Coriolis. On appelle Cor(ir) le terme géométrique:

```
Cor(ir)=1./(r(NR)**2-r(ir)**2)
```

Les éléments géneriques de A2 (de ir = 2 jusqu'à ir = NR − 2) sont:

```
        A2U(m,ir,1) = A1a(ir)   * La(ir-1)
        A2U(m,ir,2) = A1a(ir)   * (Lb(ir-1)-m*m*r_2(ir-1))
&                   + A1b(m,ir)* La(ir)
        A2U(m,ir,3) = A1a(ir)   * Lc(ir-1)
&                   + A1b(m,ir)* (Lb(ir)-m*m*r_2(ir))
&                   + A1c(ir)   * La(ir+1)
&                   + 1./Ek*Cor(ir)*m*im
        A2U(m,ir,4) = A1b(m,ir)* Lc(ir)
&                   + A1c(ir)   * (Lb(ir+1)-m*m*r_2(ir+1))
        A2U(m,ir,5) = A1c(ir)   * Lc(ir+1)
```

Passons aux termes de bord pour A2. Les conditions aux limites de no-slip imposent au poloidal non axissymétrique:

$$\Psi(0) = \Psi(\mathtt{NR}) = 0$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial r}(0) = \frac{\partial\Psi}{\partial r}(\mathtt{NR}) = 0$$

Ψ est donc nul aux bords, et on dispose de deux points fictifs:

$$\Psi(\mathtt{NR}+1) = \Psi(\mathtt{NR}-1)$$

$$\Psi(-1) = \Psi(1)$$

Ces deux points permettent d'ècrire, pour ir = 1:

```
      A2U(m,ir,1) = 0.
      A2U(m,ir,2) =  0.
      A2U(m,ir,3) = A1a(ir)*2./(r(1)-r(0))**2
&           + A1b(m,ir)* (Lb(ir)-m*m*r_2(ir))
&           + A1c(ir)  * La(ir+1)
&           + 1./Ek*Cor(ir)*m*im
      A2U(m,ir,4) = A1b(m,ir)* Lc(ir)
&           + A1c(ir)  * (Lb(ir+1)-m*m*r_2(ir+1))
      A2U(m,ir,5) = A1c(ir)  * Lc(ir+1)
```

En ir = NR − 1 on écrit:

```
      A2U(m,ir,1) = A1a(ir)  * La(ir-1)
      A2U(m,ir,2) = A1a(ir)  * (Lb(ir-1)-m*m*r_2(ir-1) )
&                 + A1b(m,ir)* La(ir)
      A2U(m,ir,3) = A1a(ir)  * Lc(ir-1)
&                 + A1b(m,ir)* (Lb(ir)-m*m*r_2(ir) )
&                 + A1c(ir)*2./(r(nr)-r(nr-1))**2
&                 + 1./Ek*Cor(ir)*m*im
      A2U(m,ir,4) = 0.
      A2U(m,ir,5) = 0.
```

Passons aux termes dans le schéma d'Adams-Bashford. le terme adamsp associé à la force d'Archimède s'exprime:

$$\texttt{adamsp} = -Ra\frac{\partial\Theta}{\partial\theta} = im\ Ra\Theta_m$$

ce qui donne, une fois codé:

```
adamsp(m,ir) = im*m*Ra*yT(m,ir)
```

Le terme non linéaire en vitesse s'exprime:

$$\texttt{yNLP} = -\mathbf{u}\cdot\nabla\nabla^2\Psi = -\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\frac{\partial\nabla^2\Psi}{\partial r} - \frac{\partial\Psi}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial\nabla^2\Psi}{\partial\theta}\right)$$

Pour le calculer, on appelle différentes sous-routines.

Spec_SpatU calcule la vitesse non axisymétrique dans l'espace physique. On a:

$$\mathbf{u}_m = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi_m}{\partial\theta} = -\frac{im}{r}\Psi_m \\ -\frac{\partial\Psi_m}{\partial r} \end{pmatrix}$$

ce qui se code:

```
      do ir=1,nr-1
      do m=1,Mmax
       ilong=2*m+1
       Ur(ilong,ir)  =+m*r_1(ir)*imag(yP(m,ir))
       Ur(ilong+1,ir)=-m*r_1(ir)*real(yP(m,ir))
       Ut(ilong,ir)  =-(Gra(ir)*real(yP(m,ir-1))
&                     +Grb(ir)*real(yP(m,ir))
&                     +Grc(ir)*real(yP(m,ir+1)))
       Ut(ilong+1,ir)=-(Gra(ir)*imag(yP(m,ir-1))
&                     +Grb(ir)*imag(yP(m,ir))
&                     +Grc(ir)*imag(yP(m,ir+1)))
       enddo
       enddo
```

Puis on fait la transformation de Fourier:

```
      isigne=-1
      call fourier(Ur,isigne)
      isigne=-1
      call fourier(Ut,isigne)
```

On remarque bien ici que le mouvement zonal n'a pas été inclu...

Spec_Spat_gradLapP calcule la partie non-axisymétrique du gradient du Laplacien, dans l'espace spectral. On calcule déja le Laplacien de la fonction courant:

```
      yLapP(:,0)=  2.*yP(:,1)/dr(1)/dr(1)

      do ir=1,nr-1
      do m=1,Mmax
      yLapP(m,ir)=    la(ir)                *yP(m,ir-1)
&                 +(lb(ir)-m*m*r_2(ir))*yP(m,ir)
&                 + lc(ir)                *yP(m,ir+1)
       enddo
       enddo
      yLapP(:,nr)=  2.*yP(:,nr-1)/dr(nr)/dr(nr)
```

Deux termes de bord ont été évalués directement, en tenant compte de la régularité de la grille pour le point fictif.

Puis on évalue le gradient:

$$\nabla = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} \\ -im \end{pmatrix}$$

```
 do ir=1,nr-1
 do m=1,Mmax
  ilong=2*m+1
  gradLapPt(ilong,ir)  =+m*r_1(ir)*imag(yLapP(m,ir))
  gradLapPt(ilong+1,ir)=-m*r_1(ir)*real(yLapP(m,ir))
  gradLapPr(ilong,ir)  =(Gra(ir)*real(yLapP(m,ir-1))
&                       +Grb(ir)*real(yLapP(m,ir))
&                       +Grc(ir)*real(yLapP(m,ir+1)))
  gradLapPr(ilong+1,ir)=(Gra(ir)*imag(yLapP(m,ir-1))
&                       +Grb(ir)*imag(yLapP(m,ir))
&                       +Grc(ir)*imag(yLapP(m,ir+1)))
  enddo
  enddo
```

Enfin, on fait la transformation de Fourier:

```
isigne=-1
call fourier(gradLapPr,isigne)
call fourier(gradLapPt,isigne)
```

La multiplication dans l'espace réel se fait dans la routine `non_lin`. On additionne déja le mouvement zonal à la vitesse convective:

```
do ir=1,nr-1
Ut(:,ir) = Ut(:,ir) + Ut0(ir)
enddo
```

On additionne aussi le gradient du Laplacien du mouvement zonal à la partie convective; puisque $\texttt{Ut0} = -\dfrac{\partial \Psi_0}{\partial r}$, on a:

```
 do ir=1,nr-1
 gradLapPr(:,ir) = gradLapPr(:,ir) - La(ir)*Ut0(ir-1)
. -Lb(ir)*Ut0(ir) - Lc(ir)*Ut0(ir+1)
 enddo
```


et on fait la multiplication

```
NL(:,:)= -(Ur(:,:)*gradLapPr(:,:) + Ut(:,:)*gradLapPt(:,:))
call Spat_Spec(NL,yNLP)
```

La routine `Spat_Spec` etant codée comme suit:

```
isigne=1
call fourier(NL,isigne)

do m=0,Mmax
 yNL(m,:) = Cmplx(NL(2*m+1,:),NL(2*m+2,:))
enddo
```

Enfin, dans la routine principale:

```
adamsP(:,:)=adamsP(:,:) + yNLP(:,:)
```

B.3.3 Équation de température.

L'équation B.2 est implémentée ainsi:

$$\texttt{A3}\,[\texttt{yt}(\texttt{t}+\texttt{dt})] = \texttt{B3}\,[\texttt{yt}(\texttt{t})] + 1.5 * \texttt{adamst}(\texttt{t}) - 0.5 * \texttt{adamst}(\texttt{t}-\texttt{dt})$$

avec

$$\texttt{A3} = \frac{P}{dt} - \frac{1}{2}\nabla^2,$$

et

$$\texttt{B3} = \frac{2P}{dt} - \texttt{A3}$$

Les éléments génériques de `A3` sont:

```
A3a(ir)   = - La(ir)/2.
A3b(m,ir)= -(Lb(ir)-m*m*r_2(ir))/2.+(Pr*1.0/dt)
A3c(ir)   = - Lc(ir)/2.
```

Ici encore, pas de problème de bord, puisque la perturbation de température doit être nulle en 0 et NR. Les termes de B3 sont codés dans un Transit. Le terme d'Adams-Bashford associé à l'advection du profil statique s'écrit:

$$\texttt{adamst} = -\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}T_s}{\mathrm{d}r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} = \frac{im}{r}\frac{\mathrm{d}T_s}{\mathrm{d}r}$$

En utilisant l'expression de T_s nous obtenons:

```
adamst(m,ir)=im*m*yP(m,ir)*dprof(ir)/r(ir)
```

dprof étant la dérivée radiale du profil statique:

```
dProf(ir)=1./(2.247*log(r(NR)/r(0))*r(ir))
```

Le terme non-linéaire de l'équation de température s'exprime

$$\texttt{yNLT} = -P\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\frac{\partial\Theta}{\partial r} - \frac{\partial\Psi}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)$$

Comme ci-dessus, le calcul est décomposé en sous-routines: Spec_SpatU a déjà calculé la vitesse non axisymétrique, il ne reste qu'à calculer le gradient de la perturbation de température. C'est la routine Spec_Spat_gradT qui s'en charge, le calcul est assez similaire à celui fait pour le gradient du Laplacien.

```
 do ir=1,nr-1
 do m=0,Mmax
  ilong=2*m+1
  gradTt(ilong,ir)   =+m*r_1(ir)*imag(yT(m,ir))
  gradTt(ilong+1,ir)=-m*r_1(ir)*real(yT(m,ir))
  gradTr(ilong,ir)   =(Gra(ir)*real(yT(m,ir-1))
&                     +Grb(ir)*real(yT(m,ir))
&                     +Grc(ir)*real(yT(m,ir+1)))
  gradTr(ilong+1,ir)=(Gra(ir)*imag(yT(m,ir-1))
&                     +Grb(ir)*imag(yT(m,ir))
&                     +Grc(ir)*imag(yT(m,ir+1)))
 enddo
 enddo
```

Puis on fait la transformation de Fourier:

```
 isigne=-1
```



```
 call fourier(gradTr,isigne)
 call fourier(gradTt,isigne)
```

non_lin multiplie les deux termes (après avoir ajouté le mouvement zonal à la vitesse convective):

```
 NL(:,:)= -(Ur(:,:)*gradTr(:,:) + Ut(:,:)*gradTt(:,:))
 call Spat_Spec(NL,yNLT)
```

et enfin, dans la boucle principale:

```
 adamsT(:,:)=adamsT(:,:) + Pr*yNLT(:,:)
```

B.3.4 Équation des mouvements axisymétriques

L'équation B.3 est implémentée comme suit:

$$\texttt{A4}\,[\texttt{Ut0(t+dt)}] = \texttt{B4}\,[\texttt{Ut0(t)}] + 1.5 * \texttt{adamsUt0(t)} - 0.5 * \texttt{adamsUt0(t-dt)}$$

avec

$$\texttt{A4} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(-\nabla_e^2 + \frac{1}{r^2} + \frac{E^{-1/2}}{r_e\left(1-\frac{r^2}{r_e^2}\right)^{3/4}}\right)$$

Ceci se code:

```
 A4a(ir)  = -La(ir)/2.
 A4b(ir)  = -Lb(ir)/2.+.5/(r(ir)**2)+(1.0/dt)+Fre(ir)/sqrt(Ek)
 A4c(ir)  = -Lc(ir)/2.
```

Le laplacien angulaire étant nul, il n'y a pas de terme en m. Par contre il y a un terme de courbure venant du fait que la projection sur un axe du Laplacien vectoriel n'est pas le Laplacien scalaire de la projection. Le terme Fre s'écrit:

```
 Fre(ir)=.5/r(NR)/(sqrt(sqrt(1-(r(ir)/r(NR))**2))**3)
```

Le terme codé dans le schéma d'Adams-Bashford se réduit au terme non-linéaire:

$$\texttt{adamsUt0} = -\overline{(\mathbf{u}\cdot\nabla)\,u_\theta} = -\overline{u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}}$$

L'autre contribution s'intègre par parties pour disparaître identiquement. On développe à l'aide de la fonction courant, et de sa décomposition spectrale. Le processus de moyennage suivant la direction latérale fait disparaître tout produit impliquant des degrés différents d'harmoniques sphériques, ainsi il ne reste que les produits correspondant aux degrés $-m$ et m:

$$\texttt{adamsUt0} = -\frac{1}{4}\sum_{1}^{\texttt{Mmax}}\frac{im}{r}\Psi_m\frac{\partial^2\Psi_m^*}{\partial r^2}+\frac{im}{r}\Psi_m^*\frac{\partial^2\Psi_m}{\partial r^2} = -\frac{1}{2}\sum_{1}^{\texttt{Mmax}}Re\left(\frac{im}{r}\Psi_m\frac{\partial^2\Psi_m^*}{\partial r^2}\right)$$

Ce qui se code:

```
      adamsUt0(:)=0.
      do ir=1,nr-1
      do m=1,Mmax
       adamsUt0(ir) = adamsUt0(ir)+0.5*m*r_1(ir)*
&        (imag(yP(m,ir))*(dr2a(ir)*real(yP(m,ir-1))
&                        +dr2b(ir)*real(yP(m,ir))
&                        +dr2c(ir)*real(yP(m,ir+1)))
&        -real(yP(m,ir))*(dr2a(ir)*imag(yP(m,ir-1))
&                        +dr2b(ir)*imag(yP(m,ir))
&                        +dr2c(ir)*imag(yP(m,ir+1)))
&        )
       enddo
       enddo
```


Annexe C

A numerical dynamo benchmark.

En 1998, à l'initiative d'Ulrich Christensen, un travail international de comparaison des codes numériques de dynamo tridimensionnelle de plusieurs groupes indépendants a été mené. Cette annexe contient un article qui en résume les résultats. Philippe Cardin, Emmanuel Dormy et moi-même formions le groupe français. Ce travail fut intéressant et difficile, car la dynamo visqueuse que nous devions traquer avait un petit bassin d'attraction dans l'espace des paramètres, que le moindre *bug* (il y en eut) pouvait être fatal, et que l'obtention, avec des méthodes numériques parfois très différentes, de résultats comparables à plusieurs décimales près tient encore parfois, à mes yeux, du miracle scientifique. Cet article est accepté pour publication dans *Physics of the Earth and Planetary Interiors.*

A numerical dynamo benchmark

U.R. Christensen [a] J. Aubert [b] P. Cardin [b] E. Dormy [c]
S. Gibbons [d] G.A. Glatzmaier [e] E. Grote [f] Y. Honkura [g]
C. Jones [d] M. Kono [h] M. Matsushima [g] A. Sakuraba [i]
F. Takahashi [g] A. Tilgner [f] J. Wicht [a] K. Zhang [d]

[a] *Institut für Geophysik, Universität Göttingen, Herzberger Landstrasse 180, 37075 Göttingen, Germany*

[b] *LGIT, Observatoire des Sciences de l'Univers de Grenoble, B.P. 53, 38041 Grenoble Cedex 09, France*

[c] *Institut de Physique du Globe de Paris, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France*

[d] *Department of Mathematics, University of Exeter, Exeter EX4 4QE, UK*

[e] *Earth Sciences Department, University of California, Santa Cruz, CA 95064, USA*

[f] *Theoretische Physik IV, Universität Bayreuth, 95440 Bayreuth, Germany*

[g] *Department of Earth and Planetary Sciences, Tokyo Institute of Technology, 2-12-1 Okayama, Meguro-ku, Tokyo 152-8551, Japan*

[h] *Institute for Study of the Earth's Interior, Ookayama University, Yamada 827, Misasa, Tottori-ken 682-0193, Japan*

[i] *Department of Earth and Planetary Physics, University of Tokyo, Hongo 7-3-1, Bunkyo-ku, Tokyo 113-0033, Japan*

Abstract

We present the results of a benchmark study for a convection-driven magnetohydrodynamic dynamo problem in a rotating spherical shell. The solutions are stationary aside from azimuthal drift. One case of non-magnetic convection and two dynamos that differ in the assumptions concerning the inner core are studied. Six groups contributed numerical solutions which show good agreement. This provides an accurate reference standard with high confidence.

Key words: geodynamo, numerical modeling

Email address: urc@uni-geophys.gwdg.de (U.R. Christensen).

Preprint submitted to Elsevier Preprint *30 March 2001*

1 Introduction

In recent years, three-dimensional simulations of convection-driven magnetohydrodynamic dynamos in rotating spherical shells have become possible and are progressively employed to develop an understanding for the origin of the Earth's magnetic field and its spatial and temporal structure. The first models employed hyperdiffusivities and either neglected inertia or included only the axisymmetric part (Glatzmaier and Roberts, 1995; Kuang and Bloxham, 1997) or they assumed somewhat artificial boundary conditions for the magnetic field (Kageyama et al., 1995). Later models with more moderate values of the control parameters did not use these approximations (Christensen et al., 1998; Busse et al., 1998; Christensen et al., 1999; Katayama et al., 1999; Grote et al., 2000, for example). Several numerical codes for dynamo modelling have been developed independently by various groups, although they usually follow similar principles. All the unknowns are expanded in spherical harmonic functions in the angular coordinates and diffusive terms in the equations are treated implicitly during time-stepping. The non-linear terms are evaluated on grid points, which requires transformations between spectral and grid space (spectral transform method). The codes differ mainly in their treatment of the radial dependence and in the way the arising boundary value problems for each harmonic mode are solved. Some expand the variables in Chebyshev polynomials and use collocation methods, while others use finite differencing and grid representation. An exception is the method by Kageyama et al. (1995), who have used finite differences throughout. Other codes that employ only local representations of the variables, for example by finite elements, are currently under development.

The verification of newly developed codes for complex nonlinear problems is not a simple task. Rigorous testing with analytical solutions is not possible for the fully non-linear problem. Comparison with other published solutions is difficult because they usually show chaotic time-dependence and because they make specific assumptions (for example on boundary conditions or neglected terms), which are not implemented in other codes. The concept of a benchmark is to set up a simple, well-defined and easily reproduced standard solution, which is confirmed by several independent codes and which is converged to great accuracy. It serves several purposes: (i) to increase the confidence in the correctness of the codes that contribute to the benchmark, (ii) to assess the accuracy and possibly the run-time performance of existing methods, and (iii) to assist future code developments by providing a well-established standard solution for verification.

The present benchmark was proposed at the SEDI (Study of the Earth's Deep Interior) meeting of 1998 in Tours and has been expanded and modified as a result of discussions among the participants. Its basis is one of the few

quasi-stationary dynamo solutions that have been reported in the literature (Christensen et al., 1999). The stationarity allows the comparison of well-defined numbers. Parameter values are moderate, so that high resolution is not required to reproduce the dynamo. The full inertia term is kept in the momentum equation and the concept of hyperdiffusivity is not used. In addition to the originally proposed dynamo with an insulating inner core co-rotating with the outer boundary (case 1), the cases of rotating non-magnetic convection (case 0) and that of a dynamo with a conducting and freely rotating inner core (case 2) have been added. Aside from global properties, such as kinetic and magnetic energies, where small inaccuracies may average out, some local values of the solution are also reported.

2 Definition of the benchmark cases

Thermal convection and magnetic field generation in a rotating spherical shell filled with an electrically conducting fluid are considered. The ratio of inner radius r_i to outer radius r_o is set to 0.35. Temperature is fixed to T_o and $T_o + \Delta T$ on the outer and inner boundaries, respectively. The Boussinesq approximation is used and gravity varies linearly with radius. The equations are scaled with $D = r_o - r_i$ as the fundamental length scale, which makes the dimensionless radii equal to $r_o = 20/13$ and $r_i = 7/13$. The time scale is D^2/ν, with ν the kinematic viscosity, ν/D is the scale for velocity $\mathbf{u}$, and ΔT for temperature T. The scaled temperature on the outer boundary is zero. Magnetic induction $\mathbf{B}$ is scaled by $(\rho\mu\eta\Omega)^{1/2}$, where ρ is density, μ magnetic permeability, η magnetic diffusivity, and Ω the basic rotation rate about the z-axis. The non-hydrostatic pressure P is scaled by $\rho\nu\Omega$. The scaled equations are

$$E\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} - \nabla^2\mathbf{u}\right) + 2\hat{z}\times\mathbf{u} + \nabla P = Ra\frac{\mathbf{r}}{r_o}T + \frac{1}{Pm}(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla\times(\mathbf{u}\times\mathbf{B}) + \frac{1}{Pm}\nabla^2\mathbf{B} \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla T = \frac{1}{Pr}\nabla^2 T \quad (3)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \qquad \nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \quad (4)$$

Non-dimensional control parameters are the modified Rayleigh number

$$Ra = \frac{\alpha g_o \Delta T D}{\nu\Omega} \quad (5)$$

where α is the thermal expansion coefficient and g_o gravity at the outer radius, the Ekman number

$$E = \frac{\nu}{\Omega D^2}, \tag{6}$$

the Prandtl number

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}, \tag{7}$$

where κ is thermal diffusivity, and the magnetic Prandtl number

$$Pm = \frac{\nu}{\eta}. \tag{8}$$

The velocity vanishes on the rigid boundaries, relative to the state of rotation of the respective boundary. In cases 0 and 1 the inner and outer boundaries co-rotate. In case 1 the regions outside the fluid shell are electrical insulators and the magnetic field on the boundaries matches with appropriate potential fields in the exterior that imply no external sources of the field.

In case 2 the inner core is treated as an electrically conducting rigid sphere that can rotate around the z-axis relative to the outer boundary, which provides the frame of reference. Its moment of inertia is determined assuming the same density as in the liquid shell, and its angular acceleration results from viscous and magnetic torques. The moment of inertia is irrelevant for the final uniform rotation of the inner core, but influences the transient spinup. In the inner core equation 2 applies with the velocity field of rigid-body rotation and the same magnetic Prandtl number, i.e. the same electrical conductivity and magnetic permeability as in the fluid shell. At the boundary between inner core and fluid shell the magnetic field and the horizontal component of the electrical field are continuous.

The Ekman number is $E = 10^{-3}$ and the Prandtl number is $Pr = 1$ in all cases. In cases 0 and 1 we set the Rayleigh number to $Ra = 100$. In case 2 it is $Ra = 110$, which is approximately two times supercritical. The magnetic Prandtl number is zero in case 0 (non-magnetic convection) and is $Pm = 5$ in cases 1 and 2.

Because only the final quasi-stationary solutions are compared, the initial condition is, strictly speaking, not part of the benchmark definition. However, because non-magnetic convection is found stable against small magnetic perturbations at these parameters and because the dynamo solutions seem to have only a small basin of attraction, the initial state is of some concern. Also the existence of multiple dynamo solutions, for example with different

azimuthal symmetry, cannot be ruled out. Here we recommend a set of initial conditions, but any other conditions that lead to the desired solutions are also permissible. In all cases the initial velocity is zero and the initial temperature is

$$T = \frac{r_o r_i}{r} - r_i + \frac{210A}{\sqrt{17920\pi}}(1 - 3x^2 + 3x^4 - x^6)\sin^4\theta\cos 4\phi \tag{9}$$

where θ is colatitude, ϕ longitude, and $x = 2r - r_i - r_o$. This describes a conductive state with a perturbation of harmonic degree and order four superimposed. The amplitude is set to $A = 0.1$. In case 1, the initial magnetic field is for $r_i \le r \le r_o$

$$B_r = \frac{5}{8}(8r_o - 6r - 2\frac{r_i^4}{r^3})\cos\theta \tag{10}$$

$$B_\theta = \frac{5}{8}(9r - 8r_o - \frac{r_i^4}{r^3})\sin\theta \tag{11}$$

$$B_\phi = 5\sin(\pi(r - r_i))\sin 2\theta. \tag{12}$$

This corresponds to a dipolar poloidal field created by a current density in the ϕ-direction which is uniform in radius and a superimposed toroidal field of harmonic degree 2. The maximum value of both B_r and B_ϕ is 5. In case 2, the initial magnetic field is for $0 \le r \le r_o$

$$B_r = 5\frac{4r_o - 3r}{3 + r_o}\cos\theta \tag{13}$$

$$B_\theta = 5\frac{9r - 8r_o}{2r_o + 6}\sin\theta \tag{14}$$

$$B_\phi = 5\sin(\pi\frac{r}{r_o})\sin 2\theta. \tag{15}$$

3 Character of the solution

Starting from the recommended initial condition, a quasi-stationary solution is reached within approximately 15 time units in cases 1 and 2 and within 1.2 time units in case 0. The solution can be expressed by a vector function of the form

$$(\mathbf{u}, \mathbf{B}, T) = \mathbf{f}(r, \theta, \phi - \omega t) \tag{16}$$

with ω being the drift frequency. In case 2 the inner core rotates at a uniform rate ω_{ic} with respect to the outer boundary after the initial transient. The

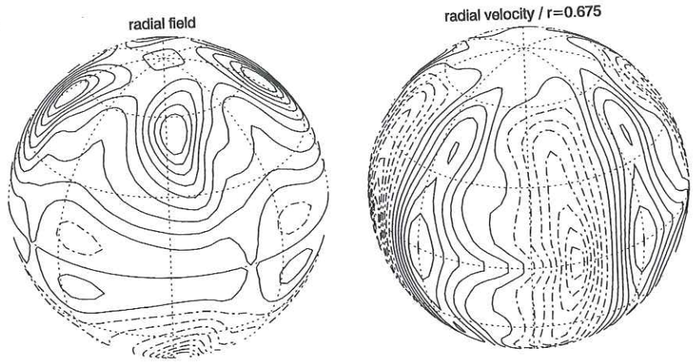


Fig. 1. Case 1. Left: contours of B_r on outer boundary in steps of 0.25. Right: contours of u_r at mid-depth in the shell, interval 2.0. Positive and zero contours full lines, negative contours dash-dotted.

solutions are symmetric about the equator (dipole parity) and have fourfold symmetry in longitude. In order to reduce computer time, in some calculations this symmetry has been exploited by restricting the spherical harmonic expansions accordingly. This is safe because tests show that the solution is stable against small symmetry-breaking perturbations. Some aspects of the solution for case 1 are visualised in Figure 1. Convection is columnar and the magnetic field on the outer boundary is strongly dipolar and dominated by four flux lobes. The figure shows a result obtained with moderate resolution and is meant for illustrative purposes only. The presence of a conducting and rotating inner core in case 2 has no strong effect of the overall pattern of the solution.

4 Requested data

Global averages as well as local data at a specific point are compared in this benchmark. In all cases the drift frequency ω and the mean kinetic energy density in the fluid have been calculated

$$E_{kin} = \frac{1}{2V_s}\int_{V_s} \mathbf{u}^2 dV \tag{17}$$

where V_s refers to the volume of the fluid shell. In cases 1 and 2 the mean magnetic energy density in the shell is calculated

$$E_{mag} = \frac{1}{2V_s EPm}\int_{V_s} \mathbf{B}^2 dV. \tag{18}$$

In case 2, also the magnetic energy density E^{ic}_{mag} in the inner core, defined equivalently to equation 18 for the inner core volume V_{ic}, and the angular frequency ω_{ic} of differential rotation of the inner core are requested. When participants compared preliminary results in the course of the benchmark study, the torque acting on the inner core turned out to be useful to identify errors. Therefore we also list the values of the Lorentz torque Γ_L scaled by $\rho D \nu^2$.

Defining a point where local data are to be taken is not trivial because it must be fixed in the drifting frame of reference. We take a point at mid-depth ($r = (r_i + r_o)/2$) in the equatorial plane ($\theta = \pi/2$) whose ϕ-coordinate is given by the conditions $u_r = 0$ and $\partial u_r/\partial\phi > 0$. For this point we request in cases 0 and 1 the values of T and u_ϕ and additionally in case 1 the value of B_θ.

5 Methods

Six groups have contributed results to some or all of the benchmark cases. Here each code is described briefly by some keywords. A more complete description can be found in the supplied references.

ACD – by Aubert, Cardin and Dormy: Spherical harmonic expansion, finite differences in the radial direction (Dormy et al., 1998). The radial mesh interval decreases in geometrical progression towards the boundaries. Three-point stencil for 2nd-order derivatives and 5-point stencil for biharmonic operators (2nd-order accurate). Symmetry in longitude can be imposed.
CWG – by Christensen, Wicht and Glatzmaier: Spherical harmonic expansion, Chebyshev polynomials in radial direction, alias-free transform (Glatzmaier, 1984; Christensen et al., 1999); the basic numerical method was also used in Glatzmaier and Roberts (1995). Symmetry in longitude assumed in most cases. Time step dynamically controlled, typically 1.5×10^{-4} at low spatial resolution and 0.75×10^{-4} at high resolution. Different versions of this code have been run on the benchmark problems by Christensen & Wicht and by Glatzmaier, respectively. Results obtained by Glatzmaier are marked by an asterisk (*).
GJZ – by Gibbons, Jones and Zhang: Spherical harmonic expansion, finite-differencing in radial direction with non-equidistant grid using the Chebyshev

zeros as grid points and a 7-point stencil for all derivatives.
KS – by Kono and Sakuraba: Spherical harmonic expansion, Chebyshev tau method (Canuto et al., 1987) for radial coordinate (Sakuraba and Kono, 1999).
TG – Tilgner and Grote: Spherical harmonic expansion, Chebyshev polynomials in radial direction (Busse et al., 1998; Tilgner, 1999).
TMH – by Takahashi, Matsushima and Honkura: Spherical harmonic expansion, finite difference with option for equidistant or non-uniform grid (Chebyshev points) in radial direction. Pressure defined on staggered grid points. Three-point stencil used for 2nd-order derivatives and four-point stencil for derivatives at staggered grid points. Longitudinal symmetry exploited.

The three codes which use an expansion in Chebyshev polynomials in the radial direction (CWG, KS and TG) are structured very similarly. The three codes using finite differences in the radial direction (ACD, GJZ and TMH) differ for example in the order of the difference scheme and the structuring of the radial grid.

Most groups provide results at different resolution. All use 8-byte words (double precision). The spherical harmonic expansion is truncated at degree ℓ_{max} and order m_{max}. Most contributors include all terms with harmonic order $m \leq \ell \leq \ell_{max}$ ($m_{max} = \ell_{max}$, triangular truncation), except GJZ, who truncate in most cases at $m \leq min(\ell, m_{max})$ with $m_{max} < \ell_{max}$ (trapezoidal truncation). The minimum necessary number of grid points in θ-direction (Gauss points), on which non-linear products are calculated, is $\ell_{max} + 1$, but some authors use a larger number of points N_θ to reduce aliasing effects (similarly in ϕ-direction). For alias-free computations of the non-linear terms N_θ needs to be equal or greater than $(3\ell_{max} + 1)/2$ and for triangular truncation of the spherical harmonics the number of grid points in longitude needs to be twice this. In those codes which use a spectral representation in the radial direction, the number of radial grid points N_r may exceed the number of Chebyshev modes N_c, although in the present cases $N_r \simeq N_c$ has been used.

6 Results

At a qualitative level, all contributors obtain the same generic solutions, which is the prerequisite for a quantitative comparison and a convergence test. In order to compare specific numbers obtained with different codes at different resolution and in order to monitor convergence, we define as resolution R the third root of the number of degrees of freedom for each scalar variable

$$R = N_r^{1/3}(\ell_{max}[2m_{max} + 1] - m_{max}^2 + m_{max} + 1)^{1/3}. \qquad (19)$$

For $m_{max} = \ell_{max}$ this reduces to $R = N_r^{1/3}(\ell_{max} + 1)^{2/3}$. In case 2, N_r refers to the combined number of radial points in the fluid shell and in the inner core.

Table 1
Results for benchmark case 0

Group	N_r	N_θ	ℓ_{max}	E_{kin}	T	u_ϕ	ω
ACD	50	46	44	58.970	0.4259	-10.058	0.0602
ACD	100	46	44	58.515	0.4276	-10.134	0.1509
ACD	150	46	44	58.426	0.4279	-10.147	0.1686
ACD	250	92	44	58.379	0.4280	-10.153	0.1775
CWG	25	48	32	58.3499	0.42812	-10.1570	0.18283
CWG	33	80	53	58.3481	0.42811	-10.1571	0.18241
CWG*	49	96	63	58.3488	0.42811	-10.1570	0.18241
CWG	65	128	84	58.3480	0.42812	-10.1571	0.18241
GJZ	40	38	36(20)	58.2208	0.42808	-10.1547	0.19198
GJZ	60	42	40(28)	58.2955	0.42813	-10.1560	0.19010
GJZ	100	42	40(28)	58.3348	0.42816	-10.1558	0.18289
TMH	40		36	58.5874	0.4271	-10.0823	0.1228
TMH	100		36	58.4028	0.4279	-10.1421	0.1670
TMH	100e		36	58.5471	0.4281	-10.1585	0.1560

e equistant radial grid, m_{max} given in parentheses after ℓ_{max} when different

6.1 *Non-magnetic convection (Case 0)*

All results for case 0 are listed in Table 1. In Figure 2 we compare most of the results as functions of R. Note that for each quantity except ω the range in the diagram is less than 2% of the absolute value. That is, all results that fall into the diagram agree within better than 2%. All results seem to converge towards the same point. The convergence is clearest for the fully spectral code by CWG (circles), where results at comparatively low resolution differ only marginally from those with high resolution. Also the contributions by ACD (diamonds), GJZ (squares) and TMH (crosses) with radial finite differencing converge satisfactorily towards the same values at high R. For the finite difference methods the radial resolution has been found to be critical, and in fact the angular resolution has been kept constant or varied little in these calculations. ACD and GJZ report that results for a uniform radial grid (not shown in this paper) are much worse than for the non-uniform grids used here. The comparison supplied by TMH for $N_r = 100$ confirms this for E_{kin} and

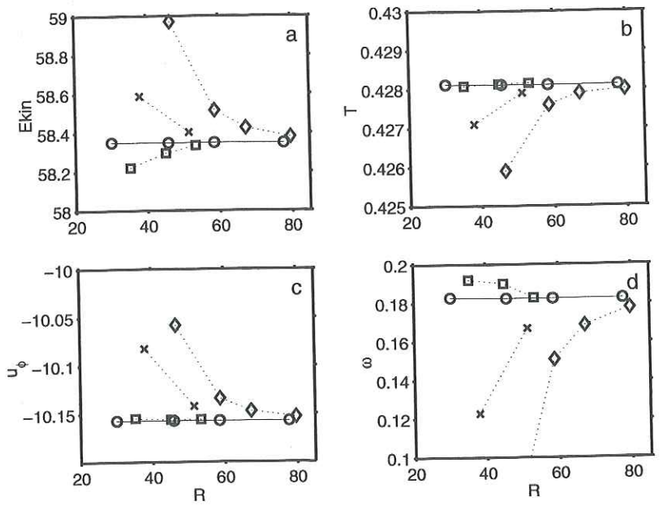


Fig. 2. Convergence of results for case 0. Diamonds = ACD, circles = CWG, squares = GJZ, crosses = TMH. a) Kinetic energy, b) local temperature, c) local azimuthal velocity, d) drift frequency.

ω, although the differences are rather moderate. A non-uniform grid provides better resolution in the boundary layers, and even though the Ekman layer is not very thin at the moderate value of the Ekman number, good resolution of this layer seems to be essential.

6.2 Dynamo with insulating inner core (Case 1)

Results for case 1 are listed in Table 2 and some of them are plotted against resolution in Figure 3. Again the agreement among the various contributions is very satisfactory; the range covered in each of the diagrams is only 1% of the total value. The general agreement is particularly good between the three codes using Chebyshev expansion (circles, triangle and plus-sign in Fig. 3), which is not surprising given that the codes are based on the same principles. For this method, only CWG (circles) provide results at variable resolution, but two codes with radial finite differencing seem to converge against the same values for the kinetic and magnetic energy, respectively. For the local values and the drift frequency convergence against a common point is less clear than for the energies, but the best resolved results agree within a quarter of a percent. For the local values the need to interpolate the respective fields between grid points is an additional source of error, which might explain the

less systematic convergence behaviour.

Table 2
Results for benchmark case 1

Group	N_r	N_θ	ℓ_{max}	E_{kin}	E_{mag}	T	u_ϕ	B_θ	ω
ACD	48	46	44	29.965	601.912	0.3730	-7.864	-4.779	-3.038
ACD	90	46	44	30.637	623.204	0.3729	-7.669	-4.912	-3.102
ACD	150	46	44	30.732	625.681	0.3730	-7.634	-4.929	-3.105
ACD	200	92	44	30.758	626.284	0.3730	-7.626	-4.933	-3.105
CWG	21	40	26	30.5015	616.085	0.36281	-7.2228	-4.8456	-3.0926
CWG	25	48	32	30.7214	626.572	0.37373	-7.5941	-4.9023	-3.0852
CWG	33	64	42	30.7686	626.420	0.37390	-7.6427	-4.9358	-3.1011
CWG	33	80	53	30.7714	626.406	0.37325	-7.6211	-4.9285	-3.1016
CWG	41	96	64	30.7715	626.416	0.37337	-7.6250	-4.9288	-3.1016
CWG*	49	96	63	30.7716	626.413	0.37337	-7.6255	-4.9284	-3.1016
CWG	65	128	85	30.7734	626.409	0.37338	-7.6250	-4.9289	-3.1017
GJZ	40	38	36(20)	30.1263	617.462	0.36226	-7.0899	-4.8972	-2.992
GJZ	40	52	50(44)	30.5724	622.558	0.37314	-7.6201	-4.9101	-3.083
GJZ	80	52	50(44)	30.7541	625.656	0.37325	-7.6203	-4.9301	-3.100
GJZ	100	54	52(52)	30.7605	626.020	0.37336	-7.6308	-4.9232	-3.101
GJZ	150	78	50(44)	30.7677	626.282	0.37328	-7.6210	-4.9333	-3.101
KS	48	64	42	30.7709	626.434	0.37376	-7.6376	-4.9333	-3.1009
TG	33	64	42	30.7695	626.402	0.37378	-7.6387	-4.9340	-3.0997
TMH	70e		26	31.0298	623.092	0.3679	-7.3525	-4.9220	-3.0949
TMH	70		26	30.7901	627.607	0.3675	-7.3330	-4.9190	-3.0735

e equidistant radial grid, m_{max} in parentheses after ℓ_{max} when different

CWG studied the influence of changing the time-step for two different spatial grids. Reducing the step by a factor of two lead to differences in the 6th decimal place. Therefore a time-step which is smaller than what stability requires does not improve the solution significantly, at least in the weakly time-dependent regime of the benchmark dynamo.

6.3 Dynamo with conducting and rotating inner core (Case 2)

Results for case 2 have only been reported by two contributors. The validity of the results is somewhat reinforced by the use of two different code versions

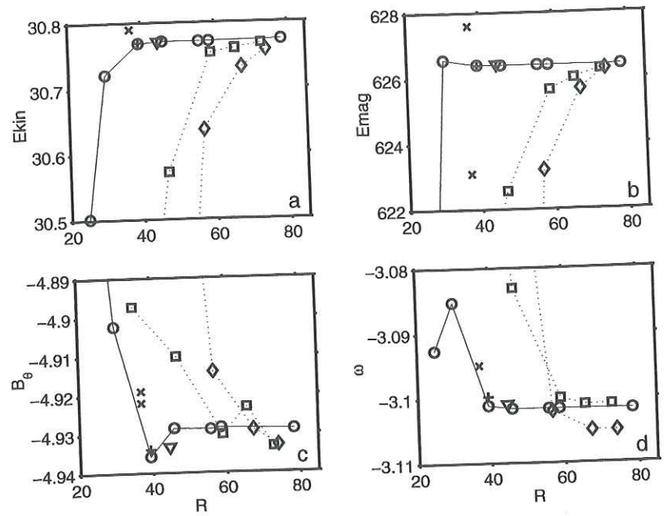


Fig. 3. Convergence of results for case 1. Diamonds = ACD, circles = CWG, squares = GJZ, plus sign = TG, triangle = KS, crosses = TMH (uniform and non-uniform radial grid). a) Kinetic energy, b) magnetic energy, c) local magnetic field component, d) drift frequency.

by CWG (labelled with and without an asterisk). The basis for both versions is the fully spectral dynamo code by Glatzmaier (1984), but the additions for treating a conducting and rotating inner core have been implemented independently and overall the codes differ in some details. The two solutions agree within better than 4×10^{-5} for all requested properties. The results by ACD, who use a finite difference method in the radial direction, are in reasonable agreement with those by CWG (Table 3 and Figure 4). The deviation is largest for the inner core rotation rate, about 1% at the highest resolution, but a quadratic extrapolation of ACD's results suggest that they converge against those by CWG.

The sum of the viscous and magnetic torques on the solid inner core is obviously zero because its rotation rate is steady. The viscous torque is positive (prograde) while the magnetic torque is negative (Table 3). GAG reports that the viscous torque on the stationary inner core of case 1 is also positive and cancels the negative viscous torque on the outer boundary so that the net torque on the fluid shell still vanishes, as it has to in steady state. It is interesting that the signs of the viscous torques on the two boundaries in the non-magnetic case 0 are opposite to what they are in case 1 and that the sign of the drift frequency ω differs between cases 0 and 1.

Table 3
Results for benchmark case 2

Group	N_r	N_r^{ic}	N_θ	ℓ_{max}	E_{kin}	E_{mag}	E_{mag}^{ic}	ω	ω_{ic}	Γ_L
ACD	90	25	46	44	42.311	844.400	822.522	-3.834	-2.521	-91.023
ACD	150	40	46	44	42.392	845.400	821.855	-3.821	-2.598	-91.910
ACD	200	60	46	44	42.405	845.604	821.833	-3.816	-2.619	-92.212
ACD	250	70	46	44	42.409	845.694	821.885	-3.815	-2.630	-92.381
CWG	33	16	48	32	42.3295	849.003	824.255	-3.7584	-2.7393	-94.407
CWG	49	16	64	41	42.3713	845.932	823.162	-3.7984	-2.6706	-93.105
CWG	49	16	96	63	42.3882	845.605	822.667	-3.8027	-2.6594	-92.979
CWG*	49	16	96	63	42.3878	845.604	822.672	-3.8027	-2.6593	-92.978
CWG	49	20	96	63	42.3888	845.602	822.649	-3.8027	-2.6593	-92.978
CWG	49	16	128	84	42.3881	845.606	822.673	-3.8027	-2.6595	-92.979

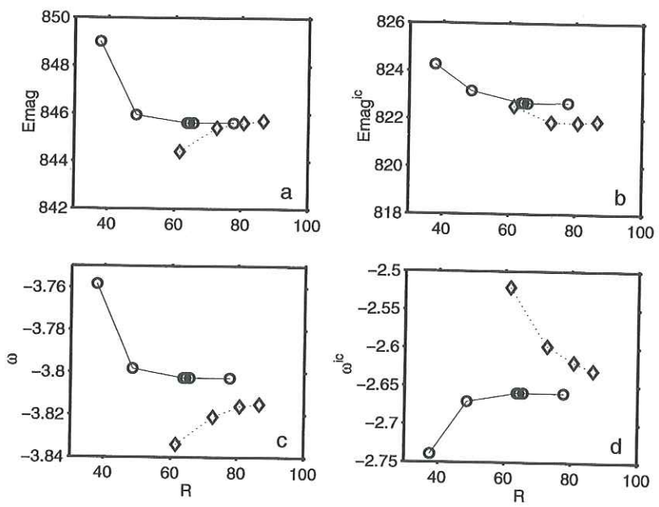


Fig. 4. Convergence of results for case 2. Diamonds = ACD, circles = CWG. a) Magnetic energy density in fluid shell, b) magnetic energy density in inner core, c) drift frequency, d) rotation frequency of inner core.

7 Discussion and conclusions

The comparison of codes that use finite differences in the radial direction with fully spectral methods suggests that the latter are more advantageous when

high accuracy is required. In case of the partial finite difference methods, the radial resolution is clearly the accuracy-limiting factor. The exponential convergence behaviour of fully spectral methods is very helpful to pin down the solution to several significant digits, which is one aim of the benchmark study. Furthermore, an asset of the Chebyshev representation is that it allows one to calculate radial derivatives of the dependent variables on grid points with great accuracy. Because most computer time is used for the transformation in the angular coordinates, the additional time required for the Chebyshev transforms is far outweighed by the smaller number of radial grid levels that is needed to achieve a given accuracy. However, one must also keep in mind that the benchmark cases are simple in the sense that the spatial spectra drop off rapidly with wavenumber and time-dependence is weak, which makes them ideally suited for spectral methods. For chaotic dynamos at higher Rayleigh numbers and lower Ekman numbers, which require much higher spatial resolution, the spectral method becomes very expensive and may be less suited than other techniques for massively parallel computers. Unfortunately a comparison study at such parameters would be far more difficult.

Table 4
Suggested standard solution with uncertainties

	Case 0	Case 1	Case 2
E_{kin}	58.348 ± 0.050	30.733 ± 0.020	42.388 ± 0.050
E_{mag}		626.41 ± 0.40	845.60 ± 0.40
E_{mag}^{ic}			822.67 ± 1.60
T	$0.42812 \pm .00012$	0.37338 ± 0.00040	
u_ϕ	-10.1571 ± 0.0020	-7.6250 ± 0.0060	
B_θ		-4.9289 ± 0.0060	
ω	$0.1824 \pm .0050$	-3.1017 ± 0.0040	-3.8027 ± 0.0250
ω_{ic}			-2.6595 ± 0.0600
Γ_L			-92.979 ± 1.200

The overall level of agreement between different methods is remarkable when the resolution is sufficiently high. This allows us to define with great confidence a standard solution within narrow error limits for cases 0 and 1. We suggest that the best result from CWG be considered the standard. To estimate the range of uncertainty we require that the best-resolved results of two more codes (those by ACD and GJZ) fall into this range (Table 4). Because of the slower convergence of the latter two codes, the exact solution may be much closer to the suggested value than what the quoted accuracy suggests.

With only two completely independent contributions to case 2 we cannot claim the same level of confidence as in the other cases, but the convergence of the CWG results and the satisfactory agreement with the ACD solution justifies

the selection of the best resolved result by CWG as a standard also in this case. Here the uncertainty has been fixed to twice the difference between the best results by CWG and ACD, but not less than the uncertainty determined in case 1 for the same property (where applicable).

References

Busse, F.H., Grote, E., Tilgner, A., 1998. On convection driven dynamos in rotating spherical shells, Studia geoph. et geod., 42, 1-6.

Canuto, C., Hussani, M.Y., Quateroni, A., Zhang, T.A., 1987. Spectral methods in fluid dynamics, Springer, Berlin.

Christensen, U., Olson, P., Glatzmaier, G.A., 1998. A dynamo model interpretation of geomagnetic field structures, Geophys. Res. Lett., 25, 1565-1568.

Christensen, U., Olson, P., Glatzmaier, G.A., 1999. Numerical modelling of the geodynamo: a systematic parameter study, Geophys. J. Int., 138, 393-409.

Dormy, E., Cardin, P., Jault, D., 1998. MHD flow in a slightly differentially rotating spherical shell, with conducting inner core, in a dipolar magnetic field, Earth Planet. Sci. Lett., 160, 15-30.

Glatzmaier, G.A., 1984. Numerical simulations of stellar convective dynamos. I. The model and method. J. Comput. Phys., 55, 461-484.

Glatzmaier, G.A., Roberts, P.H., 1995. A three-dimensional convective dynamo solution with rotating and finitely conducting inner core and mantle. Phys. Earth Planet. Inter., 91, 63-75.

Grote, E., Busse, F.H., Tilgner, A., 2000. Regular and chaotic spherical dynamos. Phys. Earth Planet. Inter., 117, 259-272.

Kageyama, A., Sato, T. and the Complexity Simulation Group, 1995. Computer simulation of a magnetohydrodynamic dynamo. Phys. Plasma, 2, 1421-1431.

Katayama, J.S., Matsushima, M., Honkura, Y., 1999. Some characteristics of magnetic field behavior in a model of MHD dynamo thermally driven in a rotating spherical shell. Phys. Earth Planet. Inter., 111, 141-159.

Kuang, W., Bloxham, J., 1997. An Earth-like numerical dynamo model. Nature, 389, 371-374.

Sakuraba, A., Kono, M., 1999. Effect of the inner core on the numerical solution of the magnetohydrodynamic dynamo. Phys. Earth Planet. Int., 111, 105-121.

Tilgner, A., 1999. Spectral methods for the simulation of incompressible flow in spherical shells. Int. J. Numer. Meth. Fluids, 30, 713-724.

Annexe D

Ultrasonic Doppler Velocimetry in liquid Gallium.

Cette annexe contient l'article que Daniel Brito a consacré à la validation de la vélocimétrie Doppler ultrasonore dans les métaux liquides tels que le gallium, et le sodium liquide. Cet article est paru dans *Experiments in Fluids.*

Experiments in Fluids manuscript No.
(will be inserted by the editor)

Ultrasonic Doppler velocimetry in liquid gallium

Daniel Brito, Henri-Claude Nataf, Philippe Cardin, Julien Aubert, Jean-Paul Masson

Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique,
Observatoire des Sciences de l'Univers de Grenoble
BP 53
38041 Grenoble Cedex 09
France

Received: January 2000 / Revised version: September 2000

Abstract For the first time, flow velocity is measured in a vortex of liquid gallium, using the pulsed Doppler shift ultrasonic method. At the top of a copper cylinder filled with liquid gallium, we spin a disk and create a turbulent vortex with a dominant nearly axisymmetric velocity field with little variation in the axial direction. The velocity profiles are shown to be well resolved and in quantitative agreement with earlier observations. Reliable velocity measurements in liquid gallium could be obtained only after serious problems due to the formation of oxides were solved. This work opens the way to performing accurate velocity measurements in other liquid metals; preliminary results for liquid sodium are shown.

1 Introduction

A wealth of optical methods is available to visualize or measure flows in transparent liquids. These methods cannot be used in opaque liquids such as liquid metals. However, in many situations, it would be very valuable to measure flow velocities in such liquids. This is particularly true in dynamo experiments where liquid sodium is used because it is a very good conductor of electricity. Sodium is set into motion, with the hope that the flow, when sufficiently vigorous, will generate a magnetic field. Several such experiments are now being conducted (Gailitis et al. 2000; Stieglitz and Müller 2001) or planned (for a review, see Tilgner 2000). Our involvement in a project of experimental dynamo provided the motivation to devise a non–intrusive method to measure velocity in liquid metals.

Send offprint requests to: D. Brito, Daniel.Brito@lgit.obs.ujf-grenoble.fr

In this respect, acoustic methods are particularly appealing. Acoustic waves interact with vortices in a fluid and vorticity can be measured from the spectrum of the scattered waves (Baudet et al. 1991) or from the refraction of the transmitted waves (Roux and Fink 1995). Another approach is to rely on small heterogeneities in physical properties of the fluid to backscatter acoustic waves. The flow velocity is then derived from the Doppler shift of these scattered waves. With a single ultrasonic probe and a pulsed signal, one obtains a profile of the component of the flow velocity along the shooting direction (Takeda 1986). Several commercial instruments implement the pulsed Doppler shift method, and spectacular results have been obtained for various flows in water (e.g., Tokuhiro and Takeda 1993; Takeda and Kikura 1998). Application to liquid metal is more seldom but successful tests have been reported for mercury (Takeda 1987; Kikura et al. 1998).

Liquid gallium is also a metal suitable for magnetohydrodynamic experiments (Brito et al. 1995; Odier et al. 1998). In this paper, we present the first velocity measurements in liquid gallium obtained with an ultrasound pulsed Doppler velocimeter. Our set–up consists of a cylinder filled with liquid gallium at the top of which spins a crenelated disk. We thus produce a nearly two–dimensional axisymmetric vortex. The effect of a transverse magnetic field on this vortex of liquid gallium, as well as that of the Coriolis force have been investigated (Brito et al. 1995; Brito et al. 1996). The flow was characterized through the magnetic field it induces, the associated electric potentials, and the pressure field at the top measured along a diameter with a row of Venturi tubes. All these measurements enable us to have a good description of the flow.

We think that our set–up is very appropriate for making a quantitative test of the pulsed Doppler shift method in liquid gallium because the vortex is well–behaved, reproducible, and nearly axisymmetric, yet turbulent.

A related configuration was investigated by Tokuhiro and Takeda 1993 who spun a rod at the top of a cylinder. Also using Doppler ultrasonic velocimetry, they documented a periodic instability occurring for Reynolds numbers above 650 in a water–glycerol mixture. The Reynolds numbers we produce are much higher (they range from 10^4 to $4\ 10^5$), and because our disk is crenelated, the mean flow is much more dominant.

In the next section, we describe the experimental set–up and the ultrasonic Doppler velocimeter. In section 3, we present the velocity profiles measured in liquid gallium and in water. The focus is set on discussing their quantitative reliability. A comparison with velocities derived from streak photographs in water is performed. In section 4, we discuss several problems that had to be solved before our tests with liquid gallium became successful. The problems are linked to the fast oxidation of gallium. In section 5, we show preliminary velocity measurements performed in liquid sodium using the same experimental set–up.

Table 1 Physical properties of water, liquid gallium (at 30°C), liquid sodium (at 120°C) and copper relevant to the experiment.

Fig. 1 Experimental set–up. a) Photograph of the copper cylinder (coated with a black cataphoretic thin film) and motor that entrains a crenelated disk near the top of the cylinder. Two 4MHz ultrasonic transducers are pressed on flat slits machined at three different angles (angles 0, 1, 2). b) Vertical cross–section of the cylinder with a schematic view of the fluid flow. c) View from the top of the cylinder. The lines indicate the chords followed by the ultrasonic beams in liquid gallium (solid line) and water (dashed lines) for the three different angles.

2 Experimental set–up and velocimeter

2.1 Set–up

The experimental set–up is shown in figure 1. A vortex is produced inside a cylinder. The cylinder is made of copper and coated with a cataphoretic thin film which gives a black shiny appearance to the cylinder in figure 1 (see Sect. 4.3 for comments about this thin film). The inner dimensions of the cylinder are 80 mm (diameter) and 130 mm (height). The vortex is produced by spinning a 40 mm–diameter crenelated disk near the top of the cylinder (see figure 1b for details). The top surface is rigid and in contact with the fluid. Rotation rates up to 3000 rev min^{-1} have been tested. The cylinder is filled with either water or liquid gallium. The melting temperature of gallium is 29.8°C. Physical properties relevant to the experiments are listed in table 1.

Figure 1b gives a schematic representation of the fluid flow inside the cylinder. The flow is nearly axisymmetric, with a dominant azimuthal velocity $V_\theta = r\omega(r)$ in cylindrical coordinates, where r is radius and ω the angular velocity. Centrifugation of the liquid by the disk also produces a nearly axisymmetric secondary flow with meridional components. In this paper, we will concentrate on measurements of the azimuthal velocities, and compare the profiles obtained for water and gallium.

As shown in figure 1a, velocities are measured with 8 mm–diameter ultrasonic transducers placed on the outer walls of the cylinder, on flat portions machined at some angle from tangent as shown in figure 1c. The ultrasonic beam can thus be shot into the cylinder along three different directions, with incidence $i_{Cu} = 0°$ (angle 0), 32° (angle 1), or 40° (angle 2). When the probe is moved along the contact surface, the cylindricity of the inner wall induces a spread in the angles of ± 8°, ± 12° and ± 10°, respectively.

At the copper–liquid interface, the beams are deflected according to the Snell–Descartes' law $\frac{\sin i_{Cu}}{c_{Cu}} = \frac{\sin i_{liq}}{c_{liq}}$ where c_{Cu} and c_{liq} are the sound velocities in copper and in the liquid, respectively (see table 1). The corresponding beams inside the cylinder are drawn for liquid gallium and water

in figure 1c. We checked the refraction of the ultrasonic beams in both water and gallium by detecting echoes from a thin rod translated in the liquid. All the velocity profiles in water and gallium shown in this paper were shot from angle 1 at mid–depth of the cylinder.

2.2 Ultrasonic velocimeter

In the pulsed Doppler shift ultrasonic technique, a pulse of collimated ultrasounds is shot into the fluid. One then listens for echoes that come back from particles in the fluid. The delay time of the echo provides the distance of the particle, while the corresponding Doppler shift provides its velocity.

In a few tens of milliseconds, a profile of fluid velocities is obtained. Only the velocity component parallel to the ultrasonic beam is accessible. The length of the profile is proportional to the listening time, which depends upon the Pulse Repetition Frequency (*PRF*). The spatial resolution is of the order of the ultrasound wavelength in the shooting direction, and depends upon the width of the ultrasonic beam in the perpendicular directions. Reliable velocities can only be obtained after a number of pulses (typically a few dozens) have been shot and analyzed. We use the *DOP1000 multigate* ultrasonic velocimeter from Signal Processing S.A. (Lausanne, Switzerland).

The ultrasonic transducers are 4 MHz probes, 8 mm in diameter (transducers TR30405, Signal Processing). From the sound velocities (table 1) we deduce a wavelength of 0.375 mm in water and 0.715 mm in gallium. The pulse usually consists of 8 cycles. The spatial physical resolution in the shooting direction then reaches $8 \times 0.375 = 3$ mm in water and 5.7 mm in gallium. Because there is some overlap between the volumes sampled, velocity gradients are well retrieved below this physical limit. In open water, the divergence of the ultrasonic beam is $\pm 5°$. The diameter of the beam could then reach 15 mm. We think that it is less, because of the focusing effect of the cylindrical wall. Note that the deflection of the beam produced by the interaction of the acoustic waves with the fluid velocities is less than 1° in our conditions (Roux and Fink 1995) and is considered to be negligible.

The *PRF* is an essential parameter. The time t_{PRF} between two emissions determines the length of the profile, but it also controls the velocity resolution. Indeed, if the time between two emissions is long, fast particles have moved too much to yield echoes that correlate. The maximum depth D_{max} and velocity along the beam V_{max} that can be measured are linked by: $D_{max} \times V_{max} = \dfrac{c^2}{8 f_e}$ where c is the sound velocity of the liquid and f_e is the emission frequency. At the other extreme, slow particles show no detectable displacements between two emissions if the repetition frequency is too high. In our experiments, we have carefully adjusted the *PRF* parameter (see Sect. 4.2).

Most profiles were constructed using 128 emissions per profile. The total acquisition time of a profile ranges from about 20 to 100 ms, depending

Fig. 2 Ultrasonic echoes (arbitrary units) as a function of distance in mm recorded in the copper cylinder filled with water (a) or gallium (b). The ultrasonic probe is at angle 0.

on the *PRF*. Each profile is then treated as described in the appendix. In this paper, we focus on the mean properties of our turbulent vortex. Therefore, we present mean velocity profiles obtained by averaging a set of 256 successive profiles (they remain identical if only 64 profiles are averaged).

The Doppler shift method relies on echoes from particles in the liquid. Optimal particles have densities close to that of the liquid, so as to stay in suspension and follow the motions of the fluid. It is best if their acoustical impedance is different from that of the liquid, so as to reflect the ultrasounds efficiently. In water, we use a polyamide powder. In liquid gallium, we selected a powder of zirconium boride. The particles are about 50 μm in diameter and the density of ZrB_2 (6.17) is close to that of liquid gallium (6.09). This powder yields good results, but it is likely that natural gallium oxides also reflect ultrasounds efficiently (see Sect. 4.3).

The user of the *DOP1000* velocimeter can adjust a number of parameters. We have already mentioned the key role of the *PRF*. Another important feature is the amplification level or Time Gain Control (*TGC*). It controls the amplification level of the echoes before they are analyzed. In some cases, a simple exponential increase of the amplification as a function of the time delay is enough to provide good sensitivity along the whole profile. However, echoes from the walls can saturate portions of the profile and produce spurious velocity values (see Sect. 4.2).

As a matter of fact, it is useful to monitor the amplitude of the echoes as velocity profiles are computed. In figure 2, we show the amplitude of the echoes in the cylinder as a function of distance for both water and gallium using the *echo mode* of the *DOP1000*. The transducer is positioned at angle 0 (see figure 1), and the time between two emissions has been chosen so as to record ultrasonic waves that have bounced back and forth on the side walls of the cylinder. Nice peaks are clearly visible that correspond to waves that have bounced at the liquid–copper interface once or more. For water, a first small peak corresponds to multiple reflections within the entrance wall. These reflections are not as strong for gallium, due to a smaller impedance contrast. On the contrary, reverberations within the opposite wall are responsible for the broadening of the peaks in gallium. Note that even the relative amplitudes of the peaks depend upon the choice of the amplification level (*TGC* parameter). The low amplitude echoes between the main peaks are those from the particles, which ultimately provide the velocity information.

Fig. 3 Velocity profiles as a function of distance measured at mid–depth of the cylinder from angle 1, in vortices of water (a) and gallium (b). The different imposed Reynolds number are obtained by changing the rotation rate of the disk up to 3000 rev min^{-1} in both cases. The error bars give the standard deviation of the velocity at each measured point of the profile.

Fig. 4 Maximum velocity of profiles as a function of the Reynolds number in vortices of water and gallium.

3 Velocity measurements in vortices of water and gallium

3.1 Raw velocity profiles

Figure 3 shows velocity profiles measured at mid–depth of the cylinder from angle 1 in vortices of water (a) and gallium (b). Only the projection of the velocity vector along the ultrasonic beam is retrieved with the Doppler method. Each profile is for a given disk rotation rate from 500 to 3000 rev min^{-1}. Throughout the paper, we use the Reynolds number $Re = \frac{\omega_{disk} r_{disk}^2}{\nu}$, this dimensionless number being based on the radius of the disk r_{disk}, the kinematic viscosity of the liquid ν and the rotation rate of the disk ω_{disk}.

The profiles of figure 3 are consistent with the properties of the flow as sketched in figure 1b:

- the profiles are symmetric with respect to the mid–point of the beam in the cylinder (distance of about 45 mm), as expected for an axisymmetric flow. No bias is introduced by the divergence of the ultrasonic beam.

- the projection of the velocity along the beam is maximum at the mid–point, as it should be if the angular velocity of the liquid decreases with increasing radius. Note that at the mid–point, the (azimuthal) velocity vector is parallel to the beam.

- this maximum velocity increases with the imposed angular velocity of the disk.

- the velocity jumps abruptly from zero in the copper wall to its value in the liquid across a very thin vertical viscous boundary layer. The thickness of this layer scales as $\delta \simeq \mathrm{Re}^{-1/3}\, r_{cylinder}$ (e.g., Pedlosky 1987), yielding $\delta < 1$ mm, which is consistent with our measurements. Note that the layer is too thin to be resolved.

- the error bars in figure 3 indicate the standard deviation at each measured point of the experimental profile. As expected for these high Reynolds numbers, the flow is turbulent. But the energy of the fluctuating part is only a few percents of the mean flow, as already seen in previous studies (Brito et al., 1995). Note that the sample volume (see Sect. 2.2) is larger than the distance between two measured points.

For a given disk rotation rate (for example at 3000 rev min^{-1}), the maximum velocity is higher for gallium than for water. This is a direct consequence of the difference between the two ultrasonic paths : as shown in figure 1c, the path in liquid gallium is less refracted than that in water. Hence, the azimuthal velocity measured at the mid–point is higher for gallium than for water (as long as the angular velocity decreases less rapidly than $1/r$ with radius).

Fig. 5 Normalized angular velocity profiles $\omega(r)/\omega_{disk}$ in vortices of water (a) and gallium (b) for different Reynolds numbers. The error bars shown for the smallest radius on each profile is representative of the error bars at every radii.

Fig. 6 Comparison of water and gallium angular velocity profiles at three different Reynolds numbers.

In figure 3 we plot the maximum velocity of each profile as a function of the Reynolds number. The maximum disk rotation rate is still 3000 rev min^{-1}, but because gallium has a lower kinematic viscosity than water, higher Reynolds numbers are reached for gallium. We observe that the maximum velocity increases linearly with Re when Re is above about 5 10^4 (for both water and gallium). In this high Reynolds number regime, the liquid is entrained very efficiently. Velocities as high as 3.5 m/s are well recovered by the velocimeter. For smaller values of the Reynolds number, the liquid is more influenced by the presence of the lateral walls. Hence, the liquid is less entrained, as we will better see in the next section.

3.2 Angular velocities

Radial profiles of the angular velocity $\omega(r)$ can be retrieved from the raw velocity profiles, as shown in the appendix. The profiles extend from the minimum radius at the mid–point of the beam to the outer wall.

Figures 5a and 5b show the normalized angular velocity profiles $\omega(r)/\omega_{disk}$ computed from the raw profiles shown in figures 2a and 2b respectively. Each profile is composed of two "branches", which correspond to the two sides of the raw profile.

First, we note that the two branches superpose remarkably well as a function of radius for both gallium and water, in particular in the central part of the vortex (at small radius). It demonstrates that the fluid flow is indeed axisymmetric. It also shows there is no bias introduced by the velocimeter : velocities far from the transducer are recovered as well as those close to it, at least when the parameters of the instrument are well tuned (in particular the *PRF*). This could be due to the focusing effect of the cylindrical interface, which reduces the intrinsic divergence of the ultrasonic beam.

We checked that the velocity profiles do not depend on the vertical coordinate when Re $\geq 10^4$, as already inferred from other measurements (Brito et al. 1995). Indeed, all profiles measured from the top to the bottom

Fig. 7 Comparison of the radial profiles of angular velocity in a vortex of water measured with the streak photograph technique (points with error bars) and with the *DOP1000* velocimeter (continuous line bracketed by the standard deviation).

of the cylinder are essentially identical for a given disk velocity, for both water and gallium, and from the two shooting angles (1 and 2), except in very thin layers near the boundaries.

Although velocities do not vary with height, the angular velocity in the liquid does not necessarily match that of the disk, as can be seen in figure 5. However, as the entrainment velocity increases, the angular velocity of the liquid at the center gets closer to that of the disk : we are entering the *vortostrophic* regime. This is more clear for water, because the geometry of the ultrasonic path permits to retrieve the angular velocities from the outer wall down to a radius of 8 mm, instead of 15 mm for gallium (see figure 1c).

For a given Reynolds number (hence for disk rotation rates that differ by a factor of about 3, which is the ratio of the kinematic viscosity of water over that of gallium) the radial profiles of non-dimensional angular velocity in water and gallium superpose perfectly, as shown in figure 6.

For Reynolds numbers above about 5 10^4, the angular velocity of the liquid at the center of the cylinder matches that of the disk. This is also when the high Reynolds number regime in figure 3 is reached.

3.3 Comparison with velocities deduced from streak photographs

We have seen the good quality and coherency of the velocity profiles measured with the ultrasonic Doppler technique, for both water and gallium. In this section, we compare these profiles with angular velocities derived with a completely different method.

We measured angular velocities in water using the streak photograph technique. The copper cylinder was replaced by a transparent polycarbonate cylinder. A horizontal slice of the cylinder was lit, and a B–pause photograph was taken from below using a mirror. Angular velocities were deduced from the length of the tracks of aluminum flakes.

In figure 7, we compare two radial profiles of the angular velocity in water. The points with error bars are from the streak photographs at Re = 1.5 10^4 and the curve is a Doppler profile for the same Reynolds number. The two profiles superpose extremely well. Both display a thin boundary viscous layer near the outer wall, across which the angular velocity must jump from zero (no slip boundary condition) to about 10% of ω_{disk}.

4 Methodological aspects

Although one advantage of the ultrasonic Doppler velocimeter is that is does not require any calibration, there are a few phenomena that can introduce

Fig. 8 a) Velocity measurement in a vortex of water as a function of distance for an identical Reynolds number Re = 3.7 10^4 and different times between two emissions t_{PRF}. Velocities are underestimated when the *PRF* is not carefully chosen. b) Maximum measured velocity in mm/s as a function of the selected t_{PRF} in μs, for three Reynolds numbers. The two circled stars for Re = 3.7 10^4 correspond to the two profiles shown above.

biases in the measurements. The biases can be in distance and in velocity. For gallium, additional problems come from the formation of oxides that affect the transmission of the ultrasonic waves, as we discuss below.

4.1 Biases in distance

According to the geometry of our set–up shown in figure 1, and to the sound velocities given in table 1, the mid–point of the raw velocity profiles should lie at a distance of 42 mm for water and 45 mm for gallium (note that distances are given assuming that the sound velocity for the whole profile is that of the liquid). Instead, we find it at 45 $\pm$ 0.5 mm and 48 $\pm$ 0.75 mm respectively, for all Reynolds numbers using the de–aliasing method described in the appendix. This implies that the origin of the profiles is offset by some 3 mm. In fact, this offset is directly seen in the raw profiles : the first data points in the liquid are at a distance of 6 mm in water and 10 mm in gallium, instead of the expected 2.5 mm and 5 mm respectively.

By using the actual mid–point of the profiles, we can correct for this small bias. The radial profiles of the angular velocity shown in figure 5 illustrate that the profiles then reach the expected radius of 40 mm.

4.2 Biases in velocity

A close look at the two profiles for Re = 3.7 10^4 in figure 2a reveals that one of these yields spurious zero velocities for some 4 mm inside the liquid. This happens when the echoes from the particles in the liquid are too strong and saturate the signal. This can be solved by adapting the filter applied to the signal, the Time Gain Control (*TGC* parameter). Note that the profiles are otherwise completely identical. Spurious velocities also appear when the echoes are not strong enough.

At the other end of the profiles, where the ultrasonic beam encounters the opposite copper wall, another bias exists. We see that the velocity does not decrease down to zero, but remains instead at a roughly constant level. This is because we are getting echoes from particles that have been hit by the ultrasonic beam reflected off that wall and vice-versa. In figure 5a tiny notches at $r \simeq 14$ mm may be artefacts due to the beating of the scattered waves with a static echo for the same shot.

We found another more subtle cause of bias in velocity. Figure 8a compares two raw velocity profiles for a vortex in water with the same Reynolds

number Re = 3.7 10^4. The only difference between the two profiles lies in the choice of the Pulse Repetition Frequency (PRF). This parameter controls the "listening" time of the velocimeter, hence the length of the profile. However, it also trades off with the velocity that can be measured.

As we have seen in section 2.2, if the time between two emissions is too short, the particles have not moved enough and the velocimeter fails to properly resolve the Doppler shift. The signal–to–noise ratio is then low and the recovered velocity is biased to low values. This is why the profile with t_{PRF} = 128 μs is too low in figure 8a. In figure 8b, we report the maximum measured velocity as a function of t_{PRF} for several Reynolds numbers. These curves display a plateau for which the measured velocity becomes independent of the selected PRF. In fact, velocity slightly decreases along this plateau (by less than 10 %). The strong velocity bias seen in figure 8a occurs for smaller t_{PRF}. Therefore, there is an optimum t_{PRF} slightly above this fall-off, for which the correct velocity is measured.

When the disk velocity increases, the optimum t_{PRF} decreases, and the width of the plateau diminishes because profiles with large t_{PRF} present too much time–aliasing to be recovered (see appendix). The optimum t_{PRF} roughly varies as the inverse of the disk velocity. A similar behavior is observed in gallium experiments. All results presented in this article are for the optimum t_{PRF}.

Following these observations and in order to find the suitable time between successive pulse emissions, one should first start with the largest possible t_{PRF} and then reduce it until the maximum velocity collapses.

4.3 Problems with oxides in liquid gallium

At this stage, we hope to have shown that excellent velocity measurements could be obtained in liquid gallium, using pulsed Doppler shift ultrasonic velocimetry. In this section, we emphasize that this was not an easy task, as several difficult problems had to be solved before we could get these results.

4.3.1 Oxides The main difficulties are linked to the exceptional affinity of liquid gallium with oxygen. Gallium oxides cover the surface of liquid gallium in a few minutes when it is in contact with the atmosphere. An oxygen content as low as 2 ppm is enough for oxidation to start (personal communication, Rhône–Poulenc). The two main gallium oxides are GaO_2 (density = 4.77) and Ga_2O_3 (density = 6.44) (Downs 1993). GaO_2 forms a very fine dark powder, which is easily seen at the surface of shiny gallium.

4.3.2 Effect of oxides on ultrasonic velocimetry As soon as oxides have had time to develop enough, it becomes impossible to obtain reliable profiles with the ultrasonic velocimeter. Within a few minutes, the profiles become asymmetric, the measured velocity decreases, and finally one loses completely the profile, starting from the far wall. At first, we thought that

these problems were due to a decrease in the population of particles, since the velocimeter returns zero velocities when it gets no echo. A simple test shows that this is not the case. If we start an experiment with clean gallium (as discussed below) at angle 0, we observe that the amplitude of the echo progressively decreases and finally disappears. This means that the ultrasonic beam looses its energy by scattering : there are too many particles. The scattering could take place in the volume of the liquid or on the walls, or both. We will see from tests discussed below that scattering from oxide particles on the walls is probably the main source of attenuation of the ultrasonic beam.

4.3.3 Cleaning There are two options to avoid problems with gallium oxides : either always operate gallium under an oxygen–free atmosphere, or remove the oxides. With the first option, one could use argon or nitrogen but we have seen that even a minute proportion of oxygen is enough to start oxidation. We have chosen the second option. As described in Brito et al. (1995), liquid gallium can be cleaned by letting it react with a 10% solution of HCl in ethanol. We perform this treatment for a few hours each time before filling the cylinder.

4.3.4 Cylinder material We used three different materials for the cylinder. First, we used polycarbonate, as described in Brito et al. (1995). Visual observations were then possible when the liquid was water (see 3.3). We built a second cylinder in nylon 6/6 : this material was chosen because its sound velocity is very close to that of liquid gallium, so that refraction was minimum. Finally, a copper cylinder was constructed, with which all measurements presented in this paper were obtained.

In all three cases, we could get good velocity measurements for the first few runs. However, after a few days or a few weeks, the profiles started deteriorating, even though gallium was cleaned before each refill. The reason seems to be that oxides clutter on the walls and cannot be completely removed even though we tried various mechanical and chemical treatments. This observation confirms the role of oxides on the walls as the primary source of disturbance for ultrasonic velocimetry.

4.3.5 Coating The final step for obtaining reliable and lasting velocity measurements was to coat the walls of the copper cylinder with a 2 μm–thick cataphoretic film. With this coating, oxides do not stick to the walls. Starting with purified liquid gallium, we can typically run the experiments for about one hour without encountering troubles due to oxides. We then have to empty and clean both the cylinder and the gallium before starting a new run. The run–time could probably be lengthened if the experiments were performed in an oxygen–free atmosphere.

4.3.6 Particles All experiments in gallium we reported on used 50 μm large zirconium boride particles to back–scatter the ultrasonic waves. ZrB_2 was

chosen because its density (6.17) is close to that of liquid gallium. However, we also performed a few tests with "pure" gallium and found it to be just as echogene, probably because of small oxide particles again.

5 Preliminary flow velocity measurements in liquid sodium

As we mentioned in the introduction, one of the motivations for our study is the possibility to measure flow velocities in dynamo experiments using liquid sodium. Having shown the merits of our experimental set–up to develop the Doppler velocimetry technique in liquid gallium, we show the results of preliminary tests in liquid sodium.

Experimenting with liquid sodium brings in two difficulties: high temperature (sodium melts at 98°C) and the violent reactivity of sodium, which requires specific handling methods. The experimental set–up has been modified accordingly. In order to avoid contact of sodium with oxygen or water, the whole set–up was placed in a dedicated Argon atmosphere chamber operated by the *Direction des Réacteurs Nucléaires* of the *Commissariat à l'Energie Atomique* in Cadarache. The polycarbonate disk was replaced by a stainless steel equivalent. For minimizing leakage problems, the cylinder was only three–quarter filled, and the disk positioned at mid-depth. The geometry of the cylinder was kept unchanged, but we tried three different materials: naked copper, copper with a cataphoretic deposit (as for gallium), and stainless steel.

The experiments were carried out with liquid sodium at a temperature of 120°C. We used a high temperature transducer TR40408 from Signal Processing, which can operate up to 150°C. The beam it produces is about 60% wider than that of the TR30405 probe.

Figure 9a shows the echo from the wall and its multiples measured using the stainless steel cylinder. The sound velocity of liquid sodium derived from this record is in agreement with the predicted value (see table 1). The naked copper cylinder yielded weaker echoes, while no echo at all was seen with the cataphoretic–coated copper cylinder.

In contrast, the best velocity profiles were obtained using the naked copper cylinder. Figure 9b displays the raw profiles and their standard deviations for three different disk rotation rates. The transducer is at angle 1 and the ultrasounds travel along a chord bottoming 10.5 mm off the axis of the cylinder. The profiles look not too different from their equivalents in water and gallium, and the maximum velocity clearly increases with the disk rotation rate. Nevertheless, the profiles are much more noisy and the maximum mean velocities are between two and three times lower than expected, even if we account for the effect of the cylinder being only three–quarter filled. We think that this is due to a poor signal–to–noise ratio in these experiments. Results obtained with the stainless steel cylinder were similar but of poorer quality, because of the high impedance contrast at the solid/ liquid interface. Rather unexpectedly, the cataphoretic–coated copper cylinder yielded the worst results.

Fig. 9 (a) Ultrasonic echoes (arbitrary units) as a function of distance in mm recorded in a cylinder of stainless steel filled with sodium. The ultrasonic probe is at angle 0 (see figure 1). (b) Velocity profiles as a function of distance measured at mid–depth of the cylinder from angle 1 (see figure 1), in vortices of liquid sodium at 120°C obtained in a cylinder of naked copper, for three different disk rotation rates.

No particles were added to the sodium. Pure sodium was too transparent to ultrasounds, and we had to let it oxidize to get sufficient echoes from oxide particles.

These preliminary measurements in liquid sodium are encouraging. There remains to perform a work similar to what we presented for gallium : determine the best container material and optimize the amount of oxides and/or other particles.

6 Conclusions

We have shown the first velocity measurements performed in a vortex of liquid gallium, using the pulsed Doppler shift *DOP1000* velocimeter. Reliable profiles have been obtained. Comparisons with earlier experimental results for the same set–up demonstrate the high quality of the velocity measurements. Comparisons with velocity profiles for water in the same set–up illustrate that the dynamics of this type of flow is controlled by its Reynolds number.

The main problems we have encountered are due to the very fast oxidation of gallium. Oxides form a powder that sticks to the walls of the container and scatters the ultrasounds, making it impossible for them to propagate far enough. We could overcome this difficulty by "cleaning" the gallium and the container before each series of runs. Cleaning of the container was efficient only when a thin cataphoretic film protected the copper walls from gallium oxides deposits. Running the experiments in an oxygen–free atmosphere would probably minimize these problems.

Our results open new perspectives for the investigation of fluid flow in liquid metals. They should lead to developments in the context of experimental dynamos, where fast motions are set in large volumes of liquid sodium. Preliminary tests of the pulsed Doppler shift ultrasonic method in liquid sodium using the same set-up show that the technique should work well.

7 Acknowledgments

We thank J.-C. Willemetz and J.-C. Attiach for their help with the *DOP 1000* velocimeter and R. Bolcato for technical assistance. The manuscript greatly benefited from the criticisms and suggestions of three anonymous

referees. We acknowledge support from Université Joseph Fourier and Région Rhône-Alpes. The sodium experiments were carried out at CEA/DRN with the help of B. Pelisset, A. Guigon and F. Baque.

Appendix: Treatment of velocity profiles

In this appendix, we explain how we convert the raw velocity data recorded by the *DOP1000* velocimeter into time–averaged profiles of the angular velocity ω as a function of radius. Figures 10a-d show the successive steps of the processing, and figure 11 illustrates the projection of the measured velocity V_{dop} into the azimuthal velocity component V_θ.

As already mentioned in section 2.2, one set of velocity profiles is typically composed of 256 individual profiles, each of them measured successively in time. The total recording time of a set is determined by the product of parameters $t_{PRF} \times$ *number of pulses per profile* $\times$ 256 and ranges from about 5 to 25 seconds.

The four individual velocity profiles shown in figure 10a are from a set of 256 velocity profiles, each of which recorded with $t_{PRF} = 208$ μs and 128 emissions per profile. Along the Y–axis, velocities are given in their original binary–coded values, spanning a range from -128 to +127. Given the sign convention of the velocimeter (velocities counted positive when the fluid moves away from the probe) and the sense of rotation of our disk, all measured velocities should be positive. We see that this is not the case in the central part of the profile, where the values have been clearly aliased into the negative side. This happens when the fluid velocities are larger than the set maximum velocity (V_{max} parameter).

This effect can easily be removed by de–aliasing the binary files (using a continuity test). Figure 10b gives the resulting de–aliased profiles.

The following step consists of time–averaging the 256 corrected profiles and convert the binary units into physical units (mm/s). The resulting mean profile is plotted in figure 10c, together with the standard deviation about that profile.

In the last step, the velocity along the ultrasonic beam V_{dop} is converted into the azimuthal velocity $V_\theta = r\omega(r)$. To do that, we first determine the symmetry point of the profile (point O' in figure 11) by least–square inversion : the result of this inversion is given by the vertical bar in figure 10c. (Note that the position of point O' is theoretically known as we know the angle of incidence i_{Cu}, and the sound velocities in copper, gallium, and water. However, we generally have a small discrepancy between the predicted value and the one obtained from the inversion as discussed in section 3.2).

Once we have the distance of point O' in figure 10c, and knowing the distance OO' $= r_0$ from the geometrical parameters of figure 11, we can project V_{dop} into V_θ :

$$V_\theta(r) = V_{dop}(M) \cdot \frac{r(M)}{r_0}$$

Fig. 10 Successive steps of the processing of a velocity file recorded by the *DOP1000* during an experiment with liquid gallium where Re = 1.6 10^5. (a) Original binary–coded velocity values as a function of distance for 4 profiles. (b) de–aliased profiles. (c) Time–averaged profile in physical units (mm/s), obtained by taking the mean of the 256 successive individual de–aliased profiles. The error bars are the standard deviation about that mean profile. The vertical bar is the symmetry point O'. (d) Time–averaged angular velocity $\omega = V_\theta/r$ scaled with ω_{disk}, as a function of radius.

Fig. 11 View from the top of the cylinder. The *DOP1000* measures the component of the velocity along the beam, V_{dop}. O' is the mid–point of the chord. $V_\theta(M)$ is obtained by projecting $V_{dop}(M)$ on the perpendicular to OM.

where $r(M) = \sqrt{r_0^2 + O'M^2}$

Dividing $V_\theta(r)$ by the radius r, we finally obtain the time–averaged angular velocity ω as a function of radius r as shown in figure 10d, here scaled to the disk angular velocity ω_{disk}. The two branches of that profile, which superpose almost perfectly, come from the two sides of the original bell–shaped profile.

Note that for high rotation rates, the retrieved angular velocity at the center reaches the imposed disk velocity when an effective value $i_{Cu} = 40°$ is selected for angle 1. This is within the bounds determined from the geometry of the machined portions for angle 1 (32°± 12°), and this value is used throughout for all profiles.

References

Baudet C.; Ciliberto S.; Pinton J. F. (1991). Spectral analysis of the von kármán flow using ultrasound scattering. Phys. Rev. Lett. 67: 193–195.

Brito D.; Cardin P.; Nataf H. C.; Marolleau G. (1995). Experimental study of a geostrophic vortex of gallium in a transverse magnetic field. Phys. Earth Planet. Int. 91: 77–98.

Brito D.; Cardin P.; Nataf H. C.; Olson P. (1996). Experiments on joule heating and the intensity of the earth's magnetic field. Geophys. Jour. Int. 127: 339–347.

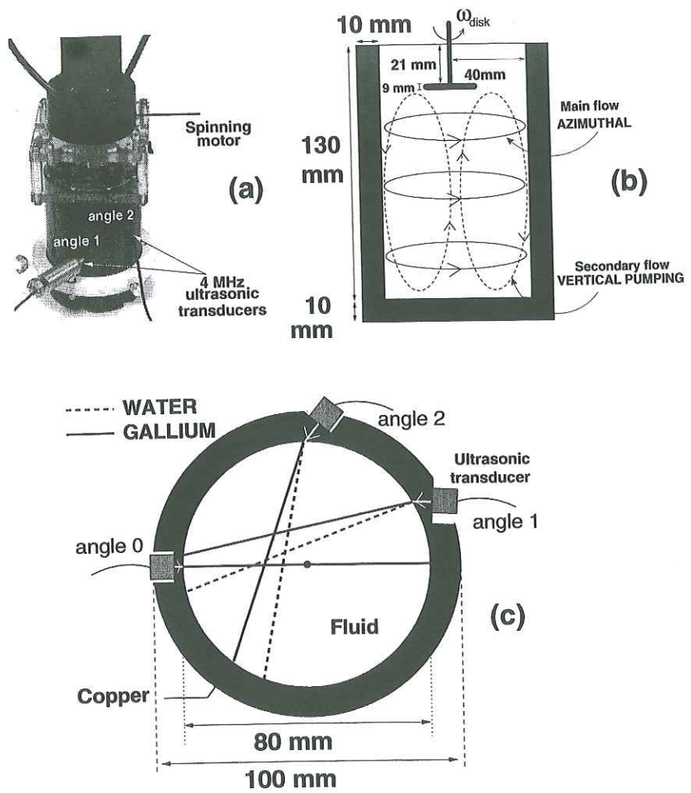
Downs A. J. (1993). Geophysical fluid dynamics. Blackie academic & professional, New-York.

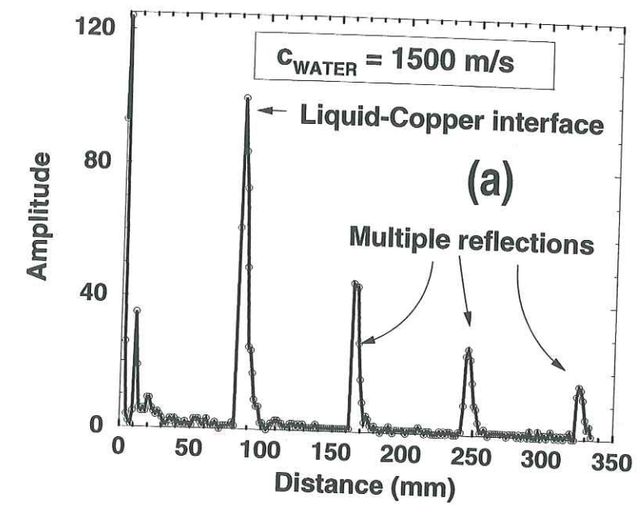
Gailitis A.; Lielausis O.; Dement'ev S.; Platacis E.; Cifersons A.; Gerbeth G.; Gundrum T.; Stefani F.; Christen M.; Hänel H.; Will G. (2000). Detection of a flow induced magnetic field eigenmode in the riga dynamo facility. Phys. Rev. Lett. 84: 4365–4368.

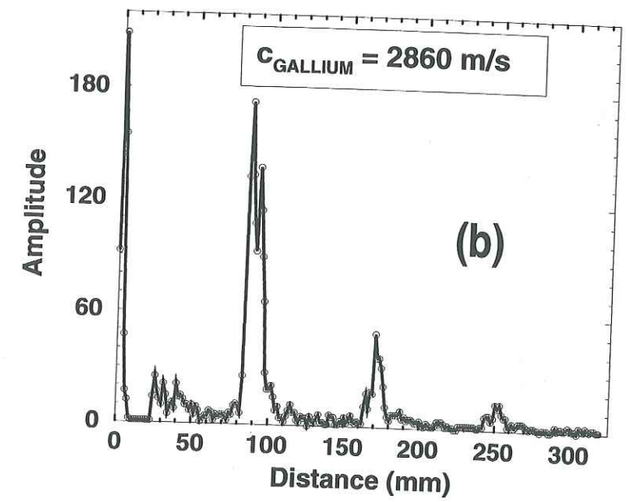
Kikura H.; Takeda Y.; Taishi T.; Aritomi M.; Mori M. (1998). Flow mapping using ultrasonic doppler method, in Proceedings of FEDSM'98, ASME Fluids Engineering Division Summer meeting.

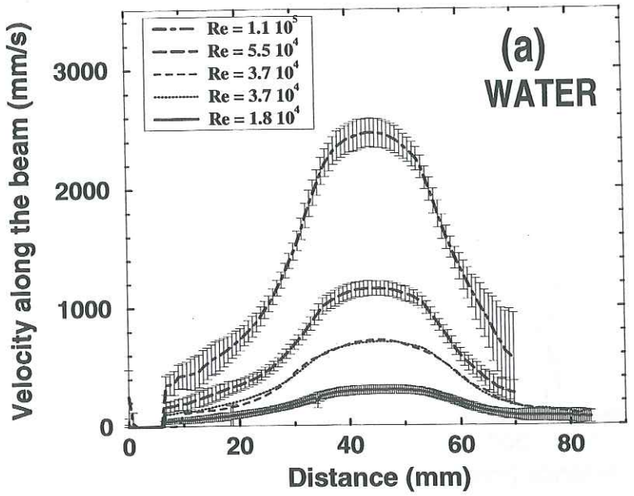
Odier P.; Pinton J. F.; Fauve S. (1998). Advection of a magnetic field by a turbulent swirling flow. Phys. Rev. E 58: 7397–7401.
Pedlosky J. (1987). Geophysical fluid dynamics. Springer, New-York.
Roux P.; Fink M. (1995). Violation of time-reversal invariance in acoustics induced by vorticity. Europhy., Lett. 32: 25–29.
Stieglitz R.; Müller U. (2001). Experimental demonstration of a homogeneous two-scale dynamo. In press in Phys. Fluids .
Takeda Y. (1986). Velocity profile measurements by ultrasound doppler shift method. Int. J. Heat Fluid Flow 7: 313.
Takeda Y. (1987). Measurement of velocity profile of mercury flow by ultrasound doppler shift method. Nuclear Technology 79: 120–124.
Takeda Y.; Kikura H. (1998). Measurement of mercury flow by ultrasonic Doppler shift method, in Proceedings of FEDSM'98, 1998 ASME Fluid Engineering Division summer meeting.
Tilgner A. (2000). Towards experimental fluid dynamos. Phys. Earth Planet. Int. 117: 171–177.
Tokuhiro A.; Takeda Y. (1993). Measurement of flow phenomena using the ultrasonic velocity profile method in a simulated czochralski crystal puller. J. Crystal Growth 130: 421–432.

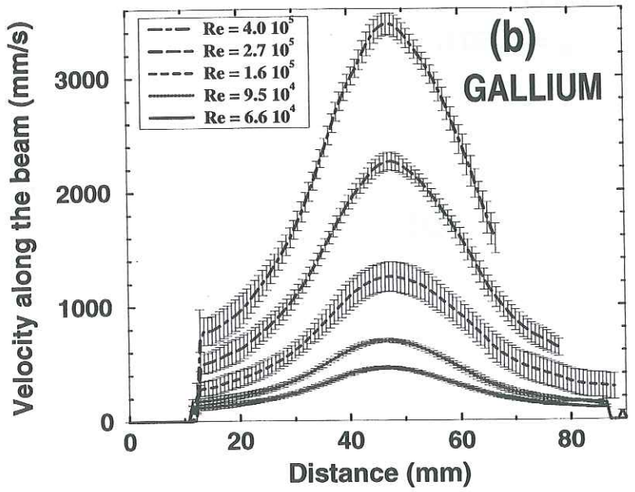
	Symbol	Unit	WATER	GALLIUM	SODIUM	COPPER
Density	ρ	kg/m^3	1000	6090	932	8900
Kinematic viscosity	$\nu = \frac{\mu}{\rho}$	m^2/s	$1.14 \cdot 10^{-6}$	$3.1 \cdot 10^{-7}$	$6.65 \cdot 10^{-7}$	
Sound velocity	c	m/s	1500	2860	2550	4760

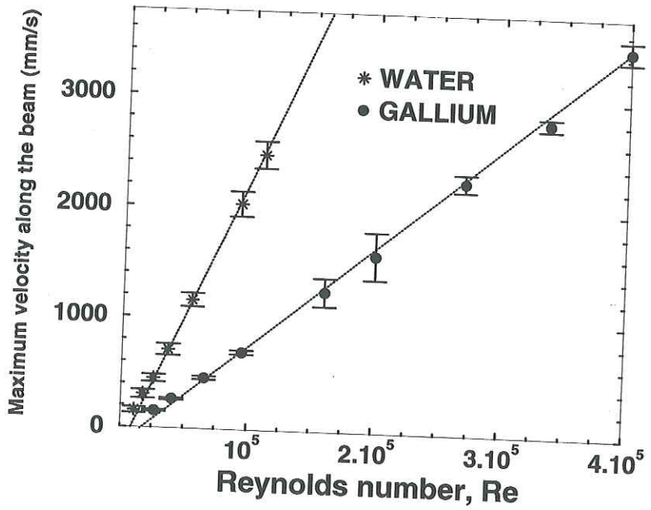

Spinning motor
(a)
angle 2
angle 1
4 MHz ultrasonic transducers
10 mm
ω_{disk}
21 mm
40mm
9 mm
130 mm
10 mm
Main flow AZIMUTHAL
(b)
Secondary flow VERTICAL PUMPING
WATER
GALLIUM
angle 2
Ultrasonic transducer
angle 1
angle 0
Fluid
(c)
Copper
80 mm
100 mm

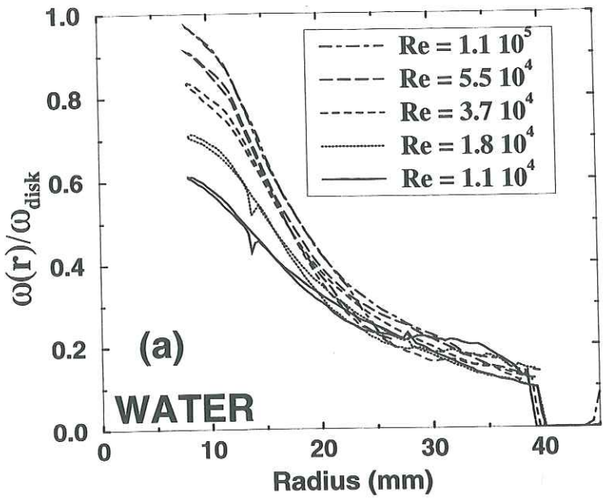

c_{WATER} = 1500 m/s
Liquid-Copper interface
(a)
Multiple reflections
Amplitude
Distance (mm)
0
40
80
120
0
50
100
150
200
250
300
350

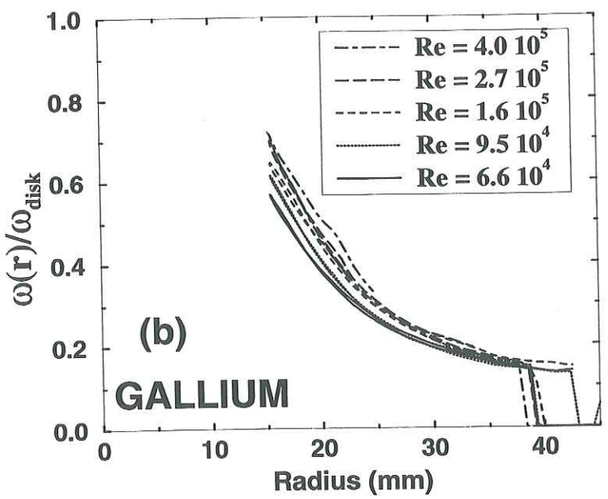

$c_{GALLIUM}$ = 2860 m/s
(b)
Amplitude
Distance (mm)
0
60
120
180
0
50
100
150
200
250
300

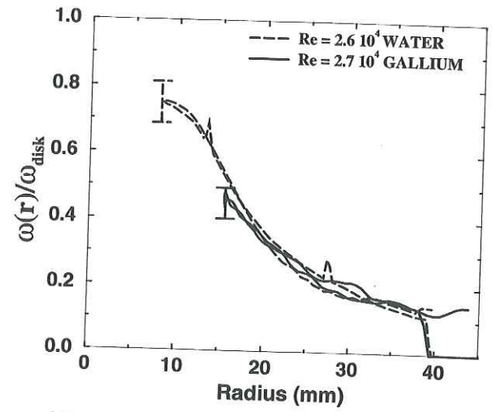

Re = 1.1 10^5
Re = 5.5 10^4
Re = 3.7 10^4
Re = 3.7 10^4
Re = 1.8 10^4
(a)
WATER
Velocity along the beam (mm/s)
3000
2000
1000
0
0
20
40
60
80
Distance (mm)

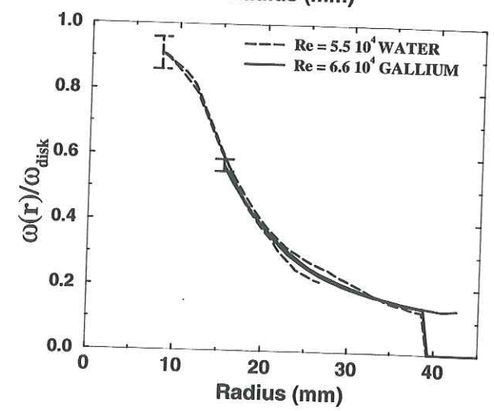

Re = 4.0 10^5
Re = 2.7 10^5
Re = 1.6 10^5
Re = 9.5 10^4
Re = 6.6 10^4
(b)
GALLIUM
Velocity along the beam (mm/s)
3000
2000
1000
0
0
20
40
60
80
Distance (mm)

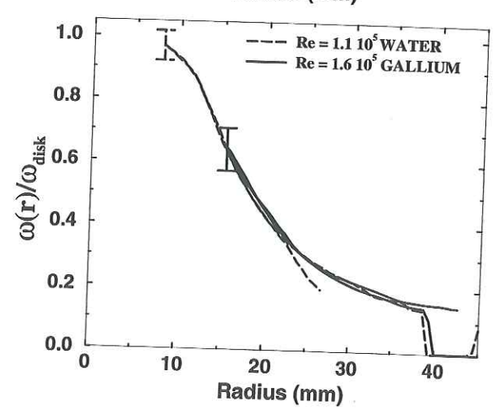

* WATER
• GALLIUM
Maximum velocity along the beam (mm/s)
3000
2000
1000
0
10^5
2.10^5
3.10^5
4.10^5
Reynolds number, Re

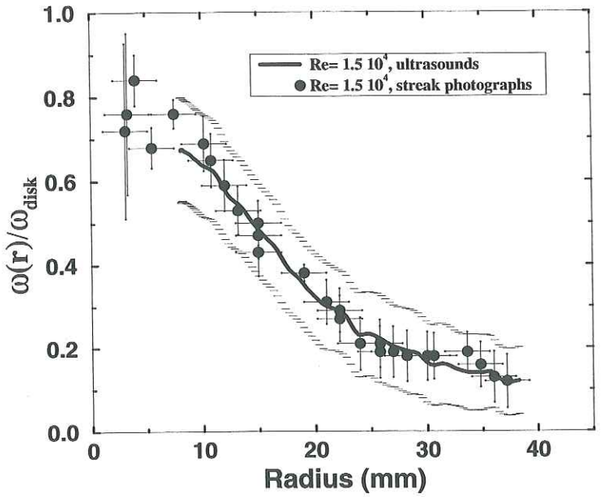

Re = 1.1 10^5
Re = 5.5 10^4
Re = 3.7 10^4
Re = 1.8 10^4
Re = 1.1 10^4
(a)
WATER
ω(r)/ω_disk
Radius (mm)

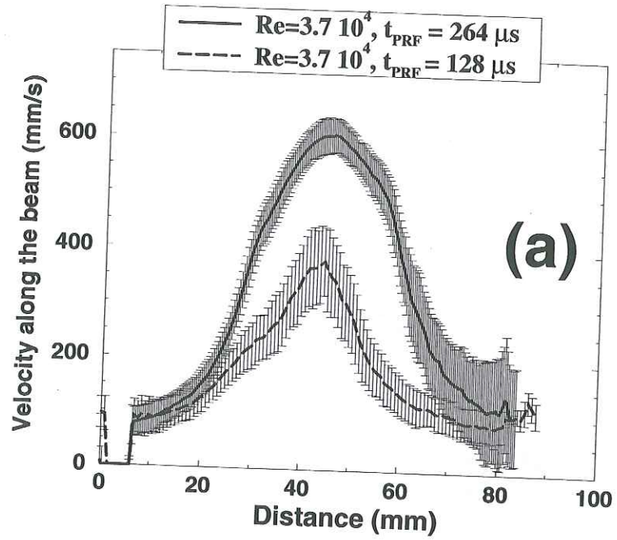

Re = 4.0 10^5
Re = 2.7 10^5
Re = 1.6 10^5
Re = 9.5 10^4
Re = 6.6 10^4
(b)
GALLIUM
ω(r)/ω_disk
Radius (mm)

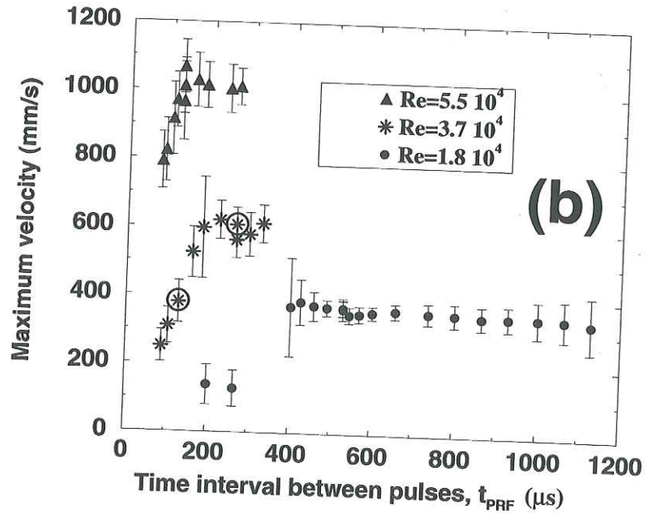

Re = 2.6 10^4 WATER
Re = 2.7 10^4 GALLIUM
ω(r)/ω_disk
Radius (mm)

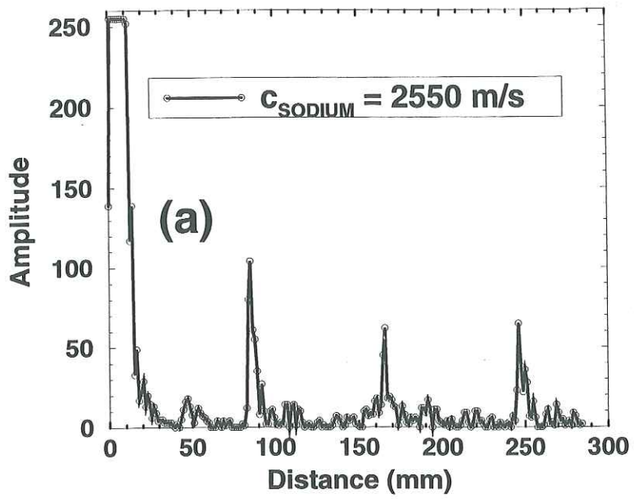

Re = 5.5 10^4 WATER
Re = 6.6 10^4 GALLIUM
ω(r)/ω_disk
Radius (mm)

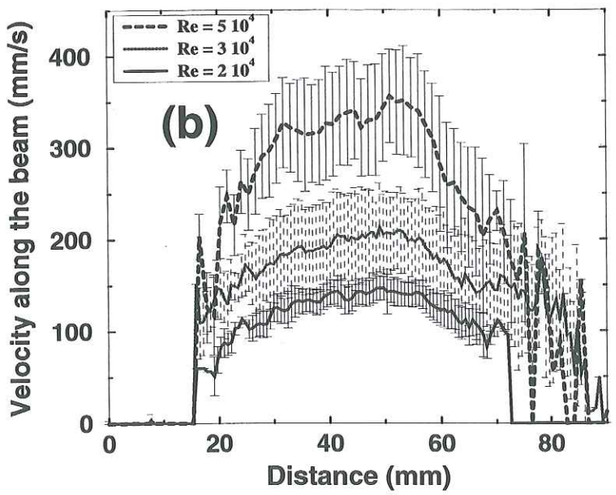

Re = 1.1 10^5 WATER
Re = 1.6 10^5 GALLIUM
ω(r)/ω_disk
Radius (mm)

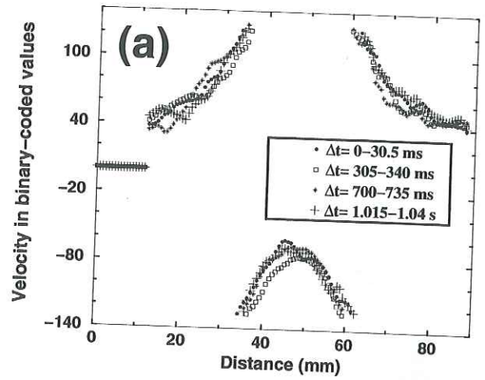

Re= 1.5 10^4, ultrasounds
Re= 1.5 10^4, streak photographs
ω(r)/ω_disk
Radius (mm)

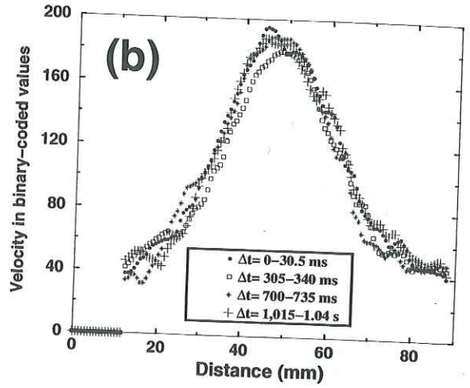

Re=3.7 10^4, t_PRF = 264 μs
Re=3.7 10^4, t_PRF = 128 μs
(a)
Velocity along the beam (mm/s)
Distance (mm)

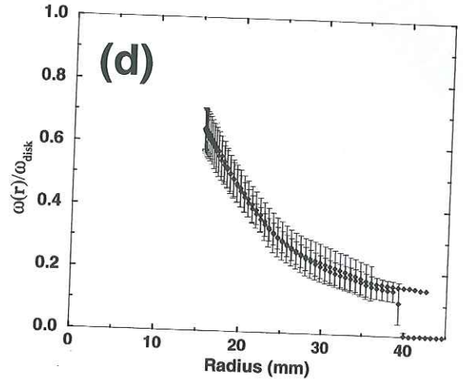

Re=5.5 10^4
Re=3.7 10^4
Re=1.8 10^4
(b)
Maximum velocity (mm/s)
Time interval between pulses, t_PRF (μs)

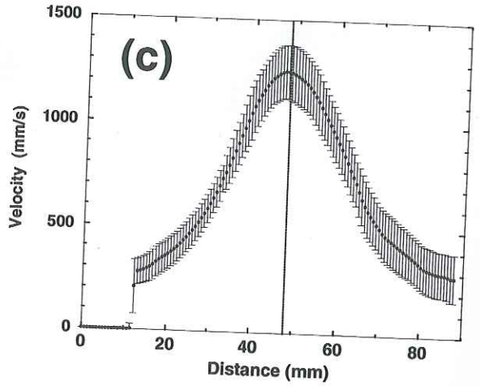

(a)
c_{SODIUM} = 2550 m/s
Amplitude
Distance (mm)

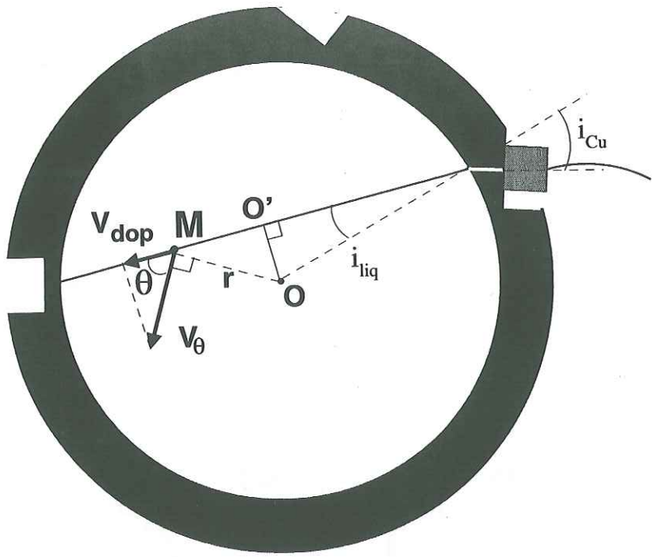

(b)
Re = 5 10^4
Re = 3 10^4
Re = 2 10^4
Velocity along the beam (mm/s)
Distance (mm)


(a)
Δt= 0–30.5 ms
Δt= 305–340 ms
Δt= 700–735 ms
Δt= 1.015–1.04 s
Velocity in binary-coded values
Distance (mm)


(b)
Δt= 0–30.5 ms
Δt= 305–340 ms
Δt= 700–735 ms
Δt= 1,015–1.04 s
Velocity in binary-coded values
Distance (mm)


(d)
ω(r)/ω_disk
Radius (mm)


(c)
Velocity (mm/s)
Distance (mm)


i_{Cu}
V_{dop}
M
O'
i_{liq}
θ
r
O
V_θ

Ce manuscrit est disponible en version électronique (format PDF), avec hypertexte et couleur, à l'URL:

http://www-lgit.obs.ujf-grenoble.fr/users/aubertj

Résumé:

La convection thermo-compositionnelle dans la partie de fer liquide du noyau de la Terre est la source d'énergie la plus probable de la géodynamo, qui entretient le champ magnétique de la planète. Des contraintes théoriques impliquent que l'écoulement est probablement dans un régime de turbulence développée, contrainte par l'influence prédominante de la force de Coriolis. Malgré de remarquables avancées récentes, tant expérimentales que numériques, aucun modèle de dynamo convective turbulente n'a encore été obtenu. Ce travail présente une première étape vers cet objectif: la modélisation de l'écoulement convectif sans champ d'un métal liquide (le gallium), à grand forçage thermique (jusqu'à 100 fois la valeur critique du chauffage), dans une sphère en rotation rapide (nombre d'Ekman jusqu'à 10^{-7}). Une étude expérimentale systématique et quantitative a d'abord été réalisée, à l'aide d'une technique de vélocimétrie Doppler ultrasonore. Afin de mieux comprendre la structure de l'écoulement, nous avons ensuite implémenté un modèle numérique quasigéostrophique, validé quantitativement par l'expérience. Les perspectives envisagées sont la magnétoconvection expérimentale, ainsi que des modèles numériques hybrides de dynamo réalisant la séparation d'échelle entre un champ de vitesse turbulent contenant de très petites échelles de vorticité et un champ magnétique entretenu à grande échelle.

Domaine de recherche: géophysique interne.

Mots clés: geodynamo, convection, turbulence, numérique, expérimental.

Thèse préparée au Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique, Maison des Géosciences, B.P. 53, 38041 Grenoble cedex 9.

Experimental and numerical models of convection in the Earth's core.

Abstract:

It is believed that thermo-solutal convection in the Earth liquid core is the driving source of the geodynamo, which maintains the magnetic field of the planet. Theoretical constraints imply that flow is probably in a developed turbulent state, highly constrained though by the dominent influence of Coriolis force. Despite remarkable recent advances in numerical and experimental fields, no turbulent convective dynamo model has ever been produced. This work is a first step towards this goal, and aims at modelling the non-magnetic convective flow of a spherical shell of liquid metal (gallium), in the regime of high departures from criticality (heating up to 100 times the critical value), and rapid rotation rates (Ekman number down to 10^{-7}). A systematic and quantitative experimental study has been performed first, using an ultrasonic Doppler velocimetry technique. We have then built a numerical quasigeostrophic model for a better understanding of flow structures. This model has been quantitatively compared with the experiments. This work opens the way to experimental magnetoconvection, as well as hybrid numerical dynamo models able to separate scales between a fine scale turbulent velocity field and a magnetic field sustained at large scales.

Research field: Core geophysics.

Keywords: geodynamo, convection, turbulence, numerical, experimental.