



HAL
open science

Modélisation et commande d'un système de trafic multimodal

Samia Smaili

► **To cite this version:**

Samia Smaili. Modélisation et commande d'un système de trafic multimodal. Automatique / Robotique. Université d'Evry-Val d'Essonne, 2012. Français. NNT: . tel-00684018

HAL Id: tel-00684018

<https://theses.hal.science/tel-00684018v1>

Submitted on 30 Mar 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Modélisation et commande d'un système de trafic multimodal

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 11 janvier 2012

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université d'Évry Val d'Essonne
(spécialité Automatique)

par

Samia SMAILI

Composition du jury

Président :

Rapporteurs : Mr Habib Haj-Salem HDR, Directeur de recherches, IFSSTAR/GRETIA
M. Daniel Jolly Professeur, université d'Artois

Examineurs : Mme Feng Chu Professeur, université d'Évry
Mr Salim Mammar Ingénieur des travaux publics, Aviation Civile
Mr John Jairo Martinez-Molina Maître de Conférences, GIPSA-LAB Grenoble
Mr François Goulette Professeur, CAOR, Ecole des Mines de Paris

Directeur : Mr Saïd MAMMAR Professeur, université d'Évry

*À la mémoire de mon père
À ma mère et à ElHadj
À tous ceux qui me sont chers
Avec toute mon affection.*

Remerciements

Au-delà de la formalité d'usage, je tiens à exprimer toute ma gratitude envers Said Mammar pour son encadrement, ses qualités tant scientifiques qu'humaines. Ce travail doit beaucoup à sa disponibilité permanente, sa rigueur scientifique et sa patience. Je tiens également à le remercier pour m'avoir impliquée activement dans son équipe de recherche.

Je suis très reconnaissante à

M.	HABIB HAJ-SALEM	HDR, Directeur de recherche de l'IFSSTAR/GRETIA
M.	DANIEL JOLLY	Professeur de l'université d'Artois
Mme.	FENG CHU	Professeur de l'université d'Evry
M.	SALIM MMAMMAR	Ingénieur des travaux publics de l'Aviation Civile
M.	JOHN JAIRO MARTINEZ-MOLINA	Maître de Conférences de GIPSA-LAB Grenoble
M.	FRANÇOIS GOULETTE	Professeur de CAOR École des Mines de Paris

pour l'honneur qu'ils m'ont fait en participant au jury de cette thèse. Je tiens à remercier en particulier MM Habib Haj-Salem et Daniel Jolly qui ont accepté d'être les rapporteurs de ce mémoire.

Je tiens à remercier l'ensemble des membres et personnels du laboratoire IBISC en particulier Naima, Dalil, Lamri, Hicham et tous les doctorants de l'équipe VASCO.

Mes pensées vont enfin et surtout vers ma famille et tous ceux qui me sont chers.

Table des matières

Liste des tableaux	5
--------------------	---

Notations

Modélisation et commande d'un système de trafic multimodal

Introduction générale

Chapitre 1

Modélisation du trafic

1.1	Introduction	15
1.2	Analyse de la modélisation macroscopique	16
1.2.1	L'approche continue	16
1.2.2	Modèles du premier ordre	18
1.2.3	Modèles d'ordre supérieur	29
1.3	Analyse de la modélisation macroscopique hétérogène	36
1.3.1	Intégration de l'hétérogénéité dans les modèles du premier ordre	36
1.3.2	Intégration de l'hétérogénéité dans les modèles d'ordre supérieur	41
1.4	Modélisation microscopique du trafic	42
1.4.1	variables des modèles microscopiques	43
1.4.2	Les modèles microscopiques	43
1.5	Conclusion	51

Chapitre 2

Affectation du trafic

2.1	Introduction	53
2.2	Affectation du trafic	54
2.2.1	Les méthodes classiques d'affectation statique	55

2.2.2	Affectation dynamique du trafic	57
2.3	Modèles d'affectation du trafic en milieu urbain	61
2.3.1	Régulation locale via les feux de signalisation	62
2.3.2	Régulation globale	68
2.4	Conclusion	69

Chapitre 3

Modélisation hétérogène de flux de trafic routier

3.1	Introduction	71
3.2	Modèle d'écoulement des flux de trafic	73
3.2.1	Modèles de trafic routier	74
3.2.2	Interaction des classes suivant un équilibre-usager	76
3.3	Schéma numérique	83
3.3.1	Régime de trafic fluide	84
3.3.2	Régime semi-congestionné	86
3.3.3	Régime congestionné	86
3.4	Observabilité et synthèse	88
3.4.1	Principe des observateurs	88
3.4.2	Résultats généraux d'observabilité et de controllabilité	89
3.4.3	Extension du schéma d'estimation	90
3.4.4	Régime de trafic fluide	90
3.4.5	Régime de trafic congestionné	92
3.5	Analyse de la stabilité	93
3.6	Résultats numériques	95
3.7	Conclusion	99

Chapitre 4

Commande prédictive appliquée à un système de trafic urbain trimodal

4.1	Introduction	101
4.2	Les bus à haut niveau de service BHNS	102
4.3	La stratégie de régulation	104
4.3.1	La commande prédictive	104
4.3.2	Le module de prédiction	106
4.3.3	Modèle des véhicules particuliers et des bus	107
4.3.4	Modèle de la progression des BRT	109

4.3.5	Module d'optimisation	110
4.3.6	La stratégie complète	112
4.3.7	Analyse de la stratégie et simulations	113
4.4	Le deuxième Modèle de la progression des BRT	123
4.4.1	Le passage d'une station	123
4.4.2	Le passage d'un carrefour à feux	124
4.4.3	Simulations	126
4.5	Conclusion	127

Chapitre 5

Modèle hybride fondé sur un modèle générique de second-ordre GSOM

5.1	Introduction	130
5.2	Revue de la modélisation hybride	130
5.2.1	Couplage entre un modèle macroscopique et une loi de poursuite	131
5.2.2	Modèle hybride basé sur les systèmes multi-agents	136
5.2.3	Modèles hybrides fondés sur des approches mesoscopiques	137
5.3	Rappels sur le modèle de second ordre générique	138
5.3.1	modèle GSOM	138
5.3.2	Discrétisation par le schéma de Godunov	140
5.3.3	Discrétisation particulière	141
5.3.4	Exemple de modèle GSOM : le modèle biphasique de Colombo	141
5.4	Principe du schéma de couplage	143
5.4.1	Transition du modèle GSOM macroscopique vers le modèle GSOM microscopique	144
5.4.2	Transition du modèle GSOM microscopique vers le modèle GSOM macroscopique	145
5.5	Validation du schéma de couplage	146
5.6	Conclusion	151

Conclusions et perspectives

Chapitre 6

Annexe

Bibliographie

167

Table des figures

1.1	Dérivation de la loi de conservation	18
1.2	Relation vitesse/densité selon Greenshields	19
1.3	Relation d'équilibre d'après Greenshields	19
1.4	Autres formes de relations d'équilibre	20
1.5	Droites caractéristique des équations 16-25	22
1.6	Onde de choc	24
1.7	Onde de raréfaction (éventail)	25
1.8	Schéma de Godunov	27
1.9	Offre et demande d'équilibre	28
1.10	D'après Daganzo : Evolution d'une file d'attente dans le cas du modèle de Payne	30
1.11	Trajectoires de véhicules en coordonnées Eulériennes et Lagrangiennes, [ZHANG [1998]]	31
1.12	Signification physique de la variable de conservation y	35
1.13	Diagrammes fondamentaux [DAGANZO [2002]]	37
1.14	Diagrammes fondamentaux [LOGGHE [2003]]	40
1.15	Diagrammes fondamentaux [CHANUT [2005]]	40
1.16	Variables pour le modèle de poursuite	43
1.17	Diagramme phase-espace voiture suiveuse ($v_j = 20m/s, b_m = 0,2m/s^2$) [FRITZSCHE [1994]]	45
1.18	Profil de la vitesse optimale en fonction de l'inter-distance et de la vitesse relative	47
1.19	Modèle à automate cellulaire [HELBING et SCHRECKENBERG [1999]]	49
1.20	Exemple d'agent de conduite [SUKTHANKAR <i>et al.</i> [1996]]	50
2.1	Architecture des différents modèles	54
2.2	Illustration de la méthode du type logit	56
2.3	La représentation d'un réseau multimodal statique [LO <i>et al.</i> [2003]]	57
2.4	VISSIM	59
2.5	AIMSUN	60
2.6	METACOR	60
2.7	Modèle de Vickrey : arbitrage temps de trajet/horaire	61
2.8	La représentation schématique d'un itinéraire multimodal [NAG 01]	61
2.9	Plan de feu d'un carrefour simple	63
2.10	Classification selon l'étude des zones de régulation	66
3.1	Voies dédiées bus sur autoroute	72
3.2	Diagramme fondamental triangulaire	75

Table des figures

3.3	Débit total basé sur la densité totale, débits partiels basés sur les densités partielles	78
3.4	Les différents régimes de trafic	78
3.5	Les diagrammes fondamentaux	78
3.6	Problème de Riemann pour un modèle de trafic hétérogène	81
3.7	Tronçon d'autoroute divisé en 5 cellules	83
3.8	Autoroute A10 entre La Folie Bessin et Palaiseau	83
3.9	Modèle	84
3.10	Densités simulées des principales cellules (régime de trafic fluide)	96
3.11	Débits des véhicules et des bus (régime de trafic fluide)	96
3.12	Nombre de véhicules et de bus (régime de trafic fluide)	96
3.13	Densités simulées des principales cellules (trafic semi-congestionné)	97
3.14	Flux des véhicules et des bus (trafic semi-congestionné)	97
3.15	Densités simulées des principales cellules (régime congestionné)	98
3.16	Débits de véhicules et de bus (régime congestionné)	98
3.17	Vitesses trafic congestionné	99
4.1	Modèles de BHNS	102
4.2	Projets BHNS en France et réseaux BHNS en Ile de France	103
4.3	Architecture de la commande prédictive	106
4.4	Arc de réseau urbain	108
4.5	BRT à une station	109
4.6	BRT à un carrefour à feux	110
4.7	Architecture complète de la stratégie de régulation	113
4.8	Réseau Corbeil/Sénart	114
4.9	Exemple de réseau (voirie banalisée)	114
4.10	Positions du BRT pour une durée de vert de 45s sur l'arc 13	116
4.11	Positions du BRT pour une durée de vert de 17s sur arc 13	116
4.12	Nombre de véhicules pour une durée de vert de 45s sur l'arc 13	116
4.13	Nombre de véhicules pour une durée de vert de 17s sur l'arc 13	116
4.14	Nombre de bus pour une durée de vert de 45s sur l'arc 13	116
4.15	Nombre de bus pour une durée de vert de 17s sur l'arc 13	116
4.16	Positions du BRT pour une durée de vert de 45s sur l'arc 11	117
4.17	Positions du BRT pour une durée de vert de 17s sur arc 11	117
4.18	Nombre de véhicules pour une durée de vert de 45s sur l'arc 11	117
4.19	Nombre de véhicules pour une durée de vert de 17s sur l'arc 11	117
4.20	Nombre de bus pour une durée de vert de 45s sur l'arc 11	117
4.21	Nombre de bus pour une durée de vert de 17s sur l'arc 11	117
4.22	Positions du BRT pour une durée de vert de 45s sur l'arc 7	118
4.23	Positions du BRT pour une durée de vert de 17s sur arc 7	118
4.24	Nombre de véhicules pour une durée de vert de 45s sur l'arc 7	118
4.25	Nombre de véhicules pour une durée de vert de 17s sur l'arc 7	118
4.26	Nombre de bus pour une durée de vert de 45s sur l'arc 7	118
4.27	Nombre de bus pour une durée de vert de 17s sur l'arc 7	118
4.28	Erreur relative nombre de VP sur le réseau	119
4.29	Erreur relative nombre de Bus sur le réseau	119

4.30	Stratégie 1 sur l'arc 13	120
4.31	Stratégie 2 sur arc 13	120
4.32	Stratégie 3 sur l'arc 13	120
4.33	Stratégie 4 sur l'arc 13	120
4.34	Erreur relative nombre de VP et de bus sur l'arc 13	120
4.35	Stratégie 1 sur l'arc 11	121
4.36	Stratégie 2 sur arc 11	121
4.37	Stratégie 3 sur l'arc 11	121
4.38	Stratégie 4 sur l'arc 11	121
4.39	Erreur relative nombre de VP et de bus sur l'arc 11	121
4.40	Stratégie 1 sur l'arc 7	122
4.41	Stratégie 2 sur arc 7	122
4.42	Stratégie 3 sur l'arc 7	122
4.43	Stratégie 4 sur l'arc 7	122
4.44	Erreur relative nombre de VP et de bus sur l'arc 7	122
4.45	Progression du BRT pour une durée de vert de 45s	127
4.46	Temps de parcours du BRT pour une durée de vert de 45s	127
4.47	Progression du BRT pour une durée de vert de 17s	127
4.48	Temps de parcours du BRT pour une durée de vert de 17s	127
5.1	Principe d'interfaçage du modèle hybride de Magne	132
5.2	Principe d'interfaçage du modèle hybride de Bourrel	133
5.3	Principe du schéma de couplage [MAMMAR [2006]]	134
5.4	Modèle hybride Macro-Micro-Macro [MOUTARI [2007]]	136
5.5	Principe du schéma de couplage fondé sur des systèmes multiagents	137
5.6	Fonction de flux (à gauche) et fonction vitesse (à droite) du modèle monophasé de Colombo	143
5.7	Schéma de couplage	143
5.8	propagation d'une congestion. Evolution de la densité dans le modèle macroscopique seul (à gauche) et hybride (à droite)	147
5.9	propagation d'une congestion. Evolution du débit dans le modèle macroscopique seul (à gauche) et hybride (à droite)	147
5.10	Evolution de la densité et du débit dans les cellules hybrides 21 et 22	148
5.11	Evolution des débits cumulés pour les modèles macroscopique et hybride en un point du réseau	149
5.12	remontée d'une congestion. Evolution de la densité dans le modèle macroscopique seul (à gauche) et hybride (à droite)	149
5.13	remontée d'une congestion. Evolution du débit dans le modèle macroscopique seul (à gauche) et hybride (à droite)	150
5.14	Trajectoires véhiculaires dans le modèle microscopique	150
5.15	Trajectoires véhiculaires dans le modèle hybride	151

Liste des tableaux

1.1	Différents diagrammes fondamentaux	20
4.1	Les taux de mouvements tournants	114
4.2	Flux de VP et de Bus par cycle	115
4.3	Les différentes consignes	119
4.4	Algorithme de passage de station	124
4.5	Algorithme de passage des carrefours à feux	126
4.6	Algorithme final	126
4.7	Positions des stations et des carrefours à feux sur le réseau	126
5.1	L'erreur quadratique des variables fondamentales	148
6.1	Valeurs des éléments de A	162
6.2	Valeurs des éléments de B	164

Notations

Acronymes

VP	Véhicules Particuliers
LWR	Lighthill-Whitham Richards
AR	Aw-Rascle
ARZ	Aw-Rascle Zhang
FIFO	First In First Out
LIFO	Last In First Out
CTM	Cell Transmission Model
BHNS	Bus de Haut Niveau de Service
BRT	Bus Rapid Transit
MPC	Model Predictive Control
IDCOM	Identification Commande
GSOM	Genetic Second Order Model
LPV	Linear Parameter Varying
KWM	Kinematic Wave Model
CFL	Courant-Friedrichs Lewy
BVT	Balanced Vehicular Traffic
IDM	Intelligent Driver Model
OVM	Optimal Velocity Model
SMA	Système Multi-Agent
SAEIV	Système d'Aide à l'Exploitation et à l'Information des Voyageurs
GHR	Gazis Herman Rothery
CARSIM-TSIS	Corridor Simulation Traffic-Traffic Software Integrated System
TUC	Traffic-responsive Urban Control
VISSIM	Verkher In Stadten-Simulation
AIMSUN/GETRAM	Advanced Interactive Microscopic Simulation for Urban/Nonurban Networks
PARAMICS	parallel Microscopic Simulations
NetPrior	Network Transit Priority

Introduction générale

Le contexte

La croissance accélérée de la population urbaine et l'extension des villes, l'intensification des échanges économiques ainsi que les préoccupations environnementales ont fait du trafic routier et de sa gestion un des enjeux majeurs du développement durable.

Le trafic routier englobe plusieurs facteurs, entre autres la géométrie des infrastructures routières, le comportement des conducteurs, la diversité des flux de véhicules, etc... Les situations auxquelles sont confrontés les exploitants des réseaux routiers dépendent du type de réseau dont ils ont la charge. En milieu urbain les carrefours à feux côtoient des voies rapides, et le trafic est très hétérogène. En milieu interurbain, le réseau est moins diversifié mais il faudrait tenir compte de certains éléments singuliers comme les rampes d'accès ou les péages. Cette complexité du trafic en a fait un domaine de recherche d'un intérêt croissant et ce depuis les premières études qui ont donné naissance au modèle LWR au milieu des années cinquante.

Les techniques de modélisation du trafic routier permettent aux exploitants des réseaux de transport, gestionnaires de voiries, opérateurs de réseaux urbains, de mieux gérer leurs infrastructures en optimisant les trafics qui les empruntent, en prévenant les congestions et en détectant rapidement les incidents ou accidents, pour les traiter dans les délais les plus réduits.

Afin de modéliser le trafic sur un réseau routier, deux approches, complémentaires l'une de l'autre sont nécessaires. La première est la modélisation de l'écoulement qui permet de décrire l'évolution des flux de trafic sur un tronçon de route et l'affectation qui décrit la façon dont les usagers choisissent leurs itinéraire sur un réseau.

Les modèles utilisés en trafic diffèrent les uns des autres selon :

- la nature de leurs variables qui peut être continue, discrète ou semi discrète,
- le type de modèle d'écoulement ; on en distingue trois : les modèles macroscopiques adaptés à la représentation de réseaux de grandes tailles, qui considèrent le trafic comme un "fluide" en mouvement, les modèles microscopiques représentatifs d'éléments plus ponctuels du réseau, qui mettent en évidence l'interaction entre les véhicules et les modèles hybrides qui combinent simultanément les deux modèles précédents,
- le domaine de l'application qui peut être, un réseau, un tronçon, une intersection,
- le mode de résolution qui peut être analytique et/ou numérique,
- le processus d'affectation qui peut être déterministe ou stochastique.

L'objet de ces travaux de thèse est d'apporter une contribution à cette amélioration de la modélisation des flux de trafic, en se concentrant dans un premier lieu sur la modélisation d'un trafic autoroutier constitué de deux classes de véhicules : des véhicules particuliers et des bus et dans un second lieu sur la modélisation d'un trafic urbain multimodal constitué de trois classes de véhicules : aux deux classes précédemment citées, est intégrée une nouvelle classe de bus à haut niveau de service BHNS, classe qui tend à se propager au milieu urbain et suburbain et

qui est perçue comme solution à de nombreux problèmes liés au trafic par les exploitants de la route.

Plan du mémoire

La démarche suivie au cours de ces travaux est basée dans les deux situations mentionnées auparavant, sur une construction pas à pas de la modélisation, de l'observation du problème à l'application possible du modèle construit. Ce mémoire reproduit ce cheminement par étapes et est organisé en 5 chapitres :

Le chapitre 1 est un état de l'art de la modélisation macroscopique et microscopique du trafic. Après un rappel de quelques concepts de base comme la définition des variables et les relations fondamentales qui les lient, nous passons en revue dans un premier temps les deux types de la modélisation macroscopique homogène, à savoir les modèles de premier ordre (modèle LWR) et les modèles de second ordre. Dans un second temps, une synthèse des différents modèles macroscopiques de trafic hétérogène est donnée. On s'intéresse ensuite à la modélisation microscopique, on présente le principe de cette modélisation et les différents modèles microscopiques existants.

le chapitre 2 passe en revue les modèles d'affectation ; le principe d'affectation et les formulations du problème d'affectation basées sur le principe de la condition d'équilibre. Puis, les systèmes de régulation du trafic, nous présentons les stratégies classiques cycliques et acycliques qui ont pour objectif la régulation du trafic des véhicules particuliers, celles qui sont concernées par le trafic des transports en commun ainsi que celles qui ont pour objectif la régulation simultanée des véhicules particuliers et des véhicules de transport en commun. Nous nous focalisons sur la régulation via les feux de signalisation.

Le chapitre 3 présente un modèle macroscopique de trafic hétérogène constitué de deux classes ; les véhicules particuliers et les bus. Ces deux types de véhicules se distinguent par la différence de leurs longueurs respectives et de leurs vitesses. Le modèle s'inspire du modèle de Logghe basé sur l'équilibre et une occupation de l'espace sur le tronçon routier. L'étude numérique du modèle se fait en adaptant le modèle de transmission cellulaire CTM de Daganzo. Un estimateur des densités et un autre des vitesses de ce trafic mixte sur un tronçon de route sont présentés. Des résultats d'observabilité, de controllabilité et de stabilité au sens de Lyapunov dans les différents régimes de ce trafic sont établis.

Le chapitre 4 est constitué de trois grandes parties. D'abord nous introduisons le concept de Bus de Haut Niveau de Service BHNS ou BRT, ensuite nous décrivons l'architecture de la stratégie de régulation de notre système de transport urbain trimodal (véhicules particuliers, bus et BRT), cette architecture s'appuie sur la commande des systèmes en boucle fermée et utilise la commande prédictive généralisée. Pour la mise en place de cette stratégie sur un réseau de carrefours ; nous commençons par décrire les deux modèles d'évolution du BRT proposés, le premier modèle est simple et original, il exprime l'évolution des positions du BRT dans le réseau de façon telle qu'on puisse avoir une représentation d'état linéaire du système de trafic trimodal avec comme commande les durées de phases de vert, le second modèle est "ponctuel", il est fondé sur les événements que rencontre le BRT sur le réseau, à savoir le passage d'une ligne de feux et l'arrêt à une station, il ne tient compte que des durées des phases. Dans un troisième temps, nous détaillons la stratégie et les résultats obtenus.

Dans le chapitre 5, nous commençons par une revue de la modélisation hybride du trafic. Nous focalisons sur les motivations des différents auteurs pour la modélisation hybride et les schémas de couplages qui permettent le passage entre les variables macroscopiques et mi-

croscopiques. Nous présentons ensuite un modèle hybride basé sur le couplage d'un modèle macroscopique générique de second ordre et d'un modèle microscopique en coordonnées Lagrangiennes. La validation de la bonne transmission de l'information à travers le schéma de couplage se fait par l'étude de deux types de phénomènes, la propagation d'une congestion dans le cas d'un trafic en aval plus dense que le trafic en amont, et la remontée d'une congestion dans le cas d'un trafic en amont plus dense que le trafic en aval.

En annexe, quelques travaux entamés, mais restant à développer sur le formalisme LPV (Linear Parameter Varying) adapté à un modèle macroscopique de second ordre d'un bi-flux de trafic routier.

En conclusion, la synthèse des principaux résultats obtenus au cours de ces travaux de thèse est présentée et les principales perspectives de recherche de ces derniers sont établies.

Publications avec comité de lecture

- S. Mammar, S. Smaili, S. Mammar and G. Weidmann : Hybrid model based on Generic Second-Order Model. TRB 90th Annual Meeting, 2011.
- S. Smaili, S. Mammar and S. Mammar : Cell transmission model and estimation schemes for mixed traffic. LOGISTIQUA 2011.

Conférences internationales avec comité de lecture

- S. Smaili, S. Mammar and S. Mammar : Mixed traffic estimation for on-ramp metering control. Dans 11th International conference on Sciences and Techniques of Automatic control and computer engineering STA'2010, Monastir, Tunisie 19-21 décembre 2010.
- S. Mammar, S. Smaili, S. Mammar and G. Weidmann : Hybrid model based on Generic Second-Order Model. TRB 90th Annual Meeting, 23-27 janvier 2011.
- S. Smaili, S. Mammar and S. Mammar : Cell transmission model and estimation schemes for mixed traffic. IEEE 1st International conference on Mobility Security and Logistics in Transport MSLT, Hammamet, Tunisie 31 mai - "3 juin 2011.

Article soumis

- S. Smaili, D. Ichalal, S. Mammar and S. Mammar : Model predictive control for an urban trimodal model. 9th IEEE International Conference on Networking Sensing and Control ICNSC12, 11-14 avril 2012, Beijing, Chine.

1

Modélisation du trafic

Sommaire

1.1	Introduction	15
1.2	Analyse de la modélisation macroscopique	16
1.2.1	L'approche continue	16
1.2.2	Modèles du premier ordre	18
1.2.3	Modèles d'ordre supérieur	29
1.3	Analyse de la modélisation macroscopique hétérogène	36
1.3.1	Intégration de l'hétérogénéité dans les modèles du premier ordre	36
1.3.2	Intégration de l'hétérogénéité dans les modèles d'ordre supérieur	41
1.4	Modélisation microscopique du trafic	42
1.4.1	variables des modèles microscopiques	43
1.4.2	Les modèles microscopiques	43
1.5	Conclusion	51

1.1 Introduction

Les premières études scientifiques sur l'écoulement du trafic routier remontent aux travaux de B.D. Greenshield [GREENSHIELD [1935]]. Depuis, la recherche dans le domaine du trafic routier n'a cessé d'attirer les scientifiques de tout bord, tant ses impacts sociaux, économiques et environnementaux sont considérables.

Les modèles de trafic répondent à ce besoin en traduisant l'application de la démarche scientifique aux problèmes posés par le transport. Ces modèles aident les gestionnaires de transport pour la prise de décision.

La description des phénomènes de trafic se fait principalement à travers trois types d'approches. La première approche est macroscopique réalisée par analogie avec la mécanique des fluides à travers trois variables fondamentales : le débit q (véhicule/h), la densité ρ (véhicule/km) et la vitesse v (km/h).

La seconde approche, dite microscopique, permet de mettre en évidence les phénomènes d'interaction entre les véhicules à travers la vitesse v , la position x et l'accélération γ ($km.h^{-2}$). Enfin, la troisième approche est l'approche hybride. Elle permet de combiner simultanément les approches macroscopique et microscopique. Le choix de l'une des représentations du trafic est fortement lié à la taille du réseau à simuler.

Les modèles macroscopiques sont adaptés à la représentation de réseaux de grandes tailles tandis que les modèles microscopiques sont mieux adaptés à la description d'éléments plus ponctuels du réseau. Ce dernier ne peut pas être adapté à l'étude de grande taille compte tenu du volume important de calculs qu'il engendrerait. Les modèles mixtes, souvent appelés modèles hybrides qui seront présentés dans un autre chapitre, permettent de coupler simultanément les deux types de représentation du trafic.

1.2 Analyse de la modélisation macroscopique

D'une manière générale, les modèles macroscopiques se fondent sur l'approche dite continue, qui consiste à traiter les véhicules comme un "fluide" assez particulier. ([MAMMAR [2006]], [MAMMAR [2007]])

1.2.1 L'approche continue

On assimile une route à une droite infinie et les véhicules à des points matériels. On définit les variables principales :

Définition du débit

On définit un intervalle de temps Δt et le débit (ou le flux) $q(x, t)$ est le nombre de véhicules $N(x, t - \frac{\Delta t}{2}, t + \frac{\Delta t}{2})$ observés à un point d'abscisse x dans l'intervalle Δt :

$$q(x, t) = \frac{N(x, t - \frac{\Delta t}{2}, t + \frac{\Delta t}{2})}{\Delta t} \quad (1.1)$$

La valeur de l'intervalle dépend du type de trafic considéré afin d'assurer une certaine stabilité du débit ainsi défini.

Définition de la densité

On définit un intervalle d'espace Δx et la densité (ou la concentration), notée $\rho(x, t)$ (ou $k(x, t)$), est le nombre de véhicules $N(t, x - \frac{\Delta x}{2}, x + \frac{\Delta x}{2})$ présents à l'instant t dans l'intervalle Δx :

$$\rho(x, t) = \frac{N(t, x - \frac{\Delta x}{2}, x + \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} \quad (1.2)$$

Définition de la vitesse du flux

On considère le cas d'un écoulement uniforme, c'est à dire tous les véhicules sont caractérisés par une vitesse identique (cas d'un fluide isovélocique), la vitesse moyenne du flux q est égale à v .

Dans le cas d'une portion de route de longueur Δx , le nombre de véhicules présents à tout instant sur cette section est égal à $N = \rho \Delta x$. Comme la vitesse du flux et de tous les véhicules est égale à v , il faut un temps $\Delta t = \frac{\Delta x}{v}$ pour que ces N véhicules quittent la zone considérée. Le débit sortant de cette zone est donc égal à

$$q = \frac{N}{\Delta t} = \rho \Delta x \frac{v}{\Delta x} = \rho v \quad (1.3)$$

Dans le cas général, on définira la vitesse du flux notée $v(x, t)$ en un point d'abscisse x et à l'instant t par :

$$v(x, t) = \frac{q(x, t)}{\rho(x, t)} \quad (1.4)$$

L'approche continue

On considère le tronçon de route matérialisé par l'intervalle fini $I = [x_1, x_2]$ négligeable par rapport à la longueur de la route. Par ailleurs, on suppose qu'il n'y'a aucune entrée ou sortie dans l'intervalle en dehors des extrémités (à gauche et à droite) et on suppose que les véhicules sont tous de même type et se déplacent dans le même sens, celui des x croissants (Figure 1). [MOUTARI [2007]]

Le nombre de véhicules à l'instant t dans I est alors

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx \quad (1.5)$$

Le flux est $\rho(x, t)v(x, t)$. Le nombre de véhicules dans l'intervalle I varie dans le temps selon que les véhicules entrent et /ou sortent de l'intervalle. C'est à dire :

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx = \rho(x_2, t)v(x_2, t) - \rho(x_1, t)v(x_1, t) \quad (1.6)$$

En intégrant cette dernière équation par rapport au temps et sous l'hypothèse que ρ et v sont des fonctions (a priori) régulières, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \partial_t \rho(x, t) dx dt &= \int_{t_1}^{t_2} (\rho(x_2, t)v(x_2, t) - \rho(x_1, t)v(x_1, t)) dt \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \partial_x (\rho(x, t)v(x, t)) dx dt \end{aligned} \quad (1.7)$$

Comme $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $t_1, t_2 > 0$ sont quelconques, on en déduit

$$\partial_t \rho + \partial_x (\rho v) = 0 \quad x \in \mathbf{R}, t > 0 \quad (1.8)$$

A cette équation, on doit associer la condition initiale à $t = 0$ qui est :

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x), \quad x \in \mathbf{R}, t > 0 \quad (1.9)$$

Cette équation est appelée l'équation de la **conservation de la masse** ou l'équation de la **continuité** (Figure 1).

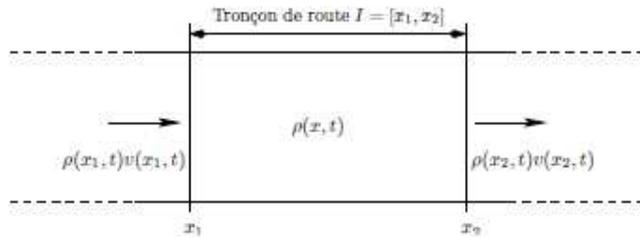


Figure 1.1 – Dérivation de la loi de conservation

On distingue deux grandes classes de modèles macroscopiques :

- soit ce sont des états d'équilibre qui sont représentés, on parlera alors de modèle du premier ordre,
- soit ce sont des états hors équilibre et les processus de convergence vers l'équilibre qui sont pris en compte, on parlera alors de modèle du second ordre.

1.2.2 Modèles du premier ordre

Le premier modèle macroscopique a été développé de manière simultanée par Lighthill et Whitham dans [LIGHTHILL et WHITHAM [1955]] et par Richards dans [RICHARDS [1956]]. Ce modèle ; connu sous plusieurs appellations, entre autres le modèle LWR (Lighthill-Whitham-Richards), le modèle hydrodynamique ou le modèle d'onde cinétique (KWM : Kinematic Wave Model) est fondé sur l'hypothèse que le trafic est toujours en équilibre (la vitesse n'est fonction que de la concentration), qu'il évolue d'un état d'équilibre à un autre et suppose l'existence d'une relation entre deux des trois variables. Cette relation est de nature phénoménologique :

$$v(x, t) = V_q(\rho(x, t)) \quad (1.10)$$

De ce fait, l'équation de conservation en régime d'équilibre s'écrit alors :

$$\partial_t \rho(x, t) + \partial_x Q_q(\rho(x, t)) = 0 \quad (1.11)$$

avec $Q_q(\rho(x, t)) = \rho(x, t)V_q(\rho(x, t))$. L'équation précédente correspond au diagramme fondamental. Elle caractérise le réseau sur lequel roulent les véhicules. Les principales caractéristiques du diagramme fondamental sont basées sur des observations logiques :

- quand la concentration est proche de 0, les interactions entre véhicules sont très limitées, donc ces véhicules roulent à leur vitesse maximale désirée notée V_l ,

- quand la concentration augmente, les interactions entre les véhicules sont de plus en plus fortes, donc leur vitesse diminue ;
- la concentration est bornée par une certaine valeur notée ρ_{\max} (cette borne correspond au cas limite d'une route sur laquelle tous les véhicules sont arrêtés les uns derrière les autres). Dans le cas d'un segment de route caractérisé par n voies avec L la longueur électrique (longueur d'un véhicule + longueur de la boucle électromagnétique) moyenne d'un véhicule, on a :

$$\rho_{\max} = \frac{n}{L} \quad (1.12)$$

- Le diagramme fondamental est basé sur le calibrage d'une relation $V_q = f(\rho)$.

En utilisant des mesures expérimentales, Greenshields [GREENSHIELD [1935]], suppose une décroissance linéaire de la vitesse et de la concentration :

$$v = v_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}\right) \quad (1.13)$$

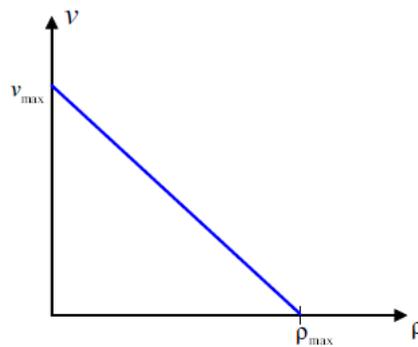


Figure 1.2 – Relation vitesse/densité selon Greenshields

D'où découle un diagramme en débit de forme parabolique qui fait apparaître deux régimes d'écoulement, la limite entre les deux correspondant à un état dit critique dont la concentration est notée ρ_c et la vitesse correspondante est notée V_c . Le premier est le régime fluide pour lequel une augmentation de la concentration se traduit par une augmentation du débit. Le second est le régime congestionné qui se traduit par une diminution du débit quand la concentration augmente.

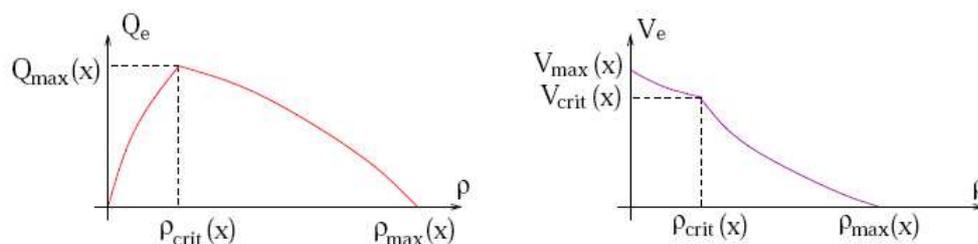


Figure 1.3 – Relation d'équilibre d'après Greenshields

Dans le but de se rapprocher le plus possible des mesures expérimentales, d'autres formes de diagrammes ont été proposées dans la littérature : triangulaire, deux demi-parabole (Figure 4).

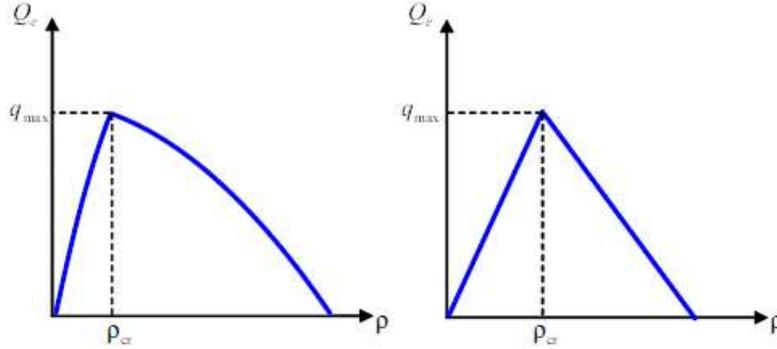


Figure 1.4 – Autres formes de relations d'équilibre

Une formule généralisée pour décrire la relation vitesse-densité est :

$$V_q(\rho) = V_{\max} \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_{\max}} \right)^r \right]^p \quad (1.14)$$

où $p \geq 1$ et $r > 0$ sont des paramètres à valeurs réelles.

Le tableau ci-dessous résume les diagrammes fondamentaux proposés dans la littérature suivant les valeurs des paramètres l et m (dans l'équation du modèle microscopique GHR, rappelé plus loin) [MAMMAR [2006]]

Auteur	Valeurs de l et m	Diagramme fondamental
Chandler	$l = 0, m = 0$	$Q_q(\rho) = q_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right)$
Greenberg	$(l = 1, m = 0)$	$Q_q(\rho) = V_c \rho \ln \left(\frac{\rho}{\rho_{\max}} \right)$
Drew	$(l = \frac{3}{2}, m = 0)$	$Q_q(\rho) = V_{\max} \rho \left(1 - \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{\max}}} \right)$
Greenshields	$(l = 2, m = 0)$	$Q_q(\rho) = V_{\max} \rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right)$
Edie	$(l = 2, m = 1)$	$Q_q(\rho) = V_{\max} \rho \exp \left(-\frac{\rho}{\rho_c} \right)$
Drake	$(l = 3, m = 1)$	$Q_q(\rho) = V_{\max} \rho \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^2 \right)$

Tableau 1.1 – Différents diagrammes fondamentaux

Sous l'hypothèse de Greenshield [GREENSHIELD [1935]], le modèle LWR s'écrit :

$$\partial_t \rho(x, t) + \partial_x \left(\rho V_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right) \right) = 0 \quad (1.15)$$

Soit un temps t_m et une position x_m tels que $V_{\max} = \frac{x_m}{t_m}$. En introduisant de nouvelles coordonnées $x' = \frac{x}{x_m}$ et $t' = \frac{t}{t_m}$ et en posant $u = 1 - \frac{2\rho}{\rho_{\max}}$ dans l'équation précédente, on obtient alors l'équation de Burgers [BURGERS [1948]]

$$\partial_{t'} u + \partial_{x'} \frac{u^2}{2} = 0 \quad (1.16)$$

qui est une équation non linéaire car ses courbes caractéristiques peuvent se rencontrer en temps fini. De ce fait la résolution d'une telle équation peut produire des solutions discontinues.

Analyse du modèle LWR

Le modèle LWR ou plus précisément ici l'équation de Burgers est de type

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0, \quad x \in \mathbf{R}, t > 0 \quad (1.17)$$

où $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, et une condition initiale :

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbf{R} \quad (1.18)$$

Ce problème, appelé aussi problème de Cauchy se réécrit sous la forme dite non conservative suivante :

$$\partial_t u + f'(u) \partial_x u = 0, \quad x \in \mathbf{R}, t > 0 \quad (1.19)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbf{R} \quad (1.20)$$

Résolution analytique

Pour résoudre ce genre de problèmes, on utilise la méthode dite des **caractéristiques**. En effet, l'évolution de u le long de toute courbe $x(t)$ telle que

$$x'(t) = f'(u(x(t), t)) \quad t > 0 \quad (1.21)$$

$$x(0) = x_0 \quad (1.22)$$

s'écrit

$$\frac{d}{dt} u(x(t), t) = \partial_t u(x(t), t) + x'(t) \partial_x u(x(t), t) = 0, \quad t > 0 \quad (1.23)$$

La solution u considérée comme constante le long des courbes caractéristiques, c'est à dire : $u(x(t), t) = u(x(0), 0) = u_0(x_0)$ pour tout $t > 0$. De ce fait, si $u_0(x_0)$ est constante, les courbes caractéristiques sont des droites, solutions de l'équation des caractéristiques

$$x(t) = x_0 + t f'(u_0(x_0)) \quad (1.24)$$

Dans la forme simplifiée du modèle LWR, c'est à dire, le cas où $f(u) = \frac{u^2}{2}$ et avec comme données initiales

$$u_0(x_0) = \begin{cases} 1 & x_0 < 0 \\ 1 - x_0 & 0 \leq x_0 < 1 \\ 0 & x_0 \geq 1 \end{cases} \quad (1.25)$$

Les caractéristiques sont alors les droites solutions de

$$x(t) = \begin{cases} x_0 + t & x_0 < 0 \\ x_0 + (1 - x_0)t & 0 \leq x_0 < 1 \\ x_0 & x_0 \geq 1 \end{cases} \quad (1.26)$$

illustrées par la Figure 5

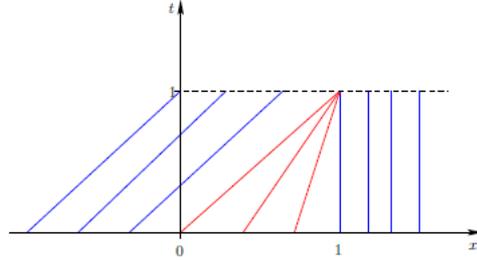


Figure 1.5 – Droites caractéristique des équations 16-25

Pour prendre en charge les discontinuités, on définit une notion de solution faible.

Définition

la fonction $u(x, t)$ est dite **solution faible** du problème de Cauchy , ssi :

$$\forall \phi \in C_0^1(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+), \int_0^\infty \int_{\mathbf{R}} (u \partial_t \phi + f(u) \partial_x \phi) dx dt = - \int_{\mathbf{R}} u_0(x) \phi(x, 0) dx \quad (1.27)$$

On cherche à déterminer toutes les solutions auto-similaires du problème de Cauchy. Pour cela, on étudie le problème de Riemann, qui est notamment à la base du schéma de Godunov (à présenter après).

Le problème de Riemann

On appelle problème de Riemann, le problème de Cauchy, dans le cas particulier où la donnée initiale est du type

$$u_0(x) = \begin{cases} u^- = \rho^g & x < 0 \\ u^+ = \rho^d & x \geq 0 \end{cases} \quad (1.28)$$

avec $u^+, u^- \in \mathbf{R}$

Si $u(x, t)$ est solution des équations (1.19)-(1.28) alors u est auto-similaire : $u(ax, at)$ est aussi solution, $\forall a > 0$. De ce fait u peut se réécrire sous la forme $u(x, t) = u(\xi)$ avec $\xi = \frac{x}{t}$. Alors, l'équation se réécrit

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = -\frac{x}{t^2} u'(\xi) + \frac{1}{t} u'(\xi) f'(u(\xi)) = \frac{1}{t} u'(\xi) (f'(u(\xi)) - \xi) = 0 \quad (1.29)$$

De ce fait,

- 1- soit $u(\xi)$ est une constante,
- 2- soit $u(\xi) = (f')^{-1}(\xi)$, lorsque $(f')^{-1}$ existe,
- 3- soit u est discontinue lelong de $\xi = \frac{x}{t}$.

D'autre part, la forme de la solution du problème de Riemann dépend des conditions initiales et on distingue les trois cas suivants :

Cas 1. $u^+ = u^-$

Dans ce cas, la solution est constante car $u(x, t) = u^+ = u^-, \forall x \in \mathbf{R}, t > 0$.

Cas 2. $u^+ > u^-$

Ce cas correspond à $\rho^d > \rho^g$; c'est à dire qu'il y'a plus de véhicules à droite ($x > 0$) qu'à gauche ($x < 0$). Comme les véhicules se déplacent de la gauche vers la droite, les véhicules à gauche vont rattraper ceux à droite ; ce qui induit une discontinuité de la densité le long d'une certaine droite d'équation $x = st$, où la constante s est appelée la vitesse de choc ou la vitesse à laquelle la discontinuité se propage ; Dans ce cas, l'unique solution faible du problème de Riemann est

$$u(x, t) = \begin{cases} u^- & x < st \\ u^+ & x \geq st \end{cases} \quad (1.30)$$

où

$$s = \frac{f(u^-) - f(u^+)}{u^- - u^+} \quad (1.31)$$

Cette relation est connue sous le nom de la condition de **saut de Rankine-Hugoniot**.

Cas 3. $u^- > u^+$

Dans ce cas, le problème de Riemann admet une infinité de solutions, entre autres la solution précédente qu'on appellera u_1 et

$$u_2(x, t) = \begin{cases} u^- & x < f'(u^-)t \\ (f')^{-1}\left(\frac{x}{t}\right) & f'(u^-)t \leq x \leq f'(u^+)t \\ u^+ & x > f'(u^+)t \end{cases} \quad (1.32)$$

Les solutions d'un problème de Riemann ne sont pas toutes admissibles. Cependant, il existe un critère mathématique permettant de sélectionner la solution admissible, c'est à dire celle ayant un sens physique. Il s'agit de la **condition d'entropie**. Les solutions qui satisfassent la condition d'entropie sont alors appelées **solutions entropiques**.

Les solutions entropiques

Il existe plusieurs façons de formuler la condition d'entropie, parmi elles :

Définition 1 : Soit $u(x, t)$ une solution faible du problème de Riemann . La solution u satisfait la **condition d'entropie d'Oleinik** si le long de chaque discontinuité de vitesse de propagation s , on a

$$\frac{f(u) - f(u^-)}{u - u^-} \geq s \geq \frac{f(u) - f(u^+)}{u - u^+} \quad (1.33)$$

Une autre façon de formuler la condition d'entropie est d'introduire la notion d'**entropie** (mathématique).

Définition 2 : On appelle une fonction $\eta \in C^2(\mathbf{R})$ **entropie** et $\psi \in C^1(\mathbf{R})$ le **flux d'entropie** associé ssi pour toute solution u régulière, on a

$$\partial_t \eta(u) + \partial_x \psi(u) = 0, x \in \mathbf{R}, t > 0 \quad (1.34)$$

Les solutions du problème de Riemann consistent en des ondes simples, résumées ci dessous

Les ondes élémentaires

Supposons que le flux $f \in C^2(\mathbf{R})$ et $f'' > 0$ dans \mathbf{R} . Alors,
- lorsque $u^- < u^+$, on a

$$u(x,t) = \begin{cases} u^- & x < st \\ u^+ & x \geq st \end{cases} \quad (1.35)$$

avec $s = \frac{f(u^-) - f(u^+)}{u^- - u^+}$, qui est l'unique solution faible entropique du problème de Riemann. Cette solution s'appelle une **onde de choc** (Figure 6).

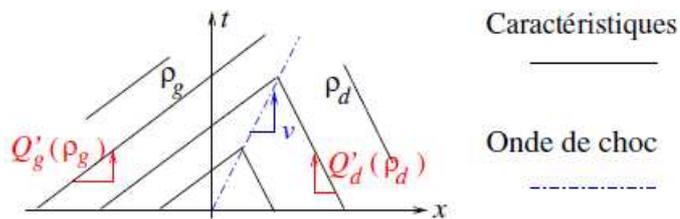


Figure 1.6 – Onde de choc

- lorsque $u^+ < u^-$, on a

$$u_2(x,t) = \begin{cases} u^- & x < f'(u^-)t \\ (f')^{-1}\left(\frac{x}{t}\right) & f'(u^-)t \leq x \leq f'(u^+)t \\ u^+ & x > f'(u^+)t \end{cases} \quad (1.36)$$

qui est l'unique solution faible entropique du problème de Riemann. On appelle cette solution une **onde de raréfaction** (Figure 7).

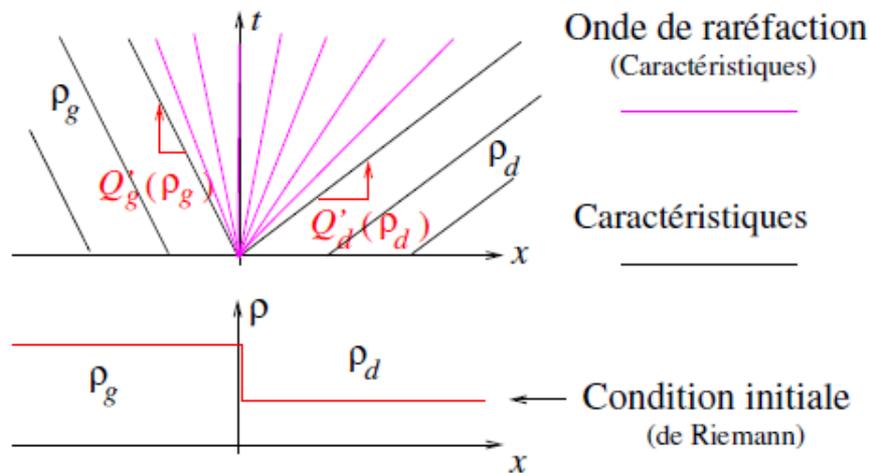


Figure 1.7 – Onde de raréfaction (éventail)

Dans le domaine du trafic, le critère d'entropie se traduit par la sélection des solutions qui maximisent le débit. Ces solutions entropiques sont dotées des propriétés suivantes :

- Elles sont la limite lorsque la viscosité tend vers 0.
- Il y'a existence, unicité et dépendance continue vis-à-vis des conditions initiales des solutions.
- Les seules ondes de choc admissibles sont celles pour lesquelles la concentration amont est inférieure à la concentration aval (la vitesse amont supérieure à la vitesse aval) : ondes de décélération.
- Le débit est maximisé localement. Le débit en tout point apparait comme le minimum de l'offre en aval et de la demande en amont de ce point. [LEBACQUE [1996]]

Au point de discontinuité, les solutions du problème sont fournies par la résolution du problème de Riemann.

Les systèmes de lois de conservation

D'une manière générale, les modèles macroscopiques du trafic, sont basés sur les systèmes et les lois de conservation, c'est à dire des systèmes du type :

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0, x \in \mathbf{R}, t > 0$$

auxquels on ajoute une condition initiale

$$u_0(x, 0) = u_0(x), x \in \mathbf{R}$$

avec $u = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ le vecteur des quantités conservées et les composantes de $f = (f_1, f_2, \dots, f_p)$ représentant les débits ou les flux.

Les solutions régulières de ce système sont aussi solutions du système quasi-linéaire équivalent suivant :

$$\partial_t u + A(u) \partial_x u = 0 \tag{1.37}$$

où $A(u) = \nabla f(u) = (\frac{\partial f_i(u)}{\partial u_j})_{1 \leq i, j \leq p}$ est la matrice jacobienne avec ∇ le gradient de f par rapport à u .

- Le système 1.37 est dit **strictement hyperbolique** si la matrice $A(u)$ admet p valeurs propres réelles distinctes

$$\lambda_1(u) < \lambda_2(u) < \dots < \lambda_p(u) \quad (1.38)$$

- Soient r_1, r_2, \dots, r_p les vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1(u), \lambda_2(u), \dots, \lambda_p(u)$ de $A(u)$. On appelle **courbe intégrale** du i ème champ caractéristique, toute courbe dont la tangente en u a la même direction que le vecteur $r_i(u)$, pour tout u .
- Le i ème champ caractéristique est dit **linéairement dégénéré** si $\nabla \lambda_i(u) \cdot r_i(u) = 0$ (ce qui implique que $\lambda_i(u)$ est constant le long de la courbe intégrale du champ i)
- Le i ème champ caractéristique est dit **vraiment non linéaire** si $\nabla \lambda_i(u) \cdot r_i(u) \neq 0$ (ce qui implique que $\lambda_i(u)$ est strictement monotone le long de la courbe intégrale du champ i)
- Un i ème invariant de Riemann au sens de Lax, est une fonction $h_i(u)$ telle que : $\nabla h_i(u) \cdot r_i(u) = 0$.

Selon que le champ caractéristique est linéairement dégénéré ou vraiment non-linéaire, on distingue trois familles d'ondes élémentaires : les ondes de détente ou ondes de raréfaction, les ondes de choc et les discontinuités de contact.

Les ondes de détente ou de raréfaction

Ces ondes apparaissent pour le champ caractéristique i lorsque celui ci est vraiment non linéaire. Pour une onde de raréfaction, la solution est de la forme

$$u(x, t) = \begin{cases} u^- & x \leq \xi_1 t \\ g(\frac{x}{t}) & \xi_1 t < x < \xi_2 t \\ u^+ & x \geq \xi_2 t \end{cases} \quad (1.39)$$

où u^- et u^+ sont des états constants et g une fonction continue avec $g(\xi_1) = u^-$, $g(\xi_2) = u^+$ et d'après [LEVEQUE [1992]]

$$g'(\xi) = \frac{r_i(g(\xi))}{\nabla \lambda_i(g(\xi)) \cdot r_i(g(\xi))} \quad \lambda_i(u^-) \leq \xi \leq \lambda_i(u^+)$$

Les ondes de choc

Comme les ondes de raréfaction, ces ondes ne concernent que les champs vraiment non-linéaires.

Pour deux données initiales constantes u^- et u^+ . On dit qu'une onde de choc entropique pour le champ caractéristique i est **admissible au sens de Lax** si sa vitesse s vérifie

$$\lambda_{i-1}(u^-) < s < \lambda_i(u^-) < \lambda_i(u^+) < s < \lambda_{i+1}(u^+)$$

Les discontinuités de contact

Lorsque le i ème champ caractéristique est linéairement dégénéré, on a une discontinuité linéaire qui se propage à une vitesse égale à la vitesse caractéristique λ_i des deux côtés : on parle alors d'une discontinuité de contact de vitesse s telle que

$$\lambda_i(u^-) = s = \lambda_i(u^+)$$

Solutions du problème de Riemann

Supposons que $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, le i ème champ caractéristique est soit vraiment non-linéaire, soit linéairement dégénéré. Alors $\forall u^-$, il existe un voisinage $V(u^-)$ de u^- tel que si $u^+ \in V(u^-)$, le problème de Riemann associé au système précédent admet une solution faible (unique) qui consiste en au plus $(p + 1)$ états constants séparés par des ondes de raréfaction, des ondes de chocs ou des discontinuités de contact.

Dans le cas de scénarios de trafic complexes, l'évaluation des solutions exactes du modèle LWR reste très difficile. Par conséquent, l'approche de résolution par des méthodes numériques est meilleure.

Résolution numérique par discrétisation spatio-temporelle

La résolution numérique la plus classique consiste en une discrétisation spatio-temporelle (pas de temps Δt , pas d'espace Δx) de l'écoulement. Le schéma numérique le plus utilisé est le **schéma de Godunov** [GODUNOV [1959]] (Figure 8), [KRONER [1997]], il est reconnu comme le schéma le plus efficace pour l'écoulement du trafic routier [ZHANG [1998]], notamment parce que c'est un schéma numérique upwind, c'est à dire qui tient compte du sens de la propagation potentiellement à la fois vers l'aval et vers l'amont des caractéristiques du trafic.

L'espace (la route) est discrétisé en cellules de longueur Δx , et le but est de calculer l'état du trafic à chaque pas de temps Δt . On suppose que la concentration à l'intérieur de chaque cellule i est homogène et que le débit est constant durant chaque pas de temps. A l'instant t , la densité de la cellule i est supposée connue. Il consiste à calculer la concentration pour un pas de temps, puis à faire la moyenne des concentrations sur chaque cellule à l'instant $t + \Delta T$.

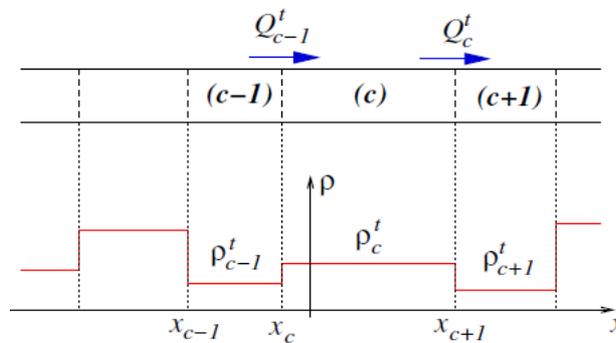


Figure 1.8 – Schéma de Godunov

Ce schéma est basé sur la résolution analytique effective de mini-problèmes de Riemann renouvelés à chaque pas de temps sur les frontières des tronçons constitués par le découpage spatial. Il assure la convergence de la solution numérique vers la solution analytique, à condition que la discrétisation spatio-temporelle réalisée vérifie la condition dite de **Courant-Friedrichs-Lewy CFL**.

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \leq V_{\max}$$

où V_{\max} est la vitesse maximale de propagation de l'information.

Par ailleurs, [DAGANZO [1995]] et [LEBACQUE [1996]] ont montré indépendamment que le calcul des débits aux frontières de chaque cellule, durant un pas de temps, permet de calculer la moyenne des concentrations dans chaque cellule.

L'avantage de ce type de calcul est la simplicité d'évaluation de la solution exacte en débit et en sortie de chaque cellule comparée à la solution exacte en concentration. Lebacque a introduit deux fonctions : une première fonction qui représente **l'offre** (nombre maximum de véhicules qui peuvent entrer dans une cellule en un pas de temps) que l'on note Σ et une seconde fonction représentant **la demande** (nombre maximum de véhicules qui souhaitent sortir d'une cellule en un pas de temps), notée Δ

$$\Sigma(\rho) = \begin{cases} Q_{\max} & \text{si } \rho \leq \rho_{cr} \\ Q_e(\rho) & \text{si } \rho \geq \rho_{cr} \end{cases}$$

$$\Delta(\rho) = \begin{cases} Q_e(\rho) & \text{si } \rho \leq \rho_{cr} \\ Q_{\max} & \text{si } \rho \geq \rho_{cr} \end{cases}$$

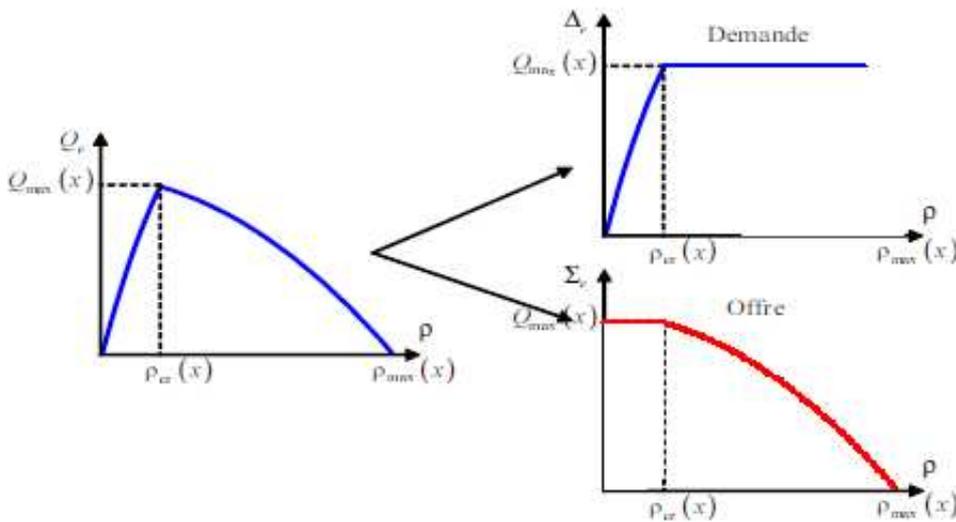


Figure 1.9 – Offre et demande d'équilibre

Le schéma de Godunov est du premier ordre (approximation de la densité par des fonctions constantes par morceaux). Tout schéma conservatif doit satisfaire l'équation de conservation suivante :

$$\rho_i^{t+1} = \rho_i^t + \frac{\Delta t}{\Delta x} (q_{i-1}^t - q_i^t)$$

Le caractère spécifique du schéma de Godunov réside dans le mode de calcul des flux q_i^t . Celui-ci correspond à la solution entropique exacte du débit sortant de la cellule i pendant l'intervalle $[t\Delta t, (t+1)\Delta t]$ en considérant la densité uniforme dans les cellules i et $(i+1)$ à l'instant $t\Delta t$. On peut montrer que :

$$q_i^t = \min [\Sigma_e(\rho_{i+1}^t, i+1), \Delta_e(\rho_{i+1}^t, i)]$$

Les fonctions offre et demande de deux cellules consécutives traduisent les propriétés physiques ou comportementales de chacune d'elles (capacité de stockage, débit maximum, vitesse désirée et la vitesse critique).

D'autres schémas ont été proposés, comme les schémas WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory), [ZHANG [2003]].

Une autre méthode numérique basée sur une résolution non entropique du modèle LWR en remplaçant, dans le cas d'un profil décroissant de densités, les éventails de caractéristiques par une série de chocs non-entropiques a été proposé par Henn dans [HENN [2003]] et les schémas de suivi d'ondes (Wave-Tracking), [HENN [2005]] qui reposent sur des solutions analytiques obtenues en approximant le diagramme fondamental par une fonction linéaire par morceaux.

Les modèles du premier ordre considèrent que la vitesse est à l'équilibre par rapport à la densité à chaque instant. Pour décrire le trafic de façon plus réaliste, plusieurs chercheurs ont remplacé l'équation d'équilibre par une relation permettant à la vitesse v d'être hors équilibre, donnant naissance ainsi, aux modèles dits "d'ordre supérieur".

1.2.3 Modèles d'ordre supérieur

D'une manière générale, les modèles du second ordre expriment l'équation de vitesse sous la forme suivante :

$$\gamma = \dot{v} = \partial_t v + v \partial_x v = \frac{1}{\tau} (V_e(\rho) - v) - \Xi \quad (1.40)$$

où Ξ désigne le comportement individuel des véhicules. Le choix de l'expression du paramètre Ξ permet essentiellement de distinguer les différents modèles proposés dans la littérature. La particularité des modèles du second ordre, est qu'ils sont obtenus par intégration d'une loi de poursuite décrivant le comportement individuel des véhicules.

On distingue principalement deux grandes familles de modèles du second ordre : les modèles isotropes et les modèles anisotropes. [MAMMAR [2006]]

Modèles isotropes

Le premier modèle de ce type a été proposé par Payne [PAYNE [1971]], il s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x (\rho v) = 0 \\ \partial_t v + v \partial_x v = \frac{1}{\tau} (V_e(\rho) - v) + \frac{1}{2\tau\rho} V_e'(\rho) \partial_x \rho \end{cases} \quad (1.41)$$

Ce modèle a reçu de nombreuses applications dans le domaine de la modélisation du trafic sur autoroute, notamment pour la mise en place des stratégies de contrôle d'accès [PAPAGEORGIOU *et al.* [1990]]. Néanmoins, il s'est avéré que ce modèle peut fournir des solutions non physiques ($v < 0, q < 0$).

Dans le célèbre article de Daganzo [DAGANZO [1995]] intitulé "**Requiem for second-order fluid approximations of traffic flow**", on retrouve les différentes critiques à l'encontre du modèle de Payne et ses variantes, ces critiques sont fondées sur les remarques suivantes (Figure 10) :

- L'ordre de grandeur des paramètres du modèle n'est pas réaliste : le temps de réaction est de l'ordre de grandeur de 30 secondes et peut atteindre dans certaines situations la minute.

- Le non-respect des contraintes de capacité et de vitesse, conduit à l'apparition de phénomènes que l'on appelle "wrong-way travel". Ce qui se traduit par l'apparition de vitesses négatives et donc de débits également négatifs.

- Le modèle de Payne ne prend pas en compte le caractère anisotrope du trafic, c'est à dire, les véhicules ne réagissent qu'à des stimulus provenant de l'aval. Or, le modèle inclut la propagation d'ondes à une vitesse supérieure à la vitesse du flux. Cette considération va conduire à une réaction des véhicules à des stimulus provenant de l'amont.

En revanche, une de ses propriétés remarquables est sa convergence vers le modèle du premier ordre LWR quand les paramètres ν et τ tendent vers zéro (avec $\nu = \frac{1}{2}V_e'(\rho)$).

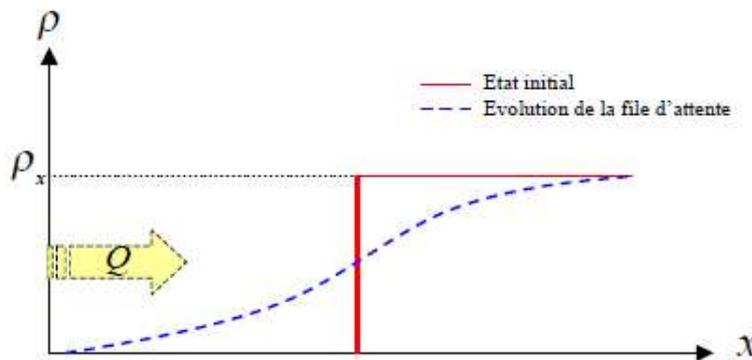


Figure 1.10 – D'après Daganzo : Evolution d'une file d'attente dans le cas du modèle de Payne

Afin de prendre en compte le caractère anisotrope du trafic, d'autres modèles sont proposés. Il s'agit des modèles de Ross [ROSS [1988]], DelCastillo [DEL-CASTILLO [1996]] et de Zhang [ZHANG [1998]]. [MAMMAR [2006]]

Modèle de Ross

Les équations du modèle de Ross sont données par :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = S \\ \partial_t v + v \partial_x v = \frac{1}{T}(F - v) \end{cases} \quad (1.42)$$

Les solutions analytiques de ce modèle sont calculables, mais ce modèle est critiqué concernant la non-unicité des solutions et le phénomène de propagation des perturbations. [NEWELL

[1998]]

Modèle de Del Castillo

Il s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0 \\ \partial_t v + v \partial_x v = \frac{1}{\tau} (V_e(\rho) - v) - \rho (V_e'(\rho))^2 \exp 2\left(\frac{V_e(\rho) - v}{a}\right) \partial_x \rho \end{cases} \quad (1.43)$$

Comparé au modèle de Payne, on remarque que le modèle de Del Castillo présente l'avantage de converger vers le modèle LWR quand le temps de réaction τ vers 0

. Modèle Zhang

Afin d'améliorer la description macroscopique du trafic et de remédier aux inconvénients du modèle de Payne. Zhang propose un modèle macroscopique dérivé d'un modèle microscopique. Cette dérivation est fondée sur des évidences empiriques du comportement du flux ainsi que sur des hypothèses du comportement d'un conducteur face à un stimulus. On considère la loi de poursuite :

$$\frac{dx_{n+1}(t+T)}{dt} = V_e(\rho(x_{n+1}) + \Delta, t) \quad (1.44)$$

Où T représente le temps de relaxation. Pour identifier la trajectoire d'un flux de véhicules, deux repères peuvent être utilisés. Un repère Eulérien dont l'origine est située en un point fixe de l'espace (x, y) , ou bien un repère Lagrangien mobile qui se déplace avec le flux de véhicules. Cependant, il existe une relation entre ces deux types de représentations. Cette relation permet la transition d'une représentation à l'autre. (Figure 11) [MAMMAR [2006]]

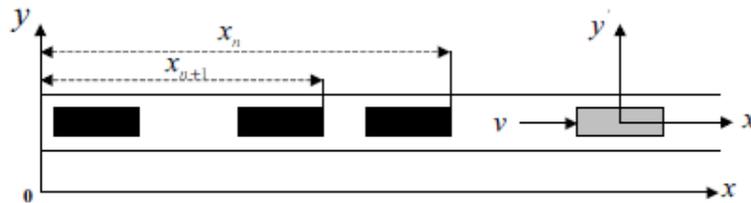


Figure 1.11 – Trajectoires de véhicules en coordonnées Eulériennes et Lagrangiennes, [ZHANG [1998]]

Après arrangement, on a l'équation suivante :

$$\frac{dv(x, t)}{dt} = -\frac{1}{T} (v(x, t) - V_e(\rho(x, t))) + \frac{\Delta}{T} V_e'(\rho(x, t)) \partial_x \rho(x, t)$$

La variation de la concentration en aval du véhicule conduit à une accélération ou à une décélération. La sensibilité de ces derniers est estimée à travers les paramètres T et Δ . On note v_c le

rapport $\frac{T}{\Delta}$. Zhang porte un choix sur la fonction v_c dont la forme est donnée par :

$$v_c = \alpha \rho V_e'(\rho) \quad (1.45)$$

avec α un paramètre positif déterminé par analogie avec le modèle LWR. L'équation de vitesse du modèle s'écrit alors comme suit :

$$\partial_t v + v \partial_x v = -\frac{1}{T}(v(x,t) - V_e(\rho(x,t))) - \alpha \rho(x,t) V_e'(\rho(x,t))^2 \partial_x \rho(x,t) \quad (1.46)$$

L'un des inconvénients majeurs de cette première classe de modèles du second ordre est le non respect du caractère anisotrope du trafic.

Pour mettre en évidence cette propriété, les différents modèles peuvent s'écrire sous la forme conservatrice suivante :

$$\partial_t U + f(U) \partial_x U = S(U) \quad (1.47)$$

avec :

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ v \end{pmatrix} \quad f(U) = \begin{pmatrix} v & \rho \\ \frac{C^2(\rho)}{\rho} & v \end{pmatrix} \quad S(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ s(U) \end{pmatrix}$$

Les modèles de cette classe diffèrent essentiellement par l'expression du coefficient $C(\rho)$:

- Si $C(\rho) = 0$, on retrouve le modèle de Ross.
- Si $C(\rho) = -\rho V_e'(\rho) \exp(\frac{V_e(\rho)-v}{a})$, on retrouve le modèle de Del Castillo.
- Si $C(\rho) = -\rho V_e'(\rho)$, on retrouve le modèle de Zhang.

La matrice du flux $f(U)$ est caractérisée par deux valeurs propres données en fonction de $C(\rho)$ comme suit :

$$\begin{aligned} \lambda_1(U) &= v - C(\rho) \\ \lambda_2(\rho) &= v + C(\rho) \end{aligned} \quad (1.48)$$

Ces valeurs propres sont en fait les vitesses de propagation de l'onde et on peut se rendre compte que la seconde valeur propre est supérieure à la vitesse de propagation du trafic v . Ceci revient à dire que, pour ces modèles, il arrive aux ondes de se déplacer plus vite que le trafic. Ce qui a pour conséquence la réaction des conducteurs aux conditions de trafic derrière eux. D'où le non respect du caractère anisotrope du trafic routier.

Modèles Anisotropes

Aw et Rascle [AW et RASCLE [2000]] ont été les premiers à "ressusciter" les modèles de second ordre en 2000. Deux années plus tard Zhang [ZHANG [2002]] et Jiang [JIANG *et al.* [2002]] respectivement dérivent à partir des modèles de poursuite, des modèles du second ordre semblables à celui de Aw-Rascle. Dans la littérature actuelle du trafic routier, ces trois

modèles sont considérés comme les modèles du second ordre les plus aboutis. Sous forme non conservative, ils s'écrivent de la manière suivante :

$$\partial_t U + A(U) \partial_x U = S(U) \quad (1.49)$$

avec :

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ v \end{pmatrix} \quad A(U) = \begin{pmatrix} v & \rho \\ 0 & C(\rho) + v \end{pmatrix} \quad S(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ s(U) \end{pmatrix} \quad C(\rho) \leq 0$$

et se distinguent les uns des autres selon la forme de la fonction $C(\rho)$ et du terme source $s(U)$. Pour ce type de modèles, les valeurs propres de la matrice $A(U)$, i.e. les vitesses des ondes associées, sont :

$$\lambda_1 = v + C(\rho) \leq \lambda_2 = v \quad (1.50)$$

Ce qui signifie qu'aucune onde ne se déplace plus vite que le trafic. Ceci répond correctement à la contrainte anisotropique du trafic routier.

Modèle de Colombo

En 2002, Colombo [COLOMBO [2002]], propose un modèle hyperbolique avec transition de phase. Le modèle se compose de deux phases dont l'une décrit le trafic en régime fluide et l'autre en régime congestionné. En régime fluide, le trafic est régi par le modèle LWR alors qu'en régime congestionné, l'évolution du trafic est gouverné par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0 \\ \partial_t q + \partial_x((q - Q)v) = 0 \end{cases} \quad (1.51)$$

où v est une fonction connue qui dépend de la densité ρ et du moment q tandis que Q est un paramètre donné.

Modèle de Aw-Rascle

Par analogie avec la dynamique des gaz. Ils définissent une loi de pression du trafic qui est fonction de la densité : $P = P(\rho)$. [MOUTARI [2007]]

Le modèle de Aw-Rascle s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0 \\ \partial_t(v + P(\rho)) + v \partial_x(v + P(\rho)) = A \frac{1}{T_\tau} (V_e(\rho) - v) \end{cases} \quad (1.52)$$

La démarche entreprise par les auteurs est une étude purement mathématique. Ils considèrent le modèle comme un système hyperbolique non linéaire dont la solution consiste à résoudre un problème de Riemann.

Le modèle est réécrit en coordonnées Lagrangiennes en utilisant les relations de passage suivantes :

$$\begin{aligned} \partial_x X &= \rho \\ \partial_t X &= \rho v \\ T &= t \end{aligned} \quad (1.53)$$

avec X définie comme l'intégrale de la densité normalisée (l'espace total occupé par les véhicules) par rapport à la densité maximale ρ_{max} . Le modèle Aw-Rascle en coordonnées Lagrangiennes s'écrit :

$$\begin{aligned}\partial_T \sigma - \partial_X v &= 0 \\ \partial_T w &= \frac{A}{T_\tau} (V_e(\rho) - v)\end{aligned}\quad (1.54)$$

avec $w = v + P(\rho)$.

Contrairement au schéma de Godunov classique, dans le cas du modèle de Aw-Rascle, on décompose le flux en paquets de véhicules de taille ΔX . Ces paquets vont représenter les cellules de la discrétisation classique de Godunov. Le système précédent sans le terme de relaxation discrétisé s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\sigma_i^{t+\Delta T} &= \sigma_i^t + \frac{\Delta T}{\Delta X} (v_{i+1}^t - v_i^t) \\ w_i^{t+\Delta T} &= w_i^t\end{aligned}\quad (1.55)$$

Modèle de Zhang

Le nouveau modèle de Zhang s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \partial_x(\rho v) &= 0 \\ \partial_t v + (v + c(\rho)) \partial_x v &= 0\end{aligned}\quad (1.56)$$

Modèle de Jiang

Dans le cas du modèle de Jiang [JIANG *et al.* [2002]], on retrouve la même démarche de modélisation d'un modèle du second ordre, i.e, la dérivation d'un modèle de poursuite modifié. L'auteur propose de remplacer le gradient de la densité par le gradient de la vitesse dans l'équation de mouvement. On obtient ainsi le modèle suivant :

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \partial_x(\rho v) &= 0 \\ \partial_t v + v \partial_x v &= \frac{V_e - v}{T} + C_0 \partial_x v\end{aligned}\quad (1.57)$$

Le coefficient $C_0 = \frac{\Delta}{\tau}$ représente la vitesse de propagation d'une perturbation.

Extensions du modèle de Aw-Rascle

Greenberg [GREENBERG [2001]] a proposé une extension du modèle AR. En dérivant à partir de l'expression Lagrangienne de modèle AR, une formulation permettant de prendre en compte le comportement des conducteurs agressifs et il a aussi proposé un algorithme complet pour la résolution du problème. Bagnerini et Rascle [BAGNERINI et RASCLE [2003]] proposent un modèle plus général qui tient compte de la catégorie des véhicules (modèle multi-classes ou multiflot) et montrent que le modèle multiclasse homogénéisé converge vers le modèle AR. Goatin [GOATIN [2006]] propose un couplage du modèle AR avec le modèle LWR

afin de construire un modèle avec transition de phase. Siebel et Mauser [SIEBEL et MAUSER [2007]], proposent à partir du modèle AR, un modèle avec terme source appelé le modèle BVT (Balanced Vehicular traffic). Garavello et Piccoli [GARAVELLO et PICCOLI [2006]] ont été les premiers à modéliser un réseau routier avec le modèle AR en proposant une approche qui est basée sur la résolution du problème de Riemann et un couplage permettant de conserver la masse à travers les intersections. Herty et Rascle [HERTY et RASCLE [2006]] proposent une approche plus étendue qui, non seulement conserve la masse mais conserve aussi la variable Lagrangienne à travers les intersections. Lebacque et al [LEBACQUE *et al.* [2005]] étudient la résolution du modèle ARZ (Aw-Rascle et Zhang) ([AW et RASCLE [2000]], [ZHANG [2002]]) dans le cas hétérogène. [MOUTARI [2007]]

Le modèle ARZ

Les équations de base du modèle ARZ sont les suivantes :

1. Équation de conservation

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0 \quad (1.58)$$

2. Équations de vitesse :

- Modèle Aw-Rascle

$$\partial_t v + (v - \rho P'(\rho)) \partial_x v = -\frac{A}{T}(v - V_e(\rho)) \quad (1.59)$$

- Modèle Zhang

$$\partial_t v + (v + \rho V_e'(\rho)) \partial_x v = 0 \quad (1.60)$$

Le modèle macroscopique de second ordre ARZ est : [MAM 06]

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0 \\ \partial_t y + \partial_x p = -\frac{1}{T} y \end{cases} \quad (1.61)$$

où

- $I = v - V_e(\rho)$: la vitesse relative (la différence entre la vitesse actuelle v et la vitesse d'équilibre $V_e(\rho)$),
- $y = \rho I$: le débit relatif,
- $p = \rho I v$: la pression relative (la différence entre le débit à l'équilibre et le débit en régime hors équilibre,
- T : le temps de relaxation.

Dans [MAMMAR [2006]] , il a été démontré que la résolution de ce modèle peut être réduit à la résolution du modèle de premier ordre sous la forme :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0 \\ v = I + V_q(\rho) \end{cases} \quad (1.62)$$

La formulation usuelle en termes d'offre et de demande, qui sont utilisées dans le cas du modèle de premier ordre LWR peuvent être appliquées avec un diagramme fondamental modifié au

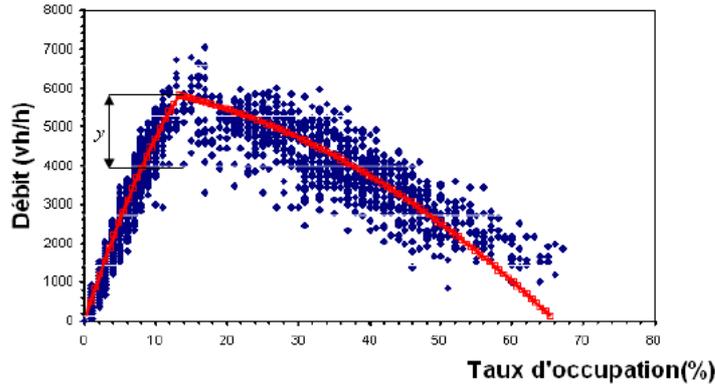


Figure 1.12 – Signification physique de la variable de conservation y

modèle ARZ. Les fonctions d'offre et de demande, qui sont respectivement notées comme Σ et Δ ont les expressions suivantes :

$$\Delta_e(\rho, I) = \begin{cases} Q_e(\rho, I) + \rho I & \text{si } \rho \leq \rho_{crit}(I) \\ q_{max}(I) & \text{si } \rho \geq \rho_{crit}(I) \end{cases} \quad (1.63)$$

avec

$$\Sigma_e(\rho, I) = \begin{cases} q_{max}(I) & \text{si } \rho \leq \rho_c(I) \\ Q_e(\rho, I) + \rho I & \text{si } \rho \geq \rho_c(I) \end{cases} \quad (1.64)$$

L'intérêt du modèle ARZ réside dans les points suivants :

- Le modèle respecte le caractère anisotrope du trafic (pas de vitesse supérieure à la vitesse du trafic) ;
- le modèle ARZ converge en régime d'équilibre vers le modèle LWR ;
- les solutions analytiques exactes dans le cas homogène et hétérogène ont été mises en évidence dans [MAMMAR [2006]] ;
- le nombre de paramètres à calibrer est faible, contrairement aux autres modèles macroscopiques du second ordre (paramètres du diagramme fondamental et temps de relaxation).

1.3 Analyse de la modélisation macroscopique hétérogène

De nombreux modèles macroscopiques tenant compte de l'hétérogénéité du trafic ont été développés ces dernières années. cette prise en compte se fait en décomposant les trafics hétérogènes en sous-classes homogènes, comme souligné par [ZHANG et LIN [2002]]. [CHANUT [2005]]

1.3.1 Intégration de l'hétérogénéité dans les modèles du premier ordre

Principe

Le flux du trafic global est décomposé en sous classes homogènes. La modélisation de l'écoulement de ces sous-classes est donc analogue à celle d'un trafic global homogène ; en particulier, le principe de conservation des véhicules s'applique aux n classes de trafic ainsi formées : Le débit partiel Q_i en chaque sous-classe de véhicules est défini par $Q_i = \rho_i V_i$ et chaque classe a sa vitesse V_i définie par un diagramme fondamental, ce qui permet de continuer de parler de modèle macroscopique du premier ordre :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial Q_i}{\partial x} = 0 \\ Q_i = \rho_i V_i \\ V_i = V_i^{eq}(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n) \end{cases} ; i = 1, \dots, n \quad (1.65)$$

Le système à résoudre est un système de n lois de conservation, il se met sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + F(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \\ F(\rho) = (F(\rho))_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial \rho_j} \end{cases} \quad (1.66)$$

Dans le cas où le diagramme fondamental est identique pour toutes les classes et où la vitesse dépend de la densité totale en véhicules, l'écoulement n'est pas modifié par rapport au cas du flux global homogène.

Cependant, le cas hétérogène est celui où il y'a interaction entre les sous-classes ainsi constituées, et donc modification de l'écoulement par rapport à un flux homogène.

Ces interactions sont représentées par des diagrammes fondamentaux ; dont la définition permet de différencier les modèles multi-classes existants.

Ces modèles se sont souvent limités au cas $n = 2$, en intégrant la différence de vitesse et/ou d'occupation de l'espace des deux classes (classiquement des poids lourds et des véhicules légers).

Modèles de Daganzo

L'un des tous premiers modèles macroscopiques hétérogènes a été développé par Daganzo [DAGANZO [1997]], modèle **multi-classes avec optimum**, en supposant la recherche par les usagers d'un optimum.(Figure 13)

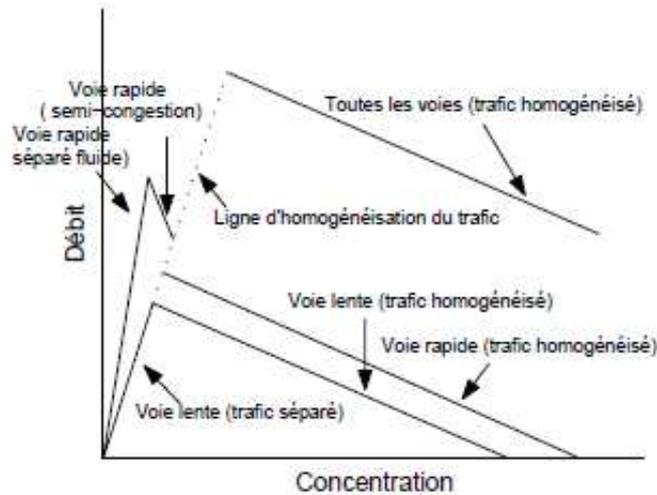


Figure 1.13 – Diagrammes fondamentaux [DAGANZO [2002]]

* Dans son premier modèle, Daganzo considère qu'il y'a deux types de voies ; les prioritaires et les normales, et deux types de véhicules, les normaux et les prioritaires. Seuls les véhicules prioritaires peuvent circuler sur les voies prioritaires. Le modèle, bâti sur l'existence d'un diagramme triangulaire identique pour les deux types de véhicules et qui fonctionne ensuite en accord avec un équilibre de type Wardrop, en principe identique avec celui utilisé en affectation du trafic :

Ce modèle permet de mieux prendre en compte les phénomènes affectant différemment les voies, comme la gêne pouvant exister à proximité d'échangeurs par exemple.

** Le second modèle de Daganzo [DAGANZO [2002]], considère deux types de conducteurs ; des conducteurs rapides (rabbits) et des conducteurs lents (slugs), qui ont des vitesses libres différentes.

Deux diagrammes fondamentaux triangulaires différents sont donc définis pour les deux types de conducteurs et de voies. Il existe un équilibre de type Wardrop identique au précédent modèle.

Cette approche de la modélisation d'un trafic hétérogène (forte influence du choix de la voie de circulation, absence d'effets de la densité sur les vitesses) est beaucoup moins adaptée en Europe, où les vitesses des véhicules sont plus étalées et où la règle est la conduite sur la voie la plus à droite.[CHANUT [2005]]

Modèle de Bliemer

Bliemer [BLIEMER [2000]] a exprimé la densité totale effective en unités de véhicules légers par unité de longueur par :

$$\rho(V_1, V_2) = \rho_1 + e(V_1, V_2)\rho_2 \quad (1.67)$$

où e est un coefficient d'équivalence affecté aux poids lourds qui n'est pas intrinsèque.

La mixité est modélisée comme accentuant la gêne par l'augmentation de la densité effective.

Modèle de Zhang et Jin

Zhang et Jin [ZHANG et JIN [2002]], ont proposé un modèle particulier. Les deux classes considérées ont des vitesses différentes V_{f_1} et V_{f_2} en situation fluide de trafic, mais le trafic global a une vitesse finalement homogène, même si elle dépend des densités ρ_i de chacune des classes.

Ce modèle est considéré comme un modèle **multi-classes mono-vitesse** où tous les véhicules s'écoulent à la même vitesse

$$V(\rho_1, \rho_2) = \begin{cases} \frac{\rho_1 V_{f_1} + \rho_2 V_{f_2}}{K_1 + K_2} & \text{si } \gamma_1 \rho_1 + \gamma_2 \rho_2 < \rho_c \\ V_{cong}(\rho_1, \rho_2) & \text{si } \gamma_1 \rho_1 + \gamma_2 \rho_2 \geq \rho_c \end{cases} \quad (1.68)$$

Où V_{cong} est la vitesse de congestion, $\gamma_i = L_i + \tau_i V_{f_i}$ sont des coefficients qui pondèrent les densités partielles, où L_i : la longueur moyenne des véhicules de chaque classe et $\tau_i V_{f_i}$; une capacité d'accélération/décélération des véhicules et ρ_c est la densité critique intrinsèque à l'infrastructure.

Le système d'équation à résoudre devient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot V(\rho))}{\partial x} = 0 \quad (1.69)$$

Il se rapproche beaucoup d'un modèle où les classes ne sont différenciées que par leur destination, il est résoluble analytiquement. Mais l'inconvénient de ce modèle est l'écoulement FIFO (First In First Out), résultant de l'égalité des vitesses de tous les véhicules

Modèle de Wong et Wong

Wong et Wong [WONG et WONG [2002]], ont proposé un modèle **multi-classes et multi-vitesses**, où la décroissance de la vitesse s'exprime selon :

$$V_i(\rho) = V_{lib,i} \left(\exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2\right) \right) \quad (1.70)$$

$V_{lib,i}$ est la vitesse libre de la classe i quand la densité est nulle et ρ_0 est une constante, fonction qui présente l'inconvénient de ne pas s'annuler complètement à la densité maximale.

Modèle de Benzoni-Gavage et Colombo

Modèle **multiclasses et multi-vitesses** [BENZONI-GAVAGE et COLOMBO [2003]], où la décroissance de la vitesse est donnée par

$$V_i(\rho) = V_{l,i} \left(\frac{\rho_{\max} - \rho_i}{\rho_{\max}} \right) \quad (1.71)$$

Modèle de Zhu, Chang et Wu

Modèle **multi-classes et multi-vitesses** ([ZHU *et al.* [2003]]) où :

$$V_i = V_{lib,i} \left(1 - \left(\frac{\rho}{\rho_{max}} \right)^{n_i} \right) \quad (1.72)$$

n_i est un coefficient relatif à chaque classe tel que la dérivée du flux par rapport à la densité s'annule quand cette dernière est égale à la densité critique, donc

$$\left(\frac{\rho_{c,i}}{\rho_{max}} \right)^{n_i} = \frac{1}{n_i + 1} \quad (1.73)$$

$\rho_{c,i}$ sont les densités critiques spécifiques à chaque classe.

Modèle de Logghe

Dans son modèle, Logghe [LOGGHE [2003]] s'est inspiré du second modèle de Daganzo et fait l'hypothèse que les véhicules lents occupent la place et seulement la place qui leur est nécessaire pour l'écoulement. (Figure 14)

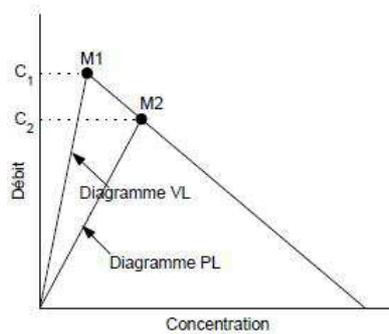


Figure 1.14 – Diagrammes fondamentaux [LOGGHE [2003]]

Ceci implique l'existence de trois types d'écoulement du trafic, de manière similaire au modèle de Daganzo [DAGANZO [2002]] : fluide, semi-congestionné et congestionné.

Ce modèle **multi-vitesses avec optimum**, s'efforce de décrire les spécificités phénoménologiques d'un trafic hétérogène ; toutefois il ne s'intéresse pas à l'éventuelle impossibilité physique de dépassement pour les véhicules légers.

Modèle de Chanut

Modèle multi-classes multi-vitesses [CHANUT [2005]]) où la décroissance de la vitesse s'exprime par

$$\begin{cases} V_i(\rho_1, \rho_2) = V_{l,i} - \left(\frac{V_{l,i} - V_c}{\rho_c} \right) \rho & \text{si } \rho \in [0, \rho_c] \\ V(\rho_1, \rho_2) = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right) V_c \left(\frac{\rho_{max}}{\rho} - 1 \right) & \text{si } \rho \in [\rho_c, \rho_{max}] \end{cases} \quad (1.74)$$

Où α est une constante.

Dans le cadre d'une modélisation macroscopique du premier ordre, Chanut a introduit la phénoménologie de l'écoulement d'un trafic comportant des poids lourds en prenant en compte : (Figure 15)

- la vitesse moindre des poids lourds et leur occupation de l'espace plus importante
- les interactions liées au dépassement des poids lourds par les véhicules légers.

Il a proposé une résolution analytique du modèle ainsi qu'une résolution numérique.

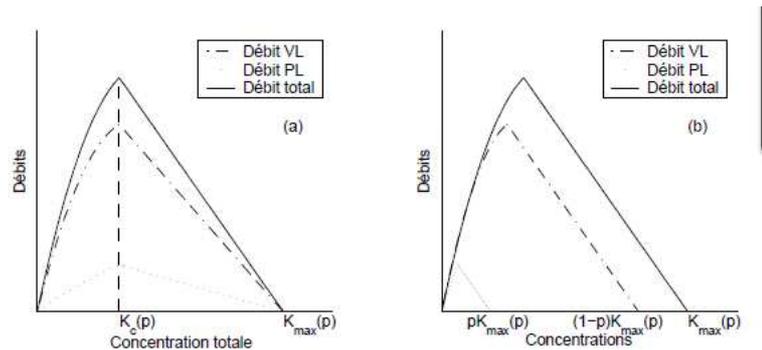


Figure 1.15 – Diagrammes fondamentaux [CHANUT [2005]]

1.3.2 Intégration de l'hétérogénéité dans les modèles d'ordre supérieur

Plusieurs auteurs ont construit des modèles d'ordre supérieur tenant compte de la composition du trafic. Dans ce type de modèle, la prise en compte de cette hétérogénéité se fait à l'aide du diagramme fondamental utilisé à l'équilibre pour chacune des classes considérées d'une part, par la modification de l'équation d'évolution des vitesses d'autre part.

Cela conduit a priori à un système de n lois de conservation pour les n classes considérées, et n équations d'évolution dynamique de la vitesse.

Modèle de Bagnerini et Rascle

Dans [BAGNERINI et RASCLE [2003]] où la décroissance des vitesses de chacune des classes se fait de façon logarithmique en fonction de la densité. Mais surtout, à la manière de [ZHANG et JIN [2002]], si les deux classes considérées ont des vitesses différentes, le trafic global a une vitesse finalement homogène, même si elle dépend des densités ρ_i de chacune des classes :

$$V(\rho, p) = (1 - p)V_1(\rho) + pV_2(\rho) \quad (1.75)$$

p est la fraction du type 2 de véhicules.

Par conséquent ce modèle est un modèle multi-classes mono-vitesse et le système se résume à trois équations car il n'existe qu'une seule équation de la vitesse, celle concernant la vitesse globale du trafic.

Cette hypothèse rend la résolution analytique du modèle proposé plus simple, mais a le même inconvénient que le modèle de Zhang et Jin, à savoir l'impossibilité de représenter une évolu-

tion plus rapide des véhicules légers à cause du type FIFO de l'écoulement.

Modèle de Jiang et Wu

où le modèle est à **multi-classes multi-vitesses** [JIANG et WU [2004]], est une relation d'équilibre sur la vitesse :

$$V_i^{eq}(\rho) = V_{l,i} \left(1 - \exp \left(1 - \exp \left(\frac{c_i}{V_{l,i}} \left(\frac{\rho_{\max}}{\rho} - 1 \right) \right) \right) \right) \quad (1.76)$$

avec c_i est la vitesse de la caractéristique du trafic de la classe i à la densité maximale ρ_{\max} supposée identique pour les différentes classes.

Outre les deux équations de conservation pour les deux classes considérées ; Jiang et Wu considèrent deux équations d'évolution de la vitesse différentes pour les véhicules rapides indicés 1 et les véhicules lents indicés 2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial t} + V_1 \frac{\partial V_1}{\partial x} &= \frac{1}{\tau_1} (V_1^e(\rho) - V_1) \\ &\quad - c_{01} \frac{\partial V_1}{\partial x} - \frac{V_1 - V_2}{a} \left(\frac{\rho_2}{b} \right)^2 \\ \frac{\partial V_2}{\partial t} + V_2 \frac{\partial V_2}{\partial x} &= \frac{1}{\tau_2} (V_2^{eq}(\rho) - V_2) - c_{02} \frac{\partial V_2}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.77)$$

τ_i est le temps de réaction, c_{0i} est le temps de sensibilité au gradient de vitesse, a et b sont des constantes. De plus, les véhicules rapides sont susceptibles d'être gênés par les véhicules lents à travers le terme de friction.

$$\frac{V_1 - V_2}{a} \left(\frac{\rho_2}{b} \right)^2 \quad (1.78)$$

Cette friction est supposée proportionnelle à la différence de vitesse et est liée à la densité en véhicules lents : elle est nulle quand ces derniers sont absents.

La résolution de ce modèle, qui est au final un système de quatre équations n'est réalisée que numériquement par les auteurs.

Résolution de ces modèles

Ces différents modèles macroscopiques multi-classes amènent à la résolution de systèmes hyperboliques d'équations. La résolution analytique est possible, mais rapidement assez compliquée, dans le cas où l'on a deux équations (cas des modèles bi-classes du premier ordre) ; elle s'apparente à la résolution analytique des modèles mono-classe d'ordre supérieur avec des transitions du type ondes de choc, de raréfaction ou de contact. La différence ici est que les deux variables caractéristiques du système sont les deux densités partielles.

Au delà (plus de trois équation, cas des modèles bi-classes d'ordre supérieur), la résolution est encore plus délicate ; on doit se contenter de résolutions numériques.

Tous les modèles évoqués précédemment ont fait l'objet de résolutions numériques afin de procéder à des simulations . Les schémas numériques utilisés sont essentiellement ceux de

Lax-Friedrichs [BENZONI-GAVAGE et COLOMBO [2003]], [WONG et WONG [2002]] et de Godunov [ZHANG et JIN [2002]], [BAGNERINI et RASCLE [2003]] et [CHANUT [2005]].

1.4 Modélisation microscopique du trafic

L'invention d'ordinateurs aux capacités de calcul de plus en plus puissantes a largement contribué au développement de la modélisation microscopique du trafic, dont les premiers travaux remontent à ceux de Pipes [PIPES [1953]] et Reuschel [REUSCHEL [1950]] dans les années 1950.

L'objet d'un modèle microscopique est le comportement du couple véhicule et conducteur dans un flux de trafic.

Pour être complet, un modèle microscopique doit traiter toutes les manoeuvres qu'un conducteur peut être amené à réaliser : changement de voie, dépassement, gestion des interdistances, etc.

Les fonctions d'un modèle microscopique sont donc multiples ; elles peuvent être subdivisées en composantes longitudinales qui interviennent dans le choix d'une vitesse désirée et d'une loi d'accélération/freinage pour atteindre cette vitesse, dans la gestion de la vitesse et de l'inter-distance ainsi que dans l'interaction du conducteur avec les fonctions d'assistance à la conduite et en composantes latérales qui interviennent dans le changement de voie ou de dépassement et d'insertion dans un flux de trafic et aussi dans l'interaction du conducteur avec des assistances au contrôle latéral. ([MAMMAR [2007]]).

Dans la suite, on rappelle les variables des modèles microscopiques et les principaux modèles proposés dans la littérature.

1.4.1 variables des modèles microscopiques

Sur une portion de route, on considère le véhicule n , à l'instant t , à la position $x_n(t)$ et de vitesse $v_n(t)$. L'accélération est notée $a_n(t)$. Le véhicule $(n + 1)$ précède le véhicule n .

Les variables microscopiques sont alors :

- la distance inter-véhiculaire $s_n(t) = x_{n+1}(t) - x_n(t)$, définie comme la distance séparant deux points identiques des deux véhicules ;
- l'inter-distance $d_n(t)$ représente l'espace disponible entre deux véhicules. $s_n = d_n + l_{n+1}$, où l_{n+1} est la longueur du véhicule $(n + 1)$; (Figure 1)
- le temps inter-véhiculaire $h_n(t)$ est le rapport de la distance inter-véhiculaire par la vitesse du véhicule suiveur ;
- la vitesse relative $\dot{s}_n(t) = v_{n+1}(t) - v_n(t)$;
- le temps à collision $t_c(t)$, défini comme le rapport de l'inter-distance à la vitesse relative ;
- l'inter-distance de sécurité d_s .

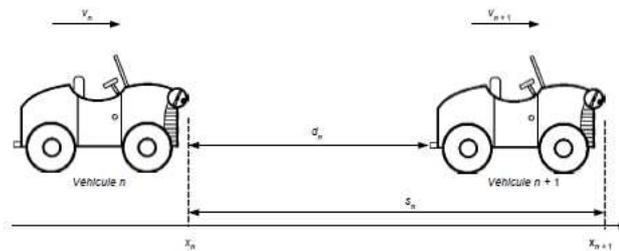


Figure 1.16 – Variables pour le modèle de poursuite
[MAMMAR [2006]]

1.4.2 Les modèles microscopiques

La modélisation microscopique du trafic routier revient à décrire le comportement individuel de chaque couple véhicule-conducteur en fonction de son environnement. Plusieurs modèles ont été proposés dans la littérature et se classent principalement en quatre catégories : les modèles de voiture-suiveuse ou modèles de poursuite, les modèles à automates cellulaires, les modèles de file d'attente et les modèles multi-agents.

Les modèles d'inter-distance de sécurité

On dit qu'un conducteur est en mode "poursuite" (ou suivi de véhicule) si le véhicule qui le précède l'amène à avoir une vitesse inférieure à sa vitesse désirée. Le véhicule suiveur établit comme nouvelle vitesse désirée la vitesse v_{n+1} du véhicule qui précède. La vitesse relative joue alors un rôle de stimuli qui provoque chez le conducteur des actions d'accélération ou de freinage. L'accélération longitudinale est l'entrée de commande communément utilisée dans tous les modèles.[MAMMAR [2007]]

Les modèles de poursuite à anticollision

Ce type de modèle a été introduit dans [KOMETANI et SASAKI [1959]]. Il modélise la distance inter-véhiculaire sous forme d'une distance de sécurité nécessaire pour éviter la collision avec le véhicule qui précède :

$$d_s(t - \tau) = \alpha v_{n+1}^2(t - \tau) + \beta_1 v_n^2(t) + \beta v_n(t) + b_0 \quad (1.79)$$

où τ est le temps de réaction du conducteur, b_0 l'inter-distance à l'arrêt et deux termes quadratiques qui reflètent la distance d'arrêt de chaque véhicule. L'ensemble des paramètres α, β, β_1 et b_0 sont des constantes à calibrer.

Le modèle de Gipps ([GIPPS [1981]], [GIPPS [1986]]), est largement utilisé dans la simulation microscopique du trafic. Ce type de modèle est souvent facile à calibrer et donne des résultats très réalistes (GIPPS [1981], PANWAI et H.DIA [2005]) Il est utilisé dans les logiciels SISTEM et CARSIM [BENEKOHAL et TREITERER [1989], McDONALD *et al.* [1994]]. Les véhicules accélèrent pour atteindre la vitesse désirée et décélèrent pour éviter une collision

quand ils essaient de maintenir la vitesse désirée. La vitesse maximale dépend de l'accélération, comme exprimée par Brackstone et McDonald [BRACKSTONE et MCDONALD [1999]].

$$V_a(n, t + T) = V(n, t) + 2.5a(n)T \times \left(1 - \frac{V(n, t)}{V^*(n)}\right) \sqrt{0.025 + \frac{V(n, t)}{V^*(n)}} \quad (1.80)$$

où

- $V(n, t)$: est la vitesse du véhicule n à l'instant t ;
- $V^*(n)$: est la vitesse désirée du véhicule n pour la courante section ;
- $a(n)$: est l'accélération maximum du véhicule n ;
- T : est le temps de réaction (égal au pas de simulation).

La vitesse est aussi influencée par les caractéristiques du véhicule et les limitations imposées par le véhicule leader.

$$V_b(n, t + T) = d(n)T + \sqrt{d^2(n)T^2 - d(n)(2x(n-1, t) - s(n-1) - x(n, t) - V(n, t)T - \frac{V^2(n-1, t)}{d'(n-1)})} \quad (1.81)$$

où

- $d(n)$: est la décélération maximale désirée par le véhicule n ;
- $x(n, t)$: est la position du véhicule n à l'instant t ;
- $x(n-1, t)$: est la position du véhicule précédent $n-1$ à l'instant t ;
- $s(n-1)$: est la longueur effective du véhicule $n-1$;
- $d'(n-1)$: est l'estimation de la décélération désirée du véhicule $n-1$.

La vitesse désirée maximale est la valeur minimale donnée par les équations précédentes.

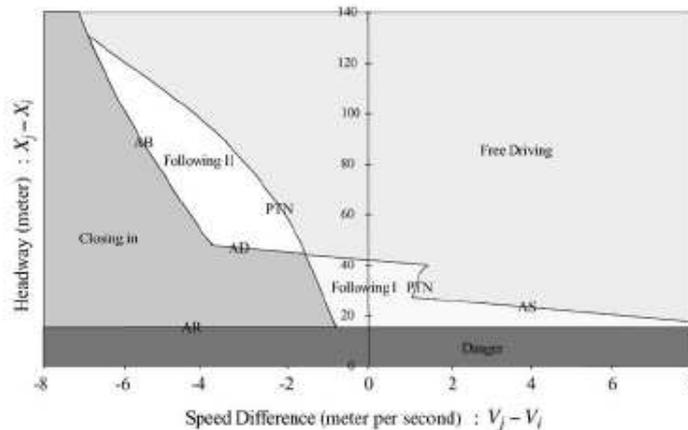


Figure 1.17 – Diagramme phase-espace voiture suiveuse ($v_j = 20m/s$, $b_m = 0,2m/s^2$) [FRITZSCHE [1994]]

Les modèles de poursuite

Les modèles de poursuite ont été conçus pour des routes à une seule voie, ils s'appuient essentiellement sur l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\frac{dv_n(t)}{dt} = \frac{v_{n+1}(t) - v_n(t)}{T} \quad (1.82)$$

Ce modèle est basé sur l'idée selon laquelle l'accélération du véhicule n à l'instant t dépend de la vitesse relative du véhicule n et de son leader $n + 1$ moyennant un certain temps de relaxation T . Cependant l'équation précédente décrit un phénomène assez stable, ce qui n'est pas le cas du trafic routier. D'où l'apparition de plusieurs variantes de ce modèle ; on peut citer entre autres, **les modèles de poursuite à stimuli**, **les modèles à vitesse optimale**, **les modèles psycho-physiques**.

Les modèles de poursuite à stimuli

Se basant sur le fait que lorsqu'un conducteur perçoit un stimulus à l'instant t , il ne réagira qu'à l'instant $t + \tau > t$ et que sa réponse dépend de l'intensité du stimulus et de sa sensibilité à ce stimulus, Chandler et al [CHANDLER *et al.* [1958]] proposent un modèle du type

$$Reponse(t + \tau) = Sensitivite \times Stimulus(t)$$

de la forme :

$$\frac{dv_n(t + \tau)}{dt} = \lambda (v_{n+1}(t) - v_n(t)) \quad (1.83)$$

avec $\lambda = T^{-1}$ et τ le temps de réaction.

Pour remédier aux problèmes de collision dus à cette équation, Gazis et al [GAZIS *et al.* [1959]], proposent d'exprimer le stimulus en fonction de la distance entre véhicule n et son leader $n + 1$ ainsi que la vitesse du véhicule n , et construisent un modèle de la forme :

$$\frac{dv_n(t + \tau)}{dt} = \lambda (v_n(t))^m \frac{v_{n+1}(t) - v_n(t)}{(x_{n+1}(t) - x_n(t))^l} \quad (1.84)$$

où l et m sont des paramètres du modèle. Les modèles de ce type sont connus sous l'appellation de **modèles du type GHR (Gazis, Herman et Rothery)**.

Modèle linéaire

La forme de base de ce modèle ([WU *et al.* [2003]], [PANWAI et H.DIA [2005]]) relie l'accélération du véhicule suiveur à la distance de suivi désirée, la vitesse du véhicule suiveur, la distance relative et la vitesse entre le véhicule suiveur et le véhicule leader, et le temps de réaction du conducteur. Ce modèle a son origine dans le modèle GHR décrit précédemment et expérimenté par Helly, qui introduit le facteur de la distance de suivi désirée. Le modèle répond bien aux données d'observation. La difficulté principale est dans la calibration des paramètres constants de l'étude.

$$\begin{aligned} a_n(t) &= C_1 \Delta v(t - T) + C_2 \Delta x_{t-T} - D_n(t) \\ D_n(t) &= \alpha + \beta v(t - T) + \gamma a_n(t - T) \end{aligned} \quad (1.85)$$

où

- $a_n(t)$: est l'accélération du véhicule n implémenté à l'instant t ;
- $D_n(t)$: est la distance de suivi désirée à l'instant t ;
- v : est la vitesse du véhicule n ;
- Δx : est la distance relative entre le véhicule n et le véhicule $n - 1$;
- Δv : est la vitesse relative entre le véhicule n et le véhicule $n - 1$;
- T : est le temps de réaction du conducteur ;
- $\alpha, \beta, \gamma, C_1$ et C_2 : sont des constantes de calibration.

Les modèles à vitesse optimale

Ces modèles considèrent que la vitesse d'un véhicule dépend plutôt d'une vitesse qui est en fonction de la distance entre celui-ci et son leader. Le premier modèle du genre, proposé par Newell [NEWELL [1998]] est de la forme suivante :

$$\frac{dv_n(t)}{dt} = \lambda (V(s_n(t)) - v_n(t)) \quad (1.86)$$

où λ est la sensibilité du conducteur n et la fonction V est appelée vitesse optimale.

Les modèles qui en découlent sont maintenant connus sous l'appellation "Optimal Velocity Model" (OVM). Il a été démontré que ce type de modèle est apte à décrire différentes situations de trafic.

En 1995, Bando et al [BANDO *et al.* [1995]] donnent l'accélération du véhicule suiveur par :

$$a_n(t) = \frac{1}{\tau} (V(s_n(t)) - v_n(t)) \quad (1.87)$$

et suggèrent la forme suivante pour la fonction V

$$V(s_n(t)) = V_1 + V_2 \tanh(C_1(s_n(t)) - C_2) \quad (1.88)$$

Les paramètres V_1, V_2, C_1 et C_2 sont calibrés à partir de données réelles.

Ce modèle a connu de nombreuses améliorations dont l'introduction de retards [BANDO *et al.* [1998]].

Dans [MAMMAR *et al.* [2005]], l'introduction d'un terme de pondération permet d'améliorer la réactivité du modèle au freinage. Cette pondération est fonction du temps à collision. La vitesse optimale modifiée est notée $V^n(s_n, \dot{s}_n)$ et prend la forme :

$$V(s, \dot{s}) = V(s) \times w(s, \dot{s}) \quad (1.89)$$

Le facteur de pondération vaut :

$$w(s_n, \dot{s}_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh B \left(\frac{\dot{s}_n}{s_n} + C \right) \quad (1.90)$$

D'où l'équation supplémentaire :

$$\frac{1}{2} \left(1 + \tanh B \left(\frac{-1}{t_{cmin}} + C \right) \right) = \varepsilon \quad (1.91)$$

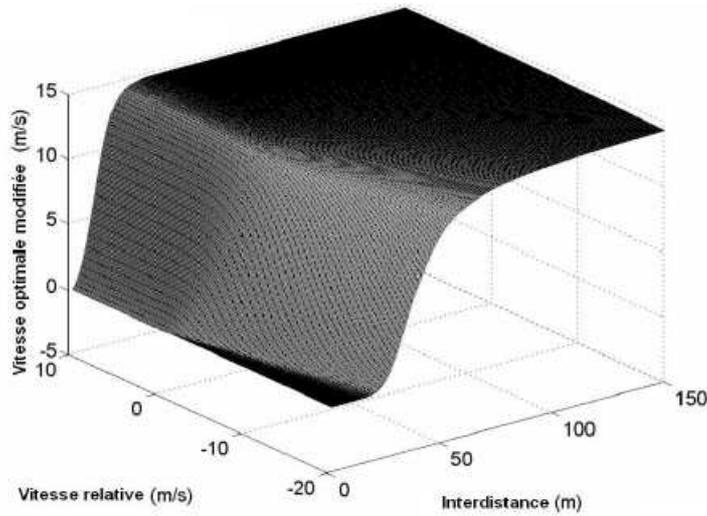


Figure 1.18 – Profil de la vitesse optimale en fonction de l’inter-distance et de la vitesse relative

Modèle de conducteur intelligent IDM

Ce modèle IDM (Intelligent Driver Model) a été développé par Treiber [TREIBER et HELBING [2001]]. La loi d’accélération du conducteur est une fonction continue de la vitesse, de l’inter-distance et de la vitesse relative. L’accélération est donnée par :

$$\begin{aligned}
 a_n(t) &= a_{max} \left(1 - \left(\frac{v_n(t)}{v_l} \right)^\delta - \left(\frac{s_n^*(v_n, \dot{s}_n)}{s_n(t)} \right)^2 \right) \\
 s_n^*(t) &= s_0 + s_1 \sqrt{\frac{v_n(t)}{v_l}} + T_{min} v_n(t) + \frac{v_n(t)(\dot{s}_n)}{2\sqrt{ab}}
 \end{aligned} \tag{1.92}$$

avec :

- v_l : la vitesse libre du véhicule,
- a_{max} : accélération maximale,
- T_{min} : le temps inter-véhiculaire minimal,
- s_0 et s_1 : inter-distances minimale et à l’arrêt respectivement,
- b : la décélération jugée confortable par le conducteur.

L’exposant δ est souvent choisi égal à 4. [MAMMAR [2007]]

Les modèles psycho-physiques

Ces modèles associent aux actions du conducteur, en plus, des manoeuvres d’accélération et de freinage, la notion de niveaux de perception. Ces niveaux donnent des seuils de réaction sous l’influence des manoeuvres du véhicule qui précède. Ces seuils sont généralement fonction de l’inter-distance et de la vitesse relative. Les premiers modèles ont été introduits par Michaels [MICHAELS [1963]] puis ont été étendus par Wiedemann [WIEDERMANN [1974]] qui a quant à lui présenté une approche qui fait la distinction entre deux états de conduite, en

l'occurrence :

- **la conduite libre** : lorsque le comportement du conducteur n'est pas influencé par celui de son leader ;

- **la conduite sous contrainte** : lorsque le conducteur doit s'adapter au comportement de son leader.

Les modèles à automates cellulaires

Le premier modèle à base d'automates cellulaires date des travaux de Cremer et Ludwig [CREMER et LUDWIG [1986]]. Le modèle de Nagel et Schreckenberg [NAGEL et SCHRECKENBERG [1992]] généralise cette approche.

Ce modèle incorpore un terme aléatoire dans la mise à jour de la vitesse. Il est capable de reproduire les diagrammes densité/vitesse et permet de mettre en évidence les phénomènes de regroupement des véhicules à forte densité et de formation des congestions. Les règles de mise à jour de la vitesse sont les suivantes [CHOWDHURY *et al.* [2000]] :

- **accélération** : Les conducteurs désirent circuler à la plus forte vitesse possible tout en respectant la contrainte de vitesse maximale v_{max} . Si la vitesse actuelle est inférieure à v_{max} , on l'augmente de 1 :

$$v_n(t+1) = \min(v_n(t) + 1, v_{max}) \quad (1.93)$$

- **décélération** : La présence de véhicules dans les cellules en aval peut contraindre le conducteur à freiner pour éviter la collision. Si l'inter-distance d_n est inférieure ou égale à v_n , la vitesse du véhicule n est réduite à $d_n - 1$:

$$v_n(t+1) = \min(v_n(t), d_n(t) - 1) \quad (1.94)$$

- **conversion aléatoire** : Cette étape est importante pour la prise en considération des comportements individuels qui diffèrent d'un conducteur à l'autre. Si la vitesse du véhicule n est positive, on la décroît de façon aléatoire de 1 avec une probabilité p :

$$v_n(t+1) = \max(v_n(t) - 1, 0), (Random(.) < p) \quad \text{avec une probabilité } p \quad (1.95)$$

- **déplacement des véhicules** : Le véhicule n est alors déplacé à la position :

$$x_n(t+1) = x_n(t) + v_n(t) \quad (1.96)$$

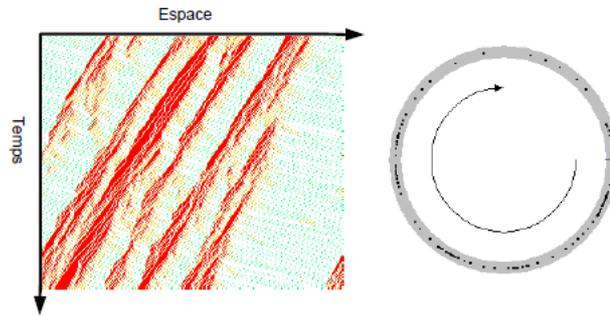


Figure 1.19 – Modèle à automate cellulaire [HELBING et SCHRECKENBERG [1999]]

Les modèles de file d'attente

Un système de files d'attente général peut être décrit par les éléments suivants :

- **Le flot des arrivées des clients** : les clients peuvent arriver individuellement ou par groupes.
- **La source des clients** : elle peut être finie ou infinie.
- **Le comportement du client** : il peut être passif, agressif, etc...
- **La loi de la durée de service de chaque client** : les durées de service sont indépendantes, identiquement distribuées et indépendantes des temps des inter-arrivées.
- **La discipline de service** : les disciplines de service les plus usuelles sont : FIFO (First In First Out), LIFO (Last In First Out), Aléatoire, Prioritaire, etc...
- **Le nombre de serveurs** : il peut y avoir un ou plusieurs serveurs selon la nature du service à fournir.
- **La capacité de la file** : elle est supposée infinie en général.

La théorie de files d'attentes s'utilise dans l'ingénierie de transport comme outil de modélisation et de régulation du trafic au niveau des carrefours avec ou sans feu de signalisation, des gares de péage, des bretelles d'accès sur l'autoroute, des restrictions de capacité ainsi que pour le dépassement entre véhicules, etc[MOUTARI [2007]]

Les modèles multi-agents

Un système multi-agent (SMA) est un ensemble d'agents situés dans un certain environnement et interagissant selon une certaine organisation. Un agent est une entité (processus, un robot, un être humain, un véhicule, etc) caractérisée par le fait qu'elle est, au moins partiellement autonome.

Les modèles multi-agents sont souvent utilisés pour l'élaboration des plans optimaux pour les feux de signalisation, pour le guidage des véhicules et pour la modélisation des flux de transport routier. D'autre part, ils permettent d'analyser les capacités des intersections.

Bomarius [BOMARIUS [1992]] a décrit un modèle multiagent dans lequel chaque objet est représenté par un agent. Ces agents échangent les variables nécessaires à leur évolution. Ce système a été implanté dans [CHAN [1996], LI *et al.* [2003]] pour un trafic urbain avec intersections signalées.

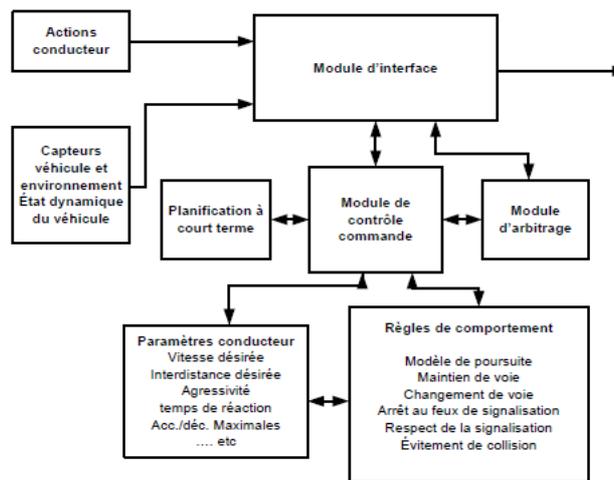


Figure 1.20 – Exemple d'agent de conduite [SUKTHANKAR *et al.* [1996]]

1.5 Conclusion

Avec Le développement des modèles macroscopiques et microscopiques de trafic routier, les propriétés mathématiques de ces derniers sont mieux comprises et les discrétisations bien maîtrisées. Il est ainsi possible par exemple de bénéficier de la méthodologie des modèles LWR : offre/demande de trafic, conditions aux limites, schéma de Godunov.[MAMMAR [2007]]

De nombreux modèles macroscopiques de trafic hétérogène ont été développés ces dernières années, essentiellement pour modéliser des flux ayant des vitesses différentes. Les différences d'occupation de l'espace selon le type de véhicules sont très peu prises en compte, alors qu'elles sont caractéristiques d'un trafic hétérogène.

Beaucoup reste à faire pour restituer la phénoménologie complète d'un trafic hétérogène dans le cadre des travaux mathématiques d'une part et des difficultés théoriques spécifiques tels que l'observabilité, la controllabilité, la stabilité qu'ils pourraient poser d'autre part.

2

Affectation du trafic

Sommaire

2.1	Introduction	53
2.2	Affectation du trafic	54
2.2.1	Les méthodes classiques d'affectation statique	55
2.2.2	Affectation dynamique du trafic	57
2.3	Modèles d'affectation du trafic en milieu urbain	61
2.3.1	Régulation locale via les feux de signalisation	62
2.3.2	Régulation globale	68
2.4	Conclusion	69

2.1 Introduction

Avec l'augmentation incessante du nombre de véhicules, les gestionnaires du transports sont en face de nouveaux problèmes qu'il faut surmonter. Par conséquent, les modèles de transport deviennent donc des outils prévisionnels destinés à orienter et à gérer la croissance. L'objectif des modèles de planification est de prévoir les déplacements à des horizons donnés. Ces modèles se décomposent généralement en quatre séquences et sont appelés "modèles à quatre étapes".[BERNE [2006]] (Figure 1, [BERNE [2006]])

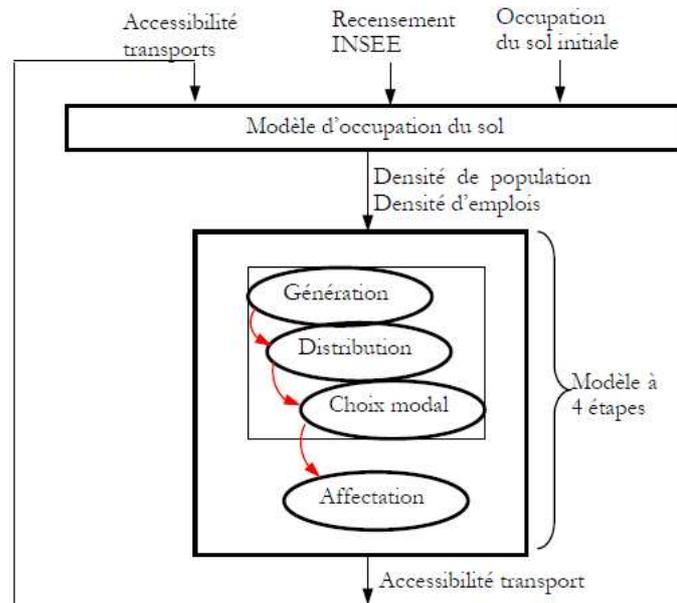


Figure 2.1 – Architecture des différents modèles

- **Étape de la génération** correspond au choix de l'individu de se déplacer ou non, et a pour objet la détermination du nombre de déplacement émis ou reçus par zone.
- **Étape de la distribution** correspond au choix pour l'individu de sa destination.
- **Étape de choix modal** a pour but de déterminer le mode utilisé par les individus. Il existe plusieurs modèles pour rendre compte de la répartition modale [ORTUZAR et WILLUMSEN [2001]]. Ces modèles ont pour base la théorie du "rational choice" qui suppose que l'unique motivation du consommateur est de maximiser son utilité ([BONNEL [2004]], [BERNE [2006]]). L'utilité est une fonction mathématique qui permet d'évaluer la satisfaction que procure un bien ou un service.
- **Étape d'affectation** correspond au choix de l'itinéraire pour se rendre d'une origine à une destination donnée et avec un mode de déplacement donné.

Dans cette section, nous présentons une revue sur les méthodes classiques de l'affectation statique et dynamique du trafic ainsi que les principales stratégies de contrôle du trafic urbain via les feux de signalisation.

2.2 Affectation du trafic

Le sujet d'équilibre de trafic est la description, par des outils analytiques, de la distribution stationnaire de véhicules dans le réseau de transport. En assumant que les voyageurs cherchent à réduire au minimum leur coût de voyage individuel, un équilibre est atteint quand aucun voya-

geur n'a une motivation de modifier sa décision de voyage.

Historiquement, le terme affectation du trafic a été utilisé pour décrire le même phénomène, reflétant le fait que la pratique n'était pas tant d'évaluer l'affectation du trafic par des modèles analytiques que l'exécution d'une répartition des voyageurs sur le réseau, typiquement pour évaluer la performance de la police contrôlant le trafic.

Le problème d'affectation du trafic consiste à répartir la demande de déplacement sur le réseau en tenant compte du choix des usagers et l'offre de systèmes de transports. Ce problème se compose, d'une part, de la modélisation du comportement des usagers et d'autre part, de la modélisation de l'écoulement du trafic consistant à représenter le choix individuel des usagers en terme de déplacement. L'hypothèse sur le comportement des usagers est que les usagers sont rationnels chacun cherchant à maximiser son propre intérêt, i.e. chacun essaie de minimiser son coût de déplacement. Cependant, les usagers n'ont pas d'information parfaite sur l'état du trafic sur le réseau. Chaque usager prend sa décision en fonction du coût prévu et le coût de déplacement est en fonction du choix de tous les usagers. L'argument principal de ce problème se manifeste par l'interaction entre le comportement des usagers et le système de transports.

2.2.1 Les méthodes classiques d'affectation statique

Les modèles d'affectation partent du principe selon lequel chaque individu cherche à maximiser son utilité, en optant pour l'itinéraire le moins coûteux.

Un grand nombre de modèles proposent de reproduire ces comportements, parmi eux :

A - Modèles d'affectation déterministe

Le mécanisme de l'affectation du trafic nécessite la formulation du coût de déplacement qui détermine le choix des usagers. Si le coût est parfaitement perçu et les usagers sont tous identiques, l'affectation est dite déterministe.

Le principe d'affectation déterministe est défini comme l'affectation du choix des usagers sur les options les moins coûteuses. [HENN [2001]]

Le coût de chaque lien est fixé, la vitesse ne varie pas lorsque la charge augmente. Cette hypothèse est donc valable lorsque le réseau n'est pas congestionné, ou alors lorsque il n'existe pas d'itinéraires alternatifs.

B - Modèles d'affectation stochastique

En revanche, l'affectation stochastique présente la variabilité de la perception du coût et l'imperfection du modèle (facteurs explicatifs ignorés). L'affectation stochastique s'appuie sur les différents principes d'affectation [HENN [2001]].

- (1) Toutes les options peuvent être choisies même si leur probabilité de choix est très faible.
- (2) Si deux options ont le même coût, la probabilité de choix est la même.
- (3) La probabilité de choix d'options est en fonction de leurs coûts.

Les modèles stochastiques les plus utilisés sont les modèles de choix discret. Ces modèles considèrent que les usagers n'ont pas la capacité parfaite de cognition sur les coûts d'options. Une

variable aléatoire est introduite pour représenter cette variation. Le modèle le plus utilisé est dit modèle **Loghit**, qui suppose que la distribution de cette variable aléatoire est identique et indépendante selon la loi de Weibull.(Figure 2, [BERNE [2006]])

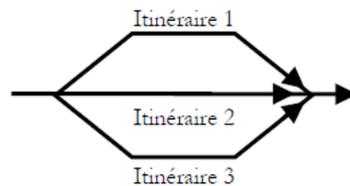


Figure 2.2 – Illustration de la méthode du type logit

Le principe d'équilibre stochastique usager préconise que les coûts perçus pour les options choisies sont égaux ou inférieurs à ceux de celles qui ne le sont pas. La probabilité de choix de l'utilisateur entre deux options R et S ne dépend que de leur coût relatif, indépendamment des autres options, ce qui n'est pas toujours vérifié. De plus le calcul peut être difficile [LEURENT [1999]].

C - Modèles d'affectation à l'équilibre de Wardrop

Un modèle de trafic bien fondé reconnaît le droit de l'utilisateur de décider quand, où et comment voyager. Un modèle d'équilibre de trafic a pour principal but, une description macroscopique ou une prédiction du volume de trafic résultant de choix de parcours faits dans le réseau de trafic, et doit donc être basé sur un choix de parcours respectant le principe comportemental. La condition d'équilibre se réfère au concept initialement présenté par le statisticien J.G.Wardrop. Depuis son fameux article [WARDROP [1952]], les conditions d'équilibre-usager sont connues comme les équilibres de Wardrop. Wardrop a présenté deux types d'équilibre de réseau : l'équilibre optimal des usagers et l'équilibre optimal du système.

Le premier préconise que l'état du trafic est en situation d'équilibre s'il vérifie la condition suivante ([HENN [2001]]) :

Le coût de chaque option (itinéraire, temps de départ, etc) effectivement utilisé est égal et inférieur à celui que ressentirait un usager isolé qui empreinterait une option inutilisée

Cette condition d'équilibre, dite équilibre-usager, est sous hypothèses que les usagers soient rationnels et identiques et qu'ils détiennent une information parfaite sur le réseau et le coût des options choisies. Cet équilibre est non-coopératif, chacun effectue son choix en fonction du coût prévu ou ressenti.

Le deuxième équilibre de Wardrop, dit optimum système, est utilisé pour la gestion du trafic qui a pour objectif de minimiser le temps de parcours total des usagers.

L'équilibre optimum système sert de critère pour évaluer des mesures de contrôle et de gestion du trafic pour atteindre l'objectif global du système.

D - Modèles d'affectation à l'équilibre stochastique

Les modèles d'équilibre incluant une composante aléatoire sont légèrement différents des modèles de Wardrop puisqu'ils supposent que chaque individu a une perception du temps généralisé de son trajet qui lui est propre. Pour chaque usager, le parcours choisi est celui qui présente le coût le plus faible et donc aucun usager n'a intérêt à choisir un autre itinéraire. L'équilibre de Wardrop est alors atteint.

L'introduction d'un facteur aléatoire a pour inconvénient de compliquer les algorithmes d'équilibre et leurs convergences, tout en augmentant les temps de calculs.[CERTU [2003]]

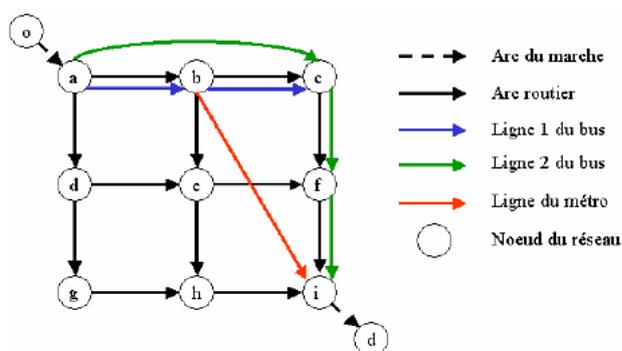


Figure 2.3 – La représentation d'un réseau multimodal statique [LO *et al.* [2003]]

2.2.2 Affectation dynamique du trafic

L'affectation dynamique traite la variation de la demande et l'écoulement du trafic qui dépendent du temps. Si l'échelle temporelle de variation de choix des usagers s'écoule d'un jour à l'autre, le problème d'affectation dit "affectation prédictive" qui suppose que les usagers apprennent au fur et à mesure l'état du réseau en se basant sur leurs expériences passées et la stabilité de l'état du trafic. L'affectation prédictive nécessite, d'une part, de modéliser le choix de temps de départ des usagers, d'autre part, de modéliser la propagation du trafic. En revanche, si l'affectation se fait en fonction d'information sur le coût en temps réel, les usagers effectuent leur choix en tenant compte de cette information. Ce mode d'affectation est dit "affectation réactive". L'équilibre usagers dans le contexte de l'affectation réactive consiste à considérer qu'à chaque point de choix les usagers empruntent le chemin le moins coûteux vers leur destination. Cette affectation prend en compte l'information sur le coût instantané d'itinéraires, qui sont différents des coûts réellement ressentis a posteriori. [MA [2007]]

La condition d'équilibre-usager de Wardrop dans le cas dynamique peut être définie de la manière suivante :

A chaque instant de départ et pour chaque itinéraire effectivement choisi, le coût ressenti par chaque usager est identique et inférieur au coût des itinéraires qui ne sont pas retenus.

Il existe quatre formulations connues du problème d'affectation dynamique. Il peut être formulé mathématiquement comme un problème de programmation mathématique ou comme un problème d'inéquation variationnelle, ou comme un problème de complémentarité non linéaire et comme un problème de point fixe [PATRIKSSON [1994]]. En plus, il existe une autre appelée approche par les systèmes dynamiques déterministes ([SMITH [1984]]; [NAGURNEY et ZHANG [1996],NAGURNEY et ZHANG [1997]]).

La plupart des modèles d'affectation dynamique développés sont formulés comme des problèmes d'inéquation variationnelle en dimension finie. Les modèles d'écoulement du trafic utilisés peuvent être classés en deux catégories : les méthodes analytiques et les méthodes de simulation. Pour la première approche, on utilise les fonctions analytiques pour estimer le temps de parcours. Mais les inconvénients résident dans le fait qu'elles ne représentent pas bien la propagation du flux du trafic. En revanche, les modèles de simulation conviennent à représenter l'écoulement dynamique du trafic de manière plus réaliste. Mais il est plus difficile de trouver des solutions d'équilibre-usager.

Parmi les méthodes de résolution des problèmes d'affectation dynamique proposées dans la littérature, on peut citer :[MA [2007]]

- les méthodes basées sur l'approche de projection ([BERTSEKAS et E.GAFNI [1982]], [NAGURNEY [1993]], [NAGURNEY et ZHANG [1996],NAGURNEY et ZHANG [1997]], [HUANG et LAM [2002]], [FRIESZ et MOOKHERJEE [2006]]).

- les méthodes basées sur l'approche de fonction de mérite ([HAN et LO [2004]], [SZETO et LO [2004]]);

- les méthodes de moyenne successive [TONG et WONG [2000]] ;

- les méthodes basées sur l'approche de système dynamique ([SMITH [1984]], [JIN [2007]]).

Les difficultés rencontrées pour la résolution d'équilibres dynamiques résident dans les difficultés du calcul sur un réseau de taille importante, les difficultés méthodologiques de résolution d'un tel équilibre dynamique d'écoulement du trafic basé sur la méthode de simulation et le manque de données pour alimenter le modèle [HENN [2001]].

Quelques logiciels d'affectation dynamique

Parmi les nombreux modèles d'affectation dynamique, il y'a ceux qui fournissent l'évolution de la congestion sur une période comprenant l'heure de pointe alors que d'autres modélisent aussi le choix de l'heure de départ.

A - L'affectation microscopique (VISSIM, AIMSUN, PARAMICS, CORSIM)

Les modèles d'affectation dynamique microscopique sont utilisés pour étudier localement les problèmes de congestion. Parmi ces modèles, on peut citer :

VISSIM : (Figure 4)

L'écoulement du trafic est simulé par le logiciel VISSIM (Verkher In Stadten-Simulation) mis au point par la firme allemande PTV AG Karlsruhe, et qui modélise de manière microscopique le comportement des véhicules par pas de temps discrets. Il est composé d'un modèle de poursuite psycho-physique pour les mouvements longitudinaux et d'un algorithme de choix développé par Wiedermann [[WIEDERMANN \[1974\]](#)] pour les changements de voies. Le modèle attribue à chaque véhicule, de manière stochastique, une vitesse, une accélération, une décélération et une distance de sécurité de référence.

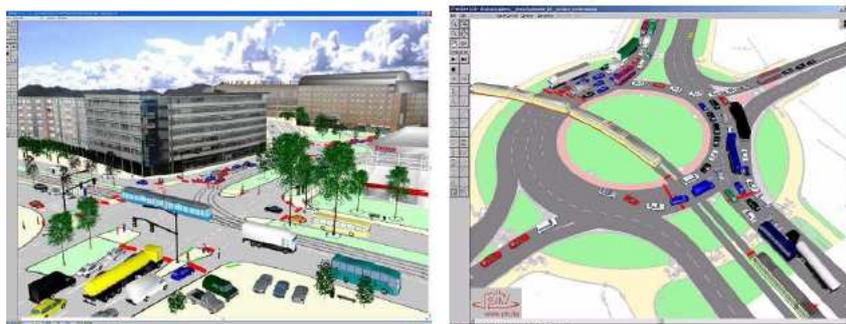


Figure 2.4 – VISSIM

PARAMICS

PARAMICS utilise aussi un modèle psycho-physique. En plus des situations de conduite de VISSIM, il permet de distinguer deux types de situations de suivi : la première à faible vitesse relative et inter-distance et la seconde à fortes vitesses relative et inter-distance. [[FRITZSCHE \[1994\]](#)]

AIMSUN : (Figure 5)

AIMSUN/GETRAM (Advanced Interactive Microscopic Simulation for Urban and Nonurban Networks) [[GETRAM/AIMSUN \[2002\]](#)] est un logiciel de simulation microscopique du trafic commercialisé par Transport Simulation Systems et qui comprend entre autre AIMSUN, un simulateur microscopique du trafic, AIMSUN 3D, un logiciel d'animation, TEDI, un éditeur graphique du réseau et l'expansion GETRAM, une interface de programmation.

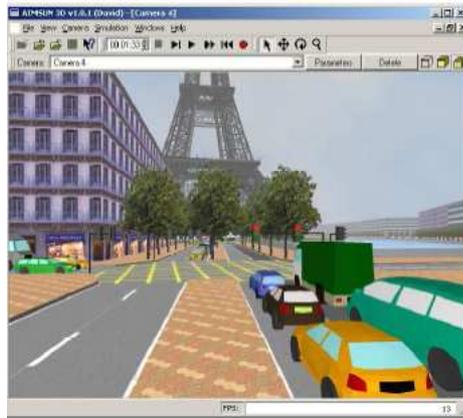


Figure 2.5 – AIMSUN

CORSIM

CORSIM-TSIS (Corridor Simulation Traffic-Traffic Software Integrated System) combine un modèle microscopique urbain NETSIM avec un modèle microscopique pour autoroute urbaine FRESIM. Il fonctionne sous l'environnement TSIS.

B - L'affectation macroscopique (METACOR)

Les modèles macroscopiques permettent de décrire la congestion de manière globale.

METACOR [ELLOUMI *et al.* [1994]](Figure 6) est un modèle macroscopique destiné à l'étude de corridors (voiries urbaines et autoroutes). La modélisation de l'affectation est incluse pour permettre le guidage dynamique des usagers dans le réseau.

Le réseau étudié est constitué d'un graphe orienté. Les divergents et convergents autoroutiers, les accès et les sorties autoroutières sont représentés par des noeuds tandis que les liaisons entre ces noeuds sont représentées par des tronçons. Les deux directions de circulation sur un tronçon sont modélisées par deux tronçons disjoints. En outre, sur chacun des tronçons, les caractéristiques géométriques telles que le nombre de voies et la courbure sont supposées homogènes.



Figure 2.6 – METACOR

C - L'affectation mesoscopique (Metropolis)

Les simulateurs de type mesoscopiques reproduisent ces phénomènes d'écoulement à un niveau intermédiaire entre l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique. [DEPALMA et MARCHAL [2002]] (Figure 7, [BERNE [2006]])

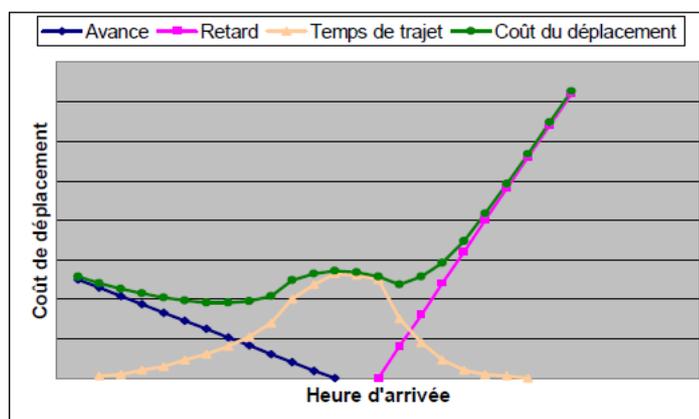


Figure 2.7 – Modèle de Vickrey : arbitrage temps de trajet/horaire

Metropolis peut affecter le trafic sur un réseau de grande taille. Il tient compte du choix de l'heure de départ dans sa fonction de coût généralisé et permet également de mettre en place un processus d'ajustement de jour en jour.

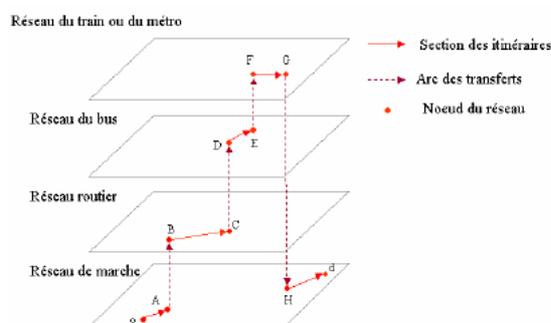


Figure 2.8 – La représentation schématique d'un itinéraire multimodal [NAG 01]

2.3 Modèles d'affectation du trafic en milieu urbain

Dans les modèles d'affectation, le trafic est le plus souvent considéré comme homogène, alors que le choix peut différer selon le type de véhicules. Par conséquent, la prise en compte de l'hétérogénéité du trafic est nécessaire pour l'affectation ([TOINT et WYNTER [1996]], [BLIEMER [2000]]) et ce pour plusieurs raisons dont :

- La différence des mécanismes de choix d'itinéraires entre les différents véhicules,

- l'impact de cette affectation sur les véhicules particuliers,
- la diffusion d'informations routières.

L'état de l'écoulement détermine le choix d'itinéraires et le modèle d'affectation du trafic. La modélisation de l'écoulement doit tenir compte des phénomènes locaux mis en jeu (entrée sur une bretelle d'accès, acceptation d'un créneau de passage, entrecroisement, régime de priorité, carrefour,...) qui peuvent conditionner le niveau de fonctionnement global d'une infrastructure. [CHANUT [2005]]

L'hétérogénéité du trafic doit être prise en considération dans la modélisation de l'écoulement dans les carrefours surtout en milieu urbain.

L'affectation du trafic urbain est une stratégie qui permet d'équilibrer les flux de véhicules entre les différentes zones du réseau, d'éviter les congestions sur certains axes et de minimiser les temps de parcours. [KACHROUDI [2010]]

Papageorgiou et al [PAPAGEORGIU *et al.* [1990]] ont été les premiers à utiliser l'affectation du trafic comme stratégie de régulation suivis par Charbonier et al [CHABONNIER *et al.* [1991]], Mahmassani et Peeta [MAHMASSANI et S.PEETA [1994]], Bolleli [BOLLELI *et al.* [1991]]..., etc.

Les stratégies de régulation via les feux de signalisation sont les plus utilisées. Cette régulation peut être locale ou globale.

2.3.1 Régulation locale via les feux de signalisation

Bien gérer les paramètres de feux de signalisation est essentiel pour réguler le trafic en général et la circulation des transports en commun en particulier.

Un plan de feu d'un carrefour est déterminé par la spécification de quatre variables : (Figure 9, [KACHROUDI [2010]])

- Diagramme de phase : une phase est une période de temps pendant laquelle des mouvements compatibles ont accès à l'intérieur du carrefour. Un diagramme de phase est une succession de phases qui permet l'accès à tous les mouvements

- Durées des différentes phases.

- Temps de dégagement appelé également rouge intégral : temps insérés entre deux phases pour des raisons de sécurité.

- Cycle : la durée totale de toutes les phases et des temps de dégagement.

- Décalage : la durée qui sépare deux événements de référence de deux carrefours successifs. Il permet d'établir une "onde verte" pour les véhicules traversant successivement deux carrefours.

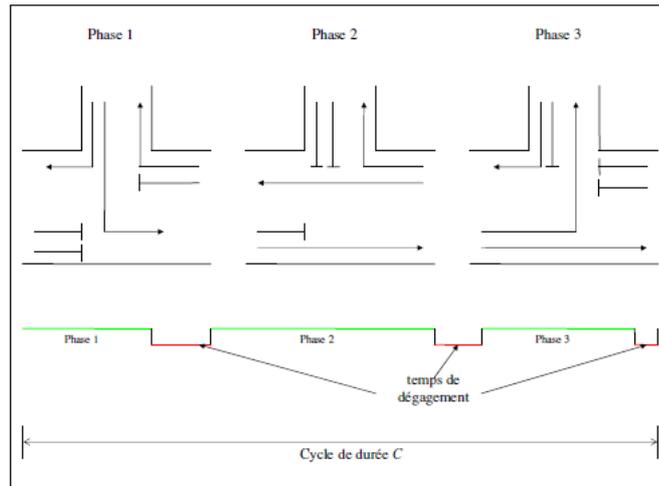


Figure 2.9 – Plan de feu d'un carrefour simple

Papageorgiou [PAPAGEORGIU [1999]] a classé les stratégies suivant plusieurs critères ; celles qui s'appuient sur les plans de feux fixes déterminés à partir de données statiques recueillies sur les sites réels (TRANSIT)[ROBERTSON [1969]], et celles qui s'appuient sur les plans de feux adaptatifs ou en temps réels.

Chaque stratégie de régulation en temps réel [PAPAGEORGIU [2006]] a ses propres variables de trafic mesurées, son propre module de prédiction (modèle de trafic) et son propre module d'optimisation qui détermine les variables optimales des plans de feux qui permettent de minimiser un critère donné (le temps de parcours,...) et aussi sa méthode de résolution (programmation dynamique, heuristique, réseaux de neurones, multi-agents, etc).

On distingue principalement deux familles de stratégies suivant qu'elles dépendent du cycle, on parle alors de stratégie cyclique, ou non, stratégie acyclique.

Stratégies cycliques (tenant compte du cycle)

En 1980, au Royaume Uni, Hunt et al [HUNT *et al.* [1982]] ont développé le système SCOOTs qui détermine au niveau de la zone de régulation la durée optimale du cycle commune à tous les carrefours. Les décalages sont calculés pour chaque carrefour en tenant compte des carrefours voisins, et les durées de phases de vert sont déterminées au niveau du carrefour indépendamment des autres carrefours.

SCATS a été proposé en 1982, en Australie, par Lowrie [LOWRIE [1982]]. Il agit au niveau local du carrefour tout en respectant les contraintes déterminées par les plans des feux adéquats pour tout le réseau considéré.

En 2002, Diakaki [DIAKAKI [2002]] a proposé la stratégie TUC (Traffic-responsive Urban Control), qui est un composant d'une stratégie plus globale appelée IN-TUC. Les cycles et les décalages étant fixés, TUC permet de déterminer les durées des phases du vert pour tous les

carrefours dans le but de minimiser le nombre total des véhicules sur le réseau. Il utilise une méthode du contrôle automatique : la commande linéaire quadratique.

En 2005, Dotoli et al [DOTOLI *et al.* [2005]], ont proposé une stratégie de régulation qui détermine les durées des phases de vert et les décalages en tenant compte des contraintes liées aux traversées piétonnes.

Stratégies acycliques (ne tenant pas compte du cycle)

Les successions de phases de vert et de rouge sont vues comme des instants de commutation. Sur un horizon de planification déterminé à l'avance, ces stratégies déterminent si, au pas de temps actuel, une commutation est nécessaire. Le choix des commutations s'effectue suivant un critère de performance donné.

Les premiers systèmes de ce type sont OPAC [GARNER [1983]] et PRODYN ([FARGES *et al.* [1983]], [KESSACI *et al.* [1990]]).

PRODYN est un système développé à Toulouse en 1980 par le CERT. Il permet de commander les feux au niveau des carrefours afin de minimiser les retards des véhicules particuliers. Il convertit le complexe problème d'optimisation de départ en de petits sous-problèmes correspondant chacun à un niveau inférieur qui traite un seul carrefour. La décomposition du problème de départ se base sur les méthodes de décomposition-coordination. La résolution de ces sous-problèmes au niveau des carrefours fait appel à la programmation dynamique.

UTOPIA a été introduit en 1989 par Mauro et DI Taranto [TARANTO et MAURO [1989]]. Cette stratégie permet de faire des estimations sur les changements dans le réseau et détermine les plans de feux de référence et certaines variables de réglages optimaux à appliquer sur les feux au niveau des carrefours.

CRONOS a été développé en 1990, à l'INRETS par Boillot et al [BOILLOT *et al.* [1992]]. Il s'inscrit dans la même lignée que OPAC et PRODYN. La résolution du problème d'optimisation s'effectue à l'aide d'une version modifiée de l'algorithme de Box, une heuristique qui donne une solution approchée.

RHODES est apparu en 1998, [MIRCHANDANI et HEAD [1998]] son architecture est composée de trois niveaux hiérarchiques. Le niveau "Réseau" ou "Network Load Control" permet d'estimer la charge du trafic sur tous les arcs du réseau se basant sur les changements de la demande à l'entrée du réseau et des choix d'itinéraire des usagers. Ces estimations sont ensuite envoyées vers le "Network Flow Control" qui détermine les durées approximatives du vert à allouer aux arcs. A partir de ces "contraintes", le niveau le plus bas "Intersection Control" choisit les changements de phases adéquats à appliquer au niveau des carrefours.

D'autres stratégies

Abu-Lebdeh et Benekohal [[ABU-LEBDEH et BENEKOHAL \[2001\]](#)] ont proposé une stratégie utilisant les algorithmes génétiques pour l'optimisation. Cette stratégie est composée de deux modules : le "control algorithm" qui détermine les durées des phases de vert et les décalages avec l'objectif de maximiser les flux de sortie des artères principales et des arcs adjacents et la "disutility function" qui mesure l'efficacité des réglages déterminés par le "control algorithm" selon la gestion voulue.

Lo [[LO \[1995\]](#)] utilise la programmation mixte en nombre entier pour déterminer, à chaque cycle, les durées des phases du vert qui permettent de minimiser les retards dans le réseau qui sont calculés par CTM " Cell Transmission Model" [[DAGANZO \[1994\]](#)]. La stratégie détermine aussi les décalages initiaux qui seront fixés par la suite.

Lo et al [[LO et al. \[2001\]](#)] ont proposé le système DISCO, où la programmation mixte en nombre entier a été remplacée par les algorithmes génétiques pour pouvoir appliquer la stratégie en temps réel.

En 2006, Beard et Ziliakopoulos [[BEARD et ZILIASKOPOULOS \[2006\]](#)], en utilisant CTM, ont introduit une stratégie combinant l'optimisation des plans de feux et la résolution d'un problème d'affectation dynamique, pour minimiser les temps de parcours dans le réseau.

Teorodovich [[TEODOROVIC \[2008\]](#)] a mis l'accent sur l'utilisation des méta-heuristiques basées sur les populations dans l'ingénierie du transport et en particulier dans la régulation du trafic. Par exemple, Wen et Wu [[WEN et WU \[2004\]](#)] ont utilisé l'algorithme des colonies de fourmis pour trouver les décalages entre carrefours adjacents.

Les systèmes de priorité aux véhicules de transport en commun

Plusieurs auteurs ont classé les systèmes de priorité aux véhicules de transport en commun suivant la nature de la régulation, ainsi A. Shalaby et al [[SHALABY et al. \[2008\]](#)] ont proposé une classification basée sur la nature de la prise de décision pour la régulation, tandis que Bhouri et al [[BHOURI et al. \[2008\]](#)] ont proposé une classification principalement axée sur l'étendue des réseaux concernés par la régulation. (Figure 10, [[KACHROUDI \[2010\]](#)])

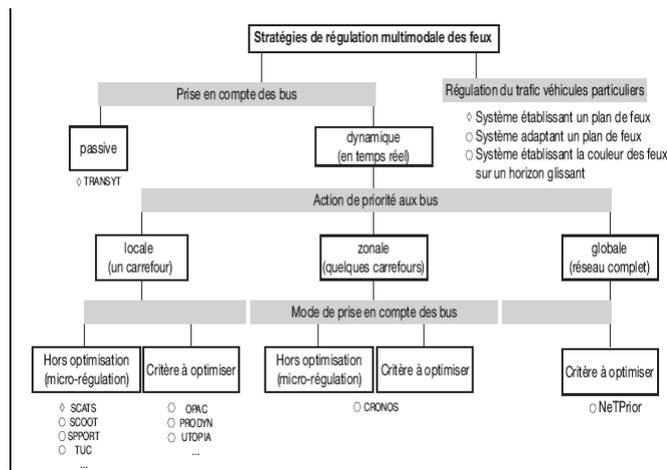


Figure 2.10 – Classification selon l'étude des zones de régulation

On distingue principalement les systèmes à priorité passive de ceux à priorité active .

Priorité passive

Les actions de priorité sont toujours opérationnelles qu'il y ait détection ou pas de bus dans le réseau.

Pour parvenir aux objectifs de la régulation passive, certaines mesures sont appliquées telles que :

- Ajuster la coordination des feux entre carrefours adjacents à la vitesse des bus au lieu de celles des voitures.
- Réduire la longueur des cycles des feux afin de réduire les attentes de bus devant les lignes de feux.
- Fractionner les phases du vert du tronçon traversé par le bus.
- Concevoir les plans de feux en tenant compte des nombres de passages plutôt que le nombre de véhicules.

Mais les variations dans les temps de stationnement ou les variations de la charge du trafic dans les arcs traversés par les bus peuvent rendre l'utilisation de ces mesures néfastes pour les bus et aussi pour le reste des usagers.

La priorité active

La priorité active ne change les plans de feux que quand un bus est détecté dans le réseau, parmi ces systèmes, il y'en a ceux qui sont classés suivant la nature des actions de régulation. On parle de stratégie à base de règles dans le cas où on peut agir en imposant des règles à respecter, et de

stratégie à base d'optimisation dans le cas où on a un ou plusieurs critères à minimiser.

Stratégies de priorité active à base de règles

Elles dépendent des objectifs de la régulation. Si par exemple, le but est de minimiser le temps de parcours d'un bus, une règle peut être une priorité absolue quand un bus est détecté près d'un feu. Dans le cas où l'objectif de régulation est le respect d'une table horaire, une règle peut consister à ne donner la priorité au bus que s'il est en retard sur son programme, s'il est en avance rien n'est effectué et le plans de feux de base est gardé.

Les actions les plus utilisées dans ce cas sont :

- Extension de la phase du vert : quand un bus s'approche d'un feu en phase de vert, la durée de cette phase est étendue pour permettre au bus de passer.

- Troncature de la phase du rouge : action qui consiste à insérer une phase spéciale pour le passage d'un bus quand il est détecté.

Les systèmes de priorité active à base de règles se divisent en deux catégories les systèmes appliqués seuls sans une régulation du trafic général (Richardson et Ogden [RICHARDSON et OGDEN [1979]], Courage et al [COURAGE *et al.* [1978]], Seware et Taube [SEWARD et TAUBE [1977]], Khasnabis et al [KHASHNABIS *et al.* [1991]], Ludwick [LUDWICK [1976]], Jacobson et Sheffi [JACOBSON et SHEFFI [1981]], Balke et al [BALKE *et al.* [2000]], Rakha et Zhang [RAKHA et ZHANG [2003]], Zhou et al [ZHOU *et al.* [2005]]) et celle qui intègrent la priorité aux bus dans un système global de régulation du trafic général (Mirchandani et al [MIRCHANDANI et WANG [2005]], Dion et Rakha [DION et RAKHA [2004]], Feng et al [FENG *et al.* [2003]], Papageorgiou [PAPAGEORGIOU [2006]].[KACHROUDI [2010]]

Priorité active basée sur l'optimisation

Dans les stratégies acycliques précédemment citées des améliorations pour la priorité aux véhicules de transport en commun ont été introduites :

- Dans **PRODYN**, deux améliorations ont été introduites ; La première idée consiste à représenter un véhicule de transport en commun que comme un véhicule particulier avec un poids de pondération plus important. Le processus de programmation dynamique reste le même. La deuxième idée introduite par Fargès et al en 1994 [FARGES *et al.* [1983]], considère les transports publics comme un mode de transport à part avec ses propres caractéristiques. Chaque fois qu'un bus est détecté à l'approche d'un carrefour, un nouveau critère est ajouté au critère des véhicules particuliers. Le nouveau critère exprime le retard du bus qui dépend du temps nécessaire pour le bus pour atteindre, depuis sa position, la ligne du feu, y compris les stations commerciales et la longueur de file d'attente devant le bus.

- Dans **CRONOS**, [BOILLOT *et al.* [1992]] pour la priorité accordée aux véhicules de transport en commun, l'objectif est de minimiser les temps d'attente des bus. Cet objectif peut être modifié selon que le bus est en avance ou en retard par rapport à un horaire théorique pré-établi. Le système de priorité aux bus est totalement intégré dans le processus d'optimisation et est composé de trois modules. Le premier permet de prédire la trajectoire d'un bus à partir de la position dans laquelle il a été détecté. La prédiction de cette trajectoire dépend d'éven-

tuels arrêts commerciaux et des longueurs de files d'attente réajustés à chaque pas de temps. Le deuxième module redéfinit les contraintes sur les feux afin d'assurer le feu vert à l'arrivée du bus sur la ligne. Les nouvelles contraintes sont limitées par des contraintes de sécurité. Le troisième module détermine les instants de commutation qui permettent de minimiser le critère pour le trafic général et celui pour les bus en respectant les contraintes imposées par le deuxième module.

D'autres stratégies existent dans le même esprit que CRONOS ou PROLYN telles que UTOPIA et OPAC.

2.3.2 Régulation globale

Quelques rares systèmes ont pour objectif la régulation globale et simultanée des deux modes de transport : les véhicules particuliers et les transports en commun.

NeTPrior

INRETS a développé à partir de 2002 [BHOURI et LOTITO [2005]], une stratégie qui permet de considérer plusieurs carrefours. Il s'agit de NeTPrior (Network Transit Priority). Cette stratégie détermine les durées optimales des phases de vert afin de minimiser un critère qui fait intervenir le trafic général et la circulation des véhicules de transport en commun. Le modèle utilisé pour décrire le trafic général est le même que celui de la stratégie TUC. Ainsi, il décrit linéairement l'évolution du nombre de véhicules sur chaque arc du réseau cycle par cycle en fonction des durées des phases de vert de tous les carrefours du réseau. Pour les véhicules de transport en commun, connaissant l'itinéraire de chaque ligne, l'équation de progression de la ligne b_i est donnée par l'équation suivante :

$$x_a^{b_i}(k) = x_{a'}^{b_i}(k - \tau_{a',a}^{b_i})$$

où $x_a^{b_i}(k)$ est le nombre de véhicules de la ligne b_i dans l'arc a au cycle k et $\tau_{a',a}^{b_i}$ est le temps de parcours des véhicules pour aller de l'arc a à l'arc a' .

$$\tau_{a',a}^{b_i} = \begin{cases} \times C & \text{si l'arc } a \text{ contient une station pour la ligne } b_i \\ C & \text{sinon} \end{cases}$$

NeTPrior utilise comme TUC la commande linéaire quadratique mais avec un vecteur d'état contenant le nombre de bus de chaque ligne traversant le réseau. Dans TUC, le critère quadratique ne mesure que le nombre total de tous les véhicules sur tous les arcs avec des poids donnés par une matrice fixée par l'utilisateur. Dans NeTPrior, le critère fait intervenir le nombre total des véhicules sur tous les arcs mais avec des poids qui varient dynamiquement en fonction du nombre de véhicules de transport en commun présents sur les arcs. La priorité donnée aux véhicules de transport en commun est donnée en minimisant les files d'attente sur les arcs où sont les véhicules et au moment où ils y sont.

NeTPrior est une stratégie globale qui agit sur de très larges réseaux urbains et qui tient compte de la progression des véhicules de transport en commun au même titre que le trafic général. Elle

a été testée en simulation sur le logiciel Dynasim pour un réseau situé dans le sud de la ville de Paris.[KACHROUDI [2010]]

DARVIN

P.A.Duerr [DUERR [2007]] a proposé une approche intégrale appelée DARVIN pour garantir une priorité pour les véhicules de transport en commun au niveau de carrefours à feux sans pénaliser le trafic général.

Le système DARVIN se base sur un modèle évènementiel pour la progression des véhicules de transport en commun qui a les caractéristiques suivantes :

- Il représente les véhicules individuellement dans un niveau microscopique.
- Il modélise les interactions entre les véhicules et le reste du trafic.
- Il ne nécessite pas de lourds calculs ce qui rend la simulation rapide.

L'objectif de ce système est la détermination des instants de début et les durées des phases de vert des carrefours du réseau qui minimisent le critère suivant :

$$F(b_{j,k}, e_{j,k}) = \sum_i \sum_j (d_{i,j} + \lambda \cdot s_{i,j}) \cdot \gamma_i$$

où $d_{i,j}$ représente le retard du véhicule i dans le carrefour j et $s_{i,j}$ une variable booléenne égale à 1 s'il y'a arrêt dans la file d'attente et 0 sinon. λ et γ_i sont des coefficients de pondération. Enfin $b_{j,k}$ et $e_{j,k}$ représentent le début et la fin de la phase de vert pour l'arc du carrefour j au cycle k .

Pour résoudre le problème d'optimisation, l'auteur utilise la méthode d'algorithmes génétiques.

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié tout d'abord le principe d'affectation du trafic, nous avons présenté les différentes formulations du problème d'affectation statique ou dynamique qui s'appuient toutes deux sur le principe qui décrit la condition d'équilibre du réseau ainsi que les différentes méthodes de résolution et les difficultés rencontrées.

Par la suite, nous avons passé en revue les méthodes de régulation du trafic urbain multimodale. Nous nous sommes focalisés sur la régulation via les feux de signalisation.

3

Modélisation hétérogène de flux de trafic routier

Sommaire

3.1	Introduction	71
3.2	Modèle d'écoulement des flux de trafic	73
3.2.1	Modèles de trafic routier	74
3.2.2	Interaction des classes suivant un équilibre-usager	76
3.3	Schéma numérique	83
3.3.1	Régime de trafic fluide	84
3.3.2	Régime semi-congestionné	86
3.3.3	Régime congestionné	86
3.4	Observabilité et synthèse	88
3.4.1	Principe des observateurs	88
3.4.2	Résultats généraux d'observabilité et de controllabilité	89
3.4.3	Extension du schéma d'estimation	90
3.4.4	Régime de trafic fluide	90
3.4.5	Régime de trafic congestionné	92
3.5	Analyse de la stabilité	93
3.6	Résultats numériques	95
3.7	Conclusion	99

3.1 Introduction

Afin d'appuyer les stratégies de gestion du trafic, il est essentiel de clairement comprendre les causes de la congestion et de sa propagation. Si l'essai de nouvelles stratégies de contrôle

dans la vie courante est très coûteux et pas toujours possible. En revanche, les simulations de trafic permettent d'évaluer la performance d'une stratégie de contrôle donnée en un court laps de temps. Par conséquent les simulations sont particulièrement utiles dans le choix de la meilleure stratégie durant les premières étapes de la mise en oeuvre de nouveaux contrôles du trafic.

Le déploiement de systèmes de transport intelligents a mené à l'élaboration de modèles macroscopiques, comme le modèle de transmission cellulaire CTM (Cell Transmission Model) de Daganzo [[DAGANZO \[1994\]](#)].

CTM est une discrétisation, basée sur le schéma de Godunov [[GODUNOV \[1959\]](#)] proposée par Daganzo [[DAGANZO \[1994\]](#)] et Lebacque [[LEBACQUE \[1996\]](#)], appliquée à l'onde cinématique équation aux dérivées partielles de Lighthill et Whitham [[LIGHTHILL et WHITHAM \[1955\]](#)] et Richards [[RICHARDS \[1956\]](#)]. CTM est largement utilisée aujourd'hui, cette popularité est due à ses très faibles exigences en calculs par rapport aux autres modèles de microsimulation.

Ainsi, CTM peut être calibrée en utilisant en un point, les données disponibles régulièrement d'un détecteur (Lin et Ahanotu [[LIN et AHANOTU \[1995\]](#)] ; Munoz et al [[MUNOZ et al. \[2004\]](#)] ; son extensibilité à des réseaux (Buisson et al [?]) et les routes urbaines avec carrefours à feux (Lo [[LO \[2001\]](#)] ; Almasri et Friedrich [[ALMASRI et FRIEDRICH \[2005\]](#)]) et la souplesse avec laquelle elle peut être utilisée pour poser des problèmes de trafic d'affectation (Buisson et al [?]; Ziliaskopoulos [[ZILIASKOPOULOS \[2000\]](#)]) et de rampe de comptage (Daganzo et Lin [[DAGANZO et LIN \[1993\]](#)] ; Zhang et al [[ZHANG et al. \[1996\]](#)] ; Gomez et Horowitz [[GOMEZ et HOROWITZ \[2006\]](#)]).



Figure 3.1 – Voies dédiées bus sur autoroute

Pour des applications pratiques concernant les réseaux urbains et suburbains, il est essentiel de prendre en compte les transports en commun, notamment les autobus dont l'impact sur le trafic est grand pour plusieurs raisons (Leur comportement est différent des autres véhicules, leurs itinéraires sont spécifiques et leurs caractéristiques cinématiques sont différentes) [[LEBACQUE et al. \[1998\]](#)].

Parce que les bus utilisent les mêmes routes que les autres véhicules et contribuent à la demande croissante des transports de surface. Cette situation a atteint une limite dans de nombreuses zones urbaines. Pour cette raison, l'utilisation de dispositifs automatisés et des techniques de

contrôle avancé comme, le régulateur de vitesse adaptatif, la traction de pointe et les systèmes de freinage, systèmes d’alerte du conducteur, et des mesures de contrôle en temps réels sur les bretelles d’accès des réseaux de transport composés de routes, d’autoroutes et de voies urbaines est devenue une approche commune pour atténuer les impacts quotidiens des embouteillages.[[ROSAS-JAIMES et ALVAREZ-ICAZA \[2007\]](#)]

Dans ce chapitre, nous avons, dans un premier temps, en nous inspirant des travaux de Logghe et Immers [[LOGGHE et IMMERS \[2008\]](#)] et de Chanut [[CHANUT \[2005\]](#)] construit un modèle hétérogène composé de deux classes, l’une de véhicules particuliers et l’autre de bus, où les classes interagissent sur la base d’un équilibre non coopératif. Le flux des bus agit en tant que goulet d’étranglement pour les véhicules particuliers, alors que ces derniers tentent de maximiser leur vitesse sans influencer sur les bus. Cela signifie que les véhicules vont réagir à des stimuli en amont, c’est le principe du caractère anisotrope du trafic [[LOGGHE \[2003\]](#)].

Puis, comme dans les travaux de Munoz et al [[MUNOZ *et al.* \[2003\]](#)] et de O.Rosas-Jaimes et L.Alvarez-Icaza [[ROSAS-JAIMES et ALVAREZ-ICAZA \[2007\]](#)] nous avons adopté le modèle de transmission cellulaire CTM pour estimer les densités et les vitesses des véhicules particuliers et des bus sur un tronçon d’autoroute.

Le modèle d’estimateur des densités et des vitesses est non linéaire. Le nombre de modèles non linéaires impliqués dans le système d’estimation est réduit à deux : l’un correspondant à toutes les cellules en trafic fluide et l’autre à toutes les cellules en trafic congestionné. Cette réduction n’est pas criticable pour deux raisons :

- (a) des données de terrain indique que d’autres configurations correspondent à des situations qui sont présentes pour de courtes périodes de temps pendant une journée normale de circulation, et
- (b) il a été démontré dans [[DAGANZO \[1994\]](#)] que ces deux modèles correspondent aux seuls points d’équilibre stables, où seuls les flux aux limites de chaque tronçon sont connus [[ROSAS-JAIMES et ALVAREZ-ICAZA \[2007\]](#)].

Nous commençons par la formulation du modèle de l’écoulement du trafic bimodal. Ensuite, le schéma numérique est présenté en régime fluide du trafic puis en régime congestionné. Nous présentons après notre Observateur P2I ou l’extension du schéma pour l’estimateur des densités et des vitesses. Les propriétés de stabilité de ces estimateurs sont discutées. Nous terminons par exposer les résultats numériques obtenus.

3.2 Modèle d’écoulement des flux de trafic

Dans cette section, nous présentons un modèle hétérogène bi-classes basé sur l’équilibre-usager de Logghe [[LOGGHE et IMMERS \[2008\]](#)]. Nous définissons les paramètres du modèle. Ensuite, nous rappelons le modèle de Logghe et nous faisons une analyse analytique du modèle.

3.2.1 Modèles de trafic routier

Nous développons un cadre multi-classes du modèle de premier ordre LWR. Tout d'abord, nous formulons le modèle LWR multi-classes général. Par la suite, nous rappelons le modèle de transmission cellulaire CTM ainsi que le principe d'équilibre usager.

Formulation du modèle LWR multi-classes

Le trafic est supposé sur un tronçon de route de caractéristiques fixes. Le flux de trafic sont composé des flux de véhicules particuliers et de bus qui appartiennent à la classe 1 et à la classe 2, respectivement. Pour chaque classe, les densités k_i , les flux de q_i et les vitesses moyennes v_i peuvent être définies. Pour la densité totale k , le flux total q et la vitesse moyenne totale v , pour l'ensemble des classes, sans indice, les relations suivantes s'appliquent :

$$k = \sum k_i \quad (3.1)$$

$$q = \sum q_i \quad (3.2)$$

$$v = \frac{q}{k} = \sum \left(\frac{k_i}{k} \right) \cdot v_i \quad (3.3)$$

Par cette définition de la vitesse moyenne des flux hétérogènes, la relation $q = kv$ continue de s'appliquer pour chaque classe distincte et pour le débit total.

La loi de conservation du trafic, qui constitue la base du modèle de LWR, s'applique à la fois à chaque classe i à part et à l'écoulement du trafic global.

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} + \frac{\partial q_i}{\partial x} = 0 \quad (3.4)$$

Comme dans le modèle LWR, une relation d'équilibre est utilisée qui exprime le débit d'une classe en fonction de la densité. Ce flux d'équilibre est fonction de toutes les densités des classes.

$$q_i = Q_{ei}(k_1, k_2) \quad (3.5)$$

Le modèle d'écoulement de trafic homogène LWR est construit autour de l'équation scalaire de conservation des véhicules. Sa résolution analytique, bien connue est bâtie sur la méthode des caractéristiques. Le modèle d'écoulement hétérogène étudié ici constitue quant à lui un système de deux équations de conservation obtenues par l'introduction des relations d'équilibre dans l'équation de conservation. Sa résolution analytique fait appel à la théorie des systèmes hyperboliques d'équations.

$$\frac{\partial K}{\partial t} + Q'_e \frac{\partial K}{\partial x} = 0 \quad (3.6)$$

avec

$$K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \quad Q'_e = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_{e1}}{\partial k_1} & \frac{\partial Q_{e1}}{\partial k_2} \\ \frac{\partial Q_{e2}}{\partial k_1} & \frac{\partial Q_{e2}}{\partial k_2} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Les valeurs propres de Q'_e représentent les vitesses des caractéristiques de la solution. Ces ondes cinématiques montrent comment se propagent les informations liées au trafic. Ainsi, une onde de choc se produit dans la solution analytique. Ce sont des lignes dans le plan de solutions où les densités de classe changent de façon discontinue. La condition de Rankine-Hugoniot montre comment les changements des densités de classe et des flux à travers l'onde de choc sont liés à la vitesse s de l'onde :

$$s = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\partial q_i}{\partial k_i} \quad (3.8)$$

La vitesse de l'onde de choc est donc liée aux changements de la densité et de débit. Notons que cette condition s'applique à la fois pour les variables de chaque classe et au flux du trafic total.

Le modèle de transmission cellulaire CTM

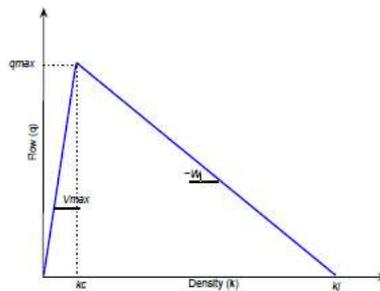


Figure 3.2 – Diagramme fondamental triangulaire

Dans [DAGANZO [1995]], il a été démontré que si la relation entre le flux de trafic q et la densité k est de la forme représentée sur la Figure 2 :

$$q = \min\{vk, q_{max}, w(k_j - k)\} \quad (3.9)$$

alors les équations LWR peuvent être approchées, sur un tronçon de route, par un ensemble d'équations de différences finies où les conditions actuelles du trafic (l'état du système) sont mises à jour avec un pas de temps. Dans l'expression précédente, v, Q_{max}, w et k_j sont des constantes désignant, respectivement, la vitesse libre, le débit maximal (ou la capacité), la vitesse de congestion et la densité maximale.

Equilibre-usager

On commence par rappeler le diagramme fondamental homogène d'une classe définie par Logghe [LOGGHE et IMMERS [2008]] ainsi que le principe d'équilibre usager :

$$\begin{aligned} q_1 &= Q_{e1}(k_1, 0) \\ q_2 &= Q_{e2}(0, k_2) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ici, comme dans le mode d'équilibre de Wardrop [[WARDROP \[1952\]](#)], tous les véhicules essayent de réduire leur temps de voyage, ce qui revient à maximiser leur vitesse. Dans l'équilibre-usager optimal, les véhicules particuliers ne sont pas en mesure d'augmenter leur vitesses sans diminuer celle des bus.

Cette définition tient compte explicitement de la propriété anisotropique du trafic. La vitesse d'un véhicule dépend uniquement de celle des véhicules à une vitesse égale ou inférieure.

Dans une définition plus précise de cet équilibre-usager optimal, Logghe et Immers [[LOGGHE et IMMERS \[2008\]](#)] supposent que les véhicules lents ne peuvent pas occuper plus d'espace que nécessaire. Cet usage des routes apparaît également dans les règles européennes sur les dépassements sur les routes à plusieurs voies. Les bus sont censés rester sur la voie de droite.

En régime libre du trafic, les classes ont des vitesses différentes. En régime congestionné du trafic, l'équilibre-usager optimal donne toujours des vitesses égales pour les deux classes.

3.2.2 Interaction des classes suivant un équilibre-usager

Dans cette section, nous nous présentons l'application de la théorie des systèmes hyperboliques d'équations à la résolution de notre modèle LWR bi-classes basé sur l'hypothèse d'équilibre-usager [[LOGGHE et IMMERS \[2008\]](#)], les flux de trafic sont divisés en deux classes, une pour les véhicules particuliers et le second pour les bus. Chaque classe est décrite par un diagramme fondamental triangulaire $(k - q)$.

L'objectif initial de la séparation d'un trafic hétérogène en classe est de considérer ces classes aussi homogènes que les variables explicatives dans le modèle, à savoir : la longueur des véhicules et les vitesses de conduite.

Les flux des deux types sont décrits séparément, mais ils sont toujours ensemble ou en régime congestionné ou en régime fluide. Les deux classes sont supposées interagir sur la base d'un équilibre-usager. Cet état stipule qu'aucun véhicule ne peut augmenter sa vitesse sans influencer la vitesse des bus. Le plus grand espace occupé par les bus, qui augmente la densité totale et diminue donc la vitesse des bus, mais aussi la vitesse des véhicules.

Cette application suit une série d'étapes bien définies. Ainsi, après avoir fixé les notations utilisées et formulé le problème à résoudre, on présente les propriétés principales du modèle hétérogène construites sur la base de l'équilibre-usager. La résolution complète du modèle est réalisée à travers des problèmes de Riemann types.

Paramètres du modèle

Dans la suite, les variables et paramètres relatifs aux véhicules particuliers, seront indicés par $i = 1$, ceux relatifs aux bus indicés par 2.

On notera de la façon suivante les paramètres du modèle :

- V_i : les vitesses libres des véhicules. On a naturellement $V_1 > V_2$,
- v_i : la vitesse critique. Elle correspond au passage du trafic fluide au trafic congestionné et est choisie telle que $w_i < V_2$,
- a_i : Les longueur caractéristique du véhicule ou du bus, choisie comme somme de sa propre longueur l_i et de la distance minimale entre un véhicule et le véhicule précédent m_i :

$$a_1 = l_1 + m_1 \quad a_2 = l_2 + m_2 \quad (3.11)$$

- N : le nombre de voies de l'infrastructure ;

- $k_i(x, t) = k_i$: les densités partielles en véhicules ;

Deux densités sont remarquables : la densité maximale k_J , où la vitesse du trafic est nulle (la congestion arrête le trafic) et la densité critique k_c , qui est la densité à laquelle le trafic passe d'un régime fluide à un régime congestionné.

La densité maximale prévue pour un trafic hétérogène composé de véhicules particuliers et de bus, avec une fraction p d'entre eux, est la suivante :

$$k_J = \frac{N}{(1-p)a_1 + pa_2} \quad (3.12)$$

Ici, p est défini comme le rapport entre la densité des bus et la densité totale $k(x, t) = k = k_1 + k_2$:

$$p = \frac{k_2}{k_1 + k_2} \quad (3.13)$$

Dépendante des densités partielles, la densité maximale s'exprime comme :

$$k_J(k_1, k_2) = \frac{N(k_1 + k_2)}{k_1 a_1 + k_2 a_2} \quad (3.14)$$

La densité critique dépend aussi de la composition du trafic et est reliée à la densité k_J maximale par :

$$k_c(k_1, k_2) = \beta k_J(k_1, k_2) \quad (3.15)$$

avec β rapport constant, choisi généralement comme $\frac{1}{4}$, [LEBACQUE *et al.* [1998]]

$v_i(x, t) = v_i$ sont les vitesses de différentes classes ; elles sont directement liées par une relation phénoménologique aux densités partielles ; en congestion elles sont égales pour les deux types de véhicules et on notera plus simplement $v_1 = v_2 = w$. [CHANUT [2005]]

Les densités maximales pour les véhicules k_{J1} et les bus k_{J2} sont respectivement définies comme suit :

$$k_{J1} = \frac{N}{a_1} \quad (3.16)$$

$$k_{J2} = \frac{N}{a_2} \quad (3.17)$$

Les densités critiques sont respectivement, k_{c1} et k_{c2} .

Propriétés générales du modèle

Diagrammes fondamentaux

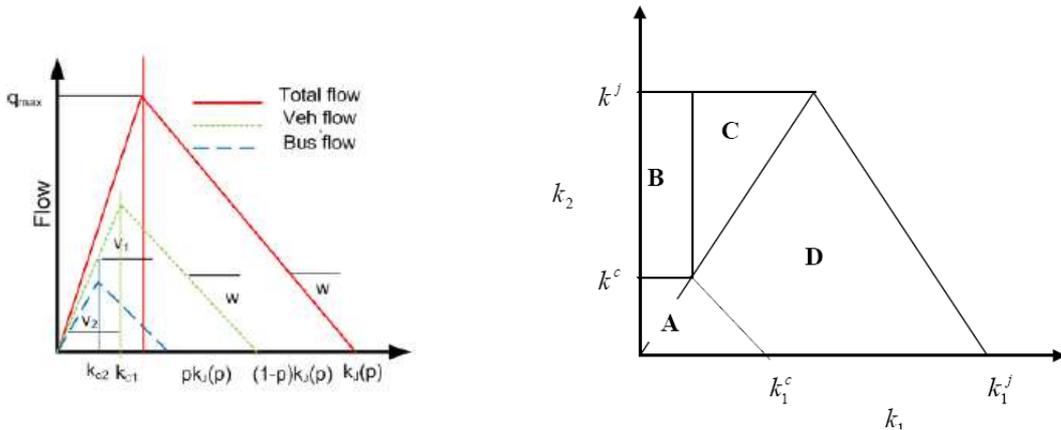


Figure 3.3 – Débit total basé sur la densité totale, débits partiels basés sur les densités partielles

Figure 3.4 – Les différents régimes de trafic

Figure 3.5 – Les diagrammes fondamentaux

Chacune des deux classes est décrite sur la base d'un diagramme triangulaire fondamental. L'interaction entre les deux classes basée sur l'équilibre-usager s'exprime dans les diagrammes triangulaires comme

$$Q_{ei}(k) = \begin{cases} k \cdot v_i & k \leq k_{ci} \\ w_i \cdot (k_{Ji} - k) & k > k_{ci} \end{cases} \quad (3.18)$$

avec $w_1 = \frac{k_{c1} \cdot v_1}{k_{J1} - k_{c1}}$, $w_2 = \frac{k_{c2} \cdot v_2}{k_{J2} - k_{c2}}$.

Trois régimes de flux de trafic peuvent être distingués en fonction des densités partielles : le régime fluide, le régime semi-congestionné et le régime congestionné.

Régime A : Trafic fluide

L'état du trafic où chacune des classes peut maintenir sa vitesse maximale est classé sous le régime fluide. La vitesse d'une classe est donnée par :

$$v_i = V_i \quad (3.19)$$

Quand cette condition suivante est posée :

$$\frac{k_1}{k_{c1}} + \frac{k_2}{k_{c2}} \leq 1 \quad (3.20)$$

appliquée à Q'_e dans la formule (3.5) donne

$$Q'_e = \begin{bmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = v_1 > \lambda_2 = v_2$

Les vecteurs propres associés sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ respectivement.

Le système est strictement hyperbolique et les champs caractéristiques associés aux deux valeurs propres sont linéairement dégénérés, ce qui signifie que les valeurs propres sont constantes le long de chaque ligne de ces champs respectivement. Le caractère anisotrope du trafic est respecté.

Dans ce régime, les véhicules et les bus se comportent d'une façon complètement indépendante les uns des autres et les véhicules particuliers peuvent dépasser les bus sans problème. Les classes ne s'influencent pas mutuellement et le principe d'équilibre-usager est respecté.

Régime B : Trafic semi-congestionné

Le terme « semi-congestion » a été pris de Daganzo [DAGANZO [2002]]. Il indique intrinsèquement que les bus peuvent fonctionner dans un régime fluide bien que les véhicules subissent déjà la congestion.

La vitesse de la classe bus reste égale à la vitesse maximale $v_2 = V_2$, et en respectant l'équilibre-usager, la vitesse de la classe véhicule est égale à ce qui suit : [LOGGHE et IMMERS [2008]]

$$v_1 = \frac{w_1}{k_1 k_{c2}} (k_1 k_{c2} - k_{c2} k_{J1} + k_2 k_{J1}) \quad (3.22)$$

Ce régime demeure valide tant que la vitesse de la classe véhicules est supérieure ou égale à la vitesse de la classe bus en régime fluide.

Q'_{ei} dans la formule (5) conduit à

$$Q'_e = \begin{bmatrix} w_1 & \frac{w_1 k_{J1}}{k_{c2}} \\ 0 & v_2 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = w_1$ et $\lambda_2 = v_2$.

Les vecteurs propres associés sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{w_1 k_{J1}}{k_{c2}(v_2 - w_1)} \\ 1 \end{pmatrix}$ respectivement.

Le système est strictement hyperbolique et les champs caractéristiques associés aux deux valeurs propres sont linéairement dégénérés, ce qui signifie que les valeurs propres sont constantes le long de chaque ligne de ces champs respectivement.

Le régime de semi-congestion est conforme à l'équilibre-usager ; La classe des bus est en mesure de maintenir sa vitesse maximale, tandis que la classe des véhicules peut maximiser sa vitesse sans influencer la classe des bus. La classe des bus fonctionne comme un goulet d'étranglement mobile pour la classe de véhicules.

Régime C : Trafic congestionné

La vitesse des deux classes est inférieure à la vitesse de trafic fluide de la classe des bus. Dans ce cas, la vitesse des deux classes est identique (D dans la figure 3.5) et le trafic fonctionne selon un régime de FIFO.

Quand la condition suivante est mise :

$$1 < \frac{k_1}{k_{c1}} \quad , 1 < \frac{k_2}{k_{c2}} \quad (3.24)$$

. La vitesse des deux classes est, d'après [LOGGHE [2003]]

$$w = \frac{\frac{k_1}{k_{J1}} + \frac{k_2}{k_{J2}} - 1}{\left(\frac{k_1}{k_{J1}w_1} + \frac{k_2}{k_{J2}w_2}\right)} \quad (3.25)$$

En remplaçant dans Q'_e dans la formule (5) on a :

$$Q'_e = \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{M^2} \left(\left(\frac{k_1}{k_{J1}} \right)^2 w_2 + 2 \frac{k_1 k_2}{k_{J1} k_{J2}} w_1 - \frac{k_2}{k_{J2}} w_1 + \left(\frac{k_2}{k_{J2}} \right)^2 w_1 \right) & \frac{k_1}{M^2 k_{J2}} \left(\left(\frac{k_1^2 w_2}{k_{J1}} - \frac{k_1^2 w_1}{k_{J1}} + w_1 \right) \right) \\ \frac{k_2}{M^2 k_{J1}} \left(\left(\frac{k_2^2 w_1}{k_{J2}} - \frac{k_2^2 w_2}{k_{J2}} - w_2 \right) \right) & \frac{1}{M^2} \left(\left(\frac{k_2}{k_{J2}} \right)^2 w_1 + 2 \frac{k_1 k_2}{k_{J1} k_{J2}} w_2 - \frac{k_1}{k_{J1}} w_2 + \left(\frac{k_1}{k_{J1}} \right)^2 w_2 \right) \end{array} \right] \quad (3.26)$$

avec

$$M^2 = \frac{1}{w_1 w_2} \left(\frac{k_1 w_1}{k_{J1}} + \frac{k_2 w_1}{k_{J2}} \right)^2 \quad (3.27)$$

Les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = \frac{\frac{k_1}{k_{J1}} + \frac{k_2}{k_{J2}} - 1}{\left(\frac{k_1}{k_{J1}w_1} + \frac{k_2}{k_{J2}w_2}\right)} = w \lambda_2 = \frac{\frac{k_1}{k_{J1}} + \frac{k_2}{k_{J2}}}{\left(\frac{k_1}{k_{J1}w_1} + \frac{k_2}{k_{J2}w_2}\right)} = W$$

Les vecteurs propres associés sont $\begin{pmatrix} -\frac{k_{J1}w_1 - k_1w_1 + k_1w_2}{k_{J2}w_2 + k_2w_1 - k_2w_2} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{k_1}{k_2} \\ 1 \end{pmatrix}$ respectivement.

Le système est strictement hyperbolique et les champs caractéristiques associés aux deux valeurs propres sont linéairement dégénérés, ce qui signifie que les valeurs propres sont constantes le long de chaque ligne de ces champs respectivement.

La composition du trafic ne change pas le long de cette deuxième caractéristique. La congestion est donc caractérisée par une vitesse homogène ayant des propriétés FIFO. La composition ne peut changer le long d'une trajectoire et les débits sont proportionnels aux densités.

Résolution du problème de Riemann

Résoudre le problème proposé revient à chercher la solution de problèmes dits de Riemann, c'est à dire constitués du système de lois de conservation et de conditions initiales constantes par morceaux avec une unique discontinuité en $x = 0$ telles que :

$$(k_1, k_2)(x, 0) = \begin{cases} (k_1^s, k_2^s), & x < 0 \\ (k_1^d, k_2^d), & x > 0 \end{cases} \quad (3.28)$$

avec $k_1^s, k_2^s, k_1^d, k_2^d$ des constantes.

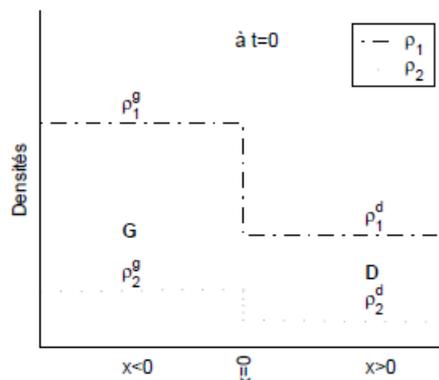


Figure 3.6 – Problème de Riemann pour un modèle de trafic hétérogène

Les transitions peuvent comporter différents types d'ondes de chocs, de raréfaction ou des discontinuités de contact. En outre, de nouveaux états intermédiaires peuvent être introduits dans les solutions.

Les conditions de Rankine-Hugoniot entre un état de trafic en amont G et un état de trafic en aval D pour le problème de Riemann sont

$$s = \frac{q_1^s - q_1^d}{k_1^s - k_1^d} \quad (3.29)$$

$$s = \frac{q_2^s - q_2^d}{k_2^s - k_2^d}$$

La vitesse de s de l'onde de choc doit être la même pour les deux classes. Si une seule catégorie est en cause, alors la densité et le débit de l'autre reste inchangée.

$$\lambda_i^s \geq s \geq \lambda_i^d \quad (3.30)$$

Les ondes de transitions dans les trois régimes de trafic se font sous forme d'ondes de contacts C_i :

Régime fluide :

Dans ce cas, à la fois l'amont et l'aval du trafic appartiennent à des régimes fluides. Deux types de discontinuités peuvent survenir dans ce régime

(1) La courbe de 1-contact et de vitesse v_1

Elle s'exprime selon :

$$C_1(k^d) = \{k^g \text{ telle que } k_1^g k_2^d = k_1^d k_2^g\}$$

ce qui traduit la conservation de la composition du trafic.

On peut considérer que cette onde de contact est une onde de choc de vitesse particulière quand l'état d'arrivée est tel que $k^g > k^d$, et une onde de raréfaction (d'étendue spatiale nulle) quand $k^g < k^d$. Elle n'affecte pas la classe 1, mais affecte la classe 2. Elle est parallèle aux trajectoires des véhicules.

(2) La courbe de 2-contact et de vitesse v_2

De façon analogue, elle s'exprime selon :

$$C_2(k^d) = k^g \text{ telle que } k^g = k^d$$

ce qui traduit la conservation de la densité totale, et donc ici de la vitesse du trafic. On peut considérer que cette onde de contact est une onde de choc de vitesse particulière, égale à la vitesse du trafic des états qu'elle sépare, quand $k^g < k^d$, et une onde de raréfaction (d'étendue spatiale nulle) quand $k^g > k^d$. Elle affecte les deux classes.

Les courbes 2-contact conduisent également à une augmentation des vitesses par diminution des densités de véhicules particuliers et de bus, jusqu'à disparition de ces derniers.

Régime semi-congestionné :

Deux types d'ondes de contact peuvent se produire lorsque les états du trafic en amont et en aval sont en régime semi-congestionné.

(1) La courbe de 1-contact et de vitesse w_1

Cette onde de discontinuité de contact fonctionne en parallèle avec la branche en congestion de la classe 1 et n'affecte pas la classe 2. La densité du trafic de classe 1 peut à la fois se compresser et se décompresser sur cette onde.

(2) La courbe de 2-contact de vitesse v_2

Cette discontinuité affecte les deux classes. Une augmentation de la densité d'une classe entraîne une diminution correspondante de l'autre classe.

Régime congestionné :

(1) La courbe de 1-contact et de vitesse w
Cela va de pair avec la discontinuité des trajectoires.

(2) La courbe de 2-contact et de vitesse W
La composition du trafic est maintenue sur cette onde. Les vitesses des véhicules sont modifiées. Une augmentation ou une diminution des densités sont possibles.

3.3 Schéma numérique

La formulation du modèle est général et pourrait être appliqué à tout type de réseau. Cependant, par souci de clarté, un tronçon de la route à plusieurs voies représenté (Figure 7) est envisagée. Il est représenté par cinq cellules, une rampe d'accès des flux de véhicules et de bus et une bretelle de sortie de véhicule et le bus. Une cellule est une section de longueur L_i .

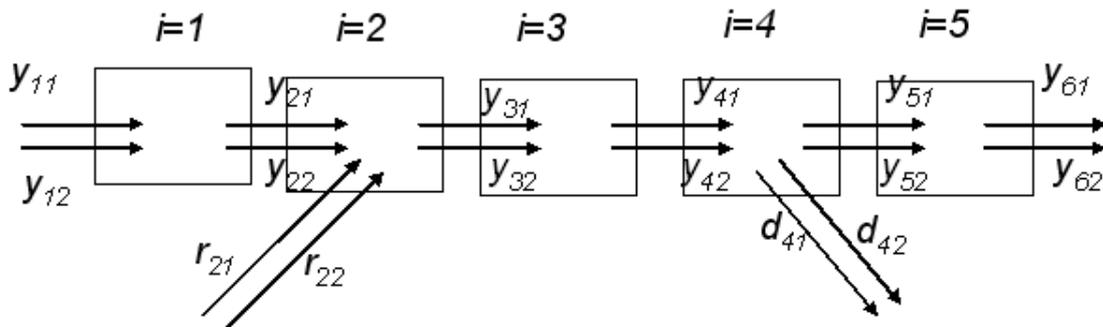


Figure 3.7 – Tronçon d'autoroute divisé en 5 cellules



Autoroute A10 entre La Folie Bessin et Palaiseau

Figure 3.8 – Autoroute A10 entre La Folie Bessin et Palaiseau

Le modèle proposé est inspiré par ceux introduits dans ([DAGANZO [1994]], [G.GOMEZ *et al.* [2008]], [MUNOZ *et al.* [2003]] et [ROSAS-JAIMES et ALVAREZ-ICAZA [2007]]).

L'indice i de la cellule est ajouté à toutes les variables.

Les débits pour les véhicules et les bus entre les cellules sont donnés par :

$$\begin{aligned} q_{i1} &= \min(v_{(i-1)1}k_{(i-1)1}, w_{i1}(k_{J1} - k_{i1}), q_{\max(i)1}) \\ q_{i2} &= \min(v_{(i-1)2}k_{(i-1)2}, w_{i2}(k_{J2} - k_{i2}), q_{\max(i)2}) \end{aligned} \quad (3.31)$$

où $Q_{\max(i)1}$ est le débit maximum possible de véhicules et $Q_{\max(i)2}$ est le débit maximal de bus qui peuvent être dans la cellule i dans le cadre de trafic fluide.

Pour l'évolution temporelle des densités, le principe de conservation de véhicules est appliqué :

$$\begin{aligned} \dot{k}_{i1} &= \frac{1}{L_i}(y_{i1} - y_{(i+1)1} + r_{i1} - d_{i1}) \\ \dot{k}_{i2} &= \frac{1}{L_i}(y_{i2} - y_{(i+1)2} + r_{i2} - d_{i2}) \end{aligned} \quad (3.32)$$

où r_{i1} et r_{i2} sont les débits d'entrée de la bretelle d'accès reliée à la cellule i de véhicules et de bus, respectivement, et d_{i1} et d_{i2} sont les débits de sortie de véhicules et de bus respectivement, de la bretelle de sortie reliée à la cellule i .

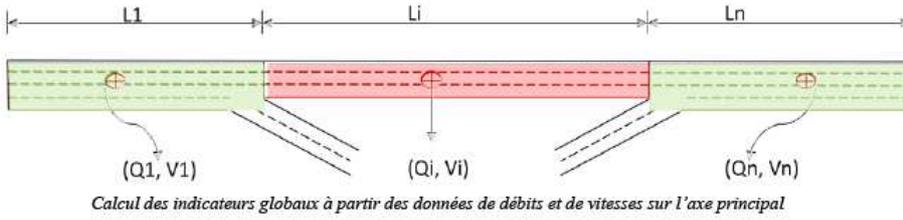


Figure 3.9 – Modèle

3.3.1 Régime de trafic fluide

Si toutes les cellules sont supposées dans en régime de trafic fluide, la dynamique des densités peut être décrite sous forme de matrice par :

$$\begin{aligned} \dot{k} &= L^{-1}F_E V k + B_E u_E = A_E(v)k + B_E u_E \\ y_E &= C_E(v)k \end{aligned} \quad (3.33)$$

où

$$k = [k_{11} \ k_{12} \ k_{21} \ k_{22} \ k_{31} \ k_{32} \ k_{41} \ k_{42} \ k_{51} \ k_{52}]^T$$

est le vecteur des densités des cellules.

$$V = \text{Diag}(v) \quad (3.34)$$

$$v = [v_{11} \ v_{12} \ v_{21} \ v_{22} \ v_{31} \ v_{32} \ v_{41} \ v_{42} \ v_{51} \ v_{52}]^T \quad (3.35)$$

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_5} \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

$$u_E = [y_{11} \ y_{12} \ r_{21} \ r_{22} \ d_{41} \ d_{42}]^T \quad (3.37)$$

$$C_E(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_{51} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_{52} \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

La matrice B_E est

$$B_E = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L_4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

$$F_E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

$$A_E = L^{-1}F_EV \quad (3.41)$$

La structure diagonal de V implique

$$\begin{aligned} A_E(v)k &= A_E(k)v \\ C_E(v)k &= C_E(k)v \end{aligned} \quad (3.42)$$

3.3.2 Régime semi-congestionné

Si la première classe est supposée en régime congestionné et la seconde est supposée en régime fluide dans toutes les cellules, la dynamique des densités des cellules peut être décrite de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{k}_{11} = \frac{1}{L_1}(w_{11}(k_{J1} - k_{11}) - w_{21}(k_{J1} - k_{21})) \\ \dot{k}_{12} = \frac{1}{L_1}(y_{12} - k_{12}v_{12}) \\ \dot{k}_{21} = \frac{1}{L_2}(w_{21}(k_{J1} - k_{21}) - w_{31}(k_{J1} - k_{31}) + r_{21}) \\ \dot{k}_{22} = \frac{1}{L_2}(k_{12}v_{12} - k_{22}v_{22} + r_{22}) \\ \dot{k}_{31} = \frac{1}{L_3}(w_{31}(k_{J1} - k_{31}) - w_{41}(k_{J1} - k_{41})) \\ \dot{k}_{32} = \frac{1}{L_3}(k_{22}v_{22} - k_{32}v_{32}) \\ \dot{k}_{41} = \frac{1}{L_4}(w_{41}(k_{J1} - k_{41}) - w_{51}(k_{J1} - k_{51}) - d_{41}) \\ \dot{k}_{42} = \frac{1}{L_4}(k_{32}v_{32} - k_{42}v_{42} - d_{42}) \\ \dot{k}_{51} = \frac{1}{L_5}(w_{51}(k_{J1} - k_{51}) - y_{61}) \\ \dot{k}_{52} = \frac{1}{L_5}(k_{42}v_{42} - k_{52}v_{52}) \end{array} \right. \quad (3.43)$$

3.3.3 Régime congestionné

Quand toutes les cellules sont congestionnées, il est possible de dériver le modèle suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{k}_{11} = \frac{1}{L_1}(w_{11}(k_{J1} - k_{11}) - w_{21}(k_{J1} - k_{21})) \\ \dot{k}_{12} = \frac{1}{L_1}(w_{12}(k_{J2} - k_{12}) - w_{22}(k_{J2} - k_{22})) \\ \dot{k}_{21} = \frac{1}{L_2}(w_{21}(k_{J1} - k_{21}) - w_{31}(k_{J1} - k_{31}) + r_{21}) \\ \dot{k}_{22} = \frac{1}{L_2}(w_{22}(k_{J2} - k_{22}) - w_{32}(k_{J2} - k_{32}) + r_{22}) \\ \dot{k}_{31} = \frac{1}{L_3}(w_{31}(k_{J1} - k_{31}) - w_{41}(k_{J1} - k_{41})) \\ \dot{k}_{32} = \frac{1}{L_3}(w_{32}(k_{J2} - k_{32}) - w_{42}(k_{J2} - k_{42})) \\ \dot{k}_{41} = \frac{1}{L_4}(w_{41}(k_{J1} - k_{41}) - w_{51}(k_{J1} - k_{51}) - d_{41}) \\ \dot{k}_{42} = \frac{1}{L_4}(w_{42}(k_{J2} - k_{42}) - w_{52}(k_{J2} - k_{52}) - d_{42}) \\ \dot{k}_{51} = \frac{1}{L_5}(w_{51}(k_{J1} - k_{51}) - y_{61}) \\ \dot{k}_{52} = \frac{1}{L_5}(w_{52}(k_{J2} - k_{52}) - y_{62}) \end{array} \right. \quad (3.44)$$

Dans le cas où la vitesse de congestion est fixée, la dynamique des densités dans les cellules peut s'exprimer comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{k} &= L^{-1}F_C W(k_J - k) + B_C u_C \\ &= A_C(w)(k_J - k) + B_C u_C \\ y_C &= C_C(w)(k_J - k) \end{aligned} \quad (3.45)$$

où k_J est le vecteur des densités de congestion des cellules.

$$W = \text{Diag}(w) \quad (3.46)$$

$$w = [w_{11} \ w_{12} \ w_{21} \ w_{22} \ w_{31} \ w_{32} \ w_{41} \ w_{42} \ w_{51} \ w_{52}]^T \quad (3.47)$$

$$u_C = [r_{21} \ r_{22} \ d_{41} \ d_{42} \ y_{61} \ y_{62}]^T \quad (3.48)$$

$$C_C(w) = \begin{pmatrix} w_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

La matrice F_C est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

La matrice B_C est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{L_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L_4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L_5} \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

$$A_C(w) = L^{-1}F_C W \quad (3.52)$$

Un changement de variables est introduit tel que

$$\bar{k} = (k_J - k) \quad (3.53)$$

alors l'équation(3.45) peut se réécrire comme

$$\begin{aligned} \dot{\bar{k}} &= A_C(w)\bar{k} + B_C u_C \\ y_C &= C_C(w)\bar{k} \end{aligned} \quad (3.54)$$

de façon qu'elle ait la même structure que l'équation (3.33).
La structure diagonale de W implique que

$$\begin{aligned} A_C(w)\bar{k} &= A_C(\bar{k})w \\ C_C(w)\bar{k} &= C_C(\bar{k})w \end{aligned} \quad (3.55)$$

3.4 Observabilité et synthèse

Connaître l'évolution des états d'un système est primordial dans l'étude de son comportement, mais en pratique il est très difficile de mesurer toutes les variables d'états. On a recours alors à un reconstruteur d'état ou estimateur qui est un système ayant comme entrées les entrées et sorties du processus réel et dont la sortie est une estimation de l'état de ce processus. Dans le cas d'un processus d'un modèle linéaire, la structure de base de l'estimateur est toujours la même, mais sa réalisation dépend du type de contexte. Si le modèle est déterministe, on parle alors d'observateur et dans le cas de systèmes bruités, on parle alors de filtre.

3.4.1 Principe des observateurs

Soit un système continu décrit par l'équation d'état déterministe :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

où $u(t)$, $y(t)$ et $x(t)$ sont des vecteurs de dimension m , l et n et représentant respectivement la commande, la sortie (mesurée) et l'état du système. Les matrices A , B , C et D sont des matrices constantes de dimensions convenables.

L'observateur a pour but d'estimer cet état par une variable $\hat{x}(t)$. Cette estimation est réalisée par un système dynamique dont la sortie sera précisément $\hat{x}(t)$ et l'entrée est constituée de $u(t)$ et de $y(t)$. La structure de l'observateur est de la forme :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + Du(t) \end{cases}$$

où $y(t) - \hat{y}(t)$ est l'erreur de reconstruction de la sortie et L est le gain de correction appelé gain de l'observateur à déterminer.

Si on considère l'erreur d'estimation : $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$. Pour que l'observateur soit utilisable il est nécessaire que cette erreur tende vers 0 lorsque t augmente. En conséquence, il faudra choisir L telle que les valeurs propres de la matrice $A - LC$ soient toutes à partie réelle strictement négative.

Théorème : Les valeurs propres de $A - LC$ peuvent être fixées arbitrairement si la paire (A, C) est observable, i.e :

$$n = \text{rang} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Il y'a différents types d'observateurs, parmi eux l'observateur d'ordre réduit, appelé observateur de Luenberger.

Soit le système précédent avec :

$$D = 0, \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{22} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad C = (C_1 \ C_2), \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

où rang de C_1 est égal à l , A_1 et $C_1 \in \mathbf{R}^{l \times l}$, $x_1 \in \mathbf{R}^l$ et $B_1 \in \mathbf{R}^{l \times m}$.

Le changement de variables : $\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 x_1 + C_2 x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Avec :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{22} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = (I_m \ 0)$$

le système précédent se réécrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1(t) = \tilde{A}_{11}\tilde{x}_1(t) + \tilde{A}_{12}\tilde{x}_2(t) + \tilde{B}_1 u(t) \\ \dot{\tilde{x}}_2(t) = \tilde{A}_{21}\tilde{x}_1(t) + \tilde{A}_{22}\tilde{x}_2(t) + B_2 u(t) \\ y(t) = \tilde{x}_1(t) \end{cases}$$

où la sortie correspond aux l premières composantes d'état, elles n'ont donc pas à être reconstruites. le vecteur $\hat{z}(t) + \tilde{L}y(t)$ peut être considéré comme un observateur de \tilde{x}_2 , où L est la matrice $(n-l) \times l$ de gain de cet observateur et \hat{z} vérifie :

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}(t) = \tilde{M}\hat{z}(t) + \tilde{N}u(t) + \tilde{P}y(t) \\ \tilde{M}(t) = \tilde{A}_{22} - \tilde{L}\tilde{A}_{12} \\ \tilde{N}(t) = B_2 - \tilde{L}\tilde{B}_1 \\ \tilde{P}(t) = \tilde{A}_{21} + \tilde{A}_{22}\tilde{L} - \tilde{L}\tilde{A}_{11} - \tilde{L}\tilde{A}_{12}\tilde{L} \end{cases}$$

Cette équation d'état définit un observateur réduit d'ordre $(n-l)$.

En général, l'observateur utilisé pour les systèmes linéaires est de type Luenberger ou avec un gain proportionnel ([LUENBERGER [1964]]). Pour améliorer la synthèse de l'observateur face à des perturbations inconnues, un gain proportionnel intégral est utilisé, en effet l'action intégrale introduit un certain degré de robustesse dans l'observateur ([MORALES et ALVARES-RAMIREZ [2002]], [RODRIGUES *et al.* [2005]]).

Koenig et Mammam [KOENIG et MAMMAR [2002]] ont développé des observateurs de type Luenberger Proportionnel Intégral (PI) d'ordre plein et d'ordre réduit pour des entrées inconnues.

Dans notre cas, on a commencé par étudier l'observabilité et la contrôlabilité des systèmes à l'aide des techniques des systèmes linéaires standard. Puis on a construit notre observateur

3.4.2 Résultats généraux d'observabilité et de controllabilité

En régime de trafic fluide, la paire $[A_E(v), C_E(v)]$ est observable pour toutes les valeurs de v qui correspondent au trafic fluide, et en régime congestionné, la paire $[A_C(w), C_C(w)]$ est observable pour toutes les valeurs de w qui correspondent au trafic congestionné.

Une section est contrôlable pour toutes les valeurs des rampes d'accès r_{i1} et r_{i2} à leurs extrémités en amont pour le régime de trafic fluide et à leurs extrémités en aval pour le régime de trafic congestionné.

Il est important de remarquer que dans l'équation (3.33), les débits y_{11} et y_{12} se comportent comme des entrées dans le système, ainsi que les entrées de la bretelle d'accès et les sorties de la bretelle de sortie. Les sorties de ce système sont les débits dans la cinquième cellule, représentés dans ce cas par les produits $v_{51}k_{51}$ et $v_{52}k_{52}$.

Le modèle de l'équation (3.45) considère les débits y_{61} et y_{62} comme des entrées dans le système, et les débits d'entrée, représentés par $w_{11}(k_{j11} - k_{11})$ et $w_{12}(k_{j21} - k_{12})$ comme les sorties du système. Ces différences sont liées aux propriétés de contrôlabilité et d'observabilité des modèles dans les équations (3.33) et (3.45), pour le trafic en régime fluide et régime congestionné, respectivement. ([MUNOZ *et al.* [2003]], [ROSAS-JAIMES et ALVAREZ-ICAZA [2007]])

3.4.3 Extension du schéma d'estimation

Le cadre est prolongé au cadre des observateurs à entrées inconnues.

3.4.4 Régime de trafic fluide

L'observateur proposé est élaboré sur le régime de trafic fluide, mais pourrait également être appliqué au régime de congestion.

Tout d'abord, le vecteur d'entrée u est divisé en entrées mesurées u_m et en entrées non mesurées u_u . De même, la matrice d'entrée B_E est divisée en B_m et B_u . Le modèle de l'équation (3.33) prend donc la forme :

$$\begin{cases} \dot{k} = A_E(v)k + B_m u_m + B_u u_u \\ y_E = C_E(v)k \end{cases} \quad (3.56)$$

Un observateur peut être conçu de manière à obtenir à la fois l'état et l'estimation des entrées inconnues. Ici, il est supposé que les inconnues sont ou bien presque partout constantes ou des variables affines et on choisit un observateur proportionnel-2Intégral (P2I), connu pour ses propriétés de robustesse et qui est en mesure d'estimer l'inconnue d'entrée et de ses dérivées. L'observateur P2I a la forme suivante [KOENIG et MAMMAR [2002]]

$$\begin{cases} \dot{\hat{k}} = A_E(v)\hat{k} + B_m u_m + L_p (y_E - \hat{y}_E) + B_{E2} \hat{u}_{u_2} \\ \dot{\hat{u}}_{u_2} = \hat{u}_{u_1} + L_{i_2} (y_E - \hat{y}_E) \\ \dot{\hat{u}}_{u_1} = L_{i_1} (y_E - \hat{y}_E) \end{cases} \quad (3.57)$$

La deuxième équation décrit le gain de la boucle intégrante ajouté à la proportionnelle une dans la première équation. Les matrices de gain L_p , L_{i1} et L_{i2} sont déterminées de manière à permettre la convergence asymptotique à zéro de l'erreur d'estimation de l'état, des erreurs d'estimation des inconnues d'entrée et de l'erreur d'estimation de la dérivée de l'entrée inconnue, définies respectivement par $e = k - \hat{k}$, $e_{u_2} = u_u - \hat{u}_{u_2}$ et $e_{u_1} = \dot{u}_u - \hat{u}_{u_1}$.

Sous la condition que le système reste observable, n'importe quelle méthode d'affectation de

valeurs propres est applicable pour obtenir une matrice de gain $[L_p \ L_{i_2} \ L_{i_1}]$.

L'équation d'erreur suivante est proposée

$$\tilde{\gamma} = \bar{F}_E(\delta)\gamma - \bar{F}_E(\hat{\delta})\hat{\gamma} \quad (3.58)$$

$$\text{où } \gamma = \begin{bmatrix} k \\ e_{u_2} \\ e_{u_1} \end{bmatrix}, \hat{\gamma} = \begin{bmatrix} \hat{k} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{\gamma} = \gamma - \hat{\gamma}, \delta = \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ and } \hat{\delta} = \begin{bmatrix} \hat{v} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

\hat{k} et \hat{v} sont respectivement les estimations de k et de v .

$$\bar{F}_E(\delta) = \begin{bmatrix} A_E(v) & B_u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_p \\ L_{i_2} \\ L_{i_1} \end{bmatrix} [C_E(v) \ 0 \ 0] \quad (3.59)$$

et la matrice $\bar{F}_E(\delta)$ est Hurwitz.

En utilisant l'équation (42), on remarque aussi que

$$\bar{F}_E(\delta)\gamma = \bar{F}_E(\gamma)\delta \quad (3.60)$$

Après quelques manipulations, l'équation (58) peut s'exprimer comme

$$\tilde{\gamma} = \bar{F}_E(\delta)\tilde{\gamma} + \bar{F}_E(\tilde{\delta})\hat{\gamma} \quad (3.61)$$

avec $\tilde{\delta} = \delta - \hat{\delta}$.

Pour désigner l'estimateur des vitesses, on suppose que les débits suivants peuvent être mesurés :

$$(y_{11}, y_{12}, r_{21}, r_{22}, y_{31}, y_{32}, d_{41}, d_{42}, y_{61}, y_{62})$$

La sortie mesurée dans le cas du régime fluide du trafic est définie comme

$$z_E = [r_{21} \ r_{22} \ y_{31} \ y_{32} \ d_{41} \ d_{42} \ y_{61} \ y_{62}]^T \quad (3.62)$$

qui peut s'exprimer comme

$$z_E = H_E \Phi v = s_E(k)v \quad (3.63)$$

où $\Phi = \text{diag}(k)$ et

$$H_E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

En accord, la sortie estimée \hat{z}_E est donnée par

$$\hat{z}_E = s_E(\hat{k})\hat{v} \quad (3.65)$$

On pose $Z_E = \begin{bmatrix} z_E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\hat{Z}_E = \begin{bmatrix} \hat{z}_E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\tilde{Z}_E = Z_E - \hat{Z}_E$.

$$S_E(\gamma) = \begin{bmatrix} s_E(k) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

alors, l'erreur d'estimation Z_E est

$$\tilde{Z}_E = Z_E - \hat{Z}_E = S_E(\gamma)\delta - S_E(\hat{\gamma})\hat{\delta} \quad (3.67)$$

On remarque que

$$S_E(\gamma)\delta = S_E(\delta)\gamma \quad (3.68)$$

L'équation (67) peut se réécrire comme

$$\tilde{Z}_E = S_E(\hat{\gamma})\tilde{\delta} + S_E(\delta)\tilde{\gamma} \quad (3.69)$$

Si on une loi d'adaptation gradient est choisie pour l'identification des vitesses, alors

$$\hat{v} = \Gamma_E S_E^T(\hat{k})\tilde{z}_E \quad (3.70)$$

où Γ_E est une matrice diagonale positive de gain.

On pose $\tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} \Gamma_E & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, alors

$$\hat{\delta} = \tilde{\Gamma}_E S_E^T(\hat{\gamma})\tilde{Z}_E \quad (3.71)$$

L'estimateur des vitesses utilise toutes les informations sur les débits dans le tronçon de route de l'étude.

3.4.5 Régime de trafic congestionné

La structure de l'estimateur des densités dans le régime de trafic congestionné est très similaire à celui de l'équation (56). les matrices et les vecteurs indicés par E sont remplacés par ceux indicés par C , la densité k par \bar{k} , la vitesse v par w , γ par ψ et δ par η .

Pour l'estimateur des vitesses dans ce régime, la sortie est définie par

$$z_C = [y_{11} \ y_{12} \ r_{21} \ r_{22} \ y_{31} \ y_{32} \ d_{41} \ d_{42}]^T \quad (3.72)$$

qui peut s'exprimer comme

$$z_C = H_C \bar{\Phi} W = s_C(\bar{k})w \quad (3.73)$$

où $\bar{\Phi} = \text{diag}(\bar{k})$ et

$$H_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.74)$$

La loi d'adaptation pour l'identification des vitesses est, de manière similaire

$$\hat{\eta} = \tilde{\Gamma}_C \mathcal{S}_C^T(\hat{\psi}) \tilde{Z}_C \quad (3.75)$$

avec Γ_C une matrice diagonale positive de gain.

3.5 Analyse de la stabilité

Dans cette section, on veut étudier la stabilité de $\tilde{\gamma} = 0$ et $\tilde{\delta} = 0$ pour le régime de trafic fluide.

On rappelle les définitions d'une fonction et équation de Lyapunov ainsi que les lemmes de Lyapunov.

Définitions et critères

- Une fonction $V(x)$ définie positive, de classe C^1 et qui vérifie $\frac{\partial V}{\partial t}(x) \leq 0$ est appelée fonction de Lyapunov du système $\dot{x} = f(x), f(0) = 0$
- Lemme 1 de Lyapunov : Si une fonction scalaire $V(x, t)$ satisfait les conditions suivantes :
 - 1- $V(x, t)$ est bornée inférieurement,
 - 2- $\dot{V}(x, t)$ est semi-définie négative,
 - 3- $\dot{V}(x, t)$ est uniformément continue par rapport à t .
 Alors, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{V}(x, t) = 0$
- Soit la fonction de Lyapunov $V = x^T P x$, où P est une matrice symétrique définie positive, on appelle équation de Lyapunov, toute équation de la forme $A^T P + P A = Q$.

- Lemme 2 de Lyapunov : Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

soit strictement stable est que l'unique solution de l'équation de Lyapunov P soit une matrice symétrique définie positive et ce quelle que soit la matrice Q définie positive.

La fonction de Lyapunov suivante est proposée :

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 \quad (3.76)$$

avec

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{1}{2} \tilde{\gamma}^T P \tilde{\gamma} \\ \theta_2 &= \frac{1}{2} \tilde{\delta}^T \tilde{\Gamma}^{-1} \tilde{\delta} \end{aligned} \quad (3.77)$$

où $P = P^T > 0$.

On dérive par rapport au temps θ_1

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \frac{1}{2} [\tilde{\gamma}^T \dot{P} \tilde{\gamma} + \dot{\tilde{\gamma}}^T P \tilde{\gamma}] \\ &= \frac{1}{2} \tilde{\gamma}^T [P \bar{F}_E(\delta) + \bar{F}_E^T(\delta) P] \tilde{\gamma} \\ &\quad + \frac{1}{2} \tilde{\gamma}^T P \bar{F}_E(\tilde{\delta}) \tilde{\gamma} + \frac{1}{2} \tilde{\gamma}^T \bar{F}_E^T(\tilde{\delta}) P \tilde{\gamma} \end{aligned} \quad (3.78)$$

En utilisant l'équation (58)

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \frac{1}{2} \tilde{\gamma}^T [P \bar{F}_E(\delta) + \bar{F}_E^T(\delta) P] \tilde{\gamma} \\ &\quad + \frac{1}{2} \tilde{\gamma}^T P \bar{F}_E(\hat{\gamma}) \tilde{\delta} + \frac{1}{2} \tilde{\delta}^T \bar{F}_E^T(\hat{\gamma}) P \tilde{\gamma} \end{aligned} \quad (3.79)$$

On dérive par rapport au temps θ_2 et en utilisant les équations (67) et (69)

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_2 &= -\tilde{\delta}^T S_E^T(\hat{\gamma}) S_E(\hat{\gamma}) \tilde{\delta} \\ &\quad - \frac{1}{2} \tilde{\delta}^T S_E^T(\hat{\gamma}) S_E(\delta) \tilde{\gamma} - \frac{1}{2} \tilde{\gamma}^T S_E^T(\delta) S_E(\hat{\gamma}) \tilde{\delta} \end{aligned} \quad (3.80)$$

En sommant les deux équations (78) et (79)

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= -\tilde{\gamma}^T Q \tilde{\gamma} - \tilde{\delta}^T S_E^T(\hat{\gamma}) S_E(\hat{\gamma}) \tilde{\delta} \\ &\quad + \frac{1}{2} \tilde{\delta}^T [\bar{F}_E^T(\hat{\gamma}) P - S_E^T(\hat{\gamma}) S_E(\delta)] \tilde{\gamma} \\ &\quad + \frac{1}{2} \tilde{\gamma}^T [P \bar{F}_E(\hat{\gamma}) - S_E^T(\delta) S_E(\hat{\gamma})] \tilde{\delta} \end{aligned} \quad (3.81)$$

où la matrice P vérifie l'équation de Lyapunov

$$P \bar{F}_E(\delta) + \bar{F}_E^T(\delta) P = -2Q \quad (3.82)$$

On remarque que les premiers termes dans l'équation (81) sont définie négative et semi définie négative respectivement.

Si on utilise un degré de liberté dans la sélection de Q de façon que P dans l'équation (79) vérifie l'inégalité suivante

$$P\bar{F}_E(\delta) + \bar{F}_E^T(\delta)P \leq -S_E^T(\delta)S_E(\hat{\gamma}) - S_E^T(\hat{\gamma})S_E(\delta) \quad (3.83)$$

Si le choix de la matrice Q vérifie $Q \geq S_E^T(\delta)S_E(\delta)$ alors en utilisant l'équation (83), il est possible de réécrire l'équation (81) comme

$$\begin{aligned} \dot{\theta} \leq & -\tilde{\gamma}^T S_E^T(\delta)S_E(\delta)\tilde{\gamma} - \tilde{\delta}^T S_E^T(\hat{\gamma})S_E(\hat{\gamma})\tilde{\delta} \\ & -\tilde{\delta}^T S_E^T(\hat{\gamma})S_E(\delta)\tilde{\gamma} - \tilde{\gamma}^T S_E^T(\delta)S_E(\hat{\gamma})\tilde{\delta} \end{aligned} \quad (3.84)$$

Alors l'équation (81) vérifie

$$\dot{\theta} \leq -([S_E(\delta)\tilde{\gamma} + S_E(\hat{\gamma})\tilde{\delta}]^T)^2 \leq 0 \quad (3.85)$$

ce qui implique la stabilité de $\tilde{\gamma} = 0$ et $\tilde{\delta} = 0$. En utilisant le lemme de Barbalat. [KHALIL [2002]] on prouve que $S_E(\delta)\tilde{\gamma} \rightarrow 0$ et que $S_E(\hat{\gamma})\tilde{\delta} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$.

Finalement, pour vérifier que la sélection de P dans l'équation (79) est appropriée, sa valeur est substituée dans l'équation de Lyapunov (82) pour obtenir

$$P\bar{F}_E(\delta) + \bar{F}_E^T(\delta)P \leq -2S_E^T(\delta)S_E(\delta) \quad (3.86)$$

qui montre la faisabilité du problème.

L'analyse de la stabilité des estimateurs pour le régime de trafic congestionné se fait de manière similaire que dans le régime fluide en substituant ses propres variables.

3.6 Résultats numériques

Le tronçon d'autoroute a trois voies et est de longueur totale de 1563 m, où les longueurs des principales cellules sont choisies comme suit : [273, 225, 444, 225, 396][m], le pas de temps est $\Delta t = 10s$, les vitesses libres des véhicules sont pour chaque cellule $V_1 = [96, 72, 67, 72, 96]km/h$ et la vitesse des bus sont $V_2 = [64, 48, 45, 48, 64]km/h$, les vitesses de congestion sont $w_1 = w_2 = 6.4m/s$ $k_{j1} = 428veh/km$ pour toutes les cellules $p = \frac{1}{3}$, $q_{max1} = 8000veh/h$ et $q_{max2} = 1/3q_{max1}$ pour toutes les cellules. les sorties d_{41}, d_{42} sont prises comme $\frac{1}{5}$ des débits de sortie de la cellule.

Régime fluide

Premièrement, le réseau est simulé sous le régime de trafic fluide. Au début de la simulation, le réseau est vide. Les figures 3.10 à 3.12 illustrent ce régime. (Les pointillés) correspondent aux bus. Les entrées en véhicules et en bus dans la cellule 1 sont illustrées dans la première sous figure 3.10. Les densités correspondantes dans les cellules sont aussi illustrées dans la même figure. Les débits entre les cellules et ceux de des bretelles de sortie sont illustrés dans la figure 3.11. Finalement le nombre des véhicules et de bus sont illustrés dans la figure 3.12.

Ces figures montrent que le modèle est capable de gérer les entrées.

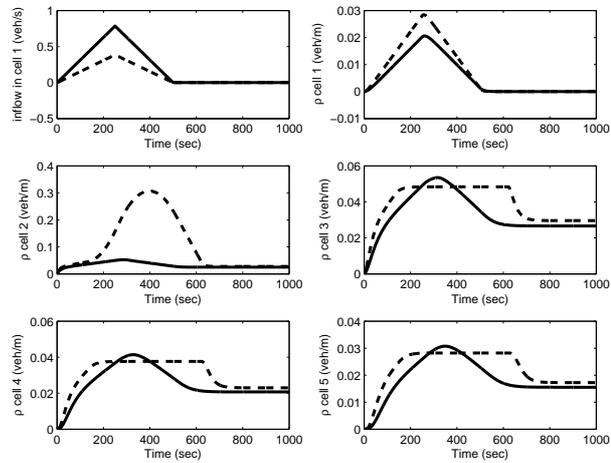


Figure 3.10 – Densités simulées des principales cellules (régime de trafic fluide)

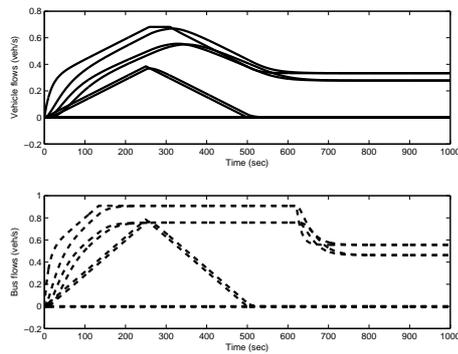


Figure 3.11 – Débits des véhicules et des bus (régime de trafic fluide)

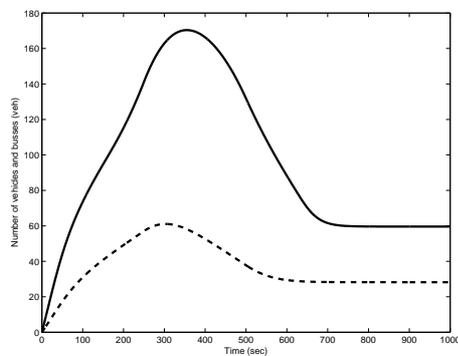


Figure 3.12 – Nombre de véhicules et de bus (régime de trafic fluide)

Régime semi-congestionné

Le modèle est maintenant simulé dans la situation semi-congestionné du trafic. Le débit à la bretelle d'entrée r_{21} est réduit à zéro. la densité initiale des véhicules particuliers est égale à la moitié de la densité de congestion dans chaque cellule.

Les différents flux entre les cellules et à la sortie sont présentés dans les figures 3.13 et 3.14. Le flux des véhicules particuliers croit à approcher le flux maximal.

On voit que la proportion des véhicules particuliers existants varie d'une manière significative (par exemple tous les véhicules quittent une cellule quand la densité est très faible), alors que, pour les bus cette proportion est relativement constante.

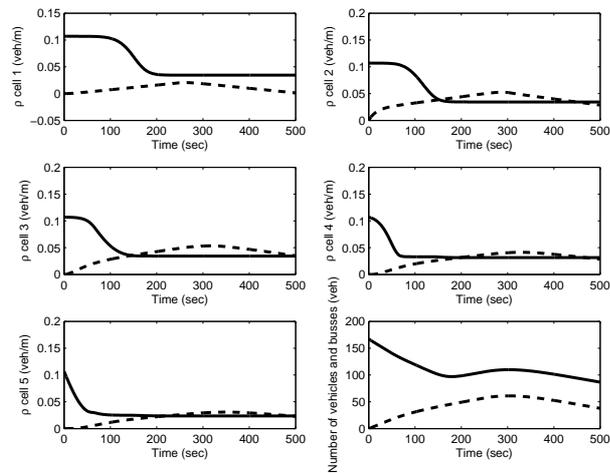


Figure 3.13 – Densités simulées des principales cellules (trafic semi-congestionné)

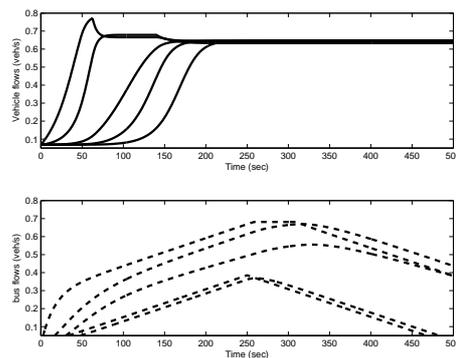


Figure 3.14 – Flux des véhicules et des bus (trafic semi-congestionné)

Régime congestionné

Le modèle est simulé sous le régime congestionné. Les débits aux bretelles d'entrées r_{21}, r_{22} sont mis à zéro. Les densités initiales sont la moitié des densités de congestion dans chaque cellule. Comme, on peut le voir des figures 3.15 et 3.16, le réseau évacue correctement les véhicules

initialement présents sur le réseau (voir la dernière sous figure de 3.15). Les différents débits entre les cellules et aux bretelles de sorties sont illustrés dans la figure 3.16. La figure 3.17 illustre l'estimation des vitesses en mode congestionné.

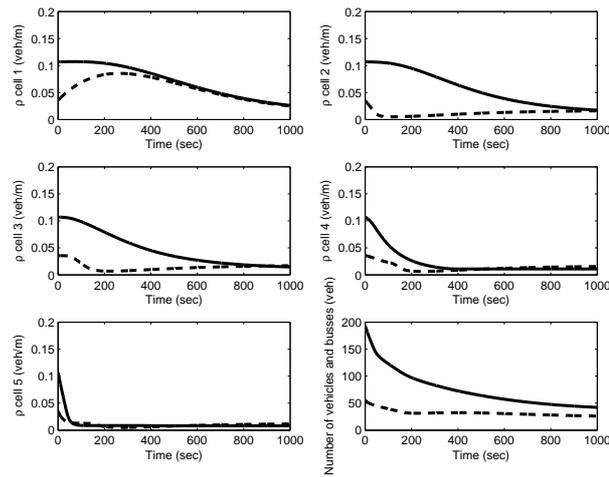


Figure 3.15 – Densités simulées des principales cellules (régime congestionné)

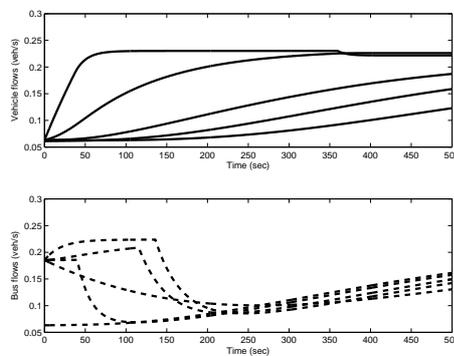


Figure 3.16 – Débits de véhicules et de bus (régime congestionné)

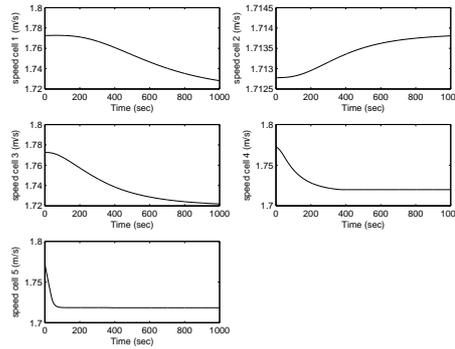


Figure 3.17 – Vitesses trafic congestionné

L'estimateur proposé a été testé sous le scénario suivant :

- On retire un ou les deux débits aux bretelles de sorties d_{41} et d_{42} .
- On retire un ou les deux débits entrants dans la cellule 1, y_{11} et y_{12} .
- on retire un ou les deux débits aux bretelles d'entrée r_{21} et r_{22} .

En effet, le modèle fonctionne quand on retire un ou deux composants de u_E et les remettre dans u_u . Cependant, il a été trouvé qu'en retirant plus que deux entrants du vecteur u_E mène à un système non observable qui ne peut être utilisé dans l'estimation de l'état ou des entrées inconnues.

3.7 Conclusion

Dans cet chapitre, nous avons présenté et analysé analytiquement en premier, un modèle hétérogène bi-classes basé sur l'équilibre-usager de Logghe. Ensuite, nous avons analysé numériquement le modèle en adaptant le modèle de transmission cellulaire de Daganzo. Les résultats des simulations ont montré que le modèle est capable de représenter les deux régimes de trafic fluide et congestionné.

Un estimateur des densités et un autre des vitesses d'un trafic mixte sur un tronçon de route ainsi que l'analyse de la stabilité des estimateurs ont été également présentés.

Les premières simulations montrent la capacité du modèle à décrire les flux de deux types de véhicules se distinguant par leurs vitesses et leurs longueurs différentes sous des régimes différents de trafic.

L'impact sur le trafic de l'occupation d'un plus grand espace par les bus a été mis en oeuvre comme une interaction entre les classes.

4

Commande prédictive appliquée à un système de trafic urbain trimodal

Sommaire

4.1	Introduction	101
4.2	Les bus à haut niveau de service BHNS	102
4.3	La stratégie de régulation	104
4.3.1	La commande prédictive	104
4.3.2	Le module de prédiction	106
4.3.3	Modèle des véhicules particuliers et des bus	107
4.3.4	Modèle de la progression des BRT	109
4.3.5	Module d'optimisation	110
4.3.6	La stratégie complète	112
4.3.7	Analyse de la stratégie et simulations	113
4.4	Le deuxième Modèle de la progression des BRT	123
4.4.1	Le passage d'une station	123
4.4.2	Le passage d'un carrefour à feux	124
4.4.3	Simulations	126
4.5	Conclusion	127

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons une architecture pour la régulation du trafic urbain trimodal composé de véhicules particuliers, de bus et de bus de haut niveau de service BHNS. La

régulation des véhicules particuliers et des bus est fondée sur la minimisation du nombre total des véhicules des deux modes sur tout le réseau. Pour les BHNS, l'objectif de la régulation est de suivre une trajectoire de référence fixée à l'avance.

La stratégie est fondée sur la commande prédictive ; la modélisation de la dynamique des véhicules particuliers et des bus est une adaptation du modèle TUC. Le modèle de la dynamique du BHNS quant à lui est novateur et original.

Le deuxième modèle de la dynamique des BHNS s'inspire du modèle développé par Kachroudi et al [KACHROUDI [2010]].

Nous commencerons par présenter la notion de bus à haut niveau de service puis, nous rappelons les objectifs de la stratégie de régulation proposée. Dans un second temps nous présentons l'architecture principale de la stratégie de régulation fondée sur la commande prédictive où nous construisons notre premier modèle de la dynamique des BHNS. Puis, nous développons notre second modèle de la dynamique des BHNS construit sur la base de la progression pas à pas des BHNS dans un réseau urbain. Nous terminons par l'étude en simulation de la stratégie établie sur le site Corbeil-Sénart.

4.2 Les bus à haut niveau de service BHNS



Figure 4.1 – Modèles de BHNS

Un bus à haut niveau de service (BHNS) est une ligne de bus conçue et exploitée dans le but de garantir un service proche de ce que peuvent offrir d'autres systèmes de transports en commun tels que les tramways ou les métros mais à un coût moindre.[WIKIPEDIA [2010]]
Les principales caractéristiques d'une ligne BHNS sont :

- une haute fréquence de passage (généralement 5 à 10 minutes en heures pleines et moins de 15 minutes en heures creuses) ;

- un temps de trajet garanti et des passages réguliers ;
- une vitesse relativement élevée ;
- une amplitude horaire de fonctionnement étendue ;
- un système d'information de qualité : temps de parcours, attente, fréquence, etc.

Ces caractéristiques sont obtenues au moyen d'aménagements particuliers par rapport aux lignes de bus classiques :

- des aménagements de voiries ponctuels ou sur l'intégralité du parcours avec souvent une circulation en site propre ;
- la mise en place de priorités aux feux ;
- une plus grande visibilité que les lignes classiques via, par exemple, la signalétique et le design des arrêts et du matériel roulant.

L'aménagement d'une ligne BHNS, même en site propre intégral, nécessite moins d'investissements que la construction d'une ligne ferrée et offre des possibilités de ré-aménagements plus souples.

Pour l'Europe, cette approche « système » a d'abord été mise en oeuvre pour le tramway avant d'être appliquée aux bus et trolleybus et c'est cette dernière application qui a entraîné la définition du concept de BHNS ou le BRT (Bus Rapid Transit) d'Amérique du Nord et du Sud, composés principalement de lignes express de bus utilisant des voies réservées sur autoroute, aux États-Unis et au Canada, ou bien de larges voies, au Brésil et en Équateur.

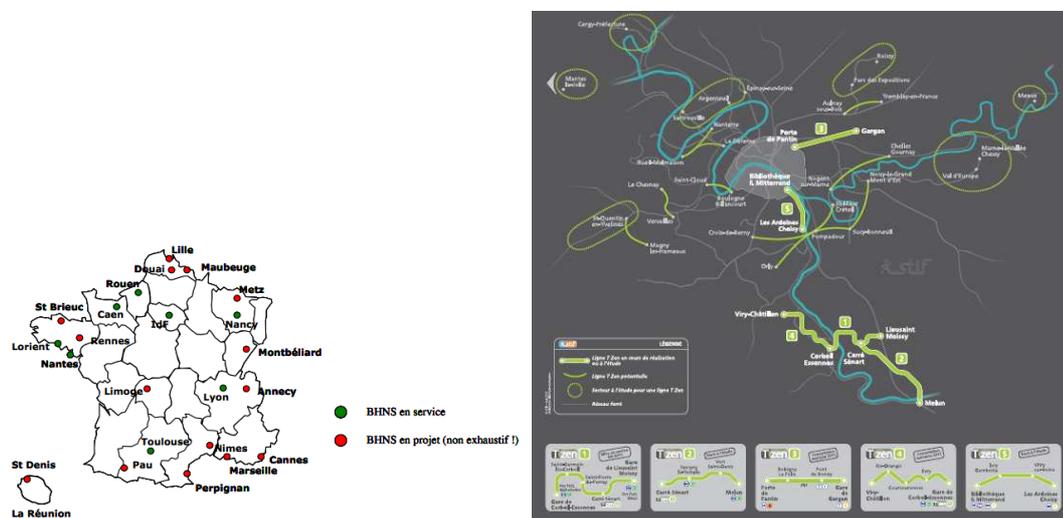


Figure 4.2 – Projets BHNS en France et réseaux BHNS en Ile de France

Ce concept est présent en France depuis les années 1970 dans la conception de la ville nouvelle d'Évry, puis repris en 1990 avec le Trans-Val-de-Marne. Actuellement un certain nombre

de villes ont mis en place ou projettent ce système de transport, comme Rouen en 2001 avec le TEOR, Nantes avec le Busway inauguré en 2006, et projeté également à Metz sous le nom de « Met ». En Île-de-France, le plan de déplacements urbains a lancé le projet Mobilien ou le T-ZEN qui a pour ambition de mettre en place un réseau structurant de près de 150 lignes.

Pour les collectivités qui mettent en oeuvre ces lignes BHNS, l'objectif consiste, dans de nombreux cas, à tendre progressivement vers ce mode de transport par amélioration progressive des infrastructures existantes.

Pour améliorer la régularité d'une ligne, la mesure la plus légère est la priorité aux carrefours à feux. La plus efficace est l'aménagement de sites propres (qui permettent de réduire l'espace accordé à l'automobile, dans le cadre de certaines politiques globales de déplacements). Il est bien sûr alors souhaitable de coupler les deux mesures. L'information aux voyageurs peut bénéficier de l'intégration au « système d'aide à l'exploitation et à l'information des voyageurs » (SAEIV) (système de transport intelligent).

Dans la suite, on adopte la terminologie de BRT au lieu de BHNS.

4.3 La stratégie de régulation

La stratégie a pour objectifs : d'une part réguler la circulation des BRT et d'autre part rendre le trafic plus fluide. La progression de tous les types de véhicules dans le réseau urbain dépend des états des feux de signalisation contrôlant les carrefours. A partir de mesures sur l'état du trafic à chaque début de cycle, la stratégie doit déterminer les états de flux qui permettent de respecter les objectifs de régulation des trois modes de transport. Les objectifs de la régulation sont formulés au moyen de critères mathématiques qui dépendent des états des feux de signalisation de tous les carrefours concernés par la régulation. Respecter les objectifs de régulation revient à minimiser ces critères par rapport aux états des feux.

Le problème de régulation est un problème de commande prédictive généralisée, en effet, l'objectif est de déterminer des commandes pour que les états futures du système dynamique suivent une trajectoire consigne pré-définie et ce à partir des mesures sur l'état à un instant présent.

Dans cette section, nous commençons par rappeler le principe de la commande prédictive, puis nous présentons les modules de prédiction et d'optimisation qui forment l'architecture de la commande prédictive.

4.3.1 La commande prédictive

La philosophie de la commande prédictive MPC (Model Predictive Control) consiste en :

- l'utilisation explicite d'un modèle pour prédire le comportement futur du système,

- le calcul d’une séquence d’échantillons futurs de commande minimisant une fonction de coût sur un horizon fuyant,
- seul le premier échantillon de commande est réellement appliqué au système. Toute la séquence est recalculée à chaque pas.

L’idée de la commande prédictive remonte à l’ouvrage fondateur de la commande optimale de Bellman en 1957.

Richalet est le premier à la mettre en oeuvre industriellement en 1976 [RICHalet *et al.* [2005]] dans le logiciel IDCOM (identification, commande). Le formalisme choisi permet de considérer les systèmes linéaires comme des filtres à réponse impulsionnelle finie. Les coûts considérés sont quadratiques, la partie estimation repose sur une approche des moindres carrés.

Depuis les années 2000, il y’a eu beaucoup d’améliorations dont l’étude de la stabilité et de la robustesse, les solutions explicites, la commande de prédiction des systèmes hybrides, des systèmes non linéaires, etc. Ainsi que de nombreux logiciels tels que DMC, IDCOM, HIECON, TFC, CMPCT, PCT, SMCA, IDCOM-M, OPC, 3dMPC.

La commande prédictive est généralement constituée de deux modules : un module de prédiction (modèle interne qui estime les valeurs futures des variables d’état) et d’un module d’optimisation, (qui détermine les valeurs des variables de commande à appliquer au système). (Figure3)

On considère un système dynamique à temps discret régi par l’équation d’état généralisée suivante :

$$x(k+1) = f(x(k), u(k))$$

où $x(k)$ est l’état du système et $u(k)$ est la commande du système à l’instant k et f une fonction arbitraire. A l’instant k , le problème de la commande prédictive est de trouver les valeurs de commandes à appliquer sur un horizon temporel de H_c pas de temps, pour minimiser, sur un horizon temporel de $H_s > H_c$, le critère général suivant :

$$J = \sum_{i=1}^{i=H_s} h(x(k+i)) + \sum_{i=1}^{i=H_s} g(u(k+i))$$

La fonction g exprime le critère correspondant aux valeurs de commande de système. Elle est utilisée pour limiter les amplitudes de la commande. La fonction h exprime le critère principal à minimiser. Elle est généralement quadratique et exprime la différence entre l’état réel du système et l’état de référence à atteindre.

A partir de l’état du système au pas de temps k , le module d’optimisation détermine les valeurs de la commande u pour les H_c pas de temps futurs qui permettent de minimiser le critère J . L’état du système le long de l’horizon H_s est estimé par le module de prédiction constitué du modèle du système. Le principe de la commande prédictive consiste à n’appliquer effectivement au système que la commande pour le premier pas de temps. La même procédure est réitérée au début de chaque pas de temps.[KACHROUDI [2010]]

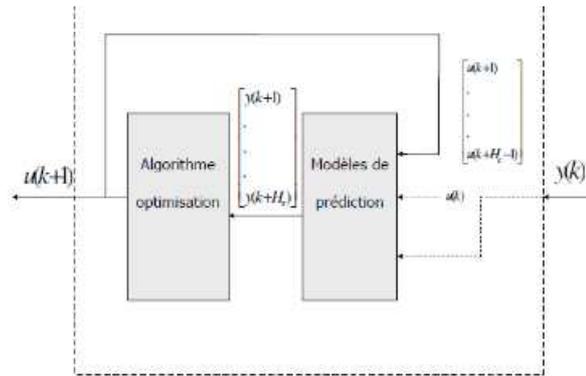


Figure 4.3 – Architecture de la commande prédictive

4.3.2 Le module de prédiction

Le réseau de trafic urbain est représenté par un graphe direct dont les noeuds correspondent aux intersections ou jonctions $j \in J$ et les arcs $i \in I$ aux routes. Un arc peut joindre deux jonctions comme il peut être une entrée ou sortie du réseau. Chaque arc i est contrôlé par des feux de signalisation d'une durée de vert G_i .

Le module de prédiction est le processus dont l'objectif est de modéliser la circulation des véhicules particuliers, des bus et des BRT dans le réseau urbain. De l'état du trafic actuel durant un cycle de temps et avec une durée de vert bien déterminée à toutes les jonctions, le modèle va prédire l'état du trafic au cycle de temps suivant. L'état du trafic dépend essentiellement de :

- Le nombre de véhicules particuliers dans chaque arc du réseau.
- Le nombre de bus dans chaque arc du réseau.
- Les positions de tous les BRT dans le réseau.

Nous commençons par présenter les notations utilisées puis nous développons le modèle de circulation des véhicules particuliers et des bus, modèle développé suivant la stratégie TUC ainsi que le modèle de progression des BRT.

Notations

- i, j, l, n, k : indices d'arc, de jonction, de stations BRT, de BRT et de temps discrétisé (respectivement),
- I, J, L, N : ensemble d'arcs, de jonctions, de stations BRT et de BRT (respectivement),
- N_i : dimension de l'ensemble I ,
- I_{n_j} : ensemble des arcs entrants à une jonction j ,
- O_j : ensembles des arcs sortants d'une jonction j ,
- T_k^n : ensemble des temps de stationnement aux stations de BRT n durant le cycle k ,

- Nv_k^n, Nb_k^n : ensemble du nombre de véhicules particuliers, de bus de la file d'attente devant le BRT n sur tous les arcs traversés par le BRT n durant le cycle k (respectivement),
- C : temps de cycle pour toutes les jonctions,
- a, b : longueur effective d'un véhicule particulier, d'un bus (respectivement),
- V_b : vitesse maximale libre de BRT,
- $x_i(k), z_i(k)$: nombre de véhicules particuliers, de bus (respectivement) sur l'arc i au cycle k ,
- $G_i(k)$: durée totale du vert aux feux de l'arc i au cycle k ,
- S_{1_i}, S_{2_i} : flux de saturation des véhicules particuliers, des bus sur l'arc i (respectivement),
- $q_i(k), u_i(k)$: débits entrants à, sortants de l'arc i au cycle k (respectivement),
- $\tau_{w,i}, \tau'_{w,i}$: taux de mouvement tournant de l'arc w vers l'arc i des véhicules, des bus (respectivement),
- Lf_i : position de la ligne des feux de l'arc i relative au BRT,
- T_l : temps de stationnement du BRT à la station l ,
- $P_n(k)$: position du BRT n au début du cycle k ,
- i_k^n, l_k^n : nombre de carrefours à feux traversés par, de stations d'arrêts pour, le BRT n durant le cycle k (respectivement),
- $Nv_n^i(k), Nb_n^i(k)$: nombre de véhicules particuliers, de bus devant le BRT n dans l'arc i au cycle k (respectivement).

4.3.3 Modèle des véhicules particuliers et des bus

Le modèle développé pour la dynamique des véhicules particuliers et des bus sur le réseau est basé sur la stratégie TUC, modèle développé par Diakaki et al ([[DIAKAKI et al. \[2002\]](#)]).

La stratégie TUC

On considère une jonction contrôlée j , et on suppose que :

- le temps de cycle $C_j = C$ pour toutes les jonctions $j \in J$,
- les débits de saturation S_i sont connus,
- les taux de mouvements de l'arc w vers l'arc i , $\tau_{w,i}$ et $\tau'_{w,i}$ sont fixés et connus.

En outre, les contraintes suivantes sont introduites pour garantir une durée de vert pour tous les feux

$$G_j \geq G_{j_{min}} \quad (4.1)$$

où $G_{j_{min}}$ est la durée effective minimale du vert au feu de la jonction j .

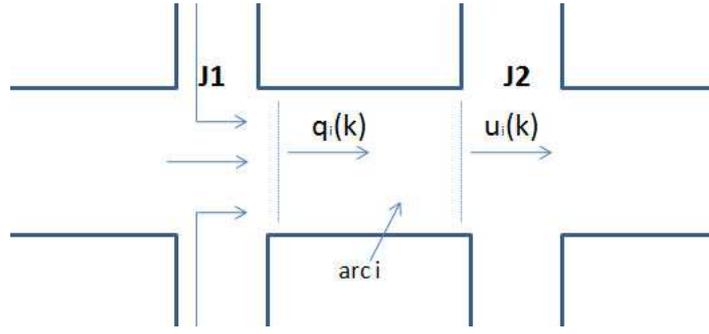


Figure 4.4 – Arc de réseau urbain

On considère maintenant un arc i connectant deux jonctions j_1 et j_2 (Figure 4). La dynamique de l'arc i est décrite par l'équation suivante

$$x_i(k+1) = x_i(k) + C[q_i(k) - u_i(k)] \quad (4.2)$$

où le débit entrant à l'arc i est

$$q_i(k) = \sum_{w \in I_{j_1}} \tau_{w,i} u_w(k)$$

et le débit sortant u_i de l'arc i est

$$u_i(k) = \frac{S_i G_i(k)}{C}$$

Alors l'équation (4.2) devient

$$x_i(k+1) = x_i(k) + C \left[\sum_{w \in I_{j_1}} \tau_{w,i} \left(\frac{S_w G_w(k)}{C} \right) - \frac{S_i G_i(k)}{C} \right] \quad (4.3)$$

En adaptant l'équation (4.3) à un arc i arbitraire d'un réseau avec deux types de véhicules ; les bus et les véhicules particuliers où x_i représente le nombre de véhicules particuliers et z_i représente le nombre de bus.

$$\begin{aligned} x_i(k+1) &= x_i(k) + C \left[\sum_{w \in I_{j_1}} \tau_{w,i} \left(\frac{S_{1w} G_w(k)}{C} \right) - \frac{S_{1i} G_i(k)}{C} \right] \\ z_i(k+1) &= z_i(k) + C \left[\sum_{w \in I_{j_1}} \tau'_{w,i} \left(\frac{S_{2w} G_w(k)}{C} \right) - \frac{S_{2i} G_i(k)}{C} \right] \end{aligned} \quad (4.4)$$

Cette équation d'état (sous forme matricielle) décrit l'évolution du système dans le temps :

$$X(k+1) = AX(k) + BG(k) \quad (4.5)$$

où $X = [x_i \ z_i]$ est le vecteur des nombres de véhicules particuliers x_i et ceux des bus z_i sur l'arc $i \in I$, $G = [G_i]$ est le vecteur des $G_i, \forall i \in I$, A and B sont les matrices d'état et d'entrée, respectivement.

La matrice A est :

$$\begin{cases} A_{i,i} = 1 & \forall i \in 1, \dots, 2N_i \\ A_{i,j} = 0 & \forall i \neq j \end{cases}$$

et la matrice B est

$$\begin{cases} B_{i,j} = \tau_{i,j} S_{1j} & \text{si l'arc } i \text{ est en aval de l'arc } j \text{ et } 1 \leq i \leq N_i \\ B_{i,i} = -S_{1i} & \text{si } 1 \leq i \leq N_i \\ B_{i,j} = \tau'_{i,j} S_{2j} & \text{si l'arc } i \text{ est en aval de l'arc } j \text{ et } (N_i + 1) \leq i \leq 2N_i \\ B_{i,i} = -S_{2i} & \text{si } (N_i + 1) \leq i \leq 2N_i \\ B_{i,j} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4.3.4 Modèle de la progression des BRT

L'objectif du modèle est de décrire l'évolution dans le temps d'un BRT. Le temps est discrétisé selon la durée, commune à tous les carrefours, d'un cycle de feu. L'itinéraire d'un BRT est supposé connu et est constitué d'une succession d'arrêts à des stations et à des carrefours.

La position future d'un BRT dépend de :

- sa position actuelle,
- les files d'attente des véhicules particuliers,
- les files d'attente des bus circulant sur le même réseau,
- les durées des phases de vert durant lesquelles les BRT peuvent passer le carrefour,
- les temps d'arrêts dans les stations.

La dynamique du BRT n est représentée par sa position $P_n(k)$ dans le cycle k , l'objectif du modèle est l'estimation de $P_n(k+1)$.

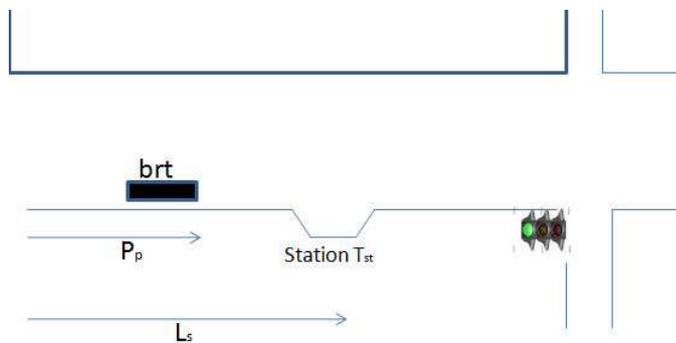


Figure 4.5 – BRT à une station

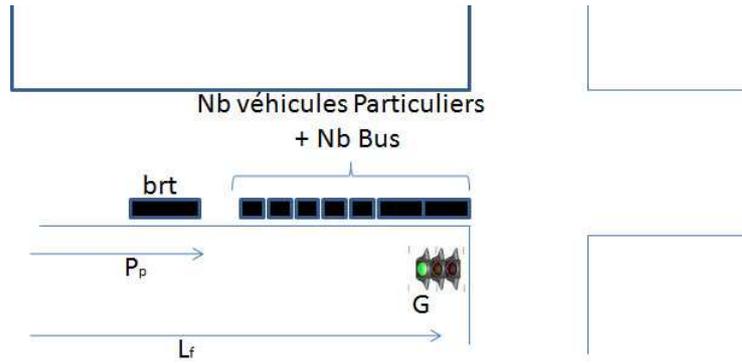


Figure 4.6 – BRT à un carrefour à feux

le BRT est supposé rouler à une vitesse V_b durant le cycle C , la distance maximale supposée parcourir est $V_b \cdot G_i$.

Entre le BRT et la ligne de feux, il y a N_v^i véhicules particuliers de longueur a et N_b^i bus de longueur b . Le feu contrôlant l'arc i a une durée de vert de $G_i(k)$.

Le nombre de véhicules particuliers qui sortent d'un tronçon durant un cycle de temps C contrôlé par une durée de feu vert G_i est $(S_{1_i}) \cdot G_i$ et le nombre de bus qui sortent est $(S_{2_i}) \cdot G_i$. La distance qui disparaît de la file d'attente est $(aS_{1_i} + b \cdot S_{2_i}) \times G_i$.

D'où, la dynamique du BRT n sur l'arc i est

$$P_{n_i}(k+1) = P_{n_i}(k) + (V_b - T_i^n \cdot (\gamma_i^n) - (aS_{1_i} + b \cdot S_{2_i})) \cdot G_i(k) \quad (4.6)$$

où γ_i^n est l'accélération du BRT n sur l'arc i et T_i^n temps d'arrêt à la station, supposés fixés et communs à tous les arcs.

4.3.5 Module d'optimisation

Réguler d'une part, la circulation des BRT et d'autre part rendre le trafic général plus fluide dans le réseau urbain sont les objectifs de notre stratégie de régulation. Notre démarche consiste à minimiser d'une part, les files d'attente devant les feux de signalisation et d'autre part respecter les intervalles réguliers entre les BRT de la même ligne sur le réseau urbain.

Un réseau urbain est constitué de N_i arcs, nous désignons par $X_i(k) = [x_i(k) \ z_i(k)]$ et $G_i(k)$ respectivement le nombre de tous les véhicules (véhicules particuliers et bus) présents dans l'arc i et la durée de la phase du vert dans un cycle k .

– Réguler le trafic général pour le cycle k revient à résoudre le problème suivant :

$$\min_{G_1(k), G_2(k), \dots, G_{N_i}(k)} \sum_{i=1}^{i=N_i} ((x_i(k) - x_i^{eq})^2 + (z_i(k) - z_i^{eq})^2)$$

- Réguler la circulation des BRT c'est respecter des intervalles réguliers entre tous les véhicules de type BRT successifs de la même ligne car à notre sens l'introduction du concept BRT se fait dans la perspective de lignes à haute fréquence de passage. Cette consigne temporelle dans un espace spatial est transformée en une consigne spatiale dans un espace temporel.

$$\min_{G_1(k), G_2(k), \dots, G_{N_i}(k)} \sum_{n=1}^{n=n_1} (P_n(k) - P_n^s(k))^2$$

où :

- $P_n^s(k)$ représente la position consigne à respecter pour le BRT n au cycle k ,
- n_1 nombre de BRT de la ligne sur le réseau.

L'objectif de régulation essentiel des exploitants de transports BRT est de respecter un intervalle de passage régulier entre les véhicules successifs de la même ligne.

Théoriquement, respecter un intervalle régulier entre un véhicule de tête et un véhicule suivant revient à ce que ce dernier respecte un horaire de passage pour la prochaine station. Soient un véhicule n suivi d'un véhicule $n + 1$ qui va s'arrêter dans une station l . L'objectif est de respecter un intervalle h de passage entre les deux véhicules. Si le temps de passage de n est t_n alors le temps de passage du véhicule $n + 1$ est $t_{n+1} = t_n + h$.

Dans le modèle de progression des BRT développé précédemment, on ajoute cette consigne.

Formulation de la fonction coût

Le problème est formulé comme un problème d'optimisation sous contraintes. L'objectif est la minimisation de la fonction coût suivante.

$$C(U) = \min_U (a_1 (\sum_{i=1}^{N_i} ((x_i(k) - x_i^{eq})^2 + (z_i(k) - z_i^{eq})^2)) + a_2 \sum_{m=1}^{n_l} \sum_{n=1}^{n_m} (P_{n,m}(k) - P_{n,m}^s(k))^2) \quad (4.7)$$

par rapport à : $U \in [U_{min}, U_{max}]$, respectivement borne minimale et borne maximale de U qui représente le nombre des durées de phase de vert dans le réseau urbain durant le cycle k .

- U : le nombre des durées de vert sur le réseau durant un cycle k ,

$$U = [G_1(k) \ G_2(k) \ . \ . \ . \ G_{N_i}(k)]$$

- x_i^{eq} : nombre de VP d'équilibre sur l'arc i ,
- z_i^{eq} : nombre de bus d'équilibre sur l'arc i ,
- a_1 : poids trafic général,
- a_2 : poids pour les BRT,
- n_l : nombre des BRT de la même ligne,
- n_m : nombre d'arcs traversés par les BRT de la même ligne,
- $P_{n,m}^s(k)$: position consigne à respecter pour le BRT durant le cycle k .

4.3.6 La stratégie complète

La stratégie

Le problème d'optimisation a pour objectif donc de minimiser le critère pour le cycle k présent. Pour tenir compte des conséquences de telles commandes sur l'état du système dans le futur, il est nécessaire de poser le problème d'optimisation sur un horizon plus long. L'horizon de simulation sur lequel les critères sont calculés est noté H_s .

L'horizon de contrôle sur lequel les commandes sont calculées est noté H_c . et nous avons la relation $H_s \geq H_c$. Les variables de commande du cycle $k + H_c$ jusqu'au cycle $k + H_s$ sont les variables nominales qui sont fixées. Le nombre de variables de commande est alors $H_c \times N_i$ au lieu de N_i pour un problème d'optimisation formulé sur un seul cycle. Le nouveau problème d'optimisation est le suivant :

$$C(U) = \min_{U(k), U(k+1), \dots, U(k+H_c)} \left\{ a_1 \left(\sum_{j=k}^{j=k+H_s} \sum_{i=1}^{N_i} (x_i(j) - x_i^{eq})^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{j=k}^{j=k+H_s} \sum_{i=1}^{N_i} (z_i(j) - z_i^{eq})^2 \right) \right. \\ \left. + a_2 \sum_{j=k}^{j=k+H_s} \sum_{n=1}^{n_1} (P_n(k) - P_n^s(k))^2 \right\} \quad (4.8)$$

où $U(j) = [G_1(j) \ G_2(j) \ \dots \ G_{N_i}(j)]^T$

Afin de récapituler, l'algorithme d'optimisation, au cycle k , a pour entrées :

- Les variables d'état mesurées au début du cycle k : il s'agit du nombre de véhicules et de bus dans chaque arc et des positions des BRT dans le réseau.
- Des prédictions mesurées (statistiquement) sur les changements des volumes de trafic général.
- Les objectifs de régulation : ce sont les trajectoires consignes que les variables d'état doivent approcher. Pour le trafic général, il s'agit d'un nombre d'équilibre de véhicules particuliers et de bus. Pour les BRT, il s'agit de positions à respecter au début de chaque cycle de feu.

L'algorithme permet de déterminer les durées des phases de vert pour les H_c futurs cycles qui composent l'horizon de commande.

Seuls les variables optimales pour le premier cycle k sont effectivement appliquées au système réel.

$X(k)$ est le vecteur des variables d'état du système au cycle k . Il est formé du nombre de véhicules par cycle du trafic général pour chaque arc du réseau et de la position de chaque BRT présent sur le réseau,

$$X(k) = [(x_1(k) - x_1^{eq}) \ \dots \ (x_{N_i}(k) - x_{N_i}^{eq}) \ (z_1(k) - z_1^{eq}) \ \dots \ (z_{N_i}(k) - z_{N_i}^{eq}) \ (P_1(k) - P_1^s(k)) \ \dots \ (P_N(k) - P_N^s(k))]^T$$

Le vecteur $u(k)$ désigne le vecteur de commande pour le cycle k et il est formé des durées de vert pour tous les carrefours.

$$u(k) = [G_1(k) \ G_2(k) \ \dots \ G_{N_i}(k)]^T$$

On a le système d'état suivant :

$$\begin{aligned} X(k+1) &= AX(k) + Bu(k) \\ y(k) &= CX(k) \end{aligned} \quad (4.9)$$

où A , B et C sont les matrices d'état, d'entrée et de commande, respectivement.

Les matrices A et C sont les matrices identité,

la matrice B est

$$\left\{ \begin{array}{ll} B_{i,j} = \tau_{i,j} S_{1j} & \text{si l'arc } i \text{ est en aval de l'arc } j \text{ et } 1 \leq i, \leq N_i \\ & B_{i,i} = -S_{1i} \quad \text{si } 1 \leq i \leq N_i \\ B_{i,j} = \tau'_{i,j} S_{2j} & \text{si l'arc } i \text{ est en aval de l'arc } j \text{ et } (N_i + 1) \leq i \leq 2N_i \\ & B_{i,i} = -S_{2i} \quad \text{si } (N_i + 1) \leq i \leq 2N_i \\ B_{i,j} = V_b - V_{i_n^s} - T_{i_n}^n \cdot \gamma_{i_n}^n - (a \cdot S_{1i} + b \cdot S_{2i}) & \text{si } (2N_i + 1) \leq i \leq 2N_i + N \text{ et } j = i_n \\ & B_{i,j} = 0 \quad \text{sinon} \end{array} \right.$$

où $V_{i_n^s}$ correspond à la vitesse consigne du BRT n sur l'arc i

La stratégie est fondée sur la commande prédictive. Son architecture est illustrée dans la Figure 7.

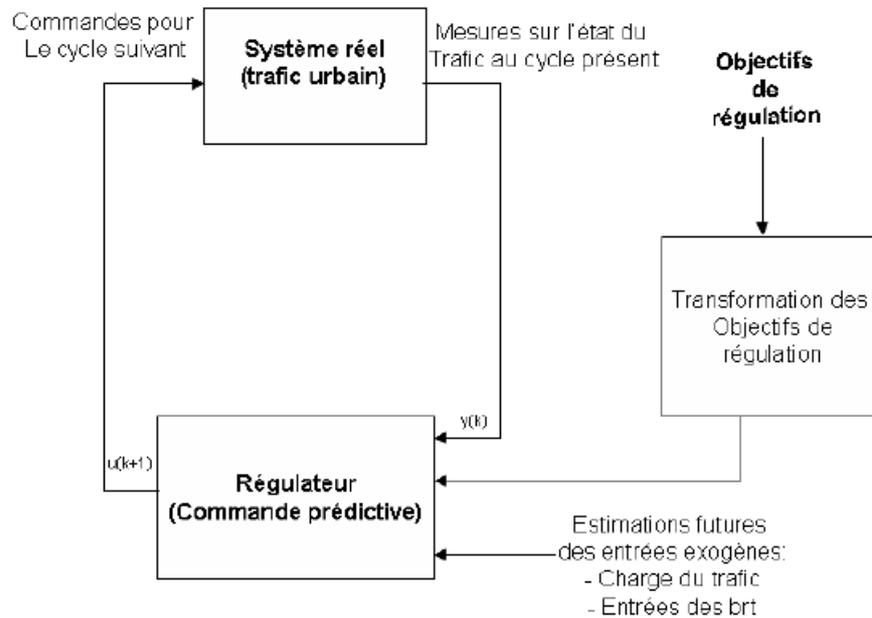


Figure 4.7 – Architecture complète de la stratégie de régulation

4.3.7 Analyse de la stratégie et simulations

Site

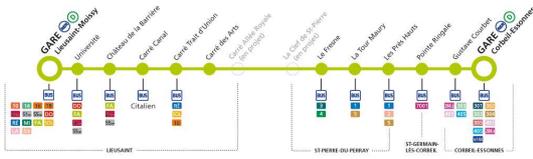


Figure 4.8 – Réseau Corbeil/Sénart

Le réseau simulé est illustré dans la figure ci dessous. Il comprend 4 jonctions, 6 entrées et 13 arcs. Il est traversé par une seule ligne de BRT. Cette ligne entre par l'entrée 1, traverse les intersections 1, 4, 3 et 2 avant de sortir. Sa fréquence est de 1BRT/3cycles.

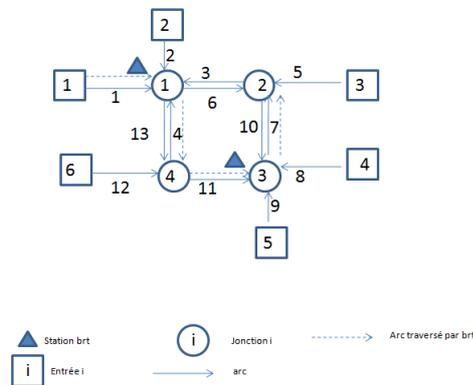


Figure 4.9 – Exemple de réseau (voirie banalisée)

La circulation des flux des véhicules particuliers et des bus entre les carrefours est définie par les taux de mouvements tournants qui sont donnés par le tableau suivant :

$\tau_{1,6} = 0.6$	$\tau_{1,13} = 0.3$	$\tau_{2,6} = 0.4$	$\tau_{2,13} = 0.5$
$\tau_{3,13} = 0.4$	$\tau_{4,6} = 0.2$	$\tau_{5,3} = 0.6$	$\tau_{5,10} = 0.2$
$\tau_{6,10} = 0.4$	$\tau_{7,3} = 0.3$	$\tau_{8,7} = 0.6$	$\tau_{9,7} = 0.7$
$\tau_{11,7} = 0.2$	$\tau_{12,4} = 0.2$	$\tau_{12,11} = 0.6$	$\tau_{13,11} = 0.3$
$\tau'_{1,6} = 0.5$	$\tau'_{1,13} = 0.5$	$\tau'_{2,6} = 0.25$	$\tau'_{2,13} = 0.25$
$\tau'_{3,13} = 0.25$	$\tau'_{4,6} = 0.25$	$\tau'_{5,3} = 0.5$	$\tau'_{5,10} = 0.5$
$\tau'_{6,10} = 0.25$	$\tau'_{7,3} = 0.5$	$\tau'_{8,7} = 0.25$	$\tau'_{9,7} = 0.25$
$\tau'_{11,7} = 0.5$	$\tau'_{12,4} = 0.25$	$\tau'_{12,11} = 0.25$	$\tau'_{13,11} = 0.5$

Tableau 4.1 – Les taux de mouvements tournants

Tous les carrefours fonctionnent avec le même cycle C de durée 80 secondes. Les simulations sont effectuées sur 6 cycles de feux, ce qui correspond à 8 minutes environ. Nous considérons une charge de trafic qui permet d'avoir des conditions de circulation dans les limites de saturation sur les arcs du réseau test.

arcs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
flux de VP	21	22	21	17	22	21	23	18	18	14	20	21	25
flux de bus	6	4	4	4	6	1	2	4	4	3	2	4	2

Tableau 4.2 – Flux de VP et de Bus par cycle

Analyse de la stratégie

Le but de cette analyse par l'interprétation des résultats numériques, est double, d'un point de vue de trafic général (VP et bus), c'est estimer l'écart entre le nombre réel et le nombre d'équilibre de VP et des bus. Du point de vue du BRT, c'est estimer la différence (l'erreur) entre la progression des BRT suivant les consignes de régularité fixées.

Le test est conduit en variant les flux des véhicules particuliers et des bus sur le réseau.

Le flux de saturation pour les véhicules particuliers est de 0,5 véh/s (18 véh/cycle) et pour les bus 0,16 bus/s (6 bus/cycle). Le nombre de véhicules varie entre 14 et 25, celui des bus entre 1 et 6.

Nous considérons une charge de trafic qui permet d'avoir des conditions de circulation dans les limites de saturation sur les arcs du réseau test empruntés par le BRT les arcs 1-13-11-7.

On ne considère que les durées des phases de vert comme seules variables influençant la progression des BRT.

Influence de la charge du trafic sur la progression des BRT

La progression des BRT dans un réseau urbain dépend de la charge du trafic sur les régions traversées par ceux-ci. Plus le trafic est dense, plus la progression est difficile.

Influence des durées de vert sur le nombre des véhicules et de bus ainsi que sur les positions du BRT

L'évolution des BRT ne dépend que des durées des phases de vert pendant lesquelles les BRT traversent les carrefours. Deux scénarios ont été envisagés :

- Plan de feux favorable au BRT : durées de 45 secondes pour toutes les phases.
- Plan de feux défavorable au BRT : durées de vert de 17 secondes pour toutes les phases.

Les deux scénarios reproduisent bien la dynamique réelle de la progression des BRT en variation en fonction des durées des phases. Quand le feu vert est important les files d'attente constituées de véhicules particuliers et de bus sont inexistantes ce qui facilite la progression du BRT sur le réseau.

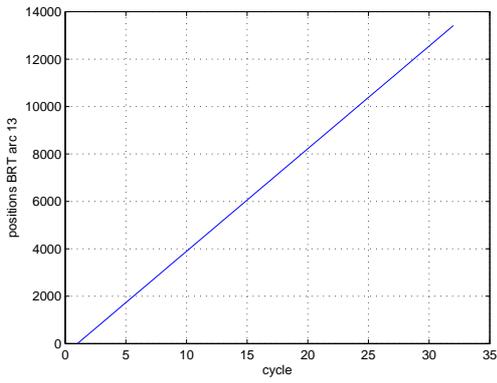


Figure 4.10 – Positions du BRT pour une durée de vert de 45s sur l'arc 13

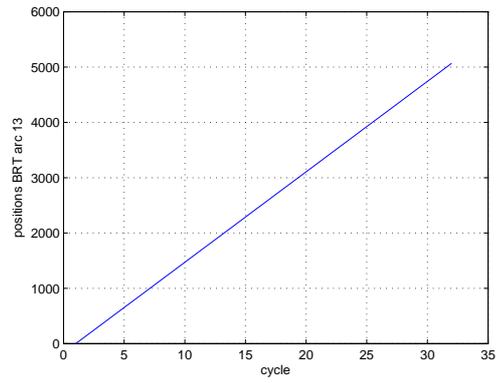


Figure 4.11 – Positions du BRT pour une durée de vert de 17s sur arc 13

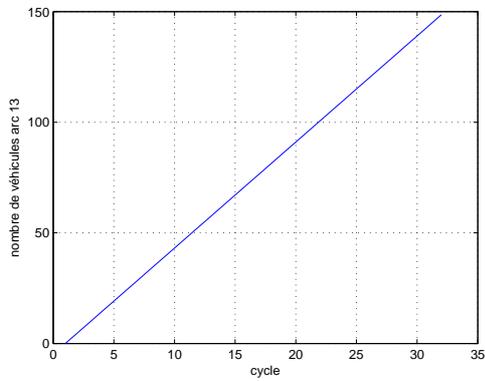


Figure 4.12 – Nombre de véhicules pour une durée de vert de 45s sur l'arc 13

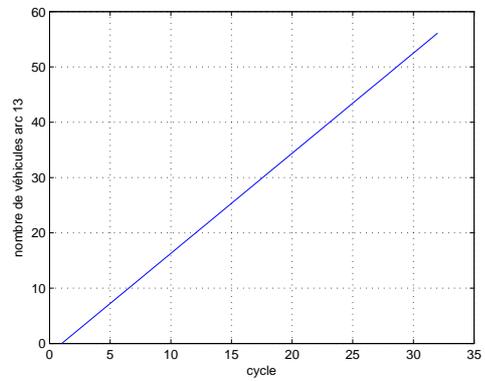


Figure 4.13 – Nombre de véhicules pour une durée de vert de 17s sur l'arc 13

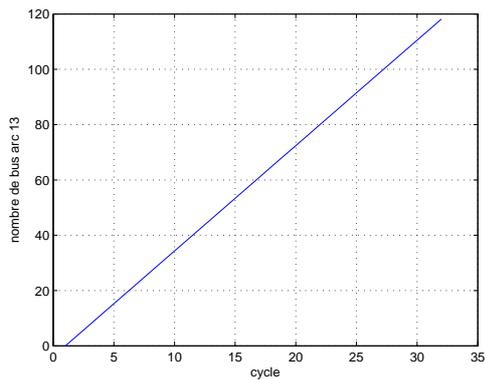


Figure 4.14 – Nombre de bus pour une durée de vert de 45s sur l'arc 13

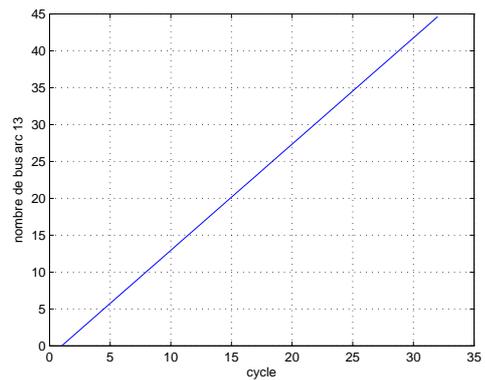


Figure 4.15 – Nombre de bus pour une durée de vert de 17s sur l'arc 13

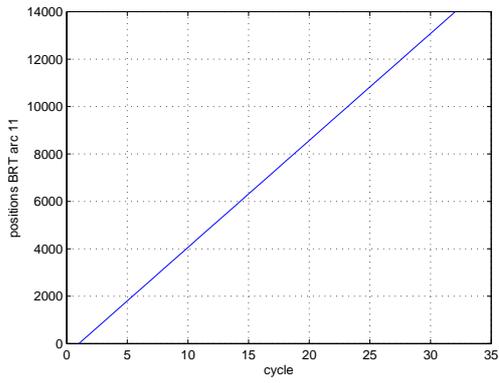


Figure 4.16 – Positions du BRT pour une durée de vert de 45s sur l'arc 11

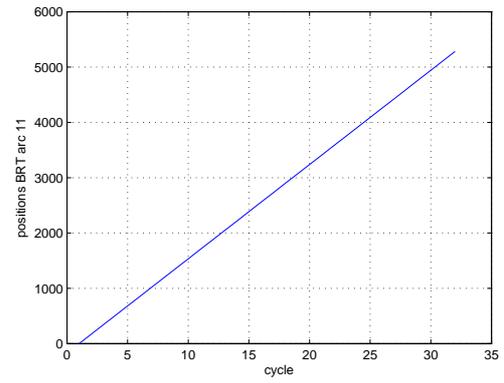


Figure 4.17 – Positions du BRT pour une durée de vert de 17s sur arc 11

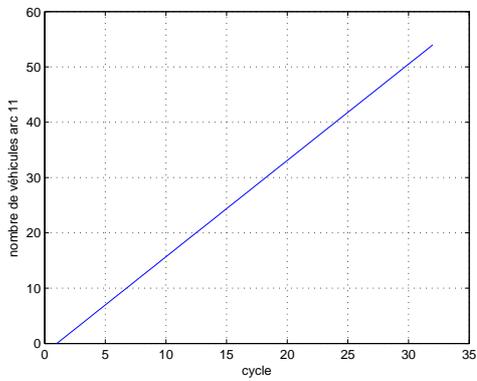


Figure 4.18 – Nombre de véhicules pour une durée de vert de 45s sur l'arc 11

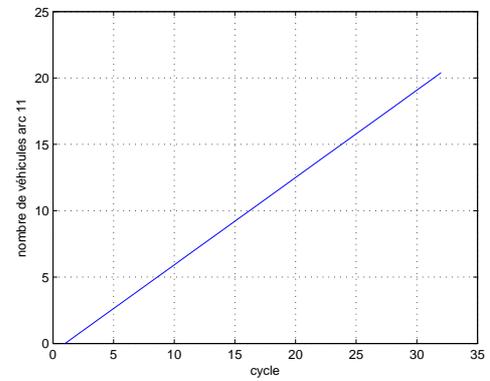


Figure 4.19 – Nombre de véhicules pour une durée de vert de 17s sur l'arc 11

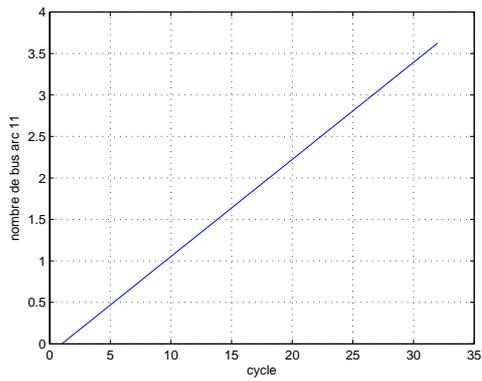


Figure 4.20 – Nombre de bus pour une durée de vert de 45s sur l'arc 11

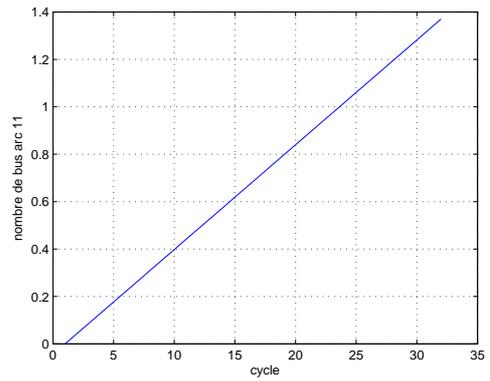


Figure 4.21 – Nombre de bus pour une durée de vert de 17s sur l'arc 11

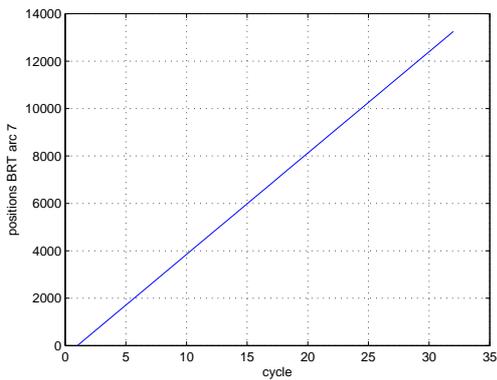


Figure 4.22 – Positions du BRT pour une durée de vert de 45s sur l’arc 7

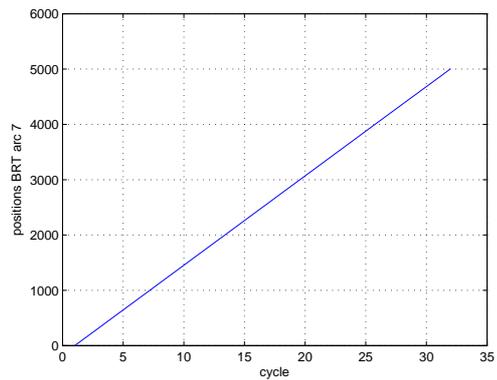


Figure 4.23 – Positions du BRT pour une durée de vert de 17s sur arc 7

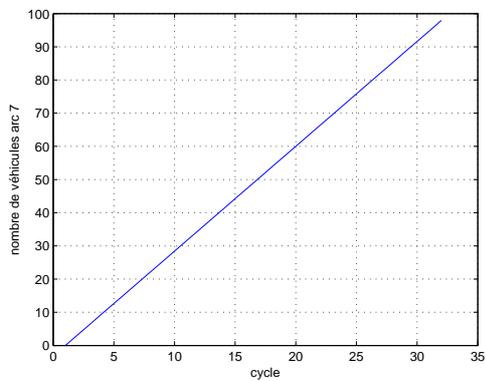


Figure 4.24 – Nombre de véhicules pour une durée de vert de 45s sur l’arc 7

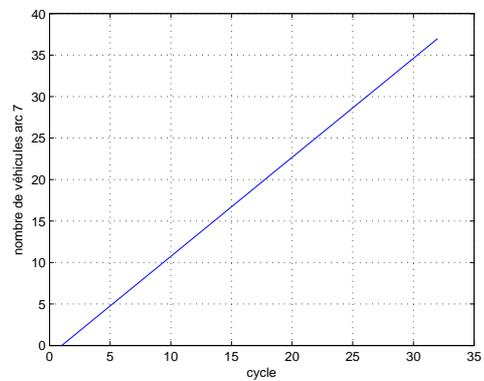


Figure 4.25 – Nombre de véhicules pour une durée de vert de 17s sur l’arc 7

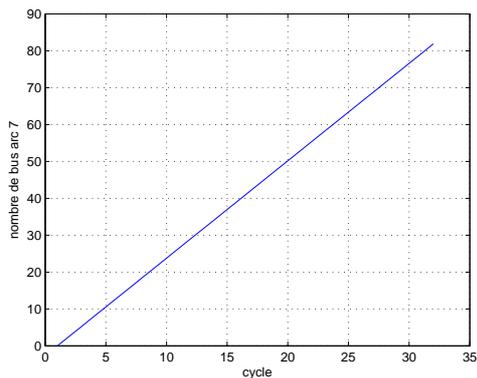


Figure 4.26 – Nombre de bus pour une durée de vert de 45s sur l’arc 7

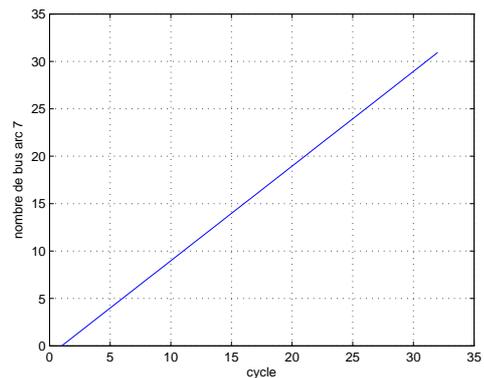


Figure 4.27 – Nombre de bus pour une durée de vert de 17s sur l’arc 7

Respect des consignes

Nous rappelons que les consignes sont les positions du BRT pour chaque fin de cycle. Avec une longueur de cycle $C = 80$ secondes et une vitesse libre du BRT fixée à 8 m/s, un BRT peut

parcourir au maximum la distance de $8 \times 80 = 640m$ en un seul cycle. Pour cette étude, nous allons appliquer quatre valeurs de consigne. Chaque valeur correspond à une configuration, c'est à dire la distance que doit parcourir un BRT par cycle. Pour chaque stratégie, la régulation est définie suivant un scénario qui donne la priorité absolue pour les BRT. La durée du vert G_i est prise entre 0 s et 45 s.

Configuration	1	2	3	4
Consigne (m)	400	480	560	640
Vitesse Consigne(m/s)	5	6	7	8

Tableau 4.3 – Les différentes consignes

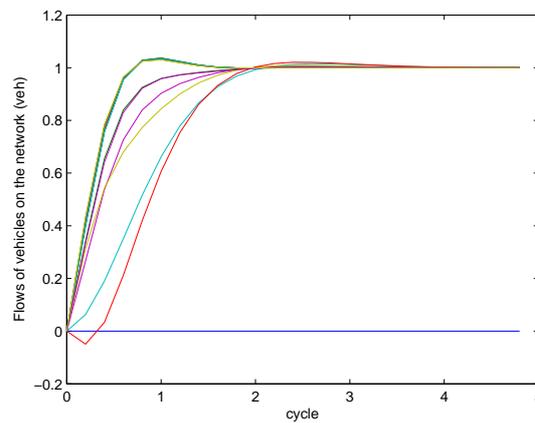


Figure 4.28 – Erreur relative nombre de VP sur le réseau

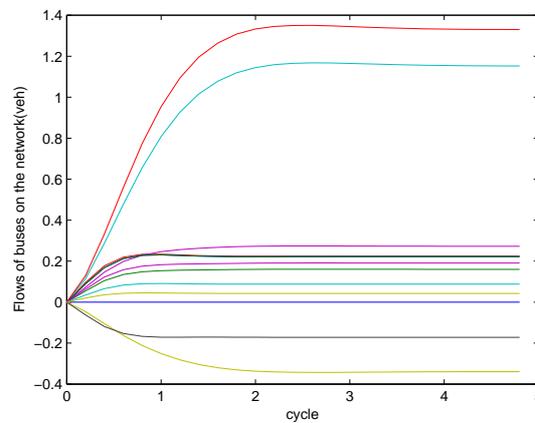


Figure 4.29 – Erreur relative nombre de Bus sur le réseau

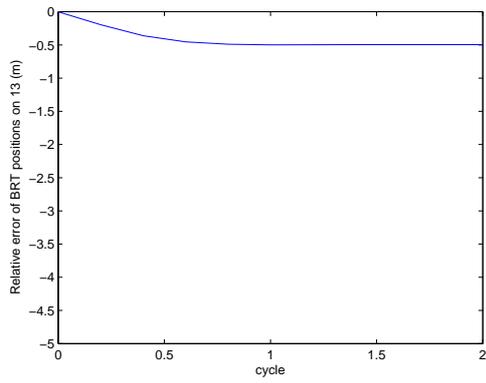


Figure 4.30 – Stratégie 1 sur l’arc 13

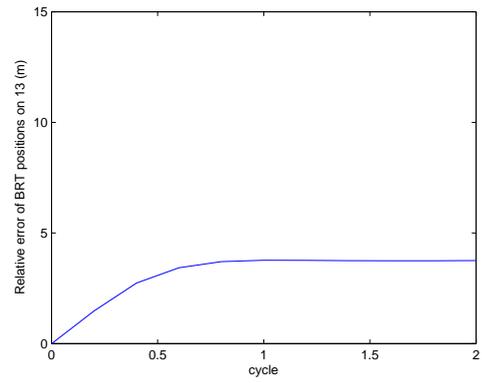


Figure 4.31 – Stratégie 2 sur arc 13

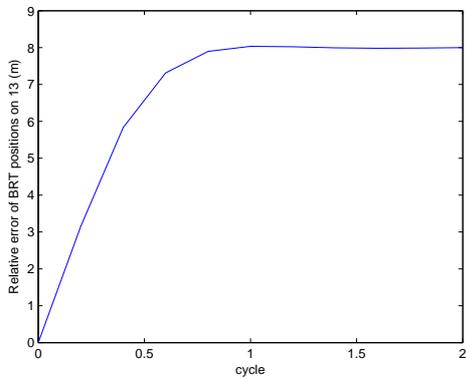


Figure 4.32 – Stratégie 3 sur l’arc 13

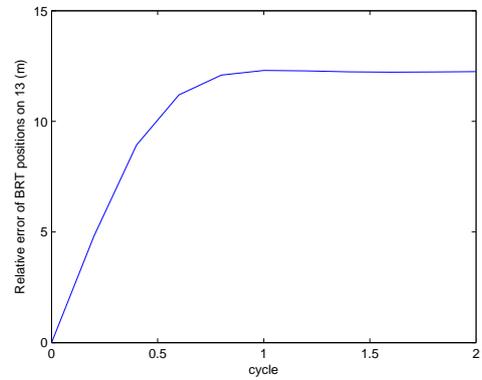


Figure 4.33 – Stratégie 4 sur l’arc 13

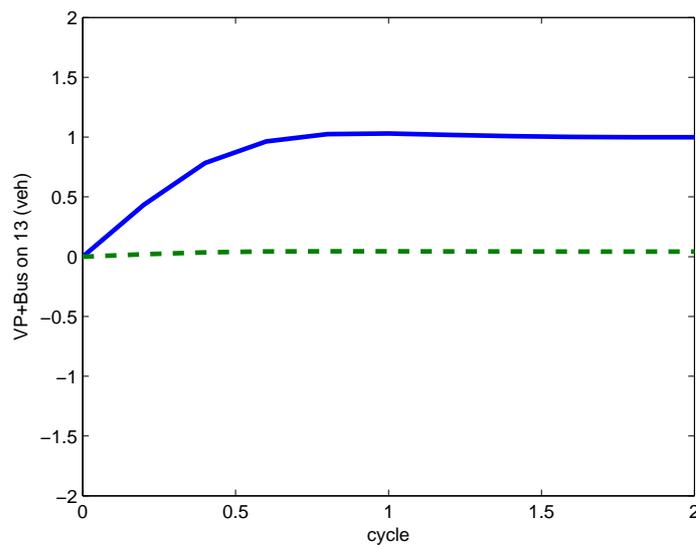


Figure 4.34 – Erreur relative nombre de VP et de bus sur l’arc 13

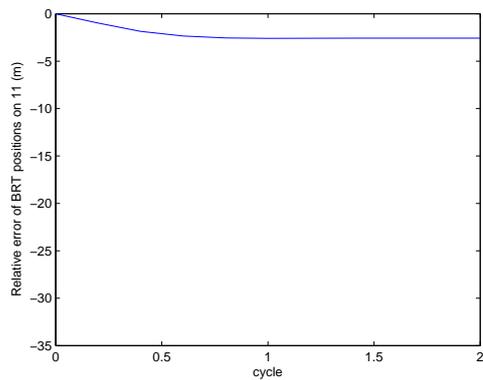


Figure 4.35 – Stratégie 1 sur l’arc 11

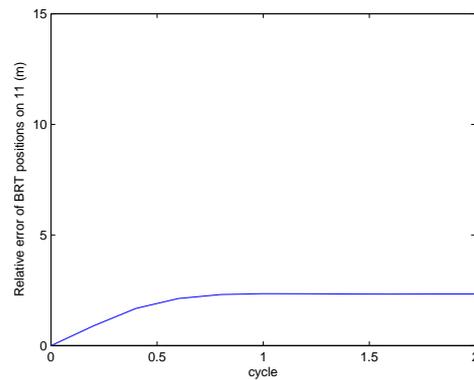


Figure 4.36 – Stratégie 2 sur arc 11

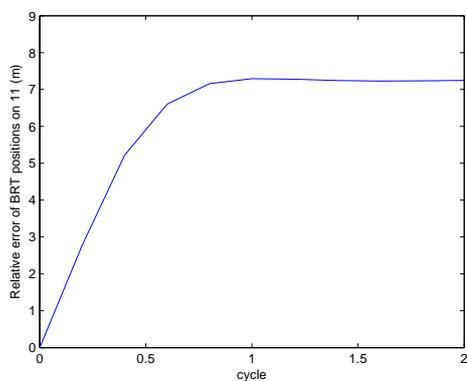


Figure 4.37 – Stratégie 3 sur l’arc 11

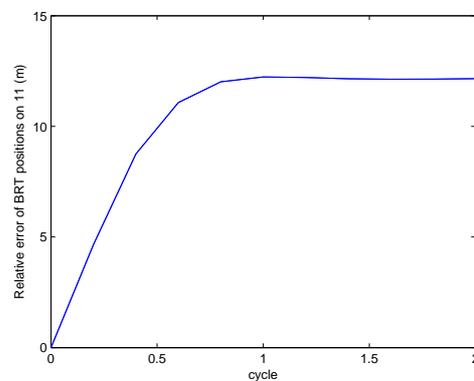


Figure 4.38 – Stratégie 4 sur l’arc 11

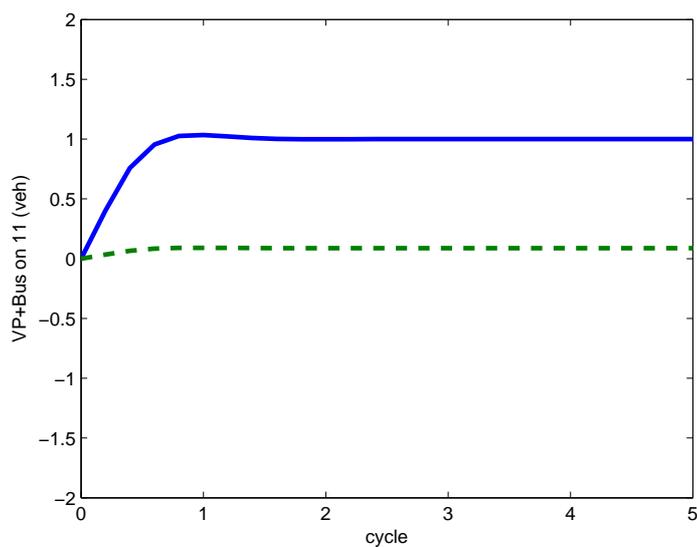


Figure 4.39 – Erreur relative nombre de VP et de bus sur l’arc 11

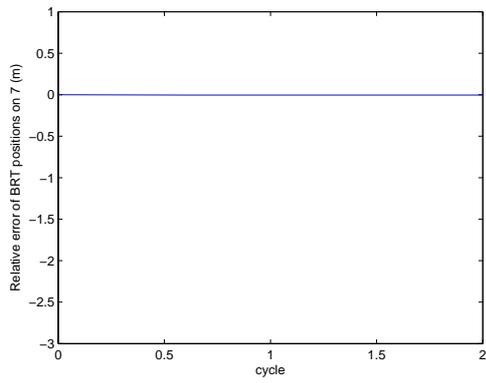


Figure 4.40 – Stratégie 1 sur l’arc 7

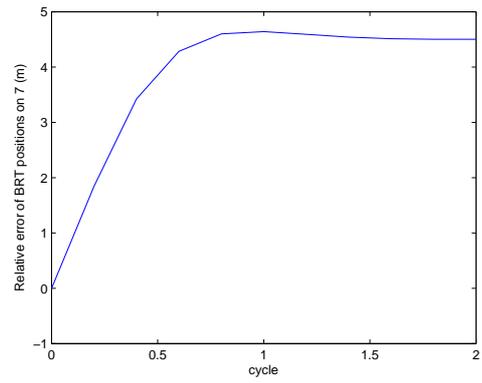


Figure 4.41 – Stratégie 2 sur arc 7

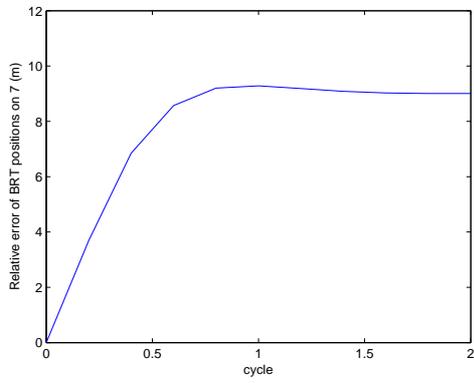


Figure 4.42 – Stratégie 3 sur l’arc 7

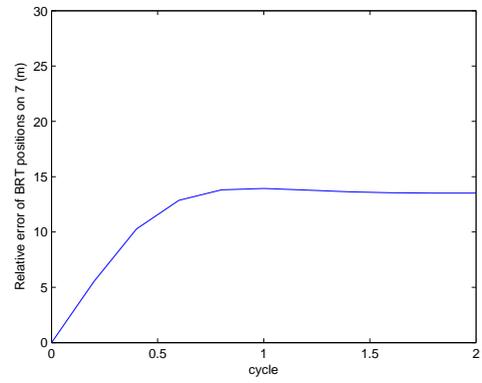


Figure 4.43 – Stratégie 4 sur l’arc 7

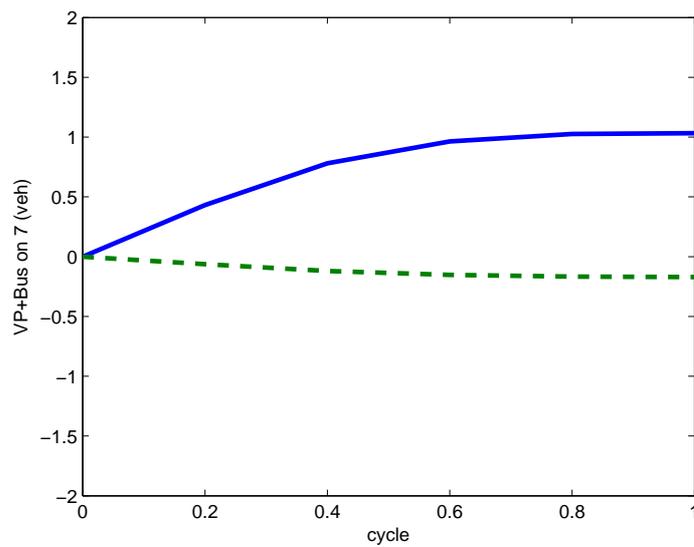


Figure 4.44 – Erreur relative nombre de VP et de bus sur l’arc 7

Pour les différentes stratégies, ou valeurs de la consigne, nous observons que la stratégie tente de faire en sorte que la progression du BRT suive la consigne donnée. Même si pour les consignes de 640 m et à un degré moindre celle de 570 m, la stratégie n'arrive pas à coller aux consignes.

4.4 Le deuxième Modèle de la progression des BRT

Nous présentons le modèle de progression du BRT inspiré par celui de Kachroudi [KACHROUDI [2010]] mais qui tient compte des différents véhicules (différentes longueurs) et quelques simulations.

L'objectif du modèle est de décrire l'évolution dans le temps d'un BRT. Le temps est discrétisé selon la durée, commune à tous les carrefours, d'un cycle de feu. L'itinéraire d'un BRT est supposé connu et est constitué d'une succession d'arrêts à des stations et à des carrefours. Nous nous sommes inspirés du modèle développé par Kachroudi [KACHROUDI [2010]] dans la construction de notre modèle.

Le concept général du modèle est de percevoir les passages des carrefours successifs et les arrêts aux stations comme des événements après-lesquels une ré-initialisation de certaines variables est nécessaire. Après le passage d'un événement, le BRT doit immédiatement passer à un autre jusqu'à ce que le cycle actuel se termine ou qu'il sort de la zone contrôlée du réseau. Deux types d'événements peuvent se produire : le passage d'un carrefour et le passage d'une station.

La dynamique du BRT n est représentée par sa position $P_n(k)$ dans le cycle k , l'objectif du modèle est l'estimation de $P_n(k+1)$. Avant le passage d'un événement, la position du BRT et le temps restant avant la fin du cycle sont désignés par P_p et t_p respectivement. Après le passage, ces deux variables sont indexées par n .

Dans le cas du passage d'une station, la position du BRT et le temps restant sont mis à jour par l'algorithme noté Algorithme 1. Pour le passage à une ligne de feux, ils sont mis à jour par l'algorithme noté Algorithme 2.

4.4.1 Le passage d'une station

Nous supposons que la station est placée suffisamment loin du carrefour en aval (Figure 5). Le prochain événement est traverser une station située à une distance LS_i dont le temps de stationnement T_l est supposé connu. Le BRT est à la position P_p et il reste t_p avant la fin de l'actuel cycle de feu.

Le BRT est supposé rouler à une vitesse V_b durant le cycle C , la distance maximale supposée parcourir est $V_b.t_p$. Deux situations peuvent se présenter :

- le BRT arrive à la station avant la fin du cycle, i.e., $V_b.t_p \geq LS_i - P_p$; alors la nouvelle position du BRT est : $P_n = LS_i$ et le nouveau temps restant est $t_n = t_p - T_l - \frac{LS_i - P_p}{V_b}$,
- le BRT arrive après la fin du cycle, i.e., $V_b.t_p < LS_i - P_p$ alors $P_n = P_p + V_b.t_p$ et $t_n = 0$.

Algorithme 1

$$\begin{array}{l}
\text{si } V_b.t_p < Ls_i - P_p \text{ alors} \\
P_n = P_p + V_b.t_p \\
t_n = 0 \\
\text{sinon} \\
P_n = Ls_i \\
t_n = t_p - T_l - \frac{Ls_i - P_p}{V_b} \\
\text{fin si}
\end{array}$$

Tableau 4.4 – Algorithme de passage de station

4.4.2 Le passage d'un carrefour à feux

Le prochain évènement est de traverser un carrefour à feux dont la ligne est située à une distance Lf_i . Le BRT est à la position P_p et il reste t_p avant la fin de l'actuel cycle de durée C . Entre le BRT et la ligne de feux, il y a N_v^i véhicules particuliers de longueur a et N_b^i bus de longueur b .

La file d'attente devant le BRT a une vitesse de V_f^i .

Le feu contrôlant l'arc i a une durée de vert de $G_i(k)$.

Si la file d'attente est assez longue, le BRT est supposé la rejoindre en un temps Y qui respecte l'équation suivante :

$$P_p + V_b.Y = Lf_i - a.N_v^i - b.N_b^i + V_f^i.Y$$

Le nombre de véhicules particuliers qui sortent d'un tronçon durant un cycle de temps C contrôlé par une durée de feu vert G_i est $S_{1i}.G_i$ et le nombre de bus qui sortent est $S_{2i}.G_i$.

La distance qui disparaît de la file d'attente est $(aS_{1i} + b.S_{2i}) \times G_i$, d'où :

$$V_f^i = \frac{(aS_{1i} + b.S_{2i}) \times G_i}{C}$$

On obtient :

$$Y = C \times \frac{Lf_i - P_p - a.N_v^i - b.N_b^i}{C.V_b - (aS_{1i} + b.S_{2i}).G_i}$$

et $Y > 0$

Comme dans le cas précédent, deux situations peuvent se présenter :

- le BRT ne rejoint pas la file d'attente de longueur $a.N_v + b.N_b$, i.e.,

$$V_b.t_p \leq Lf_i - P_p - a.N_v^i - b.N_b^i$$

alors la nouvelle position du BRT est : $P_n = P_p + t_p.V_b$ et le nouveau temps restant est $t_n = 0$,

- le BRT rejoint la file d'attente, i.e.,

$$V_b.t_p \geq Lf_i - P_p - a.N_v^i - b.N_b^i$$

On ne s'intéresse qu'au cas où il la rejoint avant la ligne de feux, ce qui est la situation la plus réalisable vu la longueur de la file.

Ce cas correspond à $Y.V_b \leq Lf_i - P_p$. Le nombre de véhicules particuliers devant le BRT correspond à

$$N_v^i - \frac{S_{1_i} \cdot Y \cdot G_i(k)}{C}$$

et le nombre de bus devant le BRT à

$$N_b^i - \frac{S_{2_i} \cdot Y \cdot G_i(k)}{C}$$

Le temps restant avant la fin du cycle est $t_p - Y$ dans lequel la durée de vert restante est $\frac{(t_p - Y)G_i(k)}{C}$.

Nous distinguons deux possibilités :

- la file d'attente disparaît complètement durant ce cycle, i.e., $N_v^i + N_b^i \leq \frac{(aS_{1_i} + bS_{2_i}) \cdot G_i(k) \cdot t_p}{C}$, nous avons alors :

$$P_n = Lf_i$$

$$t_n = \frac{1}{2} \cdot (t_p - Y) \cdot \left(1 + \frac{G_i(k)}{C}\right) - \frac{Nv_i + Nbi}{S_{1_i} + S_{2_i}} + \frac{Y \cdot G_i(k)}{C}$$

- la file d'attente ne peut pas disparaître complètement pendant ce cycle donc, $V_b \cdot t_p < Lf_i - (a \cdot N_v^i + b \cdot N_b^i - \frac{(aS_{1_i} + bS_{2_i}) \cdot G_i(k) \cdot t_p}{C})$ et on a alors :

$$P_n = Lf_i - (a \cdot N_v^i + b \cdot N_b^i - \frac{(aS_{1_i} + bS_{2_i}) \cdot G_i(k) \cdot t_p}{C})$$

$$t_n = 0$$

Pour écrire l'algorithme, nous considérons :

- **Conditions :**

$$A : Lf_i - P_p - a \cdot Nv_i - b \cdot Nbi \geq t_p \cdot V_b$$

$$B : Nv_i + Nbi \geq \frac{(S_{1_i} + S_{2_i}) \cdot G_i(k) \cdot t_p}{C}$$

$$C : t_p \cdot V_b \leq Lf_i - P_p - a \left(Nv_i - \frac{S_{1_i} \cdot G_i(k) \cdot t_p}{C}\right) - b \left(Nbi - \frac{S_{2_i} \cdot G_i(k) \cdot t_p}{C}\right)$$

$$D : G_i(k) \geq \frac{C \cdot (Nv_i + Nbi) \cdot V_b}{(S_{1_i} + S_{2_i})(Lf_i - P_p)}$$

- **Équations :**

$$EQ1 : P_n = P_p + t_p \cdot V_b \text{ et } t_n = 0$$

$$EQ2 : P_n = Lf_i - a \left(Nv_i - \frac{S_{1_i} \cdot G_i(k) \cdot t_p}{C}\right) - b \left(Nbi - \frac{S_{2_i} \cdot G_i(k) \cdot t_p}{C}\right) \text{ et } t_n = 0$$

$$EQ3 : P_n = Lf_i \text{ et } t_n = \frac{(t_p - Y) \left(1 + \frac{G_i(k)}{C}\right)}{2} - \frac{Nv_i}{S_{1_i}} - \frac{Nbi}{S_{2_i}} + \frac{Y \cdot G_i(k)}{C}$$

Algorithme 2 :

où \times se réfère à "et" et \bar{A} à la négation de A.

si A alors : EQ1
 si $(\bar{A} \times B \times C \times \bar{D})$ alors EQ2
 si $(\bar{A} \times \bar{B} \times \bar{D})$ alors EQ3

Tableau 4.5 – Algorithme de passage des carrefours à feux

Algorithme final

L'algorithme final est donné par :

$P_p = P(k)$
 $t_p = C$
 si (évènement = station) alors
 $(P_n, t_{np}) = alg_1(P_p, t_p, T_i)$
 sinon
 $(P_n, t_n) = alg_2(P_p, t_p, G, Nv, Nb)$
 fin si
 $P_p = P_n$
 $t_p = t_n$
 fin tant que
 $P(k+1) = P_n$

Tableau 4.6 – Algorithme final

4.4.3 Simulations

Arc	Ligne de feux (Lf)	Station (Ls)
1	100	-
2	200	150
3	400	450
4	600	-
5	800	900
6	1000	1170
7	1260	-
8	1400	1480
9	1520	-
10	1700	1800
11	1900	2000
12	2100	2300
13	2500	2500

Tableau 4.7 – Positions des stations et des carrefours à feux sur le réseau

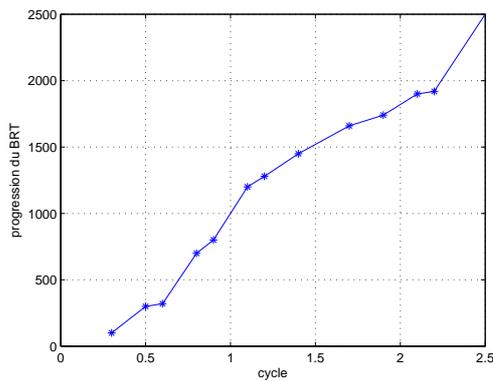


Figure 4.45 – Progression du BRT pour une durée de vert de 45s

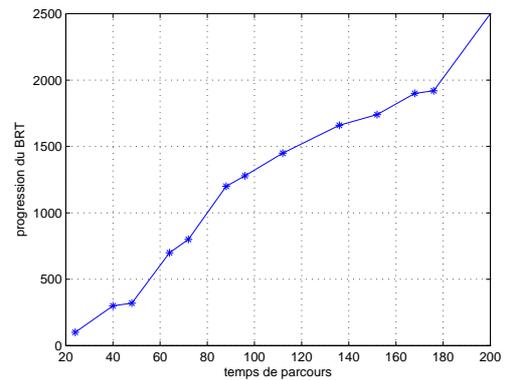


Figure 4.46 – Temps de parcours du BRT pour une durée de vert de 45s

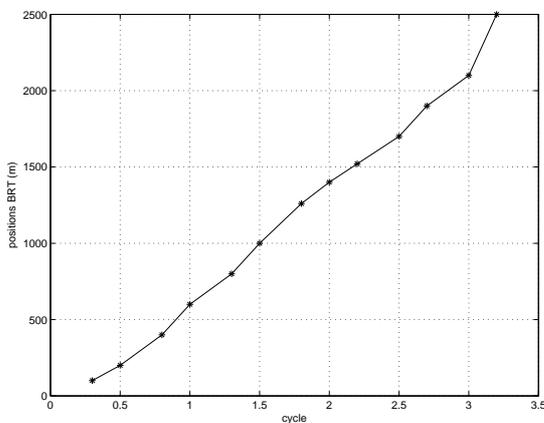


Figure 4.47 – Progression du BRT pour une durée de vert de 17s

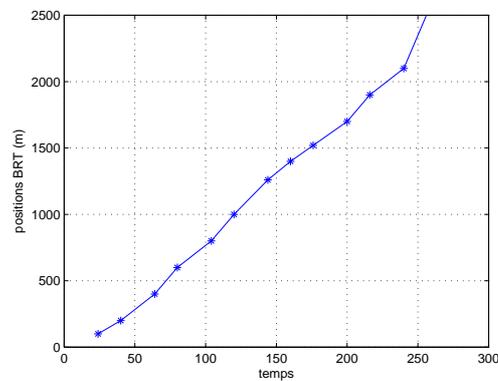


Figure 4.48 – Temps de parcours du BRT pour une durée de vert de 17s

On confirme avec ce modèle les conclusions du premier, à savoir que la progression des BRT dans un réseau urbain est plus lente quand la charge du trafic est dense sur les arcs traversés par ceux-ci. En plus, un plan de feux de phase 17 secondes est défavorable aux BRT.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un modèle de commande prédictive appliqué à un système de trafic urbain trimodal : le mode des véhicules privés, le mode des bus et le mode BRT. La modélisation des deux premiers modes est basée sur l'efficace modèle de la stratégie TUC. La modélisation des BRT se fait de deux façons différentes, la première est un nouveau modèle qui permet d'exprimer l'évolution des positions du BRT sous la forme d'un système d'état et la seconde est un modèle plus "ponctuel", il représente la progression du BRT par évènement (passage d'une station ou une ligne de feux). Les résultats des simulations montrent que ce modèle est cohérent et qu'il peut être utilisé comme un facteur prédictif d'une stratégie de contrôle du trafic.

5

Modèle hybride fondé sur un modèle générique de second-ordre GSOM

Sommaire

5.1	Introduction	130
5.2	Revue de la modélisation hybride	130
5.2.1	Couplage entre un modèle macroscopique et une loi de poursuite	131
5.2.2	Modèle hybride basé sur les systèmes multi-agents	136
5.2.3	Modèles hybrides fondés sur des approches mesoscopiques	137
5.3	Rappels sur le modèle de second ordre générique	138
5.3.1	modèle GSOM	138
5.3.2	Discrétisation par le schéma de Godunov	140
5.3.3	Discrétisation particulière	141
5.3.4	Exemple de modèle GSOM : le modèle biphasique de Colombo	141
5.4	Principe du schéma de couplage	143
5.4.1	Transition du modèle GSOM macroscopique vers le modèle GSOM microscopique	144
5.4.2	Transition du modèle GSOM microscopique vers le modèle GSOM macroscopique	145
5.5	Validation du schéma de couplage	146
5.6	Conclusion	151

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons [MAMMAR *et al.* [2011]] un modèle hybride fondé sur la discrétisation spatio-temporelle du modèle générique de second ordre GSOM, développé par Mammar et al [MAMMAR *et al.* [2006]]. Ce modèle généralise le modèle ARZ dans le sens que l'invariant I du modèle ARZ est substitué par un invariant générique fixé aux véhicules, et dépendant de la densité et de la vitesse. Ce modèle est caractérisé par la présence d'un invariant lelong des trajectoires véhiculaires.

Les modèles hybrides développés par Mammar et al [MAMMAR *et al.* [2006]] et Moutari et Rasclé [MOUTARI [2007]] sont des couplages de modèles macroscopiques issues du modèle AR [AW et RASCLE [2000]] et de modèles microscopiques obtenus par une discrétisation Lagrangienne des mêmes modèles macroscopiques. Cette approche a été développée par Lecqlercq [LECLERCQ [2007]] avec le modèle macroscopique du premier ordre LWR.

Dans ce chapitre, nous montrons qu'on peut généraliser les approches développées dans ([MAMMAR *et al.* [2006]], [MOUTARI [2007]], [LECLERCQ [2007]]) au modèle générique de second ordre GSOM développé par Lebacque et al [LEBACQUE *et al.* [2007]].

Nous commençons ce chapitre par une revue de la modélisation hybride puis nous rappelons brièvement la famille de modèles génériques de second ordre ainsi que le modèle biphasique de Colombo ([LEBACQUE *et al.* [2007]], [COLOMBO [2002]]) et la discrétisation Lagrangienne du même modèle. Nous présentons ensuite les étapes de l'algorithme d'hybridation qui permet d'assurer la continuité de passage de variables macroscopiques aux variables microscopiques et vice versa.

La validation du schéma de couplage se fera par la simulation de phénomènes de trafic en utilisant le modèle biphasique de Colombo.

5.2 Revue de la modélisation hybride

Les modèles hybrides ont été développés afin d'étudier des situations dans lesquelles les modèles macroscopiques et microscopiques ne sont pas adaptés. La modélisation hybride du trafic est le couplage entre un modèle macroscopique et un modèle microscopique ([BOURREL [2003]], [MAMMAR [2006]], [MAMMAR [2007]]). La difficulté majeure de ce type de modèle est dans le choix des modèles à interfacer afin d'assurer la continuité de passage des variables macroscopiques aux variables microscopiques.

On distingue principalement trois grandes familles de modèles hybrides : ([MAMMAR [2007]]) :

- Couplage entre un modèle macroscopique et une loi de poursuite,
- Couplage entre un modèle macroscopique et un modèle microscopique basé sur les systèmes multi-agents,
- Couplage entre un modèle mesoscopique et une loi de poursuite.

5.2.1 Couplage entre un modèle macroscopique et une loi de poursuite

Cette famille se subdivise en deux classes suivant que les modèles sont basés sur la même relation d'équilibre (les modèles hybrides homogènes) ou sur des relations différentes (les modèles hybrides hétérogènes).

Modèle hybride homogène

Les premiers travaux sont ceux de Helbing et al [HELBBING *et al.* [2000]]. Le modèle proposé résulte du couplage entre deux modèles utilisant la même loi de comportement : le modèle de conducteur intelligent (IDM) pour la représentation microscopique et un modèle de second ordre dérivé de la loi de poursuite IDM, pour la représentation à l'échelle macroscopique.

Modèle microscopique IDM

$$\begin{aligned}\ddot{x}_{i+1}(t) &= a\left(1 - \left(\frac{\dot{x}_{i+1}(t)}{v_l}\right)\delta - \left(\frac{s_{i+1}(t)}{x_i(t) - x_{i+1}(t)}\right)^2\right) \\ s_{i+1}(t) &= s_0 + s_1\sqrt{\frac{\dot{x}_{i+1}(t)}{v_l}} + T\dot{x}_{i+1}(t) + \frac{\dot{x}_{i+1}(t)(\dot{x}_i(t) - \dot{x}_{i+1}(t))}{2\sqrt{ab}}\end{aligned}\quad (5.1)$$

avec :

- v_l : la vitesse libre du véhicule,
- a : accélération maximale,
- T : le temps inter-véhiculaire minimum,
- s_0 et s_1 : deux distances caractérisant les états congestionnés,
- b : la décélération jugée confortable par le conducteur.

Modèle macroscopique

$$\partial_t v + v\partial_x v = a\left(1 - \left(\frac{v(x,t)}{v_l}\right)\delta - \left(\frac{s_0 + s_1\sqrt{\frac{v(x,t)}{v_l}} + Tv(x,t) + \frac{v(x,t)(v(x,t) - v(x,t))}{2\sqrt{ab}}}{\frac{1}{2}(\rho(x,t) + \rho(x + \frac{1}{\rho(x,t)}, t))}\right)^2\right)\quad (5.2)$$

Les auteurs ne donnent aucune information sur le schéma d'interface utilisé. Ils soulignent simplement que le principe d'hybridation est trop délicat pour être exposé.[MAMMAR [2007]]

Modèles hybrides hétérogènes

Parmi ce types de modèle, on a : le modèle développé par Magne [MAGNE *et al.* [2000]], celui développé par Poschinger [POSCHINGER *et al.* [2002]], celui proposé par Bourrel [BOURREL [2003]], celui proposé par Mammari [MAMMARI [2006]] et finalement celui proposé par Moutari [MOUTARI [2007]].([MAMMARI [2007]])

Modèle hybride de Magne

Le modèle hybride de Magne ([MAGNE *et al.* [2000]]) utilise un couplage entre le modèle macroscopique SIMRES, qui est une version discrète du modèle de second ordre de Payne ([PAYNE [1971]]), et le modèle microscopique SISTRA-B+.

Les sous-modèles échangent les informations à chaque pas de simulation du modèle macroscopique. La synchronisation des deux sous-modèles est assurée en choisissant un pas de discrétisation macroscopique proportionnel à celui du sous-modèle microscopique. Le passage des variables macroscopiques aux variables microscopiques se fait en introduisant deux cellules de transition, qui ont pour rôle le calcul de la vitesse et de la densité à partir des données microscopiques. Ce calcul est nécessaire pour la détermination des conditions limites du modèle macroscopique. (Figure 1)

Ce modèle est caractérisé par des décalages de transmission de l'information en régime congestionné ainsi que des discontinuités dans le débit et des oscillations au niveau de l'écoulement.

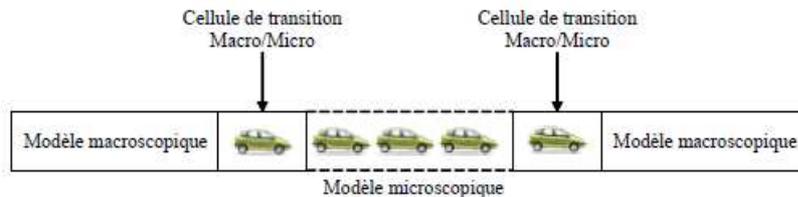


Figure 5.1 – Principe d'interfaçage du modèle hybride de Magne

Le modèle hybride de Poschinger

Poschinger ([POSCHINGER *et al.* [2002]]) adopte la même démarche que Magne, il propose comme modèle hybride, un couplage entre le modèle microscopique IDM de Helbing et une variante du modèle de second ordre de Payne pour le modèle macroscopique.

Les similitudes du schéma de couplage utilisé par Poschinger avec celui proposé par Magne conduisent aux mêmes conclusions sur le caractère discret du débit.

Le modèle hybride de Bourrel

Bourrel ([BOURREL [2003]]) propose deux modèles hybrides résultant d'un couplage entre deux modèles fondés sur la théorie du modèle de premier ordre LWR.

Le premier modèle est couplage du modèle STRADA ([?]), qui est une discrétisation spatio-temporelle du modèle macroscopique LWR et du modèle de poursuite de Del Castillo ([DEL-CASTILLO [1996]]) :

Modèle microscopique de Del Castillo

$$V_{i+1}(t + dt) = V_i(t) \quad (5.3)$$

avec :

- $V_{i+1}(t + dt)$: la vitesse du véhicule $i + 1$ à l'instant $t + dt$,
- $V_i(t)$: la vitesse du véhicule i à l'instant t ,
- dt : correspond au temps mis par une perturbation pour se propager entre le véhicule i et le véhicule $i + 1$

Mais les possibilités d'extension de ce modèle hybride avec des aspects stochastiques conduit au non respect de la loi de conservation. L'auteur conclut que ce modèle est très peu exploitable en pratique.(Figure 2)

Dans le second modèle, le comportement du flux à l'échelle microscopique est gouverné par le modèle à vitesse optimale de Newell.

Modèle microscopique de Newell

$$v_{n+1}(t + \Delta t) = G(x_{n+1}(t) - x_n(t)) \quad (5.4)$$

avec :

- x_n : la position du véhicule n à l'instant t ,
- G : une fonction déterminant la vitesse en fonction de l'espacement entre deux véhicules. Sous l'hypothèse d'un trafic en régime d'équilibre, elle est équivalente à la relation d'équilibre $V_e(\rho)$

La validation du modèle hybride se fait par l'intermédiaire d'une étude comparative des densités entre le module hybride et le modèle STRADA seul.([MAM et al 07])

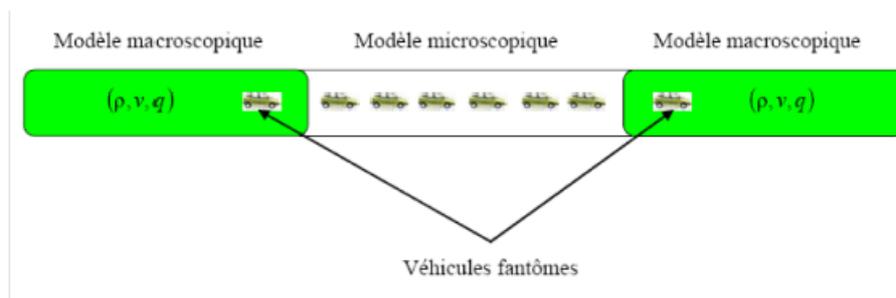


Figure 5.2 – Principe d'interfaçage du modèle hybride de Bourrel

Modèle hybride de Mammam

Ce modèle hybride proposé dans [MAMMAR *et al.* [2006]] est une extension du modèle hybride de Bourrel. Pour prendre en considération les phases transitoires qui évoluent hors régime d'équilibre, les auteurs optent pour le modèle macroscopique du second ordre ARZ (Aw-Rasclé-Zhang ([AW et RASCLE [2000]], [ZHANG [2002]]) et le modèle microscopique fondé sur la vitesse optimale OVM ([BANDO *et al.* [1995]], [BANDO *et al.* [1998]], [?]).

Le modèle macroscopique de second ordre ARZ :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0 \\ \partial_t y + \partial_x p = -\frac{1}{T} y \end{cases} \quad (5.5)$$

où

- $I = v - V_e(\rho)$: la vitesse relative,
- $y = \rho I$: le débit relatif,
- $p = \rho I v$: la pression relative,
- T : le temps de relaxation.

Le modèle microscopique

Pour assurer la continuité du passage de variables macroscopiques aux variables microscopiques, les auteurs optent pour une loi de poursuite fondée sur les propriétés dynamiques de la vitesse relative I , sachant que cette dernière est constante le long des trajectoires véhiculaires, on peut écrire, à l'échelle microscopique, la relation suivante :

$$v_i = I_{i,init} + V_e \left(\frac{1}{x_{i+1} - x_i} \right) \quad (5.6)$$

La dynamique des véhicules est représentée par l'équation :

$$\frac{dx}{dt} = v \quad (5.7)$$

Dans le cas d'un trafic à l'équilibre, la vitesse relative est nulle, et la loi de poursuite se réduit à :

$$v_i = V_e \left(\frac{1}{x_{i+1} - x_i} \right) \quad (5.8)$$

Ce modèle n'est rien d'autre que le modèle à vitesse optimale et on retrouve le modèle hybride développé par Bourrel.

Le schéma de couplage est, quant à lui, similaire à ceux déjà présentés.

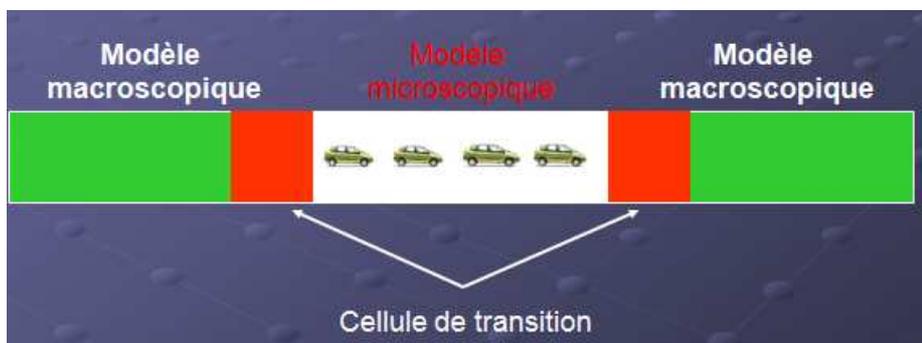


Figure 5.3 – Principe du schéma de couplage [MAMMAR [2006]]

Modèle hybride de Moutari

L'étude de la modélisation hybride développée par Moutari [MOUTARI [2007]] s'articule en deux parties, même si dans les deux cas, les modèles de base utilisés sont les mêmes (il s'agit d'une classe de modèles macroscopiques du second ordre et d'une classe de modèles microscopiques).

Les auteurs développent dans un premier temps un modèle hybride basé sur l'approche du couplage classique, qui consiste à modéliser la partie macroscopique en coordonnées Eulériennes et la partie microscopique en coordonnées Lagrangiennes. Ils proposent une méthode de fonctionnement des interfaces inspirée de Leclercq [LECLERCQ [2007]], qui satisfait aux exigences "requis" pour un modèle hybride. C'est à dire, la conservation de la masse de manière précise au niveau des interfaces sans pour autant modifier la structure des solutions des modèles couplés.

Le modèle macroscopique AR (Aw-Rasle) en coordonnées Eulériennes :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0 \\ \partial_t(\rho w) + \partial_x(\rho v w) = 0 \end{cases} \quad (5.9)$$

où $w = v - V_{max} - V_e(\rho)$

Le modèle AR microscopique en coordonnées Lagrangiennes :

$$\begin{cases} \frac{d\tau_j}{dt} = \frac{v_{j-1} - v_j}{\Delta x} \\ \frac{dw_j}{dt} = 0 \end{cases} \quad (5.10)$$

où $\tau_j = \frac{1}{\rho_j} = \frac{x_{j-1} - x_j}{\Delta x}$ est "l'espace", Δx est la longueur du véhicule.

Dans cette approche, les interfaces (macro-micro et micro-macro) sont fixées en coordonnées Eulériennes. Ceci rend complexe la mise en oeuvre de ce type de modèles hybrides, laquelle est très délicate.

Afin d'assouplir les contraintes liées à l'implémentation des modèles hybrides, les auteurs proposent une nouvelle approche qui consiste à modéliser les deux parties (macroscopique et microscopique) en coordonnées Lagrangiennes.

Le modèle AR en coordonnées Lagrangiennes :

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_X v = 0 \\ \partial_t w = 0 \end{cases} \quad (5.11)$$

où $X = \int^x \rho(y, t) dy$ décrit la longueur totale occupée par les véhicules au point x quand ils sont paquets "parchoc à parchoc".

Cette façon d'hybrider offre des avantages non négligeables. En effet dans le modèle hybride purement Lagrangien, les interfaces sont mobiles et le problème de conservation de masse ne se pose pas.

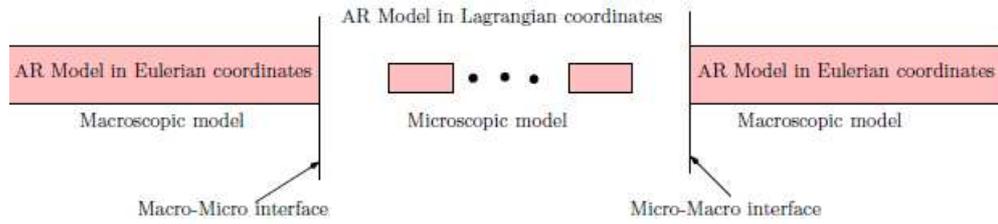


Figure 5.4 – Modèle hybride Macro-Micro-Macro [MOUTARI [2007]]

5.2.2 Modèle hybride basé sur les systèmes multi-agents

Parmi les modèles hybrides basés sur la notion de systèmes multi-agents, on peut citer le modèle proposé par Espié ([ESPIE *et al.* [2006]]) et le modèle développé par El Hmam ([EL-HMAM *et al.* [2005]]) : (Figure 5)

Le modèle hybride d’Espié

Le modèle hybride proposé par Espié ([ESPIE *et al.* [2006]]), est à l’identique de celui proposé par Bourrel, il résulte du couplage entre le modèle macroscopique SSMT ([HERGOT [1995]]) et le modèle microscopique comportemental ARCHISIM ([ESPIE *et al.* [1994]], [ESPIE [1995]]) :

Modèle macroscopique SSMT

SSMT est un modèle du premier ordre fondé sur le principe d’onde de choc.

$$\partial_t \rho + \partial_x (\rho f(\rho)) = 0 \quad (5.12)$$

On discrétise la loi de conservation et on calcule les débits aux entrées et sorties des sections à partir de l’offre et de la demande.

$$\rho_i(t+1) = \rho_i(t) + \frac{\Delta t}{\Delta x} (Q_i(t) - Q_{i+1}(t)) \quad (5.13)$$

Modèle microscopique ARCHISIM

ARCHISIM utilise les systèmes multi-agents. Chaque véhicule est représenté comme un agent autonome dont la réaction dépend de l’environnement dans lequel il se trouve et de règles issues de la psychologie de conduite. Ce modèle n’est fondé sur aucune loi mathématique.

Ce modèle apporte des améliorations, mais il est peu utilisable pour des régimes de trafic hors équilibre.

Modèle hybride d’El Hmam

Il a été proposé par El Hmam ([EL-HMAM *et al.* [2005]]). Il utilise le modèle de Payne pour la description du trafic à l’échelle macroscopique et un modèle comportemental des agents

doté d'une loi de poursuite inspirée du modèle de Krauss ([KRAUSS [1997]]) et d'un modèle de changement de voies à base de règles.

Ce modèle, tel qu'il a été formulé, présente des insuffisances notables au niveau du schéma de couplage. Le cas où les espacements sur les différentes voies sont insuffisants pour créer un véhicule et la gestion des files d'attente ne sont pas pris en considération.

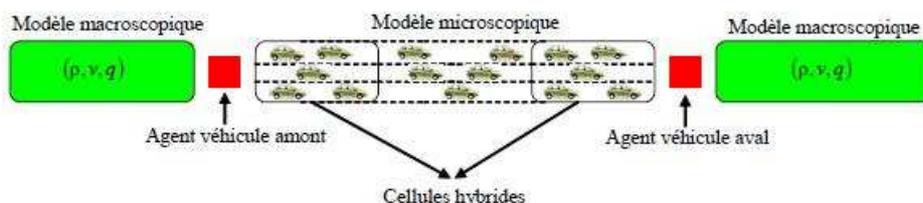


Figure 5.5 – Principe du schéma de couplage fondé sur des systèmes multiagents

5.2.3 Modèles hybrides fondés sur des approches mesoscopiques

Les modèles mesoscopiques sont caractérisés par une description d'entités de trafic à un niveau global (macroscopique) et une description des phénomènes d'interaction entre ces entités à l'échelle microscopique. Une première forme consiste à représenter un ensemble de véhicules sous forme de paquets évoluant sur des liens ([LEONARD *et al.* [1989]]). La vitesse du paquet sur chaque segment est donnée par la relation vitesse/densité du lien sur lequel il se trouve. Alternativement, une approche par files d'attente est employée dans quelques modèles ([GAWRON [1998]], [JAYAKRISHNAN *et al.* [1994]]). D'autres modèles utilisent la notion d'automates cellulaires. Dans ces modèles, le réseau routier est modélisé par des cellules, où les véhicules obéissent à un ensemble de règles de Nagel-Schreckenberg ([NAGEL et SCHRECKENBERG [1992]]), par lesquelles on détermine à chaque pas de temps le nombre de cellules qui sont traversées par des véhicules.

Les modèles hybrides utilisant les composantes mesoscopiques sont :

- Le modèle proposé dans ([OH *et al.* [1994]]) et ([JAYAKRISHNAN *et al.* [1994]]) qui est une combinaison entre le modèle microscopique PARAMICS ([SMITH *et al.* [1994]]) et la dynamique des chemins et le choix d'itinéraires du modèle mesoscopique DYNASMART ([JAYAKRISHNAN *et al.* [1994]]).

- Le modèle hybride proposé par Nizard ([NIZARD [2002]]) est une combinaison entre le simulateur MITSIMLab ([BEN-AKIVA *et al.* [1997]]) et le simulateur mesoscopique METROPOLIS ([PARMA *et al.* [1996]]).

- Le modèle TRANSMODELER incluant à la fois la simulation aux niveaux macroscopique, microscopique et mesoscopique ([MAMMAR [2007]]).

5.3 Rappels sur le modèle de second ordre générique

Dans cette section, un bref rappel sur la résolution analytique et numérique du modèle GSOM est présenté ainsi que le modèle biphasique de Colombo.

5.3.1 modèle GSOM

Le modèle GSOM est un modèle macroscopique de second ordre [LEBACQUE *et al.* [2007]], qui généralise le modèle ARZ (Aw-Rasclé et Zhang)([AW et RASCLE [2000]], [ZHANG [2002]]).

Les équations fondamentales du modèle ARZ sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) &= 0 \\ \partial_t(\rho I) + \partial_x(\rho I v) &= -\frac{1}{\tau}(\rho I) \\ I &= v - V_e(\rho) \end{aligned} \quad (5.14)$$

Si on néglige le terme $-\frac{1}{\tau}(\rho I)$ et en combinant les deux équations, on obtient :

$$\dot{I} = \partial_t I + v \partial_x I = 0$$

La vitesse relative $I = v - V_e(\rho)$ est un invariant du flux de trafic. Cette vitesse relative est constante le long des trajectoires véhiculaires. C'est un invariant lié aux conducteurs et aux propriétés globales de l'écoulement [LEBACQUE *et al.* [2005]].

L'idée de base est de remplacer dans les équations du modèle ARZ, l'invariant I par un invariant générique noté L , qui est une fonction de la densité et de la vitesse. La famille générique de modèles macroscopiques de second ordre proposée et permettant un prolongement du modèle ARZ s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) &= 0 \\ \partial_t(\rho L) + \partial_x(\rho L v) &= -\rho S(L) \\ L &= f(\rho, v) \end{aligned} \quad (5.15)$$

La fonction $S(L)$ est composée d'un terme de relaxation vers la vitesse d'équilibre et un terme d'anticipation pour tenir compte du comportement individuel du véhicule. L'invariant L est relié au comportement de chaque conducteur.

Comme pour le modèle ARZ, si la fonction $S(L) = 0$, l'invariant L est préservé le long des trajectoires véhiculaires :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho L + \partial_x(\rho v L) &= -0 \\ \rightarrow (\partial_t \rho + \partial_x(\rho v))L + \rho \partial_t L + \rho v \partial_x L &= 0 \\ \rightarrow \dot{L} = \partial_t L + v \partial_x L &= 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

La forme fonctionnelle de l'invariant L du modèle peut être choisie de telle manière à adapter le modèle de simulation au comportement des conducteurs et aux données mesurées.

Le système (15) sans le terme de relaxation est un système conservatif avec pour variables de conservation $U = \begin{pmatrix} \rho \\ y = \rho L \end{pmatrix}$ et un vecteur de flux $F(U) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho L v = y v \end{pmatrix}$. Il est nécessaire d'exprimer la vitesse v en fonction de la densité ρ et de la variable y .

$$L = f(\rho, v) \leftrightarrow v = f_v^{-1}(\rho, L) = \mathcal{L}(\rho, L) \quad (5.17)$$

avec f^{-1} la fonction inverse de f et \mathcal{L} la fonction vitesse du modèle (15). Par conséquent la fonction flux F peut être exprimée par :

$$F(U) = \begin{pmatrix} \rho \mathcal{L}(\rho, L) \\ y \mathcal{L}(\rho, L) \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

La fonction débit \mathcal{R} du modèle GSOM est donnée par :

$$\mathcal{R}(\rho, L) = \rho(\mathcal{L}(\rho, L)) \quad (5.19)$$

Le modèle GSOM s'exprime comme une loi de conservation de la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho L \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho S(L) \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

Les valeurs propres de la matrice associée au vecteur gradient de la fonction flux ont pour expression :

$$\begin{aligned} \lambda_1(\rho, v) &= v + \rho \partial_\rho \mathcal{L} = \partial \rho \mathcal{R} \\ \lambda_2(\rho, v) &= v \end{aligned} \quad (5.21)$$

Le modèle générique proposé respecte bien le caractère anisotrope du trafic.

Les vecteurs propres $r_1(\rho, v)$ et $r_2(\rho, v)$ associés respectivement à ces valeurs propres sont :

$$r_1(\rho, v) = \begin{pmatrix} -\partial_v L \\ \partial_\rho L \end{pmatrix} \quad r_2(\rho, v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

Lebacque et al [[LEBACQUE et al. \[2005\]](#)] et Mammar et al [[MAMMAR et al. \[2006\]](#)] ont montré que l'invariant L est constant par morceaux et que la résolution analytique du modèle GSOM est équivalente à la résolution du modèle de premier ordre LWR. En plus, le modèle défini par (15) peut être écrit comme suit :

$$\partial_t \rho + \partial_x \mathcal{R}(\rho, L, x) = 0 \quad (5.23)$$

avec $\mathcal{R}(\rho, L, x) = \rho \mathcal{L}(\rho, L, x)$

On remarque que le système est équivalent à un modèle de premier ordre avec un diagramme fondamental translaté par la quantité L . Cette propriété permet d'adapter la méthode de résolution analytique et numérique proposé par Lebacque et al [LEBACQUE *et al.* [2005]] pour le modèle de premier ordre LWR. On rappelle que cette résolution est basée sur les lois d'offre $\Omega_i(\rho, L)$ et de demande $\Delta_i(\rho, L)$.

La fonction offre correspond au nombre maximal de véhicules qui peuvent entrer dans la cellule à chaque étape de temps, quant à la fonction demande, elle correspond au nombre de véhicules qui désirent sortir de la même cellule (voir Figure 7).

Pour le modèle GSOM, ces fonctions sont les suivantes :

$$\begin{aligned}\Delta_i(\rho, L) &= \text{Max}_{0 \leq r \leq \rho} \mathcal{R}_i(r, L) \\ \Omega_i(\rho, L) &= \text{Max}_{r \geq \rho} \mathcal{R}_i(r, L)\end{aligned}\quad (5.24)$$

Le débit est le minimum entre la demande et l'offre, il est donné par :

$$q_i = \text{Min}[\Delta_i, \Omega_{i+1}] \quad (5.25)$$

Pour résoudre numériquement le modèle GSOM, deux méthodes sont possibles : la discrétisation par le schéma de Godunov (discrétisation Eulérienne) et la discrétisation particulière (discrétisation Lagrangienne).

5.3.2 Discrétisation par le schéma de Godunov

La résolution numérique de ce type correspond à la discrétisation des solutions analytiques en utilisant le schéma de Godunov ([KRONER [1997]], [MAMMAR *et al.* [2006]]).

Le schéma de Godunov est basé sur les principes suivants :

- Un tronçon d'autoroute est décomposé en cellules $(i) = [x_{i-1}, x_i]$ et le temps est décomposé en $(t) = [t\Delta t, (t+1)\Delta t]$ avec un pas de temps égal à Δt .

- La densité ρ et la variable y sont supposées homogènes dans chaque cellule (i) au début pour chaque étape (t) , ils valent respectivement ρ_i^t et y_i^t . La densité $\rho(x, t)$ et la variable $y(x, t)$ sont estimées au début de chaque pas de temps par des fonctions localement constantes. Puis, les solutions du modèle GSOM sont calculées durant l'étape de temps.

Les équations de discrétisation par le schéma de Godunov du modèle GSOM sont :

$$\begin{aligned}\rho_i^{i+1} &= \rho_i^t + \frac{\Delta t}{\Delta x} (q_{i-1}^t - q_i^t) \\ y_i^{i+1} &= y_i^t + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\rho_{i-1}^t - \rho_i^t)\end{aligned}\quad (5.26)$$

Le débit q_i^t est donné comme le minimum de l'offre translatée de la cellule $(i+1)$ et de la demande translatée de la cellule (i) .

$$q_i^t = \text{Min}[\Delta_i(\rho_i^t, L_i^t), \bar{\Omega}_{i+1}^t(\rho_{i+1}^t, L_i^t), L_{i+1}^t)] \quad (5.27)$$

avec :

$$\bar{\Omega}_{i+1}^t(\rho_{i+1}^t, L_i^t, L_{i+1}^t) = \Omega_{i+1}^t(\mathcal{L}_{i,\rho}^{-1}(\rho_{i+1}^t, L_i^t), L_{i+1}^t)$$

La vitesse relative est préservée le long des trajectoires véhiculaires, et le flux de l'invariant L est

$$q_i^t = \rho_i^t L_i^t \quad (5.28)$$

La condition de stabilité du schéma numérique de Godunov ; la condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) est donnée par :

$$\Delta x = \Delta t . \text{Max}_{\rho \geq 0} \mathcal{L}(\rho, L) \quad (5.29)$$

5.3.3 Discrétisation particulière

L'approche de discrétisation particulière (discrétisation Lagrangienne) proposée par Moutari et Rasclé [MOUTARI [2007]], peut être appliquée au modèle GSOM. Le principe de cette discrétisation est de considérer la fonction cumulée, que l'on note $N(x, t)$ et d'exprimer le modèle comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mathcal{L}(\rho, L) \\ \dot{L} &= -S(L) \end{aligned} \quad (5.30)$$

En considérant $x_n(t)$ la trajectoire du n ième véhicule, c'est à dire $N(x, t) = n$, le système (30) discrétisé est donné par :

$$\begin{aligned} \dot{x}_n(t) &= \mathcal{L}\left(\frac{1}{x_{n-1}(t) - x_n(t)}, L_n(t)\right) \\ \dot{L}_n(t) &= -S(L_n(t)) \end{aligned} \quad (5.31)$$

La quantité $L_n(t)$ représente l'invariant associé au n ième véhicule. On note que la densité locale est exprimée par l'inverse de l'inter-distance qui sépare deux véhicules consécutifs :

$$\rho(x_n(t)) = \frac{1}{x_{n-1}(t) - x_n(t)}$$

Finalement, le modèle (30) discrétisé dans le temps s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} x_n(t + \Delta t) = x_n(t) + \Delta t \mathcal{L}\left(\frac{1}{x_{n-1}(t) - x_n(t)}, L_n(t)\right) \\ L_n(t + \Delta t) = \psi(L_n(t), \Delta t) \end{cases} \quad (5.32)$$

avec $\psi(L_0, \tau)$, la solution à l'instant τ de $\frac{dL}{d\tau} = -S(L)$, $L_{\tau=0} = L_0$. [MAMMAR *et al.* [2006]]

-

5.3.4 Exemple de modèle GSOM : le modèle biphasique de Colombo

Lebacque et al [LEBACQUE *et al.* [2007]] ont démontré que le modèle macroscopique proposé par Colombo [COLOMBO [2002]] est une sorte de modèle GSOM. Ce modèle est utilisé

pour la validation du schéma hybride proposé.

Le modèle biphasique proposé par Colombo est conçu pour expliquer les observations de la dynamique du trafic sur les autoroutes italiennes (Lombardie). Ce modèle a deux phases : une phase pour modéliser les états fluides et une seconde pour modéliser les états congestionnés.

- phase fluide (modèle LWR) :

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \partial_x(\rho v) &= 0 \\ v &= v_f(\rho) = V - \beta \rho\end{aligned}\quad (5.33)$$

avec :

- V : la vitesse libre,
 - $\beta = \frac{V - \hat{V}}{\hat{R}}$,
 - \hat{V} , \hat{R} représentent respectivement la vitesse et la densité critiques.
- phase congestionnée :

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \partial_x(\rho v) &= 0 \\ \partial_t q + \partial_x(q - q_*)v &= 0\end{aligned}\quad (5.34)$$

avec :

- $v = \frac{q}{\rho} v_0(\rho)$, $v_0(\rho) = 1 - \frac{\rho}{R}$,
- R représente la densité maximale,
- q_* un paramètre du modèle.

Pour définir un modèle de second ordre caractérisé par une unique phase, les auteurs réécrivent la seconde équation du système de la phase congestionnée comme :

$$\partial_t(q - q_*) + \partial_x(v(q - q_*)) = 0 \quad (5.35)$$

D'où, la phase congestionnée admet la trajectoire invariante suivante :

$$L(\rho, v) = \frac{q - q_*}{\rho} = \frac{v}{v_0(\rho)} - \frac{q_*}{\rho} \quad (5.36)$$

La forme fonctionnelle de la vitesse associée à cet invariant (voir Figure 6) est donnée par :

$$v = \mathcal{L}(\rho, L) = \begin{cases} v_f(\rho) & \text{si } \rho \leq \rho_{crit}(L) \\ (L + \frac{q_*}{\rho})v_0(\rho) & \text{si } \rho \geq \rho_{crit}(\rho) \end{cases} \quad (5.37)$$

avec $\rho_{crit}(L) = \frac{1}{2(\beta - \frac{L}{R})} \left(V + \frac{q_*}{R} - L - \sqrt{(V + \frac{q_*}{R} - L)^2 - 4q_*(\beta - \frac{L}{R})} \right)$

De même, la fonction flux associée au modèle 1-phase de Colombo (voir Figure 6) est donnée par :

$$\mathcal{R}(\rho, L) = \begin{cases} \rho v_f(\rho) & \text{si } \rho \leq \rho_{crit}(L) \\ Lq_0(\rho) + q_*v_0(\rho) & \text{si } \rho \geq \rho_{crit}(\rho) \end{cases} \quad (5.38)$$

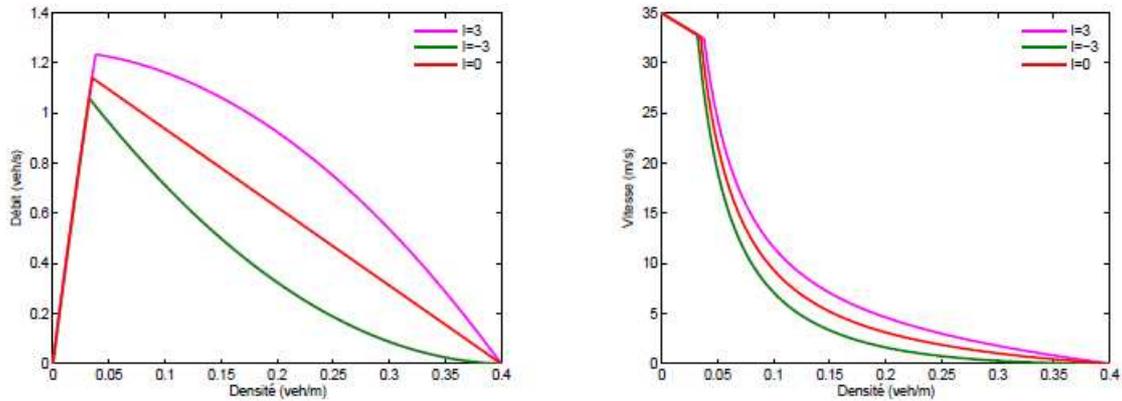


Figure 5.6 – Fonction de flux (à gauche) et fonction vitesse (à droite) du modèle monophasé de Colombo

5.4 Principe du schéma de couplage

Dans cette section, nous allons détailler les différentes étapes de l'approche permettant le passage de l'échelle macroscopique à l'échelle microscopique du trafic. Pour se faire, nous avons adopté le schéma de couplage proposé dans [BOURREL et LESSORT [2003]] et [MAMMAR *et al.* [2006]]. Ce schéma est basé sur une transmission progressive des informations entre les deux modèles (voir Figure 7).

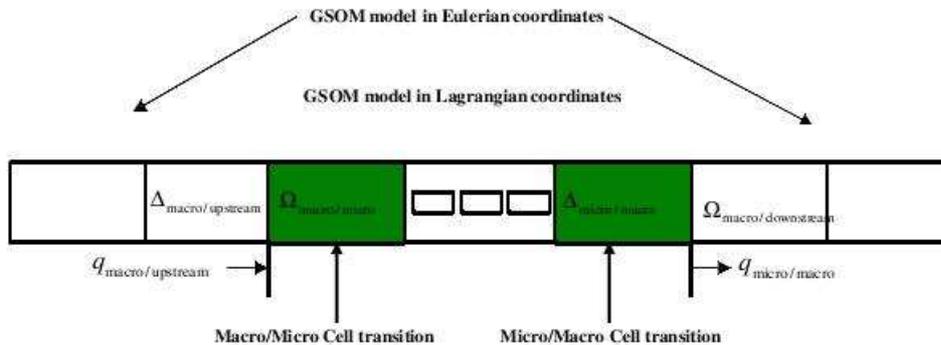


Figure 5.7 – Schéma de couplage

Pour permettre l'échange des informations entre le modèle GSOM en coordonnées Eulériennes et le modèle GSOM en coordonnées Lagrangiennes, il est nécessaire de définir les instants de cet échange. Pour cela, nous considérons la relation suivante entre le pas de discrétisation temporelle macroscopique Δt_{GSOM_E} et le pas de discrétisation temporelle microscopique Δt_{GSOM_L} .

$$\Delta t_{GSOM_E} = N \cdot \Delta t_{GSOM_L} \quad \text{avec } N \in \mathbb{N}$$

On distingue principalement deux grandes étapes pour le schéma de couplage proposé. La première étape est la transition du modèle GSOM macroscopique vers le modèle GSOM microscopique, la seconde étape est le passage du modèle GSOM microscopique vers le modèle GSOM macroscopique.

5.4.1 Transition du modèle GSOM macroscopique vers le modèle GSOM microscopique

Dans le cas de la transition du modèle macroscopique au modèle microscopique, il est nécessaire de définir les trois points suivants :

- Calcul du nombre maximal de véhicules qui peuvent transiter du modèle macroscopique vers la cellule de transition macro/micro pour chaque pas de discrétisation macroscopique.
- Evaluation des instants de génération des véhicules.
- Définition de la procédure de génération des véhicules.

Pour déterminer le nombre de véhicules qui désirent entrer au niveau de la transition macro/micro, deux solutions sont possibles. La première consiste à calculer le taux d'entrée au niveau de cette transition. Ce taux est donné par :

$$q_{macro/amont} = \text{Min}(\Delta_{macro/amont}, \Omega_{macro/micro})$$

Bien que cette solution semble évidente, il peut en résulter une surestimation ou une sous-estimation d'offre dans la zone macro / micro. Cela se produit surtout lorsque les véhicules sont répartis de manière inégale à la zone de transition.

La seconde solution, adoptée dans cette section, consiste à considérer le nombre de véhicules N_e qui désirent entrer au niveau de la transition macro/micro égal à la demande amont $\Delta_{macro/amont}$ de la zone véhiculaire.

Pour exprimer cette demande (débit) en terme de nombre de véhicules, il suffit de multiplier cette demande par le pas de discrétisation temporelle macroscopique ;

$$N_e = \Delta_{macro/amont} \cdot \Delta t_{GSOM_E}$$

Ce nombre de véhicules N_e à générer n'est pas nécessairement un entier, comme c'est la cas pour le modèle hybride dans [MAGNE *et al.* [2000]]. Afin de prendre en compte les fractions de véhicules, nous introduisons en entrée de la cellule de transition macro/micro, une cellule fictive qui permet de stocker ces fractions de véhicules. On retrouve cette démarche dans le cas du modèle hybride de Bourrel [BOURREL et LESSORT [2003]] et [MAMMAR *et al.* [2006]]. Afin de respecter la demande imposée par le modèle macroscopique ainsi que les conditions de trafic en aval, il est nécessaire de définir correctement, pour chaque pas de temps macroscopique, les instants de génération t_i des véhicules.

Ces instants de génération sont séparés par un intervalle de génération des véhicules que l'on note t_{IG} égal à l'inverse de la demande $t_{IG} = \frac{1}{\Delta_{macro/amont}}$. Ceci correspond à une distribution uniforme de la demande. La présence de la cellule fictive en amont de la transition macro/micro

nécessite de fixer le premier instant de génération des véhicules afin de compléter la fraction de véhicules présente dans cette cellule fictive. Cet instant est égal à :

$$t_1 = t_{IG} - N_{fraction} \cdot t_{IG}$$

avec $N_{fraction}$ représentant la taille de la fraction de véhicule. De même, le dernier instant t_f de génération est fixé à :

$$t_f = (N_e - (1 - N_{fraction}) - E(N_e - (1 - N_{fraction}))) \cdot t_{IG}$$

où E est la partie entière. Cet instant va correspondre à la fraction de véhicule qui reste à sortir.

En tenant compte des conditions de trafic en aval de la zone macroscopique, l'offre de la zone microscopique, est achevée par la procédure de génération de véhicules à zone de transition macro/micro. La procédure de création de véhicules consiste à prendre l'état du dernier véhicule situé dans la zone de transition macro/micro. Si l'espacement entre ce véhicule et le début de zone de transition n'est pas suffisant, alors la génération est reportée jusqu'à ce que cet espacement soit suffisant.

5.4.2 Transition du modèle GSOM microscopique vers le modèle GSOM macroscopique

Dans le cas de la transition du modèle microscopique au modèle macroscopique, il est nécessaire de définir les trois points suivants :

- Calcul du nombre maximal de véhicules qui peuvent entrer dans la première cellule macroscopique, située en aval de la cellule de transition micro/macro pour chaque pas de discrétisation macroscopique.
- Evaluation des instants de sortie des véhicules.
- Définition de la procédure de sortie des véhicules.

Le nombre maximal de véhicules qui peuvent sortir de la zone de transition micro/macro, est évalué par l'offre en aval de cette zone de transition :

$$q_{micro/macro} = \text{Min}(\Delta_{micro/macro}, \Omega_{macro/aval})$$

De manière tout à fait symétrique à la transition macro/micro, la détermination des instants de sortie des véhicules notés t_i^s se fait en définissant un intervalle de sortie t_{IS} égal à l'inverse de l'offre en aval

$$t_{IS} = \frac{1}{\Omega_{macro/aval}}$$

Pour permettre aux véhicules se situant au niveau de la zone de transition micro/macro de franchir cette dernière, il est nécessaire que le premier véhicule situé sur cette transition ait une trajectoire conforme aux conditions de trafic situé en aval. En adoptant la même approche que dans [BOURREL et LESSORT [2003]] qui consiste en la création d'un véhicule fictif à la première cellule de la zone macroscopique située en aval, dont la vitesse est égale à la vitesse

de la première cellule macroscopique située en aval de la transition micro/macro. Ce véhicule fictif permet au premier véhicule situé sur la transition micro/macro de s'adapter aux conditions de trafic en aval afin qu'il puisse franchir la transition. Dès qu'un véhicule sort de la transition micro/macro, il devient alors le premier véhicule fictif.

Pour s'assurer que les véhicules ne sortent pas avant les instants prévus, nous allons comparer ces instants prévus aux instants réels de sortie t_i^{sr} . Ces instants de sortie sont calculés par l'intermédiaire de la trajectoire du véhicule fictif. Deux situations peuvent se présenter :

- dans le cas où l'instant de sortie prévu est inférieur à l'instant réel $t_i^s < t_i^{sr}$, on retarde la sortie de ce véhicule en modifiant sa trajectoire,

- dans la cas contraire, c'est à dire si l'instant prévu est supérieur à l'instant réel $t_i^s > t_i^{sr}$, le véhicule évolue librement et son instant de sortie est égal à t_i^{sr} .

5.5 Validation du schéma de couplage

Afin d'étudier la validité du schéma de couplage, un exemple de modèle GSOM est étudié par simulation. Il s'agit du modèle macroscopique proposé par Colombo [COLOMBO [2002]]. Pour achever la transition continue entre les représentations macroscopique et microscopique du trafic, nous avons choisi le modèle microscopique basé sur la discrétisation particulière du modèle GSOM, plus précisément de l'invariant associé au modèle mono phase de Colombo

$$\begin{aligned} v_i(t) &= \text{Min} \left(v_f, \left(l_i(h) + \frac{q^*}{\rho_i} \right) v_0 \right) \\ x_i(t + \Delta t) &= x_i(t) + \Delta t v_i(t) \end{aligned} \quad (5.39)$$

avec :

$$l_i = x_{i-1}(t) - x_i(t)$$

$$\rho_i = \frac{1}{l_i}$$

$$v_f = V - \frac{\beta}{l_i}$$

$$v_0 = 1 - \frac{\rho_i}{R}$$

Etude en simulation

Afin d'étudier la bonne transmission des informations au niveau des interfaces de communication macroscopique et microscopique, on considère un tronçon d'une longueur de 6.8 kilomètres avec un pas de discrétisation spatiale fixe de l'ordre de $\Delta x_{GSOM} = 170$ mètres et des pas de discrétisation temporelle de $\Delta t_{GSOM} = 4$ secondes. On obtient 40 cellules numérotées de l'amont vers l'aval par ordre croissant. Les cellules de transition macroscopique/microscopique et microscopique/macroscopique sont les cellules 20 et 26 respectivement. Les cellules situées entre les deux cellules de transition (cellules 21, 22, 23, 24 et 25) forment la zone microscopique, qui est de longueur 1 kilomètre environ.

Nous allons étudier deux types de phénomènes : la propagation d'une congestion et la remontée d'une congestion.

1- Propagation d'une congestion

On considère une congestion entre les cellules 13 et 17 ($x \in [2210, 2890]$). Cette congestion est caractérisée par une densité maximale. L'entrée du réseau est alimenté par une demande fixe.

La Figure 8 montre que la congestion évolue dans le modèle macroscopique et le modèle hybride. Elle se propage proprement et il y'a formation d'une onde de raréfaction (onde d'accélération).

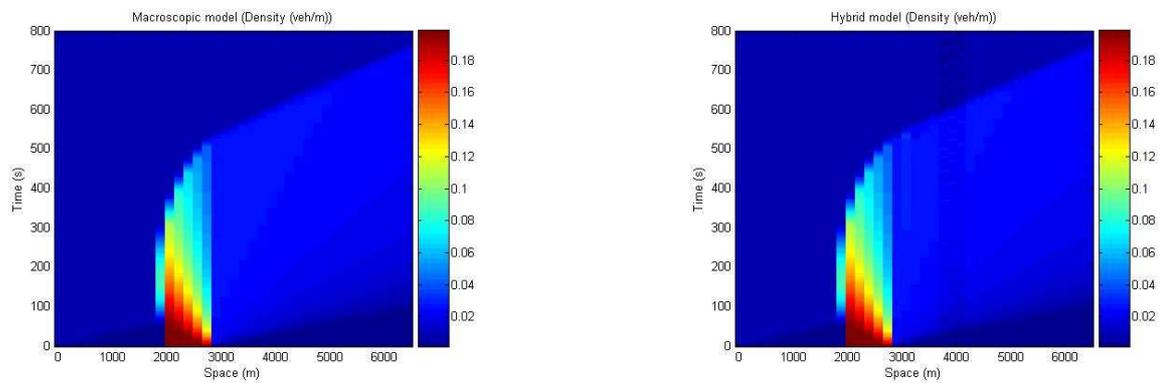


Figure 5.8 – propagation d'une congestion. Evolution de la densité dans le modèle macroscopique seul (à gauche) et hybride (à droite)

De manière similaire, l'évolution des débits dans les deux modèles précédents est identique (Figure 9).

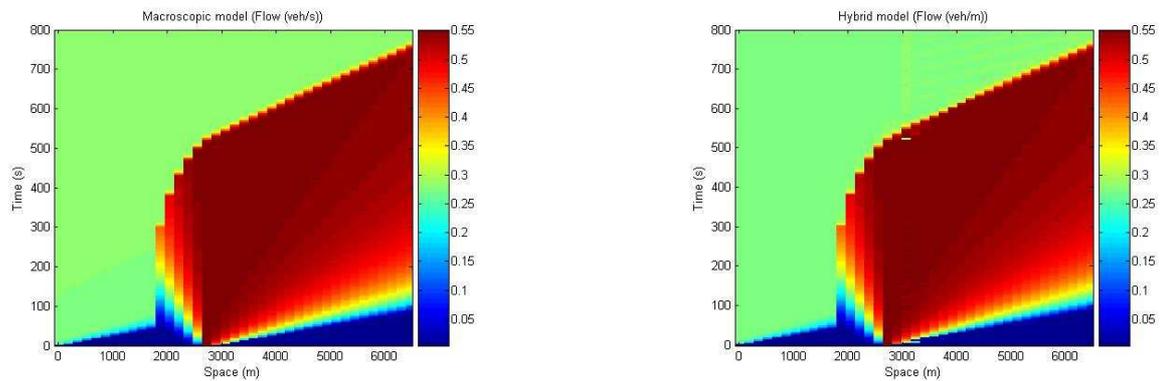


Figure 5.9 – propagation d'une congestion. Evolution du débit dans le modèle macroscopique seul (à gauche) et hybride (à droite)

La Figure 10 représente l'évolution 2D, par rapport au temps de la densité et du débit dans

Cellules	Débit (veh/s)	Densité (veh/m)
Cellule 21	8.4634e-004	3.9346e-005
Cellule 22	8.3661e-004	3.4433e-005

Tableau 5.1 – L'erreur quadratique des variables fondamentales

les cellules 21 et 22. On peut voir que les courbes sont très proches.

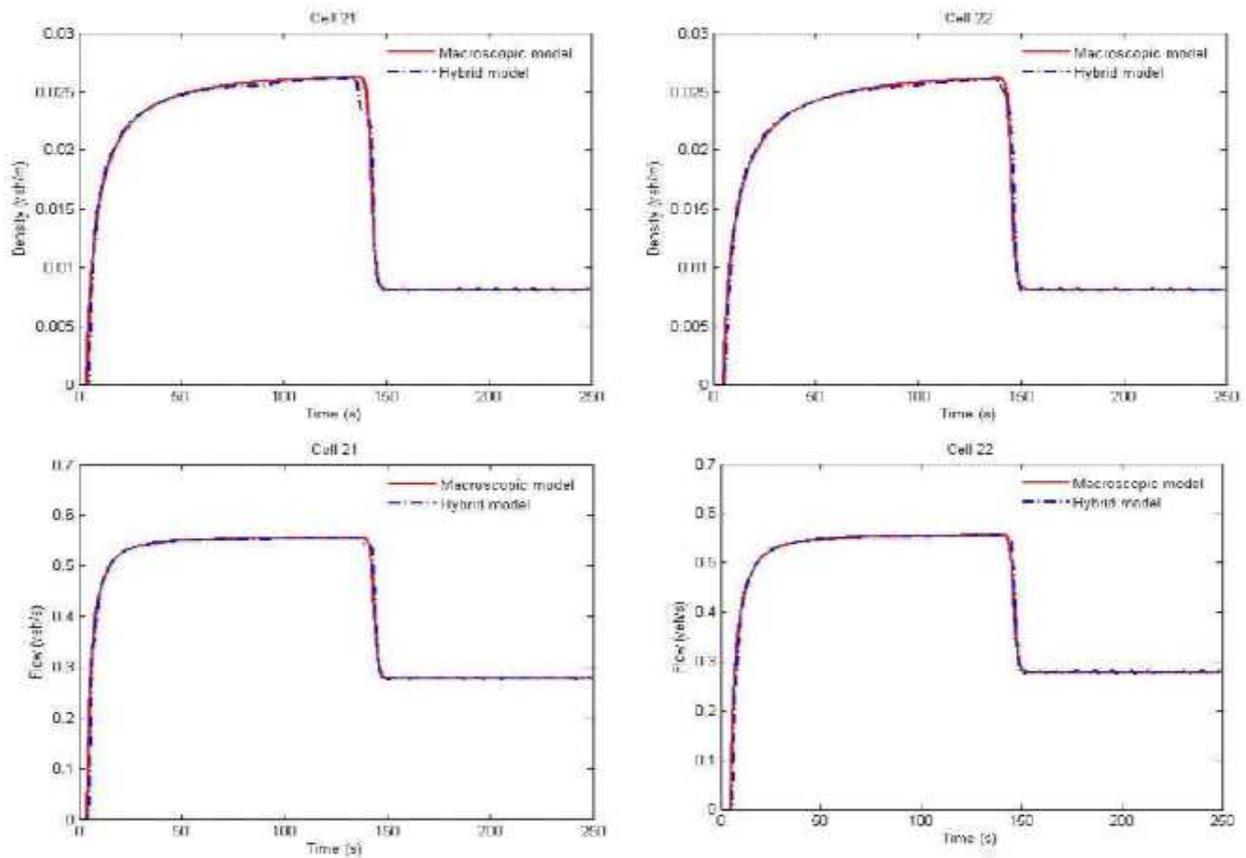


Figure 5.10 – Evolution de la densité et du débit dans les cellules hybrides 21 et 22

Si Z représente une variable du trafic, l'erreur quadratique moyenne correspondante MSE est donnée par :

$$MSE = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_N (Z_{macroscopique} - Z_{hybride})^2}$$

Le tableau suivant donne cette MSE pour les deux variables fondamentales du trafic :

La Figure 11 illustre l'évolution des débits cumulés pour les modèles macroscopique et hybride en un point situé en zone hybride.

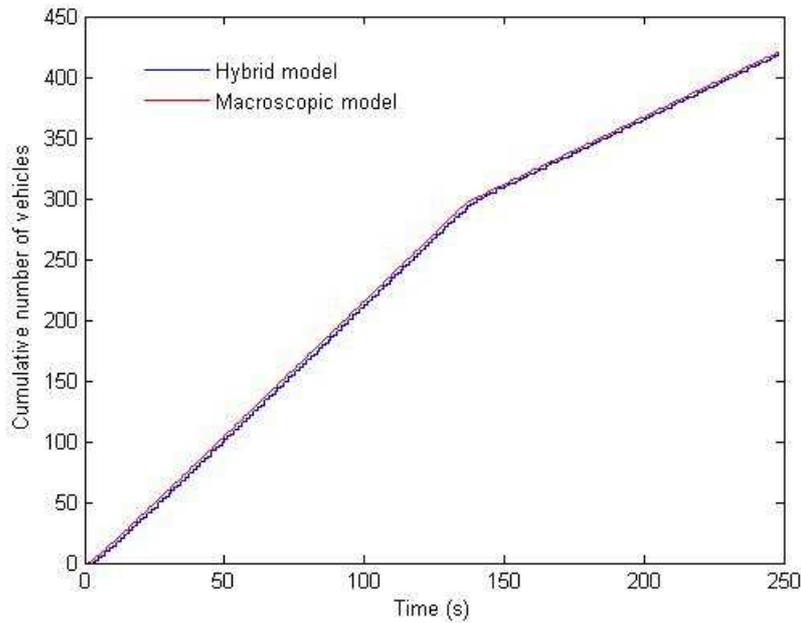


Figure 5.11 – Evolution des débits cumulés pour les modèles macroscopique et hybride en un point du réseau

2- Remontée d'une congestion

On considère deux congestions, la première localisée en amont ($x \in [2720, 3060]$) et la seconde en aval ($x \in [5720, 5440]$) de la zone microscopique. Ces congestions sont caractérisées par une densité maximale. L'entrée du réseau est alimenté par une demande fixe.

La Figure 12 montre que la congestion amont de l'interface hybride se propage dans le modèle hybride. Cette dernière rattrape la seconde congestion aval de l'interface hybride. Ce qui conduit à la formation d'une onde de choc (onde de décélération).

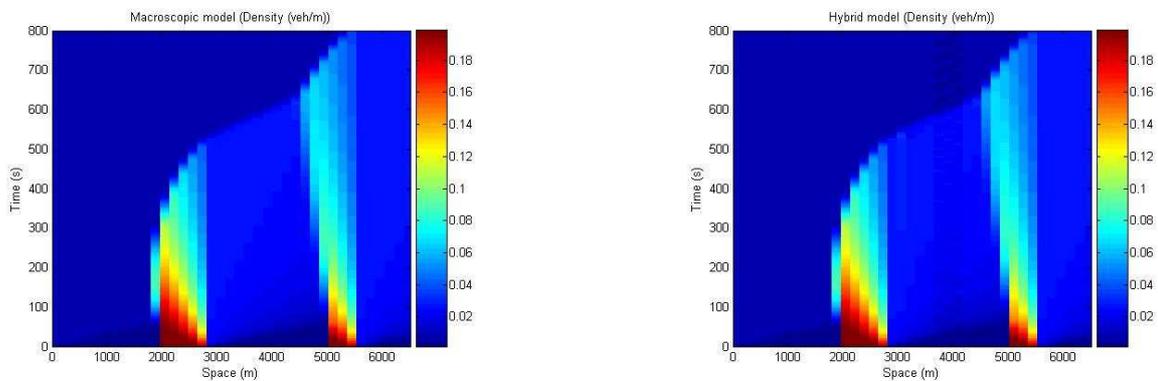


Figure 5.12 – remontée d'une congestion. Evolution de la densité dans le modèle macroscopique seul (à gauche) et hybride (à droite)

De manière similaire, l'évolution des débits dans les deux modèles précédents est identique (Figure 13).

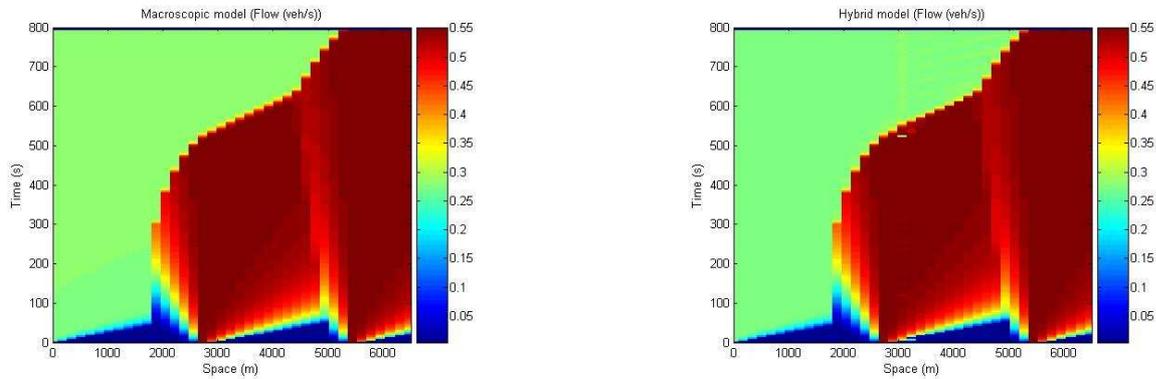


Figure 5.13 – remontée d’une congestion. Evolution du débit dans le modèle macroscopique seul (à gauche) et hybride (à droite)

La Figure 14 représente les trajectoires véhiculaires dans la zone microscopique, ($x \in [3400m, 4420m]$). On peut voir que la congestion amont de la zone microscopique se propage dans le modèle hybride (zone de raréfaction). Quand, cette congestion rattrape la seconde an aval de la zone hybride, il y’a création d’une onde de choc suivie par une onde de raréfaction.

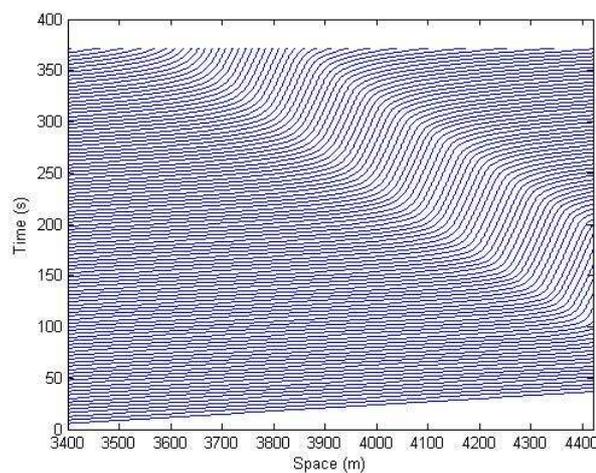


Figure 5.14 – Trajectoires véhiculaires dans le modèle microscopique

La Figure 15 représente les trajectoires véhiculaires dans la zone hybride, dans le cas d’un scénario similaire au précédent seulement la congestion aval de la zone hybride n’est pas constante dans le temps (accident de la route). On peut voir que la première congestion amont de la zone hybride crée une onde de raréfaction. Quand elle rencontre avec la seconde congestion fixe, il y’a création d’une onde de choc et une queue de véhicules.

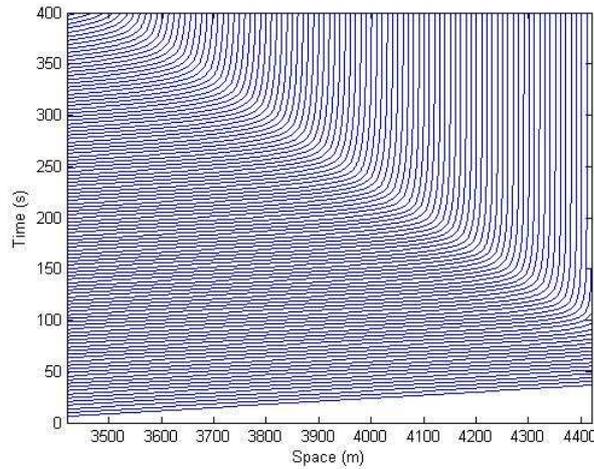


Figure 5.15 – Trajectoires véhiculaires dans le modèle hybride

5.6 Conclusion

Le choix des modèles macroscopique et microscopique à interfacer est une étape essentielle dans la mise en oeuvre d'un modèle hybride afin d'assurer une certaine continuité de passage d'une vision globale du trafic à une vision plus fine à l'échelle microscopique. malheureusement, pour la mise en évidence de phénomènes de trafic qui évoluent hors régime d'équilibre, le choix d'un modèle macroscopique et microscopique du second ordre est inévitable. Une des difficultés majeures de la mise en oeuvre d'un schéma de couplage, dans ce cas réside dans la résolution analytique exacte de ce modèle.

L'approche présentée dans ce chapitre est une généralisation des travaux de [MOUTARI [2007]] et [LECLERCQ [2007]] en rapport avec le couplage de modèles en coordonnées Eulériennes et Lagrangiennes. Cette généralisation est appliquée pour une famille macroscopique de second ordre (GSOM).

L'intérêt de ce couplage réside dans la transition continue entre une vision globale du trafic (macroscopique) à une vision locale du trafic (microscopique).

Nos motivations par rapport au choix du modèle GSOM réside dans le fait que ce modèle est macroscopique de second ordre avec des solutions analytiques et numériques assez simples à calculer.

Les résultats en simulation que nous avons obtenu en utilisant le modèle de Colombo, à travers la propagation et la remontée d'une congestion sont assez satisfaisants. Ils montrent que l'information se propage correctement à travers le modèle hybride.

Conclusions et perspectives

La modélisation des flux de trafic routier est un sujet d'actualité certes, mais semé d'embûches tant théoriques qu'expérimentales. Durant cette thèse quelques aspects de la modélisation et de contrôle du trafic y sont abordés, au moyen de méthodes et modèles simplifiés adaptés à l'écoulement du trafic hétérogène urbain ou suburbain. Les résultats obtenus sont de bonne augure pour le développement des outils de simulation du trafic.

Synthèse

- En ce qui concerne le trafic hétérogène suburbain, nous avons présenté une résolution numérique d'un modèle de trafic routier hétérogène véhicules particuliers et bus, inspiré du modèle de Logghe ; basé sur le principe de l'équilibre-usager et tenant compte de la différence des longueurs et des vitesses des véhicules. La déclinaison numérique a été obtenue par l'utilisation de la méthode de transmission cellulaire CTM pour estimer les densités et les vitesses dans les situations fluide, semi congestionné et congestionné du trafic. A travers l'étude de l'observabilité, de la controllabilité et de la stabilité de ce modèle et aussi par les résultats des simulations, nous avons montré que les estimateurs construits sont cohérents.
- En ce qui concerne le trafic urbain trimodal, nous avons proposé une stratégie de régulation qui a l'avantage de formuler le problème de régulation pour les trois modes de trafic ; véhicules particuliers et bus (trafic général) et le nouveau concept de bus BRT sur un réseau urbain. Pour cette stratégie, nous avons construit un critère mathématique exprimant les objectifs de la régulation pour leurs modes respectifs. ainsi pour le mode de trafic général qui englobe le mode véhicules particuliers et bus, la régulation consiste à minimiser le temps de parcours ou ce qui sous entend minimiser le nombre total des véhicules sur tout le réseau. Pour le mode BRT, la régulation consiste à maximiser la régularité d'une ligne en respectant des positions références à atteindre, en d'autres termes respecter une table d'horaire pré-établie. Le modèle de trafic général est celui développé dans les stratégies TUC et NeTPrior. La stratégie fonctionne en boucle fermée en utilisant la commande prédictive dont le principe est l'estimation des variables d'état dans le futur. Pour le mode BRT, nous avons construit un modèle simple et original qui exprime l'évolution des positions du BRT dans le réseau de façon telle qu'on puisse avoir une représentation d'état linéaire du système de trafic trimodal avec comme commande les durées de phases.

Un autre modèle d'évolution est donné pour le BRT, qui est plus "ponctuel", il est fondé sur les évènements que rencontre le BRT sur le réseau, à savoir le passage d'une ligne de feux et l'arrêt à une station, il ne tient compte que des durées des phases.

Les résultats de simulation de la stratégie sont très prometteurs et montrent que les objectifs de la régulation sont satisfaits.

- Nous avons présenté un modèle hybride ; couplage de modèles en coordonnées Eulériennes et Lagrangiennes appliqué pour une famille macroscopique de second ordre GSOM dont les solutions analytiques et numériques sont assez simples à calculer. Cette nouvelle approche offre l'avantage de passer facilement de la description macroscopique à la description microscopique et inversement, mais aussi de conserver la masse à travers les interfaces sans pour autant modifier la structure des modèles couplés.

Perspectives

L'innombrabilité des champs de recherche et d'application du trafic routier font que l'étude des thèmes abordés n'est qu'une contribution partielle et que plusieurs perspectives sont ouvertes pour la poursuite de ces travaux. On peut citer entre autres, les extensions et développements suivants :

- Pour le modèle hétérogène bus et véhicules légers, on peut envisager par exemple :
 - d'améliorer la phénoménologie du modèle comme l'égalité des vitesses en congestion ou le taux d'occupation critique avec la composition du trafic et ou tenir compte de l'interaction de dépassement avec les problèmes liés à la sécurité routière ou à l'évaluation d'un temps de gêne.
 - pour la déclinaison numérique, l'utilisation de SCTM (Stochastic Cell Transmission Model) ; l'extension de CTM où les paramètres de CTM sont exprimées comme des variables stochastiques.
 - pour l'observateur, mise en œuvre d'un observateur à mode glissant appliqué au système LPV.
- Pour améliorer la régulation du trafic urbain, plusieurs pistes sont à envisager :
 - par exemple concernant les modèles construits pour le BRT, il peut être intéressant d'améliorer les deux modèles en y tenant compte des débits de durées de phases et ou des longueurs des files d'attente devant le BRT.
 - Quant à l'optimisation, on peut utiliser plusieurs méthodes comme les algorithmes génétiques ou le recuit simulé.
- Le modèle hybride développé n'est valable que dans le cas d'un réseau à une voie. Comme le réseau peuvent comporter plusieurs voies au sein du modèle représentant le flux ou bien au sein du modèle à représentation véhiculaire, une extension permettant d'accroître les possibilités d'application du modèle est le développement d'un modèle hybride multi-flux et /ou multi-voies.
- L'évaluation des performances des approches, des modèles et des stratégies proposés est nécessaire. Un calibrage et une validation de ces derniers par rapport aux données réelles peuvent se situer dans le prolongement direct des travaux présentés dans cette thèse.

6

Annexe

Dans cette, quelques travaux entamés, mais restant à développer.

Le système de paramètres linéaires variants LPV appliqué à un modèle macroscopique de second ordre hétérogène

Ces dernières années, le formalisme par les paramètres linéaires variants LPV a été une approche prometteuse pour la théorie du contrôle non-linéaire ([LUSPAY *et al.* [2009]], [RUGH *et SHAMMA* [2000]], [WU [1995]]). La description LPV (Linear Parameter Varying) préserve la structure linéaire pour les systèmes non linéaires à travers le concept de paramètres d'ordonnement. Les non-linéarités peuvent être réécrites par des paramètres variant dans le temps. La structure résultante sera linéaire par rapport aux états avec un système dépendant de matrices de paramètres.

Le vecteur de paramètres d'ordonnement est continu et dépendant du temps. Dans le cas particulier où le paramètre vecteur coïncide (partiellement ou entièrement) avec le vecteur d'état, le système est appelé quasi Linear Varying Parameter (qLVP).

Dans la suite, on réécrit le modèle hétérogène macroscopique de second ordre sous la forme qLPV.

Formulation du problème

Modèle macroscopique de second ordre

L'autoroute est discrétisée en segments de longueur Δ_i avec des temps d'échantillonnage T .

Pour le modèle macroscopique, la longueur du segment est $\Delta_i = 500 - 600$ mètres, et le pas de simulation en temps devrait être choisi tel que $T < \frac{\Delta_i}{v_{max}}$ pour tous les segments.

Chaque segment est décrit par des variables de trafic discrétisées, définies comme suit :

- $k_i(t)$, $v_i(t)$, $q_i(t)$, $d_i(t)$ et r_i désignent la densité, la vitesse, le flux, le flux de bretelle de sortie et le flux de la rampe d'entrée du i -ème segment au pas de temps t respectivement,

– n le nombre des voies de l'autoroute

– $\beta_i(t)$,

– $\alpha, v_f, k_{cr}, \delta, \kappa, \tau, v$ sont des paramètres constants supplémentaires avec $\alpha > 1$.

Avec ces notations les différentes équations non-linéaires du modèle macroscopique de second ordre sur les segments i peuvent être formulées comme suit :

$$k_i(t+1) = k_i(t) + \frac{T}{\Delta_i n} [q_{i-1}(t) - q_i(t) + r_i(t) - d_i(t)] \quad (6.1)$$

$$d_i(t) = \beta_i(t) \cdot q_{i-1}(t) \quad (6.2)$$

$$v_{i+1}(t) = v_i(t) + \frac{T}{\tau} [V(k_i(t)) - v_i(t)] + \frac{T}{\Delta_i} v_i(t) [v_{i-1}(t) - v_i(t)] - \frac{vT}{\tau \Delta_i} \frac{k_{i+1}(t) - k_i(t)}{k_i(t) + \kappa} - \frac{\delta T}{\tau \Delta_i} \frac{r_i(t) v_i(t)}{k_i(t) + \kappa} \quad (6.3)$$

$$V(k_i(t)) = v_f \left[1 - \left(\frac{k_i(t)}{k_{cr}} \right)^\alpha \right] \quad (6.4)$$

$$q_i(t) = k_i(t) \cdot v_i(t) \cdot n \quad (6.5)$$

Les systèmes LPV

Le formalisme LPV décrit la dynamique non linéaire d'une manière spéciale, il définit un paramètre d'ordonnancement qui capture les non-linéarités.

Un modèle LPV déterministe discret en temps d'ordre n est défini par : comme :

$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(p(t)) & B(p(t)) \\ C(p(t)) & D(p(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

où $x(t) \in \mathbf{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbf{R}^{N_u}$ le vecteur d'entrée, $y(t) \in \mathbf{R}^{N_y}$ le vecteur de sortie et $p(t) \in \mathfrak{D}$ le vecteur d'ordonnancement dans l'ensemble des paramètres variants \mathfrak{D} .

La trajectoire complète de $p(t) \in \mathfrak{D}$ n'est pas connue, mais la valeur de $p(t)$ doit être donnée à t_0 , et donc un système peut être réévalué à $A(p(t_0)), B(p(t_0)), C(p(t_0)), D(p(t_0))$.

Il est important de souligner que les paramètres d'ordonnancement doivent prendre des valeurs finies, c'est à dire, leurs valeurs doivent être bornées. Par ailleurs, le nombre de paramètres d'ordonnancement doit être limité.

Par définition, la valeur réelle du paramètre est nécessaire pour calculer les coefficients de l'équation du mouvement. Comme la sélection des paramètres d'ordonnancement n'est pas unique, cette approche permet une certaine flexibilité.

Dans la structure prise ici, les paramètres ont une dépendance affine exprimée sous forme de matrices de la façon suivante :

$$A(p(t)) = A_0 + p_1(t)A_1 + \dots + p_m(t)A_m \quad (6.7)$$

$$B(p(t)) = B_0 + p_1(t)B_1 + \dots + p_m(t)B_m \quad (6.8)$$

$$C(p(t)) = C_0 + p_1(t)C_1 + \dots + p_m(t)C_m \quad (6.9)$$

$$D(p(t)) = D_0 + p_1(t)D_1 + \dots + p_m(t)D_m \quad (6.10)$$

La matrice dépendante des paramètres résultante est donnée par la combinaison linéaire des paramètres $p_i, i = 1, \dots, m$.

Dérivation du modèle LPV

Comme dans [ISIDORI [1995]], pour transformer la dynamique non linéaire (équations(1-5)) en la forme LPV (équation 6), la transformation intégrale suivante sera utilisée :

$$f(x) = F(x)x \quad F(x) = \int_0^1 \frac{\partial f(\lambda x)}{\partial (\lambda x)} d\lambda \quad (6.11)$$

Cette transformation est valable pour chaque système non-linéaire qui satisfait $f(0) = 0$. Elle factorise la variable x de la fonction non-linéaire continue $f(x)$ par la co-variable λ .

Nous considérons une suite de segments d'autoroute interconnectés, où chacun des segments peut avoir une rampe d'entrée et une autre de sortie. L'évolution des vitesses et des densités des classes est décrite par les équations(1-5).

Le modèle qLPV

Nous introduisons de nouvelles variables centrées :

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= x(t) - x^* \\ \tilde{u}(t) &= u(t) - u^* \end{aligned}$$

Les équations non-linéaires (1-5) sont ré-exprimées avec les nouvelles variables en remplaçant $x(t) = \tilde{x}(t) + x^*$ et $u(t) = \tilde{u}(t) + u^*$ pour tous les segments. Ainsi, l'équation de conservation pour le segment i est décrite par :

$$\begin{aligned} \tilde{k}_i(t+1) &= \frac{T}{\Delta_i} [(1 - \beta_i) [\tilde{k}_{i-1}(t) \tilde{v}_{i-1}(t) + \tilde{k}_{i-1}(t) v^* + \tilde{v}_{i-1}(t) k^*] \\ &\quad - \tilde{k}_i(t) \tilde{v}_i(t) - \tilde{k}_i(t) (v^* - \frac{\Delta_i}{T}) - \tilde{v}_i(t) k^*] \\ &\quad + \frac{T}{\Delta_i n} \tilde{r}_i(t) \end{aligned} \quad (6.12)$$

Ces termes sont linéaires ou bi-linéaires dans les variables, par conséquent, ces termes peuvent être factorisés sans transformation. En appliquant le même changement variable à l'équation dynamique, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \tilde{v}_i(t+1) &= \tilde{v}(t) + \frac{T}{\tau} \left[v_f \left[1 - \left(\frac{\tilde{k}_i(t) + k^*}{k_{cr}} \right)^\alpha \right] - (\tilde{v}_i(t) + v^*) \right] \\ &\quad + \frac{T}{\Delta_i} (\tilde{v}_i(t) + v^*) [\tilde{v}_{i-1}(t) - \tilde{v}_i(t)] \\ &\quad - \frac{\nu T}{\tau \Delta_i} \frac{(\tilde{k}_{i+1}(t) - \tilde{k}_i(t))}{\tilde{k}_i(t) + k^* + \kappa} \\ &\quad - \frac{\delta T}{n \Delta_i} \frac{\tilde{r}_i(t) (\tilde{v}_i(t) + v^*)}{\tilde{k}_i(t) + k^* + \kappa} \end{aligned} \quad (6.13)$$

Certains de ces termes sont linéaires ou bi-linéaire dans les variables aussi, les autres termes sont :

$$f(\tilde{k}_i(t), \tilde{v}_i(t)) = \frac{T}{\tau} \left[v_f \left[1 - \left(\frac{\tilde{k}_i(t) + k^*}{k_{cr}} \right)^\alpha \right] - (\tilde{v}_i(t) + v^*) \right]$$

D'un autre côté, cette fonction satisfait à l'exigence : $f(0,0) = 0$, en raison de la condition de centrage (14). La fonction peut être divisée en deux parties, la première dépend de $\tilde{k}_i(t)$ seulement, et le second de $v_i(t)$ seulement.

$$f_1(\tilde{k}_i(t)) = \frac{T}{\tau} \left[v_f \left[1 - \left(\frac{\tilde{k}_i(t) + k^*}{k_{cr}} \right)^\alpha \right] - v^*(t) \right] \quad (6.14)$$

$$f_2(\tilde{v}_i(t)) = \frac{T}{\tau} \tilde{v}_i(t) \quad (6.15)$$

La fonction peut s'écrire alors comme :

$$f(\tilde{k}_i(t), \tilde{v}_i(t)) = F_1(\tilde{k}_i(t))\tilde{k}_i(t) + F_2(\tilde{v}_i(t))\tilde{v}_i(t) \quad (6.16)$$

où $F_1(\tilde{k}_i(t))$ est $\frac{f_1(\tilde{k}_i(t))}{\tilde{k}_i(t)}$ avec une limite nulle quand $\tilde{k}_i(t) \rightarrow 0$ et $F_2(\tilde{v}_i(t))$ est $\frac{T}{\tau}$. Après quelques arrangements, l'équation des moments devient :

$$\begin{aligned} \tilde{v}_i(t+1) &= \left(\frac{T}{\Delta_i} v^* + \frac{T}{\Delta_i} \tilde{v}_i(t) \right) \tilde{v}_{i-1}(t) \\ &+ \left(1 - \frac{T}{\tau} - \frac{T}{\Delta_i} v^* - \frac{T}{\Delta_i} \tilde{v}_i(t) \right) \tilde{v}_i(t) \\ &+ \left(F_1(\tilde{k}_i(t)) + \frac{vT}{\tau \Delta_i} \frac{1}{\tilde{k}_i(t) + k^* + \kappa} \right) \tilde{k}_i(t) \\ &- \left(\frac{vT}{\tau \Delta_i} \frac{1}{\tilde{k}_i(t) + k^* + \kappa} \right) \tilde{k}_{i+1}(t) \\ &- \frac{\delta T}{n \Delta_i} \frac{\tilde{r}_i(t)(\tilde{v}_i(t) + v^*)}{\tilde{k}_i(t) + k^* + \kappa} \end{aligned} \quad (6.17)$$

Les équations (12) et (17) peuvent être convenablement paramétrées pour obtenir le système qLPV

Dans la suite on applique le modèle à un tronçon d'autoroute composée de 3 segments, chaque segment avec 3 voies.

Les paramètres de la classe des véhicules particuliers sont indexés par 1 ceux de la classe bus par 2.

Les états du système sont les deux densités centrées k^* pour les véhicules et K^* pour les bus et les deux vitesses v^* pour les véhicules et V^* pour les bus.

$$x(t) = [\tilde{k}_{11}(t) \quad \tilde{v}_{11}(t) \quad \tilde{k}_{12}(t) \quad \tilde{v}_{12}(t) \quad \tilde{k}_{21}(t) \quad \tilde{v}_{21}(t) \quad \tilde{k}_{22}(t) \quad \tilde{v}_{22}(t) \quad \tilde{k}_{31}(t) \quad \tilde{v}_{31}(t)]$$

Les entrées aux rampes d'entrée sont considérées comme les entrées du système

$$u(t) = [\tilde{r}_{11}(t) \quad \tilde{r}_{12}(t) \quad \tilde{r}_{21}(t) \quad \tilde{r}_{22}(t) \quad \tilde{r}_{31}(t) \quad \tilde{r}_{32}(t)]$$

tandis que les variables d'extrémité sont traitées comme des perturbations mesurées :

$$s(t) = [\tilde{q}_{01}(t) \quad \tilde{v}_{01}(t) \quad \tilde{k}_{01}(t) \quad \tilde{q}_{02}(t) \quad \tilde{v}_{02}(t) \quad \tilde{k}_{02}(t) \quad \tilde{k}_{41}(t) \quad \tilde{k}_{42}(t)]$$

$$A_{8i-2} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & & & & & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & & \vdots & \\ 0 & \dots & & 0 & a_{8i-2}^{4i,4i-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & & & & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & \vdots & \\ 0 & \dots & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{8i-1} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & & & & & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & a_{8i-1}^{4i,4i-1} & 0 & 0 & 0 & a_{8i-1}^{4i,4i+3} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & & & & \dots & & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & \vdots & & & & \\ 0 & \dots & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{8i} = 0_{12 \times 12}$$

où

Paramètre	Valeur
$a_0^{4i+1,4i-3}$	$\frac{T}{\Delta_{i+1}}(1 - \beta_{i+1})v^*$
$a_0^{4i+1,4i-2}$	$\frac{T}{\Delta_{i+1}}(1 - \beta_{i+1})k^*$
$a_0^{4i+3,4i-1}$	$\frac{T}{\Delta_{i+1}}(1 - \beta_{i+1})V^*$
$a_0^{4i+3,4i}$	$\frac{T}{\Delta_{i+1}}(1 - \beta_{i+1})K^*$
$a_0^{4i-3,4i-3}$	$-\frac{T}{\Delta_i}(v^* - \frac{\Delta_i}{T})$
$a_0^{4i-1,4i-1}$	$-\frac{T}{\Delta_i}(V^* - \frac{\Delta_i}{T})$
$a_0^{4i-3,4i-2}$	$-\frac{T}{\Delta_i}k^*$
$a_0^{4i-1,4i}$	$-\frac{T}{\Delta_i}K^*$
$a_0^{4i+2,4i-2}$	$\frac{T}{\Delta_{i+1}}v^*$
$a_0^{4i+4,4i}$	$\frac{T}{\Delta_{i+1}}V^*$
$a_0^{4i-2,4i-2}$	$1 - \frac{T}{\tau} - \frac{T}{\Delta_i}v^*$
$a_0^{4i,4i}$	$1 - \frac{T}{\tau} - \frac{T}{\Delta_i}V^*$
$a_{8i-7}^{4i-3,4i-3}$	$-\frac{T}{\Delta_i}$
$a_{8i-7}^{4i-2,4i-2}$	$-\frac{T}{\Delta_i}$
$a_{8i-7}^{4i+2,4i-2}$	$\frac{T}{\Delta_{i+1}}$
$a_{8i-7}^{4i+1,4i-3}$	$\frac{T}{\Delta_{i+1}}(1 - \beta_{i+1})$
$a_{8i-3}^{4i-1,4i-1}$	$-\frac{T}{\Delta_i}$
$a_{8i-3}^{4i,4i}$	$-\frac{T}{\Delta_i}$
$a_{8i-3}^{4i+4,4i}$	$\frac{T}{\Delta_{i+1}}$
$a_{8i-3}^{4i+3,4i-1}$	$\frac{T}{\Delta_{i+1}}(1 - \beta_{i+1})$
$a_{8i-6}^{4i-2,4i-3}$	1
$a_{8i-2}^{4i,4i-1}$	1
$a_{8i-5}^{4i-2,4i-3}$	$\frac{vT}{\tau\Delta_i}$
$a_{8i-5}^{4i-2,4i+1}$	$-\frac{vT}{\tau\Delta_i}$
$a_{8i-1}^{4i,4i-1}$	$\frac{vT}{\tau\Delta_i}$
$a_{8i-1}^{4i,4i+3}$	$-\frac{vT}{\tau\Delta_i}$

Tableau 6.1 – Valeurs des éléments de A

La structure et les entrées non nulles de $B(p(t))$ sont les suivantes

$$B_0 = \begin{bmatrix} \frac{T}{\Delta_1 n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{T}{\Delta_1 n} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T}{\Delta_2 n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{T}{\Delta_2 n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{T}{\Delta_3 n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{T}{\Delta_3 n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{8i-4} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_{8i-4}^{4i-2,2i-1} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{8i-5} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_{8i-5}^{4i-2,2i-1} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{8i} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_{8i}^{4i,2i} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{8i-1} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_{8i-1}^{4i,2i} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Paramètre	Valeur
$b_{8i-4}^{4i-2,2i-1}$	$-\frac{\delta T}{n\Delta_i}$
$b_{8i-5}^{4i-2,2i-1}$	$-\frac{\delta T}{n\Delta_i} v^*$
$b_{8i}^{4i,2i}$	$-\frac{\delta T}{n\Delta_i}$
$b_{8i-1}^{4i,2i}$	$-\frac{\delta T}{n\Delta_i} V^*$

Tableau 6.2 – Valeurs des éléments de B

La direction des perturbations mesurées est donnée avec $\gamma(p(t))$:

$$\gamma_0 = \begin{bmatrix} \frac{(1-\beta_i)T}{\Delta_1} & \frac{(1-\beta_i)T}{\Delta_1} k^* & \frac{(1-\beta_i)T}{\Delta_1} v^* & 0 & \dots & & & 0 \\ 0 & \frac{T}{\Delta_1} v^* & 0 & \dots & & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\beta_i)T}{\Delta_1} & \frac{(1-\beta_i)T}{\Delta_1} K^* & \frac{(1-\beta_i)T}{\Delta_1} V^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{T}{\Delta_1} V^* & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots & & & & 0 \\ 0 & \dots & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & & & 0 \\ 0 & \frac{T}{\Delta_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_5 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & & & & & & 0 \\ 0 & \dots & & & & & & 0 \\ 0 & \dots & & & & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{T}{\Delta_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & & & & & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_{19} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & & & & & & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & & & & & -\frac{vT}{\Delta_3 \tau} & 0 \\ 0 & \dots & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_{23} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & & & & & & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & & & & & 0 & -\frac{vT}{\Delta_3 \tau} \end{bmatrix}$$

L'équation de mesure du système peut se réécrire comme :

$$y(t) = (C_0 + C_1 p_1(t) + C_5 p_5(t) + C_{17} p_{17}(t) + C_{21} p_{21}(t))x(t) \quad (6.27)$$

Comme aucune approximation n'a été faite, le système résultant est équivalent avec le modèle non-linéaire initial, à savoir, il couvre le même système.

Bibliographie

- ABU-LEBDEH, G. et BENEKOHAL, B. (2001). Genetic algorithm for traffic signal control and queue management of oversaturated two-way arterials. *Transportation Research Board*, 1727:61–67.
- ALMASRI, E. et FRIEDRICH, B. (2005). Online offset optimisation in urban networks based on cell transmission model. *In ITS*, Hanover, Canada.
- AW, A. et RASCLE, M. (2000). Resurrection of second order models of traffic flow. *SIAM J. Appl. Math*, 60:916–944.
- BAGNERINI, P. et RASCLE, M. (2003). A multi-class homogenized hyperbolic model of traffic flow. *SIAM Journal of mathematical analysis*, 35(4):949–973.
- BALKE, K., DUDEK, C. et URBANIK, T. (2000). Development and evaluation of an intelligent bus priority concept. *In 79th Annual Meeting of Transportation Research Board*.
- BANDO, M., HASEBE, K., NAKANISHI, K. et NAKAYAMA, A. (1998). Analysis of optimal velocity model with explicit delay. *Print arXiv : patt-sol*, (9805002).
- BANDO, M., HASEBE, K., NAKAYAMA, A., SHIBATA, A. et SUGIYAMA, Y. (1995). Dynamical model of traffic congestion and numerical simulation. *Physical Review E*, 51(2): 1035–1042.
- BEARD, C. et ZILIASKOPOULOS, A. (2006). A system optimal signal optimization formulation. *In In Proc. of the 85th TRB Annual Meeting*, Washington, DC, USA.
- BEN-AKIVA, M., KOUTSOPOULOS, H., MISHALANI, R. et YANG, Q. (1997). Simulation laboratory for evaluating dynamic traffic management systems. *ASCE Journal of Transportation Engineering*, 123.
- BENEKOHAL, R. et TREITERER, J. (1989). Carsim : Car following model for simulation of traffic in normal and stop and go conditions. *Transportation Research Record*, 1194:99–111.
- BENZONI-GAVAGE, S. et COLOMBO, R. (2003). An n-population model for traffic flow. *Europ ; J. Appl. Math*, 63:818–833.
- BERNE, E. (2006). Mise en oeuvre d’une simulation de trafic sur l’aire urbaine de Lyon. Mémoire de D.E.A., VATRANSPORT, promotion 51, Université de Lyon.

- BERTSEKAS, D. et E.GAFNI (1982). Projection methods for variational inequalities with applications to the traffic assignment problem. *Mathematical Programming Studies*, 17:139–159.
- BHOURI, N., BOILLOT, F. et VINANT, P. (2008). Régulation multimodale du trafic routier et des transports en commun de surface, une classification des méthodes. *Recherche Transports Sécurité*, 25.
- BHOURI, N. et LOTITO, P. (2005). An intermodal traffic control strategy for private vehicles and public transport. *In Euro Working Group on Transportaion*, pages 423–428.
- BLIEMER, M. (2000). *Analytical dynamic traffic assignment with interacting user-classes-theoretical advances and applications using variational inequality approach*. Thèse de doctorat, Delft University of technology, Pays-Bas.
- BOILLOT, F., BLOSSEVILLE, J., LESORT, J., PAPAGEORGIOU, M. et SELLAM, S. (1992). Optimal signal control of urban traffic networks. *In Proceedings of the 6th IEEE International Conference on Board Traffic Monitoring and Control*, pages 75–79.
- BOLLELI, A., MAURO, V. et PERONO, E. (1991). Models and strategies for dynamic route guidance- part b : A decentralize, fully dynamic, infrastructure supported route guidance. *In Proceedings of the Drive Conference*, pages 99–105.
- BOMARIUS, F. (1992). A multi-agent approach for modeling urban traffic scenarios. Rapport technique, Deutesches Forschungszentruin fur Kunstliche Intelligenz. Research Report rRR-92-47.
- BONNEL, P. (2004). Prévoir la demande de transport. Rapport technique, Presse de l'ENPC.
- BOURREL, E. (2003). *Modélisation dynamique de l'écoulement du trafic routier : du macroscopique au microscopique*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, France.
- BOURREL, E. et LESSORT, J. B. (2003). Mixing micro and macro representation of traffic flow : a hybrid model based on the lwr theory. *Transportation Research Record*, 1862:193–200.
- BRACKSTONE, M. et MCDONALD, M. (1999). Car-following : A historical review. *Transportation Research Part F*, 2:181–196.
- BURGERS, J. (1948). A mathematical model illustrating the theory of turbulence. *Adv. Appl. Mech*, 1:171–199.
- CERTU (2003). Modélisation des déplacements urbains de voyageurs. Rapport technique, Lyon.
- CHABONNIER, C., FARGES, J. et HENRY, J. (1991). Models and strategies for dynamic route guidance- part c : Optimal control approach. *In Proceedings of the Drive Conference*, pages 106–112.

- CHAN, S. (1996). Multi-agent traffic simulation. Mémoire de D.E.A., Department of Artificial Intelligence, University of Edinburgh.
- CHANDLER, R., HERMAN, R. et MONTROLL, E. (1958). Traffic dynamics studies in car following. *Operations Research*, 6.
- CHANUT, S. (2005). *Modélisation dynamique macroscopique de l'écoulement d'un trafic routier hétérogène poids lourds et véhicules légers*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon.
- CHOWDHURY, D., SANTEN, L. et SCHADSCHNEIDER, A. (2000). Simulation of vehicular traffic : A statistical physics perspective. *Computer Simulation*, pages 80–87.
- COLOMBO, R. (2002). Hyperbolic phase transition in traffic flows. *SIAM J. Appl. Math*, 63.
- COURAGE, K., WALLACE, C. et WATTLEWORTH, J. (1978). Effect of bus priority system operation on performance of traffic signal control equipment on nw 7th avenue. Rapport technique, U.S Department of Transportation Report.
- CREMER, M. et LUDWIG, J. (1986). A fast simulation model for traffic flow on the basis of boolean operations. *Mathematics and Computers in Simulation*, 28:297–303.
- DAGANZO, C. (1994). The cell transmission model : a dynamic representation of highway traffic consistent with the hydrodynamic theory. *Transport. Res. B*, 28.
- DAGANZO, C. (1995). The cell transmission model. part ii.network traffic. *Transport. Res. B.*, 29.
- DAGANZO, C. (1997). A continuum theory of traffic dynamics for freeways with special lanes. *Transportation Research Part B*, 31(2):83–102.
- DAGANZO, C. (2002). A behavioral theory of multi-lane traffic flow, part 1 : Long homogeneous freeway sections. *Transportation. Research. Part. B.*, 36.
- DAGANZO, C. et LIN, W. (1993). The spatial evolution of queues during the morning commute in a single corridor. Rapport technique, Working Paper UCB-ITS-PWP-93-7, California PATH, University of Berkeley, CA 94720.
- DEL-CASTILLO, J. (1996). Car following model based on lighthill-whitham theory. *In In Proceedings of the 13th International Symposium on Transportation and Traffic Theory ISTTT*, Lyon, France.
- DEPALMA, A. et MARCHAL, F. (2002). Real case application of the fully dynamic metropolis tool-box : an advocacy for a large-scale mesoscopic transportation system. *Networks and special economics*, pages 347–369.
- DIAKAKI, C. (2002). *Integrated control of traffic flow in corridor networks*. Thèse de doctorat, Technical University of Crete.

- DIAKAKI, C., PAPAGEORGIOU, M. et ABOUDOLAS, K. (2002). A multivariable regulator approach to traffic responsive network-wide signal control. *In Control Engineering-Practice* .Pergamon, pages 183–195.
- DION, F. et RAKHA, H. (2004). Integrating transit signal priority within adaptive traffic signal control systems. *Transportation Research Board*.
- DOTOLI, M., FANTI, M. et MELONI, C. (2005). A signal tuning plan formulation for urban traffic control. *In Control Engineering Practice*, 14:1297–1311.
- DUERR, P. (2007). Dynamic right-of-way for transit vehicles : Integrated modeling approach for optimizing signal control on mixed traffic arterials. *Transportation Research Board*, pages 31–39.
- EL-HMAM, M., D.JOLLY et ABOUAISSA, H. (2005). Intelligent hybrid traffic flow simulation an approach based on the multi agents systems. *In IEEE AIS 05 CAD*, Divnomorskoye, Russia.
- ELLOUMI, E., HAJ-SALEM, H. et PAPAGEORGIOU, M. (1994). "metacor" a macroscopic modelling tool for urban corridors. *In TRISTAN II Int . Conf*, Capri, Italie.
- ESPIE, S. (1995). Archisim : Multi-actor parallel architecture of traffic simulation. *In Second World Congress on Intelligent Transport Systems*, Yokohama, Japan.
- ESPIE, S., GALANTE, F. et GATTUSO, D. (2006). Hybrid traffic model coupling macro and behavioral microsimulation. *Transportation Research Board*.
- ESPIE, S., SAAD, F. et SCHNETZLER, B. (1994). Microscopic traffic simulation and driver behaviour modelling : the archisim project. *In Strategic Highway Research Program and Traffic Safety on Two Continents*, Lille, France.
- FARGES, J., HENRY, J. et TUFAL, J. (1983). The prodyn real-time traffic algorithm. *In Proc of the 14th IPAC Symposium on Transportation Systems*, pages 307–312, Baden-Baden, Germany.
- FENG, Y., PERRIN, J. et MARTIN, P. (2003). Bus priority of scoot evaluated in a vissim simulation environment.
- FRIESZ, T. et MOOKHERJEE, R. (2006). Solving the dynamic network user equilibrium problem with state-dependent time shifts. *Transportation Research B*, 40(3):207–229.
- FRITZSCHE, H. (1994). A model for traffic simulation. *Traffic Engineering and Control*, 35(5):317–321.
- GARAVELLO, M. et PICCOLI, B. (2006). Traffic flow on road network using the aw-rasclé model. *Communications partial differential equations*, 31:243–275.
- GARNER, N. (1983). Opac. a demand-responsive strategy for traffic signal control. *Transportation Research Record*, 906:75–84.

- GAWRON, C. (1998). *Simulation-Based Traffic Assignment : Computing User Equilibria in Large Street Networks*. Thèse de doctorat, University of Cologne, Cologne.
- GAZIS, D., HERMAN, R. et POTTS, B. (1959). Car following theory of steady state traffic flow. *Operations Research*, 7(4):499–501.
- GETRAM/AIMSUN (2002). A model for simulating vehicular traffic on multi-lane and arterial road, version 4.1 users manuals. Rapport technique, Transport Simulation Systems.
- G.GOMEZ, HOROWITZ, R., KURZHANSKIY, A., VARAIYA, P. et KWON, J. (2008). Behavior of cell transmission model and effectiveness of ramp metering. *Transportation Research Part C*, 16:485–513.
- GIPPS, P. (1981). A behavioural car following model for computer simulation. *Transportation Research Board*, 15.
- GIPPS, P. (1986). A model for the structure of lane-changing decisions. *Transportation Research Part B*, 20(5):403–414.
- GOATIN, P. (2006). The aw-rasclé vehicular traffic flow model with phase transitions. *Math.Comp.Model*, 44:287–303.
- GODUNOV, S. (1959). A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of hydrodynamic equations. *Mathematicheskii Sbornik*, 47:271–290.
- GOMEZ, G. et HOROWITZ, R. (2006). Optimal freeway ramp metering using the asymmetric cell transmission model. *Transportation Research Part C*, 14(4):244–262.
- GREENBERG, J. (2001). Extension and amplification of the aw-rasclé model. *SIAM J. Appl. Math*, 63:729–744.
- GREENSHIELD, B. (1935). A study of capacity. In *In Proceedings of the Highway Research Board*, volume 14, pages 967–976.
- HAN, D. et LO, H. (2004). Solving non-additive traffic assignment problems : A descent methods for co-coercive variational inequalities. *European Journal for Operational Research*, 159(3):529–544.
- HELBING, D., HENNECKE, A. et SHVETOV, V. (2000). Micro-and macrosimulation of freeway traffic. *Mathematical and Computer Modelling*, 35(5).
- HELBING, D. et SCHRECKENBERG, M. (1999). Cellular automata simulating experimental properties of traffic flow. *Physical Review E*, 3(59).
- HENN, V. (2001). *Information routière et affectation du trafic : vers une modélisation floue*. Thèse de doctorat, Université de Saint-Etienne, France.
- HENN, V. (2003). A wave-based resolution scheme for the hydrodynamic lwr traffic flow model. In *In : Proc. of the 5th Meeting on Traffic and Granular Flow*, Delft, Pays-Bas.

- HENN, V. (2005). Tracking waves for modelling the impacts of incidents. *In In : Preprints of the 10th EWGT*, Poznan.
- HERGOT, B. (1995). Coopération entre une simulation microscopique et une simulation macroscopique. Rapport technique, Université Paris V et VI. Rapport de Magistère MIAIF.
- HERTY, M. et RASCLE, M. (2006). Coupling conditions for a class of "second order" models for traffic flow. *SIAM.J.Math.Anal*, 38(2):595–616.
- HUANG, H. et LAM, W. (2002). Modeling and solving the dynamic user equilibrium route and departure time choice problem in network with queues. *Transportation Research B*, 36(3):253–273.
- HUNT, P., ROBERTSON, D., BRETHERTON, R. et ROYLE, M. (1982). The scoot on line traffic signal optimization technique. *Traffic Engineering and Control*, 23:180–192.
- ISIDORI, A. (1995). *Nonlinear control systems*. Springer Verlag.
- JACOBSON, J. et SHEFFI, Y. (1981). Analytical model of traffic delays under the signal preemption : theory and application. *Transportation Research Part B*, 15(2):127–138.
- JAYAKRISHNAN, R., MAHMASSANI, H. et HU, T. (1994). An evaluation tool for advanced traffic information and management systems in urban networks. *Transportation Research Part C*, 2(3):129–147.
- JIANG, R. et WU, Q. (2004). Extended speed gradient model for mixed traffic. *Transportation Research Record*, 1883:78–84.
- JIANG, R., WU, Q. et Z.J.ZHU (2002). A new continuum model for traffic flow and numerical tests. *Transportation Research Part B*, 36(5):405–419.
- JIN, W. (2007). A dynamical system model of the traffic assignment problem. *Transportation Research B*, 41:32–48.
- KACHROUDI, S. (2010). *Commande et optimisation pour la régulation du trafic urbain multimodale sur de grands réseaux urbains*. Thèse de doctorat, Université d'Evry Val d'Essonne, France.
- KESSACI, A., FARGES, J. et HENRY, J. (1990). Upper level for real time urban traffic control systems. *In In : Proceedings of the 11th IFAC World Congress*, volume 10, pages 226–229.
- KHALIL, H. (2002). *Nonlinear Systems*. 3rd edn. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- KHASNABIS, S., REDDY, V. et CHAUDRY, B. (1991). Signal preemption as a priority treatment tool for transit demand management. *In In : Proceedings of the Vehicle Navigation and Information System*.
- KOENIG, D. et MAMMAR, S. (2002). Design of proportional-integral observer for unknown input descriptor systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(12):2057–2062.

- KOMETANI, E. et SASAKI, T. (1959). Dynamic behaviour of traffic with a nonlinear spacing-speed relationship. *In Symp. Theory Traffic Flow, Research Laboratories, General Motors*, pages 105–109, New York.
- KRAUSS, S. (1997). *Microscopic modelling of traffic flow : Investigation of collision free vehicle dynamics*. Thèse de doctorat, Université de Cologne Allemagne.
- KRONER, D. (1997). *Numerical schemes for conservation laws*. Wiley teubner édition.
- LEBACQUE, J. (1996). The godunov scheme and what it means for first-order traffic flow models. *In In : Lesort, J.B. (Ed.), Proceedings of the 13 th International Symposium on Transportation and Traffic theory*, pages 647–677.
- LEBACQUE, J., LESORT, J. et GIORGI, F. (1998). Introducing buses into first-order macroscopic traffic flow models. *Transport. Res. Record.*, pages 70–79.
- LEBACQUE, J., MAMMAR, S. et HAJ-SALEM, H. (2005). Second order traffic flow modeling : the riemann problem resolution using supply/demand based approach. *In In : Proceedings of the Euro Working Group on Transportation*, Poznan.
- LEBACQUE, J., MAMMAR, S. et HAJ-SALEM, H. (2007). Generic second order traffic flow modeling. *In In : Proceedings of ISTTT (International Symposium on Transportation and Traffic flow Theory*, London.
- LECLERCQ, L. (2007). Hybrid approaches for the solutions of the lighthill-whitham-richards model. *Transportation Research Part B*, 41(7):701–709.
- LEONARD, D., POWER, P. et TAYLOR, N. (1989). *Contram : Structure of the model*. Rapport technique, Transportation Research Laboratory, Crowthorn.
- LEURENT, F. (1999). Accessibility to vacant activities : a novel model of destination choice. *In Proceedings of European Transport Conference '99 Seminar F*, pages 307–318, London, Japan.
- LEVEQUE, R. (1992). *Numerical methods for conservation laws*. Birkhausser verlag édition.
- LI, Y., MA, S., LI, W. et WANG, H. (2003). Microscopic urban traffic simulation with multi-agent system. *In ICICS-PCEM*, pages 1835–1839, Singapoure.
- LIGHTHILL, M. et WHITHAM, G. (1955). On kinematic waves ii : A theory of traffic flow on long crowded roads. *ProRoySoc*, pages 317–345.
- LIN, W. et AHANOTU, D. (1995). Validating the basic cell transmission model on a single freeway link. Rapport technique, Technical Note 95-03, California PATH, University of Berkeley, CA 94720.
- LO, H. (1995). A novel traffic signal control formulation. *Transportation Research Part A*, 33:433–448.

- LO, H. (2001). A cell-based traffic control formulation strategies and benefits of dynamic timing plans. *Transportation Science*, 35(2):148–164.
- LO, H., CHANG, E. et CHAN, Y. (2001). Dynamic network traffic control. *Transportation Research*, 337(6):433–448.
- LO, H., YIP, C. et WAN, K. (2003). Modeling transfer and non-linear fare structure in multi-modal network. *Transportation Research B*, 37(2):149–170.
- LOGGHE, S. (2003). *Dynamic modelling of heterogeneous vehicular traffic*. Thèse de doctorat, Katholieke Universiteit Leuven, Belgique.
- LOGGHE, S. et IMMERS, L. (2008). Multi-class kinematic wave theory of traffic flow. *Transportation Research Part B*, 42:523–541.
- LOWRIE, P. (1982). Scats : the sydney co-ordinated adaptive traffic system principles, methodology algorithms. *In Proc of the IEE International Conference on Road Traffic Signalling*.
- LUDWICK, J. (1976). Bus priority system :simulation and analysis. Rapport technique, U.S. Departement of Transportation.
- LUENBERGER, D. (1964). Observing the state of a linear system. *IEEE Transaction on Military Electronics*, 8:74–80.
- LUSPAY, T., KULCSAR, B., VARGA, I. et BOKOR, J. (2009). Parameter-dependent modelling of freeway traffic flow. *Transportation Research Part C*.
- MA, T. (2007). *Modèle dynamique de transport basé sur les activités*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, France.
- MAGNE, J., RABUT, S. et GABARD, J. (2000). Toward an hybrid macro and micro traffic flow simulation model. *In INFORMS spring 2000 meeting*, Salt Lake City, Utah, USA.
- MAHMASSANI, H. et S. PEETA (1994). Network performance under system optimal and user equilibrium dynamic assignments : Implications for advanced traveller information systems. *Transportation Research Record*, 1408:83–93.
- MAMMAR, S. (2006). *Développement d'un modèle de simulation macro-microscopique de trafic*. Thèse de doctorat, Université d'Evry Val d'Essonne, France.
- MAMMAR, S. (2007). *Systèmes de transport intelligents : Modélisation, information et contrôle*. Hermes Science Publications. ISBN-13 : 978-2746215191.
- MAMMAR, S., LEBACQUE, J. et HAJ-SALEM, H. (2006). A hybrid model based on a second order traffic model. *Transportation Research Board*.
- MAMMAR, S., MAMMAR, S. et HAJ-SALEM, H. (2005). A modified optimal velocity model for vehicle following. *In 16th IFAC World Congress*, PRAHA.

- MAMMAR, S., SMAILI, S., MAMMAR, S. et WEIDMANN, G. (2011). Hybrid model based on generic second-order model. *In TRB 90th Annual Meeting*, Washington DC, USA.
- MCDONALD, M., BRACKSTONE, M. et JEFFERY, M. (1994). Simulation of a lane usage characteristics on 3 lane motorways. *In Proceedings of the 27th ISATA Conference*, Aachen, Germany.
- MICHAELS, R. (1963). Perceptual factors in car following. *In 2nd International Symposium Theory Road Traffic Flow*, pages 44–59, Paris, France.
- MIRCHANDANI, P. et HEAD, L. (1998). Rhodes, a real-time traffic signal control system : architecture, algorithms and analysis. *In In : TRISTAN III*, volume 2, San Juan, Puerto Rico.
- MIRCHANDANI, P. et WANG, F. (2005). Rhodes to intelligent transportation systems. *IEEE Intelligent Systems*, 20(1):10–15.
- MORALES, A. et ALVARES-RAMIREZ, J. (2002). A pi observer for a class of nonlinear oscillators. *Physics Letters*, pages 205–209.
- MOUTARI, M. (2007). *Modélisation mathématique et numérique du trafic automobile*. Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, France.
- MUNOZ, L., SUN, X., HOROWITZ, R. et ALVAREZ-ICAZA, L. (2003). Traffic density estimation with the cell transmission model. *In Proceedings of the American Control Conference*, pages 3750–3755, Denver, Colorado.
- MUNOZ, L., SUN, X., SUN, D., GOMEZ, G. et HOROWITZ, R. (2004). Methodological calibration of the cell transmission model. *In In : Proceedings of American Control Conference*, pages 798–803.
- NAGEL, K. et SCHRECKENBERG, M. (1992). A cellular automaton model for freeway traffic. *Journal Physique I*, 2(12):2221–2229.
- NAGURNEY, A. (1993). *Network Economics : A Variational Inequality Approach*. Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA.
- NAGURNEY, A. et ZHANG, D. (1996). *Projected dynamical systems and Variational Inequalities with Applications*. Kluwer, Boston.
- NAGURNEY, A. et ZHANG, D. (1997). Projected dynamical systems in the formulation, stability analysis and computation of fixed-demand traffic network equilibria. *Transportation Science*, 31:147–158.
- NEWELL, G. (1998). A moving bottleneck. *Transportation Research Part B*, 32(8):531–537.
- NIZARD, L. (2002). Combining microscopique and mesoscopique traffic simulators. Rapport technique, Ecole Polytechnique, Paris, France.

- OH, J., CORTER, C., JAYAKRISHNAN, R. et LEE, D. (1994). Microscopic simulation with large-network path dynamics for advanced traffic management and information systems. Institute of Transportation Studies, University of California, Irvine.
- ORTUZAR, J. et WILLUMSEN, L. (2001). *Modeling transport*. Wiley, Londres.
- PANWAI, S. et H.DIA (2005). Comparative evaluation of microscopic car-following behavior. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 6(3):314–325.
- PAPAGEORGIOU, M. (1999). Traffic control. *In handbook of transportation engineering*. R.H.Hall Editor, Kluwer. Academic Publishers, in press.
- PAPAGEORGIOU, M. (2006). Méthodes de contrôle automatique dans les transports et la gestion du trafic. *Génie Logiciel*, (75):13–25.
- PAPAGEORGIOU, M., BLOSSEVILLE, J. et HAJ-SALEM, H. (1990). Modelling and real-time control of traffic flow on the southern part of boulevard perepheric in paris, part i, modelling and part ii, coordinated on-ramp metering. *Transportation Research Part A*, 24(5).
- PARMA, A., MARCHAL, F. et NESTEROV, Y. (1996). Metropolis : a modular system for dynamic traffic simulation. *Transportation Research Record*, 1607.
- PATRIKSSON, M. (1994). The traffic assignment problem : Models and methods. *In Topics in Transportation VSP*, Zeist, The Netherlands.
- PAYNE, H. (1971). Traffic dynamics : studies in car following to investigate peak-period commuter decision dynamics. *Simulation Councils Proc. Ser. Math*, 28:51–61.
- PIPES, L. (1953). An operational analysis of traffic dynamics. *Journal of Applied Physics*, 24:271–281.
- POSCHINGER, A., KATES, R. et KELLER, H. (2002). Coupling of concurrent macroscopic and microscopic traffic flow models using hybrid stochastic and deterministic disaggregation. *In 15th International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, Oxford, UK.
- RAKHA, H. et ZHANG, Y. (2003). Sensitivity analysis of transit signal priority impacts on operation of a signalized intersection. *Transportation Engineering*, 17.
- REUSCHEL, A. (1950). Vehicle movements in a platoon. *Osterreichisches Ingenieur Archir*, 4:193–215.
- RICHALET, J., LAVIELLE, G. et MALLET, J. (2005). *La commande prédictive*. Groupe Eyrolles, France.
- RICHARDS, P. (1956). Shock waves on the highway. *Operations. Research*, 4(1):42–51.
- RICHARDSON, A. et OGDEN, K. (1979). Evaluation of action bus-priority signals. *Transportation Research Record*, 718:5–12.

- ROBERTSON, D. (1969). Transyt method of area traffic control. *Traffic Engineering and Control*, 10:276–281.
- RODRIGUES, M., THEILLIOL, D. et SAUTER, D. (2005). Design of a robust polytopic unknown input observer for fdi : Application to nonlinear systems described by a multi-models representation. In *44-th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference ECC*, Seville, Espagne.
- ROSAS-JAIMES, O. et ALVAREZ-ICAZA, L. (2007). Vehicle density and velocity estimation on highways for an-ramp metering control. *Nonlinear Dynamics*, 49:555–566.
- ROSS, P. (1988). Traffic dynamics. *Transportation Research Part B*, 22.
- RUGH, W. et SHAMMA, J. (2000). Research on gain scheduling. *Automatica .IEEE Transaction on Military Electronics*, 36:1401–1425.
- SEWARD, S. et TAUBE, R. (1977). Methodology for evaluating bus-actuated, signed-preemption systems. *Transportation Research Part C*, 630:11–17.
- SHALABY, A., LEE, J., GREENOUGH, J., HUNG, S. et BOWIE, M. (2008). Development, evaluation and selection of advanced transit signal priority concept directions. *Journal of Public Transportation*, 9(5).
- SIEBEL, F. et MAUSER, W. (2007). Simulating vehicular traffic in a network using dynamic routing. *Math.Comp.Model.Dyn.Syst*, 3:83–97.
- SMITH, M. (1984). The stability of a dynamic model of traffic assignment-a an application of a method of lyapunov. *Transportation Science*, 18:245–252.
- SMITH, M., DRUITT, S., CAMERON, G. et MACARTHUR, D. (1994). Paramics final report. Rapport technique, University of Edinburgh, Edinburgh.
- SUKTHANKAR, R., HANCOCK, J., POMERLEAU, D. et THORPE, C. (1996). A simulation and design system for tactical driving algorithm. In *Artificial Intelligence, Simulation and Planning in High Autonomy Systems*.
- SZETO, W. et LO, H. (2004). A cell-based simultaneous route and departure time choice model with elastic demand. *Transportation Research B*, 38(7):593–612.
- TARANTO, D. et MAURO, V. (1989). Utopia. In *ICAC Control, Computers, Communications in Transportaion*, pages 575–597.
- TEODOROVIC, D. (2008). Swarm intelligent systems for transportation engineering : Principles and applications. *Transportation Research Part C*, pages 651–667.
- TOINT, P. et WYNTER, L. (1996). Assymetric multiclass traffic assignment : a coherent formulation. In *In : Proc. of the 13th International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, pages 237–260, Oxford, Royaume Uni.

- TONG, C. et WONG, S. (2000). A predictive dynamic traffic assignment model in congested capacity-constrained road networks. *Transportation Research B*, 34(8):625–644.
- TREIBER, M. et HELBING, D. (2001). Microsimulation of freeway traffic including control measures. *Automatisierungstechnik*, 49:478–484.
- WARDROP, J. (1952). Some theoretical aspects of road traffic research. In *Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Part II*, volume 1, pages 325–362.
- WEN, Y. et WU, T. (2004). Regional signal coordinated control system based on an ant algorithm. In *Proceedings of the Fifth World Congress on Intelligent Control and Automation*, pages 5222–5226.
- WIEDERMANN, R. (1974). Simulation des strassenverkehrsflusses. In *Schriftenreihe des Institutes für Verkehrswesen der Universität Karlsruhe*, Allemagne.
- WIKIPEDIA (2010). www.wikipedia. Rapport technique.
- WONG, S. et WONG, G. (2002). An analytical shock-fitting algorithm for lwr kinematic wave model embedded with linear speed-density relationship. *Transportation Research Part B*, 36(10):867–884.
- WU, F. (1995). *Control of linear parameter varying systems*. Thèse de doctorat, Université de Berkeley, Californie, USA.
- WU, J., M.BRACKSTONE et McDONALD, M. (2003). The validation of a microscopic simulation model : A methodological case study. *Transportation Research Part C : Emerg. Technol*, (36):463–479.
- ZHANG, H. (1998). A theory of nonequilibrium traffic flow. *Transportation Research Part B*, 32:485–498.
- ZHANG, H. (2002). A non-equilibrium traffic model devoid of gas-like behavior. *Transportation Research Part B*, 36:275–290.
- ZHANG, H. (2003). Anisotropic property revisited- does it hold in multi-lane traffic ? *Transportation Research Part B*, 37(6):561–577.
- ZHANG, H. et JIN, W. (2002). A kinematic wave traffic flow model for mixed traffic. *Transportation Research Record*, 1802:197–204.
- ZHANG, H. et LIN, W. (2002). Some recent developments in continuum vehicular traffic flow theory. In *Proc. of the 15th International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, Adelaide, Australie.
- ZHANG, M., RITCHIE, S. et RECKER, W. (1996). Some general results on the optimal ramp control problem. *Transportation Research Part C*, 4(2):51–69.

- ZHOUL, G., GANL, A. et ZHU, X. (2005). Determination of optimal detector location for transit signal priority with queue jumper lanes. *Transportation Research Board*, pages 123–129.
- ZHU, Z., CHANG, G. et WU, T. (2003). Numerical analysis of freeway traffic flow dynamics under multiclass drivers. *Transportation Research Record*, 18:201–208.
- ZILIASKOPOULOS, A. (2000). A linear programming model for the single destination system optimum dynamic traffic assignment problem. *Transportation Science*, 34(1):37–49.

Résumé

Résumé

Le trafic routier englobe plusieurs facteurs, entre autres la géométrie des infrastructures routières, le comportement des conducteurs, la diversité des flux de véhicules, etc... Les situations auxquelles sont confrontés les exploitants des réseaux routiers dépendent du type de réseau dont ils ont la charge. Cette complexité du trafic en a fait un domaine de recherche d'un intérêt croissant et ce depuis les premières études qui ont donné naissance au modèle LWR au milieu des années cinquante.

Afin de modéliser le trafic sur un réseau routier, deux approches, complémentaires l'une de l'autre sont nécessaires. La première est la modélisation de l'écoulement qui permet de décrire l'évolution des flux de trafic sur un tronçon de route et l'affectation qui décrit la façon dont les usagers choisissent leurs itinéraires sur un réseau.

L'objet de ces travaux de thèse est d'apporter une contribution à cette amélioration de la modélisation des flux de trafic, en se concentrant dans un premier lieu sur la modélisation d'un trafic autoroutier constitué de deux classes de véhicules : des véhicules particuliers et des bus. L'étude numérique du modèle se fait en adaptant le modèle de transmission cellulaire de Daganzo. Un estimateur des densités et un autre des vitesses de ce trafic mixte sur un tronçon de route ont été présentés. Des résultats de stabilité dans les différents régimes de ce trafic ont été établis.

Dans un second temps concernant la modélisation d'un trafic urbain multimodal constitué de trois classes de véhicules : aux deux classes précédemment citées, est intégrée une nouvelle classe de bus à haut niveau de service BHNS ou BRT, classe qui tend à se propager au milieu urbain et suburbain et qui est perçue comme solution à de nombreux problèmes liés au trafic par les exploitants de la route. Nous proposons deux modèles de la progression du BRT sur le réseau, puis nous développons une stratégie de régulation de ce système de transport urbain trimodal. L'objectif de la régulation est double, veiller à la fluidité du trafic en général et le respect de positions références pour le mode BHNS. L'architecture s'appuie sur la commande des systèmes en boucle fermée et utilise la commande prédictive généralisée.

Nous avons aussi proposé un modèle hybride de trafic routier basé sur le couplage d'un modèle macroscopique générique de second ordre et d'un modèle microscopique en coordonnées Lagrangiennes. Pour la validation de la bonne transmission de l'information à travers le schéma de couplage, nous avons étudié la propagation et la remontée d'une congestion.

Mots-clés: Trafic routier, modélisation, hybride, BRT, estimateur, P2I observateur, équilibre usager, commande prédictive, Lyapunov, carrefour à feux, Lagrangienne, Eulérienne, GSOM, CTM.

Abstract

The traffic includes several factors, including the geometry of the road infrastructure, driver behavior, the diversity of vehicle flow, etc ... The situations faced by network operators depend on the type of road network under their charge. This complexity has made traffic a research area of growing interest ever since the first studies that gave rise to the LWR model in the mid-fifties. To model the traffic on a road network, two approaches are complementary to each other are needed. The first is the flow modeling for describing the evolution of traffic flows on a stretch of road and the assignment that describes how users choose their route on a network. The purpose of this thesis work is to contribute to the improvement of the modeling of traffic flows, focusing primarily on the modeling of a motorway traffic consists of two classes of vehicles : passenger cars and buses. The numerical study of the model is done by adapting the cell transmission model of Daganzo. An estimator for densities and speeds of the mixed traffic on a stretch of road have been submitted. Stability results in the different regimes of trafficking have been established.

In the second place on the modeling of a multimodal urban traffic consists of three classes of vehicles : for the two classes mentioned above, is part a new class of high-level bus service class BRT, that tends to spread to urban and suburban which is seen as a solution to many problems related to traffic by the operators of route. We propose two models for the BRT and we develop a control strategie of this system of urban tranport trimodal (cars, buses and BRT). The purpose of the regulation of this strategy is twofold, to ensure the flow of traffic in general and respect for the positions references for the BRT mode. The architecture is based on the control of closed loop systems and uses the generalized predictive control.

We have proposed a hybrid model of traffic based on the coupling of a generic second order macroscopic model and a microscopic model in Lagrangian coordinates. To validate the correct transmission of information through the coupling scheme, we have studied the spread and the rise of a congestion.

Keywords: Traffic, modeling, hybrid, BRT, GSOM, CTM, estimator, user equilibrium, predictive control, Lyapunov, P2I observator, station, light line intersection, Lagrangian, Eulerian.