



HAL
open science

Etude physique et numérique de l'écoulement dans un dispositif d'injection de turbine Pelton

Julien Leduc

► **To cite this version:**

Julien Leduc. Etude physique et numérique de l'écoulement dans un dispositif d'injection de turbine Pelton. Autre. Ecole Centrale de Lyon, 2010. Français. NNT : 2010ECDL0042 . tel-00684385

HAL Id: tel-00684385

<https://theses.hal.science/tel-00684385v1>

Submitted on 2 Apr 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée devant
L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

pour obtenir
le titre de DOCTEUR
Spécialité: Mécanique

par

Julien LEDUC

École Doctorale : MEGA

Étude physique et numérique de l'écoulement dans un système d'injection de turbine Pelton

soutenue le 13 décembre 2010 devant la commission d'examen

| | | | |
|----------------------|------------------------|----------------|---------------------|
| Composition du jury: | Docteur | F.-X. DEMOULIN | |
| | Directeur de recherche | P. FERRAND | -Président |
| | Professeur | M. LANCE | -Directeur de thèse |
| | Docteur | D. LE TOUZÉ | -Rapporteur |
| | Professeur | F. LEBOEUF | -Directeur de thèse |
| | Docteur | E. PARKINSON | |
| | Professeur | R. SAUREL | -Rapporteur |
| | | D. VIOLEAU | |

Remerciements

Cette thèse débutée en 2007 a été réalisée dans le cadre de la thèse Cifre 407/2007 en collaboration entre ANDRITZ Hydro Grenoble/Vevey, le Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique et l'Ecole Centrale de Lyon. Je tiens ainsi à remercier l'ensemble des partenaires ayant permis de m'offrir un cadre de travail que j'ai, tout au long de ces trois années, particulièrement apprécié.

Je remercie David Le Touzé et Richard Saurel pour avoir accepté d'être les rapporteurs de ma thèse ainsi que François-Xavier Demoulin, Pascal Ferrand et Damien Violeau pour avoir accepté d'être membre du jury.

Je souhaite aussi remercier différentes personnes qui ont, d'une manière ou d'une autre, favorisé la réalisation de ce travail. Thomas Staubli, Pascal Weibel et André Abgottspon qui m'ont facilité la compréhension des phénomènes physiques par la qualité des résultats expérimentaux obtenus et des échanges entre nous. Les personnes du laboratoire hydraulique de Vevey et notamment M. Chapuis et M. Amrein pour avoir mené avec un "gars des deux gares" un travail expérimental riche en résultats.

Je remercie l'ensemble de l'équipe du 4ème Gérald, Claude, Nico, Johannes, Florent, Hélène, Jérémy et Pascal. En effet j'ai particulièrement apprécié la richesse et la qualité des échanges sur le thème de recherche mais aussi l'ambiance de travail qui s'est maintenant prolongé en relation dépassant le cadre professionnel. Je tiens à remercier aussi Joëlle Caro qui a été la première (courageuse) utilisatrice de mes développements et Blaise Carrupt qui m'a accompagné avec sympathie et humour lors de la phase "parallélisation".

Je tiens à remercier ici les personnes qui ont encadré de près mon travail de thèse. Étienne Parkinson pour m'avoir toujours encouragé à croire en ce que je faisais. Mes encadrants de thèse Francis Leboeuf et Michel Lance dont les réunions d'avancement de thèse de 4 heures, toujours très riches et constructives, m'offraient la possibilité d'avancer ma thèse pendant au minimum 4 mois... Merci Francis de m'avoir permis de m'approprier le sujet de thèse progressivement ce qui a été une source de motivation déterminante pour la réalisation de ce travail. Finalement je tiens à remercier chaleureusement Jean-Christophe Marongiu. En effet, en plus d'être particulièrement intéressants et prolifiques, nos échanges notamment autour du tableau blanc étaient de vrais moments de plaisir.

Finalement je remercie mes amis Polo, Nico, Lola, Vince, Fab, Laurent, Aurel, Seb, Dody... et ma famille qui ont toujours été là dans les différents moments de la thèse.

Résumé

La turbine Pelton est une turbine hydraulique dont le fonctionnement se caractérise par l'interaction d'un jet d'eau avec les augets d'une roue. Cette étude a pour but de comprendre les phénomènes influençant le jet et son interaction avec les augets. Pour cela deux actions différentes ont été menées. Une première a visé à caractériser expérimentalement la fragmentation d'un jet de turbine Pelton. La seconde s'est attachée à développer une méthode numérique pouvant mener à la simulation précise de jets réels de turbines Pelton.

La partie expérimentale a permis de déterminer le mode de fragmentation de ces jets (atomisation turbulente), mais aussi l'influence de la rugosité des parois de l'injecteur sur les performances de la turbine. La participation de ce travail à un projet expérimental a permis de montrer l'influence de l'écoulement en sortie d'injecteur sur la fragmentation du jet. Les phénomènes physiques influençant principalement l'évolution du jet ont ainsi été déterminés.

La partie numérique a eu pour but de mettre en place une méthode permettant de simuler l'évolution d'un jet de turbine Pelton (fragmentation) et son interaction avec un auget. Étant donné les progrès de la méthode SPH-ALE pour la simulation d'impact de jets pour les turbines Pelton, il a été décidé d'adapter cette méthode pour les simulations visées. Ainsi une étude du choix de la vitesse des interfaces de problème de Riemann a permis de réaliser un modèle multi-phase stable pour les forts rapports de densité (eau-air). Cette méthode s'est avérée garantir les propriétés de continuité de vitesse normale et de pression à l'interface entre les fluides. L'ajout des phénomènes de tension de surface s'est fait par l'adaptation du modèle CSF (Continuum Surface Force) et le développement d'un second modèle nommé Laplace Law Pressure Correction (LLPC). L'intégration du saut de pression dans le solveur de Riemann a nécessité une étude précise du calcul de la courbure et a permis d'améliorer la simulation de loi de Laplace. La méthode numérique a été ensuite validée sur les cas académiques d'onde gravitaire, de rupture de barrage et d'oscillation de goutte. Les ressources en mémoire et le temps de calcul associé à cette méthode ont nécessité la parallélisation du code de calcul. Le caractère lagrangien de la méthode a très largement influencé la méthode de découpe de domaine pour permettre une bonne répartition de la charge de calcul entre les différents processeurs.

En conclusion les phénomènes physiques influençant la fragmentation de jets issus d'injecteurs de turbine Pelton sont désormais mieux connus et ils ont pu être introduits dans la méthode numérique. Les prochains développements porteront sur la simulation de jets dont la condition d'entrée s'attachera à être représentative des caractéristiques d'un écoulement en sortie d'un injecteur de turbine Pelton.

Mots-clés : Fragmentation, déformations de surface, atomisation turbulente, SPH, ALE, mul-

tiphase, tension de surface, MPI, parallélisation, décomposition de domaine.

Abstract

A Pelton turbine is characterized by a water jet which is impacting rotating buckets. The main goal of this study is to understand the phenomena which are impacting the jet and its interaction with the bucket. This study was considering two main works. One is considering experiments which allow determining the jet fragmentation. The second part considers development of a numerical code able to reproduce phenomena linked to Pelton jet fragmentation.

The experimental part succeeds to associate Pelton jet behavior with mode of jet fragmentation (turbulent dispersion) and shows the impact of hydraulic roughness on Pelton turbine performances. The access to experimental results from a project involving this PhD work, demonstrates the role of the inlet velocity/turbulence profile on the jet fragmentation.

The numerical part used the SPH-ALE (Smoothed Particle Hydrodynamics - Arbitrary Lagrange Euler) method to implement physical models linked with jet fragmentation. This choice was done because of its ability to predict pressure fields resulting of the interaction of a water jet and a rotating bucket. A multiphase model was developed based on a modification of the velocity of the interface of Riemann problem. This model does not diffuse the interface and recovers continuity of normal velocity and pressure at the interface between both fluids. Surface tension effect was implemented through an adaptation of the CSF (Continuum Surface Force) model and through a model called LLPC for Laplace Law Pressure Correction. A study of the computational methods to determine the interface curvature was performed for the integration of the pressure jump in the Riemann solver. Validation was done on academics test cases as gravity waves, dam break or droplet oscillations. The numerical code was parallelized to perform large numerical simulations.

To conclude, the numerical code integrates physical phenomena which were shown as important in the experiments. The developments will try to perform jet simulation with inlet condition which will be representative of flow conditions at the outlet of a Pelon turbine injector.

key-words : Turbulent atomization, surface deformations, SPH, ALE, multiphase, surface tension, MPI, domain decomposition.

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Remerciements | 3 |
| Résumé | 5 |
| Abstract | 7 |
| Introduction | 17 |
| I Savoir industriel et expérimentations | 21 |
| 1 Phénoménologie de déformation / fragmentation de jet - Cadre des turbines Pelton | 23 |
| 1.1 Ordres de grandeurs pour une turbine Pelton | 23 |
| 1.2 Bibliographie | 26 |
| 1.3 Cadre industriel | 30 |
| 1.4 Bilan | 34 |
| 2 Étude expérimentale | 35 |
| 2.1 Expérimentations à l'échelle modèle sur un stand Pelton horizontal | 35 |
| 2.2 Expérimentations à l'échelle modèle - Banc HSLU | 43 |
| 2.3 Bilan et choix des phénomènes à modéliser | 48 |
| II Modèles physiques et développements numériques pour la méthode SPH-ALE | 51 |
| 3 Mise en équations | 53 |
| 3.1 Système d'équations | 53 |
| 3.2 Équation d'état | 54 |
| 3.3 Conditions limites | 54 |
| 3.3.1 Dynamiques | 54 |
| 3.3.2 Cinématiques | 54 |
| 3.4 Tension superficielle | 55 |
| 4 Développements de la modélisation | 57 |
| 4.1 Choix d'une méthode numérique | 57 |
| 4.2 Description mathématique | 58 |

| | | |
|------------|--|------------|
| 4.2.1 | Description mathématique | 58 |
| 4.2.2 | Fonction d'interpolation | 60 |
| 4.2.3 | Approximation particulière | 62 |
| 4.2.4 | Précision de la méthode et convergence de la méthode | 62 |
| 4.2.5 | Bilan | 63 |
| 4.3 | Le formalisme SPH-ALE | 63 |
| 4.3.1 | Présentation de la méthode | 63 |
| 4.3.2 | Problème de Riemann | 76 |
| 4.3.3 | Intégration temporelle et choix de la vitesse du son | 82 |
| 4.3.4 | Conditions limites | 82 |
| 4.3.5 | Application au cas d'un tube à choc | 84 |
| 4.4 | Modèles multiphase et de tension de surface | 89 |
| 4.4.1 | Introduction des vitesses d'interface de problèmes de Riemann pour l'évolution des particules | 89 |
| 4.4.2 | Modèle Multiphase | 101 |
| 4.4.3 | Validations | 102 |
| 4.4.4 | Cas Test : Colonne hydrostatique | 102 |
| 4.4.5 | Cas Test : Onde de gravité | 103 |
| 4.4.6 | Utilisation de solveurs préconditionnés | 106 |
| 4.4.7 | Cas Test : Onde de gravité solveur préconditionné | 109 |
| 4.4.8 | Cas Test : Rupture de barrage | 110 |
| 4.4.9 | Conclusion | 112 |
| 4.4.10 | Modèles de tension de surface | 115 |
| III | Évolutions de la structure du code de calcul | 137 |
| 5 | Gestion des données et liste de voisins | 141 |
| 6 | Parallélisation des calculs | 145 |
| 6.1 | Méthode de parallélisation | 145 |
| 6.2 | Évaluation de la performance parallèle | 151 |
| 7 | Bilan | 155 |
| | Conclusions et perspectives | 157 |

Table des figures

| | | |
|------|--|----|
| 1 | Variation de la consommation et des types de production d'énergie électrique en France - journée du 1er oct 2010 | 17 |
| 2 | Brevet de l'invention de la turbine Pelton | 18 |
| 3 | Turbine Pelton | 19 |
| 1.1 | Gamme d'utilisation des turbines, Pelton (rouge), Francis (jaune) et Kaplan (bleu) . | 23 |
| 1.2 | Turbine Pelton à axe horizontal | 24 |
| 1.3 | Jets issus d'un injecteur de turbine Pelton pour une même turbine à une même ouverture | 26 |
| 1.4 | Fragmentation d'un jet cylindrique | 27 |
| 1.5 | Schéma d'un jet pour une atomisation turbulente | 29 |
| 1.6 | Image de jet dans un bâti de turbine Pelton - échelle modèle - ANDRITZ Hydro . . | 30 |
| 1.7 | Simulation de l'écoulement dans un injecteur de turbine Pelton - échelle modèle [33] | 31 |
| 1.8 | Évolution du coefficient de pression totale dans un injecteur précédé d'un coude [33] | 32 |
| 1.9 | Caractéristiques d'un jet à $Z = 2D_0$ [33] | 32 |
| 1.10 | Représentation de la surface du jet [33] | 33 |
| 1.11 | Vocabulaire lié aux caractéristiques de la surface d'un jet | 33 |
| 2.1 | Système de visualisation avec roue | 36 |
| 2.2 | Système de visualisation sans roue | 36 |
| 2.3 | Déformations instantanées et moyennes temporelles | 37 |
| 2.4 | Photo de l'interaction entre jet et auget à l'échelle modèle | 37 |
| 2.5 | Images du jet pour une chute de 67m | 39 |
| 2.6 | Images du jet pour une chute de 97m | 39 |
| 2.7 | Images du jet pour une chute de 127m | 39 |
| 2.8 | Influence de la chute sur le rendement | 40 |
| 2.9 | Échelle prototype - chute 688m - $Re \approx 4.10^6$ - $Z/D_0 = 1.8$ - image HSLU | 40 |
| 2.10 | Dégâts associés à des chocs de gouttes sur une turbine prototype | 40 |
| 2.11 | Modification de la rugosité | 41 |
| 2.12 | Influence des modifications de rugosité sur le rendement | 41 |
| 2.13 | Modification de la rugosité | 42 |
| 2.14 | Loi de débit de l'injecteur en fonction de la rugosité des parois | 42 |
| 2.15 | Traitement d'image développé par HSLU | 43 |
| 2.16 | Évolution du diamètre du jet en fonction de la chute | 44 |
| 2.17 | Influence de la chute sur les perturbations de l'interface | 44 |
| 2.18 | Influence de la rugosité sur le diamètre du jet | 45 |
| 2.19 | Influence de la rugosité sur les perturbations de l'interface | 45 |

| | | |
|------|---|----|
| 2.20 | Ajout d'une grille en amont de l'injecteur | 46 |
| 2.21 | Ajout d'un barreau en amont de l'injecteur | 46 |
| 2.22 | Influence des grilles sur le diamètre du jet | 47 |
| 2.23 | Influence des barreaux sur le diamètre du jet | 48 |
| 2.24 | Influence des grilles et barreaux sur la déformation de l'interface | 48 |
| 2.25 | Influence des grilles et barreaux sur les perturbations de l'interface | 49 |
| 3.1 | Découpe de l'espace physique | 55 |
| 4.1 | Représentation schématique d'une fonction kernel et des volumes de discrétisation | 60 |
| 4.2 | Fonctions kernels | 61 |
| 4.3 | Dérivée première (gauche) et seconde (droite) des fonctions kernels | 62 |
| 4.4 | Schéma de frontière entre deux volumes discrets - formulation Volumes-Finis | 73 |
| 4.5 | Schéma de la reconstruction MUSCL | 75 |
| 4.6 | Représentation des droites caractéristiques $(x^{(1)}, t)$ | 78 |
| 4.7 | Représentation des différents états du fluide dans le plan $(x^{(1)}, t)$ | 78 |
| 4.8 | Schéma de surface libre | 83 |
| 4.9 | Évolution de la pression cas du tube à choc - discrétisation 1000 | 84 |
| 4.10 | Évolution de la vitesse cas du tube à choc - discrétisation 1000 | 85 |
| 4.11 | Étude de la convergence spatiale - Pression | 85 |
| 4.12 | Étude de la convergence spatiale - Vitesse | 86 |
| 4.13 | Influence de la renormalisation - Champs de pression et vitesse | 87 |
| 4.14 | Évolution de pression et vitesse - solveur 2D | 87 |
| 4.15 | Évolution de pression - zone de discontinuité initiale - solveur 2D | 87 |
| 4.16 | Évolution de vitesse - zone de discontinuité initiale - solveur 2D | 88 |
| 4.17 | Influence de la reconstruction MUSCL - Champs de pression et vitesse | 88 |
| 4.18 | Influence de la reconstruction MUSCL et de la renormalisation - Champs de pression et vitesse | 88 |
| 4.19 | Evolution des poids des particules | 89 |
| 4.20 | Résultats pour un équilibrage des poids des particules | 91 |
| 4.21 | Position $X_{\delta w_{ij}}$ en 1D | 92 |
| 4.22 | Évolution des poids en 1D | 93 |
| 4.23 | Erreur position des particules | 94 |
| 4.24 | Evolution des poids. Cas d'une chute de colonne d'eau sur une colonne en équilibre hydrostatique | 94 |
| 4.25 | Erreur position des particules - Tube à choc - Temps = $10^{-5}s$ | 95 |
| 4.26 | Évolution de la pression cas du tube à choc - Influence de la renormalisation et de la correction des positions | 96 |
| 4.27 | Évolution de la vitesse cas du tube à choc - Influence de la renormalisation et de la correction des positions | 96 |
| 4.28 | Évolutions de la vitesse et de la pression - Influence de la renormalisation et de la correction des positions avec la reconstruction MUSCL | 96 |
| 4.29 | Évolutions de la vitesse et de la pression - Influence du choix de la vitesse ALE de déplacement v_0^n ou v_0^{n+1} | 97 |
| 4.30 | Position $X_{\delta w_{ij}}$ en 2D ou 3D - hypothèse sphérique | 97 |
| 4.31 | Position $X_{\delta w_{ij}}$ en 2D ou 3D - hypothèse géométrique | 98 |

| | | |
|------|--|-----|
| 4.32 | Évolution de la pression cas du tube à choc - cas 2D - Initiale à gauche et finale à droite | 99 |
| 4.33 | Évolution de la pression cas du tube à choc - cas 2D | 99 |
| 4.34 | Évolution de la pression cas du tube à choc - cas 2D | 99 |
| 4.35 | Évolution de la vitesse cas du tube à choc - cas 2D | 100 |
| 4.36 | Évolution de la pression cas du tube à choc - résolution 3D - Initiale à gauche et finale à droite | 100 |
| 4.37 | Évolution de la pression et de la vitesse dans la zone de discontinuité initiale - cas du tube à choc - résolution 3D - Temps = $10^{-5}s$ | 100 |
| 4.38 | Densité des fluides pour une colonne hydrostatique - $t=2s$ | 103 |
| 4.39 | Évolution de la pression pour une colonne hydrostatique - $t=2s$ | 104 |
| 4.40 | Schéma - Ondes gravitaires | 104 |
| 4.41 | Champ de pression à $t=0.18s$ | 105 |
| 4.42 | Norme et vecteurs vitesse à $t=0.18s$ | 106 |
| 4.43 | Évolution de l'énergie cinétique pour différentes fonctions kernel | 106 |
| 4.44 | Évolution de l'énergie cinétique pour le kernel C4 | 107 |
| 4.45 | Évolution de l'énergie cinétique pour différentes fonctions kernel | 107 |
| 4.46 | Influence du préconditionnement | 109 |
| 4.47 | Etude convergence spatiale | 110 |
| 4.48 | Schéma - Rupture de barrage | 111 |
| 4.49 | Position des fluides (gauche), champs de pression (milieu) et de vitesse (droite) à $t = 0.61s$ | 113 |
| 4.50 | Position des fluides (gauche), champs de pression (gauche) et de vitesse (droite) à $t = 0.72s$ | 113 |
| 4.51 | Position des fluides (gauche), champs de pression (gauche) et de vitesse (droite) à $t = 1.48s$ | 113 |
| 4.52 | Position des fluides (gauche), champs de pression (gauche) et de vitesse (droite) à $t = 2.07s$ | 114 |
| 4.53 | Position des fluides (gauche), champs de pression (gauche) et de vitesse (droite) à $t = 2.33s$ | 114 |
| 4.54 | Position des fluides (gauche), champs de pression (gauche) et de vitesse (droite) à $t = 8.83s$ | 114 |
| 4.55 | Evolution des vecteurs vitesses pour les différents pas de temps étudiés | 115 |
| 4.56 | Évolution de la position du front (gauche) et de la hauteur d'eau à $x^*=1$ | 115 |
| 4.57 | Position des fluides(gauche), champs de pression (milieu) et de vitesse (droite) à $t = 0.61s$ - solveur non préconditionné | 116 |
| 4.58 | Schéma du modèle SDSCSF | 118 |
| 4.59 | Couleur et gradient de couleur pour le cas d'une goutte sphérique | 120 |
| 4.60 | Courbure pour le cas d'une goutte sphérique | 120 |
| 4.61 | Schéma du cas du tube (gauche), gradient de couleur (centre) et courbure (droite) . | 122 |
| 4.62 | Schéma du cas de la goutte 3D | 123 |
| 4.63 | Cas de la goutte 3D : discrétisation du volume (gauche), gradient de couleur (centre) et courbure (droite) | 123 |
| 4.64 | Shéma modèle LLPC | 124 |
| 4.65 | Gradients de couleur en monophasé | 125 |
| 4.66 | Vecteurs vitesse pour le modèle CSF et un rapport de densité de 1000 - $t = 3.410^{-3}s$ | 126 |

| | | |
|------|--|-----|
| 4.67 | Champ de pression pour le cas d'une goutte sphérique - modèle DSCSF - sans saut de pression (gauche) et avec saut de pression (droite) | 126 |
| 4.68 | Champ de pression pour le cas d'une goutte sphérique - modèle SDSCSF - sans saut de pression (gauche) et avec saut de pression (droite) | 126 |
| 4.69 | Champ de pression pour le cas d'une goutte sphérique - modèle LLPC - modèle de courbure volumique (gauche) et analytique (droite) | 127 |
| 4.70 | Champ de pression caractéristique à l'intérieur d'une goutte pour le modèle DSCSF à gauche, SDSCSF au centre et LLPC à droite | 129 |
| 4.71 | Position des fluides (gauche), champ de pression (centre) et champs de vitesse (droite) pour une goutte oscillante 2D au temps $t=0.41s$ | 132 |
| 4.72 | Évolution de l'énergie cinétique pour une discrétisation 10 | 132 |
| 4.73 | Évolution de l'énergie cinétique pour une discrétisation 20 | 133 |
| 4.74 | Évolution de l'énergie cinétique pour une discrétisation 40 | 133 |
| 4.75 | Influence de la discrétisation et du préconditionnement - modèle DSCSF (gauche) et SDSCSF (droite) | 134 |
| 4.76 | Influence de la discrétisation et du préconditionnement - modèle LLPC volumique (gauche) et analytique (droite) | 134 |
| 4.77 | Champ de vitesse pour un calcul préconditionné avec le modèle DSCSF - Instabilité apparue après 1.5 oscillation | 134 |
| 4.78 | Influence du terme de correction de déplacement des particules pour le modèle LLPC analytique | 135 |
| 5.1 | Voisinage avec liste de voisins | 142 |
| 5.2 | Voisinage sans liste de voisins | 142 |
| 6.1 | Domaine physique | 146 |
| 6.2 | Répartition initiale | 146 |
| 6.3 | Découpe du domaine | 146 |
| 6.4 | Répartition des particules | 146 |
| 6.5 | Création des grilles | 146 |
| 6.6 | Vue de l'espace depuis le processeur "droit" | 146 |
| 6.7 | Matrice d'échange entre processeurs | 147 |
| 6.8 | Répartition totale | 148 |
| 6.9 | Découpe déduite | 148 |
| 6.10 | Répartition sous-domaine droit | 148 |
| 6.11 | Découpe déduite | 148 |
| 6.12 | Répartition sous-domaine gauche | 148 |
| 6.13 | Découpe déduite | 148 |
| 6.14 | évolution au cours du temps de la découpe de l'espace physique. Cas de la rupture de barrage 2D. | 149 |
| 6.15 | évolution de la charge relative de chaque processeur | 151 |
| 6.16 | Différence entre grandeurs calculées pour des calculs séries et parallèles | 152 |
| 6.17 | Efficacité et accélération de calculs | 152 |
| 6.18 | Courbe d'accélération comparée à l'accélération idéale pour des cas 2D et 3D | 153 |
| 6.19 | Évolution du nombre de sous-domaines (processeurs) de 1 à 4 en fonction du nombre de particules | 154 |

Liste des tableaux

| | | |
|------|--|-----|
| 1.1 | Grandeurs caractéristiques d'une turbine Pelton | 24 |
| 1.2 | Grandeurs caractéristiques adimensionnées d'une turbine Pelton | 25 |
| 1.3 | Critère pour la fragmentation d'un jet liquide circulaire [18] | 28 |
| 2.1 | Paramètres des grilles | 46 |
| 2.2 | Paramètres des barreaux | 47 |
| 4.1 | Configuration colonne hydrostatique | 103 |
| 4.2 | Configuration onde de gravité | 105 |
| 4.3 | Configuration du cas test : onde de gravité | 107 |
| 4.4 | Résultat pour solveur renormalisé | 108 |
| 4.5 | Résultat pour solveur renormalisé et préconditionné | 109 |
| 4.6 | Résultat pour solveur renormalisé et préconditionné | 110 |
| 4.7 | Calcul de la courbure pour une goutte 2D - Méthode volumique - Sans correction . | 121 |
| 4.8 | Calcul de la courbure pour une goutte 2D - Méthode volumique - Avec correction de Shepard | 121 |
| 4.9 | Calcul de la courbure pour une goutte 2D - Méthode volumique - Avec renormali- sation et correction de shepard | 122 |
| 4.10 | Calcul de la courbure pour une goutte 2D - Méthode analytique | 122 |
| 4.11 | Évaluation de la pression dans la goutte - modèle DSCSF - Rapport de densité 1000 | 127 |
| 4.12 | Évaluation de la pression dans la goutte - modèle SDSCSF - Rapport de densité 1000 | 127 |
| 4.13 | Évaluation de la pression dans la goutte - modèle LLPC volumique - Rapport de densité 1000 | 128 |
| 4.14 | Évaluation de la pression dans la goutte - modèle LLPC analytique - Rapport de densité 1000 | 128 |
| 4.15 | Évaluation de la pression dans la goutte - Influence de la discontinuité de pression dans le solveur de Riemann - Rapport de densité 1000 | 128 |
| 4.16 | Norme de courants parasites - modèle DSCSF - Rapport de densité 1000 | 129 |
| 4.17 | Norme de courants parasites - modèle SDSCSF - Rapport de densité 1000 | 129 |
| 4.18 | Norme de courants parasites - modèle LLPC - Calcul volumique de la courbure - Rapport de densité 1000 | 130 |
| 4.19 | Norme de courants parasites - modèle LLPC - Calcul analytique de la courbure - Rapport de densité 1000 | 130 |
| 4.20 | Norme de courants parasites - Influence du saut de pression - Rapport de densité 1000 - discrétisation 20 | 130 |
| 4.21 | Norme de courants parasites - Influence du rapport de densité - discrétisation 20 . . | 130 |
| 4.22 | Norme de courants parasites - Influence du rapport de densité - discrétisation 20 . . | 131 |

4.23 Erreur relative des fréquences d'oscillations 133

Introduction

Le mode de fonctionnement de nos sociétés impose de disposer d'une puissance électrique au moins égale à l'ensemble des besoins à chaque instant. En effet différents exemples, plus ou moins lointains nous ont montré les difficultés et les traumatismes engendrés par le défaut d'alimentation en électricité de régions entières (coupure de ligne haute tension en France à la suites des tempêtes de décembre 1999, blackout en Amérique du Nord en 2003...). Dans ce cadre, la production d'énergie électrique est tout à fait particulière car aucune technologie actuelle ne permet son stockage à grande échelle. Ainsi la puissance électrique mise sur le réseau doit équilibrer à chaque instant celle qui est consommée. L'augmentation et la variation temporelle des besoins en électricité font que les modes de production d'énergie doivent être diversifiés. Sur la figure 1 nous voyons la variation de consommation d'électricité et les différents modes de production pour la journée du 1er octobre 2010 en France [67] (les chiffres représentent la puissance fournie par chaque mode de production à 06h45).

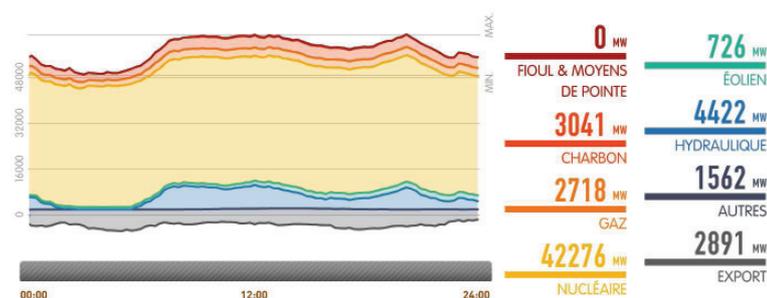


FIGURE 1 – Variation de la consommation et des types de production d'énergie électrique en France - journée du 1er oct 2010

Sur ce graphique, nous voyons que, tout au long de la journée, la majeure partie de la puissance électrique est fournie par l'industrie nucléaire. Tout comme pour les modes de production utilisant l'énergie fossile, les techniques de production de la filière nucléaire ne permettent pas de réguler rapidement la puissance électrique délivrée sur le réseau. Nous observons en effet que la puissance fournie par ces filières reste constante au cours de la journée et ce quelle que soit la demande sur le réseau. Au contraire nous observons que l'énergie hydraulique absorbe la quasi totalité des variations journalières de besoin en énergie. Ainsi la production d'énergie électrique issue du secteur hydraulique joue un rôle essentiel dans la régulation de la production journalière d'électricité. Pour produire l'énergie hydraulique, différentes ressources naturelles sont utilisées :

- les océans, pour lesquels les courants marins, comme les marées, sont utilisés (les modes de production utilisant les vagues sont encore au stade du développement)
- les rivières avec des centrales "au fil de l'eau"

– les bassins d’accumulation

La turbine Pelton est utilisée en grande majorité pour l’exploitation de bassin d’accumulation. Elle doit son nom à Lester Allan Pelton qui l’inventa en 1879 en Californie et dont une partie du brevet est représentée figure 2.

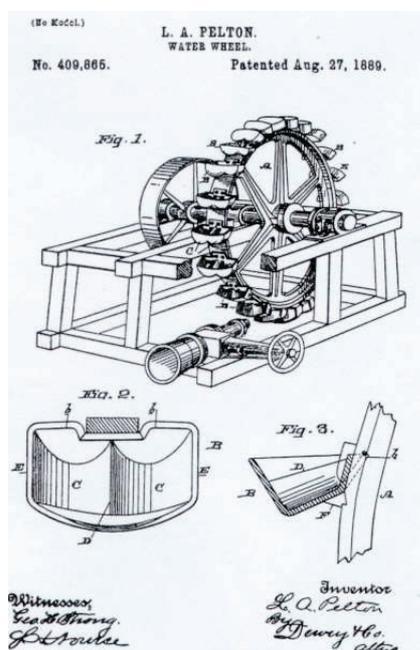


FIGURE 2 – Brevet de l’invention de la turbine Pelton

Son principe repose sur différentes conversions successives d’énergie : une première transforme l’énergie potentielle de gravité de l’eau essentiellement en pression. Cette transformation s’effectue à l’aide d’une conduite acheminant l’eau le long d’une dénivellation menant du bassin d’accumulation aux injecteurs (en passant par le distributeur), figures 3 (a) et (b). La seconde conversion se déroule au travers de l’injecteur à l’issue duquel un jet d’eau est formé, figure 3 (c). Dans le jet l’énergie est principalement sous forme d’énergie cinétique. La dernière conversion transforme l’énergie cinétique de l’eau en énergie mécanique de rotation d’un arbre de turbine à l’aide d’une roue constituée d’augets, figure 3 (d).

Les besoins en électricité et les puissances mises en jeu (jusqu’à 423MW pour la turbine Pelton la plus puissante) font que chaque gain de rendement associé à chacune de ces conversions est d’une réelle importance pour les organismes qui régulent l’électricité sur les réseaux, et donc par relation directe pour le producteur d’électricité. Dans ce cadre, au cours des quinze dernières années, l’apport de la simulation numérique d’écoulements en conduite a permis de compléter les données expérimentales pour la conception des répartiteurs [30]. Depuis environ 4 ans les progrès en méthodes numériques font que les simulations de l’écoulement dans l’injecteur et dans le jet sont réalisables dans un cadre industriel [57] [56] [21]. Ces simulations numériques ont permis de retrouver et de comprendre certaines caractéristiques des jets. Il s’agit de déviations ou déformations larges du jet (ces termes seront définis dans la première partie de ce document). Cependant les petites déformations et la dispersion ne sont pas accessibles par les méthodes numériques utilisées actuellement dans le cadre industriel [56].

Ce travail de thèse regroupe ainsi deux axes de recherche. Le premier concerne la compréhension

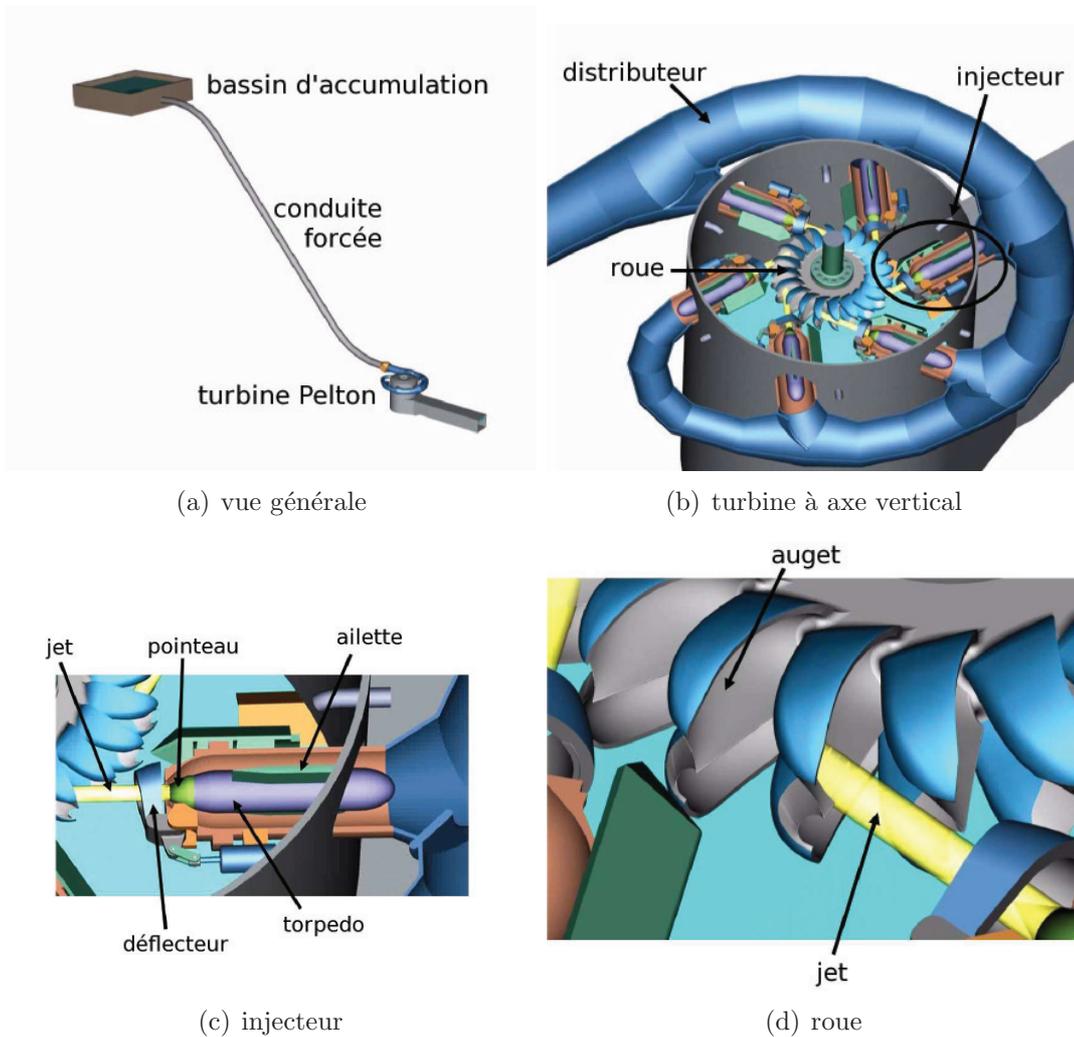


FIGURE 3 – Turbine Pelton

des phénomènes géométriques gérant les petites déformations à l'interface liquide/air et la dispersion des jets de turbine Pelton. Cette partie s'appuie sur des comparaisons aux connaissances scientifiques sur cette thématique mais aussi sur des résultats expérimentaux qui ont été obtenus dans le cadre de ce travail ou dont le protocole a été établi lors d'un programme de recherche incluant ce doctorat. Les résultats de cette étude permettront le développement du second axe de recherche qui considère la sélection et l'implémentation des modèles physiques pour obtenir une méthode numérique permettant de reproduire les phénomènes liés à la dispersion de jets de turbine Pelton.

Première partie

Savoir industriel et expérimentations

Chapitre 1

Phénoménologie de déformation / fragmentation de jet - Cadre des turbines Pelton

1.1 Ordres de grandeurs pour une turbine Pelton

La turbine Pelton se caractérise par rapport aux autres turbines par l'exploitation de débits relativement faibles et de grandes chutes, figure 1.1. En effet pour l'exploitation industrielle les valeurs de chutes des turbines Pelton varient entre 100 et 2000 mètres alors que les débits varient de 0.5 à $50\text{m}^3.\text{s}^{-1}$. Les puissances associées à ces turbines vont de moins de 1MW à plus de 400MW. Une centrale électrique est généralement composée de plusieurs turbines. Ainsi la centrale de Bieudron, la plus puissante au monde, est composée de trois turbines d'environ 420MW chacune, ce qui représente ainsi une puissance totale de 1.26 GW.

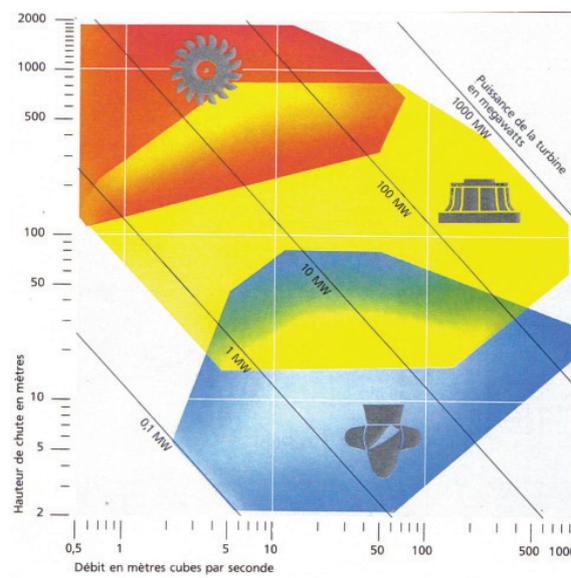


FIGURE 1.1 – Gamme d'utilisation des turbines, Pelton (rouge), Francis (jaune) et Kaplan (bleu)

Pour l'étude des phénomènes hydrauliques liés à l'exploitation de ces turbines on distingue

deux échelles. Une première est liée aux machines de production, c'est-à-dire qui délivrent de l'électricité sur le réseau général. C'est l'échelle prototype, figure 1.2 (a). La seconde est liée aux expérimentations qui se déroulent en laboratoire, il s'agit alors de l'échelle modèle, figure 1.2 (b).

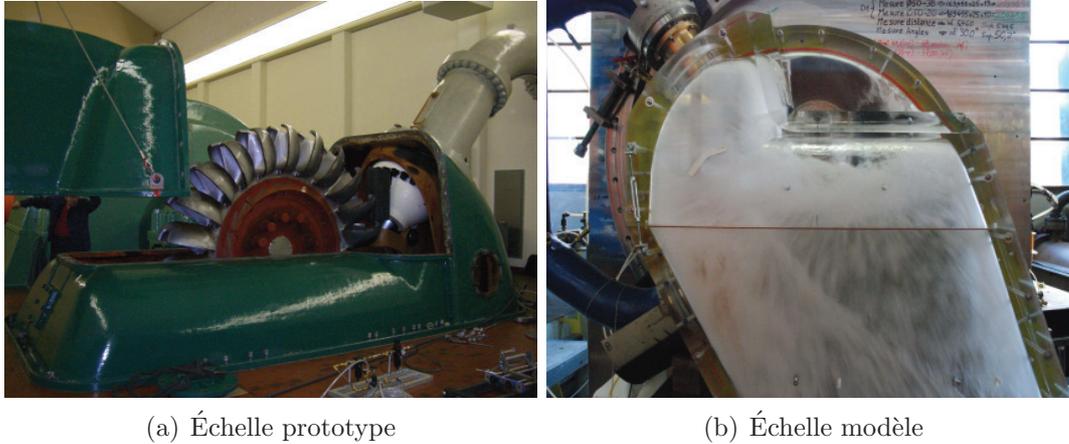


FIGURE 1.2 – Turbine Pelton à axe horizontal

Pour ces deux échelles on dispose de certaines grandeurs caractéristiques conditionnant le fonctionnement de la turbine, tableau 1.1.

Tableau 1.1 – Grandeurs caractéristiques d'une turbine Pelton

| échelle | débit [$m^3 \cdot s^{-1}$] | chute [m] | vitesse du fluide [$m \cdot s^{-1}$] | | diamètre [mm] | |
|-----------|------------------------------|------------|--|----------|---------------|----------|
| | | | conduite | jet | conduite | jet |
| modèle | 0.05 - 0.2 | 80 - 160 | 1 - 6 | 40 - 60 | 200 | 15 - 30 |
| prototype | 0.1 - 20 | 100 - 2000 | 3 - 60 | 40 - 200 | 200 - 10^3 | 30 - 200 |

De ces grandeurs on obtient différents nombres adimensionnés donnant le rapport des forces inertielles sur les forces visqueuses (nombre de Reynolds - Re) ou des forces inertielles sur les forces de tension superficielle (nombre de Weber - We) ou encore des forces visqueuses sur les forces de tensions superficielles (nombre de Ohnesorge - $Oh = \sqrt{We}/Re$). Ces différents nombres font intervenir des grandeurs caractéristiques de vitesse v , longueur d , viscosité μ ou encore de coefficient de tension de surface σ . Étant liés aux caractéristiques physiques des fluides, ils peuvent être définis pour la phase gazeuse G ou la phase liquide L . Dans notre cas il s'agit de l'air et de l'eau dont les grandeurs physiques de références sont pour l'air $\rho_G = 1 kg \cdot m^{-3}$ et $\mu_G = 2 \cdot 10^{-5} kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$ et pour l'eau $\rho_L = 1000 kg \cdot m^{-3}$ et $\mu_L = 1 \cdot 10^{-3} kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$. Au final on obtient les nombres adimensionnés suivants :

$$Re_L = \frac{\rho_L v_L d}{\mu_L} \quad We_L = \frac{\rho_L v_L^2 d}{\sigma} \quad We_G = \frac{\rho_G v_G^2 d}{\sigma} \quad Oh = \frac{\mu_L}{\sqrt{\rho_L d \sigma}} \quad (1.1)$$

La pertinence de ces nombres sera discutée dans la section 1.2. Le choix des distances et vitesses caractéristiques dépend de la partie de l'écoulement qui sera étudiée. La thématique de recherche concernant l'injecteur et le jet, il est possible de définir le nombre de Reynolds en deux régions différentes. La première est la conduite avant l'injecteur, pour laquelle la vitesse caractéristique est la moyenne de la vitesse débitante et la dimension caractéristique est le diamètre de la conduite. La seconde partie à étudier est le jet. Dans ce cas la dimension et la vitesse caractéristiques seront le diamètre du jet et sa vitesse respectivement, et ce pour les nombres de Reynolds, de Weber et d'Ohnesorge. Les nombres de Weber et d'Ohnesorge faisant intervenir le coefficient de tension de surface, ils ne sont définis que pour le jet où les deux phases sont présentes.

Tableau 1.2 – Grandeurs caractéristiques adimensionnées d'une turbine Pelton

| échelle | Re_L [-] | | We_L [-] | We_G [-] | Oh [-] |
|-----------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------------|
| | conduite | jet | | | |
| modèle | $3.10^5 - 1.10^6$ | $6.10^5 - 2.10^6$ | $3.10^5 - 2.10^6$ | $3.10^2 - 2.10^3$ | $7.10^{-4} - 1.10^{-3}$ |
| prototype | $4.10^5 - 6.10^7$ | $10^6 - 3.10^7$ | $8.10^5 - 5.10^7$ | $8.10^2 - 5.10^4$ | $3.10^{-4} - 7.10^{-4}$ |

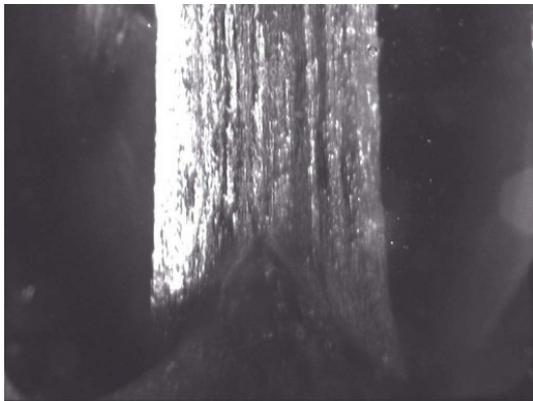
Le tableau 1.2 donne les ordres de grandeur de ces nombres adimensionnés pour les deux échelles. Nous pouvons ainsi observer que le nombre de Reynolds est toujours supérieur à 3.10^5 , ce qui montre la prépondérance des phénomènes inertiels devant les phénomènes visqueux. L'ordre de grandeur du nombre de Weber montre de même l'importance de ces phénomènes inertiels devant les phénomènes de tension de surface. Finalement le faible nombre d'Ohnesorge met en avant le faible rôle dynamique de la viscosité devant notamment les effets de tension superficielle. D'autre part nous pouvons remarquer que les nombres adimensionnels choisis ne sont pas du même ordre de grandeur pour les deux échelles et ce notamment pour les fortes chutes, c'est-à-dire pour les grandes vitesses de jets. En effet, pour les fortes chutes, le nombre de Reynolds est d'un ordre de grandeur supérieur dans le cas du prototype et ce pour la conduite ou le jet. Il en est de même pour le nombre de Weber pour l'air et l'eau. Pour ce qui est du nombre d'Ohnesorge il est plus petit à l'échelle prototype. Ceci s'explique car dans la pratique la similitude entre échelle prototype et échelle modèle s'appuie sur une similitude de Froude. Le nombre de Froude est un nombre adimensionnel qui caractérise l'influence relative des forces gravitaires par rapport aux forces inertielles.

$$Fr_L = \frac{v_L}{\sqrt{gd}} \quad (1.2)$$

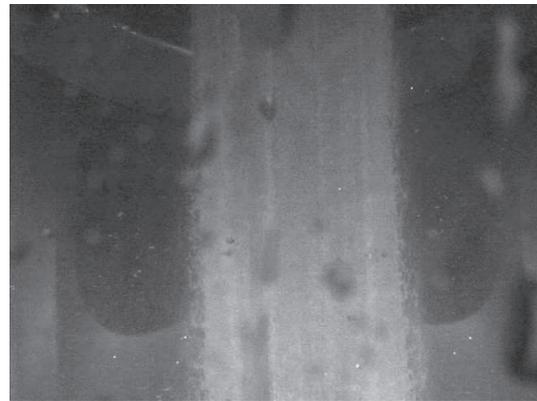
Le choix de cette similitude s'appuie sur la norme internationale IEC [10], encadrant les essais dits de "réception". Ces essais donnent des évaluations de rendement pour l'échelle prototype basées sur les mesures réalisées à l'échelle modèle. Pour corriger le rendement entre échelle modèle et prototype, des variations de rendement sont appliquées en fonction des nombres de Reynolds, Weber et Froude. Or le nombre de Froude est le seul pour lequel cette norme atteste une diminution du rendement au passage de modèle à prototype. Il est donc recommandé de s'appuyer sur ce nombre adimensionnel pour effectuer les mesures de rendement et ainsi faire attention à ne pas les surestimer. (Il est important de noter que la distance caractéristique associée aux nombres adimensionnels dans ce cas est la largeur de l'auget, c'est donc l'écoulement dans l'auget qui est pris comme référence de la similitude). Ainsi ces considérations font qu'entre échelle modèle et

échelle prototype l'ensemble des rapports de phénomènes inertiels, de gravité ou de viscosité ne sont pas identiques (et c'est le rapport associé au nombre de Froude qui est conservé).

Le nombre important d'implémentations de turbines Pelton (107 usines comprenant généralement plusieurs turbines en Suisse, pour une puissance de 7500 MW) depuis son invention et son adaptabilité à différentes conditions d'exploitation ont permis d'avoir de nombreuses expériences industrielles sur cette turbine. De plus différents travaux de recherche ont été effectués en parallèle à l'échelle modèle dans les laboratoires, [54], [81], [60]. Ainsi une base de données importante existe et ce notamment sur les caractéristiques des jets à l'échelle prototype ou modèle. Nous pouvons notamment voir, sur les figures 1.3 (a) et (b), différentes caractéristiques de jets pour une même turbine selon qu'on se trouve à l'échelle modèle ou prototype. L'axe Z est l'axe du jet, dont l'origine est au niveau de l'embouchure de l'injecteur. Les termes associés aux déformations visibles sur ces deux images seront définis dans la partie 1.3.



(a) Échelle modèle - chute 97m - $Re \approx 3.10^5$ - $Z/D_0 = 2.9$



(b) Échelle prototype - chute 688m - $Re \approx 4.10^6$ - $Z/D_0 = 1.8$

FIGURE 1.3 – Jets issus d'un injecteur de turbine Pelton pour une même turbine à une même ouverture

A ce niveau une comparaison aux études expérimentales liées au phénomène de fragmentation peut aider à discerner les différents phénomènes à l'origine de la fragmentation des jets de turbine Pelton à l'échelle modèle ou prototype.

1.2 Bibliographie

L'analyse des jets liquides dans un environnement gazeux a fait l'objet de nombreuses études ces cinquante dernières années que ce soit du point de vue théorique, expérimental ou applicatif [54], [18], [45]. En effet d'une part les phénomènes mis en jeu relèvent de phénomènes physiques complexes (fortes variations de densité, présence de tension de surface, de changement de phase, réactions chimiques...) et d'autre part les secteurs industriels intéressés sont particulièrement nombreux (système d'injection de tous types ([16], [37]), découpe haute pression [80], fabrication de tissus non tissés par jet d'eau, turbines hydrauliques...). Ainsi ces études portent sur une gamme large de phénomènes, avec des variations dimensionnelles très importantes.

Les études liées à la thématique de fragmentation de jets font apparaître quatre modes différents, [18] [44].

- Le premier est nommé régime de Rayleigh et correspond au mode où seules les forces capillaires sont responsables de l'instabilité du jet, figure 1.4 (a). Les forces capillaires sont à l'origine d'ondes de surface qui s'amplifient le long du jet et qui lorsqu'elles sont suffisamment importantes provoquent la rupture du jet. Les gouttes formées sont alors de dimension plus importante que le diamètre de l'injecteur.
- Le deuxième mode est celui de première action aérodynamique pour lequel les forces aérodynamiques commencent à impacter la fragmentation, figure 1.4 (b). Pour ce mode c'est la différence de vitesse entre les deux fluides qui est à l'origine des ondes de surface. La tension superficielle limite alors l'évolution de ces ondes. Les gouttes formées sont de la taille du diamètre de l'injecteur. Ces deux premiers modes se caractérisent par une symétrie des déformations autour de l'axe du jet.
- Le troisième mode est celui de seconde action aérodynamique, figure 1.4 (c). Les déformations du jet ne sont plus alors symétriques et il apparaît en périphérie des instabilités de petite longueur d'onde menant à la formation de ligaments. Dans un deuxième temps ces ligaments forment des gouttes de diamètre inférieur au diamètre du jet initial.
- Le dernier mode est le mode d'atomisation pour lequel il apparaît dès l'embouchure des filaments et des gouttes détachés du jet, figure 1.4 (d).

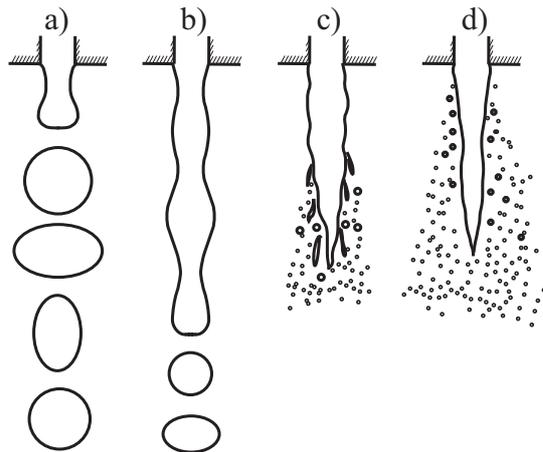


FIGURE 1.4 – Fragmentation d'un jet cylindrique

Différentes études expérimentales ont été menées pour essayer de déterminer les grandeurs délimitant ces 4 zones. Dumouchel [18] donne ainsi le tableau suivant à partir de recoupements de travaux expérimentaux, tableau 1.3.

D'après le tableau 1.3, les nombres adimensionnels présentés pour l'application d'un jet de turbine Pelton placent ces jets dans le mode d'atomisation. Le nombre important d'études sur ce type de fragmentation a permis de mettre en avant un nombre important de phénomènes influant sur ce type de fragmentation du jet. La cavitation [17] influence grandement ces phénomènes par son caractère instationnaire. Ce phénomène étant observé sur des injecteurs de turbines Pelton uniquement pour des cas particuliers, il ne sera pas traité dans le reste de cette étude. Faeth a mené une série d'études sur l'atomisation primaire des jets correspondant à des nombres de Reynolds ($5.10^3 < Re_L < 8.10^5$), et de Weber ($12 < We_G < 3790$) très variés [78], [19], [5] et [79]. Le

Tableau 1.3 – Critère pour la fragmentation d'un jet liquide circulaire [18]

| mode | critère |
|-------------------------------|---|
| Rayleigh | $We_G < 0.4$ ou $We_G < 1.2 + 3.41Oh^{0.9}$ |
| première action aérodynamique | $1.2 + 3.41Oh^{0.9} < We_G < 13$ |
| seconde action aérodynamique | $13 < We_G < 40.3$ |
| atomisation | $40.3 < We_G$ |

dispositif instrumental leur permettait de disposer en entrée d'injecteur d'un écoulement uniforme pour lequel il leur était possible d'enlever les couches limites formées dans l'injecteur. Ils pouvaient ainsi obtenir des jets laminaires sans atomisation primaire lorsque la couche limite était retirée avant la formation du jet. Pour un même nombre de Reynolds que le cas précédent et s'ils laissaient la couche limite, une atomisation primaire apparaissait pour laquelle des ligaments se développaient à la surface du jet à une distance proche de l'injecteur. Pour des rapports de densité supérieurs à 500 ils n'observaient pas d'influence des forces aérodynamiques. Dans le cas où la turbulence était pleinement développée dans l'injecteur ($L/d > 40$) ils ont montré que l'atomisation primaire était contrôlée par le nombre de Weber de la phase liquide avec 3 zones distinctes. Pour $We_L < 5200$ il n'apparaît pas d'atomisation primaire, pour $5200 < We_L < 17000$, l'atomisation primaire débute à une certaine distance de l'injecteur puis s'arrête, et finalement pour $We_L > 17000$ l'atomisation ne s'arrête pas le long du jet [79]. Lors de ces études les auteurs expliquent les phénomènes observés par l'influence de la turbulence présente dans la section de sortie de l'injecteur. Les filaments et gouttes sont issus des plus petits tourbillons turbulents qui possèdent l'énergie suffisante pour déformer l'interface. Ainsi l'atomisation débute le long du jet à la distance de l'injecteur nécessaire pour que le tourbillon puisse venir déformer l'interface [78]. Les auteurs parlent alors d'atomisation turbulente. Pour ce mode de fragmentation, Mayer et Branam [42] montrent que l'augmentation de la vitesse du jet, c'est à dire du nombre de Reynolds a tendance à diminuer la taille des structures à la périphérie du jet. Les auteurs font une analyse comparable à celle de Wu et Faeth [78] puisque selon eux cela est dû au fait qu'en augmentant le nombre de Reynolds les petites structures turbulentes ont plus d'énergie et peuvent ainsi déformer la surface du jet. Dans le cas où la vitesse radiale liée à ces structures est suffisamment importante cela résulte en la création de gouttes. Ils montrent aussi que leur protocole expérimental avec de faibles Reynolds ($Re \approx 3000$) donne une zone près de l'injecteur pour laquelle la surface du jet ne présente pas de déformation. Ainsi ces résultats approchent aussi le modèle d'atomisation turbulente de Wu et Faeth [78]. Mayer et Branam [42] donnent la même limite de nombre de Reynolds ($Re > 10^4$) pour observer l'atomisation turbulente que Wu *et al* [5]. Ces deux travaux ainsi que ceux de McCarty et Molloy [43] ont mis en avant l'impact du rapport L/d pour l'apparition de l'atomisation turbulente. Le critère minimum semble être $L/d > 10$ aux gammes de nombre de Reynolds (10^4 10^5) auxquelles ces études ont été faites.

La figure 1.5 représente le schéma d'une atomisation turbulente avec une première phase où l'interface est perturbée mais continue. La seconde est caractérisée par la cohabitation d'un cœur de jet et d'une interface dispersée. La dernière partie est le jet complètement dispersé pour lequel il n'y a plus de cœur de jet. Il a été montré expérimentalement que la première zone a tendance à rétrécir avec l'augmentation de la vitesse du jet. Wu et Faeth [79] s'appuyant sur une collecte de

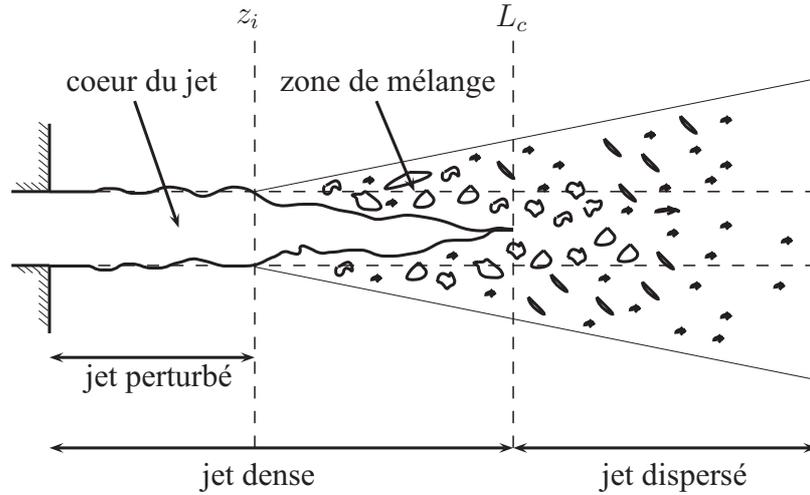


FIGURE 1.5 – Schéma d'un jet pour une atomisation turbulente

résultats expérimentaux proposent une prédiction de la distance de début d'atomisation z_i , de fin d'atomisation z_e et de longueur de cœur de jet L_c fonction du nombre de Weber selon les équations 1.3, 1.4 et 1.5 respectivement.

$$\frac{z_i}{d} = 2000W e_l^{-0.67} \quad (1.3)$$

$$\frac{z_e}{d} = 7.58W e_l^{1.68} 10^{-5} \quad (1.4)$$

$$\frac{L_c}{d} = 7.40W e_l^{0.34} \quad (1.5)$$

Sallam *et al* [69] observèrent quant à eux des jets liquides pour des nombres de Reynolds variant entre $5 \cdot 10^3$ et $2 \cdot 10^5$ et des nombres de Weber variant entre 235 et $3 \cdot 10^5$. Ils distinguèrent eux aussi différents modes de fragmentation en fonction du nombre de Weber. Pour des nombres de Weber supérieurs à $3 \cdot 10^4$, ils observent des modes de dispersion contrôlée par l'intensité turbulente en sortie d'injecteur. Ils s'aperçoivent d'ailleurs que cette intensité turbulente peut désaxer le jet et mener à une désintégration qu'ils nomment "bag-like breakup". Ce mode de désintégration ne semble se distinguer du mode de désintégration turbulente présentée par Wu *et al.* [5] qu'à des distances importantes de l'injecteur (les observations réalisées par Sallam *et al* [69] sont faites à $z/d > 200$).

S'appuyant sur un ensemble de résultats expérimentaux complet Dumouchel [18] conclut ainsi que pour les modes de fragmentation de seconde action aérodynamique et d'atomisation turbulente, la structure de l'écoulement interne influe particulièrement sur la fragmentation du jet. S'appuyant sur l'ensemble des travaux de Faeth, Dumouchel suppose que dans ce cadre et pour des rapports de densité supérieurs à 500 les forces aérodynamiques n'ont qu'un faible impact.

Sur la base de ces conclusions expérimentales différents modèles ont été développés dont le but est de prédire l'atomisation de jets. Cependant ces modèles (Taylor Analogy Breakup TAB [55], ou WAVE [66], ou d'autres intégrant la cavitation ou la turbulence), s'intéressent à l'ensemble de

la fragmentation, c'est-à-dire pour laquelle la répartition et la taille des gouttes sont les grandeurs critiques et non la zone de cœur de jet. Ainsi ces modèles considèrent un jet déjà fragmenté sous forme de "blobs" au sein même du cœur du jet. Cette hypothèse est trop forte par rapport à notre cas d'étude ; ainsi ces modèles n'ont pas été étudiés en détail.

Il est intéressant maintenant de reconsidérer le cadre industriel de notre étude par rapport aux connaissances décrites dans ce paragraphe.

1.3 Cadre industriel

Par rapport aux références bibliographiques mentionnées auparavant il est important de mettre en avant quelques points spécifiques des jets de turbines Pelton. Tout d'abord, contrairement aux problèmes d'injection pour les moteurs ou turboréacteurs, l'intérêt n'est pas ici de disperser le jet mais de l'avoir le plus cohérent possible. Ainsi les études ne portent pas sur la taille ou la répartition spatiale des gouttes issues de la fragmentation mais il s'agit d'évaluer la perte de rendement entre le jet et la roue engendrée par ces phénomènes. La perte de rendement attribuée à ces phénomènes sur les turbines Pelton est évaluée à 0.3%. Si on considère une énergie cinétique homogène dans une section de jet cela représente une diminution de rayon de 0.15%. On s'intéresse donc à des phénomènes qui ne concernent que la périphérie et le jet doit rester en tout état de cause majoritairement cohérent. Le second élément important est le fait que le "libre parcours du jet" est très court. En effet l'auget vient entrer en contact avec le jet à une distance de 2 ou 3 diamètres de jet. Nous pouvons observer sur la figure 1.6 l'injecteur avec l'extrémité du pointeau qui se trouve au centre du jet (à gauche) et les augets qui sont impactés par le jet (à droite). À cette distance de l'injecteur, le cœur du jet représente toujours la majorité de la section (les différentes études expérimentales sur le sujet [60], [61], [31] n'ont pas montré de création de gouttes à la périphérie d'un jet modèle comme c'est le cas sur la figure 1.6).

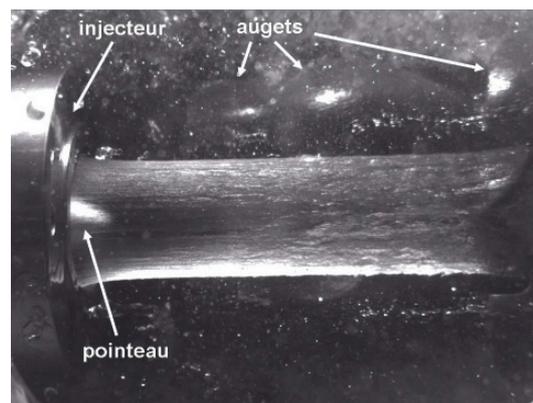


FIGURE 1.6 – Image de jet dans un bâti de turbine Pelton - échelle modèle - ANDRITZ Hydro

Le dernier élément est la différence géométrique entre les références bibliographiques trouvées dans les autres secteurs de recherche et les dimensions liées à l'exploitation des turbines Pelton. Cette différence existe d'une part par rapport aux éléments constitutifs du système d'injection. Tout d'abord l'inégalité $L/d > 10$ est toujours vérifiée, ensuite le torpédo constitue un élément

mécanique particulier dans l'injecteur. Avant que le jet ne soit à l'air libre l'écoulement est brutalement accéléré avec une forme de profil hydraulique de l'injecteur non cylindrique. Nous voyons sur la figure 1.7, l'évolution de la vitesse de l'eau dans l'injecteur puis dans le jet. Nous observons ainsi une forte accélération à la sortie du jet et la présence d'une zone de faible vitesse au sein du jet qui est le sillage créé par le pointeau. (Le pointeau est une partie mobile située dans le torpédo et qui permet de réguler le débit de la turbine.) Les résultats présentés figures 1.7 à 1.10 ont été obtenus avec le logiciel de simulation numérique ANSYS-CFX, un modèle multiphase multi fluide et un modèle de turbulence SST (Shear Stress Transport) [33] [21].

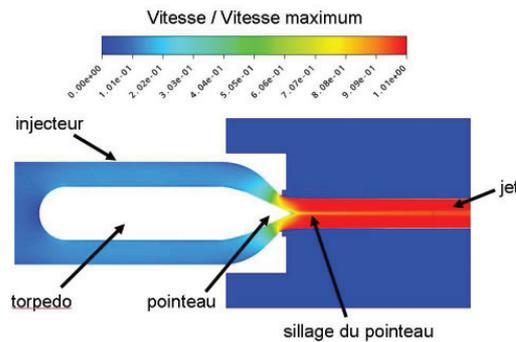


FIGURE 1.7 – Simulation de l'écoulement dans un injecteur de turbine Pelton - échelle modèle [33]

Finalement le diamètre de jet issu des injecteurs de turbines Pelton est de 10 à 1000 fois plus grand que ceux cités dans l'étude bibliographique. Comme on le voit sur la figure 1.6 le jet a son diamètre le plus faible non pas à l'extrémité même de l'injecteur mais au moment où le pointeau n'est plus dans le cœur du jet. Le diamètre important des jets de turbine Pelton a permis d'observer d'autres caractéristiques de jets qui ne sont pas mentionnées dans les études réalisées pour les autres secteurs industriels. En effet les jets issus de turbines Pelton sont sujets à des déformations et à des déviations dus aux écoulements secondaires créés par les coudes dans la conduite amont ou par des pièces mécaniques dans l'injecteur (torpédo) [33], [30], [72], [21]. Nous voyons sur la figure 1.8 l'évolution du coefficient de pression totale sur différents plans tout au long de l'injecteur. Ainsi il est visible que l'écoulement au niveau de l'injecteur est influencé par le coude situé en amont.

La figure 1.9 (a) montre les écoulements secondaires, c'est-à-dire les composantes de vitesse normales à l'axe du jet pour ce même cas. On observe ainsi deux recirculations qui résultent de la présence du coude à l'amont de l'injecteur. De même sur la figure 1.9 (b) on observe l'évolution de la pression totale sur l'axe vertical et sur l'axe horizontal dans le plan situé à $Z = 2D_0$ de l'injecteur (D_0 étant le diamètre de l'embouchure de l'injecteur). On note une déformation différente du sillage du pointeau selon ces deux directions. Ceci résulte aussi de la présence du coude [21], [57]

La déformation de la surface du jet est le résultat final des écoulements secondaires créés par le coude, figure 1.10.

Au vu de ces observations, il paraît important de définir le vocabulaire qui sera ensuite utilisé dans ce document et dans le cadre des jets de turbine Pelton. Ce vocabulaire permet de caractériser les jets à partir d'un jet théorique dont l'axe est l'axe géométrique de l'injecteur, et le diamètre est donné par la vitesse théorique (obtenue à partir de la hauteur de chute, de l'équation de Bernoulli et d'un coefficient de perte de charge de 0.02) et par le débit. L'ensemble de ces caractéristiques

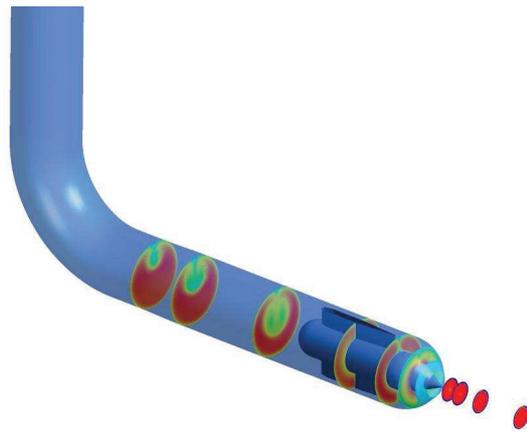


FIGURE 1.8 – Évolution du coefficient de pression totale dans un injecteur précédé d'un coude [33]

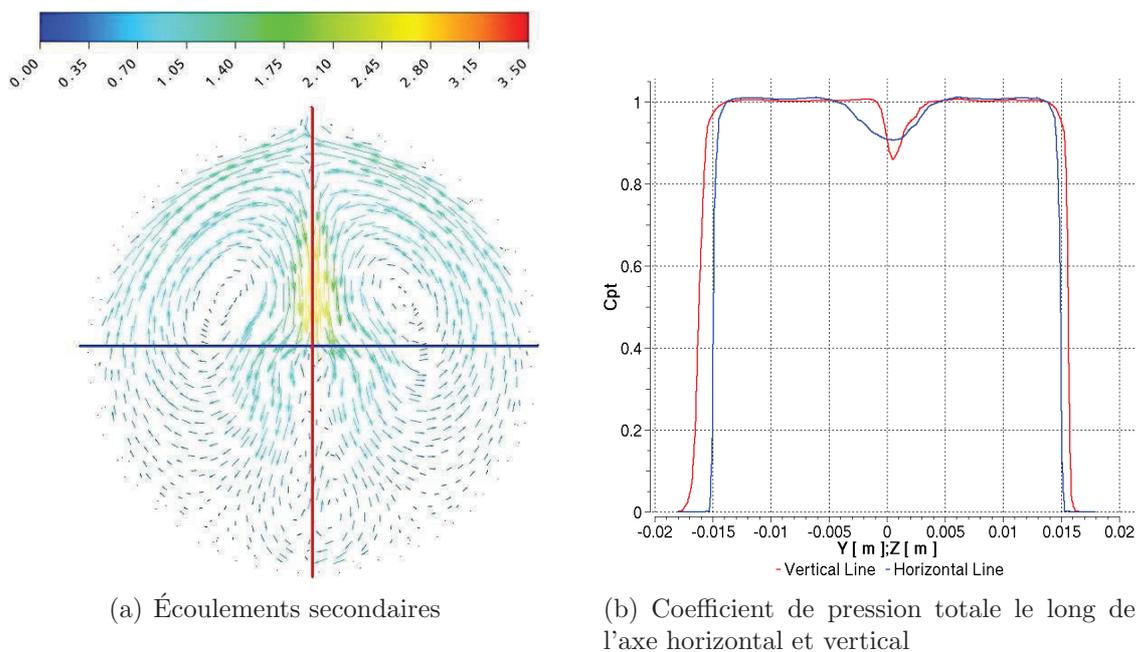


FIGURE 1.9 – Caractéristiques d'un jet à $Z = 2D_0$ [33]

sont schématisées sur la figure 1.11. Sur cette figure les motifs en rouge représentent la situation idéale de référence. Les trait-tirets noirs correspondent à la position de l'interface du cœur du jet à un instant donné. Pour chaque caractéristique un plan de coupe du jet est réalisé dans le plan A. On y voit ainsi une représentation de la surface du cœur du jet à cet instant.

- La déviation concerne un jet pour lequel dans chaque plan orthogonal à l'axe théorique du jet le barycentre de masse ou d'énergie cinétique n'est pas sur l'axe. On parlera alors de déviation de masse (c'est ce que l'on observe sur une photo), ou de déviation d'énergie cinétique. La vue en coupe dans le plan A, montre que pour la déviation la forme du jet n'est pas modifiée.
- La déformation se caractérise par des variations importantes de l'interface. Ces déformations

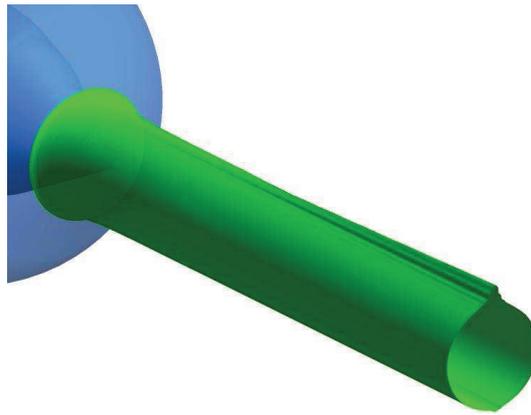


FIGURE 1.10 – Représentation de la surface du jet [33]

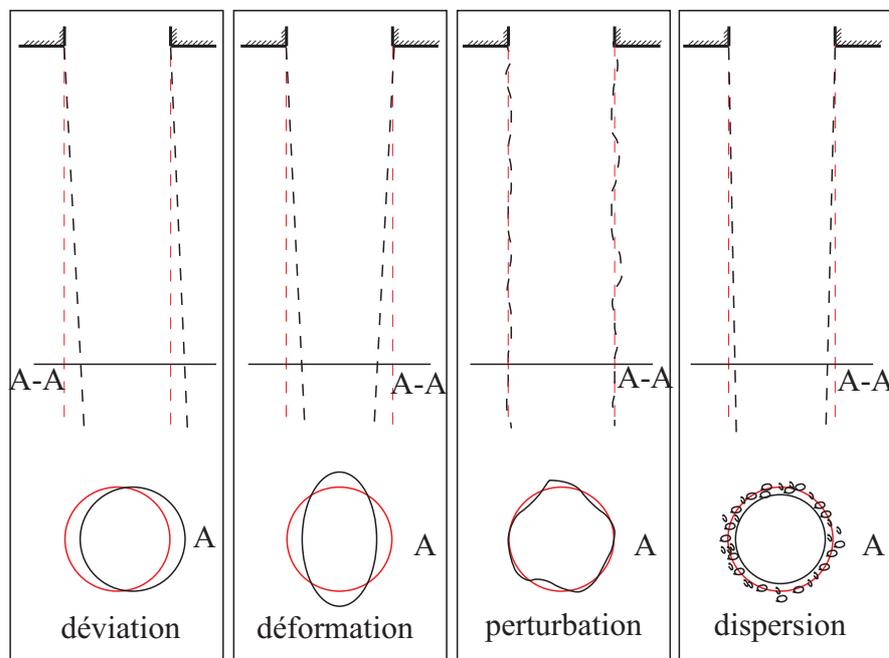


FIGURE 1.11 – Vocabulaire lié aux caractéristiques de la surface d'un jet

sont localisées et stables dans le temps.

- Les perturbations concernent de faibles variations de position de l'interface du cœur du jet autour de sa position théorique. Ces variations sont instationnaires.
- La dispersion caractérise un jet dont le cœur est entouré de gouttelettes, résultant de l'atomisation du jet.

Il est important de distinguer perturbation et dispersion car ces deux phénomènes, lorsque l'on fait une moyenne temporelle, peuvent donner le même taux de présence d'air et d'eau en un point près de l'interface théorique. Il est ainsi dangereux de faire une moyenne temporelle de ces phénomènes car cela risque de masquer une influence plus ou moins importante des forces aérodynamiques [78].

(Il est cependant admis que ces deux termes peuvent être appliqués au même jet puisque dans le cadre de l'atomisation turbulente, l'interface est d'abord perturbée avant d'être dispersée [68]).

1.4 Bilan

La comparaison des connaissances bibliographiques avec les caractéristiques des jets Pelton a fait ressortir différentes données qu'il serait intéressant d'étudier. La première est le type de fragmentation que subissent les jets de turbine Pelton. De ceci, et avec les données bibliographiques, on pourra faire des hypothèses quant à l'influence de la phase gazeuse sur cette fragmentation. Le second point est l'influence de la structure de l'écoulement interne et le dernier celui des couches limites.

Chapitre 2

Étude expérimentale

L'étude expérimentale s'est déroulée en deux parties. La première a été réalisée dans le cadre de ce doctorat au laboratoire hydraulique d'ANDRITZ Hydro à Vevey sur un banc d'essais Pelton à axe horizontal. Cela a permis d'une part de faire des visualisations de jet avec et sans roue dans le but d'étudier les modes de fragmentation des jets, et d'autre part des mesures de rendement en fonction des caractéristiques de fonctionnement et d'état de la turbine (chute, rugosité des parois). La seconde partie s'est déroulée dans le cadre du projet JISPP (Jet Improvement for Swiss Pelton Plants) et a été réalisée par l'équipe de la Hochschule de Luzern (HSLU). Le programme JISPP incluait ANDRITZ Hydro et cette thèse CIFRE. Le travail réalisé durant ce doctorat incluait ainsi la participation à l'établissement du programme expérimental.

2.1 Expérimentations à l'échelle modèle sur un stand Pelton horizontal

Le banc (à axe) horizontal du laboratoire hydraulique de Vevey a été instrumenté pour pouvoir réaliser des visualisations de jet avec et sans roue. Sur la figure 2.1 nous voyons le dispositif pour les visualisations avec roue. Celui-ci permet à la caméra d'être placée à différentes positions le long de l'axe du jet mais aussi à deux positions différentes orthogonalement à l'axe du jet : près du jet sur l'image de gauche et loin du jet sur l'image de droite. Pour la position éloignée (photo de droite), il a fallu adapter une protection entre la caméra et le jet pour empêcher l'eau ayant déjà travaillé dans les augets de détériorer la visualisation du jet.

Pour la visualisation sans la roue un système permettant de déplacer la caméra le long du jet a été réalisé. La visualisation était ainsi possible de l'embouchure à $z = 10D_0$ (où D_0 est le diamètre de l'embouchure de l'injecteur)

Une première observation a été réalisée et est représentée sur la figure 2.3. Deux temps de pause différents sont utilisés. Un temps court permet de visualiser les structures de la surface du jet, figure 2.3 (a). Le second temps de pose long, figure 2.3 (b), est représentatif de l'apparence du jet lorsqu'on le regarde à l'œil nu. Cette deuxième visualisation ne nous permet pas, comme cela a été évoqué précédemment, de distinguer si la surface du jet est perturbée ou dispersée. C'est l'étude de la fragmentation instantanée du jet qui peut nous renseigner sur l'état de surface du jet.

Les images présentées sur la figure 2.4, montrent la structure du jet pour 120m de chute au niveau de l'interaction entre le jet et un auget. Il est alors visible que le jet n'est pas dispersé à

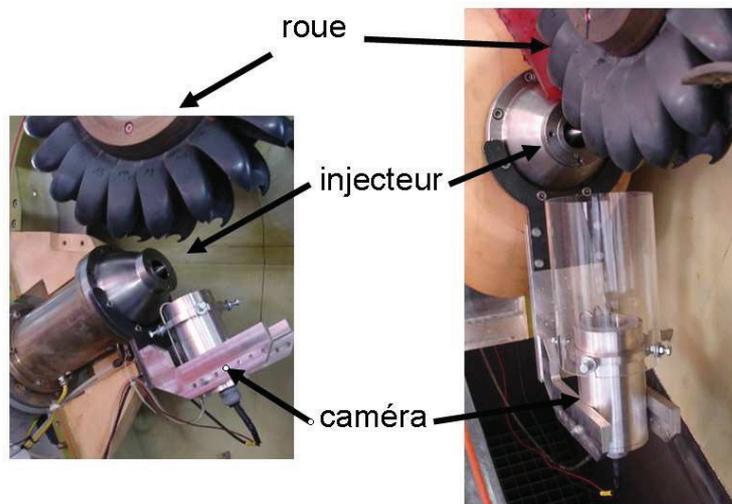


FIGURE 2.1 – Système de visualisation avec roue

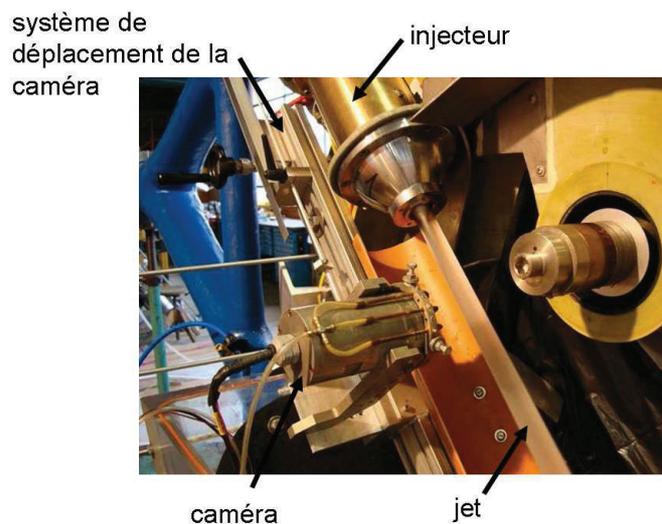


FIGURE 2.2 – Système de visualisation sans roue

ce niveau. L'apparition de gouttelettes ne se fait pas à la sortie immédiate de l'injecteur dans ce cas. Ainsi nous ne sommes pas dans le mode d'atomisation. En fait il apparaît, comme c'est le cas pour les études menées par Faeth [19], [78], [5] une première zone où l'interface est perturbée mais pour laquelle il n'y a pas d'apparition de goutte à la surface du jet. Les gouttes apparaissent plus loin le long de l'axe du jet.

Les figures 2.5 à 2.7 montrent des images de jet à $5D_0$ et à $10D_0$ de l'embouchure et pour des chutes allant de 67m à 127m. (Les nombres de Reynolds associés sont 1.10^6 , $1.3.10^6$ et $1.5.10^6$ pour les chutes 67m, 97m et 127m. Les nombres de Weber sont pour l'eau $3.4.10^5$, $7.7.10^5$ et 1.10^6). Nous voyons que pour les trois chutes choisies le diamètre du jet a tendance à augmenter avec la distance le long du jet. D'autre part, les écoulements pour les chutes de 97 et 127m font apparaître des structures et des gouttes qui ne sont pas présentes pour la chute de 67m.



(a) déformations instantanées d'un jet



(b) moyenne temporelle de la surface d'un jet

FIGURE 2.3 – Déformations instantanées et moyennes temporelles



FIGURE 2.4 – Photo de l'interaction entre jet et auget à l'échelle modèle

Ainsi comme Wu et Faeth [79] le proposent, eq. 1.3, il semble que la distance d'apparition de la dispersion diminue avec l'augmentation de la vitesse du jet. L'application numérique de cette équation et de l'équation 1.4, évaluant la fin de zone de cœur de jet, donne pour une chute de 127m et un jet de 3cm de diamètre un début d'apparition de goutte à $z/d = 0.19$ et une fin de cœur de jet à $z/d = 822$. Les moyens expérimentaux ne nous ont pas permis de vérifier la seconde application, mais pour le début de l'apparition des gouttes il apparaît que l'ordre de grandeur n'est pas le bon. Celui ci serait plus de l'ordre de 3 ou 4 D_0 (les moyens expérimentaux mis en place ne nous ont pas permis de déterminer cette valeur avec précision).

Ainsi quelle que soit la chute utilisée pour mener les expériences à l'échelle modèle il n'a pas été observé de formation de gouttes avant l'interaction du jet avec la roue, figure 2.4. Ainsi selon l'étude bibliographique, pour ce mode d'atomisation turbulente, les efforts aérodynamiques semblent faibles et ne devraient pas impacter le rendement de la turbine. Ceci avait été aussi supposé par Oguey et Manin [54]. L'étude du rendement de la turbine en fonction de la chute, n'a pas permis de dégager une tendance comparable à l'évolution du diamètre apparent du jet. En effet sur la figure 2.8, nous pouvons remarquer qu'il n'y a pas de corrélation entre les variations de rendements et la chute. (Sur l'axe horizontal est représenté le coefficient de débit de l'injecteur, c'est-à-dire ici son ouverture. Les valeurs faibles de ϕ_{B_2} représentent une petite ouverture et les grandes valeurs une grande ouverture). Ceci a tendance à confirmer le faible impact des forces aérodynamiques dans la situation où le jet présente uniquement des perturbations de l'interface. En revanche ces perturbations instationnaires de la surface du jet font que la position radiale maximale de l'interface du jet est plus importante que le rayon théorique. Cela peut donc influencer sur la capacité de l'auget à récupérer l'ensemble de l'énergie cinétique du jet.

L'étude de l'atomisation turbulente [78] a mis en avant l'importance de l'énergie cinétique turbulente en sortie d'injecteur. Celle-ci étant liée à la vitesse et au diamètre du jet, il est intéressant d'observer l'interface d'un jet issu d'un injecteur à l'échelle prototype. Sur la figure 2.9 nous observons à une distance proche de l'injecteur que l'interface n'a pas la même topologie que celle obtenue à l'échelle modèle. Cette observation est en ligne avec le modèle développé pour expliquer le principe d'atomisation turbulente. A l'échelle prototype, l'énergie cinétique turbulente étant plus importante la déformation d'interface est plus prononcée. Le nombre de Reynolds du jet pour cette configuration est d'environ 4.10^6 , ce qui reste un ordre de grandeur inférieur à ce qui peut être observé sur d'autres turbines Pelton, tableau 1.2. Ainsi il est possible que pour les turbines Pelton dont le nombre de Reynolds du jet est plus important, il apparaisse des gouttes à la périphérie du jet avant que celui-ci impacte les augets, figure 2.10.

Le mode de fragmentation étant désormais déterminé, il est intéressant de savoir ce qui peut l'impacter. Comme cela a été montré, la couche limite dans l'injecteur peut être primordiale pour les propriétés de fragmentation d'un jet, [43], [5]. Pour vérifier ceci dans le cas d'un injecteur de turbine Pelton, il a été décidé de modifier la rugosité du pointeau et/ou de l'embouchure, figure 2.11. Cette modification de rugosité a été effectuée pour obtenir une rugosité R_a de $3.5\mu m$ au lieu de $0.35\mu m$ pour une surface non sablée. (Les valeurs de rugosité obtenues sur prototype pour les surfaces de l'injecteur et des augets varient entre $1.6\mu m$ et $4\mu m$.)

Les niveaux de rendement associés à ces différentes configurations sont représentés sur la figure 2.12. Nous pouvons voir que l'effet sur le rendement de la variation de rugosité diffère beaucoup entre le pointeau et l'embouchure. En effet cette variation sur l'embouchure a une influence limitée sur le rendement alors que celle sur le pointeau impacte significativement le rendement pour les petites ouvertures et peu pour les grandes.

Il est difficile de relier ces variations aux différents paramètres de qualité d'un jet, car pour le

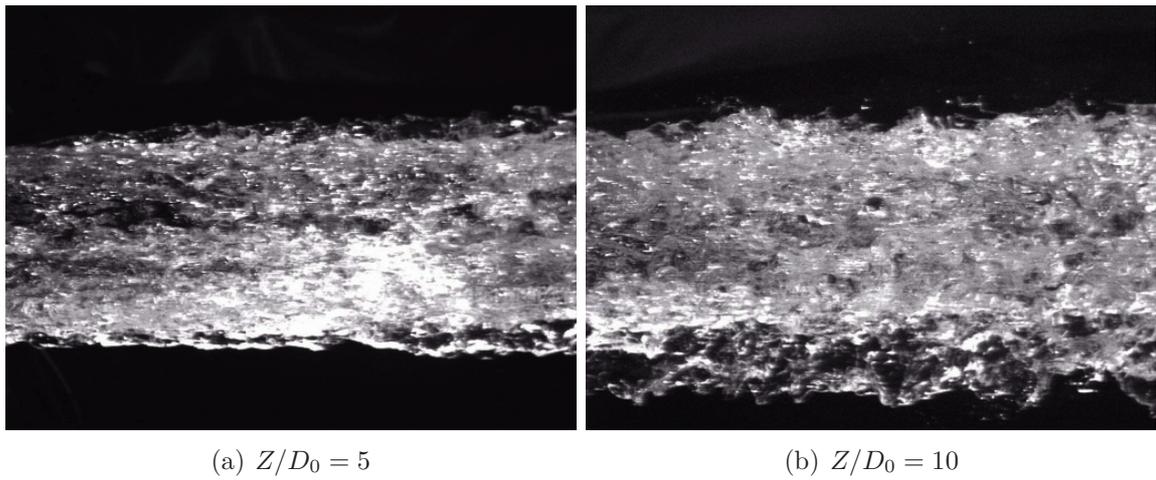


FIGURE 2.5 – Images du jet pour une chute de 67m

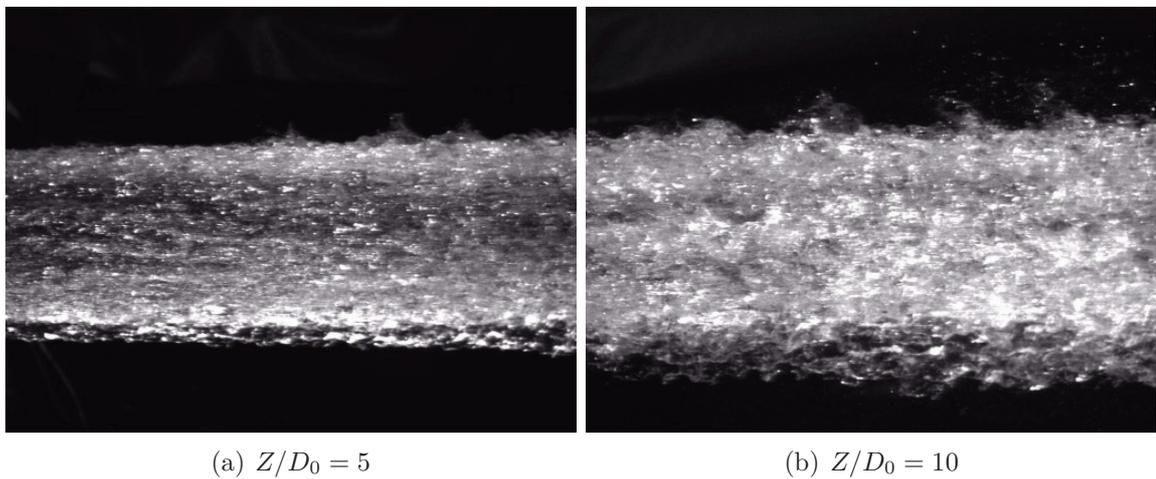


FIGURE 2.6 – Images du jet pour une chute de 97m

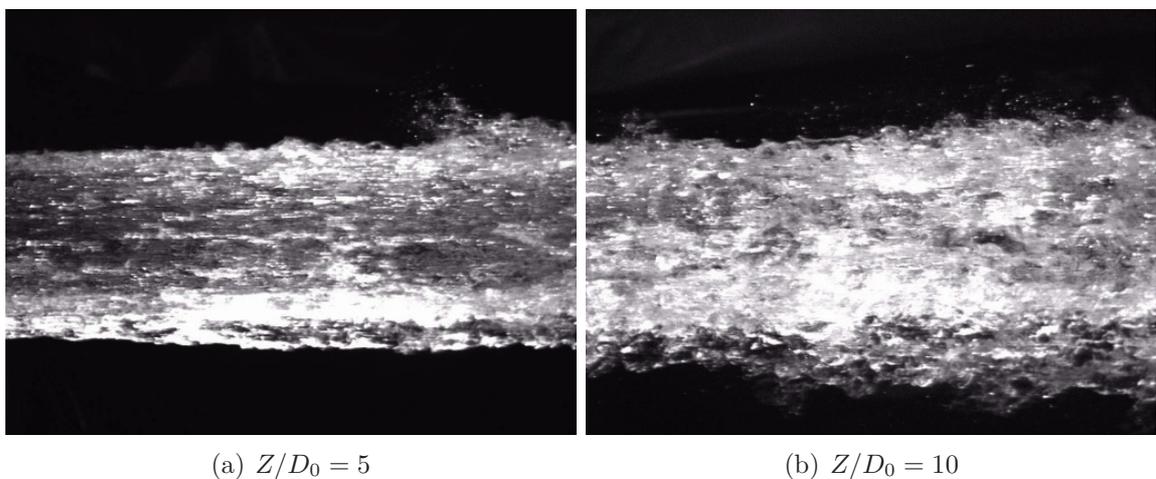


FIGURE 2.7 – Images du jet pour une chute de 127m

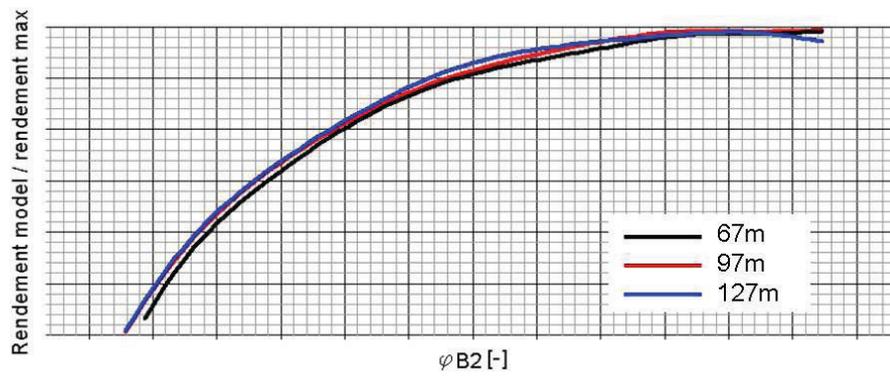


FIGURE 2.8 – Influence de la chute sur le rendement

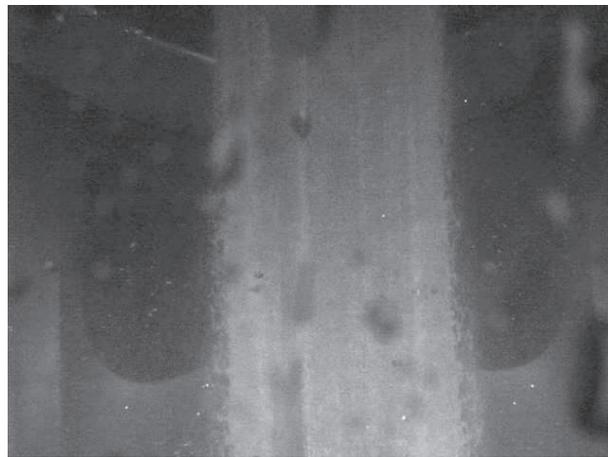
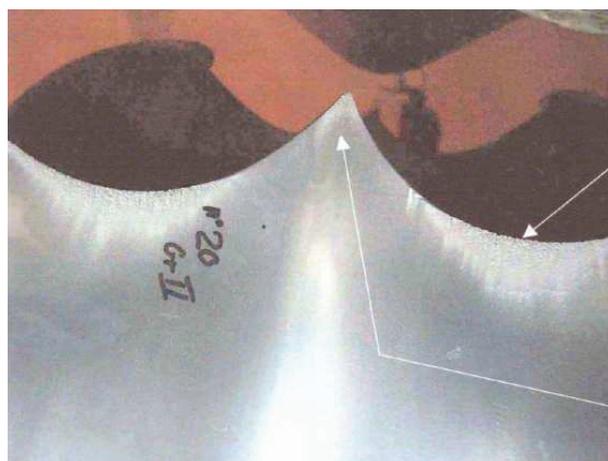
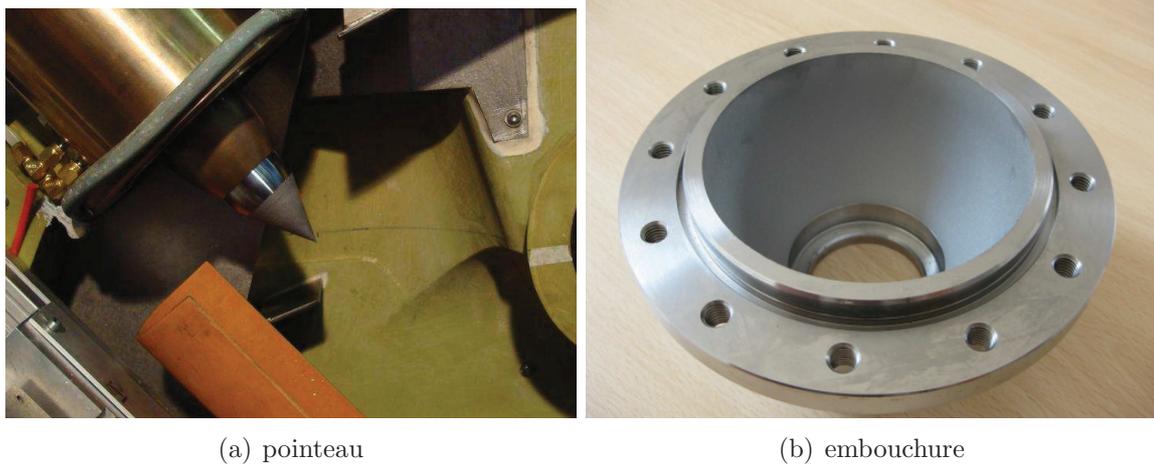
FIGURE 2.9 – Échelle prototype - chute 688m - $Re \approx 4.10^6$ - $Z/D_0 = 1.8$ - image HSLU

FIGURE 2.10 – Dégâts associés à des chocs de gouttes sur une turbine prototype

cas de la modification de la rugosité sur le pointeau, le sillage dans le jet peut avoir été modifié.



(a) pointeau

(b) embouchure

FIGURE 2.11 – Modification de la rugosité

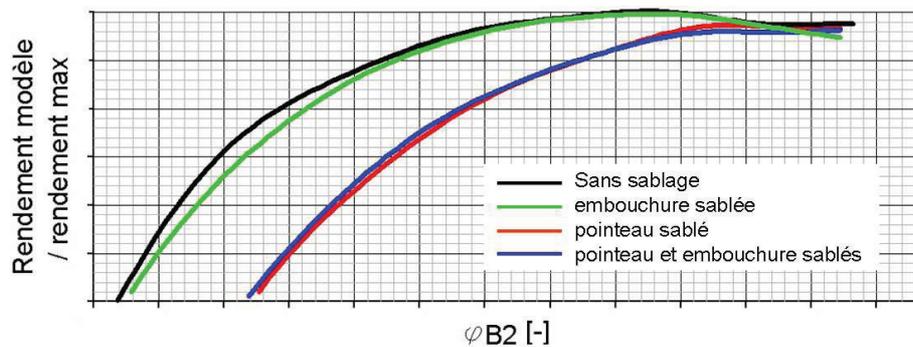


FIGURE 2.12 – Influence des modifications de rugosité sur le rendement

(L'accès aux caractéristiques du sillage du pointeau est possible avec l'utilisation d'un tube de Pitot [58], mais cette démarche n'a pas été effectuée.) Dans ce cas la qualité du jet a été altérée par la modification de l'homogénéité des vitesses axiales dans le jet. Pour ce qui est de l'effet de la rugosité sur l'embouchure deux hypothèses sont possibles. Soit cela n'a pas modifié les caractéristiques du jet et dans ce cas il est logique de retrouver une mesure de rendement comparable. Soit les caractéristiques ont été modifiées et cela n'est pas visible sur le rendement. Cette dernière situation est tout à fait possible car dans le cas où le mécanisme de fragmentation a été modifié, les images de l'interface du jet ne montrent pas l'apparition de gouttes dans la zone où le jet entre en contact avec l'auget (sur la droite des images présentées sur la figure 2.13). Ainsi le mécanisme modifié, au niveau de l'interaction jet/auget, uniquement les perturbations de l'interface qui sont peu sensibles aux forces aérodynamiques. D'autre part comme nous le voyons sur la figure 2.14, la débitance de l'injecteur (loi de débit en fonction de l'ouverture de l'injecteur) n'a pas été modifiée par le sablage sur le pointeau mais elle l'a été par le sablage effectué sur l'embouchure.

A cette étape de l'expérimentation, on a pu identifier le mode de fragmentation des jets de turbine Pelton et montrer que la couche limite, du moins au niveau du pointeau, conditionne la qualité du jet (au sens où elle influence la transmission de l'énergie cinétique de l'eau à la roue). Il est alors nécessaire, pour comprendre le mécanisme de fragmentation, d'avoir accès à des grandeurs

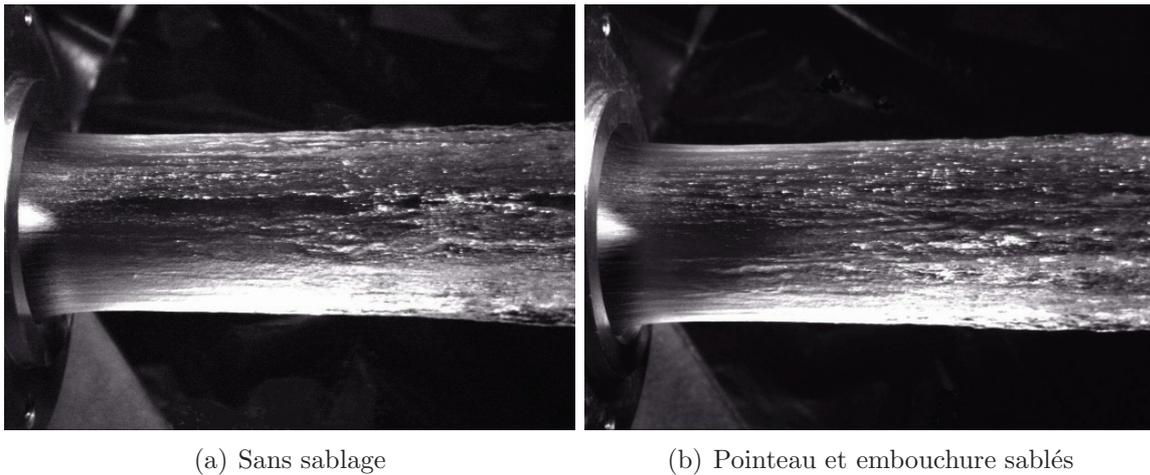


FIGURE 2.13 – Modification de la rugosité

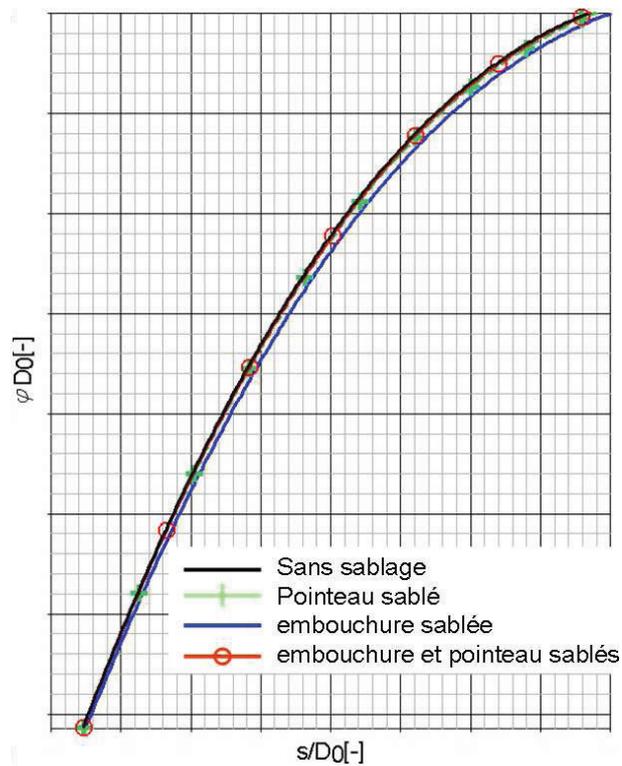


FIGURE 2.14 – Loi de débit de l'injecteur en fonction de la rugosité des parois

quantifiables pour évaluer les variations des propriétés de l'interface du jet issu de l'injecteur. Ceci n'a pas été réalisable sur ce banc d'essais ANDRITZ Hydro pour deux raisons. La première tient au montage de la caméra pour la visualisation des jets. En effet ce système ne permettait pas une assez bonne reproduction du positionnement de la caméra au cours du temps. Le second point est la caméra elle-même qui ne permettait pas un traitement de l'image efficace. Dans ce cadre, l'équipe de la Hochschule de Luzern a développé une technique de traitement d'image permettant

une quantification de l'aspect du jet. Les travaux et résultats liés à cette technique sont présentés dans la partie suivante.

2.2 Expérimentations à l'échelle modèle - Banc HSLU

Les expériences et les relevés présentés dans cette partie ont été réalisés par l'équipe de l'HSLU. Une partie du travail de ce doctorat a consisté à proposer des expérimentations pouvant mettre en avant les phénomènes gérant la fragmentation du jet. L'objectif de ces mesures était de fournir des résultats quantifiables de qualité de surface du jet pour différentes configurations de l'injecteur. Pour cela l'équipe de l'HSLU a mis au point un système de traitement d'image permettant la détection des déformations d'un jet, figure 2.15.

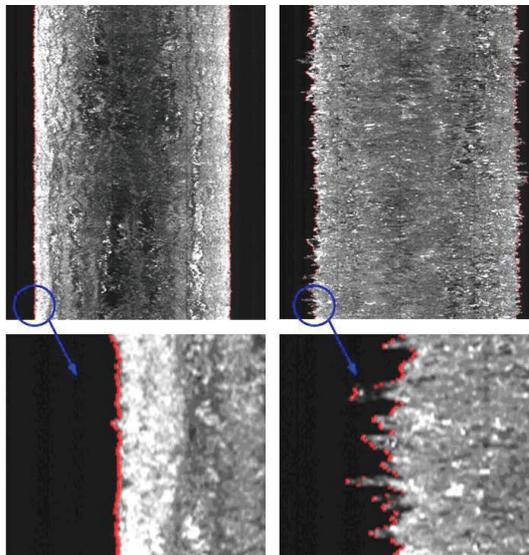


FIGURE 2.15 – Traitement d'image développé par HSLU

Ce traitement d'images avec un système de pivot de la caméra autour du jet a permis d'obtenir des mesures de trois grandeurs :

- d_{moyen}/d_0 qui est le diamètre apparent moyen du jet d_{moyen} divisé par son diamètre théorique
- $\delta_{rms} = \frac{1}{d_0} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (d_i - d_{moyen})^2}$ les fluctuations de l'interface
- O qui représente le caractère non cylindrique du jet $O = \frac{d_{max} - d_{min}}{d_{moyen}}$

Ces mesures seront appliquées :

- pour des chutes variables afin de modifier les nombres adimensionnels de Reynolds et de Weber
- pour des rugosités variables pour compléter les résultats de la section précédente
- avec des éléments modifiant la structure de l'écoulement dans l'injecteur

Les figures 2.16 et 2.17 montrent l'influence de la chute sur le diamètre moyen du jet et le δ_{rms} . Nous observons ainsi que ces grandeurs augmentent avec la chute, ce qui va dans le sens de la théorie de la dispersion turbulente, pour laquelle la perturbation de la surface du jet augmente avec son niveau de turbulence interne.

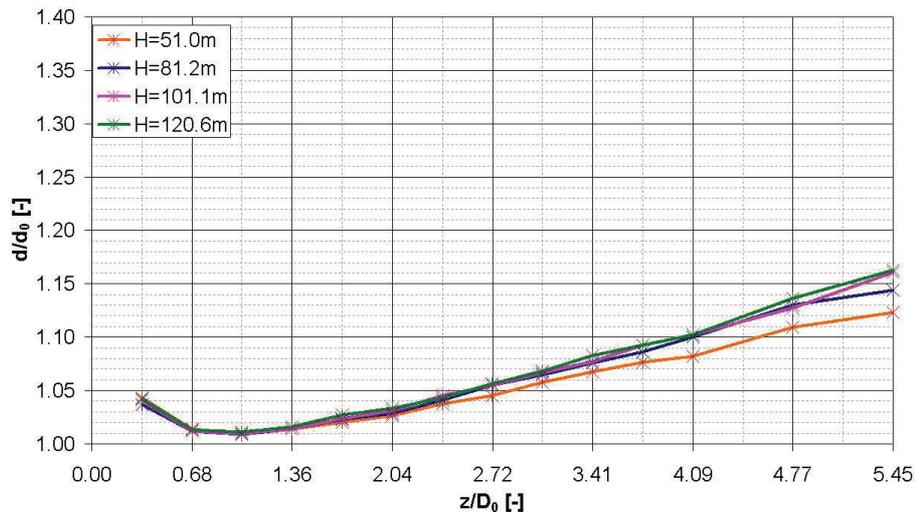


FIGURE 2.16 – Évolution du diamètre du jet en fonction de la chute

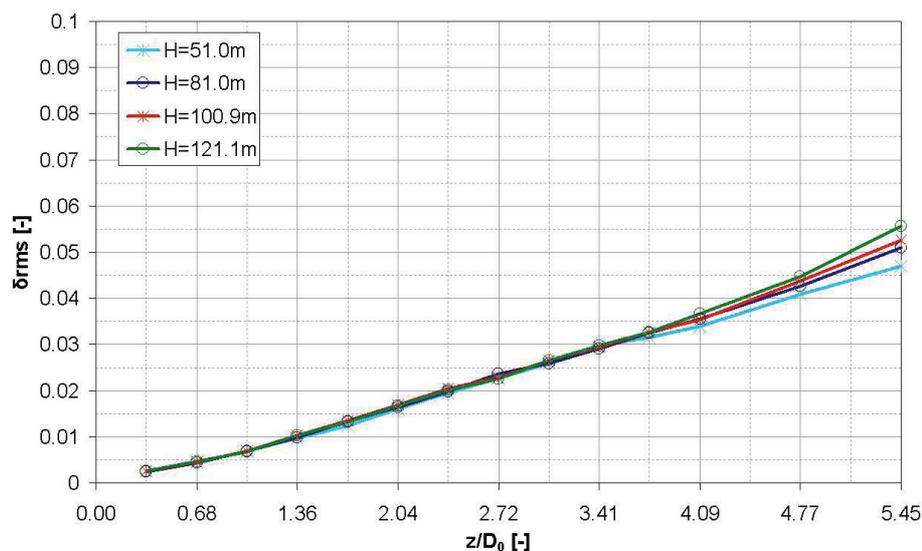


FIGURE 2.17 – Influence de la chute sur les perturbations de l'interface

Les mêmes mesures sont effectuées avec les pointeaux ("needle") et embouchures ("nozzle") sablés. Les courbes figure 2.18, montrent l'influence de la rugosité sur le diamètre moyen du jet selon 2 directions : la direction horizontale 0° , et la direction verticale "90°". La différence de niveau moyen entre ces deux directions s'explique par la présence des ailettes maintenant le torpedo dans l'injecteur qui sont situées sur l'axe vertical. Les ailettes engendrent des écoulements secondaires qui déforment l'interface dans cette direction, [33]. Nous voyons que la rugosité influence les perturbations de l'interface dans ces deux directions. Elle aurait plutôt tendance à les réduire lorsque l'embouchure a été sablée. Les variations de fluctuations de l'interface δ_{rms} sont relativement peu impactées par la rugosité.

Ainsi ces mesures ne permettent pas de retrouver des tendances similaires à celles observées sur

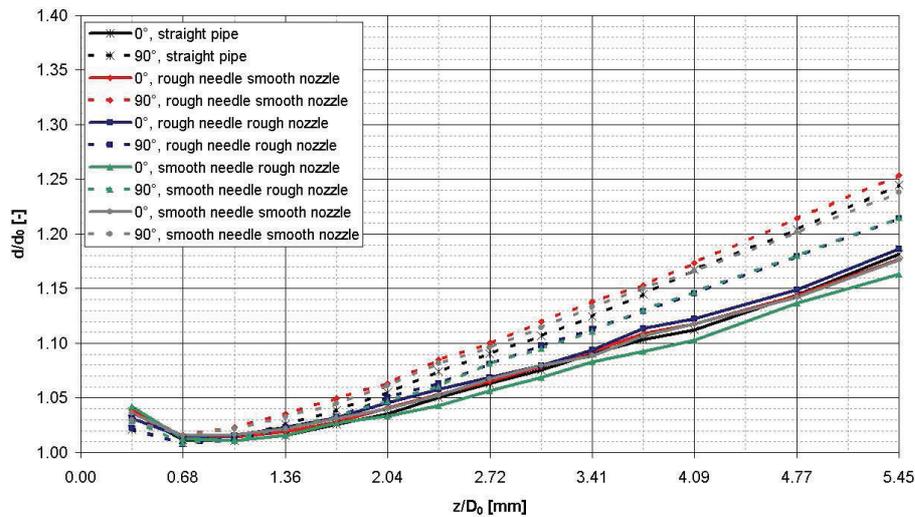


FIGURE 2.18 – Influence de la rugosité sur le diamètre du jet

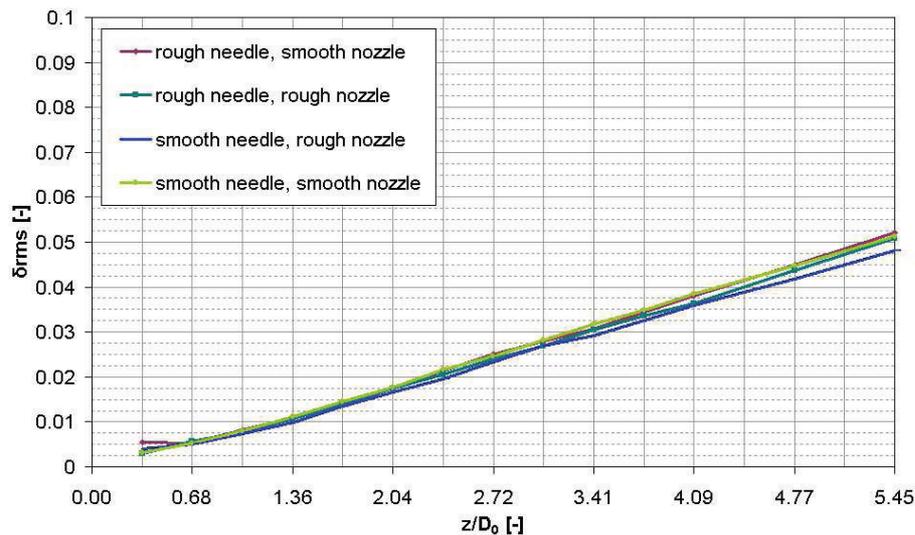


FIGURE 2.19 – Influence de la rugosité sur les perturbations de l'interface

les mesures de rendement 2.12. Les raisons expliquant ces variations de rendement doivent ainsi être certainement cherchées dans une modification du profil des vitesses axiales du jet.

Une seconde série d'expériences a consisté à modifier l'écoulement en amont de l'injecteur afin de mesurer l'impact de ces modifications sur la structure du jet. Ces modifications ont été de différentes natures. Une première a consisté à placer différentes grilles dans l'écoulement, figure 2.20. Les paramètres des trois différentes grilles sont donnés dans le tableau 2.1. Les diamètres des fils varient de 0.6mm à 1.4mm pour un écartement constant entre les axes des fils. Le but était de modifier les structures turbulentes de l'écoulement sans affecter les écoulements secondaires.

Une autre modification de l'écoulement en amont de l'injecteur a consisté à placer des barreaux de deux diamètres différents, figure 2.21 et tableau 2.2.

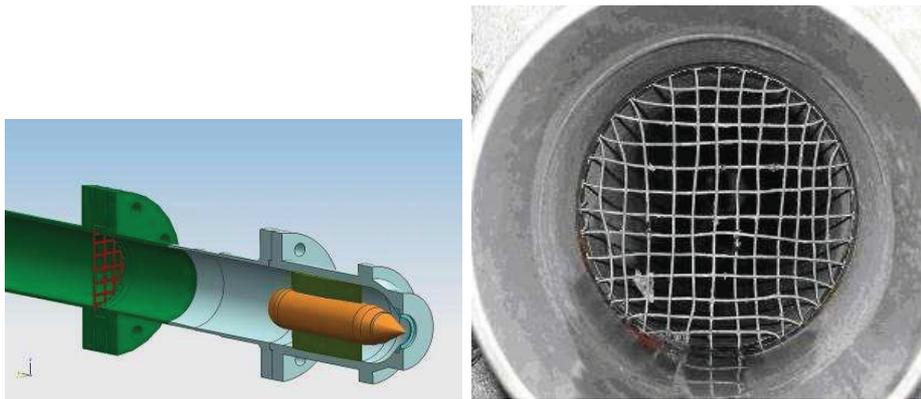


FIGURE 2.20 – Ajout d’une grille en amont de l’injecteur

Tableau 2.1 – Paramètres des grilles

| nom | diamètre fil [mm] | espacement [mm] | surface obstruée [%] |
|------------|-------------------|-----------------|----------------------|
| grille 0.6 | 0.6 | 7.5 | 15.5 |
| grille 1.1 | 1.1 | 7.5 | 26.1 |
| grille 1.4 | 1.4 | 7.5 | 32.5 |

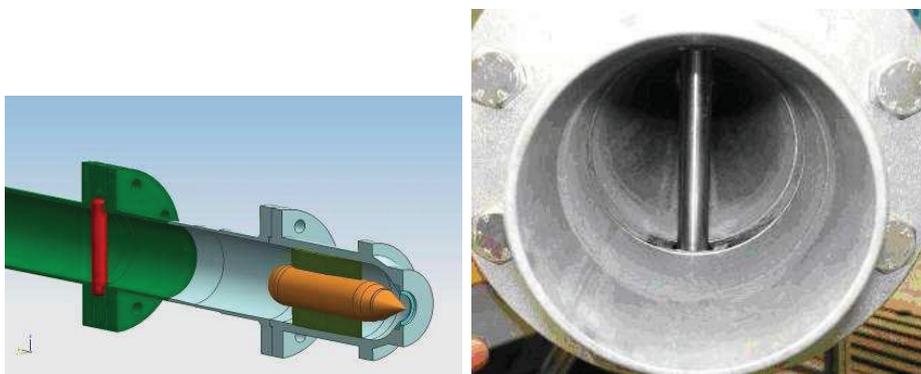


FIGURE 2.21 – Ajout d’un barreau en amont de l’injecteur

L’influence de ces modifications sur le diamètre moyen du jet est montrée figures 2.22 et 2.23 pour des mesures réalisées dans le plan horizontal 0° et dans le plan vertical 90° . Nous pouvons ainsi observer que les grilles ont tendance à diminuer les perturbations observées à la surface du jet. Cette diminution est d’autant plus forte que le diamètre des grilles est important. Sur cette figure nous pouvons à nouveau remarquer l’influence des écoulements secondaires créés par les ailettes. Ces écoulements secondaires déforment la surface du jet sur l’axe vertical. Les barreaux quant à eux ne modifient pas le jet de la même manière. En effet, nous pouvons remarquer que leur influence n’est pas la même sur l’axe horizontal et sur l’axe vertical. Sur l’axe vertical les barreaux ont tendance à augmenter le diamètre du jet alors qu’ils ont tendance à le diminuer sur

Tableau 2.2 – Paramètres des barreaux

| nom | diamètre barreaux [mm] | surface obstruée [%] |
|------------|------------------------|----------------------|
| barreau 15 | 15 | 19.9 |
| barreau 30 | 30 | 37.6 |

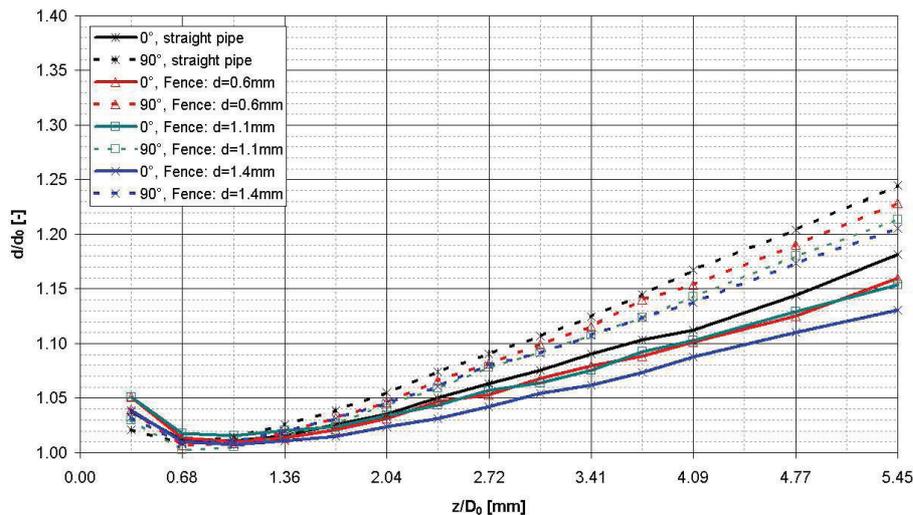


FIGURE 2.22 – Influence des grilles sur le diamètre du jet

l'axe horizontal. En fait les barreaux ont créé des écoulements secondaires qui ont, comme pour les ailettes du torpedo, tendance à déformer l'interface. Ainsi les barreaux créent une déformation de l'interface. Le tracé du caractère non cylindrique du jet, figure 2.24, confirme cela. Nous pouvons y voir que le fait de rajouter une grille ne modifie pas ce caractère, c'est à dire que les écoulements secondaires ne sont pas impactés. Au contraire le barreau amplifie ce caractère non cylindrique un peu à la manière d'un coude en amont de l'injecteur (cas présenté figure 1.10)

Finalement nous observons sur la figure 2.25 l'influence de ces modifications sur les fluctuations du jet. Les barreaux ont ainsi tendance à augmenter ces fluctuations alors que les grilles ont tendance à les diminuer.

En conclusion, nous avons vu que les paramètres définissant le jet peuvent être influencés par une modification de la nature de l'écoulement. Les grilles ont tendance à diminuer les perturbations à la surface du jet sans affecter la déformation du jet. Ces grilles modifient par leur présence les structures turbulentes mais pas les écoulements secondaires (les déformations du jet ne sont pas affectées par leur présence). Une étude précise de l'impact de la grille sur les structures turbulentes dans l'écoulement et leur évolution à travers le convergent situé dans l'embouchure de l'injecteur permettrait une meilleure interprétation des évolutions mesurées. D'autre part, concernant les résultats liés à la rugosité des parois, étant donné que sa modification sur l'embouchure n'a pas donné de résultats aussi clairs sur la qualité de surface du jet que la présence de grille, on peut supposer que c'est la modification des structures turbulentes au sein du jet (et non dans la couche limite) qui a engendré les modifications d'aspect de la surface du jet. Les barreaux quant à eux

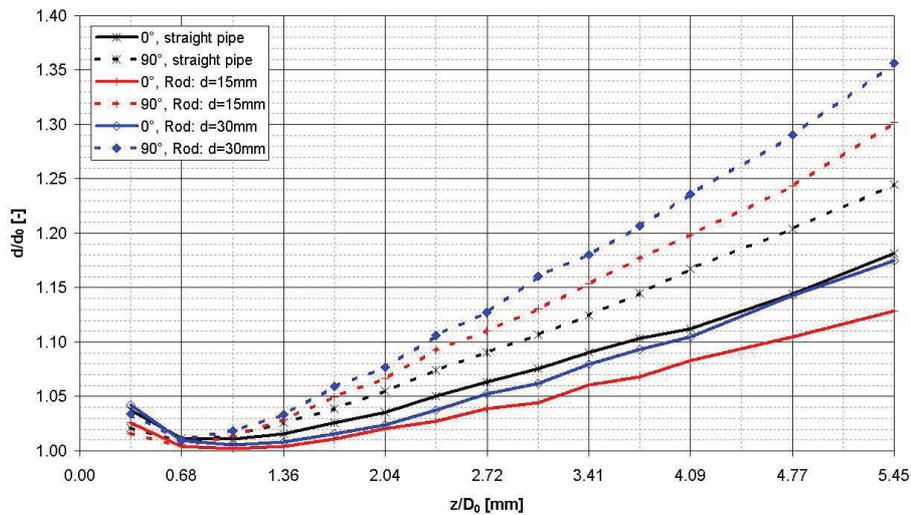


FIGURE 2.23 – Influence des barreaux sur le diamètre du jet

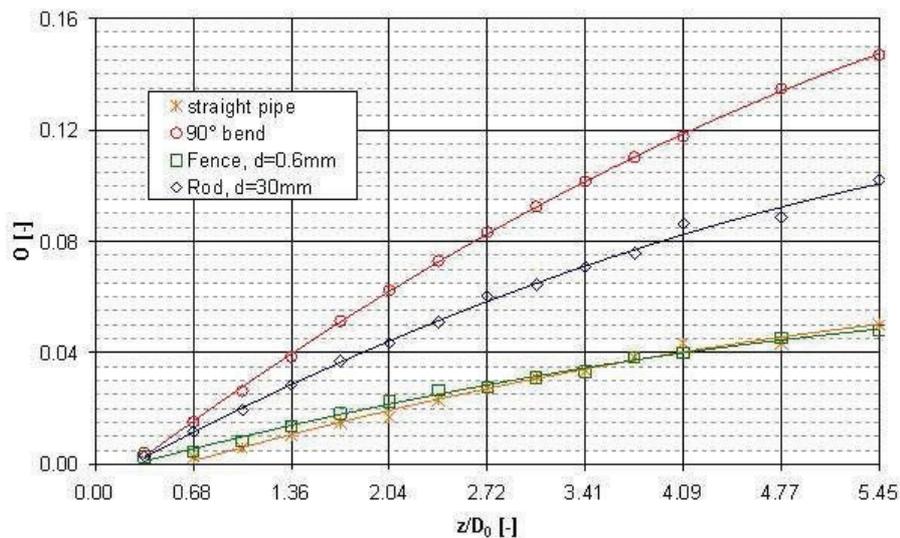


FIGURE 2.24 – Influence des grilles et barreaux sur la déformation de l'interface

engendrent une déformation de l'interface par la création d'écoulements secondaires mais aussi une augmentation des perturbations de la surface du jet. Ainsi ces résultats confirment le régime d'atomisation turbulente pour lequel la structure de l'écoulement en sortie d'injecteur conditionne la fragmentation du jet.

2.3 Bilan et choix des phénomènes à modéliser

La partie expérimentale et la comparaison à des références bibliographiques nous a permis de déterminer le régime de fragmentation des jets de turbines Pelton. Le mode d'atomisation

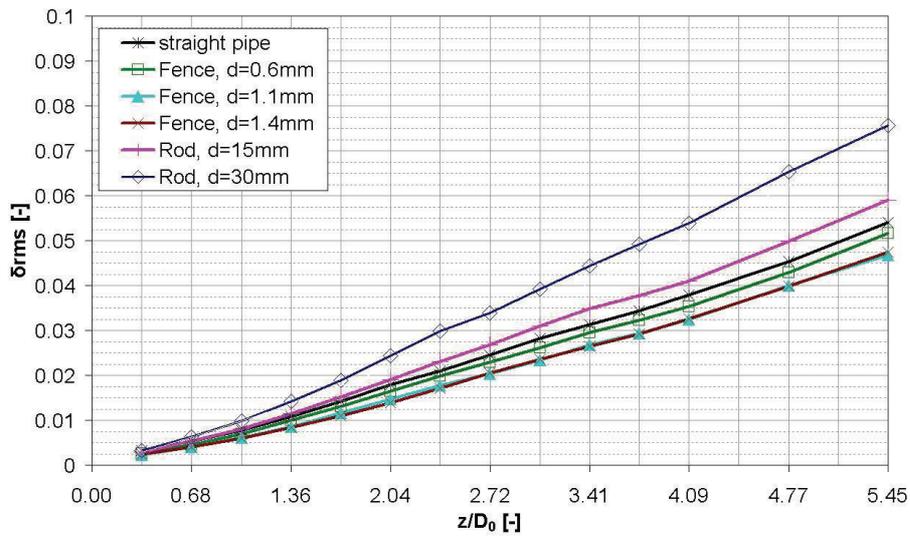


FIGURE 2.25 – Influence des grilles et barreaux sur les perturbations de l'interface

turbulente met en avant l'importance de la structure de l'écoulement en sortie d'injecteur et ce que ce soit du point de vue des écoulements secondaires ou des structures turbulentes. L'homogénéité des vitesses axiales, même si aucune preuve expérimentale ne l'a montré explicitement, semble être importante pour un bon transfert de l'énergie de l'eau à la roue. La différence entre les photos réalisées à l'échelle modèle et à l'échelle prototype nous laisse supposer qu'il est possible de voir de larges déformations de l'interface et la présence de gouttes avant l'interaction entre le jet et l'auget sur prototype. Ainsi la méthode numérique doit pouvoir être capable de simuler des écoulements multiphasés sans changement de phase, avec des perturbations de l'interface faibles (échelle modèle), et grandes (échelle prototype), tout en prenant en compte les effets de tension de surface. L'objectif de l'étude étant la connaissance de la transmission de l'énergie cinétique du jet aux augets, la méthode numérique doit pouvoir traiter l'interaction du jet avec une paroi solide en rotation. Il faut ainsi prêter une attention particulière au transport des informations imposées en condition d'entrée du jet jusqu'au transfert de l'énergie cinétique à l'auget.

Deuxième partie

Modèles physiques et développements numériques pour la méthode SPH-ALE

Chapitre 3

Mise en équations

3.1 Système d'équations

L'étude d'écoulements de fluides newtoniens est décrit par les équations de Navier-Stokes qui traduisent les conservations de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale, eq. 3.1.

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \\ \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \nabla \cdot (p \bar{\bar{I}}) = \mathbf{S} + \nabla \cdot \bar{\bar{T}} \\ \frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla \cdot (p \mathbf{v}) = \mathbf{S} \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (\bar{\bar{T}} \mathbf{v}) - \nabla \cdot (\dot{q}) + q_c \end{cases} \quad (3.1)$$

où ρ est la densité du fluide, \mathbf{v} la vitesse, e l'énergie totale spécifique (somme de l'énergie interne u et de l'énergie cinétique spécifique $\frac{1}{2}v^2$), p la pression thermodynamique, $\bar{\bar{T}}$ le tenseur des contraintes visqueuses et \dot{q} les flux de chaleur. \mathbf{S} et q_c , sont des termes sources représentant respectivement les forces extérieures et les sources de chaleur. Pour clore le système il est nécessaire d'ajouter une équation d'état qui décrit le comportement thermodynamique du fluide. Cette loi, tirée de l'expérience, relie par exemple l'énergie interne du fluide à sa pression et densité $u = u(p, \rho)$.

Ce système d'équations décrit de manière détaillée un ensemble de phénomènes variés de la mécanique des fluides. Cependant étant non linéaire il n'est pas possible, sauf cas particulier, de le résoudre de manière exacte. Pour en obtenir une résolution approchée, il est nécessaire de suivre deux démarches. La première : élaborer sur des considérations physiques issues de l'expérience, un ensemble d'hypothèses permettant de réduire la complexité du système. La seconde : réaliser une discrétisation des équations permettant d'obtenir une solution approchée des phénomènes en un nombre fini de points et à des instants discrets.

La première démarche est effectuée dans les sections suivantes. La seconde sera abordée dans la partie "Développements de la modélisation".

Les informations apportées par les expérimentations ont mis en avant l'importance de différents phénomènes géant la qualité d'un jet : à savoir des phénomènes inertiels incluant de forts ratios de densité entre les différents fluides, des phénomènes de déformations d'interface liées à la turbulence au sein du fluide et des phénomènes de tension de surface entre les différents fluides. L'objectif est donc ici de modéliser un écoulement à plusieurs phases, non miscibles et sans changement de phase. Les écoulements ainsi décrits ne sont pas soumis à des phénomènes thermiques importants. D'autre part le fluide dirigeant majoritairement l'écoulement est l'eau, qui peut être considérée

comme très faiblement compressible, et dont la viscosité moléculaire est très faible. Pour toutes ces raisons nous considérerons dans la suite que la température est constante dans l'écoulement et donc que l'énergie interne du fluide est constante. Il en résulte la possibilité d'éliminer l'équation d'énergie et que l'équation d'état est barotrope ($u(p, \rho) = \text{constante}$). D'autre part l'écoulement est considéré en première hypothèse comme non visqueux. Étant donné l'importance de la turbulence dans les écoulements visés cette hypothèse se révèle forte, mais néanmoins nécessaire pour simplifier dans un premier temps la mise sous forme discrétisée des équations.

Le système d'équations qui sera finalement résolu est donc celui des équations d'Euler pour un écoulement isotherme, eq. 3.2

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \\ \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \nabla \cdot (p \bar{\mathbf{I}}) = \mathbf{S} \end{cases} \quad (3.2)$$

3.2 Équation d'état

Comme cela a été évoqué auparavant, pour fermer le système d'équations, il est nécessaire d'utiliser une loi d'état qui décrive le comportement thermodynamique du fluide. Les hypothèses effectuées sur la nature des écoulements à simuler nous ont permis de nous limiter à une loi barotrope ($p = p(\rho)$). Dans ce cadre, la loi de Tait sera utilisée lors de cette étude, eq 3.3

$$p_i = \frac{\rho_{0i} c_{0i}^2}{\gamma} \left[\left(\frac{\rho_i}{\rho_{0i}} \right)^{\gamma_i} - 1 \right] + p_{0i} \quad (3.3)$$

où ρ_{0i} , p_{0i} et c_{0i} sont respectivement la densité, la pression et la vitesse du son de référence du fluide considéré. γ_i est le coefficient polytropique du fluide. En pratique on utilise $p_{0i} = 0$ et le choix de la vitesse du son de référence sera discuté au moment de la description du schéma d'intégration temporelle.

3.3 Conditions limites

3.3.1 Dynamiques

Les conditions aux limites dynamiques expriment la continuité des contraintes dans la direction normale \mathbf{n} entre deux milieux a,b :

$$\sigma_a : \mathbf{n} = \sigma_b : \mathbf{n} \quad (3.4)$$

où σ est le tenseur des contraintes surfaciques. Dans le cas des équations d'Euler, l'équation 3.4 impose une continuité de pression entre les deux milieux. Ce sera le cas notamment à l'interface entre deux fluides, sans tension de surface.

3.3.2 Cinématiques

Les conditions aux limites surfaciques traduisent l'imposition du déplacement du fluide. Cela est le cas au niveau d'une paroi par exemple. Dans ce cas, on distingue une condition de glissement, pour laquelle $\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}$, qui vérifie une condition de non pénétration entre les deux milieux et une condition d'adhérence, où $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_b$, qui vérifie aussi l'égalité des vitesses transverses entre les deux milieux, (fluides visqueux).

3.4 Tension superficielle

La tension de surface est un phénomène lié à un déséquilibre des forces de cohésion internes s'exerçant entre les différentes particules d'un fluide, [26]. Ces forces peuvent être des forces de van der Waals, des liaisons hydrogènes (eau), ioniques, ou encore métalliques (mercure). Au sein d'un milieu homogène toutes ces forces sont équilibrées par la présence des particules environnantes. Cependant à proximité d'une interface, un déséquilibre apparaît puisque les particules ne sont plus soumises à un ensemble de forces de cohésion isotropes. Nous voyons que sur la figure 3.1 (a), la particule centrale est entourée de voisines du même type et qu'ainsi l'ensemble des forces de cohésion s'équilibre pour cette particule. Dans le cas de la figure (b), la particule centrale voit un ensemble de particules d'un type différent. Il en résulte un déséquilibre entre les forces de cohésion issues d'interactions avec les particules environnantes. C'est ce phénomène qui est à l'origine de la tension de surface. Il en résulte une différence de pression entre les deux milieux modélisée par la loi de Laplace : $\Delta p = \sigma \kappa$ où Δp est la différence de pression, σ le coefficient de tension de surface (exprimé en Nm^{-1}) et κ la courbure de l'interface délimitant les deux milieux.

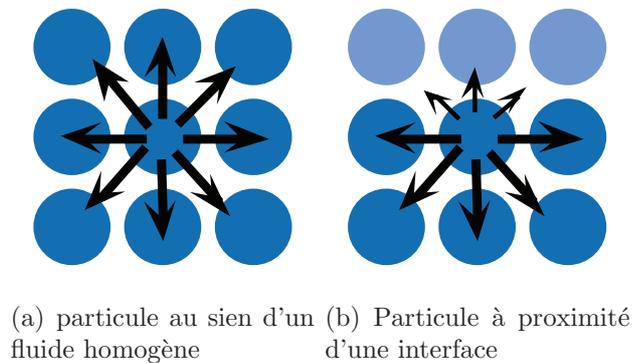


FIGURE 3.1 – Découpe de l'espace physique

L'implémentation des effets de tension de surface sera vu dans la partie 4.4.10.

Chapitre 4

Développements de la modélisation

4.1 Choix d'une méthode numérique

Maintenant que le système d'équations à résoudre est connu, chapitre 3, il est important de déterminer quelle doit être la stratégie à adopter pour les discrétiser, notamment en fonction de ce qui a déjà été réalisé au sein de la communauté scientifique.

Les phénomènes liés aux écoulements multiphasés sont présents dans de nombreux secteurs industriels (systèmes off-shores, nucléaires, systèmes d'injections, turbines hydrauliques...). De plus ceux-ci font souvent intervenir des mécanismes complexes comme les échanges de masse, de chaleur, ou des phénomènes de tension de surface. Ainsi que ce soit pour des raisons théoriques ou industrielles, ces phénomènes ont fait l'objet de nombreuses études en particulier du point de vue de la simulation numérique. Celles-ci ont été largement développées tout au long des quarante dernières années pour les écoulements multiphasés et peuvent être regroupées en différentes familles. Tout d'abord il est possible de les différencier en terme de caractérisation de l'interface, c'est-à-dire diffuse (Diffuse Interface Method - DIM) ou abrupte (Sharp Interface Method - SIM). Les méthodes à interface diffuse, DIM, considèrent les interfaces comme élargies sur plusieurs cellules de part et d'autre de cette interface. Loin de l'interface le comportement du fluide correspond au comportement classique d'un fluide seul. Cependant dans l'interface, le traitement thermodynamique du fluide doit être adapté pour décrire le comportement du mélange. Cette particularité représente la principale difficulté de ces méthodes ([4], [41], [62]).

Les méthodes à interfaces abruptes, SIM, se décomposent elles-même en différentes catégories selon que le maillage est fixe dans le repère considéré (formalisme eulérien) ou qu'il est mobile (formalisme lagrangien ou ALE, pour Arbitrary Lagrange Euler). Les méthodes à maillages fixes doivent ajouter un traitement particulier pour connaître la position de l'interface. Cela peut-être fait grâce à une méthode de Front-Tracking qui utilise des points qui représentent l'interface. Les grandeurs calculées à l'interface, comme la tension de surface, sont alors projetées sur le maillage eulérien pour résoudre les équations de Navier-Stokes, [76]. Cela peut-être aussi une méthode de Level-Set pour laquelle une fonction permet de déterminer la position de l'interface. Cette fonction représente la distance (signée) à l'interface pour chaque cellule du maillage. Le niveau 0 de la fonction représente donc la position de l'interface [74]. L'une des difficultés liées à l'utilisation de la méthode Level-Set est qu'elle ne permet pas à elle seule de garantir une conservation de la masse. D'autres méthodes reconstruisent explicitement l'interface à chaque pas de temps en utilisant l'advection de la fraction volumique [24]. Finalement la dernière catégorie de méthodes SIM

est celle à maillage mobile. C'est la méthode la plus naturelle car elle permet de suivre directement l'interface [36].

L'utilisation de ces différentes méthodes, ou une combinaison de celles-ci ([45], [73]) a montré une capacité certaine à reproduire les phénomènes physiques qui nous intéressent. Cependant notre cas d'étude présente tout de même certaines particularités. Les déformations à la périphérie du jet restent très faibles en comparaison des jets simulés dans d'autres secteurs d'activité : les simulations envisagées concernent des jets globalement cohérents (nous observons un jet sur une longueur 5 diamètres au maximum à partir de l'embouchure alors que cela correspond au début de la zone d'intérêt des jets dans les autres secteurs d'activité [32],[14]). D'autre part l'intérêt de l'étude n'est pas la connaissance de la topologie du jet en elle-même, mais son impact sur le champ de pression sur un auget. C'est-à-dire que la méthode numérique choisie doit être capable de gérer l'interaction du jet avec une surface mobile et de forme complexe. Aucun travail n'a pour l'instant, à notre connaissance, combiné le calcul d'un jet liquide très turbulent avec un solide en déplacement.

Dans ce cadre, des travaux récents sur la méthode SPH-ALE ont permis à celle-ci de montrer une capacité certaine à reproduire des interactions entre liquide et parois mobiles, [38], [40]. L'absence de topologie entre les différents volumes de contrôle la rend très adaptée aux larges déformations d'interfaces. Des travaux récents ont aussi montré la capacité de modéliser des écoulements avec différentes phases et permettant la reproduction des phénomènes de tension de surface, [23], [12], [2]. Finalement ce formalisme est très proche du formalisme Volumes Finis traditionnel ce qui permet l'adaptation de techniques numériques déjà développées avec des méthodes plus traditionnelles. Ainsi, étant sûr de la capacité de cette méthode de calculer l'impact d'un jet sur une paroi mobile, il a été choisi de l'adapter pour qu'elle puisse simuler des jets multiphasiques turbulents.

4.2 Description mathématique

Comme cela a été évoqué dans la partie précédente la méthode SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) est une méthode sans maillage, c'est-à-dire pour laquelle il n'y a pas de topologie qui relie les différents volumes de contrôle (ou particules) entre eux. Dans cette partie, 4.2, les fondements mathématiques de la méthode SPH sont décrits avant d'être appliqués aux équations d'Euler dans la partie suivante 4.3.

4.2.1 Description mathématique

La méthode SPH repose sur la reconstruction de champs à partir d'un nuage de points discrets et désordonnés. Pour comprendre les différentes caractéristiques mathématiques de la méthode, le point de départ est l'écriture de la méthode sous forme continue. A ce niveau, si on considère un champ scalaire ou vectoriel f suffisamment régulier, la valeur du champ peut être obtenue par convolution avec la fonction Dirac δ :

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) dV = f(x) \quad (4.1)$$

Où Ω est l'espace de frontière $\partial\Omega$. La relation 4.1 est exacte pour la fonction Dirac. Cependant, en pratique, la fonction Dirac est remplacée par une fonction régulière W . W est appelée fonction noyau (ou kernel) et est caractérisée par une longueur de lissage h mesurant la répartition des poids

autour du point considéré. W doit tendre vers la fonction Dirac lorsque h tend vers 0. L'équation 4.1 devient alors :

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle_h = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, h) dV \approx f(x) \quad (4.2)$$

Dans le but de comprendre les propriétés que doit vérifier la fonction kernel, nous étudions le développement en série de Taylor du champ f . Ce dernier est supposé ici au moins une fois dérivable, [38], [6].

$$f(\mathbf{x}') = f(\mathbf{x}) + (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) f'(\mathbf{x}) + o(\mathbf{x}' - \mathbf{x})^2 \quad (4.3)$$

Par convolution de l'équation précédente avec la fonction kernel W , on obtient :

$$\langle f(\mathbf{x}') \rangle = f(\mathbf{x}) \int_{\Omega} W(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, h) dV + f'(\mathbf{x}) \int_{\Omega} (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) W(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, h) dV + O(\mathbf{x}' - \mathbf{x})^2 \quad (4.4)$$

La formule 4.2 est donc précise à l'ordre 2 si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\int_{\Omega} W(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, h) dV = 1 \quad (4.5)$$

$$\int_{\Omega} (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) W(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, h) dV = 0 \quad (4.6)$$

La première condition traduit la capacité de la méthode à reproduire un champ constant, c'est la condition de normalisation. La seconde est liée à la capacité de la méthode à reproduire un champ linéaire. L'utilisation de noyaux symétriques permet de faciliter la vérification de cette condition. Cependant cela entraîne aussi l'incapacité de la méthode à reproduire correctement un champ si le domaine du noyau est intersectée par une frontière du domaine (on parle alors de noyaux tronqués).

L'intérêt majeur de la méthode SPH est sa capacité à reproduire le gradient des champs discrets à partir de la valeur de ces champs et du gradient de la fonction kernel. En effet, en faisant la même convolution que pour l'équation 4.2, le gradient du champ est égal à :

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\Omega} \nabla f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, h) dV \quad (4.7)$$

puis une intégration par partie permet de transformer l'équation précédente en :

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(\mathbf{x}) \rangle &= \int_{\Omega} \nabla [f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, h)] dV - \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \nabla_{x'} W(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, h) dV \\ &= \int_{\partial\Omega} f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, h) dV + \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \nabla_x W(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, h) dV \end{aligned} \quad (4.8)$$

Ainsi la dérivée du champ est obtenue par deux termes associés aux valeurs discrètes du champ lui-même. L'intégrale surfacique de l'équation 4.8 montre l'intérêt de disposer d'une fonction kernel à support compact. En effet cette intégrale est alors nulle si le support du kernel n'intersecte pas une frontière du domaine (h représente alors la taille du support compact et D le volume associé). Le calcul de la dérivée du champ se résume alors uniquement à l'intégrale de droite où intervient la dérivée de la fonction kernel.

Sous les mêmes conditions que pour l'évaluation de l'erreur du calcul du champ, il est possible de montrer que cette formulation continue est consistante à l'ordre 1. L'erreur est alors à l'ordre

2 en h . Il est de plus possible de montrer [38], que cet ordre ne peut être dépassé sans imposer l'utilisation de fonctions kernel négatives ce qui entraînerait des contradictions avec la physique décrite par les équations.

4.2.2 Fonction d'interpolation

Comme la partie précédente l'a mis en avant, le choix de la fonction kernel va impacter l'interpolation et donc la reconstruction des champs discrets (et de leurs gradients). L'obtention d'une reconstruction consistante à l'ordre 1, pas trop coûteuse (un nombre fini de voisin), et physiquement compatible impose à la fonction kernel d'être :

- une approximation de la fonction Dirac
- continue et dérivable
- normalisée $\int_{\Omega} W(\mathbf{x}' - \mathbf{x})dV = 1$
- symétrique
- positive
- à support compact
- à décroissance monotone

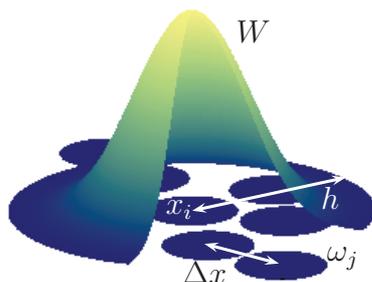


FIGURE 4.1 – Représentation schématique d'une fonction kernel et des volumes de discrétisation

Différents choix de fonctions kernel sont possibles. Un choix traditionnellement fait est l'utilisation de B-splines définies par morceaux. Ces fonctions s'écrivent sous la forme :

$$W(x, h) = \frac{c}{h^d} f\left(\frac{x}{h}\right) \quad (4.9)$$

où d est le nombre de dimensions spatiales et c une constante permettant de vérifier la propriété de normalisation.

La B-Spline kernel d'ordre 3 a été définie par Monaghan et Lattanzio [47]

$$f(q) = \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}q^2 + \frac{3}{4}q^3 & \text{si } 0 \leq q \leq 1 \\ \frac{1}{4}(2 - q)^2 & \text{si } 1 \leq q \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.10)$$

avec c qui prend les valeurs $10/7\pi$ ou $1/\pi$ en deux ou trois dimensions.

Cette fonction est définie par morceaux et est deux fois dérivable. Or Quinlan *et al.*, [63], et Amicarelli *et al.*, [6], ont montré que la régularité de la fonction kernel impacte les erreurs effectuées sur l'interpolation. Ainsi, aux fonctions B-splines, nous préférons les fonctions kernel de Wendland [71] définies par :

$$C(x, h) = \frac{c}{h^d} f\left(\frac{x}{2h}\right) \quad (4.11)$$

Pour la fonction C2, f est définie par :

$$f(q) = (1 - q)^4(4q + 1) \quad (4.12)$$

et c vaut $7/4\pi$ en 2D et $21/16\pi$ en 3D.

Pour la fonction C4, f est définie par :

$$f(q) = (1 - q)^6(35q^2 + 18q + 3) \quad (4.13)$$

et c vaut $3/4\pi$ en 2D et $165/256\pi$ en 3D.

Pour la fonction C6, f est définie par :

$$f(q) = (1 - q)^8(35q^3 + 25q^2 + 8q + 1) \quad (4.14)$$

et c vaut $39/14\pi$ en 2D et $1365/512\pi$ en 3D.

Les fonctions kernel de Wendland sont à support compact de rayon $2h$.

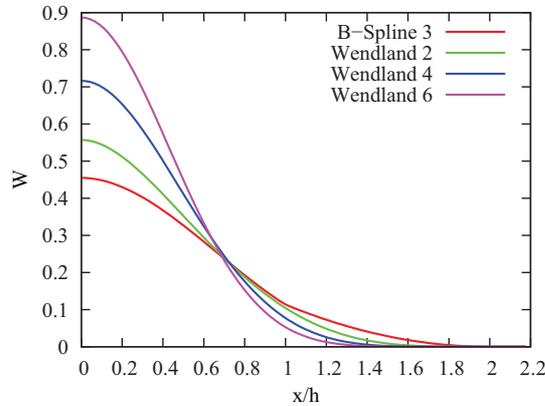


FIGURE 4.2 – Fonctions kernels

Les figures 4.2 et 4.3 montrent les différentes caractéristiques des différentes fonctions kernels. Nous pouvons d'une part observer que la dérivée seconde des kernels de Wendland reste dérivable et que d'autre part malgré le fait que toutes ces fonctions kernels soient à support compact, la valeur de W varie significativement entre elles. Par exemple la fonction kernel de Wendland C6 va accorder un poids plus important aux particules proches de celle considérée, alors que la B-Spline d'ordre 3 va en donner beaucoup aux particules éloignées en comparaison des autres fonctions. Ainsi nous pouvons nous attendre à des résultats différents au niveau des interpolations, la fonction kernel B-Spline d'ordre 3 devrait ainsi être plus stable mais devrait engendrer une plus grande diffusion numérique.

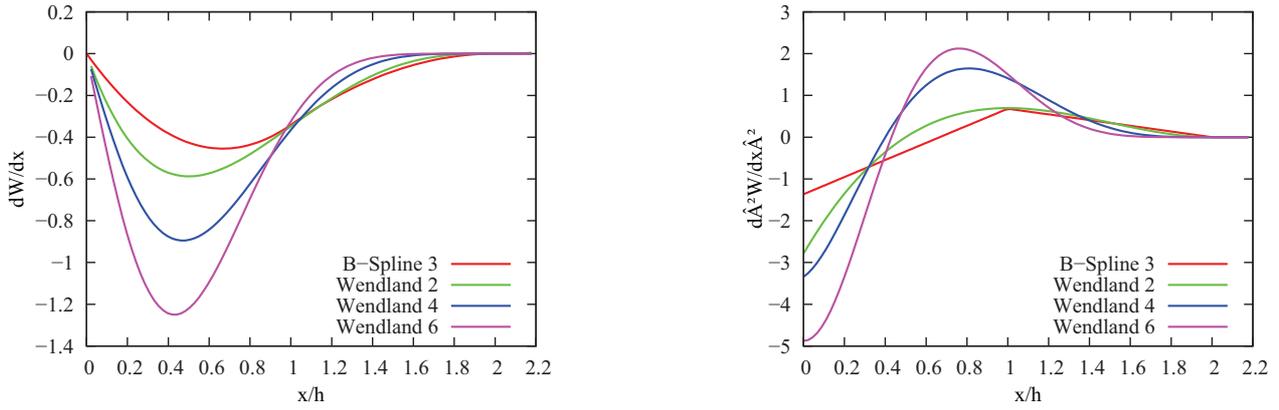


FIGURE 4.3 – Dérivée première (gauche) et seconde (droite) des fonctions kernels

4.2.3 Approximation particulière

La deuxième étape de la méthode SPH est le passage de la formulation continue à la formulation discrète pour l'interpolation de champs. Le domaine est donc découpé en un ensemble de volumes élémentaires ω_i dont le barycentre est situé en x_i . Dans cet espace discret, les équations 4.2 et 4.8 deviennent loin d'une frontière du domaine :

$$\begin{aligned} \langle f(\mathbf{x}_i) \rangle &= \int_{D_i} f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}', h_{x_i}) dx' \\ &\approx \sum_{j \in D_i} f(\mathbf{x}_j) W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h_{x_i}) \omega_j \end{aligned} \quad (4.15)$$

et

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(\mathbf{x}_i) \rangle &= \int_{D_i} f(\mathbf{x}') \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}', h_{x_i}) dx' \\ &\approx \sum_{j \in D_i} f(\mathbf{x}_j) \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h_{x_i}) \omega_j \end{aligned} \quad (4.16)$$

En pratique et pour des raisons physiques, il s'avère important de garantir l'égalité : $\nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h_{x_i}) = -\nabla W_{x_j}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i, h_{x_j})$. Or rien ne garantit que $h_{x_i} = h_{x_j}$ donc que cette équation soit bien vérifiée. Ainsi en pratique, et en particulier dans la suite de cette étude, le calcul du gradient de la fonction kernel utilise comme valeur de h la moyenne de h_{x_i} et de h_{x_j} (il en est de même pour la valeur de la fonction kernel elle-même, s'il y a besoin de la calculer).

4.2.4 Précision de la méthode et convergence de la méthode

Au niveau discret, pour que l'approximation particulière soit précise à l'ordre 2, il faut que les deux équations suivantes, déduites de eq. 4.5 et eq. 4.6, soient vérifiées :

$$\sum_{j \in D_i} \omega_j W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) = 1 \quad (4.17)$$

et

$$\sum_{j \in D_i} \omega_j \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) = \mathbf{0} \quad (4.18)$$

Or dans le cadre d'une simulation classique, ces deux équations ne sont pas vérifiées ce qui abaisse l'ordre des schémas.

Nous observons ici que l'ensemble des conditions liées à la précision de la méthode s'appuie sur deux dimensions spatiales différentes, l'une liée à la taille du kernel h et la seconde liée à la taille du volume discrétisé ω (nous notons la longueur associée à ce volume δx). Le rapport $h/\delta x$ détermine donc le nombre de particules qui seront utilisées pour les interpolations des champs. Raviart [65] définit la notion de convergence spatiale de cette méthode selon les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta x \rightarrow 0 \\ h \rightarrow 0 \\ \frac{h}{\delta x} \rightarrow \infty \end{array} \right. \quad (4.19)$$

Pour des raisons de coûts de calculs ces conditions ne sont pas vérifiées et un rapport $h/\delta x$ fini est choisi. Une étude de l'influence de ce rapport a été menée par G. Oger [53]. En règle générale ce rapport est choisi entre 1.2 et 2, ce qui correspond à une vingtaine de voisins en 2D. L'optimisation de ce rapport est en pratique relativement difficile à déterminer car elle dépend de l'homogénéité de répartition des points de calculs. Lors de l'étude des schémas numériques utilisés, la convergence spatiale de la méthode sera vérifiée selon ces critères.

4.2.5 Bilan

La méthode SPH est donc une méthode de reconstruction de champs et de leurs gradients s'appuyant sur une discrétisation spatiale désordonnée. Cette méthode souffre d'une précision théorique relativement faible et sujette à deux approximations (une liée à l'utilisation d'une fonction kernel et la seconde liée à la discrétisation numérique). Elle offre cependant des possibilités de calculs de champs malgré un désordre possible des points de calculs. C'est cette dernière propriété qui la rend attractive pour des méthodes lagrangienne ou ALE .

4.3 Le formalisme SPH-ALE

4.3.1 Présentation de la méthode

Cette partie reprend les travaux réalisés par J.-P. Vila [77] et repris notamment dans les travaux de P.-M. Guilcher [25], N. Grenier [22] et J.-C. Marongiu [38]. Dans le cas d'une description ALE les mouvements des particules sont décrits par :

$$\frac{d}{dt}(x_i) = v_0(x_i, t) \quad (4.20)$$

L'évolution du volume associé à chaque particule est alors donnée par [65] :

$$\frac{d}{dt}(\omega_i) = \omega_i \nabla \cdot (v_0(x_i, t)) \quad (4.21)$$

4.3.1.1 Bilan de flux

Le formalisme utilisé dans ces travaux repose sur le formalisme ALE (Arbitrary Lagrange Euler) adapté à la méthode SPH. Cette méthode a été développée par Jean-Paul Vila [77]. Elle repose sur

une formulation conservative des équations d'Euler écrites pour un volume mobile et se déplaçant à une vitesse arbitraire v_0 (d'où le nom de Arbitrary Lagrange Euler, puisque cette vitesse peut être nulle, formalisme eulérien, égale à celle du fluide, formalisme lagrangien, ou autre). Le bilan des variables conservatives sur un volume Ω de frontière S s'écrit :

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{v_0} \int_{\Omega} \Phi d\Omega + \int_S \Phi (v - v_0) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} S d\Omega \quad (4.22)$$

où Φ désigne le vecteur des variables conservatives $(\rho, \rho v)$, \mathbf{n} le vecteur normal sortant de Ω et S le terme source volumique. En transformant le terme surfacique en intégrale volumique et en permutant l'opérateur dérivée et intégrale (théorème de Reynolds) l'équation 4.22 devient :

$$L_{v_0}(\Phi) + \nabla \cdot (F(\Phi, t, v_0)) = S \quad (4.23)$$

où L_{v_0} est le terme de transport associé à v_0 , F est le vecteur de flux. Ces expressions s'écrivent :

$$L_{v_0}(\Phi) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \text{div}(v_0 \otimes \Phi) \quad \text{et} \quad F(\Phi, t, v_0) = F_E(\Phi) - v_0 \otimes \Phi \quad (4.24)$$

En 2D, les flux eulériens F_E s'écrivent :

$$F_E^{(1)}(\Phi) = \begin{pmatrix} \rho v^{(1)} \\ p + \rho (v^{(1)})^2 \\ \rho v^{(1)} v^{(2)} \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

$$F_E^{(2)}(\Phi) = \begin{pmatrix} \rho v^{(2)} \\ \rho v^{(1)} v^{(2)} \\ p + \rho (v^{(2)})^2 \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

Ce formalisme permet donc de décrire l'écoulement à l'aide des bilans de grandeurs conservatives, à travers un volume de contrôle se déplaçant à une vitesse arbitraire. Cette dernière propriété fait apparaître des termes de flux associés au champ de transport v_0 . L'utilisation des grandeurs conservatives permet de considérer des quantités qui sont conservées à travers des discontinuités comme des ondes de choc ou des discontinuités de contact.

4.3.1.2 Solution faible du système d'équations

La résolution des équations d'Euler pour des fluides compressibles fait que nous cherchons des solutions qui peuvent être discontinues. Il est donc nécessaire d'introduire la formulation faible du système d'équation qui permet la prise en compte de ces solutions. Pour obtenir une formulation faible de la méthode SPH différentes méthodes sont possibles :

- la première consiste à convoluer les termes des équations de conservation par la fonction Dirac à l'exception du terme de flux qui est convolué avec la fonction kernel [77]
- la seconde consiste à faire une convolution des équations de conservation dans leur ensemble par la fonction kernel
- la troisième consiste à travailler sur la forme faible (au sens mathématique du terme) des équations de conservation et à utiliser les propriétés de la méthode SPH au niveau de la discrétisation spatiale [77]

Dans les parties suivantes $\overset{\circ}{D}$ désigne l'intérieur de D , ∂D sa frontière et pour simplifier les notations nous posons $f(\mathbf{x}_i) = f_i$, $W_{x_i}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h) = W_{ij}$ et $\nabla W_{x_i}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h) = \nabla W_{ij}$.

Première méthode :

Cette première méthode reprend une méthode présentée par Vila [77]. Elle consiste à faire une convolution des équations de conservation 4.23 avec deux opérateurs différents :

$$\Pi f_i = \sum_{j \in D_i} \omega_j f_j \delta(x_j - x_i) \quad (4.27)$$

et

$$\Pi^h f_i = \sum_{j \in D_i} \omega_j f(x_j) W_{ij} \quad (4.28)$$

L'opérateur gradient associé en négligeant le traitement des termes de paroi est alors :

$$\nabla \Pi^h f_i = \sum_{j \in D_i} \omega_j f_j \nabla W_{ij} \quad (4.29)$$

Vila effectue une convolution par la fonction kernel uniquement aux endroits qui nécessitent sa dérivation. Les autres termes sont convolués avec la fonction Dirac. L'équation 4.23 devient alors :

$$L_{v_0}(\Pi \Phi) + \Pi [\text{div} \Pi^h (F(\Phi, t, v_0))] = \Pi S \quad (4.30)$$

Il est intéressant de noter que pour l'équation précédente, une approximation spatiale n'est réellement effectuée que pour les termes de flux puisque la fonction Dirac n'a pas d'extension spatiale, équation 4.30. L'équation finale discrétisée est [77] :

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{v_0} \omega_i \Phi_i + \omega_i \sum_{i \in D_i} \omega_j F_j \nabla W_{ij} = \omega_i S_i \quad (4.31)$$

L'équation 4.31 n'est pas conservative. Pour corriger cela, Vila propose d'ajouter la dérivée de l'unité (qui est un terme nul si l'équation 4.18 est vérifiée) pour donner finalement :

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{v_0} \omega_i \Phi_i + \omega_i \sum_{j \in D_i} \omega_j (F_i + F_j) \nabla W_{ij} = \omega_i S_i \quad (4.32)$$

L'opérateur gradient associé est alors :

$$\nabla \Pi^h f_i = \sum_{j \in D_i} \omega_j (f_j + f_i) \nabla W_{ij} \quad (4.33)$$

ce qui permet d'avoir un formalisme conservatif à partir de l'opérateur gradient 4.33. Étant donné que l'opérateur gradient ne fait pas intervenir de termes de parois, ceux-ci n'apparaissent pas dans l'équation bilan 4.32 (ceci revient à se placer loin des frontières du domaine).

Seconde méthode :

Le point de départ de cette méthode est identique à celui de la méthode précédente. Cependant

cette fois-ci on effectue une convolution de l'ensemble des équations de conservation par la fonction kernel et ceci sous forme continue :

$$\int_{D_x} (L_{v_0}(\Phi) + \nabla \cdot (F(\Phi, t, v_0))) W dx' = \int_{D_x} SW dx' \quad (4.34)$$

Dès ce point nous pouvons remarquer que cette méthode s'écarte de la précédente puisque tous les termes sont soumis à l'approximation spatiale.

$$\int_{D_x} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla_{x'} \cdot (v_0 \otimes \Phi) + \nabla_{x'} \cdot (F(\Phi, t, v_0)) \right] W dx' = \int_{D_x} SW dx' \quad (4.35)$$

En intégrant par partie l'équation précédente devient :

$$\begin{aligned} \int_{D_x} \left[\frac{\partial \Phi W}{\partial t} - \Phi \frac{\partial W}{\partial t} + \nabla_{x'} \cdot (\Phi W \otimes v_0) - v_0 \Phi \nabla_{x'} W + \nabla_{x'} \cdot (F(\Phi, t, v_0) W) - F(\Phi, t, v_0) \nabla_{x'} W \right] dx' \\ = \int_{D_x} SW dx \end{aligned} \quad (4.36)$$

Le théorème de Reynolds nous permet d'obtenir l'équation 4.37 et ainsi de regrouper le premier et le troisième termes de l'équation précédente.

$$\frac{d}{dt} \Big|_{v_0} \int_{D_x} \Phi W dx' = \int_{D_x} \frac{\partial \Phi W}{\partial t} dx' + \int_{D_x} \nabla_{x'} \cdot (\Phi W \otimes v_0) dx' \quad (4.37)$$

D'autre part :

$$\int_{D_x} \nabla_{x'} \cdot (F(\Phi, t, v_0) W) dx' = \int_{\partial D_x} F(\Phi, t, v_0) W \mathbf{n} ds \quad (4.38)$$

Finalement on suppose que $\frac{d}{dt} \Big|_{v_0} W = 0$, ce qui permet d'annuler la somme du deuxième et du quatrième terme de l'équation 4.36.

L'équation finale est :

$$\frac{d}{dt} \Big|_{v_0} \int_{D_x} \Phi W dx' - \int_{D_x} (F(\Phi, t, v_0) \nabla_{x'} W) dx' + \int_{\partial D_x} F(\Phi, t, v_0) W \mathbf{n} ds = \int_{D_x} SW dx' \quad (4.39)$$

L'équation précédente est une forme faible des équations de conservation adaptée à la formulation SPH-ALE.

Pour discrétiser spatialement cette équation, on étudie le premier terme de l'équation 4.39 :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{v_0} \int_{D_x} \Phi W dx' &= \frac{d}{dt} \Big|_{v_0} \Phi^h \\ &= \frac{1}{\omega_i} \frac{d}{dt} \Big|_{v_0} \omega_i \Phi^h - \frac{\Phi^h}{\omega_i} \frac{d}{dt} \Big|_{v_0} \omega_i \\ &= \frac{1}{\omega_i} \frac{d}{dt} \Big|_{v_0} \omega_i \Phi^h - \Phi^h \nabla \cdot v_{0_i} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Si on suppose le champ de transport est à divergence nulle, on peut alors écrire :

$$\frac{d}{dt} \Big|_{v_0} \int_{D_i} \Phi W dx' = \frac{1}{\omega_i} \frac{d}{dt} \Big|_{v_0} \omega_i \Phi_i \quad (4.41)$$

En supposant que $\nabla_{x'}W = -\nabla_x W$, la forme discrétisée est :

$$\frac{d\omega_i \Phi_i}{dt} + \omega_i \sum_{j \in D_i} \omega_j F_j \nabla W_{ij} + \omega_i \sum_{j \in \partial D_i} \omega_j F_j W_{ij} = \omega_i \sum_{j \in D_i} \omega_j S_j W_{ij} \quad (4.42)$$

Comme c'était le cas pour l'équation 4.31, ce système n'est donc pas conservatif. On peut le rendre conservatif avec la même technique que précédemment, c'est-à-dire en ajoutant la dérivée de l'unité :

$$\frac{d\omega_i \Phi_i}{dt} + \omega_i \sum_{j \in D_i} \omega_j (F_i + F_j) \nabla W_{ij} + \omega_i \sum_{j \in \partial D_i} \omega_j (F_i + F_j) W_{ij} = \omega_i \sum_{j \in D_i} \omega_j S_j W_{ij} \quad (4.43)$$

L'opérateur gradient associé est alors :

$$\nabla f_i = \sum_{j \in \dot{D}_i} \omega_j (f_i + f_j) \nabla W_{ij} + \sum_{j \in \partial D_i} \omega_j (f_i + f_j) W_{ij} \mathbf{n}_j \quad (4.44)$$

Nous pouvons observer que par rapport à l'équation 4.32, l'équation 4.43 fait intervenir une convolution des termes sources sur D_i . Ainsi la convolution de l'ensemble des équations de conservation par la fonction kernel fait intervenir une notion de moyenne spatiale des termes sources que la convolution par la fonction Dirac de la première méthode ne faisait pas intervenir. Finalement cette écriture fait naturellement intervenir les termes aux frontières de D (qui ne sont pas nuls si D intercepte les frontières du domaine).

Troisième méthode :

Cette méthode est présentée par Vila, [77]. Elle est différente des deux précédentes par la méthode utilisée. En effet cette méthode consiste à utiliser la formulation faible au sens mathématique du terme de l'équation 4.23. Cette dernière s'obtient en multipliant l'équation 4.23 par une fonction ϕ quelconque :

$$\forall \phi \in C_0^2(\mathbb{R}^d * \mathbb{R}^{+,*}) \int_{\mathbb{R}^d * \mathbb{R}^+} [L_{v_0}(\Phi) \cdot \phi + \text{div}(F(\Phi, t, v_0)) \cdot \phi - S \cdot \phi] d\omega dt = 0 \quad (4.45)$$

Il est alors possible de reporter les dérivées sur la fonction ϕ tout en gardant la forme continue de l'équation :

$$\forall \phi \in C_0^2(\mathbb{R}^d * \mathbb{R}^{+,*}) \int_{\mathbb{R}^d * \mathbb{R}^+} [\Phi \cdot L_{v_0}^*(\phi) + F(\Phi, t, v_0) \cdot \nabla(\phi) + S \cdot \phi] d\omega dt = 0 \quad (4.46)$$

Cette démarche fait apparaître l'opérateur adjoint $L_{v_0}^*$ qui s'écrit :

$$L_{v_0}^*(\phi) = \frac{\partial \phi}{\partial t} + v_0 \cdot \nabla(\phi) = \frac{d}{dt} \Big|_{v_0} \phi \quad (4.47)$$

Il est à noter que le passage de l'équation 4.45 à 4.46 a nécessité l'annulation du terme $\int_{\mathbb{R}^d} \nabla \cdot (F(\Phi, t, v_0) \otimes \phi)$. Ceci semble supposer (en transformant l'intégrale volumique en intégrale de surface) que ϕ s'annule quand chacune des coordonnées du point d'intégration tend vers l'infini (on est alors sur la frontière de \mathbb{R}^d).

Ensuite la discrétisation spatiale de l'équation 4.46 se fait en remplaçant l'opérateur continu gradient ∇ par sa forme discrétisée notée ici D_h et le produit scalaire par :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Phi \cdot \phi d\omega \longrightarrow (\Phi, \phi)_h = \sum_{i \in \Omega} \omega_i \Phi_i \phi_i \quad (4.48)$$

La discrétisation spatiale donne ainsi :

$$\forall \phi \in C_0^2(\mathbb{R}^d * \mathbb{R}^{+,*}) \int_{\mathbb{R}^+} [(\Phi, L_{v_0}^*(\phi))_h + (F(\Phi, t, v_0), D_h(\phi))_h + (S, \phi)_h] dt = 0 \quad (4.49)$$

L'objectif est alors de faire porter les dérivées spatiales sur Φ . Pour cela on utilise d'une part l'opérateur adjoint D_h^* de D_h qui vérifie par définition :

$$(\Phi, D_h(\phi))_h = -(D_h^*(\Phi), \phi)_h \quad (4.50)$$

Et d'autre part en remarquant que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_i} \frac{d\omega_i \Phi_i}{dt} &= \frac{d\Phi_i}{dt} + \frac{\Phi_i}{\omega_i} \frac{d\omega_i}{dt} \\ &= \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\Phi_i v_0) \\ &= L_{v_0}(\Phi) \end{aligned} \quad (4.51)$$

on obtient l'égalité suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^+} (\Phi, L_{v_0}^*(\phi))_h dt = - \int_{\mathbb{R}^+} \left(\frac{1}{\omega} \frac{d\omega \Phi}{dt}, \phi \right)_h dt \quad (4.52)$$

Ainsi en tenant compte des équations 4.50 et 4.52, on peut à nouveau faire porter les termes de dérivés, cette fois-ci au niveau discret, sur les vecteurs Φ et $F(\Phi, t, v_0)$. L'équation discrétisée 4.49 devient :

$$\forall \phi \in C_0^2(\mathbb{R}^d * \mathbb{R}^{+,*}) \int_{\mathbb{R}^+} \left[- \left(\frac{1}{\omega} \frac{d\omega \Phi}{dt}, \phi \right)_h - (D_h^*(F(\Phi, t, v_0)), \phi)_h + (S, \phi)_h \right] dt = 0 \quad (4.53)$$

L'équation 4.53 étant vérifiée pour toute fonction ϕ , le schéma discret final est :

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{v_0} \omega_i \Phi_i + \omega_i D_h^*(F(\Phi, t, v_0))_i = \omega_i S_i \quad (4.54)$$

Cette méthodologie a donc utilisé la fonction test ϕ comme intermédiaire de calcul pour obtenir l'équation 4.54. Ainsi la forme discrétisée de la formulation faible du système de lois de conservation fait intervenir l'adjoint de l'opérateur de dérivation. A ce stade aucune hypothèse sur l'opérateur de dérivation n'a dû être faite. Nous allons ainsi voir dans la partie suivante les implications du choix de l'opérateur gradient (et donc de son opérateur adjoint) sur le système discrétisé final pour cette méthode.

4.3.1.3 Choix de l'opérateur de dérivation pour la méthode avec opérateur adjoint

Le choix de l'opérateur de dérivation va influencer le bilan des flux par l'intermédiaire de son adjoint, eq 4.54. L'opérateur de dérivation doit vérifier l'équation (eq. 4.18) :

$$\sum_{j \in D_i} \omega_j \nabla W_{ij} = \mathbf{0} \quad (4.55)$$

Cette équation n'est pas vérifiée en général. Pour améliorer tout de même l'opérateur gradient, une technique consiste à retrancher le gradient du champ unité pour s'assurer que le gradient d'un champ constant est nul :

$$\begin{aligned} \nabla f_i &= \nabla f_j - f_i < \nabla(1) > \\ &= \sum_{j \in \tilde{D}_i} \omega_j (f_j - f_i) \nabla W_{ij} + \sum_{j \in \partial D_i} \omega_j (f_j - f_i) W_{ij} \mathbf{n}_j \\ &= \sum_{j \in D_i} \omega_j (f_j - f_i) A_{ij} \text{ avec } A_{ij} = \begin{cases} \nabla W_{ij} & \text{si } j \text{ fluide} \\ W_{ij} \mathbf{n}_j & \text{si } j \text{ paroi} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.56)$$

L'équation 4.56 donne l'opérateur gradient avec les termes de parois. Nous pouvons alors trouver l'opérateur adjoint associé à cette formulation de l'opérateur gradient (avec le produit scalaire défini à l'équation eq. 4.48) :

$$\begin{aligned} (\nabla f, g) &= \sum_{i \in \Omega} \omega_i \nabla f_i g_i \\ &= \sum_{i \in \Omega} \omega_i \left(\sum_{j \in D_i} \omega_j (f_j - f_i) A_{ij} \right) g_i \\ &= \sum_{i \in \Omega} \omega_i \left(\sum_{j \in \Omega} \omega_j (f_j - f_i) A_{ij} \right) g_i \\ &= \sum_{i \in \Omega} \omega_i \sum_{j \in \Omega} \omega_j f_j A_{ij} g_i - \sum_{i \in \Omega} \omega_i \sum_{j \in \Omega} \omega_j f_i A_{ij} g_i \\ &= \sum_{j \in \Omega} \omega_j \sum_{i \in \Omega} \omega_i f_i A_{ji} g_j - \sum_{i \in \Omega} \omega_i \sum_{j \in \Omega} \omega_j f_i A_{ij} g_i \\ &= \sum_{i \in \Omega} \omega_i \sum_{j \in \Omega} \omega_j f_i A_{ji} g_j - \sum_{i \in \Omega} \omega_i \sum_{j \in \Omega} \omega_j f_i A_{ij} g_i \\ &= - \sum_{i \in \Omega} \omega_i f_i \left(\sum_{j \in \Omega} \omega_j (g_i A_{ij} - g_j A_{ji}) \right) \end{aligned} \quad (4.57)$$

L'opérateur adjoint est alors :

$$\begin{aligned} \nabla^* g_i &= \sum_{j \in \Omega} \omega_j (g_i A_{ij} - g_j A_{ji}) \\ &= \sum_{j \in \tilde{D}_i} \omega_j (g_i \nabla W_{ij} - g_j \nabla W_{ji}) + \sum_{j \in \partial D_i} \omega_j (g_i W_{ij} \mathbf{n}_j + g_j W_{ji} \mathbf{n}_j) \\ &= \sum_{j \in \tilde{D}_i} \omega_j (g_i + g_j) \nabla W_{ij} + \sum_{j \in \partial D_i} \omega_j (g_i + g_j) W_{ij} \mathbf{n}_j \end{aligned} \quad (4.58)$$

Comme nous l'observons ici, l'équation 4.58 fait apparaître un opérateur adjoint qui donne une forme conservative de l'équation 4.54. L'équation 4.54 devient ainsi :

$$\frac{d\omega_i\Phi_i}{dt} + \omega_i \sum_{j \in \mathring{D}_i} \omega_j (F_i + F_j) \cdot \nabla W_{ij} + \omega_i \sum_{j \in \partial D_i} \omega_j (F_i + F_j) W_{ij} \mathbf{n}_j = \omega_i S_i \quad (4.59)$$

Cette équation est identique à celle obtenue par la seconde méthode au terme source près qui n'est pas ici moyenné. D'autre part cette équation a été obtenue en partant d'un opérateur gradient qui permet d'avoir le gradient d'un champ constant identiquement nul, eq. 4.56.

4.3.1.4 Renormalisation

La renormalisation est une technique visant à augmenter l'ordre de précision du schéma SPH. Cette méthode a été présentée par Johnson et Beisel [29] et Randles et Libersky [64]. Elle a pour but d'apporter une correction discrète du calcul du gradient afin que l'opérateur différentiel soit d'ordre 1. En effet de manière discrète les équations 4.17 et 4.18 n'étant pas vérifiées, le calcul exact du gradient d'un champ linéaire n'est pas assuré. Avec la renormalisation, l'opérateur dérivation s'écrit :

$$\begin{aligned} (\nabla f)_i &= \sum_{j \in \mathring{D}_i} \omega_j (f_j - f_i) B_i \nabla W_{ij} + \sum_{j \in \partial D_i} \omega_j (f_j - f_i) B_i W_{ij} \mathbf{n}_j \\ &= \sum_{j \in D_i} \omega_j (f_j - f_i) A_{ij} \quad \text{avec} \quad A_{ij} = \begin{cases} B_i \nabla W_{x_i}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h) & \text{si } j \text{ fluide} \\ W_{x_i}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h) B_i \mathbf{n}_j & \text{si } j \text{ parois} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.60)$$

où B_i est la matrice de renormalisation au point i . B_i doit permettre de calculer le gradient d'un champ linéaire de la forme $f(\mathbf{x}) = a + \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}$, c'est à dire qu'elle doit vérifier l'équation :

$$\mathbf{b} \cdot \left[\left(\sum_{j \in D_i} \omega_j (x_j - x_i) \otimes \nabla W_{ij} \right) \cdot B_i \right] = b \cdot I \quad (4.61)$$

Ainsi B_i est définie par :

$$B_i = \left(\sum_{j \in D_i} \omega_j (x_j - x_i) \otimes \nabla W_{ij} \right)^{-1} \quad (4.62)$$

Cette correction entraîne, pour chaque volume discrétisé, le calcul et l'inversion d'une matrice de taille d^2 , ce qui n'est pas négligeable en terme de temps de calcul. Cependant en plus d'un gain en précision, Vila [77] a montré que l'utilisation de la renormalisation relâche la condition de convergence spatiale 4.19 et qu'il suffit de garantir $\Delta x/h = O(1)$.

L'opérateur adjoint associé à ce nouvel opérateur de dérivation est alors :

$$\begin{aligned} \nabla^* g_i &= \sum_{j \in \Omega} \omega_j (g_i A_{ij} - g_j A_{ji}) \\ &= \sum_{j \in \mathring{D}_i} \omega_j (g_i B_i \nabla W_{ij} - g_j B_j \nabla W_{ji}) + \sum_{j \in \partial D_i} \omega_j (g_i W_{ij} B_i \mathbf{n}_j + g_j W_{ji} B_i \mathbf{n}_j) \\ &= \sum_{j \in \mathring{D}_i} \omega_j (g_i B_i + g_j B_j) \nabla W_{ij} + \sum_{j \in \partial D_i} \omega_j (g_i + g_j) W_{ij} B_i \mathbf{n}_j \end{aligned} \quad (4.63)$$

Vila [77] a aussi introduit une formulation plus compacte en considérant que $B_i \approx B_j$

$$\begin{aligned} g_i B_i + g_j B_j &= (g_i + g_j) \frac{B_i + B_j}{2} + (g_i - g_j) \frac{B_i - B_j}{2} \\ &\approx (g_i + g_j) \frac{B_i + B_j}{2} \end{aligned} \quad (4.64)$$

Si on pose $B_{ij} = \frac{B_i + B_j}{2}$, l'opérateur adjoint est alors :

$$\nabla^* g_i = \sum_{j \in \dot{D}_i} (g_i + g_j) B_{ij} \nabla W_{ij} \omega_j - \sum_{j \in \partial D_i} \omega_j (g_i + g_j) W_{ij} B_i \mathbf{n}_j \quad (4.65)$$

4.3.1.5 Système d'équations pour la méthode "adjointe"

L'application des adjoints de l'opérateur dérivation au système 4.54, nous permet d'obtenir trois systèmes différents dépendant de l'opérateur dérivation initial :

– opérateur eq 4.58 :

$$\frac{d\omega_i \Phi_i}{dt} + \omega_i \sum_{j \in \dot{D}_i} \omega_j (F_i + F_j) \cdot \nabla W_{ij} + \omega_i \sum_{j \in \partial D_i} \omega_j (F_i + F_j) W_{ij} \mathbf{n}_j = \omega_i S_i \quad (4.66)$$

– opérateur renormalisé, eq 4.63 :

$$\frac{d\omega_i \Phi_i}{dt} + \omega_i \sum_{j \in \dot{D}_i} \omega_j (F_i B_i \nabla W_{ij} - F_j B_j \nabla W_{ji}) + \omega_i \sum_{j \in \partial D_i} \omega_j (F_i W_{ij} B_i \mathbf{n}_j - F_j W_{ji} B_j \mathbf{n}_j) = \omega_i S_i \quad (4.67)$$

– opérateur renormalisé symétrique, eq 4.65 :

$$\frac{d\omega_i \Phi_i}{dt} + \omega_i \sum_{j \in \dot{D}_i} \omega_j (F_i + F_j) B_{ij} \nabla W_{ij} + \omega_i \sum_{j \in \partial D_i} \omega_j (F_i + F_j) W_{ij} B_{ij} \mathbf{n}_j = \omega_i S_i \quad (4.68)$$

On peut remarquer que, tenant compte de la symétrie de la fonction kernel ($\nabla W_{ij} = -\nabla W_{ji}$), ces trois systèmes sont bien conservatifs au niveau discret. D'autre part, ils ont été obtenus avec des opérateurs gradients qui permettent de vérifier que le gradient d'un champ constant est identiquement nul. Ils font finalement apparaître naturellement les termes frontières. Ainsi des trois méthodes décrites dans la partie 4.3.1.2, c'est la méthode adjointe que nous retiendrons pour le reste de l'étude. Le traitement des termes de parois ne sera pas abordé. Nous nous placerons ainsi loin des frontières du domaine. Pour l'étude du traitement des éléments frontières, nous invitons le lecteur à s'intéresser aux travaux de Marongiu [38]. À ce point de l'étude, il est maintenant intéressant d'évaluer la proximité de ce formalisme avec une méthode numérique classique qui est celle des Volumes-Finis.

4.3.1.6 Analogie avec la méthode de volumes finis et problèmes de Riemann

Le but est ici de voir les analogies et différences de cette méthode avec celle des Volumes-Finis. Cette dernière technique est utilisée pour résoudre les équations de conservation. Pour cela

l'espace physique est découpé en un nombre fini de volumes de contrôle de volume ω sur lesquels s'appliquent les équations de conservation. En deux dimensions d'espace cela donne :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial F_E^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial F_E^{(2)}}{\partial y} = 0 \quad (4.69)$$

L'intégration de cette équation sur un volume de contrôle i donne :

$$\frac{d}{dt} \int_{D_i} \Phi(\mathbf{x}, t) d\omega + \int_{D_i} \left(\frac{\partial F_E^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial F_E^{(2)}}{\partial y} \right) d\omega = 0 \quad (4.70)$$

équation qui devient en utilisant le théorème de Green :

$$\frac{d}{dt} \int_{D_i} \Phi(\mathbf{x}, t) d\omega + \int_{\partial D_i} F_E \cdot \mathbf{n} ds = 0 \quad (4.71)$$

où \mathbf{n} est la normale sortante du volume i et ds un élément de surface.

Tenant compte de la discrétisation et de la topologie des frontières entre les volumes de contrôle, l'équation 4.71 devient sous forme discrétisée :

$$\frac{d}{dt} \omega_i \Phi_i + \sum_j s_j F_{ij} \cdot \mathbf{n}_{ij} = 0 \quad (4.72)$$

Ainsi l'évolution des quantités conservatives du volume de contrôle i dépend de la somme des flux $s_j F_{ij} \cdot \mathbf{n}_{ij}$ échangés avec chaque volume voisin j . La conservativité de la méthode au niveau discret est assurée en prenant $F_{ij} \cdot \mathbf{n}_{ij} = -F_{ji} \cdot \mathbf{n}_{ji}$. Le flux numérique F_{ij} est construit entre chaque paire de volumes de contrôle voisins en remarquant que, projeté dans la direction entre i et j , ce problème revient à résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\Phi) + \frac{\partial}{\partial x^{n_{ij}}} F_E(\Phi) \cdot \mathbf{n}_{ij} \\ \Phi(x^{(n_{ij})}, 0) = \begin{cases} \Phi_i & \text{si } x^{(n_{ij})} < 0 \\ \Phi_j & \text{si } x^{(n_{ij})} > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (4.73)$$

où n_{ij} est le vecteur unitaire entre les volumes i et j (orienté de i vers j), x_{ij} est le milieu du segment joignant i et j , $x^{n_{ij}}$ est l'abscisse curviligne entre i et j (dont l'origine est prise en x_{ij}), et Φ_i et Φ_j sont les vecteurs des variables conservatives en i et j .

C'est un problème monodimensionnel à condition initiale discontinue académique appelé problème de Riemann. Sa solution, notée Φ_E , dépend des états Φ_i , Φ_j et du rapport x/t . La structure de cette solution et son obtention seront présentées dans la partie 4.3.2.

A ce stade nous pouvons remarquer que l'équation 4.72 est proche de celle établie dans le cadre de la méthode SPH-ALE, eq. 4.66 :

$$\frac{d\omega_i \Phi_i}{dt} + \omega_i \sum_j \omega_j (F_i + F_j) \cdot \nabla W_{ij} = 0 \quad (4.74)$$

(Les termes source et de parois ne sont pas étudiés ici.) En observant cela, Vila [77], a eu l'idée d'identifier le terme $(F_i + F_j)$ à deux fois le flux résultant du problème de Riemann associé aux

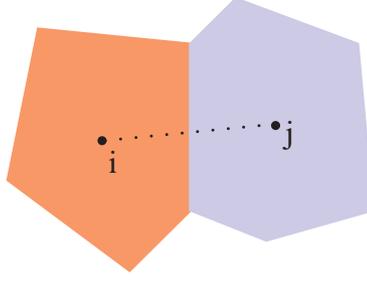


FIGURE 4.4 – Schéma de frontière entre deux volumes discrets - formulation Volumes-Finis

particules i et j . Ce problème de Riemann s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}(\Phi) + \frac{\partial}{\partial x^{n_{ij}}} (F_E(\Phi) \cdot n_{ij} - v_0(x_{ij}, t) \cdot n_{ij} \Phi) = 0 \\ \Phi(x^{(n_{ij})}, 0) = \begin{cases} \Phi_i & \text{si } x^{(n_{ij})} < 0 \\ \Phi_j & \text{si } x^{(n_{ij})} > 0 \end{cases} \end{array} \right. \quad (4.75)$$

La solution de ce problème de Riemann associé au formalisme ALE, est déduit de la solution du précédent problème 4.73 selon :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi = \Phi_E \left(\frac{x^{(n_{ij})} + X_0(t)}{t}, \Phi_i, \Phi_j \right) \\ X_0(t) = \int_0^t v_0(x_{ij}, \tau) \cdot n_{ij} d\tau \end{array} \right. \quad (4.76)$$

Il en résulte un flux de Godunov $g_E(n_{ij}, \Phi_i, \Phi_j)$ associé à la discrétisation SPH-ALE :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_0^{ij} = v_0(x_{ij}, t) \cdot n_{ij} \\ \Phi_{ij}(\lambda_0^{ij}) = \Phi_E(\lambda_0^{ij}, \Phi_i, \Phi_j) \\ G_E(\Phi_i, \Phi_j) = F_E(\Phi_{ij}(\lambda_0^{ij})) - v_0(x_{ij}, t) \otimes \Phi_{ij}(\lambda_0^{ij}) \\ g_E(n_{ij}, \Phi_i, \Phi_j) = G_E(\Phi_i, \Phi_j) \cdot n_{ij} \end{array} \right. \quad (4.77)$$

Cet aspect fait de cette méthode numérique une méthode proche des Volumes Finis. Cependant elles se distinguent notamment par le fait que dans le formalisme Volume-Finis les échanges de flux n'ont lieu qu'entre les volumes qui ont des frontières en commun, alors que pour le formalisme SPH-ALE ces échanges ont aussi lieu entre volumes de contrôle distants.

4.3.1.7 Système final d'équations

L'approximation particulière est ainsi donnée par l'ensemble d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(x_i) = v_0(x_i, t) \\ \frac{d}{dt}(\omega_i) = \omega_i \sum_{j \in D_i} \omega_j (v_0(x_j, t) - v_0(x_i, t)) \nabla W_{ij} \\ \frac{d}{dt}(\omega_i \Phi_i) + \omega_i \sum_{j \in D_i} \omega_j 2G_E(\Phi_i, \Phi_j) \nabla W_{ij} = \omega_i S_i \end{array} \right. \quad (4.78)$$

Pour la résolution de l'équation des poids, on utilise une formulation permettant de calculer correctement sous forme discrète la divergence d'un champ constant. Sous forme détaillée, et sans la renormalisation, le système d'équations discret résolu dans cette méthode numérique s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(x_i) = v_0(x_i, t) \\ \frac{d}{dt}(\omega_i) = \omega_i \sum_{j \in D_i} \omega_j (v_0(x_j) - v_0(x_i)) \nabla_i W_{ij} \\ \frac{d}{dt}(\omega_i \rho_i) + \omega_i \sum_{j \in D_i} \omega_j 2\rho_{E,ij} (v_{E,ij} - v_0(x_{ij}, t)) \cdot \nabla_i W_{ij} = 0 \\ \frac{d}{dt}(\omega_i \rho_i v_i) + \omega_i \sum_{j \in D_i} \omega_j 2[\rho_{E,ij} v_{E,ij} \otimes (v_{E,ij} - v_0(x_{ij}, t)) + p_{E,ij}] \cdot \nabla_i W_{ij} = \omega_i \rho_i g \end{array} \right. \quad (4.79)$$

avec $(\rho_{E,ij}, v_{E,ij})^t = \Phi_{ij}(\lambda_0^{ij})$

Avec la renormalisation ce système devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(x_i) = v_0(x_i, t) \\ \frac{d}{dt}(\omega_i) = \frac{1}{2} \omega_i \sum_{j \in D_i} \omega_j (v_0(x_j) - v_0(x_i)) (B_i \nabla_i W_{ij} - B_j \nabla_j W_{ji}) \\ \frac{d}{dt}(\omega_i \rho_i) + \omega_i \sum_{j \in D_i} \omega_j \cdot (\rho_{E,ij} (v_{E,ij} - v_0(x_{ij}, t)) \cdot B_i \nabla_i W_{ij} \\ \quad - \rho_{E,ji} (v_{E,ji} - v_0(x_{ji}, t)) \cdot B_j \nabla_j W_{ji}) = 0 \\ \frac{d}{dt}(\omega_i \rho_i v_i) + \omega_i \sum_{j \in D_i} \omega_j ([\rho_{E,ij} v_{E,ij} \otimes (v_{E,ij} - v_0(x_{ij}, t)) + p_{E,ij}] \cdot B_i \nabla_i W_{ij} \\ \quad - [\rho_{E,ji} v_{E,ji} \otimes (v_{E,ji} - v_0(x_{ji}, t)) + p_{E,ji}] \cdot B_j \nabla_j W_{ji}) = \omega_i \rho_i g \end{array} \right. \quad (4.80)$$

Dans cette situation les directions $B_i \nabla_i W_{ij}$ et $B_j \nabla_j W_{ji}$ ne sont pas forcément identiques. Il faut donc résoudre deux problèmes de Riemann associés à chacune des directions. Ceci entraînant un coût de calcul important il est possible de symétriser le problème en prenant $B_{ij} = 0.5(B_i + B_j)$.

Dans ce cas là on dispose du système renormalisé symétrique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(x_i) = v_0(x_i, t) \\ \frac{d}{dt}(\omega_i) = \omega_i \sum_{j \in D_i} \omega_j (v_0(x_j) - v_0(x_i)) B_{ij} \nabla_i W_{ij} \\ \frac{d}{dt}(\omega_i \rho_i) + \omega_i \sum_{j \in D_i} \omega_j 2 \rho_{E,ij} (v_{E,ij} - v_0(x_{ij}, t)) \cdot B_{ij} \nabla_i W_{ij} = 0 \\ \frac{d}{dt}(\omega_i \rho_i v_i) + \omega_i \sum_{j \in D_i} \omega_j 2 [\rho_{E,ij} v_{E,ij} \otimes (v_{E,ij} - v_0(x_{ij}, t)) + p_{E,ij}] \cdot B_{ij} \nabla_i W_{ij} = \omega_i \rho_i g \end{array} \right. \quad (4.81)$$

4.3.1.8 La reconstruction MUSCL et l'utilisation d'un limiteur

La reconstruction MUSCL (Monotonic Upstream-centered Scheme for Conservation Laws, [35]) a pour but d'améliorer l'approximation des états initiaux pour la résolution de chaque problème de Riemann. Comme nous l'avons décrit auparavant les états initiaux des problèmes de Riemann sont pris égaux aux valeurs au centre des volumes de discrétisation. Ces états dépendent donc forcément de la discrétisation spatiale du calcul. Pour réduire cette dépendance, les champs utilisés pour la résolution de problèmes de Riemann ne sont plus égaux aux champs aux centres des volumes de contrôle considérés. Ils sont reconstruits à l'interface entre les problèmes de Riemann en prenant en compte les valeurs des champs et leurs gradients, equation 4.82 et figure 4.5.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_L = \Phi_i + \nabla_i \Phi \cdot \frac{x_j - x_i}{2} \\ \Phi_R = \Phi_j - \nabla_j \Phi \cdot \frac{x_j - x_i}{2} \end{array} \right. \quad (4.82)$$

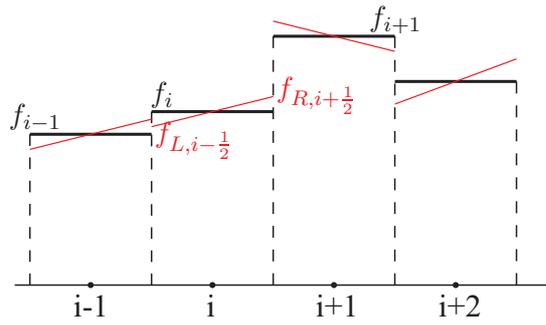


FIGURE 4.5 – Schéma de la reconstruction MUSCL

La formulation obtenue n'est cependant pas utilisable directement car trop soumise aux problèmes d'instabilités. En effet, la non-linéarité des champs ou l'inexactitude du calcul des gradients peuvent entraîner un signe de pente inversé, l'apparition d'extrema locaux à l'interface ou bien des "inversions" de problèmes de Riemann, comme c'est le cas sur le schéma 4.5 entre les particules $i - 1$ et i .

L'équation 4.82 est donc modifiée pour y introduire une fonction limiteur β

$$\begin{cases} \Phi_L = \Phi_i + \beta(\Phi_i, \Phi_j, \nabla_i \Phi) \nabla_i \Phi \cdot \frac{x_j - x_i}{2} \\ \Phi_R = \Phi_j - \beta(\Phi_j, \Phi_i, \nabla_j \Phi) \nabla_j \Phi \cdot \frac{x_j - x_i}{2} \end{cases} \quad (4.83)$$

Différents limiteurs ont été développés pour empêcher l'apparition d'instabilités. Celui utilisé dans cette étude est nommé limiteur "ξ", qui permet d'éviter les problèmes cités au dessus. Le détail de principe de ce limiteur peut-être trouvé dans [38].

4.3.1.9 Bilan

Plusieurs commentaires peuvent être faits à ce niveau. Le formalisme développé a permis, par l'introduction de la vitesse ALE, de créer des flux convectifs entre les particules. Ces dernières échangent ainsi de la masse entre elles (on parlera ainsi dans la suite du document aussi bien de particules que de volumes de contrôle). Ces échanges ont comme principal effet d'introduire un décentrement qui stabilise le calcul [38], et donc permet de ne pas avoir à introduire un terme visqueux stabilisateur comme c'est le cas pour les techniques SPH traditionnelles, [48]. De plus, comme nous l'avons souligné lors de l'établissement du modèle, celui-ci est proche du formalisme Volumes-Finis ce qui permet l'adaptation de méthodes connues comme la reconstruction MUSCL. Cependant au contraire de la méthode Volumes-Finis, la méthode SPH ne vérifie pas les équations 4.17 et 4.18 au niveau discret. Ceci introduit donc des erreurs au niveau de l'intégration des flux.

4.3.2 Problème de Riemann

Nous allons maintenant voir comment il est possible d'obtenir en pratique la solution d'un problème de Riemann. Celui-ci est un cas particulier des équations d'Euler monodimensionnelles pour lequel la condition initiale est discontinue en $x = 0$, eq. 4.73.

4.3.2.1 Approche caractéristique

L'objectif est ici d'étudier les propriétés de ce système d'équations. Cette démarche est classique [27] et a déjà été menée dans le cadre du formalisme SPH-ALE, [25] ou [38]. Nous la reprenons ici avec une légère différence puisque celle-ci va être menée avec les variables non conservatives (p, v) au lieu des variables (ρ, v) , ceci pour des intérêts liés au développement du modèle multiphase. Nous nous plaçons dans un cas bi-dimensionnel pour lequel la direction (1) relie les deux volumes de contrôle et la direction (2) lui est orthogonale. L'extension au cas 3D est basée sur la même méthodologie, celle-ci ne sera donc pas évoquée ici. Sous forme non-conservative (ρ, v) les équations d'Euler sans terme source sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + v^{(1)} \frac{\partial \rho}{\partial x^{(1)}} + v^{(2)} \frac{\partial \rho}{\partial x^{(2)}} + \rho \left(\frac{\partial v^{(1)}}{\partial x^{(1)}} + \frac{\partial v^{(2)}}{\partial x^{(2)}} \right) = 0 \\ \frac{\partial v^{(1)}}{\partial t} + v^{(1)} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x^{(1)}} + v^{(2)} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x^{(2)}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^{(1)}} = 0 \\ \frac{\partial v^{(2)}}{\partial t} + v^{(1)} \frac{\partial v^{(2)}}{\partial x^{(1)}} + v^{(2)} \frac{\partial v^{(2)}}{\partial x^{(2)}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^{(2)}} = 0 \end{cases} \quad (4.84)$$

La pression et la densité sont reliées par l'équation de Tait (barotrope) :

$$p = B \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] \quad (4.85)$$

où la vitesse du son est donnée par :

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{\gamma}{\rho} (p + B) \quad (4.86)$$

avec $B = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma}$

Cette équation implique une relation entre les dérivées temporelles (ou spatiales) de pression et densité :

$$\frac{\partial p}{\partial a} = c^2 \frac{\partial \rho}{\partial a}, \quad a \in \{t, x, z\} \quad (4.87)$$

Nous pouvons ainsi remplacer les dérivées de densité par celles de pression.

En faisant une hypothèse de problème monodimensionnel, les équations d'Euler sous forme non-conservatives deviennent alors :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + A \frac{\partial \Phi}{\partial x^{(1)}} = 0 \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} v^{(1)} & \rho c^2 & 0 \\ \frac{1}{\rho} & v^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & v^{(1)} \end{pmatrix} \quad (4.88)$$

où $\Phi = (p, v^{(1)}, v^{(2)})^t$. La matrice A possède 3 valeurs propres réelles $\lambda_1 = v^{(1)} - c$, $\lambda_2 = v^{(1)}$ et $\lambda_3 = v^{(1)} + c$ associées aux vecteurs propres à gauche : $l^1 = (-1/(\rho c), 1, 0)^t$, $l^2 = (0, 0, 1)^t$ et $l^3 = (1/(\rho c), 1, 0)^t$. Le problème est donc bien de nature hyperbolique.

En multipliant le système 4.88 à gauche par chacun des vecteurs propres, nous obtenons les relations de compatibilité suivantes :

$$\frac{\partial l_i \cdot \Phi}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial l_i \cdot \Phi}{\partial x^{(1)}} = 0 \quad (4.89)$$

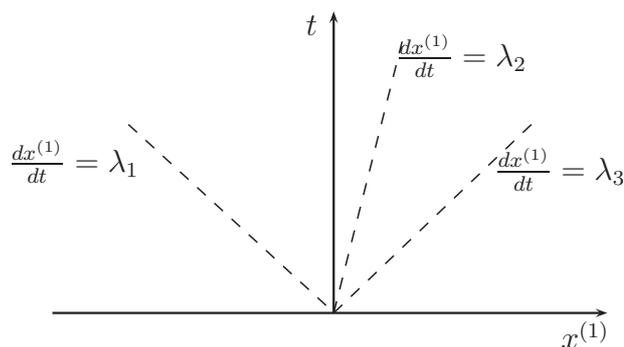
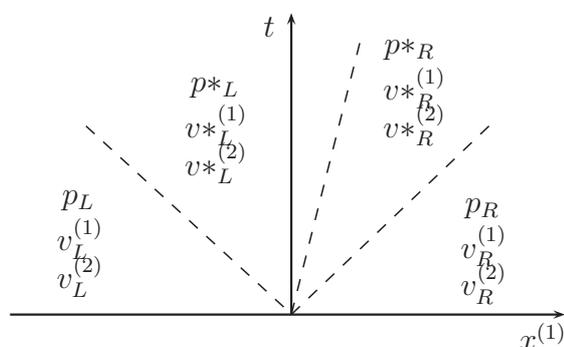
En considérant les dérivées selon chacune des lignes caractéristiques, nous obtenons les relations suivantes :

$$\begin{cases} dp - \rho c dv^{(1)} = 0 & \text{le long de } dx^{(1)}/dt = \lambda_1 \\ dv^{(2)} = 0 & \text{le long de } dx^{(1)}/dt = \lambda_2 \\ dp + \rho c dv^{(1)} = 0 & \text{le long de } dx^{(1)}/dt = \lambda_3 \end{cases} \quad (4.90)$$

Une représentation du plan (x, t) permet de tracer les différentes régions de l'écoulement 4.6. Quatre zones sont ainsi délimitées par les différentes ondes.

4.3.2.2 Description de la structure d'une solution d'un problème de Riemann

Le cas du problème de Riemann correspond à cette étude pour laquelle la condition initiale est discontinue en $x^{(1)} = 0$. La résolution du problème de Riemann consiste à trouver la nature de chacune des ondes (discontinuité de contact, onde de choc, onde de détente) et d'en déterminer leurs caractéristiques.

FIGURE 4.6 – Représentation des droites caractéristiques $(x^{(1)}, t)$ FIGURE 4.7 – Représentation des différents états du fluide dans le plan $(x^{(1)}, t)$

Dans le cadre de la résolution des équations d'Euler, l'onde centrale, correspondant à la valeur propre λ_2 , est obligatoirement une discontinuité de contact à travers laquelle on a la relation :

$$\begin{cases} p^*_R = p^*_L = p^* \\ v^*_R^{(1)} = v^*_L^{(1)} = v^*^{(1)} \end{cases} \quad (4.91)$$

A travers les ondes 1 et 3, nous avons affaire à une onde de détente si la pression est inférieure à la pression à l'extérieur de la zone étoile et à une onde de choc dans le cas contraire. A travers ces deux types d'onde on a continuité de la vitesse transverse c'est à dire :

$$\begin{cases} v^*_{L}^{(2)} = v_L^{(2)} \\ v^*_{R}^{(2)} = v_R^{(2)} \end{cases} \quad (4.92)$$

4.3.2.3 Solution exacte du problème de Riemann

Une première possibilité pour déterminer l'état intermédiaire "étoile", est de déterminer, de manière exacte, les évolutions de pression et vitesse normale à travers ces ondes. Pour cela, on utilise

les relations de Rankine-Hugoniot à travers les ondes de choc et la conservation des invariants de Riemann à travers une onde de détente. Ceci nous permet d'aboutir à une relation non linéaire qui a la forme :

$$g(\rho^*) = g_L(\Phi_L, \rho^*) + g_R(\Phi_R, \rho^*) + \delta v^{(1)} = 0 \quad (4.93)$$

où $\delta v^{(1)} = v_R^{(1)} - v_L^{(1)}$ et les fonctions g_K dépendent directement de la nature de l'onde. Nous reprenons ici rapidement la démarche nécessaire pour obtenir la solution du problème de Riemann à partir de la résolution directe des équations traduisant les phénomènes présents dans ces ondes. Une étude plus détaillée est présente dans [38].

Cas d'une onde de choc Une onde de choc se caractérise par une évolution de pression et de vitesse s'établissant sur une échelle de longueur de $10^{-7}m$. Sur cette distance, les relations de Rankine-Hugoniot traduisent la conservation de la masse et de la quantité de mouvement sous la forme :

$$[F_E(\Phi)] = S_K[\Phi] \quad (4.94)$$

où K désigne indifféremment L ou R, S_K la vitesse de l'onde de choc et $[\cdot]$ désigne le saut au travers de l'onde.

Le réarrangement des équations 4.94 permet d'aboutir aux équations :

$$\begin{cases} v_*^{(1)} = v_L^{(1)} - g_L \\ v_*^{(1)} = v_R^{(1)} + g_R \end{cases} \quad (4.95)$$

avec :

$$g_K = \left[\frac{\kappa(\rho_*^\gamma - \rho_K^\gamma) \rho_K \rho_*}{\rho_K \rho_*} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.96)$$

Cas d'une onde de détente Dans le cas d'une onde de détente, la transformation étant isentropique, l'utilisation des invariants de Riemann donne :

$$\begin{cases} v_*^{(1)} + 2 \frac{c_*}{\gamma - 1} = v_L^{(1)} + 2 \frac{c_L}{\gamma - 1} \\ v_*^{(1)} - 2 \frac{c_*}{\gamma - 1} = v_R^{(1)} - 2 \frac{c_R}{\gamma - 1} \end{cases} \quad (4.97)$$

De même que pour le cas de l'onde de choc il est possible d'obtenir les équations suivantes :

$$\begin{cases} v_*^{(1)} = v_L^{(1)} - g_L \\ v_*^{(1)} = v_R^{(1)} + g_R \end{cases} \quad (4.98)$$

avec cette fois-ci :

$$g_K = \frac{2c_K}{(\gamma - 1)} \left[\left(\frac{\rho_*}{\rho_K} \right)^{\frac{(\gamma-1)}{2}} - 1 \right] \quad (4.99)$$

Résolution itérative Nous avons donc accès à l'expression de l'équation 4.93. Cependant cette équation est non linéaire et sa résolution n'est pas possible directement. Une solution approchée est déterminée en utilisant la méthode itérative de Newton-Raphson :

$$\rho^{(i+1)} = \rho^{(i)} - \frac{g(\rho^{(i)})}{g'(\rho^{(i)})} \quad (4.100)$$

Le solveur itératif s'arrête lorsque le critère de convergence est atteint. Celui-ci est le suivant :

$$\frac{|\rho^{(i+1)} - \rho^{(i)}|}{0.5(\rho^{(i+1)} + \rho^{(i)})} < 1E - 6 \quad (4.101)$$

La valeur finale utilisée de la vitesse est obtenue par une valeur moyenne :

$$v_{*}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(v_R^{(1)} + v_L^{(1)} \right) + \frac{1}{2} (g_R(\rho^*) + g_L(\rho^*)) \quad (4.102)$$

Une fois la vitesse normale et la densité connue dans la zone étoile il faut déterminer les solutions dans les ondes de détente et déterminer la vitesse des ondes de choc. Pour les ondes de détente les solutions sont données pour une onde de détente associée à la valeur propre λ_1

$$\begin{cases} v^{(1)} = \frac{2}{\gamma + 1} \left(c_L + \frac{1}{2} v_L^{(1)} (\gamma - 1) + \frac{x}{t} \right) \\ \rho = \left(\frac{c^2}{\kappa \gamma} \right)^{1/(\gamma-1)} \end{cases} \quad (4.103)$$

et pour une onde de détente associée à la valeur propre λ_3 :

$$\begin{cases} v^{(1)} = \frac{2}{\gamma + 1} \left(-c_R + \frac{1}{2} v_R^{(1)} (\gamma - 1) + \frac{x}{t} \right) \\ \rho = \left(\frac{c^2}{\kappa \gamma} \right)^{1/(\gamma-1)} \end{cases} \quad (4.104)$$

Pour ce qui concerne les vitesses des ondes de choc, on se sert de l'équation de conservation de la masse qui nous permet d'obtenir pour les ondes associées à λ_1 et λ_3 :

$$\frac{\rho_K}{\rho_K - \rho^*} S_K = \left(v_K^{(1)} + \frac{v_{*}^{(1)} \rho^*}{\rho_K} \right) \quad (4.105)$$

Pour déterminer la vitesse transverse associée à la solution du problème de Riemann on pose :

$$v_{*}^{(2)} = \begin{cases} v_L^{(2)} & \text{si } v^{(1)} < v_{*}^{(1)} \\ v_R^{(2)} & \text{si } v^{(1)} > v_{*}^{(1)} \end{cases} \quad (4.106)$$

A cet instant nous disposons d'un moyen pour accéder aux états "étoilés" solution du problème de Riemann. Cependant cette méthode utilise un solveur itératif coûteux puisque différents passages sont nécessaires. Pour initier le solveur itératif, il faut disposer de valeurs de pression et vitesse. Une possibilité serait de prendre les valeurs d'un état initial (gauche ou droite). En pratique il vaut mieux initialiser avec une valeur plus "intelligemment" trouvée, c'est-à-dire plus proche de la solution finale, ce qui permet de réduire le nombre d'itérations du solveur. Pour cela on utilise des solveurs approchés dont l'un est présenté ensuite.

4.3.2.4 Solveur de Riemann approché - solveur acoustique

De nombreux solveurs de Riemann approchés ont été développés afin de limiter le coût d'utilisation d'un solveur itératif. Ils reposent principalement sur deux approches différentes :

- une approximation directe des flux utilisés (solveurs HLL, HLLC, Osher, Roe [75])
- ou sur une approximation de l'état intermédiaire. Les flux sont alors déduits de cette approximation.

Nous présentons ici deux solveurs approchés selon la seconde démarche : le solveur PVRS (Primitive Variable Riemann Solver) et le solveur acoustique.

Solveur PVRS Le solveur PVRS est un solveur simple et robuste déjà utilisé dans le cadre de la méthode SPH-ALE, [38]. Il consiste à considérer la matrice jacobienne comme constante et construite à partir de valeurs moyennes entre les états L et R. Nous reprenons ici le développement de ce solveur en variables non conservatives $(p, v^{*(1)}, v^{*(2)})$ au lieu de $(\rho, v^{*(1)}, v^{*(2)})$. Le système à résoudre est donc :

$$-\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} p \\ v^{(1)} \\ v^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{v}^{(1)} & \bar{c}^2 \bar{\rho} & 0 \\ 1/\bar{\rho} & \bar{v}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{v}^{(1)} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} p \\ v^{(1)} \\ v^{(2)} \end{pmatrix} \quad (4.107)$$

En exprimant les conditions de saut à travers les différentes ondes, on obtient :

$$\begin{cases} u^* = \frac{1}{2}(u_L + u_R) + \frac{1}{2\bar{\rho}\bar{c}}(p_L - p_R) \\ p^* = \frac{1}{2}(p_L + p_R) + \frac{\bar{\rho}\bar{c}}{2}(u_L - u_R) \end{cases} \quad (4.108)$$

Différents choix peuvent être faits pour les valeurs moyennes. Par la suite nous prendrons les moyennes arithmétiques :

$$\bar{\rho} = \frac{\rho_L + \rho_R}{2} \quad \bar{c} = \frac{c_L + c_R}{2} \quad (4.109)$$

Solveur acoustique Le solveur acoustique est un solveur utilisant les droites caractéristiques. Il a été principalement utilisé pour des simulations incluant différentes phases avec d'importantes variations de densité ([75] sec 9.3, [70], [51]). La démarche consiste à relier les états R* et R en intégrant le long de la caractéristique associée à λ_1 , en supposant que l'impédance acoustique reste constante. On obtient :

$$p^* - Z_R v^{*(1)} = p_R - Z_R v_R^{(1)} \quad (4.110)$$

où $Z_R = \rho_R c_R$ est l'impédance acoustique. La même démarche appliquée aux états L et L* le long de la caractéristique associée à λ_3 donne :

$$p^* + Z_L v^{*(1)} = p_L + Z_L v_L^{(1)} \quad (4.111)$$

La combinaison de ces deux équations permet d'obtenir une expression approchée de v^* et p^* :

$$\begin{cases} u^* = \frac{Z_L u_L + Z_R u_R}{Z_L + Z_R} + \frac{p_L - p_R}{Z_L + Z_R} \\ p^* = \frac{Z_R p_L - Z_L p_R}{Z_L + Z_R} + \frac{Z_R Z_L (u_L - u_R)}{Z_L + Z_R} \end{cases} \quad (4.112)$$

L'expression obtenue est particulièrement simple et permet donc d'obtenir une valeur approchée de la solution pouvant servir à initialiser le solveur itératif. Il est aussi intéressant de noter que ce solveur ne nécessite pas le calcul d'un état moyen entre les états L et R. Cette propriété ainsi que d'autres caractéristiques de ce solveur seront étudiées dans la partie concernant le développement du modèle multiphase.

En pratique il n'a pas été observé de différences de comportement entre l'utilisation d'un solveur linéarisé et l'utilisation du solveur itératif [38]. Les résultats de calculs numériques seront obtenus avec des solveurs linéarisés.

4.3.3 Intégration temporelle et choix de la vitesse du son

Une fois le problème discrétisé, le système d'équations est intégré explicitement en temps grâce à un schéma classique de type Newton d'ordre 1 ou de Runge-Kutta. Le choix du pas de temps est soumis avec cette méthode aux mêmes critères que pour la méthode Volumes Finis. Entre chaque paire de points, nous devons vérifier qu'une onde acoustique, dont la vitesse maximale est donnée par $|v_i| + c_i$, ne peut pas, en un pas de temps, parcourir une distance supérieure à la taille caractéristique de la discrétisation. Cette condition dite CFL (Courant-Friedrich-Levy) doit être adaptée au mouvement lagrangien des particules, puisque deux particules peuvent avoir des vitesses dirigées selon la même direction et être de sens opposés. Ainsi la condition CFL s'écrit :

$$\Delta t \leq C_{CFL} \min_i \frac{h_i}{c_i + 2|v_i|} \quad (4.113)$$

Le coefficient CFL est fonction du schéma d'intégration employé et en pratique s'est avéré égal à 0.2 pour un schéma de Newton et égal à 0.7 pour un schéma de Runge-Kutta d'ordre 3

L'équation 4.113 montre l'influence du choix de la vitesse du son sur la valeur du pas de temps. En utilisant les véritables vitesses du son (1500 *m/s* pour l'eau par exemple), cela rend les pas de temps très petits et donc la méthode numérique très coûteuse. L'idée est ici d'utiliser une formulation pseudo-compressible pour laquelle la vitesse du son est définie afin de vérifier que le nombre de Mach reste inférieur à 0.1 dans tout l'écoulement et à chaque pas de temps. Pour se faire en début de calcul une estimation de la vitesse maximale dans chaque fluide doit-être effectuée et une vitesse du son numérique est ainsi déduite.

4.3.4 Conditions limites

4.3.4.1 Périodicité et symétrie

Les conditions de périodicité et symétrie sont traitées facilement en dupliquant en début de chaque itération les particules qui doivent l'être (c'est-à-dire celles situées à une distance inférieure à *h* du plan de symétrie ou de périodicité). La méthodologie de duplication sera abordée dans la partie parallélisation, chapitre 6.

4.3.4.2 Surface libre

La condition de surface libre est une condition spécifique pour les applications SPH. En effet généralement, les simulations utilisant la méthode SPH ne prennent en compte que le fluide

d'intérêt et le fluide ambiant n'est pas simulé, [38], [34]. Dans notre cas, nous voulons simuler des jets d'eau, avec une prise en compte précise des phénomènes aux interfaces eau/air. C'est-à-dire que nous allons simuler une couche d'air entourant le jet qui permette de tenir compte de la tension de surface notamment. Ainsi nous allons simuler une condition d'interface entre l'air et l'eau et une condition de surface libre pour l'air qui nous permettra d'économiser du temps de calcul en calculant l'écoulement d'air uniquement autour du jet.

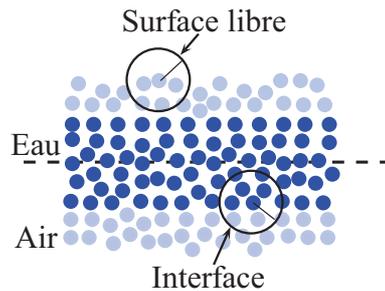


FIGURE 4.8 – Schéma de surface libre

La condition dynamique de surface libre, pour laquelle la pression est imposée se révèle très simple lorsque la pression doit être nulle. On impose que $\rho = \rho_0$ à la surface libre et donc que la pression y soit nulle.

4.3.4.3 Parois

Le traitement des conditions limites de paroi a fait l'objet de nombreuses études pour la méthode SPH. Différentes méthodes ont été développées parmi lesquelles on peut citer les forces répulsives [46], les particules fictives [50], les particules fantômes [25] ou encore plus récemment l'utilisation d'Immersed Boundary Conditions [11]. Cependant ces méthodes se sont révélées peu précises (forces répulsives), ou ayant des difficultés à traiter des géométries complexes, notamment pour le cas d'angles aigus entre parois pour lesquelles les particules fantômes se retrouvent être dans le domaine fluide. Dans le cadre de la méthode SPH-ALE, Jean-Christophe Marongiu, [38], a développé une méthode originale dans la communauté SPH pour traiter les conditions limites de parois. Cette méthode repose sur la ré-interprétation d'un élément surfacique de paroi comme une interface de problème de Riemann. Cette méthode est donc naturellement liée à l'utilisation de la méthode de Godunov pour la résolution de la méthode numérique. La solution du problème de Riemann associé à une particule de fluide et à une particule de paroi est trouvée en utilisant les propriétés de l'état fluide et les conditions imposées par la paroi en utilisant des problèmes de Riemann partiels [15]. Cette méthode présente l'avantage de pouvoir traiter des géométries de forme complexe en 3D, d'être totalement liée à la méthode de résolution numérique entre particules fluides et d'apporter des améliorations notables au niveau des champs de pression calculés, [38]. C'est donc cette méthode qui sera utilisée pour traiter les parois dans ces travaux.

4.3.5 Application au cas d'un tube à choc

L'application au cas d'un tube à choc, est un cas traditionnel pour la validation des schémas décentrés. Il reproduit le cas d'un problème de Riemann et permet la comparaison à une solution analytique. Ce type d'étude a été précédemment effectué pour ce type de méthode par différents auteurs ([25], [22] ou [38]). Nous reprenons ici cette étude pour différentes raisons. La première est pédagogique et a pour objectif d'associer des caractéristiques de résultats numériques, aux différents schémas employés. La seconde est que ce cas traité en lagrangien permet de faire des observations qui seront reprises pour le développement du modèle multiphase.

Ici nous considérons le cas d'un fluide unique au repos pour lequel il existe une discontinuité de pression (densité) en $x = 0.5m$.

$$\begin{cases} \rho_L = 1100 \\ v_L^{(1)} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \rho_R = 1000 \\ v_R^{(1)} = 0 \end{cases} \quad (4.114)$$

La solution de ce problème est constituée d'une onde de détente se déplaçant vers la gauche à la vitesse de 1951 m.s^{-1} et d'une onde de choc qui se déplace vers la droite à la vitesse de 1627 m.s^{-1} . Ce cas test est résolu en faisant varier les différentes caractéristiques du schéma numérique :

- déplacement eulérien/lagrangien
- la discrétisation spatiale
- avec ou sans reconstruction MUSCL
- avec ou sans renormalisation

Ce cas monodimensionnel sera résolu avec des codes 1D, 2D et 3D. Sauf indication contraire, les résultats présentés sont obtenus avec le code 1D. D'autre part tous les résultats présentés pour ce cas test correspondent au temps physique $t = 1.10^{-5} \text{ s}$. Les différentes discrétisations employées sont 1.10^3 , 5.10^3 et 1.10^4 particules réparties entre $0.4m$ et $0.6m$. Cela correspond donc à des espacements entre particules de $2.10^{-4}m$, $4.10^{-5}m$ et $2.10^{-5}m$. Pour ces différentes discrétisations la taille du kernel est gardée constante, c'est-à-dire que pour la discrétisation 1.10^4 , une particule aura 10 fois plus de voisines que pour la discrétisation 1.10^3 . Cette variation de discrétisation correspond donc au cadre de convergence de la méthode SPH.

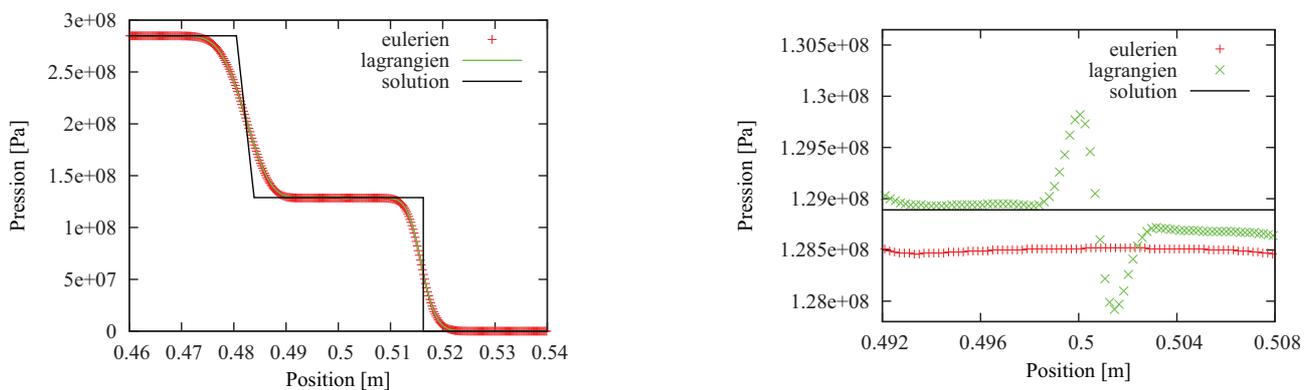


FIGURE 4.9 – Évolution de la pression cas du tube à choc - discrétisation 1000

Les figures 4.9 et 4.10 montrent les évolutions de pression et vitesse pour un schéma numérique sans renormalisation ni reconstruction MUSCL. Nous pouvons observer que les niveaux de pression

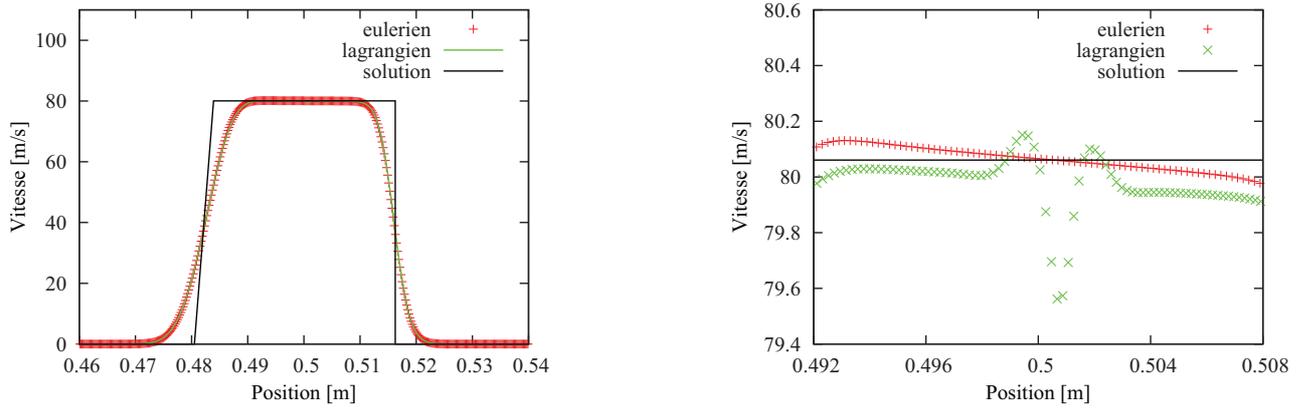


FIGURE 4.10 – Évolution de la vitesse cas du tube à choc - discrétisation 1000

et vitesse sont proches des valeurs théoriques (l'écart est inférieur à 1% dans la zone proche de la discontinuité initiale). Les figures de gauche, correspondant à une vue globale des évolutions de pression et vitesse, ne permettent pas de les distinguer. Cependant un grossissement autour des valeurs atteintes dans la zone de discontinuité initiale permet de distinguer des différences d'évolution de ces grandeurs. Sur les figures de droite les variations de pression et de vitesse correspondent à 1% des valeurs théoriques. On peut à ce niveau là remarquer que :

- les niveaux atteints entre les schémas eulérien et lagrangien ne sont pas les mêmes
- en lagrangien, il existe une différence de niveau de pression de chaque côté de la discontinuité initiale
- en lagrangien, il existe une oscillation de pression et vitesse au niveau de cette discontinuité initiale

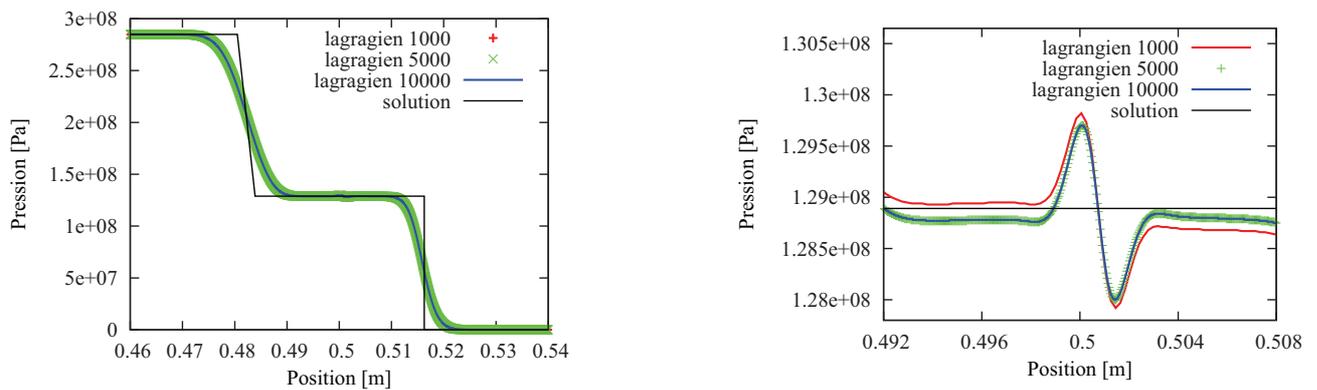


FIGURE 4.11 – Étude de la convergence spatiale - Pression

L'étude de la convergence de ce cas test, figures 4.11 et 4.12, montre que, pour le cas lagrangien, les différences de pression finale observées de part et d'autre de la discontinuité initiale sont liées à la discrétisation spatiale du calcul. Cependant le raffinement spatial du calcul n'affecte pas le niveau de pression moyen atteint ni les oscillations de pression et vitesse observées en $x = 0.5m$. L'origine de ces oscillations de pression et de vitesse sera discutée dans la partie 4.4.1, qui introduit le développement du modèle multiphase.

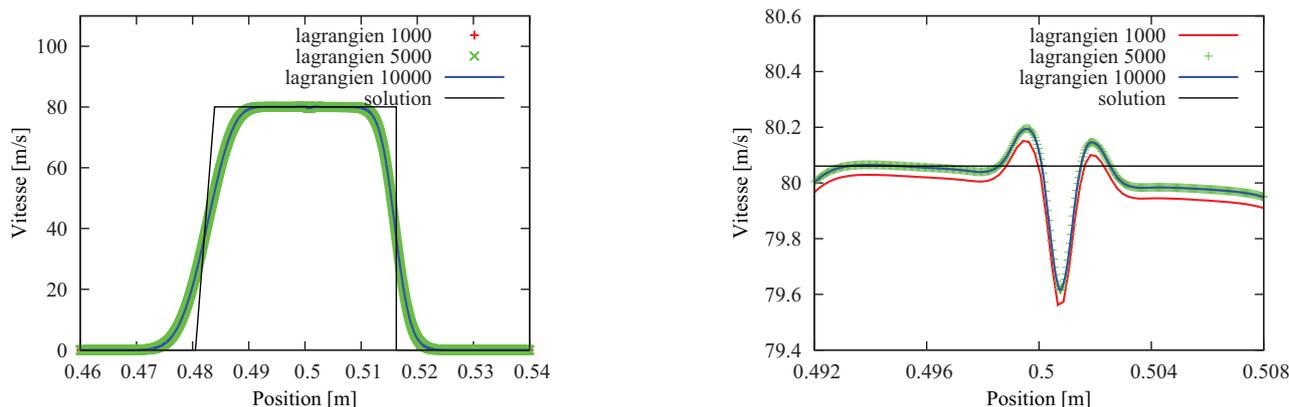


FIGURE 4.12 – Étude de la convergence spatiale - Vitesse

Étant donné l'impact de la discrétisation spatiale (à support de kernel constant), il apparaît naturel de s'intéresser à l'impact de la renormalisation sur ce cas test. La figure 4.13 montre que, comme attendu, la renormalisation a le même effet sur les champs de pression et de vitesse que la diminution de la taille des particules (toujours à support de kernel constant). La différence de pression de chaque côté de la discontinuité est réduite par la renormalisation. Cependant le traitement 1D de ce cas test représente un cas particulier de la renormalisation. En effet dans ce cadre la matrice de renormalisation est un scalaire et les vecteurs $B_i \nabla W_{ij}$, $B_j \nabla W_{ji}$ ne diffèrent que par la norme (puisque'ils ont la même direction en 1D...). Il en résulte que les solutions des problèmes de Riemann ij et ji sont identiques. Il est donc intéressant de se pencher sur l'influence de la renormalisation pour la résolution de ce problème monodimensionnel avec un solveur 2D. Figure 4.14, nous pouvons observer qu'avec un solveur 2D les résultats ne diffèrent pas beaucoup entre solutions renormalisées et non renormalisées pour les champs de vitesse et pression puisque les variations ne sont pas visibles si la figure représente l'ensemble des variations. Si on s'intéresse précisément à la zone proche de la discontinuité initiale, figure 4.15, nous n'observons pas de différence entre les solutions renormalisées avec le formalisme standard ou avec le formalisme symétrisé. Sur la figure 4.15, le graphique de droite représente les évolutions de pression avec la même échelle que celle utilisée pour les études 1D (la légende de la figure de droite est identique à celle de gauche et n'a pas été réécrite pour des raisons de clarté du graphique). Il est donc remarquable que le saut de pression de part et d'autre de la discontinuité initiale soit plus importante avec un solveur 2D qu'avec un solveur 1D.

D'autre part les résultats montrés jusqu'ici témoignent d'une diffusion numérique importante puisque les variations de pression et de vitesse s'étalent sur plus de 10 tailles de discrétisation de part et d'autre des ondes de choc et de détente, figure 4.9. Cette caractéristique, classique pour les méthodes utilisant des solveurs de Riemann, peut être modifiée en utilisant une reconstruction MUSCL. Les graphiques de la figure 4.17 montrent l'évolution des champs de pression et de vitesse avec une reconstruction MUSCL et l'utilisation du limiteur " ξ " avec une valeur de $\xi = 0.2$. Dans ce cas les pentes des chocs ou ondes de détente sont mieux reproduites mais au prix d'oscillations qui apparaissent sur les champs de vitesse et de pression. Il est de plus à noter qu'une représentation précise des évolutions de pression et vitesse, 4.18, montre un comportement différent des résultats eulérien et lagrangien autour de la discontinuité initiale de pression. En effet les champs de pression et vitesse apparaissent plus bruités en lagrangien, principalement dans la zone initialement à forte pression. La renormalisation n'affecte pas ce phénomène qui ne semble ainsi pas dû à la

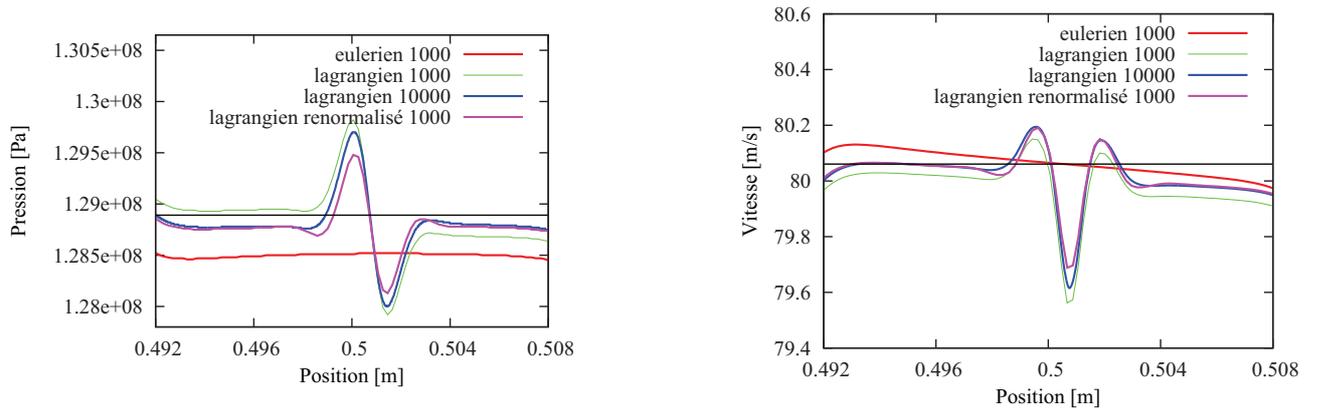


FIGURE 4.13 – Influence de la renormalisation - Champs de pression et vitesse

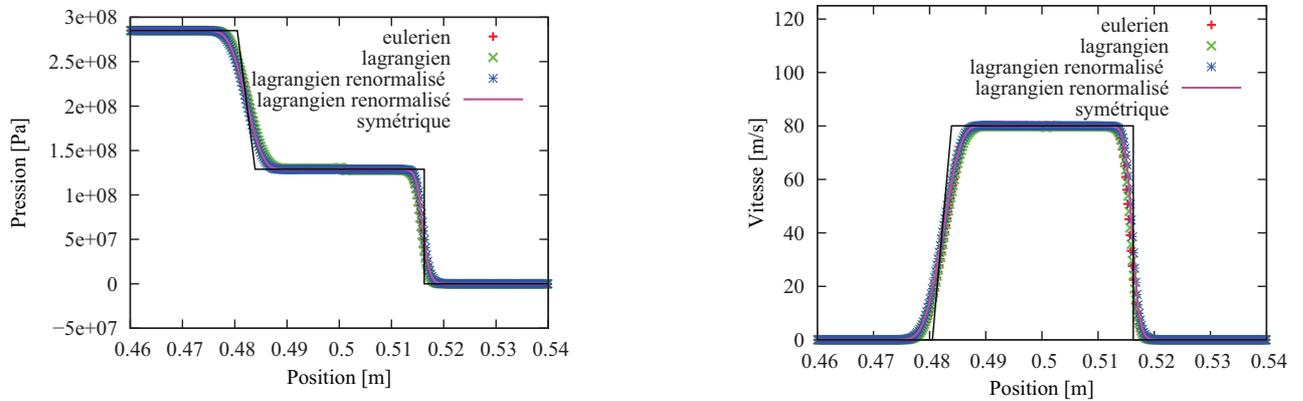


FIGURE 4.14 – Évolution de pression et vitesse - solveur 2D

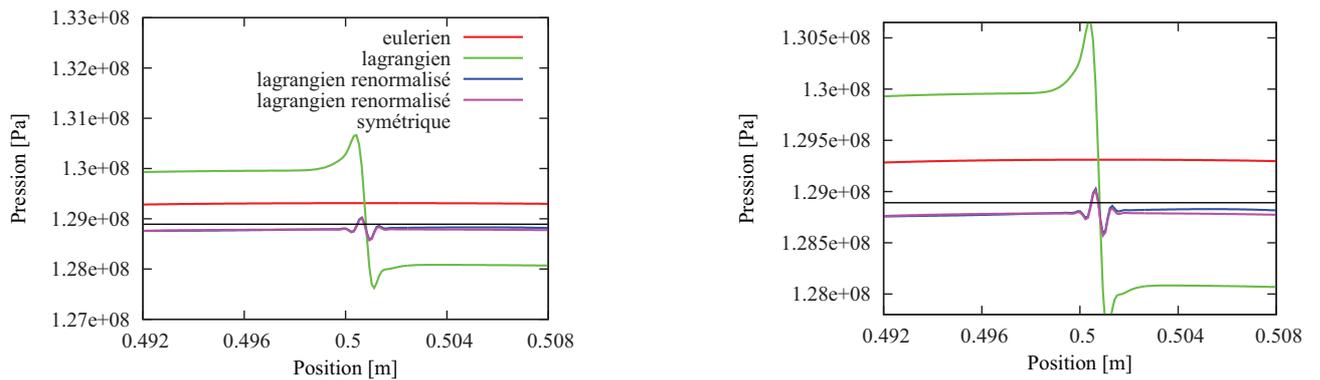


FIGURE 4.15 – Évolution de pression - zone de discontinuité initiale - solveur 2D

discrétisation spatiale.

A cette étape nous avons présenté le formalisme SPH-ALE comme développé dans la thèse de Jean-Christophe Marongiu [38], sur les bases du travail de Jean-Paul Vila [77]. Les différentes caractéristiques de ce formalisme ont été étudiées sur un cas de tube à choc académique en mettant en avant les différences de résultats entre résolution eulérienne et lagrangienne. Il en résulte

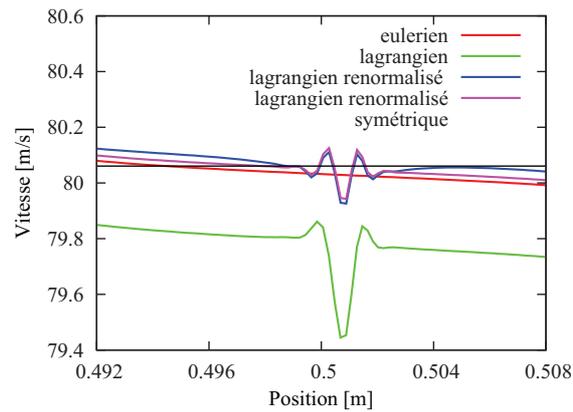


FIGURE 4.16 – Évolution de vitesse - zone de discontinuité initiale - solveur 2D

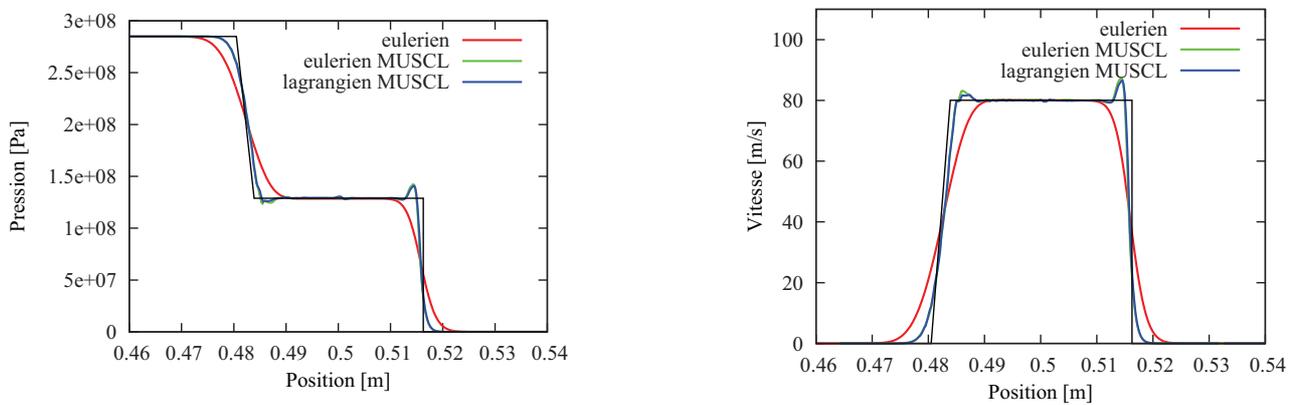


FIGURE 4.17 – Influence de la reconstruction MUSCL - Champs de pression et vitesse

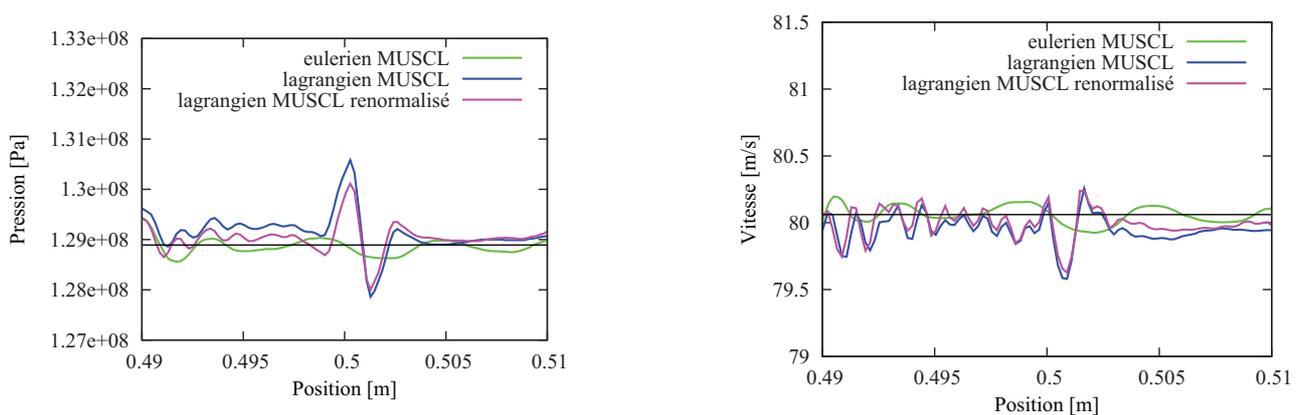


FIGURE 4.18 – Influence de la reconstruction MUSCL et de la renormalisation - Champs de pression et vitesse

différents aspects qui seront repris dans l'établissement du formalisme multifluide (oscillations et bruits de pression et vitesse autour de la discontinuité initiale de pression).

4.4 Modèles multiphase et de tension de surface

L'objectif est ici de développer un solveur multiphase qui puisse simuler de forts ratios de densité sans diffusion de l'interface entre les différents fluides. L'idée principale de ce modèle est de déterminer la vitesse de l'interface de chaque problème de Riemann "bifluid" pour bloquer les flux de masse entre ces volumes de contrôle (un problème de Riemann "bifluid" étant un problème de Riemann entre deux volumes de contrôle associés à des fluides différents). Comme nous allons le voir, la modification de la vitesse de l'interface du problème de Riemann nous a amené à considérer précisément son impact sur l'équation d'évolution des poids et sur celle de déplacement des particules.

4.4.1 Introduction des vitesses d'interface de problèmes de Riemann pour l'évolution des particules

Dans cette partie nous nous intéressons uniquement à l'impact d'un choix de vitesse d'interface de problème de Riemann quelconque, c'est-à-dire différent de la moyenne de $v_0(x_i, t)$ et $v_0(x_j, t)$, qui est le choix traditionnellement fait.

4.4.1.1 Équation des poids

Par commodité d'analyse, nous considérons tout d'abord une modification de la vitesse d'interface pour un cas statique, monophasé et monodimensionnel. La vitesse d'interface est déterminée en fonction des variations de poids entre les différentes particules selon la formule :

$$v_0(x_{ij}, t) = \frac{v_0(x_i, t) + v_0(x_j, t)}{2} + \frac{\omega_j^{\frac{1}{d}} - \omega_i^{\frac{1}{d}}}{dt} \quad (4.115)$$

où d est la dimension d'espace. Ceci nous permet d'avoir une vitesse d'interface différente de la moyenne de $v_0(x_i, t)$ et $v_0(x_j, t)$, comme cela sera le cas pour le modèle multiphase, mais en s'appuyant sur des propriétés géométriques plus faciles à interpréter que les propriétés physiques. Ce cas sera résolu avec un code 1D, 2D, ou 3D. L'étude d'un cas monodimensionnel est particulièrement intéressante ici puisqu'elle offre la possibilité de connaître les centres des volumes discrétisés, qui peuvent être différents de la position effective des particules.

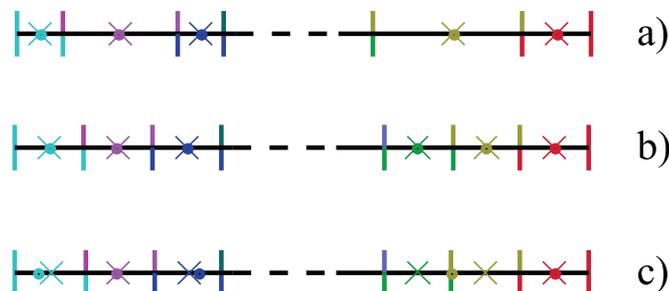


FIGURE 4.19 – Evolution des poids des particules

La figure 4.19 a) décrit l'exemple du cas monodimensionnel, résolu en 1D, où le fluide est entièrement au repos (vitesse du fluide nulle, densité constante, absence de gravité). Supposons

qu'initialement les poids ne sont pas égaux, cela va introduire des vitesses non nulles aux interfaces des problèmes de Riemann, eq 4.116. Figure 4.19, les points représentent les positions x_i et les croix les centres des poids ω_i . Dans ce cas, où l'écoulement est au repos l'équation 4.115 devient :

$$v_0(x_{ij}, t) = \frac{\omega_j^{\frac{1}{d}} - \omega_i^{\frac{1}{d}}}{dt} \quad (4.116)$$

Pour ce cas test et en reprenant l'équation de conservation de la masse, eq.4.117, nous comprenons que le fait d'introduire une vitesse d'interface non nulle va créer un flux de masse (eq. 4.117) ($v_{E,ij}$ est nulle alors que $v_0(x_{ij}, t)$ ne l'est pas) sans changer les poids ($v_0(x_j, t)$ est nulle pour tout j donc la divergence du champ de transport est nulle).

$$\frac{d}{dt}(\omega_i \rho_i) + \omega_i \sum_{j \in D_i} \omega_j 2\rho_{E,ij} (v_{E,ij} - v_0(x_{ij}, t)) \cdot \nabla_i W_{ij} = 0 \quad (4.117)$$

Il en résultera une modification de pression non physique. L'idée est donc d'introduire la vitesse d'interface du problème de Riemann dans l'équation d'évolution des poids, pour que cette dernière soit cohérente avec l'ensemble des autres équations, lorsque $v_0(x_{ij}, t)$ n'est pas la moyenne de $v_0(x_i, t)$ et $v_0(x_j, t)$.

Nous considérons ici l'ensemble des variations de volume, celui-ci devant rester identique que l'on considère la version traditionnelle de l'équation d'évolution des poids ou une version avec la vitesse d'interface.

$$\begin{aligned} & \sum_i \omega_i \sum_j \omega_j (\mathbf{v}_{0j} - \mathbf{v}_{0i}) \cdot \nabla W_{ij} \\ &= \sum_i \omega_i \sum_j \omega_j (\mathbf{v}_{0j} - \mathbf{v}_0(x_{ij}, t) + \mathbf{v}_0(x_{ij}, t) - \mathbf{v}_{0i}) \cdot \nabla W_{ij} \quad (4.118) \\ &= \sum_i \omega_i \sum_j \omega_j (\mathbf{v}_{0j} - \mathbf{v}_0(x_{ij}, t)) \cdot \nabla W_{ij} + \sum_i \omega_i \sum_j \omega_j (\mathbf{v}_0(x_{ij}, t) - \mathbf{v}_{0i}) \cdot \nabla W_{ij} \quad (4.119) \\ &= \sum_j \omega_j \sum_i \omega_i (\mathbf{v}_{0j} - \mathbf{v}_0(x_{ij}, t)) \cdot \nabla W_{ij} + \sum_i \omega_i \sum_j \omega_j (\mathbf{v}_0(x_{ij}, t) - \mathbf{v}_{0i}) \cdot \nabla W_{ij} \quad (4.120) \\ &= \sum_i \omega_i \sum_j \omega_j (\mathbf{v}_{0i} - \mathbf{v}_0(x_{ji}, t)) \cdot \nabla W_{ji} + \sum_i \omega_i \sum_j \omega_j (\mathbf{v}_0(x_{ij}, t) - \mathbf{v}_{0i}) \cdot \nabla W_{ij} \quad (4.121) \\ &= \sum_i \omega_i \sum_j \omega_j (\mathbf{v}_0(x_{ji}, t) - \mathbf{v}_{0i}) \cdot \nabla W_{ij} + \sum_i \omega_i \sum_j \omega_j (\mathbf{v}_0(x_{ij}, t) - \mathbf{v}_{0i}) \cdot \nabla W_{ij} \quad (4.122) \\ &= \sum_i \omega_i \sum_j \omega_j (\mathbf{v}_0(x_{ij}, t) - \mathbf{v}_{0i}) \cdot \nabla W_{ij} + \sum_i \omega_i \sum_j \omega_j (\mathbf{v}_0(x_{ij}, t) - \mathbf{v}_{0i}) \cdot \nabla W_{ij} \quad (4.123) \\ &= 2 \sum_i \omega_i \sum_j \omega_j (\mathbf{v}_0(x_{ij}, t) - \mathbf{v}_{0i}) \cdot \nabla W_{ij} \quad (4.124) \end{aligned}$$

Les explications suivantes concernent les manipulations mathématiques apportées au premier terme de droite des égalités précédentes. Le passage de l'équation (4.119) à (4.120) s'est effectué en inversant les sommes sur i et sur j , celui de l'équation (4.120) à (4.121) en remplaçant i par j et j par i , celui de l'équation (4.121) à (4.122), en inversant le sens du gradient de la fonction kernel et celui de l'équation (4.122) à (4.123) en tenant compte du fait que $\mathbf{v}_0(x_{ij}, t)$ et $\mathbf{v}_0(x_{ji}, t)$ sont les vitesses d'interface du même problème de Riemann et sont donc égales.

L'équation proposée d'évolution des poids est donc la suivante :

$$\frac{d}{dt}(\omega_i) = \omega_i \sum_{j \in D_i} \omega_j 2(v_0(x_{ij}, t) - v_0(x_i)) \nabla_i W_{ij} \quad (4.125)$$

Dans le cas où l'on considère la vitesse d'interface égale à la moyenne de $v_0(x_i, t)$ et $v_0(x_j, t)$, l'équation 4.125 est bien égale à l'équation traditionnelle d'évolution des poids.

Il est important ici de vérifier la cohérence physique de cette équation vis-à-vis des équations de conservation de la masse et de quantité de mouvement. Pour cela nous reprenons le cas décrit figure 4.19 a), et vérifions que, malgré une modification des vitesses d'interface, la densité et la quantité de mouvement n'évoluent pas au cours du temps.

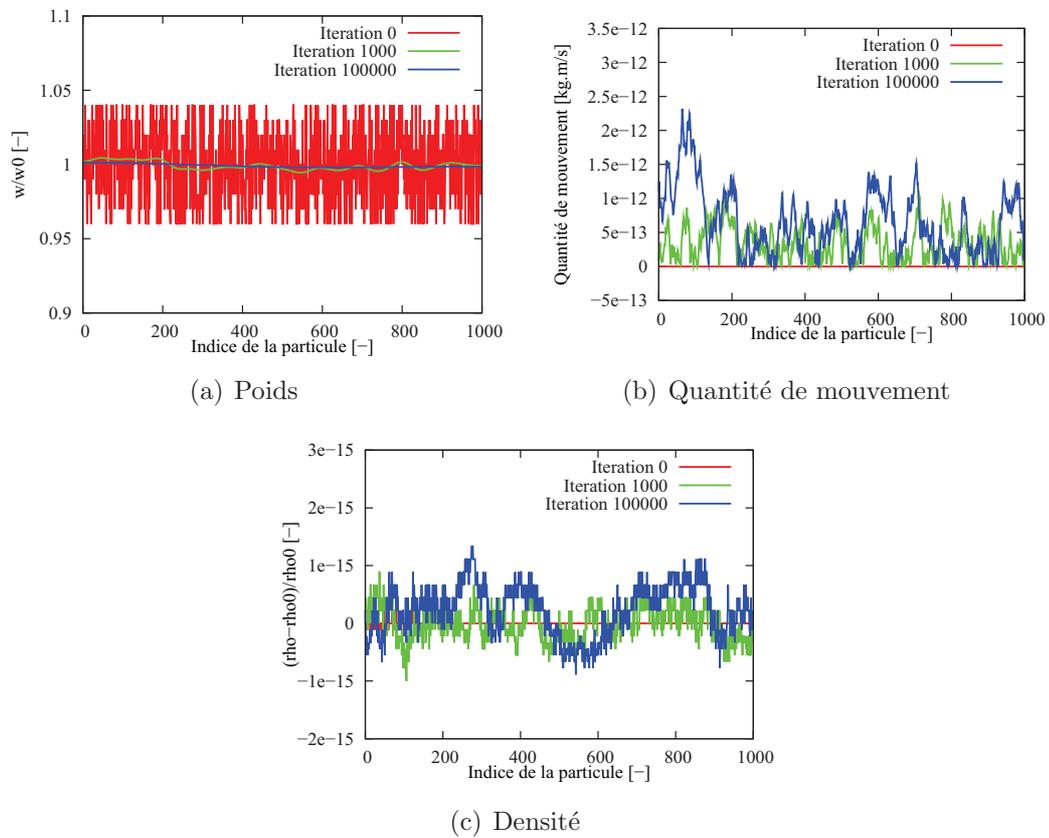


FIGURE 4.20 – Résultats pour un équilibrage des poids des particules

Figure 4.20 a., nous pouvons observer que les poids des particules s'équilibrent, sans créer de quantité de mouvement ou de variation de densité. En effet les figures 4.20 b. et c. montrent que les variations de quantité de mouvement et de densité sont de l'ordre de l'erreur machine. Les mêmes évolutions sont observables si la simulation est réalisée avec un code 2D ou 3D. Ainsi la modification de l'équation d'évolution des poids est cohérente avec la modification de la vitesse d'interface des problèmes de Riemann.

Cependant les échanges de masse précédents ne font pas intervenir de modification de la position des particules. Nous ne vérifions donc pas que la position de chaque particule se situe au centre

du domaine ω qu'elle représente et nous nous retrouvons dans le cas décrit figure 4.19 c). Les positions des centres x_i (points), ne correspondent plus aux centres des volumes discrétisés (croix). Nous nous proposons donc d'étudier le déplacement ALE des particules pour tenir compte de cette remarque.

4.4.1.2 Équation d'évolution de la position des particules

L'objectif est ici de tenir compte des évolutions de volume liées au choix de la vitesse d'interface de chaque problème de Riemann, pour déterminer l'évolution du centre des particules. Traditionnellement cette évolution est uniquement dirigée par $v_0(x_i, t)$ selon l'équation :

$$\frac{d}{dt}(x_i) = v_0(x_i, t) \quad (4.126)$$

Dans notre démarche nous pouvons remarquer que chaque interaction entre particules voisines i et j entraîne une évolution de poids donnée par l'équation 4.127.

$$\delta\omega_{ij} = \omega_i\omega_j 2(v_0(x_{ij}, t) - v_0(x_i))\Delta t \quad (4.127)$$

A partir de ce point deux méthodologies ont été testées pour déplacer le centre des particules en fonction de cette variation de poids. La première s'appuie sur la vision que cette variation de poids représente une déformation du volume ω_i . L'utilisation d'un tenseur de déformation à la manière de ce qui se fait en mécanique des milieux continus permet normalement de remonter à un déplacement moyen. Cette méthodologie n'a pas mené à des résultats satisfaisants. La seconde méthode associe la variation de volume $\delta\omega_{ij}$ à une variation de la position du barycentre du volume associé à ω_i . Ainsi l'idée est ici de rajouter au déplacement donné par l'équation 4.126, un déplacement lié à la variation du barycentre du poids résultat de l'addition de chaque terme $\delta\omega_{ij}$. La variation de la position du barycentre est donné par :

$$\delta x_{ij} = \frac{\delta\omega_{ij}}{w_i + \delta\omega_{ij}} (X_{\delta\omega_{ij}} - x_i) n_{ij} \quad (4.128)$$

où $X_{\delta\omega_{ij}}$ est la position du barycentre associé au volume $\delta\omega_{ij}$.

Étude pour un calcul 1D En 1D, les poids sont associés à des longueurs, il apparaît donc légitime de représenter la position $X_{\delta\omega_{ij}}$, selon le schéma 4.21. $X_{\delta\omega_{ij}} - x_i$ est alors égal à $0.5(w_i + \delta\omega_{ij})$

D'autre part, le cadre particulier de la discrétisation SPH fait que 2 particules peuvent échanger de

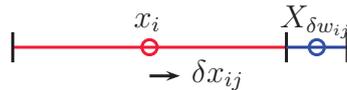


FIGURE 4.21 – Position $X_{\delta\omega_{ij}}$ en 1D

la masse, de la quantité de mouvement et influencer leur poids, sans être directement en contact,

c'est-à-dire qu'elles peuvent être séparées par une troisième particule. Dans ce cadre, il faut aussi tenir compte du fait que les variations de volume entre deux particules peuvent affecter la position des particules situées entre celles-ci. Sur la figure 4.22, l'échange de volume entre les particules j et k va influencer le positionnement de la particule i , afin qu'il n'y ait pas de recouvrement de volume. Le déplacement associé à l'échange de volume entre ces particules va entraîner pour la

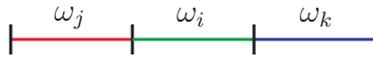


FIGURE 4.22 – Évolution des poids en 1D

particule i un déplacement de longueur $\delta\omega_{jk}$.

Ainsi nous proposons pour le cas 1D de déplacer les particules selon l'équation

$$dx_i = v_0(x_i, t)dt + \sum_{j \in D_i} \delta x_{ij} + \sum_{j \in D_i} \sum_{k \in D_i} \delta x_{jk} \quad (4.129)$$

où les particules j et k sont telles que $|x_{(jk)} - x_i| < \frac{1}{2}\omega_i$.

A ce niveau, et avant de passer à l'adaptation de cette équation pour les cas 2D et 3D, il est intéressant d'étudier l'équation 4.129 afin de savoir si elle répond à différentes questions :

- Premièrement, offre-t-elle la possibilité de garder chaque particule au centre du volume qu'elle discrétise ?

D'autre part, il est remarquable que cette équation ne soit pas égale à l'équation classique de déplacement des particules lorsque $v_0(x_{ij}, t)$ est la moyenne de $v_0(x_i)$ et de $v_0(x_j)$, ainsi deux questions apparaissent naturellement :

- A quel niveau les termes ajoutés peuvent-ils intervenir ?
- Quel peut être leur impact sur les résultats de calculs numériques ?

Pour répondre à la première question, nous déterminons l'écart entre la position des particules et le centre des volumes qu'elles discrétisent pour le cas décrit dans la partie concernant la modification de l'équation des poids : le fluide est initialement au repos, la pression constante et il n'y a pas de gravité, figure 4.19 a). Le déplacement des interfaces des problèmes de Riemann est géré par les différences de poids. La figure 4.23 représente l'erreur de position de la particule par rapport au centre du volume qu'elle discrétise. Dans ce cas, et avec l'équation modifiée, l'erreur de position du centre de la particule reste de l'ordre de grandeur de l'erreur numérique.

Ainsi dans ce cas d'étude où les frontières des problèmes de Riemann sont déplacées sur des critères géométriques, l'équation 4.129 permet de maintenir la position des particules au centre du volume qu'elles discrétisent.

Comme nous l'avons remarqué précédemment, cette équation n'est pas égale à l'équation usuelle lorsque $v_0(x_{ij}, t)$ est la moyenne de $v_0(x_i)$ et de $v_0(x_j)$. Pour comprendre où les termes peuvent intervenir nous raisonnons sur le cas décrit figure 4.24. Cette dernière représente la chute d'une colonne d'eau sur une autre colonne d'eau en équilibre hydrostatique. Les poids sont initialement les mêmes pour toutes les particules, fig 4.24 a). Lors de la première itération où la particule

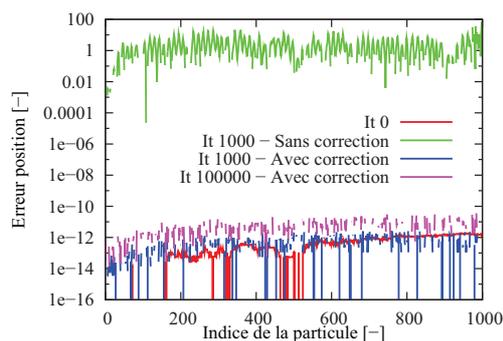


FIGURE 4.23 – Erreur position des particules

supérieure de la colonne au repos interagit avec la particule inférieure de la colonne en mouvement, l'équation traditionnelle d'évolution des poids fait diminuer les volumes de ces deux particules (il en est de même si l'équation modifiée d'évolution des poids est utilisée, eq 4.125). Or dans le même temps, l'équation traditionnelle de déplacement des particules fait que la particule de la colonne au repos reste immobile et que la particule de la colonne en mouvement continue son mouvement décrit par sa vitesse à l'étape précédente. Ainsi à la fin de l'itération, les différentes particules se retrouvent dans la situation décrite figure 4.24 c). Les colonnes supérieures et inférieures ne sont plus continues, ce qui n'est pas un résultat physique. (Le même raisonnement est valable pour une colonne d'eau rencontrant une paroi et nous verrons plus tard qu'une version utilisant comme vitesse de déplacement des particules la vitesse calculée durant l'itération ne répond pas à cette remarque.)

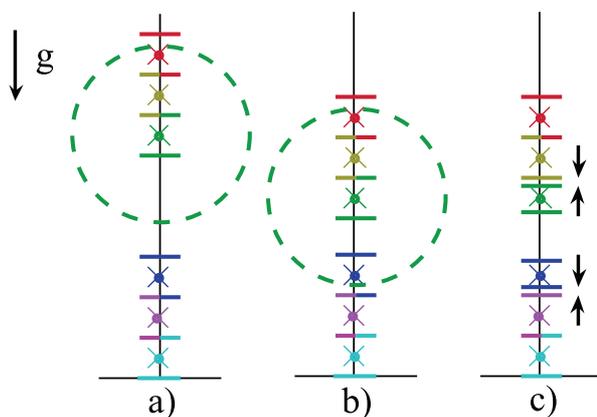


FIGURE 4.24 – Evolution des poids. Cas d'une chute de colonne d'eau sur une colonne en équilibre hydrostatique

Les termes ajoutés à l'équation de déplacement des particules doivent en partie corriger cela car ils font intervenir, par l'intermédiaire des vitesses des problèmes de Riemann, les mouvements des frontières entre les volumes de contrôle. Cette remarque est vérifiée à partir d'un cas test de tube à choc. Ce cas est particulièrement adapté puisque le fluide est initialement au repos et une discontinuité de pression le met en mouvement. Ainsi à l'instant initial, l'hypothèse de régularité

du champ de transport est bien vérifiée ainsi que celle de répartition des points (hypothèses utilisées par Raviart [65] dans l'étude mathématique de la méthode).

Ce cas test est résolu en utilisant une version eulérienne, une version lagrangienne et une version lagrangienne corrigée par l'équation 4.129 de la méthode numérique. Pour tous ces cas la vitesse d'interface des problèmes de Riemann $v_0(x_{ij}, t)$ est prise égale à la moyenne de $v_0(x_i, t)$ et $v_0(x_j, t)$. Dans ce cas l'équation d'évolution des poids, eq. 4.125, est égale à l'équation traditionnelle. Ainsi seule l'équation de déplacement des particules est modifiée.

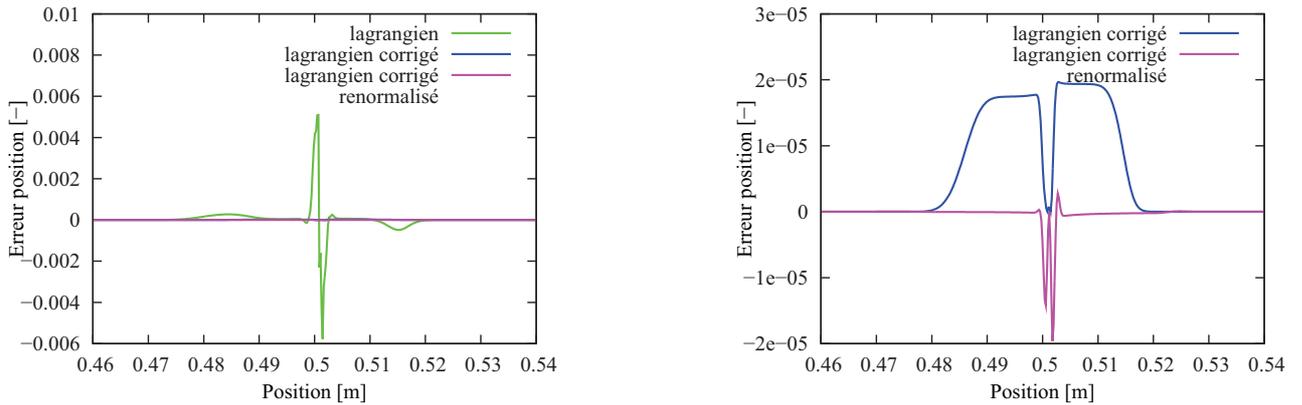


FIGURE 4.25 – Erreur position des particules - Tube à choc - Temps = 10^{-5} s

Les figures 4.25 à 4.28 montrent l'impact de cette correction sur l'erreur de position des particules ainsi que sur les calculs des champs de pression et de vitesse. La figure 4.25 montre que l'erreur sur la position des particules avec le déplacement corrigé est bien inférieure à celle commise avec la méthode classique (le rapport d'erreur est d'environ 300). Sur la figure de droite un zoom sur les erreurs avec la méthode corrigée montre que la renormalisation a un effet positif sur l'erreur de positionnement des particules mais ne permet pas de ramener cette erreur à l'ordre de grandeur de l'erreur machine. L'effet sur le calcul du champ de pression est visible sur la figure 4.26. Bien que sur le tracé de gauche, les différentes méthodes ne se distinguent pas, une attention particulière sur la zone de discontinuité initiale montre les différences de comportements entre les différents schémas. L'utilisation de la correction de position des particules permet de diminuer les oscillations de pression dans cette zone mais ne les annule pas. Il en est de même pour le champ de vitesse, figure 4.27. Enfin l'intérêt est aussi de voir l'impact de la correction de la position des particules lorsque la reconstruction MUSCL est utilisée.

La figure 4.28 montre cet impact sur les champs de pression et vitesse. Sur le champ de pression nous voyons que l'oscillation centrale présente dans le cas lagrangien disparaît avec les schémas corrigés. Ces derniers présentent de plus des variations de pression qui ont la même topologie qu'avec le schéma eulérien. Pour ce qui est du champ de vitesse, nous avons déjà remarqué, figure 4.17, que les champs de vitesses eulérien et lagrangien, avec la reconstruction MUSCL, ne présentent pas la même topologie. En effet le champ calculé avec le schéma lagrangien présente un bruit pour des positions inférieures à $0.5m$ que ne présente pas le schéma eulérien. En plus de corriger l'oscillation au niveau de la discontinuité initiale, nous observons sur la figure 4.28, que le déplacement corrigé des particules permet d'enlever ce bruit et qu'ainsi les variations de vitesse présentent la même topologie que celles obtenues avec le schéma eulérien.

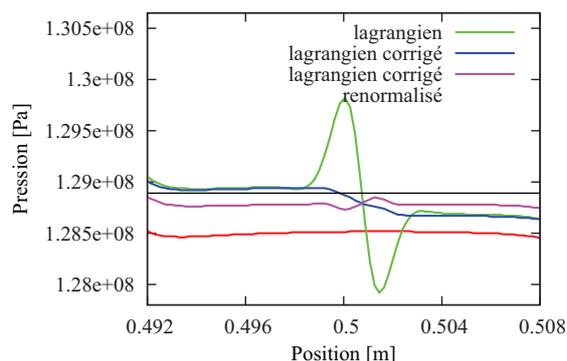
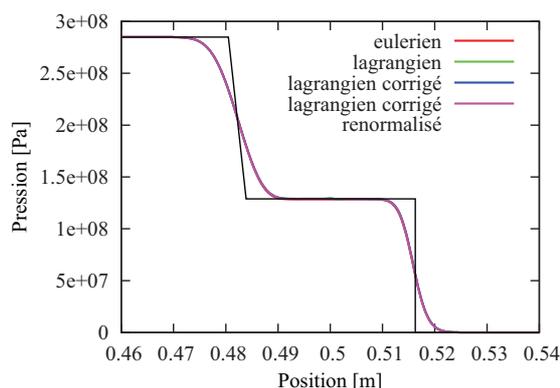


FIGURE 4.26 – Évolution de la pression cas du tube à choc - Influence de la renormalisation et de la correction des positions

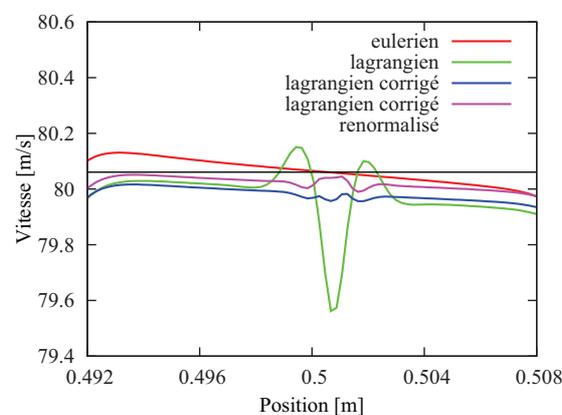
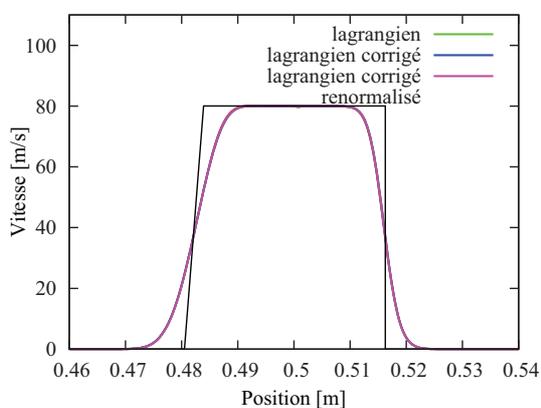


FIGURE 4.27 – Évolution de la vitesse cas du tube à choc - Influence de la renormalisation et de la correction des positions

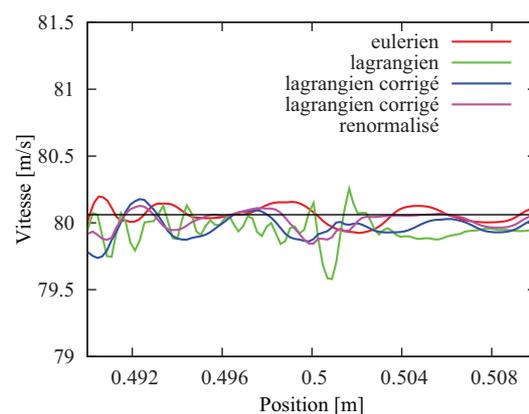
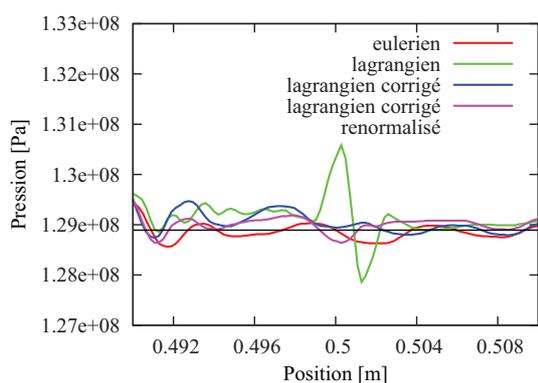


FIGURE 4.28 – Évolutions de la vitesse et de la pression - Influence de la renormalisation et de la correction des positions avec la reconstruction MUSCL

D'autre part nous observons sur la figure 4.29 que l'utilisation de la vitesse obtenue en fin d'itération (lagrangien décentré) ne permet pas de corriger les oscillations de pression ou de vitesse.

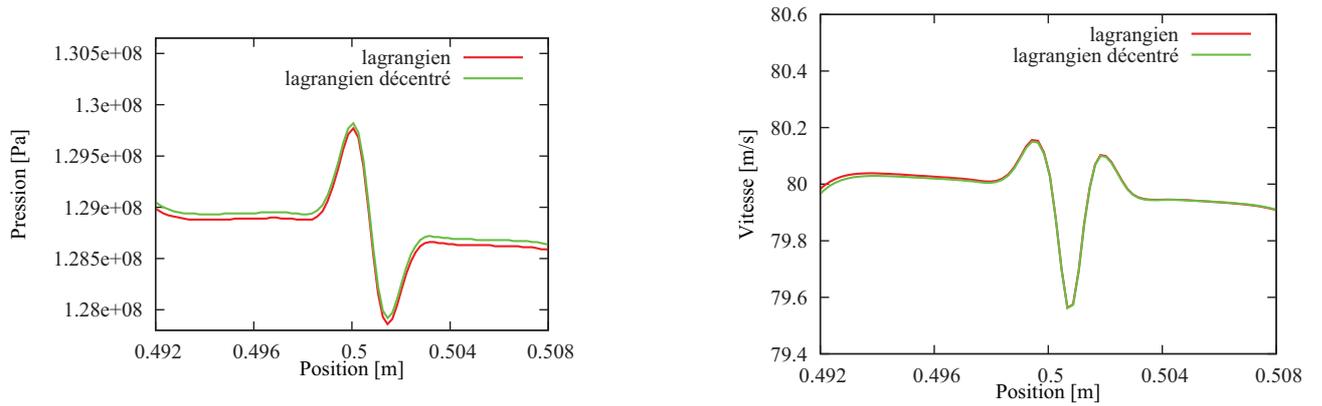


FIGURE 4.29 – Évolutions de la vitesse et de la pression - Influence du choix de la vitesse ALE de déplacement v_0^n ou v_0^{n+1}

Ainsi pour le cas 1D, l'équation 4.129 permet de déplacer les particules de manière plus cohérente avec l'évolution des poids et ainsi d'améliorer le calcul des champs de pression et de vitesse.

Étude pour un calcul 2D et 3D Pour ce qui est des cas 2D et 3D nous sommes confrontés à la difficulté de ne pas connaître la topologie des volumes ω_i . Ainsi la position $X_{\delta w_{ij}}$ associée à la variation de volume ω_{ij} , ne résulte ici que d'hypothèse sur la forme de w_i et w_{ij} . Deux principales hypothèses peuvent être faites, la première s'appuyant sur le caractère sphérique du formalisme SPH, figure 4.30, et la seconde sur des considérations plus géométriques, figure 4.31.

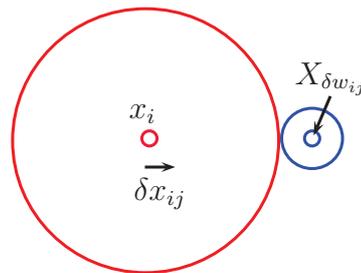
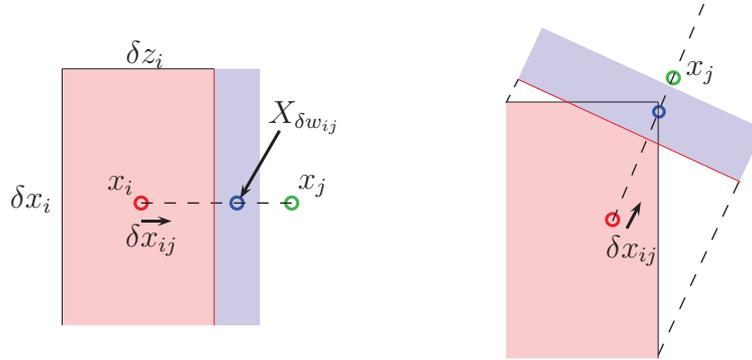


FIGURE 4.30 – Position $X_{\delta w_{ij}}$ en 2D ou 3D - hypothèse sphérique

La pratique sur différents cas a montré que la formulation sphérique a tendance à trop éloigner les centres des $\delta\omega_{ij}$ et ainsi à leur donner trop de poids vis-à-vis de la formule du barycentre 4.128. D'autre part la répartition de particules n'est que rarement isotrope, or cette formulation ne permet pas d'en tenir compte. Ainsi au début du calcul, différentes longueurs sont attribuées à chaque particule pour chaque direction de l'espace : en 1D (δ_x), en 2D (δ_x, δ_z) et en 3D ($\delta_x, \delta_y, \delta_z$). En 1D, δ_x est égal au poids de la particule, en 2 et 3D et si la grille est cartésienne, le produit des longueurs est égal au poids des particules. La longueur associée à $X_{\delta w_{ij}} - x_i$ est donnée par

FIGURE 4.31 – Position $X_{\delta w_{ij}}$ en 2D ou 3D - hypothèse géométrique

$\frac{(w_{ij} + \delta w_{ij})}{A_{ij}}$ ou A_{ij} est une longueur en 2D, une surface en 3D donnée par :

$$A_{ij} = \begin{cases} |\delta_{xi} \mathbf{n}_{ij} \cdot \mathbf{z}| + |\delta_{zi} \mathbf{n}_{ij} \cdot \mathbf{x}| & \text{en 2D} \\ |\delta_{xi} \delta_{yi} \mathbf{n}_{ij} \cdot \mathbf{z}| + |\delta_{xi} \delta_{zi} \mathbf{n}_{ij} \cdot \mathbf{y}| + |\delta_{yi} \delta_{zi} \mathbf{n}_{ij} \cdot \mathbf{x}| & \text{en 3D} \end{cases} \quad (4.130)$$

L'évolution de grandeur δ_x est donnée, en 3D, par :

$$\delta_{xi}^{n+1} = \delta_{xi}^n \left(1 + \frac{\partial \delta_x}{\partial x} \right) \quad (4.131)$$

$$\delta_{xi}^{n+1} = \delta_{xi}^n \left(1 + 2\omega_i \Delta t \sum_j \omega_j \frac{(v_{0i} - V_{(E,ij)}) \cdot \mathbf{x}}{\delta_y \delta_z} \nabla W_{ij} \cdot \mathbf{x} \right) \quad (4.132)$$

Ceci correspond à la variation donnée par les déformations calculées avec les distances : $(v_{0i} - V_{E,ij})\Delta t$. L'évolution des autres valeurs δ est calculée de la même façon.

Nous vérifions la pertinence de cette correction pour le cas monodimensionnel du tube à choc décrit plus haut. Les géométries sont présentées sur les figures 4.32 et 4.36. Au final les oscillations de pressions, figure 4.33, 4.34 et 4.37, et de vitesse, figure 4.35 et 4.37, sont diminuées mais toujours présentes. (Pour des raisons de lisibilité, la légende toujours identique n'a pas été répétée.) Le fait que nous n'obtenions pas la même qualité de résultat pour les résolutions en 2D et 3D est certainement dû à l'imprécision faite vis-à-vis de l'hypothèse géométrique, figure 4.31.

A ce stade nous avons vérifié la possibilité de ne pas prendre la vitesse des interfaces des problèmes de Riemann égale à la moyenne des vitesses de déplacement de chaque particule. Pour cela des modifications de l'équation des poids et de déplacement des particules ont été introduites. Les modifications apportées aux différentes équations sont physiquement cohérentes et permettent une amélioration des résultats. Le terme ajouté au déplacement des particules est général à la méthode SPH-ALE et n'a à notre connaissance pas été étudié précisément. Ainsi l'étude plus générale de la dépendance des résultats à la précision du déplacement des particules par rapport au barycentre du volume qu'elles doivent discrétiser semble un sujet important à étudier.

Le système final d'équation proposé est le suivant :



FIGURE 4.32 – Évolution de la pression cas du tube à choc - cas 2D - Initiale à gauche et finale à droite

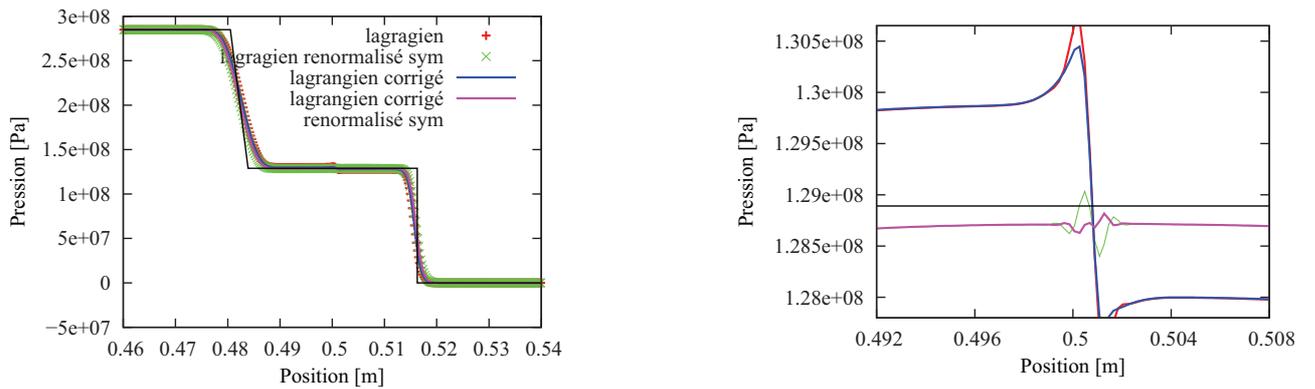


FIGURE 4.33 – Évolution de la pression cas du tube à choc - cas 2D

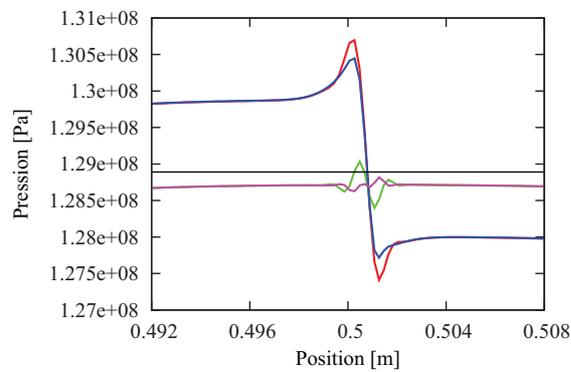


FIGURE 4.34 – Évolution de la pression cas du tube à choc - cas 2D

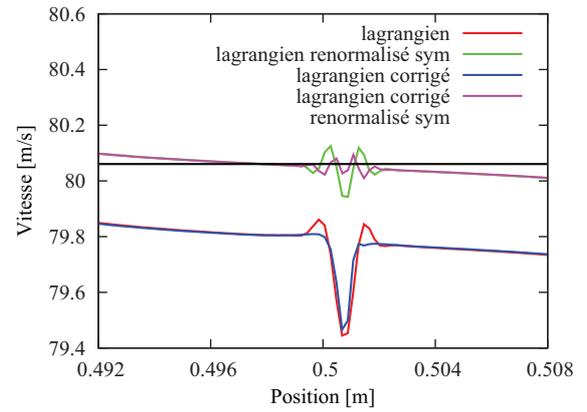
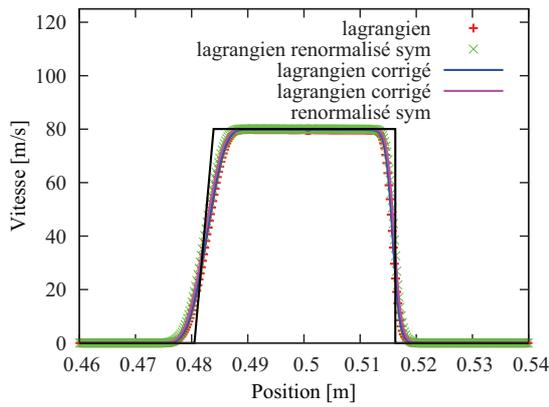
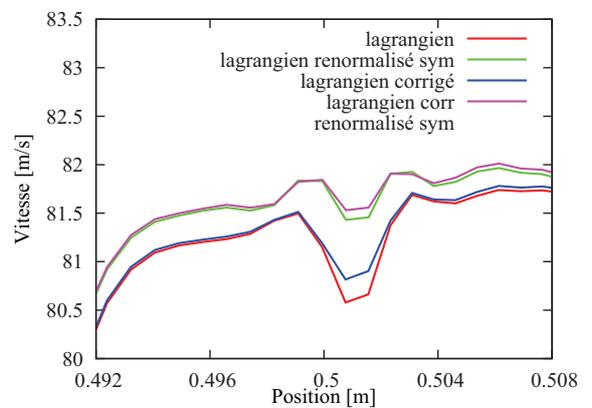
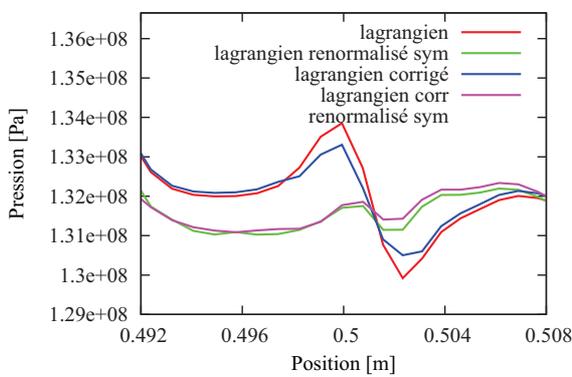


FIGURE 4.35 – Évolution de la vitesse cas du tube à choc - cas 2D



FIGURE 4.36 – Évolution de la pression cas du tube à choc - résolution 3D - Initiale à gauche et finale à droite

FIGURE 4.37 – Évolution de la pression et de la vitesse dans la zone de discontinuité initiale - cas du tube à choc - résolution 3D - Temps = 10^{-5} s

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(x_i) = v_0(x_i, t) + \sum_{j \in D_i} \delta x_{ij} + \sum_{j \in D_i} \sum_{k \in D_i} \delta x_{jk} \\ \frac{d}{dt}(\omega_i) = 2\omega_i \sum_{j \in D_i} \omega_j (v_0(x_{ij}, t) - v_0(x_i)) \nabla_i W_{ij} \\ \frac{d}{dt}(\omega_i \rho_i) + \omega_i \sum_{j \in D_i} \omega_j 2\rho_{E,ij} (v_{E,ij} - v_0(x_{ij}, t)) \cdot \nabla_i W_{ij} = 0 \\ \frac{d}{dt}(\omega_i \rho_i v_i) + \omega_i \sum_{j \in D_i} \omega_j 2[\rho_{E,ij} v_{E,ij} \otimes (v_{E,ij} - v_0(x_{ij}, t)) + p_{E,ij}] \cdot \nabla_i W_{ij} = \omega_i \rho_i g \end{array} \right. \quad (4.133)$$

Dans la suite nous ferons référence aux équations de déplacement et d'évolution des poids du système 4.133, à travers l'adjectif "modifiées" tandis que celles du système 4.79 seront qualifiées de "classiques".

4.4.2 Modèle Multiphase

Il a été montré dans la partie précédente qu'il est possible de fixer la vitesse des interfaces des problèmes de Riemann de façon arbitraire, si le système d'équation 4.133 est utilisé. L'idée est ici de fixer la vitesse des interfaces entre des particules associées à des fluides différents, égale à la vitesse solution du problème de Riemann, eq 4.134 :

$$v_0(x_{ij}, t) = v_{E,ij} \quad (4.134)$$

Ainsi si on observe les termes issus d'une interaction entre 2 particules de fluides différents, on remarque que les flux de masse et les flux convectifs de quantité de mouvement sont bloqués, eq. 4.135.

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta x_{ij} \\ 2\omega_i \omega_j (v_0(x_{ij}, t) - v_0(x_i)) \nabla_i W_{ij} \\ \omega_i \omega_j 2\rho_{E,ij} (\cancel{v_{E,ij} - v_0(x_{ij}, t)}) \cdot \nabla_i W_{ij} \\ \omega_i \omega_j 2[\rho_{E,ij} v_{E,ij} \otimes (\cancel{v_{E,ij} - v_0(x_{ij}, t)}) + p_{E,ij}] \cdot \nabla_i W_{ij} \end{array} \right. \quad (4.135)$$

Ainsi cette propriété assure que l'interface ne va pas être diffusée au cours de l'avance en temps de la simulation. Il reste, à ce niveau, à obtenir une solution du problème de Riemann qui soit adaptée à la discontinuité des propriétés physiques entre les états gauche et droit initiaux. En effet la résolution du problème de Riemann entre ces deux particules va impacter les flux à travers la pression $p_{E,ij}$ dans l'équation de quantité de mouvement et à travers la vitesse $v_0(x_{ij}, t)$ (qui est dans ce cas précis égale à $v_{E,ij}$) dans l'équation d'évolution des poids. Il est donc important de disposer d'une méthode de résolution de ce problème de Riemann qui tienne compte de la physique à l'interface entre les deux fluides. Nous reprenons ici la démarche effectuée pour l'obtention du solveur acoustique. Tout d'abord celle-ci s'appuie sur les variables de pression et vitesse normale qui sont des grandeurs continues à travers une interface entre deux fluides en l'absence de tension de surface. D'autre part celle-ci ne nécessite pas de construction d'un état moyen entre les états droit et gauche qui n'aurait pas de réalité physique dans ce cadre et finalement la construction de

la solution se fait par intégration le long de caractéristiques qui sont propres à chaque fluide. Ainsi la construction de cette solution ne s'appuie que sur des grandeurs ou hypothèses en lien avec les propriétés physiques d'une interface entre deux fluides. La solution finale trouvée est, eq 4.112 :

$$\begin{cases} u^* = \frac{Z_L u_L + Z_R u_R}{Z_L + Z_R} + \frac{p_L - p_R}{Z_L + Z_R} \\ p^* = \frac{Z_R p_L - Z_L p_R}{Z_L + Z_R} + \frac{Z_R Z_L (u_L - u_R)}{Z_L + Z_R} \end{cases} \quad (4.136)$$

où $Z = \rho c$ est l'impédance acoustique. Nous voyons ici que la vitesse de l'état "étoile", solution du problème de Riemann bi-fluide, sera imposée par le fluide d'impédance acoustique la plus élevée alors que la pression le sera par le fluide d'impédance acoustique la plus faible. Dans le cas d'une interaction entre de l'eau et de l'air, l'eau va ainsi imposer la vitesse normale à l'interface du problème de Riemann et l'air la pression. Cette condition fait donc apparaître les conditions limites naturelles à l'interface. (Il est à noter que la normale à l'interface du problème de Riemann est en général différente de la normale de l'interface entre l'air et l'eau. Ainsi la vitesse finale imposée aura une composante transverse par rapport à l'interface physique.)

Une analyse peut-être aussi faite du point de vue de l'équation modifiée d'évolution des poids. En effet entre une particule i et une particule j appartenant à deux fluides d'impédance acoustique très différente, $v_0(x_{ij}, t)$ va être quasiment égale à la vitesse du fluide d'impédance acoustique la plus élevée, c'est-à-dire $v_0(x_i)$ ou $v_0(x_j)$ puisque la description est lagrangienne. Les différences $v_0(x_{ij}, t) - v_0(x_i)$ et $v_0(x_{ij}, t) - v_0(x_j)$, ne seront pas égales et les variations de volume seront absorbées par le fluide d'impédance acoustique la plus faible. Ainsi lors d'une simulation avec de l'air et de l'eau ce seront les volumes de contrôle associés à l'air qui absorberont les variations de volume au niveau de l'interface.

4.4.3 Validations

4.4.4 Cas Test : Colonne hydrostatique

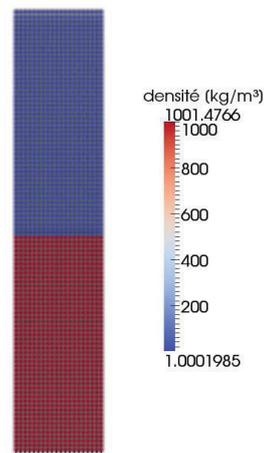
Le cas test de la colonne hydrostatique est un cas qui permet d'évaluer la stabilité du modèle pour des rapports de densité importants. A l'instant initial les fluides ont une pression égale à la pression de référence et on observe la stabilisation du système autour de l'équilibre hydrostatique. Au cours du calcul une onde de pression se dirige de la paroi inférieure vers l'interface entre les deux fluides. C'est le traitement au niveau de l'interface de cette onde de pression qui est critique pour le cas test.

Le tableau 4.1 résume les propriétés des fluides et de la géométrie pour ce cas test. Sur la figure 4.38 nous observons le champ de densité pour les deux fluides après un temps physique de 2s.

Le champ de pression à travers les deux fluides est tracé sur la figure 4.39 (la courbe de droite étant un agrandissement de la courbe de gauche pour les valeurs de pression de l'air). Nous pouvons observer que le modèle permet de retrouver le champ de pression hydrostatique dans les deux fluides et que la continuité de pression est bien vérifiée à l'interface. Au niveau de la paroi inférieure et de l'interface on peut noter que les gradients de pression ne sont pas bien évalués. Ceci est dû au fait que dans ces deux régions, pour le calcul des gradients des champs de pression, de densité et de vitesse, le support des fonctions kernel est tronqué : il en résulte une mauvaise approximation de la valeur de ces gradients. (La dérivée spatiale de ces champs étant discontinue

Tableau 4.1 – Configuration colonne hydrostatique

| | |
|----------------------------------|------|
| hauteur totale L [m] | 1 |
| densité fluide 1 [$kg.m^{-3}$] | 1000 |
| densité fluide 2 [$kg.m^{-3}$] | 1 |
| vitesse du son 1 [$m.s^{-1}$] | 15 |
| vitesse du son 2 [$m.s^{-1}$] | 5 |
| gravité [$m.s^{-2}$] | 9.81 |

FIGURE 4.38 – Densité des fluides pour une colonne hydrostatique - $t=2s$

au niveau de l'interface entre deux liquides, on ne calcule cette valeur qu'à partir des volumes voisins issus du même fluide.)

4.4.5 Cas Test : Onde de gravité

Le cas test de l'onde de gravité considère un domaine 2D dans lequel deux fluides de densité différentes sont présents. Une condition de périodicité est appliquée horizontalement alors que des parois délimitent les frontières inférieures et supérieures du domaine. Initialement une déformation est appliquée à l'interface entre les fluides. La position de l'interface est alors donnée par l'équation $z = L/2 + a \sin(kx)$ où $k=2\pi/L$ est le nombre d'onde et L la hauteur du domaine, figure 4.40

La comparaison à la valeur théorique de la fréquence d'oscillation permet d'évaluer la pertinence des travaux présentés précédemment. La fréquence d'oscillation est donnée par la relation, [7] :

$$f^2 = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{\rho_1 + \rho_2} ((\rho_1 - \rho_2)gk) \tanh\left(\frac{kL}{2}\right) \quad (4.137)$$

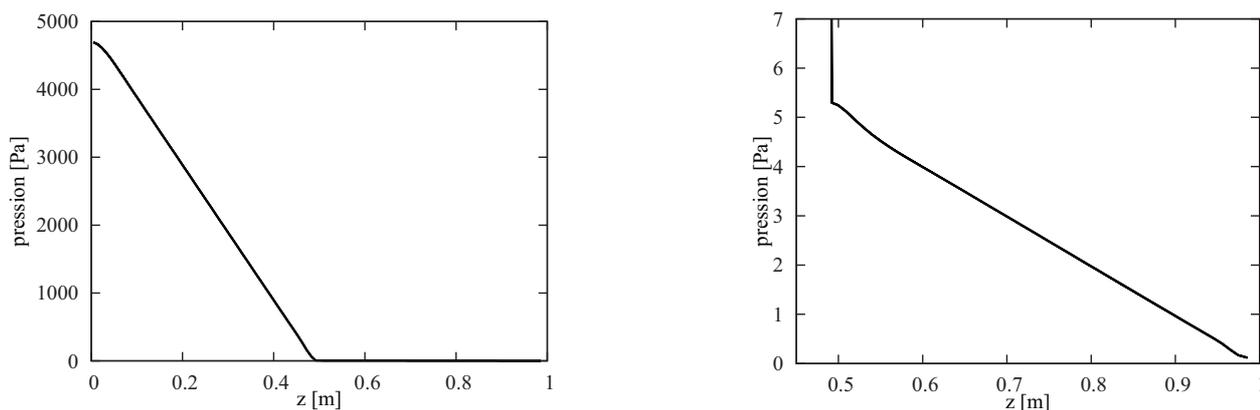
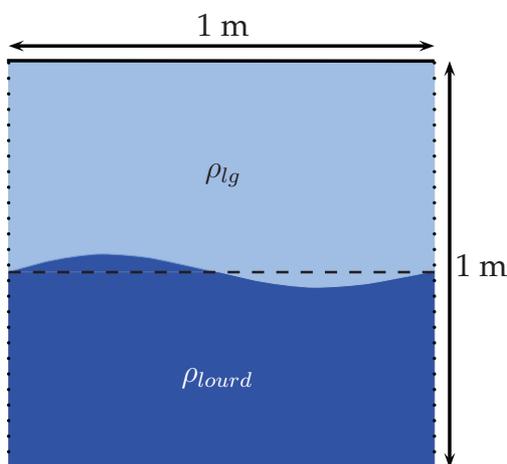
FIGURE 4.39 – Évolution de la pression pour une colonne hydrostatique - $t=2s$ 

FIGURE 4.40 – Schéma - Ondes gravitaires

L'application numérique de la précédente équation donne une fréquence théorique de $1.24Hz$, soit une période de $0.802s$.

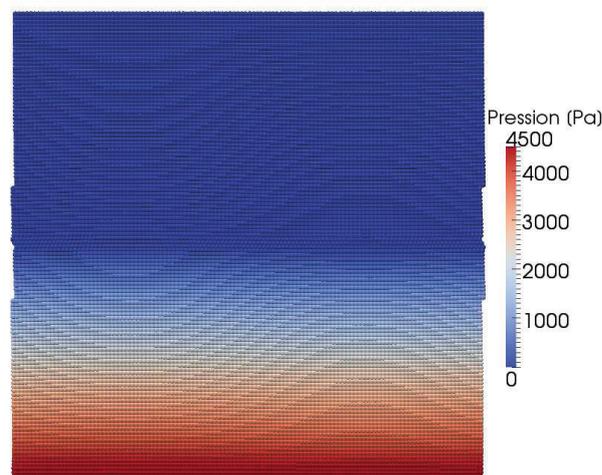
Les figures 4.41 et 4.42 montrent les champs de pression et de vitesse une fois que le système est en mouvement. On voit apparaître des oscillations de l'interface dont les propriétés changent en fonction des techniques numériques utilisées.

La figure 4.43 montre l'influence de la fonction kernel sur l'évolution de l'énergie cinétique du système. Une première observation réalisable est que les résultats sont très dépendants de la fonction kernel choisie que ce soit en terme de fréquence ou d'évolution de l'amplitude. Au premier maximum de l'énergie cinétique le kernel C6 est celui qui permet d'obtenir l'énergie cinétique la plus importante. Cependant nous voyons qu'une forme d'instabilité apparaît et que ni l'amplitude ni la fréquence ne sont correctes par la suite avec cette fonction kernel. Le tableau 4.3 donne l'écart par rapport à la fréquence théorique des résultats obtenus pour les différentes fonctions kernel. Ces écarts varient de 2.1% pour le kernel Wendland C4 à 12.6% pour le kernel C6.

L'impact de la renormalisation sur ce cas test est montré sur la figure 4.44 pour l'utilisation

Tableau 4.2 – Configuration onde de gravité

| | |
|----------------------------------|------|
| longueur L [m] | 1 |
| déformation initiale a/L [-] | 0.01 |
| densité fluide 1 [$kg.m^{-3}$] | 1000 |
| densité fluide 2 [$kg.m^{-3}$] | 1 |
| vitesse du son 1 [$m.s^{-1}$] | 5 |
| vitesse du son 2 [$m.s^{-1}$] | 15 |
| gravité [$m.s^{-2}$] | 9.81 |

FIGURE 4.41 – Champ de pression à $t=0.18s$

de la fonction kernel C4. On peut y voir que la renormalisation, avec la forme symétrisée ou non, permet d'avoir sur les premières périodes une diminution de la diffusion numérique. Pour la forme non symétrisée, on voit apparaître en fin de simulation un comportement instable. L'origine de cette instabilité n'a pas pu être déterminée précisément. D'autre part l'utilisation de la forme symétrisée de la renormalisation permet d'améliorer l'écart à la fréquence théorique puisqu'il est dans ce cas de 1.1% alors qu'il était de 2.1% sans cette correction. (L'écart entre les deux fréquences est de 3% car la forme renormalisée symétrique donne une fréquence trop faible alors qu'elle est trop élevée sans renormalisation).

Il est important d'observer l'influence de la renormalisation sur les écarts entre les résultats obtenus avec différentes fonctions kernel. La figure 4.45 montre les résultats obtenus avec les fonctions kernels C4 et C6 en ajoutant la renormalisation symétrisée (Ces deux fonctions kernels donnaient les résultats les plus éloignés auparavant). On observe ainsi que la renormalisation rend les écarts entre les résultats plus faibles. L'utilisation du kernel C6 est possible avec ce traitement et donne les mêmes résultats en terme de fréquence que le kernel C4, tableau 4.4.

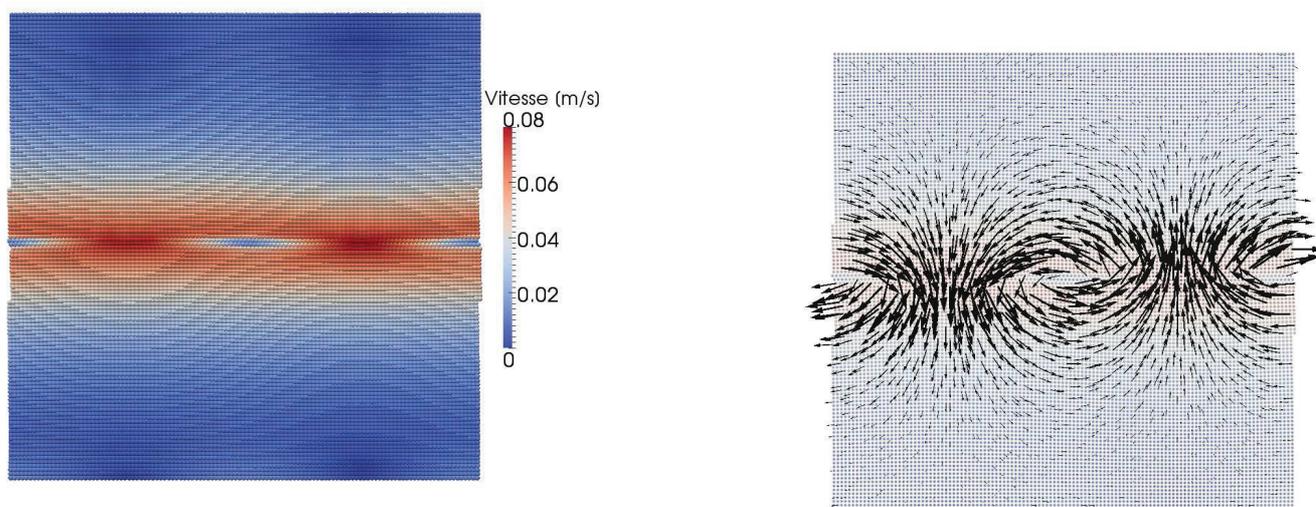
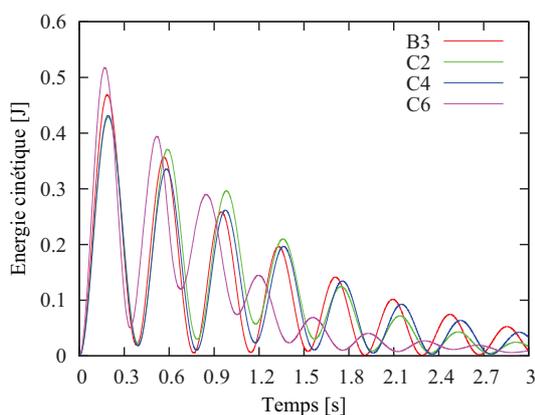
FIGURE 4.42 – Norme et vecteurs vitesse à $t=0.18s$ 

FIGURE 4.43 – Évolution de l'énergie cinétique pour différentes fonctions kernel

A ce point de l'étude des cas test, nous avons observé que pour des cas à dynamique lente le schéma est stable même pour des rapports de densité élevés, que la renormalisation permet d'améliorer les résultats (amplitude, fréquence) et de diminuer l'influence du choix de la fonction kernel. Cependant on observe sur l'ensemble des résultats une diffusion numérique importante, se caractérisant par un amortissement des oscillations sur le cas des ondes de gravité. Cette caractéristique, connue pour les méthodes numériques utilisant un schéma de Godunov pénalise la méthode. Pour diminuer cet effet nous nous intéressons à l'utilisation d'une méthode développée dans les méthodes à maillage appelée préconditionnement.

4.4.6 Utilisation de solveurs préconditionnés

Dans le cas d'écoulements à faible nombre de Mach, il a été prouvé qu'une modification des flux numériques liée à l'introduction d'une matrice de préconditionnement permet d'améliorer la

Tableau 4.3 – Configuration du cas test : onde de gravité

| kernel | B3 | C2 | C4 | C6 |
|-------------|-------|-------|-------|-------|
| période [s] | 0.763 | 0.782 | 0.785 | 0.709 |
| erreur [%] | 5.1 | 2.5 | 2.1 | 12.8 |

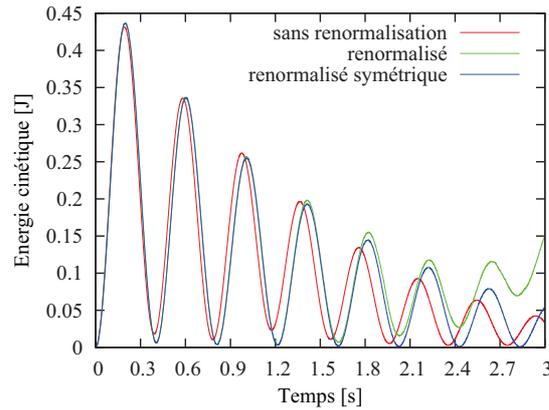


FIGURE 4.44 – Évolution de l'énergie cinétique pour le kernel C4

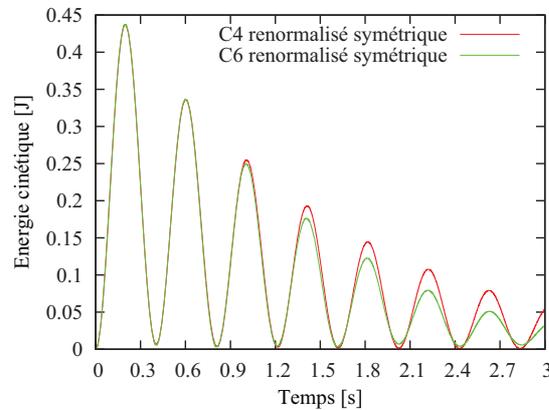


FIGURE 4.45 – Évolution de l'énergie cinétique pour différentes fonctions kernel

qualité des résultats, [52] [39]. Le système d'équation 4.88 est remplacé par le suivant :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + PA \frac{\partial \Phi}{\partial x^{(1)}} = 0 \quad (4.138)$$

où P est la matrice de préconditionnement. Différents types de matrices ont été étudiés en fonction du type du système d'équation à résoudre. Dans le cas des équations d'Euler et du formalisme SPH-ALE, Marongiu a montré l'efficacité d'utiliser la matrice de préconditionnement de Turkel définie par :

Tableau 4.4 – Résultat pour solveur renormalisé

| kernel | C4 | C6 |
|-------------|------------------------|------------------------|
| correction | renormalisé symétrique | renormalisé symétrique |
| période [s] | 0.811 | 0.811 |
| erreur [%] | 1.1 | 1.1 |

$$P = \begin{bmatrix} \beta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.139)$$

où β est de l'ordre de grandeur du nombre de Mach. Cette même matrice de préconditionnement a été aussi utilisée par Murrone *et al.* [52] dans le cadre d'écoulements multiphasiques utilisant le solveur acoustique. Nous reprenons ici succinctement les étapes menant à l'obtention de la solution d'un problème de Riemann préconditionné utilisant le solveur acoustique.

La nouvelle matrice jacobienne est :

$$\begin{pmatrix} \beta^2 v^{(1)} & \beta^2 \rho c^2 & 0 \\ \frac{1}{\rho} & v^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & v^{(1)} \end{pmatrix} \quad (4.140)$$

dont les valeurs propres sont $\lambda_1 = \frac{1}{2} \left[(1 + \beta^2)v^{(1)} - \sqrt{\Delta} \right]$, $\lambda_2 = v^{(1)}$ et $\lambda_3 = \frac{1}{2} \left[(1 + \beta^2)v^{(1)} + \sqrt{\Delta} \right]$ avec $\Delta = \left[(1 - \beta^2)v^{(1)} \right]^2 + 4\beta^2 c^2$.

Si on s'intéresse aux ordres de grandeur des valeurs propres, lorsque β tend vers 0, Δ tend vers $v^{(1)2}$. Ainsi λ_1 et λ_3 tendent vers $\frac{1}{2}(v^{(1)} - |v^{(1)}|)$ et $\frac{1}{2}(v^{(1)} + |v^{(1)}|)$ respectivement. Les valeurs propres sont donc d'un ordre de grandeur comparable alors que sans préconditionnement λ_1 et λ_3 étaient de l'ordre de grandeur de c alors que λ_2 était égale à $v^{(1)}$. La matrice jacobienne est donc bien conditionnée (au sens où le rapport maximum des valeurs propres est diminué par cette technique).

La résolution du problème préconditionné avec la méthode du solveur acoustique nous permet d'obtenir pour l'état étoilé :

$$\begin{cases} v^* = \frac{I_l v_l^{(1)} + I_r v_r^{(1)}}{I_l + I_r} - \frac{p_r - p_l}{I_l + I_r} \\ p^* = \frac{I_l p_r + I_r p_l}{I_l + I_r} - \frac{I_l I_r (v_r^{(1)} - v_l^{(1)})}{I_l + I_r} \end{cases} \quad (4.141)$$

avec

$$\begin{cases} I_l = \frac{1}{2} \rho_l \left[\sqrt{(1 - \beta_l^2)^2 u_l^2 + 4\beta_l^2 c_l^2} + (1 - \beta_l^2) u_l \right] \\ I_r = \frac{1}{2} \rho_r \left[\sqrt{(1 - \beta_r^2)^2 u_r^2 + 4\beta_r^2 c_r^2} - (1 - \beta_r^2) u_r \right] \end{cases} \quad (4.142)$$

Nous pouvons remarquer que lorsque β tend vers 1, nous retrouvons la forme non préconditionnée. En revanche il faut prévenir le cas où β est égal à 0. Pour ce faire on définit une valeur minimale

Tableau 4.5 – Résultat pour solveur renormalisé et préconditionné

| kernel | C4 | C6 |
|-------------|--|--|
| correction | renormalisé symétrique préconditionné | renormalisé symétrique préconditionné |
| période [s] | 8.05 | 8.09 |
| erreur [%] | 0.37 | 0.87 |

de β définie par :

$$\beta_{min}^i = \max \left(\frac{p_j - p_i}{\rho_{ij} c_{ij}^2 + \frac{|v_j - v_i|}{c_{ij}}} \right) \quad (4.143)$$

Ce calcul ne repose que sur des volumes de contrôle associés à la même espèce, c'est à dire pour lesquels les valeurs moyennes de la densité ρ_{ij} et de la vitesse du son c_{ij} ont un sens physique.

4.4.7 Cas Test : Onde de gravité solveur préconditionné

La figure 4.46 montre l'influence du préconditionnement sur les résultats. On observe une diminution de la diffusion numérique et une modification de la fréquence du phénomène, tableau 4.6. Le préconditionnement a tendance à améliorer les résultats puisque l'erreur passe de 1.1% à 0.87% avec le kernel C6 et de 1.1% à 0.37% avec le kernel C4. Cependant cette amélioration s'est faite au détriment de la performance du calcul puisque la condition CFL a dû être abaissée d'un facteur supérieur à 3 avec le préconditionnement pour éviter l'apparition d'instabilités numériques.

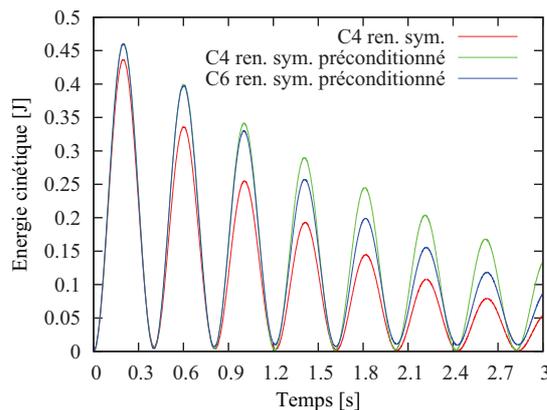


FIGURE 4.46 – Influence du préconditionnement

Finalement on s'intéresse à la variation de la discrétisation spatiale, figure 4.47 avec l'utilisation de solveur préconditionné et celle de la renormalisation (formalisme symétrique). On peut voir une diminution notable de la diffusion numérique avec le raffinement spatial du calcul et une amélioration de la fréquence d'oscillation, tableau 4.6.

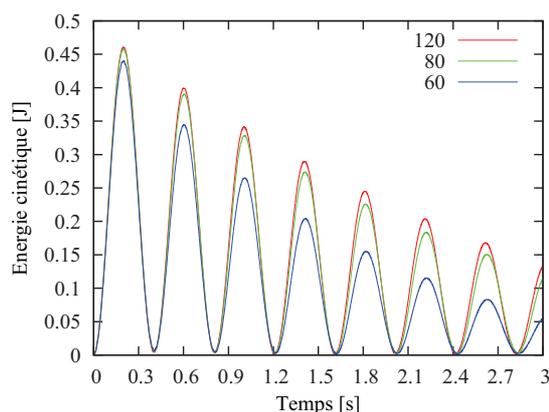


FIGURE 4.47 – Etude convergence spatiale

Tableau 4.6 – Résultat pour solveur renormalisé et préconditionné

| Δx [m] | 1/60 | 1/80 | 1/120 |
|----------------|------|------|-------|
| période [s] | 8.10 | 8.09 | 8.05 |
| erreur [%] | 0.99 | 0.87 | 0.37 |

Au final ce cas test a permis de montrer que la méthode est capable de prédire correctement la fréquence d'ondes gravitaires. L'utilisation de la renormalisation réduit la dépendance des résultats au choix de la fonction kernel et le préconditionnement améliore les résultats que ce soit du point de vue de la dynamique du mouvement ou de la réduction de la diffusion numérique.

4.4.8 Cas Test : Rupture de barrage

Le cas test de rupture de barrage est un cas à dynamique rapide relativement classique dans la communauté SPH. Il représente l'effondrement d'une colonne d'eau dans un espace fermé par des murs. Au contraire du cas précédent, ce cas test ne permet pas de comparaison à une solution analytique. Cependant il offre la possibilité de comparer les résultats à des données expérimentales pour l'avancé du front d'eau, ou l'évolution de la hauteur de colonne d'eau à la position $x = 1m$. D'autre part il permet d'évaluer la disposition spatiale des particules. En effet, étant à dynamique rapide, ce cas peut être sujet à la création de trou (espaces sans volumes de contrôle) au niveau des interfaces entre les particules d'eau et les particules d'air si ces dernières ne suivent pas la dynamique de l'écoulement. La densité de référence de l'eau est 1000 kg.m^{-3} et celle de l'air est 1 kg.m^{-3} . Les vitesses du son sont prises égales à 340 m.s^{-1} et 80 m.s^{-1} pour l'eau et l'air respectivement.

Les figures 4.49 à 4.54 représentent les évolutions de la position des fluides ainsi que les champs de pression et vitesse à différents instants pour une méthode préconditionnée. Les échelles de pression et vitesse ne sont pas globales mais adaptées aux valeurs à l'instant étudié. Cela permet une meilleure appréciation de la continuité de ces différents champs pour différentes configurations

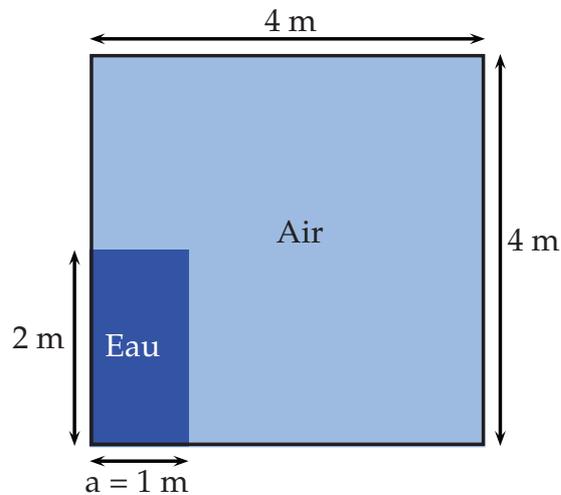


FIGURE 4.48 – Schéma - Rupture de barrage

de l'interface entre les fluides. La valeur minimale de pression est toujours prise négative et égale à -1000 Pa. La figure 4.55 représente l'évolution des vecteurs vitesse en gardant le même rapport entre la norme de la vitesse et la taille des vecteurs pour tous les pas de temps. Sur la figure 4.49 nous observons l'effondrement de la colonne d'eau avec une continuité du champ de pression à l'interface entre les fluides. L'instant suivant, figure 4.50, représente l'instant après l'impact. Le maximum de pression est ici 3.5 fois plus élevé que sur la figure 4.49. Il y a un maximum de vitesse autour de 8m/s qui se trouve dans la zone occupée par l'air. Ainsi contrairement à l'instant précédent c'est l'air qui a la vitesse la plus élevée. Ceci vient du fait qu'au moment de l'impact entre l'eau et le mur, les particules d'air situées entre les deux se retrouvent violemment expulsées vers le haut du domaine. Nous observons sur la figure 4.50 gauche, que les particules gardent une bonne répartition spatiale (absence de trou) malgré la présence de ces fortes vitesses. La figure 4.51 représente la position du fluide et les champs de pression et de vitesse lorsque l'eau atteint sa hauteur maximale. La représentation des vecteurs vitesse pour cet instant, figure 4.55 en haut à droite, montre que l'eau sur la paroi horizontale continue d'avancer alors que la colonne d'eau sur le mur de droite est arrêtée. C'est la combinaison de ces deux mouvements qui est à l'origine de la vague représentée figure 4.52. Sur cette figure nous voyons qu'une poche d'air a été enfermée dans le volume d'eau. Il est intéressant de voir que cette poche d'air n'est pas visible au niveau des champs de pression et de vitesse. L'observation du champ de vitesse à cet instant, figure 4.52 à droite, montre que ce sont les particules d'eau formant la seconde vague qui ont la vitesse la plus élevée (vitesse principalement orientée selon l'horizontale, figure 4.55 en bas à gauche). Ceci va créer un volume d'air emprisonné dans cette vague, qui a tendance à croître les instants suivants. Nous voyons figure 4.53 la fin de cette période de croissance. Les particules d'air emprisonnées au début de la formation de cette vague doivent discrétiser un volume beaucoup plus grand que leur volume initial. C'est pourquoi nous voyons dans cette zone l'apparition d'un trou, qui entraîne une mauvaise discrétisation spatiale. Le dernier pas de temps représenté correspond au temps de 8.83

secondes pour lequel le champ de vitesse est redevenu plus faible (figure 4.55 en bas à droite) et le champ de pression est proche du champ hydrostatique.

La figure 4.56 montre la comparaison entre les mesures expérimentales et les simulations numériques pour deux grandeurs : la position du front (à gauche) et la hauteur de la colonne d'eau à l'abscisse $x^*=1$ (à droite). Les résultats sont donnés pour des grandeurs adimensionnées :

$$t^* = \sqrt{\frac{2g}{a}} \quad (4.144)$$

$$x^* = \frac{x}{a} \quad (4.145)$$

$$h^* = \frac{h}{2a} \quad (4.146)$$

où a est la largeur de la colonne d'eau. On peut voir que le solveur préconditionné prédit une avancée du front plus rapide que le solveur non préconditionné. Ce dernier est plus proche des résultats expérimentaux. Cependant, ne simulant pas les effets visqueux le résultat obtenu doit être plus rapide que celui donné par les expérimentations. Sur la figure 4.57, nous observons le champ de vitesse moins rapide pour le cas d'une résolution sans préconditionnement. Ainsi même si le résultat du solveur non préconditionné est plus près des résultats expérimentaux il semble moins bien représenter la physique du phénomène compte tenu des modèles implémentés. Sur la figure de droite, on voit que malgré une avancée du front différente les deux simulations ont une vitesse de chute de la colonne d'eau en $x^* = 1$ à peu près identique. Il semble donc que la chute de la colonne d'eau ne suive pas la même dynamique entre les deux simulations et que celles-ci sont même différentes de l'expérimentation où la chute en $x^* = 1$ est moins rapide.

Ainsi ce cas test nous a permis de montrer la capacité du modèle à simuler des écoulements multiphases à forte dynamique et avec un rapport de densité élevé entre les fluides. Le préconditionnement a permis aussi pour ce cas test de diminuer la viscosité numérique de la simulation.

4.4.9 Conclusion

Le modèle multiphase développé permet de simuler des écoulements avec différents fluides possédant des densités de référence très différentes (la stabilité du modèle n'a pas été mise en défaut quel que soit le rapport de densité utilisé). Le modèle est conservatif que ce soit au niveau de la masse ou de la quantité de mouvement et ne diffuse pas l'interface. L'application de ce modèle à différents cas tests à dynamiques rapide et lente a montré que les continuités de pression et vitesse normale sont bien vérifiées et qu'ainsi le déplacement des deux fluides au niveau des interfaces est continu. L'apparition de trou dans la discrétisation spatiale peut intervenir lorsque de l'air est emprisonné dans une poche en expansion.

Au final ce modèle possède les propriétés physiques recherchées (pas de diffusion de l'interface, continuité de la pression et des vitesses normales). On peut donc essayer d'ajouter la tension de surface à ce modèle.

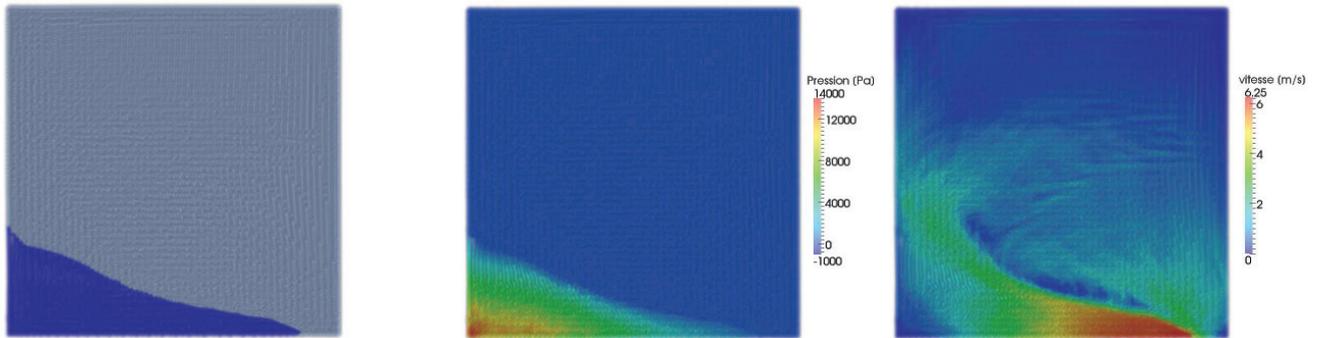


FIGURE 4.49 – Position des fluides (gauche), champs de pression (milieu) et de vitesse (droite) à $t = 0.61s$

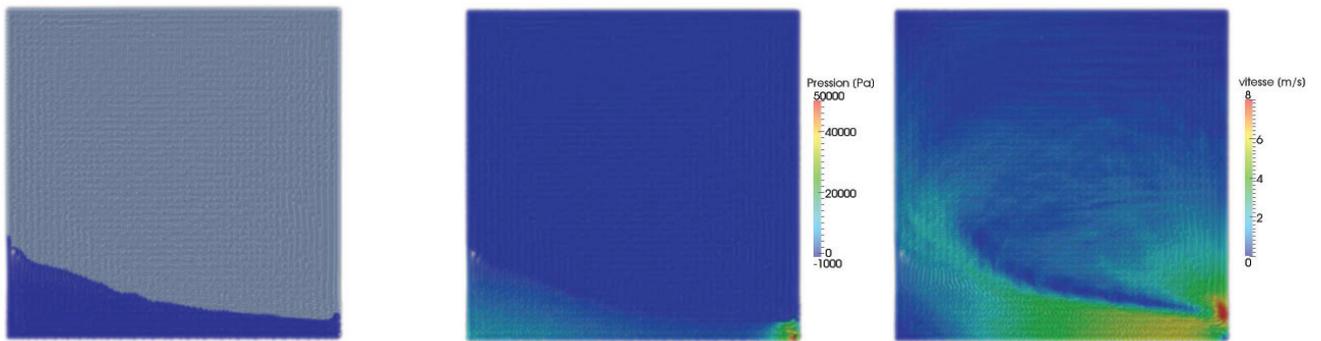


FIGURE 4.50 – Position des fluides (gauche), champs de pression (gauche) et de vitesse (droite) à $t = 0.72s$

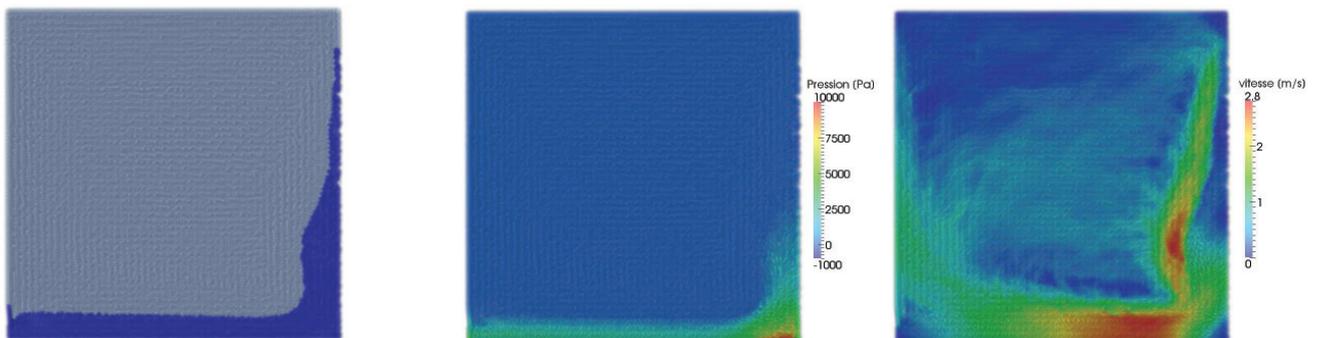


FIGURE 4.51 – Position des fluides (gauche), champs de pression (gauche) et de vitesse (droite) à $t = 1.48s$

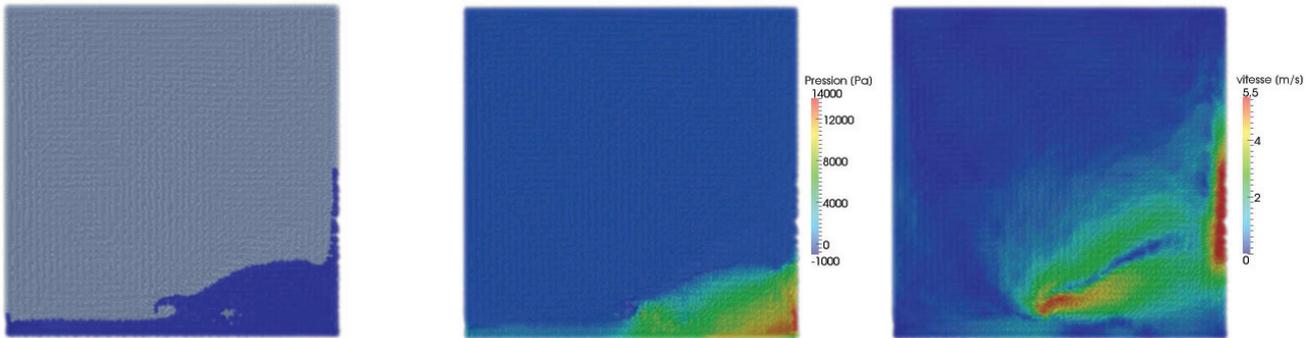


FIGURE 4.52 – Position des fluides (gauche), champs de pression (gauche) et de vitesse (droite) à $t = 2.07s$

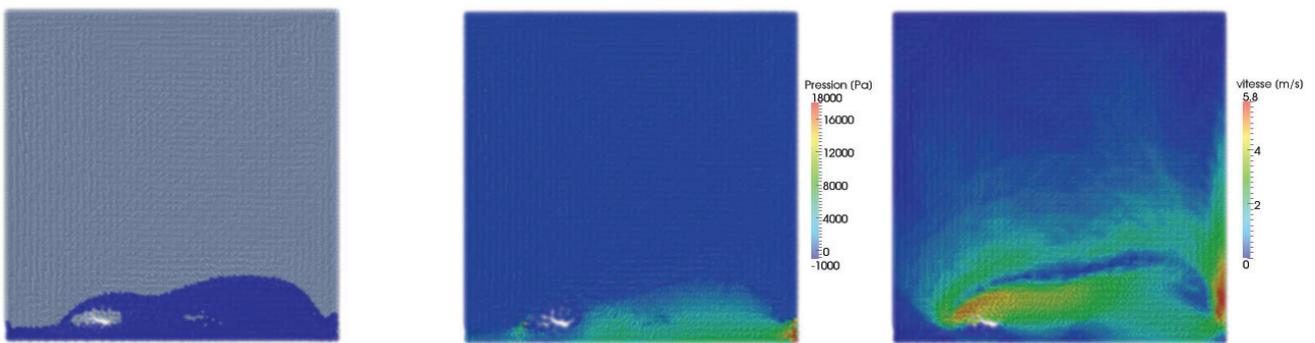


FIGURE 4.53 – Position des fluides (gauche), champs de pression (gauche) et de vitesse (droite) à $t = 2.33s$

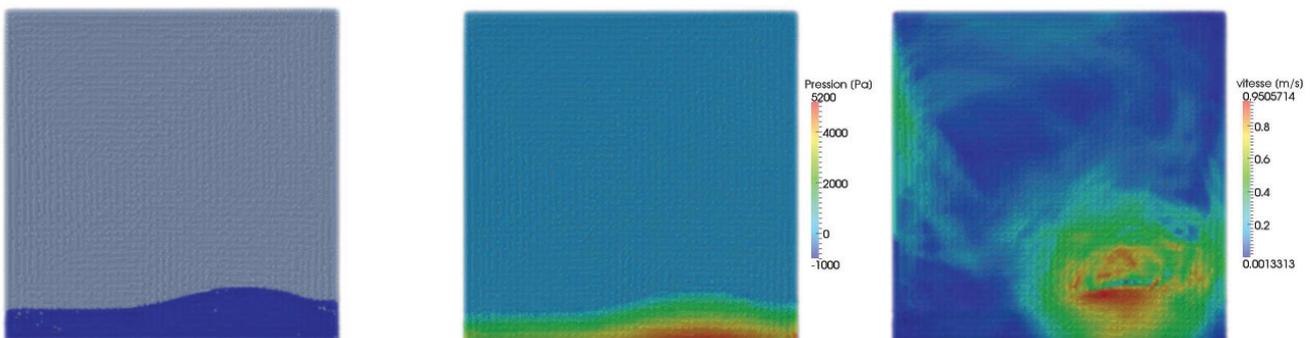


FIGURE 4.54 – Position des fluides (gauche), champs de pression (gauche) et de vitesse (droite) à $t = 8.83s$

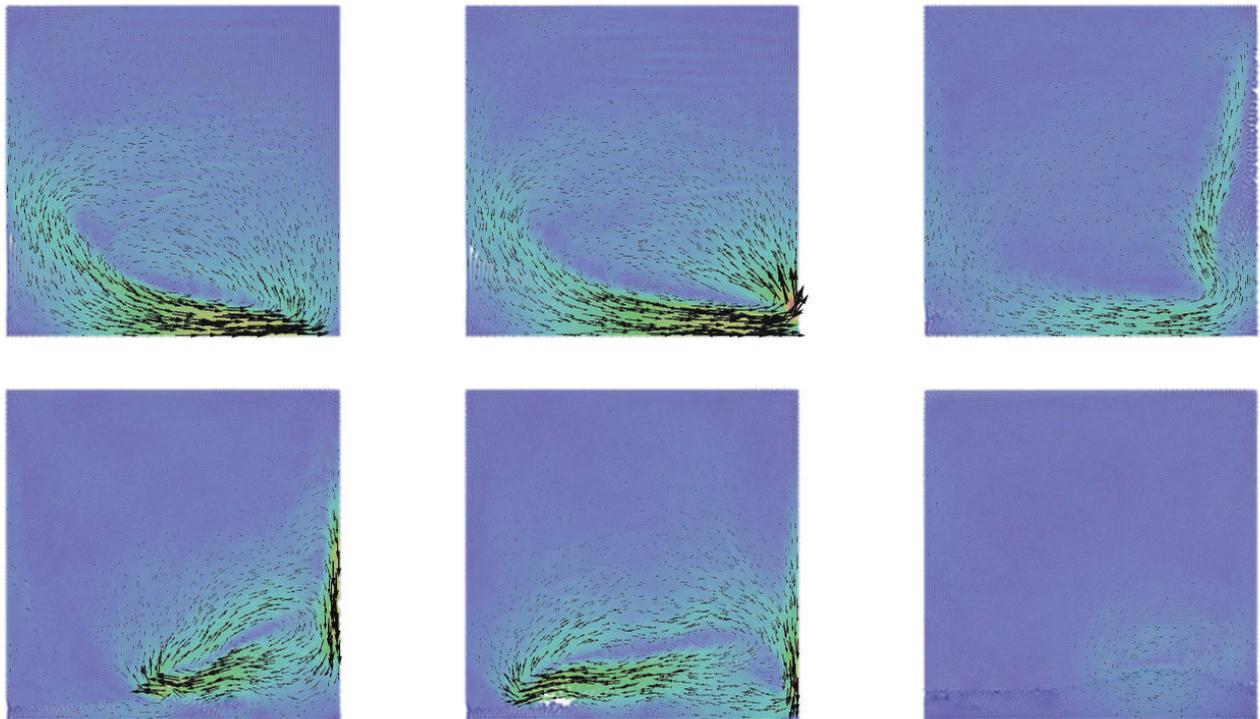
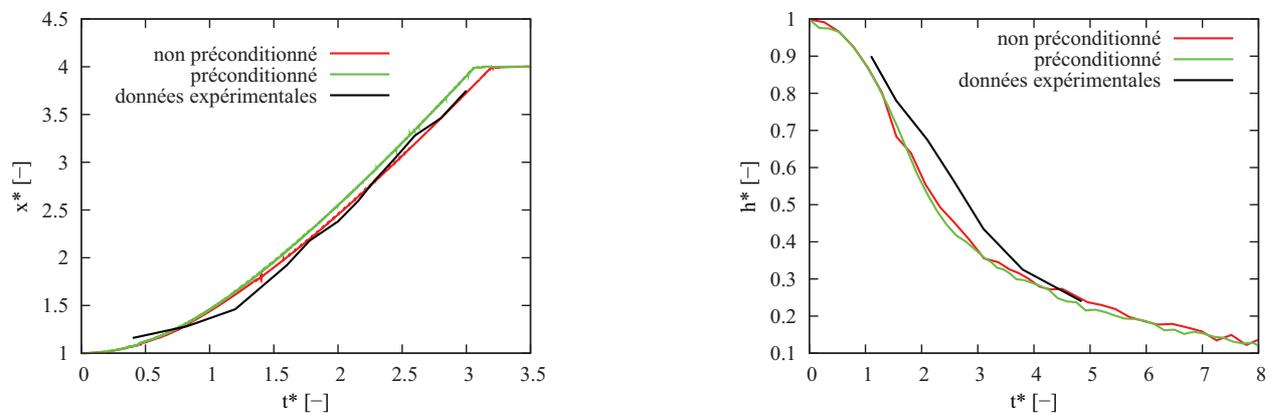


FIGURE 4.55 – Evolution des vecteurs vitesses pour les différents pas de temps étudiés

FIGURE 4.56 – Évolution de la position du front (gauche) et de la hauteur d'eau à $x^*=1$

4.4.10 Modèles de tension de surface

Comme nous l'avons vu auparavant les phénomènes de tension de surface influencent la fragmentation d'un jet. Différentes techniques numériques ont été développées pour modéliser ces phénomènes que ce soit pour la méthode SPH ou pour la méthode des Volumes Finis. Brackbill [9] a mis en avant la possibilité d'écrire la force surfacique de tension de surface sous forme volumique. Cette formulation appelée Continuum Surface Force a été à l'origine de nombreux modèles utilisés aujourd'hui dans les méthodes volumes finis, [59], [20], [8]. L'adaptation à la méthode SPH a été réalisée avec différents modèles. Le premier travail de référence sur cette adaptation a été réalisé par Morris [49]. Il a appliqué la méthode CSF développée par Brackbill au cas de gouttes

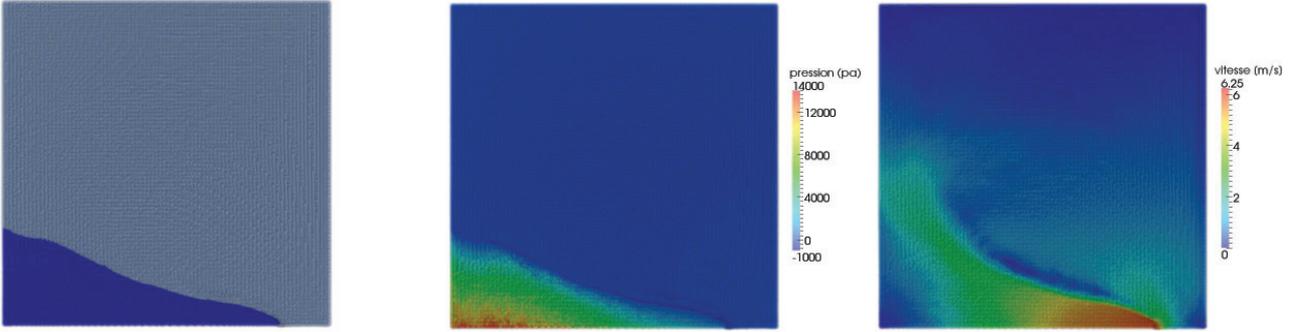


FIGURE 4.57 – Position des fluides(gauche), champs de pression (milieu) et de vitesse (droite) à $t = 0.61s$ - solveur non préconditionné

oscillantes sans variation de densité entre les différents fluides. Des travaux plus récents ont permis l'amélioration du calcul des efforts liés à la tension de surface. Nous pouvons citer notamment les travaux de Grenier [22] ou ceux menant aux travaux de Adami *et al.* [28], [3], [1]. Les différentes caractéristiques de ces travaux seront reprises dans la description des modèles étudiés dans ce travail. Ici nous présentons deux méthodes différentes. Une méthode volumique qui reprend une adaptation du modèle CSF de Brackbill et une seconde méthode utilisant les caractéristiques de la méthode SPH-ALE, à savoir l'utilisation de solveurs de Riemann, pour obtenir la loi de Laplace.

4.4.10.1 Modèle CSF - Continuum Surface Force

Brackbill a mis en avant la possibilité d'écrire la force surfacique en force volumique dans la zone de forte variation de densité entourant l'interface. La forme obtenue est alors la suivante.

$$F_{st} = \sigma \kappa \mathbf{n} \delta \quad (4.147)$$

où σ est le coefficient de tension de surface, κ la courbure, \mathbf{n} la normale à l'interface et δ est la fonction Dirac associée à l'interface. Le coefficient de tension de surface sera pris constant tout au long de cette étude. Une variante de cette formulation consiste à réécrire cette force sous la forme :

$$F_{st} = \nabla \cdot \left(|\nabla c| I - \frac{\nabla c \otimes \nabla c}{|\nabla c|} \right) \quad (4.148)$$

où c est la couleur associée au fluide valant 0 ou 1. Cette dernière formulation a le mérite de ne pas faire intervenir le calcul de la courbure qui est une étape délicate en soit.

Sous forme discrète adaptée au formalisme SPH, la force volumique obtenue est :

$$F_{sti} = \sum_{j \in D_i} \omega_j (F_j - F_i) \nabla W_{ij} \quad (4.149)$$

où

$$F_i = |\nabla_i c| I - \frac{\nabla_i c \otimes \nabla_i c}{|\nabla_i c|} \quad (4.150)$$

Il est intéressant de noter que le gradient de la fonction couleur est calculé selon la formulation :

$$\nabla_i c = \sum_{j \in D_i} \omega_j (c_j - c_i) \nabla W_{ij} \quad (4.151)$$

Ainsi au loin d'une interface le gradient de couleur sera identiquement nul ($c_j - c_i = 0$), et ainsi les efforts liés à la tension de surface seront bien présents uniquement à l'interface entre deux fluides.

Cette formulation est tout a fait adaptée au cas où l'interface ne représente pas un saut de densité trop important, c'est-à-dire quand les deux fluides ont la même densité de référence ou bien lorsque l'interface est diffuse, [9], [22], [20]. Il est à noter que cette formulation est légèrement différente de celle utilisée par Hu et Adams [28] :

$$F_{st} = \nabla \cdot \left(\frac{1}{d} |\nabla c| I - \frac{\nabla c \otimes \nabla c}{|\nabla c|} \right) \quad (4.152)$$

où d est la dimension d'espace. Cette correction a pour but d'éliminer des pressions négatives au niveau de l'interface. Grenier [22] a montré que cette correction introduit des efforts normaux à l'interface sans réellement amener d'amélioration des résultats.

Cependant lorsqu'il y a un fort ratio de densité et sans diffusion d'interface, cette formulation ne permet pas de garantir la continuité de la vitesse normale au niveau de l'interface, [20]. Dans ses travaux Brackbill propose de pondérer cette densité volumique de force par le ratio de densité. Cette idée a été reprise par François *et al.* qui montrent que la pondération de la méthode CSF permet d'améliorer les résultats de cette méthode pour de forts ratios de densité. Ainsi dans le cadre de forts ratios de densité entre les différentes phases nous nous proposons de modifier l'équation 4.149 pour tenir compte de cet effet :

$$F_{sti} = \frac{\rho_{0i}}{\rho_{0i} + \rho_{0-i}} \sum_{j \in D_i} \omega_j (F_j - F_i) \nabla W_{ij} \quad (4.153)$$

où ρ_{0i} est la densité de référence du fluide associé à la particule i et ρ_{0-i} est la densité de référence de l'autre fluide. Ce modèle sera noté "DSCSF" pour Density Scaled Continuum Surface Force.

Cependant cette méthode présente le désavantage de ne plus conserver la quantité de mouvement. Pour palier cette caractéristique, il est proposé de ne calculer les flux de tension de surface qu'entre fluide de la même espèce. L'équation est alors :

$$F_{sti} = \frac{\rho_{0i}}{\rho_{0i} + \rho_{0-i}} \sum_{j \in D_i \cap E_i} \omega_j \frac{1}{\gamma_{ij}} (F_j - F_i) \nabla W_{ij} \quad (4.154)$$

où E_i est l'ensemble des volumes de contrôles associés au même fluide que la particule i , et γ_{ij} est la moyenne des coefficients de Shepard calculés en ne tenant compte que des volumes de contrôle associés au même fluide que la particule i .

$$\gamma_i = \sum_{j \in D_i \cap E_i} \omega_j W_{ij} \quad (4.155)$$

Ce troisième modèle sera noté "SDSCSF" pour Split Density Scaled Continuum Surface Force.

Ce dernier formalisme, SDSCSF, ne fait donc apparaître des interactions liées à la tension de surface qu'entre particules du même fluide. Il est donc naturel de s'intéresser à l'adaptation de celui-ci à un modèle monofluide. Pour faire cette adaptation il est nécessaire de corriger le calcul du gradient de la fonction couleur puisque l'équation 4.151 utilisée pour le modèle multiphase n'est plus valable ici. On calcule donc le gradient de la fonction couleur selon l'équation :

$$\nabla_i c = \sum_{j \in D_i} c_j \omega_j \nabla W_{ij} \quad (4.156)$$

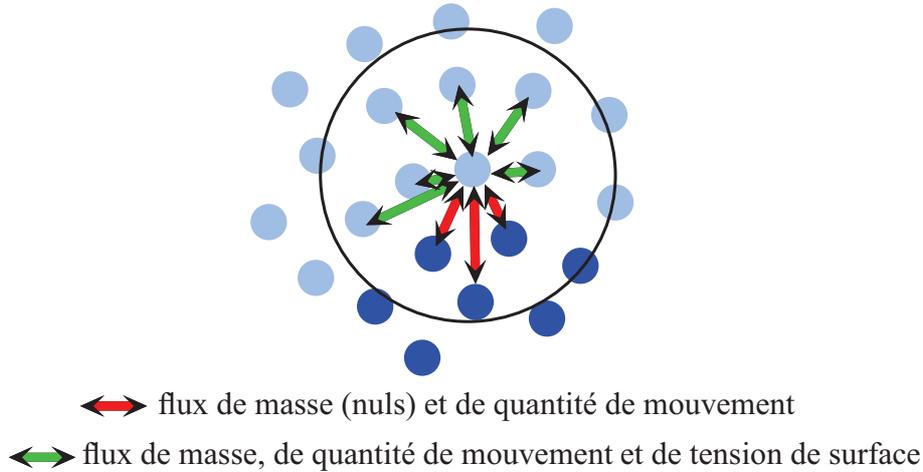


FIGURE 4.58 – Schéma du modèle SDSCSF

Or au niveau discret, au cœur du fluide, cette équation ne permet pas d'obtenir un gradient de couleur nul. Il devrait ainsi apparaître numériquement des valeurs non nulles de gradient de couleur en tout point du fluide. Étant donné que le formalisme s'intéresse à la divergence du gradient de couleur sur sa norme, les artefacts numérique du calcul de gradient de couleur pourront donner des forces volumiques de tension de surface très importantes. Nous verrons dans le cas test de la goutte statique que cela a empêché l'utilisation de cette méthode en formalisme monofluide.

4.4.10.2 Intégration du saut de pression dans le solveur de Riemann

Le modèle CSF a été développé par Brackbill dans le cadre de simulations numériques eulériennes à interface diffuse. La zone d'application de la force volumique correspond alors à la zone de variation de la masse volumique. Or le modèle multiphase développé dans le cadre de ce travail ne diffuse pas l'interface : le saut de densité est donc abrupt. L'idée est ici d'intégrer le saut de pression lié à la tension de surface dans la résolution du problème de Riemann.

4.4.10.2.1 Problème de Riemann en présence de tension de surface L'étude du problème de Riemann en présence de tension de surface a notamment été décrite par Perigaud et Saurel [59] qui ont mis en avant la possibilité d'intégrer le saut de pression dans la résolution du problème. Le long de la ligne de glissement départageant les états étoilés, il n'y a plus dans ce cadre de continuité de la pression. Les deux pressions vérifient l'équation :

$$p_R^* - p_L^* = \sigma \kappa_{RL} \quad (4.157)$$

où κ_{RL} est la courbure au niveau de la ligne de glissement. On peut ainsi réécrire p_R^* et p_L^* sous la forme :

$$p_R^* = p^* + p_{RST}^* \quad (4.158)$$

$$p_L^* = p^* + p_{LST}^* \quad (4.159)$$

Pour résoudre le problème de Riemann, il faut fermer le système en déterminant les valeurs de p_{RST} et p_{LST} . La dynamique des systèmes que nous étudions devrait permettre d'évaluer les champs de pression à une constante près puisque c'est le gradient de ce dernier qui influence la dynamique du système. Or le cadre particulier de l'application de cette méthode au formalisme SPH et de notre cadre d'étude, fait que l'un des fluides possède une surface libre, c'est-à-dire une surface pour laquelle une partie du domaine n'est pas discrétisée. Ce traitement particulier impose une pression de référence nulle. Ainsi le choix de p_{RST} et p_{LST} ne peut être fait sans tenir compte de cet aspect. Au final nous poserons que p_{ST} est nulle pour le fluide qui possède une surface libre et vaut $\sigma\kappa_{RL}$ pour le second fluide. (Cette condition s'est en fait montrée importante pour l'ajout au modèle CSF de la discontinuité de pression dans le solveur de Riemann) La solution du problème de Riemann associé à ce problème est alors :

$$\begin{cases} u^* = \frac{1}{2}(u_L + u_R) + \frac{1}{2\bar{\rho}c}((p_L - p_{LST}) - (p_R - p_{RST})) \\ p^* = \frac{1}{2}((p_L - p_{LST}) + (p_R - p_{RST})) + \frac{\bar{\rho}c}{2}(u_L - u_R) \end{cases} \quad (4.160)$$

L'intégration du saut de pression dans le solveur de Riemann nécessite ainsi le calcul de la courbure de l'interface entre les deux fluides. Pour obtenir cette valeur deux méthodes différentes ont été évaluées. La première utilise la divergence du gradient normalisé de la fonction couleur :

$$\kappa = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla c}{|\nabla c|} \right) \quad (4.161)$$

Sous forme discrète cette équation devient :

$$\kappa_i = \sum_{j \in D_i} \omega_j \left(\frac{\nabla_j c}{|\nabla_j c|} - \frac{\nabla_i c}{|\nabla_i c|} \right) \nabla W_{ij} \quad (4.162)$$

Cette formulation calcule la courbure en un point i en tenant compte de l'ensemble des points environnants. Cela peut avoir l'avantage de lisser un résultat de calcul de courbure s'appuyant sur une distribution irrégulière de points autour de l'interface. Cependant cette formulation utilise l'orientation du vecteur gradient de couleur puis la divergence de cette dernière, cette méthode peut ainsi souffrir d'erreurs de calcul liées à la précision de la discrétisation SPH. Ainsi deux corrections seront amenées à cette méthode, à savoir la renormalisation du gradient de couleur qui aura ici pour effet de changer la direction du vecteur $\frac{\nabla c}{|\nabla c|}$ et une correction de Shepard qui corrige le défaut de consistance de la méthode. La formulation discrète est alors

$$\kappa_i = \sum_{j \in D_i} \omega_j \left(\frac{B_j \nabla_j c}{|B_j \nabla_j c|} - \frac{B_i \nabla_i c}{|B_i \nabla_i c|} \right) \frac{\nabla W_{ij}}{\gamma_i} \quad (4.163)$$

où B_i et γ_i sont respectivement la matrice de renormalisation et le coefficient de Shepard liés à la particule i . L'utilisation de cette méthode de calcul de la courbure sera nommée "calcul volumique" dans la suite du document.

Cette méthode n'utilise cependant pas le caractère réellement lagrangien de la méthode. Ainsi une seconde méthode a été développée qui permet de calculer la courbure de l'interface de manière analytique en s'appuyant sur les particules environnantes. En 2D et pour une particule i , on repère les deux particules appartenant à D_i les plus éloignées et dont la valeur de la norme du gradient

de couleur s'écarte de moins de 10 % de la valeur en i . On en déduit à partir de ces deux points et du point d'intérêt le rayon du cercle passant par ces trois points. Le fait de prendre les points les plus éloignés permet de lisser des irrégularités de distribution des particules autour de l'interface. (D'autres méthodes de lissage auraient pu être choisies comme une méthode des moindres carrés.)

Ces deux méthodes sont évaluées sur un cas 2D de goutte au repos. Différentes discrétisations sont étudiées correspondant à 10, 20 et 40 particules dans le diamètre de la goutte. La discrétisation spatiale réalisée, permettant une homogénéité des poids associés aux particules fait que le rayon théorique varie légèrement en fonction de la discrétisation choisie. La figure 4.59 représente la discrétisation de ce cas (à gauche) et les valeurs de gradient de couleur (à droite). La figure 4.60 montre pour un cas particulier les valeurs de courbure associées à chaque volume de contrôle.

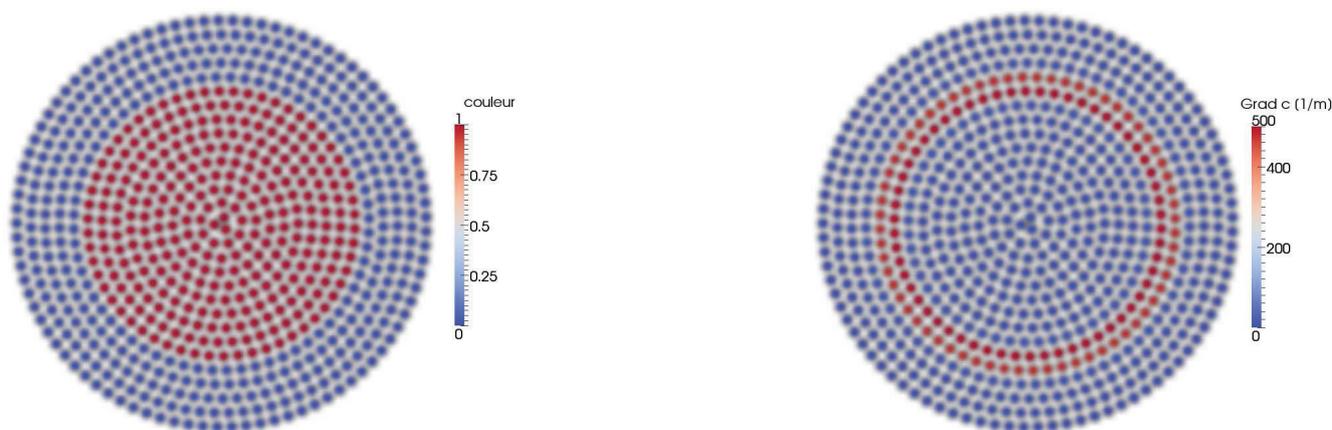


FIGURE 4.59 – Couleur et gradient de couleur pour le cas d'une goutte sphérique

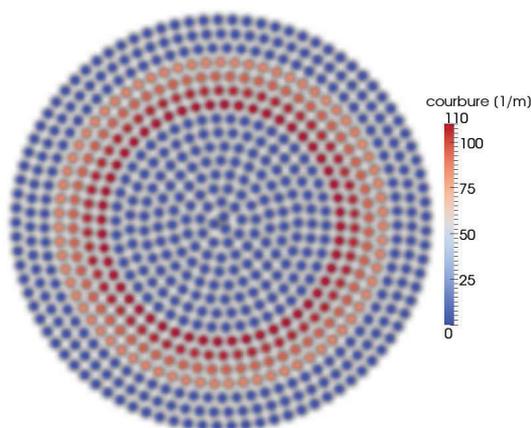


FIGURE 4.60 – Courbure pour le cas d'une goutte sphérique

Les tableaux 4.7 à 4.10 montrent la capacité des méthodes à calculer la courbure pour ce cas. Les valeurs sont la moyenne et l'écart entre les valeurs maximales et minimales des courbures utilisées lors de la résolution des différents problèmes de Riemann entre particules associées à

des fluides différents. Pour chaque problème de Riemann la valeur de la courbure utilisée est la moyenne des courbures associées à chaque particule pondérée par la norme du gradient de couleur. Le tableau 4.7 montre que la méthode volumique permet de trouver une valeur moyenne de la courbure proche de la valeur théorique et que celle-ci est d'autant plus précise que la discrétisation spatiale est fine. Pour la discrétisation 40 l'erreur liée à valeur moyenne est de 0.81%. Cependant l'écart entre les valeurs maximales et minimales de la courbure est important puisqu'il varie entre 32.8% pour la discrétisation 10 à 13.55% pour la discrétisation 40.

Tableau 4.7 – Calcul de la courbure pour une goutte 2D - Méthode volumique - Sans correction

| discrétisation | 10 | 20 | 40 |
|---------------------------------|-------|-------|------|
| courbure théorique [m^{-1}] | 97.9 | 98.3 | 98.8 |
| courbure moyenne [m^{-1}] | 103.8 | 100.8 | 99.6 |
| erreur [%] | 6.0 | 2.5 | 0.8 |
| écart [%] | 32.8 | 19.9 | 13.5 |

La correction de Shepard, tableau 4.8 permet de diminuer l'écart entre la moyenne des courbures calculées et la moyenne théorique. Cependant cela affecte peu l'écart entre les valeurs maximales et minimales. La renormalisation permet dans ce cas de diminuer légèrement cet écart 4.9. Pour la discrétisation 10 ce dernier passe de 19.9% à 13.42%.

Tableau 4.8 – Calcul de la courbure pour une goutte 2D - Méthode volumique - Avec correction de Shepard

| discrétisation | 10 | 20 | 40 |
|---------------------------------|-------|-------|-------|
| courbure théorique [m^{-1}] | 97.9 | 98.3 | 98.8 |
| courbure moyenne [m^{-1}] | 103.0 | 100.0 | 98.9 |
| erreur [%] | 5.21 | 1.72 | 0.10 |
| écart [%] | 33.18 | 19.91 | 13.42 |

La méthode analytique, quant à elle, donne des valeurs de courbures dont la moyenne est plus éloignée de la valeur théorique cependant l'écart entre les valeurs minimales et maximales est plus faible. Pour la discrétisation 20, cet écart est de 11% alors qu'il est de 16.7% avec la méthode volumique corrigée.

La méthode volumique a été aussi testée sur des cas 3D à savoir le cas d'un tube, figure 4.61 et celui d'une goutte 3D, figures 4.62 et 4.63. En 3D et dans le cadre de la loi de Laplace, la courbure en un point est la somme des deux courbures principales passant par ce point (c'est-à-dire les courbures maximales et minimales). Pour le cas du tube, en chaque point de l'interface, la courbure maximale est celle appartenant au plan orthogonal à l'axe du tube (dans ce cas le rayon de courbure est le rayon du tube) et la courbure minimale est celle appartenant au plan contenant l'axe du jet (correspondant à une courbure nulle). La courbure calculée pour ce cas par la méthode

Tableau 4.9 – Calcul de la courbure pour une goutte 2D - Méthode volumique - Avec renormalisation et correction de shepard

| discrétisation | 10 | 20 | 40 |
|---------------------------------|-------|-------|------|
| courbure théorique [m^{-1}] | 97.9 | 98.3 | 98.8 |
| courbure moyenne [m^{-1}] | 103.0 | 100.0 | 98.9 |
| erreur [%] | 5.21 | 1.72 | 0.10 |
| écart [%] | 31.5 | 16.7 | 12.7 |

Tableau 4.10 – Calcul de la courbure pour une goutte 2D - Méthode analytique

| discrétisation | 10 | 20 | 40 |
|---------------------------------|-------|-------|-------|
| courbure théorique [m^{-1}] | 97.9 | 98.3 | 98.8 |
| courbure moyenne [m^{-1}] | 105.0 | 102.5 | 101.3 |
| erreur [%] | 7.25 | 4.27 | 2.53 |
| écart [%] | 20.2 | 11.0 | 7.7 |

volumique donne une valeur de $99.6m^{-1}$ ce qui représente une erreur de 2.1% (le cœur du jet est discrétisé par 20 particules dans le diamètre). L'écart entre les valeurs minimales et maximales est de 23%. Ainsi l'erreur commise pour le calcul de la courbure par la méthode volumique pour le cas du tube est du même ordre de grandeur en 2D et en 3D (légèrement supérieur en 3D).

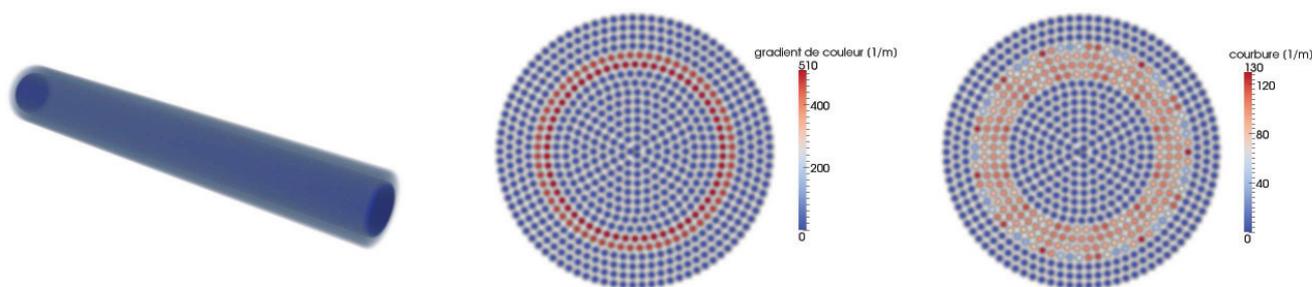


FIGURE 4.61 – Schéma du cas du tube (gauche), gradient de couleur (centre) et courbure (droite)

Pour le cas de la goutte 3D, les deux courbures principales sont identiques et égales au rayon de la goutte. L'application de la méthode volumique avec un cas dont la discrétisation utilise environ 30 particules dans le diamètre permet de trouver une courbure moyenne de $79.5m^{-1}$ alors qu'elle est théoriquement de $79.6m^{-1}$ ce qui représente une erreur de 0.12%. Cependant cette dernière mesure n'est pas très révélatrice car le rayon théorique a été obtenu en calculant le rayon de la boule

ayant le même volume d'eau que celui discrétisé. Or la discrétisation ne correspond pas précisément à une boule, figure 4.63 à gauche. De plus l'écart entre les valeurs minimales et maximales des courbures utilisées dans les problèmes de Riemann est très important (variations entre $30m^{-1}$ et $125m^{-1}$). Là encore cette valeur n'est pas très significative puisque la discrétisation peut avoir fait apparaître des zones de faible courbure (plats) ou des zones de forte courbure (angles). Cependant cette méthode permet de retrouver une valeur moyenne correcte. Cette méthode paraît à ce niveau d'étude relativement efficace pour le calcul de la courbure en 3D.

D'autre part nous voyons que sur les figures 4.61 et 4.63 que certaines valeurs de courbure sont très éloignées de la valeur théorique (volumes de contrôles rouges). Cependant ces valeurs correspondent à des zones de norme de gradient de couleur faible, figure 4.61. On voit donc ici l'intérêt de pondérer la moyenne de la courbure par la norme du gradient de couleur car cela permet de réduire fortement l'impact de ces valeurs de courbure sur la courbure utilisée pour résoudre les problèmes de Riemann.

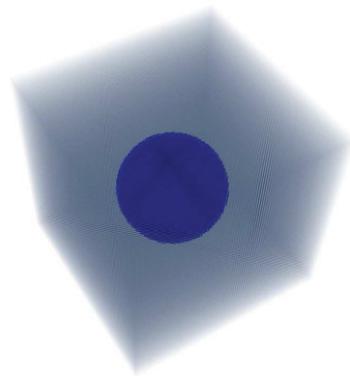


FIGURE 4.62 – Schéma du cas de la goutte 3D

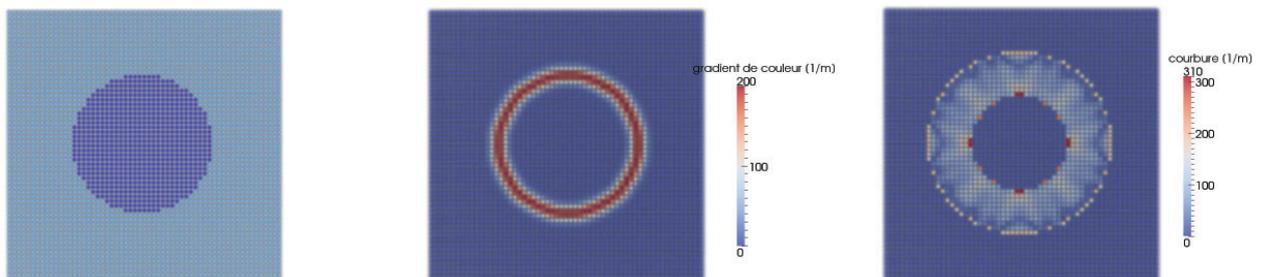


FIGURE 4.63 – Cas de la goutte 3D : discrétisation du volume (gauche), gradient de couleur (centre) et courbure (droite)

Le signe de la courbure sera déterminé pour chaque problème de Riemann. La particule de courbure la plus élevée aura une courbure positive alors qu'elle sera négative pour celle dont la valeur de la courbure sera la plus faible.

4.4.10.2.2 Adaptation aux différents modèles issus du modèle CSF L'effet de la prise en compte de ce saut de pression dans le solveur de Riemann sera étudié pour les modèles CSF, DSCSF et SDSCSF. La référence à l'utilisation de cette méthode sera faite à travers la proposition "avec saut de pression".

4.4.10.2.3 Modèle Laplace Law Pressure Correction - LLPC Ce modèle consiste, pour le calcul des flux convectifs, à ajouter à la pression issue de la résolution du problème de Riemann entre deux particules, la pression qui a été retranchée avant la résolution du problème. Cette méthode est expliquée à partir de l'exemple d'une goutte au repos, figure 4.64, pour laquelle il existe à l'instant t un saut de pression entre les deux fluides égal au saut de pression prédit par la loi de Laplace. Avant de résoudre le problème de Riemann on enlève à chacune des pressions initiales une partie du saut de pression tel que $p_{rst} - p_{lst} = \sigma_{lr}\kappa$. La différence de pression et la vitesse étant nulle la résolution du problème de Riemann donne $v^* = 0$ et $p^* = p_l - p_{lst} = p_r - p_{rst}$. On rajoute ensuite à p^* le terme p_{rst} ou p_{lst} qui avait été retranché auparavant. Ainsi dans ce cas la particule initialement au repos reste au repos et le saut de pression est conservé.

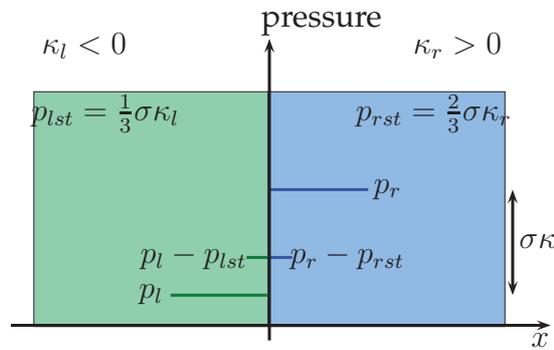


FIGURE 4.64 – Shéma modèle LLPC

Pour l'étude de ce modèle, une référence sera faite à la méthode de calcul de la courbure avec les adjectifs volumique et analytique se référant respectivement à la méthode volumique et à la méthode analytique de calcul de la courbure.

4.4.10.2.4 Stabilité temporelle Une condition sur le pas de temps est ajoutée au critère CFL initial pour assurer la résolution correcte des ondes capillaires. Le critère choisi est celui utilisé par Brackbill [9], Hu et Adams [28] :

$$\Delta t_{ts} \leq C_{CFL_{ts}} \min_{ij} \left[\left(\frac{\min(\rho_i, \rho_j) h_{ij}}{2\pi\sigma} \right)^{0.5} \right] \quad (4.164)$$

4.4.10.2.5 Goutte statique Le premier cas d'étude est celui d'une goutte 2D au repos. Ce cas test est réalisé pour deux rapports de densité : le rapport 1 pour lequel les deux fluides ont la même densité et le rapport 1000 qui est représentatif du rapport de densité entre l'air et l'eau. Le coefficient de tension de surface est choisi égale à $\sigma = 7.2 \cdot 10^{-2} Nm^{-1}$, ce qui est encore

une fois représentatif de celui existant entre l'air et l'eau aux conditions normales de pression et température. La goutte a un rayon de 10mm (aux erreurs liées à la discrétisation près), et différentes discrétisations seront utilisées : 10, 20 et 40 particules dans le diamètre.

Les deux premières études liées à ce cas test correspondent au modèle à une phase et au modèle CSF pour le cas d'un fort ratio de densité. Dans le cas d'un modèle à une phase le gradient de couleur est calculé selon l'équation 4.156. Nous voyons sur la figure 4.65 que le gradient de couleur ainsi calculé est non nul au cœur du fluide et que de plus son orientation est bruitée. Il en résulte des calculs de flux de tension de surface pour la méthode SDSCSF non nul au cœur du jet, ce qui a tendance à déstabiliser le calcul. Pour cette raison l'adaptation du modèle CSF dans un cadre monofluide n'a pu être réalisée de manière satisfaisante.

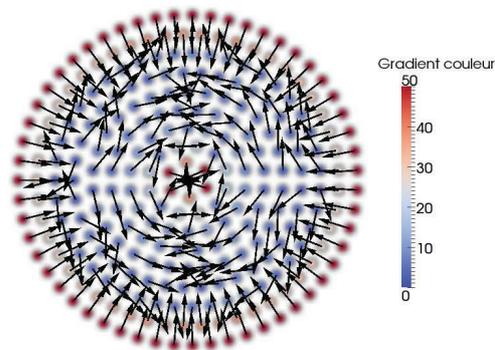


FIGURE 4.65 – Gradients de couleur en monophasique

Le champ de vitesse dans le cadre de l'application du modèle CSF à un cas avec un fort ratio de densité est représenté figure 4.66. Nous observons qu'après un temps physique $3.410^{-3}s$, l'écoulement est complètement déstabilisé puisque les vitesses maximales dépassent $1m/s$.

Nous observons sur les figures 4.67 à 4.69 la capacité des différents modèles à reproduire le saut de pression à l'interface. Sans l'ajout de cette discontinuité dans le solveur de Riemann, nous observons que les modèles DSCSF et SDSCSF reproduisent le saut de pression sur une zone de largeur environ 3 particules (à gauche sur les figures 4.67 et 4.68). L'introduction de la discontinuité de pression permet de reproduire le saut de pression de manière moins diffuse.

Les tableaux 4.11 à 4.14 montrent les valeurs de pression moyenne et l'écart entre les pressions minimales et maximales pour les différents modèles. Le modèle DSCSF, tableau 4.11, permet d'obtenir une pression moyenne dont l'écart à la valeur théorique est inférieure à 1.5%. La discrétisation influe peu sur cette valeur mais permet de diminuer notablement les écarts entre les valeurs minimales et maximales puisque qu'il passe de 18.2% pour la discrétisation 10 à 8.7% pour la discrétisation 40. Le modèle SDSCSF, tableau 4.12, présente quant à lui des écarts de pression plus faibles (entre 7.2% et 5.3%) mais la valeur moyenne de pression est plus éloignée (l'erreur varie de 7.1% à 4.6% pour les discrétisation 10 et 40 respectivement). Ce modèle a tendance à

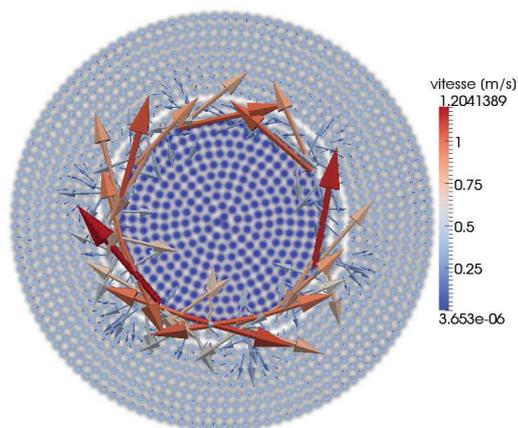


FIGURE 4.66 – Vecteurs vitesse pour le modèle CSF et un rapport de densité de 1000 - $t = 3.410^{-3}s$



FIGURE 4.67 – Champ de pression pour le cas d'une goutte sphérique - modèle DSCSF - sans saut de pression (gauche) et avec saut de pression (droite)



FIGURE 4.68 – Champ de pression pour le cas d'une goutte sphérique - modèle SDSCSF - sans saut de pression (gauche) et avec saut de pression (droite)

sous-estimer la pression dans la goutte.

Le modèle LLPC quant à lui, présente une pression moyenne proche de la pression théorique



FIGURE 4.69 – Champ de pression pour le cas d’une goutte sphérique - modèle LLPC - modèle de courbure volumique (gauche) et analytique (droite)

Tableau 4.11 – Évaluation de la pression dans la goutte - modèle DSCSF - Rapport de densité 1000

| discrétisation | pression moyenne | erreur | écart entre P_{min} et P_{max} |
|----------------|------------------|--------|------------------------------------|
| 10 | 7.41 | 0.8% | 18.2% |
| 20 | 7.41 | 1.22% | 15.9% |
| 40 | 7.41 | 1.23% | 8.7% |

Tableau 4.12 – Évaluation de la pression dans la goutte - modèle SDSCSF - Rapport de densité 1000

| discrétisation | pression moyenne | erreur | écart entre P_{min} et P_{max} |
|----------------|------------------|--------|------------------------------------|
| 10 | 6.86 | 7.1% | 7.2% |
| 20 | 6.92 | 5.8% | 6.1% |
| 40 | 6.97 | 4.6% | 5.3% |

quelle que soit la discrétisation. Le modèle analytique de calcul de la courbure permet d’obtenir des valeurs de pression plus proches des valeurs théoriques que le modèle volumique. En effet pour le modèle analytique l’erreur varie entre 2.7% et 0.3% alors qu’elle varie entre 1.4% et 2.2% pour le modèle volumique, tableau 4.13. La discrétisation et le modèle de calcul de la courbure influent peu sur l’écart entre les valeurs minimales et maximales de pression pour ce modèle. La figure 4.70 permet de comprendre cela. En effet pour le modèle LLPC (figure de droite), le champ de pression est constant dans la goutte (notamment au niveau de l’interface) à l’exception du centre de la goutte qui présente une zone de faible pression. Ceci est en fait visible pour les différents modèles et la cause de ce phénomène n’a pas été établie (De pareilles observations ne sont pas connues dans les méthodes SPH. Adami et al [2] montrent le champ de pression dans une goutte à l’exception des valeurs proches du centre). Nous observons sur cette figure qu’au contraire du

modèle LLPC les modèles DSCSF et SDSCSF présentent des champs de pression plus irréguliers au niveau de l'interface avec l'air.

Le tableau 4.15 montre l'impact de la prise en compte du saut de pression dans le solveur de Riemann pour les modèles DSCSF et SDSCSF. Nous voyons que sans prise en compte du saut de pression, l'écart de la pression moyenne à la valeur théorique est plus important et que l'écart entre pression minimale et pression maximale dans la goutte est supérieur à 160%.

Tableau 4.13 – Évaluation de la pression dans la goutte - modèle LLPC volumique - Rapport de densité 1000

| discrétisation | pression moyenne | erreur | écart entre P_{min} et P_{max} |
|----------------|------------------|--------|------------------------------------|
| 10 | 7.45 | 1.4% | 13.7% |
| 20 | 7.20 | 1.6% | 12.7% |
| 40 | 7.13 | 2.2% | 12.1% |

Tableau 4.14 – Évaluation de la pression dans la goutte - modèle LLPC analytique - Rapport de densité 1000

| discrétisation | pression moyenne | erreur | écart entre P_{min} et P_{max} |
|----------------|------------------|--------|------------------------------------|
| 10 | 7.55 | 2.7% | 13.4% |
| 20 | 7.38 | 0.8% | 12.6% |
| 40 | 7.31 | 0.3% | 12.1% |

Tableau 4.15 – Évaluation de la pression dans la goutte - Influence de la discontinuité de pression dans le solveur de Riemann - Rapport de densité 1000

| modèle | saut | pression moyenne | erreur | écart entre P_{min} et P_{max} |
|--------|------|------------------|--------|------------------------------------|
| DSCSF | sans | 6.65 | 10.1% | 162.6% |
| | avec | 7.41 | 1.2 % | 15.9% |
| SDSCSF | sans | 5.79 | 26.4% | 176.6% |
| | avec | 6.92 | 5.8 % | 6.1 % |

Ce cas test permet aussi d'étudier les valeurs des courants parasites résultants de la différence entre le gradient de pression dans la goutte et les efforts de tension de surface. Ces courants sont étudiés pour différentes discrétisations et différents rapports de densité. Les tableaux 4.16 à 4.19 montrent les normes associées à ces vitesses pour les différents modèles. Quel que soit le modèle,

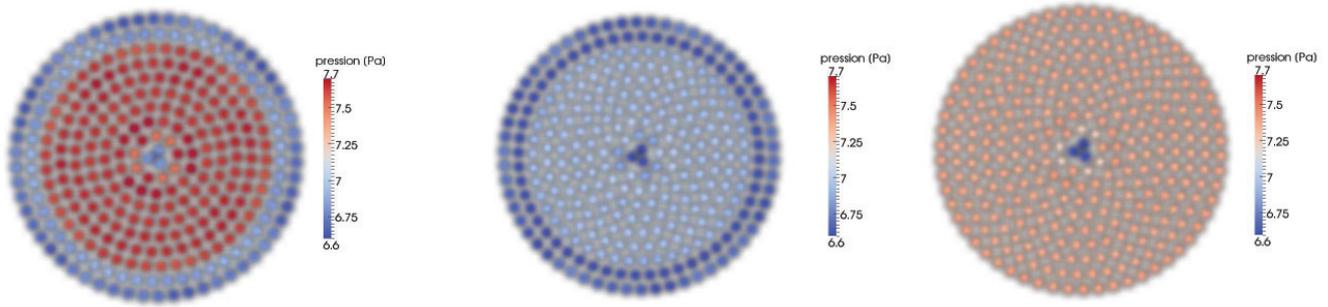


FIGURE 4.70 – Champ de pression caractéristique à l’intérieur d’une goutte pour le modèle DSCSF à gauche, SDSCSF au centre et LLPC à droite

il n’y a pas de convergence évidente de ces courants avec la discrétisation puisque les tendances varient selon la norme choisie. En effet la norme infinie donne une diminution des courants parasites pour le modèle LLPC alors que ce n’est pas le cas pour les autres modèles.

Tableau 4.16 – Norme de courants parasites - modèle DSCSF - Rapport de densité 1000

| norme | | N_1 | N_2 | N_∞ |
|----------------|----|----------------------|----------------------|----------------------|
| discrétisation | 10 | $3.83 \cdot 10^{-5}$ | $4.02 \cdot 10^{-5}$ | $8.15 \cdot 10^{-5}$ |
| | 20 | $1.70 \cdot 10^{-5}$ | $2.07 \cdot 10^{-5}$ | $7.39 \cdot 10^{-5}$ |
| | 40 | $4.6 \cdot 10^{-6}$ | $1.35 \cdot 10^{-5}$ | $9.23 \cdot 10^{-5}$ |

Tableau 4.17 – Norme de courants parasites - modèle SDSCSF - Rapport de densité 1000

| norme | | N_1 | N_2 | N_∞ |
|----------------|----|----------------------|----------------------|-----------------------|
| discrétisation | 10 | $4.90 \cdot 10^{-5}$ | $5.41 \cdot 10^{-5}$ | $1.081 \cdot 10^{-4}$ |
| | 20 | $3.85 \cdot 10^{-5}$ | $4.28 \cdot 10^{-5}$ | $1.210 \cdot 10^{-4}$ |
| | 40 | $1.60 \cdot 10^{-6}$ | $2.87 \cdot 10^{-5}$ | $2.083 \cdot 10^{-4}$ |

Néanmoins le tableau 4.20 montre que la prise en compte de la discontinuité de pression dans le solveur de Riemann a tendance à diminuer l’intensité des courants parasites. D’autre part, le point intéressant montré par les tableaux 4.21 et 4.22 est la faible sensibilité de l’intensité des courants parasites au rapport de densité entre les différents fluides.

Ainsi ce cas test permet de vérifier la capacité des différents modèles à retrouver le saut de pression théorique pour une goutte statique. L’intégration de la discontinuité de pression dans le solveur de Riemann permet d’obtenir un saut abrupt de pression à travers l’interface pour les

Tableau 4.18 – Norme de courants parasites - modèle LLPC - Calcul volumique de la courbure - Rapport de densité 1000

| norme | | N_1 | N_2 | N_∞ |
|----------------|----|----------------------|----------------------|----------------------|
| discrétisation | 10 | $1.15 \cdot 10^{-5}$ | $1.35 \cdot 10^{-5}$ | $6.81 \cdot 10^{-5}$ |
| | 20 | $2.9 \cdot 10^{-6}$ | $4.8 \cdot 10^{-6}$ | $5.99 \cdot 10^{-5}$ |
| | 40 | $3.4 \cdot 10^{-6}$ | $4.4 \cdot 10^{-6}$ | $5.14 \cdot 10^{-5}$ |

Tableau 4.19 – Norme de courants parasites - modèle LLPC - Calcul analytique de la courbure - Rapport de densité 1000

| norme | | N_1 | N_2 | N_∞ |
|----------------|----|---------------------|----------------------|----------------------|
| discrétisation | 10 | $8.9 \cdot 10^{-6}$ | $1.17 \cdot 10^{-5}$ | $7.10 \cdot 10^{-5}$ |
| | 20 | $2.0 \cdot 10^{-6}$ | $4.3 \cdot 10^{-6}$ | $5.89 \cdot 10^{-5}$ |
| | 40 | $2.5 \cdot 10^{-6}$ | $3.5 \cdot 10^{-6}$ | $5.59 \cdot 10^{-5}$ |

Tableau 4.20 – Norme de courants parasites - Influence du saut de pression - Rapport de densité 1000 - discrétisation 20

| modèle | | DSCSF | | SDSCSF | |
|------------------|------------|-----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| saut de pression | | sans | avec | sans | avec |
| norme | N_1 | $2.87 \cdot 10^{-5}$ | $1.70 \cdot 10^{-5}$ | $4.54 \cdot 10^{-5}$ | $3.85 \cdot 10^{-5}$ |
| | N_2 | $5.34 \cdot 10^{-5}$ | $2.07 \cdot 10^{-5}$ | $5.80 \cdot 10^{-5}$ | $4.28 \cdot 10^{-5}$ |
| | N_∞ | $2.281 \cdot 10^{-4}$ | $7.39 \cdot 10^{-5}$ | $1.98 \cdot 10^{-4}$ | $1.21 \cdot 10^{-4}$ |

Tableau 4.21 – Norme de courants parasites - Influence du rapport de densité - discrétisation 20

| modèle | DSCSF (CSF) | | SDSCSF | |
|--------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|----------------------|
| rapport de densité | 1 | 1000 | 1 | 1000 |
| N_1 | $3.04 \cdot 10^{-5}$ | $1.70 \cdot 10^{-5}$ | $2.33 \cdot 10^{-5}$ | $3.85 \cdot 10^{-5}$ |
| N_2 | $5.33 \cdot 10^{-5}$ | $2.07 \cdot 10^{-5}$ | $4.01 \cdot 10^{-5}$ | $4.28 \cdot 10^{-5}$ |
| N_∞ | $2.229 \cdot 10^{-4}$ | $7.39 \cdot 10^{-5}$ | $1.424 \cdot 10^{-4}$ | $1.21 \cdot 10^{-4}$ |

différents modèles. L'adaptation des efforts de tension de surface en fonction du rapport de densité pour le modèle CSF s'est avérée déterminante pour simuler une goutte au repos avec un fort

Tableau 4.22 – Norme de courants parasites - Influence du rapport de densité - discrétisation 20

| modèle | LLPC volumique | | LLPC analytique | |
|------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| | 1 | 1000 | 1 | 1000 |
| N_1 | $2.1 \cdot 10^{-6}$ | $2.9 \cdot 10^{-6}$ | $1.61 \cdot 10^{-6}$ | $2.0 \cdot 10^{-6}$ |
| N_2 | $4.4 \cdot 10^{-6}$ | $4.8 \cdot 10^{-6}$ | $4.2 \cdot 10^{-6}$ | $4.3 \cdot 10^{-6}$ |
| N_∞ | $5.81 \cdot 10^{-5}$ | $5.99 \cdot 10^{-5}$ | $5.90 \cdot 10^{-5}$ | $5.89 \cdot 10^{-5}$ |

rapport de densité. Le modèle conservatif SDSCSF a tendance à sous-estimer le niveau de pression dans la goutte, alors que les modèles non conservatifs DSCSF et LLPC en donnent une valeur plus proche de la valeur théorique. Le modèle LLPC présente un champ de pression plus homogène au niveau de l'interface que les modèles DSCSF et SDSCSF.

4.4.10.2.6 Cas test - goutte oscillante Le cas de la goutte oscillante est un cas pour lequel les effets dynamiques sont dominés par la tension superficielle. Une goutte initialement au repos est mise en mouvement par un champ de vitesse à divergence nulle donné par :

$$\mathbf{v}_0 = V_0 e^{-\frac{r}{r_0}} \begin{pmatrix} \frac{x}{r_0} \left(1 - \frac{z^2}{rr_0}\right) \\ -\frac{z}{r_0} \left(1 - \frac{x^2}{rr_0}\right) \end{pmatrix} \quad (4.165)$$

où r est la distance du point (x,z) au centre de la goutte, V_0 et r_0 sont la vitesse et le rayon caractéristiques du champ initial. La vitesse caractéristique V_0 est prise égale à $10ms^{-1}$. Trois discrétisations sont testées comprenant 10, 20 et 40 particules dans le diamètre de la goutte. Les rayons initiaux de la goutte sont respectivement 10.21mm, 10.17mm et 10.12mm pour les discrétisations 10, 20 et 40. (La méthode de discrétisation spatiale est à l'origine de ces variations de rayon, en effet celle-ci privilégie la régularité du champ des poids et la régularité de l'espacement entre les cercles de particules décrivant le domaine initialement.)

Les fluides étudiés ont une densité de référence de $1000kgm^{-3}$ et une vitesse du son de $15ms^{-1}$ pour l'eau et une densité de référence de $1kgm^{-3}$ et une vitesse du son de $4ms^{-1}$ pour l'air. Pour cette configuration la fréquence d'oscillation de la goutte est donnée par la relation :

$$\omega^2 = \frac{6\sigma}{R^3\rho} \quad (4.166)$$

où ρ est la densité du fluide lourd. L'application numérique donne des périodes théoriques d'oscillations de 0.312s, 0.310s et 0.308s pour les discrétisations 10, 20 et 40 respectivement (les rayons des gouttes initiales variant légèrement en fonction de la discrétisation). Sur la figure 4.71, nous voyons les champs caractéristiques de pression et de vitesse pour ce cas test. La déformation maximale observée lors de la mise en œuvre de ce cas test correspond à un rapport de 1.06 entre les axes principaux de la goutte.

Nous pouvons observer sur les figures 4.72 à 4.74 l'évolution de l'énergie cinétique pour les différents modèles et différentes discrétisations. Les modèles employés sans préconditionnement ne

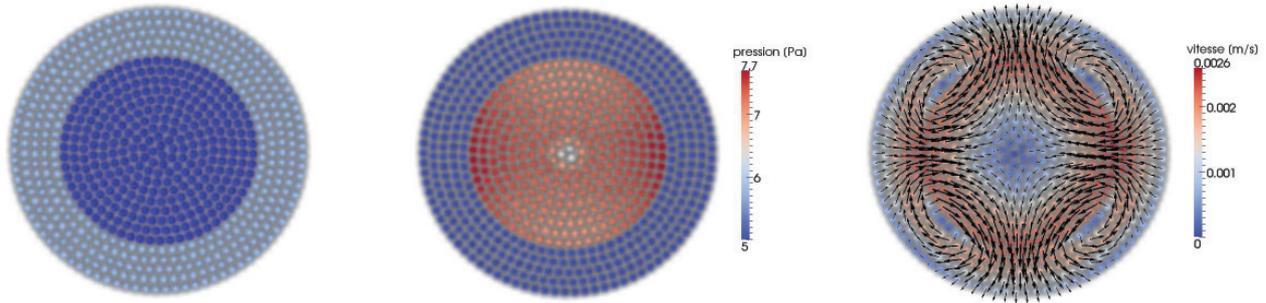


FIGURE 4.71 – Position des fluides (gauche), champ de pression (centre) et champs de vitesse (droite) pour une goutte oscillante 2D au temps $t=0.41s$

permettent pas de déterminer une fréquence d'oscillation pour la discrétisation disposant de 10 particules dans le diamètre de la goutte, figure 4.72. Tous les modèles sont stables pour la discrétisation 20 et permettent de déterminer une fréquence d'oscillation. Les erreurs de fréquence sont énumérées dans le tableau 4.23. Pour cette discrétisation les erreurs sont inférieures à 5.5% pour les modèles SDSCSF et DSCSF, et inférieures à 2.5% pour le modèle LLPC. Pour la discrétisation 40, figure 4.74, seul le modèle LLPC est stable (quelle que soit la méthode de calcul de la courbure) et les erreurs de prédiction de la fréquence d'oscillation sont inférieures à 1%.

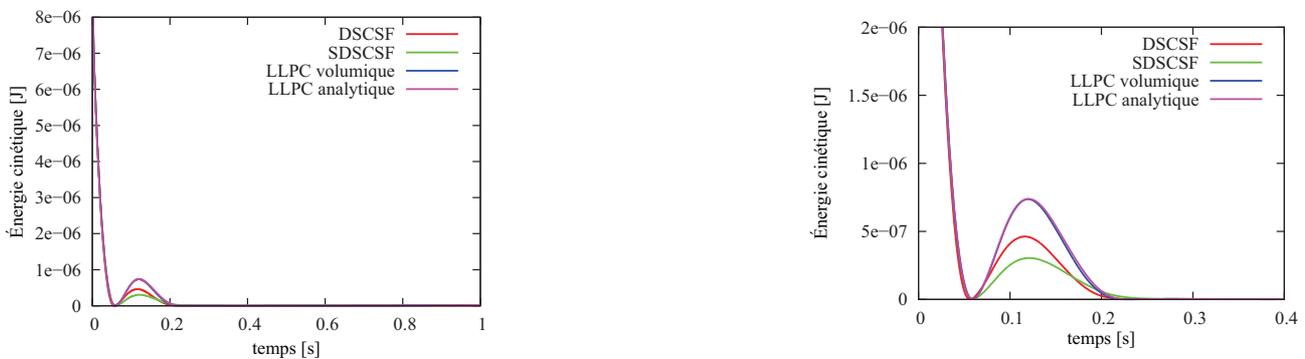


FIGURE 4.72 – Évolution de l'énergie cinétique pour une discrétisation 10

Cette étude montre, comme c'était le cas pour les ondes gravitaires, que la méthode souffre d'une forte dissipation numérique. Nous nous intéressons donc à l'impact du préconditionnement sur ces résultats. Les figures 4.75 et 4.76 montrent que comme pour le cas des ondes gravitaires, le préconditionnement réduit la dissipation numérique. Cependant il rend aussi le calcul plus instable pour les modèles DSCSF et SDSCSF. Le champ de vitesse, une fois le calcul déstabilisé, est représenté sur la figure 4.77 pour le modèle DSCSF. Une des hypothèses mise en avant pour expliquer la sensibilité des modèles SDSCSF et DSCSF en comparaison du modèle LLPC est l'irrégularité du champ de pression obtenu au niveau de l'interface comme cela était visible sur la figure 4.70. Le préconditionnement a aussi un effet bénéfique sur le calcul des fréquences d'oscillation. La figure 4.75 montre la moindre dissipation obtenue avec le modèle analytique pour le calcul de la courbure.

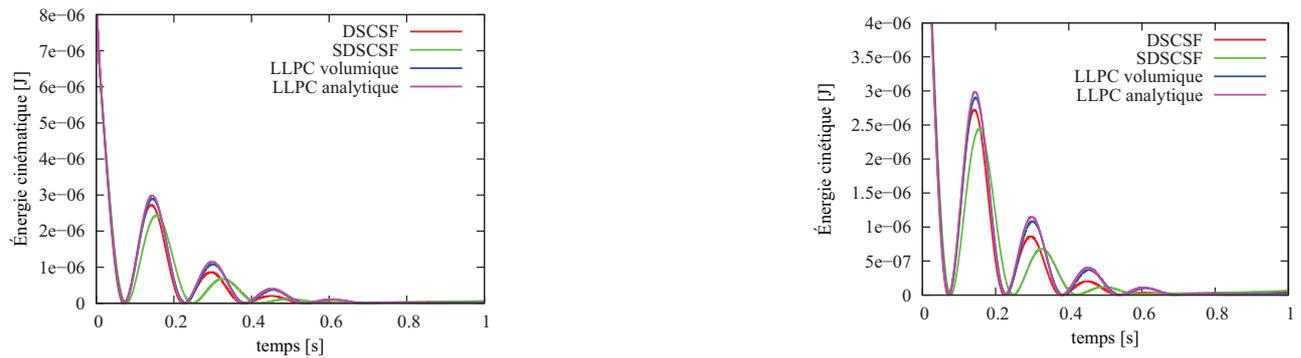


FIGURE 4.73 – Évolution de l'énergie cinétique pour une discrétisation 20

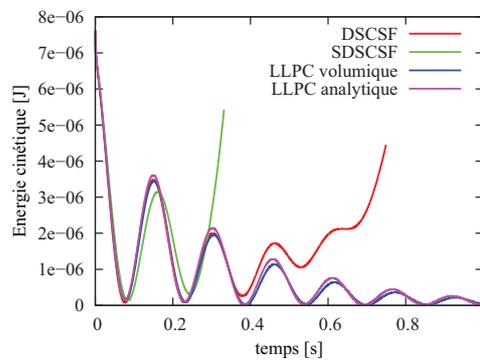


FIGURE 4.74 – Évolution de l'énergie cinétique pour une discrétisation 40

Tableau 4.23 – Erreur relative des fréquences d'oscillations

| discrétisation | préconditionnement | DSCSF | SDSCSF | LLPC volumique | LLPC analytique |
|----------------|--------------------|-------|--------|----------------|-----------------|
| 10 | sans | - | - | - | - |
| 10 | avec | 7.1 % | - | 3.72 % | 1.8% |
| 20 | sans | 3.3 % | -5.3 % | 1.73 % | 2.39 % |
| 20 | avec | - | - | -0.3 % | 0.7 % |
| 40 | sans | - | - | -0.4 % | 0.4 % |

Finalement, comme nous le remarquons à la fin de la partie 4.4.1, une erreur est généralement commise dans la méthode SHP-ALE lors du déplacement des particules. Nous avons proposé un terme de correction du déplacement pour essayer d'améliorer la position de chaque particule vis-à-vis du volume qu'elle est censée discrétiser. L'idée est ici de voir l'impact de ce terme sur les résultats de ce cas test. La figure 4.78 montre les résultats avec et sans terme de correction de position des particules. On peut y voir que le terme supplémentaire a tendance à augmenter légèrement la dissipation numérique. Ce terme n'affecte cependant pas la fréquence des phénomènes simulés.

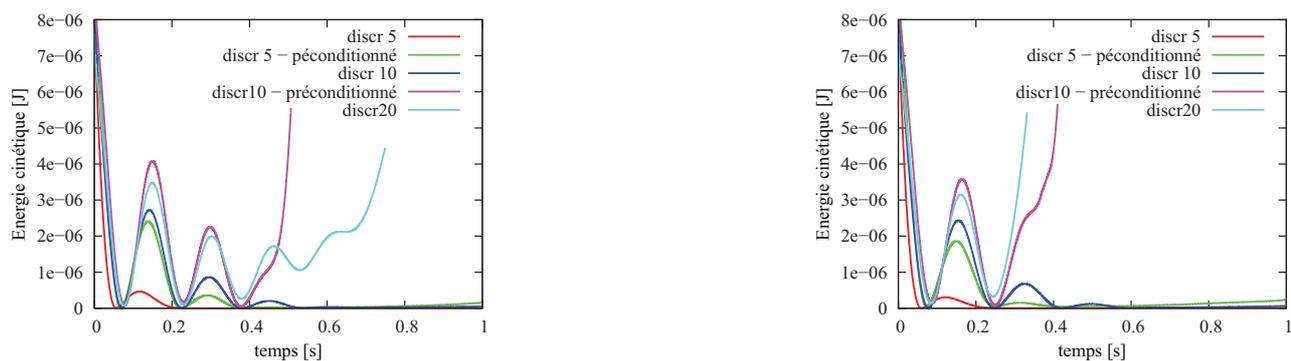


FIGURE 4.75 – Influence de la discrétisation et du préconditionnement - modèle DSCSF (gauche) et SDSCSF (droite)

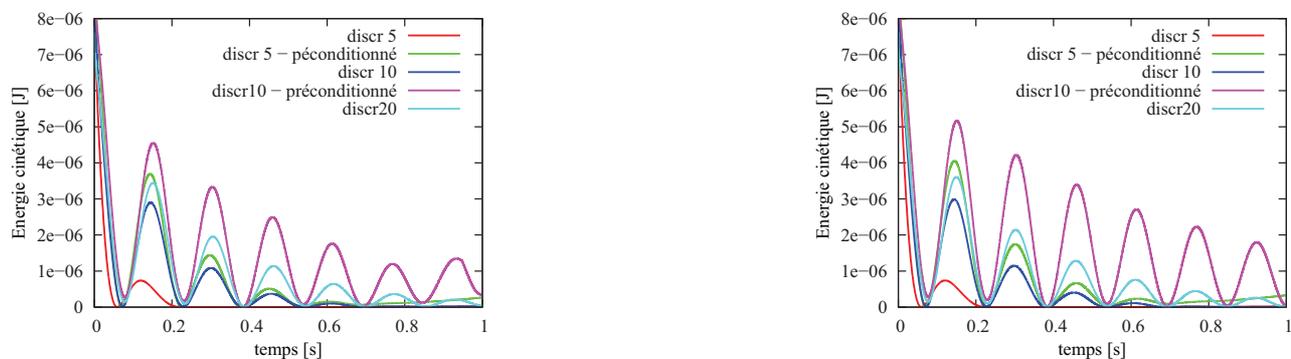


FIGURE 4.76 – Influence de la discrétisation et du préconditionnement - modèle LLPC volumique (gauche) et analytique (droite)

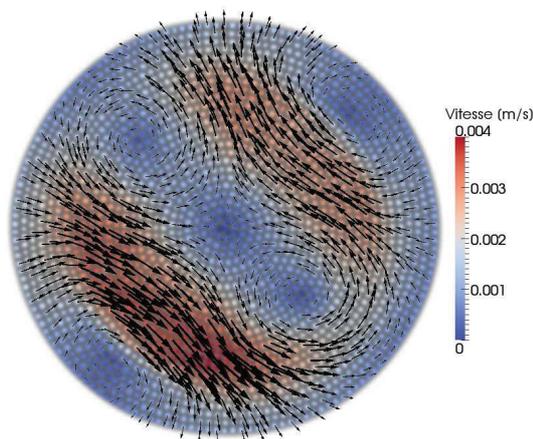


FIGURE 4.77 – Champ de vitesse pour un calcul préconditionné avec le modèle DSCSF - Instabilité apparue après 1.5 oscillation

N'ayant pas de mesure réelle de l'erreur de position de ces particules, il est difficile d'expliquer que

l'on augmente la dissipation numérique (est-ce qu'on corrige trop, pas assez, dans une mauvaise direction la position des particules?). En tous cas ce test permet de montrer que l'absence de correction de déplacement des particules peut affecter les résultats de la simulation mais ne semble pas affecter la stabilité du calcul.

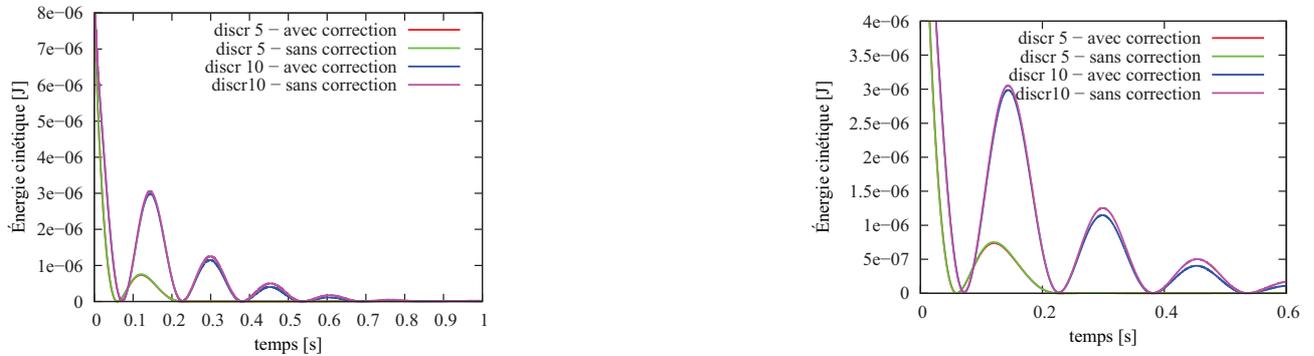


FIGURE 4.78 – Influence du terme de correction de déplacement des particules pour le modèle LLPC analytique

Ainsi ce cas test nous a permis de montrer les capacités des différents modèles à simuler un cas dynamique géré par les phénomènes de tension de surface. La fréquence des phénomènes a pu être prédite correctement ($< 1\%$ d'erreur) si la discrétisation est suffisante ou si on utilise une méthode préconditionnée. Dans ce cadre les modèles SDSCSF et DSCSF sont apparus plus diffusifs et plus instables que le modèle LLPC. Le préconditionnement a permis de réduire la dissipation numérique mais au prix d'une diminution de la condition CFL.

Troisième partie

Évolutions de la structure du code de calcul

L'environnement du calcul scientifique a été marqué ces derniers mois par le développement important de la technologie GPU (Graphics Processing Unit). Cette technologie utilise les cartes graphiques des ordinateurs comme moyen de calcul en lieu et place du CPU (Central Processing Unit). Les premiers résultats de codes portés sur cette technologie ont montré des accélérations très importantes de la vitesse des calculs, [13].

Les GPUs se caractérisent par un nombre important de canaux de calculs parallèles, par la difficulté de faire des tests au cours du calcul et par une gestion des ressources mémoires qui doit être totalement définie par le développeur. Toutes ces caractéristiques influencent largement l'optimisation du code de calcul. Les premiers travaux effectués sur GPU ont ainsi permis d'acquérir, au sein de l'équipe, une expérience sur les calculs massivement parallèles notamment en ce qui concerne l'utilisation de tests, ou la mise en paramètres de compilation de certains paramètres, et ce, que ce soit sur GPU ou CPU.

Pour bénéficier au maximum de cette expérience, acquise sur la technologie GPU, mais valorisable sur tous types de machines, il a été décidé de modifier différentes caractéristiques importantes du code de calcul :

- la mise en paramètres de compilation de paramètres de calculs,
- le stockage et l'accès aux données associées aux volumes de contrôles,
- l'utilisation d'une liste de voisins,
- le stockage des résultats intermédiaires pour le calcul d'interactions entre volumes de contrôles,
- la parallélisation du code de calcul.

Une version initiale (correspondant aux travaux présentés dans [38]) et une version actuelle (développée au cours de cette thèse) seront évoquées par la suite.

Chapitre 5

Gestion des données et liste de voisins

Dans un code de calcul, la présence de tests, et le rapport temps de calcul / temps d'accès mémoires sont des paramètres qui influencent la qualité d'implémentation. Les tests représentent des embranchements possibles entre deux parties d'un code, (par exemple pour l'utilisation d'un solveur de Riemann ou d'un autre). Ils pénalisent la performance puisque cela fait effectuer des opérations qui peuvent, au final, ne mener à aucun résultat valorisable (des tests peuvent être réalisés pour au final ne choisir qu'une seule possibilité). Différentes méthodologies permettent d'éviter la réalisation de tests comme définir un maximum de paramètres lors de la pré-compilation ou faire un tri au préalable des données en les stockant dans différents tableaux.

Paramètres de compilation La mise en place de différents paramètres de compilation, liés aux propriétés de la simulation numérique (choix des solveurs de Riemann, schémas d'intégration temporelle, phénomènes de tension de surface...) permet d'avoir un code de calcul optimisé pour la simulation à réaliser. En effet l'utilisation de paramètres de compilation permet de compiler uniquement les parties du code qui seront réellement utiles à l'exécution. Le langage C/C++ autorise par ailleurs l'utilisation de paramètres et fonctions "template" qui facilitent et formalisent cette utilisation. Un nombre important de tests sont ainsi éliminés de la version compilée du code. D'autre part, ces tests permettent de n'allouer, lors de l'exécution du programme, que les tableaux utiles. Par exemple, pour une simulation monophasé, le tableau contenant l'entier "couleur", permettant de distinguer les différents fluides, est superflu. L'utilisation de paramètres "template" permet ici de ne pas allouer le tableau couleur et ainsi d'économiser des ressources mémoires. En contrepartie, le programme est à recompiler à chaque modification de ces paramètres. (Ceci n'étant pas pénalisant puisque le temps de compilation reste court devant les temps de simulations usuels.)

Stockage et accès aux données des particules Une attention particulière a été portée au stockage et à l'accès aux données associées aux particules. En effet ces considérations influencent de plusieurs manières la performance de l'algorithme de calcul. D'une part, un stockage inapproprié peut mener à un nombre de tests important pour savoir si, par exemple, une interaction est bien à calculer. D'autre part, il peut engendrer un nombre important d'accès mémoires non contigus qui ralentissent fortement le calcul. De plus, l'utilisation de la technologie GPU a mis en avant l'avantage de stocker sous forme de tableaux de mêmes types, les différentes données (comme la pression, la quantité de mouvement), dans le but de fournir le plus rapidement possible les données aux différents canaux de calcul. Pour ces différentes raisons, le stockage des données se fait, dans la version actuelle, non plus sous forme de structure particule (contenant des champs position,

pression, masse...), mais sous la forme de tableaux séparés (pression, vitesse...). Les tableaux sont séparés pour chaque type de particules (fluides, parois, ...), ce qui fait que lors du parcours des particules voisines, au cours de l'itération, les particules fluides sont d'abord parcourues puis les solides, puis les particules de type inlet. Il n'y a alors pas de test pour savoir quel est le solveur de Riemann à utiliser.

Utilisation d'une liste de voisins Pour déterminer les interactions d'une particule donnée au cours d'une itération, il serait trop pénalisant de parcourir toutes les particules situées dans le domaine physique, de calculer la valeur du kernel associée à chaque paire de particules et d'en déduire s'il y a vraiment interaction (c'est-à-dire si la valeur du kernel est non nulle). Pour éviter cela, on détermine la position de chaque particule dans une grille associée à la taille du domaine confié au processeur (voir partie parallélisation). On ne considère alors, comme voisines possibles, que les particules situées dans la même cellule (élément de la grille) ou dans les cellules voisines. A partir de ce point, dans la version précédente du code de calcul, une liste de voisines réelles était déterminée en début d'itération. Cette liste était utilisée durant toute l'itération pour n'effectuer les calculs qu'entre les particules réellement voisines (la valeur du kernel est alors non nulle). Ainsi chaque particule avait une liste représentant ses particules voisines, fig.5.1. Malgré le fait que cette liste était réutilisée durant plusieurs itérations, cette méthode s'est révélée gourmande en ressource mémoire et n'a pas montré de gains significatifs en terme de rapidité de calculs. Ainsi dans la version actuelle, des interactions sont calculées entre une particule et toutes celles qui sont situées dans la même cellule ou dans les cellules voisines, fig.5.2. Il est à noter qu'à chaque redistribution des particules dans la grille, un réordonnancement des différents tableaux de données a lieu. Les cellules sont indexées de manière spatialement continue et pour chaque tableau, les données liées aux particules d'une cellule sont stockées les unes à la suite des autres. Ceci permet de faire correspondre, à une proximité spatiale de particules, une proximité de stockage de données sur la mémoire. Ainsi lors du calcul d'interactions entre particules voisines, les données à utiliser sont accessibles dans des cases mémoires proches, ce qui accélère les calculs.

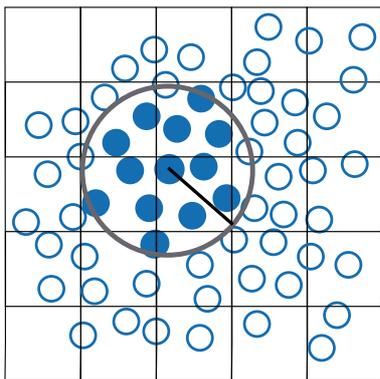


FIGURE 5.1 – Voisinage avec liste de voisins

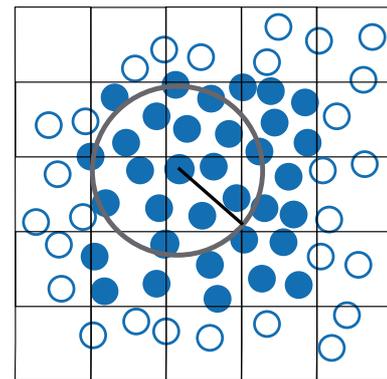


FIGURE 5.2 – Voisinage sans liste de voisins

Stockage des résultats intermédiaires En ce qui concerne le calcul de chaque interaction, la version initiale du code stockait chaque valeur qui était utilisée plusieurs fois au cours du calcul de l'interaction considérée (comme par exemple le gradient de la fonction kernel). Cette stratégie demandant des ressources mémoires importantes et des accès mémoires fréquents, il a été choisi

de la mettre de côté et de recalculer chaque terme à chaque fois qu'il apparaît. En effet, avec les technologies modernes (multi-core, GPU), le temps d'accès mémoire devient limitant par rapport au temps de calcul. Il vaut donc mieux parfois recalculer une valeur plutôt que d'aller la chercher en mémoire.

Chapitre 6

Parallélisation des calculs

Devant le nombre très important de modifications portées au code de calcul il a été décidé de repenser la parallélisation de l'algorithme pour, là aussi, tenir compte des enseignements apportés par la technologie GPU. La parallélisation d'un calcul numérique est une méthode qui permet de réaliser une simulation, non pas avec un, mais avec plusieurs processeurs qui calculent en même temps, ceci dans le but d'accélérer le calcul. La méthode de parallélisation présentée dans [38] repose sur un découpage du domaine physique de calcul. C'est-à-dire que, pour une simulation à effectuer, chaque processeur reçoit une partie du domaine de calcul et effectue l'ensemble des opérations nécessaires, uniquement pour cette partie du domaine. Les processeurs sont amenés à dialoguer à travers la librairie de messages MPI (Message Passing Interface). Cette parallélisation a montré en pratique une grande efficacité, [38], mais s'est révélée non optimisée vis-à-vis des besoins de la parallélisation massive. En effet, en plus des modifications expliquées précédemment, la gestion des données en mémoire sur différents processeurs a été repensée. La méthode développée précédemment reposait sur le fait que chaque processeur possédait les différents tableaux de données physiques (position, pression, vitesse, ...) associés à l'ensemble des particules (même si le processeur n'en utilisait qu'une partie pour le calcul des particules dans son sous-domaine). Cette méthode, ne permettait donc pas, par l'ajout de nouveaux processeurs de diminuer le besoin en mémoire de chacun d'entre eux. La stratégie de parallélisation est présentée dans la partie suivante.

6.1 Méthode de parallélisation

La version actuelle de la parallélisation reprend la notion de découpage du domaine physique en sous-domaines. Ces derniers sont attribués à un processeur qui aura en charge le calcul des interactions de l'ensemble des particules situées dans ce sous-domaine.

Cette version se distingue de la précédente par le fait que les différents tableaux contenant les informations à stocker ne sont pas partagés entre tous les processeurs. Chaque processeur a uniquement en mémoire les informations utiles pour le calcul d'un pas temporel pour les particules dont il est responsable. Pour comprendre la démarche de parallélisation, l'exemple d'un calcul de pas de temps est suivi. Cette démarche se décompose en différentes étapes : découpe du domaine physique, envoi des particules "virtuelles", boucles préliminaires et envoi des résultats des boucles préliminaires aux particules virtuelles, calcul des bilans de flux, avance en temps et échange des particules ayant changé de sous-domaine. Différents schémas (fig. 6.1 à fig. 6.6) et images (fig. 6.14 et fig. 6.8 à fig. 6.13) sont utilisés pour expliquer la démarche. Dans chaque cas, les couleurs représentent la gestion d'une particule ou d'une région par un processeur particulier.

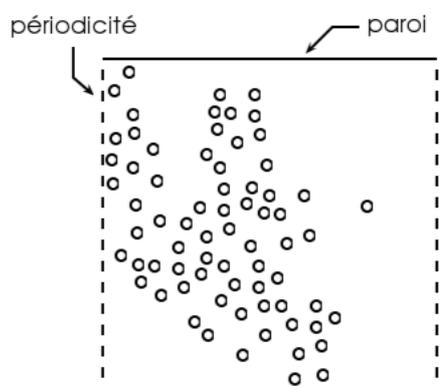


FIGURE 6.1 – Domaine physique

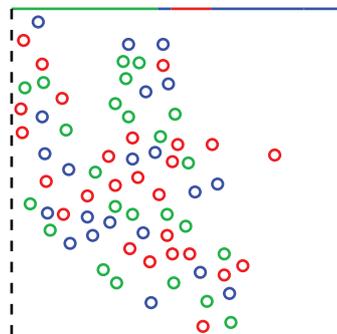


FIGURE 6.2 – Répartition initiale

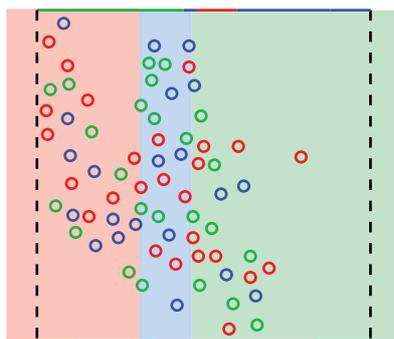


FIGURE 6.3 – Découpe du domaine

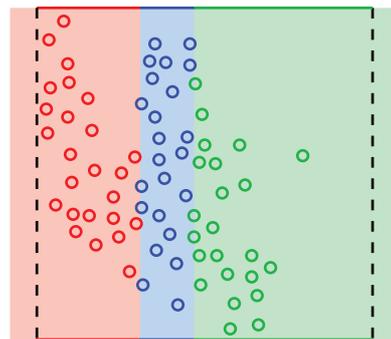


FIGURE 6.4 – Répartition des particules

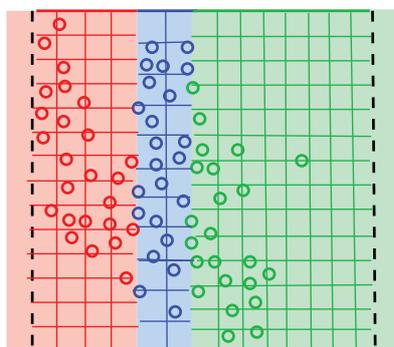


FIGURE 6.5 – Création des grilles

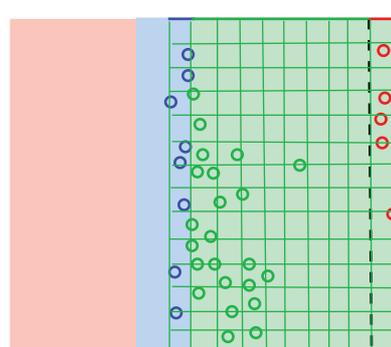


FIGURE 6.6 – Vue de l'espace depuis le processeur "droit"

Découpe du domaine physique Au début de l'itération les particules sont stockées dans la mémoire de l'un ou l'autre des processeurs (par exemple à la suite d'une lecture du fichier d'initialisation), fig.6.2. Il faut à ce moment là déterminer la topologie des sous-domaines qui seront attribués aux processeurs. Cette topologie est réalisée par dichotomie récursive à partir du domaine physique total et est déterminée en fonction de la répartition spatiale des particules fluides. Pour expliquer cette démarche, l'exemple d'une découpe, avec quatre processeurs, pour le cas d'une rupture de barrage 2D, est suivi. Le domaine total est tout d'abord considéré comme domaine parent, avec quatre processeurs associés. Partant du domaine parent, l'objectif est d'avoir une équi-répartition du nombre de particules fluides entre les sous-domaines. Chaque processeur parcourt sa liste de particules pour déterminer quelle est la répartition spatiale des particules qu'il a en mémoire dans ce domaine parent. Ceci est fait en découpant chaque direction de l'espace en tranches et en repérant dans quelle tranche se trouve chaque particule. Une fois cette répartition mise en commun entre les différents processeurs, les courbes fig. 6.8 donnent une estimation de la répartition spatiale de l'ensemble des particules présentes dans le domaine parent selon les directions x et z. La direction de découpe est choisie selon la direction de pente moyenne non nulle la plus faible (cela revient à diviser le nombre moyen de particules dans chaque tranche non vide, par le nombre de tranches non vides). En cas d'équivalence de cette valeur selon les différentes directions, la direction choisie est celle qui a servi à obtenir le sous-domaine parent (si le sous-domaine parent est l'espace physique entier alors la direction est arbitraire). Ceci permet de limiter le nombre de processeurs voisins (ceci sera détaillé ensuite). Deux sous-domaines enfants sont créés, fig. 6.9 en coupant dans la direction x. Étant donné que, dans ce cas, le nombre de processeurs associés au domaine parent (quatre) est pair, chaque domaine enfant a le même nombre de particules et le même nombre de processeurs associés (deux). Chaque sous-domaine enfant devient alors parent. Cette procédure est répétée jusqu'à ce que les processeurs enfants aient un seul processeur attribué, c'est-à-dire jusqu'à ce que le nombre de sous-domaines soit égal au nombre de processeurs requis.

| | | reçoit | | | |
|----------------------------|---------------|--------|---|----|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| E n v o i e | Processeur n° | 1 | 2 | 3 | 4 |
| | 1 | 0 | 5 | 17 | 0 |
| | 2 | | | | |
| | 3 | | | | |
| 4 | | | | | |

(a) remplie par proc 1

| | | reçoit | | | |
|----------------------------|---------------|--------|---|----|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| E n v o i e | Processeur n° | 1 | 2 | 3 | 4 |
| | 1 | 0 | 5 | 17 | 0 |
| | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 3 | 11 | 0 | 0 | 2 |
| 4 | 0 | 4 | 0 | 0 | |

(b) après mise en commun entre tous les processeurs

FIGURE 6.7 – Matrice d'échange entre processeurs

Nous nous intéressons ici aux directions de découpes choisies pour les sous-domaines fig. 6.11 et fig. 6.13. Le critère expliqué ci-dessus permet de déduire des courbes 6.10 que la direction de découpe à privilégier est la direction z. Sur la figure 6.12, les deux directions sont homogènes (la moyenne étant faite seulement pour les valeurs non nulles de la pente et par rapport au nombre de tranches non vides). Dans ce cas la direction qui est choisie est celle qui a permis d'obtenir ce

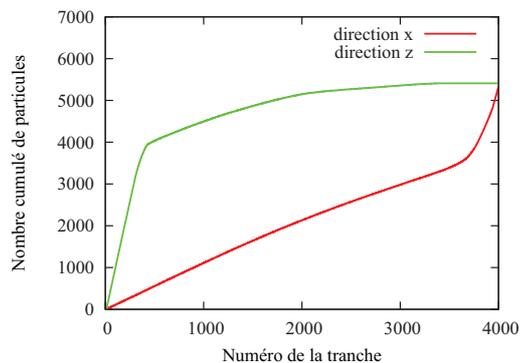


FIGURE 6.8 – Répartition totale

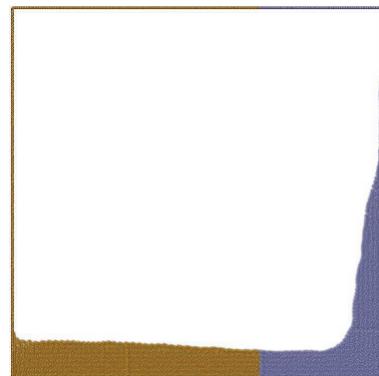


FIGURE 6.9 – Découpe déduite

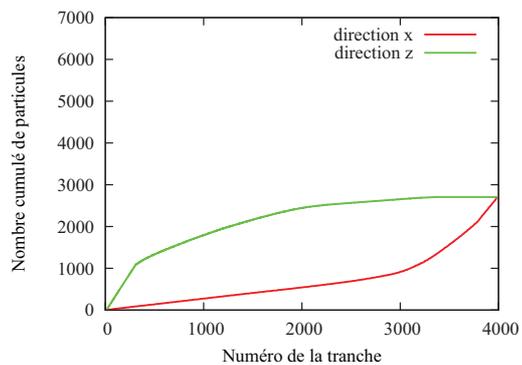


FIGURE 6.10 – Répartition sous-domaine droit



FIGURE 6.11 – Découpe déduite

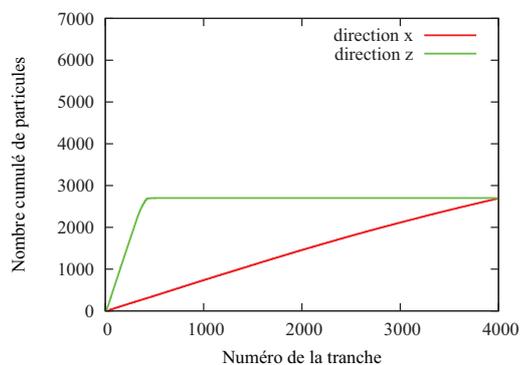


FIGURE 6.12 – Répartition sous-domaine gauche

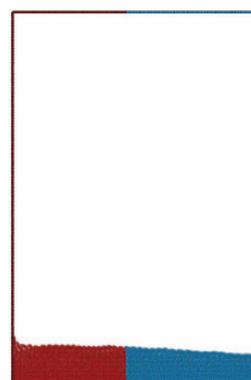


FIGURE 6.13 – Découpe déduite

domaine parent c'est-à-dire la direction x , fig. 6.9. Ceci permet de limiter les communications entre processeurs puisque, dans ce cas, le processeur de gauche (rouge), n'a qu'un seul voisin, alors qu'il en aurait eu deux si la direction avait été z . Les figures 6.14 montrent l'évolution dans le temps de la topologie des sous-domaines.

A la fin de cette procédure de découpe, tous les processeurs connaissent la topologie des différents sous-domaines et ont un sous-domaine particulier qui leur est attribué. Chaque processeur aura ainsi à effectuer les différentes étapes de l'itération pour les particules situées dans ce sous-domaine. Cependant les processeurs ont en mémoire, à cette étape, des particules qui n'appartiennent pas obligatoirement au sous domaine qui leur a été attribué, fig. 6.3. Chaque processeur parcourt donc sa liste de particules et stocke dans une matrice les nombres de particules qu'il va envoyer à tel ou tel processeur, tableau 6.7.a. Cette matrice, une fois mise en commun entre tous les processeurs, tableau 6.7.b, permet à chaque processeur d'avoir le nombre de particules qu'il va recevoir de chaque processeur.

Hormis le fait que cette information soit nécessaire pour dépaqueter les particules reçues, elle permet aussi de ne pas établir de communication entre processeurs qui n'auraient pas d'information à s'échanger (lorsqu'un 0 est présent dans la matrice). Ainsi chaque processeur envoie, sous forme de message, les particules en dehors de son sous-domaine aux processeurs qui en ont la charge. Chaque processeur reçoit alors les particules qui sont dans son sous-domaine mais qui étaient gérées par un autre processeur. A cette étape, les processeurs ont en mémoire, d'une part, les particules dont ils ont la charge et, d'autre part, la disposition de l'ensemble des sous-domaines (ce qui permet de déterminer des faces d'échanges entre sous-domaines voisins), fig. 6.4.

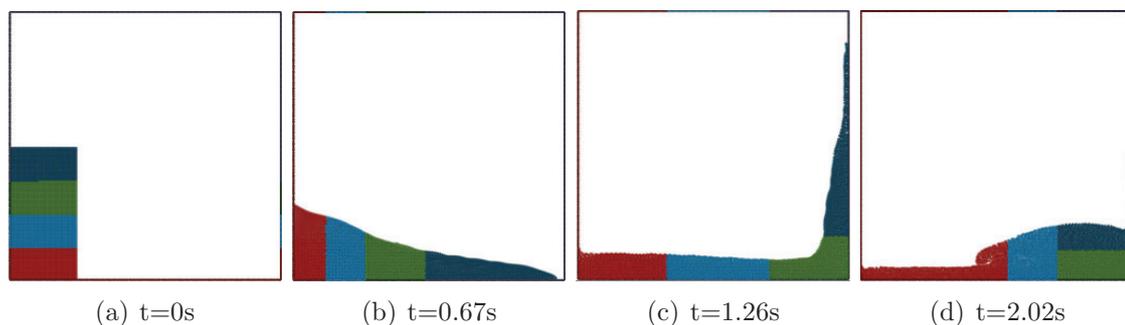


FIGURE 6.14 – évolution au cours du temps de la découpe de l'espace physique. Cas de la rupture de barrage 2D.

Création des grilles et envoi des particules "virtuelles" Pour pouvoir effectuer les différents bilans de flux au cours d'une itération, différents problèmes de Riemann doivent être résolus entre paires de particules. Comme cela a déjà été évoqué, effectuer la résolution entre toutes les paires de particules s'avèrerait trop coûteux. Ainsi les particules sont placées dans des grilles régulières dont la taille est basée sur la plus grande taille de kernel de son sous-domaine et des sous-domaines voisins. Les interactions possibles ne sont déterminées qu'entre couples de particules situées dans le même cube (élément de la grille), ou dans les cubes voisins (dont une face ou une arête, ou un coin est en commun, fig. 5.2). Cependant une particule située au bord de son sous-domaine peut avoir à interagir avec des particules situées dans un autre sous-domaine, c'est-à-dire gérée par un autre processeur. Avant toute opération, chaque processeur envoie les particules situées dans ses cubes

au contact de ses faces, arrêtes ou coin d'échanges, aux processeurs associés à la zone d'échange en question. Une fois les particules reçues, chaque processeur peut effectuer les premières opérations de l'itération. La figure 6.6 montre quelles sont les informations dont dispose le processeur gérant le sous-domaine "droit" au début d'une itération pour le cas 2D périodique, à savoir :

- l'extension spatiale de tous les sous-domaines
- la liste de ses particules réelles
- la liste de ses particules virtuelles envoyées par différents processeurs.

Boucles préliminaires et envoi des résultats des boucles préliminaires aux particules virtuelles Au début d'une itération, différentes opérations sont effectuées pour disposer de toutes les grandeurs afin de réaliser les bilans de flux. Cela peut être le calcul de gradients de pression ou vitesse pour un MUSCL, ou le calcul de la courbure pour la méthode LLPC ou encore un calcul de la matrice de renormalisation. Pour cela, chaque processeur utilise l'ensemble de ses particules "réelles" et de ses particules "virtuelles". Seulement à la fin de ces boucles préliminaires, seules les particules réelles possèdent les nouveaux champs mis à jour. Il faut ainsi que chaque processeur envoie les champs mis à jours, pour que les particules virtuelles disposent elles-aussi de leurs valeurs de gradient, courbure ou autre. Cette étape se révèle relativement sensible. En effet, afin de limiter la taille des communications MPI, seuls les champs mis à jours sont envoyés. Ainsi le message ne contient aucune information quant aux particules qui doivent recevoir les champs mis à jours. Le dépaquetage des messages doit donc se faire exactement dans le même ordre que celui effectué pour les particules elles-mêmes à l'étape "envoi des particules virtuelles". Nous nous assurons ainsi que les champs mis à jours sont attribués aux bonnes particules tout en limitant la taille des communications. Comme cela a été évoqué dans la partie décrivant les structures de données du code, les différents types de particules sont stockés dans des tableaux différents. Outre le fait que cela permet de calculer les interactions particules fluides réelles/fluides réelles, puis les interactions fluides réelles/solides réelles, etc... en utilisant des solveurs de Riemann définis à la compilation, il est aussi possible de savoir quand auront lieu des calculs entre particules réelles et particules virtuelles venant d'un processeur voisin. Ainsi il est possible d'effectuer des calculs ne nécessitant pas de données venant d'autres processeurs en parallèle des communications MPI. La méthode de parallélisation permet ainsi de cacher le temps de communication entre processeurs par du calcul.

Calcul des bilans de flux et avance en temps A la fin de la communication précédente, chaque processeur dispose de toutes les informations pour pouvoir calculer les bilans de flux et l'avance en temps de ses particules (le pas de temps est déterminé comme le pas de temps minimum calculés sur chacun des processeurs).

Echange des particules ayant changé de sous-domaine Après l'intégration temporelle, le caractère ALE de la méthode fait que les particules peuvent avoir changé de sous-domaine. Les particules dans ce cas sont envoyées aux processeurs qui en ont alors la responsabilité. Dans le cas où, du fait du déplacement des particules, le nombre de particules attribuées à chaque processeur est trop déséquilibré (par exemple supérieur à 10% de variation), une redécoupe du domaine physique a lieu. On peut ainsi observer, sur la figure 6.15, l'évolution du nombre de particules sur chacun des processeurs. Les discontinuités correspondent à un rééquilibrage de la charge entre les différents processeurs.

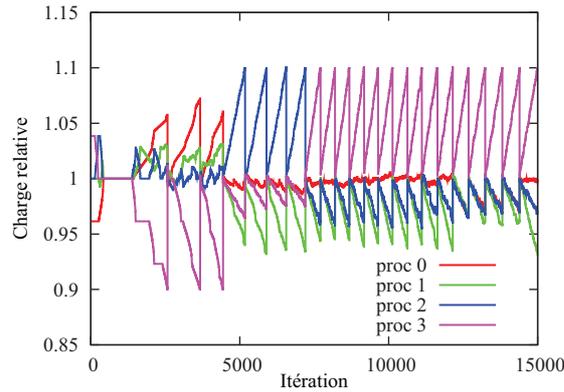


FIGURE 6.15 – évolution de la charge relative de chaque processeur

6.2 Évaluation de la performance parallèle

Considérant l'évaluation des performances parallèles d'un code de calcul, il s'agit, en premier lieu, de vérifier que les résultats en calcul série ou parallèle, sont identiques (à la précision machine près). Pour cela, nous comparons les différences de variation de poids, masse, et quantité de mouvement, entre d'une part un calcul série et un calcul parallèle, et entre deux calculs série pour lesquels les particules sont stockées dans un ordre différent dans les tableaux. La deuxième comparaison permet d'avoir un ordre de grandeur des différences liées à la précision machine. Les figures 6.16, montrent ces variations pour le cas d'une rupture de barrage 2D et d'une particule qui, dans le cas du calcul parallèle, passe d'un sous-domaine à un autre autour de l'itération 1450. Les différences de variation pour les différentes variables sont du même ordre de grandeur et permettent de dire que les calculs parallèles donneront, à la précision machine près, les mêmes résultats (ce cas est donné en exemple, d'autres cas test 3D, avec et sans symétrie, ou périodicité ont été testés).

L'évaluation de la performance de la simulation s'effectue en mesurant l'efficacité ou l'accélération de la parallélisation mesurée par rapport à un nombre de processeurs référence n_{ref} :

$$Acc(n_p, n_{ref}) = \frac{TempsCPU(n_{ref})}{TempsCPU(n_p)} \quad (6.1) \quad Eff(n_p, n_{ref}) = \frac{n_{ref}TempsCPU(n_{ref})}{n_pTempsCPU(n_p)} \quad (6.2)$$

où $TempsCPU(n)$ est le temps d'exécution d'un calcul parallèle avec n processeurs. Si $n_{ref} = 1$, les calculs parallèles sont comparés à un calcul série.

Le tableau 6.17 et la figure 6.18 montrent l'accélération et l'efficacité de la parallélisation, pour des cas 2D et 3D, avec différentes tailles de problèmes, allant de $1.6 \cdot 10^5$ particules en 2D à $1.1 \cdot 10^7$ particules en 3D. Ce dernier cas n'a pu être étudié avec un processeur à cause du trop grand besoin en ressource mémoire qu'il nécessite. Les comparaisons incluant ce cas test sont faites avec comme référence un calcul parallèle avec 4 processeurs. La parallélisation des calculs 2D montre une bonne efficacité (supérieure à 85%) tant que le nombre de particules par processeur reste supérieur à $8.0 \cdot 10^4$, fig. 6.18.a. Pour le cas 2D avec $1.6 \cdot 10^5$ particules, et à partir de 16 processeurs (ce qui représente $1.0 \cdot 10^4$ particules par processeur), l'ajout de nouveaux processeurs ne permet

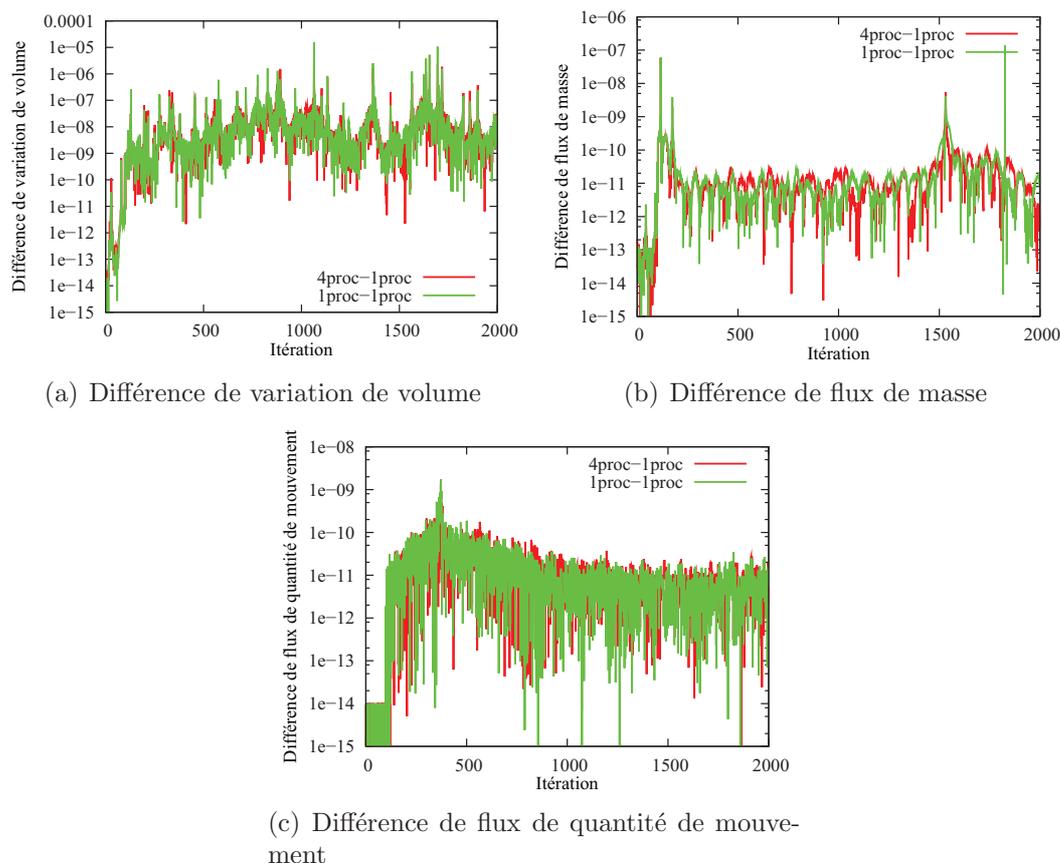


FIGURE 6.16 – Différence entre grandeurs calculées pour des calculs séries et parallèles

| n_p | 2D - $1.6 \cdot 10^5$ | | 2D - $6.4 \cdot 10^5$ | | 3D - $6.7 \cdot 10^5$ | | 3D - $1.4 \cdot 10^6$ | | 3D - $11.0 \cdot 10^6$ | |
|-------|-----------------------|------|-----------------------|------|-----------------------|------|-----------------------|------|------------------------|------|
| | acc. | eff. | acc. | eff. | acc. | eff. | acc. | eff. | acc. | eff. |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | |
| 2 | 1.92 | 0.96 | 1.90 | 0.95 | 1.90 | 0.95 | 1.95 | 0.98 | | |
| 4 | 3.74 | 0.94 | 3.75 | 0.94 | 3.73 | 0.93 | 3.74 | 0.94 | 1 | 1 |
| 8 | 7.01 | 0.87 | 6.92 | 0.86 | 6.84 | 0.86 | 6.93 | 0.87 | 1.87 | 0.94 |
| 16 | 11.6 | 0.72 | 12.9 | 0.81 | 12.3 | 0.77 | 13.2 | 0.83 | 3.60 | 0.90 |
| 32 | 12.6 | 0.39 | 21.7 | 0.68 | 21.8 | 0.68 | 23.1 | 0.72 | 6.73 | 0.84 |
| 64 | | | | | 28.9 | 0.45 | 34.7 | 0.54 | 11.1 | 0.70 |

FIGURE 6.17 – Efficacité et accélération de calculs

plus d'accélérer significativement le calcul puisque le passage de 16 à 32 processeurs fait passer l'accélération de 12.9 à 21.7. Pour les cas 3D, l'efficacité est supérieur à 80% tant que le nombre de particules par processeur est supérieur à $8 \cdot 10^4$, c'est-à-dire 8 processeurs pour le cas à $6.7 \cdot 10^5$ particules, 16 processeurs pour le cas à $1.4 \cdot 10^6$ particules et 32 processeurs pour le cas à $1.1 \cdot 10^7$ particules. Cette amélioration de l'efficacité avec le nombre de particules s'explique par le fait qu'en augmentant le nombre de particules, le rapport du temps de calcul des interactions sur le temps de communication entre processeurs augmente (il y a moins de temps perdu dans les

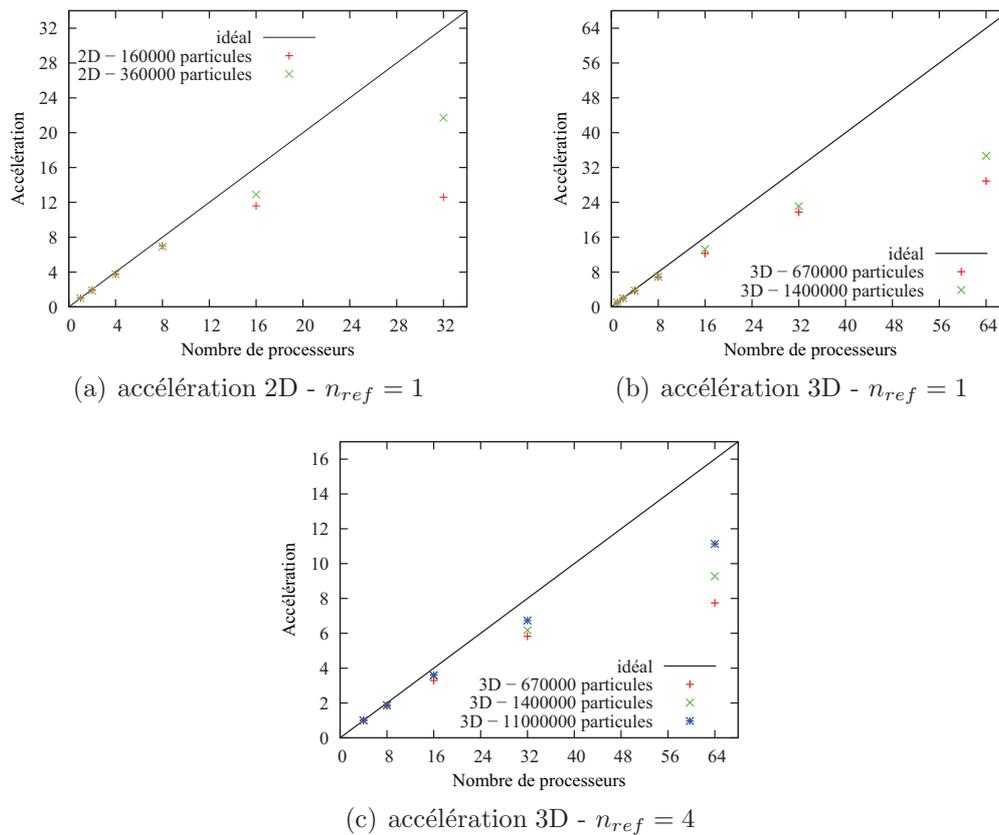


FIGURE 6.18 – Courbe d'accélération comparée à l'accélération idéale pour des cas 2D et 3D

communications). Finalement on peut observer que la répartition des informations à stocker entre les différents processeurs rend possible des calculs de grande taille sur plusieurs processeurs alors qu'ils sont impossibles sur un seul processeur (cas à $1.1 \cdot 10^7$).

Vis-à-vis de ces résultats, et étant donné que le nombre de particules lors d'une simulation de jet varie de manière significative (de quelques centaines à plusieurs millions), le code a été adapté pour utiliser un nombre de processeur en accord avec le nombre de particules dans la simulation, fig. 6.19. Ceci permet de ne pas dégrader les performances du calcul par un trop faible nombre de particules sur chaque processeur.

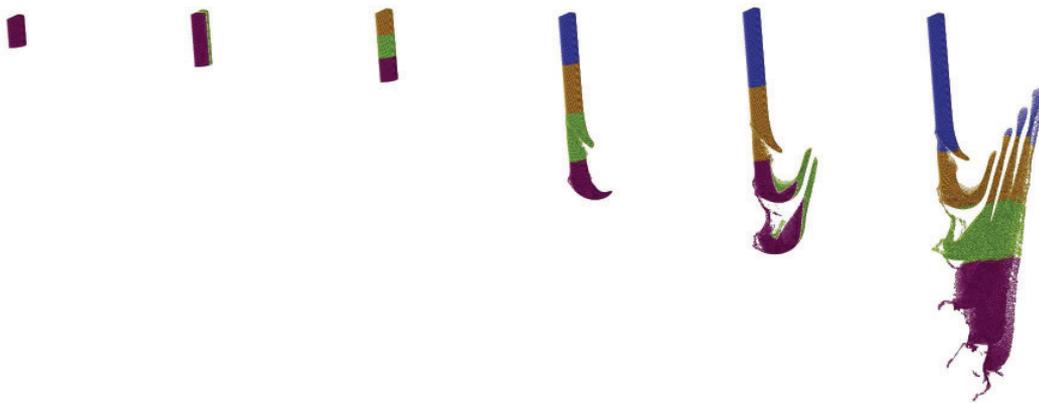


FIGURE 6.19 – Évolution du nombre de sous-domaines (processeurs) de 1 à 4 en fonction du nombre de particules

Chapitre 7

Bilan

Les développements sur le code de calcul ont permis, par les changements de structures de données, de diviser le temps de calcul par deux et les ressources mémoires par quinze en série. La parallélisation permet, quant à elle, de réaliser des calculs avec plusieurs millions de particules en gardant une efficacité supérieure à 84% sur 32 processeurs. Les différents travaux réalisés sur le code CPU ont ainsi permis de le rendre plus apte à des simulations 3D importantes en termes de ressources informatiques. Une étude précise des temps de latence au cours des différentes étapes du calcul devra être effectuée pour optimiser les communications entre les différents processeurs.

Conclusions et perspectives

L'étude avait pour objectif la compréhension des mécanismes gouvernant les déformations d'un jet de turbine Pelton et leur influence sur l'interaction entre le jet et l'auget. Pour se faire deux actions ont été menées.

Tout d'abord une étude expérimentale a permis de déterminer le mode de fragmentation du jet. L'absence d'atomisation dès la sortie d'embouchure, les tailles de déformation et les tailles de gouttes formées nous ont permis de classer cette fragmentation dans le mode d'atomisation turbulente. La variation de rugosité sur le pointeau a aussi montré l'importance de l'écoulement au cœur du jet. D'autre part l'accès aux résultats obtenus par l'équipe de la Hochschule de Luzern dans le cadre du projet JISPP (incluant la participation de ce travail de doctorat), a permis de mettre en avant l'importance de l'écoulement interne pour la fragmentation du jet. Alors que l'influence des écoulements secondaires est connue en ce qui concerne les déviations et déformations de jets, la mise en place de grilles et de barreaux a montré la possibilité de modifier les perturbations à la surface du jet en modifiant notamment la turbulence en sortie d'injecteur. Ces études ont ainsi montré la nécessité de simuler des écoulements multiphases sans changement de phase et avec tension de surface pour pouvoir prédire les influences de ces phénomènes sur le champ de pression d'un auget de turbine Pelton.

La partie numérique s'est appuyée sur le formalisme SPH-ALE. Ce formalisme a été choisi pour sa capacité à pouvoir traiter les interactions jet/auget pour lesquelles les volumes d'eau subissent de grandes déformations. Les équations de déplacement et d'évolution des volumes des particules ont été modifiées pour pouvoir attribuer aux interfaces des problèmes de Riemann des valeurs différentes de la moyenne des vitesses de chaque particule. Ces équations ont permis d'une part d'améliorer le calcul du cas d'un tube à choc en lagrangien. En effet l'utilisation d'une équation modifiée de déplacement des particules a permis de diminuer les variations de pression et de vitesse observées dans la zone de discontinuité initiale du problème. D'autre part, cette possibilité de choisir la vitesse des interfaces des problèmes de Riemann a permis de développer un modèle multiphase. L'utilisation d'un solveur de Riemann acoustique permet au modèle de vérifier la continuité de pression et de vitesse normale à l'interface entre les deux fluides. Le modèle est stable pour les forts rapports de densité (air-eau) et ne diffuse pas l'interface. L'application de ce modèle aux cas-test de colonne hydrostatique, ondes gravitaires et rupture de barrage nous a permis de vérifier que le modèle est capable de simuler de manière satisfaisante des cas à faible et à forte dynamique. L'utilisation de méthodes de correction comme la renormalisation a permis de diminuer la dépendance des résultats au choix de la fonction kernel. Cependant la difficulté majeure survenue avec ces cas test est la forte diffusion numérique de la méthode. L'utilisation de solveurs préconditionnés et adaptés aux cas à faible nombre de Mach a permis de diminuer la diffusion numérique de la méthode mais au dépend du temps de calcul puisqu'il a fallu diminuer

la condition CFL.

Deux modèles différents de tension de surface ont été adaptés à cette méthode. Un premier est une adaptation du modèle CSF. Cette adaptation a été déclinée sous plusieurs formulations prenant en compte le saut de densité, Density Scaled CSF (DSCSF), ou ne calculant les efforts de tension de surface qu'entre particules de la même espèce, Split Density Scaled CSF (SDSCSF). Le modèle CSF n'a pas permis de reproduire le saut de Laplace lorsqu'il y avait des rapports de densité entre les fluides. Le modèle DSCSF non conservatif, s'est révélé plus stable et donnant de meilleurs résultats que le modèle conservatif SDSCSF. L'intégration du saut de pression dans les solveurs de Riemann entre particules associées à des fluides différents a permis d'améliorer les résultats de ces deux modèles aussi bien pour les cas statiques (goutte au repos) ou dynamique (goutte oscillante). Un second modèle de tension de surface, nommé Laplace Law Pressure Correction (LLPC), a été développé. Il consiste à réattribuer le saut de pression après la résolution du problème de Riemann incluant justement le saut de pression. Ce modèle permet d'avoir un champ de pression dans une goutte au repos qui est plus lisse. L'intégration du saut de pression dans le solveur de Riemann nécessite cependant la connaissance de la courbure de l'interface. Pour la connaître deux méthodes ont été testées, une volumique et une analytique, sur des cas à deux et trois dimensions. Il s'est avéré que la précision de la mesure de la courbure avait une influence sur la qualité des résultats des différents cas-test (gouttes statique - oscillante).

Les cas tests visés nécessitant de grandes ressources de calcul il a fallu paralléliser le code. Pour cela le caractère lagrangien de la méthode a été pris en compte. Une découpe du domaine physique en sous-domaines est réalisée pour homogénéiser la charge de calcul entre les différents processeurs tout en minimisant les communications nécessaires entre les processeurs durant chaque pas de temps. Les particules associées à chaque sous-domaine ne sont connues que du processeur à qui le sous domaine a été attribué. Un processeur ne dispose, en plus des particules qu'il a dans son sous-domaine, que des informations de particules nécessaires pour effectuer le bilan des flux de ses particules. Ainsi la mémoire nécessaire au calcul est distribuée entre les différents processeurs. Cette méthodologie de parallélisation a montré son efficacité pour gérer 11 millions de particules sur 64 processeurs avec une efficacité de 70%. Le modèle numérique est ainsi capable de gérer les phénomènes importants pour le calcul de jet réel de turbine Pelton avec un grand nombre de particules.

L'étape suivante pour cette application sera le calcul d'un jet avec en condition d'entrée des profils de vitesse représentatifs de l'écoulement en sortie d'un injecteur de turbine Pelton. Pour des applications plus générales, ce travail a permis de mettre en avant que l'équation de déplacement des particules et celle d'évolution des poids ne permettent pas de garantir que les particules sont situées au centre du volume qu'elles sont censées discrétiser. Cette erreur ne semble pas affecter la stabilité de la méthode et les propositions de correction apportées n'ont pas modifié de manière significative les résultats. Il serait cependant important de quantifier l'erreur liée à ceci pour pouvoir mieux juger des résultats de la méthode SPH. D'autre part, la forte diffusion numérique de la méthode (même avec la reconstruction MUSCL) peut être une propriété limitante pour son applicabilité. Une étude de son origine et des méthodes permettant de la réduire est donc importante pour le développement de la méthode en général. La proximité du formalisme SPH-ALE avec le formalisme Volumes-Finis peut permettre dans ce cas de s'inspirer de méthodes déjà connues pour résoudre ce problème. Du point de vue expérimental une étude de l'influence des grilles sur la tur-

bulence au sein de l'écoulement permettrait de mieux interpréter les mesures observées et d'étendre les résultats à l'échelle prototype. D'autre part, une mesure du champ de pression totale dans un jet issu d'un injecteur, dont la rugosité aurait été modifiée en paroi, apporterait aussi des résultats importants pour l'étude du champ de vitesse au sein du jet et son influence sur l'interaction avec un auget.

Bibliographie

- [1] S. Adami, X.Y. Hu, and N.A. Adams. A conservative sph method for surfactant dynamics. *Journal of Computational Physics*, 229 :1909–1926, 2010.
- [2] S. Adami, X.Y. Hu, and N.A. Adams. A new surface-tension formulation for multi-phase sph using a reproducing divergence approximation. *Journal of Computational Physics*, 229 :5011–5021, 2010.
- [3] S. Adami, X.Y. Hu, and N.A. Adams. Simulation of surface tension in 2d and 3d with smoothed particle hydrodynamics method. *Journal of Computational Physics*, 229 :7238–7259, 2010.
- [4] G. Allaire, S. Clerc, and S. Kokh. A five-equation model for the simulation of interfaces between compressible fluids. *Journal of Computational Physics*, 181 :577–616, 2002.
- [5] P.-K. Wu amd R.F. Miranda and G.M. Faeth. Effects of initial flow conditions on primary breakup of nonturbulent and turbulent round liquid jets. *Atomization and Sprays*, 5 :175–196, 1995.
- [6] A. Amicarelli, J.-C. Marongiu, F. Leboeuf, J. Leduc, and J. Caro. Sph truncation error in estimating a 3d function. *Computers and fluids*, in press.
- [7] T. Bonometti. *Développement d’une méthode de simulation d’écoulements à bulles et à gouttes*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2005.
- [8] T. Bonometti and J. Magnaudet. An interface-capturing method for incompressible two-phase flows. validation and application to bubble dynamics. *International Journal of Multiphase Flow*, 33 :109–133, 2007.
- [9] J.U. Brackbill, D.B. Kothe, and C.Zemach. A continuum method for modeling surface tension. *Journal of Computational Physics*, 100 :335–354, 1992.
- [10] *Norme Internationale IEC - 60193 - turbines hydrauliques, pompes d’accumulation et pompes-turbines - Essais de réception*.
- [11] J.-M. Cherfils, L. Bonce, G. Pinon, and E. Rivoalen. Ib-sph simulations of wave-body interactions. 2010.
- [12] A. Colagrossi and M. Landrini. Numerical simulation of interfacial flows by smoothed particle hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 191 :448–475, 2003.
- [13] A.J.C. Crespo, J.-C. Marongiu, E. Parkinson, M. Gomez-Gesteira, and J.M. Dominguez. High performance of sph codes : Best approaches for efficient parallelisation on gpu computing. In *4th SPHERIC Workshop*, page 69, Lausanne, 2009.
- [14] O. Desjardins and V. Moureau amd H.Pitsch. An accurate conservative level set - ghost fluid method for simulating turbulent atomization. *Journal of Computational Physics*, 227 :8395–8416, 2008.

- [15] F. Dubois. *Partial Riemann problem, boundary conditions and gas dynamics*, volume Absorbing Boundaries and Layers, Domain decomposition methods : Application to large scale computations. Nova Science Publishers, 2001.
- [16] N. Dumont. *Modélisation de l'écoulement diphasique dans les injecteurs diesels*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2004.
- [17] N. Dumont, O. Simonin, and C. Habchi. cavitating flow in diesel injectors and atomization : a bibliographical review. In *8th International Conference on Liquid Atomization and Sprays Systems*, Pasadena, CA, USA, 2008.
- [18] C. Dumouchel. On the experimental investigation on primary atomization of liquid streams. *Experiments in Fluids*, 45 :371–422, 2008.
- [19] G.M. Faeth, L.-P. Hsiang, and P.-K. Wu. Structure and breakup properties of sprays. *International Journal of Multiphase Flow*, 21 :99–127, 1995.
- [20] M.M. François, S.J. Cummins, E.D. Dendy, D.B. Kothe, J.M. Sicilian, and M-W. Williams. A balanced-force algorithm for continuous and sharp interfacial surface tension models within a volume tracking framework. *Journal of Computational Physics*, 213 :141–173, 2006.
- [21] H. Garcin, J. Leduc, and E. Parkinson. Recent advances in the simulation of pelton hydraulic turbines. In *26th CADFEM Users Meeting*, Darmstadt, Germany, 2008.
- [22] N. Grenier. *Modélisation numérique par la méthode SPH de la séparation eau-humide dans les séparateurs gravitaires*. PhD thesis, École Centrale de Nantes, 2009.
- [23] N. Grenier, M. Antuono, A. Colagrossi, D. Le Touzé, and B. Alessandrini. An hamiltonian interface sph formulation for multi-fluid and free surface flows. *Journal of Computational Physics*, 228 :8380 – 8393, 2009.
- [24] D. Gueyffier, J. Li, A. Nadim, R. Scardovelli, and S. Zaleski. Volume-of-fluid interface tracking with smoothed surface stress methods for three-dimensional flows. *Journal of Computational Physics*, 152 :423–456, 1999.
- [25] P.M. Guilcher. *Contribution au développement d'une méthode SPH pour la simulation d'interactions houle-structure*. PhD thesis, École Centrale de Nantes, 2008.
- [26] E. Guyon, J-P. Hulin, and L. Petit. *Hydrodynamique Physique*. EDP sciences, 2001.
- [27] C. Hirsch. *Numerical Computation of Internal and External Flows*, volume 2. John Wiley & Sons, 1988.
- [28] X.Y. Hu and N.A. Adams. An incompressible multi-phase sph method. *Journal of Computational Physics*, 227 :264–278, 2007.
- [29] G.R. Johnson and S.R. Beissel. Normalized smoothing functions for sph impact computations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 39 :2725 – 2741, 1996.
- [30] H. Keck and M. Sick. Thirty years of numerical flow simulation in hydraulic turbomachines. *Acta Mechanica*, 201 :211 – 229, 2008.
- [31] S. Kvicinsky. *Méthode d'analyse des écoulements 3D à surface libre : Application aux turbines Pelton*. PhD thesis, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2001.
- [32] R. Lebas, T.Menard, P.-A. Beau, A. Berlemont, and F.X. Demoulin. Numerical simulation of primary break-up and atomization : Dns and modelling study. *International Journal of Multiphase Flow*, 35 :247–260, 2009.

- [33] J. Leduc. Theoretical and numerical analysis of a pelton turbine jet. Master's thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2007.
- [34] E.-S. Lee, C. Moulinec, R. Xuc, D. Violeau, D. Laurence, and P. Stansby. Comparisons of weakly compressible and truly incompressible algorithms for the sph mesh free particle method. *Journal of Computational Physics*, 227 :8417 – 8436, 2008.
- [35] B. Van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme, v. a second order sequel to godunov's method. *Journal of Computational Physics*, 32 :101–136, 1979.
- [36] R. Loubère, P.-H. Maire, M. Shashkov, J. Breil, and S. Galera. Reale : A reconnection-based arbitrary-lagrangian-eulerian method. *Journal of Computational Physics*, 229 :4724–4761, 2010.
- [37] M. De Luca. *Contribution à la modélisation de la pulvérisation d'un liquide phytosanitaire en vue de réduire les pollutions*. PhD thesis, Université de la Méditerranée, Aix-Marseille II, 2007.
- [38] J.-C. Marongiu. *Méthode numérique lagrangienne pour la simulation d'écoulements à surface libre - Application à la turbine Pelton*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2007.
- [39] J.-C. Marongiu, F. Leboeuf, J. Caro, and E. Parkinson. Low mach number numerical schemes for the sph-ale method. application in free surface flows in pelton turbines. In *4th SPHERIC Workshop*, pages 324–331, Nantes, 2009.
- [40] P. Maruzewski, D. Le Touzé G. Oger, and F. Avellan. Sph high-performance computing simulations of rigid solids impacting the free-surface water. *Journal of Hydraulic Research*, 47 :126–134, 2009.
- [41] J. Massoni, R. Saurel, B. Nkonga, and R. Abgrall. Proposition de méthodes et modèles eulériens pour les problèmes à interfaces entre fluides compressibles en présence de transfert de chaleur. *International journal of heat and mass transfer*, 45 :1287–1307, 2002.
- [42] V.O.H. Mayer and R. Branam. Atomization characteristics on the surface of a round liquid jet. *Experiments in Fluids*, 36 :528–539, 2004.
- [43] M.J. McCarty and N.A. Molloy. Review of stability of liquids jets and the influence of nozzle design. *The Chemical Engineering Journal*, 7 :1–20, 1974.
- [44] T. Menard. *Développement d'une méthode Level Set pour le suivi d'interface. Application à la rupture de jet liquide*. PhD thesis, Université de Rouen, 2007.
- [45] T. Menard, S. Tanguy, and A. Berlemont. Coupling level set/vof/ghost fluid methods : Validation and applicatio to 3d simulation of the primary break-up of a liquid jet. *International Journal of Multiphase Flow*, 33 :510–524, 2007.
- [46] J.J. Monaghan. Simulating gravity currents with sph iii boundary forces. *Mathematics Reports and Preprints*, 1995.
- [47] J.J. Monaghan and J.C. Lattanzio. A refined method for astrophysical problems. *Astronomy and Astrophysics*, 149 :135–143, 1985.
- [48] J.J. Monaghan and H. Pongracic. Artificial viscosity for particle methods. *Applied Numerical Mathematics*, 1 :187–194, 1985.
- [49] J.P. Morris. Simulating surface tension with smoothed particle hydrodynamics. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 33 :333–353, 2000.

- [50] J.P. Morris, P.J. Fox, and Y. Zhu. Modeling low reynolds number incompressible flows using sph. *Journal of Computational Physics*, 136 :214–226, 1997.
- [51] A. Murrone and H. Guillard. A five equation reduced model for compressible two phase flow problems. *Journal of Computational Physics*, 202 :664–698, 2005.
- [52] A. Murrone and H. Guillard. Behavior of upwind scheme in the low mach number limit : Iii. preconditioned dissipation for a five equation two phase model. *Computers and Fluids*, 37 :1209–1224, 2008.
- [53] G. Oger. *Aspects théoriques de la méthode SPH et application à l'hydrodynamique à surface libre*. Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes, 2006.
- [54] P. Oguey and M. Mamin. *La dispersion du jet d'eau à grande vitesse*. 1951.
- [55] P.J. O'Rourke and A.A. Amsden. The tab method for numerical simulation of spray droplet breakup. *SAE paper*, 1987.
- [56] E. Parkinson, J.-C. Marongiu, H. Garcin, and C. Bissel. From classical to novel flow simulation methods applied to pelton rehabilitation projects. In *Hydro*, Lisbon, Portugal, 2010.
- [57] E. Parkinson, C. Neury, H. Garcin, G. Vullioud, and Th. Weiss. Unsteady analysis of a pelton runner with flow and mechanical simulations. In *Hydro*, Beljak, Austria, 2005.
- [58] K. Patel, B. Patel, M. Yadav, and T. Foggia. Development of pelton turbine using numerical simulation. In *25th IAHR Symposium on Hydraulic Machinery and Systems*, Timisoara, Romania, 2010.
- [59] G. Perigaud and R. Saurel. A cromptessible flow model with capillary effects. *Journal of Computational Physics*, 209 :139–178, 2005.
- [60] A. Perrig. *Hydrodynamics of the free surface flow in Pelton turbine buckets*. PhD thesis, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2007.
- [61] A. Perrig, F. Avellan, J.-L. Kueny, M. Farhat, and E.Parkinson. Flow in a pelton turbine bucket : Numerical and experimental investigations. *Transactions of the ASME*, 128 :350–358, 2006.
- [62] F. Petitpas, J. Massoni, R. Saurel, E. Lapebie, and L. Munier. Diffuse interface model for high speed cavitating underwater systems. *International Journal of Multiphase Flow*, 35 :747–759, 2009.
- [63] N.J. Quinlan, M. Basa, and M. Lastiwka. Truncation error in mesh-free particle methods. *Internationnal Journal For Numerical Methods In Engineering*, 66 :2064–2085, 2006.
- [64] P.W. Randles and L.D. Libersky. Smoothed particle hydrodynamics : some recent improvements and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139 :375–408, 1996.
- [65] P.A. Raviart. *An analysis of particle methods, Lecture notes in mathematics*. Springer, 1985.
- [66] R.D. Reitz. Modeling atomization process in high-pressure vaporizing sprays. *Atomization and Spray Technology*, 3 :309 – 337, 1987.
- [67] RTE Réseau de transport Électricité. <http://www.rte-france.com/fr/developpement-durable/maitriser-sa-consommation-electrique/consommation-production-et-contenu-co2-de-lelectricite-francaisemixenergetique>. site internet, Octobre 2010.
- [68] K.A. Sallam, Z. Dai, and G.M. Faeth. Drop formation at the surface of plane turbulent liquid jets in still gases. *International Journal of Multiphase Flow*, 25 :1161–1180, 1999.

- [69] K.A. Sallam, Z. Dai, and G.M. Faeth. Liquid breakup at the surface of turbulent round liquid jets in still gases. *International Journal of Multiphase Flow*, 28 :427–449, 2002.
- [70] R. Saurel, S. Gavriluk, and F. Renaud. A multiphase model with internal degrees of freedom : application to shock-bubble interaction. *Journal of Fluid Mechanics*, 495 :283–321, 2003.
- [71] R. Schaback and H. Wendland. Kernel techniques : From machine learning to meshless methods. *Acta Numerica*, pages 1–97, 2006.
- [72] T. Staubli, A. Abgottspon, P. Weibel, C. Bissel, E. Parkinson, J. Leduc, and F. Leboeuf. Jet quality and pelton efficiency. In *Hydro*, 2009.
- [73] M. Sussman and E. G. Puckett. A coupled level set and volume-of-fluid method for computing 3d and axisymmetric incompressible two-phase flows. *Journal of Computational Physics*, 162 :301–337, 2000.
- [74] M. Sussman, E. Fatemiand P. Smereka, and S. Osher. An improved level-set method for incompressible two-phase flows. *Computers & Fluids*, 27 :663–680, 1998.
- [75] E.F. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*, volume A Practical Introduction. Springer, third edition edition, 2009.
- [76] G. Tryggvason, B. Bunner, A. Esmaeliand D. Juric, N. Al-Rawahi, W. Tauber, J. Han, S. Nas, and Y.-J. Janz. A front-tracking method for the computations of multiphase flow. *Journal of Computational Physics*, 169 :708–759, 2001.
- [77] J.P. Vila. On particle weighted methods and smooth particle hydrodynamics. *Mathematical models and methods in applied sciences*, 1999.
- [78] P.-K. Wu and G.M. Faeth. Aerodynamic effects on primary breakup of turbulent liquids. *Atomization and Sprays*, 3 :265–289, 1993.
- [79] P.-K. Wu and G.M. Faeth. Onset and end of drop formation along the surface of turbulent liquid jets in still gases. *Physics of Fluids*, 7 :2915–2917, 1995.
- [80] M. ZAKI. *Modélisation et simulation numérique du procédé de perçage non débouchant par jet d'eau abrasif*. PhD thesis, ENSAM, 2009.
- [81] B. Zoppé. *Simulation numérique et analyse de l'écoulement dans les augets de turbine Pelton*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2004.