



**HAL**  
open science

## Contribution à l'étude de la marche d'un bipède

Sylvain Miossec

► **To cite this version:**

Sylvain Miossec. Contribution à l'étude de la marche d'un bipède. Automatique / Robotique. Ecole Centrale de Nantes (ECN); Université de Nantes, 2004. Français. NNT: . tel-00684507

**HAL Id: tel-00684507**

**<https://theses.hal.science/tel-00684507>**

Submitted on 2 Apr 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE DOCTORALE

SCIENCES ET TECHNOLOGIES  
DE L'INFORMATION ET DES MATÉRIAUX

Année 2004

Thèse de DOCTORAT

Diplôme délivré conjointement par  
L'École Centrale de Nantes et l'Université de Nantes

Spécialité : AUTOMATIQUE ET INFORMATIQUE APPLIQUÉE

*Présentée et soutenue publiquement par*

**Sylvain MIOSSEC**

le 27 Novembre 2004  
à l'École Centrale de Nantes

TITRE

**Contribution à l'étude de la marche d'un bipède**

JURY

<i>Président</i>	J.G. FONTAINE	<i>Professeur à l'ENSI de Bourges</i>
<i>Rapporteur</i>	G. ABBA	<i>Professeur à l'Université de Metz</i>
<i>Rapporteur</i>	G. BESSONNET	<i>Professeur à l'Université de Poitiers</i>
<i>Examineurs</i>	Y. Aoustin	<i>Maitre de Conférence à l'Université de Nantes</i>
	G. CONTE	<i>Professeur à l'Université Politecnica delle Marche</i>
	W. KHALIL	<i>Professeur à l'École Centrale de Nantes</i>
<i>Membre invité</i>	C. CHEVALLEREAU	<i>Chargée de recherche CNRS à l'IRCCyN</i>

**Directeur de thèse : Wisama KHALIL**

Laboratoire : Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes

**Co-encadrant : Yannick Aoustin**

Laboratoire : Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes

Composante de rattachement du directeur de thèse : École Centrale de Nantes



# Remerciements

Je tiens d'abord à remercier Monsieur Jean-Guy Fontaine d'avoir accepté la présidence de mon jury de thèse, ainsi que Messieurs Gabriel Abba et Guy Bessonnet de m'avoir fait l'honneur d'être rapporteurs de ce travail. Mes remerciements vont également à Monsieur Guiseppe Conte et Madame Christine Chevallereau pour avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse.

Je remercie également Wisama Khalil de m'avoir encadré durant mes trois années de doctorat. Je remercie tout particulièrement Yannick Aoustin de m'avoir encadré durant ces trois années de doctorat et d'avoir été patient et disponible. Je remercie aussi Christine Chevallereau pour les discussions que nous avons pu avoir. J'adresse mes remerciements à toute l'équipe robotique et au personnel de l'IRCCyN pour leur aide et leur bonne humeur, et plus particulièrement à Philippe Lemoine pour sa disponibilité et son aide en programmation. J'adresse également mes remerciements à tous les participants du groupe de recherche Robea "Commande pour la marche et la course d'un robot bipède", pour toutes les discussions et échanges d'idées. Je remercie aussi Alexander Formal'sky de m'avoir accueilli à deux reprises à l'Institut de Mécanique de l'Université Lomonosov de Moscou, et pour les discussions et l'assistance qu'il m'a apportée.

J'adresse un grand merci à tous les thésards qui ont participé à la bonne ambiance du laboratoire. Un grand merci aussi à Cécile pour son aide dans les moments difficiles, et pour tout le reste. Enfin un grand merci à toute ma famille pour leur amour et leur soutien.



# Table des matières

Introduction générale	17
<b>1 Modélisation du robot bipède RABBIT</b>	<b>21</b>
1.1 Introduction	21
1.2 Présentation de Rabbit	23
1.3 Paramétrisation et notations utilisées	24
1.4 Modélisation en phase de simple support et double support	27
1.4.1 Cas général	27
1.4.2 Méthode d'obtention du modèle général par la méthode de Lagrange	28
1.4.2.1 Paramètres géométriques et dynamiques	31
1.4.2.2 Positions des centres de gravité et des extrémités des jambes	32
1.4.2.3 Énergie cinétique, énergie potentielle et travaux des efforts	34
1.4.2.4 Prise en compte de la barre de maintien	37
1.4.3 Cas simplifié en considérant un pied au sol	39
1.5 Conclusion	42
<b>2 Modélisation et étude de l'impact</b>	<b>43</b>
2.1 Introduction	44
2.2 Le modèle d'impact algébrique	46
2.3 Le modèle d'impact différentiel	49
2.3.1 Formulation différentielle de l'impact différentiel	49
2.3.2 Formulation intégrée de l'impact différentiel	51
2.3.3 Formulation algébrique de l'impact différentiel	53
2.3.4 Méthode de calcul de l'impact différentiel	55
2.4 Caractérisation des modèles d'impact	59
2.4.1 Introduction	59
2.4.2 Présentation de la méthode de tracé des comportements obtenus après impact	60
2.4.3 Présentation de la méthode de recherche d'un impact donnant un double support par optimisation	61

2.4.4	Résultats et comparaison des modèles algébrique et différentiel pour le cas d'une configuration de marche . . . . .	63
2.4.5	Résultats pour le cas de la configuration minimisant le frottement permettant de donner un double support, dans le cas du modèle algébrique . . . . .	66
2.4.6	Résultats pour le cas de la configuration minimisant le frottement permettant de donner un double support, dans le cas du modèle différentiel . . . . .	66
2.4.7	Résultats pour le cas de la configuration la plus proche de la configuration de marche permettant de donner un double support pour $f = 1$ , dans le cas du modèle algébrique . . . . .	70
2.4.8	Résultats pour le cas de la configuration la plus proche de la configuration de marche permettant de donner un double support pour $f = 1$ , dans le cas du modèle différentiel . . . . .	72
2.5	Conclusion et propositions . . . . .	74
<b>3</b>	<b>Génération de trajectoires par optimisation</b>	<b>79</b>
3.1	Introduction . . . . .	80
3.2	Problème d'optimisation considéré . . . . .	83
3.2.1	Paramétrisation du mouvement de référence . . . . .	84
3.2.1.1	Paramétrisation en simple support . . . . .	84
3.2.1.2	Paramétrisation en double support . . . . .	85
3.2.1.3	Dynamiques de zéro obtenues en simple support . . . . .	86
3.2.1.4	Présentation des paramètres d'optimisation choisis . . . . .	88
3.2.1.5	Calcul des polynômes à partir des paramètres d'optimisation . . . . .	90
3.2.2	Critères . . . . .	95
3.2.3	Contraintes . . . . .	96
3.2.3.1	Contraintes géométriques sur les configurations limites . . . . .	97
3.2.3.2	Contraintes géométriques en cours de phases . . . . .	98
3.2.3.3	Contraintes sur les dynamiques de zéro . . . . .	100
3.2.3.4	Autres contraintes non indispensables à la définition d'un pas . . . . .	100
3.2.4	Présentation de la hiérarchisation des contraintes et réduction de la hiérarchisation des contraintes . . . . .	103
3.3	Simulation du mouvement de référence . . . . .	107
3.3.1	Calculs préliminaires . . . . .	107
3.3.2	Simulation en phase de simple support . . . . .	108
3.3.3	Simulation en phase de double support . . . . .	110

3.3.3.1	Position du problème du calcul des couples et des réactions du sol . . . . .	111
3.3.3.2	Calcul des couples et des réactions du sol dans le cas de la minimisation de la norme des couples . . . . .	115
3.3.3.3	Calcul des couples et des réactions du sol dans le cas de la minimisation de l'énergie dépensée . . . . .	116
3.4	Méthode d'optimisation . . . . .	118
3.4.1	Méthode d'optimisation en utilisant <i>fsqp</i> . . . . .	120
3.4.2	Méthode d'optimisation en utilisant une méthode SQP classique . . . . .	121
3.5	Calcul du gradient du critère et des contraintes . . . . .	126
3.5.1	Gradient des conditions aux limites et des polynômes . . . . .	127
3.5.1.1	En simple support . . . . .	127
3.5.1.2	En double support . . . . .	130
3.5.2	Gradient des dynamiques de zéro en simple support . . . . .	133
3.5.3	Gradient des couples et réactions du sol en simple support . . . . .	134
3.5.4	Gradient des couples et réactions du sol en double support . . . . .	135
3.5.4.1	Cas du critère de couples . . . . .	136
3.5.4.2	Cas du critère d'énergie . . . . .	137
3.5.5	Gradient des critères . . . . .	139
3.5.6	Gradient des contraintes . . . . .	142
3.6	Résultats . . . . .	144
3.6.1	Quelques considérations pratiques . . . . .	144
3.6.2	Présentation de mouvements optimaux obtenus . . . . .	145
3.6.3	Présentation des critères en fonction de la vitesse d'avance . . . . .	146
3.6.4	Commentaires . . . . .	156
3.7	Conclusion . . . . .	160
<b>4</b>	<b>Commande du bipède et étude de stabilité</b> . . . . .	<b>163</b>
4.1	Introduction . . . . .	163
4.2	Etude des dynamiques de zéro . . . . .	167
4.2.1	Commande de $\alpha$ en double support . . . . .	167
4.2.2	Stabilité des dynamiques de zéro . . . . .	173
4.2.2.1	Présentation de la méthode de Poincaré . . . . .	174
4.2.2.2	Détermination de la zone de convergence en temps fini en double support . . . . .	174
4.2.2.3	Conditions d'existence et de stabilité d'un mouvement cyclique . . . . .	177
4.2.2.4	Présentation d'une méthode de visualisation de tous les mouvements cycliques stables possibles . . . . .	181

4.2.2.5	Un exemple de représentations de Poincaré . . . . .	184
4.2.2.6	Conclusion . . . . .	186
4.3	Etude de stabilité sur tous les degrés de liberté . . . . .	186
4.3.1	Commande du bipède . . . . .	187
4.3.1.1	Modèle en remplaçant le temps par $\alpha$ . . . . .	187
4.3.1.2	Linéarisation entrée-sortie du système . . . . .	192
4.3.1.3	La loi de commande avec prise en compte des contraintes .	194
4.3.2	Etude de la stabilité au sens de Poincaré . . . . .	196
4.3.3	Validation des résultats . . . . .	198
4.4	Conclusion . . . . .	200
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>201</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>208</b>
<b>A</b>	<b>Etude de l'approximation sur l'inertie moteur</b>	<b>209</b>
<b>B</b>	<b>Comparaison de la formulation d'impact avec frottement de Brach [8] et de la formulation d'impact de la section 2.2</b>	<b>213</b>
<b>C</b>	<b>Equations des différents comportements du modèle d'impact algébrique</b>	<b>219</b>
<b>D</b>	<b>Modélisation et étude de l'impact avec des pieds sans masse</b>	<b>227</b>
D.1	Introduction . . . . .	227
D.2	Présentation des modèles d'impact avec pieds . . . . .	228
D.2.1	Notations pour la prise en compte des pieds . . . . .	229
D.2.2	Lois de comportement pour le pied arrière à plat . . . . .	231
D.2.3	Lois de comportement pour le pied arrière sur son extrémité . . . . .	236
D.2.4	Lois de comportement pour le pied avant à plat . . . . .	237
D.2.5	Lois de comportement pour le pied avant sur le talon . . . . .	237
D.3	Présentation des résultats d'impact avec pieds . . . . .	238
D.3.1	Cas des deux pieds à plat . . . . .	238
D.3.2	Cas du pied arrière sur son extrémité et du pied avant à plat . . . . .	241
D.3.3	Cas du pied arrière à plat et du pied avant sur le talon . . . . .	242
D.3.4	Cas du pied arrière sur son extrémité et du pied avant sur le talon .	243
D.4	Conclusion . . . . .	245

# Table des figures

1.1	Prototype Rabbit où l'on peut apercevoir la barre de maintien latéral. . . . .	24
1.2	Prototype Rabbit. . . . .	25
1.3	Schéma du bipède avec les paramètres de position. . . . .	25
1.4	Schéma du bipède représentant les couples et les réactions du sol. . . . .	26
1.5	Schéma du bipède avec la numérotation des corps et la longueur des corps. . . . .	31
1.6	Schéma du bipède avec les positions des centres de gravité et des extrémités des jambes. . . . .	31
1.7	Schéma du bipède représentant les angles absolus. . . . .	33
1.8	Schéma de la chaîne d'actionnement. . . . .	36
1.9	Notations des longueurs pour la barre de maintien latéral de Rabbit . . . . .	38
1.10	Relation entre la masse du contrepoids et la longueur de barre à faire dépasser afin que l'ensemble soit équivalent à l'ajout d'une masse ponctuelle sur le robot. . . . .	40
1.11	Relation entre la masse équivalente au niveau du point d'attache de la barre et la longueur de barre qui dépasse afin que l'ensemble soit équivalent à l'ajout d'une masse ponctuelle sur le robot. . . . .	40
2.1	Représentation de l'algorithme de calcul de l'impact différentiel . . . . .	58
2.2	Un exemple de configuration de marche obtenue par optimisation. . . . .	64
2.3	Comportements obtenus avec le modèle d'impact algébrique pour la configuration de marche. . . . .	64
2.4	Comportements obtenus avec le modèle d'impact algébrique pour la configuration de marche, zoom sur la zone de double support. . . . .	65
2.5	Comportements obtenus avec le modèle d'impact différentiel pour la configuration de marche. . . . .	65
2.6	Configuration minimisant le coefficient de frottement nécessaire pour obtenir un double support avec l'impact algébrique. . . . .	67
2.7	Comportements obtenus pour l'impact algébrique, dans le cas minimisant le coefficient de frottement nécessaire pour obtenir un double support avec l'impact algébrique. . . . .	67

2.8	Comportements obtenus pour l'impact différentiel, dans le cas minimisant le coefficient de frottement nécessaire pour obtenir un double support avec l'impact algébrique. . . . .	68
2.9	Configuration minimisant le coefficient de frottement nécessaire pour obtenir un double support avec l'impact différentiel. . . . .	69
2.10	Comportements obtenus pour l'impact algébrique, dans le cas minimisant le coefficient de frottement nécessaire pour obtenir un double support avec l'impact différentiel. . . . .	69
2.11	Comportements obtenus pour l'impact différentiel, dans le cas minimisant le coefficient de frottement nécessaire pour obtenir un double support avec l'impact différentiel. . . . .	70
2.12	Configuration la plus proche de la configuration de marche présentée figure 2.2 et pour laquelle un double support est possible pour un coefficient de frottement de 1 avec le modèle algébrique. . . . .	71
2.13	Comportements obtenus pour la configuration la plus proche de la configuration de marche présentée figure 2.2 et pour laquelle un double support est possible pour un coefficient de frottement de 1 avec le modèle algébrique. . . . .	71
2.14	Comportements du modèle différentiel, obtenus pour la configuration la plus proche de la configuration de marche présentée figure 2.2 et pour laquelle un double support est possible pour un coefficient de frottement de 1 avec le modèle algébrique. . . . .	72
2.15	Configuration la plus proche de la configuration de marche présentée figure 2.2 et pour laquelle un double support est possible pour un coefficient de frottement de 1 avec le modèle différentiel. . . . .	73
2.16	Comportements obtenus pour la configuration la plus proche de la configuration de marche présentée figure 2.2 et pour laquelle un double support est possible pour un coefficient de frottement de 1 avec le modèle différentiel. . . . .	73
3.1	Gabarit de couples et vitesses admissibles pour les moteurs du robot, tiré de la documentation constructeur du moteur Parvex RS420J . . . . .	101
3.2	Représentation de la séquence de contraintes à vérifier avant que le pas soit défini . . . . .	104
3.3	Représentation des calculs au cours de la simulation du simple support. . .	109
3.4	Représentation des calculs au cours de la simulation du double support. . .	112
3.5	Représentation de l'algorithme de calcul de $R_{2x}$ en double support lorsque le critère sur la norme des couples est considéré. . . . .	116
3.6	Représentation de l'algorithme de calcul de $R_{2x}$ en double support lorsque le critère énergétique est considéré. . . . .	119

3.7	Représentation du vecteur de paramètres d'origine $p_0$ ne vérifiant pas les contraintes de niveau 0, et sa projection $p_M$ sur la frontière du domaine de vérification des contraintes de niveau 0. . . . .	123
3.8	Séquence de configurations d'un mouvement de marche optimal. . . . .	146
3.9	Couples articulaires d'un mouvement de marche optimal. . . . .	146
3.10	Représentation du gabarit de couples ainsi que de l'évolution des couples en fonction des vitesses articulaires pour un mouvement de marche optimal.	147
3.11	Composantes normales des réactions du sol sur le robot en fonction du temps pour un mouvement de marche optimal. . . . .	147
3.12	Représentation de $-fR_{iz} - R_{ix}$ et $-fR_{iz} + R_{ix}$ pour un mouvement de marche optimal. Ces grandeurs doivent être négatives pour vérifier le non glissement donné par (3.48). . . . .	148
3.13	Evolution des positions articulaires $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ et $\delta_4$ en fonction du temps pour un mouvement de marche optimal. . . . .	148
3.14	Evolution de $\alpha$ en fonction du temps pour un mouvement de marche optimal.	149
3.15	Evolution de $f(\alpha)$ en phase de simple support pour un mouvement de marche optimal. . . . .	149
3.16	Evolution de la position du pied libre en phase de simple support pour un mouvement de marche optimal. . . . .	150
3.17	Couples articulaires d'un mouvement de marche optimal en tenant compte du frottement sec. . . . .	150
3.18	Evolution des vitesses articulaires $\dot{\delta}_1, \dot{\delta}_2, \dot{\delta}_3$ et $\dot{\delta}_4$ , pour le même mouvement optimal tenant compte des frottements secs, que pour les couples représentés figure 3.17. . . . .	151
3.19	Critère de couples $C_\Gamma$ en fonction de la vitesse de marche imposée, pour le cas d'optimisation du critère $C_\Gamma$ . Résultats obtenus en considérant seulement les frottements fluides. . . . .	152
3.20	Critère $W$ d'énergie mécanique consommée sur un pas en fonction de la vitesse de marche imposée, pour le cas d'optimisation du critère $C_\Gamma$ . Résultats obtenus en considérant seulement les frottements fluides. . . . .	153
3.21	Critère $C_{frott}$ d'énergie mécanique consommée par frottement sur un pas en fonction de la vitesse de marche imposée, pour le cas d'optimisation du critère $C_\Gamma$ . Résultats obtenus en considérant seulement les frottements fluides. . . . .	153
3.22	Critère $C_E$ d'énergie électrique consommée sur un pas en fonction de la vitesse de marche imposée, pour le cas d'optimisation du critère $C_\Gamma$ . Résultats obtenus en considérant seulement les frottements fluides. . . . .	154

3.23	Critère de couples $C_\Gamma$ en fonction de la vitesse de marche imposée, pour le cas d'optimisation du critère $C_\Gamma$ . Résultats obtenus en considérant les frottements fluides et les frottements secs. . . . .	154
3.24	Critère $W$ d'énergie mécanique consommée sur un pas en fonction de la vitesse de marche imposée, pour le cas d'optimisation du critère $C_\Gamma$ . Résultats obtenus en considérant les frottements fluides et les frottements secs. . . . .	155
3.25	Critère $C_{frott}$ d'énergie mécanique consommée par frottement sur un pas en fonction de la vitesse de marche imposée, pour le cas d'optimisation du critère $C_\Gamma$ . Résultats obtenus en considérant les frottements fluides et les frottements secs. . . . .	155
3.26	Critère $C_E$ d'énergie électrique consommée sur un pas en fonction de la vitesse de marche imposée, pour le cas d'optimisation du critère $C_\Gamma$ . Résultats obtenus en considérant les frottements fluides et les frottements secs. . . . .	156
4.1	Représentation en phase de double support de l'évolution de $\alpha$ pour le mouvement cyclique et pour un mouvement convergent démarrant avec une vitesse nulle . . . . .	172
4.2	Représentation de $\ddot{\alpha}_{min}$ et $\ddot{\alpha}_{max}$ en fonction de $\alpha$ et $\dot{\alpha}$ . . . . .	172
4.3	Evolution de l'accélération du mouvement cyclique $\ddot{\alpha}_c$ avec les contraintes $\ddot{\alpha}_{min}$ et $\ddot{\alpha}_{max}$ de couples maximum possibles, de non glissement et de non décollement, en fonction de $\alpha$ . . . . .	173
4.4	Représentation de la surface $S_d$ dans le plan de phase . . . . .	176
4.5	Représentation de $\dot{\alpha}_{iDS,max}(\dot{\alpha}_{fDS})$ , $\dot{\alpha}_{iDS,min}(\dot{\alpha}_{fDS})$ et $\dot{\alpha}_{iDS} = a(\dot{\alpha}_{fDS})$ avec les domaines d'attraction global et en un pas. . . . .	182
4.6	Représentation du plan de Poincaré au début du double support . . . . .	185
4.7	Représentation du plan de Poincaré en début du simple support . . . . .	185
4.8	Schéma bloc de commande du robot en simulation pour la phase de simple support. . . . .	188
4.9	Schéma bloc de commande du robot en simulation pour la phase de double support. . . . .	189
4.10	Convergence de la valeur absolue de la valeur propre dominante de la linéarisation de l'application de Poincaré, avec la méthode de la puissance. . . . .	198
4.11	Grphe des différentes valeurs propres de la linéarisation de l'application de Poincaré obtenues par différence finie selon la direction du vecteur dominant. . . . .	199
4.12	Application de Poincaré selon la direction du vecteur dominant autour du point fixe. . . . .	199
A.1	Couples nécessaires pour suivre le mouvement de référence en considérant le modèle sans approximation . . . . .	210

A.2	Erreurs absolues entre les couples nécessaires pour suivre le mouvement de référence en considérant le modèle sans approximation et avec approximation	210
A.3	Erreurs relatives entre les couples nécessaires pour suivre le mouvement de référence en considérant le modèle sans approximation et avec approximation	211
B.1	Configuration d'indétermination pour laquelle la formulation de la loi de glissement de BRACH [8] n'aurait donné qu'une solution. . . . .	216
B.2	Représentation de la zone de double support sans glissement en fonction de $\theta$ et $f$ dans le cas d'une indétermination. . . . .	216
B.3	Représentation de la zone de double support avec glissement du pied arrière en fonction de $\theta$ et $f$ dans le cas d'une indétermination. . . . .	217
D.1	Différents scénarios possibles pour avoir une phase de double support avec des pieds . . . . .	228
D.2	Notation de l'orientation des pieds pour les besoins de l'impact. . . . .	229
D.3	Propriétés des réactions du sol sur les pieds et des réactions des pieds sur les chevilles, compte tenu que la masse des pieds est nulle. . . . .	230
D.4	Notation des vitesses des extrémités des pieds $V_{e1}$ et $V_{e2}$ et des distances entre les chevilles et les extrémités des pieds $d_1$ et $d_2$ . . . . .	231
D.5	Comportements après impact dans le cas où les deux pieds sont à plat au sol au moment de l'impact, en fonction de $\theta$ et $f$ dans le cas où $\theta_1 = 135^\circ$ . . . . .	239
D.6	Comportement de non glissement et basculement du pied arrière dans le cas où les deux pieds sont à plat au sol au moment de l'impact, en fonction de $\theta$ , $\theta_1$ et $f$ . . . . .	240
D.7	Comportements avant impact dans le cas où le pied arrière est en basculement et le pied avant à plat au sol au moment de l'impact, en fonction de $\theta$ et $f$ dans le cas où $\theta_1 = 135^\circ$ . . . . .	241
D.8	Comportement de non glissement et basculement du pied arrière dans le cas où le pied arrière est en basculement et le pied avant à plat au sol au moment de l'impact. . . . .	242
D.9	Comportements avant impact dans le cas où le pied arrière était à plat et le pied avant sur le talon au moment de l'impact, en fonction de $\theta_2$ et $f$ pour $\theta_1 = 135^\circ$ . . . . .	243
D.10	Comportement de non glissement et basculement des deux pieds dans le cas où le pied arrière était à plat et le pied avant sur le talon au moment de l'impact. . . . .	244
D.11	Comportement de non glissement et basculement des deux pieds dans le cas où le pied arrière était à plat et le pied avant sur le talon au moment de l'impact, en fonction de $\theta_2$ et $f$ pour $\theta_1 = 118,35^\circ$ . . . . .	244

---

D.12 Comportements après impact dans le cas où le pied arrière était en basculement et le pied avant sur le talon au moment de l'impact, en fonction de $\theta_2$ et $f$ pour $\theta_1 = 135^\circ$ . . . . .	245
---	-----

# Liste des tableaux

1.1	Valeurs numériques des paramètres dynamiques et géométriques du prototype Rabbit . . . . .	32
2.1	Tableau récapitulatif du nombre de comportements possibles pour une phase de l'impact différentiel . . . . .	55
3.1	Comparaison de résultats d'optimisation. . . . .	157
A.1	Erreurs absolues et relatives moyennes commises pour chacun des couples lorsque l'on considère le modèle approximé . . . . .	211
D.1	Tableau récapitulatif des impacts possibles avec des pieds . . . . .	228



# Introduction générale

## Contexte de la thèse

Les robots marcheurs sont très étudiés de part le monde, mais sont encore loin de rivaliser avec la locomotion à roue. Et ce malgré l'avantage indéniable de pouvoir se déplacer sur des terrains très accidentés.

C'est que le problème de la marche est un problème très difficile, qui est loin d'être résolu. En effet la structure du robot change lorsque des points d'appuis apparaissent ou disparaissent, ces appuis sont soumis à des contraintes de non glissement et de non décollement, et enfin la marche fait intervenir des phénomènes d'impact au moment de la création de nouveaux contacts. Ces difficultés sont d'autant plus criantes que l'on souhaite étudier une marche rapide, pour laquelle l'ensemble de ces phénomènes et les dynamiques du système ne peuvent plus être négligés.

Les travaux les plus aboutis traitant de marche dynamique le sont pour des bipèdes, la complexité du système augmentant avec le nombre de jambes. Parmi les réalisations de bipèdes les plus abouties, nous pouvons citer les robots Honda, HRP2, Johnny, BIP. Cependant les algorithmes utilisés pour faire marcher des robots humanoïdes possédant autant de degrés de libertés sont nécessairement simplifiés pour tenir compte des contraintes de calcul en temps réel. Dans le problème de la vérification des contraintes de contact au sol, ils ne prennent en compte pour la plupart que la contrainte la plus restreignante de non basculement des pieds par la méthode du Zéro Moment Point. Et les méthodes de génération de mouvements en ligne ne garantissent donc pas la vérification de toutes les contraintes. De plus l'impact est rarement pris en compte. Difficile dans ces cas là d'obtenir des garanties de stabilité de la marche.

Afin d'atteindre de meilleures performances de la marche, voire de faire courir un bipède, il est nécessaire de développer des études de stabilité théoriques les plus générales possibles, permettant d'exploiter au maximum les possibilités d'un robot bipède. Et il est également nécessaire de tenir compte du phénomène d'impact. L'impossibilité de pouvoir résoudre complètement le problème de la stabilité de la marche, ainsi que les difficultés théoriques de la prise en compte de l'impact, laissent donc encore largement ouvert les études sur la stabilité et la marche des bipèdes.

Dans ce contexte, le projet Robea sur la "commande des robots bipèdes pour la marche

et la course” a été créé pour regrouper la communauté française travaillant sur les robots marcheurs autour d’un projet d’étude théorique de la marche. On pourra se reporter à l’article de synthèse sur le projet Rabbit CHEVALLEREAU *et al.* [18]. Ce projet a abouti à la fabrication du prototype Rabbit. Ce robot a été conçu de manière suffisamment simple pour que les approches théoriques soient possibles, et suffisamment proche d’un robot anthropomorphe afin de garder la problématique essentielle de la marche anthropomorphe. En particulier, seule une marche sagittale est considérée, et le robot ne possède pas de pieds. L’absence de pieds entraîne que le robot est sous-actionné en phase de simple support, mais cette approximation ne rajoute pas de problème artificiel puisqu’un robot avec des pieds est limité sur le couple qu’il peut appliquer à la cheville pour éviter le basculement des pieds, et est donc soumis à un problème similaire.

Cette thèse a eu pour but d’étudier l’introduction d’une phase de double support dans la marche du robot Rabbit tant de l’aspect énergétique des mouvements de marche possible que de leur stabilité. Cette étude est dans le prolongement des études avec une phase de double support instantanée déjà menées sur le prototype Rabbit. Elle constitue une étape intermédiaire vers le cas de la marche de l’homme pour laquelle il y a bien sur une phase de double support mais avec des pieds. Il était attendu que cette phase de double support permette une plus faible consommation d’énergie en permettant une meilleure répartition de l’apport de l’énergie au cours d’un pas, notamment car le double support nous semblait plus adapté pour fournir une énergie propulsive au bipède. Le présent manuscrit apporte la preuve de l’inverse dans le contexte d’un robot sans pieds, puisque les mouvements optimaux que nous avons obtenus avec double support consomment plus que des mouvements sans double support présentés dans la littérature. Au cours de cette étude d’une marche avec double support, nous avons été amenés à étudier l’impact, afin d’obtenir la phase de double support après cet impact. Nous avons constaté que le modèle d’impact ne prédisait pas de double support possible, bien qu’il nous semble que certains cas d’impact donnent effectivement des doubles supports. Nous avons ainsi remis en cause le modèle d’impact que nous utilisons, et nous avons été amenés à considérer une marche sans impact afin d’obtenir la phase de double support. Il a aussi été partiellement étudié l’impact avec des pieds, dont nous pensons que la présence doit faciliter l’obtention du double support. Il était aussi attendu que cette phase de double support permette d’augmenter la stabilité de la marche, celle-ci permettant d’effectuer des corrections sur la marche plus importante du fait de son sur-actionnement. Nous avons effectivement montré ce résultat dans le présent manuscrit.

## Organisation du mémoire

Le présent manuscrit présentera dans le chapitre 1 la modélisation du robot nécessaire à la génération de mouvement et à la mise au point de la commande du robot. Nous

présenterons ensuite une étude de l'impact pour obtenir la phase de double support dans le chapitre 2. Nous présenterons à cette occasion deux modèles d'impact dont un nous semble plus correct. Nous effectuerons également une étude des impacts avec des pieds. Dans le chapitre 3 sera présenté le travail de recherche de mouvements optimaux de marche. Nous présenterons une mise en forme rigoureuse du problème d'optimisation. En effet, nous avons tenu compte du fait que le critère et certaines contraintes nécessitent, pour être définies, que d'autres contraintes soient vérifiées. A notre connaissance, ces caractéristiques du problème d'optimisation n'ont jamais été prises en compte. Nous proposerons une modification d'une méthode d'optimisation classique afin de pouvoir résoudre le problème d'optimisation ainsi trouvé. Et nous présenterons également les calculs nécessaires à la détermination du gradient du problème d'optimisation, qu'il est intéressant de fournir au programme de résolution du problème d'optimisation afin d'en améliorer le processus. Enfin, le chapitre 4 présentera une première étude de stabilité des dynamiques de zéro présentant l'intérêt de la phase de double support. Une deuxième étude de stabilité, plus classique, sera également donnée afin de vérifier la stabilité de toutes les dynamiques.



# Chapitre 1

## Modélisation du robot bipède

### RABBIT

#### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>21</b>
<b>1.2</b>	<b>Présentation de Rabbit</b>	<b>23</b>
<b>1.3</b>	<b>Paramétrisation et notations utilisées</b>	<b>24</b>
<b>1.4</b>	<b>Modélisation en phase de simple support et double support</b>	<b>27</b>
1.4.1	Cas général	27
1.4.2	Méthode d'obtention du modèle général par la méthode de Lagrange	28
1.4.3	Cas simplifié en considérant un pied au sol	39
<b>1.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>42</b>

---

## 1.1 Introduction

Ce chapitre présente le robot bipède Rabbit, les paramètres de configuration utilisés, ainsi que les modèles du bipède considérés pour les phases de simple et double support. Ces modèles tiennent compte en particulier des frottements articulaires et de la barre de maintien latéral du bipède Rabbit. Ces modèles seront utilisés pour la génération de mouvements optimaux présentée chapitre 3 et pour la commande et l'étude de stabilité présentée au chapitre 4.

Le robot bipède Rabbit est un système multi-corps soumis à des contacts intermittents avec le sol. La modélisation du contact avec le sol de tels systèmes peut se faire avec un modèle continu en considérant une compliance au niveau du contact, ou lorsqu'on considère des solides rigides avec un modèle hybride constitué de phases continues séparées de phases impulsionnelles discrètes pour éviter l'interpénétration lors de l'apparition d'un nouveau contact. Dans la réalité, un contact est toujours compliant, on pourrait donc

considérer que la première méthode de modélisation est la mieux adaptée. Cependant pour simuler des systèmes très rigides qui ont des dynamiques très élevées, le modèle de contact compliant nécessite un pas de discrétisation temporelle très faible. Les temps de simulations obtenus étant alors rédhibitoires, deux solutions sont possibles : augmenter la compliance du sol pour réduire le temps de simulation ou faire l'approximation d'un contact très rigide par un contact infiniment rigide. Nous avons ici choisi d'utiliser un modèle en considérant les solides comme infiniment rigides, ce qui permet de simuler plus rapidement le robot bipède, et qui est une approximation d'autant meilleure que le système réel à modéliser est plus rigide. On pourra à ce propos se reporter à l'argumentation de BARAFF [5] et à l'article de PAOLI et SCHATZMAN [64] qui donne des exemples de simulations.

Au niveau d'un contact entre solides rigides les seuls efforts de contact possibles sont des efforts pour éviter la pénétration mais pas pour éviter le décollement. De tels contacts sont représentés par des contraintes unilatérales. Pour une présentation relativement complète de l'étude de tels systèmes, on pourra se reporter au chapitre 1 de la thèse de GÉNOT [28]. Les contraintes de contact avec frottement et glissement peuvent aussi être mises sous la forme de contraintes unilatérales, présenté dans PFEIFFER et GLOCKER [66] et repris dans la thèse de GÉNOT [28]. De nombreux travaux ont été menés et sont menés sur les systèmes dynamiques soumis à des contraintes unilatérales, aussi appelés systèmes non réguliers, voir par exemple le numéros spécial des *Philosophical Transactions : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* [1]. En particulier une problématique importante est de prouver l'existence et l'unicité des solutions de tels systèmes, et de trouver des lois de comportement de contact ayant de telles propriétés. L'existence et l'unicité des solutions de tels systèmes reposent sur l'existence et l'unicité des solutions au cours des phases continues et impulsionnelles. A ce jour, l'existence et l'unicité des solutions ont été prouvées pour des systèmes soumis à des contraintes unilatérales dans le cas de contacts sans frottements et si les forces extérieures et intérieures autres que celles dues à un contact unilatéral subies par le système sont analytiques. Une fonction est analytique si les séries de Taylor en tout point de cette fonction convergent bien vers cette fonction. En général cette condition portant sur les efforts subis par un système mécanique est effectivement vérifiée. L'article de synthèse de BALLARD [4] présente toutes les démonstrations et les références des autres contributions à ce propos. Dans le cas de contacts avec frottements et la loi de frottement d'Amontons-Coulomb, l'existence et l'unicité n'a été prouvée que dans des cas particuliers. En général l'existence et l'unicité des solutions de systèmes en présence de contact avec frottement d'Amontons-Coulomb ne semblent pas vrai. De nombreux auteurs ont constaté des inconsistances (pas de solution), voir le livre de BROGLIATO [10] pour une liste de tels travaux. Le paradoxe de Painlevé est un célèbre exemple d'inconsistance dans le cas d'une barre en glissement sur un sol horizontal. Cependant dans la thèse de GÉNOT [28] et l'article de GÉNOT et BROGLIATO [29]

il est prouvé que si on démarre en dehors de ce mode inconsistant, ce mode inconsistant est évitable par une phase impulsienne sans collision. Le cas de la barre en glissement sur le sol possède également des indéterminations, et le choix de la solution reste encore un problème ouvert. Pour obtenir l'existence et l'unicité des solutions d'un système soumis à des contacts avec frottement LÖTSTEDT [53], STEWART et TRINKLE [73] proposent des modifications de la loi de frottement d'Amontons-Coulomb, mais au détriment de la consistance physique de la loi de frottement. On pourra se référer à la thèse de GÉNOT [28] pour des commentaires plus détaillés à ce propos.

Pour notre part, bien que tenant compte des contraintes de non glissement, nous avons fait le choix de ne modéliser le bipède que pour les phases de simple support sans glissement et de double support sans glissement. En effet, nous considérons seulement des mouvements de marche sans glissement (voir la section 3), et cherchons également par la commande à éviter ces phases de glissement (voir la section 4.3.1). Nous nous contenterons donc de vérifier les contraintes de non glissement sur les réactions du sol. Cette restriction au cas sans glissement a de plus l'avantage d'entraîner existence et unicité des solutions. On pourra se reporter à la thèse de WIEBER [82] qui fait la même hypothèse. Nous nous sommes donc contenté des modèles du bipède avec un et deux pieds au sol, sans glissement. Et les commutations d'un modèle à l'autre se font lorsque le pied libre rentre en contact avec le sol ou lorsque la réaction normale d'un des deux pieds au sol s'annule. Pour détecter ces événements, nous utilisons une méthode d'intégration à pas variable qui permet de déterminer les instants de ces événements avec la précision machine. Cette méthode s'oppose à d'autres méthodes d'intégration à pas fixe pour des systèmes avec contraintes unilatérales, comme développées dans MOREAU [59] où l'on peut également trouver une introduction sur les différentes méthodes de simulation des systèmes sous contraintes unilatérales. En ce qui concerne l'impact, comme nous le verrons en section 2, pour respecter le non glissement nous avons recherché les conditions avant impact permettant d'obtenir une phase de double appuis sans glissement après impact.

Le présent chapitre commencera par une présentation du robot rabbit section 1.2 et des paramètres utilisés section 1.3. La section 1.4 présentera les modèles de simple support et double support, ainsi que comment ils ont été obtenus, en tenant compte en particulier de la barre de maintien latéral du robot et des frottements articulaires.

## 1.2 Présentation de Rabbit

Le robot Rabbit est un robot bipède anthropomorphe conçu pour l'étude théorique de la marche.

Le robot est considéré comme un robot plan permettant des marches dans le plan sagittal. Le robot réel a en fait un mouvement circulaire dont le rayon est supposé suffisamment grand pour permettre l'approximation à chaque instant d'un mouvement plan.

La figure 1.1 représente le bipède avec la structure mécanique constituée d'une barre permettant le mouvement circulaire. Le robot Rabbit est équipé de roulettes au niveau des pieds pour obtenir un degré de liberté dans le plan latéral afin que le bipède reste dans un plan tangent au cercle dont le rayon est égal à la longueur de la barre, malgré son mouvement de rotation autour du poteau central qui entraîne un déplacement du plan tangent.



FIG. 1.1 – Prototype Rabbit où l'on peut apercevoir la barre de maintien latéral.

Rabbit est constitué de 5 corps : 2 jambes constituées chacune d'une cuisse et d'un tibia et un tronc. Les articulations entre les corps sont rotoïdes. Il est actionné au niveau des articulations des hanches et des genoux par 4 moteurs. La figure 1.2 permet d'observer plus précisément la structure mécanique de rabbit. Il ne possède donc pas de pieds et n'est donc pas non plus actionné au niveau des chevilles. En phase d'appui sur un pied, le robot possède donc 5 degrés de liberté en rotation et 4 actionneurs et est donc sous-actionné.

### 1.3 Paramétrisation et notations utilisées

La figure 1.3 représente la notation des paramètres considérés pour le bipède.

Nous avons choisi de paramétrer le bipède avec l'angle absolu  $\alpha$  du tibia de la jambe 1 référencé par rapport à l'axe vertical, ainsi que les angles relatifs entre les corps  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$ ,  $\delta_4$ . Ces angles sont comptés positifs dans le sens trigonométrique.  $\delta_3$  a été choisi car il est directement lié à l'écartement entre les jambes et permettra par la suite d'écrire la fermeture de la chaîne cinématique en double support sans faire intervenir l'orientation



FIG. 1.2 – Prototype Rabbit.

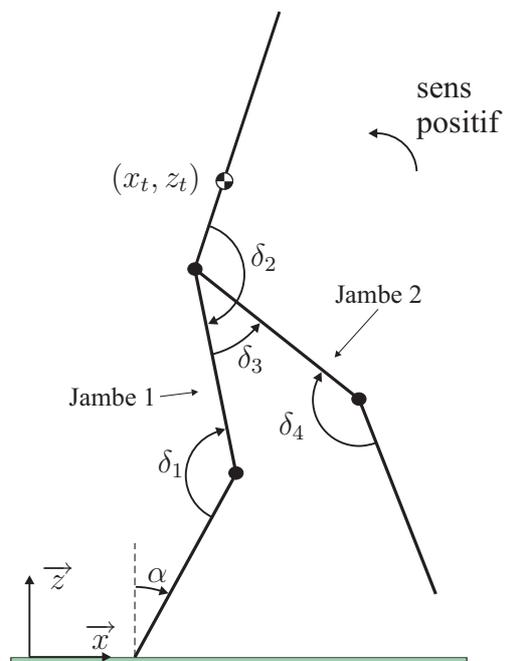


FIG. 1.3 – Schéma du bipède avec les paramètres de position.

relative du tronc  $\delta_2$ . L'ensemble de ces angles relatifs et de l'angle absolu constitue le vecteur  $q = [\alpha \delta_1 \delta_2 \delta_3 \delta_4]^T$  qui permet de définir la configuration du bipède.

$X_t = [x_t, z_t]^T$  est la position du centre de gravité du tronc où  $x_t$  est la composante selon l'axe  $\vec{x}$  et  $z_t$  est la composante selon l'axe  $\vec{z}$ . On note ainsi le vecteur  $X = [q^T x_t z_t]^T$  qui permet de définir la position et la configuration du robot dans l'espace.

$X_1 = [x_1 z_1]^T$  est la position de l'extrémité du pied 1 et  $X_2 = [x_2 z_2]^T$  est la position de l'extrémité du pied 2.

La figure 1.4 représente la notation des couples articulaires et des réactions du sol.

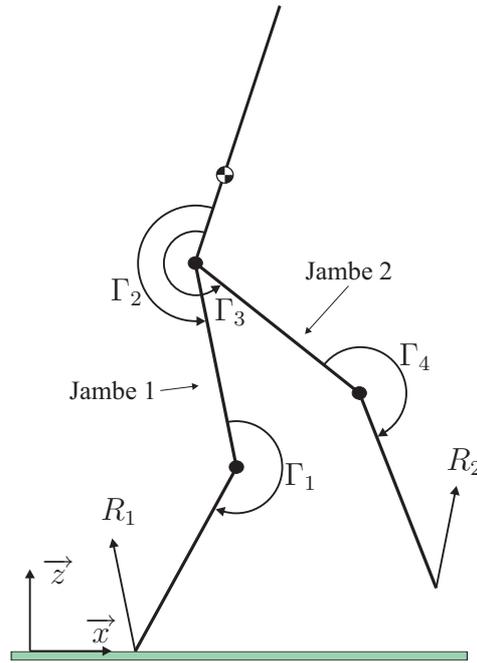


FIG. 1.4 – Schéma du bipède représentant les couples et les réactions du sol.

$\Gamma_1$  est le couple exercé par la cuisse sur le tibia selon l'axe de rotation du genou de la jambe 1,  $\Gamma_2$  est le couple exercé par le tronc sur la cuisse de la jambe 1 selon l'axe de rotation de la hanche,  $\Gamma_3$  est le couple exercé par le tronc sur la cuisse de la jambe 2 selon l'axe de rotation de la hanche,  $\Gamma_4$  est le couple exercé par la cuisse sur le tibia de la jambe 2 selon l'axe de rotation du genou. Nous notons le vecteur  $\Gamma = [\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4]^T$  le vecteur des couples articulaires. Les couples sont positifs dans le sens des flèches de la figure 1.4. La numérotation des moteurs est choisie identique à celle des couples. Nous numérotions les moteurs car nous tiendrons compte par la suite des inerties des moteurs dans le modèle du bipède.

$R_1 = [R_{1x} R_{1z}]$  est la réaction du sol sur l'extrémité de la jambe 1 et  $R_2 = [R_{2x} R_{2z}]$  est la réaction du sol sur l'extrémité de la jambe 2. Les indices  $x$  et  $z$  indiquent les composantes respectivement selon l'axe  $\vec{x}$  et selon l'axe  $\vec{z}$ .

## 1.4 Modélisation en phase de simple support et double support

### 1.4.1 Cas général

Pour la modélisation des robots avec le formalisme de Lagrange ou de Newton-Euler, on pourra se référer au livre de KHALIL et DOMBRE [46]. Nous obtenons ici un modèle légèrement différent que celui obtenu dans le livre de KHALIL et DOMBRE [46] car nous n'avons pas utilisé la paramétrisation des robots de Khalil-Kleifinger. Nous avons pu utiliser notre propre paramétrisation du robot, car le robot Rabbit est suffisamment simple pour que l'on ne soit pas obligé d'utiliser une paramétrisation systématique. Pour la modélisation des robots marcheurs on pourra également se référer aux thèses de ROUSSEL [68], MURARO [62], KERAMANE [45], PERRIN [65], CABODEVILA [12], WESTERVELT [79], et CHESSE [17]. Il est aussi possible de mettre un système soumis à des contraintes unilatérales sous forme d'un LCP (Linear Complementarity Problem) ou d'un problème d'optimisation quadratique avec le principe de Gauss de moindre déviation, voir les thèses de WIEBER [82], GÉNOT [28], et le livre de PFEIFFER et GLOCKER [66].

En considérant tous les degrés de liberté du vecteur  $X$ , le modèle dynamique du robot bipède obtenu par la méthode de Lagrange a la forme suivante.

$$A(q)\ddot{X} + C(q, \dot{q}) + G(X) = D_\Gamma \Gamma + D_1(q)^T R_1 + D_2(q)^T R_2 \quad (1.1)$$

Où :

- $A(7 \times 7)$  est la matrice d'inertie,
- $C(7 \times 1)$  correspond aux effets de Coriolis et centrifuges,
- $G(7 \times 1)$  correspond aux effets de gravité,
- $D_\Gamma(7 \times 1)$  traduit les effets des couples. Elle est composée de 0 et de  $\pm 1$ ,
- $D_1(2 \times 7)$  et  $D_2(2 \times 7)$  traduisent les effets des réactions du sol. Nous verrons section 1.4.2 que ces matrices sont les matrices jacobiennes entre la vitesse de l'extrémité des jambes et les vitesses articulaires. Ces matrices sont donc aussi présentes dans les contraintes de position des pieds en vitesse et accélération (1.4), (1.5), (1.6) et (1.7).

Il est à remarquer que la matrice d'inertie  $A(q)$  ne dépend pas de l'orientation absolue du bipède donnée par  $\alpha$ , et ne dépend donc que de  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$  et  $\delta_4$ .

Ce modèle n'est pas complet sans tenir compte des contraintes de contact des pieds au sol. La contrainte de position sur le pied de la jambe 1 est définie équation (1.2).

$$X_1(X) = 0 \quad (1.2)$$

En considérant que la position du pied 1 est nulle, l'équation (1.2) signifie que le pied

1 est considéré comme l'origine. La contrainte de contact du pied de la jambe 2 au sol est définie comme suit.

$$X_2(X) = \begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

$d$  est la position relative du pied 2 par rapport au pied 1 selon l'axe  $\vec{x}$ . Elle signifie également que le pied 2 est à la même hauteur que le pied 1.

L'expression des positions des pieds  $X_1(X)$  et  $X_2(X)$  sont données section 1.4.1. Ces contraintes (1.2) et (1.3) sur la position des pieds induisent également des contraintes sur les vitesses (1.4) pour le pied 1 et (1.5) pour le pied 2 et sur les accélérations (1.6) pour le pied 1 et (1.7) pour le pied 2. Ces équations sont obtenues par dérivation des contraintes en position (1.2) et (1.3).

$$D_1(q)\dot{X} = 0 \quad (1.4)$$

$$D_2(q)\dot{X} = 0 \quad (1.5)$$

$$D_1(q)\ddot{X} + H_1(q, \dot{q}) = 0 \quad (1.6)$$

$$D_2(q)\ddot{X} + H_2(q, \dot{q}) = 0 \quad (1.7)$$

Dans le cas d'une phase de simple support sur la jambe 1, le modèle général sera donné par l'équation (1.1) en considérant  $R_2 = 0$  et par la contrainte en accélération sur le pied 1 (1.6). On ne considère sur le pied 1 que la contrainte sur l'accélération (1.6) car dans le cas de la simulation de ce système, seules (1.1) et (1.6) constituent le système d'équations différentielles à résoudre. Et les contraintes sur le pied 1 en position (1.2) et en vitesse (1.4) constituent alors des conditions initiales.

Le modèle pour une phase de simple support sur la jambe 2 s'écrirait de manière similaire en inversant les numérotations de jambes, mais nous avons toujours considéré par la suite des simples supports sur la jambe 1.

Dans le cas d'un double support, le modèle général sera donné par l'équation (1.1) et par les contraintes de contact en accélération pour les deux pieds (1.6) et (1.7).

## 1.4.2 Méthode d'obtention du modèle général par la méthode de Lagrange

Nous pouvons nous référer au livre de LANDAU et LIFCHITZ [47] ou à LE HOUEDÉC [49] et à tout autre livre de mécanique générale pour la méthode générale d'obtention d'équations de la dynamique par le formalisme de Lagrange et à KHALIL et DOMBRE [46] pour le cas de robots.

Nous commençons par définir les dérivées partielles du premier et du second ordre par rapport à des vecteurs, qui vont par la suite nous permettre d'écrire plus simplement des expressions. Soit  $u \in \mathbb{R}^n$  un vecteur, et  $f(u) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  une fonction de  $u$ . Nous notons par (1.8) la dérivation d'une fonction scalaire par rapport à un vecteur.

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \left[ \frac{\partial f}{\partial u_j} \right] \quad (1.8)$$

où  $j = 1, \dots, n$  est un indice des colonnes. Cette notation signifie que la dérivation d'un scalaire par un vecteur est un vecteur horizontal. Cette notation donne que le gradient de  $f(u)$  est une fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^{1 \times n}$ , soit  $\frac{\partial f}{\partial u}(u) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^{1 \times n}$ . Nous avons choisi cette convention plutôt que d'obtenir un vecteur vertical, car elle s'avère plus pratique pour écrire la dérivation composée par des vecteurs. Nous utiliserons ces dérivations composées dans le chapitre 3.

Soit également  $v \in \mathbb{R}^m$  un autre vecteur, et le vecteur de fonctions  $g(v) : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^p$  où  $g(v) = [g_i(v)]$   $i = 1, \dots, p$ . Nous notons alors la dérivation d'un vecteur de fonctions par un autre vecteur avec (1.9)

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \left[ \frac{\partial g_i}{\partial v_j} \right] \quad (1.9)$$

où  $i = 1, \dots, p$  est l'indice des lignes et  $j = 1, \dots, m$  l'indice des colonnes. Que le vecteur de fonctions de départ soit vertical ou horizontal, c'est-à-dire que  $g(v) : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^{p \times 1}$  ou  $g(v) : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^{1 \times p}$ , le gradient de ce vecteur sera le même. Ainsi le gradient d'un vecteur de fonctions est une fonction de  $\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^{p \times m}$ , soit  $\frac{\partial g}{\partial v}(v) : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^{p \times m}$ .

Des deux notations précédentes découle la notation de la dérivée partielle du second ordre par rapport à des vecteurs. Soit  $f(u, v) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$  une fonction de  $u$  et  $v$ , la notation de la dérivée par rapport à  $u$  puis  $v$  est donnée par (1.10).

$$\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right) = \left[ \frac{\partial f}{\partial u_i v_j} \right] \quad (1.10)$$

où  $i = 1, \dots, n$  est l'indice des lignes et  $j = 1, \dots, m$  l'indice des colonnes. Nous avons donc que la dérivée de  $f(u, v)$  par rapport à  $u$  puis  $v$  est une fonction de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^{n \times m}$ , soit  $\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^{n \times m}$ .

Cette notation de la dérivation vectorielle s'avère également pratique dans la mesure où le modèle est obtenu de manière automatique avec la boîte à outils *symbolic* de Matlab, et où la dérivation vectorielle est possible avec la fonction *jacobian* de cette boîte à outils.

En utilisant les notations que nous venons d'introduire, la formule de Lagrange pour déterminer les équations d'un système dynamique est donnée par l'équation (1.11).

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{X}} \right)^T - \left( \frac{\partial E_c}{\partial X} \right)^T + \left( \frac{\partial E_p}{\partial X} \right)^T = \left( \frac{\partial \delta W_\Gamma}{\partial \delta X} \right)^T + \left( \frac{\partial \delta W_{R_1}}{\partial \delta X} \right)^T + \left( \frac{\partial \delta W_{R_2}}{\partial \delta X} \right)^T \quad (1.11)$$

Où :

- l'exposant  $T$  signifie la transposée,
- $E_c$  est l'énergie cinétique totale du bipède,
- $E_p$  est l'énergie potentielle du bipède due à la gravité,
- $\delta W_\Gamma$  est le travail virtuel des couples  $\Gamma$ ,
- $\delta W_{R_1}$  et  $\delta W_{R_2}$  sont les travaux virtuels des efforts extérieurs  $R_1$  sur l'extrémité de la jambe 1 et  $R_2$  sur l'extrémité de la jambe 2,
- $\delta X$  est le vecteur de déplacements virtuels associé au vecteur  $X$  des positions généralisées.

Nous constatons que la notation de la dérivation d'une fonction scalaire par un vecteur que nous avons définie introduit ici des transposées pour obtenir des vecteurs verticaux. Il aurait donc été plus simple ici d'introduire que la dérivation d'une fonction scalaire par un vecteur donne un vecteur de fonctions vertical. Cependant, comme nous le verrons dans le chapitre 3, la notation que nous avons utilisée sera plus pratique.

Les termes de l'équation (1.1) obtenus à partir de l'équation de Lagrange (1.11) sont donnés par (1.12).

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \frac{\partial^2 E_c}{\partial \dot{X}^2} \\ C = \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{X}} \right) \dot{X} - \frac{\partial E_c}{\partial X} \\ G = \frac{\partial E_p}{\partial X} \\ D_\Gamma = \frac{\partial}{\partial \Gamma} \left( \frac{\partial \delta W_\Gamma}{\partial \delta X} \right) \\ D_1^T = \frac{\partial}{\partial R_1} \left( \frac{\partial \delta W_{R_1}}{\partial \delta X} \right) \\ D_2^T = \frac{\partial}{\partial R_2} \left( \frac{\partial \delta W_{R_2}}{\partial \delta X} \right) \end{array} \right. \quad (1.12)$$

Les expressions des matrices  $D_\Gamma$ ,  $D_1$  et  $D_2$  s'obtiennent par dérivée partielle par rapport à  $\Gamma$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  des travaux virtuels  $\delta W_\Gamma$ ,  $\delta W_{R_1}$  et  $\delta W_{R_2}$  car ceux-ci sont des fonctions linéaires de  $\Gamma$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ , comme nous le verrons dans la suite.

Nous détaillons maintenant le calcul de  $E_c$ ,  $E_p$ ,  $\delta W_\Gamma$ ,  $\delta W_{R_1}$  et  $\delta W_{R_2}$ , après avoir présenté les paramètres géométriques et dynamiques nécessaires, ainsi que les positions des centres de gravité des corps et des extrémités des jambes.

## 1.4.2.1 Paramètres géométriques et dynamiques

Nous présentons figure 1.5 la numérotation des corps ainsi que les longueurs des corps, et figure 1.6 la position des centres de gravité.

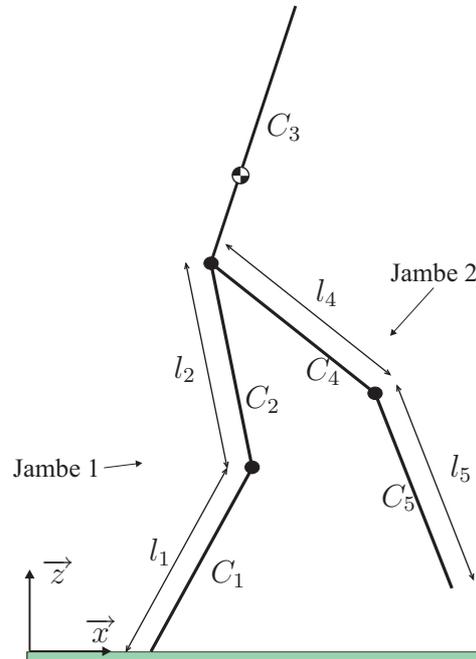


FIG. 1.5 – Schéma du bipède avec la numérotation des corps et la longueur des corps.

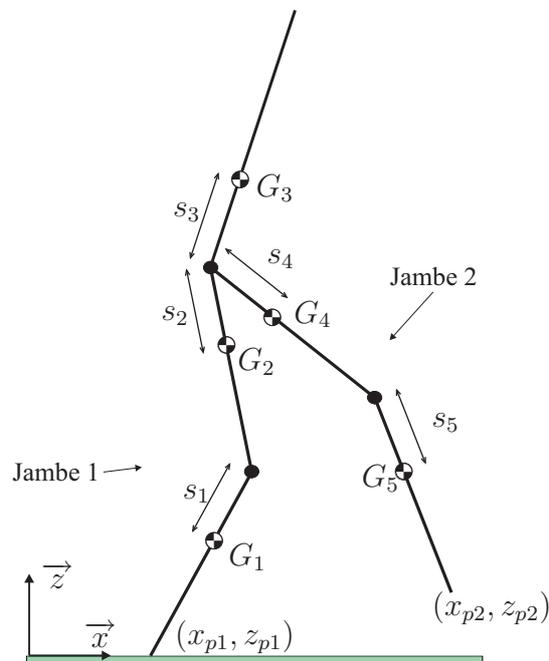


FIG. 1.6 – Schéma du bipède avec les positions des centres de gravité et des extrémités des jambes.

Compte tenu que le robot a un mouvement plan, les paramètres inertiels nécessaires de chaque corps sont les suivant :

- $m_i$  est la masse du corps  $C_i$  incluant la masse d'un moteur le cas échéant. C'est-à-dire que la masse du tronc inclut la masse des moteurs des hanches et la masse des cuisses inclut la masse des moteurs des genoux correspondant.
- $I_{yi}$  est le moment d'inertie du corps  $C_i$  autour de son centre de gravité  $G_i$  selon l'axe  $\vec{y}$ .

Pour les moteurs, seuls les moments d'inertie  $I_{mi}$  de chaque moteur  $i$  selon l'axe  $\vec{y}$  sont nécessaires.

Le tableau 1.1 récapitule les valeurs numériques de l'ensemble de ces paramètres pour le prototype Rabbit.

grandeur	valeur numérique
$l_1, l_2, l_4, l_5$	0.4 m
$s_1, s_5$	0.127 m
$s_2, s_4$	0.163 m
$s_3$	0.20025 m
$m_1, m_5$	3.2 Kg
$m_2, m_4$	6.8 Kg
$m_3$	16 Kg
$I_{y1}, I_{y5}$	0.1 Kg.m <sup>2</sup>
$I_{y2}, I_{y4}$	0.25 Kg.m <sup>2</sup>
$I_{y3}$	2.22 Kg.m <sup>2</sup>
$I_{m1}, I_{m2}, I_{m3}, I_{m4}$	0.000332 Kg.m <sup>2</sup>
$L_b$	3 m
$l_c$	0.5 m
$M_b$	15 Kg
$M_c$	7.5 Kg
$\Gamma_{s1}, \Gamma_{s4}$	5.48 N.m
$\Gamma_{s2}, \Gamma_{s3}$	16.5 N.m
$f_{v1}, f_{v4}$	8.84 N.m/(rad.s <sup>-1</sup> )
$f_{v2}, f_{v3}$	15.0 N.m/(rad.s <sup>-1</sup> )

TAB. 1.1 – Valeurs numériques des paramètres dynamiques et géométriques du prototype Rabbit

#### 1.4.2.2 Positions des centres de gravité et des extrémités des jambes

Pour faire le calcul des coordonnées cartésiennes des centres de gravité des corps et de l'extrémité des jambes, il est plus pratique d'utiliser les orientations absolues des corps. Ces orientations absolues des corps sont présentées en figure 1.7. Les relations entre ces angles absolus et les angles relatifs que nous utilisons présentés en section 1.3 sont données par les équations (1.13).

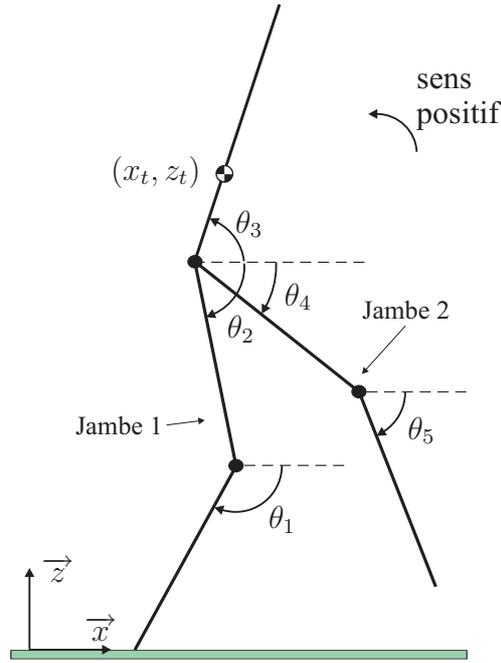


FIG. 1.7 – Schéma du bipède représentant les angles absolus.

$$\begin{cases} \theta_1 = \alpha - \frac{\pi}{2} \\ \theta_2 = \alpha + \delta_1 + \frac{\pi}{2} \\ \theta_3 = \alpha + \delta_1 - \delta_2 + \frac{\pi}{2} \\ \theta_4 = \alpha + \delta_1 + \delta_3 + \frac{\pi}{2} \\ \theta_5 = \alpha + \delta_1 + \delta_3 - \delta_4 - \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (1.13)$$

Les positions des centres de gravité et des extrémités des pieds sont représentées figure 1.6. Les positions des centres de gravité sont données par les expressions (1.14).

$$\begin{cases} x_{G1} = x_t - s_3 \cos(\theta_3) + l_2 \cos(\theta_2) + s_1 \cos(\theta_1) \\ z_{G1} = y_t - s_3 \sin(\theta_3) + l_2 \sin(\theta_2) + s_1 \sin(\theta_1) \\ x_{G2} = x_t - s_3 \cos(\theta_3) + s_2 \cos(\theta_2) \\ z_{G2} = y_t - s_3 \sin(\theta_3) + s_2 \sin(\theta_2) \\ x_{G3} = x_t \\ z_{G3} = y_t \\ x_{G4} = x_t - s_3 \cos(\theta_3) + s_4 \cos(\theta_4) \\ z_{G4} = y_t - s_3 \sin(\theta_3) + s_4 \sin(\theta_4) \\ x_{G5} = x_t - s_3 \cos(\theta_3) + l_4 \cos(\theta_4) + s_5 \cos(\theta_5) \\ z_{G5} = y_t - s_3 \sin(\theta_3) + l_4 \sin(\theta_4) + s_5 \sin(\theta_5) \end{cases} \quad (1.14)$$

Où :

- $x_{G_i}$  est la position du centre de gravité  $G_i$  du corps  $C_i$  selon l'axe  $\vec{x}$ .
- $z_{G_i}$  est la position du centre de gravité  $G_i$  du corps  $C_i$  selon l'axe  $\vec{z}$ .

Les positions des extrémités des jambes sont données par les expressions (1.15).

$$\begin{cases} x_{p1} = x_t - s_3 \cos(\theta_3) + l_2 \cos(\theta_2) + l_1 \cos(\theta_1) \\ z_{p1} = y_t - s_3 \sin(\theta_3) + l_2 \sin(\theta_2) + l_1 \sin(\theta_1) \\ x_{p2} = x_t - s_3 \cos(\theta_3) + l_4 \cos(\theta_4) + l_5 \cos(\theta_5) \\ z_{p2} = y_t - s_3 \sin(\theta_3) + l_4 \sin(\theta_4) + l_5 \sin(\theta_5) \end{cases} \quad (1.15)$$

Où :

- $x_{pi}$  est la position du pied  $i$  selon l'axe  $\vec{x}$ .
- $z_{pi}$  est la position du pied  $i$  selon l'axe  $\vec{z}$ .

### 1.4.2.3 Énergie cinétique, énergie potentielle et travaux des efforts

Pour le calcul de l'énergie cinétique, nous tenons compte à la fois des 5 corps du robot, des inerties des moteurs et de la barre reliée à la hanche.

L'énergie cinétique d'un corps  $C_i$  est donc donnée par la relation (1.16).

$$E_{ci} = \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_{Gi}^2 + \dot{z}_{Gi}^2) + \frac{1}{2} I_{yi} \dot{\theta}_i^2 \quad (1.16)$$

$\dot{x}_{Gi}$ ,  $\dot{z}_{Gi}$  sont les composantes selon les axes  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  de la vitesse du centre de gravité du corps  $C_i$ .

Les vitesses des centres de gravité des corps se déduisent par dérivation des positions des centres de gravité (1.14).

Les énergies cinétiques en rotation des moteurs sont données par les relations (1.17).

$$\begin{cases} E_{cm1} = \frac{1}{2} I_{m1} (\dot{\theta}_2 - N \dot{\delta}_1)^2 \\ E_{cm2} = \frac{1}{2} I_{m2} (\dot{\theta}_3 + N \dot{\delta}_2)^2 \\ E_{cm3} = \frac{1}{2} I_{m3} (\dot{\theta}_3 + N (\dot{\delta}_2 + \dot{\delta}_3))^2 \\ E_{cm4} = \frac{1}{2} I_{m4} (\dot{\theta}_4 - N \dot{\delta}_4)^2 \end{cases} \quad (1.17)$$

Où :

- $E_{cmi}$  est l'énergie cinétique en rotation du moteur  $i$
- $N$  est le rapport de réduction entre la sortie du moteur et l'articulation. Pour le prototype Rabbit,  $N = 50$ .

La vitesse absolue de rotation d'un moteur est la somme de la vitesse de rotation absolue du corps auquel est lié le moteur et de  $\pm N$  fois la vitesse relative du corps actionné en rotation par rapport au corps auquel est lié le moteur. Le signe – apparaît si le sens de rotation en sortie du réducteur est opposé au sens de rotation en sortie du moteur, c'est-à-dire que le sens de rotation relatif du corps actionné est opposé au sens de rotation du moteur. Dans le cas du prototype Rabbit après étude des réducteurs et du système de transmission, il s'est avéré que le sens de rotation au niveau des articulations était le même que celui des moteurs. Le signe négatif qui apparaît pour les énergies cinétiques des

moteurs 1 et 4 est du au fait que les angles relatifs des genoux définissent l'orientation de la cuisse par rapport au tibia et non l'inverse.

Souvent dans les effets inertiels dus aux moteurs, la vitesse absolue est négligée devant  $N$  fois la vitesse relative, comme proposé dans KHALIL et DOMBRE [46]. Nous avons étudié cette approximation dans le cas d'une marche obtenue par optimisation. Pour ce faire nous avons comparé les couples calculés à partir du modèle inverse dans le cas de l'approximation et dans le cas sans l'approximation. Les résultats de cette étude sont donnés en annexe A. Nous avons constaté que l'erreur absolue est de l'ordre de 0.2 N.m, et l'erreur relative de l'ordre de 3 %. Bien que cette approximation soit bonne, l'erreur n'est donc pas complètement négligeable. Nous avons donc choisi de ne pas faire cette approximation.

L'énergie potentielle due à la gravité est donnée par la formule (1.18).

$$\begin{cases} E_p = \sum_{i=1}^5 E_{pi} \\ E_{pi} = m_i g z_{Gi} \end{cases} \quad (1.18)$$

Où :

- $E_{pi}$  est l'énergie potentielle due au corps  $i$ ,
- $g$  est l'accélération de la gravité.

Compte tenu des conventions des coordonnées articulaires présentées figure 1.3 et des conventions de couples présentées figure 1.4 le travail des couples est donné par la formule (1.19).

$$\delta W_\Gamma = \delta\delta_1\Gamma_1 - \delta\delta_2\Gamma_2 - (\delta\delta_3 + \delta\delta_2)\Gamma_3 + \delta\delta_4\Gamma_4 \quad (1.19)$$

$\delta\delta_i$  sont les déplacements virtuels articulaires correspondant aux angles  $\delta_i$ .

Pour la prise en compte des frottements articulaires en considérant des frottements secs et fluides, on rajoute également le travail virtuel des forces de frottement comme donné formule (1.20).

$$\begin{aligned} \delta W_{frott} = & -\delta\delta_1(\Gamma_{s1} \text{signe}(\dot{\delta}_1) + f_{v1}\dot{\delta}_1) - \delta\delta_2(\Gamma_{s2} \text{signe}(\dot{\delta}_2) + f_{v2}\dot{\delta}_2) \\ & -(\delta\delta_3 + \delta\delta_2)(\Gamma_{s3} \text{signe}(\dot{\delta}_3 + \dot{\delta}_2) + f_{v3}(\dot{\delta}_3 + \dot{\delta}_2)) \\ & -\delta\delta_4(\Gamma_{s4} \text{signe}(\dot{\delta}_4) + f_{v4}\dot{\delta}_4) \end{aligned} \quad (1.20)$$

Où :

- $\Gamma_{si}$  est le frottement sec pour l'articulation du moteur  $i$
- $f_{vi}$  est le coefficient de frottement fluide de l'articulation du moteur  $i$

Les valeurs identifiées de ces paramètres de frottement sont données dans le tableau 1.1. Il est possible de tenir compte de ces frottements articulaires dans le modèle dynamique

(1.1) sans rajouter un terme mais en distinguant les couples disponibles au niveau des articulations du robot avant et après la prise en compte des frottements. Nous donnons figure 1.8, la représentation que nous avons considérée pour les frottements articulaires. Il est bien évident qu'elle n'a pas de réalité physique puisque l'essentiel des frottements a lieu dans le réducteur, alors que nous rapportons les frottements après le rapport de réduction. Pour une modélisation plus précise de la chaîne d'actionnement, on pourra se reporter à la thèse de CABODEVILA [12]. Les relations entre les couples après la prise en compte des frottements  $\Gamma$  en fonction des couples avant la prise en compte des frottements  $\Gamma^*$  sont données equation (1.21). Les notions d'avant et d'après se font en considérant que le sens de la chaîne d'actionnement va du moteur vers le corps actionné.

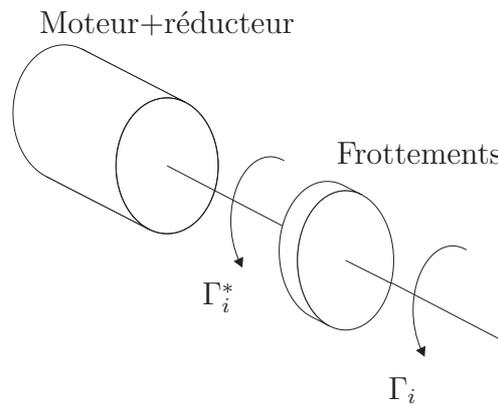


FIG. 1.8 – Schéma de la chaîne d'actionnement.

$$\Gamma = \Gamma^* - \Gamma_s \text{sign}(D_\Gamma^T \dot{q}) - F_v D_\Gamma^T \dot{q}$$

$$\Gamma_s = \begin{bmatrix} \Gamma_{s1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_{s2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_{s3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma_{s4} \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

$$F_v = \begin{bmatrix} f_{v1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_{v2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_{v3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_{v4} \end{bmatrix}$$

Où  $\text{sign}()$  est la fonction signe, qui appliquée à un vecteur donne le vecteur du signe de chaque élément.

Le travail des réactions du sol sur le bipède est donné par la formule (1.22).

$$\delta W_{R_i} = \delta V_i^T R_i \quad (1.22)$$

$\delta V_i$  est le vecteur de déplacements virtuels de l'extrémité de la jambe  $i$ , qui est donné en fonction de  $\delta X$  par (1.23).

$$\delta V_i = D_i \delta X \quad (1.23)$$

Le déplacement virtuel du pied  $i$  donné par l'équation (1.23) est déduit par dérivation des expressions de la position des pieds données par (1.15).

On obtient donc bien que  $\frac{\partial}{\partial R_i} \left( \frac{\partial \delta W_{R_i}}{\partial \delta X} \right) = D_i^T$ .

#### 1.4.2.4 Prise en compte de la barre de maintien

La prise en compte de l'effet dynamique de la barre peut être simple si sa longueur et la masse d'un contrepoids sont réglés de tel sorte que leur effet soit équivalent à l'ajout d'une masse ponctuelle sur le tronc au niveau du point d'attache de la barre avec le tronc. Ce réglage de la barre est intéressant car il revient à étudier une marche avec une charge transportée au niveau du tronc.

Compte tenu que la barre est liée au tronc au niveau des hanches, cet ajout va se traduire par une modification de masse, du moment d'inertie, et de la position du centre de gravité du tronc comme donné par les formules (1.24). Ainsi il est possible de tenir compte simplement de l'effet de la barre en gardant la structure du modèle sans la prise en compte de la barre.

$$\begin{cases} m_3^* = m_3 + m_{eqbarre} \\ s_3^* = s_3 \frac{m_3}{m_3^*} \\ I_{y3}^* = I_{y3} + m_3 s_3^2 - m_3^* s_3^{*2} \end{cases} \quad (1.24)$$

Où :

- $m_3^*$  est la nouvelle masse du tronc tenant compte de la barre,
- $s_3^*$  est la nouvelle distance du centre de masse du tronc en tenant compte de la barre,
- $I_{y3}^*$  est le nouveau moment d'inertie du tronc autour du nouveau centre de masse.

Les caractéristiques géométriques de la barre sont données figure 1.9. L'ensemble est également caractérisé par la masse de la barre  $M_b$  et la masse du contrepoids  $M_c$ .

Nous présentons maintenant la méthode d'obtention de la masse équivalente au niveau de la hanche  $m_{eqbarre}$  de la barre et du contrepoids. Nous donnons également la relation entre la masse du contrepoids  $M_c$  et la position de la barre définie par  $l_c$ , tel que l'effet de la barre et du contrepoids soit équivalent à une masse ponctuelle appliquée au niveau du tronc. Cette condition est remplie si les effets inertiels et les effets dus à la gravité s'expriment comme s'il s'agissait des effets d'une masse ponctuelle au niveau du point d'attache de la barre avec le tronc. Nous commençons donc par donner l'énergie cinétique due à la barre et à la masse ponctuelle (1.25). Cette énergie est calculée en considérant que la barre ne subit que de petits déplacements autour d'une position horizontale.

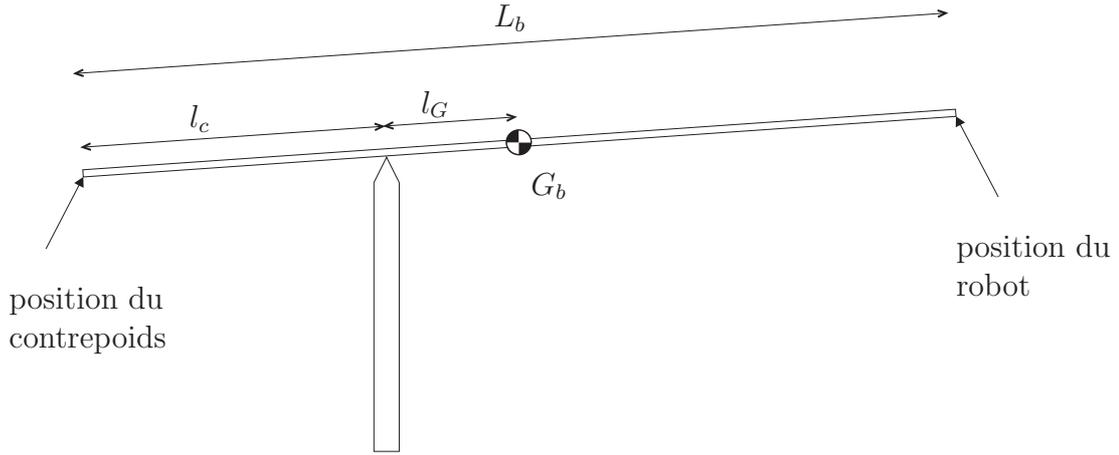


FIG. 1.9 – Notations des longueurs pour la barre.  $L_b$  est la longueur totale de la barre,  $l_c$  est la distance entre le contrepoids et l'axe de rotation de la barre,  $G_b$  est le centre de gravité de la barre et  $l_G$  est la distance entre  $G_b$  et l'axe de rotation de la barre.

$$\begin{cases} E_{c \text{ barre}} = \frac{1}{2} M_b \left( \frac{l_G}{L_b - l_c} \right)^2 (\dot{x}_b^2 + \dot{z}_b^2) + \frac{1}{2} I_b \dot{\theta}_b^2 \\ E_{c \text{ contrepoids}} = \frac{1}{2} M_c \left( \frac{l_c}{L_b - l_c} \right)^2 (\dot{x}_b^2 + \dot{z}_b^2) \end{cases} \quad (1.25)$$

Où :

- $\dot{x}_b$  et  $\dot{z}_b$  sont les composantes de la vitesse de l'extrémité de la barre au niveau du point d'attache avec le robot, exprimées dans le repère  $(\vec{x}, \vec{z})$  présenté figure 1.3,
- $I_b$  est le moment d'inertie de la barre autour de son centre de gravité et s'exprime en fonction de la longueur de la barre et sa masse  $I_b = \frac{1}{12} M_b L_b^2$ ,
- $\dot{\theta}_b$  est la vitesse de rotation de la barre autour du poteau central qui s'exprime en fonction de la vitesse de l'extrémité de la barre  $\dot{\theta}_b = \frac{\sqrt{\dot{x}_b^2 + \dot{z}_b^2}}{L_b - l_c}$ .

L'énergie potentielle due à la barre et au contrepoids est donnée par (1.26).

$$\begin{cases} E_{p \text{ barre}} = M_b g \frac{l_G}{L_b - l_c} z_b \\ E_{p \text{ contrepoids}} = -M_c g \frac{l_c}{L_b - l_c} z_b \end{cases} \quad (1.26)$$

L'énergie cinétique et potentielle de la masse ponctuelle  $m_{eq\text{barre}}$  au niveau du point d'attache de la barre sont données par les expressions (1.27).

$$\begin{cases} E_{c \text{ eq}} = \frac{1}{2} m_{eq\text{barre}} (\dot{x}_b^2 + \dot{z}_b^2) \\ E_{p \text{ eq}} = m_{eq\text{barre}} g z_b \end{cases} \quad (1.27)$$

Nous identifions maintenant les expressions de l'énergie cinétique de la masse ponctuelle avec l'énergie cinétique de la barre et du contrepoids d'une part, et les expressions de l'énergie potentielle de la masse ponctuelle avec l'énergie potentielle de la barre et

du contrepoids. Nous obtenons ainsi les relations entre la masse équivalente  $m_{eq\ barre}$ , la masse variable du contrepoids  $M_c$ , la distance variable de barre entre le contrepoids et l'axe  $l_c$ , et d'autres paramètres constants, données par (1.28).

$$m_{eq\ barre} = \frac{1}{(L_b - l_c)^2} \left[ M_b l_G^2 + \frac{M_b L_b^2}{12} + M_c l_c^2 \right] = \frac{1}{(L_b - l_c)} [M_b l_G - M_c l_c] \quad (1.28)$$

L'expression de la masse équivalente au niveau de la hanche  $m_{eq\ barre}$  du contrepoids et de la barre s'obtient directement à partir de (1.28) par la formule (1.29).

$$m_{eq\ barre} = \frac{M_b l_G - M_c l_c}{L_b - l_c} \quad (1.29)$$

La relation qui lie la masse du contrepoids  $M_c$  et la longueur de barre à faire dépasser  $l_c$  s'obtient également à partir de (1.28). Après simplification et en considérant que  $l_G = L_b/2$ , l'expression de  $M_c$  en fonction de  $l_c$  est donnée par la formule (1.30).

$$M_c = M_b \frac{L_b - 3l_c}{6l_c} \quad (1.30)$$

Si nous souhaitons plutôt calculer la longueur de barre à faire dépasser  $l_c$  en fonction d'une masse de contrepoids  $M_c$  donnée, nous pouvons utiliser la relation inverse (1.31).

$$l_c = \frac{M_b L_b}{6M_c - 3M_b} \quad (1.31)$$

La longueur et la masse de la barre sont données tableau 1.1. La figure 1.10 donne la relation entre la longueur  $l_c$  de barre que l'on fait dépasser et la masse du contrepoids  $M_c$  correspondante telle que l'ensemble soit équivalent au rajout d'une masse au niveau du tronc.

La figure 1.11 donne la masse équivalente en fonction de la longueur de barre dépassant pour le réglage présenté figure 1.10.

Par la suite nous avons seulement considéré le cas d'une masse équivalente de  $7.5Kg$  correspondant à une masse du contrepoids de  $7.5Kg$ , et correspondant à faire dépasser la barre de  $0.5m$ . La distance entre le poteau central et le robot est donc alors de  $2.5m$ .

### 1.4.3 Cas simplifié en considérant un pied au sol

Nous considérons que le robot est lié au sol par une liaison rotoïde, ce qui réduit les positions du robot au seul vecteur  $q$ . Le modèle dynamique du robot bipède obtenu par la méthode de Lagrange a alors la forme suivante.

$$A\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q) = D_\Gamma \Gamma + D_2(q)^T R_2 \quad (1.32)$$

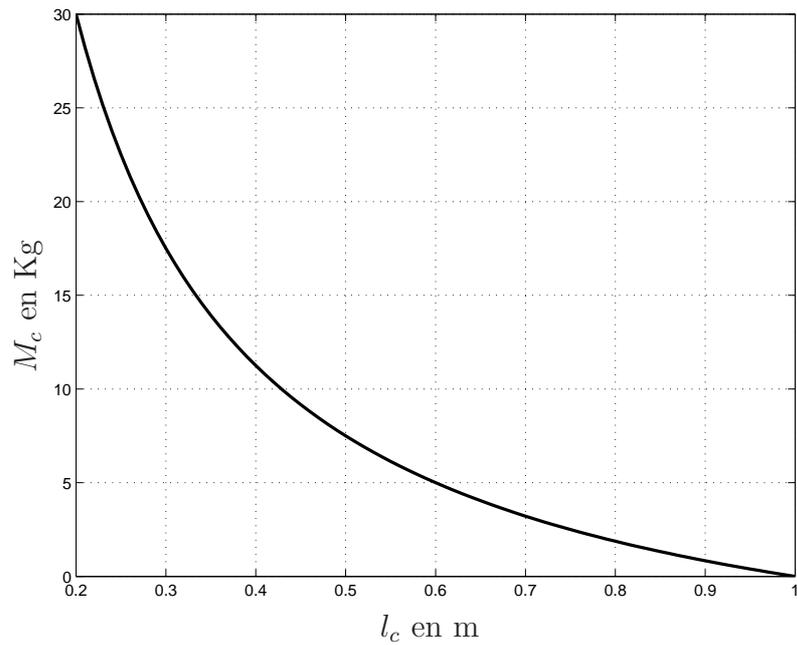


FIG. 1.10 – Relation entre la masse du contrepoids  $M_c$  et la longueur de barre à faire dépasser  $l_c$  afin que l'ensemble constitué de la barre et du contrepoids soit équivalent à l'ajout d'une masse ponctuelle sur le robot.

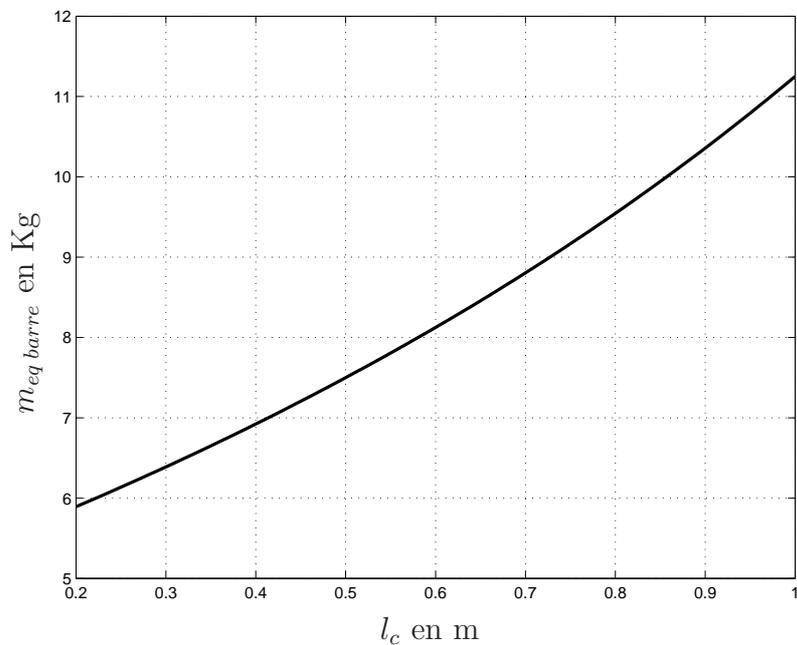


FIG. 1.11 – Relation entre la masse équivalente au niveau du point d'attache de la barre et la longueur de barre qui dépasse  $l_c$ . La masse du contrepoids  $M_c$  est celle déterminée afin que l'ensemble constitué de la barre et du contrepoids soit équivalent à l'ajout d'une masse ponctuelle sur le robot.

Où :

- $A(5 \times 5)$  est la matrice d'inertie,
- $C(5 \times 1)$  correspond aux effets de Coriolis et centrifuges,
- $G(5 \times 1)$  correspond aux effets de gravité,
- $D_\Gamma(5 \times 1)$  traduit les effets des couples. Elle est composée de 0 et de  $\pm 1$ ,
- $D_2(2 \times 5)$  est la matrice jacobienne traduisant les effets de la réaction du sol sur le pied 2.

La contrainte de contact du pied 1 au sol est déjà incluse dans le modèle (1.32). La contrainte de contact du pied 2 avec le sol s'écrira comme suit sur les positions, les vitesses et les accélérations.

$$X_2(q) = \begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

$$D_2(q)\dot{q} = 0 \quad (1.34)$$

$$D_2(q)\ddot{q} + H_2(q, \dot{q}) = 0 \quad (1.35)$$

Dans le cas d'un simple support sur le pied 1 le modèle ne sera plus donné que par l'équation (1.32) en considérant que  $R_2 = 0$ . Ce modèle ne permet pas de représenter un simple support sur la jambe 2.

Dans le cas d'un double support le modèle sera constitué par l'équation (1.32) et l'équation (1.35).

Le modèle ainsi obtenu est plus simple que le modèle précédent car il n'est plus composé que par 5 équations en simple support et 7 équations en double support, mais il ne permet pas de calculer les réactions du sol sur le pied 1.

Il est possible d'étendre le modèle précédent pour pouvoir calculer toutes les réactions du sol en considérant le bilan des efforts sur le robot à son centre de gravité.

$$\begin{cases} M\ddot{x}_G = R_{1x} + R_{2x} \\ M\ddot{z}_G = R_{1z} + R_{2z} \end{cases} \quad (1.36)$$

Où :

- $M$  est la masse totale du bipède,
- $\ddot{x}_G$  et  $\ddot{z}_G$  sont les composantes de l'accélération du centre de gravité selon l'axe  $\vec{x}$  et l'axe  $\vec{z}$

En simple support sur la jambe 1 on considérera les équations (1.32) et (1.36) en prenant  $R_2 = 0$ . En double support on considérera les équations (1.32), (1.35) et (1.36).

Ce modèle est plus simple et plus rapide à calculer que le modèle présenté en section 1.4.1 mais est plus restrictif car on suppose qu'un pied est fixe au sol. Il ne pourrait pas

servir pour modéliser une phase de vol. De plus nous verrons section 3.3 que ce modèle permet de déterminer plus facilement les dynamiques de zéro du robot pour un mouvement de référence donné qu'à partir du modèle général (1.1).

Ce modèle est obtenu par la méthode de Lagrange comme présenté section 1.4.2. La seule différence est que les positions des centres de gravité et de l'extrémité de la jambe 2 sont calculées avec pour origine l'extrémité de la jambe 1. Les nouvelles expressions des positions des centres de gravité des corps sont données par les expression (1.37).

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{G1} = -(l_1 - s_1)\cos(\theta_1) \\ z_{G1} = -(l_1 - s_1)\sin(\theta_1) \\ x_{G2} = -l_1\cos(\theta_1) - (l_2 - s_2)\cos(\theta_2) \\ z_{G2} = -l_1\sin(\theta_1) - (l_2 - s_2)\sin(\theta_2) \\ x_{G3} = -l_1\cos(\theta_1) - l_2\cos(\theta_2) + s_3\cos(\theta_3) \\ z_{G3} = -l_1\sin(\theta_1) - l_2\sin(\theta_2) + s_3\sin(\theta_3) \\ x_{G4} = -l_1\cos(\theta_1) - l_2\cos(\theta_2) + s_4\cos(\theta_4) \\ z_{G4} = -l_1\sin(\theta_1) - l_2\sin(\theta_2) + s_4\sin(\theta_4) \\ x_{G5} = -l_1\cos(\theta_1) - l_2\cos(\theta_2) + l_4\cos(\theta_4) + s_5\cos(\theta_5) \\ z_{G5} = -l_1\sin(\theta_1) - l_2\sin(\theta_2) + l_4\sin(\theta_4) + s_5\sin(\theta_5) \end{array} \right. \quad (1.37)$$

Les nouvelles expressions de la position de l'extrémité de la jambe 2 sont données par les expressions (1.38).

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{p2} = -l_1\cos(\theta_1) - l_2\cos(\theta_2) + l_4\cos(\theta_4) + l_5\cos(\theta_5) \\ z_{p2} = -l_1\sin(\theta_1) - l_2\sin(\theta_2) + l_4\sin(\theta_4) + l_5\sin(\theta_5) \end{array} \right. \quad (1.38)$$

## 1.5 Conclusion

Nous venons de présenter le robot bipède, les paramètres de configuration utilisés, et les modèles de simple et double support. Ces modèles sont utilisés pour simuler le robot bipède, ainsi que pour générer des mouvements de marche optimaux, présenté section 3, ainsi que pour la commande, présentée section 4. Dans la section suivante nous présentons le modèle d'impact utilisé, qu'il est nécessaire de connaître pour pouvoir simuler le mouvement du robot bipède sur un pas complet. Ce modèle d'impact s'obtiendra à partir du modèle complet présenté en section 1.4.1.

# Chapitre 2

## Modélisation et étude de l'impact

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>44</b>
<b>2.2</b>	<b>Le modèle d'impact algébrique</b>	<b>46</b>
<b>2.3</b>	<b>Le modèle d'impact différentiel</b>	<b>49</b>
2.3.1	Formulation différentielle de l'impact différentiel	49
2.3.2	Formulation intégrée de l'impact différentiel	51
2.3.3	Formulation algébrique de l'impact différentiel	53
2.3.4	Méthode de calcul de l'impact différentiel	55
<b>2.4</b>	<b>Caractérisation des modèles d'impact</b>	<b>59</b>
2.4.1	Introduction	59
2.4.2	Présentation de la méthode de tracé des comportements obtenus après impact	60
2.4.3	Présentation de la méthode de recherche d'un impact donnant un double support par optimisation	61
2.4.4	Résultats et comparaison des modèles algébrique et différentiel pour le cas d'une configuration de marche	63
2.4.5	Résultats pour le cas de la configuration minimisant le frottement permettant de donner un double support, dans le cas du modèle algébrique	66
2.4.6	Résultats pour le cas de la configuration minimisant le frottement permettant de donner un double support, dans le cas du modèle différentiel	66
2.4.7	Résultats pour le cas de la configuration la plus proche de la configuration de marche permettant de donner un double support pour $f = 1$ , dans le cas du modèle algébrique	70
2.4.8	Résultats pour le cas de la configuration la plus proche de la configuration de marche permettant de donner un double support pour $f = 1$ , dans le cas du modèle différentiel	72

## 2.1 Introduction

Nous avons choisi de considérer l'impact comme ayant lieu entre des solides rigides, voir la section 1.1 expliquant ce choix. En réalité l'impact est un phénomène continu mais avec des dynamiques très rapides par rapport aux dynamiques en dehors de l'apparition de nouveaux contacts. Les études expérimentales sont donc difficiles, ainsi que la détermination des grandeurs caractéristiques des impacts rigides, comme le coefficient de restitution et le coefficient de frottement. De plus STOIANOVICI et HURMUZLU [74] ont montré que pour une barre le phénomène d'impact fait intervenir des phénomènes vibratoires, et que le coefficient de restitution dépend non seulement de données locales au lieu d'impact, mais aussi des dimensions de la barre et de son orientation au moment de l'impact. Cependant il apparaît aussi que le coefficient de restitution est constant en fonction de sa configuration lorsque la barre est suffisamment courte. La validité d'un coefficient de restitution est donc parfois limitée pour un même système. En revanche le coefficient de frottement de la loi d'Amontons-Coulomb reste généralement valide. Il apparaît également que le modèle de barre discret composé de segments séparés de ressorts amortisseurs permettant de simuler les phénomènes vibratoires permet de prédire correctement les variations du coefficient de restitution.

Différents modèles d'impacts rigides ont été proposés dans la littérature suivant :

- l'utilisation de la loi de restitution de Newton ou de Poisson,
- la prise en compte du frottement par la loi d'Amontons-Coulomb, par une loi d'Amontons-Coulomb régularisée, ou l'absence de frottement,
- l'utilisation d'un modèle algébrique, pseudo-différentiel, ou d'autres formulations,
- l'application en 3 dimensions ou la restriction à un modèle plan.

On pourra se reporter au chapitre 1 de la thèse de GÉNOT [28] pour une présentation de nombreux modèles d'impacts dans le cas de contacts multiples, que l'on rappellera rapidement ici. On peut citer le modèle d'impact de MOREAU [57] défini dans le cas sans frottement et qui s'écrit par l'intermédiaire d'une procédure dite de proximation, étendu au cas avec frottement dans MOREAU et PANAGIOTOPOULUS [60] et MOREAU [58]. Dans LÖTSTEDT [52] l'auteur écrit un modèle sans frottement sous forme d'un LCP (*Linear Complementarity Problem*) équivalent à un problème quadratique, généralisé dans LÖTSTEDT [53] au cas avec frottement et régularisé pour obtenir existence et unicité des solutions, mais au détriment de la cohérence physique du modèle. Dans PFEIFFER et GLOCKER [66], le frottement est pris en compte avec la loi d'Amontons-Coulomb, la loi de restitution de Poisson est considérée, et le modèle d'impact est mis sous forme d'un LCP. HURMUZLU et CHANG [38] généralisent le modèle d'impact de BRACH [8] et BRACH

[9] qui tient compte du frottement avec la loi d'Amontons-Coulomb et la loi de restitution de Newton, au cas d'un système ayant déjà un contact lorsque la collision intervient en un deuxième point. Le modèle de BRACH [8] vient combler le problème de gain d'énergie possible lors de l'impact mis en lumière par KANE [42] dans le modèle avec frottement initialement proposé par WHITTAKER [81]. KELLER [44] et STRONGE [75] considèrent un modèle d'impact différentiel et utilisent la loi de frottement d'Amontons-Coulomb. Le modèle d'impact différentiel proposé par KELLER [44] utilise la loi de restitution de Poisson et STRONGE [75] a proposé une nouvelle loi de restitution basée sur des considérations énergétiques, la loi de Poisson dissipant de l'énergie même pour un coefficient de restitution de 1. KELLER [44] a introduit son nouveau modèle pour corriger le modèle d'impact introduit par WHITTAKER [81] qui ne tient pas compte des changements de direction du glissement en cours d'impact. Ensuite HURMUZLU et MARGHITU [39] ont généralisé le modèle d'impact introduit par KELLER [44] et STRONGE [75] au cas où un contact a déjà lieu .

L'ensemble des modèles présentés ici, même s'ils ont des formulations différentes, sont équivalents lorsque le coefficient de frottement est considéré comme nul.

Dans notre cas, nous n'avons pas un coefficient de frottement nul, et nous allons considérer que le coefficient de restitution est nul. Cela a été constaté jusqu'à maintenant sur le prototype Rabbit. En effet, lors de la marche il n'a jamais été constaté que le pied avant rentrant en contact avec le sol rebondisse au moment de l'impact. Sous cette hypothèse les différents modèles évoqués ici ne sont pas tous équivalents, et nous avons choisi de nous concentrer ici en particulier sur le modèle algébrique de BRACH [8] et le modèle différentiel de KELLER [44]. Section 2.2 nous présenterons une formulation du modèle algébrique. Ensuite section 2.3 nous présenterons l'impact différentiel et prouverons qu'il peut en fait être ramené à une succession d'impacts algébriques, ce qui permet d'éviter son calcul par une intégration numérique. Pour l'impact algébrique, nous utiliserons la formulation présentée dans HURMUZLU et MARGHITU [39], légèrement différente de BRACH [8] et HURMUZLU et CHANG [38]. Cette dernière formulation n'est pas tout le temps correcte pour le cas multi-contacts, car elle omet de prendre en compte certains comportements possibles (voir annexe B), contrairement à la formulation de HURMUZLU et MARGHITU [39] que nous présentons ici. Nous donnerons notamment un exemple d'une situation où la formulation de BRACH [8] et HURMUZLU et CHANG [38] omet une solution. Nous verrons aussi que le modèle différentiel est plus correct. Dans certains cas les deux modèles sont équivalents. Section 2.4 nous présenterons également une étude des possibilités d'obtention de double support après l'impact. En effet l'obtention d'un double support après impact est indispensable dans le cadre d'une marche avec double support. Pour rechercher les cas où nous obtenons un double support après impact, nous avons en fait étudié l'ensemble des comportements possibles, incluant le glissement des contacts. Nous verrons que nous n'avons pas trouvé de zones pour lesquelles un double support est possible, sauf pour des

configurations qui ne peuvent être des configurations de marche.

Au vu de la difficulté d'obtenir un double support, nous avons décidé d'étudier de manière similaire le cas d'un robot avec des pieds, les pieds nous semblant faciliter l'obtention d'un double support. Nous avons choisi, dans cette étude, de considérer des pieds de masse nulle pour simplifier l'étude. Les modèles algébrique et différentiel pour le robot Rabbit avec des pieds sans masse sont présentés en annexe D. Nous présenterons ensuite l'étude des comportements possibles après l'impact en considérant l'ajout de pieds. Nous verrons que dans ce cas l'obtention d'un double support est effectivement facilitée. Mais au vu de certaines incohérences physiques, nous proposerons un autre modèle d'impact, qui nous semble pouvoir donner des résultats plus proche de la réalité.

## 2.2 Le modèle d'impact algébrique

Nous considérons que l'impact a lieu entre des solides rigides et celui-ci a donc une durée infinitésimale. Pour ne pas violer la contrainte de non pénétration dans le sol à cet instant le système doit subir un saut de vitesse. De cette façon les accélérations et les réactions du sol sont infinies et sont représentées par des impulsions de Dirac. De plus durant ce temps infinitésimal, les vitesses n'étant pas infinies les positions restent constantes. On pourra trouver une justification mathématique faisant intervenir la théorie des distributions pour décrire les systèmes avec impacts entre solides rigides dans la thèse de ORHANT [63]. Il y est défini des équations mélangeant les dynamiques continues avec les équations d'impact, mais nous préférons ici séparer les deux. Le modèle d'impact s'obtient par l'intégration du modèle général (1.1) entre juste avant l'impact et juste après l'impact. A cet instant seuls les accélérations et les efforts du sol sont impulsionnels et l'on obtient donc l'équation (2.1) où les termes non impulsionnels disparaissent.

$$A(q) \left( \dot{X}^+ - \dot{X}^- \right) = D_1(q)I_{R_1} + D_2(q)I_{R_2} \quad (2.1)$$

Où :

- $\dot{X}^-$  est le vecteur vitesse juste avant impact,
- $\dot{X}^+$  est le vecteur vitesse juste après impact,
- $I_{R_i} = [I_{R_ix} I_{R_iz}]$  est le poids des réactions impulsionnelles du sol sur le pied  $i$ ,

Pour décrire complètement l'impact il manque 4 équations qui sont les équations de comportement des contacts au niveau du sol, à savoir la loi de frottement, ici d'Amontons-Coulomb et la loi de restitution de Newton, Poisson ou STRONGE [75]. Pour la loi de restitution nous considérons un coefficient de restitution nul, auquel cas toutes les lois de restitution sont équivalentes et nous donnent la relation supplémentaire (2.2) pour le pied 2.

$$\begin{cases} V_{2z}^+ = 0 \\ I_{R_{2z}} \geq 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

$V_{2z}^+$  est la composante verticale de la vitesse de l'extrémité de la jambe 2 juste après impact. Les composantes de vitesse de l'extrémité du pied  $i$  sont reliées au vecteur vitesse  $\dot{X}$  par les relations (2.3) juste avant impact et (2.4) juste après impact.

$$V_i^- = \begin{bmatrix} V_{ix}^- \\ V_{iz}^- \end{bmatrix} = D_1(q)\dot{X}^- \quad (2.3)$$

$$V_i^+ = \begin{bmatrix} V_{ix}^+ \\ V_{iz}^+ \end{bmatrix} = D_1(q)\dot{X}^+ \quad (2.4)$$

Pour ce qui concerne le pied 1 qui était déjà en contact avec le sol, il peut soit décoller, soit rester au sol et donc  $V_{1z} \geq 0$ . De plus l'effort exercé par le sol ne peut être que dirigé vers le haut  $I_{R_{1z}} \geq 0$ . Le travail de la force impulsionnelle dans le cas du décollement ne peut être que négatif, soit  $V_{1z}I_{R_{1z}} \leq 0$  et donc nécessairement  $I_{R_{1z}} = 0$ . Et donc nous obtenons la relation supplémentaire (2.5) de décollement du pied 1 ou (2.6) de non décollement du pied 1.

$$\begin{cases} V_{1z}^+ \geq 0 \\ I_{R_1} = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} V_{1z}^+ = 0 \\ I_{R_{1z}} \geq 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

La loi de frottement d'Amontons-Coulomb nous donne la relation supplémentaire (2.7) dans le cas du non glissement du pied  $i$  ou (2.8) dans le cas du glissement du pied  $i$ .

$$\begin{cases} V_{ix}^+ = 0 \\ -fI_{R_{iz}} \leq I_{R_{ix}} \leq fI_{R_{iz}} \end{cases} \quad (2.7)$$

$$I_{R_{ix}} = -f\text{sign}(V_{ix}^+)I_{R_{iz}} \quad (2.8)$$

Où  $\text{sign}()$  est la fonction signe usuelle.

*Remarque* : Nous considérons que ces lois de comportement portent sur les vitesses après impact. Ce choix est également celui fait par BRACH [8], voir la comparaison de notre formulation et de la formulation de BRACH [8] en annexe B. Ceci est une approximation car physiquement l'impact est un phénomène continu, et si l'on considère que la loi de contact est celle des dynamiques classiques, le comportement de l'impact ne peut en général se réduire à celui obtenu à la fin. Par exemple si la vitesse tangentielle avant impact est de signe opposé à celle après impact, l'effort impulsionnel tangentiel sera choisi

opposé à la vitesse après impact. Or si nous considérons que l'impact est continu l'effort tangentiel change de signe. Donc lors du passage à la limite vers l'impact impulsionnel, l'effort impulsionnel tangentiel pourrait en réalité être de signe quelconque, suivant que la "moyenne sur l'impact" de l'effort tangentiel continu est positive ou négative. Il doit donc être possible d'obtenir un effort impulsionnel tangentiel de même signe que la vitesse tangentielle après impact. Les problèmes soulevés ici sur la pertinence du modèle algébrique sont en fait résolus par le modèle d'impact différentiel de KELLER [44] que nous verrons dans la section suivante 2.3. L'article de KELLER [44] donne une formulation rigoureuse à ce modèle d'impact.

Le modèle d'impact complet est donné par l'équation (2.1) et les lois de comportement. Les lois de comportement ne s'appliquent pas toutes en même temps. Pour le pied déjà en contact avec le sol au moment de l'impact on aura le décollement donné par (2.5) *ou* le non décollement avec glissement dans le sens positif *ou* glissement dans le sens négatif donnés par (2.9) *ou* avec le non glissement donné par (2.10).

$$\begin{cases} V_{1z}^+ = 0 \\ I_{R_{1x}} = -f \text{sign}(V_{1x}^+) I_{R_{1z}} \\ I_{R_{1z}} \geq 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\begin{cases} V_1^+ = 0 \\ -f I_{R_{1z}} \leq I_{R_{1x}} \leq f I_{R_{1z}} \end{cases} \quad (2.10)$$

Pour le pied rentrant en collision avec le sol on aura l'absence de rebond avec le glissement dans le sens positif *ou* le glissement dans le sens négatif donnés par (2.11) *ou* le non glissement donné par (2.12).

$$\begin{cases} V_{2z}^+ = 0 \\ I_{R_{2x}} = -f \text{sign}(V_{2x}^+) I_{R_{2z}} \\ I_{R_{2z}} \geq 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

$$\begin{cases} V_2^+ = 0 \\ -f I_{R_{2z}} \leq I_{R_{2x}} \leq f I_{R_{2z}} \end{cases} \quad (2.12)$$

Il est à noter que dans le cas du non décollement et non glissement du pied 1 (2.10), et du pied 2 (2.12) la condition de non décollement est incluse dans la condition de non glissement.

En distinguant le sens du glissement, il y a donc quatre comportements possibles pour le pied déjà en contact avec le sol et trois pour le pied rentrant en contact avec le sol, soit douze en tout. Pour déterminer les conditions après impact et en même temps quel comportement va avoir lieu après l'impact, nous allons calculer les douze systèmes d'équations et rechercher celui pour lequel les contraintes associées sont vérifiées.

*Remarque* : La méthode de résolution de l'impact en présence de frottement est simple

dans le principe mais lourde dans la mise en œuvre et le temps de calcul. Dans notre cas, le nombre de comportements possibles après impact est encore faible, mais par exemple pour un robot quadrupède avec 3 contacts déjà au sol, le nombre de comportements possibles est de  $3 \times 4 \times 4 \times 4 = 192$ . Et dans le cas de la simulation de systèmes granulaires avec un grand nombre de particules, cette méthode n'est pas envisageable. En mettant le problème d'impact sous d'autres formes, comme un LCP (*Linear Complementarity Problem*) ou la minimisation d'une fonction quadratique sous contraintes obtenue par le principe de Gauss de moindre déviation, il serait possible d'utiliser des algorithmes spécifiques plus efficaces. Nous avons quand même gardé le problème sous cette forme car elle est plus pratique pour la caractérisation des comportements possibles après impact comme nous le verrons section 2.4.

Cependant pour déterminer le comportement après impact, il est plus simple de réduire le système général (2.1) au système (2.13) de 4 équations entre les vitesses après impact et les réactions impulsionnelles du sol, comme il a été proposé par RUBANOVICH et FORMAL'SKII [70] et par PERRIN [65].

$$\begin{bmatrix} V_1^+ - V_1^- \\ V_2^+ - V_2^- \end{bmatrix} = D^T A^{-1} D \begin{bmatrix} I_{R_1} \\ I_{R_2} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Où  $D = [D_1 \ D_2]$ .

Nous présentons en annexe C les équations pour chacun des comportements possibles en utilisant ce modèle réduit (2.13). Les vitesses articulaires après impact s'obtiendront à partir de l'équation (2.1) sachant que l'on connaît alors les réactions impulsionnelles.

Pour le cas avec frottement, l'existence et l'unicité des solutions est encore un problème ouvert, voir la thèse de GÉNOT [28]. Nous avons constaté lors de l'étude sur l'impact des cas d'inconsistance (absence de solutions) et d'indétermination (plusieurs solutions), que nous ne détaillons pas.

## 2.3 Le modèle d'impact différentiel

Nous présentons ici trois formulations différentes sous lesquelles peut être mis l'impact différentiel. Puis nous donnerons la méthode de calcul de l'impact différentiel que nous avons utilisée.

### 2.3.1 Formulation différentielle de l'impact différentiel

Cet impact différentiel a été introduit par KELLER [44] et on pourra donc se reporter à son article pour plus de précisions, ainsi qu'à l'article de HURMUZLU et MARGHITU [39] qui généralise le modèle de Keller au cas multi-contacts. Nous rappelons ici les raisons de l'introduction de ce nouveau modèle d'impact et les hypothèses qui y conduisent.

Le modèle d'impact avec frottements utilisé jusqu'alors avait pour origine la méthode de WHITTAKER [81]. Cette méthode n'est valable que lorsque la direction de glissement reste la même tout au long de l'impact, car les efforts impulsionnels dépendent uniquement des vitesses finales, faisant abstraction d'autres comportements possibles en cours d'impact. La solution proposée par Keller a été de considérer que l'impact est en fait continu et soumis à des équations différentielles mais dont l'échelle de temps est très petite devant l'échelle de temps des dynamiques en dehors d'un impact. De cette façon, l'impact est simulé de manière similaire à un système continu avec des contraintes unilatérales et peut donc être constitué de différentes phases, qui permettent de prendre en compte différents comportements successifs en cours d'impact. Il existe donc une échelle de temps propre à l'impact, qui dans l'échelle de temps des dynamiques en dehors de l'impact se réduit à une durée infinitésimale. Du point de vue des dynamiques en dehors de l'impact celui-ci est alors vu comme un impact impulsionnel, comme pour l'impact algébrique. Lorsque la durée relative de l'impact par rapport au temps en dehors de l'impact tend vers 0, on obtient une configuration du système identique durant l'impact et seulement les accélérations et les réactions du sol ne tendant pas vers 0. On obtient ainsi une équation de la dynamique durant l'impact (2.14) très proche de l'équation d'impact (2.1), mais qui porte sur les accélérations  $\ddot{X}$  plutôt que sur les vitesses  $\dot{X}^+$  et  $\dot{X}^-$ , et sur les réactions non impulsionnelles du sol en cours d'impact  $R_1$  et  $R_2$  plutôt que sur les réactions impulsionnelles du sol  $I_{R1}$  et  $I_{R2}$ .

$$A(q)\ddot{X} = D_1(q)R_1 + D_2(q)R_2 \quad (2.14)$$

Comme pour l'impact algébrique il est possible de réduire le système (2.14) en (2.15) pour ne faire apparaître que les vitesses au niveau des contacts.

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = D^T A^{-1} D \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Le calcul de l'impact peut se faire seulement sur le système (2.15) avec les équations supplémentaires introduites par les lois de comportement au niveau des contacts. Ces lois de comportement portent sur les vitesses qui évoluent en cours d'impact et sur les réactions du sol en cours d'impact. Ceci est différent du modèle d'impact algébrique dont les lois de comportement portent plutôt sur les vitesses après impact et les réactions impulsionnelles. Mais les lois de comportement restent quand même proches.

Les relations supplémentaires pour le décollement du pied 1 sont données par (2.16).

$$\begin{cases} V_{1z} \geq 0 \\ R_1 = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

Les relations de non décollement et non glissement pour le pied 1 sont données par

(2.17).

$$\begin{cases} V_1 = 0 \\ -fR_{1z} \leq R_{1x} \leq fR_{1z} \end{cases} \quad (2.17)$$

Les relations de non décollement et de glissement pour le pied 1 sont données par (2.18).

$$\begin{cases} V_{1z} = 0 \\ R_{1x} = -f \operatorname{sign}(V_{1x}) R_{1z} \\ R_{1z} \geq 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

La relation supplémentaire de la loi de restitution avec un coefficient nul va se traduire par le fait que l'impact se termine quand la vitesse normale du pied qui est rentrée en impact s'annule. En cours d'impact cela se traduit par  $V_{2z} \leq 0$ . Pour le pied 2 en cours d'impact on aura les relations (2.19) dans le cas du non glissement.

$$\begin{cases} V_{2x} = 0 \\ V_{2z} \leq 0 \\ -fR_{2z} \leq R_{2x} \leq fR_{2z} \end{cases} \quad (2.19)$$

Dans le cas du glissement du pied 2 on aura les relation (2.20).

$$\begin{cases} R_{2x} = -f \operatorname{sign}(V_{2x}) R_{2z} \\ V_{2z} \leq 0 \\ R_{2z} \geq 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

La dynamique de l'impact est donnée par le système (2.14) avec les lois de comportement (2.16), (2.17) ou (2.18) pour le pied 1 et (2.19) ou (2.20) pour le pied 2. Les comportements possibles sont les mêmes que pour le modèle algébrique. Seulement, au cours de la simulation il peut y avoir des commutations d'un comportement à un autre si les inégalités associées à un comportement ne sont plus vérifiées. Pour calculer les vitesses après impact ainsi que les efforts impulsionsnels du sol à partir des vitesses avant impact, il n'est pas nécessaire d'intégrer numériquement car les positions étant constantes en cours d'impact, le système (2.15) peut être intégré formellement, comme nous le verrons dans la section qui suit.

### 2.3.2 Formulation intégrée de l'impact différentiel

Comme proposé par HURMUZLU et MARGHITU [39], nous allons intégrer les dynamiques en cours d'impact par rapport à  $\tau$  à la place du temps, où  $\tau = \int_0^t R_{2z} d\mu$  est l'intégrale de la réaction normale au point d'impact. Cette intégration est possible car  $\tau$  est une fonction monotone du fait que  $R_{2z} \geq 0$ . Il est à remarquer que sans cette intégration

en fonction de  $\tau$ , il manque une relation au système d'équations différentielles au cours de l'impact (2.15) avec les lois de comportement. En effet, il n'y a pas de relation égalité selon les grandeurs normales du pied rentrant en contact avec le sol,  $V_{2z}$  et  $R_{2z}$ . Cette équation qui manque peut se voir comme le fait que nous ne connaissons pas l'évolution de  $R_{2z}$  en fonction du temps au cours de l'impact. Nous savons seulement que  $R_{2z} > 0$ . Le fait de pouvoir intégrer en fonction de  $\tau$  nous donne que les comportements en cours d'impact et celui de fin d'impact ne dépendent pas de cette évolution de  $R_{2z}$  en fonction du temps propre à l'impact. Nous considérons différentes phases en cours d'impact séparées par des changements de comportement au niveau des contacts. L'intégration en fonction de  $\tau$  de (2.15) nous donne le système (2.21) pour la  $k^{\text{ème}}$  phase au cours de l'impact, intégré entre  $\tau_{k-1}$  et  $\tau$ .

$$\begin{bmatrix} V_1(\tau) - V_1^{k-1} \\ V_2(\tau) - V_2^{k-1} \end{bmatrix} = D^T A^{-1} D \begin{bmatrix} I_{R_1}(\tau) \\ I_{R_2}(\tau) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Où :

- $V_i^{k-1}$  est la vitesse du pied  $i$  au début de la phase  $k$ ,
- $V_i(\tau)$  est la vitesse du pied  $i$  au cours de la phase  $k$ ,
- $I_{R_i}(\tau) = \int_{\tau_{k-1}}^{\tau} R_i d\mu$  est l'intégrale de la réaction  $R_i$  au cours de la phase  $k$  et pour  $I_{R_{2z}}(\tau)$  nous avons la relation particulière  $I_{R_{2z}}(\tau) = \tau - \tau_{k-1}$ .

Les relations obtenues avec les lois de comportement peuvent elles aussi être intégrées et s'écrire sur les vitesses en cours de phase, ainsi que sur les intégrales des réactions du sol au cours de la phase. Nous obtenons donc les relations (2.22) pour le décollement du pied 1, (2.23) pour le non décollement et non glissement du pied 1 ou (2.24) pour le non décollement avec glissement du pied 1, et (2.25) pour l'absence de rebond et le non glissement du pied 2 ou (2.26) pour l'absence de rebond et le glissement du pied 2. Ces relations sont valables pour la phase  $k$ , quelque soit  $\tau \geq \tau_{k-1}$ .

$$\begin{cases} V_{1z}(\tau) \geq 0 \\ I_{R_1}(\tau) = 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

$$\begin{cases} V_1(\tau) = 0 \\ -f I_{R_{1z}}(\tau) \leq I_{R_{1x}}(\tau) \leq f I_{R_{1z}}(\tau) \end{cases} \quad (2.23)$$

$$\begin{cases} V_{1z}(\tau) = 0 \\ I_{R_{1x}}(\tau) = -f \text{sign}(V_{1x}(\tau)) I_{R_{1z}}(\tau) \\ I_{R_{1z}}(\tau) \geq 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

$$\begin{cases} V_{2x}(\tau) = 0 \\ V_{2z}(\tau) \leq 0 \\ -f I_{R_{2z}}(\tau) \leq I_{R_{2x}}(\tau) \leq f I_{R_{2z}}(\tau) \end{cases} \quad (2.25)$$

$$\begin{cases} I_{R_{2x}}(\tau) = -f \operatorname{sign}(V_{2x}(\tau)) I_{R_{2z}}(\tau) \\ V_{2z}(\tau) \leq 0 \\ I_{R_{2z}}(\tau) \geq 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

Le système (2.21) avec les lois de comportement (2.22), (2.23) ou (2.24) pour le pied 1 et (2.25) ou (2.26) pour le pied 2, possède une équation de moins que de paramètres à déterminer. Mais toutes les grandeurs  $V_i(\tau)$  et  $I_{R_i}(\tau)$  s'expriment en fonction de  $\tau$ , qui joue le rôle du temps en cours d'impact. L'obtention de  $V_i(\tau)$  et  $I_{R_i}(\tau)$  est directe puisqu'elles sont linéaires en fonction du paramètre  $\tau$ . La phase  $k$  est intégrée tant que toutes les inégalités associées au comportement au cours de cette phase sont vérifiées. Celle-ci s'arrête lorsqu'une composante de vitesse passe par zéro si cette composante était non nulle en début de phase. Cela se traduit par la relation (2.27) de fin de glissement du pied  $i$  si le pied  $i$  glissait en début de phase ou par la relation (2.28) de fin de décollement du pied 1 si le pied 1 décollait en début de phase ou par la fin de l'enfoncement du pied 2 dans le sol (2.29) qui constitue la condition de fin de l'impact.

$$\begin{cases} V_{ix}^{k-1} \neq 0 \\ V_{ix}(\tau) = 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

$$\begin{cases} V_{1z}^{k-1} \neq 0 \\ V_{1z}(\tau) = 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

$$V_{2z}(\tau) = 0 \quad (2.29)$$

### 2.3.3 Formulation algébrique de l'impact différentiel

Sachant que les grandeurs sont linéaires en fonction de  $\tau$  au cours d'une phase d'impact, il est possible d'écrire une phase d'impact sous une forme algébrique, de manière similaire à l'impact algébrique présenté section précédente. Le modèle algébrique d'une phase d'impact est donné par la relation (2.30), avec les lois de comportement (2.31) à (2.35) et l'une des conditions d'arrêt de la phase (2.36), (2.37) ou (2.38).

$$\begin{bmatrix} V_1^k - V_1^{k-1} \\ V_2^k - V_2^{k-1} \end{bmatrix} = D^T A^{-1} D \begin{bmatrix} I_{R_1}^k \\ I_{R_2}^k \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Où :

- $V_i^k$  est la vitesse du pied  $i$  à la fin de la phase  $k$ ,
- $I_{R_i}^k = \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} R_i d\tau$  est l'intégrale de la réaction  $R_i$  au cours de la phase  $k$  et pour  $I_{R_{2z}}^k$  nous avons la relation particulière  $I_{R_{2z}}^k = \tau_k - \tau_{k-1}$ .  $\tau_k$  est la valeur de  $\tau$  en fin de phase.

On a pour le pied 1 les relations de décollement (2.31), celles de non décollement et non glissement (2.32) ou celles de non décollement avec glissement (2.33). On a pour le pied 2 les relations de non rebond et non glissement (2.34) ou de non rebond et glissement (2.35). On a enfin les relations de fin de phase d'arrêt du glissement du pied  $i$  (2.36), d'arrêt du décollement du pied 1 (2.37), ou d'arrêt de l'enfoncement du pied 2 (2.38).

$$\begin{cases} V_{1z}^{k-1} \geq 0 \\ V_{1z}^k \geq 0 \\ I_{R_1}^k = 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

$$\begin{cases} V_1^{k-1} = 0 \\ V_1^k = 0 \\ -fI_{R_1z}^k \leq I_{R_1x}^k \leq fI_{R_1z}^k \end{cases} \quad (2.32)$$

$$\begin{cases} V_{1z}^{k-1} = 0 \\ V_{1z}^k = 0 \\ I_{R_1x}^k = -f \operatorname{sign}(V_{1x}^{k-1} + V_{1x}^k) I_{R_1z}^k \\ \operatorname{sign}(V_{ix}^k) = \operatorname{sign}(V_{ix}^{k-1}) \\ I_{R_1z}^k \geq 0 \end{cases} \quad (2.33)$$

$$\begin{cases} V_{2x}^{k-1} = 0 \\ V_{2x}^k = 0 \\ V_{2z}^{k-1} \leq 0 \\ V_{2z}^k \leq 0 \\ -fI_{R_2z}^k \leq I_{R_2x}^k \leq fI_{R_2z}^k \\ I_{R_2z}^k > 0 \end{cases} \quad (2.34)$$

$$\begin{cases} I_{R_2x}^k = -f \operatorname{sign}(V_{1x}^{k-1} + V_{2x}^k) I_{R_2z}^k \\ \operatorname{sign}(V_{ix}^k) = \operatorname{sign}(V_{ix}^{k-1}) \\ V_{2z}^{k-1} \leq 0 \\ V_{2z}^k \leq 0 \\ I_{R_2z}^k > 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

$$\begin{cases} V_{ix}^{k-1} \neq 0 \\ V_{ix}^k = 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

$$\begin{cases} V_{1z}^{k-1} \neq 0 \\ V_{1z}^k = 0 \end{cases} \quad (2.37)$$

$$V_{2z}^k = 0 \quad (2.38)$$

Il est à remarquer que la contrainte sur la réaction normale sur le pied 2 est ici stricte

car le cas  $I_{R_2z}^k = 0$  entraîne  $\tau^k = \tau^{k-1}$  et donc la phase n'a pas d'effet. De plus pour un souci de simplicité nous avons écrit dans le cas d'un glissement  $\text{sign}(V_{ix}^k) = \text{sign}(V_{ix}^{k-1})$ , mais nous considérons cette égalité de signe au sens large, c'est-à-dire que si l'une des vitesses de début ou fin de phase est nulle nous considérons qu'il y a égalité de signe.

Ce modèle d'une phase est très proche du modèle algébrique présenté section 2.2, mais avec une condition d'arrêt différente et avec des conditions supplémentaires sur les vitesses de début de phase et entre les vitesses de début et de fin de phase qui conditionnent les comportements possibles.

L'impact différentiel dans son ensemble peut alors s'écrire comme une succession d'impacts algébriques.

### 2.3.4 Méthode de calcul de l'impact différentiel

Nous présentons dans le tableau 2.1 le dénombrement des comportements possibles au cours d'une phase et les conditions d'arrêts possibles en fonction des vitesses de début de phase. Nous pouvons constater que le nombre de cas total possibles ne dépasse pas 12, ce qui fait que le temps de calcul pour une phase ne serait pas plus long que pour le calcul du modèle algébrique présenté section 2.2. Cependant, au niveau de la mise en œuvre, si nous prenions en compte toutes les possibilités de vitesses de début de phase, et que nous tenions compte à la fois des comportements possibles en cours de phase et des conditions de fin de phase, nous aurions 36 cas à considérer, ce qui est relativement important.

$V_{1z}^{k-1}$	$V_{1x}^{k-1}$	$V_{2x}^{k-1}$	nombre de comportements possibles en cours de phase	nombre de cas possibles en fin de phase	nombre total de cas possibles
0	0	0	12	1	12
0	0	$\neq 0$	4	2	8
0	$\neq 0$	0	6	2	12
0	$\neq 0$	$\neq 0$	2	3	6
$> 0$	0	0	3	2	6
$> 0$	0	$\neq 0$	1	3	3

TAB. 2.1 – Tableau récapitulatif du nombre de comportements possibles pour une phase de l'impact différentiel

Bien qu'il soit intéressant, d'un point de vue théorique, de pouvoir ramener l'impact différentiel à une séquence d'impacts algébriques, il est plus simple de le garder sous la forme du système (2.21), pour le calcul avec les lois de comportement associées (2.22) à (2.26). Cependant cette forme intégrée dépend du paramètre continu  $\tau$ . Nous allons utiliser les caractéristiques de linéarité de ce modèle en fonction de  $\tau$  pour calculer une phase d'impact sans intégration numérique. Dans un premier temps, nous recherchons parmi les 12 possibilités quel va être le comportement au cours de la phase. Pour cela

nous calculons les grandeurs  $\Delta V_1^k$ ,  $\Delta V_2^k$ ,  $\Delta I_{R_1}^k$  et  $\Delta I_{R_2}^k$  définies au cours de la phase  $k$  par les relations (2.39).

$$\begin{cases} \Delta V_i^k = \frac{V_i(\tau) - V_i(\tau_{k-1})}{\tau - \tau_{k-1}} \\ \Delta I_{R_i}^k = \frac{I_{R_i}(\tau) - I_{R_i}(\tau_{k-1})}{\tau - \tau_{k-1}} \end{cases} \quad (2.39)$$

Nous avons la relation particulière pour la composante normale de la réaction du pied 2  $\Delta I_{R_2z}^k = 1$ . Ces grandeurs  $\Delta V_1^k$ ,  $\Delta V_2^k$ ,  $\Delta I_{R_1}^k$  et  $\Delta I_{R_2}^k$  sont constantes pour une phase d'impact, les équations d'impact (2.21) étant linéaires et affines en  $I_{R_2z}(\tau)$ . Elles vérifient le système d'équations (2.40).

$$\begin{bmatrix} \Delta V_1^k \\ \Delta V_2^k \end{bmatrix} = D^T A^{-1} D \begin{bmatrix} \Delta I_{R_1}^k \\ \Delta I_{R_2x}^k \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Avec cette nouvelle notation, les lois de comportement associées (2.22) à (2.26) deviennent (2.41) à (2.45).

$$\begin{cases} V_{1z}^{k-1} > 0 \text{ ou } (V_{1z}^{k-1} = 0 \text{ et } \Delta V_{1z}^k > 0) \\ \Delta I_{R_1}^k = 0 \end{cases} \quad (2.41)$$

$$\begin{cases} (V_{1z}^{k-1} = 0 \text{ et } \Delta V_{1z}^k = 0) \\ -f \Delta I_{R_1z}^k \leq \Delta I_{R_1x}^k \leq f \Delta I_{R_1z}^k \end{cases} \quad (2.42)$$

$$\begin{cases} (V_{1z}^{k-1} = 0 \text{ et } \Delta V_{1z}^k = 0) \\ \Delta I_{R_1x}^k = -f \text{sign}(V_{1x}^{k-1}) \Delta I_{R_1z}^k \text{ si } V_{1x}^{k-1} \neq 0 \\ \Delta I_{R_1x}^k = -f \text{sign}(\Delta V_{1x}^k) \Delta I_{R_1z}^k \text{ si } V_{1x}^{k-1} = 0 \\ \Delta I_{R_1z}^k \geq 0 \end{cases} \quad (2.43)$$

$$\begin{cases} (V_{2x}^{k-1} = 0 \text{ et } \Delta V_{2x}^k = 0) \\ -f \Delta I_{R_2z}^k \leq \Delta I_{R_2x}^k \leq f \Delta I_{R_2z}^k \end{cases} \quad (2.44)$$

$$\begin{cases} \Delta I_{R_2x}^k = -f \text{sign}(V_{2x}^{k-1}) \Delta I_{R_2z}^k \text{ si } V_{2x}^{k-1} \neq 0 \\ \Delta I_{R_2x}^k = -f \text{sign}(\Delta V_{2x}^k) \Delta I_{R_2z}^k \text{ si } V_{2x}^{k-1} = 0 \\ \Delta I_{R_2z}^k \geq 0 \end{cases} \quad (2.45)$$

Une fois déterminé le comportement qui va être obtenu en cours de phase, nous recherchons quelle va être la condition d'arrêt de la phase parmi les 3 relations (2.27) de fin de glissement du pied  $i$ , (2.28) de fin de décollement du pied 1 ou (2.29) de fin d'enfoncement dans le sol. Ces relations de fin de phase peuvent s'écrire sur la valeur de  $\tau_k$  à partir des expressions des grandeurs  $\Delta V_1^k$ ,  $\Delta V_2^k$ ,  $\Delta I_{R_1}^k$  et  $\Delta I_{R_2}^k$ . Nous obtenons ainsi les valeurs de  $\tau_k$  pour chacune des conditions d'arrêt de la phase (2.46).

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_k \text{ gliss1} = \tau_{k-1} - \frac{V_{1x}^{k-1}}{\Delta V_{1x}^k} \quad \text{si } V_{1z}^{k-1} = 0, \quad \Delta V_{1z}^k = 0, \quad V_{1x}^{k-1} \neq 0 \quad \text{et} \quad \Delta V_{1x}^k \neq 0 \\ \tau_k \text{ gliss2} = \tau_{k-1} - \frac{V_{2x}^{k-1}}{\Delta V_{2x}^k} \quad \text{si } V_{2x}^{k-1} \neq 0 \quad \text{et} \quad \Delta V_{2x}^k \neq 0 \\ \tau_k \text{ decoll1} = \tau_{k-1} - \frac{V_{1z}^{k-1}}{\Delta V_{1z}^k} \quad \text{si } V_{1z}^{k-1} > 0 \quad \text{et} \quad \Delta V_{1z}^k < 0 \\ \tau_k \text{ fin} = \tau_{k-1} - \frac{V_{2z}^{k-1}}{\Delta V_{2z}^k} \end{array} \right. \quad (2.46)$$

Les conditions d'arrêt  $\tau_k \text{ gliss1}$ ,  $\tau_k \text{ gliss2}$ ,  $\tau_k \text{ decoll1}$  ne sont définies que si les conditions associées données équation (2.46) sont vérifiées. La valeur de  $\tau_k$  obtenue sera celle correspondant à la première condition d'arrêt rencontrée, c'est-à-dire celle pour laquelle  $\tau_k$  est minimum, parmi celles qui sont définies. Donc  $\tau_k$  est donné par (2.47). La relation (2.47) n'est pas exacte car il ne faut considérer que les conditions de fin de phases possibles, ce qui est donné par les conditions de la relation (2.46).

$$\tau_k = \min_{\tau_k > \tau_{k-1}} \{ \tau_k \text{ gliss1}, \tau_k \text{ gliss2}, \tau_k \text{ decoll1}, \tau_k \text{ fin} \} \quad (2.47)$$

Les vitesses de fin de la phase  $k$   $V_1^k$  et  $V_2^k$ , et les réactions du sol sur les phases 1 à  $k$   $I_{R1}^k$  et  $I_{R2}^k$ , s'obtiennent en inversant les relations (2.39) pour  $\tau = \tau_k$ . Les vitesses des extrémités des pieds après impact et les réactions impulsionnelles dues à l'impact sont celles obtenues à la fin de la phase  $n$  lorsque  $\tau_n = \tau_k = \tau_{fin}$ . Nous récapitulons l'algorithme de calcul de l'impact algébrique dans le diagramme présenté figure 2.1.

Nous venons de présenter que le modèle d'impact différentiel peut être écrit comme une séquence de phases algébriques, ce qui n'avait pas été mis en valeur par les précédents travaux de KELLER [44], STRONGE [75] et HURMUZLU et MARGHITU [39] sur ce modèle d'impact. Comme pour le modèle d'impact algébrique, à chaque nouvelle phase se pose le problème d'existence et d'unicité des solutions. De plus, comme soulevé dans la thèse de GÉNOT [28] se pose le problème de l'arrêt de la séquence d'impacts algébriques. En d'autres termes la séquence d'impacts algébriques peut-elle être infinie ? Au cours de notre étude de l'impact nous avons constaté numériquement de tels cas d'une infinité de phases au cours d'un impact. Mais il s'agissait d'une série cyclique de la même séquence de phases d'impact avec un point d'accumulation. Un tel phénomène d'accumulation s'apparente au cas déjà connu d'une accumulation infinie d'impacts pour des modèles d'impact rigides classiques. Dans le cas présent il est possible de calculer l'issue de cette accumulation de phases.

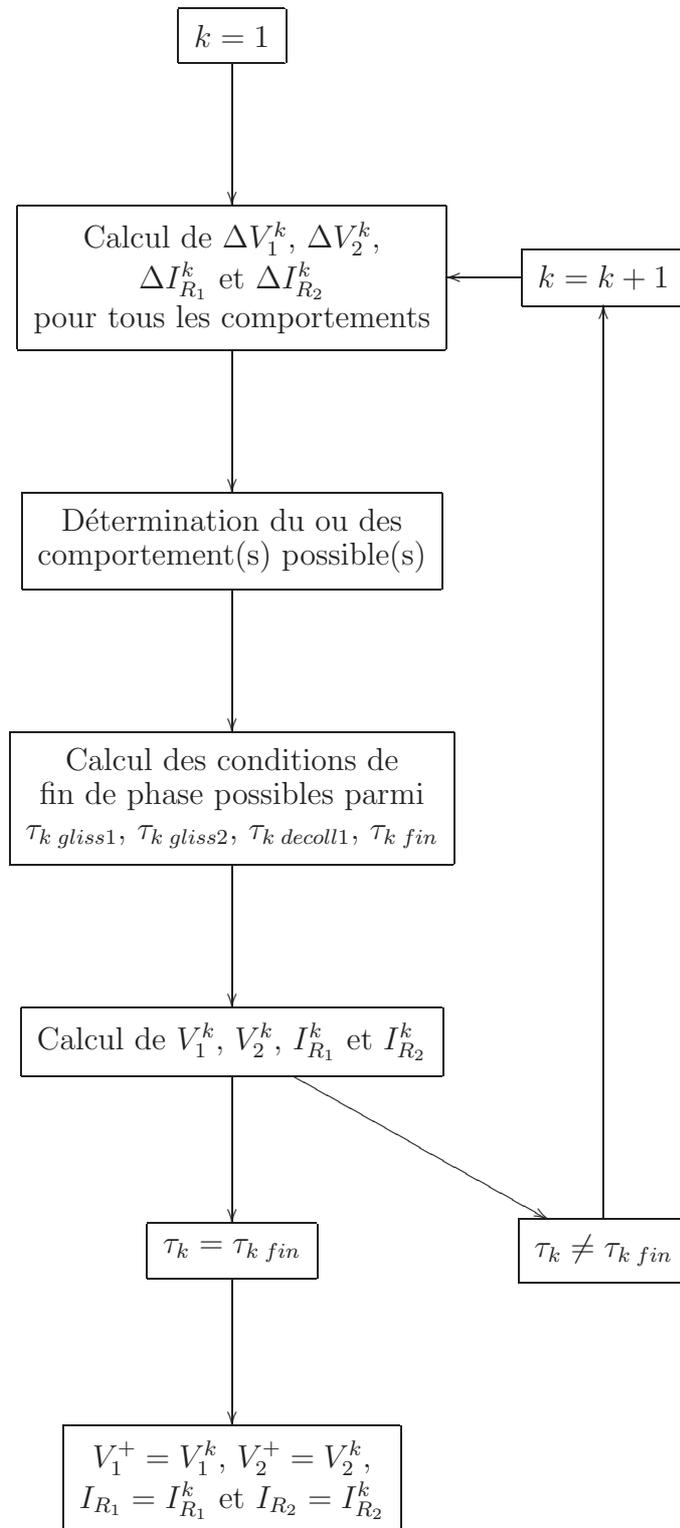


FIG. 2.1 – Représentation de l'algorithme de calcul de l'impact différentiel

## 2.4 Caractérisation des modèles d'impact

### 2.4.1 Introduction

Dans le cas de l'impact du pied avant avec le sol alors que le pied arrière est au sol, d'après les équations d'impact (2.13) pour l'impact algébrique et (2.30) pour l'impact différentiel avec les lois de comportement aux contacts, on peut voir que le comportement à l'impact dépend de :

- la direction de la vitesse du pied rentrant en contact avec le sol (la solution de l'impact étant proportionnelle à l'amplitude de cette vitesse),
- la configuration du bipède au moment de l'impact définie par les angles  $\alpha$ ,  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  ainsi que la distance entre les pieds  $d$ . Le sol est considéré plat ce qui fait que les deux pieds ont même altitude,
- les caractéristiques du sol, à savoir le coefficient de frottement entre le sol et les pieds du robot.

Le comportement à l'impact dépend donc de 6 paramètres.

Notre but est de rechercher un impact donnant un double support afin de pouvoir obtenir une phase de double support après celle de simple support, plutôt que d'obtenir une nouvelle phase de simple support comme considéré dans beaucoup d'études des bipèdes plans, voir GRIZZLE *et al.* [32], CHEVALLEREAU *et al.* [21] et Aoustin et Formal'sky [2] par exemple. D'autre part nous cherchons à éviter les comportements avec glissement.

Des études de l'impact pour des bipèdes ont déjà été faites. RUBANOVICH et FORMAL'SKII [69] et RUBANOVICH et FORMAL'SKII [70] déterminent mathématiquement les conditions donnant les différents comportements possibles pour différents systèmes mécaniques pouvant avoir deux contacts au sol. Dans RUBANOVICH et FORMAL'SKII [69] l'étude porte d'abord sur un compas sans articulations pour lequel il est prouvé formellement pour un coefficient de frottement infini que l'extrémité arrière décolle sauf pour un écartement suffisant des jambes où les deux extrémités restent au sol. Ensuite dans RUBANOVICH et FORMAL'SKII [70] l'étude est étendue au cas d'un compas avec une articulation aux hanches toujours pour un coefficient de frottement infini, et considérant que l'extrémité qui rentre en contact avec le sol le fait verticalement. Alors, il est montré qu'il existe des cas d'inconsistance. Le cas avec frottement est alors considéré et il existe alors des cas d'indétermination. Enfin il est montré que dans le cas d'un système avec un nombre arbitraire de corps et deux contacts, le comportement à l'impact peut être étudié par l'intermédiaire d'un système de 4 équations reliant les vitesses des extrémités en contact avec le sol et les réactions du sol, comme pour le cas du compas à 2 corps, et comme nous l'avons fait, voir le système (2.13).

Dans HURMUZLU [36] l'auteur utilise une méthode de visualisation pour déterminer les types de marche possibles pour un bipède plan. L'étude dans HURMUZLU [36] a été

faite dans le cadre d'une paramétrisation de la marche différente de la nôtre, ce qui lui donne un impact dépendant de 3 paramètres. Un tracé est donc fait des comportements obtenus après impact en fonction de ces 3 paramètres. Dans la thèse de GÉNOT [28] une étude des comportements après impact dans le cas d'un robot compas en fonction de la configuration, des vitesses et du coefficient de frottement du sol est également faite de manière graphique. Le comportement à l'impact dépend de 4 paramètres dans ce cas.

Pour déterminer le comportement après impact nous allons utiliser deux outils : d'abord comme HURMUZLU [36] un outil de visualisation permettant d'observer le comportement après impact en fonction de 2 paramètres parmi les 6 paramètres dont dépend l'impact, et un outil d'optimisation permettant de rechercher un jeu de paramètres permettant d'obtenir le double support. L'outil d'optimisation ne permet pas de donner de garanties quand à l'existence des impacts recherchés, mais c'est la seule possibilité simple sachant que l'outil de visualisation n'est utilisable que pour observer l'influence de 2 voire 3 paramètres, et que la détermination des conditions des différents comportements possibles de manière mathématique comme dans RUBANOVICH et FORMAL'SKII [70] est très difficile, la complexité des équations étant beaucoup plus grande dans notre cas.

Pour visualiser les comportements possibles, nous allons tracer pour une configuration donnée les comportements obtenus après l'impact en fonction du coefficient de frottement du sol et de la direction du vecteur vitesse de l'extrémité du pied rentrant en contact avec le sol.

### 2.4.2 Présentation de la méthode de tracé des comportements obtenus après impact

Pour l'impact algébrique, nous écrivons les équations d'impact en fonction des vitesses avant impact, pour les 12 comportements possibles présentés annexe C. Puis nous écrivons l'ensemble des inégalités associées à un comportement en fonction des vitesses avant impact. La vitesse avant impact  $V_2^-$  s'écrit (2.48).

$$V_2^- = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

où  $\theta$  est l'orientation du vecteur vitesse du pied qui rentre en contact avec le sol juste avant impact.

Nous recherchons alors le ou les intervalles sur  $\theta$  qui vérifie(nt) les inégalités associées à un comportement d'impact. Le calcul de cet intervalle sur  $\theta$  se fait pour une configuration donnée et un coefficient de frottement donné. Ensuite pour tracer les comportements possibles en fonction de  $\theta$ , et en fonction d'un paramètre de configuration ou du coefficient de frottement, nous parcourons un ensemble de valeurs discrètes du paramètre supplémentaire que nous étudions.

Pour l'impact différentiel, nous écrivons de même les équations d'impact en fonction des vitesses avant impact. En fonction de  $\theta$ , nous calculons le comportement obtenu au cours de la phase actuelle. Puis pour chacun des comportements possibles, nous déterminons les intervalles sur  $\theta$  pour lesquels la condition d'arrêt de la phase est la même, parmi les conditions (2.27), (2.28) et (2.29). Si c'est la condition de fin d'enfoncement du pied qui est rentré en contact avec le sol (2.29) qui est atteinte, alors l'impact différentiel est terminé et le comportement obtenu en fin d'impact est celui obtenu en fin de cette phase. Pour chacun des intervalles en  $\theta$  où une autre condition est atteinte, nous recommençons les mêmes étapes, à savoir la détermination des comportements au cours de la prochaine phase et les nouveaux sous intervalles en  $\theta$  qui ont une même condition de fin de phase. Nous avons donc un processus itératif que nous avons programmé de manière récursive. Au final nous obtenons un ensemble d'intervalles en  $\theta$  pour lesquels nous avons un même comportement en fin d'impact. Comme pour l'impact différentiel, ces calculs sont faits pour une configuration donnée, et un coefficient de frottement donné. Et pour faire un tracé des comportements obtenus en fin d'impact nous parcourons un ensemble de valeurs discrètes du paramètre supplémentaire que nous étudions.

### 2.4.3 Présentation de la méthode de recherche d'un impact donnant un double support par optimisation

Pour la recherche d'une configuration et d'un coefficient de frottement permettant d'obtenir un double support après impact, nous allons utiliser un programme d'optimisation minimisant un critère non linéaire sous des contraintes non linéaires. Nous avons utilisé pour cela la fonction *fmincon* de Matlab qui utilise un algorithme SQP (*Sequential Quadratic Programming*). Cet algorithme d'optimisation permet de trouver un minimum local d'un problème non linéaire. Si nous ne trouvons pas de double support possible, l'optimisation ne prouve pas qu'il n'en existe pas.

Nous avons considéré deux problèmes. D'abord nous avons cherché à minimiser le coefficient de frottement nécessaire pour pouvoir obtenir un double support. Dans ce cas le critère que nous avons cherché à minimiser est le coefficient de frottement. L'autre problème que nous avons considéré, une fois que nous avons constaté que des double supports étaient possibles, a été de rechercher des configurations les plus proches possibles de configurations de marche, tout en gardant un coefficient de frottement raisonnable. Le critère de ce problème, que nous cherchons à minimiser, est la distance entre la configuration recherchée et une configuration de marche. Nous considérons aussi une contrainte supplémentaire par rapport au problème d'optimisation précédent. Cette contrainte est que le frottement pour lequel le double support est possible ne doit pas dépasser une valeur maximale. Les autres contraintes communes aux deux problèmes que nous avons considérées sont d'abord des contraintes d'existence de la configuration telle que nous

l'avons définie avec les paramètres  $\alpha$ ,  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  et  $d$  la distance entre les pieds. Nous pourrions nous reporter à la section 3 où nous présentons ces contraintes plus en détail. Nous avons ensuite ajouté des contraintes qui nous semblaient évidentes pour une configuration de marche :

- le centre de gravité du robot doit être situé entre les pieds ce qui revient à considérer que le bipède a une configuration d'équilibre statique,
- le centre de gravité du robot doit être situé au dessus du niveau du sol,
- les hanches doivent être situées au dessus du niveau du sol
- le tronc doit être situé au dessus de l'horizontale

Nous avons ensuite considéré les contraintes pour l'obtention d'un double support après l'impact. Pour l'impact algébrique il s'agit dans le cas de l'impact de double support donné par les équations (2.49) des contraintes associées (2.50). L'équation algébrique d'impact donnant le double support (2.49) est obtenue à partir de (2.13) en considérant le non glissement et le non décollement pour les deux pieds (2.10) et (2.12).

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -V_2^- \end{bmatrix} = D^T A^{-1} D \begin{bmatrix} I_{R_1} \\ I_{R_2} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

$$\begin{cases} -f I_{R_1 z} \leq I_{R_1 x} \leq f I_{R_1 z} \\ -f I_{R_2 z} \leq I_{R_2 x} \leq f I_{R_2 z} \end{cases} \quad (2.50)$$

Pour le modèle différentiel, un double support est obtenu lorsque la dernière phase s'arrête avec toutes les vitesses des extrémités des jambes nulles. Ces conditions peuvent être obtenues lorsque la condition de fin d'impact (2.38) est vérifiée en même temps que d'autres conditions d'arrêt de phases (2.37) et (2.36). Un tel cas correspond à la frontière entre 2 zones de comportements différents, et il est possible que les 2 comportements qui entourent cette frontière donnant un double support ne soient pas des zones de double support. Par exemple il peut s'agir d'une frontière entre un glissement du pied avant dans un sens et dans l'autre sens avec le pied arrière fixe. Nous ne considérerons pas ces cas où la zone de double support se réduit à une frontière, car en pratique ces zones frontières sont très difficiles à obtenir du fait des erreurs de commande. Les cas où la zone de double support n'est pas réduite à une frontière s'obtiennent lorsque le pied arrière ne décolle pas ni ne glisse et le pied avant ne glisse pas au cours de la dernière phase de l'impact différentiel. Ce cas est donné par les équations de la dernière phase (2.51) avec les contraintes associées (2.52). Le système (2.51) est obtenu à partir de (2.30) en considérant le cas de non glissement et non décollement du pied 1 donné par (2.32), l'absence de rebond et de glissement pour le pied 2 donné par (2.34) et la condition de fin de l'impact (2.38).

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -V_{2z}^{k-1} \end{bmatrix} = D^T A^{-1} D \begin{bmatrix} I_{R_1}^k \\ I_{R_2}^k \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

$$\begin{cases} -f I_{R_1 z}^k \leq I_{R_1 x}^k \leq f I_{R_1 z}^k \\ -f I_{R_2 z}^k \leq I_{R_2 x}^k \leq f I_{R_2 z}^k \end{cases} \quad (2.52)$$

Il est à noter que la condition donnée pour le modèle différentiel est une condition seulement nécessaire, car il faut encore que l'état de début de la dernière phase puisse être obtenu. Nous nous contenterons dans les faits des conditions (2.51) et (2.52) car elles se sont avérées suffisantes pour obtenir un double support, comme nous le verrons dans les résultats de la recherche d'un double support.

Ces conditions d'obtention d'un double support sont très proches pour les deux modèles d'impact que nous avons utilisés. Cependant la condition de l'impact différentiel est plus contraignante car nous voyons qu'elle impose  $V_{2x}^{k-1} = 0$  alors que la condition de double support du modèle algébrique n'impose pas  $V_{2x}^- = 0$ . Un double support avec l'impact différentiel correspond donc pour l'impact algébrique au fait que le double support doit s'obtenir avec une orientation de la vitesse du pied rentrant en contact avec le sol avant impact dirigée verticalement, soit  $\theta = -90^\circ$ .

#### 2.4.4 Résultats et comparaison des modèles algébrique et différentiel pour le cas d'une configuration de marche

Nous avons ici étudié une configuration de marche que nous avons obtenue par la méthode de génération de trajectoires présentée section 3. Cette configuration est donnée figure 2.2. Nous allons donner les comportements obtenus en fonction de  $\theta$  l'orientation du vecteur vitesse juste avant impact du pied qui est rentré en contact avec le sol, et du coefficient de frottement entre le sol et le robot. Pour l'impact algébrique nous obtenons les comportements présentés figure 2.3 avec un zoom des zones sans décollement du pied arrière figure 2.4. Pour l'impact différentiel, nous obtenons les comportements présentés figure 2.5.

Nous pouvons constater que les résultats sont très proches pour les deux modèles d'impact. Cependant il y a des différences de comportements entre les deux modèles à l'interface entre les zones de glissement du pied avant dans le sens négatif et d'arrêt du glissement du pied avant. Ces zones se situent dans le demi plan inférieur qui correspond à une vitesse tangentielle d'arrivée du pied d'impact négative. Dans le cas de l'arrêt du glissement du pied avant, l'impact différentiel donne donc un changement de phase en cours d'impact, alors que le modèle algébrique donne pour comportement tout au

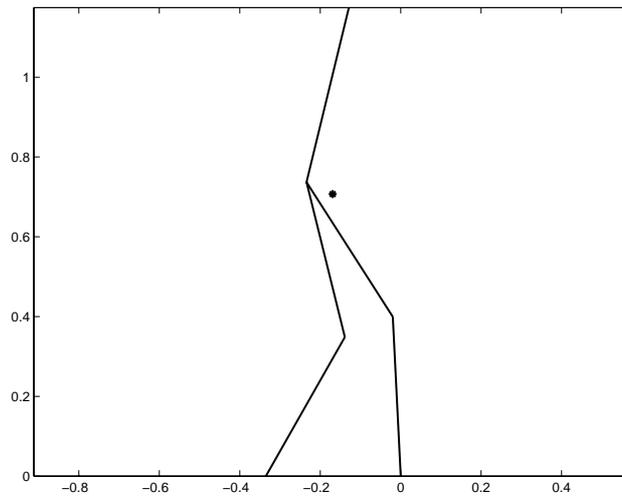


FIG. 2.2 – Un exemple de configuration de marche obtenue par optimisation. L'étoile représente le centre de gravité du bipède.

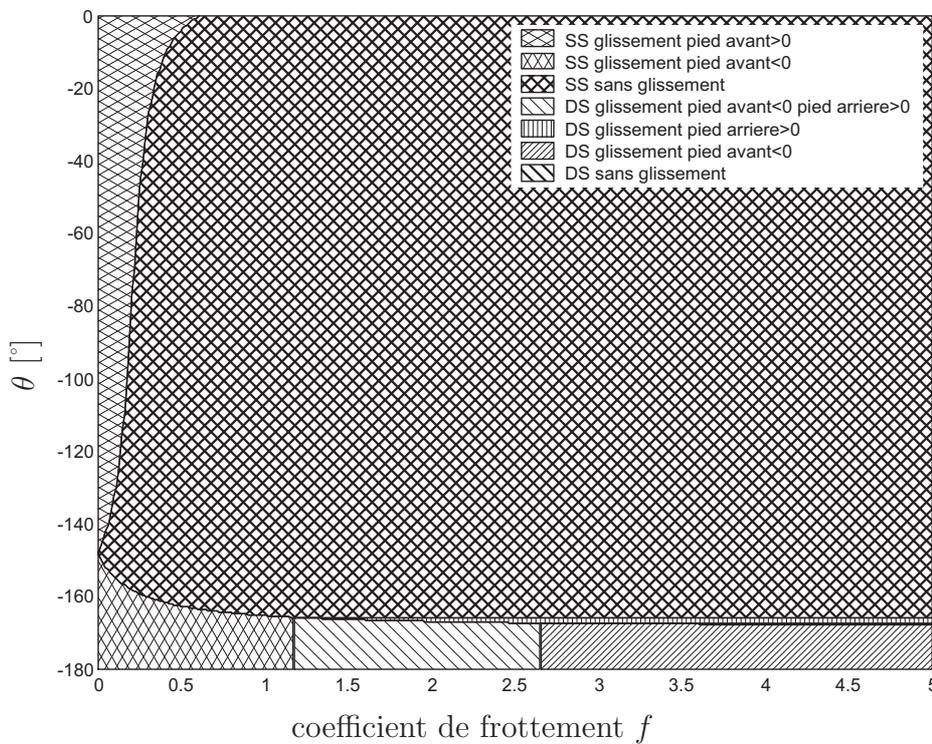


FIG. 2.3 – Comportements obtenus avec le modèle d'impact algébrique pour la configuration de marche.



FIG. 2.4 – Comportements obtenus avec le modèle d'impact algébrique pour la configuration de marche, zoom sur la zone de double support.

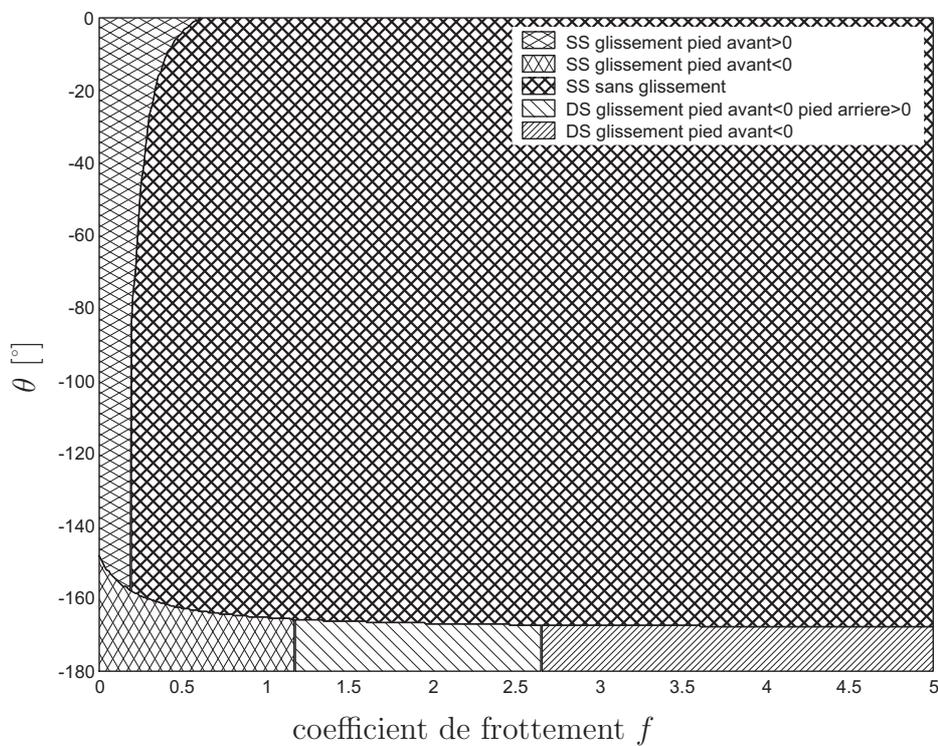


FIG. 2.5 – Comportements obtenus avec le modèle d'impact différentiel pour la configuration de marche.

long de l'impact celui de fin d'impact donc ici sans glissement du pied avant alors que le pied avant glissait en début d'impact. On voit donc pourquoi aux abords de l'arrêt du glissement du pied avant, le modèle algébrique prédit pour le pied arrière le même comportement que lorsqu'il n'y a pas arrêt du glissement du pied avant, alors que le modèle différentiel prédit le même comportement que lorsque la vitesse tangentielle du pied avant est positive. On observe en particulier que l'impact algébrique donne une phase de double support sans glissement après l'impact alors que le modèle différentiel donne une phase de simple support. Suite à la discussion au début de la section 2.3.1, nous pensons que l'impact différentiel est le plus correct lorsque les deux modèles d'impact prédisent des comportements différents. Le modèle algébrique prédit donc à tort la possibilité d'un double support après impact.

#### 2.4.5 Résultats pour le cas de la configuration minimisant le frottement permettant de donner un double support, dans le cas du modèle algébrique

Nous présentons maintenant les résultats des optimisations. Pour la recherche de la configuration donnant un double support avec un frottement le plus petit possible, pour l'impact algébrique, un résultat obtenu est celui présenté figure 2.6. Les comportements obtenus sont ceux présentés figure 2.7 pour le modèle d'impact algébrique et figure 2.8 pour le modèle d'impact différentiel. Le coefficient de frottement minimal pour obtenir un double support trouvé avec le modèle algébrique est de  $f = 0$ . Il faut cependant un coefficient plus élevé pour que la zone soit non réduite à une frontière. Comme pour la configuration de marche nous pouvons remarquer que le modèle d'impact algébrique prédit un double support possible alors que le modèle d'impact différentiel n'en prédit pas. La configuration trouvée par l'optimisation est donc une configuration donnant un double support pour le modèle algébrique justement quand cette prévision d'un double support est fautive, comme nous l'avons vu dans le cas de la configuration de marche.

#### 2.4.6 Résultats pour le cas de la configuration minimisant le frottement permettant de donner un double support, dans le cas du modèle différentiel

Pour la recherche de la configuration donnant un double support avec un frottement le plus petit possible, pour l'impact différentiel, un résultat obtenu est celui présenté figure 2.9. Les comportements obtenus sont ceux présentés figure 2.10 pour le modèle d'impact algébrique et figure 2.11 pour le modèle d'impact différentiel. La configuration obtenue est une configuration avec les jambes écartées au maximum avec la jambe rentrant en contact avec le sol pliée et le tronc à l'horizontale. Pour les deux modèles le coefficient de

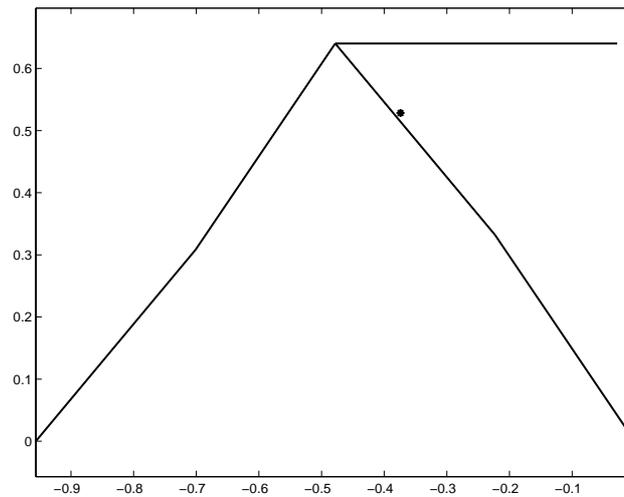


FIG. 2.6 – Configuration minimisant le coefficient de frottement nécessaire pour obtenir un double support avec l'impact algébrique. L'étoile représente le centre de gravité du bipède.

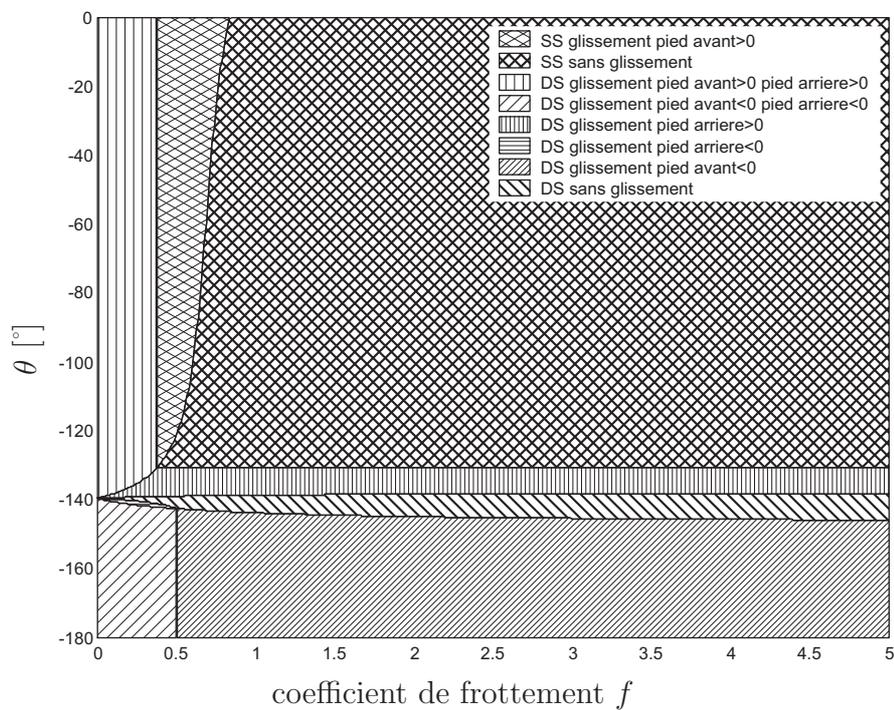


FIG. 2.7 – Comportements obtenus pour l'impact algébrique, dans le cas minimisant le coefficient de frottement nécessaire pour obtenir un double support avec l'impact algébrique.

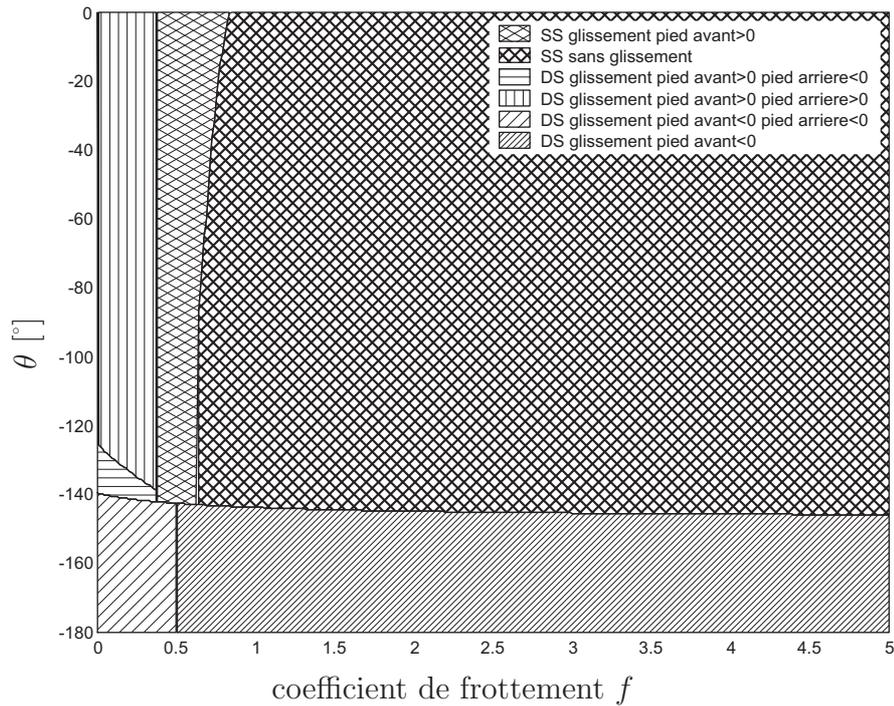


FIG. 2.8 – Comportements obtenus pour l'impact différentiel, dans le cas minimisant le coefficient de frottement nécessaire pour obtenir un double support avec l'impact algébrique.

frottement minimal permettant d'obtenir un double support est d'environ  $f = 0.4$ . Nous constatons ici que lorsqu'un double support s'obtient pour le modèle différentiel, nous en obtenons un également pour le modèle algébrique. Cela est dû au fait que les conditions nécessaires pour l'obtention d'un double support avec le modèle d'impact différentiel (2.51) et (2.52) sont des conditions suffisantes d'obtention d'un double support avec le modèle algébrique (2.49) et (2.50).

Il est également à remarquer que pour le cas de l'impact différentiel donné figure 2.11, correspondant à la configuration donnée figure 2.9, il y a une zone d'inconsistance représentée par la zone blanche sur la figure. Nous avons également constaté une zone d'indétermination qui ici n'est pas visible. Il y a non seulement indétermination, mais indétermination parmi une infinité de solutions possibles après impact. Ce phénomène est lié à une zone pour laquelle il y a une séquence infinie de phases au cours de l'impact, mais qui tend vers un point d'accumulation.

Pour les recherches du coefficient de frottement nécessaire minimal, nous avons constaté que plusieurs solutions étaient possibles lorsqu'on prenait des conditions initiales différentes, ou lorsqu'on relaxait les contraintes sur la configuration. Le problème d'optimisation possède ainsi des minimums locaux. Nous avons présenté ici le meilleur résultat de chaque optimisation qui vérifie les contraintes sur les configurations que nous nous étions fixées.

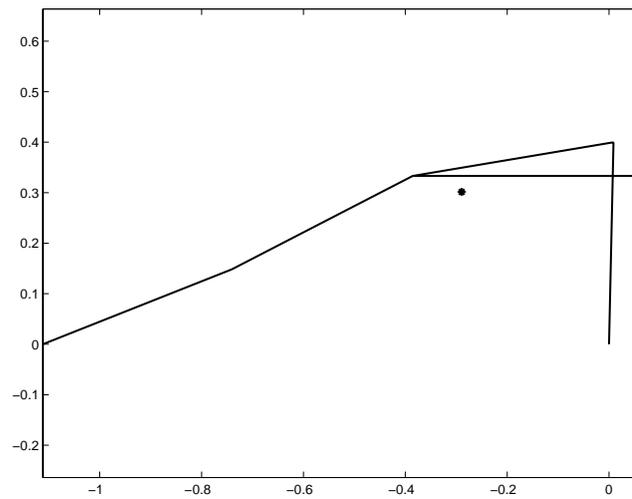


FIG. 2.9 – Configuration minimisant le coefficient de frottement nécessaire pour obtenir un double support avec l'impact différentiel. L'étoile représente le centre de gravité du bipède.

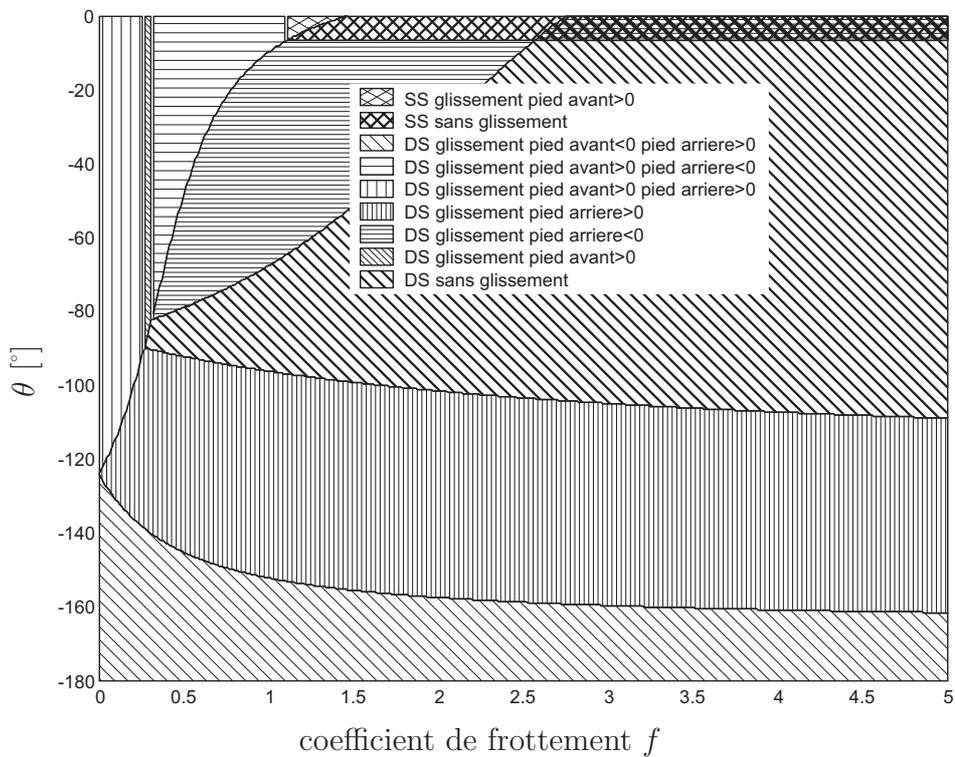


FIG. 2.10 – Comportements obtenus pour l'impact algébrique, dans le cas minimisant le coefficient de frottement nécessaire pour obtenir un double support avec l'impact différentiel.

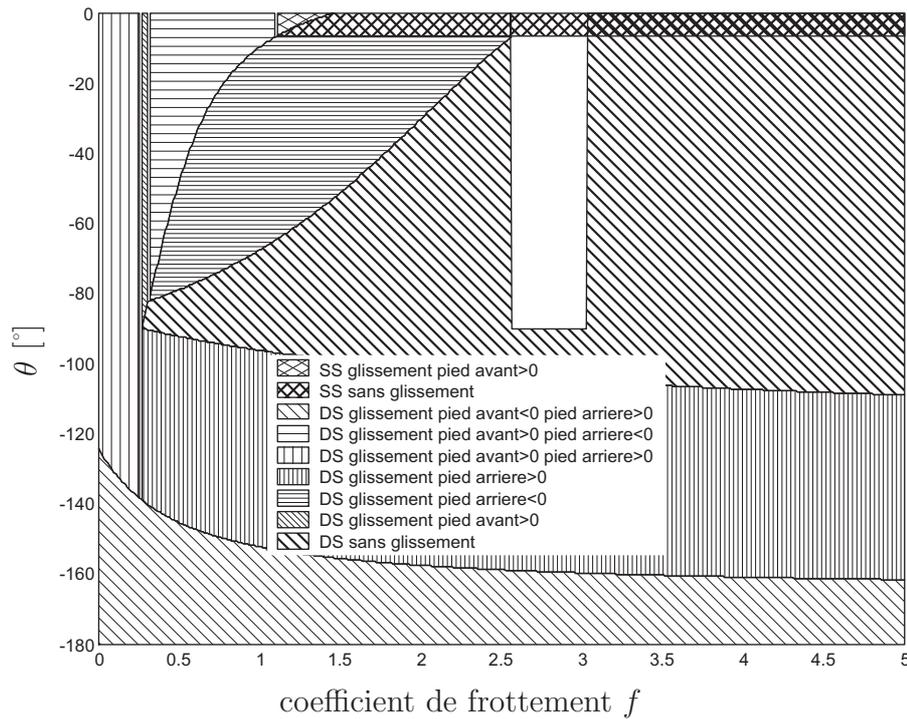


FIG. 2.11 – Comportements obtenus pour l'impact différentiel, dans le cas minimisant le coefficient de frottement nécessaire pour obtenir un double support avec l'impact différentiel.

### 2.4.7 Résultats pour le cas de la configuration la plus proche de la configuration de marche permettant de donner un double support pour $f = 1$ , dans le cas du modèle algébrique

Les résultats d'optimisation précédents nous ont montrés que des doubles supports sont possibles avec des coefficients de frottements courants, inférieurs à  $f = 0.6$ . Mais les configurations obtenues dans ces cas là ne sont pas des configurations possibles pour une marche. Nous présentons maintenant des résultats obtenus par optimisation où nous ne recherchons plus le frottement minimal nécessaire pour obtenir un double support mais la configuration la plus proche d'une configuration de marche. La condition sur le frottement est maintenant une limitation sur le coefficient de frottement admissible. Nous avons considéré une limite sur le coefficient de frottement nécessaire pour obtenir un double support de  $f_{lim} = 1$ , soit la contrainte sur le coefficient de frottement minimal pour obtenir un double support  $f_{min} < 1$ .

Dans le cas de l'optimisation du modèle d'impact algébrique, nous avons obtenu la configuration présentée figure 2.12 et les zones de comportement présentées figure 2.13. Nous donnons également les comportements prédits par le modèle d'impact différentiel

pour cette configuration figure 2.14.

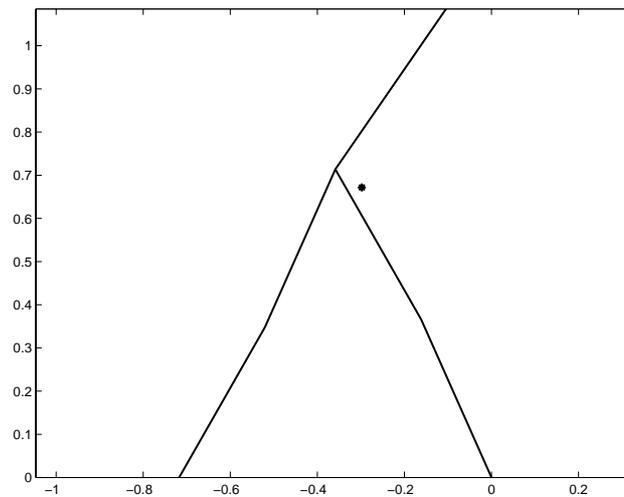


FIG. 2.12 – Configuration la plus proche de la configuration de marche présentée figure 2.2 et pour laquelle un double support est possible pour un coefficient de frottement de 1 avec le modèle algébrique. L'étoile représente le centre de gravité du bipède.

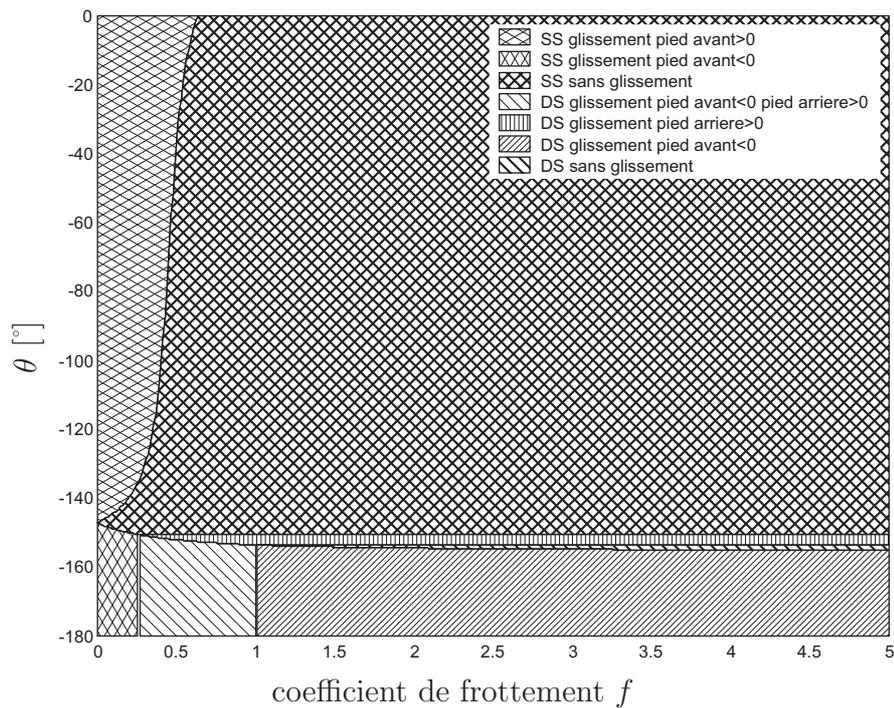


FIG. 2.13 – Comportements obtenus pour la configuration la plus proche de la configuration de marche présentée figure 2.2 et pour laquelle un double support est possible pour un coefficient de frottement de 1 avec le modèle algébrique.

La configuration obtenue avec l'impact algébrique pourrait presque être une configuration de marche si ce n'est que les jambes sont tendues, ce qui n'est pas du tout propice à une poussée sur la jambe arrière en double support. De plus l'impact différentiel ne

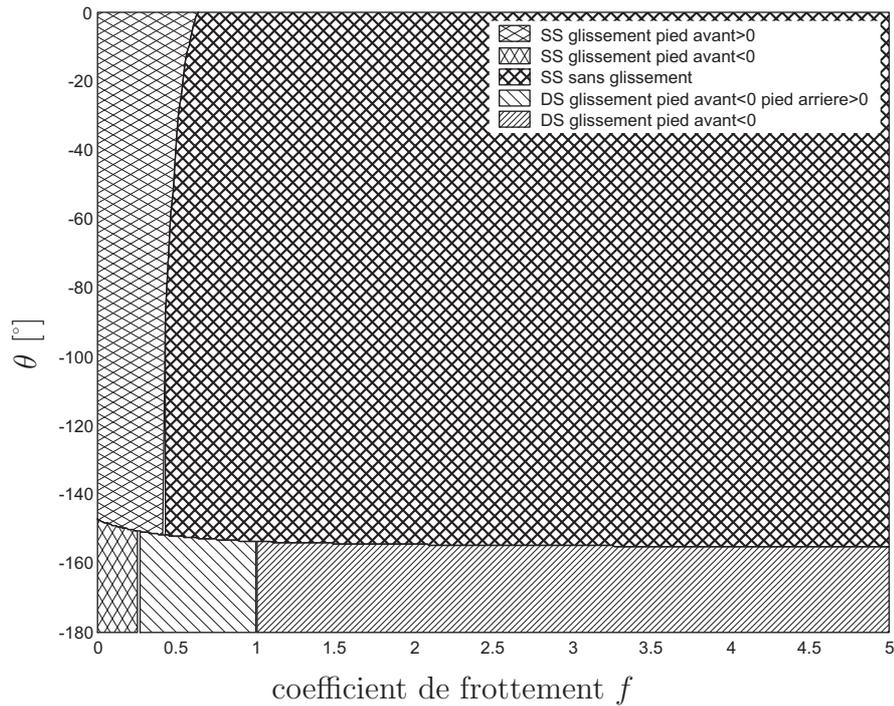


FIG. 2.14 – Comportements du modèle différentiel, obtenus pour la configuration la plus proche de la configuration de marche présentée figure 2.2 et pour laquelle un double support est possible pour un coefficient de frottement de 1 avec le modèle algébrique.

donne pas de double support dans ce cas, voir figure 2.14, sauf à la frontière entre la zone de double support avec glissement du pied avant et la zone de simple support sans glissement. Comme nous l'avons déjà évoqué précédemment, le modèle d'impact différentiel nous semble plus correct car il tient compte des changements de sens de glissement au cours de l'impact. La configuration trouvée ici n'est donc pas une configuration donnant un double support.

#### 2.4.8 Résultats pour le cas de la configuration la plus proche de la configuration de marche permettant de donner un double support pour $f = 1$ , dans le cas du modèle différentiel

Dans le cas de l'optimisation du modèle d'impact différentiel, nous avons obtenu la configuration présentée figure 2.15 et les zones de comportement présentées figure 2.16.

Pour le résultat le plus proche de la marche que nous avons obtenu pour l'impact différentiel, il s'avère que les conditions nécessaires (2.51) et (2.52) ne sont pas suffisantes et que le double support n'est même pas possible sur une frontière, voire figure 2.16. Pour vérifier d'autres conditions, la configuration serait encore plus éloignée d'une configuration

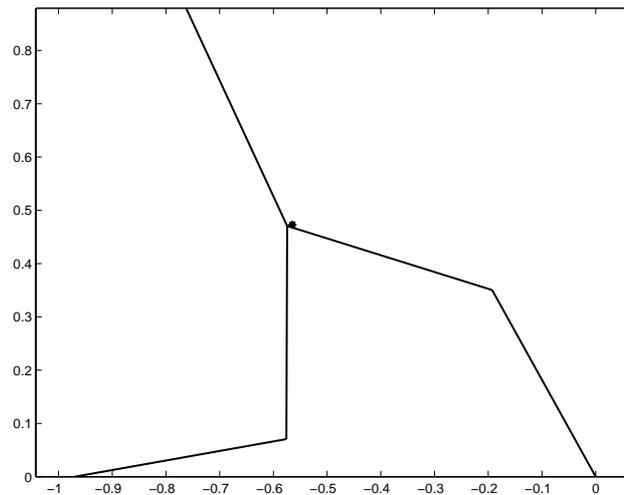


FIG. 2.15 – Configuration la plus proche de la configuration de marche présentée figure 2.2 et pour laquelle un double support est possible pour un coefficient de frottement de 1 avec le modèle différentiel. L'étoile représente le centre de gravité du bipède.

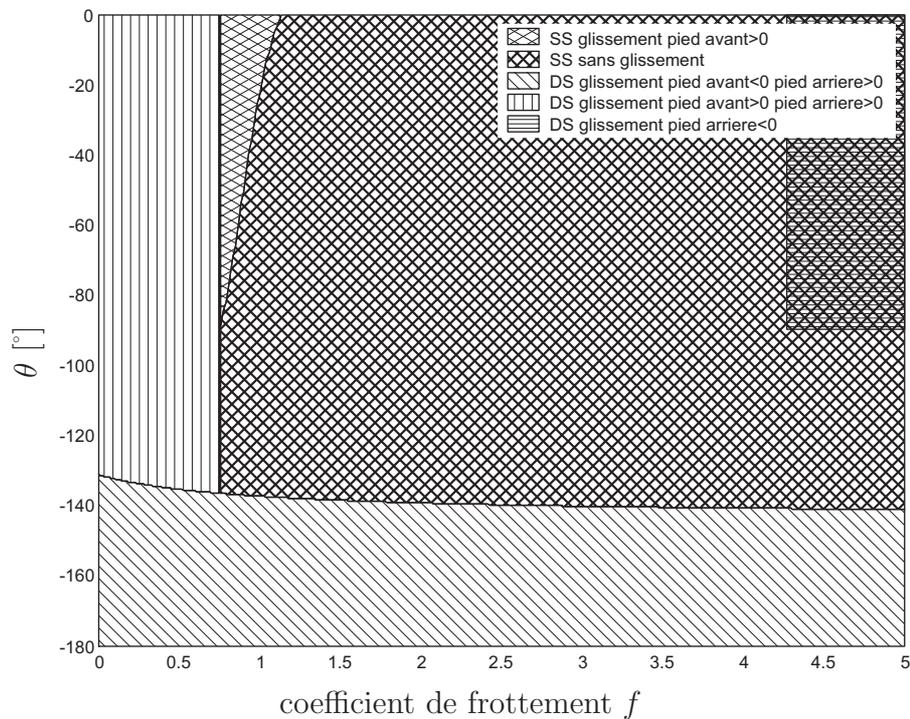


FIG. 2.16 – Comportements obtenus pour la configuration la plus proche de la configuration de marche présentée figure 2.2 et pour laquelle un double support est possible pour un coefficient de frottement de 1 avec le modèle différentiel.

de marche. Nous en concluons donc que le double support n'est pas possible pour une configuration de marche pour des zones non réduites à des frontières dans le cas de l'impact différentiel. Nous ne considérons pas les zones frontières donnant un double support après impact car en pratique il serait très dur d'atteindre ces frontières, du fait des erreurs de commande.

Nous constatons que la configuration obtenue pour l'impact algébrique présentée figure 2.12 était plus proche de la configuration de marche présentée figure 2.2 que pour l'impact différentiel présentée figure 2.15. Cela signifie qu'il est plus facile d'obtenir un double support avec l'impact algébrique, comme nous l'avons déjà remarqué avec les conditions de double support (2.51) et (2.52) pour l'impact différentiel et (2.49) et (2.50) pour l'impact algébrique. Cependant nous ne considérerons que les résultats du modèle différentiel, celui-ci étant plus correct.

Il est à remarquer que les modèles que nous venons d'étudier peuvent présenter des cas d'indétermination et d'inconsistance.

## 2.5 Conclusion et propositions

Nous avons présenté et étudié deux modèles, le modèle algébrique et le modèle différentiel. Ces deux modèles ne prédisent pas tout le temps le même comportement, comme mis en évidence dans l'article de KELLER [44], et constaté dans l'article de HURMUZLU et MARGHITU [39]. Le modèle différentiel semble plus correct car il tient compte des changements de vitesse tangentielle au cours de l'impact, contrairement au modèle algébrique. Bien que ces deux modèles donnent souvent les mêmes comportements après l'impact, nous avons remarqué que dans certains cas le modèle algébrique prédit un double support alors que le modèle différentiel n'en prédit pas. Pour une marche avec double support avec impact, il faut donc utiliser le modèle différentiel.

Nous avons donc seulement considéré le modèle d'impact différentiel pour l'étude des possibilités de double support après impact. Nous n'avons pas trouvé de configuration de marche pouvant donner un double support après impact pour un coefficient de frottement de  $f = 1$ , sauf sur certaines frontières entre deux comportements autres que le double support sans glissement. Nous n'avons pas choisi de considérer une marche avec des impacts ayant lieu sur des frontières donnant des double supports, car ces frontières sont sensibles en fonction des paramètres du modèle, et il ne nous apparaît pas de manière évidente qu'il existe en réalité une zone localement autour de cette frontière qui donnerait des doubles supports. Nous avons plutôt choisi de considérer une marche sans impact, c'est-à-dire que la vitesse du pied qui rentre en contact avec le sol est nulle. Ce cas ne pourra pas non plus être atteint exactement, mais nous comptons sur le fait que pour de petites erreurs, l'impact sera suffisamment faible pour pouvoir encore considérer qu'il n'y a pas d'impact. En effet nous avons considéré un impact entre solides rigides, mais

en réalité il y a toujours un peu d'élasticité, qui nous pensons doit permettre de continuer à obtenir un non décollement du pied arrière alors que le modèle rigide prédit un décollement du pied arrière, et ce pour un impact suffisamment faible.

Il est à remarquer qu'un autre cas d'obtention d'un double support après impact est l'obtention d'une accumulation d'impacts de simple support successivement sur le pied avant et sur le pied arrière, dont l'intensité diminue au cours des impacts pour tendre vers un impact d'intensité nulle, et ce en un temps fini. Un tel cas fait évidemment intervenir des phases dynamiques entre les phases d'impact, et une étude théorique telle que nous l'avons menée n'est alors pas possible. La stabilité de l'obtention d'un double support dépend alors de la commande appliquée au robot. Pour étudier la stabilité de l'obtention d'un double support, il est notamment possible d'utiliser une fonction de Lyapunov comme dans BROGLIATO *et al.* [11], BOURGEOT et BROGLIATO [7] et CHAREYRON et WIEBER [14].

Les résultats de l'étude de l'impact avec des pieds dans l'annexe D ainsi que les résultats de l'étude de l'impact sans pieds donnant des doubles supports très difficilement nous ont amenés à penser que les hypothèses du modèle d'impact que nous utilisons n'étaient pas tout à fait correctes. En effet pour l'impact considéré, les efforts autres que ceux générés par les variations de vitesse instantanée ne sont pas pris en compte. Or pour des impacts de systèmes ayant déjà des contacts au sol, le système subit des efforts au niveau des contacts au sol, qui peuvent être non négligeables par rapport aux effets de l'impact si celui-ci est suffisamment faible. Ceci nous amène à penser que les efforts des contacts existant déjà au moment de l'impact ne sont pas tout le temps négligeables devant les efforts dus à l'impact. Un modèle de contact continu permet de tenir compte de l'effet de tous les efforts lorsqu'un nouveau contact a lieu. Pour tenir compte des efforts juste avant impact tout en gardant un modèle ayant les caractéristiques d'un modèle d'impact rigide, nous proposons de repartir de la démonstration mathématique de l'impact différentiel établie par KELLER [44]. Il considère deux temps, l'un relatif aux dynamiques en dehors de l'impact, temps noté  $t^*$ , et l'autre relatif aux dynamiques en cours d'impact, temps noté  $t$ . Il fait également la distinction entre des grandeurs qui varient rapidement, fonctions du temps  $t$ , et celles qui varient lentement, fonctions du temps  $t^*$ , au cours de l'impact. Les vitesses et efforts de contact sont considérés comme variants rapidement. Les positions et les efforts autres que ceux de contact sont considérés comme variants lentement. De plus les efforts de contact dus à l'impact sont considérés inversement proportionnel à la durée de l'impact  $t_c$ , afin qu'ils aient un effet significatif en cours d'impact. Nous avons donc dans le temps relatif aux dynamiques en dehors de l'impact la relation des dynamiques de l'impact (2.53) pour notre robot.

$$\begin{aligned}
A(q(t^*)) \frac{d\dot{X}(t)}{dt^*} + C(q(t^*), \dot{q}(t)) \\
+ G(X(t^*)) = D_\Gamma \Gamma(t^*) \\
+ \frac{1}{t_c} \left[ D_1(q(t^*))^T R_1(t) + D_2(q(t^*))^T R_2(t) \right]
\end{aligned} \tag{2.53}$$

La relation entre le temps relatif à la phase d'impact  $t$  et le temps relatif aux dynamiques en dehors de l'impact  $t^*$  est donné par  $t = t^*/t_c$ . Ainsi en cours d'impact les dynamiques peuvent être mises sous la forme (2.54).

$$\begin{aligned}
A(q(t_c t)) \frac{d\dot{X}(t)}{dt} + t_c [C(q(t_c t), \dot{q}(t)) + G(X(t_c t))] = t_c [D_\Gamma \Gamma(t_c t)] \\
+ D_1(q(t_c t))^T R_1(t) \\
+ D_2(q(t_c t))^T R_2(t)
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Ainsi lorsque la rigidité de l'impact tend vers l'infini et donc que la durée de l'impact devient nulle, nous obtenons l'équation des dynamiques de l'impact différentiel (2.14). De plus nous obtenons que les positions et les efforts autres que ceux de contact sont constants en cours d'impact puisque  $t_c t$  a tendu vers 0.

Nous avons constaté que ce modèle complètement rigide, où les efforts autres que ceux dus à l'impact ne sont pas pris en compte, n'est pas complètement valable dans le cas de systèmes possédant plusieurs contacts unilatéraux au moment de l'impact. Nous proposons ici de ne pas faire tendre la durée de l'impact  $t_c$  vers 0 mais de considérer que cette durée est suffisamment petite pour que les positions et efforts autres que ceux de contact soient constants, et que du point de vue des dynamiques en dehors de l'impact, la durée de l'impact soit infinitésimale. Nous utilisons donc directement le modèle (2.54). Par rapport aux autres modèles d'impact présentés dans cette thèse, il est nécessaire de connaître la durée de l'impact  $t_c$ . Celle-ci peut être déterminée relativement facilement expérimentalement. Contrairement au modèle différentiel, il n'est pas possible d'intégrer analytiquement les équations de ce modèle d'impact. En effet, le terme des effets de Coriolis et centrifuges, qui disparaît dans le modèle différentiel, est non linéaire. Dans le cas des robots marcheurs, il serait peut-être possible de négliger ce terme face aux effets dus à la gravité. Une autre difficulté est la prise en compte des frottements dans les articulations.

Les avantages d'un tel modèle par rapport à un modèle continu sont les mêmes que ceux d'un modèle algébrique d'impact. Les dynamiques de l'impact, très rapides, sont séparées des dynamiques en dehors de l'impact, plus lentes, plutôt que de simuler les dynamiques lentes et rapides en même temps. Il est également possible d'étudier l'impact indépendamment des dynamiques continues, bien que cette étude soit plus difficile que

celle menée dans cette thèse sur les modèles algébrique et différentiel.

La prise en compte des effets autres que ceux de l'impact aura peu d'effet sur le comportement au point de nouveau contact, les efforts y étant nuls juste avant impact. Ainsi pour les systèmes n'ayant pas des contacts existants avant impact, la prise en compte des effets autres que ceux de l'impact semble avoir moins d'importance. Par contre pour les contacts qui avaient lieu avant impact, la prise en compte des effets autres que ceux de l'impact jouera un rôle plus important, puisque des efforts ont lieu sur ces contacts juste avant impact. Il est également important de remarquer que le rôle relatif des effets autres que ceux dus à l'impact seront d'autant plus importants que l'impact sera faible. Nous avons vu que, pour les impacts algébriques et différentiels, seule la direction  $\theta$  de la vitesse de l'extrémité du pied avant impact rentrant en collision avait un effet sur le comportement obtenu après impact, et non l'amplitude de cette vitesse. Avec ce nouveau modèle, l'amplitude de la vitesse du pied avant impact a maintenant une influence sur le comportement obtenu après impact.

Si nous considérons maintenant le cas de l'impact d'un bipède avec des pieds, nous avons vu en annexe D que des doubles supports ne sont pas possibles si l'axe cheville-extrémité du pied arrière n'est pas dans le cône de frottement. Or le bipède est en appui sur la jambe arrière juste avant l'impact. Si nous supposons un impact suffisamment faible, les effets dus à l'impact vont être suffisamment faibles relativement aux effets dynamiques et de gravité, et nous obtiendrons pour le pied arrière le comportement que nous avons juste avant impact. Dans notre cas nous obtiendrons donc un non décollement et non glissement du pied arrière. Contrairement aux résultats présentés section D.3.3 et D.3.4, ce non glissement et non décollement s'obtiendra quelque soit l'orientation de l'axe cheville-extrémité du pied par rapport à l'horizontale, et non seulement pour des orientations de cet axe dans le cône de frottement.

Cette caractéristique de l'impact est également valable dans le cas du bipède sans pieds. Si l'impact est suffisamment faible, les effets de l'impact ne seront plus prépondérants, le pied arrière aura donc le comportement qu'il avait juste avant l'impact. Ces considérations justifient le choix de considérer une marche du bipède sans pieds en évitant l'impact. En effet, si des erreurs entraînent qu'un impact a lieu, localement autour du mouvement de référence l'impact sera suffisamment faible pour que les effets dus à l'impact sur le pied arrière n'entraînent pas de décollement ou de glissement.



# Chapitre 3

## Génération de trajectoires par optimisation

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>80</b>
<b>3.2</b>	<b>Problème d'optimisation considéré</b>	<b>83</b>
3.2.1	Paramétrisation du mouvement de référence	84
3.2.2	Critères	95
3.2.3	Contraintes	96
3.2.4	Présentation de la hiérarchisation des contraintes et réduction de la hiérarchisation des contraintes	103
<b>3.3</b>	<b>Simulation du mouvement de référence</b>	<b>107</b>
3.3.1	Calculs préliminaires	107
3.3.2	Simulation en phase de simple support	108
3.3.3	Simulation en phase de double support	110
<b>3.4</b>	<b>Méthode d'optimisation</b>	<b>118</b>
3.4.1	Méthode d'optimisation en utilisant <i>fsqp</i>	120
3.4.2	Méthode d'optimisation en utilisant une méthode SQP classique	121
<b>3.5</b>	<b>Calcul du gradient du critère et des contraintes</b>	<b>126</b>
3.5.1	Gradient des conditions aux limites et des polynômes	127
3.5.2	Gradient des dynamiques de zéro en simple support	133
3.5.3	Gradient des couples et réactions du sol en simple support	134
3.5.4	Gradient des couples et réactions du sol en double support	135
3.5.5	Gradient des critères	139
3.5.6	Gradient des contraintes	142
<b>3.6</b>	<b>Résultats</b>	<b>144</b>
3.6.1	Quelques considérations pratiques	144
3.6.2	Présentation de mouvements optimaux obtenus	145

---

3.6.3	Présentation des critères en fonction de la vitesse d'avance . . .	146
3.6.4	Commentaires . . . . .	156
<b>3.7</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>160</b>

---

## 3.1 Introduction

Dans la littérature, de nombreuses méthodes existent pour définir le mouvement d'un système. Si le système est peu ou pas contraint, et complètement actionné, il n'est pas nécessaire de se poser le problème de la vérification des contraintes, et le problème de génération de mouvement peut se résumer à définir une trajectoire allant d'un point de départ à un point d'arrivée. Ensuite si le système est complètement actionné et n'est pas trop contraint, il peut être possible de considérer de nouveaux paramètres pour lesquels ces contraintes sont linéaires. Il est alors relativement simple de choisir la trajectoire des paramètres bornés de telle sorte à ce que ces paramètres vérifient leurs bornes. Mais si le système n'est pas complètement actionné ou qu'il est très contraint, le problème de la génération de mouvements est un problème difficile. De plus, souvent on veut chercher le mouvement qui minimise un critère. La plupart du temps ce critère sera un critère d'énergie dépensée au cours du mouvement, de rapidité du mouvement, ou de stabilité du mouvement.

De nombreuses méthodes de génération de mouvements existent pour de tels problèmes. Nous pourrions nous référer aux thèses de WIEBER [82], CHESSE [17], PERRIN [65], MURARO [62], KERAMANE [45], ROUSSEL [68], CABODEVILA [12] qui traitent de la génération de mouvements. Nous présenterons aussi ici quelques travaux sur la génération de mouvements.

Nous pouvons séparer les méthodes de générations de mouvements en 3 grandes familles. Les premières méthodes consistent en une recherche de mouvements balistiques de marche cyclique, en résolvant un problème aux conditions limites ou *Boundary Value Problem*. Les mouvements balistiques obtenus peuvent ensuite servir de base à des mouvements pour le robot actionné. On peut citer le travail de MCGEER [56] qui a étudié la marche passive sur un plan incliné, qui permet de fournir l'énergie dissipée lors des impacts à partir de l'énergie perdue lors de la descente. MCGEER [56] y a même étudié la marche passive avec des genoux. On peut également citer COLLINS *et al.* [22] qui ont construit un robot passif ayant des mouvements en 3 dimensions. KERAMANE [45] a étudié la marche passive d'un robot compas également sur un plan incliné. Par une commande il augmente le domaine d'attraction des mouvements de marches cycliques et permet également au robot de marcher à l'horizontale et sur des plan inclinés montant. PERRIN [65] obtient des mouvements optimaux de marche pour un quadrupède composés de phases balistiques et de phases d'actionnement impulsives.

La seconde famille de méthodes consiste en la recherche de mouvements de marche par des méthodes de commande optimale. Nous pouvons citer les travaux de HARDT [33] qui utilise le programme de commande optimale numérique DIRCOL écrit par VON STRYK [76] pour générer des mouvements optimaux de marche pour un bipède. DIRCOL transforme le problème de commande optimale en un problème d'optimisation quadratique résolu avec le programme d'optimisation NPSOL écrit par GILL *et al.* [26]. DIRCOL utilise une méthode de collocation, c'est-à-dire que les variables d'état et de commande sont approximées par des séquences de polynômes. CHESSE [17] dans sa thèse obtient des mouvements de référence optimaux par le principe du maximum de Pontryagin pour les prototypes Rabbit et BIP. Ces problèmes sont résolus par une méthode d'intégration numérique aux deux bouts. Bien que la résolution numérique de tels problèmes dans le cas des robots marcheurs permet de trouver une solution au problème de génération de mouvement peu simplifiée, elle est peu robuste et la convergence est difficilement obtenue. De plus les configurations de début et de fin de phases ne sont pas optimisées, seuls les mouvements pour aller d'un état à l'autre le sont. On peut enfin citer le travail de ROUSSEL [68] qui discrétise les équations de la dynamique du système et cherche à déterminer avec un programme d'optimisation les valeurs de la commande discrétisée par morceaux.

La troisième famille de méthodes de génération de mouvements consiste à définir le mouvement de référence avec des fonctions paramétrées, puis parfois de déterminer par optimisation un jeu de paramètres optimal. Le problème de l'optimisation est donc sous-optimal, mais comme les méthodes précédentes, il s'agit d'une discrétisation du problème pour pouvoir le résoudre numériquement. En augmentant le nombre de paramètres de la discrétisation de manière judicieuse la solution du problème approché doit aussi tendre vers la solution du problème continu. Notons qu'alors les méthodes à base de commande optimale proposées par HARDT [33] et ROUSSEL [68] qui résolvent numériquement le problème par une discrétisation des équations de la dynamique, et les méthodes basées sur une définition des mouvements par des fonctions paramétrées, bien que partant d'idées différentes, sont très proches sur le problème finalement à résoudre par optimisation. Les différents travaux de génération de mouvements à base de fonctions paramétrées peuvent se différencier selon le choix des variables paramétrées. Il peut s'agir des variables articulaires comme dans CABODEVILA [12], MURARO [62], SAIDOUNI et BESSONNET [71], CHEVALLEREAU et Aoustin [20] et GRISHIN *et al.* [31], de variables cartésiennes comme dans MU et WU [61], HUANG *et al.* [35], CHANNON *et al.* [13] et HURMUZLU [36], ou des entrées de commande comme il est fait dans ROUSSEL [68] mais pas dans le cas de fonctions paramétrées. Ensuite différents types de fonctions peuvent être utilisés, comme des polynômes dans MURARO [62], SAIDOUNI et BESSONNET [71], CHEVALLEREAU et Aoustin [20], GRISHIN *et al.* [31], CHANNON *et al.* [13], HURMUZLU [36], HUANG *et al.* [35] et MU et WU [61], des fonctions trigonométriques comme dans CABODEVILA [12]. Pour rechercher les mouvements optimaux, différentes méthodes d'optimisation ont été

utilisées comme des méthodes stochastiques de recuit simulé ou algorithmes génétiques, CABODEVILA [12], des méthodes SQP (*sequential quadratic programming*), MURARO [62], SAIDOUNI et BESSONNET [71], CHEVALLEREAU et Aoustin [20], CHANNON *et al.* [13]. HURMUZLU [36], MU et WU [61] et HUANG *et al.* [35] n'utilisent pas d'optimisation, et simulent les mouvements pour différentes valeurs des paramètres pour vérifier a posteriori s'ils vérifient les contraintes de contact au sol, la paramétrisation qu'ils utilisent se veut avoir un sens physique à la différence des autres études paramétriques.

On peut encore citer d'autres méthodes de génération de mouvements de marche qui se caractérisent plus par la volonté de pouvoir générer les mouvements en ligne de manière réactive. Dans KAJITA *et al.* [41] et KAJITA *et al.* [40] les auteurs définissent le moment d'inertie et l'accélération du centre de gravité du robot de telle sorte à ce que la contrainte du ZMP soit vérifiée. Le mouvement des paramètres de configuration du robot sont définis les plus proches de leur mouvement de référence en suivant exactement l'évolution du moment d'inertie et l'accélération du centre de gravité de référence. Cette méthode permet de respecter exactement la contrainte du ZMP pour la marche générée, mais le mouvement des autres paramètres pourrait atteindre les butées, et même ne pas être stable. Dans la thèse de AZEVEDO [3] l'intérêt est porté vers la commande prédictive pour la marche. Cette méthode évite en fait la génération de mouvements. Le mouvement émerge de la définition des contraintes avec la recherche par optimisation d'un mouvement vérifiant les contraintes sur un horizon. PRATT et PRATT [67] définissent un mouvement de référence en ayant identifié intuitivement les caractéristiques importantes de la marche. Une modification en ligne des paramètres intuitifs des mouvements est également faite pour obtenir la stabilité.

L'ensemble des méthodes de détermination de mouvements hors ligne ne permettent d'obtenir qu'un nombre fini de mouvements de références avec des caractéristiques données. Cela ne permet pas de tenir compte de toutes les situations de marche que peut rencontrer un robot bipède. Cependant des méthodes ont été proposées pour pouvoir au moins commuter de manière continue entre les mouvements de marche obtenus. Nous pouvons à ce propos citer le travail de WESTERVELT et GRIZZLE [80]. D'autres définissent les trajectoires en fonction d'un paramètre qui peut varier de manière continue à partir d'un ensemble discret de trajectoires variant en fonction de ce paramètre, proposé par WIEBER [82] et mis en application par WIEBER et CHEVALLEREAU [83] et CHEVALLEREAU et ADOUANE [19].

Nous nous intéressons ici à une méthode paramétrique de génération de mouvements. Nous définissons le mouvement des variables articulaires comme des polynômes. Nous présenterons en section 3.2 le problème d'optimisation considéré, à savoir les critères que nous avons cherché à optimiser, les contraintes que nous avons considérées, et les paramètres d'optimisation que nous avons choisis. Nous verrons notamment que le problème d'optimisation posé rigoureusement montre que la définition du critère et de certaines contraintes

dépendent eux-mêmes de la vérification d'autres contraintes, et que nous avons en quelque sorte un problème en cascade. Nous verrons ensuite comment nous avons calculé les critères et les contraintes, section 3.3. Pour résoudre le problème de génération de mouvement optimal, nous avons choisi d'utiliser une méthode d'optimisation SQP *Sequential Quadratic Programming* ou méthode de programmation quadratique séquentielle. Au cours de telles optimisations, les contraintes peuvent être temporairement violées. Or notre problème d'optimisation possède la propriété que la définition du critère et des contraintes est en cascade, ce qui interdit la violation de certaines contraintes pour que le critère soit défini. Nous avons donc été amené à adapter cette méthode d'optimisation pour tenir compte de la spécificité de notre problème. Nous présenterons cela en section 3.4. Pour améliorer la convergence du programme d'optimisation, nous avons calculé le gradient analytique du critère et des contraintes, qui est utilisé par l'algorithme d'optimisation que nous utilisons. En effet, dans le cas où le gradient n'est pas fourni, l'approximation de celui-ci est faite par différence finie, ce qui entraîne que le problème résolu en cours d'optimisation peut être mal conditionné, d'où une convergence moins bonne. Un autre avantage du calcul explicite du gradient est que le temps d'optimisation est réduit, vu que la détermination par différence finie du gradient est coûteuse. Nous présenterons les étapes du calcul des gradients en section 3.5. Enfin en section 3.6 nous présenterons les mouvements optimaux que nous avons obtenus ainsi que des comparaisons avec d'autres travaux de génération de mouvement pour le même bipède.

## 3.2 Problème d'optimisation considéré

Nous présentons ici le problème à résoudre par optimisation pour générer un mouvement de marche optimal. Le problème d'optimisation non linéaire sous contraintes non linéaires généralement considéré peut s'écrire sous la forme générale (3.1).

$$\begin{aligned} \min_p f(p) \\ g_i(p) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \tag{3.1}$$

Où  $p$  représente les paramètres du problème,  $f(p)$  est le critère à minimiser et  $g_i(p) \leq 0$  sont les contraintes à vérifier et  $n$  est le nombre de contraintes.

Nous commençons par présenter la paramétrisation du problème section 3.2.1. Nous verrons comment nous avons défini l'évolution des variables articulaires, quelles sont les dynamiques de zéro obtenues pendant la phase de simple support sous-actionnée, et quel jeu de paramètres d'optimisation  $p$  nous avons considéré. Les critères que nous avons considérés sont présentés en section 3.2.2. Nous présenterons les contraintes sur le mouvement de marche en section 3.2.3. Nous verrons notamment que parmi ces contraintes,

certaines doivent être vérifiées pour que le critère et d'autres contraintes soient définies. Ainsi nous classerons en section 3.2.4 l'ensemble des contraintes selon l'enchaînement dans lequel elles doivent être vérifiées pour qu'il n'y ait pas de problème de définition, et nous poserons alors le nouveau problème d'optimisation obtenu. Nous verrons donc que notre problème d'optimisation est plus spécifique que celui général donné par (3.1) et est ainsi plus difficile à résoudre.

### 3.2.1 Paramétrisation du mouvement de référence

Nous considérons une marche constituée d'une phase de simple support, d'un impact et d'une phase de double support. Nous définissons l'évolution des variables articulaires comme des polynômes. Du fait du sous-actionnement, nous définissons les variables articulaires actionnées en fonction du paramètre  $\alpha$  qui n'est pas actionné. Nous distinguons alors la définition pour les phases de simple support en section 3.2.1.1 et double support en section 3.2.1.2, la première étant sous-actionnée et la deuxième au contraire étant sur-actionnée. Nous présentons en section 3.2.1.3 les dynamiques de zéro qui découlent de la définition du mouvement en simple support. Puis nous avons choisi de définir les polynômes à partir des conditions aux limites des phases. En considérant de plus que le mouvement est cyclique et qu'il y a des relations entre le début et la fin de chaque phase, nous obtenons un jeu de paramètres d'optimisation réduit que nous présenterons en section 3.2.1.4. Enfin nous détaillerons le calcul des coefficients des polynômes à partir du jeu de paramètres d'optimisation en section 3.2.1.5.

#### 3.2.1.1 Paramétrisation en simple support

Durant la phase de simple support nous définissons l'évolution des 4 variables articulaires  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$  et  $\delta_4$  comme des polynômes en  $\alpha$  avec  $\alpha$  défini figure 1.3 comme étant l'angle représentant la direction du tibia de la jambe 1 par rapport à la verticale. Cette méthode permet malgré le sous-actionnement de définir l'ensemble des configurations du bipède sans avoir à considérer les dynamiques de zéro (voir en section 3.2.1.3 pour une définition des dynamiques de zéro). Par contre par la suite, pour connaître à quelle vitesse l'ensemble de ces configurations est parcourues, il sera nécessaire de tenir compte des dynamiques de zéro. Pour la phase de simple support, nous avons choisi de définir les configurations initiales et finales, les vitesses initiales et finales, ainsi qu'une configuration intermédiaire. Les polynômes en phase de simple support sont donc définis par 5 conditions et ont donc un degré 4. Ils sont donnés par (3.2).

$$\delta_{iSS} = a_{i0SS} + a_{i1SS}\alpha + a_{i2SS}\alpha^2 + a_{i3SS}\alpha^3 + a_{i4SS}\alpha^4 \quad i = 1, \dots, 4 \quad (3.2)$$

Durant cette phase de simple support nous considérons que la jambe 1 est la jambe

de support.

Il est à noter que le choix de  $\alpha$  comme paramètre du polynôme impose que celui-ci ait une évolution monotone en fonction du temps car le seul comportement non monotone de  $\alpha$  possible est le retour du robot en arrière qui n'est pas compatible avec la marche. Seul ce comportement non monotone est possible car comme présenté dans l'article de CHEVALLEREAU *et al.* [21] et comme on peut le voir dans la présentation des dynamiques de zéro section 3.2.1.3, en phase de simple support les dynamiques de zéro sont équivalentes à celles d'un pendule inverse dont le moment d'inertie et la position du centre de gravité varient en fonction de  $\alpha$ . Par ailleurs, le choix de  $\alpha$  a été fait car il a été observé que son évolution était généralement monotone pour des mouvements de marche définis en fonction du temps, obtenus par optimisation. Nous ne nous sommes donc pas privés de la possibilité de certains mouvements importants en imposant l'évolution monotone de  $\alpha$ . Cependant, des mouvements pour lequel  $\alpha$  n'était pas monotone ont par la suite été observé pour des marches à faible vitesse d'avance. Le choix de la définition du mouvement en fonction de  $\alpha$  peut donc être limitant pour des trajectoires à faible vitesse d'avance. En particulier, nous avons eu des difficultés pour générer des mouvements de marche avec un pas de 20cm pour lequel nous pensons qu'il n'est pas possible d'avoir une évolution de  $\alpha$  monotone, ou les valeurs balayées par  $\alpha$  sont trop restreintes pour pouvoir définir correctement un mouvement tel que nous l'avons fait. Ces difficultés sont donc peut-être dues à ce choix de définir le mouvement en fonction de  $\alpha$ . Il est cependant possible de choisir un autre paramètre du robot, qui ne rencontre jamais ce problème de non monotonie, comme par exemple l'orientation de l'axe entre la cheville et la hanche, utilisé par WESTERVELT [79].

### 3.2.1.2 Paramétrisation en double support

Durant cette phase de double support, le bipède est sur-actionné et possède 3 degrés de liberté. Nous avons donc choisi de définir  $\alpha$ ,  $\delta_1$  et  $\delta_2$ . Bien que ces polynômes pourraient tous être définis en fonction du temps, pour des raisons d'homogénéité avec le simple support, nous avons choisi de définir  $\delta_1$  et  $\delta_2$  en fonction de  $\alpha$  qui lui même sera défini en fonction du temps. Pour le double support nous avons choisi de définir les configurations initiales et finales, les vitesses initiales et finales, ainsi que la durée du double support. Le double support est donc défini par l'évolution de  $\delta_1$  et  $\delta_2$  donnée par les polynômes (3.3) de degré 3 et l'évolution de  $\alpha$  donnée par le polynôme (3.4) de degré 3.

$$\delta_{iDS} = a_{i0DS} + a_{i1DS}\alpha + a_{i2DS}\alpha^2 + a_{i3DS}\alpha^3 \quad i = 1, 2 \quad (3.3)$$

$$\alpha_{DS} = a_{0DS} + a_{1DSt} + a_{2DSt^2} + a_{3DSt^3} \quad (3.4)$$

Durant cette phase de double support, nous considérons que la jambe 1 est à l'avant.

### 3.2.1.3 Dynamiques de zéro obtenues en simple support

Nous commençons par donner la définition des dynamiques de zéro de SLOTINE et LI [72] : *The zero-dynamics is defined to be the internal dynamics of the system when the system output is kept at zero by the input.* Pour définir les dynamiques de zéro, il est donc nécessaire au préalable de définir les sorties qu'il est choisi de commander sur le robot bipède. Le choix des sorties commandées correspond au choix des variables pour lesquelles nous définissons un mouvement de référence. Et nous définissons ces sorties qui doivent être gardées à zéro comme l'écart entre les variables articulaires et leur mouvement de référence. En choisissant les variables pour lesquelles nous avons défini un mouvement section 3.2.1.1 et 3.2.1.2, nous avons donc en même temps choisi de commander ces variables.

Le simple support est sous-actionné, nous ne pouvons donc pas choisir l'évolution de toutes les variables articulaires à la fois. Comme nous l'avons vu en section 3.2.1.1, nous avons choisi de définir l'évolution des variables articulaires actionnées  $\delta_j$  en fonction de la variable articulaire non actionnée  $\alpha$ . En choisissant pour sorties  $\delta_j - \delta_j(\alpha)$   $j = 1, \dots, 4$ , les dynamiques de zéro correspondent donc aux dynamiques en  $\alpha$ . Il est à noter que le double support ne possède pas de dynamiques de zéro lorsque les sorties  $\alpha - \alpha(t)$  et  $\delta_j - \delta_j(\alpha)$   $j = 1, 2$  sont gardées à zéro. Les dynamiques de zéro en simple support s'obtiennent donc à partir de l'équation du modèle (1.32) en considérant la ligne dans laquelle les couples de commande n'interviennent pas, et en considérant l'évolution définie par (3.2) des  $\delta_j$ . Il s'agit de la première ligne qui nous donne (3.5). Comme nous sommes en simple support, il n'y a pas d'effort sur le pied 2.

$$A_1(q)\ddot{q} + C_1(q, \dot{q}) + G_1(q) = 0 \quad (3.5)$$

Où  $A_1(1 \times 5)$  est la première ligne de  $A$ ,  $C_1(1 \times 1)$  est la première ligne de  $C$ , et  $G_1(1 \times 1)$  est la première ligne de  $G$  de l'équation du modèle (1.32).

Il nous reste à exprimer cette equation en fonction de  $\alpha$  et de ses dérivées et des coefficients des polynômes sur les  $\delta_j$ . Nous avons directement  $q(\alpha)$  à partir des polynômes (3.2).  $\dot{q}(\alpha, \dot{\alpha})$  et  $\ddot{q}(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha})$  s'obtiennent par dérivation de  $q(\alpha)$ . Le vecteur  $\dot{q}(\alpha, \dot{\alpha})$  est donné par (3.6) et le vecteur  $\ddot{q}(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha})$  par (3.7).

$$\dot{q}(\alpha, \dot{\alpha}) = q^* \dot{\alpha} \quad (3.6)$$

$$\ddot{q}(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}) = q^* \ddot{\alpha} + q^{**} \dot{\alpha}^2 \quad (3.7)$$

Où la notation  $()^*$  signifie une dérivation partielle par rapport à  $\alpha$ ,  $()^{**}$  une dérivation double par rapport à  $\alpha$ . On a alors  $q^* = [1 \ \delta_1^* \ \delta_2^* \ \delta_3^* \ \delta_4^*]^T$  et  $q^{**} = [0 \ \delta_1^{**} \ \delta_2^{**} \ \delta_3^{**} \ \delta_4^{**}]^T$ .

On obtient alors les dynamiques de zéro sous la forme (3.8).

$$a(\alpha)\ddot{\alpha} + c(\alpha)\dot{\alpha}^2 + g(\alpha) = 0 \quad (3.8)$$

Où les termes  $a(\alpha)$ ,  $c(\alpha)$  et  $g(\alpha)$  sont donnés par (3.9).

$$\begin{cases} a(\alpha) = A_1(q)q^* \\ c(\alpha) = A_1(q)q^{**} + C_1(q, q^*) \\ g(\alpha) = G_1(q) \end{cases} \quad (3.9)$$

Il est également possible d'obtenir cette équation des dynamiques de zéro à partir des équations du moment cinétique du bipède autour de son point d'appui. En tenant compte des relations (3.2) et (3.6) on obtient les équations (3.10).

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = -Mgx_G(\alpha) \\ \sigma = f(\alpha)\dot{\alpha} \end{cases} \quad (3.10)$$

Où  $\sigma$  est le moment cinétique du bipède autour de son point d'appui,  $M$  est la masse totale du bipède,  $g$  l'accélération de la gravité et  $x_G$  la position du centre de gravité par rapport au point d'appui selon l'axe  $\vec{x}$ .

Il est possible de comparer les deux systèmes (3.8) et (3.10) et de déduire les termes de la modélisation (3.10) à partir du modèle dynamique complet (1.32) par les relations (3.11).

$$\begin{cases} f(\alpha) = A_1(q)q^* \\ \frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha} = A_1(q)q^{**} + C_1(q, q^*) \\ Mgx_G(\alpha) = G_1(q) \end{cases} \quad (3.11)$$

Les dynamiques de zéro en  $\alpha$  peuvent donc être mises sous la forme d'une équation différentielle du second ordre non linéaire (3.8), ou bien sous la forme de deux équations différentielles du premier ordre (3.10).

CHEVALLEREAU *et al.* [21] et GRIZZLE *et al.* [32] ont trouvé qu'il est possible de mettre le système d'équations (3.10) sous forme d'une seule équation du premier ordre. En effet, le produit des termes de gauches des deux équations (3.10) nous donne (3.12).

$$\frac{1}{2} \frac{d\sigma^2}{dt} = -Mgx_G(\alpha)f(\alpha)\dot{\alpha} \quad (3.12)$$

Si  $\alpha$  est strictement monotone on peut ensuite obtenir (3.13) qui est une équation différentielle du premier ordre en  $\alpha$ .

$$\frac{d\sigma^2}{d\alpha} = \frac{\partial \Phi(\alpha)}{\partial \alpha} = -2Mgx_G(\alpha)f(\alpha) \quad (3.13)$$

L'intégration de l'équation (3.13) au cours du simple support à partir du début du

simple support nous donne l'expression de  $\sigma(\alpha)$  par (3.14).

$$\sigma(\alpha)^2 - \sigma_{iSS}^2 = \Phi(\alpha) = -2Mg \int_{\alpha_{iSS}}^{\alpha} x_G(s)f(s)ds \quad (3.14)$$

Où  $\sigma_{iSS}$  est le moment cinétique de début de simple support et  $\alpha_{iSS}$  est la valeur de  $\alpha$  en début de simple support.

Nous pouvons donc obtenir les évolutions de  $\dot{\alpha}$  (3.15) puis de  $\ddot{\alpha}$  (3.16) à partir de (3.10) en fonction de cette intégrale  $\Phi(\alpha)$ .

$$\dot{\alpha} = -\frac{\sqrt{\Phi(\alpha) + f(\alpha_{iSS})^2 \dot{\alpha}_{iSS}^2}}{f(\alpha)} \quad (3.15)$$

$$\ddot{\alpha} = -\frac{Mgx_G(\alpha) + \frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha} \dot{\alpha}^2}{f(\alpha)} \quad (3.16)$$

Nous utiliserons à partir de maintenant l'équation différentielle (3.13) pour décrire les dynamiques de zéro, et nous calculerons  $\dot{\alpha}$  et  $\ddot{\alpha}$  avec (3.15) et (3.16). L'utilisation de ces équations des dynamiques de zéro, simplifiera l'écriture des contraintes sur les dynamiques de zéro et la simulation numérique des dynamiques de zéro sera également plus facile.

#### 3.2.1.4 Présentation des paramètres d'optimisation choisis

Nous avons choisi de paramétrer le mouvement avec les conditions limites des phases plutôt que les coefficients des polynômes, ces paramètres ayant un sens plus physique que les coefficients des polynômes eux-mêmes. Entre parenthèses, les coefficients des polynômes sont linéaires par rapport aux conditions limites, et le choix de l'un ou l'autre comme paramètres de l'optimisation ne changera donc pas la structure du problème d'optimisation. Une autre raison du choix des conditions aux limites des phases est que nous avons choisi de réduire le nombre de paramètres avec les conditions de continuité entre les phases qui s'écrivent sur ces conditions aux limites. Une autre option aurait été de définir des contraintes égalités dans l'optimisation, mais nous pensons que l'augmentation du nombre de paramètres d'optimisation augmenterait du même coup les temps d'optimisation. Un inconvénient possible de cette réduction de paramètres serait que le problème d'optimisation soit moins régulier, c'est-à-dire possède plus de minimums locaux, mais nous verrons dans la section 3.6 qui présente les résultats, que des optimisations avec des conditions initiales différentes donnent les mêmes résultats, ce qui rend compte d'une certaine régularité du problème.

Comme nous l'avons vu pour chacune des phases de double support et simple support, nous considérons les positions et vitesses de début et de fin des phases, ainsi qu'une configuration intermédiaire en simple support. La réduction des paramètres d'optimisation se fait donc à l'interface entre les phases de simple et double support où les conditions

limites sont redondantes. Pour les configurations limites, nous avons choisi de les définir pour la phase de double support. Une configuration de double support, en supposant que nous avons une marche sur un sol plat, se caractérise par 4 paramètres. Nous avons choisi  $\alpha$ ,  $\delta_1$ ,  $\theta_3$  l'orientation absolue du tronc et  $d$  la distance entre les pieds. Nous avons choisi l'orientation absolue du tronc  $\theta_3$  car c'est un paramètre plus facile à visualiser que  $\delta_2$ , et que ce changement n'influence pas du tout le problème,  $\delta_2$  étant linéaire vis-à-vis de  $\alpha$ ,  $\delta_1$  et  $\theta_3$ . Pour les vitesses limites il était plus simple de les définir pour la phase de simple support. En effet, avec la définition des variables articulaires  $\delta_j$  en fonction de  $\alpha$ , nous n'avons défini qu'un chemin, l'évolution de  $\dot{\alpha}$  n'étant pas connue a priori. Pour pouvoir définir les polynômes  $\delta_j(\alpha)$  sans connaître  $\dot{\alpha}$  il nous faut alors définir les conditions limites non sur les vitesses  $\dot{\delta}_j$  mais sur  $\delta_j^*$ , la dérivée partielle de  $\delta_j$  par rapport à  $\alpha$ . Cette considération est particulièrement justifiée pour la fin du simple support. En revanche, nous définissons la condition initiale des dynamiques de zéro,  $\dot{\alpha}_{iSS}$ . Nous aurions donc pu calculer les coefficients des polynômes  $\delta_1(\alpha)$  et  $\delta_2(\alpha)$  à partir des vitesses initiales  $\dot{\delta}_1$  et  $\dot{\delta}_2$ . Cependant, par souci d'homogénéité, nous avons également défini ces conditions initiales sur  $\delta_1^*$  et  $\delta_2^*$ . Une autre raison de la définition des vitesses limites sur le simple support est que l'impact à la fin du simple support se définit généralement en donnant les vitesses après impact en fonction des vitesses avant impact, il est donc plus simple de calculer les conditions initiales du double support à partir de celles de fin de simple support, plutôt que l'inverse. Dans notre cas nous avons finalement considéré une marche sans impact, cette considération n'avait donc pas d'importance. Mais dans le cas de marche avec impacts la définition des vitesses avant et après impact se fera obligatoirement sur les vitesses de fin du simple support, juste avant l'impact.

Suite aux considérations précédentes, nous pouvons donc donner le jeu de paramètres minimal considéré, constitué de :

- la configuration de début de double support donnée par  $\alpha_{iDS}$ ,  $\delta_{1iDS}$ ,  $\theta_{3iDS}$  et  $d$  la distance entre les pieds,
- la configuration de fin de double support donnée par  $\alpha_{fDS}$ ,  $\delta_{1fDS}$ ,  $\theta_{3fDS}$  avec  $d$  la distance entre les pieds qui est la même que pour la configuration de début de simple support,
- la configuration intermédiaire de simple support donnée par  $\alpha_{int}$ ,  $\delta_{1int}$  et  $\theta_{3int}$  ainsi que  $x_{2rint}$  et  $z_{2int}$  les composantes de la position de l'extrémité du pied. Le terme  $x_{2rint}$  est la composante selon  $\vec{x}$  de la position relative aux hanches et  $z_{2int}$  est la composante selon  $\vec{z}$  de la positions du pied 2 par rapport au pied 1. Nous avons fixé la valeur de  $\alpha_{int}$  car sinon la définition de cette configuration intermédiaire est redondante. La valeur intermédiaire  $\alpha_{int}$  est choisie au milieu entre les valeurs  $\alpha_{iSS}$  et  $\alpha_{fSS}$  de début et de fin du simple support, soit  $\alpha_{int} = \frac{\alpha_{iSS} + \alpha_{fSS}}{2}$ . Le choix de  $x_{2rint}$  permet de simplifier des contraintes que nous verrons section 3.2.3 et celui de  $z_{2int}$  est directement lié à la contrainte sur la hauteur du pied que nous verrons dans la

même section,

- les vitesses de début de simple support  $\dot{\alpha}_{iSS}$ ,  $\delta_{1iSS}^*$  et  $\delta_{2iSS}^*$ . Les vitesses  $\delta_{3iSS}^*$  et  $\delta_{4iSS}^*$  se déduisent des autres paramètres sachant que la vitesse de l'extrémité du pied 2 qui décolle est nulle au début du simple support,
- les vitesses de fin de simple support  $\delta_{1fSS}^*$  et  $\delta_{2fSS}^*$ . Les vitesses  $\delta_{3fSS}^*$  et  $\delta_{4fSS}^*$  se déduisent des autres paramètres sachant que nous avons choisi que la vitesse du pied 2 qui rentre en contact avec le sol soit nulle pour éviter l'impact,
- la durée de la phase de double support  $T_{DS}$ .

Nous avons donc un total de 17 paramètres d'optimisation pour la marche que nous avons considérée. Par la suite nous noterons  $p = [\alpha_{iDS}, \delta_{1iDS}, \delta_{2iDS}, d, \alpha_{fDS}, \delta_{1fDS}, \delta_{2fDS}, \delta_{1int}, \delta_{2int}, x_{2rint}, z_{2int}, \dot{\alpha}_{iSS}, \delta_{1iSS}^*, \delta_{2iSS}^*, \delta_{1fSS}^*, \delta_{2fSS}^*]$  le vecteur des paramètres d'optimisation.

### 3.2.1.5 Calcul des polynômes à partir des paramètres d'optimisation

Dans cette section, nous détaillons les expressions pour calculer les coefficients des polynômes à partir des paramètres d'optimisation. Nous détaillerons donc dans un premier temps l'obtention de paramètres manquants pour les conditions limites définies directement dans  $p$ , puis dans un second temps nous détaillerons les équations de continuité entre les phases permettant de calculer toutes les conditions aux limites et enfin nous donnerons les systèmes permettant de déterminer les coefficients des polynômes à partir des conditions aux limites.

Tout d'abord nous déterminons l'angle relatif  $\delta_2$  à partir de  $\theta_3$  par la relation (3.17) tirée de (1.13).

$$\delta_2 = \alpha + \delta_1 - \theta_3 + \frac{\pi}{2} \quad (3.17)$$

Ensuite nous déterminons les variables articulaires  $\delta_3$  et  $\delta_4$  pour chacune des configurations de début de double support, de fin de double support et intermédiaire en simple support. Pour cela on utilise les expressions de la position du pied 2 (1.38) réécrites sur les variables articulaires. On obtient (3.18) pour les configurations de début et de fin de double support et (3.19) pour la configuration intermédiaire du simple support.

$$\begin{cases} l_1 \sin(\alpha) - l_2 \sin(\alpha + \delta_1) + l_4 \sin(\alpha + \delta_1 + \delta_3) - l_5 \sin(\alpha + \delta_1 + \delta_3 - \delta_4) = 0 \\ -l_1 \cos(\alpha) + l_2 \cos(\alpha + \delta_1) - l_4 \cos(\alpha + \delta_1 + \delta_3) + l_5 \cos(\alpha + \delta_1 + \delta_3 - \delta_4) = d \end{cases} \quad (3.18)$$

$$\begin{cases} -l_4 \sin(\alpha + \delta_1 + \delta_3) + l_5 \sin(\alpha + \delta_1 + \delta_3 - \delta_4) = x_{2rint} \\ l_1 \cos(\alpha) - l_2 \cos(\alpha + \delta_1) + l_4 \cos(\alpha + \delta_1 + \delta_3) - l_5 \cos(\alpha + \delta_1 + \delta_3 - \delta_4) = z_{2int} \end{cases} \quad (3.19)$$

Ces équations possèdent deux solutions ou aucune solution. Il n'y a aucune solution lorsque la distance entre la hanche et l'extrémité du pied 2 est trop grande. Lorsque cette distance n'est pas trop grande, les deux solutions obtenues dépendent du sens du repliement du genou. Nous considérons toujours la solution du genou plié comme pour l'homme c'est-à-dire le cas  $-\pi < \delta_4 < 0$ .

Ensuite la relation entre les vitesses de l'extrémité du pied libre avec les vitesses articulaires (1.34) permet de déterminer les conditions limites  $\delta_{3iSS}^*$  et  $\delta_{4iSS}^*$  en début de simple support et  $\delta_{3fSS}^*$  et  $\delta_{4fSS}^*$  en fin de simple support respectivement à partir de  $\delta_{1iSS}^*$ ,  $\delta_{2iSS}^*$  et  $\delta_{1fSS}^*$ ,  $\delta_{2fSS}^*$ . Le système linéaire à résoudre est donné par (3.20).

$$D_2(q)q^* = 0 \quad (3.20)$$

Il reste maintenant les relations entre les positions et vitesses de fin d'une phase et les positions et vitesses de début de la phase suivante. Le double support ayant lieu le pied 1 devant qui reste ensuite le pied 1 d'appui pendant la phase de simple support, les variables articulaires de fin de double support sont donc les mêmes que celles de début de simple support donné par (3.21).

$$\begin{cases} \alpha_{iSS} = \alpha_{fDS} \\ \delta_{1iSS} = \delta_{1fDS} \\ \delta_{2iSS} = \delta_{2fDS} \\ \delta_{3iSS} = \delta_{3fDS} \\ \delta_{4iSS} = \delta_{4fDS} \end{cases} \quad (3.21)$$

La configuration du bipède ne change pas entre la fin du simple support et le début du double support, que nous considérons un impact ou non. Seul un changement de jambes intervient donc entre les variables articulaires de fin du simple support et de début du double support. Nous donnons par le système (3.22) les équations de ce changement de jambes faisant intervenir la configuration de fin de simple support en fonction de la configuration de début de double support.

$$\begin{cases} \alpha_{fSS} = \alpha_{iDS} + \delta_{1iDS} + \delta_{3iDS} - \delta_{4iDS} \\ \delta_{1fSS} = \delta_{4iDS} \\ \delta_{2fSS} = \delta_{2iDS} + \delta_{3iDS} \\ \delta_{3fSS} = -\delta_{3iDS} \\ \delta_{4fSS} = \delta_{1iDS} \end{cases} \quad (3.22)$$

La relation entre les vitesses de fin de simple support et de début de double support ne fait également intervenir que le changement de jambes, vu que nous évitons l'impact. Le changement de jambes sur les vitesses s'obtient par dérivation du changement de jambes sur les positions (3.22). Le changement de jambes sur les vitesses est donné par le système (3.23), où les vitesses de début de double support sont données en fonction des vitesses de fin de simple support. Nous pouvons constater que les équations du changement de jambes sont les mêmes que nous considérons la fin du simple support en fonction du début de double support ou l'inverse.

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_{iDS} = \dot{\alpha}_{fSS} + \dot{\delta}_{1fSS} + \dot{\delta}_{3fSS} - \dot{\delta}_{4fSS} \\ \dot{\delta}_{1iDS} = \dot{\delta}_{4fSS} \\ \dot{\delta}_{2iDS} = \dot{\delta}_{2fSS} + \dot{\delta}_{3fSS} \\ \dot{\delta}_{3iDS} = -\dot{\delta}_{3fSS} \\ \dot{\delta}_{4iDS} = \dot{\delta}_{1fSS} \end{cases} \quad (3.23)$$

Pour la détermination des coefficients des polynômes en double support, c'est en fait les relations sur les  $\delta^*$  qui nous intéressent, mais elles ont exactement la même forme, vu qu'entre les  $\dot{\delta}_j$  et les  $\delta_j^*$  nous avons la relation (3.24).

$$\dot{\delta}_j = \delta_j^* \dot{\alpha} \quad (3.24)$$

Par contre pour déterminer le polynôme de  $\alpha$  en temps, il faut connaître  $\dot{\alpha}_{iDS}$  qui dépend de  $\dot{\alpha}_{fSS}$ . Or  $\dot{\alpha}_{fSS}$  ne peut être déterminée que par une intégration numérique pendant la phase de simple support des dynamiques de  $\alpha$  qui constituent dans notre cas les dynamiques de zéro du bipède en simple support, que nous avons présentées dans la section 3.2.1.3. Pour connaître l'évolution temporelle de  $\alpha$  en double support, il est donc nécessaire de simuler au préalable les dynamiques de zéro données par (3.8) ou (3.10). Nous voyons qu'ici le problème de la détermination d'un mouvement de marche cyclique pour un système ayant une phase sous-actionnée est résolu en simulant d'abord la phase de simple support sous-actionnée pour ensuite adapter la phase de double support en fonction du résultat des dynamiques de zéro de simple support.

*Remarque :* dans le cas de la marche des robots sous-actionnés sans phase de double support sur-actionnée, l'obtention d'un mouvement cyclique n'est pas directe puisqu'il est a priori possible de ne définir l'évolution que d'un nombre limité de degrés de liberté<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Pour savoir rigoureusement s'il est possible de définir le mouvement de tous les degrés de liberté, il est nécessaire d'utiliser la notion de platitude voir par exemple MARTIN et ROUCHON [54], CONTE *et al.* [23]. Ainsi, s'il est possible de trouver des sorties pour le bipède dites plates, dont on peut choisir l'évolution, en fonction desquelles il est possible d'écrire l'état du robot et les entrées de commande, le bipède est alors un système plat. Et il n'y aurait ainsi pas de dynamiques de zéro pour le modèle du bipède défini sur les sorties plates. Pour le bipède objet de notre étude, des sorties plates n'ont jamais été trouvées. Mais pour autant, il n'existe pas de preuve de l'impossibilité de trouver des sorties plates pour le bipède objet de notre étude. A l'heure actuelle, il n'existe pas de preuve générale de l'impossibilité de trouver des sorties plates pour les systèmes non linéaires

Et l'évolution du ou des degrés de liberté non définis ne sont pas forcément cycliques, voir par exemple CHEMORI et LORIA [15]. Il est donc nécessaire de résoudre un problème aux valeurs limites, par exemple en introduisant cette condition de cyclicité comme une contrainte égalité dans l'optimisation du mouvement. Dans le cas où les mouvements des variables articulaires sont définis en fonction de la variable liée au seul degré de liberté non actionné, comme GRIZZLE *et al.* [32] et Aoustin et FORMAL'SKY [2], l'ensemble des configurations que va suivre le robot est fixé. Il est donc possible de vérifier la cyclicité sur les configurations. En revanche, la vitesse de fin de simple support de la variable non actionnée obtenue n'est pas forcément la même que celle de début de la phase de simple support (en tenant compte de l'impact et d'un changement de jambes). La condition de cyclicité porte donc seulement sur la vitesse de la variable non actionnée, plutôt qu'également sur des positions, comme c'est le cas lorsque le mouvement d'un degré de liberté n'est pas défini. Dans CHEVALLEREAU *et al.* [21] une autre méthode a été proposée pour obtenir la cyclicité sur les configurations. Bien que le robot soit sous actionné, le mouvement est défini pour l'ensemble des degrés de liberté du robot en fonction du temps. Ce mouvement n'est pas compatible avec les dynamiques du robot. Une variable artificielle est alors introduite qui remplace le temps. La dynamique de ce nouveau paramètre est choisie telle que le mouvement soit compatible avec les dynamiques du bipède. Ce paramètre traduit la vitesse à laquelle l'ensemble des configurations va être suivi, de telle sorte à ce que le mouvement de référence soit compatible avec les dynamiques du robot. Le mouvement de départ, non compatible avec les dynamiques du robot est donc modifié afin d'obtenir un mouvement compatible avec les dynamiques du robot. De plus CHEVALLEREAU *et al.* [21] et GRIZZLE *et al.* [32] ont trouvé dans le cas du non actionnement à la cheville, que les équations des dynamiques de zéro sous la forme (3.10), peuvent se mettre sous la forme (3.13). Sous cette forme (3.13), il suffit d'intégrer les dynamiques de zéro une seule fois pour déterminer la vitesse initiale donnant un mouvement cyclique. Ils résolvent donc directement le problème frontière de recherche d'un mouvement cyclique. La généralisation de cette méthode de résolution du problème de cyclicité ne pourrait s'appliquer a priori qu'au cas où le non-actionnement a lieu entre la base et le premier corps d'une chaîne de corps. L'introduction d'une phase sur-actionnée permet a priori de résoudre le problème de cyclicité quel que soit la liaison non actionnée d'un problème plus général. Mais encore faut-il qu'il soit possible d'introduire une phase sur-actionnée.

Nous donnons maintenant les systèmes matriciels entre les conditions aux limites des phases et les coefficients des polynômes. Pour la phase de simple support les coefficients des polynômes de  $\delta_j$  sont obtenus en résolvant le système (3.25).

$$\begin{aligned}
C_{SS}A_{\alpha SS} &= A_{CL SS} \\
C_{SS} &= \begin{bmatrix} a_{10SS} & a_{11SS} & a_{12SS} & a_{13SS} & a_{14SS} \\ a_{20SS} & a_{21SS} & a_{22SS} & a_{23SS} & a_{24SS} \\ a_{30SS} & a_{31SS} & a_{32SS} & a_{33SS} & a_{34SS} \\ a_{40SS} & a_{41SS} & a_{42SS} & a_{43SS} & a_{44SS} \end{bmatrix} \\
A_{\alpha SS} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \alpha_{iSS} & 1 & \alpha_{int} & \alpha_{fSS} & 1 \\ \alpha_{iSS}^2 & 2\alpha_{iSS} & \alpha_{int}^2 & \alpha_{fSS}^2 & 2\alpha_{fSS} \\ \alpha_{iSS}^3 & 3\alpha_{iSS}^2 & \alpha_{int}^3 & \alpha_{fSS}^3 & 3\alpha_{fSS}^2 \\ \alpha_{iSS}^4 & 4\alpha_{iSS}^3 & \alpha_{int}^4 & \alpha_{fSS}^4 & 4\alpha_{fSS}^3 \end{bmatrix} \\
A_{CL SS} &= \begin{bmatrix} \delta_{1iSS} & \delta_{1iSS}^* & \delta_{1int} & \delta_{1fSS} & \delta_{1fSS}^* \\ \delta_{2iSS} & \delta_{2iSS}^* & \delta_{2int} & \delta_{2fSS} & \delta_{2fSS}^* \\ \delta_{3iSS} & \delta_{3iSS}^* & \delta_{3int} & \delta_{3fSS} & \delta_{3fSS}^* \\ \delta_{4iSS} & \delta_{4iSS}^* & \delta_{4int} & \delta_{4fSS} & \delta_{4fSS}^* \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Pour la phase de double support les coefficients des polynômes de  $\delta_1$  et  $\delta_2$  sont obtenus en résolvant le système (3.26) et les coefficients du polynôme de  $\alpha$  sont obtenus en résolvant le système (3.27).

$$\begin{aligned}
C_{\delta DS}A_{\alpha DS} &= A_{CL \delta DS} \\
C_{\delta DS} &= \begin{bmatrix} a_{10DS} & a_{11DS} & a_{12DS} & a_{13DS} \\ a_{20DS} & a_{21DS} & a_{22DS} & a_{23DS} \end{bmatrix} \\
A_{\alpha DS} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha_{iDS} & 1 & \alpha_{fDS} & 1 \\ \alpha_{iDS}^2 & 2\alpha_{iDS} & \alpha_{fDS}^2 & 2\alpha_{fDS} \\ \alpha_{iDS}^3 & 3\alpha_{iDS}^2 & \alpha_{fDS}^3 & 3\alpha_{fDS}^2 \end{bmatrix} \\
A_{CL \delta DS} &= \begin{bmatrix} \delta_{1iDS} & \delta_{1iDS}^* & \delta_{1fDS} & \delta_{1fDS}^* \\ \delta_{2iDS} & \delta_{2iDS}^* & \delta_{2fDS} & \delta_{2fDS}^* \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}
C_{\alpha DS} A_{TDS} &= A_{CL \alpha DS} \\
C_{\alpha DS} &= \begin{bmatrix} a_{10DS} & a_{11DS} & a_{12DS} & a_{13DS} \end{bmatrix} \\
A_{TDS} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & T_{DS} & 1 \\ 0 & 0 & T_{DS}^2 & 2T_{DS} \\ 0 & 0 & T_{DS}^3 & 3T_{DS}^2 \end{bmatrix} \\
A_{CL \alpha DS} &= \begin{bmatrix} \alpha_{iDS} & \dot{\alpha}_{iDS} & \alpha_{fDS} & \dot{\alpha}_{fDS} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

### 3.2.2 Critères

Nous avons considéré deux critères à minimiser. D'abord un critère portant sur la norme des couples et un critère énergétique. Le critère de norme des couples par unité de distance parcourue est donné par (3.28).

$$C_{\Gamma} = \frac{1}{d} \int_0^{T_{SS}+T_{DS}} \Gamma^{*T} \Gamma^{*} dt \tag{3.28}$$

Où  $T_{SS}$  est la durée du simple support, et  $\Gamma^{*}$  est le vecteur des couples qui tient compte des frottements secs et fluides de la chaîne d'actionnement. Nous divisons par  $d$  car nous nous intéressons à la minimisation d'un critère pour parcourir une distance plutôt que pour faire un pas.

Ce critère sera en fait calculé pour chacune des phases. En phase de simple support, l'intégration ayant lieu en fonction de  $\alpha$  nous avons le critère de couples donné par (3.29).

$$C_{\Gamma SS} = \int_{\alpha_{iSS}}^{\alpha_{fSS}} \frac{\Gamma^{*T} \Gamma^{*}}{\dot{\alpha}} ds \tag{3.29}$$

En phase de double support, nous avons simplement la relation (3.30).

$$C_{\Gamma DS} = \int_0^{T_{DS}} \Gamma^{*T} \Gamma^{*} dt \tag{3.30}$$

Le critère de couple sur le pas complet est donné par (3.31).

$$C_{\Gamma} = \frac{1}{d} (C_{\Gamma SS} + C_{\Gamma DS}) \tag{3.31}$$

Le critère énergétique correspond à l'énergie électrique consommée par le robot lorsqu'on considère que le robot n'est pas autonome et qu'il est relié à une source d'énergie qui ne peut que fournir de l'énergie, et que le convertisseur de puissance associé au robot est équipé de résistances de dissipation qui absorbent l'énergie restituée par le robot.

L'énergie électrique consommée par le robot inclue l'énergie dissipée par effet joule dans les moteurs, l'énergie mécanique fournie par les moteurs (qui peut être positive ou négative) et l'énergie perdue dans les résistances de dissipation. On obtient l'expression de l'énergie consommée sur un pas par distance parcourue (3.32).

$$C_E = \frac{1}{d} \int_0^{T_{SS}+T_{DS}} \max \left( 0, \dot{q}^T D_\Gamma \Gamma^* + \frac{R}{K_{em}^2} \Gamma^{*T} \Gamma^* \right) dt \quad (3.32)$$

Où  $K_{em}$  est la constante électro-mécanique des moteurs et  $R$  est la résistance de l'induit des moteurs. Dans le cas du robot Rabbit, les moteurs ont pour caractéristiques  $K_{em} = 0,16 \text{ N.m/A}$  et  $R = 0,96 \Omega$ .

Comme pour le critère de couples, nous pouvons séparer ce critère en sa composante en simple support (3.33) et sa composante en double support (3.34), le critère total s'exprimant alors par (3.35).

$$C_{E_{SS}} = \int_{\alpha_{iSS}}^{\alpha_{fSS}} \frac{1}{\dot{\alpha}} \max \left( 0, \dot{q}^T D_\Gamma \Gamma^* + \frac{R}{K_{em}^2} \Gamma^{*T} \Gamma^* \right) ds \quad (3.33)$$

$$C_{E_{DS}} = \int_0^{T_{DS}} \max \left( 0, \dot{q}^T D_\Gamma \Gamma^* + \frac{R}{K_{em}^2} \Gamma^{*T} \Gamma^* \right) dt \quad (3.34)$$

$$C_E = \frac{1}{d} (C_{E_{SS}} + C_{E_{DS}}) \quad (3.35)$$

### 3.2.3 Contraintes

Nous trions les contraintes sur le mouvement de marche de la façon suivante. Ce classement correspond à peu près à une hiérarchie sur les contraintes qui doivent être vérifiées pour que les suivantes existent. Nous avons :

- les contraintes sur les configurations limites des phases. Si certaines de ces contraintes ne sont pas vérifiées, il n'est pas possible de calculer les polynômes sur les variables articulaires.
- les contraintes géométriques en cours de phase. Si elles ne sont pas vérifiées, des singularités sont rencontrées ou le mouvement n'existe pas.
- les contraintes sur les dynamiques de zéro en simple support. Il s'agit d'éviter une singularité des dynamiques de zéro, et d'éviter que le robot retombe en arrière en cours de simple support. Si ces contraintes ne sont pas vérifiées, le pas de marche n'est pas défini.
- les contraintes qui ne conditionnent pas l'existence d'un pas de marche, qui sont les contraintes de contact au sol, les limitations de couples, les butées articulaires, des contraintes sur la géométrie du mouvement, d'autres contraintes sur les caractéristiques de la marche désirée comme la vitesse de marche désirée.

Nous présentons maintenant les différents niveaux de contraintes rencontrés. Puis nous précisons la hiérarchie exacte des contraintes.

### 3.2.3.1 Contraintes géométriques sur les configurations limites

Ces contraintes sont liées aux choix des paramètres d'optimisation que nous avons faits. Il s'agit d'abord de contraintes d'existence de solutions des modèles géométriques inverses. Ces contraintes doivent être vérifiées pour que les configurations limites soient définies. Ces contraintes signifient physiquement que la distance entre la hanche et l'extrémité du pied arrière ne doit pas être trop grande pour que la jambe puisse la vérifier. Nous avons également considéré les contraintes pour éviter la singularité "jambe repliée". En effet, dans le cas de la jambe complètement repliée, il y a une infinité de solutions au modèle géométrique inverse. L'ensemble de ces contraintes est donné par (3.36) pour les configurations initiales et finales de double support et par (3.37) pour la configuration intermédiaire de simple support.

$$\begin{cases} 0 < (x_{1r} - d)^2 + z_{1r}^2 < (l_4 + l_5)^2 \\ x_{1r} = l_1 \sin(\alpha) - l_2 \sin(\alpha + \delta_1) \\ z_{1r} = -l_1 \cos(\alpha) + l_2 \cos(\alpha + \delta_1) \end{cases} \quad (3.36)$$

$$\begin{cases} 0 < x_{2rint}^2 + (z_{1rint} + z_{2int})^2 < (l_4 + l_5)^2 \\ z_{1rint} = -l_1 \cos(\alpha_{int}) + l_2 \cos(\alpha_{int} + \delta_{1int}) \end{cases} \quad (3.37)$$

Une autre contrainte à prendre en compte pour la marche telle que nous l'avons définie est la monotonie de l'évolution de  $\alpha$  au cours de la marche, car il est choisi comme paramètre qui remplace en quelque sorte le temps. Tel que nous l'avons défini,  $\alpha$  décroît au cours du temps. Sur les configurations limites, cette condition donne les contraintes (3.38).

$$\begin{cases} \alpha_{iDS} > \alpha_{fDS} \\ \alpha_{fDS} > \alpha_{fSS} \end{cases} \quad (3.38)$$

La première ligne de (3.38) est une contrainte linéaire car elle porte directement sur des paramètres d'optimisation. Par contre la deuxième inégalité est non linéaire, car  $\alpha_{fSS}$  se calcule à partir des paramètres de la configuration de début de double support comme présenté en section 3.2.1.5.

Il est à noter que la contrainte de monotonie en  $\alpha$  n'est pas obligatoire pour le double support. En effet, on peut imaginer que comme  $\alpha$  est défini comme un polynôme du temps de degré 3,  $\alpha$  peut changer une ou deux fois de signe en cours de double support. Comme la vitesse de fin de double support doit être négative car  $\alpha_{iSS} = \alpha_{fDS}$ , on pourrait avoir les comportements suivants :

- $\alpha$  monotone et décroissant,

- $\alpha$  croissant puis décroissant,
- $\alpha$  décroissant, croissant puis décroissant.

Bien qu'il soit donc possible de trouver des mouvements de marche qui puissent ne pas vérifier la monotonie de  $\alpha$  en double support, nous évitons ces comportements car considérer seulement les mouvements monotones en double support simplifie le problème de génération de mouvement de marche. Et surtout nous ne pensons pas restreindre l'espace des mouvements optimaux possibles par cette considération car en double support l'évolution de tout le robot est liée à  $\alpha$ . C'est-à-dire que si  $\alpha$  a une évolution non monotone, le mouvement du robot entier fera de même, ce qui ne nous semble pas du tout un mouvement optimal.

D'autres contraintes dont il faut tenir compte sur les configurations limites sont les butées articulaires. Elles sont données par (3.39), et sont valables pour les configurations initiales et finales de double support, ainsi que pour la configuration intermédiaire de simple support.

$$\left\{ \begin{array}{l} -260^\circ < \delta_2 < -110^\circ \\ -260^\circ < \delta_2 + \delta_3 < -110^\circ \\ -230^\circ < \delta_1 < -127^\circ \\ -230^\circ < \delta_4 < -127^\circ \end{array} \right. \quad (3.39)$$

Les butées articulaires que nous avons considérées sont les butées logicielles du prototype Rabbit.

Ces contraintes sur les butées articulaires existent sur  $\delta_3$  et  $\delta_4$  dès lors que ces angles existent, c'est-à-dire que suivant les cas les contraintes (3.36), ou (3.37) sont à vérifier. La vérification des contraintes sur les butées articulaires ne conditionne l'existence d'aucune autre contrainte.

Enfin nous donnons des limitations sur l'orientation des tibia par rapport au sol (3.40).

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi/2 > \alpha_{iDS} \\ \alpha_{fSS} > -\pi/2 \end{array} \right. \quad (3.40)$$

Ces contraintes (3.40) sont réduites compte tenu des contraintes (3.38)

### 3.2.3.2 Contraintes géométriques en cours de phases

La première contrainte à considérer est l'existence d'une solution au modèle géométrique inverse pour calculer  $\delta_3$  et  $\delta_4$  durant la phase de double support, le mouvement n'étant défini que pour  $\alpha$ ,  $\delta_1$  et  $\delta_2$ . Cette contrainte est la même que pour les configurations limites et est donnée par (3.36), pour tout  $\alpha \in [\alpha_{fDS}, \alpha_{iDS}]$ . Cependant nous réduisons de manière équivalente cette contrainte sur un intervalle à une contrainte pour une seule valeur de  $\alpha$ . En effet, nous considérons cette contrainte dans son cas le plus

contraignant, à savoir lorsque la valeur  $(x_{1r} - d)^2 + z_{1r}^2$  est maximum sur le double support. De même pour la contrainte de singularité jambe repliée, nous considérons cette contrainte dans son cas le plus contraignant, à savoir lorsque la valeur  $(x_{1r} - d)^2 + z_{1r}^2$  est minimum sur le double support. Nous obtenons ainsi les contraintes (3.41).

$$\begin{aligned} & \max_{\alpha \in [\alpha_{fDS}, \alpha_{iDS}]} [(x_{1r}(\alpha) - d)^2 + z_{1r}(\alpha)^2] < (l_4 + l_5)^2 \\ & \min_{\alpha \in [\alpha_{fDS}, \alpha_{iDS}]} [(x_{1r}(\alpha) - d)^2 + z_{1r}(\alpha)^2] > 0 \\ & \begin{cases} x_{1r}(\alpha) = l_1 \sin(\alpha) - l_2 \sin(\alpha + \delta_1(\alpha)) \\ z_{1r}(\alpha) = -l_1 \cos(\alpha) + l_2 \cos(\alpha + \delta_1(\alpha)) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Comme pour les configurations limites des phases, nous considérons les butées articulaires des hanches et des genoux (3.39) qui s'appliquent sur la phase de simple support, soit pour tout  $\alpha \in [\alpha_{fSS}, \alpha_{iSS}]$  et sur la phase de double support, soit pour tout  $\alpha \in [\alpha_{fDS}, \alpha_{iDS}]$ . Nous obtenons ainsi les contraintes (3.42) pour le simple support et pour le double support.

$$\begin{cases} -260^\circ < (\delta_2)_{min} & (\delta_2)_{max} < -110^\circ \\ -260^\circ < (\delta_2 + \delta_3)_{min} & (\delta_2 + \delta_3)_{max} < -110^\circ \\ -230^\circ < (\delta_1)_{min} & (\delta_1)_{max} < -127^\circ \\ -230^\circ < (\delta_4)_{min} & (\delta_4)_{max} < -127^\circ \end{cases} \quad (3.42)$$

Où l'on note respectivement par  $(\ )_{min}$  et  $(\ )_{max}$  le minimum et le maximum d'une grandeur au cours de la phase de simple support ou de double support.

Bien sûr, les conditions sur  $\delta_3$  et  $\delta_4$  ne peuvent avoir de sens qu'à partir du moment où ces variables sont définies, c'est-à-dire que les conditions (3.41) sont vérifiées.

Nous avons également la condition de monotonie au cours du double support (3.43).

$$\max_{t \in [0, T_{DS}]} \dot{\alpha}(t) < 0 \quad (3.43)$$

Nous donnons cette condition de monotonie pour le simple support dans la section suivante.

Il est à noter que les contraintes de double support dépendent de l'évolution temporelle de  $\alpha$ . En effet, si  $\alpha$  n'est pas monotone en double support, il peut prendre des valeurs en dehors de l'intervalle  $[\alpha_{iDS}, \alpha_{fDS}]$ , pour lesquelles peuvent se trouver des extremums des variables articulaires.

De plus la contrainte (3.43) sur  $\dot{\alpha}$  en double support nécessite de connaître au préalable  $\dot{\alpha}_{iDS}$  et donc que les dynamiques de zéros soient définies, c'est-à-dire que les contraintes présentées dans la section suivante soient vérifiées.

### 3.2.3.3 Contraintes sur les dynamiques de zéro

Sur les dynamiques de zéro, nous avons d'abord la condition de monotonie de  $\alpha$ , qui nous donne à partir de (3.14) la condition (3.44).

$$\Phi_{min} + f(\alpha_{iSS})^2 \dot{\alpha}_{iSS}^2 > 0 \quad (3.44)$$

Où  $\Phi_{min} = \min_{\alpha \in [\alpha_{iSS}, \alpha_{fSS}]} \Phi(\alpha)$

Cette condition peut être vue comme le fait que la vitesse  $\dot{\alpha}_{iSS}$  de début de simple support soit suffisamment grande pour que le robot ne retombe pas en arrière. Dans CHEVALLEREAU *et al.* [21] l'explication est donnée qu'au cours du simple support, dans un premier temps le centre de gravité est en arrière du point d'appui et donc les dynamiques de zéro du bipède ralentissent, puis dans un second temps, le centre de gravité est passé devant le pied d'appui et donc les dynamiques de zéro du bipède accélèrent. On voit bien que si la vitesse de début du simple support n'est pas suffisante, le bipède peut ne pas atteindre la configuration où le centre de gravité est au dessus du pied d'appui, et retomber en arrière.

L'autre contrainte sur les dynamiques de zéro est d'éviter la singularité  $f(\alpha) = 0$ . Généralement  $f(\alpha)$  est positif. Si  $f(\alpha)$  est négatif, cela signifie que le moment cinétique  $\sigma$  est opposé à  $\dot{\alpha}$ , ce qui ne semble pas possible pour une marche. Nous aurons donc la contrainte (3.45).

$$\min_{\alpha \in [\alpha_{iSS}, \alpha_{fSS}]} f(\alpha) > 0 \quad (3.45)$$

Cette singularité correspond à un cas pour lequel les mouvements polynômiaux de référence sur les variables articulaires en fonction de  $\alpha$  ne peuvent être suivis. En effet lorsque  $f(\alpha)$  tend vers 0, sauf cas particulier où  $\sigma = 0$  on aura  $\dot{\alpha}$  qui tend vers l'infini, et il faudrait donc des couples infinis pour pouvoir obtenir des vitesses articulaires infinies.

### 3.2.3.4 Autres contraintes non indispensables à la définition d'un pas

Parmi ces contraintes il y a les limitations dues aux caractéristiques des moteurs, les contraintes unilatérales de contact au sol, et la contrainte de non pénétration du pied libre dans le sol au cours du simple support.

Les limitations sur les couples moteurs sont liées aux vitesses des moteurs. Ces limitations sont données par le gabarit figure 3.1.

Ces contraintes peuvent s'écrire (3.46).

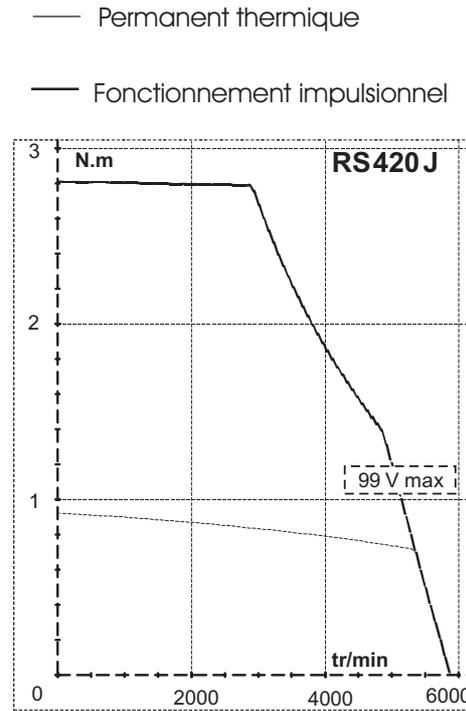


FIG. 3.1 – Gabarit de couples et vitesses admissibles pour les moteurs du robot, tiré de la documentation constructeur du moteur Parvex RS420J

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( |\Gamma_1^*(\alpha)| - \Gamma_{max}(|\dot{\delta}_1|) \right)_{max} < 0 \\ \left( |\Gamma_2^*(\alpha)| - \Gamma_{max}(|\dot{\delta}_2|) \right)_{max} < 0 \\ \left( |\Gamma_3^*(\alpha)| - \Gamma_{max}(|\dot{\delta}_2 + \dot{\delta}_3|) \right)_{max} < 0 \\ \left( |\Gamma_4^*(\alpha)| - \Gamma_{max}(|\dot{\delta}_4|) \right)_{max} < 0 \end{array} \right. \quad (3.46)$$

Où l'on note par  $(\ )_{max}$  le maximum d'une grandeur au cours de la phase de simple support ou de double support et où  $\Gamma_{max}(\dot{\delta}_j)$  est une fonction linéaire par morceaux définie par (3.47) et qui est une approximation du gabarit figure 3.1. Les couples et les vitesses sont ici donnés après le réducteur contrairement au gabarit.

$$\Gamma_{max}(\dot{\delta}_j) = \begin{cases} 140 \text{ N.m} & \text{si } 0 < \dot{\delta}_j < 5.45 \text{ rad.s}^{-1} \\ -15.94(\dot{\delta}_j - 5.45) + 140 \text{ N.m} & \text{si } 5.45 < \dot{\delta}_j < 10.47 \text{ rad.s}^{-1} \\ -35.71(\dot{\delta}_j - 10.47) + 60 \text{ N.m} & \text{si } 10.47 < \dot{\delta}_j < 12.15 \text{ rad.s}^{-1} \end{cases} \quad (3.47)$$

Nous avons donné ces contraintes liées aux capacités moteur de manière complète. Cependant, nous avons constaté lors des optimisations, que seule la première contrainte de (3.47) est importante. Les autres contraintes étant naturellement vérifiées, même pour des vitesses importantes, nous n'avons fait que les vérifier après coup, sans les inclure dans l'optimisation. Il est à remarquer qu'il existe une autre contrainte sur les moteurs repré-

sentée sur le gabarit figure 3.1. Il s'agit d'une limitation de la température des moteurs qui peut s'exprimer sur la moyenne des couples, pour des mouvements cycliques comme le cas d'une marche périodique. Cette limitation vient de l'échauffement des moteurs dû aux pertes par effet Joule. Nous n'avons pas considéré cette contrainte, chaque essais de marche sur le prototype Rabbit n'ayant pas besoin de durer longtemps.

Les contraintes de non glissement et de non décollement des pieds sont données par les relation (3.48) pour le pied  $i = 1$  en simple support et pour les pieds  $i = 1, 2$  en double support.

$$\begin{aligned} (-fR_{iz} - R_{ix})_{max} &\leq 0 \\ (-fR_{iz} + R_{ix})_{max} &\leq 0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

Nous considérons également la contrainte de non pénétration du pied en transfert dans le sol par une contrainte donnée par (3.49). Cette contrainte est établie afin que le pied libre passe au dessus de la parabole qui s'annule en position de début et fin du pied libre et dont le maximum  $z_{max}$  est situé au dessus du pied d'appui.

$$\min_{\alpha \in [\alpha_{iSS}, \alpha_{fSS}]} \left[ z_2(\alpha) - \left( \frac{x_2(\alpha)}{d} \right)^2 z_{max} + z_{max} \right] > 0 \quad (3.49)$$

Enfin nous donnons une contrainte sur la vitesse du bipède désirée, car il s'agit d'un paramètre de marche qu'il est important de pouvoir faire varier. Nous allons donc par la suite rechercher un ensemble de mouvements optimaux pour différentes vitesses de marche. Cette contrainte est donnée par (3.50).

$$\frac{d}{T_{SS} + T_{DS}} = v \quad (3.50)$$

Où  $v$  est la vitesse moyenne d'avance du bipède désirée, et la durée du simple support  $T_{SS}$  est calculée par l'intégrale (3.51).

$$T_{SS} = \int_{\alpha_{iSS}}^{\alpha_{fSS}} \frac{1}{\dot{\alpha}} d\alpha \quad (3.51)$$

Le calcul du temps de simple support n'est pas connu a priori, les dynamiques de zéro devant être simulée. Cette intégrale est écrite en fonction de  $\alpha$  car, comme proposé par CHEVALLEREAU *et al.* [21] et GRIZZLE *et al.* [32], nous allons intégrer les dynamiques de zéro données par l'équation différentielle en  $\alpha$  (3.13) au lieu d'intégrer les dynamiques de zéro données par les équations différentielles en temps (3.10).

### 3.2.4 Présentation de la hiérarchisation des contraintes et réduction de la hiérarchisation des contraintes

La figure 3.2 présente l'enchaînement de contraintes à vérifier pour pouvoir calculer le mouvement sur un pas. Nous expliquons ici les raisons de cet enchaînement. Tout d'abord, il est clair que les configurations limites de début et de fin de phase ainsi que la configuration intermédiaire de simple support doivent être définies pour que l'évolution polynômiale des variables articulaires existe en simple support. Il est aussi nécessaire qu'entre les configurations de début et de fin de simple support l'évolution de  $\alpha$  soit décroissante, ce qui s'applique sur les configurations limites. Ces contraintes sur  $\alpha$  ne peuvent être calculées qu'une fois les configurations limites définies, car en particulier  $\alpha_{fSS}$  se déduit de  $\delta_{3iDS}$  et  $\delta_{4iDS}$ . Ensuite, une fois que les polynômes existent en simple support, et que les valeurs caractéristiques de alpha vérifient la monotonie, la dynamique de  $\alpha$  ne peut être définie que si la singularité  $f(\alpha)$  est évitée. Une fois que la dynamique de simple support existe, il faut qu'elle soit monotone, c'est-à-dire que le robot ne retombe pas en arrière avant d'avoir terminé le pas. Une fois que les dynamiques de zéro du simple support permettent d'atteindre la configuration de fin de simple support, les vitesses  $\dot{\alpha}_{fSS}$  et  $\dot{\alpha}_{iDS}$  sont alors définies et il est alors possible de calculer les contraintes de double support. Parmi ces contraintes de double support, il est nécessaire que toutes les configurations de double support soient possibles, pour que la phase soit définie. Une fois toutes les configurations de double support définies, le mouvement de marche complet existe et il est possible de calculer le critère et toutes les autres contraintes.

Les raisons principales du nombre important de contraintes à vérifier dans la séquence est la présence de la phase de simple support sous-actionnée pour laquelle les dynamiques de zéro ne sont pas forcément définies et ne sont pas forcément monotones, et de la phase de double support sur-actionnée pour laquelle des solutions du modèle géométrique inverse n'existent pas forcément.

Le problème d'optimisation de départ (3.1) que nous avons considéré est en fait plus spécifique dans notre cas, et peut être mis sous la forme (3.52).

$$\begin{cases} \min_{p \in \mathbb{R}^n} f(p) \\ g_{ni}(p) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m_n \\ g_{(n-1)i}(p) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m_{n-1} \\ \vdots \\ g_{0i}(p) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m_0 \end{cases} \quad (3.52)$$

où  $f(p)$  est définie pour tout  $p \in \{p / \forall j \in \{0, 1, \dots, n-1\} \forall i \in \{1, 2, \dots, m_j\} g_{ji} \leq 0\}$  et où  $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$  et  $\forall i \in \{1, 2, \dots, m_k\}$   $g_{ki}(p)$  est définie pour tout  $p \in \{p / \forall j \in \{0, 1, \dots, k-1\} \forall i \in \{1, 2, \dots, m_j\} g_{ji} \leq 0\}$ , ce qui signifie que les contraintes d'un niveau

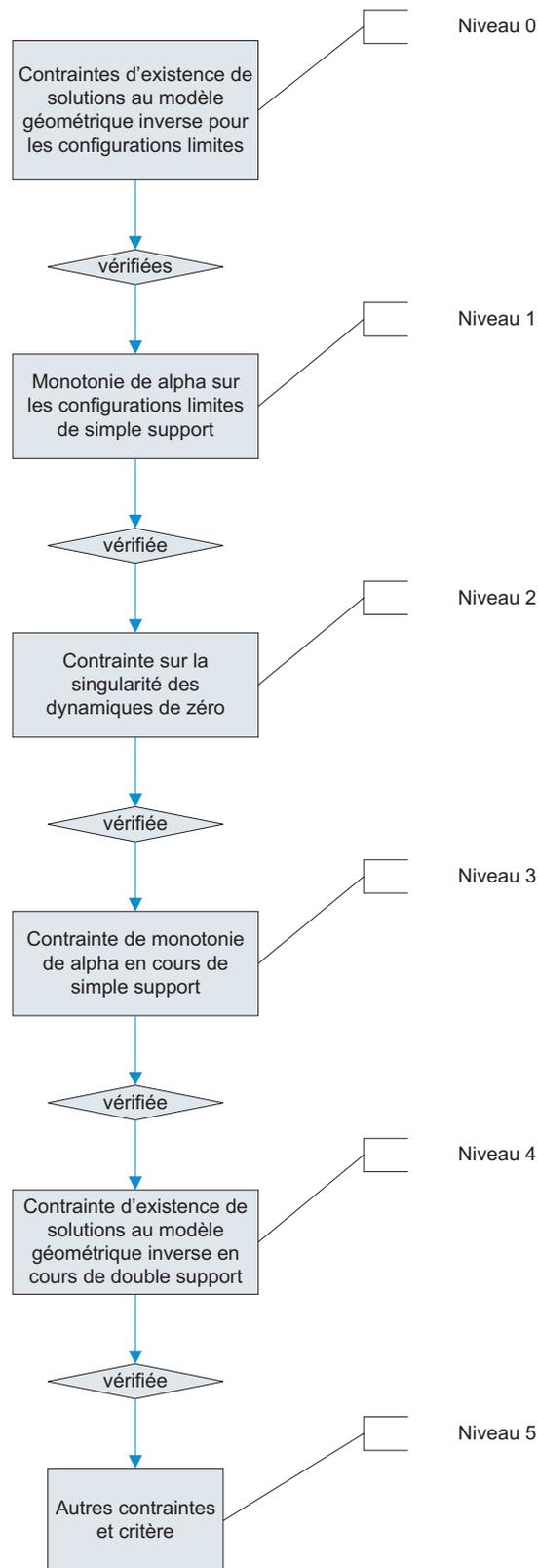


FIG. 3.2 – Représentation de la séquence de contraintes à vérifier avant que le pas soit défini

$k \in \{0, 1, \dots, n\}$  n'existent que si les contraintes des niveaux précédents sont vérifiées. Pour les contraintes de niveau zéro, on a  $\forall i \in \{1, 2, \dots, m_0\}$   $g_{0i}(p)$  est définie pour tout  $p \in \mathbb{R}^n$ , ce qui signifie que'elles sont définies dans tout l'espace.

Nous avons vu figure 3.2 que nous avons 6 niveaux de contraintes. Cependant, nous allons simplifier le nombre de niveaux car comme nous le verrons en section 3.4 sur la méthode d'optimisation que nous allons utiliser, très peu de méthodes d'optimisation actuelles permettent de résoudre ce genre de problèmes directement, et la méthode que nous avons choisie ne permet pas de prendre en compte beaucoup de niveaux de contraintes de manière efficace. Nous avons donc regroupé les niveaux de contraintes 0 et 1 d'une part et 2, 3 et 4 d'autre part en un seul niveau de contraintes.

Pour les contraintes de niveaux 0 et 1, nous allons en fait définir l'angle  $\alpha$  de la jambe 1 de support en fin de simple support, même lorsque la distance entre la hanche et l'extrémité de cette jambe est trop grande pour qu'une solution au modèle géométrique existe. Nous rappelons qu'un changement de jambe est effectué entre la fin du simple support et le début du double support, et donc que  $\alpha_{fSS}$  s'obtient à partir des variables articulaires de début de double support par la relation (3.22), et que les angles relatifs de la jambe 2 en début de double support  $\delta_{3iDS}$  et  $\delta_{4iDS}$  s'obtiennent par le modèle géométrique inverse à partir de  $\alpha_{iDS}$ ,  $\delta_{1iDS}$  et  $d$ . Quand il n'y a pas de solution pour  $\delta_{3iDS}$  et  $\delta_{4iDS}$ , nous définissons alors  $\alpha_{fSS}$  comme étant l'angle représentant la direction entre la cheville de la jambe 1 et la hanche, donné par l'équation (3.53).  $\alpha_{fSS}$  ainsi défini est continu en fonction des paramètres  $\alpha_{iDS}$ ,  $\delta_{1iDS}$  et  $d$  entre ses définitions lorsque la configuration de début de double support est définie ou non.

$$\begin{cases} \tan(\alpha_{fSS}) = \frac{-(d - x_{1r\ iDS})}{-z_{1r\ iDS}} \\ x_{1r\ iDS} = l_1 \sin(\alpha_{iDS}) - l_2 \sin(\alpha_{iDS} + \delta_{1\ iDS}) \\ z_{1r\ iDS} = -l_1 \cos(\alpha_{iDS}) + l_2 \cos(\alpha_{iDS} + \delta_{1\ iDS}) \end{cases} \quad (3.53)$$

Pour regrouper les contraintes des niveaux 2, 3 et 4, nous allons modifier le problème lorsque les contraintes des niveau 2 et 3 ne sont pas vérifiées, de telle sorte à ce que l'on puisse définir la contrainte de niveau 4. Pour la contrainte de niveau 2 sur la singularité des dynamiques de zéro  $f(\alpha) = 0$ , nous l'avons simplement saturée à une valeur limite  $f(\alpha)_{min} > 0$ . Ainsi les dynamiques de zéro n'ont plus de sens physique lorsque  $f(\alpha) < f(\alpha)_{min}$  mais restent définies. Les nouvelles dynamiques sont données par (3.54) au lieu de (3.14).

$$\sigma(\alpha)^2 - \sigma_{iSS}^2 = -2Mg \int_{\alpha_{iSS}}^{\alpha} x_G(\alpha) \max(f(\alpha), f(\alpha)_{min}) d\alpha = \Phi(\alpha) \quad (3.54)$$

Ensuite pour vérifier la contrainte (3.44) du niveau 3, nous allons saturer  $\dot{\alpha}_{iSS}$  sur sa valeur minimale nécessaire pour que le robot ne retombe pas en arrière en cours de simple

support. D'abord, il est à noter que la contrainte (3.44) se réécrit en (3.55) pour tenir compte de la saturation possible de  $f(\alpha)$ .

$$\Phi_{min} + \max(f(\alpha_{iSS}), f(\alpha_{iSS})_{min})^2 \dot{\alpha}_{iSS}^2 > 0 \quad (3.55)$$

La modification de  $\dot{\alpha}_{iSS}$  en  $\dot{\alpha}_{iSS sat}$  est donnée par (3.56).

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_{iSS sat} &= \min(\dot{\alpha}_{iSS}, \dot{\alpha}_{iSS min} + \epsilon) \\ \dot{\alpha}_{iSS min} &= -\frac{\sqrt{-\Phi_{min}}}{\max(f(\alpha_{iSS}), f(\alpha)_{min})} \end{aligned} \quad (3.56)$$

Où  $\epsilon > 0$  est une constante ici pour assurer la vérification de la contrainte (3.44) de manière stricte.

Nous aurions pu pousser cette méthode de saturation sur toutes les contraintes à vérifier pour que le pas soit défini, de telle sorte à ce que quelque soit le jeu de paramètres définissant le pas nous puissions le calculer directement. Mais cette saturation nous semble beaucoup plus compliquée à faire pour les autres contraintes des niveaux 0, 1 et 4.

Il est également à remarquer qu'il existe un certain nombre de contraintes qu'il n'est pas indispensable de vérifier pour que le pas soit défini, comme les butées articulaires. Elles ont été considérées dans le niveau 5 figure 3.2 alors qu'elles ne nécessitent pas la vérification des contraintes de niveau 4 pour être définies. Ces contraintes pourraient donc être mises dans un autre niveau que le niveau 5. Dans la pratique, un même problème d'optimisation avec une hiérarchisation des contraintes peut être mis sous plusieurs formes (3.52) qui se différencient par le niveau dans lequel on met les contraintes qui ne sont pas indispensables à vérifier pour que le pas soit défini. Pour la méthode d'optimisation que nous avons considérée, il nous a semblé qu'il était plus intéressant de mettre le plus de contraintes possibles au niveau 5 afin d'alléger les sous-problèmes d'optimisation que l'on aura à résoudre. Nous verrons en effet section 3.4.2 que pour résoudre le problème complet, nous utilisons des optimisations résolvant des sous problèmes constitués d'un nombre réduit de niveaux de contraintes. Et la complexité de l'algorithme d'optimisation complet dépend fortement de la complexité des sous-problèmes d'optimisation. Nous avons donc cherché à simplifier au mieux ces sous-problèmes d'optimisation. Par contre la complexité de l'algorithme d'optimisation présenté en section 3.4.1 que nous n'avons pas utilisé dans cette thèse dépend moins de la complexité des sous-optimisations. Il nous semble alors plus intéressant pour cet algorithme d'optimisation de mettre le plus de contraintes possibles aux niveaux inférieurs afin que les conditions initiales des optimisations des niveaux supérieurs vérifient plus de contraintes et soient donc plus proches de la solution de ces problèmes des niveaux supérieurs. Ainsi, la condition initiale d'un problème d'optimisation étant plus proche de la solution, les optimisations des niveaux supérieurs seraient

donc plus rapides. Le temps supplémentaire passé dans l'optimisation des problèmes des niveaux inférieurs avec plus de contraintes serait gagné en passant moins de temps dans les optimisations des niveaux supérieurs. Se reporter en section 3.4 pour une présentation des algorithmes que nous avons utilisés pour résoudre ce problème d'optimisation avec une hiérarchie de contraintes.

### 3.3 Simulation du mouvement de référence

Nous présentons dans cette partie comment nous calculons les contraintes et le critère pour les deux phases de simple et double support. Le problème principal présenté dans cette section réside dans le calcul en double support de la répartition des efforts pour un mouvement donné de telle sorte à optimiser les critères d'optimisation. Le degré de liberté sur la répartition des efforts vient du fait que le robot est sur-actionné. Nous effectuons sensiblement le même calcul que MURARO [62] pour le critère (3.28), mais nous le présentons dans un sens plus physique. Pour le critère (3.32) ce calcul n'a pas été fait et est plus compliqué.

Nous verrons dans la section 3.4.2 que dans le cas d'un problème ayant une hiérarchisation des contraintes nous avons parfois besoin de ne calculer qu'une partie des contraintes, celles des niveaux 0 et 1, ou jusqu'au niveau 4, ou bien la totalité des contraintes et le critère. Nous montrons comment calculer l'ensemble des grandeurs, sachant qu'alors n'en calculer qu'une partie est évident.

L'ensemble des calculs présentés dans cette partie ont été effectués sous Matlab et les simulations numériques avec Simulink, en utilisant le plus souvent sous Simulink des *s-function* écrites en C/C++ afin d'obtenir de meilleurs temps de calcul.

#### 3.3.1 Calculs préliminaires

Dans un premier temps nous calculons les contraintes des niveaux 0 et 1 sur les configurations limites des phases à partir de (3.36) et (3.37) pour savoir si une solution au modèle géométrique inverse existe, et nous calculons les contraintes sur l'évolution monotone de  $\alpha$  au niveau des configurations limites, à partir de (3.38), et (3.53) si  $\alpha_{fss}$  n'est pas défini. Une fois ces contraintes calculées, si elles sont vérifiées, nous calculons ensuite les polynômes des variables articulaires en simple support, comme nous l'avons présenté en section 3.2.1.5. Nous verrons en section 3.4.2 le traitement que nous faisons si les contraintes calculées n'étaient pas vérifiées.

Nous calculons alors les contraintes des niveaux 2, 3 et 4. Il s'agit d'abord du calcul des contraintes sur les dynamiques de zéro en simple support avec l'équation (3.54) qui sature  $f(\alpha)$ , en faisant une intégration numérique. Nous obtenons la contrainte de vérification de la singularité (3.45) et la contrainte de monotonie de  $\alpha$  (3.55) en simple support. Puis

nous saturons la vitesse  $\dot{\alpha}_{iSS}$  comme indiqué par la relation (3.56) pour pouvoir calculer ensuite les polynômes en phase de double support comme présenté en section 3.2.1.5. Nous calculons alors la contrainte d'existence des configurations en cours de double support (3.41). Pour déterminer le maximum de la violation de la contrainte en cours de double support, nous simulons la phase de double support bien que le comportement du robot ne soit pas régi par une équation différentielle.

Si les contraintes que nous venons de calculer sont vérifiées, nous calculons alors les autres contraintes du niveau 5 et le critère pour le simple support présenté section 3.3.2 et pour le double support présenté section 3.3.3. Nous verrons là encore en section 3.4.2 le traitement que nous faisons si les contraintes et le critère n'étaient pas définis.

### 3.3.2 Simulation en phase de simple support

Le calcul principal présenté ici est celui des couples et des réactions du sol en phase de simple support. Les polynômes en phase de simple support ont déjà été calculés, et les contraintes indispensables à la définition de la phase de simple support sont vérifiées. L'ensemble des calculs présentés ici se fait à l'intérieur d'une seule et même simulation. Il est à noter que nous utilisons  $\alpha$  à la place du temps comme variable d'intégration.

Nous calculons les couples et les réactions du sol, ainsi que les dynamiques de zéro. L'enchaînement de ces calculs est représenté figure 3.3 par un schéma blocs. Bien que nous ayons déjà calculé les dynamiques de zéro pour le calcul de certaines contraintes dans une autre simulation, nous avons besoin de les recalculer dans cette nouvelle simulation pour déterminer les couples et les réactions du sol. Dans ce calcul, nous allons également utiliser le calcul des dynamiques de zéro sous la forme simplifiée (3.14). Pour réduire les calculs, nous déterminerons les dynamiques de zéro à partir du modèle complet du robot en simple support (1.32) et en utilisant les relations (3.11).

A partir du calcul intégral de  $\Phi(\alpha)$  nous calculons alors  $\dot{\alpha}$  et  $\ddot{\alpha}$  à partir de (3.15) et (3.16). Ensuite nous calculons les vitesses et accélérations articulaires avec les relations (3.6) et (3.7). Puis à partir des 4 dernières lignes du système (1.32) nous calculons les couples comme donné par l'équation (3.57).

$$A_{25}\ddot{q} + C_{25}(q, \dot{q}) + G_{25}(q) = D_{\Gamma 25}\Gamma \quad (3.57)$$

Où :

- $A_{25}(4 \times 5)$  est la sous matrice de  $A(5 \times 5)$  composée des lignes 2 à 5,
- $C_{25}(4 \times 1)$  est le sous vecteur de  $C(5 \times 1)$  composé des lignes 2 à 5,
- $G_{25}(4 \times 1)$  est le sous vecteur de  $G(5 \times 1)$  composé des lignes 2 à 5,
- $D_{\Gamma 25}(4 \times 4)$  est la sous matrice de  $D_{\Gamma}(5 \times 4)$  composée des lignes 2 à 5.  $D_{\Gamma 25}$  est une matrice de rang plein composée de 0 et de  $\pm 1$ .

Les réactions du sol se déduisent alors des équations du principe fondamental de la

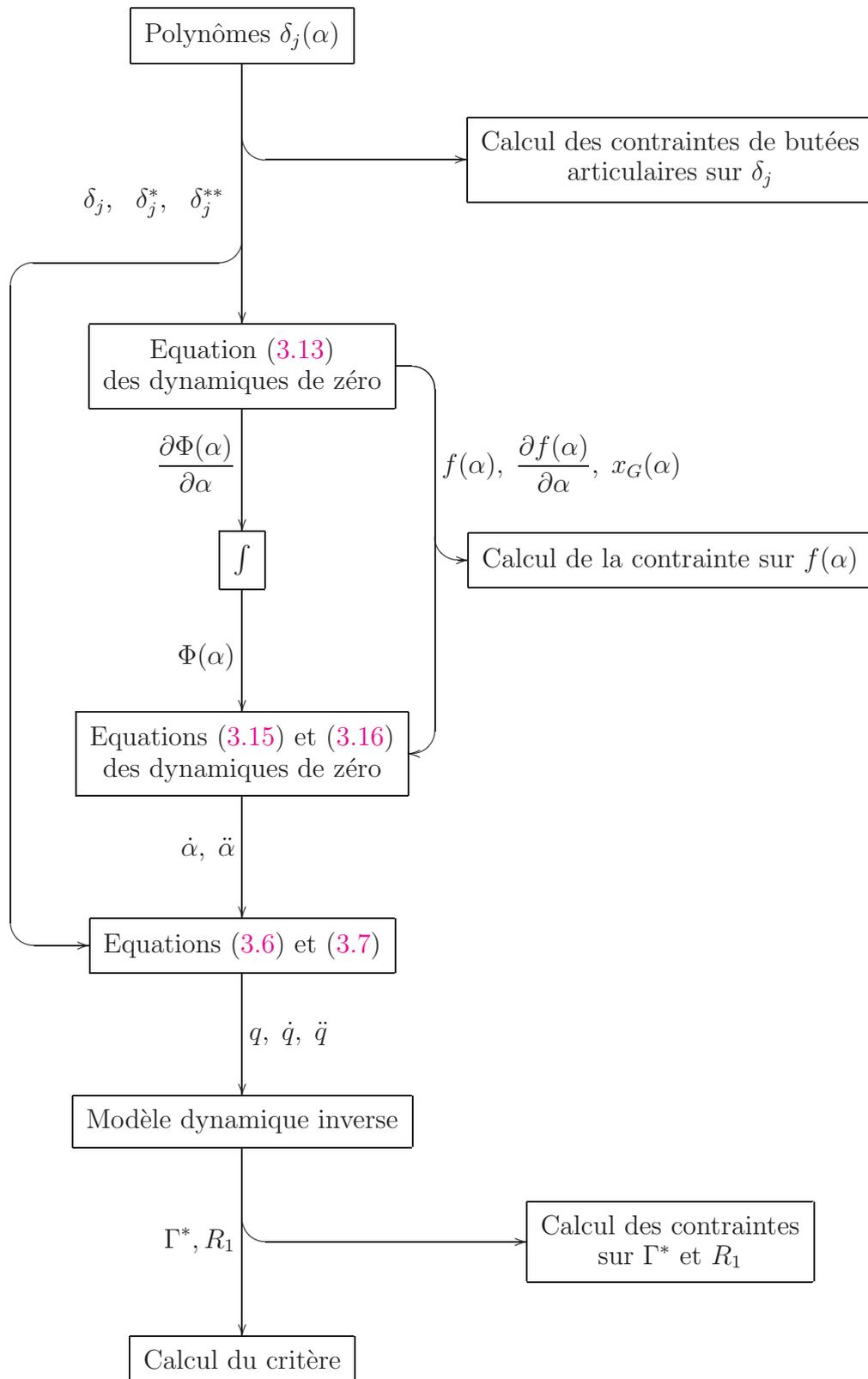


FIG. 3.3 – Représentation des calculs au cours de la simulation du simple support.

dynamique sur le robot complet (1.36).

Nous calculons alors le critère (3.29) ou (3.33) pour la phase de simple support à partir des couples. Nous calculons également la position de l'extrémité de la jambe en transfert avec l'équation (1.38) et la vitesse moyenne d'avancement du bipède à partir de l'intégrale (3.51) et l'équation (3.50).

Nous avons alors déterminé toutes les grandeurs sur lesquelles portent les contraintes que nous avons présentées en section 3.2.3 pour le simple support.

Pour les contraintes qui s'appliquent sur toute une phase, nous avons choisi de réduire ces contraintes en leur point le plus contraignant. Pour cela il nous faut déterminer les valeurs maximum et minimum de ces contraintes, et il est important de les déterminer avec précision. Si l'on se contente de rechercher l'extremum pour la discrétisation naturellement faite, il se peut qu'il n'y ait pas de point de discrétisation proche de l'extremum, d'où une mauvaise précision de la détermination de la contrainte. Pour éviter cela, nous utilisons une intégration numérique à pas variable et *Simulink* contient des blocs de recherche des extremums pour qu'un pas d'échantillonnage soit pris le plus proche possible de l'extremum, à la précision machine près. Pour éviter des problèmes dus aux erreurs numériques, il est encore plus intéressant de déterminer le passage par zéro de la dérivée analytique de la grandeur considérée par rapport à la variable d'intégration, ici  $\alpha$ . C'est ce que nous avons fait, compte tenu que nous avons calculé les dérivées analytiques par rapport à la variable d'intégration lors du calcul formel des gradients des contraintes et du critère pour l'optimisation, qui est présenté en section 3.5.

### 3.3.3 Simulation en phase de double support

Nous allons ici aussi présenter le calcul des couples et des réactions du sol. Le bipède étant sur actionné durant le double support, les couples et les réactions du sol pour réaliser un même mouvement ne sont pas uniques. Nous allons ici présenter le calcul optimal de ces couples et réactions du sol, compte tenu du critère que nous souhaitons optimiser et des contraintes de non glissement et non décollement. Un tel calcul a déjà été fait par MURARO [62] pour le critère 3.28, présenté sous une forme plus générale que nous allons le faire. Cependant les calculs que nous présentons ici sont nécessaires afin de les adapter par la suite au calcul du gradient, que nous présentons section 3.5.4. De plus nous avons apporté une modification par rapport au calcul de la répartition des couples et des réactions du sol proposée par MURARO [62] afin que l'évolution des couples et réactions du sol reste continue au cours du double support dans le cas où les contraintes ne sont pas vérifiables durant le double support. Cette condition est importante pour permettre la résolution du problème d'optimisation par le programme d'optimisation. En effet, comme nous le verrons section 3.6, le programme d'optimisation utilisé ne peut trouver l'optimum dans le cas de discontinuités.

Nous présentons en figure 3.4 le schéma bloc des calculs effectués au cours de la simulation de la phase de double support. Nous pouvons y voir la succession des calculs qui a lieu au cours d'un pas d'échantillonnage. Nous considérons les polynômes déjà connus.

Nous commençons par calculer  $\alpha(t)$ ,  $\dot{\alpha}(t)$ ,  $\ddot{\alpha}(t)$ , connaissant le polynôme de  $\alpha$  en fonction du temps. Ensuite nous calculons  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\dot{\delta}_1$ ,  $\dot{\delta}_2$ ,  $\ddot{\delta}_1$  et  $\ddot{\delta}_2$ , d'une manière similaire au simple support, connaissant les polynômes  $\delta_1(\alpha)$  et  $\delta_2(\alpha)$ .

Nous calculons alors  $\delta_3$  et  $\delta_4$  à partir du modèle géométrique inverse obtenu en résolvant les équations (3.18).  $\dot{\delta}_3$  et  $\dot{\delta}_4$  sont obtenus en fonction de  $\dot{\alpha}(t)$  et  $\dot{\delta}_1$  à partir du système linéaire (1.34) signifiant que le pied 2 est fixe au sol.  $\ddot{\delta}_3$  et  $\ddot{\delta}_4$  sont obtenus de même à partir du système linéaire (1.35).

### 3.3.3.1 Position du problème du calcul des couples et des réactions du sol

Une fois toutes les accélérations articulaires obtenues, nous calculons, parmi l'infinité des solutions possibles du fait du sur-actionnement, les couples et les réactions du sol qui permettent d'optimiser notre critère (3.28) ou (3.32). Le sur-actionnement étant de degré 1, nous paramétrons cet ensemble de solutions avec une grandeur physique, dont nous présentons le choix par la suite. Nous cherchons ensuite la solution qui va nous permettre de minimiser les critères (3.28) ou (3.32) sous les contraintes présentées section 3.2.3. Pour cela, nous allons ici chercher à minimiser les expressions sous l'intégrale des critères (3.28) ou (3.32). Les seules contraintes qui sont influencées par le choix d'une répartition des efforts sont celles sur les couples et les réactions du sol. Pour simplifier le problème, nous ne considérons ici que les contraintes sur les réactions du sol. En effet, les contraintes de limites de couple sont moins restrictives. Si il est nécessaire de prendre en compte ces limitations de couple, par exemple pour des marches rapides, la prise en compte de ces contraintes sur les couples ne changerait pas la structure du problème. Nous verrons que pour ces problèmes de minimisation sous contraintes, le critère est quadratique et les contraintes linéaires, et le problème est mono-dimensionnel. Nous cherchons donc la solution du problème analytiquement, plutôt que d'utiliser un algorithme d'optimisation.

Avant de paramétrer l'ensemble des solutions, il est important de noter que les composantes verticales des réactions du sol ne sont pas influencées par la répartition des couples et ne peuvent donc pas être choisies comme paramètre de l'ensemble des solutions. Pour constater cela, nous partons des équations du moment cinétique et du principe fondamental de la dynamique. L'équation du moment cinétique est écrite au point de contact du pied 1 et est tirée de la première ligne du modèle dynamique (1.32). Les équations du principe fondamental de la dynamique appliqué à tout le bipède en son centre de gravité (1.36) sont celles présentées section 1.4.3. Les équations ainsi obtenues sont données par (3.58).

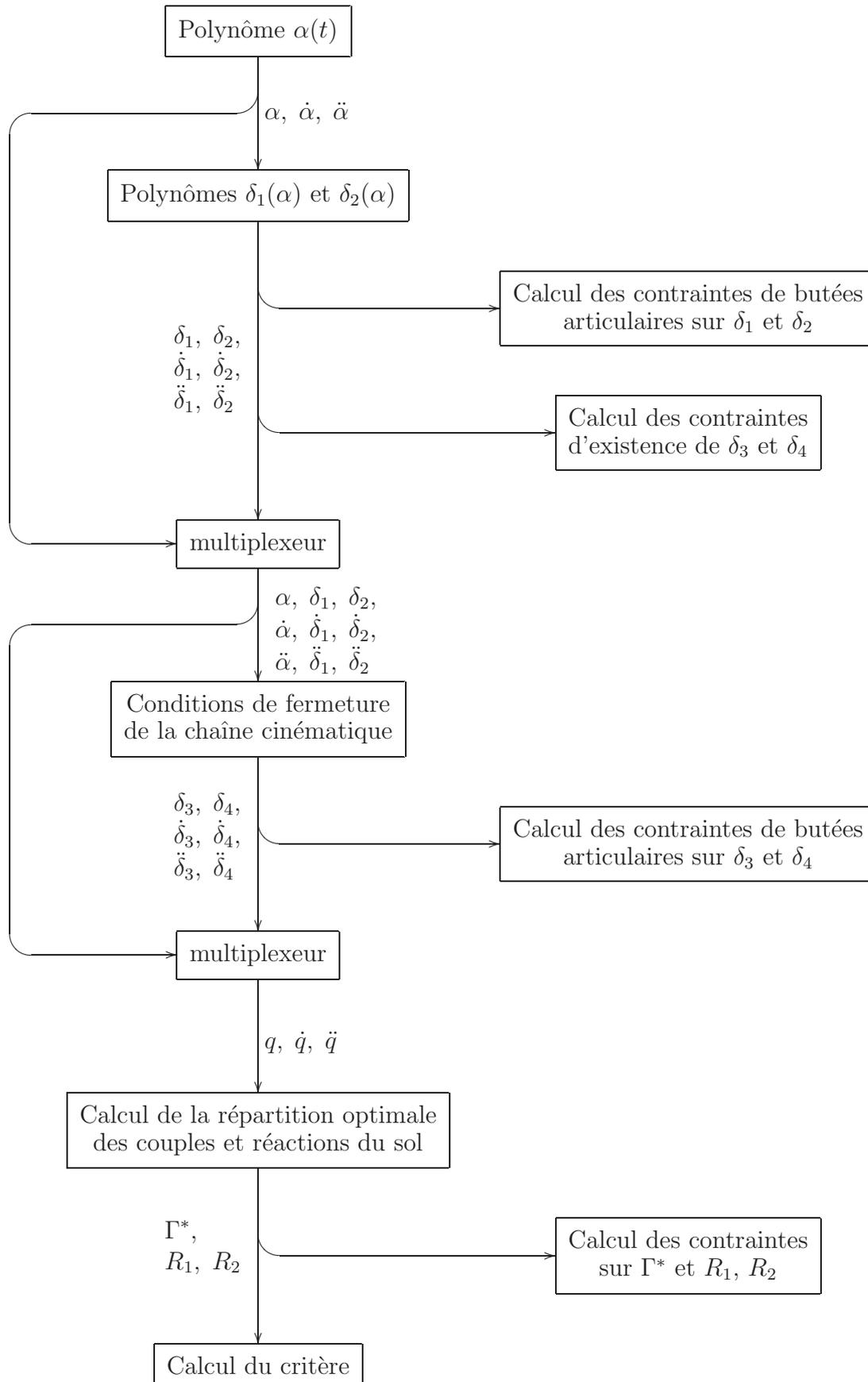


FIG. 3.4 – Représentation des calculs au cours de la simulation du double support.

$$\begin{cases} M\ddot{x}_G = R_{1x} + R_{2x} \\ M\ddot{z}_G = R_{1z} + R_{2z} \\ A_1(q)\ddot{q} + C_1(q, \dot{q}) + G_1(q) = -d R_{2z} \end{cases} \quad (3.58)$$

Dans la première ligne du modèle dynamique, la composante  $R_{2x}$  n'intervient pas car les deux pieds sont au même niveau, c'est-à-dire que le double support a lieu sur un sol plat. Nous constatons qu'en combinant les deuxième et troisième lignes de (3.58), il est possible de déterminer  $R_{1z}$  et  $R_{2z}$  alors donnés par (3.59).

$$\begin{cases} R_{2z} = -\frac{1}{d} (A_1(q)\ddot{q} + C_1(q, \dot{q}) + G_1(q)) \\ R_{1z} = R_{2z} - M\ddot{z}_G \end{cases} \quad (3.59)$$

Ils ne dépendent donc pas de la répartition des couples en phase de double support. Cette caractéristique n'est valable que tant que le sol est plat. Avec un sol plat, il n'est donc pas possible de paramétrer l'infinité de solutions par  $R_{1z}$  ou  $R_{2z}$ . Nous avons choisi de paramétrer l'infinité des solutions avec  $R_{2x}$ . Le choix de ce paramètre permet de calculer légèrement plus simplement la solution optimale que  $R_{1x}$  ou une composante de couple.

Avec ce paramètre  $R_{2x}$ , les problèmes de la minimisation des termes sous l'intégrale des critères (3.28) et (3.32) sous contraintes de non décollement et non glissement nous donnent (3.60) et (3.61).

$$\begin{aligned} & \min_{R_{2x}} \Gamma^{*T} \Gamma^* \\ & \begin{cases} -fR_{1z} - R_{1x} \leq 0 \\ -fR_{1z} + R_{1x} \leq 0 \\ -fR_{2z} - R_{2x} \leq 0 \\ -fR_{2z} + R_{2x} \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} & \min_{R_{2x}} \max \left( 0, \dot{q}^T D_\Gamma \Gamma^* + \frac{R}{K_{em}^2} \Gamma^{*T} \Gamma^* \right) \\ & \begin{cases} -fR_{1z} - R_{1x} \leq 0 \\ -fR_{1z} + R_{1x} \leq 0 \\ -fR_{2z} - R_{2x} \leq 0 \\ -fR_{2z} + R_{2x} \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.61)$$

Les couples intervenants dans les deux problèmes (3.60) et (3.61) s'obtiennent en fonction de  $R_{2x}$  par la relation (3.62) obtenue à partir des lignes 2 à 5 du modèle (1.32) et des relations (3.58) qui permettent de connaître  $R_{2z}$ .

$$\Gamma^* = J - KR_{2x}$$

$$\begin{cases} J = D_{\Gamma 25}^{-1} (A_{25}\ddot{q} + C_{25}(q, \dot{q}) + G_{25}(q) - D_{2z\ 25}R_{2z}) + \Gamma_s \text{sign}(D_{\Gamma}^T \dot{q}) + F_v D_{\Gamma}^T \dot{q} \\ K = D_{\Gamma 25}^{-1} D_{2x\ 25} \end{cases} \quad (3.62)$$

Où :

- $A_{25}(4 \times 5)$  est la sous matrice de  $A(5 \times 5)$  composée des lignes 2 à 5,
- $C_{25}(4 \times 1)$  est le sous vecteur de  $C(5 \times 1)$  composé des lignes 2 à 5,
- $G_{25}(4 \times 1)$  est le sous vecteur de  $G(5 \times 1)$  composé des lignes 2 à 5,
- $D_{\Gamma 25}(4 \times 4)$  est la sous matrice de  $D_{\Gamma}(5 \times 4)$  composée des lignes 2 à 5.  $D_{\Gamma 25}$  est une matrice de rang plein composée de 0 et de  $\pm 1$ ,
- $D_{2x\ 25}(4 \times 1)$  est la sous matrice de  $D_2(5 \times 2)$  composée de la première colonne et des lignes 2 à 5,
- $D_{2z\ 25}(4 \times 1)$  est la sous matrice de  $D_2(5 \times 2)$  composée de la deuxième colonne et des lignes 2 à 5.
- $\Gamma_s$  et  $F_v$  sont des termes pour la prise en compte des frottements articulaires, voir (1.21)

Pour résoudre les problèmes (3.60) et (3.61) nous allons considérer les contraintes sur  $R_{2x}$  et prendre les contraintes les plus restreignantes sur  $R_{2x}$ . Il est possible d'écrire les contraintes sur les réactions du sol en fonction de  $R_{2x}$  sous la forme (3.63) en utilisant les relations (3.58).

$$ER_{2x} + F(q, \dot{q}, \ddot{q}) \leq 0 \quad (3.63)$$

Les matrices  $E$  et  $F(q, \dot{q}, \ddot{q})$  sont données par les expressions (3.64).

$$\begin{cases} E = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ F(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \begin{bmatrix} -fR_{1z} - M\ddot{x}_G \\ -fR_{1z} + M\ddot{x}_G \\ -fR_{2z} \\ -fR_{2z} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3.64)$$

Nous séparons maintenant les contraintes qui s'expriment comme une borne supérieure sur  $R_{2x}$  et celles qui s'expriment comme une borne inférieure. Ici vu que le vecteur  $E$  n'est composé que de  $\pm 1$ , nous obtenons directement que les lignes 1 et 4 de (3.63) donneront les bornes supérieures et les lignes 2 et 3 les bornes inférieures. Dans un cas plus général, où on tiendrait compte des contraintes de couple, on aurait la définition (3.65) de l'ensemble

des lignes de (3.63) donnant des bornes inférieures et de l'ensemble des lignes donnant des bornes supérieures.

$$\begin{aligned} I_{inf} &= \{i / E_i > 0\} \\ I_{sup} &= \{i / E_i < 0\} \end{aligned} \quad (3.65)$$

Où  $I_{inf}$  est l'ensemble des lignes imposant une borne inférieure sur  $R_{2x}$  et  $I_{sup}$  est l'ensemble des lignes imposant une borne supérieure, et  $E_i$  est le coefficient de  $E$  de la ligne  $i$ .

Pour les cas où  $E_i$  serait nul, il n'y aurait pas de solution en  $R_{2x}$  vérifiant les contraintes si  $F_i > 0$ , et la contrainte serait vérifiée quelque soit  $R_{2x}$  si  $F_i \leq 0$ .

Parmi l'ensemble des bornes inférieures et supérieures,  $R_{2x inf}$  est la borne inférieure la plus contraignante sur  $R_{2x}$  et  $R_{2x sup}$  la borne supérieure la plus contraignante. Ces bornes sont données par (3.66).

$$\begin{aligned} R_{2x inf} &= \max_{i \in I_{inf}} \frac{F_i}{E_i} \\ R_{2x sup} &= \min_{i \in I_{sup}} \frac{F_i}{E_i} \end{aligned} \quad (3.66)$$

Les contraintes sur  $R_{2x}$  s'écrivent donc simplement (3.67).

$$R_{2x inf} \leq R_{2x} \leq R_{2x sup} \quad (3.67)$$

### 3.3.3.2 Calcul des couples et des réactions du sol dans le cas de la minimisation de la norme des couples

Pour en revenir à la résolution du problème (3.60), celui-ci aura une solution si  $R_{2x inf} \leq R_{2x sup}$ . La solution  $R_{2x opti}$  minimisant la norme des couples sans considérer les contraintes s'obtient lorsque  $\Gamma^{*T} \frac{\partial \Gamma^*}{\partial R_{2x}} = 0$ . En considérant la relation (3.62) donnant les couples en fonction de  $R_{2x}$ , l'expression de  $R_{2x opti}$  obtenue est alors donnée par (3.68).

$$R_{2x opti\Gamma} = \frac{K^T J}{K^T K} \quad (3.68)$$

La solution du problème (3.60) lorsqu'elle existe, c'est-à-dire que  $R_{2x inf} \leq R_{2x sup}$ , sera alors donnée par trois cas :

- si  $R_{2x inf} \leq R_{2x opti\Gamma} \leq R_{2x sup}$  alors  $R_{2x} = R_{2x opti\Gamma}$ ,
- si  $R_{2x opti\Gamma} \leq R_{2x inf}$  alors  $R_{2x} = R_{2x inf}$ ,
- si  $R_{2x sup} \leq R_{2x opti\Gamma}$  alors  $R_{2x} = R_{2x sup}$ .

Dans le cas où il n'y aurait pas de solution, c'est-à-dire lorsque  $R_{2x inf} \geq R_{2x sup}$ , nous choisissons la solution qui minimise la violation des contraintes, c'est-à-dire qui vérifie le problème (3.69).

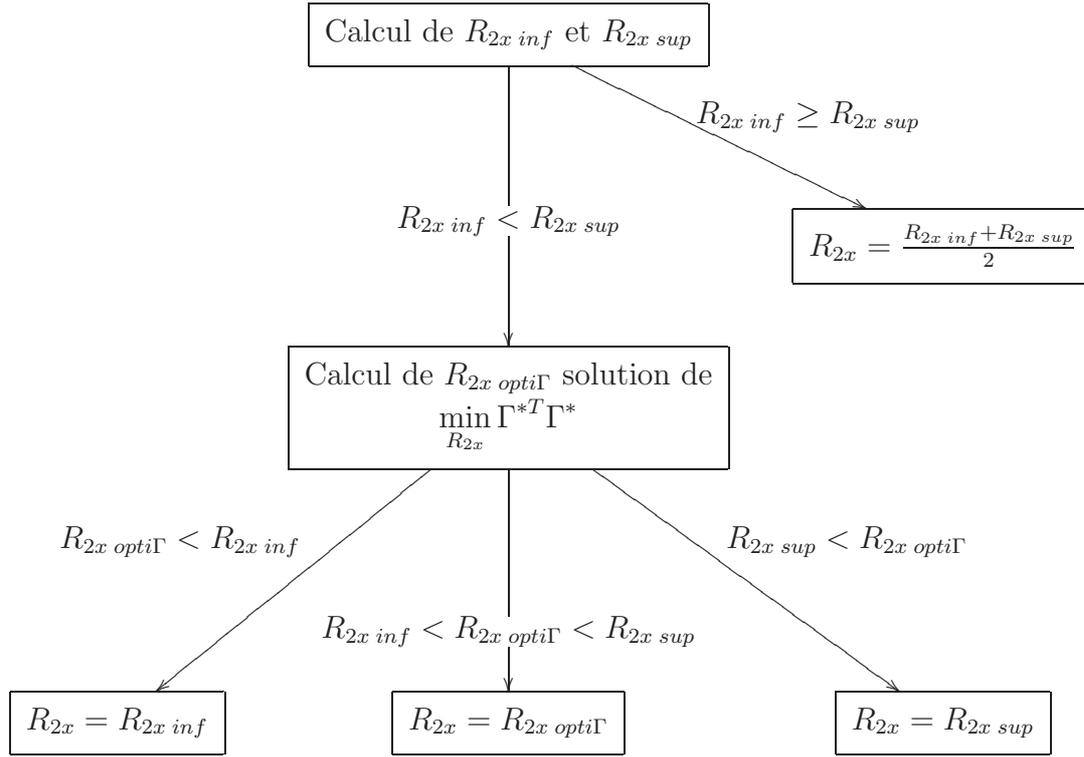


FIG. 3.5 – Représentation de l’algorithme de calcul de  $R_{2x}$  en double support lorsque le critère sur la norme des couples est considéré.

$$\min_{R_{2x}} \max_i \{E_i R_{2x} + F_i\} \quad (3.69)$$

Le choix de ce problème lorsqu’il n’est plus possible de vérifier les contraintes assure la continuité (mais pas la dérivabilité) de la solution prise en  $R_{2x}$  en fonction du temps, lors du passage entre les cas d’existence et de non existence d’une solution vérifiant les contraintes. La solution du problème est dans notre cas tout simplement donnée par (3.70), le vecteur  $E_i$  contenant seulement  $\pm 1$ .

$$R_{2x} = \frac{R_{2x inf} + R_{2x sup}}{2} \quad (3.70)$$

Le schéma 3.5 récapitule la méthode de calcul de  $R_{2x}$ , solution du problème d’optimalité du critère de couples sous contraintes de non glissement.

### 3.3.3.3 Calcul des couples et des réactions du sol dans le cas de la minimisation de l’énergie dépensée

Dans le cas du problème (3.61), la condition d’existence d’une solution est la même que pour le problème (3.60). Pour résoudre ce problème, nous allons d’abord considérer la solution du problème (3.71). Dans le cas où la solution du problème (3.71) vérifierait la condition  $\dot{q}^T D_\Gamma \Gamma^* + \frac{R}{K_{em}^2} \Gamma^{*T} \Gamma^* \geq 0$ , ce serait également la solution du problème (3.61).

$$\begin{aligned} \min_{R_{2x}} \dot{q}^T D_\Gamma \Gamma^* + \frac{R}{K_{em}^2} \Gamma^{*T} \Gamma^* \\ R_{2x \text{ inf}} \leq R_{2x} \leq R_{2x \text{ sup}} \end{aligned} \quad (3.71)$$

Nous avons le même type de problème que (3.60), nous commençons donc par déterminer la solution sans contraintes qui est donnée par (3.72) avec les notations de (3.62).

$$R_{2x \text{ optiE1}} = \frac{(\dot{q}^T D_\Gamma + R/K_{em}^2 J^T) K}{R/K_{em}^2 K^T K} \quad (3.72)$$

Comme pour le problème (3.60), si  $R_{2x \text{ inf}} \leq R_{2x \text{ sup}}$ , la solution du problème (3.72) sera donnée par les trois cas :

- si  $R_{2x \text{ inf}} \leq R_{2x \text{ optiE1}} \leq R_{2x \text{ sup}}$  alors  $R_{2x} = R_{2x \text{ optiE1}}$ ,
- si  $R_{2x \text{ optiE1}} \leq R_{2x \text{ inf}}$  alors  $R_{2x} = R_{2x \text{ inf}}$ ,
- si  $R_{2x \text{ sup}} \leq R_{2x \text{ optiE1}}$  alors  $R_{2x} = R_{2x \text{ sup}}$ .

Dans le cas du problème complet (3.61), si nous avons la solution de (3.71) qui vérifie  $\dot{q}^T D_\Gamma \Gamma^* + \frac{R}{K_{em}^2} \Gamma^{*T} \Gamma^* < 0$ , il y a en fait une infinité de solutions vérifiant les contraintes et pour lesquelles le critère est nul. Dans ce cas, nous prendrons plutôt la solution qui vérifie au mieux les contraintes en gardant le critère nul, ce qui est donné par le problème (3.73).

$$\begin{aligned} \min_{R_{2x}} \max_i \{E_i R_{2x} + F_i\} \\ \dot{q}^T D_\Gamma \Gamma^* + \frac{R}{K_{em}^2} \Gamma^{*T} \Gamma^* \leq 0 \end{aligned} \quad (3.73)$$

Il est à noter que nous n'avons pas inclus les contraintes sur  $R_{2x}$  (3.67) car nous sommes assurés que la solution de (3.73) les vérifiera mieux que la solution de (3.71) qui vérifie déjà ces contraintes (3.67).

Ce problème (3.73) sans la contrainte  $\dot{q}^T D_\Gamma \Gamma^* + \frac{R}{K_{em}^2} \Gamma^{*T} \Gamma^* < 0$  est le même que le problème (3.69). Nous avons donc la solution du problème (3.73) sans contrainte qui est donnée par  $R_{2x \text{ optiE2}} = \frac{R_{2x \text{ inf}} + R_{2x \text{ sup}}}{2}$ . La contrainte du problème (3.73) est ici quadratique en  $R_{2x}$  et, en utilisant la notation (3.62), est donnée par (3.74).

$$\begin{aligned} c_{E<0} - b_{E<0} R_{2x} + a_{E<0} R_{2x}^2 \leq 0 \\ \text{avec} \begin{cases} a_{E<0} = \frac{R}{K_{em}^2} K^T K \\ b_{E<0} = \dot{q}^T D_\Gamma K + 2 \frac{R}{K_{em}^2} J^T K \\ c_{E<0} = \dot{q}^T D_\Gamma J + \frac{R}{K_{em}^2} J^T J \end{cases} \end{aligned} \quad (3.74)$$

Le terme quadratique étant positif et vu le sens de l'inégalité, le domaine défini par cette contrainte est soit vide si  $b_{E<0}^2 - 4a_{E<0}c_{E<0} < 0$  ou un intervalle donné par (3.75) si  $b_{E<0}^2 - 4a_{E<0}c_{E<0} \geq 0$ .

$$R_{2x} \in [R_{2x \text{ inf } E=0} \ R_{2x \text{ sup } E=0}]$$

$$\begin{cases} R_{2x \text{ inf } E=0} = \frac{-b_{E>0} - \sqrt{b_{E<0}^2 - 4a_{E<0}c_{E<0}}}{2a_{E>0}} \\ R_{2x \text{ sup } E=0} = \frac{-b_{E>0} + \sqrt{b_{E<0}^2 - 4a_{E<0}c_{E<0}}}{2a_{E>0}} \end{cases} \quad (3.75)$$

Sachant que la résolution du problème (3.73) se présente lorsque la solution de (3.71) vérifie  $\dot{q}^T D_\Gamma \Gamma^* + \frac{R}{K_{em}^2} \Gamma^{*T} \Gamma^* < 0$ , nous sommes en fait assurés que le domaine défini par la contrainte (3.74) est non vide, et donc que  $b_{E<0}^2 - 4a_{E<0}c_{E<0} \geq 0$ .

La solution du problème (3.73), dans le cas où l'optimum de (3.71) est négatif, est donc donnée par trois cas :

- si  $R_{2x \text{ inf } E=0} \leq R_{2x \text{ optiE2}} \leq R_{2x \text{ sup } E=0}$  alors  $R_{2x} = R_{2x \text{ optiE2}}$ ,
- si  $R_{2x \text{ optiE2}} \leq R_{2x \text{ inf } E=0}$  alors  $R_{2x} = R_{2x \text{ inf } E=0}$ ,
- si  $R_{2x \text{ sup } E=0} \leq R_{2x \text{ optiE2}}$  alors  $R_{2x} = R_{2x \text{ sup } E=0}$ .

La séquence des calculs est récapitulée dans le schéma présenté en figure 3.6.

Une fois la valeur de  $R_{2x}$  nous permettant de minimiser notre critère sous contraintes, nous calculons les couples à partir de la relation (3.62) et la réaction du sol sur le pied 1 avec (3.58). Il est à noter que, tel que nous avons posé le calcul de la répartition des couples et réactions du sol afin de minimiser les critères de couples et d'énergie sous contraintes de non glissement et non décollement, cette répartition des couples et réactions du sol est continue en fonction du temps. En revanche elle n'est pas dérivable en fonction du temps au niveau des commutations entre les types de solutions.

Nous avons alors déterminé toutes les grandeurs sur lesquelles portent les contraintes que nous avons présentées en section 3.2.3 pour le double support.

Pour la détermination des contraintes portant sur des extremums de grandeurs variant en cours de phase, comme nous en avons déjà discuté lors de la simulation du simple support section 3.3.2, nous utilisons les possibilités de *Simulink* et l'intégration numérique à pas variable pour pouvoir déterminer ces contraintes avec précision. Il est à noter que des extremums peuvent être obtenus au niveau des changements de type de solution en  $R_{2x}$  et que ces commutations sont également détectées avec précision lors de la simulation.

## 3.4 Méthode d'optimisation

De nombreuses méthodes d'optimisation existent. Notre choix s'est porté sur les méthodes SQP, qui bien que non globales sont très rapides pour trouver le minimum local d'un problème non linéaire sous contraintes non linéaires. Ces méthodes itératives utilisent des informations locales, à savoir le gradient du problème au point courant pour rechercher un nouveau point à partir du point courant. Les autres méthodes globales que

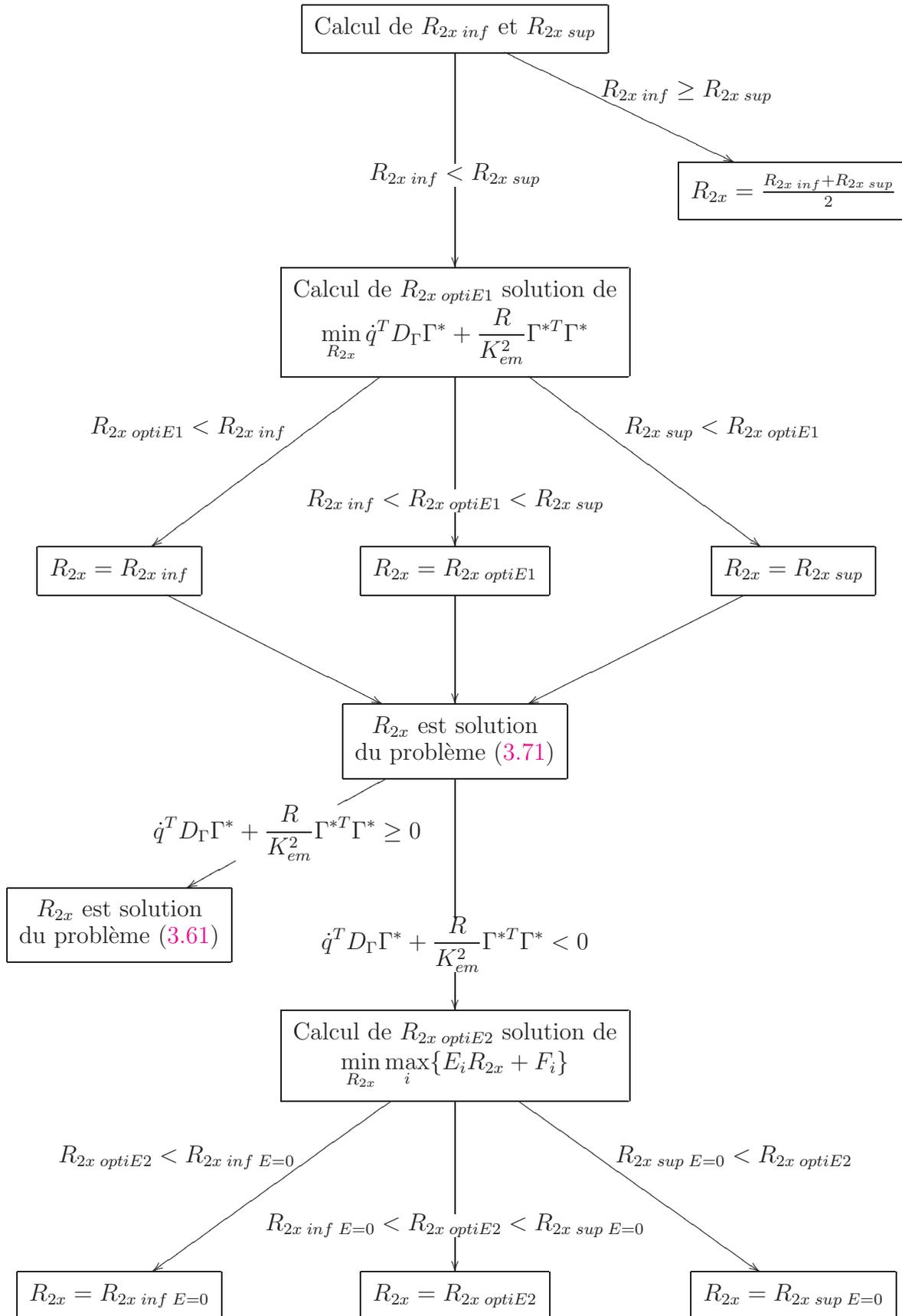


FIG. 3.6 – Représentation de l'algorithme de calcul de  $R_{2x}$  en double support lorsque le critère énergétique est considéré.

nous avons envisagées, comme la méthode de recuit simulé ou la méthode fondée sur un algorithme génétique nécessitent un nombre de calculs du critère et des contraintes plus important. Ces méthodes de recuit simulé et des algorithmes génétiques doivent pouvoir prendre en compte notre problème (3.52) qui inclut une séquence de contraintes, dans laquelle une contrainte ne peut être calculée que si la contrainte précédente est vérifiée. Il semble possible de ne pas tenir compte des cas où le mouvement de marche n'est pas défini. Mais il nous apparaît que ces méthodes bien que pouvant prendre relativement facilement en compte l'existence ou non d'un pas, seraient peu efficaces dans le cas où l'espace des mouvements qui existent est petit par rapport à l'espace de recherche entier, la probabilité de trouver un pas faisable étant alors faible lors d'une exploration au hasard. Pour améliorer ces algorithmes dans le cas de notre problème, il faudrait donc également adopter des méthodes dédiées au problème (3.52) par exemple en utilisant des méthodes de résolution successive de problèmes comme nous le verront section 3.4.1 et 3.4.2 pour le cas des méthodes SQP. Les méthodes globales ne nous semblent donc pas plus pratiques pour résoudre notre problème de génération de mouvement.

Quand aux méthodes SQP, à notre connaissance, aucune ne permet de traiter directement le problème d'une séquence de contraintes dans laquelle une contrainte doit être vérifiée pour que la contrainte suivante existe. La méthode qui permet de résoudre un problème le plus proche de celui que nous avons est celle développée dans le programme *fsqp* dont le guide est LAWRENCE *et al.* [48]. Nous présentons en section 3.4.1 comment utiliser ce programme pour résoudre notre problème. Nous n'avons pas utilisé ce programme bien que nous pensons qu'il serait intéressant de le faire et nous nous sommes concentrés sur la modification des méthodes d'optimisation SQP classiques comme le programme *fmincon* de Matlab ou *NPSOL* dont le guide est GILL *et al.* [26]. Nous présentons comment nous avons procédé à cette modification des méthodes SQP classiques pour pouvoir aborder le problème (3.52) en section 3.4.2.

### 3.4.1 Méthode d'optimisation en utilisant *fsqp*

La méthode développée dans *fsqp* (*Feasible Sequential Quadratic Programming*) permet de traiter des problèmes pour lesquels le critère n'est pas défini tant que toutes les contraintes ne sont pas vérifiées. Cette méthode est en deux temps. Dans un premier temps, une solution vérifiant toutes les contraintes est recherchée et dans un second temps, le problème de minimisation sous contraintes est recherché de manière itérative avec la garantie que les contraintes sont toujours vérifiées à chaque itération. Il est possible d'utiliser cette méthode pour résoudre notre problème en résolvant de manière séquentielle les problèmes de minimisation du maximum des contraintes de niveau  $k$  sous les contraintes de niveau 0 à  $k-1$  donné par (3.76), pour  $k = 1, 2, \dots, n - 1$ . Car la solution de chaque problème (3.76) doit nous donner, si le problème global a une solution, une condition

initiale pour le problème suivant qui vérifie les contraintes.

$$\begin{cases} \min_p \max_i \{g_{k_i}(p)\} \\ g_{k-1_i}(p) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m_{k-1} \\ g_{k-2_i}(p) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m_{k-2} \\ \vdots \\ g_{0_i}(p) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m_0 \end{cases} \quad (3.76)$$

où  $\forall K \in \{0, 1, \dots, k\}$  et  $\forall i \in \{1, 2, \dots, m_K\}$   $g_{K_i}(p)$  est défini pour tout  $p \in \{p / \forall j \in \{0, 1, \dots, K-1\} \forall i \in \{1, 2, \dots, m_j\} g_{j_i} \leq 0\}$ .

Comme il est fait dans le programme *fsqp* (voir LAWRENCE *et al.* [48]), pour rechercher un point initial vérifiant toutes les contraintes de niveau 0 à  $k$ , il est possible d'arrêter la résolution du problème (3.76) dès qu'un point tel que  $\max_i \{g_{k_i}(p)\} < 0$  est obtenu, sans attendre d'obtenir le minimum.

Pour finir nous résolvons le problème complet (3.52) avec pour condition initiale la solution du problème (3.76) pour  $k = n - 1$ .

Bien que la méthode d'optimisation avec le programme *fsqp* semble relativement simple, nous ne l'avons pour l'instant pas utilisée. Et il nous semble évident qu'il faudrait la tester à l'avenir.

### 3.4.2 Méthode d'optimisation en utilisant une méthode SQP classique

Notre but était de résoudre un problème d'optimisation tel que (3.52) en utilisant les outils d'optimisation que nous avons à notre disposition, comme la fonction *fmincon* de Matlab ou le programme *NPSOL* de GILL *et al.* [26]. Nous avons fait le choix d'éviter à avoir à développer un programme d'optimisation capable directement de prendre en compte un problème d'optimisation du type de (3.52), qui par exemple serait capable de rechercher un nouveau point seulement à partir des contraintes et du critère définis au point courant, et qui aurait donc la caractéristique de pouvoir changer de problème à résoudre à chaque itération en fonction des contraintes et du critère disponibles. Bien que nous semblant plus fiable, une telle solution nous semblait plus difficile à mettre en oeuvre. Nous avons donc utilisé les programmes *fmincon* de Matlab et *NPSOL* de GILL *et al.* [26], qui permettent d'optimiser par une méthode SQP des problèmes d'optimisation où le critère et les contraintes sont non linéaires. Par contre ils ne gèrent pas du tout l'éventualité que des contraintes ou le critère soient non définis dans une partie du domaine de recherche.

Notre but a donc été de modifier notre problème d'optimisation afin que le critère et les contraintes existent en tout point, tout en gardant une certaine régularité du problème.

La méthode que nous proposons consiste, si des contraintes ou le critère ne sont pas définis au point où le programme d'optimisation veut les calculer, à rechercher le point le plus proche tel que le critère et les contraintes soient définis, puis à définir les valeurs des grandeurs non définies au point d'origine par la valeur en ce point de leur approximation linéaire autour du point obtenu.

Concrètement, soit (3.77) le problème d'optimisation avec deux niveaux de contraintes que l'on souhaite résoudre.

$$\begin{cases} \min_p f(p) \\ g_{1i}(p) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m_1 \\ g_{0i}(p) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m_0 \end{cases} \quad (3.77)$$

où  $f(p)$  et  $g_{1i}(p) \forall i \in \{1, 2, \dots, m_1\}$  sont définies pour tout  $p \in \{p / \forall i \in \{1, 2, \dots, m_0\} g_{0i} \leq 0\}$ , ce qui signifie que le critère et les contraintes du niveau 1 n'existent que si les contraintes du niveau 0 sont vérifiées.

Au cours de la résolution du problème (3.77) par une méthode d'optimisation, le programme peut être amené à vouloir calculer le critère et les contraintes en un point  $p_0$  pour lequel ils ne sont pas définis, c'est-à-dire que des contraintes  $g_{0i}(p_0) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m_0$  ne sont pas toutes vérifiées. Nous allons alors rechercher le point  $p_M$  le plus proche de  $p_0$  et vérifiant ces contraintes.  $p_M$  est le point solution du problème (3.78).

$$\begin{cases} \min_p \|p_0 - p\| \\ g_{0i}(p) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m_0 \end{cases} \quad (3.78)$$

Sachant que les contraintes de ce problème sont non linéaires, nous allons également utiliser un programme d'optimisation pour le résoudre. Il est à remarquer que le point  $p_M$  peut être vu comme la projection orthogonale, au sens de la norme  $\| \cdot \|$  choisie, du point  $p_0$  sur la frontière du domaine de vérification des contraintes de niveau 0. Nous donnons sur la figure 3.7 le domaine de définition du critère et de la contrainte de niveau 1 équivalent au domaine de vérification des contraintes de niveau 0, ainsi qu'un exemple de point  $p_0$  en dehors de ce domaine projeté en  $p_M$ .

Les valeurs du critère et des contraintes en  $p_0$  du nouveau problème d'optimisation obtenu en prolongeant linéairement en dehors de leur domaine de définition seront alors données par (3.79).

$$\begin{cases} f(p_0) = f(p_M) + \left. \frac{\partial f}{\partial p} \right|_{p=p_M} (p_0 - p_M) \\ g_{1i}(p_0) = g_{1i}(p_M) + \left. \frac{\partial g_{1i}}{\partial p} \right|_{p=p_M} (p_0 - p_M) \quad i = 1, 2, \dots, m_1 \end{cases} \quad (3.79)$$

On voit que le calcul du critère et des contraintes du niveau 1 en  $p_0$  avec (3.79)

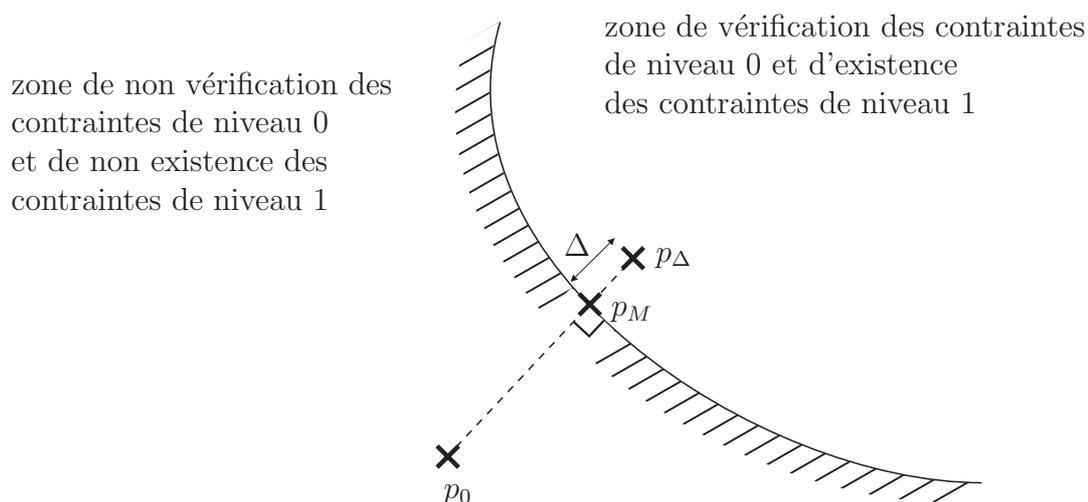


FIG. 3.7 – Représentation du vecteur de paramètres d'origine  $p_0$  ne vérifiant pas les contraintes de niveau 0, et sa projection  $p_M$  sur la frontière du domaine de vérification des contraintes de niveau 0. Le point  $p_\Delta$  utilisé pour le calcul par prolongement du critère et des contraintes en  $p_0$  est également représenté.

nécessite la connaissance de leurs gradients. Cependant si l'on ne connaît pas ce gradient, il est possible de l'évaluer par différence finie. De plus il suffit d'évaluer ce gradient par différence finie seulement selon la direction  $p_0 - p_M$ , pour pouvoir en déduire les valeurs du critère et des contraintes de niveau 1 en  $p_0$ . Ce calcul est donné par (3.80).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial p} \Big|_{p=p_M} (p_0 - p_M) = \frac{f(p_\Delta) - f(p_M)}{p_\Delta - p_M} (p_0 - p_M) \\ \qquad \qquad \qquad = \frac{f(p_M) - f(p_\Delta)}{\Delta} \|p_0 - p_M\| \\ \frac{\partial g_{1i}}{\partial p} \Big|_{p=p_M} (p_0 - p_M) = \frac{g_{1i}(p_\Delta) - g_{1i}(p_M)}{p_\Delta - p_M} (p_0 - p_M) \quad i = 1, 2, \dots, m_1 \\ \qquad \qquad \qquad = \frac{g_{1i}(p_M) - g_{1i}(p_\Delta)}{\Delta} \|p_0 - p_M\| \\ p_\Delta = p_M + \Delta \frac{p_M - p_0}{\|p_M - p_0\|} \end{array} \right. \quad (3.80)$$

Où  $p_\Delta$  est le point pour le calcul de la dérivée par différence finie,  $\Delta > 0$  est la distance entre les deux points  $p_\Delta$  et  $p_M$  pris pour le calcul du gradient par différence finie. Il est à remarquer que le point  $p_\Delta$  est choisi dans la direction opposée à  $p_0$  par rapport à  $p_M$  afin que nous soyons sûr qu'il vérifie lui aussi les contraintes de niveau 0. Le choix du point  $p_\Delta$  est représenté figure 3.7.

Pour calculer le critère et les contraintes de niveau 1 en  $p_0$ , il faut donc dans un premier temps calculer le point  $p_M$  le plus proche de  $p_0$  où toutes les contraintes sont définies, puis évaluer le critère et les contraintes de niveau 1 aux points  $p_M$  et  $p_\Delta$  afin de pouvoir les prolonger linéairement en  $p_0$ .

Nous venons donc de voir comment nous avons modifié un problème avec 2 niveaux de contraintes. Dans le cas général de  $n + 1$  niveaux de contraintes comme pour le problème (3.52) si des contraintes des niveaux 0 à  $n - 1$  ne sont pas vérifiées, nous allons résoudre le problème (3.81) avec  $k = n - 1$  pour déterminer le point  $p_{M_n}$  où le critère et les contraintes de niveau  $n$  sont définies, puis les prolonger linéairement en  $p_{0_n}$ , comme donné par la relation (3.82). Si le gradient nécessaire pour calculer (3.82) n'est pas connu directement, il est possible de l'obtenir par différence finie avec (3.80).

$$\min_p \|p_{0_{k+1}} - p\| \quad (3.81)$$

$$\begin{cases} g_{k_i}(p) \leq 0 & i = 1, 2, \dots, m_k \\ g_{k-1_i}(p) \leq 0 & i = 1, 2, \dots, m_{k-1} \\ \vdots \\ g_{0_i}(p) \leq 0 & i = 1, 2, \dots, m_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(p_{0_n}) = f(p_{M_n}) + \left. \frac{\partial f}{\partial p} \right|_{p=p_{M_n}} (p_{0_n} - p_{M_n}) \\ g_{n_i}(p_{0_n}) = g_{n_i}(p_{M_n}) + \left. \frac{\partial g_{n_i}}{\partial p} \right|_{p=p_{M_n}} (p_{0_n} - p_{M_n}) \quad i = 1, 2, \dots, m_n \end{cases} \quad (3.82)$$

Et si au cours de la résolution du problème (3.81) avec  $k = n - 1$ , des contraintes des niveaux 0 à  $n - 2$  ne sont pas vérifiées en un point  $p_{0_{n-1}}$ , de même nous déterminons le point  $p_{M_{n-1}}$  le plus proche de  $p_{0_{n-1}}$  où les contraintes des niveaux 0 à  $n - 2$  sont vérifiées en résolvant le problème (3.81) avec  $k = n - 2$ , pour ensuite prolonger linéairement en  $p_{0_{n-1}}$  les contraintes du niveau  $n - 1$  à partir de l'expression (3.83) avec  $k = n - 1$ .

$$g_{k_i}(p_{0_k}) = g_{k_i}(p_{M_k}) + \left. \frac{\partial g_{k_i}}{\partial p} \right|_{p=p_{M_k}} (p_{0_k} - p_{M_k}) \quad i = 1, 2, \dots, m_k \quad (3.83)$$

Et ainsi de manière récursive, si au cours de la résolution du problème (3.81) avec  $k \in [1, n - 1]$  des contraintes des niveaux 0 à  $k - 1$  ne sont pas vérifiées en un point  $p_{0_k}$  alors nous déterminons le point  $p_{M_k}$  le plus proche de  $p_{0_k}$  où les contraintes des niveaux 0 à  $k - 1$  sont vérifiées en résolvant le problème (3.81) avec  $k = k - 1$ . Puis nous prolongeons linéairement en  $p_{0_k}$  les contraintes du niveau  $k$  à partir de l'expression (3.83). Si le gradient nécessaire pour calculer (3.83) n'est pas connu directement, il est possible de l'obtenir par différence finie avec (3.80).

Nous donnons également le calcul du gradient du critère et des contraintes au point  $p_{0_k}$  à partir du calcul en  $p_{M_k}$ . Ce calcul est nécessaire si nous fournissons le gradient du critère et des contraintes au programme d'optimisation. Pour obtenir ces expressions, nous allons dériver par rapport au vecteur de paramètres  $p_{0_k}$  les relations (3.82) et (3.83). Nous obtenons ainsi l'expression du gradient du critère (3.84) calculé en  $p_{0_n}$  à partir du

calcul en  $p_{M\ n-1}$ . La première ligne de (3.84) correspond à un calcul intermédiaire dans la dérivation par rapport à  $p_{0\ n}$  de (3.82). Pour le gradient des contraintes de niveau  $k$  calculé en  $p_{0\ k}$  à partir du calcul en  $p_{M\ k}$ , nous obtenons (3.85).

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial p} \Big|_{p=p_{0\ n}} &= \frac{\partial f}{\partial p} \Big|_{p=p_{M\ n}} \frac{\partial p_{M\ n}}{\partial p_{0\ n}} + (p_{0\ n} - p_{M\ n})^T \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \Big|_{p=p_{M\ n}} \frac{\partial p_{M\ n}}{\partial p_{0\ n}} \\ &+ \frac{\partial f}{\partial p} \Big|_{p=p_{M\ n}} \left( I - \frac{\partial p_{M\ n}}{\partial p_{0\ n}} \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial p} \Big|_{p=p_{M\ n}} + (p_{0\ n} - p_{M\ n})^T \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \Big|_{p=p_{M\ n}} \frac{\partial p_{M\ n}}{\partial p_{0\ n}} \end{aligned} \quad (3.84)$$

$$\frac{\partial g_{k\ i}}{\partial p} \Big|_{p=p_{0\ k}} = \frac{\partial g_{k\ i}}{\partial p} \Big|_{p=p_{M\ k}} + (p_{0\ k} - p_{M\ k})^T \frac{\partial^2 g_{k\ i}}{\partial p^2} \Big|_{p=p_{M\ k}} \frac{\partial p_{M\ k}}{\partial p_{0\ k}} \quad i = 1, 2, \dots, m_k \quad (3.85)$$

Nous constatons que ces calculs sur le gradient font intervenir le Hessien du critère et des contraintes. Comme nous le verrons en section 3.5, le calcul du gradient est difficile. Le calcul du Hessien l'est encore plus. Pour déterminer ce Hessien, nous avons utilisé un calcul par différence finie. Pour le calcul du transport du critère et des contraintes sans le calcul formel du gradient, nous avons calculé le gradient selon la direction de projection par différence finie, donné par la formule (3.80). De même nous calculons le Hessien selon la direction de projection par différence finie. Seul un nouveau point de calcul est nécessaire pour ce calcul du Hessien selon la direction de projection. Le Hessien du critère selon la direction de projection est donné par (3.86) et le Hessien des contraintes de niveau  $k$  selon la direction de projection est donné par (3.87).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \Big|_{p=p_{M\ n}} (p_{0\ n} - p_{M\ n}) = \|p_{0\ n} - p_{M\ n}\| \left( \frac{\partial f}{\partial p} \Big|_{p=p_{M\ n}} - \frac{\partial f}{\partial p} \Big|_{p=p_{\Delta}} \right) / \Delta \\ p_{\Delta} = p_{M\ n} + \Delta \frac{p_{M\ n} - p_{0\ n}}{\|p_{M\ n} - p_{0\ n}\|} \end{array} \right. \quad (3.86)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 g_{k\ i}}{\partial p^2} \Big|_{p=p_{M\ k}} (p_{0\ k} - p_{M\ k}) = \|p_{0\ k} - p_{M\ k}\| \left( \frac{\partial g_{k\ i}}{\partial p} \Big|_{p=p_{M\ k}} - \frac{\partial g_{k\ i}}{\partial p} \Big|_{p=p_{\Delta}} \right) / \Delta \\ p_{\Delta} = p_{M\ k} + \Delta \frac{p_{M\ k} - p_{0\ k}}{\|p_{M\ k} - p_{0\ k}\|} \end{array} \right. \quad i = 1, 2, \dots, m_k \quad (3.87)$$

*Remarque :* Cette méthode de projection des contraintes à la limite de leur espace de définition pour extrapoler leurs valeurs au point d'origine est une méthode qui donnera

des résultats d'autant moins précis au point d'origine que la distance de projection sera grande.

Nous avons donc une méthode de résolution qui fait appel à un programme d'optimisation, qui lui même peut faire appel à chaque itération à un programme d'optimisation pour trouver un point vérifiant des contraintes, etc... En supposant que les optimisations de tous les niveaux ont  $nb_{eval}$  évaluations des contraintes et que nous avons  $n + 1$  niveaux de contraintes, nous avons donc une méthode qui dans le pire des cas peut calculer  $(nb_{eval})^{n+1}$  fois les contraintes. Nous avons donc une méthode de complexité importante, en particulier en comparaison avec la méthode fondée sur *fsqp* présentée section 3.4.1 qui calcule  $(n + 1)nb_{eval}$  fois les contraintes. Cependant, dans notre cas où nous avons réduit le nombre de niveaux de contraintes à 3, et vu que lorsque l'on tend vers une solution au problème d'optimisation, on tend à vérifier les contraintes et donc à ne plus devoir faire de sous-optimisations, comme nous le verrons notre problème peut encore être résolu dans des temps raisonnables avec la méthode présentée ici. Mais il est évident que la méthode présentée ici ne permettrait pas de résoudre des problèmes plus compliqués de manière efficace.

### 3.5 Calcul du gradient du critère et des contraintes

Nous avons cherché à calculer le gradient de manière analytique plutôt qu'il soit déterminé par différence finie car nous avons remarqué des problèmes de convergence dans l'optimisation sans calcul du gradient. Or dans GILL *et al.* [26] et plus précisément dans le chapitre 8 de GILL *et al.* [27] il est prouvé que l'optimisation est plus fiable si l'on fournit un gradient analytique. De plus le calcul du gradient permet d'accélérer l'optimisation car le calcul du gradient par différence finie nécessite de calculer les contraintes et le critère autant de fois supplémentaires qu'il y a de paramètres d'optimisation pour connaître les composantes du gradient pour chacun des paramètres d'optimisation. Or le calcul supplémentaire du gradient analytique équivaut à peu près à un calcul supplémentaire des contraintes et du critère, ce qui donne une idée du temps gagné sur la détermination du gradient lorsqu'on le calcule analytiquement.

Le calcul du gradient analytiquement dans le cadre de la génération de mouvements par optimisation paramétrique reste rare. Il faut dire que ce calcul reste très lourd. Nous pouvons cependant citer le travail de LO *et al.* [51] où le modèle dynamique d'un robot anthropomorphe est calculé par le méthode de Newton-Euler. Le gradient est déterminé en développant les opérations de base du calcul de Newton-Euler pour le gradient. La séquence des calculs est donc la même pour déterminer les couples et leur gradient, si ce n'est que les opérations de bases sont différentes. L'avantage de cette méthode est qu'une fois les opérations de dérivation définies, la méthode est similaire au calcul de Newton-

Euler classique. Nous pouvons également citer le travail de DÜRRBAUM *et al.* [25] qui compare deux méthodes de déterminations du gradient. La première consiste au calcul analytique du gradient, et la deuxième consiste à la transformation algorithmique du calcul des grandeurs en leurs dérivées, connaissant les formules de dérivation des opérations de base. Il s'avère que la méthode analytique demande plus de développement, mais est en pratique plus efficace pour calculer le gradient.

Nous présentons dans cette section, les différentes étapes du calcul du gradient du critère et des contraintes du problème d'optimisation. La première étape consiste à calculer le gradient des variables articulaires en fonction des paramètres d'optimisation. Ensuite nous en déduisons en simple support le gradient des dynamiques de zéro. Puis nous calculerons le gradient des couples et réactions du sol à partir du modèle dynamique inverse. Enfin nous en déduisons le gradient des critères et des contraintes.

Tout au long de cette section, nous utiliserons les notations de dérivation par des vecteurs que nous avons introduite en section 1.4.2. Nous avons introduit que la dérivation d'une fonction scalaire par un vecteur donne un vecteur horizontal, et que la dérivation d'un vecteur de fonction  $g$  par un autre vecteur  $u$  donne la concaténation verticale des dérivations de chacune des composantes de  $g$  par  $u$ . Ces notations donnent que la composition de dérivations par des vecteur s'écrit (3.88) pour une fonction  $f(u)$  où le vecteur  $u$  dépend du vecteur  $v$ .

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial v} \quad (3.88)$$

Si  $f(u)$  est un vecteur de fonctions, la loi de composition des dérivations s'écrit de même.

### 3.5.1 Gradient des conditions aux limites et des polynômes

Pour calculer le gradient des variables articulaires, il faut commencer par calculer pour chacune des phases le gradient des conditions aux limites, puis le gradient des coefficients des polynômes, le gradient des variables articulaires définies comme des polynômes, et enfin le gradient des autres variables articulaires en double support. Nous séparons ces calculs pour le simple et le double support.

#### 3.5.1.1 En simple support

Nous commençons par définir les vecteurs de conditions aux limites des phases. Pour le simple support, nous considérons le vecteur  $p_{CLSS}$  donné par (3.89).

$$\begin{aligned}
p_{CLSS} &= [p_{CL\alpha SS} \ p_{CL\delta SS}] \\
p_{CL\alpha SS} &= [\alpha_{iSS} \ \alpha_{int} \ \alpha_{fSS}] \\
p_{CL\delta SS} &= \begin{bmatrix} \delta_{1iSS}, \dot{\delta}_{1iSS}, \delta_{1int}, \delta_{1fDS}, \dot{\delta}_{1fDS}, \\ \delta_{2iSS}, \dot{\delta}_{2iSS}, \delta_{2int}, \delta_{2fDS}, \dot{\delta}_{2fDS}, \\ \delta_{3iSS}, \dot{\delta}_{3iSS}, \delta_{3int}, \delta_{3fDS}, \dot{\delta}_{3fDS}, \\ \delta_{4iSS}, \dot{\delta}_{4iSS}, \delta_{4int}, \delta_{4fDS}, \dot{\delta}_{4fDS} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.89}$$

Nous séparons les conditions aux limites en  $\alpha$  et  $\delta$ , car cela permet par la suite de simplifier des calculs.

En plus du vecteur  $p$  des paramètres d'optimisation que nous avons définis en section 3.2.1, nous considérons le vecteur  $p_{SS}$ . Ce vecteur est donné par (3.90) et contient en plus la variable d'intégration  $\alpha$ .

$$p_{SS} = [p, \alpha] \tag{3.90}$$

L'ajout de  $\alpha$  dans les paramètres par rapport auxquels nous calculons la dérivée va nous être utile par la suite pour le calcul de certains gradients. De plus la connaissance de la dérivée par rapport à la variable d'intégration permet également de déterminer avec plus de précision un extremum, en considérant le passage par zéro de sa dérivée en  $\alpha$ .

Dans le calcul du gradient, nous avons d'abord déterminé le gradient des conditions aux limites  $p_{CLSS}$  par rapport à  $p$ , noté  $\frac{\partial p_{CLSS}}{\partial p}$ . Ce gradient a été calculé avec du calcul symbolique à partir des expressions données en section 3.2.1.5. Pour simplifier les expressions, nous avons considéré le plus possible de paramètres intermédiaires.

Ensuite nous déterminons le gradient des coefficients des polynômes. Pour cela nous partons de l'expression (3.25) que nous dérivons d'abords par  $p_{CL\alpha SS}$  puis par  $p_{CL\delta SS}$ . Nous obtenons ainsi les équations (3.91).

$$\begin{cases} A_{\alpha SS}^T \frac{\partial C_{SSj}}{\partial p_{CL\alpha SS}} + \sum_k C_{SSjk} \frac{\partial A_{\alpha SSk}}{\partial p_{CL\alpha SS}} = 0 \\ A_{\alpha SS}^T \frac{\partial C_{SSj}}{\partial p_{CL\delta SS}} = \frac{\partial A_{CLSSj}}{\partial p_{CL\delta SS}} \end{cases} \tag{3.91}$$

Où  $C_{SSj}$  est la ligne  $j$  de la matrice des coefficients des polynômes en simple support  $C_{SS}$ , correspondant à  $\delta_j$ ,  $C_{SSjk}$  est le  $k^{ème}$  coefficient du polynôme en  $\delta_j$ , et  $A_{\alpha SSk}$  est la ligne  $k$  de la matrice  $A_{\alpha SS}$ .

Nous avons alors le gradient des coefficients de  $\delta_j$  donné par (3.92).

$$\frac{\partial C_{SSj}}{\partial p_{CLSS}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial C_{SSj}}{\partial p_{CL\alpha SS}} & \frac{\partial C_{SSj}}{\partial p_{CL\delta SS}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial C_{SSj}}{\partial p_{CL\alpha SS}} = - (A_{\alpha SS}^T)^{-1} \sum_k C_{SSjk} \frac{\partial A_{\alpha SSk}}{\partial p_{CL\alpha SS}} \\ \frac{\partial C_{SSj}}{\partial p_{CL\delta SS}} = (A_{\alpha SS}^T)^{-1} \frac{\partial A_{CLSSj}}{\partial p_{CL\delta SS}} \end{cases} \quad (3.92)$$

Le gradient des coefficients des polynômes en fonction de  $p$  est alors donné par (3.93), en utilisant la loi de composition de dérivée.

$$\frac{\partial C_{SSj}}{\partial p} = \frac{\partial C_{SSj}}{\partial p_{CLSS}} \frac{\partial p_{CLSS}}{\partial p} \quad (3.93)$$

A partir du gradient des coefficients des polynômes, nous pouvons alors calculer le gradient des variables articulaires comme donné par (3.94).

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta_{jSS}}{\partial p} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha^4 \end{bmatrix} \frac{\partial C_{SSj}}{\partial p} \\ \frac{\partial \delta_{jSS}^*}{\partial p} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2\alpha & 3\alpha^2 & 4\alpha^3 \end{bmatrix} \frac{\partial C_{SSj}}{\partial p} \\ \frac{\partial \delta_{jSS}^{**}}{\partial p} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 6\alpha & 12\alpha^2 \end{bmatrix} \frac{\partial C_{SSj}}{\partial p} \end{cases} \quad (3.94)$$

Nous intégrons alors les dérivées de  $\delta_j$ ,  $\delta_j^*$ ,  $\delta_j^{**}$  par rapport à  $\alpha$  dans le calcul du gradient, ce qui nous donne (3.95).

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta_{jSS}}{\partial p_{SS}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \delta_{jSS}}{\partial p} & \delta_{jSS}^* \end{bmatrix} \\ \frac{\partial \delta_{jSS}^*}{\partial p_{SS}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \delta_{jSS}^*}{\partial p} & \delta_{jSS}^{**} \end{bmatrix} \\ \frac{\partial \delta_{jSS}^{**}}{\partial p_{SS}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \delta_{jSS}^{**}}{\partial p} & \delta_{jSS}^{***} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3.95)$$

Les calculs de  $\delta_{jSS}^*$ ,  $\delta_{jSS}^{**}$  et  $\delta_{jSS}^{***}$  s'obtiennent directement à partir des expressions polynômiales des  $\delta_j(\alpha)$  donnés par (3.2).

Dans la suite des calculs du gradient la dérivation en  $\alpha$  est considérée au même titre qu'un paramètre de  $p$ . Les calculs ne seront pas changés par l'ajout de  $\alpha$  dans le vecteur de paramètres d'optimisation.

Une fois que le gradient des dynamiques de zéros est connu, ce que nous présentons dans la section 3.5.2, il est possible de calculer le gradient des vitesses et accélérations

articulaires (3.96).

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{\delta}_{jSS}}{\partial p_{SS}} = \dot{\alpha} \frac{\partial \delta_{jSS}^*}{\partial p_{SS}} + \delta_{jSS}^* \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial p_{SS}} \\ \frac{\partial \ddot{\delta}_{jSS}}{\partial p_{SS}} = \dot{\alpha}^2 \frac{\partial \delta_{jSS}^{**}}{\partial p_{SS}} + 2\delta_{jSS}^{**} \dot{\alpha} \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial p_{SS}} + \ddot{\alpha} \frac{\partial \delta_{jSS}^*}{\partial p_{SS}} + \delta_{jSS}^* \frac{\partial \ddot{\alpha}}{\partial p_{SS}} \end{cases} \quad (3.96)$$

### 3.5.1.2 En double support

Nous définissons également le vecteur des conditions aux limites de la phase de double support, noté  $p_{CL DS}$  et donné par (3.97).

$$\begin{aligned} p_{CL DS} &= [T_{DS} \ p_{CL \alpha DS} \ p_{CL \delta DS}] \\ p_{CL \alpha DS} &= [\alpha_{iDS}, \ \alpha_{fDS}, \ \dot{\alpha}_{iDS}, \ \dot{\alpha}_{fDS},] \\ p_{CL \delta DS} &= [\delta_{1 iDS}, \ \dot{\delta}_{1 iDS}, \ \delta_{1 fDS}, \ \dot{\delta}_{1 fDS}, \ \delta_{2 iDS}, \ \dot{\delta}_{2 iDS}, \ \delta_{2 fDS}, \ \dot{\delta}_{2 fDS}] \end{aligned} \quad (3.97)$$

Nous allons également considérer le vecteur  $p_{DS}$  constitué du vecteur  $p$  additionné du temps en double support  $t$  afin de calculer en même temps que le gradient par rapport aux paramètres d'optimisation, la dérivée temporelle des grandeurs.

$$p_{DS} = [p, \ t] \quad (3.98)$$

Comme pour le simple support, cette dérivée temporelle est nécessaire pour déterminer avec précision les extremums et pour calculer certains gradients.

Nous calculons d'abord le gradient des conditions limites par rapport aux paramètres d'optimisation, noté  $\frac{\partial p_{CL DS}}{\partial p}$ . Cependant, il est à remarquer que les conditions aux limites dépendent des conditions de fin de simple support, et en particulier de  $\dot{\alpha}_{fSS}$ . Or cette grandeur se déduit de l'intégration des dynamiques de zéro. Comme pour le calcul des coefficients des polynômes en double support, il est là encore nécessaire de simuler d'abord le simple support pour pouvoir calculer le gradient des conditions aux limites de double support.

De manière similaire au simple support, nous obtenons le gradient des coefficients des polynômes par dérivation par rapport aux paramètres d'optimisation des expressions (3.26) et (3.27). (3.99) donne le gradient des coefficients des polynômes de  $\alpha$ , et (3.100) le gradient des coefficients de  $\delta_1$  et  $\delta_2$ .

$$\frac{\partial C_{\alpha DS}}{\partial p_{CL DS}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial C_{\alpha DS}}{\partial T_{DS}} & \frac{\partial C_{\alpha DS}}{\partial p_{CL \alpha DS}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial C_{\alpha DS}}{\partial p_{CL DS}} = - (A_{TDS}^T)^{-1} \sum_k C_{DS jk} \frac{\partial A_{\alpha DS k}}{\partial p_{CL \alpha DS}} \\ \frac{\partial C_{\alpha DS}}{\partial p_{CL \alpha DS}} = (A_{TDS}^T)^{-1} \frac{\partial A_{CL DS j}}{\partial p_{CL \delta DS}} \end{cases} \quad (3.99)$$

$$\frac{\partial C_{\delta DS j}}{\partial p_{CL DS}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial C_{\delta DS j}}{\partial p_{CL \alpha DS}} & \frac{\partial C_{\delta DS j}}{\partial p_{CL \delta DS}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial C_{\delta DS j}}{\partial p_{CL \alpha DS}} = - (A_{\alpha DS}^T)^{-1} \sum_k C_{\delta DS jk} \frac{\partial A_{\alpha DS k}}{\partial p_{CL \alpha DS}} \\ \frac{\partial C_{\delta DS j}}{\partial p_{CL \delta DS}} = (A_{\alpha DS}^T)^{-1} \frac{\partial A_{CL \delta DS j}}{\partial p_{CL \delta DS}} \end{cases} \quad (3.100)$$

Le gradient par rapport à  $p$  des coefficients des polynômes de  $\alpha$ ,  $\delta_1$  et  $\delta_2$  est alors donné par (3.101) à partir du gradient par rapport à  $p_{CL DS}$  des coefficients de ces polynômes.

$$\begin{cases} \frac{\partial C_{\alpha DS}}{\partial p} = \frac{\partial C_{\alpha DS}}{\partial p_{CL DS}} \frac{\partial p_{CL DS}}{\partial p} \\ \frac{\partial C_{\delta DS j}}{\partial p} = \frac{\partial C_{\delta DS j}}{\partial p_{CL DS}} \frac{\partial p_{CL DS}}{\partial p} \end{cases} \quad (3.101)$$

Nous pouvons alors calculer les gradients de  $\alpha$  et de ses dérivées temporelles, donnés par (3.102).

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha_{DS}}{\partial p} = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \frac{\partial C_{\alpha DS}}{\partial p} \\ \frac{\partial \dot{\alpha}_{DS}}{\partial p} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2t & 3t^2 \end{bmatrix} \frac{\partial C_{\alpha DS}}{\partial p} \\ \frac{\partial \ddot{\alpha}_{DS}}{\partial p} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 6t \end{bmatrix} \frac{\partial C_{\alpha DS}}{\partial p} \end{cases} \quad (3.102)$$

Nous rajoutons alors les dérivées temporelles dans le gradient de  $\alpha$  et de ses dérivées (3.103).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \alpha_{DS}}{\partial p_{DS}} = \left[ \frac{\partial \alpha_{DS}}{\partial p} \quad \dot{\alpha} \right] \\ \frac{\partial \dot{\alpha}_{DS}}{\partial p_{DS}} = \left[ \frac{\partial \dot{\alpha}_{DS}}{\partial p} \quad \ddot{\alpha} \right] \\ \frac{\partial \ddot{\alpha}_{DS}}{\partial p_{DS}} = \left[ \frac{\partial \ddot{\alpha}_{DS}}{\partial p} \quad \dddot{\alpha} \right] \end{array} \right. \quad (3.103)$$

Les gradients de  $\delta_1$  et  $\delta_2$ , et leurs dérivées partielles en  $\alpha$  s'obtiennent en double support comme en simple support par les relations (3.94). Nous rajoutons alors en double support les dérivées temporelles plutôt que les dérivées en  $\alpha$  que nous avons considérées en simple support. Ce qui nous donne (3.104).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \delta_{jDS}}{\partial p_{DS}} = \left[ \frac{\partial \delta_{jDS}}{\partial p} \quad \delta_{jDS}^* \dot{\alpha} \right] \\ \frac{\partial \delta_{jDS}^*}{\partial p_{DS}} = \left[ \frac{\partial \delta_{jDS}^*}{\partial p} \quad \delta_{jDS}^{**} \dot{\alpha} \right] \\ \frac{\partial \delta_{jDS}^{**}}{\partial p_{DS}} = \left[ \frac{\partial \delta_{jDS}^{**}}{\partial p} \quad \delta_{jDS}^{***} \dot{\alpha} \right] \end{array} \right. \quad (3.104)$$

Le gradient des dérivées temporelles de  $\delta_1$  et  $\delta_2$  s'obtiennent comme en simple support avec les relations (3.96).

Les gradients de  $\delta_3$  et  $\delta_4$  s'obtiennent en dérivant par rapport aux paramètres d'optimisation les équations de fermeture de boucles en position (1.33), vitesse (1.34) et accélération (1.35).

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{\partial \delta_3}{\partial p_{DS}} \\ \frac{\partial \delta_4}{\partial p_{DS}} \end{array} \right] = -D_{22}^{-1} \left\{ D_{21} \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial \alpha}{\partial p_{DS}} \\ \frac{\partial \delta_1}{\partial p_{DS}} \\ \frac{\partial \delta_2}{\partial p_{DS}} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{l} 0 \\ \frac{\partial d}{\partial p_{DS}} \end{array} \right] \right\} \quad (3.105)$$

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{\partial \dot{\delta}_3}{\partial p_{DS}} \\ \frac{\partial \dot{\delta}_4}{\partial p_{DS}} \end{array} \right] = -D_{22}^{-1} \left\{ D_{21} \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial p_{DS}} \\ \frac{\partial \dot{\delta}_1}{\partial p_{DS}} \\ \frac{\partial \dot{\delta}_2}{\partial p_{DS}} \end{array} \right] + \frac{\partial D_{2\dot{q}}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial p_{DS}} \right\} \quad (3.106)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \ddot{\delta}_3}{\partial p_{DS}} \\ \frac{\partial \ddot{\delta}_4}{\partial p_{DS}} \end{bmatrix} = -D_{21}^{-1} \left\{ D_{21} \begin{bmatrix} \frac{\partial \ddot{\alpha}}{\partial p_{DS}} \\ \frac{\partial \ddot{\delta}_1}{\partial p_{DS}} \\ \frac{\partial \ddot{\delta}_2}{\partial p_{DS}} \end{bmatrix} + \frac{\partial D_2 \ddot{q}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial p_{DS}} + \frac{\partial H_2}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial p_{DS}} + \frac{\partial H_2}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial p_{DS}} \right\} \quad (3.107)$$

Où  $D_{21}(2 \times 3)$  constitue les 3 premières colonnes de  $D_2$  et  $D_{22}(2 \times 2)$  constitue les 2 dernières colonnes de  $D_2$ . Les termes  $\frac{\partial D_2 \dot{q}}{\partial q}$ ,  $\frac{\partial D_2 \ddot{q}}{\partial q}$ ,  $\frac{\partial H_2}{\partial q}$  et  $\frac{\partial H_2}{\partial \dot{q}}$  sont déterminés analytiquement à partir des expressions de  $D_2$  et  $H_2$  par un calcul symbolique. Pour le calcul des termes  $\frac{\partial D_2 \dot{q}}{\partial q}$  et  $\frac{\partial D_2 \ddot{q}}{\partial q}$ , nous avons fait rentrer  $\dot{q}$  et  $\ddot{q}$  dans la dérivée, pour éviter la dérivation d'une matrice par un vecteur. En fait dans ces deux termes nous considérerons que  $\dot{q}$  et  $\ddot{q}$  ne dépendent pas de  $q$ .

Nous connaissons donc le gradient de toutes les dynamiques en double support. Par contre en simple support, il nous reste à déterminer le gradient des dynamiques de zéro.

### 3.5.2 Gradient des dynamiques de zéro en simple support

Le gradient des dynamiques de zéro s'obtient en dérivant par rapport aux paramètres d'optimisation les équations (3.13), (3.14) avec les relations (3.11) entre les équations des dynamiques de zéro et le modèle dynamique. Nous présentons d'abord les notations (3.108) des gradients des termes des équations des dynamiques de zéro en fonction du modèle dynamique.

$$\begin{cases} \frac{\partial f(\alpha)}{\partial p_{SS}} = \frac{\partial A_1 q^*}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial p_{SS}} + A_1 \frac{\partial q^*}{\partial p_{SS}} \\ \frac{\partial}{\partial p_{SS}} \left( \frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha} \right) = \frac{\partial A_1 q^{**}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial p_{SS}} + A_1 \frac{\partial q^{**}}{\partial p_{SS}} + \frac{\partial C_1}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial p_{SS}} + \frac{\partial C_1}{\partial q^*} \frac{\partial q^*}{\partial p_{SS}} \end{cases} \quad (3.108)$$

$\frac{\partial A_1 q^*}{\partial q}$ ,  $\frac{\partial A_1 q^{**}}{\partial q}$ ,  $\frac{\partial C_1}{\partial q}$  et  $\frac{\partial C_1}{\partial q^*}$  sont déterminés analytiquement à partir des expressions de  $A_1$  et  $C_1$ . Pour calculer le gradient des dynamiques de zéro, il nous faut d'abord calculer le gradient  $\frac{\partial \Phi(\alpha)}{\partial p_{SS}}$  de l'intégrale donnée par (3.14). Pour la calculer, sachant que les bornes d'intégration dépendent des paramètres d'optimisation, nous utilisons la formule de Leibnitz donnée par (3.109). On pourra se référer au livre de BASS [6].

$$\begin{aligned} \text{Pour } \phi(p) &= \int_{\alpha_i}^{\alpha_f} f(\alpha, p) d\alpha \\ \frac{\partial \phi}{\partial p} &= \int_{\alpha_i}^{\alpha_f} \frac{\partial f(s, p)}{\partial p} ds + f(\alpha_f, p) \frac{\partial \alpha_f}{\partial p} - f(\alpha_i, p) \frac{\partial \alpha_i}{\partial p} \end{aligned} \quad (3.109)$$

En cours de simple support, nous avons donc (3.110).

$$\frac{\partial \Phi(\alpha)}{\partial p_{SS}} = \int_{\alpha_{iSS}}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial p_{SS}} \left( \frac{\partial \Phi(s)}{\partial s} \right) ds + \frac{\partial \Phi(\alpha)}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial p_{SS}} - \frac{\partial \Phi(\alpha)}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha_{iSS}}{\partial p_{SS}} \quad (3.110)$$

Et pour l'intégration jusqu'en fin de phases, nous avons (3.111).

$$\frac{\partial \Phi(\alpha)}{\partial p_{SS}} = \int_{\alpha_{iSS}}^{\alpha_{fSS}} \frac{\partial}{\partial p_{SS}} \left( \frac{\partial \Phi(s)}{\partial s} \right) ds + \frac{\partial \Phi(\alpha)}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha_{fSS}}{\partial p_{SS}} - \frac{\partial \Phi(\alpha)}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha_{iSS}}{\partial p_{SS}} \quad (3.111)$$

Où nous avons (3.112).

$$\frac{\partial}{\partial p_{SS}} \left( \frac{\partial \Phi(\alpha)}{\partial \alpha} \right) = -2G_1(\alpha) \frac{\partial f(\alpha)}{\partial p_{SS}} - 2f(\alpha) \frac{\partial G_1}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial p_{SS}} \quad (3.112)$$

$\frac{\partial G_1}{\partial q}$  est calculé analytiquement à partir de  $G_1$ . A partir de  $\frac{\partial \Phi(\alpha)}{\partial p_{SS}}$ , il nous est alors possible de calculer les gradients de  $\dot{\alpha}$  et  $\ddot{\alpha}$ , donnés par (3.113) et (3.114). L'équation (3.113) est obtenue à partir de (3.14) en considérant  $\sigma$  en fonction de  $f(\alpha)$  et  $\dot{\alpha}$  donné par (3.10). (3.114) est obtenue à partir de l'équation tirée de (3.10) où  $\sigma$  a été éliminé.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial p_{SS}} = & \left( \frac{\partial \Phi(\alpha)}{\partial p_{SS}} - 2f(\alpha) \dot{\alpha}^2 \frac{\partial f(\alpha)}{\partial p_{SS}} + 2f(\alpha_{iSS}) \dot{\alpha}_{iSS}^2 \frac{\partial f(\alpha_{iSS})}{\partial p_{SS}} \right. \\ & \left. + 2f(\alpha_{iSS})^2 \dot{\alpha}_{iSS} \frac{\partial \dot{\alpha}_{iSS}}{\partial p_{SS}} \right) / (2f(\alpha)^2 \dot{\alpha}) \end{aligned} \quad (3.113)$$

$$\frac{\partial \ddot{\alpha}}{\partial p_{SS}} = \left( -\ddot{\alpha} \frac{\partial f(\alpha)}{\partial p_{SS}} - \frac{\partial G_1}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial p_{SS}} - \frac{\partial}{\partial p_{SS}} \left( \frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha} \right) \dot{\alpha}^2 - 2 \frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha} \dot{\alpha} \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial p_{SS}} \right) / f(\alpha) \quad (3.114)$$

### 3.5.3 Gradient des couples et réactions du sol en simple support

Nous présentons dans cette section le calcul du gradient des couples et des réactions du sol en simple support. Nous connaissons maintenant le gradient des positions, vitesses et accélérations articulaires. Pour obtenir le gradient des couples, nous dérivons par rapport aux paramètres d'optimisation les 4 dernières lignes du modèle dynamique (3.57). Nous obtenons ainsi le gradient des couples (3.128).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma}{\partial p_{SS}} = & D_{\Gamma^{25}}^{-1} \left( \frac{\partial A_{25} \ddot{q}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial p_{SS}} + A_{25} \frac{\partial \ddot{q}}{\partial p_{SS}} + \frac{\partial C_{25}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial p_{SS}} \right. \\ & \left. + \frac{\partial C_{25}}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial p_{SS}} + \frac{\partial G_{25}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial p_{SS}} \right) \end{aligned} \quad (3.115)$$

Les termes  $\frac{\partial A_{25}\ddot{q}}{\partial q}$ ,  $\frac{\partial C_{25}}{\partial q}$ ,  $\frac{\partial C_{25}}{\partial \dot{q}}$  et  $\frac{\partial G_{25}}{\partial q}$  sont calculés symboliquement à partir des expressions de  $A_{25}$ ,  $C_{25}$  et  $G_{25}$ . Pour les couples tenant compte des frottements, nous avons (3.116).

$$\begin{cases} \frac{\partial \Gamma^*}{\partial p_{SS}} = \frac{\partial \Gamma}{\partial p_{SS}} + \frac{\partial \Gamma_{frott}}{\partial p_{SS}} \\ \frac{\partial \Gamma_{frott}}{\partial p_{SS}} = F_v D_{\Gamma}^T \frac{\partial \ddot{q}}{\partial p_{SS}} + \Gamma_s \delta(D_{\Gamma}^T \dot{q} = 0) \text{sign}\left(D_{\Gamma}^T \frac{\partial \dot{q}}{\partial p_{SS}}\right) \end{cases} \quad (3.116)$$

Où  $\delta()$  représente ici l'impulsion de Dirac, qui apparaît du fait des discontinuités de couple.

Pour le gradient des réactions du sol, nous allons partir des équations (1.36) du bilan des efforts au centre de gravité du robot. Nous obtenons ainsi les relations (3.117).

$$\begin{cases} \frac{\partial R_{1x}}{\partial p_{SS}} = M \left[ \frac{\partial \ddot{x}_G}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial p_{SS}} + \frac{\partial \ddot{x}_G}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial p_{SS}} + \frac{\partial \ddot{x}_G}{\partial \ddot{q}} \frac{\partial \ddot{q}}{\partial p_{SS}} \right] \\ \frac{\partial R_{1z}}{\partial p_{SS}} = M \left[ \frac{\partial \ddot{z}_G}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial p_{SS}} + \frac{\partial \ddot{z}_G}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial p_{SS}} + \frac{\partial \ddot{z}_G}{\partial \ddot{q}} \frac{\partial \ddot{q}}{\partial p_{SS}} \right] \end{cases} \quad (3.117)$$

Les termes  $\frac{\partial \ddot{x}_G}{\partial q}$ ,  $\frac{\partial \ddot{x}_G}{\partial \dot{q}}$ ,  $\frac{\partial \ddot{x}_G}{\partial \ddot{q}}$ ,  $\frac{\partial \ddot{z}_G}{\partial q}$ ,  $\frac{\partial \ddot{z}_G}{\partial \dot{q}}$  et  $\frac{\partial \ddot{z}_G}{\partial \ddot{q}}$  sont calculés symboliquement à partir des expressions de  $\ddot{x}_G$  et  $\ddot{z}_G$ .

### 3.5.4 Gradient des couples et réactions du sol en double support

En double support, à cause du sur-actionnement, le gradient des couples et des réactions peut avoir plusieurs expressions. Ces expressions dépendent de la solution qui a été obtenue à la détermination de la répartition optimale des couples sous contraintes de non glissement. Nous différencions également ces calculs selon que ce soit le critère de couples ou le critère d'énergie qui est utilisé.

Nous calculons au préalable le gradient des composantes verticales des couples qui ne dépendent pas de la répartition des couples en double support. A partir de la dérivée de la première ligne du modèle dynamique donnée dans (3.58) nous obtenons le gradient de  $R_{2z}$  (3.118).

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{2z}}{\partial p_{DS}} = D_{\Gamma_1}^{-1} \left( \frac{\partial A_1 \ddot{q}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial p_{DS}} + A_1 \frac{\partial \ddot{q}}{\partial p_{DS}} + \frac{\partial C_1}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial p_{DS}} \right. \\ \left. + \frac{\partial C_1}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial p_{DS}} + \frac{\partial G_1}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial p_{DS}} \right) \end{aligned} \quad (3.118)$$

Nous déduisons du bilan des efforts (1.36) le gradient de  $R_{1z}$  (3.119).

$$\frac{\partial R_{1z}}{\partial p_{DS}} = M \left[ \frac{\partial \ddot{z}_G}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial p_{DS}} + \frac{\partial \dot{z}_G}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial p_{DS}} + \frac{\partial \ddot{z}_G}{\partial \ddot{q}} \frac{\partial \ddot{q}}{\partial p_{DS}} \right] - \frac{\partial R_{2z}}{\partial p_{DS}} \quad (3.119)$$

Les termes  $\frac{\partial A_{1\dot{q}}}{\partial q}$ ,  $\frac{\partial C_1}{\partial q}$ ,  $\frac{\partial C_1}{\partial \dot{q}}$ ,  $\frac{\partial G_1}{\partial q}$ ,  $\frac{\partial \dot{z}_G}{\partial q}$ ,  $\frac{\partial \dot{z}_G}{\partial \dot{q}}$  et  $\frac{\partial \ddot{z}_G}{\partial \ddot{q}}$  sont obtenus symboliquement comme pour le simple support.

### 3.5.4.1 Cas du critère de couples

Si la solution de la répartition des couples donne la solution optimale sans contraintes, à partir de la relation du couple optimal (3.68) avec les notations (3.62) nous obtenons l'expression du gradient de  $R_{2x}$  (3.129).

$$\frac{\partial R_{2x \text{ opti}}}{\partial p_{DS}} = \left[ K^T \frac{\partial J}{\partial p_{DS}} + J^T \frac{\partial K}{\partial p_{DS}} - 2R_{2x \text{ opti}} K^T \frac{\partial K}{\partial p_{DS}} \right] / (K^T K) \quad (3.120)$$

Les expressions des gradients de  $J$  et  $K$  sont données par (3.121).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial J}{\partial p_{DS}} = D_{\Gamma^{25}}^{-1} \left( \frac{\partial A_{25\ddot{q}}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial p_{DS}} + A_{25} \frac{\partial \ddot{q}}{\partial p_{DS}} + \frac{\partial C_{25}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial p_{DS}} + \frac{\partial C_{25}}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial p_{DS}} \right. \\ \left. + \frac{\partial G_{25}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial p_{DS}} - D_{2z \ 25} \frac{\partial R_{2z}}{\partial p_{DS}} - R_{2z} \frac{\partial D_{2z \ 25}}{\partial p_{DS}} \right) + \frac{\partial \Gamma_{frott}}{\partial p_{SS}} \\ \frac{\partial K}{\partial p_{DS}} = D_{\Gamma^{25}}^{-1} \frac{\partial D_{2x \ 25}}{\partial p_{DS}} \end{array} \right. \quad (3.121)$$

Les termes  $\frac{\partial A_{25\ddot{q}}}{\partial q}$ ,  $\frac{\partial C_{25}}{\partial q}$ ,  $\frac{\partial C_{25}}{\partial \dot{q}}$  et  $\frac{\partial G_{25}}{\partial q}$  sont obtenus comme pour le simple support. Les matrices  $D_{2z \ 25}$  et  $D_{2x \ 25}$  dépendent de  $q$  et  $d$ . Nous avons donc les relations (3.122).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial D_{2z \ 25}}{\partial p_{DS}} = \frac{\partial D_{2z \ 25}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial p_{DS}} + \frac{\partial D_{2z \ 25}}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial p_{DS}} \\ \frac{\partial D_{2x \ 25}}{\partial p_{DS}} = \frac{\partial D_{2x \ 25}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial p_{DS}} + \frac{\partial D_{2x \ 25}}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial p_{DS}} \end{array} \right. \quad (3.122)$$

Où  $\frac{\partial D_{2z \ 25}}{\partial q}$ ,  $\frac{\partial D_{2z \ 25}}{\partial d}$ ,  $\frac{\partial D_{2x \ 25}}{\partial q}$  et  $\frac{\partial D_{2x \ 25}}{\partial d}$  sont calculés symboliquement.

L'expression du gradient des frottements articulaires est la même que dans le cas du simple support, et fait intervenir des impulsions de Dirac dues aux frottements secs.

Nous donnons maintenant l'expression du gradient de  $R_{2x}$  lorsqu'une contrainte est active. Pour chacune des contraintes actives, l'expression du gradient de  $R_{2x}$  est différente. Nous utilisons pour ce calcul la dérivation de la deuxième équation de (3.58). Dans le cas de la première contrainte de (3.60) active,  $-fR_{1z} - R_{1x} \leq 0$  nous avons l'expression du gradient de  $R_{2x}$  (3.123).

$$\frac{\partial R_{2x}}{\partial p_{DS}} = f \frac{\partial R_{1z}}{\partial p_{DS}} + M \left[ \frac{\partial \ddot{x}_G}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial p_{DS}} + \frac{\partial \ddot{x}_G}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial p_{DS}} + \frac{\partial \ddot{x}_G}{\partial \ddot{q}} \frac{\partial \ddot{q}}{\partial p_{DS}} \right] \quad (3.123)$$

Dans le cas de la deuxième contrainte active,  $-fR_{1z} + R_{1x} \leq 0$  nous avons le gradient de  $R_{2x}$  (3.124).

$$\frac{\partial R_{2x}}{\partial p_{DS}} = -f \frac{\partial R_{1z}}{\partial p_{DS}} + M \left[ \frac{\partial \ddot{x}_G}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial p_{DS}} + \frac{\partial \ddot{x}_G}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial p_{DS}} + \frac{\partial \ddot{x}_G}{\partial \ddot{q}} \frac{\partial \ddot{q}}{\partial p_{DS}} \right] \quad (3.124)$$

Dans le cas de la troisième contrainte active,  $-fR_{2z} - R_{2x} \leq 0$ , nous avons le gradient de  $R_{2x}$  (3.125).

$$\frac{\partial R_{2x}}{\partial p_{DS}} = -f \frac{\partial R_{2z}}{\partial p_{DS}} \quad (3.125)$$

Dans le cas de la quatrième contrainte active,  $-fR_{2z} + R_{2x} \leq 0$ , nous avons le gradient de  $R_{2x}$  (3.126).

$$\frac{\partial R_{2x}}{\partial p_{DS}} = f \frac{\partial R_{2z}}{\partial p_{DS}} \quad (3.126)$$

Enfin, il reste le cas où le problème (3.60) n'avait pas de solution vérifiant les contraintes de non glissement, auquel cas nous avons l'expression du gradient de  $R_{2x}$  donnée par (3.127).

$$\frac{\partial R_{2x}}{\partial p_{DS}} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial R_{2x \text{ inf}}}{\partial p_{DS}} + \frac{\partial R_{2x \text{ sup}}}{\partial p_{DS}} \right] \quad (3.127)$$

Les gradients de  $R_{2x \text{ inf}}$  et  $R_{2x \text{ sup}}$  sont les gradients de  $R_{2x}$  de 2 des 4 cas de solutions sur la frontière (3.123) à (3.127), correspondant aux contraintes les plus contraignantes sur  $R_{2x}$  parmi les contraintes (3.63).

Une fois le gradient de  $R_{2x}$  calculé parmi tous ces cas, nous pouvons en déduire le gradient des couples, à partir de la dérivation de l'expression des couples (3.62). Nous obtenons ainsi la relation (3.128).

$$\frac{\partial \Gamma^*}{\partial p_{DS}} = \frac{\partial J}{\partial p_{DS}} - \frac{\partial K}{\partial p_{DS}} R_{2x} - K \frac{\partial R_{2x}}{\partial p_{DS}} \quad (3.128)$$

### 3.5.4.2 Cas du critère d'énergie

Dans le cas du critère d'énergie, le calcul des gradients est similaire au cas du critère de couples, dans le cas de la résolution du problème (3.71). Si la solution de ce problème sans contraintes vérifie les contraintes, le gradient de  $R_{2x}$  vérifie la dérivée de la relation (3.72), et est donné par (3.129).

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{2x \text{ opti}E1}}{\partial p_{DS}} = & \left[ K^T D_\Gamma^T \frac{\partial \dot{q}}{\partial p_{DS}} + (R/K_{em}^2 J^T + \dot{q}^T D_\Gamma) \frac{\partial K}{\partial p_{DS}} + R/K_{em}^2 K^T \frac{\partial J}{\partial p_{DS}} \right. \\ & \left. - 2R/K_{em}^2 R_{2x \text{ opti}E1} K^T \frac{\partial K}{\partial p_{DS}} \right] / (R/K_{em}^2 K^T K) \end{aligned} \quad (3.129)$$

Si lors de la résolution du problème (3.71) une contrainte était active, la solution se trouve sur cette contrainte. Le calcul du gradient de  $R_{2x}$  est donc donné par l'une des 4 expressions (3.123) à (3.126), suivant la contrainte active. Dans le cas où il n'y aurait pas de solution au problème (3.71) vérifiant les contraintes, le gradient de  $R_{2x}$  est donné par (3.127).

Si la solution du problème (3.71) donne une dépense d'énergie négative,  $R_{2x}$  est solution du problème (3.73). En dérivant l'expression (3.74), nous obtenons le gradient des bornes de solutions tel que le bipède restitue de l'énergie. Ces expressions sont données par (3.130).

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{2x \text{ inf}E=0}}{\partial p_{DS}} = & \left[ -\frac{\partial c_{E<0}}{\partial p_{DS}} + \frac{\partial b_{E<0}}{\partial p_{DS}} R_{2x \text{ inf}E=0} \right. \\ & \left. - \frac{\partial a_{E<0}}{\partial p_{DS}} R_{2x \text{ inf}E=0}^2 \right] / (2a_{E<0} R_{2x \text{ inf}E=0} - b_{E<0}) \\ \frac{\partial R_{2x \text{ sup}E=0}}{\partial p_{DS}} = & \left[ -\frac{\partial c_{E<0}}{\partial p_{DS}} + \frac{\partial b_{E<0}}{\partial p_{DS}} R_{2x \text{ sup}E=0} \right. \\ & \left. - \frac{\partial a_{E<0}}{\partial p_{DS}} R_{2x \text{ sup}E=0}^2 \right] / (2a_{E<0} R_{2x \text{ sup}E=0} - b_{E<0}) \end{aligned} \quad (3.130)$$

Avec

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial a_{E<0}}{\partial p_{DS}} &= 2 \frac{R}{K_{em}^2} K^T \frac{\partial K}{\partial p_{DS}} \\ \frac{\partial b_{E<0}}{\partial p_{DS}} &= K^T D_\Gamma^T \frac{\partial \dot{q}}{\partial p_{DS}} + \dot{q}^T D_\Gamma \frac{\partial K}{\partial p_{DS}} + 2 \frac{R}{K_{em}^2} J^T \frac{\partial K}{\partial p_{DS}} + 2 \frac{R}{K_{em}^2} K^T \frac{\partial J}{\partial p_{DS}} \\ \frac{\partial c_{E<0}}{\partial p_{DS}} &= J^T D_\Gamma^T \frac{\partial \dot{q}}{\partial p_{DS}} + \dot{q}^T D_\Gamma \frac{\partial J}{\partial p_{DS}} + 2 \frac{R}{K_{em}^2} J^T \frac{\partial J}{\partial p_{DS}} \end{aligned} \right. \quad (3.131)$$

Si la solution du problème (3.73) est sur une des deux contraintes  $R_{2x \text{ inf}E=0}$  ou  $R_{2x \text{ sup}E=0}$ , le gradient de  $R_{2x}$  prend la valeur correspondante. Si cette solution n'est pas sur une contrainte, c'est qu'elle est solution du problème sans contrainte (3.69). Le

gradient de  $R_{2x}$  est alors donné par (3.127).

### 3.5.5 Gradient des critères

Le calcul du gradient des critères n'est pas simple à cause des discontinuités dues aux frottements secs. Pour le calculer, nous allons découper une phase aux instants de discontinuité des couples. Puis nous allons appliquer la formule de Leibnitz (3.109) pour chacun de ces intervalles.

Dans le cas du critère sur les couples en simple support, nous avons donc l'expression (3.132).

$$C_{\Gamma SS} = \int_{\alpha_{iSS}^-}^{\alpha_1^-} \frac{\Gamma^{*T}\Gamma^*}{\dot{\alpha}} ds + \int_{\alpha_1^+}^{\alpha_2^-} \frac{\Gamma^{*T}\Gamma^*}{\dot{\alpha}} ds + \dots + \int_{\alpha_n^+}^{\alpha_{fSS}} \frac{\Gamma^{*T}\Gamma^*}{\dot{\alpha}} ds \quad (3.132)$$

Où les  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  sont les instants de discontinuité des couples. Si nous appliquons la formule de Leibnitz (3.109), nous obtenons le gradient de  $C_{\Gamma SS}$  (3.133).

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{\Gamma SS}}{\partial p} &= 2 \int_{\alpha_{iSS}^-}^{\alpha_1^-} \frac{\Gamma^{*T}}{\dot{\alpha}} \frac{\partial \Gamma^*}{\partial p} ds + 2 \int_{\alpha_1^+}^{\alpha_2^-} \frac{\Gamma^{*T}}{\dot{\alpha}} \frac{\partial \Gamma^*}{\partial p} ds + \dots + 2 \int_{\alpha_n^+}^{\alpha_{fSS}} \frac{\Gamma^{*T}}{\dot{\alpha}} \frac{\partial \Gamma^*}{\partial p} ds \\ &\quad - \int_{\alpha_{iSS}^-}^{\alpha_1^-} \frac{\Gamma^{*T}\Gamma^*}{\dot{\alpha}^2} \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial p} ds - \int_{\alpha_1^+}^{\alpha_2^-} \frac{\Gamma^{*T}\Gamma^*}{\dot{\alpha}^2} \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial p} ds - \dots - \int_{\alpha_n^+}^{\alpha_{fSS}} \frac{\Gamma^{*T}\Gamma^*}{\dot{\alpha}^2} \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial p} ds \\ &\quad - \left[ \frac{\Gamma^{*T}\Gamma^*}{\dot{\alpha}} \right]_{\alpha_1^-}^{\alpha_1^+} \frac{\partial \alpha_1}{\partial p} - \left[ \frac{\Gamma^{*T}\Gamma^*}{\dot{\alpha}} \right]_{\alpha_2^-}^{\alpha_2^+} \frac{\partial \alpha_2}{\partial p} - \dots - \left[ \frac{\Gamma^{*T}\Gamma^*}{\dot{\alpha}} \right]_{\alpha_n^-}^{\alpha_n^+} \frac{\partial \alpha_n}{\partial p} \\ &\quad + \frac{\Gamma^{*T}\Gamma^*}{\dot{\alpha}}(\alpha_{fSS}) \frac{\partial \alpha_{fSS}}{\partial p} - \frac{\Gamma^{*T}\Gamma^*}{\dot{\alpha}}(\alpha_{iSS}) \frac{\partial \alpha_{iSS}}{\partial p} \\ &= \int_{\alpha_{iSS}^-}^{\alpha_{fSS}} 2 \frac{\Gamma^{*T}}{\dot{\alpha}} \frac{\partial (\Gamma - F_v D_{\Gamma} \dot{q})}{\partial p} - \frac{\Gamma^{*T}\Gamma^*}{\dot{\alpha}^2} \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial p} ds - \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\Gamma^{*T}\Gamma^*}{\dot{\alpha}} \right]_{\alpha_k^-}^{\alpha_k^+} \frac{\partial \alpha_k}{\partial p} \\ &\quad + \frac{\Gamma^{*T}\Gamma^*}{\dot{\alpha}}(\alpha_{fSS}) \frac{\partial \alpha_{fSS}}{\partial p} - \frac{\Gamma^{*T}\Gamma^*}{\dot{\alpha}}(\alpha_{iSS}) \frac{\partial \alpha_{iSS}}{\partial p} \end{aligned} \quad (3.133)$$

Les termes  $\frac{\partial \alpha_k}{\partial p_{SS}}$  sont caractérisés par le fait qu'une vitesse articulaire est nulle. Si nous notons  $\dot{q}_a = D_{\Gamma} \dot{q}$  ce vecteur de vitesses articulaires, nous avons une composante  $\dot{q}_{a_j}$  qui s'annule en  $\alpha_k$ . Nous avons donc la relation (3.134) sur la composante  $\dot{q}_{a_j}$  qui s'annule, qui caractérise  $\alpha_k$ .

$$\dot{q}_{a_j}(\alpha_k) = 0 \quad (3.134)$$

Le gradient de cette relation nous permet d'obtenir le gradient de  $\alpha_k$  donné par (3.135).

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial p} = -\frac{\partial \dot{q}_{a j}}{\partial p} \bigg/ \frac{\partial \dot{q}_{a j}}{\partial \alpha} \quad (3.135)$$

La détermination des instants de discontinuité des couples est faite sur le passage par zéro des vitesses articulaires.

De la même façon, nous obtenons le gradient du critère de couples en double support (3.136).

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{\Gamma DS}}{\partial p} = & 2 \int_0^{T_{DS}} \Gamma^{*T} \frac{\partial (\Gamma - F_v D_{\Gamma} \dot{q})}{\partial p} dt - \sum_{k=1}^n [\Gamma^{*T} \Gamma^*]_{t_k^-}^{t_k^+} \frac{\partial t_k}{\partial p} \\ & + \Gamma^{*T} \Gamma^*(T_{DS}) \frac{\partial T_{DS}}{\partial p} \end{aligned} \quad (3.136)$$

Où les  $t_1, t_2, \dots, t_n$  sont les instants de discontinuité des couples. Le gradient de ces instants de discontinuité s'obtient de la même façon que pour le simple support. Ils sont donnés par (3.137), où  $j$  est l'indice de la composante s'annulant à l'instant  $t_k$ .

$$\frac{\partial t_k}{\partial p} = -\frac{\partial \dot{q}_{a j}}{\partial p} \bigg/ \frac{\partial \dot{q}_{a j}}{\partial t} \quad (3.137)$$

Le gradient du critère complet va ainsi s'écrire (3.138).

$$\frac{\partial C_{\Gamma DS}}{\partial p} = \frac{1}{d} \left[ \frac{\partial C_{\Gamma DS}}{\partial p} + \frac{\partial C_{\Gamma SS}}{\partial p} \right] - \frac{C_{\Gamma SS} + C_{\Gamma DS}}{d^2} \frac{\partial d}{\partial p} \quad (3.138)$$

Pour le gradient du critère d'énergie, nous allons au préalable réduire le calcul intégral pour les intervalles où le terme sous l'intégrale est non nul. Le critère (3.32) peut donc s'écrire en simple support sous la forme (3.139).

$$C_{E SS} = \sum_{j=1}^m \left[ \int_{\alpha_{0j}}^{\alpha_{1j}} \frac{1}{\dot{\alpha}} \left( \dot{q}^T D_{\Gamma} \Gamma^* + \frac{R}{K_{em}^2} \Gamma^{*T} \Gamma^* \right) ds \right] \quad (3.139)$$

Sur l'union des intervalles  $[\alpha_{0j}, \alpha_{1j}]$ , nous avons  $\dot{q}^T D_{\Gamma} \Gamma^* + \frac{R}{K_{em}^2} \Gamma^{*T} \Gamma^* \geq 0$ . En dehors de cette union d'intervalles et dans  $[\alpha_{iSS}, \alpha_{fSS}]$  nous avons  $\dot{q}^T D_{\Gamma} \Gamma^* + \frac{R}{K_{em}^2} \Gamma^{*T} \Gamma^* \leq 0$ .

Ensuite pour chacun de ces intervalles, nous appliquons le même calcul que pour le critère de couple. Nous obtenons ainsi (3.140).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C_{ESS}}{\partial p} = & \sum_{j=1}^m \left[ \int_{\alpha_{0j}}^{\alpha_{1j}} \frac{1}{\dot{\alpha}} \left( \Gamma^{*T} D_{\Gamma}^T \frac{\partial \dot{q}}{\partial p} + \left( \dot{q}^T D_{\Gamma} + \frac{2R}{K_{em}^2} \Gamma^{*T} \right) \frac{\partial \Gamma^*}{\partial p} \right) \right. \\
& - \frac{1}{\dot{\alpha}^2} \left( \dot{q}^T D_{\Gamma} \Gamma^* + \frac{R}{K_{em}^2} \Gamma^{*T} \Gamma^* \right) \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial p} ds \\
& - \sum_{k=1}^{n_j} \left[ \frac{1}{\dot{\alpha}} \left( \dot{q}^T D_{\Gamma} \Gamma^* + \frac{R}{K_{em}^2} \Gamma^{*T} \Gamma^* \right) \right]_{\alpha_{jk}^-}^{\alpha_{jk}^+} \frac{\partial \alpha_{jk}}{\partial p} \\
& + \frac{1}{\dot{\alpha}} \left( \dot{q}^T D_{\Gamma} \Gamma^* + \frac{R}{K_{em}^2} \Gamma^{*T} \Gamma^* \right) (\alpha_{1j}) \frac{\partial \alpha_{1j}}{\partial p} \\
& \left. - \frac{1}{\dot{\alpha}} \left( \dot{q}^T D_{\Gamma} \Gamma^* + \frac{R}{K_{em}^2} \Gamma^{*T} \Gamma^* \right) (\alpha_{0j}) \frac{\partial \alpha_{0j}}{\partial p} \right]
\end{aligned} \tag{3.140}$$

Les  $\alpha_{jk}$  sont les valeurs de  $\alpha$  dans l'intervalle  $[\alpha_{0j} \alpha_{1j}]$  pour lesquelles il y a discontinuité de couples.

Pour le cas du double support nous obtenons de manière similaire (3.141).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C_{EDS}}{\partial p} = & \sum_{j=1}^m \left[ \int_{t_{0j}}^{t_{1j}} \left( \Gamma^{*T} D_{\Gamma}^T \frac{\partial \dot{q}}{\partial p} + \left( \dot{q}^T D_{\Gamma} + \frac{2R}{K_{em}^2} \Gamma^{*T} \right) \frac{\partial \Gamma^*}{\partial p} \right) ds \right. \\
& - \sum_{k=1}^{n_j} \left[ \dot{q}^T D_{\Gamma} \Gamma^* + \frac{R}{K_{em}^2} \Gamma^{*T} \Gamma^* \right]_{t_{jk}^-}^{t_{jk}^+} \frac{\partial t_{jk}}{\partial p} \\
& + \left( \dot{q}^T D_{\Gamma} \Gamma^* + \frac{R}{K_{em}^2} \Gamma^{*T} \Gamma^* \right) (t_{1j}) \frac{\partial t_{1j}}{\partial p} \\
& \left. - \left( \dot{q}^T D_{\Gamma} \Gamma^* + \frac{R}{K_{em}^2} \Gamma^{*T} \Gamma^* \right) (t_{0j}) \frac{\partial t_{0j}}{\partial p} \right]
\end{aligned} \tag{3.141}$$

Les  $t_{jk}$  sont les valeurs de  $\alpha$  dans l'intervalle  $[t_{0j} t_{1j}]$  pour lesquelles il y a discontinuité de couples.

Le gradient du critère d'énergie complet est donné par (3.142).

$$\frac{\partial C_{\Gamma DS}}{\partial p} = \frac{1}{d} \left[ \frac{\partial C_{\Gamma DS}}{\partial p} + \frac{\partial C_{\Gamma SS}}{\partial p} \right] - \frac{C_{\Gamma SS} + C_{\Gamma DS}}{d^2} \frac{\partial d}{\partial p} \tag{3.142}$$

Le calcul des gradients des critères présentés ici se fait en calculant le terme intégral par une intégration numérique. Les autres termes sont rajoutés par la suite.

### 3.5.6 Gradient des contraintes

Les contraintes que nous avons données en section 3.2.3 s'expriment directement en fonction des conditions aux limites des phases, des variables articulaires, des dynamiques de zéro, des réactions du sol et des couples. Le gradient de ces contraintes s'obtient donc par des calculs symboliques simples. Le seul point qui nous semble important et non évident est le gradient de contraintes définies sur un maximum ou un minimum sur une phase.

Soit  $f(t)$  une fonction définie sur une phase.  $t$  joue ici le rôle de la variable d'intégration. En simple support il s'agit de  $\alpha$  et en double support du temps. Nous nous intéressons ici à la détermination du gradient du maximum de cette fonction sur une phase  $\frac{\partial}{\partial p} \left( \max_t f(t) \right)$ . Nous réécrivons ce gradient sous la forme  $\frac{\partial f(t_{max})}{\partial p}$  où  $t_{max} = \text{Argmin}(f(t))$ . Le gradient du maximum de  $f(t)$  est donc donné par (3.143).

$$\frac{\partial}{\partial p} \left( \max_t f(t) \right) = \frac{\partial f(t_{max})}{\partial p} = \frac{\partial f(t)}{\partial p} \Big|_{t=t_{max}} + \frac{\partial f(t)}{\partial t} \Big|_{t=t_{max}} \frac{\partial t_{max}}{\partial p} \quad (3.143)$$

Nous voyons que si le maximum de  $f(t)$  est obtenu en un point de dérivée nulle en  $\alpha$  ou  $t$ , le gradient du maximum est simplement donné par (3.144).

$$\frac{\partial}{\partial p} \left( \max_t f(t) \right) = \frac{\partial f(t)}{\partial p} \Big|_{t=t_{max}} \quad (3.144)$$

Si le maximum est obtenu en fin d'intervalle  $t = t_f$  ou en début d'intervalle  $t = t_i$  et que les bornes  $t_i$  et  $t_f$  dépendent de  $p$ , la formule (3.143) ne se simplifie pas. Et il faut alors connaître  $\frac{\partial f(t)}{\partial t}$  et  $\frac{\partial t_i}{\partial p}$  ou  $\frac{\partial t_f}{\partial p}$  pour déterminer le gradient du maximum de  $f(t)$ . Nous avons pris soin d'inclure la variable d'intégration  $t$  aux paramètres d'optimisation afin de connaître  $\frac{\partial f(t)}{\partial t}$ .  $\frac{\partial t_i}{\partial p}$  ou  $\frac{\partial t_f}{\partial p}$  sont des gradients de conditions aux limites que nous connaissons. Ce calcul ne pose donc plus de problème.

Un autre cas peut se présenter, si la fonction n'est pas dérivable partout et possède des points anguleux, voire est discontinue. A ce moment là,  $\frac{\partial t_{max}}{\partial p}$  est non nul et il est nécessaire de le connaître pour déterminer le gradient de l'extremum.

Pour revenir à notre cas concret, les positions et vitesses sont continues et dérivables en cours de phase. Pour les contraintes définies sur le maximum et le minimum de paramètres de position et vitesse, les seuls cas possibles sont l'obtention d'un extremum en cours de phase lorsque la dérivée en  $\alpha$  ou en temps s'annule, ou lorsque cet extremum est obtenu en début ou en fin de phase. Le calcul de ces extremums ne pose donc pas de problème important.

Par contre pour ce qui est des couples et des réactions du sol, ils peuvent ne pas être continus et dérivables. En effet, les frottements secs au niveau articulaire introduisent des discontinuités, et la méthode de calcul de la répartition des couples optimale en double

support peut introduire des points anguleux, lorsqu'il y a changement d'un type de solution du problème. Pour pouvoir déterminer le gradient de ces extremums, il est donc nécessaire de connaître l'équation définissant la discontinuité ou le point anguleux.

Dans le cas d'une discontinuité de couple due aux frottements, cette discontinuité est caractérisée par l'annulation de la vitesse articulaire. Comme nous l'avons vu dans la section précédente sur le calcul des critères, la dérivée de cet instant caractéristique en fonction des paramètres d'optimisation est donnée par (3.135) en simple support et (3.137) en double support. Il est alors possible de déterminer le gradient d'un maximum défini juste avant ou juste après une discontinuité de couples.

Dans le cas d'un point anguleux en double support, différents cas sont possibles. Dans le cas du critère de couples,  $R_{2x}$  peut-être défini de 5 manières différentes. En effet, il peut s'agir de la valeur optimale ou de la valeur d'une des quatre contraintes prises en compte. Un point anguleux apparaît au moment où, au cours du temps, la solution  $R_{2x}$  change de caractéristique. Le point anguleux est donc défini par l'intersection des deux caractéristiques. Sachant qu'il y a 5 types de solutions possibles pour  $R_{2x}$ , il y a en tout 10 intersections possibles. En effet, un point anguleux peut être défini par le passage de :

- la solution optimale à une des 4 contraintes : 4 cas possibles,
- la première contrainte à une des 3 autres : 3 cas possibles,
- la deuxième contrainte à une des 2 dernières : 2 cas possibles,
- la troisième contrainte à la quatrième : 1 cas possible.

Dans le cas du critère d'énergie, il y a en plus les deux possibilités où la solution se trouve à la limite d'une énergie nulle. Il y a donc en tout 7 caractéristiques et donc la possibilité de 21 intersections.

Nous ne détaillons pas ici toutes les expressions possibles pour la dérivée de l'instant du point anguleux en fonction des paramètres d'optimisation. Nous donnons seulement un cas général. Soit  $R_{2x} = g_1(t, p)$  une première caractéristique et  $R_{2x} = g_2(t, p)$  une deuxième caractéristique. Un point anguleux a lieu à l'instant  $t_a$  défini par  $g_1(t_a, p) = g_2(t_a, p)$ . En dérivant cette expression par rapport à  $p$  nous obtenons l'équation (3.145).

$$\frac{\partial(g_1 - g_2)}{\partial p} \Big|_{t=t_a} + \frac{\partial(g_1 - g_2)}{\partial t} \Big|_{t=t_a} \frac{\partial t_a}{\partial p} = 0 \quad (3.145)$$

La dérivée de l'instant du point anguleux par rapport aux paramètres d'optimisation est donc donnée par l'équation (3.146).

$$\frac{\partial t_a}{\partial p} = - \frac{\partial(g_1 - g_2)}{\partial p} \Big|_{t=t_a} / \frac{\partial(g_1 - g_2)}{\partial t} \Big|_{t=t_a} \quad (3.146)$$

Il est alors possible de déterminer le gradient d'une fonction au point anguleux.

## 3.6 Résultats

Nous commençons par présenter dans cette section quelques aspects pratiques de l'implantation du problème d'optimisation que nous avons présenté dans les sections précédentes. Nous donnons ensuite des résultats d'optimisation. D'abord nous représentons les grandeurs significatives sur un pas d'un mouvement optimal obtenu, puis nous donnons les profils de critères pour différentes vitesses d'avance imposées. Enfin nous commentons et comparons avec d'autres travaux les résultats ainsi obtenus.

### 3.6.1 Quelques considérations pratiques

L'implantation numérique du problème d'optimisation que nous avons présenté, pose de nouveaux problèmes par rapport à la formulation théorique.

Tout d'abord les contraintes strictes doivent être écrites avec une marge pour être sûr qu'elles ne soient pas violées pour le résultat d'une optimisation. Cela est nécessaire pour les résultats des sous optimisations pour que les contraintes des niveaux supérieurs soient bien définies. En pratique, le résultat d'une optimisation numérique donne une solution du problème avec une précision donnée sur la vérification des contraintes, c'est-à-dire que les contraintes peuvent être violées de la précision de l'optimisation. Il s'agit donc de mettre une marge sur les contraintes supérieure à la précision de l'optimisation.

Ensuite se pose le problème de la possibilité d'intégration numérique du mouvement désiré. En effet il est possible qu'un mouvement soit théoriquement défini, mais qu'il soit trop compliqué pour pouvoir être simulé. Un exemple que nous avons observé est l'évolution de  $\delta_3$  en simple support qui prend des valeurs astronomiques, de telle sorte à ce que la jambe libre fait énormément de tours autour de la hanche au cours du simple support. Ce mouvement vérifie pourtant les contraintes sur les conditions aux limites. Pour le cas d'un tel mouvement, il n'a pas été possible d'intégrer numériquement les dynamiques de zéro sur le mouvement complet, le nombre de points d'échantillonnage nécessaires étant trop grand. Pour résoudre rigoureusement ce problème, nous aurions pu rajouter un niveau supplémentaire de contraintes avant le calcul des dynamiques de zéro en simple support. Ce niveau supplémentaire correspondrait à la vérification des contraintes de butées articulaires en cours de phases pour les variables articulaires définies directement. Le calcul de ces contraintes n'aurait pas besoin d'une intégration numérique. Pour ne pas complexifier encore plus le problème, et ralentir le processus de génération de mouvement par l'ajout d'un niveau supplémentaire, nous avons choisi de ne pas faire cet ajout. Ce problème n'apparaissant que rarement, nous changeons de conditions initiales lorsqu'il se produit.

D'un point de vue pratique, pour améliorer la précision du calcul du critère et des contraintes, nous avons utilisé les possibilités de *simulink* d'intégrer le mouvement avec un pas variable et de définir des points de passage avec précision. Nous avons ainsi défini

des points de passage avec précision au niveau des extremums sur lesquels portent des contraintes. L'amélioration de la précision permet une meilleure convergence de l'optimisation.

Nous avons utilisé le programme d'optimisation NPSOL de GILL *et al.* [26] sous *matlab* pour résoudre notre problème d'optimisation. Nous avons également essayé la fonction *fmincon* de *matlab* qui est également basée sur un algorithme SQP. Mais cette fonction s'arrête parfois sur un résultat non optimal en affirmant le contraire. Le programme d'optimisation NPSOL est beaucoup plus fiable quand aux raisons de l'arrêt de l'optimisation (voir la documentation GILL *et al.* [26] à ce propos).

### 3.6.2 Présentation de mouvements optimaux obtenus

Nous présentons ici de manière complète un mouvement de marche obtenu. Il s'agit du résultat de l'optimisation du mouvement en tenant compte des frottements articulaires fluides, contraint à une vitesse d'avance de  $0.3m/s$ . Lorsque des grandeurs sont données à la fois pour le simple support et le double support, le simple support est donné avant. Nous considérons un changement de numérotation des jambes et des moteurs entre la fin du simple support et le début du double support. Ce changement explique la discontinuité entre la fin du simple support et le début du double support de certaines grandeurs qui normalement sont continues.

Figure 3.8 est représenté l'ensemble des configurations suivies par le bipède au cours de la marche. La figure 3.9 donne les couples en fonction du temps en cours de marche. La figure 3.10 représente les couples en fonction des vitesses articulaires superposés sur le gabarit moteur (ramené après les réducteurs) afin de vérifier la compatibilité des mouvements générés avec les moteurs du robot. La figure 3.11 représente les réactions normales du sol en fonction du temps. La figure 3.12 représente les contraintes de non glissement des pieds. La figure 3.13 représente l'évolution temporelle des variables articulaires  $\delta_i$  obtenues pour le mouvement optimal. La figure 3.14 représente l'évolution temporelle de  $\alpha$ . La figure 3.15 représente l'évolution du terme  $f(\alpha)$  des dynamiques de zéro. Enfin la figure 3.16 représente l'évolution du pied libre en simple support, et la contrainte parabolique qui est appliquée.

Nous donnons également des résultats partiels pour une optimisation du critère de couples en considérant les frottements secs, et également dans le cas d'une contrainte de la vitesse d'avance de  $0.3m/s$ . La figure 3.17 représente les couples articulaires de la marche optimale obtenue, où des discontinuités de couples sont observables. La figure 3.18 représente les vitesses articulaires  $\dot{\delta}_i$ . Et nous pouvons constater que  $\dot{\delta}_4$  frôle une valeur nulle. Ce cas limite est obtenu car l'optimisation avec frottements secs n'a en fait pas convergé et s'est arrêtée à ce cas limite pour lequel il y a une discontinuité des critères de couples en fonction des paramètres d'optimisation. Nous discuterons plus avant de ce

phénomène dans la section 3.6.4.

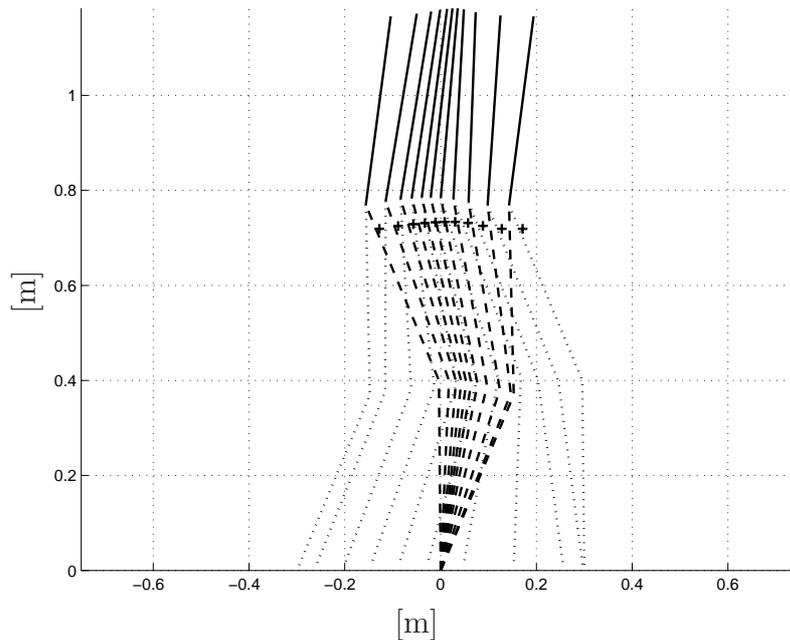


FIG. 3.8 – Séquence de configurations d'un mouvement de marche optimal. La croix représente l'évolution du centre de gravité pour chaque configuration.

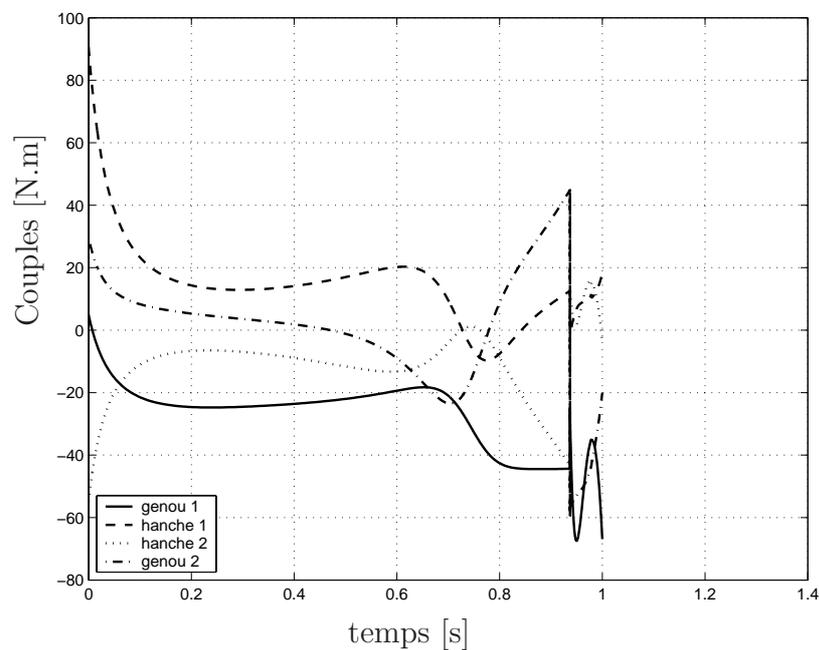


FIG. 3.9 – Couples articulaires d'un mouvement de marche optimal.

### 3.6.3 Présentation des critères en fonction de la vitesse d'avance

Nous présentons ici des résultats de synthèse de jeux de paramètres d'optimisations pour différentes vitesses moyennes d'avance du robot.

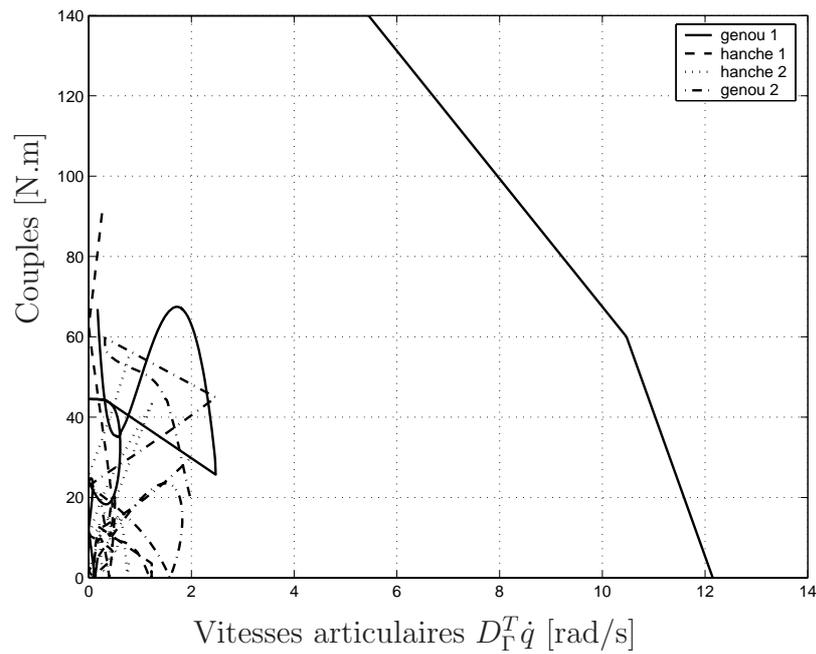


FIG. 3.10 – Représentation du gabarit de couples ainsi que de l'évolution des couples en fonction des vitesses articulaires. Pour la vitesse de marche choisie, les couples sont bien en deçà des limites du gabarit. Nous constatons également que les vitesses articulaires restent suffisamment faibles pour se contenter des contraintes  $-140N.m < \Gamma_i < 140N.m$ .

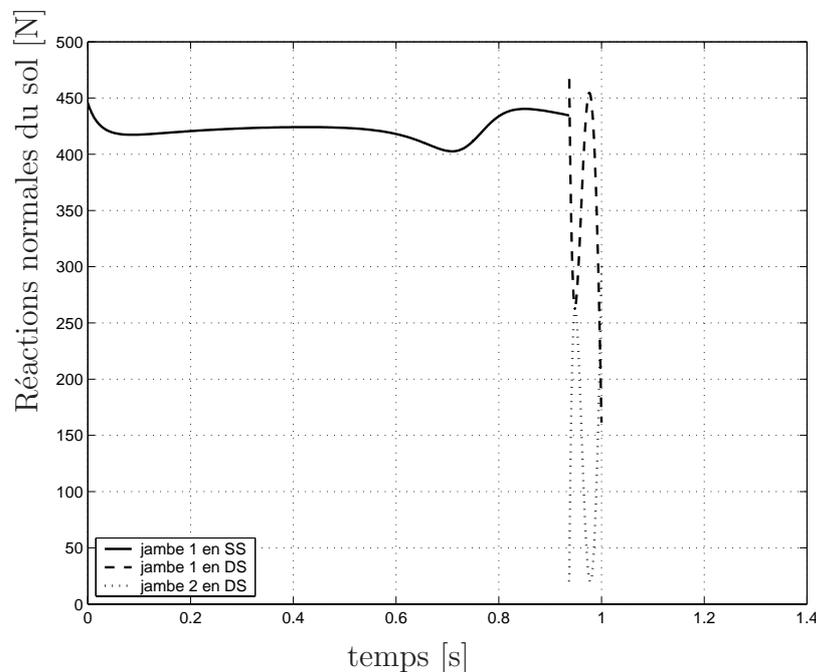


FIG. 3.11 – Composantes normales des réactions du sol sur le robot en fonction du temps. Nous constatons que ces composantes normales vérifient bien l'unilatéralité du contact. Nous constatons que cette contrainte d'unilatéralité du contact est active. En effet la composante du pied 2 en double support atteint la limite que nous avons fixée à  $20N$ .

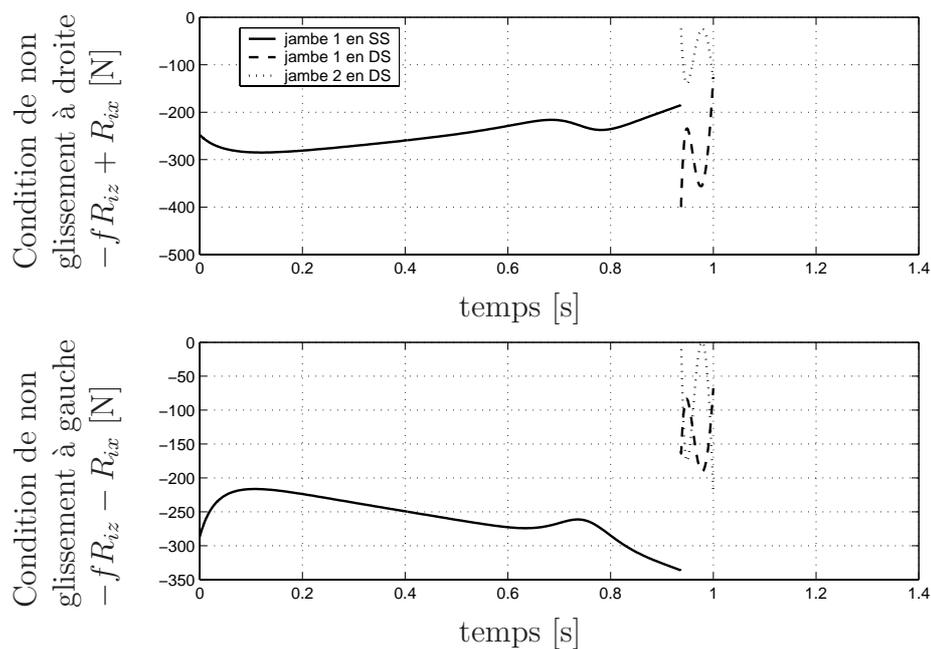


FIG. 3.12 – Représentation de  $-fR_{iz} - R_{ix}$  et  $-fR_{iz} + R_{ix}$ . Ces grandeurs doivent être négatives pour vérifier le non glissement donné par (3.48). Nous constatons bien un non glissement.

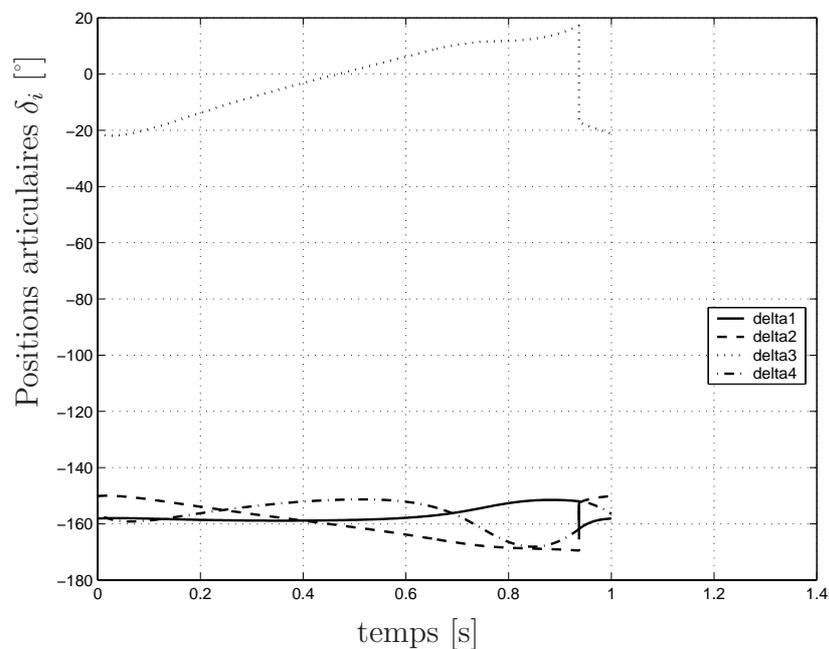


FIG. 3.13 – Evolution des positions articulaires  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$  et  $\delta_4$  en fonction du temps pour un mouvement de marche optimal.

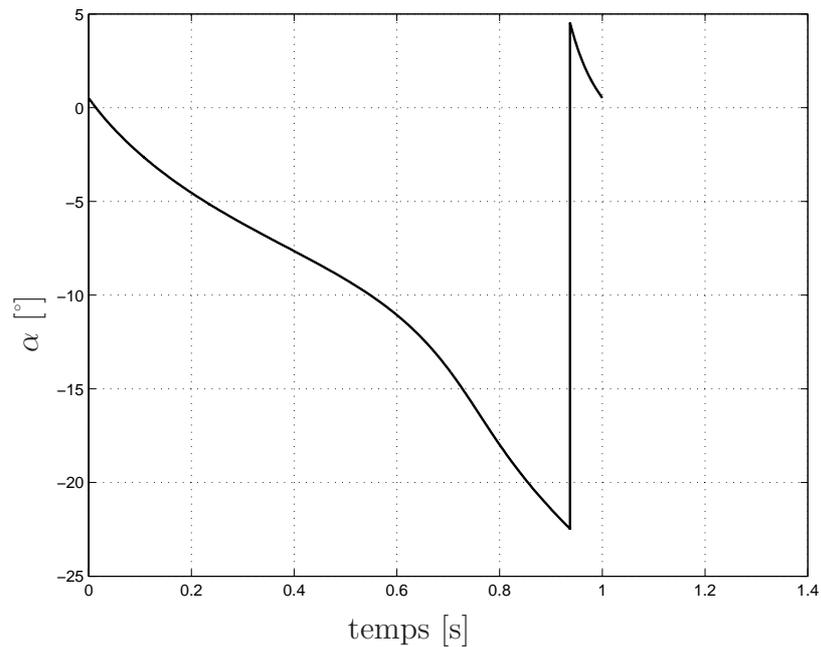


FIG. 3.14 – Evolution de  $\alpha$  en fonction du temps. Nous constatons bien qu'il a une évolution monotone, et de surcroît régulière.

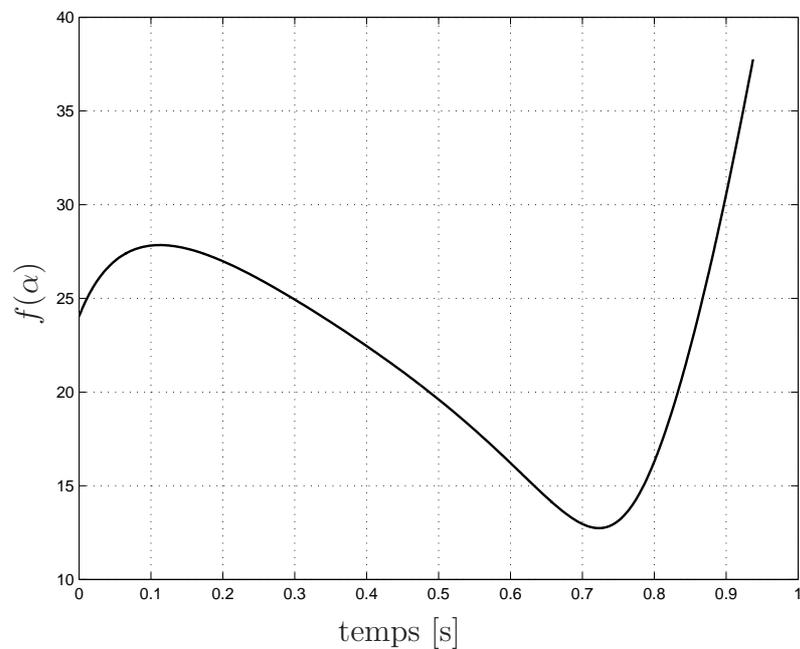


FIG. 3.15 – Evolution de  $f(\alpha)$  en phase de simple support. La singularité lorsque  $f(\alpha)$  s'annule est largement vérifiée.

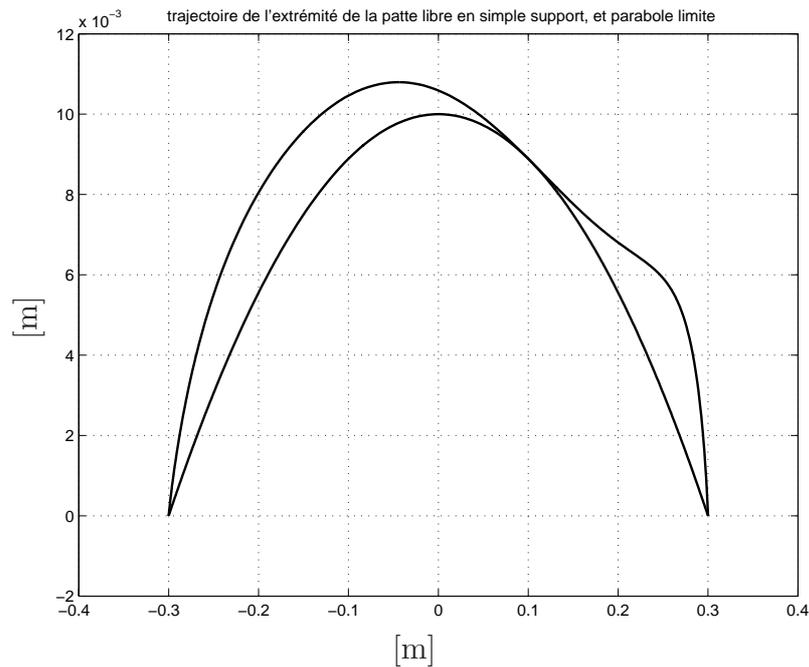


FIG. 3.16 – Evolution de la position du pied libre en phase de simple support. Le pied a bien une évolution au dessus de la parabole, et cette contrainte parabolique est active en un point.

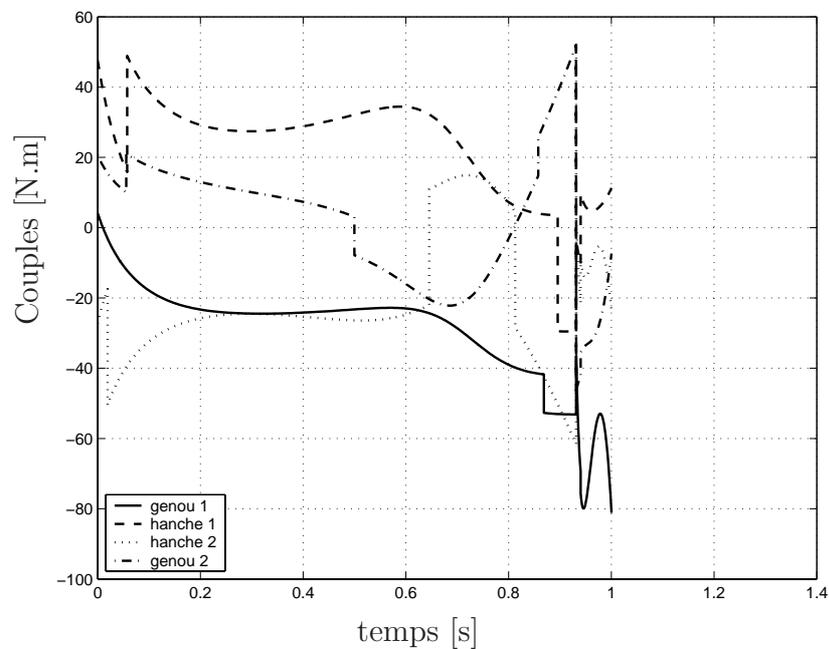


FIG. 3.17 – Couples articulaires d'un mouvement de marche optimal en tenant compte du frottement sec. Nous pouvons constater les discontinuités de couples dues aux frottements articulaires secs.

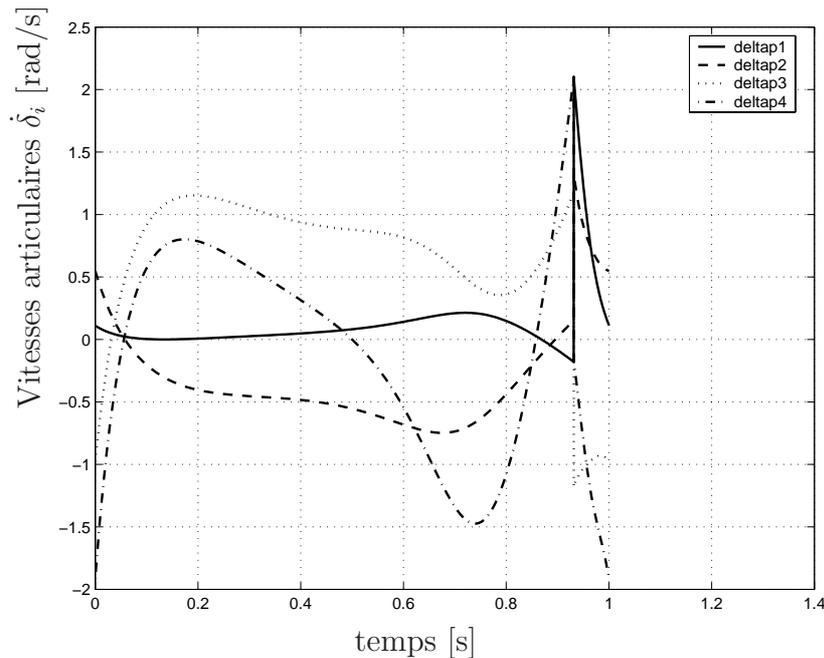


FIG. 3.18 – Evolution des vitesses articulaires  $\dot{\delta}_1$ ,  $\dot{\delta}_2$ ,  $\dot{\delta}_3$  et  $\dot{\delta}_4$ , pour le même mouvement optimal tenant compte des frottements secs, que pour les couples représentés figure 3.17. Nous pouvons constater le passage de  $\dot{\delta}_1$  à la limite d’une vitesse nulle. Nous sommes donc à la limite d’un cas de discontinuité de la contrainte sur les couples en simple support.

Nous présentons les résultats d’optimisation du critère de couple, en fonction de la vitesse moyenne d’avance du robot. Bien qu’ayant précédemment présenté le calcul du critère  $C_E$  d’énergie électrique fournie au robot, nous n’avons pas eu le temps d’effectuer des optimisations sur ce critère. Sachant qu’il s’agit du critère le plus proche de la consommation énergétique réelle du robot, nous comptons obtenir des mouvements optimisant ce critère par la suite. Nous avons distingué le cas de frottements articulaires fluides seulement, et le cas de frottements articulaires fluides et secs. Dans le cas sans frottements secs, nous donnons le critère de couples  $C_\Gamma$  que nous avons optimisé, en fonction de la vitesse d’avance du robot figure 3.19. Pour comparaison avec d’autres travaux nous donnons le critère (3.147) en fonction de la vitesse d’avance du robot.

$$W = \frac{1}{d} \int_0^{T_{SS}+T_{DS}} \sum_i |\Gamma_i^* D_{\Gamma}^T \dot{q}| dt \quad (3.147)$$

Où  $D_{\Gamma i}$  est la  $i^{\text{ème}}$  colonne de  $D_\Gamma$ .

Ce critère  $W$  représente la somme des énergies consommées sur chaque axe, en considérant qu’accélérer un axe et le freiner consomme de l’énergie. Nous donnons figure 3.20 ce critère en fonction de la vitesse d’avance, pour des optimisations sur  $C_\Gamma$ .

Nous donnons par (3.148) le critère  $C_{frott}$  qui correspond aux pertes par frottements secs et fluides.

$$C_{frott} = \frac{1}{d} \int_0^{T_{SS}+T_{DS}} \Gamma^{*T} D_{\Gamma}^T \dot{q} dt \quad (3.148)$$

La connaissance de ces pertes par frottement nous permet de comparer nos résultats avec d'autres études de génération de mouvement ne prenant pas en compte les frottements. Nous donnons figure 3.21 les pertes mécaniques dues aux frottements pour un pas en fonction de la vitesse d'avance, pour des optimisations sur  $C_{\Gamma}$ . Ces pertes mécaniques par frottement correspondent à l'énergie mécanique fournie au robot, les pertes à l'impact étant ici nulles. Enfin nous donnons figure 3.22  $C_E$ , l'énergie électrique à fournir au robot par unité de distance parcourue, toujours pour des optimisations sur  $C_{\Gamma}$ .

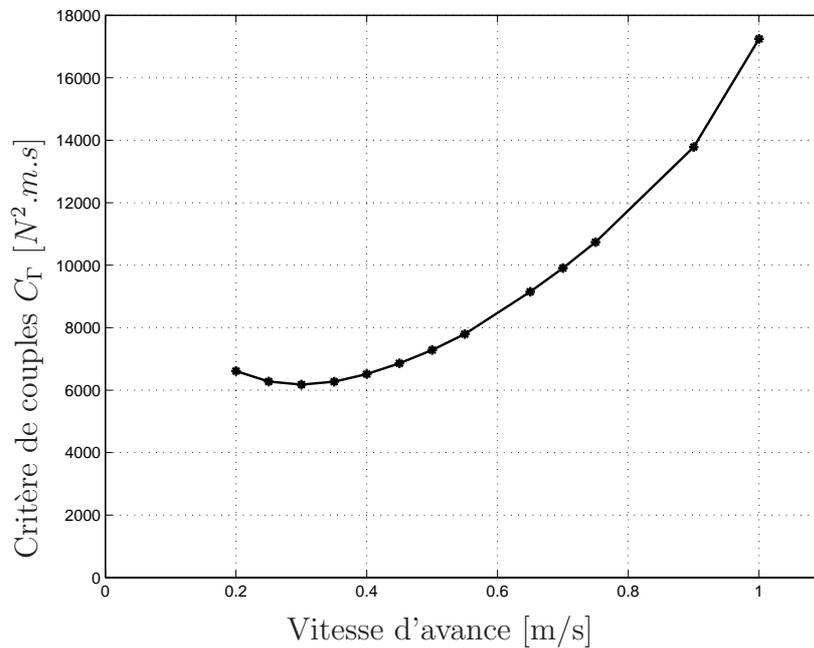


FIG. 3.19 – Critère de couples  $C_{\Gamma}$  en fonction de la vitesse de marche imposée, pour le cas d'optimisation du critère  $C_{\Gamma}$ . Résultats obtenus en considérant seulement les frottements fluides.

Nous donnons maintenant les critères en fonction de la vitesse moyenne du robot dans le cas avec frottements secs et fluides. Le critère de couple  $C_{\Gamma}$  que nous avons optimisé, en fonction de la vitesse d'avance du robot est donné figure 3.23. Le critère  $W$  en fonction de la vitesse d'avance du robot est donné figure 3.25 pour des optimisations sur  $C_{\Gamma}$ . Les pertes par frottements sur un pas,  $C_{frott}$ , en fonction de la vitesse moyenne, toujours pour des optimisations sur  $C_{\Gamma}$ , sont données figure 3.24. Enfin le critère d'énergie électrique dépensée par distance parcourue  $C_E$ , est donné figure 3.26, toujours pour des optimisations sur  $C_{\Gamma}$ .

Pour l'optimisation de ces mouvements, même en injectant pour condition initiale le résultat pour une vitesse imposée très proche, il n'a pas été rare d'observer la violation de contraintes qui doivent être vérifiées pour que le critère soit défini. Par ailleurs, pour la première condition initiale, il peut être possible de la définir nous même intuitivement.

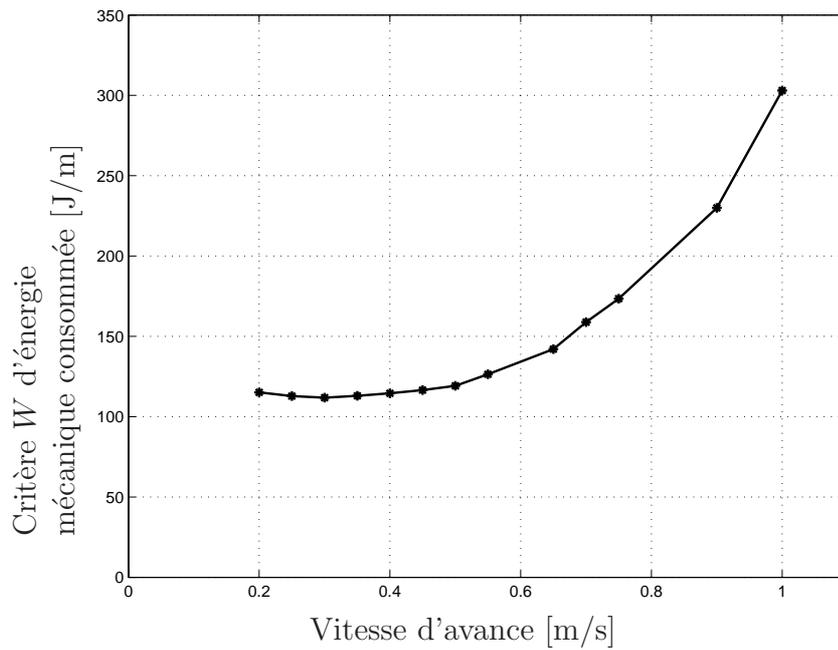


FIG. 3.20 – Critère  $W$  d'énergie mécanique consommée sur un pas en fonction de la vitesse de marche imposée, pour le cas d'optimisation du critère  $C_{\Gamma}$ . Résultats obtenus en considérant seulement les frottements fluides.

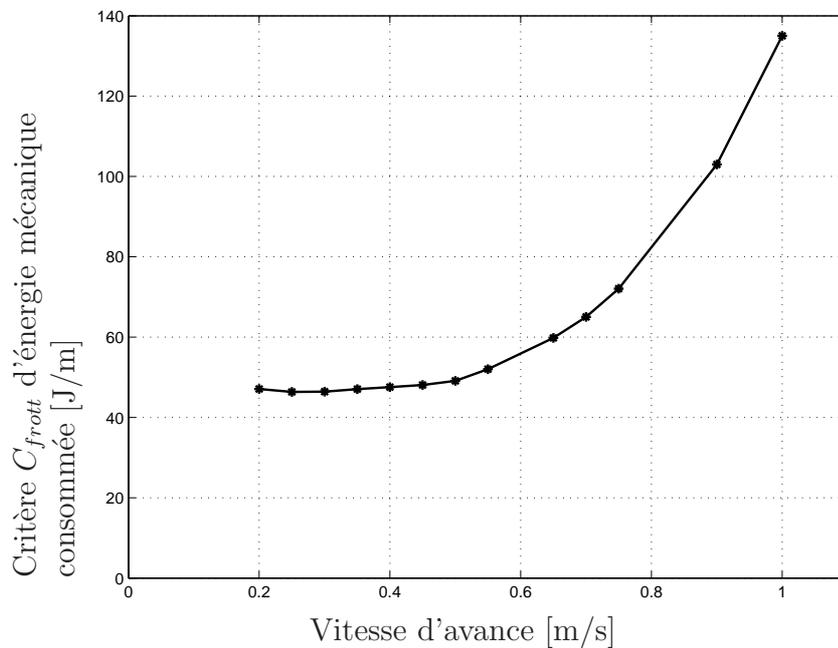


FIG. 3.21 – Critère  $C_{frott}$  d'énergie mécanique consommée par frottement sur un pas en fonction de la vitesse de marche imposée, pour le cas d'optimisation du critère  $C_{\Gamma}$ . Résultats obtenus en considérant seulement les frottements fluides. L'ensemble de l'énergie mécanique consommée par le robot est dissipée par frottements fluides. Il n'inclut pas l'énergie dissipée à l'impact, celui-ci étant absent.

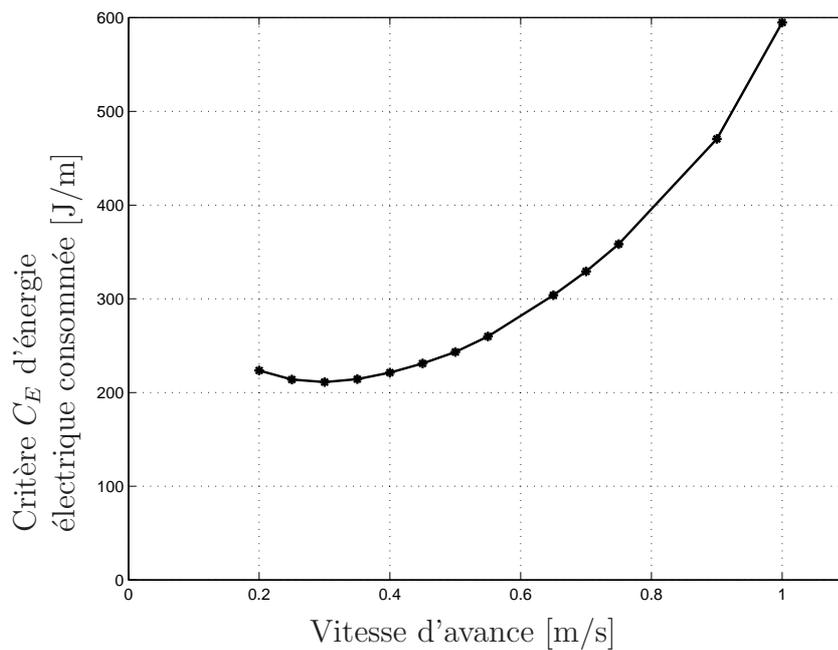


FIG. 3.22 – Critère  $C_E$  d'énergie électrique consommée sur un pas en fonction de la vitesse de marche imposée, pour le cas d'optimisation du critère  $C_T$ . Résultats obtenus en considérant seulement les frottements fluides. L'énergie électrique consommée correspond aux pertes par frottements fluides, aux pertes par effet Joule dans le moteur et à l'énergie restituée par le robot bipède qui est en fait perdue dans des résistances de dissipation.

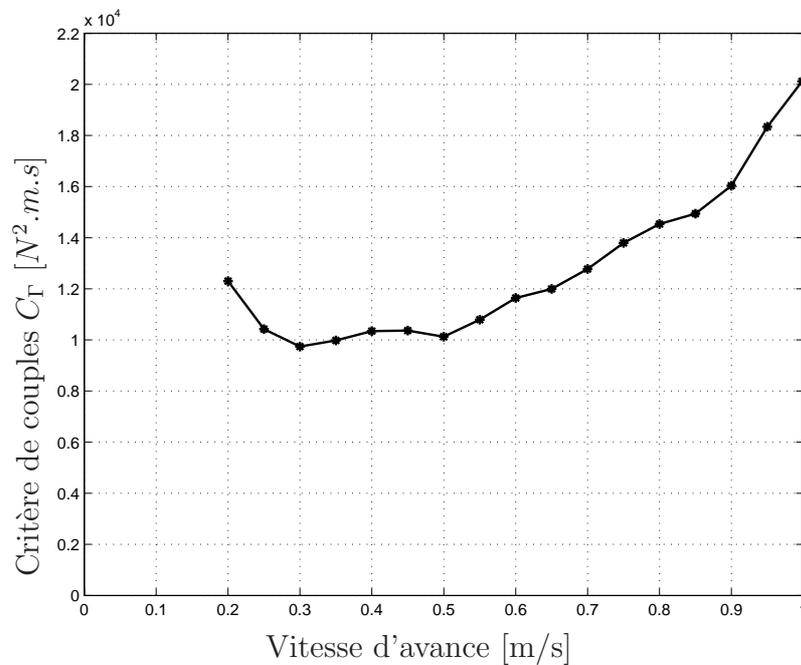


FIG. 3.23 – Critère de couples  $C_T$  en fonction de la vitesse de marche imposée, pour le cas d'optimisation du critère  $C_T$ . Résultats obtenus en considérant les frottements fluides et les frottements secs.

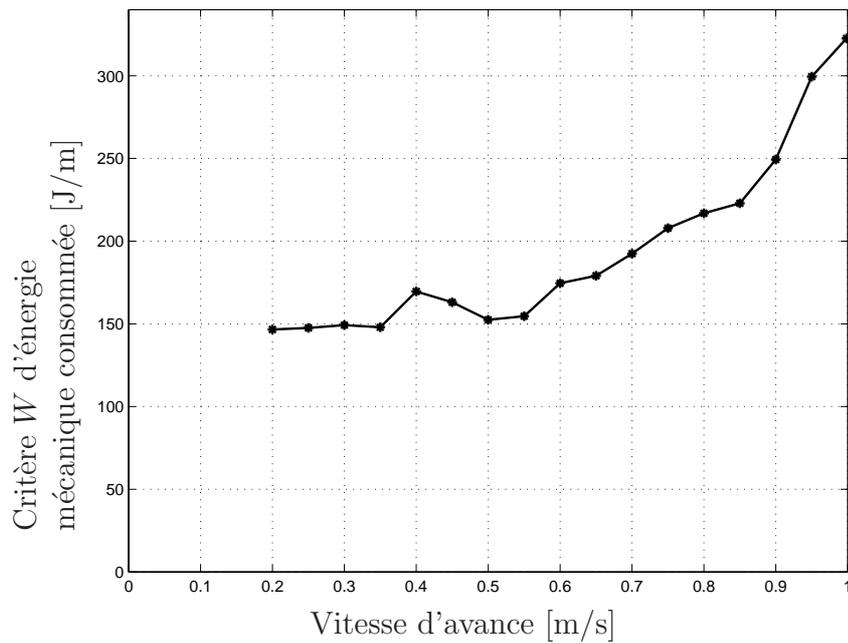


FIG. 3.24 – Critère  $W$  d'énergie mécanique consommée sur un pas en fonction de la vitesse de marche imposée, pour le cas d'optimisation du critère  $C_T$ . Résultats obtenus en considérant les frottements fluides et les frottements secs.

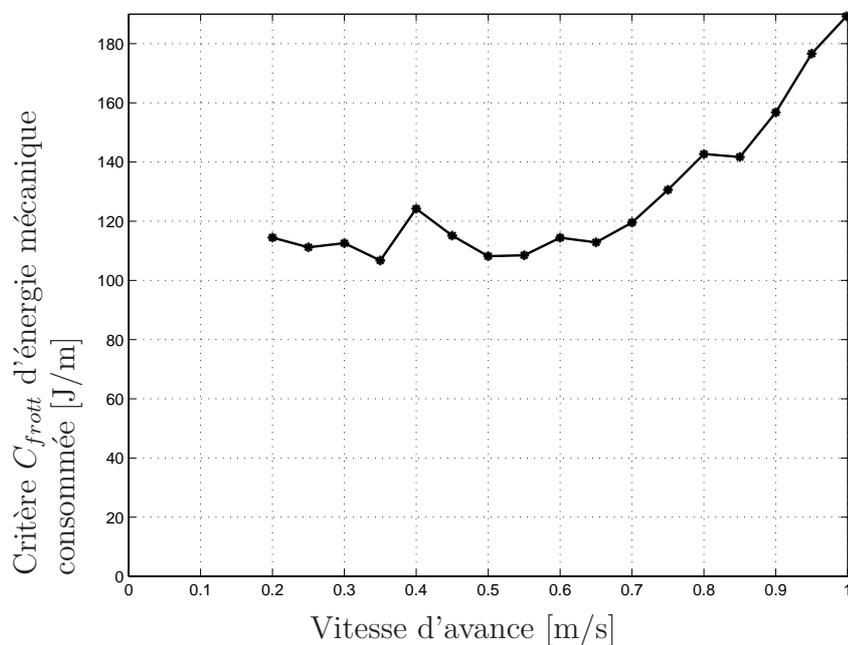


FIG. 3.25 – Critère  $C_{frott}$  d'énergie mécanique consommée par frottement sur un pas en fonction de la vitesse de marche imposée, pour le cas d'optimisation du critère  $C_T$ . Résultats obtenus en considérant les frottements fluides et les frottements secs. L'ensemble de l'énergie mécanique fournie au robot est dissipée par frottements.

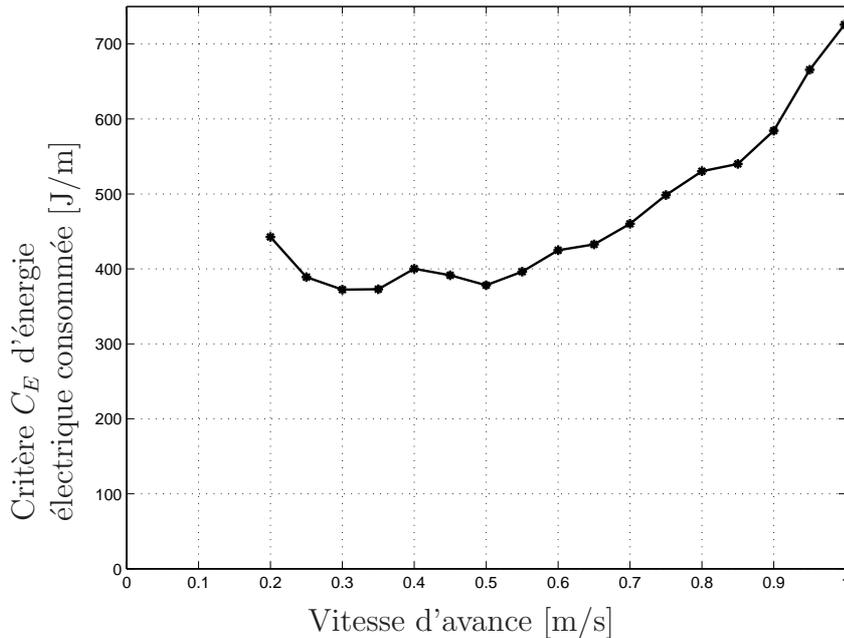


FIG. 3.26 – Critère  $C_E$  d'énergie électrique consommée sur un pas en fonction de la vitesse de marche imposée, pour le cas d'optimisation du critère  $C_T$ . Résultats obtenus en considérant les frottements fluides et les frottements secs. L'énergie électrique fournie correspond aux pertes par frottements fluides, aux pertes par effet Joule dans le moteur et à l'énergie restituée par le robot bipède qui est en fait perdue dans des résistances de dissipation.

Cependant, nous avons utilisé le résultat d'une optimisation sans contrainte de vitesse d'avance.

Pour cette génération de mouvements sans imposer de contrainte de vitesse d'avance du robot, nous avons pris une conditions initiales au hasard. Nous avons au préalable modifié cette condition initiale aléatoire avec les optimisations des contraintes indispensables à vérifier afin d'obtenir un point le plus proche du point aléatoire initial mais pour lequel le critère et toutes les contraintes soient définies. Nous avons lancé le programme d'optimisation pour plusieurs conditions initiales aléatoires. Comme nous en avons parlé en section 3.6.1, il arrive parfois qu'en cours d'optimisation, il ne soit pas possible d'intégrer les dynamiques de zéro, et l'optimisation a donc été interrompue. Cependant, pour l'ensemble des cas où la convergence a été obtenue, nous avons constaté que cette convergence avait toujours lieu vers des valeurs du critère proches à moins de  $0.2N^2.m.s$ . Pour ces optimisations avec des conditions initiales aléatoires il est indispensable d'utiliser la méthode d'optimisation qui prend en compte la hiérarchisation des contraintes, que nous avons présentée section 3.4.2.

### 3.6.4 Commentaires

Le premier commentaire que nous pouvons faire porte sur les résultats de l'optimisation sans la contrainte de vitesse moyenne d'avance et avec des conditions initiales aléatoires.

Le fait que toutes ces optimisations aient convergé vers des solutions très proches nous amène à penser que le problème d'optimisation à résoudre n'a pas de minimum local. Cela nous conforte donc dans le choix d'une méthode d'optimisation de type SQP, qui sont les plus rapides pour l'optimisation de problèmes convexes non linéaires sous contraintes.

Pour les profils de critères en fonction de la vitesse d'avance, nous pouvons commencer par constater que les critères augmentent avec la vitesse d'avance imposée. Nous obtenons également une allure de ces courbes similaires à celles données dans CHEVALLEREAU et Aoustin [20] pour des allures de marche avec double support instantané.

	Modèle de CHEVALLEREAU et Aoustin [20], marche à $0.75m/s$		Modèle de CHESSE [17], marche à $0.85m/s$	
Critères optimisés	Nos résultats	Résultats de CHEVALLEREAU et Aoustin [20]	Nos résultats	Résultats de CHESSE [17]
$C_T$	$7615N^2.m.s$	$871N^2.m.s$	$2349N^2.m.s$	$1836N^2.m.s$
$W$	$89.79J/m$	$26.38J/m$		

TAB. 3.1 – Comparaison de résultats d'optimisation. Les première et deuxième colonnes correspondent à la comparaison pour le modèle de CHEVALLEREAU et Aoustin [20] entre nos résultats et les résultats de CHEVALLEREAU et Aoustin [20]. Les troisième et quatrième colonnes correspondent à la comparaison pour le modèle de CHESSE [17] entre nos résultats et les résultats de CHESSE [17]. Ces comparaisons se font pour les deux critères  $C_T$  et  $W$ .

Dans le tableau 3.1 nous présentons une comparaison des résultats de marches optimales de CHEVALLEREAU et Aoustin [20] et CHESSE [17] avec nos résultats. Pour pouvoir comparer, nous avons généré des mouvements optimaux pour les mêmes modèles et les mêmes critères que ceux considérés par CHEVALLEREAU et Aoustin [20] et CHESSE [17]. Le modèle de CHEVALLEREAU et Aoustin [20] diffère de celui que nous avons présenté chapitre 1 dans le fait qu'ils ne tiennent pas compte des frottements, qu'ils ne tiennent pas compte de la barre mais considèrent un tronc de masse  $m_3 = 20Kg$  alors que nous considérons un tronc de masse  $m_3 = 16Kg$ . De plus ils ont considéré le regroupement des inerties moteurs avec les inerties des corps. Le modèle de CHESSE [17] diffère du notre dans le fait qu'il ne tient pas compte des frottements, qu'il ne tient pas compte de la barre et considère également un tronc de masse  $m_3 = 20Kg$ . De plus les inerties moteurs ne semblent pas avoir été prises en compte. CHEVALLEREAU et Aoustin [20] présentent des mouvements de marche optimaux avec seulement une phase de simple support et pas

de phase de double support, avec des mouvements paramétrés en temps. CHESSE [17] présente un mouvement de marche optimale avec double support, obtenu avec le principe du maximum de Pontryagin, pour lequel les configurations et vitesses de début et fin de simple et double support ne sont pas optimisées.

Nous constatons que les trajectoires que nous obtenons consomment plus d'énergie que celles obtenues par CHEVALLEREAU et Aoustin [20] et par CHESSE [17]. L'écart pour le critère  $C_T$  entre notre marche et celle de CHEVALLEREAU et Aoustin [20], pour le même modèle, est très important. Cet écart est plus faible pour le critère  $W$ . L'écart pour le critère  $C_T$  entre notre marche et celle de CHESSE [17] est beaucoup plus faible que l'écart avec CHEVALLEREAU et Aoustin [20]. Il semble donc d'abord que la marche avec double support consomme beaucoup plus que la marche sans double support. Nous pouvons tirer pour conclusion que l'écart entre la marche avec double support et sans double support peut s'expliquer par le fait que la marche sans pieds avec double support et sans impact consomme de l'énergie pour arriver avec une vitesse de l'extrémité du pied nulle, mais également pour décoller le pied à la fin du double support, alors que celui-ci décolle plus facilement pour une marche avec impact. De plus il nous semble que pour une marche avec double support sans pieds, le bipède doit marcher les genoux légèrement pliés afin de pouvoir appliquer un effort avec la jambe arrière en cours de double support. Alors que pour une marche sans double support il nous semble que les genoux sont moins pliés. Le fait d'avoir les jambes pliées au cours de la marche entraîne que la consommation d'énergie est plus importante. Pour ce qui est de la comparaison de notre résultat avec celui de CHESSE [17], les caractéristiques de la marche sont les mêmes : présence d'une phase de simple support et double support, arrivée du pied libre avec une vitesse nulle au contact. Ce qui explique le meilleur résultat de CHESSE [17] est l'utilisation du principe de Pontryagin, qui donne un résultat plus optimal. Les résultats de CHESSE [17] sont meilleurs alors même que les configurations et vitesses initiales et finales des phases ne sont pas optimisées, ce qui est fait dans notre approche. Pour se rapprocher des résultats de CHESSE [17], il nous est possible d'enrichir les mouvements possibles en ajoutant de nouveaux paramètres. Cependant cet enrichissement des mouvements possibles doit se faire en gardant autant que possible un problème bien posé, c'est-à-dire un problème présentant le moins de minimums locaux possibles. Dans le cas de notre problème, il est très difficile de déterminer l'influence de la méthode d'enrichissement des mouvements possibles sur la régularité du problème d'optimisation. Cependant il nous semble mieux d'enrichir le mouvement en considérant des B-splines par exemple, qui permettent que les paramètres d'optimisation n'aient qu'une influence locale sur le mouvement de marche. De cette façon, il y a découplage entre les phases du mouvement total. Un enrichissement du mouvement en augmentant simplement le degré des polynômes n'aurait pas cette propriété, et nous semble donc moins approprié.

En comparant les courbes de critères sans la prise en compte des frottements secs,

figures 3.19 à 3.22, avec les courbes de critères avec la prise en compte des frottements secs, figures 3.23 à 3.26, nous constatons que l'optimisation se passe beaucoup mieux pour le cas sans les frottements secs qu'avec. En effet, les profils de critères sont beaucoup plus réguliers pour le cas sans frottement. Cela est dû au fait que les contraintes de couples peuvent être discontinues lors de la prise en compte des frottements secs. Par exemple lorsqu'une vitesse articulaire tangente zéro, pour une très petite variation des paramètres d'optimisation, il peut y avoir apparition ou non de passage de la vitesse articulaire par zéro. Au niveau des couples il peut alors apparaître un nouvel extremum ou non. Si ce nouvel extremum est un extremum global, nous avons donc discontinuité du critère. Or les méthodes d'optimisation SQP ne permettent pas d'optimiser des problèmes non continus. Nous pouvons constater que la solution de l'optimisation en tenant compte des frottements secs, présentée en figure 3.17 et figure 3.18 est justement dans le cas d'une tangence d'une vitesse articulaire. Les méthodes SQP classiques ne permettent donc pas de prendre en compte correctement le problème de recherche de mouvements optimaux avec frottements secs, lorsqu'ils sont modélisés avec une fonction signe.

Nous constatons dans le cas de la recherche d'un optimum sans frottements secs, que le profile du critère est très régulier, ce qui nous amène à penser que la convergence de l'optimisation est bonne. Dans le cas où nous ne fournissons pas le gradient, la convergence n'avait pas lieu jusqu'au bout, et l'optimisation s'arrêtait seulement car elle restait bloquée, le problème étant mal conditionné. Il est connu que la détermination du gradient par différence finie peut rendre le problème mal conditionné, voir notamment GILL *et al.* [26]. Le point ainsi obtenu était donc moins proche d'un optimum local que lorsque nous fournissons le gradient.

Nous avons également remarqué que les contraintes définies  $\forall \alpha \in [\alpha_{iSS}, \alpha_{fSS}]$  et  $\forall \alpha \in [\alpha_{iDS}, \alpha_{fDS}]$  et que nous avons réduites en un point en considérant le maximum ou le minimum de la grandeur contrainte peuvent poser problème. En effet lorsque la même grandeur possède deux maximums ou deux minimums de valeurs très proches, la contrainte est sur un point anguleux. L'algorithme d'optimisation peut osciller d'un optimum à l'autre, si le gradient en chacun des optimums tend à faire tendre l'autre optimum à être global lorsqu'on cherche à vérifier la contrainte. Lorsqu'il y a une telle oscillation, les pas de l'optimisation pourraient être très petits, et celle-ci serait alors ralentie énormément, et pourrait même dans certains cas stagner. Mais nous n'avons jamais rencontré de tel cas. Avec le programme NPSOL que nous avons utilisé, dans ce cas de discontinuité du gradient lorsque l'optimum global change d'optimum local, une erreur du gradient est détectée et l'optimisation est arrêtée. Nous avons contourné le problème en relançant l'optimisation de l'autre côté du point anguleux. Nous avons toujours constaté que l'optimisation s'éloigne du point anguleux. Dans le pire des cas, elle pourrait osciller d'un côté à l'autre du point anguleux et pourrait ne pas le quitter. Dans les faits, nous avons constaté que cette manière de contourner le problème fonctionne. Une autre solution que nous n'avons pas

eu le temps d'explorer serait de mettre notre problème d'optimisation sous la forme d'un problème avec des contraintes semi-infinies, c'est-à-dire des contraintes qui doivent être définies sur tout un intervalle d'une variable, qui dans notre cas serait  $\alpha$  en simple support et  $t$  en double support. Pour de telles contraintes semi-infinies, le problème d'optimisation prend donc en compte la possibilité de plusieurs extremums sur l'intervalle de définition de la contrainte. De tels problèmes pourraient être par exemple résolus avec la fonction *fseminf* de Matlab, ou avec le programme *fsqp* qui peut également prendre en compte de tels problèmes. Cependant la fonction *fseminf* ne permet pas de prendre le gradient des contraintes semi-infinies, que nous calculons pourtant. Et elle permet seulement de prendre en compte des fonctions continues, ce qui n'est pas le cas des couples avec des frottements secs. Et *fsqp* discrétise l'intervalle en  $\alpha$  ou  $t$ , ce qui fait que les extremums ne sont pas déterminés avec précision. A notre goût, une solution idéale serait d'écrire un programme d'optimisation capable de prendre en compte un nombre de contraintes variable à chaque instant. Ainsi nous définirions une contrainte par extremum local. Il y a bien sûr d'autres méthodes d'optimisation qui pourraient prendre en compte ces problèmes, notamment les méthodes de recuit simulé et les méthodes par algorithme génétique, qui n'exploitent pas l'information du gradient. Cependant nous pensons que pour traiter le problème que nous avons, une méthode SQP modifiée doit permettre d'obtenir une solution plus rapidement. De plus pour notre problème où il semble n'y avoir qu'un minimum local, le fait que la méthode SQP ne fournisse qu'un minimum local n'est pas un désavantage.

Les temps d'optimisation pour des conditions initiales au hasard sont de l'ordre de une à deux heures sur un *pentium IV 2 GHz*, ce qui prouve que dans notre cas la complexité de notre problème n'est pas trop importante. Pour un cas typique d'optimisation, nous avons une optimisation principale qui fait appel environ 5000 fois à une simulation d'un pas, et sur ces 5000 fois, environ 600 fois il est fait appel à une sous-optimisation du niveau inférieur. Pour ce qui est des optimisations permettant d'obtenir le profile du critère en fonction de la vitesse d'avance, nous donnons pour condition initiale la condition finale de l'optimisation pour une vitesse d'avance légèrement différente. L'optimisation est donc généralement plus rapide que dans le cas de conditions initiales aléatoires. Le nombre de simulations d'un pas obtenu varie de 1500 à 5000. Le temps de calcul varie de 22 minutes à 2 heures.

### 3.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté notre problème d'optimisation et nous l'avons posé de manière rigoureuse, en prenant en compte le fait que certaines contraintes doivent être vérifiées afin que notre critère et d'autres contraintes soient définis. A notre connaissance la prise en compte de ces caractéristiques du problème n'a jamais été considérée. Nous avons également proposé une méthode de résolution de tels problèmes qui permet

d'utiliser une méthode SQP classique. Cette méthode nous a permis de résoudre correctement le problème de génération de mouvement sans considérer les frottements secs. Nous avons également présenté la détermination, fastidieuse, du gradient analytique du critère et des contraintes. Fournir ces gradients au processus d'optimisation permet de diminuer le temps de calcul et d'améliorer le résultat obtenu, en évitant des mauvais conditionnements du problème. Cependant nous avons vu qu'il serait plus performant d'utiliser le programme *fsqp* pour résoudre le problème de la génération de mouvements tel que nous l'avons posé. Ce programme est fondé sur une méthode SQP modifiée afin que les contraintes soient toujours vérifiées en cours d'optimisation. Nous prévoyons d'utiliser cette méthode à l'avenir. Cependant cette méthode n'est pas non plus complètement adaptée à notre problème. En effet, nous avons un problème pour lequel il y a plusieurs niveaux de contraintes à vérifier, ce qui n'est pas pris en compte par le programme *fsqp*. Cependant la prise en compte de cette particularité avec *fsqp* est relativement simple.

Nous avons également vu que notre problème d'optimisation peut avoir des discontinuités de contraintes lorsque nous prenons en compte les frottements articulaires, ou au moins que les contraintes sont non différentiables en certains points. Or les méthodes SQP classiques ne permettent pas de prendre en compte ce genre de problèmes de manière efficace. En particulier nous n'avons pas obtenu de convergence complète lorsque nous avons considéré les frottements secs au niveau articulaire. Or ces frottements ne sont pas négligeables dans la consommation d'énergie au cours de la marche. Une solution pour que l'optimisation actuelle fonctionne correctement serait de régulariser la modélisation de ces frottements secs. Par exemple en remplaçant la fonction signe modélisant les frottements secs par une fonction linéaire par morceaux.

Nous avons également constaté que notre problème fait partie de la classe des problèmes semi-infinis. Nous n'avons pas utilisé de programme d'optimisation dédié à ce type de problèmes et l'adaptation que nous avons faite pour en tenir compte n'est pas entièrement satisfaisante. Et nous n'avons pas trouvé de programme d'optimisation de problèmes semi-infinis entièrement satisfaisants.

Après ces considérations, nous pensons qu'il serait intéressant d'étudier la mise au point d'un programme d'optimisation fondé sur une méthode SQP permettant de prendre en compte un nombre variable de contraintes. Une telle propriété permettrait de tenir compte de la définition ou non des contraintes et du critère, et du changement du nombre des extremums des fonctions contraintes en cours de pas.



# Chapitre 4

## Commande du bipède et étude de stabilité

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>163</b>
<b>4.2</b>	<b>Etude des dynamiques de zéro</b>	<b>167</b>
4.2.1	Commande de $\alpha$ en double support	167
4.2.2	Stabilité des dynamiques de zéro	173
<b>4.3</b>	<b>Etude de stabilité sur tous les degrés de liberté</b>	<b>186</b>
4.3.1	Commande du bipède	187
4.3.2	Etude de la stabilité au sens de Poincaré	196
4.3.3	Validation des résultats	198
<b>4.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>200</b>

---

### 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier la stabilité d'un mouvement de référence cyclique pour le robot rabbit, et nous allons mettre en lumière les possibilités de stabilisation dues à l'introduction de la phase de double support sur actionnée dans la marche d'un bipède.

De manière générale, prouver la stabilité de la marche est important. En effet, il faut à tout prix éviter la chute du robot bipède. Pour certains robots, la stabilité de la marche n'est pas prouvée, mais seulement vérifiée. Une telle approche garantit donc la stabilité de la marche, mais nous prive d'une certaine compréhension de la stabilité de la marche, et donc d'une meilleure maîtrise de la marche. L'étude théorique de la stabilité s'avérera encore plus importante lorsqu'il s'agira de faire marcher le robot dans des cas plus extrêmes, et surtout de le faire courir.

La preuve de stabilité d'un robot marcheur est un problème très difficile, car un robot marcheur est un système qui change de structure lorsqu'il change de point d'appui, il subit

des impacts et il est également soumis à des contraintes, dont les contraintes de contact au sol. En particulier, bien que la plupart des robots possèdent des pieds et sont donc complètement actionnés, l'effet possible de la cheville sur le robot reste limité du fait de la longueur finie du pied. Du fait de cette contrainte sur le pied, il est nécessaire pour une marche normale d'obtenir la stabilité en tenant compte de la dynamique de la marche. Tenir compte des dynamiques dans l'étude de stabilité est encore plus nécessaire pour le robot Rabbit qui est sous-actionné en phase de simple support, et inévitable dans la perspective de la course de robots.

WIEBER [82] introduit la notion de stabilité très générale d'un robot marcheur. L'état d'un robot constitué de sa configuration et de sa vitesse, est stable s'il existe des trajectoires permettant d'éviter la chute du robot au sol. Démontrer la stabilité dans le cas général est un problème très difficile qui est encore à l'heure actuelle loin d'être résolu. En effet, une telle démonstration dans le cas général nécessite a priori d'explorer l'ensemble des mouvements possibles pour savoir s'il en existe un qui permet d'éviter la chute. Les preuves de stabilité se font donc généralement dans des cas particuliers, souvent pour des mouvements de référence.

La plupart des études sur les robots marcheurs décomposent le problème de la marche en la génération d'un mouvement de référence et la commande en suivi de ce mouvement de référence. Se pose d'abord le problème de la génération d'un mouvement de référence vérifiant les contraintes. Si le robot marcheur est sous actionné, il est aussi nécessaire de considérer la stabilité des dynamiques de zéro du mouvement résultant. Ensuite il est nécessaire de considérer la stabilité autour du mouvement de référence. S'il n'y a pas de sous-actionnement, la stabilité se réduit donc à la stabilité autour du mouvement de référence. Si les contraintes ne sont pas vérifiées par le mouvement de référence, le mouvement qui sera suivi par le robot ne sera pas celui de référence. L'étude de stabilité est alors plus difficile. Et souvent la violation des contraintes entraîne une chute. Pour prouver la stabilité, il vaut donc mieux a priori garantir la vérification des contraintes du mouvement de référence, et spécialement pour les contraintes de contact au sol.

La notion de stabilité utilisée pour les robots marcheurs en suivi de mouvement est la notion de stabilité au sens de Lyapunov. Un mouvement est stable au sens de Lyapunov si, lorsqu'il est perturbé, sa trajectoire reste proche de la trajectoire d'origine. Cette notion de stabilité qui porte sur la proximité des trajectoires est plus générale que la stabilité dont la condition de proximité porte sur l'état perturbé et l'état non perturbé au cours du temps. Notons que la stabilité de suivi d'un mouvement de référence qui peut être parcouru par le robot n'est pas forcément stable, même dans le cas complètement actionné. En effet, il faut tenir compte du phénomène d'impact, chose qui est difficile et dont l'étude est en plein développement. Nous pouvons citer sur ce thème les travaux de BROGLIATO *et al.* [11], BOURGEOT et BROGLIATO [7], CHAREYRON et WIEBER [14].

La possibilité de démonstration de stabilité va dépendre du type de mouvement de ré-

férence considéré. De nombreuses études portent seulement sur des mouvements de marche cycliques. Les mouvements cycliques peuvent avoir été recherchés par différentes méthodes que nous avons présentées dans l'introduction du chapitre précédent. Pour prouver la stabilité des mouvements cycliques la méthode de Poincaré est généralement utilisée. On peut citer les travaux de GRIZZLE *et al.* [32] qui généralisent la méthode de Poincaré aux cas de systèmes avec discontinuité, comme c'est le cas pour les robots marcheurs lors de l'impact. CHEVALLEREAU *et al.* [21], comme GRIZZLE *et al.* [32] démontrent alors la stabilité d'un mouvement cyclique pour un robot marcheur non actionné au niveau de la cheville. Ils arrivent notamment à calculer la plan de Poincaré des dynamiques de zéro, qui sont de dimension 1, à partir de la simulation d'un seul pas. Dans le cas d'un bipède complètement actionné, HURMUZLU [37] utilise également la méthode de Poincaré pour étudier la stabilité de la marche. HURMUZLU [37] constate l'apparition de marche chaotique, dues au fait que son mouvement de référence n'est pas dynamiquement réalisable par le système, et que c'est le couplage avec la commande de suivi de trajectoire qui détermine réellement le mouvement de référence. CHENG et LIN [16] calculent analytiquement la linéarisation de l'application de Poincaré autour du mouvement cyclique. Nous pouvons enfin citer le travail intéressant de GOSWAMI *et al.* [30] qui étudient dans un premier temps la stabilité d'un mouvement passif sur un plan incliné, avec la méthode de Poincaré. Puis, ils commandent leur robot compas afin d'améliorer la stabilité de la marche.

Une extension de la génération de mouvements cycliques consiste à découper un mouvement complexe de marche en des mouvements de marche élémentaires, incluant des mouvements cycliques et des mouvements de transition. Dans le cas complètement actionné, le mouvement transitoire entre deux types de mouvements différents que l'on sait stables assurera la stabilité locale dès lors qu'il vérifiera les contraintes de la marche. En effet si l'erreur en début de mouvement transitoire est suffisamment faible, l'erreur en fin de mouvement transitoire sera dans le domaine d'attraction du mouvement cyclique. Par contre dans le cas de robots sous actionnés, il faut que les dynamiques de zéro en fin de transition soit dans le domaine d'attraction du nouveau mouvement cyclique, ce qui n'est pas forcément vérifié lors de la transition. On pourra voir la thèse de WESTERVELT [79] pour une application de cette méthode à un robot sous actionné.

Une autre méthode consiste à générer les mouvements en ligne, pour pouvoir permettre une adaptation en temps réel de la marche du robot. Cette méthode est souvent utilisée dans les applications réelles. Pour des raisons de limitation en temps de calcul pour de telles applications temps réel, la génération de mouvement en ligne ne peut être complète. Des simplifications sont donc effectuées sur le problème de génération de mouvement. Mais ces simplifications se font généralement au détriment des garanties de stabilité. La stabilité de la marche n'est donc pas vraiment prouvée, mais seulement vérifiée en simulation et sur l'application réelle. Dans ces cas, seules les contraintes essentielles sont prise en compte. Une contrainte essentielle et très limitante qui est prise en compte est la contrainte de non

basculement des pieds au cours de la marche. Cette contrainte est très souvent prise en compte par la commande du Zéro Moment Point, introduit par VUKOBRATOVIC *et al.* [78]. Des preuves de stabilité ne sont pas faites pour ces approches, qui permettent pourtant l'obtention des résultats les plus aboutis et les plus impressionnants. On peut par exemple citer le robot *Johnnie* de LÖFFLER *et al.* [50], le robot *Honda* de HIRAI *et al.* [34] et le robot HRP2, de KANEKO *et al.* [43].

WIEBER [82] propose également, afin d'améliorer la stabilité des robots marcheurs, si le robot sort du domaine d'attraction du mouvement de référence, de considérer un nouveau mouvement de référence pour lequel le robot est dans le domaine d'attraction. De telles méthodes permettraient d'améliorer la stabilité de la marche et de la garantir pour certaines perturbations, mais elles ne sont encore qu'à leurs débuts. Nous pouvons cependant trouver les premiers résultats de simulations de ces travaux dans WIEBER et CHEVALLEREAU [83] et CHEVALLEREAU et ADOUANE [19]. La stabilité de telles méthodes va dépendre de l'étendue des mouvements stables qui sont connus et qui peuvent être utilisés dans les cas où le robot est déstabilisé. Dans le même esprit, on peut également citer le travail de AUSTIN et FORMAL'SKY [2] où la modification de trajectoire se fait sur la longueur des pas pour accélérer la convergence vers le mouvement cyclique d'un robot sous-actionné. Le travail de GRISHIN *et al.* [31] utilise également cette idée de modifier le mouvement de référence pour stabiliser le mouvement dans le fait que l'instant de fin du double support et de commutation vers le simple support est choisi de telle sorte à ce que la vitesse désirée de fin de simple support soit obtenue, en approximant le mouvement du robot durant cette phase comme un pendule inverse.

Dans notre étude de la marche, une spécificité est l'utilisation de la phase de double support pour améliorer la stabilité de la marche. Nous pouvons citer les travaux de ZONFRILLI *et al.* [84] et TODA *et al.* [77] qui sont dans le même esprit. ZONFRILLI *et al.* [84] ont adapté une marche sagittale pour le robot quadrupède de Sony et TODA *et al.* [77] commandent le moment cinétique d'un robot bipède durant le double support afin d'éviter que le robot ne retombe en arrière en cours de simple support, ni n'arrive trop vite à l'impact en fin de double support. Contrairement à ces travaux, nous présentons une étude théorique de stabilité avec le double support, chose qui à notre connaissance n'a jamais été faite pour un robot anthropomorphe.

En section 4.2, nous prolongerons le travail de GRIZZLE *et al.* [32] et CHEVALLEREAU *et al.* [21] de l'étude de la stabilité des dynamiques de zéro de la marche de Rabbit, dans le cas où une phase de double support non instantanée est incluse dans la marche. Nous montrerons notamment que le double support permet de converger en un pas vers le mouvement cyclique et ce même pour un démarrage de l'arrêt. Nous montrerons également que pour une même définition d'un mouvement de référence  $\delta_j(\alpha)$ , une infinité de mouvements cycliques est possible pour différents mouvements de référence de  $\alpha$  en double

support. Et nous déterminerons également le domaine d'attraction des dynamiques de zéro. En section 4.3, nous étudierons la stabilité localement autour du mouvement de référence, selon tous les degrés de liberté du robot. Nous considérons que le double support est obtenu après impact, même si le modèle d'impact que nous utilisons ne le prédit pas lorsque la vitesse du pied juste avant impact est non nulle. Cette approximation nous semble physique d'après la réflexion que nous avons eue sur l'impact présentée en section 2.5. Dans l'ensemble des travaux présentés dans ce chapitre,  $\alpha$  remplacera le temps. Nous poursuivons donc pour la commande l'idée introduite lors de la génération de mouvement.

## 4.2 Etude des dynamiques de zéro

Dans cette section, nous étudions la stabilité des dynamiques de  $\alpha$  en considérant le mouvement de référence exactement suivi. C'est-à-dire qu'en simple support les variables articulaires  $\delta_j$   $j = 1, \dots, 4$  suivent exactement les mouvements de référence  $\delta_j(\alpha)$  et qu'en double support les variables articulaires  $\delta_j$   $j = 1, 2$  suivent exactement les mouvements de référence  $\delta_j(\alpha)$ . L'étude des seules dynamiques de  $\alpha$  est intéressante, car leur étude se réduit à l'étude d'une application de Poincaré de dimension 1 et il est donc possible d'obtenir beaucoup plus de résultats qu'en abordant le problème de stabilité sur l'ensemble des degrés de liberté. De plus, nous constaterons ensuite en section 4.3 la pertinence de l'étude des dynamiques en  $\alpha$  seules, ces dynamiques étant celles qui convergent le moins rapidement et sont les plus limitantes sur la stabilité de la marche, les dynamiques de  $\alpha$  étant non commandées durant toute la phase de simple support. En simple support, nous avons vu en section 3.2.1.3 que les dynamiques de  $\alpha$  sont les dynamiques de zéro. En double support le mouvement cyclique de référence est entièrement défini, mais comme nous étudions les erreurs sur le suivi du mouvement de référence de  $\alpha$ , il est nécessaire d'introduire une loi de commande pour  $\alpha$  en double support. Nous présentons cette loi de commande en section 4.2.1. La transition du simple support au double support se fait lorsque  $\alpha$  atteint la valeur  $\alpha_{fSS}$ , mais cette transition aurait aussi bien pu se faire sur l'altitude du pied libre, le mouvement de référence  $\delta_j(\alpha)$  étant supposé exactement suivi. La transition du double support au simple support se fait lorsque la valeur finale  $\alpha_{fDS}$  est atteinte. Nous caractériserons ensuite en section 4.2.2 les mouvements cycliques en  $\alpha$ , à savoir la condition d'existence d'un mouvement cyclique, l'infinité des solutions cycliques possibles, la condition de stabilité d'un mouvement cyclique, la taille du domaine de convergence, la taille du domaine de convergence en un pas.

### 4.2.1 Commande de $\alpha$ en double support

La loi de commande que nous utilisons en double support est une loi de commande optimale en temps. En effet, elle consiste à appliquer l'accélération maximale  $\ddot{\alpha}$  possible

pour converger vers le mouvement cyclique  $\dot{\alpha}_c(\alpha)$  (la notation de l'indice  $c$  désigne le mouvement de référence cyclique), et lorsque  $\dot{\alpha}_c(\alpha)$  est atteint, de suivre le mouvement de référence cyclique. L'expression de cette loi de commande est donnée par (4.1).

$$\ddot{\alpha} = \begin{cases} \ddot{\alpha}_{max}(\alpha, \dot{\alpha}) & \text{si } \dot{\alpha}(\alpha) - \dot{\alpha}_c(\alpha) < 0 \\ \ddot{\alpha}_{min}(\alpha, \dot{\alpha}) & \text{si } \dot{\alpha}(\alpha) - \dot{\alpha}_c(\alpha) > 0 \\ \ddot{\alpha}_c(\alpha, \dot{\alpha}) & \text{si } \dot{\alpha}(\alpha) - \dot{\alpha}_c(\alpha) = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Où  $\ddot{\alpha}_{max}(\alpha, \dot{\alpha})$  et  $\ddot{\alpha}_{min}(\alpha, \dot{\alpha})$  sont respectivement les accélérations maximale et minimale possibles pour satisfaire les contraintes physiques de non glissement, non décollement et les contraintes de couple. Le même principe de commande, mais simplifié, est utilisé dans GRISHIN *et al.* [31], où un mouvement de marche cyclique avec une phase de double support est définie pour un bipède avec des jambes télescopiques. En double support, ils prescrivent l'accélération maximale possible comme une constante qu'ils ont déterminée de telle sorte à ce que les pieds restent au sol. Nous proposons ici de déterminer plutôt ces contraintes maximale et minimale en utilisant le modèle dynamique du robot. Nous détaillons donc le calcul de  $\ddot{\alpha}_{max}(\alpha, \dot{\alpha})$  et  $\ddot{\alpha}_{min}(\alpha, \dot{\alpha})$ . Nous considérons les contraintes de non glissement et non décollement des pieds (3.48) ainsi que les contraintes de limites de couples (3.46). Nous ne tenons compte que de la première ligne de contrainte de (3.47), ayant constaté dans les résultats de simulation présentés figure 3.10 que seule cette contrainte était limitante. Avec des marges de sécurité pour la vérification de ces contraintes, nous obtenons le système d'inégalité (4.2).

$$\begin{cases} -\Gamma_{max} \leq \Gamma_j \leq \Gamma_{max} & (j = 1, \dots, 4) \\ R_{iy} \geq R_{iy,min} & (i = 1, 2) \\ -f_{max}R_{iy} \leq R_{ix} \leq f_{max}R_{iy} & (i = 1, 2) \end{cases} \quad (4.2)$$

$R_{iy,min} > 0$  est la composante normale de réaction du sol minimale.  $f_{max}$  est le coefficient de frottement maximal que le rapport des réactions tangentielles par les réactions normales ne doit pas dépasser. Nous avons l'inégalité  $f_{max} < f$  qui signifie que le cône de frottement que nous considérons est à l'intérieur du cône de frottement réel défini par le coefficient de frottement réel  $f$ . Notre but est d'abord d'écrire explicitement ces contraintes sur  $\alpha$ ,  $\dot{\alpha}$  et  $\ddot{\alpha}$ , et alors d'en extraire les contraintes les plus restreignantes sur  $\ddot{\alpha}$ .

Nous commençons par écrire les vecteurs  $\dot{q}$  et  $\ddot{q}$  en fonction de  $\alpha$  et de ses dérivées, sachant que nous considérons un suivi parfait des  $\delta_j(\alpha)$   $j = 1, 2$ . Pour cela nous utilisons les expressions des polynômes en  $\alpha$  en double support (3.3), les dérivations partielles des variables articulaires en fonction de  $\alpha$  ainsi que les équations de fermeture de boucle (1.33) en position, (1.34) en vitesse et (1.35) en accélération. Nous obtenons ainsi (4.3) et (4.4).

$$\dot{q}(\alpha, \dot{\alpha}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -D_{245}^{-1} & D_{213} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \delta_1^* \\ \delta_2^* \end{bmatrix} \dot{\alpha} \quad (4.3)$$

$$\ddot{q}(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -D_{245}^{-1} & D_{213} & 0 \end{bmatrix} \left[ \begin{bmatrix} 1 \\ \delta_1^* \\ \delta_2^* \end{bmatrix} \ddot{\alpha} + \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_1^{**} \\ \delta_2^{**} \end{bmatrix} \dot{\alpha}^2 \right] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -D_{245}^{-1} H_2(\alpha, \dot{\alpha}) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Où  $(\cdot)^*$  et  $(\cdot)^{**}$  sont respectivement les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 en fonction de  $\alpha$ .  $D_{213}$  correspond aux colonnes 1 à 3 de  $D_2$ , et  $D_{245}$  aux colonnes 4 et 5.

En injectant maintenant les équations (4.3) et (4.4) obtenues, dans les équations de la dynamique composées de (1.32) et (1.36), nous obtenons (4.5).

$$\begin{bmatrix} A_\alpha \\ x_G^* \\ z_G^* \end{bmatrix} \ddot{\alpha} + \begin{bmatrix} H_\alpha(\alpha, \dot{\alpha}) \\ x_G^{**} \dot{\alpha}^2 \\ z_G^{**} \dot{\alpha}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_\Gamma \\ 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} \Gamma + \begin{bmatrix} 0_{3 \times 2} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R_1 + \begin{bmatrix} D_2^T \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R_2 \quad (4.5)$$

Où

$$A_\alpha = A(\alpha) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -D_{245}^{-1} & D_{213} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \delta_1^* \\ \delta_2^* \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

et

$$H_\alpha = H(\alpha, \dot{\alpha}) + A(\alpha) \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -D_{245}^{-1} & D_{213} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \delta_1^{**} \\ \delta_2^{**} \end{bmatrix} \dot{\alpha}^2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -D_{245}^{-1} H_2(\alpha, \dot{\alpha}) \end{bmatrix} \right\} \quad (4.7)$$

Nous voulons maintenant déterminer les couples et les réactions du sol en fonction de  $\alpha$ ,  $\dot{\alpha}$  et  $\ddot{\alpha}$ . Comme dans le cas de l'inversion du modèle dynamique pour le calcul des couples en double support, nous avons 8 inconnues pour 7 équations et nous allons paramétrer cette infinité de solutions avec  $R_{2x}$ . Nous obtenons l'équation suivante (4.8).

$$[\Gamma^T, R_{1x}, R_{1y}, R_{2y}]^T = B(\alpha) \ddot{\alpha} + C(\alpha, \dot{\alpha}) + D(\alpha) R_{2x} \quad (4.8)$$

Où

$$\begin{aligned}
 B(\alpha) &= D_{tot}(\alpha)^{-1} \begin{bmatrix} A_\alpha(\alpha) \\ x_G^* \\ z_G^* \end{bmatrix} \\
 C(\alpha, \dot{\alpha}) &= D_{tot}(\alpha)^{-1} \begin{bmatrix} H_\alpha(\alpha, \dot{\alpha}) \\ x_G^{**} \dot{\alpha}^2 \\ z_G^{**} \dot{\alpha}^2 \end{bmatrix} \\
 D(\alpha) &= D_{tot}(\alpha)^{-1} \begin{bmatrix} D_{2x}^T \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

avec  $D_{tot} = \begin{bmatrix} D_\Gamma & D_1^T & D_{2z}^T \end{bmatrix}$

Avec les expressions des couples et réactions du sol en fonction de  $\alpha$  et de ses dérivées, nous pouvons réécrire les contraintes (4.2) en (4.10).

$$E(\alpha)\ddot{\alpha} + F(\alpha, \dot{\alpha}) + G(\alpha)R_{2x} + P \leq 0 \tag{4.10}$$

Où

$$\begin{aligned}
 E &= MB(\alpha) \\
 F &= MC(\alpha, \dot{\alpha}) \\
 G &= MD(\alpha) + N
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

$M$ ,  $N$  et  $P$  viennent de la réécriture des contraintes (4.2) sous la forme de l'inégalité (4.12).

$$M \begin{bmatrix} \Gamma \\ R_1 \\ R_{2y} \end{bmatrix} + NR_{2x} + P \leq 0 \tag{4.12}$$

$M$ ,  $N$  et  $P$  sont données par (4.13).

$$M = \begin{bmatrix} -I_{4 \times 4} & 0_{4 \times 3} \\ I_{4 \times 4} & 0_{4 \times 3} \\ & 0 & -1 & 0 \\ & -1 & -f_{max} & 0 \\ 0_{6 \times 4} & 1 & -f_{max} & 0 \\ & 0 & 0 & -1 \\ & 0 & 0 & -f_{max} \\ & 0 & 0 & -f_{max} \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 0_{8 \times 1} \\ 0_{3 \times 1} \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} -\Gamma_{max} 1_{8 \times 1} \\ R_{1y,min} \\ 0_{2 \times 1} \\ R_{2y,min} \\ 0_{2 \times 1} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$0_{i \times j}$  est une matrice de taille  $(i \times j)$  composée de zéros,  $1_{i \times j}$  est une matrice de taille  $(i \times j)$  composée de 1 et  $I_{i \times i}$  est une matrice identité de taille  $(i \times i)$ .

$\ddot{\alpha}_{min}(\alpha, \dot{\alpha})$  et  $\ddot{\alpha}_{max}(\alpha, \dot{\alpha})$  sont alors obtenus en résolvant les deux problèmes du simplexe donné dans (4.14) (on pourra se reporter au livre de DANTZIG [24] pour plus d'information sur ce type de problèmes).

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\alpha}_{min}(\alpha, \dot{\alpha}) = \min_{\ddot{\alpha}, R_{2x}} \ddot{\alpha} \\ E(\alpha)\ddot{\alpha} + F(\alpha, \dot{\alpha}) + G(\alpha)R_{2x} + P \leq 0 \\ \ddot{\alpha}_{max}(\alpha, \dot{\alpha}) = \max_{\ddot{\alpha}, R_{2x}} \ddot{\alpha} \\ E(\alpha)\ddot{\alpha} + F(\alpha, \dot{\alpha}) + G(\alpha)R_{2x} + P \leq 0 \end{array} \right. \quad (4.14)$$

Nous présentons maintenant un résultat représentatif de cette commande dans le plan de phase  $(\alpha, \dot{\alpha})$ , en figure 4.1. Pour une vitesse initiale d'amplitude plus faible que celle du mouvement cyclique, l'accélération minimale est appliquée, et nous pouvons voir en figure 4.1 que le mouvement obtenu dans le plan de phase converge vers le mouvement cyclique. Alors, après l'intersection avec le mouvement cyclique, le mouvement obtenu suit exactement le mouvement cyclique. Nous obtenons alors une erreur nulle en fin de double support.

La figure 4.2 représente les contraintes  $\ddot{\alpha}_{min}$  et  $\ddot{\alpha}_{max}$  en fonction des deux paramètres  $\alpha$  et  $\dot{\alpha}$ . Ces contraintes dépendent seulement de  $\alpha$  et  $\dot{\alpha}$ . La figure 4.3 donne  $\dot{\alpha}_c$  pour le mouvement cyclique et l'évolution correspondante de  $\ddot{\alpha}_{max}(\alpha, \dot{\alpha}_c(\alpha))$  et  $\ddot{\alpha}_{min}(\alpha, \dot{\alpha}_c(\alpha))$ . Il faut voir que les contraintes  $\ddot{\alpha}_{min}$  et  $\ddot{\alpha}_{max}$  dépendent des deux paramètres  $\alpha$  et  $\dot{\alpha}$ , et qu'alors sur la figure 4.3 ces contraintes changent avec le changement du mouvement suivi en double support.

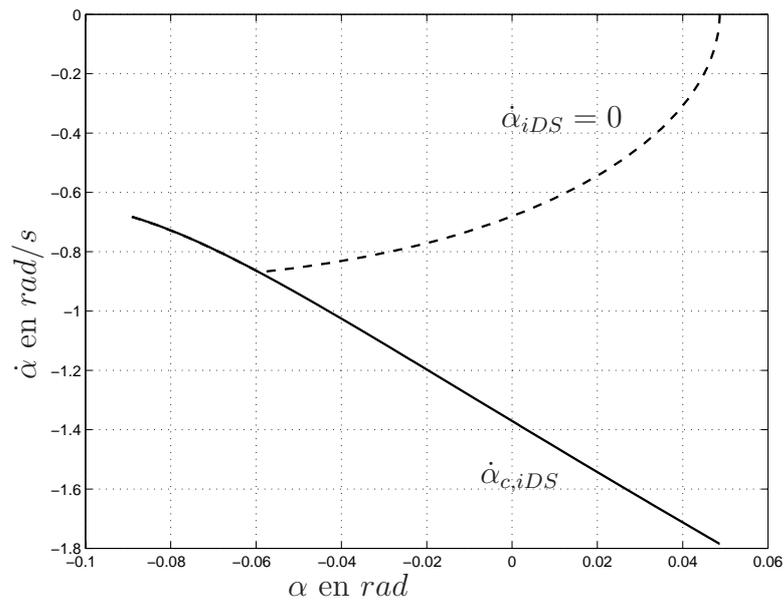


FIG. 4.1 – Représentation en phase de double support de l'évolution de  $\alpha$  pour le mouvement cyclique et pour un mouvement convergent démarrant avec une vitesse nulle

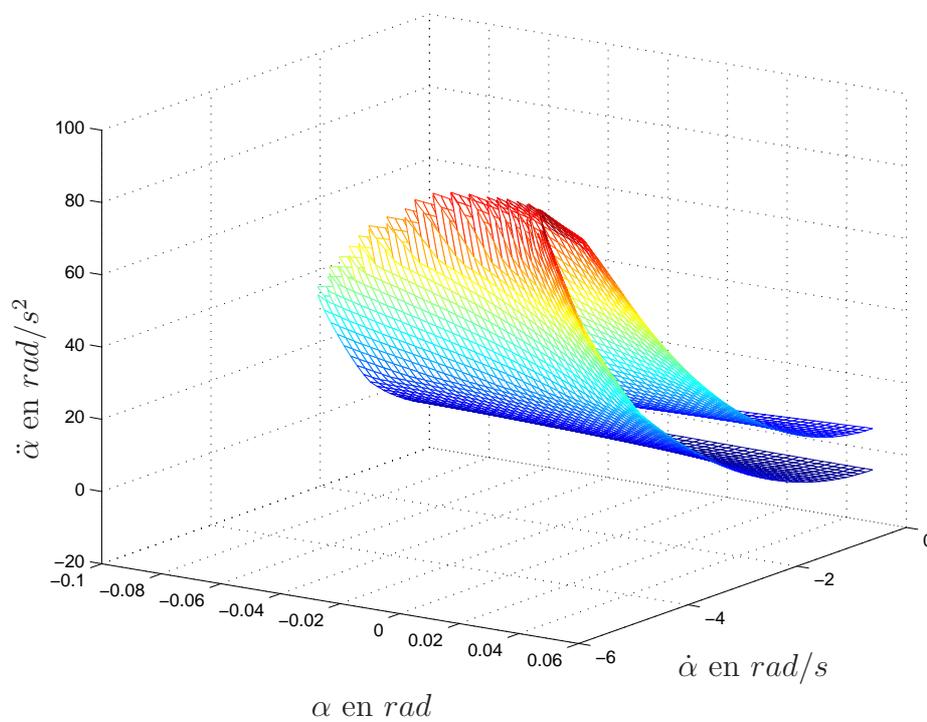


FIG. 4.2 – Représentation de  $\ddot{\alpha}_{min}$  et  $\ddot{\alpha}_{max}$  en fonction de  $\alpha$  et  $\dot{\alpha}$

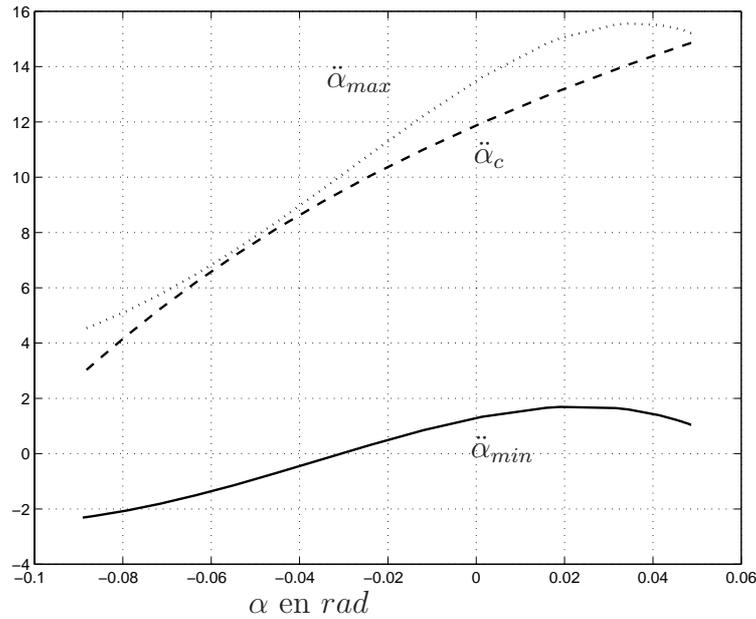


FIG. 4.3 – Evolution de l'accélération du mouvement cyclique  $\ddot{\alpha}_c$  avec les contraintes  $\ddot{\alpha}_{min}$  et  $\ddot{\alpha}_{max}$  de couples maximum possibles, de non glissement et de non décoller, en fonction de  $\alpha$

### 4.2.2 Stabilité des dynamiques de zéro

Nous étudions ici les dynamiques de  $\alpha$ , ce qui revient à considérer que les mouvements de références  $\delta_j(\alpha)$  sont exactement suivis. Cette supposition est une bonne approximation si nous considérons une commande suffisamment efficace, sans perturbations importantes. Les dynamiques de  $\alpha$  sur un pas complet sont alors données par l'équation (3.10) en simple support, par la discontinuité de vitesse obtenue à l'impact par l'équation (4.26) et par la loi de commande (4.1) en double support. Nous avons considéré un mouvement sans impact, voir le chapitre 3 à ce propos. Et nous n'obtiendrons pas d'impact quelles que soient les erreurs en  $\dot{\alpha}$ , la vitesse du pied libre restant nulle juste avant impact. Nous avons cependant gardé l'introduction de l'impact dans l'étude qui va suivre, pour plus de généralité. Pour étudier la stabilité de ces dynamiques, nous utilisons la méthode de Poincaré.

Nous allons présenter la méthode de Poincaré en section 4.2.2.1. Ensuite en section 4.2.2.2 nous définirons, pour une vitesse  $\dot{\alpha}_{fDS}$  la zone du plan de phase de double support qui est la zone de laquelle il est possible de converger vers cette vitesse finale désirée  $\dot{\alpha}_{fDS}$ . Nous montrerons aussi que, pour un mouvement cyclique défini, la commande présentée en section 4.2.1 est une commande qui permet la convergence vers la vitesse finale désirée  $\dot{\alpha}_{c,fDS}$  depuis la zone correspondante définie. En section 4.2.2.3 nous donnerons des conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'un mouvement cyclique stable, selon les dynamiques de  $\alpha$ . Quand un tel mouvement cyclique stable existe, nous montrerons

également que la zone de convergence en temps fini en double support pour la vitesse finale cyclique  $\dot{\alpha}_{c,fDS}$  d'un mouvement de référence, définit une zone de convergence en un pas. Finalement en section 4.2.2.4 nous présenterons une représentation graphique qui permet de voir toutes les possibilités de mouvements cycliques dépendant des dynamiques de  $\alpha$ , et les domaines d'attraction correspondant.

Tous les résultats de cette section sont obtenus sous les hypothèses suivantes :

**(H1)**  $\ddot{\alpha}_{min}$  et  $\ddot{\alpha}_{max}$  sont toujours définis.

Cette hypothèse signifie qu'il est toujours possible de satisfaire les contraintes (4.2). En réalité pour satisfaire (H1) nous allons considérer un sous espace pour lequel (H1) est satisfaite. Nous pouvons voir sur le figure 4.2 que la restriction s'applique pour des valeurs importantes de  $\dot{\alpha}$ . De plus nous verrons en section 4.2.2.4 que les contraintes les plus restrictives ne sont pas celles de double support, mais celles de simple support.

**(H2)** Nous considérons les cas  $\dot{\alpha} \leq 0$ .

Les conséquences de (H2) sont que  $\alpha$  est tout le temps décroissant en fonction du temps, et que donc la valeur finale de  $\alpha$ ,  $\alpha_{fDS}$ , est plus faible que la valeur initiale de  $\alpha$ ,  $\alpha_{iDS}$ . Un mouvement de  $\alpha$  dans le plan de phase se déplacera de la droite à la gauche.

**(H3)**  $\ddot{\alpha}_{min} < 0$  quand  $\dot{\alpha} = 0$ . Pour le mouvement considéré cette hypothèse est vérifiée. Si elle ne l'était pas, les démonstrations seraient plus difficiles par la suite.

#### 4.2.2.1 Présentation de la méthode de Poincaré

La méthode de Poincaré consiste à représenter l'évolution de l'état d'un mouvement cyclique à un instant caractéristique, pour un système, d'une période à la suivante. Pour la marche considérée ici, avec les hypothèses précédentes, l'application de Poincaré est une fonction d'un espace de dimension 1 seulement dans un autre espace de dimension 1. En effet,  $\alpha$  jouant le rôle du temps, pour une valeur de  $\alpha$  caractéristique, les dynamiques de  $\alpha$  considérées sont représentées par la seule vitesse  $\dot{\alpha}$ . Nous représentons donc l'application de Poincaré de  $\dot{\alpha}$ , et nous observerons à l'instant caractéristique initial ou final du double support. Dans l'application de Poincaré, un mouvement cyclique est représenté par un point invariant, et ce mouvement cyclique est stable si la pente de l'application de Poincaré est comprise entre  $-1$  et  $1$ . Dans la partie suivante, nous allons déterminer la zone de double support permettant la convergence vers une valeur donnée de fin de double support.

#### 4.2.2.2 Détermination de la zone de convergence en temps fini en double support

Dans cette section, nous allons définir la zone de convergence en un pas en double support. Nous commençons par donner une définition.

**Définition :** Pour une vitesse donnée en fin de double support  $\dot{\alpha}_{fDS}$ , nous considérons les deux fonctions  $\dot{\alpha}_{min}(\alpha, \dot{\alpha}_{fDS})$  et  $\dot{\alpha}_{max}(\alpha, \dot{\alpha}_{fDS})$  définies comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha}_{min}(\alpha, \dot{\alpha}_{fDS}) = \int_{\alpha}^{\alpha_{fDS}} \frac{\ddot{\alpha}_{min}}{\dot{\alpha}} ds + \dot{\alpha}_{fDS} \\ \dot{\alpha}_{max}(\alpha, \dot{\alpha}_{fDS}) = \int_{\alpha}^{\alpha_{fDS}} \frac{\ddot{\alpha}_{max}}{\dot{\alpha}} ds + \dot{\alpha}_{fDS} \end{array} \right. \quad (4.15)$$

$\dot{\alpha}_{min}(\alpha, \dot{\alpha}_{fDS})$  et  $\dot{\alpha}_{max}(\alpha, \dot{\alpha}_{fDS})$  sont les évolutions de  $\alpha$  qui donnent le point final  $(\alpha_{fDS}, \dot{\alpha}_{fDS})$  quand on applique respectivement l'accélération minimale possible et l'accélération maximale possible. Ces équations sont obtenues par intégration en  $\alpha$  à rebours. Ces équations sont solutions des équations différentielles (4.16).

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} &= \ddot{\alpha}_{min}(\alpha, \dot{\alpha}) \\ \ddot{\alpha} &= \ddot{\alpha}_{max}(\alpha, \dot{\alpha}) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Nous pouvons maintenant définir une surface dans le plan de phase en fermant le contour composé de  $\dot{\alpha}_{min}(\alpha, \dot{\alpha}_{fDS})$  et  $\dot{\alpha}_{max}(\alpha, \dot{\alpha}_{fDS})$ .

**Définition :** Pour une vitesse donnée à la fin du double support  $\dot{\alpha}_{fDS}$ , nous considérons la surface  $S_d$  délimitée par  $\dot{\alpha}_{min}(\alpha, \dot{\alpha}_{fDS})$ ,  $\dot{\alpha}_{max}(\alpha, \dot{\alpha}_{fDS})$ ,  $\dot{\alpha} = 0$  et  $\alpha = \alpha_{iDS}$ .

Cette surface est représentée en figure 4.4. Elle constitue effectivement une surface fermée puisque  $\dot{\alpha}_{min}(\alpha, \dot{\alpha}_{fDS})$  intersecte de manière évidente  $\dot{\alpha}_{max}(\alpha, \dot{\alpha}_{fDS})$  au point  $(\alpha_{fDS}, \dot{\alpha}_{fDS})$ , puisque  $\dot{\alpha} = 0$  intersecte aussi de manière évidente  $\alpha = \alpha_{iDS}$  au point  $(\alpha_{iDS}, 0)$ . La frontière  $\dot{\alpha} = 0$  a été introduite afin que la surface  $S_d$  n'inclue pas des mouvements rétrogrades avec  $\dot{\alpha} > 0$ .

Le théorème suivant affirme que quelque soit un point dans la surface  $S_d$ , il est possible de trouver un mouvement satisfaisant les contraintes qui permet la convergence au point  $(\alpha_{fDS}, \dot{\alpha}_{fDS})$ .

**Théorème 1 :**  $\forall (\alpha, \dot{\alpha}) \in S_d, \exists$  un mouvement  $\alpha_{DS}(t)$  qui va de  $(\alpha, \dot{\alpha})$  à  $(\alpha_{fDS}, \dot{\alpha}_{fDS})$  tout en vérifiant (4.2). De plus  $\forall (\alpha, \dot{\alpha}) \in \{(\alpha, \dot{\alpha}), \text{ tel que } (\alpha, \dot{\alpha}) \notin S_d \text{ et } \dot{\alpha} < 0 \text{ et } \alpha < \alpha_{iDS}\}, \nexists \alpha_{DS}(t)$  qui permet d'aller de  $(\alpha, \dot{\alpha})$  à  $(\alpha_{fDS}, \dot{\alpha}_{fDS})$ , tout en vérifiant (4.2).

**Preuve :** La démonstration est basée sur la construction d'un mouvement qui va converger vers  $(\alpha_{fDS}, \dot{\alpha}_{fDS})$ . Nous avons construit ce mouvement en appliquant l'accélération minimale puis maximale successivement. Nous appliquons d'abord  $\ddot{\alpha}_{min}$ . Le mouvement est solution de la première équation différentielle de (4.16). La fonction  $\ddot{\alpha}_{min}$  satisfait la condition de Lipschitz, la solution de l'équation différentielle est donc unique. Et deux solutions ayant des conditions initiales différentes ne se croiseront jamais. Donc la solution de la première équation différentielle de (4.16) ne croisera jamais  $\dot{\alpha}_{min}(\alpha, \dot{\alpha}_{fDS})$ ,

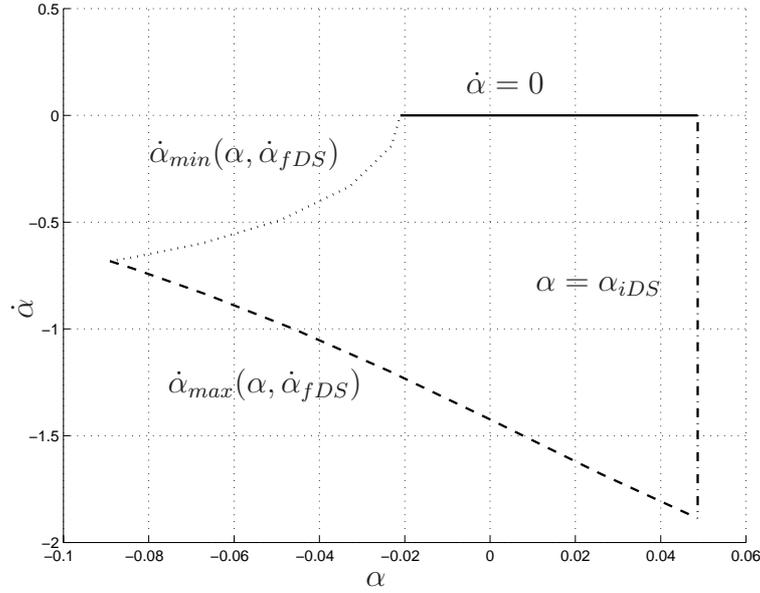


FIG. 4.4 – Représentation de la surface  $S_d$  dans le plan de phase

ni  $\dot{\alpha} = 0$  car nous avons supposé (H3), ni  $\alpha = \alpha_{iDS}$  puisque nous avons supposé (H2). Cette solution va donc forcément couper  $\dot{\alpha}_{max}(\alpha, \dot{\alpha}_{fDS})$ . Finalement en appliquant  $\ddot{\alpha}_{max}$  la mouvement va converger vers  $(\alpha_{fDS}, \dot{\alpha}_{fDS})$ . Bien sûr ce mouvement n'est pas le seul qui permette de converger à partir d'un point de  $S_d$  vers  $(\alpha_{fDS}, \dot{\alpha}_{fDS})$ . Typiquement, il y aura une infinité de tels mouvements. Si nous considérons maintenant un point initial  $(\alpha, \dot{\alpha}) \in \{(\alpha, \dot{\alpha}), \text{ tel que } (\alpha, \dot{\alpha}) \notin S_d \text{ et } \dot{\alpha} < 0 \text{ et } \alpha < \alpha_{iDS}\}$ , avec le fait que deux solutions des mêmes équations différentielles ne vont jamais se rencontrer, si  $(\alpha, \dot{\alpha})$  est sous  $S_d$  (respectivement au dessus de  $S_d$ ), la solution en appliquant l'accélération maximale (respectivement minimale) possible n'atteindra jamais  $(\alpha_{fDS}, \dot{\alpha}_{fDS})$ , sinon cela signifierait qu'il y a eu une intersection avec  $\dot{\alpha}_{max}(\alpha, \dot{\alpha}_{fDS})$  (respectivement  $\dot{\alpha}_{min}(\alpha, \dot{\alpha}_{fDS})$ ), ce qui est impossible.

Le théorème suivant signifie que la convergence vers  $(\alpha_{fDS}, \dot{\alpha}_{fDS})$  peut être obtenue avec la commande (4.1) et avec un mouvement de référence approprié.

**Théorème 2 :** Si un mouvement de référence  $\alpha_c(t)$  tel que lorsque  $\alpha_c = \alpha_{iDS}$ ,  $\dot{\alpha}_c = \dot{\alpha}_{c,iDS}$  et lorsque  $\alpha_c = \alpha_{fDS}$ ,  $\dot{\alpha}_c = \dot{\alpha}_{c,fDS}$  satisfait les contraintes (4.2)  $\forall \alpha \in [\alpha_{fDS}, \alpha_{iDS}]$ , alors  $\forall \alpha \in S_d$  la loi de commande (4.1) permet la convergence vers  $(\alpha_{fDS}, \dot{\alpha}_{fDS})$ .

**Preuve :** D'abord, un tel mouvement de  $\alpha_c(t)$  est dans  $S_d$ , car si ce n'était pas le cas, il ne satisferait pas les contraintes pour arriver en  $(\alpha_{fDS}, \dot{\alpha}_{fDS})$ . Alors, de la même façon que dans la preuve du théorème 1, il peut être montré que  $\forall (\alpha, \dot{\alpha}) \in S_d$  la commande (4.1) coupera  $\alpha_c(t)$  et alors convergera vers  $(\alpha_{fDS}, \dot{\alpha}_{fDS})$ .

Il existe une infinité de tels mouvements de référence cycliques  $\alpha_c(t)$  satisfaisant les contraintes et les conditions limites  $(\alpha_{iDS}, \dot{\alpha}_{iDS})$  et  $(\alpha_{fDS}, \dot{\alpha}_{fDS})$ . Et le choix de ce mouvement de référence n'a aucune influence sur la convergence vers  $(\alpha_{fDS}, \dot{\alpha}_{fDS})$  avec cette

commande. Nous avons obtenu un tel mouvement  $\alpha_c(t)$  par le processus d'optimisation présenté chapitre 3.

### 4.2.2.3 Conditions d'existence et de stabilité d'un mouvement cyclique

Nous avons caractérisé la phase de double support dans la partie précédente. Afin de caractériser la stabilité du mouvement de marche complet nous allons d'abord caractériser la phase de simple support puis la phase d'impact. Nous avons considéré un mouvement sans impact, mais pour plus de généralité, nous donnons ici le calcul tenant compte d'un impact. Dans CHEVALLEREAU *et al.* [21] les auteurs obtiennent une relation entre la vitesse en début de simple support et la vitesse en cours de simple support. Il s'agit de la formule (3.15) que nous avons présentée en section 3.2.1.3. Elle nous permet d'obtenir la vitesse de fin de simple support en fonction de la vitesse en début de simple support, comme donnée par (4.17).

$$\dot{\alpha}_{fSS} = -\frac{\sqrt{\Phi(\alpha_{fSS}) + f(\alpha_{iSS})^2 \dot{\alpha}_{iSS}^2}}{f(\alpha_{fSS})} \quad (4.17)$$

Nous écrivons maintenant les équations d'impact algébrique sur  $\alpha$ . Nous partons du modèle d'impact complet (2.1) en considérant l'obtention d'un double support après impact. Nous avons ce système (4.18) qui nous permet d'obtenir les vitesses juste après impact  $\dot{X}^+$  en fonction des vitesses avant impact  $\dot{X}^-$ .

$$\begin{cases} A(\dot{X}^+ - \dot{X}^-) = D_1^T I_{R_1} + D_2^T I_{R_2} \\ D_1 \dot{X}^+ = 0 \\ D_2 \dot{X}^+ = 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

La résolution du système (4.18) nous donne (4.19).

$$\begin{bmatrix} \dot{X}^+ \\ I_{R_1} \\ I_{R_2} \end{bmatrix} = A_{impact}^{-1} \begin{bmatrix} A \dot{X}^- \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Avec

$$A_{impact} = \begin{bmatrix} A & -D^T \\ D & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

La condition (4.21) sur les vitesses juste avant impact ainsi que la relation (3.6) entre les vitesses articulaires et  $\dot{\alpha}$  nous permet d'obtenir la vitesse juste après impact en fonction de la vitesse  $\dot{\alpha}^-$  juste avant impact, donnée par (4.22).

$$D_1 \dot{X}^- = 0 \quad (4.21)$$

$$\dot{X}^- = \begin{bmatrix} I_{5 \times 5} \\ -D_{167}^{-1} D_{115} \end{bmatrix} \dot{q}^* \dot{\alpha}^- \quad (4.22)$$

$D_{167}$  constitue les colonnes 6 et 7 de  $D_1$ , et  $D_{115}$  constitue les colonnes 1 à 5 de  $D_1$ .

Juste après impact nous considérons un changement de jambes pour obtenir les vitesses de début de double support  $\dot{X}_{iDS}$ . Nous avons la relation (4.23).

$$\dot{X}_{iDS} = J \dot{X}^+ \quad (4.23)$$

où la matrice  $J(7 \times 7)$  est composée de 0 et de 1.

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Nous pouvons donc maintenant écrire à partir de (4.23), (4.19) et (4.22) la relation entre la vitesse  $\dot{\alpha}^-$  et les vitesses après impact  $\dot{X}_{iDS}$ , donnée par (4.25).

$$\dot{X}_{iDS} = J (A_{impact}^{-1})_{17 \ 17} A \begin{bmatrix} I_{5 \times 5} \\ -D_{167}^{-1} D_{115} \end{bmatrix} \dot{q}^* \dot{\alpha}^- \quad (4.25)$$

Où  $(A_{impact}^{-1})_{17 \ 17}$  est la sous matrice de  $A_{impact}^{-1}$  pour les lignes 1 à 7 et les colonnes 1 à 7.

En prenant par exemple la première ligne de l'équation (4.25), nous obtenons une relation entre  $\dot{X}_{iDS}(1) = \dot{\alpha}_{iDS}$  et  $\dot{\alpha}^- = \dot{\alpha}_{fSS}$  donnée par (4.26).

$$\dot{\alpha}_{iDS} = b \dot{\alpha}_{fSS} \quad (4.26)$$

Où

$$b = J_1 (A_{impact}^{-1})_{17 \ 17} A \begin{bmatrix} I_{5 \times 5} \\ -D_{167}^{-1} D_{115} \end{bmatrix} \dot{q}^* \quad (4.27)$$

Avec  $J_1$  la première ligne de  $J$ .

Nous obtenons finalement à partir des relations (4.17) et (4.26), la relation entre  $\dot{\alpha}_{fDS}$  de fin d'un double support et  $\dot{\alpha}_{iDS}$  de début du double support suivant, donné par (4.28).

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_{iDS} &= a(\dot{\alpha}_{fDS}) \\ &= -b \frac{\sqrt{\Phi(\alpha_{fSS}) + f(\alpha_{iSS})^2 \dot{\alpha}_{fDS}^2}}{f(\alpha_{fSS})} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Dans CHEVALLEREAU *et al.* [21], les auteurs fournissent également une condition d'existence d'un mouvement de marche périodique puis prouvent la stabilité, et enfin donnent les bornes du domaine de convergence. En particulier ils ont trouvé que l'amplitude de la vitesse initiale du simple support doit être supérieure à une valeur minimum afin d'éviter que le robot ne retombe en arrière. Ils fournissent aussi une méthode pour déterminer la vitesse d'amplitude maximale possible en début de simple support, qui dépend de la vérification des contraintes de contact au sol. Nous allons utiliser ces résultats pour également déterminer le domaine d'attraction du simple support. Nous noterons  $\dot{\alpha}_{fDS,minSS}$  la borne inférieure du domaine des  $\dot{\alpha}_{fDS}$  possibles et  $\dot{\alpha}_{fDS,maxSS}$  la borne supérieure du domaine des  $\dot{\alpha}_{fDS}$  possibles, compte tenu des contraintes au cours du simple support qui suit. Nous commençons par donner une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un mouvement cyclique, puis nous donnerons une condition nécessaire de stabilité.

En utilisant les résultats obtenus pour la phase de simple support, tirés de CHEVALLEREAU *et al.* [21], et en utilisant les résultats sur le double support présentés en section 4.2.2.2, nous obtenons le théorème suivant.

**Théorème 3 :** Pour une vitesse de fin de double support  $\dot{\alpha}_{c,fDS} \in [\dot{\alpha}_{fDS,minSS}, \dot{\alpha}_{fDS,maxSS}]$  donnée, il existe un mouvement cyclique, si et seulement si  $\dot{\alpha}_{c,iDS} \in [\dot{\alpha}_{iDS,min}, \dot{\alpha}_{iDS,max}]$  où  $\dot{\alpha}_{c,iDS} = a(\dot{\alpha}_{c,fDS})$  et  $\dot{\alpha}_{iDS,min}(\dot{\alpha}_{c,fDS}) = \dot{\alpha}_{min}(\alpha_{iDS}, \dot{\alpha}_{c,fDS})$  et  $\dot{\alpha}_{iDS,max}(\dot{\alpha}_{c,fDS}) = \dot{\alpha}_{max}(\alpha_{iDS}, \dot{\alpha}_{c,fDS})$ .

Ce théorème signifie qu'il existe des mouvements cycliques pour  $\dot{\alpha}_{c,fDS}$  si  $\dot{\alpha}_{c,iDS}$  obtenue à partir de  $\dot{\alpha}_{c,fDS}$  après un simple support, l'impact et le changement de jambes, est dans la zone de double support depuis laquelle il est possible de converger vers  $(\alpha_{fDS}, \dot{\alpha}_{c,fDS})$ .

**Preuve :** Pour prouver ce théorème, nous allons étudier l'application de Poincaré de  $\dot{\alpha}_{fDS}$ , c'est-à-dire étudier l'évolution de  $\dot{\alpha}_{fDS}(n+1)$  en fonction de  $\dot{\alpha}_{fDS}(n)$ , où  $n$  indique le  $n^{ème}$  pas. D'abord considérons  $\dot{\alpha}_{c,iDS}(n+1) = a(\dot{\alpha}_{c,fDS}(n))$ . D'abord, pour montrer la condition nécessaire et suffisante d'existence d'un mouvement cyclique, nous allons considérer le cas  $\dot{\alpha}_{c,iDS}(n+1) \in ]-\infty, \dot{\alpha}_{iDS,min}[ \cup ]\dot{\alpha}_{iDS,max}, 0[$ . Dans ce cas, d'après le théorème 1 nous savons qu'il n'est pas possible de trouver un mouvement  $\dot{\alpha}_{DS}(\alpha)$  qui arrive en  $(\alpha_{fDS}, \dot{\alpha}_{c,fDS})$ . Dans le cas où  $\dot{\alpha}_{c,iDS}(n+1) \in [\dot{\alpha}_{iDS,min}, \dot{\alpha}_{iDS,max}]$ , toujours d'après le théorème 1, nous savons qu'il existe un mouvement (ne serait-ce que celui défini dans la démonstration du théorème 1) permettant d'atteindre  $(\alpha_{fDS}, \dot{\alpha}_{c,fDS})$ , et donc d'avoir un mouvement cyclique.

De plus, lorsqu'il existe un mouvement cyclique pour une vitesse  $\dot{\alpha}_{c,fDS}$ , il existe une infinité de mouvements en cours de double support qui permettent d'obtenir cette vitesse de fin de double support  $\dot{\alpha}_{c,fDS}$  à partir de la vitesse initiale de double support  $\dot{\alpha}_{c,iDS}$ . Nous

considérons par la suite un seul mouvement cyclique en double support  $\alpha_{c,DS}(t)$  parmi l'infinité des mouvements cycliques définis par  $\dot{\alpha}_{c,fDS}$  et  $\dot{\alpha}_{c,iDS}$ . Ce mouvement cyclique vérifie les contraintes (4.2). Un tel mouvement s'obtient par le processus de génération de mouvement présenté chapitre 3. Cette méthode de génération de mouvements donne des mouvements cycliques vérifiant les contraintes. Dès lors qu'un tel mouvement est obtenu, l'existence de mouvements cycliques est prouvée. Le problème de l'existence se pose donc seulement dans le contexte où des mouvements cycliques ne seraient pas recherchés par cette optimisation, ou que pour un mouvement obtenu par cette optimisation, on souhaite changer  $\alpha_{DS}(t)$  (en gardant tout de même les valeurs de  $\alpha_{iDS}$  et  $\alpha_{fDS}$ , ce qui revient à ne changer que la vitesse de parcourt du même ensemble de configurations au cours d'un pas). Comme nous le constaterons par la suite, il existe généralement une infinité de mouvements cycliques pour différentes valeurs de  $\dot{\alpha}_{c,fDS}$ .

**Théorème 4 :** Soit  $\alpha_{c,DS}(t)$  un mouvement cyclique qui vérifie les contraintes (4.2), si  $\dot{\alpha}_{c,iDS} \in ]\dot{\alpha}_{iDS,min}, \dot{\alpha}_{iDS,max}[$ , alors nous avons stabilité du mouvement cyclique avec la loi de commande (4.1).

**Preuve :** Pour prouver ce théorème, nous allons également étudier l'application de Poincaré de  $\dot{\alpha}_{fDS}$ . Considérons le cas où nous avons  $\dot{\alpha}_{c,iDS} \in ]\dot{\alpha}_{iDS,min}, \dot{\alpha}_{iDS,max}[$ . Alors il est toujours possible de trouver un intervalle fermé contenant  $\dot{\alpha}_{c,iDS}$  pour lequel il y a convergence vers  $\dot{\alpha}_{c,fDS}$ , avec la loi de commande (4.1). Par exemple il est possible de considérer l'intervalle  $[(\dot{\alpha}_{iDS,min} + \dot{\alpha}_{c,iDS})/2, (\dot{\alpha}_{iDS,max} + \dot{\alpha}_{c,iDS})/2]$ . Pour de suffisamment petites erreurs autour de  $\dot{\alpha}_{c,fDS}$  nous avons  $\dot{\alpha}_{iDS}(n+1) \in [(\dot{\alpha}_{iDS,min} + \dot{\alpha}_{c,iDS})/2, (\dot{\alpha}_{iDS,max} + \dot{\alpha}_{c,iDS})/2]$  et nous avons donc d'après le théorème 2 convergence vers  $\dot{\alpha}_{c,fDS}$ . Nous avons donc stabilité localement autour du mouvement cyclique.

Dans les cas limites où  $\dot{\alpha}_{c,iDS} = \dot{\alpha}_{iDS,min}$  ou  $\dot{\alpha}_{c,iDS} = \dot{\alpha}_{iDS,max}$ , il est nécessaire de regarder la pente de l'application de Poincaré pour savoir s'il y a stabilité. C'est pour cette raison que nous devons considérer l'intervalle ouvert  $] \dot{\alpha}_{iDS,min}, \dot{\alpha}_{iDS,max}[$  pour la condition de stabilité. De plus, dans les cas où  $\dot{\alpha}_{fDS}$  donnerait  $\dot{\alpha}_{iDS} \in ] \dot{\alpha}_{iDS,min}, \dot{\alpha}_{iDS,max}[$  nous obtiendrons  $\dot{\alpha}_{c,fDS}$  à la fin du double support, ce qui correspond à un cas de convergence en un pas. La condition suffisante de stabilité  $\dot{\alpha}_{iDS} \in ] \dot{\alpha}_{iDS,min}, \dot{\alpha}_{iDS,max}[$  n'est pas valable pour toutes les lois de commande. Par exemple pour une commande proportionnelle, dérivée en double support, pour une erreur en début de double support, l'erreur en fin de double support ne sera pas nulle. Nous n'aurons donc pas de convergence en un pas, et nous devons déterminer la pente de l'application de Poincaré pour le mouvement cyclique pour pouvoir déterminer si le mouvement cyclique est stable. Par contre, dans le cas d'une commande en temps fini et d'un mouvement cyclique qui vérifie la condition suffisante de stabilité  $\dot{\alpha}_{iDS} \in ] \dot{\alpha}_{iDS,min}, \dot{\alpha}_{iDS,max}[$ , nous aurons toujours un mouvement cyclique stable et une zone de convergence en un pas autour du mouvement cyclique.

#### 4.2.2.4 Présentation d'une méthode de visualisation de tous les mouvements cycliques stables possibles

D'après le théorème 3, nous pouvons voir que généralement nous aurons une infinité de mouvements cycliques possibles stables. Dans cette section, nous donnons une représentation qui permet de visualiser tous les mouvements cycliques stables, et permettre ainsi de faire ressortir un certain nombre de critères pour choisir parmi l'ensemble de ces possibilités. Ces critères seront en compétition avec les critères de minimisation d'énergie de la génération de mouvement présentée en section 3.

La méthode de visualisation consiste à superposer les graphes de la vitesse maximale de début de double support  $\dot{\alpha}_{iDS,max}(\dot{\alpha}_{fDS})$  qui permet de conduire à  $\dot{\alpha}_{fDS}$ , de la vitesse minimale de début de double support  $\dot{\alpha}_{iDS,min}(\dot{\alpha}_{fDS})$  qui permet de conduire à  $\dot{\alpha}_{fDS}$  et  $\dot{\alpha}_{iDS} = a(\dot{\alpha}_{fDS})$ . Les deux premières fonctions vont être calculées par une intégration numérique en double support pour un ensemble de valeurs discrètes de  $\dot{\alpha}_{fDS}$ . La troisième équation résulte, elle, d'une seule intégration en simple support. Un exemple d'un tel graphe est représenté en figure 4.5.

Sur ce graphe, nous pouvons d'abord lire la vitesse de début de double support  $\dot{\alpha}_{iDS}$  obtenue par le simple support et l'impact, à partir de la vitesse de fin de double support  $\dot{\alpha}_{fDS}$  du pas précédent, à partir de la courbe  $\dot{\alpha}_{iDS} = a(\dot{\alpha}_{fDS})$ . Ensuite nous pouvons lire, pour une valeur  $\dot{\alpha}_{fDS}$  donnée, l'ensemble des vitesses de début de double support  $\dot{\alpha}_{iDS}$  permettant d'atteindre cette vitesse  $\dot{\alpha}_{fDS}$ . Ce domaine est compris entre les bornes  $\dot{\alpha}_{iDS,min}(\dot{\alpha}_{fDS})$  et  $\dot{\alpha}_{iDS,max}(\dot{\alpha}_{fDS})$ . De manière similaire, il est possible de lire, pour une valeur  $\dot{\alpha}_{iDS}$ , l'ensemble des vitesses de fin de double support  $\dot{\alpha}_{fDS}$  qu'il est possible d'obtenir. Ce domaine est compris entre les valeurs de  $\dot{\alpha}_{fDS}$  intersection de la droite horizontale en  $\dot{\alpha}_{iDS}$  avec  $\dot{\alpha}_{iDS,min}(\dot{\alpha}_{fDS})$  et  $\dot{\alpha}_{iDS,max}(\dot{\alpha}_{fDS})$ . Autrement dit, ce domaine est donné par  $[\dot{\alpha}_{fDS,min}(\dot{\alpha}_{iDS}), \dot{\alpha}_{fDS,max}(\dot{\alpha}_{iDS})]$  où la vitesse minimale de  $\dot{\alpha}_{fDS}$  qu'il est possible d'obtenir à partir de  $\dot{\alpha}_{iDS}$  est définie par  $\dot{\alpha}_{fDS,min}(\dot{\alpha}_{iDS}) = \dot{\alpha}_{iDS,max}^{-1}(\dot{\alpha}_{iDS})$  et la vitesse maximale de  $\dot{\alpha}_{fDS}$  qu'il est possible d'obtenir à partir de  $\dot{\alpha}_{iDS}$  est définie par  $\dot{\alpha}_{fDS,max}(\dot{\alpha}_{iDS}) = \dot{\alpha}_{iDS,min}^{-1}(\dot{\alpha}_{iDS})$ .

Ce graphe permet également de voir s'il existe un mouvement cyclique pour une valeur de la vitesse de début de double support  $\dot{\alpha}_{c,fDS}$ . Pour cela, d'après le théorème 3, il faut que  $\dot{\alpha}_{c,iDS} = a(\dot{\alpha}_{c,fDS})$  obtenu après le simple support et l'impact soit dans le domaine de convergence vers  $\dot{\alpha}_{c,fDS}$ , soit  $\dot{\alpha}_{iDS,min}(\dot{\alpha}_{c,fDS}) \leq \dot{\alpha}_{c,iDS} \leq \dot{\alpha}_{iDS,max}(\dot{\alpha}_{c,fDS})$ . Concrètement, l'ensemble des valeurs  $\dot{\alpha}_{fDS}$  pour lesquelles des mouvements cycliques sont possibles va être donné par le domaine pour lequel  $\dot{\alpha}_{iDS,min}(\dot{\alpha}_{fDS}) \leq a(\dot{\alpha}_{fDS}) \leq \dot{\alpha}_{iDS,max}(\dot{\alpha}_{fDS})$ . Dans le cas présenté, il correspond au domaine d'admissibilité du simple support, et également au domaine de convergence global que nous verrons plus loin, noté  $D_{gfDS}$ . C'est donc le simple support qui est le plus limitant quand aux mouvements cycliques possibles. Les mouvements cycliques sont représentés par des points sur le graphe de la fonction

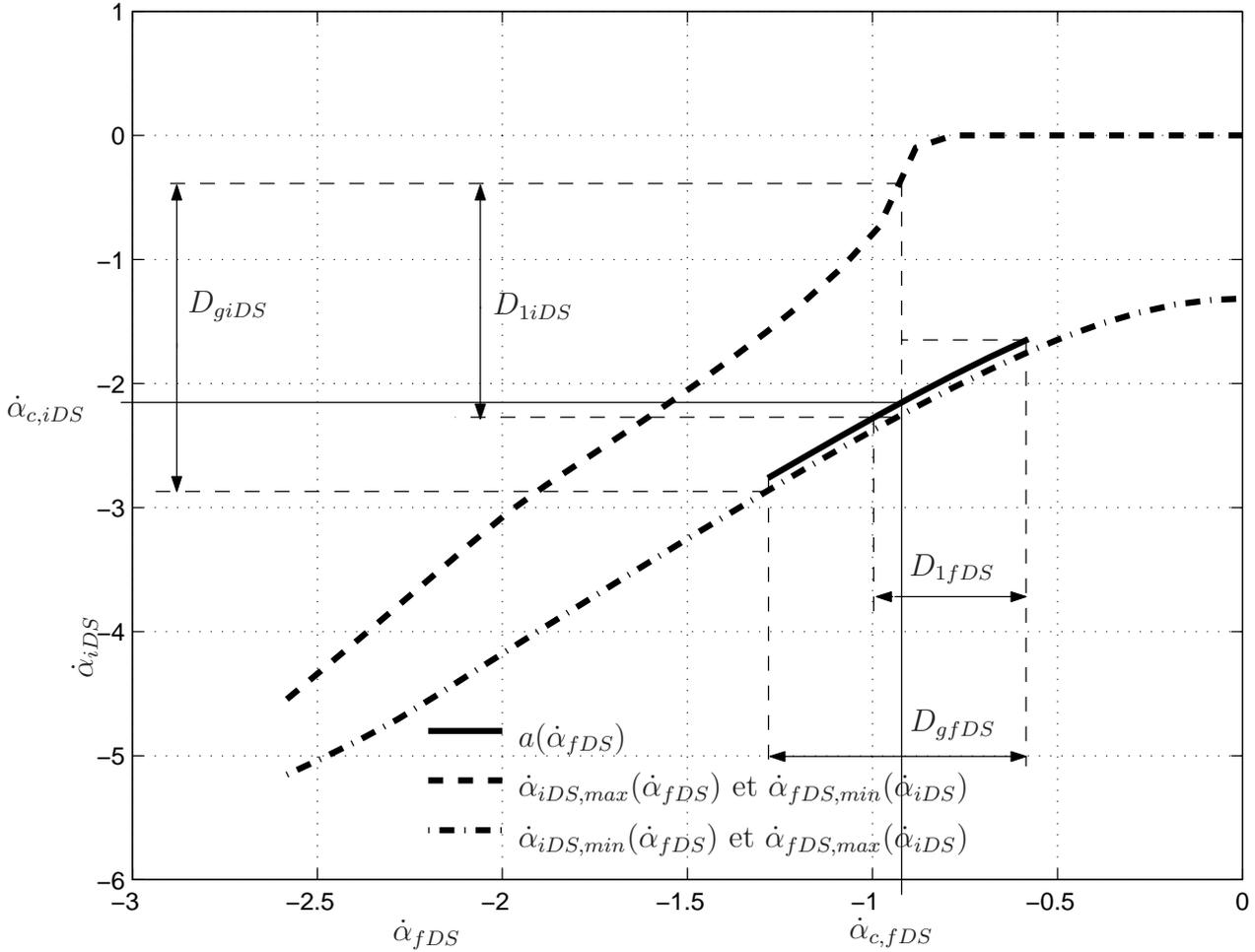


FIG. 4.5 – Représentation de  $\dot{\alpha}_{iDS,max}(\dot{\alpha}_{fDS})$ ,  $\dot{\alpha}_{fDS,min}(\dot{\alpha}_{iDS})$ ,  $\dot{\alpha}_{iDS,min}(\dot{\alpha}_{fDS})$ ,  $\dot{\alpha}_{fDS,max}(\dot{\alpha}_{iDS})$  et  $\dot{\alpha}_{iDS} = a(\dot{\alpha}_{fDS})$  avec le domaine d'attraction global en  $\dot{\alpha}_{fDS}$   $D_{gfDS}$ , le domaine d'attraction global en  $\dot{\alpha}_{iDS}$   $D_{giDS}$ , le domaine de convergence en un pas en  $\dot{\alpha}_{fDS}$   $D_{1fDS}$ , le domaine de convergence en un pas en  $\dot{\alpha}_{iDS}$   $D_{1iDS}$ . Le mouvement cyclique représenté par le point  $(\dot{\alpha}_{c,fDS}, \dot{\alpha}_{c,iDS})$  a été choisi arbitrairement parmi l'infinité des mouvements cycliques existant.

$$\dot{\alpha}_{iDS} = a(\dot{\alpha}_{fDS}).$$

D'après le théorème 4, les mouvements cycliques seront stables si  $\dot{\alpha}_{iDS,min}(\dot{\alpha}_{fDS}) < a(\dot{\alpha}_{fDS}) < \dot{\alpha}_{iDS,max}(\dot{\alpha}_{fDS})$ . Dans le cas présenté tous les mouvements cycliques possibles vérifient cette condition strictement, et sont donc tous stables, si ce n'est que les mouvements cycliques correspondant aux bornes du domaine  $D_{gfDS}$  ne seront définis que d'un côté. Il est à remarquer que la stabilité des dynamiques de  $\alpha$  dépend seulement du fait que  $a(\dot{\alpha}_{fDS})$  est entre  $\dot{\alpha}_{iDS,min}(\dot{\alpha}_{fDS})$  et  $\dot{\alpha}_{iDS,max}(\dot{\alpha}_{fDS})$ , et ne dépend pas de la pente de  $a(\dot{\alpha}_{fDS})$ , contrairement au cas sans double support où la stabilité dépend de la pente de  $a(\dot{\alpha}_{fDS})$ , voir notamment CHEVALLEREAU *et al.* [21].

Sur ce graphe, nous pouvons également lire le domaine de convergence en un pas pour un mouvement cyclique. Si l'on considère  $\dot{\alpha}_{c,iDS}$ , nous avons la vitesse  $\dot{\alpha}_{c,fDS}$  qui permet de l'obtenir qui vérifie  $\dot{\alpha}_{c,iDS} = a(\dot{\alpha}_{c,fDS})$ . Le domaine qui permet de converger en un pas vers  $\dot{\alpha}_{c,iDS}$  est donc donné par le domaine qui permet d'obtenir  $\dot{\alpha}_{c,fDS}$ , soit  $[\dot{\alpha}_{iDS,min}(a^{-1}(\dot{\alpha}_{c,iDS})), \dot{\alpha}_{iDS,max}(a^{-1}(\dot{\alpha}_{c,iDS}))]$ . Ce domaine est représenté par  $D_{1iDS}$  pour le mouvement cyclique représenté. Si l'on considère maintenant  $\dot{\alpha}_{c,fDS}$ , nous déterminons le domaine qui permet d'obtenir  $\dot{\alpha}_{c,fDS}$ , soit  $[\dot{\alpha}_{iDS,min}(\dot{\alpha}_{c,fDS}), \dot{\alpha}_{iDS,max}(\dot{\alpha}_{c,fDS})]$ . Une fois le domaine en  $\dot{\alpha}_{iDS}$  permettant d'arriver en  $\dot{\alpha}_{c,fDS}$  obtenu, nous déterminons avec la fonction  $a(\dot{\alpha}_{fDS})$  le domaine  $\dot{\alpha}_{fDS}$  permettant d'obtenir le domaine  $\dot{\alpha}_{iDS}$  précédent. Ce domaine est donné par l'intervalle  $[a^{-1}(\max(\dot{\alpha}_{iDS,min}(\dot{\alpha}_{c,fDS}), \dot{\alpha}_{iDS,minSS})), a^{-1}(\min(\dot{\alpha}_{iDS,max}(\dot{\alpha}_{c,fDS}), \dot{\alpha}_{iDS,maxSS}))]$  où  $\dot{\alpha}_{iDS,minSS}$  et  $\dot{\alpha}_{iDS,maxSS}$  sont les bornes des vitesses  $\dot{\alpha}_{iDS}$  possibles dues aux contraintes en simple support. Les  $\max()$  et  $\min()$  sont ici pour le cas où le domaine en  $\dot{\alpha}_{iDS}$  permettant d'avoir  $\dot{\alpha}_{c,fDS}$  dépasserait du domaine possible en simple support. Nous pouvons constater que le domaine de convergence en un pas vers  $\dot{\alpha}_{c,fDS}$  représenté, noté par  $D_{1fDS}$  est justement limité par le simple support sur une de ses bornes.

Il est ensuite possible d'étudier la convergence vers un mouvement cyclique en dehors du domaine de convergence en un pas. Si la vitesse  $\dot{\alpha}_{c,fDS}(n)$  au pas  $n$  est d'amplitude plus grande que  $\dot{\alpha}_{c,fDS}$  et en dehors du domaine de convergence en un pas, nous obtenons d'abord  $\dot{\alpha}_{iDS}(n+1) = a(\dot{\alpha}_{fDS}(n))$ . Puis la vitesse  $\dot{\alpha}_{fDS}(n+1)$  obtenue est celle qui rapproche le plus de  $\dot{\alpha}_{c,fDS}$ , c'est-à-dire celle donnée par  $\dot{\alpha}_{fDS}(n+1) = \dot{\alpha}_{fDS,max}(\dot{\alpha}_{iDS}(n+1))$ . C'est donc l'intersection de la droite horizontale  $\dot{\alpha}_{iDS} = \dot{\alpha}_{iDS}(n+1)$  avec la courbe  $\dot{\alpha}_{iDS,min}(\dot{\alpha}_{fDS})$ . Cette séquence est itérée jusqu'à obtenir  $\dot{\alpha}_{fDS}$  dans le domaine de convergence en un pas. Il est possible de voir que l'on aura convergence si  $\dot{\alpha}_{fDS}(n) < \dot{\alpha}_{fDS}(n+1) < \dot{\alpha}_{c,fDS}$  et donc si  $a^{-1}(\dot{\alpha}_{iDS}(n+1)) < \dot{\alpha}_{fDS,max}(\dot{\alpha}_{iDS}(n+1))$ . En d'autres termes, il faut que la courbe  $a(\dot{\alpha}_{fDS})$  soit à gauche de  $\dot{\alpha}_{iDS,min}(\dot{\alpha}_{fDS})$ . Il s'agit donc en fait de la même condition que la condition de stabilité d'un mouvement cyclique. Le domaine global de convergence pour des vitesses d'amplitude plus grande que celle du mouvement cyclique sera donc le plus grand domaine  $[\dot{\alpha}_{fDS,ming}, \dot{\alpha}_{c,fDS}]$  tel que  $\forall \dot{\alpha}_{fDS} \in [\dot{\alpha}_{fDS,ming}, \dot{\alpha}_{c,fDS}] a(\dot{\alpha}_{fDS}) > \dot{\alpha}_{iDS,min}(\dot{\alpha}_{fDS})$ .  $\dot{\alpha}_{fDS,ming}$  est donc la borne infé-

rieure du domaine global de convergence. Ce domaine s'arrêterait en une intersection de  $a(\dot{\alpha}_{fDS})$  et  $\dot{\alpha}_{iDS,min}(\dot{\alpha}_{fDS})$  si une telle intersection existait. Ici, ce domaine est limité par la vérification des contraintes en simple support. Enfin dans ce cas de convergence, l'application de Poincaré est donnée par  $\dot{\alpha}_{fDS}(n+1) = \dot{\alpha}_{fDS,max}(a(\dot{\alpha}_{fDS}(n)))$ . Nous pouvons constater que  $a(\dot{\alpha}_{fDS})$  est proche de  $\dot{\alpha}_{iDS,min}(\dot{\alpha}_{fDS})$ . La convergence sera donc lente.

Dans le cas où la vitesse  $\dot{\alpha}_{fDS}(n)$  est d'amplitude plus faible que  $\dot{\alpha}_{c,fDS}$ , c'est avec les courbes  $\dot{\alpha}_{iDS,max}(\dot{\alpha}_{fDS})$  et  $\dot{\alpha}_{fDS,min}(\dot{\alpha}_{iDS})$  que va se construire la convergence. Et le domaine de convergence globale sera donné par le plus grand domaine ne contenant pas d'intersection de  $a(\dot{\alpha}_{fDS})$  avec  $\dot{\alpha}_{iDS,max}(\dot{\alpha}_{fDS})$ . Enfin, l'application de Poincaré sera alors donnée par  $\dot{\alpha}_{fDS}(n+1) = \dot{\alpha}_{fDS,min}(a(\dot{\alpha}_{fDS}(n)))$ . Nous pouvons constater que  $a(\dot{\alpha}_{fDS})$  est éloigné de  $\dot{\alpha}_{iDS,max}(\dot{\alpha}_{fDS})$ , et que la convergence est donc rapide. Il serait donc intéressant d'équilibrer la distance de  $a(\dot{\alpha}_{fDS})$  avec  $\dot{\alpha}_{iDS,min}(\dot{\alpha}_{fDS})$  et  $\dot{\alpha}_{iDS,max}(\dot{\alpha}_{fDS})$  afin d'obtenir une vitesse de convergence aussi rapide quelque soit le signe de l'erreur sur  $\dot{\alpha}_{fDS}$ .

Ainsi il est possible d'obtenir le domaine de convergence globale, en concaténant les deux domaines de convergence obtenus pour des erreurs sur  $\dot{\alpha}_{fDS}$  positives et négatives. Ce domaine est noté sur la figure 4.5 par  $D_{gfDS}$ .

De la même façon, il est possible d'étudier la convergence sur  $\dot{\alpha}_{iDS}$ . Nous en présentons seulement le domaine de convergence global qui a été obtenu  $D_{giDS}$ .

En conclusion, le graphe 4.5 permet de déterminer tous les mouvements cycliques possibles pour différentes dynamiques de  $\alpha$  pour un même mouvement défini par les  $\delta_{j,SS}(\alpha)$ ,  $j = 1, \dots, 4$  et  $\delta_{j,DS}(\alpha)$ ,  $j = 1, 2$ . Il permet également de voir si tous ces mouvements cycliques sont stables, et de déterminer les domaines de convergence en un pas et de convergence globale pour tous ces mouvements cycliques.

Il est à remarquer sur le graphe 4.5 que les mouvements cycliques sont tous stables, sauf aux bornes du domaine des mouvements cycliques possibles, et que tous ces mouvements cycliques ont le même domaine de convergence globale.

L'exploitation de l'ensemble de ces mouvements cycliques possibles nous semble intéressante pour faire varier de manière simple la vitesse de marche du robot bipède, à partir d'un seul mouvement de marche obtenu par optimisation, et ce tout en garantissant la stabilité. D'un point de vue efficacité, il est bien sûr plus intéressant d'utiliser l'approche proposée dans WIEBER et CHEVALLEREAU [83] et CHEVALLEREAU et ADOUANE [19] pour faire varier la vitesse de marche.

#### 4.2.2.5 Un exemple de représentations de Poincaré

Nous présentons ici le plan de Poincaré d'un mouvement obtenu avec le processus d'optimisation. Nous donnons le plan de Poincaré de  $\dot{\alpha}_{iSS}$  figure 4.7 et le plan de Poincaré de  $\dot{\alpha}_{iDS}$  figure 4.6. Pour une représentation plus intuitive de ces représentations de Poincaré, nous les traçons en fonction de l'opposé des vitesses  $\dot{\alpha}$ , vu que  $\dot{\alpha} < 0$ . Ces deux plans de

Poincaré ne contiennent pas plus d'informations que la représentation figure 4.5, mais ils sont plus clairs. Ils donnent les caractéristiques de stabilité pour un mouvement cyclique, alors que la figure 4.5 les donne pour tous les mouvements cycliques possibles.

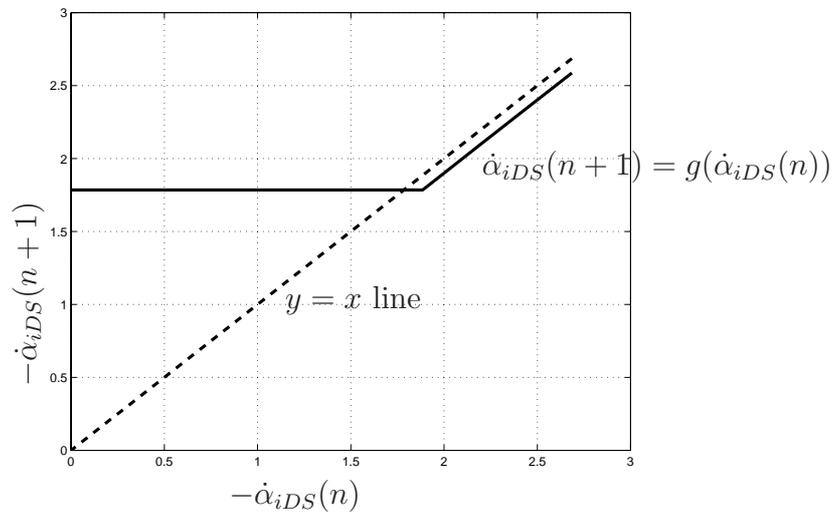


FIG. 4.6 – Représentation du plan de Poincaré au début du double support

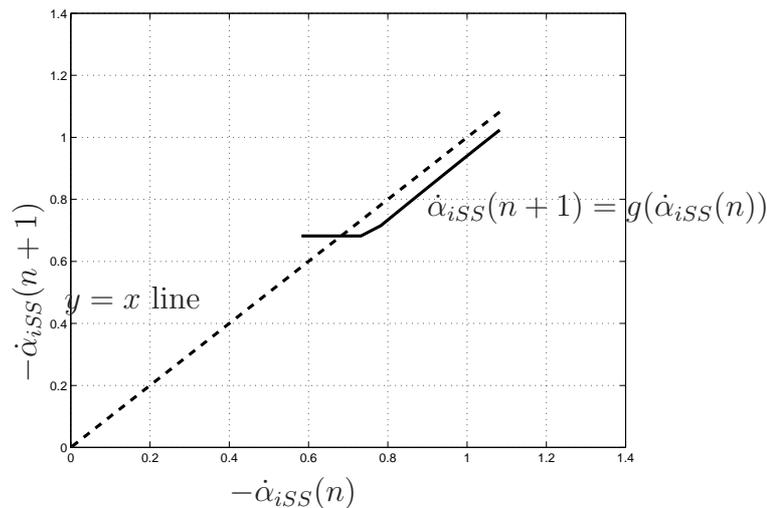


FIG. 4.7 – Représentation du plan de Poincaré en début du simple support

Nous pouvons remarquer sur les deux représentations de Poincaré que la zone de convergence en un pas est large. La présence de cette zone garantit la convergence depuis tout le domaine d'attraction en un nombre fini de pas. Le domaine d'attraction du plan de Poincaré de  $\dot{\alpha}_{iSS}$  est limité pour les vitesses de faible amplitude par la retombée en arrière du bipède en cours de simple support. Pour les vitesses d'amplitude élevée, la limitation est due aux limitations de couple en simple support. Le domaine d'attraction du plan de Poincaré de  $\dot{\alpha}_{iDS}$  n'est pas limité pour des vitesses de faible amplitude. La limitation pour les vitesses d'amplitude élevée est également due aux limitations de couples en simple support. Il est également intéressant de remarquer que la zone de convergence en un pas

du plan de Poincaré de  $\dot{\alpha}_{iDS}$  est beaucoup plus large pour les vitesses de faible amplitude que pour les vitesses d'amplitude élevée. Nous pouvons voir sur la figure 4.5 que cela est dû au fait que la distance entre le mouvement cyclique et les contraintes inférieure et supérieure en double support sont très inégales.

#### 4.2.2.6 Conclusion

Nous venons d'étudier la stabilité des dynamiques de  $\alpha$  dans le cas d'une marche avec une phase de double support, qui permet de commander les dynamiques de  $\alpha$  sur une fraction d'un pas entier. Nous avons vu qu'avec cette phase de commande de  $\alpha$  en double support, de nombreux mouvements cycliques étaient alors possibles pour différentes vitesses de parcourt de l'ensemble des configurations de marche. Ces différentes vitesses de parcourt donnent des marches à différentes vitesses d'avance. Nous avons également vu que la stabilité des dynamiques de  $\alpha$  est largement augmentée par la phase de double support. La convergence de ces dynamiques est très rapide par rapport à une marche sans double support. Ces propriétés doivent permettre plus de souplesse dans les transitions entre mouvements à différentes vitesses d'avances obtenus par optimisation. Nous avons déjà montré ici qu'il est possible de faire varier la vitesse d'avance autour d'un mouvement obtenu par optimisation, en garantissant la stabilité. Notamment, rien que pour le mouvement présenté, il est possible de l'atteindre à partir de l'arrêt en un seul pas, avec une commande appropriée en double support, comme celle que nous avons proposée.

### 4.3 Etude de stabilité sur tous les degrés de liberté

Dans la partie précédente nous avons étudié la stabilité des dynamiques de  $\alpha$ . Nous allons ici étudier la stabilité de la marche selon tous les degrés de libertés du robot. Mais sachant que l'application de Poincaré est alors de dimension élevée, nous allons maintenant déterminer une stabilité locale autour du mouvement cyclique de référence. Bien que le mouvement de référence vérifie que la vitesse du pied libre juste avant impact est nulle, lorsque nous considérons des erreurs de suivi de trajectoire, cette condition n'est plus vérifiée. Avec le modèle d'impact algébrique que nous avons utilisé, le double support n'est théoriquement pas possible, quelque soit l'erreur. Mais nous supposons ici que l'impact est suffisamment faible pour que l'on obtienne un double support. Cette hypothèse vient de la réflexion que nous avons menée dans le chapitre 2. Nous n'avons pas encore utilisé le modèle d'impact que nous proposons et ne pouvons donc donner un ordre de grandeur des erreurs possibles sur la vitesse du pied juste avant impact pour lesquelles nous obtenons quand même un double support.

En section 4.3.1 nous commencerons par présenter la loi de commande utilisée, qui tient compte des contraintes de couple et de réaction du sol. Puis en section 4.3.2 nous

présenterons la méthode de vérification de la stabilité, basée sur le calcul numérique des valeurs propres et vecteurs propres de la linéarisation de l'application de Poincaré autour du mouvement cyclique. Enfin en section 4.3.3 nous présenterons des résultats afin de valider les calculs numériques de stabilité.

### 4.3.1 Commande du bipède

Les aspects difficiles dans la commande de ce robot bipède sont de satisfaire les contraintes physiques durant la marche, même si le mouvement de référence satisfaisait ces contraintes. En effet, surtout durant la phase de double support, ces contraintes restent proches du mouvement de référence. Un autre aspect difficile est le traitement du sous-actionnement durant la phase de simple support. Pour cette raison, dans le chapitre 3 nous choisissons d'exprimer les mouvements de référence en fonction de l'angle non actionné  $\alpha$  au lieu du temps, afin de définir toutes les configurations successives du bipède. Pour la commande, nous utiliserons aussi  $\alpha$  au lieu du temps, afin que le taux de convergence des articulations commandées soit le même après un pas quelque soit la dynamique de  $\alpha$ . Cela peut être fait car l'évolution de  $\alpha$  est monotone. Nous détaillons les schémas de commande en simple support en figure 4.8 et en double support en figure 4.9. La présente section va traiter des différentes parties constituant ces schémas. Nous commençons par donner le modèle du bipède dans le cas du remplacement du temps par  $\alpha$  en section 4.3.1.1. Dans la section 4.3.1.2 nous allons linéariser le système commandé en inversant les dynamiques dans le cas du simple support et du double support, et dans la section 4.3.1.3 nous allons écrire les contraintes physiques en fonction des entrées et finalement nous allons présenter une loi de commande proportionnelle et dérivée qui prend en compte ces contraintes.

#### 4.3.1.1 Modèle en remplaçant le temps par $\alpha$

Pour le modèle actuel du bipède les entrées sont les couples et les sorties sont les positions et les vitesses articulaires. Nous allons considérer un modèle pour lequel les sorties qui sont des dérivées temporelles sont remplacées par des dérivées par rapport à  $\alpha$ . Concrètement, en simple support, les sorties que nous considérons sont alors les positions  $\delta_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$  et les dérivées partielles en  $\alpha$ ,  $\delta_j^*$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , ainsi que  $\dot{\alpha}$ .  $\dot{\alpha}$ , bien qu'étant une dérivée temporelle, est nécessaire pour faire le lien entre les dynamiques en fonction de  $\alpha$  et les dynamiques en fonction du temps. En double support, les sorties que nous considérons sont les positions  $\delta_j$ ,  $j = 1, 2$  et les dérivées partielles en  $\alpha$ ,  $\delta_j^*$ ,  $j = 1, 2$ ,  $\dot{\alpha}$ , ainsi que  $R_{2x}$ . La composante  $R_{2x}$  intervient car le double support étant sur actionné, il est possible de commander une composante d'effort. Nous allons maintenant détailler le calcul de ces modèles.

Le modèle du bipède est constitué du modèle dynamique direct obtenu à partir de (1.1), suivi de deux intégrateurs pour obtenir les vitesses et positions. Nous allons ici détailler

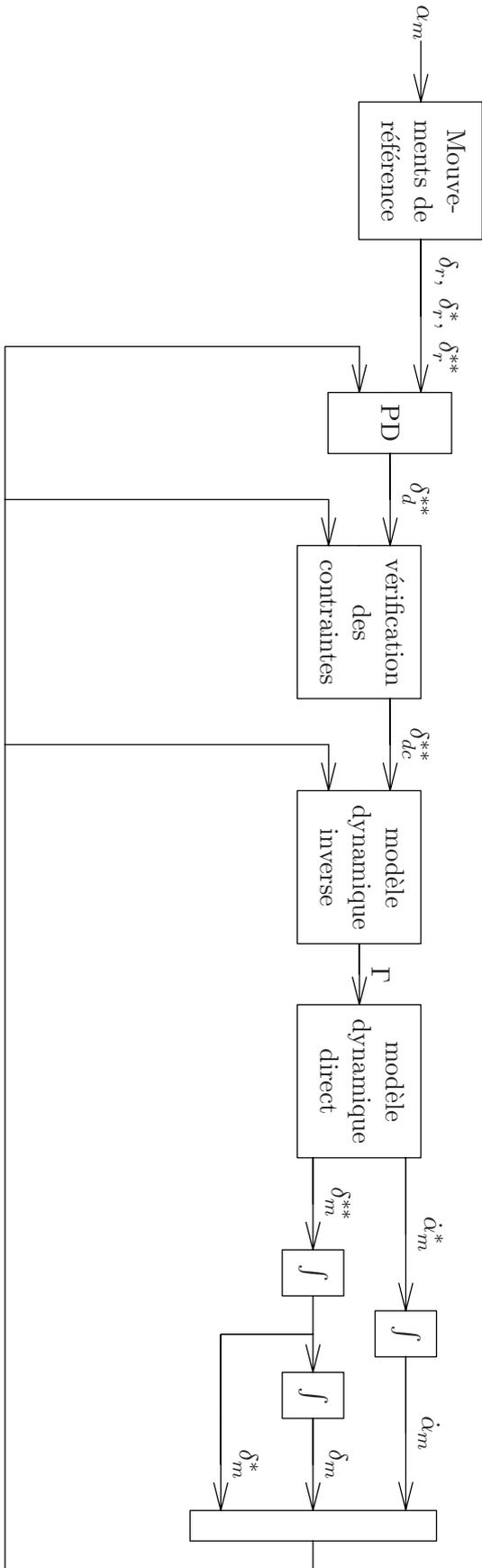


FIG. 4.8 – Schéma bloc de commande du robot en simulation pour la phase de simple support. L'indice  $m$  représente les mesures, l'indice  $r$  les références, l'indice  $d$  les valeurs désirées et l'indice  $dc$  les valeurs désirées après prise en compte des contraintes.

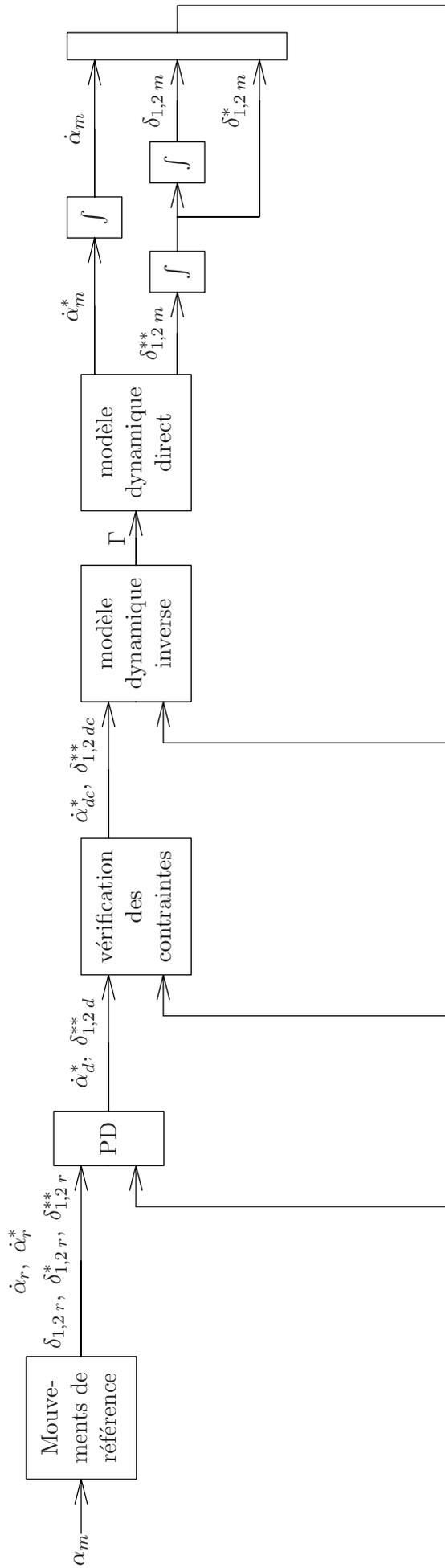


FIG. 4.9 – Schéma bloc de commande du robot en simulation pour la phase de double support. L'indice  $m$  représente les mesures, l'indice  $r$  les références, l'indice  $d$  les valeurs désirées et l'indice  $dc$  les valeurs désirées après prise en compte des contraintes.

les modèles dynamiques directs du simple support et du double support en réduisant le vecteur d'accélération complet  $\ddot{X}$  aux seules sorties considérées.

Pour le simple support, le vecteur accélération total  $\ddot{X}$  avec les contraintes de contact (1.6) en accélération pour le pied 1 au sol s'exprime en fonction de  $\ddot{q}$ .

$$\ddot{X} = A_{x,ss}(q)\ddot{q} + B_{x,ss}(q, \dot{q}) \quad (4.29)$$

$A_{x,ss}$  est une matrice de taille  $(7 \times 5)$  et  $B_{x,ss}$  est un vecteur de taille  $(7 \times 1)$ . Leurs expressions sont les suivantes.

$$A_{x,ss} = \begin{bmatrix} I_{5 \times 5} \\ -D_{167}^{-1} D_{115} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

$$B_{x,ss} = \begin{bmatrix} 0_{5 \times 1} \\ -D_{167}^{-1} H_1 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Où  $D_{115}$  est la matrice  $(2 \times 5)$  constituée des colonnes 1 à 5 de  $D_1$  et  $D_{167}$  est la matrice  $(2 \times 2)$  constituée des colonnes 6 et 7 de  $D_1$ . Les vitesses et accélérations articulaires peuvent s'écrire en fonction des dérivées partielles en  $\alpha$  par la relation (4.32).

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} = \dot{\alpha}^* \dot{\alpha} \\ \dot{\delta}_j = \delta_j^* \dot{\alpha} \\ \ddot{\delta}_j = \delta_j^{**} \dot{\alpha}^2 + \delta_j^* \dot{\alpha}^* \dot{\alpha} \end{cases} \quad j = 1, \dots, 4 \quad (4.32)$$

Où  $()^*$  et  $()^{**}$  sont les dérivées premières et secondes en  $\alpha$ .

Il est alors possible d'exprimer  $\ddot{q}$  en fonction des dérivées partielles en  $\alpha$  des sorties que nous considérons.

$$\ddot{q} = A_{q,ss} \begin{bmatrix} \dot{\alpha}^* \\ \delta^{**} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Où  $A_{q,ss}$  est une matrice  $(5 \times 5)$  donnée par (4.34).

$$A_{q,ss} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} & 0_{1 \times 4} \\ \delta^* \dot{\alpha} & I_{4 \times 4} \dot{\alpha}^2 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Avec les notations précédentes, le modèle dynamique (1.1) se réécrit en (4.35).

$$AA_{x,ss}A_{q,ss} \begin{bmatrix} \dot{\alpha}^* \\ \delta^{**} \end{bmatrix} + AB_{x,ss} + C + G = D_\Gamma \Gamma + D_1^T R_1 \quad (4.35)$$

Le modèle dynamique direct s'écrit alors (4.36) dans le cas du simple support.

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha}^* \\ \delta^{**} \\ R_1 \end{bmatrix} = M_{ss}^{-1} (D_\Gamma \Gamma - AB_{x,ss} - C - G) \quad (4.36)$$

Où la matrice  $M_{ss}$  de taille  $(7 \times 7)$  est donnée par (4.37).

$$M_{ss} = \begin{bmatrix} AA_{x,ss}A_{q,ss} & -D_1^T \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Pour le double support, le vecteur accélération total  $\ddot{X}$  s'exprime avec les contraintes de contact au sol en accélération (1.6) pour le pied 1 et (1.7) pour le pied 2 en fonction de  $\ddot{\alpha}$ ,  $\ddot{\delta}_1$  et  $\ddot{\delta}_2$ .

$$\ddot{X} = A_{x,ds}(q) \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\delta}_1 \\ \ddot{\delta}_2 \end{bmatrix} + B_{x,ds}(q, \dot{q}) \quad (4.38)$$

$A_{x,ds}$  est une matrice de taille  $(7 \times 3)$  et  $B_{x,ds}$  est un vecteur de taille  $(7 \times 1)$ . Leurs expressions sont les suivantes.

$$A_{x,ds} = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} \\ -D_{47}^{-1} D_{13} \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

$$B_{x,ds} = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 1} \\ -D_{47}^{-1} H \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Où  $D_{13}$  est la matrice  $(4 \times 3)$  constituée des colonnes 1 à 3 de  $D$  et  $D_{47}$  est la matrice  $(4 \times 4)$  constituée des colonnes 4 et 7 de  $D$ . Les matrices  $D$  et  $H$  sont définies par (4.41).

$$D = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

De même que pour le simple support, il est possible d'exprimer les accélérations articulaires des sorties considérées en fonction des dérivées partielles en  $\alpha$  de ces mêmes variables articulaires.

$$\begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\delta}_1 \\ \ddot{\delta}_2 \end{bmatrix} = A_{q,ds} \begin{bmatrix} \dot{\alpha}^* \\ \delta_1^{**} \\ \delta_2^{**} \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Où  $A_{q,ds}$  est une matrice  $(3 \times 3)$  donnée par (4.43).

$$A_{q,ds} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} & 0_{1 \times 2} \\ \delta_1^* \dot{\alpha} & \\ \delta_2^* \dot{\alpha} & I_{2 \times 2} \dot{\alpha}^2 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

Avec les notations précédentes, le modèle dynamique (1.1) se réécrit en (4.44) en double support.

$$AA_{x,ds}A_{q,ds} \begin{bmatrix} \dot{\alpha}^* \\ \delta_1^{**} \\ \delta_2^{**} \end{bmatrix} + AB_{x,ds} + C + G = D_\Gamma \Gamma + D_1^T R_1 + D_2^T R_2 \quad (4.44)$$

Le modèle dynamique directe s'écrit alors (4.45) dans le cas du double support.

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha}^* \\ \delta_1^{**} \\ \delta_2^{**} \\ R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = M_{ds}^{-1} (D_\Gamma \Gamma - AB_{x,ds} - C - G) \quad (4.45)$$

Où la matrice  $M_{ds}$  de taille  $(7 \times 7)$  est donnée par (4.46).

$$M_{ds} = \begin{bmatrix} AA_{x,ds}A_{q,ds} & -D_1^T & -D_2^T \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

#### 4.3.1.2 Linéarisation entrée-sortie du système

Pour les modèles du bipède considérés, donnés par les systèmes (4.36) et (4.45) suivi d'intégrateurs, les entrées sont les couples et les sorties sont les positions et dérivées partielles en  $\alpha$ . Nous allons écrire les couples voulus en fonction des dérivées secondes en  $\alpha$  désirées des variables articulaires commandées. Ces dérivées secondes en  $\alpha$  vont constituer les entrées de commande de notre système linéarisé.

En simple support, le modèle dynamique inverse est obtenu à partir de (4.35). Il est donné par l'équation (4.47). Nous avons déjà inversé la modèle dynamique en section 3.3.2, mais nous le faisons ici dans le cas où  $\alpha$  remplace le temps, et nous donnons ici ce calcul sans le décomposer en différentes étapes de calcul des dynamiques en  $\alpha$ , des couples puis des réactions du sol.

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha}^* \\ \Gamma \\ R_1 \end{bmatrix} = N_{ss}^{-1} AA_{x,ss}A_{q,ss25} \delta^{**} + N_{ss}^{-1} (AB_{x,ss} + C + G) \quad (4.47)$$

$N_{ss}$  est une matrice de taille  $(7 \times 7)$  donnée par (4.48).

$$N_{ss} = \begin{bmatrix} -AA_{x,ss}A_{q,ss1} & D_\Gamma & D_1^T \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

$A_{q,ss1}$  correspond à la première colonne de  $A_{q,ss}$  et  $A_{q,ss25}$  correspond aux colonnes 2 à 5 de  $A_{q,ss}$ .

Cette inversion permet aussi de calculer les forces de réactions du sols  $R_1$  et les dynamiques de  $\alpha$ .

En injectant le couple calculé avec (4.47) dans le modèle dynamique (4.36), nous obtenons un système linéarisé pour lequel les dérivées secondes en  $\alpha$ ,  $\delta^{**}$  en sortie sont celles demandées en entrée. Le système à commander se réduit donc à un double intégrateur en  $\alpha$  avec en entrée les dérivées secondes en  $\alpha$ ,  $\delta^{**}$  désirées et en sortie les positions  $\delta$  et dérivées premières en  $\alpha$ ,  $\delta^*$ , ainsi que la vitesse  $\dot{\alpha}$ .

En double support, le modèle dynamique inverse est obtenu à partir de (4.44). Il est donné par l'équation (4.49).

$$\begin{bmatrix} \Gamma \\ R_1 \\ R_{2y} \end{bmatrix} = N_{ds}^{-1} \begin{bmatrix} AA_{x,ds}A_{q,ds} & -D_{2x}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha}^* \\ \delta_1^{**} \\ \delta_2^{**} \\ R_{2x} \end{bmatrix} + N_{ds}^{-1} (AB_{x,ds} + C + G) \quad (4.49)$$

$N_{ds}$  est une matrice de taille  $(7 \times 7)$  donnée par (4.50).

$$N_{ds} = \begin{bmatrix} D_\Gamma & D_1^T & D_{2y}^T \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

Il apparaît que cette inversion dépend d'un autre paramètre que les dérivées nécessaires en  $\alpha$ , à cause du sur-actionnement. Comme dans le cadre de l'inversion du modèle dynamique présentée en section 3.3.3, nous prenons  $R_{2x}$  comme paramètre.  $R_{2x}$  peut être considéré comme une quatrième entrée de commande du système linéarisé. Ce paramètre sera déterminé avec la commande sous contraintes présentée en section suivante.

En réinjectant les couples calculés avec (4.49) dans le modèle dynamique du bipède (4.45), nous obtenons un système linéaire où les entrées  $\dot{\alpha}^*$ ,  $\delta_{1,2}^{**}$  et  $R_{2x}$  sont égales aux sorties. Le système à commander est alors un double intégrateur, ayant pour entrées  $\dot{\alpha}^*$ ,  $\delta_{1,2}^{**}$  et  $R_{2x}$ , et ayant pour sorties  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\dot{\alpha}$ ,  $\delta_1^*$ ,  $\delta_2^*$  et  $R_{2x}$ .

Pour l'inversion des modèles de simple support et de double support, nous n'avons jamais remarqué de problèmes liés à une singularité, ce qui peut-être dû au fait que les mouvements de référence obtenus par optimisation sont loin des singularités.

### 4.3.1.3 La loi de commande avec prise en compte des contraintes

Le principe de cette loi de commande sous contraintes est de calculer les entrées de commande avec une loi de commande classique, et alors de modifier le moins possible la loi de commande afin de vérifier les contraintes. On pourra se reporter au travail de PERRIN [65] concernant cette commande. Nous allons commencer par écrire les contraintes en fonction des entrées de commande. Puis nous donnerons l'expression de la commande sans prise en compte des contraintes. Enfin nous donnerons la méthode de modification des entrées de commande pour vérifier les contraintes.

Nous considérons les contraintes sur les réactions du sol et sur les couples (4.2). Dans le cas du simple support, avec le modèle dynamique inverse (4.47) il est alors possible de réécrire les contraintes (4.2) linéairement en fonction des entrées de commande.

$$A_{c,ss}(q, \dot{q})\delta^{**} \leq B_{c,ss}(q, \dot{q}) \quad (4.51)$$

$A_{c,ss}$  est une matrice de taille  $(11 \times 4)$  et  $B_{c,ss}$  est un vecteur de taille  $(11 \times 1)$ . En se servant des notations introduites en section 4.2.1 pour écrire les contraintes en double support sur  $\ddot{\alpha}$ , les matrices  $A_{c,ss}$  et  $B_{c,ss}$  s'écrivent comme donné par (4.52).

$$\begin{cases} A_{c,ss} = M_{111\ 16} (N_{ss}^{-1})_{27} AA_{x,ss} A_{q,ss25} \\ B_{c,ss} = -M_{111\ 16} (N_{ss}^{-1})_{27} (AB_{x,ss} + C + G) - P_{111} \end{cases} \quad (4.52)$$

Où  $M_{111\ 16}$  et  $P_{111}$  sont des sous matrices de  $M$  et  $P$  données par (4.13). La matrice  $M_{111\ 16}$  est constituée des lignes 1 à 11 et des colonnes 1 à 6 de  $M$  et la matrice  $P_{111}$  est constituée des lignes 1 à 11 de  $P$ .

De manière similaire, les contraintes de double support (4.2) sont obtenues en fonction des entrées de commande en utilisant l'équation (4.49).

$$A_{c,ds}(q, \dot{q}) \begin{bmatrix} \dot{\alpha}^* \\ \delta_1^{**} \\ \delta_2^{**} \\ R_{2x} \end{bmatrix} \leq B_{c,ds}(q, \dot{q}) \quad (4.53)$$

$A_{c,ds}$  est une matrice de taille  $(14 \times 4)$  et  $B_{c,ds}$  est un vecteur de taille  $(14 \times 1)$ . De même que pour le simple support, en se servant des notations introduites en section 4.2.1, les matrices  $A_{c,ds}$  et  $B_{c,ds}$  s'écrivent comme donné par (4.54).

$$\begin{cases} A_{c,ds} = MN_{ds}^{-1} \begin{bmatrix} AA_{x,ds} A_{q,ds} & -D_{2x}^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{14 \times 3} & N \end{bmatrix} \\ B_{c,ds} = -MN_{ds}^{-1} (AB_{x,ds} + C + G) - P \end{cases} \quad (4.54)$$

Où  $M$ ,  $N$  et  $P$  sont données par (4.13).

Nous allons maintenant présenter dans le cas sans contraintes la commande proportionnelle et dérivée que nous avons utilisée. Puis nous présenterons la prise en compte des contraintes. Nous allons utiliser la notation de  $r$  pour qualifier les grandeurs de référence,  $d$  pour les grandeurs désirées compte tenu de la commande,  $c$  pour qualifier les grandeurs qui vérifient les contraintes, et  $m$  pour les grandeurs mesurées.

En simple support, l'expression de la commande proportionnelle et dérivée est donnée par (4.55).

$$\delta_{i,d}^{**} = \delta_{i,r}^{**} + k_v(\delta_{i,r}^* - \delta_{i,m}^*) + k_p(\delta_{i,r} - \delta_{i,m}) \quad i = 1, \dots, 4 \quad (4.55)$$

Dans le cas d'une implantation réelle, nous pouvons déterminer les dérivées par rapport à  $\alpha$  des mesures à partir des dérivées temporelles par la relation (4.56).

$$\delta_{j,m}^* = \frac{\dot{\delta}_{j,m}}{\dot{\alpha}_m} \quad (4.56)$$

Le principe de la commande sous contraintes présentée ici consiste à trouver les entrées de commande sous contraintes les plus proches des entrées de commande sans contraintes. Pour décrire cette notion de proximité nous utilisons la norme 2. Nous obtenons le problème à résoudre suivant (4.57).

$$\begin{aligned} \min_{\delta_{dc}^{**} \in \mathbb{R}^4} & \|\delta_{dc}^{**} - \delta_d^{**}\|^2 \\ & A_{c,ss} \delta_{dc}^{**} \leq B_{c,ss} \end{aligned} \quad (4.57)$$

Il s'agit d'un problème quadratique sous contraintes linéaires. La solution d'un tel problème est alors unique. La solution de ce problème restera bornée puisque des accélérations infinies entraîneraient forcément la violation des limitations de couples.

En double support, nous utilisons une loi de commande proportionnelle pour  $\alpha$ , puisque les dynamiques linéarisées constituent des dynamiques en  $\alpha$  de degré 1. Nous utilisons pour  $\delta_1$  et  $\delta_2$  des actions proportionnelles et dérivées.

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_d^* = \dot{\alpha}_r^* + k_{p\alpha}(\dot{\alpha}_r - \dot{\alpha}_m) \\ \delta_{i,d}^{**} = \delta_{i,r}^{**} + k_v(\delta_{i,r}^* - \delta_{i,m}^*) + k_p(\delta_{i,r} - \delta_{i,m}) \quad i = 1, 2 \end{cases} \quad (4.58)$$

Dans le cas d'une implantation réelle nous pouvons déterminer les dérivées par rapport à  $\alpha$  des mesures à partir des dérivées temporelles par les relations (4.59).

$$\delta_{j,m}^* = \frac{\dot{\delta}_{j,m}}{\dot{\alpha}_m} \quad (4.59)$$

En double support, le problème de commande sous contraintes linéaires est similaire au problème du simple support.

$$\begin{aligned} \min_{[a_{dc}^T; R_{2x}]^T \in \mathbb{R}^4} \|a_{dc} - a_d\|^2 \\ A_{c,ds} \begin{bmatrix} a_{dc} \\ R_{2x} \end{bmatrix} \leq B_{c,ds} \end{aligned} \quad (4.60)$$

avec  $a = [\dot{\alpha}^*, \delta_1^{**}, \delta_2^{**}]^T$ .

Les coefficients des actions proportionnelles et dérivées, et de l'action proportionnelle sont réglés de telle sorte à obtenir un régime apériodique critique. Les gains sont choisis en fonction de la bande passantes électro-mécanique des axes du bipède, qui sont de l'ordre de  $12Hz$  pour Rabbit.

En simulation, nous considérons que la commutation du simple support au double support se fait lorsque l'altitude du pied s'annule. En parallèle, si les erreurs de suivi font que la valeur  $\alpha_{fSS}$  est atteinte avant que le pied libre ne touche le sol, le mouvement de référence pour  $\alpha < \alpha_{fSS}$  est défini comme l'état de référence pour  $\alpha = \alpha_{fSS}$ . Cela est nécessaire pour éviter que le pied ne touche pas le sol. En effet, vu que nous considérons une vitesse du pied libre juste avant impact nulle, nous obtenons que le pied ne fait que frôler le sol avant de le quitter, et il y a donc un risque que le contact ne se fasse pas. La commutation du double support au simple support se fait simplement lorsque la valeur de  $\alpha_{fDS}$  est atteinte.

### 4.3.2 Etude de la stabilité au sens de Poincaré

La stratégie de commande précédente avec contraintes amène à se poser la question de la stabilité malgré la saturation effectuée sur les contraintes. En fait, puisque le mouvement de référence satisfait les contraintes, il existe une petite zone au voisinage du mouvement de référence au cours de laquelle les contraintes sont satisfaites strictement. Ainsi, nous obtenons une convergence asymptotique localement avec le correcteur présenté, et pour les degrés commandés. Cependant, avec le phénomène d'impact et le sous-actionnement du robot en phase de simple support, la stabilité n'est plus assurée. La méthode de Poincaré est ainsi un moyen de vérifier la stabilité localement autour du mouvement de référence. La méthode de Poincaré pour des orbites périodiques consiste à étudier la stabilité de l'intersection du mouvement avec une surface. Nous appelons application de Poincaré l'application qui donne, pour une intersection du mouvement avec la surface, le prochain point d'intersection avec la surface. Un point fixe de cette fonction correspond à un mouvement périodique et est stable si le module maximale des valeurs propres de l'application de Poincaré linéarisée autour du point fixe est strictement inférieur à un. Dans GRIZZLE *et al.* [32], ces propriétés ont été généralisées pour des systèmes avec des effets impulsions, comme pour les robots bipèdes.

La stabilité d'un système en boucle fermée sera simplement vérifiée numériquement,

en calculant le module maximal des valeurs propres de la linéarisation de l'application de Poincaré. A cet effet, nous utilisons la méthode de la puissance (voir MATHEWS [55]) qui permet de calculer la valeur propre de module le plus large et le vecteur propre associé (que nous appellerons valeur propre dominante et vecteur propre dominant). Pour notre problème, la méthode des puissances est légèrement modifiée puisqu'elle combine la procédure de linéarisation avec la détermination des valeur et vecteur propres dominants. Pour cela nous avons introduit la norme  $\|\cdot\|_{\Delta x_{max}}$  qui nous permet de rester dans le domaine pour lequel la linéarisation est bonne. Cette méthode est plus pratique pour gérer la qualité de la linéarisation numérique, que de calculer la transformation de Poincaré linéarisée dans un premier temps puis les valeurs propres ensuite. Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  la transformation de Poincaré,  $x_p$  un point fixe de cette fonction, et la fonction  $g(\Delta x) = f(x_p + \Delta x) - x_p$ . Le programme récursif suivant, avec  $\delta x_0 = \Delta x_{max}$  comme valeur initiale, converge vers une paire propre dominante de la linéarisation de  $f$  autour du point fixe  $x_p$ .

$$\begin{cases} \Delta y_k = g(\Delta x_k) \\ \Delta x_{k+1} = \frac{\Delta y_k}{c_{k+1}} \\ c_{k+1} = \|\Delta y_k\|_{\Delta x_{max}} \end{cases} \quad (4.61)$$

où la norme  $\|\cdot\|_{\Delta x_{max}}$  est définie par  $\|\Delta y_k\|_{\Delta x_{max}} = \frac{\Delta y_{k,j}}{\Delta x_{max,j}}$  et  $j$  est la  $j^{\text{ème}}$  composante de  $\Delta y_k$  satisfaisant  $\frac{|\Delta y_{k,j}|}{\Delta x_{max,j}} = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{|\Delta y_{k,i}|}{\Delta x_{max,i}} \right\}$  ( $i$  est la  $i^{\text{ème}}$  composante du vecteur  $\Delta y_k$ ).  $\Delta x_{max}$  est le vecteur des valeurs maximales que  $\Delta x_k$  peut prendre, de manière à ce que la transformation de Poincaré  $f$  puisse être approchée linéairement avec une bonne précision autour du point fixe. Pour cette raison,  $\Delta x_{max}$  doit être suffisamment faible mais pas trop pour obtenir une précision suffisante du calcul des valeur et vecteur propres dominants. En pratique, nous choisissons dans un premier temps  $\Delta x_{max}$  dans le domaine linéaire de  $f$  et dans un deuxième temps nous choisissons la précision de la simulation afin d'obtenir une bonne précision du calcul des valeur et vecteur propres dominants.

$c_k$  converge vers la valeur propre dominante  $\lambda_{max}$  et  $\Delta x_k$  converge vers le vecteur propre dominant  $\Delta x_{\lambda_{max}}$ . Par ailleurs, le taux de convergence augmente avec la décroissance du ratio de la seconde valeur propre dominante avec la valeur propre dominante. Or dans notre cas nous pouvons distinguer les dynamiques en  $\delta$  commandées tout au long de la marche et les dynamiques en  $\alpha$  commandées seulement en double support. Les dynamiques en alpha de degré 1 seront donc représentées par une valeur propre beaucoup plus grande que les valeurs propres associées aux autre dynamiques. La méthode numérique proposée convergera alors rapidement.

### 4.3.3 Validation des résultats

Le robot bipède avec la loi de commande est simulé avec le logiciel Matlab et Simulink. La surface que nous considérons pour l'étude de Poincaré est celle correspondant au début de la phase de double support, juste après l'impact. L'état du robot bipède sur cette surface est décrit par les quatre paramètres  $\alpha_{iDS}$ ,  $\delta_{1,iDS}$ ,  $\delta_{2,iDS}$ ,  $d$  la distance entre les pieds et les trois paramètres de vitesse  $\dot{\alpha}_{iDS}$ ,  $\dot{\delta}_{1,iDS}$ ,  $\dot{\delta}_{2,iDS}$ . L'indice  $iDS$  correspond à l'état initial du double support. La transformation de Poincaré est ainsi une fonction de  $\mathbb{R}^7$  dans  $\mathbb{R}^7$ . Les figures 4.10, 4.11 et 4.12 présentent quelques résultats sur le calcul de la valeur propre dominante.

D'après la figure 4.10, la convergence est rapide puisqu'elle a lieu en moins de six itérations. La valeur dominante obtenue est aussi très faible puisque  $\lambda_{max} = 10^{-3}$ .

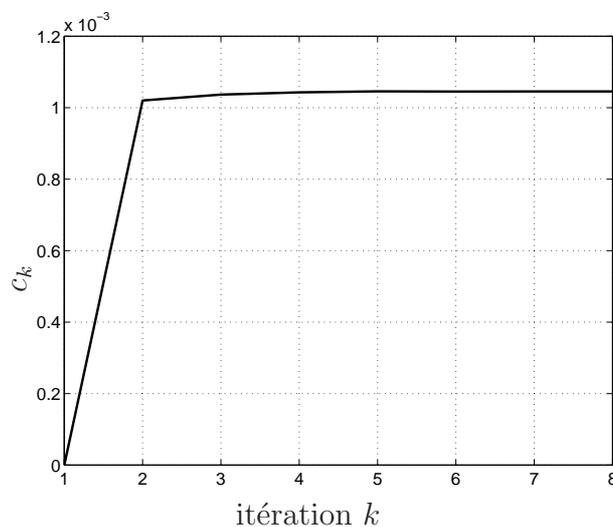


FIG. 4.10 – Convergence de la valeur absolue de la valeur propre dominante de la linéarisation de l'application de Poincaré, avec la méthode de la puissance.

Les figures 4.11 et 4.12 permettent de voir si le vecteur  $\Delta x_{max}$  a été bien choisi. Le vecteur dominant normalisé correspond à une abscisse égale à un et nous pouvons constater qu'il se trouve dans une portion linéaire puisque les valeurs propres sont à peu près constantes entre 0 et 1 mis à part lorsque l'amplitude du vecteur propre tend vers 0. Dans ce cas, les valeurs propres tendent vers l'infini et les imprécisions numériques deviennent importantes. Ceci est dû au bruit numérique qui augmente lorsque la norme du vecteur propre tend vers 0. Nous avons choisi une précision de la simulation de  $10^{-9}$ , et nous pouvons remarquer que le bruit numérique n'est pas très important pour le calcul de  $\lambda_{max}$ .

Le vecteur propre dominant est égal à  $\Delta x_{\lambda_{max}} = [2.5 \cdot 10^{-3}; -2.9 \cdot 10^{-3}; -4.4 \cdot 10^{-4}; 1.4 \cdot 10^{-5}; 6.9; -8; -1.2] \cdot 10^{-3}$ . Les composantes majeures correspondent à la vitesse. Il s'avère qu'il n'y a que des erreurs de vitesse après une phase de simple support et de double support. Ceci est dû au fait que la vitesse  $\dot{\alpha}$  n'est pas commandée en simple

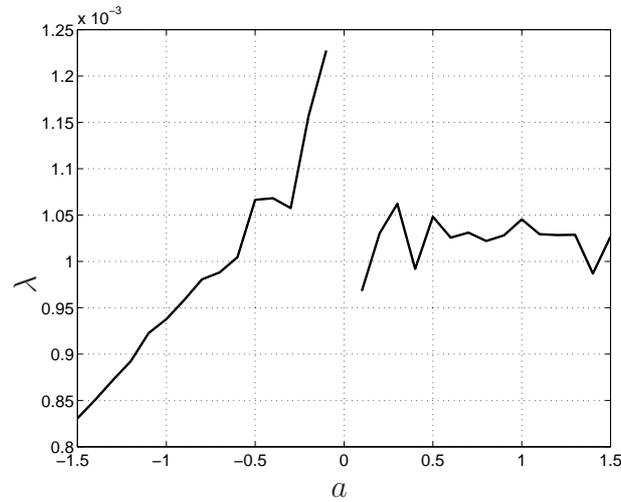


FIG. 4.11 – Graphe des différentes valeurs propres  $\lambda = \frac{\|g(a\Delta x_{\lambda_{max}})\|_{\Delta x_{max}}}{a}$  de la linéarisation de l'application de Poincaré obtenues par différence finie selon la direction du vecteur dominant, c'est-à-dire en prenant  $\Delta x = a\Delta x_{\lambda_{max}}$ .

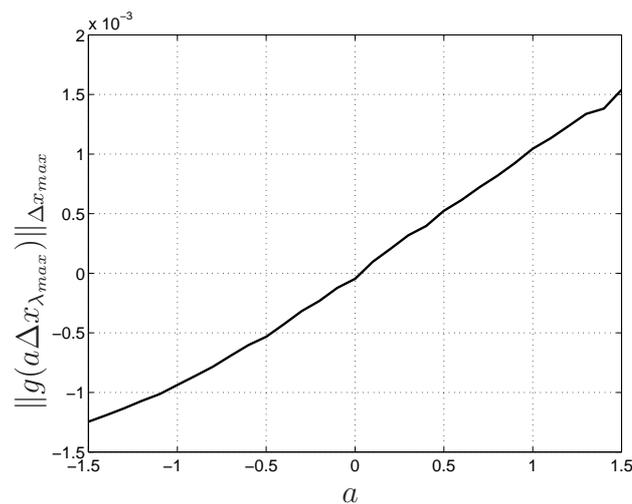


FIG. 4.12 – Application de Poincaré selon la direction du vecteur dominant autour du point fixe, c'est-à-dire en prenant  $\Delta x = a\Delta x_{\lambda_{max}}$ .

support et converge donc plus lentement que les autres composantes de l'état du robot. Bien que les dynamiques de  $\alpha$  soient les plus lentes à converger, elles sont relativement rapides, puisque la valeur propre dominante est très faible. Ceci est permis par la phase de double support sur-actionnée. De plus ces résultats nous permettent de constater que les dynamiques en  $\alpha$  sont plus lentes que les autres, ce qui justifie l'étude des dynamiques de zéro seules, comme nous l'avons présenté en section 4.2.

## 4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une étude de la stabilité des dynamiques de zéro. Nous avons notamment déterminé les conditions d'existence de mouvements cycliques stables et les conditions de stabilité avec une loi de commande optimale. Nous avons entre autre constaté qu'une infinité de mouvements cycliques stables étaient possibles, et qu'une importante zone de convergence en un pas existait. Nous avons ainsi montré les avantages de l'introduction d'une phase sur-actionnée dans la marche d'un robot bipède. Nous avons dans un second temps étudié la stabilité locale autour d'un mouvement cyclique, selon tous les degrés de liberté. A cette occasion nous avons constaté que les dynamiques les moins stables sont les dynamiques de zéro étudiées précédemment. Cette observation justifie la restriction de l'étude de la stabilité aux seules dynamiques de zéro, au moins localement autour du mouvement de référence. Une étude autre que locale en considérant tous les degrés de liberté, notamment la détermination du domaine d'attraction semble impossible. De plus, bien qu'ayant utilisé un modèle d'impact classique qui ne prédisait pas de double support, nous avons supposé que les erreurs juste avant impact étaient suffisamment faibles pour pouvoir considérer qu'un double support ait lieu. Nous avons justifié un tel choix dans l'étude de l'impact chapitre 2. Cependant nous n'avons pas encore utilisé le nouveau modèle que nous proposons et nous n'avons donc pour l'instant aucune idée des erreurs possibles sur les vitesses juste avant impact, afin de toujours obtenir un double support. C'est une étude que nous comptons effectuer à l'avenir.

# Conclusion générale et perspectives

## Bilan des travaux

Dans cette thèse, nous avons touché à tous les aspects de la marche d'un robot bipède. A savoir la modélisation, la génération de mouvements et l'étude de la stabilité.

D'abord, en ce qui concerne la modélisation nous avons travaillé sur le modèle d'impact. Nous avons considéré des modèles d'impact rigides, l'un algébrique et l'autre différentiel. Le modèle d'impact algébrique, bien qu'encore largement utilisé est parfois incorrect, chose corrigée par le modèle d'impact différentiel. Nous avons montré que l'impact différentiel, bien qu'un peu plus compliqué peut être mis sous la forme d'une séquence d'impacts algébriques. Nous avons ensuite étudié les comportements obtenus après l'impact en fonction des conditions juste avant impact. Nous avons fait cette étude de l'impact avec et sans pieds dans la perspective de l'obtention d'un double support. Nous avons obtenu pour résultat que sans pieds, le seul moyen d'avoir une marche avec double support est d'éviter l'impact en imposant que le pied libre arrive au sol avec une vitesse nulle. L'étude de ces modèles d'impact nous a également amené à remettre en cause les hypothèses de l'impact dans le cas où des contacts ont déjà lieu au moment de l'impact. Nous avons alors proposé de nouvelles hypothèses afin d'obtenir un modèle cohérent, tout en gardant un impact instantané. Nous n'avons cependant pas étudié le nouveau modèle proposé.

Ensuite pour la génération de mouvements, nous avons utilisé une méthode d'optimisation paramétrique, en définissant les variables articulaires comme des fonctions polynômiales. Nous avons considéré un critère énergétique et toutes les contraintes de notre problème, des limites articulaires, aux contraintes de non glissement et non décollement des contacts au sol, en passant par les limites de couples actionneurs. Nous avons dû faire face au problème du sous-actionnement du bipède durant la phase de simple support. Pour résoudre ce problème, nous avons notamment exprimé les mouvements de référence en fonction de la variable non commandée. Ensuite, en posant rigoureusement le problème d'optimisation, nous avons obtenu un problème d'optimisation avec une hiérarchie de contraintes, problème que nous n'avons pas rencontré dans la littérature. Pour le résoudre nous avons adapté un programme d'optimisation existant, basé sur un algorithme SQP (*sequential quadratic programming*). Nous avons également développé le calcul du gradient de manière analytique afin d'améliorer la déroulement du processus d'optimisa-

tion. La résolution de ces problèmes nous a permis d'obtenir un programme d'optimisation robuste et rapide. En effet le temps d'optimisation est inférieur à deux heures, il est possible de démarrer l'optimisation avec des conditions initiales au hasard, et l'algorithme converge vers la même solution, quel que soient les conditions initiales au hasard. Une comparaison avec une génération de mouvements de marches similaires générées avec le principe du maximum de Pontryagin nous a montré que nos résultats sont quand même sous-optimaux.

Enfin nous avons effectué une étude de la stabilité des dynamiques de zéro, constituée des dynamiques de la variable non commandée en simple support, et des dynamiques de la même variable, alors commandée, en double support. Pour ces dynamiques de zéro nous avons obtenu des preuves analytiques de stabilité, et nous avons déterminé le domaine de convergence. Nous avons ainsi prouvé l'intérêt de la phase de double support sur actionnée pour stabiliser la marche du bipède. Nous avons également étudié de manière classique la stabilité de toutes les dynamiques mais seulement localement autour du mouvement de référence. Nous avons notamment constaté que les dynamiques les moins stables correspondent à celles étudiées précédemment, confirmant par là la pertinence de l'étude de stabilité précédente.

## Perspectives

Tout d'abord, sur l'étude du modèle d'impact, nous avons proposé un nouveau modèle que nous comptons utiliser et étudier plus avant. Ensuite, sur la génération de mouvements, nous avons utilisé un programme d'optimisation classique pour résoudre le problème d'optimisation particulier que nous avons. Ce programme n'est pas complètement satisfaisant, et nous comptons au moins utiliser le programme plus adapté *fsqp*, voire à écrire nous même un programme d'optimisation pouvant gérer un nombre variable de critères et de contraintes. Il serait également intéressant d'enrichir les mouvements possibles en augmentant le nombre de paramètres d'optimisation, afin d'améliorer la solution obtenue. Nous pensons faire cet enrichissement en utilisant des B-splines ou une autre méthode pour laquelle les points de contrôle n'ont qu'une influence locale sur le mouvement. Enfin, pour compléter l'étude de stabilité, nous prévoyons d'abord d'étudier la robustesse de l'obtention d'un double support face à des erreurs de suivi de trajectoire. Pour cela, il nous faut utiliser le nouveau modèle d'impact que nous proposons, puis valider ce modèle avec une modélisation compliant du contact entre le robot et le sol.

Enfin il est évident que des essais expérimentaux seront nécessaires pour confirmer les études que nous avons menées dans cette thèse.

La génération de mouvements présentée dans cette thèse sera également l'objet d'une extension pour le robot humanoïde HRP2 évoluant en trois dimensions.

# Bibliographie

- [1] dans *Philosophical Transactions : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 359(1789) de A, The Royal Society, 2001, special issue.
- [2] Aoustin Y. et Formal'sky A., « Stability of a cyclic biped gait and hastening of the convergence to it », dans *Proceedings of the 4th International Conference on Climbing and Walking Robots*, pages 779–788, Karlsruhe, Germany, 2001.
- [3] Azevedo C., *Contrôle de la locomotion artificielle : de l'homme aux robots*, Thèse de doctorat, INPG, 2002.
- [4] Ballard P., « The dynamics of discrete mechanical systems with perfect unilateral constraints », *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 154, 2000.
- [5] Baraff D., *Non-penetrating rigid body simulation*, chapitre 2, Eurographics '93 State of the Art Reports, Barcelona, 1993.
- [6] Bass J., *Mathématiques, Analyse*, vol. 2, Masson, 1973.
- [7] Bourgeot J.M. et Brogliato B., « Tracking control of nonsmooth complementarity lagrangian systems », dans *Proceedings of the European Control Conference ECC'03*, University of Cambridge, UK, 2003.
- [8] Brach R.M., « Rigid body collisions », *Journal of Applied Mechanics*, vol. 56, pages 133–138, March 1989.
- [9] Brach R.M., *Mechanical Impact Dynamics*, John Wiley and Sons, New York, 1991.
- [10] Brogliato B., *Nonsmooth Mechanics. Models, Dynamics and Control*, Communications and Control Engineering, 2<sup>e</sup> édition, 1999.
- [11] Brogliato B., Niculescu S. et Monteiro-Marques M., « On tracking control of a class of complementary-slackness hybrid mechanical systems », *Systems and Control Letters*, pages 255–266, 2000.
- [12] Cabodevila G., *Syntèse de démarches à énergie minimale d'un robot bipède*, Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur, 1997.
- [13] Channon P.H., Hopkins S.H. et Pham D.T., « Derivation of optimal walking motions for a biped walking motion », *Robotica*, vol. 10(2), pages 165–172, 1992.

- [14] CHAREYRON S. et WIEBER P.B., « Position and force control of nonsmooth lagrangian dynamical systems without friction », dans *Submitted to the Control and Decision Conference*, 2004.
- [15] CHEMORI A. et LORIA A., « Commande d'un robot bipède sur un cycle complet de marche », dans *Conférence internationale francophone d'automatique*, pages 599–605, 2002.
- [16] CHENG M.Y. et LIN C.S., « Measurement of robustness for biped locomotion using a linearized poincaré map », *Robotica*, vol. 14, pages 253–259, 1995.
- [17] CHESSE S., *Dynamique optimale de systèmes articulés à cinématique fermée. Application à la synthèse d'allures de marche optimale*, Thèse de doctorat, Université de Poitiers, 2002.
- [18] CHEVALLEREAU C., ABBA G., AOUSTIN Y., PLESTAN F., WESTERVELT E.R., CANUDAS DE WIT C. et GRIZZLE J.W., « Rabbit : a testbed for advanced control theory », *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 23(5), October 2003.
- [19] CHEVALLEREAU C. et ADOUANE L., « On-line reference trajectory adaptation for the control of a planar biped », dans *5th International Conference on Climbing and Walking Robots*, pages 427–435, 2002.
- [20] CHEVALLEREAU C. et AOUSTIN Y., « Optimal reference trajectories for walking and running of a biped robot », *Robotica*, vol. 19, pages 557–569, 2001.
- [21] CHEVALLEREAU C., FORMAL'SKY A. et DJOUDI D., « Tracking of a joint path for the walking of an underactuated biped », *Robotica*, vol. 22, pages 15–28, 2004.
- [22] COLLINS S.H., WISSE M. et RUINA A., « A three-dimensional passive-dynamic walking robot with two legs and knees », *The International Journal of Robotics Research*, vol. 20(7), pages 607–615, July 2001.
- [23] CONTE G., MOOG C.H. et PERDON A.M., *Nonlinear Control Systems*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer, 1999.
- [24] DANTZIG G., *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, 1963.
- [25] DÜRRBAUM A., KLIER W. et HAHN H., « Comparison of automatic and symbolic differentiation in mathematical modeling and computer simulation of rigid-body systems », *Multibody System Dynamics*, vol. 7, pages 331–355, 2002.
- [26] GILL P.E., MURRAY W., SAUNDERS M.A. et WRIGHT M.H., *User's guide for NPSOL 5.0*, .
- [27] GILL P.E., MURRAY W. et WRIGHT M.H., *Practical Optimization*, Academic Press, London and New York, 1981.
- [28] GÉNOT F., *Contributions à la modélisation et à la commande des systèmes mécaniques de corps rigides avec contraintes unilatérales*, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1998.

- 
- [29] GÉNOT F. et BROGLIATO B., « New results on painlevé paradox », *European Journal of Mechanics A/Solids*, 1999.
- [30] GOSWAMI A., ESPIAU B. et KERAMANE A., « Limit cycles in a passive compass gait biped and passivity-mimicking control laws », *Journal of Autonomous Robots*, vol. 4(3), pages 273–286, 1997.
- [31] GRISHIN A.A., FORMAL'SKY A.M., LENSKY A.V. et ZHITOMIRSKY S.V., « Dynamic walking of a vehicle with two telescopic legs controlled by two drives », *The International Journal of Robotics Research*, vol. 13(2), pages 137–147, April 1994.
- [32] GRIZZLE J.W., ABBA G. et PLESTAN F., « Asymptotically stable walking for biped robots : analysis via systems with impulse effects », *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 46(1), pages 51–64, January 2001.
- [33] HARDT M., *Multibody dynamical algorithms, numerical optimal control, with detailed studies in the control of jet engine compressors and biped walking*, Thèse de doctorat, UCSD, La Jolla, 1999.
- [34] HIRAI K., HIROSE K., HAIKAWA Y. et TAKANEDA T., « The development of honda humanoid robot », dans *Proceeding of the 1998 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1998.
- [35] HUANG Q., YOKOI K., KAJITA S., KANEKO K., ARAI H., KOYACHI N. et TANIE K., « Planning walking patterns for a biped robot », *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 17(3), pages 280–289, June 2001.
- [36] HURMUZLU Y., « Dynamics of bipedal gait part i : objective functions and the contact event of a planar five-link biped », *Journal of Applied Mechanics*, vol. 60, pages 331–336, June 1993.
- [37] HURMUZLU Y., « Dynamics of bipedal gait part ii : stability analysis of a planar five-link biped », *Journal of Applied Mechanics*, vol. 60, pages 337–343, June 1993.
- [38] HURMUZLU Y. et CHANG T.H., « Rigid body collisions of a special class of planar kinematic chains », *IEEE Transactions on systems, man and cybernetics*, vol. 22(5), pages 964–971, 1992.
- [39] HURMUZLU Y. et MARGHITU D.B., « Rigid body collisions of planar kinematic chains with multiple contact points », *The International Journal of Robotics Research*, vol. 13(1), pages 82–92, February 1994.
- [40] KAJITA S., KANEHIRO F., KANEKO K., K. F., HARADA K., YOKOI K. et HIRUKAWA H., « Biped walking pattern generation by using preview control of zero-moment point », dans *Proceedings of the 2003 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 1620–1626, 2003.
- [41] KAJITA S., KANEHIRO F., KANEKO K., K. F., HARADA K., YOKOI K. et HIRUKAWA H., « Resolved momentum control : humanoid motion planning based on the

- linear and angular momentum », dans *Proceedings of the 2003 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 1644–1650, 2003.
- [42] KANE T.R., « A dynamics puzzle », dans *Stanford Mechanics Alumni Club Newsletter*, page 6, 1984.
- [43] KANEKO K., KANEHIRO F., KAJITA S., HIRUKAWA H., KAWASAKI T., HIRATA M. AKACHI K. et ISOZUMI T., « Humanoid robot hrp-2 », dans *Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2004.
- [44] KELLER J.B., « Impact with friction », *Journal of Applied Mechanics*, vol. 53, pages 1–4, March 1986.
- [45] KERAMANE A., *Cycles de marche des robots de type compas : analyse et commande*, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1997.
- [46] KHALIL W. et DOMBRE E., *Modélisation, identification et commande des robots*, Hermès Science Publications, Paris, 2<sup>e</sup> édition, 1999.
- [47] LANDAU L. et LIFCHITZ E., *Physique théorique*, vol. 1, 1982.
- [48] LAWRENCE C., ZHOU J.L. et TITS A.L., *User's guide for cfsqp 2.5 : a C code for solving (large scale) constrained nonlinear (minimax) optimization problems, generating iterates satisfying all inequality constraints*, Electrical Engineering Department and Institute for Systems Research, University of Maryland, .
- [49] LE HOUEDÉC D., « Mécanique des solides », Editions GIN, Nantes, .
- [50] LÖFFLER K., GIENGER M. et PFEIFFER F., « Trajectory control of a biped robot », dans *5th International Conference on Climbing and Walking Robots*, édité par BIDAUD P. et AMAR F.B., pages 437–444, Professional Engineering Publishing, 2002.
- [51] LO J., HUANG G. et METAXAS D., « Human motion planning based on recursive dynamics and optimal control techniques », *Multibody System Dynamics*, vol. 8, pages 433–458, 2002.
- [52] LÖTSTEDT P., « Mechanical systems of rigid bodies subject to unilateral constraints », *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 42(2), pages 281–296, 1982.
- [53] LÖTSTEDT P., « Numerical simulation of time-dependent contact and friction problems in rigid body mechanics », *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, vol. 5(2), pages 370–393, 1984.
- [54] MARTIN P. et ROUCHON P., « Systèmes plats : planification et suivi de trajectoires », Journées X-UPS, Ecole des Mines de Paris, 1999.
- [55] MATHEWS J.H., *Numerical Methods for Mathematics, Science and Engineering*, Prentice-Hall international, 2<sup>e</sup> édition, 1992.
- [56] MCGEER T., « Passive dynamic walking », *The International Journal of Robotics Research*, vol. 9(2), pages 62–82, April 1990.

- 
- [57] MOREAU J.J., *Standard inelastic shocks and the dynamics of unilateral constraints*, vol. 288 de *CISM Courses and Lectures*, Springer-Verlag, 1985.
- [58] MOREAU J.J., « Some numerical methods in multibody dynamics : application to granular mechanics », *European Journal of Mechanics*, vol. 13(special issue), pages 93–114, 1994.
- [59] MOREAU J.J., « Numerical aspects of the sweeping process », *Computer methods in applied mechanics and engineering*, pages 329–349, 1999.
- [60] MOREAU J.J. et PANAGIOTOPOULUS P.D., rédacteurs, *Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics*, vol. 302 de *CISM Courses and Lectures*, pages 1–82, Springer-Verlag, 1988.
- [61] MU X. et WU Q., « Synthesis of a complete sagittal gait cycle for a five-link biped robot », *Robotica*, vol. 21, pages 581–587, 2003.
- [62] MURARO A., *Génération de mouvements optimaux pour un robot quadrupède*, Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes et Université de Nantes, 2002.
- [63] ORHANT P., *Contribution à la manipulation fine. Etude de la phase d'impact*, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1994.
- [64] PAOLI L. et SCHATZMAN M., « Penalty approximation for dynamical systems submitted to multiple non-smooth constraints », *Multibody System Dynamics*, pages 347–366, 2002.
- [65] PERRIN B., *Modélisation et commande d'un robot quadrupède pour une allure dynamiquement stable*, Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes et Université de Nantes, 1999.
- [66] PFEIFFER F. et GLOCKER C., *Multibody Dynamics with unilateral contacts*, Wiley Series in Nonlinear Science, 1996.
- [67] PRATT J. et PRATT G., « Intuitive control of a planar bipedal walking robot », dans *Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 2014–2021, 1998.
- [68] ROUSSEL L., *Génération de trajectoires optimales pour un robot bipède*, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1998.
- [69] RUBANOVICH E.M. et FORMAL'SKII A.M., « Some problems of dynamics of multiple-element systems associated with impact phenomena, i », *Mechanics of solids*, vol. 16(2), pages 139–146, 1981.
- [70] RUBANOVICH E.M. et FORMAL'SKII A.M., « Some problems of dynamics of multiple-element systems associated with impact phenomena, ii », *Mechanics of solids*, vol. 16(3), pages 118–126, 1981.
- [71] SAIDOUNI T. et BESSONNET G., « Generating globally optimised sagittal gait cycles of a biped robot », *Robotica*, vol. 21, pages 199–210, 2003.

- [72] SLOTINE J.J.E. et LI W., *Applied nonlinear control*, Prentice Hall, 1991.
- [73] STEWART D.E. et TRINKLE J.C., « An implicit time-stepping scheme for rigid body dynamics with inelastic collisions and coulomb friction », *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 1996.
- [74] STOIANOVICI D. et HURMUZLU Y., « A critical study of the applicability of rigid body collision theory », *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol. 63(2), pages 307–316, June 1996.
- [75] STRONGE W.J., « Rigid body collisions with friction », *Proceedings of the Royal Society of London*, vol. 431, pages 169–181, October 1990.
- [76] VON STRYK O., *User's Guide for DIRCOL 2.0. A direct collocation method for the numerical solution of optimal control problems*, 1999.
- [77] TODA K., FURUTA T. et K. T., « Stabilization of biped locomotion utilizing compensation in double supporting phase », dans *Space 2002 and Robotics 2002 : Proceedings of the 5th International Conference and Exposition on Robotics for Challenging Situations ans Environments*, pages 409–415, 2002.
- [78] VUKOBRATOVIC J., BOROVAC B., SURLA D. et STOKIC D., *Biped locomotion : Dynamics, Stability, Control ans Application*, Berlin, 1990.
- [79] WESTERVELT, *Toward a coherent framework for the control of planar biped locomotion*, Thèse de doctorat, University of Michigan, 2003.
- [80] WESTERVELT E.R. et GRIZZLE J.W., « Sequential composition of walking motions for a 5-link planar biped walker », dans *Workshop on Future Directions in Nonlinear Control of Mechanical Systems*, University of Illinois, Urbana-Champaign, 2002.
- [81] WHITTAKER E.T., *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies*, Cambridge University Press, Cambridge, 1904.
- [82] WIEBER P.B., *Modélisation et commande d'un robot marcheur anthropomorphe*, Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris, 2000.
- [83] WIEBER P.B. et CHEVALLEREAU C., *Online adaptation of reference trajectories for the control of walking systems*, Rapport technique, INRIA Rhône-Alpes, 2004.
- [84] ZONFRILLI F., ORIOLO G. et NARDI D., « A biped locomotion strategy for the quadruped robot sony ers-210 », dans *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 2768–2774, Washington, 2002.

# Annexe A

## Etude de l'approximation sur l'inertie moteur

Nous présentons ici les résultats d'une étude de l'approximation de la prise en compte de l'effet des inerties moteurs dans la modélisation du robot Rabbit. Pour ce faire nous comparons pour une marche donnée les couples calculés avec le modèle dynamique inverse dans le cas avec l'approximation et le cas sans l'approximation.

Dans le cas avec l'approximation, l'énergie cinétique de rotation des moteur est donnée par (A.1).

$$\begin{cases} E_{cm1} = \frac{1}{2}I_{m1}(N\dot{\delta}_1)^2 \\ E_{cm2} = \frac{1}{2}I_{m2}(N\dot{\delta}_2)^2 \\ E_{cm3} = \frac{1}{2}I_{m3}(N(\dot{\delta}_2 + \dot{\delta}_3))^2 \\ E_{cm4} = \frac{1}{2}I_{m4}(N\dot{\delta}_4)^2 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Dans le cas sans l'approximation, l'énergie cinétique de rotation des moteurs est donnée par (A.2).

$$\begin{cases} E_{cm1} = \frac{1}{2}I_{m1}(\dot{\theta}_2 - N\dot{\delta}_1)^2 \\ E_{cm2} = \frac{1}{2}I_{m2}(\dot{\theta}_3 + N\dot{\delta}_2)^2 \\ E_{cm3} = \frac{1}{2}I_{m3}(\dot{\theta}_3 + N(\dot{\delta}_2 + \dot{\delta}_3))^2 \\ E_{cm4} = \frac{1}{2}I_{m4}(\dot{\theta}_4 - N\dot{\delta}_4)^2 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

La figure A.1 présente les couples nécessaires pour suivre le mouvement de référence, calculés à partir du modèle sans approximation. La figure A.2 représente l'erreur absolue entre les couples nécessaires calculés avec l'approximation et sans l'approximation. La figure A.3 représente l'erreur relative du calcul des couples. Le tableau A.1 présente les erreurs moyennes pour chacun des couples calculés. Nous pouvons constater figure A.2 que l'erreur absolue peut atteindre 0.7 N.m pour des couples de l'ordre de 30-40 N.m. Cependant en moyenne cette erreur ne dépasse pas 0.27 N.m. Figure A.3 nous consta-

tons que l'erreur relative peut prendre de très grande valeurs lorsque les couples tendent vers zero, mais en dehors de ces pics nous pouvons voir qu'elles sont de l'ordre de 2 %. Tableau A.1 nous voyons qu'en moyenne l'erreur relative est de 5 % pour  $\Gamma_3$ .

De cette étude nous voyons que l'approximation de la composante absolue dans l'énergie cinétique des moteur est une bonne approximation, même si elle n'est pas complètement négligeable.

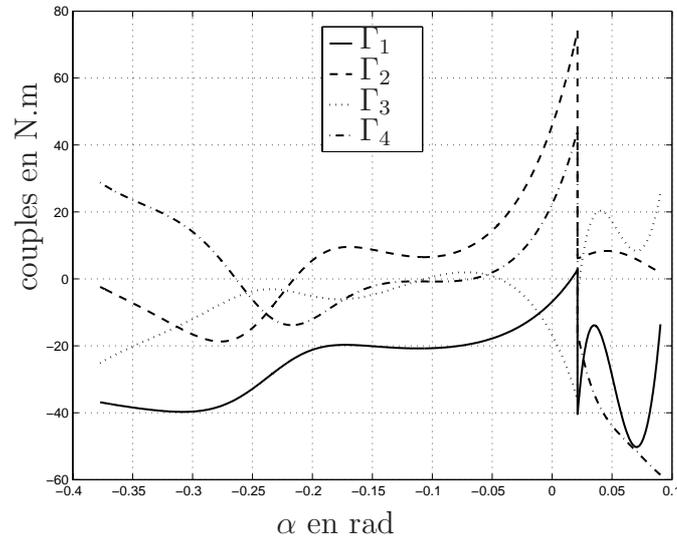


FIG. A.1 – Couples nécessaires pour suivre le mouvement de référence en considérant le modèle sans approximation

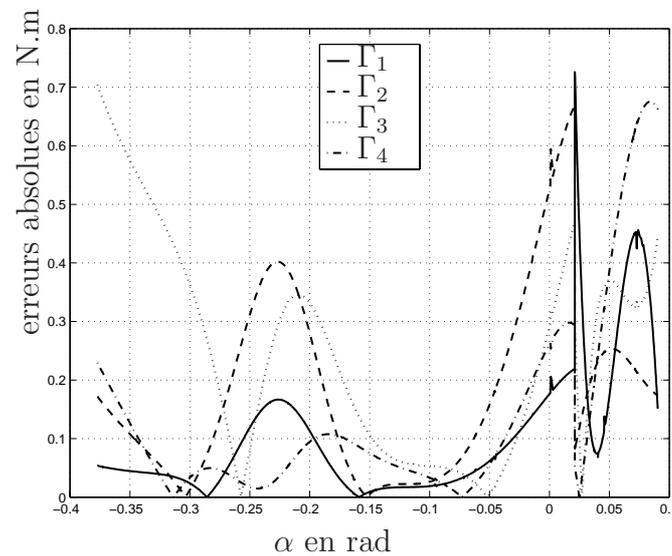


FIG. A.2 – Erreurs absolues entre les couples nécessaires pour suivre le mouvement de référence en considérant le modèle sans approximation et avec approximation

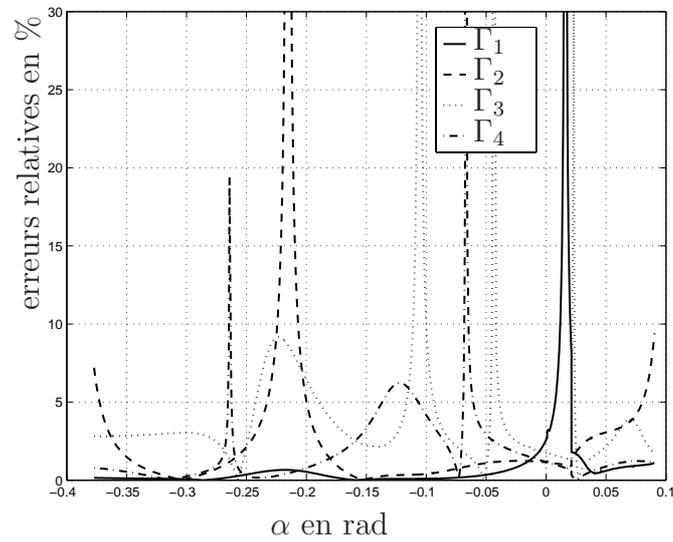


FIG. A.3 – Erreurs relatives entre les couples nécessaires pour suivre le mouvement de référence en considérant le modèle sans approximation et avec approximation

	$\Gamma_1$	$\Gamma_2$	$\Gamma_3$	$\Gamma_4$
erreur absolue moyenne en N.m	0.13	0.20	0.27	0.19
erreur relative moyenne en %	1.56	4.10	5.01	1.83

TAB. A.1 – Erreurs absolues et relatives moyennes commises pour chacun des couples lorsque l'on considère le modèle approximé



# Annexe B

## Comparaison de la formulation d'impact avec frottement de Brach [8] et de la formulation d'impact de la section 2.2

Nous commençons par rappeler les équations du modèle d'impact avec frottements de BRACH [8]. Cette formulation est écrite seulement pour l'impact entre deux solides rigides. HURMUZLU et CHANG [38] généralisent cet impact au cas de double contact. Dans HURMUZLU et MARGHITU [39] cet impact algébrique est généralisé pour un nombre arbitraire de contacts juste avant impact, mais la formulation de l'impact est différente. Aucune comparaison n'est faite entre la nouvelle formulation utilisée et l'ancienne. Bien qu'elles soient proches, l'équivalence ne nous semble pas évidente. Nous avons choisi d'utiliser cette dernière formulation, qui nous semble plus correcte, présentée en section 2.2. Nous comparons ici la formulation de Brach et celle que nous avons utilisée pour le modèle algébrique. Cette comparaison se limitera au cas d'un coefficient de restitution nul. Nous verrons que dans certains cas d'indétermination la formulation de Brach détermine arbitrairement une solution parmi les solutions existantes.

Nous commençons par donner les lois de comportements au niveau des contacts avec la formulation de Brach, pour un impact multi-contact. Pour écrire ces lois de comportements tenant compte du frottement, BRACH [8] introduit d'abord la grandeur  $\mu$  qui est le rapport des réactions d'impact tangentielle et normale donné par (B.1) pour un contact  $i$ .

$$\mu_i = \frac{I_{R_i x}}{I_{R_i z}} \quad (\text{B.1})$$

Ensuite pour un contact  $i$ , est définie la valeur  $\mu_{0i}$  qui est obtenue dans le cas où l'on considère que le contact a une vitesse nulle à la fin de l'impact. La valeur  $\mu_{mi}$  est également définie. Elle correspond à la valeur de  $\mu_i$  pour laquelle l'énergie perdue en cours d'impact

est maximum. Dans HURMUZLU et CHANG [38], la loi de comportement du contact  $i$  de non décollement incluant le glissement ou non est donnée par le système (B.2).

$$\begin{cases} |\mu_i| = \min(f, |\mu_{0i}|) \\ \text{sign}(\mu_i) = \text{sign}(\mu_{0i}) \\ V_{iz} = 0 \\ I_{R_{iz}} > 0 \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Dans le cas du contact qui rentre en collision, la loi du comportement tangentiel est différente pour tenir compte des problèmes de gain d'énergie possibles lors de l'impact. Ces gains d'énergie apparaissent du fait de la mauvaise prise en compte du phénomène d'inversion de la direction de glissement par le modèle algébrique. Nous avons discuté ce problème dans le chapitre sur l'impact. Les gains d'énergie liés à ce problème n'apparaissent que lorsque le coefficient de restitution est non nul. Vu que nous considérons un coefficient de restitution nul pour le robot bipède, nous ne sommes pas concernés par ce problème. Nous présentons cependant la prise en compte de ces gains d'énergie mais n'en tiendrons plus compte par la suite. Pour prendre en compte ces gains d'énergie possibles, est défini la valeur  $\mu_T$  qui correspond à la valeur de  $\mu_c$  du contact qui rentre en collision avec le sol pour laquelle la perte d'énergie est maximum. La loi de comportement du glissement du contact rentrant en collision est alors donnée par (B.3) dans BRACH [8].

$$\begin{cases} |\mu_c| = \min(f, |\mu_{0c}|, |\mu_T|) \\ \text{sign}(\mu_c) = \text{sign}(\mu_{0c}) \\ I_{R_{cz}} > 0 \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Dans HURMUZLU et CHANG [38], la loi de comportement du contact rentrant en collision est légèrement différente. Elle est donnée par (B.4).

$$\begin{cases} |\mu_c| = \min(f, |\mu_{0c}|, |\mu_T|) \\ \text{sign}(\mu_c) = \text{sign}(\mu_{0c}) \\ I_{R_{cz}} > 0 \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

Ces deux formulations des lois de comportement du glissement semblent équivalentes pour les exemples traités dans la littérature. Cependant à notre connaissance, aucune preuve d'équivalence n'existe, en particulier dans le cas multi-contact.

Dans notre cas où nous ne tenons pas compte des gains d'énergie possibles, la loi de comportement (B.4) sur le contact qui rentre en collision avec le sol est identique à celle des autres contacts (B.2).

Nous comparons maintenant les formulations de ces lois de comportement. Deux cas vont se présenter suivant que  $|\mu_{0i}| < f$  ou  $|\mu_{0i}| > f$ . Si nous sommes dans le cas où  $|\mu_{0i}| < f$  la loi de comportement (B.4) nous donne  $\mu = \mu_{0i}$ . Dans ce cas, la loi de comportement (B.4) est complètement équivalente à la loi de comportement (B.5).

$$\begin{cases} -fI_{R_iz} \leq I_{R_ix} \leq fI_{R_iz} \\ V_{ix}^+ = 0 \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

Cette loi de comportement est exactement celle de non glissement (2.7).

Dans le cas de la loi de comportement (B.3), nous avons  $\mu = \text{sign}(\mu_{mi})|\mu_{0i}|$ . Dans le cas où  $\text{sign}(\mu_{mi}) = \text{sign}(\mu_{m0i})$ , nous obtenons également la relation (B.5). Par contre, s'il s'avérait que  $\text{sign}(\mu_{mi}) \neq \text{sign}(\mu_{m0i})$  nous aurions  $-fI_{R_iz} \leq I_{R_ix} \leq fI_{R_iz}$  et  $V_{ix}^+ \neq 0$ , ce qui n'est pas un comportement d'impact possible. Nous ne savons pas si ce dernier cas est possible, mais pour être sûr de l'éviter, il nous semble plus judicieux de choisir  $\mu = \text{sign}(\mu_{0i})|\mu_{0i}|$ .

Dans le cas où  $|\mu_{0i}| > f$  nous avons alors  $\mu = \text{sign}(\mu_{0i})f$ , ou encore (B.6) en considérant la condition de non décollement  $I_{R_iz} > 0$  vérifiée.

$$I_{R_ix} = f\text{sign}(I_{R0ix})I_{R_iz} \quad (\text{B.6})$$

Où  $I_{R0ix}$  est la solution de l'impact en considérant  $V_{ix}^+ = 0$ .

Il s'agirait maintenant de montrer que cette relation (B.6) est équivalente à la loi de comportement de glissement (2.8) rappelée ici.

$$I_{R_ix} = -f\text{sign}(V_{ix}^+)I_{R_iz}$$

Pour cela il faudrait donc montrer que  $I_{R0ix}$  est de signe opposé à  $V_{ix}^+$ , la solution de l'impact en considérant la loi de comportement de glissement donnée par (2.8). Nous n'avons pas réussi à montrer dans le cas multi-contact que  $I_{R0ix}$  est de signe opposé à  $V_{ix}^+$ . Cependant, des deux formulations, il nous semble plus juste de considérer celle imposant  $I_{R_ix}$  de signe opposé à  $V_{ix}^+$ . En effet dans le cas d'un frottement cette condition doit être vérifiée. Et en imposant  $I_{R_ix}$  du signe de  $I_{R0ix}$  nous ne savons pas si nous risquons de prendre une solution qui ne vérifie pas cette condition, au détriment d'une autre solution, qui elle vérifierait cette condition. De la même façon pour la loi de comportement (B.3), il serait a priori possible d'obtenir une solution qui ne vérifie pas la condition de glissement  $\text{sign}(I_{R_ix}) = -\text{sign}(V_{ix}^+)$ .

Nous avons également constaté des indéterminations pour le modèle d'impact algébrique dans le cas du robot bipède, pour lesquelles la formulation de BRACH [8] ne donnerait pas une des possibilités de solution. Il s'agit du cas où le bipède est dans la configuration figure B.1. Nous donnons figure B.2 et figure B.3 les zones des comportements pour lesquels il y a indétermination. Nous constatons bien que qu'il y a une zone de superposition correspondant à la zone d'indétermination. Les deux comportements présentés correspondent à un double support sans aucun glissement et un double support avec glissement. Or la formulation de la loi de glissement (B.2), lorsque le glissement et le non glissement sont possibles, donnera seulement le cas du non glissement correspondant

à  $\mu = \mu_{0i}$  puisqu'alors  $|\mu_{0i}| < f$ .

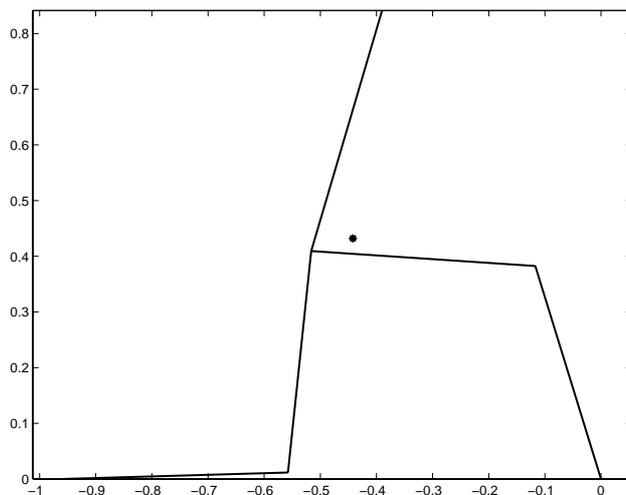


FIG. B.1 – Configuration d'indétermination pour laquelle la formulation de la loi de glissement de BRACH [8] n'aurait donné qu'une solution.

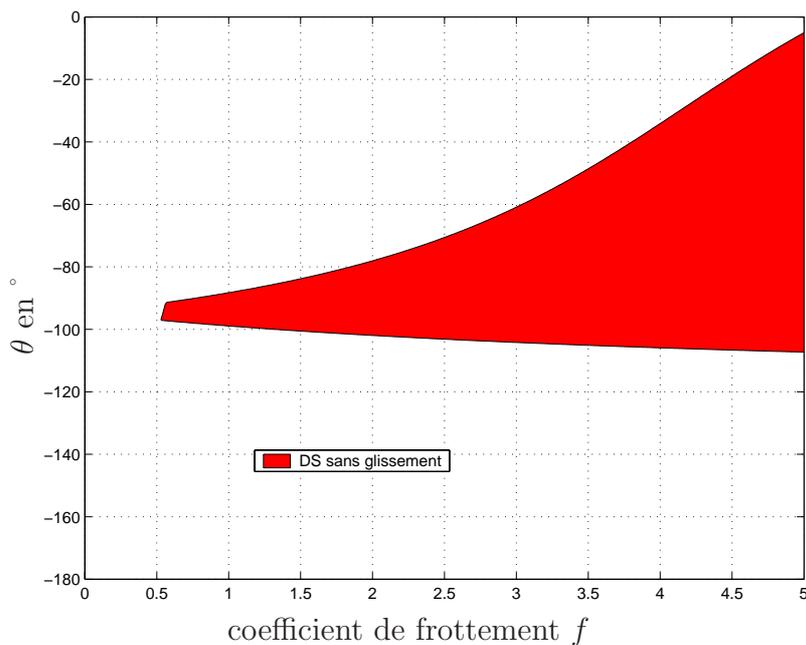


FIG. B.2 – Représentation de la zone de double support sans glissement en fonction de  $\theta$  et  $f$  dans le cas d'une indétermination.

Pour conclure, en l'absence de certitude que les formulations de BRACH [8] et HURMUZLU et CHANG [38] soient équivalentes à celle présentée dans HURMUZLU et MARGHITU [39] et que nous avons utilisée, il vaut mieux utiliser cette dernière formulation, pour laquelle nous sommes sûr que la condition de glissement est vérifiée, et qui en tout cas ne réduit pas les solutions possibles arbitrairement.

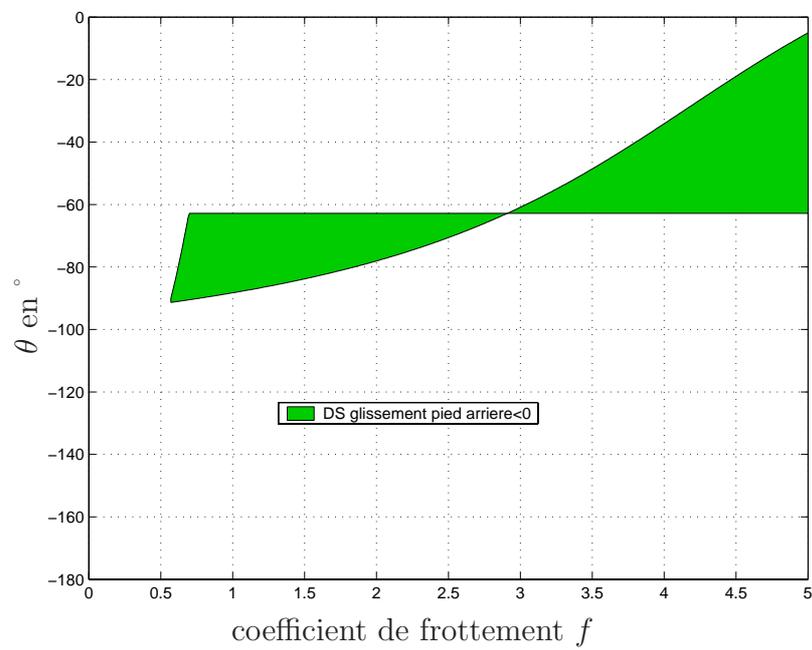


FIG. B.3 – Représentation de la zone de double support avec glissement du pied arrière en fonction de  $\theta$  et  $f$  dans le cas d'une indétermination.



# Annexe C

## Equations des différents comportements du modèle d'impact algébrique

Nous présentons ici les différentes variantes du modèle d'impact algébrique selon le comportement après impact considéré, dans le cas du modèle sans pieds. Ces variantes sont obtenues à partir du système (2.13) avec les lois de comportement. La loi du non rebond et glissement du pied 2 rentrant en contact avec le sol est donnée par (2.11). La loi de non rebond et non glissement du pied 2 est donnée par (2.12). La loi de décollement du pied 1 déjà en contact au moment de l'impact est donnée par (2.5). La loi de non décollement et glissement du pied 1 est donnée par (2.9). Enfin la loi de non décollement et non glissement du pied 1 est donnée par (2.10).

Nous avons également des relations sur les vitesses des extrémités des jambes juste avant l'impact, sachant que le bipède est en simple support sans glissement juste avant l'impact. Elles sont simplement données par la condition (C.1), qui signifie que le pied 1 est fixe au sol.

$$V_1^- = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

Dans le cas du double support sans glissement des pieds, le système d'équations d'impact est donné par (C.2) sous les conditions (C.3) de non glissement des pieds.

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -V_2^- \end{bmatrix} = D^T A^{-1} D \begin{bmatrix} I_{R_1} \\ I_{R_2} \end{bmatrix} \\ V_1^+ = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ V_2^+ = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (\text{C.2})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -f I_{R_1 z} \leq I_{R_1 x} \leq f I_{R_1 z} \\ -f I_{R_2 z} \leq I_{R_2 x} \leq f I_{R_2 z} \end{array} \right. \quad (\text{C.3})$$

Dans le cas du double support avec non glissement du pied 1 et glissement du pied 2 dans le sens positif, le système d'équations d'impact est donné par (C.4) sous les conditions (C.5) de non glissement du pied 1, de glissement du pied 2 dans le sens positif et de non rebond du pied 2.

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ V_{2x}^+ - V_{2x}^- \\ -V_{2z}^- \end{bmatrix} = D^T A^{-1} D \begin{bmatrix} I_{R_1} \\ -f I_{R_2 z} \\ I_{R_2 z} \end{bmatrix} \\ V_1^+ = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ V_{2z}^+ = 0 \\ I_{R_2 x} = -f I_{R_2 z} \end{array} \right. \quad (\text{C.4})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -f I_{R_1 z} \leq I_{R_1 x} \leq f I_{R_1 z} \\ I_{R_2 z} > 0 \\ V_{2x} > 0 \end{array} \right. \quad (\text{C.5})$$

Le cas de double support avec non glissement du pied 1 et glissement du pied 2 dans le sens négatif est très proche du cas précédent. Le système d'équations d'impact est donné par (C.6) sous les conditions (C.7).

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ V_{2x}^+ - V_{2x}^- \\ -V_{2z}^- \end{bmatrix} = D^T A^{-1} D \begin{bmatrix} I_{R_1} \\ f I_{R_{2z}} \\ I_{R_{2z}} \end{bmatrix} \\ V_1^+ = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ V_{2z}^+ = 0 \\ I_{R_{2x}} = f I_{R_{2z}} \end{array} \right. \quad (\text{C.6})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -f I_{R_{1z}} \leq I_{R_{1x}} \leq f I_{R_{1z}} \\ I_{R_{2z}} > 0 \\ V_{2x} < 0 \end{array} \right. \quad (\text{C.7})$$

Dans le cas du double support avec glissement du pied 1 dans le sens positif et non glissement du pied 2, le système d'équations d'impact est donné par (C.8) sous les conditions (C.9) de non décollement du pied 1 et glissement dans le sens positif, et de non glissement du pied 2.

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} V_{1x}^+ \\ 0 \\ -V_2^- \end{bmatrix} = D^T A^{-1} D \begin{bmatrix} -f I_{R_{1z}} \\ I_{R_{1z}} \\ I_{R_2} \end{bmatrix} \\ V_{1z}^+ = 0 \\ V_2^+ = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ I_{R_{1x}} = -f I_{R_{1z}} \end{array} \right. \quad (\text{C.8})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{R_{1z}} > 0 \\ V_{1x} > 0 \\ -f I_{R_{2z}} \leq I_{R_{2x}} \leq f I_{R_{2z}} \end{array} \right. \quad (\text{C.9})$$

Dans le cas du double support avec glissement du pied 1 dans le sens négatif et non glissement du pied 2, le système d'équations est très proche du cas précédent. Le système d'équations d'impact est donné par (C.10) sous les conditions (C.11) .

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} V_{1x}^+ \\ 0 \\ -V_2^- \end{bmatrix} = D^T A^{-1} D \begin{bmatrix} f I_{R_1 z} \\ I_{R_1 z} \\ I_{R_2} \end{bmatrix} \\ V_{1z}^+ = 0 \\ V_2^+ = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ I_{R_1 x} = f I_{R_1 z} \end{array} \right. \quad (\text{C.10})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{R_1 z} > 0 \\ V_{1x} < 0 \\ -f I_{R_2 z} \leq I_{R_2 x} \leq f I_{R_2 z} \end{array} \right. \quad (\text{C.11})$$

Le cas du double support avec glissement des deux pieds dans le sens positif est donné par le système d'équations (C.12) sous les conditions (C.13) de non décollement du pied 1 et glissement dans le sens positif, et de non rebond du pied 2 et glissement dans le sens positif.

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} V_{1x}^+ \\ 0 \\ V_{2x}^+ - V_{2x}^- \\ -V_{2z}^- \end{bmatrix} = D^T A^{-1} D \begin{bmatrix} -f I_{R_1 z} \\ I_{R_1 z} \\ -f I_{R_2 z} \\ I_{R_2 z} \end{bmatrix} \\ V_{1z}^+ = 0 \\ V_{2z}^+ = 0 \\ I_{R_1 x} = -f I_{R_1 z} \\ I_{R_2 x} = -f I_{R_2 z} \end{array} \right. \quad (\text{C.12})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{R_1 z} > 0 \\ V_{1x} > 0 \\ I_{R_2 z} > 0 \\ V_{2x} > 0 \end{array} \right. \quad (\text{C.13})$$

Le cas du double support avec glissement des deux pieds dans le sens négatif est proche du cas précédent. Ce cas est représenté par le système d'équations (C.14) sous les conditions (C.15).

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} V_{1x}^+ \\ 0 \\ V_{2x}^+ - V_{2x}^- \\ -V_{2z}^- \end{bmatrix} = D^T A^{-1} D \begin{bmatrix} f I_{R_1 z} \\ I_{R_1 z} \\ f I_{R_2 z} \\ I_{R_2 z} \end{bmatrix} \\ V_{1z}^+ = 0 \\ V_{2z}^+ = 0 \\ I_{R_1 x} = f I_{R_1 z} \\ I_{R_2 x} = f I_{R_2 z} \end{array} \right. \quad (\text{C.14})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{R_1 z} > 0 \\ V_{1x} < 0 \\ I_{R_2 z} > 0 \\ V_{2x} < 0 \end{array} \right. \quad (\text{C.15})$$

Le cas du double support avec glissement du pied 1 dans le sens positif et glissement du pied 2 dans le sens négatif est proche du cas précédent. Ce cas est représenté par le système d'équations (C.16) sous les conditions (C.17).

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} V_{1x}^+ \\ 0 \\ V_{2x}^+ - V_{2x}^- \\ -V_{2z}^- \end{bmatrix} = D^T A^{-1} D \begin{bmatrix} -f I_{R_1 z} \\ I_{R_1 z} \\ f I_{R_2 z} \\ I_{R_2 z} \end{bmatrix} \\ V_{1z}^+ = 0 \\ V_{2z}^+ = 0 \\ I_{R_1 x} = -f I_{R_1 z} \\ I_{R_2 x} = f I_{R_2 z} \end{array} \right. \quad (\text{C.16})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{R_1 z} > 0 \\ V_{1x} > 0 \\ I_{R_2 z} > 0 \\ V_{2x} < 0 \end{array} \right. \quad (\text{C.17})$$

Le cas du double support avec glissement du pied 1 dans le sens négatif et glissement du pied 2 dans le sens positif est proche du cas précédent. Ce cas est représenté par le système d'équations (C.18) sous les conditions (C.19).

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} V_{1x}^+ \\ 0 \\ V_{2x}^+ - V_{2x}^- \\ -V_{2z}^- \end{bmatrix} = D^T A^{-1} D \begin{bmatrix} f I_{R_{1z}} \\ I_{R_{1z}} \\ -f I_{R_{2z}} \\ I_{R_{2z}} \end{bmatrix} \\ V_{1z}^+ = 0 \\ V_{2z}^+ = 0 \\ I_{R_{1x}} = f I_{R_{1z}} \\ I_{R_{2x}} = -f I_{R_{2z}} \end{array} \right. \quad (\text{C.18})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{R_{1z}} > 0 \\ V_{1x} < 0 \\ I_{R_{2z}} > 0 \\ V_{2x} > 0 \end{array} \right. \quad (\text{C.19})$$

Dans le cas du simple support sans glissement du pied 2, le système d'équations d'impact est donné par (C.20) sous les conditions (C.21) de non glissement du pied 2 et décollement du pied 1 vers le haut.

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} V_1^+ \\ -V_2^- \end{bmatrix} = D^T A^{-1} D \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{R_2} \end{bmatrix} \\ V_2^+ = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ I_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (\text{C.20})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{1z}^+ > 0 \\ -f I_{R_{2z}} \leq I_{R_{2x}} \leq f I_{R_{2z}} \end{array} \right. \quad (\text{C.21})$$

Dans le cas du simple support avec glissement du pied 2 dans le sens positif, le système d'équations d'impact est donné par (C.22) sous les conditions (C.23) de décollement du pied 1 vers le haut, et de non rebond du pied 2 et glissement du pied 2 dans le sens positif.

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} V_1^+ \\ V_{2x}^+ - V_{2x}^- \\ -V_{2z}^- \end{bmatrix} = D^T A^{-1} D \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -f I_{R_{2z}} \\ I_{R_{2z}} \end{bmatrix} \\ V_{2z}^+ = 0 \\ I_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ I_{R_{2x}} = -f I_{R_{2z}} \end{array} \right. \quad (\text{C.22})$$

$$\begin{cases} V_{1z}^+ > 0 \\ I_{R_{2z}} > 0 \\ V_{2x} > 0 \end{cases} \quad (\text{C.23})$$

Dans le cas du simple support avec glissement du pied 2 dans le sens négatif, le système d'équations d'impact est très proche du système précédent. Ce système d'équations est donné par (C.24) sous les conditions (C.25).

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} V_1^+ \\ V_{2x}^+ - V_{2x}^- \\ -V_{2z}^- \end{bmatrix} = D^T A^{-1} D \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f I_{R_{2z}} \\ I_{R_{2z}} \end{bmatrix} \\ V_{2z}^+ = 0 \\ I_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ I_{R_{2x}} = f I_{R_{2z}} \end{cases} \quad (\text{C.24})$$

$$\begin{cases} V_{1z}^+ > 0 \\ I_{R_{2z}} > 0 \\ V_{2x} < 0 \end{cases} \quad (\text{C.25})$$



# Annexe D

## Modélisation et étude de l'impact avec des pieds sans masse

### D.1 Introduction

Dans cette annexe, nous avons étudié des impacts avec des pieds, car nous avons prouvé que sans pieds il n'était pas facile d'obtenir une phase de double support, et nous espérons que la présence de pieds permette que le double support soit possible, comme c'est réellement le cas pour l'homme. Il est également intéressant d'étudier le cas avec des pieds car une marche sans pieds n'est qu'une étape avant d'étudier une marche avec des pieds. A notre connaissance aucune étude d'impact d'un robot avec des pieds n'a été menée à ce jour. Nous avons choisi d'étudier le cas de pieds sans masse car l'étude est alors plus simple. En effet, il est possible de mener l'étude de l'impact avec des pieds, comme nous l'avons fait pour le robot sans pieds, en utilisant le modèle du robot sans pieds avec de légères modifications. De plus cette approximation des pieds sans masse nous semble bonne, vu que pour l'homme par exemple, les paramètres inertiels des pieds sont faibles devant ceux des autres corps.

Pour une marche avec des pieds, 10 scénarios représentés sur le schéma [D.1](#) nous semblent possibles où nous obtenons au moins une phase de double support (certains scénarios représentés ne donnent pas de phase de double support). La première ligne correspond aux cas où le pied arrière est en rotation sur l'extrémité, c'est-à-dire qu'un basculement a eu lieu en cours de simple support. La deuxième ligne correspond aux cas où l'impact a lieu lorsque le pied arrière est resté à plat jusqu'à l'impact.

Ces 10 scénarios font intervenir 4 variantes d'impact différentes en fonction des conditions juste avant impact pour chacun des pieds. Ces 4 variantes d'impact différentes sont récapitulées dans le tableau [D.1](#).

Le but de la présente étude va être de déterminer les comportements possibles après impact pour chacune des 4 variantes d'impact, et d'en déduire les scénarios possibles,

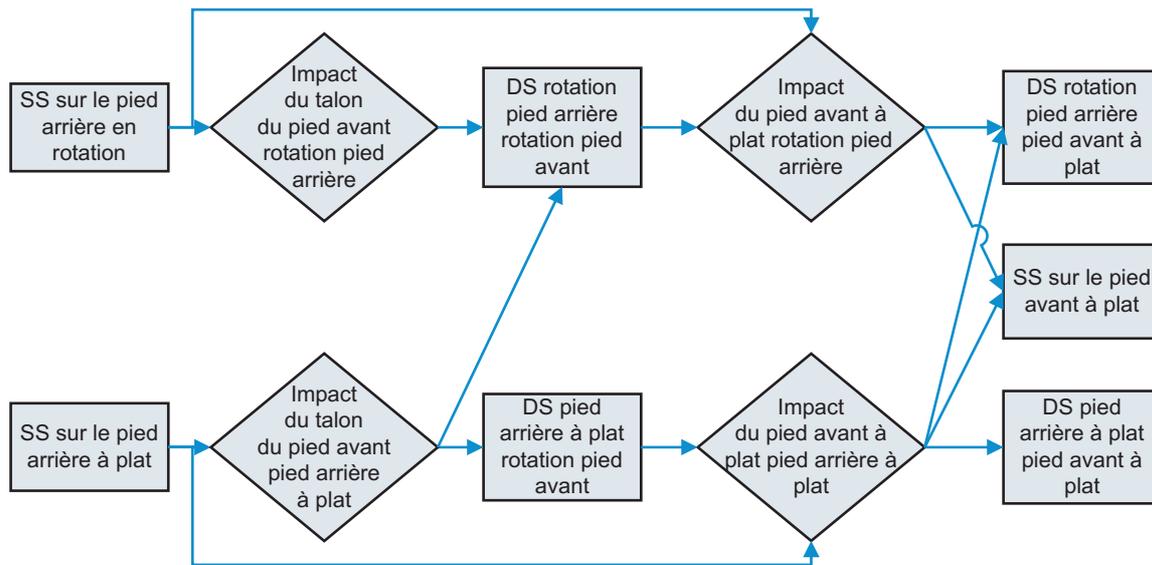


FIG. D.1 – Différents scénarios possibles pour avoir une phase de double support avec des pieds

comportement du pied avant à l'impact	comportement du pied arrière avant impact
impact sur le talon	à plat
impact sur le talon	en rotation
impact à plat	à plat
impact à plat	en rotation

TAB. D.1 – Tableau récapitulatif des impacts possibles avec des pieds

avec les conditions sur l'orientation des pieds et le coefficient de frottement du sol. Dans un but de simplification, nous étudierons la configuration de marche présentée figure 2.2 pour tous les impacts. Ceci entraîne également que nous considérerons la hauteur des deux chevilles toujours identiques, alors que pour les différentes situations d'impact cela n'est pas vrai sur un sol plat. Nous présenterons les modèles des 4 impacts en section D.2 et nous donnerons les caractéristiques de chaque modèle et les scénarios possibles en section D.3. Enfin section D.4 nous donnerons des conclusions.

## D.2 Présentation des modèles d'impact avec pieds

Les modèles d'impact avec des pieds sans masses peuvent s'écrire avec les mêmes modèles d'impact que sans pieds, la différence se situera au niveau des lois de comportement au niveau du sol, qui seront réécrites au niveau des chevilles. Nous considérerons donc les équations d'impact réduites aux relations au niveau des chevilles (2.13) pour le modèle algébrique et (2.21) pour le modèle différentiel obtenus pour le robot sans pieds. Bien qu'ayant vu dans la section 2.4 que le modèle algébrique donnait parfois de mauvais ré-

sultats, nous allons ici l'utiliser car nous verrons que le modèle différentiel se ramène au modèle algébrique dans certains cas.

Les 4 modèles d'impact à étudier se différencient en fonction des situations possibles pour chaque pied. Pour le pied arrière il peut y avoir deux situations :

- le pied arrière est à plat au sol
- le pied arrière est en rotation autour de l'extrémité

Pour le pied avant qui rentre en contact avec le sol, il peut y avoir deux situations :

- le pied avant touche le sol avec le talon
- le pied avant touche le sol avec le plat du pied

Après avoir donné des notations nécessaires pour la prise en compte des pieds avec les modèles sans pieds, nous donnerons les lois de comportements de chaque pied en fonction que le pied est en appui à plat ou sur l'extrémité du pied.

### D.2.1 Notations pour la prise en compte des pieds

Nous définissons l'orientation de l'axe passant par la cheville et l'extrémité du pied par rapport au sol. Ces angles,  $\theta_1$  pour le pied 1 à l'arrière et  $\theta_2$  pour le pied 2 à l'avant sont représentés sur la figure D.2. Ces angles sont comptés positifs dans le sens trigonométrique. Nous considérons également les repères liés à ces orientations  $(\vec{x}_{\theta_1}, \vec{z}_{\theta_1})$  pour le pied 1 et  $(\vec{x}_{\theta_2}, \vec{z}_{\theta_2})$  pour le pied 2.

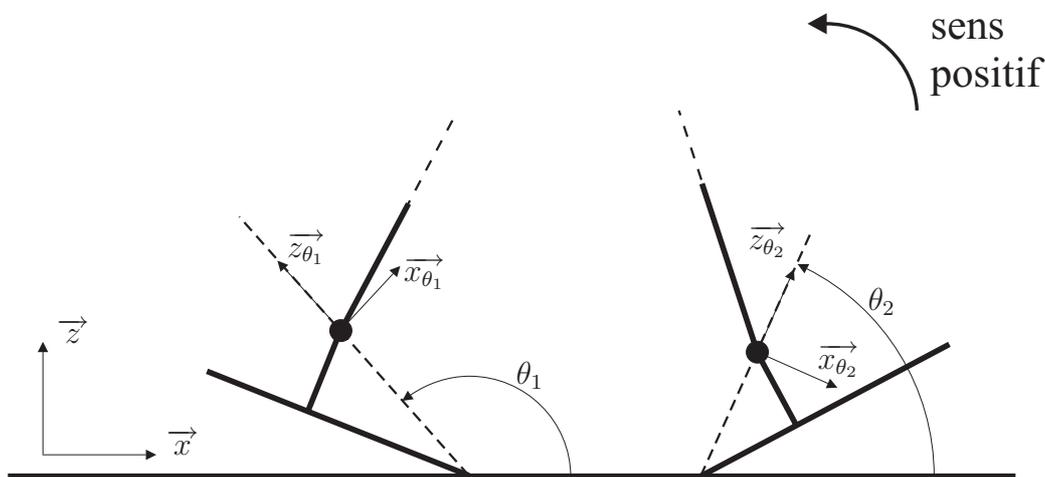


FIG. D.2 – Notation de l'orientation des pieds pour les besoins de l'impact.

Dans un souci d'analogie avec le cas sans pieds, nous noterons  $V_1$  et  $V_2$  les vitesses des chevilles, et  $I_{R_1}$  et  $I_{R_2}$  les réactions des pieds sur les chevilles. Il est à remarquer que les pieds étant sans masse, le principe fondamental de la dynamique appliqué aux pieds nous donne que  $I_{R_1}$  et  $I_{R_2}$  sont aussi les réactions du sol sur les pieds. De plus les points d'application de ces réactions du sol sur les pieds seront sur les droites passant par les chevilles et ayant pour direction les réactions du sol, comme représenté figure D.3.

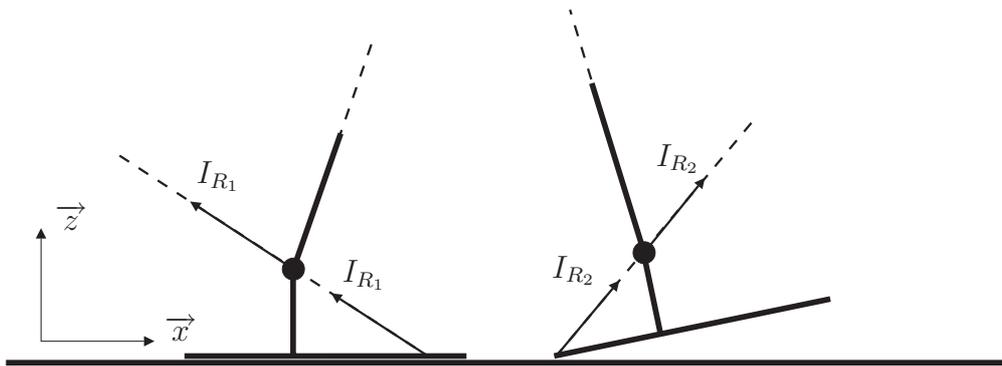


FIG. D.3 – Propriétés des réactions du sol sur les pieds et des réactions des pieds sur les chevilles, compte tenu que la masse des pieds est nulle.

Nous notons également dans les repères liés aux pieds les vitesses  $V_{1\theta_1}$  du pied 1 et  $V_{2\theta_2}$  du pied 2 et les réactions du sol  $I_{R_1\theta_1}$  du pied 1 et  $I_{R_2\theta_2}$  du pied 2 dont les relations avec ces grandeurs dans le repère  $(\vec{x}, \vec{z})$  sont données par les équation (D.1), (D.2), (D.3) et (D.4).

$$V_{1\theta_1} = M_{\theta_1} V_1 \quad (\text{D.1})$$

$$V_{2\theta_2} = M_{\theta_2} V_2 \quad (\text{D.2})$$

$$I_{R_1\theta_1} = M_{\theta_1} I_{R1} \quad (\text{D.3})$$

$$I_{R_2\theta_2} = M_{\theta_2} I_{R2} \quad (\text{D.4})$$

où :

$$M_{\theta_1} = \begin{bmatrix} \sin(\theta_1) & -\cos(\theta_1) \\ \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \end{bmatrix} \quad (\text{D.5})$$

$$M_{\theta_2} = \begin{bmatrix} \sin(\theta_2) & -\cos(\theta_2) \\ \cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) \end{bmatrix} \quad (\text{D.6})$$

Lorsque le pied bascule autour d'une de ses extrémités, les vitesses des points de contact des pieds avec le sol ne sont plus les mêmes que celles des chevilles. Nous introduisons alors les vitesses de ces extrémités des pieds  $V_{e1}$  pour l'extrémité du pied 1,  $V_{e2}$  pour l'extrémité du pied 2, ainsi que  $V_{e1\theta_1}$  et  $V_{e2\theta_2}$  lorsque ces vitesses sont exprimées dans les repères liés aux pieds. Ces vitesses sont représentées sur la figure D.4. Les relations de passages du repère absolu aux repères liés aux pieds sont les mêmes que pour les vitesses des chevilles (D.1), et (D.2).

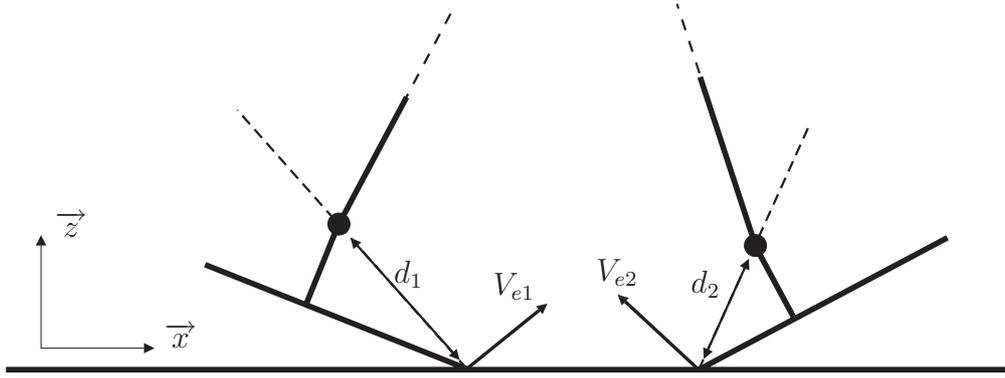


FIG. D.4 – Notation des vitesses des extrémités des pieds  $V_{e1}$  et  $V_{e2}$  et des distances entre les chevilles et les extrémités des pieds  $d_1$  et  $d_2$ .

Nous donnons ici les relations (D.7) et (D.8) de passage des vitesses des extrémités des pieds aux vitesses des chevilles, faisant intervenir la notation des distances présentée sur la figure D.4.

$$\begin{cases} V_{1x\theta_1} = V_{e1x\theta_1} - d_1\dot{\theta}_1 \\ V_{1z\theta_1} = V_{e1z\theta_1} \end{cases} \quad (\text{D.7})$$

$$\begin{cases} V_{2x\theta_2} = V_{e2x\theta_2} - d_2\dot{\theta}_2 \\ V_{2z\theta_2} = V_{e2z\theta_2} \end{cases} \quad (\text{D.8})$$

### D.2.2 Lois de comportement pour le pied arrière à plat

Dans le cas où le pied arrière est à plat au sol, il peut avoir les comportements suivants :

- le pied arrière reste à plat au sol sans glisser
- le pied arrière reste à plat au sol en glissant
- le pied arrière bascule autour de son extrémité avant sans glisser
- le pied arrière bascule autour de son extrémité avant en glissant
- le pied arrière décolle du sol

Pour simplifier l'étude, nous ne considérons pas le basculement du pied arrière autour du talon bien que d'un point de vue théorique cette situation puisse arriver. Nous pensons que ce comportement est très dur à obtenir, sinon impossible, dans les cas que nous allons étudier, et sa non prise en compte ne changera donc pas les résultats de l'étude.

Nous détaillons maintenant les équations pour chacun des cas sur le pied arrière. Ces équations s'écrivent au niveau du contact entre le pied et le sol, mais nous les présentons ici ramenées en des conditions sur les vitesses de la cheville et les réactions du pied sur la cheville. Nous faisons cela pour avoir une formulation de l'impact avec les modèles que nous avons déjà présentés pour le robot sans pieds.

Les équations du cas où le pied reste au sol sans glisser sont données dans le cas du modèle algébrique par (D.9) incluant les contraintes associées. Dans ce cas, le pied restant

fixe la vitesse du pied est nulle comme pour la cheville, nous écrivons donc directement les équations de non décollement sans glissement au niveau de la cheville.

$$\begin{cases} V_1^+ = 0 \\ -fI_{R_1z} \leq I_{R_1x} \leq fI_{R_1z} \\ I_{R_1x\theta_1} \geq 0 \end{cases} \quad (\text{D.9})$$

On retrouve les conditions de non décollement et non glissement du robot sans pieds (2.10) avec en plus la dernière inégalité de (D.9) qui correspond à la condition de non basculement du pied autour de l'extrémité avant. Elle correspond au fait que le point d'application de la réaction du sol sur le pied est situé sur le pied. Cette équation s'écrit simplement sur la réaction au niveau de la cheville à partir des propriétés reliant les réactions du sol sur le pied et du pied sur la cheville représentées figure D.3 du fait que le pied est sans masse.

Les équations du cas où le pied reste au sol en glissant sont données dans le cas du modèle algébrique par (D.10) incluant les contraintes associées dont la condition de non basculement. Comme pour le cas précédent, le pied n'étant pas en rotation, la vitesse de la cheville est la même que tout point du pied, nous écrivons donc directement les équations de non décollement avec glissement au niveau de la cheville.

$$\begin{cases} V_{1z}^+ = 0 \\ I_{R_1x} = -f\text{sign}(V_{1x}^+)I_{R_1z} \\ I_{R_1z} \geq 0 \\ I_{R_1x\theta_1} \geq 0 \end{cases} \quad (\text{D.10})$$

On retrouve les équations du cas de non décollement et glissement du robot sans pieds (2.9) avec comme le cas précédent la condition de non basculement.

Les équations du cas où le pied bascule sans glisser sont données dans le cas du modèle algébrique par (D.11) au niveau de l'extrémité du pied.

$$\begin{cases} V_{e1}^+ = 0 \\ I_{R_1x\theta_1} = 0 \\ -fI_{R_1z} \leq I_{R_1x} \leq fI_{R_1z} \\ \dot{\theta}_1^+ \leq 0 \end{cases} \quad (\text{D.11})$$

Ces relations sont équivalentes à celles d'une condition de non décollement et non glissement comme (2.10) pour le robot sans pieds, mais avec deux relations supplémentaires : la deuxième relation correspond au fait que la réaction du pied est située le long de l'axe  $\vec{z}_{\theta_1}$ , lors d'un basculement et la dernière relation signifie que le pied ne bascule pas en pénétrant dans le sol. Par les relations cinématiques sur les vitesses (D.7) et les relations de changement de repère (D.1) nous déduisons de nouvelles équations portant sur les vitesses des chevilles (D.12).

$$\begin{cases} V_{1z\theta_1}^+ = 0 \\ I_{R_1x\theta_1} = 0 \\ -fI_{R_1z} \leq I_{R_1x} \leq fI_{R_1z} \\ V_{1x\theta_1}^+ \geq 0 \end{cases} \quad (\text{D.12})$$

La dernière inégalité est la relation de non pénétration dans le sol lors du basculement. Elle peut aussi s'écrire  $V_{1z}^+ \geq 0$  dans le cas où  $\theta_1 \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ .

Les équations du cas où le pied bascule en glissant sont données dans le cas du modèle algébrique par (D.13) au niveau de l'extrémité du pied.

$$\begin{cases} V_{e1z}^+ = 0 \\ I_{R_1x\theta_1} = 0 \\ I_{R_1x} = -f\text{sign}(V_{e1x}^+)I_{R_1z} \\ I_{R_1z} \geq 0 \\ \dot{\theta}_1^+ \leq 0 \end{cases} \quad (\text{D.13})$$

On retrouve les conditions de non décollement avec glissement du robot sans pied (2.9) mais avec les deux mêmes relations supplémentaires que le système (D.11) : la deuxième relation qui correspond à l'alignement de la réaction du sol avec l'axe  $\vec{z}_{\theta_1}$ , et la dernière relation de non pénétration dans le sol. En faisant intervenir les relations cinématiques (D.7) et les relations de changement de repère (D.3) et (D.1) et en simplifiant le système on obtient l'un ou l'autre des cas (D.14) et (D.15). Ces cas ont été obtenus en considérant que  $\theta_1 \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ , ce qui est le cas des robots bipèdes. Les équations seraient différentes pour d'autres valeurs de  $\theta_1$ .

$$\begin{cases} I_{R_1x\theta_1} = 0 \\ \cos(\theta_1) - f\text{sign}(V_{1z\theta_1}^+) \sin(\theta_1) = 0 \\ V_{1z}^+ \geq 0 \\ I_{R_1z\theta_1} \geq 0 \end{cases} \quad (\text{D.14})$$

L'équation (D.14) n'est valable que lorsque l'orientation du pied est située selon le cône de frottement. Dans ce cas il y a glissement du pied en basculement avec des efforts non nuls du sol. Il y a une infinité de solutions, le système (D.14) n'introduisant qu'une équation supplémentaire. Dans la future étude des comportements possibles après impact, nous ne tiendrons pas compte de ce cas car il se réduit à une frontière.

$$\begin{cases} I_{R_1} = 0 \\ \cos(\theta_1) + f \sin(\theta_1) < 0 \\ V_{1z}^+ \geq 0 \\ V_{1z\theta_1}^+ \leq 0 \end{cases} \quad (\text{D.15})$$

Cette équation (D.15) est obtenue lorsque l'orientation du pied est en dehors du cône de frottement. La contrainte sur l'orientation de  $\theta_1$ , la deuxième ligne de (D.15) vient du fait que nous avons considéré le glissement impossible lorsque les efforts du sol qui sont selon la direction  $\theta_1$  sont dans le cône de frottement. Cette contrainte n'est pas évidente a priori car le pied sans masse peut se mettre à glisser sans efforts du sol, et donc pourrait glisser même lorsque  $\vec{z}_{\theta_1}$  est dans le cône de frottement. Pour expliquer rigoureusement cette contrainte supplémentaire, il faudrait peut-être étudier le comportement du pied lorsque ses paramètres inertiels tendent vers 0, étude qui ne nous semble pas simple. Pour justifier l'introduction de cette contrainte, nous nous contenterons de sa cohérence physique et de constater que son introduction a permis de lever l'indétermination entre le glissement et le non glissement lors du basculement et n'a pas introduit d'inconsistance.

La contrainte donnée en dernière ligne de (D.15) signifie que pour avoir cette phase de glissement  $V_{1z\theta_1}$  doit être vers le sol. Il nous paraît logique que si la composante  $V_{1z\theta_1}$  est dirigée hors du sol il y aura plutôt un décollement du pied. Mais cette contrainte, bien que paraissant logique n'a pas été obtenue à partir des conditions de contact sur l'extrémité du pied (D.13). Comme pour le cas de la contrainte sur l'orientation de  $\theta_1$ , nous pensons que cette contrainte pourrait être obtenue en considérant le problème avec des pieds de masse non nulle puis en faisant tendre la masse des pieds vers 0. L'ajout de cette contrainte a également permis de résoudre une indétermination sans ajouter d'inconsistance.

Nous pouvons remarquer que le cas du basculement avec glissement (D.15) entraîne que les réactions du sol sont nulles, ce qui correspond également aux équations d'un décollement du pied arrière. Ces réactions sont nulles car les pieds sont sans masse. En quelque sorte, un effort nul suffit à mettre le pied en rotation pour qu'il ne pénètre pas le sol. Là encore, il faudrait étudier le comportement du pied lorsque la masse du pied tend vers 0 pour obtenir cette contrainte plus rigoureusement.

Les équations du cas où le pied décolle sont données dans le cas du modèle algébrique par (D.16) incluant les contraintes associées.

$$\begin{cases} I_{R_1} = 0 \\ V_{1z}^+ \geq 0 \\ V_{1z\theta_1}^+ \geq 0 \end{cases} \quad (\text{D.16})$$

On retrouve les conditions de décollement du robot sans pied (2.5) mais avec la relation supplémentaire de non pénétration de l'extrémité du pied dans le sol, située à la dernière ligne. Comme pour le cas de du basculement avec glissement, pour justifier rigoureusement cette contrainte, il faudrait étudier l'évolution des contraintes du cas avec des pieds de paramètres inertiels non nuls lorsque ceux-ci tendent vers 0.

Nous donnons maintenant ces même lois de comportement dans le cas du modèle différentiel. Nous avons présenté le modèle différentiel sous trois formes différentes : sous

forme d'équations différentielles, sous une forme intégrée de ces équations différentielles et sous une forme algébrique. Nous allons ici donner le modèle sous la forme intégrée car c'est celle qui est la plus pratique pour la mise en oeuvre. Les lois de comportement ont une forme similaire au cas du modèle algébrique, nous ne détaillons par leur obtention. Nous avons donc pour le pied 1 à plat le cas du non décollement et non glissement (D.17), du non décollement avec glissement (D.18), du basculement sans glissement (D.19), du basculement avec glissement (D.20) et du décollement (D.21).

$$\begin{cases} V_1(\tau) = 0 \\ -fI_{R_1z}(\tau) \leq I_{R_1x}(\tau) \leq fI_{R_1z}(\tau) \\ I_{R_1x\theta_1}(\tau) \geq 0 \end{cases} \quad (\text{D.17})$$

$$\begin{cases} V_{1z}(\tau) = 0 \\ I_{R_1x}(\tau) = -f\text{sign}(V_{1x}(\tau))I_{R_1z}(\tau) \\ I_{R_1z}(\tau) \geq 0 \\ I_{R_1x\theta_1}(\tau) \geq 0 \end{cases} \quad (\text{D.18})$$

$$\begin{cases} V_{1z\theta_1}(\tau) = 0 \\ I_{R_1x\theta_1}(\tau) = 0 \\ -fI_{R_1z}(\tau) \leq I_{R_1x}(\tau) \leq fI_{R_1z}(\tau) \\ V_{1x\theta_1}(\tau) \geq 0 \end{cases} \quad (\text{D.19})$$

$$\begin{cases} I_{R_1}(\tau) = 0 \\ \cos(\theta_1) + f\sin(\theta_1) < 0 \\ V_{1z}(\tau) \geq 0 \\ V_{1z\theta_1}(\tau) \leq 0 \end{cases} \quad (\text{D.20})$$

$$\begin{cases} I_{R_1}(\tau) = 0 \\ V_{1z}(\tau) \geq 0 \\ V_{1z\theta_1}(\tau) \geq 0 \end{cases} \quad (\text{D.21})$$

Il y a également les mêmes conditions de fin de phase que pour le cas sans pieds (2.27), (2.28) et (2.29), mais il peut ici aussi y avoir la fin du basculement et la fin du glissement pendant le basculement. Cependant dans le cas où  $\theta_1 \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$  la fin du basculement correspond à la fin du décollement (2.28). La fin du glissement pendant le basculement est donnée par (D.22).

$$\begin{cases} V_{1z\theta_1}^{k-1} \neq 0 \\ V_{1z\theta_1}(\tau) = 0 \end{cases} \quad (\text{D.22})$$

### D.2.3 Lois de comportement pour le pied arrière sur son extrémité

Dans le cas où le pied arrière est en basculement autour de son extrémité avant, il peut seulement y avoir les comportements suivants :

- le pied arrière bascule autour de son extrémité avant sans glisser
- le pied arrière bascule autour de son extrémité avant en glissant
- le pied arrière décolle du sol

Dans ce cas les lois de comportement sont les mêmes que dans le cas où le pied 1 est à plat au sol, sauf qu'il n'y a plus la contrainte de non pénétration du plat du pied dans le sol. Dans le cas du modèle algébrique, le cas de basculement sans glissement est donné par (D.23), le cas de basculement avec glissement est donné par (D.24) et le cas de décollement est donné par (D.25).

$$\begin{cases} V_{1z\theta_1}^+ = 0 \\ I_{R_1x\theta_1} = 0 \\ -fI_{R_1z} \leq I_{R_1x} \leq fI_{R_1z} \end{cases} \quad (\text{D.23})$$

$$\begin{cases} I_{R_1} = 0 \\ \cos(\theta_1) + f \sin(\theta_1) < 0 \\ V_{1z\theta_1}^+ \leq 0 \end{cases} \quad (\text{D.24})$$

$$\begin{cases} I_{R_1} = 0 \\ V_{1z\theta_1}^+ \geq 0 \end{cases} \quad (\text{D.25})$$

Dans le cas du modèle différentiel, le cas de basculement sans glissement est donné par (D.26), le cas de basculement avec glissement est donné par (D.27) et le cas de décollement est donné par (D.28).

$$\begin{cases} V_{1z\theta_1}(\tau) = 0 \\ I_{R_1x\theta_1}(\tau) = 0 \\ -fI_{R_1z}(\tau) \leq I_{R_1x}(\tau) \leq fI_{R_1z}(\tau) \end{cases} \quad (\text{D.26})$$

$$\begin{cases} I_{R_1}(\tau) = 0 \\ \cos(\theta_1) + f \sin(\theta_1) < 0 \\ V_{1z\theta_1}(\tau) \leq 0 \end{cases} \quad (\text{D.27})$$

$$\begin{cases} I_{R_1}(\tau) = 0 \\ V_{1z\theta_1}(\tau) \geq 0 \end{cases} \quad (\text{D.28})$$

Les conditions de fin de phase possibles sont la fin du décollement et la fin du glissement pendant le basculement. Ces deux conditions de fin sont données dans ce cas par la même condition (D.22).

Il est à noter que dans le cas présent où le pied arrière est en rotation autour de son extrémité, la vitesse de la cheville  $V_{1x\theta_1}^-$  n'a pas d'influence sur le comportement obtenu après impact. En effet, en écrivant le modèle d'impact dans le cas présent on peut remplacer la variation de vitesse de la cheville 1 selon  $\vec{x}_{\theta_1}$ ,  $V_{1x\theta_1}^+ - V_{1x\theta_1}^-$  par une autre variable. Ainsi la solution du modèle d'impact ne dépend plus de  $V_{1x\theta_1}^-$ , et au final seul  $V_{1x\theta_1}^+$  en dépend. Cela a pour conséquence que nous n'aurons pas à étudier l'influence de cette composante de vitesse dans les comportements possibles à l'impact dans le cas où le pied arrière est en rotation autour de son extrémité.

#### D.2.4 Lois de comportement pour le pied avant à plat

Dans le cas où le pied avant est à plat, il ne rebondit pas et nous avons choisi de considérer seulement les cas où il reste à plat sans glissement ou avec glissement. Il pourrait également y avoir les cas de basculement autour des extrémités à l'impact, mais ces cas nous semblent difficiles à obtenir, et l'on cherche à les éviter dans le cadre d'une marche. Nous ne les avons donc pas considérés pour simplifier l'étude. Dans ce cas les lois de comportement du pied avant sont les mêmes que dans le cas sans pieds. Dans le cas du modèle algébrique ces lois de comportement sont (2.12) pour le cas sans glissement et (2.11) pour le cas avec glissement. Dans le cas du modèle différentiel ces lois de comportement sont (2.25) pour le cas sans glissement et (2.26) pour le cas avec glissement.

#### D.2.5 Lois de comportement pour le pied avant sur le talon

Dans ce cas les seuls comportements possibles sont la rotation autour du talon du pied 2 sans glissement et avec glissement. Ces cas sont similaires aux cas de basculement du pied arrière lorsque celui-ci est déjà en basculement au moment de l'impact. Le cas sans glissement est donné par (D.29) et le cas avec glissement par (D.30). Ces lois de comportement sont ici écrites pour  $\theta_2 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , ce qui inclut le cas des robots bipèdes.

$$\begin{cases} V_{2z\theta_2}^+ = 0 \\ I_{R_2x\theta_2} = 0 \\ -fI_{R_2z} \leq I_{R_2x} \leq fI_{R_2z} \end{cases} \quad (\text{D.29})$$

$$\begin{cases} I_{R_2} = 0 \\ -\cos(\theta_2) + f \sin(\theta_2) < 0 \\ V_{2z\theta_2}^+ \leq 0 \end{cases} \quad (\text{D.30})$$

Il est important de remarquer que la condition de non glissement lors du basculement, sachant que  $I_{R_2x\theta_2} = 0$ , donne  $-\cos(\theta_2) + f \sin(\theta_2) > 0$ . Le comportement de rotation avec glissement ou non glissement dépend donc uniquement de l'orientation de l'axe  $\vec{z}_{\theta_2}$ . Pour une configuration d'impact donnée, le comportement du pied avant sera donc unique.

De plus, en considérant le cas où la vitesse de l'extrémité du pied arrière est nulle juste avant impact, il est possible de montrer que l'impact différentiel ne donnera qu'une seule phase. En effet nous avons vu section 2.3 que les vitesses des extrémités des pieds étaient linéaires en fonction du paramètre  $\tau$ . Et si toutes les vitesses de l'extrémité du pied arrière sont nulles en début de phase, elles le resteront en cours de phase ou s'éloigneront linéairement d'une vitesse nulle. Alors aucune annulation de ces vitesses ne peut être une condition de fin de phase. La fin de phase sera donc forcément la condition de fin d'impact (2.29) qui est aussi la condition de fin d'enfoncement du pied avant dans le sol. Pour cette raison, dans le cas de l'impact du pied avant avec le talon, le modèle d'impact différentiel est complètement équivalent au modèle d'impact algébrique. Dans la suite, nous ne considérerons donc que le modèle algébrique, plus simple.

De plus nous remarquerons que lorsqu'il y a glissement du pied avant, les efforts du pied avant seront nulles, ce qui fait qu'il n'y a en fait pas d'impact. L'impact sur le talon n'a pas lieu et c'est donc par la suite un impact le pied à plat qui aura lieu.

Il est aussi important de remarquer que dans le cas d'un impact avec le talon du pied avant, l'orientation du vecteur vitesse juste avant impact  $V_2^-$  n'a d'importance que dans la mesure où l'impact a lieu, c'est-à-dire que  $V_{2z\theta_2}^-$  est négatif. En effet il est possible de remarquer en écrivant le modèle d'impact dans le cas d'un impact avec le talon du pied avant que la composante  $V_{2x\theta_2}^-$  n'a aucune influence. Comme présenté section D.2.3 il est possible de voir que quelque soit  $V_{2x\theta_2}^-$  le comportement à l'impact est inchangé et la variation de vitesse de la cheville 2 selon  $\vec{x}_{\theta_2}$ ,  $V_{2x\theta_2}^+ - V_{2x\theta_2}^-$  également. Cela a pour conséquence que nous n'aurons pas à étudier l'influence de l'orientation du vecteur vitesse  $V_2^-$  dans le cas de l'impact sur le talon du pied avant.

## D.3 Présentation des résultats d'impact avec pieds

Nous allons présenter ici les quatre cas d'impact possibles, leurs propriétés et nous allons caractériser quelles sont les conditions sur le coefficient de frottement et l'orientation des pieds afin d'obtenir les comportements désirés.

### D.3.1 Cas des deux pieds à plat

Le modèle d'impact lorsque les deux pieds sont à plat est donné par l'équation d'impact (2.21) sachant que nous utilisons le modèle différentiel, ainsi que les lois de comportement du pied 1 données en section D.2.2 et les lois de comportement du pied 2 données en section D.2.4.

Les comportements obtenus après impact dépendent de la configuration du bipède, de l'orientation du vecteur vitesse du pied 2 juste avant impact  $V_2^-$ , notée  $\theta$  et du coefficient de frottement entre le sol et le bipède  $f$ . La configuration du bipède est celle donnée figure 2.2,

mais il y a aussi l'orientation de l'axe  $\vec{z}_{\theta_1}$  notée  $\theta_1$ . Nous étudions ici l'influence de  $\theta$ ,  $\theta_1$  et  $f$ . Nous présentons figure D.5 les comportements à l'impact en fonction de  $\theta$  et  $f$  dans le cas où  $\theta_1 = 135^\circ$ . Figure D.6 nous représentons les comportements de non glissement et de basculement du pied arrière en fonction de  $\theta$ ,  $\theta_1$  et  $f$ . Nous constatons que seul le cas avec glissement du pied avant est possible. De plus le cas de non décollement et non glissement des deux pieds est impossible comme nous pouvions nous y attendre suite à l'étude déjà faite pour l'impact sans pied. En effet le fait de considérer la possibilité de basculement des pieds ne peut faire que diminuer les possibilités de non décollement.

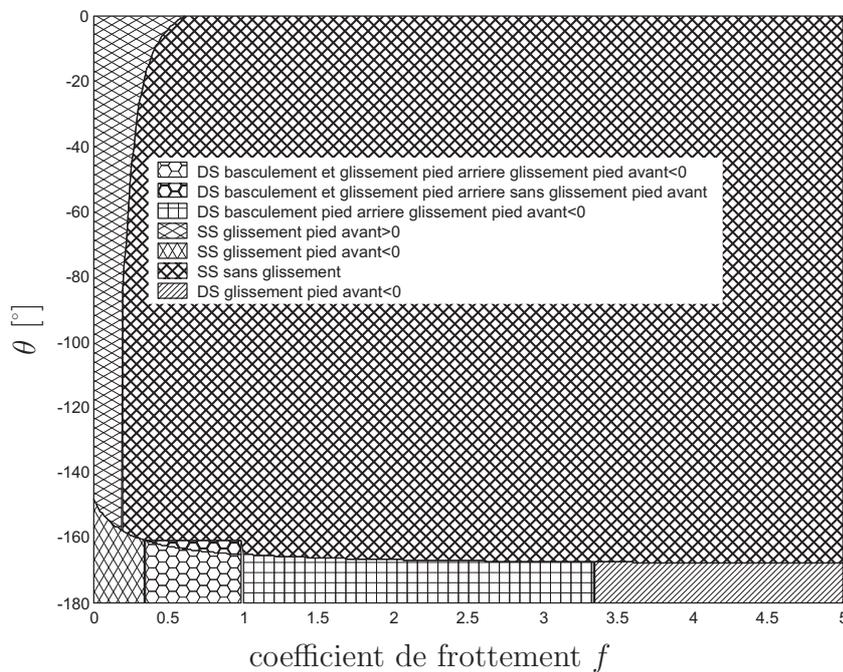


FIG. D.5 – Comportements après impact dans le cas où les deux pieds sont à plat au sol au moment de l'impact, en fonction de  $\theta$  et  $f$  dans le cas où  $\theta_1 = 135^\circ$ .

Le cas de l'impact avec les deux pieds à plat ne peut donc donner de phase de double support le pied arrière restant à plat ou basculant. Le fait de considérer des pieds ne permet pas dans ce cas de faciliter l'obtention d'un double support. Par contre nous pouvons considérer le même cas que sans pieds pour obtenir un double support, à savoir considérer que si le pied arrive avec une vitesse nulle il n'y a pas d'impact et donc un double support est obtenu. De plus si le pied avant était en rotation sur le talon, la condition d'impact avec une vitesse nulle est plus facile à obtenir par la commande car le robot est dans une phase de double support sur-actionnée juste avant l'impact.

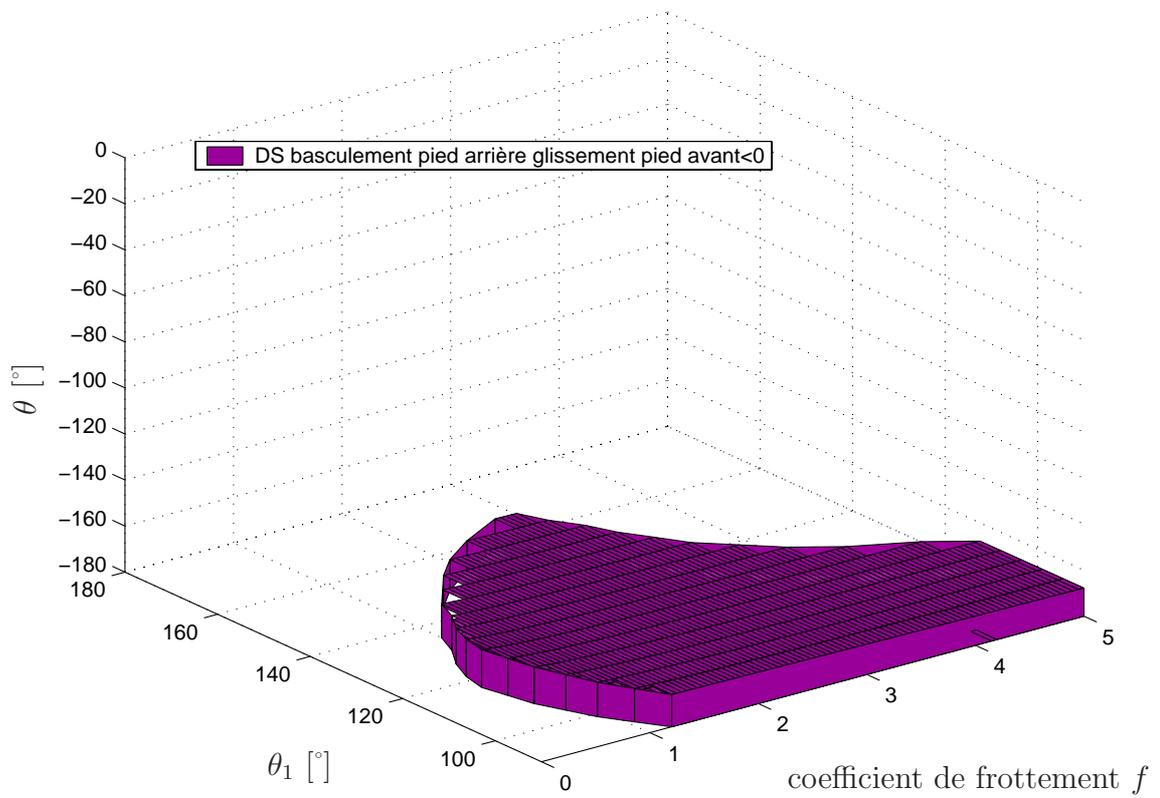


FIG. D.6 – Comportement de non glissement et basculement du pied arrière dans le cas où les deux pieds sont à plat au sol au moment de l'impact, en fonction de  $\theta$ ,  $\theta_1$  et  $f$ .

### D.3.2 Cas du pied arrière sur son extrémité et du pied avant à plat

Le modèle d'impact lorsque le pied arrière est en rotation et le pied avant à plat est donné par l'équation d'impact (2.21) sachant que nous utilisons le modèle différentiel, ainsi que les lois de comportement du pied 1 données en section D.2.3 et les lois de comportement du pied 2 données en section D.2.4.

Comme nous l'avons montré section D.2.3, les comportements obtenus après impact ne dépendent pas de la vitesse du pied arrière. Les comportements obtenus dépendent donc de la configuration du bipède, de l'orientation du pied arrière  $\theta_1$ , de l'orientation  $\theta$  du vecteur vitesse du pied avant juste avant impact et du coefficient de frottement  $f$ . Nous présentons d'abord figure D.7 les comportements obtenus en fonction de  $\theta$  et  $f$  dans le cas où  $\theta_1 = 135^\circ$ . La figure D.8 présente les comportement de non décollement et non glissement du pied arrière en fonction des 3 paramètres  $\theta$ ,  $\theta_1$  et  $f$ .

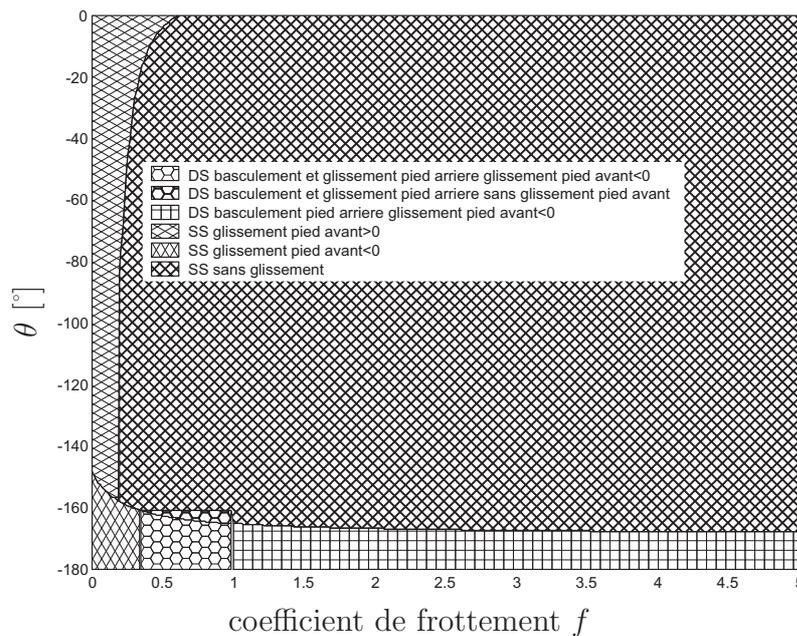


FIG. D.7 – Comportements avant impact dans le cas où le pied arrière est en basculement et le pied avant à plat au sol au moment de l'impact, en fonction de  $\theta$  et  $f$  dans le cas où  $\theta_1 = 135^\circ$ .

Nous constatons qu'il n'y a pas de grande différence avec le cas où le pied arrière est au sol, à savoir que le double support sans glissement, avec basculement du pied arrière est impossible. Comme dans le cas précédent, le double support est possible si la vitesse du pied avant est nulle juste avant l'impact, ce qui est plus facile à obtenir si le pied avant était en rotation sur le talon avant l'impact.

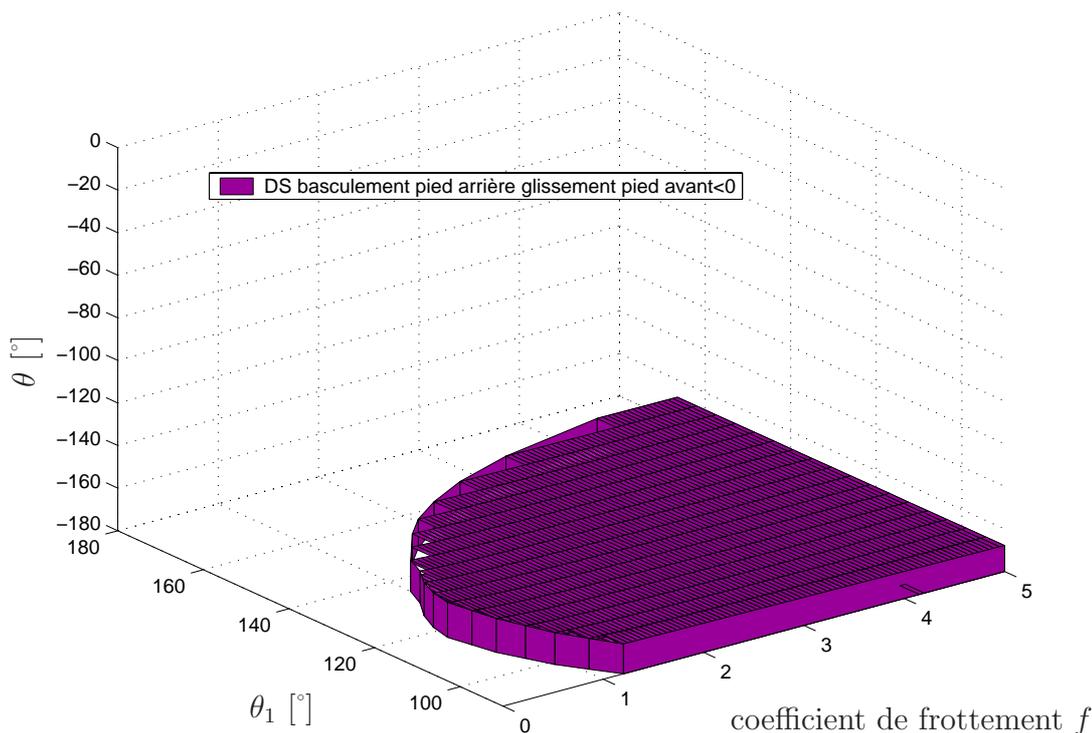


FIG. D.8 – Comportement de non glissement et basculement du pied arrière dans le cas où le pied arrière est en basculement et le pied avant à plat au sol au moment de l'impact.

### D.3.3 Cas du pied arrière à plat et du pied avant sur le talon

Dans ce cas, comme nous l'avons vu section D.2.5 les modèles algébriques et différentiels sont équivalents. Nous utilisons le modèle algébrique qui est plus simple. Le modèle d'impact est donc donné ici par le système (2.13) avec les lois de comportement du pied 1 donnée section D.2.2 et les lois de comportement du pied 2 donnée section D.2.5.

Comme nous l'avons montré section D.2.5, le comportement après impact ne dépend pas de l'orientation du vecteur vitesse du pied 2 juste avant impact  $\theta$ , si ce n'est que la composante verticale doit être dirigée vers le sol. Les comportements après impact dépendent donc de la configuration du bipède, des orientations des pieds  $\theta_1$  et  $\theta_2$  et du coefficient de frottement du sol  $f$ . Nous présentons figure D.9 les comportements possibles en fonction de  $\theta_2$  et  $f$  pour  $\theta_1 = 135^\circ$ . Nous constatons qu'un double support est alors possible si le coefficient de frottement est supérieur à 1. Cette limite correspond au cas où  $\theta_1$  est sur le bord du cône de frottement et est donnée par l'équation  $\tan(\theta_1) = -1/f$ , issue des lois de comportement de basculement avec et sans glissement du pied 1 (D.15) et (D.12). Lorsque  $\theta_1$  est dans le cône de frottement il y a non glissement lors du basculement et lorsque  $\theta_1$  est en dehors du cône de frottement il y a glissement lors du basculement. Nous pouvons également constater une frontière entre le basculement sans glissement et avec glissement du pied avant dont la frontière correspond à l'équation  $\tan(\theta_2) = 1/f$ ,

tirée des lois de comportement de basculement avec et sans glissement du pied 2 (D.30) et (D.29). Pour pouvoir obtenir un double support avec basculement des deux pieds pour un coefficient de frottement donné, on doit donc nécessairement avoir  $\theta_1 < \arctan(-1/f)$  et  $\theta_2 > \arctan(1/f)$ , ce qui n'est bien sûr pas une condition suffisante.

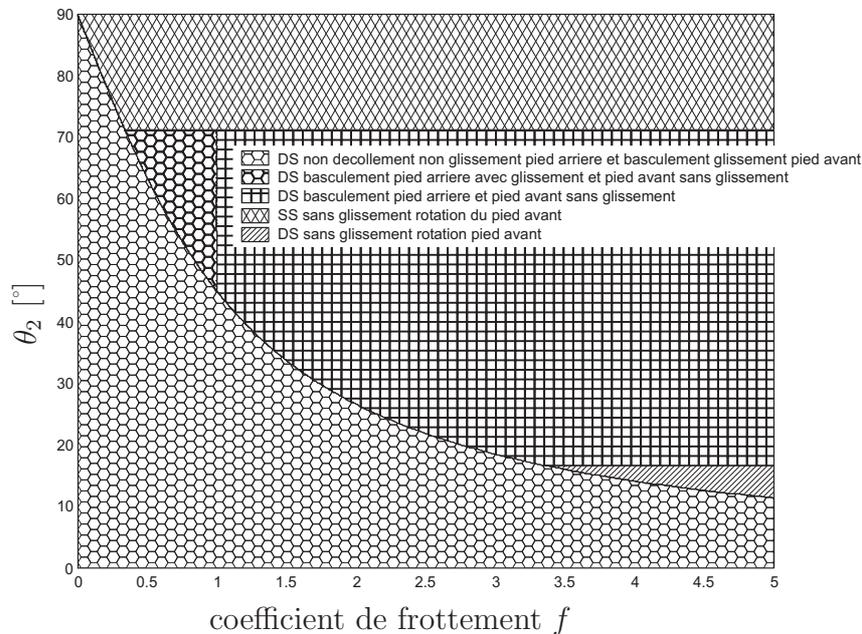


FIG. D.9 – Comportements avant impact dans le cas où le pied arrière était à plat et le pied avant sur le talon au moment de l'impact, en fonction de  $\theta_2$  et  $f$  pour  $\theta_1 = 135^\circ$ .

Sur la figure D.10 nous avons représenté les zones de comportements de double support sans glissement en fonction des 3 paramètres  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  et  $f$ . Nous pouvons y constater qu'il faut un coefficient de frottement minimum de l'ordre de  $f = 0.54$  pour pouvoir obtenir un double support après impact. Nous représentons de plus l'ensemble des comportements possibles dans ce cas, où  $\theta_1 = 118,35^\circ$  figure D.11. D'autre part on constate que si le sol a un coefficient de frottement de  $f = 1$  (coefficient de frottement rarement dépassé dans la réalité), il faut au moins que  $95^\circ < \theta_1 < 135^\circ$  et  $45^\circ < \theta_2 < 70^\circ$ . Les contraintes sur  $\theta_2$  nous semblent cohérentes avec ce que l'on peut observer chez l'homme, en revanche les contraintes sur  $\theta_1$  ne sont pas compatibles avec la physiologie de l'homme lorsque le pied arrière est à plat. En réalité il est donc possible d'obtenir des doubles supports en dehors des cas prédits par notre modèle.

### D.3.4 Cas du pied arrière sur son extrémité et du pied avant sur le talon

Le modèle d'impact est donné ici par le système (2.13) avec les lois de comportement du pied 1 données section D.2.3 et les lois de comportement du pied 2 données section

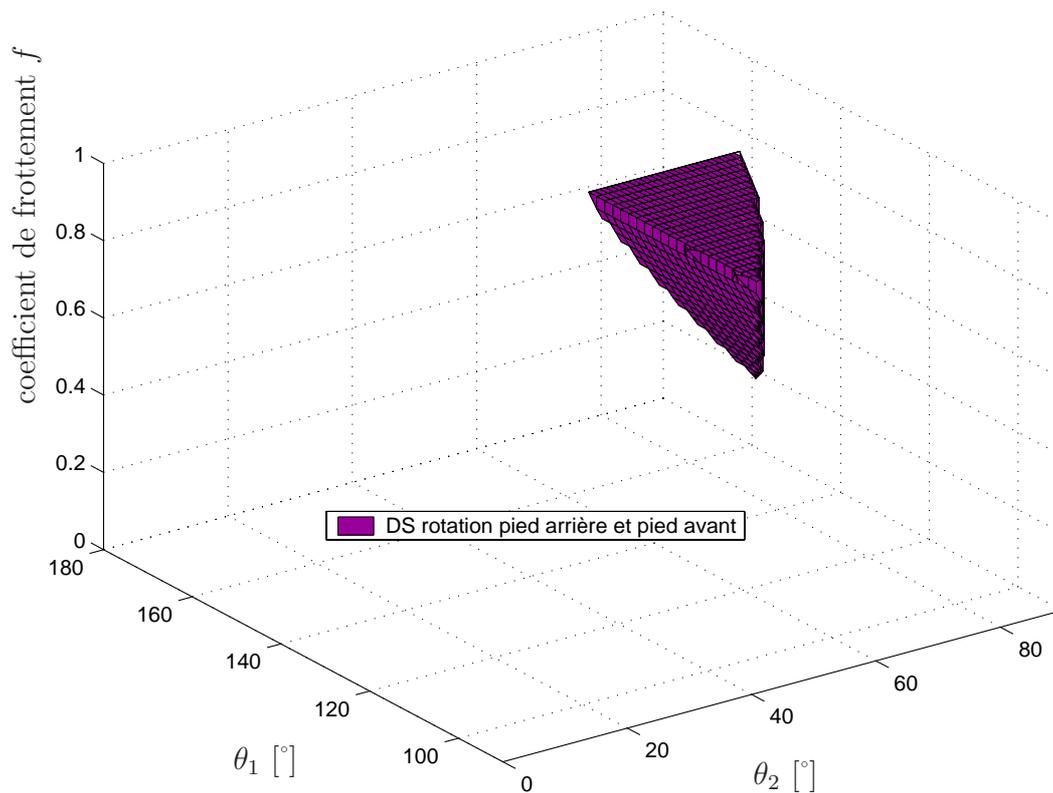


FIG. D.10 – Comportement de non glissement et basculement des deux pieds dans le cas où le pied arrière était à plat et le pied avant sur le talon au moment de l'impact.

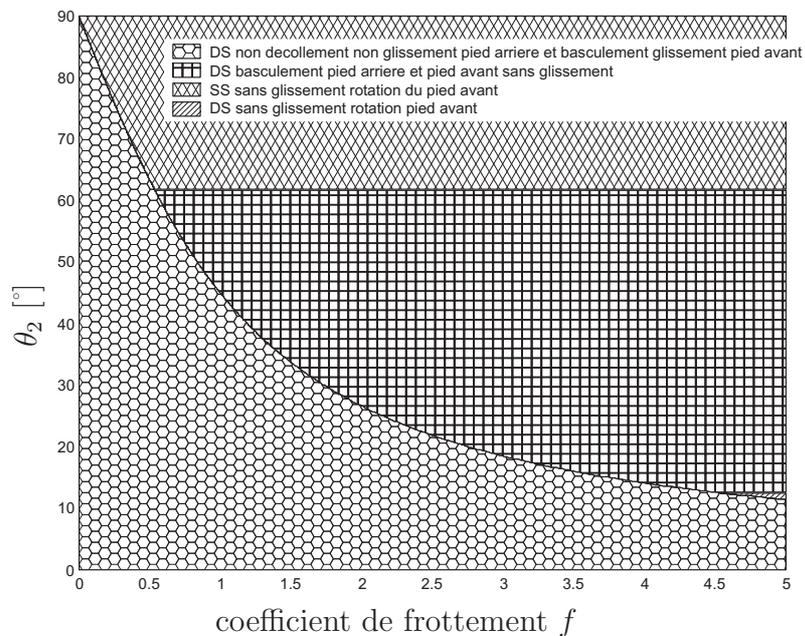


FIG. D.11 – Comportement de non glissement et basculement des deux pieds dans le cas où le pied arrière était à plat et le pied avant sur le talon au moment de l'impact, en fonction de  $\theta_2$  et  $f$  pour  $\theta_1 = 118,35^\circ$ .

## D.2.5.

Les résultats sont ici très proches du cas présenté section D.3.3 de l'impact avec le pied arrière à plat et le pied avant sur le talon. Les différences sont que les comportements avec le pied arrière à plat sont remplacés par des comportement de basculement ou décollement. Nous constatons cela figure D.12 qui présente les comportements après impact en fonction de  $\theta_2$  et  $f$  pour  $\theta_1 = 135^\circ$ , et voyons également que ces modifications n'ont lieu que pour des valeurs du coefficient de frottement du sol élevées. La représentations des zones de comportement donnant un double support en fonction des 3 paramètres  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  et  $f$  est exactement pareil que dans le cas précédent donné figure D.10. Les conditions d'obtention d'un double support sont donc exactement les mêmes que le cas précédent. Seulement dans le cas présent, le pied arrière étant levé, les cas de double support que nous avons trouvés sont réalisables dans le cas de la marche humaine. Mais, comme dans le cas précédent du pied avant à plat, le cas présent du pied avant sur le talon, les cas de double support de la marche humaine où le pied arrière est presque à plat au sol ne sont pas prédits par notre modèle.

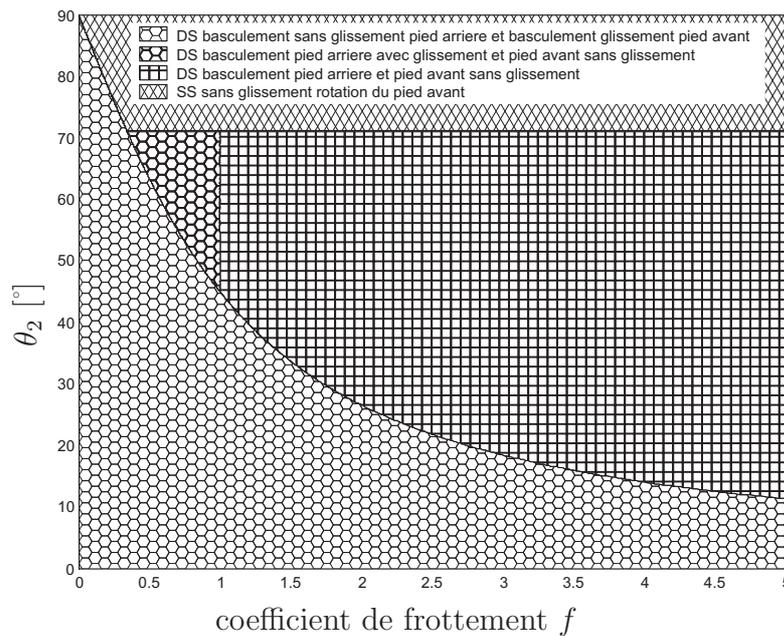


FIG. D.12 – Comportements après impact dans le cas où le pieds arrière était en basculement et le pied avant sur le talon au moment de l'impact, en fonction de  $\theta_2$  et  $f$  pour  $\theta_1 = 135^\circ$ .

## D.4 Conclusion

Nous avons trouvé pour un coefficient de frottement de l'ordre de  $f = 1$  que des marches avec double support sont possibles avec des pieds lorsque l'impact a lieu sur le

talon du pied avant, et que le pied arrière bascule alors après impact. De plus avec notre modèle d'impact nous avons trouvé que la direction entre la cheville et l'extrémité du pied avant devait être supérieure à un angle de  $45^\circ$  avec le sol. Pour un robot ayant la géométrie de l'homme, il faut donc que le pied arrière bascule avant que l'impact ait lieu. Suite à ce premier impact le bipède est en phase de double support sur le talon du pied avant et sur l'extrémité du pied arrière. Lors de l'impact du pied avant à plat notre modèle d'impact prédit qu'il ne peut y avoir de double support, sauf si cet impact n'a pas lieu, ce qui est possible en arrivant avec une vitesse du pied nulle.

Tous les résultats obtenus nous semblent tout à fait logiques. Mais il nous apparaît que pour l'homme il est possible d'obtenir des doubles supports aux moments des impacts pour des orientations du pied arrière plus proches de l'horizontale, et que l'impact du pied à plat au sol peut se faire avec des vitesses non nulles tout en obtenant un double support par la suite. Les résultats de cette étude avec des pieds nous a donc conforté dans la remise en cause des hypothèses du modèle d'impact, que nous avons déjà mises en doute suite à l'étude de l'impact sans pieds. Nous poursuivons la réflexion sur les hypothèses à remettre en cause dans la section 2.5.



# Contribution à l'étude de la marche d'un bipède

**Résumé :** Ce travail est consacré à l'étude de la marche d'un robot bipède non actionné au niveau des chevilles. Les mouvements du robot sont réduits au plan sagittal. La spécificité de l'étude actuelle est la prise en compte d'une phase de double support sur actionnée, en plus de la phase de simple support sous-actionnée.

Ce travail traite de trois points distincts.

Il traite d'abord de l'étude de l'impact du pied libre avec le sol, dans les cas avec et sans pieds. Nous avons trouvé qu'avec le modèle d'impact utilisé le seul moyen d'obtenir un double support était d'éviter l'impact. Cette étude nous a également amené à remettre en cause les hypothèses généralement faites qui conduisent au modèle d'impact que nous avons utilisé, dans le cas où des contacts ont déjà lieu au moment de l'impact.

Il traite ensuite de la génération de mouvements de marche que nous avons posée rigoureusement sous la forme d'un problème d'optimisation avec une hiérarchie de contraintes. Cette hiérarchie de contraintes consiste en une suite de contraintes où une contrainte doit être vérifiées pour que les contraintes suivantes soient définies. Une adaptation de programmes d'optimisation existants a été développée afin de tenir compte des spécificités du problème de la génération de mouvements qui a été posé. Le calcul du gradient de manière analytique a également été développé afin d'améliorer le déroulement du processus d'optimisation.

Enfin est étudiée la stabilité des dynamiques non commandées en simple support, sachant que la marche inclut la phase de double support sur-actionnée. Des conditions de stabilité sont déterminées ainsi que le domaine d'attraction pour les dynamiques non commandées en simple support. Il est aussi prouvé tout l'intérêt de la phase sur actionnée pour améliorer la stabilité de la marche.

**Mots-clés :** bipède, marche, double support, impact, sous-actionné, génération de mouvements, stabilité.

## A contribution to the study of biped walk

**Abstract :** This work is dedicated to the study of the walk of a biped without actuation of the ankle. The robot motion is restricted to the sagittal plan. A particularity of this study is the consideration of a double support, over-actuated phase, in addition to the single support, under-actuated phase.

This work deals with three distinct points.

Firstly, it deals with the study of the collision of the free leg with the ground, when considering feet or not. We have found that with the impact model used, the only way to obtain the double support phase is to avoid the impact. Furthermore this study has brought us to call into question the usual hypothesis that leads to the collision model we used, when a contact already exists at the moment of collision.

Secondly, this work deals with the walking motion generation, that we pose rigorously under the form of an optimisation problem with a hierarchy of constraints. This hierarchy of constraints consist in a sequence of constraints where a constraint needs to be satisfied so that subsequent constraints are defined. An adaptation of optimisation programs has been developed in order to deal with such problems. Furthermore, the analytic gradient has been determined in order to improve the optimisation process.

Thirdly, this work deals with the stability study of the dynamics of the under-actuated single support phase that are not controlled, considering the over-actuated double support phase. Stability conditions are given as the the convergence domain of these dynamics not controlled during the single support phase. It is also proven all the interest of this over-actuated phase to improve the stability of the walk.

**Keywords :** biped, walk, double support, collision, under-actuated, motion generation, stability.

**Discipline :** Sciences et Technologies de l'Information et des Matériaux