



HAL
open science

Contribution à l'analyse de la turbulence associée à des vitesses moyennes

Antoine Craya

► **To cite this version:**

Antoine Craya. Contribution à l'analyse de la turbulence associée à des vitesses moyennes. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université de Grenoble, 1957. Français. NNT : . tel-00684659

HAL Id: tel-00684659

<https://theses.hal.science/tel-00684659>

Submitted on 2 Apr 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Goulle
205. 142
1957
2

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

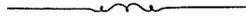
POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

M. ANTOINE CRAYA

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE



1^{re} THÈSE

CONTRIBUTION A L'ANALYSE DE LA TURBULENCE
ASSOCIÉE A DES VITESSES MOYENNES

2^e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

TECHNIQUES EXPÉRIMENTALES POUR L'ÉTUDE DE LA TURBULENCE

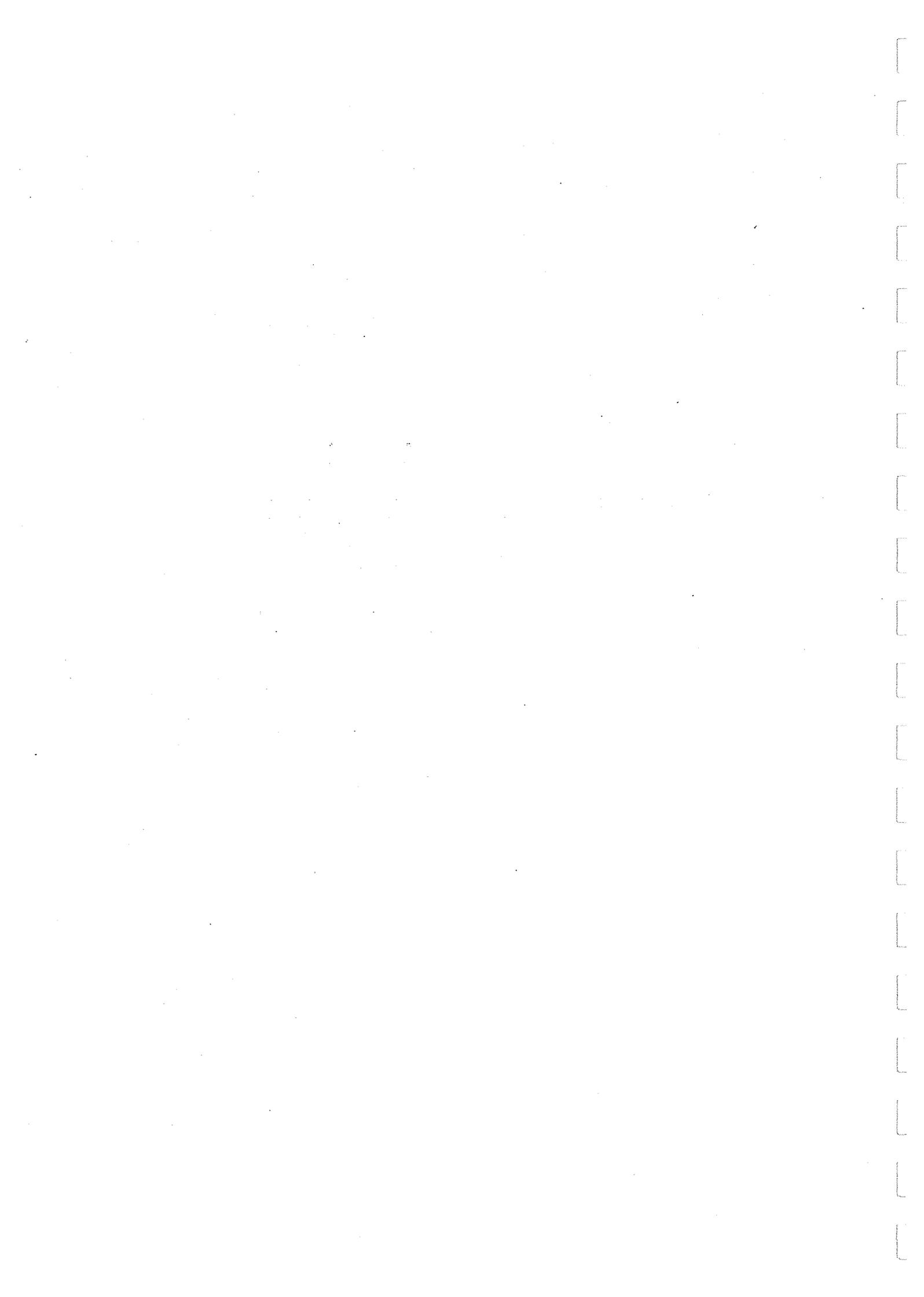
Soutenues, le 1^{er} juin 1957, devant la Commission d'Examen

BIBLIOTHÈQUE
GRENOBLE
UNIVERSITAIRE

Jury	{	MM. L. NÉEL	}	Président.
		J. KRAVTCHENKO		Examineurs.
		L. SANTON		

40244368

CONTRIBUTION
A L'ANALYSE DE LA TURBULENCE
ASSOCIÉE
A DES VITESSES MOYENNES



A ma femme,

à qui ce travail doit tant

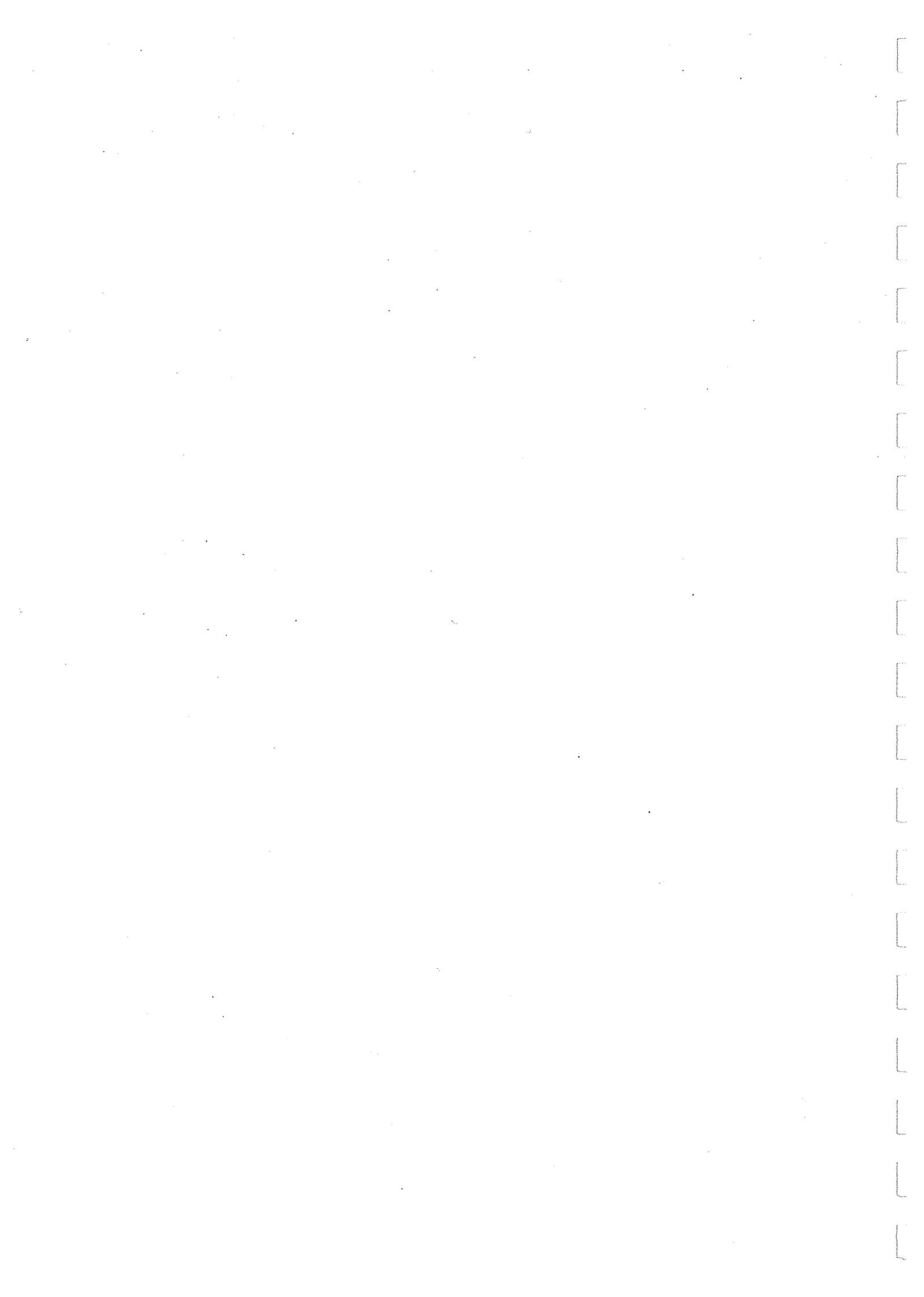


TABLE DES MATIÈRES

	PAGES
INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE PREMIER	
Équations d'évolution des corrélations en deux et trois points.....	3
1. — Champs de vitesse moyenne homogènes	3
2. — Équation dynamique des corrélations doubles	6
3. — Traduction en transformés de FOURIER	7
4. — Équation des corrélations triples en trois points	10
5. — Relation homologue des tenseurs spectraux	12
6. — Cas d'une distribution quasi normale.....	15
7. — Les tenseurs de déformation de la turbulence	16
CHAPITRE II	
Forme des tenseurs spectraux, compte tenu de l'incompressibilité	19
1. — Conséquences de l'incompressibilité pour Φ_{ijk}	19
2. — Expression des symétries	21
3. — Triades de vecteurs \vec{k} — Relations géométriques	24
4. — Procédés d'extraction des scalaires de base	27
5. — Cas de l'isotropie	29
6. — Corrélations doubles — Propriétés parallèles	31
CHAPITRE III	
Équations réduites pour les corrélations doubles	35
1. — Objectifs de recherche	35
2. — Introduction d'un système d'axes locaux	39
3. — Différentiations en axes fixes	41
4. — Équations réduites générales	43
5. — Cas d'une déformation pure plane	47
6. — L'écoulement parallèle	52
CHAPITRE IV	
Équations réduites pour les corrélations triples	54
1. — Introduction	54
2. — Les scalaires de base de A_{ijk}	55

	PAGES
3. — Les scalaires de base de B_{ijk}	57
4. — Décomposition normale de Ψ_{ijk}	64
5. — Décomposition normale de Ω_{ijk}	66
6. — Expression de Ω_{ij}	68
7. — Cas d'une déformation pure plane	69

CHAPITRE V

Moyennes en un même point	71
1. — Tensions de REYNOLDS — Moyennes de pression	71
2. — Moyennes du produit de deux dérivées de la vitesse	76
3. — Corrélations du tourbillon	80
4. — Moyennes du produit de trois dérivées de la vitesse	86
5. — Le bilan de la production et de la dissipation du tourbillon	99
BIBLIOGRAPHIE	110

INTRODUCTION

Il y a un peu plus de vingt ans se produisait, dans le domaine de la turbulence, une de ces mutations dont la Science bénéficie périodiquement et qui lui impriment, pour de longues années, une impulsion vigoureuse. Délaissant les phénomènes de turbulence usuels qui avaient, jusque-là, défié l'analyse, G. I. TAYLOR introduisait un schéma simple caractérisé par *l'absence de vitesses moyennes, l'homogénéité et l'isotropie*. L'écoulement à l'aval d'une grille dans une soufflerie lui fournissait même une réalisation facile d'une telle turbulence isotrope, circonstance considérée alors comme naturelle, regardée aujourd'hui avec un peu plus de surprise comme un accident heureux. Parallèlement, enfin, le petit instrument merveilleux qu'est le fil chaud parvenait, à force d'ingéniosité et d'électronique, à livrer à l'observation des propriétés de plus en plus fines des fluctuations de vitesse.

De leur côté les écoulements turbulents naturels n'avaient cessé d'attirer l'attention, depuis l'époque où BOUSSINESQ appliquait aux courants « tourbillonnants et tumultueux » de l'hydraulique une intuition pénétrante et très en avance sur son époque, et où REYNOLDS introduisait les moyennes d'où devaient sortir les modernes corrélations. Après les écoulements en conduite de l'hydraulique, ceux en couche limite, sillage et jet intéressant l'aéronautique, ont donc fait l'objet de nombreuses recherches, surtout expérimentales et d'interprétations théoriques simples (coefficients de diffusion turbulente et longueur de mélange) permettant, dans une certaine mesure, de mieux les comprendre. Il est toutefois bien clair qu'il subsiste un écart considérable entre la pénétration physique qu'a permis l'étude de la turbulence isotrope et la voie indépendante à laquelle, par nécessité mais à regret, a dû se limiter la turbulence usuelle.

Ce fossé pourra-t-il être comblé de sitôt et d'un seul coup ? Il est permis d'en douter et sans doute faudra-t-il encore beaucoup d'efforts patients et de tentatives dans des directions variées pour y parvenir; c'est à répondre à ce souci et à explorer une de ces directions que voudraient contribuer les pages qui suivent. Une des idées qui les ont inspirées est la constatation d'une lacune : celle d'un *modèle* théorique assez simple pour être accessible à l'analyse, assez heureux pour retenir de la réalité quelques aspects essentiels, celle, autrement dit, d'une ouverture de la théorie pour un dialogue plus fructueux avec l'expérimentation. Cet idéal est, à vrai dire, difficile à réaliser et le choix des aspects qu'il faut se résoudre à négliger ne peut manquer de soulever des objections dès le départ. Un de ces aspects est l'inhomogénéité, dont la distribution des vitesses moyennes est la manifestation la plus immédiate; un autre, caractéristique de la turbulence naturelle, est son anisotropie qu'on pourrait croire confinée aux plus gros « tourbillons » de la chaîne, mais qui semble bien marquer très profondément sa structure à des échelles beaucoup plus fines. Ces deux aspects sont tous deux importants mais

il ne semble pas qu'une même théorie puisse se donner pour objectif de les analyser dans le détail à la fois; le choix qui a été fait ici a consisté à sacrifier le premier et à se concentrer sur le second. Du schéma de TAYLOR on a donc conservé l'homogénéité mais on a introduit un *champ de vitesses moyennes*, lui-même homogène, et l'on s'est proposé d'étudier son action déformante sur la *turbulence anisotrope* associée.

Cette prise en compte de l'anisotropie ne va pas sans pénalités et elle est responsable de l'aspect, à notre gré un peu trop hérissé de symboles, des pages qui suivent; disparue est en effet la belle simplicité qui ramenait à un scalaire unique les moyennes en un ou plusieurs points, et le décompte de ces grandeurs devient maintenant à lui seul un problème; mais comment ignorer cette complexité à laquelle l'expérimentateur lui-même se heurte dans ses mesures. Au-delà, enfin, de cette multiplicité de variables, subsiste le problème central de la turbulence que constitue le mode de transfert de l'énergie entre les « tourbillons » de différentes échelles. Telles sont les difficultés, les premières plus *réductibles* qu'il ne semblerait au premier abord, les secondes pour lesquelles il a fallu tenir compte des possibilités actuelles de la théorie, entre lesquelles nous avons essayé de nous frayer un passage. Peut-être le lecteur trouvera-t-il cette voie plutôt longue et pénible; qu'il soit assuré que nous appelons de nos vœux des raccourcis plus rapides et que nous n'avons pas manqué de consacrer quelque effort à en chercher, avant de nous résoudre à cette analyse systématique.

Ce n'est pas sans quelque regret que, cédant à d'amicales instances, nous nous décidons à publier cette recherche dans son état actuel; il reste, en effet, pour lui donner sa pleine signification et aboutir à une connaissance détaillée de la structure de la turbulence associée à un champ de vitesses moyennes, un travail essentiel d'exploration numérique et de discussion à accomplir. Nous espérons qu'une présentation ordonnée et raisonnablement explicite des aspects les plus fondamentaux de la théorie y contribuera efficacement, et nous tenons à remercier M. l'Ingénieur Général de l'Air VERNOTTE pour la large hospitalité qu'il nous a accordée dans la Collection qu'il dirige. Puisse ce travail susciter d'autres recherches et contribuer ainsi à une solution progressive de cette « désespérante énigme » de la turbulence.

ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION DES CORRÉLATIONS EN DEUX ET TROIS POINTS

1,1 CHAMPS DE VITESSE MOYENNE HOMOGENES

Nous appelons ainsi un champ de vitesses moyennes \bar{u}_i tel que :

$$\lambda_{lm} = \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_m}$$

demeure constant dans tout l'écoulement, lequel est, par ailleurs, supposé illimité. En ce qui concerne la turbulence associée nous supposons aussi qu'elle est homogène au sens habituel, c'est-à-dire que toute moyenne y est invariante pour toute translation de la configuration de points à laquelle elle s'applique; le tenseur $\overline{u_i u_j}$ de REYNOLDS, notamment, ne change pas d'un point à un autre (toute paroi constituée évidemment à son voisinage un obstacle à l'homogénéité puisque les fluctuations turbulentes y sont nulles).

Les équations de REYNOLDS pour l'écoulement moyen :

$$(1,1.1) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u_i u_k}}{\partial x_k} - \nu \Delta \bar{u}_i = 0$$

se réduisent alors aux équations d'EULER relatives au fluide parfait (puisque $\overline{u_i u_k}$ est constant et que $\Delta \bar{u}_i = 0$ en raison de la linéarité de la distribution des \bar{u}_i). Bien entendu, chaque portion de volume perd de l'énergie par dissipation visqueuse et production d'énergie turbulente mais cette perte est exactement compensée par le travail des tensions de NAVIER et de REYNOLDS à la périphérie.

Si l'écoulement est permanent, l'accélération du mouvement moyen est un gradient, et son rotationnel est nul. On a donc comme condition de permanence (ce qui revient à considérer les équations de HELMHOLTZ) :

$$0 = (\text{rot } \vec{J})_i = \bar{u}_k \frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial x_k} + \bar{\omega}_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}$$

Le premier terme est nul, puisque le tourbillon est constant, et le second peut s'écrire :

$$\frac{1}{2} \overline{\omega_k} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \overline{\omega_k} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} - \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_i} \right),$$

expression qui se réduit identiquement à son premier terme. En axes principaux des déformations les conditions de permanence sont donc :

$$\overline{\omega_1} \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_1} = 0, \quad \overline{\omega_2} \frac{\partial \overline{u_2}}{\partial x_2} = 0, \quad \overline{\omega_3} \frac{\partial \overline{u_3}}{\partial x_3} = 0.$$

Il en résulte que l'écoulement pourra demeurer permanent dans trois cas :

— d'abord, s'il est irrotationnel :

$$(a) \quad \overline{\omega_1} = \overline{\omega_2} = \overline{\omega_3} = 0;$$

— ensuite, s'il n'y a pas de déformation pure, c'est-à-dire dans le cas d'une rotation en bloc :

$$(b) \quad \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_1} = \frac{\partial \overline{u_2}}{\partial x_2} = \frac{\partial \overline{u_3}}{\partial x_3} = 0;$$

— enfin, si l'on a :

$$(c) \quad \overline{\omega_1} = \overline{\omega_2} = 0, \quad \frac{\partial \overline{u_3}}{\partial x_3} = 0,$$

ce qui comprend notamment tous les écoulements plans.

On calcule aisément la distribution de pression moyenne en axes principaux et en supposant réalisées les conditions de permanence; posant :

$$\frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_1} = a_1, \quad \frac{\partial \overline{u_2}}{\partial x_2} = a_2, \quad \frac{\partial \overline{u_3}}{\partial x_3} = a_3,$$

on a :

$$\frac{\overline{p}}{\rho} = -\frac{1}{2} (a_1^2 x_1^2 + a_2^2 x_2^2 + a_3^2 x_3^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{\overline{\omega}}{2} \right)^2 r'^2,$$

où r' est la distance d'un point M à l'axe de rotation issu de l'origine. Cette distribution est donc la somme de celles qui résulteraient de la déformation pure et de la rotation en bloc prises séparément; la même propriété appartient aux distributions des accélérations et entraîne la précédente.

Un écoulement plan remarquable et familier est celui où seul $\partial \overline{u_1} / \partial x_2$ est non nul; la pression y est uniforme. C'est d'ailleurs le seul champ de vitesse homogène jouissant de cette propriété, comme on le montre aisément à partir de l'expression qui précède de la pression.

L'accroissement sans limite de la vitesse et, en général, de la pression à l'infini, semble d'abord conférer au schéma du champ homogène un caractère peu réaliste. On

peut cependant en réaliser, tout au moins en ce qui concerne les vitesses moyennes, des portions limitées. Considérons, par exemple, l'écoulement irrotationnel caractérisé en axes principaux par $a_1 a_2 a_3$ dont, d'ailleurs, la somme est nulle par l'incompressibilité; on posera :

$$\frac{a_2}{a_1} = m, \quad \frac{a_3}{a_1} = -(1 + m).$$

Du fait que chaque composante de la vitesse ne dépend que de l'abscisse correspondante :

$$\overline{u_1} = a_1 x_1, \quad \overline{u_2} = a_2 x_2, \quad \overline{u_3} = a_3 x_3,$$

on peut prendre pour parois (s'il n'y a pas de décollements) une section rectangulaire dont les côtés sont l_1 et l_2 et varient avec la distance x_3 , comme :

$$x_3^{-\frac{1}{1+m}} \quad \text{et} \quad x_3^{-\frac{m}{1+m}}.$$

Dans le cas particulier d'une déformation pure plane :

$$a_1 = -a_2 = a, \quad a_3 = 0,$$

les côtés doivent varier comme :

$$e^{ax_3} \quad \text{et} \quad e^{-ax_3}.$$

Cette dernière « boîte de distorsion » a été effectivement réalisée par TOWNSEND [1, 2] qui y a effectué de très intéressantes mesures. Toutefois, c'est ici le lieu de dire un mot de la deuxième face du schéma que nous avons défini, qui est l'existence d'une turbulence elle-même homogène. Dans l'expérience de TOWNSEND la turbulence pénétrant dans la section initiale de la boîte est celle à peu près isotrope et en cours d'extinction produite par une grille; elle est peu à peu déformée par l'écoulement moyen, reçoit en conséquence de l'énergie de celui-ci et la tendance à la décroissance de son intensité se redresse progressivement; il y a donc là une longue transition qui fait que la turbulence n'est pas homogène dans le sens de l'écoulement. Le lien entre le schéma théorique et l'expérience ne peut donc être, en l'occurrence, que celui bien familier de la turbulence homogène isotrope et en déclin avec sa réalisation expérimentale derrière une grille : les tranches successives dans l'espace, pour cette dernière, sont assimilées à l'évolution temporelle de sa contrepartie théorique.

Les raisons qui nous ont conduit à considérer le schéma d'une turbulence homogène associée à un champ de vitesses moyennes également homogène, ne sont pas cependant principalement tournées vers sa réalisation directe (bien qu'il soit agréable que cette possibilité existe). Notre intérêt va plutôt aux écoulements turbulents usuels (comme celui en conduite) où la turbulence est marquée par les gradients de vitesse moyenne. Il y a, semble-t-il, dans ces écoulements, beaucoup plus de choses que n'en peut embrasser une seule théorie; on y trouve des aspects globaux, comme la distribution de vitesse moyenne sur laquelle l'expérience nous a beaucoup renseigné; il est vraisemblable que pour les comprendre il faille prendre l'écoulement comme un tout (comme dans des tentatives toutes récentes ayant, pour point de départ, la théorie de l'instabilité du

régime laminaire); à l'extrême opposé il y a les propriétés des plus fins tourbillons de la turbulence tendant vers l'équilibre statistique de KOLMOGOROFF. Il y a sans doute aussi (d'après les mesures de LAUFER) des aspects intermédiaires pour lesquels l'action déformante d'un champ de vitesses moyennes sur la turbulence, le transfert d'énergie à celle-ci et sa redistribution par la pression entre les composantes, l'anisotropie qui en résulte, sont des facteurs importants. Nous pensons que le schéma homogène en retient plusieurs, qu'il peut nous instruire à leur sujet et qu'ils sont difficilement abordables par un autre moyen.

Nous nous réservons de revenir sur ces questions de principe en cours de développement de la théorie et nous allons tout d'abord nous préoccuper de l'étudier de manière déductive.

1,2 ÉQUATION DYNAMIQUE DES CORRÉLATIONS DOUBLES

Les équations de NAVIER pour le mouvement total s'écrivent en mettant en évidence les valeurs moyennes :

$$(1,2.1) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{p} + p) + \frac{\partial}{\partial t} (\bar{u}_i + u_i) + (\bar{u}_k + u_k) \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{u}_i + u_i) - \nu \Delta (\bar{u}_i + u_i) = 0.$$

En soustrayant l'équation (1,1.1) de l'écoulement moyen, compte tenu de l'homogénéité assumée, on obtient les équations du mouvement de fluctuation :

$$(1,2.2) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \bar{u}_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \nu \Delta u_i = 0.$$

Multipliant cette équation pour la composante i en M par u'_j en M' et prenant la moyenne pour un ensemble de réalisations, opérant ensuite de même avec l'équation pour la composante j en M' qui sera multipliée par u_i en M , on obtient les deux équations :

$$(1,2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p u'_j}}{\partial x_i} + \overline{u'_j \frac{\partial u_i}{\partial t}} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \overline{u_k u'_j} + \bar{u}_k \frac{\partial \overline{u_i u'_j}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u_k u_i u'_j}}{\partial x_k} - \nu \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \overline{u_i u'_j} = 0; \end{array} \right.$$

$$(1,2.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p' u_i}}{\partial x_j} + \overline{u_i \frac{\partial u'_j}{\partial t}} + \frac{\partial \bar{u}'_j}{\partial x'_k} \overline{u_i u'_k} + \bar{u}'_k \frac{\partial \overline{u_i u'_j}}{\partial x'_k} + \frac{\partial \overline{u'_k u'_j u_i}}{\partial x'_k} - \nu \frac{\partial^2}{\partial x'^2_k} \overline{u_i u'_j} = 0. \end{array} \right.$$

Si la turbulence est homogène les diverses corrélations en deux points ne dépendent que du vecteur $\overline{MM'} = \vec{r}$. Nous affectons ci-dessous un symbole à celles qui interviennent dans l'équation (1,2.3) :

$$(1,2.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{ij}(\vec{r}) = \overline{u_i u'_j}, \\ Q_{kij}(\vec{r}) = \overline{u_k u_i u'_j}, \quad T_{ij}(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial \xi_l} Q_{lij}(\vec{r}), \\ P_j(\vec{r}) = \frac{\bar{p}}{\rho} u'_j, \quad S_{ij}(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial \xi_i} P_j(\vec{r}). \end{array} \right.$$

Un obstacle à l'homogénéité apparaît à première vue dans l'équation (1,2.3) en raison du terme :

$$\overline{u_k \frac{\partial u_i u'_j}{\partial x_k}},$$

dont le coefficient $\overline{u_k}$ dépend de la position de M et non pas seulement de l'écartement $\overline{MM'}$. Corrélativement, il n'est pas possible de supposer que :

$$\overline{u'_j \frac{\partial u_i}{\partial t}}$$

est indépendant de l'origine du vecteur $\overline{MM'}$; on le comprend d'ailleurs aisément car s'il y a en M une vitesse moyenne transportant l'ensemble de la turbulence, la dérivée $\frac{\partial u_i}{\partial t}$ constatée par un observateur fixe reflète étroitement cette vitesse de transport (c'est l'hypothèse de G. I. TAYLOR permettant de traduire en soufflerie les dérivées temporelles en dérivées spatiales). Il ne faut donc pas disjoindre les deux termes en cause et c'est seulement à leur somme que l'on peut demander de vérifier l'homogénéité, comme tous les autres termes de l'équation (1,2.3).

Toute difficulté disparaît en effet si l'on additionne les équations (1,2.3) et (1,2.4), comme on le fait en turbulence homogène classique sans vitesses moyennes. On a d'abord :

$$\begin{aligned} \overline{u_k \frac{\partial u_i u'_j}{\partial x_k}} + \overline{u'_k \frac{\partial u_i u'_j}{\partial x'_k}} &= (\overline{u'_k} - \overline{u_k}) \frac{\partial R_{ij}}{\partial \xi_k} = \lambda_{km} \xi_m \frac{\partial R_{ij}}{\partial \xi_k} \\ \overline{u'_j \frac{\partial u_i}{\partial t}} + \overline{u_i \frac{\partial u'_j}{\partial t}} &= \frac{\partial R_{ij}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Le terme de pression de l'équation (1,2.4) se déduit de son homologue de l'équation (1,2.3) en permutant i et j et en prenant un écartement $\overline{M'M} = -\vec{r}$, et il en est de même pour le terme de corrélation triple. On obtient, en définitive :

$$(1,2.6) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} R_{ij} + [\lambda_{im} R_{mj} + \lambda_{jm} R_{im}] + \lambda_{lm} \xi_m \frac{\partial R_{ij}}{\partial \xi_l} \\ &- [T_{ij}(\vec{r}) + T_{ji}(-\vec{r})] - [S_{ij}(\vec{r}) + S_{ji}(-\vec{r})] - 2\nu \Delta R_{ij} = 0. \end{aligned} \right.$$

1,3 TRADUCTION EN TRANSFORMÉS DE FOURIER

Les avantages de l'introduction des transformés de FOURIER des diverses corrélations et de la formation de l'équation des tenseurs spectraux corrélative de (1,2.6), sont désormais trop bien établis pour qu'il soit utile d'y insister [3].

Nous introduisons donc :

$$(1,3.1) \quad \left\{ \begin{aligned} R_{ij}(\vec{r}) &= \int \Phi_{ij}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{k}, \\ Q_{ijk}(\vec{r}) &= -i \int \Theta_{ijk}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{k}, \\ P_j(\vec{r}) &= -i \int \Sigma_j(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{k}, \end{aligned} \right.$$

d'où il suit, à partir des définitions (1,2.5) :

$$(1,3.2) \quad \begin{cases} T_{ij}(\vec{r}) = \int k_l \Theta_{lij} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{k}, \\ S_{ij}(\vec{r}) = \int k_i \Sigma_j e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{k}. \end{cases}$$

On vérifie, d'autre part, aisément que si $C_{ij}(\vec{r})$ a pour transformé de FOURIER $\Gamma_{ij}(\vec{k})$, le transformé de $C_{ij}(-\vec{r})$ est $\Gamma_{ij}(-\vec{k})$. On a enfin besoin du transformé de $\xi_m C_{ij}$ qui résulte des égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \xi_m C_{ij}(\vec{r}) &= \int \xi_m \Gamma_{ij} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{k} = \frac{1}{i} \int \Gamma_{ij} \frac{\partial}{\partial k_m} (e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}) d\vec{k} \\ &= \frac{1}{i} \int \frac{\partial}{\partial k_m} [\Gamma_{ij} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}] d\vec{k} - \frac{1}{i} \int \frac{\partial \Gamma_{ij}}{\partial k_m} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{k}. \end{aligned}$$

La première somme se transforme en intégrale de surface qui s'annule si Γ_{ij} décroît suffisamment vite aux grands nombres d'onde k ; ce sera le cas pour les corrélations que représentera Γ_{ij} . La multiplication par ξ_m a donc pour transformé $i \frac{\partial}{\partial k_m}$ et l'on aura :

$$(1,3.3) \quad \xi_m \frac{\partial}{\partial \xi_l} R_{ij} = - \int \frac{\partial}{\partial k_m} (k_l \Phi_{ij}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{k}.$$

Pour avoir une notation symétrique nous poserons :

$$\vec{k}' = -\vec{k}, \quad F'(\vec{k}) = F(-\vec{k}).$$

En remplaçant dans l'équation (1,2.6) les différents termes par leurs expressions (1,3.1), (1,3.2), (1,3.3), on obtient immédiatement sa transformée de FOURIER :

$$(1,3.4) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_{ij} + [\lambda_{im} \Phi_{mj} + \lambda_{jm} \Phi_{im}] - \lambda_{lm} \frac{\partial}{\partial k_m} (k_l \Phi_{ij}) \\ - [k_l \Theta_{lij} + k'_l \Theta'_{lji}] - [k_i \Sigma_j + k'_j \Sigma'_i] + 2\nu k^2 \Phi_{ij} = 0. \end{cases}$$

Un des avantages de cette équation est l'aisance avec laquelle on peut exprimer le tenseur de pression en fonction des autres et, par conséquent, l'éliminer; sur les équations de départ (1,2.6) cette élimination s'effectuerait comme pour les équations de NAVIER originelles, en prenant la divergence et tenant compte de la condition d'incompressibilité; la corrélation pression-vitesse s'obtiendrait alors en intégrant une équation de POISSON. Ces opérations se traduisent sur les tenseurs spectraux par de simples opérations algébriques; multipliant d'abord par k_i et ajoutant, la condition d'incompressibilité impose :

$$\begin{aligned} k_i \Phi_{ip} &= 0, & k'_i \Theta'_{qri} &= 0, & k'_i \Sigma'_i &= 0, \\ k_i \frac{\partial}{\partial k_m} (k_l \Phi_{ij}) &= \frac{\partial}{\partial k_m} (k_l k_i \Phi_{ij}) - \delta_{im} k_l \Phi_{ij} = - \delta_{im} k_l \Phi_{ij}, \end{aligned}$$

et l'on obtient simplement :

$$\lambda_{im} k_i \Phi_{mj} + \lambda_{lm} \delta_{im} k_l \Phi_{ij} - k_l k_i \Theta_{lij} - k^2 \Sigma_j = 0.$$

L'expression du tenseur spectral Σ_j est donc :

$$(1,3.5) \quad \Sigma_j = 2\lambda_{lm} \frac{k_l}{k^2} \Phi_{mj} - \frac{k_l k_m}{k^2} \Theta_{lmj}.$$

Combinant le tenseur de pression $k_i \Sigma_j$ avec le tenseur d'accélération auquel il est apparenté dans (1,3.4) :

$$-k_l \Theta_{lij} = -k_l \delta_{im} \Theta_{lmj};$$

posant, d'autre part, désormais :

$$\Delta_{ij} = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2},$$

nous obtenons :

$$(1,3.6) \quad k_i \Sigma_j + k_l \Theta_{lij} = 2\lambda_{lm} \frac{k_i k_l}{k^2} \Phi_{mj} + k_l \Delta_{im} \Theta_{lmj}.$$

Le terme homologue dans (1,3.4) s'écrit de même, en permutant i et j et remplaçant \vec{k} par $\vec{k}' = -\vec{k}$:

$$(1,3.7) \quad k'_j \Sigma'_i + k'_l \Theta'_{lji} = 2\lambda_{lm} \frac{k'_j k'_l}{k^2} \Phi'_{mi} + k'_l \Delta'_{jm} \Theta'_{lmi}.$$

On note que, en vertu de l'homogénéité :

$$R_{ij}(\vec{r}) = R_{ji}(-\vec{r}),$$

ce qui entraîne :

$$\Phi_{ij}(\vec{k}) = \Phi_{ji}(-\vec{k}),$$

et nous pouvons donc remplacer Φ'_{mi} par Φ_{im} . D'autre part, on vérifie aisément que Q_{ijk} étant réel son transformé de FOURIER vérifie :

$$\Theta_{ijk}(-\vec{k}) = -\Theta_{ijk}^*(\vec{k}),$$

ce qui permet de remplacer Θ'_{ijk} par $-\Theta_{ijk}^*$. L'expression (1,3.7) s'écrit donc :

$$(1,3.8) \quad k'_j \Sigma'_i + k'_l \Theta'_{lji} = 2\lambda_{lm} \frac{k_j k_l}{k^2} \Phi_{im} + k_l \Delta_{jm} \Theta_{iml}^*.$$

L'équation des tenseurs spectraux (1,3.4) peut désormais être écrite avec les termes de pression éliminés grâce aux expressions (1,3.6) et (1,3.8). On peut, d'autre part, grouper les termes de pression provenant du champ moyen avec leurs homologues de (1,3.4) en écrivant :

$$\lambda_{im} \Phi_{mj} = \lambda_{lm} \delta_{il} \Phi_{mj}, \quad \lambda_{jm} \Phi_{im} = \lambda_{lm} \delta_{jl} \Phi_{im}.$$

On arrive ainsi à l'équation générale valable quel que soit le champ moyen homogène et sans imposer aucune condition de symétrie à la turbulence (1) :

$$(1,3.9) \quad \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial t} + \Psi_{ij} = \Omega_{ij} - 2\nu k^2 \Phi_{ij},$$

avec :

$$(1,3.10) \quad \left\{ \Psi_{ij} = 2\lambda_{lm} [\Delta_{il} \Phi_{mj} + \Delta_{jl} \Phi_{im}] - \lambda_{lm} \left[\frac{\partial}{\partial k_m} (k_l \Phi_{ij}) + \delta_{il} \Phi_{mj} + \delta_{jl} \Phi_{im} \right]; \right.$$

$$(1,3.11) \quad \left. \Omega_{ij} = [k_l \Delta_{im} \Theta_{lmj} + k_l \Delta_{jm} \Theta_{lmi}^*]. \right.$$

1,4 ÉQUATION DES CORRÉLATIONS TRIPLES EN TROIS POINTS

L'équation (1,3.9) comprend, comme cas particuliers, d'une part, la turbulence homogène habituelle (cas où les λ_{lm} sont nuls), d'autre part, la turbulence avec vitesses moyennes où les termes en λ_{lm} dominent la variation temporelle de Φ_{ij} et, à la limite, s'y substituent complètement si l'on admet l'existence du cas stationnaire; il est apparent que la forme spéciale de cette variation temporelle équivalente, doit marquer la structure de la turbulence et nous analyserons, au chapitre III, cette idée en détail. Toutefois, on se heurte ici, comme d'habitude, au point d'arrêt constitué par le tenseur de corrélations triples en deux points Θ_{ijk} . Parmi les expressions intuitives de ce tenseur la plus populaire est celle d'HEISENBERG; mais l'idée qu'elle parvient à exprimer en turbulence isotrope est plus malaisée à étendre au cas général. A cet égard l'introduction systématique, par I. PROUDMAN et W. H. REID [5], des corrélations triples en trois points et de leur équation d'évolution nous paraît constituer une acquisition importante de la théorie dont nous voudrions étendre le bénéfice au problème qui nous occupe.

En vue de bien préciser certains points nous allons présenter ce calcul de manière assez explicite. Nous considérons donc trois points M, M', M'', dont les coordonnées et les composantes de la vitesse attachée seront affectées des mêmes accents. Nous écrivons les équations de NAVIER du mouvement de fluctuation (1,2.2) en ces trois points, respectivement pour les composantes i , j et k :

$$(1,4.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_l \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_l} + \bar{u}_l \frac{\partial u_i}{\partial x_l} + u_l \frac{\partial u_i}{\partial x_l} - \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_l^2} = 0, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x'_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial t} + u'_l \frac{\partial \bar{u}'_j}{\partial x'_l} + \bar{u}'_l \frac{\partial u'_j}{\partial x'_l} + u'_l \frac{\partial u'_j}{\partial x'_l} - \nu \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x'^2_l} = 0, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p''}{\partial x''_k} + \frac{\partial u''_k}{\partial t} + u''_l \frac{\partial \bar{u}''_k}{\partial x''_l} + \bar{u}''_l \frac{\partial u''_k}{\partial x''_l} + u''_l \frac{\partial u''_k}{\partial x''_l} - \nu \frac{\partial^2 u''_k}{\partial x''^2_l} = 0. \end{array} \right.$$

Nous les multiplions ensuite respectivement par $u'_j u''_k$, $u''_k u_i$ et $u_i u'_j$, et nous en prenons la moyenne sur un ensemble de réalisations du champ turbulent.

(1) Nous sommes arrivé indépendamment à cette équation; elle avait été déjà obtenue pour l'essentiel, mais dans un contexte un peu moins général, par J. M. BURGERS et M. MITCHNER [4].

Si la turbulence est homogène les diverses corrélations ne dépendront que des vecteurs $\overline{MM'} = \vec{r}'$ et $\overline{MM''} = \vec{r}''$. Nous donnons ci-dessous la définition des tenseurs en cause dont on notera le parallélisme avec ceux du tableau (1,2.5) :

$$(1,4.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{ijk}(\vec{r}, \vec{r}') = \overline{u_i u'_j u''_k}, \\ Q_{lijk}(\vec{r}, \vec{r}') = \overline{u_l u_i u'_j u''_k} - \overline{u_l u_i} \overline{u'_j u''_k}, \\ T_{ijk}(\vec{r}, \vec{r}') = \left(\frac{\partial}{\partial \xi_i} + \frac{\partial}{\partial \xi'_i} \right) Q_{lijk}, \\ P_{jk}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{\rho}{\rho} \overline{u'_j u''_k}, \\ S_{ijk}(\vec{r}, \vec{r}') = \left(\frac{\partial}{\partial \xi_i} + \frac{\partial}{\partial \xi'_i} \right) P_{jk}. \end{array} \right.$$

Le seul point qui exige un commentaire concerne la définition de Q_{lijk} dont la raison apparaîtra mieux lorsque seront introduits les transformés de FOURIER (voir 1,6). Notons cependant que son introduction sous cette forme est déjà naturelle par la manière même dont a été obtenue l'équation des fluctuations (1,2.2) en soustrayant de l'équation du mouvement total (1,2.1) celle de l'écoulement moyen (1,1.1); l'avant-dernier terme des équations (1,2.2) ou (1,4.1) devrait donc être écrit, en réalité :

$$\frac{\partial}{\partial x_l} (\overline{u_l u_i} - \overline{u_l} \overline{u_i}).$$

La dérivée du deuxième terme est bien entendu nulle par l'homogénéité et c'est pour cette raison que ce terme a été omis dans (1,4.1); mais il peut aussi bien être inclus dans la définition de Q_{lijk} si l'on y a avantage, comme ce sera le cas.

En additionnant par colonne les trois équations moyennes déduites des (1,4.1) nous obtenons six sommes de trois termes L que nous désignerons par leur rang compté de gauche à droite. La deuxième, en vue de laquelle le calcul a été organisé, est :

$$(1,4.3) \quad L_1 = \frac{\partial}{\partial t} R_{ijk}.$$

La troisième s'écrit immédiatement :

$$(1,4.4) \quad L_3 = \lambda_{il} R_{ljk} + \lambda_{jl} R_{ilk} + \lambda_{kl} R_{ijl}.$$

La quatrième comporte des termes qui, individuellement, dépendent de la position de chaque point M, M', M'' , mais dont la somme vérifie l'homogénéité. On a, en effet :

$$\begin{aligned} L_4 &= \overline{u_l} \frac{\partial}{\partial x_l} R_{ijk} + (\overline{u_l} + \lambda_{lm} \xi_m) \frac{\partial}{\partial x'_l} R_{ijk} + (\overline{u_l} + \lambda_{lm} \xi'_m) \frac{\partial}{\partial x''_l} R_{ijk} \\ &= \overline{u_l} \left(\frac{\partial}{\partial x_l} + \frac{\partial}{\partial x'_l} + \frac{\partial}{\partial x''_l} \right) R_{ijk} + \lambda_{lm} \left(\xi_m \frac{\partial}{\partial x'_l} + \xi'_m \frac{\partial}{\partial x''_l} \right) R_{ijk}. \end{aligned}$$

Or, on a, par l'homogénéité :

$$(1,4.5) \quad \frac{\partial}{\partial x_l} = - \left(\frac{\partial}{\partial \xi_l} + \frac{\partial}{\partial \xi'_l} \right), \quad \frac{\partial}{\partial x'_l} = \frac{\partial}{\partial \xi_l}, \quad \frac{\partial}{\partial x''_l} = \frac{\partial}{\partial \xi'_l},$$

de sorte que :

$$(1,4.6) \quad L_4 = \lambda_{lm} \left(\xi_m \frac{\partial}{\partial \xi_l} + \xi'_m \frac{\partial}{\partial \xi'_l} \right) R_{ijk}.$$

Appelons d'une manière générale $C_{ijk}(\vec{r}, \vec{r}')$ l'un des six tenseurs apporté par la première équation (1,4.1). On voit aisément que son homologue de la deuxième ligne s'obtient en remplaçant la suite des points M, M', M'' et des indices i, j, k par la suite des points M', M'', M et des indices j, k, i . Une nouvelle permutation circulaire conduit au tenseur homologue de la troisième équation (1,4.1). Si une moyenne est C pour les points M, M', M'', dans cet ordre, nous appellerons C' la même moyenne pour les points M', M'', M et C'' la moyenne pour la suite M'', M, M' (cette notation rappelle à la fois le point origine et le nombre de permutations effectuées). On a, d'après cela :

$$(1,4.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} C' = C(-\vec{r} + \vec{r}', -\vec{r}); \\ C'' = C(-\vec{r}', -\vec{r}' + \vec{r}), \end{array} \right.$$

$$(1,4.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} C' = C(-\vec{r} + \vec{r}', -\vec{r}); \\ C'' = C(-\vec{r}', -\vec{r}' + \vec{r}), \end{array} \right.$$

et les sommes L_1 et L_5 s'écrivent, en utilisant (1,4.5) et les définitions (1,4.2) :

$$(1,4.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_1 = -(S_{ijk} + S'_{jki} + S''_{kij}); \\ L_5 = -(T_{ijk} + T'_{jki} + T''_{kij}). \end{array} \right.$$

$$(1,4.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_1 = -(S_{ijk} + S'_{jki} + S''_{kij}); \\ L_5 = -(T_{ijk} + T'_{jki} + T''_{kij}). \end{array} \right.$$

On a enfin, directement :

$$L_6 = -\nu \left[\left(\frac{\partial}{\partial \xi_l} + \frac{\partial}{\partial \xi'_l} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial \xi_l^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi'^2_l} \right] R_{ijk}.$$

L'équation d'évolution des corrélations triples est donc, finalement :

$$(1,4.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} R_{ijk} + [\lambda_{il} R_{ijk} + \lambda_{jl} R_{ilk} + \lambda_{kl} R_{ijl}] \\ + \lambda_{lm} \left(\xi_m \frac{\partial}{\partial \xi_l} + \xi'_m \frac{\partial}{\partial \xi'_l} \right) R_{ijk} - [T_{ijk} + T'_{jki} + T''_{kij}] \\ - [S_{ijk} + S'_{jki} + S''_{kij}] - \nu \left[\left(\frac{\partial}{\partial \xi_l} + \frac{\partial}{\partial \xi'_l} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial \xi_l^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi'^2_l} \right] R_{ijk} = 0. \end{array} \right.$$

1,5

RELATION HOMOLOGUE DES TENSEURS SPECTRAUX

Introduisant les transformés de FOURIER à six dimensions des corrélations en trois points fonctions de \vec{r} et de \vec{r}' nous posons :

$$(1,5.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{ijk}(\vec{r}, \vec{r}') = -i \int \Phi_{ijk}(\vec{k}, \vec{k}') e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \vec{k}' \cdot \vec{r}')} d\vec{k} \cdot d\vec{k}', \\ Q_{ijk}(\vec{r}, \vec{r}') = \int \Theta_{ijk}(\vec{k}, \vec{k}') e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \vec{k}' \cdot \vec{r}')} d\vec{k} d\vec{k}', \\ P_{ijk}(\vec{r}, \vec{r}') = \int \Sigma_{ijk}(\vec{k}, \vec{k}') e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \vec{k}' \cdot \vec{r}')} d\vec{k} \cdot d\vec{k}'. \end{array} \right.$$

On obtiendra une grande symétrie de notations dans tout ce qui suit en introduisant le vecteur \vec{k}'' tel que :

$$\vec{k} + \vec{k}' + \vec{k}'' = 0.$$

Les transformés de FOURIER de certains tenseurs dérivés s'écrivent immédiatement, d'après cela :

$$(1,5.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_{ijk}(\vec{r}, \vec{r}') = -i \int k''_l \Theta_{lijk}(\vec{k}, \vec{k}') e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \vec{k}' \cdot \vec{r}')} d\vec{k} d\vec{k}', \\ S_{ijk}(\vec{r}, \vec{r}') = -i \int k''_i \Sigma_{jkl}(\vec{k}, \vec{k}') e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \vec{k}' \cdot \vec{r}')} d\vec{k} d\vec{k}', \end{array} \right.$$

et à l'opérateur :

$$(1,5.3) \quad \left(\frac{\partial}{\partial \xi_l} + \frac{\partial}{\partial \xi'_l} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial \xi_l^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi'^2_l},$$

il correspond la multiplication par $-(k^2 + k'^2 + k''^2)$. En opérant enfin comme pour la formule (1,3.3) on obtient :

$$(1,5.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_m \frac{\partial}{\partial \xi_l} R_{ijk} = i \int \frac{\partial}{\partial k_m} (k_l \Phi_{ijk}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \vec{k}' \cdot \vec{r}')} d\vec{k} d\vec{k}', \\ \xi'_m \frac{\partial}{\partial \xi'_l} R_{ijk} = i \int \frac{\partial}{\partial k'_m} (k'_l \Phi_{ijk}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \vec{k}' \cdot \vec{r}')} d\vec{k} d\vec{k}'. \end{array} \right.$$

Il nous reste à transformer les opérations C' et C'' définies par (1,4.7) et (1,4.8). On constate aisément que si Γ est le transformé de FOURIER de C on a :

$$(1,5.5) \quad C(-\vec{r} + \vec{r}', -\vec{r}) = \int \Gamma[\vec{k}', -(\vec{k} + \vec{k}')] e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \vec{k}' \cdot \vec{r}')} d\vec{k} d\vec{k}'.$$

Le transformé de C' est donc :

$$(1,5.6) \quad \Gamma' = \Gamma(\vec{k}', \vec{k}'')$$

et celui de C'' sera de même :

$$\Gamma'' = \Gamma(\vec{k}'', \vec{k}).$$

Si l'on considère la triade de points N, N', N'' de l'espace \vec{k} correspondant à \vec{k} , \vec{k}' et \vec{k}'' et une moyenne Γ qui leur est affectée, la notation qui précède désigne donc par Γ' la même moyenne concernant la permutation N', N'', N, et par Γ'' celle qui concerne la suite N'', N, N'.

Avec ces définitions la traduction de (1,4.11) en tenseurs spectraux s'écrit, à vue :

$$(1,5.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial l} \Phi_{ijk} + [\lambda_{il} \Phi_{ijk} + \lambda_{jl} \Phi_{ikl} + \lambda_{kl} \Phi_{ijl}] \\ -\lambda_{lm} \left[\frac{\partial}{\partial k_m} (k_l \Phi_{ijk}) + \frac{\partial}{\partial k'_m} (k'_j \Phi_{ijk}) \right] - [k''_l \Theta_{lijk} + k_l \Theta'_{ljk} + k'_l \Theta''_{lkij}] \\ - [k''_i \Sigma_{jkl} + k_j \Sigma'_{kji} + k'_k \Sigma''_{ijl}] + v(k^2 + k'^2 + k''^2) \Phi_{ijk} = 0. \end{array} \right.$$

L'élimination des tenseurs de pression suit une marche parallèle à celle employée pour les corrélations doubles. L'opération de divergence $\partial F_i / \partial x_i$ sur (1,4.1) se traduit sur (1,4.11) par :

$$-\left(\frac{\partial}{\partial \xi_i} + \frac{\partial}{\partial \xi'_i}\right) F_i,$$

et celle-ci, à son tour, devient sur (1,5.7) multiplication par k''_i et sommation. Un certain nombre de termes disparaissent ou se simplifient dans le processus en vertu de l'incompressibilité :

$$\begin{aligned} k''_i \Phi_{ipq} &= 0, \\ k''_i \frac{\partial}{\partial k_m} (k_l \Phi_{ijk}) &= -k_l \Phi_{ijk} \frac{\partial k''_i}{\partial k_m} = \delta_{im} k_l \Phi_{ijk}, \\ k''_i \frac{\partial}{\partial k'_m} (k'_l \Phi_{ijk}) &= -k'_l \Phi_{ijk} \frac{\partial k''_i}{\partial k'_m} = \delta_{im} k'_l \Phi_{ijk}, \\ k''_i \Theta_{ijki}(\vec{k}', \vec{k}'') &= 0, \quad k''_i \Theta_{lkij}(\vec{k}'', \vec{k}) = 0, \\ k''_i \Sigma_{ki}(\vec{k}', \vec{k}'') &= 0, \quad k''_i \Sigma_{ij}(\vec{k}'', \vec{k}) = 0. \end{aligned}$$

Il vient ainsi, simplement :

$$(1,5.8) \quad \Sigma_{jk} = 2 \lambda_{lm} \frac{k''_l}{k''^2} \Phi_{mjk} - \frac{k''_l k''_m}{k''^2} \Theta_{lmjk},$$

d'où il suit :

$$(1,5.9) \quad k''_i \Sigma_{jk} + k''_l \Theta_{lijk} = 2 \lambda_{lm} \frac{k''_i k''_l}{k''^2} \Phi_{mjk} + k''_l \Delta''_{im} \Theta_{lmjk}.$$

Les deux groupes restants de termes de l'équation (1,5.7), homologues de celui qui précède, s'en déduisent par permutation des points N, N', N''; suivant la règle (1,5.6) combinée avec une permutation des indices i, j, k , ils s'écrivent donc :

$$(1,5.10) \quad \left\{ \begin{aligned} k_j \Sigma'_{ki} + k_l \Theta'_{ijki} &= 2 \lambda_{lm} \frac{k_j k_l}{k^2} \Phi'_{mki} + k_l \Delta_{jm} \Theta'_{lmki}, \\ k'_k \Sigma''_{ij} + k'_l \Theta''_{lkij} &= 2 \lambda_{lm} \frac{k'_k k'_l}{k'^2} \Phi''_{mij} + k'_l \Delta'_{km} \Theta''_{lmij}. \end{aligned} \right.$$

On remarquera maintenant que pour les corrélations triples de vitesses, les trois points jouent le même rôle, de sorte qu'une permutation simultanée des points M, M', M'' et des indices i, j, k , donne par l'homogénéité identiquement le même résultat, c'est-à-dire que l'on a :

$$R_{ijk} = R'_{jki} = R''_{kij}$$

et corrélativement, pour le tenseur spectral :

$$\Phi_{ijk} = \Phi'_{jki} = \Phi''_{kij}.$$

On peut donc, dans les relations (1,5.10), écrire :

$$\Phi'_{mki} = \Phi_{imk}, \quad \Phi''_{mij} = \Phi_{ijm}.$$

L'équation générale du tenseur spectral des corrélations triples s'écrit en définitive, une fois les tenseurs de pression éliminés [6] :

$$(1,5.11) \quad \frac{\partial}{\partial t} \Phi_{ijk} + \Psi_{ijk} = \Omega_{ijk} - \nu(k^2 + k'^2 + k''^2) \Phi_{ijk},$$

avec :

$$(1,5.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi_{ijk} = 2 \lambda_{lm} [\Delta''_{il} \Phi_{mjk} + \Delta_{jl} \Phi_{imk} + \Delta'_{kl} \Phi_{ijm}] \\ - \lambda_{lm} \left[\frac{\partial}{\partial k_m} (k_l \Phi_{ijk}) + \frac{\partial}{\partial k'_m} (k'_l \Phi_{ijk}) + \delta_{il} \Phi_{mjk} + \delta_{jl} \Phi_{imk} + \delta_{kl} \Phi_{ijm} \right] \end{array} \right.$$

et :

$$(1,5.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega_{ijk} = [k''_l \Delta''_{im} \Theta_{lmjk} + k_l \Delta_{jm} \Theta'_{lmki} + k'_l \Delta'_{km} \Theta''_{lmij}]. \end{array} \right.$$

1,6

CAS D'UNE DISTRIBUTION QUASI NORMALE

L'objectif principal de la recherche de I. PROUDMAN et W. H. REID, déjà mentionnée en (1,4), était l'expression systématique d'une hypothèse reliant les corrélations quadruples aux corrélations doubles. En fermant ainsi la chaîne des équations de la turbulence une solution en était rendue possible, au moins en principe. Nous rappelons cette hypothèse : le lien entre les corrélations quadruples et les corrélations doubles est supposé celui-là même qu'on aurait si la distribution de probabilité des $3n$ composantes de la vitesse en n points était normale; il est bien entendu que rien de tel n'est supposé pour les corrélations d'ordre impair, notamment 3 (ce qui serait contraire à l'essence même de la turbulence); pour abrégé le langage on peut, avec R. H. KRAICHNAN [7], employer l'expression distribution quasi normale pour caractériser ce type d'approximation. Son introduction est encore trop récente pour qu'on puisse en évaluer l'exacte portée qui dépend certainement de l'emploi qu'on en fait; il serait sans doute peu sage de l'appliquer à l'échelle des tourbillons responsables de la dissipation ou pour le calcul d'une propriété dont la dépendance par rapport à l'hypothèse ne serait pas assez lointaine et, en quelque sorte, amortie. Elle pourra sous ses réserves nous être utile, et nous en rappelons l'expression.

On a, pour une distribution normale des grandeurs aléatoires a, b, c, d :

$$\overline{abcd} - [\overline{ab} \cdot \overline{cd} + \overline{ac} \cdot \overline{bd} + \overline{ad} \cdot \overline{bc}] = 0,$$

ce qui, supposé s'appliquer à $\overline{u_l u_m u'_j u''_k}$, donne :

$$(1,6.1) \quad \overline{u_l u_m u'_j u''_k} - \overline{u_l u_m} \cdot \overline{u'_j u''_k} - \overline{u_l u'_j} \cdot \overline{u_m u''_k} - \overline{u_l u''_k} \cdot \overline{u_m u'_j} = 0.$$

Indépendamment de l'hypothèse, le premier membre est un groupement intéressant lorsqu'on veut former le transformé de FOURIER des corrélations quadruples. Si l'on considère quatre points M, M', M'', M''' avec $\overline{MM'} = \vec{r}$, $\overline{MM''} = \vec{r}'$, $\overline{MM'''} = \vec{r}''$, celles-ci ne tendent pas vers zéro lorsque $\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}''$ tendent vers l'infini et, pour pouvoir définir un transformé de FOURIER, il faut considérer [3] le groupement du premier membre de (1,6.1), appelé tenseur cumulant d'ordre 4; l'hypothèse revient à poser que ce tenseur

est nul. En l'occurrence nous avons besoin, non pas du tenseur général en quatre points mais en trois seulement et, avec nos notations, (1,6.1) s'écrit :

$$(1,6.2) \quad Q_{lmjk} - R_{ij}(\vec{r}) R_{mk}(\vec{r}') - R_{lk}(\vec{r}') R_{mj}(\vec{r}) = 0.$$

Il est immédiat que les deux derniers termes ont individuellement un transformé de FOURIER, de sorte que si leur somme en a un il en sera de même pour Q_{lmjk} . Autrement dit, dans le cas de trois points et pour pouvoir définir un transformé de FOURIER, il est possible d'utiliser Q_{lmjk} en place du tenseur cumulant. Avec l'hypothèse de distribution quasi normale son expression est donnée par (1,6.2), dont la traduction en transformé de FOURIER s'écrit :

$$(1,6.3) \quad \Theta_{lmjk}(\vec{k}, \vec{k}') = \Phi_{ij}(\vec{k}) \Phi_{mk}(\vec{k}') + \Phi_{lk}(\vec{k}') \Phi_{mj}(\vec{k}).$$

1,7 LES TENSEURS DE DÉFORMATION DE LA TURBULENCE

Les lois d'évolution des tenseurs spectraux d'ordre 2 et 3, données par les équations (1,3.9) et (1,5.11), constituent l'aboutissement de l'analyse de la turbulence dans le cadre actuel. Du point de vue de l'interaction d'un champ de vitesses moyennes avec la turbulence qui est le nôtre, les termes importants et nouveaux sont les tenseurs Ψ_{ij} (1,3.10) et Ψ_{ijk} (1,5.12).

Un cas idéal d'interaction, qui a fait l'objet d'études détaillées, est celui qui est suggéré par les contractions rapides des tunnels aérodynamiques établies en vue d'abaisser le niveau relatif de turbulence de la veine; on peut réaliser d'ailleurs en vue de la recherche, comme l'a fait TOWNSEND [1, 2], des distorsions rapides plus compliquées (contraction dans une direction, divergence dans une autre) que la contraction symétrique des souffleries. Ces problèmes ont suggéré [8] le schéma théorique suivant, intéressant en soi malgré son inaptitude reconnue à traduire les faits. On considère un champ de turbulence homogène initial (coordonnées a_i) et on le soumet à une déformation uniforme *finie*, c'est-à-dire telle que les coordonnées de l'état final \bar{x}_i sont :

$$\bar{x}_i = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial a_i} a_i,$$

où les $\partial \bar{x}_i / \partial a_i$ sont des constantes; un déplacement étant sans intérêt il suffit d'ailleurs de considérer une déformation pure. Le champ de turbulence initial livré à lui-même engendrerait de son côté sa propre déformation; mais celle-ci est négligée dans l'approximation de la déformation *brusque*, c'est-à-dire qu'on admet que la déformation uniforme imposée de l'extérieur est d'un ordre de grandeur supérieur à celle que produit la turbulence dans le même temps (c'est ce qui n'est pas, en général, réalisé en pratique); il est alors cohérent de négliger aussi les effets de viscosité dans le court intervalle de temps considéré. Pour toute réalisation de l'état initial on calcule aisément dans ces conditions, par les équations de CAUCHY, la distribution du tourbillon dans l'état déformé, d'où ensuite toute moyenne statistique.

Il est instructif de transposer l'approximation qui précède dans nos équations. Le champ de vitesses moyennes \bar{u}_i produit pendant le temps dt une déformation uniforme

homologue de celle du paragraphe précédent mais infiniment petite. Faire abstraction des déformations internes et de la viscosité, c'est supprimer les termes Ω_{ij} , Ω_{ijk} et ν . On a alors :

$$d\Phi_{ij} = -\Psi_{ij} dt, \quad d\Phi_{ijk} = -\Psi_{ijk} dt.$$

Si donc on connaît, par un calcul indépendant, le spectre nouveau Φ'_{ij} en fonction de l'ancien Φ_{ij} après une déformation brusque, le cas particulier d'une déformation infiniment petite donne Ψ_{ij} ; un tel calcul n'a d'ailleurs d'autre intérêt que de vérification, car le grand mérite des équations de CAUCHY étant de constituer une intégrale du mouvement par rapport au temps, c'est en détruire le bénéfice que de revenir de là à une variation infinitésimale. D'un autre côté, la théorie de la déformation brusque n'a pas été appliquée jusqu'ici aux corrélations triples; l'extension est d'ailleurs possible (mais non sans labeur) car, de même que [3] :

$$(1,7.1) \quad \Phi_{ij}(\vec{k}) = \lim \frac{\overline{dZ_i^*(\vec{k}) dZ_j(\vec{k})}}{d\vec{k}},$$

on peut montrer que :

$$(1,7.2) \quad \Phi_{ijk}(\vec{k}, \vec{k}') = \lim i \frac{\overline{dZ_i(\vec{k}'') dZ_j(\vec{k}) dZ_k(\vec{k}')}}{d\vec{k} \cdot d\vec{k}'},$$

où les $d\vec{Z}$ sont définis pour une réalisation par :

$$\vec{u}(\vec{x}) = \int e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} d\vec{Z}(\vec{k}).$$

On en a, en tout cas, la variation infinitésimale par Ψ'_{ijk} .

D'une façon plus précise, le lien de Ψ_{ij} et Ψ_{ijk} avec la théorie de la déformation brusque est exactement celui que nous venons de dire, seulement si le champ de vitesse moyenne est *irrotationnel*; s'il existe un tourbillon moyen, il y a une différence que nous voudrions maintenant examiner. Les équations de CAUCHY relient le tourbillon final *total* $\vec{\Omega}'$ au tourbillon initial *total* $\vec{\Omega}$ par :

$$\Omega'_i = \frac{\partial X_i}{\partial a_l} \Omega_l.$$

Partageons $\vec{\Omega}$ en valeur moyenne et fluctuation et faisons de même, comme il sera nécessaire, pour la déformation (X_i désigne la nouvelle position due au déplacement par le mouvement moyen \bar{X}_i , et par celui de fluctuation x_i); il vient :

$$\omega'_i = \frac{\partial \bar{X}_i}{\partial a_l} \omega_l + \frac{\partial x_i}{\partial a_l} \omega_l + \frac{\partial x_i}{\partial a_l} \omega_l$$

[nous avons tenu compte de ce que, d'après (1,1.1), l'écoulement moyen vérifie aussi les équations de CAUCHY]; le dernier terme est celui que néglige par principe la théorie de la déformation brusque; mais le second n'y apparaît pas non plus puisqu'on y part

d'une turbulence sans vitesses moyennes. Signalons, sans développer le calcul assez long, que le premier terme seul conduit à :

$$\Psi_{ij} = (\lambda_{lm} + \lambda_{ml}) [\Delta_{il} \Phi_{mj} + \Delta_{jl} \Phi_{im}] \\ - \lambda_{lm} \left[\frac{\partial (k_l \Phi_{ij})}{\partial k_m} + \delta_{il} \Phi_{mj} + \delta_{jl} \Phi_{im} \right],$$

tandis que le second rétablit l'accord avec la formule générale (1,3.10).

Nous soulignons à nouveau, pour terminer cette discussion, que les tenseurs Ψ_{ij} et Ψ_{ijk} ne sauraient, à eux tout seuls, donner l'évolution ou l'équilibre de la turbulence comme le voudrait l'approximation de la déformation brusque, que tout dépend, au contraire, de leur interaction avec les termes Ω_{ij} et Ω_{ijk} et ceux de viscosité, et que c'est tout l'objet de la présente recherche.

CHAPITRE II

FORME DES TENSEURS SPECTRAUX, COMPTE TENU DE L'INCOMPRESSIBILITÉ

2,1 CONSÉQUENCES DE L'INCOMPRESSIBILITÉ POUR Φ_{ijk}

Si le champ turbulent est à divergence nulle il en résulte, pour les corrélations triples en trois points :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u_i u'_j u''_k} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x'_j} \overline{u_i u'_j u''_k} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x''_k} \overline{u_i u'_j u''_k} = 0,$$

et par suite, pour Φ_{ijk} :

$$(2,1.1) \quad k''_i \Phi_{ijk} = 0, \quad k_j \Phi_{ijk} = 0, \quad k'_k \Phi_{ijk} = 0.$$

Il y a vingt-sept composantes Φ_{ijk} et vingt-sept équations (2,1.1), de sorte que les restrictions imposées par l'incompressibilité sont importantes, mais pas toutefois aussi considérables que le ferait croire ce décompte des équations. Choisissons une valeur de l'indice, par exemple 1; on peut demander au premier groupe de fournir toutes les composantes de Φ_{ijk} , où $i = 1$, et de même au second celles où $j = 1$ et au troisième celles où $k = 1$; mais si le premier groupe fournit $3 \times 3 = 9$ composantes, il ne faut pas compter pour le second celles où $i = 1$ déjà obtenue, ce qui apporte seulement $3 \times 2 = 6$ composantes nouvelles, et de même il faut enlever du troisième celles où $i = 1, j = 1$, ce qui apporte encore $2 \times 2 = 4$ composantes nouvelles. En tout, par conséquent, les équations (2,1.1) permettent d'exprimer dix-neuf composantes en fonction des autres, c'est-à-dire qu'il reste huit composantes indépendantes.

Nous allons maintenant exprimer d'une autre manière les équations (2,1.1) en nous laissant guider par le fait qu'elles peuvent être regardées comme des relations d'orthogonalité; il en résulte que chacune se présente sous sa forme la plus simple si, respectivement, \vec{k}'' ou \vec{k} ou \vec{k}' est l'un des axes de coordonnées. Nous sommes ainsi conduit à introduire trois trièdres trirectangles dont, d'ailleurs, un axe peut être commun étant donné que les vecteurs $\vec{k}, \vec{k}', \vec{k}''$ sont coplanaires. Nous choisissons les vecteurs unités de ces trièdres comme suit : $\vec{\alpha}, \vec{\alpha}', \vec{\alpha}''$ sont dirigés respectivement suivant $\vec{k}, \vec{k}', \vec{k}''$; dans le plan de ces vecteurs nous prenons $\vec{\beta}, \vec{\beta}', \vec{\beta}''$, normaux respectivement à $\vec{k}, \vec{k}', \vec{k}''$ et dans

le sens qui va de \vec{k} à \vec{k}' et \vec{k}'' ; enfin, $\vec{\gamma}$ est la normale directe au plan ainsi orienté. Les trois trièdres trirectangles sont alors définis par $\vec{\alpha}'' \vec{\beta}'' \vec{\gamma}$, $\vec{\alpha} \vec{\beta} \vec{\gamma}$ et $\vec{\alpha}' \vec{\beta}' \vec{\gamma}$.

D'une manière analogue à la décomposition d'un vecteur en trois composantes nous pouvons d'abord écrire :

$$(2,1.2) \quad \Phi_{ijk} = P_{jk} \alpha''_i + Q_{jk} \beta''_i + R_{jk} \gamma_i.$$

Il suffit pour cela de prendre :

$$P_{jk} = \alpha''_l \Phi_{ljk}, \quad Q_{jk} = \beta''_l \Phi_{ljk}, \quad R_{jk} = \gamma_l \Phi_{ljk},$$

ce qui donne :

$$\Phi_{ijk} = (\alpha''_i \alpha''_l + \beta''_i \beta''_l + \gamma_i \gamma_l) \Phi_{ljk},$$

qui est bien une identité, compte tenu des relations que vérifient les composantes des vecteurs unités d'un trièdre trirectangle :

$$\alpha''_i \alpha''_l + \beta''_i \beta''_l + \gamma_i \gamma_l = \delta_{il}.$$

La première condition d'incompressibilité se traduit donc par $P_{jk} = 0$ et le deuxième membre de (2,1.2) se réduit à ses deux derniers termes.

Sur l'expression ainsi réduite, la deuxième condition d'incompressibilité s'écrit :

$$(2,1.3) \quad \alpha_j \Phi_{ijk} = \alpha_j Q_{jk} \beta''_i + \alpha_j R_{jk} \gamma_i = 0.$$

Si l'on considère une valeur donnée de k , les trois équations (2,1.3) écrites pour $i = 1, 2$ et 3 définissent les deux inconnues $\alpha_j Q_{jk}$ et $\alpha_j R_{jk}$; comme les β''_i ne sont pas proportionnels aux γ_i , on aura :

$$(2,1.4) \quad \alpha_j Q_{jk} = 0, \quad \alpha_j R_{jk} = 0.$$

Effectuons maintenant, pour les tenseurs Q_{jk} et R_{jk} , une décomposition analogue à celle effectuée en (2,1.2) pour Φ_{ijk} mais à partir du trièdre $\vec{\alpha} \vec{\beta} \vec{\gamma}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{jk} = L_k \alpha_j + M_k \beta_j + N_k \gamma_j, \\ R_{jk} = L'_k \alpha_j + M'_k \beta_j + N'_k \gamma_j, \end{array} \right.$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{lll} L_k = \alpha_l Q_{lk}, & M_k = \beta_l Q_{lk}, & N_k = \gamma_l Q_{lk}, \\ L'_k = \alpha_l R_{lk}, & M'_k = \beta_l R_{lk}, & N'_k = \gamma_l R_{lk}. \end{array} \right.$$

La deuxième condition d'incompressibilité se traduit donc, d'après (2,1.4), par L_k et L'_k nuls.

Les réductions opérées jusqu'ici donnent pour Φ_{ijk} l'expression :

$$\Phi_{ijk} = M_k \beta_j \beta''_i + N_k \gamma_j \beta''_i + M'_k \beta_j \gamma_i + N'_k \gamma_j \gamma_i.$$

Écrivant, pour finir, la troisième condition d'incompressibilité, nous avons, avec toutes les paires d'indices i, j , neuf équations définissant les inconnues $\alpha'_k M_k, \alpha'_k N_k, \alpha'_k M'_k, \alpha'_k N'_k$, et la solution est évidemment :

$$(2,1.5) \quad \alpha'_k M_k = 0, \quad \alpha'_k N_k = 0, \quad \alpha'_k M'_k = 0, \quad \alpha'_k N'_k = 0.$$

Poursuivant la manière précédente d'opérer on décomposera les vecteurs M_k, N_k, M'_k, N'_k en leurs composantes suivant, cette fois, les vecteurs unités $\vec{\alpha}', \vec{\beta}', \vec{\gamma}'$, et il résulte de (2,1.5) que seules subsistent les composantes relatives à $\vec{\beta}'$ et $\vec{\gamma}'$, soit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} M_k = \Gamma \beta'_k + \Psi' \gamma_k, & N_k = \Psi' \beta'_k + \Theta'' \gamma_k, \\ M'_k = \Psi'' \beta'_k + \Theta' \gamma_k, & N'_k = \Theta \beta'_k + \Omega \gamma_k. \end{array} \right.$$

Avec ces notations l'expression générale de Φ_{ijk} , compte tenu des conditions d'incompressibilité, s'écrit [9] :

$$(2,1.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_{ijk} = \Gamma \beta''_i \beta_j \beta'_k + \Psi' \beta''_i \beta_j \gamma_k + \Psi'' \beta''_i \gamma_j \beta'_k + \Psi'' \gamma_i \beta_j \beta'_k \\ \quad + \Theta \gamma_i \gamma_j \beta'_k + \Theta' \gamma_i \beta_j \gamma_k + \Theta'' \beta''_i \gamma_j \gamma_k + \Omega \gamma_i \gamma_j \gamma_k. \end{array} \right.$$

On retrouve bien, conformément au décompte initial, seulement huit scalaires indépendants.

2,2

EXPRESSION DES SYMÉTRIES

Ce nombre de composantes, quoique réduit, resterait un obstacle à une utilisation effective du tenseur Φ_{ijk} pour une turbulence non isotrope, si une réduction supplémentaire fort importante n'était apportée par les propriétés de symétrie inhérentes à la définition de Φ_{ijk} .

Nous avons déjà remarqué en (1,5) que si $\overline{u_i u'_j u''_k}$ est relatif aux points M, M', M'', on retombe identiquement sur la même quantité en permutant simultanément les points et les indices (ce ne serait pas le cas si, à chaque point, étaient affectées non seulement des composantes mais des grandeurs différentes). La propriété corrélative pour Φ_{ijk} fait intervenir les points N, N', N'', extrémités des vecteurs $\vec{k}, \vec{k}', \vec{k}''$ tels que :

$$\vec{k} + \vec{k}' + \vec{k}'' = 0.$$

Pour des permutations circulaires directes notamment (sens N'', N, N'), nous avons déjà établi en (1,5) les égalités :

$$(2,2.1) \quad \Phi_{ijk}(\vec{k}, \vec{k}') = \Phi_{jki}(\vec{k}', \vec{k}'') = \Phi_{kij}(\vec{k}'', \vec{k}).$$

On peut aussi considérer des échanges de deux points et deux indices seulement, le plus évident consistant à échanger M' et M'' dans l'espace physique; à cette permutation de \vec{r}' et \vec{r}'' correspond une permutation de \vec{k} et \vec{k}' , soit :

$$(2,2.2) \quad \Phi_{ijk}(\vec{k}, \vec{k}') = \Phi_{ikj}(\vec{k}', \vec{k}).$$

D'une manière générale les propriétés de symétrie de Φ_{ijk} apparaissent le plus directement dans l'expression (1,7.2); on voit que le premier indice i est attaché à N'' , le second j à N et le troisième k à N' , et qu'il est loisible de permuter à la fois les points et les indices attachés. On a, par exemple, comme prolongement de (2,2.2) :

$$(2,2.3) \quad \Phi_{ikj}(\vec{k}', \vec{k}) = \Phi_{kji}(\vec{k}, \vec{k}') = \Phi_{jik}(\vec{k}'', \vec{k}').$$

D'autre part, une autre propriété de Φ_{ijk} traduit le fait que dans la définition (1,5.1) R_{ijk} est réel; on en déduit aisément :

$$(2,2.4) \quad \Phi_{ijk}(-\vec{k}, -\vec{k}') = -\Phi_{ijk}^*(\vec{k}, \vec{k}').$$

Pour montrer le plus clairement les répercussions des symétries (2,2.1) et (2,2.2) nous avons explicité, pour chaque permutation des indices (et des points N'' NN' attachés), le développement de Φ_{ijk} suivant (2,1.6). Les conséquences se présentent différemment suivant que l'on considère, d'une part, les scalaires Γ et Ω , d'autre part, les Ψ et les Θ . Nous commençons par le cas particulièrement intéressant de ces derniers pour lesquels il nous suffira, d'ailleurs, de considérer les Ψ , tout ce qui sera dit demeurant valable pour les Θ .

On voit, sur le tableau de la page 23, que les permutations circulaires des équations (2,2.1) (colonnes supérieures du tableau) permutent entre eux les termes de groupe Ψ ; la traduction de ces relations est donc :

$$(2,2.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi(\vec{k}, \vec{k}') = \Psi'(\vec{k}', \vec{k}'') = \Psi''(\vec{k}'', \vec{k}), \\ \Psi'(\vec{k}, \vec{k}') = \Psi''(\vec{k}', \vec{k}'') = \Psi(\vec{k}'', \vec{k}), \\ \Psi''(\vec{k}, \vec{k}') = \Psi(\vec{k}', \vec{k}'') = \Psi'(\vec{k}'', \vec{k}). \end{array} \right.$$

Il en résulte que les Ψ ne sont pas des fonctions distinctes et que si l'on prend pour fonction de base, par exemple Ψ , on en déduit Ψ' et Ψ'' par les deux conditions extraites de (2,2.5) :

$$(2,2.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi'(\vec{k}, \vec{k}') = \Psi(\vec{k}'', \vec{k}), \\ \Psi''(\vec{k}, \vec{k}') = \Psi(\vec{k}', \vec{k}''). \end{array} \right.$$

Ces définitions de Ψ' et Ψ'' expriment d'ailleurs complètement les formules (2,2.5); on vérifie en effet aisément que les quatre autres équations non utilisées de (2,2.5) sont de simples applications des règles (2,2.6) pour d'autres couples de vecteurs \vec{k}, \vec{k}' .

Pareillement, les permutations circulaires (2,2.3) (colonnes inférieures du tableau de la page 23) donnent :

$$(2,2.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi'(\vec{k}', \vec{k}) = \Psi(\vec{k}'', \vec{k}') = \Psi''(\vec{k}, \vec{k}''), \\ \Psi(\vec{k}', \vec{k}) = \Psi''(\vec{k}'', \vec{k}') = \Psi'(\vec{k}, \vec{k}''), \\ \Psi''(\vec{k}', \vec{k}) = \Psi'(\vec{k}'', \vec{k}') = \Psi(\vec{k}, \vec{k}''). \end{array} \right.$$

$\Phi_{ijk}(\vec{k}, \vec{k}')$	$\Phi_{jki}(\vec{k}', \vec{k}'')$	$\Phi_{kij}(\vec{k}'', \vec{k})$
$\Gamma(\vec{k}, \vec{k}') \quad \beta''_i \beta_j \beta'_k$	$\Gamma(\vec{k}', \vec{k}'') \quad \beta''_i \beta_j \beta'_k$	$\Gamma(\vec{k}'', \vec{k}) \quad \beta''_i \beta_j \beta'_k$
$\Psi(\vec{k}, \vec{k}') \quad \beta''_i \beta_j \gamma_k$	$\Psi(\vec{k}', \vec{k}'') \quad \gamma_i \beta_j \beta'_k$	$\Psi(\vec{k}'', \vec{k}) \quad \beta''_i \gamma_j \beta'_k$
$\Psi'(\vec{k}, \vec{k}') \quad \beta''_i \gamma_j \beta'_k$	$\Psi'(\vec{k}', \vec{k}'') \quad \beta''_i \beta_j \gamma_k$	$\Psi'(\vec{k}'', \vec{k}) \quad \gamma_i \beta_j \beta'_k$
$\Psi''(\vec{k}, \vec{k}') \quad \gamma_i \beta_j \beta'_k$	$\Psi''(\vec{k}', \vec{k}'') \quad \beta''_i \gamma_j \beta'_k$	$\Psi''(\vec{k}'', \vec{k}) \quad \beta''_i \beta_j \gamma_k$
$\Theta(\vec{k}, \vec{k}') \quad \gamma_i \gamma_j \beta'_k$	$\Theta(\vec{k}', \vec{k}'') \quad \beta''_i \gamma_j \gamma_k$	$\Theta(\vec{k}'', \vec{k}) \quad \gamma_i \beta_j \gamma_k$
$\Theta'(\vec{k}, \vec{k}') \quad \gamma_i \beta_j \gamma_k$	$\Theta'(\vec{k}', \vec{k}'') \quad \gamma_i \gamma_j \beta'_k$	$\Theta'(\vec{k}'', \vec{k}) \quad \beta_i \gamma_j \gamma_k$
$\Theta''(\vec{k}, \vec{k}') \quad \beta''_i \gamma_j \gamma_k$	$\Theta''(\vec{k}', \vec{k}'') \quad \gamma_i \beta_j \gamma_k$	$\Theta''(\vec{k}'', \vec{k}) \quad \gamma_i \gamma_j \beta'_k$
$\Omega(\vec{k}, \vec{k}') \quad \gamma_i \gamma_j \gamma_k$	$\Omega(\vec{k}', \vec{k}'') \quad \gamma_i \gamma_j \gamma_k$	$\Omega(\vec{k}'', \vec{k}) \quad \gamma_i \gamma_j \gamma_k$
$\Phi_{ikj}(\vec{k}', \vec{k})$	$\Phi_{jik}(\vec{k}'', \vec{k})$	$\Phi_{kji}(\vec{k}, \vec{k}'')$
$\Gamma(\vec{k}', \vec{k}) \quad \beta''_i \beta_j \beta'_k$	$\Gamma(\vec{k}'', \vec{k}') \quad \beta''_i \beta_j \beta'_k$	$\Gamma(\vec{k}, \vec{k}'') \quad \beta''_i \beta_j \beta'_k$
$\Psi(\vec{k}', \vec{k}) \quad \beta''_i \gamma_j \beta'_k$	$\Psi(\vec{k}'', \vec{k}') \quad \beta''_i \beta_j \gamma_k$	$\Psi(\vec{k}, \vec{k}'') \quad \gamma_i \beta_j \beta'_k$
$\Psi'(\vec{k}', \vec{k}) \quad \beta''_i \beta_j \gamma_k$	$\Psi'(\vec{k}'', \vec{k}') \quad \gamma_i \beta_j \beta'_k$	$\Psi'(\vec{k}, \vec{k}'') \quad \beta''_i \gamma_j \beta'_k$
$\Psi''(\vec{k}', \vec{k}) \quad \gamma_i \beta_j \beta'_k$	$\Psi''(\vec{k}'', \vec{k}') \quad \beta''_i \gamma_j \beta'_k$	$\Psi''(\vec{k}, \vec{k}'') \quad \beta''_i \beta_j \gamma_k$
$\Theta(\vec{k}', \vec{k}) \quad \gamma_i \beta_j \gamma_k$	$\Theta(\vec{k}'', \vec{k}') \quad \gamma_i \gamma_j \beta'_k$	$\Theta(\vec{k}, \vec{k}'') \quad \beta''_i \gamma_j \gamma_k$
$\Theta'(\vec{k}', \vec{k}) \quad \gamma_i \gamma_j \beta'_k$	$\Theta'(\vec{k}'', \vec{k}') \quad \beta''_i \gamma_j \gamma_k$	$\Theta'(\vec{k}, \vec{k}'') \quad \gamma_i \beta_j \gamma_k$
$\Theta''(\vec{k}', \vec{k}) \quad \beta''_i \gamma_j \gamma_k$	$\Theta''(\vec{k}'', \vec{k}') \quad \gamma_i \beta_j \gamma_k$	$\Theta''(\vec{k}, \vec{k}'') \quad \gamma_i \gamma_j \beta'_k$
$\Omega(\vec{k}', \vec{k}) \quad \gamma_i \gamma_j \gamma_k$	$\Omega(\vec{k}'', \vec{k}') \quad \gamma_i \gamma_j \gamma_k$	$\Omega(\vec{k}, \vec{k}'') \quad \gamma_i \gamma_j \gamma_k$

D'autre part, en vertu de (2,2.2), toutes les permutations de la page 23 sont identiques, de sorte que les coefficients d'un même terme tel que $\beta''_i \beta_j \gamma_k$ y sont égaux; pour le terme cité en exemple ces coefficients constituent les éléments de la première ligne de (2,2.5) et (2,2.7), lesquels sont donc tous égaux; il en est de même, respectivement, pour les deuxième et troisième lignes. Extrayant des cinq égalités de chaque ligne celle qui concerne Ψ nous avons :

$$(2,2.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi(\vec{k}, \vec{k}') = \Psi(\vec{k}'', \vec{k}'), \\ \Psi(\vec{k}'', \vec{k}) = \Psi(\vec{k}', \vec{k}), \\ \Psi(\vec{k}', \vec{k}'') = \Psi(\vec{k}, \vec{k}''). \end{array} \right.$$

Ces trois conditions, imposées à la fonction de base Ψ , se ramènent à une seule, par exemple la première; elles expriment une invariance par substitution au premier vecteur qui y figure de celui des vecteurs de la triade qui n'y figure pas.

En ce qui concerne les scalaires Γ et Ω , l'expression des symétries entraîne simplement qu'ils prennent la même valeur pour tout couple d'une même triade :

$$(2,2.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma(\vec{k}, \vec{k}') = \Gamma(\vec{k}', \vec{k}'') = \Gamma(\vec{k}'', \vec{k}) = \Gamma(\vec{k}', \vec{k}) = \Gamma(\vec{k}'', \vec{k}') = \Gamma(\vec{k}, \vec{k}''), \\ \Omega(\vec{k}, \vec{k}') = \Omega(\vec{k}', \vec{k}'') = \Omega(\vec{k}'', \vec{k}) = \Omega(\vec{k}', \vec{k}) = \Omega(\vec{k}'', \vec{k}') = \Omega(\vec{k}, \vec{k}''). \end{array} \right.$$

Il nous reste enfin à traduire les propriétés (2,2.4) qui expriment que R_{ijk} est réel. Nous avons pour cela à écrire l'expression développée (2,1.6) pour une triade formée des points symétriques des points primitifs par rapport à l'origine. Il est clair que les nouveaux vecteurs $\vec{\beta} \vec{\beta}' \vec{\beta}''$ seront eux-mêmes symétriques des anciens; en revanche, le vecteur $\vec{\gamma}$ qui complète les trièdres directs est normal au même plan et concerne la même direction, c'est-à-dire qu'il ne change pas [voir conventions d'orientation en (2,1)]. Il suit que les produits triples $\beta''_i \beta_j \beta'_k$, où les β figurent un nombre impair de fois, changent de signe tandis que ceux où il est en nombre pair ne changent pas. On en déduit immédiatement [9] :

$$(2,2.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma(-\vec{k}, -\vec{k}') = \Gamma^*(\vec{k}, \vec{k}'), \\ \Theta(-\vec{k}, -\vec{k}') = \Theta^*(\vec{k}, \vec{k}'); \\ \Psi(-\vec{k}, -\vec{k}') = -\Psi^*(\vec{k}, \vec{k}'), \\ \Omega(-\vec{k}, -\vec{k}') = -\Omega^*(\vec{k}, \vec{k}'). \end{array} \right.$$

2,3 TRIADES DE VECTEURS \vec{k} — RELATIONS GÉOMÉTRIQUES

Il est, nous l'avons vu, dans la nature des corrélations triples en trois points, d'introduire dans l'espace des \vec{k} les triades de vecteurs $\vec{k}, \vec{k}', \vec{k}''$ dont la somme géométrique est nulle (*fig. 1*). Il y aura lieu dans la suite de tenir compte de quelques

relations géométriques du triangle $NN'N''$ et des vecteurs associés, et nous nous proposons de les examiner ici.

Nous appelons φ l'angle inférieur à π formé par \vec{k} et \vec{k}' ; les angles φ' et φ'' sont définis de même (voir *fig. 1*) et l'on a :

$$(2,3.1) \quad \begin{cases} \alpha_m \alpha'_m = \beta_m \beta'_m = \cos \varphi = m, \\ \alpha'_m \alpha''_m = \beta'_m \beta''_m = \cos \varphi' = m', \\ \alpha''_m \alpha_m = \beta''_m \beta_m = \cos \varphi'' = m''. \end{cases}$$

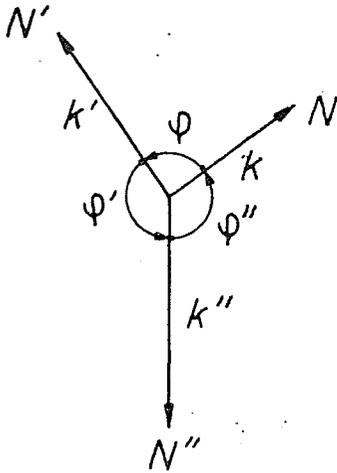


Fig. 1

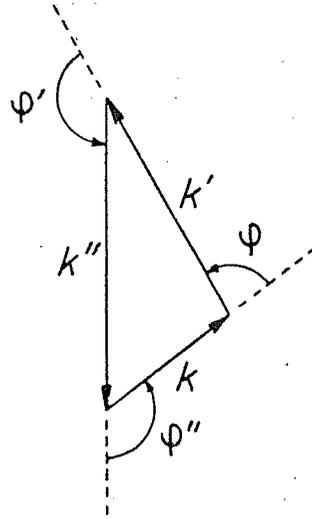


Fig. 2

Le produit scalaire des vecteurs k et $\vec{\beta}'$ vaut évidemment :

$$k \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -k \sin \varphi;$$

on obtient ainsi :

$$(2,3.2) \quad \begin{cases} k_l \beta'_l = -k \sin \varphi, & k'_l \beta''_l = -k' \sin \varphi', & k''_l \beta_l = -k'' \sin \varphi'', \\ k''_l \beta'_l = k'' \sin \varphi', & k_l \beta''_l = k \sin \varphi'', & k'_l \beta_l = k' \sin \varphi. \end{cases}$$

La somme de chaque paire d'équations est identique à zéro puisque, par exemple, pour la première :

$$k_l \beta'_l + k''_l \beta_l = -k'_l \beta'_l = 0.$$

On a donc les relations qui, d'ailleurs, sont géométriquement évidentes (*fig. 2*) :

$$(2,3.3) \quad \begin{cases} k \sin \varphi = k'' \sin \varphi', \\ k' \sin \varphi' = k \sin \varphi'', \\ k'' \sin \varphi'' = k' \sin \varphi. \end{cases}$$

Si l'on veut exprimer tous les angles en fonction des longueurs des côtés on a les relations :

$$(2,3.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \varphi = \frac{k''^2 - (k^2 + k'^2)}{2kk'}, \\ \cos \varphi' = \frac{k^2 - (k'^2 + k''^2)}{2k'k''}, \\ \cos \varphi'' = \frac{k'^2 - (k''^2 + k^2)}{2kk''}, \end{array} \right.$$

d'où l'on déduit :

$$(2,3.5) \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{K}}{2kk'}, \quad \sin \varphi' = \frac{\sqrt{K}}{2k'k''}, \quad \sin \varphi'' = \frac{\sqrt{K}}{2k''k},$$

où :

$$K = 2(k^2 k'^2 + k'^2 k''^2 + k''^2 k^2) - (k^4 + k'^4 + k''^4).$$

Les relations (2,3.5) peuvent s'écrire en variante :

$$(2,3.6) \quad \frac{\sin \varphi}{k''} = \frac{\sin \varphi'}{k} = \frac{\sin \varphi''}{k'} = \frac{\sqrt{K}}{2kk'k''},$$

qui ne sont autres que les (2,3.3) avec une précision supplémentaire.

On peut, au contraire, désirer exprimer toutes les grandeurs en fonction de k , k' et φ . On a dans ce cas, à partir de (2,3.4) et (2,3.6) :

$$(2,3.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} k''^2 = k^2 + k'^2 + 2kk' \cos \varphi, \\ \sin \varphi' = \frac{k \sin \varphi}{k''}, \quad \sin \varphi'' = \frac{k' \sin \varphi}{k''}. \end{array} \right.$$

Nous en venons maintenant à quelques propriétés des vecteurs $\vec{\beta}$ $\vec{\beta}'$ $\vec{\beta}''$ associés. Il résulte d'abord, des conventions d'orientation de (2,1), que $\vec{\gamma}$ est dirigé suivant le produit vectoriel de \vec{k} et de \vec{k}' ; si l'on appelle \vec{c} ce vecteur, on a :

$$(2,3.8) \quad \vec{c} = (kk' \sin \varphi) \vec{\gamma} = \vec{k} \wedge \vec{k}'.$$

Les vecteurs unités $\vec{\beta}$ $\vec{\beta}'$ $\vec{\beta}''$ peuvent s'en déduire par :

$$(2,3.9) \quad \vec{\beta} = \vec{\gamma} \wedge \vec{\alpha}, \quad \vec{\beta}' = \vec{\gamma} \wedge \vec{\alpha}', \quad \vec{\beta}'' = \vec{\gamma} \wedge \vec{\alpha}''.$$

On peut aussi remarquer que $\vec{\beta}$, par exemple, étant dans le plan de $\vec{\alpha}$ et $\vec{\alpha}'$, peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de ces derniers :

$$\vec{\beta} = \lambda \vec{\alpha} + \lambda' \vec{\alpha}'.$$

Écrivant que :

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\alpha}' \cdot \vec{\beta} = \sin \varphi,$$

on en déduit immédiatement λ et λ' . Opérant de même pour $\vec{\beta}'$, $\vec{\beta}''$ on a les expressions :

$$(2,3.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta_j = \frac{1}{\sin \varphi} (\alpha'_j - m \alpha_j), \quad \beta'_k = \frac{1}{\sin \varphi} (m \alpha'_k - \alpha_k), \\ \beta''_i = \frac{1}{\sin \varphi} (m'' \alpha'_i - m' \alpha_i). \end{array} \right.$$

Inversement, l'expression des $\vec{\alpha}$ en fonction des $\vec{\beta}$ s'écrit :

$$(2,3.10) \quad \alpha_l = \frac{1}{\sin \varphi} (m \beta_l - \beta'_l), \quad \alpha'_l = \frac{1}{\sin \varphi} (\beta_l - m \beta'_l).$$

Certaines combinaisons des vecteurs $\vec{\alpha}$ et $\vec{\beta}$ dont l'intérêt n'apparaîtra que dans la suite trouvent ici logiquement leur place. Écrivant *a priori* ces combinaisons au premier membre nous les exprimons systématiquement au second membre, en fonction des seuls $\vec{\alpha}$ et $\vec{\alpha}'$, au moyen de (2,3.9). On a ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_i \alpha_j + \beta_i \beta_j = \frac{1}{\sin^2 \varphi} [\alpha_i \alpha_j + \alpha'_i \alpha'_j - m (\alpha_i \alpha'_j + \alpha'_i \alpha_j)], \\ \alpha_i \beta'_j - \alpha'_i \beta_j = \frac{1}{\sin \varphi} [\alpha_i \alpha_j + \alpha'_i \alpha'_j - m (\alpha_i \alpha'_j + \alpha'_i \alpha_j)], \end{array} \right.$$

d'où il résulte :

$$(2,3.11) \quad \frac{\alpha_i \beta'_j - \alpha'_i \beta_j}{\sin \varphi} = -(\alpha_i \alpha_j + \beta_i \beta_j) = \gamma_i \gamma_j - \delta_{ij}.$$

Écrivant de même :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_i \beta_j - \alpha'_i \beta'_j = -\frac{m}{\sin \varphi} \left[\alpha_i \alpha_j + \alpha'_i \alpha'_j - \frac{1}{m} (\alpha_i \alpha'_j + \alpha'_i \alpha_j) \right], \\ \alpha_i \alpha_j - \beta'_i \beta'_j = -\frac{m^2}{\sin^2 \varphi} \left[\alpha_i \alpha_j + \alpha'_i \alpha'_j - \frac{1}{m} (\alpha_i \alpha'_j + \alpha'_i \alpha_j) \right], \end{array} \right.$$

on obtient l'identité :

$$(2,3.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{m}{\sin \varphi} (\alpha_i \beta_j - \alpha'_i \beta'_j) = \alpha_i \alpha_j - \beta'_i \beta'_j \\ = \delta_{ij} - (\beta_i \beta_j + \beta'_i \beta'_j + \gamma_i \gamma_j). \end{array} \right.$$

2,4

PROCÉDÉS D'EXTRACTION DES SCALAIRES DE BASE

Le nombre des composantes indépendantes d'un tenseur spectral vérifiant les conditions d'incompressibilité se réduit, nous l'avons vu, à quatre lorsqu'il possède, par surcroît, certaines propriétés de symétrie relativement à des permutations d'indices. Il y aura donc intérêt à traduire toute équation tensorielle telle que (1,5.11) en des relations entre les scalaires de base des tenseurs qui y apparaissent. L'extraction

de ces scalaires de base pour un tenseur dérivé d'un autre, comme c'est le cas pour Ψ_{ijk} , lequel est formé à partir de Φ_{ijk} , peut être assez malaisée en opérant par substitution directe. On peut alors employer les propriétés ci-après.

Considérons le tenseur S_{pqr} développable suivant (2,1.6) :

$$(2,4.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_{pqr} = \Gamma_s \beta''_p \beta_q \beta'_r + \Psi'_s \beta''_p \beta_q \gamma_r + \Psi'_s \beta''_p \gamma_q \beta'_r + \Psi''_s \gamma_p \beta_q \beta'_r \\ \quad + \Theta_s \gamma_p \gamma_q \beta'_r + \Theta'_s \gamma_p \beta_q \gamma_r + \Theta''_s \beta''_p \gamma_q \gamma_r + \Omega_s \gamma_p \gamma_q \gamma_r. \end{array} \right.$$

Il est évident que :

$$k''_p k_q k'_r S_{pqr} = 0,$$

mais si l'on effectue le produit par $k_p k'_q k''_r$ on obtient Γ_s à un coefficient près. En effet, les sept termes autres que le premier dans (2,4.1) contiennent ou γ_p ou γ_q ou γ_r et l'on aura, par suite de l'orthogonalité de $\vec{\gamma}$ et des \vec{k} :

$$k_p \gamma_p = 0, \quad k'_q \gamma_q = 0, \quad k''_r \gamma_r = 0.$$

Les termes correspondants étant nuls il restera :

$$(2,4.2) \quad (k_p \beta''_p) (k'_q \beta_q) (k''_r \beta'_r) \Gamma_s = k_p k'_q k''_r S_{pqr}.$$

On pourrait aussi obtenir Γ_s en multipliant S_{pqr} par $\beta''_p \beta_q \beta'_r$, mais il sera plus avantageux d'utiliser le plus possible les vecteurs \vec{k} .

Pour extraire Ψ'_s par une contraction analogue du tenseur S_{pqr} , le troisième facteur ne saurait être dans le plan des vecteurs \vec{k} et l'on est ainsi conduit à considérer $k_p k''_q \gamma_r$. Tous les termes de (2,4.1) contenant γ_p (c'est-à-dire les quatrième, cinquième, sixième et huitième) s'annulent par orthogonalité avec k_p ; il en sera de même pour tous les termes contenant γ_q (les troisième et septième, en plus des précédents); enfin, les termes contenant β'_r s'éliminent avec γ_r , et c'est le cas du premier. On obtient donc :

$$(2,4.3) \quad (k_p \beta''_p) (k''_q \beta_q) \Psi'_s = k_p k''_q \gamma_r S_{pqr}.$$

De manière analogue on formera Θ_s en multipliant S_{pqr} par $\gamma_p \gamma_q k_r$. Sont nuls dans le produit tous les termes contenant β''_p (les premier, deuxième, troisième et septième), tous ceux contenant β_q (notamment les quatrième et sixième), ainsi que les termes contenant γ_r (en particulier le huitième). Il reste alors :

$$(2,4.4) \quad (k_r \beta'_r) \Theta_s = \gamma_p \gamma_q k_r S_{pqr}.$$

On obtient enfin Ω_s par :

$$(2,4.5) \quad \Omega_s = \gamma_p \gamma_q \gamma_r S_{pqr}.$$

2,5

CAS DE L'ISOTROPIE

Considérons trois points M, M', M'' dans l'espace physique et trois vecteurs unités \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , respectivement attachés à chacun de ces trois points; la moyenne du produit des composantes de la vitesse suivant \vec{a} en M, suivant \vec{b} en M', suivant \vec{c} en M'', s'écrit :

$$(2,5.1) \quad \overline{(u_i a_i) (u'_j b_j) (u''_k c_k)} = R_{ijk} a_i b_j c_k.$$

Par définition de l'isotropie cette corrélation reste invariante pour toute rotation de la figure formée par les trois points et les vecteurs attachés, et aussi pour toutes symétries de cette figure; la propriété s'applique identiquement au tenseur spectral Φ_{ijk} . D'une manière générale, un tenseur est dit « isotrope » s'il vérifie les deux propriétés d'invariance qui viennent d'être précisées.

CHANDRASEKHAR [10] a introduit aussi dans la théorie les tenseurs isotropes gauches; ce sont, par définition, ceux pour lesquels la forme (2,5.1) demeure encore invariante pour toute rotation de la figure formée par les points et les vecteurs unités mais change de signe pour les symétries.

Notre représentation (2,1.6) exprime Φ_{ijk} comme une combinaison linéaire de huit tenseurs tels que $\beta''_i \beta_j \beta'_k$. Notons que les vecteurs $\vec{\beta}$, $\vec{\beta}'$, $\vec{\beta}''$ et $\vec{\gamma}$ sont rigidement attachés à toute triade NN' N''; si donc on fait subir une rotation à cette figure les nouveaux vecteurs $\vec{\beta}$ et $\vec{\gamma}$ se déduisent des anciens par la même rotation; il en résulte que, par exemple :

$$\beta''_i \beta_j \beta'_k a_i b_j c_k$$

demeurera invariante pour toute rotation et cette propriété est commune aux huit tenseurs analogues. En ce qui concerne cependant les symétries, ils ne réagissent pas de la même façon parce que $\vec{\gamma}$ est un vecteur axial; une symétrie des points NN' N'' par rapport à l'origine change le signe des $\vec{\beta}$ mais laisse $\vec{\gamma}$ inchangé. Il en résulte que les tenseurs coefficients des Γ et Θ qui contiennent β un nombre impair de fois, changent de signe par symétrie par rapport à l'origine, tandis que les tenseurs coefficients des Ψ et Ω n'en changent pas. Comme $a_i b_j c_k$ change lui-même de signe par cette symétrie, les tenseurs du premier groupe :

$$\beta''_i \beta_j \beta'_k, \quad \gamma_i \gamma_j \beta'_k, \quad \gamma_i \beta_j \gamma_k, \quad \beta''_i \gamma_j \gamma_k$$

sont isotropes tandis que ceux du second :

$$\beta''_i \beta_j \gamma_k, \quad \beta''_i \gamma_j \beta'_k, \quad \gamma_i \beta_j \beta'_k, \quad \gamma_i \gamma_j \gamma_k$$

sont isotropes gauches.

Pour une turbulence isotrope, l'invariance par rapport aux rotations exige que tous les scalaires Γ , Ψ , Θ et Ω soient fonctions des seules longueurs et des angles du

triangle NN' N'' mais pas de sa situation dans l'espace; les tenseurs gauches sont alors impropres à assurer l'invariance par rapport aux symétries et les scalaires Ψ et Ω correspondants doivent être nuls :

$$(2,5.2) \quad \Phi_{ijk} = \Gamma \beta''_i \beta_j \beta'_k + \Theta \gamma_i \gamma_j \beta'_k + \Theta' \gamma_i \beta_j \gamma_k + \Theta'' \beta''_i \gamma_j \gamma_k.$$

Il n'est pas sans intérêt de comparer cette analyse rapide, où l'isotropie est considérée comme un cas particulier du cas général homogène, à celle de PROUDMAN et REID qui se concentrent sur le cas isotrope. Ces auteurs forment donc d'emblée le tenseur Φ_{ijk} isotrope le plus général, suivant la méthode de ROBERTSON; c'est une combinaison linéaire de quatorze tenseurs et il est facile de vérifier, à l'aide des formules (2,3.9), que les tenseurs figurant dans (2,5.2) entrent bien dans ce cadre, tandis que les tenseurs du groupe isotrope gauche n'y satisfont pas.

Pour vérifier l'incompressibilité, PROUDMAN et REID considèrent ensuite le produit :

$$(2,5.3) \quad \Delta''_{il} \Delta_{jm} \Delta'_{kn}$$

qui remplit cette condition et qui, par contraction avec un tenseur quelconque Φ_{lmn} , en extrait un nouveau tenseur ayant les propriétés voulues. Par définition du symbole :

$$\Delta''_{il} = \delta_{il} - \alpha''_i \alpha''_l = \beta''_i \beta''_l + \gamma_i \gamma_l,$$

on voit que (2,5.3) s'écrit aussi :

$$(2,5.4) \quad (\beta''_i \beta''_l + \gamma_i \gamma_l) (\beta_j \beta_m + \gamma_j \gamma_m) (\beta'_k \beta'_n + \gamma_k \gamma_n),$$

dont le développement a précisément la forme (2,1.6) avec, pour coefficient de chaque terme, par exemple $\beta''_i \beta_j \beta'_k$, un terme identique où les indices l, m, n remplacent les i, j, k soit, en l'occurrence, $\beta''_l \beta_m \beta'_n$. Notons au passage que cette remarque permet de retrouver par une autre voie le résultat général (2,1.6) en posant, à partir d'un tenseur arbitraire Φ_{lmn} :

$$\Gamma = \beta''_i \beta''_l \beta_m \Phi_{lmn},$$

et de même pour les autres scalaires.

Pour le cas de l'isotropie, PROUDMAN et REID prennent le tenseur isotrope le plus général Φ_{lmn} et n'en retiennent — les autres termes étant nuls par contraction avec (2,5.3) — que quatre termes :

$$(2,5.5) \quad \Phi^p k_l \delta_{mn} + \Phi^p_1 k'_m \delta_{nl} + \Phi^p_2 k_n \delta_{lm} + \Psi^p k_l k'_m k_n,$$

où nous avons ajouté la lettre P à certains symboles pour éviter une confusion avec les nôtres utilisés avec un sens différent. En effectuant le produit par l'expression (2,5.4) développée, il est aisé de constater qu'un grand nombre de termes s'annulent et que les termes restants se groupent suivant (2,5.2). On en déduit (nous ne développons

pas ce calcul facile) que les scalaires de base Ψ^P et Φ^P , utilisés par PROUDMAN et REID dans le cas de l'isotropie, se relieut à ceux de la formule (2,5.2) par :

$$(2,5.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi^P = \frac{\Theta'' \cos \varphi + \Theta' \cos \varphi' + \Theta \cos \varphi'' - \Gamma}{kk'k'' \sin \varphi \sin \varphi' \sin \varphi''}, \\ \Phi^P = \frac{\Theta''}{k \sin \varphi''}. \end{array} \right.$$

Nous examinerons pour finir un cas de symétrie beaucoup moins restrictif que l'isotropie. Nous dirons que Φ_{ijk} a un centre de symétrie si :

$$\Phi_{ijk}(\vec{k}, \vec{k}') a_i b_j c_k$$

ne change pas quand on effectue une symétrie par rapport à l'origine, aussi bien du triangle $NN'N''$ que des vecteurs unités quelconques $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ respectivement attachés à chacun de ces points. Nous avons vu que dans (2,1.6) certains des tenseurs composants jouissent eux-mêmes de cette propriété; les coefficients correspondants ne doivent donc pas changer par symétrie :

$$(2,5.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma(-\vec{k}, -\vec{k}') = \Gamma(\vec{k}, \vec{k}'), \\ \Theta(-\vec{k}, -\vec{k}') = \Theta(\vec{k}, \vec{k}'). \end{array} \right.$$

Pour les tenseurs gauches restants, au contraire, qui ne changent pas de signe par symétrie, ce sont les coefficients qui doivent en changer :

$$(2,5.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi(-\vec{k}, -\vec{k}') = -\Psi(\vec{k}, \vec{k}'), \\ \Omega(-\vec{k}, -\vec{k}') = -\Omega(\vec{k}, \vec{k}'). \end{array} \right.$$

En comparant ces conditions à celles (2,2.10) imposées par le fait que R_{ijk} est réel, on voit que les quatre scalaires Γ, Θ, Ψ et Ω sont réels lorsqu'il y a centre de symétrie et possèdent les parités qui viennent d'être précisées.

2,6 CORRÉLATIONS DOUBLES — PROPRIÉTÉS PARALLÈLES

Les propriétés générales du tenseur Φ_{ij} sont connues et nous ne les reprenons ici que pour souligner certains résultats dont nous aurons à nous servir, et pour les montrer sous un aspect un peu différent par application de la méthode qui nous a servi à analyser Φ_{ijk} .

Les conditions d'incompressibilité s'écrivent :

$$(2,6.1) \quad k_i \Phi_{ij} = 0, \quad k_j \Phi_{ij} = 0.$$

Considérons le vecteur unité $\vec{\alpha}$ suivant \vec{k} , et les vecteurs unités $\vec{\beta}$ et $\vec{\gamma}$ normaux entre eux et à $\vec{\alpha}$ complétant le trièdre trirectangle direct (le couple $\vec{\beta}, \vec{\gamma}$ n'est donc défini qu'à une rotation près dans le plan normal à \vec{k}). On peut, parallèlement à (2,1), écrire :

$$\Phi_{ij} = P_j \alpha_i + Q_j \beta_i + R_j \gamma_i,$$

et P_j est nul en vertu de la première condition (2,6.1); en vertu de la seconde :

$$\alpha_j Q_j = 0, \quad \alpha_j R_j = 0,$$

de sorte que :

$$Q_j = N_1 \beta_j + S \gamma_j, \quad R_j = S' \beta_j + N_2 \gamma_j,$$

et :

$$(2,6.2) \quad \Phi_{ij} = N_1 \beta_i \beta_j + S \beta_i \gamma_j + S' \gamma_i \beta_j + N_2 \gamma_i \gamma_j.$$

Les conditions de symétrie sont ici :

$$R_{ij}(\vec{r}) = R_{ji}(-\vec{r}),$$

qui entraînent :

$$(2,6.3) \quad \Phi_{ij}(\vec{k}) = \Phi_{ji}(-\vec{k}).$$

Le fait, enfin, que R_{ij} est réel, entraîne :

$$(2,6.4) \quad \Phi_{ij}(-\vec{k}) = \Phi_{ij}^*(\vec{k}).$$

Si l'on convient d'affecter à un point N' symétrique de N par rapport à l'origine, des vecteurs $\vec{\beta}'$ et $\vec{\gamma}'$ parallèles à $\vec{\beta}$ et $\vec{\gamma}$, il faudra choisir l'un d'eux équipollent à son homologue et l'autre symétrique pour conserver un trièdre direct. La propriété (2,6.3) entraîne alors, pour (2,6.2) :

$$(2,6.5) \quad \begin{cases} N_1(-\vec{k}) = N_1(\vec{k}), & -S'(-\vec{k}) = S(\vec{k}), \\ N_2(-\vec{k}) = N_2(\vec{k}), & -S(-\vec{k}) = S'(\vec{k}). \end{cases}$$

Les deux relations entre les S se ramènent à la deuxième qui montre que S' n'est pas une nouvelle fonction par rapport à S . D'autre part, la relation (2,6.4) donne :

$$(2,6.6) \quad \begin{cases} N_1(-\vec{k}) = N_1^*(\vec{k}), & -S(-\vec{k}) = S^*(\vec{k}), \\ N_2(-\vec{k}) = N_2^*(\vec{k}), & -S'(-\vec{k}) = S'^*(\vec{k}). \end{cases}$$

On obtient dans ces conditions, pour Φ_{ij} , l'expression :

$$(2,6.7) \quad \Phi_{ij} = N_1 \beta_i \beta_j + S \beta_i \beta_j + S^* \gamma_i \beta_j + N_2 \gamma_i \gamma_j,$$

où N_1 et N_2 sont des fonctions réelles et paires de \vec{k} et où, d'après (2,6.6) :

$$S(-\vec{k}) = -S^*(\vec{k}).$$

On note que le tenseur Φ_{ij} général dépend de trois scalaires.

Si la turbulence a un centre de symétrie on aura, par définition :

$$R_{ij}(\vec{r}) = R_{ij}(-\vec{r}),$$

d'où :

$$(2,6.8) \quad \Phi_{ij}(\vec{k}) = \Phi_{ij}(-\vec{k}),$$

qui, comparée à (2,6.4), montre que Φ_{ij} est réel et que S sera également réel dans (2,6.7); l'examen de (2,6.3) montre aussi que s'il y a centre de symétrie, le tenseur Φ_{ij} est symétrique par rapport à sa diagonale principale.

Si l'on prend pour axes $Ok_1 Ok_2 Ok_3$ respectivement les axes $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ et $\vec{\alpha}$, les seules composantes non nulles de Φ_{ij} sont, d'après (2,6.7) :

$$(2,6.9) \quad \Phi_{11} = N_1, \quad \Phi_{12} = S, \quad \Phi_{21} = S^*, \quad \Phi_{22} = N_2.$$

On peut substituer à $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ deux nouveaux vecteurs $\vec{\beta}'$, $\vec{\gamma}'$ se déduisant des premiers par une rotation d'angle φ dans leur plan. On en déduira les nouvelles valeurs de N et S, soit en substituant dans (2,6.7) :

$$\begin{cases} \vec{\beta} = \cos \varphi \vec{\beta}' - \sin \varphi \vec{\gamma}', \\ \vec{\gamma} = \sin \varphi \vec{\beta}' + \cos \varphi \vec{\gamma}', \end{cases}$$

soit en transformant directement les (2,6.9). Pour une turbulence à centre de symétrie notamment (S réel), on obtient :

$$(2,6.10) \quad \begin{cases} N'_1 = \frac{N_1 + N_2}{2} + \left[\frac{N_1 - N_2}{2} \cos 2\varphi + S \sin 2\varphi \right], \\ N'_2 = \frac{N_1 + N_2}{2} - \left[\frac{N_1 - N_2}{2} \cos 2\varphi + S \sin 2\varphi \right], \\ S' = S \cos 2\varphi - \frac{N_1 - N_2}{2} \sin 2\varphi. \end{cases}$$

Si la turbulence est isotrope les N et S ne doivent pas changer par rotation des axes $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ autour du vecteur \vec{k} , et il résulte alors de (2,6.10) que l'on doit avoir $S = 0$, $N_1 = N_2 = \Phi$; l'expression (2,6.7) de Φ_{ij} s'écrit donc, pour la turbulence isotrope :

$$(2,6.11) \quad \Phi_{ij} = \Phi (\beta_i \beta_j + \gamma_i \gamma_j) = \Phi \Delta_{ij}.$$

Il résulte de la signification (1,7.1) de Φ_{ij} que les termes diagonaux de ce tenseur ne sauraient être négatifs et cela, évidemment, quels que soient les axes de référence. Cette propriété est exprimée dans le théorème de CRAMER donnant les conditions auxquelles doit satisfaire un tenseur de corrélation de vitesses R_{ij} par l'exigence que la forme quadratique :

$$F = \Phi_{ij} X_i X_j^*$$

soit non négative. Pour une turbulence à centre de symétrie et en se plaçant dans les axes de (2,6.9) la forme F s'écrit :

$$F = N_1 X_1^2 + 2 S X_1 X_2 + N_2 X_2^2,$$

et il faut donc que l'on ait :

$$(2,6.12) \quad N_1 N_2 \geq S^2.$$

On peut retrouver cette condition en cherchant par (2,6.10) les axes principaux ($S' = 0$) du tenseur Φ_{ij} et en écrivant que les tensions principales N'_1 et N'_2 y sont positives ou nulles.

Il est clair, d'après cette dernière remarque, qu'on pourra toujours choisir les axes $\vec{\beta}$ et $\vec{\gamma}$ (principaux) de façon à réduire (2,6.7) pour une turbulence à centre de symétrie à la forme :

$$(2,6.13) \quad \Phi_{ij} = B \beta_i \beta_j + C \gamma_i \gamma_j,$$

laquelle peut aussi s'écrire de deux façons :

$$(2,6.14) \quad \begin{cases} \Phi_{ij} = B (\beta_i \beta_j + \gamma_i \gamma_j) - (B - C) \gamma_i \gamma_j = B \Delta_{ij} - (B - C) \gamma_i \gamma_j, \\ \Phi_{ij} = C (\beta_i \beta_j + \gamma_i \gamma_j) + (B - C) \beta_i \beta_j = C \Delta_{ij} + (B - C) \beta_i \beta_j. \end{cases}$$

Ces propriétés ont une contrepartie dans le cas général. Nous rappelons ce résultat qui constitue le théorème de KAMPÉ DE FÉRIET [11]; il existe deux vecteurs complexes normaux entre eux et à \vec{k} tels que Φ_{ij} puisse s'écrire, pour une turbulence homogène quelconque :

$$\Phi_{ij} = b_i b_j^* + c_i c_j^*.$$

Dans la suite, cependant, nous trouverons plus commode de ne pas utiliser les axes principaux autres que \vec{k} .

ÉQUATIONS RÉDUITES POUR LES CORRÉLATIONS DOUBLES

3,1

OBJECTIFS DE RECHERCHE

Nous avons, dans les chapitres précédents, introduit *a priori* un schéma de turbulence homogène associée à un champ de vitesses moyennes également homogène et nous nous sommes surtout préoccupé d'en préciser les équations et les propriétés des tenseurs spectraux qui y figurent. Avant d'aller plus loin il est utile de reconsidérer les problèmes concrets de turbulence et les questions qu'ils posent, la part que peut en retenir le schéma qui précède et quelques aspects de ce schéma qu'il importe de souligner.

La turbulence de la pratique (tuyau, couche limite, jets et sillages) est essentiellement non homogène et, pour cette raison, il est très compliqué de considérer théoriquement des moyennes de quantités qui ne sont pas toutes prises au même point. Nous avons écrit en (1,2.1), d'une manière générale, l'équation de NAVIER pour le mouvement total; si l'on en retranche l'équation de REYNOLDS du mouvement moyen sans aucune hypothèse sur l'homogénéité, on obtient l'équation suivante qui ne diffère de (1,2.2) que par un terme supplémentaire :

$$(3,1.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_m \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_m} + \bar{u}_m \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \\ + \frac{\partial}{\partial x_m} (u_i u_m - \bar{u}_i \bar{u}_m) - \nu \Delta u_i = 0. \end{array} \right.$$

Si l'on écrit la même équation des fluctuations pour la composante j , si l'on multiplie la première par u_j , la seconde par u_i (pris toujours au même point) et qu'on additionne après moyenne, il vient :

$$(3,1.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \overline{u_i u_j} + \left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_m} \overline{u_m u_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_m} \overline{u_i u_m} \right] + \frac{\partial \overline{u_i u_j u_m}}{\partial x_m} \\ + \frac{1}{\rho} \left(\overline{u_j \frac{\partial p}{\partial x_i}} + \overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_j}} \right) + 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}} + \bar{u}_m \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_m} - \nu \Delta \overline{u_i u_j} = 0. \end{array} \right.$$

Additionnant pour $i = j$ on a l'équation d'énergie bien connue (établie par REYNOLDS lui-même) [12] :

$$(3,1.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\overline{u_i^2}}{2} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_m} \overline{u_i u_m} + \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\overline{u_i^2 u_m}}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \bar{u}_i \frac{\partial p}{\partial x_i} \\ + \nu \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i} \right)^2 + \bar{u}_m \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\overline{u_i^2}}{2} \right) - \nu \Delta \frac{\overline{u_i^2}}{2} = 0. \end{array} \right.$$

Nous ne reprenons pas l'analyse énergétique classique des termes de cette équation, sinon pour rappeler que le second changé de signe représente l'énergie transférée au mouvement de fluctuation par le mouvement moyen. Nous dirons par extension que dans (3,1.2) le deuxième terme changé de signe représente un apport depuis l'écoulement moyen à la composante $\overline{u_i u_j}$ du tenseur de REYNOLDS. Il est important de noter que cet apport est différent d'une composante à l'autre; dans le cas, par exemple, de l'écoulement parallèle uniforme entre deux plans (que nous appellerons problème du tuyau plan), les (3,1.2) s'écrivent avec les notations plus usuelles (Ox suivant l'écoulement, Oy dans la direction du gradient de vitesse) :

$$(3,1.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \overline{u^2}}{\partial t} \frac{1}{2} + \overline{uv} \frac{d\overline{u}}{dy} + \frac{d \overline{vu^2}}{dy} \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho} \overline{u} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial x_l} \right)^2 - \nu \frac{d^2 \overline{u^2}}{dy^2} \frac{1}{2} = 0, \\ \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial t} \frac{1}{2} + \frac{d \overline{vv^2}}{dy} \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho} \overline{v} \frac{\partial \overline{p}}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial \overline{v}}{\partial x_l} \right)^2 - \nu \frac{d^2 \overline{v^2}}{dy^2} \frac{1}{2} = 0, \\ \frac{\partial \overline{w^2}}{\partial t} \frac{1}{2} + \frac{d \overline{vw^2}}{dy} \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho} \overline{w} \frac{\partial \overline{p}}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial \overline{w}}{\partial x_l} \right)^2 - \nu \frac{d^2 \overline{w^2}}{dy^2} \frac{1}{2} = 0, \\ \frac{\partial \overline{uv}}{\partial t} + \nu^2 \frac{d\overline{u}}{dy} + \frac{d \overline{vuv}}{dy} + \frac{1}{\rho} \left(\overline{v} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \overline{u} \frac{\partial \overline{p}}{\partial y} \right) + 2\nu \frac{\partial \overline{u} \partial \overline{v}}{\partial x_l \partial x_l} - \nu \frac{d^2 \overline{uv}}{dy^2} = 0. \end{array} \right.$$

On voit que la contribution totale de l'écoulement moyen à l'énergie turbulente est, en fait, fournie à la seule composante u . Un deuxième terme important des (3,1.4) est la dissipation relative à chaque composante qui est plus uniformément répartie car l'anisotropie doit être plus réduite à l'échelle du tourbillon. Il apparaît ainsi que pour un écoulement uniforme les termes de pression ont un rôle capital qui consiste à redistribuer, entre les différentes composantes de la vitesse turbulente, l'énergie communiquée à l'une d'elles seulement. Dans la structure de la turbulence associée à un champ de vitesse moyenne le double fait de la répartition, inégale au départ, de l'énergie turbulente et de sa redistribution par les pressions, joue certainement un rôle capital.

Les termes de pressions peuvent, en principe, se déduire du champ de vitesses. Prenant la divergence de (3,1.1) on a :

$$(3,1.5) \quad \frac{1}{\rho} \Delta p = -2 \frac{\partial \overline{u_l}}{\partial x_m} \frac{\partial \overline{u_m}}{\partial x_l} - \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_m} (\overline{u_l u_m} - \overline{u_l} \overline{u_m}),$$

d'où :

$$(3,1.6) \quad \frac{1}{\rho} \Delta \frac{\partial p}{\partial x_j} = -2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \overline{u_l}}{\partial x_m} \frac{\partial \overline{u_m}}{\partial x_l} \right) - \frac{\partial^3}{\partial x_j \partial x_l \partial x_m} (\overline{u_l u_m} - \overline{u_l} \overline{u_m}).$$

Intégrant cette équation de POISSON (nous laissons de côté une intégrale de surface), puis multipliant par u_i nous avons :

$$(3,1.7) \quad \frac{1}{\rho} \overline{u_i} \frac{\partial p}{\partial x_j} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial}{\partial x'_j} \left[\frac{\partial \overline{u'_l}}{\partial x'_m} \frac{\partial \overline{u'_m}}{\partial x'_l} \right] \frac{d\tau'}{r} + \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial^3 \overline{u'_l u'_l u'_m}}{\partial x'_j \partial x'_l \partial x'_m} \frac{d\tau'}{r}.$$

On voit apparaître la difficulté sérieuse qui est que le calcul des moyennes pression-vitesse en un point, exige la connaissance des corrélations doubles et triples de la vitesse

en *deux* points; or, nous avons dit que l'introduction de celles-ci pour le cas général est peu praticable et ce fut précisément le mérite des schémas de la turbulence isotrope, puis simplement homogène, de la rendre possible. Une méthode de calcul consistant à former les moyennes doubles, triples, etc., *en un même point*, a été systématiquement employée par P. Y. CHOU [13]; elle exige cependant par (3,1.7) de tenir compte de quelque manière des corrélations en deux points et l'introduction, à cet effet, de développements limités d'ordre 2, est sans doute un des points délicats de cette théorie.

L'idée de considérer au préalable un schéma homogène, tant pour la turbulence que pour les vitesses moyennes, résulte donc assez naturellement de l'analyse qui précède; on peut alors, nous l'avons vu, introduire *d'emblée* des corrélations en plusieurs points; l'élimination de la pression analogue à (3,1.7) est particulièrement commode dans l'espace des \vec{k} et la théorie dans son ensemble devient élégante et compacte. Il reste toutefois à s'interroger sur la mesure dans laquelle le schéma d'un état homogène peut nous instruire sur le mécanisme des problèmes concrets, ainsi que sur les différentes possibilités offertes par ce schéma et leurs conditions d'existence respectives.

Les termes qui disparaissent de (3,1.2) par homogénéité sont le troisième, le sixième et le septième; pour le problème du tuyau, par exemple, les seuls termes importants de non-homogénéité dans les formules (3,1.4) sont les troisièmes, généralement interprétées comme diffusion d'énergie cinétique; leur importance relative, d'après les mesures de LAUFER [14, 15], varie de faible près de la paroi à très sensible près de l'axe; il y a donc des aspects des écoulements, par exemple, en tuyau, pour lesquels l'inhomogénéité ne saurait être ignorée. C'est d'ailleurs moins la reconstitution complète de ce qui se passe dans un problème complexe réel qui peut être demandé au schéma homogène qu'une analyse du mécanisme d'interaction de certains facteurs importants; à défaut de solutions analytiques sur lesquelles cette discussion s'effectuerait le plus commodément, c'est au calcul numérique qu'il faut demander de fixer les allures de variation et les ordres de grandeur, grâce auxquels, d'ailleurs, des propriétés simples, actuellement peu apparentes, pourraient être décelées.

Il y a à cette exigence une autre raison. Le concept d'une turbulence et d'un champ de vitesses moyennes homogènes n'est pas sans susciter *a priori* des objections et l'existence d'une solution physiquement acceptable, du moins pour certains cas particuliers de la théorie, ne peut être tenue pour assurée d'avance. Nous avons déjà rencontré une difficulté relativement au terme :

$$\overline{u_k \frac{\partial u_i u'_j}{\partial x_k}},$$

qui n'est pas homogène dans chaque équation originelle (1,2.3) et (1,2.4); mais nous avons souligné qu'en présence d'une vitesse moyenne $\overline{u_k}$ le terme :

$$\overline{u'_j \frac{\partial u_i}{\partial t}}$$

ne saurait être homogène non plus et que seule la combinaison des deux :

$$\overline{u'_j \frac{du_i}{dt}},$$

où d/dt désigne une dérivée en suivant le mouvement moyen, pouvait vérifier cette propriété. Ce point admis, il reste que deux points MM' voient leur écartement rapidement modifié par l'écoulement moyen et qu'il peut y avoir pendant ce trajet une certaine tendance à la conservation de la corrélation; une question qui se pose est donc de savoir si pour cette raison, et aussi à cause de la propriété inhérente de diffusion de la turbulence, celle-ci peut demeurer stationnaire ou si elle est obligée de changer de structure et d'échelle avec le temps. Dans tous les cas il est clair que sa structure devra être marquée de manière non négligeable par le terme :

$$\lambda_{lm} \xi_m \frac{\partial R_{ij}}{\partial \xi_l}$$

de (1,2.6) qui traduit cet écartement relatif de deux points, et par son homologue dans les équations des tenseurs spectraux (1,3.10) et (1,5.12).

Le point d'arrêt bien connu de la théorie de la turbulence, abordée suivant la voie désormais classique ouverte par G. I. TAYLOR, est qu'elle offre une chaîne non fermée d'équations. La fermeture, dès le premier maillon, exige une hypothèse sur les corrélations triples comme celle de HEISENBERG; on sait que celle-ci donne en turbulence isotrope et, tout au moins, pour la partie du spectre portant l'énergie cinétique, des résultats raisonnables; c'est essentiellement une hypothèse *globale* sur l'action assimilée à une viscosité fictive de *tous* les tourbillons inférieurs à une certaine échelle sur *l'ensemble* des tourbillons de taille supérieure; elle semble dès lors mal adaptée par nature à une extension tenant compte de l'anisotropie. Une voie toute récente en turbulence isotrope est la fermeture de la chaîne au second maillon, en calculant les corrélations quadruples par l'hypothèse d'une loi de probabilité quasi normale (1,6); malgré ses limitations (quand on va vers les tourbillons de la zone dissipatrice du spectre) il semble que cette hypothèse constitue un instrument de travail intéressant. Compte tenu de ce qui précède la voie de recherche qui, pour l'analyse de la turbulence anisotrope, semble actuellement ouvrir le plus de perspectives, paraît être la suivante : on considérera à part chaque équation de la chaîne; pour l'équation (1,3.9) on supposera connues les corrélations triples intervenant dans Ω_{ij} et l'on s'attachera à en déduire explicitement la structure de Φ_{ij} et son évolution; de même on résoudra (1,5.11) par rapport à Φ_{ijk} en supposant Ω_{ijk} connu. Cette première étape, qui fait l'objet des pages suivantes, n'implique aucune hypothèse; la seule difficulté qu'elle rencontre est que les systèmes d'équations à résoudre comportent des dérivées partielles des inconnues, qu'il serait, d'après des remarques antérieures, incorrect de négliger; étant donné, d'autre part, le nombre d'équations de chaque système (9 pour le premier, 27 pour le second), un objectif essentiel en vue d'une résolution numérique effective est de réduire ce nombre au minimum. C'est ce à quoi nous allons maintenant nous attacher en partant des résultats du chapitre précédent.

3,2

INTRODUCTION D'UN SYSTÈME D'AXES LOCAUX

Le tenseur Φ_{ij} s'écrit le plus simplement en un point N de l'espace des \vec{k} , dans des axes dont l'un d'eux Nk'_3 prolonge ON. Nous prendrons ensuite pour Nk'_1 la tangente au grand cercle du plan méridien passant par Ok_3 (dans le sens des θ croissants), et pour axe Nk'_2 la tangente au parallèle d'axe Ok_3 (dans le sens des φ croissants) (fig. 3). Dans ces axes les conditions d'incompressibilité :

$$k'_i \Phi'_{ij} = 0, \quad k'_j \Phi'_{ij} = 0,$$

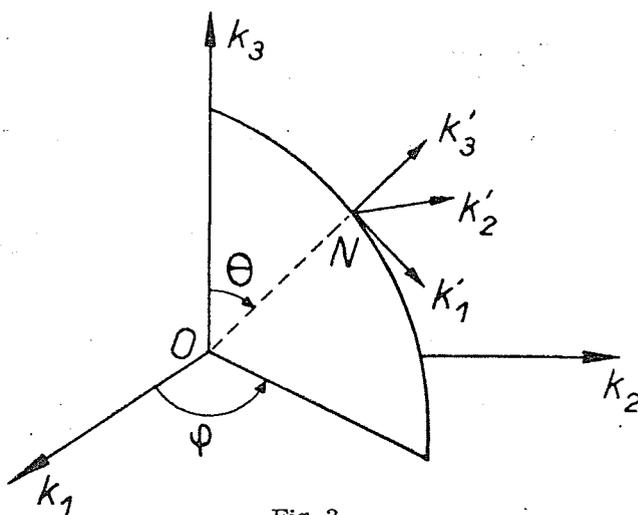


Fig. 3

donnent, puisque $k'_1 = k'_2 = 0$ et $k'_3 = 1$:

$$\Phi'_{3j} = 0, \quad \Phi'_{i3} = 0.$$

Les seules composantes non nulles de Φ'_{ij} sont donc relatives aux indices 1 et 2; nous retrouvons les résultats de (2,6) et, compte tenu de la symétrie hermitienne de Φ'_{ij} , nous poserons encore :

$$(3,2.1) \quad \Phi'_{11} = N_1, \quad \Phi'_{12} = S, \quad \Phi'_{21} = S^*, \quad \Phi'_{22} = N_2.$$

Les cosinus directeurs du changement d'axes seront désignés par :

$$(3,2.2) \quad \omega_{ij} = \cos(Nk'_i, Ok_j),$$

et leurs valeurs, en fonction des angles polaires θ et φ , sont :

$$(3,2.3) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \omega_{11} = \cos \theta \cos \varphi, & \omega_{12} = \cos \theta \sin \varphi, & \omega_{13} = -\sin \theta, \\ \omega_{21} = -\sin \varphi, & \omega_{22} = \cos \varphi, & \omega_{23} = 0, \\ \omega_{31} = \sin \theta \cos \varphi, & \omega_{32} = \sin \theta \sin \varphi, & \omega_{33} = \cos \theta. \end{array} \right.$$

Ces lignes trigonométriques sont reliées aux cosinus directeurs $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ du vecteur unité porté par \overrightarrow{ON} par :

$$(3,2.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \varphi = \frac{\alpha_1}{\sqrt{1-\alpha_3^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{\alpha_2}{\sqrt{1-\alpha_3^2}}, \\ \cos \theta = \alpha_3, \quad \sin \theta = \sqrt{1-\alpha_3^2}, \end{array} \right.$$

de sorte que le tableau, utile pour la suite, des ω_{ij} , s'écrit :

$$(3,2.5) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \omega_{11} = \frac{\alpha_1 \alpha_3}{\sqrt{1-\alpha_3^2}}, & \omega_{12} = \frac{\alpha_2 \alpha_3}{\sqrt{1-\alpha_3^2}}, & \omega_{13} = -\sqrt{1-\alpha_3^2}, \\ \omega_{21} = -\frac{\alpha_2}{\sqrt{1-\alpha_3^2}}, & \omega_{22} = \frac{\alpha_1}{\sqrt{1-\alpha_3^2}}, & \omega_{23} = 0, \\ \omega_{31} = \alpha_1, & \omega_{32} = \alpha_2, & \omega_{33} = \alpha_3. \end{array} \right.$$

Nous rappelons les formules de changement d'axes cartésiens pour les vecteurs :

$$(3,2.6) \quad \left\{ \begin{array}{ll} V'_i = \omega_{il} V_l, & V_i = \omega_{li} V'_l, \\ \frac{\partial}{\partial k'_i} = \omega_{il} \frac{\partial}{\partial k_l}, & \frac{\partial}{\partial k_i} = \omega_{li} \frac{\partial}{\partial k'_l}, \end{array} \right.$$

et pour les tenseurs :

$$T'_{ij} = \omega_{il} \omega_{jm} T_{lm}, \quad T_{ij} = \omega_{li} \omega_{mj} T'_{lm}.$$

En particulier, pour $\lambda_{lm} = \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_m}$ on a :

$$(3,2.7) \quad \lambda'_{lm} = \omega_{lp} \omega_{mq} \lambda_{pq}.$$

Pour le calcul de toute grandeur dans l'espace physique il faut revenir à l'expression de Φ_{ij} en axes fixes; on obtient aisément, en appliquant (3,2.6) :

$$(3,2.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_{11} = \frac{1}{1-\alpha_3^2} [\alpha_1^2 \alpha_3^2 N_1 + \alpha_2^2 N_2 - \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 (S + S^*)], \\ \Phi_{22} = \frac{1}{1-\alpha_3^2} [\alpha_2^2 \alpha_3^2 N_1 + \alpha_1^2 N_2 + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 (S + S^*)], \\ \Phi_{33} = (1-\alpha_3^2) N_1, \\ \Phi_{12} = \frac{1}{1-\alpha_3^2} [\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3^2 N_1 - \alpha_1 \alpha_2 N_2 + \alpha_1^2 \alpha_3 S - \alpha_2^2 \alpha_3 S^*], \\ \Phi_{23} = -\alpha_2 \alpha_3 N_1 - \alpha_1 S^*, \\ \Phi_{31} = -\alpha_1 \alpha_3 N_1 + \alpha_2 S. \end{array} \right.$$

3,3

DIFFÉRENTIATIONS EN AXES FIXES

Les équations (1,3.10) comportent des dérivées des composantes de Φ_{ij} repérées par rapport à des axes fixes; nous avons trouvé commode, au contraire, d'associer à chaque point N de l'espace des \vec{k} des repères locaux. Nous sommes donc conduit à résoudre le problème suivant : étant donné un point N' voisin de N et les composantes $\Phi''_{ij}(N')$ du tenseur en N' rapportées aux axes locaux en N', on désire les composantes $\Phi'_{ij}(N')$ de ce même tenseur rapportées aux axes locaux en N (fig. 4). Ce problème du calcul d'une différentielle absolue peut être résolu d'une manière générale à l'aide des symboles de CHRISTOFFEL, mais la solution géométrique directe est ici trop simple pour qu'il soit nécessaire d'y faire appel.

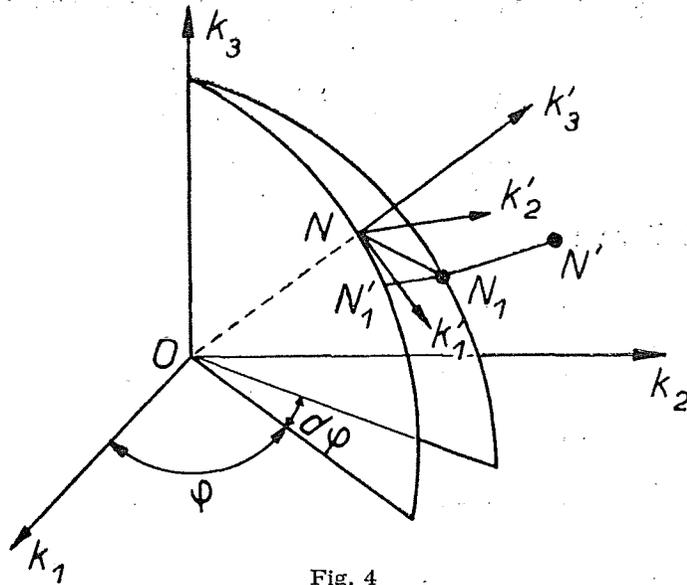


Fig. 4

Appelant $N' k''_i$ les axes locaux en N' et Nk'_j ceux en N nous posons :

$$\alpha_{ij} = \cos(\vec{Ok''_i}, \vec{Ok'_j}).$$

Le trièdre de référence en N' se déduit de celui en N par une rotation $-d\theta$ autour de Nk'_2 et une rotation $+d\varphi$ autour de Nk'_3 ; les composantes de ces rotations, respectivement sur les axes Nk'_1, Nk'_2, Nk'_3 , sont donc :

$$dr'_1 = -\sin\theta d\varphi, \quad dr'_2 = -d\theta, \quad dr'_3 = \cos\theta d\varphi.$$

Cette rotation $d\vec{r}$ imprime aux extrémités des vecteurs unités \vec{e}'_i du trièdre local en N des déplacements :

$$d\vec{r} \wedge \vec{e}'_i,$$

de sorte que les vecteurs unités \vec{e}''_i du repère naturel en N' s'écrivent :

$$\vec{e}''_i = \vec{e}'_i + d\vec{r} \wedge \vec{e}'_i,$$

et les projections de ces vecteurs sur les axes \vec{e}'_j , c'est-à-dire les α_{ij} , ont pour valeur :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \alpha_{11} = 1, & \alpha_{12} = dr'_3, & \alpha_{13} = -dr'_2, \\ \alpha_{21} = -dr'_3, & \alpha_{22} = 1, & \alpha_{23} = dr'_1, \\ \alpha_{31} = dr'_2, & \alpha_{32} = -dr'_1, & \alpha_{33} = 1. \end{array} \right.$$

Les composantes de $\Phi''_{ij}(N')$, suivant le repère de N que nous écrivons $\Phi'_{ij}(N)$, s'en déduisent alors aisément par :

$$\Phi'_{ij}(N') = \alpha_{li} \alpha_{mj} \Phi''_{lm},$$

où, bien entendu, il n'y a lieu de retenir que les infiniment petits du premier ordre. En posant :

$$d\Phi'_{ij} = \Phi'_{ij}(N') - \Phi'_{ij}(N),$$

$$\delta\Phi'_{ij} = \Phi''_{ij}(N') - \Phi'_{ij}(N),$$

on obtient, en définitive :

$$(3,3.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\Phi'_{11} = \delta\Phi'_{11} - (\Phi'_{12} + \Phi'_{21}) \cos\theta d\varphi, \\ d\Phi'_{22} = \delta\Phi'_{22} + (\Phi'_{12} + \Phi'_{21}) \cos\theta d\varphi, \\ d\Phi'_{33} = 0, \\ d\Phi'_{12} = \delta\Phi'_{12} + (\Phi'_{11} - \Phi'_{22}) \cos\theta d\varphi, \\ d\Phi'_{21} = \delta\Phi'_{21} + (\Phi'_{11} - \Phi'_{22}) \cos\theta d\varphi, \\ d\Phi'_{23} = -\Phi'_{22} \sin\theta d\varphi + \Phi'_{21} d\theta, \\ d\Phi'_{32} = -\Phi'_{22} \sin\theta d\varphi + \Phi'_{12} d\theta, \\ d\Phi'_{31} = \Phi'_{11} d\theta - \Phi'_{21} \sin\theta d\varphi, \\ d\Phi'_{13} = \Phi'_{11} d\theta - \Phi'_{12} \sin\theta d\varphi. \end{array} \right.$$

A partir des relations définissant les coordonnées polaires k , φ et θ :

$$k_1 = k \sin\theta \cos\varphi, \quad k_2 = k \sin\theta \sin\varphi, \quad k_3 = k \cos\theta,$$

on a, en différentiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} dk_1 = \sin\theta \cos\varphi dk - k \sin\theta \sin\varphi d\varphi + k \cos\theta \cos\varphi d\theta, \\ dk_2 = \sin\theta \cos\varphi dk + k \sin\theta \cos\varphi d\varphi + k \cos\theta \sin\varphi d\theta, \\ dk_3 = \cos\theta dk - k \sin\theta d\theta, \end{array} \right.$$

d'où l'on déduit aisément :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\varphi = \frac{1}{k \sin \theta} [-\sin \varphi dk_1 + \cos \varphi dk_2], \\ d\theta = \frac{1}{k} [\cos \theta \cos \varphi dk_1 + \cos \theta \sin \varphi dk_2 - \sin \theta dk_3]. \end{array} \right.$$

Les relations (3,3.1) s'écrivent alors (nous n'en retenons que les trois qui nous seront utiles) :

$$(3,3.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\Phi'_{11} = \delta N_1 + (S + S^*) \frac{\cos \theta}{k \sin \theta} (\sin \varphi dk_1 - \cos \varphi dk_2), \\ d\Phi'_{22} = \delta N_2 - (S + S^*) \frac{\cos \theta}{k \sin \theta} (\sin \varphi dk_1 - \cos \varphi dk_2), \\ d\Phi'_{12} = \delta S - (N_1 - N_2) \frac{\cos \theta}{k \sin \theta} (\sin \varphi dk_1 - \cos \varphi dk_2). \end{array} \right.$$

3,4

ÉQUATIONS RÉDUITES GÉNÉRALES

Nous rappelons l'équation fondamentale (1,3.9) des corrélations en deux points :

$$(3,4.1) \quad \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial t} + \Psi_{ij} = \Omega_{ij} - 2\nu k^2 \Phi_{ij},$$

où Ψ_{ij} s'exprime à partir de Φ_{ij} par la combinaison :

$$(3,4.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi_{ij} = 2\lambda_{lm} [\Delta_{il} \Phi_{mj} + \Delta_{jl} \Phi_{im}] \\ - \lambda_{lm} \left[\frac{\partial}{\partial k_m} (k_l \Phi_{ij}) + \delta_{il} \Phi_{mj} + \delta_{jl} \Phi_{im} \right], \end{array} \right.$$

et où Ω_{ij} résulte des corrélations triples en deux points par la formule :

$$(3,4.3) \quad \Omega_{ij} = [k_l \Delta_{im} \Theta_{lmj} + k_l \Delta_{jm} \Theta^*_{lmi}].$$

Avant de poursuivre le calcul dans le sens où nous l'avons orienté, il n'est peut-être pas inutile de montrer que certains raccourcis ou cas particuliers auxquels on peut penser *a priori* sont inopérants pour le problème qui nous occupe. Nous avons vu en (2,6.14) que pour une turbulence à centre de symétrie le tenseur Φ_{ij} peut s'écrire, dans le cas général :

$$(3,4.4) \quad \Phi_{ij} = \Phi \Delta_{ij} + X \beta_i \beta_j,$$

où $\vec{\beta}$ est un certain vecteur unité situé dans le plan perpendiculaire à \vec{k} (cette expression peut être écrite de deux manières différentes en substituant à $\vec{\beta}$ le vecteur unité $\vec{\gamma}$ normal

à \vec{k} et à $\vec{\beta}$). Un cas particulier est celui où $X = 0$ et si, plus particulièrement, Φ n'est fonction que de k on tombe sur la turbulence isotrope. Dans ce dernier cas l'expression connue de Θ_{ijk} est :

$$(3,4.5) \quad \Theta_{ijk} = \Lambda \left[\frac{k_i k_j k_k}{k^3} - \frac{1}{2} \left(\delta_{jk} \frac{k_i}{k} + \delta_{ik} \frac{k_j}{k} \right) \right] = \Lambda \Delta_{ijk},$$

où Δ_{ijk} s'écrit aussi :

$$(3,4.6) \quad \Delta_{ijk} = -\frac{1}{2} \left[\frac{k_i}{k} \Delta_{jk} + \frac{k_j}{k} \Delta_{ik} \right].$$

On peut considérer au moins formellement (nous constaterons d'ailleurs, ultérieurement, que cette notion soulève des objections) une turbulence non isotrope à centre de symétrie où Θ_{ijk} serait donné par (3,4.5) mais avec Λ , fonction de $k_1 k_2 k_3$. On notera les identités :

$$(3,4.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} k_l \Delta_{lmj} = -\frac{1}{2} k \Delta_{mj}, \\ \Delta_{im} \Delta_{mj} = \Delta_{ij}, \end{array} \right.$$

d'où il résulte (comme en turbulence isotrope) :

$$(3,4.8) \quad \Omega_{ij} = -k \Lambda \Delta_{ij}.$$

En l'absence d'un champ de vitesses moyennes ($\Psi_{ij} = 0$) il est donc possible (formellement) de considérer une turbulence anisotrope en déclin, où :

$$(3,4.9) \quad \Phi_{ij} = \Phi \Delta_{ij},$$

où les termes d'accélération et de pression sont rassemblés dans (3,4.8) [on note au passage qu'avec (3,4.5) le tenseur de pression Σ_j calculé en (1,3.5) est nul] et où, par conséquent, les scalaires de base Φ et Λ vérifient :

$$(3,4.10) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -k \Lambda - 2 \nu k^2 \Phi.$$

Ce schéma d'anisotropie réduite à sa plus simple expression, pourrait servir d'objectif préliminaire à la théorie si, comme nous allons le constater, il n'était incompatible avec l'existence d'un champ de vitesses moyennes. En vue d'explicitier Ψ_{ij} pour une forme (3,4.9) de Φ_{ij} nous l'écrivons d'abord en variante :

$$\Psi_{ij} = \lambda_{lm} [\Delta_{il} \Phi_{mj} + \Delta_{jl} \Phi_{im}] - \lambda_{lm} \left[\frac{\partial}{\partial k_m} (k_l \Phi_{ij}) + \frac{k_l}{k} \left(\frac{k_i}{k} \Phi_{mj} + \frac{k_j}{k} \Phi_{im} \right) \right].$$

On a :

$$\frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial k_m} = \frac{\partial \Phi}{\partial k_m} \Delta_{ij} + \Phi \frac{\partial}{\partial k_m} \Delta_{ij},$$

et l'on vérifie aisément que :

$$(3,4.11) \quad \frac{k}{2} \frac{\partial}{\partial k_m} \Delta_{ij} = \Delta_{ijm},$$

d'où il résulte, pour un fluide incompressible ($\lambda_{ll} = 0$) et compte tenu de (3,4.6) :

$$(3,4.12) \quad \lambda_{lm} \left[k_l \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial k_m} + \frac{k_l}{k} \left(\frac{k_i}{k} \Phi_{mj} + \frac{k_j}{k} \Phi_{im} \right) \right] = \lambda_{lm} k_l \frac{\partial \Phi}{\partial k_m} \Delta_{ij}.$$

Nous obtenons donc au passage le résultat intéressant qu'une partie de Ψ_{ij} prend elle-même la forme (3,4.9); mais il est facile de constater (nous le vérifierons plus loin) que la partie restante :

$$(3,4.13) \quad \Phi \lambda_{lm} [\Delta_{il} \Delta_{mj} + \Delta_{jl} \Delta_{im}]$$

n'a pas cette propriété.

La conclusion qui se dégage de ces remarques est que pour un champ turbulent associé à des vitesses moyennes il est nécessaire de considérer le tenseur Φ_{ij} sous sa forme générale (3,4.4); il y a, dès lors, peu d'espoir que ses grandeurs de base Φ , X et $\tilde{\beta}$ aient une expression simple ou puissent se découvrir intuitivement; il est apparent aussi qu'il n'y a pas avantage à introduire d'emblée les axes principaux utilisés par (3,4.4) et que deux axes rectangulaires quelconques sur le plan tangent en N à la sphère de rayon ON , introduisent les grandeurs équivalentes $N_1 N_2 S$, d'où Φ , X et $\tilde{\beta}$ se déduiraient aisément (mais de deux manières différentes); le bien-fondé de l'adoption de repères locaux tels que ceux que nous avons définis se trouve ainsi confirmé. Parvenu en ce point nous pouvons, d'autre part, préciser un peu plus les objectifs du calcul : il est visible, sur (3,4.1) et (3,4.2), que la structure de Φ_{ij} doit être fortement modelée par la combinaison que représente le tenseur de déformation Ψ_{ij} ; de manière analogue Φ_{ijk} est, par les équations (1,5.11), essentiellement informé par le groupement Ψ_{ijk} ; toutefois, comme Θ_{ijk} représente une intégrale de Φ_{ijk} dans tout l'espace, il est possible que l'anisotropie soit plus estompée dans Ω_{ij} , d'autant plus que ce tenseur forme un pont entre la génération et la dissipation d'énergie cinétique turbulente et qu'il s'étale sur une gamme de nombres d'ondes plus élevés que ceux qui contribuent à l'énergie cinétique. Si l'on partait d'un tenseur Φ_{ij} à structure isotrope les remarques antérieures [formules (3,4.12) et (3,4.13)] montrent que Ψ_{ij} serait fortement déformé; inversement, il faut une certaine distribution de Φ_{ij} pour que, par déformation, il s'ajuste à Ω_{ij} ; l'orientation logique du calcul qui résulte de ces considérations est donc bien la détermination de Φ_{ij} à partir de Ω_{ij} , avec cette raison supplémentaire que s'agissant d'une intégration on aura une certaine stabilité pour toute approximation faite sur Ω_{ij} .

L'expression de (3,4.1) en repères locaux est immédiate, sauf en ce qui concerne Ψ_{ij} dont les composantes locales sont :

$$(3,4.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi'_{ij} = 2 \lambda'_{lm} [\Delta'_{il} \Phi'_{mj} + \Delta'_{jl} \Phi'_{im}] \\ - \lambda'_{lm} \left[k'_l \frac{\partial \Phi'_{ij}}{\partial k'_m} + \delta_{il} \Phi'_{mj} + \delta_{jl} \Phi'_{im} \right]. \end{array} \right.$$

Ce tenseur satisfait aux conditions d'incompressibilité et l'on vérifie même que les deux expressions qui la composent y satisfont séparément; il n'y a donc lieu de considérer que les composantes relatives aux indices 1 et 2. On a, en N :

$$(3,4.15) \quad k'_1 = k'_2 = 0, \quad k'_3 = k,$$

et par suite, pour les indices i et j en cause :

$$\Delta'_{ii} = \delta_{ii}, \quad \Delta'_{ji} = \delta_{ji}.$$

On remplacera, d'autre part, λ'_{lm} par son expression (3,2.7) et l'on notera que :

$$\omega_{mq} \frac{\partial \Phi'_{ij}}{\partial k'_m} = \frac{\partial \Phi'_{ij}}{\partial k_q}, \quad \omega_{lp} k'_l = k \omega_{3p}.$$

D'où :

$$(3,4.16) \quad \Psi'_{ij} = \lambda_{pq} [\omega_{ip} \omega_{mq} \Phi'_{mj} + \omega_{jp} \omega_{mq} \Phi'_{im}] - \lambda_{pq} \omega_{3p} k \frac{\partial \Phi'_{ij}}{\partial k_q}.$$

Pour le calcul des composantes de la dérivée covariante, on utilisera les expressions (3,3.2) de la différentielle absolue; on a, par exemple :

$$(3,4.17) \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda_{pq} \omega_{3p} k \frac{\partial \Phi'_{11}}{\partial k_q} &= \lambda_{p1} \omega_{3p} \left[k \frac{\partial N_1}{\partial k_1} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \sin \varphi (S + S^*) \right] \\ &+ \lambda_{p2} \omega_{3p} \left[k \frac{\partial N_1}{\partial k_2} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cos \varphi (S + S^*) \right] + \lambda_{p3} \omega_{3p} k \frac{\partial N_1}{\partial k_3}. \end{aligned} \right.$$

On posera :

$$(3,4.18) \quad m = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \omega_{3p} (\lambda_{p1} \sin \varphi - \lambda_{p2} \cos \varphi),$$

moyennant quoi (3,4.17) et les deux expressions analogues s'écrivent :

$$(3,4.19) \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda_{pq} \omega_{3p} k \frac{\partial \Phi'_{11}}{\partial k_q} &= \lambda_{pq} \omega_{3p} k \frac{\partial N_1}{\partial k_q} + m (S + S^*), \\ \lambda_{pq} \omega_{3p} k \frac{\partial \Phi'_{22}}{\partial k_q} &= \lambda_{pq} \omega_{3p} k \frac{\partial N_2}{\partial k_q} - m (S + S^*), \\ \lambda_{pq} \omega_{3p} k \frac{\partial \Phi'_{12}}{\partial k_q} &= \lambda_{pq} \omega_{3p} k \frac{\partial S}{\partial k_q} - m (N_1 - N_2). \end{aligned} \right.$$

Les expressions suivantes de Ψ'_{11} , Ψ'_{22} et Ψ'_{12} en résultent immédiatement :

$$(3,4.20) \quad \left\{ \begin{aligned} \Psi'_{11} &= 2 \lambda_{pq} \omega_{1p} \omega_{1q} N_1 - \lambda_{pq} \omega_{3p} k \frac{\partial N_1}{\partial k_q} \\ &+ (\lambda_{pq} \omega_{1p} \omega_{2q} - m) (S + S^*), \\ \Psi'_{22} &= 2 \lambda_{pq} \omega_{2p} \omega_{2q} N_2 - \lambda_{pq} \omega_{3p} k \frac{\partial N_2}{\partial k_q} \\ &+ (\lambda_{pq} \omega_{2p} \omega_{1q} + m) (S + S^*), \\ \Psi'_{12} &= \lambda_{pq} (\omega_{1p} \omega_{1q} + \omega_{2p} \omega_{2q}) S - \lambda_{pq} \omega_{3p} k \frac{\partial S}{\partial k_q} \\ &+ \lambda_{pq} \omega_{2p} \omega_{1q} N_1 + \lambda_{pq} \omega_{1p} \omega_{2q} N_2 + m (N_1 - N_2). \end{aligned} \right.$$

La comparaison des directions principales et des tensions principales de Ψ'_{ij} et Φ_{ij} est particulièrement simple à partir des équations (3,4.20). Supposons, par exemple, connues les directions principales Nk''_1, Nk''_2 de Φ_{ij} qui se déduisent de Nk'_1, Nk'_2 par une rotation d'angle σ dans le plan normal à ON; les formules bien connues de changement d'axes donnent, si B et C sont les tensions principales :

$$(3,4.21) \quad \begin{cases} N_1 = B \cos^2 \sigma + C \sin^2 \sigma, & N_2 = B \sin^2 \sigma + C \cos^2 \sigma, \\ S = (B - C) \sin \sigma \cos \sigma. \end{cases}$$

Les (3,4.20) donnent, à partir de ces valeurs, les Ψ'_{ij} et les axes principaux de ce tenseur résultent eux-mêmes de Nk'_1, Nk'_2 par une rotation d'angle σ' , avec :

$$(3,4.22) \quad \operatorname{tg} 2 \sigma' = 2 \frac{\Psi'_{12}}{\Psi'_{11} - \Psi'_{22}}.$$

3,5 CAS D'UNE DÉFORMATION PURE PLANE

L'équation de base des corrélations doubles (3,4.1) se réduit, par ce qui précède, à :

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} + \Psi'_{11} = \Omega'_{11} - 2v k^2 N_1$$

et les deux équations analogues. Supposant les Ω'_{ij} connus le problème est donc d'intégrer un système d'équations aux dérivées partielles en N_1, N_2 et S où, par (3,4.20), toutes les inconnues figurent dans chaque équation. En ce qui concerne les dérivées spatiales leur expression, sous forme générale (3,4.2) :

$$\lambda_{lm} k_l \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial k_m},$$

montre qu'il s'agit d'une dérivée de chaque composante Φ_{ij} suivant la direction caractéristique $\lambda_{lm} k_l$. Dans l'espace physique l'équation (1,2.6) montre de même que le tenseur de corrélation R_{ij} se trouve dérivé suivant la direction $\lambda_{lm} \xi_m$ qui est celle de la vitesse (prise nulle à l'origine), de sorte qu'on a simplement dans cette équation une dérivée lagrangienne. Si le tenseur λ_{lm} est symétrique, c'est-à-dire s'il s'agit d'une déformation pure, les directions caractéristiques dans l'espace \vec{k} sont identiques à celles de la vitesse au point de coordonnées \vec{k} de l'espace physique. Ce cas d'une déformation pure est intéressant pour plusieurs raisons et nous l'examinerons en détail, plus particulièrement le cas plan caractérisé en axes principaux par :

$$\lambda_{11} = -\lambda_{22} = a.$$

La valeur de quelques termes saillants de (3,4.20) est alors :

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda_{pq} \omega_{1p} \omega_{2q} = \lambda_{pq} \omega_{1q} \omega_{2p} = -2 \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{1 - \alpha_3^2}, \\ m = 2 \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{1 - \alpha_3^2}. \end{aligned} \right.$$

Il suit que le coefficient de $(S + S^*)$ dans la deuxième équation est nul et que le coefficient de N_1 dans la troisième est également nul; cette circonstance est extrêmement favorable pour l'intégration numérique de notre problème car Ψ'_{22} ne contient que N_2 , Ψ'_{12} contient seulement N_2 et S , de sorte que les diverses inconnues pourront être obtenues séparément l'une après l'autre. Les expressions complètes des Ψ'_{ij} sont, pour une turbulence à centre de symétrie (S réel) :

$$(3,5.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi'_{11} = a \left[2 \frac{\alpha_3^2}{1 - \alpha_3^2} (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) N_1 - \left(k_1 \frac{\partial N_1}{\partial k_1} - k_2 \frac{\partial N_1}{\partial k_2} \right) - 8 \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{1 - \alpha_3^2} S \right], \\ \Psi'_{22} = a \left[\frac{2}{1 - \alpha_3^2} (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) N_2 - \left(k_1 \frac{\partial N_2}{\partial k_1} - k_2 \frac{\partial N_2}{\partial k_2} \right) \right], \\ \Psi'_{12} = a \left[(\alpha_3^2 - \alpha_1^2) S - \left(k_1 \frac{\partial S}{\partial k_1} - k_2 \frac{\partial S}{\partial k_2} \right) - 4 \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{1 - \alpha_3^2} N_2 \right]. \end{array} \right.$$

On peut mettre les (3,5.1) sous une forme plus commode pour le calcul, en utilisant systématiquement la transformation :

$$ay + b \frac{dy}{dx} = p \frac{dq}{dx},$$

où, par identification, l'expression de p et q est :

$$\frac{1}{q} \frac{dq}{dx} = \frac{a}{b}, \quad p = \frac{b}{q}.$$

Pour Ψ'_{11} , par exemple, l'une des expressions à transformer est :

$$2 \frac{\alpha_3^2 \alpha_1^2}{1 - \alpha_3^2} N_1 - k_1 \frac{\partial N_1}{\partial k_1},$$

et l'on trouve aisément :

$$q = \frac{1}{1 - \alpha_3^2}, \quad p = -k_1 (1 - \alpha_3^2).$$

De même, pour Ψ'_{22} , il faut considérer :

$$2 \frac{\alpha_1^2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} N_2 + k_1 \frac{\partial N_2}{\partial k_1},$$

pour lequel on a :

$$q = k_1^2 + k_2^2, \quad p = \frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2}.$$

Enfin, de manière analogue, Ψ'_{33} introduit :

$$\alpha_1^2 S + k_1 \frac{\partial S}{\partial k_1},$$

qui se transforme par :

$$q = k, \quad p = \frac{k_1}{k};$$

avec ces expressions, les (3,5.1) prennent la forme :

$$(3,5.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi'_{11} = a \left[- (1 - \alpha_3^2) \left(k_1 \frac{\partial}{\partial k_1} - k_2 \frac{\partial}{\partial k_2} \right) \frac{N_1}{1 - \alpha_3^2} - 8 \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{1 - \alpha_3^2} S \right], \\ \Psi'_{22} = a \left[- \frac{1}{k_1^2 + k_2^2} \left(k_1 \frac{\partial}{\partial k_1} - k_2 \frac{\partial}{\partial k_2} \right) (k_1^2 + k_2^2) N_2 \right], \\ \Psi'_{12} = a \left[- \frac{1}{k} \left(k_1 \frac{\partial}{\partial k_1} - k_2 \frac{\partial}{\partial k_2} \right) (kS) - 4 \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{1 - \alpha_3^2} \right]. \end{array} \right.$$

L'écoulement plan à potentiel dans le plan physique est tout simplement :

$$w = - \frac{az^2}{2},$$

où :

$$w = \Phi + i \Psi, \quad z = x_1 + ix_2,$$

et les lignes de courant sont les hyperboles équilatères $x_1 x_2 = C^{te}$. Les caractéristiques des équations aux dérivées partielles (3,5.2) étant ici confondues avec les lignes de courant il est évident qu'on aura avantage à les prendre pour axes de coordonnées. On peut pour cela substituer à l'espace $k_1 k_2 k_3$ un espace $X_1 X_2 X_3$ obtenu en conservant la coordonnée k_3 et en appliquant au plan $Ok_1 k_2$ la transformation conforme :

$$X_1 + iX_2 = \frac{(k_1 + ik_2)^2}{2},$$

c'est-à-dire :

$$(3,5.3) \quad 2 X_1 = k_1^2 - k_2^2, \quad 2 X_2 = 2 k_1 k_2.$$

Il revient au même mais il est plus parlant de conserver les axes \vec{k} , mais de tracer sur le plan $Ok_1 k_2$ le réseau d'hyperboles orthogonales (3,5.3) dont les cotes X_1, X_2 seront les coordonnées curvilignes d'un point quelconque. On montre aisément, à partir de (3,5.3), que :

$$k_1 \frac{\partial}{\partial k_1} - k_2 \frac{\partial}{\partial k_2} = (k_1^2 + k_2^2) \frac{\partial}{\partial X_1},$$

de sorte que les expressions de Ψ'_{ij} s'écrivent [16] :

$$(3,5.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi'_{11} = a \left[- \frac{(k_1^2 + k_2^2)^2}{k_2} \frac{\partial}{\partial X_1} \frac{k^2 N_1}{k_1^2 + k_2^2} - \frac{8 k_1 k_2 k_3}{k (k_1^2 + k_2^2)} S \right], \\ \Psi'_{22} = - a \frac{\partial}{\partial X_1} (k_1^2 + k_2^2) N_2, \\ \Psi'_{12} = a \left[- \frac{k_1^2 + k_2^2}{k} \frac{\partial}{\partial X_1} (kS) - \frac{4 k_1 k_2 k_3}{k (k_1^2 + k_2^2)} N_2 \right]. \end{array} \right.$$

Un cas *a priori* très attirant (mais pour lequel, nous l'avons dit, l'existence d'une solution physiquement acceptable n'est pas assurée d'avance) est celui d'une turbulence stationnaire obéissant, par conséquent, aux équations :

$$(3,5.5) \quad \begin{cases} \Psi'_{11} = \Omega'_{11} - 2\nu k^2 N_1, & \Psi'_{22} = \Omega'_{22} - 2\nu k^2 N_2, \\ \Psi'_{12} = \Omega'_{12} - 2\nu k^2 S. \end{cases}$$

L'examen de cette possibilité constitue une nouvelle étape du problème qui doit être traitée avec l'attention et les détails voulus et nous n'entendons pas l'aborder ici, sinon pour souligner quelques points de méthode. Pour le calcul de Ω'_{ij} nous disposons des équations des corrélations triples en trois points et nous montrerons bientôt que leur intégration, à partir des corrélations quadruples en trois points, est encore possible; les fonctions à déterminer dépendent toutefois de deux points et le labeur exigé est forcément assez considérable; de plus, la mise en œuvre d'emblée exacte de l'hypothèse d'une distribution quasi normale exigerait la connaissance préalable de Φ_{ij} . La marche à suivre praticable paraît donc être celle des approximations successives et la première d'entre elles, déjà intéressante, consiste à se borner au système (3,5.4) et à prendre pour Ω'_{ij} une distribution isotrope. Nous avons vu que dans ce cas, si Λ est défini par (3,4.5), Ω_{ij} est donné par (3,4.8), c'est-à-dire :

$$(3,5.6) \quad \Omega'_{11} = \Omega'_{22} = -k\Lambda, \quad \Omega'_{12} = 0.$$

D'autre part, on substitue volontiers en turbulence isotrope, au scalaire Φ de (3,4.9), le scalaire :

$$E = 4\pi k^2 \Phi,$$

de sorte que l'énergie cinétique s'écrit :

$$\int \frac{\Phi_{ii}}{2} d\vec{k} = \int \Phi d\vec{k} = \int_0^\infty 4\pi k^2 \Phi dk = \int_0^\infty E dk,$$

et parallèlement on remplace Ω'_{11} par T :

$$(3,5.7) \quad T = 4\pi k^2 \Omega'_{11},$$

grâce à quoi l'équation (3,4.10) s'écrit :

$$(3,5.8) \quad \frac{\partial E}{\partial t} = T - 2\nu k^2 E.$$

Pour une forme raisonnable de T on peut faire appel à l'expression proposée par HEISENBERG :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^k T dk = -\nu_t \int_0^k 2k^2 E dk, \\ \nu_t = \gamma \int_k^\infty \sqrt{\frac{E}{k^3}} dk, \end{array} \right.$$

à l'exclusion, toutefois, de la zone de k justiciable de l'équilibre de KOLMOGOROFF, et en s'aidant des commentaires théoriques et expérimentaux qui ont été apportés à cette idée.

La question de principe essentielle qui se rattache à l'intégration du système stationnaire (3,5.5) est, nous l'avons dit, la possibilité d'obtenir une solution physiquement acceptable, telle notamment, que les tensions principales de Φ_{ij} soient non négatives; on peut noter que si les dérivées partielles étaient négligées la deuxième équation (3,5.1) donnerait :

$$\Psi'_{11} = 2a \frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} N_2 = \Omega'_{22} - 2\nu k^2 N_2,$$

et N_2 changerait de signe en traversant les bissectrices de $Ok_1 k_2$; les équations complètes (3,5.4) ne présentent pas *a priori* cette anomalie mais seule l'intégration, en disposant des fonctions arbitraires, peut montrer s'il y a là une épreuve critique pour l'existence d'une solution stationnaire correcte. Sur les paramètres dont dépendrait une telle solution on peut faire quelques remarques qui ont ici leur place. L'équation d'énergie (3,1.3) s'écrit, dans le cas présent :

$$3,5.9) \quad a(\bar{u}_2^2 - \bar{u}_1^2) = \nu \bar{\omega}^2$$

Se basant sur ses expériences déjà citées, TOWNSEND [2] admet que, d'une manière (générale, une turbulence homogène soumise pendant quelque temps à une déformation pure tend vers une structure d'équilibre, en entendant par là des rapports constants :

$$(3,5.10) \quad c_1 = \frac{\bar{u}_1^2}{q^2}, \quad c_2 = \frac{\bar{u}_2^2}{q^2}, \quad c_3 = \frac{\bar{u}_3^2}{q^2},$$

où :

$$q^2 = \bar{u}_1^2 + \bar{u}_2^2 + \bar{u}_3^2$$

(les valeurs expérimentales pour une déformation plane seraient $c_1 = 0,19$, $c_2 = 0,48$). L'équation (3,5.9) s'écrit alors :

$$(3,5.11) \quad (c_2 - c_1) \frac{q^2}{\omega^2} = \frac{\nu}{a}.$$

Il suit que l'analogie, pour le cas actuel de l'échelle λ de la turbulence isotrope, est fixée par ν et le gradient de vitesse « a ».

Posant :

$$\frac{q^2}{\omega^2} = \frac{\lambda^2}{5},$$

on a :

$$(3,5.12) \quad \sqrt{\frac{c_2 - c_1}{5}} \lambda = \sqrt{\frac{\nu}{a}}.$$

L'intensité de la turbulence, toutefois, demeure *a priori* arbitraire, ainsi que son échelle intégrale « l ». Il est possible, d'ailleurs, qu'il y ait un lien entre elles si l'on peut admettre, comme en turbulence isotrope, que le taux de dissipation est fixé, en fait, par les gros tourbillons et indépendant de la viscosité; on aurait, dans ces conditions :

$$a(\bar{u}_2^2 - \bar{u}_1^2) \sim \frac{q^3}{l} \quad \text{soit} \quad l \sim \frac{q}{a},$$

et le paramètre de base, pour l'ensemble du tenseur Φ_{ij} , demeurerait alors le nombre REYNOLDS de turbulence :

$$R_\lambda = \frac{q\lambda}{\nu} \sim \frac{q}{\sqrt{\nu a}}$$

En vertu du postulat (3,5.10), cependant, la partie de Φ_{ij} contribuant à l'énergie cinétique serait déterminée d'une manière unique par l'intensité et l'échelle l seules. A l'extrémité opposée des très petits tourbillons il n'est peut-être pas inutile de montrer que l'équilibre de KOLMOGOROFF demeure possible. L'argument étant simplement dimensionnel on peut revenir à l'équation générale sous sa forme (3,4.1); si ν et η sont les échelles de KOLMOGOROFF on a, pour la zone d'équilibre isotrope :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_{ij} - 2\nu k^2 \Phi_{ij} = \nu^3 [G(k\eta) - F(k\eta)] \Delta_{ij}, \\ \Psi_{ij} = \lambda_{lm} \nu^2 \eta H_{lmij}(k\eta). \end{array} \right.$$

Le tenseur Ψ_{ij} constitue évidemment un obstacle à l'équilibre par son anisotropie foncière et par l'écho qu'il apporte de paramètres étrangers λ_{lm} ; si « a » est une valeur caractéristique de ceux-ci une condition de possibilité de l'équilibre absolu est donc :

$$\frac{a\eta}{\nu} \ll 1,$$

c'est-à-dire :

$$a \ll \omega \quad \text{où} \quad \omega = \sqrt{\omega^2}$$

$$\left(\text{en vertu de } \nu = \sqrt{\nu} \omega, \quad \eta = \sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \right).$$

D'après (3,5.9) ceci revient à exiger, comme d'habitude, un nombre de REYNOLDS de turbulence R_λ assez grand. La question du nombre d'onde k à partir duquel l'équilibre (et particulièrement l'isotropie locale) peuvent être atteints demeure cependant ouverte, et il est possible que l'anisotropie de la déformation moyenne se fasse encore sentir assez loin dans la zone dissipatrice du spectre.

L'hypothèse de stationnarité qui précède n'épuise pas, bien entendu, les possibilités de la théorie. Le pas suivant consiste, notamment, à explorer la possibilité d'une variation temporelle conservant la structure des tourbillons associés à l'énergie cinétique à une similitude cinématique près; nous aurons l'occasion de revenir sur ce point ultérieurement [formule (5,5.19)].

3,6

L'ÉCOULEMENT PARALLÈLE

Le mouvement moyen le plus simple, et apparemment le plus proche de certains écoulements naturels, est l'écoulement parallèle caractérisé par un seul gradient de vitesse non nul :

$$\lambda_{12} = S.$$

Il se compose, en réalité, d'une déformation pure plane :

$$\frac{\partial \bar{u}'}{\partial x'} = -\frac{\partial \bar{v}'}{\partial y'} = \frac{s}{2},$$

dont les directions principales sont à 45° de la direction du courant, et d'un tourbillon moyen :

$$\bar{\omega} = \frac{\partial \bar{v}'}{\partial x'} - \frac{\partial \bar{u}'}{\partial y'} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -s.$$

A ce titre il est plus complexe et son étude présente plus de difficultés que le cas de la déformation pure seule qui vient d'être examiné.

Nous nous bornons à indiquer les expressions de Ψ'_{ij} en axes locaux qu'on obtient par application des formules (3,4.20) :

$$(3,6.1) \left\{ \begin{array}{l} \Psi'_{11} = \frac{s}{1-\alpha_3^2} \left[2\alpha_1\alpha_2\alpha_3^2 N_1 - \alpha_1(1-\alpha_3^2)k \frac{\partial N_1}{\partial k_2} + 2\alpha_1^2\alpha_3(S+S^*) \right], \\ \Psi'_{22} = \frac{s}{1-\alpha_3^2} \left[-2\alpha_1\alpha_2 N_2 - \alpha_1(1-\alpha_3^2)k \frac{\partial N_2}{\partial k_2} - \alpha_3(1-\alpha_3^2)(S+S^*) \right], \\ \Psi'_{12} = \frac{s}{1-\alpha_3^2} \left[-\alpha_1\alpha_2(1-\alpha_3^2)S - \alpha_1(1-\alpha_3^2)k \frac{\partial S}{\partial k_2} - \alpha_3(1-\alpha_3^2)N_1 + 2\alpha_1^2\alpha_3 N_2 \right], \end{array} \right.$$

et la forme qu'on peut leur donner en variante, parallèlement à un calcul précédent :

$$(3,6.2) \left\{ \begin{array}{l} \Psi'_{11} = s \left[-(1-\alpha_3^2)k_1 \frac{\partial}{\partial k_2} \frac{N_1}{1-\alpha_3^2} + 2 \frac{\alpha_1^2\alpha_3}{1-\alpha_3^2} (S+S^*) \right], \\ \Psi'_{22} = s \left[-\frac{k_1}{k_1^2+k_2^2} \frac{\partial}{\partial k_2} N_2 (k_1^2+k_2^2) - \alpha_3 (S+S^*) \right], \\ \Psi'_{12} = s \left[-\alpha_1 \frac{\partial}{\partial k_2} kS - \alpha_3 N_1 + 2 \frac{\alpha_1^2\alpha_3}{1-\alpha_3^2} N_2 \right]. \end{array} \right.$$

ÉQUATIONS RÉDUITES
POUR LES CORRÉLATIONS TRIPLES

4,1

INTRODUCTION

Nous rappelons l'équation des tenseurs spectraux des corrélations triples en trois points établis au chapitre II :

$$(4,1.1) \quad \frac{\partial \Phi_{ijk}}{\partial t} + \Psi_{ijk} = \Omega_{ijk} - \nu(k^2 + k'^2 + k''^2) \Phi_{ijk};$$

$$(4,1.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi_{ijk} = 2\lambda_{lm} A_{ijklm} - \lambda_{lm} B_{ijklm}, \\ A_{ijklm} = \Delta''_{il} \Phi_{mjk} + \Delta_{jl} \Phi_{imk} + \Delta'_{kl} \Phi_{ijm}, \\ B_{ijklm} = \frac{\partial}{\partial k_m} (k_l \Phi_{ijk}) + \frac{\partial}{\partial k'_m} (k'_l \Phi_{ijk}) + \delta_{il} \Phi_{mjk} + \delta_{jl} \Phi_{imk} + \delta_{kl} \Phi_{ijm}; \end{array} \right.$$

$$(4,1.3) \quad \Omega_{ijk} = [k''_l \Delta''_{im} \Theta_{lmjk} + k_l \Delta_{jm} \Theta'_{lmki} + k'_l \Delta'_{km} \Theta''_{lmij}].$$

Le tenseur Φ_{ijk} obéit par définition aux conditions d'incompressibilité; on vérifie aisément qu'il en est de même pour Ω_{ijk} et, *individuellement*, pour chacun des tenseurs A_{ijklm} et B_{ijklm} pour toutes valeurs des indices lm ; il en résulte que tous ces tenseurs peuvent se mettre sous la forme normale (2,1.6) :

$$(4,1.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_{ijk} = \Gamma \beta''_i \beta_j \beta'_k + \Psi \beta''_i \beta_j \gamma_k + \Psi' \beta''_i \gamma_j \beta'_k + \Psi'' \gamma_i \beta_j \beta'_k \\ \quad + \Theta \gamma_i \gamma_j \beta'_k + \Theta' \gamma_i \beta_j \gamma_k + \Theta'' \beta''_i \gamma_j \gamma_k + \Omega \gamma_i \gamma_j \gamma_k. \end{array} \right.$$

Nous désignerons les scalaires de base de Ψ_{ijk} par $\Gamma^d, \Psi^d, \Theta^d, \Omega^d$ (l'indice d rappelant qu'il s'agit du tenseur de déformation) et ceux de Ω_{ijk} par $\Gamma^q, \Psi^q, \Theta^q, \Omega^q$ (l'indice q se référant aux corrélations quadruples qui forment Ω_{ijk}); les mêmes lettres sans indice seront réservées au tenseur dont nous cherchons les propriétés régies par l'équation (4,1.1). La décomposition normale (4,1.4) est unique et les scalaires de base

s'additionnent pour une somme de tenseurs; il en résulte que l'équation tensorielle (4,1.1) se réduit à quatre équations analogues à :

$$(4,1.5) \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \Gamma^d = \Gamma^a - \nu (k^2 + k'^2 + k''^2) \Gamma.$$

Le tenseur de déformation Ψ_{ijk} étant, d'après (4,1.2), une certaine combinaison de Φ_{ijk} , ses scalaires de base s'expriment en fonction des $\Gamma, \Psi, \Theta, \Omega$. De même, les scalaires de base de Ω_{ijk} s'obtiennent à partir du tenseur Θ_{lmjk} , lequel, si l'on adopte l'hypothèse d'une distribution quasi normale, est complètement défini par Φ_{ij} . C'est cette formation explicite qui constitue notre tâche actuelle et elle ne présente pas de difficulté spéciale en ce qui concerne Ω_{ijk} et la partie de Ψ_{ijk} qui ne contient pas de dérivées, c'est-à-dire A_{ijklm} . L'extraction des scalaires de base est plus malaisée, en revanche, pour B_{ijklm} , et la méthode de substitution directe paraissant ici trop laborieuse nous avons employé une voie indirecte qui abrège le labeur sans le supprimer; ayant pensé d'emblée à cette méthode et étant parvenu par elle au résultat nous n'avons pas trop cherché de raccourci encore plus rapide qui pourrait cependant exister; il n'y a pas lieu, en tout cas, d'être surpris de voir l'attention se concentrer ici, comme pour les corrélations doubles, sur les termes de dérivées dont nous avons déjà souligné l'importance. Les équations réduites finales que l'on obtient ainsi sont relativement simples et il est important, en vue de toute recherche qui les prendrait comme point de départ, que nous en donnions une justification assez complète.

4,2 LES SCALAIRES DE BASE DE A_{ijk}

Nous nous occupons d'abord de la première moitié de l'expression :

$$(4,2.1) \quad A_{ijk} = \Delta''_{il} \Phi_{mjk} + \Delta_{jl} \Phi_{imk} + \Delta'_{kl} \Phi_{ijm}.$$

Il suffit ici de substituer la forme normale (4,1.4) de Φ_{ijk} et de tenir compte des identités :

$$(4,2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta''_{il} = \beta''_i \beta''_l + \gamma_i \gamma_l, \quad \Delta_{jl} = \beta_j \beta_l + \gamma_j \gamma_l, \\ \Delta'_{kl} = \beta'_k \beta'_l + \gamma_k \gamma_l. \end{array} \right.$$

Les produits donnent quarante-huit termes qui se groupent en huit paquets de six, chaque paquet correspondant à un terme du développement (4,1.4). Nous caractériserons les scalaires de base de A_{ijk} par l'indice a , et en extrayant du tableau, page 56, les termes ayant en facteur respectivement $\beta''_i \beta_j \beta'_k$, $\beta''_i \beta_j \gamma_k$, $\gamma_i \gamma_j \beta'_k$ et $\gamma_i \gamma_j \gamma_k$, on obtient immédiatement :

$$(4,2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma^a_{im} = (\beta_l \beta_m + \beta'_l \beta'_m + \beta''_l \beta''_m) \Gamma + (\beta'_l \gamma_m \Psi' + \beta_l \gamma_m \Psi'' + \beta''_l \gamma_m \Psi'''), \\ \Psi^a_{im} = \gamma_l \beta'_m \Gamma + (\beta_l \beta_m + \beta''_l \beta''_m + \gamma_l \gamma_m) \Psi' + (\beta''_l \gamma_m \Theta' + \beta_l \gamma_m \Theta''), \\ \Theta^a_{im} = (\gamma_l \beta''_m \Psi' + \gamma_l \beta_m \Psi'') + (\beta'_l \beta'_m + 2 \gamma_l \gamma_m) \Theta + \beta'_l \gamma_m \Omega, \\ \Omega^a_{im} = (\gamma_l \beta'_m \Theta + \gamma_l \beta_m \Theta' + \gamma_l \beta''_m \Theta'') + 3 \gamma_l \gamma_m \Omega. \end{array} \right.$$

	Φ_{mjk} $\beta''_i \beta''_m + \gamma_i \gamma_j$		Φ_{imk} $\beta_i \beta_j + \gamma_i \gamma_j$		Φ_{ijm} $\beta'_i \beta'_k + \gamma_i \gamma_k$	
Γ	$\beta''_i \beta''_m \beta''_i \beta_j \beta'_k$	$\gamma_i \beta''_m \gamma_i \beta_j \beta'_k$	$\beta_i \beta_m \beta''_i \beta_j \beta'_k$	$\gamma_i \beta_m \beta''_i \gamma_j \beta'_k$	$\beta'_i \beta'_m \beta''_i \beta_j \beta'_k$	$\gamma_i \beta'_m \beta''_i \beta_j \gamma_k$
Ψ	$\beta''_i \beta''_m \beta''_i \beta_j \gamma_k$	$\gamma_i \beta''_m \gamma_i \beta_j \gamma_k$	$\beta_i \beta_m \beta''_i \beta_j \gamma_k$	$\gamma_i \beta_m \beta''_i \gamma_j \gamma_k$	$\beta'_i \gamma_m \beta''_i \beta_j \beta'_k$	$\gamma_i \gamma_m \beta''_i \beta_j \gamma_k$
Ψ'	$\beta''_i \beta''_m \beta''_i \gamma_j \beta'_k$	$\gamma_i \beta''_m \gamma_i \gamma_j \beta'_k$	$\beta_i \gamma_m \beta''_i \beta_j \beta'_k$	$\gamma_i \gamma_m \beta''_i \gamma_j \beta'_k$	$\beta'_i \beta'_m \beta''_i \gamma_j \beta'_k$	$\gamma_i \beta'_m \beta''_i \gamma_j \gamma_k$
Ψ''	$\beta''_i \gamma_m \beta''_i \beta_j \beta'_k$	$\gamma_i \gamma_m \gamma_i \beta_j \beta'_k$	$\beta_i \beta_m \gamma_i \beta_j \beta'_k$	$\gamma_i \beta_m \gamma_i \gamma_j \beta'_k$	$\beta'_i \beta'_m \gamma_i \beta_j \beta'_k$	$\gamma_i \beta'_m \gamma_i \beta_j \gamma_k$
Θ	$\beta''_i \gamma_m \beta''_i \gamma_j \beta'_k$	$\gamma_i \gamma_m \gamma_i \gamma_j \beta'_k$	$\beta_i \gamma_m \gamma_i \beta_j \beta'_k$	$\gamma_i \gamma_m \gamma_i \gamma_j \beta'_k$	$\beta'_i \beta'_m \gamma_i \gamma_j \beta'_k$	$\gamma_i \beta'_m \gamma_i \gamma_j \gamma_k$
Θ'	$\beta''_i \gamma_m \beta''_i \beta_j \gamma_k$	$\gamma_i \gamma_m \gamma_i \beta_j \gamma_k$	$\beta_i \beta_m \gamma_i \beta_j \gamma_k$	$\gamma_i \beta_m \gamma_i \gamma_j \gamma_k$	$\beta'_i \gamma_m \gamma_i \beta_j \beta'_k$	$\gamma_i \gamma_m \gamma_i \beta_j \gamma_k$
Θ''	$\beta''_i \beta''_m \beta''_i \gamma_j \gamma_k$	$\gamma_i \beta''_m \gamma_i \gamma_j \gamma_k$	$\beta_i \gamma_m \beta''_i \beta_j \gamma_k$	$\gamma_i \gamma_m \beta''_i \gamma_j \gamma_k$	$\beta'_i \gamma_m \beta''_i \gamma_j \beta'_k$	$\gamma_i \gamma_m \beta''_i \gamma_j \gamma_k$
Ω	$\beta''_i \gamma_m \beta''_i \gamma_j \gamma_k$	$\gamma_i \gamma_m \gamma_i \gamma_j \gamma_k$	$\beta_i \gamma_m \gamma_i \beta_j \gamma_k$	$\gamma_i \gamma_m \gamma_i \gamma_j \gamma_k$	$\beta'_i \gamma_m \gamma_i \gamma_j \beta'_k$	$\gamma_i \gamma_m \gamma_i \gamma_j \gamma_k$

4,3

LES SCALAIRES DE BASE DE B_{ijk}

La deuxième partie de Ψ'_{ijk} est constituée par le tenseur :

$$(4,3.1) \quad B_{ijklm} = \frac{\partial}{\partial k_m} (k_l \Phi_{ijk}) + \frac{\partial}{\partial k'_m} (k'_l \Phi_{ijk}) + \delta_{il} \Phi_{mjk} + \delta_{jl} \Phi_{imk} + \delta_{kl} \Phi_{ijm}.$$

Comme nous l'avons déjà noté une substitution directe de la forme normale (4,1.4) donnerait ici des calculs très lourds; nous emploierons en conséquence la technique développée en (2,4) dont nous rappelons les formules sous une forme légèrement différente. Nous appelons \vec{c} le vecteur :

$$\vec{c} = \vec{k} \wedge \vec{k}',$$

et sa longueur :

$$(4,3.2) \quad c = kk' \sin \varphi.$$

Nous poserons :

$$(4,3.3) \quad \begin{cases} A = (k_p \beta''_p) (k'_q \beta_q) (k''_r \beta'_r), & B = c (k_p \beta''_p) (k''_q \beta_q), \\ C = c^2 (k_r \beta'_r), & D = c^3. \end{cases}$$

Si l'on distingue par l'indice b les scalaires de base du tenseur B_{ijk} on a, avec ces notations :

$$(4,3.4) \quad \begin{cases} A \Gamma_{lm}^b = k_p k'_q k''_r B_{pqrilm}, & B \Psi_{lm}^b = k_p k''_q c_r B_{pqrilm}, \\ C \Theta_{lm}^b = c_p c_q k_r B_{pqrilm}, & D \Omega_{lm}^b = c_p c_q c_r B_{pqrilm}. \end{cases}$$

Pour terminer ces remarques préliminaires nous noterons ce qui suit : on peut substituer, dans (4,3.1) :

$$(4,3.5) \quad \frac{\partial}{\partial k_m} (k_l \Phi_{ijk}) + \frac{\partial}{\partial k'_m} (k'_l \Phi_{ijk}) = \left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m} \right) \Phi_{ijk} + 2 \delta_{lm} \Phi_{ijk}.$$

Dans la suite de ce paragraphe nous omettrons systématiquement le dernier terme du second membre et nous arriverons ainsi, pour chaque scalaire de base S_{lm}^b , à une expression de la forme :

$$(4,3.6) \quad S_{lm}^b = \left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m} \right) S + R,$$

où S est le scalaire correspondant de Φ_{ijk} et R est un ensemble de termes ne comportant pas de dérivées. Pour rétablir la valeur exacte de S_{lm}^b il suffira d'ajouter à (4,3.6) un terme $2 \delta_{lm} S$, obtenant ainsi :

$$S_{lm}^b = \left[\frac{\partial (k_l S)}{\partial k_m} + \frac{\partial (k'_l S)}{\partial k'_m} \right] + R.$$

Tout tenseur δ_{lm} étant contracté ultérieurement avec λ_{lm} donnera, d'ailleurs, zéro par l'incompressibilité ($\lambda_{ll} = 0$) mais il est préférable, à ce stade du calcul, de ne rien supposer à cet égard. Nous allons maintenant développer les expressions (4,3.4) successivement pour chacun des scalaires en cause.

Scalaire Γ .

Effectuant le produit $k_p k'_q k''_r B_{pqrlm}$ on obtient d'abord :

$$(4,3.7) \quad \left\{ \begin{aligned} A \Gamma_{lm}^b &= \left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m} \right) A \Gamma - \Phi_{pqr} \left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m} \right) k_p k'_q k''_r \\ &+ k_l k'_q k''_r \Phi_{mqr} + k_p k'_l k''_r \Phi_{pmr} + k_p k'_q k''_l \Phi_{pqm}. \end{aligned} \right.$$

Le deuxième terme du second membre s'écrit :

$$- k_l k'_q k''_r \Phi_{mqr} + k_l k_p k'_q \Phi_{pqm} - k_p k'_l k''_r \Phi_{pmr} + k'_l k_p k'_q \Phi_{pqm}.$$

Cette expression est visiblement égale mais de signe contraire à la dernière ligne de (4,3.7), compte tenu de la définition des vecteurs $\vec{k} \vec{k}' \vec{k}''$:

$$k_l + k'_l = -k''_l.$$

On a donc ici le résultat très simple :

$$(4,3.8) \quad \Gamma_{lm}^b = \frac{1}{A} \left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m} \right) A \Gamma.$$

Scalaire Ψ .

Passant à la seconde formule de (4,3.4) nous formons cette fois $k_p k''_q c_r B_{pqrlm}$:

$$(4,3.9) \quad \left\{ \begin{aligned} B \Psi_{lm}^b &= \left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m} \right) B \Psi - \Phi_{pqr} \left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m} \right) k_p k''_q c_r \\ &+ k_l k''_q c_r \Phi_{mqr} + k_p k''_l c_r \Phi_{pqr} + k_p k''_q c_l \Phi_{pqm}. \end{aligned} \right.$$

On développe immédiatement le deuxième terme du second membre en :

$$- k_l k''_q c_r \Phi_{mqr} - k''_l k_p c_r \Phi_{pmr} - k_p k''_q \Phi_{pqr} \left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m} \right) c_r,$$

dont les deux premiers termes s'annulent avec leurs homologues de la deuxième ligne de (4,3.9). A partir de l'expression :

$$c_r = \varepsilon_{rxy} k_x k'_y,$$

on obtient :

$$(4,3.10) \quad \left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m} \right) c_r = \varepsilon_{rny} k_l k'_y + \varepsilon_{rxm} k'_l k_x.$$

D'autre part, le tenseur contracté :

$$k_p k''_q \Phi_{pqr}$$

est un vecteur qu'on obtient aisément en utilisant la forme normale (4,1.4) de Φ_{pqr} ; tenant compte des relations d'orthogonalité des vecteurs $\vec{k}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$, on trouve immédiatement :

$$(4,3.11) \quad k_p k''_q \Phi_{pqr} = \frac{B}{c} (\Gamma \beta'_r + \Psi \gamma_r).$$

La combinaison des résultats (4,3.10) et (4,3.11) fait apparaître les produits vectoriels suivants qui ont une signification géométrique simple (voir 2,3) :

$$\begin{cases} \varepsilon_{myr} k'_y \beta'_r = k' \gamma_m, & \varepsilon_{myr} k'_y \gamma_r = -k' \beta_m, \\ \varepsilon_{mrz} \beta'_r k_x = -km \gamma_m, & \varepsilon_{mrz} \gamma_r k_x = k \beta_m. \end{cases}$$

On en déduit :

$$(4,3.12) \quad \begin{cases} -k_p k''_q \Phi_{pqr} \left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m} \right) c_r \\ = B \Gamma \frac{m \alpha'_l - \alpha_l}{\sin \varphi} \gamma_m + B \Psi \frac{\alpha_l \beta'_m - \alpha'_l \beta_m}{\sin \varphi}. \end{cases}$$

D'autre part, appliquant encore (4,3.11) on a :

$$(4,3.13) \quad k_p k''_q c_l \Phi_{pqr} = B \Gamma \gamma_l \beta'_m + B \Psi \gamma_l \gamma_m.$$

On tiendra compte, enfin, de certaines identités démontrées en (2,3); en vertu de (2,3.9) :

$$\frac{m \alpha'_l - \alpha_l}{\sin \varphi} = \beta'_l,$$

et d'après (2,3.11) :

$$\frac{\alpha_l \beta'_m - \alpha'_l \beta_m}{\sin \varphi} = \gamma_l \gamma_m - \delta_{lm}.$$

Il vient, en définitive :

$$(4,3.14) \quad \begin{cases} \Psi^b_{lm} = \frac{1}{B} \left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m} \right) B \Psi + (2 \gamma_l \gamma_m - \delta_{lm}) \Psi \\ + (\beta'_l \gamma_m + \gamma_l \beta'_m) \Gamma. \end{cases}$$

Scalaire Θ .

Nous formons maintenant $c_p c_q k_r B_{pqr} \Theta$:

$$(4,3.15) \quad \begin{cases} C \Theta^b_{lm} = \left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m} \right) C \Theta - \Phi_{pqr} \left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m} \right) c_p c_q k_r \\ + c_l c_q k_r \Phi_{mqr} + c_p c_l k_r \Phi_{pmr} + c_p c_q k_l \Phi_{pqm}. \end{cases}$$

Le deuxième terme du second membre s'écrit d'abord :

$$(4,3.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} -c_p c_q k_m \Phi_{pqr} - c_p k_r \Phi_{pqr} \left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m} \right) c_q \\ -c_q k_r \Phi_{pqr} \left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m} \right) c_p, \end{array} \right.$$

et son premier terme disparaît avec le dernier de la seconde ligne. Pour les termes restants les dérivées sont données par (4,3.10) et l'on a, de manière analogue à (4,3.11) :

$$(4,3.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_p k_r \Phi_{pqr} = \frac{C}{c} (\Psi'' \beta_q + \Theta \gamma_q), \\ c_q k_r \Phi_{pqr} = \frac{C}{c} (\Psi' \beta''_p + \Theta \gamma_p). \end{array} \right.$$

Le deuxième terme de (4,3.16) fait alors apparaître les produits vectoriels ci-après dont la signification géométrique est immédiate :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon_{myq} k'_y \beta_q = k' m \gamma_m, & \varepsilon_{myq} k'_y \gamma_q = -k' \beta'_m, \\ \varepsilon_{mqx} \beta_q k_x = -k \gamma_m, & \varepsilon_{mqx} \gamma_q k_x = k \beta_m. \end{array} \right.$$

Son expression ressort ainsi à :

$$(4,3.18) \quad C \Psi'' \frac{(\alpha'_l - m \alpha_l)}{\sin \varphi} \gamma_m + C \Theta \frac{\alpha_l \beta'_m - \alpha'_l \beta_m}{\sin \varphi}.$$

De même, le calcul du troisième terme introduit les produits vectoriels suivants :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon_{myp} k'_y \beta''_p = k' m' \gamma_m, & \varepsilon_{myp} k'_y \gamma_p = -k' \beta'_m, \\ \varepsilon_{mpx} \beta''_p k_x = -k m'' \gamma_m, & \varepsilon_{mpx} \gamma_p k_x = k \beta_m, \end{array} \right.$$

ce qui permet de l'écrire :

$$(4,3.19) \quad C \Psi' \frac{(m'' \alpha'_l - m' \alpha_l)}{\sin \varphi} \gamma_m + C \Theta \frac{\alpha_l \beta'_m - \alpha'_l \beta_m}{\sin \varphi}.$$

Il reste enfin à prendre en compte les deux termes qui demeurent de la deuxième ligne de (4,3.15); ils s'écrivent immédiatement, d'après (3,3.17) :

$$(4,3.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} C [\Psi'' \gamma_l \beta_m + \Theta \gamma_l \gamma_m] \\ \text{et :} \\ C [\Psi' \gamma_l \beta''_m + \Theta \gamma_l \gamma_m]. \end{array} \right.$$

On tiendra compte encore des relations géométriques (2,3.9) et (2,3.11), et le résultat final est :

$$(4,3.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta^b_{lm} = \frac{1}{C} \left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m} \right) C \Theta + 2(2 \gamma_l \gamma_m - \delta_{lm}) \Theta \\ + (\beta''_l \gamma_m + \gamma_l \beta''_m) \Psi' + (\beta_l \gamma_m + \gamma_l \beta_m) \Psi''. \end{array} \right.$$

Scalaire Ω .

Il s'agit, pour ce dernier scalaire, de former $c_p c_q c_r B_{pqrlm}$:

$$(4,3.22) \left\{ \begin{aligned} D \Omega_{lm}^b &= \left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m} \right) D \Theta - \Phi_{pqr} \left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m} \right) c_p c_q c_r \\ &+ c_l c_q c_r \Phi_{mqr} + c_p c_l c_r \Phi_{pmr} + c_p c_q c_l \Phi_{pqm}. \end{aligned} \right.$$

Parallèlement aux calculs qui précèdent on développe d'abord le deuxième terme du second membre de (4,3.12) suivant :

$$(4,3.23) \left\{ \begin{aligned} -c_q c_r \Phi_{pqr} \left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m} \right) c_p - c_p c_r \Phi_{pqr} \left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m} \right) c_q \\ -c_p c_q \Phi_{pqr} \left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m} \right) c_r. \end{aligned} \right.$$

On a ensuite :

$$(4,3.24) \left\{ \begin{aligned} c_q c_r \Phi_{pqr} &= \frac{D}{c} (\Theta'' \beta''_p + \Omega \gamma_p), \\ c_p c_r \Phi_{pqr} &= \frac{D}{c} (\Theta' \beta'_q + \Omega \gamma_q), \\ c_p c_q \Phi_{pqr} &= \frac{D}{c} (\Theta \beta'_r + \Omega \gamma_r). \end{aligned} \right.$$

et il apparaît, par combinaison à (4,3.10), quelques produits vectoriels déjà rencontrés à l'aide desquels les trois termes de (4,3.23) s'écrivent immédiatement :

$$(4,3.25) \left\{ \begin{aligned} D \Theta'' \frac{(m'' \alpha'_l - m' \alpha_l)}{\sin \varphi} \gamma_m + D \Omega \frac{\alpha_l \beta'_m - \alpha'_l \beta_m}{\sin \varphi}, \\ D \Theta' \frac{(\alpha'_l - m \alpha_l)}{\sin \varphi} \gamma_m + D \Omega \frac{\alpha_l \beta'_m - \alpha'_l \beta_m}{\sin \varphi}, \\ D \Theta \frac{(m \alpha'_l - \alpha_l)}{\sin \varphi} \gamma_m + D \Omega \frac{\alpha_l \beta'_m - \alpha'_l \beta_m}{\sin \varphi}. \end{aligned} \right.$$

Les trois termes de la deuxième ligne de (4,3.22) s'écrivent eux-mêmes, d'après (4,3.24) :

$$(4,3.26) \left\{ \begin{aligned} D \Theta'' \gamma_l \beta''_m + D \Omega \gamma_l \gamma_m, & \quad D \Theta' \gamma_l \beta'_m + D \Omega \gamma_l \gamma_m, \\ D \Theta \gamma_l \beta'_m + D \Omega \gamma_l \gamma_m. \end{aligned} \right.$$

La combinaison de ces résultats, compte tenu toujours des identités (2,3.9) et (2,3.11), fournit :

$$(4,3.27) \left\{ \begin{aligned} \Omega_{lm}^b &= \frac{1}{D} \left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m} \right) D \Omega + 3(2 \gamma_l \gamma_m - \delta_{lm}) \Omega \\ &+ (\beta'_l \gamma_m + \gamma_l \beta'_m) \Theta + (\beta_l \gamma_m + \gamma_l \beta_m) \Theta' + (\beta''_l \gamma_m + \gamma_l \beta''_m) \Theta''. \end{aligned} \right.$$

4,4

DÉCOMPOSITION NORMALE DE Ψ_{ijk}

Les expressions que nous venons de former des scalaires de base de B_{ijklm} peuvent être explicitées davantage et nous allons d'abord effectuer cette simplification qui, outre son intérêt propre, sera utile pour la suite. Chacune de ces formules comporte un terme :

$$(4,4.1) \quad \frac{1}{F} \left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m} \right) FX = \left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m} \right) X + X \left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m} \right) \text{Log}|F|,$$

et les différentes quantités F définies en (4,3.3) peuvent s'écrire, compte tenu des relations géométriques des triades de vecteurs [formules (2,3.2) et (2,3.3)] :

$$(4,4.2) \quad \begin{cases} A = kk' k'' \sin \varphi \sin \varphi' \sin \varphi'', & B = -kk'^3 \sin^2 \varphi \sin \varphi', \\ C = -k^3 k'^2 \sin^3 \varphi, & D = k^3 k'^3 \sin^3 \varphi. \end{cases}$$

La dérivée logarithmique de ces produits se ramène à celle des facteurs et seule la dérivation des angles $\varphi, \varphi', \varphi''$ pose un problème que nous examinons au préalable.

A partir de la définition :

$$\cos \varphi = \alpha_l \alpha'_l,$$

on a facilement, par différentiation :

$$(4,4.3) \quad -\sin \varphi d\varphi = \alpha_l \Delta'_{lm} \frac{dk'_m}{k'} + \alpha'_l \Delta_{lm} \frac{dk_m}{k}.$$

D'ailleurs :

$$\alpha_l \Delta'_{lm} = \alpha_l (\beta'_l \beta'_m + \gamma_l \gamma_m) = \alpha_l \beta'_l \beta'_m = -\sin \varphi \beta'_m,$$

$$\alpha'_l \Delta_{lm} = \alpha'_l (\beta_l \beta_m + \gamma_l \gamma_m) = \alpha'_l \beta_l \beta_m = \sin \varphi \beta_m.$$

D'où :

$$(4,4.4) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial k_m} = -\frac{\beta_m}{k}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial k'_m} = +\frac{\beta'_m}{k'}.$$

De même, à partir de la définition :

$$\cos \varphi' = \alpha'_l \alpha''_l,$$

on écrit une différentielle qui se déduit de (4,4.3) en ajoutant partout un accent; on remplace dk'' par :

$$(4,4.5) \quad dk''_m = -(dk_m + dk'_m),$$

et l'on obtient immédiatement :

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial k_m} = -\frac{\beta''_m}{k''}, \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial k'_m} = -\left(\frac{\beta'_m}{k'} + \frac{\beta''_m}{k''}\right).$$

La somme des angles φ , φ' , φ'' étant égale à 2π il vient enfin :

$$(4,4.6) \quad \frac{\partial \varphi''}{\partial k_m} = \left(\frac{\beta_m}{k} + \frac{\beta''_m}{k''}\right), \quad \frac{\partial \varphi''}{\partial k'_m} = \frac{\beta''_m}{k''}.$$

Considérons alors le terme A de (4,4.2); il résulte de ces résultats et des dérivées évidentes de k , k' , k'' :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m}\right) \text{Log A} = (\alpha_l \alpha_m + \alpha'_l \alpha'_m + \alpha''_l \alpha''_m) \\ -\frac{m}{\sin \varphi} (\alpha_l \beta_m - \alpha'_l \beta'_m) - \frac{m'}{\sin \varphi'} (\alpha'_l \beta'_m - \alpha''_l \beta''_m) - \frac{m''}{\sin \varphi''} (\alpha''_l \beta''_m - \alpha_l \beta_m), \end{array} \right.$$

où, si l'on tient compte de l'égalité (2,3.12) :

$$(4,4.7) \quad \left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m}\right) \text{Log A} = \beta_l \beta_m + \beta'_l \beta'_m + \beta''_l \beta''_m.$$

On obtient de même, pour B :

$$\begin{aligned} \left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m}\right) \text{Log |B|} &= \alpha_l \alpha_m + 3 \alpha'_l \alpha'_m \\ &- 2 \frac{m}{\sin \varphi} (\alpha_l \beta_m - \alpha'_l \beta'_m) - \frac{m'}{\sin \varphi'} (\alpha'_l \beta'_m - \alpha''_l \beta''_m), \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en vertu de (2,3.12) :

$$(4,4.8) \quad \left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m}\right) \text{Log |B|} = (\beta_l \beta_m + \beta''_l \beta''_m) + (\delta_{lm} - \gamma_l \gamma_m).$$

Le calcul analogue pour C conduit immédiatement à :

$$\left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m}\right) \text{Log |C|} = 3 \alpha_l \alpha_m + 2 \alpha'_l \alpha'_m - 3 \frac{m}{\sin \varphi} (\alpha_l \beta_m - \alpha'_l \beta'_m),$$

qu'on peut aussi écrire par (2,3.12) :

$$(4,4.9) \quad \left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m}\right) \text{Log |C|} = \beta'_l \beta'_m + 2 (\delta_{lm} - \gamma_l \gamma_m).$$

On a enfin :

$$(4,4.10) \quad \left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m}\right) \text{Log D} = 3 (\delta_{lm} - \gamma_l \gamma_m).$$

Les scalaires de base de B_{ijklm} peuvent être réécrits d'après cela [voir remarque en (4,3.6)] :

$$(4,4.11) \left\{ \begin{aligned} \Gamma_{lm}^b &= \left(\frac{\partial k_l \Gamma}{\partial k_m} + \frac{\partial k'_l \Gamma}{\partial k'_m} \right) + (\beta_l \beta_m + \beta'_l \beta'_m + \beta''_l \beta''_m) \Gamma, \\ \Psi_{lm}^b &= \left(\frac{\partial k_l \Psi}{\partial k_m} + \frac{\partial k'_l \Psi}{\partial k'_m} \right) + (\beta_l \beta_m + \beta''_l \beta''_m + \gamma_l \gamma_m) \Psi \\ &\quad + (\beta'_l \gamma_m + \gamma_l \beta'_m) \Gamma, \\ \Theta_{lm}^b &= \left(\frac{\partial k_l \Theta}{\partial k_m} + \frac{\partial k'_l \Theta}{\partial k'_m} \right) + (\beta'_l \beta'_m + 2 \gamma_l \gamma_m) \Theta \\ &\quad + (\beta''_l \gamma_m + \gamma_l \beta''_m) \Psi' + (\beta_l \gamma_m + \gamma_l \beta_m) \Psi'', \\ \Omega_{lm}^b &= \left(\frac{\partial k_l \Omega}{\partial k_m} + \frac{\partial k'_l \Omega}{\partial k'_m} \right) + 3 \gamma_l \gamma_m \Omega + (\beta'_l \gamma_m + \gamma_l \beta'_m) \Theta \\ &\quad + (\beta_l \gamma_m + \gamma_l \beta'_m) \Theta' + (\beta''_l \gamma_m + \gamma_l \beta''_m) \Theta''. \end{aligned} \right.$$

L'objectif d'ensemble du calcul, qui est la décomposition de Ψ_{ijk} sous la forme normale (4,1.4), est maintenant atteint; en combinant (4,2.3) et (4,4.11) on a, pour expression, des scalaires de base de Ψ_{ijk} :

$$(4,4.12) \left\{ \begin{aligned} \Gamma^d &= \lambda_{lm} (\beta_l \beta_m + \beta'_l \beta'_m + \beta''_l \beta''_m) \Gamma - \lambda_{lm} \left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m} \right) \Gamma \\ &\quad + 2 \lambda_{lm} \beta'_l \gamma_m \Psi' + 2 \lambda_{lm} \beta_l \gamma_m \Psi'' + 2 \lambda_{lm} \beta''_l \gamma_m \Psi''', \\ \Psi^d &= \lambda_{lm} (\beta_l \gamma_m + \beta''_l \beta''_m + \gamma_l \gamma_m) \Psi - \lambda_{lm} \left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m} \right) \Psi \\ &\quad + \lambda_{lm} (\gamma_l \beta'_m - \beta'_l \gamma_m) \Gamma + 2 \lambda_{lm} \beta''_l \gamma_m + 2 \lambda_{lm} \beta_l \gamma_m \Theta'', \\ \Theta^d &= \lambda_{lm} (\beta'_l \beta'_m + 2 \gamma_l \gamma_m) \Theta - \lambda_{lm} \left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m} \right) \Theta \\ &\quad + \lambda_{lm} (\gamma_l \beta''_m - \beta''_l \gamma_m) \Psi' + \lambda_{lm} (\gamma_l \beta_m - \beta_l \gamma_m) \Psi'' \\ &\quad + 2 \lambda_{lm} \beta'_l \gamma_m \Omega, \\ \Omega^d &= 3 \lambda_{lm} \gamma_l \gamma_m \Omega - \lambda_{lm} \left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m} \right) \Omega + \lambda_{lm} (\gamma_l \beta'_m - \beta'_l \gamma_m) \Theta \\ &\quad + \lambda_{lm} (\gamma_l \beta_m - \beta_l \gamma_m) \Theta' + \lambda_{lm} (\gamma_l \beta''_m - \beta''_l \gamma_m) \Theta''. \end{aligned} \right.$$

Parvenu en ce point on peut désirer, en vue d'intégrations ultérieures, perfectionner l'écriture des (4,4.12) en écrivant les premières lignes sous la forme :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{K} \left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m} \right) KX &= \left[\left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m} \right) \text{Log} \frac{1}{K} \right] X \\ &\quad - \left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m} \right) X. \end{aligned}$$

C'est, en somme, un calcul inverse de celui de (4,4.1) qui serait *a priori* malaisé, mais pour lequel on est guidé par les expressions obtenues précédemment. Les conditions définissant les valeurs respectives de K sont :

$$(4,4.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m} \right) \text{Log} \frac{1}{K_1} = \beta_l \beta_m + \beta'_l \beta'_m + \beta''_l \beta''_m, \\ \left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m} \right) \text{Log} \frac{1}{K_2} = \beta_l \beta_m + \beta''_l \beta''_m + \gamma_l \gamma_m, \\ \left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m} \right) \text{Log} \frac{1}{K_3} = \beta'_l \beta'_m + 2 \gamma_l \gamma_m, \\ \left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m} \right) \text{Log} \frac{1}{K_4} = 3 \gamma_l \gamma_m. \end{array} \right.$$

La solution de la première apparaît immédiatement d'après (4,4.7) :

$$(4,4.14) \quad \frac{1}{K_1} = A = k k' k'' \sin \varphi \sin \varphi' \sin \varphi'' = \frac{k^2 k'^2 \sin^3 \varphi}{k''}.$$

On vérifie d'autre part, comme pour (4,4.8), que :

$$\left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m} \right) \text{Log} c = \delta_{lm} - \gamma_l \gamma_m,$$

où « c », défini en (4,3.2), désigne toujours $k k' \sin \varphi$. On peut alors écrire les deuxièmes membres des (4,4.13) qui restent à résoudre sous la forme :

$$(4,4.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\beta_l \beta_m + \beta''_l \beta''_m) + (\delta_{lm} - \gamma_l \gamma_m) - 2(\delta_{lm} - \gamma_l \gamma_m) + \delta_{lm}, \\ \beta'_l \beta'_m + 2(\delta_{lm} - \gamma_l \gamma_m) - 4(\delta_{lm} - \gamma_l \gamma_m) + 2 \delta_{lm} \\ - 3(\delta_{lm} - \gamma_l \gamma_m) + 3 \delta_{lm}. \end{array} \right.$$

Il est, par ailleurs, loisible d'extraire de ces expressions toute quantité que l'on voudra et de la maintenir en dehors du calcul de (4,4.13) à condition, naturellement, de rétablir ensuite dans (4,4.12) un terme :

$$\lambda_{lm} A_{lm} X.$$

On en profitera pour supprimer de cette façon les δ_{lm} isolés qui figurent dans (4,4.15) car ils disparaissent ensuite par l'incompressibilité ($\lambda_u = 0$). L'intégration des (4,4.13) devient ainsi évidente :

$$(4,4.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{K_2} = \frac{|B|}{c^2} = \frac{k' \sin \varphi'}{k} = \sin \varphi'', \\ \frac{1}{K_3} = \frac{|C|}{c^4} = \frac{1}{k k'^2 \sin \varphi}, \\ \frac{1}{K_4} = \frac{1}{c^3} = \frac{1}{k^3 k'^3 \sin^3 \varphi}. \end{array} \right.$$

On peut finalement écrire les scalaires de base de Ψ_{ijk} sous la forme variante [17] :

$$(4,4.17) \left\{ \begin{aligned} \Gamma^d &= -\lambda_{lm} \frac{k^2 k'^2 \sin^3 \varphi}{k''} \left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m} \right) \left[\frac{k''}{k^2 k'^2 \sin^3 \varphi} \Gamma \right] \\ &\quad + 2 \lambda_{lm} \beta'_l \gamma_m \Psi + 2 \lambda_{lm} \beta_l \gamma_m \Psi' + 2 \lambda_{lm} \beta''_l \gamma_m \Psi'', \\ \Psi^d &= -\lambda_{lm} \sin \varphi'' \left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m} \right) \left[\frac{1}{\sin \varphi''} \Psi \right] + \lambda_{lm} (\gamma_l \beta'_m - \beta'_l \gamma_m) \Gamma \\ &\quad + 2 \lambda_{lm} \beta''_l \gamma_m \Theta' + 2 \lambda_{lm} \beta_l \gamma_m \Theta'', \\ \Theta^d &= -\lambda_{lm} \frac{1}{kk'^2 \sin \varphi} \left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m} \right) [kk'^2 \sin \varphi \Theta] \\ &\quad + \lambda_{lm} (\gamma_l \beta''_m - \beta''_l \gamma_m) \Psi' + \lambda_{lm} (\gamma_l \beta_m - \beta_l \gamma_m) \Psi'' + 2 \lambda_{lm} \beta'_l \gamma_m \Omega, \\ \Omega^d &= -\lambda_{lm} \frac{1}{(kk' \sin \varphi)^3} \left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m} \right) [kk'^2 \sin \varphi \Omega] \\ &\quad + \lambda_{lm} (\gamma_l \beta'_m - \beta'_l \gamma_m) \Theta + \lambda_{lm} (\gamma_l \beta_m - \beta_l \gamma_m) \Theta' \\ &\quad + \lambda_{lm} (\gamma_l \beta''_m - \beta''_l \gamma_m) \Theta''. \end{aligned} \right.$$

4,5

DÉCOMPOSITION NORMALE DE Ω_{ijk}

La mise sous forme réduite de l'équation de base des corrélations triples (4,1.1) comporte deux étapes dont la première, concernant le tenseur de déformation Ψ_{ijk} , vient d'être accomplie; il nous reste maintenant à effectuer la même opération pour le tenseur :

$$(4,5.1) \quad \Omega_{ijk} = [k''_l \Delta''_{im} \Theta_{lmjk} + k_l \Delta_{jm} \Theta'_{lmki} + k'_l \Delta'_{km} \Theta''_{lmij}].$$

La voie est ici ouverte, en principe, à toute méthode d'approximation permettant de tenir compte des corrélations quadruples; une seule, à vrai dire, est actuellement considérée par la théorie, l'hypothèse d'une distribution quasi normale, dont nous nous occuperons; celle-ci, d'après (1,6.3), rattache les corrélations quadruples aux corrélations doubles (du moins pour les tourbillons pas trop petits) par :

$$(4,5.2) \quad \Theta_{lmjk}(\vec{k}, \vec{k}') = \Phi_{lj}(\vec{k}) \Phi_{mk}(\vec{k}') + \Phi_{lk}(\vec{k}') \Phi_{mj}(\vec{k}).$$

L'hypothèse n'est pas limitée dans son application à la turbulence isotrope et la traduction de (4,5.2) pour le tenseur Φ_{ij} le plus général ne présente pas de difficulté de calcul. Le résultat est cependant assez compliqué et il est plus conforme à notre idée d'approximations successives de commencer, en vue du calcul de l'anisotropie de Φ_{ijk} , par une structure isotrope de Ω_{ijk} ; on examinera donc d'abord le cas où l'on peut écrire :

$$\Phi_{ij} = \Phi \Delta_{ij},$$

et par suite :

$$(4,5.3) \quad \Theta_{lmjk} = \Phi(k) \Phi(k') [\Delta_{lj} \Delta'_{mk} + \Delta'_{lk} \Delta_{mj}].$$

Substituant systématiquement :

$$\Delta_{ij} = \beta_i \beta_j + \gamma_i \gamma_j;$$

en tenant compte des relations d'orthogonalité qui font disparaître un grand nombre de termes, on obtiendra sans difficulté :

$$\begin{aligned} k''_l \Delta''_{im} \Theta_{lmjk} &= \Phi \Phi' (-k'' \sin \varphi'' \cos \varphi' + k'' \sin \varphi' \cos \varphi'') \beta''_i \beta_j \beta'_k \\ &\quad - \Phi \Phi' k'' \sin \varphi'' \gamma_i \beta_j \gamma_k + \Phi \Phi' k'' \sin \varphi' \gamma_i \gamma_j \beta'_k. \end{aligned}$$

Les termes suivants peuvent être écrits *a priori* par une permutation évidente d'accents et d'indices et les scalaires de base de Ω_{ijk} s'en déduisent immédiatement :

$$(4,5.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma^a = k'' \sin \varphi'' \cos \varphi' \Phi (\Phi'' - \Phi') + k \sin \varphi \cos \varphi'' \Phi' (\Phi - \Phi'') \\ \quad + k' \sin \varphi' \cos \varphi \Phi'' (\Phi' - \Phi), \\ \Psi^a = 0, \\ \Theta^a = k \sin \varphi \Phi' (\Phi - \Phi''), \\ \Omega^a = 0. \end{array} \right.$$

On remarquera que Γ^a et Θ^a donnés par cette théorie ne sont pas indépendants et que leur relation est :

$$(4,5.5) \quad \Theta''^a \cos \varphi + \Theta'^a \cos \varphi' + \Theta^a \cos \varphi'' - \Gamma^a = 0.$$

L'expression de Γ^a peut prendre une forme un peu différente en substituant, en vertu de (2,3.6) :

$$k'' \sin \varphi'' = \frac{c}{k}, \quad k \sin \varphi = \frac{c}{k'}, \quad k' \sin \varphi' = \frac{c}{k''}$$

(où $c = kk' \sin \varphi$) et en observant, d'après (2,3.4), que :

$$\frac{\cos \varphi'}{k} = \frac{2k^2 - l^2}{2kk'k''}, \quad \frac{\cos \varphi''}{k'} = \frac{2k'^2 - l^2}{2kk'k''}, \quad \frac{\cos \varphi}{k''} = \frac{2k''^2 - l^2}{2kk'k''},$$

où :

$$l^2 = k^2 + k'^2 + k''^2.$$

Comme, par ailleurs, on a :

$$\Phi (\Phi'' - \Phi') + \Phi' (\Phi - \Phi'') + \Phi'' (\Phi' - \Phi) = 0,$$

on peut, dans les expressions précédentes, supprimer les termes en l^2 , obtenant ainsi :

$$(4,5.6) \quad \Gamma^a = \frac{\sin \varphi}{k''} [k^2 \Phi (\Phi'' - \Phi') + k'^2 \Phi' (\Phi - \Phi'') + k''^2 \Phi'' (\Phi' - \Phi)].$$

Dans le cas général d'un tenseur Φ_{ij} non isotrope on peut, d'après (2,6.7), écrire ses composantes en un point \vec{k} quelconque sous la forme :

$$(4,5.7) \quad \Phi_{ij} = N_1 \beta_i \beta_j + S \beta_i \gamma_j + S^* \gamma_i \beta_j + N_2 \gamma_i \gamma_j,$$

et les vecteurs $\vec{\beta}, \vec{\gamma}$ peuvent être précisément ceux introduits pour l'étude de la triade $\vec{k}, \vec{k}', \vec{k}''$. Cette définition adaptée à notre objet a malheureusement l'inconvénient de faire dépendre N_1, N_2 et S , non seulement du point d'application \vec{k} mais par l'orientation des $\vec{\beta}, \vec{\gamma}$ de l'autre point \vec{k}' ; la connaissance des directions principales de Φ_{ij} en un point permet, bien entendu, de préciser cette dépendance, mais il y a là une complication certaine (et inévitable). Le calcul des scalaires de base de Ω_{ijk} à partir de (4,5.7) ne présente aucune difficulté mais les résultats sont eux-mêmes moins simples lorsque Φ_{ij} comporte en chaque point des directions privilégiées. Le scalaire Γ^a est identique à son expression (4,5.4), à condition de remplacer Φ par N_1 ; le scalaire Θ^a comporte de même un terme homologue de celui de (4,5.4) avec $N'_1 (N_2 - N''_2)$ remplaçant $\Phi' (\Phi - \Phi'')$, mais aussi des termes supplémentaires en S ; de plus, l'absence d'isotropie introduit des Ψ^a et Ω^a qui, précédemment, étaient nuls. Il ne semble pas que, dans ces conditions, le calcul puisse remplir le rôle que nous lui demandons d'éclairer les phénomènes.

4,6

EXPRESSION DE Ω_{ij}

L'objectif principal d'une étude des corrélations triples en trois points est de renseigner sur le tenseur :

$$(4,6.1) \quad \Omega_{ij} = [k_l \Delta_{im} \Theta_{lmj} + k_l \Delta_{jm} \Theta_{lmi}^*],$$

qui, nous l'avons vu, règle de manière décisive l'évolution des corrélations doubles; supposant donc Φ_{ijk} donné sous sa forme normale, nous nous proposons maintenant d'indiquer la manière dont on peut en déduire Ω_{ij} .

Il résulte d'abord directement, des définitions (1,3.1) et (1,5.1), que :

$$(4,6.2) \quad \Theta_{ijk}(\vec{k}) = \int \Phi_{ikj}(\vec{k}, \vec{k}') d\vec{k}',$$

de sorte que l'on peut écrire (4,6.1) :

$$(4,6.3) \quad \Omega_{ij} = \int [\Delta_{im} k_l \Phi_{ljm} + \Delta_{jm} k_l \Phi_{lmi}^*] d\vec{k}'.$$

Remplaçant, comme on l'a fait souvent, Δ_{ij} par $\beta_i \beta_j + \gamma_i \gamma_j$, substituant à Φ_{ijk} son développement normal et prenant avantage de quelques vecteurs qui sont orthogonaux, on obtient facilement :

$$(4,6.4) \quad \Omega_{ij}(\vec{k}) = \int k' \sin \varphi' \left[\begin{array}{l} \cos \varphi (\Gamma + \Gamma^*) \beta_i \beta_j + (\Theta'' + \Theta''^*) \gamma_i \gamma_j \\ + (\Psi' \cos \varphi + \Psi^*) \beta_i \gamma_j + (\Psi' + \Psi'^* \cos \varphi) \gamma_i \beta_j \end{array} \right] d\vec{k}'.$$

Il y a lieu de noter que les indices i et j étant permutable dans Θ_{ijk} il en résulte, d'après (4,6.2) :

$$\int \Phi_{ikj}(\vec{k}, \vec{k}') d\vec{k}' = \int \Phi_{jki}(\vec{k}, \vec{k}') d\vec{k}'.$$

propriété qui ne vaut, bien entendu, que pour les intégrales et ne s'étend pas aux fonctions intégrées. La formule (4,6.3) peut donc s'écrire aussi en permutant l et m dans les Φ et cette variante conduit à une expression différente de (4,6.4), en ce qui concerne l'élément à intégrer, mais équivalente à celle-ci.

Chaque élément de volume de l'espace k contribue, d'après (4,6.4), à Ω_{ij} par un tenseur élémentaire $d\Omega_{ij}$ qui a bien la forme (2,6.7) exigée par les relations d'incompressibilité auxquelles obéit Ω_{ij} . Pour une turbulence isotrope Ψ' est nul, mais chaque contribution $d\Omega_{ij}$ n'en a pas moins des directions principales qui sont $\vec{\beta}$ et $\vec{\gamma}$; la structure isotrope de Ω_{ij} en un point \vec{k} résulte donc seulement de la symétrie de révolution autour de \vec{k} quand on effectue l'intégrale (4,6.4). Nous avons noté en passant en (3,4), avec des réserves, qu'il apparaissait formellement possible de considérer une turbulence anisotrope simplifiée sans vitesse moyenne où l'on aurait :

$$\Phi_{ij} = \Phi \Delta_{ij}, \quad \Omega_{ij} = -k \Lambda \Delta_{ij},$$

les scalaires Φ et Λ variant d'un point à un autre. On peut ici préciser ces réserves et confronter cette idée avec le mécanisme des corrélations triples; si Ψ' restant nul, Γ et Θ sont réels et fonctions quelconques des points \vec{k} et \vec{k}' , il faudra, pour que Ω_{ij} n'ait en chaque point aucune direction privilégiée, qu'il en soit de même pour toutes les contributions $d\Omega_{ij}$, c'est-à-dire :

$$\Gamma \cos \varphi = \Theta''.$$

Une telle relation est concevable, mais la comparaison avec (4,5.5) montre aisément qu'elle est incompatible avec l'hypothèse de la loi quasi normale.

4,7

CAS D'UNE DÉFORMATION PURE PLANE

L'équation fondamentale (4,1.1) des corrélations triples se ramène, par les réductions aux scalaires de base effectuées dans ce chapitre, à quatre équations de la forme :

$$(4,7.1) \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \Gamma^d = \Gamma^a - \nu(k^2 + k'^2 + k''^2) \Gamma.$$

Il est remarquable de constater que, comme pour l'équation des corrélations doubles, le cas d'un écoulement moyen irrotationnel se présente d'une manière particulièrement favorable au calcul. Si l'on considère, en effet, les expressions (4,4.17) on remarque que le coefficient de Γ dans Ψ'_d :

$$\lambda_{lm} (\gamma_l \beta'_m - \beta'_l \gamma_m)$$

comporte un facteur antisymétrique qui, si λ_{lm} est symétrique, donnera par combinaison zéro. Il en est de même pour les coefficients de Ψ' et Ψ'' dans Θ^d et pour ceux de Θ , Θ' , Θ'' dans Ω^d . Le cas limite le plus simple de (4,7.1) (mais dont l'existence n'est pas assurée) est relatif à une turbulence stationnaire; on peut alors se proposer de déterminer par

intégration les Γ , Ψ , Θ et Ω , et c'est une circonstance favorable que Ω n'apparaît que dans Ω^d , puis dans Θ^d , puis enfin Ψ dans Ψ^d , permettant ainsi une détermination successive de chaque inconnue.

Dans le cas d'une déformation pure plane notamment, caractérisée par :

$$\lambda_{11} = -\lambda_{22} = a,$$

on a :

$$\lambda_{lm} \left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m} \right) = a \left(k_1 \frac{\partial}{\partial k_1} - k_2 \frac{\partial}{\partial k_2} \right) + a \left(k'_1 \frac{\partial}{\partial k'_1} - k'_2 \frac{\partial}{\partial k'_2} \right).$$

Il est indiqué, dans ces conditions, de repérer chaque point sur le plan $O k_1 k_2$ par les coordonnées curvilignes :

$$\begin{cases} 2 X_1 = k_1^2 - k_2^2, & 2 X'_1 = k'^2_1 - k'^2_2, \\ 2 X_2 = 2 k_1 k_2, & 2 X'_2 = 2 k'_1 k'_2, \end{cases}$$

moyennant quoi l'opérateur différentiel ci-dessus devient simplement :

$$\lambda_{lm} \left(k_l \frac{\partial}{\partial k_m} + k'_l \frac{\partial}{\partial k'_m} \right) = a \left(\frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X'_1} \right).$$

Le mode opératoire d'un calcul numérique pouvant s'aider de représentations graphiques demeure donc substantiellement le même que pour les corrélations doubles; la seule nouveauté véritable est la présence d'inconnues fonctions de deux points qui ne va pas, bien entendu, sans labour supplémentaire.

CHAPITRE V

MOYENNES EN UN MÊME POINT

5,1 TENSIONS DE REYNOLDS — MOYENNES DE PRESSION

La grandeur moyenne la plus immédiate d'un écoulement turbulent réel est la vitesse moyenne et c'est à juste titre que, de BOUSSINESQ à nos jours, cet aspect est demeuré un objectif essentiel de la recherche; il n'est pas besoin, cependant, de souligner que la turbulence est une chaîne et qu'il est difficile d'en saisir un bout en ignorant les maillons suivants, du moins les plus proches; la vitesse moyenne se rattache aux tensions de REYNOLDS, qui dépendent des corrélations pression-vitesse, lesquelles introduisent les corrélations en deux points, etc. Bien entendu, pour certains aspects cette interdépendance affecte inégalement chaque maillon; la forme logarithmique de la distribution de vitesse près d'une paroi semble davantage due à des raisons globales et dimensionnelles qu'à un mécanisme de détail; c'est dire que cet objectif traditionnel de toute tentative théorique peut ne pas être très significatif et qu'il est plus essentiel de comprendre d'autres mécanismes d'ensemble ou plus fins de l'écoulement.

L'exploration expérimentale des moyennes de fluctuations et, en premier lieu, des tensions de REYNOLDS, est beaucoup plus récente et a déjà à son actif une importante moisson de résultats. Une des difficultés majeures auxquelles se heurtent ces recherches est l'anisotropie foncière de la turbulence usuelle; il y a en conséquence trop de grandeurs à mesurer, dont beaucoup sont inaccessibles, et le tableau qui est livré à la réflexion théorique est complexe et comporte des lacunes ou des incertitudes dues à la difficulté des mesures; le besoin de points de repères, de recoupements susceptibles d'aider l'expérimentation et de lui fournir des directions de recherches se fait donc ici vivement sentir. Certaines des questions que nous nous posons dans ce chapitre sont à situer dans ce contexte; pour les analyser nous sommes toutefois obligé de nous limiter à une turbulence homogène et même, souvent, au cas où celle-ci comporte trois plans de symétrie, comme dans le cas de la déformation pure; nous nous bornons d'ailleurs, ici, aux aspects globaux qui n'exigent pas la connaissance détaillée des tenseurs spectraux; dans ce cadre limité nous nous attachons, quand c'est possible, à donner une analyse exacte mais nous n'hésitons pas aussi, à l'occasion, à considérer des simplifications plus poussées mais toujours explicites. On ne perdra donc pas de vue cette distance entre schéma et réalité dans toute référence qui sera faite dans la suite à des écoulements usuels complexes.

Toute étude expérimentale du tenseur de REYNOLDS ne peut manquer de tenir compte de l'équation exacte et générale qui régit son évolution et que nous avons déjà rappelée en (3,1.2) :

$$(5,1.1) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \overline{u_i u_j} + \left[\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_m} \overline{u_m u_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_m} \overline{u_i u_m} \right] + \frac{\partial \overline{u_i u_j u_m}}{\partial x_m} \\ & + \frac{1}{\rho} \left(\overline{u_j \frac{\partial p}{\partial x_i}} + \overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_j}} \right) + 2\nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_l} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_l} + \overline{u_m} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_m} - \nu \Delta \overline{u_i u_j} = 0. \end{aligned} \right.$$

Lorsque les termes de diffusion sont négligeables on tombe sur l'équation valable en turbulence homogène :

$$(5,1.2) \quad \frac{\partial}{\partial t} \overline{u_i u_j} + (\lambda_{im} \overline{u_m u_j} + \lambda_{jm} \overline{u_i u_m}) = -\frac{1}{\rho} \left(\overline{u_j \frac{\partial p}{\partial x_i}} + \overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_j}} \right) - 2\nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_l} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_l}.$$

Il convient, d'ailleurs, d'être très prudent sur les conclusions à tirer de la disparition d'une grandeur dans une moyenne déterminée; ainsi, si l'on déduit de (5,1.1) l'équation d'énergie en additionnant pour $i = j$, les termes de pression deviennent :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p u_i}}{\partial x_i}$$

et disparaissent en turbulence homogène alors que leurs composantes en (5,1.2) sont essentielles; de même, la contribution de :

$$\frac{\partial \overline{u_i u_j u_m}}{\partial x_m}$$

est nulle en turbulence homogène mais les corrélations triples correspondantes sont la clef de la distribution des fluctuations de vitesses dans le spectre.

La relation (5,1.2) se retrouve aisément en intégrant dans tout l'espace l'équation (1,3.9) du tenseur spectral Φ_{ij} . Il est à noter que les pressions ayant été éliminées de (1,3.9) ont été incorporées en partie dans Ψ_{ij} et en partie dans Ω_{ij} . On peut obtenir la valeur des moyennes de pression de (5,1.2) soit par identification, soit directement à partir de l'expression du tenseur de pression Σ_j donnée en (1,3.5); on obtient [c'est aussi la traduction de (3,1.7)] :

$$(5,1.3) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\rho} \left(\overline{\frac{\partial p}{\partial x_i} u_j} + \overline{\frac{\partial p}{\partial x_j} u_i} \right) = -2 \lambda_{lm} \int \left[\frac{k_i k_l}{k^2} \Phi_{mj} + \frac{k_j k_l}{k^2} \Phi_{mi} \right] d\vec{k} \\ & + \int \left[\frac{k_i k_m}{k^2} k_l \Theta_{lmj} + \frac{k_j k_m}{k^2} k_l \Theta_{lmi} \right] d\vec{k}. \end{aligned} \right.$$

Si le tenseur de corrélations triples en deux points Θ_{lmj} a une structure isotrope [voir (3,4.5)] :

$$(5,1.4) \quad \Theta_{ijk} = -\frac{\Lambda}{2} \left[\frac{k_i}{k} \Delta_{jk} + \frac{k_j}{k} \Delta_{ik} \right],$$

on trouve aisément qu'il n'apporte pas de contribution à la pression. Il y a lieu de noter que d'une manière générale Θ_{ijk} possède, à cause de la symétrie des indices i

et j , dix-huit composantes dont, par l'incompressibilité, douze seulement sont indépendantes; un raisonnement analogue à celui que nous avons employé pour l'analyse de Φ_{ijk} permet de l'écrire :

$$(5,1.5) \quad \Theta_{ijk} = B_{ij} \beta_k + C_{ij} \gamma_k,$$

où B et C sont deux tenseurs symétriques et $\vec{\beta}$ et $\vec{\gamma}$ sont deux vecteurs unités normaux entre eux et à \vec{k} . La contribution à la pression sera nulle seulement si :

$$k_m B_{im} = 0 \quad \text{et} \quad k_m C_{im} = 0,$$

mais il n'est nullement requis que B et C vérifient cette condition d'incompressibilité.

L'autre contribution à la moyenne de pression dans (5,1.3) est directement fonction des corrélations doubles de vitesse et il est permis de penser, malgré les réserves qui précèdent, qu'elle en représente une part importante. On notera que cette corrélation de pression (inaccessible aux mesures) intéresse la même région du spectre que l'énergie cinétique et qu'elle a un lien étroit avec le tenseur de REYNOLDS. Pour l'examiner plus en détail nous allons considérer le cas d'une déformation pure plane :

$$\lambda_{11} = -\lambda_{22} = a.$$

Négligeant le deuxième terme de (5,1.3) on a :

$$(5,1.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \overline{u_1 \frac{\partial p}{\partial x_1}} = -2a \int \left[\frac{k_1^2}{k^2} \Phi_{11} - \frac{k_1 k_2}{k^2} \Phi_{21} \right] d\vec{k}, \\ \frac{1}{\rho} \overline{u_2 \frac{\partial p}{\partial x_2}} = -2a \int \left[\frac{k_1 k_2}{k^2} \Phi_{12} - \frac{k_2^2}{k^2} \Phi_{22} \right] d\vec{k}, \\ \frac{1}{\rho} \overline{u_3 \frac{\partial p}{\partial x_3}} = -2a \int \left[\frac{k_1 k_3}{k^2} \Phi_{13} - \frac{k_2 k_3}{k^2} \Phi_{23} \right] d\vec{k}. \end{array} \right.$$

Les conditions d'incompressibilité permettent d'exprimer toutes les composantes de Φ_{ij} à partir de trois d'entre elles; on a, par exemple, pour une turbulence à centre de symétrie :

$$(5,1.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} k_2 k_3 \Phi_{23} = \frac{1}{2} [k_1^2 \Phi_{11} - k_2^2 \Phi_{22} - k_3^2 \Phi_{33}], \\ k_3 k_1 \Phi_{31} = \frac{1}{2} [-k_1^2 \Phi_{11} + k_2^2 \Phi_{22} - k_3^2 \Phi_{33}], \\ k_1 k_2 \Phi_{12} = \frac{1}{2} [-k_1^2 \Phi_{11} - k_2^2 \Phi_{22} + k_3^2 \Phi_{33}]. \end{array} \right.$$

Posant :

$$\int \frac{k_1^2}{k^2} \Phi_{11} d\vec{k} = s_1^2, \quad \int \frac{k_2^2}{k^2} \Phi_{22} d\vec{k} = s_2^2, \quad \int \frac{k_3^2}{k^2} \Phi_{33} d\vec{k} = s_3^2,$$

il vient alors :

$$(5,1.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \overline{u_1 \frac{\partial p}{\partial x_1}} = -a(3s_1^2 + s_2^2 - s_3^2), \quad \frac{1}{\rho} \overline{u_2 \frac{\partial p}{\partial x_2}} = +a(s_1^2 + 3s_2^2 - s_3^2), \\ \frac{1}{\rho} \overline{u_3 \frac{\partial p}{\partial x_3}} = -2a(s_2^2 - s_1^2). \end{array} \right.$$

Si l'on imagine de plus, à titre d'approximation provisoire, que la dissipation est également répartie entre les trois axes on obtient, dans l'hypothèse de la permanence :

$$(5,1.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\bar{u}_1^2 + (3s_1^2 + s_2^2 - s_3^2) = \frac{\nu \bar{\omega}^2}{a \cdot 3}, \\ u_2^2 - (s_1^2 + 3s_2^2 - s_3^2) = \frac{\nu \bar{\omega}^2}{a \cdot 3}, \\ 2(s_2^2 - s_1^2) = \frac{\nu \bar{\omega}^2}{a \cdot 3}. \end{array} \right.$$

La somme des trois équations (5,1.9) donne le bilan d'énergie :

$$(5,1.10) \quad \bar{u}_2^2 - \bar{u}_1^2 = \frac{\nu \bar{\omega}^2}{a},$$

et l'on voit bien que cet apport net est en réalité une perte sur une composante et un gain sur l'autre, avec la pression jouant le rôle de caisse de compensation. Compte tenu de (5,1.10) les équations individuelles deviennent (deux d'entre elles seulement sont indépendantes) :

$$(5,1.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} 3s_1^2 + s_2^2 - s_3^2 = \frac{2\bar{u}_1^2 + \bar{u}_2^2}{3}, \quad s_1^2 + 3s_2^2 - s_3^2 = \frac{\bar{u}_1^2 + 2\bar{u}_2^2}{3}, \\ s_2^2 - s_1^2 = \frac{\bar{u}_2^2 - \bar{u}_1^2}{6}. \end{array} \right.$$

Il n'y a pas de considération élémentaire qui permette de tirer de là même des indications sur la structure d'équilibre et seule l'étude complète de Φ_{ij} , suivant les chapitres précédents, peut conduire à ce résultat (il est vain, notamment, d'essayer des formes approchées de Φ_{ij}); mais il est intéressant de constater que dans les hypothèses simplifiées qui l'ont établi, le système (5,1.11) ne présente pas d'anomalie. On notera à cet égard que si Φ_{ij} a la structure isotrope on obtient aisément, pour une composante quelconque :

$$\bar{u}_3^2 = \frac{2}{3} \int_0^\infty 4\pi k^2 \Phi dk, \quad s_3^2 = \frac{2}{15} \int_0^\infty 4\pi k^2 \Phi dk,$$

c'est-à-dire :

$$s_3^2 = \frac{u_3^2}{5},$$

dont l'ordre de grandeur est une bonne confirmation des exigences de (5,1.11).

Pour l'examen qui précède on pourrait considérer plus généralement un champ de vitesse moyenne plan, c'est-à-dire en se plaçant en axes principaux de la déformation :

$$\lambda_{11} = -\lambda_{22} = a, \quad \lambda_{12} = -\lambda_{21} = b.$$

Il faudrait alors compléter (5,1.6) par des termes supplémentaires de la forme :

$$\int \frac{k_1 k_2}{k^2} \Phi_{11} d\vec{k},$$

qui sont nuls lorsque Φ_{ij} a les plans de coordonnées comme plans de symétrie; il y a lieu de considérer aussi la composante relative aux indices 1, 2 de (5,1.2) qui, en négligeant encore les termes qui s'annuleraient par symétrie, exige simplement :

$$(5,1.12) \quad \int \frac{k_1^2}{k^2} \Phi_{22} d\vec{k} - \int \frac{k_2^2}{k^2} \Phi_{11} d\vec{k} = \frac{\overline{u_2^2} - \overline{u_1^2}}{2}.$$

On note que pour un Φ_{ij} isotrope :

$$\int \frac{k_1^2}{k^2} \Phi_{22} d\vec{k} = \frac{4}{15} \int_0^\infty 4 \pi k^2 \Phi dk = \frac{2}{5} \overline{u_2^2},$$

ce qui rend très raisonnable la relation (5,1.12). TOWNSEND a avancé l'hypothèse que, en structure d'équilibre, le tenseur de REYNOLDS est peu influencé par la rotation moyenne et que ses axes principaux pourraient être assez voisins de ceux de la déformation pure. Les considérations qui précèdent ne sont pas en contradiction avec cette idée mais seule l'étude complète de Φ_{ij} pourrait en approfondir le bien-fondé. Il convient de noter que pour un écoulement parallèle les axes de la déformation pure sont à 45° de l'écoulement moyen et que s'ils coïncidaient avec les axes principaux du tenseur de REYNOLDS on devrait avoir, en axes naturels :

$$\overline{u^2} = \overline{v^2}.$$

Ceci ne se vérifie pas dans l'écoulement en tuyau où, en dépouillant les mesures de LAUFER [15], on trouve les axes principaux tournés de 65° en moyenne par rapport à la direction de la vitesse (les rapports des tensions principales varient aussi de place en place). Il est difficile de dire s'il s'agit là d'un effet de non-homogénéité ou de rotation moyenne et c'est à l'étude complète de Φ_{ij} dans le schéma homogène qu'on en revient toujours.

Partant du tenseur de REYNOLDS nous avons été conduit par (5,1.2) aux termes importants des corrélations de pression, à certains égards proches du premier. L'autre facteur essentiel est la dissipation qui, cette fois, intéresse une gamme beaucoup plus fine de tourbillons. On pourrait espérer, en vertu de la tendance escomptée à l'isotropie aux grands k , que cette partie au moins nous apporterait la simplification d'une distribution isotrope; les mesures ici atteignent un petit nombre de produits doubles de dérivées :

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_l} \right)^2,$$

et la constatation est que, à cette échelle non plus, la structure n'est pas isotrope; ceci ne fait pas de doute dans les essais de LAUFER [15] qui a pu mesurer en tuyau les cinq dérivées :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2,$$

dont les valeurs se révèlent nettement inégales; on pourrait incriminer en l'occurrence la non-homogénéité de l'écoulement, mais les essais de la boîte de distorsion de

TOWNSEND [2] montrent aussi très clairement qu'un champ moyen homogène de déformation pure imprime sa marque jusqu'au niveau de la dissipation, l'effet, ici, paraissant dépendre du nombre de REYNOLDS de la turbulence.

5,2 MOYENNES DU PRODUIT DE DEUX DÉRIVÉES DE LA VITESSE

Les termes introduits par la dissipation sont des composantes du tenseur :

$$(5,2.1) \quad D_{ijlm} = \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial u_j}{\partial x_m}}$$

formé par moyenne du produit de deux dérivées de la vitesse. Il avait été déjà observé par G. I. TAYLOR qu'il y a, d'une manière générale, quarante-cinq telles moyennes distinctes (les trente-six combinaisons des neuf dérivées deux à deux et les neuf carrés de dérivées); les relations d'incompressibilité en réduisent un peu le nombre mais celui-ci reste hors de proportion avec ce qu'on peut raisonnablement mesurer. A l'extrême opposé la turbulence homogène et isotrope ne laisse subsister qu'une composante indépendante, que TAYLOR avait traduite par une échelle de longueur :

$$\left(\overline{\frac{\partial u_1}{\partial x_1}} \right)^2 = \frac{\overline{u_1^2}}{\lambda^2}.$$

Intéressé ici spécialement par l'anisotropie nous voudrions nous arrêter un moment au cas simple où la turbulence est homogène et où il y a un trièdre trirectangle dont les faces sont des plans de symétrie de la turbulence, hypothèse naturelle lorsque l'on considère un écoulement moyen réduit à une déformation pure.

On a d'abord, par l'homogénéité seule :

$$(5,2.2) \quad \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial u_j}{\partial x_m}} = - \left[\frac{\partial^2 R_{ij}}{\partial \xi_l \partial \xi_m} \right]_0 = \int k_l k_m \Phi_{ij} d\vec{k},$$

de sorte que pour un choix donné de la suite de deux indices ij il est permis de permuter les indices l et m ; corrélativement, comme :

$$(5,2.3) \quad R_{ji}(\vec{r}) = R_{ij}(-\vec{r})$$

et qu'il s'agit de dérivées partielles secondes prises en $r = 0$, on constate qu'on peut également permuter i et j ; sans autre hypothèse que l'homogénéité le nombre des composantes distinctes se trouve donc réduit à $6 \times 6 = 36$. Venant maintenant aux conditions de symétrie nous pouvons d'abord les exprimer de manière précise en considérant plus généralement les moyennes :

$$\overline{\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\gamma} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\delta}},$$

où $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$ sont quatre vecteurs unités issus du point considéré; il y aura symétrie par rapport à un plan Π si ces moyennes ne changent pas lorsqu'on substitue à $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$ leurs

symétriques par rapport au plan II. Il en résulte que si les trois plans de coordonnées sont aussi plans de symétrie, tous les termes D_{ijlm} , où la valeur « p » d'un des indices ne figure qu'une fois, sont nécessairement nuls; prenant en effet des axes symétriques des anciens par rapport au plan normal à l'axe p , les termes en question changent de signe alors qu'ils ne devraient pas varier. Seuls subsistent, par conséquent, ceux où ne figurent (chacune deux fois) que deux valeurs des indices; on voit aisément (compte tenu des égalités résultant de l'homogénéité) qu'il y en a douze distincts qui sont en notation plus courante :

$$(5,2.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)^2, \quad \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right)^2, \quad \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}\right)^2, \\ \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right)^2, \quad \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y}\right)^2, \quad \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right)^2, \quad \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2, \quad \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^2, \quad \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right)^2, \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}. \end{array} \right.$$

Il nous reste à exprimer l'incompressibilité qui impose :

$$(5,2.5) \quad \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial x_m} = 0.$$

Des neuf relations ainsi obtenues les six pour lesquelles $i \neq l$ concernent des termes déjà nuls par symétrie et il reste :

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial x_m} = 0, \quad \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial x_m} = 0, \quad \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_3} \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial x_m} = 0.$$

On peut en tirer les termes rectangles du tableau (5,2.4) :

$$(5,2.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} = -\frac{1}{2} \left[-\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}\right)^2 \right], \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}\right)^2 \right], \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}\right)^2 \right]. \end{array} \right.$$

Sans autre hypothèse il est impossible de réduire davantage le nombre des composantes de D_{ijlm} et il y en a donc neuf indépendantes qui sont les termes carrés de (5,2.4). Parmi les cas particuliers que l'on peut considérer, nous signalons, à titre seulement de remarque, celui où $\Phi_{ij} = \Phi \Delta_{ij}$, pour lequel :

$$(5,2.7) \quad \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i}\right)^2 = \int \alpha_i^2 (1 - \alpha_i^2) k^2 \Phi d\vec{k}.$$

Il est clair, à cause de la relation :

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1,$$

que les neuf termes (5,2.7) s'expriment en fonction des six quantités :

$$c_{ij} = \int \alpha_i^2 \alpha_j^2 k^2 \Phi d\vec{k},$$

et l'on déduit aisément les trois relations suivantes :

$$(5,2.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 = \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right)^2 - \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2, \\ \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right)^2, \\ \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 - \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2 = \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2. \end{array} \right.$$

Nous savons, toutefois, qu'en présence d'un champ de vitesses moyennes, Φ_{ij} prend essentiellement sa forme générale :

$$\Phi_{ij} = A \Delta_{ij} + B \beta_i \beta_j,$$

et rien ne permet d'affirmer que pour la gamme des nombres d'ondes qui contribuent aux moyennes (5,2.2) le deuxième coefficient B disparaît plus vite que l'anisotropie du premier A.

Les grandeurs qui nous ont conduit aux D_{ijlm} sont les termes de dissipation :

$$(5,2.9) \quad D_{ij} = \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial u_j}{\partial x_l}},$$

dont les trois composantes relatives à $i = j$ subsistent seules en axes principaux de symétrie. Parmi les autres grandeurs physiques intéressantes qui s'y rattachent on peut noter la valeur quadratique moyenne du taux d'allongement des éléments fluides dans chaque direction; si $d \lambda_n$ est le coefficient de dilatation pendant dt d'un élément de longueur dn orienté suivant le vecteur unité $\vec{\alpha}$ on a :

$$\frac{d \lambda_n}{dt} = \vec{\alpha} \cdot \frac{d\vec{V}}{dn} = \alpha_i \alpha_l \frac{\partial u_i}{\partial x_l}$$

et :

$$(5,2.10) \quad \left(\frac{d \lambda_n}{dt} \right)^2 = \alpha_i \alpha_j \alpha_l \alpha_m \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial u_j}{\partial x_m}}.$$

Considérons, par exemple, dans l'hypothèse de symétrie par rapport au trièdre de référence, une direction Ox' située dans le plan Oxy et faisant l'angle φ avec Ox ; on obtient aisément, compte tenu de (5,2.6) :

$$\left(\frac{\partial \lambda_{x'}}{\partial t} \right)^2 = \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} \right)^2 = R \cos^4 \varphi + 2S \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + T \sin^4 \varphi,$$

avec :

$$(5,2.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} R = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2, \quad T = \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2, \\ 2S = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right)^2. \end{array} \right.$$

Une discussion facile montre que pour une variation monotone avec l'angle φ il faut que S soit compris entre R et T, condition qui peut se traduire par :

$$(5,2.12) \quad \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 = (3-r) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + (3+r) \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right)^2,$$

avec r compris entre -1 et $+1$. Le cas où S est exactement la moyenne de R et T (qui se traduit par $r = 0$) correspond à la variation particulièrement simple :

$$(5,2.13) \quad \left(\frac{\partial \bar{u}'}{\partial x'} \right)^2 = \cos^2 \varphi \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \sin^2 \varphi \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2.$$

Pour une turbulence isotrope les éléments de la première ligne de (5,2.4) sont égaux entre eux, ainsi que ceux de la seconde, et la relation qui manque entre ces deux valeurs est fournie par (5,2.12) qui donne :

$$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 = 2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2.$$

Si l'on pouvait admettre plus généralement la condition (5,2.12) et les deux relations homologues obtenues par permutation des axes (et changement de r en deux autres constantes), une utile précision serait apportée à la distribution des moyennes de carrés de dérivées; il est bien évident, toutefois, qu'il s'agit là d'une hypothèse assez arbitraire.

Un autre tenseur important donné par les moyennes D_{ijlm} est constitué par les corrélations du vecteur tourbillon : on a, d'une manière générale, pour les corrélations $\overline{\omega_i \omega'_j}$ du rotationnel d'un champ homogène à divergence nulle (comme la vitesse pour un fluide incompressible) :

$$(5,2.14) \quad \overline{\omega_i \omega'_j} = - \left[\left(\delta_{ij} \frac{\partial^2}{\partial \xi_m^2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right) R_{ll} - \frac{\partial^2 R_{ji}}{\partial \xi_m^2} \right],$$

d'où l'on déduit son transformé de FOURIER en substituant l'expression de R_{ij} à l'aide du tenseur spectral :

$$(5,2.15) \quad \overline{\omega_i \omega'_j} = \int k^2 [\Phi_{ll} \Delta_{ij} - \Phi_{ji}] e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{k}.$$

On obtient notamment, dans le cas particulier où $\Phi_{ij} = \Phi \Delta_{ij}$:

$$\overline{\omega_i \omega'_j} = \int k^2 \Phi_{ij} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{k},$$

et les trois composantes principales de la dissipation coïncident alors avec les carrés moyens des composantes du tourbillon; les relations (5,2.8) sont une autre manière d'exprimer cette identité. En ce qui concerne la dissipation totale on a, dans tous les cas :

$$(5,2.16) \quad \overline{\omega^2} = - \frac{\partial^2 R_{ll}}{\partial \xi_m^2} = \int k^2 \Phi_{ll} d\vec{k}.$$

5,3

CORRÉLATIONS DU TOURBILLON

Dé même que l'équation (5,1.11) donne l'évolution des tensions de REYNOLDS $\overline{u_i u_j}$, on pourrait former une équation donnant l'évolution temporelle de D_{ijlm} dont l'intérêt physique est de se concentrer sur la gamme des tourbillons les plus étroitement associés à la dissipation. Il revient au même, avec l'avantage d'éliminer d'emblée la pression, de former l'équivalent de (5,1.11) pour les corrélations du tourbillon $\overline{\omega_i \omega_j}$. Cette relation ayant été moins utilisée pour la recherche il peut être utile que nous nous arrêtions quelque peu à son établissement et à quelques-uns de ses aspects.

Tant qu'on se limite aux moyennes en un même point il n'y a pas lieu de consentir à une restriction quelconque et, comme pour (5,1.11), nous considérerons d'abord un écoulement turbulent très général. Les équations de HELMHOLTZ s'écrivent au point M en séparant grandeurs moyennes et fluctuations :

$$(5,3.1) \quad \frac{\partial (\overline{\omega_i} + \omega_i)}{\partial t} + (\overline{u_k} + u_k) \frac{\partial (\overline{\omega_i} + \omega_i)}{\partial x_k} = (\overline{\omega_k} + \omega_k) \frac{\partial (\overline{u_i} + u_i)}{\partial x_k} + \nu \Delta (\overline{\omega_i} + \omega_i).$$

Retranchant la moyenne de cette équation, on obtient celle du mouvement fin :

$$(5,3.2) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \omega_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial \omega_i}{\partial x_k} + \overline{u_k} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial \overline{\omega_i}}{\partial x_k} - \overline{u_k} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_k} \\ & = \omega_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \overline{\omega_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \overline{\omega_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \omega_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \nu \Delta \omega_i. \end{aligned} \right.$$

Écrivant enfin celle relative à la composante j , multipliant la première par ω_j , la seconde par ω_i , additionnant et prenant la moyenne on a :

$$(5,3.3) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \overline{\omega_i \omega_j}}{\partial t} + \overline{u_m} \frac{\partial \overline{\omega_i \omega_j}}{\partial x_m} + \frac{\partial \overline{u_m \omega_i \omega_j}}{\partial x_m} - \left[\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_m} \overline{\omega_m \omega_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_m} \overline{\omega_i \omega_m} \right] \\ & - \overline{\omega_m} \left[\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_m} \overline{\omega_i} + \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_m} \overline{\omega_j} \right] + \left[\frac{\partial \overline{\omega_i}}{\partial x_m} \overline{u_m \omega_j} + \frac{\partial \overline{\omega_j}}{\partial x_m} \overline{\omega_i u_m} \right] \\ & = \left[\overline{\omega_i \omega_m} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_m} + \overline{\omega_j \omega_m} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_m} \right] - 2\nu \frac{\partial \overline{\omega_i}}{\partial x_l} \frac{\partial \overline{\omega_j}}{\partial x_l} + \nu \Delta \overline{\omega_i \omega_j}. \end{aligned} \right.$$

Une relation globale importante s'en déduit en additionnant les termes diagonaux :

$$(5,3.4) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \overline{\omega^2}}{\partial t} \frac{1}{2} + \overline{u_m} \frac{\partial \overline{\omega^2}}{\partial x_m} \frac{1}{2} + \frac{\partial \overline{u_m \omega^2}}{\partial x_m} \frac{1}{2} - \frac{\partial \overline{u_l}}{\partial x_m} \overline{\omega_l \omega_m} \\ & - \overline{\omega_m \omega_l} \frac{\partial \overline{u_l}}{\partial x_m} + \frac{\partial \overline{\omega_l}}{\partial x_m} \overline{\omega_l u_m} = \overline{\omega_l \omega_m} \frac{\partial \overline{u_l}}{\partial x_m} - \nu \left(\frac{\partial \overline{\omega_l}}{\partial x_m} \right)^2 + \nu \Delta \frac{\overline{\omega^2}}{2}. \end{aligned} \right.$$

On reconnaît dans les trois premiers termes la dérivée de l'intensité tourbillonnaire en suivant une particule; nous reviendrons sur les autres plus longuement, mais auparavant nous voudrions indiquer une variante d'expression pour certains d'entre eux. On vérifie d'abord aisément l'identité :

$$\overline{\omega_l \frac{\partial u_l}{\partial x_m}} = \overline{\omega_l \frac{\partial u_m}{\partial x_l}} = \frac{\partial \overline{\omega_l u_m}}{\partial x_l}.$$

Si l'on ajoute alors au groupe formé par les cinquième et sixième termes l'expression :

$$\frac{\partial \overline{\omega_m}}{\partial x_l} \overline{\omega_l u_m},$$

on obtient, en variante :

$$(5,3.5) \quad \overline{\omega_l \omega_m} \left(\frac{\partial \overline{\omega_l}}{\partial x_m} - \frac{\partial \overline{\omega_m}}{\partial x_l} \right) - \left[\overline{\omega_m \frac{\partial \omega_l u_m}{\partial x_l}} - \frac{\partial \overline{\omega_m}}{\partial x_l} \overline{\omega_l u_m} \right].$$

Le premier groupe n'est autre que :

$$\overrightarrow{\nu} \wedge \overrightarrow{\omega} \operatorname{rot} \overrightarrow{\omega},$$

et il résulte d'une expression bien connue de l'accélération que :

$$(5,3.6) \quad (\overrightarrow{\nu} \wedge \overrightarrow{\omega})_l = \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{q^2}{2} - \frac{\partial u_l u_m}{\partial x_m},$$

où les termes de droite sont plus accessibles à l'expérience. On pourra écrire, en définitive, l'ensemble des termes (5,3.5) :

$$(5,3.7) \quad \left(\frac{\partial \overline{u_l u_m}}{\partial x_m} - \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{q^2}{2} \right) \Delta \overline{u_l} - \overline{\omega_m} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\overline{\omega_l u_m}}{\omega_m},$$

et cette forme, outre qu'elle se simplifie en pratique, permet mieux d'en apprécier l'ordre de grandeur.

A titre d'exemple d'un problème familier on peut considérer le cas du tuyau plan; le rotationnel moyen se confond ici avec sa composante, suivant la normale Oz au plan de l'écoulement :

$$\overline{\omega} = - \frac{d\overline{u}}{dy},$$

et l'équation (5,3.4) de l'intensité tourbillonnaire peut s'écrire avec des notations un peu hétérogènes mais parlantes :

$$(5,3.8) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dy} \frac{\overline{v \omega_i^2}}{2} - \overline{\omega_1 \omega_2} \frac{d\overline{u}}{dy} + \frac{d\overline{uv}}{dy} \frac{d^2 \overline{u}}{dy^2} - \overline{\omega}^2 \frac{d}{dy} \frac{\overline{w \omega_2}}{\overline{\omega}} \\ = \overline{\omega_l \omega_m} \frac{\partial u_l}{\partial x_m} - \nu \left(\frac{\partial \overline{\omega_l}}{\partial x_m} \right)^2 + \nu \frac{d^2 \overline{\omega^2}}{dy^2} \cdot \end{aligned} \right.$$

Un certain nombre de termes dans cette relation expriment essentiellement la non-homogénéité et il est intéressant d'en jauger l'importance par rapport aux autres. Le troisième s'écrit, si l'on admet la loi logarithmique de distribution de vitesses moyennes :

$$\frac{1}{K} \frac{u_*^3}{h^3} \frac{h^2}{y^2}.$$

Pour évaluer le septième on peut s'aider de l'équation d'énergie aisément déduite de (5,1.1) :

$$(5,3.9) \quad -\overline{uv} \frac{d\overline{u}}{dy} = \nu \overline{\omega^2} + \frac{d}{dy} \left(\frac{p}{\rho} + q^2 \right) \nu - \nu \frac{d^2 \overline{q^2}}{dy^2} \frac{1}{2},$$

et du fait résultant des mesures de LAUFER que les deux derniers termes de diffusion sont assez peu variables; assimilant alors la dissipation à la production d'énergie turbulente on peut écrire le dernier terme de (5,3.8) :

$$\frac{1}{K} \frac{u_*^3}{h^3} \frac{h^3}{y^3}.$$

Le quatrième nous donne l'occasion d'un examen rapide, dans le cas du tuyau plan, des moyennes telles que :

$$\overline{u_i \omega_j} \quad \text{et} \quad \overline{u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_l}}.$$

En ce qui concerne les dernières, le fait qu'il y ait symétrie par rapport au plan de l'écoulement entraîne que tous les termes où l'indice 3 figure un nombre impair de fois sont nuls; treize composantes sur vingt-sept s'éliminent ainsi. On a, d'autre part, les dix-huit relations :

$$\overline{u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_l}} + \overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_l}} = \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l},$$

où le deuxième membre n'est différent de zéro que pour $l = 2$ et pour les seules tensions de REYNOLDS $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$, $\overline{w^2}$ et \overline{uv} ; si l'on considère la distribution de ces tensions en fonction de y comme expérimentalement connue, on a dix relations entre les quatorze quantités que la symétrie a laissé subsister. Enfin, l'incompressibilité apporte, avec les conditions :

$$\overline{u_i \frac{\partial u_l}{\partial x_l}} = 0,$$

deux relations de plus. Il ne subsiste finalement que deux moyennes vraiment nouvelles pour lesquelles on peut choisir, par exemple :

$$\overline{v \frac{\partial u}{\partial x}} \quad \text{et} \quad \overline{v \frac{\partial u}{\partial y}},$$

et les six autres s'en déduisent immédiatement. On a, notamment :

$$(5,3.10) \quad \overline{w \omega_2} = \overline{u \frac{\partial v}{\partial y}} = \frac{d\overline{uv}}{dy} - \overline{v \frac{\partial u}{\partial y}},$$

et il est très vraisemblable, d'après cette expression, que l'ordre de grandeur en est u_*^2/h . Il en résulterait que les troisième et quatrième termes de (5,3.8) apportent des contributions analogues.

Les termes dont nous venons de parler prennent de l'importance, surtout au voisinage de la paroi; ailleurs, leur rôle est plutôt secondaire et l'analyse des termes principaux restants revient à considérer le schéma homogène, notamment celui de la déformation pure plane. Les équations (5,3.3) s'écrivent alors en axes principaux :

$$(5,3.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \frac{d\overline{\omega_1^2}}{dt} - a\overline{\omega_1^2} = \overline{\omega_1 \omega_m \frac{\partial u_1}{\partial x_m}} - \nu \left(\frac{\partial \overline{\omega_1}}{\partial x_l} \right)^2, \\ \frac{1}{2} \frac{d\overline{\omega_2^2}}{dt} + a\overline{\omega_2^2} = \overline{\omega_2 \omega_m \frac{\partial u_2}{\partial x_m}} - \nu \left(\frac{\partial \overline{\omega_2}}{\partial x_2} \right)^2, \\ \frac{1}{2} \frac{d\overline{\omega_3^2}}{dt} = \overline{\omega_3 \omega_m \frac{\partial u_3}{\partial x_m}} - \nu \left(\frac{\partial \overline{\omega_3}}{\partial x_l} \right)^2, \end{array} \right.$$

et l'équation globale (5,3.4) devient :

$$(5,3.12) \quad \frac{1}{2} \frac{d\overline{\omega^2}}{dt} + a(\overline{\omega_2^2} - \overline{\omega_1^2}) = \overline{\omega_l \omega_m \frac{\partial u_l}{\partial x_m}} - \nu \left(\frac{\partial \overline{\omega_l}}{\partial x_m} \right)^2.$$

Ces relations sont, bien entendu, contenues dans l'équation complète des tenseurs spectraux (1,3.9); il suffit, pour les obtenir par cette filière, de considérer le tenseur spectral des corrélations du tourbillon, soit Θ_{ij} , qui, d'après (5,2.15), s'écrit :

$$(5,3.13) \quad \Theta_{ij} = k^2 (\Phi_{pp} \Delta_{ij} - \Phi_{ji}),$$

et d'appliquer cet opérateur à chacun des termes de l'équation (1,3.9); on obtient ainsi :

$$(5,3.14) \quad \frac{\partial \Theta_{ij}}{\partial t} + k^2 (\Psi_{pp} \Delta_{ij} - \Psi_{ji}) = k^2 (\Omega_{pp} \Delta_{ij} - \Omega_{ji}) - 2\nu k^2 \Theta_{ij}.$$

Considérant, en particulier, les composantes diagonales $i = j$ divisant par 2 et intégrant dans tout l'espace des \vec{k} on reconnaît immédiatement, dans les premiers et derniers termes de (5,3.14), leurs homologues de (5,3.11); en ce qui concerne les deux autres, l'identification terme à terme subsiste, bien qu'elle n'apparaisse pas avec évidence,

parce que l'équation (5,3.11) en représente une traduction plus ramassée en terme de tourbillon. Une grandeur clef dans toute turbulence est, on le sait, le terme :

$$\overline{\omega_l \omega_m \frac{\partial u_l}{\partial x_m}},$$

qui apparaît dans les équations de l'intensité tourbillonnaire (5,3.4) et (5,3.12); elle traduit le fait bien connu qu'en l'absence de viscosité les filets tourbillons sont des filaments fluides (entraînés avec la matière) et que la grandeur du tourbillon ω demeure à tout instant proportionnelle à la longueur d'un petit élément fluide dl qui l'accompagne dans sa direction; il en résulte que si la turbulence a pour tendance générale d'écartier les points et d'entortiller les filaments elle sera, par là même, génératrice en moyenne d'intensité tourbillonnaire; l'argument, sous son expression sommaire, caractérise bien, en effet, une propriété de base des écoulements turbulents. En plus de cette élongation désordonnée due aux vitesses de fluctuation, le champ de vitesse moyenne impose, quand il existe, sa propre déformation qui se traduit, dans (5,3.4), par le terme :

$$\overline{\omega_l \omega_m \frac{\partial u_l}{\partial x_m}}.$$

Dans le cas particulier de la déformation plane les équations (5,3.11) montrent que la dilatation principale suivant Ox_1 entraîne un apport dans cette direction tandis que la contraction suivant Ox_2 crée un déficit suivant cet axe. Nous nous trouvons donc ici dans une situation, à certains égards, analogue à celle des équations (5,1.9) relatives à l'énergie cinétique, puisque de l'intensité tourbillonnaire est inégalement distribuée entre les trois axes; mais d'un autre côté l'agent de redistribution principal était alors constitué par les corrélations de pression, et même en grande partie par la portion de celles-ci qui n'était pas associée aux corrélations triples; en ce qui concerne l'intensité tourbillonnaire nous dépendons, au contraire, principalement de ces dernières. Cette conclusion est en tout cas inévitable si l'on admet (ce qui, nous l'avons dit, n'est pas certain *a priori*) l'existence d'une solution stationnaire au schéma homogène. Nous pouvons considérer à l'extrême opposé l'hypothèse où les seconds membres de (5,3.11) sont très sensiblement isotropes et égaux, d'où il suit, en retranchant la deuxième équation de la première :

$$(5,3.15) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\overline{\omega_1^2} - \overline{\omega_2^2}) = a(\overline{\omega_1^2} + \overline{\omega_2^2}).$$

Il en résulte que si même l'on avait au départ $\overline{\omega_1^2} = \overline{\omega_2^2}$ ces composantes vont immédiatement s'écartier et apporter au bilan (5,3.12) une production tourbillonnaire accrue; celle-ci va tendre à enrayer la décroissance de $\overline{\omega^2}$ et l'on ne voit pas sans un mécanisme régulateur aux seconds membres de (5,3.11) ce qui va stopper l'anisotropie croissante du tourbillon. On peut être surpris de voir l'anisotropie du terme de corrélations triples (5,3.15) devenir ici essentielle alors qu'elle l'était moins au niveau de l'énergie cinétique; il convient de se rappeler à cet égard que les deuxièmes membres de (5,3.11) sont, aux grands nombres de REYNOLDS de turbulence, de petites différences entre deux grands termes, de sorte qu'il suffit d'une anisotropie même légère pour modifier notablement le bilan.

Il résulte de (5,3.14) que les termes de production tourbillonnaire tels que :

$$\overline{\omega_1 \omega_m \frac{\partial u_1}{\partial x_m}}$$

s'expriment directement en fonction du tenseur de corrélations triples en deux points Θ_{ijk} :

$$(5,3.16) \quad \overline{\omega_i \omega_m \frac{\partial u_j}{\partial x_m}} + \overline{\omega_j \omega_m \frac{\partial u_i}{\partial x_m}} = \int k^2 (\Omega_{pp} \Delta_{ij} - \Omega_{ji}) d\vec{k},$$

et qu'en particulier on a, dans tous les cas :

$$(5,3.17) \quad \overline{\omega_l \omega_m \frac{\partial u_l}{\partial x_m}} = \frac{1}{2} \int k^2 \Omega_{pp} d\vec{k} = \int k^2 k_l \Theta_{lmm} d\vec{k}.$$

Au point de vue expérimental, il ne semble pas qu'il y ait d'autres moyens d'accéder à ces termes que par les moyennes de produits de trois dérivées qui les composent et le nombre de celles qu'on peut ainsi atteindre, de même que la précision des mesures, sont assez limités. La simplification apportée par l'isotropie est ici encore considérable puisque la mesure d'une seule grandeur suffit; on a, en effet, dans ce cas :

$$\Theta_{ijk} = \Lambda \left[\frac{k_i k_j k_k}{k^3} - \frac{1}{2} \left(\delta_{jk} \frac{k_i}{k} + \delta_{ik} \frac{k_j}{k} \right) \right],$$

d'où :

$$\overline{\omega_l \omega_m \frac{\partial u_l}{\partial x_m}} = - \int_0^\infty k^3 \Lambda 4 \pi k^2 dk.$$

D'autre part, on vérifie aisément, en s'aidant de l'homogénéité, que :

$$\left[\frac{\partial^3 Q_{111}}{\partial \xi_1^3} \right]_0 = \overline{u_1^3 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3}} = -2 \overline{u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}} = \left(\overline{\frac{\partial u_1}{\partial x_1}} \right)^3,$$

de sorte que :

$$\left(\overline{\frac{\partial u_1}{\partial x_1}} \right)^3 = - \int k_1^3 \Theta_{111} d\vec{k} = \frac{2}{35} \int_0^\infty k^3 \Lambda 4 \pi k^2 dk.$$

On retrouve ainsi la relation connue :

$$(5,3.18) \quad \overline{\omega_l \omega_m \frac{\partial u_l}{\partial x_m}} = - \frac{35}{2} \left(\overline{\frac{\partial u_1}{\partial x_1}} \right)^3.$$

Cette égalité n'est d'ailleurs qu'un aspect des liens imposés par l'isotropie entre corrélations triples de dérivées, de même que l'équation homologue pour la dissipation :

$$\left(\overline{\frac{\partial u_l}{\partial x_m}} \right)^2 = 15 \left(\overline{\frac{\partial u_1}{\partial x_1}} \right)^2$$

ne fait que refléter un ensemble de relations entre moyennes du produit de deux dérivées. Mais alors que l'analyse de ces dernières a coïncidé avec l'origine même des études

modernes de turbulence par G. I. TAYLOR, il ne semble pas que les produits triples aient retenu la même attention; en raison de l'intérêt qui s'attache, d'après ce qui précède, à la mise en évidence de l'anisotropie de ces moyennes, nous les examinerons en détail dans ce qui suit.

Auparavant nous voudrions signaler une autre expression des termes (5,3.16) susceptibles d'un usage théorique. Puisque les équations (5,3.11) concernent essentiellement le tourbillon il est naturel de chercher à écrire les termes de production à ce même niveau. On peut en effet, négligeant une intégrale de surface, exprimer la vitesse par :

$$(5,3.19) \quad u_j = \frac{1}{4\pi} \int \varepsilon_{j pq} \omega'_p \frac{x'_q - x_q}{r^3} d\tau',$$

d'où :

$$\overline{\omega_i \omega_m \frac{\partial u_j}{\partial x_m}} = \frac{1}{4\pi} \int \varepsilon_{j pq} \frac{3\alpha_m \alpha_q - \delta_{mq}}{r^3} \overline{\omega_i \omega_m \omega'_p} d\tau'.$$

On peut former *a priori*, dans le cas de l'isotropie, le tenseur de corrélations triples en deux points du tourbillon; on notera qu'il s'agit d'un tenseur gauche, c'est-à-dire que si \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} désignent trois vecteurs unités, la corrélation :

$$\overline{\omega_a \omega_b \omega'_c}$$

est invariante pour toute rotation de l'ensemble \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , \vec{r} mais change de signe pour toute symétrie par rapport à un plan; appliquant la technique de CHANDRASEKHAR [18] on obtient, compte tenu de la symétrie des indices i et j :

$$(5,3.20) \quad \overline{\omega_i \omega_j \omega'_k} = H(r) [\xi_i \varepsilon_{jkl} \xi_l + \xi_j \varepsilon_{ikl} \xi_l].$$

L'expression de la production tourbillonnaire à partir du scalaire H s'en déduit immédiatement :

$$(5,3.21) \quad \overline{\omega_l \omega_m \frac{\partial u_i}{\partial x_m}} = 6 \int_0^\infty H(r) r dr.$$

5,4 MOYENNES DU PRODUIT DE TROIS DÉRIVÉES DE LA VITESSE

Le décompte des moyennes du produit de trois dérivées de la vitesse :

$$(5,4.1) \quad \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \frac{\partial u_k}{\partial x_n}}$$

s'obtient de la même manière que pour les produits doubles. On rencontre d'abord les produits où toutes les dérivées sont distinctes : ce sont les combinaisons de neuf objets trois à trois et il y en a quatre-vingt-quatre; il faut ensuite considérer les moyennes où une dérivée est au carré et l'autre distincte, c'est-à-dire $9 \times 8 = 72$ cas, et enfin les moyennes de cubes dont la simplicité mérite qu'on les mette à part, soit neuf termes;

en tout, par conséquent, cent soixante-cinq termes. Les réductions, dans ce nombre plutôt considérable, proviennent de trois causes : les symétries de la turbulence lorsqu'elles existent, l'incompressibilité et l'homogénéité; l'expression de cette dernière est d'ailleurs moins immédiate que dans le cas de deux dérivées, et c'est sans doute la raison (avec l'urgence moindre par rapport à d'autres questions au début de la théorie) pour laquelle l'analyse de ces moyennes triples, même pour le cas de l'isotropie, ne semble pas avoir été systématiquement établie.

Une première étape intéressante est de *classer* les différentes moyennes en groupes dont les membres ont des propriétés apparentées. Si l'on considère la condition d'incompressibilité :

$$\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}} = 0,$$

on voit qu'elle fait jouer un rôle distinct aux dérivées d'une composante de la vitesse suivant la direction même de la composante; nous en ferons en conséquence un critère de classification et nous distinguerons les dérivées où les indices sont les mêmes haut et bas, que nous désignerons par A_p (où p peut prendre trois valeurs), et celles où les indices sont différents, que nous appellerons B_q (où q peut prendre six valeurs). Un deuxième critérium est constitué par les conditions de symétrie et à cet égard nous nous arrêterons plus spécialement, comme précédemment, au cas où la turbulence a trois plans de symétrie formant trièdre trirectangle de référence; on voit alors exactement, comme pour les moyennes (5,2), que tout terme où les différents indices comportent une réalisation répétée un nombre impair de fois, est nul. Ces fils directeurs admis, il est clair qu'on peut considérer à part les termes formés uniquement de A, ceux formés de B et ceux constitués par des A et des B; à l'intérieur de ces trois familles il est d'ailleurs naturel de mettre à part, car ce sont des termes plus simples, ceux où une dérivée figure au carré ou au cube; on est ainsi conduit aux dix groupes suivants :

$$(5,4.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_p^3, \quad A_p^2 A_{p'}, \quad A_p A_{p'} A_{p''}, \\ B_q^3, \quad B_q^2 B_{q'}, \quad B_q B_{q'} B_{q''}, \\ B_q^2 A_p, \quad B_q B_{q'} A_p, \quad A_p^2 B_q, \quad A_p A_{p'} B_q. \end{array} \right.$$

Il est clair, d'abord, que les symétries n'opéreront aucune réduction sur les trois groupes formés de A seuls, pour lesquels chaque indice figure un nombre pair de fois; le nombre de ces termes pour le cas général est visiblement de trois pour le groupe A_p^3 , de $3 \times 2 = 6$ pour le groupe $A_p^2 A_{p'}$ et d'une unité seulement pour $A_p A_{p'} A_{p''}$. Passant à la deuxième ligne du tableau (5,4.2) on voit que le groupe B_q^3 comporte en général six termes et qu'ils sont tous nuls lorsque les symétries existent; le nombre de termes du groupe $B_q^2 B_{q'}$ est de $6 \times 5 = 30$, et ils sont encore nuls par symétrie. Le groupe $B_q B_{q'} B_{q''}$ est constitué par les combinaisons de six objets trois à trois, c'est-à-dire de vingt termes; pour en extraire ceux qui ne sont pas nuls par symétrie on peut utiliser la remarque suivante : tout terme que les symétries laissent subsister

demeurera tel si l'on y remplace l'une des dérivées par sa symétrique par rapport à la diagonale principale dans le tableau des neuf dérivées, car on ne fait ainsi qu'échanger entre eux deux indices; ce procédé permet donc de ramener tout terme non nul à un produit de dérivées toutes situées, par exemple, au-dessus de la diagonale principale; or, seul de ces produits celui composé de trois dérivées distinctes :

$$(5,4.3) \quad \overline{\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \frac{\partial u_3}{\partial x_1}}$$

est non nul, tout autre comportant la répétition d'une des dérivées disparaissant par symétrie; inversement, on obtiendra tous les termes qui nous intéressent en prenant les symétriques par rapport à la diagonale principale d'une, deux ou trois dérivées du terme unique (5,4.3); on obtient ainsi respectivement trois, trois et un termes nouveaux soit, en tout, huit moyennes non nulles pour ce groupe. Dans la famille de produits mixtes — troisième ligne de (5,4.2) — le premier groupe $B_q^2 A_p$ comprend dix-huit termes qui subsistent tous par symétrie. Le deuxième groupe $B_q B_{q'} A_p$ est composé de quarante-cinq termes obtenus en associant toutes les combinaisons deux à deux des B_q , soit quinze à chacun des trois A_p ; il est, d'ailleurs, évident que les seuls termes non nuls sont ici du type :

$$\overline{\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_1}}$$

et ils sont au nombre de $3 \times 3 = 9$. Il y a enfin dix-huit termes $A_p^2 B_q$, et également dix-huit termes $A_p A_{p'} B_q$ tous nuls pas symétrie. Nous donnons, dans le tableau de la page 89, le classement par groupe de toutes les quarante-cinq moyennes qui ne se réduisent pas à zéro dans le cas où la turbulence a trois plans rectangulaires de symétrie; pour alléger l'écriture nous supprimerons souvent le symbole de différentiation, ainsi que la variable intéressée, et nous écrirons simplement une moyenne telle que (5,4.1) :

$$\frac{ijk}{lmn}$$

Nous en venons maintenant aux relations imposées par l'incompressibilité et, en premier lieu, celles qui concernent les moyennes composées uniquement de termes A. On a, par exemple :

$$(5,4.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_2 A_3 (A_1 + A_2 + A_3) = 0, \\ A_1^2 (A_1 + A_2 + A_3) = 0, \end{array} \right.$$

et en considérant les deux autres produits $A_3 A_1$ et $A_1 A_2$, ainsi que les deux autres carrés A_2^2 et A_3^2 , on a en tout six telles équations. Posant, pour alléger l'écriture :

$$\left\{ \begin{array}{lll} x_1 = A_2^2 A_3, & x_2 = A_3^2 A_1, & x_3 = A_1^2 A_2, \\ x'_1 = A_3^2 A_2, & x'_2 = A_1^2 A_3, & x'_3 = A_2^2 A_1, \\ a_1 = A_1^3, & a_2 = A_2^3, & a_3 = A_3^3, \quad m = A_1 A_2 A_3, \end{array} \right.$$

MOYENNES DE PRODUITS DE TROIS DÉRIVÉES NON NULLES
QUAND IL Y A TROIS PLANS RECTANGULAIRES DE SYMÉTRIE

		ISOTROPIE
A_p^3	$\frac{111}{111} \quad \frac{222}{222} \quad \frac{333}{333}$	m
$A_p A_{p'} A_{p''}$	$\frac{123}{123}$	m
$A_p^2 A_{p'}$	$\frac{112}{112} \quad \frac{113}{113} \quad \frac{223}{223} \quad \frac{221}{221} \quad \frac{331}{331} \quad \frac{332}{332}$	$-\frac{m}{2}$
$B_q^2 A_p$	$\frac{111}{221} \quad \frac{111}{331} \quad \frac{221}{331} \quad \frac{221}{111} \quad \frac{331}{111} \quad \frac{331}{221}$ $\frac{112}{222} \quad \frac{112}{332} \quad \frac{222}{332} \quad \frac{222}{112} \quad \frac{332}{112} \quad \frac{332}{222}$ $\frac{113}{223} \quad \frac{113}{333} \quad \frac{223}{333} \quad \frac{223}{113} \quad \frac{333}{113} \quad \frac{333}{223}$	$\frac{2}{3}m$ $-\frac{4}{3}m$
$B_q B_{q'} A_p$	$\frac{121}{211} \quad \frac{131}{311} \quad \frac{231}{321}$ $\frac{122}{212} \quad \frac{132}{312} \quad \frac{232}{322}$ $\frac{123}{213} \quad \frac{133}{313} \quad \frac{233}{323}$	$\frac{m}{12}$ $-\frac{m}{6}$
$B_q B_{q'} B_{q''}$	$\frac{121}{233} \quad \frac{232}{311} \quad \frac{313}{122}$ $\frac{212}{133} \quad \frac{323}{211} \quad \frac{131}{322}$ $\frac{123}{231} \quad \frac{123}{312}$	m $-\frac{3}{4}m$

on obtient aisément le système équivalent :

$$(5,4.4) \quad \begin{cases} x_3 - x_2 = m - a_1, & x_1 + x'_1 = -m, \\ x_1 - x_3 = m - a_2, & x_2 + x'_2 = -m, \\ x_2 - x_1 = m - a_3, & x_3 + x'_3 = -m. \end{cases}$$

Additionnant le premier groupe on a d'abord la condition :

$$m = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3),$$

qui s'écrit, en notation plus courante :

$$(5,4.5) \quad \frac{\overline{\partial u} \overline{\partial v} \overline{\partial w}}{\overline{\partial x} \overline{\partial y} \overline{\partial z}} = \frac{1}{3} \left[\left(\frac{\overline{\partial u}}{\overline{\partial x}} \right)^3 + \left(\frac{\overline{\partial v}}{\overline{\partial y}} \right)^3 + \left(\frac{\overline{\partial w}}{\overline{\partial z}} \right)^3 \right].$$

Les équations (5,4.4) reviennent à donner les positions relatives de trois points sur une droite à une translation d'ensemble près; si donc l'on pose :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3k, \quad x'_1 + x'_2 + x'_3 = 3k',$$

il ne sera pas possible de calculer k ou k' ; toutefois, l'addition des équations du deuxième groupe montre que :

$$k + k' = -m,$$

dont il sera tenu compte en posant :

$$k = -\frac{m}{2} + \alpha, \quad k' = -\frac{m}{2} - \alpha.$$

On en déduit l'expression suivante des six termes du groupe :

$$(5,4.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\overline{\partial u}}{\overline{\partial x}} \right)^2 \frac{\overline{\partial v}}{\overline{\partial y}} = -\frac{1}{6} \left[3 \left(\frac{\overline{\partial u}}{\overline{\partial x}} \right)^3 - \left(\frac{\overline{\partial v}}{\overline{\partial y}} \right)^3 + \left(\frac{\overline{\partial w}}{\overline{\partial z}} \right)^3 \right] + \alpha, \\ \left(\frac{\overline{\partial v}}{\overline{\partial y}} \right)^2 \frac{\overline{\partial w}}{\overline{\partial z}} = -\frac{1}{6} \left[\left(\frac{\overline{\partial u}}{\overline{\partial x}} \right)^3 + 3 \left(\frac{\overline{\partial v}}{\overline{\partial y}} \right)^3 - \left(\frac{\overline{\partial w}}{\overline{\partial z}} \right)^3 \right] + \alpha, \\ \left(\frac{\overline{\partial w}}{\overline{\partial z}} \right)^2 \frac{\overline{\partial u}}{\overline{\partial x}} = -\frac{1}{6} \left[-\left(\frac{\overline{\partial u}}{\overline{\partial x}} \right)^3 + \left(\frac{\overline{\partial v}}{\overline{\partial y}} \right)^3 + 3 \left(\frac{\overline{\partial w}}{\overline{\partial z}} \right)^3 \right] + \alpha, \\ \left(\frac{\overline{\partial u}}{\overline{\partial x}} \right)^2 \frac{\overline{\partial w}}{\overline{\partial z}} = -\frac{1}{6} \left[3 \left(\frac{\overline{\partial u}}{\overline{\partial x}} \right)^3 + \left(\frac{\overline{\partial v}}{\overline{\partial y}} \right)^3 - \left(\frac{\overline{\partial w}}{\overline{\partial z}} \right)^3 \right] - \alpha, \\ \left(\frac{\overline{\partial v}}{\overline{\partial y}} \right)^2 \frac{\overline{\partial u}}{\overline{\partial x}} = -\frac{1}{6} \left[-\left(\frac{\overline{\partial u}}{\overline{\partial x}} \right)^3 + 3 \left(\frac{\overline{\partial v}}{\overline{\partial y}} \right)^3 + \left(\frac{\overline{\partial w}}{\overline{\partial z}} \right)^3 \right] - \alpha, \\ \left(\frac{\overline{\partial w}}{\overline{\partial z}} \right)^2 \frac{\overline{\partial v}}{\overline{\partial y}} = -\frac{1}{6} \left[\left(\frac{\overline{\partial u}}{\overline{\partial x}} \right)^3 - \left(\frac{\overline{\partial v}}{\overline{\partial y}} \right)^3 + 3 \left(\frac{\overline{\partial w}}{\overline{\partial z}} \right)^3 \right] - \alpha. \end{array} \right.$$

On voit en définitive que l'expression de l'incompressibilité, en apportant six conditions, permet de ramener à quatre seulement le nombre des inconnues de la famille de termes formés de dérivées A. Pour les groupes $B_q^2 A_p$ et $B_q B_{q'} B_{q''}$ les conditions :

$$B_q^2 (A_1 + A_2 + A_3) = 0, \quad B_q B_{q'} (A_1 + A_2 + A_3) = 0$$

donnent un des termes sur trois en fonction des deux autres dans chaque colonne du tableau de la page 89, c'est-à-dire neuf termes en tout. Aucune restriction n'est, en revanche, imposée au groupe $B_q B_{q'} B_{q''}$ et c'est finalement quinze termes sur quarante-cinq que l'incompressibilité permet d'éliminer.

Nous avons rappelé en (5,2) la manière dont les moyennes du produit de deux dérivées se rattachent au tenseur de corrélations doubles R_{ij} , et le fait que ce lien est la meilleure traduction des conditions imposées à ces moyennes par l'homogénéité. L'extension naturelle au cas de produits triples de dérivées doit de même faire appel au tenseur R_{ijk} de corrélations triples en *trois* points (et non en deux points seulement); on a, en effet, en généralisant l'argument classique relatif à deux points :

$$(5,4.7) \quad \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \frac{\partial u_k}{\partial x_n}} = - \left[\left(\frac{\partial}{\partial \xi_l} + \frac{\partial}{\partial \xi'_l} \right) \frac{\partial}{\partial \xi_m} \frac{\partial}{\partial \xi'_n} R_{ijk}(\vec{r}, \vec{r}') \right]_0,$$

soit, plus explicitement :

$$\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \frac{\partial u_k}{\partial x_n}} = - \left[\frac{\partial^3 R_{ijk}(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial \xi_l \partial \xi_m \partial \xi'_n} \right]_0 - \left[\frac{\partial^3 R_{ijk}(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial \xi_m \partial \xi'_l \partial \xi'_n} \right]_0.$$

Pour faire apparaître des conditions éventuelles apportées par l'homogénéité il est indiqué de considérer une suite donnée d'indices ijk , donc une fonction déterminée R_{ijk} des six variables ξ et ξ' , et de traduire la possibilité qui est offerte de changer l'ordre des dérivations. A la différence, cependant, du cas des produits doubles, ce sont deux dérivées qui apparaissent dans (5,4.7) et il est apparent qu'une autre permutation des indices l, m, n changera l'une ou l'autre de ces dérivées. Les égalités cherchées ne peuvent donc pas concerner deux arrangements isolés et l'on est ainsi amené à considérer leur ensemble qui comprend les deux groupes de permutation circulaire directe et inverse :

$$lmn, \quad mnl, \quad nlm, \quad mln, \quad lnm, \quad nml.$$

Pour R_{ijk} donné on peut caractériser symboliquement chaque dérivée de (5,4.7) par la seule suite d'indices qui la concerne en distinguant toutefois, par un « prime », ceux qui sont relatifs aux variables ξ' ; on obtient ainsi, pour les permutations directes :

$$lmn' + ml'n', \quad mnl' + nm'l', \quad nlm' + ln'm',$$

et pour les permutations inverses :

$$mln' + lm'n', \quad nml' + mn'l', \quad lnm' + nl'm'.$$

Si l'on considère la somme des moyennes relatives à ces deux groupes on constate qu'elles sont égales, compte tenu de la possibilité de changer l'ordre des dérivées, et l'on arrive ainsi à la condition suivante due à l'homogénéité :

$$\frac{ijk}{lmn} + \frac{ijk}{mnl} + \frac{ijk}{nlm} = \frac{ijk}{mln} + \frac{ijk}{lnm} + \frac{ijk}{nml}.$$

On peut remarquer, au sujet de cette relation, que la considération des deux groupes de permutations circulaires directes et inverses généralise assez naturellement, pour le cas des produits triples, la possibilité d'échanger deux indices qui appartiennent aux produits doubles. Mais la deuxième constatation est que la condition qui précède n'est pas très riche car elle se réduit à une identité triviale si deux indices sont égaux soit parmi les lmn , soit pour les ijk . Elle ne fournit donc qu'une équation, d'ailleurs importante, pour le seul cas où tous les indices sont différents :

$$(5,4.8) \quad \frac{123}{123} + \frac{123}{231} + \frac{123}{312} = \frac{123}{213} + \frac{123}{321} + \frac{123}{132}.$$

Nous pouvons maintenant examiner le cas plus particulier de la turbulence isotrope. Celle-ci étant symétrique par rapport à un plan quelconque le tableau de la page 89 donne encore les seules moyennes non nulles et l'équivalence des trois axes permet déjà de réduire à l'un d'eux un grand nombre de termes. Nous désignerons le groupe des A_p^3 par :

$$(5,4.9) \quad \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3} = \overline{\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^3} = \overline{\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^3} = m,$$

et l'on a aussi, en vertu du résultat général (5,4.5) :

$$(5,4.10) \quad \overline{\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z}} = m.$$

Tous les $A_p^3 A_{p'}$ sont égaux et il résulte de (5,4.6) que :

$$(5,4.11) \quad \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial v}{\partial y}} = -\frac{m}{2}.$$

Dans le groupe des $B_q^3 A_p$ il suffit de considérer la première colonne dont nous noterons les deux premiers termes :

$$(5,4.12) \quad \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial u}{\partial x}} = a_1, \quad \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial v}{\partial y}} = a_2,$$

la troisième étant, par l'incompressibilité :

$$(5,4.13) \quad \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial w}{\partial z}} = -(a_1 + a_2).$$

Il y a, dans le groupe $B_q B_{q'} A_p$, six termes égaux à :

$$(5,4.14) \quad \overline{\frac{\partial u \partial v \partial u}{\partial y \partial x \partial x}} = b$$

et trois termes identiques du type :

$$(5,4.15) \quad \overline{\frac{\partial u \partial v \partial w}{\partial y \partial x \partial z}} = -2 b.$$

Enfin, le groupe $B_q B_{q'} B_{q''}$ introduit les six premiers termes égaux à :

$$(5,4.16) \quad \overline{\frac{\partial u \partial v \partial u}{\partial y \partial z \partial z}} = c_1$$

et les deux derniers de la forme :

$$(5,4.17) \quad \overline{\frac{\partial u \partial v \partial w}{\partial y \partial z \partial x}} = c_2.$$

Si l'on considère m comme la grandeur de référence on est donc en présence de cinq quantités nouvelles a_1 a_2 b c_1 et c_2 entre lesquelles existe d'ailleurs, en vertu de la condition d'homogénéité (5,4.8), la relation :

$$m + 2c_2 = -6b.$$

Pour achever d'exprimer l'isotropie il est nécessaire d'effectuer une rotation des axes, par exemple de considérer le trièdre $Ox' y' z'$ déduit de $Oxyz$ par rotation autour de Oz de l'angle φ . Posant :

$$\cos \varphi = \alpha, \quad \sin \varphi = \beta,$$

on aura :

$$\left\{ \begin{array}{l} u' = \alpha u + \beta v, \quad \frac{\partial}{\partial x'} = \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y}, \\ v' = -\beta u + \alpha v, \quad \frac{\partial}{\partial y'} = -\beta \frac{\partial}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial y}, \end{array} \right.$$

et l'on écrira qu'une moyenne déterminée a , dans les nouveaux axes, la valeur définie dans le tableau récapitulatif qui précède. Il y a évidemment un grand choix de moyennes pouvant être considérées et les relations auxquelles elles conduisent ne sont pas indépendantes et se ramènent à quatre d'entre elles par combinaison linéaire. Choisisant, par exemple, d'abord :

$$\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} \right)^3,$$

on obtient, après un calcul facile :

$$a_1 + a_2 + 2b = \frac{3}{2}m.$$

Passant maintenant à :

$$\overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial y'}\right)^3},$$

dont la valeur est nulle, on déduit :

$$a_1 = a_2.$$

On peut considérer ensuite :

$$\frac{\partial u'}{\partial y'} \frac{\partial v'}{\partial z'} \frac{\partial u'}{\partial z'},$$

et l'on est conduit à :

$$c_1 = a_1 + \frac{a_2}{2}.$$

On utilisera enfin :

$$\frac{\partial u'}{\partial y'} \frac{\partial v'}{\partial z'} \frac{\partial w'}{\partial x'},$$

qui donne la relation :

$$c_1 + c_2 = 3b.$$

Les cinq équations qui viennent d'être établies permettent de déterminer toutes les quantités en fonction de l'une d'entre elles, soit :

$$(5,4.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 = a_2 = \frac{2}{3}m, \\ b = \frac{m}{12}, \\ c_1 = m, \quad c_2 = -\frac{3}{4}m. \end{array} \right.$$

On trouvera résumées dans le tableau général de la page 89 l'ensemble de ces valeurs que prennent, en turbulence isotrope, les moyennes de produits triples de dérivées.

Une question vient naturellement à l'esprit à la suite de l'analyse qui précède : étant donné l'importance et la simplicité relative du tenseur de corrélations triples en *deux* points, y a-t-il une filière permettant d'en déduire les moyennes triples de dérivées qui nous occupent ? De tels résultats pourraient dispenser, pour la turbulence isotrope, de changements d'axes toujours un peu arbitraires et permettraient plus généralement de traduire des hypothèses plus précises que les simples symétries; c'est à ce problème que nous voudrions à présent consacrer quelque attention.

Une moyenne :

$$\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \frac{\partial u_k}{\partial x_n}}$$

relative à des indices ijk et lmn bien déterminés ne pourra provenir que des composantes du tenseur $\overline{u_i u_j u'_k}$ où figurent ces mêmes indices, c'est-à-dire Q_{ijk} , Q_{kij} et Q_{jki} ; nous sommes donc amené à considérer simultanément les trois nombres :

$$(5,4.19) \quad \Lambda_1 = \left[\overline{\frac{\partial^3 u_i u_j u'_k}{\partial \xi_l \partial \xi_m \partial \xi_n}} \right]_0, \quad \Lambda_2 = \left[\overline{\frac{\partial^3 u_k u_i u'_j}{\partial \xi_l \partial \xi_m \partial \xi_n}} \right]_0, \quad \Lambda_3 = \left[\overline{\frac{\partial^3 u_j u_k u'_i}{\partial \xi_l \partial \xi_m \partial \xi_n}} \right]_0.$$

Traduisant l'homogénéité on peut d'abord écrire le premier :

$$(5,4.20) \quad A_1 = u_i u_j \overline{\frac{\partial^3 u_k}{\partial x_l \partial x_m \partial x_n}} = - \overline{\frac{\partial^3 u_i u_j}{\partial x_l \partial x_m \partial x_n}} u_k.$$

On peut aussi reporter deux dérivées sur l'un des facteurs et la dérivée restante sur l'autre :

$$(5,4.21) \quad A_1 = - \overline{\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_l} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_m \partial x_n}} = + \overline{\frac{\partial^2 u_i u_j}{\partial x_m \partial x_n} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}},$$

et ces expressions peuvent d'ailleurs être écrites de deux autres manières avec les groupements d'indices m, nl et n, lm . En effectuant les dérivations on est ainsi conduit à huit développements différents faisant apparaître trois types distincts de moyennes :

$$\overline{u_i u_j \frac{\partial^3 u_k}{\partial x_m \partial x_n \partial x_l}}, \quad \overline{\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_m \partial x_n} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} u_k}, \quad \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \frac{\partial u_k}{\partial x_n}},$$

dont la première, directement égale à A_1 d'après la première équation (5,4.20), ne sera pas dans la suite considérée comme une inconnue. Ne retenant que la deuxième équation (5,4.20) et les six équations (5,4.21) on a donc sept relations données par A_1 , soit en tout vingt et une relations en comptant celles analogues provenant de A_2 et A_3 . Les inconnues livrées en vrac sont d'abord les moyennes triples qui nous intéressent; pour alléger l'écriture nous désignerons un produit :

$$\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \frac{\partial u_k}{\partial x_n}},$$

où les indices i, j, k ont une valeur et un ordre fixés par (l, m, n) , et il y en a six qui seront définies par :

$$(5,4.22) \quad \begin{cases} \alpha_1 = (m, n, l), & \alpha_2 = (n, l, m), & \alpha_3 = (l, m, n), \\ \alpha'_1 = (n, m, l), & \alpha'_2 = (m, l, n), & \alpha'_3 = (l, n, m). \end{cases}$$

De manière analogue un produit :

$$\overline{\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_m \partial x_n} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} u_k},$$

où les indices supérieurs et leur ordre sont encore immuables sera désigné par $(mn, l, 1)$; on peut répartir les dérivations de ce symbole entre u_i, u_j et u_k de six manières différentes en considérant les deux groupes de permutations circulaires directe et inverse de mn, l et 1, et l'on appellera ces moyennes :

$$(5,4.23) \quad \begin{cases} a_1 = (mn, l, 1), & a_2 = (l, 1, mn), & a_3 = (1, mn, l), \\ a'_1 = (l, mn, 1), & a'_2 = (mn, 1, l), & a'_3 = (1, l, mn). \end{cases}$$

On obtiendra de manière analogue un groupe caractérisé par la lettre b en partant de $(nl, m, 1)$ et un groupe c avec $(lm, n, 1)$. C'est donc $6 + 18 = 24$ moyennes inconnues qui doivent être mises en regard des vingt et une relations qui les lient.

Le développement explicite des relations fournies, par exemple, par A_1 , s'obtient sans difficulté et l'on a, avec les notations qui précèdent et en appelant de plus :

$$A_1 + A_2 + A_3 = M,$$

le système d'équations ci-après :

$$(5,4.24) \quad \left\{ \begin{array}{ll} (e) & -M = a_1 + a'_1 + b_1 + b'_1 + c_1 + c'_1, \\ (f) & -A_1 = a_2 + a'_3, \quad (i) \quad A_1 = a_3 + a'_2 + \alpha_1 + \alpha'_1, \\ (g) & -A_1 = b_2 + b'_3, \quad (j) \quad A_1 = b_3 + b'_2 + \alpha_2 + \alpha'_3, \\ (h) & -A_1 = c_2 + c'_3, \quad (k) \quad A_1 = c_3 + c'_2 + \alpha_3 + \alpha'_2. \end{array} \right.$$

On passera de là aux équations relatives à A_2 en notant qu'il suffit d'y remplacer tout produit symbolique :

$$\frac{i \ j \ k}{a \ b \ c}$$

(où a, b, c représente un des indices l, m, n ou un groupement de deux d'entre eux ou l'unité) par :

$$\frac{k \ i \ j}{a \ b \ c} = \frac{i \ j \ k}{b \ c \ a},$$

c'est-à-dire de permuter circulairement les indices de (5,4.24). Le système d'ensemble auquel on arrive ainsi avec A_1, A_2 et A_3 n'est pas linéairement indépendant et il est facile d'y mettre en évidence plusieurs identités par combinaison de certains groupes d'équations. Additionnant, par exemple, les trois équations (f), et de même pour les (g) et les (h), on obtient :

$$-M = \Sigma a_i + \Sigma a'_i = \Sigma b_i + \Sigma b'_i = \Sigma c_i + \Sigma c'_i.$$

Si, de manière analogue, on additionne respectivement les trois équations (i), et de même pour les (j) et les (k) on a, en posant :

$$\begin{aligned} S &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3, \\ M - S &= \Sigma a_i + \Sigma a'_i = \Sigma b_i + \Sigma b'_i = \Sigma c_i + \Sigma c'_i. \end{aligned}$$

La comparaison de ces deux résultats montre que :

$$S = 2M,$$

et c'est aussi la seule relation qu'on puisse obtenir entre les moyennes seules. Elle s'écrit explicitement :

$$(5,4.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{ijk}{lmn} + \frac{ijk}{mnl} + \frac{ijk}{nlm} + \frac{ijk}{mln} + \frac{ijk}{lnm} + \frac{ijk}{nml} \\ = 2 \frac{\partial^3}{\partial \xi_i \partial \xi_m \partial \xi_n} [Q_{ij,k} + Q_{jk,i} + Q_{ki,j}]_0. \end{array} \right.$$

Apparemment, donc, il n'est pas possible de déduire les moyennes de produits triples de dérivées du tenseur $Q_{ij,k}$. Cette conclusion, toutefois, doit être tempérée pour deux raisons, dont la première concerne seulement certaines moyennes; si les trois indices i, j, k ou les trois indices l, m, n sont identiques les six termes du premier membre de (5,4.25) sont égaux et l'on a :

$$(5,4.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{iii}{lmn} = \left[\frac{\partial^3 Q_{ii,i}}{\partial \xi_l \partial \xi_m \partial \xi_n} \right]_0, \\ \frac{ijk}{lll} = \frac{1}{3} \frac{\partial^3}{\partial \xi_l^3} [Q_{ij,k} + Q_{jk,i} + Q_{ki,j}]_0 \end{array} \right.$$

(où il est entendu qu'il n'y a pas sommation pour des indices répétés); si l'on s'intéresse plus particulièrement aux termes non nuls par symétries du tableau de la page 89, on voit qu'on obtient ainsi les trois termes A_p^3 et douze termes du groupe $B_q^2 A_p$, c'est-à-dire, en fait, l'ensemble de ce groupe puisque les six termes restants s'en déduisent par l'incompressibilité. Cette deuxième raison va nous permettre de calculer la presque totalité des termes du tableau (p. 89). Considérons en effet comme autre cas particulier simple celui où deux des indices ijk sont égaux, et aussi deux des indices lmn ; on a alors :

$$(5,4.27) \quad \frac{iik}{lln} + 2 \frac{iki}{nll} = \frac{\partial^3}{\partial \xi_l^2 \partial \xi_n} [Q_{ii,k} + 2 Q_{ik,i}]_0.$$

Si, par surcroît, i et l sont égaux, ainsi que k et n , le premier terme est un membre du groupe des $A_p^3 A_p$ qui est connu par l'incompressibilité, à une constante près cependant α [formules (5,4.6)]; le deuxième terme fait partie des six termes non diagonaux du groupe $B_q B_{q'} A_p$ et peut donc être déterminé à son tour, d'où par l'incompressibilité, les trois termes diagonaux restants. De même, si k et n sont égaux mais i et l sont différents le premier terme est connu par le groupe $B_q^2 A_p$ et l'on en tire le deuxième qui fait partie des six premiers termes du groupe $B_q B_{q'} B_{q''}$. Les seules inconnues restantes du tableau sont les deux derniers termes de $B_q B_{q'} B_{q''}$, dont on obtiendra seulement la somme par (5,4.25) (où tous les autres éléments sont connus), ou par (5,4.8). En définitive, l'incompressibilité permet d'exprimer à partir de $Q_{ij,k}$ toutes les moyennes du tableau, sauf deux : la constante α et l'un des deux derniers termes considérés; nous ne croyons pas utile d'en donner les formules explicites qui s'obtiennent facilement à partir de (5,4.26) et (5,4.27).

Nous terminons cette analyse des moyennes de produits de dérivées par quelques remarques supplémentaires concernant l'homogénéité. Si l'on considère deux champs vectoriels aléatoires \vec{a} et \vec{b} on peut toujours définir, sur un ensemble de réalisations, les corrélations :

$$\overline{a_i(\vec{x}) b_j(\vec{x}') } = R_{ij}(\vec{x}, \vec{r})$$

qui dépendront, s'il n'y a pas homogénéité, du point origine M comme de l'écartement MM' ; on a, dans ces conditions générales :

$$(5,4.28) \quad \frac{\partial a_i}{\partial x_l} \frac{\partial b'_j}{\partial x'_m} = - \frac{\partial^2 R_{ij}}{\partial \xi_l \partial \xi_m} + \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial R_{ij}}{\partial \xi_m},$$

et notamment, pour un écartement tendant vers zéro :

$$(5,4.29) \quad \overline{\frac{\partial a_i}{\partial x_l} \frac{\partial b_j}{\partial x_m}} = - \left[\frac{\partial^2 R_{ij}}{\partial \xi_l \partial \xi_m} \right]_0 + \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\overline{a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_m}} \right).$$

La mesure dans l'écoulement non homogène en conduite de moyennes telles que :

$$\left(\overline{\frac{\partial u}{\partial y}} \right)^2 \quad \text{et} \quad \left(\overline{\frac{\partial u}{\partial z}} \right)^2$$

se fait à partir de la courbure à l'origine des corrélations R_{ij} , et la relation (5,4.29) donne l'erreur de non-homogénéité correspondante qui est généralement très faible. Une question un peu différente se pose pour les taux de production tourbillonnaire :

$$(5,4.30) \quad \overline{\omega_i \omega_m \frac{\partial u_j}{\partial x_m}} + \overline{\omega_j \omega_m \frac{\partial u_i}{\partial x_m}},$$

où l'on s'intéresse à la différence entre cette quantité et la dissipation correspondante, laquelle est petite par rapport à chacun d'eux; il n'est alors pas sans intérêt de s'interroger sur l'expression de (5,4.30) lorsqu'il n'y a pas homogénéité, et nous considérerons brièvement le cas de la production totale [somme de (5,4.30) pour $i = j$]. On obtient d'abord facilement, à partir de (5,4.29) :

$$(5,4.31) \quad \overline{\text{rot } \vec{a} \text{ rot } \vec{b}} = - \frac{\partial^2 R_{mm}}{\partial \xi_n^2} + \text{div} [\vec{a} \wedge \text{rot } \vec{b}],$$

pourvu que \vec{b} soit à divergence nulle (mais pas nécessairement \vec{a}). On note ensuite l'identité :

$$(5,4.32) \quad \overline{\vec{\omega} \text{ rot } (\vec{v} \wedge \vec{\omega})} = \overline{\omega_l \omega_m \frac{\partial u_l}{\partial x_m}} - \text{div} \frac{\vec{v} \omega_l^2}{2},$$

et par (5,4.31) le terme du premier membre s'écrit :

$$\overline{\vec{\omega} \cdot \text{rot } (\vec{v} \wedge \vec{\omega})} = - \left[\frac{\partial^2 \overline{\vec{v} \wedge \vec{\omega} \cdot \vec{v}'}}{\partial \xi_n^2} \right]_0 + \text{div} [(\vec{v} \wedge \vec{\omega}) \wedge \vec{\omega}];$$

la corrélation qui y figure se ramène aisément aux corrélations triples de vitesses en deux points par :

$$\overline{(\vec{v} \wedge \vec{\omega}) \cdot \vec{v}'} = \frac{\partial}{\partial x_m} \frac{u_l^2 u'_m}{2} - \frac{\partial}{\partial x_l} \overline{u_l u_m u'_m},$$

et l'on a, finalement :

$$(5,4.33) \quad \overline{\vec{\omega} \text{ rot } (\vec{v} \wedge \vec{\omega})} = - \left[\frac{\partial^3 Q_{lmm}}{\partial \xi_n^2 \partial \xi_l} \right]_0 + \text{div} \left[\overline{(\vec{v} \wedge \vec{\omega}) \wedge \vec{\omega}} + \overline{(\vec{v} \Delta \vec{v}) \vec{v}} - \frac{v_l^2}{2} \Delta \vec{v} \right].$$

On retrouve bien la formule (5,3.17) lorsqu'il y a homogénéité, et l'on a en plus une expression du supplément de non-homogénéité. Il peut être intéressant de noter

au passage que la formule (5,4.31) permet un traitement analogue et immédiat de la dissipation du tourbillon :

$$(5,4.34) \quad \overline{\vec{\omega} \cdot \Delta \vec{\omega}} = - \left[\frac{\partial^4 R_{nn}}{\partial \xi_l^2 \partial \xi_m^2} \right]_0 + \text{div} [\vec{v} \wedge \Delta \vec{\omega}].$$

Il est souligné, par ce qui précède, que l'expression des corrélations du tourbillon (5,2.14) et les relations qui en résultent (5,3.16) et (5,3.17) supposent l'homogénéité. Considérons, par exemple, la seconde d'entre elles :

$$\overline{\omega_l \omega_m \frac{\partial u_l}{\partial x_m}} = - \left[\frac{\partial^3 Q_{lmm}}{\partial \xi_n^2 \partial \xi_l} \right]_0.$$

Il est possible, grâce aux formules (5,4.27), de remplacer le second membre par des moyennes de produits triples de dérivées et l'on a ainsi, en développant le premier membre, une relation que vérifient ces moyennes comme conséquence de l'homogénéité. En effectuant ce calcul, on constate que cette relation n'est autre que (5,4.8) que nous avons écrit directement et que (5,3.16) conduit encore au même résultat.

5,5

LE BILAN DE LA PRODUCTION ET DE LA DISSIPATION DU TOURBILLON

A diverses reprises, dans les pages précédentes, nous avons rencontré (et, pour notre objet, essayé de contourner) l'énigme centrale de la turbulence homogène qui est l'interaction des tourbillons ou la structure des corrélations triples; les travaux expérimentaux consacrés, dans la dernière décade, à la turbulence à peu près isotrope engendrée par une grille en soufflerie ont apporté à cet égard de précieux renseignements permettant de suppléer, dans une certaine mesure, aux limitations de la théorie. C'est à l'examen de certains de ces résultats et de la mesure dans laquelle on peut les retrouver dans la turbulence plus générale qui nous occupe que nous voudrions maintenant accorder quelque attention.

Nous rappelons d'abord quelques notations déjà rencontrées. L'équation générale (1,3.9) devient, en l'absence de vitesses moyennes :

$$(5,5.1) \quad \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial t} = \Omega_{ij} - 2\nu k^2 \Phi_{ij}.$$

En turbulence isotrope et compte tenu de l'incompressibilité, les deux tenseurs spectraux de base s'écrivent [voir (3,4.5)] :

$$\Phi_{ij} = \Phi \Delta_{ij}, \quad \Theta_{ijk} = \Lambda \Delta_{ijk} \quad \text{d'où} \quad \Omega_{ij} = -k \Lambda \Delta_{ij}.$$

Introduisant, suivant l'usage, les scalaires plus parlants :

$$E = 4 \pi k^2 \Phi, \quad T = -4 \pi k^2 (k \Lambda),$$

on traduit (5,5.1) en :

$$(5,5.2) \quad \frac{\partial E}{\partial t} = T - 2\nu k^2 E.$$

Il est avantageux d'utiliser des grandeurs sans dimensions et pour cela de tirer du phénomène lui-même des grandeurs de référence; nous poserons :

$$q = \sqrt{\overline{u_1^2} + \overline{u_2^2} + \overline{u_3^2}}, \quad \omega = \sqrt{\overline{\omega_1^2} + \overline{\omega_2^2} + \overline{\omega_3^2}},$$

et ces quantités se déduisent de E par :

$$(5,5.3) \quad \frac{q^2}{2} = \int_0^\infty E dk, \quad \frac{\omega^2}{2} = \int_0^\infty k^2 E dk.$$

On peut en déduire une échelle de temps et une échelle de longueur; conservant pour cette dernière, à cause de son emploi très répandu, le λ de TAYLOR, on écrira :

$$\frac{q^2}{\omega^2} = \frac{\lambda^2}{5}.$$

Il a été observé avec raison qu'il ne faut pas accorder à cette échelle une signification précise de longueur caractéristique d'une gamme déterminée de tourbillons car elle est intermédiaire entre celle des tourbillons porteurs de l'énergie cinétique et celle des tourbillons responsables de la dissipation. Pour ces derniers, la notion d'équilibre de KOLMOGOROFF conduit à former une longueur η à partir de la dissipation et de la viscosité, c'est-à-dire en turbulence homogène entre ω et ν :

$$\frac{\nu}{\omega} = \eta^2.$$

Le rapport entre λ et η conduit à considérer le paramètre sans dimension qui est un nombre de REYNOLDS de la turbulence :

$$\frac{q^2}{\nu \omega} = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{q \lambda}{\nu} = R.$$

Une échelle de longueur convenant à la gamme de tourbillons contribuant le plus à l'énergie cinétique est :

$$l = \int_0^\infty f(r) dr = \frac{3 \pi}{4} \frac{\int_0^\infty k^{-1} E dk}{\int_0^\infty E dk},$$

où $f(r)$ est l'habituel coefficient de corrélation longitudinale.

Avec les échelles ci-dessus on peut former des grandeurs réduites telles que :

$$(5,5.4) \quad \mathcal{E}(\chi) = \frac{E}{q^2 \lambda}, \quad \mathcal{T}(\chi) = \frac{T}{q^3}, \quad \chi = k \lambda,$$

qui expriment une *structure* de turbulence commune à toutes les réalisations qu'on peut en tirer par similitude cinématique.

Pour toutes les grilles d'une forme donnée dont on se donne comme dimension caractéristique la longueur de maille M , et pour toutes les vitesses V du vent, les règles générales de similitude nous livrent *a priori* un catalogue de structures à deux paramètres : la distance relative de la grille x/M et le nombre de REYNOLDS UM/ν . L'influence du premier peut être explorée en observant pour une grille et une vitesse déterminées les diverses tranches de l'écoulement d'abscisse x correspondant, dans le schéma théorique associé, à des temps de décroissance $t = x/V$. Un premier fait physique important apparaît ici qui est l'invariance approchée de la structure de la turbulence, c'est-à-dire l'indépendance, par rapport au temps, des fonctions $\mathcal{E}(\chi)$ et $\mathcal{T}(\chi)$; à vrai dire, aux faibles valeurs de χ la forme de $\mathcal{E}(\chi)$ varie sensiblement et il y a bien 25 % de l'énergie cinétique associée à ces gros tourbillons tenaces qui n'évoluent pas tout à fait comme le reste; à cette réserve près non négligeable, la tendance d'ensemble de la turbulence en soufflerie vers une structure où seules les échelles de vitesse et de longueur varient avec le temps constitue une propriété très remarquable. On constate, d'ailleurs, que ce régime unique pour une dimension de maille M et un vent V dépend assez peu de la géométrie exacte de la grille, de sorte que tous les échantillons de ce type de turbulence peuvent être finalement répertoriés à l'aide d'un paramètre unique UM/ν . Si l'on admet l'invariance de E et T au cours du temps, à une similitude cinématique près, comme une loi exacte, on peut en déduire une conséquence importante relativement à l'évolution des échelles q^2 et λ ; substituant en effet (5,5.4) dans (5,5.2), on obtient, dans ces conditions :

$$(5,5.5) \quad \frac{q^2(t-t_0)}{\nu} = \text{Cte}, \quad \frac{q\lambda}{\nu} = \text{Cte}.$$

La similitude n'étant, en fait, que partielle il ne résulte pas de l'argument qui précède que (5,5.5) doive représenter la réalité expérimentale. Il se trouve cependant qu'il en est bien ainsi et la loi en question constitue, par sa simplicité et la difficulté d'en trouver une explication probante, une deuxième propriété remarquable de la turbulence engendrée par une grille. Nous allons en examiner les implications dans ce qui suit mais auparavant il y a lieu de compléter le rappel des propriétés de similitude qui précèdent sur un autre point essentiel. Les fonctions $E(k)$ et $T(k)$ forment, nous l'avons vu, approximativement, une famille à un paramètre pour lequel on peut désormais prendre un nombre de REYNOLDS de turbulence tel que R . Cependant, si l'on se limite à des portions et non à la totalité de $E(k)$ on a des lois partielles qui sont universelles. C'est d'abord le cas, aux grands nombres de REYNOLDS, pour la région dissipatrice du spectre où l'équilibre de KOLMOGOROFF entraîne que l'on a une fonction unique en prenant pour échelles cinématiques la dissipation et la viscosité, c'est-à-dire ω et ν . A l'extrême opposé, dans la gamme des tourbillons contenant l'énergie cinétique, un enseignement très intéressant de l'expérience est que la viscosité est un paramètre sans influence; si donc on prend des échelles comme q et l tirées de cette partie du spectre on a encore une loi unique. Cet effacement du nombre de REYNOLDS, quand il est grand et à certaines échelles, est un fait constant en Mécanique des Fluides, mais la possibilité d'appliquer ce concept à une partie du mouvement fin que constitue la turbulence est encore un résultat remarquable méritant d'être souligné.

Il vient d'être rappelé que l'expérience a révélé la loi de décroissance de l'énergie cinétique (du moins en période initiale car à la longue elle se modifie pour des raisons

connues), qui peut être écrite à partir d'une origine convenable du temps et avec une notation particulière de la constante :

$$(5,5.6) \quad \frac{q^2 t}{\nu} = \frac{R^2}{2}.$$

On déduit alors, de l'équation d'énergie :

$$(5,5.7) \quad \frac{1}{2} \frac{dq^2}{dt} = -\nu \omega^2,$$

la loi de décroissance de l'intensité tourbillonnaire :

$$(5,5.8) \quad \omega^2 t^2 = \frac{R^2}{4},$$

et ses deux expressions équivalentes :

$$\frac{q^2}{\omega^2} = \frac{\lambda^2}{5} = 2\nu t, \quad \frac{q^2}{\nu \omega} = R.$$

La relation (5,5.8) étant déduite par dérivation d'une formule expérimentale pourrait être peu assurée, mais en turbulence isotrope ω^2 est directement mesurable par :

$$\omega^2 = 15 \left(\overline{\frac{\partial u_1}{\partial x_1}} \right)^2,$$

et cette épreuve l'a confirmée très correctement. On peut donc aller encore plus avant et considérer l'équation de l'intensité tourbillonnaire qui s'écrit d'une manière générale, en turbulence homogène sans vitesses moyennes :

$$(5,5.9) \quad \frac{1}{2} \frac{d\omega^2}{dt} = \overline{\omega_l \omega_m \frac{\partial u_l}{\partial x_m}} - \nu \left(\overline{\frac{\partial \omega_l}{\partial x_m}} \right)^2.$$

Il résulte de la loi (5,5.8) que :

$$\frac{1}{2} \frac{d\omega^2}{dt} = -\frac{R^2}{4t^3},$$

et, en éliminant le temps à l'aide de la même relation :

$$(5,5.10) \quad \frac{1}{2} \frac{d\omega^2}{dt} = -\frac{2}{R} \omega^3 = -2 \frac{\nu \omega}{q^2} \omega^3.$$

Cette relation ayant une certaine importance il convient de se demander au préalable si elle est bien représentative de l'ensemble des faits évoqués. D'une manière générale, pour une turbulence ne dépendant que du seul paramètre R, l'analyse dimensionnelle permet d'écrire *a priori* :

$$\frac{1}{2} \frac{d\omega^2}{dt} = \varphi \left(\frac{\nu \omega}{q^2} \right) \omega^3,$$

dont l'intégration conduit, en s'aidant de (5,5.7), à une loi de décroissance de la forme :

$$\frac{q_0^2}{q^2} = \Phi\left(\frac{q_0^2 t}{\nu}\right).$$

On n'obtiendra une loi de puissance qu'avec :

$$(5,5.11) \quad \frac{1}{2} \frac{d\omega^2}{dt} = -m \frac{\nu \omega}{q^2} \omega^3,$$

pour laquelle la variation des grandeurs principales est :

$$q^2 = \frac{C}{t^{\frac{1}{m-1}}}, \quad \frac{q^2}{\omega^2} = \frac{\lambda^2}{5} = 2(m-1)\nu t, \quad \frac{q^2}{\nu \omega} = c' t^{\frac{\frac{m}{2}-1}{m-1}}.$$

Il y a donc une grande sensibilité du phénomène, non seulement au type de fonction (5,5.11) mais au coefficient même dont le second membre est affecté, et cette relation caractérise bien la turbulence isotrope en soufflerie. On peut écrire la production d'intensité tourbillonnaire :

$$(5,5.12) \quad \overline{\omega_l \omega_m \frac{\partial u_l}{\partial x_m}} = P \omega^3.$$

Il y a quelque arbitraire pour une expression physiquement intéressante du terme de dissipation; en prenant pour base ω et l'échelle η on peut, par exemple, adopter :

$$\left(\overline{\frac{\partial \omega_l}{\partial x_m}}\right)^2 = Q \frac{\omega^2}{\eta^2},$$

ce qui conduit à :

$$(5,5.13) \quad \nu \left(\overline{\frac{\partial \omega_l}{\partial x_m}}\right)^2 = Q \omega^3.$$

Avec ces notations et en admettant plus généralement la formule de décroissance (5,5.11), le bilan du tourbillon s'écrit :

$$(5,5.14) \quad P - Q = -m \frac{\nu \omega}{q^2},$$

où m a la valeur 2 pour la loi (5,5.6) effectivement observée. Cette relation a elle-même été soumise au contrôle de l'expérience, car en turbulence isotrope chacun de ses termes est directement mesurable : on a, en effet, dans ce cas :

$$\overline{\omega_l \omega_m \frac{\partial u_l}{\partial x_m}} = -\frac{35}{2} \left(\overline{\frac{\partial u_1}{\partial x_1}}\right)^3, \quad \left(\overline{\frac{\partial \omega_l}{\partial x_m}}\right)^2 = 35 \left(\overline{\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}}\right)^2.$$

Introduisant, avec *BATCHELOR* et *TOWNSEND*, les coefficients sans dimensions :

$$S = \frac{-\left(\overline{\frac{\partial u_1}{\partial x_1}}\right)^3}{\left[\left(\overline{\frac{\partial u_1}{\partial x_1}}\right)^2\right]^{3/2}}, \quad G = \frac{q^2}{3} \frac{\left(\overline{\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}}\right)^2}{\left[\left(\overline{\frac{\partial u_1}{\partial x_1}}\right)^2\right]^2},$$

on a :

$$P = \frac{7}{6\sqrt{15}} S, \quad Q = \frac{7}{15} \frac{\nu \omega}{q^2} G,$$

et la traduction de (5,5.14) en termes proportionnels devient :

$$(5,5.15) \quad \frac{\sqrt{15}}{6} SR - G = -\frac{15}{7} m.$$

La vérification expérimentale est à vrai dire assez délicate car il s'agit, lorsque R est grand, d'une différence entre deux grands nombres, et il est difficile encore aujourd'hui d'être assuré d'une grande précision, notamment dans la mesure du coefficient de dissymétrie S dont l'intérêt est considérable; on peut dire néanmoins que les résultats obtenus il y a dix ans à Cambridge, [19] pour R allant jusqu'à 50, paraissent en bonne concordance d'ensemble avec (5,5.15) et la valeur $m = 2$. Sur la raison d'être d'une relation de type général (5,5.11) il est peut-être possible d'avancer les considérations ci-après. Le postulat d'équilibre de KOLMOGOROFF prévoit que pour R suffisamment grand, la portion de E (k) et T (k) relative aux grandes valeurs de k se trouve en régime permanent, c'est-à-dire que :

$$\frac{\partial E}{\partial t} = 0, \quad T - 2\nu k^2 E = 0.$$

A la limite d'un nombre de REYNOLDS infiniment grand, la zone d'équilibre engloberait toute la production et la dissipation du tourbillon et l'on aurait :

$$(5,5.16) \quad \overline{\omega_l \omega_m \frac{\partial u_l}{\partial x_m}} = \int_0^\infty k^2 T dk = 2\nu \int_0^\infty k^4 E dk = \nu \left(\frac{\partial \overline{\omega_l}}{\partial x_m} \right)^2,$$

c'est-à-dire, en désignant par un indice les limites pour $R \rightarrow \infty$:

$$P_1 - Q_1 = 0.$$

Lorsque R est grand mais fini les différences $P - P_1$ et $Q - Q_1$, qui reflètent la part non en équilibre de E (k) et T (k), doivent dépendre d'un paramètre comme q^2 , extérieur à ceux ω^2 et ν qui suffisent à caractériser l'équilibre; dépendant donc essentiellement de R et s'annulant pour $R \rightarrow \infty$ il est assez naturel qu'elles soient représentables par les développements limités :

$$P - P_1 = \frac{a_1}{R}, \quad Q - Q_1 = \frac{b_1}{R},$$

mais le fait que l'on ait plus précisément :

$$b_1 - a_1 = 2$$

demeure toujours sans explication.

Il serait évidemment d'un grand intérêt de savoir ce que deviennent les propriétés précédentes pour une turbulence plus générale que celle considérée ci-dessus et, pour

commencer, pour une turbulence toujours homogène et sans vitesses moyennes mais anisotrope. On peut, comme l'a fait TOWNSEND [2], l'obtenir systématiquement en disposant à l'aval de la grille génératrice soit de la gaze qui affaiblit plus fortement la composante longitudinale que les transversales, soit un convergent, soit, plus généralement, la boîte de distorsion déjà mentionnée. Ces essais ont montré que l'anisotropie une fois produite s'atténue très lentement, de sorte que la croyance, jusqu'à présent très répandue d'une tendance naturelle et rapide vers l'isotropie, s'est révélée sans fondement. Il est moins surprenant, dans ces conditions, que même sans avoir été prévues pour cela certaines souffleries aient livré une turbulence nettement anisotrope, et cette circonstance a conduit L. A. WYATT [20] à une intéressante investigation systématique. En désignant par l'indice 1 la composante longitudinale il a été observé dans ce cas que :

$$\overline{u_2^2} = \overline{u_3^2} = \alpha^2 \overline{u_1^2},$$

où α^2 restait sensiblement constant et égal à 0,75, et la meilleure traduction de la loi de décroissance de l'énergie cinétique était :

$$q^2 \sim \frac{1}{rk},$$

avec k proche de 1,25 et l'origine des abscisses un peu en aval de la grille, comme d'habitude; ceci se traduit dans notre notation par une valeur de m voisine de 1,80. Il y a lieu de noter que dans ces expériences l'anisotropie était confinée aux gros tourbillons et que la structure de la dissipation était essentiellement isotrope, en accord avec une constatation analogue de TOWNSEND. Il est alors admissible de conserver (5,5.15) et, à défaut d'une mesure directe de S, L. A. WYATT l'a déduit de cette équation à partir de valeurs mesurées de G; le résultat est assez surprenant et en désaccord total avec les mesures directes de ce coefficient effectuées par STEWART; ce dernier trouve en effet une décroissance de S avec le nombre de REYNOLDS de turbulence [a_1 , positif dans (5,5.14)], alors que le contraire est obtenu par l'estimation, il est vrai détournée, qui précède; des valeurs encore différentes ont été obtenues tout récemment dans d'autres conditions et avec un nouveau montage électronique par R. BETCHOV [21], et d'autres encore par J. P. MILLIAT [22], de sorte que cette question de la valeur et de la variation du coefficient de dissymétrie S demeure pour le moment en suspens.

Le problème suivant, dans l'ordre de la complexité, concerne la turbulence homogène associée à des vitesses moyennes. Reprenant encore le cas particulier d'une déformation pure plane, les équations d'évolution de l'énergie cinétique et de l'intensité tourbillonnaire s'écrivent, avec les notations (5,5.12) et (5,5.13) :

$$(5,5.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \frac{dq^2}{dt} - a(\overline{u_2^2} - \overline{u_1^2}) = -\nu \omega^2, \\ \frac{1}{2} \frac{d\omega^2}{dt} - a(\overline{\omega_1^2} - \overline{\omega_2^2}) = (P - Q) \omega^3. \end{array} \right.$$

Si l'on adopte, en vertu des considérations qui précèdent, la forme (5,5.14) pour $P - Q$, on obtient immédiatement la combinaison suivante :

$$(5,5.18) \quad \frac{\overline{\omega_1^2} - \overline{\omega_2^2}}{\omega^2} = m \frac{\overline{u_2^2} - \overline{u_1^2}}{q^2} + \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{\omega^2} \frac{d\omega^2}{dt} - \frac{m}{q^2} \frac{dq^2}{dt} \right].$$

Cette relation présente le grand intérêt de relier l'anisotropie du tourbillon à d'autres grandeurs et les indications qu'elle fournit sont, comme nous allons le voir, assez curieuses. Plaçons-nous d'abord dans l'hypothèse d'un régime de turbulence stationnaire (dont l'existence ne peut pas être tenue *a priori* pour assurée). On aurait, dans ce cas :

$$\frac{\overline{\omega_1^2} - \overline{\omega_2^2}}{\omega^2} = m \frac{\overline{u_2^2} - \overline{u_1^2}}{q^2},$$

et si m avait une valeur proche de celle révélée par la turbulence de grille, le tourbillon serait plus anisotrope que les vitesses; cette conclusion paraissant peu probable il semblerait que m doive, dans le cas qui nous occupe, prendre une valeur moindre. On peut aussi voir dans ce qui précède une objection contre la stationnarité et penser que le deuxième terme de (5,5.18) apporte automatiquement le correctif voulu, mais il ne semble pas que ce soit nécessairement le cas, ainsi que nous allons le constater. La discussion peut prendre pour point de départ une loi de puissance pour la décroissance de q^2 , soit t^{-n} , d'où l'on déduit, par la première équation (5,5.17), la loi de ω^2 ; en admettant avec TOWNSEND la constance du rapport :

$$s = \frac{\overline{u_2^2} - \overline{u_1^2}}{q^2},$$

on obtient aisément le résultat suivant :

$$\frac{\overline{\omega_1^2} - \overline{\omega_2^2}}{\omega^2} = m \frac{\overline{u_2^2} - \overline{u_1^2}}{q^2} + \frac{1}{2at} \left[(m-1)n - \frac{1}{1 + \frac{2}{n}ast} \right].$$

Il faut, pour que le dernier terme ait des valeurs négatives, que l'on ait :

$$(m-1)n < 1,$$

mais ces valeurs pourront aussi être très grandes au début de la décroissance; si, pour éviter ce comportement bizarre, on admet que $(m-1)n$ est égal à l'unité, on obtient une valeur positive finie dès l'origine et tendant ensuite vers zéro. On peut aussi explorer plus complètement l'idée de la structure universelle des tourbillons contenant l'énergie cinétique postulée par TOWNSEND. Reportons-nous pour cela à l'équation générale (1,3.9) des tenseurs spectraux et admettons que — du moins au bout d'un certain temps — Φ_{ij} puisse s'écrire :

$$\Phi_{ij} = q^2 l G_{ij}(\vec{\chi}) \quad \text{où} \quad \vec{\chi} = \vec{k}l,$$

et pareillement :

$$\Omega_{ij} = q^3 H_{ij}(\chi).$$

Il résulte alors de l'expression (1,3.10) que Ψ_{ij} s'écrira de son côté en rapportant les λ_{lm} à l'un d'eux « a » :

$$\Psi_{ij} = a q^2 l H_{ij}(\chi).$$

On voit alors aisément que si cette similitude cinématique est supposée vérifier (1,3.9) pour toute la gamme des tourbillons k on doit avoir :

$$\frac{1}{q^3} \frac{d}{dt} (q^2 l) = c_1, \quad \frac{1}{q} \frac{dl}{dt} = c_2, \quad \frac{al}{q} = c_3, \quad \frac{v}{ql} = c_4.$$

Les deux premières conditions imposent à q et l des variations en fonction du temps suivant une loi de puissance ou exponentielle. En leur adjoignant la quatrième on obtient la loi de décroissance de la turbulence de grille. Cette condition est évidemment incompatible avec la troisième, mais si au lieu d'une similitude complète on se limite à la zone des tourbillons contenant l'énergie cinétique, on peut ignorer le terme de viscosité et l'on est alors conduit aux variations exponentielles :

$$(5,5.19) \quad q^2 \sim e^{-kat}, \quad l \sim e^{-\frac{kat}{2}},$$

où k est une constante arbitraire sans dimensions. On peut traduire de manière équivalente cette similitude en disant que si la viscosité s'efface pour la fixation de la dissipation, celle-ci doit pouvoir s'écrire :

$$\frac{q^3}{l},$$

et que les deux termes de variation de l'énergie cinétique et de production à partir de l'écartement moyen lui sont séparément proportionnels :

$$\frac{dq^2}{dt} \sim a q^2 \sim \frac{q^3}{l}.$$

La condition résultante :

$$q \sim al$$

est à la base des interprétations pratiques de la turbulence stationnaire en conduite, mais il est clair que le résultat auquel conduit son extension à une turbulence en cours d'extinction (décroissance de l) est plutôt paradoxal. Quoi qu'il en soit, avec les lois (5,5.19) on obtient, pour l'anisotropie du tourbillon :

$$\frac{\overline{\omega_1^2} - \overline{\omega_2^2}}{\omega^2} = m \frac{\overline{u_2^2} - \overline{u_1^2}}{q^2} + (m - 1) \frac{k}{2},$$

c'est-à-dire encore une valeur supérieure à celle de la vitesse, si $m > 1$. On a considéré dans ce qui précède le seul cas observé expérimentalement, celui d'une turbulence d'intensité décroissante; le cas contraire (n ou k négatifs) ne doit pas cependant être totalement exclu, au moins théoriquement, car en regard de la dissipation, l'écoulement moyen est ici une source permanente d'énergie. Mais il est difficile, en l'absence de données expérimentales, de donner sur les différents points évoqués beaucoup plus que des conjectures.

Nous allons examiner, pour terminer le cas de l'écoulement plan en conduite pour lequel les équations de l'énergie cinétique et du tourbillon s'écrivent en négligeant quelques termes qui ne prennent de l'importance que très près de la paroi :

$$(5,5.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dy} \overline{v \left(\frac{p}{\rho} + \frac{u_i^2}{2} \right)} + \overline{uv} \frac{d\overline{u}}{dy} = -\nu \omega^2, \\ \frac{d}{dy} \frac{\overline{v \omega_i^2}}{2} - \frac{\overline{v \omega_i^2}}{\omega_1 \omega_2} \frac{d\overline{u}}{dy} = -m \frac{\nu \omega^4}{q^2}. \end{array} \right.$$

Dans la dernière équation nous avons encore exprimé le bilan de la production et de la dissipation du tourbillon figurant au second membre sous la forme (5,5.14); il n'existe pas pour le moment de mesures ou même d'indications expérimentales concernant les autres termes, ce qui excusera l'estimation, évidemment un peu hardie, qui suit. Étant donné la réussite en conduite (pour des raisons mystérieuses) de la notion de diffusion de gradient pour l'expression du flux d'une grandeur transportable, telle que la chaleur ou les fines suspensions, nous étendrons le même traitement avec le même coefficient au flux de la grandeur moins transportable ω_i^2 et nous écrirons :

$$\overline{v \omega_i^2} = -\varepsilon \frac{d\omega^2}{dy} \quad \text{où} \quad \varepsilon = K u_* h \eta (1 - \eta) \quad \eta = \frac{y}{h}.$$

Par ailleurs, nous basant sur les résultats des mesures de LAUFER, nous considérerons comme à peu près constant le premier terme de (5,5.10), écrivant en conséquence :

$$-\overline{uv} \frac{d\overline{u}}{dy} = \nu (\omega^2 - \omega_c^2),$$

où ω_c est la valeur de ω à l'axe du conduit. On obtient, avec ces hypothèses :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega^2 - \omega_c^2 = \frac{1}{K} \frac{u_*^3}{\nu h} \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right), \quad \overline{v \omega_i^2} = \frac{u_*^4}{\nu h} \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right), \\ \frac{d}{dy} \frac{\overline{v \omega_i^2}}{2} = -\frac{1}{2} \frac{u_*^4}{\nu h^2} \frac{1}{\eta^2}. \end{array} \right.$$

Nous formons ensuite le rapport :

$$r = \frac{-\frac{d}{dy} \overline{v \omega_i^2}}{\frac{\nu \omega^4}{q^2}},$$

qui, avec les expressions précédentes, devient :

$$r = \frac{1}{2} \left[\frac{q}{u_*} \frac{1}{\frac{1}{K} - \left(\frac{1}{K} - \alpha \right) \eta} \right]^2,$$

en posant :

$$\alpha = \frac{\nu h}{u_*^3} \omega_c^2.$$

Les deux valeurs extrêmes de r près de la paroi et à l'axe ressortent alors à :

$$r_p = \frac{1}{2} \left(K \frac{q_p}{u_*} \right)^2 \quad \text{et} \quad r_c = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} \frac{q_c}{u_*} \right)^2.$$

Avec q_p/u_* proche de 3 et $K = 0,4$ la première valeur apparaît de l'ordre de 0,70; si l'on adopte pour la seconde, d'après certaines mesures (il y a là-dessus quelque doute), la valeur $\alpha = 1$ et pour q_c/u_* la valeur 1,30, on tombe encore sur une valeur comparable de r . Bien que l'estimation qui précède ne puisse avoir aucune prétention à l'exactitude il est intéressant d'aboutir à un ordre de grandeur plausible. Souhaitons que des mesures plus nombreuses, aidées par la réflexion théorique, nous éclairent davantage sur les propriétés encore mystérieuses des écoulements turbulents usuels.

BIBLIOGRAPHIE

(Nous ne donnons ci-dessous, dans l'ordre où nous les avons rencontrées, que les références des Auteurs cités dans notre étude; on trouvera des bibliographies complètes et récentes dans [2] et [3]; pour une vue d'ensemble de l'état actuel de la question on pourra consulter [23] et [24].)

- [1] A. A. TOWNSEND (1954). — *The uniform distortion of homogeneous turbulence*. Quart. J. Mech. Appl. Math. 7, pp. 104-127.
- [2] A. A. TOWNSEND (1956). — *The structure of turbulent shear flow*. Cambridge Univ. Press. (315 p.).
- [3] G. K. BATCHELOR (1953). — *The theory of homogeneous turbulence*. Cambridge Univ. Press. (197 p.).
- [4] J. M. BURGERS et M. MITCHNER (1953). — *On homogeneous non-isotropic turbulence connected with a mean motion having a constant velocity gradient*. Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet. B, Vol. 56, pp. 228-235 et 343-354.
- [5] I. PROUDMAN et W. H. REID (1954). — *On the decay of a normally distributed and homogeneous turbulent velocity field*. Phil. Trans. Roy. Soc. A 247, pp. 163-189.
- [6] A. CRAYA (1957). — *Sur les équations de la turbulence homogène en présence d'un champ de vitesses moyennes*. Comptes Rendus, t. 244, pp. 847-849.
- [7] R. H. KRAICHNAN (1957). — *Relation of fourth to second moments in stationary homogeneous hydromagnetic turbulence*. New-York University Res. Rep., N° M H - 6.
- [8] G. K. BATCHELOR et I. PROUDMAN (1954). — *The effect of rapid distortion of a fluid in turbulent motion*. Quart. J. Mech. Appl. Math. 7, pp. 83-103.
- [9] A. CRAYA (1957). — *Sur les corrélations triples en trois points en turbulence homogène*. Comptes Rendus, t. 244, pp. 560-562.
- [10] S. CHANDRASEKHAR (1950). — *The theory of axisymmetric turbulence*. Phil. Trans. Roy. Soc. A 242, pp. 557-577.
- [11] J. KAMPÉ DE FÉRIET (1948). — *Le tenseur spectral de la turbulence homogène non isotrope dans un fluide incompressible*. Comptes Rendus, t. 227, pp. 760-761.
- [12] O. REYNOLDS (1895). — *The dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion*. Phil. Trans. Roy. Soc. A 186.
- [13] P. Y. CHOU (1945). — *On velocity correlations and the solution of the equations of turbulent fluctuations*. Quart. Appl. Math., pp. 38-54.
- [14] J. LAUFER (1951). — *Investigation of turbulent flow on a two-dimensional channel*. N.A.C.A. Rep., N° 1033.
- [15] J. LAUFER (1955). — *The structure of turbulence in fully developed pipe flow*. N.A.C.A. Rep., N° 1174.
- [16] A. CRAYA (1957). — *Une méthode d'investigation des corrélations doubles pour la turbulence homogène en présence de vitesses moyennes*. Comptes Rendus, t. 244, pp. 1448-1450.
- [17] A. CRAYA (1957). — *Sur la structure des corrélations triples en turbulence homogène associée à un champ de vitesses moyennes*. Comptes Rendus, t. 244, pp. 1609-1611.
- [18] S. CHANDRASEKHAR (1951). — *The invariant theory of isotropic turbulence in magneto-hydrodynamics*. Proc. Roy. Soc. A 204, pp. 435-449.

- [19] G. K. BATCHELOR et A. A. TOWNSEND (1947). — *Decay of vorticity in isotropic turbulence*. Proc. Roy. Soc. A 190, p. 534.
- [20] L. A. WYATT (1955). — *Energy and spectra in decaying homogeneous turbulence*. Univ. of Manchester, thèse (1955).
- [21] R. BETCHOV (1956). — *Vorticity production in isotropic turbulence*. 7^e Congrès Inter. Mec. Appl., Bruxelles.
- [22] J. P. MILLIAT (1956). — *Étude expérimentale de l'écoulement turbulent dans un divergent bidimensionnel parcouru par de l'air*. S.D.I.T. n° 335.
- [23] A. CRAYA (1956). — *L'interprétation statistique de la turbulence; état de la question*. Revue de Statistique appliquée, Vol. IV, n° 2, pp. 17-30.
- [24] A. CRAYA (1956). — *Idées actuelles sur les mécanismes de la turbulence et des transferts thermiques turbulents*. La Houille Blanche, janvier-février 1957, pp. 19-28.



IMPRIMERIE

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

TECHNIQUES EXPÉRIMENTALES
POUR L'ÉTUDE DE LA TURBULENCE

Vu et approuvé :

Grenoble, le 30 mars 1957

Le Président de la Thèse,

L. NÉEL

Vu et approuvé :

Grenoble, le 30 mars 1957

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

L. MORET

Vu et permis d'imprimer :

Grenoble, le 1^{er} avril 1957

Le Recteur de l'Académie de Grenoble,

R. TRÉHIN

